



HAL
open science

ENSEIGNEMENT DES PROBABILITÉS DANS LE SECONDAIRE AU BÉNIN: APPORT D'UNE DÉMARCHE EXPÉRIMENTALE À L'APPRENTISSAGE

Henri Dandjinou

► **To cite this version:**

Henri Dandjinou. ENSEIGNEMENT DES PROBABILITÉS DANS LE SECONDAIRE AU BÉNIN: APPORT D'UNE DÉMARCHE EXPÉRIMENTALE À L'APPRENTISSAGE. Probabilités [math.PR]. Université d'Abomey-Calavi (Bénin), 2020. Français. NNT: . tel-03606616

HAL Id: tel-03606616

<https://theses.hal.science/tel-03606616>

Submitted on 11 Mar 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



INSTITUT DE MATHÉMATIQUES ET DE SCIENCES PHYSIQUES

UNIVERSITÉ D'ABOMEY-CALAVI

N° d'ordre : 011/2020

THÈSE

SOUMISE POUR L'OBTENTION DU GRADE DE DOCTEUR EN SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ D'ABOMEY-CALAVI (BÉNIN)

Option : Didactique des Sciences et Technologies

Spécialité : Didactique des Mathématiques

Présentée par **Henri DANDJINOU**

ENSEIGNEMENT DES PROBABILITÉS DANS LE SECONDAIRE AU BÉNIN : APPORT D'UNE DÉMARCHE EXPÉRIMENTALE À L'APPRENTISSAGE

Soutenue le vendredi 11 septembre 2020 devant le jury composé de :

Président

M. Léonard TODJIHOUNDE, Professeur titulaire, Université d'Abomey-Calavi, Bénin

Rapporteurs

*M. Carlos OGOUYANDJOU, Maître de Conférences, Université d'Abomey-Calavi, Bénin

*M. Adolphe Cossi ADIHOU, Professeur titulaire, Université de Sherbrooke, Canada

*M. Michel HENRY, Professeur agrégé, Université de Franche-Comté, France

Examineurs

*M. Kossivi ATTIKLEME, Professeur titulaire, Université d'Abomey-Calavi, Bénin

*M. Aboubacar MARCOS, Maître de Conférences, Université d'Abomey-Calavi, Bénin

Directeur de thèse

M. Alain BRONNER, Professeur émérite, Université de Montpellier, France

À mes filles

Sterenn Fifa Toma et Urielle Dona Dêka.

REMERCIEMENTS

L'aboutissement de cet ouvrage, après tant d'années de recherches, marquées tantôt par des avancées, tantôt par des remises en cause, ne saurait être effectif sans l'aide d'un certain nombre d'acteurs, auxquels je voudrais exprimer mes remerciements.

Je pense en premier lieu au professeur Alain Bronner, qui a accepté de diriger cette thèse. Il ne m'a pas marchandé sa disponibilité, ni sa technicité, malgré la distance qui nous sépare. Par deux fois, il m'a favorablement accueilli dans son laboratoire de recherches à Montpellier. Je me souviens de l'occasion qu'il m'a donnée de rencontrer le très célèbre didacticien Yves Chevallard à Castro Urdiales, en Espagne, lors du cinquième congrès international de la théorie anthropologique du didactique (CITAD5). Je lui témoigne ma profonde gratitude.

Je pense ensuite au professeur Léonard Todjihoundé, qui a assuré la présidence du jury de soutenance, aux professeurs Michel Henry, Adolphe Adihou et Carlos Ogouyandjou, qui ont accepté d'être les rapporteurs de cette thèse et aux professeurs Kossivi Attiklémè et Aboubacar Marcos, respectivement examinateur et membre du jury de soutenance. Leurs commentaires et remarques vont assurément contribuer à enrichir le travail initial soumis à leur appréciation. À eux tous, je dis un sincère merci.

Le Centre d'Excellence Africain en Sciences Mathématiques et Applications (CEA-SMA) de l'Institut de Mathématiques et de Sciences Physiques (IMSP) a financé l'un de mes séjours à l'Université de Montpellier, en France. J'adresse mes remerciements à ce centre à travers ses coordonnateurs Joël Tossa et Aboubacar Marcos, qui, au-delà de leurs précieux conseils, m'ont pratiquement coaché dans ce travail.

Je dis un sincère merci à tous mes formateurs de l'IMSP, nationaux comme expatriés, et spécialement à Mirène Larguier et Cécile De Hosson, dont les cours m'ont beaucoup inspiré. Je suis particulièrement reconnaissant au professeur Kossivi Attiklémè pour son suivi et ses conseils.

À la jeune communauté didactique de l'Institut de Mathématiques et de Sciences Physiques et de l'Institut National de la Jeunesse, de l'Éducation Physique et du Sport, je dis merci pour tout ce qu'elle m'a permis d'apprendre, à travers les séminaires.

Je n'oublie pas M. Kodjo Gontran et ses élèves de la seconde C du Collège d'Enseignement Général (CEG) d'Agblangandan de la promotion 2016-2017, pour leur

disponibilité au moment de l'expérimentation de l'ingénierie didactique travaillée dans cette thèse.

À mon épouse Justine Assiba, mes filles Sterenn Fifa et Urielle Dona, qui ont eu à supporter mon absence parfois même dans ma présence physique, je redis mon attachement affectueux et ma reconnaissance, pour leur soutien de tous les jours.

Qu'ils reçoivent toute ma gratitude mes frères et sœurs, fils et filles de François Dandjinou et de Tangnigbo Ahouadi, qui ont été régulièrement préoccupés par l'évolution de la thèse.

Je dis enfin un grand merci aux sieurs Bienvenu Yémalin Houéto, El-Katib Ayihouè, Moïse Mèvi, Kabirou Adéromou, Raphaël Houédanou, Christophe Koukoui, Clément Adandé, et à tous ceux que ma mémoire humaine défaillante ne m'a pas permis de citer mais qui ont contribué d'une manière ou d'une autre à l'aboutissement de ce travail.

TABLE DES MATIÈRES

REMERCIEMENTS	1
TABLE DES MATIÈRES	3
INTRODUCTION.....	13
PREMIÈRE PARTIE : LES TRAVAUX ÉPISTÉMOLOGIQUES ET DIDACTIQUES SUR LES PROBABILITES.....	19
Chapitre I : Étude épistémologique de la notion de probabilité.....	20
Introduction	20
1. La notion de hasard	20
1.1. Quelques conceptions fondamentales du hasard.....	20
1.1.1. Définition étymologique	20
1.1.2. Le hasard selon Aristote.....	21
1.1.3. Le hasard chez Laplace	22
1.1.4. Le hasard chez Cournot.....	23
1.1.5. Le hasard chez Poincaré.....	23
1.1.6. Synthèse	24
1.2. La mentalité primitive, la pensée destinale et le hasard.....	25
1.2.1. La mentalité primitive et le hasard.....	25
1.2.2. Le destin et le hasard.....	26
1.3. Classification mathématique du hasard.....	26
1.3.1. Le hasard bénin, le hasard sauvage et le hasard lent.....	27
1.3.2. Le hasard du tirage au sort et le hasard formel.....	28
1.3.3. Synthèse	28
2. La notion de probabilité	29
2.1. Éléments historiques et épistémologiques du calcul des probabilités.....	29
2.1.1. Émergence du calcul des probabilités au XVII ^e siècle.....	29
2.1.2. L'évolution des probabilités vers une discipline mathématique pure.....	32
2.1.3. L'axiomatisation des probabilités au XX ^e siècle.....	34
2.1.4. Synthèse	35
2.2. Les théories fondamentales du calcul des probabilités	35
2.2.1. La théorie Laplacienne du calcul des probabilités	35
2.2.2. La loi faible des grands nombres.....	37
2.2.3. La théorie probabiliste de Kolmogorov.....	38

2.3. Les courants probabilistes	39
3. La notion d'expérience aléatoire	40
3.1. Quelques approches de définition de l'expérience aléatoire	40
3.2. Le vocabulaire associé à la notion d'expérience aléatoire	42
Conclusion.....	43
Chapitre II : Revue de littérature	45
Introduction	45
1. Les travaux didactiques relatifs à l'enseignement des probabilités	45
1.1. Les travaux de Michel Henry	45
1.2. Les travaux de Bernard Parzysz et de Bernard Dantal	51
1.3. Les travaux de Jean-Claude Girard	58
1.4. Bilan des travaux relatifs à l'enseignement des probabilités	62
2. Les travaux relatifs à l'apprentissage des probabilités	63
2.1. Les travaux de Piaget relatifs à l'idée de hasard et de probabilité chez l'enfant	63
2.1.1. Le hasard et la probabilité chez l'enfant du stade préopérateur	64
2.1.2. Le hasard et la probabilité chez l'enfant du stade des opérations concrètes	64
2.1.3. Le hasard et la probabilité chez l'enfant du stade des opérations formelles	65
2.1.4. Synthèse	66
2.2. Les travaux de Fischbein relatifs aux intuitions probabilistes	66
2.3. Les travaux de Maury et de Lecoutre	74
2.4. Bilan des travaux relatifs à l'apprentissage des probabilités.....	77
3. Les travaux sur les ingénieries en vue de l'enseignement des probabilités	78
3.1. Les expériences didactiques de Fischbein et collaborateurs	79
3.1.1. Première leçon.....	79
3.1.2. Deuxième leçon.....	80
3.1.3. Troisième leçon	82
3.1.4. Quatrième leçon	83
3.1.5. Cinquième leçon.....	83
3.1.6. Une évaluation pour contrôler l'apprentissage.....	84
3.1.7. Bilan de l'expérimentation de Fischbein.....	86
3.2. L'ingénierie de Guy Brousseau	86
3.2.1. Première phase : une introduction au test d'hypothèse	86
3.2.2. Deuxième phase : Modélisation et expérience	87

3.2.3. Troisième phase : Représentation graphique de longues séries	88
3.2.4. Quatrième phase : La convergence et la décision statistique	88
3.2.5. Cinquième phase : Les intervalles de décision.....	89
3.2.6. Sixième phase : Les événements et leur probabilité	90
3.2.7. Les conclusions des auteurs	91
3.3. L'ingénierie de Joël Briand	93
3.3.1. Expérimentation avec le stagiaire	93
3.3.2. Expérimentation du professeur.....	94
3.4. L'ingénierie de Mounir Dhieb.....	97
3.4.1. La première séance.....	97
3.4.2. La deuxième séance.....	98
3.4.3. Troisième séance et quatrième séance.....	98
3.4.4. Synthèse de l'ingénierie didactique de Dhieb	99
3.5. Bilan des ingénieries présentées.....	99
Conclusion.....	101
Chapitre III : Problématique, méthodologie de recherche et cadre théorique.....	103
Introduction	103
1. Problématique.....	103
2. Méthodologie de recherche	107
2.1. Méthodologie relative à l'hypothèse H_1	108
2.2. Méthodologie relative à l'hypothèse H_2	109
3. Cadre théorique	110
3.1. Méthodologie d'ingénierie didactique	111
3.1.1. Les caractéristiques d'une ingénierie didactique.....	111
3.1.2. Les différentes phases de la méthodologie d'ingénierie	112
3.2. La théorie anthropologique du didactique.....	115
3.2.1. La transposition didactique	115
3.2.2. Anthropologie cognitive, organisations mathématique et didactique	118
3.3. La théorie des situations didactiques.....	121
3.3.1. Les situations didactiques.....	121
3.3.2. Le contrat didactique	123
3.4. Méthodologie d'analyse des quatre composantes	125
Conclusion.....	127

DEUXIÈME PARTIE : ENSEIGNEMENT ET APPRENTISSAGE DES PROBABILITES AU BENIN	128
Chapitre IV : Étude de la transposition didactique des probabilités au Bénin	129
Introduction	129
1. Étude de la transposition didactique de la notion d'expérience aléatoire au Bénin	129
1.1. L'expérience aléatoire dans l'enseignement mathématique universitaire.....	129
1.1.1. Rapport à l'expérience aléatoire caractérisée uniquement par le hasard.....	130
1.1.2. Rapport à l'expérience aléatoire caractérisée par le hasard et la connaissance des résultats possibles	131
1.1.3. Synthèse	132
1.2. L'expérience aléatoire dans les programmes d'enseignement	132
1.2.1. L'expérience aléatoire dans les programmes béninois.....	132
1.2.2. L'expérience aléatoire dans les programmes de quelques pays Africains	133
1.2.3. L'expérience aléatoire dans les programmes de quelques pays occidentaux...	135
1.2.4. Bilan	136
1.3. L'expérience aléatoire dans les manuels au Bénin.....	138
1.3.1. Présentation de la notion d'expérience aléatoire dans les manuels.....	138
1.3.2. Analyse.....	140
1.4. L'enseignement de la notion d'expérience aléatoire au Bénin.....	141
1.4.1. La notion d'expérience aléatoire enseignée par les professeurs suivis	141
1.4.2. Rapports des enseignants béninois à la notion d'expérience aléatoire.....	144
1.4.3. Bilan du savoir enseigné relatif à la notion d'expérience aléatoire.....	147
1.5. Récapitulatif de la transposition didactique de l'expérience aléatoire	147
1.6. Notre position sur l'enseignement de la notion d'expérience aléatoire au Bénin ...	148
1.6.1. L'aspect lexical du « vocabulaire des probabilités ».....	148
1.6.2. Le vide didactique au niveau de la définition d'expérience aléatoire	149
2. Étude de la transposition didactique de la notion de probabilité d'un événement	149
2.1. Rapport institutionnel à la notion de probabilité d'un événement dans l'institution savante	149
2.1.1. Présentation de l'ouvrage de Bogaert.....	150
2.1.2. Présentation de l'ouvrage de Saporta	151
2.1.3. Présentation de l'ouvrage de Gaultier	153
2.1.4. Présentation du cours photocopié d'Ogouyandjou.....	153
2.1.5. Bilan de la présentation des ouvrages	154

2.1.6. Analyse praxéologique du savoir savant relatif au calcul des probabilités dans l'enseignement mathématique du supérieur	155
2.2. La notion de probabilité d'un événement au niveau des instructions officielles	157
2.2.1. Évolution de l'enseignement des probabilités au Bénin	157
2.2.2. Analyse praxéologique des programmes de probabilités	162
2.2.3. La notion de probabilité d'un événement dans les programmes de quelques pays africains et occidentaux.	162
2.2.4. Bilan du savoir à enseigner relatif à la probabilité d'un événement	165
2.3. La notion de probabilité dans l'apprêt didactique	166
2.3.1. Présentation des manuels.....	166
2.3.2. Analyse praxéologique des manuels relativement à la notion de probabilité d'un événement.....	168
2.4. L'enseignement de la notion de probabilité d'un événement au Bénin	169
2.4.1. La notion de probabilité enseignée par les professeurs suivis	169
Cours du professeur M.	169
Cours du professeur L.	169
2.4.2 Analyse praxéologique du savoir enseigné relatif à la notion de probabilité....	170
2.4.3. Rapport des enseignants à l'épistémologie du calcul des probabilités.....	170
2.5. Récapitulation de la transposition didactique de la notion de probabilité.....	171
Conclusion.....	173
Chapitre V : Apprentissage du calcul élémentaire des probabilités au Bénin	174
Introduction	174
1. Présentation et analyse a priori du test	174
1.1. Les exercices du test.....	174
1.1.1. Exercice 1	174
1.1.2. Exercice 2	175
1.1.3. Exercice 3	176
1.1.4. Exercice 4	176
1.1.5. Exercice 5	176
1.1.6. Exercice 6	176
1.1.7. Exercice 7	177
1.2. Analyse a priori	177
1.2.1. Exercice 1	177
1.2.2. Exercice 2	179

1.2.3. Exercice 3	180
1.2.4. Exercice 4	181
1.2.5. Exercice 5	182
1.2.6. Exercice 6	183
1.2.7. Exercice 7	184
2. Analyse des résultats du post test	185
2.1. Analyse des réponses relatives à l'exercice 1	185
2.1.1. Question 1	185
2.1.2. Question 2 de l'exercice 1	187
2.1.3. Question 3 de l'exercice 1	189
2.1.4. Synthèse des résultats relatifs à l'exercice 1	193
2.2. Résultats relatifs à l'exercice 2.....	194
2.2.1. La catégorie « tirage au sort »	194
2.2.2. La catégorie « compensation ».....	195
2.2.3. La catégorie « constance »	195
2.2.4. La catégorie « Conception non affirmée »	196
2.2.5. Répartition statistique des élèves par rapport aux catégories de réponses identifiées	196
2.3. Analyse des réponses relatives à l'exercice 3	196
2.3.1. Question 1 de l'exercice 3	197
2.3.2. Question 2.a) de l'exercice 3	198
2.3.3. Question 2.b) de l'exercice 3.....	200
2.3.4. Bilan de l'analyse des résultats relatifs à l'exercice 3.....	202
2.4. Analyse des réponses relatives aux exercices 4 et 6	203
2.4.1. Résultats relatifs à l'exercice 4.....	203
2.4.2. Résultats relatifs à l'exercice 6.....	206
2.4.3. Bilan des résultats relatifs aux exercices 4 et 6.....	207
2.5. Analyse des réponses relatives aux exercices 5 et 7	208
2.5.1. Analyse des réponses relatives à l'exercice 5	208
2.5.2. Analyse des réponses relatives à l'exercice 7	211
2.5.3. Bilan des résultats relatifs aux exercices 5 et 7	214
3. Bilan de l'apprentissage du calcul élémentaire des probabilités.....	215
3.1. Rapport à la notion d'expérience aléatoire.....	215
3.2. Rapports personnels au premier principe de Laplace.....	217

3.2.1. Les types de rapports personnels au premier principe de Laplace	218
3.2.2. Étude quantitative du rapport des élèves au premier principe de Laplace	219
3.3. Rapport personnel au deuxième principe de Laplace.....	220
3.3.1. Les types de rapports au deuxième principe de Laplace	221
3.3.2. Étude quantitative du rapport des élèves au deuxième principe de Laplace	222
3.4. Synthèse sur l'apprentissage du calcul élémentaire des probabilités	223
Conclusion.....	224
TROISIÈME PARTIE : UNE INGENIERIE DIDACTIQUE POUR ENSEIGNER LE CALCUL ELEMENTAIRE DES PROBABILITES DANS LE CADRE D'UNE DEMARCHE EXPERIMENTALE.....	
226	
Chap. VI : Élaboration de l'ingénierie	227
Introduction	227
1. Objectifs et contraintes	227
1.1. Les objectifs et les hypothèses	227
1.2. Les conditions et les contraintes.....	228
1.2.1. Les conditions de l'expérimentation	229
1.2.2. Les contraintes.....	230
1.2.3. La classe d'expérimentation et le professeur expérimentateur	234
2. Organisation de l'ingénierie	236
2.1. Présentation globale	236
2.2. Présentation des situations de l'ingénierie	238
2.2.1. Situation 1	238
2.2.2. Situation 2	241
2.2.3. Situation 3	245
2.2.4. Situation 4	247
2.2.5. Situation 5	249
2.2.6. Situation 6 (Post test)	254
2.2.7. Synthèse de la présentation des situations.....	257
3. Analyse a priori	257
3.1. Situation 1	258
3.1.1. Analyse de la phase 1.1	259
3.1.2. Analyse de la phase 1.2	263
3.1.3. Analyse de la phase 1.3	265
3.2. Situation 2	270

3.2.1. Analyse a priori de la phase 2.1	271
3.2.2. Analyse a priori de la phase 2.2	275
3.2.3. Analyse a priori de la phase 2.3	276
3.3. Situation 3	279
3.3.1. Les variables didactiques	280
3.3.2. Rôle du professeur.....	281
3.3.3. Organisation mathématique visée	281
3.3.4. Les réponses possibles des élèves	283
3.4. Situation 4	283
3.4.1. Les choix didactiques	284
3.4.2. Rôle du professeur.....	284
3.4.3. Organisations mathématiques visées.....	285
3.4.4. Comportement et réponses possibles des élèves	287
3.5. Situation 5	289
3.5.1. Rôle du professeur pour l'ensemble des exercices.....	289
3.5.2. Exercice 1	290
3.5.3. Exercice 2.....	292
3.5.4. Exercice 3	296
3.5.5. Exercice 4	301
3.5.6. Exercice 5	305
3.5.7. Exercice 6	310
3.5.8. Exercice 7	312
3.6. Situation 6	316
3.6.1. Exercice 1	316
3.6.2. Exercice 2	319
3.6.3. Exercice 3	320
3.6.4. Exercice 4	323
3.6.5. Exercice 5	325
3.6.6. Exercices 6 et 8	328
3.6.7. Exercice 7	329
Conclusion.....	330
Chapitre VII : Analyse de la réalisation en classe de l'ingénierie.....	331
Introduction	331

1. Conditions générales de réalisation en classe des situations de l'ingénierie.....	331
1.1. Nombre de séances et période d'expérimentation.....	331
1.2. La classe d'expérimentation.....	333
1.3. La collaboration avec le professeur d'expérimentation	333
2. Analyse a posteriori des situations	334
2.1. Analyse a posteriori de la situation n°1.....	334
2.1.1. Analyse de la phase 1.1 de la situation n°1	335
2.1.2. Analyse de la phase 1.2.....	341
2.1.3. Analyse de la phase 1.3 de la situation n°1	348
2.1.4. Bilan de l'analyse de la situation n°1	362
2.2. Analyse a posteriori de la situation n°2.....	363
2.2.1. Analyse de la phase 2.1 dans la première séance consacrée à sa réalisation ...	363
2.2.2. Analyse de la phase 2.1 dans la deuxième séance consacrée à sa réalisation ..	376
2.2.3. Analyse de la phase 2.1 dans la troisième séance consacrée à sa réalisation...	385
2.2.4. Analyse de la phase 2.2 de la situation n°2	396
2.2.5. Analyse de la phase 2.3 de la situation 2.....	407
2.2.6. Bilan de la réalisation de la situation n°2.....	412
2.3. Analyse a posteriori de la situation n°3.....	413
2.3.1. La trame de la séance	413
2.3.2. Organisation mathématique de la situation	414
2.3.3. Analyse suivant la méthodologie des 4 composantes	417
2.3.4. Bilan de la réalisation de la troisième situation.....	426
2.4. Analyse a posteriori de la situation n°4.....	427
2.4.1. La trame de la séance	427
2.4.2. Organisation mathématique de la situation	428
2.4.3. Analyse de la situation n°4 suivant la méthodologie des 4 composantes	433
2.4.4. Bilan de l'analyse de la situation n°4	438
2.5. Analyse a posteriori de la situation n°5.....	439
2.5.1. Exercice 1	439
2.5.2. Exercice 2.....	444
2.5.3. Exercice 3	447
2.5.5. Exercice 5.....	453
2.5.6. Exercice 6.....	457

2.5.7. Exercice 7	460
2.5.8. Bilan de la réalisation de la situation 5	463
Conclusion.....	465
CHAPITRE VIII : Apport de l'ingénierie à l'apprentissage du calcul des probabilités	467
1. Administration du post test	467
2. Analyse des résultats du test.....	468
2.1. Analyse des réponses des élèves à l'exercice 1	469
2.1.1. Réponses à la question 1	469
2.1.2. Réponses à la question 2	471
2.1.3. Réponses à la question 3	472
2.1.4. Bilan de l'analyse des résultats relatifs à l'exercice 1	475
2.2. Analyse des résultats relatifs à l'exercice 2 du post test	475
2.2.1. Organisations mathématiques et réponses proposées.....	475
2.2.2. Analyse quantitative des types de réponses	477
2.2.3. Bilan de l'exercice 2.....	478
2.3. Analyse des résultats relatifs à l'exercice 3 du post test	479
2.3.1. Organisation mathématique de la question 1)	479
2.3.2. Organisation mathématique de la question 2a)	481
2.3.3. Organisation mathématique de la question 2.b)	484
2.3.4. Bilan de l'analyse de l'exercice 3 du post test	486
2.4. Analyse des résultats relatifs à l'exercice 4 du post test	487
2.5. Analyse des résultats relatifs aux exercices 6 et 8 du post test	492
2.6. Analyse des résultats relatifs aux exercices 5 et 7 du post test	495
2.6.1. Organisation mathématique des élèves par rapport à l'exercice 5	496
2.6.2. Organisation mathématique des élèves par rapport à l'exercice 7	500
2.6.3. Bilan de l'analyse des exercices 5 et 7	502
3. Bilan de l'apprentissage du calcul des probabilités à l'issue de l'ingénierie didactique expérimentée	503
3.1. Rapports personnels à la notion d'expérience aléatoire	503
3.2. Rapports personnels au premier principe de Laplace.....	504
3.3. Rapports personnels au deuxième principe de Laplace.....	507
Conclusion.....	509
CONCLUSION	512
RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES	520

INTRODUCTION

Origine de la thèse

Il n'est aujourd'hui un secret pour personne dans le monde scolaire et universitaire que les mathématiques sont une science difficilement accessible par la grande majorité des apprenants. Qualifiées même de « bête noire » par ces derniers au Bénin, elles constituent indubitablement l'une des causes de la diminution drastique et progressive des effectifs dans les séries scientifiques. Cette désaffection des séries scientifiques est non seulement évoquée dans les discours prononcés lors des rencontres entre acteurs de l'éducation, mais aussi de plus en plus dans les travaux scientifiques pour justifier des études portant sur l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques (Affognon, 2015 ; F. Gbaguidi, 2015 ; Sossa, 2018). Plus particulièrement, les probabilités sont perçues par les élèves béninois, mais aussi par certains enseignants, comme l'un des domaines mathématiques, où l'on note plus de difficultés de compréhension. Une étude sur l'enseignement et l'apprentissage des probabilités dans le contexte béninois devient alors nécessaire pour faire l'état des lieux en vue de proposer des solutions aux difficultés des uns et des autres dans ce domaine.

Notre première source de motivation à travailler dans le domaine des probabilités est notre souci de corriger l'appréhension que les élèves et les enseignants ont des probabilités. En effet, au début de notre carrière d'enseignant de mathématique, l'une de nos préoccupations majeures a été de rendre plus compréhensibles les probabilités par les élèves. Depuis ce moment, où nous étions totalement ignorant de l'épistémologie des probabilités et des travaux didactiques relatifs aux probabilités, nous n'avions pour arme que la proposition de méthodes d'enseignement informelles pouvant conduire à l'amélioration du rapport personnel de l'élève au calcul des probabilités, et notamment à l'analyse combinatoire, car pour nous, le calcul des probabilités se limitait au premier principe de Laplace. C'est ce qui nous a conduit à nous engager au début de l'année 2012 dans l'étude de l'apprentissage du calcul des probabilités au Bénin dans le cadre de la rédaction de notre mémoire de DEA (Dandjinou, 2013).

Notre seconde source de motivation vient d'une discussion à laquelle nous avons participé dans la commission chargée d'élaborer les corrigés-types des épreuves de mathématiques de la session unique de baccalauréat 2012. Il s'agissait du problème de probabilité ci-dessous, extrait de l'épreuve de mathématique de la série D, qui a conduit les membres de la commission à proposer, après des heures de discussion, plusieurs réponses différentes supposées correctes.

Un jour, un passant a été témoin d'un accident de circulation et a décidé d'appeler les sapeurs-pompiers. Il dispose de 5 numéros des sapeurs-pompiers mais ce jour-là, 3 des numéros étaient hors service. Le passant a composé au hasard un des numéros.

Calcule la probabilité que l'appel du passant tombe sur un numéro en service :

a) au premier essai.

b) au second essai sachant qu'il n'a pas repris le premier numéro essayé.

Membre de cette commission très représentative de la noosphère béninoise en mathématique, nous avons participé aux discussions et avons notamment suivi avec attention celles à propos de la question b). En effet tous les membres de la commission ont été unanimes sur la bonne réponse de la question a), mais au niveau de la question b), il y a eu trois propositions différentes de réponses après plus de deux heures de discussion. Une partie de la commission avait soutenu que la présence du mot « sachant » dans la question indique qu'il s'agit d'une probabilité conditionnelle. Pour cette partie, la probabilité demandée à la question b) est $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ (R_1). Une seconde partie, majoritaire, avait estimé qu'il ne s'agit pas d'une probabilité conditionnelle et que l'expérience aléatoire dans la question b) est : « composer deux fois de suite un numéro de téléphone ». Par manque de précision de l'énoncé, cette deuxième partie de la commission s'est disloquée en deux groupes, l'un estimant que le deuxième appel ne peut avoir lieu que lorsqu'il y a échec au premier appel. Pour ce groupe, le plus majoritaire des deux, la probabilité demandée est : $\frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$ (R_2). Le deuxième groupe, qui a soutenu qu'il peut y avoir un deuxième appel même en cas de réussite au premier appel, a proposé comme réponse : $\frac{3}{5} \times \frac{2}{4} + \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{5}$ (R_3). Ne s'étant pas entendus sur l'une des trois propositions de réponses, les membres de la commission les ont retenues, toutes les trois, comme réponses correctes. La diversité de réponses constatée au niveau de la commission d'élaboration des corrigés-types est confirmée au niveau d'un échantillon de professeurs enseignant en classe terminale. En effet, nous avons soumis cet échantillon à un questionnaire, invitant les enseignants à choisir l'une des trois réponses proposées par la commission. Cette enquête a révélé que les réponses R_1 , R_2 , R_3 sont respectivement acceptées par environ 6%, 65% et 20% des enseignants interrogés (Annexe 1), confirmant ainsi les tendances au sein de la commission d'élaboration de corrigés. Les candidats auxquels le problème est soumis ne semblent pas tellement se retrouver dans ce débat des professeurs. En effet, une deuxième enquête menée au niveau de 225 candidats ayant composé à cet examen, montre qu'au niveau de la question discutée, très peu d'élèves sont allés dans le même sens que les enseignants avec les proportions respectives de 4%, 1% et 0% pour les réponses R_1 , R_2 et R_3 (Annexe 1).

L'énoncé non suffisamment précis du problème et les multiples réactions des membres de la commission d'élaboration de corrigés-types, confirmées par les enseignants, sont pour nous des signes évocateurs de la problématique de l'enseignement des probabilités au Bénin. Ce qui nous avait conforté dans notre détermination à mener une étude plus approfondie sur l'enseignement et l'apprentissage des probabilités.

Délimitation de la thèse

Depuis leur origine officielle en 1654, suite à la résolution d'un problème de parti par Pascal et Fermat, les probabilités se sont construites sur environ trois siècles et demi (Pichard, 2005). Elles sont utilisées dans plusieurs domaines scientifiques et deviennent indispensables pour le développement de l'esprit critique de l'être humain surtout en couplage avec la statistique. Présentes dans les discours de tout genre à travers l'estimation du risque ou de la chance qu'a un événement de se produire, les probabilités sont aujourd'hui d'une importance certaine et leur enseignement semble s'imposer à tous les niveaux de formation.

Sur le plan épistémologique, on distingue trois approches de définition de la probabilité : l'approche laplacienne basée sur les deux premiers principes de Laplace, l'approche fréquentiste justifiée par la loi des grands nombres et l'approche axiomatique due à André Kolmogorov en 1933. Cette dernière approche, élaborée à partir de la théorie de la mesure, mise en place par Borel et Lebesgue, offre un cadre mathématique qui accompagne les deux autres dans le calcul des probabilités. Le manque d'univocité du concept de probabilité n'est pas de nature à favoriser son enseignement. Pour les uns, la probabilité est objective car correspondant à une réalité physique dans le cas des événements pouvant se reproduire ; pour les autres, elle est avant tout subjective et ne devient objective que pour des événements qui peuvent être répétés ; pour certains encore, la probabilité est purement mathématique et son étude se développe indépendamment d'une réalité concrète (Allais, 1983). Nous faisons l'hypothèse que cette variété de concepts pour le seul mot « probabilité » affecte la qualité de l'enseignement et par conséquent celle de l'apprentissage des probabilités, chaque enseignant pouvant très tôt orienter l'enseignement vers le concept qu'il aura adopté, souvent de manière inconsciente.

Après près de deux siècles de tâtonnements de leur enseignement à partir de 1786, les probabilités ont fait leur entrée officielle dans les programmes d'enseignement dans les années 1930 pour la France (Meusnier, 2006) et dans les années 1960 dans le monde anglo-saxon (Gattuso et Vermette, 2013). Le choix de l'approche de la définition de la probabilité d'un événement constitue une difficulté majeure dans l'enseignement des probabilités (Dhieb, 2009).

Pendant longtemps, l'enseignement du calcul des probabilités, un peu partout dans le monde, est basé sur l'approche laplacienne à travers le premier principe de Laplace (soutenue bien sûr par l'approche axiomatique), ramenant de ce fait le calcul des probabilités aux problèmes de dénombrement. Des travaux de Michel Henry sur l'enseignement des probabilités en France ont débouché sur le constat de l'échec de cette manière d'enseigner les probabilités (Henry, 1999, 2010). Du côté de l'apprentissage, de nombreux travaux ont montré les rapports inadéquats qu'ont généralement les étudiants, les lycéens, les collégiens et les écoliers à des objets probabilistes. Les probabilités constituent ainsi un domaine où l'on note des difficultés aussi bien dans l'enseignement que dans l'apprentissage (Dhieb, 2009). L'introduction de l'approche fréquentiste dans les programmes français de 1991 en classe de première puis l'introduction du calcul des probabilités au collège, notamment en troisième à partir de 2000 devraient remédier à l'échec relatif de l'enseignement des probabilités (Henry, 1999, 2010). Tout comme en France, l'approche fréquentiste prend place dans les programmes de probabilités dans plusieurs pays dans le but de donner plus de sens à la notion de probabilité.

Il est certain que jusqu'à un passé récent, les probabilités n'étaient enseignées que dans les universités comme par exemple en France où le premier véritable enseignement structuré et continu s'est mis en place à la faculté des sciences de Paris (Meusnier, 2006) ou tout au plus au lycée. Si en France, il a fallu attendre l'an 2000 pour introduire les probabilités dans les programmes de mathématique du premier cycle de l'enseignement secondaire (Henry, 2010), l'enseignement des probabilités au collège et même au primaire est une réalité vers la fin des années 1980 aux USA, au Canada, en Angleterre, en Australie, en Nouvelle Zélande, en Italie (Gattuso et Vermette, 2013). Par contre, certains pays comme la Belgique Francophone (Vermandele, 2013) et un bon nombre de pays africains dont le Bénin, ne font enseigner les probabilités qu'au second cycle de l'enseignement secondaire (lycée) et pratiquement en classe terminale.

La réforme du système éducatif béninois de 1994 a abouti à l'élaboration des programmes selon l'approche par les compétences qui ont été expérimentés puis généralisés. Bien que ces programmes en vigueur au secondaire depuis 2005 recommandent que du sens soit donné aux concepts mathématiques qui s'y trouvent (DIP, 2011b), ils continuent de faire aborder les probabilités à partir de l'approche axiomatique débouchant sur le premier principe de Laplace et contenant des traces implicites du deuxième principe de Laplace. Cet enseignement des probabilités, inscrites au second cycle de l'enseignement secondaire et actuellement dans les classes terminales de plusieurs séries, se focalise sur le premier principe de Laplace. Dans notre

mémoire de master 2 de recherche, intitulé « Apprentissage du calcul élémentaire des probabilités en terminale D au Bénin¹ », nous avons étudié le rapport des élèves au deuxième principe de Laplace. Le résultat principal auquel nous avons abouti est que le rapport des élèves à ce principe n'est pas conforme à celui de l'institution d'enseignement pour la grande majorité des élèves. Ce rapport inadéquat des élèves béninois pourrait résulter du caractère implicite qu'a ce principe dans les programmes béninois. Des difficultés sont ainsi régulièrement constatées aussi bien sur le plan conceptuel que sur le plan de l'enseignement et de l'apprentissage des probabilités dans le système scolaire béninois comme d'ailleurs dans ceux de plusieurs pays du monde en général et d'Afrique en particulier.

Ainsi de nombreuses questions peuvent se poser par rapport aux options d'enseignement des probabilités dans différents pays. L'approche fréquentiste qui tend à se généraliser actuellement dans le monde permet-elle d'améliorer le rapport des élèves au calcul des probabilités ? À partir de quelle année d'études les probabilités peuvent-elles être enseignées ? Comment enseigner les probabilités pour améliorer les rapports des apprenants aux objets probabilistes ? Ces problèmes globalement posés participent de l'intérêt que nous avons à nous pencher dans la présente thèse sur une étude didactique approfondie sur le calcul des probabilités. Cette étude consistera à expérimenter un enseignement des probabilités à partir d'une démarche expérimentale basée sur l'approche fréquentiste couplée avec le deuxième principe de Laplace. Le domaine des probabilités étant vaste, nous circonscrivons notre étude au calcul élémentaire des probabilités en étudiant l'intérêt d'un enseignement des probabilités basé sur l'approche fréquentiste. Nous entendons par calcul élémentaire des probabilités, le calcul de la probabilité d'un événement lié à une expérience aléatoire donnée, excluant la probabilité conditionnelle, les variables aléatoires et les lois classiques. En effet, nous estimons qu'une bonne compréhension du calcul des probabilités passe nécessairement par la maîtrise du calcul élémentaire des probabilités. Toutes ces considérations nous conduisent au thème : « Enseignement des probabilités dans le secondaire au Bénin : Apport d'une démarche expérimentale à l'apprentissage du calcul élémentaire des probabilités ».

Objectifs

Notre but est d'améliorer l'enseignement/apprentissage des probabilités en agissant sur tous les pôles du triangle didactique tout en nous intéressant particulièrement au pôle « élève ». L'objectif de notre travail est de contribuer à l'enseignement/apprentissage des probabilités au

¹ Soutenu en mars 2013 à l'Institut de Mathématiques et de Sciences Physiques (IMSP), à Porto-Novo.

Bénin en visant l'appropriation par les élèves des notions probabilistes et leur capacité à les appliquer dans des problèmes. Il s'agira pour nous d'appréhender l'effet d'un enseignement du calcul des probabilités à partir de l'approche fréquentiste en partant des problèmes que pose l'enseignement des probabilités suivant les programmes en vigueur au Bénin. La finalité de notre travail, en ce moment, où le Bénin est engagé dans l'approche d'enseignement par les compétences, est de contribuer à éclairer la noosphère sur l'enseignement/apprentissage des probabilités en vue de l'enrichissement justifié des programmes de probabilités au Bénin et dans les pays subsahariens. L'aboutissement de ce travail permettra de préciser les conditions d'un enseignement des probabilités pour un apprentissage plus efficace.

Organisation de la thèse

La présente thèse est organisée en trois parties. La première partie intitulée « Les travaux didactiques sur les probabilités » comporte trois chapitres : le chapitre I, le chapitre II et le chapitre III. Elle vise à renseigner sur l'épistémologie des probabilités et sur les travaux relatifs à l'enseignement et à l'apprentissage des probabilités. Le chapitre I porte sur l'étude épistémologique de la notion de probabilité, le chapitre II est une revue de littérature sur les travaux didactiques en probabilités et le chapitre III comprend une explication de la problématique de la recherche, le cadre théorique d'analyse et la méthodologie générale de recherche. La deuxième partie est intitulée « Enseignement/ apprentissage des probabilités au Bénin ». Elle constitue un état des lieux de l'enseignement des probabilités et se situe dans le cadre des analyses préalables d'une ingénierie didactique. Elle comporte deux chapitres, notamment le chapitre IV qui est l'étude de la transposition didactique des probabilités au Bénin, et le chapitre V qui rend compte des rapports personnels à des notions probabilistes telles que la notion d'expérience aléatoire et les deux premiers principes de Laplace. La troisième et dernière partie de la thèse, intitulée « Une ingénierie didactique pour enseigner le calcul élémentaire des probabilités dans le cadre d'une démarche expérimentale », est globalement consacrée à une ingénierie didactique sur l'enseignement des probabilités. Elle comporte trois chapitres, à savoir les chapitres VI, VII et VIII. Dans le chapitre VI, il est question de l'élaboration de l'ingénierie didactique. Le chapitre VII, quant à lui porte sur la réalisation en classe de cette ingénierie, tandis que dans le chapitre VIII, nous évaluons l'apport de l'ingénierie à l'apprentissage du calcul des probabilités.

PREMIÈRE PARTIE :
**Les travaux épistémologiques et
didactiques sur les probabilités**

Chapitre I : Étude épistémologique de la notion de probabilité

Introduction

L'objet d'étude central de notre thèse est la probabilité, et plus spécifiquement cette étude porte sur l'enseignement et l'apprentissage du calcul élémentaire des probabilités. Étant donné que toute étude didactique d'un savoir donné se nourrit en premier lieu de son épistémologie, nous nous intéressons dans ce chapitre à l'épistémologie de la probabilité. La notion de probabilité est fortement corrélée avec la notion d'expérience aléatoire, sans laquelle on ne saurait définir la probabilité dans le secondaire, et par ailleurs, la notion d'expérience aléatoire fournit un habitat pour la notion controversée de hasard. D'ailleurs la notion de hasard est à la base de la notion de probabilité, puisqu'au début de sa construction, la probabilité était désignée par le groupe de mot « la géométrie du hasard » (Godfroy-Génin, 2000). Compte tenu du fait que la notion de hasard et celle de probabilité ont plus préoccupé les penseurs que celle d'expérience aléatoire, nous insistons dans ce chapitre sur l'épistémologie des deux premières notions citées.

1. La notion de hasard

Le hasard est une idée familière et commune à presque toutes les sociétés. Il est ordinairement caractéristique de tout événement dont les causes sont naturelles mais qui a un effet défavorable (malheur) ou favorable (chance) pour l'homme. Plusieurs penseurs, depuis l'antiquité avec Aristote (IV^e siècle avant J-C) jusqu'à l'époque contemporaine en passant par Poincaré (1854-1912), ont réfléchi sur le concept du hasard, en proposant chacun, de son côté, sa conception du hasard. Il existe cependant des courants d'idées qui n'accordent pas de statut au concept du hasard.

1.1. Quelques conceptions fondamentales du hasard

1.1.1. Définition étymologique

À l'origine, le mot hasard est lié au jeu comme l'a précisé Bernard Courtebras (2001) qui distingue à cet effet deux hypothèses pour l'expliquer. Une première hypothèse présente ce mot comme un emprunt, en 1150, à l'arabe « az-zahr » qui signifie « jeu de hasard » par l'intermédiaire du mot espagnol « azar » de même signification. Une deuxième hypothèse

proche de la première fait référence à un « jeu de dés » trouvé par les croisés² dans le château de « Hazard » près d'Alep en Syrie (Ibid).

Le hasard a donc pris sa source étymologique dans le « jeu de dés ». Mais que signifie-t-il au juste ? Selon le dictionnaire « le nouveau petit Robert de 1994 », le hasard est la cause fictive de ce qui arrive sans raison apparente ou explicable. Cette définition traduit bien l'ambiguïté de la notion du hasard que le généticien Albert Jacquard (1983, p. 24) voit intervenir dans la transmission complexe d'un caractère d'une génération à une autre et qu'il définit comme étant « *le sujet du verbe choisir lorsque ce sujet est inconnu, ou inconnaissable, ou même, peut-être, inexistant* ».

1.1.2. Le hasard selon Aristote

Aristote (384-322 av. J-C) est le premier scientifique à s'intéresser à une étude objective du hasard. Avant Aristote, le hasard avait une place, qui nécessitait son étude rationnelle, aussi bien dans l'opinion, dans la religion, que dans la science. Les pensées du hasard qui avaient prévalu avant Aristote sont : la pensée négationniste, la pensée déterministe et la pensée religieuse (Pollock, 2012). Pour la pensée négationniste, le hasard n'existerait pas car, d'une part, s'il existait les penseurs en auraient parlé, et d'autre part, rien ne se produit au hasard puisque « *tout fait attribué au hasard est l'effet d'une cause* » (Dupond, 2012, p. 24). Les déterministes tels que Démocrite d'Abdère (460 – 370 av. J.- C.) et son maître Leucippe estiment que « *le hasard préside à la formation des mondes, mais non pas à la production des phénomènes en leur sein* » (Pollock, 2012, p. 4). Ce qu'ils justifient par la régularité des phénomènes : « *les animaux et les plantes ne sont pas produits par le hasard mais par une cause qui est nature ou esprit* » (Dupond, 2012, p. 25). Quant à la pensée religieuse, elle interprète le hasard comme une cause « mystérieuse » qui échappe à la connaissance humaine (Ibid). Voulant éviter ces pensées, Aristote expose sa théorie qui vise à montrer que le hasard a une cause au sein de la nature mais ne peut être considéré comme une cause pouvant servir d'explication aux phénomènes réguliers. Il s'essaye à une définition rationnelle, mais qui ne l'est pas en réalité : « *Le hasard n'est la cause ni de « ce qui arrive nécessairement et toujours », ni de « ce qui arrive le plus souvent »* » (Pollock, 2012, p. 4).

Le point de départ d'Aristote a été d'abord de reconnaître l'existence du hasard à travers les événements rares ou exceptionnels.

² Un croisé est un chevalier chrétien occidental qui a participé aux croisades du Moyen Âge

Aristote distingue trois catégories d'événements : ceux qui se produisent toujours identiquement (comme le retour du soleil), ceux qui se produisent pour la plupart du temps de la même façon (un homme naît la plupart du temps avec la vue plutôt que sans la vue) et ceux qui sont rares ou exceptionnels. Ce sont ces derniers que l'on dit relever de la tuchè (hasard). (Dupont, 2012, p. 28).

Ensuite, une double distinction des événements : entre événements relevant d'une finalité naturelle ou d'une finalité consciente et ceux qui se produisent en marge du nécessaire d'une part, et entre les causes par soi et les causes par accident d'autre part, a permis à Aristote de définir le hasard comme « la cause par accident ».

Les événements dus au hasard sont des événements susceptibles de résulter d'un choix réfléchi, résultant d'un choix réfléchi, mais d'un choix réfléchi autre que celui qui aurait pris pour fin l'événement en question (Dupont, 2012, p. 29).

La conception d'Aristote est illustrée par divers exemples dont celui d'une rencontre fortuite entre un créancier et son débiteur au marché (Milhaud, 1902).

Quand un créancier étant allé au marché, y trouve précisément son débiteur, auquel il n'avait pas songé, la rencontre est fortuite parce qu'elle n'est pas par sa volonté le but naturel et rationnel de toute la série d'actes, qui l'a amené au marché, parce qu'il se trouve en présence d'une chaîne d'événements aboutissant à la rencontre, celle-ci restant cependant extérieure à la chaîne (p. 669).

Ainsi, en appelant à la cause essentielle à ses yeux, Aristote n'a pas pu écarter l'absence de cause pour expliquer le hasard (Milhaud, 1902) qui selon lui est le fruit de la combinaison entre une série causale et une finalité liée à un intérêt humain que l'on projette sur l'événement (Martin, 1996).

1.1.3. Le hasard chez Laplace

Pierre-Simon Laplace (1749-1827) ne pouvait pas se passer de la notion de hasard lorsqu'il étudia les dix principes généraux du calcul des probabilités. Sa conception du hasard se distingue clairement dans ses premiers écrits sur les probabilités. Il perçoit le hasard simplement comme « la conséquence de notre ignorance » (Laplace, 1840), se détachant de l'idée de causalité d'Aristote.

[...] mais ces causes imaginaires ont été successivement reculées avec les bornes de nos connaissances, et disparaissent entièrement devant la saine philosophie, qui ne voit en elles que l'expression de l'ignorance où nous sommes des véritables causes (p. 3).

Il est important de préciser que Laplace lie la notion de hasard à celle du calcul des probabilités par le premier principe en affirmant que la « théorie des hasards », qu'est la théorie des probabilités, consiste à réduire tous les événements à un nombre de cas « également possibles » (Laplace, 1840).

1.1.4. Le hasard chez Cournot

Plus explicite, Antoine Augustin Cournot (1801-1877) propose une définition du hasard qui lui a servi de cadre au calcul des probabilités en donnant à ces dernières le statut de mesure du degré de réalisation d'un phénomène objectif (Chrétien et Gaud, 1998). Le hasard pour Cournot n'est ni un surgissement imprévu d'un effet sans cause, ni l'ignorance des causes d'un événement, le hasard est la rencontre accidentelle entre plusieurs séries de causes indépendantes (Martin, 2001).

Ce qui fait la fortuité n'est donc pas l'absence de détermination, ou son ignorance, mais l'absence de nécessité dans la conjonction des déterminations. En ce sens, un événement peut être le produit d'un ensemble de causes qui le déterminent, tout en étant fortuit dès lors qu'il n'est pas nécessaire (p. 459).

À y voir de près, Cournot et Aristote se rapprochent dans leurs conceptions du hasard. Ce que, Aristote appelle « cause par accident » s'apparente bien à ce que Cournot désigne par rencontre de causes indépendantes. C'est ce qu'exprime Milhaud (1920, p. 672) en affirmant que : « *en éclairant ce qui touche au hasard par la pensée générale d'Aristote, on se rapproche de la définition de Cournot* ».

1.1.5. Le hasard chez Poincaré

Poincaré (1854-1912) s'est aussi intéressé aux probabilités et plus particulièrement à la notion de hasard dans le but de construire des outils mathématiques utilisables pour la théorie cinétique des gaz. L'ignorance d'une cause, la complexité des causes et l'intervention d'une cause imprévue sont pour Poincaré les origines qui justifient la légitimité de la notion du hasard comme l'articule Laurent Mazliak (2012).

Il en voit essentiellement trois origines : l'ignorance d'une cause très petite que nous ne pouvons pas connaître mais qui produit un effet très grand (l'effet papillon de la météorologie), la complexité des causes qui nous interdit d'accéder à un ordre autre que statistique (comme dans la théorie cinétique des gaz), l'intervention d'une cause imprévue que nous avons négligée (p. 146).

Se situant dans le même courant d'idée que Laplace, Poincaré s'est également démarqué d'Aristote pour se réclamer déterministe absolu, en définissant le hasard comme « la mesure de notre ignorance », car pour lui le hasard n'aurait pas existé. Il a illustré sa définition qu'il juge satisfaisante par de nombreux exemples (Poincaré, 1923).

Et même sans sortir de notre faible humanité, ce qui est hasard pour l'ignorant, n'est plus hasard pour le savant. Le hasard n'est que la mesure de notre ignorance. Les phénomènes fortuits sont, par définition, ceux dont nous ignorons les lois. Mais cette définition est-elle bien satisfaisante ? Quand les premiers bergers chaldéens suivaient des yeux les mouvements des astres, ils ne connaissaient pas encore les lois de l'Astronomie ; auraient-ils songé à dire que les astres se meuvent au hasard ? Si un physicien moderne étudie un phénomène nouveau, et s'il en découvre la loi le mardi, aurait-il dit le lundi que ce phénomène était fortuit ? (p. 2).

Bien que très proche de la conception laplacienne, Poincaré n'associe pas nécessairement au hasard la condition d'événements également probables.

1.1.6. Synthèse

Signifiant étymologiquement « jeu de dés », le hasard a été une préoccupation majeure des savants depuis le temps d'Aristote, où le calcul des probabilités n'était pas envisagé, jusqu'au temps de Laplace, où la notion de hasard est étudiée pour servir de base au calcul des probabilités. Si pour Aristote, le hasard est « la cause par accident », il est la « conséquence de notre ignorance » pour Laplace et la « mesure de notre ignorance » pour Poincaré. La notion de hasard telle que définie par Cournot comme « la rencontre de plusieurs séries causales indépendantes » semble concilier plusieurs conceptions majeures et peut être considérée comme un cadre pour le calcul des probabilités (Chrétien et Gaud, 1998). Il importe de préciser que le hasard évoqué dans l'enseignement secondaire pour le calcul des probabilités à travers l'expression « prélever au hasard » est synonyme d'équiprobabilité. Il est donc utilisé pour signifier que tous les éléments ont des chances égales d'être tirés. Ce qui est ainsi expliqué est « le choix au hasard » et non pas le hasard lui-même (Courtebras, 2005).

Les approches de définition précédentes représentent les grands courants correspondant aux pensées qui accordent un statut au hasard. Il en existe pour lesquelles le hasard n'est pas un concept.

1.2. La mentalité primitive, la pensée destinale et le hasard

Il y a des catégories de personnes et de sociétés pour lesquelles le hasard n'est pas une préoccupation, c'est-à-dire qu'il existe des pensées pour lesquelles le hasard n'a pas de place. Pour ces sociétés, il ne se pose pas le problème de l'existence ou non du concept du hasard. C'est tout simplement que ce concept n'y existe pas et n'y a donc pas de sens. Parmi ces pensées, on peut citer la mentalité primitive étudiée par Lucien Lévy-Bruhl (1960) et la « pensée destinale » caractérisée par des raisonnements faisant appel au destin.

1.2.1. La mentalité primitive et le hasard

La mentalité primitive telle que définie par Lévy-Bruhl (1960) est l'ensemble des habitudes mentales qui exclut la pensée abstraite et le raisonnement. L'existence d'une structure mentale proche de la mentalité primitive est étudiée par de nombreux travaux dont ceux de Lévy-Bruhl.

Bref, l'ensemble d'habitudes mentales qui exclut la pensée abstraite et le raisonnement proprement dit semblent bien se rencontrer dans un grand nombre de sociétés inférieures, et constituer un trait caractéristique et essentiel de la mentalité des primitifs (Lévy-Bruhl, 1960, p. 11).

Selon Lévy-Bruhl, l'absence de hasard est un des caractères essentiels de la « mentalité primitive » qui est « mystique » et « prélogique », c'est-à-dire fondée sur des croyances en des forces surnaturelles et indifférente à la contradiction. Les primitifs ont une « conception occasionnaliste » de la causalité naturelle et dans la pensée primitive tout peut s'expliquer grâce à l'invention des causes surnaturelles (Courtebras, 2005).

Ce que nous considérons comme la cause d'un phénomène, serait simplement pour eux une circonstance qui a donné l'occasion d'intervenir à une puissance surnaturelle et qui serait la véritable raison de l'événement [...]. Si la foudre tombe sur une case et déclenche un incendie, c'est qu'un esprit irrité l'a frappée [...]. Si un homme a un accident, on cherche quel est le sorcier qui lui a jeté un sort (pp. 102, 103).

Pour la mentalité primitive, le hasard n'existe pas, non pas parce qu'elle est dans le courant déterministe mais parce qu'aucune situation ne devrait en donner de sens (Lévy-Bruhl, 1960).

Pour cette mentalité, d'une façon générale, il n'y a pas de hasard, et il ne peut pas y en avoir. Non pas qu'elle soit persuadée du déterminisme rigoureux des phénomènes ; bien au contraire, comme elle n'a pas la moindre idée de ce déterminisme, elle reste indifférente à la liaison causale et à tout événement qui la frappe, elle attribue une origine mystique (p. 28).

Habitée par des influences mystiques favorables ou défavorables, la pensée primitive est encore présente en Afrique à en croire le griot Siré Kamara que Courtebras (2005) a fait parler.

En Afrique, tout est fait pour qu'il n'y ait pas de place pour le hasard. Toutes les choses sont expliquées. Il y a une explication derrière toute chose. C'est les croyances, c'est les mythes. Et donc le hasard n'a pas sa place là (p. 103).

Les propos du griot Kamara traduisent parfaitement une réalité béninoise car les éléments caractéristiques de la mentalité primitive sont perceptibles dans la société béninoise et certainement africaine et plus spécifiquement dans les zones rurales. Toutefois la scolarisation régulière depuis les temps coloniaux jusqu'à nos jours devrait déjà réduire considérablement la portée et les manifestations de cette pensée au Bénin et en Afrique.

1.2.2. Le destin et le hasard

La notion de hasard est incompatible avec celle de destin qui désigne ce qui est dit ou écrit et dont le déroulement suit un cours inéluctable, imprévisible et irréversible. Il est cependant à distinguer la conception aveugle du destin chez les Grecs de la conception finaliste et rationnelle du destin stoïcien. Le destin dans la mythologie grecque encore appelé destin tragique, peut être défini comme un enchaînement de causes et d'effets qui conduisent à la mort tandis que le destin stoïcien est bonté en ce sens que tout ce qui arrive est bon et si ce qui arrive n'était pas bon, il n'arriverait pas. Pour l'individu voué au destin qu'il soit tragique ou stoïcien, la finalité qui s'empare de lui est externe et le hasard n'a aucune place.

Le destin religieux, appelé encore providence divine diffère du destin tragique par le fait que Dieu domine le destin dans le cas de la providence, alors que les dieux sont dominés par le destin tragique. Le destin stoïcien, ne s'oppose nullement à la Providence puisqu'il est Providence. L'idée de la providence récuse celle du hasard.

1.3. Classification mathématique du hasard

En étudiant les causes d'une crise financière des années soixante, Benoît Mandelbrot (1924-2010) a mis en cause les modèles mathématiques utilisés en ingénierie financière et qui étaient basés sur un certain modèle de hasard justifié par les théorèmes limites (Idier, 2011). Dans le développement de la théorie fractale et en se basant sur les théorèmes limites, Mandelbrot a identifié trois catégories de hasard qui sont le hasard bénin, le hasard sauvage, le hasard lent. De son côté, en voulant décrire les conceptions du hasard, relativement aux cadres théoriques mathématiques intervenant dans l'étude des phénomènes aléatoires, Dominique Lahanier-

Reuter (1999) a enregistré deux autres catégories de hasard : le hasard du tirage au sort et le hasard formel. Une classification mathématique du hasard est ainsi obtenue.

1.3.1. Le hasard bénin, le hasard sauvage et le hasard lent

Trois théorèmes principaux appelés « théorèmes limites » constituent le repère à partir duquel Mandelbrot définit le hasard bénin, le hasard sauvage et le hasard lent. Il s'agit de la loi faible des grands nombres, la loi forte des grands nombres et le théorème central limite. Si le hasard bénin est celui engendré par l'obéissance stricte de ces théorèmes, le hasard sauvage est engendré par la non obéissance aux mêmes théorèmes tandis que le hasard lent est engendré par l'obéissance très lente de ces théorèmes.

1.3.1.1. Le hasard bénin

Le hasard bénin qui caractérise les phénomènes qui obéissent strictement aux théorèmes limites est le hasard usuel, qui intervient dans les expériences aléatoires reproductibles dans les mêmes conditions. Il a été évoqué dans les travaux de Bernoulli, de Moivre et de Laplace (Chaput et Vergne, 2011). Lahanier-Reuter (1999) caractérise le hasard bénin comme il suit :

Ce hasard est reproductible, une séquence finie peut accumuler les variations, peut sembler n'obéir à aucune loi. Par contre, si le nombre d'épreuves devient suffisamment grand, des lois, des régularités apparaissent (p. 13).

Utilisé pour illustrer la théorie cinétique des gaz de Maxwell, le hasard bénin est reconnu par Kolmogorov comme le seul type de hasard mathématique (Lahanier-Reuter, 1999). En tenant compte de l'objet de l'étude de hasard chez Poincaré, qui est la théorie cinétique des gaz, nous sommes en mesure d'affirmer que le hasard tel que défini par Poincaré est bien le hasard bénin.

1.3.1.2. Le hasard lent et le hasard sauvage

Étudié par Lévy puis par Lorentz, le hasard sauvage est le hasard qui intervient dans les phénomènes qui n'obéissent pas aux théorèmes limites (Chaput et Vergne, 2011). Il concerne les phénomènes chaotiques tels que les phénomènes boursiers, les phénomènes météorologiques et les turbulences. Quant au hasard lent, il intervient dans les phénomènes qui n'obéissent pas aux théorèmes limites à court et à moyens termes mais qui obéissent à ces théorèmes à longs termes.

Contrairement au hasard bénin qui peut jouer un rôle d'outil mathématique dans la modélisation en probabilités, le hasard sauvage et le hasard lent sont en désaccord avec la théorie des probabilités comme le précise Lahanier-Reuter (1999).

Ils ne s'inscrivent pas dans les cas typiques d'étude, en ce qu'ils interdisent le passage de la connaissance locale construite à partir d'observations forcément limitées dans le temps, à la connaissance globale du phénomène. Puisqu'ils perturbent le paradigme de la théorie des probabilités, les étudier a constitué une rupture avec l'ancienne théorie et a nécessité la construction de nouveaux champs théoriques, en particulier la théorie du chaos (p. 16).

Des trois types de hasard définis par Benoît Mandelbrot à partir des lois des grands nombres et du théorème limite central, seul le hasard bénin est compatible avec l'enseignement des probabilités au secondaire à travers l'approche fréquentiste et les deux premiers principes de Laplace.

1.3.2. Le hasard du tirage au sort et le hasard formel

Le hasard du tirage au sort est défini par Lahanier-Reuter comme celui qui intervient dans la modélisation des situations de jeux de hasard, où le hasard évoqué, qui n'est qu'une règle de l'ensemble des règles du jeu, n'a aucune définition mathématique. Il est devenu objet d'étude au milieu du XVII^e siècle avec les travaux de Pascal et de Fermat (Lahanier-Reuter, 1999). Le hasard du tirage au sort transforme une situation initiale de jeu, où les joueurs ont la même chance de gagner en une situation finale, où les joueurs sont différenciés en gagnants et perdants tel que le caractérise Lahanier-Reuter.

Il s'agit d'un hasard défini conventionnellement, mobilisable à volonté, qui permet de séparer un passé où tous les joueurs ont le droit à la même espérance et un futur où l'inégalité entre joueurs est irréversible. Les effets possibles de l'intervention du hasard sont en nombre fini et peuvent être entièrement décrits, par des outils empruntés à l'arithmétique (Ibid., p. 10).

Le hasard formel est le hasard dont le cadre d'utilisation est la théorie de l'information qui intervient dans la composition des suites de 0 et de 1 permettant de définir les quantités d'informations apportées par la réalisation d'un événement et celle à attendre d'une expérience. En effet la complexité des suites de 0 et de 1 est non seulement liée à la longueur minimale de la suite mais aussi à son caractère aléatoire, donc au hasard, qualifié ici de formel par Lahanier-Reuter.

1.3.3. Synthèse

La classification mathématique du hasard élaborée successivement par Mandelbrot et Lahanier-Reuter est une distinction des phénomènes aléatoires concrets. De tous les types de hasard évoqués, le hasard du tirage au sort et le hasard bénin sont ceux qui interviennent dans le calcul des probabilités dans l'enseignement secondaire général. Plus précisément, le hasard du tirage

au sort se présente comme celui qui intervient dans le modèle d'urne et par conséquent dans le premier principe de Laplace. Utilisé dans les problèmes scolaires, le hasard du tirage au sort est un type de hasard bénin.

2. La notion de probabilité

Construites sur environ trois siècles, les probabilités ont connu leur début de construction au milieu du dix-septième siècle, à partir de la résolution du problème de partis par Pascal. Les différentes approches de définition de la probabilité d'un événement sont les conséquences des ruptures épistémologiques de sa construction dans le temps. Les applications intéressantes du calcul des probabilités justifient l'intérêt de son enseignement, qui se trouve encore à la croisée des chemins au Bénin. Nous proposons dans cette section, de retracer un historique de la construction des probabilités, afin de dégager ses différentes approches épistémologiques, qui sont au centre de son enseignement.

2.1. Éléments historiques et épistémologiques du calcul des probabilités

Il serait très prétentieux de vouloir étudier l'histoire des probabilités dans un travail comme le nôtre, qui est consacré à l'enseignement/apprentissage des probabilités. Toutefois, le repérage de certaines constructions de cette histoire est nécessaire pour permettre la compréhension des choix didactiques dans l'enseignement des probabilités. Dans les lignes qui suivent, nous passons en revue les grands courants de pensées probabilistes. Afin de capter les ruptures épistémologiques apparues au cours de la construction des probabilités, nous nous proposons de suivre l'ordre chronologique du développement du calcul des probabilités.

2.1.1. Émergence du calcul des probabilités au XVII^e siècle

Le calcul des probabilités a connu l'essentiel de sa construction dans la première période scientifique, représentant l'état préscientifique, que Bachelard (1934) situe entre l'antiquité classique jusqu'au XVIII^e siècle. La présence des activités humaines dépendant du hasard a été signalée au début de cette période préscientifique, notamment : les astragales et autres jeux de dés en terre cuite au III^e millénaire avant Jésus-Christ en Mésopotamie, la distinction du fortuit du nécessaire en Grèce au IV^e siècle avant J-C avec Aristote, les dés cubiques équilibrés en Egypte au II^e siècle avant J-C (Pichard, 1998). Cette présence de l'aléatoire, confirmée par beaucoup d'autres traces de situations faisant appel au hasard jusqu'au XIV^e siècle de notre ère, fait dire à Michel Henry (1999) que la notion de probabilité est plus ancienne que celle du calcul des probabilités.

Les tout premiers documents consacrés au calcul des probabilités sont : « *Liber de ludo aleae* », écrit par Jérôme Cardan (1501-1576), et « *Considerazione sopra il Giuoco dei Dadi* » de Galilée (1564-1642) dans lesquels on trouve des dénombrements de cas favorables à un gain. Mais la construction du calcul des probabilités remonte officiellement à 1654 avec la lettre de Fermat (1601-1665) à Pascal (1623-1662), où le premier explicite l'idée de dénombrer les *chances* ou les *hasards*³ dans le *problème des partis*, soumis à Pascal par le chevalier de Méré pour une recherche de solution. En réalité, Fermat confirmait dans cette correspondance la résolution correcte de ce problème par Pascal, laquelle résolution avait été attaquée par Roberval (Dieudonné, 1978).

Comparativement à la géométrie, l'apparition du calcul des probabilités est tardive. Pascale Boulais (2012) attribue cette émergence tardive de la construction du calcul des probabilités à trois causes majeures que nous reprenons dans notre travail :

- le concept du hasard n'existe pas pour la pensée primitive et la pensée destinale qui pourraient caractériser des civilisations de la première période scientifique ;
- l'interdiction par de nombreuses religions et par le sénat romain de pratiquer les jeux de hasard ;
- la nature même du hasard qui rendrait inconcevables des calculs sur ce qui est imprévisible par nature.

La première version du problème des partis, dont la résolution en 1654, a marqué le début de la construction du calcul des probabilités, est retrouvée dans un livre de Pacioli en 1494 et dans des manuscrits italiens datant de 1380 (Dieudonné, 1978). Cette version se précise comme il suit (Trotignon, 1998, p. 2).

Deux camps jouent à la balle ; chaque manche est de dix points et il faut 60 points pour gagner le jeu ; la mise totale est de dix ducats. Il arrive que, pour quelque raison accidentelle, le jeu ne puisse s'achever. On demande ce que touche de la mise totale chacun des deux camps, lorsque l'un a 50 points et l'autre 20 points.

D'autres versions plus explicites du problème des partis sont semblables à celle ci-après (Derriennic, 2003, p. 46).

³ Le mot « hasards » signifie ici « probabilités ».

Deux joueurs jouent à un jeu de pur hasard⁴ en plusieurs parties, chacun misant au départ 32 pistoles. La règle du jeu dit que le premier des deux qui aura remporté trois parties⁵ emportera la totalité du pot, soit 64 pistoles ; celui-ci aura donc gagné 32 pistoles alors que l'autre aura perdu 32 pistoles. Pour une raison inconnue les deux joueurs sont obligés d'interrompre le jeu avant que l'un ou l'autre n'ait gagné trois manches ; par exemple le joueur A a gagné deux manches et le joueur B en a gagné une. Comment faut-il alors répartir le pot entre les deux joueurs ? Quel est le partage juste en cette circonstance ?

Après plusieurs tentatives de résolution non satisfaisantes, notamment par les italiens Pacioli en 1494, Cardan en 1539, Tartaglia en 1556, Peverone en 1558, Pagani en 1591 et Forestani en 1603, et par le Français Gosselin en 1575 (Meusnier, 2004), le problème a été finalement résolu par Pascal, pour établir les premiers fondements analytiques de la théorie des probabilités, que Pascal a dénommée *la géométrie du hasard* (Trotignon, 1998). Il est à noter qu'on ne retrouve pas dans l'œuvre « la géométrie du hasard » le mot *probabilité*, ni l'expression *calcul des chances* pour désigner le calcul des probabilités tel que nous l'apercevons aujourd'hui (Godfroy-Génin, 2000). Toutefois le mot probabilité apparaît chez Pascal pour désigner la doctrine des opinions probables élaborées et utilisées par les Jésuites (Courtebras, 2008).

Ayant séjourné en France en 1655, où il a été mis au courant de la résolution du problème des partis par le biais de Roberval, Christiaan Huygens (1629-1695) a poursuivi en Hollande le travail entamé par Pascal et Fermat, en écrivant en 1657, le premier traité de l'histoire sur le calcul des probabilités. La version latine « *De ratociniis in Ludo aleae* » de ce traité a été reprise plus tard par Jacques Bernoulli dans « *Ars conjectandi* » (Freudenthal, 1980). Le calcul des probabilités fut ainsi présenté au monde, avec les concepts fondamentaux énoncés et rigoureusement utilisés (Dieudonné, 1978). De leur côté, Antoine Arnauld (1612-1694) et Pierre Nicole (1625-1695), dans leur ouvrage « *la logique ou l'art de penser* », paru en 1662, donnèrent à la notion de probabilité le sens de degré de crédibilité et le sens probabiliste de rapport de chances (Pichard, 1998). Toujours au XVII^e siècle, Leibniz a établi le lien entre le calcul des probabilités et la combinatoire, qui fut introduite par Raymond Lulle au XIII^e siècle et développée par Pacioli et Cardan au XV^e et XVI^e siècle (Henry, 1999).

La première étape de la construction du calcul des probabilités ci-dessus présentée est essentiellement caractérisée par le calcul de l'espérance de gain d'un joueur et la combinatoire.

⁴ Il n'y a pas de précision sur le jeu dans les écrits de Pascal. C'est un jeu tel qu'à chaque partie les deux joueurs possèdent la même chance de gagner (Derriennic, 2003).

⁵ Dans les écrits de Pascal, partie désigne manche, tandis que parti est le pot à ramasser en cas de gain.

On note ainsi pour le compte de ce début de la construction du calcul des probabilités l'émergence du type de tâches « *calculer l'espérance mathématique* » et le développement du genre de tâches « *dénombrer* ». Les techniques relevant du genre de tâches « *dénombrer* » proviennent certainement des technologies suffisamment élaborées de la théorie de la combinatoire entre le XIII^e siècle et le XVI^e siècle. Par contre, par rapport au type de tâches « *calculer l'espérance mathématique* », il relève chez Pascal une technique empirique basée sur une sorte de récurrence à l'envers à partir des issues possibles (Ibid.). La technique de Huygens, plus élaborée, fait émerger la formule de l'espérance mathématique d'une variable aléatoire comme nous pouvons le constater dans la proposition suivante (Freudenthal, 1980, p. 116).

If the number of chances I have for a is p , and the number of chances I have b is q , then assuming that every chance can happen as easily, it is worth to me as much as $\frac{pa+qb}{p+q}$.

Il est évident que le calcul de la probabilité d'un événement dans une situation d'équiprobabilité, sans être formalisé, apparaît dans les deux techniques précédentes utilisées par Pascal et Huygens. Leibniz aura été plus explicite en définissant la probabilité comme « *degré de possibilité* » égale à la proportion entre le nombre de cas favorables et le nombre total des cas équipossibles. Le concept d'équiprobabilité attribué à Laplace à la fin du XVIII^e siècle doit donc son origine à Leibniz dès 1678 (Courtebras, 2008). De plus le sens épistémique de la probabilité absent chez Pascal était bien présent chez ses contemporains Arnauld et Nicole.

2.1.2. L'évolution des probabilités vers une discipline mathématique pure

Le calcul des probabilités s'est développé comme une discipline mathématique tout au long du XVIII^e siècle, avec notamment les trois grands traités de Jacques Bernoulli (1654-1705), de Pierre Rémond Montmort (1678-1719) et d'Abraham de Moivre (1667-1754), publiés au début de ce siècle (Pichard, 1998).

Dans la publication posthume « *Ars conjectandi* », Jacques Bernoulli a étudié en détail le calcul combinatoire, qu'il a ensuite appliqué aux jeux de hasard. Sa démonstration de la loi des grands nombres, qui établit le lien entre la probabilité d'un événement et la fréquence de sa réalisation au cours d'un grand nombre d'expériences, a permis l'estimation de la probabilité d'un événement par la fréquence stabilisée. Dans la même période et avant la publication de l'ouvrage de Jacques Bernoulli, Montmort, dans son « *Essai d'analyse sur les jeux de hasard* », a analysé un grand nombre de jeux de cartes, à l'aide du calcul combinatoire (Dieudonné, 1978). Abraham de Moivre, dans son ouvrage *Doctrine of chances*, démontra en 1733 la première version du théorème central limite, en étudiant dans un cas particulier, la vitesse de convergence

de la loi des grands nombres (Delmas, 2010). Il a surtout explicité la formule de la probabilité d'un événement en situation d'équiprobabilité, laquelle avait-il utilisée pour résoudre un nombre important d'exercices.

Dans le prolongement des travaux de Jacques Bernoulli et d'Abraham de Moivre sur l'estimation des probabilités des événements naturels, Thomas Bayes (1702-1761), dans « *An essay toward solving a problem in the doctrine of chances* », s'est distingué en introduisant la notion de « probabilité inverse » (Courtebras, 2008). Ce concept fut repris à la fin du XVIII^e siècle par Pierre-Simon Laplace, dans « *mémoire sur la probabilité des causes par des événements* », pour établir « la règle de Bayes ».

Au début du XIX^e siècle, Pierre-Simon Laplace, dans ses traités « *La théorie analytique des probabilités* » et « *L'essai philosophique sur les probabilités* », parus respectivement en 1812 et 1814, rassembla ses travaux sur les probabilités réalisés à partir de 1774, en exposant des principes et des résultats de la théorie des probabilités (Ibid.), et en abordant des applications du calcul des probabilités à la statistique (Pichard, 1998). Tous ces travaux ont donné au calcul des probabilités son évolution vers une discipline mathématique pure. De leur côté Adrien M. Legendre (1752-1833) et Carl F. Gauss (1777-1855) ont respectivement fait émerger la méthode des moindres carrés et la loi normale en 1805 et en 1829 (Ibid.). Les résultats généraux sur la loi des grands nombres et le théorème central limite furent ensuite progressivement établis par Denis Poisson (1781-1840), Irénée-Jules Bienaymé (1796-1878) et Pafnouti Tchebychev (1821-1894). Andreï Markov (1856-1922) en 1898 puis Alexandre Liapounov (1857-1918) en 1900 ont marqué le début de la période moderne du calcul des probabilités par des démonstrations rigoureuses de ces résultats (Diendonné, 1978).

La deuxième étape de la construction des probabilités, qui couvre les travaux réalisés dans ce domaine au XVIII^e et XIX^e siècles, est caractérisée par la vulgarisation scientifique des principes du calcul des probabilités, et la démonstration généralisée de la loi des grands nombres et du théorème central limite. Parmi les principes du calcul des probabilités mis en texte par Laplace figure le premier principe qui fut clarifié dans un premier temps par De Moivre, et la règle de Bayes. Trois techniques relèvent désormais du type de tâches *calculer la probabilité d'un événement* : il s'agit de celles pouvant faire appel aux technologies relatives au premier principe de Laplace, à la stabilisation de fréquence relative puis à la formule totale des probabilités composées.

2.1.3. L'axiomatisation des probabilités au XX^e siècle

En calcul des probabilités, le XX^e siècle est marqué par l'axiomatisation des probabilités et l'étude des processus stochastiques. La théorie d'intégration et de la mesure, élaborée progressivement par Émile Borel (1871-1956) et Henri Lebesgue (1875-1941), respectivement en 1896 et en 1904, permet la clarification des notions du calcul des probabilités telles que : mesures de probabilité, variables aléatoires, lois, espérances, lois conditionnelles (Delmas, 2010). Cette clarification s'est faite à partir notamment des travaux de Maurice Fréchet (1878-1973) et de Paul Lévy (1886-1971) sur l'espérance mathématique et les variables aléatoires (Pichard, 1998). La monographie d'Andreï Kolmogorov (1903-1987), intitulé « *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung* », parue en 1933, et que nous pourrions traduire par « *Concepts de base du calcul des probabilités* », donna le fondement axiomatique du calcul des probabilités à partir de la théorie de la mesure (Ibid.). Cette axiomatisation constitue le cadre théorique dans lequel s'exprime le calcul des probabilités comme discipline mathématique pure. Dès lors, le calcul des probabilités a connu un nouvel essor dû à l'étude des processus stochastiques et de ses nombreuses applications en sciences physiques, en biologie, en informatique, en économie et en sciences de l'ingénieur, comme le clarifie Delmas (2010, p. 13).

Dès la première moitié du XX^e siècle, le calcul des probabilités connaît un nouvel essor avec l'étude des processus stochastiques et surtout leurs nombreuses applications. Celles-ci se sont multipliées dans la deuxième moitié du siècle : modélisation de phénomènes physiques (en particulier au niveau microscopique pour les fluides complexes ou les matériaux et en physique statistique) ou biologique (en démographie et épidémiologie, mais aussi au niveau de la cellule ou de l'ADN), en informatique (analyse d'algorithmes, d'images ou de réseaux), en économie (assurance ou finance de marché) ainsi que dans les sciences de l'ingénieur (fiabilité, optimisation, analyse de risque, maîtrise de l'environnement aléatoire).

L'apport majeur de la troisième et dernière étape (étape actuelle) de la construction du calcul des probabilités reste son axiomatisation qui a permis la confirmation de la théorie des probabilités comme une discipline mathématique pure et moderne au service de son propre développement et de celui de la science en général. À travers la formule d'additivité dénombrable, conséquence de cette axiomatisation, le calcul de la probabilité d'un événement s'enrichit d'une technique supplémentaire qui généralise le deuxième principe de Laplace.

2.1.4. Synthèse

La construction des probabilités s'est définie sur environ trois siècles à partir de l'estimation par Pascal et Fermat de l'espérance de gain dans le problème des partis au milieu du XVII^e siècle. Longtemps implicite, le concept de probabilité en tant que rapport des chances, dans le cas d'équipossibilité, a été explicitement défini par De Moivre en 1733 pour être plus tard présenté par Laplace comme le premier des principes du calcul des probabilités. La démonstration de la loi faible des grands nombres introduite par Jacques Bernoulli justifie l'estimation de la probabilité d'un événement par la fréquence stabilisée sur un grand nombre de réalisations. La notion de probabilité inverse de Bayes fonde les probabilités conditionnelles, tandis que l'axiomatisation de la probabilité par Andreï Kolmogorov en 1933 a permis d'offrir un cadre mathématique aux probabilités et de les inscrire parmi les disciplines mathématiques.

2.2. Les théories fondamentales du calcul des probabilités

Tout au long de sa construction, le calcul des probabilités, dans son développement, a mis en place des concepts de base et les manières potentielles de calculer et de justifier des probabilités d'événements. Concernant la définition de la probabilité d'un événement, il se dégage de l'histoire quatre théories dont sont issues les technologies relatives aux différentes techniques relevant du type de tâches « *calculer la probabilité d'un événement* ». La théorie dont est issue la règle de Bayes étant celle des probabilités conditionnelles, qui ne se situe pas dans notre champ d'étude, nous allons nous limiter dans cette section à l'analyse de chacune des trois autres théories.

2.2.1. La théorie Laplacienne du calcul des probabilités

Comme on a dû le constater, le problème des partis résolu par Pascal et Fermat au début de la construction du calcul des probabilités, ne concernait pas explicitement un calcul de probabilité, mais plutôt, un calcul de gain, donc d'espérance mathématique. Jacques Bernoulli avait adopté la terminologie « probabilité » dans son développement de la notion de probabilité épistémologique basée sur l'analyse des arguments. Cette notion a dû être reprise par De Moivre dans « The doctrine of chances » (Santos Del Cerro, 2006), dans lequel il proposa la définition classique de la probabilité comme un quotient du nombre de cas favorables et du nombre de cas possibles (De Moivre, 1756).

Wherefore, if we constitute a Fraction where of the Numerator be the number of Chances whereby an Event may happen, and the Denominator the number of all the Chances

whereby it may either happen or fail, that Fraction will be a proper designation of the Probability (p. 1).

Dans son « essai philosophique sur les probabilités », publié en 1812, Laplace décrit les fondements de la probabilité et présenta dix principes de calcul des probabilités dont le premier est la définition proposée par De Moivre, pour laquelle il insista sur les cas également possibles (Laplace, 1840).

La théorie des hasards consiste à réduire tous les événements du même genre, à un certain nombre de cas également possibles, c'est-à-dire tels que nous soyons également indécis sur leur existence, et à déterminer le nombre de cas favorables à l'événement dont on cherche la probabilité. Le rapport de ce nombre à celui de tous les cas possibles, est la mesure de cette probabilité qui n'est ainsi qu'une fraction dont le numérateur est le nombre des cas favorables, et dont le dénominateur est le nombre de tous les cas possibles (p. 7).

Laplace lui-même a hissé au rang de théorie le premier principe du calcul des probabilités tel qu'on le remarque dans la citation ci-dessus. Mais ce principe est restrictif en ce sens qu'il ne s'applique qu'aux situations d'équiprobabilité et ne permet pas de considérer la plupart des situations aléatoires, comme l'avait fait remarquer Jacques Bernoulli en 1713, d'après Meusnier⁶, cité par Henry (2010, p.37).

On en est ainsi venu à ce point que pour former selon les règles des conjectures sur n'importe quelle chose, il est seulement requis d'une part que les nombres de cas soient soigneusement déterminés, et d'autre part que soit défini combien les uns peuvent arriver plus facilement que les autres.

Laplace lui-même, conscient des limites du premier principe, précisa les conditions d'utilisation de ce principe avant de donner le deuxième principe (Laplace, 1814, p. 12).

Mais cela suppose les divers cas, également possibles. S'ils ne le sont pas, on déterminera d'abord leurs possibilités respectives dont la juste appréciation est un des points les plus délicats de la théorie des hasards. Alors la probabilité sera la somme des possibilités de chaque cas favorable.

Ainsi la définition suivante, qui n'est qu'un cas particulier de l'axiome d'additivité dénombrable, traduit bien le deuxième principe de Laplace : « La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le composent ».

⁶ Meusnier N. (1987). Jacques Bernoulli et l'Ars Conjectandi, IREM de Rouen

Les deux premiers principes de Laplace mobilisables pour le calcul des probabilités constituent une théorie que nous nommons théorie laplacienne du calcul des probabilités.

2.2.2. La loi faible des grands nombres

La définition du calcul de la probabilité d'un événement, attribuée à Laplace et évoquée en écrit pour la première fois par De Moivre, semble avoir été une préoccupation de Bernoulli. En réalité, dans les commentaires du traité de Huygens, réalisés par Bernoulli dans la première partie de « *Ars conjectandi* », ce dernier aborda la définition classique comme l'explique Santos Del Cerro (2006) dans le passage suivant.

Dans l'esprit de Bernoulli il y a le désir de systématiser la théorie exposée par Huygens dans son bref traité. Ce même traité contient une proposition, qui ensuite conduira Bernoulli à un quotient qui coïncide avec la définition classique de probabilité. (p. 8)

La définition de Laplace ne se limite qu'aux situations d'équiprobabilité, qui ne sont pas naturelles, mises à part celle des jeux inventés. La démonstration en 1713 par Bernoulli du théorème sur la convergence de la suite des fréquences de réalisation d'un événement vers sa probabilité a permis de dégager un autre chemin de calcul de probabilité qui ne se réduit pas à un système de cas également possible (Henry, 1999). Ce nouveau chemin est évoqué dans « *Ars Conjectandi* », cité par Henry (2010, p. 38), comme ci-dessous.

Mais à la vérité ici s'offre à nous un autre chemin pour obtenir ce que nous cherchons. Ce qu'il n'est pas donné d'obtenir a priori l'est du moins a posteriori, c'est-à-dire qu'il sera possible de l'extraire en observant l'issue de nombreux exemples semblables...

Le *théorème d'or* de Bernoulli, rebaptisé plus tard « *loi faible des grands nombres* » par Denis Poisson (Boulais, 2012), peut s'énoncer comme ci-après (Henry, 2011, p. 539).

Une même expérience aléatoire est répétée un nombre n de fois suffisamment grand. On enregistre la fréquence F_n des issues réalisant un événement donné de probabilité notée p . Alors (théorème de Bernoulli), il y a une probabilité aussi voisine de 1 que l'on veut, que l'écart entre la fréquence F_n des issues réalisant l'événement et sa probabilité p soit plus petit que tout ε donné (convergence en probabilité de F_n vers p).

Ce théorème donne donc une estimation à ε près, de la probabilité inconnue p de l'événement par sa fréquence de réalisation F_n avec un certain risque de se tromper (Ibid). Il constitue dans sa forme générale la théorie dont est issue la technologie faisant appel au calcul des probabilités à partir de la stabilisation des fréquences observées.

Les mathématiciens des XVIII^e et XIX^e siècles n'avaient pas considéré le phénomène de stabilisation des fréquences observées comme source concrète du concept théorique de probabilité. Mais, au début du XX^e siècle, Von Mises a élargi les fondements du calcul des probabilités, en tentant d'axiomatiser le phénomène de stabilisation de la fréquence des réalisations d'un événement, pour déboucher sur la définition de la probabilité comme fréquence limite (Henry, 1999). C'est la définition fréquentiste de la probabilité d'un événement comme l'a appuyé Alfred Rényi⁷, cité par Henry (1999, 2011).

Si la fréquence relative d'un événement aléatoire oscille autour d'un certain nombre, ce nombre est appelé la probabilité de l'événement considéré.

A travers cette définition fréquentiste, le calcul de probabilité s'applique ainsi aux situations où l'on peut répéter une expérience aléatoire un assez grand nombre de fois. Cette définition ne peut servir qu'à estimer la probabilité (a priori) d'un événement lié à une expérience aléatoire reproductible, et non pas à la calculer comme dans le cas de la définition classique. Excluant les situations non reproductibles, elle ne paraît pas suffisante pour calculer ou pour justifier les probabilités dans le cas général. C'est certainement l'une des raisons pour lesquelles Rényi a précisé que cette définition n'est pas mathématique (Henry, 1999).

2.2.3. La théorie probabiliste de Kolmogorov

L'essor actuel des probabilités est dû à leur inscription dans un cadre mathématique par Andreï Kolmogorov qui définit en 1933 la probabilité comme une mesure sur toute tribu \mathcal{C} de parties de l'univers des éventualités Ω associé à une expérience aléatoire. En effet, une telle tribu est définie par les axiomes suivants (Saporta, 2011, p. 4) :

- Ω est un élément de \mathcal{C} ;
- Pour tout événement A de \mathcal{C} , l'événement contraire de A est un élément de \mathcal{C} ;
- Pour tout ensemble fini ou dénombrable $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ d'éléments de \mathcal{C} , $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ est un élément de \mathcal{C} .

On appelle probabilité sur le couple (Ω, \mathcal{C}) , appelé espace probabilisable, toute application p de \mathcal{C} dans l'intervalle $[0; 1]$ telle que :

- $p(\Omega) = 1$;
- Pour tout ensemble dénombrable d'événements deux à deux incompatibles $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ de \mathcal{C} , alors $p(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = p(A_1) + p(A_2) + \dots + p(A_n)$.

⁷ Rényi, A. (1966). *Calcul des probabilités*. Paris : Dunod, Rééd. Jacques Gabay, Paris 1992.

On peut ainsi définir plusieurs probabilités sur un espace probabilisable (Ω, \mathcal{C}) et pour une probabilité p donnée, l'image $p(A)$ de tout événement A est la probabilité de cet événement.

Les axiomes contenus dans la définition ci-dessus permettent d'établir plusieurs propriétés fondamentales du calcul des probabilités dont les deux premiers principes de Laplace. Le calcul de la probabilité d'un événement à partir de la théorie axiomatique de Kolmogorov dépend de l'existence des probabilités a priori, que la théorie Laplacienne et la théorie fréquentiste peuvent permettre de calculer ou de déterminer.

2.3. Les courants probabilistes

Les fondements du calcul des probabilités font distinguer deux courants probabilistes, qu'il ne serait pas superflu de clarifier. Il s'agit des conceptions objectiviste et subjectiviste.

Le point de vue objectiviste des probabilités est basé sur la conception selon laquelle la probabilité d'un événement peut être déterminée de façon unique (Saporta, 2011). Le courant objectiviste regroupe ceux qui adoptent les approches dont les définitions sont légitimées par la loi des grands nombres tels que l'approche classique et l'approche fréquentiste (Dhieb, 2009 ; Pichard, 1998). Ainsi la probabilité objective est la probabilité qui peut être vérifiée empiriquement par la répétition d'une expérience dans exactement les mêmes conditions.

Un deuxième courant probabiliste ne soutient pas l'existence d'une probabilité objective, argumentant que la probabilité étant une mesure d'incertitude, peut varier avec les circonstances, et de ce fait ne peut être que subjective. Cette position est celle qu'affiche Bruno de Finetti (1936) dans son article « *la logique de la probabilité* ».

Selon mon point de vue, l'objection que la probabilité d'un événement particulier n'est pas vérifiable est dénuée de valeur, car c'est précisément pour cela que la logique du probable n'est pas inutile ; pour parler des faits objectifs la logique ordinaire suffit, pour justifier des prévisions quelconques et des jugements de probabilité ou vraisemblance, toute théorie non-subjective de la probabilité est insuffisante. Une telle théorie ne peut que transposer l'élément subjectif d'un point à un autre ; si elle cherche à le supprimer, elle se condamne à la stérilité (p. 571).

L'école bayésienne, qui a probabilisé tout ce qui est incertain et même des phénomènes non aléatoires, s'inscrit aussi dans le courant subjectiviste des probabilités (Saporta, 2011). On peut aisément résumer que la probabilité subjective est celle qui ne peut pas ou peut difficilement être confirmée par l'expérience.

Jacques Bernoulli a nettement fait la distinction de ces deux courants probabilistes (Butz, 2004).

La probabilité objective : calculable, soit par dénombrements, soit par fréquences.

La probabilité subjective : associée au degré de croyance qu'un événement va se produire ou non, elle ne dépend pas de calculs mathématiques (p. 281).

3. La notion d'expérience aléatoire

La notion d'expérience aléatoire est la première notion de base des probabilités, une notion sans laquelle la probabilité ne peut être définie dans l'enseignement secondaire. Dans certains programmes, comme ceux de la France, elle est une notion primitive de base en ce sens qu'elle est une notion à laquelle la pratique courante permet de donner du sens sans qu'une définition mathématique puisse être formulée, comme le cas des notions de point, de droite et de plan en géométrie (Michel Henry, 2001b).

En probabilité, la notion primitive de base est celle d'« expérience aléatoire », du moins pour le programme de 1991, c'était un choix de transposition didactique (p. 162).

La caractéristique principale d'une expérience aléatoire est le hasard dont l'existence n'est pas évidente pour tout le monde, comme nous l'avons développé plus haut. La notion d'expérience aléatoire, paraissant comme une modélisation de la notion de hasard dans le calcul des probabilités, n'a pas une épistémologie particulière en dehors de celle du hasard. Dans l'enseignement secondaire, la définition de l'expérience aléatoire varie selon l'approche de définition utilisée pour introduire la notion de probabilité. L'enseignement de la notion d'expérience aléatoire est le plus souvent suivi de celui d'autres éléments de base du calcul des probabilités, qui forment avec elle ce qu'on désigne par « vocabulaire des probabilités » ou « langage des probabilités » dans les programmes d'études. Nous présentons dans cette section le vocabulaire des probabilités que nous utiliserons, en commençant par la définition de la notion d'expérience aléatoire.

Rappelons que le concept de hasard dont il est question dans l'enseignement secondaire est le hasard bénin qui intègre celui du hasard du tirage au sort.

3.1. Quelques approches de définition de l'expérience aléatoire

Selon J.C. Girard (2001a), une expérience aléatoire contrairement à une expérience déterministe est simplement une expérience dont on ne peut ni prévoir ni calculer le résultat même si on répète l'expérience une deuxième fois dans les mêmes conditions. C'est donc une expérience

dont le résultat est dû au hasard. On peut distinguer trois niveaux dans la description d'une expérience aléatoire (Chaput et Vergne, 2012) :

- le niveau de l'expérience réelle,
- celui de l'expérience pseudo-concret qui est une simplification de l'expérience réelle,
- celui du modèle mathématique qui permet d'aboutir à la liste des éventualités affectées chacune d'un nombre compris entre 0 et 1.

L'expérience aléatoire est donc avant tout une expérience réelle à laquelle on trouve un modèle mathématique compatible avec le calcul des probabilités qu'on pourrait appeler expérience aléatoire mathématique. Le modèle mathématique de l'expérience aléatoire doit vérifier les trois points suivants (J.C. Girard 2001a) :

- la description des conditions de l'expérience détermine celle-ci de façon précise et suffisante pour en garantir l'unicité de l'expérience ;
- on peut déterminer l'ensemble des issues possibles ;
- on ne peut ni prévoir ni calculer le résultat de l'expérience.

Ce modèle pourrait expliquer celui adopté dans les programmes français de 1991 pour lesquels l'expérience aléatoire est habituellement caractérisée de la manière suivante (M. Henry, 2001b) :

- c'est une expérience reproductible,
- le hasard intervient dans son déroulement pour en rendre l'issue incertaine,
- on peut faire la liste des issues possibles.

Dans les programmes béninois de tous les temps comme dans ceux de la France d'avant 1991, le modèle mathématique de l'expérience aléatoire est caractérisé par l'imprévisibilité de son résultat et la connaissance préalable de la liste des issues possibles.

Ces caractérisations soulèvent des questions relatives à la reproductibilité, au hasard et à la liste des issues. C'est ce qui fait dire à Michel Henry (Ibid) que la notion d'expérience aléatoire est ambiguë et floue. Elle semble être forgée par l'utilisateur à sa guise.

La notion « d'expérience aléatoire » est dégagée pour désigner un processus réel de nature expérimentale, où le hasard intervient, avec des issues possibles bien identifiées.

En réalité, une expérience aléatoire, est la mise en place par un expérimentateur d'un système évolutif pour lequel il ne s'intéresse qu'aux issues qui vont se présenter à la fin du processus. Il est associé à la notion d'expérience aléatoire celle de « protocole expérimental »,

comportant des instructions à respecter pour pouvoir affirmer que l'on a bien réalisé l'expérience aléatoire. C'est ce protocole expérimental accompagné de la liste des issues possibles à observer, qui caractérise « l'expérience aléatoire » (Ibid). Lorsque la réalisation d'une expérience aléatoire comprend plusieurs étapes, chacune de ces étapes est une épreuve (Chaput et Vergne, 2012).

3.2. Le vocabulaire associé à la notion d'expérience aléatoire

Le vocabulaire probabiliste regroupant les concepts de base du calcul des probabilités est mis en place tout au long de la construction des probabilités. Les notions d'événement et d'événements élémentaires sont présentes dans les travaux de De Moivre et de Laplace.

Thus if an Event has 3 Chances to happen, and 2 to fail, the Fraction $\frac{3}{5}$ will fitly represent the Probability of its happening, and may be taken to be the measure of it (De Moivre, 1756, p. 2).

La théorie des hasards consiste à réduire tous les événements du même genre, à un certain nombre de cas également possibles, c'est-à-dire tels que nous soyons également indécis sur leur existence, et à déterminer le nombre de cas favorables à l'événement dont on cherche la probabilité (Laplace, 1840, p. 7).

Non seulement, De Moivre utilise le terme « événement » dans la première citation, mais il semble en distinguer aussi les événements élémentaires à travers les cas également possibles sur lesquels Laplace a insisté dans la deuxième citation. Avec l'axiomatisation des probabilités par Kolmogorov en 1933, le vocabulaire probabiliste est clairement constitué et comporte les notions d'éventualités, d'univers des éventualités et d'événements.

La modélisation de l'expérience aléatoire se fait en trois étapes que nous avons désignées plus haut par les niveaux de description d'une expérience aléatoire : la réalité, le modèle pseudo-concret et le modèle mathématique (Henry, 2001a). Au niveau du modèle mathématique, on définit l'éventualité comme étant tout résultat possible de l'expérience aléatoire et l'ensemble de toutes les éventualités d'une expérience aléatoire est appelé l'univers des éventualités (ou des possibles) ou encore l'ensemble fondamental. Un événement est alors un sous-ensemble de l'univers des éventualités, c'est-à-dire un ensemble d'éventualités. On distingue plusieurs types d'événements, notamment (Saporta, 2011) :

- l'événement impossible, qui ne comporte aucune éventualité (c'est donc l'ensemble vide), et qui n'est jamais réalisé ;

- l'événement certain, qui est l'univers des éventualités et qui de ce fait est toujours réalisé ;
- les événements élémentaires qui sont composés d'une éventualité ;
- les événements compatibles, qui sont deux événements A et B tels que $A \cap B = \emptyset$;
- les événements contraires, qui sont deux événements A et B tels que $A \cap B = \emptyset$ et $A \cup B = \Omega$, étant l'univers des possibles.

Au niveau des probabilités conditionnelles, la typologie des événements est complétée par les systèmes complets d'événements et les événements indépendants.

Conclusion

À travers la notion de hasard, les probabilités ont été une préoccupation de l'humanité depuis l'antiquité, mais la naissance officielle de la construction des probabilités est reconnue au milieu du XVII^e siècle à partir de la résolution par Pascal et Fermat d'un des problèmes célèbre du chevalier de Méré. Dès lors le hasard et la probabilité sont restés indissociables, car les conceptions de la probabilité chez les penseurs ont été toujours précédées de celles du hasard.

Par rapport au hasard, en dehors des pensées qui ne reconnaissent pas l'existence du hasard, toutes les autres, d'Aristote à Poincaré en passant par Laplace et Cournot, sont déterministes à des degrés différents (Boulais, 2012). La conception de Cournot, selon laquelle le hasard est la rencontre de séries causales indépendantes concilient les conceptions des autres penseurs déterministes et semble être le modèle de hasard compatible au calcul des probabilités (Chrétien, Gaud, 1998). Une classification mathématique du hasard due à Mandelbrot et Lahanier-Reuter a permis de distinguer cinq types de hasards dont le « hasard bénin » et le « hasard du tirage au sort » intervenant en général dans le calcul des probabilités dans l'enseignement secondaire.

Avant le début officiel de la construction des probabilités, le dénombrement de cas favorables est intervenu dans la résolution des problèmes jusqu'à la résolution du problème des partis en 1654 par Pascal. Sans être formalisé, le calcul des probabilités apparaît ainsi dans des situations d'équiprobabilité. Du calcul d'espérance mathématique à leur naissance de construction, les probabilités ont été approfondies avec le développement de la combinatoire avec Jacques Bernoulli et Montmort, la démonstration de la loi faible des grands nombres avec Jacques Bernoulli, le calcul de probabilités en situations d'équiprobabilité et la démonstration du théorème central limite avec Abraham De Moivre, le calcul de la probabilité inverse avec

Thomas Bayes, et la publication des dix principes de Laplace. L'axiomatisation du calcul des probabilités par Kolmogorov en 1933 a conféré à ces dernières le statut de « mathématique pure » avec le développement des variables aléatoires et des lois classiques.

Sur le plan épistémologique, nous avons distingué trois théories (Chevallard, 1999) probabilistes, à savoir : la théorie Laplacienne, la loi faible des grands nombres de Jacques Bernoulli et l'axiomatisation de Kolmogorov. Par rapport au calcul élémentaire des probabilités, deux types de tâches sont à distinguer : « calculer la probabilité d'un événement » et « estimer la probabilité d'un événement ». Le type de tâches « calculer la probabilité d'un événement » fait appel à des techniques justifiées par quatre éléments technologiques essentiels, notamment la combinatoire, le premier principe de Laplace, le deuxième principe de Laplace, et l'ensemble des propriétés élémentaires issues de l'axiomatisation de Kolmogorov. Il relève par contre du type de tâches « estimer la probabilité d'un événement » une technique s'inscrivant dans la théorie relative à la loi faible des grands nombres.

Chapitre II : Revue de littérature

Introduction

Pour cerner tous les contours d'un sujet donné, il importe de connaître l'essentiel des travaux ayant rapport directement ou indirectement avec ce sujet. Il existe dans notre domaine d'études, celui de l'enseignement et de l'apprentissage des probabilités, une variété de travaux dont la connaissance peut permettre de bien circonscrire notre sujet. Martin et Thibault (2016) classent la multitude des travaux réalisés dans le domaine des probabilités suivant trois périodes : la période piagétienne (1950 à 1970), la période post-piagétienne (1970 à 1990) et la période contemporaine (1990 à nos jours). Ces travaux portent aussi bien sur l'enseignement que sur l'apprentissage des probabilités, notamment sur les programmes d'enseignement des probabilités, les approches d'enseignement des probabilités, les rapports des élèves et des enseignants aux objets probabilistes et les ingénieries didactiques en probabilités. Nous nous proposons de présenter dans ce chapitre quelques travaux représentatifs dans les champs de recherche de l'enseignement des probabilités, de l'apprentissage des probabilités et des ingénieries didactiques relatives à l'enseignement des probabilités.

1. Les travaux didactiques relatifs à l'enseignement des probabilités

Plusieurs auteurs ont étudié l'enseignement des probabilités, notamment les approches d'enseignement, les contenus des programmes et quelquefois le rapport des enseignants aux concepts probabilistes. Les travaux de chercheurs français tels que Michel Henry (1999, 2000, 2009, 2010, 2011) et de Bernard Parzysz (2009, 2011a, 2011b) ont abondamment centré leur recherche sur les nouvelles approches d'enseignement des probabilités. Nous présentons l'essentiel de leurs travaux, que nous compléterons par certains travaux de Jean-Claude Girard (2001a, 2001b, 2004).

1.1. Les travaux de Michel Henry

Michel Henry a beaucoup travaillé sur l'enseignement des probabilités. Il fait certainement partie de ceux qui sont à l'origine des dernières réformes en France dans le domaine de l'enseignement des probabilités. Nous avons identifié certains de ses articles sur l'enseignement des probabilités et notamment sur la dernière approche d'enseignement en France souvent nommé approche fréquentiste. Il s'agit des articles :

- L'introduction des probabilités au lycée : un processus de modélisation comparable à celui de la géométrie (Henry, 1999) ;
- Perspectives de l'enseignement de la statistique et des probabilités (Henry, 2000) ;
- Émergence de la probabilité et enseignement : définition classique, approche fréquentiste et modélisation (Henry, 2009) ;
- Simulations d'expériences aléatoires en classe : un enjeu didactique pour comprendre la notion de modèle probabiliste, un outil de résolution de problèmes (Henry, 2011).

Dans l'article « L'introduction des probabilités au lycée : un processus de modélisation comparable à celui de la géométrie », Michel Henry a fait une étude comparative des probabilités et de la géométrie aussi bien par rapport aux fondements des deux domaines que par rapport à leur enseignement. Dans une première partie intitulée « notion de probabilité : de la réalité au modèle », l'auteur est parti de l'historique du calcul des probabilités pour présenter respectivement la conception laplacienne et celle fréquentiste des probabilités avant d'aborder des questions épistémologiques sur la réalité et le modèle. Il importe de retenir que suivant l'ordre chronologique, la loi des grands nombres est démontrée avant les fondements des probabilités de Laplace, qui définit la probabilité comme étant le rapport du nombre des cas favorables à celui des cas possibles. Malgré la démonstration de Jacques Bernoulli de la convergence de la suite des fréquences d'un événement vers sa probabilité, pour proposer une estimation de la probabilité par la fréquence stabilisée, les mathématiciens ont préféré la version simplifiée de Laplace pour le calcul des probabilités. Mais à la suite de von Mises, Albert Reyni a pu présenter une définition fréquentiste de la probabilité en ces termes « si la fréquence relative d'un événement aléatoire oscille autour d'un certain nombre, ce nombre est appelé la probabilité de l'événement considéré » (Reyni⁸, p. 26). Faisant allusion à la définition de Kolmogorov, il reconnaît que cette définition n'est pas mathématique. Les programmes français de 1991 ont recommandé en classe de première l'approche fréquentiste pour introduire l'enseignement des probabilités, en s'appuyant sur l'étude des séries statistiques obtenues par répétition d'une expérience aléatoire. Comme l'approche laplacienne, l'approche fréquentiste présente sur le plan didactique des limites, en ce sens qu'elle n'est possible que pour des expériences aléatoires reproductibles. L'un de ces inconvénients est qu'elle est fondée sur la convergence en probabilité et étudiée chez des élèves qui n'ont pas la maîtrise de la notion de suite numérique. Michel Henry propose comme solution une clarification du processus de modélisation. Cet historique du calcul des probabilités le conduit à une comparaison de

⁸ Reyni A. Calcul des probabilités, Dunod, 1966, cité dans (Henry, 1999, p.18)

l'évolution de la géométrie et de la probabilité. Il a ensuite présenté l'historique de l'enseignement des probabilités en France suivi des conséquences didactiques du choix fréquentiste dans l'enseignement des probabilités dans l'enseignement secondaire. A ce propos, il est à préciser que les programmes français ont abandonné l'étude d'espaces probabilisés dans les années 80 tout en conservant l'approche laplacienne de calcul des probabilités à l'aide de la combinatoire. Henry fait le constat qu'il y a échec au niveau des élèves, qui considèrent la probabilité comme des jeux de l'esprit déconnectés des réalités. Avec l'introduction de l'approche fréquentiste, les enseignants ont des difficultés à intégrer cette approche, revenant toujours à la définition formelle. Mais le choix de l'approche fréquentiste est bien justifié selon Henry, car il fait de la probabilité une discipline qui peut s'enseigner avec les mêmes considérations que la géométrie. Ainsi le carré utilisé dans la réalité n'est pas plus abstrait que le dé censé être équilibré en probabilité. Cependant la géométrie s'enseigne depuis le bas âge, alors que la probabilité est réservée aux plus grands. De plus, le concept d'expérience aléatoire n'est pas suffisamment exploré, les notions d'ensemble et de limite sont aussi rencontrées pour la première fois par les élèves aux cours de probabilités. L'auteur propose que des situations de modélisation soient introduites dans les programmes et que les objets probabilistes soient étudiés plus tôt chez les élèves. Le modèle étant une représentation abstraite et simplifiée d'une situation réelle, la modélisation d'une expérience aléatoire respecte deux étapes essentielles : l'étape du passage de la réalité au modèle pseudo-concret et celle de la mathématisation. Après avoir montré l'importance de la modélisation en probabilités et présenté un parallèle de l'enseignement des probabilités avec celui de la géométrie, l'auteur a enfin dégagé les perspectives didactiques dans le domaine des probabilités, traduites par des questions ouvertes en vue de l'étude de l'enseignement des probabilités à partir de l'approche fréquentiste. Ces questions sont entre autres relatives aux obstacles didactiques engendrés par l'abus de l'utilisation du modèle d'urne, au rôle didactique de la simulation, à la place de la preuve expérimentale et à l'enseignement de la probabilité au collège.

Dans son article « Perspectives de l'enseignement de la statistique et des probabilités », Henry relate d'abord l'atmosphère qui règne chez les enseignants suite à la publication en France d'un nouveau programme de la classe de seconde, qui recommande l'étude des fluctuations d'échantillonnage et celle des distributions des fréquences issues d'une expérience aléatoire répétée. Les enseignants s'opposent en fait à la démarche purement expérimentale d'enseignement des probabilités recommandées par le programme. Henry Michel estime que l'un des motifs de la controverse est l'évitement du concept de probabilité, qui est remplacé par

une notion floue de chance. Sans être satisfait du programme de probabilités de la classe de première, qui n'a pas de lien explicite avec les démarches de la décision statistique, Henry semble approuver en partie celui de la seconde. Pour mieux comprendre les changements, il a proposé dans cet article l'évolution de l'enseignement des probabilités depuis trente-cinq ans, tel qu'il l'a présentée dans son article « Évolution de l'enseignement secondaire français en statistique et probabilités » (Henry, 2010). En fait, depuis leur introduction dans les programmes des séries classiques au milieu des années 60 jusqu'aux années 90, le calcul des probabilités est présenté comme une application de la combinatoire, la probabilité étant définie par le premier principe de Laplace. Cette méthode restrictive ramène le calcul des probabilités aux situations d'équiprobabilité des jeux de hasard, enfermant les élèves sur des exercices délicats de la combinatoire et causant ainsi l'échec de cet enseignement chez bon nombre d'élèves. La réforme de 1991 fait introduire la probabilité en classe de première à partir de l'observation des fréquences pour faire définir ensuite la probabilité par le deuxième principe de Laplace. Henry Michel fait remarquer que :

- ce choix suppose la mise en œuvre d'expériences concrètes et de simulation sur ordinateur, ce qui n'est souvent pas le cas avec des enseignants qui manquent de temps ;
- le changement des programmes de la classe de première n'a pas empêché les manuels de mettre le cas d'équiprobabilité en avant et les enseignants de se rabattre sur des exercices de combinatoire simple ;
- le programme comporte des faiblesses, à savoir l'impasse qui est faite sur la modélisation laissant place uniquement à la description d'expériences aléatoires simples sans une interprétation en modèle théorique, et la confusion entre la probabilité théorique et la fréquence expérimentale ;
- l'existence de la probabilité est une source de questionnement épistémologique, la confusion entre modèle et réalité étant ici la cause des difficultés didactiques essentielles, ce que le programme de la classe de première L non retenu en 1993 a tenté de corriger ;
- le programme de 1991 ne prévoit pas la simulation, le vocabulaire ensembliste fait défaut aux élèves, la notion de loi est abordée sans l'utilisation de situations concrètes.

Après avoir noté quelques critiques sur les programmes de statistique, Michel Henry jette un regard critique sur le nouveau programme de la classe de seconde, dont il juge excellentes les intentions, à savoir : « acquérir une expérience de l'aléatoire », « comprendre ce qu'est une question statistique et le type de réponse que l'on peut proposer » et « voir dans un cas simple

ce qu'est un modèle probabiliste ». Concernant l'aléatoire, Henry Michel trouve que l'observation des fluctuations d'échantillonnage est très ambitieuse, tout en se questionnant sur les conditions didactiques de réalisation de la simulation sans l'introduction du concept théorique de la probabilité. Il est du même avis que ceux qui critiquent le programme de la classe de première par rapport à la confusion entre la probabilité et la fréquence limite. Il fait remarquer que la notion d'expérience nécessite un travail et donc que le vocabulaire statistique soit séparé de celui des probabilités. Il finit l'article en insistant sur les contraintes de l'application des programmes dont la formation insuffisante des enseignants et la réduction d'horaire à laquelle ils sont confrontés. Il passe alors le message suivant à ses collègues chargés de la réforme des programmes : « *Pour tout ce qui touche à l'enseignement, on ne peut ignorer les contraintes didactiques et la prise en compte des travaux de recherche sur le sujet ne peut être négligée* » (Henry, 2000, p. 56).

Dans l'article « Émergence de la probabilité et enseignement : définition classique, approche fréquentiste et modélisation », Michel Henry, profitant de l'introduction des probabilités au collège, s'est appuyé sur l'historique des probabilités pour faire le point global de l'enseignement des probabilités en France depuis les programmes de 1991 jusqu'à ceux de 2008. À l'issue de l'historique bien détaillé de l'approche classique, il fait la remarque que dans cette approche, la probabilité est définie à l'aide de la probabilité, en faisant ainsi allusion au fait que le premier principe de Laplace est applicable dans les situations d'équiprobabilité. Il a distingué trois options épistémologiques de l'approche classique, à savoir : l'option objectiviste caractérisée par l'équiprobabilité relevant des symétries des générateurs de hasard ; l'option subjectiviste caractérisée par l'équiprobabilité postulée en cas d'ignorance des conditions de réalisations des issues de l'expérience aléatoire et l'option de la modélisation qui fait correspondre un modèle d'équiprobabilité à l'expérience aléatoire. Abordant l'approche fréquentiste, il traduit le théorème de Bernoulli par la condition de confiance : $P(F_n - \varepsilon < p < F_n + \varepsilon) > 1 - \alpha$, où F_n est la fréquence d'observation d'un événement pour un grand nombre n de réalisations de l'expérience aléatoire, p la probabilité de l'événement et α le risque de se tromper. Cet énoncé de la loi faible des grands nombres pose un certain nombre de problèmes didactiques, notamment la présence de deux probabilités de natures différentes, le nombre d'expériences à réaliser pour atteindre la probabilité p et le fonctionnement de la définition fréquentiste dans un problème. Plus particulièrement, la définition fréquentiste confond deux domaines à séparer, à savoir : le domaine de la réalité avec l'observation des fréquences F_n de réalisation d'un événement donné et le domaine théorique avec la probabilité de cet événement.

Si en 1990, le programme français de la classe de première s'est contenté d'introduire la probabilité par l'observation des fréquences, celui de la même classe est allé plus loin en 2001 en proposant d'introduire le concept de loi de probabilité et la vulgarisation de la loi faible des grands nombres. Depuis 2001, les programmes français ont adopté l'option de la modélisation en visant l'objectif que les élèves comprennent que modéliser une expérience aléatoire, c'est choisir une loi de probabilité. Ils font appel à la simulation pour le traitement de séries statistiques de grandes tailles afin de visualiser concrètement la loi des grands nombres. L'axiomatique de Kolmogorov intervient dans les programmes français à travers les propriétés de base du calcul des probabilités. Les programmes de 2008 étalent l'enseignement des probabilités de la troisième en terminale, avec notamment : l'étude des probabilités issues des expériences aléatoires simples en troisième ; l'étude des distributions de fréquences à l'aide de simulations en classe de seconde, le vocabulaire de base, la loi de probabilité, l'observation des fluctuations d'échantillonnage, la probabilité d'un événement, la loi des grands nombres et la modélisation en classe de première ; les probabilités conditionnelles et les lois classiques en classe de terminale.

L'article « Simulations d'expériences aléatoires en classe : Un enjeu didactique pour comprendre la notion de modèle probabiliste, un outil de résolution de problèmes » traite des enjeux didactiques de la simulation, comme outil de validation de la probabilité d'un événement obtenue par l'observation des fréquences de réalisation de cet événement. En effet, l'usage des outils informatiques dans l'enseignement secondaire en France est une condition favorable à l'étude des séries statistiques par la mise en œuvre de la simulation pour étudier et modéliser des expériences aléatoires relevant des situations d'équiprobabilité. Le choix d'une démarche expérimentale tel qu'il avait été précisé dans les articles précédents met l'accent sur l'initiation au processus de modélisation. Le programme fait recours à la simulation pour l'atteinte de cet objectif d'initialisation à la modélisation. La simulation consiste d'abord à choisir un modèle et ensuite à simuler la loi du modèle. Se faisant, bon nombre d'élèves n'arrivent pas à reconnaître la similarité entre l'expérience aléatoire simulée et le modèle utilisé pour la simulation, prenant la simulation comme un substitut de l'expérience. Estimant que les exemples simples de simulations conduisent les élèves à comprendre ce que c'est qu'un modèle probabiliste, Michel Henry a décrit quatre exemples de simulation dans l'article. Le premier exemple de simulation décrit est celle du problème du Grand-Duc de Toscane, consistant à montrer, dans un lancer de trois dés, pourquoi il est plus fréquent d'obtenir les sommes 10 et 11 plutôt que 9 et 12, bien que 10 et 11 se décomposent en autant de fois que 9 et 12. Une

simulation proposée sur un tableau comme Excel avec des suites de 1000 lancers n'a pas permis de constater la prépondérance des sommes 10 et 11 sur les sommes 9 et 12. Le deuxième exemple est la simulation du problème « croix ou pile » de d'Alembert, qui consiste à trouver la probabilité d'obtenir croix dans deux lancers consécutifs d'une pièce de monnaie. L'analyse des ensembles des issus possibles permet d'évaluer dans une situation d'équiprobabilité cette chance à $\frac{3}{4}$ ou $\frac{2}{3}$. Une simulation réalisée par Bernard Parzysz en première ES permet d'estimer cette chance à $\frac{3}{4}$ après plus de 1000 réalisations de l'expérience aléatoire. Le jeu du « franc-carreau » de Buffon est le troisième problème dont la simulation est présentée dans l'article. Ce jeu consiste à lancer une pièce de monnaie sur un carrelage constitué de carreaux carrés et à s'intéresser à la probabilité que la pièce de monnaie s'arrête sur un carreau, c'est-à-dire si elle ne rencontre pas un ou plusieurs joints. L'hypothèse de modèle associée à ce jeu est constituée d'un carreau représenté par un carré ABCD et une zone carrée A'B'C'D' délimitant la zone dans laquelle le centre O de la pièce de monnaie peut se trouver, pour qu'elle s'arrête sur le carreau. En prenant $AB = 1$ et le rayon de la pièce de monnaie égal à $\frac{1}{4}$, la probabilité recherchée vaut $\frac{1}{4}$. Une simulation de ce modèle, avec des séries de 10000 lancers, donne des fréquences très proches de $\frac{1}{4}$. Les simulations de deux autres problèmes de Buffon, notamment « l'aiguille de Buffon » et « la baguette à franc-carreau », plus complexes que le jeu « franc-carreau », présentées dans le présent article, sont utilisées pour valider des modèles de calcul de probabilités.

1.2. Les travaux de Bernard Parzysz et de Bernard Dantal

Tout comme Michel Henry, Bernard Parzysz a beaucoup travaillé sur l'enseignement des probabilités en France, notamment sur la modélisation et la simulation. Il avait été suffisamment cité dans les articles de M. Henry portant sur la modélisation et la simulation. Nous résumons ici quelques-uns de ses articles, à savoir :

- De l'expérience aléatoire au modèle, *via* la simulation (Parzysz, 2009) ;
- Un générateur de pile ou face venu d'ailleurs (Parzysz, 2011a) ;
- Quelques questions didactiques de la statistique et des probabilités (Parzysz, 2011b).

Nous complétons ces articles par l'article « Les enjeux de la modélisation en probabilités » de Bernard Dantal (2001), dans lequel ce dernier a abordé l'une des difficultés rencontrées par les enseignants dans la mise en œuvre de la modélisation en probabilité.

L'article « De l'expérience aléatoire au modèle via la simulation » est publié après l'introduction en classe de troisième du calcul des probabilités en France. Ce programme insiste sur la modélisation d'expériences aléatoires simples issues des situations simples de la vie courante. Pour la mise en œuvre de ce programme, comme de celui du lycée, Parzysz propose dans l'article le recours à la simulation avec un tableur, en s'appuyant sur des exemples classiques d'expériences aléatoires. En guise d'introduction, l'auteur présente un premier exemple d'expérience aléatoire classique, celui du jeu de Croix ou Pile d'Alembert, qui se joue entre deux joueurs A et B sur un ou deux lancers. Si le joueur A joue croix au premier lancer, il gagne la partie, sinon il lance une deuxième fois et s'il obtient croix, alors il gagne, sinon c'est le joueur B qui gagne la partie. D'Alembert se pose la question de savoir la chance que chacun des joueurs a de gagner le jeu, en proposant les deux solutions suivantes : la première consiste à considérer les quatre éventualités CP, CC, PC, PP pour trouver trois chances sur quatre au profit du joueur A ; la deuxième consiste à considérer une seule éventualité lorsque C est obtenu au premier lancer, faisant dénombrer ainsi les éventualités C, PC et PP pour trouver deux chances sur trois pour le joueur A. Pour Parzysz, il y a d'intérêt à proposer cette situation aux élèves, car ces derniers trouvent bien que le joueur A a plus de chance de gagner, mais ils ne sont pas en mesure d'évaluer les chances des deux joueurs, qui sont celles relevant de la première solution proposée par d'Alembert. L'une des deux réponses proposées par d'Alembert peut retenir l'attention d'une partie de la classe et l'idée de jouer un certain nombre de fois apparaît spontanément. Le professeur peut saisir l'occasion pour faire rejeter les solutions non plausibles sans nécessairement en valider. Après cet exemple, Parzysz revient sur la notion de simulation dont il justifie la nécessité par la durée trop longue de la réalisation effective d'expérience aléatoire un grand nombre de fois. Pour lui, il est possible de réaliser une simulation sans nécessairement posséder l'outil informatique puisqu'il y a eu des simulations avant l'invention de la calculatrice, comme ce fut le cas de Walter Weldon au 19^e siècle, qui a pu obtenir 315372 lancers de dé en lançant 26306 fois douze dés. Synthétisant les définitions de la simulation dans les manuels de classe de seconde, l'auteur précise que la simulation consiste à substituer une expérience aléatoire qu'on se propose d'étudier à une autre expérience, plus facile à réaliser et dont la mise en œuvre reflète statistiquement l'expérience initiale. Cette définition justifie la démarche de simulation qui consiste, en s'appuyant sur un protocole expérimental à proposer, en fonction des outils dont on dispose, un modèle pour cette expérience, que les données expérimentales permettront d'accepter ou de rejeter. Dans le cas de Weldon, il a implicitement fait l'hypothèse que les probabilités d'apparition des faces sont égales et que lancer simultanément 12 dés identiques revient à lancer 12 fois un même dé. Pour

Parzysz, la simulation faisant intervenir la technologie et les tables de nombres aléatoire n'est pas une expérience aléatoire, puisque les nombres produits sont les termes consécutifs de suites récurrentes bien déterminées, bien qu'ils soient supposés équirépartis. Justifiant que le choix d'une bonne simulation présuppose l'association d'un modèle probabiliste à l'expérience étudiée, l'auteur prend l'exemple de la simulation d'une série de lancers successifs d'une pièce de monnaie pour faire les hypothèses suivantes : un résultat sera pile ou face selon le côté visible à l'issue du lancer (H_1) ; si la pièce tombe sur la tranche, le lancer est annulé (H_2) ; la pièce est équilibrée (H_3) ; la pièce doit être lancée suffisamment fort pour que le résultat soit imprévisible (H_4). Ce qui constitue ainsi le modèle pseudo-concret nommé par Michel Henry. Les hypothèses seront ensuite traduites en termes de productions du générateur aléatoire, c'est-à-dire déterminer les valeurs du générateur qui peuvent correspondre au côté P de la pièce de monnaie et celles qui peuvent correspondre au côté F. La correspondance entre l'expérience et la simulation va d'abord de l'expérience 1 (phénomène à étudier) au modèle, ce qui est la modélisation, puis du modèle à l'expérience 2 (celle expérimentée), ce qui est la simulation. Etant donné que la modélisation ne figure que dans le programme de la classe de première, le document d'accompagnement du programme de la classe de seconde prévoit que la classe soit divisée en deux groupes : un fera l'expérience et un autre la simulation, et les résultats seront comparés par la suite. Parzysz fait remarquer que la mise en œuvre d'une simulation nécessite l'établissement d'une procédure à implémenter sur la machine, qui est choisie parfois parmi plusieurs procédures différentes. Par exemple pour simuler en classe de seconde l'expérience consistant à s'intéresser à la composition d'une famille de deux enfants, composée par hasard, on peut convenir que tout nombre pair de la table correspond à un garçon et que tout nombre impair correspond à une fille, puis on partage la suite des nombres de la table en des tranches de deux nombres, après avoir émis des hypothèses. Concernant le problème de croix ou pile évoqué plus haut, deux procédures de simulation sont possibles. La première consiste à produire un aléa de deux valeurs équiréparties C et P ; si on obtient C, on a gagné, sinon on produit un aléa du même type que le précédent et si on obtient C, on a gagné. La deuxième procédure consistera à produire deux aléas à deux valeurs équiréparties C et P ; si on n'obtient que P, on a perdu, sinon on a gagné. La deuxième procédure, plus simple à réaliser, nécessite deux lancers obligatoires et risque de poser de problème au niveau des élèves. Parzysz exploite le problème de partis qui était à la base de la construction de la probabilité, pour justifier le bien fondé du problème qui peut se poser au niveau des élèves pour ce qui concerne la deuxième procédure de la simulation précédente. En fait, dans la résolution du problème des partis, il existe deux procédures comparables aux deux de la simulation précédente. Il suffira de montrer que la

deuxième qui suppose des lancers virtuels est plus simple pour donner les mêmes résultats que la première. Revenant au programme de seconde, Parzysz a proposé des procédures de simulation pour les expériences ci-dessous :

- (E₁) on lance 4 fois successivement une pièce de monnaie et on note le nombre de piles obtenu ;
- (E₂) on lance simultanément 4 pièces de monnaie et on note le nombre de piles obtenu ;
- (E₃) dans un sac contenant 10 billes (5 blanches et 5 noires) on effectue 4 tirages successifs d'une bille (avec remise), et on note le nombre de billes blanches obtenu ;
- (E₄) on laisse tomber une bille dans une planche de Galton à 5 godets et on note le numéro du godet dans lequel elle tombe.

La procédure de l'expérience E₁ consiste à produire quatre fois de suite un aléa à deux valeurs équiréparties P et F et à totaliser le nombre de P obtenus. Celle de l'expérience E₂ consiste à produire quatre aléas à deux valeurs équiréparties P et F et à totaliser le nombre de P obtenus.

Pour l'expérience E₃, la procédure de simulation consiste à produire quatre fois successivement un aléa à deux valeurs équiréparties B et N et à totaliser le nombre de B obtenus. Enfin la procédure proposée pour l'expérience E₄ consiste à produire quatre fois successivement un aléa à deux valeurs équiréparties G et D et à totaliser le nombre de D obtenus. La comparaison des procédures montre que celles des expériences aléatoires E₁, E₃, et E₄ sont identiques. Les tableaux des résultats présentés dans l'article montrent que les quatre expériences correspondent à un même schéma d'expérience. Pour conclure, Parzysz note que le passage de l'expérience aléatoire à la simulation n'est pas évident pour les élèves et qu'il est nécessaire que du temps y soit consacré.

Dans son article « un générateur de pile ou face venu d'ailleurs », Parzysz présente le cauri comme un générateur de hasard. En effet il existe dans différentes civilisations des jeux qui font des générateurs aléatoires tels que les pièces de monnaie, les dés cubiques, les sacs contenant des jetons, les roues, les boules tombant dans des trous, l'aiguille de Buffon, etc. En dehors de ces jeux, auxquels on est plus ou moins habitué dans la littérature sur les probabilités, il en existe en Afrique aussi, qui se font avec les cauris, que l'auteur de l'article étudie ici comme pouvant être considérés comme des générateurs aléatoires. Le cauri est un coquillage originaire de l'Océan Indien et qui servait de monnaie en Afrique de l'Ouest. Ils sont aujourd'hui utilisés dans la divination, la décoration et dans certains jeux. Lorsqu'on lance un cauri, il peut présenter comme face supérieure, soit une face avec ouverture (fente), soit sur la

face bombée (dos). Sa particularité est qu'il ne renvoie pas au modèle canonique d'équiprobabilité. Les cauris ne sont pas fabriqués industriellement comme les dés, et bien qu'ayant les caractéristiques communes, ils ne sont pas parfaitement identiques. Plusieurs jeux africains utilisent le lancer simultané de quatre cauris. On distingue dans ce cas cinq configurations possibles selon le nombre de fentes qui apparaissent, à savoir : 4D, 1F3D, 2F2D, 3F1D, 4F. Généralement, il y a des configurations favorables (4D, 2F2D, 4F) et d'autres défavorables (1F3D, 3F1D). Dombia et Pil⁹ ont cherché à déterminer la probabilité d'obtenir F ou D avec un cauri, en lançant 1000 fois de suite un cauri, et en faisant pareil pour trois autres cauris. Ils ont obtenu respectivement les fréquences de F suivantes : 0,390 ; 0,430 ; 0,383 ; 0,422. Les intervalles de confiance à 0,95 des probabilités respectives p_1 , p_2 , p_3 et p_4 donnent pour le cauri 1, cauri 2, cauri 3 et cauri 4 : [0,36 ; 0,42], [0,40 ; 0,46], [0,35 ; 0,41] et [0,39 ; 0,45]. Les auteurs de l'étude concluent que : « *on peut estimer, dans des limites raisonnables, que la probabilité d'obtenir [F] est voisine de 0,4 ou 2/5. C'est précisément cette valeur que nous adopterons pour la suite de nos calculs.* » Concernant le lancer de quatre cauris, Parzys se pose la question de savoir s'il y a équiprobabilité entre les issus : « configuration favorable » et « configuration défavorable ». En notant p la probabilité d'obtenir fente pour chaque cauri (ici estimée à 0,4), la probabilité de la configuration défavorable (1F3D ou 3F1D) est : $4p^3(1-p) + 4p(1-p)^3$ et celle de la configuration favorable est : $P(p) = 1 - 4p^3(1-p) + 4p(1-p)^3$, qui présente une symétrie par rapport à $p = \frac{1}{2}$. L'étude de la fonction P en fonction de p montre que P varie très peu autour de 0,5 si p varie entre 0,4 et 0,6. Même après une généralisation avec des probabilités différentes mais voisines pour les cauris, les auteurs arrivent presque à la même conclusion. L'auteur termine l'article en concluant que ce matériel associé à sa règle de jeu fournit une simulation du jeu de pile ou face dont la qualité n'a rien à envier à l'original.

Le troisième article de Parzys que nous étudions dans la présente revue de littérature s'intitule « Quelques questions didactiques de la statistique et des probabilités ». L'auteur y présente, d'une part, la modélisation en probabilité en comparaison avec celle qui se fait dans le domaine de la géométrie, et d'autre part, les registres en statistique et en probabilités. Concernant la première partie, Parzys clarifie en deux étapes le processus de la modélisation, à partir d'une relecture de l'article « L'introduction des probabilités au lycée : un processus de modélisation comparable à celui de la géométrie » de Henry (1999). En effet, contrairement à

⁹Dombia, S. et Pil, J-C. *Les jeux de cauris*. Éd. IRMA, 1992, cité dans Parzys (2011a).

la géométrie, l'analyse et l'algèbre, le calcul des probabilités est véritablement introduit dans les programmes français d'enseignement à l'occasion de la réforme des mathématiques modernes des années 1970. Dans le domaine des probabilités, cette réforme est centrée sur l'axiomatique de Kolmogorov. Mais avec les programmes de 2001, l'aléatoire est considéré comme une discipline mathématique à part entière. Parzysz s'intéresse au début de l'article à l'analogie soulignée par M. Henry (1999), entre la démarche de modélisation de la géométrie et celle de la probabilité. La particularité de la notion de probabilité est qu'elle présente une dualité partagée entre la probabilité subjective, exprimant le degré de croyance de l'observateur, et la probabilité objective, issue de la loi des grands nombres et expérimentée à partir de l'approche fréquentiste, à laquelle s'est intéressé M. Henry. Dans le processus de la modélisation, Parzysz distingue deux modélisations successives. En géométrie, la première modélisation part d'une perception de l'environnement et des actions sur celui-ci pour un premier paradigme géométrique (G_1). En prenant l'exemple du motif central d'un panneau de la mosaïque de Besançon, Parzysz fait remarquer qu'on peut en observer des segments, des arcs de cercles et on peut faire des hypothèses sur leurs longueurs et sur des positions. Cette observation a conduit à la production des dessins se rapprochant de la mosaïque. Du côté de l'approche fréquentiste de l'aléatoire, il y a eu perception du hasard à travers les expériences réelles et des actions que sont les jeux de hasard et les relevés statistiques. En prenant l'exemple du cauri dont le dos bombé est retallé à plat et dont le lancer peut produire les résultats fente et dos, l'auteur fait observer que les variations de la proportion de fentes peuvent être observées par groupe de 10 lancers et sa stabilisation autour de 0,4 lorsqu'on regroupe les échantillons. On serait ainsi passé de la statistique descriptive (SD) à un premier paradigme probabiliste (P_1). En géométrie, pour la deuxième modélisation, on passe aux définitions et aux théorèmes que l'on démontre, après la production des dessins. On passe ainsi du paradigme G_1 au paradigme G_2 . Dans le cas de la mosaïque, on s'intéressera aux propriétés de l'hexagone régulier et à la construction des arcs de cercles. On travaille ensuite dans la G_2 en s'appuyant sur les représentations figurales de G_1 . Dans l'aléatoire, on passe du paradigme probabiliste P_1 à un paradigme plus théorique P_2 , en définissant l'expérience aléatoire, la probabilité mathématique et en étudiant ses propriétés. Dans le cas du cauri, on introduit le modèle binomial pour étudier la probabilité d'obtenir k fentes à l'issue de n lancers. On travaille ensuite uniquement dans P_2 en s'appuyant éventuellement sur P_1 pour élaborer des conjectures ou pour confirmer ou infirmer un modèle, par l'utilisation d'un espace de travail constitué de l'algèbre des événements, des propriétés de probabilités et des modèles. Les outils de travail sont la démonstration, les techniques de calcul et les registres de représentations, auxquels il faut

ajouter la statistique descriptive qui intervient pour produire et étudier des expériences aléatoires simulées. La probabilité étant définie comme une fréquence théorique, on peut réinvestir la statistique descriptive pour continuer le travail dans P_2 . Dans ce cadre la simulation informatique peut être importante dans l'acquisition de la notion de modèle en probabilités. La deuxième partie de l'article met l'accent sur le rôle important des registres de représentations en statistique et en probabilités en comparaison avec leur rôle fondamental en géométrie. En statistique, les registres de représentations utilisés sont les tableaux, l'histogramme, les barres, les courbes, les secteurs, le nuage de points, les aires, l'anneau, le radar, les surfaces, les bulles et le boursier. L'objectif de l'apprentissage dans ce domaine est de permettre à l'élève de faire un choix judicieux du registre de représentation pouvant permettre une lecture fidèle et claire du type de données collectées. Du côté des probabilités, on utilise le registre langagier, le registre symbolique ainsi que ceux des arbres et des tableaux de contingence. Il convient de noter que l'arbre pondéré est officiellement admis dans les programmes français, après un plaidoyer de Parzysz pour cette officialisation (Parzysz, 1990).

Dans l'article « Les enjeux de la modélisation en probabilités », Bernard Dantal s'intéresse à une difficulté à laquelle est confronté l'enseignant dans l'acte d'enseignement des probabilités suivant les programmes de 1991 en France. Cette difficulté s'explique par le fait qu'il doit partir d'une observation de la réalité, qu'il doit décrire en passant par des étapes successives, pour extraire ses élèves de la réalité afin de les conduire progressivement vers un modèle mathématique. De ce fait, l'enseignant doit se placer entre l'observation de la réalité et la construction du modèle. Cet état des choses pose le problème de la nécessité du passage de l'observation de la réalité à la construction du modèle. Mais le choix didactique du programme français de 1972 d'éviter au niveau du second degré la difficulté de la construction du modèle à partir de l'observation de la réalité a conduit au fait que le concept de probabilité a perdu son sens chez le plus grand nombre d'élèves. Pour corriger cet état de choses, la démarche suggérée dans les programmes depuis 1991 prend en compte le passage de l'observation de la réalité à la construction du modèle en passant par les étapes de la description de la réalité et de la mathématisation d'un modèle. Il est question en ce moment de savoir si les concepts utilisés au cours des étapes intermédiaires peuvent être définis rigoureusement d'un point de vue mathématique. Concernant le concept d'expérience aléatoire, cette question pose de redoutables problèmes d'enseignement. En effet, au niveau de la description de la réalité, une expérience aléatoire est une expérience dont l'observateur ne peut pas prévoir le résultat à l'avance avec certitude. Mais l'utilisation du mot aléatoire en mathématique prend parfois un autre sens pour

les élèves pour qui les mathématiques traitent des résultats sûrs et prouvés contrairement à l'expérience aléatoire qui peut être considérée comme peu sûre et non signifiante. En se mettant au niveau de la construction du modèle, deux cas de modélisation se présentent pour l'observateur qui veut décrire une expérience réelle sous le terme d'expérience aléatoire. Pour le premier cas, il faut que l'observateur pense qu'il ne peut pas prévoir le résultat, qu'il pense pouvoir déterminer à l'avance l'ensemble des résultats possibles et qu'il décide a priori que tous les possibles sont également probables. Cette approche conduit à la définition de la probabilité d'un événement suivant le premier principe de Laplace. Dans le deuxième cas de modélisation, l'observateur doit penser qu'il ne peut pas prévoir le résultat et qu'il peut reproduire l'expérience aléatoire un grand nombre de fois dans des conditions semblables. Ce modèle se fonde sur l'approche fréquentiste de la notion de probabilité.

1.3. Les travaux de Jean-Claude Girard

Jean-Claude Girard a aussi travaillé dans le champ de recherche de l'enseignement des probabilités. Nous faisons une présentation sommaire de trois de ses articles, portant notamment sur la notion d'expérience aléatoire, sur les difficultés relatives à l'enseignement des probabilités, ainsi sur la liaison entre la statistique et les probabilités dans l'enseignement en France. Il s'agit des articles « Qu'est-ce qu'une expérience aléatoire ? » (Girard, 2001a), « Quelques hypothèses sur les difficultés rencontrées dans l'enseignement des probabilités » (Girard, 2001b) et « La liaison statistiques-probabilités dans l'enseignement » (Girard, 2004).

Jean-Claude Girard, a mis l'accent sur la différence entre l'expérience aléatoire réelle et le modèle dans son article « Qu'est-ce que l'expérience aléatoire ? ». Après avoir défini l'expérience aléatoire réelle comme une expérience dont on ne peut ni prévoir ni calculer le résultat même si on la répète une deuxième fois dans les mêmes conditions, il fait remarquer que dans une expérience concrète, on n'a jamais exactement les mêmes conditions et que l'identification du hasard qui intervient dans l'expérience aléatoire n'est pas toujours claire. Abordant l'expérience aléatoire mathématique, c'est-à-dire le modèle mathématique de l'expérience aléatoire, Girard précise qu'elle doit vérifier trois conditions, que nous avons précisées dans le premier chapitre (Chap. I, 3.1.). Pour lever la confusion entre expérience aléatoire réelle et expérience aléatoire mathématique, Girard précise que les expériences aléatoires des cours de probabilités sont mathématiques, tandis que les expériences aléatoires évoquées dans les exercices d'application ou de baccalauréat sont des expériences aléatoires réelles. Il fait remarquer que les probabilités sont largement déterminées par l'expérience

aléatoire mathématique et qu'en conséquence la simulation, bien qu'illustrant les conséquences du modèle, ne peut être considérée comme une démonstration.

Dans l'article « Quelques hypothèses sur les difficultés rencontrées dans l'enseignement des probabilités », Girard évoque les difficultés rencontrées dans la mise en œuvre des derniers programmes français par rapport à l'enseignement des probabilités. D'entrée de jeu, Girard annonce dans son introduction que les élèves sont déroutés par le nouveau type de raisonnement qu'est celui de l'aléatoire et que les professeurs sont déconcertés. Il caractérise les difficultés en plusieurs types d'obstacles qu'on peut notamment situer parmi les obstacles épistémologiques et didactiques (Brousseau, 1989). Les obstacles épistémologiques sont ceux liés à la nature du hasard, ceux liés à des notions mathématiques et ceux dus aux conceptions des élèves, tandis que les obstacles didactiques sont ceux dus aux conceptions des professeurs, et ceux liés à la modélisation de la réalité. Concernant les obstacles épistémologiques, il fait d'abord remarquer que le hasard est difficile à définir et que son existence n'est pas admise par tout le monde. Si pour Poincaré, l'une des caractéristiques du hasard est l'impossibilité de toute prédiction, le hasard n'existe pas chez Aristote et Laplace. Jean-Claude Girard retrouve les trois points de vue d'existence et de la non existence du hasard chez des étudiants ayant reçu ou non un enseignement en probabilités. Puisque l'incertain n'a pas beaucoup sa place dans l'enseignement, définir les probabilités n'est pas alors simple. Il faut au préalable admettre qu'elles existent. L'auteur suggère qu'il faut montrer aux apprenants au début de l'enseignement, par des activités variées, que les choses ne sont pas toujours sûres et qu'il existe une certaine variabilité entre les phénomènes aléatoires physiques, biologiques et sociaux. De tout temps la définition de la probabilité pose problème comme l'a affirmé Poincaré bien avant l'axiomatique de Kolmogorov en 1933 : « *On ne peut guère donner une définition satisfaisante de la Probabilité* » (Poincaré, 1923, p. 24). Du côté des obstacles didactiques, le choix didactique des programmes de seconde et de première, qui privilégient l'approche fréquentiste, ne s'applique qu'à des événements qu'il est possible de répéter. Elle repose sur une limite dont le sens ne peut être compris et sur la loi des grands nombres dont la démonstration est basée sur les propriétés des probabilités. Une deuxième définition possible, basée sur les principes de symétrie, est celle du premier principe de Laplace, selon laquelle, chacune des six faces d'un dé régulier a une probabilité de $\frac{1}{6}$ d'apparaître, par raison de symétrie, alors qu'en réalité un dé régulier n'existe pas. La question se pose de savoir comment un dé peut être reconnu régulier sans la réalisation d'un grand nombre de lancers pour voir si chacune des faces apparaît approximativement avec une fréquence de $\frac{1}{6}$. Les deux approches précédentes de la notion de

probabilité, qualifiées d'objectives, s'opposent à la conception subjective pour laquelle la probabilité d'un événement est la mesure de l'incertitude que nous avons dans sa réalisation. Il se pose encore la question de savoir comment quantifier ces probabilités a priori devant être utilisées pour en calculer d'autres. Une dernière définition assez récente (1933) dite axiomatique, œuvre du mathématicien russe A. Kolmogorov, permet de définir un ensemble de règles mathématiques cohérentes et non contradictoires, à l'image des axiomes d'incidence en géométrie. Comme en géométrie, seules sont nécessaires quelques idées intuitives de départ pour une construction mathématique des probabilités. Au niveau des obstacles liés à des notions mathématiques, Girard estime que les élèves sont confrontés à des difficultés mathématiques en dehors de celles occasionnées par les définitions de la probabilité. Tout comme les pourcentages, les probabilités d'événements sont source d'erreurs au niveau de l'enseignement. Il se pose la question de leur addition et de leur multiplication. Ce qui entraîne les obstacles dans les notions d'indépendance, d'incompatibilité et de probabilités conditionnelles. L'absence de l'étude de la théorie des ensembles dans les programmes français, les difficultés de langage et les erreurs de logique sont aussi des handicaps pour l'enseignement des probabilités. Pour ce qui concerne les obstacles dus aux conceptions des élèves, Girard note chez les élèves la difficulté à admettre que des événements de probabilité nulle puissent se produire. Il trouve qu'il serait plutôt mieux de qualifier d'événements impossibles ceux qui ont des probabilités très petites. Une autre conception erronée, liée à la nature du hasard dans la répétition d'une même épreuve aléatoire, est le fait d'admettre qu'un événement qui ne s'est pas réalisé depuis longtemps a plus de chance d'être réalisé (le hasard compense), tandis qu'un événement qui s'est réalisé plusieurs fois a encore plus de chance d'être réalisé (la loi des séries). L'idée qu'un événement a toujours une chance sur deux de se produire est également fréquente chez les élèves, car ces derniers pensent qu'il y a toujours deux cas possibles : l'événement se produit ou il ne se produit pas. Certaines expressions de la vie courante créent aussi des confusions au niveau des élèves. Par exemple, quand un élève dit que la face 6 sortira en moyenne une fois sur 6 avec un dé équilibré, on peut se demander si le mot « moyenne » est pour lui synonyme de « à peu près ». Au niveau des obstacles dus aux conceptions des professeurs, Girard fait remarquer que la plupart des professeurs ont reçu à l'université un enseignement axiomatique des probabilités très éloigné de ce qu'ils sont appelés à enseigner. Certains ne comprennent pas comment un concept insaisissable comme le hasard peut faire partie d'une théorie mathématique. D'autres pensent que l'on ne peut pas proprement enseigner les probabilités sans avoir étudié la théorie de la mesure, alors qu'ils sont conscients qu'on peut faire proprement une démonstration en géométrie avant d'avoir étudié la logique formelle.

Certains doutent même de l'intérêt et de l'utilité de l'enseignement des probabilités, ignorant ainsi qu'aujourd'hui l'une des formes de l'intelligence est la capacité au raisonnement probabiliste ou statistique. D'autres encore ne comprennent pas pourquoi la combinatoire est abandonnée et se demandent si on peut faire la probabilité sans l'analyse combinatoire. Au niveau des obstacles liés à la modélisation de la réalité, Girard fait remarquer que les probabilités constituent une des rares parties des mathématiques où l'on s'intéresse à la réalité, mais que l'on n'est jamais sûr de la justesse d'un modèle. Par exemple, dans l'expérience aléatoire qui consiste à lancer deux dés et à faire la somme des points apparus, certains apprenants pensent que les résultats $6+5$ et $5+6$ sont différents tandis que d'autres les considèrent identiques. En conséquence, les élèves sont tentés de penser qu'il y a plusieurs réalités. En fait, on croit travailler sur la réalité, alors que l'on est déjà dans un modèle. Jean-Claude Girard conclut l'article en faisant l'hypothèse que les difficultés dans l'enseignement des probabilités pourraient être dues au fait qu'on sous-estime les difficultés liées à la nature du hasard et des probabilités.

Dans son article « La liaison statistiques-probabilités dans l'enseignement », Jean-Claude Girard a fait part des difficultés relatives au processus de modélisation, après avoir précisé la liaison entre la statistique et les probabilités dans les réformes éducatives successives en France jusqu'en 2004. Il note d'abord que jusqu'en 1970, la statistique et les probabilités, qui étaient enseignées aux élèves aspirants aux études de biologie ou d'économie, n'ont de lien qu'à travers la statistique inférentielle. Avec la réforme des « mathématiques modernes » de 1970, l'enseignement des probabilités est généralisé dans le secondaire. La forme axiomatique de la probabilité est enseignée avec l'introduction de la notion d'espace probabilisé, tandis qu'en statistique un caractère est présenté comme une relation d'équivalence définie sur une population. La liaison entre la statistique et les mathématiques est alors quasi inexistante. La réforme de 1981, dans laquelle l'enseignement des probabilités est basé sur le premier principe de Laplace, n'a pu faire non plus de lien entre la statistique et les probabilités. La réforme de 1986 a connu l'entrée progressive de la statistique descriptive au collège et a abouti en 1991 à l'enseignement des probabilités au lycée à partir de l'approche fréquentiste. La liaison ainsi créée entre la statistique et les probabilités par la loi des grands nombres est confirmée dans la réforme de 2000-2002, qui introduit l'observation des fluctuations et la simulation en classe de seconde. Évoquant le parallèle entre l'enseignement de la géométrie et celui des probabilités, Jean-Claude Girard fait remarquer que le processus de modélisation en géométrie dure une dizaine d'années, tandis qu'en probabilités ce processus ne s'étale que sur deux ans. Par

exemple, le carré commence par être étudié à travers le cube à la maternelle, reconnu effectivement comme un carré, puis dessiné au primaire, avant d'être abstrait au collège. Mais du côté des probabilités, ni l'expérience aléatoire, ni le hasard ne sont étudiés au collège. Concernant la simulation, en dehors de la confusion entre réalité et modèle, soulevé plus haut et par Henry et Parzysz, Girard précise qu'elle fait recours en classe de seconde à la notion de probabilité qui n'est étudiée qu'un an plus tard. D'autant de ce que l'observation des fluctuations de la distribution des fréquences peut conduire à l'idée d'accepter des lois théoriques, l'auteur prône l'enseignement des probabilités sur une longue période.

1.4. Bilan des travaux relatifs à l'enseignement des probabilités

Les travaux de Michel Henry dans le domaine de l'enseignement des probabilités font constater l'échec relatif de l'enseignement des probabilités fondé sur l'approche classique et proposent l'approche fréquentiste comme solution. La réalisation de l'enseignement suivant cette approche implique l'utilisation de la statistique pour aborder la notion de probabilité d'un événement. Comme pour l'approche classique, l'enseignement des probabilités basé sur l'approche fréquentiste pose aussi un certain nombre de problèmes, dont notamment l'utilisation précoce de la notion de limite, qui intervient dans l'énoncé de la loi faible des grands nombres. Dans un monde mathématique, caractérisé par la certitude et la rigueur des démonstrations, les probabilités qui relèvent de l'aléatoire, donc de l'incertitude, ont besoin d'un cadre de vérification de la définition de la probabilité d'un événement. À cet effet, et faisant un parallèle entre la géométrie et la probabilité, Henry a mis l'accent sur la modélisation en probabilités, option faite par les programmes français depuis 2001. L'outil de conviction de la modélisation étant la simulation, les exemples de simulations proposés dans les travaux de Henry constituent d'importantes ressources pour les enseignants.

Les travaux de Parzysz complètent ceux de Henry dans le domaine de la modélisation et de la simulation en probabilités. Tout en justifiant le bien-fondé de la modélisation, Parzysz a clarifié le processus de la modélisation en probabilités en distinguant deux étapes de la modélisation, à savoir : une première étape qui passe de la statistique descriptive (SD) à un premier paradigme probabiliste (P_1), où le modèle est identifié ; et la seconde qui passe de (P_1) à un deuxième paradigme probabiliste (P_2), où les conjectures sont élaborées pour la confirmation ou non du modèle. L'exemple du cauri comme un générateur de hasard et des exemples de simulations sont proposés par Parzysz dans ses travaux. De son côté, Dantal a relevé le fait de partir de l'observation de la réalité pour conduire les élèves vers le modèle comme une difficulté majeure de l'enseignant dans l'application du processus de modélisation.

Jean-Claude Girard relève dans ses articles présentés plus haut la confusion entre la réalité et le modèle dans le processus de modélisation en probabilités. Il fait observer que l'option de l'approche fréquentiste depuis les programmes de 1991 est une volonté de la noosphère française de faire un lien entre la statistique et les probabilités. Il note également que la simulation qui consiste à conjecturer la loi de probabilité associée à une expérience aléatoire mathématique modèle ne saurait être la démonstration de cette loi. Ayant évoqué les difficultés de tous genres, liées à l'enseignement et l'apprentissage des probabilités et notamment celles liées à la simulation, il plaide pour que l'enseignement des probabilités s'étale sur une longue période comme cela se fait déjà en géométrie.

2. Les travaux relatifs à l'apprentissage des probabilités

L'étude de l'apprentissage des mathématiques en général a été d'abord une préoccupation des psychologues cognitivistes dans la période piagétienne et au début de la période post-piagétienne (Martin et Thibault, 2016). Dès la naissance de la didactique au début des années 1980, les chercheurs en didactique ont pris le relais de cette étude dans un cadre plus adéquat et plus formel, confirmant ou améliorant d'une part les résultats obtenus par les psychologues, et les complétant d'autre part par des résultats à caractère spécifiquement didactique. Nous présentons dans cette section l'essentiel des travaux relatifs à l'apprentissage des probabilités, réalisés essentiellement par Piaget et Inhelder (1951), Fischbein et ses collaborateurs (1967, 1969, 1971, 1984), Sylvette Maury (1985), Lecoutre et Durand (1988).

2.1. Les travaux de Piaget relatifs à l'idée de hasard et de probabilité chez l'enfant

La période piagétienne, allant de 1950 à 1970, est marquée dans le domaine des probabilités par les travaux de Piaget et Inhelder (1951). Ils ont notamment étudié les conceptions probabilistes chez l'enfant qui n'a pas reçu d'enseignement en probabilités. D'abord, dans le développement de la logique chez l'enfant, Jean Piaget (1896-1980) a distingué quatre principaux stades : le stade sensori-moteur (de la naissance à 2 ans), le stade préopératoire (2 ans à 6-7 ans), le stade des opérations concrètes (6-7 ans à 11-12 ans) et le stade des opérations formelles (11-12 ans à 14-15 ans). Ces stades se caractérisent par des plans de connaissances distincts et des degrés distincts de complexité des activités cognitives. Par la suite, Jean Piaget et Bärbel Inhelder (Ibid.) ont fait une série d'expériences pour mettre en évidence une corrélation entre la formation des idées probabilistes et les principaux stades de développement

de l'enfant. D'après leurs travaux, l'appréhension du hasard et de probabilité chez l'enfant est fonction de son développement intellectuel.

2.1.1. Le hasard et la probabilité chez l'enfant du stade préopératoire

Lors de la période préopératoire, l'enfant ne distingue pas le possible du nécessaire, ne différencie pas le déductible du non déductible. Il n'appréhende ni la vraie nature du mélange ou du brassage, ni l'irréversibilité des processus fortuits. La prévision des cas fortuits isolés se base sur les ressemblances ou en tenant compte des plus grandes fréquences observées. Par exemple, lorsqu'il est en face de deux éventualités A et B telles que A soit la plus fréquente, il choisira B pour compenser ou A pour confirmer. À ce stade, l'enfant n'a pas la notion de hasard : « *Il n'y a dès lors ni hasard ni probabilité, faute d'un système de référence consistant en opérations déductives* » (Piaget et Inhelder, 1951, p. 197). Tout est miracle pour l'enfant à des degrés divers.

C'est par rapport à ce stade qu'on pourrait dire qu'il existe une structure mentale propre à l'enfant qui a les mêmes caractéristiques que la « mentalité primitive » comme le précisent ici les deux auteurs.

Il est deux sortes de terrains psychologiques normaux, auxquels les notions de hasard et de probabilisme paraissent plus ou moins étrangères : la mentalité primitive et celle du petit enfant (p. 8).

Par rapport à la quantification des chances, on note l'inexistence de jugement probabiliste, caractérisée par l'absence de mise en relation d'un ensemble et ses parties. Par exemple, dans une collection composée d'un seul élément A et de deux éléments B, l'enfant juge de façon certaine que la chance de tirer A est plus forte que celle de tirer B, puisqu'il y a précisément un seul A et qu'on veut en tirer un.

Les caractéristiques du stade préopératoire par rapport au hasard et à la probabilité, telles qu'elles sont observées par Piaget, ne pourraient pas favoriser un enseignement du calcul des probabilités à l'enfant de ce stade de développement.

2.1.2. Le hasard et la probabilité chez l'enfant du stade des opérations concrètes

Au stade de développement de l'intelligence opératoire concrète, la nature du mélange ou de brassage est acquise et l'irréversibilité des processus aléatoires est appréhendée. Il y a différenciation entre le nécessaire et le possible par antithèse. La manifestation d'un début de raisonnement inductif diminue les prévisions empiriques des cas fortuits. L'enfant de ce stade

a conscience du « miracle » que constituerait un phénomène très peu probable et est préoccupé par la recherche d'une cause pouvant expliquer le phénomène. À ce stade, l'idée de hasard est conçue comme ce qui résiste aux opérations et est découverte par opposition avec la nécessité déductive.

L'apparition des opérations concrètes rend compte de la découverte du hasard, par antithèse avec la nécessité déductive, tandis que l'absence d'opérations formelles explique le manque de synthèse entre le hasard et les mécanismes opératoires, sous la forme d'un système de composition probabiliste (Piaget et Inhelder, 1951, p. 211).

Pour la notion de probabilité, l'enfant du stade opératoire concret a des jugements probabilistes basés par exemple sur la comparaison correcte des chances lorsque l'un des termes est invariant. Toutefois l'appréhension des données proportionnelles reste impossible à ce stade (Ibid.).

Un enseignement des probabilités à l'enfant du stade de développement des opérations concrètes pourrait être envisagé dans le but d'appréhender les effets du hasard en visant des éventualités et des événements moins probables, également probables, plus probables.

2.1.3. Le hasard et la probabilité chez l'enfant du stade des opérations formelles

Au troisième stade de l'intelligence opératoire formelle, le hasard découvert au stade des opérations concrètes est assimilé en tant qu'un obstacle que l'esprit cherche à dépasser. Le nécessaire et le possible sont nettement distingués. La composition probabiliste naît sous le simple principe de la possibilité de déterminer l'ensemble des cas fortuits, pourtant indéterminés ou imprévisibles.

Bref, au lieu de conserver au hasard son caractère imprévisible et incompréhensible en soi, l'esprit le traduit sous la forme d'un système d'opérations, mais incomplètes et effectuées elles-mêmes sans ordre : le hasard subsiste ainsi, mais, se déplaçant sur le terrain des opérations, il gagne en intelligibilité (Piaget et Inhelder, 1974, p. 213).

Le jugement de probabilité découle de la synthèse entre le hasard et les opérations conduisant à la détermination des cas favorables et des cas possibles même s'ils sont indéterminés. La probabilité des cas isolés et l'appréhension de la loi des grands nombres caractérisent le troisième stade de développement de l'enfant chez Piaget.

Comme on le constate, l'enfant au stade de développement des opérations formelles, non seulement devrait avoir une conception acceptable du hasard, mais il serait également capable

de supporter un enseignement sur le calcul des probabilités basé sur les deux premiers principes de Laplace et sur la probabilité fréquentielle. En un mot, l'étude de tout le calcul élémentaire des probabilités peut être proposée aux enfants de ce stade.

2.1.4. Synthèse

En somme, selon Piaget et Inhelder, l'appréhension du hasard et de la probabilité se met en place progressivement du stade de l'intelligence opératoire concrète à celui de l'intelligence opératoire formelle. À la période préopératoire, le hasard ne fait pas partie des concepts de l'enfant, qui ne différencie pas le déductible et le non déductible. Son incapacité à distinguer le tout et ses parties a pour conséquence l'impossibilité de la quantification des chances. Selon Piaget, le hasard et la probabilité sont donc inexistantes à ce stade de développement de l'enfant. Au stade de développement des opérations concrètes, l'enfant est bien conscient de l'existence du hasard, qu'il admet par opposition à la nécessité opératoire. La quantification de chances dans certains cas indique l'existence d'une idée de probabilité chez l'enfant de ce stade, qui n'arrive pas toutefois à reconnaître les grandeurs proportionnelles. Avec l'apparition des opérations formelles au troisième stade de développement, on note chez l'enfant une synthèse entre le hasard et les opérations, favorisant une prédisposition à appréhender le hasard et la probabilité dans toutes ses dimensions.

Ces résultats de Piaget et Inhelder sont confirmés plus tard par Fischbein et collaborateurs (1969, 1971) et aussi par Maury (1985), qui ont cependant mis l'accent sur le rôle de l'intuition dans la construction de la pensée probabiliste. Il est à remarquer que la théorie piagétienne a été critiquée par certains penseurs dont Vygotsky qui reproche à cette théorie d'avoir sous-estimé le rôle du langage dans l'élaboration des structures de l'intelligence (Yvon et Zinchenko, 2011). Certains ont remis en cause la linéarité du développement de l'intelligence de l'enfant chez Piaget. Malgré ces critiques d'ordre général, les travaux de Piaget comptent parmi les références par rapport à l'idée de hasard et de probabilité chez l'enfant.

2.2. Les travaux de Fischbein relatifs aux intuitions probabilistes

S'opposant a priori à l'idée de Piaget selon laquelle l'acquisition des concepts probabilistes est évolutive par rapport à la périodisation de l'enfance qu'il a proposée, Fischbein a réalisé plusieurs études pour mettre l'accent sur le rôle des intuitions dans l'apprentissage des probabilités. Ses travaux ont été à cheval entre la période piagétienne et celle post-piagétienne. L'essentiel des travaux de Fischbein peut être retrouvé notamment dans les articles : « L'intuition probabiliste chez l'enfant » (Fischbein, Pampu et Mînzat, 1967), « Intuitions

primaires et intuitions secondaires dans l'initiation aux probabilités » (Fischbein, Bärbat et Mînzat, 1971) et « Does the teaching of probability improves probabilistic intuitions ? » (Fischbein et Gazit, 1984).

Dans leur article « L'intuition probabiliste chez l'enfant », Fischbein, Pampu et Mînzat ont étudié l'intuition probabiliste chez les enfants de 6 à 14 ans n'ayant reçu aucun enseignement sur les probabilités. Il s'agit pour eux de déterminer l'âge à partir duquel les phénomènes aléatoires peuvent être compris par l'enfant. Leur travail dans cet article s'inscrit dans le cadre de la vérification des résultats des travaux de Piaget selon lesquels l'idée de probabilité chez l'enfant n'est effective qu'au cours du stade des opérations formelles. La méthodologie a consisté à soumettre des enfants de 6 à 14 ans à des situations aléatoires d'équiprobabilité ou non, pour lesquelles les enfants devraient montrer leur rapport personnel initial à la notion de fréquence relative. Les enfants sont répartis en trois groupes suivant leurs âges, à savoir : le groupe des préscolaires (5 ans 10 mois à 7 ans 6 mois), le groupe des élèves de la classe I^{ère} (7 ans à 8 ans 3 mois) et de la classe III^e (9 ans 2 mois à 10 ans 5 mois) et le groupe des élèves de la classe VII^e (13 ans 5 mois à 14 ans 5 mois). Une première partie du dispositif expérimental est composé de cinq planchettes en bois I, II, III, IV, V comportant des canaux qui se ramifient par des bifurcations. L'élève devra laisser tomber une puis plusieurs billes dans les planchettes suffisamment inclinées pour prédire leurs sorties probables. Les planchettes I, II, III présentent des sorties équiprobables progressivement complexes, tandis que les deux autres planchettes possèdent des sorties non équiprobables. La deuxième partie du dispositif expérimental est composée d'un entonnoir débouchant sur quatre ramifications qui conduisent à des sorties de probabilités respectives $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{20}$ et $\frac{1}{24}$. Chaque élève est appelé à subir individuellement toutes les épreuves à partir des questions suivantes : « On va lâcher une bille par le canal principal, tu dois deviner par où elle va sortir » et « Si on lâche la bille plusieurs fois de suite, elle sortira autant de fois par tous les canaux ou elle ira plusieurs fois par certains et moins par d'autres ? ». Des justifications des réponses sont demandées aux élèves. Pour ce qui concerne les résultats, au niveau de l'épreuve I, dont la planchette comporte trois sorties simples équiprobables, la quasi-totalité des élèves ont exprimé que la bille sortira aussi bien par l'une que par l'autre des sorties. Ce qui signifie pour les auteurs de l'article que les enfants peuvent clairement distinguer l'incertitude de la certitude. Avec la deuxième planchette, munie de huit sorties équiprobables simples, le taux de réponses correctes à la première question a légèrement diminué par rapport à la première épreuve. Cependant, au niveau de la deuxième question concernant le lancer de plusieurs billes, le taux de réponses correctes s'est amélioré

considérablement et confirme les résultats obtenus au niveau de l'épreuve I. Bien que la planchette de l'épreuve III ait des sorties équiprobables, elle comporte une asymétrie contrairement aux planchettes des épreuves I et II. On a assisté aussi à une baisse du taux des réponses correctes à tous les niveaux d'âges. L'intuition de l'équiprobabilité constatée au niveau des expériences aléatoires simples n'a pas pu ainsi résister aux expériences aléatoires complexes. Pour chacune des trois épreuves précédentes, les meilleurs taux de réponses correctes sont obtenus chez les plus petits et notamment chez les préscolaires. Pour les épreuves IV et V dont les sorties de la planchette ne sont pas équiprobables, les plus forts taux de réponses correctes sont obtenus par les plus grands élèves, notamment par ceux des classes VI^e et VII^e. Dans la première de ces deux épreuves comportant chacune trois sorties, la probabilité de l'une des sorties est le produit de celles des deux autres, tandis que dans la deuxième, la probabilité d'une des trois sorties est la somme de celles des autres. Les meilleurs taux de réponses correctes sont constatés au niveau de l'épreuve IV, laissant penser aux auteurs que « *le théorème de l'addition est plus facilement compris par intuition que celui de la multiplication des probabilités* » (Fischbein, Pampu et Mînzat, 1967, p. 202). Concernant enfin la sixième épreuve, la plus complexe, ayant deux niveaux de ramifications, le taux de réponses correctes a augmenté suivant l'âge comme dans les deux épreuves précédentes et contrairement aux trois premières épreuves. Les auteurs expliquent l'intuition d'équiprobabilité des tout petits, d'une part, par leur faible capacité d'analyse, et d'autre part, par une confusion chez eux entre l'équiprobabilité et l'arbitraire subjectif. Du côté des plus grands, les taux relativement bas de réponses correctes au niveau des situations équiprobables peuvent se justifier par l'influence de l'école, orientée vers l'interprétation déterministe des phénomènes. Le fait que le taux de réponses correctes augmente avec l'âge dans les situations dans lesquelles les événements élémentaires ont des probabilités différentes s'explique pour les auteurs par deux facteurs. En premier lieu, l'incertitude dans ces situations n'est pas totale, en ce sens qu'elle est compensée par une certaine objectivité due aux ramifications qui sont à la base des probabilités inégales. En second lieu, il y a le niveau général de développement qui favorise de façon graduelle certaines constructions logiques, tel qu'il avait été préconisé par Piaget. En somme, le concept de fréquence relative est mieux compris par les tout petits lorsqu'il s'agit d'événements élémentaires équiprobables. Quant aux événements non équiprobables, ce sont les plus grands qui maîtrisent mieux le concept.

Dans l'article « Intuitions primaires et intuitions secondaires dans l'initiation aux probabilités », Fischbein et ses collaborateurs Bärbat et Mînzat ont étudié les rapports

personnels à des objets probabilistes en lien avec leurs réactions intuitives. Leur étude a pour fondement les recommandations de certains chercheurs à insister, en matière d'éducation intellectuelle, sur la nécessité de faire référence aux intuitions, qu'ils ont définies comme des connaissances immédiates fondées sur des habitudes mentales. Faisant l'hypothèse que l'enseignement d'une discipline donnée doit être précédé de la prospection du terrain intuitif, ils ont distingué deux sortes d'intuitions : les intuitions primaires, qui sont celles qui se manifestent en dehors d'un enseignement et les intuitions secondaires, qui sont construites dans le processus d'enseignement. Deux variables externes aux objets probabilistes ont été prises en compte dans leur étude. Il s'agit de l'âge des élèves et de leur niveau en mathématiques. La méthodologie utilisée consiste à soumettre à un test quatre groupes de 20 élèves n'ayant pas de connaissance préalable en probabilités. Le premier groupe est constitué des sujets dont l'âge est compris entre 12 ans 5 mois et 13 ans 8 mois ; le deuxième groupe comprend des sujets âgés de 14 ans 6 mois à 15 ans 5 mois ; le troisième groupe est un échantillon d'élèves de 16 ans à 16 ans 9 mois provenant de différents types d'écoles et de classes ; les élèves du quatrième groupe diffèrent du troisième groupe par leur bon niveau en mathématique. Le questionnaire administré aux sujets est une succession de questions principales et de questions auxiliaires. Les questions auxiliaires interviennent lorsque le sujet n'arrive pas à donner la réponse correcte à une question principale. Elles sont destinées à aider l'élève à corriger éventuellement son erreur. Le questionnaire comporte quatre thèmes intitulés respectivement : la probabilité comme mesure de la chance, la règle de multiplication des probabilités, le jeu de dés, le problème des pommes. Au niveau du thème « la probabilité comme mesure de la chance », Fischbein et ses collaborateurs sont arrivés à la conclusion qu'il existe à tous les niveaux un terrain intuitif favorable au concept de chance, au concept de mesure des chances, à l'utilisation des valeurs 1 et 0 pour exprimer les chances des événements certain et impossible, au concept de probabilité dans les cas d'équiprobabilité. À ce niveau, il n'y a donc pas une évolution des intuitions due à l'âge des élèves. Les questions du thème « la règle de multiplication des probabilités » sont relatives au calcul des probabilités d'obtention de billes noires dans un tirage successif sans remise de 2 ou 3 billes dans une boîte contenant une bille blanche et une bille noire. Dans le cas de tirage de 2 billes, cette règle de calcul n'apparaît que chez une minorité d'élèves du quatrième groupe constitué des élèves les plus âgés ayant un bon niveau en mathématique. Après des apports de l'expérimentateur à travers les questions auxiliaires, la majorité des élèves des quatre groupes ont montré une compréhension de la règle dans le cas du tirage de 3 billes. Au niveau du deuxième thème, l'âge n'a donc pas été déterminant dans l'acquisition de la règle de multiplication des probabilités. Concernant le troisième thème « le

jeu de dés », il a été question essentiellement de comparer la probabilité d'obtenir le couple (5, 6) dans le lancer d'un dé deux fois de suite et la probabilité d'obtenir la paire {5, 6} dans un lancer simultané de deux dés. Ce n'est qu'après les questions auxiliaires que l'ensemble des quatre groupes a pu réussir la comparaison, et ceci indépendamment des âges. Quant au quatrième thème « le problème des pommes », il y a été question de calculer la probabilité de tirer avec remise deux pommes mûres et une non mûre dans une population contenant 90% de pommes mûres et 10% de pommes non mûres. C'est aussi après des apports de l'expérimentateur que l'ensemble des groupes s'est rendu compte intuitivement que le résultat s'obtient par addition des probabilités des trois événements. Ici aussi, l'âge n'intervient pas dans la réussite ou non de l'exercice.

En somme les intuitions primaires ont été suffisantes pour l'appréhension des concepts de chance et de mesure de chance, tandis le calcul des probabilités par les règles de multiplication et d'addition peut être acquis grâce aux intuitions secondaires. Les résultats obtenus le sont indépendamment des âges, tel que les auteurs de l'article le précisent dans leurs discussions (Fischbein, Bärbat et Mînzat, 1971, p. 278).

En ce qui concerne le fond intuitif, on ne constate pas d'améliorations systématiques et spontanées dues à l'âge, ce qui nous semble essentiel pour tout le processus éducatif. Certains progrès dus à l'âge se manifestent dans la capacité de transfert, dès qu'une règle de calcul a été apprise pour une situation donnée.

Au terme de cette étude, Fischbein et ses collaborateurs ont fait l'hypothèse que les résultats précédemment obtenus par certains psychologues concernant la manifestation spontanée d'une intuition probabiliste restent valables pour les concepts de chance et de mesure de chance.

Dans leur article « Does the teaching of probability improve probabilistic intuitions ? », Fischbein et Gazit (1984) ont évalué l'impact indirect de l'enseignement des probabilités sur les intuitions probabilistes fausses des élèves. Pour ce faire, ils ont administré des questionnaires A et B à deux groupes d'élèves de plusieurs niveaux (niveau 5, niveau 6 et niveau 7). Le premier groupe, expérimental, est composé d'élèves ayant reçu un enseignement des probabilités portant sur les concepts d'événement, de chance, de probabilité, de fréquence relative et sur les relations entre ces concepts. Le deuxième groupe est un groupe témoin, formé d'élèves n'ayant pas reçu d'enseignement en probabilité. Le questionnaire A, administré uniquement aux élèves du groupe expérimental, est destiné à vérifier ce que les élèves ont assimilé après l'enseignement reçu. Quant au questionnaire B, il est administré aux deux

groupes et a pour but d'identifier les intuitions probabilistes des élèves. Au niveau des trois premières questions du questionnaire A, où il est question de donner des exemples d'événement, d'événement certain et d'événement impossible, la majorité des élèves de chaque niveau a pu être capable de donner des exemples corrects, avec une croissance du pourcentage de réponses correctes par rapport au niveau d'étude. La question 4 vise à vérifier la capacité des élèves à calculer des probabilités d'événements indépendants et non indépendants dans un contexte de tirage d'une bille d'un sac qui en contient de deux couleurs différentes. Juste une minorité des plus jeunes élèves (autour du quart) ont pu montrer un rapport personnel conforme aux calculs requis, tandis que le pourcentage des réponses correctes est suffisamment élevé chez les plus grands. Trois types de rapports non conformes sont à noter chez les plus petits élèves : des élèves ont tendance à établir un lien entre les deux couleurs, de sorte à considérer une couleur comme le nécessaire et l'autre comme le possible ; certains considèrent que la probabilité d'un événement est une fraction de la forme $\frac{1}{n}$; d'autres encore oublient de réduire le nombre de billes dans le cas de tirage successif sans remise. Pour les auteurs de l'article, ces difficultés des enfants peuvent s'expliquer d'une part par une insuffisance de développement intellectuel et d'autre part par le fait qu'ils sont intuitivement limités à comparer un ensemble d'objets à un autre. Pour la question 5, qui porte sur le lancer d'un dé cubique, les taux de réponses correctes ont évolué suivant l'âge : les plus petits du niveau 5 ont réussi le calcul des probabilités demandées à un taux relativement faible, et les plus grands du niveau 7 ont montré un rapport adéquat au calcul de probabilité dans le contexte d'un lancer de dé équilibré. Selon les auteurs, cela suppose qu'à l'âge de 13-14 ans, l'enfant est capable de comprendre le concept de probabilité d'un événement. Au niveau de la question 6 portant sur le lancer simultané de deux dés équilibrés, les pourcentages de calculs corrects de probabilités, bien qu'évoluant en fonction de l'âge, sont relativement faibles. Pour les auteurs, ces taux faibles peuvent s'expliquer par le fait que les élèves ne se soient pas suffisamment exercés sur le dénombrement résultant du produit cartésien de deux ensembles finis. Ce qui leur fait dire que chez les enfants en général et chez ceux de 11-12 ans en particulier, l'approche additive dans le dénombrement est plus intuitive que celle multiplicative. La question 7 du questionnaire pose le problème de détermination du nombre total de plusieurs catégories d'objets connaissant la proportion de l'une de ces catégories. Les taux de réussite quoique bas ont évolué en fonction de l'âge avec moins de 2% pour les plus petits. Dans les questions 8 et 9, il est question de donner des exemples d'événements associés aux expériences aléatoires consistant à lancer un dé cubique respectivement une seule fois et deux fois. Les résultats sont semblables à ceux des trois

premières questions du questionnaire. Ainsi la plupart des élèves de tous les niveaux ont pu donner des exemples corrects d'événement, d'événement certain, d'événement impossible. Toutefois les pourcentages des exemples corrects d'événements complexes sont les plus bas, avec les meilleurs pourcentages pour les élèves de niveau le plus élevé. En résumé, pour le questionnaire A, administré uniquement aux élèves ayant reçu un enseignement en probabilité selon leurs niveaux respectifs, les plus petits élèves du niveau 5 (10-11 ans) ont été notamment capables de donner des exemples d'événement, d'événement certain et d'événement impossible, mais n'ont pas pu réussir les calculs de probabilités. Quant aux plus grands, environ deux tiers des élèves du niveau 6 et sept huitièmes de ceux du niveau 7 (12-13 ans) ont été en mesure de donner des réponses correctes pour la plupart des questions du questionnaire A. L'administration de ce questionnaire a surtout permis l'observation chez les élèves d'un biais intuitif affectant leur capacité à produire des exemples d'événements. Il s'agit notamment du fait que la notion d'événement élémentaire se limite pour les enfants aux expériences aléatoires dont les éventualités sont constituées d'un seul élément, tandis que la notion d'événement non élémentaire est intuitivement liée aux expériences aléatoires conduisant à des éventualités formées de plusieurs éléments. L'impact de l'étude des concepts probabilistes sur l'intuition des élèves est étudié par les auteurs de l'article à travers le questionnaire B, administré à la fois aux élèves du groupe expérimental qu'à ceux du groupe témoin. La question 1 de ce questionnaire vise à vérifier la capacité des élèves à trouver des exemples d'événements certains. Elle consiste précisément à trouver le nombre de billes à tirer dans un sac, qui en contient neuf dont quatre rouges, trois vertes et deux blanches, pour qu'il y ait au moins une bille de chaque couleur. La réponse correcte est obtenue plus du côté du groupe expérimental que du groupe témoin, mais le pourcentage de réponses correctes évolue dans les deux groupes suivant l'âge. La capacité des élèves à donner des exemples d'événements certains semble ne pas dépendre de l'instruction, mais plutôt de l'âge. La question 2 du questionnaire B demande l'opinion des élèves sur la conception selon laquelle entrer en classe avec le pied droit peut augmenter la chance d'avoir de bonnes notes. Cette conception est majoritairement et spontanément rejetée par les élèves des deux groupes avec une évolution suivant l'âge du pourcentage de rejet dans le groupe expérimental. Le pourcentage du rejet est néanmoins plus élevé dans le groupe témoin chez les élèves de niveau 5. Ce qui pourrait laisser comprendre que l'enseignement des probabilités a un effet négatif sur l'estimation des probabilités chez les enfants. Dans la question 3, il a été demandé aux élèves si dans un jeu de loterie on peut considérer un ensemble de numéros qui a fait gagner une fois comme celui qui porte chance. À ce niveau, le pourcentage de rejet, quoi qu'évoluant en fonction de l'âge dans les deux groupes,

est bas, dépassant à peine les 50% chez les plus grands élèves du groupe expérimental. L'âge semble être le facteur principal du rejet de cette conception. Dans la question 4 du questionnaire, il est demandé l'opinion des élèves sur deux attitudes contraires dans un jeu de loterie. La première attitude consiste à dire qu'il y a plus de chance à gagner avec une suite de nombres consécutifs, tandis que la seconde consiste à affirmer qu'il n'y a pas de chance de gagner avec des nombres consécutifs. Dans le groupe témoin, le pourcentage de rejet de ces deux attitudes décroît en fonction de l'âge, alors que cette tendance est inversée dans le groupe expérimental. Ainsi, la conception selon laquelle dans un jeu de chance, la réalisation d'une suite régulière de nombres est moins probable que celle d'une suite irrégulière de nombres, semble être un biais intuitif, qui ne disparaît pas avec l'âge, mais plutôt avec l'instruction en probabilité. Concernant la question 5 du questionnaire B, les élèves doivent donner leur opinion par rapport à la conception selon laquelle on a plus de chance de gagner un jeu que l'on avait perdu plusieurs fois. Dans les deux groupes, les pourcentages de rejet de cette conception erronée sont en croissance par rapport au niveau, avec les plus grands pourcentages chez les plus grands. Selon l'analyse des auteurs de l'article, l'âge, de façon directe, et l'instruction, de façon indirecte, sont les facteurs principaux qui permettent de surmonter cet obstacle. La question 6 vise à comparer les probabilités de tirer une bille noire dans deux sacs contenant l'un 100 billes blanches et 50 noires, et l'autre 200 blanches et 100 noires. Les pourcentages de réponses correctes ont évolué suivant l'âge dans les deux groupes avec les meilleurs pourcentages pour le groupe témoin, ce qui laisse comprendre que l'âge joue un rôle important dans l'appréhension de l'égalité des deux probabilités. L'instruction en probabilité ayant plutôt un effet négatif sur cette appréhension. La comparaison de deux probabilités égales est également visée dans les deux dernières questions du questionnaire B. Les réactions des élèves ont confirmé les résultats obtenus au niveau de la question 6.

Selon la conclusion des auteurs de l'article, concernant les effets directs de l'enseignement des probabilités, l'assimilation évolue effectivement suivant l'âge pour la plupart des concepts probabilistes enseignées, quand on considère les élèves des niveaux 6 et 7. Pour les élèves du niveau 5, il semble que la plupart des notions abordées leur ont été trop difficiles. Cependant ils ont été capables de comprendre les notions relatives aux événements. D'un autre côté, l'apprentissage des probabilités a eu un effet indirect positif sur les conceptions erronées des élèves et ceci en fonction de l'âge chez les élèves du niveau 6 (11 – 12 ans) et ceux du niveau 7 (12 – 13 ans). Toutefois ceux qui ont reçu un enseignement en probabilités ont estimé à tous les niveaux que la connaissance et l'intelligence augmentent la probabilité de

gagner à un jeu de hasard. Aussi sont-ils les plus nombreux à n'avoir pas pu résoudre les problèmes de proportionnalité. Selon les auteurs, les résultats de leur recherche conduisent à trois implications didactiques, qui sont : la possibilité de commencer l'enseignement du calcul des probabilités à partir du niveau 6 ou 7 ; le franchissement des obstacles relevant des préjugés et des superstitions par l'enseignement des probabilités ; la correction par des exercices de l'effet négatif de l'enseignement des probabilités sur la résolution des problèmes de proportionnalité.

2.3. Les travaux de Maury et de Lecoutre

À la naissance de la didactique dans les années 1980, Sylvette Maury a entre autres étudié, chez les élèves, l'indépendance d'événements résultant d'expériences aléatoires indépendantes, tandis que Lecoutre et Durand ont travaillé sur le biais d'équiprobabilité. Nous résumons dans les lignes qui suivent ces deux travaux.

Dans l'article « Influence de la question dans une épreuve relative à la notion d'indépendance », Maury (1985) a étudié d'une part, la réaction des élèves par rapport à la reconnaissance d'événements associés à des expériences aléatoires indépendantes, et d'autre part, l'influence de la forme de la question posée sur ces réactions. L'expérience est faite sur des élèves en classe de quatrième (13 – 14 ans) et de seconde (15 – 16 ans). Le problème auquel les élèves ont été soumis se précise comme suit (Maury, 1985, p. 286).

Une personne jette 3 fois de suite la même pièce. Elle obtient dans l'ordre les résultats suivants : face, pile, pile. Elle jette la pièce une quatrième fois.

Ce problème dans lequel il est demandé aux élèves de donner le résultat du quatrième lancer, avait été étudié par Cohen et Hansel en 1955. Pour sa part, afin d'étudier l'influence de la manière de poser la question sur la réaction des élèves, Maury l'a posée sous les quatre formes ci-après (ibid.).

Modalité 1 : Penses-tu que le quatrième résultat a plus de chances d'être pile ou d'être face ?

Modalité 2 : (1) Penses-tu que le quatrième résultat a plus de chances d'être pile ? (2) Penses-tu que le quatrième résultat a plus de chances d'être face ? (3) Penses-tu que le quatrième résultat a autant de chances d'être pile que d'être face ?

Modalité 3 : Penses-tu que le quatrième résultat a plus de chance d'être pile ou d'être face ou qu'il y a autant de chances d'être pile que face ?

Modalité 4 : Que penses-tu du quatrième résultat ?

En général, les élèves interrogés ont massivement reconnu l'indépendance des expériences en contradiction avec les résultats obtenus par Cohen et Hansel en 1955. Le niveau d'étude n'a pas semblé avoir d'effet significatif sur les résultats. Quant aux formes de la question posée, ce sont les modalités 2 et 3, les QCM, qui ont connu les plus forts taux de réponses correctes d'équiprobabilité (90% et 91%). Les modalités 1 et 4, qui sont des questions ouvertes, ont donné des taux équivalents de réponses correctes (61% et 56%). Sur le plan qualitatif, les arguments spontanés donnés par les élèves interrogés ont permis à Maury d'identifier quatre catégories de réponses, qu'elle a nommées respectivement « le hasard », « la mécanique », « l'équilibre, le partage équitable » et « probabilité et fréquence relative ». La catégorie « le hasard » comprend les réponses où l'indépendance des expériences aléatoires est simplement justifiée par le fait que le phénomène est aléatoire. Les élèves du groupe « la mécanique » ont fait allusion à la force qu'exercerait le lanceur de dé pour justifier que le résultat peut être pile ou face. La catégorie « l'équilibre ou partage équitable » comprend les élèves qui choisissent l'éventualité non prédominant « face » afin de réaliser l'équilibre au niveau des résultats des quatre lancers. Dans la catégorie « probabilité et fréquence relative », les élèves ont proposé l'éventualité la plus fréquente parmi les résultats des trois premiers lancers.

Dans l'article « Jugements probabilistes et modèles cognitifs : étude d'une situation aléatoire », Lecoutre et Durand (1988) ont étudié le biais d'équiprobabilité chez les sujets de divers niveaux en mathématiques à partir du problème suivant (ibid., p. 357).

On lance en même temps deux dés ; on compare les deux résultats : Résultat 1 (R_1) « on obtient un 5 et un 6 », Résultat 2 (R_2) « on obtient deux fois 6 » ; on pose la question suivante : « pensez-vous qu'il y a : Autant de chances d'obtenir chacun des deux résultats ? Plus de chances d'obtenir l'un des deux résultats, et dans ce cas, lequel (R_1 ou R_2) ? Vous est-il impossible de vous prononcer, et dans ce cas, pourquoi ? »

Dans les travaux antérieurs de Lecoutre et Durand, il est observé qu'environ deux étudiants ou lycéens sur trois estiment que les résultats R_1 et R_2 sont équiprobables, alors que R_1 est deux fois plus probable que R_2 . C'est une distorsion dans les jugements probabilistes désignée sous le vocable de « biais d'équiprobabilité ». Dans leur présent article, Lecoutre et Durand (1988) ont notamment mené dans un premier temps des expériences dans le but de cerner l'origine du biais d'équiprobabilité. Ils ont ensuite réalisé une expérience pour formaliser des modèles de fonctionnement cognitif, et ont enfin montré comment il est possible de définir des modes d'apprentissages probabilistes en lien avec les modèles de fonctionnement cognitifs

identifiés. Concernant l'étude de la résistance du biais d'équiprobabilité, les auteurs ont agi sur plusieurs facteurs en administrant le problème présenté plus haut à plusieurs types d'élèves. Il y a notamment comme facteurs : la formation en probabilité (aucune, début et approfondie), les types d'études secondaires (littéraire et scientifique), la pratique de jeux de hasard (aucune, peu et beaucoup) et le sexe (garçons et filles). Aucun de ces facteurs n'a permis une véritable réduction du biais d'équiprobabilité en dehors d'une légère augmentation du taux de réponses correctes, dépassant à peine les 50% chez les sujets n'ayant reçu aucune formation en probabilité et chez ceux qui pratiquent beaucoup de jeux de hasard. Pour le facteur sexe, les garçons résistent mieux que les filles, tandis que les littéraires et les scientifiques ont des taux de réponses correctes très voisins. Il y a donc une résistance considérable du biais d'équiprobabilité. Pour étudier la formation du fonctionnement des modèles cognitifs relatifs au problème étudié, Lecoutre et Durand sont partis des arguments spontanés des sujets ayant estimé que les deux événements sont équiprobables pour modifier le paradigme expérimental, en demandant explicitement que les élèves justifient leurs propositions de réponses. Cette nouvelle expérience a consisté à soumettre 342 lycéens âgés de 14 à 18 ans, n'ayant reçu aucun enseignement en probabilité, à un test comportant les trois problèmes ci-après (Lecoutre et Durand, 1988, p. 362).

P₁) On lance simultanément un dé rouge et un dé bleu et on considère les événements R₁ : « on obtient un 5 avec le dé rouge et un 6 avec le dé bleu » et R₂ : « on obtient un 6 avec le dé rouge et un 6 avec le dé bleu ».

P₂) On lance simultanément un dé rouge et un dé bleu et on considère les événements R₁ : « on obtient un 6 avec le dé rouge et un 5 avec le dé bleu » et R₂ : « on obtient un 6 avec le dé rouge et un 6 avec le dé bleu ».

P₃) On lance simultanément deux dés jaunes et on considère les événements R₁ : « on obtient un 5 et un 6 » et R₂ : « on obtient deux fois 6 ».

Pour chacun de ces problèmes administrés l'un après l'autre, les élèves doivent choisir en se justifiant l'une des réponses : (a) il y a autant de chances d'obtenir chacun des deux résultats ; (b) il y a plus de chances d'obtenir le résultat R₁ ; (c) il y a plus de chances d'obtenir le résultat R₂ ; (d) il est impossible de se prononcer.

De l'analyse des réponses suivies de justifications proposées par les élèves, Lecoutre et Durand ont dégagé cinq modèles cognitifs en probabilités nommés respectivement : « doubles plus rares », « condition complémentaire », « doubles plus faciles », « hasard » et « une chance par résultat ». Le modèle « doubles plus rares » regroupe les élèves selon lesquels le résultat R₁

est plus probable que le résultat R_2 dans les problèmes P_1 et P_2 . Ils le justifient par le fait qu'il est rare d'obtenir deux fois le même résultat avec deux dés. Ce type de raisonnement les conduit à une réponse correcte du problème P_3 , bien qu'ils n'aient pas une appréhension correcte du problème. Selon le modèle « condition complémentaire », on a plus de chances d'obtenir le résultat R_2 pour la seule raison qu'on n'a pas besoin de tenir compte de la couleur pour obtenir deux fois 6, alors que pour le résultat R_1 , il aura en plus des numéros, à faire attention aux couleurs des dés. Ce type de raisonnement conduit à une réponse incorrecte d'équiprobabilité pour le problème P_3 , pour lequel les deux dés sont de même couleur. Le modèle « doubles plus faciles » donne également plus de chances de réalisation de l'événement R_2 pour la simple raison que les doubles sont plus fréquents. C'est naturellement que les élèves de ce modèle cognitif donnent au niveau du problème P_3 , la réponse incorrecte selon laquelle l'événement R_2 est plus probable que l'événement R_1 . Les élèves identifiés dans le modèle « hasard » ont donné la réponse correcte d'équiprobabilité pour les deux premiers problèmes. Leurs justifications se résument à ce que les événements à caractères aléatoires sont équiprobables. Ce modèle est celui qui contribue massivement au biais d'équiprobabilité dans le problème P_3 . Selon le modèle « une chance par résultat », modèle correct et très minoritaire, les deux événements R_1 et R_2 sont équiprobables dans les problèmes P_1 et P_2 et l'événement R_1 est plus probable que l'événement R_2 dans le problème P_3 . La justification des élèves de ce modèle est qu'il est associé une chance à chaque résultat. Il ressort de l'analyse des modèles identifiés que toutes les réponses correctes constatées au niveau du problème P_3 ne proviennent pas nécessairement d'un modèle cognitif pertinent. Pour Lecoutre et Durand, l'apprentissage des probabilités peut être basé sur l'identification des modèles cognitifs. Dans le cas où un modèle non pertinent est identifié chez un apprenant, un mode d'apprentissage adapté au modèle identifié pourrait être envisagé, à partir de la prise en conscience de l'apprenant par rapport à la non-pertinence du modèle qui le caractérise.

2.4. Bilan des travaux relatifs à l'apprentissage des probabilités

Les travaux que nous avons présentés dans cette section sont relatifs à l'apprentissage des probabilités. Ils portent notamment sur l'appréhension du hasard et des probabilités par l'enfant (Piaget et Inhelder, 1951), sur les intuitions des enfants en probabilités (Fischbein et al., 1967, 1971, 1984), sur la reconnaissance d'événements issus d'expériences aléatoires indépendantes (Maury, 1985) et sur l'étude du biais d'équiprobabilité (Lecoutre et Durand, 1988).

Pour Piaget, l'idée du hasard et de probabilité se met en place à partir du stade des opérations concrètes (6-7 ans à 11-12 ans) avec l'appréhension du hasard comme ce qui

s'oppose à la nécessité opératoire. Cette idée se renforce véritablement au stade de développement des opérations formelles (11-12 ans à 14-15 ans) avec une maîtrise des phénomènes aléatoires sur tous les plans.

Les travaux réalisés par Fischbein ont confirmé que dès l'âge de 6 ans, les intuitions primaires de l'enfant lui permettent de distinguer la certitude de l'incertitude, favorisant l'appréhension des concepts de chance et de mesure des chances. Quant au calcul des probabilités, il est en général acquis par un effet de l'enseignement pour les enfants relativement grands. Pour Fischbein et ses collaborateurs, les conceptions probabilistes erronées sont susceptibles d'être surmontées par l'enseignement des probabilités, qui peut être sérieusement envisagé à partir de 10 – 11 ans, en commençant par les concepts de base.

Par son étude de l'indépendance d'expériences aléatoires chez les élèves de 13 à 15 ans, Maury (1985) a distingué plusieurs catégories d'élèves, appelés à prédire le résultat d'un lancer d'une pièce de monnaie, après un certain nombre de lancers successifs de la pièce dont les résultats sont connus. Elle distingue notamment ceux qui reconnaissent que le résultat est imprévisible du fait que le phénomène est aléatoire, ceux pour qui le résultat découle de la force exercée pour lancer la pièce de monnaie, ceux qui choisissent le résultat non prédominant parmi les résultats des lancers précédents, et ceux qui optent pour le résultat dominant.

Lecoutre et Durand, dans leur étude portant sur le biais d'équiprobabilité, se sont intéressés à la comparaison des probabilités des événements $(6, 6)$ et $\{5, 6\}$ dans un lancer simultané de deux dés équilibrés numérotés chacun de 1 à 6. Ils ont identifié à cet effet cinq modèles cognitifs, dont notamment le modèle majoritaire « hasard », qui exprime le biais d'équiprobabilité, en ce sens que les élèves de ce modèle considèrent que les deux événements sont équiprobables. À l'opposé, il y a le modèle minoritaire et pertinent « une chance par résultat », dans lequel la probabilité de l'événement $\{5, 6\}$ est le double de celle de l'événement $(6, 6)$. Lecoutre et Durand préconisent un enseignement des probabilités basé sur les modèles cognitifs des élèves en vue d'œuvrer pour la modification de ceux qui ne sont pas pertinents.

3. Les travaux sur les ingénieries en vue de l'enseignement des probabilités

Depuis sa création jusqu'à nos jours, la didactique des mathématiques s'est dotée d'un outil de travail privilégié, l'ingénierie didactique, qui s'occupe de concevoir des modèles d'enseignement de savoirs mathématiques, depuis l'élaboration jusqu'à la réalisation en classe

dans des conditions devant garantir des apprentissages. Au-delà d'un modèle d'enseignement, l'ingénierie didactique désigne également aujourd'hui la méthodologie qui permet de concevoir et d'expérimenter des séquences d'enseignement dans des conditions précises.

De nombreuses ingénieries didactiques élaborées et expérimentées par des didacticiens ont permis d'asseoir des modèles efficaces d'enseignement dans divers domaines de savoirs mathématiques, y compris celui des probabilités, dans lequel Guy Brousseau en a réalisé une (Brousseau G., 1974, 1975, 2005). Avant Brousseau, Fischbein, Pampu et Minzat (1969) avaient réalisé aux cours élémentaires (10 à 13 ans) des expériences didactiques, que l'on peut assimiler à une ingénierie didactique, sur des concepts probabilistes dont notamment celui de la probabilité d'un événement. D'un autre côté, Joël Briand (2005) a partiellement repris dans l'un de ses travaux l'ingénierie de Guy Brousseau, tandis que Mounir Dhieb (2009) s'en est inspiré pour réaliser une ingénierie didactique dans le même domaine des probabilités. Nous présentons ici sommairement ces ingénieries didactiques.

3.1. Les expériences didactiques de Fischbein et collaborateurs

Fischbein E., Pampu I. et Minzat I. (1969) ont réalisé, leurs expériences didactiques en 1968, sur une population d'élèves âgés de 10 à 13 ans. Ils parlent bien d'expériences didactiques et non pas d'expérimentations comme dans le cas d'une ingénierie didactique au sens de Brousseau. Ce décalage de langage pourrait bien s'expliquer par leur période de recherche, qualifiée de piagétienne, et qui est dominée par des travaux du domaine de la psychologie (Martin et Thibault 2016). Ces expériences didactiques sont notamment organisées en cinq leçons en classe de IV^e (10 ans) pour ce qui concerne les notions de base du calcul des probabilités.

3.1.1. Première leçon

La première leçon, consacrée à l'explication de quelques notions de base, a permis d'aborder, la notion d'événement et plus spécifiquement les notions d'événement impossible, certain et possible, aussi bien à partir des exemples d'expériences aléatoires usuelles tel que le lancer d'un dé et le tirage de billes, qu'avec des exemples relatifs aux phénomènes naturels ou sociaux (Fischbein, Pampu. et Minzat, 1969).

On est passé ensuite aux notions d'événement certain, possible, impossible dont on donne facilement des exemples par des expériences simples, telles que le tirage d'une bille ou le lancement d'un dé. Dès que l'idée a été clairement saisie, on peut passer ensuite à des phénomènes naturels ou sociaux (p. 22).

Comme nous le constatons, la première leçon constitue globalement une phase d'institutionnalisation de la notion d'événement sans le passage par des phases d'action, de formulation et de validation. L'expérimentateur s'est servi des exemples pour définir la notion d'événement, nécessaire pour aborder la notion de probabilité, comme on le remarque aujourd'hui dans les manuels scolaires.

3.1.2. Deuxième leçon

Le concept de probabilité, présenté comme rapport du nombre de cas favorables au nombre de cas possibles, est abordé à la deuxième leçon à partir de la situation ci-dessous telle qu'elle est présentée dans l'article (Fischbein et al., 1969, p. 19).

On a présenté aux élèves deux tas d'enveloppes en leur disant que certaines contenaient des billets gagnants. De cette manière le tout (le nombre des enveloppes dans un tas) était donné, il ne devait pas être calculé. Le problème était de choisir le tas qui offrait les plus grandes chances de trouver un billet gagnant.

Avant de présenter les réactions des élèves face à cette situation, essayons de l'explicitier. D'abord il est clair qu'il est présenté aux élèves deux tas d'enveloppes dont certaines contiennent des billets gagnants. Par l'expression « le tout est donné, il ne devait pas être calculé », nous comprenons que le nombre total d'enveloppes de chaque tas est donné et qu'il ne revient donc pas aux élèves de le déterminer. Nous reformulons ainsi le problème ainsi qu'il suit.

Il est présenté aux élèves deux tas d'enveloppes dont certaines contiennent des billets gagnants. Les nombres d'enveloppes et de billets gagnants étant connus pour chaque tas, les élèves ont à choisir le tas offrant plus de chance qu'un billet gagnant y soit tiré.

En fait, Fischbein et ses collaborateurs ont préféré cette expérience à celle qui consiste à présenter aux élèves deux boîtes contenant des billes blanches et noires, pour laquelle les élèves, lors des expérimentations antérieures, avaient eu des difficultés à considérer la somme totale de billes par boîte pour calculer la probabilité qu'une bille blanche soit tirée. Plus précisément, lorsqu'on désigne par B_1 et N_1 les nombres respectifs de billes blanches et noires d'une des deux boîtes, et par B_2 et N_2 ces mêmes nombres pour la seconde boîte, il a été constaté la tendance générale des élèves à comparer $\frac{B_1}{N_1}$ et $\frac{B_2}{N_2}$ plutôt que de comparer $\frac{B_1}{B_1+N_1}$ et $\frac{B_2}{B_2+N_2}$.

Concernant les réactions des élèves, avec deux tas d'enveloppes ayant des chances égales qu'une bille blanche soit tirée, les nombres d'enveloppes et de billets gagnants de chaque tas étant écrits au tableau, des élèves prononçaient intuitivement l'égalité de chance à chaque fois.

Pour les auteurs, ceci s'explique par le fait que les élèves ont disposé les nombres d'enveloppes et de billets gagnants donnés en fractions qu'ils ont simplifiées par la suite. Cette même réaction est constatée chez les élèves pour des tas d'enveloppes ayant des chances inégales qu'une bille blanche soit tirée. Par la suite, les élèves sont amenés à donner la formule des « chances » de tomber sur un billet gagnant dans un tas d'enveloppe : « les chances s'obtiennent par la division du nombre de billets gagnants par le nombre d'enveloppes ». La deuxième leçon a pris fin sur la définition de la probabilité donnée par l'enseignant comme il suit.

La valeur ainsi obtenue s'appelle probabilité. Donc, en général, on obtient la probabilité en divisant le nombre des cas favorables (gagnants, espérés) par le nombre total des cas également possibles (Ibid, p. 19).

En guise de commentaire, nous avons la compréhension que la deuxième leçon a permis de découvrir la formule traduisant le premier principe de Laplace, à partir d'une situation, qualifiée par les auteurs de fait expérimental comme l'indique le passage suivant : « la deuxième leçon a été consacrée au concept mathématique de probabilité, déduit d'un fait expérimental » (Ibid, p. 18). Il nous semble d'une part que le fait expérimental évoqué par Fischbein correspond à la notion de situation didactique disposant d'un milieu matériel (les enveloppes), et d'autre part, le concept mathématique de probabilité doit être compris comme la formule classique du calcul des probabilités. Pour nous, le concept de probabilité évoque la stabilisation de la fréquence relative. Il peut être mis en évidence dans une démarche expérimentale basée sur l'approche fréquentiste de la probabilité. Revenons à la démarche utilisée pour faire découvrir aux élèves le premier principe de Laplace. Il nous semble qu'elle est plus basée sur l'intuition des élèves à former des fractions et à les simplifier, que sur l'exploitation effective du milieu matériel constitué des enveloppes. En fait, ce sont les nombres d'enveloppes et de billets gagnants, déjà écrits au tableau, qui ont servi à écrire les fractions représentant les proportions de billets gagnants dans les tas d'enveloppes. Il aurait été intéressant de proposer aux élèves de recueillir les données nécessaires des deux tas pour prendre la décision.

La situation des billes contenues dans des boîtes, évoquée par les auteurs, nous semble-t-il, est une preuve que les élèves ne maîtrisaient pas nécessairement au moment de l'expérimentation le calcul des proportions dans les cas complexes. Nous pouvons conclure en disant que dans la situation de la deuxième leçon, il est proposé aux élèves une tâche qui ne leur a pas permis d'interagir avec le milieu, et que pour les auteurs, le concept de probabilité dont il est question dans l'expérimentation est le premier principe de Laplace.

3.1.3. Troisième leçon

Au début de la troisième leçon, la formule de probabilité découverte à la fin de la leçon précédente est appliquée pour résoudre des problèmes de calcul de probabilités, parmi lesquels le problème des boîtes contenant des billes de deux couleurs différentes évoqué plus haut. Qualifiée par Fischbein et ses collaborateurs d'avoir un caractère expérimental, la troisième leçon a principalement permis de faire constater aux élèves la stabilisation de la fréquence relative d'un événement autour de sa probabilité, à travers une situation que nous décrivons à l'aide des informations contenues dans l'article de la manière suivante.

Il est présenté aux élèves une boîte opaque dans laquelle sont introduites des billes rouges et noires (par exemple 3 rouges et 12 noires). La probabilité d'obtenir une bille rouge étant calculée, les élèves effectuent des séries de 10 tirages jusqu'à atteindre un nombre de tirages donné (30 par exemple), calculent ensuite la fréquence des billes rouges pour chaque série de 10 et pour l'ensemble des 30 tirages.

Au cours de l'expérimentation, il a été constaté d'une part que les fréquences relatives oscillent autour de la probabilité calculée initialement, et d'autre part que la fréquence relative à l'ensemble des 30 tirages est la plus proche possible de la probabilité calculée. Les auteurs trouvent ainsi que le sens statistique du concept de probabilité est acquis par les élèves.

Nous abordons notre analyse de la troisième leçon en relevant d'abord que la situation présentée dans la troisième leçon permet des interactions sur le milieu de la part des élèves, à travers les tirages effectués et le calcul des fréquences. Mais ces interactions, qui répondent plutôt à des tâches calculatoires et de vérification, ne sont pas motivées par un problème face auquel les élèves pourraient prendre eux-mêmes des initiatives. Il ne nous semble même pas évident que les élèves aient constaté par eux-mêmes la stabilisation des fréquences. Autrement dit, la leçon n'a pas été conduite dans le sens d'une situation adidactique au sens de Brousseau. Pour nous résumer, la troisième leçon offre certes une phase d'action, qui ne conduit pas nécessairement à des phases de formulation et de validation. Nos remarques à propos de la situation exploitée dans la troisième leçon sont également valables pour les deux dernières leçons. Nous ne passerons pas sous silence la notion de concept de probabilité qui revient dans la troisième leçon. Rappelons qu'il a été question dans la deuxième leçon de concept mathématique de la probabilité, qui correspond au premier principe de Laplace. Dans la troisième leçon, le sens statistique du concept de probabilité évoqué correspond à l'approche fréquentiste de la probabilité d'un événement.

3.1.4. Quatrième leçon

L'expérience réalisée au niveau de la quatrième leçon a porté sur la comparaison de deux probabilités. Deux urnes contenant deux sortes de billes et de compositions déterminées, par exemple 15 billes dont 3 rouges dans l'une des urnes et 20 billes dont 10 rouges dans la seconde, sont présentées aux élèves, qui doivent déterminer celle qui offre le plus de chances qu'une bille rouge soit tirée, en effectuant un même nombre de tirages dans les deux urnes. Le constat fait par les auteurs est qu'un grand nombre d'enfants ont tiré plus de billes gagnantes dans l'urne 2, confortant le fait que la probabilité de tirer une bille rouge dans la seconde urne est supérieure à celle relative à la première. Par cette expérience, Fischbein et ses collaborateurs font remarquer que le sens statistique du concept de probabilité s'est élargi, permettant une meilleure compréhension de ce concept (Fischbein et al., 1969, p. 21).

Le sens statistique du concept de probabilité se trouve ainsi élargi. Par cette voie on atteint une meilleure compréhension du concept de probabilité, en tant que mesure des chances, donc en tant que procédé pour établir des relations d'ordre entre les chances.

Pour nous, l'élargissement du sens statistique du concept de probabilité s'explique par le fait que l'approche fréquentiste est utilisée ici pour comparer les probabilités d'un même événement dans deux expériences similaires. L'approche est donc perçue comme un outil de résolution d'un type de problèmes, qui est ici celui de comparaison de probabilités. Nous pouvons donc dire que la quatrième leçon de l'expérimentation a servi à approfondir le concept fréquentiste de la probabilité d'un événement. Cependant, la situation aurait été plus intéressante s'il avait été d'abord demandé aux élèves d'anticiper l'urne favorable.

3.1.5. Cinquième leçon

La stabilisation des fréquences relatives à l'aide des échantillons a été l'objet de la cinquième leçon. La notion d'échantillon est abordée avec cette leçon au cours de laquelle l'expérience utilisée consiste à extraire d'une urne contenant 400 grains de haricot dont 100 colorés, un verre de capacité d'environ 80 grains de haricots et à calculer la fréquence de grains de haricot colorés. Avec cinq prélèvements, il est obtenu dans une classe les fréquences 0,29 ; 0,26 ; 0,26 ; 0,23 et 0,22 ; qui sont des valeurs s'approchant de la probabilité préalablement calculée et valant 0,25. De plus, sans connaître préalablement la notion de moyenne, les élèves ont pu constater, à partir des opérations algébriques convenables, que la moyenne des fréquences observées est la plus proche de la valeur théorique calculée. La notion d'échantillon, objet de l'enseignement, est définie et explicitée de la manière suivante (Ibid).

Un échantillon, c'est une partie prélevée au hasard qui nous permet de connaître d'une manière approximative la composition du tout. Il suffit par exemple d'extraire un petit verre de grains pour se rendre compte de la composition du vase...

Au terme des cinq leçons, Fischbein et ses collaborateurs ont insisté sur l'importance des initiatives expérimentales pour l'enseignement des probabilités afin de familiariser les élèves avec les concepts fondamentaux de la science (Ibid, p. 22).

Mais ce que nous voulons souligner, c'est le fait que l'initiation expérimentale au domaine des probabilités représente une occasion extraordinaire pour familiariser les enfants avec des concepts fondamentaux de la science : prévision, expérience et vérification, nécessité et hasard, certitude et probabilité, loi et loi statistique, connaissance par induction.

Ils trouvent que les élèves montrent beaucoup d'intérêt à participer à ces activités, qui ont des caractères de jeux collectifs mais qui représentent pour ces élèves de véritables expériences scientifiques.

Nous pensons qu'au-delà de la notion d'échantillon abordée dans la cinquième leçon, on peut souligner l'utilisation d'une démarche expérimentale pour déterminer le contenu d'une urne contenant deux types d'objets identiques, comme on le verra plus tard dans l'ingénierie de Brousseau. L'échantillon de taille de n est ainsi assimilé à une suite de n tirage l'un après l'autre. Comme dans la quatrième leçon, l'approche fréquentiste paraît comme un outil pour résoudre un problème, celui de la composition d'une urne. Pour finir notre interprétation de la cinquième leçon, nous pensons qu'il n'est pas superflu de préciser que les grains de haricot de l'urne dont il est question sont supposés bien mélangés.

3.1.6. Une évaluation pour contrôler l'apprentissage

A l'issue des cinq leçons, une épreuve écrite est soumise à 137 élèves et les résultats ont permis de constater que les élèves ont assimilé les notions d'événements et ont compris le procédé de calcul de probabilité. Cependant, ils ont des difficultés à déterminer le nombre de cas possibles, lorsque celui-ci ne constitue pas une donnée directe du problème à résoudre. L'épreuve qui a porté sur les notions étudiées à partir des questions similaires aux exemples et situations étudiés lors du déroulement des cinq leçons, comporte les six questions suivantes.

- (1) Dans un tas de 20 enveloppes, il y a 4 qui contiennent des billets gagnants. Quel est la probabilité d'extraire un billet gagnant ?

- (2) Nous avons deux tas d'enveloppes ; dans le premier, il y a 12 enveloppes dont 6 gagnantes et dans le second, il y a 15 enveloppes dont 5 gagnantes. Quel tas choisissez-vous ?
- (3) Dans un sac, il y a 9 billes rouges et 3 billes noires. Quelle est la probabilité de tomber sur une rouge ? Sur une noire ?
- (4) Dans un sac, il y a 2 billes blanches, 2 billes noires et 4 billes rouges. On doit calculer la probabilité de tirer une blanche, une noire, une rouge.
- (5) Dans un sac, il y a une boule rouge et trois noires. On extrait 30 fois de suite une boule. Combien de noires et de rouges peut-on supposer être tirées approximativement ?
- (6) Donnez des exemples d'événements certains, impossibles et possibles.

Avant de présenter les résultats de cette évaluation, signalons que les quatre premières questions visent à vérifier le rapport des élèves au premier principe de Laplace dans des situations incarnant des expériences aléatoires simples. La question (5) vise à vérifier le rapport des élèves au concept fréquentiste de la probabilité, mais elle pose le problème du nombre de tirages à partir duquel la fréquence relative d'un événement est suffisamment proche de la probabilité. Autrement dit, la question peut se poser de savoir si avec 30 tirages, les proportions de boules rouges et noires sont suffisamment voisines des probabilités. Quant à la question (6), on peut comprendre que le terme événement signifie événement d'une expérience aléatoire qui sera implicitement formulée.

Les résultats de cette évaluation, analysés quantitativement à partir des fréquences de réussite, ont permis à Fischbein et ses collaborateurs d'aboutir globalement aux conclusions suivantes :

- le procédé de calcul de probabilité (premier principe de Laplace) est retenu par les élèves, qui toutefois ont des difficultés dans certains cas à déterminer le nombre des cas possibles ;
- les notions d'événements certains, impossibles et possibles constituent des acquis pour les élèves.

Pour nous, en plus d'une analyse quantitative des résultats, une analyse qualitative serait utile pour mieux apprécier l'évolution des rapports des élèves au calcul des probabilités dans les cas, où les élèves ont moins de réussite. Cependant, les taux élevés de réussite des questions (1), (2), (4) et (6) de l'évaluation (Ibid, p. 22) montrent que les concepts probabilistes peuvent être bien enseignés avec succès aux élèves de 10-11 ans.

3.1.7. Bilan de l'expérimentation de Fischbein

L'objectif de l'expérimentation de Fischbein et ses collaborateurs est clairement l'étude des conditions de la diffusion des savoirs relatifs au calcul des probabilités, notamment la notion d'événement et les conceptions laplacienne et fréquentiste de la probabilité d'un événement. Ces travaux qui peuvent ainsi s'inscrire dans le cadre de la didactique des mathématiques telle que définie par Chevallard (2010), se situent dans une période d'émergence de l'épistémologie expérimentale (Brousseau, 2013), que nous pouvons qualifier de période pré-didactique. Par leur réalisation en classe, les expériences didactiques de Fischbein constituent un essai de modèle d'enseignement du calcul des probabilités au cours élémentaire, et peuvent être considérées comme une ingénierie didactique, bien qu'elles ne reposent pas sur des situations suffisamment adidactiques. Elles marquent donc une rupture avec la période piagétienne, marquée par les travaux dans le domaine de la psychologie et annoncent la période post-piagétienne (Martin et Thibault, 2016), qui connaîtra la naissance officielle de la didactique des mathématiques en 1975 (Brousseau, 2013). Comme dans ses travaux précédents, le but de Fischbein en menant cette étude expérimentale est d'éprouver l'idée de Piaget (Piaget et Inhelder, 1951), selon laquelle l'acquisition des concepts de hasard et de probabilité est effective au stade opératoire formel (11-12 ans et plus). Les présents travaux de Fischbein montrent que les concepts probabilistes peuvent être construits par l'enfant un peu plus tôt.

3.2. L'ingénierie de Guy Brousseau

L'ingénierie conçue par Guy Brousseau l'a été dans le cadre des recherches sur la possibilité de l'enseignement des probabilités dans la scolarité obligatoire. Elle a été expérimentée en 1973-1974 dans une classe de CM₂ de 17 élèves avec l'institutrice Nadine Brousseau. L'expérimentation est réalisée en trente-deux séances de 15 minutes chacune, réparties en six phases.

3.2.1. Première phase : une introduction au test d'hypothèse

La première phase intitulée « une introduction au test d'hypothèse » a commencé par la communication aux élèves d'une première situation fondamentale résumée comme il suit (Brousseau, 2005, p. 196).

La maîtresse de la classe s'est présentée avec trois sacs vides opaques profonds et étroits, étiquetés A, B, C et d'une boîte contenant des jetons blancs et noirs. Après avoir bien brassé les jetons, elle prend au hasard cinq qu'elle met dans le sac A, et elle en fait de même pour les sacs B et C. Elle demande alors aux élèves de deviner le contenu de chaque

sac, sachant qu'ils sont autorisés à faire sortir un seul jeton de chaque sac qu'ils doivent y remettre après observation de sa couleur.

Au cours des cinq séances qu'a duré cette phase, les élèves ont d'abord réalisé des suites de 17 tirages, à raison d'un tirage par élève. Ayant trouvé plus de blancs que de noirs dans les sacs A, B et l'inverse dans le sac C, ils ont dans un premier temps conclu qu'il y a plus de jetons blancs que de jetons noirs dans les sacs A et B, avant d'évoluer vers l'hypothèse qu'il y a au moins un jeton de chaque couleur dans les trois sacs. Ensuite, ils ont décidé de réaliser des suites de 5 tirages. Ils ont alors abouti à des propositions incertaines des compositions des trois sacs. Les critères ayant conduit aux premières hypothèses de composition des sacs ont évolué de la simple observation des résultats des tirages, à l'étude de la distribution d'effectifs des différentes compositions possibles, puis à l'étude de la fréquence des jetons de chaque couleur observés dans les séries de 5 tirages. La recherche de la certitude des hypothèses de composition des sacs est devenue leur défi dans la première phase.

Nous pouvons considérer qu'il y a dans cette phase des interactions des élèves avec le milieu dans une situation adidactique d'action, qui a évolué vers une situation adidactique de formulation d'hypothèses non validées de compositions des sacs.

3.2.2. Deuxième phase : Modélisation et expérience

Au début de cette phase, les élèves ont proposé de vérifier leurs hypothèses précédentes à partir des sacs témoins de compositions bien connues. La maîtresse, qui avait déjà prévu remplacer les sacs et les jetons par une bouteille en plastique contenant des billes, afin de rendre les expériences plus faciles et donc plus nombreuses, leur a proposé des bouteilles à la place des sacs et des billes à la place des jetons, que les élèves ont reconnu comme des situations similaires à celles des sacs. Une bouteille Z contenant 4 billes bleues et une jaune, puis une autre Z_2 de même composition que Z ont été apprêtées pour une vérification, qui a permis de confirmer la proposition de composition du sac C avec quand même une variation étonnante des fréquences calculées. Le modèle des bouteilles étant préféré à celui des sacs, la maîtresse a dû reconstruire la situation fondamentale initiale à l'aide des bouteilles opaques, disposant d'une zone transparente permettant à chaque tirage de voir une bille parmi les cinq.

Selon les expérimentateurs, les connaissances développées au cours des deux premières phases sont celles développées par les élèves qui commencent l'étude des probabilités, à savoir : la correspondance fréquence-probabilité, l'idée de répéter les épreuves pour valider ou

rejeter des hypothèses et le vocabulaire. Cependant le test d'hypothèse a plus préoccupé ici les élèves que la curiosité pour le hasard (Brousseau, 1974).

De notre point de vue, les séances de la deuxième phase ont permis de trouver un modèle à l'expérience de départ et d'amorcer la validation d'une méthode de détermination de la composition des bouteilles.

3.2.3. Troisième phase : Représentation graphique de longues séries

Dans la troisième phase, la maîtresse a organisé la classe en trois groupes pour les tirages en vue de déterminer les compositions respectives des sacs A, B et C avec le modèle de bouteilles. Les résultats ont été consignés dans un tableau comportant plusieurs lignes dont deux pour les fréquences cumulées. Ces résultats de 180 tirages effectués par groupe ont été utilisés pour réaliser le diagramme des fréquences sur papier. Les tirages effectués par des ordinateurs mis à la disposition des écoliers leur ont permis de réaliser une deuxième fois des diagrammes de fréquences.

Les séances de la troisième phase ont permis de valider la méthode de détermination de la composition des bouteilles à partir de la simulation, qui sans être une démonstration, a rassuré les écoliers de la justesse de leurs hypothèses. Les bouteilles étant restées fermées, le doute persiste quant à la résolution définitive du problème posé au départ.

3.2.4. Quatrième phase : La convergence et la décision statistique

Les courbes sont reconstruites et analysées à partir des données disponibles pour les compositions $1b4n$, $2b3n$, $3b2n$, $4b1n$ des bouteilles. Ayant remarqué qu'avec 180 tirages les courbes restent respectivement autour de 0,2 ; 0,4 ; 0,6 et 0,8 les élèves ont demandé à refaire la courbe avec 2000, 4000 ou 5000 tirages faits par l'ordinateur. Mais, la maîtresse a repris plutôt 180 tirages avec l'ordinateur qui affiche les fréquences observées et demande aux élèves de deviner la composition de la bouteille simulée. Non seulement, ils ont pu donner le nombre de billes pour chaque série de tirages réalisés, ils ont surtout remarqué que les fréquences sont proportionnelles aux nombres de billes blanches. C'est alors que la maîtresse a introduit une autre situation dont la finalité a été de trouver les fréquences lorsque le nombre de billes varie.

Avec cette quatrième phase, les écoliers sont passés implicitement au calcul de la probabilité d'un événement. C'est l'émergence du premier principe de Laplace.

3.2.5. Cinquième phase : Les intervalles de décision

À la vingt-cinquième séance, qui est la première séance de la cinquième phase, la maîtresse, après avoir rappelé ce qui avait été obtenu comme résultat, a demandé aux élèves ce qu'ils allaient faire si le sac contenait huit billes. Cette question a donné l'occasion aux élèves de rappeler avec parfois l'aide de la maîtresse l'ensemble du processus. Dans le but de déterminer les probabilités sans avoir recours à la simulation, la maîtresse propose aux élèves la nouvelle situation ci-après.

Nous avons un sac qui contient 4 billes, vous devez :

- 1) deviner la composition du sac ;
- 2) deviner les valeurs dont se rapprochent les "fréquences cumulées" (au bout de 3000 tirages par exemple).

Pour cela, vous avez le droit de faire des tirages (à l'ordinateur) dans ce sac mais il faut les acheter avec des jetons : 1 jeton donne droit à 5 tirages.

Quand vous croyez savoir ce que contient le sac, vous pouvez parier sur son contenu. On n'a le droit de parier qu'une fois. Supposons par exemple que vous vous misiez 12 jetons, si vous avez raison, vous prenez 24 jetons, vous en avez donc gagné 12, mais si vous avez tort, vous perdez votre mise de 12 jetons. De même pour les valeurs, vous pouvez parier (à quitte ou double) dès que vous voulez.

Alors la machine fait 3000 tirages et vous voyez si vous avez gagné.

Au départ, chaque groupe a 25 jetons. On verra ceux qui auront le plus de jetons à la fin.

Tour à tour les groupes ont demandé des tirages et ont pu trouver les valeurs limites qui conviennent à savoir 0,25 ; 0,50 ; 0,75. Convaincue que les élèves savent deviner les compositions des sacs contenant des billes de deux couleurs différentes à partir d'un grand nombre de tirages, la maîtresse s'est intéressée à la manière dont les élèves interprètent les valeurs des fréquences cumulées, en leur posant la question suivante.

Si vous voulez expliquer à des camarades qui s'interrogeraient sur la stratégie à employer pour deviner la composition d'un sac de 5 billes, que diriez-vous ? Il faudrait que ces enfants puissent décider dans tous les cas qui se présentent.

Organisés en 6 groupes, il est décidé que les élèves récapitulent dans un tableau les intervalles de valeurs de fréquences pouvant correspondre aux compositions d'une bouteille de 5 billes. Un tableau A comportant les propositions d'intervalles des six groupes est alors établi pour être analysé à la séance suivante. Avec des suites de tirages de 10, de 20, de 50, de 200 et de 500 réalisés sur ordinateur, les élèves sont parvenus à corriger les intervalles du tableau A pour ce qui concerne la composition $4b1n$, puis pour $3b2n$, $2b3n$ et $1b4n$. Ce qui leur a permis

de répondre à la question de savoir comment les fréquences-limites sont utilisées pour former les intervalles, par la découverte d'une formule pour calculer le centre d'un intervalle, à partir duquel les intervalles sont proposés. Après avoir rappelé aux élèves que le meilleur découpage n'est sûr qu'avec un très grand nombre de tirages, la maîtresse a soumis les élèves à des exercices aux deux dernières séances de la cinquième phase.

Selon les expérimentateurs, la cinquième phase a permis d'explicitier et de formaliser la méthode de résolution du jeu, par une variété et une sophistication des moyens mathématiques qui paraissent excessives pour les élèves. Pour nous, la cinquième phase consacre l'atteinte des objectifs de l'expérimentation par l'institutionnalisation de la méthode de résolution du jeu, derrière laquelle se cachent la conception fréquentiste et la conception laplacienne de la probabilité. Car, en voulant s'assurer de la composition des bouteilles, les élèves sont amenés à constater la stabilisation de fréquence relative autour d'une valeur déterminée subtilement par le premier principe de Laplace.

3.2.6. Sixième phase : Les événements et leur probabilité

La dernière phase qui a porté sur les notions d'événement et de la probabilité d'un événement s'est déroulée en sept séances, soit de la vingt-sixième séance à la trente-deuxième. Elle a consisté à présenter aux élèves des expériences aléatoires dont ils sont appelés à déterminer des événements et leurs probabilités respectives.

La première expérience aléatoire, présentée à la première séance de cette phase, consiste à tirer au hasard (piocher un seul carton comme dans une loterie) un carton dans un sac opaque contenant 6 cartons identiques dont trois rouges et trois jaunes et qui sont numérotés de 1 à 6. La maîtresse a d'abord demandé aux élèves d'écrire la liste de toutes les possibilités, tout en leur indiquant ce que c'est qu'un événement dans le contexte de l'expérience : « on appelle ce qui peut se produire un événement ». Les événements trouvés par les élèves étant écrits au tableau : « on sort un carton rouge ; on sort un carton jaune ; on sort le carton 1 ; on sort le carton 2 ; ... ; on sort le carton 6 », la maîtresse a proposé aux élèves de trouver la probabilité de sortir 1, après leur avoir rappelé ce que c'est qu'une probabilité. Mais allant dans le sens de certains élèves qui ont remarqué un rapprochement entre l'expérience proposée et la situation des sacs, la maîtresse a plutôt convié à trouver la probabilité de tirer un carton jaune, une probabilité qui est très vite calculée comme dans le cas des sacs de jetons. La première préoccupation de la maîtresse a conduit à un échec, car les élèves ont simplement calculé le rapport du numéro du carton au nombre total de cartons. Face à cet échec, un élève a remarqué que les numéros 1, 2, ..., 6 pouvaient être remplacés par A, B, C, D, E et F.

Aux trois séances suivantes de la phase, l'expérience relative aux cartons ainsi que d'autres relatives, respectivement au lancer d'un dé dont les faces sont de deux couleurs, au lancer d'un dé ordinaire, au lancer de dés de différentes sortes, au lancer d'un polyèdre à vingt faces et au tirage d'un jeton d'une boîte contenant des perles de plusieurs couleurs différentes sont proposées aux élèves organisés en groupes. Une grande réussite est notée du côté des élèves aussi bien pour l'établissement de la liste des événements que pour le calcul des probabilités. Les trois dernières séances de la phase, consacrées à des expériences aléatoires plus complexes telles que le lancer d'un dé plusieurs fois de suite et le lancer de deux dés, ont été une occasion d'utiliser des méthodes de dénombrement telles que l'arbre de choix et les tableaux à double entrées, qui sont des outils connus des élèves.

D'après les expérimentateurs la dernière phase, consacrée à l'enseignement classique du calcul des probabilités, a permis d'aborder en peu de temps les notions suivantes :

- le vocabulaire des événements ;
- la recherche des événements dans des expériences ;
- le calcul de sommes de probabilités ;
- les expériences successives et produits de probabilités.

Les expérimentateurs paraissent satisfaits des apprentissages générés par leurs expérimentations, car disent-ils, les exercices furent réussis grâce à la familiarité des élèves aux notions de base.

3.2.7. Les conclusions des auteurs

Guy Brousseau a développé à la fin de l'article un bilan des leçons qu'on peut tirer de l'expérimentation au niveau des élèves, du professeur, du savoir et même de la didactique. Nous présentons dans les lignes qui suivent quelques points capitaux de ce bilan.

3.2.7.1. Au niveau des élèves

Malgré la durée de l'expérimentation, longue par le nombre de séances (32), les élèves ont été tous intéressés et sont satisfaits de l'activité, notamment à cause des défis que les problèmes leur font relever. Ils ont appris et ont appliqué avec succès des connaissances relatives aux conceptions probabilistes et au calcul d'opérations élémentaires de leur niveau. L'introduction des conceptions probabilistes leur a facilité grâce à l'usage du vocabulaire classique des événements, le repérage des événements dans des expériences aléatoires simples comme complexes, et la considération de distributions de fréquences sur des systèmes exhaustifs d'événements (Brousseau, 2005).

3.2.7.2. Au niveau de l'enseignante

Dans la mise en œuvre de l'expérimentation, plusieurs difficultés sont apparues chez l'enseignante. Une première difficulté est son incapacité à provoquer les réactions des élèves relatives à l'évolution de la pensée de l'enfant et qui sont pourtant évoquées lors des séances de préparation. La présence permanente des chercheurs a été nécessaire pour exploiter les opportunités d'apprentissage et pour expliquer le déroulement des apprentissages. C'est ce qui fait dire à Brousseau que la reproduction d'une situation d'enseignement nécessite de la part du professeur la capacité de la diriger et de la contrôler (Brousseau, 2005).

Ce fait montre que la reproduction d'une situation n'est envisageable dans l'enseignement que dans la mesure où le professeur pense pouvoir la diriger et la contrôler. La reproduction passe par la connaissance des conditions de la reproductibilité.

Une deuxième difficulté est due au changement des conditions de validation des hypothèses aussi bien chez les élèves que chez l'enseignante, en ce sens que les déclarations déterministes, auxquelles ils étaient habitués, ne peuvent plus obéir au nouveau modèle mathématique que constitue le domaine des probabilités. La longueur du processus constitue aussi une difficulté pour l'enseignante, qui doit par moment relancer les débats afin que les enfants ne se lassent pas. Aussi l'enseignante a-t-elle signalé la difficulté de pouvoir maintenir les élèves dans le processus en leur rappelant les objectifs et les motivations des actions en cours ainsi que les conséquences des actions passées.

3.2.7.3. Au niveau du processus

Les situations utilisées dans l'expérimentation sont accessibles aux élèves du cours moyen (9-11 ans) et ont permis les évolutions prévues grâce à certaines caractéristiques du processus. Primo, il y a le caractère dialectique, qui est le fait que chaque activité est motivée par les résultats de la précédente en même temps qu'elle sert à engager la suivante. Ce qui s'oppose à la tendance des professeurs à organiser leur enseignement en une suite de petits objectifs de manière à rendre l'apprentissage d'une nouvelle connaissance la moins dépendante possible des apprentissages antérieurs. Secundo, on a la nécessité de l'augmentation de la rapidité des tirages au fur et à mesure que les paramètres pertinents apparaissent, même si le passage des sacs aux bouteilles, puis à l'ordinateur pose des problèmes. Tercio, il y a le rôle des questions de la maîtresse pour relancer la dialectique autour de la composition de la machine, suivant une formule utilisée dans la plupart des expériences didactiques : « ce qui a été continuera d'être ». En effet le fait de centrer les idées des élèves sur la composition de la machine de hasard a joué

un rôle central dans le processus, et a ainsi permis de réduire au rôle de connaissances-outils les objets d'enseignement que sont les éléments statistiques et probabilistes.

3.3. L'ingénierie de Joël Briand

Dans le cadre de l'exploitation de l'ingénierie didactique expérimentée en 1974 par Guy Brousseau et son équipe (Brousseau, 2005), Joël Briand a repris cette ingénierie pour étudier la construction de la notion d'expérience et pour identifier des obstacles à la construction d'une démarche probabiliste dans le contexte des nouveaux programmes français de la classe de seconde de l'année 2000 (Briand, 2005). Tout en se plaçant dans le contexte des programmes en vigueur, il a fait expérimenter l'ingénierie de Brousseau par deux professeurs différents : un stagiaire dans le cadre de la rédaction d'un mémoire et un professeur plus expérimenté. La description de ces deux expérimentations et l'analyse du chercheur sont relatées dans les lignes suivantes.

3.3.1. Expérimentation avec le stagiaire

Elle a eu lieu en janvier 2002 dans une classe de seconde et est organisée en trois parties.

3.3.1.1. Première partie

Les élèves sont répartis en groupes de trois ou quatre et disposent des bouteilles contenant 5 boules dont la composition est 3 vertes et 2 rouges pour une partie des groupes et, 4 vertes et 1 rouge pour la deuxième partie. Les bouteilles sont opaques et permettent de voir une seule boule par retournement. L'enseignant, qui est le seul à connaître la composition des bouteilles, invite les élèves à répondre aux deux questions suivantes, en consignnant les résultats dans un tableau.

- Y a-t-il plus de boules vertes ou de rouges dans l'urne ?
- Combien y a-t-il de boules vertes et combien y en a-t-il de rouges dans l'urne ?

Les tirages, dont le nombre n n'est pas imposé par l'enseignant, ont permis aux élèves de donner la composition des bouteilles. Pour la première question, les élèves se sont basés sur les fréquences des boules, mais cela à partir de nombres de tirages différents (15, 20, 30, 50). Pour la deuxième question, avec des raisonnements faisant parfois référence à la proportionnalité et l'équiprobabilité, les élèves ont fait des propositions de compositions des bouteilles conformes aux compositions effectives.

3.3.1.2. Deuxième partie et troisième partie

L'enseignant introduit dans la deuxième partie les termes de probabilité et de fréquence, et une représentation graphique qui met en évidence les intervalles de confiance pour aider les élèves

à travers des questionnements de type maïeutique à répondre à des questions du genre : « *que conclure si l'on observe 46 boules vertes sur 97 tirages ?* ». Pour l'enseignant, cette étape n'a pas rencontré de résistance de la part des élèves, mais elle est marquée par l'intuition des élèves que les nombres de boules de chaque sorte sont à peu près proportionnels aux probabilités.

Dans la troisième partie, l'enseignant propose aux élèves un autre dispositif composé de bouteilles de 7 boules ayant toutes la même composition non connue par les élèves. Ces derniers sont invités à effectuer des nombres indiqués de tirages et à conclure. Les résultats sont traduits par un graphique et complétés par des résultats réalisés par l'enseignant sur l'ordinateur, pour aboutir à la conclusion : « La confiance, que l'on peut attribuer au résultat statistique pour en inférer le contenu de la bouteille à l'aide d'un calcul de probabilité, augmente avec le nombre de tirages. »

Par rapport à cette expérimentation, Joël Briand fait le constat que la fiche présentée aux élèves lors de la première séance oriente leur comportement. En supposant certains savoirs acquis par les élèves, l'enseignant n'a pas su que les élèves de la seconde, à de petites différences près, ont des comportements des élèves nettement plus jeunes. Comme Joël Briand, nous pensons que les élèves n'ont pas été suffisamment autonomes dans l'expérimentation du stagiaire. L'occasion ne leur a pas été donnée de prendre des initiatives en vue de décider d'effectuer un très grand nombre de tirages pour minimiser le risque de se tromper sur la composition des bouteilles comme cela a été le cas dans l'expérimentation originale de Brousseau.

3.3.2. Expérimentation du professeur

Briand a d'abord eu avec le professeur des réunions au cours desquelles le professeur a pris connaissance de l'ingénierie de Brousseau et du protocole a priori construit par le chercheur. Sur proposition du professeur la consigne de travail du protocole initial a dû être modifiée. L'expérimentation a eu lieu en 2003 en trois séances d'une heure.

3.3.2.1. Première séance

Les élèves sont mis en groupes de 4 avec des bouteilles contenant cinq billes rouges et vertes, et de compositions différentes. Pour maintenir plus longtemps l'aspect adidactique, les compositions des bouteilles ne sont pas connues par l'enseignant. Les élèves sont mis au travail avec la consigne ci-après (Briand, 2005, p.17).

On va considérer que vous êtes en quelque sorte des prévisionnistes. Un client s'adresse à vous et vous demande un sondage. Qu'est-ce que c'est qu'un sondage dans ce

dispositif ? Par exemple, un sondage de taille 10, cela veut dire que l'on interroge 10 fois la bouteille. Il a besoin que vous lui disiez le résultat de ce sondage de 15 tirages et, en plus, il a besoin de savoir si vous êtes moyennement sûrs, assez sûrs ou au contraire tout à fait sûrs.

Les élèves ont réalisé des séries de 10 tirages comme il est indiqué dans la consigne et sont parvenus à l'hypothèse qu'il y a des boules vertes et des boules rouges. Les comportements observés étaient similaires à ceux observés dans l'expérimentation originale. La fluctuation des résultats conduit à l'incertitude et motivent les élèves à réaliser de plus en plus de tirages.

3.3.2.2. Deuxième séance et troisième séance

À la deuxième séance, l'enseignant relance les élèves au travail après avoir fait le point de la première séance. Contrairement aux élèves de CM2 dans l'ingénierie de Brousseau, les élèves n'ont pas réclamé l'ouverture des bouteilles, et ont abouti aux premières hypothèses de composition des bouteilles dont l'hypothèse : « *plus on fera de tirages, plus on pourra affirmer des compositions de bouteilles avec certitude* ». A propos des intervalles de confiance, ils tiennent des raisonnements pour justifier la composition des bouteilles.

A la troisième séance, l'enseignant a proposé de nouveaux dispositifs pour vérifier les hypothèses émises par les élèves. Ainsi, pour la stabilisation des fréquences, qui est à la base de la composition des bouteilles, il a fait simuler l'expérience à l'aide d'un programme effectué sur Excel et a proposé la réalisation de graphiques. Sachant que le dispositif expérimental permet de quantifier l'évolution du risque par rapport au nombre de tirages, le risque qu'une hypothèse soit rejetée alors qu'elle est vraie, est également déterminé dans la simulation. Et ce risque est très faible à partir de 500 tirages.

De notre avis, la deuxième expérimentation paraît plus pertinente dans le sens que les élèves sont restés longtemps dans une situation adidactique, grâce à l'intervention limitée du professeur. Toutefois, il a fallu que ce dernier intervienne grâce à l'amélioration du milieu pour conduire les élèves à la simulation afin de vérifier les hypothèses qu'ils avaient émises. La grande originalité ici est la quantification du risque du rejet d'une hypothèse alors qu'elle est vraie. Au-delà de la composition des bouteilles, la stabilisation constatée des fréquences relatives est aussi porteuse de la définition de la probabilité d'un événement qui n'est pas apparemment la préoccupation de l'étude.

3.3.2.3. Analyse de Joël Briand

L'auteur de l'article a commencé son analyse en évoquant la modification par le professeur de la consigne initiale, qui bien que justifiée par les programmes, a occasionné des confusions au niveau notamment des concepts de sondage et de tirage. Concernant les conjectures, il en a identifié dans les déclarations des élèves au moins trois familles, dont la mise en œuvre ne peut s'effectuer que par expérimentation. Il s'agit notamment des hypothèses :

- « *S'il y a plus de rouges dans la bouteille, il y a plus de chances qu'elles viennent* », apparue immédiatement après les premiers tirages ;
- « *Si l'on a affaire à une bouteille de composition 4 et 1, alors la décision va être plus facile à prendre* », qui est apparue plus tard ;
- « *Il me semble que plus on fait de tirages, plus on aura un chiffre moyen qui sera donc plus des moyennes donc plus proches de la réalité..., plus on fait de tirages, plus on se rapproche de la réalité* », qui traduit la loi des grands nombres en actes.

Pendant l'expérimentation, il est remarqué, par l'auteur de l'article, des difficultés du professeur à prendre en compte les opinions et les conjectures des élèves comme le cas d'un élève qui déclare « avec le hasard on ne peut rien prévoir » et qui reste longtemps sur sa position sans être relancé dans le cadre de la régulation de l'expérimentation. Des types d'usages de mots propres du vocabulaire des probabilités et des statistiques tels que probabilité, fréquence, statistiques, sondage, prévision, chance ont attiré l'attention du chercheur. Par exemple le mot probabilité a été utilisé pour désigner soit les chances, soit la fréquence, soit la tendance, tandis que le mot fréquence est utilisé par certains élèves pour désigner le nombre d'observations (effectif). À côté des savoirs visés par l'expérimentation, l'auteur fait remarquer la présence des savoirs mathématiques annexes tels les pourcentages, les représentations graphiques et le programme de simulation. Il est à noter aussi des conditions non didactiques qui ont entouré le travail, comme par exemple l'élève, qui exprimant que le hasard n'est pas déterministe, refuse de s'impliquer dans les activités.

Après ses analyses sur l'expérimentation faite par le professeur plus expérimenté, Joël Briand arrive aux conclusions ci-dessous sur l'ensemble des deux expérimentations :

- l'ingénierie de Brousseau devrait servir de fil conducteur pour les deux expérimentations. L'injonction précoce du stagiaire et le fait que le professeur s'est centré très rapidement sur le risque n'ont pas permis de rester sur la ligne de Brousseau.

- l'étude n'a pas pu évaluer si les élèves peuvent mieux réussir les exercices de probabilité.
- les expérimentations s'étant appuyées sur des modèles implicites d'équiprobabilité, des questions peuvent se poser sur le comportement des élèves dans une situation qui porte sur des issues non équiprobables.

3.4. L'ingénierie de Mounir Dhieb

Le dernier chapitre de la thèse de Mounir Dhieb (2009) est consacré à l'expérimentation d'une ingénierie didactique qui porte sur l'introduction des probabilités et qui vise à observer principalement la stabilisation de la fréquence relative d'un événement sur un grand nombre de réalisations d'une expérience aléatoire. Elle a été expérimentée en 7^e année (12-13 ans) de l'enseignement de base en Tunisie correspondant à la classe de sixième du système éducatif béninois. Au moment de l'expérimentation, les programmes tunisiens venaient de prévoir l'initiation au calcul des probabilités en 7^e année. Après une pré-expérimentation et plusieurs séances de travail avec le professeur chargé d'expérimenter l'ingénierie, l'expérimentation est étalée sur quatre séances d'une heure, au cours desquelles les élèves sont organisés en groupes. Les deux premières séances ont été consacrées à l'étude de la notion d'expérience aléatoire et les deux dernières ont servi à expérimenter la stabilisation de la fréquence relative.

3.4.1. La première séance

L'objectif de cette séance est d'étudier la notion d'expérience aléatoire en proposant aux élèves deux jeux de telle sorte qu'ils cherchent à tricher pour gagner. L'occasion de la constatation de la tricherie par un élève quelconque sera saisie pour discuter sur les conditions de réalisation d'une expérience que l'on pourrait qualifier d'aléatoire. Le premier jeu consiste à lancer dix fois de suite un dé comportant deux faces blanches et quatre faces noires dans le but d'obtenir le plus grand nombre de faces blanches pour gagner. Le deuxième jeu consiste à tirer une balle dans un récipient contenant cinq balles dont deux blanches et trois oranges afin d'obtenir le plus grand nombre de balles blanches pour être déclaré gagnant. La classe est organisée en quatre groupes dont un est composé de trois élèves et les trois autres de deux membres. Le protocole a prévu que les jeux soient exécutés groupe après groupe.

Au début de la séance, pendant que le professeur présentait la première expérience, il a été interrompu par un élève qui a suggéré que les résultats des 10 lancers soient notés dans un tableau à deux colonnes. Cette perturbation n'a pas permis au professeur de préciser à temps la condition pour un groupe d'être déclaré gagnant. Néanmoins le constat de fraude, tel qu'il était

souhaité par les expérimentateurs, a été observé et dénoncé par un élève. Cela a été la bonne occasion pour le professeur de lancer une discussion autour de la manière dont il faut jeter le dé pour que les résultats soient aléatoires. Sans avoir fait le point de la première expérience, qui a duré quarante minutes, le professeur est passé à la deuxième expérience. Pour Dhieb, le professeur a exécuté une tâche différente de celle qui lui a été confiée, en ce sens qu'il n'a pas pu présenter correctement l'expérience, de même qu'il n'a pas fait une institutionnalisation avant de passer à une autre expérience. La première séance est surtout marquée par l'émergence chez les élèves de quelques conceptions de hasard nommées respectivement « Imprévisibilité Microscopique », « N1 Cardinaux » et « Mécanique ». La conception « Imprévisibilité Microscopique » caractérise le hasard par l'imprévisibilité du résultat du lancer de dé, alors que selon la conception « N1 Cardinaux », le résultat du lancer du dé dépend de la couleur dominante de face du dé. Pour la conception « Mécanique », le résultat d'un lancer de dé dépend de la manière dont le dé est lancé, comme il avait été question dans les travaux de Maury (1985).

3.4.2. La deuxième séance

A la deuxième séance, il est remis à un groupe d'élèves un récipient contenant trois balles dont une blanche et deux oranges et à chacun des autres groupes un dé cubique comportant deux faces blanches et quatre noires. Les dés remis aux groupes 3 et 4 comportent 2 faces blanches et quatre faces noires, tandis que celui du groupe 4 comportent 3 faces de chaque couleur. Chacun des groupes est d'abord invité à faire, soit dix tirages d'une balle dans le récipient, soit dix jets de dé en respectant les conditions sur lesquelles ils se sont mis d'accord au cours de la première séance, et à noter sur une feuille le nombre de faces blanches ou de balles blanches. Le professeur demandera ensuite aux groupes de réaliser vingt tirages ou vingt jets, en suscitant une discussion devant les amener à faire le cumul des résultats. En se donnant les bonnes conditions pour que les jeux soient équitables, les élèves ont procédé aux tirages et aux jets, après avoir fait des prévisions sur les résultats à obtenir. Naturellement les résultats obtenus sont différents de ceux prédits, renforçant la variabilité des résultats, due au caractère aléatoire des expériences réalisées. Sur la demande du professeur, les élèves ont effectué d'autres séries de tirages sans que le cumul des résultats ne soit fait. Globalement, pour cette deuxième séance, les conceptions de hasard « Imprévisibilité Microscopique » et « N1 Cardinaux » sont confirmées au détriment de la conception « Mécanique ».

3.4.3. Troisième séance et quatrième séance

Dans la troisième, il a été mis à la disposition de chaque groupe d'élèves le tableau des effectifs du cumul des tirages réalisés dans le groupe. Chaque groupe d'élèves a donc à compléter le

tableau par les fréquences d'obtention de boules blanches. Les tableaux ainsi réalisés avec l'aide du professeur et les polygones de fréquences préparés par les expérimentateurs constituent le milieu (Brousseau, 1998), à partir duquel les élèves sont appelés à identifier les ressemblances et les dissemblances au niveau du graphique des polygones. À partir de 30 tirages, les ressemblances sont constatées au niveau des fréquences calculées dans les groupes 1, 2 et 3, lesquelles fréquences sont nettement différentes de celles calculées dans le groupe 4. L'analyse du graphique des polygones de fréquences a confirmé les ressemblances et dissemblances constatées. La simulation sur ordinateur prévue n'a pu être réalisée pendant les deux dernières séances.

3.4.4. Synthèse de l'ingénierie didactique de Dhieb

Un décalage entre la tâche confiée au professeur expérimentateur et celle effectivement réalisée n'a pas permis d'atteindre tous les objectifs. Le milieu installé au cours des deux premières séances a favorisé une conception du hasard, qui a conduit à l'apprentissage de la notion d'expérience aléatoire. Il s'agit de la conception « Imprévisibilité Microscopique » selon laquelle le résultat d'une expérience aléatoire est imprévisible. Elle a pris le pas sur deux autres conceptions construites mais non porteuses de l'apprentissage de la notion d'expérience aléatoire. Bien que les deux dernières séances n'aient pas pu conduire à la simulation telle qu'elle avait été prévue dans le protocole d'expérimentation, la stabilisation des fréquences a pu être constatée au niveau de la dernière expérience, à partir de l'analyse des polygones de fréquences correspondant aux séries de tirages effectués par les élèves. Favorisant ainsi le passage du cadre statistique à celui des probabilités, qui est l'objectif principal de l'expérimentation.

3.5. Bilan des ingénieries présentées

L'élaboration de modèles d'enseignement en mathématiques a été une préoccupation exprimée par les chercheurs depuis les années 1960. Inscrits plus tard dans un cadre formel didactique par Guy Brousseau (2013), ces modèles d'enseignement sont connus aujourd'hui sous le nom d'ingénieries didactiques. Les ingénieries didactiques que nous venons de présenter sont du domaine des probabilités.

La première, celle de Fischbein et ses collaborateurs (Fischbein, Pampu et Minzat, 1969), expérimentée au cours élémentaire (10 ans), a porté essentiellement sur la notion d'événement, le premier principe de Laplace et la probabilité fréquentiste. Le premier principe de Laplace est introduit avec une situation de comparaison de probabilités, tandis que l'étude de la stabilisation

de la fréquence relative d'événements est faite à partir de trois situations variées. Pour chacune des trois situations, trente réalisations de l'expérience aléatoire ont permis d'approcher la probabilité théorique calculée selon le premier principe de Laplace. Une évaluation comportant plusieurs exercices

La deuxième ingénierie présentée, celle de Brousseau, a été expérimentée en 1974 avec les écoliers d'une classe de CM₂. Elle a été conduite à l'aide d'une situation fondamentale inédite (Brousseau, 2005), qui a permis dans une longue expérimentation de construire la notion de probabilité suivant la loi faible des grands nombres, pour aboutir au premier principe de Laplace. L'étude de la notion d'événement et le calcul effectif des probabilités à partir d'exercices variés ont mis fin à la réalisation de l'ingénierie. Le milieu de la situation fondamentale comporte un générateur de hasard permettant une réalisation facile de l'expérience aléatoire. Il s'agit d'une bouteille opaque contenant des billes de deux couleurs différentes, dont le retournement permet d'observer à travers une partie transparente la couleur d'une seule bille. L'enjeu de la situation est de donner la composition de la bouteille connaissant le nombre total de billes qu'elle contient. C'est autour de cet enjeu que toutes les notions visées sont construites. L'étude de l'évolution de la fréquence d'observation d'une couleur donnée est faite à travers la réalisation de plusieurs séries de tirages. La réalisation de polygones de fréquences à partir de 180 tirages effectués par les écoliers a conduit à la mise en évidence de la stabilisation de la fréquence relative, laquelle stabilisation est confirmée plus finement avec des simulations sur ordinateur avec de très grands nombres de tirages.

Dans la troisième ingénierie, que nous avons présentée, Briand a adapté la situation fondamentale de Brousseau à l'enseignement de la statistique en classe de seconde. En restant dans le contexte des programmes français de 2002, il a étudié les intervalles de confiance d'acceptation d'une composition donnée de la bouteille de hasard. En dehors des séries de tirages ayant servi à l'étude de l'évolution de la fréquence d'obtention d'une couleur donnée, la simulation sur ordinateur a permis de constater que plus le nombre de tirages est élevé, plus on est sûr de donner la composition de la bouteille.

La dernière ingénierie présentée, élaborée par Mounir Dhieb (2009), est expérimentée en sixième (12 - 13 ans). Elle est composée d'une situation d'enseignement de la notion d'expérience aléatoire et d'une autre pour la construction de la notion de probabilité. La situation fondamentale de bouteille opaque de billes est encore exploitée ici pour asseoir la notion de probabilité suivant l'approche fréquentiste. Les élèves ont notamment effectué des séries de tirages et ont analysé les graphiques réalisés pour eux à partir des résultats de leurs

tirages, pour déterminer les compositions des bouteilles à eux présentées. Les difficultés rencontrées lors de l'expérimentation n'ont pas permis d'appuyer les résultats par des simulations sur ordinateur.

Le point commun des ingénieries didactiques en vue de l'enseignement de la probabilité d'un événement semble être l'approche fréquentiste. Elle est la toile de fond des quatre ingénieries que nous avons présentées. Dans ce cadre, l'ingénierie didactique de Brousseau paraît complète par rapport aux notions qu'elle permet d'enseigner. Elle constitue d'ailleurs une référence pour les ingénieries en probabilités, comme dans les ingénieries de Briand (2005) et Dhieb (2009), dans lesquelles la situation fondamentale de Brousseau est exploitée. D'autres chercheurs comme Pablo Carranza (2009) et Vincent Martin (2014) ont également exploité cette situation fondamentale pour élaborer des ingénieries didactiques. Le premier l'a utilisée pour l'étude du modèle bayésien de la probabilité (probabilité conditionnelle) chez les étudiants en BTS et le second l'a proposée parmi les ressources didactiques à des enseignants pour l'enseignement de la probabilité au primaire.

Conclusion

La revue de littérature qui vient d'être présentée dans ce chapitre donne fondamentalement les réponses à quatre types de questions, à savoir : Comment introduire la notion de probabilité d'un événement ? À quel âge pourrait-on soumettre l'enfant à un enseignement des probabilités ? Quelles sont les conceptions probabilistes des élèves avant et après avoir reçu un enseignement en probabilités ? Quels sont les modèles d'enseignement expérimentés en probabilités ?

Les travaux de Michel Henry indiquent clairement l'existence, sur le plan épistémologique, de trois approches de définition de la probabilité en général : l'approche laplacienne regroupant les deux premiers principes de Laplace, l'approche fréquentiste fondée par la loi faible des grands nombres et l'axiomatique de Kolmogorov. Au secondaire, l'enseignement des probabilités longtemps basé sur l'approche laplacienne se concentre plutôt sur l'analyse combinatoire que sur le calcul des probabilités de façon générale. L'approche fréquentiste, qui est proposée comme solution à cette situation, implique un enseignement de la notion de la probabilité en lien avec la statistique descriptive. Le parallèle fait entre la géométrie et la probabilité inspire Henry et Parzysz à orienter leurs travaux vers la modélisation en probabilité, avec la simulation comme appui aux résultats embryonnaires devant être issus de

la statistique. Les difficultés relatives à la modélisation, comme l'a précisé Girard, peuvent être réglées à travers un enseignement des probabilités sur une longue durée.

Pour Piaget, qui a étudié l'idée du hasard chez l'enfant, l'enseignement du calcul des probabilités peut intervenir à partir de 11 – 12 ans, puisqu'à cet âge, qui marque le début du stade de développement des opérations formelles, l'appréhension du hasard et de la probabilité est totale. Les travaux de Fischbein relatifs aux intuitions probabilistes montrent que l'enseignement des probabilités peut commencer un peu plus tôt par l'étude des notions probabilistes de base. L'âge ne suffit pas à lui-seul pour que les probabilités soient maîtrisées. L'instruction en probabilité est plus que nécessaire et dans ce cadre, il serait souhaitable que l'enseignement des probabilités puisse tenir compte des modèles cognitifs relatifs à l'indépendance d'expériences aléatoires, identifiés par Maury, et ceux relatifs au biais d'équiprobabilité, identifiés par Lecoutre. Les travaux de Piaget, de Fischbein, de Maury et de Lecoutre rendent compte également dans leur ensemble des conceptions probabilistes chez les enfants ayant reçu ou non un enseignement en probabilités.

Plusieurs ingénieries didactiques d'enseignement des probabilités ont été expérimentées. Le point commun de celles que nous avons présentées dans ce chapitre est l'approche fréquentiste, qui semble être une indication des chercheurs depuis les années 1970. La situation fondamentale conçue par Brousseau dans le cadre de l'ingénierie didactique, qu'il a élaborée pour l'enseignement de la statistique et de la probabilité, est devenue une référence, dont se sont inspirés des chercheurs.

Nous faisons le choix de nous appuyer sur les résultats principaux des travaux que nous avons présentés dans ce chapitre pour élaborer une ingénierie didactique pour l'enseignement des probabilités dans le contexte béninois actuel.

Chapitre III : Problématique, méthodologie de recherche et cadre théorique

Introduction

Une fois qu'un sujet de recherche est bien défini, les problèmes qu'il pose méritent d'être clairement indiqués afin de définir une ligne précise de recherche et de rédaction autour de la vérification des hypothèses découlant des questions, qui les clarifient. L'acte scientifique qui consiste à poser de manière structurée les problèmes que le sujet aborde est la problématique de la recherche. La vérification des hypothèses issues de la problématique se fait à travers une méthodologie générale de recherche qui précise toutes les actions devant être menées pour trouver des réponses aux problèmes posés. Pour être comprises du lecteur averti, les analyses, desquelles seront issues les solutions aux problèmes posés, ont besoin d'être conduites suivant des théories et méthodologies validées par la communauté scientifique didactique. L'ensemble de ces théories et méthodologies constitue le cadre théorique de recherche. Nous présentons dans ce troisième chapitre de la thèse respectivement la problématique, la méthodologie générale de recherche et le cadre théorique.

1. Problématique

Les probabilités, reconnues comme un domaine des mathématiques pures depuis la fin de leur construction, ont contribué à l'essor de la statistique, classée parmi les mathématiques appliquées, à travers son apport important à la mise en place des éléments technologiques de la statistique inférentielle, devenue incontournable dans les problèmes de décision. Ce rapprochement entre ces deux domaines longtemps séparés (Vu Nhu, 2009) était pourtant à l'origine de la conception fréquentiste de la notion de probabilité à travers la loi faible des grands nombres, démontrée par Jacques Bernoulli dans son ouvrage posthume « *Ars Conjectandi* », publié en 1713 (Delmas, 2010). Le couplage des probabilités et de la statistique, aussi bien du point de vue épistémologique que du point de vue de leurs applications dans plusieurs domaines, justifie l'intérêt à promouvoir la pensée probabiliste et statistique à travers la formation à l'aléatoire, basée sur des approches croisées entre les champs statistique et probabiliste dans l'enseignement des mathématiques (Vu Nhu, 2009). Dans le secondaire, l'enseignement tardif des probabilités longtemps basé sur l'approche classique laisse progressivement la place à un enseignement têtif basé sur l'approche fréquentiste, permettant

non seulement de donner du sens à la notion de la probabilité d'un événement, mais aussi de favoriser un raisonnement à partir de l'aléatoire.

Les programmes béninois selon l'approche par les compétences, expérimentés dans l'enseignement secondaire à partir de l'année scolaire 2001-2002 et généralisés dans le second cycle à partir de l'année scolaire 2008-2009, sont particulièrement conçus pour changer l'image de la mathématique, qui serait mal perçue, mal enseignée et non exploitée dans la vie (DIP, 2011b, p. 4).

De façon particulière, les mesures déterminantes ont été prises pour changer l'image actuelle de la mathématique, la promouvoir et lui restituer la plénitude de sa fonction de développement durable dans une école autrement conçue et gérée à cette fin car en général, la mathématique est mal perçue, mal enseignée et non exploitée dans la vie.

Ce changement qui a porté sur une approche d'enseignement basée sur le socioconstructivisme et la résolution de problème n'a pas affecté les contenus notionnels, qui sont ceux des programmes « Harmonisation des Programmes de Mathématiques (HPM) » (Touré, 2002), programmes par objectifs, précédant ceux en vigueur et généralisés au second cycle de l'enseignement secondaire à partir 2000-2001.

Les programmes de mathématiques du second cycle de l'enseignement secondaire prennent en compte non seulement les innovations engagées au cours primaire et au premier cycle, mais aussi les riches expériences acquises dans le cadre du projet d'Harmonisation des Programmes de Mathématiques (H.P.M.) dans les pays francophones et de l'Océan Indien (ibid, p. 4).

Avec les programmes HPM, la statistique descriptive avait fait son entrée à tous les niveaux de l'enseignement secondaire, tandis que les contenus probabilistes sont demeurés ceux enseignés depuis les années 70. Malgré le changement voulu de l'image des mathématiques prôné par les programmes en vigueur, l'enseignement des probabilités reste basé sur l'approche classique dont l'échec est constaté par M. Henry (2010). Les programmes en vigueur, qui indiquent clairement qu'il soit donné du sens aux concepts étudiés (DIP, 2011b, p. 10), ne proposent dans son développement ni le sens à donner à la notion de probabilité d'un événement, ni une quelconque instruction spécifique pour l'enseignement des probabilités (Ibid). Sachant que l'enseignement des probabilités basé sur l'approche fréquentiste permet de donner un sens à la notion de probabilité d'un événement et eu égard aux ambitions épistémologiques exprimées par la noosphère à travers les fondements d'ordres didactique et

pédagogique des programmes en vigueur (Ibid), il nous paraît légitime d'envisager au Bénin un enseignement des probabilités à partir d'une démarche expérimentale.

Plusieurs travaux didactiques ont été consacrés à l'enseignement des probabilités basé sur une démarche expérimentale, dont notamment ceux de Fischbein, Pampu et Minzat (1969), Brousseau (2005), Briand (2005), Dhieb (2009), Vu Nhu (2009) et Carranza (2009). Psychologue cognitiviste de la période de recherche qualifiée de Piagétienne (Martin et Thibault, 2016), Fischbein et ses collaborateurs ont réalisé une expérience didactique portant sur l'enseignement des probabilités aux élèves de 10-13 ans. La partie concernant l'approche fréquentiste a consisté à calculer une probabilité dans une situation d'équiprobabilité et à vérifier le résultat obtenu à partir des observations des échantillons extraits de l'univers des éventualités. En l'absence d'une théorie élaborée en matière d'expérimentation d'un enseignement comme celle de l'ingénierie didactique, ils ont réalisé une expérience embryonnaire qui a montré que les probabilités peuvent être enseignées aux plus petits (chap. II, 2.2). Au début de la période post-piagétienne, Guy Brousseau a élaboré une situation fondamentale pour l'enseignement des probabilités et de la statistique. Le milieu matériel dans l'expérimentation de Brousseau est une bouteille opaque contenant cinq billes de deux couleurs différentes avec un bouchon transparent permettant de voir une seule bille à la fois à chaque retournement. La détermination de la composition de la bouteille est la tâche de la situation fondamentale qui conduit à effectuer de plus en plus de retournements de la bouteille. Avec cette machine de hasard, la notion d'événement, celle de la probabilité d'un événement ainsi que l'incertitude qu'il y a à obtenir la probabilité d'un événement par l'approche fréquentiste ont été respectivement étudiées dans une classe de CM₂. Pour l'étude de l'incertitude, Brousseau a eu recours à des simulations en vue de tester des hypothèses de la composition de la bouteille pour des nombres assez grands de retournements (chap. II, 3.2). L'expérimentation de Brousseau a été reprise en partie par Briand (2005) et Vu Nhu (2009) pour étudier au lycée la notion de probabilité d'un événement en lien avec le problème d'incertitude. Il s'est agi pour eux de tester les intervalles de confiance de la fréquence relative pour les différentes compositions possibles de la bouteille. Quant à Dhieb (2009), il a proposé une ingénierie pour l'enseignement des notions d'expérience aléatoire et de probabilité fréquentiste d'un événement. Il n'a pas repris la machine de hasard de Brousseau qu'il a remplacée par un dé dont les faces sont de deux couleurs différentes. Il a cependant eu recours à la réalisation de polygones de fréquences et la simulation informatique pour faire conjecturer la fréquence limite, sans se préoccuper du problème de l'incertitude.

Tout comme les auteurs précédemment cités, nous estimons utile d'intégrer le dispositif d'enseignement des probabilités conçu par Brousseau à un enseignement qui repose sur une démarche expérimentale et prenant en compte toutes les notions probabilistes prescrites dans le secteur du calcul élémentaire des probabilités au Bénin. Au niveau de la notion de probabilité d'un événement, sans chercher à nous préoccuper du problème d'incertitude, nous faisons recours à la situation fondamentale de Brousseau (2005), qui s'est révélée, comme beaucoup d'autres situations fondamentales, efficace pour l'enseignement de la notion de probabilité d'un événement (Brousseau, 2011).

Certains ne remarqueront peut-être pas que nous avons conçu et expérimenté de nombreux dispositifs didactiques originaux pour enseigner de façon « fonctionnelle » et non formelle les notions mathématiques de base à des enfants réels dans des classes ordinaires : les nombres et la numération, le calcul élémentaire, la mesure des grandeurs, les structures numériques élémentaires, les connaissances spatiales. Nous y avons ajouté des notions de statistique, de logique, de théorie des fonctions et même de topologie sans jamais chercher à faire des « morceaux de bravoure » injustifiés. Ces dispositifs ont été expérimentés et reproduits sous contrôle pendant des années (p. 2).

La problématique de la présente thèse consiste à nous interroger sur l'enseignement et l'apprentissage des probabilités relativement aux instructions officielles en vigueur en vue de l'élaboration d'une ingénierie didactique pour l'enseignement des probabilités basé sur une démarche expérimentale incluant la situation fondamentale de Brousseau évoquée précédemment. Nous nous proposons ainsi d'étudier d'une part les conditions de diffusion et de transmission du calcul des probabilités dans le contexte actuel de l'enseignement au Bénin, et d'autre part de rechercher de nouvelles conditions d'enseignement des probabilités pouvant permettre non seulement de donner du sens aux concepts probabilistes fondamentaux, mais aussi d'améliorer par la même occasion l'apprentissage du calcul des probabilités.

Pour aborder notre thème, nous nous posons les deux questions de recherche suivantes :

Question Q₁ : Quels sont les effets de l'enseignement des probabilités sur l'apprentissage du calcul élémentaire des probabilités dans le secondaire au Bénin ?

Question Q₂ : Dans quelles conditions la diffusion du calcul élémentaire des probabilités au Bénin peut-elle contribuer à des apprentissages réussis des concepts probabilistes de base ?

La première question nous conduira à faire un état des lieux de l'enseignement des probabilités souvent basé sur l'approche laplacienne et à proposer des enquêtes relatives à l'apprentissage des probabilités. Quant à la deuxième question, son étude aboutira à

l'élaboration d'une ingénierie didactique pour l'enseignement des probabilités basée sur une démarche expérimentale en prenant en compte les problèmes auxquels est confronté cet enseignement dans les conditions actuelles. Il s'agira plus particulièrement pour nous d'étudier les conditions dans lesquelles l'approche fréquentiste de la notion de probabilité d'un événement peut permettre d'améliorer considérablement le rapport des élèves au calcul des probabilités. L'approche fréquentiste dans l'enseignement des probabilités loin d'en exclure l'approche laplacienne voire celle de Kolmogorov les renforce plutôt, car les approches fréquentiste et laplacienne tout en paraissant contradictoires selon certains points de vue (l'une étant expérimentale et l'autre théorique) sont complémentaires (Parzysz¹⁰, 2003).

[Les deux approches laplacienne et fréquentiste] apparaissent donc finalement « contradictoires et complémentaires », et, en conséquence, se limiter à l'une ou l'autre des deux approches est, comme on l'a vu, nécessairement réducteur. C'est pourquoi une démarche didactique cohérente se devrait d'intégrer les deux aspects, en prenant en compte les conceptions « initiales » des élèves et les obstacles épistémologiques repérés.

Par rapport aux deux questions précédentes, qui précisent la problématique de la thèse, nous formulons respectivement les hypothèses ci-après.

Hypothèse H₁ : La focalisation de l'enseignement des probabilités sur le premier principe de Laplace conduit à un échec qui se traduit par le rapport inadéquat de la plupart des élèves aux concepts probabilistes de base et au calcul des probabilités.

Hypothèse H₂ : L'enseignement des probabilités à partir d'une démarche expérimentale incluant l'approche fréquentiste couplée avec le deuxième principe de Laplace permet d'une part, de donner un sens aux objets probabilistes de base, et d'autre part, d'améliorer le rapport personnel des élèves au calcul des probabilités.

La vérification de ces deux hypothèses constitue pour la suite le point focal vers lequel la thèse sera orientée. La deuxième partie de la thèse aura pour but d'étudier la question Q₁, tandis la troisième partie sera consacrée à l'étude de la question Q₂.

2. Méthodologie de recherche

Pour aborder notre sujet de thèse relatif à l'étude d'un enseignement des probabilités à partir d'une démarche expérimentale, nous avons pu le traduire par deux questions de recherche qui

¹⁰ Parzysz B. (2003). *L'enseignement de la statistique et des probabilités en France : évolution au cours d'une carrière d'enseignant (période 1965-2002)*, Probabilités au lycée, brochure 143, p 9-34, A.P.M.E.P., cité dans Gaydier (2011, p. 69).

nous ont conduit à formuler les hypothèses H_1 et H_2 précédemment évoquées. La vérification de ces hypothèses nécessite la mise en place d'une méthodologie générale devant indiquer les actions à mener en vue de la confirmation ou de l'infirmité de chacune d'entre elles.

2.1. Méthodologie relative à l'hypothèse H_1

La vérification de l'hypothèse H_1 a consisté à faire l'état des lieux de l'enseignement et de l'apprentissage des probabilités au Bénin, en étudiant notamment la transposition didactique des probabilités et en soumettant à un post test des élèves de classes terminales ayant fraîchement suivi des cours de probabilités dans les conditions actuelles de leur diffusion au Bénin. La méthodologie pour la vérification de l'hypothèse H_1 s'appuie ainsi sur un certain nombre d'analyses préalables (Artigue, 1988), dont notamment :

- l'analyse épistémologique des contenus visés par l'enseignement ;
- l'analyse de l'enseignement usuel et de ses effets ;
- l'analyse des conceptions des élèves, des difficultés et obstacles qui marquent leur évolution.

Nous avons précisément suivi et réalisé en 2013 l'enregistrement audio des séances de cours de probabilités dans quatre classes terminales de trois établissements de Lokossa, à savoir : la classe terminale TD du lycée de jeunes filles de Lokossa, les classes de terminales TD₃ et TC du CEG₁ de Lokossa et la classe de terminale TD₃ du CEG₂ de Lokossa. Lokossa est une ville située au Sud-Ouest du Bénin, où nous avons été en service de 2006 à 2012. Dans deux des classes, à savoir les classes TD du lycée des jeunes filles et TD₃ du CEG₂, nous avons proposé aux deux enseignants une activité d'introduction de la notion de probabilité d'un événement à partir d'une démarche expérimentale basée sur l'approche fréquentiste et dont l'objectif est d'étudier la faisabilité de cette démarche (Annexe 2). Une séance tenue avec les enseignants nous a permis de valider l'activité et de nous entendre sur la manière dont elle doit se dérouler. Pendant le déroulement de cette activité nous sommes intervenu par moments soit pour orienter discrètement l'enseignant soit pour apporter des éclairages aux élèves. Nous n'avons pas suivi ni enregistré des séances de cours portant sur les notions de base du calcul des probabilités telles que l'expérience aléatoire, l'univers des possibles, les événements. Toutefois, dans le cadre de notre DEA (Dandjinou, 2013), nous avons réalisé en 2012 des enregistrements audios de séances de cours des mêmes enseignants sur les notions de base des probabilités, notamment sur la notion d'expérience aléatoire. Nous avons récupéré les notes de cours des élèves ainsi que la fiche pédagogique de l'un des deux enseignants. À l'issue de

l'enseignement, nous avons soumis les élèves à un test ayant eu lieu simultanément dans les quatre classes. Le test comporte sept exercices et porte aussi bien sur les concepts de base et les propriétés que sur le calcul des probabilités (Annexe 3). En dehors des cours suivis et du post test, nous avons réalisé auprès de quatre-vingt-huit enseignants ayant dispensé des cours de probabilités une enquête portant sur l'enseignement de la notion d'expérience aléatoire et sur les approches du calcul de probabilités (Annexe 4).

L'analyse des cours observés, des notes de cours des élèves et de la fiche pédagogique, peut servir à étudier, d'une part, le savoir enseigné dans le cadre de la transposition didactique et d'autre part l'organisation didactique de l'enseignement des probabilités. L'analyse des réponses fournies par les enseignants au questionnaire permettra d'apprécier leur pratique de l'enseignement du calcul des probabilités et d'évaluer leur rapport personnel aux approches de définition de la probabilité d'un événement. Les réponses des élèves aux exercices du test seront de leur côté analysées pour évaluer les rapports personnels des élèves aux concepts probabilistes enseignés dont notamment les deux premiers principes de Laplace. De ces études sortiront des hypothèses sur les effets de l'enseignement et ceux de l'apprentissage des probabilités dont nous avons tenu compte pour fixer les objectifs de l'ingénierie didactique en vue de la vérification de l'hypothèse H_2 .

Le choix des classes et celui des professeurs sont liés. En effet, nous avons souhaité travailler avec des professeurs ayant une formation initiale en mathématique, car certains enseignent les mathématiques sans avoir évolué dans des filières essentiellement mathématiques. Nous avons pu contacter deux sur les trois qu'il y avait dans la ville de Lokossa, à qui nous avons présenté notre projet d'étude de l'enseignement et de l'apprentissage des probabilités. Ces professeurs qui ont donné un avis favorable à notre sollicitation tenaient chacun en ce moment deux classes terminales scientifiques. Ils sont des professeurs certifiés de mathématiques qui totalisaient respectivement cinq et vingt ans d'enseignement des mathématiques. Parmi les quatre classes, il y a trois de la série D d'effectifs respectifs 19, 32 et 49, et une de la série C d'effectif 16, soit un effectif total de 116 élèves, parmi lesquels 100 ont participé au post test.

2.2. Méthodologie relative à l'hypothèse H_2

Concernant la vérification de l'hypothèse H_2 , nous avons élaboré une ingénierie didactique pour l'enseignement des probabilités à partir d'une démarche expérimentale, dont le but est la recherche de solutions aux problèmes constatés dans l'enseignement et l'apprentissage des

probabilités lors de la vérification de l'hypothèse H_1 . L'ingénierie élaborée est ensuite réalisée en 2017 dans une classe de seconde de la série C du collège d'enseignement général d'Agblangandan, où nous avons été aussi en service de 2012 à 2018. La réalisation en classe de l'ingénierie didactique a eu lieu en onze séances de cours, enregistrées entièrement en audio et partiellement en vidéo. Le choix de la classe de seconde C et du professeur expérimentateur est justifié au niveau du chapitre consacré à l'élaboration de l'ingénierie (chap. VI). Tous transcrits, les enregistrements ont été exploités pour l'analyse a posteriori de l'ingénierie expérimentée. Comme dans la méthodologie de vérification de l'hypothèse H_1 , les élèves ayant pris part à l'expérimentation de l'ingénierie ont été soumis à un post test presque identique à celui administré aux élèves en 2013 à l'occasion des analyses préalables. L'analyse comparative des réponses des élèves au test a permis de faire des hypothèses sur les apports éventuels de l'ingénierie expérimentée à l'apprentissage des concepts essentiels du calcul des probabilités.

Avant d'aboutir à l'ingénierie expérimentée dans cette thèse, nous avons essayé plusieurs fois un enseignement des probabilités à partir de l'approche fréquentiste. D'abord, lors des analyses préalables réalisées dans le cadre de la vérification de l'hypothèse H_1 , nous avons proposé aux professeurs une activité introductive au niveau de deux des quatre classes concernées par cette étude. Portant sur le lancer effectif de dé en classe, l'activité a visé l'introduction de la notion de probabilité d'un événement. Ensuite, nous avons élaboré en 2016 une première ingénierie que nous avons expérimentée dans la classe terminale C que nous avons eu en charge au CEG Agblangandan en 2015-2016. L'ingénierie que nous avons finalement expérimentée pour la vérification de l'hypothèse H_2 s'est nourri de ces pré-expérimentations dont quelques résultats sont présentés en annexe (Annexe 5).

3. Cadre théorique

Toute thèse a besoin d'être rédigée dans un cadre théorique précis pouvant permettre aux lecteurs avertis d'apprécier sa scientificité. Le cadre théorique adapté à notre thèse dont l'objectif principal est la proposition d'un enseignement des probabilités à partir d'une démarche expérimentale, est composé de la méthodologie d'ingénierie didactique (Brousseau, 2013 ; Artigue, 1988 ; Margolinas, 2004), de la théorie anthropologique du didactique (Chevallard 1992, 1999), de la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1998) et de la méthodologie d'analyse des quatre composantes (Bronner, 2010).

3.1. Méthodologie d'ingénierie didactique

L'ingénierie didactique désigne à la fois une méthodologie de recherche et une proposition de modèle d'enseignement d'un savoir précis dans des conditions précises. Pour être validé par la communauté scientifique, le processus d'élaboration, d'expérimentation et d'analyse d'une ingénierie didactique, en tant que proposition d'un enseignement donné, doit respecter une démarche scientifique qu'est l'ingénierie didactique, vue comme une méthodologie de recherche. Pour proposer notre démarche expérimentale d'enseignement des probabilités, nous avons dû faire le choix de suivre cette méthodologie d'ingénierie didactique, dont nous présentons les caractéristiques et les étapes dans cette section.

3.1.1. Les caractéristiques d'une ingénierie didactique

S'étant intéressé à l'épistémologie et l'histoire des mathématiques, qu'il a jugé insuffisantes pour décrire et expliquer les phénomènes de l'enseignement des mathématiques, Guy Brousseau avait défendu l'idée de l'épistémologie expérimentale qui l'a conduit à la création dans les années 1970 de la didactique des mathématiques (Brousseau, 2013). Sur un autre plan, s'étant inspiré de l'existence au Québec en 1970, des enseignants d'université sans grades universitaires suffisants, se réclamant « ingénieurs didacticiens », qui avaient la responsabilité de faire les cours, d'écrire les manuels, d'imaginer le matériel éducatif, de présenter les théories éducatives, etc, Brousseau a officialisé le terme « ingénierie didactique » auquel il a contribué à donner son sens actuel. L'ingénierie didactique se présente comme une des branches de la didactique, où se conçoivent et s'étudient les dispositifs observables et reproductibles d'enseignement (Ibid., p.4).

L'ingénierie didactique s'occupe de créer des modèles consistants et pertinents et de réaliser des dispositifs d'enseignement d'une connaissance précise, destinés à décrire ou à prévoir, et à expliquer les événements observables d'un épisode d'enseignement déterminé (situations ou curriculum) observé ou envisagé :

- observé, afin de recueillir les informations qui permettront d'en rendre compte, d'expliquer a posteriori son déroulement et ses résultats, et de permettre sa reproduction
- envisagé, afin de déterminer les conditions reproductibles (réalisables et communicables) de son déroulement et de ses résultats observables.

L'étude de la consistance et de la pertinence de ces modèles renvoie à un examen critique de tous les concepts relatifs à l'enseignement, à l'apprentissage et à la constitution même de la matière enseignée.

Régine Douady (1984), Michèle Artigue (1988), Claire Margolinas (2004) et bien d'autres didacticiens des mathématiques ont contribué à faire de l'ingénierie didactique une méthodologie de recherche privilégiée.

Cet étiquetage est alors perçu comme le moyen d'aborder deux questions cruciales, vu l'état du développement de la didactique des mathématiques à l'époque :

- les rapports entre la recherche et l'action sur le système d'enseignement,
- le rôle qu'il convient de faire jouer aux "réalisations didactiques" en classe, au sein des méthodologies de la recherche didactique (Artigue, 1988, p. 281).

À ces deux problèmes s'ajoute celui du rôle qu'il faut faire jouer au professeur dans les réalisations didactiques en classe.

Le problème qui se pose donc est de savoir comment chercheur et enseignant vont pouvoir négocier le rôle du professeur dans les situations didactiques, ce qui est devenu plus tard un problème théorique que j'ai contribué à problématiser puis à résoudre (Margolinas, 2004, p. 20).

Artigue (1988) identifie trois caractéristiques fondamentales de la méthodologie d'ingénierie didactique, notamment :

- Un schéma expérimental basé sur des « réalisations didactiques » en classe, c'est-à-dire sur la conception, la réalisation, l'observation et l'analyse de séquences d'enseignement ;
- Le registre dans lequel elle se situe, celui des études de cas, et dont la validation est interne, étant fondé sur la confrontation entre analyse a priori et analyse a posteriori ;
- Les objectifs divers en ce sens qu'on distingue les recherches qui visent l'étude des processus d'apprentissage d'un concept donné de celles qui sont transverses aux contenus.

L'ingénierie didactique, que nous proposons, possède les trois caractéristiques précédentes et porte précisément sur l'apprentissage du concept de probabilité d'un événement.

3.1.2. Les différentes phases de la méthodologie d'ingénierie

Selon Artigue (1988), la méthodologie d'ingénierie didactique comporte quatre phases, à savoir les phases : des analyses préalables, de la conception et de l'analyse a priori des situations didactiques, de l'expérimentation et de l'analyse a posteriori. Nous présentons brièvement ces phases telles qu'elles ont été clarifiées par Artigue (Ibid).

3.1.2.1. Analyses préalables

En dehors du cadre théorique didactique général et des connaissances didactiques acquises dans le domaine, la phase de la conception s'appuie sur un certain nombre d'analyses préliminaires, notamment :

- l'analyse épistémologique des contenus visés par l'enseignement,
- l'analyse de l'enseignement usuel et de ses effets,
- l'analyse des conceptions des élèves, des difficultés et obstacles qui marquent leur évolution,
- l'analyse du champ de contraintes dans lequel va se situer la réalisation didactique effective,
- la prise en compte des objectifs spécifiques de la recherche.

Il est à noter que ces analyses n'interviennent pas toutes de façon explicite. Il y a souvent des dimensions privilégiées. Un des points d'appui essentiel de la phase de conception est l'analyse préalable des conceptions des élèves, de leurs difficultés et erreurs tenaces, l'ingénierie didactique étant conçue pour provoquer l'évolution des conceptions.

Dans notre étude, les analyses préalables ont consisté globalement à étudier la transposition didactique des probabilités, l'enseignement et l'apprentissage des probabilités pour dégager des hypothèses dont nous avons tenu compte pour concevoir le dispositif d'enseignement des probabilités.

3.1.2.2. Conception et analyse a priori

Dans cette phase, le chercheur prend la décision d'agir sur des variables du système non fixées par les contraintes, appelées variables de commande et qui sont pertinentes par rapport au problème étudié. On distingue deux types de variables de commande : les variables macro-didactiques ou globales qui concernent l'organisation globale de l'ingénierie et les variables micro-didactiques ou locales qui concernent l'organisation locale (organisation d'une séance, d'une phase) pour lesquelles on distingue les variables dites du problème de celles dites de situation.

Le processus de validation (interne) s'engage dès la phase de conception via l'analyse a priori qui est à concevoir comme une analyse du contrôle du sens. En effet la théorie des situations qui sert de référence à l'ingénierie didactique s'est constituée comme une théorie du contrôle des rapports entre sens et situations. Ainsi l'objectif de l'analyse a priori est de déterminer en quoi les choix effectués permettent de contrôler les comportements des élèves et

leur sens. Se fondant sur des hypothèses dont la validation sera en jeu dans la confrontation analyse a priori et analyse a posteriori, l'analyse a priori comporte une partie descriptive et une partie prédictive. Elle est centrée a priori sur les caractéristiques d'une situation adidactique que l'on a voulu constituer et dont on va chercher à faire la dévolution aux élèves. Elle consiste à :

- décrire les choix effectués au niveau local et les caractéristiques de la situation adidactique qui en découlent ;
- analyser l'enjeu de cette situation pour l'élève en fonction des possibilités d'action, de choix, de décision, de contrôle et de validation dont il dispose en situation de dévolution ;
- prévoir des champs de comportements possibles et montrer en quoi l'analyse effectuée permet de contrôler leur sens et d'assurer que les comportements attendus résulteront de la mise en œuvre de la connaissance visée par l'apprentissage.

À la naissance de la méthodologie d'ingénierie didactique, l'enseignant est traditionnellement peu présent dans l'analyse a priori. Il n'est essentiellement envisagé que dans ses rapports à la dévolution et à l'institutionnalisation. Ceci est dû au fait que la didactique des mathématiques s'est constituée sur des théories constructivistes de la connaissance, qui insiste sur la restitution de la place de l'élève. Dans les ingénieries actuelles, la place de l'enseignant est importante. Ce qu'il doit faire à chaque phase doit être précisé, car les ingénieries plus récentes envisagent le rôle du professeur (Margolinas, 2004).

Dans notre étude, la conception de l'ingénierie didactique est suivie d'une analyse a priori de chacune des situations composant l'ingénierie. Pour rester conforme à l'actualité des ingénieries didactiques, nous avons inclus dans l'analyse a priori le rôle que le professeur doit jouer dans chaque situation.

3.1.2.3. Expérimentation, analyse a posteriori et validation

L'expérimentation classique est suivie d'une analyse dite a posteriori qui s'appuie sur les données recueillies lors de l'expérimentation (observations réalisées des séances d'enseignement et productions des élèves en classe ou hors classe) qui sont complétées par des données externes telles que les questionnaires et les entretiens individuels ou en petits groupes. La validation des hypothèses engagées dans la recherche se fonde essentiellement sur la confrontation entre analyse a priori et analyse a postérieure.

L'ingénierie didactique est confrontée à des difficultés liées aussi bien à l'épistémologie de la didactique qu'à la validation interne de cette méthodologie, parmi lesquelles :

- l'impossibilité de communiquer, du fait de sa longueur, toute l'analyse a priori dont il n'est publié qu'un condensé, affectant ainsi le contrôle extérieur de la communauté sur la démarche de la validation ;
- l'analyse des distorsions apparues de la confrontation de l'analyse a priori et de l'analyse a posteriori qui n'est pas faite de manière à invalider les hypothèses engagées, les chercheurs se bornant plutôt à modifier l'ingénierie ;
- le fait que les hypothèses engagées, souvent globales, occasionnent un processus d'apprentissage à long terme qui ne permet pas d'entrer dans une démarche de validation.

Dans le cadre de notre travail, la réalisation en classe a pu avoir lieu dans des conditions assez bonnes et l'analyse a posteriori a été faite en confrontation avec l'analyse a priori conformément à la méthodologie.

3.2. La théorie anthropologique du didactique

Dans le processus de la méthodologie d'ingénierie didactique, nous avons choisi la théorie anthropologique du didactique (TAD) développée par Chevallard (1992, 1999) pour l'analyse de toute activité humaine. La TAD nous a intéressé dans ses composantes cognitives et praxéologiques pour les différentes analyses intervenant notamment dans les phases d'analyses préalables, d'analyse a priori et d'analyse a posteriori. Nous avons porté également notre choix sur le concept de la transposition didactique (Chevallard, 1991), dont la TAD est un prolongement pour étudier la trajectoire du savoir en jeu depuis sa nature savante jusqu'à sa présence dans la classe. Nous avons l'ambition d'aller plus loin en étendant cette étude à l'échelle didactique de codétermination (Chevallard, 2011).

3.2.1. La transposition didactique

Le concept de la transposition didactique est apparu pour la première fois chez le sociologue Michel Verret¹¹ (1975) pour expliquer l'organisation spécifique de tout objet d'enseignement.

Toute pratique d'enseignement d'un objet présuppose en effet la transformation préalable de cet objet en objet d'enseignement.

Cette transformation implique que la division du travail ait autonomisé le procès de transmission du savoir du procès de sa mise en œuvre et constitué pour chaque pratique une pratique distincte d'apprentissage, [...]

¹¹ Verret, M. (1975) : Le temps des études, 2 volumes, Paris, Honoré Champion, cité dans (Bronckart, Plazaola Giger, 1998)

Dans ce travail de détachement et de transposition, une distance s'institue nécessairement de la pratique d'enseignement à la pratique dont elle est l'enseignement, de la pratique de transmission à la pratique d'invention, de l'« ars docendi » à l'« ars inveniendi » et même à l'« ars exponendi ». (p. 140)

Selon Verret, l'objet d'enseignement a dû subir des transformations de l'invention à l'exposition scientifique, puis à l'exposition didactique, puis à la mise en œuvre (Bronckart, Plazaola Giger, 1998). Cette transformation présente les caractéristiques suivantes : la désyncrétisation (découpage en champs de savoirs limités), la dépersonnalisation (séparation du savoir de son producteur), la programmabilité (organisation en séquences), la publicité du savoir à transmettre (définition explicite) et le contrôle social des apprentissages (Ibid).

Se questionnant sur la légitimité des contenus d'enseignement et sur l'apparition d'un écart entre le savoir enseigné et les références qui le légitiment, Chevallard (1991) s'est approprié le concept de la transposition didactique qu'il a développé en didactique des mathématiques en clarifiant notamment les différentes étapes de la transposition et les statuts des savoirs. Comme Verret, Chevallard soutient que tout objet d'enseignement subit des transformations préalables pour être désigné comme tel.

Un contenu de savoir ayant été désigné comme savoir à enseigner subit dès lors un ensemble de transformations adaptatives qui vont le rendre apte à prendre place parmi les objets d'enseignement. "Le travail" qui d'un objet de savoir à enseigner fait un objet d'enseignement est appelé la transposition didactique. (Chevallard, 1991, p. 39)

Ce texte de référence de la transposition didactique pose dans un premier temps le problème de légitimité du savoir à enseigner, désigné comme tel : pourquoi ce savoir désigné et pourquoi pas un autre ? Dans un second temps, le texte met l'accent sur la distance entre le savoir à enseigner et le savoir enseigné tel que Chevallard le clarifie un peu plus tôt dans son ouvrage (Ibid, p.15).

Le savoir-tel-qu'il-est-enseigné, le savoir enseigné, est nécessairement autre que le savoir-initialement-désigné-comme-devant-être-enseigné, le savoir à enseigner.

On note ainsi clairement que les transformations en question ont lieu entre le savoir à enseigner et le savoir enseigné. Cependant, dans le développement de Chevallard (Ibid), le savoir à enseigner est lui aussi le fruit des transformations du savoir situé à un niveau supérieur : le savoir savant. La transposition didactique est donc l'activité qui consiste à transformer d'une part le savoir savant en savoir à enseigner puis de ce dernier au savoir enseigné, qui lui aussi est différent du savoir appris, qu'on pourrait localiser au niveau de l'élève.

Le savoir savant est le savoir validé comme tel par la communauté scientifique. Le savoir à enseigner est celui jugé d'utilité sociale et désigné pour être enseigné en classe. Cette désignation est assurée par ce que Chevallard appelle la noosphère, constituée par l'ensemble des personnes et des groupes dont la fonction est d'assurer plus généralement l'interface, la relation, entre le système d'enseignement et la société globale. Il est contenu dans les documents programmes et dans une certaine mesure dans les manuels scolaires. Le savoir enseigné est le savoir effectivement enseigné. Il est ce savoir que l'enseignant a construit à partir du savoir à enseigner et qu'il va mettre en œuvre en classe pour provoquer des apprentissages. C'est en un mot l'interprétation du savoir à enseigner par l'enseignant.

On distingue deux étapes dans la transposition didactique : la transposition didactique externe et la transposition didactique interne. La transposition didactique externe est le passage du savoir savant au savoir à enseigner. Ayant lieu hors de la classe, elle est effectuée par la noosphère. Elle analyse comment et pourquoi les programmes sont renouvelés dans chaque contexte social : en fonction de quelles références (nouvelles connaissances, pratiques sociales, valeurs) et de quelles influences (conceptions des acteurs qui effectuent ces choix pour le système éducatif) ? La transposition didactique interne est la transformation effectuée par l'enseignant pour le faire passer du savoir à enseigner au savoir enseigné. La transposition didactique de Yves Chevallard peut être schématisé comme il suit :

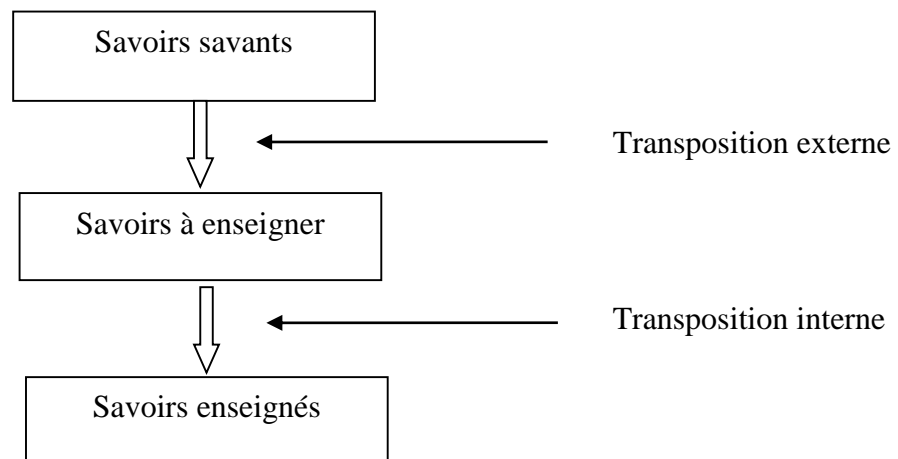


Schéma de la transposition didactique de Chevallard.

Dans notre travail, nous contextualisons le concept de la transposition didactique dans le domaine des probabilités, en étudiant les transformations subies par l'objet de savoir « calcul des probabilités » depuis la communauté scientifique jusque dans les classes terminales scientifiques. Concrètement nous allons examiner les notions d'expérience aléatoire, de probabilité d'un événement et les différentes formules de calcul de probabilités respectivement

au niveau de l'enseignement mathématique supérieur, des instructions officielles, des manuels scolaires et de l'enseignement secondaire au Bénin. Les différentes analyses à ces niveaux de savoirs se feront à l'aide de la théorie anthropologique du didactique que nous présentons sommairement dans la section suivante.

3.2.2. Anthropologie cognitive, organisations mathématique et didactique

Dans la théorie anthropologique du didactique, nous abordons trois outils essentiels que nous avons utilisés pour nos analyses. Il s'agit notamment de l'anthropologie cognitive, de l'organisation mathématique ou de la praxéologie et de l'organisation didactique.

3.2.2.1. L'anthropologie cognitive

La dimension cognitive de la théorie anthropologique du didactique aborde les éléments de base de cette théorie, qui sont les notions d'objets, de personnes, d'institutions et de rapports personnel et institutionnel.

L'objet tel que défini par Chevallard (1992) est « l'objet d'étude » d'une question Q à laquelle on envisage de trouver une réponse. C'est l'élément de base de la théorie tel qu'il le précise (Ibid, p. 86).

Les objets, cependant, occupent ici une position privilégiée ; ils sont le « matériau de base » de la construction théorique envisagée.

La notion d'objet est intimement liée à celles d'institution et de personnes. L'institution I est « le lieu moral » où un objet O est étudié, tandis que les personnes sont les personnes concernées par cette étude. Il s'agit, exclusivement dans le système didactique, de l'élève et du professeur. Le lien entre les trois termes primitifs d'objet O , d'institution I et d'une personne X est constitué du rapport institutionnel $R_I(O)$ et du rapport personnel $R_X(O)$ tels qu'ils sont introduits par Chevallard (1992, p. 86).

Un objet existe dès lors qu'une personne X ou une institution I reconnaît cet objet comme un existant (pour elle). Plus précisément, on dira que l'objet O existe pour X (respectivement, pour I), s'il existe un objet, que je note $R_X(O)$ (resp. $R_I(O)$), que j'appelle rapport personnel de X à O (resp. rapport institutionnel de I à O). En d'autres termes, l'objet O existe s'il existe pour au moins une personne X ou une institution I , c'est-à-dire si au moins une personne ou une institution a un rapport à cet objet.

Le rapport personnel $R_X(O)$ d'une personne X à un objet d'enseignement O est ainsi la connaissance et toutes les relations que la personne X a de l'objet, tandis que le rapport institutionnel à l'objet O est tout ce que l'institution prévoit comme savoir relatif à l'objet O .

Par rapport à notre travail, l'objet d'enseignement O est la probabilité, constituée des notions probabilistes nécessaires au calcul élémentaire des probabilités. Il s'agit plus précisément des notions de base des probabilités dont notamment la notion d'expérience aléatoire, de la définition fréquentiste de la probabilité, des deux premiers principes de Laplace et des propriétés fondamentales du calcul élémentaire des probabilités. Dans le cadre de l'étude des effets de l'enseignement et de l'apprentissage des probabilités, l'institution d'étude est la classe terminale scientifique où les probabilités sont inscrites au programme. Mais l'institution que nous avons choisie pour l'expérimentation de l'ingénierie construite est la classe de seconde de la série C, à laquelle nous avons adapté une partie du programme de probabilité de la classe terminale scientifique. Ainsi, en nous plaçant dans l'institution terminale scientifique, nous avons étudié le rapport institutionnel à l'objet probabilité au niveau de la transposition didactique. De même, le rapport des élèves aux notions probabilistes est étudié, dans un premier temps dans un contexte de l'enseignement suivant les recommandations du programme officiel, et dans un second temps dans le contexte d'une ingénierie didactique construite pour l'enseignement des probabilités suivant une démarche expérimentale.

3.2.2.2. L'organisation mathématique

L'un des outils principaux d'analyse de la théorie anthropologique du didactique (Chevallard, 1999) est la notion d'organisation praxéologique ou d'organisation mathématique, qui est la modélisation de l'activité humaine en général et de l'activité mathématique en particulier.

Le postulat de base de la TAD fait violence à cette vision particulariste du monde social : on y admet en effet que toute activité humaine régulièrement accomplie peut être subsumée sous un modèle unique, que résume ici le mot praxéologie. Avant même d'examiner ce que l'on nomme ainsi, on doit noter que l'on part donc d'une hypothèse qui ne spécifie nullement l'activité mathématique parmi les activités humaines : c'est autrement que les mathématiques devront se voir reconnues leur spécificité (p. 223).

L'organisation praxéologique sert à décrire, analyser, évaluer les rapports personnels, les rapports institutionnels, et plus généralement les pratiques des enseignés, les pratiques enseignantes. Les éléments composant l'organisation praxéologique, donc aussi l'organisation mathématique, sont respectivement les notions de tâche et type de tâches, de techniques, de technologies et de théories.

Le type de tâches est le point de départ de l'organisation praxéologique. Il précise l'objet de ce que l'on veut décrire, analyser, évaluer, etc. Plus généraliste, le type de tâches comporte des tâches qui le spécifient. Pour un type de tâches T donné, une technique τ est une manière

de réaliser les tâches qui relèvent de T. Il faut entendre le terme de technique en un sens très large, comme une « manière de faire » particulière, « une manière de réaliser la tâche », et non pas seulement comme un procédé structuré et méthodique, voire algorithmique, ce qui n'est qu'un cas très particulier de technique (Chevallard, 1999). Tout type de tâches T et une technique τ permettant de réaliser les tâches de T forment le bloc pratico-technique $[T/\tau]$, couramment appelé savoir-faire. Pour une technique τ donnée, on appelle technologie θ , tout discours rationnel sur cette technique. On admet que dans une institution I donnée, quel que soit le type de tâche T, la technique τ relative à T est toujours accompagnée d'au moins une technologie θ . Une technologie peut avoir pour fonction de justifier rationnellement la technique ; d'expliquer, de rendre intelligible et d'éclairer la technique ; produire la technique (Ibid). Toute technologie θ a besoin, à son tour, d'une justification Θ , que l'on appelle la théorie de la technique, et qui en constitue le fondement ultime. Une technologie θ et la théorie Θ qui la justifie forment le bloc technologico-théorique $[\theta/\Theta]$ identifié comme un savoir.

Dans le cadre des différentes études menées dans notre travail, nous avons dû définir pour chacune d'entre elles un ou plusieurs types de tâches. Par exemple, pour étudier le rapport institutionnel ou le rapport personnel au calcul de probabilité d'un événement, nous sommes parti du type de tâches « Calculer la probabilité d'un événement ». Nous avons utilisé l'organisation praxéologique pour nos analyses au niveau de la transposition didactique, des analyses préalables, des analyses a priori et des analyses a posteriori.

3.2.2.3. L'organisation didactique

L'outil de la théorie anthropologique du didactique qui permet de s'intéresser à la manière dont un objet est étudié dans un système didactique est la praxéologie didactique ou organisation didactique (Ibid., p. 244).

Les praxéologies didactiques ou organisations didactiques sont des réponses (au sens fort) aux questions du type « comment étudier la question $q = \tau_T ?$ », ou « comment étudier l'œuvre O ? ».

L'étude de l'organisation didactique d'une situation d'enseignement est basée sur la notion de moments didactiques, qui sont des situations présentes dans tout cheminement d'étude d'un objet ou d'une œuvre O (Ibid). Chevallard a défini six moments didactiques pour décrire comment une activité humaine est menée. Il s'agit :

- du moment de la première rencontre (d'un type de tâches donné) ;

- du moment de l’exploration du type de tâches et de l’élaboration de la technique (une technique relevant du type de tâches) ;
- du moment de la constitution du bloc théorique relatif à la technique ;
- du moment du travail de la technique ;
- du moment de l’institutionnalisation ;
- du moment de l’évaluation.

Intégrée dans la méthodologie des quatre composantes (Bronner, 2010), que nous allons présenter un peu plus loin (3.4), l’organisation didactique est utilisée dans notre travail au niveau de l’analyse a posteriori des quatre premières des situations de l’ingénierie didactique. De même, nous avons eu recours à l’organisation mathématique pour analyser les séances de cours que nous avons suivis et transcrits lors des analyses préalables.

3.2.2.4. Le topos et le temps didactique

Dans l’accomplissement d’une tâche t , l’élève et l’enseignant sont appelés chacun à effectuer certains gestes qui constituent son rôle. Certains de ces gestes sont considérés comme des tâches à part entière dont il assume les enjeux et la responsabilité dans la réalisation. L’ensemble de ces tâches pour un acteur constitue son topos (Chevallard, 1999).

La progression de l’enseignement est assurée par l’évolution des statuts des anciens objets d’enseignement et la rencontre avec de nouveaux objets d’enseignement selon un nouveau rythme, le temps didactique, qui n’est pas le temps de l’élève. Ce dernier, souvent en retard, est parfois contraint à entamer des négociations du contrat, se traduisant par des pauses et des reprises afin de modifier le temps didactique.

3.3. La théorie des situations didactiques

Nous nous sommes inscrit dans le cadre de la théorie des situations didactiques pour construire l’ingénierie didactique pour un enseignement des probabilités. Il a fallu, pour ce faire, élaborer des situations didactiques.

3.3.1. Les situations didactiques

Étant l’ensemble des circonstances qui conduisent à la diffusion et l’acquisition des connaissances, une situation est dite didactique lorsqu’elle sert à enseigner (Brousseau, 1998).

Une situation est l’ensemble des circonstances dans lesquelles une personne se trouve, et des relations qui l’unissent à son milieu. Prendre comme objet d’études les circonstances qui président à la diffusion et à l’acquisition des connaissances conduit donc à s’intéresser

aux situations. Les situations didactiques sont, dans la langue française, des situations qui servent à enseigner (p. 2).

Cette définition comporte la notion de « milieu » que Brousseau (2010) définit comme étant le système antagoniste sur lequel les élèves interagissent au cours de leur apprentissage. Il est composé de tout ce qui agit sur l'élève et de tout ce sur quoi l'élève agit, y compris l'enseignant. C'est l'ensemble des objets présents dans la situation, y compris les autres acteurs, ou qui apparaissent au fur et à mesure de l'interaction de l'élève.

Les situations porteuses d'apprentissages sont celles qui contiennent suffisamment des phases où une autonomie est accordée à l'élève, qui devra adopter la posture d'un « mathématicien en herbe » en résolvant le problème qui lui est soumis sans se soucier d'un quelconque savoir sous-jacent. Ces phases d'autonomie des élèves sont appelées les situations adidactiques (Kuzniak, 2005, p. 22).

En s'inspirant de l'usage des connaissances mathématiques en mathématiques ou en dehors des mathématiques, BROUSSEAU introduit la notion de situation adidactique pour l'élève : l'élève s'approprie la situation proposée par le professeur non pas en faisant son travail d'élève mais plutôt celui d'un « mathématicien en herbe » préoccupé par la seule résolution du problème posé.

Trois types de situations adidactiques sont distingués par Brousseau : il s'agit de la situation d'action, la situation de formulation et la situation de validation. La situation adidactique d'action est la situation au cours de laquelle, l'élève dans sa posture de « mathématicien » interagit sur le milieu en vue de la résolution du problème mathématique auquel il est confronté. La situation de formulation est celle pendant laquelle, un élève formule à l'endroit d'autres élèves la connaissance en jeu dans la situation didactique. Quant à la situation de validation, c'est la phase au cours de laquelle les élèves établissent la validité de la connaissance qui caractérise la situation didactique (Brousseau, 2010).

Deux autres notions relatives aux situations didactiques sont immanquablement celles de dévolution et d'institutionnalisation, qui sont des phases caractérisées par la présence de l'enseignant aux côtés des élèves comme faisant partie de leur milieu. En effet, la dévolution est l'acte par lequel le professeur arrive à faire saisir aux élèves leur responsabilité de s'approprier du problème et de travailler en autonomie didactique. Elle précède la situation adidactique d'action mais se poursuit dans les différents types de situations. Quant à l'institutionnalisation, elle intervient en général après la situation adidactique de validation au

niveau des élèves. Elle consiste chez le professeur à proclamer et officialiser le savoir tel qu'il souhaite le faire intégrer par les élèves.

Pour construire des situations didactiques, Brousseau met l'accent sur un type particulier de situations, ou plutôt de schémas de situations, qu'il appelle situations fondamentales, et qui font apparaître le savoir à enseigner comme le moyen optimal et autonome de solution de ces situations (Brousseau, 1997). Elles permettent de donner un sens au savoir à enseigner en jeu de la situation (Brousseau, 2010).

Une telle situation, lorsqu'on peut l'identifier, offre des possibilités d'enseignement mais surtout une représentation du savoir par les problèmes où il intervient permettant de restituer le sens du savoir à enseigner (p. 3).

Brousseau postule qu'il existe pour chaque savoir donné au moins une situation fondamentale. De même « il existe aujourd'hui de nombreuses situations fondamentales pour tous les secteurs des mathématiques élémentaires » (Brousseau, 1997, p. 10).

Par rapport à notre étude, l'ingénierie didactique élaborée pour un enseignement des probabilités à partir d'une démarche expérimentale comporte cinq situations consacrées effectivement à l'enseignement du calcul élémentaire des probabilités. Elles comportent régulièrement des phases adidactiques. La situation fondamentale conçue par Brousseau (2005) pour l'enseignement des probabilités est intégrée à l'ingénierie, permettant ainsi la construction des situations didactiques portant le sens des concepts visés.

3.3.2. Le contrat didactique

Le contrat didactique est un autre concept fondamental développé par Brousseau dans la théorie des situations didactiques. Il le définit comme « *un ensemble de règles le plus souvent implicites qui pèsent sur les élèves et sur l'enseignant et qui conditionnent leur travail* » (Brousseau, 1989a, p. 58). Ce sont les attentes réciproques explicites ou le plus souvent implicites entre les élèves et l'enseignant autour d'un savoir en construction ou construit. Le contrat didactique se noue toujours autour du savoir, et dépendant ainsi du savoir, il est dynamique et connaît régulièrement des ruptures, au cours desquelles il est reconnu par l'observateur (Ibid). C'est justement sur ces ruptures que repose l'apprentissage (Brousseau, 2010, p. 6).

L'apprentissage va donc reposer, non pas sur le bon fonctionnement du contrat, mais sur *ses ruptures et ses ajustements.*" Lorsqu'il y a rupture (échec de l'élève ou du professeur) les partenaires se comportent comme s'il y avait eu entre eux un contrat.

Le contrat didactique s'explique bien à partir du problème de l'âge du capitaine. Il s'agit d'une expérience célèbre réalisée par une équipe de l'IREM¹² de Grenoble qui a consisté à proposer des problèmes, comme celui de demander aux écoliers de CE₂/CM₂ de déterminer l'âge du capitaine d'un bateau contenant 26 moutons et 18 chèvres (Brousseau, 1997). Bien que conscients que l'âge du capitaine n'a rien à voir avec les nombres de moutons et de chèvres, la plupart de ces écoliers ont pourtant donné l'âge du capitaine en utilisant des opérations faisant intervenir les nombres 26 et 18. En effet, les écoliers ont juste respecté le contrat selon lequel le maître attend des réponses à toute question posée en fonction des données proposées. Le problème de l'« âge du capitaine » est observé lorsqu'un apprenant, n'ayant pas compris une question ou ne pouvant pas résoudre un problème, utilise de façon aléatoire les données pour parvenir à une réponse qui manque alors totalement de sens.

Le concept de contrat didactique s'illustre aussi à partir d'un certain nombre de ses effets, notamment l'effet Topaze et l'effet Jourdain. L'effet Topaze est l'acte par lequel l'enseignant, devant les échecs répétés de l'apprenant, prend à sa charge l'essentiel du travail de celui-ci, en lui suggérant implicitement la réponse au problème (Ibid.). Brousseau illustre cet effet du contrat didactique par la scène de Topaze, pièce de théâtre de Pagnol, dans laquelle le professeur donnant une dictée à un élève faible, modifie sa diction de sorte à lui suggérer la solution, par la transformation du groupe de mots « les moutons étaient dans le parc » en « les moutonnss etai-hunt dans le parc ». Dans l'effet Topaze, le professeur, dans l'attente de la bonne réponse qu'il dispose et devant le constat de l'échec de l'élève, conduit ce dernier à cette réponse souhaitée. L'effet Topaze est le constat de l'effondrement de l'enseignement ou d'un apprentissage non réussi. Il se manifeste par la gestion des questions que le professeur pose pour guider les élèves vers la solution (Kuzniak, 2005). L'effet Jourdain est la reconnaissance par le professeur de réponses dénuées de valeur ou de sens comme un indice caractéristique d'une connaissance suffisante d'un savoir chez l'élève (Brousseau, 1989a, p. 56).

L'« effet JOURDAIN » est une forme d'effet Topaze : pour éviter un débat de connaissance avec l'élève, et éventuellement un constat d'échec, le professeur accepte de reconnaître comme l'indice d'un savoir ou d'une démarche authentiques, une production ou un comportement de l'élève qui ne sont en fait que des réponses ayant des causes banales donc dénuées de valeur et même parfois de sens.

¹² Institut de recherche sur l'enseignement des mathématiques (structure française de recherche).

Dans l'effet Jourdain, le professeur ne veut pas admettre l'échec de son enseignement et donne l'impression d'avoir respecté son contrat vis-à-vis de l'élève.

Le concept de contrat didactique, comme celui de milieu développé plus haut, est intégré dans la méthodologie d'analyse des quatre composantes de Bronner (2010), que nous avons utilisée dans l'analyse a posteriori des quatre premières situations de l'ingénierie. Nous présentons cette méthodologie dans la section qui suit.

3.4. Méthodologie d'analyse des quatre composantes

Alain Bronner (2010) a proposé, à partir de la théorie anthropologique du didactique et la théorie des situations didactiques, un cadre théorique et méthodologique permettant de décrire et d'analyser ce que le professeur peut faire et fait dans la gestion de la classe mathématique ainsi que les interactions des élèves avec les éléments de la situation.

Je montrerai comment la théorie des situations didactiques de Guy Brousseau (1998) et la théorie anthropologique développée par Yves Chevallard (1992 et 1999) permettent de proposer une méthodologie d'analyse des *gestes d'étude* et des *gestes professionnels* relativement au *projet didactique* et aux *événements* qui se produisent dans l'espace-temps d'une situation didactique (p. 26).

Ce cadre théorique appelé la méthodologie des quatre composantes répond aux questions relatives aux caractéristiques mathématiques et didactiques des situations d'enseignement, à la manière dont un enseignement est conduit et aux gestes d'études possibles. Ce cadre théorique, qui combine l'analyse de l'organisation mathématique et de l'organisation didactique, l'analyse de la mésogenèse, de la topogenèse, de la chronogenèse et du contrat didactique, et la détermination des événements significatifs, comporte les quatre étapes suivantes d'analyse (Ibid).

L'élaboration de la trame de la séance qui aboutit à une première lecture et un premier découpage de la séance ;

La description et l'analyse des organisations mathématiques selon l'approche anthropologique ;

L'analyse de l'organisation didactique selon une méthodologie que nous qualifions des quatre composantes qui nous conduisent à une deuxième lecture et un deuxième découpage ;

Le repérage de gestes d'étude d'élèves et de gestes professionnels de l'enseignant, des événements et des ajustements ; ce qui conduit à mettre l'accent sur des événements et épisodes significatifs d'un questionnement.

La première étape, qui est la trame de la séance, a pour fonction de donner une description de ce qui est observé et d'identifier des traces objectives suivant les fonctions habituellement utilisées en classes : mise au travail, mise en commun, bilan, cours (Bronner 2010, p. 27).

Pour décrire les pratiques observées nous proposons de construire tout d'abord ce que nous appelons *la trame* de la leçon, qui fait apparaître des découpages de la séance selon de grandes unités rendant intelligible chaque élément retenu relativement à un projet d'enseignement. Ce premier découpage en périodes est défini par les fonctions habituellement utilisées en classe (recherche ou mise au travail sur des exercices, mises en commun, bilans, cours, etc.).

La deuxième étape de la méthodologie consiste à décrire et à analyser les organisations mathématiques suivant l'approche anthropologique de Chevallard (1999) évoquée plus haut (2.2.2). Il s'agit dans cette étape de traduire les consignes en types de tâches et de déterminer pour chaque type de tâches les techniques observées, ainsi que les technologies et la théorie qui les justifient. (Bronner, 2010).

La troisième étape consiste à analyser la séance à l'aide de la méthode des quatre composantes qui sont : l'organisation du milieu, le contrat didactique, le temps didactique et le topos de l'élève et du professeur. Elle s'articule autour de la trame et la description en moments didactiques (Chevallard, 1999), que nous avons présentées plus haut comme étant les éléments sur lesquels repose l'étude de l'organisation didactique.

Je commencerai tout d'abord par repérer les différents moments de l'organisation didactique selon Chevallard (1999). Ensuite pour analyser la réalisation de chaque moment, notamment ceux rassemblés ce que Chevallard appelle les activités d'études et de recherche (AER), je présenterai ce que nous avons nommé *la méthodologie des 4 composantes*, méthodologie d'analyse de l'organisation didactique élaborée lors d'une recherche précédente. Cette méthodologie s'appuie à la fois sur la théorie des situations de Brousseau (1986¹³) et sur l'approche anthropologique de Chevallard (1999). Dans cette approche, quatre composantes liées seront systématiquement prises en compte pour analyser une situation didactique : l'organisation du milieu, le contrat didactique, le temps didactique et le topos de l'élève et du professeur (Bronner, 2010, p. 33).

¹³ Brousseau G. (1986), Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques RDM Vol. 7/2, La pensée sauvage, cité dans Bronner (2010)

Les quatre composantes évoquées dans cette troisième étape sont définies dans les sections précédentes au niveau de la présentation de la théorie anthropologique du didactique (3.2) et de la théorie des situations didactiques (3.3).

La quatrième étape de la méthodologie consiste à repérer les gestes professionnels, les gestes d'études et les événements. Les gestes professionnels se constituent autour des types « construire une séance » et « construire une progression » pour les praxéologies globales et autour des types de tâches « donner une consigne » et « gérer des réponses d'élèves » pour les praxéologies ponctuelles. Les gestes d'études sont ceux observés chez les élèves dans leurs topos par rapport à l'accomplissement des tâches auxquelles ils sont soumis. Les événements sont des faits intéressants ou non qui ne sont pas nécessairement liés à de l'extraordinaire. Ils portent sur des objets divers de préférence de nature didactique. Les événements tels que décrits par Bronner (2010) peuvent être heureux, prévisibles ou imprévisibles, problématiques ou non.

Conclusion

Dans ce chapitre III, qui marque la fin de la première partie, nous avons défini la ligne conductrice de la thèse en précisant deux questions de recherche et les hypothèses correspondantes. Dès lors, la vérification de ces hypothèses devient l'enjeu de la suite. La vérification de la première hypothèse nous conduira à étudier dans les chapitres IV et V la transposition didactique de la probabilité et les rapports personnels aux objets probabilistes des élèves béninois ayant étudié fraîchement les probabilités dans le secondaire. Quant à la deuxième hypothèse, sa vérification nous conduira à l'élaboration et la réalisation d'une ingénierie didactique pour l'enseignement du calcul élémentaire des probabilités. Les outils théoriques d'analyses précisés dans ce chapitre sont notamment ceux de la théorie anthropologique du didactique développée par Chevallard (1992, 1999), de la théorie des situations didactiques de Brousseau (1998) et de la méthodologie d'analyse des quatre composantes développée par Bronner (2010).

DEUXIÈME PARTIE :
Enseignement et apprentissage des
probabilités au Bénin

Chapitre IV : Étude de la transposition didactique des probabilités au Bénin

Introduction

Le concept de la transposition didactique, développée en didactique des mathématiques par Yves Chevallard (1991) au début des années 1980, a pour but d'expliquer d'une part l'évolution des objets d'enseignement dans les programmes, et d'autre part, d'étudier pour chaque objet d'enseignement, l'écart ou les liens entre le savoir savant et le savoir enseigné. Pour l'enseignement des mathématiques, la transposition didactique se conçoit en deux grandes phases : celle du savoir savant au savoir à enseigner et celle du savoir à enseigner au savoir enseigné (Tavignot, 1995). Dans le vaste domaine des probabilités, nous faisons l'option d'étudier séparément dans ce chapitre, la transposition didactique de l'objet « expérience aléatoire » et celle de l'objet « probabilité d'un événement ». L'importance de ces deux objets de savoir est capitale pour nous, tant ils constituent des notions indispensables à l'enseignement du calcul élémentaire des probabilités dans l'institution scolaire « enseignement secondaire ». Nous allons donc étudier l'existence de chacun de ces objets de savoir, respectivement dans l'institution savante et dans l'institution d'enseignement, notamment dans les instructions officielles, en vue d'apprécier les relations entre le savoir savant et le savoir à enseigner puis entre ce dernier et le savoir enseigné d'autre part.

1. Étude de la transposition didactique de la notion d'expérience aléatoire au Bénin

La notion d'expérience aléatoire est la première notion probabiliste dont l'enseignement est indiqué dans les programmes béninois. Elle est contenue dans un ensemble de concepts de base connu sous le nom de « vocabulaire probabiliste ». Elle est donc la porte d'entrée en calcul des probabilités et constitue une notion sans laquelle on ne pourrait enseigner les probabilités au Bénin. Pour son importance dans le calcul des probabilités au secondaire, nous faisons le choix d'étudier sa trajectoire depuis l'institution savante jusqu'à celle d'enseignement.

1.1. L'expérience aléatoire dans l'enseignement mathématique universitaire

Pour Yves Chevallard (1991), l'objet de savoir en mathématiques, c'est-à-dire le savoir savant, est à ranger dans la catégorie des notions mathématiques. Le savoir savant peut être étudié à

travers l'histoire ou à partir des manuels de l'enseignement supérieur. La place importante qu'occupe la notion de hasard dans la définition de l'expérience aléatoire ramène l'histoire de l'expérience aléatoire à celle du hasard, qui a nourri considérablement l'étude épistémologique que nous avons faite dans le premier chapitre (chap. I, 1.). Pour cette raison, nous limitons l'étude du savoir savant de l'expérience aléatoire aux textes qui la légitiment dans les manuels de l'enseignement supérieur et dans les travaux didactiques reconnus dans l'institution de l'enseignement supérieur. Nous distinguons au niveau du savoir savant deux rapports à la notion d'expérience aléatoire, que nous précisons dans cette section.

1.1.1. Rapport à l'expérience aléatoire caractérisée uniquement par le hasard

La plupart des ouvrages de l'enseignement supérieur que nous avons consultés et qui portent sur le calcul des probabilités font de l'expérience aléatoire une notion primitive de base (Henry, 2001b) en ce sens qu'elle est une notion à laquelle la pratique courante permet de donner du sens sans qu'une définition mathématique puisse être formulée. C'est le cas par exemple, de Jean-François Delmas (2010), qui introduit le calcul des probabilités par un vocabulaire probabiliste, qui exclut l'expérience aléatoire. De son côté, Bruno Saussereau (2014), dans un cours donné en licence de mathématiques, sur la théorie des probabilités, a simplement renvoyé l'étude de la notion d'expérience aléatoire aux enseignements reçus antérieurement.

Ce cours ne suppose aucun prérequis sur le formalisme des probabilités. Tout le formalisme et le vocabulaire des probabilités sont définis et introduits au fur et à mesure des besoins. Il suppose juste une sensibilisation aux phénomènes aléatoires et à leur étude élémentaire telle qu'elle est enseignée depuis quelques années au lycée et dans le semestre 4 de la Licence (p. 3).

De même, Benjamin Jourdain (2013), dans un cours de probabilités et statistique, donné en première année d'université, passe très implicitement sur la notion d'expérience aléatoire pour définir l'univers des possibles.

On s'intéresse à une expérience aléatoire qui conduit à la réalisation d'un seul résultat parmi un nombre fini de résultats possibles $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$. On note $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ l'ensemble de ces résultats (p. 13).

Cependant, la définition de l'expérience aléatoire, la plus fréquente, au niveau de l'enseignement mathématique universitaire, est celle qui la caractérise uniquement par le hasard, comme dans la définition suivante proposée par Jean-Claude Girard (2001a, p. 141) : « une épreuve aléatoire est donc simplement une expérience dont on ne peut ni prévoir, ni

calculer le résultat ». Insistant sur la caractéristique principale de l'expérience aléatoire, Girard complète (ibid.) :

C'est donc le fait que l'on ne puisse pas prévoir les résultats, même si on répète l'expérience une deuxième fois dans les mêmes conditions qui rend cette expérience aléatoire.

La répétition de l'expérience aléatoire dont il est question ici, semble mettre l'accent sur le fait que le résultat est dû au hasard. Cette définition de l'expérience aléatoire, avec toute la précision nécessaire, est préconisée par Louis Wehenkel (2012) comme il suit.

Une expérience est qualifiée d'aléatoire si on ne peut pas prévoir à l'avance son résultat, et donc si, répétée dans des conditions apparemment identiques, elle pourrait donner lieu à des résultats différents (p. 21).

Avec cette définition, qui est celle proposée aussi par Gilbert Saporta (2011), à quelques mots près, nous sommes arrivés ainsi à un premier rapport de l'institution savante à la notion d'expérience aléatoire que nous nommons modèle mathématique réduit (MR) de l'expérience aléatoire.

1.1.2. Rapport à l'expérience aléatoire caractérisée par le hasard et la connaissance des résultats possibles

Analysant une définition de l'expérience aléatoire donnée habituellement aux élèves selon laquelle « une expérience aléatoire est une expérience reproductible dans laquelle le hasard intervient pour rendre l'issue incertaine et dont on peut faire la liste des issues possibles », Henry (2001b) trouve que cette manière de définir l'expérience aléatoire confond la réalité et le modèle et ne fonde pas assez le modèle mathématique standard. Cependant, en remarquant qu'une expérience aléatoire est d'abord une expérience réelle, et qui de ce fait ne peut qu'être unique sans être reproduite, Henry inscrit la notion d'expérience aléatoire dans le monde de la réalité en parvenant à la définition ci-après.

La notion « d'expérience aléatoire » est dégagée pour désigner un processus réel de nature expérimentale, où le hasard intervient, avec des issues possibles bien identifiées (Henry, 2001b, p. 163).

Cette notion est ainsi associée à celle de « protocole expérimental », comportant des instructions à respecter pour pouvoir affirmer que l'on a bien réalisé l'expérience aléatoire, objet d'étude. C'est ce protocole expérimental accompagné de l'ensemble des issues possibles à observer, qui caractérise « l'expérience aléatoire » (Ibid.). Lorsque la réalisation du protocole

expérimental associé à une expérience aléatoire comprend plusieurs étapes, chacune de ces étapes est une épreuve (Ibid.).

Cette définition, qui caractérise l'expérience aléatoire par le hasard et la connaissance préalable des issues possibles, constitue de notre point de vue, un modèle conçu pour expliciter l'univers des possibles, indispensable à l'enseignement du calcul des probabilités au secondaire. C'est un deuxième rapport de l'institution savante à l'expérience aléatoire, que nous dénommons naturellement « le modèle didactique » (MD) de la notion l'expérience aléatoire.

1.1.3. Synthèse

Sur le plan épistémologique, la notion d'expérience aléatoire paraît moins préoccupante que celle de hasard, qui a occupé les esprits durant des millénaires. Ceci est sûrement dû au fait que le hasard est la caractéristique fondamentale de l'expérience aléatoire, qui est considérée généralement comme une notion primitive de base par la plupart des probabilistes. En partant des cours de probabilités dans l'enseignement supérieur et des travaux didactiques dans le domaine des probabilités, il se dégage deux rapports de l'institution savante à la notion d'expérience aléatoire. Nous les nommons respectivement modèle mathématique réduit (MR) et modèle didactique (MD) de la notion d'expérience aléatoire. Le modèle mathématique réduit de la notion d'expérience aléatoire est caractérisé uniquement par le hasard, c'est-à-dire par l'imprévisibilité de son résultat. Quant au modèle didactique, il est caractérisé, non seulement par l'imprévisibilité de son résultat, mais aussi par la connaissance préalable de ses résultats. De notre point de vue, le modèle didactique, qui englobe le modèle réduit, peut être considéré comme le modèle épistémologique de référence (MER) de la notion d'expérience aléatoire.

1.2. L'expérience aléatoire dans les programmes d'enseignement

Nous allons à présent déterminer le savoir à enseigner relatif à la notion d'expérience aléatoire en exploitant les instructions officielles. Nous choisissons, de ne pas nous limiter aux seuls programmes béninois, afin de montrer que le Bénin partage la même situation que d'autres pays, surtout africains. Nous proposons donc une étude comparative des programmes d'un certain nombre de pays par rapport à la notion d'expérience aléatoire.

1.2.1. L'expérience aléatoire dans les programmes béninois

Les probabilités ont été présentes dans tous les programmes béninois d'enseignement qui se sont succédés depuis le début de leur enseignement dans les années 60-70. Le langage des probabilités, regroupant les notions de base des probabilités, dont celle d'expérience aléatoire,

est inscrit explicitement ou implicitement dans ces différents programmes, qui ont porté presque sur les mêmes objets d'enseignement.

Depuis l'année scolaire 2001-2002, les probabilités n'ont été enseignées que dans les classes terminales. Les instructions officielles relatives à la partie concernant le vocabulaire probabiliste dans les séries scientifiques se retrouvent dans les guides des programmes d'études en vigueur dans les classes terminales C et D en ces termes :

Faire utiliser le vocabulaire des probabilités : épreuve (expérience aléatoire), univers, événement, événement élémentaire, événement certain, événement impossible, événements incompatibles, événement contraire d'un événement, éventualité, système complet d'événements, événement "A et B", événement "A ou B" (DIP, 2011a, p. 47).

Aucun commentaire des programmes de ces séries, ni de leurs guides, ne mentionne le contenu des termes indiqués dans « le vocabulaire des probabilités », ni les horaires, ni les conditions de l'enseignement/apprentissage. Par contre, dans le guide du programme d'études de mathématiques des séries A₂ et B la définition d'expérience aléatoire est donnée de la manière suivante : « *Une expérience dont on ne peut pas prévoir le résultat est appelée expérience aléatoire ou épreuve* » (DIP, 2008, P. 33).

En somme, les programmes béninois prévoient explicitement l'enseignement de la notion d'expérience aléatoire dans les séries scientifiques et littéraires. Ils précisent la définition d'expérience aléatoire à enseigner au niveau des séries littéraires en laissant l'enseignant faire son choix au niveau des séries scientifiques, pour lesquelles l'aspect lexical du vocabulaire probabiliste semble être une priorité.

1.2.2. L'expérience aléatoire dans les programmes de quelques pays Africains

Dans plusieurs pays africains, les probabilités sont enseignées pour la première fois en classes terminales ou en classes premières au plus tôt. C'est le cas par exemple, de la Côte d'Ivoire, du Sénégal, du Gabon, du Maroc et de la Tunisie. La notion d'expérience aléatoire est prescrite explicitement dans certains pays et ne l'est pas ou l'est implicitement dans d'autres.

En Côte d'Ivoire, les probabilités se retrouvent pour la première fois en classes terminales de toutes les séries de l'enseignement secondaire général. Dans les programmes de 1999, aucune mention n'est faite à propos de l'enseignement de l'expérience aléatoire (PO-CI, 1999) dans les séries littéraires. Par contre, le vocabulaire des probabilités est clairement indiqué dans les programmes des séries scientifiques avec le commentaire suivant.

On apprendra aux élèves à reconnaître un événement élémentaire d'une expérience aléatoire.

On choisira des situations concrètes simples pour mettre en place le vocabulaire des probabilités » (Ibid, p. 19).

Au Sénégal, où les probabilités sont des objets d'enseignement pour la première fois en classe terminale (Gueye, 2012), les programmes des séries scientifiques (S_1 , S_2 , S_3 et S_4) n'ont pas mis l'accent sur la notion d'expérience aléatoire. Dans certaines séries scientifiques, l'étude du vocabulaire probabiliste est envisagée à partir de la notion d'expérience aléatoire que le programme ne fait pas étudier de façon spécifique, et dans les autres, il est prévu explicitement l'étude des événements comme l'indiquent les programmes, que Gueye (ibid.) a mis en annexe de son article.

Contenus en S_1 et S_3 : événements, événements élémentaires, événements incompatibles, événements contraires, réunion et intersection de deux événements (p. 1613).

Commentaire des contenus en S_2 et S_4 : Le vocabulaire probabiliste (univers, événement, événement élémentaire...) sera introduit à partir d'épreuves aléatoires simples (p. 1614).

On constate aisément que la notion d'expérience aléatoire qui doit servir de base pour le vocabulaire probabiliste n'est pas explicite dans les programmes des séries scientifiques au Sénégal.

Au Gabon, le premier contact de l'élève avec le calcul des probabilités a lieu en classe terminale. Le programme de mathématiques des classes terminales des séries littéraires est resté muet sur la notion d'expérience aléatoire. Dans les séries scientifiques, les programmes évoquent l'étude du langage probabiliste sans préciser les notions le constituant comme l'indiquent respectivement les contenus et capacités attendues dans les programmes des classes terminales des séries C, D et E. (PO-Gabon-Tle-CE, p. 17 ; PO-Gabon-Tle-D, p. 14)

Contenus : Evénement élémentaire, événement.

Capacités attendues : Passer du langage probabiliste au langage ensembliste et vice-versa ; reconnaître une expérience aléatoire.

Ni la définition d'expérience aléatoire, ni celle d'une quelconque notion relative au langage probabiliste n'est évoquée dans les programmes gabonais consultés.

Au Maroc, le système éducatif comporte un cycle primaire de six ans (6-11 ans), un cycle secondaire collégial de trois ans (12-14 ans) et un cycle qualifiant de trois ans (15-17 ans) dont une année de tronc commun et deux années de baccalauréat. Le premier et seul enseignement du calcul de probabilités se fait en deuxième année du baccalauréat (correspondant à la classe

terminale) pour toutes les sections (Rouan et El-Idrissi, 2014). L'enseignement de la notion d'expérience aléatoire est une intention bien remarquable des programmes marocains à travers le contenu du programme en probabilité : « *Expériences aléatoires, espace probabilisé fini, hypothèse d'équiprobabilité* » (*ibid.*, pp. 26 et 27).

En Tunisie, le système éducatif est composé d'un enseignement de base comprenant l'école primaire (6 ans) et le collège (3 ans), et d'un enseignement secondaire de quatre ans dont la première année est un tronc commun, les trois autres années s'organisant en quatre sections en deuxième année puis en six sections à partir de la troisième année (Dhieb, 2009). Les premières traces des programmes officiels sur l'expérience aléatoire s'observent au profit des « activités statistiques » en première année du secondaire et portent sur la prédiction de la fréquence d'apparition des phénomènes aléatoires. Cet objectif des programmes est repris en deuxième année du secondaire et complété par la simulation d'expériences aléatoires, toujours dans le cadre des « activités statistiques » (PO-Tunisie, 2008).

Les élèves exploitent des représentations graphiques pour résumer une série statistique, faire des interprétations et des prédictions sur la fréquence d'apparition de phénomènes aléatoires (pp. 10, 19, 27, 32).

Simuler des expériences aléatoires (pp. 19, 27, 32).

L'enseignement de la notion d'expérience aléatoire et même du langage probabiliste ne semble pas être une recommandation explicite des programmes tunisiens.

1.2.3. L'expérience aléatoire dans les programmes de quelques pays occidentaux

Les programmes de mathématiques, en vigueur en France depuis 2008, recommandent l'enseignement des probabilités à partir de la classe de troisième. L'expérience aléatoire est implicitement prescrite à travers « *les notions élémentaires de probabilités* » dont la compréhension et l'utilisation constituent des objectifs du programme de la troisième : « *Comprendre et utiliser des notions élémentaires de probabilité* » (BO-France, 2008, p. 35). Mais les « ressources », qui accompagnent les programmes du collège en probabilités, n'ont pas mis spécialement l'accent sur l'étude de la notion d'expérience aléatoire (Res-France, 2008).

Dans la Communauté française de Belgique, après une première rencontre avec les probabilités en première année du premier degré de l'enseignement secondaire (sixième, 12 ans), à partir du calcul de la fréquence d'un événement dans des situations aléatoires concrètes,

l'élève retrouve les probabilités en sixième année du troisième degré (Terminale, 16 ans). La notion d'expérience aléatoire ne constitue pas un objectif des programmes de mathématiques de la Communauté française de Belgique (Vermandele, 2013).

Au Canada, dans la province de Québec par exemple, la première rencontre des apprenants avec les probabilités se fait dès les premières années du primaire (6 – 12 ans) par l'observation et la réalisation d'expériences aléatoires et la familiarisation avec les concepts de base des probabilités (Gattusso et Vermette, 2013). Au premier cycle du secondaire (12 – 13 ans), passant du raisonnement arbitraire du primaire au raisonnement basé sur les calculs, l'élève aborde les concepts d'expériences aléatoires à l'aide d'expérimentations et simulations. Les programmes québécois mettent donc l'accent sur l'étude de la notion d'expérience aléatoire et du langage probabiliste (PO-Québec, 2016).

1.2.4. Bilan

Pour un bon nombre de pays, la notion d'expérience aléatoire n'apparaît pas dans les instructions officielles comme un enjeu fondamental d'enseignement, mais elle est plutôt considérée comme une notion primitive de base comme le sont par exemple les notions de points et de droites en géométrie. À ce titre, la notion d'expérience aléatoire, implicite dans les programmes, sert soit à construire le langage probabiliste, soit à introduire l'enseignement des probabilités par une expérimentation de la fréquence limite.

En dehors du Maroc, où la notion d'expérience aléatoire est un objet d'enseignement en soi, les programmes du Bénin, de la Côte d'Ivoire, du Sénégal et du Gabon mettent plutôt l'accent sur l'enseignement du langage probabiliste qui comprend certainement la notion d'expérience aléatoire. Quant aux programmes de la Tunisie, de la France et de la Belgique, ils font utiliser les expériences aléatoires simples pour expérimenter la notion de probabilité d'un événement. De tous les programmes consultés, seuls les programmes béninois des terminales littéraires ont indiqué la définition de la notion d'expérience aléatoire à enseigner. Le tableau ci-après résume la situation de l'enseignement de l'expérience aléatoire dans les programmes dont nous avons fait cas plus haut.

Pays	Première rencontre avec la notion de probabilités	L'expérience aléatoire dans les programmes	Définition proposée
Bénin	Classes terminales	Explicite à travers le vocabulaire probabiliste	- Modèle mathématique réduit en séries littéraires

			- Aucune définition en séries scientifiques
Côte d'Ivoire	Classes terminales	Explicite à travers le vocabulaire probabiliste	Pas de définition dans les programmes
Sénégal	Classes terminales	Explicite à travers le vocabulaire probabiliste	Pas de définition dans les programmes
Gabon	Classes terminales	Explicite à travers le vocabulaire probabiliste	Pas de définition dans les programmes
Maroc	Classes terminales	Explicite	Pas de définition dans les programmes
Tunisie	Première année du secondaire (seconde)	Implicite	Pas de définition dans les programmes
France	Troisième	Implicite	Pas de définition dans les programmes
Belgique	Première année du premier degré du secondaire (sixième)	Implicite	Pas de définition dans les programmes
Canada	Primaire	Explicite	Pas de définition dans les programmes

Tableau n°01 : L'enseignement de la notion d'expérience aléatoire au Bénin et ailleurs.

L'étude du savoir à enseigner relatif à la notion d'expérience aléatoire conduit aux conclusions suivantes :

- En France, en Belgique, au Canada comme en Tunisie, l'enseignement des probabilités commence bien avant les classes terminales et la notion d'expérience aléatoire est souvent implicite dans les programmes ;
- Dans les pays d'Afrique au Sud du Sahara et au Maroc, l'enseignement des probabilités a lieu en classes terminales et la notion d'expérience aléatoire est explicite à travers l'enseignement du vocabulaire probabiliste ;
- La définition de la notion d'expérience aléatoire n'est généralement pas mentionnée dans les programmes ;
- Au Bénin, la définition de la notion d'expérience aléatoire, proposée dans le programme des terminales littéraires, est celle du modèle réduit, caractérisé uniquement par l'imprévisibilité du résultat de l'expérience aléatoire.

1.3. L'expérience aléatoire dans les manuels au Bénin

Les manuels les plus utilisés, dont ceux de la collection inter africaine de mathématiques (CIAM) des classes terminales, introduisent la notion d'expérience à l'aide des exemples sans nécessairement proposer une définition formelle. Nous présentons dans un premier temps la manière dont la notion d'expérience aléatoire est abordée dans chacun de ces manuels ainsi que dans le manuel SOLFATH, qui est un manuel également recommandé par la direction de l'enseignement secondaire et qui a été rédigé au début de l'application des programmes HPM. Par la suite, nous ferons une analyse, manuel par manuel, pour déduire une analyse globale de l'apprêt didactique relatif à la notion d'expérience aléatoire.

1.3.1. Présentation de la notion d'expérience aléatoire dans les manuels

Les manuels CIAM des classes terminales sont au nombre de trois. Il s'agit du manuel de la série A (Kouassi et al., 2002), celui de la série C (Alassane et al., 1999) et celui de la série D (Hamaty et al., 1999). Le manuel SOLFATH (Bello, 2002) est destiné aux séries scientifiques de l'enseignement secondaire dont les séries C et D. Chacun de ces manuels introduit le vocabulaire des probabilités par des exemples introductifs d'expérience aléatoire.

Dans le manuel de la collection CIAM des classes terminales des séries littéraires, le vocabulaire des probabilités est introduit par l'exemple ci-après (Kouassi et al., 2002, p. 127).

On lance un dé dont les faces sont numérotées de 1 à 6, et on note le numéro de la face supérieure.

- Enumérer tous les résultats possibles.
- Peut-on prévoir, avant un lancer, le numéro qui apparaîtra ?

Les notions d'expérience aléatoire, d'éventualité et d'univers sont alors définies comme il suit.

Définitions

- Une expérience dont on ne peut pas prévoir le résultat est appelée expérience aléatoire ou épreuve.
- Le résultat d'une expérience aléatoire est appelé éventualité, issue ou cas possible.
- L'ensemble de toutes les éventualités est l'univers associé à l'expérience aléatoire.

Après d'autres exemples d'expériences aléatoires, la notion d'événement et les différents types d'événements sont présentés à partir de l'exemple introductif.

Dans le manuel de la collection CIAM de la classe terminale C, la définition d'expérience aléatoire est étudiée à partir des trois exemples dont deux portent sur le lancer d'un dé et le troisième sur le tirage d'une boule dans une urne. (Alassane et al., 1999, p. 176).

On lance un dé et on observe le numéro tiré ; six résultats sont possibles : 1, 2, 3, 4, 5 et 6.

On dit qu'on a réalisé *une expérience aléatoire* (ou *épreuve*) comportant six *éventualités* et que l'univers associé à cette expérience aléatoire est $\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$.

On lance un dé et on observe la parité du numéro tiré ; deux résultats sont possibles : P (le numéro est pair) et I (le numéro est impair)

On a cette fois réalisé une expérience aléatoire comportant deux éventualités ; l'univers associé à cette épreuve est : $\Omega = \{P ; I\}$

Une urne contient des boules blanches, rouges et noires. On tire une boule dans cette urne et on note la couleur obtenue ; trois résultats sont possibles : B (la boule est blanche), R (la boule est rouge), N (la boule est noire).

On a maintenant réalisé une expérience aléatoire comportant trois éventualités ; l'univers associé à cette épreuve est : $\Omega = \{B ; R ; N\}$.

Aucune autre définition formelle de l'expérience aléatoire n'est donnée en dehors de ces indications de l'expérience aléatoire dans lesquelles l'imprévisibilité du résultat n'apparaît pas.

Au niveau du manuel CIAM de la classe terminale D, le vocabulaire probabiliste est introduit à l'aide des deux exemples suivants (Hamaty et al., 1999, p. 298).

On considère un dé cubique parfaitement équilibré dont les six faces sont numérotées de 1 à 6. On lance ce dé et on note le chiffre inscrit sur la face supérieure.

On considère une pièce de monnaie parfaitement équilibrée. On lance trois fois de suite cette pièce de monnaie et on note par ordre d'apparition le côté visible.

L'expérience aléatoire est définie à la suite de ces deux exemples comme ci-après.

Pour chacune de ces deux expériences, il n'est pas possible d'en prévoir les résultats. Ces expériences donnent des résultats aléatoires dus essentiellement au hasard, on dit que ce sont des expériences aléatoires ou des épreuves aléatoires. Cependant, pour chacune de ces expériences aléatoires, on peut prévoir tous les résultats possibles ou éventualités.

Cette définition qui caractérise l'expérience aléatoire par l'imprévisibilité du résultat et la connaissance préalable des résultats possibles, insiste fondamentalement sur la première des deux caractéristiques.

Comme les autres manuels, le manuel SOLFATH part d'un exemple (de lancer de dé) pour définir l'expérience aléatoire suivante (Bello, 2002, p. 173).

On appelle phénomène aléatoire ou expérience aléatoire ou épreuve, toute expérience pour laquelle l'issue est imprévisible, mais dont on connaît tous les résultats possibles.

L'auteur de l'ouvrage insiste sur les deux caractéristiques fondamentales de l'expérience aléatoire, à savoir : le fait que le résultat soit imprévisible et la possibilité de connaître à l'avance tous les résultats possibles.

1.3.2. Analyse

Pour l'analyse des manuels relative à la notion d'expérience aléatoire, nous allons prendre comme références, les deux modèles de définition d'expérience aléatoire établis au niveau de l'étude du savoir savant, à savoir : le modèle mathématique réduit et le modèle didactique.

Le manuel de la collection CIAM des terminales littéraires donne une définition explicite de la notion d'expérience aléatoire, qu'il caractérise uniquement par l'imprévisibilité du résultat. Nous pouvons dire qu'il y a là une conformité explicite au modèle mathématique réduit de la notion d'expérience aléatoire. Dans le livre de la collection CIAM de la terminale C, on ne retrouve aucune définition généraliste de la notion d'expérience aléatoire, ni explicitement, ni implicitement. Le manuel semble définir l'univers des éventualités et non pas l'expérience aléatoire. Au niveau du manuel CIAM de la terminale D, il n'est pas donné une définition formelle de l'expérience aléatoire. Les expériences présentées en exemples sont qualifiées d'aléatoires du fait que leurs résultats sont essentiellement dus au hasard. La connaissance des résultats possibles est néanmoins évoquée. On peut dire qu'il y a là une conformité implicite au modèle didactique de la notion d'expérience aléatoire. Le manuel SOLFATH propose une définition explicite de la notion d'expérience aléatoire, qui correspond à celle du modèle didactique. Nous avons ici aussi une conformité explicite au modèle didactique. Le tableau ci-après est un résumé de l'analyse des manuels par rapport à la notion d'expérience aléatoire.

Manuel	Définition de l'expérience aléatoire	Modèle de définition
CIAM Tle L (A-B)	Explicite	Mathématique réduit
CIAM Tle SM (C)	Pas de définition	
CIAM Tle SE (D)	Implicite	Didactique
SOLFATH	Explicite	Didactique

Tableau n°02 : La notion d'expérience aléatoire dans les manuels.

En somme, sur l'ensemble des manuels analysés, on retrouve les deux modèles de définition de l'expérience aléatoire. Le manuel SOLFATH et le manuel CIAM de la terminale D ont présenté clairement la définition du modèle didactique de l'expérience aléatoire, le modèle mathématique réduit étant le choix du manuel de la collection CIAM des classes terminales littéraires. La définition dans les manuels CIAM devient de moins en moins précise au fur à mesure que l'on passe des séries à faible option mathématique vers les séries à forte option mathématique, contrairement au manuel SOLFATH, qui propose une définition précise et explicite pour les séries scientifiques et techniques. L'analyse des manuels nous conduit ainsi à trois remarques par rapport à l'enseignement de la notion d'expérience aléatoire au Bénin :

- Les deux modèles de définition identifiés au niveau du savoir savant se retrouvent globalement dans l'apprêt didactique ;
- Le savoir à enseigner et l'apprêt didactique sont identiques pour les séries littéraires ;
- Le manque de précision par rapport à la définition de la notion d'expérience aléatoire, constaté au niveau des programmes des séries C et D, se retrouve dans les manuels de la collection CIAM destinés à ces séries.

Avec la première remarque, nous pouvons dire que, par rapport à la notion d'expérience aléatoire, il n'y a pas d'écart entre le savoir savant et l'apprêt didactique, tandis que les deux dernières remarques nous amènent à l'hypothèse d'une conformité des manuels de la collection CIAM aux instructions officielles concernant l'enseignement de cette notion.

1.4. L'enseignement de la notion d'expérience aléatoire au Bénin

Nous rappelons que dans le cadre des études préalables sur l'enseignement des probabilités au Bénin, nous avons suivi et réalisé l'enregistrement audio des cours de deux enseignants de mathématiques. C'était en 2013 dans la ville de Lokossa, où nous étions en service. De même, nous avons adressé un questionnaire aux enseignants des classes terminales (Annexe 4). L'une des questions de ce questionnaire porte sur la définition de l'expérience aléatoire enseignée par les enseignants. Notre étude du savoir enseigné relativement à la notion d'expérience aléatoire se basera sur l'analyse des définitions proposées par les professeurs, que ce soit ceux dont nous avons suivis les cours ou ceux repérés dans notre enquête.

1.4.1. La notion d'expérience aléatoire enseignée par les professeurs suivis

Nous nommons M. et L. les deux enseignants dont nous avons suivi les cours dans quatre classes terminales des séries C et D à Lokossa en 2013. À partir des notes de cours prises par

les élèves, nous avons dégagé la définition d'expérience aléatoire proposée par les professeurs suivis, chacun ayant abordé la notion d'expérience aléatoire à partir d'une activité introductive, inspirée de la situation de départ, proposée dans les programmes des classes terminales des séries scientifiques.

Le professeur M. a proposé dans ses deux classes une activité qui porte sur le lancer simultané de quatre cauris¹⁴ pour répondre à une préoccupation d'un personnage, nommé Dansou, dans la situation de départ introduisant la situation d'apprentissage. Le professeur débouche alors sur les formalisations suivantes dans ses classes respectives.

Nous ne pouvons pas prévoir le nombre de cauris qui seront fermés ou ouverts¹⁵ avant que les devins ne les jettent : on dit que c'est une expérience aléatoire ou une épreuve (Définition donnée en terminale D du lycée des jeunes filles).

On ne pourra pas donner le nombre de cauris ouverts et le nombre de cauris fermés car si cela était possible les deux devins allaient répondre à la préoccupation de Dansou sans avoir lancé les cauris. Parce que les résultats sont essentiellement dus au hasard, on dit que c'est une expérience aléatoire ou une épreuve (Définition donnée en terminale D₃ du CEG₁ de Lokossa).

Les extraits suivants de l'enregistrement audio d'une séance du professeur M. portant en partie sur le vocabulaire probabiliste et réalisé au cours de l'année scolaire 2011-2012 confirment la caractéristique d'expérience aléatoire, sur laquelle il s'est basé pour aboutir à l'institutionnalisation (Dandjinou, 2013). Dans cet extrait, P désigne le professeur M, E₁ et E₉ des élèves désignés, le premier pour présenter les résultats de son groupe au tableau, et le deuxième pour lire l'énoncé de l'activité introduisant la notion d'expérience aléatoire. Nous désignons par E un ensemble d'élèves de la classe intervenant simultanément.

P : Parlez ! Parlez ! Parlez !

E₁ : La consigne a demandé de savoir si on peut trouver avec exactitude la possibilité qu'on peut avoir quand le devin va jeter les cauris, bien avant que les devins ne jettent les cauris. On a dit non.

P : Rappelez la deuxième question.

E₉ : Présente les différents cas possibles lorsque l'un des devins jettera ses 4 cauris.

¹⁴ Le cauri est un coquillage qui a servi longtemps de monnaie en Afrique noire. C'est un solide de l'espace ayant deux surfaces dont l'une convexe et l'autre supposée plane.

¹⁵ Traduit littéralement de la langue Fon, parlée au Bénin, un cauri est dit ouvert, après un lancer, lorsqu'il repose sur la surface convexe, sinon, il est dit fermé.

P : Ok ! Bien ! Tu présentes, tu présentes ça puisque tu n'as rien dit.

E₁ : On peut avoir 1 cauri ouvert et 3 fermés ; 2 cauris ouverts et 2 fermés, 3 ouverts et 1 fermé ou les 4 ouverts.

P : OK, bien, je crois que c'est ce que vous avez adopté hein en groupe que tu as rapporté. Nous invitons maintenant l'ensemble de la classe à se prononcer sur ce qui est au tableau. Ça va ?

E : Oui, ça va.

P : D'accord. Bien vous voyez, ici nous sommes dans une situation où on nous a présenté quelque chose et on nous a demandé les résultats. A la première question vous avez dit que vous ne pouvez pas présenter le résultat qui va sortir de l'action des deux devins. Nous sommes en probabilité, cette façon de faire là a une expression dans la probabilité. D'accord. Nous rentrons comme ça dans le vocabulaire lié à la probabilité. Nous avons dit qu'à la première question ici les résultats sont essentiellement dus au hasard. Puisqu'on ne sait pas ; on ne peut pas prévoir ces résultats-là. N'est-ce pas ? Lorsque les résultats d'un jeu sont liés essentiellement à un hasard, on dit qu'on a donc une expérience aléatoire ou une épreuve. D'accord ? Nous avons une expérience aléatoire ou nous avons une épreuve. Mais au-delà de tout ça là, on a pu quand même identifier l'ensemble des résultats. N'est pas ? On sait qu'au moins si je n'ai ceci, j'aurai ça, si je n'ai pas ça, j'aurai l'autre. J'ai l'ensemble des résultats. Alors l'ensemble des résultats possibles pour une expérience aléatoire, c'est ça que nous appelons univers. D'accord. Donc nous avons deux vocabulaires maintenant. Nous avons expérience aléatoire ou épreuve et nous avons également univers. [...]

On constate aisément que le professeur M. n'a mis l'accent que sur l'imprévisibilité du résultat comme unique caractéristique de la notion d'expérience aléatoire, la connaissance des résultats possibles n'ayant servi qu'à définir l'univers des possibles. Même si l'appel au hasard a été implicite dans la première classe, on peut conclure à une conformité de la définition proposée par le professeur M. dans ses deux classes avec le modèle mathématique réduit.

Dans une démarche analogue, le professeur L. a débouché dans ses deux classes à la formalisation suivante :

On appelle expérience aléatoire ou épreuve toute expérience dont on ne peut pas prévoir avec certitude le résultat mais dont on peut connaître tous les résultats possibles.

Le professeur L. caractérise ainsi l'expérience aléatoire par l'imprévisibilité du résultat et par la connaissance préalable des résultats. Il se retrouve donc dans le modèle didactique de la définition de la notion d'expérience aléatoire.

En somme, les deux professeurs suivis ont utilisé les deux modèles établis dans le savoir savant, l'un, le modèle mathématique réduit que l'on retrouve également dans le manuel de la collection CIAM des terminales littéraires, et l'autre, le modèle didactique se trouvant aussi dans le manuel SOLFATH.

1.4.2. Rapports des enseignants béninois à la notion d'expérience aléatoire

L'enquête que nous avons menée auprès de quatre-vingt-huit professeurs de mathématiques enseignant effectivement dans les classes terminales au Bénin, dont cinquante-six ayant une formation initiale en mathématiques, nous a révélé que près de quatre professeurs interrogés sur cinq enseignent l'un des deux types de définitions repérées chez les professeurs M. et L. (Annexe 4). Nous rappelons que ces types de définitions sont conformes aux deux modèles de la définition d'expérience aléatoires identifiés au niveau du savoir de référence. En dehors de ces définitions, nous avons enregistré d'autres types de rapports personnels des enseignants à l'expérience aléatoire différents des deux modèles précédemment évoqués. Au total, quatorze définitions différentes de la notion d'expérience aléatoire ont été proposées par les enseignants interrogés. Ces définitions, que nous désignons respectivement par d_1, d_2, \dots, d_{14} se précisent comme ci-dessous.

d_1 : Une expérience aléatoire est une expérience dont on ne peut pas prévoir le résultat.

d_2 : Une expérience aléatoire est une expérience dont le résultat est imprévisible et qui répétée dans les mêmes conditions peut donner lieu à des résultats différents.

d_3 : Une expérience aléatoire est une expérience qui répétée dans des conditions identiques peut conduire à des résultats différents.

d_4 : Une expérience aléatoire est toute expérience dont on ne connaît pas le résultat.

d_5 : Une expérience aléatoire est une expérience dont on ne peut pas connaître a priori les résultats.

d_6 : Une expérience aléatoire est un événement dont on ne peut connaître l'issue avant sa réalisation.

d_7 : Une expérience aléatoire est une expérience liée à la chance et au hasard.

d_8 : Une expérience aléatoire est une activité ou un jeu dont le résultat est imprévisible.

d_9 : Une expérience aléatoire est l'exercice d'une épreuve sur un ensemble fini (ou dénombrable) dont on ne peut pas prévoir le résultat.

d_{10} : Une expérience aléatoire est la chance d'apparition d'une éventualité. C'est un choix au hasard.

d_{11} : Une expérience aléatoire est toute expérience dont l'issue est due au hasard mais dont on sait définir l'ensemble des résultats possibles.

d_{12} : Une expérience aléatoire est toute expérience dont on ne connaît pas l'issue mais dont on connaît tous les résultats possibles.

d_{13} : Une expérience aléatoire est une expérience qui conduit à un résultat non connu à l'avance parmi plusieurs résultats possibles et cela à partir d'un lancer de dé parfait.

d_{14} : Une expérience aléatoire est toute expérience qui peut être répétée dans des conditions apparemment identiques et dont le résultat ne peut être prévu a priori mais dont on sait définir l'ensemble des résultats possibles.

Deux paramètres déterminent chacune de ces définitions : la nature et la caractérisation de la notion d'expérience aléatoire. Pour la grande majorité des professeurs interrogés, une expérience aléatoire est d'abord une expérience. Néanmoins, il est à remarquer que certains professeurs ont hésité sur la nature de l'expérience aléatoire qu'ils prennent comme étant soit un événement, soit un exercice, soit un jeu, soit la chance d'apparition d'une éventualité. Nous avons classé ces quatorze définitions en sept types de définitions de la notion d'expérience aléatoire en nous référant aux deux modèles identifiés au niveau du savoir savant. Ces types de définitions, que nous nommons respectivement D_1, D_2, \dots, D_7 , se précisent comme ci-après.

Le type de définition D_1 regroupe les définitions identiques dans leur contenu au modèle mathématique réduit tel qu'on peut le constater avec les définitions d_1, d_2 et d_3 . Ce type de définitions indique de notre point de vue un rapport conforme de l'enseignant à la notion d'expérience aléatoire que nous qualifions de « modèle mathématique réduit complet (MRC) ». Dans le type de définitions D_2 se trouvent les définitions proches du modèle mathématique réduit, dans le sens qu'elles caractérisent ou semblent caractériser l'expérience aléatoire par l'imprévisibilité du résultat mais qui manquent de précision pour être compris exactement comme tel. C'est le cas par exemple de certaines définitions proposées dans lesquelles il est utilisé le mot « connaître » à la place de « prévoir ». Regroupant les définitions d_4 et d_5 , le type de définitions D_2 détermine le rapport à la notion d'expérience aléatoire que nous appelons « modèle mathématique réduit presque complet (MRPC) ». Le type de définitions D_3 comprend les définitions d_6, d_8 et d_9 dans lesquelles l'imprévisibilité du résultat de l'expérience aléatoire est bien exprimée sans que sa nature ne soit une expérience, et le type de réponses d_7 qui lie l'expérience aléatoire au hasard sans expliciter ce lien. Il détermine le rapport que nous qualifions de « modèle mathématique réduit incomplet (MRI) ». Dans le type de définitions D_4 , nous regroupons les définitions d_{11} et d_{14} qui s'identifient par leur contenu au modèle didactique du savoir savant. De notre point de vue, ce type de définitions est la manifestation d'un rapport adéquat de l'enseignant au modèle MD que nous nommons « modèle didactique complet (MDC) ». Le type de définition D_5 prend en compte les définitions proches du modèle

didactique, dans le sens que, tout en caractérisant l'expérience aléatoire par l'imprévisibilité de son résultat et par la connaissance préalable de ses résultats, elles utilisent le mot « connaître » à la place du mot « prévoir ». À ce type de définitions qui comprend les types de réponses d₁₂ et d₁₃, nous associons le rapport « modèle didactique presque complet (MDPC) ». Sans l'avoir observé chez les professeurs que nous avons interrogés, nous prévoyons le type de définitions D₆ qui pourrait comprendre les propositions de définition de l'expérience aléatoire dans lesquelles on retrouve les deux caractéristiques du modèle didactique mais dont la nature n'est pas une expérience ou celles dont la nature est correcte mais ne précisant que la connaissance préalable des résultats comme unique caractéristique. Ce type de définitions déterminera le rapport « modèle didactique incomplet (MDI) ». Enfin, le type de définitions D₇ prend en compte les définitions proposées qui ne font apparaître aucune des deux caractéristiques de l'expérience aléatoire. Il est composé dans une certaine mesure de la définition d₁₀ et détermine le rapport que nous qualifions de « non aléatoire (NA) ».

La présente catégorisation des propositions de définition de l'expérience aléatoire constitue une grille d'analyse dont nous allons nous servir pour étudier le rapport des élèves à la notion d'expérience aléatoire. La répartition des professeurs concernés par notre étude suivant les types de définitions ci-dessus définis se résume dans le tableau ci-après.

Type de définitions	D ₁	D ₂	D ₃	D ₄	D ₅	D ₆	D ₇	Total
Rapport sous-tendu	MRC	MRPC	MRI	MDC	MDPC	MDI	NA	
Nombre d'enseignants	44	8	6	23	3	0	1	85
Pourcentage	51,76%	9,41%	7,06%	27,06%	3,53%	0,00%	1,18%	100,00%

Tableau n°03 : Types de définitions de la notion d'expérience aléatoire chez les enseignants.

Sachant que les types de définitions D₁ et D₄ sont ceux qui sont conformes aux deux modèles d'expérience aléatoire identifiés au niveau du savoir savant, il est aisé de constater que, concernant la notion d'expérience aléatoire :

- plus des trois quarts des professeurs questionnés enseignent soit le modèle mathématique réduit, soit le modèle didactique ;
- le modèle MR est enseigné par un peu plus de la moitié des professeurs questionnés, tandis que le modèle MD est enseigné par un peu plus du quart de ces professeurs ;

- environ un huitième des professeurs pense enseigner l'un de ces modèles sans être suffisamment précis, tandis qu'environ huit pour cent des professeurs semblent avoir un rapport à l'expérience aléatoire inadéquat avec celui de l'institution savante.

1.4.3. Bilan du savoir enseigné relatif à la notion d'expérience aléatoire

Au terme de l'étude du savoir enseigné relatif à la notion d'expérience aléatoire, nous arrivons à la conclusion que six types de rapports à la notion d'expérience aléatoire sont observés au niveau des enseignants. Deux de ces types de rapports sont conformes à ceux identifiés au niveau du savoir de référence. Ils sont enseignés par les deux professeurs dont nous avons suivi les cours et par un plus grand nombre d'enseignants. Deux autres types de rapports, proches des deux précédents, manquent de précision dans l'utilisation des mots et ne sont pas ainsi conformes aux deux modèles de référence. Les deux derniers rapports personnels identifiés au niveau des enseignants sont incomplets, en ce sens que les définitions y correspondant attribuent à l'expérience aléatoire une nature différente de celle d'une expérience. À notre avis, ils ne sont pas non plus conformes aux modèles de référence.

1.5. Récapitulatif de la transposition didactique de l'expérience aléatoire

L'étude de la transposition didactique de l'expérience aléatoire au Bénin nous conduit globalement aux résultats ci-dessous résumés.

Le savoir savant est constitué de deux types de rapports à la notion d'expérience aléatoire : le modèle mathématique réduit (MR) et le modèle didactique (MD). Le modèle MR caractérise l'expérience aléatoire uniquement par le fait que son résultat est dû au hasard. En plus de l'imprévisibilité du résultat, due au hasard, le modèle MD caractérise l'expérience aléatoire par la connaissance préalable de ses résultats.

Les instructions officielles au Bénin recommandent explicitement l'enseignement de la notion d'expérience aléatoire. Cependant, la définition de l'expérience aléatoire n'est précisée que dans les documents officiels des classes terminales des séries littéraires. Cette définition est celle du modèle mathématique réduit. Tout comme au Bénin, les programmes du Maroc et de la Côte d'Ivoire font de cette notion un objet d'enseignement. Par contre au Sénégal et au Gabon, l'expérience aléatoire figure implicitement dans les programmes au niveau de l'étude du vocabulaire probabiliste, tandis qu'en Tunisie, en Belgique et en France, l'étude implicite de l'expérience aléatoire sert à sa modélisation, à partir de l'expérimentation de la fréquence limite d'un événement. Nous déduisons ainsi qu'au niveau de l'enseignement de la notion

d'expérience aléatoire, l'option des programmes béninois de ne pas suffisamment insister sur l'étude de la notion d'expérience aléatoire est partagée par beaucoup d'autres pays de l'Afrique comme de l'Europe. Par ailleurs, seul le modèle de référence MR est clairement présent dans les programmes béninois, à travers la définition proposée au niveau des séries littéraires. On note ainsi au Bénin, un écart entre le savoir savant et le savoir enseigné au niveau de l'objet d'enseignement « expérience aléatoire ».

Concernant l'apprêt didactique, les manuels de la collection CIAM, utilisés dans les pays d'Afrique au Sud du Sahara, proposent la définition du modèle mathématique réduit dans les séries littéraires et en série D, mais n'en proposent aucune pour la série C. Le manuel SOLFATH par exemple, destinés aux séries scientifiques et techniques du Bénin, contient la définition du modèle didactique. L'apprêt didactique, qui se situe entre le savoir à enseigner et le savoir enseigné, comporte globalement les deux modèles MR et MD de la définition de l'expérience aléatoire.

Au niveau du savoir enseigné, les deux modèles identifiés dans l'institution savante sont enseignés par plus des trois quarts des enseignants des classes terminales. Le modèle mathématique réduit semble être le plus enseigné dans le système scolaire béninois. Cependant quatre autres types de définitions, non conformes aux deux modèles ci-dessus, sont proposés par une minorité non négligeable des enseignants des classes terminales.

En somme, les deux modèles de référence de la notion d'expérience aléatoire se retrouvent partiellement dans les programmes béninois et globalement dans l'ensemble des manuels utilisés. Ils sont complétés par des définitions inadéquates au niveau de l'enseignement.

1.6. Notre position sur l'enseignement de la notion d'expérience aléatoire au Bénin

Certains dysfonctionnements révélés par la présente étude de la transposition didactique de l'expérience aléatoire, méritent de notre part quelques commentaires, en vue de l'amélioration de l'enseignement des probabilités au Bénin.

1.6.1. L'aspect lexical du « vocabulaire des probabilités »

Comme nous l'avons constaté, au niveau des instructions officielles, la mention « faire utiliser le vocabulaire des probabilités », contenue dans les guides des programmes des terminales scientifiques, semble inviter à s'intéresser au lexique et non pas nécessairement au sens des notions concernées, dont celle de l'expérience aléatoire. Il serait important que les instructions

officielles insistent aussi sur le sens des concepts comme le recommandent d'ailleurs les programmes selon l'approche par compétences en vigueur (DIP, 2011b).

Il est nécessaire de donner du sens aux concepts, de faire fonctionner les nouveaux outils et ceci avant toute formalisation (p. 10).

Pour ce qui concerne spécifiquement la notion d'expérience aléatoire, insister sur le sens du concept, devrait être une occasion pour surmonter les obstacles épistémologique, culturel et même ontogénique à la notion de hasard dans le calcul des probabilités.

1.6.2. Le vide didactique au niveau de la définition d'expérience aléatoire

Il est aisé de constater la variété des définitions d'expérience aléatoire enseignées dans les classes terminales au Bénin. Il est surprenant d'avoir pour une seule notion, quoique complexe, jusqu'à quatorze types de définitions possibles. Cette diversité de modèles d'enseignement de la notion d'expérience aléatoire peut s'expliquer par l'absence d'une définition institutionnelle de cette notion. Cette inexistence, dans les programmes, du choix d'un modèle précis d'enseignement d'expérience aléatoire, lequel devrait être la conséquence d'un choix affiché de l'approche d'enseignement des probabilités, constitue à notre avis, un vide didactique institutionnel, au sens d'Alain Bronner (1997). Il serait envisageable de combler ce vide en optant pour le choix précis d'une approche d'enseignement des probabilités et par conséquent du modèle de la notion d'expérience aléatoire dont la définition pourrait être indiquée clairement dans les instructions officielles.

2. Étude de la transposition didactique de la notion de probabilité d'un événement

Dans le cadre de la rédaction de notre mémoire de DEA (Dandjinou, 2013), nous avons étudié la transposition didactique de la probabilité d'un événement afin d'appréhender la présence des différentes approches de définition de probabilité utilisées dans l'enseignement des probabilités. Dans cette section, nous exploitons ce travail pour une étude plus affinée, que nous avons présentée au premier colloque de l'Association des Didacticiens des Mathématiques Africains (ADiMA), à Yaoundé, au Cameroun (Dandjinou et Bronner, 2016).

2.1. Rapport institutionnel à la notion de probabilité d'un événement dans l'institution savante

Nous situons le savoir savant relatif à tout objet de savoir mathématique au niveau de l'épistémologie du savoir en jeu et au niveau de l'institution « enseignement mathématique

supérieur ». Concernant l'objet de savoir « probabilité d'un événement », nous exploitons d'une part, l'épistémologie des probabilités présentée dans le premier chapitre, et d'autre part, quelques ouvrages de mathématiques du supérieur dont notamment ceux de Patrick Bogaert (2006), de Maurice Gaultier (2002) de Gilbert Saporta (2011) et un cours photocopié dispensé en deuxième année de la filière Mathématiques-Physiques (MP₂) par Carlos Ogouyandjou (2013). Après la présentation de chacun de ses ouvrages, nous proposons une analyse praxéologique de l'ensemble des quatre ouvrages pour déterminer le savoir savant relatif à l'objet « probabilité d'un événement ».

2.1.1. Présentation de l'ouvrage de Bogaert

Dans ce livre comportant 9 chapitres, les notions de probabilités sont abordées dans le deuxième chapitre après le développement, dans un premier chapitre, des notions d'expérience aléatoire, d'univers des possibles et d'événement. Trois définitions de probabilité d'un événement sont proposées : la « définition classique », la « définition en fréquence » et la « définition axiomatique ». La définition classique qui est le premier principe de Laplace est présentée comme suit (Bogaert, 2006, p. 16).

Classiquement (Laplace, 1819), la probabilité d'un événement A était définie comme le rapport du nombre de cas favorables à la réalisation de A au nombre total de cas possibles supposés tous « également possibles » (c'est-à-dire qui ont la même chance de se réaliser).

Cette définition utilisée durant deux siècles nécessite dans son application que l'on s'assure que tous les cas possibles sont équiprobables. La définition en fréquence est l'approche fréquentiste de la définition de la probabilité d'un événement A tel que le montre l'extrait suivant (ibid. p. 16).

Bien entendu, si l'on réalise plusieurs fois ces n répétitions, on obtiendra très probablement des fréquences observées différentes F_n . Toutefois, on s'attend à ce que ces fréquences différentes de moins en moins entre elles au fur et à mesure que le nombre de répétitions augmente. Il est alors possible de définir une fréquence théorique $P(A)$, avec $p(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n$ qui est une valeur unique lorsque le nombre de répétitions est infini. C'est cette fréquence théorique que l'on appelle la probabilité de l'événement A. Il s'agit donc d'une démarche inductive ; on tente d'obtenir un résultat général sur base de l'expérimentation.

Cette définition simple à comprendre pose aussi des problèmes menant à préférer une définition axiomatique, celle de Kolmogorov, qui offre un cadre mathématique au calcul des probabilités. Cette définition s'énonce comme il suit (ibid. p. 18).

La probabilité est un nombre satisfaisant les axiomes :

- (1) La probabilité $p(A)$ d'un événement A quelconque est positive ou nulle ;
- (2) La probabilité $p(A)$ de l'événement certain est égale à 1 ;
- (3) Si deux événements sont incompatibles, la probabilité de leur union est égale à la somme de leur probabilité.

Cette définition quoique suffisante dans le cas où l'univers des éventualités est fini est incomplète, car il y manque l'axiome d'additivité dénombrable : « La probabilité de la réunion d'un nombre quelconque d'événements deux à deux incompatibles est égale à la somme de leurs probabilités ». Le deuxième principe de Laplace, qui en est une conséquence s'énonce : « La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le composent ».

Les trois définitions du livre sont illustrées par quatre exemples résolus dont deux portent sur la définition axiomatique.

2.1.2. Présentation de l'ouvrage de Saporta

Dans l'ouvrage de Saporta, c'est le premier chapitre intitulé « le modèle probabiliste » qui est consacré à la probabilité. Il y est d'abord défini l'espace probabilisable après la présentation des concepts de base du calcul des probabilités dont notamment les notions d'expérience aléatoire, d'univers des possibles, d'événement avec ses différents types. Sont présentés ensuite dans ce premier chapitre respectivement l'espace probabilisé, les probabilités conditionnelles et une réflexion sur le concept de probabilité.

L'axiomatique de Kolmogorov est la première définition de probabilité donnée dans le livre. Elle est précisée comme il suit (Saporta, 2011, p. 5).

Définitions

On appelle probabilité sur (Ω, \mathcal{C}) une application P de \mathcal{C} dans $[0; 1]$ telle que :

- $P(\Omega)=1$;

- Pour tout ensemble dénombrable d'événements incompatibles A_1, A_2, \dots, A_n , on a :

$$P(\cup A_i) = \sum P(A_i).$$

On appelle espace probabilisé le triplet (Ω, \mathcal{C}, P) .

Notons que (Ω, \mathcal{C}) est un espace probablisable, avec \mathcal{C} une tribu de parties de l'univers des possibles Ω .

Après les énoncés des propriétés élémentaires de calcul de probabilités et la présentation des probabilités conditionnelles, l'approche classique puis l'approche fréquentiste ont été présentées dans le cadre des réflexions sur le concept de probabilité. L'approche classique est précisément définie de la manière suivante (Ibid., p. 10).

La vision classique

C'est celle qui est héritée des jeux de hasard. Ω est en général fini et des raisons de symétrie conduisent à donner à chaque événement élémentaire la même probabilité : ainsi le lancer d'un dé parfait conduit à un ensemble Ω à 6 éléments équiprobables.

Le calcul des probabilités n'est donc plus qu'une affaire de dénombrement, d'où la célèbre formule :

$$P(A) = \frac{\text{Nombre de cas favorables}}{\text{Nombre de cas possibles}}.$$

L'analyse combinatoire fournit alors les réponses aux cas classiques.

À propos de l'approche classique, Saporta note qu'elle ne s'étend pas aux cas où Ω n'est pas dénombrable et repose sur une conception idéaliste de l'expérience aléatoire, car les symétries parfaites n'existent pas. Il ajoute qu'à travers le paradoxe de Bertrand, les limites de l'approche classique sont prouvées (Ibid., p. 11).

L'approche fréquentiste est simplement précisée comme il suit (Ibid., p. 12).

La vision fréquentiste

Elle repose sur la loi des grands nombres. Une seule expérience ne suffisant pas pour évaluer la probabilité d'un événement, on va répéter un très grand nombre de fois l'expérience. Ainsi du lancer du dé, la probabilité d'observer la face 6 est la limite du rapport :

$$\frac{\text{Nombre de 6 obtenus}}{\text{Nombre d'essais}} = f.$$

Lorsque le nombre d'essais augmente indéfiniment. En effet la loi des grands nombres assure que f converge vers la probabilité p de l'événement.

Saporta fait la remarque que la vision fréquentiste est un processus irréaliste nécessitant une infinité d'expériences et ne permet pas ainsi de trouver la probabilité d'un événement. La plus grande critique de cette approche est le fait que le concept de probabilité soit défini par un théorème de probabilité. On définirait ainsi la probabilité par la probabilité. Cette critique est néanmoins à relativiser dans le cadre d'une étude didactique comme la nôtre.

2.1.3. Présentation de l'ouvrage de Gaultier

Ce livre comporte 70 exercices résolus avec des résumés de cours. Le premier chapitre, intitulé « Notions générales sur les probabilités », fait d'abord des rappels sur la théorie des ensembles, donne ensuite la notion d'événement, énonce les axiomes de structure, et aborde enfin les situations d'équiprobabilité. La probabilité est définie comme une application d'une tribu T de parties de l'univers des possibles Ω dans l'intervalle $[0 ; 1]$ vérifiant les axiomes (Gaultier, 2002, p. 5) :

[a] $p(\emptyset)=0, p(\Omega)=1$;

[b] axiome des probabilités totales : A et B étant deux éléments quelconques de T tels que $A \cap B = \emptyset$ (événements incompatibles), alors on a :

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B).$$

[c] axiome complet des probabilités totales : pour chaque suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de T tels que $A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j$, on a :

$$p\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} p(A_n).$$

Cette définition est suivie des propriétés habituelles de calcul de probabilités et de l'équiprobabilité qui traduit le premier principe de Laplace. Le deuxième principe de Laplace n'est qu'implicite à travers l'axiome complet des probabilités totales. Les quatre exercices du premier chapitre qui concerne le calcul élémentaire des probabilités portent tous sur le premier principe de Laplace.

2.1.4. Présentation du cours photocopié d'Ogouyandjou

C'est un chapitre intitulé « Introduction à la théorie probabiliste » qui est consacré au calcul des probabilités. La probabilité est définie comme une mesure sur un espace mesurable. Elle est particulièrement définie sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$, où Ω est un univers des éventualités fini (Ogouyandjou, 2012, p. 13).

On appelle probabilité définie sur l'espace probabilisable fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$, toute application p définie de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans $[0; 1]$ qui vérifie les propriétés suivantes :

(a) $p(\Omega) = 1$;

(b) Si A et B sont deux événements incompatibles c'est-à-dire $A \cap B = \emptyset$ on a :

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B).$$

Le triplet $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), p)$ est appelé espace probabilisé. Pour tout événement A , le réel $p(A)$ est appelé probabilité de l'événement A .

Après cette définition axiomatique, l'équiprobabilité est ensuite abordée en ces termes (Ibid.).

Définition : On dit qu'il y a équiprobabilité, lorsque les probabilités de tous les évènements élémentaires sont égales. On dit alors que la probabilité est uniforme sur l'espace probabilisable $(\Omega; P(\Omega))$.

Proposition : S'il y a équiprobabilité, alors pour tout évènement A, on a :

$$p(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

Aucune trace pouvant traduire le deuxième principe de Laplace n'est retrouvée dans le cours. Cependant l'un des trois exemples proposés porte sur ce principe, les autres étant des situations d'équiprobabilité. Un deuxième exemple portant sur le deuxième principe de Laplace est proposé pour le calcul d'une probabilité conditionnelle.

2.1.5. Bilan de la présentation des ouvrages

Dans les documents ci-dessus consultés, nous avons noté globalement la présence implicite ou explicite des trois approches de définition de la probabilité que sont l'approche Laplacienne fondée sur les deux principes de Laplace, l'approche fréquentiste et l'axiomatique de Kolmogorov. Le tableau suivant résume les différentes approches de la définition de la probabilité contenues dans les quatre ouvrages consultés.

	Premier principe de Laplace	Deuxième principe de Laplace	Approche fréquentiste	Approche axiomatique
Ouvrage Bogaert	Explicite	Implicite	Explicite	Explicite
Ouvrage Saporta	Explicite	Implicite	Explicite	Explicite
Ouvrage Gaultier	Explicite	Implicite	Inexistant	Explicite
Cours Ogouyandjou	Explicite	Implicite à travers des exemples	Inexistant	Explicite

Tableau n°04 : Les approches de définition de la probabilité dans le supérieur.

De la lecture de ce tableau, il nous est aisé de retenir de la présentation de ces quatre documents que :

- Globalement toutes les approches sont enseignées dans le supérieur ;
- Le premier principe de Laplace et l'approche axiomatique de Kolmogorov sont les plus présentes dans le supérieur ;
- L'accent n'est pas mis sur le deuxième principe de Laplace comme une définition de la probabilité, mais plutôt comme une propriété ou un axiome ;
- L'approche fréquentiste est moins présente dans le supérieur.

2.1.6. Analyse praxéologique du savoir savant relatif au calcul des probabilités dans l'enseignement mathématique du supérieur

Au niveau de la notion de probabilité d'un événement dans l'enseignement mathématique du supérieur, deux types de tâches se dégagent. Il s'agit des types de tâches « estimer la probabilité d'un événement » et « calculer la probabilité d'un événement » que nous désignons respectivement par T_e et T_c . Pour une analyse complète du rapport institutionnel au calcul des probabilités au niveau du savoir savant, nous considérons les ouvrages présentés précédemment et l'épistémologie du calcul des probabilités (chap. I), rejoignant ainsi Tavignot (1995) qui indique d'étudier le savoir savant à partir de l'historique de la notion étudiée.

Au type de tâches T_e correspond une seule technique τ_e que nous nommons « démarche expérimentale » et qui se décline comme il suit :

- Identifier l'expérience aléatoire et l'événement ;
- Réaliser l'expérience aléatoire un certain nombre n de fois ;
- Déterminer la fréquence F_n de l'événement ;
- Observer l'évolution de la fréquence F_n lorsque n devient de plus en plus grand ;
- Conjecturer la limite de F_n lorsque n tend vers $+\infty$.

La technologie θ_e justifiant la technique τ_e est composée des notions d'expérience aléatoire, d'événement, de fréquence d'une modalité en statistique, de limite d'une suite numérique et de la loi faible des grands nombres. Cette technologie que nous nommons « Approche fréquentiste » est fondée par la théorie fréquentiste de la définition de la probabilité d'un événement.

Au type de tâches T_c , relèvent trois techniques τ_c^1 , τ_c^2 et τ_c^3 que nous nommons respectivement « technique de calcul par les axiomes (TCA) », « technique d'équiprobabilité (TE) » et « technique d'addition de probabilités d'événements élémentaires (APEE) ». La technique TCA s'applique aux événements pouvant s'exprimer en fonction d'autres événements non tous élémentaires de probabilités connues ; la technique TE s'applique dans

les situations d'équiprobabilité et la technique APEE s'applique en l'absence de situation d'équiprobabilité avec la possibilité de connaître les probabilités des événements élémentaires.

La technique TCA se décompose de la manière suivante :

- Identifier l'expérience aléatoire et l'événement E ;
- Identifier les événements E_i de probabilités connues ;
- Exprimer l'événement E en fonction des événements E_i ;
- Identifier un axiome ou une propriété liant la probabilité de l'événement E et celles des événements E_i ;
- Utiliser l'axiome ou la propriété pour calculer la probabilité de E.

La technologie θ_c^1 justifiant la technique TCA que nous nommons « Axiomes élémentaires » est composée du langage probabiliste, des opérations sur les ensembles et des propriétés de calcul élémentaires des probabilités. La technologie θ_c^1 se justifie elle-même par la théorie axiomatique de Kolmogorov.

La technique TE basée sur le premier principe de Laplace se décompose de la manière suivante :

- Identifier l'expérience aléatoire et l'événement ;
- Déterminer le nombre de cas possibles ;
- Déterminer le nombre de cas favorables à l'événement ;
- Calculer le rapport du nombre de cas favorables au nombre de cas possibles.

A la technique TE, nous associons la technologie θ_c^2 , que nous nommons « Premier principe de Laplace » et qui se compose du langage probabiliste, de l'analyse combinatoire et de la formule traduisant le premier principe de Laplace $p(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$. La théorie qui fonde cette technologie est l'approche laplacienne du calcul des probabilités.

La technique APEE fondée sur le deuxième principe de Laplace se définit comme suit :

- Identifier l'expérience aléatoire et l'événement ;
- Ecrire en extension l'événement ;
- Déterminer éventuellement les probabilités des événements élémentaires ;
- Additionner les probabilités des événements élémentaires qui composent l'événement.

A cette technique nous associons la technologie θ_c^3 que nous nommons « Deuxième principe de Laplace » et qui est globalement composé du vocabulaire des probabilités et du deuxième principe de Laplace. La théorie Laplacienne est la théorie qui fonde la technologie θ_c^3 .

En résumé, on retrouve au niveau du savoir savant les quatre techniques suivantes relevant des types de tâches Tc et Te :

- La technique TE, justifiée par la technologie « Premier principe de Laplace » de la théorie laplacienne ;
- La technique APEE, justifiée par la technologie « Deuxième principe de Laplace » de la théorie laplacienne ;
- La technique TCA, justifiée par la technologie « Axiomes élémentaires » de la théorie axiomatique de Kolmogorov ;
- La technique DE, justifiée par la technologie « Approche fréquentiste » de la théorie fréquentiste des probabilités.

Le savoir savant relatif au calcul des probabilités est donc constitué à partir de la théorie laplacienne, la théorie fréquentiste et de la théorie axiomatique de Kolmogorov.

2.2. La notion de probabilité d'un événement au niveau des instructions officielles

Depuis l'avènement en 2002 des programmes de mathématiques dénommés « Harmonisation des programmes de Mathématiques (HPM) », adoptés par les pays francophones d'Afrique et de l'Océan Indien, les probabilités ne sont enseignées que dans les classes terminales au Bénin. Nous présentons dans les lignes qui suivent l'évolution de l'enseignement des probabilités au Bénin, dont nous allons nous servir pour l'analyse praxéologique des programmes d'études par rapport à la notion de probabilité d'un événement. Pour situer les programmes du Bénin par rapport à ceux d'autres pays, les programmes de quelques pays africains et occidentaux seront sommairement analysés du point de vue de l'introduction de la notion de probabilité d'un événement.

2.2.1. Évolution de l'enseignement des probabilités au Bénin

De la période coloniale à nos jours, le Bénin a connu quatre réformes principales dans son système éducatif, respectivement en 1945, 1971, 1975 et 1994. Recommandée par les états généraux de l'éducation de 1990, la réforme de 1994 n'a concerné que l'enseignement primaire et a impliqué des changements de programmes dans l'enseignement secondaire dans les années

2000. Indépendamment des réformes, les programmes connaissent régulièrement des changements ou juste de légères modifications. Les programmes changés sont expérimentés puis généralisés progressivement classe après classe, rendant le processus de changement de programmes très long. Par exemple, concernant la réforme de 1994, elle a commencé à la rentrée de l'année scolaire 1994-1995 par une expérimentation au cours d'initiation (CI), mais elle n'a connu sa généralisation en deuxième année du cours moyen (CM₂) qu'au cours de l'année scolaire 2004-2005. Dans le secondaire, les programmes selon l'approche par compétences (APC), après une phase pilote, ont été mis en œuvre en sixième en 2005-2006 et en terminale en 2011-2012. En tenant compte des contenus notionnels des programmes de mathématiques de l'enseignement secondaire général, nous distinguons quatre grands moments dans l'enseignement des probabilités au Bénin, à savoir : la période allant de l'indépendance à 1975 ; la période de 1975 à 1995 ; la période de 1995 à 2002 et enfin celle de 2002 à ce jour.

Pour ce qui concerne la première période, nous n'avons pas pu avoir les programmes de probabilités, mais nous savons que les programmes béninois en cette période-là étaient calqués sur les programmes français. Voici quelques extraits de programmes français de probabilités en cette époque (Henry, 2010, p. 37).

1965 (Terminale D) : 1° Préliminaires d'analyse combinatoire... ; 2° Principe du calcul des probabilités. Variable aléatoire... ; 3° Statistique appliquée.

1970 (Terminale C) : 1° Espaces probabilisés finis (Ω , $B(\Omega)$, p). Applications mesurables... ; 2° Espérance mathématique... ; 3° Loi faible des grands nombres.

L'enseignement des probabilités dans ces programmes est conçu comme une application de la combinatoire. La probabilité d'un événement est introduite par le premier principe de Laplace : « le rapport du nombre des cas favorables à celui de tous les cas possibles » (Ibid).

Les programmes de 1975 à 1995 ont prévu l'enseignement de la combinatoire dans les classes de première des séries littéraires et de la série C (section mathématique), où le calcul des probabilités est introduit, sans doute par le premier principe de Laplace comme le montrent les extraits suivants (PO-Bénin-1^{ères}, 1975b ; PO-Bénin-1^{ère}, 1975c)

2^{ème} année des sections L₂ et L₃ (Premières A₂ et A₃)

Relations – Applications : applications injectives ; applications surjectives ; applications bijectives ; application réciproque d'une bijection ; dénombrement des applications d'un ensemble fini dans un autre, arrangements, combinaisons, permutations, nombre de parties d'un ensemble fini.

2^{ème} année de la section ST (Première C)

Dénombrement – Probabilités

Nombre d'applications d'un ensemble fini dans un autre, arrangements, combinaisons, permutations ;

Introduction élémentaire aux probabilités : événements, probabilité d'un événement.

Le calcul des probabilités est introduit en classe terminale de la série D et poursuivi en terminale C. Nous n'avons pas pu avoir ces programmes, mais en tenant compte des manuels scolaires français utilisés dans cette période, nous faisons l'hypothèse que les contenus notionnels sont approximativement ceux de la France d'avant 1990 tels qu'ils sont précisés par Henry (2010, p. 37).

1982 (Terminale D) : a) Combinatoire ; b) Exemples de situations où le hasard intervient. Ensemble fini d'épreuves Ω . Probabilité uniforme sur Ω , calcul des probabilités par dénombrement.

1986 (Terminale C) : 1. Combinatoire ; probabilités. En probabilités, l'objectif est d'entraîner les élèves à décrire grâce au langage élémentaire des événements, quelques expériences aléatoires simples, et à employer les techniques de dénombrement pour calculer des probabilités.

Le manuel scolaire de la collection Monge de la série D (Monge, Audouin et Hautcoeur, 1984), indiqué comme manuel conforme au programme, a développé les contenus notionnels relatifs aux probabilités suivants : Exemples de situations où le hasard intervient, probabilité, construction élémentaire d'une probabilité, probabilité uniforme, probabilité conditionnelle, événements indépendants, produit de deux probabilités, aléas numériques, distributions binomiales, approximation d'une loi binomiale par la loi de Gauss. Ayant fait la classe terminale C en 1986, nous reconnaissons qu'en dehors de l'approximation de la loi binomiale par la loi de Gauss, toutes les autres notions avaient été largement étudiées en classe.

De 1995 à 2002, les programmes de probabilités n'ont pas vraiment connu de modification. Le dénombrement est étudié en première littéraire et repris en terminale littéraire. Le dénombrement est étudié en première C et le calcul des probabilités y est introduit. D'une manière générale, le calcul des probabilités est étudié dans toutes les classes terminales. L'extrait du programme de classe terminale de la série D que voici nous permet d'avoir une idée du contenu des programmes (PO-Bénin-Tles, 1995, pp. 6-7).

Analyse combinatoire

- Cardinal d'un ensemble ; cardinal du produit cartésien de deux ensembles finis.

- Cardinal de l'ensemble E^p des p-uplets d'éléments d'un ensemble fini E ; cas où les termes de ces p-uplets sont distincts deux à deux : dénombrement des arrangements (notation A_n^p) et des permutations (notation $n!$).
- Parties de cardinal donné d'un ensemble fini : Dénombrement des combinaisons (notation C_n^p).
- Formule du binôme de Newton et triangle de Pascal

Probabilité sur un ensemble fini

- Vocabulaire : Événements ; probabilité d'un événement ; événements élémentaires, disjoints, contraires.
- Probabilité conditionnelle ; événements indépendants.
- Variables aléatoires : loi de probabilité ; fonction de répartition ; espérance mathématique ; variance ; écart type.
- Schéma de Bernoulli ; distribution binomiale ; espérance mathématique et écart type de la loi binomiale.

En terminale C, il est prévu l'enseignement de la probabilité conditionnelle, des variables aléatoires discrètes, de l'espérance mathématique, de l'écart-type, de la fonction de répartition et de la loi binomiale (Ibid.).

Concernant la période de 2002 à 2019, rappelons d'abord que les pays francophones d'Afrique et de l'Océan Indien ont adopté des programmes communs en mathématiques dénommés « Harmonisation des programmes de Mathématiques (HPM) » (Touré, 2002). Ils ont été exécutés au Bénin selon l'approche par objectifs et basés sur le constructivisme. Expérimentés puis généralisés progressivement à partir de la sixième au cours de l'année scolaire 1996-1997, ces programmes ont atteint les classes terminales de l'enseignement secondaire général au cours de l'année scolaire 2002-2003 et n'ont concerné que les séries C et D, les programmes des séries littéraires n'ayant pas connu de modification. Contrairement aux programmes par contenus exécutés jusque-là, les intentions pour chaque objet d'enseignement des programmes HPM ont été clairement définies. Les programmes HPM prévoient l'enseignement du dénombrement en classe de première C et D, et l'enseignement du calcul des probabilités en terminale C et D. La probabilité sur un univers Ω est définie comme suit (INFRE, 2002, p. 48).

Soit Ω l'univers associé à une expérience aléatoire. Une probabilité sur Ω est une application p de $P(\Omega)$ vers $[0, 1]$ qui, à tout événement A de Ω associe le nombre réel $p(A)$ appelé probabilité de l'événement A et qui vérifie les conditions suivantes :

- $p(\Omega) = 1$;
- Si A et B sont deux événements incompatibles alors $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.

Cette définition est suivie des propriétés fondamentales du calcul des probabilités dont la propriété d'additivité dénombrable (Ibid.).

Soit p une probabilité définie sur un univers Ω , A et B deux événements.

- $p(A) + p(\bar{A}) = 1$
- Si $A \subset B$, alors $p(A) \leq p(B)$
- $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$
- Si A_1, A_2, \dots, A_n ($n \geq 2$) sont des événements deux à deux incompatibles, alors :

$$p\left(\bigcup_{i=1}^{i=n} A_i\right) = \sum_{i=1}^n p(A_i).$$

Implicitement énoncé dans la dernière propriété, le deuxième principe de Laplace est suivi du premier en ces termes du programme :

Soit p une probabilité définie sur un univers fini non vide Ω .

Si tous les événements élémentaires de Ω sont équiprobables, alors on a : pour tout

événement A de Ω , $p(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$.

Comme dans les programmes précédents, le programme prévoit l'enseignement de la probabilité conditionnelle, des variables aléatoires réelles et de la loi binomiale.

La réforme de 1994 a abouti à l'élaboration des programmes selon l'approche par compétences qui ont été expérimentés puis généralisés. La généralisation a atteint les classes de seconde en 2009, les classes de première en 2010 et les classes de terminale en 2011. Les contenus notionnels des programmes HPM sont purement et simplement reconduits. La seule différence entre les deux programmes se situe au niveau des approches (par objectifs pour HPM et par compétences pour les programmes en vigueur). Les programmes des séries littéraires ont connu de modifications. Le dénombrement est introduit depuis la classe de seconde, se poursuit en première et le calcul des probabilités est introduit à partir des propriétés suivantes (DIP, 2008, p. 34).

- Soit une expérience aléatoire à n éventualités. Dans une situation d'équiprobabilité, la probabilité d'un événement élémentaire est : $\frac{1}{n}$;
- La probabilité d'un événement est un nombre compris entre 0 et 1.
- La probabilité de l'événement certain est égale à 1.
- La probabilité de l'événement impossible est égale à 0.
- La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le composent.

- Dans une situation d'équiprobabilité, la probabilité d'un événement A est :

$$p(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}.$$

Les deux dernières propriétés traduisent respectivement le deuxième principe et le premier principe de Laplace. Les deux propriétés suivantes de calcul des probabilités sont énoncées ainsi qu'il suit (Ibid.).

- La somme des probabilités de deux événements contraires est égale à 1.
- La probabilité de la réunion de deux événements est égale à la somme de leurs probabilités diminuée de la probabilité de leur intersection.

L'enseignement de la probabilité conditionnelle, des variables aléatoires et des lois classiques n'est pas prévu en terminale littéraire, contrairement aux programmes précédents, dans lesquelles ces notions étaient enseignées.

2.2.2. Analyse praxéologique des programmes de probabilités

Pour ce qui concerne l'analyse les programmes, nous nous intéressons différemment aux institutions de la classe terminale scientifique (séries C et D) et de la classe terminale littéraire (séries A et B), et nous nous situons dans la période actuelle pendant laquelle, les programmes des classes terminales des séries C et D sont les mêmes, de même que ceux des séries A et B. Ces programmes sont en vigueur depuis 2002 pour les séries C et D, et depuis 2008 pour les séries A et B.

Parmi les deux types de tâches identifiés au niveau du savoir savant pour étudier la notion de probabilité d'un événement, seul le type de tâches Tc se retrouve au niveau instructions officielles. La non observation du type de tâches Te relatif à l'estimation de la probabilité d'un événement traduit bien l'absence de l'approche fréquentiste dans les programmes béninois. Les techniques relevant du type de tâches Tc sont explicitement les techniques TCA et TE évoquées plus haut (2.1.). La technique APEE n'est par contre exprimée qu'implicitement à travers l'axiome d'additivité dénombrable. Nous notons cependant que cette technique est explicite au niveau des programmes des classes terminales littéraires.

2.2.3. La notion de probabilité d'un événement dans les programmes de quelques pays africains et occidentaux.

Nous nous intéressons ici aux approches de probabilités indiquées pour l'enseignement des probabilités dans certains pays africains et occidentaux, notamment la Côte d'Ivoire, le Sénégal, le Gabon, la Tunisie, la France, la Belgique et le Canada.

Les programmes de la Côte d'Ivoire, tout en précisant de définir la probabilité dans l'hypothèse d'équiprobabilité, indique que le lien entre la fréquence et la probabilité d'un événement soit fait : « *On fera le lien entre la fréquence en statistique et la probabilité de l'évènement correspondant* » (PO-CI, 1999, p. 19). En interdisant clairement l'étude des situations de non-équiprobabilité dans les séries C et E, ils semblent ne pas s'intéresser au deuxième principe de Laplace : « *Toute situation de non-équiprobabilité est hors programme* » (Ibid.) L'étude des propriétés du calcul élémentaire des probabilités n'apparaît pas dans les programmes ivoiriens des classes terminales.

Au Sénégal, les programmes des séries scientifiques indiquent clairement que la notion de probabilité soit introduite à partir de l'approche fréquentiste et qu'elle soit définie par la suite par l'axiomatique de Kolmogorov. Ils vont plus loin en recommandant l'historique de la naissance des probabilités (Gueye, 2012, p. 1613).

Pour introduire la notion de probabilité, on s'appuiera essentiellement sur l'observation statistique dans des cas simples et les stabilités de fréquence qui s'en dégagent. À travers quelques expériences aléatoires simples, on introduira la notion d'espace probabilisé en donnant la définition axiomatique de la probabilité. On s'attachera en introduction à faire l'historique de la naissance des probabilités et à montrer leur importance actuelle dans pratiquement tous les secteurs de la vie moderne.

Le deuxième principe de Laplace est explicitement présenté dans les programmes sénégalais comme une conséquence de l'axiome d'additivité dénombrable et sans surprise le premier principe de Laplace est évoqué à travers une indication de l'étude des cas d'équiprobabilité.

Au Gabon, les commentaires des programmes des séries C et E demandent de « *veiller à faire ressortir le lien entre les statistiques et les probabilités* » (PO-Gabon-Tle-CE, p. 18) sans aller plus en détail, tandis que ceux de la série D sont un peu plus précis : « *On fera le lien entre la fréquence en statistique et la probabilité de l'évènement correspondant* » (PO-Gabon-Tle-D, p. 15). Le premier principe de Laplace est présent dans tous les programmes, mais le deuxième principe de Laplace n'y est pas explicitement.

Au Maroc, les programmes prévoient l'introduction de la notion de probabilité à partir de l'approche fréquentiste au moyen de la simulation (Rouan et El-Idrissi, 2014, p. 78).

A travers la répétition d'une expérience aléatoire simple un grand nombre de fois (lancer d'un dé, d'une pièce de monnaie, tirage d'une boule dans un sac...) constater la stabilité de la fréquence d'un événement aléatoire et puis accepter ce résultat. A cette fin, on peut

utiliser la touche « rand » de la calculatrice scientifique, de la calculatrice scientifique programmable ou de l'ordinateur.

L'approche classique laplacienne est évidemment prévue dans l'étude de l'hypothèse d'équiprobabilité. Aucune indication claire n'est donnée par rapport au deuxième principe de Laplace, tandis que l'axiomatique de Kolmogorov apparaît à travers les propriétés de calcul de probabilité.

En Tunisie, le choix est fait depuis les programmes de 2008 (PO-Tunisie, 2008) d'enseigner les probabilités à partir de l'approche fréquentiste comme nous l'avons précisé au niveau de l'étude de la transposition didactique de la notion d'expérience aléatoire (1.2.2.). L'accent n'est pas mis sur le deuxième principe de Laplace, mais les propriétés de calcul de probabilités sont prévues comme on pouvait s'y attendre.

Dans la Communauté française de Belgique comme en France, l'enseignement de la notion de probabilité d'un événement est fondé sur l'approche fréquentiste. Les programmes de ces pays mettent l'accent sur le lien entre la probabilité et la statistique comme le montre par exemple le commentaire suivant du programme belge (Vermandele, 2013, p. 83).

L'examen de tableaux statistiques relatifs à la répétition d'une même expérience, un grand nombre de fois, pourra introduire la notion de probabilité. Des simulations avec logiciels peuvent être très instructives et éclairantes.

Outre le premier principe de Laplace qui occupe une bonne place dans les programmes de ces pays et les propriétés élémentaires de calcul de probabilités, le deuxième principe de Laplace y est aussi abordé comme l'illustre l'indication suivante des programmes français de la classe de seconde (B.O., 2009, p. 9).

La probabilité d'un événement est définie comme la somme des probabilités des événements élémentaires qui le constituent.

Dans la province de Québec, au Canada, l'approche fréquentiste est au centre de l'enseignement des probabilités. Du cours primaire jusqu'à la fin du deuxième cycle du secondaire, toutes les approches du calcul des probabilités sont étudiées (PO-Québec, 2016).

En somme les types de tâches qui relèvent du calcul élémentaire des probabilités au niveau des programmes de chacun des pays ci-dessus évoqués sont les types de tâches Te et Tc identifiés précédemment. Au type de tâches Te est associée très explicitement la technique « Démarche expérimentale (DE) » dans les programmes de la France, de la Belgique, du Québec, du Maroc, de la Tunisie et du Sénégal. Les traces de cette technique apparaissent dans

les programmes de la Côte d'Ivoire et du Gabon. Au type de tâches Tc relèvent les techniques TE, TCA et APEE dans les programmes de chacun des trois pays occidentaux et du Sénégal. Dans les programmes du Maroc, de la Tunisie et du Gabon, ce sont les techniques TE et TCA qui relèvent du type de tâches Tc, tandis dans les programmes de la Côte d'Ivoire, seule la technique TE semble relever de ce type de tâches.

2.2.4. Bilan du savoir à enseigner relatif à la probabilité d'un événement

Comme l'ont montré les analyses praxéologiques, seul le type de tâches Tc apparaît dans les programmes de probabilités du Bénin. À ce type de tâches est associée explicitement les techniques TE et TCA dans les programmes des séries scientifiques. Ces techniques sont complétées par la technique APEE dans les programmes des séries littéraires. Ainsi, par rapport à la notion de probabilité d'un événement dans l'institution terminale C et D, l'écart entre le savoir savant et le savoir à enseigner peut se résumer par :

- La présence du type de tâches Te au niveau du savoir savant et son absence au niveau du savoir à enseigner ;
- L'observation explicite au niveau du savoir à enseigner des techniques TCA et TE parmi les trois identifiées au niveau du savoir savant.

Les programmes de probabilités contiennent donc globalement l'approche laplacienne et l'axiomatique de Kolmogorov. L'accent est mis sur le premier principe de Laplace comme dans l'institution universitaire et le deuxième principe de Laplace n'est clairement exprimé que dans les séries littéraires. On note bien un écart entre le savoir savant et le savoir à enseigner par l'absence de l'approche fréquentiste dans les programmes.

Le type de tâches Te, relatif à l'approche fréquentiste, qui ne s'observe pas au niveau des programmes béninois, est présent dans plusieurs pays africains et occidentaux. Par rapport aux instructions officielles, l'enseignement des probabilités dans ces pays est fondé sur l'approche fréquentiste. Le Bénin semble résister à la tendance mondiale qui consiste à faire le lien entre la statistique et la probabilité en basant l'enseignement des probabilités sur cette approche qui se justifie par la loi faible des grands nombres. Il importe de préciser que l'approche classique et les propriétés élémentaires semblent être le point commun des programmes de probabilités au niveau mondial.

2.3. La notion de probabilité dans l'apprêt didactique

Situé entre le savoir à enseigner et le savoir enseigné, l'apprêt didactique est contenu dans les manuels scolaires pouvant être exploités par l'enseignant pour élaborer sa fiche d'enseignement. Nous revenons aux quatre manuels évoqués à l'occasion de l'étude de la transposition didactique de la notion d'expérience aléatoire pour analyser leurs contenus relatifs à la notion de probabilité d'un événement. Il s'agit notamment des manuels de la Collection Inter Africaine de Mathématiques (CIAM) des classes terminales et du manuel de la collection SOLFATH des classes terminales scientifiques. Après avoir présenté la manière dont la probabilité est étudiée dans chacun de ces manuels, nous proposerons une analyse praxéologique afin d'étudier les liens entre le savoir à enseigner et l'apprêt didactique.

2.3.1. Présentation des manuels

Dans le manuel de la collection CIAM des classes terminales littéraires, après l'étude du vocabulaire des probabilités, la notion de probabilité est introduite par deux approches, l'une qualifiée d'intuitive et l'autre d'expérimentale. L'approche intuitive définit les situations d'équiprobabilité pour déboucher sur la propriété suivante (Kouassi et al., 2002, p. 128).

Propriété

Soit une expérience aléatoire à n éventualités.

Dans une situation d'équiprobabilité, la probabilité d'un événement élémentaire est $\frac{1}{n}$.

Dans l'approche expérimentale, il est présenté les résultats de mille lancers de quatre cauris pour admettre que « *la probabilité d'obtenir un côté du cauri est égale à sa fréquence d'apparition* » (Ibid. p. 129). Les propriétés de calcul de probabilités identiques à celles décrites au niveau des programmes béninois des classes terminales littéraires sont présentées pour entamer à titre d'exemple la résolution de cinq problèmes de probabilités portant tous sur des situations d'équiprobabilité. Sur les 28 exercices proposés à la fin du chapitre consacré aux probabilités, 3 portent sur le vocabulaire des probabilités, 20 portent sur le premier principe de Laplace, 2 portent sur le deuxième principe de Laplace et 3 portent sur les autres propriétés.

Dans le manuel CIAM de la série C (Alassane et al., 1999), un seul chapitre porte sur les probabilités. La définition de la probabilité est introduite par un exemple portant une situation d'équiprobabilité. La probabilité d'un événement est introduite par un exemple de lancer d'un dé équilibré. La définition de probabilité proposée dans ce livre se précise comme il suit (ibid., p. 177).

Soit Ω l'univers associé à une expérience aléatoire.

Une probabilité sur l'univers Ω est une application P de $\mathcal{P}(\Omega)$ vers $[0 ; 1]$, qui à toute partie A de Ω associe le nombre réel $P(A)$ appelé probabilité de l'événement A et qui vérifie les conditions suivantes :

- La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le constituent ;
- La probabilité de l'événement certain est 1 ;
- La probabilité de l'événement impossible est 0.

Cette définition est suivie d'un exemple portant sur le deuxième principe de Laplace. La situation d'équiprobabilité est étudiée après l'établissement de quelques propriétés relatives au calcul élémentaire des probabilités. En dehors de trois autres exemples portant tous sur le premier principe de Laplace, il est proposé sur le calcul élémentaire des probabilités 27 exercices, parmi lesquels 17 portent sur le premier principe de Laplace et 1 sur le deuxième principe.

Concernant le manuel de la collection CIAM utilisé en terminale D (Hamaty et al., 1999), deux chapitres sont consacrés aux probabilités : le premier porte sur le calcul des probabilités et le second sur la probabilité conditionnelle et les variables aléatoires. Le premier chapitre qui nous intéresse pour cette étude fait découvrir la probabilité à travers deux exemples introduisant l'approche fréquentiste du calcul des probabilités. Entre les deux exemples introductifs est énoncé le théorème de Jacques Bernoulli comme ci-après (Ibid., P. 297).

En effet, selon le mathématicien Jacques Bernoulli (1654-1705), dans son livre *L'art de conjecturer* ; « si l'on répète un grand nombre de fois, dans les mêmes conditions, une centaine d'« expériences aléatoires », la fréquence observée semble se rapprocher d'une fréquence théorique. »

Le calcul des probabilités est introduit à l'aide de la définition suivante, basée sur le deuxième principe de Laplace.

U étant l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire, on dit que l'on a défini une probabilité sur U lorsque, à tout événement A de U, on peut associer un nombre réel appelé probabilité de A et noté $P(A)$ vérifiant les conditions suivantes :

- La probabilité d'un événement est comprise entre 0 et 1 ;
- La probabilité de l'événement certain est 1, celle de l'événement impossible est 0 ;
- La probabilité d'un événement est la somme des événements élémentaires qui le composent.

Après un exemple portant sur le deuxième principe de Laplace, sont donnés les énoncés de quelques propriétés sur les probabilités puis celui de la formule de la probabilité d'un événement dans une situation d'équiprobabilité. Douze exercices sont résolus en guise d'exemples, et trente exercices non résolus portant sur le calcul des probabilités sont proposés à la fin du chapitre. De ces 42 exercices, 28 portent sur le premier principe de Laplace et 7 portent sur le deuxième principe de Laplace.

Pour ce qui concerne le manuel de la collection SOLFATH, en dehors d'un chapitre portant sur le dénombrement, trois chapitres sont consacrés aux probabilités. Ils sont respectivement intitulés : Probabilités, Probabilités conditionnelles, Variables aléatoires et Loi binomiale. Dans le premier de ces trois chapitres, qui nous intéresse dans le cadre de notre étude, il a été présenté sommairement la définition suivant l'axiomatique de Kolmogorov, les propriétés élémentaires de calcul de probabilité puis le premier principe de Laplace, le deuxième principe de Laplace étant totalement absent. Les deux exercices résolus à la fin du chapitre portent tous sur le premier principe de Laplace.

2.3.2. Analyse praxéologique des manuels relativement à la notion de probabilité d'un événement

Pour l'ensemble des manuels ci-dessous présentés, nous notons la présence des deux types de tâches T_e et T_c identifiés au niveau du savoir savant relatif à la probabilité d'un événement. Si le type de tâches T_e n'est observée que dans le manuel CIAM de la terminale D, le type de tâches T_c se retrouve dans tous les manuels présentés.

Au type de tâches T_e il n'est observée aucune technique car l'approche fréquentiste n'est pratiquement pas étudiée pour estimer la probabilité d'un événement. Elle est présentée dans le manuel CIAM de la terminale D à titre informatif. Le bloc pratique-technique n'est donc pas complet. Cependant, l'élément technologique fondamental qui pourrait justifier une technique éventuelle est donné en remarque. Il s'agit bien sûr de la loi faible des grands nombres, qui n'a pas été travaillé. Nous pouvons supposer que le bloc technologico-théorique relatif au type de tâches T_e est présent dans le manuel précédemment évoqué. Au type de tâches T_c , relèvent explicitement et surtout en série scientifique les trois techniques TCA, TE et APEE identifiées au niveau du savoir savant.

En somme, l'apprêt didactique comporte partiellement le type de tâches T_e et surtout le type de tâches T_c . Il y a eu des traces de la technique DE à travers l'existence de l'élément technologique qui devrait le justifier. Toutefois les techniques TCA, TE et APEE relevant du

type de tâches sont globalement présentes dans l'apprêt didactique. La différence entre le savoir savant relatif à la notion de probabilité d'un événement et l'apprêt se situe au niveau du type de tâches T_c qui n'est partiellement pas remarquable dans l'apprêt didactique. Sur un autre plan, l'apprêt didactique présente le type de tâches T_c non repéré dans le savoir à enseigner.

2.4. L'enseignement de la notion de probabilité d'un événement au Bénin

Nous revenons ici sur les cours des deux enseignants que nous avons observés en 2013 et sur le questionnaire administré en 2014 aux enseignants à propos de l'enseignement des probabilités (Annexe 4) pour l'analyse du savoir enseigné relatif à la notion de probabilité d'un événement et celle du rapport des enseignants à l'épistémologie des probabilités.

2.4.1. La notion de probabilité enseignée par les professeurs suivis

A partir des enseignements donnés par les deux professeurs M. et L. dont nous avons suivi les cours, nous avons dégagé la définition de probabilité proposée par chacun de ces professeurs.

Cours du professeur M.

Le professeur M. a eu en charge pendant l'année scolaire 2012-2013 la classe terminale D du lycée de jeunes filles du Mono/Couffo et la terminale D_3 du CEG₁ de Lokossa. L'enseignement dispensé dans la classe terminale D_3 du CEG₁ de Lokossa l'a été sans notre collaboration contrairement à la terminale D du lycée des jeunes filles où nous avons proposé une activité pré-test d'introduction de la probabilité à partir de l'approche fréquentiste. En terminale D_3 du CEG₁ de Lokossa, le professeur M., après avoir étudié les notions de base des probabilités, a introduit la définition de la probabilité à partir de l'activité suivante :

Soit Ω l'univers associé à une expérience aléatoire. À l'aide des documents à ta disposition, propose une définition de la probabilité d'un événement.

Après consultation du manuel CIAM de la terminale D, le professeur M. a abouti avec les élèves à la définition, basée sur le deuxième principe de Laplace proposée dans ce livre et que nous avons présentée dans l'apprêt didactique. Cette définition est ensuite utilisée pour démontrer les propriétés relatives au calcul des probabilités d'une part et pour justifier le premier principe de Laplace d'autre part.

Cours du professeur L.

Le professeur L. a eu en charge deux classes de terminale dont une de la série C au CEG₁ de Lokossa et l'autre de la série D au CEG₂ de Lokossa. Sans notre collaboration, le professeur L.

dans une démarche analogue à celle du professeur M. a introduit dans sa classe terminale de la série C le calcul des probabilités à partir de la définition axiomatique préconisée par le programme en vigueur en classe terminale des séries C et D. Ayant utilisé le même support de cours que le professeur M., il a fait résoudre un exercice nécessitant le deuxième principe de Laplace, qui apparaît dans le cours comme une application de l'axiome d'additivité dénombrable et non pas comme une définition. Evidemment le premier principe de Laplace est ensuite étudié à travers les situations d'équiprobabilité.

2.4.2 Analyse praxéologique du savoir enseigné relatif à la notion de probabilité

Il ressort des deux enseignements donnés par les professeurs, que seul le type de tâches Tc permet d'étudier le calcul élémentaire des probabilités au niveau du savoir enseigné au Bénin. Par rapport à ce type de tâches Tc : « Calculer la probabilité d'un événement », le professeur M. a enseigné dans l'ordre les techniques APEE, TCA et TE, tandis que le professeur L. s'est intéressé aux techniques TCA et TE, incluant implicitement la technique APEE dans la technique TCA.

Les techniques relevées au niveau du savoir à enseigner, étant les techniques TE et TCA, il est aisé de constater qu'il y a un écart entre le savoir à enseigner et le savoir enseigné au niveau du professeur M., qui semble préférer l'apprêt didactique aux instructions officielles. Par rapport au type de tâches Tc, ce dernier n'apparaît donc pas comme un bon sujet enseignant (au sens de Chevallard, 1992) pour l'institution terminale C et D. D'un autre côté le professeur L. est de notre point de vue un bon sujet enseignant relativement à la même institution.

2.4.3. Rapport des enseignants à l'épistémologie du calcul des probabilités

Pour nous il n'y a pas de doute sur le rapport « très bon » aux deux premiers principes de Laplace des professeurs qualifiés de mathématiques pour enseigner dans les classes terminales. Notre assurance à cela vient de ce que les énoncés de ces deux principes se retrouvent explicitement pour le premier principe et implicitement pour le deuxième dans les instructions officielles. On les retrouve de même dans les manuels utilisés par la quasi-totalité des professeurs qui ont reçu également des enseignements en probabilités à l'université. Il n'est toutefois pas évident que les professeurs de mathématiques soient conscients des dénominations que portent les énoncés de savoir qu'ils enseignent, tant l'histoire des probabilités ne leur a pas été enseignée au cours de leur cursus universitaire. Pour nous rendre compte de ce fait, nous avons prévu dans notre questionnaire d'enquête les trois questions suivantes (Annexe 4) :

- q₁ : Quelles sont les approches du calcul des probabilités que vous connaissez ?
- q₂ : En calcul des probabilités, avez-vous une idée du premier principe de Laplace ? Si oui, donnez l'énoncé.
- q₃ : En calcul des probabilités, avez-vous une idée du deuxième principe de Laplace ? Si oui, donnez l'énoncé.

Concernant la question q₁, seuls 24% des quatre-vingt-huit professeurs enquêtés affirment avoir une idée d'au moins une des approches de calcul des probabilités. Trois professeurs, tous statisticiens de formation, déclarent connaître toutes les trois approches de calcul des probabilités qui sont l'approche laplacienne, l'approche fréquentiste et l'approche de Kolmogorov. Quant aux questions q₂ et q₃, la quasi-totalité des professeurs interrogés pensent ne rien savoir des deux premiers principes de Laplace. Parmi ceux qui pensent en savoir, seuls cinq ont pu énoncer convenablement le premier principe de Laplace et un seul a pu énoncer le deuxième principe de Laplace.

Au vue de cette enquête, on peut aisément conclure que, soit les enseignants de mathématiques n'avaient pas bénéficié d'un enseignement en épistémologie des probabilités au cours de leur formation, soit ils en ont bénéficié, mais cet enseignement n'a pas abordé les approches du calcul des probabilités. La première hypothèse nous paraît plus plausible, car il serait difficile d'étudier l'épistémologie des probabilités sans insister sur ces approches. Nous estimons toutefois que la connaissance de l'épistémologie des probabilités peut contribuer à mieux donner un sens à la notion de probabilité au niveau des élèves.

2.5. Récapitulation de la transposition didactique de la notion de probabilité

Du savoir savant au savoir enseigné la transposition didactique de la notion de probabilité au Bénin révèle deux types de tâches, à savoir : les types de tâches « Estimer la probabilité d'un événement (Te) » et « Calculer la probabilité d'un événement (Tc) ». La technique relevant du type de tâches Te est la technique « Démarche expérimentale (DE) », justifiée par l'approche fréquentiste issue de la loi faible des grands nombres. Au type de tâches Tc sont associées trois techniques, notamment :

- La « technique d'équiprobabilité (TE) », justifiée par le premier principe de Laplace de la théorie Laplacienne des probabilités ;
- La « technique de calcul à partir des axiomes (TCA) », justifiée par les propriétés élémentaires du calcul des probabilités de l'axiomatique de Kolmogorov ;

- La technique « Addition des probabilités des événements élémentaires (APEE) », justifiée par le deuxième principe de Laplace de la théorie laplacienne des probabilités.

Le tableau suivant résume les praxéologies relatives à la notion de probabilité à chaque niveau de savoir de la transposition didactique et dans l'apprêt didactique des classes terminales de séries scientifiques.

	Savoir savant	Savoir à enseigner	Apprêt didactique	Savoir enseigné
Type de tâches Te	DE	Néant	Traces	Néant
Type de tâches Tc	TE, TCA, APEE	TE, TCA	TE, TCA, APEE	TE, TCA, APEE

Tableau n°05 : Tableau récapitulatif des praxéologies de la notion de probabilité d'un événement.

Il ressort de ce récapitulatif les constats suivants :

- Des quatre techniques relevant des types de tâches Te et Tc, la noosphère n'a fait, dans les séries scientifiques, que le choix de deux, qui sont les techniques TE et TCA ;
- Les techniques APEE et DE justifiées par le deuxième principe de Laplace et l'approche fréquentiste ne sont pas recommandées par les instructions officielles dans les séries scientifiques ;
- Les techniques recommandées par les instructions officielles sont effectivement enseignées par les professeurs de mathématiques au Bénin. Cependant, chez certains enseignants, l'enseignement du calcul des probabilités est basé sur la technique APEE qui n'est pas recommandée par les programmes ;
- La technique DE justifiée par l'approche fréquentiste n'a vécu réellement qu'au niveau du savoir savant.

En somme, les différentes praxéologies montrent que par rapport au calcul de la probabilité d'un événement, le savoir savant diffère des autres savoirs par l'approche fréquentiste. Le premier principe de Laplace et les propriétés du calcul élémentaire des probabilités sont présents à tous les niveaux de savoirs de la transposition didactique. Quant au deuxième principe, il n'apparaît pas dans les programmes des séries scientifiques comme une technologie pouvant justifier le calcul des probabilités, bien qu'il soit présent dans l'apprêt didactique et dans les programmes des séries littéraires.

Conclusion

L'étude séparée de la transposition didactique des notions d'expérience aléatoire et de probabilité d'un événement nous conduit aux conclusions ci-après.

Par rapport à la notion d'expérience aléatoire, deux modèles de définition existent au niveau du savoir savant, notamment le modèle mathématique réduit, caractérisé par l'imprévisibilité du résultat et le modèle didactique, caractérisé par l'imprévisibilité du résultat et la connaissance préalable des résultats possibles. Bien que l'enseignement de la notion d'expérience aléatoire soit prévu par les programmes béninois, aucune définition n'est précisée dans les programmes des séries scientifiques, alors que le modèle réduit est le choix des programmes des séries littéraires. Cette tendance observée au niveau des programmes est confirmée au niveau des manuels de la collection CIAM, tandis le manuel SOLFATH a opté pour le modèle didactique. Ces deux modèles de définitions identifiés au niveau du savoir savant sont différemment enseignés dans les classes.

Concernant la notion de probabilité d'un événement, elle s'étudie à l'aide de deux types de tâches identifiés au niveau du savoir savant au savoir. Il s'agit précisément du type de tâches T_e : « Estimer la probabilité d'un événement » et du type de tâches T_c : « Calculer la probabilité d'un événement ». Le type de tâches T_e , qui n'a réellement existé qu'au niveau du savoir savant, est associé à la technique « Démarche expérimentale (DE) » justifiée par l'approche fréquentiste issue de la loi faible des grands nombres. Le type de tâches T_c se retrouve à la fois dans les programmes, dans les manuels et également au niveau du savoir enseigné. À ce type de tâches T_c sont associées au niveau savant trois techniques TE, APEE et TCA justifiées respectivement par les deux premiers principes de Laplace et les propriétés élémentaires du calcul des probabilités. Le premier principe de Laplace et les propriétés découlant de l'axiomatique de Kolmogorov s'observent à tous les niveaux de savoirs. Quant au deuxième principe de Laplace, sans être indiqué explicitement comme une méthode de calcul des probabilités dans les séries scientifiques, il se retrouve dans les manuels et s'enseigne par certains enseignants.

Chapitre V : Apprentissage du calcul élémentaire des probabilités au Bénin

Introduction

Dans le cadre de la première phase de la méthodologie d'ingénierie didactique (Artigue, 1988) que constituent les analyses préalables et après l'étude de l'enseignement des probabilités à travers la transposition didactique, présentée dans le chapitre précédent, nous abordons dans ce chapitre l'étude de l'apprentissage des probabilités. Nous restons dans les limites de la thèse en nous intéressant aux rapports personnels des élèves aux concepts relatifs au calcul élémentaire des probabilités. Comme annoncé dans la méthodologie générale (chap. III, 2.), la présente étude se fera à travers l'analyse des réponses à un test administré à des élèves ayant fraîchement suivi des cours de probabilités dans le contexte béninois actuel de l'enseignement des probabilités. Ce test (Annexe 3) porte aussi bien sur les notions de base, que sur le calcul effectif des probabilités. Après la présentation et l'analyse a priori des exercices du test, nous donnerons dans un premier temps l'analyse des réponses proposées par les élèves, exercice par exercice et question par question. Une analyse plus globale nous permettra dans un second temps d'évaluer les rapports personnels des élèves au calcul élémentaire des probabilités, notamment à la notion d'expérience aléatoire et aux deux premiers principes de Laplace.

1. Présentation et analyse a priori du test

Le test administré aux élèves afin d'étudier l'apprentissage des notions probabilistes contenus dans le programme relatif au calcul élémentaire des probabilités a eu lieu après un enseignement assuré dans quatre classes terminales de trois établissements scolaires de la ville de Lokossa. Ce sont plus précisément les classes suivantes de l'année scolaire 2012-2013 : la terminale D du lycée de jeunes filles de Lokossa, la terminale D₃ et la terminale C du CEG₁ de Lokossa, la terminale D₂ du CEG₂ de Lokossa. L'effectif total de ces classes est 116 élèves. Ce test (Annexe 3), qui comporte sept exercices, porte sur des notions probabilistes objets de l'enseignement précédemment décrit dans le chapitre IV (chap. IV, 1.4 et 2.4). Parmi les élèves ayant suivi les cours, 100 ont participé au test, qui a eu lieu simultanément dans les quatre classes.

1.1. Les exercices du test

1.1.1. Exercice 1

- 1) Donne la définition d'une expérience aléatoire en complétant la phrase suivante.

On appelle expérience aléatoire ...

2) A et B sont deux événements de l'univers des éventualités Ω d'une expérience aléatoire et p est une probabilité définie sur Ω . Pour chacune des questions a), b) et c), encercle le numéro de la bonne réponse parmi les trois qui sont proposées.

a) A et B sont incompatibles signifie que :

(i) $A = \emptyset$ et $B = \emptyset$.

(ii) $A \cap B = \emptyset$.

(iii) $A \cup B = \Omega$.

b) A et B sont contraires signifie que :

(i) $A \cap B = \emptyset$.

(ii) $A \cup B = \Omega$

(iii) $A \cap B = \emptyset$ et $A \cup B = \Omega$.

c) A et B sont équiprobables signifie que :

(i) $p(A \cap B) = 0$;

(ii) $p(A) = p(B)$;

(iii) $p(A) + p(B) = 1$.

3) On considère une probabilité p sur l'univers des éventualités Ω d'une expérience aléatoire. Complète chacune des égalités suivantes :

a) $p(\Omega) = \dots$

b) Si A et B sont deux événements de Ω , alors $p(A \cup B) = \dots$

c) Si A est un événement composé des éventualités e_1, e_2, \dots, e_k , alors :

$p(A) = \dots$

d) Si tous les événements élémentaires sont équiprobables, alors pour tout événement A , on a :

$p(A) = \dots$

1.1.2. Exercice 2

On lance onze fois de suite un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on obtient les résultats suivants :

2 – 5 – 3 – 4 – 1 – 1 – 6 – 5 – 2 – 3 – 6.

Quel résultat obtiendrait-on si on lançait le dé une douzième fois ? Argumente ta réponse.

1.1.3. Exercice 3

Dans l'un des bureaux d'une entreprise de vente par correspondance arrivent plusieurs catégories de courrier. Parmi les lettres reçues, 90% contiennent une commande, 45% contiennent une demande de cadeau et 40% contiennent une commande et une demande de cadeau. Les autres lettres ne sont jamais accompagnées de commande, ni de demande de cadeau. On prend une lettre au hasard dans ce bureau. On désigne par A l'événement « la lettre contient une commande » et par B l'événement « la lettre contient une demande de cadeau ».

- 1) Identifie dans le texte ci-dessus (de l'exercice 3) la proposition qui représente l'expérience aléatoire en complétant la phrase suivante :
La proposition qui désigne l'expérience aléatoire est : ...
- 2) Calcule la probabilité que la lettre prise :
 - a) ne contienne pas une demande de cadeau ;
 - b) contienne une commande ou une demande de cadeau.

1.1.4. Exercice 4

Un sac contient trois jetons blancs et deux jetons noirs, tous indiscernables au toucher. On tire successivement sans remise trois jetons dans le sac.

Calcule la probabilité qu'exactement deux des trois jetons tirés soient blancs.

1.1.5. Exercice 5

On lance un dé tétraédrique dont les quatre faces sont marquées a, b, c, d. et on note la marque de la face sur laquelle le dé se repose. Le dé est pipé de telle sorte que :

- les faces portant les marques a, b et d ont la même probabilité que le dé repose sur elles ;
 - la probabilité que le dé repose sur la face marquée c est quatre fois plus grande que la probabilité que le dé repose sur l'une quelconque des autres faces.
- 1) Détermine la probabilité que le dé repose sur chacune des 4 faces.
 - 2) Calcule la probabilité que le dé repose sur une face dont la marque est une consonne.

1.1.6. Exercice 6

Un jour, un passant a été témoin d'un accident de circulation et a décidé d'appeler les sapeurs-pompiers. Il dispose de 5 numéros des sapeurs-pompiers mais ce jour-là, 3 des numéros étaient hors service. Le passant a composé au hasard un des numéros.

Calcule la probabilité que l'appel du passant tombe sur un numéro en service :

- a) au premier essai ;
- b) au second essai sachant qu'il n'a pas repris le premier numéro essayé.

1.1.7. Exercice 7

L'univers des éventualités d'une expérience aléatoire étant $\Omega = \{0; 1; 2; 3\}$, on donne dans le tableau ci-dessous les probabilités des événements élémentaires.

e_i	0	1	2	3
$p(\{e_i\})$	0,17	0,64	a	0,01

- 1) Détermine le nombre réel a.
- 2) Calcule la probabilité que le résultat de l'expérience aléatoire soit un nombre impair.

1.2. Analyse a priori

Les exercices du test que nous venons de présenter figurent aussi dans le post test prévu pour être administré après la réalisation en classe de l'ingénierie que nous proposons d'élaborer pour l'enseignement du calcul élémentaire des probabilités au Bénin. Afin d'éviter des redites, l'analyse a priori de ce premier test comportera essentiellement les réponses possibles des élèves au niveau de chaque exercice et au niveau de chaque question, après éventuellement une brève analyse praxéologique. Nous proposerons une analyse a priori plus détaillée du post test dans le chapitre VI, consacré à la conception de l'ingénierie didactique.

1.2.1. Exercice 1

L'exercice 1 comprend trois questions qui visent globalement à vérifier la compréhension des élèves par rapport à quelques notions de base des probabilités.

1.2.1.1. Question 1 de l'exercice 1

Cette question vise à vérifier l'appropriation de la définition de l'expérience aléatoire par les élèves. De l'étude de la transposition didactique de la notion d'expérience aléatoire (chap. IV, 1.4), il a été enseigné aux élèves soumis au test, soit le modèle MR de la définition d'expérience aléatoire, caractérisé uniquement par l'imprévisibilité du résultat, soit par le modèle MD, caractérisé à la fois par l'imprévisibilité du résultat et la connaissance préalable des résultats possibles. Il est donc attendu des élèves qu'ils proposent une définition proche de l'une des deux suivantes :

- Une expérience aléatoire est toute expérience dont on ne peut pas prévoir avec certitude le résultat ;
- Une expérience aléatoire est toute expérience dont on ne peut pas prévoir avec certitude le résultat mais dont on peut connaître les résultats possibles.

Les élèves ayant une bonne compréhension de la notion d'expérience aléatoire et ignorant l'énoncé de sa définition pourront produire une formulation indiquant que c'est une expérience liée au hasard, soit une expérience du hasard, soit une expérience qui dépend du hasard. D'autres encore, n'ayant pas bien cerné la notion peuvent la confondre à celle d'un événement ou de toute autre notion probabiliste.

1.2.1.2. Question 2 de l'exercice 1

La question 2 porte sur la distinction de quelques types d'événements. Elle comporte trois questions à choix multiples, invitant chaque élève à choisir une bonne réponse parmi trois réponses dont deux fausses. La durée relativement courte de l'enseignement reçu sur le vocabulaire des probabilités ne garantit pas le choix des bonnes réponses par un grand nombre d'élèves. Les bonnes réponses attendues des élèves sont :

- « deux événements A et B sont incompatibles » signifie que $A \cap B = \emptyset$;
- « deux événements A et B sont contraires » signifie que $A \cap B = \emptyset$ et $A \cup B = \Omega$;
- « deux événements A et B sont équiprobables pour une probabilité p » signifie que $p(A) = p(B)$.

En dehors des bonnes réponses qui pourraient être proposées éventuellement par une minorité d'élèves, des confusions entre les notions probabilistes de base peuvent être observées, notamment entre événements contraires et événements incompatibles.

1.2.1.3. Question 3 de l'exercice 1

La troisième question de l'exercice 1 comporte quatre sous-questions. Les deux premières visent la vérification de la connaissance des élèves par rapport à un axiome et une propriété fondamentale du calcul élémentaire des probabilités. Les deux dernières portent sur les énoncés des deux premiers principes de Laplace.

Question 3.a)

Dans la question 3.a), il est demandé aux élèves de proposer la valeur de $p(\Omega)$, où Ω désigne l'univers des possibles d'une expérience aléatoire. En tenant compte du fait que l'axiome $p(\Omega) = 1$ figure dans les définitions de probabilité données dans les quatre classes, et du fait

qu'il est utilisé pour déterminer les probabilités des événements élémentaires dans chacune des classes, il paraît clair pour nous que les élèves proposeront la réponse correcte. Toutefois, la rare utilisation de cet axiome, lors de la résolution d'exercices, peut justifier éventuellement le choix de réponses incorrectes par des élèves.

Question 3.b)

La propriété qu'il est demandé de compléter dans la question 3.b) est : « Si A et B sont deux événements de Ω , alors $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$ ». Compte tenu du fait que deux formules de $p(A \cup B)$ ont été utilisées dans l'enseignement donné dans les quatre classes, nous pouvons nous attendre à deux types de réponses, à savoir : la propriété requise et l'axiome $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$, vrai dans le cas où les événements A et B sont incompatibles.

Question 3.c)

La réponse correcte de cette question est l'énoncé du deuxième principe de Laplace : $p(A) = p(\{e_1\}) + p(\{e_2\}) + \dots + p(\{e_k\})$. Les programmes des classes terminales des séries scientifiques ne l'explicitent pas sous cette forme. Enseigné par l'un des professeurs dans deux des classes, le deuxième principe de Laplace est tout de même utilisé pour la résolution de certains exercices types dans toutes classes. Il est donc envisageable que la formule qui l'exprime soit connue des élèves. Cependant le contrat didactique caractérisé par l'utilisation très fréquente du premier principe de Laplace dans la résolution des exercices peut amener certains élèves à écrire aussi $p(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$.

Question 3.d)

L'objectif de cette question est la vérification de la connaissance par les élèves de l'énoncé du premier principe de Laplace, dont la formule est utilisée dans la plupart des exercices résolus en classe. Fort de cette utilisation de ce principe, il est attendu que la majorité des élèves écrivent la réponse correcte suivante : $p(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$. Cependant, ceux qui ne comprendront pas la question comme telle pourraient écrire des égalités exprimant simplement l'équiprobabilité d'événements.

1.2.2. Exercice 2

Une situation semblable à l'exercice 2 a été utilisée par Sylvette Maury (1985) pour étudier la notion d'indépendance d'expériences aléatoires chez des élèves de quatrième (13 à 14 ans) avant tout enseignement des probabilités (chap. II, 2.3). Il était alors question que les élèves prédisent le résultat du quatrième lancer d'une pièce de monnaie, sachant que les résultats des

trois premiers lancers sont dans l'ordre face, pile, pile. Nous la reprenons ici avec des lancers de dé chez des élèves de terminale, qui ont fraîchement reçu un enseignement en probabilités. L'équirépartition des résultats, sous-entendue dans l'exercice, vient du fait que, par effet de contrat didactique, le dé est considéré équilibré lorsqu'aucune précision n'est donnée. La prise en compte des résultats obtenus par Maury (Ibid.), de ceux de Piaget (1951) et de Lévy-Bruhl (1960) nous permet d'envisager trois types de réponses que nous nommons ici respectivement « tirage au sort », « compensation » et « fatalité ». La classe « tirage au sort » est caractérisée par la réponse qui consiste à dire que le résultat d'un douzième lancer peut être 1, 2, 3, 4, 5 ou 6, en argumentant que le résultat est aléatoire. La classe « compensation » est celle évoquée par Piaget et Inhelder (1951) chez les enfants du stade de développement préopératoire (0 à 7 ans) et selon laquelle les enfants ont tendance à considérer que l'éventualité la moins fréquente a plus de chance d'être réalisée. L'élève de cette classe va affirmer que le résultat du douzième lancer serait 4, le seul numéro qui n'est pas répété dans la suite des résultats des onze premiers lancers. Le type de réponses « fatalité » est celui comportant les réponses dans lesquelles le résultat est lié à une croyance qui ne reconnaît pas la nature aléatoire de la situation. Ce type de rapports relève d'une certaine société dont les caractéristiques sont parfois perceptibles en Afrique Subsaharienne (Lévy-Bruhl, 1960). L'élève de la catégorie « fatalité » répondrait que le résultat du lancer dépend de la puissance mystique du lanceur. Cependant, il est possible que cette catégorie ne soit pas observée, compte tenu du niveau d'instruction relativement élevé des élèves en classe terminale.

1.2.3. Exercice 3

L'exercice 3 comporte deux parties que nous appelons question 1 et question 2. La première vise à vérifier la reconnaissance de l'expérience aléatoire dans un problème de probabilité, tandis que la seconde porte sur le calcul de probabilité par l'utilisation des propriétés de base.

1.2.3.1. Question 1 de l'exercice 3

L'expérience aléatoire définie dans l'exercice 3 du post test est : « On prend une lettre au hasard dans ce bureau ». Cette phrase sera sans doute la réponse des élèves ayant une bonne connaissance de la notion d'expérience aléatoire. Certains élèves, conscients du lien entre l'expérience aléatoire et le hasard, peuvent donner simplement « hasard » comme réponse. Il n'est pas exclu que d'autres indiquent les passages définissant des événements dans le texte ou ceux qui donnent des indications sur des probabilités d'événements.

1.2.3.2. Question 2 de l'exercice 3

Au niveau de la deuxième question de l'exercice 3, il est question de calculer les probabilités de deux événements en utilisant respectivement la formule liant les probabilités de deux événements contraires et la formule liant les probabilités de deux événements ainsi que celles de leur réunion et de leur intersection.

Question 2.a)

Au type de tâches « calculer la probabilité d'un événement », il est associé dans cette question « la technique de calcul par les axiomes (TCA) » décrite dans le chapitre IV (chap. IV, 2.1.6). Cette technique consiste à identifier l'expérience aléatoire, l'événement « la lettre ne contient pas une demande de cadeau » et sa probabilité, son événement contraire et sa probabilité, puis à utiliser la formule qui lie les probabilités de deux événements contraires, pour enfin calculer la probabilité demandée. Étant donné que la technique TCA fait partie du savoir enseigné par les deux enseignants, il est attendu des élèves qu'ils reconnaissent d'une part 0,45 comme probabilité de l'événement E : « la lettre contient une demande de cadeau » et qu'ils déduisent d'autre part la probabilité que la lettre ne contienne pas de demande de cadeau, qui est égale à 0,55. Pour ce faire, il est nécessaire qu'au niveau de la donnée principale, qu'une conversion soit faite du registre des pourcentages au registre des nombres décimaux. Des difficultés algébriques pourraient être à la base de la résolution incorrecte de la question au niveau de certains élèves. Le défaut de conversion de la probabilité de l'événement E dans le registre requis pourrait conduire certains élèves à une probabilité supérieure à 1.

Question 2.b)

La technique TCA est également celle qui est visée dans cette question avec l'utilisation de la propriété « $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$, pour tous événements A et B ». L'analyse a priori est semblable à celle de la question 2.a). De façon spécifique, le fait que la formule visée ait été utilisée dans la résolution d'un exercice en classe peut faire qu'un nombre important d'élèves réussissent la question. Pour la même raison, il est possible que l'axiome $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$, vrai pour des événements incompatibles, soit utilisé par une partie des élèves.

1.2.4. Exercice 4

L'exercice 4 est un exercice classique du modèle d'urne. Il vise à vérifier le rapport des apprenants au premier principe de Laplace : le rapport du nombre de cas favorables au nombre des cas possibles. C'est du type de tâches Tc : « Calculer la probabilité d'un événement » qu'il

est question dans cet exercice. Il lui est associé la technique TE telle que décrite dans le chapitre IV (chap. IV, 2.1.6.). La résolution experte ci-après, relative à cette technique, est attendue des élèves.

Si Ω désigne l'univers des éventualités de l'expérience aléatoire, alors $\text{Card}(\Omega) = A_5^3$. Le L'événement A : « exactement deux des trois jetons tirés sont blancs » ayant pour cardinal $A_3^2 \times A_2^1 \times \frac{3!}{2!1!}$, on a : $p(A) = \frac{A_3^2 \times A_2^1 \times \frac{3!}{2!1!}}{A_5^3} = \frac{3}{5}$.

Une difficulté souvent constatée chez les élèves en analyse combinatoire peut les amener à poser $p(A) = \frac{A_3^2 \times A_2^1}{A_5^3} = \frac{1}{5}$. De même, le contrat didactique, traduit ici par la plus grande fréquence des exercices résolus en utilisant les combinaisons, peut entraîner certains élèves à écrire $p(A) = \frac{C_3^2 \times C_2^1}{C_5^3} = \frac{3}{5}$. Les difficultés d'ordre algébrique ainsi que la non-maîtrise des outils de dénombrement peuvent être observées chez certains élèves.

1.2.5. Exercice 5

L'exercice 5 comporte un contexte, qui renferme les données du problème, et deux questions nécessitant l'utilisation du deuxième principe de Laplace.

1.2.5.1. Question 1 de l'exercice 5

Il s'agit dans cette question de déterminer les probabilités des quatre événements élémentaires que comporte l'expérience aléatoire. Sa résolution nécessite l'utilisation du deuxième principe de Laplace et de l'axiome $p(\Omega) = 1$, avec Ω l'univers des éventualités de l'expérience aléatoire. L'exploitation des données de l'exercice conduit alors à l'équation $7p(\{a\}) = 1$. Ce qui permet d'obtenir $p(\{a\}) = p(\{b\}) = p(\{d\}) = \frac{1}{7}$ et $p(\{c\}) = \frac{4}{7}$. C'est cette résolution fondamentalement algébrique qui est attendue des élèves. Pour avoir traité un exercice similaire en classe, il est envisageable que cette résolution experte soit observée chez des élèves. Des difficultés d'ordre algébrique et numérique paraissent inévitables chez certains élèves, qui auraient pourtant réussi à faire une bonne combinaison des connaissances probabilistes requises. D'un autre côté, nous estimons que l'équiprobabilité donnée des événements élémentaires $\{a\}$, $\{b\}$ et $\{d\}$ peut conduire d'autres élèves à affirmer que $p(\{a\}) = p(\{b\}) = p(\{d\}) = \frac{1}{3}$ et $p(\{c\}) = \frac{4}{3}$. Dans ce même ordre idée, d'autres élèves n'hésiteront pas à virer dans le biais d'équiprobabilité en précisant que chacun des événements élémentaires a pour probabilité $\frac{1}{4}$.

1.2.5.2. Question 2 de l'exercice 5

La technique qui relève du type de tâches Tc dans la question 2 de l'exercice 5 est la technique APEE (chap. IV, 2.1.6.). Elle consiste à identifier l'expérience aléatoire et l'événement à travers les événements élémentaires qui le composent, et appliquer le deuxième principe de Laplace en se servant des probabilités déterminées au niveau de la question 1. Pour répondre à la question 2, il faut donc remarquer d'abord que l'événement A dont on veut calculer la probabilité est composé des éventualités b, c et d. L'utilisation du deuxième principe de Laplace donne alors : $p(A) = p(\{b\}) + p(\{c\}) + p(\{d\}) = \frac{1}{7} + \frac{4}{7} + \frac{1}{7} = \frac{6}{7}$. Un exercice similaire portant sur un dé pipé ayant été résolu dans chacune des quatre classes, il est normal qu'on s'attende à des réponses correctes. C'est même possible que la question soit bien résolue sans que l'élève ne soit conscient de l'utilisation du deuxième principe de Laplace. Il n'est cependant pas exclu que certains élèves se servent du premier principe de Laplace compte tenu de la fréquence très forte de son utilisation. Comme dans la question 1, nous n'ocultons pas les difficultés d'ordres algébrique et numérique au niveau de certains élèves qui auraient fait le choix du deuxième principe de Laplace pour calculer la probabilité demandée.

1.2.6. Exercice 6

L'exercice 6 est un extrait de l'épreuve de mathématique proposée à la session normale du baccalauréat 2012 en série D. Il vise aussi à vérifier le rapport des apprenants au premier principe de Laplace. La question a) paraît simple et sans équivoque. Les membres de la commission chargée de proposer le corrigé-type de l'épreuve de mathématiques du BAC D en 2012 n'ont pu s'entendre sur une réponse pour la question b) : trois réponses différentes ont été défendues par trois groupes de professeurs (Annexe 1).

1.2.6.1. Question a) de l'exercice 6

Pour répondre à la question a), on doit utiliser le premier principe de Laplace « le rapport du nombre de cas favorables au nombre de cas possibles ». C'est donc la méthode relative à la technique TE qui est requise pour la résolution de la question. Le nombre de cas favorables étant 2 et le nombre de cas possibles 5, la réponse correcte à cette question est $\frac{2}{5}$. Nous nous attendons à ce qu'un pourcentage écrasant des candidats trouve la bonne réponse compte tenu de la simplicité de l'expérience aléatoire et des nombreux cas d'équiprobabilité étudiés dans les classes terminales. Cependant il est aussi possible que la détermination des nombres de cas favorables et de cas possibles soit sans succès chez certains élèves. .

1.2.6.2. Question b) de l'exercice 6

La question b) est moins évidente que la question a). Son choix dans le post test a pour but de confirmer éventuellement les résultats de l'étude que nous avons faite à propos de cet exercice dans l'annexe 1. Les trois réponses différentes proposées par les membres de la commission de corrigés-types constituent une partie importante des réponses possibles des élèves. Elles se présentent comme suit :

- la présence du mot « sachant » peut orienter vers la probabilité conditionnelle. Dans ce cas, la probabilité demandée serait : $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$;
- en supposant que le passant ne composerait un numéro une deuxième fois qu'après avoir composé un numéro hors service la première fois, la probabilité cherchée serait :
$$\frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{3}{10} ;$$
- il est possible que le passant compose un numéro en service au premier appel avant de composer un numéro au deuxième appel. Dans ce cas la réponse correcte serait :
$$\frac{3}{5} \times \frac{2}{4} + \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{5}.$$

Même si dans la première proposition de réponse, l'objet de savoir nécessaire pour la résolution du problème est la probabilité conditionnelle, qui ne fait pas objet de notre étude, tous les trois cas proposés se ramènent au premier principe de Laplace. C'est donc la méthode relative à la technique TE qui est encore sollicitée dans cette deuxième question. Les difficultés liées au dénombrement peuvent entraîner une résolution incorrecte du problème. La complexité du problème, ayant ainsi occasionné plusieurs propositions de résolutions par les enseignants de mathématiques suffisamment expérimentés, peut se traduire chez la plupart des élèves par une compréhension incorrecte du problème.

1.2.7. Exercice 7

L'exercice 7 se résout de la même manière que l'exercice 5 à la différence que les probabilités de trois événements élémentaires sur les quatre sont données dans l'exercice 7 tandis dans l'exercice 5, les probabilités des événements élémentaires sont toutes à déterminer. Spécifiquement, le tableau qui résume les probabilités des événements élémentaires peut ne pas être compris ou peut être confondu à raison à la donnée de la loi de probabilité d'une variable aléatoire. Signalons que contrairement à l'exercice 5, aucun exercice similaire à l'exercice 7 n'a été résolu dans aucune des quatre classes pour appliquer le deuxième principe de Laplace.

2. Analyse des résultats du post test

Nous procédons dans cette deuxième section du chapitre V à l'analyse des résultats du post test afin d'étudier les effets de l'apprentissage des probabilités au Bénin. Cette analyse se fera exercice par exercice à l'aide de l'outil de la praxéologie développé par Yves Chevallard (1999). Ainsi au niveau de chaque question de chacun des sept exercices donnés, nous partirons du type de tâches pour identifier au niveau des élèves les techniques développées. Cette analyse sera complétée par une catégorisation pondérée (par les pourcentages) des réponses proposées par les élèves.

2.1. Analyse des réponses relatives à l'exercice 1

Au niveau de l'exercice 1, qui porte sur des connaissances déclaratives, notre analyse consistera à rechercher des régularités dans les réponses proposées par les élèves afin de constituer une partition de l'ensemble des élèves ayant pris part au test.

2.1.1. Question 1

Invités à donner la définition de l'expérience aléatoire, les cent élèves, ayant suivi fraîchement un enseignement sur le calcul des probabilités et ayant composé notre test, ont donné des réponses qui peuvent être regroupées en treize propositions de définitions. Sept de ces définitions avaient été enregistrées au niveau des professeurs. Il s'agit précisément des définitions $d_1, d_4, d_5, d_6, d_7, d_{11}$ et d_{12} (chap. IV, 1.4.2.). Nous désignons respectivement par $d_{15}, d_{16}, d_{17}, d_{18}, d_{19}$ et d_{20} les six autres types de réponses donnés par les élèves. Rappelons que nous avons réparti les 14 définitions proposées par les enseignants, lors d'une enquête, en sept types de définitions de l'expérience aléatoire que nous avons nommés respectivement $D_1, D_2, D_3, D_4, D_5, D_6$ et D_7 (chap. IV, 1.4.2.). Cette catégorisation nous sert de grille d'analyse des réponses proposées par les élèves dans le post test.

Dans le type de réponses d_{15} , l'expérience aléatoire est caractérisée par la variété de ses résultats possibles comme il est précisé dans les exemples qui suivent.

L'expérience aléatoire est une expérience donnant lieu à plusieurs possibilités de résultats (tous différents) à l'issue de celle-ci (Guy-Serge, TD₃, CEG₁).

Une expérience aléatoire est toute expérience qui comporte plusieurs éventualités (Crespin, TD₃, CEG₁).

Le type de réponses d_{16} est constitué des réponses dans lesquelles les élèves indiquent que l'expérience aléatoire est un ensemble d'éventualités avec une précision de la caractéristique d'imprévisibilité d'une expérience aléatoire, comme dans l'exemple ci-après :

Une expérience aléatoire est l'ensemble des éventualités qu'on ne peut pas prévenir avec certitude avant l'expérience (Lucie, LJF).

On remarque dans le type de réponses d_{16} une confusion entre les mots « prévenir » et « prévoir ». Ce type de réponses s'apparente au type d_6 des professeurs, dans lequel la nature de l'expérience aléatoire est un événement.

Le type de réponses d_{17} regroupe les réponses, où l'expérience aléatoire semble être confondue à l'univers des éventualités, comme dans les propositions suivantes :

Une expérience aléatoire est l'ensemble des éventualités de l'univers d'une épreuve (Marie, LJF).

Une expérience aléatoire est l'ensemble des événements élémentaires appelé univers (Ω) (Rosaline, LJF).

Dans le type de réponses d_{18} , l'expérience aléatoire est confondue à un événement ou à l'ensemble des événements comme par exemple : *Une expérience aléatoire est l'ensemble des événements de l'univers des éventualités* (Judith, LJF).

Le type de réponses d_{19} regroupe les réponses, dans lesquelles l'élève définit l'expérience aléatoire par rapport au tirage au sort, comme dans l'exemple : *Une expérience aléatoire est toute expérience qui se base sur le hasard* (Grégoire, TD₃, CEG₁). Ce type de définitions s'apparente à une partie du type de définitions d_{10} répertorié au niveau des professeurs.

Nous regroupons dans le type de réponses d_{20} , toutes les propositions de définitions qui ne sont pas suffisamment claires pour indiquer la nature ou les caractéristiques d'une expérience aléatoire, comme dans les exemples ci-après :

Une expérience aléatoire est tout événement d'une éventualité (Mélaine, LJF) ;

Une expérience aléatoire est tout événement de l'univers des éventualités de la probabilité qui le compose (Sylvie, TD₃, CEG₂) ;

L'univers des éventualités Ω composé de plusieurs éventualités et une probabilité p définie sur Ω (Josué, TC, CEG₁).

Nous associons au type de réponses d_{15} le type de définitions D_6 , aux types de réponses d_{16} et d_{19} le types de définitions D_3 ; les types de réponses d_{17} , d_{18} et d_{20} sont associés au type de définitions D_7 . La répartition des cent élèves suivant les types de définitions arrêtés est

présentée dans le tableau ci-après. Il importe de préciser qu'il a été enseigné aux deux premières classes du tableau (LJF et TD₃ du CEG₁) le modèle réduit (MR) de la définition de l'expérience aléatoire, tandis qu'à ceux des deux autres classes (TC du CEG₁ et TD₃ du CEG₂), il a été enseigné le modèle didactique (MD).

Classe	D ₁	D ₂	D ₃	D ₄	D ₅	D ₆	D ₇	Pas de réponse	Total
LJF	4	0	2	0	0	0	10	2	18
TD ₃ CEG ₁	1	1	5	0	0	4	28	3	42
TC CEG ₁	1	1	1	0	2	1	6	2	14
TD ₃ CEG ₂	3	2	0	1	5	1	14	0	26
Total	9	4	8	1	7	6	58	7	100
Pourcentage	9%	4%	8%	1%	7%	6%	58%	7%	100%

Tableau n°06 : Répartition des élèves suivant les types de définitions de l'expérience aléatoire.

L'interprétation de ce tableau nous conduit aux remarques suivantes :

- près des deux tiers des élèves testés semblent méconnaître les deux modèles de définition de l'expérience aléatoire, pourtant enseignés en classe ;
- un dixième des élèves a une bonne connaissance de l'énoncé de l'une des définitions enseignées de la notion d'expérience aléatoire ;
- un dixième des élèves testés semblent confondre les mots « prévoir » et « connaître » au niveau de l'imprévisibilité du résultat de l'expérience aléatoire.

En somme, l'énoncé de l'expérience aléatoire est méconnu par une grande majorité des élèves qui ont suivi fraîchement des cours de probabilités dans les conditions actuelles de leur enseignement au Bénin.

2.1.2. Question 2 de l'exercice 1

La question 2 est décomposée en trois sous-questions à choix multiples visant à vérifier le rapport personnel des élèves concernés par notre étude à certains types d'événements. Nous présentons l'analyse des résultats par sous-question.

2.1.2.1. Question 2.a)

Invités à choisir une réponse parmi trois pour caractériser les événements incompatibles, les élèves ont porté massivement leur choix sur la réponse correcte. Toutefois un nombre non moins important d'élèves a opté pour les réponses non correctes. Les réponses choisies par les

élèves peuvent être regroupées en quatre catégories, à savoir : chacune des trois propositions de réponses de l'énoncé de la question et la catégorie « Autres » constituée des élèves qui n'ont choisi aucune réponse ou qui en ont choisi plus d'une réponse. Le tableau ci-dessous rend compte du poids de chaque catégorie dans chacune des quatre classes.

	A=∅ et B=∅		A∩B=∅		A∪B=Ω		Autres		Total	
	Eff.	Pourc.	Eff.	Pourc.	Eff.	Pourc.	Eff.	Pourc.	Eff.	Pourc.
LJF	2	11%	10	56%	5	28%	1	6%	18	100%
TD ₃ CEG ₁	1	2%	29	69%	10	24%	2	5%	42	100%
TC CEG ₁	0	0%	11	79%	3	21%	0	0%	14	100%
TD ₃ CEG ₂	1	4%	15	58%	8	31%	2	8%	26	100%
Total	4	4%	65	65%	26	26%	5	5%	100	100%

Tableau n°07 : Répartition quantitative des résultats relatifs à la question 2.a) de l'exercice 1.

Contrairement à la prévision faite dans l'analyse a priori le nombre des élèves ayant fait le choix correct de la définition de deux événements incompatibles n'est pas petit. Pour l'ensemble des quatre classes, ce sont près des deux tiers des élèves qui semblent avoir un rapport personnel adéquat avec la notion d'événements incompatibles, avec le meilleur pourcentage pour les élèves de la série C.

2.1.2.2. Question 2.b)

Les choix opérés par les élèves en vue de caractériser deux événements contraires sont classés en quatre groupes : les trois propositions de réponses de la question et le groupe « Autres » tel que nous l'avions défini dans la question 2.a). Les résultats obtenus ne sont pas tellement différents de ceux de la question précédente. En effet, sur l'ensemble des quatre classes, environ trois élèves sur cinq ont pu choisir la réponse correcte. Le meilleur pourcentage est toujours obtenu chez les élèves de la terminale C et le plus faible taux de réponses correctes chez les élèves de la terminale D du lycée de jeunes filles. Le condensé des résultats est présenté dans le tableau ci-après.

	A∩B=∅		A∪B=Ω		A∩B=∅ et A∪B=Ω		Autres		Total	
	Eff.	Pourc.	Eff.	Pourc.	Eff.	Pourc.	Eff.	Pourc.	Eff.	Pourc.
LJF	6	33%	3	17%	7	39%	2	11%	18	100%
TD ₃ CEG ₁	9	21%	5	12%	27	64%	1	2%	42	100%
TC CEG ₁	0	0%	3	21%	11	79%	0	0%	14	100%
TD ₃ CEG ₂	4	15%	4	15%	17	65%	1	4%	26	100%
Total	19	19%	15	15%	62	62%	4	4%	100	100%

Tableau n°08 : Répartition quantitative des résultats relatifs à la question 2.b) de l'exercice 1.

Bien que le nombre d'élèves ayant une bonne connaissance de la définition d'événements contraires ne soit pas petit, un nombre non négligeable d'entre eux confondent cette notion avec celle d'événements incompatibles.

2.1.2.3. Question 2.c)

Plus que les notions d'événements incompatibles et d'événements contraires, l'équiprobabilité de deux événements est majoritairement partagée par les élèves. En fait, plus des quatre cinquièmes des élèves ayant participé au test ont choisi l'égalité $p(A) = p(B)$ comme réponse caractérisant l'équiprobabilité des événements A et B. D'autres élèves ont porté leur choix sur l'une des deux autres propositions de réponses. Certains sont abstenus de répondre ou ont choisi plus d'une réponse proposée. Nous avons classé ces derniers dans la catégorie « Autres » comme dans les deux questions précédentes. Le tableau ci-dessous récapitule les résultats classe par classe.

	$p(A \cap B) = 0$		$p(A) = p(B)$		$p(A) + p(B) = 1$		Autres		Total	
	Eff.	Pourc.	Eff.	Pourc.	Eff.	Pourc.	Eff.	Pourc.	Eff.	Pourc.
LJF	0	0%	16	89%	1	6%	1	6%	18	100%
TD ₃ CEG ₁	2	5%	29	69%	9	21%	2	5%	42	100%
TC CEG ₁	0	0%	14	100%	0	0%	0	0%	14	100%
TD ₃ CEG ₂	0	0%	22	85%	2	8%	2	8%	26	100%
Total	2	2%	81	81%	12	12%	5	5%	100	100%

Tableau n°09 : Répartition quantitative des résultats relatifs à la question 2.c) de l'exercice 1.

Contrairement aux prévisions de l'analyse a priori, les élèves sont très nombreux à maîtriser la notion d'équiprobabilité de deux événements, avec encore le meilleur pourcentage pour la série C. Parmi ceux qui n'ont pas une connaissance correcte de cette notion, une bonne partie semble la confondre avec la notion d'événements contraires.

2.1.3. Question 3 de l'exercice 1

La question est composée de quatre sous-questions, dans lesquelles il est demandé aux élèves de compléter des égalités.

2.1.3.1. Question 3.a)

Cette sous-question vise à évaluer le rapport personnel des élèves à l'axiome $p(\Omega) = 1$. Nous avons réparti les réponses proposées par les élèves en trois catégories que nous nommons respectivement « Unité », « Cardinal Univers » et « Autres ». Dans la catégorie « Unité » se trouvent les élèves, les plus nombreux, qui ont donné la réponse correcte, c'est-à-dire $p(\Omega) = 1$.

La catégorie « Cardinal Univers » regroupe les élèves qui ont écrit « $p(\Omega) = \text{Card}(\Omega)$ » comme réponse. Cette réponse incorrecte, quoique proposée par un nombre restreint d'élèves s'est retrouvée dans trois classes sur les quatre. Quant à la catégorie « Autres », elle est constituée des réponses variées qui n'expriment pas une quantité en lien avec l'univers telles que « $p(\Omega) = \Omega$ », « $p(\Omega) = p(A) + p(B)$ ». Nous complétons à ces catégories, celle de ceux qui n'ont pas proposé de réponse. La répartition quantitative de ces catégories est présentée dans le tableau suivant.

	Unité		Cardinal		Autres		Pas de réponse		Total	
	Eff.	Pourc.	Eff.	Pourc.	Eff.	Pourc.	Eff.	Pourc.	Eff.	Pourc.
LJF	17	94%	0	0%	1	6%	0	0%	18	100%
TD ₃ CEG ₁	25	60%	1	2%	14	33%	2	5%	42	100%
TC CEG ₁	12	86%	2	14%	0	0%	0	0%	14	100%
TD ₃ CEG ₂	24	92%	1	4%	0	0%	1	4%	26	100%
Total	78	78%	4	4%	15	15%	3	3%	100	100%

Tableau n°10 : Répartition quantitative des résultats relatifs à la question 3.a) de l'exercice 1.

Comme il a été prévu dans l'analyse a priori, l'axiome $p(\Omega) = 1$ est largement connu par les élèves ayant suivi les cours de probabilités. Nous constatons que les meilleurs taux de réussite sont obtenus dans les classes où l'approche fréquentiste a été essayée. Cela pourrait se justifier par le fait que les différentes formules de calcul de probabilités avaient été rappelées et écrites au tableau lors de la séance d'exercices dans ces classes.

2.1.3.2. Question 3.b)

Invités à donner la formule liant la probabilité de l'événement « A ou B », les élèves ont donné des formules très variées que nous regroupons en quatre catégories que nous nommons respectivement « Formule générale », « Axiome », « Premier principe de Laplace (PPL) » et « Autres ». Nous mettons dans le groupe « Formule générale », les élèves qui ont donné la réponse correcte « $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$ ». Cette catégorie est dominante dans deux classes sur les quatre. La catégorie « Axiome » comporte les élèves qui ont donné la réponse incorrecte « $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$ », dans laquelle A et B sont supposés incompatibles. Elle domine dans les deux autres classes. En dehors de ces deux types de réponses, on a celui dans lequel les élèves proposent la formule « $p(A \cup B) = \frac{\text{Card}(A \cup B)}{\text{Card}(\Omega)}$ », qui traduit le premier principe de Laplace dans le contexte de la consigne. Ce sont les élèves ayant donné cette réponse que nous avons classé dans la catégorie « Premier principe de Laplace ».

Ils sont trois et font la même classe. Nous avons classé toutes les autres réponses dans la catégorie « Autres ». On y trouve par exemple les propositions de réponses « $p(A \cup B) = p(\Omega)$ », « $p(A \cup B) = \Omega$ », « $p(A \cup B) = p(A) = p(B)$ ». La répartition des élèves dans ces différentes catégories est présentée dans le tableau suivant.

	Formule générale		Axiome		PPL		Autres		Pas de réponse		Total	
	Eff.	Pourc.	Eff.	Pourc.	Eff.	Pourc.	Eff.	Pourc.	Eff.	Pourc.	Eff.	Pourc.
TD LJF	12	67%	5	28%	0	0%	1	6%	0	0%	18	100%
TD ₃ CEG ₁	12	29%	16	38%	3	7%	9	21%	2	5%	42	100%
TC CEG ₁	10	71%	3	21%	0	0%	1	7%	0	0%	14	100%
TD ₃ CEG ₂	11	42%	13	50%	0	0%	2	8%	0	0%	26	100%
Total	45	45%	37	37%	3	3%	13	13%	2	2%	100	100%

Tableau n°11 : Répartition quantitative des résultats relatifs à la question 3.b) de l'exercice 1.

L'énoncé de la propriété évaluée semble être maîtrisé par près de la moitié des élèves avec les plus forts pourcentages pour la terminale C et la terminale D du lycée de jeunes filles, qui ont les effectifs les plus bas. La formule alternative de la probabilité de la disjonction de deux événements est également connue d'un bon nombre d'élèves. Au total, les deux formules sont globalement connues par la grande majorité des élèves.

2.1.3.3. Question 3.c)

La question 3.c) de l'exercice 1 vise à vérifier la connaissance des élèves sur l'énoncé du deuxième principe de Laplace. Plus précisément, il est demandé aux élèves de donner la formule de la probabilité $p(A)$ d'un événement A constitué des éventualités e_1, e_2, \dots, e_k . Les propositions de réponses des élèves à cette consigne peuvent être catégorisées en trois groupes que nous désignons respectivement par DPL, PPL et ANA.

Le groupe « Deuxième principe de Laplace (DPL) » est constitué des élèves ayant exprimé à travers leur réponse que la probabilité d'un événement est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le composent en écrivant $p(A) = p(\{e_1\}) + p(\{e_2\}) + \dots + p(\{e_k\})$. Dans le groupe « Premier principe de Laplace (PPL) » se retrouvent les élèves ayant écrit la formule du premier principe de Laplace. Quant au groupe « Approche non appropriée (ANA) », il est composé des élèves dont les réponses ne sont pas assez claires pour exprimer l'un des deux premiers principes de Laplace. Parmi ces réponses, on en trouve deux contenant des indications d'une certaine connaissance du deuxième principe de Laplace, notamment : « $p(A) = \sum_{i=1}^k p(e_i)$ », « $p(A) = \{p(e_1) ; p(e_2) ; \dots ; p(e_k)\}$ ». Les exemples suivants

sont quelques-unes des autres réponses enregistrées dans ce groupe : « $p(A)=1$ », « $p(A)=e_1+e_2+\dots+e_k$ », « $p(A)=e_1 \times e_2 \times \dots \times e_k$ », « $p(A)=1-p(\bar{A})$ ».

Le tableau ci-après rend compte quantitativement de la répartition des élèves dans les groupes ci-dessus identifiés.

	DPL		PPL		ANA		Pas de réponse		Total	
	Eff.	Pourc.	Eff.	Pourc.	Eff.	Pourc.	Eff.	Pourc.	Eff.	Pourc.
LJF	14	77,78%	0	0,00%	4	22,22%	0	0,00%	18	100%
TD ₃ CEG ₁	25	59,52%	4	9,52%	12	28,57%	1	2,38%	42	100%
TC CEG ₁	9	64,29%	0	0,00%	4	28,57%	1	7,14%	14	100%
TD ₃ CEG ₂	21	80,77%	0	0,00%	5	19,23%	0	0,00%	26	100%
Total	69	69%	4	4%	25	25%	2	2%	100	100%

Tableau n°12 : Répartition quantitative des résultats relatifs à la question 3.c) de l'exercice 1.

Un plus grand nombre d'élèves (69%) ayant pris part au test ont un rapport adéquat à l'énoncé du deuxième principe de Laplace. Très peu d'entre eux (4%) le confondent au premier principe de Laplace tandis le quart de la population des élèves ayant subi le test semblent ignorer le deuxième principe de Laplace. Les meilleurs taux de réussite de la consigne sont observés dans les classes où l'enseignement est basé sur l'approche fréquentiste.

2.1.3.4. Question 3.d)

Dans la question 3.d) de l'exercice 1, qui vise à évaluer la connaissance par les élèves de l'énoncé du premier principe de Laplace, il est demandé aux élèves de donner la formule de la probabilité $p(A)$ d'un événement A lorsque tous les événements élémentaires de l'univers des éventualités Ω sont équiprobables. Les réponses des élèves sont variées et peuvent être catégorisées en quatre types de réponses que nous désignons respectivement par PPL, DPL, EEE et ANA.

Dans le groupe PPL dénommé « premier principe de Laplace », nous avons classé les élèves qui ont donné la réponse correcte, celle qui traduit le premier principe de Laplace. Dans ce groupe sont donc classés les élèves ayant écrit « $p(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$ ». Les élèves ayant proposé une réponse traduisant le deuxième principe de Laplace occupent le groupe DPL. Nous y avons inclus les réponses isolées de deux élèves, qui n'expriment pas réellement le deuxième principe de Laplace mais que nous trouvons proches de ce principe. Il s'agit des réponses suivantes :

- $p(A)$ est la probabilité de chacun des événements élémentaires ;

$$- p(A) = p(A \cap B_1) + p(A \cap B_2) + \dots + p(A \cap B_n).$$

Certains élèves ont écrit des formules qui peuvent traduire l'équiprobabilité d'événements élémentaires telles que « $p(e_1) = p(e_2) = \dots = p(e_k)$ ». Nous les avons classés dans le groupe EEE. Les élèves classés dans le groupe « approche non appropriée (ANA) » sont ceux dont les réponses ne sont pas suffisamment claires pour avoir un sens ou pour être compris comme étant des types de réponses précédents. C'est le cas par exemple des réponses « $p(A) = \text{Card}(A)$ », « $p(A)=A$ » et « $P(A) = \frac{1}{n}$ ».

La répartition des élèves dans ces catégories est présentée dans le tableau suivant.

	PPL		DPL		EEE		ANA		Pas de réponse		Total	
	Eff.	Pourc.	Eff.	Pourc.	Eff.	Pourc.	Eff.	Pourc.	Eff.	Pourc.	Eff.	Pourc.
LJF	10	56%	2	11%	2	11%	4	22%	0	0%	18	100%
TD ₃ CEG ₁	19	45%	0	0%	7	17%	14	33%	2	5%	42	100%
TC CEG ₁	7	50%	1	7%	1	7%	3	21%	2	14%	14	100%
TD ₃ CEG ₂	14	54%	0	0%	3	12%	8	31%	1	4%	26	100%
Total	50	50%	3	3%	13	13%	29	29%	5	5%	100	100%

Tableau n°13 : Répartition quantitative des résultats relatifs à la question 3.d) de l'exercice 1.

Il ressort de ce tableau que la moitié des élèves concernés par notre étude ont une connaissance certaine de l'énoncé du premier principe de Laplace. Quoique relativement faible, les meilleurs taux de connaissance de cet énoncé sont obtenus dans les classes où l'approche fréquentiste est essayée.

2.1.4. Synthèse des résultats relatifs à l'exercice 1

L'exercice 1 a permis d'évaluer la maîtrise de quelques connaissances déclaratives chez les élèves qui ont suivi fraîchement les cours de probabilités dans le contexte actuel de leur enseignement. De l'énoncé de la notion d'expérience aléatoire aux formules de calcul de probabilités, en passant par la typologie des événements, les élèves ont montré plus ou moins une certaine maîtrise des connaissances déclaratives.

Si l'énoncé de l'expérience aléatoire n'est connu que par une minorité stricte d'élèves, les notions d'événements incompatibles, d'événements contraires et d'événements équiprobables semblent être respectivement connues par de grands nombres d'élèves. Cette apparente contradiction peut se justifier par le fait que les questions posées aux élèves pour recueillir des informations relatives à l'apprentissage de ces notions ne sont pas de même

nature. En effet, la question posée au niveau de la notion d'expérience aléatoire est ouverte, tandis que ce sont des questions à choix multiples qui sont utilisées au niveau de la typologie des événements. Il est bien possible que les élèves soient nombreux à indiquer la définition d'expérience aléatoire dans une question à choix multiple. Inversement, avec une question ouverte, nous ne sommes pas certain d'avoir un fort taux de réussite au niveau de la typologie des événements.

Pour ce qui concerne les formules de calcul des probabilités, l'axiome $p(\Omega) = 1$ est largement connu des élèves, tandis que la formule $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$ est maîtrisée par environ la moitié des élèves sans compter le nombre important d'élèves qui ont montré une bonne connaissance de l'axiome $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$, valable pour des événements incompatibles. Quant aux deux premiers principes de Laplace, l'énoncé du premier principe de Laplace est moins connu des élèves en termes de savoirs à mémoriser. Environ un élève sur deux a pu énoncer ce principe, tandis qu'ils sont près de 7 élèves sur 10 à donner l'énoncé correct du deuxième principe de Laplace.

2.2. Résultats relatifs à l'exercice 2

Dans l'exercice 2 du test, les élèves ont été appelés à prévoir le résultat d'un lancer de dé connaissant les résultats des onze premiers lancers du même dé. Les réponses qu'ils ont proposées peuvent être regroupées en quatre catégories, qui définissent chacune une certaine conception du hasard chez l'élève. Nous nommons ces catégories respectivement « tirage au sort », « compensation », « constance » et « conception non affirmée ».

2.2.1. La catégorie « tirage au sort »

D'après la classification mathématique du hasard, il est question du hasard « tirage au sort » dans l'enseignement des probabilités dans les collèges et lycées. C'est cette conception de hasard qui permet de comprendre dans l'exercice 2 qu'on ne peut pas prévoir le résultat du douzième lancer, comme dans les propositions de réponses ci-après.

Soit A le résultat qu'on obtiendrait au douzième lancer $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, car c'est une expérience aléatoire (Roger, TD₃, CEG₂).

1 ou 2 ou 3 ou 4 ou 5 ou 6 (Marcelline, TD, LJF).

On ne pourra pas connaître le résultat avant le lancer (Alexandre, TD₃, CEG₁).

On obtient le résultat suivant : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 (Godfrid, TC, CEG₁).

Un bon nombre d'élèves ont montré ainsi un rapport conforme au hasard du « tirage au sort », en exprimant effectivement que le résultat du douzième lancer est imprévisible.

2.2.2. La catégorie « compensation »

D'après les travaux de Piaget, le hasard est un obstacle ontogénétique (Brousseau, 1989b) pour l'enfant du stade de développement préopérateur. Cet obstacle se caractérise chez les élèves par la conception de compensation qu'ils attribuent au hasard et selon lequel un événement moins fréquent a plus de chance d'être réalisé. Dans la catégorie « compensation », nous mettons justement les élèves ayant cette conception de compensation du hasard. Elle est composée des élèves qui ont soutenu que le résultat du lancer est 4, le seul numéro qui ne figure qu'une seule fois sur la liste des résultats des onze premiers lancers. Voici à des mots près la justification commune de la plupart des élèves de cette catégorie.

Parmi les onze autres lancers, on a deux fois chaque numéro que comporte le dé sauf le numéro 4 qui est apparu une seule fois.

La conception de compensation du hasard, prévue par Piaget pour être observée chez l'enfant du stade préopérateur (2 ans à 7-8 ans), s'observe ici chez des élèves du stade des opératoires formelles (à partir de 11-12 ans). Ceci serait certainement dû au fait que la notion de hasard n'a pas été étudiée jusque-là et conforte la position de Fischbein par rapport aux travaux de Piaget (chap. II, 2.2).

2.2.3. La catégorie « constance ».

Nous tenons cette appellation d'un raisonnement que certains élèves ont mené pour justifier que le résultat du douzième lancer serait 6, celui-ci étant le dernier des numéros composant la suite des résultats des onze premiers lancers du dé. En réalité, on a rencontré ce type de raisonnement parmi les élèves des deux classes où nous avons essayé la faisabilité de l'entrée en calcul de probabilités par une démarche expérimentale basée sur la conception fréquentiste. Dans cet essai, fait à partir de lancers de dé, la probabilité d'un événement avait été présentée comme une valeur autour de laquelle la fréquence de l'événement se stabilise suite à un grand nombre de réalisations de l'expérience aléatoire. C'est sûrement ce qui a influencé les élèves de la catégorie « constance » dont voici une réponse-type.

On obtiendrait le même résultat, parce que même si on lance une douzième fois, le résultat va se présenter comme une limite (Dossin, TD, LJF).

Lorsqu'on va lancer le dé une douzième fois ; le nombre 6 restera constant (Bérenice, TD, LJF)

À notre avis, c'est bien parce que le résultat du onzième lancer est le plus grand numéro du dé que les élèves de la catégorie « constance » indiquent que le résultat du douzième lancer serait 6.

2.2.4. La catégorie « Conception non affirmée »

Dans cette catégorie, nous logeons, tous ceux dont les écrits ne permettent pas de les situer par rapport à une régularité constatée et qui, de ce fait, donnent l'impression de ne pas comprendre ce dont il est réellement question. Certains parmi les élèves de cette catégorie se sont lancés par exemple dans des calculs de probabilités, ou de dénombrement, prouvant ainsi qu'ils n'ont pas compris la question posée. Les réponses vagues du genre « *on obtiendrait les mêmes résultats* » ou encore « *on obtient le double des résultats lorsqu'on lance onze fois* » font partie de cette catégorie.

2.2.5. Répartition statistique des élèves par rapport aux catégories de réponses identifiées

Les élèves ayant participé au post test inégalement répartis dans les catégories ci-dessus évoquées. Le tableau ci-après rend compte de cette répartition.

	Tirage au sort	Compensation	Constance	Non affirmée	Pas de réponse	Total
TD LJF	5	2	3	5	3	18
TD ₃ CEG ₁	6	11	0	17	8	42
TC CEG ₁	2	9	0	1	2	14
TD ₃ CEG ₂	8	6	1	9	2	26
Total	21	28	4	32	15	100

Tableau n°14 : Répartition quantitative des résultats relatifs à l'exercice 2.

Les présents résultats révèlent que la conception « tirage au sort » liée au hasard n'est mobilisée que par moins du quart des élèves ayant subi le test, tandis qu'une bonne partie d'entre eux a la conception « compensation » de hasard que l'on devrait remarquer chez les enfants beaucoup plus jeunes si on doit s'en tenir aux travaux de Piaget et Inhelder (1951).

2.3. Analyse des réponses relatives à l'exercice 3

L'exercice 3 comporte deux questions auxquelles les élèves ont répondu. Les réponses proposées seront analysées question par question.

2.3.1. Question 1 de l'exercice 3

Les réponses des élèves à la question 1 de l'exercice 3 ont permis de vérifier la capacité de ceux-ci à reconnaître l'expérience aléatoire dans un problème de probabilités comportant des informations diverses. Nous distinguons au niveau de cette question cinq types de réponses que nous désignons respectivement : « Aléatoire », « Hasard », « Probabilité », « Événement » et « Non aléatoire ».

2.3.1.1. Les catégories « Aléatoire » et « Hasard »

La catégorie « Aléatoire » regroupe les réponses dans lesquelles l'expérience aléatoire est correctement identifiée dans le texte qui est proposé, à savoir : « on prend une lettre au hasard dans ce bureau ». Dans la catégorie « Hasard », nous avons classé les élèves, qui à défaut d'identifier l'expérience aléatoire, l'ont lié au mot « hasard » en citant un passage du texte qui contient le mot « hasard », comme dans les exemples suivants :

- Au hasard (Guillaume, TC, CEG₁) ;
- Le hasard (Alban, TD₃, CEG₁) ;
- Parmi les lettres reçues au hasard (Alexandre, TD₃, CEG₁) ;
- Les autres lettres ne sont jamais accompagnées de commande, ni de demande de cadeau.
On prend une lettre au hasard dans ce bureau (Sévérine, TD, LJF).

Bien que la dernière phrase du dernier exemple indique clairement l'expérience aléatoire, la phrase qui la précède est un indice d'une identification non correcte de l'expérience aléatoire.

2.3.1.2. Les catégories « Probabilité », « Événement » et « Non aléatoire »

Certaines données de l'exercice 3 peuvent être interprétées comme des probabilités d'événements. Des élèves ont pris ces données pour l'expérience aléatoire. Ces élèves sont classés soit dans la catégorie « Probabilité », soit dans la catégorie « Événement ». Les réponses ci-après sont des exemples respectifs des réponses de ces deux catégories.

- 40% contiennent une commande et une demande de cadeau (Grégoire, TD₃, CEG₁).
- On désigne par A l'événement « la lettre contient une commande » et par B l'événement « la lettre contient une demande de cadeau » (Delphine, TD, LJF).

La catégorie « Non aléatoire » comporte les réponses qui n'ont apparemment aucun lien avec les notions probabilistes contenues dans le texte de l'exercice. On y retrouve la réponse « plusieurs catégories de courriers arrivent dans une entreprise de vente » qui semble évoquer implicitement l'univers des éventualités de l'expérience aléatoire, et qui est faiblement représentée dans ce type de réponses.

2.3.1.3. Bilan quantitatif

Le tableau ci-après est la répartition des élèves suivant les types de réponses relatifs à la reconnaissance de l'expérience aléatoire dans un problème de probabilité.

	Aléatoire		Hasard		Probabilité		Evènement		Non aléatoire		Pas de réponse		Total	
	Eff.	%	Eff.	%	Eff.	%	Eff.	%	Eff.	%	Eff.	%	Eff.	%
LJF	6	33%	5	28%	2	11%	3	17%	2	11%	0	0%	18	100%
TD ₃ CEG ₁	11	26%	4	10%	10	24%	3	7%	10	24%	4	10%	42	100%
TC CEG ₁	6	43%	1	7%	2	14%	0	0%	4	29%	1	7%	14	100%
TD ₃ CEG ₂	6	23%	1	4%	5	19%	2	8%	12	46%	0	0%	26	100%
Total	29	29%	11	11%	19	19%	8	8%	28	28%	5	5%	100	100%

Tableau n°15 : Répartition quantitative des résultats relatifs à la question 1 de l'exercice 3.

Ainsi près du tiers de la population concernée par notre étude sait reconnaître l'expérience aléatoire dans un problème de probabilité comme celui de l'exercice 3 du test. Sans reconnaître avec prévision l'expérience aléatoire, environ un élève sur dix a exprimé que l'expérience aléatoire est liée au hasard. Toutefois trois élèves sur cinq parmi ceux concernés par notre travail semblent ne pas reconnaître l'expérience aléatoire dans un problème.

2.3.2. Question 2.a) de l'exercice 3

Dans cette question, la technique relevant du type de tâches Tc : « calculer la probabilité d'un événement » est la « technique calcul par les axiomes (TCA) », qui consiste notamment à identifier l'évènement et une formule liant la probabilité de cet évènement et les probabilités connues d'autres évènements (1.2.3.1). Au niveau de la question 2.a) de l'exercice 3, cette technique est observée chez certains élèves avec trois types de réponses que nous nommons respectivement « TCA complète (TCA-C) », « TCA presque complète (TCA-PC) » et « TCA inappropriée ». Le type de réponses TCA-C comporte les réponses dans lesquelles la formule requise pour parvenir à la réponse correcte comme dans la résolution experte ci-après.

Soit $P(\bar{B})$ cette probabilité.

$$P(B) = 45\% = 0,45$$

$$P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0,45 = 0,55 \text{ (Bérénice, TD, LJF).}$$

Le type de réponses TCA-PC est composé des élèves qui ont utilisé la formule requise, mais avec une identification incorrecte de l'évènement. À quelques différences de forme près, la résolution type de la minorité d'élèves chez qui ce type de réponses est observé se présente comme suit.

Soit \bar{A} l'événement « ne contient pas une demande de cadeau ».

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) \text{ or } P(A) = 0,9 \\ = 1 - 0,9$$

$$P(\bar{A}) = 0,1 \text{ (Marie, TD, LJF).}$$

La catégorie TCA-I est celle des élèves qui ont utilisé la méthode relative à la technique TCA, mais en utilisant une formule étudiée autre que celle liant les probabilités d'événements contraires. Les formules utilisées dans cette catégorie sont pour la plupart relative aux probabilités conditionnelles comme le montre la production suivante.

$$p_{\bar{B}}(A) = \frac{p(A \cap \bar{B})}{p(\bar{B})} \Leftrightarrow p(A \cap \bar{B}) = p_{\bar{B}}(A) \times p(\bar{B})$$

$$\text{Or } p(\bar{B}) = 1 - p(B) \text{ donc } p(A \cap \bar{B}) = p_{\bar{B}}(A) \times (1 - p(B))$$

$$p(A \cap \bar{B}) = \frac{90}{100} \times \left(1 - \frac{45}{100}\right) = \frac{9}{10} \times \frac{11}{20}; p(A \cap \bar{B}) = 99/200 \text{ (Olivier, TC, CEG}_1\text{)}$$

En dehors de la technique TCA, nous avons une autre que nous avons nommée « Technique alternative (TA) ». Elle consiste à supposer que l'événement « la lettre contient une commande » est systématiquement l'événement contraire de l'événement « la lettre contient une demande de cadeau », bien qu'une donnée de l'exercice traduise le fait que ces deux événements ne sont pas incompatibles. Pour les nombreux élèves chez qui cette technique est observée, la probabilité demandée est celle de l'événement « la lettre contient une commande », qui est égale à 0,9.

Nous classons dans une catégorie que nous nommons « autres » les réponses diverses qui manquent de sens, ou dans lesquelles il est utilisé une formule incorrecte comme dans l'exemple suivant.

Soit D l'événement « la lettre ne contient pas une demande de cadeau ». On a :

$$p(D) = p_{\bar{A}}\bar{B} = \frac{p(\bar{B} \cap \bar{A})}{p(\bar{A})} + p(A) \\ = \frac{p(\bar{B} \cap \bar{A})}{p(\bar{A})} + p(A) \text{ (Irené, TC, CEG}_1\text{)}.$$

L'importance numérique de chacune des catégories ci-dessus présentées est résumée dans le tableau ci-après.

	TCA-C		TCA-PC		TCA-I		TA		Autres		Pas de réponse		Total	
	Eff.	%	Eff.	%	Eff.	%	Eff.	%	Eff.	%	Eff.	%	Eff.	%
LJF	9	50%	2	11%	1	6%	3	17%	2	11%	1	6%	18	100%
TD ₃ CEG ₁	5	12%	0	0%	3	7%	15	36%	12	29%	7	17%	42	100%
TC CEG ₁	4	29%	1	7%	4	29%	3	21%	2	14%	0	0%	14	100%
TD ₃ CEG ₂	7	27%	0	0%	2	8%	9	35%	6	23%	2	8%	26	100%
Total	25	25%	3	3%	10	10%	30	30%	22	22%	10	10%	100	100%

Tableau n°16 : Répartition quantitative des résultats relatifs à la question 2.a) de l'exercice 3.

Par rapport à cette question, l'ensemble des élèves s'est constitué en trois groupes presque également répartis. Environ le tiers des élèves a pu convenablement appliquer la méthode indiquée pour la résolution de cette question. Un autre tiers, ayant bien identifié l'événement dont la probabilité est à calculer, a simplement considéré que les deux événements indiqués dans l'exercice sont contraires. Si ce n'est pas cette compréhension que ce groupe a de ces événements donnés, certains de ses membres auraient proposé le type de réponses TCA-C ou TCA-PC. Une partie du troisième tiers ne semble pas avoir compris la question, tandis qu'une seconde partie a pensé résoudre la question en utilisant des non appropriée.

2.3.3. Question 2.b) de l'exercice 3

Nous retrouvons au niveau de la question 2.b), à des détails près, les mêmes catégories de réponses qu'au niveau de la question 2.a). La technique requise TCA est observée avec également trois types de réponses TCA-C, TCA-PC, TCA-I, ainsi que la technique TA avec deux types de réponses TA-1 et TA-2.

Les élèves de la catégorie TCA-C sont ceux qui ont appliqué avec succès la technique TCA en faisant une identification correcte de l'événement et en utilisant sans erreur la propriété convenable. La proposition de réponse de ces élèves se précise à des mots près comme suit.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A) = 90\% = 0,9 ; P(B) = 45\% = 0,45 ; P(A \cap B) = 40\% = 0,4$$

$$P(A \cup B) = 0,9 + 0,45 - 0,4 ; P(A \cup B) = 0,95 \text{ (Marie, TD, LJF)}$$

Les élèves ayant mobilisé la propriété requise avec une identification correcte de l'événement et qui n'ont pas pu trouver la valeur correcte de la probabilité sont classés dans la catégorie TCA-PC. L'une des raisons de leur relatif échec par rapport à cette question est une

exploitation incorrecte des données du problème comme dans la production suivante, dans laquelle l'élève considère que les événements A et B sont indépendants.

$$\begin{aligned} \text{On a : } P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= 0,9 + 0,45 - 0,9 \times 0,45 \\ P(A \cup B) &= 0,945 \text{ (Fulbert, TC CEG}_1\text{)} \end{aligned}$$

Dans la catégorie TCA-I se trouvent les réponses dans lesquelles il est utilisé la formule $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$, valable pour les événements incompatibles. La résolution ci-dessous est celle présentée par la plupart des membres de ce groupe.

Soit C l'événement « contienne une commande ou une demande de cadeau ».

$$\begin{aligned} P(C) &= P(A) + P(B) \\ P(C) &= \frac{45}{100} + \frac{90}{100} \\ P(C) &= 0,45 + 0,9 = 1,35 \text{ (Delphine, TD}_3\text{, CEG}_2\text{)}. \end{aligned}$$

Certains élèves ont identifié l'événement dont la probabilité est à calculer comme étant l'événement « $A \cap B$ » au lieu de « $A \cup B$ ». Une partie de ces élèves ont alors proposé comme réponse la valeur donnée de la probabilité de $A \cap B$, tandis qu'une seconde partie a considéré A et B comme des événements indépendants en proposant comme réponse le produit des probabilités des événements A et B. Nous classons ces élèves dans la catégorie « Technique alternative (TA) ».

La dernière catégorie que nous avons nommée « Autres » est composée des réponses qui ne sont pas assez claires pour exprimer une certaine régularité. Elles comportent pour la plupart l'utilisation des formules incorrectes comme dans les deux réponses suivantes.

* Soit F événement « contienne une commande ou une demande de cadeau ».

$$\begin{aligned} P(F) &= P(A) \cap P(B) \text{ (Lucie, TD, LJF)} \\ * P(A) \cap P(B) &= P(A) + P(B) - P(A \cup B) \\ \text{Or } P(A) &= \frac{90}{100} = 0,9 \\ P(A) \cap P(B) &= 0,9 + 0,45 - (0,9 + 0,45) \\ P(A) \cap P(B) &= 0 \text{ (Laetitia, TD}_3\text{, CEG}_2\text{)} \end{aligned}$$

La répartition quantitative des élèves dans les différentes catégories ci-dessus présentées se précise dans le tableau suivant.

	TCA-C		TCA-PC		TCA-I		TA		Autres		Pas de réponse		Total	
	Eff.	%	Eff.	%	Eff.	%	Eff.	%	Eff.	%	Eff.	%	Eff.	%
LJF	10	56%	2	11%	5	28%	0	0%	1	6%	0	0%	18	100%
TD ₃ CEG ₁	5	12%	1	2%	7	17%	10	24%	11	26%	8	19%	42	100%
TC CEG ₁	6	43%	2	14%	3	21%	1	7%	1	7%	1	7%	14	100%
TD ₃ CEG ₂	10	38%	1	4%	3	12%	4	15%	5	19%	3	12%	26	100%
Total	31	31%	6	6%	18	18%	15	15%	18	18%	12	12%	100	100%

Tableau n°17 : Répartition quantitative des résultats relatifs à la question 2.b) de l'exercice 3.

Plus de la moitié des élèves ont ainsi montré leur connaissance de la technique TCA en identifiant l'événement $A \cup B$ et en utilisant l'une des formules permettant le calcul de la probabilité d'un tel événement. Mais ce sont près des deux cinquièmes des élèves qui ont pu faire le choix de la formule appropriée. Environ un élève sur trois ne semble pas avoir compris la tâche à accomplir.

2.3.4. Bilan de l'analyse des résultats relatifs à l'exercice 3

L'exercice 3 comporte deux volets : le premier est la reconnaissance de l'expérience aléatoire dans un problème de probabilité, et le second, le calcul des probabilités à partir des propriétés liant les probabilités de plusieurs événements. Au niveau du premier volet, un petit nombre d'élèves est arrivé à reconnaître l'expérience aléatoire dans l'énoncé de cet exercice, qui contient des données diverses. Une autre petite partie des élèves, sans pouvoir indiquer l'expérience aléatoire, en reconnaît le hasard comme la caractéristique principale. Mais le plus grand nombre des élèves n'a pas pu identifier l'expérience aléatoire dans le problème. Ces résultats semblent confirmer ceux relatifs à la définition d'expérience aléatoire, selon lesquels les élèves n'ont pas été nombreux à en avoir connaissance. Concernant le deuxième volet, il est constaté pour chacune des deux questions relatives à l'utilisation des formules $p(A) + p(\bar{A}) = 1$ et $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$, qu'il y a une partie des élèves qui a su convenablement appliquer avec succès la méthode requise. Ceux qui ont appliqué la méthode correcte sans trouver la réponse attendue ont eu pour la plupart des difficultés d'interprétation des données du problème ou des difficultés d'ordre numérique. Bien qu'ayant identifié l'événement dont la probabilité est à calculer, certains ont fait le choix des propriétés inappropriées. À côté de tous ceux-là se trouvent certains qui ne semblent pas avoir bien identifié l'événement, et d'autres qui ont utilisé des formules incorrectes. Il importe de préciser que les élèves ont connus plus de réussite au niveau de la question faisant intervenir $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$ qu'au niveau de celle nécessitant la formule : $p(A) + p(\bar{A}) = 1$. À notre avis, cet état des choses

est dû au fait que la première formule a été clairement utilisée lors des séances d'exercices, dans un problème semblable à l'exercice 3, mais ne comprenant ni la première question, ni la deuxième dont la résolution nécessite l'axiome $p(A) + p(\bar{A}) = 1$.

2.4. Analyse des réponses relatives aux exercices 4 et 6

Comme nous l'avons écrit dans l'analyse a priori (1.2.4 et 1.2.6), les exercices 4 et 6 portent sur le premier principe de Laplace. Il est donc attendu des élèves qu'ils cherchent à dénombrer les cas possibles et les cas favorables afin de déterminer le rapport traduisant l'application du premier principe de Laplace. Il convient de signaler que le problème de dénombrement dans l'exercice 4 est plus complexe que dans l'exercice 6. En effet, bien que les deux exercices soient tous des modèles d'urne, l'exercice 4 porte sur le choix de trois objets parmi cinq tandis que dans l'exercice 6 il est question du choix d'un objet parmi cinq. Rappelons également que les techniques de calcul de probabilités enseignées par les deux professeurs dont nous avons observé les séances de cours sont les techniques TE, APEE et TCA justifiées respectivement par le premier principe de Laplace, le deuxième principe de Laplace et l'axiomatisation de Kolmogorov (chap. IV, 2.4.2).

Dans notre analyse, nous proposons d'identifier dans les productions des élèves la technique utilisée par chacun d'eux pour la résolution des exercices 4 et 6.

2.4.1. Résultats relatifs à l'exercice 4

Les productions des élèves par rapport à l'exercice 4 sont réparties en quatre catégories que nous désignons respectivement TE-C, TE-PC, TE-I, TNA.

Nous disons qu'un élève est dans la catégorie « Technique d'équiprobabilité complète (TE-C) » pour l'exercice 4 lorsqu'il utilise la technique TE avec succès, c'est-à-dire qu'il a pu déterminer les nombres exacts de cas favorables et de cas possibles pour ensuite calculer avec succès le rapport du nombre de cas favorables au nombre de cas possibles. Un seul élève sur les cent qui ont composé a pu être inscrit dans ce groupe pour l'exercice 4 avec la production ci-après.

Notons les boules blanches : B_1, B_2 et B_3 , puis les boules noires : N_1 et N_2 . Voici dans le désordre, les résultats désirés : $\{(B_1, B_2, N_1), (B_1, B_3, N_1), (B_2, B_3, N_1), (B_1, B_2, N_2), (B_1, B_3, N_2), (B_2, B_3, N_2)\}$. Chaque résultat admet 6 permutations c'est-à-dire ordres d'arrivée différents. Les événements élémentaires sont équiprobables. Aussi, le nombre de résultats possibles est $A_5^3 = 60 = \text{Card}(\Omega)$ avec Ω l'univers des événements associés à l'expérience. Désignons par S , l'évènement « exactement deux des trois jetons tirés sont

blancs ». On a : $\text{Card}(A) = (6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6) = 36$. $p(S) = \frac{\text{Card}(S)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{36}{60}$ d'où
 $p(S) = \frac{3}{5}$. (Rippert, TC, CEG₁).

La catégorie « Technique d'équiprobabilité presque complète (TE-PC) » est composée des élèves ayant utilisé le premier principe de Laplace avec la détermination correcte du nombre de cas possibles, mais qui n'ont pas tenu compte du facteur multiplicateur qui intervient dans la détermination du nombre de cas favorables. Les élèves du groupe TE-PC ont une bonne compréhension de l'expérience aléatoire et de l'événement en jeu. À des mots près, leur réponse à la question posée est la production suivante.

Soit Ω l'univers associé à cette expérience aléatoire. $\text{Card}(\Omega) = A_5^3 = 60$. Pour que deux des trois jetons tirés soient blancs il doit avoir deux jetons blancs parmi les trois puis un jeton noir. Soit $p(A)$ cette probabilité. $p(A) = \frac{A_3^2 \times A_2^1}{A_5^3} = \frac{6 \times 2}{60} = 0,2$ (Jocelyne, TD₃, CEG₂).

Les réponses classées dans la catégorie « Technique d'équiprobabilité incomplète (TE-I) » sont celles des élèves qui ont utilisé le premier principe de Laplace et qui n'ont pas pu déterminer le nombre de cas possibles ou bien, qui même l'ayant bien déterminé n'ont pas utilisé un mode correct de dénombrement des éléments de l'événement. Dans ce groupe les nombres de cas favorables et de cas possibles sont diversement mal déterminés. Un nombre important d'élèves ont pu déterminer le nombre de cas possibles. Certains ont écrit la formule donnant le nombre de cas possibles sans pouvoir trouver la valeur. Ce sont donc les réponses dans lesquelles on note un manque de maîtrise des outils de dénombrement ou qui font comprendre une mauvaise compréhension soit de l'expérience aléatoire soit de l'événement. Les productions suivantes sont des réponses caractérisant les élèves du groupe TE-I.

Soit Ω l'univers de cette expérience aléatoire. $\text{Card}\Omega = A_5^3 = \frac{5 \times 4 \times 3!}{3!} = 20$. A : « tirer exactement deux des trois jetons blancs ». $\text{Card}A = A_3^2 + A_2^1 = 3 + 2 = 5$.
 $p(A) = \frac{\text{Card}A}{\text{Card}\Omega} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$ (Vivien, TD₃, CEG₁).

Soit Ω l'univers associé à cet événement. $\text{Card}\Omega = A_5^3 = 10$. Soit A l'évènement « deux des trois jetons tirés soient blancs ». $\text{Card}A = A_3^2 \times A_2^1 = 6$. Soit p la probabilité. $p(A) = \frac{\text{Card}A}{\text{Card}\Omega} \Leftrightarrow p(A) = \frac{6}{10}$. (Judith, TD, LJF).

Soit Ω l'univers associé à cette expérience aléatoire. $\text{Card}(\Omega) = C_3^1 + C_2^1 = 5$. Soit A l'évènement « deux des trois jetons tirés soient blancs ». $p(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$, $\text{Card}(A) = C_3^1 = 3$. $p(A) = \frac{3}{5}$. (Bruno, TD₃, CEG₂).

Soit Ω l'univers des éventualités. $\text{Card}(\Omega) = 5$. Calculons le nombre de possibilité de tirer 2 des 3 jetons blancs. Soit n le nombre de possibilités $n = C_3^2 \Leftrightarrow n = 3$. Etant donné qu'il y a équiprobabilité entre les évènements on a $p(B) = \frac{n}{\text{Card}(\Omega)} \Leftrightarrow p(B) = \frac{3}{5}$, avec $p(B)$ la probabilité de l'évènement « tirer exactement deux des trois jetons blancs » donc $p(B) = \frac{3}{5}$. (Louange, TC, CEG₁).

Le groupe que nous dénommons « Technique non appropriée (TNA) » est celui des élèves chez lesquels on ne note pas l'intention d'utiliser ni le premier principe de Laplace, ni le deuxième comme dans les exemples suivants :

Soit Ω l'univers. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. $p(\Omega) = C_3^2 \times C_5^2$. $p(\Omega) = 2 \times 4 = 8$. (Rosaline, TD, LJF) ;

Soit Ω l'univers associé à l'expérience aléatoire. $\text{Card}(\Omega) = A_3^3 \times A_3^2 = 3 \times 2 \times 3 = 18$. La probabilité qu'exactly deux des trois jetons tirés blancs est 18. (Félicien, TD₃, CEG₂) ;

Soit $p(B)$ la probabilité de tirer deux jetons blancs et $p(N)$ celle de tirer un jeton noir. $p(B) = C_3^2 = 3$. $p(N) = C_2^1 = 2$. Soit $p(A)$ la probabilité de tirer deux jetons blancs et un jeton noir. On a : $p(A) = p(B) \times p(N) = 3 \times 2 = 6$. (Florentin, TC, CEG₁).

Les proportions des élèves des catégories ci-dessus mentionnées sont indiquées classe par classe dans le tableau ci-après.

	TEC		TE-PC		TE-I		TNA		Pas de réponse		Total	
	Eff.	Pourc.	Eff.	Pourc.	Eff.	Pourc.	Eff.	Pourc.	Eff.	Pourc.	Eff.	Pourc.
LJF	0	0,00%	0	0,00%	14	77,78%	2	11,11%	2	11,11%	18	100%
TD ₃ CEG ₁	0	0,00%	10	23,81%	23	54,76%	8	19,05%	1	2,38%	42	100%
TC CEG ₁	1	7,14%	3	21,43%	6	42,86%	4	28,57%	0	0,00%	14	100%
TD ₃ CEG ₂	0	0,00%	2	7,69%	15	57,69%	9	34,62%	0	0,00%	26	100%
Total	1	1%	15	15%	58	58%	23	23%	3	3%	100	100%

Tableau n°18 : Répartition quantitative des résultats relatifs à l'exercice 4.

La lecture de ce tableau laisse comprendre qu'environ trois quarts des élèves soumis au test ont mobilisé l'élément technologique du premier principe de Laplace pour résoudre l'exercice 4, dont la résolution nécessite effectivement ledit principe. Mais les autres éléments technologiques de la technique TE, dont notamment l'analyse combinatoire, ont fait défaut à la quasi-totalité de ces élèves. La complexité de la situation de dénombrement induite par

l'exercice 4 se fait remarquer à travers la proportion presque nulle des élèves ayant pu dénombrer avec succès les cas favorables et les cas possibles.

2.4.2. Résultats relatifs à l'exercice 6

L'exercice 6 comporte deux questions, dont la deuxième porte sur une expérience aléatoire relativement complexe. Dans le cadre de notre analyse par rapport à l'apprentissage du premier principe de Laplace, nous nous limitons à l'étude de la première question. En tenant compte des techniques relevant du type de tâches « calculer la probabilité d'un événement » et des régularités observées dans les productions des élèves, nous avons réparti leurs réponses à cette question en trois catégories TE-C, TE-I et TNA telles que caractérisées au niveau de l'exercice 4.

La catégorie TE-C comporte les réponses dans lesquelles il a été fait usage avec succès du premier principe de Laplace, tandis que dans la catégorie TE-I sont regroupés les réponses dans lesquelles le premier principe de Laplace est utilisé sans que les cas favorables et possibles ne soient bien dénombrés comme dans les exemples ci-après.

Soit B événement « l'appel du passant tombe sur un numéro en service ».

$$p(B) = \frac{A_3^1}{A_5^2} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}. \text{ (Lucie, TD, LJF).}$$

A : l'événement « l'appel du passant tombe sur un numéro en service au premier essai ».

Soit Ω l'univers. $\text{Card}(\Omega) = 2^5 = 32$. $\text{Card}(A) = A_5^2 = 20$. $p(A) = \frac{20}{32} = \frac{5}{8}$. (Evrard, TD₃, CEG₂).

Soit Ω l'univers associé à cette épreuve. $\text{Card}\Omega = C_2^1 \Rightarrow \text{Card}\Omega = 2$ et $\text{Card}A = 2$.

Soit A cette probabilité : $p(A) = \frac{\text{Card}A}{\text{Card}\Omega} \Rightarrow p(A) = \frac{2}{2} = 1$. D'où $p(A) = 2$. (Raymond, TD₃, CEG₁).

Comme on peut le constater dans ces exemples, l'élément technologique qui fait le plus défaut aux élèves du groupe TE-I est l'analyse combinatoire, aussi bien dans la maîtrise des objets de dénombrement tels que les listes, les arrangements et les combinaisons que dans la maîtrise des outils numériques de dénombrement tels que les nombres A_n^p et C_n^p .

La répartition des élèves dans les différentes catégories est présentée par classe dans le tableau qui suit.

	TE-C		TE-I		TNA		Pas de réponse		Total	
	Eff.	Pourc.	Eff.	Pourc.	Eff.	Pourc.	Eff.	Pourc.	Eff.	Pourc.
LJF	2	11,11%	7	38,89%	4	22,22%	5	27,78%	18	100%
TD ₃ CEG ₁	11	26,19%	8	19,05%	14	33,33%	9	21,43%	42	100%
TC CEG ₁	8	57,14%	2	14,29%	2	14,29%	2	14,29%	14	100%
TD ₃ CEG ₂	7	26,92%	7	26,92%	5	19,23%	7	26,92%	26	100%
Total	28	28%	24	24%	25	25%	23	23%	100	100%

Tableau n°19 : Répartition quantitative des résultats relatifs à l'exercice 6.

De ce tableau, il ressort les remarques suivantes :

- un élève sur deux environ a utilisé le premier principe de Laplace pour résoudre l'exercice 6 ;
- environ le quart des élèves testés ont pu dénombrer correctement les cas possibles et les cas favorables ;
- environ la moitié des élèves testés ignorent le premier principe de Laplace ou n'ont pas pu reconnaître la situation comme celle faisant appel à ce principe.

2.4.3. Bilan des résultats relatifs aux exercices 4 et 6

Sur l'ensemble des deux exercices, il est remarqué trois catégories principales d'élèves face aux situations nécessitant l'utilisation du premier principe de Laplace. Il s'agit des catégories TE-C, TE-I et TNA, que nous avons décrites précédemment.

L'exercice 4 est le plus abordé bien qu'il soit le plus complexe. Ce constat pourrait s'expliquer par le contrat didactique consistant à résoudre dans les classes majoritairement des exercices non contextualisés portant sur les tirages de boules et de jetons et sur les lancers de dés. En fait l'exercice 6 est un problème de la vie courante assimilable à un tirage d'une boule parmi 5 mais qui n'est certainement pas reconnu comme tel par les élèves.

Concernant la catégorie TE-C, composée des élèves qui ont appliqué avec succès le principe en question, on ne note presque pas de réussite au niveau de l'exercice 4, tandis qu'il y a 28% de succès au niveau de l'exercice 6. Ceci pourrait être toujours dû à la complexité de la situation de dénombrement de l'exercice 4 par rapport à celle de l'exercice 6. Au niveau des catégories TE-PC et TE-I, composées des élèves ayant utilisé le premier principe de Laplace sans être en mesure de calculer avec succès la probabilité demandée, il est à remarquer que 73%

des élèves s'y retrouvent pour l'exercice 4 alors qu'ils ne sont que 24% pour l'exercice 6. Ce qui semble confirmer que les élèves ont mieux compris l'exercice 4 que l'exercice 6.

En somme, il nous semble évident qu'en face d'un problème nécessitant l'utilisation du premier principe de Laplace, les élèves ayant une compréhension convenable du problème, optent effectivement et majoritairement pour ce premier. Ceux parmi eux qui n'y arrivent pas, butent simplement sur l'analyse combinatoire, comme l'avaient montré les travaux de Michel Henry (1999, 2010). A côté de la majorité appliquant le principe requis, il y a une minorité, d'environ le quart, qui montrent une certaine non maîtrise des connaissances sur les probabilités.

2.5. Analyse des réponses relatives aux exercices 5 et 7

Les exercices 5 et 7 ont une même structure ; ils comportent deux questions dont la deuxième est une application directe du deuxième principe de Laplace. La première question de chacun de ces exercices fait utiliser aussi l'axiome $p(\Omega)=1$ pour la détermination des probabilités des événements élémentaires, devant être utilisées pour répondre à la deuxième question, notamment dans l'exercice 5. Dans chacun des exercices 5 et 7, les réponses fournies par les élèves aux deux questions seront respectivement analysées du point de vue de l'application du deuxième principe de Laplace.

2.5.1. Analyse des réponses relatives à l'exercice 5

Les réponses des élèves aux deux questions de l'exercice 5 sont réparties, pour chacune des questions, en quatre catégories que nous avons respectivement nommées :

- technique complète d'Addition des probabilités d'événements élémentaires (APEE-C),
- technique incomplète d'Addition des probabilités d'événements élémentaires (APEE-I),
- technique d'équiprobabilité (TE),
- technique non appropriée (TNA).

Ces catégories ont à peu près les mêmes caractéristiques pour les deux questions de l'exercice.

2.5.1.1. Question 1) de l'exercice 5

Concernant la première question de l'exercice 5, qui nécessite l'utilisation du deuxième principe de Laplace et de l'axiome $p(\Omega) = 1$, nous classons dans la catégorie APEE-C les élèves qui ont appliqué avec succès les deux propriétés. À la présentation près, leur proposition de réponse à la question est la résolution experte telle qu'elle est présentée dans la production suivante.

Soit Ω l'univers associé à cet événement.

$$\Omega = \{a;b;c;d\}; p(\Omega)=p(a)+p(b)+p(c)+p(d)$$

$$p(a)=p(b)=p(d)=A; p(c)=4p(a)$$

$$p(\Omega)=1 \Leftrightarrow A+A+4A+A=1 \Leftrightarrow 7A=1 \Leftrightarrow A=\frac{1}{7}.$$

$$\text{Donc } p(a)=p(b)=p(d)=\frac{1}{7}; p(c)=\frac{4}{7} \text{ (Judith, TD, LJF).}$$

Certains élèves, ayant utilisé le deuxième principe de Laplace, ont eu des difficultés algébriques ou numériques et ne sont pas parvenus à la réponse correcte. Ils sont regroupés dans la catégorie APEE-I. La production ci-après est un exemple de réponse de ce groupe d'élèves.

Soit Ω l'univers associé de cette expérience. $\Omega=\{a ; b ; c ; d\}$.

$$P(\Omega)=p(a)+p(b)+p(c)+p(d). \text{ Or } p(c)=4p(a)=4p(b)=4p(d).$$

$$\Leftrightarrow p(c)+4p(c)+4p(c)+4p(c)=1 \Leftrightarrow 13p(c)=1 \Leftrightarrow p(c)=\frac{1}{13}.$$

$$\text{Alors } p(c)=\frac{1}{13}; p(a)=\frac{1}{52}; p(b)=\frac{1}{52}; p(d)=\frac{1}{52} \text{ (Arnaud, TD}_3\text{, CEG}_2\text{).}$$

Les élèves de la catégorie TE sont ceux qui ont utilisé le premier principe de Laplace pour résoudre le problème. La production suivante caractérise bien cette catégorie.

Pour a, b, d, il y a équiprobabilité. Soit $p(A)$ cette probabilité :

$$P(A)=\frac{\text{Card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{3}{4}.$$

Pour c il y a 4 fois plus probabilité que les autres donc on a :

$$P(B)=\frac{\text{Card}(B)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{4(3)}{4} = 3 \text{ (Alban, TD}_3\text{, CEG}_1\text{)}$$

Plus nombreux sont les élèves pour lesquels les productions ne font apparaître aucun des deux premiers principes de Laplace. Nous les avons classés dans la catégorie TNA. Les productions suivantes sont quelques exemples de réponses classées dans cette catégorie.

$$p(a)=C_4^4; p(a)=1$$

Etant donné que a, b et d ont la même probabilité que le dé sur elles alors :

$$p(b)=1; p(d)=1; p(c)=C_4^1 = 4; p(c)=4 \text{ (Dieudonné, TD}_3\text{, CEG}_1\text{).}$$

$$\text{Soit } p \text{ cette probabilité. } P=C_4^3 \times C_3^1 = \frac{3 \times 4}{4 \times 3 \times 2 \times 1} \times \frac{3}{6} = \frac{12}{24} \times \frac{3}{6} = \frac{1}{4}$$

$$\text{Comme c'est 4 fois plus grand que la probabilité on a : } P=2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \text{ (Josué, TC, CEG}_1\text{).}$$

Le tableau suivant donne une idée du poids de chaque catégorie dans chacune des quatre classes.

	APEE-C		APEE-I		TE		TNA		Pas de réponse		Total	
	Eff.	Pourc.	Eff.	Pourc.	Eff.	Pourc.	Eff.	Pourc.	Eff.	Pourc.	Eff.	Pourc.
LJF	3	17%	4	22%	1	6%	7	39%	3	17%	18	100%
TD ₃ CEG ₁	5	12%	2	5%	7	17%	15	36%	13	31%	42	100%
TC CEG ₁	10	71%	1	7%	0	0%	2	14%	1	7%	14	100%
TD ₃ CEG ₂	7	27%	3	12%	0	0%	5	19%	11	42%	26	100%
Total	25	25%	10	10%	8	8%	29	29%	28	28%	100	100%

Tableau n°20 : Répartition quantitative des résultats relatifs à la question 1) de l'exercice 5.

On remarque ici qu'un peu plus du tiers des élèves ont présenté des traces explicites du deuxième principe de Laplace dans la résolution de cette question, avec un grand taux de réussite en terminale C. Le nombre élevé d'élèves n'ayant pas présenté de réponse donne l'impression que le problème ne paraît pas abordable pour un nombre important d'élèves.

2.5.1.2. Question 2) de l'exercice 5

Pour la deuxième question, portant sur l'application directe du deuxième principe de Laplace, les élèves du groupe APEE-C sont ceux qui ont appliqué avec succès le deuxième principe de Laplace. Ils reconnaissent dans un premier temps les événements élémentaires composant l'événement et appliquent ensuite le deuxième principe de Laplace. Les exemples qui suivent sont les productions types de ce groupe.

Soit G l'événement : « le dé repose sur une face dont la marque est une consonne. »

$$p(G) = p(b) + p(c) + p(d) = \frac{1}{7} + \frac{4}{7} + \frac{1}{7}, \text{ donc } p(G) = \frac{6}{7} \text{ (Roméo, TC, CEG}_1\text{).}$$

Soit N l'événement « la marque est une consonne ».

$$P(N) = p(\{b\}) + p(\{c\}) + p(\{d\})$$

$$= \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7}. P(N) = \frac{3}{7} \text{ (Marcelline, TD, LJF).}$$

Bien que la réponse dans la seconde production ne soit pas celle attendue, nous avons considéré son auteur comme faisant partie de la catégorie APEE-C. En effet, l'élève a mis en œuvre toute la praxéologie relative à l'application du deuxième principe de Laplace, en utilisant les résultats qu'il a obtenus au niveau de la première question.

Le groupe APEE-I est composé des élèves ayant appliqué sans succès le deuxième principe de Laplace. En effet la caractérisation fondamentale de ce groupe est l'identification de l'événement dont la probabilité est à calculer, l'élément technologique principal de la technique APEE ne faisant pas défaut aux éléments du groupe. Les traces écrites ci-après le prouvent bien.

Soit A l'événement « le dé repose sur une face dont la marque est une consonne ».

$$A(\{b; c; d\}). p(A)=p(a)+p(b)+p(d) \Rightarrow p(A)=\frac{3}{7} \text{ (Gildas, TD}_3\text{, CEG}_1\text{)}.$$

Le groupe TE est constitué des élèves ayant utilisé le premier principe de Laplace. Bien que les probabilités des événements élémentaires ne soient pas égales, ils ont recouru au premier principe de Laplace, comme on peut le remarquer dans la production suivante.

Désignons par E l'événement « le dé repose sur une face dont la marque est une consonne. » $\text{Card}(E)=3$ et $\text{card}(\Omega)=4$. $p(E) = \frac{\text{card}(E)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{3}{4}$; $p(E) = \frac{3}{4}$ (Roger, TD₃, CEG₂).

La catégorie TNA comprend les élèves dont les réponses n'utilisent aucune des approches de calcul de probabilités. Les réponses proposées par les élèves de ce groupe montrent de leur part une certaine non-maîtrise du calcul des probabilités comme on peut le constater dans les exemples ci-dessous.

$$\Omega = \{b; c; d\} \Leftrightarrow P=4^4 + 4^4 + 4^4 + 4^4 = 1536 \text{ (Alexandre, TD}_3\text{, CEG}_1\text{)}.$$

Les données quantitatives de la répartition des élèves testés par rapport à l'utilisation du deuxième principe de Laplace dans la résolution de l'exercice 5 se résument dans le tableau ci-après.

	APEE-C		APEE-I		TE		TNA		Pas de réponse		Total	
	Eff.	Pourc.	Eff.	Pourc.	Eff.	Pourc.	Eff.	Pourc.	Eff.	Pourc.	Eff.	Pourc.
LJF	1	6%	1	6%	2	11%	5	28%	9	50%	18	100%
TD ₃ CEG ₁	6	14%	1	2%	7	17%	9	21%	19	45%	42	100%
TC CEG ₁	8	57%	0	0%	2	14%	2	14%	2	14%	14	100%
TD ₃ CEG ₂	5	19%	0	0%	2	8%	9	35%	10	38%	26	100%
Total	20	20%	2	2%	13	13%	25	25%	40	40%	100	100%

Tableau n°21 : Répartition quantitative des résultats relatifs à la question 2) de l'exercice 5.

Le nombre d'élèves n'ayant pas répondu à cette deuxième question est encore plus élevé qu'au niveau de la première question. En général, plus des trois quarts des élèves ne maîtrisent pas le deuxième principe de Laplace ou ne reconnaissent pas à travers cette question un problème dont la résolution nécessite ce principe.

2.5.2. Analyse des réponses relatives à l'exercice 7

Les réponses proposées par les élèves au niveau de l'exercice 7 peuvent être classées dans les mêmes catégories que celles identifiées au niveau de l'exercice 5. Elles sont ainsi regroupées dans les catégories APEE-C, APEE-I, TE et TNA.

2.5.2.1. Question 1) de l'exercice 7

Au niveau de la question 1 de l'exercice 7, la catégorie APEE-C comporte les élèves qui ont utilisé avec succès l'axiome $p(\Omega) = 1$ et le deuxième principe de Laplace pour trouver la probabilité de l'événement élémentaire $\{2\}$ comme dans la production suivante.

$$\text{On a : } 0,17+0,64+a+0,01=1 ; 0,82+a=1 ; a=1-0,82 ; a=0,18 \text{ (Godfrid, TC, CEG}_1\text{)}$$

Dans la catégorie APEE-I, nous mettons toutes les réponses, où l'on retrouve des sommes de probabilités d'événements élémentaires. En général il manque dans la résolution des élèves de cette catégorie l'axiome $p(\Omega) = 1$. Pour certains, ce sont des difficultés algébriques qui sont à la base de leurs réponses incorrectes. Les productions suivantes caractérisent bien la catégorie APEE-I au niveau de la question 1 de l'exercice 7.

$$\text{Soit } \Omega \text{ l'univers. } \Omega = \{0,1,2,3\},$$

$$p(\{e_i\})=0,17+0,64+a+0,01=0,82+a.$$

$$3=0,82+a ; a=3-0,82. a=2,18 \text{ (Dorcas, TD, LJF)}$$

$$a=0,17+0,64+0,01; a=0,82 \text{ (Nadège, TD}_3\text{, CEG}_1\text{)}$$

Dans la catégorie TE se trouvent les élèves qui ont appliqué le premier principe de Laplace. Dans ce cas, le numéro 2 est simplement considéré comme le nombre de cas favorables de l'événement élémentaire $\{2\}$, pour aboutir à la résolution incorrecte ci-après.

$$\text{Card}(\Omega)=4; p(e_3)=\frac{\text{Card}(e_3)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{2}{4}; p(e_3)=0,5 \text{ donc } a=0,5 \text{ (Rosaire, TD, LJF).}$$

La catégorie TNA comporte les réponses variées qui ne contiennent pas des traces qui orientent exclusivement vers les deux premiers principes de Laplace, comme l'indique la production d'élève suivante.

$$\text{Soit } \Omega \text{ l'univers associé à cette expérience aléatoire. } \Omega = \{0,1,2,3\}$$

$$p(a)=\frac{2}{4} = 0,65.$$

$$P(X=a)=C_4^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 = 6\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right) = 6\left(\frac{1}{16}\right).$$

$$a=\frac{6}{16} = 0,37 \text{ (Arnaud, TD}_3\text{, CEG}_2\text{)}.$$

L'importance quantitative de chacune des catégories apparaît dans le tableau suivant.

	APEE-C		APEE-I		TE		TNA		Pas de réponse		Total	
	Eff.	Pourc.	Eff.	Pourc.	Eff.	Pourc.	Eff.	Pourc.	Eff.	Pourc.	Eff.	Pourc.
LJF	9	50%	4	22%	2	11%	0	0%	3	17%	18	100%
TD ₃ CEG ₁	25	60%	8	19%	2	5%	0	0%	7	17%	42	100%
TC CEG ₁	13	93%	0	0%	0	0%	0	0%	1	7%	14	100%
TD ₃ CEG ₂	18	69%	1	4%	1	4%	2	8%	4	15%	26	100%
Total	65	65%	13	13%	5	5%	2	2%	15	15%	100	100%

Tableau n°22 : Répartition quantitative des résultats relatifs à la question 1) de l'exercice 7.

Au niveau de la première question de l'exercice 7, près des quatre cinquièmes des élèves semblent avoir reconnu la situation comme celle nécessitant le deuxième principe de Laplace, avec toujours le meilleur taux de réussite en terminale C. Le taux relativement faible des élèves n'ayant pas proposé de réponses montre que le degré de complexité de l'exercice est moindre que celui de l'exercice 5.

2.5.2.2. Question 2) de l'exercice 7

Au niveau de la deuxième question de l'exercice 7, on a observé des réponses de la catégorie APEE-C, dans laquelle le deuxième principe de Laplace est utilisé avec succès. Un deuxième groupe est formé des élèves qui ont appliqué ce principe, mais qui n'ont pas pu identifier correctement l'événement. Ils sont associés à la catégorie APEE-I que l'exemple de production suivante illustre.

Soit D l'événement « le résultat de l'expérience aléatoire soit un nombre impair ».

$$P(D)=p(\{e0\})+ p(\{e1\})+ p(\{e3\})$$

$$P(D)=0,17+0,64+0,01$$

$$P(D)=0,82 \text{ (Gérardine, TD}_3\text{, CEG}_1\text{)}$$

Les élèves qui ont résolu la question 2 en utilisant le premier principe de Laplace sont classés dans la catégorie TE. Ils ont constaté qu'il y a deux cas favorables et quatre cas possibles comme dans l'exemple suivant.

Soit A « événement désignant les nombre impair » et Ω l'univers des éventualités de

l'expérience. On a : $P_A = \frac{\text{Card}A}{\text{Card}\Omega}$; $\text{Card}A=2$, $\text{card}(\Omega)=4$.

$$\text{Donc } P_A = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \text{ (Alexandre, TD}_3\text{, CEG}_1\text{)}.$$

Comme dans l'exercice 5, la catégorie TNA comprend les réponses dans lesquelles on ne note pas l'intention d'utiliser l'un quelconque des deux premiers principes de Laplace. Ce sont des réponses qui manquent pour la plupart de sens comme dans les deux exemples suivants.

Soit Ω une éventualité d'une expérience aléatoire.

$\Omega = \{0; 1; 2; 3\}$. $P(D) = \{0, 1, 3\}$ (Juanita, TD, LJF).

Soit A l'événement. $P(A) = 1 \times 0,64 + 3 \times 0,01 \Rightarrow p(A) = 0,63$ (Léon, TD₃, CEG₂).

La répartition quantitative des élèves dans les différentes catégories est présentée dans le tableau ci-après.

	APEE-C		APEE-I		TE		TNA		Pas de réponse		Total	
	Eff.	Pourc.	Eff.	Pourc.	Eff.	Pourc.	Eff.	Pourc.	Eff.	Pourc.	Eff.	Pourc.
LJF	4	22%	2	11%	4	22%	2	11%	6	33%	18	100%
TD ₃ CEG ₁	8	19%	4	10%	14	33%	6	14%	10	24%	42	100%
TC CEG ₁	6	43%	0	0%	4	29%	1	7%	3	21%	14	100%
TD ₃ CEG ₂	7	27%	1	4%	9	35%	2	8%	7	27%	26	100%
Total	25	25%	7	7%	31	31%	11	11%	26	26%	100	100%

Tableau n°23 : Répartition quantitative des résultats relatifs à la question 2) de l'exercice 7.

Bien qu'ils aient été très nombreux à utiliser le deuxième principe de Laplace au niveau de la première question, très peu parmi les élèves (à peine le tiers) ont reconnu la question 2 comme une situation faisant intervenir ce principe. Ceci laisse croire qu'une bonne partie des élèves n'étaient pas conscients qu'ils utilisaient le deuxième principe de Laplace au niveau de la première question. Ils auraient ainsi simplement reproduit le corrigé d'un type d'exercices résolu en classe sans intégrer dans leur répertoire de connaissance les éléments technologiques dont relève l'exercice. On note également le biais d'équiprobabilité chez un nombre important d'élèves.

2.5.3. Bilan des résultats relatifs aux exercices 5 et 7

Une analyse croisée des réponses des élèves aux exercices 5 et 7 montre que, concernant la détermination des probabilités des événements élémentaires dans la première question, les élèves ont été beaucoup plus nombreux à mobiliser l'élément technologique visé dans l'exercice 7 que dans l'exercice 5. Le constat est le même dans une moindre mesure au niveau de la question 2. Ce qui laisse comprendre à juste titre que l'exercice 7 paraît plus abordable que l'exercice 5. En effet, dans l'exercice 5, les données à traduire en langage probabiliste avant leur exploitation le rendent plus complexe. De façon générale, l'interprétation des tableaux récapitulatifs de la catégorisation des élèves par rapport à l'utilisation du deuxième principe de Laplace nous conduit aux conclusions suivantes :

- les taux bas des élèves ayant utilisé le deuxième principe et les taux élevés d'élèves ayant utilisé une technique non appropriée ou n'ayant pas donné de réponse au niveau de la deuxième question de chacun des deux exercices montrent qu'un grand nombre d'élèves n'arrivent pas à reconnaître les problèmes dont la résolution nécessite le deuxième principe de Laplace ou méconnaissent le principe ;
- la grande majorité de ceux qui reconnaissent comme telles les situations faisant intervenir le deuxième principe de Laplace, l'appliquent avec succès ;
- pour la minorité d'élèves qui applique sans succès le deuxième principe de Laplace, l'identification incorrecte de l'événement est à la base de cet échec ;
- face à des problèmes portant sur le deuxième principe de Laplace, un nombre non négligeable d'élèves utilisent à tort le premier principe de Laplace.

Ces constats nous amènent à faire l'hypothèse que dans les conditions actuelles de l'enseignement des probabilités au Bénin, le deuxième principe de Laplace n'est pas mobilisé dans le calcul des probabilités par un grand nombre d'élèves.

3. Bilan de l'apprentissage du calcul élémentaire des probabilités

Dans cette section, nous faisons une analyse globale des résultats relatifs aux exercices du test en vue d'évaluer les rapports personnels des élèves au calcul élémentaire des probabilités. À cet effet, nous faisons spécifiquement le choix d'analyser :

- le rapport personnel à la notion d'expérience aléatoire ;
- le rapport au premier principe de Laplace ;
- le rapport personnel au deuxième principe de Laplace.

Pour y parvenir, nous allons combiner les résultats relatifs à plusieurs exercices portant sur chacune des notions évoquées.

3.1. Rapport à la notion d'expérience aléatoire

Pour étudier le rapport personnel des élèves à la notion d'expérience aléatoire, nous combinons les résultats relatifs à la définition de l'expérience aléatoire, ceux relatifs aux conceptions du hasard et ceux relatifs à la reconnaissance de l'expérience aléatoire dans un problème de

probabilité. Nous établissons une grille d'analyse pouvant nous permettre de classer les rapports à cette notion.

Rappelons que nous avons identifié sept types de définitions D₁, D₂, D₃, D₄, D₅, D₆, D₇ de l'expérience aléatoire au niveau de la première question de l'exercice 1. Deux de ces types de définitions, D₁ et D₄, sont conformes à celles enseignées dans les classes, qui sont elles aussi conformes à celles de l'institution savante. Sans être complètement conformes aux définitions enseignées, les types de définitions D₂ et D₅ sont proches de D₁ et D₄. De même, l'étude des conceptions du hasard chez les élèves, dans l'exercice 2, nous a permis de distinguer quatre types de rapports personnels à la notion de hasard que nous avons nommés respectivement « Tirage au sort », « Compensation », « Constance » et « Non affirmée ». Le type de rapports « Tirage au sort » est celui qui exprime la conception correcte de hasard. Aussi avons-nous identifié, au niveau de la reconnaissance de l'expérience aléatoire dans un problème de probabilité, cinq catégories de réponses que nous avons respectivement nommées « Aléatoire », « Hasard », « Probabilités », « Événements » et « Non aléatoire ». La catégorie « Aléatoire » est ici celle qui exprime un rapport conforme à la notion visée, et les élèves de la catégorie « Hasard » ont connaissance de la caractéristique fondamentale de l'expérience aléatoire. Nous qualifions de « catégories correctes » les types de définitions D₁, D₂, D₄ et D₅ au niveau de l'exercice 1, le type de rapports « tirage au sort » au niveau de l'exercice 2 et les catégories « Aléatoire » et « Hasard » au niveau de l'exercice 3.

La prise en compte simultanée de tous ces types de réponses aux exercices indiqués nous permet de définir quatre types de rapports personnels à la notion d'expérience aléatoire chez les élèves, qui ont composé à notre test, après avoir suivi les cours de probabilités tels qu'il est prévu par les programmes béninois en vigueur. Il s'agit des rapports personnels que nous nommons respectivement :

- « rapport complet à la notion d'expérience aléatoire (RC-EA) » ;
- « rapport presque complet à la notion d'expérience aléatoire (RPC-EA) » ;
- « rapport partiel à la notion d'expérience aléatoire (RP-EA) » ;
- « rapport absence à la notion d'expérience aléatoire (RA-EA) ».

Le rapport RC-EA est celui développé par les élèves qui sont classés dans les catégories correctes pour les trois exercices. Les élèves ayant le rapport personnel RPC-EA sont ceux qui sont classés dans deux catégories correctes pour les trois exercices ; le rapport RP-EA est celui

des élèves chez lesquels il est observé une catégorie correcte sur les trois exercices, tandis que les élèves n'ayant été classés dans aucune catégorie correcte pour les trois exercices sont du rapport personnel RA-EA.

Cette catégorisation des rapports personnels à la notion d'expérience aléatoire constitue ainsi une grille d'analyse de l'apprentissage de la notion d'expérience aléatoire, qui pourra servir à faire une étude comparative de cet apprentissage avant et après la réalisation de l'ingénierie didactique en cours d'étude (chap. VIII). Concernant l'apprentissage de la notion d'expérience aléatoire avant l'élaboration et la réalisation de cette ingénierie, nous présentons dans le tableau ci-dessous la répartition des élèves dans les différents types de rapports personnels précédemment définis.

	RC-EA		RPC-EA		RP-EA		RA-EA		Total	
	Eff.	Pourc.	Eff.	Pourc.	Eff.	Pourc.	Eff.	Pourc.	Eff.	Pourc.
LJF	0	0,00%	6	33,33%	6	33,33%	6	33,33%	18	100%
TD ₃ CEG ₁	0	0,00%	6	14,29%	11	26,19%	25	59,52%	42	100%
TC CEG ₁	0	0,00%	5	35,71%	5	35,71%	4	28,57%	14	100%
TD ₃ CEG ₂	3	11,54%	4	15,38%	6	23,08%	13	50,00%	26	100%
Total	3	3%	21	21%	28	28%	48	48%	100	100%

Tableau n°24 : Répartition quantitative des types de rapports personnels à l'expérience aléatoire.

En considérant que les types de rapports RC-EA et RPC-EA sont globalement les seuls conformes au rapport institutionnel, il ressort de l'analyse de ce tableau que :

- moins du quart des élèves concernés par notre étude ont un rapport personnel adéquation à la notion d'expérience aléatoire ;
- près de la moitié des élèves semblent n'avoir qu'un minimum de connaissance sur la notion d'expérience aléatoire.

Fort de ces constats, nous sommes en mesure de faire l'hypothèse que dans les conditions actuelles de l'enseignement des probabilités au Bénin, l'apprentissage de la notion d'expérience aléatoire n'est pas adéquat pour un plus grand nombre d'élèves.

3.2. Rapports personnels au premier principe de Laplace

Trois exercices du test ont porté directement sur le premier principe de Laplace. Il s'agit de l'exercice 1 à travers sa question 3.d), l'exercice 4 et l'exercice 6. Prises séparément, les réponses proposées par les élèves à chacun de ces exercices ne permettent pas d'identifier objectivement le rapport des élèves au premier principe de Laplace. En effet, il y a des élèves

ayant donné l'énoncé correct du premier principe de Laplace et qui n'ont pas pu reconnaître les situations proposées comme celles nécessitant l'utilisation de ce principe ; de même qu'il y en a, qui n'ayant pas montré une connaissance effective du premier principe de Laplace, l'ont quand même appliqué, avec ou sans succès, dans la résolution des problèmes. La combinaison des réponses apportées par les élèves aux trois exercices, dont il est question dans cette partie du travail, nous permet de déterminer le rapport des élèves au premier principe de Laplace.

3.2.1. Les types de rapports personnels au premier principe de Laplace

Les éléments technologiques de la technique TE relevant du type de tâches « calculer la probabilité d'un événement » et relative au premier principe de Laplace sont : le vocabulaire des probabilités, l'analyse combinatoire et l'énoncé du premier principe de Laplace. En nous basant sur ces éléments technologiques, nous pouvons dégager quatre types de rapports au premier principe de Laplace, que nous dénommons respectivement :

- « rapport complet au premier principe de Laplace (RC-PPL) »,
- « rapport presque complet au premier principe de Laplace (RPC-PPL) »,
- « rapport partiel au premier principe de Laplace (RP-PPL) »,
- « rapport absence du premier principe de Laplace (RA-PPL) ».

Le rapport RC-PPL est celui développé par les élèves ayant une bonne maîtrise de tous les éléments technologiques de la technique TE. La bonne maîtrise des outils d'analyse combinatoire chez ces élèves fait qu'ils arrivent à bout de la plupart des problèmes dont la résolution nécessite le premier principe de Laplace. Ce type de rapports est de notre point de vue celui conforme au rapport institutionnel au calcul des probabilités dans les situations d'équiprobabilité.

Le type de rapports RPC-PPL est caractérisé par une bonne maîtrise du vocabulaire des probabilités, du premier principe de Laplace et une maîtrise partielle de l'analyse combinatoire. Les limites des élèves, ayant ce type de rapports en analyse combinatoire, font qu'ils ne réussissent que les problèmes portant sur des situations simples de dénombrement telles que celles assimilables par exemple, soit au tirage d'un objet parmi un nombre donné, soit au lancé d'un dé une seule fois, soit le choix simultané de plusieurs objets. Bien que proche du rapport RC-PPL, nous estimons que le type de rapports RPC-PPL n'est pas totalement conforme au rapport institutionnel du calcul des probabilités dans les situations d'équiprobabilité. Nous le qualifions en conséquence de rapport presque conforme.

Le type de rapports RP-PPL n'est caractérisé que par l'assurance de la connaissance par l'élève du premier principe de Laplace, l'analyse combinatoire et peut-être le vocabulaire des probabilités lui faisant défaut. Le défaut de maîtrise de l'analyse combinatoire conduit l'élève ayant le rapport RP-PPL à ne pas réussir les problèmes dont la résolution passe par ce principe. À notre avis le type de rapport RP-PPL n'est pas conforme au rapport institutionnel du calcul des probabilités dans les situations d'équiprobabilité.

Le type de rapports RA-PPL est caractérisé par l'absence des traces du premier principe de Laplace. Des trois éléments technologiques de la technique TE, seul le vocabulaire des probabilités peut être à la limite remarquable au niveau de ce type de rapports, qui n'est pas non plus pour nous conforme au rapport institutionnel au calcul des probabilités dans des situations d'équiprobabilité.

3.2.2. Étude quantitative du rapport des élèves au premier principe de Laplace

Nous venons d'établir, dans une analyse qualitative des réponses des élèves aux exercices du test relatifs au premier principe de Laplace, les types de rapports à ce principe. Nous en avons observés quatre dont un conforme au rapport au calcul des probabilités dans des situations d'équiprobabilité. Nous en avons jugé un presque conforme et deux autres, à nos yeux, non conformes à ce rapport institutionnel. Pour le classement des élèves dans ces différents types de rapports personnels, nous proposons une grille basée sur la distinction des « catégories correctes » parmi les types de réponses de chaque exercice. Rappelons à cet effet qu'au niveau de la question 3.d) de l'exercice 1, nous avons enregistré les catégories PPL, DPL, EEE, ANA tandis qu'au niveau des exercices 4 et 6, les productions sont fondamentalement classées dans les catégories TE-C, TE-PC, TE-I et TNA. Nous qualifions de « catégories correctes » :

- la catégorie PPL au niveau de la question 3.d) de l'exercice 1 ;
- les catégories TE-C et TE-PC au niveau de l'exercice 4 ;
- la catégorie TE-C au niveau de l'exercice 6.

Compte tenu de la diversité des catégories observées, nous disons qu'un élève a le rapport RC-PPL lorsqu'il est classé dans les catégories correctes au niveau des trois exercices. L'élève de rapport RPC-PPL est celui qui est classé dans les catégories correctes au niveau de deux exercices sur les trois. L'élève qui a le rapport RP-PPL est celui qui n'est ni de RC-PPL, ni de RPC-PPL, mais chez qui il est retrouvé des traces du premier principe de Laplace, soit à travers l'énoncé de ce principe au niveau de l'exercice 1, soit à travers la présence de la formule

traduisant ce principe dans les exercices 4 et 6. Quant au rapport RA-PPL, il est caractérisé par l'absence du premier de Laplace dans l'ensemble des réponses aux trois exercices. Le tableau ci-après est un récapitulatif de cette répartition au niveau des élèves concernés par notre travail.

	RC-PPL		RPC-PPL		RP-PPL		RA-PPL		Total	
	Eff.	Pourc.	Eff.	Pourc.	Eff.	Pourc.	Eff.	Pourc.	Eff.	Pourc.
LJF	0	0,00%	2	11,11%	14	77,78%	2	11,11%	18	100%
TD ₃ CEG ₁	1	2,38%	12	28,57%	23	54,76%	6	14,29%	42	100%
TC CEG ₁	3	21,43%	5	35,71%	3	21,43%	3	21,43%	14	100%
TD ₃ CEG ₂	0	0,00%	9	34,62%	13	50,00%	4	15,38%	26	100%
Total	4	4%	28	28%	53	53%	15	15%	100	100%

Tableau n°25 : Répartition des types de rapports personnels au premier principe de Laplace.

La lecture de ce tableau nous amène globalement aux conclusions suivantes pour ce qui concerne l'apprentissage du premier principe de Laplace :

- une proportion importante des élèves interrogés (85%) mobilise le premier principe de Laplace, soit en tant qu'objet, soit en tant qu'outil, alors qu'une minorité (17%) semble méconnaître ce principe ;
- une stricte minorité de 4% des élèves ont un rapport adéquat au calcul de probabilité selon la technique d'équiprobabilité ;
- la non maîtrise de l'analyse combinatoire est la principale cause du manque de réussite des élèves dans les problèmes dont la résolution nécessite l'utilisation du premier principe de Laplace.
- Ces données confirment bien les résultats de Michel Henry (1999) selon lesquels l'enseignement du calcul des probabilités basé sur l'approche classique conduit à un échec caractérisé par le fait que les élèves butent sur l'analyse combinatoire.

3.3. Rapport personnel au deuxième principe de Laplace

Après l'analyse qualitative et quantitative des réponses proposées par les élèves aux questions du test relatives au deuxième principe de Laplace, nous finalisons l'étude de l'apprentissage de ce principe en répertoriant les rapports personnels. Ceci se fera à partir d'une analyse qui prend en compte globalement les réponses à la question 3.c) de l'exercice 1, et aux exercices 5 et 7.

3.3.1. Les types de rapports au deuxième principe de Laplace

Les éléments technologiques de la technique APEE relevant du type de tâches « calculer la probabilité d'un événement » sont : le vocabulaire des probabilités et l'énoncé du deuxième principe de Laplace. En nous basant sur ces éléments technologiques, nous pouvons dégager trois types de rapports au deuxième principe de Laplace, que nous dénommons respectivement :

- « rapport complet au deuxième principe de Laplace (RC-DPL) » :
- « rapport presque complet au deuxième principe de Laplace (RPC-DPL) » ;
- « rapport partiel au deuxième principe de Laplace (RP-DPL) » ;
- « rapport absence du deuxième principe de Laplace (RA-DPL) ».

Le « rapport complet au deuxième principe de Laplace (RC-DPL) » est celui observé chez les élèves ayant une bonne connaissance de tous les éléments technologiques de la technique APEE. Ils maîtrisent l'énoncé du deuxième principe de Laplace, reconnaissent les situations nécessitant l'utilisation de ce principe et l'appliquent avec succès. Le type de rapports « RC-DPL » est naturellement conforme au rapport institutionnel au calcul des probabilités selon le deuxième principe de Laplace. Le type de rapports « RPC-DPL » est développé par les élèves ayant aussi une bonne maîtrise des éléments technologique de la technique APEE, mais font une identification ou une caractérisation incorrecte de l'événement dont la probabilité est à calculer. Les éléments technologiques étant maîtrisés chez l'élève ayant le rapport personnel RPC-DPL, nous estimons que ce rapport peut être considéré comme conforme au rapport de l'institution d'enseignement au deuxième principe de Laplace. Le type de rapports « RP-DPL » est caractérisé par la connaissance de l'énoncé du deuxième principe, mais surtout par la non-reconnaissance des situations portant sur ce principe. De notre point de vue, ce type de rapports n'est pas conforme au rapport institutionnel du calcul des probabilités suivant le deuxième principe de Laplace.

Le type de rapports « RA-DPL » est celui développé par l'élève qui n'a produit aucune trace du deuxième principe de Laplace dans ses réponses aux questions relatives au deuxième principe de Laplace. Ce qui manque fondamentalement à ce type de rapports, c'est l'élément technologique principal de la technique APEE, qui en est une relevant du type de tâches « calculer la probabilité d'un événement ». Seul le vocabulaire des probabilités peut être remarquable au niveau de ce type de rapports. Le type de rapports RA-DPL n'est pas conforme au rapport institutionnel au calcul des probabilités selon le deuxième principe de Laplace.

3.3.2. Étude quantitative du rapport des élèves au deuxième principe de Laplace

Après la classification précédente des types de rapports au deuxième principe de Laplace, nous passons à présent à la pondération de chacun des types de rapports au niveau des élèves ayant subi le test dans le cadre de la présente étude. Il s'agit de définir une grille d'identification des élèves de chaque type de rapports afin de déterminer leur nombre. Il est alors utile de rappeler que concernant l'étude de l'apprentissage du deuxième principe de Laplace, les catégories d'élèves enregistrées au niveau de la question 3.c) de l'exercice 1 sont DPL, PPL et ANA. Celles observées au niveau de la deuxième question des exercices 5 et 7 sont APEE-C, APEE-I, TE et TNA. Pour cette étude, nous déclarons « correctes » la catégorie DPL au niveau de l'exercice 1 et les catégories APEE-C et APEE-I au niveau de la deuxième question de chacun des exercices 5 et 7.

L'élève identifié comme ayant le type de rapports RC-DPL est celui qui est classé dans les catégories correctes des trois questions visées. Le type de rapports RPC-DPL est observable à partir du classement dans les catégories correctes au niveau de deux questions sur les trois. L'élève du type de rapports RP-DPL est celui qui est classé dans les catégories correctes au niveau d'une question sur les trois prises en compte pour l'étude ou dans la catégorie APEE-I pour l'un au moins des exercices 5 et 7. Quant à l'élève du type de rapport RA-DPL, il est celui qui n'a laissé aucune trace écrite traduisant le deuxième principe de Laplace dans ses réponses aux trois questions évoquées du test. La répartition quantitative des types de rapports identifiés dans la population d'élèves concernés par notre travail est récapitulée dans le tableau ci-après.

	RC-DPL		RPC-DPL		RP-DPL		RA-DPL		Total	
	Eff.	Pourc.	Eff.	Pourc.	Eff.	Pourc.	Eff.	Pourc.	Eff.	Pourc.
LJF	0	0,00%	6	33,33%	10	55,56%	2	11,11%	18	100%
TD ₃ CEG ₁	3	7,14%	11	26,19%	13	30,95%	15	35,71%	42	100%
TC CEG ₁	4	28,57%	3	21,43%	5	35,71%	2	14,29%	14	100%
TD ₃ CEG ₂	5	19,23%	2	7,69%	15	57,69%	4	15,38%	26	100%
Total	12	12%	22	22%	43	43%	23	23%	100	100%

Tableau n°26 : Répartition des types de rapports personnels au deuxième principe de Laplace.

À la lecture du tableau nous arrivons aux conclusions suivantes concernant l'apprentissage du deuxième principe de Laplace :

- un nombre important d'élèves (les trois quarts environ) ont une connaissance certaine du deuxième principe de Laplace en tant qu'objet ou outil (Douady, 1984) ;

- près du quart des élèves ne semblent méconnaître le deuxième principe de Laplace ;
- près du tiers de la population des élèves testés ont un rapport adéquat au calcul de probabilité selon la technique APEE relative au deuxième principe de Laplace.

En bref, bien que le deuxième principe de Laplace ne soit pas explicitement inscrit dans les programmes de probabilités, il est mobilisé par un grand nombre d'élèves, dont une bonne partie sait l'appliquer convenablement.

3.4. Synthèse sur l'apprentissage du calcul élémentaire des probabilités

Après les études séparées du rapport des élèves à la notion d'expérience aléatoire et aux deux premiers principes de Laplace, nous nous proposons de récapituler dans cette sous-section le rapport des élèves au calcul élémentaire des probabilités. Ceci nous permettra de mettre notamment en exergue le bilan comparé des apprentissages des deux principes de Laplace. En effet, mis à part les propriétés liant les probabilités de plusieurs événements, établies dans le cadre de l'axiomatique de Kolmogorov, le calcul de la probabilité d'un événement se fonde sur l'un de ces deux principes. Il importe de préciser que l'approche fréquentiste ne sert qu'à estimer la probabilité d'un événement afin de donner à cette notion son sens mathématique.

Dans les conditions actuelles de l'enseignement des probabilités au Bénin et à l'étape actuelle de notre étude, les résultats suivantes semblent se préciser par rapport à l'apprentissage du calcul des probabilités :

- les élèves arrivent dans leur majorité à reconnaître aussi bien les problèmes dont la résolution nécessite le premier principe de Laplace que ceux pouvant faire intervenir le deuxième principe de Laplace ; toutefois ils sont plus nombreux dans le premier cas que dans le second ;
- à chacun des deux principes, les élèves peuvent avoir soit un rapport personnel complet, soit un rapport personnel presque complet, soit un rapport personnel partiel, un rapport partiel, soit une absence de rapport ;
- seule une minorité des élèves ont une connaissance parfaite des techniques de calcul de probabilités basées sur les deux premiers principes de Laplace ; mais cette minorité est plus stricte dans le cas du premier principe que dans celui du deuxième ;
- l'analyse combinatoire fait défaut au grand nombre de ceux qui appliquent sans succès le premier principe de Laplace tandis que le défaut d'appréhension des éventualités

composant les événements est à la base de l'échec de ceux qui appliquent sans succès le deuxième principe de Laplace.

En somme, on peut constater de ces résultats que le rapport au calcul des probabilités, aussi bien à partir du premier principe de Laplace qu'avec le deuxième principe, n'est pas conforme au rapport institutionnel pour un grand nombre des élèves. Les élèves ont une meilleure connaissance du premier principe de Laplace que du deuxième, mais réussissent mieux l'application de ce dernier.

Conclusion

L'étude réalisée dans ce chapitre a porté sur les apprentissages de la notion d'expérience aléatoire, de quelques concepts probabilistes de base, de quelques propriétés découlant de l'axiomatique de Kolmogorov et des deux premiers principes de Laplace. À propos de la notion d'expérience aléatoire, l'énoncé de sa définition n'est connu que par une minorité stricte d'élèves, le rapport au hasard du « tirage au sort » requis pour l'enseignement des probabilités au secondaire n'est adéquat que chez un nombre réduit d'élèves, de même que la reconnaissance de l'expérience aléatoire dans un problème de probabilité n'a été également possible que chez une minorité. La prise en compte de tous ces constats dans une analyse plus globale nous a conduit à la conclusion qu'il n'y a pas apprentissage de la notion d'expérience aléatoire pour un grand nombre d'élèves ayant suivi l'enseignement des probabilités dans le système éducatif béninois. C'est là un premier effet de l'apprentissage des probabilités au Bénin.

Concernant les connaissances déclaratives mémorisables par rapport à la typologie des événements, les élèves en ont montré une maîtrise relative. Nous en avons pour preuve, la reconnaissance par un nombre assez grand d'élèves des caractéristiques d'événements incompatibles, d'événements contraires et d'événements équiprobables dans des questions à choix multiples. Aussi sont-ils nombreux à connaître les axiomes de la définition axiomatique de la probabilité selon Kolmogorov, ainsi que les propriétés élémentaires liant les probabilités de plusieurs événements telles que les formules $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$ et $p(A) + p(\bar{A}) = 1$. Ainsi l'enseignement des probabilités dans le système éducatif béninois semble favorable à la mémorisation de la typologie des événements et des formules élémentaires de calcul des probabilités.

Pour ce qui concerne le calcul des probabilités à partir des formules liant les probabilités de plusieurs événements, un petit nombre d'élèves est arrivé à appliquer la méthode convenable avec succès. Les difficultés d'ordre numérique, les difficultés d'interprétation des données et le

choix des formules non convenables sont à la base de l'échec d'une autre catégorie d'élèves ayant une bonne connaissance de la méthode de calcul de probabilité à partir des formules. Une troisième partie d'élèves ne semble pas avoir un rapport adéquat au calcul des probabilités à partir des propriétés issues de l'axiomatique de Kolmogorov.

Concernant le calcul des propriétés à partir des deux premiers principes de Laplace, un bon apprentissage de ces deux principes n'est pas assuré pour un grand nombre d'élèves. En effet, bien que les élèves aient massivement une bonne connaissance de ces deux principes, ils n'arrivent pas toujours à les appliquer avec succès. Pour le premier principe de Laplace, la non maîtrise de l'analyse combinatoire est la principale cause de la non-conformité du rapport des élèves au rapport de l'institution d'enseignement, tandis que l'identification incorrecte des éventualités de l'événement dont la probabilité est à calculer explique l'échec relatif dans l'application du deuxième principe de Laplace.

En somme, dans les conditions actuelles de l'enseignement des probabilités au Bénin, nous pouvons faire l'hypothèse que par rapport à la typologie des événements, et aux axiomes et propriétés découlant de l'axiomatique de Kolmogorov, le rapport personnel des élèves semble conforme au rapport institutionnel. Toutefois, pour le grand nombre d'élèves, il n'y a apprentissage ni de la notion d'expérience aléatoire, ni du calcul des probabilités à partir des propriétés élémentaires issues de l'axiomatique de Kolmogorov, ni des deux premiers principes de Laplace. L'ingénierie didactique que nous proposons réaliser dans la troisième partie de la thèse aura entre autres pour but de mettre en place un processus d'enseignement des probabilités afin de rendre plus conformes les rapports personnels des élèves au calcul élémentaire des probabilités en général.

TROISIÈME PARTIE :
**Une ingénierie didactique pour
enseigner le calcul élémentaire des
probabilités dans le cadre d'une
démarche expérimentale**

Chap. VI : Élaboration de l'ingénierie

Introduction

Les programmes de mathématiques en vigueur prévoient que l'enseignement des probabilités démarre par l'étude du vocabulaire des probabilités dans lequel il est essentiellement défini les notions d'expérience aléatoire, d'univers et d'événements. Ils prévoient aussi une introduction de la notion de probabilité conforme à l'axiomatique de Kolmogorov débouchant sur le premier principe de Laplace. Notre travail a pour but l'amélioration de l'apprentissage du calcul des probabilités à travers l'expérimentation de nouvelles conditions d'enseignement en vue de l'appréhension par l'élève des concepts qui entrent en jeu dans le calcul élémentaire des probabilités.

Notre expérimentation, qui est prévue pour être réalisée en classe de seconde, prend en compte le fait que la statistique descriptive est étudiée dans cette classe et que l'analyse combinatoire n'y est pas étudiée (DIP., 2009a). Elle se basera sur des situations aléatoires familières simples et tiendra compte des analyses préalables réalisées dans nos travaux précédents et notamment des travaux de Brousseau relative à l'ingénierie didactique sur la statistique et les probabilités (Brousseau, 1974, 1975, 2005).

1. Objectifs et contraintes

1.1. Les objectifs et les hypothèses

L'ingénierie vise précisément à donner du sens à des concepts fondamentaux du domaine des probabilités tels que la notion de hasard et celle de la probabilité d'un événement. Plus spécifiquement, elle permettra de :

- surmonter les obstacles à la notion de hasard en vue d'installer la notion d'expérience aléatoire et des notions connexes ;
- construire la notion de probabilité d'un événement telle que définie par Jacques Bernoulli à travers la loi des grands nombres en estimant cette probabilité dans une démarche expérimentale ;
- rencontrer une première modélisation d'une expérience aléatoire simple ;
- mettre en valeur les deux premiers principes de Laplace.

En effet, les analyses préalables relatives à l'enseignement des probabilités montrent l'existence des difficultés au niveau de l'apprentissage de la notion d'expérience aléatoire et du

calcul des probabilités (Chap. V, 3.). Concernant la notion d'expérience aléatoire, une conception erronée du hasard attendue chez les enfants du stade préopératoire s'est fait remarquer au niveau des élèves des classes terminales au Bénin. Cette conception assimilable à un obstacle ontogénique pourrait être doublée d'un obstacle culturel dû à certaine mentalité qualifiée de primitive, qui caractériserait entre autres les sociétés africaines au Sud du Sahara (Levy Bruhl, 1960). En surmontant ces obstacles et l'obstacle épistémologique au calcul des probabilités que constitue naturellement la notion de hasard (Chrétien C. et Gaud D., 1998), nous pourrions faire évoluer le rapport des élèves aux notions d'expérience aléatoire et des autres concepts connexes. Il importe toutefois de nuancer que la perception du hasard qu'un élève peut avoir, aussi incorrecte qu'elle pourrait être, n'handicape en rien son apprentissage du calcul des probabilités. Du côté du calcul des probabilités, l'enseignement à partir de l'axiomatique de Kolmogorov est abstrait et ne permet pas de donner un sens bien profond et partagé par tous les élèves à la notion de probabilité d'un événement dans l'enseignement secondaire. Nous conjecturons que l'estimation de cette dernière à l'aide d'une démarche expérimentale basée sur l'approche fréquentiste permettra de construire cette notion en donnant une signification précise aux probabilités des événements élémentaires intervenant dans le deuxième principe de Laplace. À partir de ce principe, les propriétés essentielles du calcul des probabilités, puis le premier principe de Laplace peuvent être mis en place.

1.2. Les conditions et les contraintes

Il va de soi que l'expérimentation d'une ingénierie didactique doit se faire dans des conditions favorables à la construction effective des savoirs visés, et tenir compte d'un certain nombre de contraintes dues à l'environnement des actants et au système éducatif. Nous nous inscrivons dans le cadre de la TAD pour admettre comme contraintes, les conditions que nous n'avons pas le pouvoir de modifier (Chevallard, 2010, p. 1).

On dira en effet que telle condition est une contrainte pour une personne occupant une telle position si, ès qualités, cette personne n'a pas le pouvoir de modifier (dans certaines limites) ladite condition.

Cependant, à titre expérimental, nous allons modifier certaines contraintes pour favoriser l'enseignement et l'apprentissage, tout en restant réaliste par rapport aux objectifs de l'institution scolaire.

Dans la suite, nous fixons les conditions de l'expérimentation de l'ingénierie didactique, tout en précisant les contraintes auxquelles nous serons soumis.

1.2.1. Les conditions de l'expérimentation

Les conditions que nous nous fixons pour l'expérimentation sont relatives au niveau d'études des élèves (la classe), au nombre de classes, aux effectifs par classe et au profil du professeur. Nous souhaitons réaliser cette ingénierie dans une classe de seconde ou de première, bien que les programmes de ces niveaux d'études ne prévoient pas l'enseignement des probabilités. Notre choix s'explique par le fait que les élèves de ces classes du second cycle n'ont pas d'examen à passer en fin d'année. Initialement nous avons voulu faire l'expérimentation dans des classes de terminale, où les probabilités constituent un objet d'enseignement. Mais puisque les élèves de ce niveau sont préoccupés par la préparation du baccalauréat, nous ne sommes pas certain que ces élèves et même leurs professeurs soient assez patients pour supporter un changement de méthode d'enseignement, qui pourrait leur prendre assez de temps. En plus de cela, avec le taux élevé d'échec au baccalauréat (en 2016 ce taux est 46,83% pour la série C et 71,17% pour la série D), il est certain qu'on rencontrerait en classes terminales des élèves, qui ont déjà une première rencontre avec les probabilités ; ce qui pourrait biaiser notre expérimentation. Nous pensons donc que non seulement les élèves des classes de seconde et de première seront plus disponibles que leurs camarades des classes terminales, mais aussi ils sont supposés n'avoir pas encore étudié les probabilités.

La statistique est prévue par les programmes pour être enseignée dans ces deux classes, et le dénombrement est un objet d'enseignement de la classe de première. Par conséquent, l'expérimentation en classe de première peut donner l'occasion d'exploiter les outils de dénombrement étudiés, tandis qu'en classe de seconde, elle permettra de faire émerger par exemple des techniques de dénombrement à partir des tableaux et des arbres de choix. Ce faisant, notre travail pourrait participer, dans la perspective d'éventuel changement de programmes, à éclairer la noosphère sur la possibilité de commencer plus tôt l'enseignement des probabilités. C'est d'ailleurs une tendance mondiale d'enseigner les probabilités au collège, comme en France (Jacquet F., Henry M., 2014), ou au primaire comme au Canada et en Italie (Gattuso L., Vermette S. 2013). Ce qui se justifie pleinement par les résultats de l'ingénierie didactique de Brousseau (1974), expérimentée avec succès au primaire.

Pour une bonne observation des élèves, il serait souhaitable que l'effectif des classes d'expérimentation soit raisonnable, par exemple vingt élèves organisés en cinq groupes de quatre élèves. Pour obtenir un tel effectif avec cette organisation de la classe, nous sommes obligés de jouer sur deux contraintes : le nombre d'élèves par groupe et l'effectif pléthorique des classes. Dans le premier cas, la pratique actuelle des programmes par compétences en

vigueur, fait organiser les classes en groupes de six élèves. Nous allons ramener ce nombre à quatre pour notre expérimentation. Concernant la deuxième contrainte, il est important de savoir qu'à l'exception des classes de la série C, les effectifs sont ordinairement pléthoriques, pouvant s'estimer en moyenne dans les classes de seconde et première à cinquante pour la série D. Une sélection réaliste sera donc nécessaire en série D afin d'avoir un effectif plus réduit. Un échantillonnage par la méthode de stratification sera privilégié pour réduire l'effectif, et dans ce cas, une sensibilisation des élèves s'impose pour éviter que les élèves non sélectionnés se sentent frustrés.

Le profil du professeur qu'on pourrait souhaiter pour l'expérimentation est celui d'un enseignant qui a un bon rapport au calcul des probabilités et, qui par son expérience a une bonne connaissance des élèves et du milieu scolaire. C'est dire que le professeur idéal pour notre étude doit avoir le certificat d'aptitude au professorat de l'enseignement secondaire (CAPES) ou le brevet d'aptitude au professorat de l'enseignement secondaire (BAPES), couplé chacun d'une licence en mathématique. Cette dernière précision vient du fait qu'il existe dans notre système scolaire des professeurs de mathématiques titulaires du BAPES ou du CAPES, qui n'ont pas une formation initiale en mathématiques. Le profil que nous venons de décrire est justement rare dans le système scolaire béninois, et plus rare encore dans les classes de seconde et de première, surtout en série D. Pour cette raison, il sera indispensable de prévoir plusieurs séances de travail avec les professeurs expérimentateurs, afin de renforcer éventuellement leur capacité en calcul des probabilités d'une part, d'établir d'autre part avec eux non pas seulement un contrat de conduite de classe et de collaboration, mais de partager aussi avec eux l'expérimentation faite par Brousseau en 1974, comme l'a fait Briand (2005) dans sa reprise de l'ingénierie de Brousseau portant sur les concepts probabilistes.

1.2.2. Les contraintes

Les contraintes principales que nous prenons en compte dans ce travail sont de deux ordres, à savoir : les contraintes par rapport à l'organisation de l'enseignement et celles relatives aux savoirs à enseigner.

1.2.2.1. Organisation de l'enseignement des mathématiques

Les programmes par les compétences actuellement en vigueur au Bénin recommandent que les notions mathématiques soient abordées dans le cadre d'une situation d'apprentissage (SA) intégrant un nombre important d'objets mathématiques. Pour chacune des classes du second cycle de l'enseignement secondaire général, les contenus notionnels sont regroupés en trois situations d'apprentissage portant dans l'ordre les titres : « configurations de l'espace »,

« organisation des données » et « lieux géométriques dans le plan » (DIP., 2011a). Chaque situation d'apprentissage est subdivisée en des séquences d'apprentissage, dont les titres sont ceux des chapitres étudiés dans les programmes par objectifs, qui ont précédé les programmes par les compétences. Une situation problème dénommée « situation de départ » introduit chaque situation d'apprentissage. Elle doit être exploitée au début de la SA pour permettre à l'élève « d'exprimer sa perception du problème », selon les propres termes des instructions officielles (DIP, 2009a et DIP, 2009b). Aussi le professeur doit-il s'en inspirer pour élaborer au début de chaque séquence d'apprentissage une activité pour faire découvrir aux élèves la notion objet d'enseignement de la séquence.

En classe de seconde des séries scientifiques par exemple, la situation d'apprentissage « Organisation des données », comporte les séquences suivantes (DIP, 2009a) :

- Généralités sur les fonctions ;
- Applications ;
- Statistique ;
- Polynômes ;
- Fractions rationnelles.

En classe de première des séries scientifiques, la même situation d'apprentissage comporte les séquences (DIP, 2010a) :

- Équations et Inéquations dans \mathbb{R} , systèmes d'équations linéaires ;
- Statistiques ;
- Dénombrement ;
- Fonctions numériques d'une variable réelle ;
- Suites numériques.

Il est bien clair que les probabilités ne figurent pas parmi les séquences des situations d'apprentissage ci-dessus présentées. Cependant, nous allons les y inclure à titre expérimental en nous servant des contenus notionnels contenus dans le programme des classes terminales des séries scientifiques. Les objets d'enseignement contenus dans notre expérimentation pourraient logiquement s'inscrire dans la deuxième situation d'apprentissage. Toutefois pour éviter des confusions entre les termes spécifiques des programmes et les termes scientifiques requis, et pour ainsi faciliter une compréhension de l'utilisation de notre cadre théorique, nous allons nous passer de cette exigence du cadre institutionnel, en évitant l'utilisation des termes de situation

de départ, de situation d'apprentissage et de séquence d'apprentissage tels qu'ils sont conçus dans les programmes des classes de seconde et de première.

1.2.2.2. Les savoirs à enseigner

L'institution éducative au Bénin n'a prévu l'enseignement des probabilités ni dans les classes de seconde, ni dans les classes de première. Si le dénombrement n'est pas un objet d'enseignement dans les classes de seconde des séries scientifiques, il est tout de même enseigné dans les classes premières de toutes les séries classiques. Les programmes des séries C et D de cette classe proposent dans le chapeau du dénombrement les contenus notionnels suivants (DIP, 2010a) :

- dénombrement de parties d'ensemble fini ;
- dénombrement de listes, dénombrement d'arrangements ;
- dénombrement de permutations ;
- dénombrement de combinaisons ;
- triangle de Pascal ;
- formule du binôme de Newton.

Certaines notions sur les ensembles sont recommandées au début de la séquence d'apprentissage portant sur le dénombrement (DIP, 2010a, p. 32).

Ici ce sera l'occasion de présenter certaines notions sur les ensembles (réunion, intersection, différence, différence symétrique, partition d'ensembles). Toutefois ces notions ne sont pas exigibles des apprenants.

En dehors du dénombrement, la statistique fait partie des objets d'enseignement inscrits dans les programmes des classes premières des séries C et D avec les contenus notionnels communs ci-après (DIP, 2010a ; DIP, 2010b ; DIP, 2010c) :

- regroupement en classes de séries statistiques ;
- représentations graphiques (effectifs et fréquences cumulées) ;
- caractéristiques de position (classe modale, mode, moyenne, médiane) ;
- caractéristiques de dispersion (variance, écart-type) ;
- séries statistiques à deux caractères (organisation des données, nuage de points, covariance, ajustement linéaire).

La première C étudie la statistique à deux variables en plus des contenus notionnels ci-dessus énumérés. Quant aux classes de seconde des séries C et D, l'étude de la statistique comprend :

- la présentation d'une série statistique ;
- les effectifs cumulés, les fréquences cumulées ;
- les représentations graphiques (polygone des effectifs, polygone des effectifs cumulés, polygone des fréquences, polygone des fréquences cumulées, histogramme, diagramme cumulatif des fréquences) ;
- les caractéristiques de position (mode, moyenne, médiane, quartile) ;
- les caractéristiques de dispersion (étendue, variance, écart moyen absolu, écart - type).

Les instructions officielles n'ayant donc pas prévu l'enseignement du calcul des probabilités dans les classes de seconde et de première des séries C et D, nous faisons le choix, dans le cadre de notre expérimentation, d'adapter à ces programmes des classes terminales des mêmes séries par rapport au calcul élémentaire des probabilités. À ce niveau, ces programmes recommandent l'étude du vocabulaire des probabilités et celle de la probabilité d'un événement. Les notions prévues dans le cadre du vocabulaire des probabilités sont celles d'expérience aléatoire, d'univers et d'événement comme le précisent les guides d'études du programme des classes terminales C et D (DIP, 2011a, p. 47).

Faire utiliser le vocabulaire des probabilités : épreuve (expérience aléatoire), univers, événement, événement élémentaire, événement certain, événement impossible, événements incompatibles, événement contraire d'un événement, éventualité, système complet d'événements, événement "A et B" événement "A ou B".

Si aucune précision n'est donnée dans les programmes sur le contenu des notions composant le « vocabulaire des probabilités », le choix de l'axiomatique de Kolmogorov apparaît par contre clairement au niveau de la définition d'une probabilité (Ibid.).

Soit Ω l'univers associé à une expérience aléatoire. Une probabilité sur Ω est une application p de $\mathcal{F}(\Omega)$ vers $[0, 1]$ qui, à tout événement A de Ω associe le nombre réel $p(A)$ appelé probabilité de l'événement A et qui vérifie les conditions suivantes :

- $p(\Omega) = 1$;
- Si A et B sont deux événements incompatibles, alors $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.

Les programmes prévoient, en dehors des deux axiomes fondamentaux précédents, la démonstration et l'utilisation des propriétés suivantes (ibid.).

Soit p une probabilité définie sur un univers Ω , A et B deux événements de Ω .

- $p(A) + p(\bar{A}) = 1$;
- Si $A \subset B$ alors $p(A) \leq p(B)$;
- $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$;

- Si A_1, A_2, \dots, A_n ($n \geq 2$) sont des événements deux à deux incompatibles, alors

$$p\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n p(A_i).$$

Le premier principe de Laplace ferme la marche des contenus notionnels du calcul élémentaire des probabilités, avec notamment la définition de deux événements équiprobables pour une probabilité p donnée et la démonstration de ce principe, énoncé tel qu'il suit (ibid.).

Soit p une probabilité définie sur un univers fini non vide Ω .

Si tous les événements élémentaires de Ω sont équiprobables, alors pour tout événement

$$A \text{ de } \Omega, \text{ on a : } p(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}.$$

Pour notre expérimentation, nous faisons le choix d'appliquer cette partie du programme de probabilité des classes terminales des séries C et D à notre classe d'expérimentation, en apportant deux modifications essentielles. La première concerne l'ajout du travail de la notion de hasard, qui n'est pas prévu par les programmes actuels mais qui est nécessaire compte tenu de l'existence de certains obstacles à cette notion au niveau des élèves. La deuxième modification est relative à la définition de la probabilité. Elle est actuellement donnée suivant l'axiomatique de Kolmogorov. Nous proposons de définir la probabilité à partir du deuxième principe de Laplace, après le travail du concept de probabilité et une rencontre des élèves avec la modélisation d'une expérience aléatoire. Ainsi les contenus notionnels qui entrent en jeu dans notre expérimentation se détaillent comme il suit :

- la notion de hasard, dans le but de déstabiliser les obstacles à cette notion ;
- le langage des probabilités, qui découlera du travail de la notion de hasard ;
- le concept de probabilité d'un événement, dont l'étude se fera à partir d'une démarche expérimentale ;
- la probabilité, qui sera définie à partir du deuxième principe de Laplace ;
- les propriétés relatives au calcul élémentaire des probabilités dont le premier principe de Laplace.

1.2.3. La classe d'expérimentation et le professeur expérimentateur

Les conditions d'expérimentation relatives au profil du professeur et au niveau d'étude nous ont permis d'opérer des choix par rapport à la classe d'expérimentation et au professeur expérimentateur.

1.2.3.1. La classe d'expérimentation

Compte tenu de l'importance de l'analyse combinatoire dans le calcul des probabilités et du fait qu'elle devrait être étudiée dans les classes premières des séries scientifiques au cours du premier trimestre de l'année scolaire, nous avons fait dans un premier temps le choix de travailler dans une classe de première scientifique. En 2016-2017, nous étions en service au collège d'enseignement général (CEG) d'Agblangandan, dans la commune de Sèmè-Podji, située au Sud-Est du Bénin et frontalière de Cotonou. Notre premier choix était alors l'une des trois classes premières scientifiques de cet établissement, notamment la classe de première C. Mais la situation géographique de la classe de première C au sein de l'établissement, faisant d'elle une classe très bruyante, à cause de sa proximité avec le terrain de sport, nous a amené à très tôt l'exclure. Par ailleurs, le sérieux d'un professeur que nous avons particulièrement observé et qui tient une classe de première D au CEG Djassin à Porto-Novo, nous a motivé à sélectionner cette classe comme pouvant être une classe d'expérimentation. Non seulement le professeur de cette classe et ceux des autres classes premières scientifiques du CEG Agblangandan ne vérifient pas entièrement le profil indiqué plus haut pour l'expérimentation, mais il s'est fait aussi que jusqu'à la fin du deuxième trimestre, ils n'ont pas pu aborder l'étude du dénombrement dans leurs classes respectives. Pour nous alors, il est préférable d'enseigner les probabilités en classe de seconde, où l'étude du dénombrement n'est pas prévue, plutôt que de les enseigner en classe première sans l'étude du dénombrement. C'est alors que nous avons fait un deuxième choix, celui de réaliser notre expérimentation en seconde C, dont le professeur a heureusement le profil requis.

Notre classe d'expérimentation est donc la seconde C du CEG Agblangandan de l'année scolaire 2016-2017. Elle est composée de six filles et de onze garçons dont l'âge varie entre 14 ans et 17 ans. Bien que les dix-sept élèves aient été sélectionnés spécialement pour faire la série C, ils constituent une classe normale, où les élèves sont dans l'ensemble d'un niveau moyen. Il leur est programmé par semaine deux séances de mathématique d'une durée de trois heures chacune. Pour ne pas perturber l'exécution du programme de mathématiques prescrit pour la classe, nos séances d'expérimentations devraient se dérouler à leurs temps libres et quelquefois les jours non ouvrables de l'école.

1.2.3.2. Le professeur expérimentateur

Le professeur expérimentateur est naturellement le professeur de mathématiques affecté par l'administration du CEG Agblangandan à la seconde C de l'année scolaire 2016-2017. C'est un jeune professeur formé à l'école normale supérieure de Natitingou, spécialisée dans la

formation des professeurs dans les disciplines scientifiques. Notre expérimentateur, recruté dans la fonction publique en 2014 comme professeur adjoint, était dans sa troisième année d'enseignement en 2016-2017. En dehors de la seconde C, il a en charge une classe de troisième et une classe de terminale D. La formation académique et la formation professionnelle donnée dans son école de formation lui confèrent le profil requis pour la réalisation de notre ingénierie didactique. Cependant, des rencontres sont prévues pour échanger avec lui sur l'épistémologie du calcul des probabilités et sur l'expérimentation réalisée par Brousseau en 1974.

2. Organisation de l'ingénierie

2.1. Présentation globale

Pour atteindre les objectifs énumérés plus haut (1.1.), il nous faudra utiliser des situations pertinentes pouvant nous permettre d'aborder chacun des concepts probabilistes fondamentaux visés par notre étude, notamment les concepts de hasard, d'expérience aléatoire, d'événement, de probabilité d'un événement et pour construire les deux principes de Laplace. Au niveau de la construction de notion de probabilité d'un événement, nous nous proposons d'adapter à notre ingénierie la situation fondamentale, conçue par Brousseau (1974) dans le cadre de son ingénierie sur l'enseignement de la statistique et des probabilités, tout en prenant en compte le contexte social des élèves et les conditions d'expérimentation, qui ne sont pas nécessairement les mêmes que ceux de Brousseau. En fait, l'expérimentation de Brousseau, dont le but implicite est de définir une statistique (Brousseau, 2005), a conduit à la production de la notion de probabilité d'un événement et au calcul élémentaire des probabilités (Brousseau, 1975) chez des enfants du cours moyen deuxième année du primaire. Cette situation fondamentale a permis à Brousseau de construire sans une institutionnalisation formelle, la notion de probabilité d'un événement suivant la loi faible des grands nombres d'une part, et le premier principe de Laplace d'autre part. L'efficacité de la situation fondamentale de Brousseau ayant été prouvée par plusieurs autres chercheurs dont notamment Briand (2005), Dhieb (2009) et Vu Nhu (2009), qui l'ont exploitée dans leurs travaux respectifs, nous la trouvons suffisamment pertinente pour la construction de la notion de probabilité d'un événement. Briand semble même en faire une recommandation pour l'enseignement des phénomènes aléatoires (Briand, 2005, p. 278).

Lors de la recherche de 1975 sur la « découverte des lois du hasard à l'élémentaire », la communauté des chercheurs de l'époque a pu penser que ce travail allait être rapidement repris, réétudié. Il était envisageable que ce travail et les autres de l'époque, à l'école élémentaire, dans le même domaine, allaient peser sur les décideurs afin que

l'enseignement propose une première approche des phénomènes aléatoire à l'école. Tel ne fut pas le cas et ces travaux furent ignorés.

Cette recommandation de Briand, ajoutée au fait que les travaux didactiques n'ont encore jusque-là relevé des insuffisances au niveau de la situation fondamentale utilisée par Brousseau, justifie pleinement notre adaptation de la situation fondamentale de Brousseau à notre ingénierie. Nous l'avons d'ailleurs préférée à une situation fondamentale que nous avons-nous-même essayé de concevoir à partir des lancers de dé et qui pourrait aussi conduire à la construction de la notion de probabilité.

Compte tenu du fait qu'il sera fait régulièrement référence à la situation fondamentale initiale de Brousseau relative à la construction de la notion de probabilité, nous la nommons dans toute la suite « situation fondamentale de référence », autant que nous qualifions d'« expérimentation de référence », l'expérimentation de Brousseau dans laquelle cette situation est exploitée.

Nous organisons la présente ingénierie en six situations didactiques, dont les trois premières portent sur la construction des concepts probabilistes, la quatrième sur l'institutionnalisation des propriétés fondamentales du calcul élémentaire des probabilités et la cinquième sur le calcul pratique de probabilités. Quant à la sixième situation, elle est une situation d'évaluation. Les trois premières situations correspondent aux activités d'étude et de recherche (AER), caractérisées par la succession dans un ordre indifférent des trois premiers moments didactiques (Chevallard, 1999). La première situation, décomposée en trois phases, permettra de travailler les obstacles éventuels à la notion de hasard, en vue de mettre en place les premiers concepts probabilistes, ceux relatifs aux notions d'expérience aléatoire et d'événement. Subdivisée également en trois phases, la deuxième situation s'appuie sur la situation de référence de Brousseau pour faire observer la stabilisation de la fréquence relative d'un événement et pour faire émerger le premier principe de Laplace. La troisième situation sera consacrée à la construction du deuxième principe de Laplace. Sa finalité est la définition de la probabilité à partir du deuxième principe de Laplace. La quatrième situation servira à décontextualiser les notions de probabilités construites afin de démontrer les propriétés relatives au calcul élémentaire des probabilités. Une séance d'exercices sera organisée dans la cinquième situation en vue de travailler les organisations mathématiques mises en place dans les situations précédentes. La sixième situation est un post test, auquel les élèves seront soumis en vue de l'étude de l'évolution de leur rapport personnel aux objets probabilistes et au calcul élémentaire des probabilités.

2.2. Présentation des situations de l'ingénierie

2.2.1. Situation 1

2.2.1.1. Objectif spécifique

La situation 1 a pour objectif de surmonter les obstacles à la notion de hasard. L'enjeu pour les élèves est le hasard du « tirage au sort » présent dans les problèmes de probabilités dans le secondaire. Elle permettra à l'élève d'exprimer dans un premier temps son rapport personnel initial à la notion de hasard, puis de faire évoluer éventuellement ce rapport vers celui requis pour le calcul élémentaire des probabilités. Elle donnera aussi l'occasion au professeur de faire émerger les notions d'expérience aléatoire et d'événement.

2.2.1.2. Contexte et problème étudié

La situation 1 pose le problème de la détermination des résultats possibles d'une expérience aléatoire dans un contexte de lancers successifs d'un cauri. Elle est découpée en trois phases, dans lesquelles le problème est décomposé en des questions.

Contexte de la situation 1

Dansou est un élève brillant en classe terminale d'une série scientifique. À l'approche de l'examen du baccalauréat, sa maman lui demande, comme il est de coutume dans sa famille, de consulter le Fâ¹⁶ chez le devin Gouton, en vue de savoir s'il réussira à son examen. Pour la consultation, ce dernier remet un cauri à Dansou qu'il lui demande de lancer quatre fois de suite afin d'observer la face supérieure après immobilisation du cauri. En effet, le cauri est composé de deux faces dont une plane (P) et une courbe (C).

2.2.1.3. Les phases de la situation 1

Phase 1.1

Après avoir présenté le contexte de la situation aux élèves, le professeur remet à ces derniers un texte comportant le contexte et les questions suivantes, auxquelles ils répondront individuellement puis en petits groupes.

Question Q₁ : Quel résultat obtiendrait Dansou, s'il lance le cauri pour la première fois ?
Argumente ta réponse.

Question Q₂ : Dansou a lancé le cauri trois fois et a obtenu les résultats CCC. Quelle face obtiendrait-il s'il lance le cauri une quatrième fois ? Argumente ta réponse.

¹⁶Le Fâ est une géomancie divinatoire pratiquée dans les pays du Golfe du Bénin, notamment au Nigéria et au Bénin.

Phase 1.2

Dans cette phase, il sera remis un cauri à chaque groupe suivi du texte ci-dessous.

Vous disposez dans vos groupes d'un cauri que vous pouvez lancer autant de fois que vous le souhaitez pour répondre en groupe à nouveau aux questions Q₁ et Q₂ précédentes.

Phase 1.3

Disposant toujours des cauris, les élèves répondront aux questions Q₃ et Q₄ suivantes dans un travail en groupe.

Dansou lance quatre fois de suite le cauri comme le devin le lui a demandé.

Question Q₃ : Écris tous les résultats possibles que Dansou pourrait avoir.

Question Q₄ : Écris les résultats possibles que Dansou pourrait avoir dans chacun des cas suivants :

1^{er} cas : Dansou obtient deux fois la face (P),

2^{ème} cas : Dansou obtient au moins deux fois la face (P),

3^{ème} cas : Dansou obtient au plus une fois la face (P).

2.2.1.4. Institutionnalisation

L'institutionnalisation ici consistera à faire définir les notions d'expérience aléatoire, d'éventualité, d'univers des possibles, d'événement, et à préciser la typologie des événements. Concernant la notion d'expérience aléatoire, nous proposons de combler le vide didactique (Bronner, 1997) constaté au niveau des instructions officielles (chap. IV, 1.6.2) en privilégiant le modèle que nous avons qualifié de didactique. Ce choix a l'intérêt de fixer les enseignants sur le contenu réel de la notion d'expérience aléatoire et d'éviter que la définition d'expérience aléatoire varie d'un enseignant à l'autre, comme nous l'avons constaté dans nos analyses préalables (chap. IV, 1.4.2). De façon précise, le professeur fera la synthèse de la situation autour des définitions ci-après.

- *On appelle expérience aléatoire toute expérience dont on ne peut pas prévoir avec certitude le résultat, mais dont on peut connaître tous les résultats possibles.*
- *Tout résultat possible d'une expérience aléatoire est appelé éventualité.*
- *L'ensemble des éventualités d'une expérience aléatoire est appelé l'univers des éventualités de cette expérience aléatoire.*
- *Un événement d'un univers des éventualités Ω est toute partie de Ω .*

- Un événement est dit réalisé lorsque le résultat de l'expérience aléatoire est un élément de cet événement.

Conformément aux programmes des classes terminales, que nous avons adaptés à notre classe d'expérimentation, le professeur s'appuiera sur la situation pour présenter la typologie des événements par la clarification des notions d'événement impossible, d'événement certain, d'événement élémentaire, d'événements incompatibles et d'événements contraires. L'univers des éventualités d'une expérience aléatoire étant désigné par Ω , ces notions peuvent être définies comme ci-après.

- L'ensemble vide \emptyset est appelé événement impossible ; il n'est jamais réalisé.
- L'univers Ω est l'univers certain ; il est toujours réalisé.
- On appelle événement élémentaire, tout événement composé d'une seule éventualité.
- Pour deux événements A et B de Ω , on appelle respectivement événement « A et B » et événement « A ou B », les sous-ensembles $A \cap B$ et $A \cup B$ de Ω .
- Deux événements A et B de Ω sont dits incompatibles lorsque l'événement « A et B » est l'événement impossible, c'est-à-dire $A \cap B = \emptyset$.
- Deux événements A et B de Ω sont dits contraires lorsque l'événement « A et B » est impossible et que l'événement « A ou B » est l'événement certain, c'est-à-dire $A \cap B = \emptyset$ et $A \cup B = \Omega$.

2.2.1.5. Organisation de l'enseignement/apprentissage

La situation 1 alterne dans chacune de ses phases les modalités de travail individuel, de travail en groupes et de travail collectif. Son déroulement sera organisé comme il est indiqué dans le tableau ci-après, dans lequel TI, TG et TC désignent respectivement travail individuel, travail en groupe et travail collectif.

Phase	Type de tâches	Topos du professeur	Topos de l'élève	Modalités de travail	Durée prévue
Phase 1.1	Prévoir le résultat d'une expérience aléatoire.	Présente des cauris, le contexte et les questions de la phase.	Exprime son rapport initial à la notion de hasard.	TI (10 min)	60 min
				TG (10 min)	
				TC (40 min)	
Phase 1.2	Prévoir le résultat d'une expérience aléatoire.	Remet un cauri à chaque groupe d'élèves, présente les	Lance le cauri un certain nombre de fois puis exprime	TG (5 min)	30 min
				TC	

		questions de la phase et dirige le débat.	son rapport à la notion de hasard	(25 min)	
Phase 1.3	Déterminer les éventualités d'un événement	Présente les questions de la phase et dirige le débat qui débouchera sur l'institutionnalisation	Lance éventuellement le cauri puis donne les résultats possibles	TG (15 min)	60 min
				TC (45 min)	
		Fais le bilan et institutionnalise	Prend notes	TC (30 min)	30 min
Durée totale					180 min

Tableau n°27 : Organisation de l'enseignement-apprentissage suivant la situation 1.

2.2.2. Situation 2

2.2.2.1. Objectif spécifique

Cette situation aborde le deuxième objectif de l'ingénierie, qui est celui de la construction de la notion de probabilité d'un événement. Il s'agira de faire constater à l'élève, la stabilisation à la longue de la fréquence d'un événement particulièrement visé par la situation autour d'un nombre réel positif compris entre 0 et 1. Ce qui conduira à la définition de la probabilité d'un événement en lien avec la loi des grands nombres. Une reprise de la méthode de construction de la notion de probabilité d'un événement devrait permettre aux élèves d'avoir une première rencontre avec le premier principe de Laplace, étant donné que l'expérimentation est réalisée dans des conditions supposées d'équiprobabilité.

2.2.2.2. Contexte et problème étudié

Basée sur une approche expérimentale importante, la deuxième situation est étudiée dans un contexte d'étude statistique de séries de tirages d'un objet dans une urne. Cette étude est motivée par la détermination de la composition de l'urne, qui en est le problème posé. L'urne est une bouteille contenant des billes de deux couleurs différentes comme dans l'expérimentation de référence de Brousseau.

Les bouteilles sont opaques, suffisamment profondes et fermées à l'aide d'un bouchon non transparent. La partie supérieure de chaque bouteille est étroite et comporte une bande transparente, de telle sorte qu'il ne soit possible de voir une seule bille par retournement de la bouteille à travers la bande transparente.

2.2.2.3. Décomposition de la situation en phases

La situation 2 est subdivisée en trois phases nécessitant un milieu matériel constitué de bouteilles opaques contenant des billes de deux couleurs différentes. Ce milieu matériel est physique dans les deux premières phases et virtuel dans la troisième.

Phase 2.1

Dans cette première phase de la deuxième situation, le chercheur prépare cinq bouteilles contenant les mêmes nombres de billes blanches et noires (par exemple trois billes blanches et deux billes noires). Cette composition des bouteilles ne sera connue ni du professeur ni des élèves. Ces bouteilles seront remises aux cinq groupes de la classe afin qu'ils en déterminent la composition, à partir de la consigne suivante.

Vous disposez dans votre groupe d'une bouteille contenant cinq billes dont certaines sont de couleur blanche et d'autres de couleur noire. Il n'est possible de voir par retournement de la bouteille qu'une seule bille à la fois à travers la partie supérieure et transparente de la bouteille. Vous pouvez retourner la bouteille autant de fois que vous voulez pour observer à chaque fois une bille, mais vous ne devez pas ouvrir la bouteille.

Question Q₅ : Combien de billes blanches y a-t-il dans la bouteille de votre groupe ?

Cette phase se déroulera en deux temps. Les élèves seront organisés dans un premier temps en groupe pour déterminer une méthode pouvant leur permettre de trouver la composition de la bouteille. Ceci passera nécessairement par la réalisation de tirages de billes par retournement de la bouteille. Les propositions de réponses des groupes seront discutées dans un deuxième temps de travail collectif, au cours duquel les élèves peuvent être relancés plusieurs fois dans le but de répondre à la question posée. Les résultats des tirages effectués par les membres de chaque groupe ainsi que les interprétations qu'ils en font seront notés au tableau et analysés par l'ensemble des élèves.

La phase sera clôturée par la réalisation des tableaux de fréquences des séries de tirages cumulés des cinq groupes et la représentation de ces dernières par des polygones de fréquence sur un même graphique, ainsi que la construction du polygone de fréquence de la série statistique du cumul des tirages des cinq groupes. Les polygones de fréquence seront interprétés en vue de l'estimation du nombre réel autour duquel les fréquences relatives oscillent. Le professeur passera alors à l'institutionnalisation de la définition de la probabilité selon la loi des grands nombres.

Phase 2.2

Dans cette phase, cinq bouteilles de compositions deux-à-deux différentes, préparées par le chercheur, seront remises à chacun des cinq groupes. Les élèves seront alors invités à déterminer les compositions des bouteilles de leurs groupes respectifs à l'aide de la consigne ci-dessous.

Comme dans la phase précédente, vous disposez dans votre groupe d'une bouteille contenant cinq billes dont certaines sont de couleur blanche et d'autres de couleur noire. On considère l'expérience aléatoire « tirer une bille dans la bouteille » et l'événement A : « la bille tirée est blanche ».

Question Q₆ : Estimez la probabilité de l'événement A, puis déduisez-en le nombre de billes blanches contenues dans la bouteille de votre groupe.

Cette deuxième phase de la situation 2 se déroulera dans un premier temps en travail en groupe, pendant lequel les élèves devraient spontanément effectuer suffisamment de séries de tirages pour observer l'évolution de la fréquence d'observation des billes blanches. Dans un deuxième temps, les résultats obtenus dans les groupes seront discutés en travail collectif.

Phase 2.3

Les résultats de la phase précédente vont être rappelés et consignés dans un tableau comportant pour chaque groupe le nombre de billes blanches contenues dans la bouteille et la valeur autour de laquelle la fréquence a oscillé. Ce tableau préconçu par le chercheur et réalisé par le professeur avec les élèves dans un temps de travail collectif sera une composante du milieu de la phase complété par la consigne ci-après.

Vous avez dans le tableau ci-dessus les compositions possibles d'une bouteille contenant cinq billes de couleurs blanche et noire, ainsi que la valeur autour de laquelle oscille la fréquence pour chaque composition donnée.

Question Q₇ : Réalise un tableau semblable au tableau précédent dans chacun des cas suivants :

- a) Le nombre de billes contenues dans la bouteille est 8 ;
- b) Le nombre de billes contenues dans la bouteille est 7.

Cette phase se déroulera en travail individuel puis en travail en groupe. À l'issue du débat, le professeur fera conjecturer la formule du premier principe de Laplace qu'il institutionnalisera.

2.2.2.4. Institutionnalisation

A l'issue de la phase 2.1 de la situation 2, le professeur formalisera la notion de probabilité d'un événement en se basant sur la loi des grands nombres. Il mettra surtout l'accent sur le fait que les fréquences relatives sont des estimations de la probabilité recherchée. La notion de la probabilité d'un événement peut être donnée comme dans l'énoncé suivant.

Selon un théorème appelé la loi des grands nombres, les fréquences d'observation d'un événement A pour de grands nombres de réalisations d'une expérience aléatoire, oscillent autour d'un nombre réel compris entre 0 et 1. Ce nombre est la probabilité de l'événement A pour une seule réalisation de cette expérience aléatoire. On la note p(A).

La fréquence de réalisation de l'événement A pour un nombre n donné de réalisations de l'expérience aléatoire n'est pas la probabilité de l'événement A. Elle est plutôt une estimation de cette probabilité.

La fin de la phase 2.3 et donc de la situation 2 sera sanctionnée par la conjecture du premier principe de Laplace, que le professeur pourra faire énoncer comme suit.

Dans le cas particulier où tous les événements élémentaires ont la même probabilité d'être réalisés, la probabilité d'un événement A s'obtient par la formule :

$$p(A) = \frac{\text{Nombre de cas favorables à } A}{\text{Nombre de cas possibles}}$$

2.2.2.5. Organisation de l'enseignement/apprentissage

Le déroulement de la situation 2 sera organisé comme il est résumé dans le tableau ci-après.

Phase	Type de tâches	Topos du professeur	Topos de l'élève	Modalités de travail	Durée prévue
Phase 2.1	Déterminer la composition d'une bouteille opaque contenant des billes de couleurs différentes.	Présente les bouteilles, leur fonctionnement, les remet aux élèves, précise la consigne de la phase et dirige le débat.	Observe successivement les billes en retournant la bouteille	TG (10 min)	120 min
				TC (110 min)	
Phase 2.2	Déterminer la composition d'une bouteille opaque	Remet les bouteilles aux élèves, précise la	Réalise des tirages de billes par	TG (30 min)	60 min

	contenant des billes de couleurs différentes.	consigne de la phase et dirige le débat.	retournement de bouteille.	TC (30 min)	
Phase 2.3	Déterminer les compositions possibles d'une bouteille contenant des billes de couleurs différentes. Indiquer la valeur vers laquelle tend la fréquence relative d'un événement	Présente les questions de la phase et dirige le débat.	Propose de réponse aux questions posées.	TI (10 min)	30 min
				TG (10 min)	
				TC (10 min)	
		Fais le bilan et institutionnalise	Prend notes	TC (15 min)	15 min
Durée totale					225 min

Tableau n°28 : Organisation de l'enseignement-apprentissage suivant la situation 2.

2.2.3. Situation 3

2.2.3.1. Objectif spécifique

Cette situation permettra aux élèves de faire une première rencontre avec le deuxième principe de Laplace par l'estimation de la probabilité d'un événement précis, pouvant nécessiter celle des probabilités des événements élémentaires qui composent cet événement. En fait, l'étude de l'estimation de la probabilité d'un événement relatif à une expérience aléatoire donnée pourrait conduire les élèves à estimer d'abord les probabilités des événements élémentaires.

2.2.3.2. Contexte et problème posé

Le contexte que nous avons choisi pour la situation 3 est le lancer simultané de quatre cauris en vue de l'estimation de la probabilité d'un événement donné qui n'est pas élémentaire. L'estimation de la probabilité de cet événement est le problème posé.

Contexte de la situation 3

Le contexte à présenter aux élèves comme une composante du milieu se présente comme ci-après.

Pour confirmer les résultats d'une consultation chez le devin Gouton, à propos de sa réussite ou non à l'examen, Dansou se rend chez un second devin nommé Adandé. Ce dernier dispose de quatre cauris qu'il doit lancer simultanément, chaque cauri étant composé de deux surfaces :

une plane (P) et une courbe (C). Selon Adandé, l'obtention de deux faces (P) suppose que Dansou réussira à son examen avec une bonne mention ; avec quatre faces (P), il réussira avec la mention assez bien ; l'obtention de trois faces (P) annonce la réussite de Dansou avec la mention passable ; dans les autres cas, il faudra beaucoup de sacrifices à Dansou pour réussir.

2.2.3.3. Consigne

La situation 3, composée de deux phases dont implicitement la phase d'institutionnalisation, est administrée à partir de la consigne suivante.

Vous disposez avec vos camarades d'un gobelet contenant quatre cauris et d'un plateau. Le gobelet servira à agiter les quatre cauris avant de les jeter dans le plateau. Pour chaque cauri, la face C est obtenue lorsque le cauri repose de façon stable sur la face plane ; la face P est supposée obtenue dans tous les autres cas.

Question Q₈ : Estimez la probabilité que Dansou réussisse à son examen sans avoir de sacrifice à faire.

La question Q₈ peut être complétée par une question Q₈' si les élèves n'arrivent pas à faire le lien entre la probabilité demandée et les probabilités des événements élémentaires qui composent l'événement. Cette question se précise comme suit :

Question Q₈' : Donnez les estimations des probabilités des événements 2P2C, 3P1C et 4P, puis trouvez une relation entre ces estimations de probabilités et l'estimation de la probabilité de l'événement A.

2.2.3.4. Institutionnalisation

À l'issue de la situation 3, le professeur fera définir la probabilité de la manière suivante (Hamaty, E. A. et al, 1999, p. 301).

Soit une expérience aléatoire d'univers des éventualités Ω . On dit que l'on a défini une probabilité p sur Ω lorsque, à tout événement A de Ω , on peut associer un nombre réel $p(A)$ appelé probabilité de A et vérifiant les conditions suivantes :

- *la probabilité d'un événement est comprise entre 0 et 1 ;*
- *la probabilité de l'événement certain est 1 ;*
- *la probabilité d'un événement est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le composent.*

2.2.3.5. Organisation de l'enseignement/apprentissage

Le déroulement de la situation 3 sera organisé comme il est indiqué dans le tableau ci-après.

Phase ou situation	Type de tâches	Topos du professeur	Topos de l'élève	Modalités de travail	Durée prévue
Situation 3	Estimer la probabilité d'un événement	Remet les cauris aux élèves, présente le contexte et la consigne puis dirige le débat.	Réalise des lancers en nombre relativement grand, estime éventuellement la probabilité des événements élémentaires.	TG (40 min)	70 min
				TC (30 min)	
Institutionnalisation	Estimer la probabilité d'un événement Calculer la probabilité d'un événement	Fais le bilan et institutionnalise	Prend notes	TC (10 min)	10 min
	Durée totale				80 min

Tableau n°29 : Organisation de l'enseignement-apprentissage suivant la situation 3.

2.2.4. Situation 4

2.2.4.1. Objectif spécifique

Cette situation permet l'installation chez les élèves des formules relatives au calcul élémentaire des probabilités, notamment les axiomes du calcul des probabilités et le premier principe de Laplace. Elle a pour objectif de démontrer les propriétés fondamentales du calcul élémentaire des probabilités telles que programmées dans les classes terminales scientifiques. Dans cette situation, le deuxième principe de Laplace, construit et formalisé dans la situation 3, constitue un élément technologique pouvant permettre aux élèves de démontrer les propriétés visées ou de comprendre les démonstrations du professeur. Étant donné que les propriétés à démontrer sont des égalités et que la démonstration d'égalité est prescrite en classe de seconde, puis étudiée en début d'année par les élèves de notre classe d'expérimentation, nous ne doutons pas de la capacité de ces élèves à démontrer certaines de ces propriétés. Les initiatives de démonstration qui seront prises par le professeur feront de cette situation, une situation qui ne donne pas autant d'autonomie aux élèves que les précédentes.

La situation 4 est essentiellement une situation d'institutionnalisation, qui exploite la définition précédente de la probabilité pour asseoir certaines propriétés fondamentales en calcul des probabilités. Elle vise, en effet, la construction du bloc technologico-théorique au sens de Chevallard (1999) en faisant le lien avec les situations précédentes. La situation 4 aborde ainsi la partie déterministe du calcul des probabilités par rapport aux indications des programmes des classes terminales des séries scientifiques.

2.2.4.2. Contexte et problème posé

Le problème posé est relatif à la démonstration des propriétés conséquentes des deux axiomes de la définition de la probabilité selon l'axiomatique de Kolmogorov. Le contexte basé sur la définition de la probabilité suivant le deuxième principe de Laplace se précise comme ci-après.

Contexte

La définition précédente de la probabilité sur un univers des éventualités d'une expérience aléatoire Ω , indique que la probabilité de l'événement certain est 1 et que la probabilité d'un événement est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le composent. Tu utiliseras cette définition pour démontrer les propriétés ci-dessous.

2.2.4.3. Consignes

Les propriétés à démontrer constituent l'unique phase de la situation 4 dont les consignes indiquées ci-dessous, seront abordées en travail collectif avec l'ensemble du groupe classe.

1) On considère deux événements A et B de Ω composés respectivement des éventualités $e_1, e_2, \dots, e_m, e_1'', e_2'', \dots, e_q''$ et $e_1', e_2', \dots, e_l', e_1'', e_2'', \dots, e_q''$.

Question Q₉ : Démontre que $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.

Question Q₁₀ : Que devient cette relation si A et B sont incompatibles ?

2) Question Q₁₁ : Démontre que pour deux événements contraires A et \bar{A} de Ω on a : $p(A) + p(\bar{A}) = 1$.

3) On suppose que Ω est composé des éventualités e_1, e_2, \dots, e_n et on considère un événement A composé de n_0 éventualités $e_1', e_2', \dots, e_{n_0}'$.

Question Q₁₂ : Démontre que si tous les événements élémentaires de Ω ont la même probabilité, alors $p(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$, où Card(A) et Card(Ω) désignent respectivement les nombres d'éléments de A et de Ω .

2.2.4.4. Institutionnalisation

Au terme de la situation 4, l'institutionnalisation portera sur les propriétés ci-après.

- Pour deux événements incompatibles A et B de Ω , $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$;

- Si \bar{A} désigne l'événement contraire de A , alors $p(A)+p(\bar{A}) = 1$;

- Pour deux événements quelconques A et B de Ω , on a :

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) ;$$

- Si A_1, A_2, \dots, A_n sont n événements deux-à-deux incompatibles de Ω , où n est un nombre entier naturel supérieur ou égal à 2, on a :

$$p(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = p(A_1) + p(A_2) + \dots + p(A_n).$$

Le premier principe de Laplace sera formalisé à partir de la définition et la propriété suivantes.

Deux événements A et B d'un univers Ω sont dits équiprobables pour une probabilité p définie sur Ω lorsque $p(A) = p(B)$.

Si tous les événements élémentaires d'une expérience aléatoire sont équiprobables pour une probabilité p , alors pour tout événement A , on a : $p(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$.

2.2.4.5. Organisation de l'enseignement/apprentissage

L'organisation de l'enseignement/apprentissage de la situation 4 est résumée dans le tableau ci-après.

Phase ou situation	Type de tâches	Topos du professeur	Topos de l'élève	Modalités de travail	Durée prévue
Situation 4	Démontrer des propriétés du calcul élémentaire des probabilités.	Précise les consignes de la situation, dirige le débat par des questionnements de type maïeutique.	Propose des réponses aux questions posées par le professeur.	TC (60 min)	60 min
Institutionnalisation		Fais le bilan et institutionnalise	Prend notes	TC (15 min)	15 min
				Durée totale	75 min

Tableau n°30 : Organisation de l'enseignement-apprentissage suivant la situation 4.

2.2.5. Situation 5

2.2.5.1. Objectif spécifique

Après les trois premières situations qui constituent des activités d'études et de recherche (Chevallard, 1999) et la quatrième situation de formalisation des propriétés relatives au calcul

des probabilités, la présente situation de l'ingénierie est une situation d'exercices et de problèmes (Ibid.). Elle correspond au moment du travail de la technique et plus généralement des organisations praxéologiques mises en place (Chevallard, 1999). Elle est consacrée à la résolution d'exercices afin de faire travailler les notions probabilistes en voie de construction et d'appliquer les propriétés de calcul élémentaire de probabilités. Les exercices porteront essentiellement sur l'application des deux premiers principes de Laplace et partiellement sur l'évaluation du rapport des élèves au hasard et à l'approche fréquentiste.

2.2.5.2. Contextes et problèmes posés

Les contextes des exercices sont variés de manière à exploiter les situations scolaires les plus fréquentes pour travailler les notions construites. Ils sont fondamentalement relatifs aux lancers de dés et aux tirages d'objets dans une urne. Les problèmes posés varient également d'un exercice à l'autre mais ils reposent essentiellement sur le calcul des probabilités, à partir des deux premiers principes de Laplace. Ils devraient offrir l'occasion au professeur de vérifier le rapport des élèves aux concepts probabilistes construits.

2.2.5.3. Les exercices

Exercice 1

Dans une enquête effectuée dans les classes de terminale d'un lycée, 20% des élèves aiment les mathématiques, 70% des élèves aiment la philosophie, 15% des élèves aiment les mathématiques et la philosophie, 10% des élèves sont paresseux. L'enquête a révélé que les élèves paresseux n'aiment pas les mathématiques.

On choisit un élève de terminale au hasard et on définit les événements :

A : « L'élève aime les mathématiques » ;

B : « L'élève aime la philosophie » ;

C : « L'élève est paresseux ».

1) Donne les probabilités des événements A, B, C et $A \cap B$.

2) Calcule la probabilité que l'élève choisi :

a) aime les mathématiques ou la philosophie ;

b) aime les mathématiques ou est paresseux ;

c) n'aime ni les mathématiques ni la philosophie.

Exercice 2

Un cauri est tel que la probabilité qu'il repose sur la face plane (P) est le double de la probabilité qu'il repose sur la face courbe (C).

On lance ce cauri et on note la face sur laquelle il repose.

- 1) Détermine l'univers des éventualités de cette expérience aléatoire.
- 2) Calcule la probabilité que le cauri repose sur la face courbe et celle qu'il repose sur la face plane.
- 3) On lance le cauri 1000 fois de suite. Combien de fois le cauri pourrait-il reposer sur la face (P) ?

Exercice 3

Un sac contient six cartons carrés identiques dont deux jaunes numérotés de 1 à 2 et quatre rouges numérotés de 3 à 6. On choisit au hasard un carton dans le sac.

- 1) Calcule la probabilité que le carton tiré porte :
 - a) le numéro 1 ;
 - b) le numéro 5.
- 2) Calcule la probabilité que le carton tiré :
 - a) soit jaune ;
 - b) porte un numéro pair.
- 3) On procède à 2500 tirages d'un carton dans le sac. Donne une estimation du nombre de fois qu'on pourrait obtenir un carton rouge.

Exercice 4

On lance un dé à six faces numérotées de 1 à 6 et on note le numéro de la face supérieure. Ce dé est truqué de la façon suivante :

- les numéros de même parité ont la même chance d'apparaître ;
- un numéro pair a deux fois plus de chance d'apparaître qu'un numéro impair.

- 1) Calcule la probabilité d'apparition de chacune des faces.
- 2) Calcule la probabilité de chacun des événements :

A : « Le numéro obtenu est un chiffre pair » ;

B : « Le numéro obtenu est impair ».

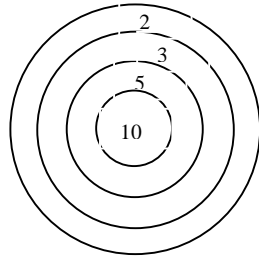
Exercice 5

- 1) On lance deux fois de suite un dé parfaitement équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on lit les numéros inscrits sur la face supérieure pour en former un nombre de deux chiffres.
 - a) Détermine toutes les éventualités de cette expérience aléatoire.
 - b) Calcule la probabilité que le nombre formé soit impair.
 - c) Calcule la probabilité que la somme des chiffres du nombre obtenu soit égale à 9.

- 2) On lance trois fois de suite le dé et on lit les numéros inscrits sur la face supérieure pour en former un nombre de trois chiffres.
- Détermine toutes les éventualités de cette expérience aléatoire.
 - Calcule la probabilité que le nombre formé comporte uniquement des chiffres pairs.

Exercice 6

On considère une cible de tir à l'arc comme l'indique la figure ci-après :



Lorsque la fléchette atteint la cible, le tireur note le nombre des points inscrit dans la couronne où se trouve la fléchette.

Sachant que la probabilité d'atteindre une couronne est proportionnelle au nombre de points inscrit dans la couronne, calcule :

- les probabilités des événements élémentaires de l'univers Ω .
- la probabilité de l'événement « le tireur note un nombre premier ».

Exercice 7

Un sac contient deux jetons rouges et trois jetons blancs indiscernables au toucher.

- On tire au hasard un jeton du sac, on note sa couleur puis sans le remettre dans le sac, on tire un deuxième jeton et on note sa couleur, puis sans remettre ce dernier dans le sac, on tire un troisième jeton et on note sa couleur.
 - Calcule la probabilité de tirer deux jetons rouges et un jeton blanc dans cet ordre.
 - Calcule la probabilité de tirer deux jetons rouges et un jeton blanc.
- On tire au hasard simultanément trois jetons dans le sac.
Quelle est la probabilité que les trois jetons soient rouges ?

2.2.5.4. Institutionnalisation

La situation 5 est une situation d'entraînement, de travail des techniques et des technologies introduites dans les situations précédentes. Son déroulement donnera l'occasion de revenir sur les éléments technologiques du calcul élémentaire des probabilités, aussi qu'il permettra d'institutionnaliser des notions probabilistes complémentaires, qui sont nécessaires pour la compréhension et la résolution des exercices. Concernant les notions probabilistes

complémentaires, il est important d'amener les élèves à comprendre, au niveau de l'exercice 1, que les proportions et les pourcentages permettent d'estimer voire de définir les probabilités d'événements comme les fréquences.

2.2.5.5. Organisation de l'enseignement/apprentissage

Le déroulement de la situation 5 est basé sur la résolution des huit exercices qu'elle comporte. Pour chacun des exercices, le topos du professeur consiste à présenter l'exercice et à diriger le débat lors de la modalité de travail collectif, tandis que celui de l'élève consistera à répondre aux questions de l'exercice individuellement puis éventuellement en petits groupes.

Exercice	Contexte	Types de tâches	Modalités de travail	Durée prévue
Exercice 1	Estimation des pourcentages de certaines catégories d'élèves d'un lycée	Calculer la probabilité d'un événement	TG (10 min)	25 min
			TC (15 min)	
Exercice 2	Lancer d'un cauri	Déterminer les probabilités des événements élémentaires ; Estimer le nombre de fois qu'un événement est réalisé.	TI (10 min)	30 min
			TG (5 min)	
			TC (15 min)	
Exercice 3	Tirage d'un carton dans un sac qui en contient six.	Calculer la probabilité d'un événement ; Estimer le nombre de fois qu'un événement est réalisé.	TI (10 min)	40 min
			TG (10 min)	
			TC (20 min)	
Exercice 4	Lancer d'un dé pipé	Déterminer les probabilités des événements élémentaires ; Calculer la probabilité d'un événement.	TG (10 min)	30 min
			TC (20 min)	
Exercice 5	Lancer d'un dé équilibré deux fois puis trois fois	Modéliser et déterminer les éventualités ; Calculer la probabilité d'un événement	TG (20 min)	40 min
			TC (20 min)	

Exercice 6	Lancer de fléchette sur une cible répartie en plusieurs zones	Modéliser et déterminer les probabilités des événements élémentaires ; Calculer la probabilité d'un événement.	TG (10 min)	25 min
			TC (15 min)	
Exercice 7	Tirage successif puis tirage simultané de trois jetons dans un sac qui en contient cinq	Calculer la probabilité d'un événement.	TI (10 min)	45 min
			TG (15 min)	
			TC (20 min)	
			Durée totale	235 min

Tableau n°31 : Organisation de l'enseignement-apprentissage suivant la situation 5.

2.2.6. Situation 6 (Post test)

2.2.6.1. Objectif spécifique

La situation 6 est une situation d'évaluation (Chevallard, 1999). Elle nous permet de recueillir des informations fiables relatives à l'apprentissage du calcul élémentaire des probabilités, en vue d'étudier le rapport des élèves à certains objets probabilistes. Ne comportant pas a priori un enjeu nouveau d'apprentissage pour les élèves, la situation 6 est fondamentalement un outil d'étude pour le chercheur dans le cadre de l'ingénierie et pour l'enseignant dans celui de son enseignement.

2.2.6.2. Contextes et problèmes posés

Les contextes des exercices qui composent la situation 6 sont les mêmes que ceux de la situation 5. Ils portent essentiellement sur les situations scolaires relatives aux lancers de dés et aux tirages d'objets dans une urne. Visant à vérifier l'appréhension par les élèves des objets probabilistes, qui leur ont été enseignés, les problèmes posés dans la situation 6 portent aussi bien sur des questions de cours que sur la résolution effective des problèmes de probabilités. Ils sont pour la plupart proposés pour le test réalisé à l'occasion des analyses préalables (Chap. V).

2.2.6.3. Les exercices

Exercice 1

- 1) Donne la définition d'une expérience aléatoire.
- 2) A et B sont deux événements de l'univers des éventualités Ω d'une expérience aléatoire et p est une probabilité définie sur Ω . Pour chacune des questions a), b) et c), encercle le numéro de la bonne réponse parmi les trois qui sont proposées.

a) « A et B sont incompatibles » signifie que :

(i) $A = \emptyset$ et $B = \emptyset$.

(ii) $A \cap B = \emptyset$.

(iii) $A \cup B = \Omega$.

b) « A et B sont contraires » signifie que :

(i) $A \cap B = \emptyset$.

(ii) $A \cup B = \Omega$

(iii) $A \cap B = \emptyset$ et $A \cup B = \Omega$.

c) « A et B sont équiprobables » signifie que :

(i) $p(A \cap B) = 0$;

(ii) $p(A) = p(B)$;

(iii) $p(A) + p(B) = 1$.

3) On considère une probabilité p sur l'univers des éventualités Ω d'une expérience aléatoire. Complète chacune des égalités suivantes :

a) $p(\Omega) = \dots$

b) Si A et B sont deux événements de Ω , alors $p(A \cup B) = \dots$

c) Si A est un événement composé des éventualités e_1, e_2, \dots, e_k , alors :

$p(A) = \dots$

d) Si tous les événements élémentaires sont équiprobables, alors pour tout événement A, on a : $p(A) = \dots$

Exercice 2

On lance onze fois de suite un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on obtient les résultats suivants :

2 – 5 – 3 – 4 – 1 – 1 – 6 – 5 – 2 – 3 – 6.

Quel résultat obtiendrait-on si on lançait le dé une douzième fois ? Justifie ta réponse.

Exercice 3

Dans l'un des bureaux d'une entreprise de vente par correspondance arrivent plusieurs catégories de courrier. Parmi les lettres reçues, 90% contiennent une commande, 45% contiennent une demande de cadeau et 40% contiennent une commande et une demande de cadeau. Les autres lettres ne sont jamais accompagnées de commande, ni de demande de cadeau. On prend une lettre au hasard dans ce bureau. On désigne par A l'événement « la lettre contient une commande » et par B l'événement « la lettre contient une demande de cadeau ».

- 1) Identifie dans le texte ci-dessus (de l'exercice 3) la phrase qui désigne l'expérience aléatoire en complétant la phrase suivante :

La phrase qui désigne l'expérience aléatoire est :

- 2) Calcule la probabilité que la lettre prise :
- ne contienne pas une demande de cadeau ;
 - contienne une commande ou une demande de cadeau.

Exercice 4

Un sac contient trois jetons blancs B_1, B_2, B_3 et deux jetons noirs N_1, N_2 , tous indiscernables au toucher. On tire au hasard un jeton dans le sac et on note sa couleur puis, sans le remettre dans le sac, on tire un second jeton et note sa couleur.

Calcule la probabilité que les deux jetons tirés soient de couleurs différentes.

Exercice 5

On lance un dé tétraédrique dont les quatre faces sont marquées a, b, c, d. et on note la marque de la face sur laquelle le dé se repose. Le dé est pipé de telle sorte que :

- les faces portant les marques a, b et d ont la même probabilité que le dé repose sur elles ;
- la probabilité que le dé repose sur la face marquée « c » est quatre fois plus grande que la probabilité que le dé repose sur l'une quelconque des autres faces.

- Détermine la probabilité que le dé repose sur chacune des 4 faces.
- Calcule la probabilité que le dé repose sur une face dont la marque est une consonne.

Exercice 6

Un jour, un passant a été témoin d'un accident de circulation et a décidé d'appeler les sapeurs-pompiers. Il dispose de 5 numéros des sapeurs-pompiers mais ce jour-là, 3 des numéros étaient hors service. Le passant a composé au hasard un des numéros.

Calcule la probabilité que l'appel du passant tombe sur un numéro en service.

Exercice 7

L'univers des éventualités d'une expérience aléatoire étant $\Omega = \{0; 1; 2; 3\}$, on donne dans le tableau ci-dessous les probabilités des événements élémentaires.

e_i	0	1	2	3
$p(\{e_i\})$	0,17	0,64	a	0,01

Calcule la probabilité que le résultat de l'expérience aléatoire soit un nombre impair.

Exercice 8

Un sac contient cinq boules dont deux blanches et deux noires. On tire au hasard une boule dans le sac.

Calcule la probabilité que la boule tirée soit noire.

2.2.7. Synthèse de la présentation des situations

Le tableau ci-dessous présente les objectifs, les enjeux, la durée et le nombre probable de séances des situations à développer tout au long de l'expérimentation.

Situation	Objectif	Enjeux pour les élèves	Durée	Nombre probable de séances
Situation 1	Déstabiliser les obstacles à la notion de hasard	La notion d'expérience aléatoire et les autres notions relatives au vocabulaire des probabilités	180 min	2
Situation 2	Construire la notion de probabilité d'un événement	Le sens de la notion de la probabilité d'un événement	225 min	2
Situation 3	Asseoir le deuxième principe de Laplace	La définition de la probabilité sur un univers à partir du deuxième principe de Laplace	80 min	1
Situation 4	Démontrer les propriétés fondamentales du calcul élémentaire des probabilités	Les propriétés du calcul élémentaire des propriétés	75 min	1
Situation 5	Appliquer les notions étudiées	Approfondissement des notions étudiées	235 min	2
Situation 6	Tester les apprentissages		90 min	1
Total : 885 min soit 14h 45 min				9

Tableau n°32 : Tableau récapitulatif des situations de l'ingénierie.

3. Analyse a priori

Comportant une partie descriptive et une partie prédictive, l'analyse a priori d'une situation consiste à décrire les choix effectués, à analyser l'enjeu pour les élèves et à prévoir leurs comportements possibles (Artigue, 1988). Longtemps réduit à une simple collaboration entre le chercheur et le professeur, le rôle de ce dernier mérite aussi d'être précisé dans une ingénierie

didactique (Margolinas C., 2004). En prenant en compte ces dispositions complémentaires de la méthodologie, nous allons articuler notre analyse a priori autour de la description des situations, des rôles des élèves et du professeur, et les comportements possibles des élèves. Concrètement, nous introduirons l'analyse a priori de chaque situation par les variables macro-didactiques et pour chaque phase de la situation nous préciserons respectivement les variables micro-didactiques, le rôle du professeur, l'organisation mathématique et les comportements possibles des élèves.

3.1. Situation 1

La situation est introduite par un contexte de lancer d'un cauri quatre fois de suite. Le problème posé est globalement celui de la détermination des résultats possibles d'une expérience aléatoire. Dans le souci, de ne pas nous éloigner de l'organisation pratique de l'enseignement/apprentissage au Bénin, ce texte est inspiré du texte introductif du recouplement du programme qui aborde les probabilités en classe terminale. Les consignes ont abordé respectivement, à travers les trois phases de la situation, l'identification des conceptions de la notion de hasard, l'amélioration des conceptions erronées et l'énumération effective des résultats possibles de l'expérience aléatoire définie.

Le milieu matériel est globalement composé des cauris. Il est virtuel dans la première phase et physique dans les deux autres phases, bien qu'il soit possible de se passer du cauri dans la troisième phase. Au début de la séance consacrée à la première phase, le professeur présentera un certain nombre de cauris aux élèves pour vérifier leur connaissance effective de cet objet, et surtout pour les sensibiliser sur le fait que les cauris utilisés dans le cadre de notre expérimentation n'aient rien de mystique. Cette précision nous paraît très importante, car en dehors de son usage dans la décoration et l'art, le cauri est aussi utilisé dans la divination (Parzysz, 2011a). De ce fait, il est fort probable que certains élèves, d'obédience chrétienne ou musulmane, considèrent le cauri comme un objet diabolique et refusent alors d'en toucher. Après cette clarification, venons-en aux raisons qui nous ont poussés à utiliser le cauri. La première raison est culturelle, car le cauri constitue l'un des outils que le devin utilise pour consulter le Fâ, tel qu'il a été question dans le contexte. Son lancer garantit une expérience aléatoire simple pouvant permettre de discuter de la notion de hasard, et surtout de celui du tirage au sort dont il est question dans le calcul élémentaire des probabilités. La deuxième raison est liée à l'origine même du texte introductif de la situation, inspiré d'un texte des documents officiels dans lequel il est question de lancer des cauris. Enfin, la troisième raison est notre volonté d'exploiter des expériences aléatoires ne garantissant pas nécessairement une situation

d'équiprobabilité, comme semble souhaiter Joël Briand dans la conclusion de l'un de ses travaux d'ingénierie didactique en calcul des probabilités (Briand, 2005, p. 278).

Ce travail s'appuie sur des modèles implicites d'actions tels que « toutes les billes ont la même chance de se présenter ... ». Un élève, en fin de séance évoque la possibilité d'une remise en cause de ce modèle : si « une boule était plus lourde, et tombait plus vite ». Si nous faisons étudier une expérience dont les issues ne sont plus équiprobables que diront nos élèves ?

En effet, le cauri ou *cypria monneta* est un coquillage originaire des îles Maldives dans l'Océan indien qui se prêtait à plusieurs usages ; il servait notamment de monnaie en Afrique de l'Ouest à l'époque des grands empires du Ghana, du Mali et du Songhaï (Samb, 1978). Bien qu'on trouve sur le marché béninois des cauris fabriqués industriellement, il n'est pas aisé d'en trouver qui soient parfaitement identiques. Dans tous les cas, les cauris ne renvoient pas à un modèle d'équiprobabilité (Parzysz, 2011a). Lorsqu'on lance un cauri, il peut présenter comme face supérieure, soit une face concave avec ouverture, assimilable à une face plane (P), soit une face convexe que nous appelons face courbe (C).

3.1.1. Analyse de la phase 1.1

Cette phase comporte deux questions, qui invitent les élèves à prédire individuellement, puis en petits groupes, le résultat du lancer d'un cauri, et à faire de même lorsque les résultats sont connus pour des lancers précédents. Les élèves ne sont pas autorisés à lancer le cauri dans cette phase. Ils fonctionneront sur la base de leur rapport initial au hasard.

La deuxième question posée dans la phase a fait l'objet d'une étude sur le rapport des collégiens et des lycées à l'indépendance d'expériences aléatoires par Maury S. (1985) puis par Dhieb (2009). Nous l'exploitons plutôt pour détecter chez les élèves les obstacles éventuels à la notion de hasard, comme nous l'avions déjà fait dans nos études antérieures sur la notion de hasard (Dandjinou, Bronner, 2017) et sur l'apprentissage de la notion d'expérience aléatoire (chap. V, 3.1).

Les instructions officielles n'ont prévu aucun détail des notions à enseigner au niveau du langage probabiliste. Elles n'ont surtout pas fait le choix de travailler les obstacles à la notion de hasard comme nous le proposons dans la première situation. Or nos analyses préalables ont montré tout au moins l'existence chez les élèves d'un obstacle ontogénique doublé d'un obstacle culturel à la notion de hasard.

3.1.1.1. Les variables didactiques

Le nombre de fois que le cauri est lancé dans la situation est un choix inspiré de la pratique divinatoire, où il est généralement utilisé quatre cauris, ou huit, ou encore seize (Hounwanou, 1984). Avec quatre cauris, nous avons l'assurance d'avoir une expérience aléatoire simple, car par rapport aux objectifs, nous n'avons pas besoin de complexifier l'expérience aléatoire, qui n'est pas trop simple non plus. Il importe de préciser qu'aucune contrainte didactique ne justifie le choix de quatre cauris, au lieu de trois ou de deux par exemple. Ce choix n'est qu'une conséquence du choix du contexte, par rapport auquel une conformité culturelle paraît nécessaire. Pour simplifier davantage l'expérience aléatoire et pour permettre une appréhension relativement rapide du hasard du « tirage au sort » par les élèves, nous avons fait le choix du lancer d'un seul cauri quatre fois de suite, plutôt que du lancer de quatre cauris.

Le lancer successif d'un cauri est assimilable à un tirage successif avec remise d'un objet dans une urne qui en contient deux. Ce deuxième choix assure l'indépendance des lancers, qui permet l'identification des rapports personnels des élèves au hasard du « tirage au sort ».

Le troisième choix didactique est le résultat binaire qui s'explique par le fait que nous n'avons envisagé que deux résultats possibles pour le lancer d'un cauri, excluant le lancer dans le sable par exemple, où le cauri peut s'immobiliser aussi sur le profil ou sur un des bouts pointus. Le cauri utilisé n'étant pas rogné, nous convenons que la face courbe (C) est visible lorsqu'il est en équilibre stable sur la face plane (P), qui est supposé visible dans tous les autres cas.

3.1.1.2. Rôle du professeur

En ce début du déroulement de l'ingénierie, le professeur aura d'abord à apprêter la classe en disposant les dix-sept élèves en cinq groupes et en leur rappelant le but des séances qu'ils auront en présence du chercheur. Concernant particulièrement la première phase de la situation 1, après avoir fait lire le contexte de la phase, le professeur présentera des cauris afin de leur montrer les deux faces (P) et (C). Il leur expliquera surtout que les cauris utilisés dans l'expérimentation sont des cauris naturels achetés au marché et qui n'ont rien à voir avec le charlatanisme.

Pour la suite, le rôle du professeur consiste à circuler pour prendre connaissance des conceptions exprimées individuellement par les élèves, et pour suivre les arguments développés au niveau du travail en groupe. Il n'interviendra lors du travail individuel et du travail en groupe, que pour repréciser la consigne en cas de besoin. Pendant le travail collectif, il fera le bilan de la phase, en faisant recopier au tableau les différents types de réponses en lien avec les arguments développés. Afin de ne pas influencer l'évolution du rapport personnel des élèves au

hasard au niveau de la phase suivante, il n'est pas prévu que le professeur commente les réponses des élèves ou de donner son point de vue sur la situation. Il peut juste chercher à faire comprendre la position de chaque groupe à toute la classe.

3.1.1.3. Organisation mathématique visée

Type de tâches

Les deux questions Q_1 et Q_2 de la phase 1.1 constituent deux spécimens d'un même type de tâches T_1 , qui se définit par : « Prévoir les résultats d'une expérience aléatoire ». Ce type de tâches est renforcé par une invitation à argumenter les réponses qui seront proposées.

La technique relevant de T_1

Pour chacune des deux questions, il ne sera pas possible de prévoir avec certitude le résultat. Le résultat est donc soit (P), soit (C), car le résultat du lancer est dû au hasard. Cette unique réponse correcte aux deux questions Q_1 et Q_2 est l'aboutissement de la technique $\tau_{1.1}$ relevant du type de tâches T_1 qui se décompose comme il suit :

- Identifier l'expérience aléatoire « lancer un cauri » ;
- Se baser sur l'intuition pour préciser que le résultat est imprévisible.

Technologie et théorie associées à la technique $\tau_{1.1}$

La technique précédente relevant du type de tâches T_1 se justifie par la notion de hasard et plus précisément par le hasard du « tirage au sort » relatif aux jeux dits de chance. Au stade actuel de notre étude, cet élément technologique n'est pas formel puisqu'il doit provenir des conceptions initiales des élèves sur la notion de hasard et non pas d'un enseignement. La théorie dans laquelle cette technologie est plongée est évidemment hors portée des élèves. Elle est constituée de la classification du hasard élaborée par Benoît Mandelbrot (Idier, 2011) et Lahanier-Reuter (1999).

3.1.1.4. Les éléments de réponses possibles des élèves

De ce qui précède, il est attendu au niveau de la phase 1.1, que les élèves fassent ressortir leur rapport à la notion de hasard. Mais en tenant compte des résultats de notre étude relative au rapport personnel des élèves à la notion de hasard, de la forme irrégulière du cauri et de la pratique des jeux basés sur le lancer d'un dé, plusieurs types de réponses sont envisageables pour les questions Q_1 et Q_2 réunies. Avant la présentation de ces types de réponses à l'ensemble des deux questions, précisons que les propositions possibles de réponses pour la question Q_1 prise isolément sont :

- La face visible est soit (C), soit (P), car le cauri est lancé au hasard ;
- La face visible du cauri sera nécessairement (C), puisque le cauri est plus stable en se posant sur la face (P),
- Si Dansou lance le cauri à partir de la face (P), le résultat serait (C) et vice-versa.

La première proposition de réponse est la manifestation d'un probable rapport adéquat à la notion du hasard du tirage au sort. La deuxième tient compte de la géométrie du cauri, qui reste en équilibre stable lorsqu'il repose sur la face (P). Quant à la troisième proposition de réponse, elle avait été ainsi constatée chez certains élèves lors des pré-expérimentations réalisées en 2016 (Annexe 5). Elle peut naître d'une volonté de tricher dans le lancer comme les enfants savent bien le faire parfois dans le jeu de ludo. C'est bien possible que cette proposition de réponse s'explique par une conception du biais d'équiprobabilité selon laquelle les résultats des lancers devraient s'alterner.

Pour l'ensemble des deux questions, nous prévoyons les six types de réponses ci-dessous que nous nommons respectivement « tirage au sort », « compensation », « confirmation », « géométrie du cauri », « mécanique » et « fatalité ».

Le type de réponses « tirage au sort »

Il regroupera les élèves qui soutiendront pour chacune des deux questions que le résultat du lancer est imprévisible, et sera donc soit (C), soit (P). Ce type de réponses est caractéristique d'un rapport adéquat au hasard « tirage au sort ».

Le type de réponses « compensation »

Bien qu'ayant donné une proposition de réponse bien argumentée parmi les trois ci-dessus signalées au niveau de la question Q₁, des élèves, prenant en compte les résultats des trois premiers lancers (CCC) vont exprimer au niveau de la question Q₂ que le résultat ne peut être que (P), en prétextant que la face (P) n'était pas encore jusque-là apparue. C'est la conception que Piaget et Inhelder (1951) ont désigné par « compensation », remarquée chez l'enfant du stade préopératoire, qui juge plus probable l'éventualité la moins fréquente. Cette conception a été confirmée chez les lycéens par Maury (1985) puis par Dhieb (2009), qui l'ont qualifiée de conception « équilibre ».

Le type de réponses « confirmation »

Dans le même registre que la conception « compensation » du hasard, Piaget et Inhelder (1951) ont repéré chez l'enfant du stade préopératoire une conception qu'on pourrait qualifier de

« confirmation » selon laquelle l'éventualité la plus fréquente serait la plus probable. C'est fort de cela qu'il est envisageable que certains élèves prédisent le résultat (C) au niveau de la question Q₂ malgré leur position clairement affichée pour l'une des propositions de réponses à la première Q₁.

Le type de réponses « géométrie du cauri »

Le type de réponses « géométrie du cauri » concernera les élèves qui soutiendront au niveau des deux questions que le résultat du lancer serait (C), en se basant sur la forme du cauri. En effet, il y a plus de chances que le cauri repose sur la face (P), et donc que la face (C) soit visible.

Le type de réponses « mécanique »

Des résultats de nos pré-expérimentations (Annexe 5), il a été constaté que des élèves estiment que le résultat du lancer du dé dépend de la façon dont le dé est lancé. Il semble qu'ils pensent qu'il est possible, à partir du résultat d'un lancer, d'exercer une certaine force pour obtenir un numéro souhaité au lancer suivant. Cette pratique est souvent observée lors des jeux de lancer de dés ou de pièce de monnaie. Nous estimons que dans l'expérimentation de l'ingénierie cet argument peut être développé par certains élèves, dont nous classerons les réponses dans le type que nous qualifions de « mécanique ». Ces élèves soutiendront donc au niveau des deux questions que le résultat dépendra de la manière dont le cauri sera lancé.

Le type de réponse « fatalité »

Il n'est pas exclu que l'on rencontre dans cette phase, comme ce fût le cas dans les travaux de Dhieb (2009), des élèves soutenant une conception déterministe, en expliquant qu'il y a une main invisible qui donne le résultat du lancer, ou que le résultat dépend du pouvoir surnaturel de celui qui a lancé le cauri. L'élève ayant le type de réponses « fatalité » refuserait même de prédire le résultat du lancer. Ce type de réponses peut s'expliquer par l'existence dans la société béninoise de la mentalité primitive, dont Lévy-Bruhl (1960) a fait cas, et qui est caractérisée par un comportement fataliste.

3.1.2. Analyse de la phase 1.2

Dans cette phase le milieu matériel est enrichi par l'apport des cauris que les élèves sont appelés à lancer pour répondre aux mêmes questions Q₁ et Q₂.

3.1.2.1. Les variables didactiques

Les trois choix didactiques de la phase 1.1 sont reconduits pour la phase 1.2. À ces variables didactiques s'ajoutent un quatrième et un cinquième choix relatifs à l'enrichissement du milieu initial. Le quatrième choix didactique est bien le cauri physique, qui doit être remis aux élèves pour être lancé. Ce choix se justifie par la recherche de l'évolution des rapports personnels des élèves vers le hasard du tirage au sort à partir d'une expérimentation, dans laquelle il doit avoir une interaction avec le milieu. L'enrichissement du milieu par le professeur participe de faire évoluer par les élèves eux-mêmes les conceptions erronées du hasard. Le cinquième choix didactique est le nombre de fois que les élèves doivent lancer le cauri. Ce nombre est laissé à leur choix. L'essentiel est qu'ils arrivent après des lancers de cauri à appréhender la manifestation du hasard du tirage au sort. La limitation du nombre de lancers à quatre par exemple peut ne pas permettre de constater l'imprévisibilité du résultat.

3.1.2.2. Rôle du professeur

Les réponses des élèves aux questions de la phase 1.1 étant notées au tableau, le professeur remettra un cauri à chaque groupe d'élèves, pour enrichir le milieu matériel jusque-là virtuel. Pendant le travail en groupe, il peut au besoin rappeler ou clarifier la consigne aux élèves sans toutefois intervenir dans leur recherche de solution au problème qui leur est posé. Après le travail en groupe, le professeur recueillera les nouvelles propositions de réponses des élèves aux questions Q_1 et Q_2 . Il fera alors comprendre la position de chaque groupe à toute la classe. Au cas, où les réponses des élèves ne vont pas toutes converger vers le hasard du tirage au sort, le professeur conduira la discussion par des questionnements de type maïeutique de manière à unifier les positions des élèves autour de ce type de hasard, indispensable pour la suite. Pour clôturer la phase, le professeur fera définir la notion d'expérience aléatoire et celle d'éventualité.

3.1.2.3. Organisation mathématique visée

L'organisation mathématique visée pour la phase 1.2 de la situation 1 est globalement identique à celle de la phase 1.1, à la seule différence que la technique $\tau_{1,2}$ relevant du type de tâches T_1 dans la phase 1.2 se précise un peu plus comme il suit :

- identifier l'expérience aléatoire « lancer le cauri » ;
- lancer le cauri un certain nombre de fois ;
- identifier l'expérience aléatoire « lancer le cauri une fois » ;
- préciser que le résultat du lancer peut être soit (P), soit (C).

Dans cette technique, le nombre de fois que le cauri sera lancé variera d'un groupe d'élèves à un autre pour les deux questions.

3.1.2.4. Éléments de réponses possibles

Malgré le lancer effectif du cauri, il est possible que les éléments de réponses ne se réduisent pas au seul type de réponses « tirage au sort » visé. Nous faisons l'hypothèse que chez certains élèves ayant le type de réponses « tirage au sort » à la phase 1.1., on pourrait noter l'apparition de la réponse selon laquelle le résultat à prévoir pour le lancer est la face (C), en tant que la face la plus probable. Nous estimons que globalement certaines appréhensions du hasard vont disparaître au profit du hasard du tirage au sort ou de la réponse précédemment expliquée. Ainsi, pour les deux questions, on peut envisager les deux types de réponses « tirage au sort » et « géométrie du cauri » évoquées parmi tant d'autres dans l'analyse a priori de la phase 1.1 (3.1.1.4).

3.1.3. Analyse de la phase 1.3

Après la construction de la notion d'expérience aléatoire avec les deux premières phases, la troisième phase de la situation 1 fait de cette notion un outil (Douady, 1987) pour faire construire la notion d'événement lié à une expérience aléatoire.

3.1.3.1. Variables didactiques

Pour atteindre l'objectif spécifique de cette phase, nous avons fait le choix d'exploiter l'expérience aléatoire, qui consiste à lancer quatre fois de suite un cauri. En dehors de la motivation du choix du cauri, expliquée plus haut, il importe d'ajouter que le fait de lancer quatre fois successivement le cauri nous conduit dans l'étude d'une expérience aléatoire plus complexe que celle étudiée dans les deux premières phases. Cette expérience aléatoire suscitera de la part de l'élève la mobilisation des concepts d'analyse combinatoire pour énumérer les résultats possibles. Le choix laissé à l'élève de lancer le cauri ne le dispense pas des efforts cognitifs, car il n'est pas évident de retrouver tous les résultats possibles à partir du lancer du cauri.

3.1.3.2. Rôle du professeur

Dans un premier temps, le professeur s'assurera de la compréhension des questions posées. Il remettra ensuite un cauri à chaque groupe pour lancer le travail en groupe. Pendant tout le temps que durera ce temps de travail, il se gardera d'intervenir dans les débats au niveau des groupes. Au niveau de l'étape du travail collectif, il s'intéressera à la nature des résultats possibles et à l'énumération de tous les résultats possibles pour chaque événement. Le professeur fera définir un événement et précisera la typologie des événements conformément au programme.

3.1.3.3. Organisations mathématiques visées

Nous présentons pour chacune des deux questions Q₃ et Q₄ l'organisation mathématique que nous visons à travers le déroulement de la troisième et dernière phase de la situation 1.

3.1.3.3.1. Organisation mathématique visée pour la question Q₃

La question Q₃ demande d'écrire toutes les éventualités de l'expérience aléatoire qui consiste à lancer quatre fois de suite un cauri.

Type de tâches

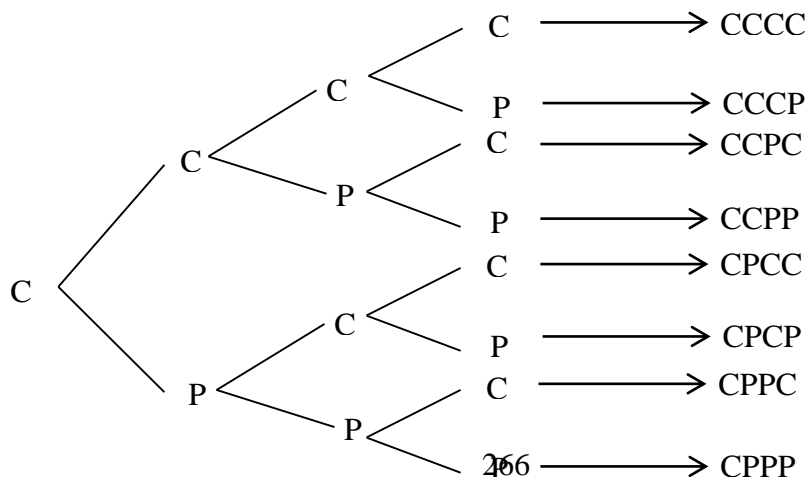
Le type de tâches T₂ commun à toutes les questions de cette phase est : « déterminer les possibilités de résultats d'un événement » décomposé en quatre tâches pour l'ensemble des deux questions.

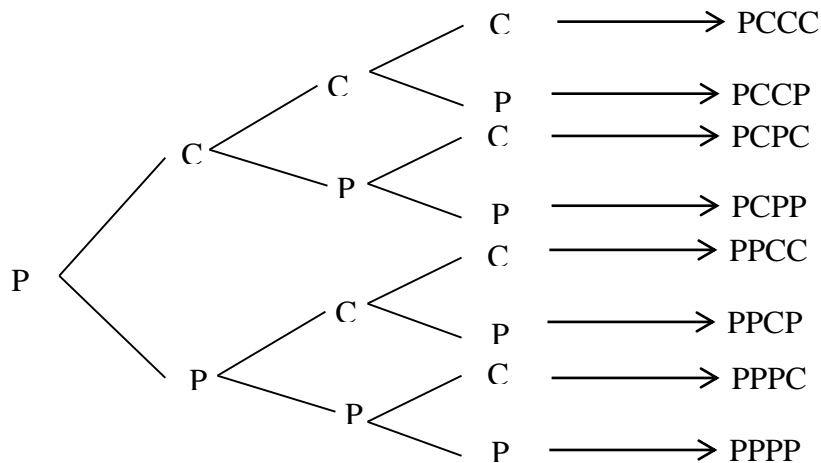
Les techniques relevant de T₂

Nous avons identifié quatre techniques $\tau_{2.1}$, $\tau_{2.2}$, $\tau_{2.3}$ et $\tau_{2.4}$ qui relèvent du type de tâches T₂ que nous nommons respectivement techniques « Produit cartésien », « Arbre de choix », « Deux tableaux » et « Trois tableaux ».

La technique $\tau_{2.1}$: « Produit cartésien » consiste à écrire directement la liste de tous les résultats possibles, à savoir : PPPP, PPCP, PCPP, CPPP, PPCC, PCPC, PCCP, CCPP, CPCP, CPPC, PCCC, CPCC, CCPC, CCCP, CCCC. Ces résultats possibles, qui sont les éléments du produit cartésien : $\{C, P\} \times \{C, P\} \times \{C, P\} \times \{C, P\}$, sont à retrouver dans les investigations et productions des élèves, qui en classe de seconde n'ont reçu aucun enseignement officiel sur la théorie des ensembles.

La technique $\tau_{2.2}$: « Arbre de choix » consiste à réaliser un arbre de choix pour mettre en évidence tous les résultats précédents.





Par la technique $\tau_{2,3}$: « Deux tableaux », les résultats possibles peuvent s’obtenir à partir de la réalisation de deux tableaux à double entrée. Le premier tableau à double entrée est réalisé pour identifier les résultats des deux premiers lancers ou des deux derniers lancers. Les résultats obtenus à l’aide de ce premier tableau seront exploités dans la réalisation du deuxième tableau pour aboutir à l’ensemble des résultats possibles. Les deux tableaux se présentent comme ci-dessous.

Premier tableau

	P	C
P	PP	PC
C	CP	CC

Deuxième tableau

	PP	PC	CP	CC
PP	PPPP	PPPC	PPCP	PPCC
PC	PCPP	PCPC	PCCP	PCCC
CP	CPPP	CPPC	CPCP	CPCC
CC	CCPP	CCPC	CCCP	CCCC

Avec la technique $\tau_{2,4}$: « Trois tableaux », les résultats possibles s’obtiendront par la réalisation de trois tableaux à double entrée. Le premier tableau servira à obtenir les résultats des deux premiers lancers. Ces résultats seront exploités dans la réalisation du deuxième tableau pour obtenir les résultats des trois premiers lancers. La combinaison de ces derniers résultats avec ceux du quatrième lancer dans le troisième tableau conduira à l’ensemble des résultats possibles. Les trois tableaux se présentent ainsi qu’il suit.

Premier tableau

	P	C
P	PP	PC
C	CP	CC

Les résultats des deux premiers lancers sont : PP, PC, CP, CC

Deuxième tableau

	PP	PC	CP	CC
P	PPP	PPPC	PCP	PCC
C	CPP	CPC	CCP	CCC

Les résultats possibles des trois premiers lancers sont : PPP, PPC, PCP, PCC, CPP, CPC, CCP, CCC.

Troisième tableau

	PPP	PPC	PCP	PCC	CPP	CPC	CCP	CCC
P	PPPP	PPPC	PPCP	PPCC	PCPP	PCPC	PCCP	PCCC
C	CPPP	CPPC	CPCP	CPCC	CCPP	CCPC	CCCP	CCCC

On retrouve les résultats possibles dans le troisième tableau.

Les technologies associées aux techniques

L'élément technologique indispensable pour l'ensemble des quatre techniques est la notion d'expérience aléatoire du langage probabiliste. En dehors de cette notion, l'élément technologique fondamental de la technique « Produit cartésien » est la notion de produit cartésien, dont la première rencontre pour les élèves est prévue pour la classe de première. Cette technologie, de même que celle relative à la technique « Arbre de choix », restent dans l'investigation des élèves. Quant aux techniques « Deux tableaux » et « Trois tableaux », elles reposent sur la notion de tableau à double entrée, qui sans avoir été formellement étudié en mathématique, appartient au registre des tableaux largement utilisé dans la plupart des disciplines d'enseignement. En somme, les éléments technologiques visés chez les élèves au niveau des quatre techniques évoquées sont résumés dans le tableau suivant.

Techniques	Technologie
Produit cartésien	- Expérience aléatoire
Arbre de choix	- Expérience aléatoire
Deux tableaux	- Expérience aléatoire - Tableau à double entrée
Trois tableaux	- Expérience aléatoire - Tableau à double entrée

3.1.3.3.2. Organisation mathématique visée pour la question Q₄

Pour chacun des trois cas de la question Q₄, il y a une seule technique τ'_2 , qui pourrait relever du type de tâches T₂, à savoir :

- Identifier les caractéristiques de l'événement ;
- Sélectionner dans l'ensemble de tous les résultats possibles, ceux qui respectent les caractéristiques de l'événement.

La notion d'inclusion d'un ensemble dans un autre, issue de la théorie des ensembles, est la technologie qui justifie cette technique. Prévues pour être enseignées en classe première, cette notion peut résulter de l'investigation des élèves.

3.1.3.3. Les éléments de réponses possibles des élèves

Les éléments de réponses à la question Q₃

Étant donné que les élèves de la classe de seconde scientifique n'avaient pas jusque-là eu à étudier le dénombrement, il n'est pas a priori à attendre d'eux qu'ils utilisent formellement les techniques de dénombrement utilisant l'arbre de choix et les tableaux. Toutefois leur culture personnelle dans le domaine de réalisation des tableaux et autres dispositifs de comptage peut amener des élèves à réaliser l'arbre de choix ou un tableau pour déterminer les résultats possibles de l'expérience aléatoire. En partant donc des prérequis des élèves relativement aux techniques de dénombrement, nous prévoyons au niveau de la question Q₃, les types de réponses suivants :

- Une catégorie d'élèves peut arriver à dresser la liste des seize résultats possibles à partir de la technique « Produit cartésien » ;
- Une certaine minorité d'élèves peut dresser la liste des résultats possibles éventuellement à partir des tableaux ou de la technique « arbre de choix » ;
- D'autres peuvent, même en utilisant l'une des techniques évoquées plus haut, ignorer l'ordre dans l'obtention des résultats pour trouver les résultats pouvant se traduire par 4P, 3P1C, 2P2C, 1P3C, 4C.

Signalons que dans les deux premières propositions de réponses, les résultats possibles sont les éventualités effectives de l'expérience aléatoire, tandis que pour la troisième proposition, les résultats donnés représentent des événements qui ne sont pas tous élémentaires.

Les éléments de réponses à la question Q₄

La nature des résultats possibles étant déterminée par chaque groupe d'élèves, la présentation des réponses des élèves à la question Q₄ sera fonction de cette nature. C'est donc dans la

présentation des résultats que proviendra la différence entre les éléments de réponses possibles des élèves à la question Q₄ : les uns les présenteront sous forme de liste et les autres sous forme de combinaison. Ainsi au niveau du premier cas de la question, les réponses possibles seront PFFF, PFPF, PFFP, FFPP, FFPF, FPPF pour certains et 2P2F pour d'autres ; au niveau du deuxième cas, certains élèves donneront la liste PPCC, PCCP, PCPC, CCPP, CPPC, CPCP, PPPC, PPCP, PCPP, CPPP, PPPP pendant que d'autres les présenteront sous la forme 4P, 3P1C et 2P2C. Avec le troisième cas, on peut envisager la liste CCCC, CCCP, CCPC, CPCC, PCCC pour les uns et, 4C et 1P3C pour les autres.

3.2. Situation 2

Cette situation est une expérimentation, en classe de seconde, de la situation fondamentale conçue par Brousseau (1974) pour l'étude de la statistique et des probabilités au cours moyen du primaire. Il y a certes de différences entre les deux niveaux d'études. D'abord, les élèves de la classe de seconde (15-16 ans) sont plus matures que ceux du primaire (11-12 ans), et ont étudié la statistique avant l'expérimentation. Aussi ont-ils étudié dans la première situation de cette ingénierie les notions d'expérience aléatoire et d'événement, conformément à la transposition didactique. En conséquence, le but de notre expérimentation est réduit explicitement à la construction de la notion de probabilité d'un événement. C'est dire que les conditions d'expérimentation ne sont pas les mêmes pour notre ingénierie et celle de référence. Néanmoins nous reconduisons le contexte et le problème de cette situation avec quelques modifications mineures des variables didactiques, étant donné qu'elle vise les savoirs relatifs aussi bien à la notion de probabilité qu'au calcul des probabilités.

Le milieu est celui de la machine de hasard de Brousseau : une bouteille opaque contenant des billes de deux couleurs. Ce choix a une double justification. Il se justifie d'abord par le fait que nous avons besoin que les élèves réalisent de grands nombres de tirages pour observer la stabilisation de la fréquence des billes d'une couleur donnée. Comme l'avait signalé Brousseau, cette machine est simple, facile à concevoir et à reproduire, et capable de fournir rapidement des informations à interpréter (Brousseau, 2005). La deuxième justification du choix de la machine de hasard de Brousseau réside dans le fait qu'aucune insuffisance ou limite n'est encore signalée dans son fonctionnement. Très appréciée dans l'étude des probabilités, plusieurs chercheurs ont adopté cette machine dans le domaine des probabilités. C'est le cas par exemple de Briand (2005), de Dhieb (2009) et de Carranza P. (2009), qui ont exploité la situation fondamentale de référence de Brousseau pour des expérimentations dans les enseignements secondaire et supérieur (chap. II, 3.3 et 3.4). À ce niveau de notre ingénierie,

nous restons sur la même ligne que Dhieb (2009) en exploitant l'ingénierie de référence de Brousseau pour estimer la notion de probabilité à partir de l'étude de l'évolution de la fréquence relative à l'aide des polygones de fréquences.

La deuxième variable macro-didactique est le nombre de billes dans chaque bouteille. Nous l'avons fixé à cinq comme dans l'expérimentation de référence. En fait le nombre cinq paraît simple en ce sens que les valeurs d'oscillations des fréquences sont des nombres décimaux. C'est aussi le cas pour le nombre quatre pour lequel nous avons opté au départ. Mais nous avons estimé qu'avec quatre billes, les élèves pourraient être tentés de deviner la composition de la bouteille en trichant, c'est-à-dire en cherchant à regarder l'ensemble des billes à travers la bande transparente de la bouteille. Pour nous cette devinette serait certainement plus facile avec quatre billes.

Le troisième choix didactique est le nombre de couleurs différentes des billes. Nous avons reconduit deux couleurs comme dans l'ingénierie de référence. En fait, l'objectif de la situation étant de construire la notion de probabilité d'un événement, il est plus réaliste de partir d'un événement simple comme celui considéré par Brousseau dans l'expérimentation de référence. Ceci a l'intérêt de permettre à l'enseignant de se concentrer sur la conduite vers la convergence de la fréquence relative vers la probabilité de l'événement. Dans ces conditions, il n'y a pas d'intérêt à considérer plus de deux couleurs.

Il n'est pas superflu de signaler que les billes sont apparemment identiques afin de réaliser les conditions d'équiprobabilité. Ceci permet d'aller au-delà de la construction de la notion de probabilité pour aboutir par la même occasion à une première rencontre des élèves avec le premier principe de Laplace.

3.2.1. Analyse a priori de la phase 2.1

Cette phase dont l'enjeu pour les élèves est la stabilisation de la fréquence relative a pour objectif spécifique d'amener les élèves à conjecturer la valeur autour de laquelle oscillent les fréquences observées.

3.2.1.1. Variables didactiques

La variable didactique principale de cette phase est la composition des bouteilles que nous avons voulue unique pour les cinq groupes de classe, afin de faciliter l'observation de la convergence de la fréquence à partir de la réalisation de cinq courbes de fréquences. Pour susciter la réalisation de plus en plus de tirages par les élèves, nous avons jugé nécessaire de ne pas leur expliquer que la composition des bouteilles est la même dans tous les groupes.

L'observation de l'évolution de la fréquence d'apparition d'une bille blanche nécessite l'étude des séries de tirages dont il serait souhaitable de fixer très tôt la taille, à moins d'en faire une donnée de la situation. Dans l'expérimentation de référence, la valeur de la taille des séries de tirages a été spontanément fixée à 5 par les élèves dès la deuxième séance, pour passer à 10 à la douzième séance, la durée d'une séance étant de 15 minutes dans cette expérimentation (Brousseau, 1975, 2005). Cette taille, que nous laissons libre au début, sera fixée à 20 pour une évolution plus rapide de la fréquence et pour une facilité dans les calculs.

Le nombre total de lancer est important pour apprécier la convergence. Il doit être suffisamment grand. Les graphiques réalisés par les élèves dans l'expérimentation de référence l'ont été avec 180 tirages. Le cumul des tirages de toute la classe peut être un moyen pour atteindre de plus grands nombres de tirages, comme ce fut le cas dans les travaux de Fischbein et al (1969).

3.2.1.2. Rôle du professeur

Comme dans l'ingénierie de référence, le professeur va jouer dans cette phase un rôle de régulateur. Avant d'entamer les différents temps de travail relatifs à la construction de la notion de probabilité d'un événement, le professeur fera rappeler les notions d'expérience aléatoire et d'événements étudiées au cours de la séance précédente. Il présentera aux élèves les bouteilles fabriquées pour la circonstance afin de leur montrer comment il n'est possible de voir à travers la partie transparente qu'une seule bille après retournement de la bouteille. Les élèves seront ensuite mis au travail en groupe après la lecture de la situation fondamentale qui leur sera présentée. Pendant le temps du travail en groupe, le rôle du professeur se limite à circuler pour voir les élèves travailler et à leur repréciser au besoin la consigne. C'est dans le temps du travail collectif que son rôle devient plus important. Il fera noter au tableau les observations de chaque groupe ainsi que leur tentative éventuelle de réponse à la question posée. Il sera attentif à exploiter des occasions de fixer la taille des séries de tirages, et de faire adopter la décision de l'étude de l'évolution de la fréquence de billes blanches par cumul de tirages. Aussi s'intéressera-t-il aux incertitudes des élèves sur leurs hypothèses pour relancer régulièrement la classe par le rappel de la tâche, en vue d'avoir de plus en plus d'informations à interpréter. Il fera surtout réaliser par chaque groupe, sur un même dessin, les polygones de fréquence des cinq séries statistiques construites dans les cinq groupes, et sur un deuxième dessin le polygone des fréquences d'une série statistique obtenue à partir du cumul des tirages des cinq groupes.

3.2.1.3. Organisation mathématique visée

Type de tâches

Dans les conditions matérielles définies dans cette phase, un type de tâches T_3 univoque y est défini comme il suit : « déterminer la composition de la bouteille dans une situation d'expérience aléatoire précise ».

La technique visée relevant de T_3

Une seule technique τ_3 relève du type de tâches T_3 et se décline comme il suit :

- reconnaître l'expérience aléatoire ;
- effectuer des séries d'une taille donnée n_0 de réalisations de l'expérience aléatoire ;
- compter par série de tirages le nombre de fois que les billes d'une couleur donnée sont apparues ;
- réaliser le tableau de la série statistique des fréquences du cumul des tirages sous la forme ci-après ;

Nombre total de tirages cumulés	n_0	$2n_0$	$3n_0$...
Nombre cumulé de billes blanches
Fréquence cumulée

- estimer la valeur autour de laquelle oscille la fréquence cumulée d'apparition des billes de la couleur visée ;
- conjecturer le nombre de billes de la couleur visée en multipliant la valeur précédente par 5 ;
- déduire le nombre de billes de la deuxième couleur.

Technologie et théorie associées à la technique τ_3

La technologie associée à la technique τ_3 se compose de :

- la notion de série statistique à une variable ;
- les notions d'effectif et de fréquence ;
- les notions d'effectif cumulé croissant et de fréquence cumulée croissante.

La théorie contenant la technologie ci-dessus déclinée est la statistique descriptive à une variable.

3.2.1.4. Les comportements possibles des élèves

Les comportements envisageables sont ceux observés dans les expérimentations antérieures de Brousseau (1974, 1975), de Briand (2005) et de Dhieb (2009). Ainsi, au niveau du premier temps de travail en groupe, on peut assister respectivement à :

- des essais de retournement de la bouteille en vue de comprendre le fonctionnement du dispositif ;
- la réalisation effective des premiers essais de tirages en vue d'analyser les résultats observés;
- l'émergence des premières hypothèses à partir de la fréquence d'observation de la couleur recherchée.

Les analyses se feront dans les groupes à partir des nombres de tirages se limitant à une ou deux dizaines chez les uns, et relativement plus grands chez d'autres. L'observation effective des deux couleurs donnera très tôt aux élèves l'assurance de la présence d'au moins une bille blanche et une bille noire dans la bouteille. Concernant la composition de la bouteille, nous pouvons nous attendre à plusieurs hypothèses soutenues par des arguments divers basés notamment sur la détermination de la fréquence d'observation de billes blanches pour un petit nombre de tirages et la déduction du nombre de billes blanches par une règle de trois. Toutefois il est envisageable que certains élèves, dépassés par le passage du déterminisme auquel ils sont habitués à l'aléatoire, ne puissent pas être en mesure de bien argumenter leur proposition de la composition de la bouteille, ou qu'ils refusent carrément d'en proposer.

Au niveau du temps du travail collectif, la discussion autour des méthodes utilisées dans les groupes pour parvenir à leurs propositions respectives de composition de la bouteille pourrait aboutir à :

- l'émission de l'hypothèse de la couleur dominante des billes ;
- l'adoption de la fréquence des billes blanches comme outil d'analyse ;
- la réalisation de plusieurs séries d'une taille donnée de tirages pour vérifier les hypothèses des uns et des autres ;
- l'émergence de l'idée du cumul des tirages.

Avec la réalisation de nombres relativement grands de tirages dans un deuxième temps de travail en groupe, les élèves vont réaliser ou seront amenés à réaliser au sein de leurs groupes respectifs des tableaux de fréquences des séries cumulées de tirages. L'interprétation de ces tableaux conduira l'ensemble de la classe à une seule hypothèse de composition de la bouteille.

Au cours d'un deuxième temps de travail collectif, la discussion sera centrée autour de l'évolution de la fréquence et de sa limite. La recherche ou la confirmation de cette limite se fera à l'occasion d'un troisième temps de travail en groupe, au cours duquel des graphiques seront réalisés. Avec les indications qui seront données par le professeur, les élèves arriveront à réaliser un même type de graphiques corrects, qui vont mettre en évidence la convergence de la fréquence. La mise en commun des résultats des cinq groupes à l'issue du troisième temps de travail en groupe donnera lieu à une meilleure observation du nombre réel autour de laquelle les fréquences relatives oscillent. Pour y arriver, les élèves vont devoir faire plusieurs propositions de valeurs proches de la valeur théorique attendue.

3.2.2. Analyse a priori de la phase 2.2

L'objectif spécifique de cette phase est le travail de la méthode de stabilisation de la fréquence relative afin d'estimer la probabilité d'un événement. À l'issue de cette phase, les six valeurs possibles de la probabilité de l'événement « la bille tirée est blanche », associé à l'expérience aléatoire « tirer une bille dans un sac contenant cinq identiques de couleurs blanche et noire » seront approximativement connues.

3.2.2.1. Variables didactiques

Les compositions des bouteilles des cinq groupes constituent le premier choix didactique pour lequel nous avons opté dans la phase 2.2. L'atteinte de l'objectif spécifique de la phase est la raison fondamentale qui justifie le fait que nous avons voulu que ces compositions soient deux-à-deux différentes. L'intérêt en est que les valeurs estimées des probabilités de l'événement « obtenir une bille blanche » qui seront fournies par les cinq groupes serviront à réaliser le tableau qui sera exploité dans la phase 2.3 en vue d'aboutir à la conjecture du premier principe de Laplace.

La taille des séries successives de tirages est une deuxième variable didactique. Elle est laissée libre aux élèves, qui, forts des résultats de la phase 2.1, prendront l'initiative de fixer la taille des séries de tirages. Le nombre total de lancers, qui est une autre variable didactique, est également laissé à l'initiative des élèves.

3.2.2.2. Rôle du professeur

Le professeur commencera cette phase par le rappel de la méthode utilisée pour déterminer la composition de la bouteille, qui a consisté à observer l'évolution de la fréquence d'apparition des billes blanches. Le concept de probabilité d'un événement étant ainsi rappelé, le professeur aura d'abord à remettre aux élèves les cinq bouteilles préparées à l'avance par le chercheur. Il disposera

des papiers millimétrés qu'il pourra remettre à des élèves, qui jugeront nécessaire la réalisation d'un graphique. Dans son rôle de régulation, il circulera pendant le temps de travail en groupe pour se rendre compte du fonctionnement effectif de tous les groupes. Pendant le temps du travail collectif, il conduira la discussion de manière à obtenir les valeurs limites 0 ; 0,2 ; 0,4 ; 0,6 ; 0,8 et 1 lorsque la bouteille contient respectivement 0, 1, 2, 3, 4 et 5 billes blanches.

3.2.2.3. Organisation mathématique et comportements possibles des élèves

L'organisation mathématique de la phase 2.2 est la même que celle de la phase 2.1, notamment pour la question Q₆, qui peut être considérée comme un spécimen du type de tâches T₃. La seule différence possible est le fait que les élèves avaient déjà étudié dans la phase 2.1 la technique relevant de ce type de tâches. Ils doivent avoir compris à partir de la phase précédente qu'ils auront besoin des séries d'une taille donnée de tirages, et qu'ils doivent en effectuer un grand nombre pour atteindre dans leur groupe une valeur approchée de la fréquence limite.

En prenant en compte les résultats de la phase précédente, il est donc envisageable que les élèves aient le même comportement dans leurs groupes respectifs, à savoir :

- réaliser suffisamment de séries de tirages de taille fixée au niveau de la phase précédente ;
- présenter les résultats dans un tableau de fréquences du cumul des tirages ;
- réaliser éventuellement le polygone des fréquences d'apparition de billes blanches ;
- estimer la valeur autour de laquelle la fréquence pourrait osciller ;
- déduire le nombre de billes blanches.

Ainsi dans le groupe où la bouteille contiendrait zéro bille blanche ou cinq billes blanches, les élèves trouveront avec plus de certitude la valeur 0 ou 1. Dans les autres groupes, les élèves aboutiront respectivement aux valeurs 0,2 ; 0,4 ; 0,6 et 0,8.

3.2.3. Analyse a priori de la phase 2.3

L'objectif spécifique de cette phase est l'anticipation sur le premier principe de Laplace par la détermination de la probabilité de tirer une bille blanche pour toute composition de la bouteille contenant des billes de couleur blanche et de couleur noire.

3.2.3.1. Variables didactiques

Dans cette phase, nous avons fait le choix majeur de rendre virtuel le milieu que constitue la bouteille opaque contenant les billes afin de solliciter l'intuition des élèves à généraliser les résultats de la phase précédente. Ce choix, inspiré de l'expérimentation de référence, se justifie

par le fait que l'expérimentation des phases 2.1 et 2.2 permet également aux élèves de conjecturer le premier principe de Laplace dans les conditions de l'expérimentation.

Le tableau réalisé à l'issue de la phase 2.2 et dont la forme est exploitée dans la phase 2.3 est pour nous un choix didactique non moins important. Il permettra de récapituler les différentes valeurs estimatives des probabilités de l'événement « tirer une bille blanche », relatives aux différentes possibilités de composition de la bouteille. Le fait d'observer toutes ces probabilités à la fois devrait permettre aux élèves de capter la formule à conjecturer.

Le nombre total de billes contenues dans la bouteille est également un choix didactique de cette phase. Ce nombre qui était cinq dans les deux premières phases passe à huit puis à sept dans la troisième phase. La détermination de toutes les compositions possibles de la bouteille et des valeurs limites respectives de la fréquence des billes blanches constituent la manifestation d'une rencontre effective avec le premier principe de Laplace. Ce qui devrait offrir dans le cas présent d'équiprobabilité un passage de la probabilité réelle et la probabilité théorique, c'est-à-dire de la probabilité estimée et celle calculée.

Les nombres de billes dont il est question dans la phase ne sont pas anodins. Le choix du nombre huit permet de confirmer la nature décimale des probabilités obtenues dans la phase 2.2. Le nombre sept par contre ne garantit pas cette décimalité, mais il permettra de présenter la probabilité d'un événement comme une fraction telle qu'elle avait été définie par A. De Moivre (1756, p.1).

Wherefore, if we constitute a Fraction whereof the Numerator be the number of Chances whereby an Event may happen, and the Denominator the number of all the Chances whereby it may either happen or fail, that Fraction will be a proper designation of the Probability.

3.2.3.2. Rôle du professeur

Le premier acte didactique du professeur sera de mettre les élèves en situation en mettant d'abord à la disposition des élèves l'énoncé de la consigne et en réalisant avec les élèves le tableau récapitulatif des résultats obtenus par l'ensemble des cinq groupes de la classe. En dehors de la régulation habituelle, le professeur amènera les élèves à conjecturer le premier principe de Laplace qu'il institutionnalisera. Mais avant d'en arriver là, il lui aura fallu guetter les occasions de présenter les registres des probabilités présents dans la phase. Avec le premier cas de la consigne, le registre des écritures décimales sera confirmé, tandis que le deuxième cas

donnera l'occasion au professeur de montrer le registre des écritures fractionnaires dans lequel peuvent s'écrire les probabilités.

3.2.3.3. Organisation mathématique visée

L'organisation mathématique visée dans cette phase se base sur le type de tâches T_4 : « déterminer la probabilité d'un événement à partir du premier principe de Laplace ». La question Q_7 constitue un spécimen qui conduit à la réalisation de ce type de tâches. La technique τ_4 qui en relève peut se décomposer ainsi qu'il suit :

- identifier le nombre de billes contenues dans la bouteille ;
- identifier l'expérience aléatoire ainsi que l'événement ;
- déterminer toutes les compositions possibles de la bouteille en billes blanches et noires ;
- conjecturer la formule du premier principe de Laplace ;
- écrire la probabilité de l'événement pour chaque possibilité de composition de la bouteille comme dans les tableaux ci-après.

Premier cas : le nombre total de bille est 8

Nombre de billes blanches dans la bouteille	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Nombre de billes noires dans la bouteille	8	7	6	5	4	3	2	1	0
Probabilité de tirer une bille blanche	0	0,125	0,25	0,375	0,5	0,625	0,75	0,875	1

Deuxième cas : le nombre total de bille est 7

Nombre de billes blanches dans la bouteille	0	1	2	3	4	5	6	7
Nombre de billes noires dans la bouteille	7	6	5	4	3	2	1	0
Probabilité de tirer une bille blanche	0	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{6}{7}$	1

La technologie qui justifie cette technique est constituée d'une part des notions La technologie qui justifie cette technique est constituée d'une part des notions d'expérience aléatoire, d'événements de la théorie des probabilités, et d'autre part de la capacité à mettre en relation les données et les inconnues pour arriver au constat que les probabilités à donner respectent bien une formule, qui est celle du premier principe de Laplace.

3.2.3.4. Comportements possibles des élèves

La réalisation du tableau récapitulatif des résultats de la phase 2.2 peut amener les élèves ayant compris la consigne à avoir un même comportement pour remplir les tableaux. La différence entre les réponses se situera certainement au niveau de la présentation des probabilités dans le deuxième cas. Dans une grande majorité, les élèves les écriront dans le registre des écritures décimales en précisant des valeurs approchées au lieu des valeurs réelles de ces probabilités. Et ceci à cause de leur réflexe à utiliser systématiquement la calculatrice pour effectuer les opérations, même les plus simples. D'autres élèves, et nous pensons qu'ils ne seront pas nombreux, vont exprimer les probabilités dans le registre des fractions.

Nous envisageons ainsi que par rapport au premier cas de la question, la quasi-totalité des groupes de la classe réaliseront le tableau prévu au niveau de l'organisation mathématique. Pour ce qui concerne le deuxième cas, comme nous venons d'expliquer, une stricte minorité d'élèves feront émerger l'idée de réaliser le tableau prévu dans l'organisation didactique. Il est possible d'attendre du plus grand nombre d'élèves le tableau ci-après.

Nombre de billes blanches dans la bouteille	0	1	2	3	4	5	6	7
Nombre de billes noires dans la bouteille	7	6	5	4	3	2	1	0
Probabilité de tirer une bille blanche	0	0,143	0,286	0,429	0,571	0,714	0,857	1

Les nombres décimaux présentés dans la dernière ligne du tableau sont les arrondis d'ordre trois des probabilités recherchées. À ce niveau aussi, on peut s'attendre de la part des élèves aux valeurs approchées par défaut de ces probabilités et à des nombres décimaux d'ordre différent de trois.

3.3. Situation 3

La situation 3 a pour objectif de faire rencontrer aux élèves un premier exemple de modélisation d'une expérience aléatoire, à travers l'estimation de la probabilité d'un événement non élémentaire. Le savoir enjeu est la définition de la probabilité définie sur un univers fini à partir du deuxième principe de Laplace. Élaborée dans un contexte de lancer simultané de quatre cauris, cette situation pose le problème d'estimation de la probabilité d'un événement, en vue de la découverte du deuxième principe de Laplace. Comme les situations précédentes, la situation 3 sera conduite suivant une démarche expérimentale à partir de l'approche

fréquentiste. Ce caractère expérimental de la situation ne permet pas de calculer a priori la probabilité d'un événement, mais plutôt d'en estimer pour déboucher sur l'enjeu, qui est le deuxième principe de Laplace.

3.3.1. Les variables didactiques

Le milieu matériel est globalement composé de quatre cauris, d'un plateau et d'un gobelet ainsi que des lancers des cauris. Les cauris seront agités dans le gobelet pour être lancés dans le plateau. Bien qu'utilisé dans le charlatanisme, le cauri ne constitue pas un obstacle au bon déroulement de la situation, puisque les élèves avaient été habitués à ce coquillage naturel dans la première situation. Les raisons du choix de cauris sont les mêmes que celles évoquées dans la situation 1 : les cauris sont tirés du milieu culturel des élèves ; ils semblent être indiqués par les programmes en tant que matériel virtuel pour introduire les probabilités ; ils garantissent une situation de probabilité dans laquelle les événements élémentaires ne sont pas équiprobables. Rappelons que le nombre de cauris dans la situation est l'un des choix possibles de nombre de cauris utilisés dans la pratique divinatoire, comme nous l'avions expliqué au niveau de l'analyse de la situation 1 (3.1). Si dans la situation 1, nous avons opté pour le lancer successif d'un cauri quatre fois de suite pour rechercher la stabilité ou non du rapport des élèves au hasard du tirage au sort, nous trouvons plus pertinent dans la situation 3 de simplifier cette expérience aléatoire par un seul lancer de quatre cauris. Non seulement l'expérience aléatoire de la situation 3 est un autre modèle de celle de la situation 1, mais elle paraît plus simple à réaliser que celle de la situation 1 et garantit en un seul lancer l'observation d'un événement non élémentaire. A priori, l'influence de la situation 1 sur la situation 3 ne s'arrête qu'au rapport des élèves au hasard du tirage au sort.

À côté des cauris et de leur nombre, l'événement dont la probabilité est à estimer dans la situation est la variable fondamentale qui permet de faire découvrir le deuxième principe de Laplace. L'expérience aléatoire étant le lancer de quatre cauris, cet événement E est : « obtenir au moins deux fois la face (P) ». Il n'est pas un événement élémentaire, mais plutôt la réunion de trois événements élémentaires. Nous souhaitons qu'il y ait un groupe au moins parmi les cinq dans lequel la probabilité de cet événement serait estimée à partir de l'estimation de celles des événements élémentaires qui le constituent. Dans le cas contraire, il est prévu qu'il soit proposé aux élèves une consigne complémentaire devant les inviter à trouver le lien entre la probabilité de l'événement E et celles des événements élémentaires qui le composent.

Avec les travaux de Parzysz (2011a.), il est possible de connaître une estimation par calcul de la probabilité de l'événement E. En effet, S. Doumbia et J.-C. Pil¹⁷ ont estimé à 0,4 la probabilité d'obtenir (P) dans le lancer d'un cauri rogné : « on peut estimer, dans des limites raisonnables, que la probabilité d'obtenir (P) est voisine de 0,4. », (Ibid., p. 311). Nous inspirant de ces travaux, nous pouvons estimer la probabilité d'obtenir la face (P) pour le cauri non rogné. Partant de l'estimation de S. Doumbia et J.-C. Pil et en considérant que les quatre cauris sont identiques, la probabilité de l'événement E peut être obtenue par calcul de la manière suivante.

$$\begin{aligned}
 p(E) &= C_4^2(0,4)^2(0,6)^2 + C_4^3(0,4)^3(0,6)^1 + C_4^4(0,4)^4 \\
 &= 0,3456 + 0,1536 + 0,0256 \\
 &= 0,5248.
 \end{aligned}$$

Les cauris que nous avons utilisés n'étant pas rognés comme ceux de Dombia et Pil, nous ne nous attendons pas nécessairement à une probabilité proche de 0,52.

3.3.2. Rôle du professeur

Outre son rôle de régulateur qui consiste à faire travailler les élèves à partir de l'administration de la consigne, le professeur demandera aux élèves de noter tous les résultats des lancers effectués pendant le temps de travail en groupe afin qu'ils soient exploités plus tard pour estimer les probabilités des événements élémentaires. Pendant le temps de travail collectif, il fera noter au tableau noir les réponses et méthodes utilisés par chaque groupe pour estimer la probabilité demandée. Il exploitera ces méthodes pour faire exprimer la probabilité de l'événement en fonction des probabilités des événements élémentaires, en même temps qu'il fera établir le tableau des probabilités de tous les événements élémentaires. Il clôturera la séance par l'institutionnalisation de la définition de la probabilité à partir du deuxième principe de Laplace.

3.3.3. Organisation mathématique visée

Deux types de tâches permettent de poursuivre l'objectif de la situation. Il s'agit du type de tâches T₅ : « estimer la probabilité d'un événement » dont la question Q₈ de la situation est un spécimen et le type de tâches T₅' : « calculer la probabilité d'un événement constitué de plusieurs éventualités ». Le type de tâches T₅' est précisé à travers la question Q₈' consistant à trouver une relation entre l'estimation de la probabilité d'un événement et celles des événements élémentaires qui le composent. Au type de tâches T₅ relève une technique $\tau_{5,1}$ basée

¹⁷ Doumbia S. et Pil J.-C. (1992), *les jeux de cauris*. Éd. Institut de Recherches Mathématiques d'Abidjan, cité dans Parzysz (2011a).

sur l'estimation de la probabilité de l'événement E sans faire un lien avec les probabilités des événements élémentaires le composant. Elle se détaille comme il suit :

- identifier l'expérience aléatoire ;
- identifier l'événement E dont la probabilité est à estimer ;
- réaliser l'expérience aléatoire un grand nombre de fois pour noter toutes les observations ;
- compter le nombre de fois que l'événement E est réalisé ;
- calculer la fréquence de réalisation de l'événement E qui sera considérée comme une estimation de la probabilité.

Cette technique se justifie par les éléments technologiques relatifs aux notions d'expérience aléatoire, d'événement et à la loi des grands nombres, qui s'inscrivent dans la théorie des probabilités.

Spécifiquement pour cette situation, l'expérience aléatoire est le lancer simultané de quatre cauris et l'événement est « obtenir au moins deux faces (P) ». Dans la technique $\tau_{5,1}$, le décompte du nombre de fois que l'événement E est réalisé est fait, en utilisant la définition de l'événement tel qu'il est donné. Ce décompte peut se faire aussi en additionnant les nombres de fois que les événements élémentaires sont observés.

Au type de tâches T₅ relève une technique $\tau_{5,2}$ basée sur la détermination des estimations des probabilités des événements élémentaires qui composent l'événement E. Elle se décline comme il suit :

- identifier l'expérience aléatoire ;
- identifier l'événement E dont la probabilité est à estimer ;
- identifier les événements élémentaires qui composent l'événement E ;
- réaliser l'expérience aléatoire un grand nombre de fois pour noter toutes les observations ;
- compter le nombre de fois que chaque événement élémentaire de l'événement E est réalisé ;
- calculer la fréquence de réalisation de chaque événement élémentaire de E qui sera considérée comme une estimation de la probabilité de cet événement-là ;
- additionner les estimations des probabilités des événements élémentaires pour obtenir l'estimation de la probabilité de l'événement E.

La technologie qui justifie cette technique comporte les éléments technologiques de la technique $\tau_{5,1}$ et le deuxième principe de Laplace en construction. En effet le développement de la technique permettra au professeur d'institutionnaliser le savoir visé qui est le deuxième principe de Laplace. Dans ce sens la situation 3 n'est pas une situation fondamentale pour la construction de ce principe.

3.3.4. Les réponses possibles des élèves

Dans les phases n°1 et n°2 de la deuxième situation, les élèves ont appris à estimer la probabilité d'un événement. Il n'y a aucun doute qu'ils adoptent avec succès les deux techniques évoquées précédemment. Concernant la technique $\tau_{5,1}$, nous estimons qu'ils opteront pour les deux possibilités de décompte des observations relevant de l'événement E évoquées plus haut. Il n'est pas exclu qu'un groupe d'élèves opte prématurément pour la technique $\tau_{5,2}$ au niveau du type de tâches T_5 , mais à notre avis, la probabilité qu'il en soit ainsi est si faible, qu'une intervention du professeur pourra être nécessaire pour les relancer à partir de la question Q_8 . Ainsi, nous pouvons nous attendre globalement aux trois comportements possibles ci-dessous chez les élèves :

- s'intéresser globalement à la réalisation de l'événement, en identifiant les résultats du lancer comportant deux, trois ou quatre faces (P) puis calculer l'estimation de la probabilité de cet événement ;
- s'organiser de manière à s'intéresser d'abord aux décomptes des observations appartenant aux événements élémentaires « avoir exactement deux (P) », « avoir exactement trois (P) » et « avoir exactement quatre (P) » ; les additionner pour obtenir le nombre de fois que l'événement E est réalisé, puis calculer l'estimation de sa probabilité ;
- s'intéresser à l'estimation de la probabilité de chaque événement élémentaire composant l'événement E, puis les additionner pour trouver l'estimation de E.

Rappelons que les deux premiers comportements sont relatifs à la technique $\tau_{5,1}$ et que le dernier est lié à la technique $\tau_{5,2}$.

3.4. Situation 4

La démonstration des propriétés apparaissant comme des axiomes dans la théorie axiomatique de Kolmogorov et celle du premier principe de Laplace constituent l'objectif de la situation 4. Le savoir enjeu pour l'élève est ainsi composé des énoncés des axiomes fondamentaux et de l'énoncé du premier principe de Laplace qui apparaissent comme des propriétés de la théorie

qui est construite dans la classe. Ces savoirs seront mis en place en utilisant le deuxième principe de Laplace et constitueront les éléments du bloc technologique des praxéologies en construction.

3.4.1. Les choix didactiques

La situation 4 n'étant pas expérimentale et adidactique, il n'y existe pas un milieu physique antagoniste. Le milieu existant est composé juste du contexte et des consignes. Le deuxième principe de Laplace, construit dans la situation précédente s'impose comme choix didactique pour démontrer les formules essentielles du calcul élémentaire des probabilités. En réalité, ce choix est une conséquence de l'organisation globale de l'ingénierie pour laquelle nous avons préféré entrer dans le calcul des probabilités par le deuxième principe de Laplace, contrairement aux indications des programmes de probabilités, qui privilégient l'axiomatique de Kolmogorov. Le deuxième choix didactique se situe au niveau des formules à démontrer dans la situation. Étant donné que l'ingénierie expérimentée devrait être la première rencontre avec le calcul des probabilités, nous nous sommes limités aux formules nécessaires pour le calcul élémentaire des probabilités. Par exemple, nous n'avons pas jugé utile de démontrer la formule d'additivité dénombrable, puisque à cette première rencontre avec la probabilité, le deuxième principe de Laplace, qui est un cas particulier de cette formule, peut valablement la remplacer.

3.4.2. Rôle du professeur

Étant donné que le deuxième principe de Laplace est l'outil principal sur lequel repose toutes les démonstrations, il est nécessaire que cet outil soit compris de tous les acteurs de la séance. C'est pour cette raison que nous prévoyons que le rappel de ce principe soit le premier acte didactique que le professeur devra poser. Ainsi à l'entame de la séance, le professeur posera aux élèves des questions de type maïeutique dans le but du rappel ci-dessus évoqué. Pendant le temps du travail collectif et pour chaque question, le professeur cherchera à exploiter les idées développées par les élèves dans le temps du travail en groupe pour procéder à la démonstration. Dans le cas où un groupe d'élèves aura réussi à démontrer une propriété ou aura trouvé de bonnes idées pour y parvenir, le professeur enverra un membre du groupe au tableau pour la présentation de la démonstration, qu'il les aidera à éventuellement parfaire. Cependant le professeur prendra la responsabilité de la présentation de la démonstration au cas où les idées des élèves ne seront pas suffisamment fructueuses pour l'aboutissement de la démonstration. L'ensemble des propriétés démontrées sera récapitulé à la fin de la séance en guise d'institutionnalisation.

3.4.3. Organisations mathématiques visées

Les quatre questions de la situation 4 ne peuvent pas être perçues comme des spécimens d'un même type de tâches, mais de plusieurs types de tâches à venir ou déjà travaillés avec une extension de certains types. Nous y reviendrons au fur et à mesure de l'analyse a priori pour chaque question. En fait, il s'agit dans cette situation de mettre en place des éléments du bloc technologico-théorique en lien avec les programmes de classe terminale. On peut aussi voir dans cette situation une formalisation de techniques et technologies associées à des questions de la situation 5 sur le calcul de probabilité. Nous présenterons les praxéologies visées en suivant l'ordre des quatre questions. Et puisque, la propriété relative à la question Q₁₀ est une conséquence directe de celle relative à la question Q₉, nous examinons seulement le cas des questions Q₉, Q₁₁ et Q₁₂.

Question Q₉

La tâche t_6 au niveau de cette question est de « démontrer que pour deux événements quelconques A et B, $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$ » et de construire cette propriété comme un élément technologique de la théorie probabiliste. Compte tenu des connaissances rappelées dans la situation, à savoir la définition de la probabilité selon le deuxième principe de Laplace, il est attendu à quelques légères variations près une méthode de démonstration suivant le plan :

- Identifier les éventualités qui composent respectivement les événements A et B ;
- Identifier les éventualités des événements $A \cap B$ et $A \cup B$;
- Exprimer $p(A \cup B)$ en fonction des probabilités des événements élémentaires ;
- Exprimer $p(A) + p(B) - p(A \cap B)$ en fonction des probabilités des événements élémentaires ;
- Comparer $p(A \cup B)$ et $p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.

Les variations ci-dessus signalées porteront sur la manière de démontrer l'égalité de deux expressions littérales. Comme nous l'avons précisé plus haut, la question Q₁₀ peut être résolue comme la question Q₉ ou peut être vue comme une application de cette dernière.

En se projetant dans les exercices d'application ou problèmes de réinvestissement, cet élément technologique permet de construire une technique de calcul de la probabilité d'un événement pouvant se définir comme la réunion de deux événements élémentaires ou non.

Question Q₁₁

La tâche t_7 au niveau de la question Q₁₁ est de « démontrer que pour tout événement A , $p(A) + p(\bar{A}) = 1$ », autre élément technologique de la théorie probabiliste visée. Trois techniques $\tau_{7.1}$, $\tau_{7.2}$ et $\tau_{7.3}$ sont envisageables : les deux premières basées sur des axiomes fondamentaux de la probabilité selon l'axiomatique de Kolmogorov, et la troisième sur le deuxième principe de Laplace.

La technique $\tau_{7.1}$ se détaille de la manière suivante :

- remarquer que $A \cup \bar{A} = \Omega$ et $A \cap \bar{A} = \emptyset$;
- calculer $p(A \cup \bar{A})$ en utilisant la propriété démontrée à la question Q₉ ;
- utiliser l'axiome $p(\Omega)=1$ pour déduire la relation à démontrer.

La démonstration repose sur les notions d'événements incompatibles, d'événements contraires et sur les axiomes fondamentaux de l'axiomatique de Kolmogorov de la théorie des probabilités.

La technique $\tau_{7.2}$ utilise la formule démontrée à la question Q₁₀ et se détaille comme il suit :

- remarquer que A et \bar{A} sont incompatibles et que $A \cup \bar{A} = \Omega$;
- appliquer la propriété « Si A et B sont incompatibles, alors $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$ » et l'axiome « $p(\Omega)=1$ » pour déduire la relation à démontrer.

La technique $\tau_{7.3}$ se précise comme il suit :

- désigner les éventualités de l'événement A et celle de son événement contraire \bar{A} ;
- remarquer que $A \cup \bar{A} = \Omega$;
- calculer $p(A \cup \bar{A})$ en utilisant le deuxième principe de Laplace ;
- utiliser l'axiome $p(\Omega) = 1$ pour déduire la relation.

La démonstration repose ici sur les notions introduites et les propriétés démontrées de la théorie des probabilités, notamment la notion d'événement, le deuxième principe de Laplace et l'axiome $p(\Omega) = 1$.

Cet élément technologique mis en place pourra à son tour servir à construire une technique de calcul de la probabilité d'un événement contraire d'un événement dont la probabilité est connue.

Question Q₁₂

La tâche t_8 au niveau de la question Q₁₂ consiste à « démontrer que lorsque tous les événements élémentaires de Ω sont équiprobables, alors pour tout événement A, $p(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$ ». Cette tâche, qui relève du même genre de tâches que les autres questions de la situation, peut être résolue à l'aide de la technique de démonstration τ_8 qui se définit par :

- identifier les éventualités de Ω ;
- identifier les éventualités de l'événement A ;
- exprimer $p(\Omega)$ en fonction des probabilités des événements élémentaires de Ω ;
- déterminer la probabilité de chaque événement élémentaire en fonction de $\text{card}(\Omega)$;
- exprimer la probabilité de A en fonction des probabilités des événements élémentaires qui le composent ;
- déduire la probabilité de A en utilisant la probabilité de chaque événement élémentaire déterminée plus haut.

Comme on peut le constater, cette technique se justifie par les éléments technologiques constitués du langage probabiliste, du deuxième principe de Laplace et de l'axiome $p(\Omega) = 1$. Cette propriété constitue une technologie se plongeant entièrement dans la théorie des probabilités et permettant de construire des techniques de calcul de probabilité d'un événement dans le cas d'équiprobabilité.

3.4.4. Comportement et réponses possibles des élèves

Les questions de la situation 4 sont d'un même genre de tâches, à savoir « démontrer ». Plus précisément, il s'agit pour les élèves de démontrer des implications. Compte tenu de leur habitude à démontrer les implications directes, dont il est d'ailleurs question dans la situation, il est à attendre des élèves un comportement conforme à la démonstration d'une implication. Les élèves doivent chercher pour chaque question à exploiter les données pour aboutir à la conclusion convenable. Nonobstant une démarche de résolution pouvant être conforme à celle de l'implication, les élèves peuvent rencontrer des difficultés relatives à l'enjeu de cette situation en rupture avec les situations expérimentales précédentes et à la complexité formelle des formules dans le langage des probabilités.

L'étude de la démonstration d'une implication n'étant pas un objet explicite de notre étude, nous nous concentrons dans la suite sur les réponses possibles des élèves relativement aux enjeux sur les praxéologies probabilistes pour chacune des quatre questions de la situation.

Les question Q₉ et Q₁₀

En dehors des notions probabilistes, la résolution correcte des questions Q₉ et Q₁₀ dépend aussi des notions de réunion et d'intersection d'ensembles, qui ne constituent pas un objet d'enseignement formel ni en classe de seconde, ni dans les classes antérieures. Même si elle a fait l'objet d'un enseignement sommaire dans notre classe d'expérimentation, il est à craindre des difficultés dues à la non maîtrise de cet outil important du calcul des probabilités. En faisant l'hypothèse de la connaissance effective du deuxième principe de Laplace, nous envisageons trois types de comportements chez les élèves par rapport à la question Q₉ principalement. Il s'agit d'abord des élèves qui vont déterminer la réunion et l'intersection des événements A et B, et appliquer avec succès le deuxième principe de Laplace pour aboutir à la conclusion telle que prévue par l'organisation mathématique visée. Ensuite, il y a les élèves qui auront la maîtrise de la réunion et de l'intersection d'ensembles, et qui vont bien appliquer le deuxième principe de Laplace sans parvenir à démontrer l'égalité demandée. Enfin, il n'est pas exclu qu'on trouve des élèves, qui n'arriveront pas à écrire en extension la réunion et l'intersection des événements A et B, et qui ne sauront donc pas par où commencer la démonstration.

Concernant la question Q₁₀, en nous basant sur la culture mathématique des élèves de notre classe d'expérimentation, nous estimons que la plupart des élèves verront cette question comme une application directe de la propriété démontrée à la question Q₉.

Question Q₁₁

Des deux techniques composant l'organisation mathématique de la démonstration de la propriété $p(A) + p(\bar{A}) = 1$, nous estimons que celle qui utilise les axiomes fondamentaux de la définition de la probabilité selon l'axiomatique de Kolmogorov, pourrait être une réponse possible des élèves à cette question. Dans une moindre mesure, il est possible que des élèves proposent comme réponse la deuxième technique qui utilise le deuxième principe de Laplace. Nous n'envisageons pas une autre réponse possible des élèves à cette question. Il est plutôt possible qu'il n'y ait aucune proposition fructueuse de réponse et que le professeur soit obligé de conduire lui-même la démonstration.

Question Q₁₂

Comme dans la première question de la situation, la résolution de la question Q₁₂ nécessite fortement le deuxième principe de Laplace et demande qu'il soit déterminé d'abord la probabilité de chaque événement élémentaire. Toutefois la notion de cardinal introduite dans la question peut dérouter les élèves. Outre la technique relevant de la tâche t₈ de la question Q₁₂

développée dans l'organisation mathématique visée, qui pourrait être une réponse possible des élèves à la question posée, certains élèves peuvent juste donner comme réponse la formule du premier principe de Laplace rencontrée dans la troisième phase de la situation, en faisant un lien entre cette formule et celle qu'ils sont appelés à démontrer. Il est aussi possible que certains ne comprennent la question qu'après sa résolution par le professeur ou par des élèves sous sa direction.

3.5. Situation 5

Étant une activité d'exercices, la situation 5 permet de renforcer et d'appliquer les savoirs jusque-là construits ou en voie de construction, notamment le sens de la notion de probabilité d'un événement, la définition de la probabilité et les propriétés fondamentales relatives à cette notion. Nous proposons d'analyser la situation exercice par exercice en mettant explicitement l'accent sur l'organisation mathématique et les réponses possibles des élèves. Le rôle du professeur sera globalement présenté pour tous les exercices et les variables didactiques serviront à introduire l'analyse de chaque exercice.

3.5.1. Rôle du professeur pour l'ensemble des exercices

Nous distinguons deux moments de travail pour le professeur : le début de chaque séance et la résolution effective de chaque exercice. Au début de la première séance d'exercices, le professeur fera rappeler les savoirs construits durant les séances précédentes et notera avec la participation des élèves les propriétés étudiées au tableau. Dans ce cadre les propriétés ci-après doivent être écrites et numérotées au tableau en vue de leur utilisation éventuelle.

Une probabilité p étant définie sur l'univers des éventualités Ω d'une expérience aléatoire, on a :

- (1) Pour tout événement A de Ω , $0 \leq p(A) \leq 1$;
- (2) $p(\emptyset) = 0$ et $p(\Omega) = 1$;
- (3) Si A et B sont deux événements incompatibles de Ω , alors

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B);$$
- (4) Pour tout événement A de Ω , $p(A) + p(\bar{A}) = 1$;
- (5) Si A et B sont deux événements quelconques de Ω , alors :

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) ;$$
- (6) Si un événement A est composé des éventualités e_1, e_2, \dots, e_k , alors :

$$p(A) = p(\{e_1\}) + p(\{e_2\}) + \dots + p(\{e_k\}) ;$$

- (7) Si tous les événements élémentaires de Ω sont équiprobables, alors pour tout événements A , $p(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$.

Ces propriétés seront rappelées, écrites au tableau et numérotées dans l'ordre précédent au début de chaque séance d'exercices. Pour chacun des exercices, le professeur fera lire dans un premier temps l'énoncé de l'exercice afin de s'assurer de la compréhension des consignes par rapport au vocabulaire utilisé. Pour chacune des consignes d'un exercice donné, il fera travailler les élèves de façon individuelle et/ou en groupe. Il enverra le rapporteur d'un groupe au tableau pour la présentation de la proposition de réponse de son groupe. Ensuite suivra la discussion qui doit être dirigée de manière à parfaire la résolution de l'exercice par l'ensemble des élèves. Le professeur s'appliquera à conduire les élèves à identifier pour chaque consigne les propriétés dont dépend sa résolution. Les élèves seront autorisés à noter les réponses trouvées à la fin de la résolution de chaque exercice.

3.5.2. Exercice 1

L'exercice 1 est une situation-problème qui vise, en dehors de l'application des propriétés (3), (4) et (5), l'enseignement implicite du registre des pourcentages pour exprimer les probabilités. Le choix des pourcentages donnés se justifie par le souci de compléter les registres des nombres décimaux et des fractions par celui des pourcentages pour le calcul des probabilités. L'identification de l'expérience aléatoire dans le texte ainsi que celle des événements qui y sont définis constituent également des enjeux importants pour les élèves.

3.5.2.1. Organisations mathématiques visées et travaillées

Le type de tâches T_9 de la première question de l'exercice 1 peut se définir par : « identifier les données d'un problème dans un langage approprié », tandis que les trois consignes de la deuxième question sont des spécimens du type de tâches T_{10} « calculer la probabilité d'un événement ». Les événements dont les probabilités sont à calculer étant exprimés en fonction d'autres événements de probabilités connues, la résolution de l'exercice se basera uniquement sur l'utilisation des propriétés liant les probabilités de plusieurs événements.

L'organisation mathématique visée pour la première question se compose d'une technique qui se décline comme il suit :

- Identifier les pourcentages donnés comme des probabilités d'événements ;
- Identifier l'expérience aléatoire et les événements dont les pourcentages de réalisation sont donnés ;

- Exprimer sous forme décimale ou fractionnaire les probabilités identifiées.

Concernant le deuxième type de tâches, une seule technique relève de ce type de tâches. Cette technique que nous avons nommée « technique de calcul basée sur les axiomes (TCA) » (chap. IV, 2.1.6) et que nous notons $\tau_{10.1}$ se décline comme il suit pour le calcul d'un événement E donné.

- Identifier l'expérience aléatoire et l'événement E ;
- Identifier les événements dont les probabilités sont données et dont dépendent l'événement E ;
- Traduire les pourcentages donnés en probabilités d'événements ;
- Exprimer l'événement E en fonction des événements de probabilités connues ;
- Appliquer selon le cas des propriétés convenables pour la résolution de la question.

La technologie explicite qui justifie cette technique est constituée du langage probabiliste, de la définition de la probabilité et des axiomes fondamentaux qui régissent le calcul des probabilités.

Dans la résolution experte pouvant découler de cette praxéologie, les probabilités des événements A, B, C et $A \cap B$ seront traduites du registre des pourcentages vers le registre des écritures décimales ou fractionnaires conformément à la première consigne de l'exercice. Dans la deuxième question 2, il suffira de remarquer que les événements dont on cherche à calculer les probabilités sont respectivement $A \cup B$, $A \cup C$ et $\overline{A \cup B}$. Les formules (5), (3) et (4) présentées plus haut seront respectivement appliquées.

3.5.2.2. Comportements possibles des élèves

Le fait que les pourcentages n'avaient pas été jusque-là évoqués comme pouvant exprimer des probabilités devrait constituer un frein à la compréhension de la question 1) de l'exercice 1. Il n'est donc pas à attendre au niveau de cette question que les élèves reconnaissent dans leur majorité les probabilités données dans l'exercice sans l'aide du professeur. Toutefois il est bien envisageable que des élèves cherchent à interpréter ces pourcentages à l'aide du premier principe de Laplace en traduisant alors $t\%$ comme $\frac{t}{100}$, où t et 100 représenteraient respectivement le nombre de cas favorables et le nombre de cas possibles.

Au niveau de la deuxième question de l'exercice 1, la maîtrise du langage des probabilités par les élèves assurera de leur part la compréhension des consignes, notamment des deux premières qui paraissent plus facile à comprendre. Certains élèves de la classe pourront

aisément identifier les axiomes à utiliser et calculer avec succès les probabilités au niveau de ces deux consignes. C'est possible que des élèves cherchent à utiliser le premier principe de Laplace compte tenu de sa simplicité et du fait qu'étant la dernière formule étudiée, il apparaît comme le but de l'enseignement sur la probabilité. Avec la complexité relative de l'énoncé de la troisième consigne, il n'est pas évident que les élèves puissent réussir à la traduire en langage probabiliste sans l'aide du professeur.

3.5.3. Exercice 2

Dans un contexte de lancer d'un cauri, l'exercice 2 vise dans un premier temps à utiliser principalement le deuxième principe de Laplace pour le calcul des probabilités des événements élémentaires, et dans un second temps à se baser sur l'approche fréquentiste pour estimer le nombre de fois qu'apparaîtrait une face donnée connaissant la probabilité de réalisation de cette face et le nombre total de lancers. Les choix didactiques de l'exercice sont le cauri et l'épreuve de Bernoulli consistant à lancer le cauri une seule fois. Elles permettent de s'appuyer sur le contrat didactique instauré au cours de l'enseignement pour réinvestir de façon simple le deuxième principe de Laplace et l'approche fréquentiste.

3.5.3.1. Organisations mathématiques travaillées

Les trois questions de l'exercice déterminent trois différents types de tâches, à savoir :

- T_{11} : « modéliser et déterminer l'univers des possibles d'une expérience aléatoire » ;
- T_{12} : « déterminer la probabilité d'un événement élémentaire » ;
- T_{13} : « estimer le nombre d'apparitions d'un événement connaissant sa probabilité et le nombre de réalisations de l'expérience aléatoire ».

3.5.3.1.1. Analyse praxéologique de la première question

Du type de tâches « déterminer l'univers des possibles d'une expérience aléatoire » relève une technique τ_{11} qui consiste à identifier l'expérience aléatoire et à énumérer les éventualités (C) et (P). La technologie qui justifie cette technique est basée sur la définition de l'expérience aléatoire et celle de l'univers des éventualités inscrites dans la théorie des probabilités.

3.5.3.1.2. Analyse praxéologique de la deuxième question

Les événements dont il est demandé de calculer les probabilités sont des événements élémentaires qui forment un système complet d'événements de l'univers. Dans le contexte spécifique de la question, où il n'est pas possible d'utiliser une démarche expérimentale basée sur la loi des grands nombres, deux techniques $\tau_{12.1}$ et $\tau_{12.2}$ relèvent du type de tâches T_{12} . La première technique $\tau_{12.1}$ basée sur le deuxième principe de Laplace se décline comme il suit :

- exprimer $p(\Omega)$ en fonction des probabilités des événements élémentaires ;
- exploiter l'axiome $p(\Omega) = 1$ pour écrire une relation entre les probabilités des événements élémentaires ;
- exploiter les données du problème pour déterminer algébriquement les probabilités des événements élémentaires.

La deuxième technique $\tau_{12.2}$ fondée sur le fait que l'expérience aléatoire est une épreuve de Bernoulli se détaille comme ci-après :

- remarquer que les deux événements élémentaires sont des événements contraires ;
- appliquer la formule (4) pour écrire une relation entre les probabilités des deux événements élémentaires ;
- exploiter les données de l'exercice pour déterminer les probabilités recherchées.

Le langage des probabilités est un élément technologique commun aux deux techniques ci-dessus présentées. De façon spécifique la première technique se justifie par le deuxième principe de Laplace et l'axiome $p(\Omega) = 1$, tandis que la deuxième technique se justifie par la formule qui exprime la probabilité d'un événement en fonction de celle de son événement contraire. Il est évident que tous les éléments technologiques des deux techniques sont issus de la théorie des probabilités.

3.5.3.1.3 Analyse praxéologique de la troisième question

L'estimation du nombre de cas favorables à un événement connaissant la probabilité de cet événement et le nombre de réalisations de l'expérience aléatoire est la tâche assignée au niveau de la question 3. Deux techniques $\tau_{13.1}$ et $\tau_{13.2}$ peuvent relever du type de tâches T_{13} dont la question 3 est un spécimen. Ces deux techniques sont basées la première sur le sens donné à la notion de probabilité d'un événement à partir de l'approche fréquentiste, et la deuxième sur le premier principe de Laplace. La technique $\tau_{13.1}$ consisterait à :

- considérer la probabilité connue de l'événement comme une fréquence d'observation de cet événement ;
- déterminer l'effectif d'observation de l'événement.

La technologie qui justifie cette technique est bien sûr la définition de la probabilité d'un événement selon l'approche fréquentiste issue de la loi des grands nombres de la théorie des probabilités.

La technique $\tau_{13.2}$ basée sur le premier principe de Laplace consiste à

- considérer la probabilité connue de l'événement comme issue du premier principe de Laplace ;
- considérer le nombre de réalisations de l'expérience aléatoire comme étant le nombre des possibles ;
- déterminer le nombre de cas favorables à l'événement.

La technologie justifiant la technique $\tau_{13.2}$ est essentiellement constituée du premier principe de Laplace.

3.5.3.2. Réponses possibles des élèves

3.5.3.2.1. Première question

En considérant la maîtrise que les élèves ont du vocabulaire des probabilités et les nombreuses situations d'enseignement portant sur des contextes de lancer de cauri, il est attendu que tous les élèves arrivent à donner le plus rapidement possible l'univers des possibles $\Omega = \{P, C\}$ de l'expérience aléatoire.

3.5.3.2.2. Deuxième question

Pour la détermination des probabilités des événements élémentaires, nous prévoyons trois types de réponses au niveau des élèves, dont deux relatifs aux praxéologies travaillées.

Premier type de réponses possibles

Il est possible que des élèves arrivent à bien traduire les données de l'exercice, utilisent l'axiome $p(\Omega) = 1$ et la propriété (6) qui traduit le deuxième principe de Laplace pour trouver les probabilités demandées comme dans la résolution ci-après, qui résulte de la technique $\tau_{12.1}$ indiquée plus haut.

$$p(\Omega) = 1 \Leftrightarrow p(\{C\}) + p(\{P\}) = 1. \text{ Or } p(\{P\}) = 2p(\{C\}).$$

$$\text{Alors } 3p(\{C\}) = 1. \text{ Donc } p(\{C\}) = \frac{1}{3} \text{ et } p(\{P\}) = \frac{2}{3}.$$

Il n'est pas exclu qu'il soit observé chez les élèves, et dans une moindre mesure, des difficultés algébriques pouvant se traduire par des réponses incorrectes malgré une démarche de résolution conforme au premier type de réponses possibles.

Deuxième type de réponses possibles

Le deuxième type de réponses résulte de la technique $\tau_{12.2}$ relevant du type de tâches T_{12} dont la deuxième question est un spécimen. Il n'est pas exclu que la résolution de la question suivant

cette technique soit observée chez certains élèves. Cette résolution, basée sur le fait que les événements élémentaires $\{C\}$ et $\{P\}$ sont contraires, se précise comme ci-après.

$\{C\}$ et $\{P\}$ étant des événements contraires, on a $p(\{C\}) + p(\{P\}) = 1$.

Or $p(\{P\}) = 2p(\{C\})$. Alors $3p(\{C\}) = 1$. Donc $p(\{C\}) = \frac{1}{3}$ et $p(\{P\}) = \frac{2}{3}$.

Des difficultés d'ordre algébrique signalées au niveau du premier type de réponses sont aussi envisageables pour ce deuxième type de réponses

Troisième type de réponses possibles

Il est fort probable que certains élèves appliquent le premier principe de Laplace en précisant que la probabilité de chacun des deux événements élémentaires est $\frac{1}{2}$. En fait comme nous l'avons précisé un peu plus haut, en plus de son énoncé simple, le premier principe de Laplace paraît dans les activités d'enseignement comme une finalité. Ce qui entrainerait du coup le biais d'équiprobabilité qui est la tendance à considérer tous les événements comme équiprobables.

Il importe de préciser que les deux types de réponses relatifs aux praxéologies visées peuvent être observés seulement après l'intervention du professeur pour donner des indications. Parmi les difficultés des élèves à bien répondre à la question, on peut noter éventuellement la mauvaise traduction de la donnée principale de l'exercice, à savoir : « la probabilité qu'il repose sur la face plane (P) est le double de la probabilité qu'il repose sur la face courbe (C) ». En effet, il n'est pas rare de voir les élèves confondre « la moitié » avec le « double ». Ainsi, il ne sera pas surprenant qu'on observe des élèves écrire $p(\{P\}) = \frac{1}{2}p(\{C\})$ au lieu de $p(\{P\}) = 2p(\{C\})$.

3.5.3.2.3. Troisième question

Nous envisageons deux types de réponses possibles pour la question au niveau des élèves, l'un pouvant se baser sur l'approche fréquentiste et l'autre sur le premier principe de Laplace.

Premier type de réponses possibles

Avec ou sans l'aide du professeur, certains élèves ayant compris la question proposeront la résolution commune ci-après, conforme à la praxéologie visée pour cette question.

Soit n_p le nombre de fois que le cauri repose sur la face (P) sur les 1000 lancers.

$\frac{n_p}{1000}$ est une estimation de $p(\{P\})$. Donc $p(\{P\}) \approx \frac{n_p}{1000}$. Alors on peut estimer n_p à $p(\{P\}) \times 1000$. Donc $n_p \approx 666$.

Dans ce cas précis, les élèves peuvent ne pas considérer qu'on a affaire à des valeurs approchées et mettre une égalité, de même qu'ils peuvent considérer la valeur décimale de n_p .

Deuxième type de réponses possibles

Il est bien possible que des élèves mobilisent le premier principe de Laplace pour résoudre le problème posé en prenant comme inconnue le cardinal de l'événement $\{P\}$ et en donnant la valeur 1000 au cardinal de l'univers. Cette manière de voir serait bien sûr une mauvaise appréhension du problème, car 1000 n'est pas ici le nombre d'éventualités de l'univers.

3.5.4. Exercice 3

L'exercice 3 donne l'occasion d'une première application du premier principe de Laplace et d'une deuxième occasion de l'estimation du nombre de cas favorables à un événement connaissant la probabilité de cet événement et un nombre donné de réalisations de l'expérience aléatoire. Un exercice similaire avait été proposé aux élèves dans l'expérimentation de référence. Avec un contexte de tirage d'un carton dans un sac contenant six, l'expérience aléatoire est assez simple pour une application réussie du premier principe de Laplace par les élèves. Les couleurs et les numéros des jetons sont les variables didactiques de l'exercice. Elles permettent de distinguer les cas favorables aux événements dont les probabilités sont à calculer. Comme dans l'expérimentation de Brousseau, les numéros portés par les jetons permettront d'observer s'il n'y aura pas des élèves qui vont confondre le numéro d'un carton au nombre de cas favorables à l'événement « tirer ce carton ».

3.5.4.1. Organisations mathématiques travaillées

Cinq consignes organisées en trois questions ont meublé l'exercice 3. Les quatre premières consignes sont des spécimens du type de tâches T_{10} : « calculer la probabilité d'un événement » et la dernière consigne est un spécimen du type de tâches T_{13} : « estimer le nombre d'apparitions d'un événement connaissant sa probabilité et le nombre de réalisations de l'expérience aléatoire ». Dans le premier type de tâche, l'événement ne s'exprime pas en fonction d'autres événements.

3.5.4.1.1. Analyse praxéologique des quatre premières consignes

La technique à travailler pour le type de tâches « calculer la probabilité d'un événement » au niveau des quatre premières consignes de l'exercice est la « technique d'équiprobabilité (TE) » étudiée au chapitre (chap. IV, 2.1.6), que nous notons $\tau_{10,2}$ et dont nous rappelons la déclinaison comme il suit :

- identifier l'expérience aléatoire ;
- identifier l'événement ;
- déterminer le nombre de cas possible ;
- déterminer le nombre de cas favorables à l'événement ;
- calculer le rapport du nombre de cas favorables au nombre de cas possibles.

A cette technique est associée une technologie constituée du langage probabiliste, de l'analyse combinatoire et du premier principe de Laplace. Nous avons inclus cette technologie dans la théorie Laplacienne des probabilités.

3.5.4.1.2. Analyse praxéologique de la cinquième consigne

Toute technique qui relèverait du type de tâches « estimer le nombre de cas favorables à un événement » dans la cinquième consigne de l'exercice 3 doit combiner le calcul de la probabilité de l'événement et l'estimation du nombre de cas favorables à un événement connaissant la probabilité de ce dernier et le nombre de réalisations de l'expérience aléatoire. Le calcul de la probabilité de l'événement « le carton tiré est rouge » pouvant se faire suivant deux techniques, nous en déduisons qu'il y a deux techniques $\tau_{13.1a}$ et $\tau_{13.1b}$ relevant du type de tâches « estimer le nombre de cas favorables à un événement » dans la question 3.

La première technique $\tau_{13.1a}$ est basée sur le premier principe de Laplace et se décline comme ci-après :

- identifier l'expérience aléatoire de l'énoncé ;
- identifier l'événement ;
- déterminer le nombre de cas possibles ;
- déterminer le nombre de cas favorables à l'événement ;
- calculer le rapport du nombre de cas favorables au nombre de cas possibles ;
- considérer la probabilité calculée comme une fréquence d'observation de cet événement ;
- déterminer le nombre d'observations de l'événement sur les 2500 réalisations de l'expérience aléatoire.

Les éléments technologiques qui justifient cette technique sont ceux relatifs à la technique TE du calcul des probabilités à partir du premier principe de Laplace couplés de la définition de la probabilité d'un événement selon l'approche fréquentiste. Ces éléments prennent source dans la théorie laplacienne du calcul des probabilités et la loi des grands nombres, toutes plongées dans la théorie des probabilités.

La deuxième technique $\tau_{13.1b}$, qui exploite la formule liant les probabilités de deux événements contraires, se détaille comme ci-dessous.

- identifier l'expérience aléatoire de l'énoncé ;
- identifier l'événement comme l'événement contraire de l'événement « le carton tiré est jaune » ;
- utiliser la formule liant les probabilités de deux événements contraires pour calculer la probabilité de l'événement « le carton tiré est rouge » ;
- considérer la probabilité calculée comme une fréquence d'observation de cet événement ;
- déterminer le nombre d'observations de l'événement sur les 2500 réalisations de l'expérience aléatoire.

La technologie de cette technique ne diffère de celle de la première technique que par l'élément technologique du calcul de la probabilité. Dans le cas présent, il s'agit de la propriété « $p(A) + p(\bar{A}) = 1$, pour tout événement A ». Par conséquent, l'axiomatique de Kolmogorov et la loi des grands nombres, issues de la théorie des probabilités, sont les théories qui justifient la technologie de cette deuxième technique.

Dans ces deux techniques la détermination de l'estimation du nombre d'observations de l'événement au cours des 2500 réalisations de l'expérience aléatoire est basée sur l'approche fréquentiste et consiste à considérer la probabilité trouvée comme la fréquence de réalisation de l'événement. Dans ce cas le nombre de fois que l'événement est observé serait obtenu en multipliant la probabilité trouvée par 2500.

Bien que les élèves aient déjà eu une première rencontre avec le type de tâches T_{13} au niveau de l'exercice 2, il est encore possible que l'estimation du nombre d'observations de l'événement soit calculée chez certains élèves en utilisant à tort le premier principe de Laplace avec 2500 cas possibles. Cette considération erronée donne lieu à deux autres techniques que nous nommons respectivement $\tau_{13.1c}$ et $\tau_{13.1d}$. Dans la technique $\tau_{13.1c}$ la probabilité de l'événement « le carton tiré est rouge » est calculée à partir du premier principe de Laplace, tandis que pour la technique $\tau_{13.1d}$ cette probabilité est calculée avec la formule liant les probabilités de deux événements contraires.

3.5.4.2. Réponses possibles des élèves

3.5.4.2.1. Question 1.a

Deux types de réponses, tous deux utilisant le premier principe de Laplace sont envisageables pour cette consigne : le premier est relatif à la technique indiquée dans l'organisation mathématique visée et le second est inspiré de l'expérimentation de Brousseau (2005). Dans ces deux types de réponses les élèves vont déterminer le nombre de cas possibles qui est 6 et le nombre de cas favorables (1), puis calculeront la probabilité de l'événement « le carton tiré porte le numéro 1 », qui est égale à $\frac{1}{6}$. La différence entre les deux types de réponses possibles se trouve au niveau de la détermination du nombre de cas favorables. Étant donné qu'il n'y a un seul carton qui porte le numéro 1, nombreux seront les élèves qui le remarqueront ainsi. Il est toutefois possible que certains élèves prennent le numéro du carton pour le nombre de cas favorables. Nos conditions d'expérimentations nous permettent de dire que la plupart des élèves iront du côté du premier type de réponses avec succès.

3.5.4.2.2. Question 1.b

On distinguera ici également les deux types de réponses indiqués précédemment. Le nombre de cas possibles sera 6 pour l'ensemble des élèves. Mais le nombre de cas favorables à l'événement « le carton tiré porte le numéro 5 » sera 1 pour certains (les plus nombreux) et 5 pour d'autres, qui vont confondre à tort le numéro du carton avec le nombre de carton portant le numéro 5. Les probabilités trouvées pour ces deux types de réponses seront respectivement $\frac{1}{6}$ et $\frac{5}{6}$, la première étant bien entendu la réponse exacte.

3.5.4.2.3. Question 2.a et question 2.b

Comparativement aux questions précédentes, aucune confusion n'est à craindre a priori au niveau des nombres de cas favorables de l'événement « le jeton tiré est jaune », car le nombre de jetons jaunes est clairement indiqué dans l'énoncé. En conséquence, le seul type de réponses qu'on peut envisager pour la question 2.a est celui qui conduit à la réponse exacte ci-après.

Soit C l'événement « le carton tiré est jaune ». On a : $\text{Card}(C) = 2$.

$$\text{Donc } p(C) = \frac{\text{Card}(C)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Ce type de réponses devrait être observé chez les élèves pour le calcul de la probabilité de l'événement « le jeton tiré porte un numéro pair » dans la question 2.b. La résolution qui en découle est :

Soit D l'événement « le carton tiré porte un numéro pair ». On a : $\text{Card}(D) = 3$.

$$\text{Donc } p(D) = \frac{\text{Card}(C)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Dans notre pratique enseignante, nous avons parfois rencontré au début de l'enseignement des probabilités, des élèves, qui au lieu de compter le nombre de nombres pairs, choisissent un numéro pair parmi ceux indiqués dans l'énoncé comme nombre de cas favorables à l'événement. Ainsi il ne sera pas étonnant que certains élèves hésitent individuellement entre 2, 4 ou 6 comme nombre de cas favorables. Mais au niveau du travail en groupe cette manière de faire a toutes les chances de disparaître au profit de la résolution experte, ci-dessus présentée.

3.5.4.2.4. Question 3

La résolution de cette question nécessite d'abord le calcul de la probabilité de l'événement « le carton tiré est rouge ». Cette probabilité peut se calculer de deux manières différentes conformément à l'organisation mathématique présentée plus haut. La première manière est basée sur l'application du premier principe de Laplace et se précise comme ci-après.

Soit $p(R)$ la probabilité que le carton tiré soit rouge. $\text{Card}(R) = 4$; donc $p(R) = \frac{2}{3}$.

La deuxième manière exploite la formule liant les probabilités de deux événements contraires. La probabilité $p(R)$ se calcule dans ce cas comme il suit :

$$P(R) = 1 - p(\bar{R}) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Une fois la probabilité calculée et comme dans la troisième question de l'exercice 2, l'estimation du nombre de fois qu'un carton rouge serait tiré après 2500 tirages pourrait être déterminée de deux façons différentes. La première manière consisterait à se baser sur l'approche fréquentiste comme dans la résolution ci-après.

Soit n_R le nombre de fois qu'un carton rouge serait tiré. $\frac{n_R}{2500}$ est une estimation de $p(R)$.

Alors on peut estimer n_R à $P(R) \times 2500$. Donc $n_R \approx \frac{2}{3} \times 2500 \approx 1667$.

La deuxième manière possible, qui se base sur le premier principe de Laplace, consisterait à prendre 2500 comme cardinal de l'univers et à considérer le nombre de fois que l'événement est réalisé comme son cardinal. De cette méthode on obtient la résolution erronée ci-après.

Soit n_R le nombre de fois qu'un carton rouge serait tiré. On a $p(R) = \frac{n_R}{2500}$ et donc $n_R = \frac{2}{3} \times 2500 \approx 1667$.

Comme nous pouvons le constater, même avec un résultat correct, la deuxième méthode est incorrecte, car le nombre de fois qu'une expérience aléatoire est réalisée ne représente pas

le nombre d'éventualités de cette expérience aléatoire. L'exercice 2 devant être corrigé avant la résolution de l'exercice 3, la chance d'observation de cette deuxième méthode chez les élèves au niveau de la dernière question de l'exercice 3 nous paraît faible.

3.5.5. Exercice 4

Avec l'exercice 4, les élèves vont appliquer pour une deuxième fois le deuxième principe de Laplace dans une situation plus complexe que celle de l'exercice 2. La première des deux questions de l'exercice permettra de déterminer les probabilités des événements élémentaires, qui seront utilisées pour calculer les probabilités de deux événements dans la seconde question.

Le dé cubique est un premier choix didactique de l'exercice. C'est la première fois qu'un dé cubique est une composante du milieu (ici virtuel) depuis le début de l'expérimentation. Contrairement au dé cubique équilibré auquel les élèves sont habitués dans leur vécu social à travers les jeux de hasard, le dé dont il est question dans l'exercice est pipé. Ce choix favorise l'utilisation du deuxième principe de Laplace. Le *lancer une seule fois du dé* est un deuxième choix didactique de l'exercice. Elle assure une expérience aléatoire ayant six éventualités. Ainsi, avec les résultats non binaires de cette expérience aléatoire, les probabilités des événements élémentaires ne peuvent pas être obtenues en utilisant la formule liant les probabilités de deux événements élémentaires comme cela avait été le cas dans l'exercice 2. Un troisième choix didactique est constitué des événements contraires A et B dont il faut calculer la probabilité dans la question 2. Ce faisant, l'élève a deux possibilités pour calculer la probabilité de B.

3.5.5.1. Organisations mathématiques travaillées

Les deux questions de l'exercice 4 sont des spécimens respectifs des types de tâches T_{12} : « déterminer la probabilité d'un événement élémentaire » et T_{10} : « calculer la probabilité d'un événement ». Il est à comprendre que les événements relatifs au second type de tâches ne sont pas élémentaires et ne s'expriment pas nécessairement en fonction d'autres événements non élémentaires de probabilités connues.

3.5.5.1.1. Analyse praxéologique de la première question

D'une part, l'expérience aléatoire n'étant pas une épreuve de Bernoulli, les événements élémentaires ne sont pas contraires. Ils forment tout de même un système complet d'événements. D'autre part, il n'est pas judicieux d'adopter dans l'exercice une démarche expérimentale pour connaître la probabilité de chaque événement élémentaire. Dans ces conditions, seule la technique $\tau_{12.1}$ évoquée au niveau de l'organisation mathématique de

l'exercice 2 est celle qu'il faut pour la détermination des probabilités des événements élémentaires. Elle se décrit de la manière suivante :

- identifier l'expérience aléatoire ;
- identifier les événements élémentaires ;
- exprimer la probabilité de l'univers Ω en fonction de celles des événements élémentaires ;
- utiliser l'axiome $p(\Omega) = 1$ pour obtenir une relation liant les probabilités de tous les événements élémentaires ;
- exploiter les données de l'exercice relatives aux probabilités des événements élémentaires pour déterminer ces probabilités.

A cette technique est associée une technologie constituée des éléments suivants :

- le langage probabiliste ;
- l'axiomatique de Kolmogorov ;
- le deuxième principe de Laplace.

Tous les éléments technologiques précédents sont issus de la théorie des probabilités.

3.5.4.1.2. Analyse praxéologique de la deuxième question

Au niveau de la deuxième question, il est demandé de calculer la probabilité de deux événements contraires A et B dont on connaît les événements élémentaires les composant. Comme nous l'avons précisé un peu plus haut, le type de tâches relatif à ces deux calculs est « calculer la probabilité d'un événement ».

Probabilité de l'événement A

L'unique technique qui relève du type de tâches ci-dessus pour ce qui concerne la probabilité de l'événement A est la technique « Addition des probabilités des événements élémentaires (APEE) » développée dans le chapitre (chap. IV, 2.1.6) et que nous notons $\tau_{10.3}$. Elle se décline comme il suit :

- identifier l'expérience aléatoire ;
- identifier les éventualités composant l'événement ;
- appliquer le deuxième principe de Laplace ;
- utiliser les probabilités des événements élémentaires déterminées à la première question pour trouver la probabilité de l'événement A.

La technologie associée à cette technique est basée sur le deuxième principe de Laplace et comporte entre autres les notions d'expérience aléatoire et d'événement. Cette technologie est plongée dans la théorie laplacienne du calcul des probabilités, issue elle aussi de la théorie des probabilités.

Probabilité de l'événement B

Étant donné qu'il est possible de connaître les éventualités constituant l'événement B, la technique $\tau_{10.2}$ est adaptée au calcul de la probabilité $p(B)$ de B. Mais puisque B est l'événement contraire de l'événement A, la technique $\tau_{10.1}$ que nous avons nommée « technique de calcul basée sur les axiomes (TCA) », relevant du type de tâches « calculer la probabilité d'un événement », peut être visée pour le calcul de $p(B)$. Cette technique peut se décrire comme ci-après :

- identifier l'expérience aléatoire ;
- remarquer que l'événement B est l'événement contraire de l'événement A ;
- utiliser la formule liant les probabilités de deux événements contraires ;
- déduire $p(B)$.

La technologie associée à cette technique est composée des notions d'expérience aléatoire, d'événement et de l'axiome « $p(A) + p(\bar{A}) = 1$, pour tout événement A ». La théorie de cette technologie peut être restreinte à l'axiomatique de Kolmogorov de la théorie des probabilités.

3.5.5.2. Réponses possibles des élèves

3.5.5.2.1. Question 1

Deux types de réponses sont à attendre au niveau des élèves ayant compris la consigne : un type de réponses en lien avec l'organisation mathématique travaillée et un type de réponses pouvant traduire à tort l'équirépartition des résultats possibles de l'expérience aléatoire.

Premier type de réponses possibles

La résolution experte de la question 1 qui est en même temps une réponse possible des élèves se précise comme il suit.

Les données du texte se traduisent par :

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

$$p(\{1\}) = p(\{3\}) = p(\{5\}), p(\{2\}) = p(\{4\}) = p(\{6\}) \text{ et } p(\{2\}) = 2p(\{1\}).$$

$$p(\Omega) = 1 \Leftrightarrow p(\{1\}) + p(\{2\}) + p(\{3\}) + p(\{4\}) + p(\{5\}) + p(\{6\}) = 1$$

$$\Leftrightarrow p(\{1\}) + 2p(\{1\}) + p(\{1\}) + 2p(\{1\}) + p(\{1\}) + 2p(\{1\}) = 1$$

$$\Leftrightarrow 9p(\{1\}) = 1$$

$$\text{Donc } p(\{1\}) = \frac{1}{9}.$$

$$\text{D'où } p(\{1\}) = p(\{3\}) = p(\{5\}) = \frac{1}{9} \text{ et } p(\{2\}) = p(\{4\}) = p(\{6\}) = \frac{2}{9}.$$

Il est à noter que des élèves pourront bien adopter la démarche de résolution sans parvenir à la réponse exacte par défaut d'une bonne interprétation des données relatives aux probabilités des événements élémentaires. En effet, il est possible que des élèves ne comprennent pas ce que signifie la parité d'un nombre entier naturel, bien qu'ils aient un bon rapport aux nombres pairs et aux nombres impairs. A cette difficulté algébrique peuvent s'ajouter les résolutions erronées des équations intervenant dans la résolution de la question.

Deuxième type de réponses possibles

La simplicité du premier principe de Laplace amène les élèves à se référer à ce principe sans chercher à vérifier la condition principale d'application de ce principe qui est l'équirépartition des issues possibles. C'est ainsi que certains élèves n'hésiteront pas à appliquer ce principe pour répondre à la question 1. Ils écriront alors simplement que $\frac{1}{6}$ est la probabilité d'apparition de chaque face. Puisqu'il a été précisé dans l'énoncé que les numéros de même parité ont la même probabilité, certains élèves peuvent indiquer que la probabilité de chaque événement élémentaire est $\frac{1}{3}$ en considérant des pseudos univers composés respectivement des numéros pairs et des numéros impairs.

3.5.5.2.2. Calcul de la probabilité de l'événement A dans la question 2

Deux types de réponses sont envisageables pour le calcul de la probabilité de A, à savoir : la résolution experte issue de l'organisation mathématique travaillée et une résolution qui s'appuie sur le premier principe de Laplace.

Premier type de réponses possibles

On trouvera des élèves qui appliqueront avec succès la technique APEE comme il est indiqué dans l'organisation mathématique. Ces élèves produiront une résolution semblable à la production suivante.

$$A = \{2, 4, 6\}. \text{ Donc } p(A) = p(\{2\}) + p(\{4\}) + p(\{6\}) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}.$$

Deuxième type de réponses possible

Malgré la non-équirépartition des résultats possibles de l'expérience aléatoire, il est possible que certains élèves présentent la résolution ci-dessous basée sur la technique TE.

$A = \{2; 4; 6\}$, donc $\text{card}(A)=3$. Or $\text{card}(\Omega)=6$.

$$\text{Alors } p(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

3.5.5.2.3. Calcul de la probabilité de l'événement B dans la question 2

Trois types de réponses sont envisagés pour le calcul de la probabilité de l'événement B, notamment : les types de réponses semblables à ceux évoqués pour le calcul de la probabilité de A et un troisième type basé sur la formule liant les probabilités de deux événements contraires.

Premier type de réponses possibles

Ce type de réponses résulte de l'application avec succès de la technique APEE comme dans le calcul de la probabilité de l'événement A. Il se précise à des mots près de la manière suivante :

$$B = \{1, 3, 5\}. \text{ Donc } p(B) = p(\{1\}) + p(\{3\}) + p(\{5\}) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}.$$

Deuxième type de réponses possible

Il est possible de des élèves remarquant que B est l'événement contraire de A. Ils proposeront alors la résolution ci-après.

A et B sont des événements contraires. Alors $p(A) + p(B) = 1$.

$$\text{Donc } p(B) = 1 - p(A) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

Troisième type de réponses possible

Comme pour le calcul de la probabilité de l'événement A, il n'est pas exclu que des élèves utilisent la technique TE encore notée $\tau_{10.2}$ pour calculer la probabilité de B comme dans la résolution erronée ci-après.

$B = \{1; 3; 5\}$, donc $\text{card}(B)=3$. Or $\text{card}(\Omega)=6$.

$$\text{Alors } p(B) = \frac{\text{Card}(B)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

3.5.6. Exercice 5

L'exercice 5 donne aux élèves l'occasion d'une deuxième rencontre avec l'application du premier principe de Laplace, mais dans des situations beaucoup plus complexes que celle étudiée au niveau de l'exercice 3.

Nous avons opéré dans cet exercice deux choix didactiques : le dé cubique parfaitement équilibré et le lancer plusieurs fois de suite de ce dé. En effet, le dé parfaitement équilibré, qui est un acquis social pour les élèves est évoqué pour la première fois depuis le début de l'expérimentation. Il assure l'équirépartition des résultats possibles de l'expérience aléatoire consistant à lancer deux ou trois fois le dé. Justement, le fait de lancer le dé plusieurs fois de suite rend complexe l'expérience aléatoire dans chacune des deux questions de l'exercice et permet aux élèves de faire une première rencontre avec le dénombrement dans la situation 5. Rappelons pour cela, que dans les programmes de mathématiques des séries scientifiques, le dénombrement est abordé pour la première fois en classe première. Par conséquent, les élèves de la classe de seconde C, concernés par notre expérimentation, sont supposés ne rien savoir sur les techniques de dénombrement.

3.5.6.1. Organisations mathématiques travaillées et visées

Les deux questions de l'exercice 5 sont organisées en cinq consignes qui sont des spécimens de deux types de tâches, à savoir les types de tâches T_{11} : « déterminer l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire » et T_{10} : « calculer la probabilité d'un événement. Deux des cinq consignes se rapportent au premier type de tâche et les autres au deuxième.

3.5.6.1.1. Analyse praxéologique des questions 1.a) et 2.a)

Trois techniques $\tau_{11.1}$, $\tau_{11.2}$ et $\tau_{11.3}$ peuvent relever du type de tâches « déterminer l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire » dans les questions 1.a) et 2.a). Globalement identiques à celle présentée dans l'analyse de l'exercice 2 (3.5.3.1.1.), elles consistent à :

- identifier l'expérience aléatoire ;
- identifier les éventualités de l'expérience aléatoire ;
- dresser la liste des éventualités.

Technique $\tau_{11.1}$

Dans une première technique, la liste des éventualités est dressée directement sur la base de l'intuition. Les définitions de l'expérience aléatoire et de l'univers des éventualités sont les éléments technologiques qui justifient cette technique. La théorie des probabilités dans sa composante du vocabulaire des probabilités est la théorie qui justifie la technologie ainsi indiquée.

Technique $\tau_{11.2}$

Dans la deuxième technique, l'identification des éventualités se fera à l'aide d'un tableau à double entrée pour la question 1.a) et de deux tableaux à double entrée dans la question 2.a).

Le tableau à réaliser alors au niveau de la question 1.a) et qui est en même temps le premier tableau à réaliser au niveau de la question 2.a) est le suivant.

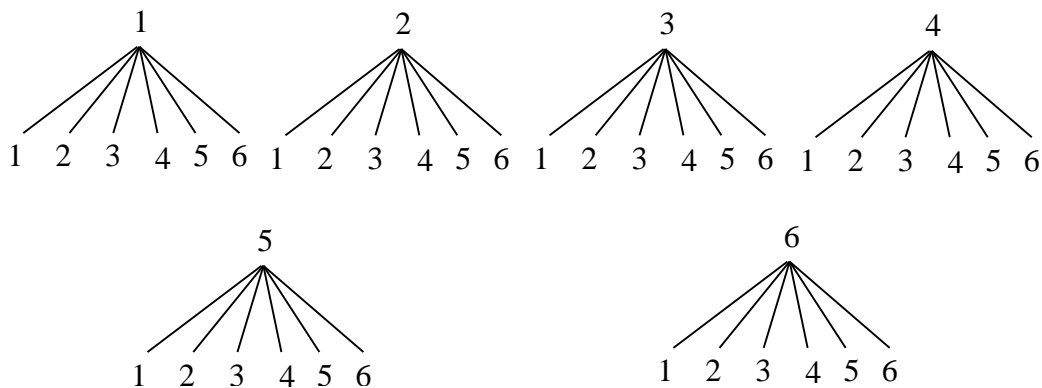
1 ^{er} lancer \ 2 ^e lancer	1	2	3	4	5	6
1	11	21	31	41	51	61
2	12	22	32	42	52	62
3	13	23	33	43	53	63
4	14	24	34	44	54	64
5	15	25	35	45	55	65
6	16	26	36	46	56	66

Le deuxième tableau devant être réalisé dans la question 2.a) a une entrée composée des trente-six nombres à deux chiffres du tableau précédent et une deuxième entrée composée des six numéros du dé.

Les notions de produit cartésien, d'expérience aléatoire et d'univers des éventualités constituent la technologie qui justifie la deuxième technique. Les élèves concernés par notre expérimentation n'ayant pas étudié la notion du produit cartésien de deux ensembles, ils ne pourront que se servir de leur intuition pour construire les tableaux précédents. La technologie est ainsi réduite aux notions d'expérience aléatoire et d'univers des éventualités, qui font globalement partir de la théorie des probabilités dans sa composante de vocabulaire des probabilités.

Technique $\tau_{11.3}$

Dans la troisième technique, les éventualités peuvent être déterminées à l'aide d'un arbre de choix. Ainsi pour la question 1.a) par exemple, on peut réaliser l'arbre de choix ci-dessous pour énumérer les trente-six éventualités.



Au niveau de la question 2.a), l'arbre de choix est réalisé de façon analogue à celle de la question 1.a). Les éléments technologiques justifiant cette troisième technique sont identiques à ceux de la deuxième technique.

3.5.6.1.2. Analyse praxéologique des questions 1.b), 1.c) et 2.b)

L'analyse praxéologique de chacune des trois questions 1.b), 1.c) et 2.b) est la même que celle présentée au niveau de l'analyse de l'exercice 3 (3.5.4.1.1.). En effet, une technique est envisagée au niveau de chacune de ces questions qui sont des spécimens du type de tâches « calculer la probabilité d'un événement ». Il s'agit de la technique TE développée dans le chapitre (chap. IV, 2.1.6) et évoquée dans l'analyse praxéologique de la question 2 du troisième exercice.

3.5.6.2. Réponses possibles des élèves

3.5.6.2.1. Question 1.a)

L'expérience aléatoire dans cette question consiste à lancer le dé deux fois de suite. Cette expérience aléatoire étant souvent réalisée dans la société à travers les jeux de ludo, nous estimons que, dans la plupart des groupes, les élèves arriveront à dresser avec succès la liste complète des trente-six éventualités de l'expérience aléatoire. Etant donné que les élèves n'avaient étudié auparavant les techniques de dénombrement, ils ne se serviront que de leur intuition pour déterminer l'univers des éventualités. Nous n'envisageons pas de la part des élèves la détermination de la liste des éventualités à partir d'un tableau à double entrée, ni à partir d'un arbre de choix. Les techniques utilisant ces deux outils pourront faire l'objet d'un enseignement au cours de la résolution de la question.

3.5.6.2.2. Question 1.b)

Le calcul de la probabilité de l'événement « le nombre formé est impair » est la tâche précise de cette question. Le dé étant parfaitement équilibré, les élèves vont sans doute utiliser la technique TE dont la résolution se présente comme il suit.

Soit Ω l'univers des éventualités de l'expérience aléatoire. D'après les résultats de la question 1.a), $\text{Card}(\Omega) = 36$.

Soit A l'événement « le nombre formé est impair ». On dénombre 18 nombres impairs dans Ω . Alors $\text{Card}(A) = 18$.

$$p(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}.$$

La détermination incorrecte du nombre de cas favorables à l'événement A pourrait être éventuellement à la base d'une résolution non satisfaisante de la question au niveau de certains élèves.

3.5.6.2.3. Question 1.c)

Comme dans la question 1.b), le calcul de la probabilité de l'événement « la somme des chiffres du nombre obtenu est 9 » se fera par la plupart des groupes d'élèves à partir de la technique TE. La résolution qui en sera issue est la suivante.

Soit B l'événement « la somme des chiffres du nombre obtenu est 9 ».

$B = \{36, 45, 54, 63\}$. Alors $\text{Card}(B) = 4$.

$$p(B) = \frac{\text{Card}(B)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

Aucune autre réponse possible n'est envisageable chez les élèves pour cette question, mais la mauvaise identification de l'événement et des erreurs de calcul peuvent conduire à des résolutions incorrectes de la question.

3.5.6.2.4. Question 2.a)

Le lancer du dé cubique trois fois de suite est l'expérience aléatoire dans la question consiste 2.a). En s'inspirant du lancer deux fois de suite d'un dé cubique, les élèves devraient être capables de puiser dans leur intuition pour faire la liste des deux cent seize triplets. Toutefois, compte tenu du nombre très élevé d'éventualités à déterminer, il est à penser que la plupart des élèves ne puissent pas énumérer toutes les éventualités. Par exemple, des permutations issues d'un arrangement (a, b, c) donné peuvent être facilement omises.

Comme dans la question 1.a), il n'est pas à espérer que les élèves utilisent les tableaux à double entrée. En fait, il est possible qu'il leur ait été enseigné, à l'issue de la question 1.a), l'utilisation d'un tableau à double entrée pour déterminer les éventualités de l'expérience aléatoire consistant à lancer deux fois de suite un dé cubique. À notre avis, cette première rencontre avec cette technique ne suffit pas pour que l'élève ait l'idée de réaliser deux tableaux à double entrée pour identifier les éventualités de l'expérience aléatoire « lancer trois fois de suite un dé cubique ».

D'un autre côté, si la technique utilisant l'arbre de choix avait été enseignée, certains élèves vont l'essayer pour déterminer avec ou sans succès l'univers des éventualités de l'expérience aléatoire.

3.5.6.2.5. Question 2.b)

La résolution ci-dessous de cette question, qui repose sur la technique TE, est une réponse possible des élèves.

Soit U l'univers des éventualités de l'expérience aléatoire. D'après les résultats de la question 1.a), $\text{Card}(U) = 216$.

Soit C l'événement « le nombre formé comporte uniquement des chiffres pairs ». Dans U, on dénombre 27 nombres composés uniquement des chiffres pairs. Alors $\text{Card}(C) = 27$.

$$p(C) = \frac{\text{Card}(C)}{\text{Card}(U)} = \frac{27}{216} = \frac{1}{8}.$$

Il n'y a pas de doute que tous les groupes de la classe adoptent la démarche de cette résolution qui repose en fait sur la technique TE compte tenu de l'équirépartition des éventualités due au fait que le dé est parfaitement équilibré. Cependant la détermination correcte du nombre de cas favorables ne serait une garantie pour tous les élèves. On peut noter les erreurs de comptage et de mauvaise identification des cas favorables dans la liste des éventualités. Pour la détermination du nombre de cas favorables, il est possible que certains élèves essaient d'utiliser l'arbre de choix.

3.5.7. Exercice 6

Après les exercices 2 et 4, l'exercice 6 permet aux élèves d'appliquer pour la troisième fois le deuxième principe de Laplace dans une situation presque similaire à celle de l'exercice 4. Si le contexte de l'exercice 4 est le lancer d'un dé pipé, celui de l'exercice 6 est une cible de tir à l'arc comportant quatre parties portant les numéros 2, 3, 5 et 10. Les probabilités que la fléchette atteigne les différentes parties de la cible sont différentes. Ce qui favorise l'application du deuxième principe de Laplace.

3.5.7.1. Organisations mathématiques travaillées

Les types de tâches dont les deux questions de l'exercice 6 sont des spécimens sont : « modéliser et déterminer la probabilité d'un événement élémentaire » et « calculer la probabilité d'un événement ». Comme dans l'exercice 4, l'événement dont il est demandé de calculer la probabilité dans la deuxième question s'exprime uniquement en fonction d'événements élémentaires dont les probabilités sont à déterminer dans la première question.

L'analyse praxéologique de la première question est identique à celle décrite dans l'analyse praxéologique de la première question de l'exercice 4 (3.5.4.1.1.) et selon laquelle une seule technique est travaillée pour déterminer les probabilités des événements élémentaires.

Cette technique est basée sur les données relatives aux probabilités des événements élémentaires et l'axiome $p(\Omega) = 1$.

L'analyse praxéologique de la deuxième question est également présentée au niveau de l'analyse du calcul de la probabilité de l'événement B dans l'exercice 4 (3.5.4.1.2.). Les deux techniques ainsi visées pour le calcul de la probabilité de l'événement donné dans la question 2 sont :

- la technique APEE justifiée fondamentalement par le deuxième principe de Laplace ;
- la technique qui utilise la relation qui lie les probabilités de deux événements contraires.

3.5.7.2. Réponses possibles des élèves

3.5.7.2.1. Question 1

Compte tenu de l'expérience acquise par les élèves dans la résolution de l'exercice 4, il nous paraît légitime d'envisager une seule réponse possible des élèves pour cette première question, en éliminant justement l'hypothèse que certains élèves pourraient juger équiprobables les événements élémentaires. Cette réponse possible peut ressembler à des détails près à la résolution ci-après de la question.

Les données du texte se traduisent par :

$$\Omega = \{ 2, 3, 5, 10 \}.$$

$$\frac{p(\{2\})}{2} = \frac{p(\{3\})}{3} = \frac{p(\{5\})}{5} = \frac{p(\{10\})}{10}.$$

$$\text{Alors on a : } \frac{p(\{2\})}{2} = \frac{p(\{3\})}{3} = \frac{p(\{5\})}{5} = \frac{p(\{10\})}{10} = \frac{p(\{2\})+p(\{3\})+p(\{5\})+p(\{10\})}{20} = \frac{p(\Omega)}{20}.$$

$$\text{C'est-à-dire } \frac{p(\{2\})}{2} = \frac{p(\{3\})}{3} = \frac{p(\{5\})}{5} = \frac{p(\{10\})}{10} = \frac{1}{20}.$$

$$\text{Donc } p(\{2\}) = \frac{1}{10} ; p(\{3\}) = \frac{3}{20} ; p(\{5\}) = \frac{1}{4} \text{ et } p(\{10\}) = \frac{1}{2}.$$

Il importe de noter que la notion proportionnalité présente dans les données peut constituer un frein dans la résolution de la question 1 chez certains élèves, qui auront besoin de la clarification de cette notion par le professeur. À cette difficulté d'ordre algébrique peut s'ajouter d'autres difficultés du même ordre ou d'ordre numérique chez des élèves.

3.5.7.2.2. Calcul de la probabilité dans la question 2

Après deux rencontres avec l'application du deuxième principe de Laplace, nous estimons que pour cette troisième rencontre les élèves présenteront dans l'ensemble un type de réponses, l'un de ceux visés par l'organisation mathématique et qui s'appuie sur la technique APEE. Dans une moindre mesure, la deuxième technique évoquée dans l'organisation mathématique peut être observée.

Premier type de réponses possibles

La résolution de la question selon la technique APEE se précise à des mots près comme ci-après.

Soit A l'événement « le tireur note un nombre premier ». $A = \{2, 3, 5\}$.

$$\text{Donc } p(A) = p(\{2\}) + p(\{3\}) + p(\{5\}) = \frac{1}{10} + \frac{3}{20} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Deuxième type de réponses possibles

Il est envisageable que les élèves remarquent éventuellement que l'événement A est contraire à l'événement élémentaire $\{10\}$ dont la probabilité est connue. Dans ce cas, on pourrait avoir droit à la résolution ci-dessous.

A et $\{10\}$ sont des événements contraires.

$$\text{Alors } p(A) = 1 - p(\{10\}) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

3.5.8. Exercice 7

Pour la troisième fois, les élèves vont appliquer le premier principe de Laplace à travers la résolution de l'exercice 7. L'outil de dénombrement qu'est la liste, implicitement abordée dans l'exercice 5 est complété par les deux autres outils de base de dénombrement, à savoir : l'arrangement et la combinaison avec lesquels les élèves auront leur première rencontre.

Le tirage successif sans remise de jetons est un choix didactique important qui sert ici à compléter le premier outil de dénombrement abordé dans la résolution de l'exercice 5, à savoir : la liste d'éléments d'un ensemble fini non vide. Ce deuxième outil de dénombrement se constitue principalement des arrangements d'éléments d'un ensemble fini non vide. Leur dénombrement dans l'exercice sera une occasion pour les élèves d'essayer l'utilisation de l'arbre de choix pour dénombrer. Le nombre de jetons tirés dans l'exercice, que nous fixons à trois, est une variable didactique nous permettant de rester au moins au même niveau de complexité de l'expérience aléatoire définie dans la deuxième question de l'exercice 5. Ce qui, couplé avec la nature du tirage, devrait favoriser la manipulation implicite des anagrammes dans la première question de l'exercice 7. Un autre choix didactique est le tirage simultané de jetons, qui permet de faire découvrir implicitement la notion de combinaison d'éléments d'un ensemble fini non vide. Elle vise surtout à mettre l'accent sur la différence entre une liste et une combinaison.

3.5.8.1. Organisations mathématiques visées

L'exercice 7 comporte trois consignes qui sont toutes des spécimens d'un seul type de tâches, à savoir : « calculer la probabilité d'un événement » mais ici dans un autre contexte et dans des conditions différentes des autres exercices. Les jetons indiscernables au toucher font des deux sortes de tirages de l'exercice des situations d'équiprobabilité. Par conséquent les techniques relevant de l'unique type de tâches de l'exercice sont basées sur la technique TE dont nous rappelons globalement la déclinaison ci-dessous :

- identifier l'expérience aléatoire ;
- identifier l'événement ;
- déterminer le nombre de cas possibles ;
- déterminer le nombre de cas favorables à l'événement ;
- calculer le rapport du nombre de cas favorables au nombre de cas possibles.

Compte tenu des acquis espérés issus de la résolution de l'exercice 5, la détermination du nombre de cas possibles et du nombre de cas favorables se fait en dressant la liste de toutes les éventualités, soit intuitivement, soit à l'aide d'un arbre de choix pour les consignes de la question 1. Quant à la question 2, seule la détermination basée sur l'intuition paraît réaliste.

3.5.8.2. Réponses possibles des élèves

3.5.8.2.1. Question 1.a)

L'expérience aléatoire dans la première partie de l'exercice consiste à tirer successivement et sans remise trois jetons dans un sac contenant cinq jetons indiscernables au toucher dont deux rouges et trois blancs. Pour la question 1.a) qui porte sur le calcul de la probabilité de l'événement « tirer deux jetons rouges et un jeton blanc dans cet ordre », deux types de réponses liées à l'organisation mathématique visée peuvent être envisagés.

Premier type de réponses

Le premier type de réponses possibles peut être rédigé comme ci-dessous.

Désignons par Ω l'univers des éventualités de l'expérience aléatoire définie au niveau de la question 1. Notons les jetons rouges r_1 et r_2 , et les jetons blancs b_1 , b_2 et b_3 . Les éventualités de l'expérience aléatoire sont :

(r_1, r_2, b_1) ; (r_2, r_1, b_1) ; (r_1, b_1, r_2) ; (b_1, r_1, r_2) ; (r_2, b_1, r_1) ; (b_1, r_2, r_1) ; (r_1, r_2, b_2) ;
 (r_2, r_1, b_2) ; (r_1, b_2, r_2) ; (b_2, r_1, r_2) ; (r_2, b_2, r_1) ; (b_2, r_2, r_1) ; (r_1, r_2, b_3) ; (r_2, r_1, b_3) ;
 (r_1, b_3, r_2) ; (b_3, r_1, r_2) ; (r_2, b_3, r_1) ; (b_3, r_2, r_1) ; (r_1, b_1, b_2) ; (b_1, r_1, b_2) ; (r_1, b_2, b_1) ;
 (b_2, r_1, b_1) ; (b_1, b_2, r_1) ; (b_1, b_2, r_1) ; (r_1, b_1, b_3) ; (b_1, r_1, b_3) ; (r_1, b_3, b_1) ; $(b_3, r_1,$

b1) ; (b1, b3, r1) ; (b1, b3, r1) ; (r1, b2, b3) ; (b2, r1, b3) ; (r1, b3, b2) ; (b3, r1, b2) ; (b2, b3, r1) ; (b3, b2, r1) ; (r2, b1, b2) ; (b2, r2, b1) ; (r2, b1, b2) ; (b1, r2, b2) ; (b2, b1, r2) ; (b1, b2, r2) ; (r2, b1, b3) ; (b3, r2, b1) ; (r2, b1, b3) ; (b1, r2, b3) ; (b3, b1, r2) ; (b1, b3, r2) ; (r2, b2, b3) ; (b2, r2, b3) ; (r2, b3, b2) ; (b3, r2, b2) ; (b2, b3, r2) ; (b3, b2, r2) ; (b1, b2, b3) ; (b2, b1, b3) ; (b1, b3, b2) ; (b3, b1, b2) ; (b2, b3, b1) ; (b3, b2, b1).

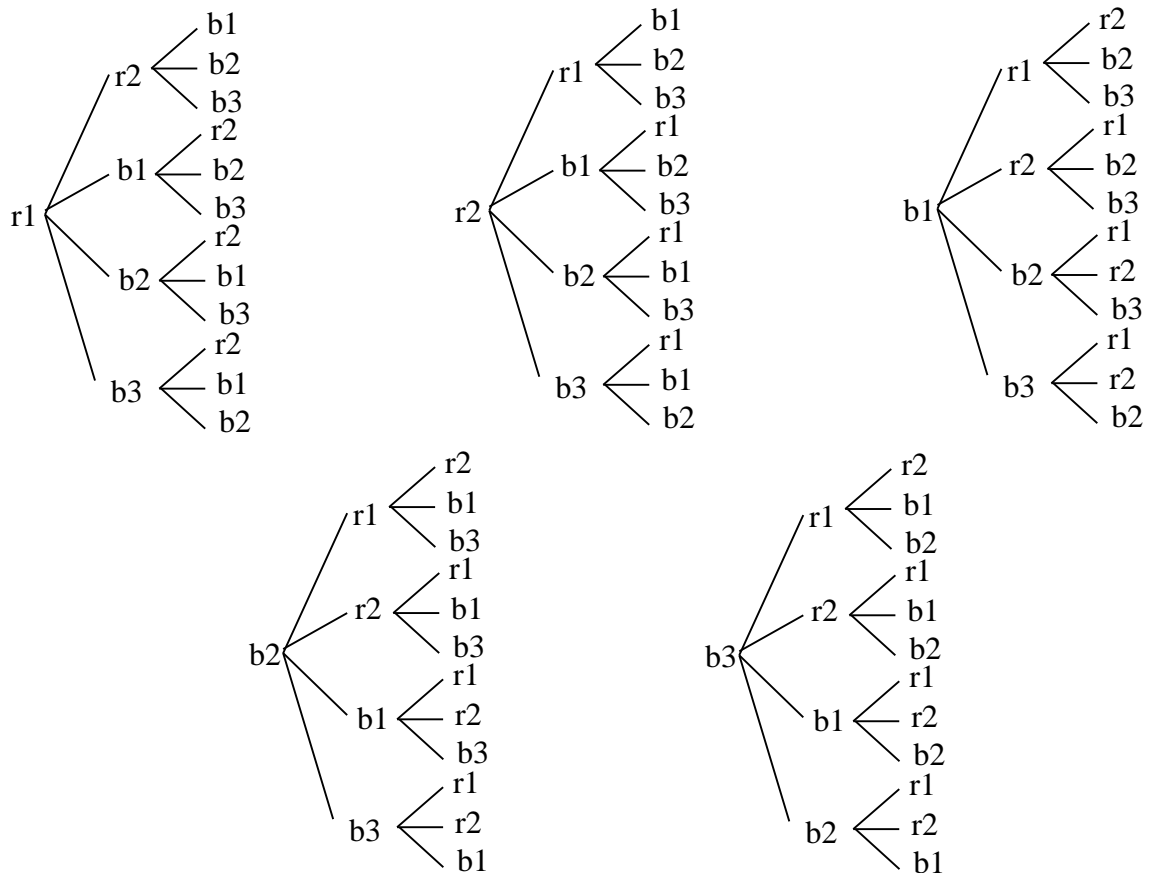
Alors $\text{Card}(\Omega)=60$.

Soit A l'événement « tirer deux jetons rouges et un jeton blanc dans cet ordre ». Les éventualités appartenant à A sont : (r1, r2, b1) ; (r2, r1, b1) ; (r1, r2, b2) ; (r2, r1, b2) ; (r1, r2, b3) ; (r2, r1, b3). Donc $\text{Card}(A)=6$.

$$\text{Ainsi } p(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{6}{60} = \frac{1}{10}.$$

Deuxième type de réponses

Dans ce deuxième type de réponses possibles, les élèves vont déterminer les soixante éventualités de l'expérience aléatoire à partir de la réalisation d'un arbre choix et produiront ensuite une résolution de la consigne semblable à celle précédemment présentée. L'arbre de choix qui permettra de lister toutes les éventualités peut être réalisé comme il suit.



Dans ce type de réponses, puisqu'on n'a besoin du nombre des éventualités et non pas nécessairement des éventualités, l'élève peut déduire ce nombre de la réalisation d'un seul arbre

de choix. En effet, étant donné que le nombre d'arrangements dont le premier élément est r1 est douze, le cardinal de l'univers se déduit par le produit de ce nombre par le nombre de jetons contenus dans le sac.

3.5.8.2.2. Question 1.b)

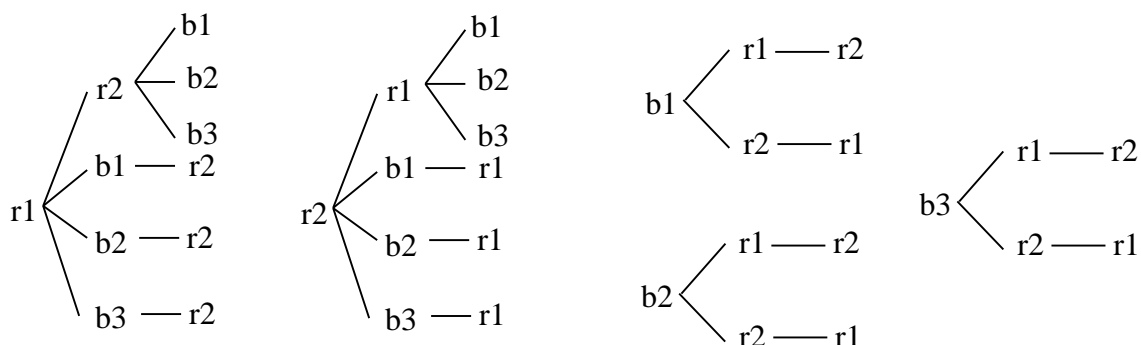
L'univers des éventualités étant déterminé au niveau de la question 1.a), seule la détermination du nombre de cas favorables à l'événement B : « tirer deux jetons rouges et un jeton blanc » est l'enjeu de la question 1.b). Comme dans la question précédente, il est envisageable deux types de réponses possibles.

Premier type de réponses

Une réponse possible chez les élèves consisterait à identifier parmi toutes les éventualités, celles qui comportent deux jetons rouges et un jeton blanc. Ces éventualités qui sont au nombre de dix-huit conduisent à la valeur $\frac{3}{10}$ de la probabilité de l'événement B.

Deuxième type de réponses

Une seconde réponse possible des élèves consiste à déterminer le nombre de cas favorables à l'événement B à l'aide des arbres de choix comme réalisés ci-dessous.



Les arbres de choix illustrent bien les dix-huit cas favorables à l'événement B.

3.5.8.2.3. Question 2

L'expérience aléatoire dans cette question consiste à choisir simultanément trois jetons dans le sac qui en contient cinq comme dans la question 1. L'événement dont la probabilité est à calculer dans cette question est « les jetons tirés sont blancs ». Compte tenu du fait que les élèves n'ont pas étudié de façon spécifique la notion de combinaison d'éléments d'un ensemble fini non vide, nous estimons qu'à la rigueur une stricte minorité des élèves pourra déterminer le nombre de cas possibles et le nombre de cas favorables à l'événement selon la technique visée plus haut et qui se traduit par la résolution ci-après de la question.

Soit U l'univers des éventualités de l'expérience aléatoire.

Les éventualités sont $\{r1, r2, b1\}$, $\{r1, r2, b2\}$, $\{r1, r2, b1\}$, $\{r1, r2, b3\}$, $\{r1, r2, b1\}$, $\{r1, b1, b2\}$, $\{r1, b1, b3\}$, $\{r1, b2, b3\}$, $\{r2, b1, b2\}$, $\{r2, b1, b3\}$ et $\{b1, b2, b3\}$.

On a $\text{Card}(U)=10$.

Soit E l'événement « les trois jetons tirés sont blanc ». Seule l'éventualité $\{b1, b2, b3\}$ est favorable à cet événement. Donc $\text{Card}(E)=1$. D'où $p(E) = \frac{1}{10}$.

3.6. Situation 6

Rappelons que la situation 6 est un post-test, qui est de ce fait une situation d'évaluation. Elle sert à évaluer l'apprentissage des différentes notions abordées au cours des cinq premières situations. Elle comporte huit exercices dont trois permettront de vérifier l'apprentissage de quelques concepts probabilistes développés ; les cinq autres portent sur le calcul effectif des probabilités. L'analyse de cette situation, qui se fera exercice par exercice, sera constituée essentiellement des organisations mathématiques visées et des réponses possibles des élèves au niveau de chaque consigne.

3.6.1. Exercice 1

L'exercice 1 du post test comporte trois parties, que nous appelons questions, qui visent respectivement à vérifier :

- la compréhension que les élèves ont de la notion d'expérience aléatoire dans le langage de la théorie mise en place ;
- la différence que les élèves font entre événements incompatibles, événements contraires et événements équiprobables pour une probabilité donnée ;
- la compréhension que les élèves ont des axiomes et propriétés en probabilités et des deux premiers principes de Laplace.

Le choix de la notion d'expérience aléatoire se justifie par le fait qu'elle est la notion sans laquelle on ne saurait parler de probabilité et à laquelle une attention particulière est accordée dans l'expérimentation, notamment par l'étude de la notion de hasard, absente dans les indications officielles en vigueur. Le fait que la notion d'événement et surtout la typologie des événements soit présente dans les axiomes qui fondent le calcul de probabilités justifie notre intérêt à évaluer le rapport des élèves à certains types d'événements. Notre troisième choix porte sur la vérification des connaissances des élèves par rapport aux formules utilisées dans le calcul élémentaire des probabilités.

3.6.1.1. Organisations mathématiques évaluées

Toutes les consignes de l'exercice 1 font appel chez l'élève à des connaissances déclaratives au niveau de la théorie et langage probabiliste et des technologies associées. Elles sont fondées juste sur le contrat didactique qui voudrait que les savoirs construits soient appris et mémorisés.

Ainsi pour la question 1, l'élève doit se souvenir de la notion d'expérience aléatoire pour en donner la définition telle qu'elle est proposée au cours de l'acte d'enseignement/apprentissage. Au niveau de la question 2, il doit choisir une bonne réponse parmi trois pour exprimer que deux événements sont incompatibles, contraires ou équiprobables.

3.6.1.2. Les réponses possibles et les difficultés des élèves

Bien que la mémorisation des savoirs construits soit nécessaire pour répondre aux consignes de l'exercice 1, les compréhensions que les élèves ont de ces savoirs peuvent transparaître à travers les réponses qu'ils proposeront aux consignes.

3.6.1.2.1. Réponses possibles à la question 1

Lors des analyses préalables en marge de la conception de l'ingénierie didactique présentement en étude, la transposition didactique de la notion d'expérience aléatoire a révélé l'existence de deux modèles d'énoncés de la définition de l'expérience aléatoire : le modèle universitaire (MU) caractérisé uniquement par l'imprévisibilité du résultat de l'expérience et le modèle didactique (MD) caractérisé à la fois par l'imprévisibilité du résultat et la connaissance préalable des résultats possibles (Dandjinou et Bronner, 2017). C'est ce dernier qui a fait objet d'enseignement dans l'expérimentation en cours d'étude. En conséquence, il est légitime de s'attendre de la part des élèves à des propositions de définition liées au modèle MD.

L'enseignement basé sur des expérimentations proposé aux élèves aura pour effet immédiat que les élèves donnent la définition telle qu'elle a été retenue en classe, et qui se précise comme il suit.

Une expérience aléatoire est une expérience dont on ne peut pas prévoir le résultat avec certitude mais dont on peut connaître les résultats possibles.

Au vu des études antérieures, il est prévisible que des élèves ne soient pas précis par rapport au texte de savoir enseigné. Ainsi il peut être constaté chez des élèves des propositions de définition moins précises et semblables à celle indiquée ci-après.

Une expérience aléatoire est une expérience dont on ne peut pas connaître avec certitude le résultat mais dont peut connaître tous les résultats possibles.

Il importe de préciser qu'aucune proposition de définition d'expérience aléatoire liée au modèle MR ne peut être espérée.

3.6.1.2.2. Réponses possibles des élèves aux consignes de la question 2

Constituée de trois questions à choix multiple, la question 2 oriente les élèves vers trois réponses pour chacune des trois consignes. La participation active des seize élèves aux expérimentations de l'ingénierie les prédispose au choix des bonnes réponses que sont :

- « deux événements A et B sont incompatibles » signifie que $A \cap B = \emptyset$;
- « deux événements A et B sont contraires » signifie que $A \cap B = \emptyset$ et $A \cup B = \Omega$;
- « deux événements A et B sont équiprobables pour une probabilité p » signifie que $p(A) = p(B)$.

À notre avis, rares seront les élèves qui vont opérer des choix de réponses incorrectes, puisque les notions constituant « le vocabulaire des probabilités » ont souvent fait l'objet de point régulier des savoirs construits tout au long de l'expérimentation.

3.6.1.2.3. Réponses possibles des élèves aux consignes de la question 3

Dans cette question, les élèves sont appelés à compléter certaines propriétés fondamentales du calcul des probabilités dont les deux premiers principes de Laplace. Nous proposons les réponses envisageables pour chaque propriété visée.

Question 3.a)

À ce niveau, l'élève doit donner la valeur de $p(\Omega)$, Ω désignant l'univers des possibles d'une expérience aléatoire. Il est clair pour nous que les élèves proposeront la valeur 1 compte tenu du fait que la formule a été utilisée maintes fois dans la situation 5 pour résoudre des exercices.

Question 3.b)

Dans la consigne, les élèves sont invités à compléter la proposition suivante : « Si A et B sont deux événements de Ω , alors $p(A \cup B) = \dots$ ». Puisqu'il y a deux formules de $p(A \cup B)$ parmi les axiomes enseignés, les élèves auront deux types de réponses à la cette consigne. Les uns écriront $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$, qui est la réponse correcte attendue, et les autres écriront l'axiome $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$, qui n'est vraie que lorsque les événements A et B sont incompatibles.

Question 3.c)

Cette consigne s'intéresse aux connaissances des élèves à propos du deuxième principe de Laplace. La réponse correcte de la consigne est $p(A) = p(\{e_1\}) + p(\{e_2\}) + \dots + p(\{e_k\})$. Elle sera

sans doute écrite par la plupart des élèves. Cependant, en prenant en compte la réaction des élèves au pré-test lors des analyses préalables à l'élaboration de l'ingénierie didactique, nous n'excluons pas la possibilité qu'il y ait des élèves pouvant écrire $p(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$, qui traduit plutôt le premier principe de Laplace.

Question 3.d)

Par rapport au premier principe de Laplace, qui se traduit par une formule simple et qui est suffisamment exploitée dans la résolution des exercices, il est prévisible que les élèves dans leur quasi-totalité l'énoncent correctement. Toutefois, il peut être observé des cas rares de mauvaise compréhension de la question, pouvant se traduire par des réponses basées sur la définition d'événements équiprobables, comme nous l'avons eu à le constater lors des analyses préalables.

3.6.2. Exercice 2

L'exercice 2 du post test vise à apprécier le rapport des élèves à la notion de hasard à l'issue de l'enseignement basé sur des expérimentations, objet de notre étude. Une situation semblable à cet exercice a été utilisée au cours de cet enseignement dans la situation 1 pour recueillir d'une part les rapports des élèves à la notion du hasard, et à leur clarifier cette notion d'autre part. Il était alors question que les élèves prédisent le résultat du quatrième lancer d'un cauri, sachant que les résultats des trois premiers lancers sont CCC, C désignant la face courbe du cauri dont la face plane est désignée par P. Nous l'avons repris dans le post test avec des lancers de dé. Bien qu'il ait été implicitement question d'un dé non équilibré dans la résolution d'un exercice de la situation 5, l'équirépartition des résultats, sous-entendue dans l'exercice 2, est considérée comme un acquis social.

3.6.2.1. Organisation mathématique évaluée

Comme dans la phase 1.1 de la situation 1 (3.1), la question posée est un spécimen du type de tâches : « Prévoir les résultats d'une expérience aléatoire » renforcé par une invitation à argumenter la réponse donnée.

La technique qui relève de ce type de tâches se décompose comme il suit :

- identifier l'expérience aléatoire « lancer un dé » ;
- se baser sur la notion d'expérience aléatoire pour préciser que le résultat est imprévisible.

Cette technique se justifie par la notion de hasard du « tirage au sort », qui n'est pas une notion formelle d'apprentissage et qui s'inscrit dans la théorie de classification du hasard (Idier, 2011).

3.6.2.2. Réponses possibles des élèves

En tenant compte des travaux de Maury (1985), de Piaget et Inhelder (1951) et de Lévy-Bruhl (1960), nous avons prévu au niveau de la situation de lancer de cauri cinq types de réponses possibles chez les élèves n'ayant pas reçu un enseignement sur les probabilités. Ces types de réponses avaient été nommés respectivement « tirage au sort », « compensation », « confirmation », « géométrie du cauri », « mécanique » et « fatalité ». L'un des objectifs de notre ingénierie didactique étant de contribuer à améliorer le rapport personnel des élèves à la notion de hasard, il est normal qu'il y ait moins de types de réponses possibles à l'issue de la réalisation de l'ingénierie. Des résultats de notre étude sur le rapport personnel des élèves béninois à la notion de hasard lors des analyses préalables (Dandjinou et Bronner, 2017), nous prévoyons les types de réponses suivants « tirage au sort » et « compensation » chez les élèves à l'issue de nos expérimentations.

En fait, l'effet attendu de l'enseignement peut se remarquer éventuellement par un nombre important d'élèves qui diront que le résultat du douzième lancer peut être 1, 2, 3, 4, 5 ou 6, en argumentant que le résultat est aléatoire : c'est le type de réponses « tirage au sort ». Cependant il est bien possible que quelques élèves dont le rapport au hasard n'a pas encore évolué vers le rapport attendu puissent aller dans le sens du type de réponses « compensation », selon lequel les élèves ont tendance à considérer que l'éventualité la moins fréquente a plus de chance d'être réalisé. L'élève reconnu de ce type de réponses va affirmer que le résultat du douzième lancer serait 4, le seul numéro qui n'est pas répété dans la suite des résultats des onze premiers lancers.

3.6.3. Exercice 3

Le post test propose dans l'exercice 3 un problème de probabilité portant sur l'utilisation de la formule liant les probabilités de deux événements contraires et de celle relative au calcul $\text{dep}(A \cup B)$ en fonction de $p(A)$, $p(B)$ et $p(A \cap B)$, où A et B sont deux événements. Les données du problème portent sur une expérience aléatoire, des événements et des probabilités d'événements. L'exercice est organisé en trois consignes dont une porte sur la reconnaissance de l'expérience aléatoire définie dans le problème et les deux autres sur le calcul des probabilités par le biais des deux formules évoquées précédemment. Concernant le calcul des probabilités, un exercice similaire est résolu en séances d'exercices.

Les probabilités données dans le problème le sont dans le registre des pourcentages. Ce choix se justifie par notre volonté de vouloir vérifier la capacité des élèves à reconnaître les pourcentages donnés comme des probabilités d'événements. Un deuxième choix didactique est le mot « hasard » contenu dans la phrase qui désigne l'expérience aléatoire et devant permettre aux élèves de la localiser.

3.6.3.1. Organisations mathématiques évaluées

Globalement deux types de tâches résument les trois consignes de l'exercice, à savoir : « identifier l'expérience aléatoire dans un problème de probabilité » et « calculer la probabilité d'un événement qui s'exprime en fonction d'autres événements ».

Au type de tâches « identifier l'expérience aléatoire dans un problème de probabilité » relève la technique qui consiste à identifier une expression indiquant un effet du hasard et à dégager la proposition ou la phrase qui désigne l'expérience aléatoire. La technologie qui justifie cette technique est la définition de l'expérience aléatoire, qui est inscrite dans le langage des probabilités.

Étant donné que les événements dont les probabilités sont à calculer peuvent s'exprimer en fonction d'autres événements, la technique qui relève du type de tâches « calculer la probabilité d'un événement » est la technique TCA décrite dans l'analyse a priori du premier exercice de la situation 5 (3.5.2.1) et qui se décompose comme il suit :

- identifier l'expérience aléatoire ;
- identifier les événements dont les probabilités sont données et dont dépendent l'événement A ;
- traduire les pourcentages donnés en probabilités d'événements ;
- exprimer l'événement A en fonction des événements de probabilités connues ;
- appliquer selon le cas la formule requise.

Le langage probabiliste, la définition de la probabilité d'un événement et les axiomes fondamentaux qui régissent le calcul des probabilités sont les éléments technologiques nécessaires à la mise en œuvre de cette technique.

3.6.3.2. Comportements possibles des élèves

Les pourcentages ayant été utilisés dans l'exercice 1 de la situation 5 pour exprimer des probabilités, il est normal que ceux qui sont donnés dans le présent exercice du post test soient compris comme tels par les élèves en vue du calcul des probabilités au niveau des deux dernières consignes. De même, la connaissance que ces derniers ont de la notion de hasard de

« tirage au sort », pour l'avoir étudiée au début de la réalisation de notre ingénierie didactique, est pour eux un atout pour reconnaître l'expérience aléatoire du problème. En conséquence, les réponses ci-dessous sont envisageables pour chacune des consignes de l'exercice 3.

3.6.3.2.1. Réponses possibles à la question 1).

Le post test réalisé lors des analyses préalables a montré au niveau de l'exercice 3 du présent test en étude, que les élèves ayant pourtant suivi un enseignement en probabilités sont nombreux à considérer l'expérience aléatoire définie dans le problème comme étant, soit les événements définis, soit les probabilités données. Certains ont pu toutefois reconnaître avec succès l'expérience aléatoire et d'autres ont simplement confondu le mot hasard avec l'expérience aléatoire.

Avec les expérimentations réalisées dans le cadre de la présente ingénierie didactique, il n'est pas à notre avis exagéré d'espérer deux types de réponses possibles chez les élèves, à savoir :

- la phrase qui indique l'expérience aléatoire dans le texte est « on prend une lettre au hasard dans ce bureau » ;
- la phrase qui indique l'expérience aléatoire est « au hasard ».

Nous estimons que le premier type de réponses possibles, qui est la réponse correcte, sera le plus fréquent, tandis que pour nous les réponses indiquant plutôt des probabilités ou des événements à la place de l'expérience aléatoire seront rares voire inexistantes.

3.6.3.2.2. Réponses possibles à la question 2.a).

Dans cette consigne, il est question de calculer la probabilité de l'événement E : « la lettre prise ne contient pas une demande de cadeau ». La résolution visée par l'organisation mathématique présentée plus haut est l'une des réponses possibles des élèves. Elle consiste à reconnaître que l'événement E est le contraire de l'événement B dont la probabilité est 0,45 puis de déduire la probabilité de l'événement A, qui vaut alors 0,55. Tout en adoptant cette méthode, des erreurs d'ordre algébrique peuvent amener certains élèves à ne pas obtenir la réponse correcte.

En tenant compte des résultats du post test lors des analyses préalables, il est envisageable que des élèves considèrent l'événement A comme l'événement contraire de B et trouvent 0,90 comme probabilité de l'événement E. De même une mauvaise compréhension de la question peut conduire certains élèves à utiliser des formules, qui ne conviennent pour la résolution de 2.a), notamment le premier principe de Laplace.

3.6.3.2.3. Réponses possibles à la question 2.b).

L'événement dont il faut calculer la probabilité dans cette question est F : « la lettre prise contient une commande ou une demande de cadeau ». Il s'exprime en fonction des événements A et B de la façon suivante $F = A \cup B$. L'existence de deux formules permettant de calculer $p(A \cup B)$ nous amène à prévoir deux types de réponses possibles chez les élèves, à savoir : la résolution experte qui utilise la formule $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$ et une résolution non correcte utilisant la formule $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$. Cette erreur peut provenir de la formulation de l'exercice, qui nécessite une analyse logique pour comprendre que les événements A et B ne sont pas incompatibles. Dans le premier cas la probabilité recherchée est 0,95 tandis que le second cas conduit à l'absurdité $p(F) = 1,35$. Cette absurdité devrait amener les élèves, qui auraient voulu appliquer la deuxième formule sans se soucier de l'incompatibilité des événements A et B , à opter pour la première formule. Ceux parmi eux qui n'auraient pas remarqué l'absurdité la garderaient ainsi.

3.6.4. Exercice 4

L'exercice 4 du post test porte sur une application du premier principe de Laplace. Relativement complexe l'expérience aléatoire définie dans l'exercice consiste à tirer successivement sans remise deux jetons dans un sac contenant cinq jetons indiscernables au toucher dont trois blancs B_1, B_2, B_3 et deux noirs N_1, N_2 . Un exercice portant sur le tirage successif sans remise avait été résolu dans la situation 5 et a été une occasion d'utiliser les arbres de choix pour dénombrer.

Le nombre de jetons contenus dans le sac ainsi que le nombre de jetons à tirer constituent une première variable didactique pouvant assurer un petit nombre d'éventualités afin de faciliter leur détermination et par ricochet le nombre de cas possibles. Les deux couleurs des jetons constituent une seconde variable didactique nécessaire pour la détermination du nombre de cas favorables à l'événement « les deux jetons tirés sont deux couleurs différentes ».

3.6.4.1. Organisations mathématiques évaluées

La seule question de l'exercice 4 est un spécimen du type de tâches « calculer la probabilité d'un événement ». Le choix que les jetons sont indiscernables au toucher fait de l'exercice 4 une situation d'équiprobabilité. Ainsi toute technique qui relèverait de ce type de tâches doit prendre appui sur la technique TE basée sur le premier principe de Laplace. La particularité de l'événement « les deux jetons sont de couleurs différentes » permet d'identifier deux techniques pour le calcul de sa probabilité.

La première technique est la technique TE dont nous rappelons ci-dessous le détail :

- identifier l'expérience aléatoire ;
- identifier l'événement E : « les deux jetons sont de couleurs différentes » ;
- déterminer le nombre de cas possibles ;
- déterminer le nombre de cas favorables à l'événement E ;
- calculer le rapport du nombre de cas favorables à E au nombre de cas possibles.

La deuxième technique relevant du type de tâches « calculer la probabilité d'un événement » dans l'exercice 4 est la technique que nous nommons TE-TCA, qui se décline comme il suit :

- identifier l'expérience aléatoire ;
- identifier l'événement E et son contraire \bar{E} ;
- déterminer le nombre de cas possibles ;
- déterminer le nombre de cas favorables à \bar{E} ;
- calculer le rapport du nombre de cas favorables à \bar{E} au nombre de cas possibles pour obtenir la probabilité de \bar{E} ;
- déduire la probabilité de E en utilisant la formule qui lie les probabilités de deux événements contraires.

Contenus dans la théorie laplacienne des probabilités et l'axiomatique de Kolmogorov, les éléments technologiques nécessaires aux deux techniques reposent sur le vocabulaire probabiliste, le premier principe de Laplace et les propriétés du calcul des probabilités.

Notons que le nombre de cas possibles et le nombre de cas favorables peuvent être déterminés en listant les éventualités soit sur la base de l'intuition, soit à l'aide des arbres de choix.

3.6.4.2. Réponses possibles des élèves

Les résolutions de l'exercice qui découlent de l'organisation mathématique visée sont les types de réponses possibles envisageables chez les élèves. Ainsi une première réponse possible des élèves peut se traduire par la résolution ci-après de l'exercice.

Soit Ω l'univers des éventualités de l'expérience aléatoire « choisir successivement sans remise deux jetons dans le sac ».

$\Omega = \{(B1, B2) ; (B2, B1) ; (B1, B3) ; (B3, B1) ; (B1, N1) ; (N1, B1) ; (B1, N2) ; (N2, B1) ; (B2, B3) ; (B3, B2) ; (B2, N1) ; (N1, B2) ; (B2, N2) ; (N2, B2) ; (B3, N1) ; (N1, B3) ; (B3, N2) ; (N2, B3) ; (N1, N2) ; (N2, N1)\}$.

Alors $\text{Card}(\Omega)=20$.

Soit E l'événement « les jetons tirés sont de couleurs différentes ». Les éventualités composées de jetons de couleurs différentes sont au nombre de 12. Donc $\text{Card}(E)=12$.

$$\text{Ainsi } p(E)=\frac{\text{Card}(E)}{\text{Card}(\Omega)}=\frac{12}{20}=\frac{3}{5}.$$

La deuxième réponse possible des élèves est identique à la première jusqu'à la détermination des éventualités et de leur nombre. Elle peut se poursuivre comme il suit :

L'événement contraire \bar{E} de l'événement E est composé des huit éventualités suivantes :

(B1, B2) ; (B2, B1) ; (B1, B3) ; (B3, B1) ; (B2, B3) ; (B3, B2) ; (N1, N2) et (N2, N1).

$$\text{Alors } p(\bar{E})=\frac{\text{Card}(\bar{E})}{\text{Card}(\Omega)}=\frac{8}{20}=\frac{2}{5}. \text{ Donc } p(E)=1-p(\bar{E})=\frac{3}{5}.$$

Dans les résolutions précédentes, la liste des éventualités est obtenue sur la base de l'intuition. Puisque les arbres de choix avaient été utilisés dans la résolution de certains exercices de la situation 5, il est à espérer que des élèves essaient de lister les éventualités en réalisant un arbre de choix. En nous référant aux résultats des analyses préalables, nous envisageons des difficultés de dénombrement aussi bien des cas possibles que des cas favorables chez un nombre important d'élèves.

3.6.5. Exercice 5

L'exercice 5 vise à évaluer l'élève par rapport à l'utilisation du deuxième principe de Laplace. Il est composé de deux questions dont la première sert à déterminer les probabilités des événements élémentaires, tandis que la seconde sert à calculer la probabilité d'un événement. L'expérience aléatoire qui y est définie est le lancer d'un dé tétraédrique non équilibré.

Le dé tétraédrique avec ses quatre faces de probabilités d'apparition différentes constitue un choix didactique. Ce choix dans l'exercice se justifie d'une part par la définition des conditions d'application du deuxième principe de Laplace, et d'autre part par notre volonté de proposer un exercice du même contexte que l'exercice 4 de la situation 5 sans lui être exactement identique.

3.6.5.1. Organisations mathématiques évaluées

Les organisations mathématiques évaluées dans l'exercice 5 du post test sont les mêmes que celles travaillées dans l'exercice 4 de la situation 5. Pour les résumer, nous notons que les types de tâches « déterminer la probabilité d'un événement élémentaire » et « calculer la probabilité d'un événement » sont les deux types de tâches qui constituent le point de départ de l'analyse praxéologique de chacune des deux questions de l'exercice en cours d'analyse. Au type de

tâches « déterminer la probabilité d'un événement élémentaire », dans un contexte qui n'est pas celui d'une démarche expérimentale, relève une technique qui consiste à exploiter les données relatives aux probabilités des événements élémentaires et à appliquer le deuxième principe de Laplace et l'axiome $p(\Omega) = 1$ issus respectivement de la théorie laplacienne des probabilités et de l'axiomatique de Kolmogorov. Quant au type de tâches « calculer la probabilité d'un événement » de l'exercice, il fait appel d'une part à la technique APEE qui exploite les probabilités des événements élémentaires et le deuxième principe de Laplace issu de la même théorie laplacienne sur les probabilités. D'autre part, puisque l'événement « le dé repose sur une face dont la marque est une consonne » est l'événement contraire de l'événement « le dé repose sur la face marquée a », la technique qui consiste à exploiter la relation liant les probabilités de deux événements contraires relève aussi du même type de tâches. Cette dernière se justifie par les propriétés élémentaires du calcul des probabilités issues de l'axiomatique de Kolmogorov.

3.6.5.2. Réponses possibles des élèves

3.6.5.2.1. Question 1

Un type de réponses lié à l'organisation mathématique évaluée et un autre ne respectant pas le fait que le dé n'est pas équilibré sont les types de réponses possibles des élèves pour la résolution de cette question.

Le premier type de réponses possibles se résume dans la présentation suivante. C'est la résolution correcte de la question.

La traduction des données de l'exercice donne :

$$\Omega = \{a, b, c, d\};$$

$$p(\{a\}) = p(\{b\}) = p(\{d\}) \text{ et } p(\{c\}) = 4p(\{a\}).$$

$$p(\Omega) = 1 \Leftrightarrow p(\{a\}) + p(\{b\}) + p(\{c\}) + p(\{d\}) = 1$$

$$\Leftrightarrow p(\{a\}) + p(\{a\}) + 4p(\{a\}) + p(\{a\}) = 1$$

$$\Leftrightarrow 7p(\{a\}) = 1$$

$$\text{Donc } p(\{a\}) = \frac{1}{7}.$$

$$\text{D'où } p(\{a\}) = p(\{b\}) = p(\{d\}) = \frac{1}{7} \text{ et } p(\{c\}) = \frac{4}{7}.$$

Même si elle est bien respectée, cette démarche de résolution de cette question peut ne pas conduire aux réponses correctes, si les données de l'exercice ne sont pas bien traduites. Il importe de chercher alors à voir si les difficultés algébriques éventuelles enregistrées au niveau de la situation 5 pourraient disparaître chez les élèves.

Le deuxième type de réponses serait la conséquence de la facilité à faire référence au premier principe de Laplace dans le calcul des probabilités. Dans ce cadre, il peut avoir des élèves qui supposeront que les événements élémentaires sont équiprobables pour trouver que la probabilité que le dé repose sur chaque face est $\frac{1}{4}$. Ce type de réponses avait été constaté dans les résultats du pré-test relatif aux analyses préalables et également lors des séances d'exercices dans la situation 5.

3.6.5.2.2. Question 2

Les deux résolutions de la question 2 en lien avec l'organisation mathématique évaluée de cette question et une résolution probable utilisant le premier principe de Laplace sont les types de réponses possibles à envisager pour le calcul de la probabilité de l'événement A : « le dé repose sur une face dont la marque est une consonne ».

Premier type de réponses possibles

La technique APEE peut être bien appliquée chez un certain nombre d'élèves ayant pu déterminer avec succès les probabilités des événements élémentaires. Une production possible de cette catégorie d'élèves serait :

$$A = \{b, c, d\}. \text{ Donc } p(A) = p(\{b\}) + p(\{c\}) + p(\{d\}) = \frac{1}{7} + \frac{4}{7} + \frac{1}{7} = \frac{6}{7}.$$

Deuxième type de réponses possibles

Il est possible que des élèves remarquent que l'événement A est le contraire de l'événement élémentaire {a}, même si nous estimons que les élèves concernés par notre étude ne sont pas encore suffisamment expérimentés en calcul des probabilités pour être guidés par cette intuition. La résolution de la question qui découlerait de cette remarque se présente comme il suit.

L'événement A est l'événement contraire de l'événement élémentaire {a}.

$$\text{Alors } p(A) = 1 - p(\{a\}) = 1 - \frac{1}{7} = \frac{6}{7}.$$

Troisième type de réponses possibles

Malgré la non-équirépartition des résultats possibles de l'expérience aléatoire, il est possible que certains élèves présentent la résolution ci-dessous basée sur la technique TE.

$A = \{b; c; d\}$, donc $\text{Card}(A)=3$. Or $\text{Card}(\Omega)=4$.

$$\text{Alors } p(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{3}{4}.$$

Contrairement aux deux premiers types de réponses précédemment clarifiés, ce troisième type de réponses n'est pas une résolution correcte du problème posé dans la question 2.

3.6.6. Exercices 6 et 8

Avec une expérience aléatoire simple consistant à choisir un objet parmi cinq, les exercices 6 et 8 constituent des applications directes du premier principe de Laplace. Ils ne diffèrent que par leurs contextes. Si dans l'exercice 6, le contexte est extrascolaire et porte sur le choix d'un numéro de téléphone parmi cinq dont trois sont hors service, dans l'exercice 8, le contexte est scolaire et porte sur le tirage d'une boule dans un sac qui en contient aussi cinq dont trois noires et deux blanches. Le nombre total de numéros ou de boules ainsi que le nombre de numéros ou de boules à choisir permettront d'avoir une idée claire des éventualités de l'expérience aléatoire, tandis que les deux catégories de numéros ou de boules sont nécessaires pour distinguer les cas favorables à l'événement « choisir un numéro en service » dans l'exercice 6 et « tirer une boule blanche » dans l'exercice 8. Bien qu'aucune précision relative à l'équirépartition des résultats ne soit donnée, ces exercices peuvent être considérés par effet de contrat didactique comme des situations d'équiprobabilité. En effet, étant donné qu'aucune donnée de chacun des deux exercices ne permette d'obtenir les probabilités des événements élémentaires, la condition d'équiprobabilité devient implicitement nécessaire pour prétendre répondre à la question posée.

Les réponses des élèves à ces deux exercices identiques dans le fond seront utiles pour appréhender si l'ingénierie expérimentée permettrait aux élèves d'aborder indifféremment les situations à contextes scolaires et celles à contextes extrascolaires. À notre avis, les élèves réussiront mieux l'exercice 8 que l'exercice 6, compte tenu du fait que, dans l'ingénierie, les exercices résolus portant sur des tirages d'objets ont porté uniquement sur des contextes scolaires ordinaires.

Il est défini dans chacun des deux exercices un seul type de tâches, à savoir : « calculer la probabilité d'un événement », auquel relève la technique TE basée sur le premier principe de Laplace longtemps développé dans l'analyse de l'exercice 4. Une deuxième technique combinant la technique TE et la propriété liant les probabilités de deux événements contraires. La résolution de chacun des exercices en lien avec cette organisation mathématique peut se faire suivant les deux réponses envisageables suivantes pour l'exercice 6.

Première résolution possible

Soit U l'univers des éventualités de l'expérience aléatoire « appeler au hasard un numéro de téléphone ». On a : $\text{Card}(U)=5$.

Soit A l'événement « l'appel tombe sur un numéro en service ». Puisqu'il y a trois numéros hors service, il en existe deux en service. Donc $\text{Card}(A)=2$. Alors $p(A) =$

$$\frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(U)} = \frac{2}{5}.$$

Deuxième résolution possible

L'événement contraire de A est « l'appel tombe sur un numéro hors service ».

Donc $\text{card}(\bar{A}) = 3$. Alors $p(\bar{A}) = \frac{3}{5}$. Or $p(A) + p(\bar{A}) = 1$.

Donc $p(A) = 1 - p(\bar{A}) = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$.

Vu la simplicité de l'expérience aléatoire dans les deux exercices, toute autre réponse de l'élève s'expliquerait par une mauvaise compréhension du problème posé.

3.6.7. Exercice 7

L'exercice 7 a la même structure que l'exercice 5 et vise aussi à évaluer l'élève par rapport à l'utilisation du deuxième principe de Laplace dans un contexte formel de la théorie et directement dans le langage probabiliste. Avec une expérience aléatoire à quatre éventualités, la loi de probabilité proposée donne les probabilités de trois événements élémentaires. Ce choix se justifie par notre volonté de proposer aux élèves une situation portant sur l'utilisation du deuxième principe de Laplace et différente de celles jusque-là étudiées.

Comme dans l'exercice 5 du post test les types de tâches dont les questions de l'exercice 7 sont des spécimens sont : « déterminer la probabilité d'un événement élémentaire » et « calculer la probabilité d'un événement ». La technique utilisant le deuxième principe de Laplace et l'axiome $p(\Omega) = 1$ relève du premier type de tâches, tandis que la technique APEE est celle qui relève du deuxième type de tâches. Au second type de tâches relève aussi la technique qui exploite la relation liant les probabilités de deux événements contraires.

Pour la première question qui consiste à déterminer la probabilité de l'un des quatre événements élémentaires, la seule réponse possible que nous envisageons du côté des élèves se résume dans la présentation ci-dessous.

La probabilité de l'événement {2} est notée a.

$$\Omega = \{0, 1, 2, 3\}.$$

$$p(\Omega) = 1 \Leftrightarrow p(\{0\}) + p(\{1\}) + p(\{2\}) + p(\{3\}) = 1$$

$$\Leftrightarrow 0,17 + 0,64 + a + 0,01 = 1$$

$$\Leftrightarrow a = 0,18$$

Donc $a = 0,18$.

Pour ce qui concerne la deuxième question, qui consiste à calculer la probabilité que le résultat de l'expérience aléatoire soit un chiffre impair, nous envisageons deux types de réponses possibles. Le premier est relatif à la technique APEE de l'organisation mathématique et qui se présente comme il suit.

L'événement A : « le résultat de l'expérience aléatoire est impair » est composé des éventualités 1 et 3. Donc $p(A) = p(\{1\}) + p(\{3\}) = 0,64 + 0,01 = 0,65$.

Le deuxième type de réponses possibles, qui n'est pas une réponse correcte, repose sur le premier principe de Laplace et consiste à écrire que $p(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

Conclusion

Les analyses préalables s'inscrivant dans la méthodologie de l'ingénierie didactique, et avant la conception d'un modèle d'enseignement/apprentissage, nous ont permis d'appréhender un certain nombre de difficultés relatives notamment à l'enseignement et à l'apprentissage du calcul des probabilités, ainsi qu'aux programmes d'études des probabilités au Bénin. Pour surmonter ces difficultés, nous venons d'élaborer dans ce chapitre un modèle d'enseignement basé sur l'approche fréquentiste à partir d'une démarche expérimentale. Avec ses cinq situations, l'ingénierie didactique ainsi construite a prévu de donner un sens précis dans le cas d'une théorie probabiliste, d'une part aux concepts fondamentaux des probabilités tels que la notion d'expérience aléatoire à travers le franchissement des obstacles à la notion de hasard, et d'autre part, à la notion de probabilité d'un événement. Les expérimentations réalisées, inspirées de l'ingénierie réalisée en 1974 par Brousseau (2005) et centrées sur l'approche fréquentiste, doivent permettre d'aborder l'axiomatique de Kolmogorov à partir du deuxième principe de Laplace, qui est ensuite exploitée pour asseoir le premier principe de Laplace. Des séances d'exercice sont prévues pour permettre aux élèves de réinvestir et d'approfondir les notions et techniques construites. Les effets de cette ingénierie didactique sur les apprentissages sont également prévus pour être mesurés à partir des réponses des élèves au post-test qui y est développé.

La réalisation en classe du modèle d'enseignement conçu et l'analyse a posteriori en vue de sa validation sont les prochaines étapes de la méthodologie d'ingénierie didactique. Elles feront l'objet d'étude dans le chapitre suivant.

Chapitre VII : Analyse de la réalisation en classe de l'ingénierie

Introduction

Dans la méthodologie de l'ingénierie didactique, l'étape qui suit la conception des situations du modèle d'enseignement proposé est celle de la réalisation en classe de ces situations et de leur analyse a posteriori. Après l'étape de l'élaboration de l'ingénierie et de son analyse a priori dans le chapitre précédent, nous nous intéressons à présent à la réalisation des cinq situations d'enseignement qui composent cette ingénierie. Dans un premier temps, nous proposons de présenter les conditions générales de la réalisation en classe de ces situations, et dans un second temps, nous procéderons à leur analyse en suivant la méthodologie des quatre composantes de Bronner (2010).

1. Conditions générales de réalisation en classe des situations de l'ingénierie

L'ingénierie didactique que nous avons conçue dans le but de proposer une entrée en probabilité à partir d'une démarche expérimentale comporte six situations : les trois premières sont basées sur des démarches expérimentales en vue de la construction des notions probabilistes, la quatrième formalise la notion de probabilité d'un événement et les axiomes élémentaires de calcul de probabilités, la cinquième est une situation d'exercices pour les élèves et la dernière est une évaluation. L'étape de réalisation concerne essentiellement les situations de l'ingénierie relatives à l'enseignement, c'est-à-dire les cinq premières. Dans les lignes suivantes sont précisées la programmation des séances de l'expérimentation, la classe d'expérimentation ainsi que les conditions de collaboration avec le professeur ayant conduit l'expérimentation avec nous.

1.1. Nombre de séances et période d'expérimentation

L'expérimentation de l'ingénierie a eu lieu dans la période allant du 29 mars 2017 au 13 mai 2017, s'étendant ainsi sur 45 jours. Les séances ont été programmées en tenant compte de la disponibilité du professeur et des élèves. Nos séances n'ont eu aucune perturbation sur l'exécution des programmes de la classe d'expérimentation, car la période de réalisation en classe des cinq situations fondamentales de l'ingénierie a coïncidé avec une période de grève

de la majorité des enseignants du secondaire au Bénin. Ceci a favorisé la disponibilité presque sans faille des élèves et celle du professeur.

L'expérimentation de l'ensemble des cinq premières situations, qui sont relatives à l'enseignement/apprentissage de la probabilité, est réalisée en onze séances dont la durée varie d'une heure dix-neuf minutes à deux heures cinquante-trois minutes. Quant à la sixième situation, qui est un post-test, elle a eu lieu en une seule séance de 90 minutes. Le tableau suivant présente de façon détaillée les différentes séances avec leurs durées respectives.

Séances	Situations	Date de réalisation	Horaires	Durée de réalisation	Durée prévue	Ecart
Séance n°1	Situation n°1 Phases 1.1 et 1.2	29-mars-17	8h25 à 9h52	87 min	90 min	- 3 min
Séance n°2	Situation n°1 Phase 1.3	29-mars-17	15h30 à 17h46	136 min	90 min	+ 46 min
Séance n°3	Situation n°2 Phase 2.1	30-mars-17	8h50 à 10h15	85min	120 min	+ 150 min
Séance n°4	Situation n°2 Phase 2.1 (suite)	05-avr-17	8h15 à 10h01	106 min		
Séance n°5	Situation n°2 Phase 2.1 (suite et fin)	12-avr-17	8h30 à 9h49	79 min		
Séance n°6	Situation n°2 Phases 2.2 et 2.3	13-avr-17	15h à 17h53	173min	105 min	+ 68 min
Séance n°7	Situation n°3	18-avr-17	8h30 à 9h49	152min	80 min	+ 72 min
Séance n°8	Situation n°4	19-avr-17	8h50 à 10h32	102min	75 min	+ 27 min
Séance n°9	Situation n°5 Exercices 1 à 3	26-avr-17	07h40 à 9h52	132min	235 min	+ 121 min
Séance n°10	Situation n°5 Exercices 4 à 5	01-mai-17	8h30 à 9h58	88min		
Séance n°11	Situation n°5 Exercices 6 à 7	06-mai-17	9h45 à 12h56	136 min		
Séance n°12	Situation n°6 (Post-test)	13-mai-17	8h30 à 10h30	120 min	90 min	+ 30 min
Total				23h 16 min	14h 45 min	+ 8h 31 min

Tableau n° 33 : Durée de réalisation en classe des situations.

De ce tableau, on remarque aisément que la durée effective de réalisation en classe dépasse largement la durée prévue pour la plupart des situations. Sur l'ensemble des cinq

situations d'enseignement/apprentissage, pour une prévision de 13 heures 15 minutes, la durée effective de réalisation en classe des situations est de 21 heures 16 minutes, soit un dépassement de 8 heures. Les plus grands dépassements sont obtenus au niveau de la phase 2.1 et des séances d'exercices, qui a pris trois séances au lieu d'une seule prévue.

1.2. La classe d'expérimentation

Comme nous l'avons indiqué dans le chapitre III, la classe d'expérimentation est la classe de seconde C du CEG Agblangandan, où nous avons été en service de 2012 à 2018. Elle est composée de dix-sept élèves dont six filles et onze garçons, que nous avons numérotés de E₁ à E₁₇ et dont les âges varient de 14 à 18 ans comme l'indique le tableau suivant.

Âge	14	15	16	17	18	Total
Nombre d'élèves	2	6	5	2	2	17

Tableau n°34 : Répartition des élèves de la classe d'expérimentation selon l'âge.

Les élèves ont été regroupés en cinq groupes G₁, G₂, G₃, G₄ et G₅ pour les six premières séances et en quatre groupes G₁, G₂, G₃, G₄ pour les cinq dernières séances. Cette variation est due à l'abandon de l'élève E₁₀, réduisant l'effectif à 16 à partir de la troisième situation. Concernant la dernière situation consacrée au post test, le nombre des élèves ayant composé est 15, car l'élève E₉ n'a pas été présent le jour de la composition.

1.3. La collaboration avec le professeur d'expérimentation

Nous rappelons d'abord que l'enseignant qui a accepté conduire l'expérimentation avec nous est le professeur de mathématiques de la classe d'expérimentation pour le compte de l'année scolaire 2016-2017. Il est titulaire d'une licence professionnelle d'enseignement et totalisait en 2017 trois années d'expérience dans l'enseignement.

Deux rencontres ont eu lieu avec lui avant le début de l'expérimentation. Ces rencontres ont servi à lui présenter l'ingénierie et à lui clarifier les différentes conceptions de la probabilité d'un événement. Puisque nous réalisons une expérimentation visant les hypothèses et conditions de notre ingénierie, ainsi que les effets sur l'apprentissage, et non pas l'analyse de la pratique de l'enseignant expérimentateur, nous avons convenu, lui et nous, qu'il soit le professeur principal de l'expérimentation, mais que le chercheur, que nous sommes, puisse intervenir par moment dans un rôle d'enseignant pour recadrer au besoin l'enseignement en cas de déviation de la ligne de l'ingénierie. C'est dire donc que nous avons opté pour une cogestion

de la classe au niveau du contrat de recherche, sans être véritablement dans une recherche collaborative.

Pour chaque séance, nous élaborons une fiche pédagogique que nous envoyons par courrier électronique au professeur avant la séance et nous tenons une rencontre de trente minutes environ juste avant la séance pour préciser les objectifs et pour discuter du déroulement de la séance. Une autre rencontre de la même durée a lieu à la fin de chaque séance pour apprécier le déroulement de la séance et pour faire une projection sur la séance suivante.

2. Analyse a posteriori des situations

La méthodologie d'analyse que nous avons jugée pertinente pour l'analyse de la réalisation des situations est celle des quatre composantes de Bronner (2010). Rappelons que cette méthodologie comporte pour chaque situation les quatre étapes d'analyse suivantes :

- élaboration de la trame de la situation, aboutissant à un premier découpage ;
- analyse de l'organisation mathématique de la situation ;
- analyse de l'organisation didactique de la situation en prenant en compte le milieu, le contrat didactique, les topos et le temps didactique ;
- repérage des événements didactiques.

De façon pratique, après l'élaboration de la trame et l'analyse de l'organisation mathématique d'une situation donnée, nous proposons de coupler les deux dernières étapes de la démarche, en découpant d'abord cette situation en des épisodes que nous analysons un à un par la suite. Cette analyse consiste alors à identifier pour chaque épisode les moments didactiques, à décrire le milieu, le contrat didactique, les topos et le temps didactique, et à repérer les événements didactiques.

2.1. Analyse a posteriori de la situation n°1

La situation n°1, qui comporte trois phases, s'est déroulée en deux séances. La première séance a permis de réaliser les phases 1.1 et 1.2 portant sur l'étude de la notion de hasard du « tirage au sort » et la notion d'expérience aléatoire, tandis que la deuxième séance a porté sur la phase 1.3 dont l'objectif est l'étude de la notion d'événement. Nous présentons dans la suite l'analyse de la réalisation de chacune des trois phases de la première situation.

2.1.1. Analyse de la phase 1.1 de la situation n°1

La trame, l'organisation mathématique et l'analyse de la séance suivant les quatre composantes sont présentées dans les lignes qui suivent.

2.1.1.1. La trame de la phase

Le découpage de la réalisation de la phase 1.1 de la situation comporte cinq moments comme il est énuméré ci-après (Annexe 7, Ligne 001 à 092).

- 1) Un premier moment collectif d'une durée de 2'12 (0 à 2'12) : Introduction de l'expérimentation.
- 2) Un deuxième moment collectif d'une durée de 10'18 (2'12 à 12'30) : Lecture et explication du contexte de la situation 1 et de la consigne de la phase 1.1, constituée des questions Q_1 et Q_2 .
- 3) Un moment de travail individuel d'une durée de 8'6 (12'30 à 20'36) : Temps de travail individuel dans la phase 1.1 consacré aux questions Q_1 et Q_2 .
- 4) Un moment de travail en groupe d'une durée de 10'18 (20'36 à 30'54) : Temps de travail en groupe dans la phase 1.1 toujours consacré aux questions Q_1 et Q_2 .
- 5) Un troisième moment collectif de 14'19'' (30'54 à 49'24) : Présentation des résultats des différents groupes et lancement de la phase 1.2, consacrée à une reprise des questions Q_1 et Q_2 .

2.1.1.2. Organisation mathématique de la phase 1.1

a) Type de tâche et organisation mathématique visée

Rappelons que le type de tâches qui permet d'étudier l'activité des élèves dans la phase 1.1 est T_1 : « déterminer les résultats possibles d'une expérience aléatoire » dont les questions Q_1 et Q_2 sont des tâches. Nous avons précisé dans la section 3 du chapitre VI l'organisation mathématique visée et l'analyse a priori de cette phase qui a pour but de travailler le rapport personnel au hasard en vue de rencontrer la notion d'expérience aléatoire.

b) L'organisation mathématique effectivement construite et les réponses proposées par les élèves

La technique $\tau_{1.1}'$ relevant effectivement du type de tâches T_1 chez les élèves pour chacune des questions Q_1 et Q_2 consiste à identifier l'expérience aléatoire et à donner le résultat du premier lancer pour la question Q_1 et celui du quatrième lancer pour la question Q_2 . Les réponses proposées par les élèves montrent que cette technique diffère de la technique visée par le fait

que l'accent n'est pas mis sur l'imprévisibilité du résultat de l'expérience aléatoire chez les élèves. Compte tenu de la spécificité de la phase 1.1, dans laquelle les élèves ne sont pas autorisés à lancer de cauri, la technologie justifiant la technique $\tau_{1.1}'$ est basée sur l'intuition ou l'expérience personnelle des élèves par rapport au jeu de lancer de dé ou de pièce de monnaie.

Sans surprise, les élèves ne sont pas entrés dans la technique prévue dans l'organisation mathématique. À leur niveau, deux types de réponses sont identifiés pour la question Q₁ et quatre pour la question Q₂. Pour ce qui est de la question Q₁, où il est question de prédire le résultat du lancer une seule fois d'un cauri, les élèves de deux groupes (G₂ et G₄) ont estimé que le résultat du lancer serait (C) ou bien (P) avec l'argument que le résultat dépendra de la manière dont le cauri est lancé tel que le précise la formulation suivante du groupe G₂.

Si Dansou lance le cauri pour la première fois, le résultat qu'il obtiendra dépend de la manière dont il a lancé. Il pourra trouver le résultat (P) ou (C).

Les trois autres groupes ont prédit la face (C) comme résultat du lancer, ce qu'ils justifient par le fait que le cauri reposera nécessairement sur la face (P), compte tenu de sa forme.

Si Dansou lance le cauri pour la première fois, il obtiendra la face (C), car le cauri ayant deux faces, une face plane et une face courbe, pour que le cauri soit totalement immobile la face plane doit rester sur la terre.

Ainsi au niveau de la question Q₁ les deux types de réponses effectives correspondent à ceux prévus. On note cependant l'absence de la réponse pouvant soupçonner un rapport personnel conforme à celui du hasard du « tirage au sort », selon lequel le résultat est dû au hasard et serait soit (C), soit (P). La technologie visée n'est donc pas perceptible chez les élèves au niveau de la question Q₁.

Concernant la question Q₂, qui demande de prédire le résultat du quatrième lancer sachant qu'il est obtenu CCC pour les résultats des trois premiers lancers, quatre groupes dont les trois qui avaient prédit la face (C) comme résultat du premier lancer ont confirmé ce résultat mais avec deux arguments différents de celui évoqué précédemment. Pour un groupe (n°4), c'est une certaine pression qui est exercée sur le cauri pour obtenir (C) pour chacun des trois premiers lancers et cette même pression sera exercée pour le quatrième lancer.

Si Dansou lance le cauri une quatrième fois, il obtiendra toujours la face C, car c'est la pression qu'il avait exercée sur le cauri pour les trois premières fois qu'il exercera toujours.

Invité à mieux expliquer le résultat de son groupe, un élève précise :

Comme c'est la même personne. C'est la manière dont il avait lancé les autres fois, c'est la force qu'il avait exercée sur le cauri, qu'il exercera de nouveau.

Il nous semble que ce raisonnement n'est pas anodin. C'est possible qu'il soit une conséquence d'une explication donnée par le professeur de ce qu'on pouvait entendre par immobilisation du cauri. En effet, dans son explication, le professeur, avec des gestes de mains, avait semblé dire que c'est le lanceur qui immobilise le cauri. Indépendamment de cette cause probable, ce type de réponses peut être classé dans le type de réponses « mécanique » prévu dans l'analyse a priori comme devant être une réponse possible des élèves.

Un autre argument avancé par deux autres groupes (G_2 et G_5) ayant prédit la face (C) comme résultat du quatrième lancer semble traduire le rapport « confirmation » mais nuancé.

Si Dansou lance le cauri une quatrième fois, ce serait la face (C), car il a lancé le cauri trois fois et cela est tombé sur la face (C). Donc c'est fort probable qu'elle tombe encore sur la face (C).

La nuance vient du fait que les élèves n'ont pas précisé à ce niveau qu'on obtiendrait nécessairement la face (C). On pourrait dire qu'ils affirment par leur réponse que le résultat pourrait être (C) ou (P), montrant ainsi un certain rapport en construction conforme à celui du hasard du « tirage au sort ». Fort heureusement, le professeur a cherché à comprendre la nuance cachée dans l'expression « il est fort probable ». En répondant à cette préoccupation du professeur, les élèves de l'un des deux groupes (le groupe G_2) ont confirmé qu'il s'agit bien d'un rapport adéquat au hasard du « tirage au sort. » (Annexe 7, Lignes 75 à 77)

Prof : Vous avez dit que c'est la face (C), vous dites encore que c'est fort probable. Dans fort probable là, est-ce qu'on comprend que c'est forcément (C) ? C'est forcément (C) que vous dites ou bien ça pourrait être (C) ou (P).

Élève E_8 : C'est fort possible.

Élève E_7 : Ça pourrait être (C) ou (P).

À propos de cette même préoccupation du professeur, un élève du groupe G_5 devient plus précis en donnant les probabilités de réalisation de chacune des faces mais avec un biais d'équiprobabilité. (Annexe 7, Lignes 88 et 89)

Prof : Vous dites que c'est (C) et après vous donnez comme si on va dire c'est possible. Votre argumentation tombe sur c'est possible et votre résultat dit que c'est ça. C'est le groupe numéro 5. Qu'est-ce que vous voulez qu'on comprenne concrètement. C'est (C) ou bien ça pourrait être (C) ?

Élève E_{17} : A moitié (C), à moitié (P).

L'un des groupes (le groupe n°3) ayant prédit la face (C) comme résultat du quatrième lancer n'a pas accepté d'argumenter. Ce groupe est l'un des deux groupes ayant prédit que le résultat du premier lancer serait (C) ou (P). Tout logiquement, leur réponse concernant le résultat du quatrième lancer pourrait correspondre au rapport « géométrie du cauri », sur lequel leur réponse à la question Q₁ était basée.

La réponse proposée par le groupe G₄, qui avait prédit le résultat du premier lancer comme pouvant être (C) ou (P) peut être classée dans le rapport « compensation », car les élèves de ce groupe ont déclaré que le résultat du quatrième lancer serait la face (P), en argumentant que le lanceur chercherait à immobiliser le cauri sur une autre face que la face (C) observée à l'issue de chacun des trois premiers lancers.

Si Dansou lançait le cauri pour la quatrième fois, il pourrait obtenir la face (P) car étant donné qu'il a lancé trois fois et obtenu la face (C), il va chercher à immobiliser le cauri sur une autre face d'une autre manière.

A travers cette réponse, qui donne la preuve de la présence du rapport « compensation », selon lequel l'éventualité la moins fréquente est la plus probable, on peut noter une nuance qui ne lie pas nécessairement ce résultat à un effet quelconque du hasard, mais qui le lie plutôt à la volonté du lanceur à immobiliser le cauri sur la face (P).

En somme, à travers les réponses effectives des élèves à la question Q₂ dans la première phase de la situation 1, il apparaît chez les élèves des types de rapports au hasard identiques aux types de rapports « tirage au sort », « géométrie du cauri », « mécanique » et « compensation », prévus dans l'analyse a priori de cette phase comme pouvant être des réponses des élèves. Si les deux premiers semblent être clairement exprimés, les deux autres sont nuancés par un effet de l'enseignement, celui d'avoir fait croire que le cauri lancé devrait être immobilisé par son lanceur. Les types de rapports « confirmation » et « fatalité » inventoriés également au niveau de l'analyse a priori semblent être absents chez les élèves concernés par notre expérimentation. Cette réalisation de la première phase nous conforte dans la nécessité de travailler le rapport au hasard dès le début de l'enseignement, les élèves n'ayant pas encore construit pour la grande majorité, une organisation mathématique conforme à ce qui est visée.

2.1.1.3. Analyse de phase selon la méthodologie des 4 composantes

La phase 1.1 se décompose en deux épisodes caractérisés chacun par un moment didactique au sens de Chevallard (1999) : un moment de première rencontre avec l'organisation didactique visée et un moment d'exploration du type de tâches et d'élaboration de techniques.

2.1.1.3.1. Premier épisode (0 à 12'30)

Cet épisode de 12 minutes trente secondes commence par l'introduction de l'expérimentation et finit par l'entrée effective dans la phase 1.1. Il correspond à un moment de première rencontre avec le type de tâches T_1 : « prévoir le résultat d'une expérience aléatoire ». On distingue dans cet épisode deux périodes : la première ayant servi à l'entrée dans l'expérimentation et dans la séance, et la deuxième, à la mise en place des éléments constituant le milieu de la phase.

En l'absence d'un travail effectif des élèves avec un milieu matériel, le milieu est réduit aux dires du professeur comme premier objet sur lequel l'élève interagit dans sa première rencontre avec le type de tâches T_1 . Outre l'organisation de la séance par le professeur et l'appropriation de la consigne par les élèves, le contrat pédagogique est marqué par l'exigence faite à l'élève de se lever pour parler et fort chaque fois qu'il aura quelque chose à dire. (Annexe 7, lignes 32 à 36)

E₃ : Qu'est-ce qu'on entend par immobilisation du cauri ?

Prof : Plus fort, plus fort.

E₃ : Qu'est-ce qu'on entend par immobilisation ?

Prof : Lève-toi et parle plus fort.

E₃ : Qu'est-ce qu'on entend par immobilisation du cauri ?

Le topos du professeur se traduit dans la première période par sa responsabilité à préciser aux élèves le but de l'expérimentation et à leur présenter le chercheur, et dans la deuxième période, à faire comprendre la tâche aux élèves. Quant au topos de l'élève, il se résume dans la première période à l'écoute du professeur et dans la deuxième à la compréhension de la consigne. La fin de l'épisode marque une première évolution du temps didactique.

Un premier événement relatif à une explication du professeur est problématique et a eu un effet sur la phase suivante. En effet, dans son explication de l'immobilisation du cauri, le professeur a donné l'impression que l'immobilisation du cauri se fait par le lanceur avec sa main. (Annexe 7, ligne 37)

Prof : Qu'est-ce qu'on entend par immobilisation du cauri ? Tout simplement, immobilisation d'abord, ça veut dire rendre immobile. Eh, par exemple un ballon, on vous lance, le ballon étant mobile, vous mettez le pied sur la balle, la balle devient immobile. On est d'accord ? Le cauri c'est un peu comme ça, donc quand on lance le cauri, le cauri est en train de bouger, donc on le rend immobile, c'est qu'on met la main sur ça..., on essaie de faire en sorte que le cauri ne bouge plus. Ça peut aller ?

Comme on le voit dans l'intervention précédente du professeur, le cauri lancé doit être immobilisé par le lanceur. C'est le cas lors du tirage au sort au début d'un match de football en vue de l'attribution des camps aux deux équipes. L'arbitre lance une pièce de monnaie en l'air et l'immobilise à l'aide de ses mains. La même pratique s'observe aussi dans les jeux de pile-face dans les sociétés béninoises. Cette compréhension légitime du professeur par rapport à l'immobilisation du cauri n'est pas celle du chercheur. Evidemment l'entretien que le chercheur et le professeur ont eu avant la séance n'a pas abordé cet aspect. Le chercheur a dû isoler le professeur à un moment où les élèves sont occupés à travailler pour avoir avec lui une brève discussion, qui a abouti à l'entente selon laquelle le cauri devrait s'immobiliser de lui-même pour l'obtention d'un meilleur effet du hasard.

Un deuxième événement non problématique est survenu à la fin de l'épisode quand l'élève E₁₄ a semblé trouver la tâche évidente au point d'anticiper sur sa réponse. Le professeur a dû le retourner au travail individuel comme peut le faire comprendre l'échange ci-après. (Annexe 7, Lignes 61 à 64)

Élève E₁₄ : La première question : Quel résultat obtiendrait Dansou s'il lance le cauri pour la première fois ? Dans quel sens il lance ?

Prof : Il lance le cauri. Je t'ai montré le cauri tout à l'heure. D'accord ? Regardez comme on fait pour les pièces à la maison. Il lance et puis il l'immobilise. D'accord. Donc on lui demande, puisque ça a deux faces, voilà une face plane et une face courbe. Lorsqu'on lance et qu'on l'immobilise comme ça. On lui demande alors quelle face, d'accord, on te demande quelle face obtiendrait-il ?

Élève E₁₄ : Ça dépend de la façon dont il a lancé.

Prof : Ça c'est ce qu'on attend de toi dans ton travail de recherche maintenant que je vais lancer. J'attends que les questions soient comprises d'abord. Ça peut aller ? C'est bien compris pour tout le monde ? Bien maintenant, chacun avec son imagination essaie de répondre, d'accord, et dans cinq minutes on va lancer le travail en groupe et on verra. C'est parti hein ?

Dans cet échange, l'élève trouve déjà que le résultat du lancer dépend de la façon dont le cauri est lancé et ne semble voir aucun effet de hasard dans ce lancer.

2.1.1.3.2. Deuxième épisode (12'30 à 49'24)

D'une durée de trente-six minutes cinquante-quatre secondes, le deuxième épisode de la réalisation de la phase 1.1 est un moment d'exploration du type de tâches T₁ et de l'élaboration d'une technique relative. Cet épisode est constitué de trois périodes qui sont respectivement le

temps du travail individuel, le temps du travail en groupe et celui du travail collectif. Le milieu est essentiellement composé du support papier comportant le contexte et les deux consignes qui sont des spécimens du type de tâches T_1 . Le topos de l'élève a consisté à chercher des réponses aux questions posées dans les deux premières périodes et celui du professeur a consisté à faire comprendre les réponses de chaque groupe à l'ensemble de la classe dans la troisième période. Le contrat didactique est ordinaire et est caractérisé par l'absence d'intervention du professeur lors des modalités de travail individuel et de travail en groupe et par sa responsabilité de régulation lors du travail collectif. Les élèves sont restés en autonomie didactique pendant vingt minutes vingt-quatre secondes lors des deux premières périodes et ont participé activement au travail collectif en expliquant les points de vue de leurs groupes respectifs à toute la classe. C'est dire que le temps d'apprentissage est important.

Deux événements didactiques importants attirent notre attention dans ce deuxième épisode de la phase 1.1. Il s'agit d'abord du passage de la modalité de travail individuel à celle du travail en groupe. Le professeur a semblé oublier qu'il devrait y avoir un temps de travail en groupe et voulait passer au travail collectif quand il a été approché par le chercheur qui lui a fait remarquer qu'il était prévu un temps de travail en groupe. Le deuxième événement est relatif à l'utilisation de l'expression « fort probable » pour argumenter la réponse donnée par deux des cinq groupes d'élèves tel que nous l'avions développé au niveau de l'organisation mathématique (2.1.1.2)). C'est un événement imprévu heureux puisqu'il montre la construction d'un certain rapport à la notion de probabilité chez certains élèves. Trois types de rapports à la notion de probabilité se font remarquer à travers l'explication de l'expression « fort probable » par les élèves. Pour les uns la notion de probabilité serait la notion de hasard comme le semble illustrer Kenneth : « *ça pourrait être (C), ça pourrait être (P)* » ; on note chez d'autres un embryon de la notion d'équiprobabilité comme dans le chuchotement de Adeline : « *à moitié (C), à moitié (P)* » ; il existe chez certains la présence de la notion de l'estimation subjective de la probabilité d'un événement comme l'ont précisé les membres du groupe 5 à travers leur réponse : « *donc la probabilité est forte qu'il obtienne une fois de plus le résultat (C)* ».

2.1.2. Analyse de la phase 1.2.

2.1.2.1. Trame de la phase

Six moments composent fondamentalement la trame de la phase 1.2 dans la première séance de réalisation de l'ingénierie didactique. Ils sont énumérés comme ci-après. (Annexe 7, Lignes 092 à 422)

- 1) Un premier moment collectif d'une durée de 3'9'' (49'24 à 52'33) : Lecture et explication de la consigne de la phase 1.2 en lien avec la présence de cauris.
- 2) Un premier moment de travail en groupe de 1'39''(52'33 à 54'12) : Premier temps de travail en groupe dans la phase 1.2. pour la reprise des questions Q₁ et Q₂.
- 3) Un deuxième moment collectif de 56'' (54'12 à 55'8) : Suite de l'explication de la consigne de la phase 1.2.
- 4) Un deuxième moment de travail en groupe de 3'39''(55'8 à 58'47) : Suite du premier temps de travail en groupe.
- 5) Un troisième moment collectif de 15'26'' (58'47 à 1 :14'13) : Mise en commun et lancement de la mise en place du savoir en construction.
- 6) Un quatrième moment collectif de 12'38''(1 :14'13 à la fin) : Mise en place du savoir en construction.

2.1.2.2. Organisation mathématique de la phase 1.2

a) Type de tâche

Nous rappelons que le type de tâches de la phase 1.2 est le même que celui de la phase 1.1 pour les deux questions Q₁ et Q₂ de la phase. Il s'agit notamment du type de tâches T₁ : « déterminer les résultats possibles d'une expérience aléatoire ». Nous souhaitons ici que les élèves modifient leurs techniques et technologie en effectuant des lancers de cauri un certain nombre de fois.

b) Organisation mathématique effectivement construite

Dans cette phase, la technique relevant du type de tâches T₁ est également basée sur l'intuition couplée avec l'expérience découlant du lancer effectif de cauri pour toute la classe. En effet, ayant réalisé des lancers de cauri dans la phase et ayant argumenté leur réponse par rapport au résultat du quatrième lancer, les élèves ont dû adopter la technique $\tau_{1.2}$ 'suivante presque identique à celle prévue dans l'organisation mathématique visée. Elle se précise comme il suit :

- identifier l'expérience aléatoire ;
- lancer le cauri un certain nombre de fois ;
- donner le résultat du premier lancer pour la question Q₁ et celui du quatrième lancer pour la question Q₂ connaissant la forme du cauri et les résultats donnés des trois premiers lancers.

Cette technique diffère de la technique $\tau_{1.2}$ visée, par sa variété de réponses relatives au résultat du quatrième lancer telle qu'elle sera présentée ci-dessous dans le cadre des réponses

proposées par les élèves. Bien que non étudiée par les élèves, la notion d'expérience aléatoire de la théorie des probabilités constitue la technologie pouvant justifier la technique utilisée par les élèves.

c) Les réponses proposées par les élèves aux questions Q₁ et Q₂ dans la phase 1.2

Après les éclairages du professeur suite à une certaine incompréhension de la consigne par les élèves et après avoir effectué quelques lancers de cauris devant toute la classe, les élèves de trois des cinq groupes ont été convaincus que le résultat du lancer, que cela soit la première ou la quatrième fois est soit (C), soit (P). Certains élèves des deux autres groupes ont rejoint la position des autres après avoir lancé publiquement et plusieurs fois le dé. In fine tous les élèves ont montré un rapport adéquat au hasard du tirage au sort comme le montrent les interventions ci-dessous. (Annexe 7, Lignes 171 à 175).

Prof : Maintenant, on vous demande alors de répondre à la question à base des expériences que vous avez obtenues. Supposez maintenant que vous avez un cauri dans les mains et imaginez qu'on a lancé, qu'est-ce qu'on peut avoir ? C'est là maintenant la question.

Élève E₃ : Si on lance le cauri, le cauri, on peut avoir, soit la face plane, soit la face courbe.

Prof : Donc on invite chaque groupe à donner sa réponse. Le groupe numéro 2, selon vous, si on lance le cauri, quelle face obtiendrait-on ? Selon le groupe numéro 2.

Élève E₈ : Si on lance le cauri pour la première fois, on peut obtenir, soit la face (P), soit la face courbe (C).

Compte tenu du fait que la consigne n'avait pas été comprise par les élèves au départ, le travail en groupe n'a pas été productif et c'est au niveau du travail collectif que l'évolution du rapport au hasard a pu être constatée. Avec l'heure avancée, la question Q₂ dans la deuxième phase n'a pas pu être abordée avant que le professeur ne passe à l'institutionnalisation de la notion d'expérience aléatoire à l'aide d'un questionnement de type maïeutique. C'est à cette occasion que le mot hasard, prononcé pour la première fois depuis le démarrage de l'expérimentation, est reconnu comme étant la cause de l'imprévisibilité du résultat d'une expérience aléatoire comme on peut le remarquer dans l'échange ci-dessous. (Annexe 7, Lignes 330 à 341).

Prof : Vous prenez la pièce de monnaie, vous lancez, c'est pile ou face on dit non ?

Élèves : Oui ; tête-franc.

Prof : Tête-franc ou pile-face. Euh, et vous êtes d'accord que le résultat est imprévisible.

Élèves : Oui

Prof : Pourquoi c'est imprévisible ? Je prends le dé, vous jouez au ludo, est-ce que c'est ce que vous voulez que vous obtenez ?

Élèves : Non.

Prof : Et pourquoi ?

Élève E₁₁ : Le hasard.

Prof : Pardon ?

Élève E₁₁ : Parce que c'est le hasard.

Après avoir défini la notion d'expérience aléatoire conformément à notre choix, celui du modèle didactique (MD), le professeur a amené les élèves à donner d'autres exemples d'expérience aléatoire.

2.1.2.3. Analyse de la phase 1.2 selon la méthodologie des quatre composantes

La phase 1.2 se décompose en trois épisodes caractérisés respectivement par le moment d'élaboration d'une technique et le moment d'évaluation (Chevallard, 1999).

2.1.2.3.1. Premier épisode (49'24'' à 52'33'')

Cet épisode de trois minutes neuf secondes correspondant au deuxième moment didactique, après le moment de première rencontre avec le type de tâches T₁ dans la phase 1.1, a servi à mettre en place les éléments du milieu de l'épisode suivant, en vue de l'élaboration d'une technique convenable. Le milieu de cet épisode est constitué des cauris présentés aux élèves et du discours du professeur. Le contrat didactique est constitué de la régulation et l'explication du professeur ainsi que de l'écoute attentive des élèves. Toutefois le professeur a quelque peu rompu le contrat en cherchant à indiquer aux élèves comment ils doivent procéder pour accomplir la tâche. La responsabilité est reprise du côté du professeur qui a présenté et distribué des cauris aux élèves pour l'accomplissement de leur tâche.

Nous notons dans cet épisode deux événements didactiques. Le premier, qui n'est pas problématique, qui survient à la fin de l'épisode et se manifeste par le rappel par un élève de la modalité de travail indiqué sur le support papier. En fait le professeur lançait le travail individuel qui n'était pourtant pas prévu dans l'organisation de la séance. (Annexe 7, Lignes 104 à 106).

Prof : De toutes les façons vous avez un travail individuel de 5 minutes...

E₁ : Monsieur. C'est en groupe qui est sur l'épreuve. Monsieur, monsieur, c'est en groupe qui est sur l'épreuve.

Prof : Oui. C'est en groupe.

Le deuxième événement est problématique et se caractérise par la volonté du professeur à indiquer aux élèves comment la tâche doit être accomplie. Ce faisant, le professeur n'a pas laissé les élèves prendre l'initiative de l'organisation de l'accomplissement de la tâche. (Annexe 7, Ligne 104).

Prof : D'accord. Donc je prends par exemple ce groupe, toi tu lances, peut être trois fois, tu notes tes réponses, lui il lance et ainsi de suite. Donc vous avez cinq minutes pour vous passer le cauri. Après maintenant vous allez collecter vos réponses. D'accord ?

La « problématique » de cet événement vient du fait que le professeur ne s'est pas contenté d'expliquer la consigne telle qu'écrite sur le support papier. Il va bien au-delà en demandant de collecter les résultats des lancers. Une telle collection est plus utile pour estimer les probabilités des événements élémentaires de l'expérience aléatoire consistant à lancer le cauri, plutôt qu'à prévoir le résultat de cette expérience aléatoire.

2.1.2.3.2. Deuxième épisode (52'33 à 1 :14'13)

Cet épisode d'une durée de vingt-et-une minutes quarante secondes correspond au deuxième moment didactique au sens de Chevallard, celui de l'exploration de la tâche et de l'élaboration d'une technique en vue de l'accomplissement de la tâche. Il comporte deux périodes correspondant respectivement aux modalités de travail en groupe et de travail collectif. Le milieu est celui préparé dans l'épisode précédent et qui est constitué d'un cauri physique que les élèves sont appelés à lancer pour prévoir le résultat d'un lancer quelconque du cauri. Le contrat didactique et l'évolution des topos se caractérisent par la responsabilité des élèves à accomplir la tâche dans leurs groupes respectifs et celle du professeur à les laisser travailler dans une phase adidactique et à réguler dans la période du travail collectif. Ce contrat a dû être renégocié pendant la période du travail en groupe par les élèves, qui ont sollicité le professeur pour une nouvelle explication de la consigne. (Annexe 7, Ligne 107).

Discussion dans le groupeG₄

Élève E₁₄ : S'il vous plaît monsieur. Je veux poser une question.

Prof : Oui.

Élève E₁₄ : Si je comprends bien, on va encore reprendre ?

Prof : Oui.

Élève E₁₁ : Et si on reprend, on argumente encore ?

Élève E₁₄ : Ou bien, on donne seulement les réponses.

Professeur s'adressant à toute la classe

Prof : Il y a deux de vos camarades qui ont demandé, lorsqu'on va lancer les cauris, est-ce qu'on va encore argumenter ; parce que les questions 1 et 2 demandent d'argumenter. Est-ce qu'on va encore argumenter ?

Un élève : Non, on avait déjà argumenté ; on peut confirmer.

Prof : Vous avez lancé. D'accord ? Ce que vous obtenez, ce qu'on vous demande par rapport à ce que vous avez fait expérimentalement, c'est répondre aux questions 1 et 2. C'est comme si vous décrivez ce que vous voyez. Donc votre argument, c'est ce que vous voyez. Si vous voulez, vous pouvez dire c'est (C) parce qu'on voit (C). Ça peut aller ? Votre argument, c'est ce que vous voyez. C'est tout.

Concernant les topos, les élèves sont restés dans leur rôle de rechercher de réponses aux questions et le professeur dans son rôle d'explication et de régulation. Les élèves sont restés en autonomie didactique pendant cinq minutes dix-huit seconde et ont efficacement répondu aux sollicitations du professeur pendant les seize minutes vingt-deux secondes qu'a duré le travail collectif, en vue de la conformité du rapport personnel des élèves au hasard à celui du hasard du tirage au sort.

Un événement problématique est survenu du côté du professeur qui est allé une fois encore au-delà de l'explication qu'il doit donner au sujet de l'argumentation des réponses des élèves lorsqu'il a été interpellé à cet effet par ces derniers. En fait, au lieu de se contenter de leur dire qu'ils doivent argumenter leurs réponses aux questions posées, il leur a précisé que leur argument est ce qu'ils auraient observé. Or il aurait fallu que pour argumenter leurs réponses, les élèves fassent référence à leur intuition après les observations des résultats des lancers réellement effectués. La conséquence de cet événement est l'hésitation qu'il y a eu au niveau des élèves dans la deuxième période de l'épisode à proposer des réponses pouvant rendre compte de leur rapport personnel au hasard. Il a fallu l'intervention du chercheur dans une posture d'enseignant pour clarifier la consigne ensemble avec le professeur avant que les élèves ne puisent dans leur intuition pour donner des réponses qui conviennent et investir les argumentations au niveau de leur topos.

Un deuxième événement de cet épisode est relatif à un élève, qui malgré toutes les explications, a des difficultés à faire évoluer son rapport personnel vers le hasard du tirage au sort. Cet élève soutient que le résultat du lancer serait (C) et ne semble pas accepter que ce résultat puisse être aussi (P). En réaction, le professeur a abandonné l'élève dans ce rapport non adéquat pour passer à l'institutionnalisation, laissant la deuxième question de la phase 1.2 sans réponse. (Annexe 7, Lignes 215 à 223)

Prof : Selon toi, quelle face pourrait-on obtenir ?

Élève E : La face (C).

Prof : La face (C). Il maintient sa position. Qui d'autre est, est sur sa position ?

Élève E₄ : Ici monsieur.

Prof : Oui

Élève E₄ : Si c'est ça, il n'a qu'à faire l'essai on va voir, si ce qu'il est en train de dire est vrai. Comme il dit que c'est (C) qu'il va obtenir, il n'a qu'à refaire ça. Là il va voir ce qu'on est en train de dire.

Prof : Est-ce qu'il y a quelqu'un qui est sur sa position quoi ?

La classe : Non

Prof : Bien assied-toi. Bon, je suppose peut-être qu'il n'a pas perçu ce qu'on est en train de dire. Mais c'est toujours bien d'avoir des divergences d'opinion. Maintenant, la question que je vais vous poser est : lorsqu'on lance le cauri, d'accord ? La majorité a dit, qu'on peut obtenir soit (P), soit (C). Selon vous, pourquoi ?

Convaincu de ce que le résultat est imprévisible, l'élève E₄ invite l'élève E à refaire l'expérience pour se rendre compte de l'imprévisibilité du résultat. Mais le professeur a préféré ne plus s'occuper de cet élève pour la double raison qu'il est seul à conserver ce rapport personnel et que les divergences sont normales. Se muant en enseignant, le chercheur est intervenu pour essayer un dernier éclairage et pour recueillir les réponses des élèves à la deuxième question. (Annexe 7, Lignes 228 à 245).

Chercheur : Puisqu'on dit, qu'est-ce qu'il obtiendrait. On est dans le conditionnel, c'est-à-dire il n'a pas lancé. Si vous n'avez pas lancé et que vous voulez lancer. Sans avoir lancé, qu'est-ce vous pensez qu'on pouvait avoir si on avait lancé. C'est ça la question.

Élève E : On ne peut se prononcer sur le résultat obtenu.

Chercheur : Oui ; alors ça veut dire quoi ?

Élève : Ça peut être probablement (P), probablement (C).

Chercheur : Maintenant, vous avez lancé trois fois et vous avez trouvé CCC pour les trois fois. Vous voulez lancer la quatrième fois. Quel résultat peut-on obtenir ? C'est la deuxième question ça hein !

Élève E₄ : Soit on peut obtenir (C), soit on peut obtenir (P).

Chercheur : Il dit qu'on peut obtenir soit (C), soit (P). C'est votre avis aussi.

Élèves : Oui.

Il est à souhaiter que cette intervention du chercheur puisse permettre à l'élève abandonné et à d'autres de faire évoluer leur rapport au hasard du tirage au sort.

2.1.2.3.3. Troisième épisode (1 :14'13 à 1 :26'52)

Le troisième épisode de la phase 1.2 correspond au moment didactique de l'institutionnalisation. Le professeur assisté du chercheur transformé par moment en enseignant ont, par des questionnements de type maïeutique, amené les élèves à donner la cause de l'imprévisibilité du résultat du lancer d'une part et à donner la définition de l'expérience aléatoire d'autre part. Le milieu naturel antagoniste des élèves est réduit aux discours du professeur et du chercheur compte tenu de la méthode de questionnement utilisée pour parvenir au but de la phase. En dehors de l'écoute attentive des élèves et de leur curiosité à découvrir les notions qui se cachent derrière les questions que pose le professeur, le contrat didactique s'est surtout manifesté par la volonté du professeur de laisser les élèves identifier le hasard comme la cause de l'imprévisibilité du résultat d'un lancer. Concernant les topos, celui du professeur est remarquable par sa responsabilité de donner la définition d'une expérience aléatoire. Les douze minutes trente-neuf secondes qu'a duré l'épisode ont été concomitamment occupées par le professeur et les élèves.

Un événement heureux est à signaler dans cet épisode. Il s'agit d'une tentative d'explication du hasard du tirage au sort par le chercheur aux élèves. Dans cette explication, le chercheur a fait remarquer que lorsqu'on triche dans un jeu de hasard, on ne saurait parler de résultats issus du hasard. L'échange ci-dessous montre comment le chercheur explique aux élèves la manière dont il faut lancer un dé pour que le résultat soit imprévisible. (Annexe 7, Lignes 351 à 354).

Chercheur : Ou bien quand vous voulez voler dans les jeux de ludo et vous déposez le dé,

Élève E₁ : On dépose ça sèè¹⁸

Chercheur : Et on fait sèè. Est-ce que c'est le hasard ? Est-ce que c'est lancer au hasard ça ?

Élèves : Non.

Cet exemple donné par le chercheur semble être bien compris par les élèves qui ont su placer le mot qu'il faut pour exprimer son intention.

2.1.3. Analyse de la phase 1.3 de la situation n°1

La deuxième séance consacrée à la situation n°1 a permis de réaliser la phase 1.3 de cette situation dont l'objectif est l'étude de la notion d'événement.

¹⁸Sèè signifie « doucement » en langue Goun parlée à Porto-Novo et ses environs.

2.1.3.1. Trame de la deuxième séance

La trame de la deuxième séance comporte les huit moments ci-dessous énumérés (Annexe 8).

- 1) Un premier moment collectif d'une durée de 4'40 (00:00 :49 à 00:05:29) : Salutation et rappel de ce qui avait été fait dans la matinée.
- 2) Un deuxième moment collectif d'une durée de 12'03 (00:05:30 à 00:17:33) : Institutionnalisation des notions d'éventualités et d'univers.
- 3) Un troisième moment collectif d'une durée de 27'57 (00:17:34 à 00:45:31) : Exemples d'éventualités et d'univers donnés par les élèves.
- 4) Un quatrième moment collectif d'une durée de 2'49 (00:45:31 à 00:48:20) : Lancement de la phase 1.3 de la situation 1 consacrée aux questions Q₃ et Q₄.
- 5) Un premier moment de travail en groupe d'une durée de 10'06 (00:48:21 à 00:58:27) : Temps de travail en groupe pour répondre aux consignes de la phase 1.3.
- 6) Un cinquième moment collectif d'une durée de 37'31 (00:58:28 à 01:35:59) : temps de travail collectif de la phase 1.3
- 7) Un sixième moment collectif d'une durée de 19'12 (01:36:00 à 01:55:12) : Institutionnalisation de la notion d'événement ainsi que de sa typologie.
- 8) Un premier moment individuel d'une durée de 20'43 (01:55:12 à 02:15:55) : Prise de notes par les élèves.

2.1.3.2. Organisation mathématique de la phase 1.3

Au cours de la séance, la phase 1.3 a été réellement lancée après une phase de rappel portant notamment sur les notions d'expérience aléatoire et d'univers des éventualités d'une expérience aléatoire. Cette partie relative au rappel sera analysée dans l'organisation didactique et seule la partie relative à la phase 1.3 fera l'objet d'une analyse praxéologique dans les lignes qui suivent.

a) Type de tâches de la phase 1.3

Le type de tâches de la troisième et dernière phase de la situation n°1 est T₁₋₂ : « déterminer les éventualités d'un événement ». Les deux tâches annoncées dans l'analyse a priori (Chap. VI, 3.1.3.) et qui relèvent de ce type de tâches, à savoir les questions Q₃ et Q₄, sont relatives à la détermination des éventualités composant respectivement l'univers et trois événements bien précis.

b) Techniques relevant du type de tâches T₂

Sur les quatre techniques pouvant relever du type de tâches T₂, identifiées dans l'organisation mathématique visée (Chap. VI, 3.1.3.3), seule la technique $\tau_{2.1}$ que nous avons nommée

« Produit cartésien » et qui est basée sur l'intuition est développée par l'ensemble des élèves. Elle a consisté à :

- identifier l'expérience aléatoire ;
- identifier l'événement ;
- énumérer tous les résultats possibles de l'événement.

La notion d'expérience aléatoire institutionnalisée au début de la séance est l'élément technologique visé et qui justifie, à ce stade, le type de tâches T₂. Nous repérerons dans la suite si les élèves y font référence, plus ou moins explicitement.

c) Les réponses proposées par les élèves aux questions Q₃ et Q₄

La technique utilisée par les élèves a conduit à un même type de réponses pour chacune des deux questions de la phase. Concernant la question Q₃ relative à la détermination de toutes les éventualités de l'expérience aléatoire « lancer quatre fois de suite le cauri », aucun des cinq groupes n'a pu énumérer les seize résultats possibles. Ceci pourrait s'expliquer par le fait que les élèves n'avaient pas explicitement étudié les listes d'éléments d'un ensemble donné et certains ensembles relativement aux modèles prévus dans l'analyse a priori. Cependant, les résultats obtenus par les groupes n°2 et n°5 montrent que les élèves ont une certaine connaissance des listes, car certains trouvent à juste titre que les résultats PCPC et CPCP sont différents. Le groupe n°1 par contre a ignoré l'ordre dans l'obtention de ses résultats en listant les résultats possibles suivants : CCCC, CPPP, PPCC, PPPP, CCCP. Pour la question Q₄ relative à la détermination des éventualités d'événements, bien que les éventualités proposées par les élèves aient gardé leur nature de 4-liste d'éléments de l'ensemble {C, P}, aucun des groupes n'a pu énumérer toutes les éventualités des trois événements indiqués. Les résultats possibles proposés par le groupe G₁ au niveau de la question Q₄ ne sont pas conformes à ceux de l'expérience aléatoire donnée.

Il est à signaler que pendant le temps de travail collectif, la technique « arbre de choix », qui consiste à réaliser un arbre de choix pour déterminer toutes les éventualités, a été utilisée par le professeur pour permettre aux élèves de s'assurer que toutes les éventualités de l'univers sont énumérées. Les éventualités des événements en étude sont alors facilement choisies parmi les éventualités composant l'univers de l'expérience aléatoire.

En somme, la réalisation en classe de la troisième phase de la première situation a révélé la présence au niveau des élèves de la technique « Produit Cartésien », qui n'a cependant pas permis l'énumération de toutes les éventualités de l'expérience aléatoire. La technique « Arbre

de choix » a constitué un apport du professeur pour vérifier que toutes les éventualités de l'univers sont listées. Les deux autres techniques basées sur l'utilisation des tableaux pour la détermination des éventualités n'ont été évoquées ni par les élèves, ni par le professeur. Ce dernier a l'assurance que les élèves disposent de ce qu'il faut pour aborder l'institutionnalisation de la notion d'événement.

2.1.3.3. Analyse de la phase 1.3 selon la méthodologie des 4 composantes

À partir de la trame de la deuxième séance portant sur la phase 1.3 de la situation n°1, nous avons décomposé la réalisation en classe de cette phase en sept épisodes d'une durée totale de 2h 25min 1s.

2.1.3.3.1. Premier épisode (00 :00 :49 à 00 :05 :29)

Le premier épisode de la séance correspond au moment didactique de l'évaluation de la notion étudiée à la fin de la première séance, notamment la notion d'expérience aléatoire. Dans une situation de rappel, le professeur, dans un temps de travail collectif, a amené les élèves à faire le point de ce qui avait été étudié au cours de la réalisation de la deuxième phase de la situation n°1. Sans hésiter les élèves ont indiqué qu'ils ont une première rencontre avec la notion de hasard et ont défini la notion d'expérience aléatoire (Annexe 8, Lignes 9 à 12).

Prof : Alors, qui va nous rappeler un peu ce qu'on a vu. Le peu de temps qu'on avait passé ensemble, ce qu'on a vu, qui est-ce qui va nous dire ça. Ou bien au moins ce de quoi on a parlé. Oui, Pacôme.

Élève E₁₄ : Ce matin, on a parlé du hasard et on a essayé de définir ce que c'est qu'une expérience aléatoire.

Prof : On a parlé du hasard et on a on a essayé de définir ce que c'est qu'une expérience aléatoire. C'est quoi une expérience aléatoire. Quelle est la définition qu'on a donnée de ça.

E₁₄ : C'est une expérience dont on ne peut pas prévoir le résultat mais dont on connaît les résultats possibles.

Des exemples d'expériences aléatoires, donnés dans la séance précédente ont été aussi rappelés mais en insistant plus sur leurs résultats possibles, sur lesquels le professeur a l'intention de s'appuyer pour compléter le vocabulaire des probabilités dans l'épisode suivant. Dans le premier épisode ci-dessus décrit en termes de moment didactique, le milieu est réduit au discours du professeur par l'intermédiaire des questions qu'il pose, le contrat didactique est donné par la rétention et la restitution de la définition de l'expérience aléatoire et son approfondissement à travers les exemples donnés. Les topos sont caractérisés par la

participation active des élèves à travers les échanges avec le professeur sur les quatre minutes quarante secondes qu'a duré l'épisode avec une intervention franche de trente-cinq seconde de la part des élèves (Annexe 8, Ligne 17).

Le premier épisode est marqué par un événement problématique qui est très vite passé inaperçu. Il s'agit d'une caractérisation erronée de l'expérience aléatoire par le professeur. En fait, par deux fois, le professeur a manqué d'attention en précisant dans les exemples étudiés qu'on ne peut pas connaître le résultat d'une expérience aléatoire mais qu'on peut prévoir les résultats possibles. Il permute ici les mots connaître et prévoir, changeant ainsi le sens de la notion d'expérience aléatoire.

J'en reviens à mon lancer de cauri qui est une expérience aléatoire. On avait dit, lorsqu'on lance le cauri, on ne peut pas savoir la face qui va sortir ; ça peut être (P), ça peut être (C). Mais au moins on sait que c'est entre (P) et (C), soit ça donne (P), soit ça donne (C). Toutes ces expériences-là, on les a appelées des expériences aléatoires, parce que le résultat est dû au hasard, on ne connaît pas le résultat mais au moins on peut prévoir les résultats possibles.

Bien que problématique, cet événement apparaît comme un épiphénomène, qui restera sans inconvénient sur l'apprentissage, car le professeur est revenu plus tard et plusieurs fois sur la définition correcte bien maîtrisée des élèves.

2.1.3.3.2. Deuxième épisode (00 :05 :30 à 00 :17 :33)

Les exemples étudiés dans l'épisode précédent constituent le terreau pour faire émerger d'autres concepts du langage des probabilités dans ce deuxième épisode, qui correspond au moment didactique de l'institutionnalisation. En fait les résultats possibles énumérés pour chacun des trois exemples d'expérience aléatoire sont présentés comme étant les éventualités de ces expériences aléatoires. La liaison est ainsi bien trouvée pour noter au tableau et pour faire noter les élèves dans leur cahier les définitions d'éventualité et d'univers des éventualités d'une expérience aléatoire. Dans cet épisode, le milieu de l'élève reste réduit aux discours du professeur, tandis que le contrat didactique est l'appropriation et la rétention des notions étudiées. L'élève est resté dans le rôle d'écoute et le professeur dans celui d'explication. Une bonne partie du temps est consacrée par le professeur à écrire au tableau les définitions d'expérience aléatoire, d'éventualité et d'univers et à les faire noter par les élèves.

Deux événements importants sont à remarquer dans cet épisode. Le premier est relatif à un élève, qui en prenant note, a remarqué que le professeur a écrit « expérience » au lieu de « expérience aléatoire » et a réclamé la correction. Cette intervention est la preuve que des

élèves suivent bien l'enseignement du professeur. Evidemment certains élèves respectant un certain contrat didactique avaient déjà noté l'expression incomplète dans leur cahier comme le montre la conversation ci-après (Annexe, Lignes 38 à 40).

Élève E₁₄ : S'il vous plaît monsieur. Vous avez écrit tout résultat possible d'une expérience, on va ajouter aléatoire ?

Prof : Aléatoire oui. Ajoutez aléatoire. Tout résultat possible d'une expérience aléatoire.

Élève E₄ : Et nous qui avons déjà écrit ?

Le deuxième événement vient corriger l'erreur faite par le professeur par rapport à la définition de l'expérience aléatoire dans le premier épisode. Sans se rendre compte qu'il avait précédemment permuté les verbes prévoir et connaître, le professeur est naturellement revenu sur la définition de l'expérience aléatoire, qu'il avait notée au tableau (Annexe 8, Ligne 43).

Prof : Je vais encore vous lire ce qui est au tableau. Définition : On appelle expérience aléatoire une expérience dont on ne peut pas prévoir avec certitude le résultat mais dont on connaît tous les résultats possibles.

Il est donc clair que l'erreur faite précédemment ne résulte que du fait que le professeur, emporté par ses explications, n'avait pas pu contrôler son langage.

Le deuxième épisode tel que décrit est centré sur l'institutionnalisation de deux nouvelles notions et est marqué par deux événements heureux, l'un pour compléter une définition et l'autre pour corriger une erreur d'inattention du professeur.

2.1.3.3.3. Troisième épisode (00 :17 :34 à 00 :45 :31)

Les notions d'éventualité et d'univers qui ont précédemment fait l'objet d'institutionnalisation sont évaluées dans le troisième épisode, qui correspond ainsi au moment didactique de l'évaluation. En effet, comme dans le premier épisode, le professeur, dans un temps de travail collectif, a demandé aux élèves de préciser les éventualités et l'univers de chacune des trois expériences aléatoires jusque-là évoquées dans l'étude, à savoir : le lancer de cauri, le lancer de pièce de monnaie et le lancer de dé.

Le milieu est resté invariable et se constitue des questions posées par le professeur pour susciter l'intervention des élèves sur les expériences aléatoires évoquées. L'exploitation par les élèves des définitions données pour identifier les éventualités en vue de constituer l'univers de chaque expérience aléatoire constitue le contrat didactique. Plus spécifiquement la notation d'une éventualité et celle de l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire sont les éléments autour desquels des discussions ont eu lieu. Le déroulement de cet épisode de vingt-

huit minutes est partagé dans un dialogue entre le professeur et les élèves. Concernant les topos, le professeur pose des questions et apporte régulièrement des clarifications, tandis que les élèves, répondant aux questions du professeur, expriment leurs points de vue par rapports aux notions en étude.

Dans cet épisode, deux événements majeurs heureux ont donné l'occasion au professeur, d'une part de mettre l'accent sur l'écriture en extension de l'univers, et d'autre part de faire la différence entre une éventualité et un événement élémentaire. Le premier événement est parti de l'élève E_{10} qui, en application de la définition de l'univers, a précisé que l'univers de l'expérience aléatoire « le lancer d'un dé » est l'intervalle fermé $[1 ; 6]$.

Les résultats possibles sont répartis comme suit : 1, 2, 3, 4, 5 jusqu'à 6. Mais on a dit que tout résultat possible d'une expérience aléatoire est encore appelé éventualité. Donc les résultats possibles 1, 2, 3, 4, jusqu'à 6 sont appelés éventualités. Maintenant on a dit que l'ensemble des éventualités 1, 2, 3, 4, 5, 6 est l'univers des éventualités. De 1 jusqu'à 6, l'intervalle fermé de 1 à 6 est l'ensemble des éventualités de l'expérience aléatoire. D'où c'est l'univers des éventualités (Annexe 8, Ligne 68).

Cette intervention a suscité une première discussion sur la notation d'une éventualité e_i . Les élèves ont fait les trois propositions suivantes : e_i , (e_i) et $\{e_i\}$. Très vite, ils sont venus dans un premier temps à la conclusion qu'il n'y a pas de différence entre e_i et (e_i) et qu'ainsi l'une de ces écritures peut valablement désignée l'éventualité e_i . Ensuite ils ont fait le choix implicite de la notation e_i comme peut le confirmer la conclusion ci-après (Annexe 8, Lignes 150 à 155).

Prof : Vous voyez la différence ? Le résultat possible, ce n'est pas l'ensemble. Ça c'est l'ensemble contenant ce résultat possible. Ça c'est un résultat possible. Un résultat possible est 1, un résultat possible est 2, un résultat possible est 3 et ainsi de suite. Je vous repose la question. Donnez-moi un exemple d'éventualité de cette expérience aléatoire.

Élève E_8 : Six.

Prof : Six, le six comment ? Ensemble ou on écrit simplement ?

Élève E_8 : Six simple.

Prof : Six simple. Tout le monde est d'accord hein.

Élèves : Oui.

La deuxième discussion que l'intervention de l'élève E_{10} a suscitée, a tourné autour de l'écriture en extension de l'univers de l'expérience aléatoire « lancer un dé cubique ». Le professeur a pu amener les élèves à trancher entre $[1 ; 6]$ proposé par l'élève E_{10} et l'ensemble

{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6} comme on peut s'en rendre compte dans la conversation ci-après (Annexe 8, Lignes 158 à 174).

Prof : On écrit séparément sans accolade 1, comme ça, 2, 3, 4, 5 et 6. Chacun de ces nombres représente un résultat possible, donc une éventualité. On dit que l'ensemble des éventualités d'une expérience aléatoire est appelé univers des éventualités de cette expérience aléatoire. L'univers sera alors quoi ?

Élève E₁₇ : Avec accolade.

Élève E₁₀ : L'univers sera l'intervalle de 1 jusqu'à 6.

Prof : L'intervalle de 1 jusqu'à 6. Ok. Autre Réponse ? Oui Pacôme.

Élève E₁₄ : Si on veut, on peut encore les mettre dans l'accolade.

Prof : Si on veut, on peut encore les mettre entre accolade. Donc les deux résultats sont acceptés ?

Élèves : oui.

Prof : Selon vous est ce qu'on peut trouver 1,5 dans l'intervalle ? Oui Toyibou.

Élève E₄ : Moi je préfère qu'on mette accolade.

Prof : Toi, tu préfères qu'on mette accolade. Ma question à moi est : est-ce que les deux sont les mêmes ?

Élèves : Non.

Prof : Pourquoi les deux ne sont pas les mêmes ? Oui Sergéo.

Élève E₁₆ : Parce que dans l'intervalle fermé 1 à 6, il y a 1,2 dedans, 1,3 jusqu'à 6. Mais dans l'accolade il n'y a pas 1,2 dedans.

Cette clarification a mis fin à l'embarras suscité par l'élève E₁₀ à travers son intervention événementielle. Les éventualités des deux autres expériences aléatoires à l'étude ainsi que leurs univers ont été par la suite donnés et présentés conformément au contrat didactique relatif à ces notions.

2.1.3.3.4. Quatrième épisode (00 :45 :31 à 00 :48 :27)

Après la situation de rappel qui a débouché sur une institutionnalisation de nouvelles notions et sur l'évaluation de ces dernières, le professeur a lancé, dans le quatrième épisode, le déroulement de la troisième phase de la première situation de l'ingénierie en expérimentation. Ce quatrième épisode correspond au moment de la première rencontre avec le type de tâches « déterminer les éventualités d'un événement » dont relèvent les questions Q₃ et Q₄. La lecture de la consigne par les élèves et son explication par le professeur constituent les actes essentiels qui ont permis aux élèves de prendre connaissance de la tâche à accomplir. La dévolution de la tâche aux élèves est l'acte qui a mis fin à cet épisode.

En l'absence d'une situation effective d'action, le milieu de l'élève est réduit au discours du professeur, qui lui-même est resté dans un rôle d'explication pendant que son interlocuteur, l'élève, s'est contenté de l'écoute attentive. Le temps de cet épisode d'à peine trois minutes est composé d'environ deux minutes d'explication de la consigne par le professeur et de quarante minutes environ d'intervention réduite à la lecture de la consigne. Aucun événement n'est à noter dans ce quatrième épisode.

2.1.3.3.5. Cinquième épisode (00 :48 :28 à 00 :58 :27)

Le cinquième épisode plonge l'élève dans une situation adidactique correspondant au deuxième moment didactique, caractérisé par l'exploration du type de tâches et l'élaboration d'une technique. La technique exploitée ici par les élèves sans succès est celle que nous avons nommée « Produit cartésien ». Bien qu'il ait été mis un cauri à la disposition des élèves à la fin du quatrième épisode, seul le support de travail comportant l'énoncé de la consigne, constitue le milieu antagoniste de l'élève. En effet, devant la possibilité qui leur est donnée de lancer le cauri s'ils le souhaitent, les élèves ont préféré se passer du cauri pour répondre aux questions à eux soumises. Le contrat didactique est caractérisé par l'attente du professeur à avoir des élèves des réponses dont il se servira plus tard pour mettre en place le savoir enjeu qu'est la notion d'événement. Du côté des élèves, dans leur ignorance de la notion à étudier, ils remplissent leur contrat de travailler à trouver de réponses aux consignes données. La dizaine de minutes de cet épisode, exclusivement réservé au travail en groupe est quelque peu écourté par l'intervention du professeur pour la clarification de la consigne, suite à la demande d'un groupe d'élèves. Les élèves ont assumé leur responsabilité de résolution de problème pendant que le professeur est resté dans un rôle d'observation des élèves en silence. Interpellé par un geste de certains élèves à propos de la clarification de la consigne, le professeur a dû interrompre les élèves pour se livrer à l'exercice d'explication.

La sollicitation du professeur par les élèves d'un groupe pour une explication de l'une des consignes constitue bien un événement qui pourrait perturber quelque peu le temps de travail en groupe de certains, ainsi qu'il aurait permis à d'autres de s'engager réellement dans la deuxième question de la phase. Le professeur a d'abord clarifié la question dans le groupe où il est sollicité (Annexe 8, Ligne 208).

Élève E₁₀ : S'il vous plaît monsieur. Est-ce que vous pouvez nous expliquer ça, on n'a pas bien compris.

Prof : C'est qu'on veut les résultats que vous avez écrits. D'accord ? Dedans, qu'on voit qu'il y a deux faces (P). [Dans ces résultats, il faut qu'on ait deux fois (P)]

Élève E₉ : Donc il faut qu'on ait deux faces (P) dans le résultat.

Ayant pensé que d'autres élèves pourraient avoir la même préoccupation que les élèves du groupe de l'élève E₁₀, le professeur s'est résolu à partager avec toute la classe l'explication à laquelle le groupe a eu droit (Annexe 8, Lignes 209 à 211).

Prof : Pour la deuxième question, il y en a qui n'ont pas bien compris. Ce qu'on veut de vous, c'est qu'on a dit d'écrire les résultats possibles que Dansou pourrait avoir dans le cas où il obtient deux fois la face (P). Dansou a lancé le cauri quatre fois bien sûr. D'accord ? Et il a noté les résultats possibles. Maintenant dans ses résultats, ceux dans lesquels on voit que Dansou a obtenu deux fois la face (P). Ça suit ?

Elèves : Oui.

Prof : Deuxième cas, ceux dans lesquels, on a vu qu'il a obtenu au moins deux fois la face (P) et pour le dernier cas, ceux dans lesquels Dansou a obtenu au plus une fois la face (P).

Donc vous listez les résultats. C'est ce qu'on veut.

Les effets de cette clarification du professeur sont attendus dans le temps de travail collectif pendant lequel les différents résultats de chaque groupe sont prévus pour être exposés à l'ensemble de la classe.

2.1.3.3.6. Sixième épisode (00 :58 :29 à 01 :35 :59)

D'une durée de trente-sept minutes, le sixième épisode a la fonction du troisième moment didactique, c'est-à-dire celui de la constitution de l'environnement technologico-théorique relatif au type de tâches T₁₋₂ présenté dans le quatrième épisode de cette troisième phase en cours d'étude. La présentation des résultats de l'un des groupes a permis de constater que les élèves ont exploité sans succès la technique « Produit cartésien » pour accomplir les tâches qui leur sont assignées. Cette technique est renforcée dans le temps du travail collectif pour aboutir aux résultats attendus avant d'être complétée par la technique « Arbre de choix » sous la conduite du professeur, faisant ainsi avancer le temps didactique. Les ensembles d'éventualités déterminés serviront dans le septième et dernier épisode de la phase, à mettre en place les éléments technologiques relatifs à la notion d'événement, qui est l'objet d'étude de cette dernière phase de la situation n°1.

Dans ce sixième épisode, de temps de travail collectif, le milieu antagoniste de l'élève est ordinairement limité aux discours du professeur. Le contrat didactique se manifeste du côté de l'élève par sa curiosité à situer sa production par rapport aux résultats attendus par le professeur et par sa participation au débat scientifique en vue de la constitution des éléments de réponse des consignes. La direction du débat par le professeur et la disponibilité de ce dernier à

compléter au besoin les connaissances des élèves sont les manifestations du contrat didactique. Dans ce cadre, les listes d'éléments d'un ensemble fini ont fait l'objet d'une étude implicite dans une situation non didactique. Le temps didactique est simultanément exploité par les acteurs de la classe à travers une discussion à laquelle les élèves ont participé activement.

Quatre événements heureux ont marqué le sixième épisode. Le premier est relatif à la méconnaissance d'une liste d'éléments d'un ensemble fini par certains élèves. En effet, en réaction à la production du groupe n°5 relative à la détermination des éventualités de l'expérience aléatoire « lancer quatre fois de suite un cauri », l'élève E₂ du groupe n°1 s'est étonné que PCPC et CPCP soient considérés comme des résultats possibles différents par ses camarades (Annexe 8, Lignes 222 à 225).

Prof : Bon ! Voilà ce que le groupe n°5 a proposé. Vos réactions par rapport à la première question qui dit d'écrire tous les résultats possibles que Dansou pourrait avoir lorsqu'il lance 4 fois de suite le cauri. Oui Camir.

Élève E₂ : En première position ce que moi j'aimerais souligner, c'est qu'il a écrit PCPC et il a écrit CPCP. C'est encore les mêmes choses.

Prof : Il a écrit PCPC et il a écrit PCPC. C'est encore les mêmes choses. Pourquoi toi, tu dis que c'est encore les mêmes choses ?

Élève E₂ : Je crois que c'est deux P et deux C dans les deux cas.

La réaction de l'élève E₂ confirme bien la position du groupe n°1, dont il est membre, par rapport aux résultats possibles proposés au niveau de la question Q₃ et qui représentent des événements non élémentaires. À partir des expériences aléatoires « lancer deux fois un dé cubique » et « lancer deux fois une pièce de monnaie », le professeur a pris une dizaine de minutes pour faire comprendre aux élèves la différence qu'on devrait faire entre les couples (6,2) et (2, 6). Il s'est fait comprendre par les élèves comme on peut le constater avec l'élève E₁ du groupe n°1 dans l'intervention suivante : « *D'après ce que vous venez de dire, on peut aussi avoir PPCC, CCPP* ». C'est alors que les élèves ont pu lister une à une toutes les éventualités.

Le dénouement de cet événement heureux qui a conduit à l'étude non programmé d'un objet dont l'habitat est le dénombrement, inscrit dans les programmes des classes de premières des séries C et D, a suscité un deuxième événement d'origine sociale. Il constitue une avancée du temps didactique. En voulant amener ses élèves à comprendre que les couples (2, 6) et (6, 2) sont différents, à partir de l'exemple de l'expérience aléatoire « lancer deux fois de suite un dé cubique », le professeur a été confronté à une argumentation issue de la pratique d'un jeu de

société. En effet, par rapport à cet exemple, un élève a estimé qu'on ne peut pas obtenir le résultat (2, 6), faisant ainsi allusion à un jeu de ludo dans lequel on n'est autorisé à lancer le dé une deuxième fois que lorsqu'on a obtenu 6. Le professeur a dû lui repréciser l'expérience aléatoire (Annexe 8, Lignes 228 à 233).

Prof : Supposons qu'on doit jouer deux fois. On va jouer deux fois et c'est quand on va obtenir deux fois 6, qu'on va jouer une troisième fois. Arrêtons-nous aux deux. Celui qui joue et obtient peut-être 6 et rejoue et après il obtient 2. Celui qui joue et obtient 2 et après il obtient 6. Selon vous, ça serait le même résultat ?

Elèves : Non.

Prof : Pourquoi ce n'est pas le même résultat ? Qui a dit que ce n'est pas le même résultat ? Pourquoi ?

Élève E₁₄ : Normalement quand il obtient 2, il ne va pas rejouer.

Prof : Non tu n'as pas bien compris. Il joue normalement deux fois. C'est quand il trouve deux 6, ce qu'on appelle double- là, qu'il joue une troisième fois. On reste dans les deux cas de départ. Lorsqu'il joue et qu'il obtient 6 d'abord et obtient 2 après. Celui qui joue et obtient d'abord 2 et ensuite 6. Est-ce que c'est le même résultat ?

Elèves : Oui.

Un troisième événement survient suite à la clarification de l'expérience aléatoire en jeu. En effet, voulant justifier cette fois-ci que les résultats (6, 2) et (2, 6) sont les mêmes (ce qui n'est pas vrai), l'élève E₁₀ fait encore référence au même jeu de société, le jeu de ludo, pour s'appuyer sur la somme des chiffres des résultats. Selon lui les deux résultats sont les mêmes puisque chacun de ces résultats a pour conséquence le déplacement du pion du jeu sur une même longueur (Annexe 8, Lignes 234 à 239).

Élève E₁₀ : Parce que s'ils veulent, le jeu consiste à pousser les pions.

Prof : Non. Là tu veux entrer déjà dans comment on joue le jeu. Nous, on parle juste des résultats qu'on obtient, c'est-à-dire des éventualités.

Élève E₁₀ : Donc ça fait que la somme va donner le même nombre.

Prof : Est-ce qu'on a dit qu'on veut faire la somme ?

Elèves : Non.

Prof : Restez juste dans le cas mathématique, c'est-à-dire d'expérience aléatoire, des éventualités.

C'est le déroulement de cette situation, qui a conduit à la résolution du problème initialement posé par l'élève E₂ et qui a permis au groupe classe de compléter les résultats du

groupe G₅ pour obtenir les seize éventualités de l'expérience aléatoire initiale définie de la consigne en cours de résolution.

Un quatrième événement, aussi heureux que les trois premiers, vient de la volonté du professeur de montrer aux élèves une technique qu'il a jugée plus rassurante. Il s'agit de la technique « Arbre de choix » dont nous avons parlé plus haut. Le professeur a trouvé une bonne occasion pour faire la première rencontre des élèves avec l'arbre de choix, qui sera déterminant plus tard dans la résolution des exercices de probabilités à partir du premier principe de Laplace. En huit minutes, le professeur a réalisé l'arbre de choix avec la participation effective des élèves.

Bon je vous apprend comment on peut être sûr du résultat. [...] Suivez très bien. Je pars d'un lieu. J'ai un cauri que je lance, je peux obtenir C ou bien P. La première fois, j'ai alors deux possibilités : soit C, soit P.

Cet apprentissage commencé de l'arbre de choix a permis au professeur de déterminer ensemble avec les élèves tous les résultats possibles de l'expérience aléatoire. Ce n'est qu'après avoir fini de réaliser l'arbre de choix que le professeur donne le nom de cet outil de dénombrement en déclarant : « *Et ceci, on appelle ça, arbre de choix, l'arbre de choix* ».

En somme, le sixième épisode a permis la mise en place des deux techniques exploitées pour trouver les éventualités de l'expérience aléatoire en jeu. Le contrat didactique est caractérisé chez l'élève par l'achèvement de la tâche exécutée sans succès dans le cinquième épisode, et chez le professeur par le transfert à l'élève des connaissances relatives aux listes d'éléments d'un ensemble fini non vide. Favorisé par quatre événements heureux, le temps didactique est exploité aux fins de remplir le contrat didactique. Deux des quatre événements sont des sources d'obstacles didactiques d'ordre culturel, que le professeur a su surmonter.

2.1.3.3.7. Septième épisode (01 :36 :00 à 02 :15 :55)

Constitué d'un temps de travail collectif et d'un autre de travail individuel, le septième épisode de la phase 1.3 de la situation n°1 correspond à un moment d'institutionnalisation de la notion d'événement et des différents types d'événements. Le milieu de l'élève est une fois encore réduit aux dires du professeur, qui régule en vue de la mise en place des notions visées par l'enseignement. Face au professeur, l'élève suit attentivement celui-ci en répondant à ses questions. Ainsi l'élève est dans rôle de suivre le professeur jusqu'à ce que ce dernier atteigne son objectif. Une partie du temps est exploitée pour étudier la notion d'événement et pour distinguer les types d'événements, à savoir, l'événement impossible, l'événement certain, les événements élémentaires, les événements compatibles et les événements contraires. Le temps

didactique a ainsi connu une évolution remarquable par l'institutionnalisation de ces notions. L'autre partie du temps a servi aux élèves à prendre note dans leurs cahiers de cours.

Le premier événement de cet épisode est relatif à la réponse suivante que l'élève E_{10a} donné à une question du professeur : « Je constate que les éléments de l'ensemble A sont contenus, sont inclus dans l'ensemble Oméga ». Avec le refus du terme « contenus » par le professeur, l'élève a immédiatement proposé une correction : « les éléments de A appartiennent à l'ensemble Oméga ». Le deuxième événement fait suite à une longue explication du professeur d'une question qu'il adresse aux élèves. Convaincu qu'il n'est pas suivi, le professeur a voulu savoir si les élèves suivent. C'est alors qu'il a eu la confirmation que son long discours n'a pas eu l'effet qu'il aurait voulu, car les élèves lui ont rétorqué « Non, ce n'est pas assez clair ». Un troisième événement fait suite au deuxième. Une fois comprise la question du professeur invitant les élèves à donner un exemple d'événement, l'élève E₁₁ donne l'exemple suivant « Dansou obtient trois fois la face P », que le professeur n'a pas accepté, non pas parce que l'exemple donné n'est pas celui d'un événement, mais parce qu'il n'est pas un exemple attendu par le professeur. En fait, le professeur espérait un exemple qui puisse lui permettre d'enseigner un type donné d'événements, que l'élève E₂ lui a immédiatement fourni (Annexe 8, Lignes 571 à 576).

Élève E₁₁ : Il obtient trois fois la face P.

Prof : Trois fois la face P. Déjà non ! C'est-à-dire que si on va dire trois fois la face P, on ne va regarder que ce qui est ici.

Élève E₂ : Evènement 0 fois la face P.

Prof : Zéro fois la face P. Einhein ! Qui va donner quel ensemble ?

Élève E₂ : On a l'ensemble {CCCC}.

Prof : CCCC. C'est fini ? Ça m'intéresse : zéro fois la face P. Ce n'est pas que j'ai refusé la réponse de Landry hein. J'ai vu que c'est un peu déjà fait ici. Je ne veux pas encore revenir sur la même chose. On obtient zéro fois la face P et on a l'ensemble {CCCC} qui contient un seul élément. Pourquoi ça m'intéresse ? C'est parce que les événements comme ça, on les appelle les événements élémentaires.

Un quatrième événement a favorisé la réalisation de l'intention didactique du professeur, qui cherchait des occasions pour faire asseoir les éléments technologiques relatifs à la typologie des événements. En effet, l'élève E₃ offre au professeur un exemple qui sort de l'ordinaire, mais qui donne l'occasion rêvée au professeur pour aborder la notion d'événement impossible (Annexe 8, Lignes 577 à 585).

Élève E₃ : Cinq fois la face P.

Un élève : Ça n'existe pas.

Prof : Ça n'existe pas. Pourquoi tu dis que ça n'existe pas ? Ça existe.

Élève E₄ : C'est zéro.

Un élève : C'est l'ensemble vide.

Prof : Ensemble vide. Merci. C'est aussi un événement ! C'est aussi un événement non ?

Élèves : Oui.

Prof : Einheim ! L'ensemble vide. Ce n'est pas parce qu'il ne contient rien qu'il n'existe pas. Ça existe. C'est l'ensemble vide. Mais c'est un événement qu'on dit qu'il est impossible parce qu'on ne peut pas obtenir 5 fois la face P. C'est l'évènement impossible.

Il est à remarquer dans cet échange la réaction de l'élève qui pense que l'ensemble vide n'existe pas et celle de l'élève E₁₀ qui identifie l'ensemble vide au nombre zéro. Ces réactions font partir des phénomènes d'apprentissage régulièrement constatés par rapport à l'ensemble vide et au nombre zéro.

2.1.4. Bilan de l'analyse de la situation n°1

La réalisation des trois phases de la situation n°1 a permis d'atteindre les objectifs fixés, qui sont ceux de surmonter les obstacles au hasard et de faire émerger les notions de base des probabilités telles que les notions d'expérience aléatoire et d'évènement. Avec la phase 1.1, les élèves ont exprimé leurs rapports personnels initiaux à la notion de hasard, qui ne sont pas tous conformes au hasard du tirage au sort nécessaire pour l'enseignement des probabilités au secondaire. Concernant les types de rapports personnels non adéquats prévus dans l'analyse a priori (chap. VI, 3.), ceux que nous avons nommés « géométrie du cauri », « mécanique » et « compensation » ont été effectivement observés chez les élèves, tandis les types de rapports « confirmation » et « fatalité » n'ont pas été observés. La conduite de la phase 1.2 a permis de faire évoluer ces types de rapports vers le hasard du tirage au sort et a débouché sur l'étude de la notion d'expérience aléatoire et celle d'univers des éventualités. Au cours de la réalisation de la phase 1.3, la technique observée chez les élèves pour la construction des éventualités de l'expérience aléatoire « lancer quatre fois de suite un cauri » est celle que nous avons nommée « Produit cartésien ». Néanmoins la complexité de l'expérience aléatoire n'a pas permis l'inventaire de toutes les éventualités avec cette technique. C'est avec la technique « Arbre de choix » que le professeur a amené les élèves à énumérer toutes les éventualités devant constituer l'univers. Les techniques basées sur l'utilisation des tableaux n'ont été ni observées chez les élèves, ni exploitées par le professeur. La réalisation de la phase 1.3 a été surtout une occasion

pour les élèves, avec l'aide du professeur, de faire la différence entre les listes et les combinaisons. Comme prévu, les résultats de la phase 1.3 ont été exploités par le professeur pour définir la notion d'événement.

L'organisation didactique de la situation n°1 s'est traduite par la succession dans un ordre indifférent du moment de la première rencontre, du moment de l'exploration de la tâche et de l'élaboration d'une technique, du moment de la constitution de l'environnement technologico-technique, du moment de l'institutionnalisation et du moment de l'évaluation (Chevallard, 1999). Si les trois premiers moments sont régulièrement observés dans le déroulement des trois phases, le moment de l'institutionnalisation a eu lieu en début de chacune des deux dernières séances après le moment de l'évaluation lors des situations de rappel. Globalement le milieu est composé de cauris virtuels ou physiques, du support des activités et du discours du professeur. Le temps didactique a connu sa première évolution réelle à partir de la deuxième phase avec la découverte des concepts probabilistes de base. Quant aux topos et au contrat didactique, ils sont caractérisés chez l'élève tout au long de la situation par sa responsabilité d'écouter le professeur, de répondre aux questions du professeur et surtout de travailler en autonomie didactique en cas de nécessité. Du côté du professeur, ils se sont manifestés par sa responsabilité de clarifier les consignes, de donner d'explications et surtout de donner en dernier ressort les définitions des notions étudiées. Plusieurs événements heureux et problématiques (Bronner, 2010) ont été observés dans le déroulement de la situation.

2.2. Analyse a posteriori de la situation n°2

Comportant trois phases comme la situation n°1, la situation n°2 s'est déroulée en quatre séances. Les trois premières séances ont été consacrées à la phase 2.1 dont l'objectif est la construction de la notion de probabilité d'un événement. La quatrième séance a permis de réaliser la phase 2.2, qui est une reprise nuancée de la phase 2.1 et la phase 2.3 dont l'objectif est une première rencontre des élèves avec le premier principe de Laplace.

2.2.1. Analyse de la phase 2.1 dans la première séance consacrée à sa réalisation

La première séance de la situation n°2 a permis de démarrer l'expérimentation de la phase 2.1 conçue pour la construction de la notion de probabilité d'un événement. Nous présentons dans cette section l'analyse de cette séance, la première des trois séances consacrées à la phase 2.1.

2.2.1.1. La trame de la séance

La réalisation de la phase 2.1 dans la première séance est découpée en onze moments élémentaires comme il est énuméré ci-après (Annexe 9).

- 1) Un premier moment collectif d'une durée de 11'38 (0 :00 :56 à 0 :12 :38) : Rappel des notions étudiés dans la situation n°1.
- 2) Un deuxième moment collectif d'une durée de 3'18'' (0 :12 :39 à 0 :15 :57) : Présentation aux élèves du générateur de hasard constitué d'une bouteille opaque contenant les billes et disposant d'une bande transparente.
- 3) Un troisième moment collectif d'une durée de 4'57'' (0 :15 :58 à 0 :20 :55) : Lecture du contexte et de la consigne de la phase 2.1 constituée de la question Q₅, et lancement du travail en groupe.
- 4) Un premier moment de travail en groupe d'une durée de 10'1 (0 :20 :56 à 0 :30 :57) : Réalisation de la première série de tirages par les élèves.
- 5) Un quatrième moment collectif d'une durée de 11'57'' (0 :30 :58 à 0 :42 :55) : Présentation des résultats des différents groupes à l'issue de la première série de tirages et lancement d'une deuxième série de tirages de taille fixe.
- 6) Un deuxième moment de travail en groupe d'une durée de 3'43'' (0 :42 :56 à 0 :46 :39) : Réalisation d'une deuxième série de tirages par les élèves.
- 7) Un cinquième moment collectif d'une durée de 1'07'' (0 :46 :40 à 0 :47 :47) : Présentation partielle des résultats à l'issue de la deuxième série de tirages et clarification de la consigne par le professeur
- 8) Un troisième moment de travail en groupe d'une durée de 5'56'' (0 :47 :48 à 0 :53 :44) : Suite du deuxième moment de travail en groupe constituée de l'analyse des résultats de la deuxième série de tirages par les élèves dans leurs groupes respectifs.
- 9) Un sixième moment collectif d'une durée de 18'50'' (0 :53 :45 à 01 :12 :35) : Présentation et discussion des résultats de la deuxième série de tirages.
- 10) Un quatrième moment de travail en groupe d'une durée de 10'08'' (01 :12 :36 à 01 :22 :44) : Réalisation d'une troisième série de tirages.
- 11) Un septième moment collectif d'une durée de 2'10'' (01 :22 :45 à 01 :24 :55) : Arrêt de la séance suite à la non-disponibilité de résultats.

2.2.1.2. Organisation mathématique de la phase 2.1 dans la première séance

2.2.1.2.1. Type de tâches

Le type de tâches prévu dans l'unique consigne de la phase 2.1 est T_3 : « déterminer la composition de la bouteille dans une situation d'expérience aléatoire précise ». Il s'agit d'une bouteille opaque contenant cinq billes de deux couleurs différentes qui dispose d'une bande transparente à travers laquelle on peut voir une seule bille par retournement de la bouteille, qui ne doit être ni ouverte ni cassée. Le type de tâches T_3 traduit par la question Q_5 de l'ingénierie et les conditions rappelées consiste à trouver le nombre de billes de chaque couleur contenues dans la bouteille.

2.2.1.2.2. Techniques, technologies et théories relevant du type de tâches T_3

Pendant la séance, les élèves ont eu pratiquement deux moments différents de retournement de la bouteille en vue d'observer à chaque fois la couleur de la bille apparue dans la bande transparente. Ils ont consacré les premiers instants à l'observation de la bouteille et à la possibilité éventuelle chez certains d'observer à travers la bande transparente la totalité des billes. Les premiers retournements effectifs de la bouteille ont conduit à l'assurance de l'existence d'au moins une bille de chaque couleur. Quant à la composition de la bouteille, les propositions faites par les différents groupes sont « 3 billes blanches et 2 billes noires », « 2 billes blanches et 3 billes noires » et « 4 billes blanches et 1 bille noire ».

A cette première séance de réalisation de la phase 2.1 de la situation 2, cinq techniques $\tau_{3.1}$, $\tau_{3.2}$, $\tau_{3.3}$, $\tau_{3.4}$ et $\tau_{3.5}$ ont émergé chez les élèves. D'une façon générale, les cinq techniques adoptées par les élèves pour accomplir la tâche se décomposent comme il suit :

- observer la bouteille ;
- identifier l'expérience aléatoire qui consiste à retourner la bouteille pour noter la couleur de la bille apparue ;
- retourner la bouteille un certain nombre de fois ;
- exploiter les résultats obtenus pour déterminer la composition de la bouteille.

C'est au niveau de l'exploitation des résultats que les techniques se spécifient. La notion d'expérience aléatoire est la composante perceptible de la technologie justifiant globalement les cinq techniques. Comme nous allons le constater dans la présentation ci-dessous des spécificités des techniques, l'exploitation des résultats des tirages s'est faite sans l'utilisation de la notion de fréquence, réduisant ainsi au langage probabiliste la théorie qui justifie la technologie en voie de construction.

L'exploitation des résultats des premiers retournements de la bouteille a conduit les élèves ayant adopté la technique $\tau_{3,1}$, consistant à estimer qu'il n'est pas possible de connaître avec certitude le nombre de billes blanches, ni celui de billes noires. La formulation ci-dessous des élèves du groupe G_1 illustre bien cette position de la classe.

D'après les expériences qu'on a eues à faire, on ne peut pas prévoir, on ne peut pas dire avec certitude le nombre de billes blanches qu'il y a dans la bouteille. Mais on connaît le nombre possible ; c'est au plus quatre qu'on doit avoir ; le résultat possible qu'on peut avoir, c'est au plus 4 (Annexe 9, Ligne 80).

La notion d'expérience aléatoire semble être la technologie qui justifie spécifiquement la technique $\tau_{3,1}$ observée notamment chez les élèves du groupe G_1 , qui sont convaincus à cette étape de l'expérimentation que la composition de la bouteille n'est pas prévisible avec certitude. Par ailleurs, la certitude qu'il y a au moins une bille noire et au moins une bille blanche dans la bouteille est confirmée par les autres groupes qui ont observé lors de cette première série de retournements l'apparition de billes blanches et de billes noires à travers la bande transparente de la bouteille.

À l'issue du deuxième moment de retournement de la bouteille, les quatre autres techniques ont émergé. La technique $\tau_{3,2}$ adoptée encore par le groupe G_1 a consisté à déterminer le rapport du nombre total de retournement (20 dans le groupe) au nombre total de billes contenues dans la bouteille pour obtenir le nombre de billes blanches contenues dans la bouteille (Annexe 9, Lignes 206 à 211).

Prof : Vous avez remué la bouteille combien de fois ?

Élève E_2 : vingt fois. Et on a fait sur le nombre total de billes.

Prof : Vous avez fait sur le nombre total de ? Je n'ai pas compris. Vous avez retourné la bouteille vingt fois et vous avez,

Élève E_2 : divisé par le nombre total.

Prof : Par le nombre total de billes qui est dedans.

Élève E_2 : Oui.

L'élément technologique qui spécifie la technique $\tau_{3,2}$ est caractérisé par la formule $n_b = \frac{n}{5}$, où n et n_b sont respectivement le nombre de retournements de bouteille effectués et le nombre de billes blanches contenues dans la bouteille. Cette formule ne paraît pas logique, car si le groupe avait effectué 30 retournements de la bouteille, on trouverait avec cette technique six billes blanches dans la bouteille, qui ne contient que cinq billes au total.

La technique $\tau_{3,3}$, observée dans les groupes G_3 et G_5 est semblable à la technique $\tau_{3,2}$ à la différence que le nombre de billes blanches contenues dans la bouteille est obtenu par le

rapport de nombre de billes blanches observées respectivement au nombre total de billes contenues dans la bouteille pour le groupe G_3 et à 4 pour le groupe G_5 comme en témoignent les explications suivantes des élèves E_8 et E_{17} .

Élève E_8 du groupe G_3

On a fait 25 essais et on a trouvé 20 billes blanches. Maintenant, on a fait 20 divisé par 5.

On a trouvé 4 billes blanches.

Élève E_{17} du groupe G_5

Lorsqu'on a tourné la bouteille 20 fois, on a trouvé 12 billes blanches et 8 billes noires.

On a divisé le tout par cinq, non par quatre et on a trouvé 3 billes blanches et 2 billes noires.

Au niveau de la technique $\tau_{3,4}$, remarquée chez les élèves du groupe G_2 , le nombre de billes blanches contenues dans la bouteille est obtenu par soustraction du nombre de billes noires observées du nombre de billes blanches observées (Annexe 9, lignes 220 et 221).

Prof : Vous avez trouvé trois billes blanches.

Élève E_7 : Parce que lorsqu'on a agité la bouteille 20 fois, on a trouvé 12 billes blanches et 9 billes noires. On a fait les 12 billes blanches moins les 9 et on a trouvé 3.

La formule $n_b = n_1 - n_2$, où n_1 et n_2 sont respectivement les nombres de billes blanches et de billes noires observées, est l'élément technologique qui justifie fondamentalement la technique $\tau_{3,4}$.

La technique $\tau_{3,5}$ a consisté à traduire les données observées en un système d'équations dont les inconnues x et y sont respectivement les nombres de billes blanches et de billes noires contenues dans la bouteille (Annexe 9, Lignes 260 à 285).

Prof : Lorsque vous avez retourné la bouteille 20 fois, vous avez trouvé ?

Élève E_{14} : 11 billes blanches.

Prof : Lorsqu'on a retourné 20 fois la bouteille, on a trouvé 11 fois la bille blanche et 9 fois la bille noire. Et après ?

Élève E_{14} : On a essayé de faire un système. On sait que $x+y=5$. Maintenant ce qu'on avait trouvé, on a divisé par 5.

Prof : Non, non ! Votre, votre système, lis-moi ça d'abord.

Élève E_{14} : On a $11x$ sur 5 plus $9x$ sur 5 égale 4.

Prof : Et après résolution, vous avez obtenu x égal à 3. C'est ça hein ?

Élève E_{14} : Oui !

La résolution de problème du premier degré à travers un système d'équations linéaires est l'élément technologique qui fonde la technique $\tau_{3,5}$.

En somme, durant cette première séance consacrée à la phase 2.1, la technique $\tau_{3.1}$ qui a émergé dès la première série de retournements de bouteille, a permis de conclure de façon cohérente à l'existence d'au moins une bille de chaque couleur, comme cela a été le cas dans l'expérimentation de référence de Brousseau (2005). Les autres techniques ont conduit à des raisonnements relevant du « problème de l'âge du capitaine », utilisé souvent pour illustrer la notion de contrat didactique (Brousseau, 1998). En effet, les élèves ont utilisé dans des calculs qui ne se justifient pas, les nombres de billes qu'ils ont observées après retournement de la bouteille. Le point fait par le professeur après la présentation des positions des cinq groupes a permis de montrer que les raisonnements utilisés au niveau des quatre dernières techniques relevant du type de tâches T_3 dans cette séance ne paraissent pas cohérents pour conduire à des résultats satisfaisants.

2.2.1.3. Analyse suivant la méthodologie des 4 composantes

D'une durée totale de 1 heure 25 minutes, la première séance consacrée à la phase 2.1 se décompose en sept épisodes suivant les variations des moments didactiques (Chevallard, 1999).

2.2.1.3.1. Premier épisode (0 :00 :56 à 0 :12 :39)

Le premier épisode de la première séance est caractérisé par un moment d'évaluation formative. Il commence évidemment par un échange de salutations entre le professeur et les élèves. Ensuite, les notions d'expérience aléatoire, d'éventualité, d'univers des possibles, d'événement sont évaluées à travers une situation de rappel, au cours de laquelle les élèves ont été invités à restituer ces savoirs précédemment construits.

Dans cet épisode qui est un temps de travail collectif, le milieu matériel et social de l'élève est naturellement limité aux dires du professeur. Le milieu dans sa composante cognitive est constitué entre autres des savoirs construits du côté de l'élève et l'enjeu est la vérification de la justesse de ces savoirs en vue de leur ajustement du côté du professeur. Le contrat didactique du côté de l'élève est de restituer ses connaissances, mais il n'est pas individualisé. Il s'agit de réponses collectives, même si elles sont portées par quelques élèves seulement dans cette configuration. L'élève générique assume bien son topos de répondre aux questions tandis que le professeur est resté dans son rôle de poser des questions précises. L'évolution du temps didactique est concrétisée par la prise de notes par les élèves sur la notion d'événements contraires qui n'a pas jusque-là figuré dans le cahier de notes des élèves. Aucun événement n'a attiré notre attention dans ce premier épisode.

2.2.1.3.2 Deuxième épisode (0 :12 :39 à 0 :20 :56)

Long d'une durée de 8 minutes 15 secondes, le deuxième épisode a permis au professeur de mettre en place les éléments constitutifs du milieu pour l'accomplissement de la tâche principale de la première phase de la situation n°2. C'est un moment de première rencontre du type de tâches T_3 annoncée par la consigne : « déterminer la composition de la bouteille ». Deux périodes composent cet épisode : la présentation de la machine de hasard conçu sur le modèle de Brousseau (2005) et la lecture suivie de l'explication de la consigne de travail.

Le milieu est non pas seulement composé du support écrit ou oral de travail mais surtout de la machine de hasard : la bouteille opaque contenant 5 billes dont certaines sont blanches et d'autres noires. Chaque bouteille est recouverte d'une peinture épaisse de couleur jaune qui la rend opaque. Une petite bande circulaire dans la partie supérieure de la bouteille et immédiatement en dessous du bouchon n'a pas reçu la couche de peinture et reste ainsi transparente pour laisser voir une seule bille à la fois après retournement de la bouteille.



Image n°01 : Bouteille génératrice de hasard du groupe G₁.

Du côté du professeur, le topos se caractérise par l'explication du fonctionnement de la bouteille et celle de la consigne, tandis que les élèves de leur côté sont restés dans un rôle d'écoute en vue de la compréhension. Le temps didactique n'a servi qu'à la mise en place du milieu de l'épisode suivant.

Deux événements sont à remarquer dans cet épisode. Il s'agit d'abord de la manière dont le professeur introduit l'expérimentation du jour qu'il trouve plus intéressante que les expérimentations précédentes : « Bien ! Pour aujourd'hui on aura à faire d'autres

expérimentations. Ce sera même plus intéressant que les cauris ». Le professeur, convaincu de l'intérêt à faire une telle expérimentation dans l'enseignement des probabilités, tente ainsi de motiver les élèves. Le deuxième événement de cet épisode est relatif au principe selon lequel la bouteille ne doit pas être ouverte (ou cassée) pour déterminer une réponse, principe apparaissant ainsi comme un élément du contrat didactique. Le professeur l'a bien martelé : « Donc vous ne devez pas ouvrir la bouteille. Ça c'est un principe fondamental ». De même que Brousseau (2005) ne l'a pas permis aux élèves sur lesquels l'ingénierie de référence est expérimentée, le professeur, en voulant expliquer la consigne de la phase a érigé en un principe fondamental le fait que la bouteille ne doit pas être ouverte.

2.2.1.3.3. Troisième épisode (0 :20 :56 à 0 :42 :55)

Le troisième épisode de cette phase comporte deux temps : un temps de travail en groupe et un temps de travail collectif. Dans le temps de travail en groupe, chacun des groupes s'est occupé à trouver le nombre de billes blanches contenues dans la bouteille de son groupe à partir des billes observées après des retournements de la bouteille. Les résultats obtenus par chaque groupe sont communiqués à la classe dans le temps de travail collectif. Le troisième épisode de la phase 2.1 correspond ainsi au deuxième moment didactique, c'est-à-dire le moment d'exploration de la tâche et d'élaboration d'une technique.

Le milieu antagoniste de l'élève est fondamentalement constitué de la machine de hasard présentée dans l'épisode précédent. C'est avec des rétroactions sur la bouteille qu'il est prévu que les élèves parviennent au but. Pendant le temps de travail en groupe, les élèves sont restés en autonomie didactique absolue avec quelques perturbations du professeur, qui reprecise par moment la tâche à faire. La communication des résultats de chaque groupe à toute la classe et leur recueil par le professeur en vue de leur analyse fait partie de la tâche pendant le temps du travail collectif. La responsabilité des élèves à résoudre le problème, selon les principes envoyés, pendant le temps de travail en groupe et celle du professeur à recueillir leurs résultats constituent le contrat et les topos des élèves et du professeur dans ce troisième épisode. Le temps didactique est ainsi exploité pour la recherche de solution au problème.

Un premier événement vient d'une injonction du chercheur tout au début du temps de travail en groupe. Il fait suite à la curiosité de certains élèves qui tournaient la bouteille dans tous les sens pour chercher à observer la totalité des billes à travers la bande transparente.

Attendez ! Si vous ne respectez pas le principe, on ne va pas faire le travail. Ce qui est caché dedans, c'est de la mathématique. Vous retournez la bouteille ; vous voyez une

bille ; sa couleur. Vous retournez combien de fois vous voulez pour voir la couleur. J'ai dit : ne trichez pas ! Si vous trichez, c'est gâté (Annexe 9, Ligne 69).

Cet événement montre encore comment le contrat didactique est difficile à tenir et accepter par certains élèves. Le principe fondamental, prôné précédemment par le professeur, est confirmé par le chercheur : le nombre de billes blanches recherché doit être déterminé après une analyse des billes observées par retournement de la bouteille.

Un deuxième événement est relatif à l'intervention du professeur pendant le temps de travail en groupe comme pour indiquer aux élèves ce qu'ils devraient faire des résultats des tirages effectués (Annexe 9, Ligne 71 à 74).

Prof : Lorsque vous agitez comme ça et que vous retournez, je suppose que vous voyez une bille noire, qu'est-ce que vous faites avec cette information ?

Élèves : On écrit ; on retient.

Prof : On retient. On fait encore. Je suppose que vous avez vu une bille blanche. Qu'est-ce que vous faites avec cette information ?

Élèves : On retient.

Jusque-là, les élèves n'ont pas trouvé utile de noter leurs observations. Le professeur tente de leur indiquer le comportement à adopter dans le temps de travail en groupe, leur apportant ainsi une aide à l'organisation de la méthode de travail.

Un troisième et dernier événement est le constat que certains élèves n'avaient pas noté les résultats des tirages effectués pendant le temps de travail en groupe, et se sont vus dans l'obligation d'effectuer d'autres tirages pendant le temps de travail collectif sans en avoir reçu l'ordre du professeur. Ce dernier, qui s'en est rendu compte, a réagi comme le montre l'échange ci-après (Annexe 9, Lignes 138 à 146).

Prof : Ceux qui n'ont pas fait, ne mentez pas.

Élève E₁₄ : Monsieur, c'est maintenant qu'ils ont fait.

Prof : Maintenant ou pendant les 10 minutes de travail en groupe.

Élève E₂ : Pendant les 10 minutes.

Élève E₁ : C'est maintenant on a fait.

Prof : C'est maintenant que vous avez fait ?

Élèves : Oui !

Cet événement montre que, malgré l'aide à l'organisation de la méthode de travail apportée précédemment par le professeur, certains élèves n'ont pas perçus l'intérêt de noter les observations. L'échange collectif a induit au niveau de ces élèves un certain contrat de relevé

de résultats bien plus par mimétisme collectif que par un argument scientifique, puisque les élèves ne sont pas convaincus de l'intérêt de noter les résultats des observations.

En somme, le troisième épisode, correspondant à un moment d'exploration du type de tâches T_3 , a permis aux élèves d'être unanimement assurés qu'il y a au moins une bille de chaque couleur dans la bouteille, bien qu'un point n'ait été fait sur ce résultat par le professeur. Aucune technique élaborée n'a permis de faire des hypothèses sur le nombre exact de billes blanches contenues dans la bouteille de chaque groupe. Les événements majeurs de cet épisode ne sont pas problématiques.

2.2.1.3.4. Quatrième épisode (0 :42 :55 à 1 :12 :35)

D'une durée de 29 minutes environ, le quatrième épisode est comme une reprise du troisième épisode. En effet, suite à une difficulté d'exploitation des résultats des premières observations dans le troisième épisode, le professeur a dû relancer les élèves à faire de nouveaux tirages en vue de l'élaboration de techniques pouvant permettre de déterminer le nombre de billes blanches contenues dans la bouteille de chaque groupe. Nous nous retrouvons tout naturellement dans un moment d'élaboration de techniques du type de tâches T_3 . Dans un temps de travail en groupe, les élèves ont dans leurs groupes respectifs retourné une vingtaine de fois la bouteille et ont analysé les résultats obtenus en vue d'atteindre leur but. Plusieurs méthodes qui ont découlé de ce temps de travail en groupe sont communiquées à la classe sous la direction du professeur.

Le milieu ainsi que les topos sont identiques à ceux du troisième épisode. Du côté du professeur le contrat didactique est particulièrement remarquable par l'autonomie accordée aux élèves pendant le temps de travail en groupe et par le recueil des résultats obtenus par les élèves. Les comportements présentés par les cinq groupes pour déterminer le nombre de billes blanches relèvent du contrat didactique de l'ordre du « problème de l'âge du capitaine » comme nous l'avons développé plus haut dans l'organisation mathématique (2.2.1.2.).

Le premier événement est une interruption précoce du temps de travail en groupe par le professeur suite à l'impression que les élèves lui ont donné d'avoir fini leur travail. Invités à communiquer leurs résultats à la classe, les élèves d'un groupe ont simplement donné le nombre de billes blanches observées au lieu du nombre de billes contenues dans la bouteille, qui constitue le défi à relever dans cette phase (Annexe 9, Lignes 186 à 193).

Prof : Ok. Le groupe n°1, combien de billes blanches il y a dedans ?

Élève E1 : On a trouvé 10.

Prof : Le groupe numéro 1, combien de billes blanches, il y a dans la bouteille ? Hein, c'est ça la question.

Élève E1 : D'après ce qu'on a fait, on a trouvé dix billes blanches.

Prof : Vous avez trouvé dix billes blanches dans la bouteille.

Élève E1 : Non, ce n'est pas dans la bouteille. Vous avez dit de faire 20 fois.

Avec cet échange, nous avançons différentes interprétations : soit les élèves n'ont pas eu suffisamment de temps pour répondre à la question, soit ils ne l'ont pas bien comprise, soit encore ils sont à cette étape loin de dégager une technique et restent sur les données qu'ils peuvent seules fournir comme réponse. La solution trouvée par le professeur est de relancer les élèves pour une exploitation des résultats qu'ils ont observés dans leurs groupes respectifs.

Un deuxième événement non problématique concerne une somme non cohérente des nombres de billes par un groupe, qui dit avoir retourné la bouteille 20 fois pour observer 12 fois la bille blanche et 9 fois la bille noire comme on peut le remarquer dans l'échange ci-après (Annexe 9, Lignes 221 à 224).

Prof : Vous avez trouvé trois billes blanches. Comment ?

Élève E7 : Parce que lorsqu'on a agité la bouteille 20 fois, on a trouvé 12 billes blanches et 9 billes noires. On a fait les 12 billes blanches moins les 9 et on a trouvé 3.

Prof : Il y a un problème dedans. Il y a un problème. Et 9 fois la bille noire, ce qui ne colle pas. Mais c'est votre réponse quand même.

Il a dû avoir une erreur dans le décompte des retournements ou des billes observées, voire dans le nombre de retournements. Le professeur n'a pas jugé bon de faire corriger l'erreur, certainement parce que la méthode utilisée par ce groupe pour obtenir la composition de la bouteille n'est pas la bonne.

Le troisième événement vient d'une confusion entre les nombres de billes et les billes elles-mêmes. Les élèves du groupe n°4, voulant essayer de traduire les observations faites par un système d'équations, ont désigné par x et y les nombres respectifs de billes blanches et de billes noires contenues dans la bouteille. Après avoir retournés la bouteille vingt fois, les élèves de ce groupe disent avoir obtenu $11x$ de billes blanches et $9y$ de billes noires, obtenant ainsi un système équivalent à $\begin{cases} x + y = 5 \\ 11x + 9y = 20 \end{cases}$. Bien que le couple $(3 ; 2)$ ne soit pas une solution de ce système, ils ont déclaré avoir obtenu 3 billes blanches et 2 billes noires après résolution du système. Plus tard, le chercheur, dans un rôle d'enseignant, est intervenu pour montrer que la deuxième équation du système n'est pas logique (Annexe 9, Lignes 335 à 347).

Chercheur : Comment est-ce que vous êtes arrivés à $11x$?

Élève E_{11} : Lorsqu'on a retourné la bouteille 20 fois-là, on a trouvé 11 fois la bille blanche et 9 fois la bille noire.

Chercheur : Maintenant comment vous expliquer $11x$?

Élève E_{11} : En fait, on a supposé que la bille blanche est x .

Chercheur : C'est le nombre que vous avez dit, pas la bille blanche. Ce n'est pas la bille qui est x . C'est le nombre de billes blanches qui est x . Donc si vous faites 11 fois x , ça veut dire que vous avez trouvé 11 fois le nombre de billes blanches qu'il y a dans la bouteille et qu'on ne connaît pas. Vous comprenez ? Donc si on vous comprend très bien, vous semblez avoir multiplié 11 par la bille blanche et non pas par le nombre de billes blanches. C'est ça qui s'est passé ici hein ?

Élèves : Oui.

Le quatrième événement est un appel du chercheur aux élèves à prendre le travail au sérieux. En fait, ayant constaté que les élèves ne se donnent pas véritablement à une activité de réflexion et qu'ils cherchent à donner le nombre de billes blanches sans une justification convaincante, le chercheur les a invités à plus de sérieux dans le travail.

Non ! Prenons le travail au sérieux. Vous êtes en seconde. On ne vous voit pas réfléchir.

On vous voit prendre ça du côté de l'amusement. Sinon, on aurait déjà fini. On est d'accord ? (Annexe 9, Ligne 333)

Après avoir complété cette intervention par la justification de ce que la deuxième équation du système d'équations établi par le groupe n°4 ne prend pas en compte les nombres de billes blanches et de billes noires contenues dans la bouteille, le chercheur et le professeur ont relancé pour une troisième fois le travail en groupe.

2.2.1.3.5. Cinquième épisode

Ayant le même objectif que les deux épisodes précédents, le cinquième épisode constitué essentiellement d'un temps de travail en groupe s'est déroulé comme l'épisode 4. Il correspond donc au deuxième moment didactique avec un contrat didactique et des topos caractérisés par la responsabilité des élèves à accomplir la tâche et celle du professeur à recueillir les résultats des élèves pendant le temps du travail collectif. En l'absence d'un savoir construit, le temps didactique semble être statique. Compte tenu d'une certaine lassitude constatée au niveau des élèves, le chercheur et le professeur se sont concertés pour arrêter la séance, car à l'issue du temps de travail en groupe, il ne semble pas y avoir des résultats qui ne sont pas différents de ceux du quatrième épisode.

Deux événements sont à remarquer dans ce dernier épisode de la séance. Le premier montre la lassitude des élèves à résoudre le problème qu'ils commencent à trouver trop difficile comme le dit l'élève E₁₄ dans son groupe en Goungbé (langue locale) : « La chose est bizarre. Moi je n'ai pas compris ». Un autre élève du même groupe dit un peu plus tard au professeur que le problème est trop fort (Annexe 9, Ligne 352).

Élève : C'est beaucoup. C'est trop fort.

Prof : C'est trop fort ! Non ! Ce n'est pas trop fort. Si c'était trop fort, on ne va pas vous amener ça.

Cette lassitude de ne pas pouvoir trouver la réponse du problème posé et de ne pas bénéficier à l'accoutumée de l'aide du professeur à cette fin est lisible sur tous les visages. Elle conduit à l'arrêt de la séance annoncé par le professeur après une concertation avec le chercheur. Le deuxième événement est survenu à l'annonce de l'arrêt de la séance. Il traduit en fait la volonté des élèves à ouvrir la bouteille pour voir sa composition si on le leur permet (Annexe 9, Lignes 357 et 358).

Prof : Si on vous laissait la bouteille, vous allez ouvrir la bouteille à la maison.

Élève E₇ : Ce sera vite fait.

Bien que les élèves aient été avertis par le chercheur dans le deuxième épisode qu'il est caché une connaissance mathématique dans le problème en résolution, les élèves nourrissent ici l'envie d'avoir la solution sans nécessairement atteindre cette connaissance. C'est la preuve que l'élève n'est pas toujours conscient de l'enjeu visé dans un enseignement donné par le professeur. Seul ce dernier sait comment y parvenir.

2.2.1.4. Bilan de la première séance de la phase 2.1 de la situation n°2

Cette première séance de l'expérimentation de la phase 2.1 montre que les élèves ne sont pas convaincus d'être devant un problème mathématique qu'ils peuvent résoudre. La certitude qu'il y a au moins une bille de chaque couleur est partagée par tous les élèves après les premiers retournements des bouteilles. L'exploitation des résultats de la deuxième série de retournements des bouteilles n'a pas permis de déterminer la composition de chaque bouteille. À notre avis, Il y a eu visiblement une rupture de contrat au niveau des élèves, qui sont jusque-là restés dans le déterminisme, à travers la résolution des problèmes d'ordre algébrique, arithmétique ou géométrique. Le passage du déterminisme à l'aléatoire a semblé les dérouter au point où ils, ne sachant pas quoi faire des résultats observés dans leurs groupes respectifs, sont restés dans des tentatives de résolutions arithmétiques et algébriques, correspondant aux contrats en vigueur

dans les situations plus classiques ou il y a des inconnues. Certains élèves ont trouvé que le problème qui leur est posé est bizarre et d'autres ont pensé que la solution est trop difficile à atteindre comme il l'a été clairement signifié dans le groupe n°4 : « La chose est bizarre. Moi je n'ai pas compris », « C'est beaucoup. C'est trop fort ».

Les différents comportements des élèves au cours de cette séance sont également observés dans l'expérimentation de Brousseau (2005) et celle de Briand (2005). Se fondant sur l'évolution des comportements des élèves lors de ces expérimentations et notamment celle de Brousseau, le chercheur semble être rassuré qu'une technique pouvant faire intervenir le calcul des fréquences peut émerger, pour faciliter l'orientation des élèves vers l'étude de l'évolution de la fréquence d'observation des billes blanches.

2.2.2. Analyse de la phase 2.1 dans la deuxième séance consacrée à sa réalisation

Étant donné que la première séance n'a pas permis d'entrer véritablement dans l'organisation mathématique visée, la deuxième séance consacrée à la situation 2 est une reprise de la réalisation de la phase 2.1 dont l'objectif est l'étude de la notion de probabilité d'un événement.

2.2.2.1. La trame de la séance

Nous avons découpé la réalisation de la phase 2.1 dans la deuxième séance de la situation n°2 en onze moments élémentaires dont la liste est présentée ci-dessous (Annexe 10).

- 1) Un premier moment collectif d'une durée de 1'51 (00 :00 :50 à 00 :02 :41) : Introduction de la séance, lecture de la consigne de la phase 2.1 et lancement du travail en groupe.
- 2) Un premier moment de travail en groupe d'une durée de 12'15'' (0 :02 :42 à 0 :15 :07) : Réalisation d'une première série de 20 tirages.
- 3) Un deuxième moment collectif d'une durée de 22'27'' (0 :15 :08 à 0 :37 :35) : Présentation des résultats à l'issue du premier moment de travail en groupe.
- 4) Un deuxième moment de travail en groupe d'une durée de 11'27 (0 :37 :36 à 0 :49 :03) : Réalisation d'une deuxième série de tirages de 20 tirages.
- 5) Un troisième moment collectif d'une durée de 1'46'' (0 :49 :03 à 0 :50 :49) : Présentation des résultats des différents groupes à l'issue du deuxième moment du travail en groupe
- 6) Un quatrième moment collectif d'une durée de 0'44 (0 :50 :49 à 0 :51 :33) : Lancement d'une troisième série de 20 tirages.

- 7) Un troisième moment de travail en groupe d'une durée de 5'20'' (0 :51 :33 à 0 :56 :53) : Réalisation d'une troisième série de 20 tirages.
- 8) Un cinquième moment collectif d'une durée de 7'47'' (0 :56 :53 à 01 :04 :40) : Présentation des résultats des différents groupes à l'issue du troisième moment de travail en groupe.
- 9) Un sixième moment collectif d'une durée de 8'44'' (01 :04 :40 à 01 :13 :34) : Justification de la nécessité de faire des séries successives de 20 tirages jusqu'à 200 tirages.
- 10) Un quatrième moment de travail en groupe d'une durée de 33'55'' (01 :13 :34 à 01 :47 :29) : Réalisation de séries successives de 20 tirages jusqu'à 200 tirages.
- 11) Un septième moment collectif d'une durée de 0'57'' (01 :47 :29 à 01 :48 :26) : Clôture de la séance.

2.2.2.2. Organisation mathématique de la phase 2.1 dans la deuxième séance de la situation 2

2.2.2.2.1. Type de tâches

Le type de tâches en étude depuis la séance précédente est le type de tâches T_3 suivant : « déterminer la composition de la bouteille dans une situation d'expérience aléatoire précise ». Les bouteilles opaques contenant chacune cinq billes de deux couleurs différentes et qui disposent d'une bande transparente à travers laquelle on peut voir une seule bille par retournement, sont distribuées aux cinq groupes de la classe. La composition de ces bouteilles est la même, mais cette précision n'est pas donnée aux élèves. Il leur est plutôt dit que les bouteilles sont de compositions différentes. Chaque groupe est alors appelé à trouver la composition de la bouteille de son groupe par la détermination du nombre de billes blanches qu'elle contient, sachant que la bouteille ne doit être ni ouverte ni cassée.

2.2.2.2.2. Techniques, technologies et théories relevant du type de tâches T_3 dans la séance

Dans cette deuxième séance consacrée à la phase 2.1 de la situation n°2, les élèves ont eu au total quatre temps de retournement de la bouteille : il y a eu d'abord une première série de 20 tirages, puis une deuxième de 20 tirages après l'analyse des résultats de la première, puis une troisième de 20 tirages, puis enfin des séries successives de 20 tirages jusqu'à 200 tirages. Les 20 premiers tirages ont conduit entre autres à l'émergence de la fréquence d'observation de billes blanches comme outil de détermination de la composition de la bouteille au niveau de chaque groupe. Cet outil implicite s'est imposé dans l'exploitation des résultats des deux séries suivantes de tirages pour trouver une hypothèse de la composition des bouteilles, qui est « 3

billes blanches et 2 billes noires ». Les séries successives de tirages de fin de séance participe de la constitution de la série statistique du cumul des séries de 20 tirages en vue de l'étude de la vérification certaine de la composition des bouteilles.

Trois techniques $\tau_{3,6}$, $\tau_{3,7}$ et $\tau_{3,8}$ que nous nommons respectivement « léger dépassement », « large dépassement » et « proportionnalité » ont relevé du type T_3 après la première série de retournements de bouteilles. Ces techniques diffèrent de celles observées au cours de la première séance par l'exploitation des observations faites comme nous pouvons le constater dans la présentation ci-dessous

Technique « léger dépassement »

Le raisonnement « léger déplacement » provient de l'élève E_9 composant à lui seul le groupe G_3 , du fait de l'absence ce jour-là de ses deux coéquipiers. Il a d'abord effectué 10 tirages qui ont donné 5 fois une bille blanche et 5 fois une bille noire. Il refait alors 2 tirages qui ont donné pour les deux fois une bille noire. Sur les 12 tirages effectués, le nombre de fois qu'une bille noire est apparue dépasse légèrement le nombre de fois qu'une bille blanche est apparue. C'est ce qui l'aurait amené à donner la composition de « 3 billes noires et de 2 billes blanches » comme on peut le comprendre dans l'échange ci-après (Annexe 10, Lignes 34 à 47).

Élève E_9 : J'ai trouvé 5 fois billes blanches et 5 fois billes noires ; J'ai encore fait deux fois le tirage et j'ai trouvé 2 billes noires.

Prof. : Je n'ai pas compris. Tu avais fait 10 tirages. Et tu as trouvé 5 billes blanches et 5 billes noires. Après tu as fait quoi ?

Élève E_9 : J'ai fait en plus deux tirages.

Prof : Plus deux tirages. Et après, tu as trouvé ?

Élève E_9 : J'ai trouvé deux billes noires.

Prof : Deux billes noires. Avec ça, tu as trouvé combien de billes blanches ?

Élève E_9 : Deux et trois billes noires.

Prof : Comment ?

Élève E_9 : Comme j'ai trouvé 5 billes blanches et 5 billes noires, j'ai trouvé la même réponse, j'ai fait encore, en plus deux tirages pour voir la différence.

Comme on peut le comprendre, si la bouteille contenait par exemple 6 billes, l'élève E_9 aurait certainement conclu après les 10 premiers tirages que la composition est « 3 billes blanches et 3 billes noires ». C'est donc à défaut d'une composition paritaire qu'il aurait été nécessaire d'effectuer d'autres tirages. L'élément technologique fondamental de la technique « léger dépassement » peut se résumer à l'énoncé suivant : « Dans le contexte de la phase 2.1,

si le nombre d'observations d'une couleur donnée est légèrement supérieur au nombre d'observations de l'autre couleur, alors le nombre de billes de la première couleur contenues dans la bouteille dépasse légèrement le nombre de billes de la deuxième couleur ».

Technique « large dépassement »

Cette technique est fondée sur un raisonnement similaire au raisonnement issu de la technique « léger dépassement ». Il est mené par les membres du groupe G₄, qui ayant observé beaucoup plus de billes blanches que de billes noires après 17 tirages, disent avoir écarté l'hypothèse de la composition « 3 billes blanches et 2 billes noires » au profit de la composition « 4 billes blanches et 1 bille noire. » (Annexe 10, Lignes 63 à 77)

Élève E₁₄ : On sait que des deux côtés, il y a au moins une bille. Donc le nombre de billes blanches est compris entre 1, 2, 3 et 4 et le nombre de billes noires aussi. Lorsqu'on retourne, on voit que le nombre de billes blanches, lorsqu'on fait douze tirages, on trouve 9 billes blanches.

Prof : Vous avez fait combien tout à l'heure ?

Élève E₁₄ : On a fait 5 tirages et on a eu 4 billes blanches et 1 bille noire. On voit que lorsqu'on fait le tirage, il y a plus de billes blanches que de billes noires. Donc, soit on a 3 billes blanches et 2 billes noires, soit on a 4 billes blanches et une seule bille noire.

Prof : Comment tu élimines la possibilité 3-2 ?

Élève E₁₄ : J'ai dit que, si on supposait qu'il y avait 3 billes blanches et 2 billes noires, lorsqu'on fera le tirage, le nombre billes blanches ne va pas dépasser largement le nombre de billes noires.

Le raisonnement « large dépassement » n'a pas conduit à la composition effective de la bouteille. Avec un assez grand nombre de tirages, l'hypothèse de composition de la bouteille issue de ce raisonnement, pourrait être infirmée. L'élément technologique qui justifie la technique « large dépassement » est similaire à celui de la technique « léger dépassement » et pourrait se préciser comme il suit : « Dans le contexte de la phase 2.1, si le nombre d'observations d'une couleur donnée est légèrement supérieur au nombre d'observations de l'autre couleur, alors le nombre de billes de la première couleur contenues dans la bouteille dépasse légèrement le nombre de billes de la deuxième couleur ».

Technique « proportionnalité »

Cette technique est basée sur un raisonnement proche de celui attendu par le professeur et le chercheur car tendant vers l'outil nécessaire pour la construction de la notion de probabilité d'un événement. En fait, les élèves du groupe G₅ ont proposé que le nombre de billes blanches

contenues dans la bouteille soit calculé en multipliant le nombre total de billes par la fréquence d'observation de billes blanches (Annexe 10, Lignes 96 à 105).

Élève E₁₅ : On a trouvé 12 fois la bille blanche et 8 fois la bille noire sachant qu'il y a au total 5 billes blanches et noires dans la bouteille. Pour retrouver le nombre de billes blanches, on multiplie le nombre de fois de billes blanches trouvées dans l'expérience par le nombre total de billes dans la bouteille sur le nombre total de tirages.

Prof : Et vous avez trouvé combien ?

Élève E₁₅ : Trois billes blanches.

Même si ce raisonnement conduit à la composition effective de la bouteille, une confirmation de cette composition s'impose par la réalisation d'un assez nombre grand de tirages. Au niveau de l'exploitation des résultats des observations, la technologie qui justifie la technique « proportionnalité » est essentiellement basée sur la notion de proportionnalité.

Les discussions ayant eu lieu à propos des différents raisonnements menés par les groupes respectivement pour trouver la composition des bouteilles ont conduit le professeur et le chercheur à susciter des séries de vingt retournements de la bouteille en adoptant la méthode du groupe G₅, donc la technique « proportionnalité », pour déterminer la composition de la bouteille. Dès la deuxième série, tous les groupes ont trouvé qu'il y exactement trois billes dans la bouteille sans en avoir la certitude. Le professeur a alors suscité davantage de retournements pour être sûr. Ainsi, avec l'aide du professeur, la classe a évolué vers une quatrième technique, qui est celle visée, et qui consiste à étudier l'évolution de la fréquence d'observation de bille blanche. Un tableau est alors conçu pour noter le cumul des observations comme il était indiqué dans la technique visée, présentée dans l'analyse a priori (Chap. VI, 3.2.1.3).

2.2.2.3. Analyse suivant la méthodologie des 4 composantes

La deuxième séance consacrée à la phase 2.1 et qui est même temps la quatrième séance de toute l'ingénierie a duré 1 heure 48 minutes 26 seconde. Pour son analyse selon la méthodologie des quatre composantes (Bronner, 2010), nous la décomposons en cinq épisodes que nous présentons de façon détaillée dans les lignes qui suivent.

2.2.2.3.1. Premier épisode (0 :00 :50 à 0 :02 :41)

Ce premier épisode correspond au premier moment didactique, celui d'une première rencontre avec le type de tâches T₃ dans la séance. Le premier acte de cet épisode est la présentation des cinq bouteilles contenant chacune cinq billes dont certaines sont blanches et d'autres noires. La lecture de la consigne a permis de préciser à nouveau la tâche, qui consiste pour chaque groupe

d'élèves à déterminer le nombre de billes blanches contenues dans la bouteille remise au groupe.

Le milieu de l'élève dans ce premier épisode est strictement composé du discours du professeur et du support papier comportant la consigne. Concernant le contrat didactique et les topos, les élèves ont écouté le professeur, qui a pris très tôt la responsabilité de lancer le premier travail en groupe, pendant lequel la tâche annoncée doit être accomplie.

Un événement est à mettre à l'actif du premier épisode de cette deuxième séance de la situation Il s'agit de l'information du professeur selon laquelle les bouteilles auraient des compositions différentes : « Les compositions des bouteilles sont différentes » Or les cinq bouteilles ont bel et bien la même composition connue du chercheur et non pas du professeur. En effet, c'est une entente entre le professeur et le chercheur pour que les élèves ne s'alignent pas tous sur les propositions de réponses d'un groupe désigné en première position pour présenter les résultats issus du temps du travail en groupes.

2.2.2.3.2. Deuxième épisode (0 :02 :42 à 0 :37 :35)

D'une durée d'environ 34 minutes, le deuxième épisode de la deuxième séance de cette situation comporte deux temps : un temps de travail en groupe et un temps de travail collectif. Il correspond au deuxième moment didactique, c'est-à-dire le moment d'exploration du type de tâches T_3 et d'élaboration de la technique. En fait, la technique relevant du type de tâches T_3 , peut être identifiée dans la réalisation de tirages et dans l'exploitation des observations. Pour les élèves, il s'agit concrètement de produire un raisonnement cohérent pouvant leur permettre de trouver le nombre de billes blanches contenues dans les bouteilles. Dans ce cadre, les types de raisonnements issus du temps de travail en groupe sont présentés dans le temps du travail collectif. Parmi ces types de raisonnements, déjà évoqués plus hauts dans l'organisation mathématique, se trouve le type de raisonnements souhaité par le chercheur et le professeur en vue d'évoluer vers la notion de probabilité d'un événement selon la loi faible des grands nombres.

Dans ce deuxième épisode de la deuxième séance de réalisation en classe de la situation n°2, le milieu antagoniste de l'élève est composé essentiellement de la machine de hasard, c'est-à-dire la bouteille opaque contenant les 5 billes. Du côté du professeur, le contrat didactique est caractérisé par son rôle d'observateur simple lors du temps de travail en groupe et par sa présence effective lors du travail collectif à travers le recueil des résultats issus du travail en groupe. De leur côté, l'autonomie didactique dont les élèves ont bénéficié lors du temps de

travail en groupe et la présentation de leurs résultats issus de l'interprétation des observations constituent leur contrat didactique. Pour ce qui concerne les topos, nous avons l'exécution du travail en groupe par les élèves lors du temps de travail en groupe et la direction du débat par le professeur lors du temps de travail collectif. Le temps didactique est resté en attente de la nouvelle notion en construction.

Dans le deuxième épisode de la séance en cours d'analyse, nous distinguons quatre événements, dont l'un a été très déterminant pour les objectifs de la séance. Le premier événement, qui émane du professeur juste à la fin du temps de travail en groupe, a semblé rappeler que la séance précédente n'avait pas été fructueuse. En effet, en disant : « J'espère que vous avez trouvé quelque chose de meilleur que la dernière fois », le professeur semble exprimer une certaine attente non comblée à la séance précédente en même temps qu'il exprime son souhait de voir les élèves lui offrir une certaine ouverture pouvant lui permettre d'évoluer dans l'expérimentation. Le deuxième événement, qui provient toujours du professeur est un événement malheureux, en ce sens qu'il est caractérisé par des propos quelque peu humiliants. En fait, le professeur a par deux fois déclaré que le raisonnement des élèves ne tient pas. Pour une première fois, face à un raisonnement de l'ordre du problème de « l'âge du capitaine », le professeur a interrompu le débat par : « Vous voyez que le raisonnement ne tient pas ». Pour la deuxième fois, face au raisonnement que nous avons dénommé « léger dépassement », le professeur sans avoir très bien compris l'élève E₉, qui menait ce raisonnement, a lâché cette phrase pour suspendre le débat : « Toi-même tu constates que ton raisonnement ne tient pas. Ça ne tient pas. D'accord ? ». Et pourtant, il y a une logique dans le raisonnement mené par l'élève. Bien que paraissant humiliant, les propos qui sont indexés dans cet événement n'ont pas émoussé l'ardeur des élèves, qui ont continué à participer activement à l'expérimentation. Le troisième événement de l'épisode rend compte du contrat qu'il y a entre le chercheur et le professeur et selon lequel le chercheur peut intervenir au besoin dans le cours dans le rôle de professeur. Ayant saisi une opportunité offerte par les élèves pour susciter la réalisation de plus en plus de tirages, le chercheur après une très brève concertation avec le professeur s'est excusé auprès des élèves de son immixtion dans le cours en disant : « Excusez ! C'est notre collaboration ». Le quatrième événement est un événement heureux, puisqu'il a permis au professeur et au chercheur de trouver des moyens de poursuivre l'expérimentation telle qu'elle est prévue. En effet, pendant que le chercheur, dans le rôle de professeur, cherchait à susciter plus de réalisations de tirages, deux élèves sont intervenus pour réclamer que leurs camarades fassent davantage de tirages pour vérifier leur hypothèse de composition de la bouteille de leurs

groupes respectifs. Il s'agit d'abord d'un élève qui demande que le résultat obtenu à l'aide de la technique « large dépassement » du groupe G₄ soit vérifié : « Au niveau du groupe 4, on va essayer 20 fois ou bien 30 fois pour voir si on aura la même chose ». Juste après, c'est un autre élève du groupe n°4, qui demande que le résultat obtenu par la technique « proportionnalité » du groupe G₅ soit vérifié : « Ils ont fait 20 fois ils ont trouvé 12 fois une bille blanche. Nous sommes d'accord. Ils n'ont qu'à faire 40 fois on va voir ce qu'ils vont trouver ». Ces interventions ont été aussitôt exploitées par le chercheur pour relancer les élèves pour une deuxième série de 20 tirages.

2.2.2.3.3. Troisième épisode (0 :37 :35 à 0 :51 :33)

En dehors de la durée, le troisième épisode de cette deuxième séance de la situation n°2 a les mêmes caractéristiques que l'épisode précédent, c'est-à-dire qu'il y a le même milieu, les mêmes contrats didactiques, les mêmes topos et le même temps didactique.

Un seul événement est à signaler dans ce troisième épisode. Il s'agit de l'adoption par l'ensemble des cinq groupes du raisonnement « fréquence » du groupe n°5 et qui est en même temps le raisonnement que nous recherchons afin de passer à l'exploitation de la fréquence relative. Le professeur qui pensait même l'imposer est surpris de son utilisation rapide par les élèves pour calculer le nombre de billes blanches contenues dans les bouteilles et qui est égal à 3 selon les élèves. L'échange ci-dessous rend compte de ce constat souhaité dans l'expérimentation (Annexe 10, Lignes 183 et 184).

Prof : Maintenant en utilisant la formule du groupe 5, vous allez essayer de trouver le nombre de billes blanches que vous avez.

Élèves : Oui ! On a vu 3.

Cet événement heureux est aussitôt exploité par le professeur pour lancer une troisième série de 20 tirages en vue de la confirmation éventuelle de la composition de la bouteille dans chaque groupe.

2.2.2.3.4. Quatrième épisode (0 :51 :33 à 1 :13 :34)

Comportant un temps de travail en groupe et un temps de travail collectif, le quatrième épisode concerne la réalisation d'une troisième série de 20 tirages. Il est une reprise du deuxième ou du troisième épisode et ne diffère de ces épisodes que par ses événements. Ainsi son analyse relative au milieu, au contrat didactique, aux topos et au temps didactique est identique à celle du deuxième épisode.

Concernant les événements, le premier événement important provient du chercheur qui a voulu profiter d'une déclaration d'un élève non apparemment suivie par le professeur pour lancer un débat devant permettre de susciter encore plus de tirages. En effet, pendant que tous les élèves déclaraient que le nombre de billes blanches calculé est trois, un élève a annoncé qu'il a trouvé un nombre décimal. Le chercheur a interrompu le professeur pour lui porter cette information : « Non ! Ils disent autre chose. Ils disent que ce sont des nombres à virgule ». En questionnant à nouveau les cinq groupes, le professeur s'est rendu compte que les élèves n'avaient trouvé que des nombres décimaux qu'ils ont librement arrondis. La recherche d'un nombre exact de nombre de billes blanches calculé devient ainsi l'occasion pour orienter les élèves vers la réalisation d'autres séries de tirages. Le deuxième événement est venu aussi du chercheur qui a pris la direction du débat lorsqu'il a remarqué que le professeur semblait ne pas aller dans le sens de faire réaliser davantage de tirages. Il interrompt à nouveau en déclarant : « on ne va pas évoluer dans ce sens ». En exploitant les propos du professeur, le chercheur a, dans un premier temps, orienté le débat vers l'établissement du tableau de la série statistique du cumul des tirages déjà effectués et comportant des lignes relatives aux nombres de billes blanches observées, la fréquence d'observation des billes blanches et le nombre de billes blanches contenues dans la bouteille. Ensuite le débat a évolué vers la réalisation des séries successives complémentaires de 20 tirages jusqu'à 200 tirages afin de vérifier si le nombre de billes blanches calculé est exactement 3. Le troisième événement de cet épisode est relatif au contrat didactique relatif aux nombres décimaux. Il s'agit d'un élève qui trouve qu'il suffit d'arrondir à l'unité près le nombre de billes blanches calculé pour obtenir une valeur exacte (Annexe 10, Lignes 269 et 270).

Prof : Maintenant qu'on n'a pas trouvé 3, on a trouvé 2 virgule, 3 virgule dans les groupes-là, pensez-vous que vous pouvez dire que dans les groupes c'est 3 ?

Élève E₇ : On peut arrondir.

Pour les élèves, c'est évident que c'est en arrondissant qu'on devrait avoir la valeur exacte du nombre de billes blanches contenues dans la bouteille, comme ils en ont l'habitude. Par contre, pour le chercheur et le professeur qui cherchent à susciter de plus en plus de tirages, la prise en compte de cette proposition de l'élève E₇ arrêterait d'emblée la poursuite de la réalisation des tirages.

2.2.2.3.5. Cinquième épisode (1 :13 :34 à 1 :48 :26)

Le cinquième épisode de cette séance, constitué d'un temps de travail en groupe, correspond encore au deuxième moment didactique, car avec la réalisation de plusieurs séries de 20 tirages,

la technique relevant du type de tâches T_3 est en cours d'élaboration. Le milieu antagoniste de l'élève demeure la machine de hasard qu'est la bouteille opaque contenant 5 billes. Le contrat didactique se traduit par l'autonomie des élèves à effectuer les tirages afin de réaliser le tableau de la série statistique du cumul des tirages. La responsabilité des élèves à exécuter la tâche et celle du professeur à laisser les élèves en autonomie didactique constituent les topos respectifs des élèves et du professeur. Le temps didactique d'une durée de 35 minutes environ n'est consacré qu'aux séries de tirages effectués.

Aucun événement n'a retenu notre attention dans le cinquième épisode, qui ne comporte qu'un temps de travail en groupe et un seul. Les résultats issus du travail en groupe sont prévus pour être présentés et analysés au début de la cinquième séance de la réalisation en classe de l'ingénierie didactique.

2.2.2.4. Bilan de la deuxième séance consacrée à la phase 2.1

La deuxième séance consacrée à la deuxième phase de la situation n°2 a permis aux élèves d'entrer réellement dans la technique souhaitée par le chercheur et le professeur pour résoudre le problème posé. Il y a eu quatre séries de retournement de bouteilles au cours de cette séance. Au niveau de l'exploitation des observations de la première série de retournements de bouteille, les raisonnements relevant du contrat didactique de l'ordre du « problème de l'âge du capitaine », constatés au cours de la première séance de la situation, ont évolué vers trois autres types de raisonnements plus cohérents, qui ont conduit à trois hypothèses de composition des bouteilles, savoirs : 2 billes blanches et 3 billes noires, 3 billes blanches et 2 billes noires, 4 billes blanches et 1 bille noire. L'un de ces raisonnements, basé sur la proportionnalité est particulièrement exploité par le professeur lors des discussions pour évoluer vers la technique visée consistant à étudier l'évolution de la fréquence d'observation d'une bille blanche. À partir de la deuxième série de retournement, tous les groupes ont pu faire une hypothèse commune de la composition de leur bouteille : 3 billes blanches et 2 billes noires. Cette composition obtenue à partir des valeurs approchées des nombres de billes blanches calculés porte en elle une incertitude dont la levée a entraîné de plus en plus de retournements des bouteilles. Sous la direction du professeur des tableaux statistiques du cumul des séries successives des résultats des retournements de bouteilles dans les cinq groupes.

2.2.3. Analyse de la phase 2.1 dans la troisième séance consacrée à sa réalisation

La troisième séance consacrée à la phase 2.1 de la situation n°2 a permis de poursuivre et de finaliser toujours la réalisation de la phase par la réalisation et l'interprétation des polygones de

fréquences des séries statistiques des cumuls des séries de tirages réalisées à la deuxième séance.

2.2.3.1. La trame de la séance

La troisième séance consacrée à la situation n°2 est découpée en sept moments élémentaires qui se détaillent comme ci-après (Annexe 11).

- 1) Un premier moment collectif d'une durée de 08'07 (0 :00 :12 à 0 :08 :19) : Introduction de la séance et explication d'une première consigne du jour relative à la réalisation des polygones des fréquences des séries statistiques obtenues dans les cinq groupes à partir du cumul des résultats des tirages effectués.
- 2) Un premier moment de travail en groupe d'une durée de 30'32'' (0 :08 :20 à 0 :38 :52) : Réalisation des polygones des fréquences à partir des observations de la troisième séance.
- 3) Un deuxième moment collectif d'une durée de 3'26'' (0 :38 :53 à 0 :42 :19) : Présentation des résultats des différents groupes à l'issue du premier moment du travail en groupe.
- 4) Un troisième moment collectif d'une durée de 8'30 (0 :42 :20 à 0 :50 :50) : Explication d'une deuxième consigne relative à la réalisation du polygone des fréquences du cumul des résultats des cinq groupes et lancement du deuxième temps de travail en groupe.
- 5) Un deuxième moment de travail en groupe d'une durée de 9'27'' (0 :50 :51 à 1 :00 :18) : Réalisation du polygone de fréquence du cumul des observations des cinq groupes.
- 6) Un quatrième moment collectif d'une durée de 12'39'' (1 :00 :19 à 1 :13 :08) : Présentation des résultats des différents groupes à l'issue du deuxième moment du travail en groupe.
- 7) Un cinquième moment collectif d'une durée de 4'41'' (1 :13 :09 à 01 :17 :50) : Institutionnalisation de la notion de probabilité d'un événement.

2.2.3.2. Organisation mathématique de la phase 2.1 dans la troisième séance de la deuxième situation

2.2.3.2.1. Type de tâches

Le type de tâches de la phase 2.1 comme nous l'avons précisé dans l'analyse de la séance précédente est T_3 : « déterminer la composition de la bouteille dans une situation d'expérience aléatoire précise ». Ce type de tâches est traduit par la question Q_5 de la situation 2 et les conditions matérielles définies dans la phase.

2.2.3.2.2. Technique et technologie

La technique relevant du type de tâche T_3 dans cette troisième séance de réalisation de la situation 2 fait logiquement suite à la technique incomplète utilisée dans la deuxième séance de la situation. Rappelons que cette technique incomplète a consisté à :

- Identifier l'expérience aléatoire consistant à retourner la bouteille pour noter la couleur de la bille apparue ;
- Réaliser des séries de 20 tirages ;
- Remarquer que le nombre de billes blanches contenues dans la bouteille s'obtient en multipliant 5 par la fréquence d'observation de billes blanches ;
- Réaliser le tableau statistique des fréquences du cumul des séries de tirages.

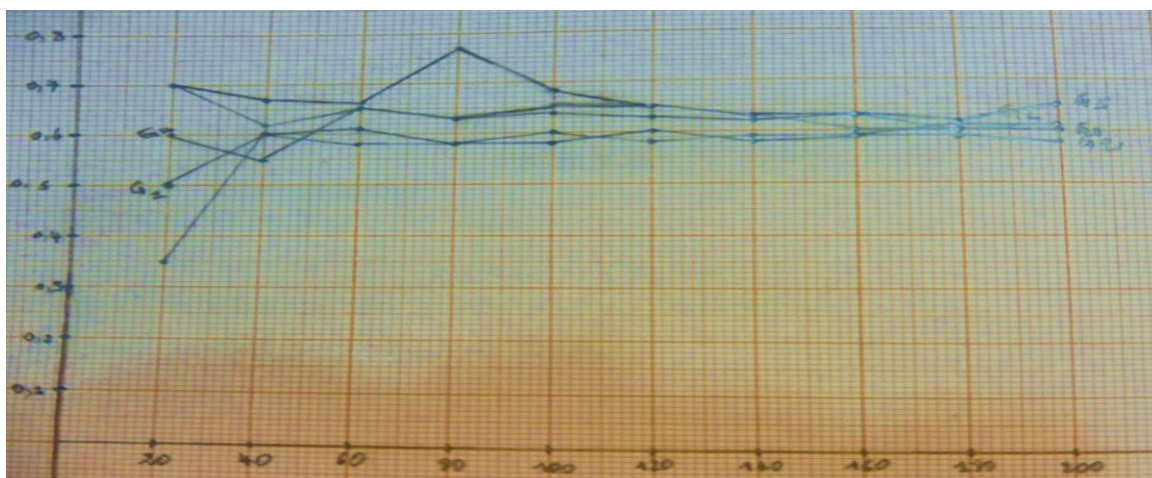
La suite de cette technique, qui est utilisée dans cette troisième séance a consisté à :

- Réaliser sur une même figure les polygones de fréquences des séries statistiques du cumul des séries de tirages obtenues à l'issue de la deuxième séance ;
- Conjecturer la limite de la fréquence d'observation des billes blanches lorsque le nombre de réalisations de l'expérience aléatoire est de plus en plus grand ;
- Calculer le nombre de billes blanches dans la bouteille en multipliant la limite conjecturée par 5.

La technologie de la deuxième séance est ainsi complétée dans cette troisième séance par la notion de polygone des fréquences d'une série statistique et la notion implicite de convergence d'une suite. Au niveau des élèves, la théorie qui justifie explicitement cette technologie est celle de la statistique.

En suivant la consigne du professeur qui les a invités à réaliser les graphiques dans cette séance, les élèves ont abandonné le calcul du nombre de billes blanches contenues dans chaque bouteille, au profit de la recherche de la certitude de leur hypothèse de composition de la bouteille. L'enjeu de la consigne est donc passé du nombre de billes blanches contenues dans chaque bouteille à l'évolution de la fréquence d'obtention de billes blanches pour des grands nombres de réalisations de l'expérience aléatoire. Deux sortes de figures sont alors réalisées par chacun des cinq groupes afin de conjecturer la limite de la fréquence d'observation des billes blanches. Dans un premier temps, les élèves ont représenté les polygones des fréquences des séries statistiques du cumul des séries de tirages réalisées par les cinq groupes. Les graphiques

ainsi réalisés par les cinq groupes sont identiques et se présentent comme dans la figure ci-dessous.



Graphique 01 : Polygones de fréquences des séries statistiques du cumul des tirages.

L'interprétation de ce graphique, où les polygones des fréquences sont juxtaposés, a conduit très tôt les élèves dans un effet Topaze à la conclusion que la limite de la fréquence relative est 0,6 comme on peut le constater dans l'échange ci-après (Annexe 11, Lignes 28 à 48).

Prof : Observez bien les graphiques que vous avez. Quelle interprétation vous en faites ?
C'est-à-dire, qu'est-ce que vous constatez sur ce graphique-là ?

Élève E₁₁ : On constate que les graphes se rencontrent sur leur itinéraire.

Prof : On constate que les graphes se rencontrent sur leur itinéraire. Qui a une autre interprétation ? Tout le monde a constaté que les graphes se rencontrent sur les itinéraires ?

Élèves : Oui.

Prof : Bien, lorsqu'ils se rencontrent, ils se rencontrent autour de quel nombre ?

Élève E₁₄ : 0,63.

Prof : Groupe 1, vous avez trouvé quel nombre ?

Élève E₃ : 0,6.

Prof : Là-bas ?

Élève E₆ : 0,5 à 0,7.

Prof : Ici ?

Élève E₁₁ : 0,5 à 0,7.

Prof : 0,5 à 0,7. Oui lorsqu'ils se rencontrent vraiment.

Élève E₁₁ : Ah ! 0,6.

Prof : Ici. Le groupe 4 ?

Élève : 0,6.

Prof : Groupe n°5 ?

Élève : Ils se croisent en 0,6.

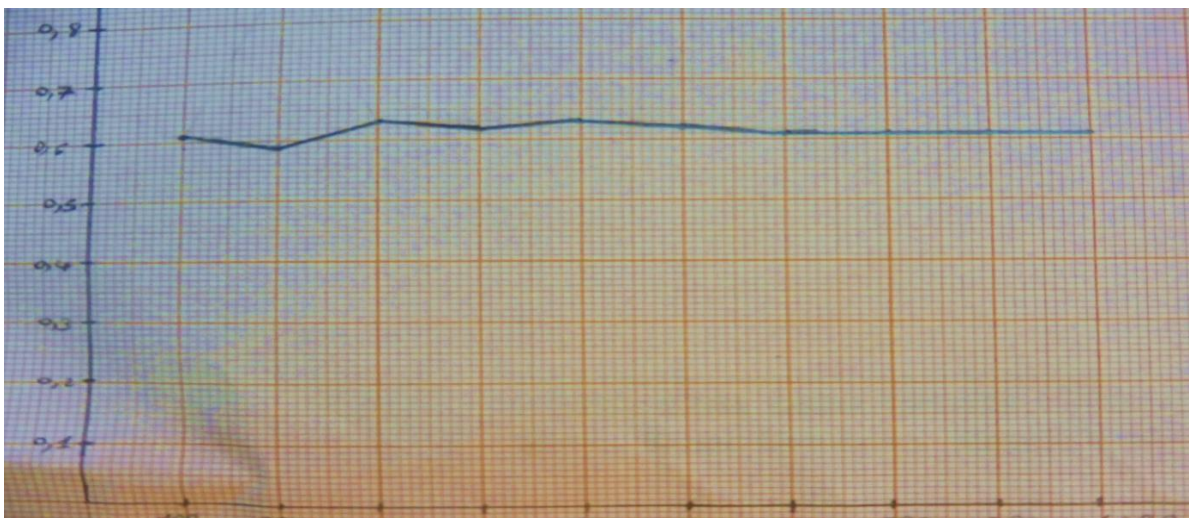
Prof : Donc on peut conclure que, enfin, les graphiques qu'on a construits tournent autour de 0,6. La fréquence des tirages tourne autour de 0,6. C'est ce qu'on peut conclure non ?

Élèves : Oui !

Dans cet échange, on voit bien comment le professeur a pratiquement amené les élèves à accepter que 0,6 est la limite de la suite des fréquences d'observation des billes blanches. En effet, il n'a pas trop le choix puisque la validation de la probabilité théorique obtenue par expérimentation pose problème comme l'a expliqué Assia Nechache (2016) dans sa thèse de doctorat.

Nous avons donné aux élèves de 3^e et de 2nde un exercice dans lequel il fallait déterminer la probabilité d'un événement, faisant appel à la simulation informatique. Après avoir expliqué certaines fonctions du tableur (logiciel Excel), les élèves ont effectué la tâche demandée et ont obtenu la probabilité cherchée. Certains élèves ont alors posé la question : « Comment prouver que la probabilité obtenue par la simulation est bien celle attendue ? » Nous avons répondu que cela n'était pas demandé et qu'il fallait admettre le résultat obtenu par l'expérience (p. 9).

Avec la réalisation du deuxième graphique constitué du polygone des fréquences des données cumulées des cinq groupes réunis, la limite conjecturée se précise davantage, comme le montre le graphique ci-dessous.



Graphique n°02 : Polygone des fréquences du cumul des observations des cinq groupes réunis.

Avec l'allure du graphique, il a été facile aux élèves d'admettre que la limite de la fréquence relative serait 0,6 lorsque l'expérience aléatoire serait réalisée un plus grand nombre de fois. En d'autres termes, la convergence de la fréquence relative vers 0,6 semble être une évidence pour la plupart des élèves, après l'effet Topaze intervenu au niveau de l'interprétation du premier graphique.

2.2.3.3. Analyse suivant la méthodologie des 4 composantes

La troisième séance de la deuxième situation est réalisée en 1 heure 18 minutes environ. Nous la décomposons en cinq épisodes représentant le premier, deuxième, troisième et cinquième moment didactique.

2.2.3.3.1. Premier épisode (0 :00 :12 à 0 :08 :19)

Dans cette séance, le premier épisode correspond au premier moment didactique, celui de la première rencontre avec la consigne du jour, qui est de réaliser les polygones des fréquences des séries statistiques du cumul des observations faites dans les cinq groupes. En effet, après une brève salutation adressée aux élèves, le professeur a rappelé la tâche dont l'accomplissement est en cours depuis la première séance de la situation n°2. Le dernier volet de l'accomplissement de cette tâche est la réalisation des polygones de fréquences en vue de la conjecture de la limite de la fréquence relative d'observation d'une bille blanche. Ce volet de la tâche est expliqué et précisé aux élèves par le professeur.

Dans ce premier épisode de la séance, le milieu de l'élève est constitué du support écrit de la consigne et du professeur. Le contrat didactique se caractérise chez l'élève par son effort à comprendre la consigne et chez le professeur par son intention de se faire comprendre par les élèves. La responsabilité de l'élève à écouter et celle du professeur à expliquer sont leurs topos respectifs. Quant au temps didactique, en attendant d'être pourvu en de nouvelles notions, il est constitué du rappel de la notion de polygone de fréquence.

Un événement est à signaler dans cet épisode. Il s'agit d'une intervention du chercheur, qui a complété l'explication du professeur pour préciser davantage les conditions de réalisation des graphiques. En effet, le professeur a conseillé aux élèves de réaliser les polygones des fréquences à partir du diagramme en bâtons. Agissant comme le deuxième professeur de la classe, le chercheur a proposé que l'on puisse se passer du diagramme en bâtons pour réaliser les polygones des fréquences. La proposition du chercheur est alors approuvée par le professeur. L'échange ci-dessous est un exemple de la manière dont le chercheur et le professeur s'entendent pour gérer la classe (Annexe 11, Lignes 11 à 13).

Chercheur : On peut se passer de bâtons hein.

Prof : Oui. On peut se passer des bâtons.

Chercheur : Puisque vous joignez les sommets des bâtons. Mais les sommets, on sait qu'on peut représenter les sommets directement. Nous allons nous passer des bâtons. [...]

Par la suite, le chercheur, le professeur et les élèves se sont entendus sur les échelles à utiliser sur les axes de coordonnées pour réaliser les graphiques.

2.2.3.3.2. Deuxième épisode (0 :08 :19 à 0 :42 :19)

Le deuxième épisode est composé de deux périodes correspondant respectivement à un temps de travail en groupe de 30 minutes et demie et à un temps de travail collectif de 3 minutes et demie. Il est à la fois le deuxième moment didactique et le troisième moment didactique. En fait, l'élaboration de la technique relevant du type de tâches T_3 se poursuit dans la troisième séance. Mais dans le même temps, l'imminence de l'aboutissement de la technique nous plonge dans le troisième moment didactique, qui est celui de la constitution du bloc technologico-théorique, constitué essentiellement de la définition de la probabilité d'un événement suivant la loi faible des grands nombres.

Le milieu antagoniste de l'élève est surtout composé des cinq tableaux des séries statistiques cumulatives des observations faites par les cinq groupes lors de la séance précédente et du papier millimétré pour la réalisation des polygones des fréquences. Le contrat didactique pendant le temps du travail en groupe est caractérisé par l'autonomie didactique accordée aux élèves et la non implication du professeur dans le travail des élèves. Lors du travail collectif, ce contrat est constitué de l'interprétation par les élèves des graphiques réalisés sous l'autorité du professeur et du chercheur. Les topos respectifs des élèves et du professeur sont faits de leurs responsabilités respectives à accomplir la tâche donnée et à faire interpréter les graphiques réalisés. Le temps didactique n'a pas connu d'évolution par rapport à l'épisode précédent.

Un événement heureux est à signaler dans cet épisode. Il est relatif à la convergence de la fréquence vers une valeur subjective représentant la probabilité de l'événement « la bille tirée est blanche ». En effet, il s'agit des termes spécifiques trouvés par les élèves pour interpréter les polygones de fréquences réalisés. Tout d'abord, c'est l'élève E_{11} , qui très tôt, a donné l'interprétation des courbes en ces termes : « les courbes se rencontrent sur leur itinéraire ». L'observation des polygones de fréquences représentés montre qu'ils s'entremêlent effectivement à plusieurs endroits. C'est ce que semble exprimer l'élève et non pas nécessairement la convergence, qui pourrait s'observer à partir de l'évolution collective des courbes vers une même asymptote. Mais cette interprétation a été la bonne occasion pour le

professeur pour orienter les élèves vers l'idée de convergence : « Bien, lorsqu'ils se rencontrent, ils se rencontrent autour de quel nombre ? ». Cette question a permis au professeur d'avoir l'avis des élèves sur la limite de la fréquence relative. Ces derniers ont fini très tôt par conjecturer la limite de la fréquence relative : « les courbes se rencontrent en 0,6 ». Le professeur a d'ailleurs choisi un langage proche de celui des élèves en expliquant dans son effet Topaze cette convergence de la fréquence relative par : « Donc on peut conclure que les graphiques qu'on a construits tournent autour de 0,6 ».

2.2.3.3.3. Troisième épisode (0 :42 :19 à 0 :50 :50)

Comme le premier épisode de la séance, le troisième épisode correspond au premier moment didactique, celui de la première rencontre avec la deuxième consigne de la séance : réaliser le polygone des fréquences du cumul des observations des cinq groupes. En fait, après la conjecture de la limite de la fréquence relative d'observation de billes blanches pour 200 tirages par groupe, il est question dans la deuxième consigne de confirmer cette limite en regroupant les données des cinq groupes pour atteindre mille tirages. L'introduction et l'explication de la consigne puis la réalisation du tableau de la série statistique du cumul des observations des cinq groupes ont abouti au lancement du temps de travail en groupe en vue de la réalisation du polygone des fréquences de la série statistique constituée.

Le milieu de l'élève dans ce troisième épisode de la séance est constitué du support écrit de la consigne et des dire du professeur. L'attention de l'élève à s'appropriier la consigne et l'intention du professeur à se faire comprendre constituent le contrat didactique chez l'élève et chez le professeur. Les responsabilités respectives d'écoute et d'explication sont les topos de l'élève et du professeur, qui ont en outre réalisé conjointement le tableau de la série statistique du cumul des observations des cinq groupes devant servir à répondre à la consigne dans le quatrième épisode. Le temps didactique n'a pas évolué dans cet épisode.

Dans le registre des événements, nous notons également dans cet épisode un événement qui semble problématique. À la question de savoir si la limite 0,6 conjecturée de la fréquence relative peut être confirmée avec de plus grands nombres de tirages, certains élèves ont dit non. Ceci semble remettre en cause la méthode utilisée pour conjecturer la limite, comme l'a fait souligner le chercheur dans l'échange suivant (Annexe 11, Lignes 58 à 62).

Chercheur : Si on continuait à faire encore plus de tirages, est-ce que les graphes, tels que ça évolue chez vous pour se rencontrer là, est-ce qu'on va constater que la valeur est vraiment 0,6 ?

Élèves : Non !

Chercheur : Mais d'où est-ce que vous tenez votre 0,6 alors ? Si on ne doit pas constater, où est-ce que vous avez obtenu votre 0,6 ?

Cet échange montre que la valeur 0,6 imposée par le professeur plus haut n'est pas comprise par tous les élèves comme la limite de la fréquence relative d'observation de bille blanche.

L'élaboration du tableau statistique du cumul des 1000 tirages effectués par l'ensemble des cinq groupes de la classe en vue de la confirmation ou de l'infirmité de la limite de la fréquence relative dans le quatrième épisode se justifie plus que jamais par ce doute émis par les élèves. Ce tableau statistique, qui servira à réaliser puis à interpréter le polygone des fréquences est élaboré comme il suit.

Nombre n de tirages	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
Fréquence f_n d'observation de billes blanches	0,61	0,595	0,633	0,625	0,63	0,625	0,614	0,614	0,612	0,615

Tableau n°35 : Tableau des fréquences du cumul des observations de l'ensemble des cinq groupes.

2.2.3.3.4. Quatrième épisode (0 :50 :51 à 1 :13 :08)

Comportant un temps de travail en groupe et un temps de travail collectif, le quatrième épisode de la troisième séance portant sur la phase 2.1, correspond à la fois au deuxième moment didactique et au troisième moment didactique. L'élaboration de la technique qui relève du type de tâches T_3 est toujours en cours et est dans sa phase finale. L'émergence du bloc technologico-théorique entamée dans le deuxième épisode de cette séance se poursuit dans ce quatrième épisode. Bien entendu, l'élément technologique en construction est la notion de probabilité d'un événement.

Le support écrit de la deuxième consigne, le tableau statistique élaboré dans le troisième épisode constitue l'essentiel du milieu antagoniste de l'élève dans ce quatrième épisode. Le contrat didactique et les topos sont les mêmes que ceux indiqués dans le deuxième épisode. Le temps didactique est resté statique en attendant le constat de son évolution

Quatre événements importants sont à distinguer dans cet épisode à l'issue duquel l'élément technologique visé par l'ingénierie didactique est construit. Le premier événement est un événement heureux qui est relatif à la confirmation de la limite conjecturée dans le troisième épisode. Le premier élève à se prononcer sur l'interprétation du polygone des fréquences (élève E_4 du groupe n°1) a indiqué avec un air très confiant que la fréquence relative

converge vers 0,6 : « On a constaté que ça tourne autour de 0,6 ». Cette valeur indiquée par quatre groupes sur les cinq qui constituent la classe est pratiquement imposée au seul groupe qui a proposé une valeur différente de 0,6 : « On constate que ça tourne autour de 0,61 ».

Le deuxième événement vient d'un doute soulevé par le même élève E₄, qui en absence d'un graphique estime que la valeur limite 0,6 conjecturée ne peut pas être nécessairement atteinte si le nombre de tirages devenait plus grand que 1000, comme on peut le constater dans la conversation ci-après (Annexe 11, Lignes 85 à 91).

Prof : À 200, on a trouvé 0,6. À 1000, on a trouvé que ça tourne autour de 0,6. Selon vous, est ce que si on évolue, ça va changer ?

Élèves : Non, oui.

Prof : D'accord ? On a remarqué qu'à chaque fois, ça va tourner autour de 0,6.

Chercheur : Tu dis que ça peut changer.

Élève E₄ : Oui. Ça peut changer comme ça ne peut pas changer.

Ce qui montre qu'au niveau de certains élèves dont l'élève E₄, la loi faible des grands nombres, qui est l'enjeu de la deuxième situation et même de toute l'ingénierie n'est pas encore une réalité. Cependant, il est bien possible l'élève ait raison de penser qu'avec un plus grand nombre de tirages que la limite évolue vers un autre nombre proche de 0,6. Les explications du chercheur qui ont suivi ont permis de faire montrer aux élèves que la valeur 0,6 trouvée est une valeur théorique et non pas une valeur effectivement observée.

Le troisième événement montre une certaine évolution du rapport de l'élève E₄ par rapport à la loi des grands nombres. En fait, suite à la question du chercheur de savoir pourquoi les nombres de billes blanches, qui avaient été déterminés sont des nombres décimaux et non pas des nombres entiers naturels, l'élève E₄ a répondu : « Il y avait virgule, parce que le nombre de tirages était peu ». C'est la preuve que les élèves sont conscients que la détermination du nombre de billes blanches contenues dans les bouteilles passe nécessairement par la réalisation de grands nombres de tirages.

Le quatrième événement de cet épisode est une fois encore relatif à la valeur limite de 0,6 conjecturée et confirmée. La suite des fréquences F_n d'observation de billes blanches semble être une suite décroissante pour l'élève E₂, qui craint donc que la valeur limite soit inférieure à 0,6 si on augmentait le nombre de tirages.

Ce que j'aimerais demander, au départ le nombre obtenu est plus élevé que 0,6. Maintenant en augmentant, ça tourne autour de 0,6. Je me demande, si en augmentant plus, ça ne va pas s'abaisser que 0,6 (Annexe 11, Ligne 135).

Dans le rôle d'enseignant, le chercheur a montré qu'il n'y avait pas de décroissance de la fréquence relative mais plutôt une fluctuation des valeurs de cette fréquence.

2.2.3.3.5. Cinquième épisode (1 :13 :09 à 1 :17 :59)

Le cinquième épisode consacre l'atteinte de l'objectif principal de la situation n°2, à savoir : donner du sens à la notion de la probabilité d'un événement. Il correspond au moment d'institutionnalisation (Chevallard, 1999). Le professeur a présenté dans cet épisode le bilan du résultat principal de la phase 2.1, qu'il a justifié par l'introduction de la notion de la probabilité d'un événement à partir de la loi faible des grands nombres.

Dans cet épisode, le milieu de l'élève est réduit aux discours du professeur. En communiquant et en faisant noter le savoir construit, le professeur assume son topos devant l'élève, qui est resté dans son rôle d'attention en vue de la compréhension du message du professeur. Au niveau de l'élève, le contrat didactique est sa reconnaissance de la construction antérieure du savoir présenté par le professeur. L'évolution du temps didactique est perceptible par la présentation de la notion de probabilité par le professeur et la prise de note effective des élèves de cette notion en voie de construction.

Deux événements dont un heureux et l'autre problématique sont à noter dans le cinquième et dernier épisode de la troisième séance consacrée à la réalisation en classe de la deuxième situation de l'ingénierie. Le premier événement concerne l'idée que le professeur fait avoir de grands nombres. Il fait comprendre aux élèves que les grands nombres ne s'arrêtent pas juste à des milliers d'unités, renforçant ainsi la notion de limite, nécessaire au sens que l'on peut donner à la probabilité d'un événement : « Les grands nombres dont je parle, ce n'est pas 1000, 2000 hein. Ça peut aller à peut-être mille milliards ».

Le deuxième événement est problématique et provient également du professeur, qui en clôturant la séance, a donné une idée non précise de la notion de probabilité d'un événement semblant contredire ainsi l'idée qu'il venait de soutenir dans le premier événement. Il définit en fait la probabilité d'un événement comme la fréquence d'observation de cet événement pour un grand nombre de réalisations de l'expérience aléatoire (Annexe 11, Ligne 141).

Donc, voilà la leçon qu'on a tirée. Lorsqu'on a une expérience aléatoire et un événement, la probabilité de cet événement, c'est la fréquence d'observation, c'est la fréquence d'apparition ou de réalisation de cet événement lorsqu'on réalise un très grand nombre de fois l'expérience aléatoire. C'est ce qu'on va écrire comme notre synthèse du jour.

La synthèse du jour apprêtée par le chercheur pour le professeur ne définit pas cette fréquence comme la probabilité de l'événement mais comme une estimation de cette probabilité. L'entretien de fin de séance entre le professeur et le chercheur a permis à ces derniers de s'entendre sur la notion enseignée.

2.2.3.4. Bilan de la troisième séance consacrée à la réalisation de la phase 2.1.

Pendant la troisième séance consacrée à la phase 2.1, la technique de détermination de la composition des bouteilles, entamée dans la deuxième séance, est complétée pour atteindre la technique visée pour cette phase. Il s'est agi pour les élèves de représenter par des polygones de fréquences les séries statistiques du cumul des tirages établies par les cinq groupes de la classe. Dans un premier temps, les cinq polygones de fréquences sont réalisés sur un même graphique pour observer et conjecturer la limite de la fréquence F_n de réalisation de l'événement « obtenir une bille blanche » lié à l'expérience aléatoire « tirer une bille dans la bouteille ». La limite conjecturée après interprétation du graphique est 0,6. Dans un deuxième temps, les élèves ont réalisé sur un deuxième graphique la série statistique du cumul des tirages des cinq groupes réunis. La limite conjecturée est alors confirmée et le nombre et la composition des bouteilles a pu être déterminée, mais avec toujours d'incertitude, puisque l'expérimentation ne peut être substituée à la démonstration déterministe à laquelle les élèves sont jusque-là habitués. Si les graphiques sont réalisés par les élèves en autonomie didactique, leur interprétation en vue de la conjecture de la fréquence limite, est faite sous la direction du professeur à l'aide des questionnements de type maïeutique.

En bref, la troisième séance de la phase 2.1 a conduit à l'achèvement de la technique de détermination de la composition de la bouteille dont l'enjeu est la définition de la probabilité d'un événement.

2.2.4. Analyse de la phase 2.2 de la situation n°2

La réalisation de la phase 2.2 a eu lieu lors de la quatrième séance de la situation n°2 pendant laquelle la phase 2.3 a été aussi réalisée. Avec la phase 2.2, les élèves ont repris le processus qui permet la mise en évidence de la probabilité d'un événement associé à une expérience aléatoire reproductible.

2.2.4.1. La trame de la phase

La phase 2.2 de la situation n°2 a été réalisée suivant la suite des sept moments élémentaires ci-après (Annexe 12, Lignes 1 à 323).

- 1) Un premier moment collectif d'une durée de 01'24 (0 :00 :03 à 0 :01 :27) : Introduction de la séance
- 2) Un deuxième moment collectif d'une durée de 07'36 (0 :01 :27 à 0 :09 :03) : Rappel des résultats de la troisième séance de la situation.
- 3) Un troisième moment collectif d'une durée de 16'30 (0 :09 :03 à 0 :25 :33) : Institutionnalisation de la notion de probabilité d'un événement selon la loi faible des grands nombres.
- 4) Un quatrième moment collectif d'une durée de 1'37 (0 :25 :33 à 0 :27 :10) : Lecture et explication de la consigne de la phase 2.2. consacrée à la question Q₆.
- 5) Un premier moment de travail en groupe d'une durée de 55'59'' (0 :27 :10 à 01 :23 :09) : Réalisation de tirages et leur exploitation en vue de répondre à la consigne de la phase 2.2 consacrée à la question Q₆.
- 6) Un cinquième moment collectif d'une durée de 18'26'' (01 :23 :09 à 01 :41 :35) : Présentation des résultats des différents groupes à l'issue du premier moment du travail en groupe.
- 7) Un sixième moment collectif d'une durée de 9'53 (01 :41 :35 à 01 :51 :28) : Récapitulation des résultats issus du premier moment du travail en groupe dans un tableau (suite du cinquième moment collectif)

2.2.4.2. Organisation mathématique construite dans la phase 2.2

2.2.4.2.1. Type de tâches

Le type de tâches de la phase 2.2 est identique à celui de la phase 2.1 qui est le type de tâches T₃ : « déterminer le nombre de billes blanches contenues dans la bouteille dans une situation d'expérience aléatoire précise ». Il est traduit par la question Q₆ intitulée « Estimez la probabilité de l'événement A, puis déduisez-en le nombre de billes blanches contenues dans la bouteille de votre groupe ».

2.2.4.2.2. Technique et technologie relevant du type de tâches T₃ dans la phase 2.2

Dans la phase 2.2, les nombres corrects de billes contenues dans les bouteilles sont déterminés dans les groupes respectifs, à l'exception du groupe n°4 où les résultats sont biaisés suite à des décomptes mal effectués. Les élèves ont spontanément effectué des séries de tirages de taille constante afin d'étudier l'évolution de la fréquence d'obtention d'une bille blanche. Comme nous le constatons, au lieu de s'arrêter au calcul de la fréquence d'obtention d'une bille blanche après la réalisation d'un assez grand nombre de tirages, la totalité des groupes a réalisé le

polygone des fréquences pour conjecturer la probabilité d'obtention d'une bille blanche. Aucun des groupes n'a pu donc utiliser une technique pour estimer la probabilité comme le recommande la question Q₆ à laquelle ils prétendent répondre. Ils ont dû certainement être influencés par le fait qu'on leur a remis de papier millimétré. En dehors du groupe n°5 pour lequel la fréquence d'observation de billes blanches est constante et égale à l'unité, les conjectures faites par les élèves sont des valeurs approchées des fréquences observées égales respectivement à 0,2 ; 0,4 pour les deux premiers groupes de la classe et 0,6 pour les groupes n°3 et n°4. Comme cela a été le cas dans la phase précédente, les élèves ont certainement préféré les valeurs approchées pouvant leur permettre d'obtenir un nombre entier de billes blanches et qui sont ici des fractions de la forme $\frac{nb}{5}$

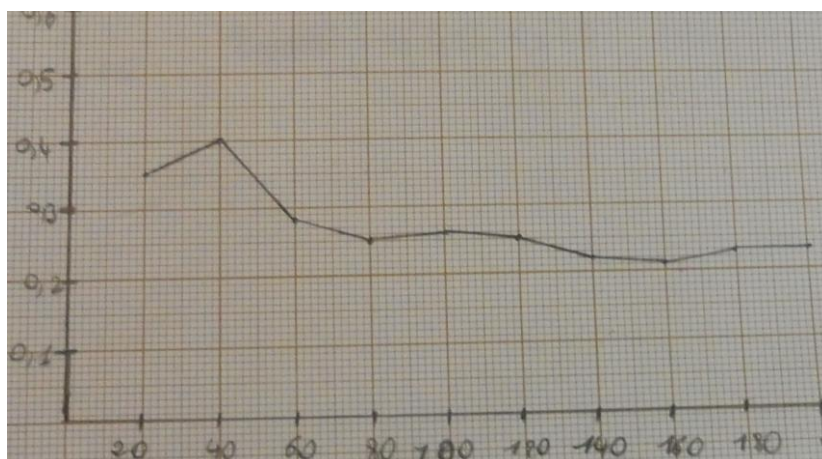
La résolution de la question Q₆ montre ainsi chez les élèves l'existence d'une seule technique relevant du type de tâches T₃ dans la réalisation en classe de la phase 2.2 de la situation n°2. Il s'agit de la technique visée puis construite tout au long de la phase 2.1 et qui se décline de la façon suivante :

- Identifier l'expérience aléatoire et l'événement ;
- Réaliser des séries de retournements pour noter le nombre de fois qu'une bille blanche est observée ;
- Réaliser le tableau des fréquences du cumul des séries de tirages ;
- Réaliser le polygone des fréquences ;
- Conjecturer la probabilité de l'événement « la bille observée est blanche » ;
- Déterminer le nombre de billes blanches contenue dans la bouteille en utilisant la probabilité conjecturée.

La technologie de cette technique est constituée des notions d'expérience aléatoire et d'événement, de la notion de fréquence et de la loi faible des grands nombres. L'approche fréquentiste de la définition de la probabilité d'un événement est la théorie qui intègre cette technologie, théorie qui est institutionnalisée au début de la séance et ceci après le rappel de la méthode utilisée pour trouver la composition des bouteilles dans la phase 2.1.

Les polygones des fréquences réalisés par les cinq groupes pour arriver à ces conjectures sont présentés ci-dessous.

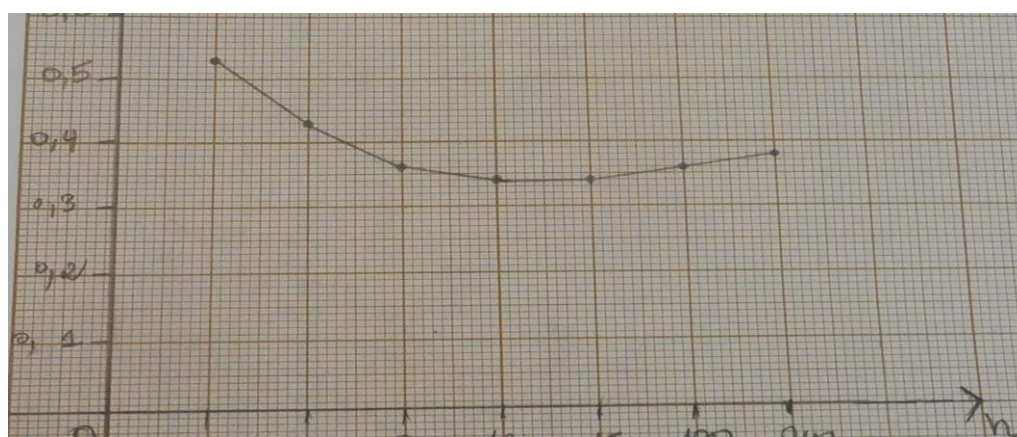
Polygone des fréquences réalisé par le groupe G₁



Graphique n°03. : Polygone des fréquences réalisé par le groupe G₁ dans la phase 2.2.

Après 200 tirages, les élèves du groupe G₁ ont obtenu une estimation de la probabilité égale à 0,23, mais ils ont préféré communiquer la valeur 0,21 obtenu après 140 tirages et qui est le plus proche possible de 0,2.

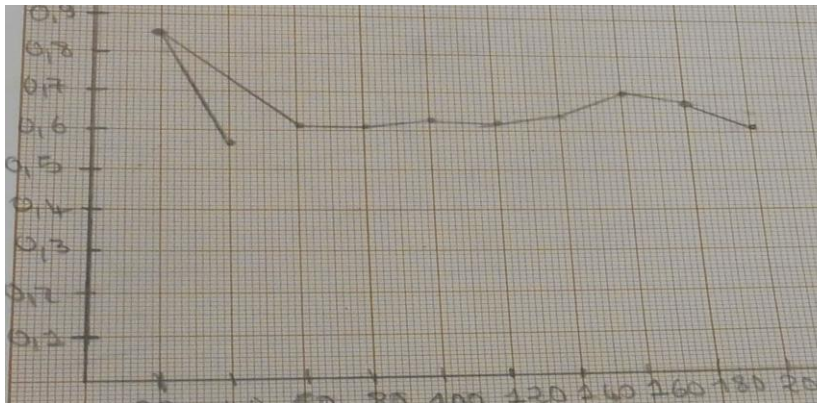
Polygone des fréquences réalisé par le groupe G₂



Graphique n°04 : Polygone des fréquences réalisé par le groupe G₂ dans la phase 2.2.

Cette courbe réalisée par les membres du groupe G₂ semble indiquer la droite d'équation $y = 0,4$ comme asymptôte confirmant bien leur interprétation selon laquelle 0,4 est la probabilité de l'événement « obtenir une bille blanche ».

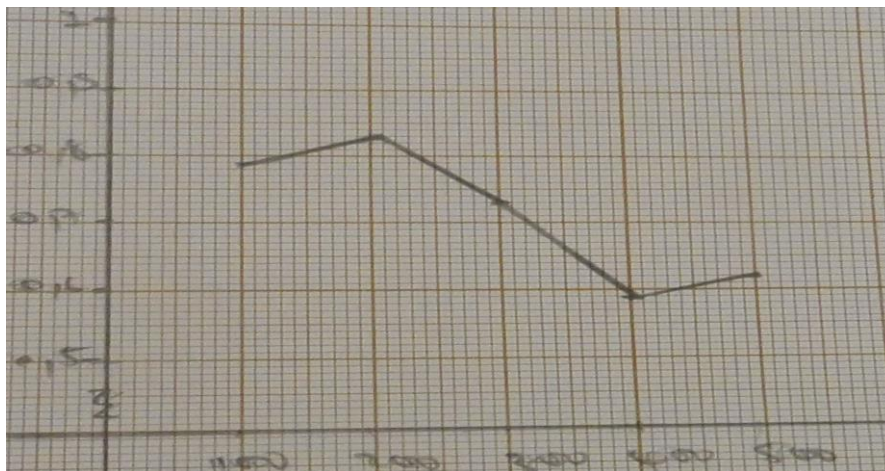
Polygone des fréquences réalisé par le groupe G₃



Graphique n°05 : Polygone des fréquences réalisé par le groupe G₃ dans la phase 2.2.

Même avec un début incorrect, la courbe réalisée par les membres du groupe G₃ montre une estimation de la probabilité à 0,6 après 200 tirages et semble indiquer une évolution de la fréquence vers 0,6, qui est considéré à juste titre comme la probabilité recherchée.

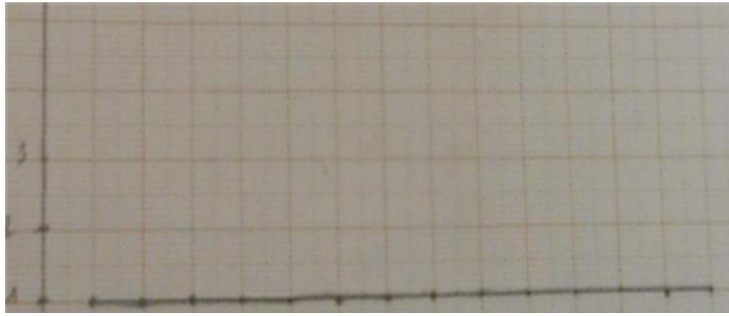
Polygone des fréquences réalisé par le groupe G₄



Graphique n°06 : Polygone des fréquences réalisé par le groupe G₄ dans la phase 2.2.

Contrairement aux courbes réalisées dans les autres groupes, ce polygone des fréquences, réalisé par les membres du groupe G₄ ne montre pas encore la convergence de la fréquence vers un nombre réel donné, encore moins vers 0,6. Nous avons fait l'hypothèse d'un manque de concentration dans ce groupe pour décompter les billes observées.

Polygone des fréquences réalisé par le groupe G₅



Graphique n°07 : Polygone des fréquences réalisé par le groupe G₅ dans la phase 2.2.

Sans doute, le polygone des fréquences construit au niveau du groupe G₅ est une droite parallèle à l'axe des abscisses, montrant de façon évidente la convergence vers 1.

Le tableau suivant est le tableau récapitulatif des résultats obtenus à l'issue de la phase 2.2.

Groupes	Groupe 1	Groupe 2	Groupe 3	Groupe 4	Groupe 5
Nombre de tirages effectués	200	210	200	500	300
Estimation de la probabilité de tirer une bille blanche	0,21	0,38	0,61	-	1
Probabilité de tirer une bille blanche	0,2	0,4	0,6	0,8	1
Nombre de billes blanches	1	2	3	4	5
Nombre de billes noires	4	3	2	1	0

Tableau n°36 : Tableau récapitulatif des compositions des bouteilles dans la phase 2.2.

2.2.4.3. Analyse de la phase 2.2 suivant la méthodologie des 4 composantes

La réalisation en classe de la deuxième phase de la situation n°2 comporte sept épisodes, qui correspondent à divers moments didactiques.

2.2.4.3.1. Premier épisode (0 :00 :03 à 0 :09 :03)

Le premier épisode de la quatrième séance de la deuxième situation est un moment d'évaluation au sens de Chevallard (1992). En effet après l'introduction brève de la séance, le professeur a invité les élèves à rappeler ce qui avait été fait au cours de la séance précédente qui a connu l'aboutissement de la notion de probabilité d'un événement.

Le milieu antagoniste de l'élève est le plus simple possible, car constitué uniquement des discours du professeur. Le contrat didactique se caractérise chez l'élève par le point qu'il fait de la notion de probabilité d'un événement qu'il avait étudiée auparavant. L'évaluation du rapport personnel des élèves à la notion étudiée constitue le contrat didactique au niveau du professeur. En conséquence, la responsabilité de l'élève à faire le point de la construction de la notion de probabilité d'un événement et celle du professeur à poser des questions et à écouter l'explication de l'élève, constituent les topos respectifs des deux parties. Quant au temps didactique, il est composé de la description de la technique ayant permis d'obtenir le nombre de billes blanches contenues dans les bouteilles.

Trois événements sont à signaler dans cet épisode. Le premier événement est relatif à une intervention du professeur, qui exprime au début de la séance sa désolation par rapport aux absences constatées : « je suis un peu peiné de voir qu'il y a des gens qui manquent à cet événement ». En fait, la dernière séance de la réalisation de la deuxième situation a connu le plus grand nombre d'absents : 4 absents sur les 17 élèves que compte la classe. Pour corriger cet état de chose, le chercheur a invité à la fin de la séance les élèves présents à sensibiliser les absents afin qu'ils soient tous présents aux séances suivantes. Le deuxième événement que nous qualifions de malheureux est relatif à une autre intervention peu courtoise du professeur, qui devant un certain mutisme des élèves, a voulu les amener à prendre la parole en leur disant : « Qu'est-ce qu'on a fait ? De quoi on a parlé ? Ou bien hier on s'est regardé seulement ? ». La dernière phrase de cette intervention, qui ne paraît pas courtoise, est un fait courant mais aussi banal dans l'enseignement au Bénin. Il arrive qu'on note certaines paroles quelque peu déplacées de la part du professeur vis-à-vis des élèves qui ne devraient pas trop mettre ces derniers en confiance. Le comportement du professeur fait donc partie des régularités malheureuses de l'enseignement au Bénin. Le troisième événement que nous qualifions d'heureux provient d'un élève qui met l'accent sur le grand nombre de tirages effectués pour conjecturer la probabilité d'apparition d'une bille blanche. En effet, répondant à une question du professeur, l'élève E₆ a déclaré ceci : « On a fait beaucoup de tirages ». Le nombre de tirages fait est précisé plus tard dans la conversation suivante (Annexe 12, Lignes 40 à 51) :

Élève E₆ : Parce que l'autre a dit, quand on a fait le tirage, on a représenté le polygone des fréquences sur un papier millimétré. On a vu la fréquence autour de laquelle tournent les résultats de chacun des cinq groupes, puis

Prof : On a observé la fréquence autour de laquelle tournent toutes les autres fréquences.

C'est ça ?

Élève E₆ : Oui !

Prof : Et combien de fois on a fait ça avant de trouver ça ?

Élève E₆ : Un grand nombre.

Prof : Dites ce qu'on a fait hier non ! Ce qu'on a fait hier là, c'est ça que je veux.

Élève E₆ : On a fait 200 fois.

Prof : 200 fois par ?

Élèves : par groupe.

Prof : Et après ?

Élève E₆ : On a agencé, on a agencé le tout et ça a donné jusqu'à 1000.

Cette conversation, qui est un témoignage d'un certain rapport des élèves au sens de la notion de probabilité d'un événement, montre que la tendance de la fréquence relative est déjà remarquable à partir de 200 tirages. Elle devient de plus en plus précise lorsque le nombre de tirages augmente.

2.2.4.3.2. Deuxième épisode (0 :09 :03 à 0 :25 :33)

Le deuxième épisode de cette séance est un moment didactique d'institutionnalisation. La notion de probabilité construite dans la première phase de la deuxième situation pendant trois séances est formalisée dans cet épisode par le professeur. L'évolution observée de la fréquence d'apparition d'une bille blanche vers 0,6 est donc justifiée par la technologie appropriée qui est celle de la loi faible des grands nombres.

Le milieu de l'élève est réduit aux apports et questions du professeur. Le contrat didactique impose au professeur de communiquer sur le savoir en jeu, et à l'élève de s'en approprier. Le temps didactique dans cet épisode a évolué avec la définition de la probabilité d'un événement et celle de son estimation.

Un événement problématique est à signaler au profit de cet épisode. Il s'agit d'une confusion que le professeur semble faire entre la probabilité d'un événement et l'estimation de cette probabilité. En effet en commentant la définition de la probabilité d'un événement suivant la loi faible des grands nombres, définition qu'il venait d'écrire au tableau, le professeur a déclaré que la probabilité obtenue par les élèves après l'interprétation des polygones de fréquences n'est qu'une estimation de cette probabilité.

On a dit qu'on avait fait 1000 tirages et hier on s'était posé la question, si on allait à 5000, 10000, 20000, 30000. D'accord ? Est-ce qu'on allait obtenir la même chose ? On avait conclu que oui. Parce qu'à chaque fois qu'on allait, ça se précisait. Mais est-ce que les grands nombres s'arrêtent à 30000 ? Il faut aller à un million, un milliard. Est-ce qu'on a la possibilité de faire ça. Même le temps ne nous suffirait pas. D'accord ? Et lorsqu'on

arrive à faire cette construction pour donner à peu près, d'accord, cette fréquence, on dit que la fréquence qu'on obtient n'est pas la probabilité. C'est juste une estimation de cette probabilité. D'accord ? Le nombre 0,6 qu'on a obtenu, on dirait pour l'instant que ce n'est pas la probabilité (Annexe 12, Ligne 82).

Contrairement à cette déclaration du professeur, le nombre 0,6 obtenu après l'interprétation des polygones de fréquences n'est pas une fréquence calculée pour être considéré comme une estimation de la probabilité de l'événement « la bille observée est blanche ». Afin d'éviter l'installation chez les élèves d'un obstacle didactique à ce niveau, le chercheur et le professeur se sont retirés pour se mettre d'accord sur les formulations à proposer. Ils sont aussitôt revenus sur l'explication pour corriger l'erreur.

2.2.4.3.3. Troisième épisode (0 :25 :33 à 0 :27 :10)

Le troisième épisode de cette dernière séance de la deuxième situation correspond au premier moment didactique, le moment de la première rencontre du type de tâches T₃: « estimer la probabilité d'un événement », précisé à travers le spécimen « Estimez la probabilité de l'événement A, puis déduisez-en le nombre de billes blanches contenues dans la bouteille de votre groupe », A étant l'événement « la bille tirée est blanche ».

Dans cet épisode, le milieu de l'élève est composé du support écrit et des discours du professeur. L'appropriation de la consigne en vue de sa résolution chez les élèves et l'explication de la consigne aux élèves constituent le contrat didactique respectivement au niveau des élèves et du professeur. Les topos se confondent aux responsabilités respectives du professeur et des élèves à faire lire et expliquer la consigne, et à lire la consigne. Ici, le temps didactique n'a pas connu d'évolution.

Un événement a attiré notre attention dans cet épisode. Il est relatif à des indications que le chercheur a donné aux élèves par rapport à leur manière très énergique d'agiter la bouteille et par rapport à des tentatives de tricherie dans un groupe d'élèves. C'est donc pour repreciser le contrat et pour éviter des résultats biaisés que le chercheur s'est donc adressé aux élèves.

Il ne faut pas secouer avec toute la force qu'on a. Parce que certains ont failli casser les billes. Pour le groupe n°2, on a mis un peu de peinture quelque part sur la bouteille, parce que ça a été gratté un peu. Ne grattez pas les bouteilles (Annexe 12, Ligne 99).

En fait, en apprêtant les bouteilles pour la séance, le chercheur a remarqué que certaines billes sont dégradées suite à l'énergie déployée pour agiter les bouteilles. De même, la bouteille du groupe n°2 a été légèrement grattée, certainement dans le but d'observer l'ensemble des

billes contenues dans la bouteille. La partie grattée, qui ne permet néanmoins pas de voir les billes contenues dans la bouteille, a dû être recouverte de peinture, de même les billes dégradées ont été remplacées.

2.2.4.3.4. Quatrième épisode (0 :27 :10 à 1 :51 :28)

Le quatrième épisode de cette séance comporte un temps de travail en groupe et un temps de travail collectif. Il correspond à la fois au deuxième moment didactique et au moment d'évaluation par rapport au type de tâches T_3 . En effet, les élèves ont évidemment élaboré une technique pour accomplir la tâche de la phase 2.2, mais cette technique avait été déjà construite pendant l'accomplissement de la tâche de la phase 2.1 précédente. En clair, l'accomplissement de la tâche de la phase 2.2 en cours est une occasion d'évaluation dans les groupes de la technique mise sur place auparavant.

Pour chaque groupe d'élèves, en dehors du support écrit de la consigne et des discours du professeur, une bouteille opaque contenant 5 billes d'au plus deux couleurs différentes (blanc et noir) constitue l'essentiel du milieu antagoniste physique de l'élève. Chez l'élève, le contrat didactique se caractérise par la recherche de solution à la consigne, en autonomie didactique pendant le temps de travail en groupe et la présentation des résultats issus du travail en groupe à la classe. La non implication du professeur dans l'accomplissement de la tâche par les élèves pendant le temps de travail en groupe, et sa direction des discussions pendant le temps de travail collectif, constituent son contrat didactique. Les topos de l'élève et du professeur pendant le temps de travail en groupe sont remarquables à travers la responsabilité du premier à travailler en groupe et en autonomie et celle du second à circuler de groupe en groupe pour voir ce qui se fait dans les groupes. Quant au temps du travail collectif, le rôle de l'élève à communiquer les résultats trouvés en groupe et le recueil de ces résultats par le professeur en vue des discussions autour constitue les topos de l'élève et du professeur. Le temps didactique dans cet épisode est composé de la détermination du nombre de billes blanches dans la bouteille de chaque groupe, la communication des résultats à la classe entière et la récapitulation de ces résultats dans un tableau en vue d'apprêter un élément important du milieu de l'élève dans la phase suivante.

Nous avons identifié quatre événements dans ce quatrième épisode que nous présentons dans les paragraphes suivants. Le premier événement vient d'un élève du groupe n°1. C'est juste un lapsus au niveau de cet élève qui prononce le nombre 0,1 à la place de 1 : « Pour trouver 0,1, on a fait la probabilité qui est 0,2 fois Oméga qui est 5 ». Cette erreur n'a pas pu être remarquée par le professeur, qui en faisant le point a bien précisé que le groupe a obtenu une bille blanche.

Le deuxième événement est un événement problématique relatif aux résultats des élèves du groupe n°4, qui ont effectué 500 tirages et qui n'ont pas pu constater la stabilité de la fréquence d'obtention de bille blanche comme l'indique le tableau statistique suivant de leurs tirages.

Nombre de tirages	100	200	300	400	500
Fréquence de billes blanches	0,79	0,83	0,73	0,59	0,62

Contrairement à ces résultats du groupe n°4, les tirages faits jusque-là ont montré une certaine stabilité de la fréquence relative à partir de 200 tirages. Ce manque de stabilité dans les résultats du groupe n°4 a fait dire au chercheur qu'il y a manque de concentration dans le comptage. Ce que certains membres du groupe ont reconnu lorsque les bouteilles ont été ouvertes.

Le troisième événement souligne une contradiction glissée dans la consigne soumise aux élèves et relevée par l'élève E₁₄, à partir des résultats du groupe n°5 dans lequel le nombre de billes blanches trouvé est 5 : « Si selon eux, il y a 5 billes blanches, ça veut dire que dans le contexte, ça ne va pas, puisqu'il y a d'autres qui sont de couleur noire ». En effet, bien qu'il y ait été précisé dans le support écrit que les bouteilles contiennent des billes de deux couleurs différentes, la bouteille du groupe n°5 contient 5 billes toutes blanches. Nous pensons que cette contradiction relevée par l'élève E₁₄ n'a pas besoin d'être corrigée car une telle correction peut entraîner la réalisation d'un petit nombre de tirages chez les groupes dont les premiers tirages donneraient des billes de même couleur.

Le quatrième événement est l'ouverture des bouteilles pour une confrontation entre les nombres de billes blanches trouvés dans les groupes et ceux des billes contenues effectivement dans les bouteilles. En effet, face aux résultats biaisés du groupe G₄, le chercheur a proposé que les bouteilles soient ouvertes : « Ouvrez les bouteilles maintenant pour qu'on voit si vous avez dit la vérité ». Une fois les bouteilles ouvertes, les membres du groupe G₄ qui avaient trouvé par calcul 3 billes blanches ont découvert 4 billes blanches dans leur bouteille. Quant aux autres élèves, ils étaient très contents d'avoir pu déterminer la composition effective de leurs bouteilles respectives. Cet événement est heureux dans le sens qu'il constitue une validation empirique de la méthode utilisée à partir des rétroactions des milieux.

2.2.4.4. Bilan de la phase 2.2

Commencée par un rappel de la technique visée et progressivement construite qui a abouti à l'institutionnalisation de la probabilité d'un événement à partir de la loi faible des grands nombres, la phase 2.2 est une évaluation de cette technique construite. Les élèves ont immédiatement effectué des séries de retournements de bouteilles de même taille mais variable selon les groupes : 20 pour trois groupes, 30 pour un groupe et 100 pour un autres. Les séries statistiques des cumuls des observations ont servi à réaliser le polygone des fréquences, dont l'interprétation conduit à conjecturer la probabilité d'obtention d'une bille blanche dans chaque groupe. En dehors d'un groupe où les observations auraient été mal notées, les graphiques de tous les autres groupes les ont conduits à des réponses correctes de la composition des bouteilles, qui ont été ouvertes à la fin dans le cadre d'une validation empirique des résultats trouvés.

2.2.5. Analyse de la phase 2.3 de la situation 2

Conçue pour faire une première rencontre avec le premier principe de Laplace, la réalisation de phase 2.3 a permis aux élèves d'anticiper sur le premier principe de Laplace en exploitant les résultats de la phase 2.2.

2.2.5.1. Trame de la phase 2.3.

La réalisation de la phase 2.3 comporte sept moments de travail que nous déclinons comme suit (Annexe 12, Lignes 323 à 531).

- 1) Un premier moment collectif d'une durée de 7'41 (01 :51 :28 à 01 :59 :09) : Lecture et explication des consignes de la phase 2.3 consacrée à la question Q₇.
- 2) Un premier moment de travail individuel d'une durée de 10'26 (01 :59 :09 à 02 :19 :35) : Réalisation de deux tableaux semblables à un tableau réalisé pendant le sixième moment collectif.
- 3) Un deuxième moment collectif d'une durée de 0'23'' (02 :19 :35 à 02 :19 :58) : lancement du deuxième moment de travail en groupe.
- 4) Un premier moment de travail en groupe d'une durée de 4'00'' (02 :19 :58 à 02 :23 :58) : Réalisation en groupe de deux tableaux semblables au tableau réalisé pendant le sixième moment collectif.
- 5) Un troisième moment collectif d'une durée de 8'27'' (02 :23 :58 à 02 :32 :25) : Présentation des résultats des différents groupes à l'issue du deuxième moment du travail en groupe.

- 6) Un quatrième moment collectif d'une durée de 20'43'' (02 :32 :25 à 02 :53 :08) : Institutionnalisation du premier principe de Laplace.
- 7) Un cinquième moment collectif d'une durée de 20'' (02 :53 :08 à 02 :53 :28) : Clôture de la séance.

2.2.5.2. Organisation mathématique construite de la phase 2.3

2.2.5.2.1. Type de tâches

Comme nous l'avons précisé dans l'analyse a priori (Chap. VI, 3.2.3), le type de tâches de la phase 2.3 de la situation n°2 est T_4 : « déterminer la probabilité d'un événement à partir du premier principe de Laplace », dont la question Q_7 est un spécimen. En effet, à partir des probabilités obtenues dans la phase 2.2 et qui sont conformes au premier principe de Laplace, les élèves ont dû trouver le lien entre ces probabilités et la composition de la bouteille pour réaliser les tableaux demandés dans la question Q_7 .

2.2.5.2.2. Technique et technologie

Les interventions des élèves après le temps de travail individuel et le temps de travail en groupe révèlent deux techniques relatives au type de tâches T_4 et qui sont presque semblables et montrent l'émergence du premier principe de Laplace chez les élèves. La première technique conduit directement à la formule visée : « On a pris le nombre de billes blanches divisé par le nombre total de billes dans la bouteille ». La deuxième technique exploite la formule ayant permis de calculer le nombre de billes blanches contenues dans chaque bouteille : « Pour trouver le nombre de billes, on avait fait la probabilité fois le nombre de billes total. De là, on a tiré ». Concernant la technologie et la théorie, la première technique relève de l'intuition et de l'expérience antérieure des élèves sur la construction de la notion de probabilité d'un événement et la seconde est justifiée par les équations du premier degré à une inconnue, qui relève de l'algèbre.

Les deux techniques ci-dessous évoquées ont conduit à une seule réponse chez les élèves pour le cas où le nombre total de billes contenues dans la bouteille est 8. Il s'agit du tableau ci-dessous.

Nombre de billes blanches	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Nombre de billes noires	8	7	6	5	4	3	2	1	0
Probabilité de tirer une bille blanche	0	0,125	0,25	0,375	0,5	0,625	0,75	0,875	1

Tableau n°37 : Probabilité de tirer une bille blanche suivant les compositions possibles d'une bouteille contenant 8 billes (phase 2.3).

Les probabilités calculées sont toutes exprimées dans le registre des écritures décimales qui sont ici les valeurs exactes de ces probabilités. Pour le cas où le nombre total de billes est 7, les élèves sont restés dans un premier temps dans le registre des écritures décimales pour le calcul des probabilités comme le montre le tableau suivant présenté par le groupe G₅.

Nombre de billes blanches	0	1	2	3	4	5	6	7
Nombre de billes noires	7	6	5	4	3	2	1	0
Probabilité de tirer une bille blanche	0	0,14	0,28	0,42	0,57	0,71	0,85	1

Tableau n°38 : Probabilités de tirer une bille blanche suivant les compositions possibles d'une bouteille contenant 7 billes, exprimées dans le registre des écritures décimales.

Dans un second temps, les élèves du groupe G₁ ont contesté les nombres décimaux utilisés par tous les autres groupes, en semblant estimer par exemple que $\frac{1}{7}$ n'est pas égal à 0,14. La discussion a conduit à l'adoption du registre des écritures fractionnaires tel qu'il a été prévu dans l'analyse a priori et qui aboutit au tableau ci-après.

Nombre de billes blanches	0	1	2	3	4	5	6	7
Nombre de billes noires	7	6	5	4	3	2	1	0
Probabilité de tirer une bille blanche	0	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{6}{7}$	1

Tableau n°39 : Probabilités de tirer une bille blanche suivant les compositions possibles d'une bouteille contenant 7 billes, exprimées dans le registre des écritures décimales.

2.2.5.3. Analyse suivant la méthodologie des 4 composantes

La réalisation en classe de la phase 2.3 de la deuxième situation de l'ingénierie s'est déroulé en sept épisodes, qui correspondent à divers moments didactiques.

2.2.5.3.1. Premier épisode (1 :51 :28 à 1 :59 :09)

Le cinquième épisode de la séance en cours d'analyse est un moment de première rencontre, celle du type de tâches T_4 de la phase 2.3 qui s'intitule : « déterminer la probabilité d'un événement » en utilisant une technique s'appuyant sur le premier principe de Laplace, et dont un spécimen est la question Q_7 qui invite les élèves à réaliser un tableau suivant une forme bien indiquée. Il s'agit pour les élèves d'anticiper sur le premier principe de Laplace pour remplir le tableau. Le milieu de l'élève dans cet épisode, où la consigne de la phase 2.3 est lue et expliquée, n'est composé que du support écrit et des dire du professeur. Le contrat didactique, les topos du troisième épisode de la phase précédente (2.2.4.3.3). Le temps didactique est en émergence mais ne subit pas encore à ce moment une évolution. Nous ne notons aucun événement important dans cet épisode.

2.2.5.3.2. Deuxième épisode (1 :59 :09 à 2 :19 :58)

Le sixième épisode est essentiellement composé d'un temps de travail individuel relatif à la question Q_7 . Il correspond donc à un moment d'exploration du type de tâches T_4 et d'élaboration d'une technique en vue de la réalisation de la tâche. Le milieu est le support écrit de la consigne et du tableau récapitulatif des résultats de la question Q_6 . Le contrat didactique est fait chez l'élève de l'autonomie dont il dispose pour travailler et chez le professeur de son choix à laisser l'élève jouir de cette autonomie. Le topos de l'élève est bien remarquable par son rôle, qui est de résoudre le problème qui lui est posé. L'évolution du temps didactique n'est pas remarquable encore dans cet épisode. Aucun événement n'est non plus remarquable dans l'épisode.

2.2.5.3.3. Troisième épisode (2 :19 :58 à 2 :32 :25)

Comportant un temps de travail en groupe et un temps de travail collectif, le septième épisode de la dernière séance de la deuxième situation correspond à la fois au deuxième moment didactique et au troisième moment didactique par rapport au type de tâches T_4 . En fait, l'élaboration de la technique relevant du type de tâches T_4 a conduit à la constitution de l'élément technologique du premier principe de Laplace. Dans cet épisode, le milieu antagoniste de l'élève dans le temps de travail en groupe est fondamentalement le support écrit de la consigne qui comporte le tableau établi à la fin de la phase 2.2 et des discours de ses pairs. Le contrat didactique et les topos sont ceux signalés dans le quatrième épisode (2.2.4.3.4). Le temps didactique est en émergence à travers la tâche des élèves constitué par le remplissage de

deux tableaux en vue de l'installation de la formule du premier principe de Laplace. Aucun événement majeur n'est à signaler au profit de ce sixième épisode.

2.2.5.3.4. Quatrième épisode (2 :32 :25 à 2 :53 :28)

D'une durée de vingt et une minutes, le septième épisode correspond au cinquième moment didactique, c'est-à-dire celui de l'institutionnalisation. En effet, après la constitution de l'environnement technologico-théorique relatif à la technique relevant du type de tâches T_{2.3}, le professeur a justifié la formule du premier principe de Laplace conjecturée par les élèves par le fait que les événements élémentaires sont équiprobables. Il a ensuite écrit au tableau l'énoncé du premier principe de Laplace que les élèves ont noté.

Le milieu de l'élève dans cet épisode d'institutionnalisation est évidemment réduit au professeur. Au niveau de l'élève, le contrat didactique le situe dans une position d'écoute en vue de la compréhension du message véhiculé par le professeur, qui respecte son contrat en prenant la responsabilité de communiquer le texte du savoir construit. Ainsi les topoi du professeur et de l'élève sont leurs rôles respectifs de communication et de réception du savoir. Quant au temps didactique, il a servi à énoncer le premier principe de Laplace tout en précisant les conditions de sa validité.

Deux événements, tous heureux, sont à mettre à l'actif du quatrième épisode de la phase 2.3. Le premier événement vient d'un élève qui réagit par rapport à cette question posée par le professeur : « imaginez que les billes noires étaient plus grosses que les billes blanches. La probabilité de tirer une bille blanche serait-elle le nombre de billes blanches sur le nombre total de billes ? ». L'élève répond : « on va essayer ». La réponse de cet élève pose le problème de l'expérimentation de l'ingénierie initiale de Brousseau à partir des billes de poids différents, comme l'avait souligné Briand (2005). Le deuxième événement est relatif à la contestation d'un résultat par l'élève E₂. En effet, cet élève a fait remarquer qu'une approximation décimale de la fraction $\frac{1}{7}$ ne saurait être égale à cette fraction : « 0,14 fois 7 ne donne pas le nombre de billes blanches. Non ! Ce n'est pas exact ». Le professeur a compris qu'il voulait dire que $\frac{1}{7}$ n'est pas égale à 0,14 : « Oui ! Ils ont coupé. 1 sur 7 ne donne pas 0,14 ». Le chercheur a saisi cette occasion offerte par l'élève E₂ pour amener les élèves à utiliser le registre des fractions pour exprimer au besoin les probabilités.

2.2.5.4. Bilan de la phase 2.3

La phase 2.3 s'est déroulée presque comme il est prévu dans l'analyse a priori (Chap. VI, 3.2.3). Les tableaux à remplir l'ont été à partir de deux techniques semblables relevant du type de

tâches T_4 chez les élèves. Il y a bien sûr la technique visée, basée directement sur le premier principe de Laplace, qui devrait être tiré de l'intuition des élèves. Il y a eu également une deuxième technique qui part de la formule utilisée dans les phases précédentes pour calculer les nombres de billes blanches contenues dans les bouteilles connaissant la probabilité d'observation d'une bille blanche, pour déterminer les probabilités. Sans problème, les probabilités ont été présentées par les élèves sous forme de nombres décimaux exacts pour le premier cas où le nombre de billes contenues dans la bouteille est 8. Pour le cas où ce nombre est 7, elles ont été présentées sous forme de nombres décimaux par tous les groupes, puis sous la forme de fractions sur la demande d'un élève lors du temps de travail collectif. Les prévisions de l'analyse a priori par rapport aux registres dans lesquels les probabilités seraient exprimées sont ainsi atteintes. En résumé, l'objectif de la phase 2.3, consistant à faire une première rencontre avec le premier principe de Laplace est effectivement atteint.

2.2.6. Bilan de la réalisation de la situation n°2

La réalisation de la situation a pris beaucoup plus de temps que prévu. Et pour cause, la phase la plus déterminante, la phase 2.1, a été réalisée en trois séances au lieu d'une seule prévue. Les autres phases ont été réalisées chacune en une seule séance comme il est prévu dans l'analyse a priori (Chap. VI, 3). Le passage du déterminisme à l'aléatoire a semblé dérouter les élèves dans la première séance de la phase 2.1, dans laquelle, ils n'ont pas mené des raisonnements pouvant indiquer la fréquence comme outil de détermination de la composition des bouteilles. Ils ont d'abord trouvé bizarre ou très difficile le problème à résoudre. Leurs premières tentatives pour sa résolution, après les premiers essais de retournements de la bouteille, sont des résolutions algébriques et numériques de l'ordre du « problème de l'âge du capitaine ». C'est au cours de la deuxième séance de la phase 2.1, que la technique visée pour la résolution du problème a émergé, avec l'identification de la fréquence comme outil de détermination de la composition des bouteilles et l'étude de son évolution pour essayer de réduire la part d'incertitude que comporte cette technique. Cette technique est complétée et affinée au cours de la troisième séance avec la représentation des polygones de fréquences des séries statistiques du cumul des résultats des retournements de bouteilles, en vue de la conjecture de la fréquence limite, définie comme étant la probabilité de l'événement « obtenir une bille blanche » de l'univers associé à l'expérience aléatoire « tirer une bille dans la bouteille ». La technique ainsi adoptée dans la phase 2.1 est exploitée en autonomie didactique dans la phase 2.2 pour déterminer dans chacun des cinq groupes d'élèves la composition d'une bouteille de cinq billes de deux couleurs différentes au moyen de la probabilité qu'une bille tirée de la bouteille soit

blanche. Les probabilités obtenues par les différents groupes ont permis aux élèves de pouvoir utiliser par anticipation le premier principe de Laplace dans la phase 2.3, faisant ainsi une première rencontre avec ce principe prévu pour être démontré plus tard dans un cadre plus formel.

2.3. Analyse a posteriori de la situation n°3

La réalisation en classe de la situation n°3 s'est déroulée en une séance de 152 minutes. Elle comporte une première partie de rappel des notions jusque-là étudiées et une seconde partie portant sur l'expérimentation du deuxième principe de Laplace. L'organisation mathématique proposée dans la présente analyse porte uniquement sur l'objet même de la séance qu'est l'étude du deuxième principe de Laplace, tandis que l'organisation didactique portera sur toute la séance y compris le rappel qui est fait en début de séance.

2.3.1. La trame de la séance

Nous découpons la réalisation de la situation n°3 en onze moments élémentaires comme il est énuméré ci-après (Annexe 13).

- 1) Un premier moment collectif d'une durée de 20'36 (0 :00 :06 à 0 :20 :42) : Rappel des notions étudiées dans les situations n°1 et n°2.
- 2) Un deuxième moment collectif d'une durée de 9'13'' (0 :20 :42 à 0 :29 :55) : Lecture et explication de la consigne consacrée à la question Q₈ et lancement du travail en groupe.
- 3) Un premier moment de travail en groupe d'une durée de 28'31 (0 :29 :55 à 0 :58 :26) : Réalisation des lancers simultanés de quatre cauris par les élèves.
- 4) Un troisième moment collectif d'une durée de 4'24'' (0 :58 :26 à 01 :02 :50) : Clarification de la consigne par le professeur.
- 5) Un deuxième moment de travail en groupe d'une durée de 31'21'' (01 :02 :50 à 01 :34 :11) : Suite des lancers et détermination de l'estimation de la probabilité recherchée par les élèves.
- 6) Un quatrième moment collectif d'une durée de 35'26'' (01 :34 :11 à 02 :09 :37) : Analyse des résultats issus du travail en groupe.
- 7) Un cinquième moment collectif d'une durée de 3'13'' (02 :09 :37 à 02 :12 :50) : Présentation d'une deuxième consigne, conçue séance tenante, en vue d'achever la résolution de la consigne initiale.

- 8) Un troisième moment de travail en groupe d'une durée de 9'59'' (02 :12 :50 à 02 :22 :49) : Détermination de l'estimation de la probabilité recherchée suivant une deuxième méthode.
- 9) Un sixième moment collectif d'une durée de 02'10'' (02 :22 :49 à 02 :24 :59) : Présentation et analyse des résultats issus du troisième moment de travail collectif.
- 10) Un septième moment collectif d'une durée de 05'27'' (02 :24 :59 à 02 :30 :26) : Institutionnalisation du deuxième principe de Laplace.
- 11) Un huitième moment collectif d'une durée de 1'48'' (02 :30 :26 à 02:32 :14) : Bilan sur les formules de calcul de probabilité étudiées jusque-là et arrêt de la séance.

2.3.2. Organisation mathématique de la situation

a) Type de tâches

La situation 3 se décline en deux types de tâches. Il s'agit d'abord du type de tâches T_5 : « estimer la probabilité d'un événement », dont un spécimen est la question Q_8 qui consiste à estimer la probabilité d'obtenir au moins deux faces (P) après le lancer simultané de quatre cauris supposés identiques. Il s'agit ensuite du type de tâches T_5' , dont la question Q_8' , consistant à faire le lien entre l'estimation d'un événement et celles de ses événements élémentaires, est un spécimen.

b) Technique et technologie observées

Au cours du déroulement de la situation n°3, il est observé chez les élèves au niveau du type de tâches T_5 la technique $\tau_{5.1}$ évoquée dans l'analyse a priori (Chap. VI, 3.3.3.) et basée sur l'estimation de la probabilité de l'événement E sans un lien avec les estimations des probabilités des événements élémentaires le composant. Seule la méthode de décompte consistant à additionner les nombres de réalisations des événements élémentaires de l'événement E est observée également chez les élèves. En effet, trois des quatre groupes de la classe ont pu mener l'expérimentation à terme et ont pu présenter leurs résultats à l'ensemble de la classe pour analyse. Ayant repris plusieurs fois l'expérimentation suite à une difficulté liée à la complexité de l'événement E, le quatrième groupe n'a pas pu faire analyser ses résultats par le groupe-classe, les membres de ce groupe ayant déclaré n'avoir rien fait. Avec respectivement 100 lancers, 200 lancers et 150 lancers, les trois groupes ont abouti à l'estimation de la probabilité en calculant la fréquence de réalisation de l'événement E: « obtenir au moins deux faces P ». Les fréquences ont été calculées de la manière suivante :

- décompter le nombre de fois que chaque événement élémentaire composant l'événement E est réalisé ;
- obtenir le nombre n_0 de réalisations de l'événement E en sommant les effectifs des événements élémentaires composant E ;
- calculer ensuite la fréquence de l'événement E avec la formule $\frac{n_0}{n}$, où n est le nombre total de lancers effectués.

Les tableaux suivants présentent les résultats analysés pendant le temps de travail collectif. Ces résultats montrent une certaine convergence des fréquences vers la probabilité théorique conformément à la loi faible des grands nombres.

Groupe G₂

Nombre n de tirages	20	40	60	80	100
2P2C	6	10	19	24	27
3P1C	0	1	5	7	7
4P	0	0	0	1	1
Fréquence d'observation de E	0,3	0,275	0,4	0,4	0,35

Tableau n°40 : Résultats du groupe G₂ relatifs à la situation n°3.

Groupe G₃

Nombre n de tirages	20	40	60	80	100	120	140	180	180	200
2P2C	5	11	18	21	29	34	40	48	54	57
3P1C	1	2	4	6	7	8	8	8	9	10
4P	0	1	1	1	2	2	2	2	2	2
Fréquence d'observation de E	0,3	0,35	0,38	0,35	0,38	0,37	0,357	0,363	0,36	0,345

Tableau n°41 : Résultats du groupe G₃ relatifs à la situation n°3.

Groupe G4

Nombre n de tirages	25	50	75	100	125	150
2P2C	8	16	19	27	36	42
3P1C	2	6	10	11	12	13
4P	0	0	0	0	0	0
3C1P	8	14	26	39	50	59
4C	7	14	20	23	27	36
Fréquence d'observation de E	0,32	0,56	0,346	0,39	0,4	0,393

Tableau n°42 : Résultats du groupe G₄ relatifs à la situation n°3.

Il importe de noter que la technique d'estimation utilisée par les élèves est en lien avec l'organisation mathématique institutionnalisée avec l'approche fréquentiste, qui a été rappelée en début par les élèves. Ce qui montre une certaine compréhension des organisations mathématiques travaillées dans la situation 2. Comprises entre 0,34 et 0,40, les estimations de la probabilité de l'événement E obtenues par les élèves ne sont pas proches de la valeur 0,5248 qu'on pourrait obtenir si les cauris étaient rognés (Chap. VI, 3.3.1.). Ce qui signifie que la probabilité qu'un des cauris utilisés repose sur la face courbe ne peut pas être estimée à 0,4.

Comme nous l'avions prévu, nous constatons à travers ces résultats, que les élèves n'ont pas pensé additionner les estimations des probabilités des événements élémentaires composant l'événement E. Pourtant, cette praxéologie est celle souhaitée par le professeur et le chercheur pour introduire l'institutionnalisation du deuxième principe de Laplace. Pour arriver à cette institutionnalisation, le chercheur dans le rôle du professeur, ayant essayé en vain avec des questionnements de type maïeutique à amener les élèves à évoquer la praxéologie souhaitée, a dû proposer aux élèves la question Q₈' suivante prévue pour cette circonstance.

Donnez les estimations des probabilités des événements 2P2C, 3P1C et 4P, puis trouvez une relation entre ces estimations de probabilités et l'estimation de la probabilité de l'événement A.

Cette question a permis de susciter chez les élèves la technique $\tau_{5,2}$ et de faire mobiliser tous les éléments technologiques relatifs à l'accomplissement des deux types de tâches de la situation. La résolution de cette consigne par les élèves a permis au professeur d'atteindre l'objectif visé par la séance, c'est-à-dire l'étude du deuxième principe de Laplace.

En somme, l'accomplissement du type de tâches T_5 dans la situation a montré une certaine compréhension de la part des élèves des organisations mathématiques relatives à l'approche fréquentiste, travaillées dans la situation 3, car ils ont pu réinvestir ces organisations à travers la technique $\tau_{5,1}$ appropriée pour estimer la probabilité d'un événement. Le type de tâches T_5 n'ayant pas occasionné précocement l'émergence de la technique $\tau_{5,2}$, le recours au type de tâches T_5 a été nécessaire pour offrir au professeur des conditions d'institutionnalisation du deuxième principe de Laplace, qui est l'objectif principal visé par la situation 3. En dehors du fait qu'ils n'ont pas pu spontanément exprimer l'estimation de la probabilité de l'événement E en fonction des estimations des probabilités des événements élémentaires le composant, on note au niveau du type de tâches T_5 qu'ils ont adopté la méthode qui consiste à additionner les nombres des éventualités des événements élémentaires. Ils ont ainsi pu identifier les événements élémentaires de l'événement E en restant cohérents à la demande d'estimation de la probabilité de l'événement sans avoir recours aux estimations des probabilités des événements élémentaires. Par contre aucun groupe n'a utilisé le dénombrement global des observations sans considérer les événements élémentaires composant cet événement, pourtant prévu dans l'analyse a priori (Chap. VI, 3.3.3.). Nous ne trouvons pas une justification à la non observation de cette méthode chez les élèves, car nous estimons qu'il n'est pas exclu que cette méthode soit observée à une autre expérimentation de l'ingénierie.

2.3.3. Analyse suivant la méthodologie des 4 composantes

À partir des variations des moments didactiques dans la réalisation de la situation n°3, nous l'avons décomposée en six épisodes que nous analysons dans les lignes qui suivent.

2.3.3.1. Premier épisode (0 :00 :06 à 0 :20 :42)

Le premier épisode de cette septième séance de l'ingénierie est caractérisé par le moment didactique d'évaluation. En effet, après un échange de salutations entre le professeur et les élèves, le professeur a fait rappeler les notions jusque-là étudiées. Dans ce cadre, les notions d'expérience aléatoire, d'éventualité, d'univers des éventualités, d'événement, de probabilité selon la loi faible des grands nombres et du premier principe de Laplace ont été successivement rappelées par les élèves sous la direction confirmée du professeur.

Dans cet épisode constitué d'un temps de travail collectif, le milieu de l'élève est réduit aux discours du professeur, qui pose ses questions en vue de la reconstitution des savoirs déjà construits. La restitution des savoirs de la part des élèves et la vérification de la justesse de ces savoirs constituent le contrat didactique de part et d'autre. En répondant aux questions, l'élève assume bien son topos dans l'épisode, tandis que le fait de poser des questions en vue de faire

le point des savoirs déjà construits participe du topos du professeur. L'évolution du temps didactique est ainsi stabilisée par le rappel des notions étudiées au cours des six précédentes séances.

Nous avons distingué quatre événements dans ce premier épisode de la situation n°3. Le tout premier dans l'ordre chronologique est un mot de remerciement que le professeur a adressé aux élèves pour leur courage à poursuivre l'expérimentation : « j'aimerais déjà vous remercier d'avoir eu le courage de continuer avec nous ». Cette réaction du professeur au début de la septième séance de l'ingénierie est une reconnaissance de la durée suffisamment longue de l'ingénierie et de la bonne volonté des élèves à participer à l'expérimentation jusqu'à la fin. Le deuxième événement ressemble à un lapsus d'un élève, qui voulant énoncer le premier principe de Laplace, prononce « élément élémentaire » à la place d'événement élémentaire. Aussitôt il a été corrigé par une de ses camarades. Le troisième événement est problématique en ce sens qu'il est relatif à une confusion du professeur entre les notions de probabilité théorique et de l'estimation de cette probabilité. En effet, au cours du rappel, l'élève E₁₇ a décrit tout le processus expérimental étudié dans la situation 2 pour conjecturer la probabilité d'un événement, mais cette conjecture est considérée par le professeur comme une estimation de la probabilité contrairement au savoir institutionnalisé à propos de l'estimation de la probabilité (Annexe 13, Lignes 27 à 35).

Prof : Ce qu'elle vient de décrire, selon vous, c'est la probabilité ?

Élèves : Non !

Prof : Qu'est-ce qu'elle vient de décrire comme ça ?

Élève E₃ : L'estimation de la probabilité.

Prof : Elle vient de décrire l'estimation de la probabilité ou bien la méthode utilisée pour estimer la probabilité. La méthode qu'on a apprise, la méthode qu'on utilise pour estimer la probabilité. Mais ce n'est pas encore la probabilité.

Suite à l'intervention du professeur, l'élève E₁₇ a décrit plus tard le même processus expérimental comme permettant d'estimer la probabilité d'un événement comme on peut le constater dans de passage suivant extrait de la conversation au cours de laquelle l'élève a repris la description du processus (Annexe 13, Lignes 87 à 112).

Élève E₁₇ : Pour estimer la probabilité, on réalise l'expérience aléatoire un grand nombre de fois et après,

Prof : Un grand nombre-là veut dire combien ?

Élève E₁₇ : 100, 200 ou bien 1000.

Prof : Ok ! Vas-y !

Élève E₁₇ : Et après, on calcule la fréquence d'observation. Ensuite, on trace le polygone des effectifs.

Prof : Est-ce que c'est une seule fréquence ?

Élève E₁₇ : Non, des fréquences ! Après ça, on trace le polygone des fréquences pour observer le nombre sur lequel, autour duquel...

Prof : Et on fait ça chaque fois qu'on évolue, on cumule les résultats. C'est ça hein ?

Élèves : Oui !

Élève E₁₇ : Et on observe le nombre autour duquel tourne, euh, le résultat de...

Prof : Le nombre vers lequel tend le polygone des fréquences. C'est ça qui est l'estimation de notre probabilité.

La conclusion de cette conversation met en évidence la position du professeur par rapport à la notion de l'estimation de la probabilité d'un événement, qu'il a pourtant précisé lors de l'institutionnalisation de la notion de probabilité d'un événement (2.2.4.3.2.).

Selon un théorème appelé la loi des grands nombres, les fréquences d'observation d'un événement A pour de grands nombres de réalisations d'une expérience aléatoire, oscillent autour d'un nombre réel compris entre 0 et 1. Ce nombre est la probabilité de l'événement A pour une seule réalisation de cette expérience aléatoire. On le note $p(A)$. La fréquence de réalisation de l'événement A pour un nombre n donné de réalisations de l'expérience aléatoire n'est pas la probabilité de l'événement A. Elle est plutôt une estimation de cette probabilité.

D'après cette définition, l'estimation de la probabilité est bien la fréquence d'observation de l'événement pour un nombre donné de réalisations de l'expérience aléatoire. Ainsi le polygone des fréquences est réalisé à l'aide des estimations de la probabilité en vue de la conjecture de cette probabilité théorique. Le processus décrit par l'élève E₁₇ est donc celui permettant dans l'expérimentation de conjecturer la probabilité d'un événement. Cette confusion du professeur avait été déjà évoquée une première fois dans l'analyse du deuxième épisode de la troisième séance de la situation n°2 (2.2.3.3.2.). L'intervention du chercheur en ce moment pour éviter l'installation d'un obstacle didactique à propos de la notion de probabilité d'un événement a semblé produire ses fruits au niveau des élèves et non pas au niveau du professeur. Une nouvelle intervention du chercheur à ce sujet a été nécessaire pour préciser avec un peu de tact que le processus décrit par l'élève est bien celui de la recherche de la probabilité d'un événement.

Le quatrième événement de ce premier épisode de la septième séance de l'ingénierie est l'intervention du chercheur suite à la confusion précédente entre probabilité d'un événement et son estimation. Par des questions adressées aux élèves, le chercheur a trouvé les moyens de faire revenir les élèves sur leur rapport à la probabilité d'un événement, comme le montre si bien l'échange suivant (Annexe 13, Lignes 113 à 124) :

Chercheur : D'accord ! Disons que vous avez fait tout le rappel qu'il faut mais il faut qu'on insiste sur quelque chose. Pourquoi est-ce qu'on a fait le graphique ? Pourquoi on a fait ça ?

Un élève : Pour la fréquence d'observation.

Prof : Non. Pacôme veut dire autre chose.

Élève E₁₄ : On a fait la courbe, euh le graphique pour voir l'évolution.

Chercheur : Pour voir l'évolution, l'évolution de la ...*

Élèves : fréquence.

Chercheur : C'est bien ça hein ?

Élève : Oui !

Chercheur : Et donc pour voir quoi ?

Élèves : L'estimation de la probabilité.

Chercheur : Non ! Pas l'estimation ! Puisque, quand on voit l'évolution, qu'est-ce ça donne ? C'est que ça nous permet de dire à peu près vers où la fréquence peut aller. Et c'est ça la probabilité. Ce n'est pas ça ?

Élèves : Oui !

Dans la suite de la conversation, le chercheur a expliqué largement la notion de probabilité en précisant que la valeur de la probabilité, recherchée en adoptant le processus décrit par l'élève E₁₇ est une valeur théorique et que pour estimer la probabilité, on n'a pas besoin de réaliser le polygone des fréquences.

Il importe de préciser après les deux derniers événements décrits que le problème posé est un problème bien connu dans l'enseignement des probabilités à partir de la loi des grands nombres. En effet, l'un des problèmes rencontrés dans cette approche d'enseignement des probabilités est la confusion entre le domaine de la réalité où l'on observe l'évolution des fréquences et le domaine théorique où les probabilités sont calculées de façon abstraite : c'est le problème de la dualité de la notion de probabilité (Henry, 2009).

2.3.3.2. Deuxième épisode (0 :20 :42 à 0 :29 :55)

Le deuxième épisode, long de 9 minutes est un moment de première rencontre avec le type de tâches de la séance, celle d'estimer la probabilité d'un événement précis d'une expérience

aléatoire donnée. L'expérience aléatoire est le lancer simultané de quatre cauris et l'événement est « obtenir au moins deux fois la face (P) ». Après la lecture du contexte et de la consigne de la situation 3, le professeur et le chercheur ont à tour de rôle expliqué la consigne en même temps qu'ils ont présenté le matériel de travail composé d'un plateau, d'un gobelet et de quatre cauris, qui constituent les éléments constitutifs du milieu physique de l'épisode suivant.



Image n°02 : Milieu physique constitué d'un plateau, d'un gobelet et de quatre cauris.

Le milieu antagoniste de l'élève dans ce deuxième épisode est composé du support de travail et des dires du professeur et du chercheur, le matériel présenté n'ayant servi réellement que dans le troisième épisode. L'explication de la consigne ainsi que la présentation du matériel de travail précisent le contrat didactique de la situation, tandis que l'écoute en vue de la compréhension de ta tâche à exécuter, sont les éléments caractéristiques de ce contrat et du topos des élèves. Le temps didactique n'a pas connu d'évolution.

Dans cet épisode, deux événements, tous heureux, ont attiré notre attention. Le premier événement concerne l'ordre donné par le professeur aux élèves de noter toutes les observations. Respectant le topos qui lui est confié, le professeur a dû perturber quelque peu l'autonomie didactique des élèves par un genre d'effet Topaze comme on peut s'en rendre compte dans les déclarations suivantes du professeur (Annexe 13, Lignes 137 à 139).

Prof : Bien ! Voilà la consigne ! Est-ce que vous avez des questions à poser par rapport à la consigne ? Je voudrais vous notifier que tout ce que vous allez, tout ce que vous allez faire comme tirage, vous allez noter ça. C'est-à-dire, si vous faites un tirage, le résultat que vous obtenez là, je voudrais que vous notiez ça. Je ne sais pas si vous comprenez ce que je viens de dire ?

Élèves : Oui !

Prof : Si peut-être vous avez obtenu la face (P) une fois ou deux fois, vous allez noter comme vous avez fait lors des tirages.

Cependant cet effet Topaze est limité, car en demandant d'emblée aux élèves de noter toutes les observations, le professeur ne leur a pas donné le choix de noter les observations qu'ils auraient jugé utiles pour répondre à la consigne. Toutefois, le professeur n'a pas le choix puisque ce topos lui est indiqué afin d'orienter les élèves vers l'exploitation probable des observations relatives aux événements élémentaires composant l'événement E. Le deuxième événement de l'épisode est l'explication donnée par le chercheur concernant la manière de noter les résultats observés. Il a été question que les acteurs s'entendent sur la lecture et la notation des observations. Une première entente est relative à l'observation du côté visible d'un cauris lancé sur le plateau, à savoir, lorsque le cauri repose sur sa face plane, c'est le côté (C) qui est observé et dans les autres cas, on prendra la face (P) comme côté visible. La deuxième entente est la notation d'un résultat à l'issue du lancer des quatre cauris. Il est décidé qu'on note par exemple 3P1C lorsqu'on obtient trois fois la face (P) et une fois la face (C).

2.3.3.3. Troisième épisode (0 :29 :55 à 0 :58 :26)

Le troisième épisode de la situation n°3 correspond au moment de l'exploration du type de tâches et de l'élaboration d'une technique. En effet, dans un temps de travail en groupe, les élèves en autonomie didactique ont recherché une solution au problème qui leur est posé. Le milieu antagoniste des élèves dans cet épisode est essentiellement constitué du matériel physique présenté dans le deuxième épisode, à savoir le plateau, le gobelet et les quatre cauris. Le contrat didactique est caractérisé par la recherche de la solution en toute autonomie didactique chez les élèves et par la circulation dans la salle en vue de la clarification éventuelle de la question chez le professeur. La responsabilité du professeur à laisser les élèves travailler et celle des élèves à se mettre au travail constituent les topos respectifs du professeur et des élèves. Le temps didactique n'a pas connu d'évolution. Nous n'avons pas identifié d'événement dans cet épisode.

2.3.3.4. Quatrième épisode (0 :58 :26 à 2 :12 :50)

Ce quatrième épisode est constitué d'un temps de travail en groupe et d'un temps de travail collectif. Il correspond toujours au deuxième moment didactique dans son volet d'élaboration d'une technique relevant de la tâche « estimer la probabilité d'un événement ». En effet, ayant constaté que le travail n'avance pas dans certains groupes, le professeur a relancé le travail en précisant la consigne à l'ensemble des élèves. Avec la clarification apportée par le professeur dans cet épisode, les élèves ont repris avec la réalisation de l'expérience aléatoire un certain

nombre de fois afin de noter les éventualités de manière générale, et de décompter celles relatives à l'événement « obtenir au moins deux fois la face (P) en particulier

Le milieu de l'élève dans un premier temps est fondamentalement constitué autour du matériel de travail prévu dans l'épisode 2, puis ce milieu sera complété par des productions de trois groupes et des discours du professeur dans un deuxième temps. Chez les élèves, le contrat didactique est caractérisé par leur autonomie à travailler au cours du temps de travail en groupe et la présentation des résultats issus de ce temps lors du temps de travail collectif. Du côté du professeur, on peut noter pour le compte du contrat didactique, sa volonté de clarifier la consigne en vue de permettre à certains groupes de pouvoir accomplir la tâche, son absence apparente lors du temps de travail en groupe et la direction des débats dans le temps du travail collectif. La responsabilité du professeur de laisser travailler les élèves d'une part et celle d'amener les élèves à présenter et expliquer leurs résultats d'autre part, constituent les topos du professeur dans chacun des deux temps de l'épisode. L'accomplissement de la tâche donnée et la participation aux discussions sont les topos respectifs de l'élève dans cet épisode.

Nous avons identifié trois événements dans ce quatrième épisode. Le premier événement s'inscrit dans le cadre de la gestion de la classe par le chercheur dans son rôle de professeur. Il demandait au groupe n°1 dont les membres ont mis beaucoup de temps à comprendre la consigne, à cesser de travailler pour suivre la présentation et l'analyse des résultats des autres groupes. Sous la contrainte du temps, le chercheur a estimé suffisant les résultats des trois autres groupes et invite les membres du groupe n°1 à se contenter du niveau de recherche atteint dans leur groupe : « Arrêtez de travailler là ! Suivons pour voir quelle exploitation on peut en faire. Vous faites comme si c'est fini ». Le deuxième événement est relatif à une remarque selon laquelle des élèves hésitent avant d'intervenir dans les discussions en vue de l'analyse des résultats issus du travail individuel ou du travail en groupe. Pour une première fois, le chercheur observe que certains élèves, au lieu de dire ouvertement leur opinion, préfèrent chuchoter à leurs voisins leurs propositions de réponses aux questions posées : « Ce que je n'aime pas chez vous ici, c'est quand vous avez à dire, vous ne le dites pas, vous le dites très bas-là ». Un peu plus tard et pour une deuxième fois, le chercheur fait le reproche à certains élèves d'hésiter en voulant proposer des réponses aux questions qui leur sont posées : « Pourquoi vous hésitez quand vous voulez parler ? ». Certainement que la peur de proposer une réponse incorrecte peut être à la base de cette attitude qui peut se justifier par une certaine arrogance ignorante des professeurs en général et de ceux de mathématiques en particulier. Le troisième événement est relatif à la conception séance tenante d'une consigne par le chercheur, toujours dans son rôle

de professeur, en vue de l'achèvement de la consigne initiale et de faire énoncer par-là le deuxième principe de Laplace. Aucun des groupes n'a utilisé le deuxième principe de Laplace pour estimer la probabilité de l'événement « obtenir au moins deux faces planes ». Les échanges lors de l'analyse des résultats issus du travail en groupes n'ont pas permis non plus de faire énoncer le deuxième principe de Laplace par les élèves. En vue de l'atteinte de l'objectif du jour, qui est la première rencontre avec le deuxième principe de Laplace, le chercheur a dû concevoir sur place une consigne dont la résolution devrait permettre d'atteindre explicitement le savoir visé. Cinq minutes sont alors accordées aux élèves pour un travail en groupe.

2.3.3.5. Cinquième épisode (2 :12 :50 à 2 :24 :59)

Constitué d'un temps de travail en groupe et d'un temps de travail collectif, le cinquième épisode correspond au deuxième moment didactique, c'est-à-dire au moment de l'exploration de la nouvelle tâche donnée et de l'élaboration d'une technique y relevant. En effet, pendant le temps de travail en groupe, les élèves ont dû explorer la tâche et élaborer une technique de résolution de la consigne soumise à leur réflexion.

Dans cet épisode, le milieu des élèves est fondamentalement constitué des tableaux statistiques des résultats analysés dans l'épisode précédent. Le contrat didactique, les topos et le temps didactique de ce sixième épisode sont identiques à ceux indiqués dans le cinquième épisode. Nous avons identifié dans cet épisode un seul événement semblable au premier événement de l'épisode précédent. Il s'agit de la décision du chercheur-professeur de se contenter de l'analyse des résultats des deux groupes prêts sur les quatre. En réalité, toujours sous la contrainte du temps, il a préféré exploiter les résultats de deux groupes, invitant les membres des autres groupes à arrêter le travail en groupe et à suivre la présentation des résultats des autres : « On peut commencer. Les autres n'ont qu'à suivre ».

2.3.3.6. Sixième épisode (2 :24 :59 à 2 :32 :14)

Le sixième épisode de la troisième situation est un moment de construction du bloc technologico-théorique et d'un début du processus d'institutionnalisation. Après avoir atteint l'objectif de la situation n°3 qui est la mise en évidence du deuxième principe de Laplace dans l'épisode précédent, le chercheur-professeur a fait énoncer ce principe par les élèves sans le leur faire noter dans leurs cahiers (Annexe 13, Lignes 337 à 356).

Chercheur : C'est déjà une formule de calcul de probabilité. Qui peut essayer de nous donner la formule ?

Élève E₁₄ : Soit A un événement. On va dire que l'événement A est composé des événements élémentaires A', B', C'. $P(A)=p(A')+p(B')+p(C')$.

Chercheur : Vous avez écouté ?

Élèves : Oui !

Chercheur : Est-ce que ça traduit ce qui est là (au tableau) ?

Élèves : Oui !

Chercheur : Ok, mais lui, il parle seulement de trois événements élémentaires. Et si on avait plus ? [...] Est-ce qu'on ne peut pas donner une phrase pour que ça soit plus généraliste ?

Élève E₁₄ : Somme des événements élémentaires qui composent cet événement.

Chercheur : Reprends !

Élève E₁₄ : La probabilité de l'événement A est égale à la somme de la probabilité des événements élémentaires.

Chercheur : des probabilités

Élève E₁₄ : des probabilités des événements élémentaires qui composent l'événement A.

Ce processus d'institutionnalisation est suivi d'une poursuite de la construction du bloc technologico-théorique caractérisé par le bilan des formules de calcul de probabilités en cours de construction, à savoir les formules relatives respectivement aux deux premiers principes de Laplace.

Le milieu dans cet épisode constitué d'un unique temps de travail collectif est exclusivement constitué des dires du professeur. En écoutant et en répondant aux questions du professeur, l'élève remplit son contrat didactique envers ce dernier qui oriente ses questions en vue de faire découvrir aux élèves le deuxième principe de Laplace. Cette responsabilité des élèves à répondre aux questions et celle du professeur à poser ces questions constituent les topos respectifs des deux actants dans la situation. Le temps didactique s'est enrichi par l'émergence du deuxième principe de Laplace et par le rappel du premier principe de Laplace.

Nous avons identifié trois événements pour le compte de cet épisode. Le premier est relatif à la décision du chercheur-professeur de faire répéter le deuxième principe de Laplace par un certain nombre d'élèves en vue de s'assurer de l'atteinte de l'objectif visé comme on peut le constater dans la séquence suivante (Annexe 13, Lignes 368 à 371) :

Chercheur : Est-ce que Kenneth, tu peux répéter ça ? Ce n'est pas à lire hein ? C'est possible ?

Élève E₇ : Oui ! La probabilité d'un événement est la somme des probabilités de cet événement.

Chercheur : des événements élémentaires

Élève E₇ : des événements élémentaires qui le composent.

Le deuxième événement de l'épisode concerne la déception constatée par le chercheur des membres du groupe n°1 dont les résultats n'ont pas pu être prêts pour être exploités dans l'épisode précédent. Le chercheur les a alors rassurés par rapport au fait qu'ils n'ont rien à craindre pour ce qui concerne la compréhension du savoir construit en mettant en avant qu'il s'agit d'une élaboration collective du savoir.

Le groupe 1 qui est un peu déçu parce qu'on n'a pas ses résultats mais c'est la classe qui compte. Ce n'est pas un groupe qui trouve, c'est la classe qui trouve. La leçon est pour toute la classe. On est d'accord ? Vous n'avez pas à vous plaindre (Annexe 13, Ligne 372).

Le troisième événement est relatif à l'expression utilisée par les élèves pour dire que les événements sont équiprobables : « lorsque tous les événements ont les mêmes caractéristiques, ... ». En fait, les élèves utilisent ici les termes utilisés par le professeur lui-même pour expliquer en son temps les situations d'équiprobabilité. Le chercheur est intervenu pour exiger que les terminologies convenables soient utilisées.

2.3.4. Bilan de la réalisation de la troisième situation

En somme, l'accomplissement du type de tâches T_5 dans la situation a montré une certaine compréhension des organisations mathématiques relatives à l'approche fréquentiste, travaillées dans la situation 3, car les élèves ont pu réinvestir ces organisations à travers la technique $\tau_{5,1}$ appropriée pour estimer la probabilité d'un événement. Le type de tâches T_5 n'ayant pas occasionné précocement l'émergence de la technique $\tau_{5,2}$, le recours au type de tâches T_5' a été nécessaire pour offrir au professeur des conditions d'institutionnalisation du deuxième principe de Laplace, qui est l'objectif principal visé par la situation 3. En dehors du fait qu'ils n'ont pas pu spontanément exprimer l'estimation de la probabilité de l'événement E en fonction des estimations des probabilités des événements élémentaires le composant, on note au niveau du type de tâches T_5 qu'ils ont adopté la méthode qui consiste à additionner les nombres des éventualités des événements élémentaires. Ils ont ainsi pu identifier les événements élémentaires de l'événement E en restant cohérents à la demande d'estimation de la probabilité de l'événement sans avoir recours aux estimations des probabilités des événements élémentaires. Par contre aucun groupe n'a utilisé le dénombrement global des observations sans considérer les événements élémentaires composant cet événement, pourtant prévu dans l'analyse a priori (Chap. VI, 3.3.3.). Nous ne trouvons pas une justification à la non observation de cette méthode chez les élèves, car nous estimons qu'il n'est pas exclu que cette méthode soit observée à une autre expérimentation de l'ingénierie.

2.4. Analyse a posteriori de la situation n°4

La situation n°4 de l'ingénierie est réalisée en une unique séance d'environ 100 minutes. Elle est fondamentalement une situation de construction du bloc technologico-théorique en ce sens qu'elle part de la définition de la probabilité en tant qu'une mesure positive sur la tribu de l'ensemble des événements d'une expérience aléatoire pour aboutir à la démonstration de quatre propriétés essentielles du calcul élémentaire des probabilités. Par son caractère non expérimental, elle marque une rupture avec les trois situations précédentes. Nous analysons dans cette section l'organisation mathématique et l'organisation didactique de la situation en suivant la méthodologie des quatre composantes.

2.4.1. La trame de la séance

Comportant quatre questions nécessitant pour chacune un travail préalable de l'élève avant la présentation de la réponse en groupe classe, la réalisation de la situation n°4 est découpée en dix moments élémentaires ci-dessous présentés (Annexe 14).

- 1) Un premier moment collectif d'une durée de 12'18'' (0 :00 :00 à 0 :12 :18) : Institutionnalisation de la définition de probabilité à partir de l'axiomatique de Kolmogorov et du deuxième principe de Laplace.
- 2) Un deuxième moment collectif d'une durée de 3'50'' (0 :12 :18 à 0 :16 :08) : Lecture du contexte et de la consigne et lancement du travail individuel relatif à la question Q₉ consacrée à la démonstration de la propriété $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$, A et B étant des événements.
- 3) Un premier moment individuel d'une durée de 5'52'' (0 :16 :08 à 0 :22 :00) : Recherche individuelle des élèves de la démonstration de la propriété $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.
- 4) Un troisième moment collectif d'une durée de 42'35'' (0 :22 :00 à 01 :04 :35) : Présentation de la démonstration de $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$ par le professeur.
- 5) Un deuxième moment individuel d'une durée de 03'25'' (1 :04 :35 à 1 :08 :00) : Lancement du travail individuel relatif à la question Q₁₀.
- 6) Un quatrième moment collectif d'une durée de 3'33'' (1 :08 :00 à 1 :11 :33) : Présentation des résultats issus du quatrième moment individuel.

- 7) Un premier moment de travail en groupe d'une durée de 5'02'' (1 :11 :33 à 1 :16 :35) : Résolution en groupe de la question Q₁₁ consacrée à la démonstration de la formule $p(A) + p(\bar{A}) = 1$ pour deux événements contraires A et \bar{A} .
- 8) Un cinquième moment collectif d'une durée de 6'50'' (1 :16 :35 à 1 :23 :25) : Présentation des résultats d'un groupe et son amendement par l'ensemble groupe classe.
- 9) Un deuxième moment de travail en groupe d'une durée de 10'22'' (1 :23 :25 à 1 :33 :47) : Résolution en groupe de la question Q₁₂.
- 10) Un sixième moment collectif d'une durée de 7'08'' (1 :33 :47 à 1 :40 :55) : Présentation de la démonstration du premier principe de Laplace par le professeur.

2.4.2. Organisation mathématique de la situation

Nous proposons l'organisation mathématique liée à la réalisation de chacune des questions Q₉, Q₁₀, Q₁₁ et Q₁₂ que comporte la situation n°4.

2.4.2.1. Organisation mathématique de la question Q₉

Après avoir accordé aux élèves quelques minutes de temps de travail individuel, le professeur a pris la responsabilité d'établir la formule ensemble avec les élèves à partir des questionnements de type maïeutique.

a) Type de tâches

La tâche t_6 du genre de tâches « démontrer » relatif à la question Q₉ telle que nous l'avons précisé dans l'analyse a priori est « démontrer que pour deux événements quelconques A et B, $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$ ». Cette tâche a été précisée aux élèves à travers sa lecture pour toute la classe.

b) Méthode de démonstration de la question Q₉

La méthode effective de la démonstration de la question par le professeur avec la participation très active des élèves a suivi le plan suivant :

- identifier le type de démonstration, qui est ici celle d'une égalité ;
- choisir une méthode de démonstration d'une égalité ;
- identifier les éventualités de chacun des deux événements A et B ;
- déterminer les éventualités de AUB ;
- exprimer $p(A \cup B)$ en fonction des probabilités des événements élémentaires de AUB en utilisant le deuxième principe de Laplace ;

- exprimer $p(A)$ et $p(B)$ en fonction des probabilités des événements élémentaires qui composent respectivement les événements A et B en utilisant le deuxième principe de Laplace ;
- déterminer $A \cap B$;
- écrire $p(A \cap B)$ en fonction des probabilités des événement élémentaires qui composent $A \cap B$ en utilisant le deuxième principe de Laplace ;
- calculer $p(A) + p(B) - p(A \cap B)$;
- comparer $p(A \cup B)$ et $p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.

En dehors de la démarche de démonstration d'une égalité, les opérations sur les ensembles et le deuxième principe de Laplace, qu'on peut respectivement plonger dans la théorie des ensembles et dans la théorie laplacienne des probabilités sont les éléments technologiques qui justifient la méthode effective de résolution de la question Q_9 . Cette méthode est globalement identique à celle prévue dans l'analyse a priori. Ce qui se justifie d'ailleurs par le fait qu'elle est pratiquement conduite par le professeur, qui a, lui-aussi, reçu les indications du chercheur dans ce sens.

c) Comportements des élèves

Des trois types de comportement envisagés chez les élèves pour la question Q_9 dans l'analyse a priori (Chap. VI, 3.4.3.), seul un est véritablement observé chez les élèves pendant le temps de travail individuel. Il s'agit de celui dans lequel les élèves n'ont pas pu écrire en extension la réunion et l'intersection des événements A et B . Il y a juste eu chez un nombre restreint d'élèves des tentatives non réussies de détermination de ces deux ensembles. Toutefois, il est observé chez un élève la détermination correcte de l'ensemble $A \cap B$. Des tentatives non réussies de la traduction du deuxième principe de Laplace sous sa forme algébrique sont également observées chez certains élèves. Par contre, sous la direction du professeur, les élèves ont montré pendant le temps de travail collectif une connaissance correcte des notions d'intersection et de réunion d'ensembles ainsi que du deuxième principe de Laplace, pour accompagner le professeur dans la démonstration de la propriété.

2.4.2.2. Organisation mathématique effective de la question Q_{10}

Après seulement trois minutes de temps de travail individuel, les élèves ont majoritairement proposé une résolution correcte de la question Q_{10} consistant à démontrer que $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$ si A et B sont incompatibles. Nous présentons l'organisation mathématique effective dans les lignes suivantes.

a) Méthode de démonstration de la question Q₁₀

Le type de tâches relatif à la question Q₁₀ est le même que celui de la question Q₉ mais avec la condition supplémentaire que les événements A et B sont incompatibles. Une seule méthode est proposée par les élèves pour démontrer la question Q₁₀. C'est naturellement celle qui exploite juste la formule de la question Q₉ et qui se précise comme il suit :

- reconnaître que si A et B sont incompatibles, alors $p(A \cap B) = 0$;
- appliquer la formule précédemment démontrée.

Les éléments technologiques utilisés pour démontrer la formule de la question Q₁₀ sont précisément la définition d'événements incompatibles, la probabilité de l'événement impossible et la formule $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$, démontrée précédemment. Ces éléments technologiques se justifient tous par la théorie des probabilités.

b) Comportements et réponses des élèves

Pendant le temps du travail individuel, le comportement des élèves est presque unanimement conforme à celui dans lequel la formule démontrée au niveau de la question Q₉ est exploitée. C'est cette application directe des résultats de la question Q₉ que l'élève E₁₄ présente au professeur pendant le temps du travail collectif (Annexe 14, Lignes 358 à 370).

Élève E₁₄ : Lorsque A et B sont incompatibles, la probabilité de l'évènement AUB serait égale à probabilité de A plus la probabilité de B.

Prof : si A et B sont incompatibles, $p(A \cup B)$ donne quoi ? $p(A) + p(B)$. Pourquoi ?

Élève E₁₄ : Parce que normalement ça devrait nous faire $p(A) + p(B)$ plus maintenant $p(A \cap B)$.

Prof : moins $p(A \cap B)$.

Élève E₁₄ : Bon ! Si on supposait que les deux étaient incompatibles, $p(A \cap B)$ va donner zéro.

Prof : $p(A \cap B)$ va donner 0 parce que $A \cap B$ est égale à ?

Élève E₁₄ : l'ensemble vide.

Comme il était prévu dans l'analyse a priori (Chap. VI, 3.4.3), l'évidence de la déduction de la résolution de la question Q₁₀ à partir de la propriété démontrée au niveau de la question Q₉ est largement observée chez les élèves.

2.4.2.3. Organisation mathématique effective de la question Q₁₁

Un temps de travail en groupe d'environ cinq minutes a suffi aux élèves pour démontrer la propriété $p(A \cup \bar{A}) = p(A) + p(\bar{A})$, pour les événements contraires A et \bar{A} .

a) Méthode de démonstration de la question Q₁₁

La question Q₁₁ est vite perçue par les élèves comme une autre application de la propriété démontrée au niveau de la question Q₉, comme le témoigne le plan de la démonstration suivante adoptée unanimement par les élèves.

- reconnaître que $A \cap B = \emptyset$ et $A \cup B = \Omega$;
- appliquer la formule $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$;
- utiliser les axiomes $p(\emptyset) = 0$ et $p(\Omega) = 1$ pour conclure.

Comme nous pouvons nous en rendre compte, les éléments technologiques justifiant cette méthode de démonstration sont la notion d'événements contraires, les axiomes $p(\emptyset) = 0$ et $p(\Omega) = 1$ et la formule $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$. Cette technologie trouve sa justification exclusivement dans la théorie des probabilités.

b) Comportements et réponses des élèves

Après que les élèves ont proposé dans leurs groupes respectifs des résolutions correctes presque identiques dans la forme pendant le temps du travail en groupe, le professeur a désigné l'élève E₈ du groupe n°2 pour présenter leur résultat ci-dessous au tableau.

$$\begin{aligned} A \text{ et } \bar{A} \text{ sont contraires. Alors } A \cap \bar{A} &= \emptyset \text{ et } A \cup \bar{A} = \Omega. \\ p(A \cup \bar{A}) &= p(A) + p(\bar{A}) - p(A \cap \bar{A}) \\ P(A \cup \bar{A}) &= p(A) + p(\bar{A}) \\ 1 &= p(A) + p(\bar{A}). \end{aligned}$$

Apportant ses amendements à cette production, l'élève E₆ du même groupe a proposé qu'il soit précisé dans la rédaction de la démonstration que $p(A \cup \bar{A}) = p(\Omega) = 1$ et $p(A \cap \bar{A}) = 0$. Les élèves des autres groupes ont accepté sans contestation cette résolution présentée par les élèves du groupe n°2.

La méthode utilisée par les élèves ici est l'une des trois mentionnées dans l'organisation mathématique visée (Chap. VI, 3.4.3.). La deuxième technique qui y est mentionnée, moins évidente que la première, n'a pas pu être observée chez les élèves. Cette technique qui utilise exclusivement le deuxième principe de Laplace reprend la démarche utilisée pour démontrer la formule $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$. Elle paraît donc trop couteuse lorsqu'on a déjà démontré les propriétés des questions Q₉ et Q₁₀. La troisième méthode qui consiste à remarquer d'abord que les événements contraires sont incompatibles n'a pas non plus pu être exploitée par les élèves, bien qu'elle paraisse plus simple que toutes les autres.

2.4.2.4. Organisation mathématique effective de la question Q12

Comme à la question Q9, c'est le professeur qui a pris la responsabilité de proposer aux élèves la démonstration du premier principe de Laplace, après un temps de travail en groupe non fructueux d'environ dix minutes accordé aux élèves.

a) Méthode de démonstration de la question Q12

La question Q12, qui est « démontrer que lorsque tous les événements élémentaires de Ω sont équiprobables, alors pour tout événement A, $p(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$ », est du même genre que les questions précédentes et se rapproche plus de la question Q9 du fait qu'elle est une application du deuxième principe de Laplace. La méthode de résolution utilisée par le professeur est l'unique indiquée dans l'analyse a priori, qui a consisté à utiliser par deux fois le deuxième principe de Laplace ajouté à l'axiome $p(\Omega)=1$ pour déterminer la probabilité des événements élémentaires afin d'aboutir à la formule recherchée.

b) Comportements et réponses des élèves

Pendant le temps de travail en groupe qui a précédé celui du travail collectif pendant lequel le professeur a conduit la démonstration du premier principe de Laplace, les élèves se sont essayés à cette démonstration sans y parvenir. Les traces écrites observées dans leurs cahiers montrent l'existence de trois types de réponses à la question Q12, en dehors bien sûr de ceux qui n'ont pas proposé de réponse à la question. Parmi les réponses enregistrées, il y a eu une dans laquelle des élèves ont juste reconduit la formule du premier principe de Laplace telle qu'elle a été découverte à l'issue de la réalisation de la phase 2.3 de la situation n°2 pour produire la réponse ci-dessous.

Si tous les événements élémentaires de Ω ont la même probabilité, alors :

$$p(A) = \frac{\text{N.cas favorable}}{\text{N.cas possible}}; \text{ donc } p(A) = \frac{\text{Nombre d'éléments de A}}{\text{Nombre d'éléments de } \Omega}.$$

Certains élèves ont effectivement perçu la question Q12 comme une application du deuxième principe de Laplace sans aboutir à la résolution correcte de la question. Il y a ceux qui ont pu écrire la probabilité de l'événement A en fonctions des probabilités des événements élémentaires qui le composent sans aller plus loin et ceux qui ont complété cette relation par l'axiome $p(\Omega)=1$ comme dans la production non correcte ci-après.

$$p(A) = p(\{e_1'\}) + p(\{e_2'\}) + \dots + p(\{e_{n_0}'\})$$

$$p(\Omega) = p(\{e_1\}) + p(\{e_2\}) + \dots + p(\{e_n\})$$

$$1 = p(\{e_1\}) + p(\{e_2\}) + \dots + p(\{e_n\})$$

$$p(A) \times \text{Card}(A) = p(\Omega) \times \text{Card}(\Omega)$$

$$p(A) \times \text{Card}(A) = 1 \times \text{Card}(\Omega)$$

$$p(A) = \frac{\text{Card}(A)}{1 \times \text{Card}(\Omega)} = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$$

Dans cette production, où les trois dernières, indépendantes des trois premières, constituent une affirmation gratuite, la donnée principale portant sur l'équiprobabilité des événements élémentaires n'est pas exploitée.

Bien que les élèves n'aient pas pu trouver de réponse correcte à la question Q₁₂, ils ont participé activement à la constitution de la démonstration proposée par le professeur pendant le temps de travail collectif.

2.4.3. Analyse de la situation n°4 suivant la méthodologie des 4 composantes

En tenant compte des variations des moments didactiques dans la réalisation de la situation n°4, nous la décomposons en neuf épisodes en vue de son analyse didactique suivant la méthodologie des quatre composantes.

2.4.3.1. Premier épisode (0 :00 :00 à 0 :12 :18)

Ce premier épisode de la situation n°4 correspond au moment didactique d'institutionnalisation. En effet, après avoir étudié le deuxième principe de Laplace à la séance précédente, le professeur a commencé la séance consacrée à la quatrième situation par la présentation de la définition de la probabilité selon le modèle de Kolmogorov couplé avec le deuxième principe de Laplace comme il est précisé ci-après.

Soit une expérience aléatoire d'univers des éventualités Ω . On dit que l'on a défini une probabilité sur Ω lorsque à tout événement A de Ω on peut associer un nombre réel noté $p(A)$, appelé probabilité de A , vérifiant les conditions suivantes : la probabilité d'un événement est comprise entre 0 et 1, la probabilité de l'événement impossible est 0, la probabilité de l'événement certain est 1, la probabilité d'un événement est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le composent.

Le milieu de l'élève en ce début de séance est strictement composé des discours du professeur. L'explication et les questions du professeur ainsi que l'écoute et les réponses des élèves constituent le contrat didactique. La responsabilité du professeur de définir la probabilité et d'écrire la définition au tableau et celle des élèves de noter cette définition constituent les topos respectifs du professeur et de l'élève. Quant au temps didactique, il est enrichi par la définition de la probabilité comme une application de l'ensemble des événements vers l'intervalle $[0 ; 1]$ vérifiant entre autres le deuxième principe de Laplace.

Deux événements heureux sont à signaler dans ce premier épisode de la quatrième situation. Il s'agit de la probabilité de l'événement impossible et celle de l'événement certain que les élèves ont spontanément données sans l'avoir étudié auparavant. En effet, après avoir défini la probabilité en termes d'application, le professeur, voulant donner les axiomes, s'est adressé aux élèves pour connaître les probabilités de ces deux événements évidents. C'est sans hésitation que ces derniers ont donné ces probabilités comme on peut le constater dans l'échange ci-après (Annexe 14, Lignes 3 à 12).

Prof : Lorsque je prends l'événement impossible, selon vous, quelle est sa probabilité ?

Élève E₁₂ : Zéro.

Prof : Ça fait 0. La probabilité de l'événement impossible, ça fait 0. Parce que ça ne se réalise jamais. D'accord ? La probabilité de l'événement certain. D'abord, c'est quoi l'événement certain ?

Un élève : C'est l'ensemble Ω lui-même.

Prof : C'est l'ensemble Ω lui-même. Maintenant sa probabilité ? Oui !

Un élève : Un.

Nous lions la connaissance spontanée des probabilités de ces deux événements à la maîtrise par les élèves des notions d'événement impossible et d'événement certain, ainsi qu'à l'expérimentation de la notion de la probabilité d'un événement dont ils sont des acteurs clés.

2.4.3.2. Deuxième épisode (0 :12 :18 à 1 :04 :35)

Le deuxième épisode est composé de trois périodes qui concourent à la même finalité, c'est-à-dire la démonstration de la propriété $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$. La première période est celle de la recherche individuelle de la démonstration au niveau des élèves, période précédée par la rencontre de la tâche à travers la lecture du contexte et des consignes. Elle n'a pas été suffisamment fructueuse pour que les résultats qui y sont issus soient valablement exploités par le professeur. La deuxième période est celle de la démonstration de la propriété par le professeur avec l'aide des élèves. Elle est la période qui rend compte effectivement de la résolution de la tâche définie et est de ce fait la période la plus représentative de l'épisode. La troisième période est celle de la prise de notes par les élèves. Ce troisième épisode ainsi composé correspond à deux moments didactiques, à savoir, le deuxième moment didactique observé dans la première période et le troisième moment didactique observé dans la deuxième période et qui est l'aboutissement même de la tâche. En effet, la période du travail individuel, bien qu'étant infructueuse, a permis aux élèves d'explorer la tâche, tandis que la période de démonstration proprement dite a permis la mise en place de la technique de résolution de la

consigne telle qu'annoncé dans l'organisation mathématique et dont la finalité est la constitution de la formule de la probabilité de la disjonction de deux événements.

Dans la première période, le milieu de l'élève est le support papier tandis que dans la deuxième période, ce milieu s'est enrichi des discours du professeur. Le contrat didactique est caractérisé chez les élèves par la recherche de solution au problème dans la première période et par la participation à l'établissement de la formule enjeu dans la deuxième période. Du côté du professeur, sa volonté de laisser les élèves travailler dans la première période et celle d'associer les élèves à la démonstration de la propriété dans la deuxième période constituent son contrat à l'égard des élèves. La responsabilité du professeur à démontrer la propriété et celle des élèves à suivre en vue de comprendre la démonstration constituent leurs topos respectifs. L'évolution du temps didactique est marquée par la découverte de la propriété démontrée.

Dans ce deuxième épisode de l'unique séance de la quatrième situation, nous avons identifié huit événements de natures diverses qui permettent d'expliquer la part des différents acteurs dans le déroulement de l'épisode. Le premier de ces événements est une erreur d'un élève répétée par inattention par le professeur. En effet, en voulant donner l'énoncé du deuxième principe de Laplace, un élève déclare : « la probabilité d'un événement est la somme des événements élémentaires qui le composent ». Sans faire attention, le professeur a repris exactement la même phrase. Il est certain que c'est une erreur d'inattention chez le professeur, tandis que chez l'élève, il est possible que cela fasse partir de son rapport au deuxième principe de Laplace à cet instant. Le deuxième événement est relatif à la méthode du professeur de faire participer les élèves à la démonstration à partir des questionnements de type maïeutique. Déjà au début de la démonstration, il demande aux élèves de lui rappeler les méthodes de démonstration d'une égalité : « quelles sont les méthodes que vous connaissez pour démontrer une égalité ? ». Plus loin, il rappelle aux élèves qu'il ne fait qu'écrire leurs idées : « Moi je ne fais qu'écrire ce que vous dites ». Le troisième événement concerne une autre confusion d'un élève à propos des éventualités qui composent l'événement $A \cup B$. En fait l'élève E_2 exprimait cet événement comme la somme d'éventualités, mais en réalité, il parlait de la probabilité de

$A \cup B$ comme on peut le retrouver dans son cahier de notes : « $p(A \cup B) = \sum_{i=1}^{m \text{ et } p} e_i + e_i + e_i' \text{ »}$.

Même si cette écriture manque de sens, elle permet de comprendre un certain rapport non encore adéquat de l'élève au deuxième principe de Laplace déjà signalé dans le premier événement de l'épisode. Le quatrième événement provient du même élève E_2 qui conteste à tort la

composition de l'événement A telle que donnée par l'un de ses camarades (Annexe 14, Lignes 71 à 74).

Élève E_2 : Moi je ne suis pas d'accord.

Prof : Pourquoi, tu n'es pas d'accord ?

Élève E_2 : En temps normal, selon moi, pour A, il ne devrait pas avoir les e_2'' .

Prof : Il ne devrait pas avoir les e_2'' . Pourquoi ? Quelqu'un pour nous relire la question 1 de la consigne.

La discussion qui a suivi la lecture a permis à l'élève E_2 de se rendre compte qu'il se trompait. Le cinquième événement est relatif à un élève qui, croyant qu'on pouvait avoir un même élément e deux fois dans un ensemble, proposait que le « double élément » soit noté $2e$ comme il le précise dans la conversation suivante (Annexe 14, Lignes 174 à 182).

Élève E_{12} : Selon moi, on a e_1'' jusqu'à e_q'' deux fois. Et si on écrivait $2e_1''$ jusqu'à $2e_q''$.

Prof : Donc on va écrire ça deux fois ?

Élève E_{12} : Oui.

Prof : On met 2 devant ?

Élève E_{12} : Ça fait deux facteurs de e_1'' .

Prof : On ne fait pas la somme. C'est quand on a la somme de deux choses identiques, qu'on trouve deux fois la chose. D'accord ? Est-ce que dans un ensemble un élément peut se répéter ?

Élèves : Non.

On note donc dans ce cinquième événement une règle en acte (Vergnaud, 1991) dont le domaine de validité est tout ensemble de nombres, muni de l'addition et de la multiplication. Le sixième événement est également un théorème en acte provenant d'un élève qui a estimé que $p(A \cap B)$ serait $p(A) \cap p(B)$, une formule qui n'a pas de sens mais qui exprime une certaine linéarité de la probabilité par rapport à l'intersection. Cette intervention de cet élève a duré le temps d'un feu de paille, car un autre élève a proposé immédiatement une meilleure solution que le professeur a vite adoptée comme le montre l'échange ci-après (Annexe 14, Lignes 244 à 248).

Prof : Pour calculer $P(A \cap B)$, comment on va faire ?

Elève : $P(A) \cap p(B)$

Prof : Parlez plus fort. On va faire quoi ?

Elève : $P(A) \cap p(B)$

Prof : Les autres, parlez ? Vous avez des choses à dire. Juliette comment on va calculer $p(A \cap B)$?

Elève E₃ : On va d'abord calculer $A \cap B$.

Prof : On va d'abord déterminer l'ensemble $A \cap B$.

Le septième événement est un rappel des élèves au professeur à passer à la résolution d'une question qu'il semble avoir oubliée. En effet le professeur avait déjà lancé la question Q₁₁ de l'activité quand un élève lui a rappelé que la question Q₁₀ n'était pas encore résolue. Le huitième et dernier événement est l'intervention du chercheur pour réduire la longueur des notes à prendre par les élèves dans le souci de gagner de temps pour la suite de la séance « Moi je propose qu'on enlève (du tableau) certaines choses que vous connaissez déjà ».

2.4.3.3. Troisième épisode (1 :04 :35 à 1 :11 :33)

Comportant un temps de travail individuel et un temps de travail collectif, le cinquième épisode correspond au deuxième et au troisième moment didactique. En effet, après la première rencontre avec la tâche consistant à démontrer que $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$ pour des événements incompatibles A et B, le temps de travail individuel a servi à explorer cette tâche et à élaborer une technique de résolution. Le temps de travail collectif a abouti à la constitution du savoir que représente ici l'un des axiomes fondamentaux du calcul des probabilités.

Le milieu de l'élève est passé du support papier de la consigne dans le premier temps de travail aux discours du professeur dans le second temps de travail. Le contrat didactique est caractérisé d'abord par l'autonomie didactique accordée par le professeur aux élèves dans le premier temps et la présentation des résultats des élèves dans le second temps. La responsabilité des élèves à résoudre le problème dans le temps de travail individuel et à rendre compte des résultats issus de ce temps de travail constituent les topos des élèves dans cet épisode. Quant au professeur, son non implication dans la recherche de solution par les élèves et sa direction du temps de travail collectif constituent ses topos. L'évolution du temps didactique s'est enrichie par l'axiome démontré. Aucun événement didactique n'est à signaler dans le cinquième épisode.

2.4.3.4. Quatrième épisode (1 :11 :33 à 1 :23 :25)

Le quatrième épisode de cette séance, constitué d'un temps de travail en groupe et d'un temps de travail collectif correspond, comme dans le troisième épisode, au deuxième et au troisième moments didactiques. En fait, l'exploration de la tâche et l'élaboration d'une technique pour démontrer la propriété « $p(A \cup \bar{A}) = p(A) + p(\bar{A})$ pour deux événements contraires A et \bar{A} », sont observables pendant le temps de travail en groupe, alors que la finalité de l'épisode après

le temps de travail collectif est l'enrichissement du répertoire de connaissances de l'élève à travers la propriété démontrée.

Le milieu antagoniste de l'élève, le contrat didactique et les topos des élèves et du professeur sont identiques à ceux de l'épisode précédent. Quant au temps didactique, une nouvelle propriété est enregistrée à son profit.

Un double événement heureux est à mettre à l'actif de ce septième épisode. Il s'agit de l'amendement par un élève de la production de l'un de ses camarades. Cet élève confond un événement et sa probabilité comme on le constate souvent chez les débutants en calcul de probabilités. Il déclare plus précisément entre autres que $p(A \cap \bar{A})$ est l'ensemble vide et que $p(A \cup \bar{A})$ est l'univers.

Elle devrait mettre, or $p(A \cap \bar{A})$ est égal à l'ensemble vide, ce qui est égal à zéro.

Maintenant, après avoir mis $p(A \cup \bar{A}) = p(A) + p(\bar{A})$, elle doit mettre, or $p(A \cup \bar{A})$ est égal à Ω , ce qui est égal à 1.

Le professeur, n'ayant pas fait attention à cette confusion passagère de l'élève, a fait adopter à juste titre l'amendement de l'élève.

2.4.3.5. Cinquième épisode (1 :23 :25 à 1 :40 :55)

Le cinquième et dernier épisode de la réalisation de la situation n°4 est composé d'un temps de travail en groupe et d'un temps de travail collectif. Ayant les mêmes caractéristiques que le quatrième épisode, il correspond au deuxième et troisième moment didactique, ceux de l'élaboration d'une technique relevant de la tâche observée dans le temps de travail en groupe et de la constitution du bloc technologico-théorique relatif au premier principe de Laplace, qui est la finalité du temps de travail collectif.

Par rapport au milieu, au contrat didactique et aux topos, le neuvième épisode est semblable au deuxième épisode (2.4.3.2.). Le temps didactique s'est enrichi de la dernière propriété de l'ingénierie, celle du premier principe de Laplace. Nous ne notons pas d'événement didactique dans le neuvième épisode.

2.4.4. Bilan de l'analyse de la situation n°4

La réalisation de la situation n°4, qui vise la constitution des éléments technologiques des techniques TCA et TE relevant du type de tâches Tc : « Calculer la probabilité d'un événement », a permis aux élèves de participer à la démonstration des propriétés fondamentales du calcul des probabilités. C'est le professeur qui a pris la responsabilité de négocier la

participation des élèves pour démontrer la propriété $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$, après avoir constaté leur échec à la démontrer sans aide. La détermination des ensembles $A \cup B$ et $A \cap B$ en extension et la traduction algébrique du deuxième principe de Laplace sont les difficultés rencontrées par les élèves, bien qu'ils aient eu une connaissance correcte de ces notions. La formule $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$, valable pour des événements incompatibles, est logiquement démontrée par les élèves comme une application de la formule précédemment démontrée. Ils ont unanimement reconnu que $A \cap B$ est l'événement impossible de probabilité nulle. Aussi ont-ils démontré en autonomie didactique dans un travail en groupe que pour tout événement A , $p(A \cup \bar{A}) = p(A) + p(\bar{A})$. En effet, ils ont remarqué que $A \cap \bar{A} = \emptyset$ et $A \cup \bar{A} = \Omega$ et ont appliqué la toute première formule démontrée, avec la précision que les événements impossible et certain ont respectivement pour probabilités 0 et 1. La démonstration du premier principe de Laplace à partir du deuxième principe de Laplace n'a pu se faire par les élèves en autonomie, bien que certains d'entre eux ont pu appliquer le deuxième principe de Laplace et l'axiome $p(\Omega)=1$. Elle a été conduite par le professeur lui-même, qui a utilisé la seule méthode prévue dans l'analyse a priori (Chap.. VI, 3.4.3).

Somme toute, les élèves n'ont pas pu réussir dans le temps qui leur est réservé à démontrer les deux propriétés les plus complexes. Toutefois, ils ont, en un temps raisonnable, démontré les deux autres, qui sont les conséquences de la première propriété dont la démonstration est conduite par le professeur lui-même.

2.5. Analyse a posteriori de la situation n°5

Dans la situation n°5, réalisée en trois séances de durées respectives 132 min, 128 min et 136 min, il est demandé aux élèves de réinvestir les savoirs construits ou en voie de construction pour calculer des probabilités à travers la résolution des sept exercices que comporte la situation. La première séance est consacrée à la résolution des trois premiers exercices de la situation, la deuxième aux deux exercices suivants et la troisième aux deux derniers. Pour chaque exercice, nous étudions dans cette section l'organisation mathématique effective des élèves à partir de leurs propositions de réponses aux consignes.

2.5.1. Exercice 1

L'exercice 1 de la situation n°5 comporte quatre consignes organisées en deux questions : une première consistant à donner les probabilités de certains événements exprimées en pourcentage dans l'énoncé et la deuxième qui consiste à calculer des probabilités.

2.5.1.1. Organisation mathématique effective

Le type de tâches dont la première question fournit un spécimen est T_9 : « identifier les données d'un problème dans un langage approprié » et celui dont les trois consignes de la deuxième question sont des spécimens est T_{10} : « calculer la probabilité d'un événement ».

2.5.1.1.1. Première question

Au niveau de la question 1, les méthodes utilisées par les élèves pour donner les probabilités des événements A, B, C sont différentes de celles utilisées pour donner la probabilité de $A \cap B$.

Probabilités des événements A, B et C

Pour les trois premiers événements, deux techniques $\tau_{9,1}$ et $\tau_{9,2}$ relevant du type de tâches T_9 sont globalement observées chez les élèves.

La technique $\tau_{9,1}$ est la technique visée consistant à identifier les pourcentages donnés, l'expérience aléatoire et les événements, et à écrire les probabilités sous forme décimale ou fractionnaire. La production ci-dessous des groupes G_1 , G_2 et G_3 est le type de réponses induit par la technique $\tau_{9,1}$ tel qu'il était prévu dans l'analyse a priori.

$$p(A) = \frac{20}{100} = 0,2 ; p(B) = \frac{70}{100} = 0,7 ; p(C) = \frac{10}{100} = 0,1.$$

Comme nous pouvons nous en rendre compte, cette production en lien avec la technique $\tau_{9,1}$ est une double conversion de registres : du registre des pourcentages vers le registre des écritures fractionnaires puis de ce dernier vers le registre des écritures décimales (Duval, 1993). Rappelons que la technologie qui justifie la technique $\tau_{9,1}$ est constituée du langage probabiliste, et des notions de pourcentage et de probabilité d'un événement.

La technique $\tau_{9,2}$ est basée sur le premier principe de Laplace et se différencie de la technique $\tau_{9,1}$ par la considération de chaque pourcentage $\frac{t}{100}$ comme issu de la formule $\frac{\text{Card}(E)}{\text{Card}(\Omega)}$ avec $\text{Card}(\Omega) = 100$ et $\text{Card}(E) = t$. Cette technique qui conduit aussi à une valeur numérique correcte est illustrée par la production suivante des élèves du groupe G_4 .

$$p(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{20}{100} = 0,2 ; p(B) = \frac{\text{Card}(B)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{70}{100} = 0,7 ;$$
$$p(C) = \frac{\text{Card}(C)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{10}{100} = 0,1.$$

La technologie justifiant la technique $\tau_{9,2}$ est constituée du langage probabiliste, des notions de pourcentage et de probabilité d'un événement, et repose sur la fiction que $\text{Card}(\Omega) = 100$ et $\text{Card}(E) = t$, car les élèves ne sont pas nécessairement conscients que $\text{card}(A)$ n'est pas 20 par exemple.

Probabilité de $A \cap B$

Pour l'événement $A \cap B$, la technique $\tau_{9,1}$ présentée précédemment est celle adoptée par les élèves du groupe G_4 , qui ont proposé la réponse correcte « $p(A \cap B) = \frac{15}{100} = 0,15$ ».

En dehors de cette technique, il est observé chez les élèves une technique $\tau_{9,3}$ identique à la technique TCA décrite dans l'analyse a priori comme il suit (Chap. VI, 3.5.2.1.) :

- Identifier l'expérience aléatoire ;
- Identifier les événements dont les probabilités sont données et dont dépend l'événement A ;
- Traduire les pourcentages donnés en probabilités d'événements ;
- Exprimer l'événement A en fonction des événements de probabilités connues ;
- Appliquer selon le cas des propriétés convenables du cadre probabiliste pour la résolution de la question.

Les propositions de réponses suivantes des groupes G_1 et G_3 constituent un type de réponses en lien avec la technique $\tau_{9,3}$.

Groupe G1

$$\begin{aligned} p(A \cap B) &= p(A) \cap p(B) \\ &= p(A) + p(B) - p(A \cup B) \\ &= 0,9 - 0,9 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Groupe G3

$$\begin{aligned} p(A \cup B) &= p(A) + p(B) - p(A \cap B) \\ p(A \cap B) &= p(A) + p(B) - p(A \cup B) \\ p(A \cup B) &= p(A) + p(B) = 0,2 + 0,7 = 0,9. \\ \text{Donc } p(A \cap B) &= 0,2 + 0,7 - 0,9 = 0. \end{aligned}$$

Globalement la production du groupe G_3 semble expliciter celle du groupe G_1 . En dehors d'un théorème en acte (Vergnaud, 1991), à savoir $p(A \cap B) = p(A) \cap p(B)$ écrit dans le groupe G_1 , les deux groupes ont calculé $p(A \cap B)$ en combinant les formules $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$ et $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$ pour les mêmes événements A et B. Sans en être conscients, ils ont ainsi supposé au départ que A et B sont incompatibles pour encore aboutir à ce même résultat à la fin.

Les éléments technologiques qui justifient la technique $\tau_{9,3}$ sont globalement constitués du langage probabiliste, de la notion de probabilité d'un événement et des propriétés relatives au calcul de la probabilité de la disjonction de deux événements. À cette technologie s'ajoute

le théorème en acte « $p(A \cap B) = p(A) \cap p(B)$ », qui relève dans ce groupe d'un défaut de la deuxième condition de Duval (1993) pour constituer le registre probabiliste, à savoir les règles de formation du registre et l'identification des unités élémentaires.

2.5.1.1.2. Deuxième question

Concernant la deuxième question de l'exercice, dont les consignes concernent les spécimens du type de tâches T_{10} , la technique TCA évoquée plus haut est celle adoptée par l'ensemble des élèves, notamment pour le calcul des probabilités des deux premiers événements. Ainsi pour le calcul de la probabilité d'un événement donné de la question, les élèves ont d'abord remarqué que l'événement s'exprime en fonction d'autres événements dont les probabilités sont connues et ont ensuite fait le choix d'une propriété pour calculer la probabilité. Le choix de la propriété n'étant pas unique pour tous les groupes, plusieurs types de réponses sont observés pour le calcul de chacune des probabilités composant la question. Nous présentons dans les lignes qui suivent les différentes propositions de réponses pour le calcul des probabilités respectives des événements $A \cup B$, $A \cup C$ et $\bar{A} \cap \bar{B}$.

Calcul de $p(A \cup B)$

L'un des quatre groupes et notamment le groupe G_4 a proposé la résolution experte ainsi qu'il suit :

$$\begin{aligned} p(A \cup B) &= p(A) + p(B) - p(A \cap B) \\ &= 0,2 + 0,7 - 0,15 \\ &= 0,75 \end{aligned}$$

Les groupes G_1 et G_3 qui avaient trouvé $p(A \cap B) = 0$ au niveau de première question, ont utilisé sans succès la propriété convenable en écrivant :

$$\begin{aligned} p(A \cup B) &= p(A) + p(B) - p(A \cap B) \\ &= 0,2 + 0,7 - 0 \\ &= 0,9 \end{aligned}$$

Quant aux membres du groupe G_2 , ils ont fait le choix de la formule $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$ pour aboutir au même résultat que les groupes G_1 et G_3 , bien que les événements A et B ne soient pas incompatibles.

Calcul de $p(A \cup C)$

Après une bonne identification de l'événement, les élèves ont pendant le temps de travail en groupe, proposé des calculs conduisant tous à la même valeur numérique, mais qu'on peut

classer en trois catégories. D'abord, comme précédemment, le groupe G₄ a proposé la résolution correcte que voici.

$$p(A \cup C) = p(A) + p(C) - p(A \cap C).$$

Les événements A et C sont incompatibles ; donc $p(A \cap C) = 0$.

$$\begin{aligned} p(A \cup C) &= p(A) + p(C) \\ &= 0,2 + 0,1 \\ &= 0,3 \end{aligned}$$

Les groupes G₁ et G₃ ont appliqué la formule $p(A \cup C) = p(A) + p(C) - p(A \cap C)$ en considérant que $p(A \cap C) = 0$ sans nécessairement préciser que A et C sont incompatibles. Quant aux élèves du groupe G₂, ils ont encore opté pour la formule $p(A \cup C) = p(A) + p(C)$ sans non plus préciser que A et C sont incompatibles.

Calcul de $p(\bar{A} \cap \bar{B})$

Comme il avait été prévu, les élèves n'ont pas pu identifier convenablement l'événement dont la probabilité est demandée au niveau du troisième volet de la deuxième question. En conséquence, le calcul de $p(\bar{A} \cap \bar{B})$ n'a pas été effectif pendant le temps de travail en groupe. Il a fallu l'intervention du professeur pendant le temps de travail collectif pour amener les élèves à identifier l'événement comme étant $\bar{A} \cap \bar{B}$ et à calculer sa probabilité en utilisant la formule $p(\overline{A \cup B}) = 1 - p(A \cup B)$ et ceci après que le professeur a donné la propriété $\bar{A} \cap \bar{B} = \overline{A \cup B}$, non disponible chez les élèves.

2.5.1.2. Bilan de la résolution de l'exercice 1

La clarification par le professeur des pourcentages comme exprimant des probabilités d'événements a permis aux élèves de pouvoir associer ces probabilités à leurs événements respectifs. Ces probabilités sont obtenues chez les élèves soit par la conversion du registre des pourcentages vers le registre des écritures décimales en passant par celui des écritures fractionnaires, soit en faisant une lecture des pourcentages donnés à l'aide du premier principe de Laplace. Malgré cette bonne compréhension que les élèves ont des pourcentages en probabilités, la plupart d'entre eux n'ont pas pu reconnaître la probabilité de l'événement $A \cap B$. La complexité relative de cet événement et les formules de probabilités écrites au tableau les auraient certainement entraînés, dans un contrat didactique, à penser qu'il fallait nécessairement calculer la probabilité de cet événement.

Pour le calcul des probabilités, les élèves ont fait une bonne identification des deux événements les plus simples parmi les trois. La méthode utilisée pour calculer les probabilités

est conforme à la démarche de la technique TCA indiquée mais les formules utilisées ne sont pas toujours correctes pour tous les élèves. La probabilité du troisième événement, plus complexe que les autres, n'a été calculée qu'en travail collectif sous la conduite du professeur. Il est à noter qu'aucun élève n'a essayé le premier principe de Laplace contrairement à ce que nous avons prévu dans l'analyse a priori (Chap. VI, 3.5.2.2.).

2.5.2. Exercice 2

Dans l'exercice 2, il est question d'une part de modéliser une épreuve de Bernoulli par la détermination de la probabilité de chacun de ses événements élémentaires, et d'autre part d'estimer le nombre de réalisations d'un événement de probabilité connue, connaissant le nombre de réalisations de l'expérience aléatoire.

2.5.2.1. Organisation mathématique observée

Les trois questions de l'exercice 2 se déclinent respectivement en trois types de tâches : T_{11} , T_{12} et T_{13} tels qu'ils sont présentés dans l'analyse a priori (Chap. VI, 3.5.3.1.).

2.5.2.1.1. Première question

Les traces écrites retrouvées dans les cahiers des élèves ont montré qu'il relève du type de tâches T_{11} trois techniques : $\tau_{11.1}$, $\tau_{11.1.a}$ et $\tau_{11.1.b}$ que nous nommons respectivement « éventualités simples », « double éventualité » et « éventualités multiples ».

La technique « éventualités simples » est celle visée et qui consiste à identifier l'expérience aléatoire « lancer un cauri et observer la face sur laquelle il repose » et à énumérer les éventualités. Elle conduit à la réponse « $\Omega = \{P, C\}$ », écrite par les élèves de deux des quatre groupes de la classe et validée comme réponse correcte pendant le temps de travail collectif. Les notions d'expérience aléatoire et d'éventualité constituent la technologie qui justifie cette technique.

La technique « double éventualité » consiste à identifier l'expérience aléatoire, identifier le lien entre les probabilités des éventualités et énumérer les éventualités en répétant l'éventualité dont la probabilité est le double de celle de l'autre comme l'illustre la réponse suivante : « $\Omega = \{PP, C\}$ ou $\{2P, C\}$ ». À la différence du type de réponses issu de la technique « éventualités simples », ce type de réponses, proposé par les élèves d'un troisième groupe de la classe, prend en compte l'information selon laquelle la probabilité que le cauri repose sur la face (P) est le double de celle qu'il repose sur la face (C). La technologie justifiant cette technique est constituée des notions d'expérience aléatoire, d'éventualité et de probabilité d'un événement dans son aspect subjectif.

La technique « éventualités multiples » est caractérisée par une identification non appropriée de l'expérience aléatoire et l'énumération des éventualités PPCC, PCCC, CPPP, PPPP, CCCC de l'expérience aléatoire « lancer quatre de fois de suite un cauri ». Ce contexte qui n'est pas celui de l'exercice avait été utilisé dans les situations n°1 et n°3 de l'ingénierie. La technologie justifiant la technique « éventualités multiples » semble basée sur autre expérience aléatoire, issue de souvenirs des situations de l'ingénierie où intervient le lancement de cauri.

2.5.2.1.2. Deuxième question

Face au type de tâches T_{12} : « déterminer la probabilité d'un événement élémentaire », les élèves ont développé deux techniques, notamment la technique visée $\tau_{12.1}$ et une deuxième technique $\tau_{12.3}$.

La technique visée $\tau_{12.1}$ est basée sur le deuxième principe de Laplace et l'axiome : $p(\Omega) = 1$, qui constituent la technologie qui justifie cette technique. Les élèves de trois des quatre groupes de la classe ont opté pour cette technique $\tau_{12.1}$ en proposant un type de réponses adopté pendant le temps de travail collectif ainsi qu'il suit :

On sait que $p(\Omega) = p(C) + p(P)$. Or $p(P) = 2p(C)$.

Alors $p(\Omega) = 2p(C) + p(C)$; $p(\Omega) = 3p(C)$.

De là $p(C) = \frac{p(\Omega)}{3}$. Or $p(\Omega) = 1$.

Ainsi $p(C) = \frac{1}{3}$ et $p(P) = p(\Omega) - p(C) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

La deuxième technique $\tau_{12.3}$ peut se décliner comme ci-après :

- estimer la probabilité de l'un des événements élémentaires ;
- exploiter les données du problème pour déterminer les probabilités des autres événements élémentaires.

En application de cette technique les élèves du quatrième groupe ont attribué la valeur 0,2 à la probabilité de l'événement élémentaire $\{C\}$ pour obtenir celle de $\{P\}$ dans la résolution ci-après.

Prenons pour 100 lancers, on obtient 20 billes noires. Soit C la face courbe.

$p(C) = \frac{20}{100} = 0,2$. D'où $p(P) = 2p(C) = 2 \times 0,2 = 0,4$.

Dans cette résolution, la confusion entre les faces du cauri et les couleurs de billes fait penser à l'expérimentation réalisée dans la situation n°2 pour construire la notion de probabilité d'un événement. On note à ce niveau la présence d'un certain rapport à la notion de la probabilité suivant la loi faible des grands nombres. La technologie de cette technique est

constituée du langage des probabilités, de la notion de probabilité d'un événement selon la loi faible des grands nombres.

2.5.2.1.3. Troisième question

Par rapport au type de tâches T_{13} dont relève la troisième consigne de l'exercice, seule la technique non convenable $\tau_{13,2}$ décrite dans l'analyse a priori (Chap. VI, 3.5.3.1.2.), et qui est basée sur une interprétation à partir du premier principe de Laplace, est observée chez les élèves d'un seul groupe qui ont produit la résolution ci-après :

$$p(P) = \frac{\text{Nbre de cas favorables}}{\text{Nbre de cas possibles}} ; N_f = N_p \times p(P) = 1000 \times 0,66 = 660.$$

Même si ce nombre trouvé peut être considéré comme une estimation du nombre de fois que l'événement $\{P\}$ est réalisé sur les 1000 réalisations de l'expérience aléatoire, cette résolution qui utilise le premier principe de Laplace n'est pas une appréhension correcte du problème posé. La méthode correcte basée sur l'approche fréquentiste a dû être présentée par le professeur et le chercheur à la classe pendant le temps de travail collectif comme le montre l'échange ci-après (Annexe 15, Lignes 275 à 314).

Prof : Bien. Maintenant la dernière question. J'ai vu que personne ne l'a fait. Enfin vous n'avez même pas eu le temps d'aller là-bas. On dit qu'on lance le cauris 1000 fois de suite. Combien de fois le cauris pourrait-il reposer sur la face P ? Lorsqu'on lance le cauris 1000 fois, combien de fois on voit, on va voir l'événement $\{P\}$ se réaliser ? Si on lançait le cauris 1000 fois, combien de fois, on voir la face P apparaître ? Combien de fois on va voir le cauris reposer sur la face P ? Normalement quelle est la meilleure manière de le savoir ? Quelle est la meilleure manière de savoir combien de fois le cauris va reposer sur la face P ?

Un élève : L'expérience aléatoire.

Prof : Parlez à haute voix.

L'élève : On va d'abord faire l'expérience.

Prof : C'est de faire l'expérience, c'est de lancer le cauris 1000 fois.

[...]

Chercheur : Vous avez fait des expériences pour déterminer les probabilités. Quand vous avez fait votre tirage, par exemple, 100 fois, 200 fois, qu'est-ce qui a été votre probabilité ? Vous avez trouvé la probabilité comment ? Oui

Élève E_1 : On a calculé la fréquence.

Chercheur : Parlez fort !

Élève E_1 : Pour trouver la probabilité, on a fait l'expérience aléatoire. On a fait un grand nombre. On a fait le graphique.

Chercheur : D'accord ! Maintenant il n'y a pas de graphique. Vous avez lancé un nombre de fois non ? Et vous avez calculé la fréquence. Ici on a dit : vous faites 1000 fois. En réalité on donne l'exercice à des gens qui ont fait l'expérience. Si on avait lancé le cauris 1000 fois, on aurait trouvé la face P, que le cauris repose sur la face P combien

de fois ? Vous avez fait l'expérience. Parce que vous avez fait l'expérience, c'est possible que vous puissiez donner une estimation de ce nombre.

Élève E_{17} : On va faire la probabilité fois le nombre total de tirages.

Chercheur : Parle fort pour qu'ils entendent.

Élève E_{17} : Pour trouver le nombre de fois qu'on obtiendra, peut-être la face C là.

Chercheur : La face P. Alors si on appelle N_p ce nombre, on l'obtient comment ? C'est ce que tu es entrain de donner.

Élève E_{17} : N_p serait égale à la probabilité de P fois 1000, le nombre de tirages.

Chercheur : Parce que vous avez avec vos expériences vu que c'est la fréquence qui devient la probabilité. Ou bien ?

Élève E_{17} : Oui.

De cet échange, on peut noter essentiellement deux choses. Premièrement, le relais pris par le chercheur a permis de vite orienter la discussion vers la recherche de solution à la question en étude. Ensuite, l'intervention de l'élève E_{17} montre une certaine maîtrise de la démarche de l'approche fréquentiste par un certain nombre d'élèves.

2.5.2.2. Bilan de la résolution de l'exercice 2

Pour l'ensemble des trois questions de l'exercice, les élèves ont pu globalement proposer pendant le temps de travail en groupe des réponses variées dont des réponses correctes, notamment pour les deux premières questions. Plus spécifiquement, pour la première question, même si la plupart des élèves ont donné à juste titre les deux éventualités de l'expérience aléatoire, nous avons observé chez certains élèves deux autres types de réponses. L'un de ces types de réponses incorrect mais pertinent prend en compte les informations du problème relatives aux probabilités des événements élémentaires, en attribuant à chaque éventualité un poids. Au niveau de la deuxième question, il est observé en dehors de la réponse correcte, un type de réponse inspiré de l'expérimentation de l'approche fréquentiste faite dans la situation 2. Contrairement à ce que nous avons prévu dans l'analyse a priori, il n'y a eu aucune réponse exploitant le premier principe de Laplace. Quant à la troisième question, on n'a observé chez les élèves que le type de réponses erroné basé sur le premier principe de Laplace. Ce type de réponse a été évidemment corrigé pendant le temps de travail collectif sous la conduite du professeur et du chercheur avec la participation effective des élèves, dont notamment l'élève E_{17} qui semble montrer un rapport certain à l'approche fréquentiste.

2.5.3. Exercice 3

L'exercice 3 porte sur le calcul de probabilités à partir du premier principe de Laplace et l'estimation du nombre de cas favorables à un événement connaissant la probabilité de cet événement et le nombre de réalisation de l'expérience aléatoire.

2.5.3.1. Organisation mathématique des élèves

Les cinq consignes de l'exercice 3 correspondent à deux types de tâches, à savoir le type de tâches T_{10} : « Calculer la probabilité d'un événement » et le type de tâches T_{13} : « estimer le nombre d'apparitions d'un événement connaissant sa probabilité et le nombre de réalisations de l'expérience aléatoire ».

2.5.3.1.1. Questions 1.a, 1.b, 2.a et 2.b

Par rapport au type de tâches T_{10} dont les quatre premières consignes sont des spécimens, les élèves ont adopté deux techniques. Il s'agit de la technique TE que nous avons aussi notée $\tau_{10.2}$ comme le montre les échanges ci-après relatifs à la résolution en groupe classe de la première consigne (Annexe 15, Lignes 358 à 366).

Prof : Comment vous avez fait pour trouver $\frac{1}{6}$.

Élève E_9 : On a pris le nombre de fois on peut trouver le numéro 1 sur le nombre total de cartons.

Prof : Le nombre total de cartons. Ça fait nombre de cas favorables sur le nombre de cas,

Élèves : possibles.

Prof : Pourquoi vous avez fait ça comme ça ?

Élève E_9 : C'est comme ça.

Élève E_{14} : Les six cartons sont identiques.

Prof : Voilà ! Les six cartons sont identiques. Donc on est dans la condition.

L'application réussie de la technique TE dans cet exercice par l'ensemble des quatre groupes de la classe est une preuve d'un rapport conforme au premier principe de Laplace pour la grande majorité des seize élèves de la classe dans le cas des expériences aléatoires simples. Ainsi par rapport aux quatre premières consignes de l'exercice, les élèves ont appliquée avec succès la technique TE requise pour aboutir aux résolutions correctes arrêtées par l'ensemble de la classe pendant le temps du travail collectif. Cependant, il y a eu quelques particularités observées. Premièrement, les réponses aux questions 2.a et 2.b sont identiques pour les quatre groupes. Ensuite, trois des quatre groupes ont exprimé les probabilités calculées sous forme de fractions irréductibles, alors que le quatrième les a exprimées sous forme de fractions irréductibles suivies de valeurs approchées décimales. Enfin, la lecture parallèle du calcul des probabilités des événements A : « le carton tiré porte le numéro 1 » et B : « le carton tiré porte le numéro 5 » montre que les nombres de cas favorables à ces événements respectifs sont déterminés avec succès dans trois groupes et que dans le quatrième groupe ces nombres sont confondus aux numéros portés respectivement par les cartons. Ainsi, alors qu'un seul carton

porte le numéro 5 parmi les 6, la probabilité de l'événement B trouvée par les élèves du groupe 4 est $\frac{5}{6}$ comme le montre l'image ci-après.

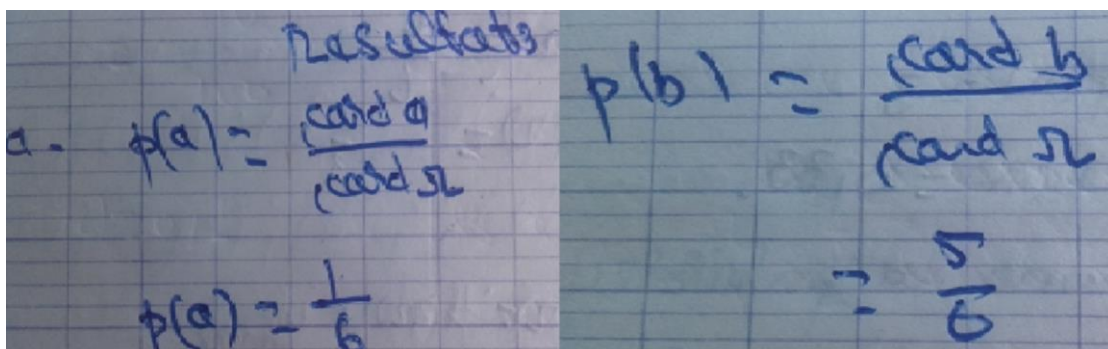


Image n°03 : Une détermination erronée de nombre de cas favorables.

Cette confusion entre nombre de carton et numéro de carton avait été réalisée par les élèves au cours de l'expérimentation référentielle de Brousseau (2005) comme nous l'avons fait remarquer dans l'analyse a priori (Chap. VI, 3.5.4.2.2.).

2.5.3.1.2. Question 3

La durée trop longue de la séance n'ayant pas permis de travailler la dernière consigne de l'exercice, il ne nous a pas été possible d'observer pour une deuxième fois les réactions de l'ensemble des élèves par rapport au type de tâches T_{13} dans cet exercice. Toutefois les traces écrites dans les cahiers des élèves ont montré l'utilisation par deux élèves de la technique $\tau_{13.1c}$ indiquée dans l'analyse a priori (Chap. VI, 3.5.4.2.1.) et qui conduit à une appréhension erronée de l'estimation du nombre d'observations de l'événement « le carton tiré est rouge ». Malgré une première application du concept fréquentiste de la probabilité d'un événement dans l'exercice 2, les deux élèves ayant résolu la question 3, après avoir déterminé la probabilité de l'événement « le carton tiré est rouge », ont utilisé la méthode erronée de détermination du nombre de réalisations de cet événement. Leurs propositions de réponses se présentent ainsi qu'il suit.

Élève E_{14} du groupe G_4

$$p(R) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$N_R = p(R) \times n_{\text{tirages}}$$

Élève E_{16} du groupe G_3

$$p(A)=0,16 ; n = p(A) \times 2500$$

$$= 0,16 \times 2500$$

$$= 400$$

Si l'élève E_{14} est parti d'une valeur correcte et exacte de la probabilité de l'événement, l'élève E_{16} par contre, est parti d'une valeur approchée erronée de la probabilité sans même se rendre compte qu'il ne s'agit pas d'une égalité.

2.5.3.2. Bilan de la résolution de l'exercice 3

La première application du premier principe de Laplace, à travers la résolution de l'exercice 3, a montré que les élèves ont dans leur majorité un rapport conforme à celui de ce principe. L'identification de la situation d'équiprobabilité et l'utilisation de la technique TE lui correspondant sont les actes qui indiquent leur rapport adéquat au premier principe de Laplace. La simplicité de l'expérience aléatoire a certainement favorisé la détermination avec succès des nombres de cas favorables et de cas possibles pour la résolution des quatre premières consignes de l'exercice, même si la confusion entre nombre et numéro, que nous avons prévu au niveau de la question 1.b, a été effectivement observé chez un élève. Au niveau de la dernière consigne relative à l'estimation du nombre de réalisations d'un événement par rapport à un nombre donné de réalisations de l'expérience aléatoire, des élèves ont persisté dans la démarche erronée basée sur le premier principe de Laplace, bien qu'elle ait été corrigée au niveau de la dernière question de l'exercice 2, confirmant ainsi la possibilité que nous avons évoquée dans l'analyse a priori que des élèves pourraient continuer à utiliser le premier principe de Laplace.

2.5.4. Exercice 4

Il est posé deux questions dans l'exercice 4 : l'une consistant à déterminer les probabilités des événements élémentaires et l'autre portant sur le calcul de probabilités à partir du deuxième principe de Laplace.

2.5.4.1. Organisation mathématique observée

La première question est un spécimen du type de tâches T_{12} : « déterminer la probabilité d'un événement élémentaire », déjà rencontré dans la deuxième exercice2, tandis que la deuxième question en est un du type de tâches T_{10} : « calculer la probabilité d'un événement », déjà rencontré pour la première fois dans l'exercice 3.

2.5.4.1.1. Première question

Comme on pouvait s'y attendre, les élèves n'ont pas compris ce que « numéro de même parité » pourraient signifier. Ils ont dû demander des explications au professeur pour que l'énoncé de l'exercice soit compris.

Au type de tâches T_{12} , les élèves ont dans un premier temps adopté la technique TE basée au premier principe de Laplace. Cette technique, que nous avons encore notée $\tau_{10,2}$, ne pouvant

conduire aux réponses correctes attendues, a induit deux types de réponses. D'abord, sans s'assurer que la condition d'application du premier principe de Laplace est vérifiée, les élèves ont proposé une réponse utilisant ce principe comme dans la proposition de réponse ci-après du groupe n°3.

La probabilité d'apparition de chacune des faces

$p(1) = \frac{1}{6} = 0,16$. Comme les numéros de même parité ont la même chance d'apparaître,

alors on a : $p(1) = p(3) = p(5) = 0,16$.

$p(2) = \frac{1}{6} = 0,16$. Or par hypothèse les numéros de même parité ont la même chance

d'apparaître. Donc $p(2) = p(4) = p(6) = 0,16$.

La séparation dans cette résolution des événements élémentaires de même parité viendrait de la précision dans l'exercice que les événements élémentaires de même parité ont la même chance d'apparaître. Cependant la donnée selon laquelle la probabilité d'un événement élémentaire de numéro pair est le double de celle d'un événement de numéro impair, n'apparaît pas dans cette résolution. Bien que reposant sur la technique TE, ce type de réponse est marqué par une mauvaise compréhension de l'énoncé comme d'ailleurs le deuxième type de réponses intervenu lors d'une discussion ouverte par le professeur pour faire traduire les données du problème en langage mathématique. En effet, aucun élève n'a pu au prime abord traduire les conditions d'équiprobabilité des événements portant les numéros de même parité. Au cours de cette discussion, un élève a semblé proposer de considérer séparément les éventualités de même parité dans un même univers des possibles, proposant ainsi deux univers des possibles comme le montre les échanges verbaux ci-après (Annexe 16, Lignes 110 à 112).

Élève E_{14} : J'ai une idée. Je ne sais pas hein. Si on veut, comme on sait que les numéros de même parité ont même probabilité, on peut prendre l'événement qui est composé des numéros pairs. Maintenant, pour les événements, l'événement qui est composé de numéros pairs, la face là, euh l'univers ça va faire 3 et lorsqu'on veut calculer on va faire cardinal sur 3.

Prof : [...] Je te comprends bien mais on a une seule expérience aléatoire. C'est-à-dire si tu casses encore l'univers en deux autres univers, c'est comme s'il y a deux expériences aléatoires. Chaque fois, dans un exercice de calcul de probabilités, c'est qu'il y a une expérience aléatoire qui est donnée et donc il y a combien d'univers ?

Élève14 : Un seul.

Il est à noter dans l'intervention de l'élève E_{14} un lapsus qui lui fait confondre ici événement et univers. En considérant un univers des éventualités caractérisées par les numéros

pairs, ou celui des numéros impairs, la probabilité de chaque événement élémentaire serait $\frac{1}{3}$. Ce qui correspond à l'un des types de réponses possibles auxquels nous avons pensé dans l'analyse a priori (Chap. VI, 3.5.5.2.2).

Après la traduction des données du problème dans le langage des probabilités sous la conduite du professeur, tous les groupes ont adopté la technique $\tau_{12.1}$ qui convient à la question et qui les a conduits aux réponses correctes : $p(\{1\}) = p(\{3\}) = p(\{5\}) = \frac{1}{9}$ et $p(\{2\}) = p(\{4\}) = p(\{6\}) = \frac{2}{9}$. Rappelons que la technique $\tau_{12.1}$ est justifiée par le deuxième principe de Laplace et l'axiome $p(\Omega) = 1$.

2.5.4.1.2. Deuxième question

Au type de tâches T_{10} dans cet exercice 4, on relève chez certains élèves la technique APEE convenable et chez d'autres la technique $\tau_{10.2}$ relative au premier principe de Laplace. La technique APEE encore notée $\tau_{10.3}$ est la technique visée. Elle est appliquée avec succès par les groupes G_1 , G_2 et G_4 pour le calcul des probabilités des deux événements A et B telle qu'elle a été exactement développée dans l'analyse a priori (Chap. VI, 3.5.5.2.2).

Pour le calcul des probabilités des deux événements A et B, les élèves du groupe G_3 ont appliqué la technique $\tau_{10.2}$ justifiée globalement par le premier principe de Laplace et non adaptée à la question. La résolution de cette question par ce groupe se précise ainsi qu'il suit.

On sait que $p(\{2\}) = p(\{4\}) = p(\{6\})$.

Alors $p(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$; $p(A) = \frac{3}{6} = 0,5$.

Dans cette résolution erronée, l'égalité traduisant l'équiprobabilité des événements composant l'événement A, semble être la justification de l'option du premier principe de Laplace prise par les élèves. Il en ressort donc un théorème en acte pouvant s'énoncer comme il suit : « lorsque tous les événements élémentaires d'un événement A sont équiprobables, alors $p(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$ ».

2.5.4.2. Bilan de la résolution de l'exercice 4

Dans la résolution de l'exercice 4, les élèves ont été confrontés à deux difficultés majeures. La première, d'ordre algébrique, est caractérisée par le fait qu'ils n'ont pas pu traduire les données du problème en langage des probabilités. La levée de cette difficulté a permis à certains élèves de déterminer les probabilités des événements élémentaires et de calculer les autres probabilités en appliquant le deuxième principe de Laplace. La deuxième difficulté est relative aux

conditions d'équiprobabilité données sur certains événements élémentaires. Ces conditions auraient entraîné certains élèves à opter avec insistance pour le premier principe de Laplace. Ce qui s'est manifesté par un théorème en acte réduisant la condition d'équiprobabilité juste à l'équiprobabilité des événements élémentaires composant l'événement dont la probabilité est à calculer.

Concernant les réponses possibles aux questions, il est à noter que tous les types de réponses prévus pour la première question ont été observés tout au long de la résolution complète de cette question. Quant à la deuxième question, des trois types de réponses prévus, seul celui qui utilise la formule liant les probabilités d'un événement et de son contraire n'a pas été observé pour le calcul de la probabilité de l'événement B.

En somme, bien qu'adapté au deuxième principe de Laplace, l'exercice 4 a permis de mieux faire connaître aux élèves la condition d'application du premier principe de Laplace.

2.5.5. Exercice 5

Lors de la résolution de l'exercice 5, les groupes ont été spontanément recomposés par les élèves suite à une pluie diluvienne dont les gouttes d'eau sont brassées dans la salle d'expérimentation, réduisant ainsi l'espace de travail disponible. Trois groupes G_1 , G_2' et G_3' dont le premier, ancien groupe G_1 , est composé de quatre membres et les deux autres de six membres chacun, ont eu un temps de travail en groupe pour répondre aux cinq consignes de l'exercice. À cause des conditions climatiques spéciales du jour, le professeur a dû circuler de groupe en groupe pour s'enquérir des propositions de solutions des élèves et de discuter au besoin avec eux en vue de l'amélioration de leurs productions.

2.5.5.1. Organisation mathématique effectivement observée

Dans l'exercice 5, deux expériences aléatoires d'un même contexte de lancer de dés sont définies pour appliquer à nouveau le premier principe de Laplace. Deux types de tâches permettent d'expliquer les cinq consignes de l'exercice. Il s'agit du type de tâches T_{11} : « déterminer l'univers des possibles d'une expérience aléatoire » pour les consignes 1.a) et 2.a) et du type de tâches T_{10} : « calculer la probabilité d'un événement » pour les consignes 1.b), 1.c) et 2.b).

2.5.5.1.1. Question 1.a)

La technique effectivement observée chez les élèves par rapport au type de tâches T_{11} est la technique $\tau_{11.1}$ qui consiste à dresser la liste de toutes les éventualités de l'expérience aléatoire, sans n'avoir recours ni à un tableau à double entrée, ni à un arbre de choix.

Les trois groupes ont pu faire la liste des trente-six éventualités de l'expérience aléatoire « lancer deux fois de suite un dé cubique équilibré ». Dans la forme, deux groupes ont présenté les éventualités sous forme de nombres de deux chiffres comme indiqué par l'énoncé, tandis qu'un groupe les ont présentées sous forme de couple comme le montrent les images suivantes.

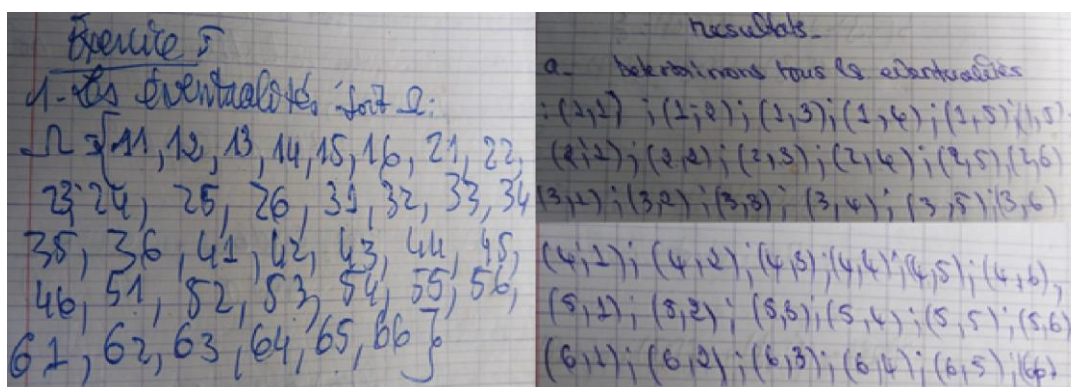


Image n°04 : Présentation des éventualités de l'expérience aléatoire de la question 1 de l'exercice 5.

2.5.5.1.2. Question 1.b)

Une fois l'univers des éventualités déterminé en extension, les élèves des groupes G_2' et G_3' ont pu identifier les éventualités de l'événement « le nombre formé est impair » pour calculer la probabilité de cet événement suivant la technique TE. Quant aux élèves du groupe G_1 , ils n'ont pas pu proposer dans un premier temps de réponse, car ne sachant pas qu'ils étaient dans une situation d'équiprobabilité. La discussion qu'ils ont eue dans le groupe avec le professeur leur a permis de s'en convaincre et de répondre convenablement à la consigne. La production ci-dessous est à la présentation près la réponse commune proposée par chacun des groupes.

Soit A l'événement « le nombre formé est impair »

$A = \{11, 13, 15, 21, 23, 25, 31, 33, 35, 41, 43, 45, 51, 53, 55, 61, 63, 65\}$.

$$p(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{18}{36} = 0,5.$$

Rappelons que la technique est justifiée par la technologie constituée du langage probabiliste, du premier principe de Laplace et de l'analyse combinatoire dont les élèves ne sont pas encore conscients.

2.5.5.1.3. Question 1.c)

Au niveau de cette question, l'ensemble des trois groupes ont encore adopté la technique TE convenable avec succès. Les cas favorables de l'événement « la somme des chiffres du nombre formé est égale à 9 » ont été facilement identifiés et dénombrés, et le premier principe de Laplace appliqué sans hésitation comme dans la production ci-après.

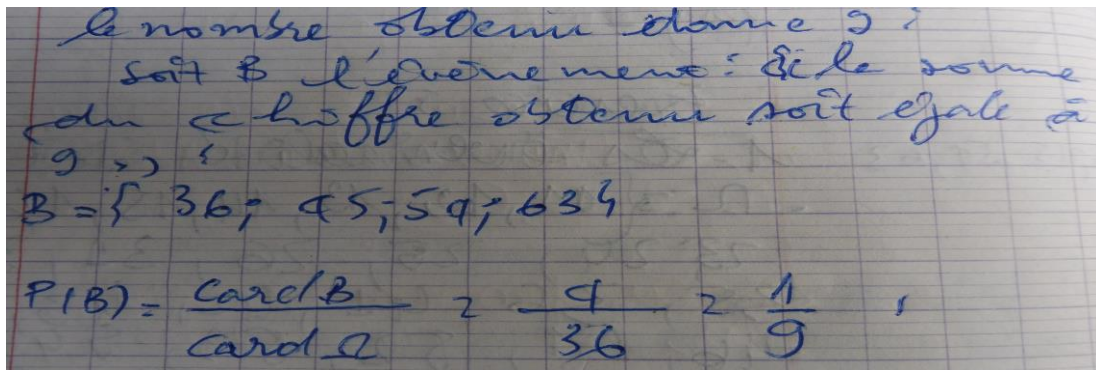


Image n°05 : Résolution de la question 1.c) de l'exercice 5.

2.5.5.1.4. Question 2.a)

Le nombre relativement élevé des éventualités de la deuxième expérience aléatoire n'a pas permis à tous les groupes de dresser la liste de toutes les éventualités. Néanmoins les élèves de l'un des trois groupes ont pu faire la liste complète des éventualités. Pendant que le professeur faisait le point des résultats des différents groupes, un élève a proposé une méthode lui permettant de déterminer le nombre des éventualités sans les avoir listées : c'est l'émergence d'une technique $\tau_{11.4}$ basée sur la formule de dénombrement des listes. On distingue donc deux techniques relevant du type de tâches T_{11} au niveau des élèves dans cette question. Il y a d'abord la technique $\tau_{11.1}$ qui consiste à identifier l'expérience aléatoire et à écrire les éventualités. Pour y arriver, les élèves, en dressant la liste trop longue, ont dû représenter certaines éventualités par des pointillés comme dans l'image suivante.

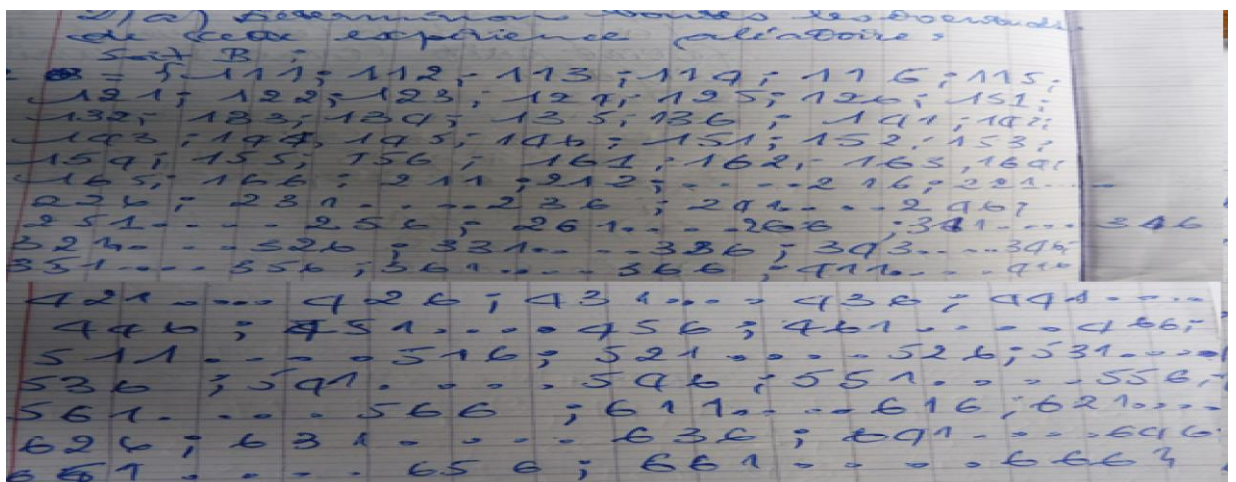


Image n°06 : Liste des éventualités de l'expérience aléatoire de la question 2 de l'exercice 5.

Au décompte, les élèves qui ont dressé cette liste, ont trouvé 217 éventualités au lieu de 216. Ceci est dû au fait qu'il y a un pointillé de trop entre les nombres 212 et 216 de la liste.

La deuxième technique $\tau_{11.4}$ que nous nommons encore « émergence de la formule n^p » a consisté chez l'élève à déterminer le nombre de nombres commençant par 1 que l'on peut former puis à multiplier ce nombre par 6 comme cela est expliqué dans l'échange suivant (Annexe 16, Lignes 282 à 289).

Prof : Quelqu'un a dit 216.

Élève E₁₅ : Oui !

Prof : Comment as-tu trouvé 216 ?

Élève E₁₅ : J'ai fait 6 fois 6 fois 6.

Prof : On prend 1, on peut écrire 11, 12, 13, 14, 15, 16 comme les chiffres des centaines et des dizaines. Et il dit pour chacun de ces nombres, on peut écrire 6 nombres. Tu continues.

Élève E₁₅ : Maintenant, on fait le tout fois 6.

Prof : Le tout, ça fait combien ?

Élève E₁₅ : Ça fait 36. Pour le 1, ça fait 6 fois 6.

La technologie justifiant la technique « émergence de la formule n^p » est constituée des notions d'expérience aléatoire, d'éventualités et de la propriété émergente du dénombrement des listes.

En dehors de ces deux techniques, certains élèves ont déclaré avoir essayé sans succès la technique $\tau_{11.3}$ basée sur la réalisation d'un arbre de choix.

2.5.5.1.5. Question 2.b)

Dans cette question, seule la technique TE ou $\tau_{10.2}$ est observée au niveau des élèves pendant le temps de travail en groupe. Le calcul de l'événement « le nombre formé comporte uniquement des chiffres pairs » est ainsi effectué en appliquant le premier principe de Laplace au niveau des élèves qui ont dressé la liste complète des éventualités. Ils ont pu identifier les éventualités favorables à l'événement dont ils ont dressé la liste pour trouver une probabilité égale $\frac{27}{216}$ après correction du nombre erroné des cas possibles, ramenés de 217 à 216.

2.5.5.3. Bilan de la résolution de l'exercice 5

Pour la résolution de l'exercice 5, la plupart des élèves ont reconnu que les expériences aléatoires traduisent des situations d'équiprobabilité et ont par conséquent utilisé le premier principe de Laplace pour calculer les probabilités. Il a fallu cependant l'intervention du

professeur chez certains élèves pour qu'ils reconnaissent être en face des situations d'équiprobabilité. Comme nous l'avons prévu, l'univers des possibles est déterminé à partir de la technique consistant à établir la liste des éventualités. Tous les élèves se sont servis de leur connaissance d'un dé cubique pour établir cette liste pour la première expérience aléatoire. Pour la deuxième expérience aléatoire, en dehors de l'établissement de la liste des éventualités par l'un des groupes formés spontanément pour la résolution de l'exercice, une méthode de dénombrement des éventualités a été proposée par un élève. L'arbre de choix a été essayé sans succès chez certains et le tableau à double entrée n'a pu être réalisé pour lister les éventualités. Une fois les cas possibles connus, les élèves ont identifié sans difficulté les cas favorables aux événements pour calculer leurs probabilités et notamment au niveau de la plus simple des expériences aléatoires de l'exercice

En somme, les praxéologies prévues dans l'analyse a priori sont globalement observées chez les élèves. L'émergence d'une technique de dénombrement chez les élèves pourrait être une motivation en faveur de l'étude de l'analyse combinatoire dans un processus d'enseignement institutionnel. L'application du premier principe de Laplace dans l'exercice 5 avec des expériences aléatoires relativement complexes devrait améliorer le rapport des élèves à ce principe.

2.5.6. Exercice 6

Comme dans l'exercice 4, l'exercice 6 comporte deux questions qui consistent respectivement à déterminer les probabilités des événements élémentaires et à calculer la probabilité d'un événement à partir du deuxième principe de Laplace. Au début de la séance la notion de proportionnalité a dû être clarifiée par le professeur sur la demande d'un élève.

2.5.6.1. Organisation mathématique observée

Les deux questions de l'exercice sont respectivement des spécimens des types de tâches T_{12} : « déterminer la probabilité d'un événement élémentaire » et T_{10} : « calculer la probabilité d'un événement ». Rappelons que le type de tâches T_{12} est déjà rencontré dans les exercices n°2 et n°4, tandis que dans le contexte d'application du deuxième principe de Laplace, le type de tâches T_{10} est rencontré pour la première fois dans l'exercice 4.

2.5.6.1.1. Première question

Dans l'exercice 6, les techniques effectives des élèves relevant du type de tâches T_{12} sont au nombre de deux, à savoir : la technique $\tau_{12.1}$ qui combine le deuxième principe de Laplace et l'axiome $p(\Omega) = 1$ et la technique TE relative au premier principe de Laplace. En effet, les

membres du groupe G_4 ont opté pour la première technique indiquée avec la résolution experte ci-dessous, qui a été adoptée par la suite par toute la classe pendant le temps de travail collectif.

$$p(\Omega) = p(\{2\}) + p(\{3\}) + p(\{5\}) + p(\{10\}).$$

$$\text{Or } \frac{p(\{2\})}{2} = \frac{p(\{3\})}{3} = \frac{p(\{5\})}{5} = \frac{p(\{10\})}{10}.$$

$$\frac{p(\{2\})}{2} = \frac{p(\{10\})}{10} \Leftrightarrow p(\{10\}) = 5p(\{2\}); \quad \frac{p(\{2\})}{2} = \frac{p(\{5\})}{5} \Leftrightarrow p(\{5\}) = \frac{5}{2}p(\{2\});$$

$$\frac{p(\{2\})}{2} = \frac{p(\{3\})}{3} \Leftrightarrow p(\{3\}) = \frac{3}{2}p(\{2\}).$$

$$\text{Alors, on a : } p(\Omega) = p(\{2\}) + \frac{3}{2}p(\{2\}) + \frac{5}{2}p(\{2\}) + 5p(\{2\}) = 10p(\{2\})$$

$$p(\Omega) = 10p(\{2\}). \text{ Or } p(\Omega) = 1, \text{ donc } p(\{2\}) = \frac{1}{10}.$$

$$\text{De } \frac{p(\{2\})}{2} = \frac{p(\{3\})}{3}, \text{ on a } \frac{1}{20} = \frac{p(\{3\})}{3}, \text{ donc } p(\{3\}) = \frac{3}{20}.$$

$$\text{De } \frac{p(\{2\})}{2} = \frac{p(\{5\})}{5}, \text{ on a } \frac{1}{20} = \frac{p(\{5\})}{5}, \text{ donc } p(\{5\}) = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}.$$

$$\text{De } \frac{p(\{2\})}{2} = \frac{p(\{10\})}{10}, \text{ on a } \frac{1}{20} = \frac{p(\{10\})}{10}, \text{ donc } p(\{10\}) = \frac{1}{2} = 0,5.$$

Deux autres groupes, engagés dans la technique $\tau_{12.1}$ ne sont pas allés plus loin que la relation $1 = p(\{2\}) + p(\{3\}) + p(\{5\}) + p(\{10\})$, dans laquelle on retrouve les éléments technologiques de la technique requise. Des difficultés algébriques liées certainement à des connaissances et compétences techniques insuffisantes de la notion de proportionnalité pourraient être à la base de cette résolution inachevée de la question au niveau de ces groupes.

Bien qu'ayant réussi à écrire la relation de proportionnalité, qui ne traduit pas une situation d'équiprobabilité, les élèves du groupe G_3 ont fait recours au premier principe de Laplace et ont défendu leur position comme le montrent les échanges ci-après (Annexe 17, Lignes 182 à 202).

Élève E_{17} : $\Omega = \{2, 3, 5, 10\}$. Et d'après la propriété 6, $p(\Omega) = p(\{2\}) + p(\{3\}) + p(\{5\}) + p(\{10\})$. Sachant que la probabilité d'atteindre une couronne est proportionnelle au nombre de points inscrits dans la couronne, $\frac{p(\{2\})}{2} = \frac{p(\{3\})}{3} = \frac{p(\{5\})}{5} = \frac{p(\{10\})}{10}$. Donc $p(\{2\}) = \frac{1}{4} = 0,25$.

Élèves : Pourquoi ? Pourquoi ?

Prof : Si vous avez de questions à poser, levez le doigt et posez la question et qu'on entende.

Élève E_{14} : Ils ont posé la formule lorsqu'il y a équiprobabilité, ce que je vais demander, est-ce qu'ils ont eu la preuve, euh où est ce qu'ils ont eu la preuve que les événements sont équiprobables ?

Prof : Pour $p(\{2\}) = \frac{1}{4}$, vous avez utilisé quelle formule ?

Élève E₁₇ : C'est la formule 7.

Prof : Voilà ! Pacôme demande si vous avez utilisé la formule 7. Où est-ce que vous avez eu l'information que les événements élémentaires sont équiprobables ? C'est sa question ça. Oui répondez ! Oui Edgard !

Élève E₁₅ : Dans l'exercice, on avait dit que la probabilité d'atteindre une couronne est proportionnelle au nombre de points inscrits dans la couronne. Donc c'est cette partie-là que nous avons traduite au tableau.

Prof : Que vous avez traduit par cette ligne ?

Élève E₁₅ : Oui !

Prof : D'accord ! Maintenant et ici ? C'est ici. La question de Pacôme est ici.

Élève E₁₅ : D'après cette relation-là, euh, P de l'événement A est égale à $\frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$.

Élève E₁₁ : C'est lorsque les événements élémentaires ont la même probabilité.

Prof : Si vraiment c'est $\frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$ comme vous le dites là, c'est lorsque les événements élémentaires ont la même probabilité. Mais votre relation dont vous avez parlé là, est-ce que ça montre que $p(\{2\}) = p(\{3\}) = p(\{5\}) = p(\{10\})$? Vous avez dit que $\frac{p(\{5\})}{5} = \frac{p(\{10\})}{10}$.

Il y a déjà de différence entre les deux. Dans cette relation-là on n'a pas $p(\{5\}) = p(\{10\})$.

On constate aisément dans cet échange que les élèves du groupe G₃ ont trouvé dans la relation de proportionnalité une condition d'équiprobabilité des événements élémentaires.

2.5.6.1.2. Deuxième question

Par rapport au type de tâches T₁₀, c'est la technique $\tau_{10.3}$ ou APEE relative au calcul des probabilité suivant le deuxième principe de Laplace qui a été observé chez les élèves, notamment chez ceux qui ont pu avec ou sans succès déterminer les probabilités des événements élémentaires. En effet, pour le calcul de la probabilité de l'événement « le tireur note un nombre premier », les traces écrites montrent que les élèves des groupes G₃ et G₄ ont adopté la méthode requise, qui est une application du deuxième principe de Laplace, chaque groupe ayant exploité les valeurs des probabilités des événements élémentaires trouvées dans le groupe. Les deux autres groupes n'ont pas pu aborder la question avant le temps du travail collectif au cours duquel la résolution correcte a été justifiée.

2.5.6.2. Bilan de la résolution de l'exercice 6

Contrairement à l'exercice 4, une bonne partie de la classe a mobilisé les éléments technologiques nécessaires à la résolution de l'exercice 6. Ce qui a permis une résolution correcte de l'exercice au niveau de certains élèves. Cette réussite serait certainement due au fait

qu'il y avait déjà eu une première rencontre de l'application du deuxième principe de Laplace. Cependant une mauvaise interprétation de la condition de proportionnalité des probabilités d'événements élémentaires a conduit les élèves d'un groupe à opter pour le premier principe de Laplace. Il importe de noter aussi que des difficultés d'ordre algébrique n'ont pas permis à certains élèves de proposer une résolution complète de l'exercice.

Comparativement à l'analyse a priori, la résolution de la première question à partir du premier principe de Laplace, observée chez certains élèves, n'avait pas été prévue, car pour nous, la condition de proportionnalité des probabilités d'événements élémentaires ne devrait pas faire penser à une situation d'équiprobabilité. Quant à la deuxième question, les élèves ont utilisé l'une des deux méthodes prévues pour la résolution tout en écartant la méthode erronée utilisant le premier principe de Laplace.

En somme, l'expérience acquise par les élèves lors de la résolution de l'exercice 4 a permis à des élèves de reconnaître sans ambiguïté l'exercice 6 comme une application du deuxième principe de Laplace. Le non établissement de la relation de proportionnalité ou sa mauvaise interprétation serait la cause de l'échec dans la résolution de l'exercice 6 chez une autre partie des élèves.

2.5.7. Exercice 7

Compte tenu des difficultés des élèves à comprendre les consignes, l'exercice 7 a été essentiellement résolu dans le temps de travail collectif. Après un premier temps de travail en groupe, au cours duquel les élèves n'ont pas pu bien cerner la nature réelle des éventualités, le professeur a lancé une discussion pour donner des clarifications sur l'expérience aléatoire et l'événement définis dans la première question de l'exercice. Avec un second temps de travail en groupe, les élèves ont tenté d'écrire les éventualités afin de déterminer leur nombre. Dans un autre temps de travail collectif, le professeur a conduit la résolution de toutes les questions de l'exercice avec la participation active des élèves.

2.5.7.1. Organisation mathématique observée

Toutes les questions de l'exercice sont des spécimens du type de tâches T_{10} : « calculer la probabilité d'un événement ». La technique effective qui relève de ce type de tâches est la technique TE, issue de la discussion après le premier temps de travail en groupe. L'utilisation du premier principe de Laplace particulièrement justifiée par les élèves comme le montrent les échanges ci-après (Annexe 17, Lignes 401 à 418).

Prof : Mais nous voulons utiliser quelle formule ? Parce que c'est le problème qu'il faut régler. C'est par rapport aux formules qu'on peut savoir ce qu'on veut aller chercher. On ne va pas chercher d'abord avant d'utiliser la formule. Oui Fadhil, on va utiliser ?

Élève E₆ : 6 et 3.

Prof : Pour utiliser la formule 6, c'est qu'il faut qu'on ait un moyen d'avoir la probabilité des évènements élémentaires. Oui Adéline. Est-ce qu'il y a des données dans l'exercice qui permettent d'obtenir la probabilité de chaque évènement élémentaire ?

Élève E₂ : Ici selon moi, notre première phrase, ils ont dit : un sac contient deux jetons rouges et trois jetons blanc indiscernable au toucher. Donc selon moi, ils ont les mêmes probabilités. Une fois que tous sont indiscernables au toucher donc ils ont les mêmes probabilités selon moi.

Prof : Qu'est-ce que vous en pensez ? Parce qu'on a dit indiscernable au toucher, que les évènements élémentaires ont tous la même probabilité. Oui Fadhil en pense quoi ? Oui entendons-nous parce qu'on n'a pas encore décidé de la formule. Mais ce n'est pas un vote qu'on va faire. On est d'accord ?

Élève E₆ : S'il vous plaît monsieur. Et si les jetons rouges étaient plus, étaient plus de taille que les jetons blancs ?

Prof : Ils seraient indiscernables ? Ils ne seraient pas indiscernables au toucher. S'il y a plus de taille c'est qu'on peut, on peut distinguer. Au toucher on va dire mais il y a tel qui est plus grand que l'autre. Oui Fadhil on conclut quoi ? Que les évènements élémentaires ont la même ?

Élève E₆ : probabilité.

Dans le temps de travail collectif, les cas possibles et les cas favorables ont été dénombrés en réalisant un arbre de choix pour la question 1) et en écrivant toutes les éventualités pour la deuxième question. Puisque la résolution de l'exercice a été presque entièrement faite en temps de travail collectif sous la conduite du professeur, les seules traces écrites des élèves sont relatives à la détermination des éventualités de l'univers ou de l'évènement de la première consigne en vue de la détermination de leur nombre. Dans un premier temps, la majorité des élèves ont considéré comme éventualités les numéros des jetons, comme s'il s'agissait du tirage d'un seul jeton. Après des explications données par le professeur pour la compréhension de l'expérience aléatoire, les techniques $\tau_{11.1}$ et $\tau_{11.3}$ ont été observés dans le cadre de la détermination des éventualités, à savoir : une première technique relative à l'établissement de la liste des éventualités sans la réalisation d'un tableau ou d'un arbre de choix et une deuxième relative à la réalisation d'un arbre de choix.

Concernant la première technique, il est précisément observé dans le groupe G₁ l'établissement avec succès de la liste de toutes les éventualités composant l'événement « tirer deux jetons rouges et un jeton blanc dans cet ordre » comme dans l'image ci-après.

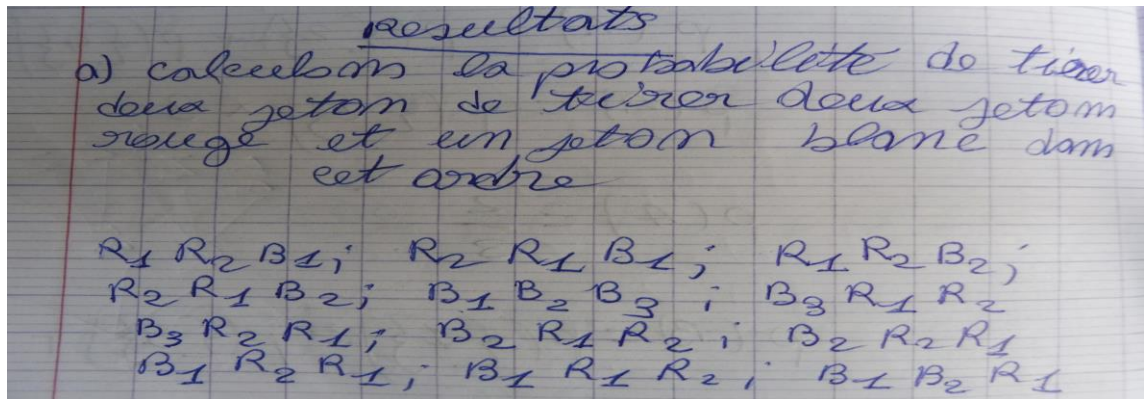


Image n°07 : Liste des éventualités dans la question a) de l'exercice 7 au niveau groupe G₁.

La deuxième technique relative à la réalisation d'arbre de choix est notamment observée dans le groupe G₄, où les élèves n'ont pas tenu compte du fait que le tirage est sans remise. Il s'agit d'un arbre de choix incomplet dans lequel le troisième niveau ne comporte qu'un seul choix comme on peut le constater dans l'image ci-dessous.

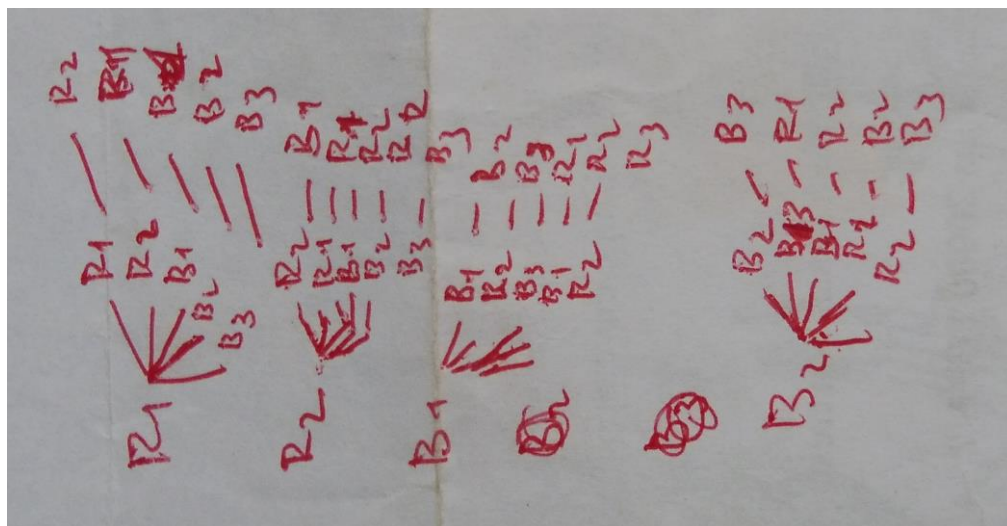


Image n°08 : Arbre de choix réalisé dans le groupe G₄ pour la question a) de l'exercice 7.

2.5.7.3. Bilan de la résolution de l'exercice 7

Le contexte du tirage de plusieurs objets d'un ensemble donné, rencontré pour la première fois, a constitué le principal niveau de difficulté des élèves dans la résolution de l'exercice 7. La nature des éventualités n'a pu alors être reconnue par les élèves sans l'aide du professeur, qui a dû revenir sur la clarification des expériences aléatoires définies dans l'exercice. Après que chacune de deux expériences aléatoires est reconnue comme une situation d'équiprobabilité, les cas possibles et favorables sont déterminés, soit en listant toutes les éventualités, soit en réalisant un arbre de choix. Le fait que le tirage soit sans remise au niveau de la première question n'a pas favorisé le décompte de ces différents cas par les élèves. En conséquence, la résolution correcte de tout l'exercice n'a pu se faire que dans le temps de travail collectif sous la responsabilité du professeur.

En résumé, les praxéologies prévues dans l'analyse a priori n'ont pu être observées chez les élèves, du fait que l'exercice constitue leur première rencontre avec les arrangements et les combinaisons. Dans les conditions de résolution de l'exercice 7, nous estimons que l'apprentissage de ces nouveaux outils de dénombrement, qui ne constituent pas un objectif de l'expérimentation, ne serait pas encore une réussite pour la majorité des élèves.

2.5.8. Bilan de la réalisation de la situation 5

Conçue pour renforcer et appliquer les savoirs construits lors du déroulement des quatre situations précédentes, la situation 5 de l'ingénierie didactique expérimentée a fondamentalement permis aux élèves d'apprendre à calculer des probabilités et de poursuivre l'élaboration des techniques de résolutions des principaux types de tâches. Globalement, les exercices résolus ont porté sur l'identification des données probabilistes dans un langage approprié, la détermination des éventualités d'une expérience aléatoire, la détermination des probabilités d'événements élémentaires, le calcul de probabilités d'événements et l'estimation du nombre de réalisations d'un événement connaissant le nombre de réalisations de l'expérience aléatoire et la probabilité de cet événement. Au niveau des données probabilistes, les probabilités des événements A et B ont pu être identifiées convenablement par les élèves, dans l'exercice 1, après une clarification apportée par le professeur sur l'interprétation des pourcentages dans les problèmes de probabilités. Toutefois, avec la complexité relative de l'événement $A \cap B$, les élèves ont pensé à un calcul plutôt qu'à une identification de donnée en langage approprié. Dans les exercices 2 et 4, les données relatives aux probabilités des événements élémentaires ont pu être traduites avec succès dans le langage des probabilités. Dans l'exercice 6, une clarification de la notion de proportionnalité a été nécessaire pour une

traduction correcte des données relatives aux probabilités des événements élémentaires. La détermination des éventualités d'expériences aléatoires dans la plupart des exercices a consisté en général à lister toutes éventualités, soit simplement, soit en réalisant des arbres de choix avec ou sans succès. Il est à noter qu'au niveau de l'exercice 2 les éventualités ont été pondérées par certains élèves en considérant le rapport des probabilités des deux événements élémentaires. Les probabilités des événements élémentaires dans les exercices 2, 4 et 6 ont été déterminées en combinant le deuxième principe de Laplace, l'axiome $p(\Omega)=1$ et les données relatives aux probabilités des événements élémentaires. Les difficultés rencontrées à ce niveau sont d'ordre algébrique, liées notamment à une traduction erronée des données dans le langage probabiliste. Le calcul des probabilités est effectué, soit en utilisant les formules liant les probabilités de plusieurs événements (exercice 1 et exercice 2), soit en appliquant le premier principe de Laplace (exercice 3, exercice 5 et exercice 7), soit encore en utilisant le deuxième principe de Laplace (exercice 4 et exercice 6). Concernant le premier cas, les formules liant les probabilités de plusieurs événements sont convenablement choisies dans l'ensemble lorsque l'événement dont la probabilité à calculer est bien identifié. L'apprentissage du premier principe de Laplace semble être réussi, car après quelques hésitations dans l'exercice 3, les élèves arrivent à reconnaître les situations d'équiprobabilité et à mobiliser convenablement la formule conséquente. Toutefois l'application du premier principe de Laplace est plus une réussite pour les expériences aléatoires simples comme dans les exercices 3 et 5 qu'avec les expériences aléatoires complexes comme dans l'exercice 7. Il est à noter l'émergence chez un élève de la formule de dénombrement des listes au niveau de la résolution de l'exercice 4. Sur un autre plan, l'étude des situations de tirages selon le modèle d'urne étudié dans l'exercice 7 n'a pas connu de succès au niveau des élèves. Concernant l'application du deuxième principe de Laplace, l'équiprobabilité de certains événements élémentaires dans l'exercice 4 a d'abord conduit les élèves à faire le choix du premier principe de Laplace, avant d'évoluer vers le deuxième principe de Laplace, après une discussion en travail collectif sur le fait que la situation n'est pas celle d'équiprobabilité. Hormis les difficultés d'ordre algébrique, les élèves ont unanimement appliqué le deuxième principe de Laplace, une fois les probabilités des événements élémentaires déterminées. Quant à l'estimation du nombre de réalisations d'un événement, les élèves ont, toutes les fois, confondu la situation à une situation d'équiprobabilité, en considérant le nombre de réalisations de l'expérience aléatoire comme le cardinal de l'univers des éventualités. La correction apportée au niveau de l'exercice 2 n'a pas empêché les élèves de garder leur interprétation initiale au niveau de l'exercice 3.

En somme, en dehors de l'estimation du nombre de réalisations d'un événement connaissant sa probabilité et le nombre de réalisations de l'expérience aléatoire, pour laquelle l'apprentissage ne semble pas être réussi, la réalisation de la situation 5 a permis de constater un apprentissage certain des objets probabilistes étudiés. À la fin de cette situation, les élèves sont initiés au calcul élémentaire des probabilités à travers notamment les techniques TCA, TE et APEE.

Conclusion

Globalement, la réalisation en classe des situations d'apprentissage des probabilités, à savoir les cinq premières situations de l'ingénierie, a permis de faire un grand pas dans l'atteinte des objectifs de la thèse. Au prime abord, le franchissement des obstacles à la notion de hasard et la mise en place des notions de base des probabilités ont été effectifs avec la réalisation des trois phases de la situation n°1. Au niveau de cette situation, la quasi-totalité des élèves ont fait évoluer leurs rapports initiaux inadéquats vers le hasard du « tirage au sort », enjeu important de la première situation de l'ingénierie. Cette évolution du rapport au hasard a favorisé l'installation des concepts probabilistes de base tels que les notions d'expérience aléatoire, d'éventualité et d'événement. L'étude du concept d'événement dans la troisième phase de la situation n°1 a surtout été l'occasion d'une première rencontre avec l'arbre de choix, comme outil de dénombrement. Avec la deuxième situation, la notion de probabilité d'un événement est construite à partir de l'étude de la convergence de la fréquence de réalisation de l'événement sur un grand nombre de réalisations d'expérience aléatoire. La machine génératrice de hasard de la situation fondamentale conçue par Brousseau pour expérimenter l'enseignement des probabilités (2005), que nous avons adaptée à notre ingénierie, a semblé tenir ses promesses. En effet, après les premiers essais de retournement de la bouteille génératrice de hasard et plusieurs tentatives infructueuses de recherche de la méthode de détermination de la composition de la bouteille, les élèves ont pu indiquer la fréquence comme outil de détermination de cette composition. La stabilisation de la fréquence relative a commencé par être constatée à partir de deux cents retournements de la bouteille et la conjecture de la fréquence limite est faite à partir de la réalisation des polygones de fréquences des séries statistiques construites à cet effet. Le réinvestissement de cette méthode expérimentale, qui a permis de définir la probabilité d'un événement, a conduit dans la dernière phase de la situation n°2 à la conjecture du premier principe de Laplace. La même démarche expérimentale, réalisée dans la situation n°3 dans un contexte autre que celui de la bouteille génératrice de hasard, a conduit à la modélisation d'une expérience aléatoire et la découverte du deuxième principe de

Laplace. Avec l'institutionnalisation de la définition de la probabilité à partir de l'axiome $p(\Omega)=1$ et du deuxième principe de Laplace, à l'issue de la réalisation de la situation n°3, les propriétés élémentaires du calcul des probabilités ont été démontrées. À ce niveau, les élèves n'ont pu démontrer en autonomie didactique que les deux propriétés les plus simples parmi les quatre proposées, la démonstration des deux autres étant conduite par le professeur lui-même avec la participation effective des élèves. Comme il a été prévu, l'ensemble des objets probabilistes construits ont été travaillés dans la situation n°5, donnant surtout l'occasion aux élèves de découvrir quelques méthodes de dénombrement pour ce qui concerne le calcul des probabilités dans les situations complexes d'équiprobabilité.

Les organisations mathématiques de la réalisation des cinq situations d'apprentissage de l'ingénierie ont montré une participation très active des élèves, marquée par une autonomie didactique importante des élèves à travers les nombreuses phases adidactiques. Cette participation des élèves est un indice qu'une bonne partie des programmes de probabilités béninois des classes terminales peut être enseignée plus tôt. Les organisations didactiques de la réalisation des cinq situations réunies ont révélé la présence de tous les moments didactiques (Chevallard, 1999), sauf celui de l'évaluation, qui est prévu dans la situation n°6 en vue de l'étude de l'apport de l'ingénierie expérimentée à l'apprentissage du calcul élémentaire des probabilités.

CHAPITRE VIII : Apport de l'ingénierie à l'apprentissage du calcul des probabilités

Le but principal d'une ingénierie relative à la construction d'un savoir donné est de tester les hypothèses liées à la problématique de la recherche didactique et notamment l'évolution du rapport personnel des élèves aux différents concepts liés à ce savoir. L'appréciation de ce rapport est effectuée, d'une part pendant la réalisation en classe de l'ingénierie à partir de l'analyse des comportements des élèves, et d'autre part après sa réalisation à partir de l'analyse des réponses des élèves à un post test relatif aux objets d'enseignement étudiés. L'ingénierie, que nous avons conçue, comporte à la suite des situations d'enseignement, un post test (Chap. VI, 1.) portant sur une large partie des notions ayant fait l'objet d'expérimentation, et majoritairement sur le calcul des probabilités à partir des deux premiers principes de Laplace. Nous présentons dans ce chapitre l'étude de la réalisation de ce post test ainsi que l'analyse des réponses des élèves en nous servant de la théorie anthropologique du didactique dans sa dimension d'organisation mathématique (Chevallard, 1999).

1. Administration du post test

Le test que nous avons prévu pour évaluer le rapport des élèves aux savoirs construits ou en construction est intégré à l'ingénierie en tant que sa sixième et dernière situation. Nous rappelons qu'il comporte huit exercices dont six portent sur le calcul effectif des probabilités. Le post test a eu lieu après les onze séances de la réalisation des cinq situations d'enseignement de l'ingénierie. D'une durée de 90 min pour les élèves, il a eu lieu le 13 mai 2017 entre 8h30 et 10h30 dans le lieu d'expérimentation de l'ingénierie qu'est le collège d'enseignement général d'Agblangandan.

Des seize élèves qui ont régulièrement participé à l'expérimentation, quinze se sont effectivement présentés pour la composition. Parmi eux, cinq n'avaient pas répondu à l'appel à l'heure prévue pour la composition. Nous avons dû appeler les parents de certains d'entre eux, avant qu'ils n'acceptent rejoindre leurs camarades. Ayant reçu l'information selon laquelle un élève, habitant non loin du lieu de composition, ne voulait pas composer, nous nous sommes déplacés vers lui pour le convaincre à participer au test. Bien qu'ayant obtenu la permission de ses parents pour participer au test, le seul absent a choisi de ne pas se présenter sur le lieu de composition.

Le test a été administré par nous-même. L'administration du test a consisté d'abord à disposer les élèves un par table et à suivre les indications ci-après contenues dans le guide de passation du test (Annexe 6) :

- Faire débarrasser les élèves des documents divers ;
- Offrir des feuilles de brouillon aux élèves ;
- Demander aux élèves d'écrire leurs nom et prénoms sur les feuilles de brouillon ;
- Faire remplir la première page et faire lire les exercices avant de commencer ;
- Demander aux élèves de résoudre les exercices dans l'ordre dans lequel ils sont présentés. Il est donc conseillé que chaque élève finisse de traiter un exercice avant de passer au suivant. Toutefois, l'élève peut mettre comme réponse la mention « aucune idée » lorsqu'il estime qu'il n'a aucune réponse à proposer pour une question donnée ;
- Ecrire l'heure de démarrage au tableau ;
- Rappeler aux candidats le temps qu'il leur reste à faire toutes les 15 minutes ;
- Autoriser le dépassement de la durée par ceux qui ont encore des idées après 90 minutes de composition ;
- Ramasser à la fin les copies et les feuilles de brouillon ;
- Remercier les élèves pour leur collaboration.

La plupart des élèves ont pu tenir dans le temps prévu pour la composition. Toutefois, trois élèves ont dépassé le temps prévu d'une quinzaine de minutes, et un élève d'une trentaine de minutes.

En somme, le test s'est déroulé dans des conditions qui garantissent, à notre avis, la fiabilité des informations recueillies chez les élèves. En conséquence, l'analyse des réponses proposées par les élèves aux différentes questions du test permettra de rendre compte en grande partie du rapport personnel de l'élève aux notions probabilistes ainsi qu'au calcul élémentaire des probabilités après la réalisation de notre ingénierie.

2. Analyse des résultats du test

Comme nous l'avons exprimé plus haut et pour rester en conformité avec l'analyse a priori du post test (Chap. VI, 2.2.6.), nous proposons une analyse exercice par exercice, constituée des organisations mathématiques effectives des élèves relatives aux différentes consignes. Ainsi pour chacune des consignes de chaque exercice, nous allons exploiter l'ensemble des réponses proposées par les élèves pour décrire les praxéologies observées et pour alors proposer une

classification de ces réponses en comparaison avec l'analyse a priori. Étant donné que le post test de l'ingénierie avait été également soumis aux élèves lors des analyses préalables (Chap. V), nous proposons pour chaque question une comparaison des résultats obtenus à l'issue de l'expérimentation de l'ingénierie à ceux obtenus lors des analyses préalables, en vue d'apprécier l'apport de cette ingénierie à l'apprentissage des probabilités. Pour la fiabilité de cette comparaison, elle se fera spécifiquement entre les observations des élèves de la classe terminale de la série C concernés par notre étude dans les analyses préalables et celles des élèves de la seconde C ayant participé à l'expérimentation de l'ingénierie. Pour être plus clair, rappelons que lors de nos études antérieures de 2013, cent élèves des classes terminales dont quatorze de la série C ont participé à un test après avoir fraîchement suivi les cours de probabilités conformément aux programmes d'études en vigueur. Nous proposons donc de prendre en compte dans notre comparaison uniquement les quatorze élèves de la terminale C. Ce choix se justifie, d'une part, par le fait que la classe de terminale C de 2013 et celle de la seconde C de 2017 ont des effectifs très voisins, et d'autre part par le fait qu'on peut admettre que ces deux populations d'élèves ont à peu près une même culture scientifique, compte tenu du fait qu'il est admis en série C, dès la classe de seconde, les meilleurs élèves en sciences.

2.1. Analyse des réponses des élèves à l'exercice 1

Étant donné que toutes les consignes de l'exercice 1 font appel à des connaissances déclaratives, l'analyse des résultats sera basée spécialement sur la classification des réponses proposées par les élèves.

2.1.1. Réponses à la question 1

La tâche de la première question de l'exercice 1 s'intitule : « donner la définition d'une expérience aléatoire ». La technique qui relève de cette tâche est constituée de l'énoncé mémorisé ou compris de la notion d'expérience aléatoire, qui est le seul élément technologique justifiant cette technique. Le modèle de définition donnée en classe par le professeur est le modèle MD qui est caractérisé par l'imprévisibilité du résultat et la connaissance préalable des résultats possibles (Dandjinou et Bronner, 2017). Les définitions proposées par les élèves s'inscrivent toutes dans ce modèle et sont presque toutes identiques à la définition qui leur a été enseignée. Au total trois types de définitions du modèle MD que nous désignons par MD₁, MD₂ et MD₃ sont observés chez les élèves. Ils se précisent comme il suit :

MD₁ : Une expérience aléatoire est une expérience dont on ne peut prévoir avec certitude le résultat mais dont on connaît tous les résultats possibles.

MD₂ : Une expérience aléatoire est une expérience dont on ne peut prévoir avec certitude le résultat mais dont on peut connaître les résultats possibles.

MD₃ : Une expérience aléatoire est une expérience dont on ne peut pas dire avec certitude le résultat mais dont on connaît tous les résultats possibles.

Ces types de définitions, qui paraissent identiques, présentent cependant des nuances. La définition MD₁ est celle issue de l'institutionnalisation de la notion d'expérience aléatoire par le professeur expérimentateur. Elle est proposée par les quatre cinquièmes des élèves ayant participé au test. La définition MD₂ améliore la définition MD₁ en ce sens qu'elle met l'accent sur la possibilité de la connaissance préalable des résultats possibles et non pas sur la connaissance de ces résultats. En effet, si pour le lancer d'une pièce de monnaie ou d'un dé cubique, on connaît tous les résultats possibles, ce n'est pas nécessairement le cas pour le tirage de cinq jetons dans un sac contenant par exemple quinze jetons, pour lequel on sait qu'on peut connaître les résultats possibles. Cette définition MD₂ proposée par un seul élève est celle utilisée habituellement par le chercheur dans ses interventions aux côtés du professeur expérimentateur. Enfin, la définition MD₃ paraît moins précise que la définition enseignée, car au niveau de l'imprévisibilité du résultat, il est précisé qu'on ne peut pas « dire avec certitude » le résultat de l'expérience aléatoire, au lieu de « prévoir avec certitude ». En fait, on peut bien dire avec certitude le résultat quand l'expérience aléatoire est déjà réalisée, mais à l'opposé, prévoir le résultat suppose d'office que l'expérience aléatoire n'est pas encore réalisée. Cependant, il est possible que la confusion faite par les élèves ayant proposé la définition MD₃ provienne d'une certaine difficulté à bien s'exprimer dans la langue française, qui n'est d'ailleurs pas leur langue maternelle. Dans ce sens, nous pouvons affirmer que tous les élèves ou presque tous les élèves ayant pris part à notre expérimentation, se sont appropriés la définition de la notion d'expérience aléatoire telle qu'elle leur été enseignée.

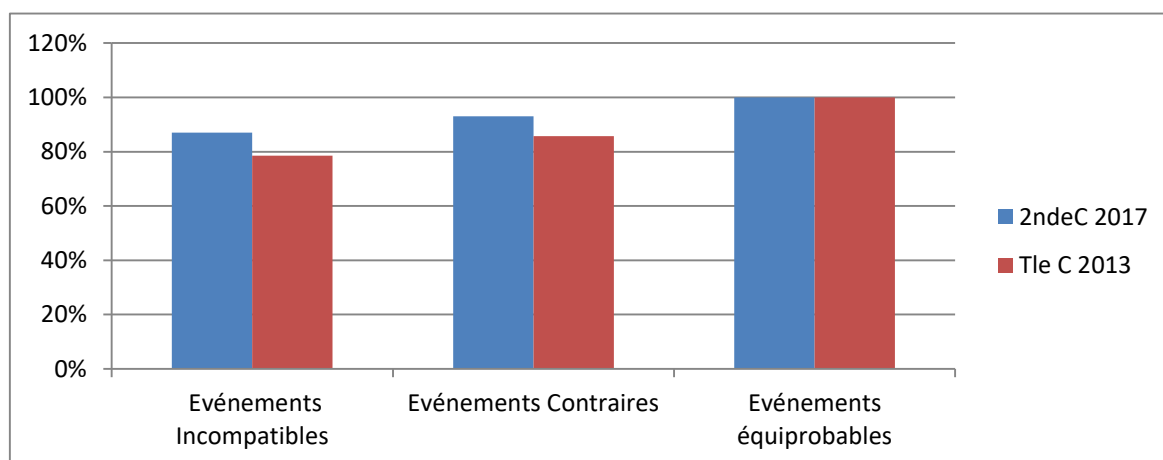
Par rapport aux résultats des analyses préalables, il y a amélioration considérable du comportement des élèves aussi bien qualitativement que quantitativement. Sur le plan qualitatif, le nombre de types de définitions proposés par les élèves après le cours de probabilités est passé de sept dont deux conformes, pour les analyses préalables, à trois dont deux conformes pour les résultats actuels. Sur le plan quantitatif, le pourcentage des élèves ayant proposé des définitions conformes à celle de l'institution enseignante est passé en général de 10% à 86% en considérant l'ensemble des élèves concernés dans les analyses préalables, et plus particulièrement de 7% à 86% si on considère uniquement les élèves de la terminale C.

En somme, sur le plan des connaissances déclaratives, les élèves qui ont suivi l'enseignement des probabilités suivant l'ingénierie expérimentée ont montré une très bonne compréhension de la notion d'expérience aléatoire. Toutefois, cette apparente compréhension peut être chez certains l'effet d'une mémorisation de la définition sans nécessairement que leur rapport à la notion d'expérience aléatoire ne soit suffisant pour conclure à un apprentissage réussi de cette notion. L'analyse des réponses des élèves aux exercices 2 et 3 permettra d'appréhender davantage leur rapport personnel à la notion d'expérience aléatoire.

2.1.2. Réponses à la question 2

La question n°2 de l'exercice comporte trois questions à choix multiples relatives respectivement aux notions d'événements incompatibles, d'événements contraires et d'événements équiprobables. Concernant la notion d'événements incompatibles, les réponses des élèves correspondent à deux réponses parmi les trois proposées. Pour la grande majorité des élèves, deux événements A et B sont incompatibles lorsque $A \cap B = \emptyset$ comme il le leur a été effectivement enseigné, tandis que pour d'autres, deux événements sont incompatibles lorsque $A \cup B = \emptyset$. Pour ce qui concerne la notion d'événements contraires, la quasi-totalité des élèves ont opté pour la bonne réponse en indiquant ainsi que deux événements sont contraires lorsque $A \cap B = \emptyset$ et $A \cup B = \Omega$. Une stricte minorité représentée par un seul élève estime cependant que deux événements sont contraires lorsque $A \cap B = \emptyset$. Quant à la notion d'équiprobabilité de deux événements, les élèves ont unanimement opté pour la bonne réponse proposée.

Par rapport aux résultats issus des analyses préalables, les élèves ayant participé à l'expérimentation en cours d'étude semblent avoir une même compréhension de la notion d'événements et de la typologie des événements. Le graphique ci-dessous montre qu'il n'y a pas de différence significative entre les résultats actuels et ceux issus des analyses préalables.



Graphique n°08: Comparaison des résultats relatifs à la notion d'événement.

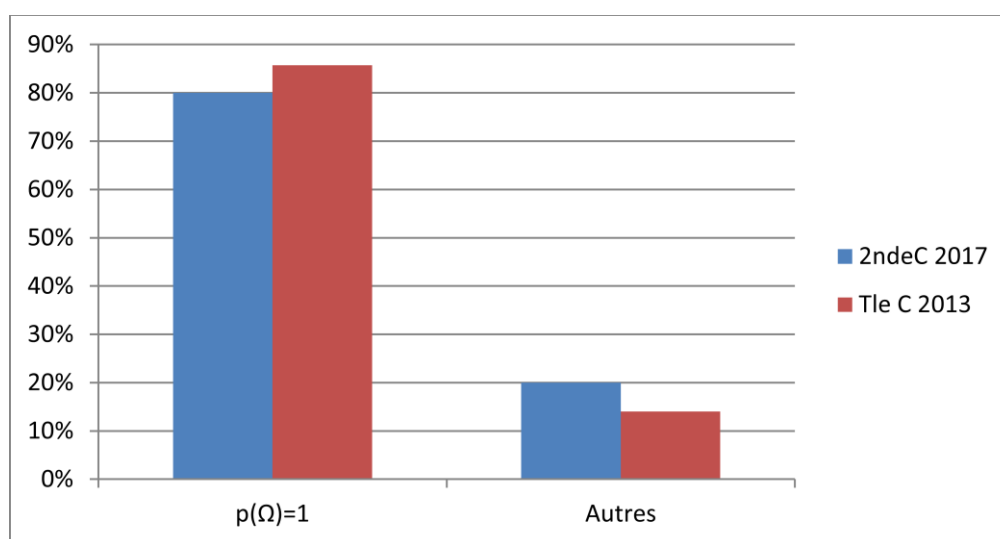
Comme nous l'avions prévu dans notre analyse a priori (Chap. VI, 3.6.1), rares sont les élèves qui n'ont pas choisi les réponses correctes. La maîtrise de la typologie des événements semble être assurée chez les élèves de la série C, aussi bien dans l'approche d'enseignement classique qu'avec l'enseignement basée sur une démarche expérimentale telle que nous l'avons réalisée.

2.1.3. Réponses à la question 3

La question n°3 de l'exercice est une série de quatre questions relatives aux axiomes et propriétés du calcul des probabilités dont notamment les deux premiers principes de Laplace. Elles permettent de mesurer la connaissance que les élèves ont des propriétés de calcul de probabilités.

2.1.3.1. Question 3.a)

La question 3.a) consistant à donner la valeur de $p(\Omega)$, où Ω est l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire, a connu quatre différentes réponses chez les élèves concernés par notre expérimentation. Il y a d'abord la bonne réponse, $p(\Omega) = 1$, donnée par la grande majorité des élèves. Ensuite, les réponses « $p(\Omega)=p(A)+p(B)=1$ », « $\frac{\text{Nombre de cas favorables}}{\text{Nombre de cas possibles}}$ » et « aucune idée » sont observées respectivement chez trois élèves. Nous regroupons ces réponses en deux types de réponses que nous nommons respectivement « Bonne réponse » et « Autres ». Ces résultats sont semblables à ceux issus de nos analyses préalables comme le montre le diagramme ci-après.

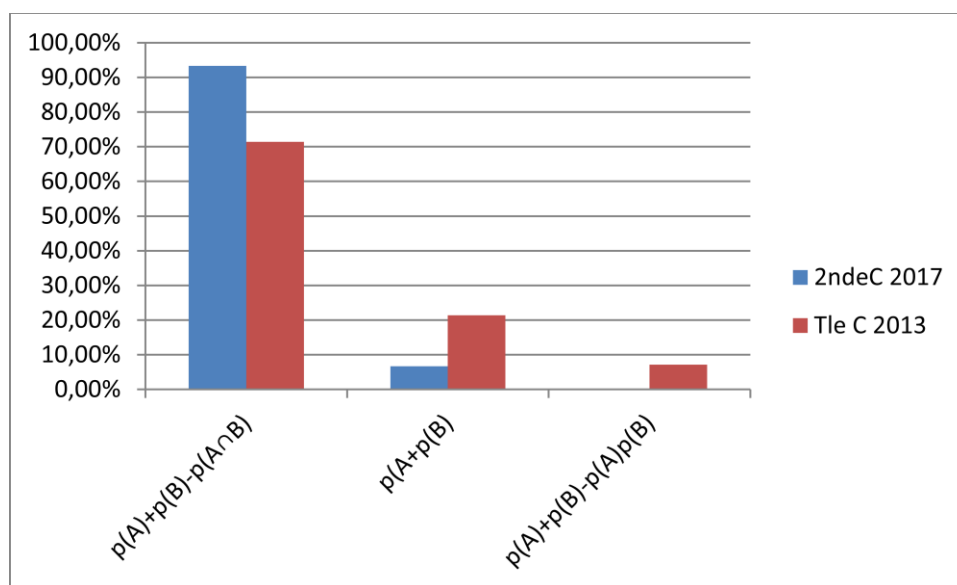


Graphique n°09 : Comparaison des résultats relatifs à l'axiome $p(\Omega)= 1$.

Contrairement à ce que nous avons prévu dans l'analyse a priori, il y a eu des réponses autres que la réponse correcte. L'utilisation et le rappel, répétés de l'axiome $p(\Omega) = 1$ dans la réalisation de l'ingénierie, n'ont pas suffi pour qu'il soit dans le répertoire de connaissances de tous les élèves.

2.1.3.2. Question 3.b)

Il s'agit pour les élèves de rappeler la propriété $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$, pour deux événements quelconques. Deux types de réponses ont été donnés par les élèves. La réponse correcte attendue est proposée par la quasi-totalité des élèves, tandis qu'un élève a proposé $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$, formule valable pour des événements incompatibles. Ces résultats sont semblables à ceux issus des analyses préalables, pour lesquelles il y a eu chez les élèves de la terminale C un troisième type de réponses, valable pour des événements indépendants. Le graphique ci-dessous montre l'amélioration des résultats actuels par rapport à ceux des analyses préalables aussi bien sur le plan qualitatif que sur le plan quantitatif.



Graphique n°10 : Comparaison des résultats relatifs à la propriété $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.

Les deux types de réponses proposés par les élèves ayant participé à notre expérimentation sont exactement ceux qui avaient été prévus au niveau de l'analyse a priori (Chap. VI, 3.6.1.). Le troisième type de réponses provient évidemment des élèves qui, contrairement à ceux concernés par notre ingénierie, avaient étudié la notion d'événements indépendants.

2.1.3.3. Question 3.c)

Pour la question 3.c) relative à l'énoncé du deuxième principe de Laplace, on a enregistré chez l'ensemble des élèves un seul type de réponses, à savoir l'énoncé correct de ce principe. C'est une nette amélioration par rapport aux résultats issus des analyses préalables, pour lesquels les élèves de la terminale C ont proposé six types de réponses dont évidemment l'énoncé exact du deuxième principe de Laplace, écrit tout de même par environ la moitié des élèves. Les autres réponses écrites par ces élèves se précisaient ainsi qu'il suit :

- $p(A) = p(e_1) \cup p(e_2) \cup \dots \cup p(e_k)$;
- $p(A) = e_1 \times e_2 \times \dots \times e_k$;
- $p(A) = p(e_k)$;
- $p(A) = \frac{k}{\text{Card}(\Omega)}$;
- $p(A) = 1 - p(\bar{A})$.

Le passage de six types de réponses lors des analyses préalables à un seul après la réalisation de l'ingénierie est une amélioration qualitative du rapport des élèves à l'énoncé du deuxième principe de Laplace. Cette amélioration est aussi quantitative, car le pourcentage des élèves ayant donné l'énoncé correct du deuxième principe de Laplace est passé d'environ 60% lors des analyses préalables à 100% pour le présent post test.

2.1.3.4. Question 3.d)

Les réponses des élèves à la question 3.d) relative à l'énoncé du premier principe de Laplace, peuvent être regroupées en trois types de réponses, parmi lesquels l'énoncé exact du premier principe de Laplace, à savoir « $p(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$ », proposé par les quatre cinquièmes des élèves. Les deux autres types sont respectivement « $p(A) = p(\{e_i\})$ » et « $p(A) = p(\Omega)$ », qui sont des propositions respectives de deux élèves. Signalons qu'un élève n'a pu proposer de réponse à la question 3.d).

Ces résultats relatifs au rapport des élèves à l'énoncé du premier principe de Laplace, globalement satisfaisants, sont conformes à l'analyse a priori relative à cette question (Chap. VI, 3.6.1). Ils constituent aussi sur le plan quantitatif une amélioration par rapport aux analyses préalables, car le pourcentage des élèves ayant proposé la formule du premier principe de Laplace est de 80% pour le post test en cours d'analyse contre 60% environ pour les résultats issus de ces analyses préalables. Sur le plan qualitatif, il n'y a pas une grande différence entre

les deux résultats, car les différents types de réponses observés lors des analyses préalables se ramènent globalement à ceux observés après l'expérimentation de l'ingénierie.

2.1.4. Bilan de l'analyse des résultats relatifs à l'exercice 1

Dans l'ensemble, les objectifs visés en donnant l'exercice 1 en post test sont largement atteints. Les élèves ont montré un très bon rapport à la définition d'expérience aléatoire telle qu'elle leur a été enseignée. Ils ont pu distinguer les événements incompatibles, les événements contraires et les événements équiprobables, montrant ainsi une certaine maîtrise du langage des probabilités. Ils ont également une bonne maîtrise des énoncés des axiomes et les propriétés entrant dans le calcul élémentaire des probabilités.

Par rapport aux résultats issus des analyses préalables, les résultats de l'exercice 1 du test à l'issue de l'expérimentation de notre ingénierie didactique confirment des rapports personnels conformes aux notions probabilistes et constituent par endroit une amélioration de ces rapports tant sur le plan qualitatif que sur le plan quantitatif. Certes cette conformité du rapport des élèves concernés par notre expérimentation aux concepts probabilistes n'est pas toujours observée chez la totalité des élèves, mais elle est observée chez le plus grand nombre d'élèves. Nous arrivons ainsi à la conclusion que l'ingénierie expérimentée favorise l'appropriation des connaissances déclaratives relatives aux notions probabilistes.

2.2. Analyse des résultats relatifs à l'exercice 2 du post test

Prévu pour évaluer le rapport personnel des élèves à la notion de hasard du tirage au sort, l'exercice 2 a consisté à donner le résultat du douzième lancer d'un dé cubique connaissant les résultats des onze premiers lancers. Nous précisons dans cette section les organisations mathématiques effectivement observées, suivies d'une lecture quantitative des réponses proposées par les élèves ayant suivi l'enseignement des probabilités tel que nous l'avons proposé dans notre expérimentation.

2.2.1. Organisations mathématiques et réponses proposées

La question posée dans l'exercice est un spécimen du type de tâches « prévoir le résultat d'une expérience aléatoire ». A ce type de tâches relèvent quatre techniques correspondant aux types de réponses effectivement observés. La première technique est celle qui découle de l'organisation mathématique évaluée et qui consiste à identifier l'expérience aléatoire et à préciser que le résultat est imprévisible, en se basant sur la notion d'expérience aléatoire. A cette technique correspond le type de réponses « tirage au sort » proposé par un grand nombre

d'élèves ayant participé au test. L'argument commun développé par ces élèves ressemble à des mots près à la justification suivante de l'un d'entre eux.

Étant donné que le lancer de dé est une expérience aléatoire (au hasard) et que le dé comporte plusieurs faces, on ne peut pas prévoir le résultat fixe mais on pourra donner les résultats possibles.

Cette première technique se justifie bien sûr par la notion d'expérience aléatoire qui est un habitat de la notion de hasard, qui est l'élément technologique fondamentale de cette technique. La deuxième technique dont relève le type de tâches consiste à identifier l'expérience aléatoire et à puiser dans l'intuition pour prévoir le résultat. Elle correspond au type de réponse « compensation », pour lequel le résultat du douzième lancer du dé est 4, le seul numéro qui n'a pas été répété dans la suite des résultats des onze premiers lancers. Les élèves ayant prédit le numéro 4 ont justifié leurs réponses, les uns par la manière dont le dé est lancé et les autres par la probabilité forte qu'a la face numéro 4 d'apparaître.

Car lorsqu'on avait lancé le dé onze fois de suite, on a trouvé deux fois le chiffre 2, deux fois le chiffre 5, deux fois le chiffre 3, deux fois les chiffres 1 et 6 ; donc la probabilité est forte qu'on peut trouver une deuxième fois le chiffre 4.

Car cela dépendra de la façon ou de la manière dont le lanceur va lancer pour la douzième fois.

En dehors de l'intuition, la technologie qui justifie la deuxième technique est aussi composée de la notion de probabilité.

La troisième technique consiste à remarquer que le dernier numéro de la liste des résultats des onze premiers lancers est le numéro le plus élevé du dé pour ensuite prédire ce numéro comme résultat de tout autre lancer. A cette technique correspond le type de réponse que nous avons nommé « constance » dans nos analyses préalables à l'ingénierie. Il est proposé par un élève qui a argumenté sa réponse ainsi qu'il suit.

Car lorsqu'on avait lancé pour onze fois le dé s'est reposé sur 6.

De cet argument, on pourrait comprendre que l'élève confond ici la stabilisation de la fréquence relative d'un événement avec la stabilisation du résultat de l'expérience aléatoire, bien que le nombre de lancers du dé ne soit pas assez grand. La technologie qui justifie cette troisième technique est fondamentalement constituée de la définition de la probabilité suivant l'approche fréquentiste.

La quatrième technique est inédite, tant qu'elle est observée pour la première fois dans le post test réalisé à l'issue de l'ingénierie réalisée en classe. Elle consiste à déterminer la

probabilité d'un événement et à estimer le nombre de fois qu'un événement donné est réalisé connaissant le nombre de réalisations de l'expérience aléatoire. Cette technique qui avait été utilisée dans un contexte requis dans la situation 5, ne convient pas pour l'exercice 2 du test. Elle est utilisée dans cet exercice par deux élèves pour trouver respectivement que le résultat du douzième lancer est 1 et 2 comme on peut le constater dans la réponse suivante proposée par l'un de ces élèves.

Comme le dé a une forme cubique, alors ses faces ont la même possibilité d'apparaître, donc elles sont équiprobables. $p(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$

$$p(1) = \frac{2}{11} = p(2) = p(3) = p(5) = p(6) \text{ et } p(4) = \frac{1}{11}.$$

On constate que les faces 1, 2, 3, 5 et 6 ont la plus grande probabilité d'apparaître.

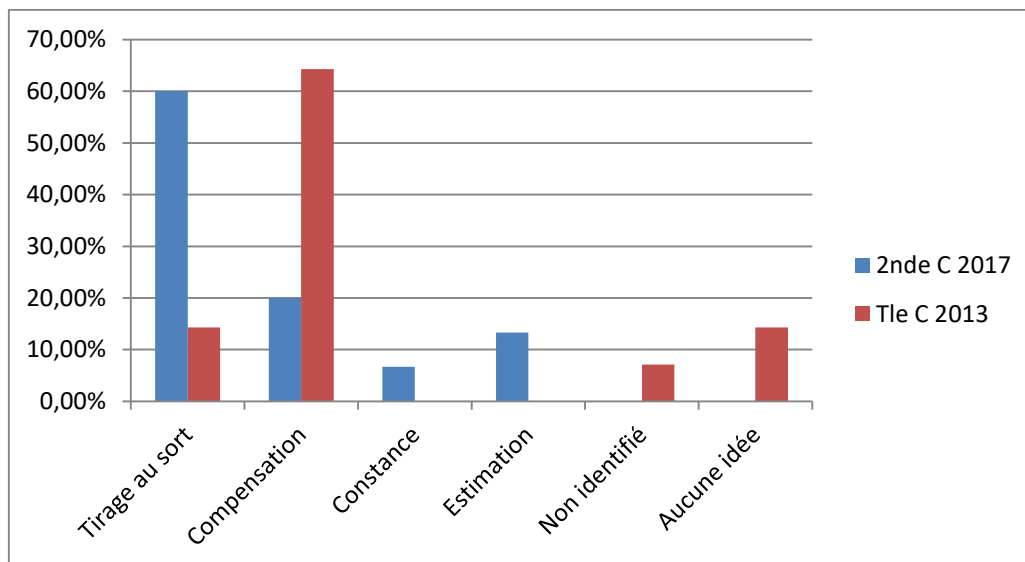
Comme $p(1) = p(2) = p(3) = p(5) = p(6)$, alors le résultat qu'on obtiendrait si on lançait le dé une douzième fois est : $p(2) \times 12 = 2$ car l'estimation de sa probabilité est $\frac{2}{11}$. En conclusion le résultat qu'on obtiendrait serait la face 2.

Comme nous pouvons le constater, la quatrième technique ci-dessus décrite est justifiée par le premier principe de Laplace et la notion de probabilité selon la loi faible des grands nombres. En raison de ces éléments technologiques de cette quatrième technique, nous lui associons le type de réponses que nous nommons « estimation ».

2.2.2. Analyse quantitative des types de réponses

D'après l'analyse praxéologique précédente, il est observé chez les élèves quatre types de réponses, à savoir les types de réponses « tirage au sort », « compensation », « constance » et « estimation ». Si les trois premiers avaient été prévus dans l'analyse a priori, le quatrième est observé pour la première fois dans la résolution de l'exercice 2. Le type de réponses « tirage au sort » est heureusement le plus représenté avec neuf élèves sur les quinze, ensuite vient le type de réponses « compensation » avec trois élèves et enfin les types de réponses « constance » et « estimation » avec respectivement un et deux élèves.

Par rapport aux résultats issus des analyses préalables, les présents résultats constituent une amélioration quantitative non négligeable, car le type de réponses « compensation » avait été largement plus représenté que le type de réponses « tirage au sort » au niveau des élèves de la terminale C concernés par nos analyses préalables. Le graphique ci-dessous montre l'évolution du rapport personnel des élèves au hasard du tirage au sort.



Graphique n°11 : Comparaison des résultats relatifs au rapport à la notion de hasard du tirage au sort.

Les types de réponses « non identifié » et « aucune idée » ont été observés au niveau du test réalisé lors des analyses préalables (Chap. V, 2.2.). Le premier regroupe des réponses dont les caractéristiques ne sont pas porteuses d'une technologie bien identifiée, tandis que le second comporte les élèves qui ont estimé qu'ils n'ont aucune idée sur la question qui leur est posée. Ces deux types de réponses ne sont pas observés dans le post test de l'ingénierie en cours d'analyse. En tant que conséquences d'un enseignement des probabilités basé sur l'approche fréquentiste, les types de réponses « constance » et « estimation » n'avaient pas été logiquement observés au niveau des élèves de la terminale C concernés par nos analyses préalables, puisque ces derniers n'ont pas été soumis à un tel enseignement.

2.2.3. Bilan de l'exercice 2

La réaction des élèves face à l'exercice 2 permet d'émettre trois hypothèses importantes par rapport à l'ingénierie expérimentée. D'abord le nombre de types de réponses montre que qualitativement, l'ingénierie ne garantit pas nécessairement une amélioration globale du rapport à la notion de hasard du tirage au sort. Ensuite, sur le plan quantitatif, l'ingénierie améliore les résultats issus des analyses préalables en inversant les tendances entre les types de réponses « tirage au sort » et « compensation ». En effet, le pourcentage des élèves de la catégorie « tirage au sort » est passé de moins de 15% lors des analyses préalables à 60% après la réalisation en classe de l'ingénierie, et le pourcentage des élèves de la classe « compensation » est passé de plus de 60% à 20%. Enfin, l'enseignement des probabilités basé sur l'approche fréquence semble être la cause de certains types de réponses à la question posée. Ces types de réponses qui sont non conformes au hasard du tirage au sort, sont tout de même faiblement représentés. Il s'agit du type

de réponses « constance » constaté depuis les analyses préalables et confirmé dans les présents résultats, et du type de réponses « estimation » observé pour la première fois, chez les élèves, pour lesquels la définition fréquentiste de la probabilité est utilisée pour déterminer le nombre de réalisations d'un événement donné connaissant la probabilité de cet événement et le nombre de fois que l'expérience aléatoire est réalisée. Pour ces élèves, en faible nombre, l'approche fréquentiste semble constituer un obstacle didactique (Brousseau, 1989b).

En somme l'enseignement des probabilités suivant l'ingénierie que nous avons expérimentée favorise le rapport personnel au hasard du tirage au sort pour un grand nombre d'élèves, diminue le nombre d'élèves de la catégorie « compensation », mais occasionne l'existence d'autres types de rapport causés par l'enseignement des probabilités suivant l'approche fréquentiste.

2.3. Analyse des résultats relatifs à l'exercice 3 du post test

L'exercice 3 vise la reconnaissance de l'expérience aléatoire dans un problème de probabilité et le calcul des probabilités d'événements s'exprimant en fonction d'autres dont les probabilités sont connues. L'organisation mathématique effective des élèves par rapport à chacune des trois consignes ainsi que les réponses proposées par eux à ces questions vont meubler la présente section.

2.3.1. Organisation mathématique de la question 1)

La première question de l'exercice 3 consiste à reconnaître la phrase qui indique l'expérience aléatoire dans l'énoncé de l'exercice. Le type de tâches associé à cette première question est « identifier l'expérience aléatoire dans un problème de probabilité ». Au vu des écrits des élèves, nous dégagons trois techniques correspondant à trois types de réponses.

Il s'agit d'abord de la technique évaluée, qui consiste à identifier une expression indiquant un effet de hasard et dégager la phrase qui désigne l'expérience aléatoire. Le type de réponses correspondant à cette technique est constitué d'une seule réponse écrite par les deux tiers des élèves ayant participé au test, à savoir : « On prend une lettre au hasard dans ce bureau ». Nous désignons ce type de réponses par « Aléatoire ». Ensuite, il y a une technique qui semble caractériser l'expérience aléatoire par ses résultats possibles comme dans les deux réponses ci-après.

Dans l'un des bureaux d'une entreprise de vente par correspondance arrivent plusieurs catégories de courriers.

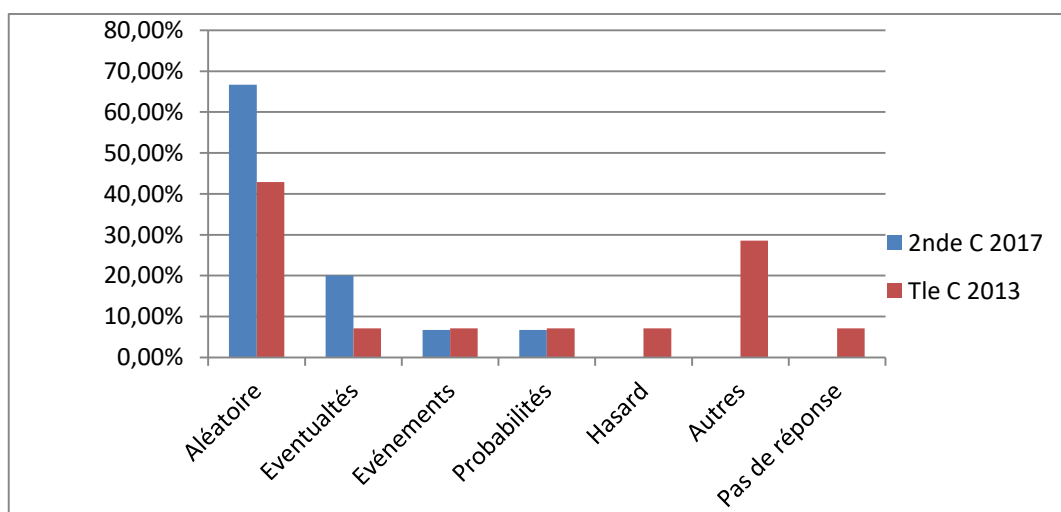
La lettre contient une commande ou une demande de cadeau.

Ces réponses qui mettent l'accent sur la variété des éventualités constituent le type de réponses que nous nommons « Éventualités » et qui correspond à cette deuxième technique. Enfin, la troisième technique consiste à caractériser l'expérience aléatoire par les données relatives aux probabilités d'événements comme dans l'unique réponse ci-après, écrite par un seul élève.

Parmi les lettres reçues, 90% contiennent une commande, 45% contiennent une demande de cadeau et 40% contiennent une commande et une demande de cadeau.

Cette réponse constitue le type de réponses correspondant à la technique précédemment évoquée. Nous le désignons par « Probabilités ».

En comparaison avec les résultats issus des analyses préalables, les résultats du post test de l'ingénierie relatifs à la reconnaissance de l'expérience aléatoire dans un problème de probabilité constituent une amélioration tant sur le plan qualitatif que sur le plan quantitatif. En effet, les élèves de la terminale C ayant participé au test des analyses préalables ont présenté plus de types de réponses avec même des réponses que nous n'avons pas pu caractériser par rapport aux savoirs probabilistes construits comme par exemple : « Entreprise de vente par correspondance », « les autres ne sont jamais accompagnés de commande ». Le champ de réponses pour les résultats des analyses préalables paraît donc plus vaste que pour les présents résultats. En dehors de ces réponses que nous regroupons dans la catégorie « Autres », il y a aussi le type de réponses « Hasard » qui consiste à choisir ce mot comme expérience aléatoire. Sur le plan quantitatif, le pourcentage des élèves ayant identifié l'expérience aléatoire dans le test actuel est plus élevé que celui observé lors des analyses préalables. C'est ce que montre le graphique ci-après.



Graphique n°12 : Comparaison des résultats relatifs à l'identification de l'expérience aléatoire dans un problème de probabilité.

Le pourcentage, moins élevé des élèves de la catégorie « Aléatoire » en comparaison avec celui de ceux qui ont donné la définition requise de la notion d'expérience aléatoire, montre bien qu'il y a des élèves n'ayant pas pu identifier l'expérience aléatoire dans le problème, bien qu'ils aient une bonne connaissance de la définition d'expérience aléatoire.

2.3.2. Organisation mathématique de la question 2a)

La question 2a) de l'exercice consiste à calculer la probabilité d'un événement connaissant la probabilité de son événement contraire. Au type tâches « Calculer la probabilité d'un événement », relèvent deux techniques développées par les élèves qui ont participé au test. Il y a d'abord la technique évaluée « technique de calcul par les axiomes (TCA) » et qui consiste globalement à identifier l'expérience aléatoire et l'événement, exprimer cet événement en fonction d'autres de probabilités connues et à identifier la formule liant les probabilités de deux événements contraires. La technologie de la technique TCA est fondamentalement constituée du langage probabiliste et de la propriété liant les probabilités de deux événements contraires. À cette technique correspondent trois types de réponses que nous nommons respectivement « TCA Conforme (TCA-C) », « TCA Presque conforme (TCA-PC) » et « TCA Inappropriée (TCA-I) ». Le type de réponses TCA-C est constitué de la résolution experte, semblable à la réponse ci-après proposée par un élève.

$$\text{Soit } p(\bar{B}) \text{ cette probabilité. } p(B) + p(\bar{B}) = 1 ; p(\bar{B}) = 1 - p(B) ;$$

$$p(\bar{B}) = 1 - 0,45, \text{ donc } p(\bar{B}) = 0,55.$$

Le type de réponses TCA-PC est constitué des réponses conformes à la technique TCA, mais pour lesquelles des difficultés d'ordre algébrique et numérique n'ont pas permis d'arriver à la réponse correcte comme dans les productions suivantes.

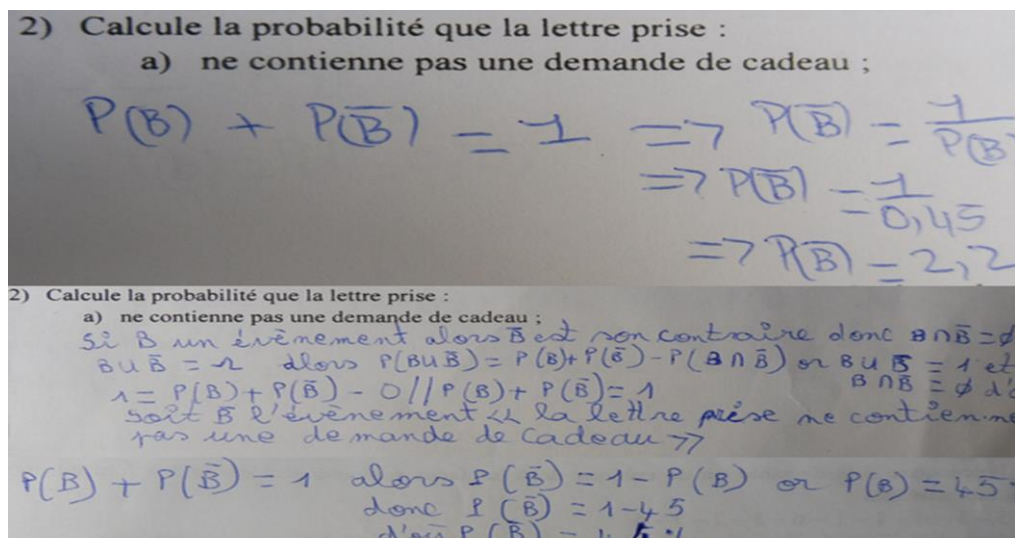


Image n°09 : Réponses de deux élèves de la catégorie TCA-PC pour la question 2.a) de l'exercice 3 du post-test.

Dans la première production, l'élève a utilisé le théorème en actes (Vergnaud, 1991) : « Pour tout nombres réels a et b , avec $a \neq 0, x + a = b \implies x = \frac{b}{a}$ ». Quant à la deuxième production, l'élève, après une bonne démonstration de la formule à utiliser, a effectué une opération entre des nombres écrits dans deux registres différents (Duval, 1993).

Le type de réponses TCA-I regroupe les réponses conformes à la technique TCA, mais dans lesquelles la formule utilisée n'est pas celle requise pour la résolution de la consigne, comme le montrent les deux productions ci-après des deux élèves s'inscrivant dans ce type de réponses.

Élève E₄

Soit D la lettre ne contient pas une demande de cadeau.

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B).$$

$$p(A \cap B) = p(A \cup B) - p(A) + p(B) \text{ or } p(A \cup B) = p(A) + p(B) = 1.$$

$$p(A \cap B) = 1 - 1 = 0, \text{ ou } D=0$$

Élève E₈

On sait que $p(\Omega) = 1$.

$1 = p(A) + p(B) + p(AB) + p(C)$, où $p(C)$ est la probabilité ne contienne pas une demande de cadeau.

$$p(C) = 1 - p(A) + p(B) + p(AB).$$

$p(AB)$ est la probabilité que la lettre contienne une commande et une demande de cadeau.

$$p(C) = 1 - (0,9 + 0,45 + 0,4)$$

$$= 1,75 - 1$$

$$p(C) = 0,75.$$

Dans la production de l'élève E₄, on note, d'une part une identification erronée de l'événement D, pris ici comme $A \cap B$, et d'autre part, la combinaison des formules $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$ et $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$, supposant ainsi que A et B sont contraires. Dans la production de l'élève E₈, les événements A, B, $A \cap B$ et C sont considérés comme des événements élémentaires qui composent l'univers. Cette production semble être inspirée de l'utilisation du deuxième principe de Laplace pour la détermination des probabilités des événements élémentaires. Il importe de remarquer que l'élève E₈ ne semble pas avoir reconnu l'événement $A \cap B$ dans l'énoncé du problème, si bien qu'il s'est trouvé dans le besoin de désigner cet événement par AB.

La seconde technique est celle que nous nommons « Technique-Alternative (TA) » et qui consiste fondamentalement à considérer, sans s'en rendre compte, que les événements A et B

sont contraires, bien qu'il ait été indiqué la probabilité non nulle de $A \cap B$. À cette technique correspond le type de réponses du même nom TA ci-après, proposé par plus du quart des élèves ayant composé pour le post test.

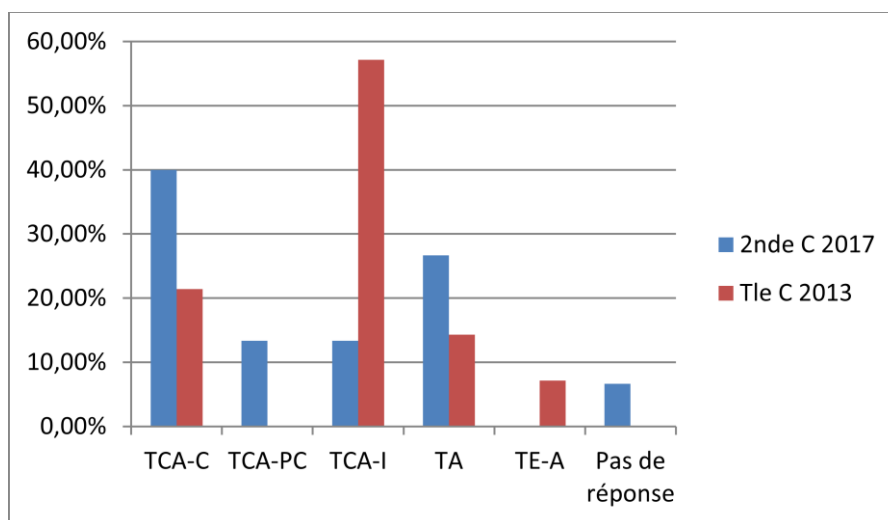
A est l'événement « la lettre contient une commande ».

Soit $p(A)$ la probabilité de cet événement.

$$p(A) = \frac{90\%}{100} = 0,9 ; \text{ donc } p(A) = 0,9.$$

La technologie de cette technique comporte en dehors du langage des probabilités et le théorème en acte « Si l'on définit dans un problème deux événements A et B d'une expérience aléatoire, alors ces deux événements sont contraires ».

Par rapport à l'analyse a priori, les types de réponses prévus sont globalement observés chez les élèves. Il s'agit notamment de TCA-C, TCA-PC, TCA-I et TA. Lors des analyses préalables, il avait été aussi observé chez les élèves de la terminale C concernés par notre étude, la technique TE basée sur le premier principe de Laplace et ayant conduit à un type de réponses que nous nommons « Technique d'équiprobabilité alternative (TE-A) ». Dans ce type de réponses, les élèves ont considéré la somme des pourcentages donnés comme le nombre de cas possibles et le pourcentage d'obtention de l'événement A comme le nombre de cas favorables à cet événement. Sur le plan qualitatif, les résultats du post test de l'ingénierie sont semblables à ceux obtenus lors des analyses préalables, mais ils présentent une amélioration quantitative relativement importante comme le montre la répartition ci-dessous des élèves par rapport aux différents types de réponses observés.



Graphique n°13 : Résultats comparatifs suivant les types de réponses au niveau de la résolution de la question 2.a) de l'exercice 3.

De ce graphique, on remarque que les élèves sur lesquels l'ingénierie est expérimentée savent mieux reconnaître les événements contraires que ceux concernés par les analyses préalables. Pour cause, le type de réponses TCA-C dont résulte la résolution experte et le type de réponses TCA-PC dans lequel la formule liant les probabilités de deux événements contraires a pu être appliquée sans succès sont adoptés par plus de la moitié des élèves, et donnent un pourcentage pratiquement trois fois plus grand qu'en Terminale. Notons également que les élèves des catégories TCA-I et TA ne montrent pas un rapport personnel suffisant au calcul de la probabilité d'un événement dont on connaît la probabilité de l'événement contraire.

2.3.3. Organisation mathématique de la question 2.b)

Au type de tâches « calculer la probabilité d'un événement », relèvent chez les élèves deux techniques dont la technique TCA précédemment décrite et une technique que nous nommons « Technique non appropriée (TNA) ». Cette dernière est basée notamment sur une identification non correcte de l'événement dont la probabilité est à calculer, et par conséquent, sur un choix incorrect de la formule nécessaire à la résolution de la question 2.b). La technologie justifiant la technique TNA se limite en général au langage probabiliste et la notion de pourcentage, complétés par des formules inappropriées, dont le premier principe de Laplace. À la technique TCA correspondent les types de réponses TCA-C et TCA-I relatifs à la question 2.b. Le type de réponses TCA-C est composé des réponses dans lesquelles la formule requise $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$ est appliquée avec succès comme dans la production suivante.

Soit A l'événement la lettre contient une commande et B l'événement la lettre contient une demande de cadeau.

$$\begin{aligned} p(A \cup B) &= p(A) + p(B) - p(A \cap B) \\ &= 0,9 + 0,45 - 0,4 \\ p(A \cup B) &= 0,95. \end{aligned}$$

Pour la question 2.b), des élèves, bien que se positionnant dans la technique TCA, n'ont pas utilisé la formule requise pour calculer $p(A \cup B)$, mais ont utilisé plutôt soit la formule alternative $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$, soit toute autre formule incorrecte de $p(A \cup B)$. C'est le type de réponses TCA-I qu'illustrent bien les productions suivantes.

Élève E₁₁

Puisque l'événement A représente « la lettre contient une commande » et l'événement B « la lettre contient une demande de cadeau ». Alors on me demande $A \cup B$, c'est-à-dire $p(A \cup B)$. Or $p(A \cup B)$ pour deux événements est : $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.

$$p(A \cup B) = 90\% + 45\%.$$

$$p(A \cup B) = 135\%.$$

Élève E₂

On sait que : $p(A \cup B) = p(A) + p(B) + p(A \cap B)$

Déterminons d'abord $p(B)$

$$p(B) + p(\bar{B}) = 1 \Leftrightarrow p(B) = 1 - p(\bar{B}) \Leftrightarrow p(B) = 1 - 0,4 \Leftrightarrow p(B) = 0,6.$$

$$\text{Alors } p(A \cup B) = p(A) + p(B) + p(A \cap B) \Leftrightarrow p(A \cup B) = 0,4 + 0,6 + 0$$

$$p(A \cup B) = 1.$$

Dans la production de l'élève E₁₁, dans laquelle les probabilités sont exprimées dans le registre des pourcentages, l'élève n'a pas remarqué que la probabilité ne doit pas dépasser 100% pour se rendre compte de son erreur. En dehors de la formule non correcte utilisée, l'élève E₂ n'a pas pu identifier dans l'énoncé de l'exercice les probabilités des événements A, B et $A \cap B$. Dans les deux productions, il est clair que l'événement $A \cup B$ est identifié comme l'événement dont la probabilité est recherchée.

À la technique TNA correspond un seul type de réponses du même nom, dans lequel nous regroupons les réponses, où l'enjeu n'est pas la détermination de la probabilité de $A \cup B$ comme dans les réponses ci-après.

Élève E₁₇

Soit $p(C)$ la probabilité de l'événement C « la lettre contienne une commande et une demande de cadeau ».

$$p(C) = \frac{40\%}{100} = 0,4. \text{ Donc } p(C) = 0,4$$

Élève E₈

$$p(B) = \frac{45+40}{100} = p(B) = \frac{85}{100}; p(B) = 0,85.$$

Élève E₁₅

$$p(\bar{A} \cap \bar{B}) = p(\overline{A \cup B})$$

$$p(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - p(A \cup B)$$

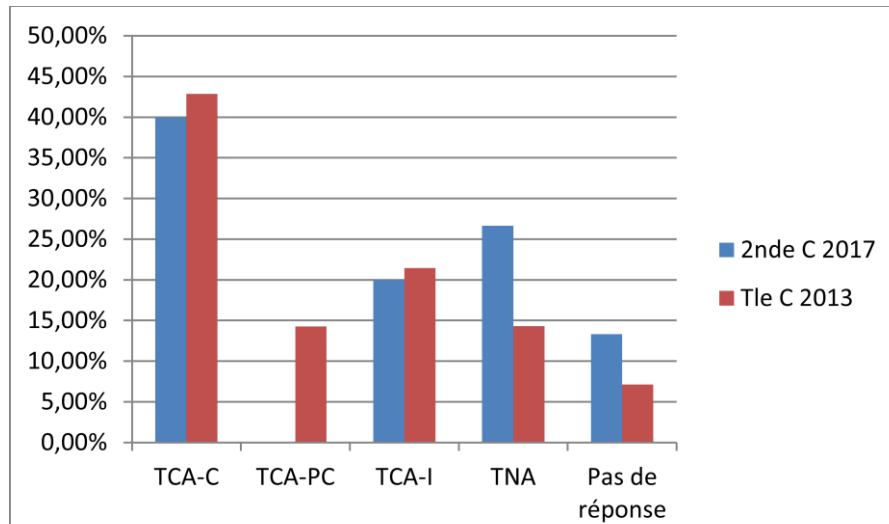
$$= 1 - 0,4 + 0,45$$

$$p(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,15$$

Dans ces productions, l'événement dont la probabilité est à calculer n'a pas pu être identifié. Si sur les deux premières productions, on remarque une certaine volonté d'utiliser le premier principe de Laplace ou de convertir les pourcentages dans le registre des nombres décimaux, la dernière utilise une formule exploitée au cours des séances d'exercices pour répondre à une question dans un exercice semblable à l'exercice 3 du post test.

En dehors du type de réponses TNA, les types de réponses TCA-C et TCA-I ont été prévus dans l'analyse à priori (Chap. VI, 3.6.3). Globalement les résultats du présent test sont semblables à ceux des analyses préalables aussi bien qualitativement que quantitativement, car il n'y a ni une grande variation des types de réponses d'une étude à l'autre, ni une différence

significative entre les pourcentages des élèves ayant opté pour des types de réponses conformes ou presque conformes à la résolution experte. Le graphique ci-dessous montre la relative faible performance des élèves concernés par l'expérimentation de l'ingénierie par rapport à ceux concernés par nos études antérieures.



Graphique n°14 : Résultats comparatifs suivant les types de réponses au niveau de la résolution de la question 2.b) de l'exercice 3.

Nous sommes tenté d'expliquer la régression des élèves sur la question 2.b) par rapport à la question 2.a) de l'exercice 3 par le fait que la formule $p(A) + p(\bar{A}) = 1$ a été plus utilisée ou évoquée au moins trois fois lors de la résolution des exercices dans la situation n°5, tandis que chacune des formules $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$ et $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$ n'a été utilisée qu'une seule fois.

2.3.4. Bilan de l'analyse de l'exercice 3 du post test

L'exercice 3 du test a été une occasion, d'une part, de mieux connaître sur le rapport personnel à la notion d'expérience aléatoire des élèves ayant suivi l'ingénierie expérimentée, et d'autre part d'évaluer leur rapport au calcul de probabilité basé sur l'utilisation des propriétés liant les probabilités de plusieurs événements. Concernant le rapport à la notion d'expérience aléatoire, bon nombre d'élèves ont pu reconnaître dans le problème proposé la phrase qui indique l'expérience aléatoire, en suivant rigoureusement la définition de cette notion. Toutefois les phrases contenant des informations relatives aux éventualités ou aux probabilités d'événements indiquent pour certains l'expérience aléatoire dans un problème de calcul de probabilités. À propos du calcul de probabilité d'un événement qui s'exprime en fonction d'autres de probabilités connues, plus de la moitié des élèves ont les praxéologies requises pour la résolution normale des problèmes posés. Cependant des difficultés d'ordre algébrique ont

conduit certains d'entre eux à des solutions inexactes. Le choix incorrect de la formule de calcul de probabilité et la mauvaise identification des événements entrant dans ce calcul sont les principales causes de l'échec de certains élèves au calcul de probabilité à partir des propriétés mettant en relation les probabilités de plusieurs événements.

Les résultats obtenus à l'issue du test réalisé après l'enseignement suivant l'ingénierie expérimentée sont meilleurs à ceux obtenus lors des analyses préalables au niveau de la reconnaissance de l'expérience aléatoire dans un problème de probabilité, et au niveau du calcul de probabilité d'un événement connaissant la probabilité de son événement contraire. Les résultats des deux post tests sont presque semblables quant au calcul de probabilité à partir de la propriété $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.

2.4. Analyse des résultats relatifs à l'exercice 4 du post test

La seule consigne de l'exercice 4 est le calcul de la probabilité que deux jetons tirés successivement sans remise dans un sac contenant trois jetons blancs et deux rouges soient de couleurs différentes. Nous proposons l'organisation mathématique de cette consigne que nous illustrons avec les types de réponses proposées par les élèves.

L'unique type de tâches de cet exercice est : « Calculer la probabilité d'un événement ». La situation d'équiprobabilité indiquée par la nature indiscernable des jetons est reconnue par l'ensemble des élèves. À ce type de tâches relève chez les élèves la technique évaluée TE et une technique que nous appelons « Décomposition par la technique d'équiprobabilité (DTE) ». Suivant la technique TE, les élèves ont dans l'ensemble :

- identifié l'expérience aléatoire et l'événement ;
- déterminé le nombre de cas possibles et le nombre de cas favorables à l'événement ;
- calculé le rapport du nombre de cas favorables au nombre de cas possibles.

C'est au niveau de la détermination des nombres de cas possibles et de cas favorables qu'il y a pour cet exercice plusieurs catégories d'élèves, représentées par les types de réponses TE-C, TE-PC et TE-I évoqués dans l'étude du rapport personnel au premier principe de Laplace lors des analyses préalables (Chap. V, 2.4.1.), présentées au deuxième colloque de l'Association de Didacticiens des Mathématiques Africains (Dandjinou et Bronner, 2018). Il y a eu d'abord un élève qui a pu déterminer avec succès le nombre de cas possibles et le nombre de cas favorables, trouvant ainsi la probabilité demandée avec une bonne démarche et des calculs exacts. C'est ce cas qui compose le type de réponses « Technique d'équiprobabilité Conforme (TE-C) ». Pour y arriver, il a listé toutes les éventualités pour dénombrer les nombres de cas

possibles et de cas favorables, comme nous pouvons bien le constater dans sa production ci-dessous.

Élève E₁₄

Soit Ω l'univers des éventualités de cette expérience aléatoire.

$\Omega = \{(B1, B2); (B1, B3); (B1, N1); (B1, N2); (B2, B1); (B2, B3); (B2, N1); (B2, N2); (B3, B1); (B3, B2); (B3, N1); (B3, N2); (N1, B1); (N1, B2); (N1, B3); (N2, B1); (N2, B2); (N2, B3); (N2, N1); (N1, N2)\}$

Soit A l'événement les jetons sont formés de couleurs différentes.

$$p(A) = \frac{\text{Card}A}{\text{Card}\Omega} = \frac{12}{20}$$

$$p(A) = 0,6.$$

Cette méthode de résolution de l'exercice 4 par l'élève E₁₄ est conforme à celle utilisée en séances d'exercices pour résoudre des exercices similaires.

Sans avoir pu dénombrer correctement les cas favorables ou les cas possibles, certains élèves ont pu dénombrer avec succès les cas possibles sans réussir à dénombrer les cas favorables et vice versa. Nous classons ces élèves dans le groupe « Technique d'équiprobabilité presque conforme (TE-PC) ». Nous y mettons également ceux qui ont dénombré les cas possibles et les cas favorables en considérant des combinaisons en lieu et place des arrangements. Les trois productions suivantes des élèves E₁, E₅ et E₁₅ caractérisent bien le type de réponses TE-PC.

Élève E₁

Soit Ω « tiré un jeton dans le sac » et $p(A)$ la probabilité le jeton tiré est de différentes couleurs

$$p(A) = \frac{\text{Card}A}{\text{Card}\Omega} = \frac{12}{60}$$

$$p(A) = 0,2.$$

Élève E₅

Soit A l'événement « les deux jetons tirés soient de couleurs différentes » et Ω l'univers des éventualités.

$A = \{B1N1; B1N2; B2N1; B2N2; B3N1; B3N2\}$

$$p(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{6}{20}$$

$$p(A) = 0,3.$$

Élève E₁₅

Déterminons l'univers des éventualités Ω

$\Omega = \{B1N1 ; B1N2 ; B2N1 ; B2N2 ; B3N1 ; B3N2 ; B1B2 ; B2B3 ; B3B1 ; N1N2\}$.

Comme ils sont indiscernables au toucher, alors ils sont équiprobables.

$$\text{Donc } p(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}\Omega}.$$

Soit ainsi A l'événement « les jetons tirés soient de couleurs différentes ».

$$p(A) = \frac{6}{10} ; p(A) = 0,6.$$

Sur les brouillons de l'élève E_1 , on retrouve des traces d'essais de réalisation d'un arbre de choix ayant trois composantes. Ce qui laisse penser que l'élève E_1 , pour déterminer le nombre de cas possible, a dénombré les 3-arrangements au lieu des 2-arrangements. Toutefois au niveau des cas favorables, il a listé les douze éventualités, prouvant ainsi que l'événement est bien identifié. L'élève E_5 a, par contre, listé toutes les vingt éventualités de l'expérience aléatoire sur son brouillon, mais a semblé considérer comme cas favorables, les éventualités comportant un jeton blanc et un jeton noir dans cet ordre, comme il en avait été question dans l'un des exercices traités dans la situation 5. Quant à l'élève E_{15} , on remarque un dénombrement correct des cas possibles et des cas favorables, bien qu'il y ait à son niveau une identification inexacte de la nature des éventualités.

Le troisième type de réponses observé est constitué des réponses dans lesquelles la formule du premier principe de Laplace est visible, mais qui ne comportent pas un raisonnement structuré pour le dénombrement des cas possibles et favorables. En effet, les élèves de ce type de réponses que nous avons nommé « Technique d'équiprobabilité incomplète », semblent être conscients qu'ils sont en face d'une situation d'équiprobabilité, mais ont des difficultés à dénombrer les cas possibles et les cas favorables, soit à cause de la complexité relative du problème, soit parce qu'ils n'ont pas pu identifier convenablement l'expérience aléatoire ou l'événement. Les productions ci-dessous des élèves E_2 et E_{12} représentent entièrement la catégorie TE-I.

Élève E_2

Soit $p(A)$ cette probabilité.

On sait que $p(A) = \frac{\text{Card}A}{\text{Card}\Omega}$. Or $\text{Card}A = 6$ et $\text{Card}\Omega = 36$.

$$p(A) = \frac{6}{36} = \frac{3}{16}$$

$$p(A) = 0,1875.$$

Élève E_{12}

Calculons la probabilité que le jeton soit de couleurs différentes.

$$\Omega = \{B, B, B, N, N\}.$$

$$p(A) = \frac{1}{5} = 0,2$$

On retrouve sur le brouillon de l'élève E₂ une liste de douze 2-arrangements et un arbre de choix ayant conduit aux six cas favorables. Ce qui explique à son niveau une difficulté de dénombrement. La production de l'élève E₁₂, par contre, fait penser à une identification inexacte de l'expérience aléatoire.

La technique DTE, basée sur le premier principe de Laplace consiste à identifier l'expérience aléatoire et l'événement, et obtenir la probabilité de l'événement par addition des probabilités des deux événements « un jeton est blanc » et « un jeton est noir ». Le type de réponses correspondant à cette technique, que nous appelons DTE, est formé des réponses ci-dessous des élèves E₃ et E₁₃.

Élève E₃

Comme les deux jetons tirés sont de couleurs différentes, alors, soit G l'événement les deux jetons tirés soient de couleurs différentes.

$p(G) = p(B_1)$ probabilité d'un jeton blanc + $p(N_1)$ probabilité d'un jeton noir.

Donc $p(B_1) = \frac{1}{5}$ et $p(N_1) = \frac{1}{5}$

Puisque les jetons sont indiscernables au toucher, alors $p(B)$ ou $p(N)$ sera $\frac{\text{Card}B}{\text{Card}\Omega}$ ou $\frac{\text{Card}N}{\text{Card}\Omega}$.

Donc $p(B_1) = \frac{1}{5}$ et $p(N_1) = \frac{1}{5}$ alors $p(B_1) = p(N_1)$.

D'où la probabilité de G est $p(G) = \frac{1}{5}$.

Élève E₁₃

Soit Ω l'univers des éventualités de l'expérience aléatoire.

Soit A l'événement « les deux jetons tirés soient de couleurs différentes ».

Donc $\text{Card}(\Omega) = 5$. Soit a « le premier jeton soit de couleur blanc ».

Alors $p(a) = \frac{\text{Card}(a)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{1}{3}$ et b « le 2ème jeton soit de couleur noir ». $p(b) = \frac{1}{2}$.

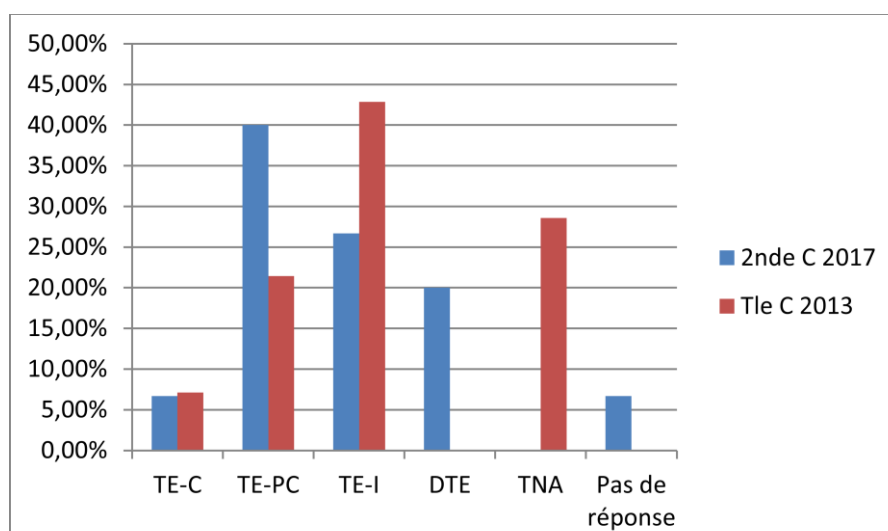
Donc $p(A) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$

La somme des probabilités annoncée par l'élève E₃ n'a plus été réalisée comme cela a été le cas chez l'élève E₁₃. Les deux productions laissent comprendre que l'événement G ou A ne comporte qu'une seule éventualité formée d'un jeton blanc et d'un jeton noir dans cet ordre. Ce qui nous fait dire qu'il y a une identification incorrecte de l'événement dont la probabilité est recherchée.

Les éléments technologiques de la technique DTE sont évidemment le langage des probabilités, le premier principe de Laplace et du théorème en acte, qui pourrait s'énoncer comme il suit :

« La probabilité d'un événement de la forme $\{(a, b)\}$, où a et b sont des éventualités respectives de deux univers U_1 et U_2 est égale à la somme des probabilités des événements élémentaires $\{a\}$ et $\{b\}$ ». La théorie des probabilités est la théorie qui abrite ces éléments technologiques qui justifie la technique DTE.

Les résultats ainsi obtenus à l'issue du post test de l'ingénierie que nous avons réalisée en classe de seconde, tout en étant semblables aux résultats obtenus lors des analyses préalables sur le plan qualitatif, semblent être une légère amélioration de ces résultats quantitativement. En effet, un exercice similaire à l'exercice 4 du post test de l'ingénierie expérimentée, mais portant sur le tirage successif sans remise de trois jetons dans un sac contenant cinq, a été proposé aux élèves ayant participé au post test lors des analyses préalables. Les types de réponses TE-C, TE-PC, TE-I ont été également observés chez les élèves de la terminale, concernés par notre étude, en plus d'un quatrième type de réponses nommé « Technique non appropriée (TNA) » composé des réponses ne comportant pas des traces ni du premier principe, ni du deuxième principe de Laplace. On observe ainsi à peu près les mêmes types de réponses de part et d'autre. Toutefois, les types de réponses TE-C et TE-PC sont mieux représentés au niveau des élèves ayant suivi l'ingénierie qu'au niveau des élèves concernés par les analyses préalables, tandis que les types de réponses TE-I et TN-A sont moins représentés au niveau des premiers qu'au niveau des seconds. Le graphique ci-dessous montre la répartition quantitative des élèves dans les différents types de réponses.



Graphique n°15 : Résultats comparatifs suivant les types de réponses au niveau de la résolution de l'exercice 4.

En somme, l'analyse des réponses des élèves à l'exercice 4 du post test révèle ainsi que les élèves ayant suivi notre expérimentation ont un rapport conforme avec le premier principe de Laplace, car la quasi-totalité de ces élèves ont reconnu l'exercice comme une situation d'équiprobabilité. Ce qui justifie la présence de la formule conséquente dans leurs réponses respectives à l'unique question de l'exercice. Cependant la complexité relative de l'expérience aléatoire n'a pas permis à tous les élèves de dénombrer convenablement les cas possibles et les cas favorables. Néanmoins, des élèves ont su utiliser positivement l'arbre de choix pour déterminer avec succès, soit les cas possibles, soit les cas favorables, soit les cas possibles et les cas favorables. D'autres, tout en ayant une bonne démarche de résolution du problème posé, ont dénombré des combinaisons à la place des arrangements. Bien qu'ils n'aient pas étudié explicitement l'analyse combinatoire, ils semblent dans une certaine mesure bien appréhender l'application du premier principe de Laplace.

2.5. Analyse des résultats relatifs aux exercices 6 et 8 du post test

Les exercices 6 et 8 sont des situations d'équiprobabilité identiques mais portant le premier sur un contexte extrascolaire et le deuxième sur un contexte scolaire. Chacun des deux exercices se décline au seul type de tâches « calculer la probabilité d'un événement ». Les deux exercices ont été presque différemment abordés par les élèves. Nous présentons l'organisation mathématique des élèves pour chaque exercice, suivie des types de réponses qui sous-tendent les techniques développées.

Pour l'exercice 6, ce sont trois techniques qui relèvent du type de tâches « calculer la probabilité d'un événement ». Il s'agit de la technique TE et de la technique TCA basée sur la formule liant les probabilités d'événements contraires, évoquées dans l'analyse a priori (Chap. VI, 3.6.6.), mais aussi d'une troisième technique fondée sur le deuxième principe de Laplace. La technique TE, telle que décrite précédemment dans l'analyse des résultats relatifs à l'exercice 4, a conduit aux trois types de réponses TE-C, TE-PC et TE-I. La catégorie TE-C regroupe les réponses dans lesquelles est appliqué avec succès uniquement le premier principe de Laplace. Plus de la moitié des élèves se retrouvent dans cette catégorie avec des réponses toutes semblables à la production suivante de l'élève E₁₁.

Puisqu'il y a 3 numéros hors services, alors il y en a 2 qui marchent donc. Les numéros ont tous la même chance d'être appelés. Soit A l'événement « l'appel du passant tombe sur un numéro en service ». La probabilité est $p(A) = \frac{2}{5}$. $p(A) = 0,4$.

Une identification incorrecte de l'événement pourrait conduire un élève relevant de la technique TE, à calculer la probabilité de l'événement contraire. Estimant que cette attitude serait simplement due à un manque de concentration de la part de cet élève, nous classons cet élève dans la catégorie TE-PC. Certains élèves ayant utilisé le premier principe de Laplace ne sont pas parvenus à identifier les nombres de cas favorables ou possibles. Nous les regroupons dans la classe TE-I explicitée plus haut. Les productions des élèves E₇, E₈ et E₁₇ montrent la variété des réponses de cette classe.

Élève E₇

Soit p(S) ce numéro en service.

$$p(S) = \frac{1}{5} ; p(S) = 0,2.$$

Élève E₈

Calculons la probabilité que l'appel du passant tombe sur un numéro en service.

$$p = \frac{\text{Card}A}{\text{Card}\Omega} ; p = \frac{12}{60} = 0,2.$$

Élève E₁₇

La probabilité p pour que l'appel du passant tombe sur un numéro en service.

$$p = \frac{1}{2} = 0,5.$$

Au niveau des productions des élèves E₇ et E₁₇, on dirait que pour le premier il n'y a qu'un seul numéro en service et que le second a juste calculé la probabilité de choisir un numéro en service sur les deux qu'il y a. La production de l'élève E₈ semble carrément sortir du problème posé. Tout cela pose le problème d'une identification erronée soit de l'expérience aléatoire, soit de de l'événement.

La deuxième technique que nous nommons « Technique d'équiprobabilité combinée avec les axiomes (TECA) » a consisté à calculer la probabilité de l'événement contraire à l'aide du premier principe de Laplace et à déduire la probabilité demandée à partir de la propriété $p(A) + p(\bar{A}) = 1$. Cette technique est observée chez l'élève E₅ dont la production ci-dessous est l'unique réponse de la catégorie.

$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ et A l'évènement « 3 des numéros étaient hors services » ;

\bar{A} l'évènement « 2 numéros en service ».

$$p(A) = \frac{3}{5} = 0,6. \text{ Or } p(A) + p(\bar{A}) = 1. \text{ Alors } p(\bar{A}) = 1 - p(A).$$

$$p(\bar{A}) = 0,4.$$

Le type de réponses TECA, qui avait été prévu dans l'analyse a priori conduit à la réponse correcte du problème posé.

La technique, basée sur le deuxième principe de Laplace, qui est la technique APEE telle que nous l'avons décrite dans l'analyse a priori des exercices 5 et 7 du post test (Chap. VI, 3.6.5. et 3.6.7.), consiste, après avoir identifié l'expérience aléatoire et l'événement, à appliquer le deuxième principe de Laplace. Pour l'exercice 6, cette technique qui n'est pas appropriée, est adoptée par l'élève E₄, qui a produit la résolution incorrecte suivante de l'exercice.

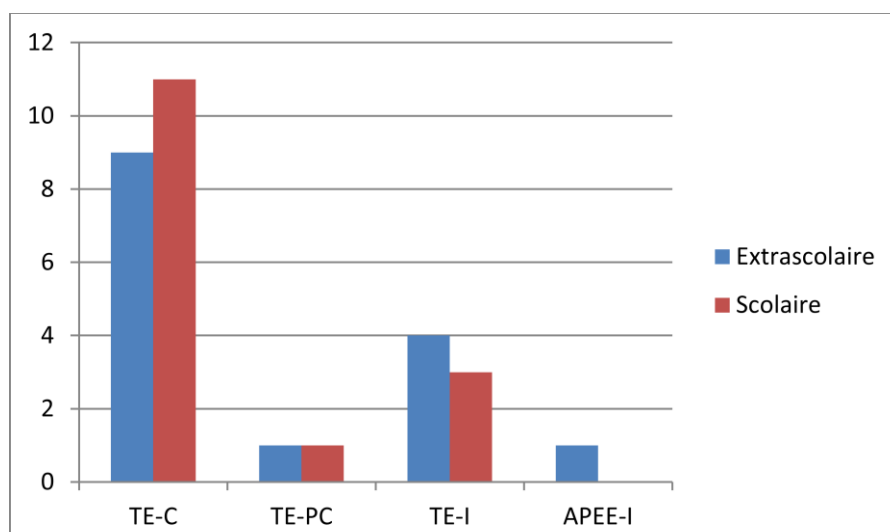
Soit $p(A)$ la probabilité que l'appel du passant tombe et A l'événement l'appel du passant tombe.

$A = \{1;3\}$. Donc $p(A) = p(\{1\}) + p(\{3\}) = 1 + 3$

$p(A) = 4$.

Dans cette résolution, les événements élémentaires composant l'événement A ainsi que leurs probabilités paraissent arbitraires. Les valeurs impossibles des probabilités dans la production indiquent entre autres le rapport personnel non adéquat à la définition de la probabilité d'un événement.

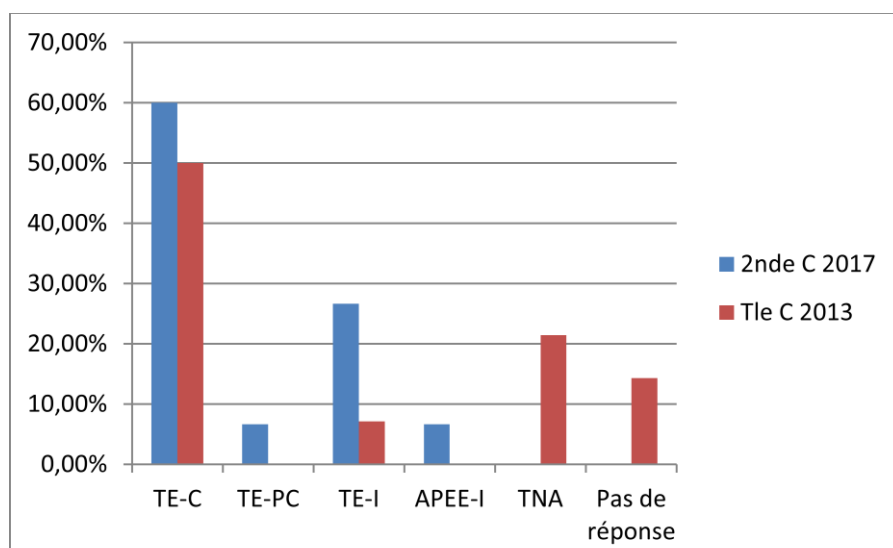
Pour l'exercice 8, portant sur un contexte purement scolaire, seule la technique TE relève du type de tâches « calculer la probabilité d'un événement » avec les types de réponses TE-C, TE-PC et TE-I. Cette réduction de types de réponses par rapport à l'exercice 6 donne l'impression que les élèves ont mieux compris l'exercice portant sur le contexte scolaire que celui qui porte sur le contexte extrascolaire. Mais globalement, ils n'ont pas réagi différemment aux deux exercices, comme le montre le graphique ci-dessous, pour lequel l'unique élève de la classe TECA pour l'exercice 6 est comptabilisé au profit du type de réponses TE-C, à cause de la conformité de sa réponse.



Graphique n°16 : Répartition des élèves suivant les types de réponses aux exercices 6 et 8.

La lecture croisée des deux diagrammes juxtaposés montre bien que les élèves ne distinguent pas vraiment un contexte scolaire d'un contexte extrascolaire dans la résolution de ces problèmes simples de probabilités. Les différences observées au niveau des types de réponses TE-C et TE-I ne paraissent pas significatives.

L'exercice 6 avait été proposé aux élèves soumis au post test lors des analyses préalables. Les résultats obtenus au niveau des élèves de la classe terminale C en ce moment ne sont pas plus reluisants que ceux obtenus présentement avec les élèves de la classe seconde ayant participé à la réalisation de notre ingénierie. En effet, même s'il n'y a pas de variation importante entre les types de réponses, le pourcentage des élèves de la présente étude ayant proposé une résolution convenable du problème dépasse légèrement celui de ceux des analyses préalables. Le graphique ci-dessous présente la répartition comparée des élèves suivant les types de réponses enregistrés.



Graphique n°17 : Répartition comparative des élèves suivant les types de réponses au niveau de la résolution de l'exercice 6.

L'analyse du graphique montre qu'il n'y a pas une grande différence entre les performances observées au sein de la population cible de 2017 et celles des élèves ayant pris part au test de 2013. Toutefois l'avantage semble être du côté des élèves ayant pris part à l'expérimentation de l'ingénierie didactique.

2.6. Analyse des résultats relatifs aux exercices 5 et 7 du post test

Les exercices 5 et 7 sont les deux qui portent sur le calcul des probabilités à partir du deuxième principe de Laplace, mais, dans un contexte formel probabiliste pour l'exercice 7 et avec une présence importante de données algébriques pour l'exercice 5. Ils comportent chacun deux

questions. Les organisations mathématiques des élèves pour chacun des exercices seront présentées dans les lignes qui suivent. Elles seront illustrées par les réponses des élèves à chacune des questions des deux exercices.

2.6.1. Organisation mathématique des élèves par rapport à l'exercice 5

2.6.1.1. Question 1

Le type de tâches dont relève la première question est « déterminer les probabilités des événements élémentaires ». À ce type de tâches relève chez les élèves deux techniques basées essentiellement sur les deux premiers principes de Laplace. La première technique est celle évaluée, qui est la technique APEE, consistant à appliquer le deuxième principe de Laplace pour exprimer la probabilité de l'univers en fonction de celles des événements élémentaires, puis à exploiter les données de l'exercice pour déterminer les probabilités recherchées. À cette technique correspondent deux types de réponses que nous nommons APEE-C et APEE-I. Le premier conduit à la bonne résolution de la question comme dans la production experte ci-dessous de l'élève E₁.

$$\text{On a : } p(\Omega) = p(\{a\}) + p(\{b\}) + p(\{c\}) + p(\{d\}).$$

$$\text{Or } p(\{a\}) = p(\{b\}) = p(\{d\}), \text{ or } p(\{c\}) = 4p(\{a\}).$$

$$p(\Omega) = 3p(\{a\}) + 4p(\{a\}) \Rightarrow p(\Omega) = 7p(\{a\}).$$

$$\text{Alors } p(\{a\}) = \frac{p(\Omega)}{7}; p(\{a\}) = \frac{1}{7}, \text{ car } p(\Omega) = 1.$$

$$\text{Donc } p(\{a\}) = p(\{b\}) = p(\{d\}) = \frac{1}{7}$$

$$p(\{c\}) = 4p(\{a\}) \Rightarrow p(\{c\}) = 4 \times \frac{1}{7}. \text{ Alors } p(\{c\}) = \frac{4}{7}.$$

Le type de réponses APEE-I est caractérisé par l'application du deuxième principe de Laplace et l'utilisation de l'axiome $p(\Omega) = 1$, mais avec une utilisation erronée des autres données du problème comme dans la résolution ci-après de l'élève E₃, unique élève de cette catégorie dans cette question.

La probabilité que le dé repose sur a, b, et d est :

$$p(a)=p(b)=p(d) \text{ donc } p(a) = \frac{3}{4}; p(b) = \frac{3}{4} \text{ et } p(d) = \frac{3}{4}. \text{ Or } p(c) = p(a) \text{ ou } p(b) \text{ ou } p(d).$$

$$p(\Omega) = p(a) + p(b) + p(c) + p(d). \text{ Or } p(\Omega) = 1. \text{ Donc}$$

$$1 = p(a) + p(b) + p(d) + p(c)$$

$$p(c) = 1 - 3p(a).$$

$$\frac{p(c)}{4} = \frac{p(a)}{1}. p(c) = \frac{1}{4} \times p(a) = \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = 0,25 \times 0,75 = 0,1875.$$

$$p(c) = \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = 0,25 \times 0,75.$$

$$p(c) = 0,1875.$$

Bien qu'exprimés, les deux éléments technologiques fondamentaux intervenant dans le type de réponses APEE-C n'ont pu être exploités. L'élève a mobilisé en plus le premier principe de Laplace, qui n'est pas nécessaire à la résolution de la question.

La deuxième technique dont relève le type de tâches de la question 1 est la technique TE basée sur le premier principe de Laplace. Ne convenant pas à la question, elle ne peut conduire qu'à une réponse erronée. Elle correspond au seul type de réponses TE-I. La production ci-dessous est à des mots près la résolution de la question 1 de l'exercice 5 par les élèves de la catégorie TE-I.

On sait que $p(a)=p(b)=p(d)$ et $p(c)=4p(a)$.

De plus $\Omega=\{a, b, c, d\}$.

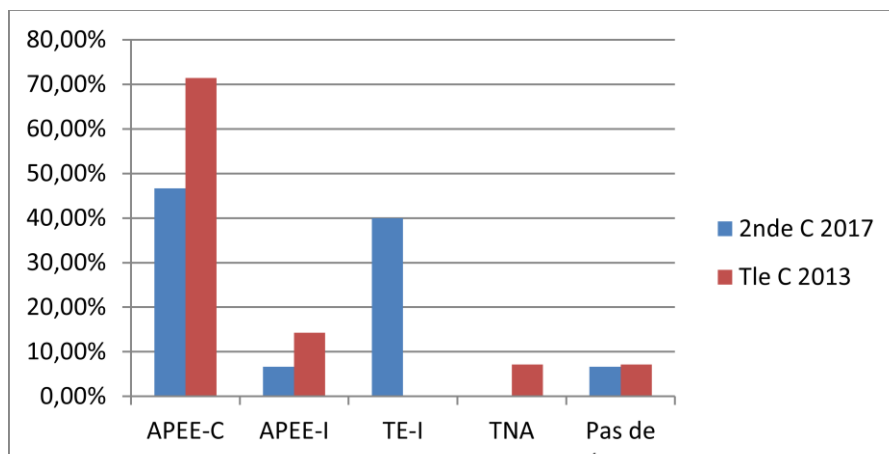
$p(a)=p(b)=p(d)$. Alors $p(a) = \frac{1}{4}$.

$p(a)=0,25$ donc $p(b)=0,25$ et $p(d)=0,25$;

$p(c) = 4p(a) = 4\left(\frac{1}{4}\right) = 1$.

L'équiprobabilité des événements élémentaires $\{a\}$, $\{b\}$ et $\{d\}$ est certainement la condition qui a justifié le choix du premier principe de Laplace chez les élèves de la catégorie TE-I.

Par rapport aux résultats des analyses préalables, les présents résultats de la question 1 ne sont pas une amélioration, car les élèves de la catégorie APEE-C des analyses préalables sont plus nombreux que leurs homologues de la présente étude. Le graphique ci-après, dans lequel le type de réponses TNA est composé d'un élève n'ayant fait allusion à aucun des deux premiers principes de Laplace, en donne une idée.



Graphique n°18 : Répartition comparative des élèves suivant les types de réponses au niveau de la résolution de la question 1 de l'exercice 5.

Comme on peut le constater, non seulement le pourcentage des élèves de la catégorie APEE-C est plus important chez les élèves des analyses préalables que chez ceux de l'ingénierie en cours d'analyse, mais c'est seulement chez ces derniers que la catégorie TE-I est observée. Comme nous l'avons prévu dans l'analyse a priori (Chap. VI, 3.6.5.1), ce biais d'équiprobabilité est une conséquence de la donnée relative à l'équiprobabilité d'événements élémentaires.

2.6.1.2. Question 2

Dans cette question, il s'agissait pour les élèves de calculer la probabilité d'un événement dans un contexte d'utilisation du deuxième principe de Laplace. Deux techniques relèvent du type de tâches dont la question est un spécimen. Il s'agit notamment des techniques « Addition des probabilités des événements élémentaires (APEE) » et « Technique d'équiprobabilité (TE) ». La technique APEE est celle évaluée caractérisée par l'application du deuxième principe de Laplace. La technique TE basée sur le premier principe de Laplace n'est pas adaptée à la question.

Deux types de réponses proviennent de la technique APEE. Ce sont les types de réponses APEE-C et APEE-I dans lesquels le deuxième principe de Laplace est appliqué respectivement avec succès et sans succès. Le type de réponses APEE-C regroupe donc les élèves qui ont proposé la résolution experte, que la production ci-dessous de l'élève E₁₄ illustre bien.

Soit B l'événement le dé repose sur une face dont la marque est une consonne.

$$B = \{b ; c ; d\}.$$

$$\begin{aligned} p(B) &= p(\{b\}) + p(\{c\}) + p(\{d\}) \\ &= 2 \times \frac{1}{7} + \frac{4}{7} \end{aligned}$$

$$p(B) = \frac{6}{7}.$$

Contrairement à cette production, dans laquelle l'événement est bien identifié, on observe une résolution d'une élève, où le deuxième principe de Laplace est bien appliqué, mais avec une identification erronée de l'événement. C'est la production que nous avons classée dans la catégorie APEE-I et qui se précise ainsi qu'il suit.

$$p(A) = p(\{a\}) + p(\{b\}) + p(\{d\})$$

$$\text{Or } p(\{a\}) = p(\{b\}) = p(\{d\})$$

$$\text{Alors } p(A) = 3p(\{a\})$$

$$= 3 \times \frac{1}{7}$$

$$p(A) = \frac{3}{7}.$$

Comme on peut le constater, le défaut de l'élève dans cette résolution est le fait d'avoir considéré la lettre a comme consonne.

Un nombre non moins important d'élèves ont plutôt reconnu le problème comme une situation d'équiprobabilité en adoptant la technique TE non convenable. Puisque cette technique ne conduit pas à la réponse désirée, nous classons dans la catégorie TE-I tous les élèves qui ont diversement utilisé le premier principe de Laplace pour répondre à la deuxième question de l'exercice. Les productions suivantes montrent la variété des réponses de la catégorie TE-I.

Élève E₃

Les consonnes sont : b, c et d.

Donc la probabilité que le dé repose sur l'une de ces faces b, c et d est : $p(b) = \frac{3}{4}$.

Élève E₅

b étant une consonne, on a :

$$p(b) = \frac{2}{4}$$

$$p(b) = 0,5$$

Élève E₁₇

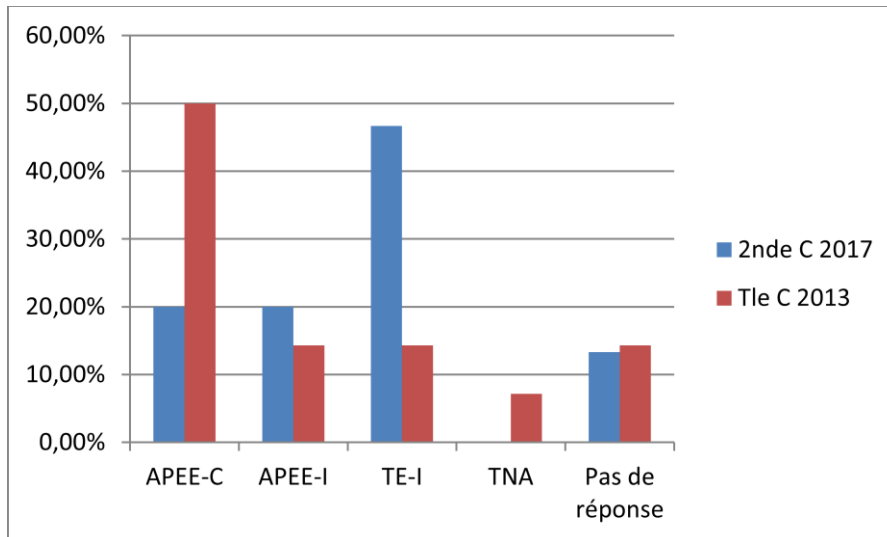
$$p(a) = p(b) \neq p(c) = p(d) \text{ donc } p(b) = \frac{\text{Card}b}{\text{Card}\Omega}$$

$$p(b) = \frac{1}{3}$$

$$p(b) = 0,33$$

Ces trois productions ont le premier principe de Laplace en commun, mais ce n'est pas évident que l'événement ait été bien identifié par tous. Si l'élève E₃ a pu bien identifier l'événement, ce n'est pas le cas chez les deux autres élèves

Comme dans la question 1 de l'exercice, la donnée relative à l'équiprobabilité de trois des quatre événements élémentaires a orienté un nombre important d'élèves vers le premier principe de Laplace, qui est pourtant utilisé par une minorité d'élèves la terminale C ayant subi le post test lors des analyses préalables. Ces derniers ont montré une meilleure reconnaissance de la situation comme celle nécessitant le deuxième principe de Laplace comme peut le montrer le graphique comparatif suivant.



Graphique n°19 : Répartition comparative des élèves suivant les types de réponses au niveau de la résolution de la question 2 de l'exercice 5.

De ce graphique, on peut retenir que seulement moins de la moitié des élèves ayant participé à l'expérimentation de l'ingénierie ont pu reconnaître la deuxième question de l'exercice 5 comme une situation dont la résolution nécessite le deuxième principe de Laplace.

2.6.2. Organisation mathématique des élèves par rapport à l'exercice 7

L'exercice 7, étant comme une reprise de l'exercice 5 avec deux questions déclinées par les mêmes types de tâches, son analyse s'appuiera sur l'organisation mathématique des élèves au niveau de l'exercice 5.

Au niveau de la question 1, c'est la technique requise APEE qui est mobilisée par l'ensemble des élèves avec leur quasi-totalité dans la catégorie APEE-C caractérisée à des mots près par la résolution experte suivante de l'élève E_3 .

$$\text{On sait que } p(\Omega) = p(\{e_0\}) + p(\{e_1\}) + p(\{2\}) + p(\{3\}) .$$

$$p(\Omega) = 0,17 + 0,64 + a + 0,01.$$

$$p(2) = a.$$

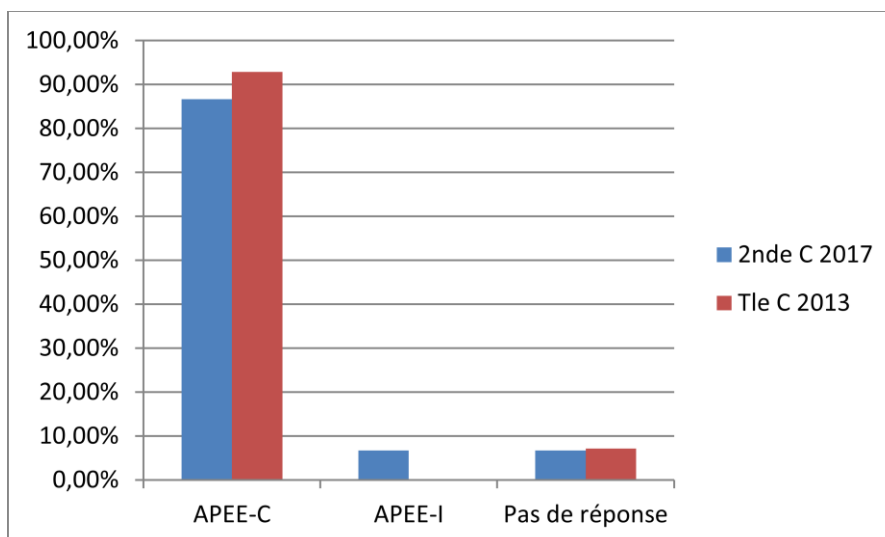
$$a = p(\Omega) - 0,17 + 0,64 + 0,01. \text{ Or } p(\Omega) = 1.$$

$$a = 1 - 0,17 + 0,64 + 0,01 ;$$

$$a = 1 - 0,82.$$

$$a = 0,18.$$

Ces résultats confirment ceux obtenus lors des analyses préalables comme le montre bien le graphique ci-dessous.



Graphique n°20 : Répartition comparative des élèves suivant les types de réponses à la question 1 de l'exercice 7.

De ce graphique, il est à noter que les élèves ont réagi de la même manière pendant les études relatives aux analyses préalables que lors de l'expérimentation de l'ingénierie en cours d'analyse. Il se dégage ainsi que les élèves ont nettement mieux réussi l'exercice 7 que l'exercice 5 au niveau de la première question. L'absence du biais d'équiprobabilité confirme que la donnée de l'exercice 5 relative à l'équiprobabilité d'événements élémentaire est à la base de l'utilisation du premier principe de Laplace dans cet exercice.

Concernant la question 2 de l'exercice 7, ce sont les techniques APEE et TE qui relèvent du type de tâches « calculer la probabilité d'un événement » chez les élèves. Les types de réponses observés sont APEE-C, APEE-I et TE-I avec la grosse part pour le type de réponses APEE-I, montrant chez les élèves une certaine reconnaissance du problème comme celui nécessitant l'utilisation du deuxième principe de Laplace, mais avec une identification incorrecte de l'événement concerné. Les trois résolutions suivantes caractérisent respectivement les types de réponses APEE-C, APEE-I et TE-I.

Élève E₁

Soit $p(C)$ cette probabilité.

$$p(C) = p(\{1\}) + p(\{3\})$$

$$p(C) = 0,64 + 0,01. \text{ Alors } p(C) = 0,65.$$

Élève E₂

Soit $p(A)$ cette probabilité

$$\text{On a : } p(A) = p(1) + p(3) + p(0)$$

$$= 0,64 + 0,01 + 0,17$$

$$p(A) = 0,82.$$

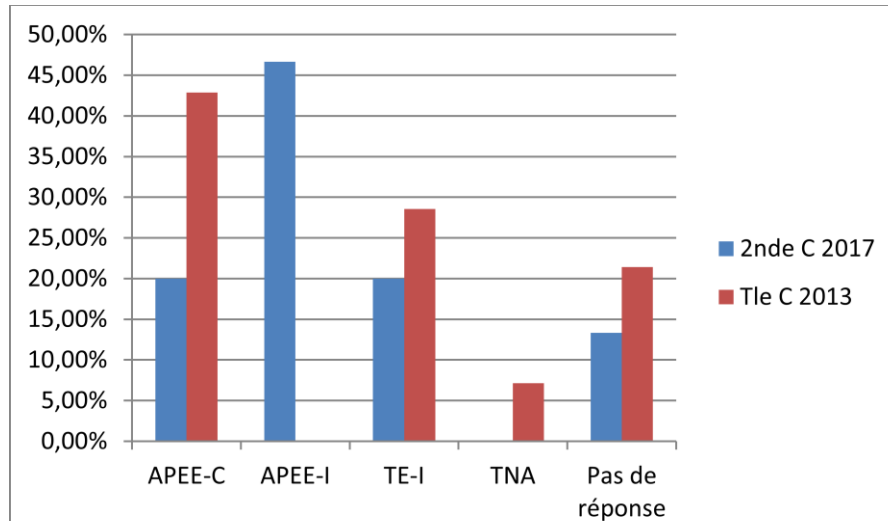
Élève E₇

Soit B l'événement : « le résultat de l'expérience aléatoire soit un nombre impair ».

$$B = \{1; 3\}.$$

$$p(B) = \frac{\text{Card}B}{\text{Card}\Omega} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

En comparaison avec les résultats des analyses préalables, les présents résultats ne sont pas nécessairement mieux sur le plan quantitatif comme le montre le graphique ci-après.



Graphique n°21 : Répartition comparative des élèves suivant les types de réponses à la question 2 de l'exercice 7.

Bien que le pourcentage des élèves ayant subi le post test des analyses préalables soit le double de celui qui ont subi celui prévu dans le cadre de la présente ingénierie, il importe toutefois de remarquer que les élèves cibles de l'ingénierie sont plus nombreux à reconnaître le problème posé comme une situation nécessitant l'utilisation du deuxième principe de Laplace.

2.6.3. Bilan de l'analyse des exercices 5 et 7

Les exercices 5 et 7 portant sur l'application du deuxième principe de Laplace ont été différemment abordés par les élèves ayant suivi l'expérimentation de l'ingénierie en étude. Ils ont mieux réagi au niveau de l'exercice 7 qu'au niveau de l'exercice 5. Ce constat s'explique par la complexité relative de l'exercice 5 par rapport à l'exercice 7. Pour la première question de chacun de ces deux exercices, la résolution experte, basée sur la combinaison du deuxième principe de Laplace et de l'axiome $p(\Omega) = 1$, est proposée par une minorité non négligeable pour l'exercice 5 et par la grande majorité des élèves pour l'exercice 7. Outre cette démarche, un bon nombre d'élèves ont opté pour l'application du premier principe de Laplace, qui n'est pas adapté pour la question. Au niveau de la deuxième question, le deuxième principe de Laplace a été appliqué avec succès dans la même proportion pour les deux exercices. L'identification erronée de l'événement dont la probabilité est à calculer est la raison fondamentale de l'échec d'un nombre important d'élèves, notamment au niveau de l'exercice

7. Bien que le premier principe de Laplace ne soit pas adapté à la question, il a été appliqué par des élèves, beaucoup plus pour l'exercice 5 que pour l'exercice 7.

Par rapport à l'exercice 5, les résultats du post test à l'expérimentation de l'ingénierie ne constituent pas une amélioration des résultats obtenus sur l'application du deuxième principe de Laplace lors des analyses préalables. Cette tendance est néanmoins inversée au niveau de l'exercice 7, montrant que les élèves ont été déroutés par la condition d'équiprobabilité donnée dans l'exercice 5.

3. Bilan de l'apprentissage du calcul des probabilités à l'issue de l'ingénierie didactique expérimentée

Dans cette section, nous voudrions faire le bilan des apprentissages suite à l'ingénierie expérimentée en nous basant sur les analyses praxéologiques des réponses des élèves aux exercices du test. Nous proposons à cet effet une classification des rapports personnels à la notion d'expérience aléatoire et aux deux premiers principes de Laplace.

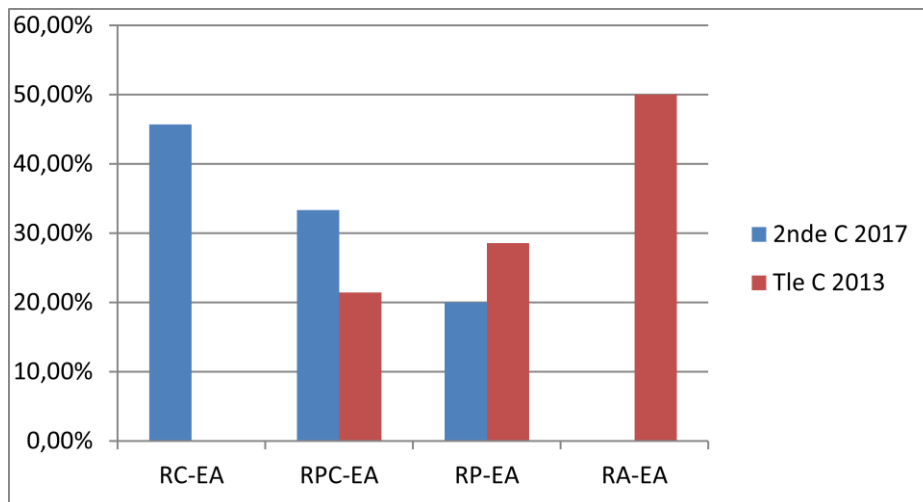
3.1. Rapports personnels à la notion d'expérience aléatoire

Pour évaluer le rapport personnel à la notion d'expérience aléatoire, nous nous basons sur les réponses proposées par les élèves à la première question de l'exercice 1, à l'exercice 2 et à la première question de l'exercice n°3. Le choix de ces exercices ou parties d'exercices se justifie par le fait que les questions évoquées portent de façon plus ou moins explicite sur la notion d'expérience aléatoire. La grille de classification tient compte des types de réponses enregistrées pour chacune des questions. Nous distinguons, à partir des exercices indiqués, les quatre rapports personnels suivants à la notion d'expérience aléatoire :

- le rapport complet à la notion d'expérience aléatoire (RC-EA) ;
- le rapport presque complet à la notion d'expérience aléatoire (RPC-EA) ;
- le rapport partiel à la notion d'expérience aléatoire (RP-EA) ;
- le rapport absence de la notion d'expérience aléatoire (RA-EA).

Comme dans les analyses préalables, nous appelons « catégories correctes » : les types de réponses MD₁, MD₂ et MD₃ au niveau de la première question de l'exercice 1, le type de réponses « Tirage au sort » au niveau de l'exercice 2, et les catégories « Aléatoire » au niveau de la première question de l'exercice 3. Un élève ayant participé au test a un rapport RC-EA lorsqu'il est classé dans les catégories correctes pour les trois questions. Le rapport RPC-EA

est caractérisé par deux catégories correctes sur les trois attendues. Est du rapport RP-EA, tout élève classé dans une seule catégorie correcte sur les trois. Quant au rapport RA-EA, il est caractérisé par l'absence de catégorie correcte au niveau des trois questions. La répartition des 15 élèves suivant les rapports ci-dessus définis en comparaison avec celle des élèves ayant participé au test lors des analyses préalables se précise par le graphique ci-après.



Graphique n°22 : Répartition comparative des élèves suivant les rapports personnels à la notion d'expérience aléatoire.

En tenant compte des pourcentages des élèves ayant les types de rapports RC-EA et RPC-EA, on peut affirmer que les élèves de l'expérimentation de 2017 semblent nettement avoir une meilleure compréhension de la notion d'expérience aléatoire que ceux ayant pris part au test de 2013.

3.2. Rapports personnels au premier principe de Laplace

Dans le post test, la question 3.d) de l'exercice 1 et les exercices 4, 6 et 8 portent explicitement sur le premier principe de Laplace. Nous proposons de combiner les réponses des élèves à ces quatre questions pour donner une classification des rapports personnels au premier principe de Laplace. La grille de classification repose essentiellement sur les éléments technologiques de la technique TE relative au calcul de probabilités dans une situation d'équiprobabilité. Les quatre types de rapports personnels constituant la typologie des rapports personnels au premier principe de Laplace sont (Dandjinou et Bronner, 2018) :

- rapport complet au premier principe de Laplace (RC-PPL) ;
- rapport presque complet au premier principe de Laplace (RPC-PPL) ;
- rapport partiel au premier principe de Laplace (RP-PPL) ;

- rapport absence du premier principe de Laplace (RA-PPL).

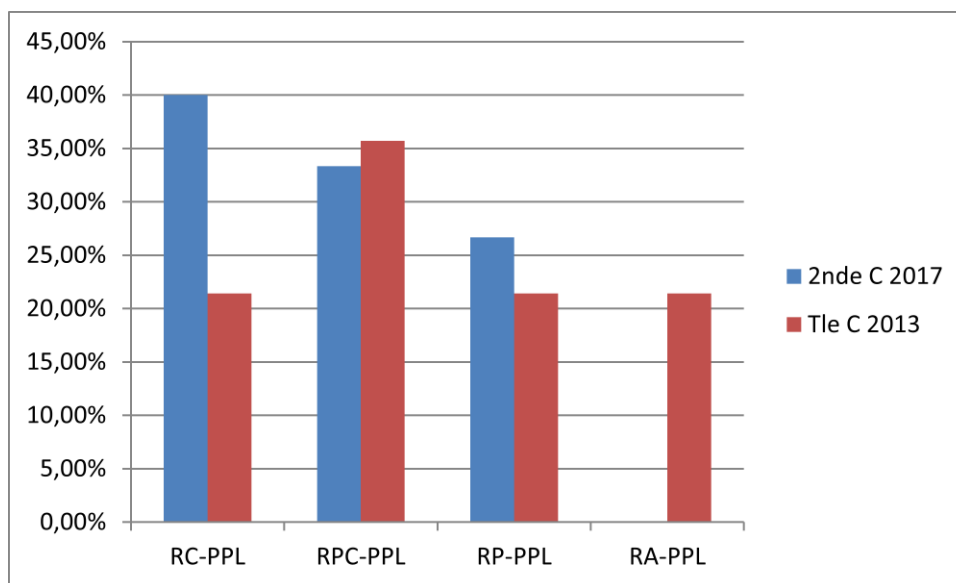
Le type de rapports RC-PPL est celui développé par les élèves ayant la maîtrise de tous les éléments technologiques de la technique TE, notamment le langage des probabilités, l'analyse combinatoire et le premier principe de Laplace. Caractérisés particulièrement par une bonne maîtrise des techniques de dénombrement, les élèves du type de rapports RC-PPL arrivent à réussir la plupart des problèmes dont la résolution nécessite le premier principe de Laplace. Le type de rapports RC-PPL est, de notre point de vue, conforme au rapport institutionnel au calcul des probabilités dans les situations d'équiprobabilité. Le type de rapports RP-PPL est caractérisé par une bonne maîtrise du vocabulaire des probabilités, une connaissance certaine du premier principe de Laplace et une maîtrise partielle des techniques de dénombrement assurant la réussite uniquement dans certains problèmes portant sur des situations relativement simples telles que le choix d'un objet parmi un nombre donné d'objets, le lancer d'un dé une seule fois, etc. Ce type de rapport n'est pas totalement conforme au rapport institutionnel du calcul des probabilités dans les situations d'équiprobabilité, qui ne se limite pas en classe terminale aux situations simples d'équiprobabilité. Le type de rapports RP-PPL est caractérisé par la connaissance par l'élève du premier principe de Laplace et du langage des probabilités, mais surtout par une maîtrise insuffisante de l'analyse combinatoire. L'insuffisance de l'analyse combinatoire s'explique par leur incapacité à dénombrer avec succès les cas possibles et favorables, même dans des situations simples d'équiprobabilité. Le type de rapport RA-PPL est caractérisé par la méconnaissance de l'énoncé du premier principe de Laplace ou par l'absence de sa mobilisation dans la résolution des situations d'équiprobabilité. Évidemment, les types de rapports RP-PPL et RA-PPL ne sont pas conformes au rapport institutionnel du calcul des probabilités par le premier principe de Laplace.

Dans le but de la répartition des élèves ayant participé au test de 2017 suivant les types de rapports précédemment définis et en suivant le principe adopté au niveau des analyses préalables (Chap. V, 3.2.), nous définissons les « catégories correctes » relatives au premier principe de Laplace comme étant :

- la catégorie PPL au niveau de la question 3.d) de l'exercice 1 ;
- les catégories TE-C et TE-PC au niveau de l'exercice 4 ;
- la catégorie TE-C au niveau des exercices 6 et 8.

Nous distinguons ensuite trois groupes d'exercices. Le premier groupe est composé de la question 3.d) de l'exercice 1, le deuxième groupe est composé de l'exercice 4 et le troisième groupe est constitué des exercices 6 et 8. Pour le dernier groupe, la catégorie correcte est à rechercher au niveau de l'un au moins des exercices le constituant.

Dans le contexte du post test en cours d'analyse, l'élève du type de rapports RC-PPL est celui qui est classé dans les catégories correctes au niveau des trois groupes d'exercices. Les élèves ayant le type de rapports RPC-PPL sont ceux répartis dans deux catégories correctes sur les trois possibles, alors que le type de rapports RP-PPL est celui développé par les élèves classés dans une seule catégorie correcte pour les trois groupes d'exercices. Quant au type de rapports RA-PPL, il est celui de l'élève, qui n'appartient à aucune catégorie correcte. La répartition simultanée des élèves ayant subi le test de l'ingénierie expérimentée et de ceux de la classe terminale C ayant participé au post test lors des analyses préalables peut se lire à travers le graphique ci-après.



Graphique n°23 : Répartition comparative des élèves suivant les rapports personnels au premier principe de Laplace.

Comme le montre le graphique, le type de rapports « absence du premier principe de Laplace », n'est observé chez aucun élève parmi ceux concernés par l'expérimentation de 2017. De plus le pourcentage des élèves ayant un des types de rapports RC-PPL et RPC-PPL est plus élevé chez cette même population. En somme, les conditions d'expérimentation de l'ingénierie semblent favoriser l'apprentissage du premier principe de Laplace.

3.3. Rapports personnels au deuxième principe de Laplace

La question 3.c) de l'exercice n°1 et les exercices 5 et 7 portent explicitement sur le deuxième principe de Laplace. La combinaison des réponses des élèves à ces trois questions nous conduit à une classification des rapports personnels au deuxième principe de Laplace des élèves ayant participé à notre expérimentation. Nous nous sommes basé sur l'énoncé du deuxième principe de Laplace et le vocabulaire probabiliste qui sont les éléments technologiques de la technique APEE adaptée au calcul des probabilités dans les situations nécessitant le deuxième principe de Laplace, pour distinguer quatre rapports personnels au deuxième principe de Laplace (Dandjinou et Bronner, 2018), à savoir :

- « rapport conforme au deuxième principe de Laplace (RC-DPL) » ;
- « rapport presque conforme au deuxième principe de Laplace (RPC-DPL) » ;
- « rapport partiel au deuxième principe de Laplace (RP-DPL) » ;
- « rapport absence du deuxième principe de Laplace (RA-DPL) ».

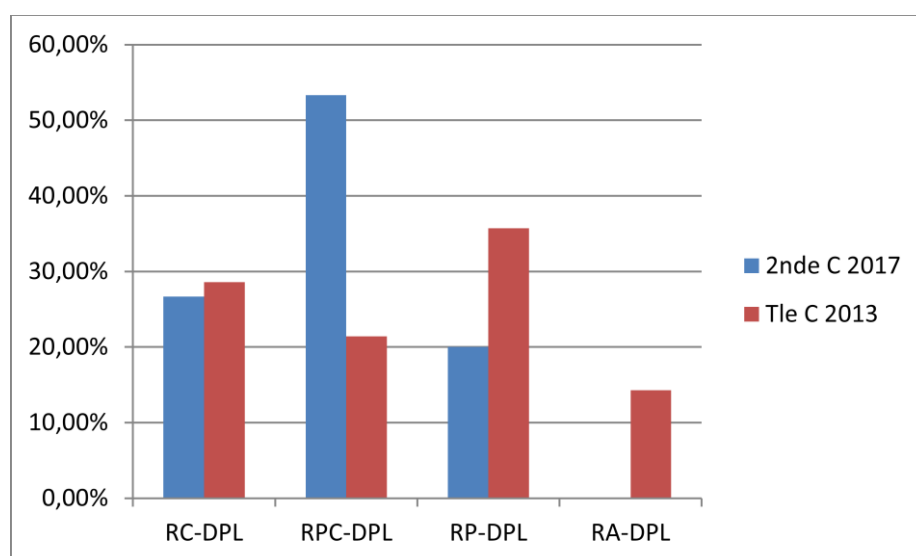
Le type de rapports « RC-DPL » est celui développé par les élèves ayant une bonne maîtrise de tous les éléments technologiques de la technique APEE. Les élèves ayant ce type de rapports ont une bonne connaissance de l'énoncé du deuxième principe de Laplace et reconnaissent aisément les situations nécessitant l'utilisation de ce principe qu'ils appliquent avec succès. Le type de rapports « RC-DPL » est conforme au rapport institutionnel au calcul des probabilités suivant le deuxième principe de Laplace. Le type de rapports « RPC-DPL » est caractérisé par une connaissance certaine du deuxième principe de Laplace et du vocabulaire des probabilités, mais aussi par une identification non correcte de l'événement. Dans une certaine mesure, on peut affirmer que le type de rapport « RPC-DPL » est aussi conforme au rapport institutionnel, car l'identification de l'événement dans la technique APEE relève de la compréhension de la tâche et ne conduit pas nécessairement à un élément technologique spécifique de cette technique. Le rapport partiel au deuxième principe de Laplace « RP-DPL » est caractérisé par la non reconnaissance de la deuxième question de chacun des deux exercices comme une situation faisant appel au deuxième principe de Laplace et par l'énoncé correct du deuxième principe de Laplace dans la troisième question de l'exercice 1. De notre point de vue, ce type de rapport n'est pas conforme au rapport institutionnel au deuxième principe de Laplace. Le type de rapports « RA-DPL » est caractérisé par la méconnaissance de l'énoncé du deuxième principe de Laplace et par l'absence de mobilisation de ce principe dans les problèmes portant

sur ce principe. Un tel rapport ne saurait être conforme au rapport de l'institution enseignante au deuxième principe de Laplace.

Concernant la répartition des élèves dans les types de rapports ci-dessus définis, nous rappelons que les catégories que nous avons qualifiées de « correctes » sont : la catégorie DPL au niveau de la question 3.c) de l'exercice 1 et la catégorie APEE-C au niveau de la deuxième question de chacun des exercices 5 et 7. Le choix de la deuxième question de ces exercices se justifie par le fait qu'elle porte essentiellement sur le deuxième principe de Laplace. Cependant, à travers la catégorie APEE-I, la première question de chacun de ces exercices peut être exploitée pour rechercher chez un élève des traces du deuxième principe de Laplace, au cas où ce dernier n'aurait pas résolu la deuxième question de l'un quelconque des exercices 5 et 7.

Comme lors des analyses préalables (Chap. V, 3.3.2.), l'élève ayant le type de rapports RC-DPL est celui qui est classé dans les catégories correctes pour les trois questions évoquées précédemment. Le type de rapports RPC-DPL est celui de l'élève classé dans les catégories correctes au niveau de deux questions sur les trois visées. Concernant le type de rapports RP-DPL, il est développé par tout élève classé dans la catégorie correcte d'une seule des trois questions. L'élève qui n'a produit aucune trace du deuxième principe de Laplace dans les questions sélectionnées est du type de rapports RA-DPL.

Avec cette grille, la répartition quantitative des types de rapports identifiés dans la population d'élèves concernés par l'expérimentation, comparée à celle dans la population des élèves concernés par les analyses préalables, est résumée par le graphique ci-après.



Graphique n°24 : Répartition comparative des élèves suivant les rapports personnels au deuxième principe de Laplace.

Comme au niveau de l'étude du rapport personnel au premier principe de Laplace, aucun des élèves ayant pris part à l'ingénierie n'a le type de rapports « absence du deuxième principe de Laplace. De même, en considérant les types de rapports RC-DPL et RPC-DPL que nous avons jugé conformes au rapport de l'institution d'enseignement, cette population semble avoir un meilleur apprentissage du deuxième principe de Laplace.

Conclusion

Les exercices du post test de l'ingénierie expérimentée couvrent globalement les quatre secteurs ci-après :

- les connaissances déclaratives sur le vocabulaire des probabilités et sur des propriétés relatives au calcul des probabilités ;
- la notion d'expérience aléatoire ;
- le calcul des probabilités à partir des propriétés liant les probabilités de plusieurs événements ;
- le calcul des probabilités dans des situations d'équiprobabilités ;
- le calcul des probabilités faisant appel au deuxième principe de Laplace.

Par rapport aux connaissances déclaratives sur le vocabulaire des probabilités, les élèves ont montré qu'ils ont une bonne connaissance de la définition de la notion d'expérience aléatoire et de la typologie des événements. Ils arrivent notamment dans une grande majorité à faire la distinction entre événements incompatibles, événements équiprobables et événements contraires. Les axiomes et propriétés entrant dans le calcul élémentaire des probabilités font également partie du répertoire de connaissances des élèves ayant participé à l'expérimentation de l'ingénierie. Ces rapports personnels aux concepts probabilistes, adéquats pour le plus grand nombre d'élèves, constituent globalement une amélioration des résultats issus des analyses préalables. L'évaluation formative, quoique collective, constituée des rappels des notions en construction au début de chaque séance, pourrait justifier cette amélioration des rapports personnels aux concepts fondamentaux des probabilités.

Le rapport personnel à la notion d'expérience aléatoire est évalué à travers l'évaluation du rapport au hasard du tirage au sort et la reconnaissance de l'expérience aléatoire dans un problème de probabilité. Concernant l'évaluation du rapport personnel à la notion de hasard, bien qu'il y ait une amélioration des résultats obtenus lors des études antérieures par rapport au type de rapports « tirage au sort » visé, les autres types de rapports constatés lors des analyses

préalables et pendant l'expérimentation de l'ingénierie n'ont pas disparu. Quoique observés chez des minorités d'élèves, les types de rapports « compensation » et « constance » ont non seulement persisté, mais il s'en est ajouté le type de rapports « estimation », qui pourrait provenir de l'effet de l'évaluation formative relative à l'approche fréquentiste à travers la résolution des deux premiers exercices de la situation 5. Nonobstant cette régression qualitative, le rapport personnel à la notion d'expérience aléatoire est globalement conforme à celui du rapport de l'institution d'enseignement chez le plus grand nombre d'élèves, mieux que chez les élèves concernés par nos analyses préalables en 2013.

Concernant le calcul des probabilités à partir des propriétés liant les probabilités de plusieurs événements, bien qu'ils aient une bonne connaissance de ces propriétés, les élèves, dans une proportion importante, ne sont pas arrivés à les mobiliser avec succès pour le calcul des probabilités. Le choix incorrect des propriétés et les difficultés d'ordre algébrique et numérique en sont les causes. Ces résultats sont semblables à ceux obtenus chez les élèves de la terminale C lors des analyses préalables.

Pour ce qui est du calcul des probabilités à partir du premier principe de Laplace, la quasi-totalité des élèves arrivent à reconnaître les situations d'équiprobabilité et à mobiliser ce principe pour le calcul des probabilités. Dans ce cadre, le dénombrement des cas possibles et des cas favorables est mieux réussi pour les expériences aléatoires simples. La prise en compte de toutes les questions du test relatives au premier principe de Laplace a permis de répartir les élèves en quatre types de rapports personnels à ce principe dont nous avons deux conformes au rapport institutionnel. La plus grande représentativité dans ces deux types de rapports personnels des élèves ayant pris part à l'expérimentation de l'ingénierie nous permet de faire l'hypothèse que les conditions de réalisation de cette ingénierie favorisent l'apprentissage du premier principe de Laplace.

Par rapport au calcul des probabilités à partir du deuxième principe de Laplace, les élèves ont montré dans leur totalité une connaissance certaine de l'énoncé du deuxième principe. De même, arrivent-ils à reconnaître les situations où intervienne le deuxième principe de Laplace. Par contre, une partie non négligeable des élèves ont recours au premier principe de Laplace dans ces situations. Le défaut d'une identification correcte de l'événement dont la probabilité est à calculer, est la cause de l'échec du calcul de la probabilité d'une bonne partie des élèves qui reconnaissent les situations faisant intervenir le deuxième principe de Laplace. La classification des rapports personnels au deuxième principe de Laplace, à partir de la combinaison des réponses des élèves à toutes les questions du test relatives à ce principe, montre

une représentativité importante dans les deux types de rapports personnels que nous avons jugés conformes parmi les quatre définis. Cette représentativité des élèves ayant participé à l'expérimentation de l'ingénierie, au niveau des types de rapports personnels adéquats, est également meilleure à celle de la population des élèves de la classe terminale C ayant pris part au test lors des analyses préalables. Nous sommes ainsi en mesure de faire l'hypothèse que les conditions d'expérimentation de l'ingénierie, ont favorisé l'apprentissage du deuxième principe de Laplace.

Il importe de remarquer que le post test ne comporte aucun exercice portant sur l'approche fréquentiste pour permettre d'apprécier à travers une évaluation strictement individuelle le rapport personnel des élèves à la notion de probabilité à partir de la loi faible des grands nombres. Nous justifions cette absence d'exercice portant sur l'approche fréquentiste par le fait que l'évaluation formative consacrée à cette approche n'a pas eu lieu dans les meilleures conditions de travail pour les élèves. En effet, les contraintes de temps pendant la séance consacrée à la résolution des exercices 2 et 3 de la situation 5 (Chap. VII, 2.5.2.1.3., 2.5.3.1.2.) ont fait que la résolution des dernières questions de ces exercices, réservées à l'utilisation de l'approche fréquentiste, n'a pas respecté le même processus que les autres questions. Ces conditions de résolution des questions précédemment évoquées et leur conséquence, qui est l'absence dans le post test d'un exercice portant sur l'approche fréquentiste, constituent sûrement l'une des limites de l'analyse de l'ingénierie expérimentée.

CONCLUSION

Notre ambition première en nous lançant dans la rédaction de cette thèse de doctorat est de proposer au système éducatif du Bénin un modèle innovant de diffusion des probabilités pouvant améliorer leur apprentissage dans le secondaire. Le titre de la thèse est significatif de cette perspective : « *Enseignement des probabilités dans le secondaire au Bénin : apport d'une démarche expérimentale à l'apprentissage* ». Les questions que nous nous sommes posées pour aborder notre étude nous ont amené à formuler deux hypothèses H_1 et H_2 que nous avons testées, l'une par l'étude de l'enseignement et de l'apprentissage du calcul élémentaire des probabilités, et l'autre, par l'élaboration et la réalisation en classe d'une ingénierie didactique. Au-delà de l'étude de la véracité de ces hypothèses, notre travail a certainement répondu à divers questionnements liés à l'enseignement-apprentissage des probabilités au Bénin. Dans la présente conclusion, nous allons préciser dans un premier temps, les résultats relatifs aux hypothèses H_1 et H_2 , ainsi que les réponses aux questionnements précédemment évoqués. Dans un second temps, nous allons donner les limites de notre travail. Les perspectives qui s'ouvrent à la suite de cette thèse seront indiquées en dernière position.

Hypothèse H_1

En nous inscrivant dans le cadre théorique générale de la méthodologie d'ingénierie didactique (Artigue, 1988), l'élaboration d'une méthode innovante d'enseignement a nécessité des analyses préalables, suscitées par la question Q_1 suivante : « Quels sont les effets de l'enseignement des probabilités sur l'apprentissage du calcul élémentaire des probabilités dans le secondaire au Bénin ? » L'hypothèse que nous avons formulée par rapport à cette question est H_1 : « La focalisation de l'enseignement des probabilités sur le premier principe de Laplace conduit à un échec qui se traduit par le rapport inadéquat de la plupart des élèves aux concepts probabilistes de base et au calcul des probabilités » À ce propos, les effets de l'enseignement sont identifiés dans le chapitre IV à partir de l'étude de la transposition didactique des probabilités, et ceux des apprentissages sont étudiés dans le chapitre V, à travers l'analyse des réponses des élèves à un premier test ayant porté sur divers objets probabilistes dont le calcul élémentaire des probabilités. Concernant la transposition didactique, nous avons mis séparément l'accent sur la notion d'expérience aléatoire et sur la notion de probabilité d'un événement.

L'étude de la transposition didactique de la notion d'expérience aléatoire a révélé l'existence de deux modèles de définition dans l'institution savante, à savoir : le modèle

mathématique réduit (MR) caractérisé uniquement par l'imprévisibilité du résultat de l'expérience aléatoire et le modèle didactique (MD), caractérisé par la connaissance préalable de ses résultats possibles en plus de l'imprévisibilité de son résultat. Au niveau du savoir à enseigner, nous avons noté un vide didactique (Bronner, 1997), marqué par l'absence d'indication sur la définition d'expérience aléatoire dans les programmes de probabilités des classes terminales des séries scientifiques. La noosphère (Chevallard, 1991) a néanmoins fait le choix du modèle MR dans les séries littéraires. L'une des conséquences du vide didactique relatif à la notion d'expérience aléatoire dans les séries scientifiques est l'enseignement dans les classes des deux modèles de définition identifiés dans des formes variées. Notons que, par rapport à la notion d'expérience aléatoire, il y a une similitude entre les instructions officielles et les manuels de la collection CIAM, proches des programmes d'études du point de vue des contenus notionnels. Pour ce qui concerne la notion de probabilité d'un événement, deux types de tâches sont identifiés au niveau du savoir savant, à savoir : les types de tâches T_e : « Estimer la probabilité d'un événement » et T_c : « Calculer la probabilité d'un événement ». Présent uniquement dans l'institution savante, le type de tâches T_e est associé à une technique dont l'élément technologique principal est la loi faible des grands nombres. Quant au type de tâches T_c , il est présent aussi bien dans les programmes, dans l'apprêt didactique, qu'au niveau du savoir enseigné. Au nombre de trois, les techniques relevant de ce type de tâches sont respectivement fondées sur les deux premiers principes de Laplace et les propriétés fondamentales du calcul élémentaire des probabilités. Si le premier principe de Laplace et les propriétés fondamentales se retrouvent à tous les niveaux de savoir de la transposition didactique de Chevallard (1991), il n'en est pas de même pour le deuxième principe de Laplace. Ne figurant pas explicitement dans les programmes des séries scientifiques, ce principe se retrouve dans les manuels de la collection CIAM, et est enseigné par certains enseignants.

Du côté des effets des apprentissages, l'analyse des réponses proposées par cent élèves de quatre classes terminales scientifiques aux questions du premier post test, administré dans le cadre des analyses préalables, a d'abord révélé que leur rapport au hasard du tirage au sort et à la notion d'expérience aléatoire n'est adéquat que pour une minorité d'élèves. À ce niveau, deux types d'obstacles à la notion de hasard sont clairement identifiés : il y a eu un obstacle ontogénétique traduit par le rapport personnel « compensation » (Piaget et Inhelder, 1951) et un obstacle didactique dû à un enseignement basé sur l'approche fréquentiste et traduit par le rapport personnel « constance » (Chap. V, 2.2.3. ; Dandjinou et Bronner, 2017). Cependant, les connaissances déclaratives mémorisables relatives à la typologie des événements, testés à l'aide

des questions à choix multiples, semblent être maîtrisées par de plus grands nombres d'élèves. Nous avons expliqué ce paradoxe apparent par les natures différentes des questions utilisées pour recueillir, chez les élèves, des informations relatives à ces notions. Nombreux sont-ils aussi les élèves qui maîtrisent les énoncés des axiomes et des autres propriétés qui entrent dans le calcul élémentaire des probabilités. Pour ce qui est du calcul des probabilités, la méthode relative à la détermination de la probabilité d'un événement pouvant s'exprimer en fonction d'autres événements, est maîtrisée par environ le tiers des élèves. N'eurent été les difficultés d'interprétation et d'ordre numérique, ce taux pourrait doubler. Les deux premiers principes de Laplace sont connus par un grand nombre d'élèves, mais leur application dans le calcul des probabilités ne marche que pour une minorité, plus stricte pour le premier principe de Laplace. Si les difficultés en analyse combinatoire constituent la cause essentielle de l'échec des élèves au niveau de l'application du premier principe de Laplace, ce sont les difficultés à identifier les éventualités d'un événement et le biais d'équiprobabilité qui en sont les causes au niveau du deuxième principe de Laplace. Nos travaux confirment ainsi le relatif échec de l'enseignement des probabilités basé sur l'approche classique (Henry, 1999, 2010). Revenant à l'hypothèse H_1 , nos travaux la confirment sur le plan du calcul des probabilités. Cependant, hormis la notion d'expérience aléatoire, les élèves semblent avoir globalement un rapport adéquat aux concepts de base et aux axiomes et propriétés probabilistes, qui sont des savoirs déclaratifs non procéduraux. Cela peut s'expliquer par la culture de mémorisation, encore présente dans le système éducatif béninois, comme on l'entend le plus souvent chez certains élèves : « *J'apprends mes leçons en mathématiques, mais je n'arrive pas à les appliquer dans les exercices* ». Ceci pourrait conduire à l'hypothèse que les concepts de base sont connus sur le plan lexical ou phonétique au détriment de leur dimension sémantique, comme l'a souligné Marie-Françoise Legendre (1994)

Hypothèse H_2

En restant toujours dans le cadre de la méthodologie d'ingénierie didactique, le modèle d'enseignement est construit et expérimenté pour répondre à la question Q_2 : « Dans quelles conditions la diffusion du calcul élémentaire des probabilités au Bénin peut-elle contribuer à des apprentissages réussis des concepts probabilistes de base ? ». Rappelons que l'hypothèse formulée à la suite de cette question est H_2 : « L'enseignement des probabilités à partir d'une démarche expérimentale incluant l'approche fréquentiste couplée avec le deuxième principe de Laplace permet d'une part, de donner un sens aux objets probabilistes de base, et d'autre part, d'améliorer le rapport personnel des élèves au calcul des probabilités. »

L'ingénierie didactique élaborée a pour but de tester l'hypothèse H_2 et plus généralement d'apporter des solutions aux difficultés rencontrées dans l'apprentissage des probabilités et constatées à l'issue de la vérification de l'hypothèse H_1 . Elle est composée de six situations dont les trois premières, fondées sur une démarche expérimentale, visent l'enseignement des probabilités en vue de surmonter les obstacles à la notion de hasard, de donner un sens aux concepts probabilistes de base et surtout à la notion de probabilité d'un événement, et de découvrir le deuxième principe de Laplace. Il importe de préciser que dans la deuxième situation, la situation fondamentale de Brousseau (2005) dans le cadre de l'enseignement des probabilités et de la statistique est éprouvée comme elle l'a été dans les travaux de Briand (2005), de Dhieb (2009) et de Martin (2014). La quatrième situation a permis de construire les éléments technologiques relatifs à l'axiomatique de Kolmogorov et au premier principe de Laplace, qui sont ensuite travaillés dans la cinquième situation. La sixième situation de l'ingénierie didactique a servi à évaluer les élèves en vue de l'étude de l'apprentissage des notions et techniques construites dans les situations précédentes.

La réalisation en classe de la première situation a permis, dans un contexte de lancer de cauri, de faire évoluer le rapport des élèves vers le hasard du tirage au sort et favoriser la mise en place des notions d'expérience aléatoire, d'éventualité et d'événement. L'approche fréquentiste expérimentée dans la deuxième situation, à partir de la bouteille génératrice de hasard de Brousseau (2005), a conduit à la construction de la notion de probabilité d'un événement selon la loi faible des grands nombres, et à l'émergence du premier principe de Laplace. Dans un contexte de lancer simultané de quatre cauris, la troisième situation a offert aux élèves une première rencontre avec la modélisation d'une expérience aléatoire et a débouché sur l'institutionnalisation du deuxième principe de Laplace, qui a servi à définir la probabilité suivant l'axiomatique de Kolmogorov. Au cours de la réalisation des trois premières situations, les élèves ont travaillé dans une grande autonomie didactique à travers des situations adidactiques, régulièrement accompagnées de la dévolution des problèmes aux élèves de la part du professeur (Brousseau, 1998). La réalisation en classe de la quatrième situation, dans un contexte classique de démonstration de propriétés, a permis aux élèves de retrouver le raisonnement déterministe auquel ils étaient habitués et qui a connu une rupture au cours de l'expérimentation, notamment dans la deuxième situation. Comme l'on pouvait s'y attendre, les élèves ont réussi certaines démonstrations sans l'aide du professeur et d'autres sont conduites par ce dernier avec la participation effective des élèves. À travers la cinquième situation, les élèves ont non seulement appliqué les notions et techniques construites, mais

c'était aussi pour eux l'occasion de compléter leur apprentissage, notamment sur les registres des probabilités et sur des techniques de dénombrement. Tout au long de la réalisation des cinq premières situations de l'ingénierie didactique, les organisations mathématiques observées chez les élèves au niveau des différentes tâches ont été pour la plupart prévues dans l'analyse a priori des situations (Chap. VI). Quant aux organisations didactiques, elles sont marquées par la succession de tous les moments didactiques (Chevallard, 1999), hormis celui de l'évaluation, qui n'a pas été jusque-là explicite.

Le test réalisé à travers la réalisation de la sixième situation de l'ingénierie a montré une amélioration considérable de l'apprentissage des probabilités. D'abord, les acquis relatifs aux savoirs mémorisables et non procéduraux, constatés lors des analyses préalables, sont confirmés et améliorés sur le plan quantitatif. Ainsi la typologie des événements, les axiomes et les autres propriétés conséquentes semblent faire partie du répertoire des connaissances de la plupart des élèves ayant participé à l'expérimentation de l'ingénierie, y compris la définition de l'expérience aléatoire, qui avait fait défaut à la majorité des élèves lors des analyses préalables. Le rapport à la notion d'expérience aléatoire, étudié à partir de trois questions du test, est conforme au rapport institutionnel pour un grand nombre d'élèves, montrant ainsi une amélioration certaine des résultats obtenus à ce sujet lors des analyses préalables. Il importe néanmoins de signaler à ce niveau, que l'étude du rapport à la notion de hasard, a révélé, en dehors de l'évolution vers le hasard du tirage au sort chez la majorité des élèves, l'existence des types de rapports traduisant des obstacles didactiques (Brousseau, 1989b), liés à l'ingénierie expérimentée. En effet, nous avons observé la confirmation du type de rapports « constance » identifié lors des analyses préalables et l'apparition du type de rapports « estimation » (Chap. VIII, 2.3.1), qui sont tous deux des conséquences de l'enseignement basé sur l'approche fréquentiste, que nous avons proposé dans cette thèse. Du côté du calcul des probabilités à partir des propriétés de base liant les probabilités de plusieurs événements, la réalisation de l'ingénierie n'a pas vraiment montré une amélioration des résultats obtenus lors des analyses préalables en 2013. Dans ce cadre, les élèves savent mieux appliquer la formule $p(A) + p(\bar{A}) = 1$ que les formules $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$ et $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$, compte tenu certainement d'une fréquence plus élevée d'utilisation de la première formule au cours des séances d'exercices dans la cinquième situation. Concernant le calcul des probabilités dans les situations d'équiprobabilité, le premier principe de Laplace est largement mobilisé par les élèves. Bien qu'ils butent sur l'analyse combinatoire pour les situations d'équiprobabilité complexe, l'ingénierie expérimentée a montré chez un grand nombre d'élèves un rapport

conforme au calcul des probabilités à partir du premier principe de Laplace. Quant aux situations faisant intervenir le deuxième principe de Laplace, elles sont reconnues comme telles par la majorité des élèves, même si une proportion non moins importante d'élèves utilise le premier principe de Laplace à la place du deuxième, surtout dans les situations complexes. À l'issue de l'expérimentation de notre ingénierie, les résultats relatifs au calcul des probabilités à l'aide des deux premiers principes de Laplace constituent une amélioration par rapport à ceux obtenus lors des analyses préalables en 2013.

Au total, les conditions de réalisation de l'ingénierie ont favorisé l'apprentissage aussi bien des concepts probabilistes de base que du calcul élémentaire des probabilités. L'hypothèse H_2 formulée semble ainsi vérifiée.

Réponses à des questionnements liés à l'enseignement-apprentissage des probabilités au Bénin

Nos travaux ont apporté des réponses à plusieurs questionnements relatifs à la problématique de l'enseignement et de l'apprentissage des probabilités, que nous avons évoqués au niveau de l'introduction. L'un de ces questionnements est relatif à la concentration de l'enseignement des probabilités dans les dernières années du secondaire, comme ce fut le cas en France jusqu'au début des années 1990 (Henry, 1999). Plusieurs travaux dont ceux de Piaget et Inhelder (1951), de Fischbein (1967, 1969), et de Brousseau (1975), ont montré que l'enseignement des probabilités peut commencer à bas âges, notamment entre 10 et 12 ans. D'un autre côté, l'expérimentation de notre ingénierie a montré qu'une bonne partie du programme actuel de probabilités des classes terminales scientifiques peut être favorablement appliquée en classe de seconde. Avec l'importance de l'aléatoire aujourd'hui, il n'est point nécessaire d'attendre la fin du second cycle du secondaire pour enseigner les probabilités. Pour favoriser les apprentissages en probabilités, il importe alors que leur enseignement soit étalé sur une assez longue période, comme c'est le cas en géométrie (Girard, 2004). Nous voudrions proposer que cet enseignement commence dès la classe de quatrième (12-13 ans), par l'étude des concepts d'expérience aléatoire, d'événements et le calcul des probabilités dans les situations d'équiprobabilités simples. Le deuxième questionnement est relatif à la manière dont les probabilités pourraient être enseignées pour améliorer les rapports personnels des élèves au calcul des probabilités. Mais plus que cela, il nous semble d'abord que l'enseignement des probabilités doit prendre en compte leur épistémologie. Ainsi toutes les approches de définition de la probabilité d'un événement, à savoir l'approche fréquentiste, l'approche laplacienne et l'axiomatique de Kolmogorov, devraient trouver de place dans les programmes de probabilités. Il importe donc

que l'approche fréquentiste et le deuxième principe de Laplace, absents des programmes des séries scientifiques (Chap. IV, 2.2.4.), fassent explicitement partie des objets d'enseignements, à l'occasion de la prochaine relecture des programmes de mathématiques. En nous basant sur l'ingénierie didactique que nous avons expérimentée dans cette thèse, nous trouvons que l'accent peut être aussi mis sur l'étude de la notion de hasard en vue de surmonter les obstacles identifiés (Dandjinou et Bronner, 2017). À cet effet, le vide didactique (Bronner, 1997), constaté par rapport à l'expérience aléatoire, pourrait être comblé, par le choix d'un modèle précis de la définition. Dans ce sens, le modèle didactique (MD) se présente comme un modèle épistémologique de référence.

Les limites de la thèse

Les limites que nous reconnaissons à notre travail se situent à trois niveaux. En premier lieu, la présente thèse a été pour nous l'occasion d'une première expérimentation de l'ingénierie que nous avons élaborée. Une ou deux autres expérimentations, réalisées dans des conditions similaires, sont nécessaires pour inférer certains résultats relatifs à l'apport de cette ingénierie à l'apprentissage du calcul élémentaire des probabilités (Chap. VIII). En effet, l'étude comparative des effets des apprentissages avant et après la réalisation de l'ingénierie, a montré, entre autres, une amélioration sensible des rapports personnels à la notion d'expérience aléatoire et aux deux premiers principes de Laplace. Ces résultats devront être confirmés par d'autres expérimentations. Sur un autre plan, l'effectif réduit de la classe d'expérimentation ne traduit pas suffisamment les conditions habituelles de travail dans nos établissements scolaires, caractérisés par des effectifs élevés dans les classes. Dans ce cadre, d'autres expérimentations de l'ingénierie dans des classes d'effectifs plus grands paraissent nécessaires voire indispensables. Aussi, nous a-t-il manqué de temps pour former l'enseignant expérimentateur sur l'approche fréquentiste et sur l'épistémologie des probabilités, nécessaires pour l'enseignement des probabilités. En lieu et place d'une formation, nous n'avons eu que le temps de lui donner suffisamment d'informations sur l'ingénierie de Brousseau. Une formation en bonne et due forme placerait l'enseignant dans de meilleures conditions pour conduire l'expérimentation. Toutefois sa formation initiale en mathématiques et en enseignement des mathématiques a facilité l'expérimentation, au point où nous avons pu nous concentrer davantage sur l'observation des élèves. Dans une moindre mesure, le fait que nous n'ayons pas évalué l'approche fréquentiste dans le post test peut être considéré comme une autre limite de notre travail. Cela nous aurait permis d'évaluer le rapport personnel des élèves à l'approche fréquentiste.

Les perspectives

En dehors des perspectives de notre travail qui pourraient découler des limites précédemment signalées, nous envisageons, pour la suite, exploiter l'ingénierie, pour construire et expérimenter un modèle d'enseignement des probabilités en classe de quatrième puis au primaire. Ces travaux potentiels, qui permettront de déterminer les conditions spécifiques de la diffusion des probabilités à ces niveaux d'étude, contribueront certainement à l'introduction des probabilités au premier cycle du secondaire et éventuellement au primaire.

Quittant le domaine de la recherche scientifique, notre thèse appelle à un véritable travail de transposition didactique externe par rapport aux probabilités. En fait, un enseignement « précoce » des probabilités, nécessite que les programmes soient revus de manière à étaler les probabilités sur une longue période. Les contenus notionnels probabilistes de chaque niveau d'études méritent alors d'être précisés avec à l'appui la justification des choix à opérer en lien avec les travaux didactiques dans ce domaine. Une implication conséquente d'une introduction prochaine des probabilités au premier cycle de l'enseignement secondaire est la formation des enseignants sur l'enseignement des probabilités. Il faudra donc à côté de la transposition didactique envisager un plan de formation initiale et continue des enseignants. Concernant la formation initiale, l'épistémologie des probabilités ainsi que la didactique des probabilités devraient faire partie des curricula des écoles normales supérieures et assimilées. La formation continue viserait alors deux cibles, à savoir les enseignants ayant une formation initiale en mathématiques et ceux n'en ayant pas eue. Aux premiers, peuvent être enseignés les mêmes contenus notionnels que ceux qui seraient programmés pour les écoles de formation initiale en enseignement des mathématiques. Quant à la deuxième cible, constituée actuellement du plus grand nombre des enseignants de mathématiques au Bénin, il faudra en dehors de l'épistémologie et de la didactique des probabilités, penser la renforcer sur le calcul des probabilités. Pour réduire le risque d'obstacles didactiques, des fiches pédagogiques d'enseignement des probabilités, avec des explications des choix didactiques, peuvent être conçues et mises à la disposition des enseignants au cours des premières années de la mise en œuvre de l'enseignement des probabilités au premier cycle.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

Ouvrages et articles scientifiques

Affognon G. (2015). *Perspectives historiques et enseignement des mathématiques, cas du vecteur géométrique en classe de quatrième* (Thèse de doctorat). Institut de Mathématiques et de Sciences Physiques, Université d'Abomey-Calavi, Bénin, mai 2015

Allais M. (1983). Fréquence, probabilité et hasard. *Journal de la société statistique de Paris*, tome 124, N°2 (1983), pp. 70-102, récupéré du site : http://www.numdam.org/item?Id=JSFS_1983_124_2_70_0

Artigue M. (1988). L'ingénierie didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 9/3, pp 281-308, Grenoble, La pensée Sauvage éditions 1988

Bachelard G. (1934). *Formation de l'esprit scientifique, Contribution à une psychanalyse de la connaissance objective*. Édition électronique de Jean-Marie Tremblay, 288 pages. Récupéré en ligne à l'adresse : http://classiques.uqac.ca/classiques/bachelard_gaston/formation_esprit_scientifique/formation_esprit.pdf

Bogaert, P. (2006). *Probabilités pour scientifiques et ingénieurs, Introduction au calcul des probabilités, Cours et exercices corrigés*. Bruxelles : De Boeck Université.

Boulais P. (2012). *Simulations d'observations statistiques au lycée : un outil didactique pour faire évoluer les conceptions du hasard et construire la notion de probabilité* (Mémoire de recherche, Master Didactique, Épistémologie et Histoire des Sciences). Université Montpellier II, Septembre 2012, 179 pages.

Briand J. (2005). Une expérience statistique et une première approche des lois du hasard au lycée par une confrontation avec une machine simple. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, La Pensée Sauvage, 2005, 25 (2), pp.247-282, téléchargeable à <https://halshs.archives-ouvertes.fr/halshs-00494923>

Bronckart J-P, Plazaola Giger I. (1998). La transposition didactique. Histoire et perspectives d'une problématique fondatrice. In. *Pratiques : linguistique, littérature, didactique*, n°97-98, juin 1998, pp. 35-58, récupéré à l'adresse https://www.perse.fr/doc/prati_0338-2389_1998_num_97_1_2480

Bronner A. (1997), Les rapports d'enseignants de Troisièmes et de Seconde aux objets « nombre réel » et « racine carrée ». *Recherches en didactique des mathématiques (RDM)*, n°17/3, numéro spécial de la revue sur l'enseignant, La pensée Sauvage, Grenoble.

Bronner A. (2010). Un cadre théorique et méthodologique pour analyser le travail du professeur de mathématiques dans la classe. *Actes de colloque, Troisièmes journées Sherbrooke-Montpellier*, 6-8 octobre 2010, pp 26-41

Brousseau G. (1974). L'enseignement des probabilités à l'école élémentaire. *Compte-rendus de la XXVI^e rencontre de la C.I.E.A.E.M.* IREM de Bordeaux, téléchargeable à l'adresse <http://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2011/03/Proba-2ième-experience74.pdf>

Brousseau, G. (1975). Une expérience de premier enseignement des statistiques et des probabilités. *Actes du 26^e Congrès CIAEM*, téléchargeable sur le site de Guy Brousseau à l'adresse : <http://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2011/03/Une-exp-de-1er-enseignement-des-stat2001.pdf>

Brousseau, G. (1989a). Utilité et intérêt de la didactique pour un professeur de collège, *Petit x*, n°21, 1989, pp. 47-68, téléchargeable à l'adresse : <http://www-irem.ujf-grenoble.fr>

Brousseau, G. (1989b). Les obstacles épistémologiques et la didactique des mathématiques. In N. Bednarz & C. Garnier (Eds.), *Construction des savoirs, Obstacles et Conflits* (pp. 41-63). Montréal: CIRADE : Les éditions Agence d'Arc inc. En ligne à l'adresse : <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00516581v2/document>

Brousseau G. (1997). *Théories des situations didactiques*. Conférence de Montreal, récupéré à l'adresse : http://math.unipa.it/~grim/brousseau_montreal_03.pdf

Brousseau G. (1998). Les obstacles épistémologiques, problèmes et ingénierie didactique. In G. Brousseau, *Théorie des situations didactiques*, Grenoble, La pensée sauvage, pp.115-160, téléchargé sur le site <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00516595v2>

Brousseau, G. (2005). Situations fondamentales et processus génétiques de la statistique. In A. Mercier & C. Margolinas (dir.), *Balises en didactique des mathématiques : Cours de la 12^e École d'été de didactique des mathématiques* (pp. 165-194). Grenoble : La Pensée sauvage, téléchargeable sur le site de Guy Brousseau à l'adresse : <http://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2011/03/03-Sit-fond-et-processus-g%C3%A9n%C3%A9tiques-de-la-stat.pdf>

Brousseau G. (2010). *Glossaire de quelques concepts de la théorie des situations didactiques en mathématiques*. Récupéré en ligne à l'adresse : <http://guy-brousseau.com/biographie/glossaire/>

Brousseau G. (2011). La théorie des situations didactiques en mathématiques, *Éducation et didactique (en ligne)*, vol. 5, no. 1, 2011, mis en ligne le 30 mai 2011, consultable à l'adresse : <http://journals.openedition.org/educationdidactique/1005>

Brousseau G. (2013), *Introduction à l'ingénierie didactique*, site de G. Brousseau, guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2013/12/introduction-à-l'ingénierie-didactique.pdf

Butz E. (2004). Galilée ou Descartes ? Étude d'un scénario d'introduction historique au calcul des probabilités. *Histoires de Probabilités et de Statistiques*, Coordonné par Évelyne Barbin et Jean-Pierre Lamarche, Ellipses Éditions Marketing SA, 2004, pp. 275-293.

Carranza P. (2009). *La dualité de la probabilité dans l'enseignement de la statistique. Une expérience en classe de BTS* (Thèse de doctorat en didactique des mathématiques). Université Paris-VII, 2009, téléchargeable à <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00458320>

Chaput B. et Vergne C. (2012). Probabilités au collège. Lexique. Un cheminement en probabilités, *Bulletin APMEP*, N° 198, Paris 2012, pp. 113-120. Récupéré en ligne à l'adresse : <http://publimath.irem.univ-mrs.fr/biblio/IWV12012.htm>

Chevallard Y. (1991). *La transposition didactique, du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble, La pensée sauvage, Éditions 1991, 239 pages

Chevallard Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une anthropologie. *Recherches en didactique des mathématiques*, Vol. 12, n°1, p. 73-112

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 19(2). La Pensée Sauvage.

Chevallard Y. (2010). Le sujet apprenant entre espace et dispositif. Commentaires depuis la théorie anthropologique du didactique. *Journée du Lisec à Gérardmer*, téléchargeable à : http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Commentaires_depuis_la_TAD_YC_.pdf

Chevallard Y. (2011). Quel programme pour l'avenir de la recherche en TAD ? Un panorama de la TAD. *Troisième congrès de la TAD, CRM*, Novembre 2011, pp. 23-32.

Chrétien C., Gaud D. (1998). Qu'est-ce que le hasard ? Comment le mathématiser ? *Repères-IREM*, N° 32, juillet 1998

Courtebras B. (2005). Sur quelques conceptions du hasard. *Autour de la modélisation en probabilités*, Commission inter-IREM Statistique et Probabilités, Coordination : Michel Henry, Presses universitaires de Franche-Comté 2001, pp. 195-132.

Courtebras B. (2008). *Mathématiser le hasard*. Collection « Culture scientifique », Vuibert, Paris, Janvier 2008, 209 pages.

Dandjinou H. (2013). *Apprentissage du calcul élémentaire des probabilités en terminale D au Bénin* (Mémoire de DEA). Institut de Mathématiques et de Sciences Physiques, Université d'Abomey-Calavi, Bénin, mars 2013.

Dandjinou H. et Bronner A. (2016). Enseignement du calcul élémentaire des probabilités au Bénin. *In Actes du premier colloque de l'Association de Didacticiens des Mathématiques Africains*, Yaoundé (Cameroun), du 16 au 19 août 2016, pp. 119-145).

Dandjinou H. et Bronner A. (2017). Rapport personnel a l'objet hasard dans l'enseignement secondaire au Bénin. *Revue de Mathématiques pour l'École (RMé)*, N°228, Septembre 2017, pp. 42-49.

Dandjinou H. et Bronner A. (2018). Enseignement des probabilités dans l'enseignement secondaire au Bénin : Rapport des élèves au calcul élémentaire des probabilités. À paraître dans les *Actes du deuxième colloque de l'Association de Didacticiens des Mathématiques Africains*, Dangbo (Bénin), du 16 au 18 août 2018, 19 pages

Dantal B. (2001). Les enjeux de la modélisation en probabilités. *Autour de la modélisation en probabilités*. Commission inter-IREM Statistique et Probabilités, Coordination : Michel Henry, Presses universitaires de Franche-Comté 2001, pp. 137-140.

Delmas J-F. (2010). *Introduction au calcul des probabilités et à la statistique*. Les presses de L'ENSTA, Paris, 2010, 341 pages. Récupéré en ligne à l'adresse : http://cermics.enpc.fr/~delmas/Enseig/ensta_cours.pdf

Derriennic Y. (2003). Pascal et les problèmes du chevalier de Méré. De l'origine du calcul des probabilités aux mathématiques financières d'aujourd'hui. *SMF, Gazette* 97, Juillet 2003, pp. 45-71

Dieudonné J. (1978). *Abrégé d'histoire des mathématiques 1700-1900, tome II*. Hermann, Paris, 1978, 469 pages.

Dhieb M. (2009). *Contribution à l'introduction des probabilités au collège : rapports d'élèves à quelques notions probabilistes* (Thèse de doctorat). Université Paris Descartes, France. Récupéré du site <http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00507751>

Douady R. (1984). *Jeux de cadres et dialectiques outil-objet dans l'enseignement des Mathématiques : Une réalisation dans tout le cursus primaire* (Thèse de doctorat). Université Paris VII, Octobre 1984

Dupont P. (2012). *Aristote, Commentaire de Physique II*, Philopsis éditions numériques 2012, récupéré du site : http://psychaanalyse.com/pdf/ARISTOTE_COMMENTAIRES_DE_PHYSIQUE_II_CHAP1A9_60PAGES_1.1Mo.pdf

Duval R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* 5 (1993), pp. 37-65, IREM de Strasbourg

De Finetti B. (1936). La logique de la probabilité. *Actes du Congrès International de Philosophie Scientifique*, Paris, 1935, Hermann et Cie Éditeurs, 1936, pp. 565-573, téléchargé à l'adresse <https://doi.org/10.1017/50022481200039840>

Fischbein E., Pampu I., Minzat I. (1967). L'intuition probabiliste chez l'enfant. *In Enfance, tome 20, n°2. Études longitudinales du développement psychologique de l'enfant*. 1967. pp. 193-208, téléchargé à l'adresse : http://www.persee.fr/doc/enfan_0013-7545_1967_num_20_2_2424

Fischbein E., Pampu I., Minzat I. (1969). Initiation aux probabilités à l'école élémentaire. *Educational Studies in Mathematics* 2 (1969), pp. 16-31.

Fischbein E., Barbat I., Minzat I. (1971). Intuitions primaires et intuitions secondaires dans l'initiation aux probabilités. *Educational Studies in Mathematics* 4 (1971), pp. 264-280.

Fischbein E., Gazit A. (1984). Does the teaching of probability improve probabilistic intuitions ? *Educational Studies in Mathematics* 15 (1984), pp. 1-24.

Freudenthal Hans. (1980). Huygens foundations of probability. *Historia Mathematica* 7, 1980, pp.113-117.

Gattusso L., Vermette S. (2013). L'enseignement de statistique et probabilités au Canada et en Italie. *Statistique et Enseignement*, 4(1), pp. 107-129, Société Française de Statistique(SFdS), Avril 2013

Gaultier, M. (2002). *Probabilités, premiers cycles de l'enseignement supérieur*. Paris, Vuibert, pp. 137.

Gaydier F. (2011). *Simulation informatique d'expérience aléatoire et acquisition de notions de probabilité au lycée* (Thèse de doctorat). Université Paris Descartes, France, novembre 2011, pp. 446

Gbaguidi A. F. (2015). *La place et le rôle des problèmes de construction géométrique dans l'enseignement et dans l'apprentissage de la mathématique au cours secondaire au Bénin* (Thèse de doctorat). Institut de Mathématiques et de Sciences Physiques, Université d'Abomey-Calavi, Bénin, mai 2015

Girard J-C. (2001a). Qu'est qu'une expérience aléatoire ? *Autour de la modélisation en probabilités*, Commission inter-IREM Statistique et Probabilités, Presses universitaires de Franche-Comté 2001, pp. 141-144

Girard J-C. (2001b). Quelques hypothèses sur les difficultés rencontrées dans l'enseignement des probabilités. *Autour de la modélisation en probabilités*, Commission inter-IREM Statistique et Probabilités, Presses universitaires de Franche-Comté 2001, pp. 189-200

Girard J-C. (2004). La liaison statistiques-probabilités dans l'enseignement. *REPÈRES-IREM N°57*, Octobre 2004, pp. 83-91

Godfroy-Génin A. S. (2000). Pascal : la géométrie du hasard. *Math. & Sci. hum*, n°150, 2000, pp. 7-39.

Gueye K. (2012). Difficultés de l'enseignement et de l'apprentissage des probabilités dans le secondaire. *Actes du colloque EMF 2012*, pp. 1604-1615), téléchargé à l'adresse : <http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actesemf-2012>

Henry M. (1999). L'introduction des probabilités au lycée : un processus de modélisation comparable à celui de la géométrie. *Repères-IREM*, N°36, 15-34

Henry M. (2000). Perspectives de l'enseignement de la statistique et des probabilités. *SMF, Gazette* 84, Avril 2000, pp. 49-57

Henry M. (2001a). Notion de modèle et modélisation dans l'enseignement. *Autour de la modélisation en probabilités*, Commission inter-IREM Statistique et Probabilités, Presses universitaires de Franche-Comté 2001, pp. 149-159

Henry M. (2001b). Notion d'expérience aléatoire. Vocabulaire et modèle probabiliste. *Autour de la modélisation en probabilités*, Commission inter-IREM Statistique et Probabilités, Presses universitaires de Franche-Comté 2001, pp. 161-171

Henry M. (2010). Évolution de l'enseignement secondaire français en statistique et probabilités. *Statistique et Enseignement*, **1**(1), Société Française de Statistique (SFdS), Avril/April 2010, pp. 35-45, récupéré sur le site <http://www.statistique-et-enseignement.fr>,

Henry M. (2011). Simulations d'expériences aléatoires en classe : un enjeu didactique pour comprendre la notion de modèle probabiliste, un outil de résolution de problèmes. *APMEP N°496*, Novembre et décembre 2011, pp. 536-550. En ligne : http://www.apmep.fr/IMG/pdf/06-HenryV_C.pdf

Idier J. (2011). Les modèles fractals en finance. *Bulletin de la Banque de France*, N° 183, 1^{er} trimestre 2011, pp. 81-86

Jacquard A. (1983). *Moi et les autres, Initiation à la génétique*. Editions du seuil, mars 1983

Jaquet F. et Henry M. (2014). Approche de la notion de probabilité chez des enfants de 10-15 ans. *REPÈRES-IREM*, N°94, Janvier 2014, pp. 5-20.

Jourdain B. (2013). *Probabilités et statistique*. septembre 2013, en ligne : <http://cermics.enpc.fr/~jourdain/probostat/poly.pdf>, pp. 194

Kuzniak A. (2005). La théorie des situations didactiques de Brousseau. *Repères-IREM*. N°61, Octobre 2005, pp. 19-35.

Lahanier-Reuter D. (1999). *Conceptions du hasard et enseignement des probabilités et statistiques*. Presses Universitaires de France, 1^{ère} édition, Novembre 1999

Laplace P-S. (1814). *Théorie analytique des probabilités*. Paris Mme Ve Courcier Imprimeur-Libraire pour les Mathématiques et la Marine, quai des Augustin, n°57, Deuxième édition, 1814, pp. 612.

Laplace P-S. (1840). *Essai philosophique sur les probabilités*. Paris Bachelier Imprimeur-Libraire, Sixième édition, 1840, pp. 290.

Lecoutre M-P. et Durand J-L. (1988). Jugements probabilistes et modèles cognitifs : Étude d'une situation aléatoire. *Educational Studies in Mathematics* 19 (1988), pp. 357-368.

Legendre M-F. (1994). Problématique de l'apprentissage et de renseignement des sciences au secondaire : un état de la question. *Revue des sciences de l'éducation*, Vol. XX, n° 4, 1994, p. 657 à 677.

Lévy-Bruhl L. (1960). *La mentalité primitive*. 15^e édition, Presses Universitaires de France, 4^e trimestre 1960

Margolinas C. (2004). *Points de vue de l'élève et du professeur. Essai de développement de la théorie des situations didactiques* (Thèse d'habilitation à diriger les recherches en sciences de

l'éducation). Université de Provence, juin 2004, récupéré sur le site <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00429580v2>

Martin T. (1996). *Probabilités et critique philosophique selon Cournot*. Paris Librairie philosophique J. Vrin, 1996

Martin T. (2001). Histoire et théorie du hasard à l'âge classique selon Cournot. *Revue de synthèse*, 4e série, N° 2-3-4, Avril-décembre 2001, p. 455-471.

Martin V. (2014). *Étude des interventions didactiques dans l'enseignement des probabilités auprès d'élèves jugés ou non en difficulté en mathématiques en classes ordinaires du primaire*. (Thèse de doctorat). Faculté d'éducation, Université de Sherbrooke, Canada, 2014, pp. 555.

Martin V., Thibault M. (2016). Regards québécois sur sept décennies de recherche liée à l'apprentissage et l'enseignement des probabilités. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, volume 21, p. 79-115, 2016, IREM de Strasbourg

Maury S. (1985). Influence de la question dans une épreuve relative à la notion d'indépendance. *Educational Studies in Mathematics* 16 (1985), pp. 283-301.

Mazliak L. (2012). Poincaré et le hasard, Poincaré 1912-2012. *Séminaire Poincaré XVI* (2012), pp. 135-171

Meusnier, N. (2004). Le problème des partis avant Pacioli. *Histoire de Probabilités et de Statistiques*. Coordination Évelyne Barbin et Jean-Pierre Lamarche, Édition Ellipses, 2004, pp. 3-23

Meusnier, N. (2006). Sur l'histoire de l'enseignement des probabilités et des statistiques. *Journal Electronique d'Histoire des Probabilités et de la Statistique*. Vol 2, n°2. Récupéré du site <http://www.jehps.net>

Milhaud G. (1902). Le hasard chez Aristote et chez Cournot. *Revue de métaphysique et de morale*, Tome 10, N° 6, Novembre 1902, pp. 667-681, récupéré à l'adresse : <http://cruel.org/econthought/texts/cournot/cournotmilhaud02.pdf>

De Moivre A. (1756). *The doctrine of chances or a method of calculating the probabilities of events in play*. Third edition, Printed for A. Millar, in the Strand, London, MDCCLVI.

Nechache A. (2016). *La validation dans l'enseignement des probabilités au secondaire* (Thèse de doctorat). Université Paris Diderot Sorbonne Paris Cité, soutenue en juin 2016, récupéré sur à l'adresse <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01345747>

Ogouyandjou, C. (2012). *Cours de Probabilités et Statistique, Faculté des sciences et techniques, MP2*. 2012-2013. Inédit.

Parzys B. (1990). Un générateur de pile ou face venu d'ailleurs. *Bulletin de l'APMEP*, n°372, pp. 47-54

- Parzys B. (2009). De l'expérience aléatoire au modèle, *via* la simulation. Repères-IREM N°74, pp 91-103, Janvier 2009
- Parzys B. (2011a). Un générateur de pile ou face venu d'ailleurs. *Bulletin de l'APMEP*, n°494, pp. 309-314
- Parzys B. (2011b). Quelques questions didactiques de la statistique et des probabilités. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, volume 16, p. 127 – 147, IREM de Strasbourg, 2011
- Piaget J. et Inhelder B. (1951). *La genèse de l'idée de hasard chez l'enfant*. Presses universitaires de France, 2^e édition, 4^e trimestre 1974.
- Pichard, J.-F. (1998). Approche épistémologique et diverses conceptions de la probabilité. *Repères IREM N°32*, Juillet 1998, pp. 5-24
- Pichard, J.-F. (2005). Les probabilités au tournant du XVIII^e siècle. *Autour de la modélisation en probabilités*, Commission Inter IREM, Coordination Michel Henry, pp 13-45
- Poincaré H. (1923). *Calcul des probabilités*. Rédaction de A. Quiquet, Paris Gauthier-Villars, Deuxième édition, 1923, récupéré à l'adresse : <https://archive.org/details/calculdeprobabil00poinrich>
- Pollock J. (2012). *Pratiques du hasard pour un matérialisme de la rencontre*. Presses Universitaires de Perpignan, Septembre 2012, brochure récupérée du site : <http://www00.unibg.it/dati/bacheca/676/57432.pdf>
- Rouan O. et El-Idrissi A. (2014). Enseignement de la statistique au secondaire marocain. *Statistique et Enseignement*, 5(1), Société Française de Statistique (SFdS), Mai 2014, pp. 53-82, téléchargeable à l'adresse <http://www.statistique-et-enseignement.fr/>
- Samb A. (1978), Les systèmes de divination en Afrique Noire, Ethiopiques n°15. *Revue socialiste de culture négro-africaine*, 1978, publié sur <http://ethiopiques.refer.sn>
- Santos Del Cerro. J. (2006). L'ars conjectandi: la géométrie du hasard versus le probabilisme moral. *Journ@l électronique d'Histoire des Probabilités et de la Statistique*, Vol.2, n°1. Juin 2006, pp. 1-24
- Saporta G. (2011). *Probabilités, analyse des données et statistique*. 3^{ème} édition, Éditions Technip, Paris, 2011, 622 pages.
- Saussereau B. (2014). *Cours de théorie des probabilités avec exercices corrigés et devoirs, Licence de mathématiques, 3^{ème} année*. Centre de Télé-enseignement Universitaire, Franche-Comté, Besançon, 235 pages. En ligne à l'adresse : <http://bsauss.perso.math.cnrs.fr/CTU-1314-SAUSSEREAU-THEORIE-DES-PROBABILITES.pdf>
- Schmidt-Lainé C., Pavé A. (2002). Environnement : modélisation et modèles pour comprendre, agir ou décider dans un contexte interdisciplinaire. *Natures Sciences Sociétés « Sciences pour l'ingénierie de l'environnement »*, 10 :S1, 2002, 5, 25.

Sossa B. (2018). *Des pratiques d'enseignement des mathématiques au Bénin, contraintes et marges de manœuvres : une étude de cas en classe de seconde* (Thèse de doctorat). Institut de Mathématiques et de Sciences Physiques, Université d'Abomey-Calavi, Bénin, août 2018

Tavignot P. (1995). À propos de la transposition didactique en didactique des mathématiques. *SPIRALE-Revue de Recherche en Éducation*, 1995, N°15, pp. 31-60.

Touré S. (2002). L'enseignement des mathématiques dans les pays francophones d'Afrique et de l'Océan Indien. *ZDM* 2002, vol. 34(4), pp. 175-178.

Trotignon N. (1998). *Pascal, Fermat et la géométrie du hasard*. (Mémoire réalisé à IUFM de Créteil, France). 1^{er} juin 1998, Récupéré le 23/02/2019 à l'adresse <https://arxiv.org> sur le site personnel www.persoens.lyon.fr/nicolas.trotignon/articles/pascal.pdf

Vergnaud, G. (1991). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques*, 10(2.3),133-170.

Vermandele C. (2013). Le curriculum statistique en Belgique Francophone. *Statistique et Enseignement*, 4(1), pp. 71-88, Société Française de Statistique(SFdS), Avril 2013, récupéré à l'adresse <http://www.statistique-et-enseignement.fr/article/view/139>

Vu Nhu T. H. (2009). *Une étude didactique sur l'introduction dans l'enseignement mathématique vietnamien des notions statistiques dans leurs liens avec les probabilités* (Thèse de doctorat). Université Joseph-Fourier-Grenoble I, 2009

Wehenkel L. (2012). *Éléments du calcul des probabilités*. Version provisoire, Université de Liège, Belgique 2012, 143 pages. En ligne : <http://www.montefiore.ulg.ac.be/~lwh/Probas/notes-probas-janvier-2012.pdf>

Yvon F., Zinchenko Y. (2011). *Vygotsky, une théorie du développement et de l'éducation, Recueil de textes et commentaires*. Moscou MGU, 2011, pp. 215

Manuels scolaires

Alassane, T., Barry, A. K., N'da Kouadio, J., Razafindranovna, O. T., Rey, P., Sanhouidi, J., ... et Tsoumetsa, J. (1999). *Mathématiques, Terminale sciences mathématiques*. CIAM. Paris : Edicef.

Bello W. (2002). *Mathématiques, Terminales C, D, E et F, Cours, exercices et problèmes corrigés*. CNPMS, Novembre 2002.

Hamaty, E. A., Dagbegnon Lawin Orè P., Haddad-Ouédraogo, G., Ouéhi, D., Ould El Hadj Amar, B. et Touadera, F. (1999). *Mathématiques, Terminale scientifique, Option sciences expérimentales*. Collection CIAM, Paris : Edicef, 1999.

Kouassi, M-A., Mensah L., Ouehi D. et Touadera F. (2002). *Mathématiques, Terminale littéraire*. Collection CIAM, Paris : Edicef, 2002.

Monge M., Audouin M-C, Hautcoeur S. (1984)., *Collection Monge, Mathématiques, terminale D*. Librairie Classique Eugène Belin, Paris, Mai 1984.

Programmes

BO-France. (2008). *Programmes du collège, Programmes de l'enseignement de mathématiques*, Bulletin officiel spécial n° 6 du 28 août 2008, Ministère de l'Éducation nationale (France). En ligne à l'adresse : http://media.education.gouv.fr/file/special_6/52/5/Programme_math_33525.pdf

BO-France. (2009). *Mathématiques, Classe de seconde*, Bulletin officiel n°30 du 23 juillet 2009, Ministère de l'Éducation nationale (France). En ligne à l'adresse : <http://www.education.gouv.fr/pid21566/n-30-du-23-juillet-2009.html>

DIP. (2008). Guide du programme d'études, Enseignement secondaire, Champ de formation : Mathématique, Classes terminales A₂ et B C, Porto-Novo, septembre 2008.

DIP. (2009a). Guide du programme d'études, Enseignement secondaire, Champ de formation : Mathématique, Classes de 2^e C, Porto-Novo, juillet 2009.

DIP. (2009b). Programmes d'études, Enseignement secondaire, Mathématique, Classe Seconde C, Porto-Novo, Juin 2009.

DIP. (2010a). Guide du programme d'études, Enseignement secondaire, Mathématique, Classe de première C, Porto-Novo, juillet 2010.

DIP. (2010b). Programme d'études, Mathématique, Classe de première C, Porto-Novo, juillet 2010.

DIP. (2010c). Programme d'études, Mathématique, Classe de première D, Porto-Novo, juillet 2010.

DIP. (2011a). Guide du programme d'études, Enseignement secondaire, Champ de formation : Mathématique, Classe terminale C, Porto-Novo, mai 2011.

DIP. (2011b). Programmes d'études par compétences, Champ de formation : Mathématique, classe terminale C, version révisée, Porto-Novo, juin 2011.

INFRE (2002). Programme d'études, Enseignement secondaire général, champ de formation : Mathématiques, Classe de terminale C (version officielle), juin 2002.

PO-Bénin-1^{ère} (1975a). Programme de mathématiques, 2^{ème} année, Niveau II, Section L₁, 1975.

PO-Bénin-1^{ère} (1975b). Programme de mathématiques, 2^{ème} année, Niveau II, Sections L₂ et L₃, 1975.

PO-Bénin-1^{ère} (1975c). Programme de mathématiques, Série ST, 2^{ème} année, 1975.

PO-Bénin-Tles (1995). Programme de mathématiques des classes terminales de l'enseignement secondaire, 1995.

PO-CI (1999). Programmes de mathématiques, Terminales A, C, D et E.

PO-Gabon-Tle-CE. Programme de mathématiques, Terminale D, HPM.

PO-Gabon-Tle-D. Programme de mathématiques, Terminale D, HPM.

PO-Québec (2016). Programme de formation de l'école québécoise, Progression des apprentissages au secondaire, Mathématique, Ministère de l'éducation et de l'enseignement supérieur, Québec, Août 2016.

PO-Tunisie. (2008). Programmes de mathématiques, Enseignement secondaire, Ministère de l'éducation et de la formation de la Tunisie, Septembre 2008.

Res. France. (2008). *Ressources pour les classes de collège*, Mathématiques, Probabilités, Ministère de l'éducation nationale, de la jeunesse et de la vie associative, Eduscol, Mars 2008, mise à jour en novembre 2011. En ligne : <http://eduscol.education.fr/>

LES ANNEXES

TABLE DES MATIERES DES ANNEXES

ANNEXE 1 : Un problème de probabilité à polémique.....	3
Introduction	3
1. Le problème.....	3
2. Les enquêtes	5
3. Résultats des enquêtes	6
Conclusion.....	8
ANNEXE 2 : Un essai d'enseignement des probabilités basé sur l'approche fréquentiste	10
Activité 1 (Notion de probabilité d'un événement)	10
Activité 2 (Définition de la probabilité d'un événement)	11
Activité 3	12
Activité 4	13
Activité 5	14
ANNEXE 3 : Post test réalisé en 2013.....	16
ANNEXE 4 : Rapport personnel des enseignants à certaines notions probabilistes.....	20
Introduction	20
1. Présentation du questionnaire.....	20
2. Résultats du questionnaire.....	23
Conclusion.....	27
ANNEXE 5 : Des expérimentations zéro de l'ingénierie didactique.....	28
Introduction	28
1. Première version initiale de l'ingénierie	28
2. Deuxième version initiale de l'ingénierie didactique.....	41
ANNEXE 6 : Guide de passation du test de 2017.....	54
ANNEXE 7 : Transcription T ₁	55
ANNEXE 8 : Transcription T ₂	78
ANNEXE 9 : Transcription T ₃	109
ANNEXE 10 : Transcription T ₄	126
ANNEXE 11 : Transcription T ₅	143
ANNEXE 12 : Transcription T ₆	153
ANNEXE 13 : Transcription T ₇	178
ANNEXE 14 : Transcription T ₈	199

ANNEXE 15 : Transcription T ₉	217
ANNEXE 16 : Transcription T ₁₀	236
ANNEXE 17 : Transcription T ₁₁	255
ANNEXE 18 : Quelques productions d'élèves dans le cadre du post test de 2013	292
ANNEXE 19 : Quelques productions d'élèves dans le cadre du post test de 2017	308

ANNEXE 1 : Un problème de probabilité à polémique

Introduction

Il est connu des travaux didactiques que des difficultés de plusieurs ordres sont signalées au niveau de l'enseignement et de l'apprentissage des probabilités (M. Dhieb, 2009). Au nombre de ces difficultés peuvent figurer certains problèmes ambigus sur lesquels les enseignants n'arrivent pas à s'entendre, donnant ainsi raison aux élèves que la probabilité n'est pas facile à comprendre. C'est le cas d'un problème de probabilité proposé au baccalauréat série D/APC de la session unique de 2012 au Bénin, auquel les membres de la commission chargée d'élaborer le corrigé-type ont dû proposer trois solutions différentes, supposées toutes correctes. Nous présentons dans ce document les résultats de deux enquêtes sur les positions respectives des enseignants et des élèves par rapport à ce problème.

1. Le problème

1.1. Présentation

Le problème sur lequel porte la présente étude est extrait de l'épreuve de mathématiques du baccalauréat béninois, série D/APC¹⁹, session de juillet 2012. Il s'énonce :

Un jour, un passant a été témoin d'un accident de circulation et a décidé d'appeler les sapeurs-pompiers. Il dispose de 5 numéros des sapeurs-pompiers mais ce jour-là, 3 des numéros étaient hors service. Le passant a composé au hasard un des numéros.

Calcule la probabilité que l'appel du passant tombe sur un numéro en service :

a) au premier essai.

b) au second essai sachant qu'il n'a pas repris le premier numéro essayé.

L'épreuve dont l'exercice est extrait n'est pas longue car sa durée (4heures) est largement suffisante pour répondre à toutes les questions qui la composent. On peut ainsi admettre que tout candidat ayant suivi des enseignements en probabilités devrait répondre à l'une au moins des deux questions de l'exercice, qui est une situation d'équiprobabilité.

¹⁹ Approche par compétences

Nous étions membre de la commission chargée de proposer le corrigé-type et nous avons suivi avec attention les discussions à propos de la question b). En effet tous les membres de la commission ont été unanimes sur la bonne réponse au niveau de la question a) mais au niveau de la question b), il y a eu trois propositions différentes de réponses suite à plus de deux heures de discussion. Les mêmes discussions ont eu lieu dans les sous-commissions de correction des copies des élèves. Quelle pourrait être la réaction des candidats face à un problème tant discuté par les enseignants ? Pour répondre à cette question et pour recueillir les points de vue des enseignants par rapport aux réponses proposées dans la commission d'élaboration de corrigés-types, nous avons mené deux enquêtes dont nous présentons les résultats dans la section suivante.

1.2. Analyse a priori

Question a)

La question a) est une application du premier principe de Laplace « le rapport du nombre de cas favorables au nombre de cas possibles ». Le nombre de cas favorables étant 2 et le nombre de cas possibles est 5. La bonne réponse pour cette question est $\frac{2}{5}$. Les candidats ayant un rapport suffisant au calcul des probabilités n'auront pas de difficulté à identifier le nombre de cas favorables et le nombre de cas possibles, compte tenu de la simplicité de l'expérience aléatoire. Cependant le fait que le contexte du problème soit extrascolaire peut dérouter ceux qui parmi eux n'en sont pas habitués. Les candidats n'ayant pas un rapport suffisant au calcul des probabilités abandonneront simplement la question.

Question b)

La question b) est moins évidente que la première. Nous proposons comme analyse a priori les réponses des trois tendances qu'il y eu à la commission de corrigés-types.

- Un groupe a estimé que la situation relève d'un modèle de probabilité conditionnelle compte tenu de la présence du mot « sachant ». Pour ce groupe la bonne réponse est :
$$\frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$
- Un deuxième groupe a soutenu que le passant composerait une deuxième fois qu'après avoir composé un numéro hors service la première fois. Pour ce groupe la bonne réponse est :
$$\frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{3}{10}.$$

- Le troisième groupe déclare qu'il est possible que le passant compose un numéro en service au premier appel avant de composer un numéro au deuxième appel. Dans ce cas la bonne réponse est : $\frac{3}{5} \times \frac{2}{4} + \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{5}$.

Compte tenu de l'ambiguïté du problème et de l'apprentissage souvent non réussi en probabilités, il est possible que la question b) soit simplement abandonnée par les candidats.

2. Les enquêtes

2.1. Enquête au niveau des enseignants

Pour confirmer la non unicité de la solution de la question b) au niveau des enseignants, nous avons élaboré un questionnaire pour recueillir les avis des professeurs de mathématiques, enseignant dans les classes terminales, sur les propositions de réponses faites par les membres de la commission chargée d'élaborer le corrigé-type. Le questionnaire a été distribué aux enseignants lors d'une rencontre organisée par l'association des professeurs de mathématiques du Bénin. Ayant déjà participé aux débats dans les commissions de corrections, les enseignants abordés ont pu donner sur le champ la réponse au questionnaire dont l'énoncé est le suivant.

Un jour, un passant a été témoin d'un accident de circulation et a décidé d'appeler les sapeurs-pompiers. Il dispose de 5 numéros des sapeurs-pompiers mais ce jour-là, 3 des numéros étaient hors service. Le passant a composé au hasard un des numéros.

Calcule la probabilité p que l'appel du passant tombe sur un numéro en service au second essai sachant qu'il n'a pas repris le premier numéro essayé.

Choisissez la bonne réponse en encerclant son numéro.

a) $p = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$;

b) $p = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$;

c) $p = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} + \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$;

d) Autre à préciser.

2.2. Enquête au niveau des candidats

Pour étudier la réaction des candidats face à une question aussi controversée au niveau des enseignants comme la question b) de l'exercice, nous avons fait deux prélèvements

indépendants de réponses proposées par les candidats lors de la correction des copies à Lokossa, dans le département du Mono. L'un des prélèvements est constitué des copies de trois lots de 35 copies. Le deuxième prélèvement est composé de 120 copies tirées au hasard dans une dizaine de lots de 35 copies. Nous avons opté pour des prélèvements indépendants en vue de comparer les résultats obtenus. Pour chaque copie de candidat, il s'est agi de cocher la réponse du candidat dans un tableau comportant préalablement les réponses envisageables pour chacune des deux questions.

3. Résultats des enquêtes

3.1. Au niveau des enseignants

Soixante-huit enseignants ont répondu à notre questionnaire d'enquête portant sur la question b). Parmi eux, seuls quarante-neuf enseignent effectivement en classe terminale. Les résultats de ces derniers sont résumés dans le tableau suivant.

Réponses	1 à 5 ans d'enseignement en terminale		6 à 10 ans d'enseignement en terminale		Plus de 10 ans d'enseignement en terminale		Total	
	Effectif	Pourc.	Effectif	Pourc.	Effectif	Pourc.	Effectif	Pourc.
2/4	0	0,00%	2	15,38%	1	5,26%	3	6,12%
3/10	13	76,47%	8	61,54%	11	57,89%	32	65,31%
2/5	3	17,65%	1	7,69%	6	31,58%	10	20,41%
Autres	1	5,88%	2	15,38%	1	5,26%	4	8,16%
Total	17	100,00%	13	100,00%	19	100,00%	49	100,00%

Signalons que dans la catégorie « Autres » se retrouvent ceux qui ont proposé plusieurs réponses.

Il ressort de l'analyse de ce tableau que :

- Quatre individus soit environ 8% des enseignants questionnés signalent un manque de précision dans l'énoncé. L'un d'eux a notamment écrit en remarque :
« Toutes les solutions sont possibles, car l'énoncé manque de précision. Mais pour le bon sens, je choisis b) ».

- Seulement trois enseignants (6,12%) dont un totalisant plus de 10 ans d’enseignement en probabilités se sont considérés dans une situation de probabilité conditionnelle. La présence du mot « sachant » dans la question est certainement la cause de ce que nous pouvons appeler ici « le biais de la probabilité conditionnelle » ;
- La majorité des enseignants (65,31%) ont tenu compte du contexte de l’exercice ou du bon sens, pour estimer qu’on ne peut faire un deuxième appel qu’après un échec du premier appel.
- Pour un bon nombre d’enseignants (20,41%), on peut faire un deuxième appel même si le premier appel tombe sur un numéro en service.

Cette variété de réponses proposées par des enseignants pour une question de probabilité pose le problème de l’univocité des questions à poser dans les exercices. Si l’énoncé était précis, on n’assisterait certainement pas à cette diversité de réponses qui n’est pas de nature à attirer les élèves vers les probabilités.

3.2. Au niveau des candidats

Question a)

Pour la question a) portant sur une situation d’équiprobabilité simple, on a recueilli les résultats suivants :

Réponses	Premier prélèvement		Deuxième prélèvement		Total	
	Effectif	Fréquence	Effectif	Fréquence	Effectif	Fréquence
Pas de réponse	48	40,00%	39	37,14%	87	38,67%
2/5	24	20,00%	22	20,95%	46	20,44%
3/5	1	0,83%	2	1,90%	3	1,33%
Autres	47	39,17%	42	40,00%	89	39,56%
Total	120	100,00%	105	100,00%	225	100,00%

D’abord, il est à noter qu’on a à peu près les mêmes résultats au niveau des deux prélèvements de réponses proposées par les candidats. Sur l’ensemble des candidats dont les copies sont observées, il y a 87 soit 38,67% qui n’ont pas proposé de réponse. Cette absence de réponse peut être le signe d’un apprentissage non réussi en probabilités à leur niveau.

Parmi ceux qui ont proposé de réponse, seuls 46, soit 20,44% de l'ensemble des copies, ont donné la réponse correcte. Ils représentent le tiers de l'ensemble de ceux qui ont répondu à la question. Ils ont un rapport personnel conforme au rapport institutionnel pour ce qui concerne la question a).

Les 92 ayant proposé d'autres réponses ont sans doute utilisé le premier principe de Laplace, mais ils n'ont pas pu convenablement dénombrer les cas possibles et/ou les cas favorables. Leur rapport personnel au premier principe de Laplace, même conforme, demeure insuffisant.

Question b)

Pour ce qui concerne la question b), les résultats suivants sont obtenus.

Réponses	Premier prélèvement		Deuxième prélèvement		Total	
	Effectif	Fréquence	Effectif	Fréquence	Effectif	Fréquence
Pas de réponse	51	42,50%	43	40,95%	94	41,78%
2/4	5	4,17%	4	3,81%	9	4,00%
3/10	1	0,83%	1	0,95%	2	0,89%
2/5	0	0,00%	0	0,00%	0	0,00%
Autres	63	52,50%	57	54,29%	120	53,33%
Total	120	100,00%	105	100,00%	225	100,00%

Comme pour la question a) les deux prélèvements ont donné à peu près les mêmes résultats. Sur les 131 candidats qui ont effectivement répondu à la question b), seuls 11 sont allés dans le même sens que les enseignants dans les proportions suivantes 4%, 1% et 0%. Les proportions de ces élèves par rapport à ces réponses sont diamétralement opposées à celles des professeurs pour les mêmes réponses. C'est ce qui nous fait émettre l'hypothèse qu'au niveau des probabilités l'écart entre le savoir enseigné et le savoir appris est important.

Conclusion

Les résultats de l'enquête au niveau des enseignants ont montré que ces derniers ont gardé la même tendance que les membres de la commission d'élaboration des corrigés types par rapport

à la question querellée de l'exercice. Ceci confirme bien le manque de précision de l'énoncé qui entraîne ainsi plusieurs interprétations. Il aurait peut-être fallu que l'expérience aléatoire soit bien définie pour qu'une telle situation soit évitée. Au niveau des élèves, toujours par rapport à la question b, il est constaté que très peu de candidats se sont alignés sur les points de vue des enseignants dans des proportions très faibles. Nous pouvons conclure que l'écart entre le savoir enseigné et le savoir appris est important en probabilités et que les problèmes de probabilités à polémique ne semblent pas être de nature à favoriser l'apprentissage des probabilités. Mais au-delà de l'ambiguïté constatée au niveau de la question b), la réaction des candidats par rapport à la question a) révèle qu'au niveau des élèves, le rapport personnel au premier principe de Laplace est adéquat pour une minorité des élèves et que l'apprentissage de ce premier ne semble pas réussi pour un bon nombre d'élèves.

ANNEXE 2 : Un essai d'enseignement des probabilités basé sur l'approche fréquentiste

En voulant vérifier l'hypothèse H_1 de la thèse, nous avons suivi et enregistré en audio des séances de cours de probabilités dans quatre classes terminales (chap. III, 2.1). Dans deux de ces classes, nous avons essayé d'introduire la notion de probabilité d'un événement à partir de l'approche fréquentiste, après l'enseignement dans ces classes du langage probabiliste. A cet effet, nous avons proposé aux deux enseignants suivis des activités de découverte de la notion de probabilité d'un événement, qu'ils ont pris en compte dans l'élaboration de leur fiche pédagogique. Nous présentons dans cette annexe toutes les activités de cette fiche.

Activité 1 (Notion de probabilité d'un événement)

Consigne 1

On lance un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on observe le numéro apparu sur la face supérieure du dé après son immobilisation.

Précise l'univers des éventualités de cette expérience aléatoire.

Modalité de travail : Travail individuel (2 min) ; Travail collectif (3 min).

Consigne 2

Tu disposes avec ton groupe d'un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

- 1) Lance avec tes amis cent fois de suite le dé et note à chaque fois le numéro apparu sur la face supérieure pour obtenir une suite de 100 chiffres, compris chacun entre 1 et 6.
- 2) Organise le résultat obtenu en complétant le tableau suivant :

Numéro	1	2	3	4	5	6	Total
Nombre de fois							
Fréquence							

Modalité de travail : Travail en groupe (20 min)

Consigne 3

On s'intéresse maintenant à l'évolution de la fréquence de 6. Les résultats obtenus par toute la classe seront progressivement consignés dans le tableau suivant :

Groupes	G ₁	G ₁ à G ₂	G ₁ à G ₃	G ₁ à G ₄	G ₁ à G ₅	G ₁ à G ₆	...
Nombre total (n) de fois que le dé est lancé	100	200	300	400	500	600	...
Nombre total de 6							
Fréquence de 6							

Modalité de travail : Travail collectif (15 min)

NB : G₁, G₂, ... sont les groupes d'élèves.

Consigne 4

En exploitant le tableau réalisé dans la consigne 3, quelle serait selon-toi la fréquence de 6 si le nombre n de lancers devient de plus en plus en grand ?

Modalité de travail : Travail individuel 2 min ; Travail en groupe (1 min) ; Travail collectif (2 min)

Activité 2 (Définition de la probabilité d'un événement)

On te propose la définition suivante de la probabilité définie sur un univers des éventualités d'une expérience aléatoire.

Soit Ω l'univers des éventualités associé à une expérience aléatoire.

Une probabilité sur l'univers Ω est une application p de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans $[0 ; 1]$, qui à toute partie A de Ω associe le nombre réel noté $p(A)$ appelé probabilité de l'événement A et qui vérifie les conditions suivantes :

- la probabilité de l'événement certain est 1 ;
- la probabilité de l'événement impossible est 0 ;
- la probabilité d'un événement est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le composent.

Consigne 1

En utilisant la définition ci-dessus, complète les égalités suivantes dans lesquelles p désigne une probabilité définie sur un univers Ω .

- $p(\Omega) = \dots$, $p(\emptyset) = \dots$;
- Si un événement A est composé des éventualités e_1, e_2, \dots, e_p , alors $p(A) = \dots$

Modalité de travail : Travail individuel (3 min) ; Travail en groupe (2 min) ; Travail collectif (5 min)

Consigne 2

1) A et B sont deux événements incompatibles de Ω .

Posons $A = \{e_1, e_2, \dots, e_p\}$ et $B = \{e_{p+1}, e_{p+2}, \dots, e_q\}$.

- Ecris en extension $A \cup B$.
 - Justifie que $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.
- 2) A est un événement de Ω et \bar{A} son événement contraire.
- Détermine $A \cap \bar{A}$ et $A \cup \bar{A}$.
 - Déduis-en que $p(A) + p(\bar{A}) = 1$.
- 3) Consulte ton manuel de mathématiques et donne les autres propriétés des probabilités.

Modalité de travail : Travail en groupe (10 min) ; Travail collectif (10 min)

Connaissances et techniques : Définition de la probabilité, propriétés des probabilités.

Activité 3

Consigne 1

Dans une enquête effectuée dans les classes de terminale d'un lycée, 20% des élèves aiment les mathématiques, 70% des élèves aiment la philosophie, 15% des élèves aiment les mathématiques et la philosophie, 10% des élèves sont paresseux. L'enquête a révélé que les élèves paresseux n'aiment pas les mathématiques.

On choisit un élève de terminale au hasard et on définit les événements :

A : « L'élève aime les mathématiques » ;

B : « L'élève aime la philosophie » ;

C : « L'élève est paresseux ».

1. Donne la probabilité de chacun des événements A, B, C et $A \cap B$.
2. Calcule la probabilité que l'élève choisi :
 - a. aime les mathématiques ou la philosophie ;
 - b. aime les mathématiques ou est paresseux ;
 - c. n'aime ni les mathématiques ni la philosophie.

Modalité de travail : Travail en groupe (10 min), Travail collectif (10 min)

Consigne 2

Un cauris est tel que la probabilité qu'il repose sur la face courbe (C) est le double de la probabilité qu'il repose sur la face plane (P).

On lance ce cauris et on note la face sur laquelle il repose.

- 4) Détermine l'univers des éventualités de cette expérience aléatoire.
- 5) Calcule la probabilité que le cauris repose sur la face courbe et celle qu'il repose sur la face plane.

Modalité de travail : Travail individuel (5 min), Travail en groupe (5 min), Travail collectif (10 min)

Activité 4

Consigne 1

Soit Ω l'univers associé à une expérience aléatoire et, A, B deux événements de Ω .

Quand peut-on dire que les événements A et B sont équiprobables pour une probabilité définie sur Ω ?

Consigne 2

Soit p une probabilité définie sur l'univers Ω associé à une expérience aléatoire telle que tous les événements élémentaires soient équiprobables.

On pose $\Omega = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, n étant un nombre entier naturel supérieur à 1.

1. Démontre que la probabilité de chaque événement élémentaire est égale à $\frac{1}{n}$.
2. Soit A un événement de Ω , démontre que $p(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$.

Modalité de travail : Travail en groupe (10 min) ; Travail collectif (10 min)

Connaissances et techniques à formaliser : Situation d'équiprobabilité

Activité 5

Consigne 1

On lance un dé cubique parfaitement équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on note le numéro inscrit sur la face supérieure.

1. Quelle est la probabilité d'avoir un chiffre pair ?
2. Quelle est la probabilité d'avoir un chiffre impair ?

Modalité de travail : Travail individuel (5 min) ; Travail en groupe (5 min) ; Travail collectif (5 min)

Consigne 2

On lance deux fois de suite un dé parfaitement équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on lit les numéros inscrits sur la face supérieure pour en former un nombre de deux chiffres.

- 3) Calcule la probabilité que le nombre formé soit impair.
- 4) Calcule la probabilité que la somme des chiffres du nombre obtenu soit égale à 9.

Modalité de travail : Travail en groupe (10 min) ; Travail collectif (10 min)

Consigne 3

On lance un dé à six faces numérotées de 1 à 6 et on note le numéro de la face supérieure. Ce dé est truqué de la façon suivante :

- les numéros de même parité ont la même chance d'apparaître ;
- un numéro pair a deux fois plus de chance d'apparaître qu'un numéro impair.

- 3) Calcule la probabilité d'apparition de chacune des faces.
- 4) Calcule la probabilité de chacun des événements :

A : « Le numéro obtenu est un chiffre pair » ;

B : « Le numéro obtenu est impair ».

Modalité de travail : Travail en groupe (10 min) ; Travail collectif (10 min)

Consigne 4

Un sac contient deux jetons rouges et trois jetons blancs indiscernables au toucher. On tire au hasard un jeton du sac, on note sa couleur puis sans le remettre dans le sac, on tire un deuxième jeton et on note sa couleur, puis sans remettre ce dernier dans le sac, on tire un troisième jeton et on note sa couleur.

1. Calcule la probabilité de tirer deux jetons rouges et un jeton blanc dans cet ordre.
2. Calcule la probabilité de tirer deux jetons rouges et un jeton blanc.

Modalité de travail : Travail individuel (10 min) ; Travail en groupe (5 min) ; Travail collectif (10 min)

Consigne 5

Une urne contient huit boules indiscernables au toucher dont cinq rouges et trois noires.

On tire simultanément au hasard trois boules de l'urne.

Calcule la probabilité de chacun des événements suivants :

A : « les boules tirées sont de la même couleur » ;

B : « exactement deux des boules tirées sont rouges ».

Modalité de travail : Travail individuel (5 min) ; Travail en groupe (5 min) ; Travail collectif (5 min)

ANNEXE 3 : Post test réalisé en 2013

Dans le cadre de l'étude des effets des apprentissages en probabilités et pour vérifier l'hypothèse H_1 de la thèse, nous avons administré aux élèves ayant fraîchement suivi des cours de probabilité un test, que nous présentons dans cette annexe. Pour occuper moins de place, nous avons supprimé les espaces vides réservés aux productions des élèves.

REPUBLIQUE DU BENIN

ANNEE SCOLAIRE : 2012 – 2013

DEPARTEMENT DU MONO

TEST PORTANT SUR LE CALCUL DES PROBABILITES

Tu viens de suivre les cours de probabilités et tu as une certaine compréhension de cette partie du programme de la terminale D. Tu es invité(e) à répondre aux questions ci-dessous pour rendre compte de ta compréhension des probabilités. Tu disposes de 90 minutes pour le faire. Réponds aux questions dans l'ordre. Inscris les réponses et les justifications dans les parties vides réservées à cet effet. Tu peux au besoin, utiliser le verso de la page (à partir de la page 2). Sois clair(e), bref (brève) et concis(e).

A- IDENTIFICATION

Nom et prénoms :

Etablissement :

Classe :

Contact :

Date :

B- LE TEST

Exercice 1

4) Donne la définition d'une expérience aléatoire en complétant la phrase suivante.

On appelle expérience aléatoire ...

5) A et B sont deux événements de l'univers des éventualités Ω d'une expérience aléatoire et p est une probabilité définie sur Ω . Pour chacune des questions a), b) et c), encercle le numéro de la bonne réponse parmi les trois qui sont proposées.

a) A et B sont incompatibles signifie que :

(i) $A = \emptyset$ et $B = \emptyset$.

(ii) $A \cap B = \emptyset$.

(iii) $A \cup B = \Omega$.

b) A et B sont contraires signifie que :

(i) $A \cap B = \emptyset$.

(ii) $A \cup B = \Omega$

(iii) $A \cap B = \emptyset$ et $A \cup B = \Omega$.

c) A et B sont équiprobables signifie que :

(i) $p(A \cap B) = 0$;

(ii) $p(A) = p(B)$;

(iii) $p(A) + p(B) = 1$.

6) On considère une probabilité p sur l'univers des éventualités Ω d'une expérience aléatoire. Complète chacune des égalités suivantes :

a) $p(\Omega) = \dots$

b) Si A et B sont deux événements de Ω , alors $p(A \cup B) = \dots$

c) Si A est un événement composé des éventualités e_1, e_2, \dots, e_k , alors :

$p(A) = \dots$

d) Si tous les événements élémentaires sont équiprobables, alors pour tout événement A , on a : $p(A) = \dots$

Exercice 2

On lance onze fois de suite un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on obtient les résultats suivants :

2 – 5 – 3 – 4 – 1 – 1 – 6 – 5 – 2 – 3 – 6.

Quel résultat obtiendrait-on si on lançait le dé une douzième fois ? Justifie ta réponse.

Exercice 3

Dans l'un des bureaux d'une entreprise de vente par correspondance arrivent plusieurs catégories de courrier. Parmi les lettres reçues, 90% contiennent une commande, 45% contiennent une demande de cadeau et 40% contiennent une commande et une demande de cadeau. Les autres lettres ne sont jamais accompagnées de commande, ni de demande de cadeau. On prend une lettre au hasard dans ce bureau. On désigne par A l'événement « la lettre contient une commande » et par B l'événement « la lettre contient une demande de cadeau ».

- 1) Identifie dans le texte ci-dessus (de l'exercice 3) la proposition qui représente l'expérience aléatoire en complétant la phrase suivante :
La proposition qui désigne l'expérience aléatoire est : ...
- 2) Calcule la probabilité que la lettre prise :
 - a) ne contienne pas une demande de cadeau ;
 - b) contienne une commande ou une demande de cadeau.

Exercice 4

Un sac contient trois jetons blancs et deux jetons noirs, tous indiscernables au toucher. On tire successivement sans remise trois jetons dans le sac.

Calcule la probabilité qu'exactement deux des trois jetons tirés soient blancs.

Exercice 5

On lance un dé tétraédrique dont les quatre faces sont marquées a, b, c, d. et on note la marque de la face sur laquelle le dé se repose. Le dé est pipé de telle sorte que :

- les faces portant les marques a, b et d ont la même probabilité que le dé repose sur elles ;
 - la probabilité que le dé repose sur la face marquée c est quatre fois plus grande que la probabilité que le dé repose sur l'une quelconque des autres faces.
- 1) Détermine la probabilité que le dé repose sur chacune des 4 faces.
 - 2) Calcule la probabilité que le dé repose sur une face dont la marque est une consonne.

Exercice 6

Un jour, un passant a été témoin d'un accident de circulation et a décidé d'appeler les sapeurs-pompiers. Il dispose de 5 numéros des sapeurs-pompiers mais ce jour-là, 3 des numéros étaient hors service. Le passant a composé au hasard un des numéros.

Calcule la probabilité que l'appel du passant tombe sur un numéro en service :

- c) au premier essai ;
- d) au second essai sachant qu'il n'a pas repris le premier numéro essayé.

Exercice 7

L'univers des éventualités d'une expérience aléatoire étant $\Omega = \{0; 1; 2; 3\}$, on donne dans le tableau ci-dessous les probabilités des événements élémentaires.

e_i	0	1	2	3
$p(\{e_i\})$	0,17	0,64	a	0,01

- 1) Détermine le nombre réel a.
- 2) Calcule la probabilité que le résultat de l'expérience aléatoire soit un nombre impair.

-FIN-

ANNEXE 4 : Rapport personnel des enseignants à certaines notions probabilistes

Introduction

Les programmes béninois de probabilités des classes terminales des séries scientifiques proposent une entrée en probabilités par l'enseignement du vocabulaire des probabilités, composé des concepts de base du calcul des probabilités, dont notamment les notions d'expérience aléatoire, d'éventualité, d'univers des possibles et d'événement. Toutefois, aucun document officiel n'indique la définition de chacune des notions constituant le vocabulaire probabiliste. Dans le but d'étudier, d'une part le savoir enseigné relatif à la notion d'expérience aléatoire, et d'autre part, le rapport des enseignants aux approches d'enseignement des probabilités, nous avons mené une enquête auprès des enseignants. Nous présentons dans la présente annexe le questionnaire d'enquête, ainsi que les réponses proposées par les enseignants tenant effectivement des classes terminales.

1. Présentation du questionnaire

1.1. Conditions d'administration du questionnaire

Soucieux d'avoir un échantillon représentatif des enseignants, nous avons administré le questionnaire à l'occasion d'un recyclage des enseignants de mathématiques des départements de l'Atlantique, du Littoral et de l'Ouémé, et à l'occasion d'un regroupement des professeurs certifiés de mathématiques, à Porto-Novo, pour la correction des copies des candidats à un concours. La formation et le concours ont eu lieu respectivement en octobre et novembre 2014. Le questionnaire est adressé prioritairement aux enseignants des classes terminales, où l'enseignement des probabilités est prévu. Chaque enseignant ayant reçu le support du questionnaire avait été prié de répondre aux questions et de retourner le support séance tenante. Le questionnaire comporte deux parties : une ayant servi à l'identification anonyme de l'enseignant questionné et l'autre comportant huit questions. Les quatre premières questions sont relatives à l'enseignement de la notion d'expérience aléatoire et les quatre dernières sont relatives aux approches d'enseignement de la probabilité d'un événement.

Au total cent cinquante-trois (153) enseignants ont reçu le questionnaire et cent trois (103) ont pu le retourner séance tenante, soit un pourcentage de 67,32%. Parmi ces cent trois

enseignants, quatre-vingt-huit (88) enseignent effectivement dans des classes terminales. Ce sont les réponses de ces derniers que nous avons dépouillées.

1.2. Le questionnaire

Dans le cadre d'une étude sur l'enseignement/apprentissage des probabilités, nous²⁰ vous prions de répondre au présent questionnaire portant sur l'enseignement des probabilités au Bénin. Il est anonyme pour garantir le caractère confidentiel de vos réponses qui ne seront utilisées qu'à des fins scientifiques. Comptant sur votre sincérité, nous vous remercions par avance de l'intérêt que vous portez au développement de la recherche en didactique au Bénin.

I- IDENTIFICATION

Statut : (Encerclez votre statut)

APE ACE ACLR Vacataire

Diplôme académique : (Encerclez votre diplôme académique le plus élevé et précisez votre spécialité)

Licence Maîtrise DEA/MASTER Doctorat Autres à préciser :

Spécialité :

Diplôme professionnel : (Encerclez votre diplôme professionnel le plus élevé)

Aucun BAPES/BAPET CAPES/CAPET Autres à préciser :

Ancienneté dans l'enseignement

Générale:..... Au second cycle : En terminale :

Département :

Contact téléphonique :

²⁰ Henri DANDJINO : Etudiant-chercheur en didactique des mathématiques à l'Institut de mathématiques et de sciences physiques (IMSP)

II- QUESTIONNAIRE

2.1. Vocabulaire relatif aux probabilités

Les programmes et les guides des classes où sont enseignées les probabilités recommandent l'enseignement du « vocabulaire des probabilités » constitué des notions de base de ce domaine.

2.1.1. Quelles sont les notions relatives au « vocabulaire des probabilités » que vous avez l'habitude d'enseigner ?

.....
.....
.....

2.1.2. Dans vos classes, combien d'heures consacrez-vous à l'enseignement du « vocabulaire des probabilités » ?.....

2.1.3. Comment définissez-vous l'expérience aléatoire à vos élèves ?

On appelle expérience aléatoire
.....
.....

2.1.4. Avez-vous l'habitude de donner à vos élèves des exercices portant sur « le vocabulaire des probabilités » ? Si oui, combien à peu près ?

2.2. Calcul des probabilités

2.2.1. Que pensez-vous de l'enseignement des probabilités ? (Encerclez la réponse qui convient.)

Très facile Facile Difficile Très difficile

2.2.2. Quelles sont les approches du calcul des probabilités que vous connaissez ? (Cochez les réponses qui conviennent.)

- a) Approche laplacienne
- b) Approche fréquentiste
- c) Approche de Kolmogorov
- d) Je n'en ai aucune idée

2.2. 3. En calcul des probabilités, avez-vous une idée du premier principe de Laplace ?
(Encerclez la réponse qui convient.)

a) Oui Non

b) Si oui, donnez l'énoncé de ce principe.

.....
.....
.....

2.2. 4. En calcul des probabilités, avez-vous une idée du deuxième principe de Laplace ?
(Encerclez la réponse qui convient.)

a) Oui Non

b) Si oui, donnez l'énoncé de ce principe.

.....
.....
.....

MERCI

2. Résultats du questionnaire

Nous présentons ici les réponses, question par question, des quatre-vingt-huit enseignants des classes terminales ayant répondu au questionnaire.

2.1. Quelles sont les notions relatives au « vocabulaire des probabilités » que vous avez l'habitude d'enseigner ?

Dans leur ensemble, les enseignants enquêtés ont cité toutes les notions probabilistes prévues dans les programmes. Ce qui laisse penser qu'un bon nombre d'enseignants n'ont pas bien cerné la question posée. Cependant les notions les plus évoquées par les enseignants sont dans l'ordre celles de : univers des possibles, événement, expérience aléatoire, éventualité, événement élémentaire, événement certain, événement impossible, événements incompatibles, événements contraires et système complet d'événements.

2.2. Dans vos classes, combien d'heures consacrez-vous à l'enseignement du vocabulaire des probabilités ?

Selon les enseignants interrogés, la durée consacrée à l'enseignement du langage probabiliste varie entre 30 min et 5 heures. Le tableau ci-dessous présente la répartition des enseignants suivant la durée d'enseignement du vocabulaire des probabilités.

Durée	30 mn	1h	1h 30	2h	2h 30	3h	4h	5h	Pas de réponse
Nombre d'enseignants	6	28	6	27	1	8	5	2	5

À notre avis, une durée supérieure à 2 heures paraît trop pour l'enseignement de cette partie du programme des probabilités, de même que 30 min et 1h semblent insuffisants pour mettre en place tous les concepts du langage des probabilités.

2.3. Comment définissez-vous l'expérience aléatoire à vos élèves ?

Nous avons regroupé les réponses proposées par les enseignants en quatorze types que nous avons respectivement nommés d_1, d_2, \dots, d_{14} . Ces types de réponses se précisent comme il suit.

d_1 : Une expérience aléatoire est une expérience dont on ne peut pas prévoir le résultat.

d_2 : Une expérience aléatoire est une expérience dont le résultat est imprévisible et qui répétée dans les mêmes conditions peut donner lieu à des résultats différents.

d_3 : Une expérience aléatoire est une expérience qui répétée dans des conditions identiques peut conduire à des résultats différents.

d_4 : Une expérience aléatoire est toute expérience dont on ne connaît pas le résultat.

d_5 : Une expérience aléatoire est une expérience dont on ne peut pas connaître a priori les résultats.

d_6 : Une expérience aléatoire est un événement dont on ne peut connaître l'issue avant sa réalisation.

d_7 : Une expérience aléatoire est une expérience liée à la chance et au hasard.

d_8 : Une expérience aléatoire est une activité ou un jeu dont le résultat est imprévisible.

d_9 : Une expérience aléatoire est l'exercice d'une épreuve sur un ensemble fini (ou dénombrable) dont on ne peut pas prévoir le résultat.

d_{10} : Une expérience aléatoire est la chance d'apparition d'une éventualité. C'est un choix au hasard.

d_{11} : Une expérience aléatoire est toute expérience dont l'issue est due au hasard mais dont on sait définir l'ensemble des résultats possibles.

d_{12} : Une expérience aléatoire est toute expérience dont on ne connaît pas l'issue mais dont on connaît tous les résultats possibles.

d_{13} : Une expérience aléatoire est une expérience qui conduit à un résultat non connu à l'avance parmi plusieurs résultats possibles et cela à partir d'un lancer de dé parfait.

d_{14} : Une expérience aléatoire est toute expérience qui peut être répétée dans des conditions apparemment identiques et dont le résultat ne peut être prévu a priori mais dont on sait définir l'ensemble des résultats possibles.

Près des quatre cinquièmes des enseignants interrogés ont donné des définitions conformes à celles prescrites et présentées dans les manuels de la collection CIAM (Hamaty et al., 1999 ; Kouassi et al., 2002) et de la collection SOLFATH (Bello, 2002).

2.4. Avez-vous l'habitude de donner à vos élèves des exercices portant sur le « vocabulaire des probabilités » ? Si oui, combien à peu près.

Une minorité non négligeable d'enseignants disent ne pas avoir l'habitude de donner à leurs élèves des exercices portant sur le vocabulaire des probabilités. La majorité des enseignants donnent un à trois exercices sur le vocabulaire des probabilités. Nous résumons dans le tableau suivant les réponses des enseignants à cette question.

Nombre d'exercices	0	1	2	3	4	5	6	7	Pas de réponse	Total
Nombre d'enseignants	19	18	21	8	4	1	0	5	12	88

2.5. Que pensez-vous de l'enseignement des probabilités ?

Les enseignants apprécient différemment l'enseignement des probabilités selon qu'ils aient ou non une formation initiale en mathématiques. Cinquante pour cent des enseignants ayant une formation initiale en mathématiques trouvent que l'enseignement des probabilités est facile

contre le tiers pour ceux qui n'ont pas reçus une formation initiale en mathématiques. Le détail des réponses est présenté dans le tableau suivant.

Niveau de difficulté	Très Facile	Facile	Difficile	Très difficile	Pas de réponse	Total
Enseignants avec formation initiale en maths	2	23	25	2	4	56
Enseignants sans formation initiale en maths	0	8	24	0	0	32
Total des deux groupes d'enseignants	2	31	49	2	4	88

2.6. Quelles sont les approches du calcul des probabilités que vous connaissez ?

La grande majorité des enseignants questionnés affirment n'avoir aucune idée des approches du calcul des probabilités comme le montre le tableau récapitulatif des réponses.

Approches	Laplacienne	Fréquentiste	Axiomatique	Toutes les approches	Aucune idée	Pas de réponse	Total
Enseignants	4	9	1	7	54	13	88

Il importe de faire la nuance que les enseignants ont un rapport satisfaisant avec des approches de calcul des probabilités dont certainement l'approche laplacienne et l'axiomatique de Kolmogorov qu'ils enseignent dans les classes. Les résultats précédents révèlent donc que les enseignants ne maîtrisent pas le vocabulaire utilisé pour désigner les différentes approches de calcul probabilités.

2.7. Avez-vous une idée du premier principe de Laplace ?

Bien qu'ayant l'habitude d'enseigner le premier principe de Laplace, plus de 85% des enseignants interrogés estiment n'avoir aucune idée du premier principe de Laplace. C'est juste qu'ils ne connaissent pas ce vocabulaire de « premier principe de Laplace ». Plus précisément

75 enseignants ont affirmé qu'ils n'ont aucune idée de ce principe, 11 ont dit en avoir une idée et 2 se sont abstenus de répondre à la question posée. Parmi ceux qui ont déclaré avoir une idée du premier principe de Laplace, 5 ont pu l'énoncer convenablement.

2.8. Avez-vous une idée du deuxième principe de Laplace ?

Par rapport au deuxième principe de Laplace, seuls six enseignants sur les quatre-vingt-huit ont estimé en avoir une idée. Parmi ces derniers, un seul a pu énoncer le deuxième principe de Laplace.

Conclusion

L'analyse des résultats du questionnaire révèle dans un premier temps qu'une proportion importante des enseignants qui tiennent des classes terminales propose à leurs élèves des définitions correctes de la notion d'expérience aléatoire. Cependant, il n'en demeure pas moins que des définitions incorrectes de cette notion sont également proposées par des enseignants. La plupart des enseignants enseignent l'essentiel des notions contenues dans le langage probabiliste et proposeraient des exercices portant sur ces notions. La durée d'enseignement de cette partie du programme varie selon l'enseignant. Elle paraît normale chez certains, mais trop courte ou trop longues chez d'autres. Dans un deuxième temps, les enseignants, dans leur grande majorité, n'ont pas connaissance de l'approche fréquentiste de la notion de probabilité. Ils disent méconnaître les deux premiers de Laplace et l'axiomatique de Kolmogorov, bien qu'ils l'enseignent en classe. Il est évident qu'ils ne maîtrisent pas le vocabulaire par lequel on désigne les approches relatives à la notion de probabilité d'un événement.

ANNEXE 5 : Des expérimentations zéro de l'ingénierie didactique

Introduction

L'ingénierie didactique réalisée dans notre travail a connu d'évolution. Il y a eu d'abord un essai d'enseignement basé sur l'approche fréquentiste lors des analyses préalables. Ensuite une première version de l'ingénierie a été élaborée et expérimentée par nous-même en mars 2016 dans une classe de terminale C que nous avons en charge. Elle avait pour but l'amélioration de l'apprentissage du calcul des probabilités à travers l'appréhension de la notion d'expérience aléatoire et une démarche expérimentale de l'enseignement de la notion de probabilité d'un événement. Une deuxième version de l'ingénierie est obtenue après modification de la première. Cette dernière est expérimentée en septembre 2016 avec un enseignant autre que nous-même et des élèves de classe de terminale des cours de vacance dans un établissement scolaire privé. Nous présentons dans cette annexe les résultats de ces deux expérimentations.

1. Première version initiale de l'ingénierie

Pour atteindre les objectifs visés, nous avons subdivisé l'ingénierie en deux situations d'enseignement. Une première situation permettra d'asseoir les concepts de base du langage probabiliste tout en surmontant les obstacles à la notion de hasard. La deuxième situation sera consacrée à la démarche expérimentale pour estimer la probabilité d'un événement, modéliser une expérience aléatoire et pour mettre en place les techniques de calcul des probabilités. Les deux situations sont introduites par un contexte découlant de la situation de départ de la deuxième situation d'apprentissage portant entre autres sur le calcul des probabilités.

1.1. Présentation des situations d'enseignement-apprentissage de la première version de l'ingénierie

1.1.1. Contexte

Dansou est un élève brillant en classe terminale d'une série scientifique. À l'approche de l'examen du baccalauréat, sa maman lui demande de consulter le Fâ²¹ chez le devin Gouton, en vue de savoir s'il réussira à son examen. Pour la consultation, ce dernier explique à Dansou

²¹ Consulter les oracles.

qu'il doit choisir au hasard dans un sac un cauri²² parmi quatre numérotés (a), (b), (c) et (d), puis lancer le cauri tiré pour observer la face sur laquelle il va reposer. Pour le devin Gouton, le tirage du cauri (a) qui repose sur la face plane (P) après le lancer symbolise la réussite de Dansou avec une bonne mention. Dansou se pose de questions sur sa chance d'espérer réussir avec une bonne mention.

1.1.2. Activité 1 (Situation n°1)

Consigne 1

1) On lance un cauri dont les faces sont marquées (P) et (C).

Sur quelle face le cauri reposera-t-il (Plane ou courbe)? Argumente ta réponse.

2) On lance le cauri six fois de suite. Pour les cinq premiers lancers on a obtenu PCCPC.

Qu'obtiendrait-on au sixième lancer ? Argumente ta réponse.

3) On lance le cauri trois fois de suite. Pour les deux premiers lancers on a obtenu PP.

Qu'obtiendrait-on au troisième lancer ? Argumente ta réponse.

Stratégie : Travail individuel (5 min) ; Travail en groupe (5 min) ; Travail collectif : (10 min)

Consigne 2

Un sac contient quatre cauris marqués respectivement (a), (b), (c), (d). On réalise l'expérience qui consiste à choisir au hasard un cauri dans le sac.

1)

a) Peux-tu prévoir le résultat de cette expérience ?

b) Écris l'ensemble de tous les résultats possibles de cette expérience.

2) Les réponses correctes aux questions précédentes font dire que cette expérience est aléatoire.

a) Les six faces d'un dé cubique sont numérotées de 1 à 6. On lance ce dé et on note le numéro apparu sur sa face supérieure après immobilisation.

Cette expérience est-elle une expérience aléatoire ? Justifie ta réponse.

b) Cite d'autres exemples d'expériences aléatoires.

Stratégie : Travail individuel (10 min) ; Travail en groupe (10 min) ; Travail collectif : (10 min)

²² Le cauris est un coquillage longtemps utilisé comme monnaie en Afrique. C'est un solide de l'espace composé de deux surfaces dont une plane et une courbe.

Consigne 3

Dansou n'a pas pu tirer le cauri (a) dans le sac. Gouton lui accorde alors une deuxième chance : celle de choisir au hasard deux cauris dans un sac contenant cinq dont trois noirs N_1, N_2, N_3 et deux blancs B_1, B_2 . Le tirage d'un cauri blanc au moins lui assurerait la réussite à son examen.

1)

- a) Écris en extension l'ensemble Ω de tous les résultats possibles.
- b) Écris en extension les ensembles A, B et C définis comme il suit.

A : « les cauris tirés sont blancs » ;

B : « les cauris tirés sont noirs » ;

C : « l'un au moins des cauris est blanc ».

2) Dans le langage des probabilités, chaque élément de Ω est une éventualité et les ensembles A, B et C sont appelés des événements.

- a) Donne d'autres exemples d'événements.
- b) Propose une définition de la notion d'événement.

Stratégie : Travail individuel (20 min) ; Travail en groupe (10 min) ; Travail collectif : (30 min)

1.1.3. Activité 2 (Situation n°2)

Consigne 1

Tu disposes avec tes camarades de groupe d'un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6, d'un gobelet et d'un plateau.

1) Avec tes camarades de groupe, lancez le dé deux cents fois de suite puis remplissez le tableau suivant.

Numéro	1	2	3	4	5	6	Total
Nombre de fois							
Fréquence sous forme de fraction							

2) Construisez le digramme en bâtons des fréquences de la série statistique ainsi obtenue.

Stratégie : Travail en groupe (30 min)

Consigne 2

On considère le tableau des effectifs suivant, obtenu en sommant les résultats de l'ensemble des groupes de la classe.

Groupes	1	2	3	4	5	6	Total
Groupe 1							
Groupe 2							
Groupe 3							
...							
...							
...							
Total							

- 1) Inscrivez les résultats de votre groupe dans le tableau (reproduit au tableau).
- 2) Construisez le diagramme en bâtons des fréquences de cette nouvelle série statistique.

Stratégie : Travail en groupe (20 min) ; Travail collectif (20 min)

1.2. L'expérimentation de la première version de l'ingénierie

Cette version initiale de l'ingénierie a été expérimentée par nous même pendant qu'on devrait enseigner les probabilités dans l'unique classe de terminale C du collège d'enseignement général d'Agblangandan en mars 2016. Cette classe est composée de vingt-huit élèves majoritairement de niveau que nous estimons en dessous de la moyenne, mais dominée par un élève qui se classe considérablement au-dessus des autres et suivi immédiatement par quelque cinq élèves de niveau moyen. Ils avaient tous étudié en classe première l'analyse combinatoire et la statistique descriptive. Aucune reprise de ces deux contenus notionnels ne leur a été faite avant d'aborder les probabilités.

1.2.1. Situation n°1

La première situation s'est déroulée en deux séances d'une heure chacune. La consigne 1 a fait l'objet d'étude à la première séance et les deux autres consignes à la deuxième séance.

1.2.1.1. Consigne 1

1.2.1.1.1. Les résultats obtenus dans les groupes

Les élèves invités à travailler d'abord individuellement et ensuite en groupe de 3 à 5 personnes ont abouti après discussion dans leurs groupes respectifs aux réponses ci-après.

Groupe 1 (Marius, Jacob, Yasminath, Nélide et Joachim)

- 1) Le cauri reposera soit sur sa face courbe (C), soit sur sa face plane (P), car on n'a pas la certitude sur la face sur laquelle il reposera.
- 2) Au sixième lancer, on obtiendra soit la face courbe (C), soit la face plane (P), car on n'est pas certain que le cauri retombera encore sur la face courbe (C) ou sur la face plane (P).
- 3) Au troisième lancer, on obtiendra soit la face courbe (C), soit la face plane (P), car on ne peut pas prévoir avec certitude la face sur laquelle il reposera.

Groupe 2 (Adélaïde, Carine, Adèle et Ulrich)

- 1) Le cauri reposera soit sur la face plane ou soit sur la face courbe, parce qu'on ne pourra pas dire la main sur le cœur la face sur laquelle le cauri reposera.
- 2) Au sixième lancer, soit on obtient PCCPCC, soit on obtient PCCPCP. Ici aussi, on ne pourra évaluer avec certitude la face qu'on obtiendra, ce qui justifie les deux possibilités.
- 3) Au troisième lancer, on a deux possibilités : CCC, CCP.

Groupe 3 (Armandine, Cécile, Alice et Espérance)

- 1) Il est fort probable que le cauri repose sur la face plane (P). C'est ainsi parce que le cauri n'arrive souvent pas à être stable sur la face courbe (C).
- 2) On obtiendra au sixième lancer la face (C), parce qu'il est fort probable que la face (C) ne sorte de nouveau.
- 3) On obtiendra au troisième lancer la face plane (P), parce que la chance est forte que (P) sorte pour ce lancer.

Groupe 4 (Romziath, Dona, Walix et Chance)

- 1) Il y a plus de chance que le cauri repose sur la face plane (P) que sur la face courbe (C), parce qu'il est plus difficile au cauri d'être en équilibre sur la face courbe (C).

- 2) Au sixième lancer, on obtiendrait la face courbe (C), parce que le risque est très grand d'avoir la face (C).
- 3) On obtiendrait au troisième lancer la face (P), car il est assez rare d'avoir plusieurs fois de suite le même événement.

Groupe 5 (Michée, Cédric et Corine)

- 1) Le cauri va reposer sur la face (C) ou sur la face (P), parce que c'est quelque chose du hasard.
- 2) Au sixième lancer, on obtiendra la face (C), parce qu'elle est en forte probabilité.
- 3) Au troisième lancer, on obtiendrait la face (C), parce qu'elle est en forte probabilité.

Groupe 6 (Daniel, Bill et Gildas)

- 1) Lorsqu'on lance le cauri, on obtiendra soit l'une des faces car les deux faces ont 50% de chance chacun.
- 2) Au sixième lancer, on obtiendra soit un (P) s'ajoute ou soit un (C) s'ajoute.
- 3) On obtiendra au troisième lancer, soit un CC ou PC ou CP ou PP.

Groupe 7 (Abraham, Napoléon, Ahmed, Jules et Ronaldo)

- 1) Le cauri est susceptible de reposer sur l'une des deux faces. Mieux, 50% de chance de reposer sur la face courbe et 50% de chance de reposer sur la face plane.
- 2) Puisqu'aux cinq premiers lancers, on a PCCPC, on peut obtenir au sixième lancer PCCPCC comme on peut avoir PCCPCP, car le cauri doit reposer obligatoirement sur l'une de ses deux faces.
- 3) Au troisième lancer, on obtiendrait CCC ou CCP, car il n'y a que deux résultats possibles.

Synthèse

A cette première étape de l'ingénierie, qui a pour objectif de recenser les conceptions du hasard chez les élèves des classes terminales au Bénin, on note dans cette classe de terminale C du CEG Agblangandan de cette année scolaire 2015-2016, la présence de trois conceptions du hasard.

Les groupes G_1 , G_2 , G_6 et G_7 ont constamment exprimé pour les trois questions que le résultat du lancer est soit la face (P) soit la face (C). Les arguments évoqués par les élèves,

convergent vers celui selon lequel le résultat est dû au hasard et de ce fait il ne serait pas possible de dire avec certitude le résultat de l'expérience dans chacune des trois questions. C'est la conception du hasard qui est attendue des élèves, celle conforme au hasard du tirage au sort.

Dans les groupes G₃ et G₄, les arguments des élèves varient d'une question à l'autre. À la première question, les élèves de ces groupes ont tenu compte de la forme irrégulière et asymétrique du cauri pour estimer que la face plane (P) qui permet une stabilité du cauri est plus probable et de ce fait le cauri reposerait sur cette face plane. Au niveau de la deuxième question, cet argument est laissé au profit du raisonnement qui consiste à juger certaine la face la plus fréquente au cours des lancers précédents. À la troisième question, c'est plutôt la face la moins fréquente au cours des lancers précédents qui est jugée certaine. Les réponses des élèves de ces groupes aux deux dernières questions montrent qu'ils présentent, malgré leurs âges (16-18 ans) les caractéristiques de l'enfant au stade opératoire concret tel qu'étudiées par Piaget et Inhelder (1951), manifestant ainsi un obstacle ontogénétique.

Les élèves du groupe G₅ qui ont affiché clairement la conception du hasard du tirage au sort n'ont pas pu s'empêcher de virer à la conception qui consiste à prendre les événements les plus fréquentes comme les plus probables. Ils peuvent être classés dans la même catégorie que les élèves des groupes G₃ et G₄.

Au total, les réponses des élèves aux questions de cette première situation, révèlent deux conceptions majeures du hasard chez les élèves : la conception du tirage au sort et celle de la compensation.

1.2.1.1.2. Le travail collectif

Les réponses présentées par les groupes ont été écrites au tableau pour analyse. Après discussion, les élèves ayant exprimé la conception « compensation » ont rejoint leurs homologues ayant exprimé la conception « tirage au sort » du hasard. La conclusion de cette étape de travail collectif était qu'il n'est pas possible de prévoir avec certitude le résultat du lancer, même au cas où un événement est plus probable ou plus fréquent ou moins fréquent.

1.2.1.2. Consigne 2

1.2.1.2.1. Les résultats de la consigne 2 après le travail de groupe

Les élèves constitués en cinq groupes (la composition de certains groupes de ce jour n'est pas exactement celle de la veille), invités à travailler d'abord individuellement et ensuite en groupes, ont abouti après discussion dans leurs groupes respectifs aux réponses ci-après.

Groupe 1 (Marius, Yasminath, Nélide, Daniel, Ulrich et Joachim)

- 1) a) On obtiendra soit (a), soit (b), soit (c), soit (d).
b) On obtiendra 4 résultats possibles.
- 2) a) Oui. Elle est aléatoire car avant le lancer on ne peut pas prédire avec certitude le résultat, mais on connaît les résultats possibles.
b) Exemples : tirage de cartes ; tirages de jetons à numéros distincts

Groupe 2 (Armandine, Cécile, Espérance, Adélaïde, Carine, Adèle et Alice)

- 1) a) On aura après le tirage soit le cauri (a), soit le cauri (b), soit le cauri (c), soit le cauri (d).
b) Les résultats possibles de cette expérience sont au nombre de 4.
- 2) a) Cette expérience est aléatoire, car après le lancer du dé cubique, on peut avoir soit la face 1, soit la face 2, soit la face 3, soit la face 4, soit la face 5, soit la face 6.
b) D'autres exemples : le jeu de franc ou tête (pile ou face), le jeu de tirage des cartes.

Groupe 3 (Dona, Walix, Michée, Cédric, Chance et Romziath)

- 1) a) On aura après le tirage l'un des quatre cauris (a), (b), (c), (d).
b) Les résultats possibles de cette expérience sont : (a), (b), (c), (d).
- 2) a) Oui, cette expérience est aléatoire parce qu'on ne peut pas prévoir avec certitude le résultat mais on peut savoir combien de résultats possibles il y a.
b) Les exemples d'expériences aléatoires : les élections présidentielles (on connaît le nombre total de candidats mais on ne sait pas qui gagnera) ; loto-fortune (la fortune par les boules), le tirage au sort.

Groupe 4 (Ronaldo, Gildas, Bill, Corine)

- 1) a) On aura l'un d'entre les quatre cauris après le tirage.
b) Les résultats possibles sont : soit le cauri (a), soit le cauri (b), soit le cauri (c), soit le cauri (d).
- 2) a) Oui, elle est aléatoire car il est fort probable qu'on ait après le lancer l'un des numéros figurant sur une face. Donc il est possible d'avoir après le lancer, le numéro 1, ou le numéro 2, soit le numéro 3, soit le numéro 4, soit le numéro 5 soit le numéro 6.

- b) Exemples d'autres expériences aléatoires : lancer de boules de couleurs, lancer de pièces.

Groupe 5 (Abraham, Napoléon, Ahmed, Jules, Jacob)

- 1) a) On aura un cauri parmi les quatre car on ne peut prédire avec certitude le cauri qu'on aura.
 - b) On aura quatre résultats possibles : soit (a), soit (b), soit (c), soit (d).
- 2) a) Oui cette expérience aléatoire, car ce dé étant lancé on ne saurait connaître avec exactitude la face qui apparaîtrait.
 - b) Exemples d'expériences aléatoires : le lancer d'une pièce de monnaie ; la loterie.

Synthèse

A cette deuxième étape, consacrée à l'enseignement apprentissage de la notion d'expérience aléatoire, on constate au niveau de la première question que la conception « compensation » du hasard présentée par certains élèves de la classe a disparu pour ne laisser place qu'à la conception « tirage au sort ». La définition de l'expérience aléatoire proposée dans la consigne 2 semble être comprise, à voir les exemples d'expériences aléatoires donnés par les élèves.

1.2.1.2.2. Le travail collectif

Au travail collectif de cette consigne 2, le modèle didactique de la définition de l'expérience aléatoire a été institutionnalisé et les différents exemples proposés par les élèves ont été analysés.

1.2.1.3. Consigne 3

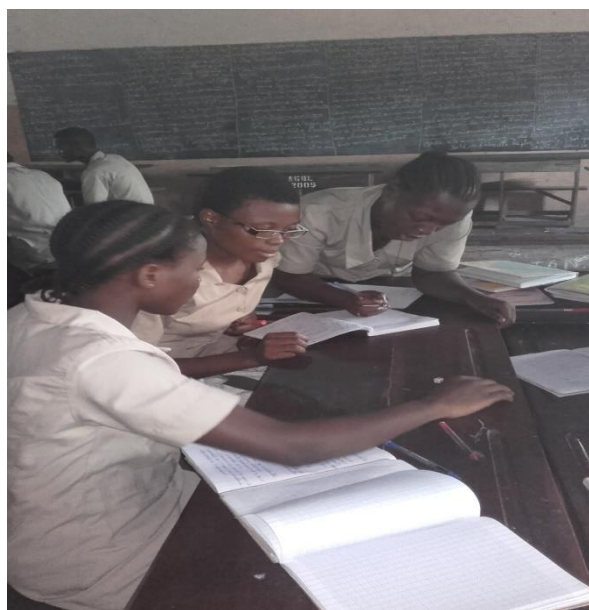
L'objectif de la consigne 3 est la mise en place chez les élèves du langage des probabilités. Les élèves ont réalisé le travail individuel et le travail en groupe dont les résultats sont exploités pour l'institutionnalisation des notions d'univers des éventualités et d'événement dont la typologie est précisée, conformément aux recommandations du programme.

1.2.2. Situation n°2

Pour l'expérimentation de la situation 2, dont l'objectif est le constat de la stabilisation de la fréquence d'événement après un grand nombre de réalisation d'expérience aléatoire, hormis le groupe 4, chacun des quatre autres groupes de la classe est divisé en deux sous-groupes. Ainsi neuf sous-groupes ont disposé chacun d'un dé cubique.

1.2.2.1. Résultats relatifs à la consigne 1

Les membres des neuf sous-groupes ont lancé deux cents fois de suite le dé et ont organisé les résultats dans le tableau indiqué à cet effet. Le protocole expérimental est tel que pour un sous-groupe donné, le dé doit être secoué dans les mains d'un membre du sous-groupe avant d'être lancé sur la table. Lorsqu'il tombe par terre, le résultat n'est pas pris en compte. Ci-dessous les photos des élèves des sous-groupes SG2b et SG3a des groupes 3 et 4 lors des lancers de dés.



Les résultats obtenus par les neuf sous-groupes sont présentés groupe par groupe.

Groupe 1

Le groupe 1 est divisé en deux sous-groupes dénommés SG1a et SG1b. Ces deux sous-groupes ont lancé le dé deux cents fois pour le premier et deux cent cinq fois pour le second et ont obtenu les résultats consignés dans les tableaux suivants.

N°	1	2	3	4	5	6	Total
Effectif	27	31	44	31	30	37	200
Fréquence	0,135	0,155	0,22	0,155	0,15	0,185	1
Résultats des 200 lancers du sous-groupe SG1a							
N°	1	2	3	4	5	6	Total
Effectif	32	35	35	30	36	37	205
Fréquence	0,156	0,171	0,171	0,146	0,176	0,180	1
Résultats des 205 lancers du sous-groupe SG1b							

Groupe 2

Le groupe 2 est divisé en deux sous-groupes dénommés SG2a et SG2b. Ces deux sous-groupes issus ont lancé le dé deux cents fois pour le premier et deux cent cinq fois pour le second et ont obtenus les résultats consignés dans les tableaux suivants.

N°	1	2	3	4	5	6	Total
Effectif	40	40	40	45	40	41	246
Fréquence	0,163	0,163	0,163	0,183	0,163	0,167	1
Résultats des 246 lancers du sous-groupe SG2a							
N°	1	2	3	4	5	6	Total
Effectif	32	36	21	38	37	36	200
Fréquence	0,160	0,180	0,105	0,190	0,185	0,180	1
Résultats des 200 lancers du sous-groupe SG2b							

Groupe 3

Les deux sous-groupes SG3a et SG3b du groupe 3 ont lancé le dé deux cents fois pour le premier et deux cent deux fois pour le second et ont obtenus les résultats consignés dans les tableaux suivants.

N°	1	2	3	4	5	6	Total
Effectif	33	31	33	29	30	44	200
Fréquence	0,165	0,155	0,165	0,145	0,15	0,22	1
Résultats des 200 lancers du sous-groupe SG3a							
N°	1	2	3	4	5	6	Total
Effectif	33	38	27	33	40	31	202
Fréquence	0,16	0,180	0,13	0,16	0,19	0,15	1
Résultats des 202 lancers du sous-groupe SG3b							

Groupe 4

Les résultats du groupe 4 sont présentés dans le tableau suivant.

N°	1	2	3	4	5	6	Total
Effectif	34	33	33	21	41	38	200
Fréquence	0,170	0,165	0,165	0,105	0,205	0,190	1
Résultats des 200 lancers du groupe 4							

Groupe 5

Les élèves des deux sous-groupes SG5a et SG5b du groupe 5 ont lancé le dé deux cents fois pour le sous-groupe SG5a et deux cent dix fois le second. Les résultats de ces lancers se résument dans les tableaux qui suivent.

N°	1	2	3	4	5	6	Total
Effectif	42	28	23	41	31	35	200
Fréquence	0,21	0,14	0,115	0,205	0,155	0,175	1
Résultats des 200 lancers du sous-groupe SG5a							
N°	1	2	3	4	5	6	Total
Effectif	36	27	38	28	39	42	210
Fréquence	0,17	0,12	0,18	0,13	0,19	0,2	1
Résultats des 202 lancers du sous-groupe SG5b							

Synthèse

Dans l'ensemble la stabilisation des fréquences observées des numéros ne semble pas remarquable dans les résultats des sous-groupes. Nous nous attendions à un constat d'équiprobabilité des événements élémentaires sans avoir la certitude qu'ils le sont effectivement. Il serait plus intéressant de chercher à vérifier plutôt la stabilisation de la fréquence d'un seul numéro parmi les six et offrir de bonnes conditions d'obtention de résultats aléatoires. Au niveau de la deuxième question de la consigne 2 qui consiste à réaliser le diagramme en bâtons des fréquences, nous avons eu droit à des représentations très variées ne pouvant pas permettre des comparaisons en vue de l'analyse. En effet, les élèves de deux des neuf sous-groupes ont représenté un diagramme semblable à un histogramme et les autres ont réalisé leur diagramme des fréquences avec des échelles très variées pouvant rendre complexes les interprétations. En réalité, nous n'avons pas fourni aux élèves le matériel pouvant leur permettre de réaliser le diagramme dans les mêmes conditions.

1.2.2.2. Résultats relatifs à la consigne 2

Les résultats des neufs sous-groupes sont regroupés dans un tableau et chaque groupe est appelé à réaliser le diagramme à bâtons des fréquences qu'on devrait comparer au diagramme initialement réalisé à partir uniquement des résultats du groupe. Seuls deux des cinq groupes ont pu réaliser le diagramme mais aussi avec des échelles variées. Les résultats réunis au niveau de l'ensemble de la classe se résument dans le tableau suivant.

Numéro	1	2	3	4	5	6	Total
Total	309	299	294	296	324	341	1863
Fréquence	0,166	0,160	0,158	0,159	0,174	0,183	1

Résultats réunis de l'ensemble de la classe

Comme à la consigne 2, la stabilisation des fréquences n'est pas remarquable. En fait, il a été utilisé des dés différents et les conditions pour que les résultats soient aléatoires ne sont

pas nécessairement remplies. Même avec des bonnes conditions, la question se posera de savoir à partir de quel nombre de réalisations de l'expérience aléatoire la stabilisation des fréquences pourraient être obtenue.

Pendant le travail collectif, les élèves n'ont pas pu estimer la probabilité d'apparition de chaque numéro lorsque n est assez grand. Le professeur a dû continuer son enseignement en passant à l'institutionnalisation de la notion de probabilité et des propriétés relatives au calcul élémentaires des probabilités en suivant les recommandations du programme jusqu'à épuisement des notions inscrites au programme, à savoir : vocabulaire des probabilités, probabilité d'un événement, probabilités conditionnelles, variables aléatoires, loi binomiale.

1.2.3. Bilan de l'expérimentation

Les résultats de l'expérimentation de la situation 1 paraissent très satisfaisants, car ils ont révélé la présence effective d'obstacles à la notion de hasard chez les élèves, le plus remarquable de ces obstacles étant l'obstacle ontogénétique caractérisé par la conception « compensation » du hasard. Ils montrent surtout que cet obstacle est vite surmonté par l'installation du hasard « tirage au sort ». Ce qui devrait faciliter la construction des concepts contenus dans le langage probabiliste.

Contrairement à la situation 1, l'expérimentation de la situation 2 ne semble pas porter ses fruits. Les résultats obtenus par les élèves ne leur ont pas permis de réaliser la stabilisation de la fréquence d'un événement après un nombre assez grand de réalisations de l'expérience aléatoire dont est issu l'événement. Plusieurs causes peuvent permettre de justifier cet état des choses, à savoir :

- L'observation des fréquences de plusieurs événements à la fois ;
- Les mauvaises conditions du lancer des dés qui n'assurent pas l'obtention des résultats effectivement aléatoires ;
- La non précision des échelles pour la réalisation du diagramme en bâtons des fréquences ;
- La compilation des résultats des lancers de plusieurs dés, non nécessairement identiques pour atteindre un grand nombre de lancers.

Il est alors important que la situation 2 soit modifiée en vue de la prise en compte des observations précédentes. On pourrait par exemple observer la stabilisation de la fréquence d'apparition d'un seul numéro par groupe avant de s'intéresser aux six numéros pour la modélisation de l'expérience aléatoire. Dans ce cas, il serait souhaitable de fournir aux élèves

un gobelet pour agiter suffisamment le dé et un plateau sur lequel le dé pourra être jeté sans oublier éventuellement les papiers millimétrés pour la réalisation des diagrammes.

2. Deuxième version initiale de l'ingénierie didactique

L'expérimentation de la première version de l'ingénierie didactique a révélé des insuffisances au niveau de l'activité 2, dont les objectifs n'ont pas pu être atteints. Cette situation est modifiée dans une deuxième version, dont une expérimentation zéro a eu lieu en septembre 2016 avec un enseignant autre que nous-même et des élèves de classe de terminale des cours de vacance d'un établissement scolaire privé. Nous présentons les résultats de cette deuxième expérimentation zéro dans le présent document.

2.1. Présentation des situations de la deuxième version initiale

La deuxième version initiale de l'ingénierie didactique comporte deux activités. La première situation est semblable à celle de la première version. C'est au niveau de la deuxième situation qu'il y a modification. Nous avons essayé de construire à ce niveau une situation fondamentale pour introduire la notion de probabilité d'un événement.

2.1.1. Contexte

Dansou est un élève brillant en classe terminale d'une série scientifique. À l'approche de l'examen du baccalauréat, sa maman lui demande de consulter le Fâ²³ chez le devin Gouton, en vue de savoir s'il réussira à son examen. Pour la consultation, ce dernier explique à Dansou qu'il doit choisir au hasard dans un sac un cauri²⁴ parmi quatre numérotés (a), (b), (c) et (d), puis lancer le cauri tiré pour observer la face sur laquelle il va reposer. Pour le devin Gouton, le tirage du cauri (a) qui repose sur la face plane (P) après le lancer symbolise la réussite de Dansou avec une bonne mention. Dansou se pose de questions sur sa chance d'espérer réussir avec une bonne mention.

2.1.2. Activité 1 (Situation n°1)

2.1.2.1. Consigne 1

- 1) On lance un cauri dont les faces sont marquées (P) et (C).

Sur quelle face le cauri va-t-il reposer ? Argumente ta proposition de réponse.

²³ Consulter les oracles.

²⁴ Le cauri est un coquillage longtemps utilisé comme monnaie en Afrique. C'est un solide de l'espace composé de deux surfaces dont une plane et une courbe.

2) On lance le cauri trois fois de suite et on obtient pour les deux premiers lancers CC.

Que peut-on obtenir pour le troisième lancer ? Argumente ta proposition de réponse.

3) On lance le cauri sept fois de suite. Pour les six premiers lancers, on obtient PCCPCC.

Qu'obtiendrait-on au septième lancer ? Argumente ta proposition de réponse.

Stratégie : Travail individuel (5 min) ; Travail en groupe (5 min) ; Travail collectif : (20 min)

2.1.2.2. Consigne 2

Un sac contient quatre cauris marqués respectivement (a), (b), (c), (d). On réalise l'expérience qui consiste à choisir au hasard un cauri dans le sac.

1)

a) Peux-tu prévoir le résultat de cette expérience ?

b) Écris l'ensemble de tous les résultats possibles de cette expérience.

2) Les réponses correctes aux questions précédentes font dire que cette expérience est aléatoire.

a) Les six faces d'un dé cubique sont numérotées de 1 à 6. On lance ce dé et on note le numéro apparu sur sa face supérieure après immobilisation.

Cette expérience est-elle une expérience aléatoire ? Justifie ta réponse.

b) Cite d'autres exemples d'expériences aléatoires.

3) Propose une définition de la notion d'expérience aléatoire.

Stratégie : Travail individuel (10 min) ; Travail en groupe (10 min) ; Travail collectif : (10 min)

2.1.2.3. Consigne 3

Dansou n'a pas pu tirer le cauri (a) dans le sac. Gouton lui accorde alors une deuxième chance : celle de choisir au hasard deux cauris dans un sac contenant cinq dont trois noirs N_1, N_2, N_3 et deux blancs B_1, B_2 . Le tirage d'un cauri blanc au moins lui assurerait la réussite à son examen.

1)

a) Écris en extension l'ensemble Ω de tous les résultats possibles.

b) Écris en extension les ensembles A, B et C définis comme il suit.

A : « les cauris tirés sont blancs » ;

B : « les cauris tirés sont noirs » ;

C : « l'un au moins des cauris est blanc ».

2)

a) Détermine les ensembles $A \cap B$, $A \cap C$ et $A \cup B$.

b) Détermine C_{Ω}^B (complémentaire de B dans Ω).

Stratégie : Travail individuel (20 min) ; Travail en groupe (20 min) ; Travail collectif : (20 min)

2.1.2.4. Consigne 4

On lance deux fois de suite et au hasard une pièce de monnaie dont les côtés visibles sont pile (P) et face (F).

1) Détermine l'univers des éventualités de l'expérience aléatoire ainsi définie.

2) Ecris en extension les événements :

A : « les deux faces observées sont identiques » ;

B : « les deux faces observées sont distinctes ».

3) Les événements A et B sont-ils incompatibles ? contraires ?

Stratégie : TI=10 min, TC=10 min

2.1.3. Activité 2

2.1.3.1. Consigne 1

Vous disposez dans votre groupe d'un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6, d'un gobelet et d'un plateau.

On suppose qu'on a lancé le dé 100000 fois et on veut connaître le nombre n de fois que la face numéro 1 apparaîtra. Vous êtes appelés à trouver une méthode pouvant vous permettre d'estimer ce nombre n et à communiquer cette méthode à la classe entière. Un groupe est déclaré gagnant lorsque sa méthode est acceptée par les autres groupes après vérification.

Vous pouvez vous servir du gobelet et du plateau pour lancer le dé si vous le désirez. Dans ce cas, il va falloir mettre le dé dans le gobelet qu'il faut bien agiter avant de jeter le dé dans le plateau.

Durée : 1 heure.

NB : Dans cette étape, le professeur se gardera d'intervenir dans la recherche de la méthode par les élèves. Pendant la phase du travail collectif, il écrira au tableau la méthode indiquée par un groupe donné que les autres groupes seront appelés à vérifier. Le débat portera sur le nombre de fois qu'il faut lancer le dé pour être sûr de l'estimation et sera orienté vers l'observation de l'évolution de la fréquence d'apparition de la face n°1. Le professeur peut amener les élèves à compléter une ancienne série de lancers par une nouvelle série pour obtenir des nombres croissants de lancers d'une expérience à une autre.

Lorsque la stabilisation de la fréquence sera constatée dans les groupes, le professeur fera l'institutionnalisation en faisant remarquer que selon un théorème appelé la loi des grands nombres, les fréquences d'observation d'un événement pour des nombres grands de réalisations d'une expérience aléatoire oscillent autour d'un nombre compris entre 0 et 1, qui est la probabilité de cet événement pour une seule réalisation.

2.1.3.2. Consigne 2

Maintenant, vous allez vous intéresser à la probabilité de réalisation de chaque face du dé dont vous disposez dans votre groupe.

- 1) Lancez le dé deux cents fois de suite et notez à chaque fois le numéro apparu sur la face supérieure. Vous obtiendrez une suite de 200 chiffres, compris chacun entre 1 et 6, que vous organiserez en remplissant le tableau suivant.

Numéro	1	2	3	4	5	6	Total
Nombre de fois							
Fréquence sous forme de fraction							

- 2) Réalisez le digramme en bâtons des fréquences de la série statistique ainsi obtenue. (Vous disposez pour cela d'un papier millimétré. Echelle : 1cm pour 0,05 sur l'axe des ordonnées.)

Stratégie : TG= 30 min ; Travail collectif 30 min.

2.2. Expérimentation de la deuxième version de l'ingénierie

Nous avons sollicité un professeur pour l'expérimentation de la deuxième version de l'ingénierie sur des élèves des classes terminales des séries C et D ayant suivi des cours de vacances dans un établissement scolaire privé. Les cours se sont déroulés en cinq séances.

L'enseignant qui a assuré le cours est un professeur certifié de mathématiques et conseiller pédagogique, totalisant une dizaine d'années d'expérience dans l'enseignement des mathématiques dans les classes terminales des séries scientifiques. Avant la première séance, nous l'avons rencontré pour échanger sur les situations composant l'ingénierie. Après chaque séance, nous faisons ensemble le point de l'enseignement/apprentissage d'une part et nous discutons ensuite des objectifs et des stratégies à mettre en place à la séance suivante.

La classe d'expérimentation est constituée des élèves âgés de 16 à 21 ans, provenant en majorité de plusieurs établissements scolaires des alentours du collège privé « Espérance 2000 ». Ils étaient en effet une cinquantaine à suivre pendant les grandes vacances de l'année scolaire 2015-2016 des cours dits de renforcement, organisés par le collège privé. Après avoir négocié avec le promoteur de l'établissement scolaire et en même temps responsable desdits cours, nous avons pu rencontrer la cinquantaine d'élèves de la classe terminale C-D pour leur signifier que c'est dans le cadre d'un travail de recherche que nous procédons avec eux à une

expérimentation zéro d'un cours de probabilités. Conscients de leur intérêt dans ce partenariat gagnant-gagnant, trente élèves ont volontairement pris part à la première séance de notre expérimentation. Nous avons organisé la classe en cinq groupes de six élèves. Des trente qui avaient commencé, seuls vingt ont pu suivre les cours jusqu'à la fin.

2.2.1. Situation n°1

La première situation s'est déroulée en deux séances d'une heure et demie environ. La première séance a été consacrée aux deux premières consignes et la deuxième aux deux dernières.

2.2.1.1. Consigne 1

2.2.1.1.1. Les résultats obtenus dans les groupes

Après un travail individuel puis un travail en groupe, les élèves ont abouti aux réponses ci-après.

Groupe 1

- 1) Le cauri peut reposer sur sa face courbe (P), comme sur la face plane (C). En fait le cauri repose sur la face (P) si au départ le cauri a été lancé par la face (C) et vice versa.
- 2) On peut obtenir pour le troisième lancer (P) ou (C) avec la même argumentation que pour la première question.
- 3) Au septième lancer, on peut obtenir la face (P) ou (C) avec la même argumentation que la question précédente.

Groupe 2

- 1) Le cauri peut reposer sur la face (C) ou (P) car ça dépendra de comment le cauri a été lancé.
- 2) On peut obtenir pour le troisième lancer (P) ou (C), car on peut avoir la possibilité d'obtenir (C) ou (P).

Groupe 3

- 1) Le cauri va reposer sur la face (P) ou sur la face (C), c'est-à-dire l'un ou l'autre. Car l'obtention de la face est au hasard et le cauri a la possibilité de reposer sur la face (P) ou sur la face (C).
- 2) Malgré le fait que la face C est obtenue aux deux premiers lancers, le cauri peut reposer soit sur la face (C), soit sur la face (P), car le résultat est dû au hasard.
- 3) On obtiendra au troisième lancer la face plane (P), parce que la chance est forte que (P) sorte pour ce lancer.

Groupe 4

- 1) Le cauri va reposer soit sur la face (P), soit sur la face (C).

Le cauri a plus de chance de reposer sur la face (P) qui est plane que sur la face (C) qui est courbe, car au cours du lancer le cauri peut tomber sur la face courbe et se retourner sur la face plane. Soit un pourcentage de 60% contre 40%.

- 2) Si les deux premiers lancers sont CC, il est fort probable que le troisième lancer soit (C) si l'on suit la logique.
- 3) Si après six lancers on a PCCPCC alors le septième lancer a de forte chance d'être (P) car à chaque fois que deux lancers sur la face (C) sont faits le lancer qui suit tombe sur la face (P).

Synthèse

Au niveau des élèves des cours de renforcement du collège Espérance 2000, on note comme dans le cas des élèves de la classe terminale C du CEG Agblangandan plusieurs conceptions du hasard.

Il y a d'abord la conception du hasard « tirage au sort » avec le groupe G_3 qui a estimé au niveau de la première question que le résultat du lancer est soit (P) soit (C), en évoquant le fait que le résultat du lancer est dû au hasard : « car l'obtention de la face est au hasard et le cauri a la possibilité de reposer sur la face (P) ou sur la face (C) ».

Dans les groupes G_1 et G_2 , les élèves ont estimé que le résultat d'un lancer dépend de la manière dont le dé est lancé. En fait ils semblent dire que le résultat d'un lancer dépend du résultat du lancer précédent.

Enfin dans le groupe G_4 , il est à noter que les élèves ont tenu compte de la géométrie asymétrique du cauri pour estimer qu'il est plus probable que le dé repose sur la face plane que sur la face courbe. Mais les membres de ce groupe ont dans un deuxième temps viré vers la conception « compensation » du hasard au niveau de la question avant d'indiquer que le hasard pourrait suivre un ordre au niveau de la troisième question : « à chaque fois que deux lancers sur la face (C) sont faits le lancer qui suit tombe sur la face (P) ». Ainsi puisqu'on a deux suites de PCCPCC, au sixième lancer il y a de forte chance d'avoir P.

2.2.1.1.2. Le travail collectif

Les réponses des quatre groupes sont écrites au tableau. Après discussion, les élèves sont tombés d'accord avec le professeur et le groupe 3 que le résultat du lancer n'est pas prévisible dans aucune des trois questions. Le chercheur est ensuite intervenu pour faire le point avec les élèves qui ont semblé contourner les obstacles à la notion de hasard constaté au niveau de la première consigne de la situation 1.

2.2.1.1.3. Synthèse

Le déroulement de la consigne 1 de la première situation a permis de relever trois conceptions à la notion de hasard au niveau des élèves. D'abord la conception « tirage au sort » a été présente avec le groupe G_3 qui a constamment soutenu que le résultat du lancer n'est pas prévisible compte tenu du fait que le lancer est fait au hasard. Ensuite, la conception « compensation » a été remarquable au niveau du groupe G_4 , dans lequel les élèves ont semblé dire que le hasard pourrait suivre un ordre. Enfin, il y a la conception que nous pouvons qualifier dans cette classe de conception de dépendance selon laquelle le résultat pourrait dépendre des résultats précédents. En dehors de cette dernière, toutes les conceptions de hasard prévues dans l'analyse a priori se retrouvent dans cette classe.

Nous avons dans la présente expérimentation la confirmation de ce que des obstacles à la notion de hasard existent dans nos classes terminales où les probabilités sont enseignées et qu'il faut prévoir les surmonter.

2.2.1.2. Consigne 2

2.2.1.2.1. Les résultats issus du travail en groupe

Rappelons que la consigne 2 de l'activité 1 vise à faire construire la notion d'expérience aléatoire. Les élèves sont invités dans un premier temps à découvrir les caractéristiques d'une expérience aléatoire, à reconnaître ensuite une expérience aléatoire et à donner enfin des exemples d'expériences aléatoires.

Après discussion dans les groupes, les réponses des groupes G_3 et G_4 que nous avons pu récupérer se sont précisées comme il suit.

Groupe G_3

- 1) a) Non on ne peut pas prévoir le résultat car l'expérience est au hasard.
c) L'ensemble des résultats possibles est $\{a, b, c, d\}$, car on ne peut que choisir parmi les cauris qui se trouvent dans le sac.
- 2) a) Oui. Cette expérience est une expérience aléatoire car on ne peut pas prévoir le résultat avec certitude.
b) Exemples d'expériences aléatoires : jeu de football, jeu de volley

Groupe G_4

- 1) a) Non car l'expérience est au hasard. Mais si le sac ne contenait rien que des cauris marqués a, b, c ou d, on pourrait prévoir le résultat de l'expérience.
b) L'ensemble de tous les résultats possibles de cette expérience est $\{a, b, c, d\}$.

2) a) Oui. C'est une expérience aléatoire, car il y a 6 résultats possibles lorsqu'on lance le dé. On ne sait quelle face cela donnera.

b) Exemples : la loterie, le braquage.

A cette deuxième étape de la situation n°1, consacrée à l'enseignement/apprentissage de la notion d'expérience aléatoire, on constate l'unanimité des élèves par rapport à l'imprévisibilité du résultat d'une expérience aléatoire. Au niveau de la première question, la conception « compensation » du hasard présentée par certains élèves de la classe au niveau de la consigne 1 a laissé place à la conception « tirage au sort ». La définition de l'expérience aléatoire proposée dans la consigne 2 semble être comprise, même si la plupart des exemples donnés sont liés aux jeux et ne sont pas précis.

2.2.1.2.2. Le travail collectif

La discussion faite autour des réponses proposées par le groupe G_3 a permis de constater que tous les groupes ont estimé que le résultat de l'expérience n'est pas prévisible et ont pu préciser les résultats possibles. Après avoir prétexté de ces caractéristiques de cette expérience pour la qualifier d'aléatoire, le professeur a procédé à l'institutionnalisation du modèle mathématique standard de l'expérience aléatoire, en définissant l'expérience aléatoire comme étant toute expérience dont on ne peut pas prévoir avec certitude le résultat. Après discussion avec le chercheur, le professeur est revenu sur cette définition au début de la séance suivante en donnant la définition du modèle didactique avant l'étude des autres concepts du langage des probabilités. Ainsi une expérience aléatoire est définie comme toute expérience dont on ne peut pas prévoir avec certitude le résultat mais dont on peut connaître les résultats possibles.

2.2.1.3. Les consignes 3 et 4

Le déroulement de cette consigne 3 a permis au professeur d'aborder les concepts du langage des probabilités prévus dans les programmes. À l'issue des discussions, le professeur a fait définir précisément les notions d'univers des éventualités et d'événement et a précisé la typologie des événements. Les notions étudiées dans la consigne 3 ont fait l'objet de révision dans la consigne 4.

2.2.2. Situation n°2

Pour l'expérimentation de la situation 2, dont l'objectif est le constat de la stabilisation de la fréquence d'événement après un grand nombre de réalisation d'expérience aléatoire, il a été demandé aux élèves de trouver une méthode pouvant permettre de déterminer le nombre de fois

qu'on obtiendrait la face n°1 d'un dé, si ce dernier est lancé 100 000 fois. Les élèves présents sont regroupés en quatre groupes de six membres.

2.2.2.1. Résultats relatifs à la consigne 1

2.2.2.1.1. La phase d'action

Dans la recherche de la méthode, les élèves ont dans un premier temps commencé à lancer le dé en désordre pour se rendre compte très tôt qu'il leur est impossible de lancer le dé mis à leur disposition 100000 fois. Ils se sont entendus dans chaque groupe sur une méthode de détermination du nombre recherché. Certains groupes ont simplement décidé de prendre le sixième du nombre total de lancers tandis que les autres ont décidé de lancer le dé un certain nombre de fois pour déduire par règle de trois le nombre n recherché.

2.2.2.1.2. La phase de formulation

Après avoir lancé le dé un certain nombre de fois, les quatre groupes ont proposé chacun une méthode pour déterminer le nombre n de fois qu'on aurait trouvé la face n°1 si le dé est lancé 100000 fois.

Groupe G₁

Les membres de ce groupe ont déterminé le nombre recherché à partir de la formule suivante :

$$n = \frac{100000}{6} - \frac{\text{Numéro de la face}}{6}.$$

Cette formule qu'ils n'ont pas pu justifier leur a permis de trouver $n = 16666$.

Groupe G₂

Les membres de ce groupe ont trouvé $n = 16667$ à partir de la formule :

$$n = \frac{100000}{6}.$$

Groupe G₃

Les membres du groupe ont lancé le dé 10 fois et ont obtenu 1 fois la face n°1. Par la règle de trois, ils ont trouvé $n = 10000$.

Groupe G₄

Ici la méthode est la même que celle du groupe G₃ avec le dé qui est lancé 60 fois. Le nombre de fois que la face n°1 est apparue est 14. Par la règle de trois, le nombre n recherché est arrondi à 23333.

2.2.2.1.3. La phase de validation

Après avoir passé en revue les quatre propositions de réponses, le professeur soutenu par le chercheur a choisi de faire vérifier la méthode des groupes G_3 et G_4 . Toute la classe a convenu de lancer le dé 10 fois pour la vérification et le professeur a invité les élèves à bien agiter le dé avant de lancer pour obtenir des résultats effectivement aléatoires. Les résultats obtenus par les quatre groupes se précisent comme il suit.

	Groupe G_1	Groupe G_2	Groupe G_3	Groupe G_4
Nombre fois que la face 1 est obtenue sur les 10 lancers	2	4	2	5
n	20000	40000	20000	50000

Devant cette variation de résultats, certains élèves n'ont pas hésité à juger la méthode fautive mais n'acceptant pas que la méthode soit changée sans une vérification profonde, le professeur a cherché à connaître les causes éventuelles de cette variation de résultats. Après plusieurs propositions jugées non pertinentes par le professeur, un élève a estimé que le nombre de lancers est insuffisant pour la vérification. Il a été alors décidé que le nombre de lancers aille jusqu'à 20. Mais les résultats n'ont toujours pas été les mêmes. Certains élèves ont conclu que les résultats seront toujours différents quel que soit le nombre de lancers. Jusque-là les élèves n'ont pas encore réalisé qu'ils n'ont pas besoin d'avoir les mêmes résultats du fait que les dés sont différents et que l'évolution du nombre de fois que la face 1 est apparu devrait être observé par dé, donc par groupe. Mais voulant les amener à varier le nombre de lancers, le professeur et le chercheur ont décidé de faire vérifier la proposition des élèves selon laquelle les résultats seront toujours différents. Il est alors décidé qu'on lance un assez grand nombre de fois le dé mais en allant de 10 lancers à 10 lancers jusqu'à ce qu'on trouve une raison de s'arrêter pour rejeter la méthode ou pour l'accepter. Chaque groupe est alors invité à lancer le dé en vue de remplir le tableau de la forme ci-après.

Nombre p de lancers	10	20	30	40	...
Nombre p_1 de fois que 1 est apparu					
La fréquence $\frac{p_1}{p}$ d'apparition de 1					
Le nombre n					

Les résultats obtenus groupe par groupe sont les suivants.

Groupe G₁

p	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
p ₁	2	3	3	4	4	8	10	11	12	13
$\frac{p_1}{p}$	0,2	0,15	0,1	0,1	0,08	0,13	0,14	0,14	0,13	0,13
n	20000	15000	15000	10000	10000	13333	14286	13750	13333	13000

Groupe G₂

p	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
p ₁	4	6	7	9	10	12	14	15	16	18
$\frac{p_1}{p}$	0,4	0,3	0,23	0,225	0,2	0,2	0,2	0,1875	0,17	0,18
n	20000	15000	15000	10000	10000	13333	14286	13750	13333	13000

Groupe G₃

p	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
p ₁	2	5	7	8	10	11	12	14	16	16
$\frac{p_1}{p}$	0,2	0,25	0,23	0,225	0,2	0,18	0,17	0,18	0,18	0,16
n	20000	25000	23333	20000	20000	18333	17143	17500	17777	16000

Groupe G₄

p	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
p ₁	5	7	7	11	12	15	16	16	18	19
$\frac{p_1}{p}$	0,5	0,35	0,23	0,225	0,24	0,25	0,23	0,2	0,2	0,19
n	50000	35000	35000	27500	24000	25000	22875	20000	20000	19000

La stabilisation de la fréquence commence à s'observer dans chaque groupe mais les élèves ne l'ont pas très tôt perçu ainsi, car pour eux, ils ne semblent pas obtenir les mêmes nombres d'apparition de la face 1 dans tous les quatre groupes.

2.2.2.1.4. L'institutionnalisation

Après avoir amené les élèves à observer dans chaque leurs groupes respectifs l'évolution de la fréquence d'apparition de la face 1, le professeur a fait remarquer que cette fréquence se stabiliserait autour d'une valeur théorique, qui est la probabilité de l'événement $\{1\}$ de l'expérience aléatoire qui consiste à lancer le dé une seule fois. La loi faible des grands nombres, qui fonde cette stabilisation de la fréquence, est par la suite institutionnalisée par le professeur comme il suit.

Selon un théorème appelé la loi des grands nombres, la fréquence d'un événement pour un grand nombre de réalisation de l'expérience aléatoire oscille autour d'un nombre compris entre 0 et 1, qui est la probabilité de cet événement pour une seule réalisation de l'expérience aléatoire.

2.2.2.2. Résultats relatifs au déroulement de la consigne 2

L'objectif de la consigne 2 est la constatation de la régularité éventuelle du dé dans au moins un groupe par la stabilisation uniforme des fréquences d'apparition des six numéros. Les deux cents lances de dés dans chaque n'ont pas permis de faire ce constat comme le témoignent les résultats ci-dessous des quatre groupes.

Groupe G₁

Numéro	1	2	3	4	5	6	Total
Effectif	38	32	27	43	39	25	204
Fréquence (valeur approchée)	0,19	0,16	0,13	0,21	0,19	0,12	1

Groupe G₂

Numéro	1	2	3	4	5	6	Total
Effectif	36	33	23	41	39	28	200
Fréquence (valeur approchée)	0,18	0,165	0,115	0,205	0,195	0,14	1

Groupe G₃

Numéro	1	2	3	4	5	6	Total
Effectif	38	25	31	34	30	42	200
Fréquence (valeur approchée)	0,19	0,125	0,155	0,17	0,15	0,21	1

Groupe G₄

Numéro	1	2	3	4	5	6	Total
Effectif	36	39	31	37	37	24	204
Fréquence (valeur approchée)	0,18	0,19	0,15	0,18	0,18	0,12	1

Naturellement, les diagrammes en bâtons des fréquences réalisés par les quatre groupes d'élèves n'ont pas permis de constater l'uniformité de la distribution des fréquences. Ceci peut être dû au nombre de lancers relativement faible. Peut-être serait-il bon de vérifier plutôt l'évolution de la fréquence de chacun des six numéros.

2.2.3. Bilan de l'expérimentation

Les résultats de l'expérimentation de la situation 1 paraissent très satisfaisants, car ils ont révélé la présence effective d'obstacles à la notion de hasard chez les élèves, le plus remarquable de ces obstacles étant l'obstacle ontogénétique caractérisé par la conception « compensation » du hasard. Ils montrent surtout que cet obstacle est vite surmonté par l'installation du hasard « tirage au sort ». Ce qui devrait faciliter la construction des concepts contenus dans le langage probabiliste.

L'expérimentation de la consigne 1 de la situation 2 a permis de constater la stabilisation de la fréquence d'un événement pour un assez grand nombre de réalisation d'une expérience aléatoire. La consigne 2, dont l'objectif est de constater la régularité du dé, n'a pas donné les résultats escomptés.

ANNEXE 6 : Guide de passation du test de 2017

CEG AGBLANGANDAN

Année scolaire : 2016-2017

Seconde C

POST-TEST PORTANT SUR LE CALCUL DES PROBABILITES

GUIDE DE PASSATION

(Samedi 13 mai 2017, matinée)

L'objectif du présent test est de recueillir les appréhensions des élèves sur des notions de probabilités. Ce test est donc un outil de recherche qui ne s'identifie pas à une évaluation. Aucune note ne sera attribuée aux élèves qui ont accepté composer. Le surveillant de salle est prié de faire respecter les consignes suivantes.

- 1) Faire débarrasser les élèves des documents divers.
- 2) Offrir de feuilles de brouillon aux élèves.
- 3) Demander aux élèves d'écrire leurs nom et prénoms sur les feuilles de brouillon.
- 4) Faire remplir la première page et faire lire les exercices avant de commencer.
- 5) Demander aux élèves de résoudre les exercices dans l'ordre dans lequel ils sont présentés. Il est donc conseillé que chaque élève finisse de traiter un exercice avant de passer au suivant. Toutefois, l'élève peut mettre comme réponse la mention « aucune idée » lorsqu'il estime qu'il n'a aucune réponse à proposer pour une question donnée.
- 6) Ecrire l'heure de démarrage au tableau.
- 7) Rappeler aux candidats le temps qui reste à faire toutes les 15 minutes.
- 8) Autoriser le dépassement de la durée par ceux qui ont encore des idées après 90 minutes de composition.
- 9) Ramasser à la fin les copies et les feuilles de brouillon ;
- 10) Remercier les élèves pour leur collaboration.

- FIN-

ANNEXE 7 : Transcription T₁

SITUATION 1, PHASES 1 ET 2

29 MARS 2017

ETABLISSEMENT : CEG Agblangandan

NIVEAU : CLASSE DE SECONDE C

EFFECTIF : 17

HEURE : 8h 25 min

Ce matin, les élèves sont organisés en 5 groupes dont 2 de quatre élèves et 3 de trois élèves. Aucune contrainte n'a été imposée pour la construction des groupes. Les groupes habituels de la classe ont été juste légèrement modifiés pour obtenir le nombre de groupes prévus. Avant le démarrage, nous avons rappelé aux élèves que nous sommes là dans le cadre d'une étude scientifique. Avec le professeur, nous les avons invités à travailler comme d'habitude sans être influencés par notre présence. Nous avons distribué aux élèves des cahiers de notes que nous allons retirer à la fin de l'expérimentation.

Les élèves sont numérotés de E₁ à E₁₇. Lorsque l'élève qui intervient est identifié, il est indiqué par son numéro. La lettre E signifie que l'élève qui intervient n'est pas identifié. Par EE, nous exprimons que plusieurs élèves (au moins deux) interviennent simultanément. La lettre P désigne le professeur et la lettre C le chercheur. Dans la colonne des échanges verbaux, les points de suspension indiquent des passages qui n'ont pas pu être déchiffrés.

N°	Temps	Acteurs	Echanges verbaux
001	00 :00 :40	P	Bonjour tout le monde.
002	00 :00 :42	EE	Bonjour monsieur
003	00 :00 :44	P	J'espère que ça va bien.
004	00 :00 :47	EE	Oui.
005	00 :00 :48	P	Est-ce que tout le monde sait pourquoi on est là ?
006	00 :00 :50	EE	Oui.
007	00 :00 :52	P	Pourquoi on est là selon vous ?
008	00 :00 :57	E	Moi je ne sais pas pourquoi on est là.
009	00 :00 :59	P	Lève-toi et parle à tous tes camarades
010	00 :01 :02	E	Moi, je ne sais pas pourquoi on est là.
011	00 :01 :04	P	Tu ne sais pas pourquoi on est là.
012	00 :01 :05	E	Oui

013	00 :01 :06	P	Alors que, j'ai demandé et vous avez dit oui. Qui sait pourquoi on est là ? Oui.
014	00 :01 :12	E	Nous sommes là pour une expérimentation, c'est-à-dire la notion probabilité.
015	00 :01 :18	P	Nous sommes là pour une expérimentation sur la notion de probabilité. C'est une notion qu'on enseigne normalement en terminale mais nous on veut l'expérimenter sur vous pour voir comment vous allez réagir par rapport à cette notion. Et vos réactions seront déterminantes pour l'analyse, pour notre analyse après. D'accord. Donc, on veut voir comment vous allez appréhender la notion suivant les activités et consignes qu'on va vous présenter. D'accord ? Donc moi je vais vous faire le cours et le professeur, derrière, lui il va nous suivre. En même temps il sera en train de voir comment on fait, comment vous réagissez par rapport à cette nouvelle notion. Ça peut aller ?
016	00 :02 :11	EE	Oui.
017	00 :02 :12	P	Bien. On va commencer en même temps le cours de ce matin. (silence). Chacun une feuille. (Silence pendant la distribution de la planche). Vous devez normalement sortir vos cahiers d'exercices,
018	00 :02 :42	E	Monsieur ça reste.
019	00 :02 :43	P	Ça reste ?
020	00 :02 :44	E	Oui
021	00 :02 :45	P	Cahiers de recherche (silence). Vous faites ça dans les cahiers qui vous ont été distribué. Il y a qui encore ? (Silence) Tout le monde a la photocopie ?
022	00 :03 :10	EE	Oui.
023	00 :03 :11	P	Bien. Chacun fait une lecture silencieuse d'abord. (silence). Le texte n'est pas long. Donc une minute, ou au plus deux minutes vous suffisent déjà pour la lecture. Juste du contexte. Pas le tout. Juste le contexte (long silence) ... déjà fini. Juste le contexte. Le contexte seul. Quelqu'un va nous lire le contexte.
024	00 :05 :16	E1	Ici monsieur.
025	00 :05 :18	P	Vas-y.
026	00 :05 :19	E1	Contexte
027	00 :05 :20	P	Lis plus fort.
028	00 :05 :22	E1	Dans un élève, Dansou, un élève brillant de classe de terminale D d'une série scientifique, à l'approche de son examen du baccalauréat, sa maman lui demande, comme il est de coutume dans sa famille, de consulter le Fâ, chez le devin Gouton en

			vue de savoir s'il réussira à son examen. Pour la consultation, ce dernier remet un cauri à Dansou qu'il lui demande de lancer quatre fois de suite afin d'observer la face supérieure après immobilisation du cauri. En effet, le cauri est composé de deux faces dont une plane (P) et une courbe (C). Consigne. S'il vous plait monsieur. Je lis la consigne ?
029	00 :05 :58	P	Non c'est bon. (silence). Je vais lire aussi le contexte rapidement. On dit, Dansou est un élève brillant en classe de terminale d'une série scientifique. A l'approche de son examen du baccalauréat, sa maman lui demande, comme il est de coutume dans sa famille, de consulter le Fâ, chez le devin Gouton en vue de savoir s'il réussira à son examen. Pour la consultation, ce dernier remet un cauri à Dansou qu'il lui demande de lancer quatre fois de suite afin d'observer la face supérieure après immobilisation du cauri. En effet, le cauri est composé de deux faces dont une plane (P) et une courbe (C). Voilà le contexte. D'accord ? Maintenant, est-ce que le contexte n'est pas clair chez quelqu'un ? Est-ce qu'il y a des points d'ombre. Est-ce qu'il y a des mots qu'il n'a pas compris ? Il faut que le contexte soit clair d'abord avant qu'on se lance sur les consignes. Est-ce qu'il y a quelqu'un qui n'a pas bien compris le contexte ? Il lève le doigt et on le lui explique encore avant de continuer.
030	00 :07 :14	E	Ici monsieur
031	00 :07 :15	P	Oui.
032	00 :07 :14	E3	Qu'est-ce qu'on entend par immobilisation du cauri ?
033	00 :07 :21	P	Plus fort, plus fort.
034	00 :07 :23	E3	Qu'est-ce qu'on entend par immobilisation ?
035	00 :07 :25	P	Lève-toi et parle plus fort.
036	00 :07 :26	E3	Qu'est-ce qu'on entend par immobilisation du cauri ?
037	00 :07 :28	P	Qu'est-ce qu'on entend par immobilisation du cauri ? Tout simplement ; immobilisation d'abord, ça veut dire rendre immobile. Eh, par exemple un ballon, on vous lance, le ballon étant mobile, vous mettez le pied sur la balle, la balle devient immobile. On est d'accord ? Le cauri c'est un peu comme ça, donc quand on lance le cauri, le cauri est en train de bouger, donc on le rend immobile, c'est qu'on ou bien on met la main sur ça..., on essaie de faire en sorte que le cauri ne bouge plus. Ça peut aller ?
038	00 :08 :02	E	Ici monsieur
039	00 :08 :03	P	Oui.
040	00 :08 :04	E7	Qu'est-ce qu'on appelle un cauri ?

041		P	Qu'est-ce qu'on appelle un cauri ? Très bien. On en vient là. Est-ce qu'il y a une autre question d'abord ? On vient à sa question. Est-ce qu'il y a une autre question d'abord ? Est-ce qu'il y a autre point d'ombre dans le contexte ? Je vais revenir sur ta question hein ! est-ce qu'il y a autre point d'ombre dans le contexte ? Ça peut aller pour tout le monde ?
042	00 :08 :30	EE	Oui
043	00 :08 :31	P	Bien, vous allez regarder ceci et chacun va me dire ce que s'est. (Silence montrer un cauri à la classe) Selon vous, c'est quoi ceci ?
044	00 :08 :39	EE	Un cauri
045	00 :08 :41	P	Tout le monde a vu ?
046	00 :08 :42	EE	Oui.
047	00 :08 :43	P	ça c'est un cauri. Kenneth. Ça peut aller ? C'est ça ce qu'on appelle un cauri. C'est ça que le devin lui demande de lancer. Lorsqu'il lance, d'accord, on l'immobilise. C'est bon ? Comme on fait avec les pièces. Comment elle s'appelle ? Juliette. Comme on fait avec les pièces. On lance puis on l'immobilise. Voilà un peu ce dont le contexte parle. Donc, on dit que le cauri a une face courbe et une face plane. Tout à l'heure, je vais vous distribuer les cauris et vous allez répondre aux questions. Ça peut aller ? Bien. Maintenant avant la distribution, vous allez d'abord faire la première consigne 1 de la phase 1.1. Donc quelqu'un pour lire le contexte et la phase 1.1.
048	00 :09 :42	E	Contexte.
049	00 :09 :43	P	Non. Une autre personne.
050	00 :09 :45	E14	Contexte. Dansou est un élève brillant en classe de
051	00 :09 :45	E1	Ici monsieur.
052	00 :09 :47	P	Attend. Oui.
053	00 :09 :50	E1	Contexte. Dansou est un élève brillant en classe de terminale d'une série scientifique. A l'approche de l'examen du baccalauréat, sa maman lui demande, comme il est de coutume dans sa famille, de consulter le Fâ, chez le devin Gouton en vue de savoir s'il réussira à son examen. Pour la consultation, ce der ce dernier remet un cauri à Dansou qu'il lui demande de lancer quatre fois de suite afin d'observer la face supérieure après immobilisation du cauri. En effet, le cauri est composé de deux faces dont une plane (P) et une courbe (C). Consignes. Phase 1.1. Quel résultat obtiendra Dansou ?
054	00 :10 :44	P	Obtiendrait.

055	00 :10 :45	E1	Obtiendrait Dansou s'il lance le cauri le cauri pour la première fois ? Argumente ta réponse. 2) Dansou a lancé le cauri trois fois et a obtenu le résultat CCC. Quelle face obtient, obtiendrait-il s'il lance le cauri une quatrième fois ? Argumente ta réponse.
056	00 :11 :12	P	Voilà. Est-ce qu'il y a des points d'ombre dans la phase 1.1. ? est-ce qu'il y a des questions qui ne sont pas comprises ?
057	00 :11 :21	E14	Ici monsieur.
058	00 :11 :22	P	Oui. Pacôme.
059	00 :11 :23	E14	Première question. Quel résultat
060	00 :11 :25	P	Parlez plus fort
061	00 :11 :27	E14	La première question. Quel résultat obtiendrait Dansou s'il lance le cauri pour la première fois. Dans quel sens il lance.
062	00 :11 :33	P	Il lance le cauri. Je t'ai montré le cauri tout à l'heure. D'accord ? Regardez comme on fait pour les pièces à la maison. Il lance et puis il l'immobilise. D'accord. Donc on lui demande, puisque ça a deux faces, voilà une face plane et une face courbe. Lorsqu'on lance et qu'on l'immobilise comme ça. On lui demande alors quelle face, d'accord, on te demande quelle face obtiendrait-il ?
063	00 :11 :58	E14	Ça dépend de la façon dont il a lancé.
064	00 :12 :00	P	Ça c'est dans ; c'est ce qu'on attend de toi dans ton travail de recherche maintenant que je vais lancer. J'attends les questions sont comprises d'abord. Ça peut aller ? C'est bien compris pour tout le monde ? Bien maintenant, chacun avec son imagination essaie de répondre, d'accord et dans cinq minutes on va lancer le travail en groupe et on verra. C'est parti hein.
065			Travail individuel dans le groupe 3 (silence)
066	00 :20 :26	P	Vous avez Vous avez fait huit minutes.
067	00 :20 :28	EE	Oui. Oui.
068	00 :20 :29	P	Je pense que chacun a pu écrire quand même quelque chose de potable.
069	00 :20 :34	E	Oui.
070	00 :20 :36	P	Bien. Avant d'aborder la phase 1.2, je vais recueillir vos réponses, c'est-à-dire quoi ? Je vais désigner (silence). Avant d'abord lancer le travail en groupe qui va durer aussi cinq minutes. (silence). C'est plus que dix minutes. Le travail en groupe est lancé. (chuchotements dans les groupes).
071	00 :30 :54	P	Bien. Le travail en groupe tire vers sa fin. N'oubliez pas de noter ce qu'il doit dire dans le cahier! Ce que chaque groupe a fait comme travail, notez ça dans le cahier. Vous n'avez pas... là-bas. On s'entend hein ! (chuchotements). Alors (silence). Je pense que vous avez déjà, vous avez pu résoudre la majorité

		<p>des questions ? De toute façon, il y en a que deux. Donc vous avez pu répondre aux deux questions. Maintenant ce qu'on va faire, on va désigner un rapporteur par groupe et chaque groupe ira mettre sa réponse au tableau. C'est cinq groupes non. Groupe numéro 1, vous allez faire en sorte que votre réponse reste dans cette colonne. Groupe numéro 2, groupe numéro 3, groupe numéro 4, groupe numéro 5. Vous irez en même temps. Qu'on gagne du temps. Ici, groupe numéro 1, groupe numéro 2, groupe numéro 3, groupe numéro 4, groupe numéro 5. (Silence pendant que les réponses sont écrites au tableau). Bien. Voilà ... de vos réponses. Le groupe numéro 1 dit : Si Dansou lance le cauri pour la première fois, il obtiendra la face (C), car le cauri ayant deux faces, une face plane et une face courbe, pour que le cauri soit totalement immobile la face plane doit rester sur la terre. Voilà, c'est pour répondre à la question, quelle face obtiendrait-on s'il lance le cauri pour la première fois. Pour la même question, je vais lire les arguments des autres groupes. Le groupe 2 dit : si Dansou lance le cauri pour la première fois, le résultat qu'il obtiendra dépend de la manière dont il a lancé. C'est le verbe avoir. Il pourra trouver le résultat (P) ou (C). Le groupe 3 dit par contre, selon lui, si Dansou lance le cauri pour la première fois, il obtiendra un résultat (C). Comme justification, Dansou obtiendra un résultat (C), parce que si on lance le cauri, on observera après immobilisation du cauri, que le cauri va se poser sur la face plane (P), dont la face (C). Donc le groupe 3 rejoint numéro 1 ; c'est ça hein. Eux, ils disent que ça va se reposer, eux ils disent que ça va reposer sur la face plane, le groupe 3 aussi dit que ça va se reposer sur la face plane. On continue. Le groupe numéro 4 dit : si Dansou lançait le cauri pour la première fois, il pourrait obtenir soit la face (P) ou la face (C). Car cela dépendra de la façon, dont il a lancé et immobilisé le cauri. Ils ont fait exactement la même chose que le groupe numéro 2. Donc ça fait deux deux, donc ça reste le groupe numéro 5 qui va départager. Le groupe numéro 5, Dansou obtiendrait la face courbe car après immobilisation du cauri, la face plane serait la face supérieure, la face inférieure et la face courbe sera la face supérieure. Donc ils ont dit la même chose que les groupes numéros 1 et 3. Donc il y a trois groupes qui disent que c'est la face plane qui va rester en bas et la face C va rester en haut. Puisque l'autre est plane, c'est ça qui va poser sur la terre, si je comprends bien votre réponse hein. Alors que le groupe numéro 2, les groupes numéros 2 et 4 disent que plutôt, on ne sait pas la réponse ; cela dépend de la manière dont on a lancé.</p>
--	--	--

			Bon ce n'est pas grave. Pour la deuxième question. Tout à l'heure on verra, je vais vous distribuer les cauris et vous-même vous allez lancer pour voir ce qu'on obtiendra. Dansou a lancé le cauri trois fois et a obtenu les résultats CCC, ça c'est la question, quelle face obtiendrait-il s'il lance le cauri une quatrième fois. Argumente ta réponse. La réponse du groupe numéro 1, ils disent, si Dansou lance le cauri une quatrième fois, il obtiendra toujours la face C, car c'est la pression qu'il avait exercé sur le cauri pour les trois premières fois qu'il exercera toujours. Ici, j'ai un peu du mal à comprendre Je veux que vous expliquiez ça un peu. Suivez hein ! Je veux qu'ils expliquent là parce que je ne vois pas très bien ce qu'ils mettent dans dans la pression exercée.
072	00 :43 :25	E1	Comme c'est la même personne. C'est la manière dont il avait lancé les autres fois, c'est la force qu'il avait exercée sur le cauri, qu'il exercera de nouveau.
073	00 :43 :40	P	Hum ! Est-ce que tout le monde a compris ce qu'ils expliquent là ? Si moi je comprends, puisque c'est de la même manière qu'il lance, s'il lance encore, il obtiendra la même chose. Si je comprends bien hein. C'est ça ?
074	00 :43 :52	EE	Oui.
075	00 :43 :53	P	Bien. Asseyez-vous ! Le groupe numéro 2 dit par contre, si Dansou lance le cauri une quatrième fois, ce serait la face (C), car il a lancé le cauri trois fois et cela est tombé sur la face (C). C'est. Donc c'est fort probable qu'elle tombe encore sur la face (C). (Silence) Là aussi j'avoue que c'est un peu biaisé. Vous avez dit que c'est la face (C), vous dites encore que c'est fort probable. Dans fort probable là, est-ce qu'on comprend que c'est forcément (C) ? C'est forcément (C) que vous dites ou bien ça pourrait être (C) ou (P).
076	00 :44 :35	E8	C'est fort possible.
077	00 :44 :37	E7	Ça pourrait être (C) ou (P).
078	00 :44 :47	P	Vous avez dit ici que si Dansou lance le cauri pour une quatrième fois, que ce serait la face (C). Ça c'est votre réponse ça. La justification dit alors que c'est fort probable. C'est comme s'il y a, Il y a, il y a, il y a une certaine nuance entre les deux. Je veux que vous essayez d'exprimer, ne regardez pas ce que je vais dire. Ce que vous voulez exprimer par là et que vous avez peut-être mal exprimé, dites pour qu'on soit fixé sur votre réponse. Le groupe numéro 2. (Silence de concertation des élèves du groupe). C'est bon ? Si c'est bon, quelqu'un se lève et nous dit à haute voix. Je ne sais pas si c'est moi qui ne comprends pas ; est-ce que les autres ont compris. Si on lit

			l'argumentation, l'argumentation dit que c'est fort probable. Donc ce n'est pas exactement, donc on n'est pas sûr que c'est ça. Mais dans la réponse normalement, ils disent que c'est (C). On veut être sûr de votre réponse ; est-ce que vous dites que c'est (C), ou bien vous dites que ça peut être (C).
079	00 :45 :50	E7	C'est (C).
080	00 :45 :51	P	Oui. Lève-toi et parle.
081	00 :45 :53	E8	Ça peut être (C).
082	00 :45 :55	P	Ça peut être (C).
083	00 :45 :57	E8	Ce n'est pas forcément (C).
084	00 :45 :59	P	Donc ce n'est pas c'est (C), ça peut être
085	00 :46 :02	E7	(C).
086	00 :46 :03	P	Je préfère que vous écriviez ça. Si Dansou lance le cauri pour la quatrième fois, écrivez peut-être, ça pourrait être la face (C). C'est votre réponse hein. Ce n'est pas moi hein. C'est votre réponse (silence) Ecrit seulement. (silence pendant que l'élève écrit au tableau).
087	00 :46 :45	E8	Il faut écrire (C) seulement.
088	00 :46 :48	P	Ecrire seulement (C). Voilà. Eux, ils disent que ça pourrait être (C). Le groupe numéro trois dit par contre, s'il lance le cauri la quatrième fois, on obtiendra encore une face (C). Mais ils n'ont pas donné de justification. Ce n'est pas grave. Groupe numéro 4. Si Dansou lançait le cauri pour la quatrième fois, il pourrait obtenir la face (P) car étant donné qu'il a lancé trois fois et obtenu la face (C), il va chercher à immobiliser le cauri sur une autre face d'une autre manière. Ça c'est leur façon de voir ça. Puisqu'il a obtenu trois, il va chercher à obtenir l'autre. C'est comme ça qu'ils ont vu ça. On ne peut pas toutefois leur en vouloir. Le groupe numéro 5 dit par contre, s'il lance le cauri pour la quatrième fois, il obtiendra le résultat (C), car il avait lancé le cauri trois fois et a obtenu CCC, donc la probabilité est forte qu'il obtienne une fois de plus le résultat (C). Encore une fois, j'ai l'impression d'être tombé sur ce que le groupe 2 a dit. Vous dites que c'est (C) et après vous donnez comme si on va dire c'est possible. Votre argumentation tombe sur c'est possible et votre résultat dit que c'est ça. C'est le groupe numéro 5. Qu'est-ce que vous voulez qu'on comprenne concrètement. C'est (C) ou bien ça pourrait être (C) ?
089	00 :48 :28	E17	A moitié (C), à moitié (P).
090	00 :48 :30	P	Quelqu'un se lève parmi vous et nous dit ce que vous voulez vraiment dire ; Parce que, c'est l'impression qu'on a, ou bien ?
091	00 :48 :35	EE	Oui

092	00 :48 :36	P	<p>Quand on lit, ils disent que la probabilité est forte qu'on obtienne le résultat (C). C'est comme si ça peut être aussi (P). Quand on lit l'argumentation, le résultat, c'est, ils disent que c'est (C). Ce qui est un peu différent. Qu'est-ce que vous voulez dire concrètement ? (silence) Vous avez eu quinze minutes pour réfléchir à la question. (Silence). Vous n'avez pas trouvé une réponse fixe ? Bon ce n'est pas grave. On prend ça comme ça, on prend ça comme ça. Bien. Donc voilà ce que vous avez obtenu lorsque vous imaginez la scène. D'accord ?</p> <p>Donc pour la phase 1.2, je vais vous partager les cauris, un cauri par groupe, je ne sais pas s'il y en a beaucoup pour qu'on ait deux par groupe. Ça n'atteint pas, ça n'atteint pas dix, sinon on va avoir deux par groupe. Toujours pour avoir plus de résultats. Donc on va partager un par groupe et vous allez lancer. Maintenant, vous lancez et vous laissez le cauri s'immobiliser lui-même. Ce n'est pas avec la main ; Donc le cauri peut tourner autant de fois qu'il veut et à un moment donné, le cauri va devenir immobile. Ça suit ?</p>
093	00 :50 :13	EE	Oui.
094	00 :50 :14	P	<p>Donc vous lancez. Pas trop haut hein sinon vous risquez de casser le cauris et vous attendez que le cauri s'immobilise. Vous allez voir maintenant si c'est la face courbe ou si c'est la face plane. Regardez d'abord pour que chacun ait une notion de ce qu'on appelle face courbe et face plane. Regardez, il y a une face qui est un peu gondolée, c'est ça qui est la face courbe et l'autre qui est plane on va dire non. C'est bon ?</p>
095	00 :50 :49	EE	Oui
096	00 :50 :50	P	Chacun a reconnu la face courbe et la face plane. Ça peut aller maintenant ?
097	00 :50 :54	EE	Oui
098	00 :50 :55	P	Bien quelqu'un pour nous lire rapidement la phase 1.2. qu'on va commencer.
099	00 :51 :04	EE	Ici monsieur.
100	00 :51 :08	P	Là-bas ; Suivez, suivez.
101	00 :51 :12	E16	Vous disposez dans votre groupe d'un cauri que vous allez lancer autant de fois que vous le souhaitez pour répondre aux questions
102	00 :51 :22	P	Voilà. Ici on vous donne encore le choix de lancer autant de fois que vous pouvez. Vous pouvez lancer dix fois, vous pouvez lancer
103	00 :51 :32	E	100 fois.
104	00 :51 :33	P	De toutes les façons vous avez un travail individuel de 5 minutes. D'accord. Donc je prends par exemple ce groupe, toi

			tu lances, tu peux peut-être trois fois, tu notes tes réponses, lui il lance et ainsi de suite. Donc vous avez cinq minutes pour vous passer le cauri. Après maintenant vous allez collecter vos réponses. D'accord ? (Silence) Le travail individuel est lancé. Vous avez 5 minutes.
105	00 :52 :27	E1	Monsieur. C'est en groupe qui est sur l'épreuve. Monsieur, monsieur, c'est en groupe qui est sur l'épreuve.
106	00 :52 :33	P	Oui. C'est en groupe. (Silence) J'ai l'impression que certains n'ont pas bien compris. Vous lancez, vous attendez qu'il s'immobilise et vous notez la face que vous avez obtenue. Si c'est la face courbe ou si c'est la face plane, (C) ou (P). Vous allez voir si ça correspond à ce que vous avez dit.
107	00 :53 :20	EE	<u>Discussion dans le groupe 5</u> E14 : Chacun lance et écrit ce qu'il a vu. Pourquoi la chose tombe (en goun gbé) E11 : Maintenant, on va encore répondre aux questions. E14 : S'il vous plaît monsieur. Je veux poser une question. P : Oui. E14 : Si je comprends bien, on va encore reprendre ? P : Oui. E11 : Et si on reprend, on argumente encore ? E14 : Ou bien, on donne seulement les réponses.
108	00 :54 :12	P	Il y a deux de vos camarades qui ont demandé, lorsqu'on va lancer les cauris, est-ce qu'on va encore argumenter parce que les questions 1 et 2 demandent d'argumenter. Est-ce qu'on va encore argumenter ?
109	00 :54 :27	EE	Non, on avait déjà argumenté ; on peut confirmer.
110	00 :54 :33	P	Vous avez lancé. D'accord ? Ce que vous obtenez, ce qu'on vous demande de, par rapport à ce que vous avez fait expérimentalement, c'est répondre aux questions 1 et 2. C'est comme si vous décrivez ce que vous voyez. Donc votre argument, c'est ce que vous voyez. Si vous voulez, vous pouvez dire c'est (C) parce qu'on voit (C). Ça peut aller ? Votre argument, c'est ce que vous voyez. C'est tout.
111	00 :55 :08	EE	<u>Discussion dans le groupe 1</u> E1 : c'est (C) qu'on obtient. E2 : C'est en mouvement. E1 : On a 1 ; ça là là 2 E3 : On recommence. Ça va faire 3, l'autre est 2. E1 : Premier cas (C), deuxième cas E14 : On veut noter. Lui, il est en train de s'amuser. E11 : J'ai déjà noté. Tu ne vois pas que j'ai noté ?

			<p>P : C'est un travail en groupe. Vous lancez et vous notez à chaque fois que vous obtenez. (On entend ensuite une succession de P et C) <u>Discussion dans le groupe 4</u> P : Est-ce que vous notez ici. E14 : On veut noter. Lui, il est en train de s'amuser. E11 : J'ai déjà noté. Tu ne vois pas que j'ai noté ? P : C'est un travail en groupe. Vous lancez et vous notez à chaque fois que vous obtenez. (On entend ensuite une succession de P et C)</p>
112	00 :57 :48	P	Bien. On a encore une minute pour répondre, pour le travail, pour le travail en groupe. On passera au travail collectif.
113	00 :58 :30	EE	C, P, ...
114	00 :58 :47	P	Bien. Je pense que vous avez, vous avez eu à répondre aux deux questions déjà. Bien je prends le groupe numéro 1, d'accord. Après vos expériences, qu'est-ce que vous avez trouvé ? Est-ce que c'est la face (C) forcément ? Qu'est-ce que vous avez obtenu ?
115	00 :59 :14	E1	D'après nos expériences,
116	00 :59 :16	P	Tout le monde suit hein.
117	00 :59 :18	E1	Lorsque chacun a lancé, on a obtenu plus la face (C) que la face (P).
118	00 :59 :24	P	Vous avez obtenu plus la face (C) que la face (P). Assieds-toi. Le groupe numéro 2.
119	00 :59 :36	E14	Groupe numéro 2. (Silence)
120	00 :59 :46	P	Elle a dit, lorsqu'ils ont lancé le cauri, ils ont obtenu plus la face (C) que la face (P). Maintenant, selon vous, est-ce que on peut tirer une conclusion par rapport au lancer ? Lorsqu'on lance le cauri, est-ce qu'on peut avoir une certitude de ce qui va sortir ?
121	01 :00 :10	EE	Non, non.
122	01 :00 :12	P	Je parle d'abord du groupe numéro 1, de vos expériences. Vous avez fait des lancers tout à l'heure.
123	01 :00 :21	EE	Oui
124	01 :00 :22	P	Est-ce qu'on peut avoir une certitude de ce qui va sortir ?
125	01 :00 :25	EE	Non
126	01 :00 :26	P	Si c'est (P) ou si c'est (C).
127	01 :00 :29	E2	Ici monsieur.
128	01 :00 :31	P	Oui Camir.
129	01 :00 :33	E2	Oui. d'après nos expériences ici. Si la cauri, le cauri est bien lancé, comme il le faut, on peut avoir la face (C).
130	01 :00 :47	P	Qu'est-ce que tu mets dans bien lancer ?

131	01 :00 :50	E2	Le cauri. Non, c'est que, ici maintenant, d'après nos expériences,
132	01 :00 :55	C	Il n'a qu'à bien lancer plusieurs fois.
133	01 :00 :57	P	Ok. Lance alors! Lance ! lance devant nous on va voir.
134	01 :01 :09	E2	Je lance ici ?
135	01 :01 :10	P	Oui. Oui. Lance le cauri.
136	01 :01 :16	E14	Lance ça bien.
137	01 :01 :17	P	Tu as obtenu quelle face ?
138	01 :01 :19	E2	Face plane.
139	01 :01 :21	E14	Quelle face ?
140	01 :01 :24	E2	Plane. Ce n'est pas ce que nous avons obtenu.
141	01 :01 :29	P	Ce n'est pas ce que vous aviez obtenu. D'accord. Très bien.
142	01 :01 :34	E2	Cela veut dire qu'on ne peut pas fixer n'importe quel résultat. Ça peut être tantôt l'autre, tantôt
143	01 :01 :42	P	Tantôt plane
144	01 :01 :44	E2	Ou tantôt courbe.
145	01 :01 :46	P	Tantôt courbe
146	01 :01 :47	E4	Monsieur, ça dépend de la manière de lancement non ?
147	01 :01 :50	P	Je vais prendre un autre groupe aussi qui va, enfin, qui vont nous donner leur réponse. Je prends par exemple le groupe numéro 4. Lorsque vous avez lancé, la première fois, vous avez obtenu quoi ?
148	01 :02 :01	E14	La face (P).
149	01 :02 :02	P	La face (P), déjà la première fois.
150	01 :02 :05	E14	Oui.
151	01 :02 :06	P	Alors que vous avez dit qu'on obtiendra (P) ou (C). Voilà que vous avez obtenu (P). Et pour la quatrième fois ? Vous avez, vous avez obtenu quoi ?
152	01 :02 :15	E14	Pour la première fois, on a obtenu que (P), on a obtenu deux (P), deux fois (C).
153	01 :02 :20	P	Juste pour la première fois !
154	01 :02 :22	E14	Pour la première fois, on a obtenu (P)
155	01 :02 :24	C	Ce n'est pas ça le problème. Le problème, vous avez répondu à la question quand vous n'avez pas lancé les cauris. Maintenant que vous avez lancé les cauris, que deviennent vos réponses ?
156	01 :02 :34	E14	Nos réponses. On a obtenu la face (P).
157	01 :02 :37	P	Quand vous avez lancé pour la première fois.
158	01 :02 :39	E14	Oui.
159	01 :02 :40	P	Maintenant la question 2.
160	01 :02 :42	E14	Pour la quatrième fois, on a obtenu la face (P).
161	01 :02 :44	P	Parle plus fort.

162	01 :02 :45	E14	Pour la quatrième fois, on a encore obtenu la face (P)
163	01 :02 :48	P	Vous avez encore obtenu la face (P). Maintenant, qu'est-ce que vous vous concluez ?
164	01 :02 :52	C	Non. Reprécisons la question. Vous avez répondu à la question sans le cauri.
165	01 :02 :59	EE	Oui.
166	01 :03 :00	C	Maintenant que vous avez, vous avez lancé, vous savez comment ça se passe. Maintenant si on vous dit, qu'on lance, vous n'avez pas encore lancé le cauri, on vous dit on veut lancer le cauri, qu'est-ce qu'on va obtenir ? C'est bien ça la question qu'on vous a posée. N'oubliez pas de répondre à la question. Ce n'est pas les bonnes réponses que vous avez trouvées qu'on veut. Maintenant que vous avez lancé plusieurs fois, quelle sera la réponse à la question qu'on vous a posée ? Ce n'est pas quel sera ce que vous avez vu. Que devient la réponse à la question qu'on vous a posée. D'accord ? Et si votre réponse qu'on va prendre. Professeur, c'est pour préciser la question.
167	01 :03 :48	P	Oui. Oui. Est-ce que c'est clair chez tout le monde ?
168	01 :03 :51	EE	Oui.
169	01 :03 :52	P	Avant vous n'avez pas lancé et on vous a demandé qu'est-ce qu'on obtiendrait si on lançait. Maintenant vous avez fait des expériences, on vous repose alors la question. On suppose que vous n'avez pas lancé. Qu'est-ce que vous allez obtenir, d'accord ? Ou bien, qu'est-ce qu'on obtiendrait si on lance le cauri pour la première fois. Vous avez fait des expériences avec un cauri maintenant. Ça suit ?
170	01 :04 :17	EE	Oui.
171	01 :04 :18	P	Maintenant, on vous demande alors de répondre à la question à base des expériences que vous avez obtenues. Supposez maintenant que vous avez un cauri dans les mains et imaginez qu'on a lancé, qu'est-ce qu'on peut avoir ? C'est là maintenant la question.
172	01 :04 :44	E3	Ici monsieur
173	01 :04 :46	P	Oui. Tohibou.
174	01 :04 :48	E3	Si on lance le cauri, le cauri, on peut avoir, soit la face plane, soit la face courbe.
175	01 :04 :54	P	Si on lance le cauri, on peut avoir soit la face plane, soit la face courbe. Cela veut dire que lorsqu'on lance le cauri-là.
176	01 :05 :01	C	Est-ce que le même point de vue. Nous, on respecte votre point de vue. S'ils sont convaincus que si on lance le cauri pour la première fois, on peut avoir la face (P) ou la face (C). Ça c'est

			leur point de vue. Les autres aussi vont donner leur point de vue.
177	01 :05 :28	P	Donc on invite chaque groupe à donner sa réponse. Le groupe numéro 2, selon vous, si on lance le cauri, quelle face obtiendrait-on ? Selon le groupe numéro 2.
178	01 :05 :45	E8	Si on lance le cauri pour la première fois, on peut obtenir, soit la face (P), soit la face courbe.
179	01 :05 :54	P	Le groupe numéro 3.
180	01 :06 :00	E9	Selon nous, si on lance le cauri pour la première fois, on obtiendra la face (C).
181	01 :06 :08	P	Selon vous. Vous avez lancé et vous avez obtenu que la face (C). Merci. C'est très bien déjà. Il y a déjà divergence des points de vue. Le groupe numéro 4.
182	01 :06 :18	E14	Soit la face (C), soit la face(P).
183	01 :06 :21	P	Soit la face (C), soit la face(P). Le groupe numéro 5.
184	01 :06 :26	E17	Quand on a lancé pour la première fois.
185	01 :06 :29	P	Oui.
186	01 :06 :30	E17	On a obtenu la face (C).
187	01 :06 :32	P	Vous avez lancé plusieurs fois. Imaginez maintenant qu'on lance un cauri, qu'est-ce qu'on va obtenir ? face (C) ou face (P) ?
188	01 :06 :43	E17	Face (C).
189	01 :06 :44	P	Face (C). Je crois que, le groupe numéro 3. Prenez un cauri. Allez là-bas. Lance. C'est quelle face ça.
190	01 :07 :18	EE	Plane. (P).
191	01 :07 :20	P	Alors que vous avez dit, qu'on obtenait forcément la face (C). Vous voyez, donc il y a déjà une différence. Vous allez faire aussi l'essai.
192	01 :07 :45	E3	Vous avez quelle face ?
193	01 :07 :47	E	(C).
194	01 :07 :48	E14	C'est trop haut.
195	01 :07 :52	EE	(P)
196	01 :07 :53	P	Essaie encore.
197	01 :07 :58	EE	(C).
198	01 :08 :05	P	Maintenant, je vous repose la question, au groupe numéro 5. Lorsqu'on lance un cauri, d'accord ? pour une première fois, quel résultat pourrait-on obtenir ?
199	01 :08 :20	E17	Pour la première fois ?

200	01 :08 :22	P	Oui. Pour la première fois. Je suppose que, je vous donne un cauri. Je vous dis de lancer Quel résultat pourriez-vous, pourriez-vous obtenir, soit la face (P) ou bien la face (C), ou bien, afin. Quel résultat vous pourriez obtenir ? (Silence) Ou bien, vous voulez qu'on fasse encore un essai ? Ou bien la question n'est pas
201	01 :08 :55	E1	C'est clair.
202	01 :08 :57	P	Vous avez, d'accord, tout à l'heure répondu sans les cauris, d'accord, vous avez imaginé. Vous avez pris un cauri, vous avez fait des essais, on a fait des essais. Maintenant, je suppose qu'on repart encore dans l'imagination et que vous lancez un cauri pour une première fois. Quelle face, vous allez obtenir ?
203	01 :09 :15	E14	S'il vous plait monsieur. Monsieur
204	01 :09 :18	E	Attend non.
205	01 :09 :20	E14	Je voulais poser une question
206	01 :09 :23	E17	Si on lance le cauri pour la première fois, on va obtenir soit la face (C), soit la face (P).
207	01 :09 :28	P	Au premier lancer, on peut obtenir, soit la face (P), soit la face (C). Est-ce que la réponse est unanime chez tout le monde ?
208	01 :09 :36	EE	Oui.
209	01 :09 :37	P	Cela veut dire que,
210	01 :09 :39	E14	S'il vous plait monsieur.
211	01 :09 :40	P	Oui
212	01 :09 :41	E14	Normalement, si, ils ont dit que s'il lance le cauri pour la première fois qu'est-ce qu'il va obtenir. Normalement, nous, si on doit faire l'expérience pour la première fois, on doit lancer le cauri une seule fois.
213	01 :09 :51	P	Non. Ce n'est pas ça. Tu n'as bien perçu. C'est-à-dire, ce que vous avez lancé, ça vous sert, je suppose qu'avant vous n'avez jamais lancé de cauri dans votre vie. Ça suit ? La première phase, on vous a demandé juste d'imaginer la scène et de donner le résultat, ce qu'on pourrait obtenir. Maintenant on va a donné des cauris, vous avez vu ce que c'est qu'un cauri, vous avez lancé et vous savez ce que ça peut donner ou pas. Ça suit ? Maintenant, on vous repose, je suppose que vous repartez dans l'imagination, quelle face pourrait-on obtenir lorsqu'on lance un cauri pour la première fois ? est-ce que tout le monde comprend maintenant l'idée de la chose ?
214	01 :10 :34	EE	Oui
215	01 :10 :36	P	Selon toi, quelle face pourrait-on obtenir ?
216	01 :10 :42	E	La face (C).

217	01 :10 :44	P	La face (C). Il maintient sa position. Qui d'autre est, est sur sa position ?
218	01 :10 :52	E4	Ici monsieur.
219	01 :10 :53	P	Oui
220	01 :10 :55	E4	Si c'est ça, il n'a qu'à aller pour faire essai on va voir, si ce qu'il est en train de dire là, comme il a dit que c'est (C) que lui il va obtenir là, il n'a qu'à refaire ça. Là il va voir que ce qu'on est en train de lire là, si c'est
221	01 :11 :09	P	Est-ce qu'il y a quelqu'un qui est sur sa position quoi ?
222	01 :11 :12	EE	Non
223	01 :11 :13	P	Bien assied-toi. Bon, je suppose peut-être qu'il n'a pas perçu ce qu'on est en train de dire. Mais c'est toujours bien d'avoir des divergences d'opinion. Maintenant, la question que je vais vous poser est : lorsqu'on lance le cauri, d'accord ? La majorité a dit, qu'on peut obtenir soit (P), soit (C). Selon vous, pourquoi ?
224	01 :11 :42	E2	Selon nous pourquoi ?
225	01 :11 :44	P	Pourquoi pourrait-on obtenir soit (P), soit (C) ? (Silence)
226	01 :11 :56	C	Si le résultat, si on avait déjà lancé trois fois, il faut qu'on s'entende sur ça. Vous prenez un cauri. Vous voulez lancer. Qu'est-ce que vous allez obtenir si vous lancez ?
227	01 :12 :10	EE	Soit (C), soit (P).
228	01 :12 :12	C	C'est ça la question. Puisqu'on dit, qu'est-ce qu'il obtiendrait. On est dans le conditionnel, c'est-à-dire il n'a pas lancé. Si vous n'avez pas lancé et que vous voulez lancer. Sans avoir lancé, qu'est-ce que vous pensez qu'on pouvait avoir si on avait lancé. C'est ça la question.
229	01 :12 :33	EE	Oui.
230	01 :12 :34	C	Réponse ?
231	01 :12 :40	E	Ici monsieur.
232	01 :12 :41	C	Oui. Réponse, si tu en as ? il n'en a pas.
233	01 :12 :45	E	Ici.
234	01 :12 :46	C	Oui.
235	01 :12 :47	E	On ne peut se prononcer sur le résultat obtenu.
236	01 :12 :50	C	Oui ; Alors ça veut dire quoi ?
237	01 :12 :52	E	Ça peut être probablement (P), probablement (C).
238	01 :12 :55	C	Ça peut être (C), ou ça peut être (P). Est-ce qu'on est d'accord ?
239	01 :12 :59	EE	Oui
240	01 :13 :01	C	Maintenant, vous avez lancé trois fois et vous avez trouvé CCC pour les trois fois. Vous voulez lancer la quatrième fois. Quel résultat peut-on obtenir ? (Silence). C'est la deuxième question ça hein !

241	01 :13 :24	EE	Oui.
242	01 :13 :25	C	On a lancé trois fois, on a obtenu CCC, maintenant on lance une quatrième fois, qu'est-ce qu'on pourrait obtenir ?
243	01 :13 :35	E4	Soit on peut obtenir (C), soit on peut obtenir (P).
244	01 :13 :39	C	Il dit qu'on peut obtenir soit (C), soit (P). C'est votre avis aussi.
245	01 :13 :45	EE	Oui.
246	01 :13 :46	C	Ici ?
247	01 :13 :46	EE	Oui
248	01 :13 :47	C	Et ici ?
249	01 :13 :49	EE	Oui
250	01 :13 :49	C	Et là ?
251	01 :13 :50	EE	Oui.
252	01 :13 :51	C	Donc on peut résumer.
253	01 :13 :53	EE	Oui
254	01 :13 :53	C	Si on lance le cauri, sans avoir fini de lancer, on peut obtenir, on peut obtenir soit (P), soit (C). Je peux écrire ça dans mes documents ?
255	01 :14 :09	EE	Oui.
256	01 :14 :10	C	Que c'est ce que vous avez dit ?
257	01 :14 :12	EE	Oui.
258	01 :14 :13	C	Ça, c'est pour finir la question.
259	01 :14 :15	P	Je demandais tout à l'heure, le fait qu'on n'est pas certain du résultat, selon vous, ça vient de quoi ? (Silence)
260	01 :14 :25	E2	Je n'ai pas compris.
261	01 :14 :26	P	Puisque, lorsqu'il lance, on ne sait pas la face qu'il va obtenir. C'est ce qu'on a conclu tout à l'heure ?
262	01 :14 :32	EE	Oui.
263	01 :14 :33	P	On peut obtenir soit (P) ou bien on peut obtenir (C). Pourquoi il y a cette, comment je peux dire ? Pourquoi il n'y a pas la certitude de ce qu'on aura ?
264	01 :14 :45	EE	Ici monsieur
265	01 :14 :47	P	Oui. Kenneth
266	01 :14 :48	E8	Parce qu'il n'a pas encore lancé.
267	01 :14 :50	P	Parce qu'il n'a pas encore lancé. C'est vrai. Il n'a pas encore lancé.
268	01 :14 :55	E4	Ici monsieur
269	01 :14 :57	P	Oui.
270	01 :14 :58	E4	Même s'il lançait, ça dépend de la façon dont il a lancé.
271	01 :15 :01	P	Ça dépend de la façon dont il a lancé. Autre, oui.
272	01 :15 :08	E	Parce que l'événement est incertain.
273	01 :15 :10	P	L'événement est incertain. Oui je vous écoute. Oui.
274	01 :15 :20	E	Parce que le résultat est imprévisible.

275	01 :15 :23	P	Parce que le résultat est imprévisible. Mais pourquoi, pourquoi le résultat est imprévisible ? Oui.
276	01 :15 :30	E	Parce que le cauri a deux faces.
277	01 :15 :33	P	Parce que le cauri a deux faces. Oui.
278	01 :15 :42	E2	Oui. Puisque le cauri, le cauri a deux faces et on ne peut pas dire ce qui peut se passer dans quelques minutes. Donc sans avoir lancé le cauri, on ne peut pas dire ce qu'on obtiendrait.
279	01 :16 :00	P	Oui ; il y a des choses qu'on fait et on peut dire ce qui va se passer ou bien ?
280	01 :16 :05	EE	Oui
281	01 :16 :06	P	Et pourquoi dans ce cas-ci là on n'est pas capable de dire ce qui va se passer. (Silence) Il y a, il y a quelque chose
282	01 :16 :20	E4	Monsieur
283	01 :16 :21	P	Oui
284	01 :16 :22	E4	Répétez la question.
285	01 :16 :23	P	J'ai dit, il y a des choses qu'on fait et on peut dire ce qui va se passer, par exemple, je suppose, je mets de l'eau sur le feu et je mets du riz dedans, je vais obtenir du riz cuit ?
286	01 :16 :39	EE	Oui.
287	01 :16 :40	P	Ça c'est sûr.
288	01 :16 :41	EE	Oui.
289	01 :16 :42	P	D'accord ?
290	01 :16 :43	EE	Oui.
291	01 :16 :44	P	Maintenant, ça-là j'ai la certitude de ce que je veux obtenir. On est d'accord ? Maintenant ceci là, on n'est pas certain de ce qu'on va obtenir ? pourquoi ?
292	01 :16 :59	E14	Ça dépend de
293	01 :17 :04	P	Vous avez tous lancé tout à l'heure. Même si je faisais le tour de tous les élèves du CEG Agblangandan-là, c'est soit (P), soit (C). Pourquoi on n'est pas sûr que c'est (P), pourquoi on n'est pas sûr que c'est (C) ?
294	01 :17 :14	EE	Ici monsieur, ici monsieur.
295	01 :17 :17	P	Oui.
296	01 :17 :18	E4	Selon moi, je peux dire, c'est à cause de la forme, la forme du cauri.
297	01 :17 :22	P	La forme ?
298	01 :17 :23	E	Oui. La forme que le cauri a.
299	01 :17 :26	P	Ok. Oui
300	01 :17 :28	E14	C'est la différence entre les deux faces du cauri.
301	01 :17 :30	P	La différence entre les deux faces. (Silence) Autre réponse ? Il y a quelque chose que je veux que vous ne donnez pas. Oui.
302	01 :17 :44	E3	Parce que le cauri ne tombe pas de la même manière.
303	01 :17 :47	P	Parce que le cauri ne tombe pas de la même manière.

304	01 :17 :51	E	Ici.
305	01 :17 :52	P	Oui.
306	01 :17 :53	E	A cause de sa ...
307	01 :17 :55	P	A cause de sa ... Bon. Je suppose que vous sortez de cette salle, d'accord ?
308	01 :18 :10	EE	Oui.
309	01 :18 :12	P	Comment je peux exprimer ça. Selon vous, qui est-ce que vous allez rencontrer ?
310	01 :18 :25	EE	On ne sait pas.
311	01 :18 :26	P	Qui est-ce que vous allez rencontrer ?
312	01 :18 :29	EE	On ne peut pas le savoir.
313	01 :18 :31	P	Non. Qui est-ce que, on vous a dit, qui est-ce que vous allez rencontrer ?
314	01 :18 :35	E4	Si on sort de la classe ?
315	01 :18 :37	P	Oui.
316	01 :18 :37	E	Le mur.
317	01 :18 :38	P	Oui. Qui est-ce que vous allez rencontrer ?
318	01 :18 :40	E4	On peut rencontrer des élèves, soit autre chose.
319	01 :18 :42	P	Je te parle d'une personne que vous allez rencontrer premièrement.
320	01 :18 :45	EE	On ne sait pas, n'importe quoi, Le directeur, un professeur, des élèves, quelqu'un.
321	01 :18 :48	P	Pourquoi ? Pourquoi ? Pourquoi ce phénomène ?
322	01 :18 :53	EE	Parce qu'on ne sait pas ceux qui sont présents.
323	01 :18 :56	P	Il y a un mot que je veux que vous sortiez là, personne n'a encore sorti le mot. Cela est dû à quoi ?
324	01 :19 :03	E	A la probabilité.
325	01 :19 :04	P	Non. A la probabilité. On n'est pas encore là-bas. Le fait que je sors, d'accord ? je rencontre quelqu'un comme ça. Alors que je ne sais pas d'avance celui que je vais rencontrer. Vous voyez, donc, c'est-à-dire, je pose la question, d'ici, si vous sortez d'ici, qui est-ce que vous allez rencontrer ?
326	01 :19 :28	E4	Monsieur, on ne sait pas.
326 bis	01 :19 :30	P	On ne sait pas. Maintenant pourquoi ? Le
327	01 :19 :35	E2	Le pourquoi. C'est parce qu'on n'est pas un dieu.
328	01 :19 :37	P	On n'est pas un dieu.
329	01 :19 :38	E2	Oui
330	01 :19 :39	C	Non. Changeons d'exemple. Vous prenez le dé ou une pièce de monnaie. C'est la même chose que le cauri ! Vous prenez la pièce de monnaie, vous lancez, c'est pile ou face on dit non ?
331	01 :19 :53	EE	Oui ; tête-franc.

332	01 :19 :55	C	Tête-franc ou pile-face. Euh, et vous êtes d'accord qu'on ne peut pas, que le résultat est imprévisible.
333	01 :20 :04	EE	Oui
334	01 :20 :05	C	C'est ça non ?
335	01 :20 :06	EE	Oui.
336	01 :20 :07	C	Pourquoi c'est imprévisible ? Je prends le dé, vous jouez au ludo, est-ce que c'est ce que vous voulez que vous obtenez ?
337	01 :20 :19	EE	Non.
338	01 :20 :20	C	Et pourquoi ?
339	01 :20 :22	E11	Le hasard
340	01 :20 :24	C	Pardon ?
341	01 :20 :25	E11	Parce que c'est le hasard.
342	01 :20 :26	C	Parce que c'est le hasard ! Qui veut dire autre chose ?
343	01 :20 :29	E	Parce que c'est un jeu de chance.
344	01 :20 :32	C	Parce que le dé est lancé au hasard. Parce le cauri est lancé
345	01 :20 :36	EE	Au hasard.
346	01 :20 :37	C	On suppose que je prends le cauri comme ça, je mets ça là, je l'ai lancé oui ou non ?
347	01 :20 :40	EE	Oui
348	01 :20 :41	C	est-ce que c'est au hasard ça ?
349	01 :20 :43	E	Non.
350	01 :20 :44	E	Ça c'est savoir.
351	01 :20 :47	C	Ou bien quand vous voulez voler dans les jeux de ludo et vous déposez
352	01 :20 :53	E1	On dépose ça sèè.
353	01 :20 :55	C	Et on fait sèè, est-ce que c'est le hasard, est-ce que c'est lancer au hasard ça ?
354	01 :20 :59	EE	Non
355	01 :21 :00	C	Mais si on doit lancer effectivement au hasard, est-ce que vous pouvez donner le résultat ?
356	01 :21 :04	EE	Non.
357	01 :21 :05	C	Donc, c'est ça le problème. C'est parce que c'est lancé
358	01 :21 :08	EE	Au hasard
359	01 :21 :10	C	Au hasard. Sinon c'est le mot que le professeur cherche.
360	01 :21 :19	P	Bien. Vous avez fini par accepter que le résultat est dû au hasard. D'accord ? Bien. À cause du hasard, on ne peut pas prévoir le résultat. On ne peut pas savoir ce qui va arriver. Lorsqu'on prend un événement comme ça dont on n'arrive pas à prévoir le résultat mais dont on peut arriver à identifier tous les résultats possibles. Par exemple, le cauri, on sait que c'est soit (P), soit (C). Je prends par exemple le dé de ludo, on sait que je peux obtenir 1 ou 2 ou 3 ou 4 ou 5 ou 6. Je connais tous les résultats mais je ne sais pas ce qui va sortir. D'accord ?

			<p>lorsque j'ai des événements comme ça, je les appelle des expériences aléatoires, expériences aléatoires, c'est-à-dire, c'est des faits qui sont basés sur le hasard. On ne sait pas ce qui va sortir mais au moins on sait ce qui peut sortir. Vous voyez, on appelle ça expérience aléatoire. Je veux bien que chaque élève qui est dans la classe ici arrive à comprendre ce que je suis en train de dire. Ce que j'appelle expérience aléatoire. Je dis, c'est un fait, peut-être un phénomène ou bien quelque chose qui se passe dont vous pouvez prévoir, dont vous ne pouvez pas prévoir le résultat. Vous ne pouvez pas dire, c'est ça ce que ça va donner, c'est ça ce que ça ne va pas donner. Mais au moins vous connaissez les résultats possibles. Ça peut donner ça, ça peut donner ça, ça peut donner ça. On appelle ça expérience aléatoire. Chez qui ce n'est pas clair ? D'accord, Maintenant, je vous demande, est-ce qu'il y a quelqu'un parmi vous qui peut me donner un exemple d'expérience aléatoire. Un exemple d'expérience aléatoire.</p>
362	01 :23 :24	E3	Aléatoire. Que veut dire aléatoire ?
363	01 :23 :26	P	Que veut dire aléatoire ? Aléatoire, c'est
364	01 :23 :29	EE	Hasardeux.
365	01 :23 :30	P	Hasardeux. Merci. Lorsque vous payez par exemple votre portable, on peut mettre la musique sur le mode aléatoire ou bien on peut le mettre sur le mode successif et ça va jouer les chansons l'une après l'autre. Ça c'est le mode successif. Mais si vous mettez sur le mode aléatoire, ça peut prendre la première chanson, après ça peut prendre la vingtième chanson, après ça va prendre la
366	01 :23 :46	EE	La quatorzième,
367	01 :23 :48	P	Ceux qui utilisent l'appareil, ils ont ça. Donc voici ce qu'on appelle expérience aléatoire. Donc je voudrais qu'au moins deux ou trois personnes nous donnent un exemple d'expérience aléatoire.
368	01 :23 :57	C	On ne peut plus aborder la phase 1.3. On va s'arrêter là. D'accord, non. Soyez clair. Il dit, quand vous lancez le cauri, quand vous voulez lancer le cauri, vous n'êtes pas sûr du résultat mais vous êtes, vous connaissez les résultats possibles qui sont :
369	01 :24 :18	EE	(C) ou (P).
370	01 :24 :20	C	Et il dit pour ça, lancer le cauri pour obtenir ce qui apparaît est appelé expérience aléatoire.
371	01 :24 :31	EE	aléatoire
372	01 :24 :32	C	aléatoire. Et il demande en plus si pouvez donner maintenant d'autres exemples d'expériences aléatoires. Oui. Allez-y !

373	01 :24 :42	E2	Ludo.
374	01 :24 :43	E	Tête ou franc
375	01 :24 :44	C	Pardon.
376	01 :24 :45	E	Tête ou franc.
377	01 :24 :47	C	Tête ou franc. Oui. Pourquoi pas ? Mais il faut que ça soit bien formulé. Moi j'ai dit quoi ? Qu'est-ce qui est l'expérience aléatoire ? Lancer le cauri pour observer ce qui est apparu est une expérience aléatoire. Et chez toi, c'est quoi ?
378	01 :25 :06	E	Lancer
379	01 :25 :07	C	lancer
380	01 :25 :08	E	La monnaie
381	01 :25 :09	C	La pièce de monnaie
382	01 :25 :11	E	La pièce de monnaie pour observer l'image.
383	01 :25 :13	C	Pour observer ce qui va apparaître, est une expérience
384	01 :25 :16	EE	Aléatoire
385	01 :25 :17	C	Aléatoire. Qui en a encore ?
386	01 :25 :19	E	Comme vous avez dit, le ludo là, le dé.
387	01 :25 :22	E11	Lancer le dé pour obtenir un chiffre est une expérience aléatoire.
388	01 :25 :27	C	Aléatoire. Tout ça là, c'est lancer, lancer. Qu'est-ce peut donner qui n'est pas lancer ? Oui.
389	01 :25 :31	E1	Par exemple, le vote présidentiel.
390	01 :25 :33	C	Pardon
391	01 :25 :34	E1	Le vote.
392	01 :25 :34	C	Oui
393	01 :25 :35	E1	Pour élire quelqu'un.
394	01 :25 :37	C	Pour élire quelqu'un.
395	01 :25 :39	E1	Oui. Puisqu'on ne sait pas, euh
396	01 :25 :41	E14	La personne qui sera élue.
397	01 :25 :43	E1	Le candidat.
398	01 :25 :44	C	On ne se sait pas à l'avance le candidat qui va sortir.
399	01 :25 :47	E14	Mais on connaît
400	01 :25 :49	C	Ce n'est pas fini, mais ...
401	01 :20 :33	EE	Mais on connaît les les candidats
402	01 :20 :35	C	On connaît les
403	01 :20 :36	EE	Candidats
404	01 :20 :40	C	Les candidats, les les
405	01 :20 :53	E1	C'est un fait aléatoire.
406	01 :20 :54	C	Ce n'est pas un fait aléatoire. Nous sommes en mathématiques. C'est une expérience aléatoire. Le mot exact est une expérience aléatoire. Nous ne voulons pas parler des faits

			aléatoires. Nous voulons parler de quelque chose de clair qu'on appelle expérience aléatoire
407	01 :26 :14	EE	aléatoire
408	01 :26 :15	C	Aléatoire. D'accord ? Qui est une expérience dont on ne peut pas prévoir le résultat mais dont on peut
409	01 :26 :26	EE	Connaitre
410	01 :26 :27	C	Connaître les
411	01 :26 :28	EE	Les résultats possibles
412	01 :26 :30	C	Les résultats possibles. Ou bien, c'est bien ça hein ?
413	01 :26 :32	EE	Oui.
414	01 :26 :33	C	Donc c'est une expérience dont on ne peut pas
415	01 :26 :35	E	fixer
416	01 :26 :36	C	Prévoir, pas fixer. On ne peut pas
417	01 :26 :38	EE	prévoir
418	01 :26 :39	C	Prévoir avec certitude le résultat mais dont on peut connaître les résultats
419	01 :26 :46	EE	possibles
420	01 :26 :47	C	Possibles. C'est ça qu'on a appelé expérience
421	01 :26 :50	EE	aléatoire
422	01 :26 :51	C	Aléatoire.

ANNEXE 8 : Transcription T₂

SITUATION 1, PHASE 3

29 mars 2017, après-midi

EFFECTIF : 17

HEURE : 15h30 min

Comme dans la matinée, les élèves sont organisés en 5 groupes dont deux de quatre élèves et trois de trois élèves. Ils sont numérotés de E1 à E17 et gardent leur position de la matinée. Lorsque l'élève qui intervient est identifié, il est indiqué par son numéro. La lettre E signifie que l'élève qui intervient n'est pas identifié. Par EE, nous exprimons que plusieurs élèves (au moins deux) interviennent simultanément. La lettre P désigne le professeur. Dans la colonne des échanges verbaux, les points de suspension indiquent des passages qui n'ont pas pu être déchiffrés.

N°	TEMPS	ACTEURS	ECHANGES VERBAUX
001	00 :00 :49	P	Bonsoir tout le monde
002	00 :00 :50	EE	Bonsoir monsieur
003	00 :00 :52	p	Et cet après-midi, ça va ?
004	00 :00 :54	EE	Oui ça va monsieur.
005	00 :00 :56	P	J'espère que vous vous êtes bien reposé
006	00 :00 :59	EE	Oui.
007	00 :01 :01	P	Bien ce soir on va continuer ce qu'on a commencé le matin, mais avant ça, on va rappeler un peu ce qu'on a fait ce matin. Ça peut aller ?
008	00 :01 :20	EE	Oui.
009	00 :01 :22	P	Alors, qui va nous rappeler un peu ce qu'on a vu. Le peu de temps qu'on avait passé ensemble, ce qu'on a vu, qui est-ce qui va nous dire ça. Ou bien au moins ce de quoi on a parlé. Oui ; Pacôme.
010	00 :01 :40	E14	Ce matin, on a parlé du hasard et on a essayé de définir ce que c'est qu'une expérience aléatoire.
011	00 :01 :46	P	On a parlé du hasard et on a on a essayé de définir ce que c'est qu'une expérience aléatoire. C'est quoi une expérience aléatoire. Quelle est la définition qu'on a donnée de ça.
012	00 :01 :46	E14	C'est une expérience dont on ne peut pas prévoir le résultat mais dont on connaît les résultats possibles.

013	00 :02:00	P	C'est une expérience dont on ne peut pas prévoir le résultat mais dont on connaît tous les résultats
014	00 :02:04	EE	possibles
015	00 :02:05	P	Possibles. On est d'accord ?
016	00 :02:06	EE	Oui.
017	00 :02:06	P	Bien. J'en reviens à mon lancer de cauri qui est une expérience aléatoire. On avait dit, lorsqu'on lance le cauri, on ne peut pas savoir la face qui va sortir, ça peut être (P), ça peut être (C). Mais au moins on sait que c'est entre (P) et (C), soit ça donne (P), soit donne (C). On avait parlé d'autres expériences aléatoires, qui va me donner un autre exemple dont on avait parlé ce matin. Pas toujours le même groupe ! Ou bien, vous n'étiez pas les seuls ce matin non ?
018	00 :02:52	E	Non
019	00 :02:55	P	Oui. Rachelle !
020	00 :02:58	E1	On a parlé de lancer de pièce
021	00 :03:01	P	Lancer de pièce. Oui. Quels sont les résultats possibles d'un lancer de pièce. (silence) Les résultats possibles de lancers de pièces.
022	00 :03:19	E1	Ça peut être Tête ou franc.
023	00 :03:22	P	Ça peut être Tête ou franc. On a aussi parlé de, oui !
024	00 :03:30	E10	On a aussi parlé du lancer de dé.
025	00 :03:32	P	Oui. Et les résultats possibles sont :
026	00 :03:37	E	1, 2, 3, 4, 5, 6
027	00 :03:40	P	Toutes ces expériences-là, on les a appelées des expériences aléatoires, parce que le résultat est dû au hasard, on ne connaît pas le résultat mais au moins on peut prévoir les résultats possibles. Et pour le lancer de cauri, on a dit que les résultats possibles sont : (P), (C), c'est-à-dire la face plane ou la face courbe ; (Silence). Donc pour le lancer de cauri les résultats possibles sont (P)
028	00 :05:05	E14	et (C).
029	00 :05:09	P	Pour le lancer de pièce de monnaie, les résultats possibles sont :
030	00 :05:13	EE	Tête et franc
031	00 :05:15	P	Tête et franc. Pour le lancer d'un dé, les résultats possibles sont : 1, 2, 3, 4
032	00 :05:29	EE	5 et 6
033	00 :05:30	P	Lorsque je prends chacun des résultats possibles pour une expérience aléatoire donnée, chaque résultat possible est appelé éventualité, éventualité. Ça suit ? Quand je prends une expérience aléatoire, on sait qu'on ne peut pas prévoir le résultat mais on connaît tous les résultats possibles.

			Chaque résultat possible est appelé éventualité. Et l'ensemble des résultats possibles, c'est-à-dire l'ensemble contenant les résultats possibles, on appelle ça l'univers. L'ensemble dans lequel je vais mettre P et C, je vais appeler ça univers de l'expérience aléatoire. Ça fait deux nouveaux mots que nous venons de voir ce soir : il y a éventualité d'une expérience aléatoire et univers d'une expérience
034	00 :06:32	EE	aléatoire
035	00 :06:33	P	Aléatoire. Ça peut aller.
036	00 :06:36	EE	Oui monsieur
037	00 :06:40	p	On va écrire ça rapidement. C'est la synthèse de ce qu'on a fait ce matin. (Silence). On écrit probabilité ; 1. Vocabulaire des probabilités ; 1.1.1 expérience aléatoire, éventualité. Définition (silence)
038	00 :12:40	E14	S'il vous plait monsieur. Vous avez écrit tout résultat possible d'une expérience, on va ajouter aléatoire.
039	00 :12:50	P	Aléatoire oui. Ajoutez aléatoire. Tout résultat possible d'une expérience aléatoire,
040	00 :13:04	E4	Et nous qui avons écrit ? (Silence)
041	00 :16:43	P	Alors, on peut continuer
042	00 :16:45	EE	Oui monsieur.
043	00 :16:47	P	J'ai laissé les exemples parce que j'ai voulu que ça soit vous-même qui en trouvez. Je vais encore vous lire ce qui est au tableau. Définition. On appelle expérience aléatoire une expérience dont on ne peut pas prévoir avec certitude le résultat mais dont on connaît tous les résultats possibles. Mais on dit, tout, tout résultat possible d'une expérience aléatoire est appelé éventualité et l'ensemble des éventualités d'une expérience aléatoire est appelé univers des éventualités de cet expérience aléatoire. Maintenant on a pris d'exemple d'au moins ; on a pris d'exemple d'au moins
044	00 :17:34	E	Trois
045	00 :17:35	P	Trois expériences aléatoires. Je voudrais que vous arriviez à ressortir chaque éventualité de chacune de ces expériences aléatoires et l'univers de chacune de ces expériences aléatoires. Je prends l'expérience aléatoire le lancer de cauri, je prends l'expérience aléatoire le lancer d'une pièce, je prends l'expérience aléatoire le lancer de dé. Si quelqu'un a d'autres expériences aléatoires, il peut le

			dire, donner les éventualités et l'univers des éventualités. (Silence) Allez-y. Entre nous, il y a une ou deux personnes qui réagissent. Ce n'est pas bien
046	00 :18:44	E4	Je suis dedans.
047	00 :18:46	P	Hum, tu es dedans. Levez les doigts. Levez bien les doigts, je vais vous voir. Ou bien la question n'est pas assez claire.
048	00 :19:02	E3	C'est clair
049	00 :19:03	p	Chez qui ce n'est pas clair ? Oui Prince, vas-y !
050	00 :19:15	E10	On va prendre l'exemple du dé, du lancer de dé.
051	00 :19:20	P	Oui
052	00 :19:21	E10	On a les les résultats possibles : 1, 2, 3, 4, 5, jusqu'à 6. Maintenant l'ensemble, euh, les résultats possibles, les éventualités-là, sont, sont : 1 ;2 ;3 ;4 ;5 ;6. Maintenant les éventualités, c'est tout, le tout de 1 jusqu'à 6 est appelé univers des éventualités ? .
053	00 :19:51	P	L'ensemble contenant 1, 2, 3, 4, 5, 6 est appelé univers des éventualités de cette expérience aléatoire. Qui n'est pas d'accord ? Je veux celui qui n'est pas d'accord parce que c'est lui qui m'intéresse. Ceux qui sont d'accord là eux, ils ne sont pas dedans. Ou bien ce qu'il a dit n'est pas bien entendu. Tout le monde a entendu ce qu'il a dit ?
054	00 :20:26	EE	Oui.
055	00 :20:27	P	Inhein (interjection). Ce que je veux là, ce sont vos réactions. Est-ce que ce qu'il a dit est vrai ? c'est faux ? Est-ce qu'il y a quelque chose à ajouter ? quelque chose à reprocher ? Je veux votre avis. Si c'est vrai, vous dites que c'est vrai ; si c'est faux vous dites que c'est faux. Oui Pacôme.
056	00 :20:49	E14	Ce qu'il a dit est vrai.
057	00 :20:52	P	Ce qu'il a dit est vrai. Quelqu'un d'autre !
058	00 :21 :02	E2	Ici
059	00 :21 :03	P	Oui. Camir.
060	00 :21 :06	E2	Moi je contredis ce qu'il a dit.
061	00 :21 :09	P	Tu contredis ce qu'il a dit. Très bien. On y va.
062	00 :21 :09	E2	Si je comprends bien, il a dit que 1, 2, 3, jusqu'à 6 est l'éventualité. Sont des éventualités
063	00 :21:25	P	Il a dit : sont les éventualités.
064	00 :21 :27	E2	Sont les éventualités.
065	00 :21 :29	P	Les éventualités sont 1, 2, 3, 4, 5, 6

066	00 :21 :31	E10	J'ai dit que 1, 2, 3, 4, 5, 6 sont les résultats possibles de l'expérience. Maintenant, or on nous a dit que les résultats possibles sont les éventualités du lancer de dé, sont (1 2 3 4 5 6) et que les éventualités sont de [1 à 6].
067	00 :21 :40	P	Redis alors ce que tu as dit.
068	00 :21 :43	E10	J'ai dit que, on a ; l'expérience c'est le lancer de dé. Maintenant on a dit les résultats possibles, euh, les résultats possibles sont répartis comme suit 1, 2, 3, 4, 5 jusqu'à 6. Mais on a dit que tout résultat possible d'une expérience aléatoire est encore appelé éventualité. Donc les résultats possibles 1, 2, 3, 4, jusqu'à 6 sont appelés éventualités. Maintenant on a dit que l'ensemble des éventualités 1, 2, 3, 4, 5, 6 est l'ensemble des éventualités. De 1 jusqu'à 6, l'intervalle fermé de 1 à 6 est l'ensemble des éventualités de l'expérience aléatoire. D'où c'est l'univers des éventualités.
069	00 :22 :21	P	Voilà ce qu'il a dit. Oui allez-y.
070	00 :22 :24	E2	Par rapport à ce qu'il a dit.
071	00 :22 :29	P	Oui.
072	00 :22 :30	E2	Là maintenant, l'éventualité et l'univers, c'est les mêmes, c'est pratiquement les mêmes choses puisqu'il a dit 1, 2, 3 jusqu'à 6 sont des éventualités.
073	00 :22 :41	P	Oui.
074	00 :22 :42	E2	Et maintenant l'univers encore est 1, 2, 3, 4, 5, 6.
075	00 :22 :51	P	Il a dit intervalle fermé. Il a dit intervalle fermé de 1 à 6. C'est ça qu'il a dit hein !
076	00 :22 :56	EE	Oui
077	00 :22 :57	P	C'est comme ça non (écrivant l'intervalle au tableau).
078	00 :22 :58	EE	Oui.
079	00 :23 :00	E10	est l'univers.
080	00 :23 :02	P	est l'univers. Maintenant pour les éventualités, qu'est-ce que tu dis ? toujours intervalle ou bien ?
081	00 :23 :12	E10	On écrit 1, 2, 3, 4, 5, 6
082	00 :23 :14	P	Comment on écrit ça. On met ça dans un ensemble ? Ou bien on écrit ça simplement.
083	00 :23 :18	Elève à côté de E10	On écrit ça. On écrit ça.
084	00 :23 :18	E	Dans ensemble.

085	00 :23 :20	p	Je parle à celui qui a ...
086	00 :23 :22	E10	À moi. Euh, on écrit ça simplement.
087	00 :23 :25	P	On écrit ça simplement ou bien on met ça dans quelque chose ? dans accolade ?
088	00 :23 :29	E10	On met ça dans accolade.
089	00 :23 :29	E14	On écrit ça simplement.
090	00 :23 :31	P	On met ça dans accolade. Un, deux, trois, quatre, cinq, six. Réaction ? Oui. Réagissez. Les résultats sont toujours là. On dit tout résultat possible d'une expérience aléatoire est appelé éventualité. Tout résultat possible d'une expérience aléatoire est appelé éventualité.
091	00 :24 :16	E14	Ici.
092	00 :24 :17	P	Oui.
093	00 :24 :18	E14	Ce qui est là maintenant là, est comme un ensemble quoi, un ensemble d'éventualités. Déjà là ça forme l'univers.
094	00 :24 :25	p	Qu'est ce qui forme l'univers ? l'intervalle ou bien l'accolade ?
095	00 :24 :28	E14	Ce que vous aviez mis en bas.
096	00 :24 :31	P	L'accolade,
097	00 :24 :32	E14	Oui
098	00 :24 :33	P	C'est ça qui forme l'univers selon toi. Maintenant l'éventualité selon toi c'est quoi ?
099	00 :24 :36	E14	Si on doit écrire ça-là, ce serait sans accolade. Il faut que ça soit sans accolade.
100	00 :24 :40	P	Donne-moi un exemple d'une éventualité
101	00 :24 :44	E14	4
102	00 :24 :45	P	4 là on l'écrit comment ? on le met dans croché ou dans accolade ? Comment ?
103	00 :24 :49	E14	On peut le mettre dans accolade.
104	00 :24 :52	P	Je vais écrire hein, regardez bien, 4 dans accolade. ça là comment on lit ça ?
105	00 :24 :59	E10	Ensemble de 4
106	00 :25 :00	P	Ensemble 4. Plus précisément.
107	00 :25 :04	E	Ensemble solution.
108	00 :25 :06	P	Non. Ça a un nom plus particulier.
109	00 :25 :11	E14	Singleton 4
110	00 :25 :13	P	Singleton 4. Merci. Et ça là ?

111	00 :25 :17	EE	4, le nombre 4, c'est quatre.
112	00 :25 :20	P	Ça c'est le nombre 4. Et ça là ?
113	00 :25 :24	EE	4
114	00 :25 :25	P	Toujours 4
115	00 :25 :27	E10	Oui
116	00 :25 :28	P	C'est différent de ceci hein ! c'est quoi entre les trois c'est ceci, c'est ceci ou bien c'est ceci ? Ce que j'appelle éventualité ?
117	00 :25 :42	EE	Ici monsieur. Ici monsieur.
118	00 :25 :48	P	Et les autres ? Il y a, l'autre là n'est pas venue ?
119	00 :25 :52	E	Kenneth
120	00 :25 :58	P	Je prends plutôt là-bas. Sergéo.
121	00 :26 :04	E16	On choisit entre 4 et 4 entre parenthèse.
122	00 :26 :07	P	On choisit entre
123	00 :26 :08	E16	4 simple et 4 entre parenthèse
124	00 :26 :10	P	4 simple et 4 entre parenthèse. Est-ce qu'il y a une différence entre ce 4 et ce (4) ?
125	00 :26 :18	E16	Il n'y a pas de différence.
126	00 :26 :20	P	Il n'y a pas de différence. D'accord ? C'est 4 comme on l'écrit comme ça. Ça, ça-là, ça devient un ensemble, c'est différent. D'accord ? Maintenant entre les deux-là il n'y a pas un choix à faire et ça c'est la même chose on se comprend hein
127	00 :26 :41	EE	Oui
128	00 :26 :43	P	Maintenant, tu dis quoi ? On choisit ceci ou bien on choisit ceci ? Je vais même effacer l'autre, parce que ça et ça c'est la même chose. C'est ça ou bien c'est ça ? C'est là la question.
129	00 :27 :00	E16	4 simple.
130	00 :27 :02	P	4 simple, pourquoi ? Pourquoi c'est quatre simple ? Oui on doit avoir le pourquoi. Lorsque vous prenez le dé, lorsque vous prenez le dé, qu'est ce qui est marqué sur le dé ?
131	00 :27 :32	E10	Des, des, ils représentent les nombres par des pointillés.
132	00 :27 :36	P	Ils représentent les nombres par des pointillés.
133	00 :27 :39	E10	Oui.
134	00 :27 :42	P	J'ai un pointillé qui représente 1, c'est ça ?
135	00 :27 :44	E10	Oui.
136	00 :27 :44	P	Deux pointillés qui représentent 2.

137	00 :27 :46	EE	Deux
138	00 :27 :46	P	Trois pointillés qui représentent 3.
139	00 :27 :48	EE	Trois
140	00 :27 :49	P	Jusqu'à 6 ou bien ?
141	00 :27 :51	EE	Oui.
142	00 :27 :52	P	Si je lance le dé, puisque l'expérience est « lancer le dé et noter le chiffre qui apparaît sur la face supérieure », lorsque je lance et par exemple j'ai quatre pointillés, ce qui représente
143	00 :28:09	EE	Le chiffre 4.
144	00 :28:11	P	Le chiffre 4. D'accord ?
145	00 :28:12	EE	Oui.
146	00 :28:13	P	La définition dit, tout résultat possible d'une expérience aléatoire est appelé éventualité. Vous suivez ?
147	00 :28:24	EE	Oui.
148	00 :28:25	P	Ce que j'appelle résultat possible, c'est ce que j'obtiens lorsque je fais l'expérience. Mais ce que je peux obtenir, voilà, je peux obtenir un pointillé qui donne 1, deux pointillés qui donne 2, trois pointillés qui donne 3 et ainsi de suite, ainsi de suite. Lorsque je fais ceci, ça c'est un ensemble, l'ensemble contenant le résultat possible 4, c'est différent du résultat possible 4.
149	00 :28:58	EE	Oui.
150	00 :28:59	P	Vous voyez la différence. Le résultat possible, ce n'est pas, ce n'est pas l'ensemble. Ça c'est l'ensemble contenant ce résultat possible. Et ça c'est le résultat possible, un résultat possible. Ça c'est un résultat possible. Un résultat possible est 1, un résultat possible est 2, un résultat possible est 3 et ainsi de suite. Je vous repose la question. Quels sont ? Donnez-moi un exemple d'éventualité de cette expérience aléatoire. Oui Ghislaine.
151	00 :29:39	E8	Six
152	00 :29:40	P	Six, le six comment ? ensemble ou on écrit simplement.
153	00 :29:44	E8	Six simple
154	00 :29:45	P	Six simple. Tout le monde est d'accord hein.
155	00 :29:47	EE	Oui
156	00 :29:48	P	Chez qui ce n'est pas clair ? Ce n'est pas ceci mais plutôt ceci parce que quand je lance, imaginez même qu'on marque les chiffres sur ça. On marque les nombres 1, 2, 3,

			4, 5, 6, c'est ceci qui va apparaître, c'est qu'on va voir et non ceci. Lorsque je lance par exemple le cauris, la face que j'obtiens, c'est la face soit P ou bien C. Je dis seulement ce que je vois hein, un résultat possible, ce que je peux obtenir. D'accord ? Donc on revient alors à notre exemple. Si je prends l'expérience aléatoire « lancer le dé pour, comment je vais dire, noter le chiffre qui apparaît à la face supérieure, les éventualités sont ? Comment on va écrire ? Oui Landry.
157	00 :31:08	E11	On écrit séparément sans accolade
158	00 :31:10	P	On écrit séparément sans accolade 1, comme ça, 2, 3, 4, 5 et 6. Chacun de ces nombres représente un résultat possible, donc une éventualité. Maintenant quand je le mets dans un ensemble, on dit l'ensemble des éventualités d'une expérience aléatoire est appelé univers des éventualités de cette expérience aléatoire. L'univers sera alors quoi ?
159	00 :31:41	E17	Avec accolade
160	00 :31:41	E10	L'univers sera de l'intervalle [1 à 6]
161	00 :31:43	P	Lève-toi et dis ça bien.
162	00 :31:45	E10	L'univers serait l'intervalle de 1 jusqu'à 6.
163	00 :31:47	P	L'intervalle de 1 jusqu'à 6. Ok. Autre Réponse. Oui Pacôme.
164	00 :31:55	E14	Si on veut, on peut encore les mettre dans l'accolade
165	00 :31:58	P	Si on veut, on peut encore les mettre en accolade. Donc les deux résultats sont acceptés ?
166	00 :32:01	EE	Oui
167	00 :32:03	P	Autre réponse ? C'est intéressant. Autre réponse ? Donc tout le monde est d'accord que les deux résultats sont les mêmes ?
168	00 :32:14	EE	Oui.
169	00 :32:17	P	Selon vous est ce qu'on peut trouver 1,5 ici ? Oui Tohibou.
170	00 :32:29	E	Moi je préfère qu'on mette accolade.
171	00 :32:33	P	Toi, tu préfères qu'on mette accolade. Ma question à moi est : est-ce que les deux sont les mêmes ?
172	00 :32:37	EE	Non
173	00 :32:39	P	Pourquoi les deux ne sont pas les mêmes ? Oui Sergéo.
174	00 :32:43	E16	Parce que dans l'intervalle fermé 1 à 6, il y a 1,2 dedans, 1,3 jusqu'à 6. Mais dans l'accolade il n'y a pas 1,2 dedans.

175	00 :32:58	P	Il n'y a pas. Les deux ne sont pas les mêmes choses. D'accord ? Rappelez-vous quand on parlait de l'ensemble de définition, on dit que c'est l'ensemble des éléments de départ tel que leurs images existent dans l'ensemble d'arrivée. C'est l'ensemble, et on mettait ça, des éléments des éléments de l'ensemble de départ tel que $f(x)$ existe dans l'ensemble d'arrivée. Donc lorsqu'on parle d'ensemble déjà, vous devez faire recours à l'accolade. Ça aussi c'est un ensemble mais c'est différent. Ceci s'est risqué, vous voyez ce qui est dedans. Mais ceci est continue de 1 jusqu'à 6. On prend tous les nombres entre 1 et 6. Alors qu'ici on prend juste 1, 2, 3, 4, 5, 6. C'est ça-là qui est notre univers. J'espère qu'on s'entend hein?
176	00 :34:07	EE	Oui
177	00 :34:08	p	Est-ce qu'on s'entend ?
178	00 :34:10	EE	Oui monsieur.
179	00 :34:12	P	Donc si je prends, je résume hein. Je prends notre expérience aléatoire lancer de dé pour noter le chiffre obtenu sur la face supérieure, les éventualités sont : 1, 2, 3, 4, 5, 6 et l'univers des éventualités est l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Bon. Quelqu'un pour se lever et me donner un autre exemple : il donne l'expérience aléatoire, il cite les éventualités et, il donne l'univers des éventualités. Oui Rachelle.
180	00 :34:55	E1	L'exemple d'expérience aléatoire : Lancer de cauris.
181	00 :34:58	P	Lancer de cauri.
182	00 :35:02	E1	Les éventualités : P, C.
183	00 :35:06	P	Les éventualités P et C.
184	00 :35:08	E1	L'univers, l'ensemble $\{P, C\}$.
185	00 :35:15	P	L'ensemble P et l'ensemble C. Lancé de cauri là, c'est imprécis. Vous avez vu comment j'ai donné tout à l'heure ? J'ai dit, lancé de dé pour noter le chiffre obtenu sur la face supérieure ; lancé de cauri, c'est pour faire quoi ?
186	00 :35:37	E16	C'est pour obtenir la face supérieure
187	00 :35:39	P	Pour ?
188	00 :35:40	EE	Pour obtenir la face supérieure.
189	00 :35:46	P	Allez-y pour ? Lorsqu'on lance le cauri, qu'est-ce qu'on fait ?
190	00 :35:57	E1	Euh, lorsqu'on lance le cauri, c'est pour obtenir, pour observer la face supérieure.

191	00 :36:05	P	C'est pour observer la face supérieure. Donc l'expérience aléatoire c'est : lancer le cauri pour observer la face supérieure. Les éventualités sont : P et C.
192	00 :36:15	E1	P et C
193	00 :36:16	P	P et C. L'ensemble des éventualités est :
194	00 :36:20	E1, EE	L'ensemble {P, C}.
195	00 :36:22	P	L'ensemble P, l'ensemble C. Je prends le premier exemple que je note 1). L'expérience aléatoire « lancer un cauri pour observer la face supérieure ». Les éventualités sont P et C. L'univers des éventualités est {P, C}. Je vais écrire pour Prince. L'expérience aléatoire, l'expérience « lancer un dé pour obtenir le chiffre, pour observer, pour observer le chiffre qui apparaît sur la face supérieure ». Les éventualités sont : 1, 2, 3, 4, 5 et puis 6. L'univers des éventualités est {1, 2, 3, 4, 5, 6}. Quelqu'un pour me donner un dernier exemple. Mais pour ça-là nous n'allons pas écrire. Bien ! (silence) Euh, l'univers des éventualités généralement est noté Oméga. Quand je prends l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire, il est noté Oméga. On met ça en remarque. Ceci est notre Oméga pour cette expérience aléatoire. Ceci est notre Oméga pour cette expérience aléatoire. Donc je mets remarque : L'univers des éventualités d'une expérience aléatoire, d'une expérience aléatoire est généralement noté Oméga. Vous avez déjà vu ça une fois ? ça se note comme ça.
196	00 :41:55	E1	C'est Ohm.
197	00 :41:56	E	Oui. C'est Oméga.
198	00 :41:58	P	C'est Oméga. Ça c'est le grand Oméga, le petit est écrit sous forme de w. Il y a le petit et le grand Oméga. Ça c'est le grand Oméga. (Silence) Bien on va commencer, on va continuer. Pardon ! On va entamer la phase 1.3, c'est la troisième phase, dans laquelle vous allez encore utiliser les cauris. On va vous laisser un cauri par groupe. Vous allez l'utiliser comme vous voulez. Vous pouvez lancer comme vous pouvez ne pas lancer. D'accord ? Pourvu que vous réussissiez à répondre aux questions de la phase 1.3. Vous n'êtes pas obligés d'utiliser le cauri, mais si vous en avez besoin, vous pouvez l'utiliser. Quelqu'un pour nous lire la phase 1.3.
199	00 :45 :32	E6	Page 1 .3 : Dansou lance 4 fois de suite le cauris comme le devin lui a demandé. Ecris tous les résultats possibles que

			Dansou pourrait avoir ? Ecris les résultats possibles que Dansou pourrait avoir dans chacun des cas suivants a) 1 ^{er} cas : Dansou obtient deux fois la face P. b) 2 ^{ème} cas : Dansou obtient au moins deux fois la face P. 3 ^{ième} cas : Dansou obtient au plus une fois la face P.
200	00 :46 :10	P	Bien. Voilà ce qu'on nous demande maintenant. On dit, Dansou lance 4 fois de suite le cauris comme le devin lui a demandé, on demande d'écrire tous les résultats possibles que Dansou pourrait avoir. Ça suit ?
201	00 :46 :27	EE	Oui
202	00 :46 :28	P	Il lance 4 fois, on demande tous les résultats possibles qu'il pourrait avoir ? (silence) Il lance quatre fois et on demande tous les résultats possibles qu'il pourrait avoir. C'est clair ? Ça peut aller chez tout le monde hein.
203	00 :47 :08	EE	Oui
204	00 :47 :06	P	Si ce n'est pas clair, est-ce qu'il y a une question qui n'est pas claire pour quelqu'un ? On dit encore d'écrire les résultats que Dansou pourrait avoir dans les cas suivants 1 ^{er} cas : Dansou obtient 2 fois la face P, c'est-à-dire quels sont les cas, les résultats dans lesquels on pourrait retrouver deux fois la face P. Donc vous listez ces résultats. Les résultats dans lesquels Dansou obtient au moins 2 fois la face P. Les résultats dans lesquels Dansou obtient au plus une fois la face P. Voilà le travail qu'on vous demande de faire.
205	00 :47 :52	P	Je peux lancer ?
206	00 :47 :53	EE	Oui
207	00 :47 :54	P	Ou bien, il y a de questions ? S'il n'y a pas de question, c'est lancé. Vous avez 10 minutes de travail en groupe. Vous allez finir à 16h 28. Voilà ! Je vous ai dit si vous trouvez nécessaire de lancer le cauri pour répondre aux questions, vous pouvez le faire. (Fin à 00:48:20)
208	00 :48 :24		<u>Discussion dans le groupe 3</u> E9 et E8 ont travaillé ensemble et E10 a travaillé seul pendant les trois premières minutes. E9 : Travaillons et cessons de nous amuser (en goun) E10 (00 :53 :12) : Et la question, je n'ai pas retrouvé ma feuille. Comment je peux travailler ? (la feuille a fini par être retrouvée chez le professeur) E10 (00 :53 :40): Ecris les résultats possibles que Dansou pourrait avoir dans chacun des cas suivants..

			<p>E8, E9 (00 :53 :43) : Nous avons déjà fait ça. Toi tu dormais ? (En goun)</p> <p>E10 (00 :53 :47) : Non. Vous avez déjà fait le premier cas ? (en goun).</p> <p>E9 : (00 :53 :50) C'est de ça que je parle. (En goun)</p> <p>E8 : On comprend bien le premier cas.</p> <p>E10 : Dansou obtient deux fois la face P. Ecris les résultats possibles que Dansou pourrait avoir.</p> <p>E10 (00 :54 :12): S'il vous plait monsieur. Est-ce que vous pouvez nous expliquer ça, on n'a pas bien compris.</p> <p>P : C'est qu'on veut les résultats que vous avez écrits. D'accord ? Dedans qu'on voit qu'il y a deux faces (P).</p> <p>E9 (00 :54 :27): Donc il faut qu'on ait deux faces (P) dans le résultat. (En goun).</p>
209	00 :54 :32	P	<p>Pour la deuxième question, il y en a qui n'ont pas bien compris. Ce qu'on veut de vous, c'est qu'on a dit, écrire les résultats possibles que Dansou pourra avoir dans chacun des cas suivants. Dansou obtient deux fois la face (P). Dansou a lancé le cauri quatre fois bien sûr. D'accord ? Et il a noté les résultats possibles. Maintenant dans ces résultats, ceux dans lesquels on voit que Dansou a obtenu deux fois la face (P). Ça suit ?</p>
210	00 :55 :04	EE	Oui
211	00 :55 :05	P	<p>Deuxième cas, ceux dans lesquels, on a vu qu'il a obtenu au moins deux fois la face (P) et l'autre Dansou a obtenu au plus une fois la face (P). Donc vous listez les résultats. C'est ce qu'on veut.</p>
212	00 :55 :12	EE	D'accord.
213	00 :58 :25	P	Je pense qu'on peut s'arrêter là hein.
214	00 :58 :27	E	Oui monsieur.
215	00 :58 :28	P	<p>Efface-moi le tableau. On va désigner un groupe. Le groupe ira au tableau et on va réagir par rapport aux réponses proposées par, par le groupe en question. Quel groupe veut bien aller au tableau ?</p>
216	00 :58 :49	EE	Ici. Ici monsieur
217	00 :58 :51	P	Tous les groupes veulent aller au tableau.
218	00 :58 :54	EE	Oui.
219	00 :58 :59	P	Le groupe de Fadil, personne ne veut aller au tableau ?
220	00 :59 :05	E4	Tous les groupes veulent aller au tableau.
221	00 :59 :16	P	<p>Je vais désigner ce groupe. Vous écrivez ce que vous avez fait. Tout ce que vous avez fait : première question, deuxième question, a) b) c).</p>

			(Silence) Mets phase 1.3, écris ici. (Silence) Phase 1.3. Mets réponses obtenues. (long silence pendant que E15 écrit les réponses de son groupe au tableau).
222	01 :04 :23	P	Bon ! Voilà ce que le groupe n°5 a proposé. Réaction par rapport à la première question qui dit d'écrire tous les résultats possibles que Dansou pourrait avoir lorsqu'il lance 4 fois de suite le cauris. Réaction ? Oui Camir.
223	1 :04.52	E2	En première position ce que moi j'aimerais souligner, c'est qu'il a écrit PCPC et il a écrit CPCP. C'est encore les mêmes choses
224	1 :05.02	P	Il a écrit PCPC et il a écrit PCPC. C'est encore les mêmes choses. Pourquoi toi, tu dis que c'est encore les mêmes choses ?
225	1 :05.13	E2	Je crois que c'est deux P et deux C dans les deux cas.
226	1 :05.24	P	Je prends un exemple. Je prends le dé. D'accord ? Je lance par exemple, je suppose, vous voyez quand on joue le ludo et on obtient 6, on rejoue encore. Je suppose que c'est un seul dé, quand on obtient 6, on va encore rejouer.
227	1 :05.47	EE	Rejouer
228	1 :05.48	P	On va encore rejouer. Supposons qu'on doit jouer, déjà deux fois, ça me suffit pour avoir ce que je veux. On va jouer deux fois et c'est quand on va obtenir 6 deux fois qu'on va jouer 3 fois. Arrêtons-nous aux deux. Celui qui joue et obtient peut-être 6 et rejoue et après il obtient 2. Celui qui joue obtient 2 et après il obtient 6. Selon vous, ça serait le même résultat ?
229	1 :06 :20	EE	Non
230	1 :06 :23	P	Pourquoi ce n'est pas le même résultat ? Qui a dit que ce n'est pas le même résultat ? Pourquoi ?
231	1 :06 :29	E14	Normalement quand il obtient 2, il ne va pas rejouer.
232	1 :06 :33	P	Non tu n'as pas bien compris. Il rejoue, il joue normalement deux fois. C'est quand il trouve deux 6, ce qu'on appelle double là, qu'il joue une troisième fois. On reste dans les deux cas de départ. Lorsqu'il joue il obtient 2 et après. Non ! Lorsqu'il joue 6 d'abord et après il obtient 2. Celui qui joue et d'abord, il obtient 2 et ensuite 6. Est-ce que c'est le même résultat ?
233	01:06 :58	EE	Oui. C'est le même résultat.
234	01:07 :01	E10	Parce que s'ils veulent, le jeu consiste à pousser les pillons. Maintenant si

235	01:07 :07	P	Non. Là tu veux entrer déjà dans comment on joue le jeu. Nous on parle juste des résultats qu'on obtient, c'est-à-dire des éventualités.
236	01:07 :16	E10	Ein. Donc ça fait que la somme va donner le même nombre.
237	01:07 :18	P	Est-ce qu'on a dit qu'on veut faire la somme ?
238	01:07 :21	EE	Non.
239	01:07 :22	P	Restez juste dans le cas mathématique, c'est-à-dire d'expérience aléatoire, des éventualités. Ce que j'appelle résultat possible, c'est ce que je peux obtenir. Lorsque je lance le dé deux fois de suite, je peux obtenir 6, 2. Est-ce c'est le même lancer qui permet d'obtenir 2, 6 ? (Silence) Ce n'est pas clair. Lorsque, c'est-à-dire, lorsque je, je lance une seule fois, je peux obtenir 1, 2, 3, 4 ou 5 ou 6. C'est-à-dire c'est 6 résultats que je peux avoir quand je lance une fois. Mais quand je lance deux fois de suite, d'accord ? Je peux obtenir 6, 2. 6 d'abord et 2 après. Est-ce que c'est la même chose ? C'est-à-dire, est-ce que cette éventualité est la même chose que l'éventualité où j'obtiens 2 d'abord et 6 ensuite ?
240	01:08 :27	EE	Non.
241	01:08 :29	P	Est-ce que le résultat possible 2 d'abord, 6 après est le même que le résultat possible 6 d'abord et 2 après ? Je ne sais pas si vous êtes en train de comprendre ma question.
242	01:08 :42	EE	Oui
243	01:08 :43	P	Parce que l'éventualité c'est un résultat possible. On est d'accord que par exemple que quand je lance le dé deux fois, 1 et 2 c'est un résultat possible.
244	01:08 :53	EE	Oui
245	01:08 :54	P	Ça c'est un résultat possible comme 3,4, comme 5, 6, comme ... Par exemple si je prends tête-franc, tête d'abord et le franc après c'est un résultat possible si je lance deux fois. Maintenant le résultat possible tête et franc et franc et tête, est-ce que les deux sont les mêmes ?
246	01:09 :20	EE	Non.
247	01:09 :24	P	Il faut que vous soyez convaincus de ça. Si vous n'êtes pas convaincus de ça, on ne va pas retourner là-bas. Est-ce que c'est le même ? Oui Pacôme.
248	01:09 :37	E14	Non ce n'est pas les mêmes.
249	01:09 :39	P	Pourquoi ?
250	01:09 :40	E14	Il suffit juste de regarder. On ne peut pas s'intéresser à la somme ou bien. On regardera 2, 6 et 6, 2 comme résultats possibles.

251	01:09 :51	P	On regarde juste les chiffres ou bien ce qu'on obtient ?
252	01:09 :54	E14	Oui ce qu'on obtient là
253	01:09 :56	P	Donc on ne s'attaque pas à la somme. On est d'accord. Je prends, je prends par exemple ici, on regarde juste les résultats qu'on obtient. Le problème ici c'est que c'est lancer de suite. Je lance d'abord une première fois, je lance d'abord une première fois, je note ce que j'ai obtenu. Je lance une seconde fois, je note ce que j'ai obtenu. Ça c'est un résultat. Je peux obtenir tête d'abord et franc après, mais je peux obtenir franc d'abord et tête après. Vous voyez. On dit que l'éventualité c'est un résultat possible. Le résultat possible franc d'abord et tête après ce n'est pas le même que le résultat possible tête d'abord et franc après. Qui n'est pas convaincu. Que celui qui n'a pas compris lève le doigt hein. Je vais lui expliquer. (Silence) Tout à l'heure lorsqu'on a demandé de lister les résultats possibles. D'abord, je ne vais même pas aborder là. Je prends la phase 1. 1 là où on avait dit qu'il a lancé 3 fois et il a obtenu C, C et C et on demande la 4 ^{ème} fois ce qu'il obtiendra. Ça suit ?
254	01 :11 :31	EE	Oui
255	01 :11 :31	P	Les CCC là, ça c'est la première fois ce qu'il a obtenu, la 2 ^{ème} fois ce qu'il a obtenu ; 3 ^{ème} fois ce qu'il a obtenu ; 4 ^{ème} fois on a dit qu'il peut obtenir C comme il peut obtenir P. On est d'accord ?
256	01 :11 :49	EE	Oui
257	01 :11 :49	P	Les deux-là, chacun représente quoi ?
258	01 :11 :55	E	Un résultat possible.
259	01 :11 :56	P	Un résultat possible, donc une éventualité. Quelque chose qu'on pourrait a
260	01 :12 :00	EE	avoir.
261	01 :12 :02	P	Maintenant, imaginez que premièrement quand il avait lancé, c'est P qu'il avait obtenu. D'accord ? Et après il a obtenu C, et C ceci qu'il obtient, il obtient d'abord C après C, après C et après P. Par contre ceci il obtient, il obtient d'abord P, après C, après C, après C. Les deux ne sont pas les mêmes, puisque, ce n'est pas, les deux sont des résultats possibles différents. Vous voyez, ceci c'est possible, ceci aussi, c'est possible. Est-ce que vous voyez ?
262	01 :12 :54	EE	Oui.
263	01 :12 :55	P	Ça suit ?
264	01 :12 :56	EE	Oui.

265	01 :12 :57	P	Accrochez-vous à la notion de résultat possible, ça là on peut l'avoir, ça aussi on peut l'avoir mais on ne peut pas mélanger les deux et dire que c'est la même chose. Imaginez par exemple qu'on avait marqué, je suppose, c'est-à-dire, le fait qu'on avait lancé le dé après les autres nous met dans la notion d'ordre. Il y a, c'est ordonné l'un après l'autre, après l'autre puis après l'autre. Vous voyez ?
266	01 :13 :46	EE	Oui
267	01 :13 :47	P	Quand je prends par exemple notre pièce. Je lance deux fois de suite. Lorsque j'obtiens « tête », « franc », c'est un résultat possible ; lorsque j'obtiens « franc », « tête », c'est aussi un résultat possible. Je n'ai pas dit qu'on mélange les deux tout simplement parce que c'est les mêmes. Ça c'est possible ; ça aussi c'est possible. Si on trouve aussi « tête », « tête », on dira que c'est possible. C'est tout ce qu'on veut. Donc on veut que vous listiez les éventualités. D'accord ? Bien ! ça peut aller ?
268	01 :14 :18	EE	Oui.
269	01 :14 :22	p	Bien ! C'est bon ?
270	01 :14 :24	EE	Oui.
271	01 :14 :26	P	Maintenant on revient à leur réponse. Réaction ? Bon ! Autres réactions puisque c'est une réaction qui nous a amené là-bas. Oui Rachelle.
272	01 :14 :50	E1	D'après ce que vous venez de dire, on peut aussi trouver PP et CC.
273	01 :14 :55	P	On peut aussi trouver PP
274	01 :14 :58	E1	CC et CCPP
275	01 :15 :00	P	et CCPP (Silence). Après ? Est-ce qu'il y a d'autres résultats qu'on peut trouver ? Oui.
276	01 :15 :27	E14	On peut trouver PCPP.
277	01 :15 :30	P	PCPP. Ce n'est pas dedans ?
278	01 :15 :34	EE	Non.
279	01 :15 :35	P	Hein ? Tu as encore trouvé quoi ?
280	01 :15 :37	E14	PCPP
281	01 :15 :38	P	PCPP
282	01 :15 :40	EE	CC
283	01 :15 :41	P	On va les écrire. Ça a donné CCPP, CCPC, PPCP, CPPP, CPCP.
284	01 :15 :57	E	Ici monsieur.
285	01 :15 :59	P	... CCCC
286	01 :16 :03	E	Ici monsieur.
287	01 :16 :05	P	... PCCP. Oui Luc.
288	01 :16 :09	E9	CPPC

289	01 :16 :11	P	CPPC. Oui Mohamed
290	01 :16 :22	E3	CPCC
291	01 :16 :25	P	CPCC. Essayez de vérifier si ce n'est pas encore là hein ?
292	01 :16 :29	EE	Oui.
293	01 :16 :37		Est-ce qu'il y en a encore ?
294	01 :16 :40	EE	Oui.
295	01 :16 :41	E	PCCP
296	01 :16 :44	P	PCPC ?
297	01 :16 :45	E	Oui (silence)
298	01 :17 :00	P	Je vous suis. Est-ce qu'il y en a encore ? S'il y en a encore donnez-les.
299	01 :17 :05	E	Ici monsieur.
300	01 :17 :06	P	Oui
301	01 :17 :07	E	CPPC
302	01 :17 :08	P	CP
303	01 :17 :09	E	CPPC
304	01 :17 :11	E14	C'est déjà là. Déjà.
305	01 :17 :12	P	C'est déjà là (Silence). Est-ce que ça reste ? d'autres résultats qu'on peut obtenir ?
306	01 :17 :50	EE	CPPP
307	01 :17 :52	P	CPPP. C'est ça ? Vous êtes sûr que ce n'est pas dedans ?
308	01 :18 :02	EE	Non. Ce n'est pas dedans.
309	01 :18 :04	E	CCPC
310	01 :18 :05	P	CC
311	01 :18 :05	E	PC
312	01 :18 :07	P	PC hein.
313	01 :18 :10	E14	PCC, PCCC
314	01 :18 :13	P	PCCC
315	01 :18 :15	EE	C'est dedans. C'est déjà là.
316	01 :18 :17	E	Non
317	01 :18 :18	EE	PPPC, PPCP, ...
318	01 :18 :40	P	Ce n'est pas dedans hein. Ça reste ? Je vous écoute. (Silence) Oui.
319	01 :19 :02	E	PPCP
320	01 :19 :03	EE	PPCP, ...
321	01 :19 :12	P	PPCP
322	01 :19 :13	E	Oui.
323	01 :19 :14	EE, P	P, C, ..., ça reste, c'est fini.
324	01 :19 :37	E3	Ça reste.
325	01 :19 :39	P	Est-ce que ça reste. (Silence) S'il y en a, donnez ?
326	01 :19 :52	E14	C'est fini.

327	1 :19 :53	P	C'est fini. Qu'est-ce prouve que c'est fini. Est-ce que ça reste ? Selon vous. Parce qu'il faut être sûr que ça reste ou bien que ça ne reste pas avant de s'arrêter. Qu'est-ce qui vous donne l'assurance que ça ne c'est fini ?
328	1 :20 :13	E3	Rien
329	1 :20 :14	E	Parce que
330	1 :20 :15	E4	On a vérifié les résultats
331	1 :20 :19	P	Vous avez vérifié. Bon je vous apprends comment on peut être sûr du résultat, enfin d'avoir tout donné. Suivez très bien. Je je pars d'un lieu. J'ai un cauri que je lance, je peux obtenir C ou bien P. La première fois, j'ai alors deux possibilités : soit C, soit (L'enseignant veut réaliser l'arbre de choix)
332	1 :20 :53	E	P
333	1 :20 :54	P	On est d'accord ?
334	1 :20 :56		Oui
335	1 :20 :57	P	On suppose que j'ai obtenu C. Lorsque j'obtiens C, je fais une deuxième fois, je peux obtenir soit P, soit
336	1 :21 :07	EE	C
337	1 :21 :07	P	Ça c'est une deuxième fois. Si j'ai, si j'obtiens P, je lance une deuxième fois encore, je peux obtenir soit P, soit
338	1 :21 :15	E	C
339	1 :21 :19	P	Je continue ?
340	1 :21 :20	E	Oui.
341	1 :21 :21	P	Je viens là. J'ai obtenu C premièrement, P deuxièmement. Je lance une troisième fois ; je peux obtenir C ou bien
342	1 :21 :30	EE	P
343	1 :21 :31	P	J'ai obtenu CC, je lance une troisième fois. Je peux obtenir C ou bien
344	1 :21 :37	EE	P
345	1 :21 :38	P	J'ai obtenu PC ; je lance une troisième fois, je peux obtenir
346	1 :21 :42	EE	C et P
347	1 :21 :43	P	C ou bien
348	1 :21 :43	E	P
349	1 :21 :45	P	J'ai obtenu PP ; je lance une troisième fois, je peux obtenir
350	1 :21 :47	E10	C ou P.
351	1 :21 :48	P	C ou P. J'ai obtenu CPC ; je lance une quatrième fois, je peux obtenir
352	1 :21 :54	E	P, C
353	1 :21 :55	P	C ou bien
354	1 :21 :56	EE	P
355	1 :21 :57	P	C'est ça hein

356	1 :21 :58	E	Oui
357	1 :21 :59	P	J'ai obtenu CPP, je lance une quatrième fois, je peux obtenir C ou bien P. Et même chose : C ou bien P, C ou bien P, C ou bien P, C ou bien P, C ou bien P et puis C ou bien
358	1 :22 :17	E	Ou bien P.
359	1 :22 :19	P	Les résultats possibles alors ici j'ai CPCC, ici j'ai CPC et P ; ça suit ?
360	1 :22 :30	EE	Oui
361	1 :22 :31	P	Je prends le chemin-là jusque là-bas. Ça fait CPCC. Ici j'ai CPCP ; ici j'ai CPPC, CPPC
362	1 :22 :44	E	CCP
363	1 :22 :47	P	Ici j'ai ?
364	1 :22 :47	EE	CCPP
365	1 :22 :50	P	CCP et puis P Et ici ?
366	1 :22 :56	EE	CCCC
367	1 :22 :58	P	CCCC et ici ?
368	1 :23 :01	EE	CCCP
369	1 :23 :05	P	CCCP et ici ?
370	1 :23 :07	EE	CCPC
371	1 :23 :09	P	CCPC, ici ?
372	1 :23 :13	EE	CCPP
373	1 :23 :15	P	CCPP, et ici ?
374	1 :23 :17	EE	PCPP
375	1 :23 :20	P	PCP et puis ? J'ai laissé un.
376	1 :23 :25	E	Ici
377	1 :23 :26	P	J'ai laissé ici.
378	1 :23 :27	EE	Oui.
379	1 :23 :29	E	Ça fait PCCC
380	1 :23 :30	P	Il y a
381	1 :23 :32	EE	PCCC
382	1 :23 :35	P	PCC et puis ?
383	1 :23 :37	EE	C
384	1 :23 :38	P	C
385	1 :23 :41	EE	PCCP
386	1 :23 :45	P	PCC
387	1 :23 :46	EE	P
388	1 :23 :49	EE	PCPP
389	1 :23 :50	P	PC
390	1 :23 :51	EE	PP
391	1 :23 :56	P	Je suis là.

392	1 :23 :56	EE	Oui
393	1 :23 :57	P	PCP
394	1 :23 :58	EE	C
395	1 :23 :59	P	Après je suis là.
396	1 :24 :01	EE	PCPP
397	1 :24 :02	P	PCPP. Après je suis là.
398	1 :24 :04	EE	CPCC
399	1 :24 :07	P	CPCC. Après je suis là.
400	1 :24 :09	EE	PPCP
401	1 :24 :10	P	PPCP. Après je suis là.
402	1 :24 :16	EE	PPCC
403	1 :24 :19	P	Et après je suis là.
404	1 :24 :20	EE	PPPP
405	1 :24 :25	P	Voilà tous les résultats. Il y en a combien ? On va compter 1, 2
406	1 :24 :33	P et EE	1 ,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15, et puis 16.
407	1 :24 :47	P	Voilà il y a 16 résultats possibles. Donc il y a 16 éventualités. Nous, on a obtenu combien ?
408	1 :24 :53	E3	16.
409	1 :24 :55	P	16. ça veut dire qu'on a fini. Donc on n'était pas sûr qu'on a avait fini, alors que si on fait comme ça, on allait être sûr qu'on a obtenu tous les
410	1 :25 :04	EE	résultats.
411	1 :25 :06	P	Et ceci, on appelle ça, arbre de choix, l'arbre de choix. (silence) Ça peut aller ?
412	1 :25 :20	EE	Oui.
413	1 :25 :23	P	On va faire..., De tous les résultats possibles alors, on fait tout ceci ajouté à tout ceci. Et on va ... (silence, partie non audible). Suivez-moi
414	1 :26 :20	EE	CPCC
415	1 :26 :22	P	Une seule personne.
416	1 :26 :24	E4	CPCC
417	1 :26.26	P	CPCC
418	1 :26.28	E4	CPCP
419	1 :26 :30	P	CP
420	1 :26 :31	E4	CP
421	1 :26 :32	P	CP
422	1 :26 :33	EE	CPPC
423	1 :26 :34	P	Une seule personne.
424	1 :26 :36	E	Vous avez écrit

425	1 :26 :38	P	Oui.
426	1 :26 :40	E4	Maintenant vous écrivez CPPC
427	1 :26 :42	P	CP
428	1 :26 :43	E4	PC
429	1 :26 :44	P	C'est bon ?
430	1 :26 :45	E4	Oui.
431	1 :26 :46	P	Après
432	1 :26 :47	E4	CPPP
433	1 :26 :48	P	C
434	1 :26 :49	EE	PPP
435	1 :26 :50	P	Après
436	1 :26 :51	E4	CCCC
437	1 :26 :52	P	CCC
438	1 :26 :53	E3, E4	C
439	1 :26 :54	P	C encore. Après
440	1 :26 :55	E4	Oui. CCCP
441	1 :26 :56	P	CCC
442	1 :26 :57	E3, E4	P
443	1 :26 :58	P	Après ?
444	1 :26 :59	E4	CCPC
445	1 :27 :00	P	Suivez avec lui hein
446	1 :27 :05	E4, EE, P	CCPC, CCPP, PCCC, PCCP, PCPC, PCPP, PPCC, PPCP, PPPC, PPPP
447	1 :27 :56	P	Un, deux, trois, quatre, cinq, six, sept, huit, neuf, dix, onze, douze, treize, quatorze, quinze et puis seize résultats possibles. Voilà tous les résultats possibles que Dansou pourrait avoir. On demande maintenant dans les autres questions les résultats dans lesquels il a obtenu deux fois P, les résultats dans lesquels il a obtenu au moins deux fois P. c'est ça hein ?
448	1 :28 :26	E3	Au plus
449	1 :28 :27	P	Au plus une fois la face P. Alors lui, il a dit qu'on a : PPCC, CCPP, CPCP et PCPC. Vu qu'on connaît les cas possibles, est-ce qu'on va s'arrêter là ?
450	1 :28 :50	E	Non !
451	1 :28 :56	P	Là où on a deux fois la face P.
452	1 :28 :58	E	On a PPCC.
453	1 :29 :00	P	Il a déjà écrit ça.
454	1 :29.02	EE, P	CPPC, PCCP, ...
455	1 :29.51	P	Quoi encore ?
456	1 :29.52	E	C'est fini.
457	1 :29.52	P	C'est fini ?
458	01 :29 :53	E14	Oui. (silence)

459	01 :29 :55	P	C'est déjà suffisant. Oui ? C'est bon ?
460	01 :30 :03	EE	Oui.
461	01 :30 :05	P	On est là. Ici on demande au moins 2. Ça veut dire qu'on aura CPCP, CPPP, PCPC déjà et ici ?
462	01 :30 :16	E	Un
463	01 :30 :17	P	Le minimum c'est
464	01 :30 :19	EE	Deux
465	01 :30 :20	P	Donc on peut avoir
466	01 :30 :21	EE	Trois
467	01 :30 :22	P	Trois ou même ?
468	01 :30 :24	E	Quatre
469	01 :30 :24	P	Alors, donc ceci n'est pas dedans, ceci est dedans. Est-ce qu'il a été écrit ? CPCP
470	01 :30 :35	E3	Oui
471	01 :30 :36	P	Y a ceci ?
472	01 :30 :38	EE	Oui.
473	01 :30 :39	P	Ah ici. Ok, Ok. Ça vient jusqu'ici. D'accord. Donc il a déjà mis CPCP. Alors ceci ?
474	01 :30 :57	E	Non
475	01 :30 :58	P	Donc, on ira jusqu'ici. CPPC. Après, ceci est dedans ?
476	01 :31 :09	EE	Non.
477	01 :31 :11	P	Est-ce que ceci est dedans ?
478	01 :31 :13	EE	Oui.
479	01 :31 :15	P	On a dit que le minimum, c'est deux. Si ce n'est pas deux, c'est trois ou bien c'est quatre. Donc ceci est bel et bien dedans. CPPP. Ceci non, non, non. Au moins deux.
480	01 :31 :36	E	CC
481	01 :31 :37	P	Et ceci ?
482	01 :31 :37	E	Oui, c'est dedans.
483	01 :31 :41	P	Sinon ceci PCCP.
484	01 :31 :47	EE	Non.
485	01 :31 :47	P	Donc, on l'ajoute. PCCP. Ceci PC et PC.
486	01 :31 :54	E	Oui
487	01 :31 :55	P	Déjà ceci. C'est ça ici non ?
488	01 :32 :04	EE	Non. C'est dans le ...
489	01 :32 :05	P	Après PCPP. Et ceci ?
490	01 :32 :15	EE	Oui.
491	01 :32 :16	P	PPCC
492	01 :32 :18	E	Oui
493	01 :32 :20	P	Oui. Déjà ici. Et ceci ?
494	01 :32 :22	EE	Déjà
495	01 :32 :25	P	Déjà. Et ceci ? PPCP. PPCP et PPPP

496	01 :32:43	EE	Oui
497	01 :32:43	P	C'est bon déjà. Voilà au moins deux fois la face P. Troisième cas, au plus une fois la face
498	01 :32:52	E	P
499	01 :32:54	P	P. Au plus, ça veut dire que le maximum est ?
500	01 :32:58	E	1
501	01 :32:58	P	Si le maximum est 1, ça veut dire que on peut avoir 0 ou bien 1. Ici est-ce que c'est dedans ?
502	01 :33:08	E	Oui
503	01 :33:09	P	Oui il y a là. Ceci n'est pas dedans. Ça dépasse déjà 1. Ceci aussi non plus. Ceci ?
504	01 :33:17	E	Non plus
505	01 :33:18	P	Non plus. Ceci ?
506	01 :33:20	EE	Oui.
507	01 :33:21	P	C'est dedans.
508	01 :33:21	E	Non.
509	01 :33:23	P	Est-ce qu'il a écrit ça ?
510	01 :33:24	E	Non
511	01 :33:25	P	Il n'a pas écrit. Ceci ?
512	01 :33:32	EE	Oui ; Il a écrit.
513	01 :33:34	P	Ceci ?
514	01 :33:36	EE	Oui.
515	01 :33:37	P	Il a déjà écrit ceci ?
516	01 :33:39	E	Ça dépasse.
517	01 :33:41	P	Ceci
518	01 :33:42	E	Oui.
519	01 :33:43	P	Déjà écrit. Ceci n'est pas dedans. Ce n'est pas dedans, ce n'est pas dedans, ce n'est pas dedans.
520	01 :33:49	E	Non
521	01 :33:50	P	Ce n'est pas dedans.
522	01 :33:51	E	Non
523	01 :33:59	P	Maintenant lorsque je prends les résultats que j'ai obtenus ici, comment peut-on l'appeler ?
524	01 :34:13	E3	Eventualité.
525	01 :34:15	P	Comment on peut appeler chaque résultat de la question 1? D'abord l'expérience aléatoire ici c'est ? Qui va me donner l'expérience aléatoire que Dansou a obtenue ? que Dansou a effectuée ici.
526	01 :34:40	E	Lancer de cauris
527	01 :34:43	P	Lancer de cauris, c'est insuffisant.
528	01 :34:45	E11	Ici monsieur
529	01 :34:46	P	Oui.

530	01 :34:47	E	Lancer de cauri pour observer la face supérieure.
531	01 :34:53	P	Lancer de cauri pour observer la face supérieure. C'est insuffisant. Oui Camir.
532	01 :35:08	E2	Lancer de cauri quatre fois.
533	01 :35:10	P	Lancer quatre fois le cauri pour ?
534	01 :35:14	E2	Pour observer la face supérieure.
535	01 :35:15	E4	Pour noter la face supérieure.
536	01 :35:19	P	Pour observer la face supérieure obtenue à chaque lancer. D'accord ?
537	01 :35:25	EE	Oui.
538	01 :35:26	P	Donc c'est ça qu'il a effectué ici. Voilà l'expérience aléatoire, les éventualités qu'on a listées ici. On est d'accord ? Voilà les résultats possibles de son expérience aléatoire. Donc si on les met toutes dans un même ensemble, on va obtenir quoi ? D'accord ?
539	01 :35:43	EE	L'univers des éventualités.
540	01 :35:45	P	L'univers des éventualités. D'accord ? On note Ω . Notre Ω , c'est l'ensemble contenant tous les seize résultats qui sont, qui sont là. Ça peut aller ?
541	01 :35:58	EE	Oui Monsieur
542	01 :36:00	P	Maintenant, regardez. Chaque résultat est aussi une éventualité. Je les mets dans un ensemble, par exemple, quand je note, permettez-moi de mettre accolade ici et ici pour ne pas trop écrire. Donc je mets ça dans un ensemble. On a répondu à la question puisque la question n'avait pas besoin qu'on mette ça dans un ensemble. Je mets ça dans un ensemble, supposons que je note ça A. Je mets tout ce qui est ici aussi dans un ensemble. Ça c'est quel ensemble ? L'ensemble
543	01 :36:33	EE	B, Oméga.
544	01 :36:35	P	Oméga. Merci. L'ensemble Oméga. Je ne sais bien écrire ça hein. Alors quel lien faites-vous entre l'ensemble A et Oméga ?
545	01 :36:50	E	Ici monsieur. Ici monsieur.
546	01 :36:53	P	Oui Prince
547	01 :36:54	E10	Je constate que les éléments de l'ensemble A sont contenus, sont inclus dans l'ensemble
548	01 :37:03	P	Ce n'est pas un bon français. Les éléments de l'ensemble A
549	01 :37:06	E10	sont contenus
550	01 :37:07	P	Pas contenus
551	01 :37:07	E10	Appartiennent
552	01 :37:09	P	Appartiennent à l'ensemble Oméga.

553	01 :37:10	E	Oméga.
554	01 :37:11	P	D'accord ? Les éléments appartiennent à l'ensemble. Et de là, quel rapport il y a entre l'ensemble A et l'ensemble Oméga.
555	01 :37:28	E	On peut dire l'ensemble A
556	01 :37:29	P	L'ensemble A est
557	01 :37:32	E	Est inclus dans
558	01 :37:33	P	Est inclus. Voilà le mot que je cherchais. L'ensemble Oméga ; L'ensemble A est inclus dans l'ensemble Oméga.
559	01 :37:38	EE	Oméga.
560	01 :37:39	P	Je prends ceci aussi et je mets tous les résultats dans un ensemble que je note.
561	01 :37:45	E	B
562	01 :37:46	P	Je veux le même résultat. Je dis que l'ensemble B est inclus
563	01 :37:49	E	Est inclus
564	01 :37:50	P	Est inclus dans l'ensemble
565	01 :37:51	EE	Oméga
566	01 :37:52	P	Je fais la même chose ici aussi. Je note ça peut-être C. Je dis que l'ensemble C est inclus dans l'ensemble Oméga. Les ensembles A, B et C, on peut dire, sont des sous ensemble de l'ensemble Oméga. D'accord ? Lorsqu'on prend une expérience aléatoire et qu'on prend son univers Oméga, n'importe quels sous-ensemble de Oméga est appelé événement de l'expérience aléatoire, événement de l'expérience aléatoire. Je prends mon expérience aléatoire, je prends l'univers des éventualités Oméga. N'importe que sous-ensemble est appelé événement de l'expérience aléatoire. Ça peut aller ? Bien ! L'évènement peut être aussi caractérisé par une phrase. Vous avez vu, quand on voulait vous poser une question, on a dit : « Dansou obtient deux fois la face P ». Donc on peut aussi traduire des événements par des phrases comme ça. D'accord ? L'expérience était : il lance, il observe à chaque fois les faces obtenues. Maintenant ici, par exemple l'évènement A, voilà le sous-ensemble ; c'est un événement. L'évènement A c'est l'évènement : « il obtient deux fois la face P ». , l'évènement B, c'est l'évènement : « il obtient au moins 2 fois la face P », L'évènement C est l'évènement : « il obtient au plus une fois la face P ». Qui va me donner un évènement ? La personne d'abord peut donner un sous-ensemble et après, s'il veut il peut caractériser. Mais le mieux généralement, c'est de donner la caractérisation par une phrase. Ça permet alors de déduire les éléments qui vont constituer votre événement. Je ne sais pas si vous suivez ma

			question. C'est-à-dire vous choisissez un type d'événement que vous voulez. Je prends un exemple : vous avez vu comment on a caractérisé les événements ici. Je veux que la personne caractérise aussi un événement comme ça. L'univers et il me donne, enfin, les éventualités qui appartiennent à cet événement et liste ça. Je vous suis. Ou bien ma question n'est pas assez claire ?
567	01 :40 :21	EE	Non. Ce ne n'est pas assez clair.
568	01 :40 :25	P	Oh. Ce n'est pas très clair. Vous avez vu, ceci c'est un événement. On a dit Dansou obtient au moins, Dansou obtient deux fois la face P. C'est parce qu'on connaît cette information, c'est ce qui nous a permis de prendre les éventualités qui correspondent à ça. C'est en quelque sorte, l'événement a été traduit, enfin, comme on a caractérisé l'expérience aléatoire. Donc un événement, on peut aussi la traduire comme ça, donner une caractérisation à ça. L'événement obtenu est deux fois la face P. C'est ça qui est ceci. Est-ce que tout le monde est d'accord ? Ça c'est l'événement : « obtenir deux fois la face P ». Quand vous regardez quels sont les éléments qui ont deux fois la face P. Mais ce que je veux, c'est que vous-même vous portez un événement comme ça et que vous listez les éléments. Bon ! Je vous mets sur le chemin. Je vous donne mon exemple. Mon événement, c'est Dansou obtient une fois la face P, je suppose. Bon ! Pour quitter le P, je peux dire Dansou obtient une fois la face C. Donc si je dois lister, je vais prendre une fois la face C. Il y a ça ici, je prendre ceci, je vais prendre ceci.
569	01 :42 :09	EE	Monsieur, PPCP,
570	01 :42 :11	P	Et ceci, c'est tout hein ! Voilà les éléments qui constituent mon événement. Je viens de créer un événement comme ça. Il obtient une fois la face C, parce qu'il peut obtenir beaucoup de choses. D'accord ? Je peux caractériser et obtenir les éléments particuliers qui vont constituer mon événement. Oui Landry. Landry n'a pas répondu aujourd'hui. Vas-y.
571	01 :42 :44	E11	Il obtient trois fois la face P.
572	01 :42 :46	P	Trois fois la face P. Déjà... Non ! C'est-à-dire que si on va dire trois fois la face P, on va regarder que ce qui est ici. Je veux... Oui.
573	01:43:02	E2	Evènement 0 fois la face P. On a l'ensemble {CCCC}
574	01:43:04	P	Zéro fois la face P. einhein ! qui va donner quel ensemble ?

575	01:43:06	E2	On a l'ensemble {CCCC}
576	01:43:07	P	CCCC. C'est fini ? ça m'intéresse : zéro fois la face P. Ce n'est pas que j'ai refusé la réponse de Landry hein. J'ai vu que c'est un peu déjà fait ici. Je ne veux pas encore revenir sur la même chose. On obtient zéro fois la face P ; D'accord ? Et on a l'ensemble {CCCC} qui contient un seul élément. Pourquoi ça m'intéresse ? C'est parce que les événements comme ça, on les appelle les événements élémentaires. Les événements qui sont des singletons. Quand je dis événement ici, vous devez voir ensemble. Quand je fais sortir le mot événement, vous devez voir ensemble. C'est quel ensemble, sous-ensemble de Oméga. Ça suit ? Les événements qui sont des singletons, on les appelle des événements élémentaires. Voilà pourquoi ton exemple m'a intéressé. Bien. Donc on peut créer autant d'événements qu'on veut. L'évènement par exemple « obtenir cinq fois la face P ».
577	01 :44 :32	E3	Cinq fois la face P.
578	01 :44 :34	E	Ça n'existe pas.
579	01 :44 :35	P	Ça n'existe pas. Pourquoi tu dis ça n'existe pas ? ça existe.
580	01 :44 :38	E4	C'est zéro
581	01 :44 :39	P	C'est
582	01 :44 :40	E	C'est l'ensemble vide.
583	01 :44 :42	P	Ensemble vide. Merci. C'est aussi un événement ! C'est aussi un évènement non ?
584	01 :44 :46	EE	Oui
585	01 :44 :47	P	Einhein ! L'ensemble vide. Ce n'est pas parce qu'il ne contient rien que ça n'existe pas. Ça existe. C'est l'ensemble vide. Mais c'est un évènement qu'on dit qu'il est impossible parce qu'on ne peut pas obtenir 5 fois la face P. C'est l'évènement ; l'ensemble vide, on appelle ça l'évènement impossible, l'évènement impossible, événement impossible. Les événements élémentaires. Là, c'est l'évènement
586	01 :45 :15	EE	Impossible.
587	01 :45 :17	P	Ça peut aller ? Maintenant lorsque je prends un ensemble A. (Silence) Lorsque je prends un ensemble A. On a la propriété selon laquelle l'ensemble A est inclus dans lui-même. On est d'accord. Donc notre ensemble Oméga, je peux dire qu'il est inclus dans lui-même. Donc l'ensemble Oméga peut être vu aussi comme un évènement. Ça suit ?
588	01 :45 :59	EE	Oui.
589	01:46:00	P	Donc l'évènement Oméga, c'est l'évènement qu'on appelle événement certain. Ça suit ? Oméga est un événement que j'ai appelé événement certain. On a vu événement élémentaire,

			événement impossible, événement certain. Ça peut aller ? Et si on va caractériser cet évènement, ce n'est pas obtenir quelque chose, c'est, disons, on serait amené à donner encore le titre de l'expérience aléatoire, parce que c'est lui qui contient tous les résultats possibles. Ça peut aller ? Donc lorsque je prends une expérience aléatoire, je définis ce que j'appelle éventualité, ce que j'appelle l'univers des éventualités qui est Oméga et chaque sous-ensemble de Oméga est un événement. L'ensemble vide aussi est contenu dans Oméga. Donc il est aussi un événement qui est l'évènement im-
590	01:47:12	EE	possible.
591	01:47:13	P	Oméga aussi étant contenu dans lui-même, Oméga aussi est un événement qui est l'évènement
592	01:47:16	EE	certain.
593	01:47:22	P	Avant qu'on écrive je vais essayer de
594	01:47:24	EE	S'il vous plait monsieur ; monsieur.
595	01:47:26	P	Oui. (silence). Je voudrais bien que quelqu'un d'autre me donne un exemple d'évènement élémentaire. Oui Michkath.
596	01:47:55	E5	Evènement 0 fois la face C.
597	01:47:58	P	0 fois la face C
598	01:47:59	E5	Ça fait PPPP
599	01:48:00	P	Qui donne PPPP. Un autre ?
600	01:48:08	E4	Evènement élémentaire ?
601	01:48:10	P	Oui. Evènement élémentaire (silence). C'est fini les éléments élémentaires ? C'est quoi un élément élémentaire ?
602	01:48:42	E11	C'est un évènement singleton.
603	01:48:45	P	C'est un singleton. Tout singleton comportant l'une des éventualités, d'accord ? est un élément élémentaire. Ce n'est pas forcément lorsqu'on a PPPP et CCCC qu'on a un évènement élémentaire. D'accord ? Ce n'est pas que vous devez forcément caractériser l'évènement mais si vous pouvez faire. Ce n'est pas une obligation de caractériser l'évènement. Je peux dire même si je prends ceci, c'est un évènement élémentaire. Si je veux le caractériser, je peux dire l'évènement « obtenir premièrement P, deuxièmement C, troisièmement C et puis quatrièmement ?
604	01:49:30	EE	C.
605	01:49:38	P	Un autre exemple d'élément élémentaire ?
606	01:49:43	E	Ici monsieur.
607	01:49:44	P	Oui.

608	01:49:45	E	CPPP
609	01:49:46	P	CPPP. Chaque fois que je prends un singleton, donc contenant une éventualité, j'ai un événement
610	01:49:56	EE	élémentaire.
611	01:49:57	P	élémentaire. ça peut aller ? Maintenant, je vais essayer de ... Je prends deux événements. Je prends par exemple, voilà je prends mon événement élémentaire ceci et mon événement élémentaire ceci. C'est comme des ensembles. Si je veux, je peux noter ça E et l'autre
612	01:50:25	E	F
613	01:50:25	P	F. Alors, je veux bien effacer ceci hein. (silence) L'intersection de E et F selon vous, ça donne quoi ? ça donne ?
614	01:50:45	E3, E	L'ensemble vide.
615	01:50:47	P	Ça donne l'ensemble vide parce qu'ils n'ont rien en commun. Lorsque deux événements sont tels que leur intersection est vide, on dit qu'ils sont incompatibles ; incompatibles, d'accord ? Les deux événements dont leur intersection est vide, on dit qu'ils sont incompatibles. Je prends deux événements, par exemple, là où on a dit au moins deux fois la face P et au plus une fois la face P. J'ai ces deux événements. Voyez-moi si les deux ont d'intersection. Regardez si les deux ont d'intersection.
616	01:51:55	E3	B et C
617	01:51:58	P	B et C. Au plus deux fois la face P. Non, au moins deux fois la face P et au plus une fois la face P. Regardez bien leur intersection.
618	01:52 :11	E	C'est vide.
619	01:52 :13	P	C'est vide. Voilà ce que lui, il a dit. Qui a encore bien regardé ? B inter C, ça donne quoi ? (long silence) Regardez. Il suffit de voir s'il y a quelque chose en commun.
620	01:52 :53	E14	C'est vide.
621	01:52 :55	P	C'est vide. On est d'accord ?
622	01:52 :57	EE	Oui.
623	01:52 :58	P	Maintenant B union C. Quand je regarde les deux, ça donne quoi ? Mettez les deux ensembles, ça donne quoi ? ça donne ?
624	01:53:10	EE	Ça donne l'ensemble Oméga.
625	01:53 :12	P	Ça donne l'ensemble Oméga. On va vérifier. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16. Si tout ce qui est ici est différent de tout ce qui est ici, ça veut dire qu'on n'a rien que des choses différentes. Donc on va dire que les seize résultats différents se trouvent dans les deux quand je les regroupe.

			Donc B union C me redonne alors Oméga. Quand j'ai deux évènements qui vérifient ces 2 conditions, je les appelle des évènements contraires, des évènements contraires ; c'est-à-dire l'évènement B est le contraire de l'évènement C. L'évènement C aussi est le contraire de l'évènement B. Les deux sont vides, c'est-à-dire sont incompatibles, mais quand je les réunis, je retrouve l'univers. On dit que ce sont des évènements contraires. Donc voilà un peu les types d'évènements qu'on a. J'ai des évènements élémentaires, l'évènement impossible, l'évènement certain, j'ai deux évènements, même trois évènements qui peuvent être incompatibles ; j'ai deux évènements qui peuvent être contraires. Ça peut aller ? Bien ! ça peut aller ? Bien ! Qu'est-ce que je peux effacer maintenant. Je peux effacer l'arbre de choix.
626	01:54:55	EE	Oui.
627	01:54:56	P	J'efface ou bien vous allez noter. Hein ! Vous allez noter ou bien j'efface.
628	01:55:04	EE	Effacez !
629	01:55:12	E3	Monsieur, on prend note ?
630	01:55:14	P	Oui !
631	01:55:48	P	Non ! Ceci n'est pas dedans.
632	01:55:50	E	Ah ! C'est ce qu'ils veulent écrire.
633	01:55:52	P	Ça c'est pour l'explication. La réponse à la question va demander d'abord.
634	01:56 :18	E14	C'est PCPC
635	02:06:08	P	Ceux qui sont là-bas là, ils voient ici ?
636	02:06:10	EE	Non
637	02:06:12	P	Et ici ?
638	02:06:13	EE	Non.
639	02:15:55	P	Bon ! Je pense qu'on va s'arrêter là pour aujourd'hui. J'espère que vous avez retenu quelque chose.

ANNEXE 9 : Transcription T₃

SITUATION 2, PHASE 2.1

30 MARS 2017

EFFECTIF : 16

HEURE : 08h 50 min

Les élèves sont organisés en 5 groupes comme dans les séances précédentes. Les élèves sont numérotés de E₁ à E₁₇. Lorsque l'élève qui intervient est identifié, il est indiqué par son numéro. La lettre E signifie que l'élève qui intervient n'est pas identifié. Par EE, nous exprimons que plusieurs élèves (au moins deux) interviennent simultanément. La lettre P désigne le professeur. Dans la colonne des échanges verbaux, les points de suspension indiquent des passages qui n'ont pas pu être déchiffrés. L'élève E₉ est absent.

N°	Temps	Acteurs	Echanges verbaux
001	00 :00 :56	P	Bonjour tout le monde.
002	00 :00 :57	EE	Bonjour monsieur.
003	00 :00 :58	P	Et ce matin ?
004	00 :00 :59	EE	Ça va bien monsieur.
005	00 :01 :01	P	En forme ?
006	00 :01 :03	EE	Oui monsieur.
007	00 :01 :04	P	Bien ! J'espère que vous avez appris des deux séances passées. On va commencer par le rappel de ce qu'on a fait hier. Ça peut aller ?
008	00 :01 :12	EE	Oui.
009	00 :01 :17	P	Qui va nous rappeler brièvement ce qu'on a vu hier ? Brièvement ! De quoi on a parlé ? Vous étiez ici hier soir non ?
010	00 :01 :29	EE	Oui monsieur !
011	00 :01 :30	P	On a fait quelque chose ? Einhein ! Qui va nous dire en deux minutes ce qu'on a fait hier ? Oui Rachelle.
012	00 :01 :45	E1	Hier soir, d'abord, on a rappelé la définition d'une expérience aléatoire. On a dit que c'est une expérience dont on ne peut pas prévoir avec certitude le résultat mais on connaît les résultats possibles.
013	00 :02 :01	P	possibles

014	00 :02 :03	E1	Après ça on a dit que chaque résultat possible est appelé éventualité et l'ensemble des résultats possibles est l'univers des éventualités.
015	00 :02 :12	P	L'univers des
016	00 :02 :15	E1	Eventualités
017	00 :02 :17	P	Oui.
018	00 :02 :18	E1	Après ça, on a dit que les sous-ensembles de l'univers sont appelés des événements.
019	00 :02 :22	P	Evénements.
020	00 :02 :23	E1	Et on a eu différentes sortes d'événements. On a vu les événements élémentaires,
021	00 :02 :29	P	Elémentaires,
022	00 :02 :30	E1	Evénement certain,
023	00 :02 :31	P	Certain,
024	00 :02 :32	E1	Evénement impossible,
025	00 :02 :36	P	Evénement impossible
026	00 :02 :42	E1	Deux événements contraires
027	00 :02 :44	P	Deux événements contraires
028	00 :02 :46	E1	Evénements compatibles, incompatibles.
029	00 :02 :51	P	Incompatibles. Et si je demandais c'est quoi un événement impossible. C'est quoi un événement impossible ?
030	00 :03 :05	E4	Ici
031	00 :03 :06	P	Oui Tohibou
032	00 :03 :08	E4	Un événement est impossible lorsque l'ensemble donne vide. Il n'est jamais réalisé.
033	00 :03 :16	P	L'événement impossible, c'est l'ensemble vide et il n'est jamais réalisé. Et l'événement certain ?
034	00 :03 :22	E4	Il est toujours réalisé.
035	00 :03 :24	P	Il est toujours réalisé et c'est ?
036	00 :03 :27	E3E	Oméga
037	00 :03 :28	E4	C'est Oméga.
038	00 :03 :31	P	C'est Oméga lui-même. D'accord ? Maintenant, quand est-ce que deux événements sont incompatibles.
039	00 :03 :39	E11	Ici monsieur.
040	00 :03 :40	P	Oui Landry
041	00 :03 :41	E11	Lorsque l'intersection est vide.
042	00 :03 :44	P	Lorsque leur intersection est vide. Quand est-ce deux événements sont contraires ?
043	00 :03 :47	E16	Ici.
044	00 :03 :48	P	Oui Sergéo.

045	00 :03 :50	E16	Deux événements sont contraires lorsque leur intersection est vide et leur réunion donne Oméga.
046	00 :03 :57	P	Leur intersection est vide et leur réunion donne Oméga
047	00 :04 :02	EE	Oméga.
048	00 :04 :03	P	On va écrire ça-là rapidement parce qu'on n'a pas écrit ça hier, avant de continuer. (Long silence)
049	00 :12 :39	P	Bien ! Pour aujourd'hui on aura à faire d'autres expérimentations. Euuh. Ce sera même plus intéressant que les cauris, vous allez voir tout à l'heure. Nous avons les bouteilles. (Silence) Lorsque vous regardez les bouteilles, on ne voit pas ce qui est dedans. On est d'accord ?
050	00 :13 :31	EE	Oui !
051	00 :13 :33	P	Ce qui est dedans, il y a des billes. Vous connaissez les billes ?
052	00 :13 :40	EE	Oui.
053	00 :13 :42	P	Les petites billes. Et vous en avez, je pense 5.
054	00 :13 :58	C	Oui ! Il y a 5 billes dedans, les billes blanches et les billes noires, 5 au total. J'ai bien dit 5 au total. Vous voyez bien qu'on ne peut pas voir. Vous n'êtes pas autorisés à ouvrir. Ce n'est pas l'objectif du travail. D'accord ? Puisque vous êtes des grands, il n'y a pas de problème pour ça. Le travail qu'on veut faire avec est scientifique. Donc on ne va pas tricher non plus. On est d'accord ?
055	00 :14 :36	EE	Oui.
056	00 :14 :37	C	Mais comment on peut voir, quand on retourne la bouteille. Il y a une partie transparente à travers laquelle on peut voir une seule bille. Vous voyez quelle bille ici ?
057	00 :14 :49	EE	Blanc, blanche.
058	00 :14 :51	C	Pour vous ce n'est pas proche. C'est blanc ici. D'accord ? Alors quand on fait ça, c'est comme on est en train de mélanger. Et on fait jouer ça comme ça. Quel est l'effet qu'on veut lui donner ?
059	00 :15 :04	E	Le hasard.
060		C	Le hasard. Donc on peut voir, quand on retourne, on peut voir une seule. Mais il ne faut pas chercher à voir ça autrement. Vous êtes grands. Il faut chercher à voir ça ici. On est d'accord ?
061	00 :15 :22	EE	Oui.
062	00 :15 :23	C	Bon ! C'est ça les bouteilles qu'on a. Et les cinq bouteilles contiennent des billes ; elles contiennent 5 billes, et il y a des billes blanches et des billes noires.

063	00 :15 :58	P	Bon ! Les activités, vous les avez devant vous. Vous allez les lire silencieusement et ensuite à haute voix.
064	00 :18 :40	P	J'espère que tout le monde a fini d'écrire hein. Lisez silencieusement et après quelqu'un va nous lire à haute voix la consigne. (Silence) Quelqu'un peut nous lire à haute voix la consigne ?
065	00 :19 :54	E10	Phase 2.1 : Vous disposez dans votre groupe d'une bouteille contenant 5 billes dont certaines sont de couleur blanche et d'autres de couleur noire. Il n'est possible de voir par retournement de la bouteille qu'une seule bille à la fois à travers la partie supérieure et transparente de la bouteille. Vous ne devriez pas ouvrir la bouteille. Vous pouvez la retourner autant de fois que vous voulez pour observer à chaque fois une seule bille pour répondre à la question ci-dessous : combien y a-t-il de billes blanches dans la bouteille ? Argumentez votre réponse. Travail en groupe 10 minutes.
066	00 :20 :28	P	Donc vous ne devez pas ouvrir la bouteille. Ça c'est un principe fondamental. D'accord ? Et vous avez des billes noires et blanches là-dedans. La question est : combien de billes blanches il y en a ? Et vous pouvez retourner la bouteille autant de fois que vous voulez. Ça peut aller ? est-ce que la consigne est claire pour tout le monde ?
067	00 :20 :51	EE	Oui.
068	00 :20 :52	P	Bien ! Vous avez dix minutes de travail en groupe.
069	00 :21 :44	C	Attendez ! Si vous ne respectez pas le principe, nous allons, on ne va pas faire le travail. Ce qui est caché dedans, c'est la mathématique. Vous retournez la bouteille ; vous voyez une bille, la couleur. Vous retournez le nombre de fois que vous voulez pour voir la couleur. J'ai dit : ne trichez pas ! Si vous trichez, c'est gâté. Donc on veut analyser mathématiquement par rapport au fait qu'on ne voit qu'une seule bille dans la partie transparente-là. C'est seulement ce qui est dans la partie transparente là qu'on veut regarder. Combien de fois vous allez faire pour trouver, on ne sait pas, mais donc voilà. On est d'accord ? C'est ça. C'est parce que je vois des gens pencher. Non ce n'est pas à pencher du tout. C'est vertical. Et on regarde la bille qu'on voit.
070	00 :22 :48	E3	Prince ! Fais doucement non !
071	00 :25 :05	P	Lorsque vous agitez comme ça et que vous retournez, je suppose que vous voyez une bille noire, qu'est-ce que vous faites avec cette information ?
072	00 :25 :18	EE	On écrit ; on retient.

073	00 :25 :20	P	On retient. On fait encore. Je suppose que vous avez vu une bille blanche. Qu'est-ce que vous faites avec cette information ?
074	00 :25 :25	EE	On retient.
075	00 :25 :27	P	On retient. On retient comment ?
076	00 :27 :48	P	Il vous reste 3 minutes.
077	00 :30 :58	P	Ok. Stop. Le travail en groupe est terminé. D'accord ? Donc chaque groupe passera au tableau et (silence). Bien ! Le groupe 1. Qu'est-ce que vous avez trouvé ? Le travail en groupe est terminé. Suivons ! On va donner la parole au groupe 1 et le groupe 1 nous dira ce qu'ils ont trouvé, c'est-à-dire le nombre de billes blanches et leur argument. Allez-y.
078	00 :31 :48	E1	D'après les expériences qu'on a eues à faire.
079	00 :31 :50	P	Parle plus fort.
080	00 :31 :52	E1	D'après les expériences qu'on a eues à faire, on ne peut pas prévoir, on ne peut pas dire avec certitude le nombre de billes blanches qu'il y a dans la bouteille. Mais on connaît le nombre possible ; c'est au plus quatre qu'on doit avoir ; le résultat possible qu'on peut avoir, c'est au plus 4.
081	00 :32 :12	P	C'est au plus quatre. (Silence) Le groupe 1 a dit qu'on ne peut pas connaître le nombre de billes blanches qu'il y a.
082	00 :32 :35	E1	On ne peut pas prévoir.
083	00 :32 :35	P	On veut connaître le nombre, combien de billes blanches il y a dans la bouteille.
084	00 :32 :40	E1	Oui. On ne peut pas dire ça.
085	00 :32 :42	P	On ne peut pas dire ça.
086	00 :32 :44	E1	On ne peut pas affirmer que c'est tel nombre.
087	00 :32 :46	P	Que c'est tel nombre, tel nombre.
088	00 :32 :48	E1	Mais on connaît le résultat possible. C'est au plus 4.
089	00 :32 :52	P	C'est au plus quatre. Ok. Merci. Le rapporteur du groupe n°2. Je vous demande de, allez-y. (Silence). Le groupe n°2.
090	00 :33 :20	E6	On a, on a trouvé, on ne peut dire quel est le nombre de billes blanches mais on peut dire qu'il y a au plus 4 billes blanches parce qu'il faut qu'il y ait au moins un noir.
091	00 :33 :47	P	Au moins un noir. Vous avez trouvé de noir dedans ?
092	00 :33 :49	EE	Oui.
093	00 :33 :49	P	D'accord ! (Silence)
094	00 :34 :42	P	Bien ! Le groupe n°3. Allez-y.
095	00 :34 :44	E10	Selon nous, on a d'après les essais,
096	00 :34 :46	P	Oui
097	00 :34 :47	E10	On a constaté que, on ne peut pas donner le nombre exact. Mais d'après nos multiples essais, on a trouvé qu'on a au plus 3 ou 4.

098	00 :34 :59	P	Quoi ?
099	00 :35 :00	E10	3 ou 4 billes blanches au plus.
100	00 :35 :07	P	3 ou 4 billes blanches au plus mais vous ne savez pas le nombre exact de billes blanches qu'il y a dedans. C'est-à-dire que vous rejoignez les groupes 1 et 2.
101	00 :35 :13	E10	Oui monsieur.
102	00 :35 :15	P	Le groupe suivant.
103	00 :35 :16	E11	Même chose.
104	00 :35 :19	P	Vous rejoignez les groupes 1 et 2. Le groupe n°5.
105	00 :35 :20	E11	Oui
106	00 :35 :24	P	Le groupe n°5
107	00 :35 :29	E16	D'après les expériences, on ne peut pas trouver avec précision, le nombre de billes blanches qu'il y a dans la bouteille. Mais il doit y avoir au plus 4 billes blanches.
108	00 :35 :46	P	Au plus quatre billes blanches parce que vous avez vu de noires. Donc ça veut dire que pour s'entendre, on ne peut pas donner avec précision le nombre de billes blanches qu'il y a mais on sait qu'il y en a au plus quatre. Maintenant, est-ce que vous avez pris au moins la peine de noter à chaque fois le nombre de billes blanches que vous avez obtenues selon le nombre de fois que vous avez remué la bouteille ? Quels sont les groupes qui ont pu faire ça ?
109	00 :36 :16	E	Ici.
110	00 :36 :19	P	Oui le groupe n°2. Vous avez combien de fois vous avez remué la bouteille ? Et selon ça le nombre de billes blanches que vous avez vues, enfin le nombre de fois que vous vu la bille blanche apparaître. Le nombre de fois que vous avez vu la bille noire apparaître. Lève-toi !
111	00 :36 :53	C	Il y a une question à clarifier. Il y a d'expérience aléatoire, mais le nombre n'est pas une expérience aléatoire. C'est certain qu'il y a un nombre de billes blanches dedans et un nombre de billes noires, mais pourquoi on va dire qu'on ne peut pas connaître. On vous a dit de donner le nombre. Vous avez comme tâche de donner le nombre de billes blanches. Maintenant, par quelle méthode ? En retournant. Avec ce que vous venez de faire, on peut comprendre que vous avez dit que quand on retourne, vous êtes sûrs qu'il y a au moins une bille blanche dedans et une bille noire dedans. On peut dire ça ! Mais le travail qu'on vous demande, c'est de trouver le nombre de billes blanches qu'il y a dans votre bouteille. On est d'accord ? Et c'est pourquoi le professeur demande, est-ce qu'il y a des gens qui ont noté au moins pour qu'il puisse orienter un peu le travail. Alors si on doit déterminer le nombre de billes blanches, qu'est-ce qu'on va faire ? Pardon ?

112	00 :38 :15	C	Vous allez continuer à tourner, à retourner la bouteille. Par contre vous devez raisonner. Vous allez trouver le nombre et argumenter.
113	00 :38 :34	P	Bien ! Quel groupe a pu noter ?
114	00 :38 :36	E	Ici monsieur.
115	00 :38 :39	P	Ok. Le groupe n°2. Vous avez remué combien de fois ?
116	00 :38 :42	E6	Neuf fois.
117	00 :38 :43	P	Neuf fois.
118	00 :39 :26	P	Combien de fois avez-vous trouvé de billes blanches ?
119	00 :39 :29	EE	Cinq fois.
120	00 :39 :32	P	Oui. Billes noires ?
121	00 :39 :34	E	Quatre fois.
122	00 :39 :39	P	Le groupe numéro, quel groupe a encore fait ça ?
123	00 :39 :42	E	Ici monsieur
124	00 :39 :43	P	Oui. Vous attendez quoi ? Combien ?
125	00 :39 :58	EE	5 fois, 6 fois
126	00 :40 :02	P	6 fois.
127	00 :40 :03	E	Oui
128	00 :40 :04	P	Vous avez vu combien de fois la bille blanche ?
129	00 :40 :07	E	Quatre fois.
130	00 :40 :08	P	Quatre fois.
131	00 :40 :09	E	Oui.
132	00 :40 :10	P	Et noire ?
133	00 :40 :12	E	Deux fois, deux fois.
134	00 :40 :13	P	Ça c'est le groupe numéro ?
135	00 :40 :16	E	3.
136	00 :40 :18	P	Numéro 3. Quel groupe a encore trouvé ?
137	00 :40 :23	E	Ici monsieur.
138	00 :40 :24	P	Ceux qui n'ont pas fait, ne mentez pas.
139	00 :40 :26	EE	On a fait.
140	00 :40 :27	E14	Monsieur, c'est maintenant qu'ils ont fait.
141	00 :40 :31	P	Maintenant ou pendant les 10 minutes de travail en groupe.
142	00 :40 :35	E2	Pendant les 10 minutes.
143	00 :40 :37	P	Pendant les dix minutes.
144	00 :40 :39	E1	C'est maintenant on a fait.
145	00 :40 :40	P	C'est maintenant que vous avez fait ?
146	00 :40 :42	EE	Si.
147	00 :40 :43	P	Quel groupe l'avait fait pendant les dix minutes de travail en groupe ?
148	00 :40 :46	EE	Ici.
149	00 :40 :47	P	Vous avez fait ?
150	00 :40 :49	EE	Oui.

151	00 :41 :00	P	Oui, vous avez,
152	00 :41 :02	E	Cinq fois.
153	00 :41 :03	P	Cinq fois.
154	00 :41 :04	EE	Oui.
155	00 :41 :08	P	Cinq fois dont vous avez
156	00 :41 :11	E	2 blancs.
157	00 :41 :12	P	Quatre
158	00 :41 :13	EE	Deux blancs.
159	00 :41 :14	P	Deux.
160	00 :41 :15	EE	Oui.
161	00 :41 :15	P	Et
163	00 :41 :16	E	Trois noires
164	00 :41 :17	P	Trois fois la bille noire. Quel groupe a encore fait ? Donc c'est seulement trois groupes qui ont fait ça. Maintenant on va encore relancer. D'accord ? Maintenant vous avez vu qu'il y a des groupes qui ont fait ça, il y a un groupe qui a fait ça 9 fois, un groupe qui a fait ça 6 fois et il y a un groupe qui a fait 5 fois. Est-ce qu'on ne peut pas trouver un nombre exact et tout le monde fera à ce nombre ? C'est-à-dire que chaque groupe fera ça pour ce nombre-là au lieu que le nombre de fois que vous allez faire sera différent. Ça peut aller ?
165	00 :41 :55	EE	Oui
166	00 :41 :56	P	Combien ?
167	00 :41 :57	EE	Cinq, dix, monsieur.
168	00 :41 :58	P	Dix
169	00 :42 :01	EE	Dix.
170	00 :42 :04	P	Vous savez que vous devez retourner autant de fois pour pouvoir déterminer le nombre de billes blanches qu'il y a dedans.
171	00 :42 :09	E	Oui monsieur.
172	00 :42 :10	E3	10, monsieur.
173	00 :42 :12	P	10. Je trouve que c'est peu hein.
174	00 :42 :15	EE	18, 20, 50.
175	00 :42 :18	P	20
176	00 :42 :20	E	50
177	00 :42 :23	EE	12 fois, 14 fois, 50
178	00 :42 :27	P	Je préfère qu'on prenne 20 fois.
179	00 :42 :29	E3	20 fois.
180	00 :42 :30	P	D'accord ? Donc on va relancer le travail en groupe ; Dix minutes encore. Vous allez retourner la bouteille. Chaque groupe me donnera pendant les 20 fois qu'on a retourné la bouteille ces nombres. Vous allez noter combien de fois vous avez vu apparaître la bille blanche et combien de fois vous avez vu apparaître la bille

			noire. Ça peut aller ? (Silence pendant que les élèves retournaient les bouteilles) L'objectif, c'est toujours à la fin de dire le nombre de billes blanches qu'il y a dedans. Ça peut aller ? (Silence)
181	00 :43 :30	P	L'objectif est de toujours, à la fin de dire le nombre de billes blanches qu'il y a dedans. Ça peut aller ?
182	00 :46 :00	P	J'espère que vous pouvez répondre à la question.
183	00 :46 :03	EE	Oui.
184	00 :46 :13	C	Oui. Pour répondre à quelle question ? Vous avez pu déterminer le nombre de billes blanches et le nombre de billes noires ?
185	00 :46 :18	EE	Oui.
186	00 :46 :40	P	Ok. Le groupe n°1, combien de billes blanches il y a dedans ?
187	00 :46 :45	E1	On a trouvé 10.
188	00 :46 :48	P	Vous suivez hein ?
189	00 :46 :50	EE	Oui.
190	00 :46 :51	P	Le groupe numéro 1, combien de billes blanches, il y a dans la bouteille ? Hein, c'est ça la question.
191	00 :46 :58	E1	D'après ce qu'on a fait, on a trouvé dix billes blanches.
192	00 :47 :02	P	Vous avez trouvé dix billes blanches dans la bouteille.
193	00 :47 :05	E1	Non, ce n'est pas dans la bouteille. Vous avez dit de faire 20 fois.
194	00 :47 :07	C	Oui. Mais la question qu'on vous a posé, c'est de déterminer le nombre de billes blanches qu'il y a dans la bouteille. Si vous n'arrivez pas à déterminer le nombre de billes blanches qu'il y a dans la bouteille, c'est comme si vous n'avez pas répondu à la question posée. On est d'accord ?
195	00 :47 :22	EE	Oui.
196	00 :47 :23	C	C'est-à-dire, si on ne s'entend pas, on vous laisse encore le temps et vous déterminez le nombre de billes blanches. La réponse qu'on veut avoir de vous est : dans la bouteille il y a tel nombre de billes blanches et tel nombre de billes noires parce que...
197	00 :47 :40	EE	Anhan ! (C'est ça ?)
198	00 :47 :45	C	On vous laisse un peu de temps encore ?
199	00 :47 :47	EE	Oui.
200	00 :53 :45	P	Ok. On repart encore. Groupe n°1, combien de billes blanches il y a dans la bouteille ? C'est ça la question non ?
201	00 :53 :57	E2	Il y a quatre billes blanches.
202	00 :53 :59	P	Il y a quatre billes blanches. Pourquoi ?
203	00 :54 :04	E2	Oui, parce que, quand nous avons fait
204	00 :54 :15	P	Allez-y, allez-y. Quatre billes blanches. Tout le monde veut suivre.

205	00 :54 :22	E2	Oui parce qu'on a pris le nombre total de fois, le nombre de fois,
206	00 :54 :37	P	Vous avez remué la bouteille combien de fois ?
207	00 :54 :40	E2	Vingt fois.
208	00 :54 :41	P	Vingt fois et
209	00 :54 :43	E2	On a fait sur le nombre total de billes.
210	00 :54 :49	P	Vous avez fait sur le nombre total de ? Je n'ai pas compris. Vous avez retourné la bouteille vingt fois et vous avez,
211	00 :54 :56	E2	Oui.
212	00 :54 :57	P	Et vous avez
213	00 :54 :59	E2	divisé par le nombre total
214	00 :55 :01	P	par le nombre total de billes qui est dedans.
215	00 :55 :03	E2	Oui.
216	00 :55 :04	P	C'est qui vous a donné les quatre billes blanches.
217	00 :55 :07	E2	Oui.
218	00 :55 :08	P	Ça c'est votre argumentation. Ok. Il y a quatre boules blanches car on a retourné la bouteille vingt fois et on a divisé ce nombre par le nombre total de billes qu'il y a dans la bouteille. Bien le groupe numéro 2.
219	00 :56 :27	E7	On a trouvé 3 billes blanches.
220	00 :56 :29	P	Vous avez trouvé trois billes blanches, oui, pourquoi ?
221	00 :56 :35	E7	Parce que lorsqu'on a agité la bouteille 20 fois, on a trouvé 12 billes blanches et 9 billes noires. On a fait les 12 billes blanches moins les 9 et on a trouvé 3.
222	00 :56 :49	P	Trois billes blanches car lorsqu'on a retourné la bouteille 20 fois, vous suivez hein, on a trouvé 12 fois la bille blanche et combien de fois la bille noire ?
223	00 :57 :24	E7	9 fois.
224	00 :57 :35	P	Et 9 fois la bille noire. Il y a un problème dedans. Il y a un problème. Et 9 fois la bille noire, ce qui ne colle pas. Mais c'est votre réponse quand même. Et on a fait 12 moins 9. Ce qui est égal à 3. Le groupe numéro 3 maintenant.
225	00 :57 :55	E8	Quatre billes blanches.
226	00 :57 :57	P	Quatre billes blanches. Suivez ! Oui.
227	00 :57 :59	E8	On a fait 25 essais, on a trouvé,
228	00 :58 :02	P	Parle plus fort.
229	00 :58 :03	E8	On a fait 25 essais et on a trouvé,
230	00 :58 :05	C	Le raisonnement des autres intéresse tout le monde. Suivez, suivez !

231	00 :58 :10	E8	On a fait 25 essais
232	00 :58 :12	P	25 essais.
233	00 :58 :13	E8	On a trouvé 20 billes blanches.
234	00 :58 :15	P	20 billes blanches.
235	00 :58 :16	E8	Maintenant, on a fait 20 divisé par 5. On a trouvé 4 billes blanches.
236	00 :58 :22	P	Quatre billes blanches, car on a retourné la bouteille 25 fois et on a trouvé 20 fois la bille blanche. 20 ?
237	00 :58 :52	EE8	25 fois, 25 fois.
238		P	Et après on a fait 25 divisé par, non, pas 25, 20. Vous avez fait les 20 fois non ? divisé par le nombre de billes dans la bouteille.
239	00 :59 :15	E8	Oui.
240	00 :59 :16	P	divisé par le nombre de billes dans la bouteille, divisé par le nombre de billes dans la bouteille. Ce qui donne 4 billes blanches. C'est le raisonnement du groupe n°3. Groupe n°4, allez-y !
241	00 :59 :50	E14	Quatrième groupe, allez-y ! Parle non !
242	00 :59 :52	P	Je vous en prie. Allez-y ! Allez-y ! Quelqu'un pour lire ce que vous avez fait. Combien de billes blanches vous avez trouvé et pourquoi vous avez trouvé ce nombre.
243	01 :00 :01	E14	On a trouvé 2 billes, non trois billes blanches.
244	01 :00 :03	P	Trois billes blanches, pourquoi ?
245	01 :00 :06	E14	On a fait un système
246	01 :00 :09	P	Oui
247	01 :00 :10	E14	On a désigné par x le nombre de billes blanches et par y le nombre de billes noires. On sait que $x+y=5$.
248	01 :00 :13	P	Vous avez divisé ?
249	01 :00 :15	E14	On a désigné par x,
250	01 :00 :18	P	Le nombre de billes blanches. Oui !
251	01 :00 :20	E14	On sait que $x+y=5$.
252	01 :00 :22	P	Ahan !
253	01 :00 :23	E14	Après ça, lorsqu'on a tourné 20 fois la bouteille, on a trouvé 11x et 9.
254	01 :00 :28	P	Attend, attend ! Résultat : on a trouvé 3 billes blanches. On met justification. Soit x le nombre
255	01 :00 :49	EE	de billes blanches
256	01 :00 :50	P	de billes blanches et y le nombre de billes noires. On sait que $x+y$ égal
257	01 :01 :07	EE	égal à 5.
258	01 :01 :08	P	égal à 5. Après ?
259	01 :01 :10	E14	Maintenant, lorsqu'on a tourné 20 fois la bouteille, on a trouvé 11x et 9y.

260	01 :01 :16	P	Lorsque vous avez retourné la bouteille 20 fois, vous avez trouvé ?
261	01 :01 :19	E14	11
262	01 :01 :20	P	11 quoi ?
263	01 :01 :21	E14	11 billes blanches.
264	01 :01 :23	P	Lorsqu'on a retourné 20 fois la bouteille, on a trouvé 11 fois la bille blanche et 9 fois la bille noire. Et après ?
265	01 :01 :58	E14	On a essayé de faire un système. On sait que $x+y=5$ et le nombre
266	01 :02 :02	P	On a fait le système. Lis-moi votre système.
267	01 :02 :10	E14	$x+y=5$.
268	01 :02 :11	P	$x+y=5$
269	01 :02 :12	E14	Maintenant ce qu'on avait trouvé, on a divisé par 5.
270	01 :02 :16	P	Non, non ! Votre, votre système, lis-moi ça d'abord.
271	01 :02 :20	E14	On a $11x$ sur 5
272	01 :02 :21	P	$11x$
273	01 :02 :22	E14	Sur 5
274	01 :02 :23	P	Sur 5. Oui !
275	01 :02 :26	E14	Plus
276	01 :02 :27	P	Plus
277	01 :02 :28	E14	$9x$ sur 5
278	01 :02 :29	P	9
279	01 :02 :30	E14	$9y$ sur 5
280	01 :02 :31	P	Sur 5.
281	01 :02 :32	E14	égal à 4
282	01 :02 :33	P	égal à 4
283	01 :02 :34	E14	Lorsqu'on avait
284	01 :02 :36	P	Et vous avez résolu ça ?
285	01 :02 :38	E14	Oui
286	01 :02 :39	P	Et après résolution, vous avez obtenu x égal à 3. C'est ça hein ?
287	01 :02 :50	EE	Oui !
288	01 :02 :51	P	Et y est égal à 2. Le dernier groupe, groupe n°5. Oui.
289	01 :03 :08	E17	Lorsqu'on a tourné la bouteille 20 fois
290	01 :03 :11	P	Oui !
291	01 :03 :12	E17	On a trouvé 12 billes blanches et 9 et 8 billes héé
292	01 :03 :20	P	Noires
293	01 :03 :21	E17	On a divisé le tout par cinq
294	01 :03 :24	P	Oui.
295	01 :03 :25	E17	Non par 4.
296	01 :03 :26	P	Par 4
297	01 :03 :27	E17	Et on a trouvé 3 billes blanches

298	01 :03 :29	P	Oui
299	01 :03 :30	E17	Et 2 billes noires.
300	01 :03 :32	P	Donc votre résultat, c'est trois billes blanches. 3 billes blanches car après avoir retourné 20 fois la bouteille, on a trouvé 12 fois la bille blanche et 8 fois la bille noire puis on a fait le calcul 12 divisé par 4, ce qui nous a donné, ce qui nous a donné 3 billes blanches. Voilà l'argumentation de chacun des des groupes. Je prends le groupe n°1 par exemple, vous avez dit que vous avez retourné la bouteille 20 fois et vous avez pris ce 20 divisé par le nombre de billes dans la bouteille. Et si vous avez retourné la bouteille 40 fois ? Vous allez prendre 40 divisé par les 5. Ça vous fait 8 billes blanches dans la bouteille. Ce qui ne tient pas. Vous voyez ? Donc vous devez trouver une autre manière de trouver la bille blanche. Ça peut aller ?
301	01 :05 :23	C	Oui. Est-ce que vous êtes d'accord ? Si vous avez retourné 40 fois avec votre méthode-là, on trouverait combien de billes blanches ? On a retourné 20 fois, c'est ça non ?
302	01 :05 :32	EE	Oui
303	01 :05 :33	C	Vous avez divisé 20 par, par 5 pour dire qu'il y a 4 billes blanches. Maintenant si vous avez retourné 40 fois et vous utilisez la même méthode, vous aurez trouvé combien de billes blanches ?
304	01 :05 :52	EE	Huit.
305	01 :05 :53	C	Huit. Est-ce normal ?
306	01 :05 :55	EE	Non.
307	01 :05 :56	C	Donc on peut dire heu, la méthode-là est à changer, est à revoir.
308	01 :06 :01	EE	Oui.
309	01 :06 :02	C	Il semble qu'il y a le même argument quelque part encore. On a divisé 20 par, groupe 3,
310	01 :06 :10	P	par le nombre de billes, oui le groupe 3 aussi.
311	01 :06 :14	C	On dit
312	01 :06 :15	P	Eux, ils ont divisé 20 par le nombre de bille dans la bouteille, même cas aussi.
313	01 :06 :21	C	On dit ils ont trouvé 20 fois la bille blanche. Oui, si on avait fait aussi 40 fois, enfin, ou bien 50 fois et si vous avez trouvé 40 fois de bille blanche. C'est un exemple hein. Vous n'avez pas trouvé ça, et que vous divisez les 40 par 5. On aurait plus de billes blanches, c'est ça hein, que de billes qu'il y a dans la bouteille. Ce n'est pas que, c'est qu'il faut donner des arguments scientifiques pour déterminer. Ce n'est pas, on est d'accord ?
314	01 :06 :51	E	Oui

315	01 :06 :52	C	C'est-à-dire, il faut que ça puisse reposer sur quelque chose de normal. Donc, ce n'est pas que ce qui est fait n'est pas normal. Mais on n'a pas encore trouvé la réponse, la
316	01 :07 :00	P	La réponse
317	01 :07 :02	C	Non, pas la réponse, la
318	01 :07 :04	P	La méthode
319	01 :07 :05	C	la méthode. Donc, on ne peut pas encore accepter que c'est 4, ni ici, ni là, ou bien ?
320	01 :07 :10	P	Oui
321	01 :07 :11	C	Ok. On peut trouver pour les autres systèmes aussi ?
322	01 :07 :14	P	Le groupe n°2 dit qu'il a trouvé 3 parce qu'en retournant 20 fois la bouteille, ils ont trouvé 12 fois la bille blanche et 9 fois la bille noire et ils ont fait 12 moins 9. En supposant que vous avez fait la bouteille 100 fois et que peut-être vous avez trouvé, je suppose 80 fois la bille blanche et 20 fois la bille noire. En faisant 80 moins 20, ça nous fait 60. Est-ce que c'est normal ? est-ce que ça tombe ? Est-ce qu'on peut prendre ce nombre-là comme le nombre de billes blanches qu'il y a dans la bouteille ?
323	01 :07 :51	E	Non.
324	01 :07 :52	P	Non, ça veut dire que votre méthode-là est à revoir.
325	01 :07 :56	E2	Est erronée.
326	01 :07 :58	P	Ça peut aller ? Je prends le groupe n°4. Ils ont désigné par x le nombre de billes blanches et y le nombre de billes noires. On sait effectivement que $x+y=5$. Lorsqu'ils ont retourné la bouteille 20 fois, ils ont trouvé 11 fois la bille blanche et 9 fois la bille noire. Et moi je vais demander et si vous avez retourné la bouteille 100 fois et qu'ils trouvaient comme je le disais tout à l'heure 80 et 20. Est-ce qu'ils auront le même résultat que vous ? Le problème est, vous n'avez fait que 20 fois, et celui qui fait 100 et celui qui fait 200 fois, est-ce qu'il aura le même résultat que vous ? Parce que, ce qui est sûr, il y a un nombre exact de billes blanches dedans et un nombre exact de billes noires. Ce nombre ne change pas. Donc ce n'est pas le nombre de fois qu'on va faire qui devrait changer normalement le nombre de billes blanches qu'il y a dedans. Est-ce qu'on est d'accord ?
325	01 :08 :53	EE	Oui.

326	01 :08 :54	P	Donc, à vous de voir comment vous allez faire, d'accord, pour trouver le nombre de billes blanches et le nombre de billes noire. Est-ce que c'est en faisant encore, en retournant encore la bouteille que vous arrivez à déterminer ou bien si vous avez, afin, ou bien la méthode qui est indiquée ici, c'est de retourner la bouteille autant de fois que vous voulez jusqu'à trouver le nombre de billes blanches. Je n'ai pas parlé du groupe n°5. Je donnerai encore le même argument. Ils n'ont fait que 20 fois, ils trouvé 12 fois la bille blanche, ils ont divisé 12 par 4. S'ils avaient fait 50 fois et qu'ils avaient trouvé 40 fois la bille blanche et 10 fois la bille noire, heu, 40 divisé par 4, ça nous donne 10. Ce qui dépasse déjà le nombre de billes qu'il y a dans la bouteille. A vous de voir, en retournant la bouteille comment vous allez faire pour déterminer le nombre de billes blanches. A vous de voir, en tant que scientifiques, mathématiciens encore. D'accord
327	01 :09 :58	E2	Oui
328	01 :09 :59	P	Donc on va encore relancer. 5 minutes. Vous allez retourner encore.
329	01 :10 :10	C	Le problème qui se pose ici, même si on retourne, c'est le problème de méthode. Donc on va retourner pour voir ? C'est ça ? Bon vous retournez encore combien de fois ?
330	01 :10 :19	E2	5 fois.
331	01 :10 :20	C	Pourquoi 5 fois ? Pourquoi pas 20 fois encore ?
332	01 :10 :23	E2	Ok
333	01 :10 :24	C	Parce que si vous retournez encore 5 fois, on va diviser 5 par ? Non est-ce, ce n'est pas bien qu'on retourne encore 20 fois. Non prenons le travail au sérieux. Vous êtes en seconde. On, on ne vous voit pas réfléchir. On vous voit prendre ça de côté un peu de l'amusement. Sinon, on aurait déjà fini. On est d'accord ? Mais peut-être, on chemine bien. Le cheminement est bon, mais de réflexion pour trouver comment, c'est la méthode, on veut le nombre et la justification d'accord ? retournons encore 20 fois et trouvons des méthodes. Ici, venons là. L'équation que vous avez trouvée, 11x sur 5. Si on dit le, est-ce que 11x là est dans ce que vous avez ? Vous avez dit x est le nombre de
334	01 :11 :15	EE	billes blanches
335	01 :11 :17	C	de billes blanches. Bon ce n'est pas que, ce n'est, comment est-ce que vous êtes arrivez à 11x. On a besoin, peut-être que c'est ... je ne sais pas.
336	01 :11 :28	E11	Lorsqu'on a retourné la bouteille 20 fois-là, on a trouvé 11 fois la bille blanche.
337	01 :11 :34	C	Oui.

338	01 :11 :35	E11	et 9 fois la bille noire.
339	01 :11 :37	C	Maintenant comment vous expliquer 11 fois x ?
340	01 :11 :43	E11	En fait, on a supposé que la bille blanche, que la bille blanche est x.
341	01 :11 :49	C	C'est le nombre que vous avez dit, pas la bille blanche.
342	01 :11 :52	E11	le nombre
343	01 :11 :53	C	Ce n'est pas la bille qui est x. C'est le nombre de
344	01 :11 :57	E11	billes
345	01 :11 :58	C	de billes blanches qui est x. Donc si vous faites 11 fois x, ça veut dire que vous avez trouvé 11 fois le nombre de billes blanches qu'il y a dans, dans la, dans la bouteille et qu'on ne connaît pas. Vous comprenez ? Donc il semble, si on vous comprend très bien, vous semblez avoir multiplié 11 par la bille blanche et non par, non par le nombre. C'est ça qui s'est passé ici hein ?
346	01 :12 :23	EE	Oui !
347	01 :12 :24	C	Bon. Or on ne veut pas la bille. La bille n'est pas un nombre. C'est bien ça hein ?
348	01 :12 :29	EE	Oui.
349	01 :12 :30	C	Ok.
350	01 :12 :35	P	Allez-y ! Allez-y !
351	01 :12 :42	C	L'autre problème, si vous êtes fatigués, on va arrêter. Vous devez trouver le nombre. On va arrêter et on va reprendre un autre jour.
352			<p><u>Discussion dans le groupe 4</u></p> <p>E14 (01 :19 :30) : La chose est bizarre. Moi je n'ai pas compris (en goun)</p> <p>C (01 :20 :15) : Vous avez fini ici ? Vous n'avez pas trouvé.</p> <p>Prof : (01 :20 :52) Vous avez trouvé combien ?</p> <p>E : (01 :20 :55) : Comme on doit passer par le système.</p> <p>Prof (01 :20 :55) : Personne ne vous dit de passer, non, c'est juste le professeur qui voulait comprendre le système. Ce n'est pas que c'est le système que vous allez utiliser. Pas du tout. Non non, le professeur voulait juste comprendre ce que vous mettez dans le système.</p> <p>E : (01 :21 :14) : C'est beaucoup. C'est trop fort.</p>

			Prof (01 :21 :20) : C'est trop fort. Non ! Ce n'est pas trop fort. Si c'était trop fort, on ne va pas vous amener ça. A vous de savoir comment en retournant de ...
353	01 :22 :45	P	Est-ce qu'il y en a qui ont trouvé le nombre de billes blanches. Quel groupe a trouvé le nombre de billes blanches qu'il y a dans la bouteille ? Aucun groupe n'a trouvé ? Puisque vous n'avez pas encore trouvé, vous allez réfléchir à la question : comment vous allez faire, en retournant la bouteille pour trouver le nombre de billes blanches. C'est ça la question mathématique que vous avez. Vous êtes mathématiciens non ?
354	01 :23 :23	EE	Oui
355	01 :23 :24	P	Donc vous devez trouver la réponse. Maintenant, comment en retournant la bouteille, trouver le nombre de billes blanches qu'il y a dans la bouteille ? ça peut aller ?
356	01 :23 :33	EE	Oui
357	01 :23 :35	P	Bien ! On va arrêter là pour aujourd'hui et le mercredi prochain, on fera. Si on vous laissait la bouteille, vous allez ouvrir la bouteille à la maison.
358	01 :23 :48	E7	Ce sera vite fait.
359	01 :23 :57	C	Entendons-nous un peu, si on vous remettait ça, vous allez ouvrir ?
360	01 :24 :00	EE	Oui
361	01 :24 :01	C	Mais si vous ouvrez, vous aurez appris quoi ?
362	01 :24 :03	EE	Rien.
363	01 :24 :05	C	On a dit que, ce que nous sommes en train de faire, il est caché derrière ça des choses qu'on veut apprendre. On est d'accord ?
364	01 :24 :11	EE	Oui !
365	01 :24 :12	C	Maintenant, ce qu'on veut apprendre n'est pas sorti. Si on vous remettait la bouteille, vous allez à la maison, vous ouvrez pour venir donner la composition, ça n'a pas d'importance. Donc, ça veut dire qu'on doit être simplement, qu'on doit toujours réfléchir pour trouver par rapport à cette méthode-là, comment on peut, on peut trouver. Donc vous allez réfléchir et à la prochaine étape ...
366	01 :24 :55	P	On va prendre les bouteilles.

ANNEXE 10 : Transcription T₄

SITUATION 2, PHASES 2.1

05 AVRIL 2017

EFFECTIF : 15

HEURE : 8H

Toujours organisés en 5 groupes comme dans les séances précédentes, les élèves sont numérotés de E1 à E17. Lorsque l'élève qui intervient est identifié, il est indiqué par son numéro. La lettre E signifie que l'élève qui intervient n'est pas identifié. Par EE, nous exprimons que plusieurs élèves (au moins deux) interviennent simultanément. La lettre P désigne le professeur. Dans la colonne des échanges verbaux, les points de suspension indiquent des passages qui n'ont pas pu être déchiffrés. Les élèves E8 et E10 sont absents.

Num.	Temps	Acteurs	Echanges verbaux
001	00 :00 :50	P	Voilà les bouteilles de la fois passée qu'on a utilisée pour faire les tirages. D'accord ? Je rappelle qu'il y a 5 billes dedans, de deux couleurs différentes. Il y a des billes de couleur blanche et des billes de couleur noire. Le problème ici est de déterminer le nombre de billes blanches qu'il y a dans chaque bouteille. Les compositions sont différentes. Chaque groupe essaiera de déterminer le nombre de billes blanches qu'il y a dans sa bouteille. Et comment ? En faisant des tirages. On était arrivé à la conclusion la fois passée qu'on fera des séries de 20 tirages. Donc on va faire des séries de 20 tirages pendant 10 minutes et on essaiera d'analyser vos résultats, si un groupe a pu trouver le nombre de billes blanches qu'il y a dans sa bouteille et donner le raisonnement qu'il a utilisé pour trouver le nombre de billes blanches. Ça peut aller ? Quelqu'un pour nous lire rapidement la consigne avant qu'on ne commence ?
002	00 :02 :05	E11	Vous disposez dans votre groupe d'une bouteille contenant 5 billes dont certaines sont de couleur blanche et d'autre de couleur noire. Il n'est possible de voir par retournement de la bouteille qu'une seule bille à la fois à travers la partie supérieure et transparente de la bouteille. Vous ne devrez pas ouvrir la bouteille. Vous pouvez la retourner autant de fois que vous voulez pour observer à chaque fois une seule bille et répondre à la question ci-dessous. Combien y a-t-il de

			billes blanches dans la bouteille ? Argumentez votre réponse ?
003	00 :02:38	P	Vous avez 10 minutes de travail en groupe. (Fin : 00 :02:41)
004	00: 09 :00	P	Il vous reste 3 minutes.
005	00 :15:08	P	Bien ! J'espère que vous avez trouvé quelque chose de meilleur que la dernière fois. Enfin, on verra tout à heure. On va prendre vos résultats. Groupe N°1, qu'est-ce que vous avez trouvé ? Nombre de billes blanches ? vous n'avez pas encore fini ? Groupe N°2 ?
006	00:15:43	E6	On a trouvé que dans la, euh, il y a,
007	00:15:46	P	Suivez, suivez.
008	00:15:48	E6	Il y a trois billes blanches et deux billes noires.
009	00:15:53	P	Mais pourquoi trois billes blanches et deux billes noires ?
010	00:15:56	E6	C'est en agitant la bouteille et en observant les résultats.
011	00:16:02	P	En agitant et en observant. Comment vous avez agité et vous avez observé ces résultats ? Vous avez tiré combien de fois ?
012	00:16:10	E6	Trois billes blanches et deux billes noires.
013	00:16:13	P	En agitant et en observant.
014	00:16:19	P	Combien de fois ?
015	00:16:22	E6	15 fois
016	00:16:23	P	15 fois. Et vous avez trouvé la bille blanche combien de fois ?
017	00:16:26	E6	10 fois
018	00:16:28	P	10 fois. Et la bille noire ?
019	00:16:30	E6	5 fois.
020	00:16:31	P	Pourquoi vous avez trouvé 3 billes blanches et 2 billes noires ?
021	00:16:40	C	A partir de 15 fois, comment vous avez trouvé 3 billes blanches et deux noires ? (Silence)
022	00:17:00	P	Il croit que c'est du hasard. Vous avez dit que vous avez fait 20 tirages, vous avez fait 15 tirages et que vous avez trouvé 10 fois la bille blanche et 5 fois la bille noire. Mais comment vous avez fait pour trouver alors 3 billes blanches et 2 billes noires ?
023	00:17:28	E6	On a fait : 5 fois combien donne 15. ; 3
024	00:17:32	P	5 fois combien donne 15.
025	00:17:36	E6	Et ça fait trois.
026	00:17:38	P	Ça fait trois.

027	00:17:40	E6	Et comme il y a 5 billes dans la bouteille, il qu'il doit avoir de billes noires, c'est pour ça qu'on a dit qu'il y trois billes blanches.
027 bis	00:17:50	P	Il y a cinq billes dans la bouteille. 5 fois combien nous donne 15. C'est ça ? ça fait 3. Quel rapport vous avez tiré avec la bille blanche, avec le nombre de billes blanches. Vous n'avez même pas utilisé le nombre de billes blanches observées. Vous voyez que le raisonnement ne tient pas. Le groupe N°3
028	00:18:40	E9	Moi j'ai trouvé deux billes blanches.
029	00:18:42	P	Deux billes blanches
030	00:18:44	E9	Et trois billes noires.
031	00:18:46	P	Et trois billes noires. Pourquoi ?
032	00:18:49	E9	Parce que, j'ai fait 10 tirages
033	00:18:51	P	10 tirages.
034	00:18:52	E9	J'ai trouvé 5 fois bille blanche et 5 fois bille noire. J'ai encore fait deux fois le tirage et j'ai trouvé 2 billes noires.
035	00:19:03	P	Je n'ai pas compris. Tu avais fait 10 tirages.
036	00:19:06	E9	Tirages
037	00:19:07	P	Et tu as trouvé 5 billes blanches et 5 billes noires. Après tu as fait quoi ?
038	00:19:14	E9	J'ai fait en plus deux tirages.
039	00:19:17	P	Plus deux tirages. Et après, tu as trouvé ?
040	00:19:20	E9	J'ai trouvé deux billes noires.
041	00:19:22	P	Deux billes noires. Avec ça, tu as trouvé combien de billes blanches ?
042	00:19:26	E9	Deux.
043	00:19:27	P	Deux et trois billes
045	00:19:29	E9	Noires.
046	00:19:31	P	Comment ?
047	00:19:37	E9	Comme j'ai trouvé 5 boules blanches et 5 billes noires. Ils sont, j'ai trouvé la même réponse, j'ai fait encore, en plus deux tirages pour voir la différence.
048	00 :20 :10	P	Essayez de suivre les propositions des autres groupes. D'accord ?
049	00 :20 :15	EE	Oui
050	00 :20 :16	P	J'ai l'impression que vous ne suivez pas. Ce qui n'est pas bien. On est déjà en plénière, c'est-à-dire en travail collectif. Donc vous devez analyser aussi les résultats de vos camarades. D'accord ? oui ? Pourquoi tu as dit que ça fait 2

			billes blanches et 3 billes noires ? C'est que tu as fait, disons au total 12 tirages. C'est ça non ? Et tu as trouvé 5 billes blanches et 7 billes noires et comment tu as pu trouver 2 billes noires et trois blanches ?
051	00 :20 :56	E9	Comme j'ai fait en plus 2 tirages.
052	00 :20 :59	P	Oui.
053	00 :21 :00	E9	Comme ils ont la même réponse et j'ai en plus fait deux tirages, c'est pourquoi j'ai ...
054	00 :21 :07	P	Tu as pris 1 pour l'autre et tu as ajouté. Je n'ai pas compris. Comment ? Comment tu es arrivé quoi ? Voilà ! Ce n'est pas clair. Vas-y ! Vas-y ! Tu as trouvé 5, 5 pour les 10 tirages. Et tu as dit que ... Je n'ai pas compris. Il faut un raisonnement mathématique logique et toi-même tu constates que ton raisonnement ne tient pas. Ça ne tient pas. D'accord ? le groupe N°4.
055	00 :22 :10	E14	Selon nous il y a 4 billes blanches.
056	00 :22 :13	P	4 billes blanches ?
057	00 :22 :15	E14	Oui.
058	00 :22 :16	P	4 billes blanches. Oui.
059	00 :22 :20	E14	Il y a quatre billes blanches. On sait que la somme des billes doit nous donner 5.
060	00 :22 :28	P	5. Oui
061	00 :22 :29	E14	Nous savons qu'il y a au moins de chaque côté une bille.
062	00 :22 :38	P	Parle fort.
063	00 :22 :39	E14	On sait que des deux côtés, il y a au moins une bille. Donc le nombre de billes blanches est compris entre 1, 2, 3 et 4 et de, le nombre de billes noires aussi. Lorsqu'on retourne, on voit que le nombre de billes blanches, lorsqu'on fait douze tirages, on trouve 9 billes blanches.
064	00 :23 :04	P	Vous avez fait combien tout à l'heure ?
065	00 :23 :06	E14	On a fait 5.
066	00 :23 :07	P	5 tirages. Et vous avez trouvé combien de billes ?
067	00 :23 :13	E14	4 billes blanches et 1 bille noire.
068	00 :23 :15	P	4 billes blanches et une bille noire.
069	00 :23 :18	E14	Oui ! On voit que lorsqu'on fait le tirage il y a plus de billes blanches que de billes noires. Donc, soit le nombre de billes blanches qu'il y a dedans, soit on a 3 billes blanches et 2 billes noires de l'autre côté, soit on a 4 billes blanches et deux, et une seule bille noire. La somme des 2 billes doit faire 5 en faisant le tirage on voit qu'il y a plus de billes blanches que de billes noires.
070	00 :23 :20	P	Oui

071	00 :23 :21	E14	Donc soit on a 3 billes blanches et 2 billes noires ou on a 4 billes blanches et 1 bille noire
072	00 :24 :00	P	Comment tu élimines la possibilité 3-2
073	00 :24 :04	E14	Lorsqu'on fait le tirage, on voit que le nombre de billes blanches,
074	00 :24 :10	P	Quel tirage ? Combien de tirages ?
075	00 :24 :11	E14	Cinq, cinq. On voit que le nombre de billes blanches est largement au-dessus du nombre de billes noires. s'il avait ... On suppose qu'il y avait deux billes noires. S'il y avait deux billes noires,
076	00 :24 :20	P	Non. Permetts-moi de comprendre. Tu as dit qu'on constate, vu que le nombre de billes blanches sont plus que le nombre de billes noires ; c'est-à-dire que le nombre de bille blanche dépasse le nombre de bille noire. D'accord ? Donc ça veut dire que c'est soit 3 billes blanches et 2 billes noires, soit c'est 4 billes blanches et 1 bille noire. Maintenant, donc on a deux possibilités : entre 3-2 et 4-1. Maintenant comment tu élimines la possibilité 3-2 ?
077	00 :24 :48	E14	J'ai dit que, si on supposait qu'il y avait 3 billes blanches et 2 billes noires, lorsqu'on fera le tirage, le nombre billes blanches ne va pas dépasser largement le nombre de billes noires. On peut avoir,
078	00 :25 :00	P	Vous avez fait combien tout à l'heure 5 ?
079	00 :25 :03	E14	Cinq.
080	00 :25 :04	P	Cinq. Vous avez trouvé quatre billes blanches et 1 bille noire.
081	00 :25 :07	E14	Oui.
082	00 :25 :08	P	C'est sur ça vous vous êtes basés ?
083	00 :25 :10	E14	Oui. C'est comme si le nombre de billes blanches fait,
084	00 :25 :14	P	vous êtes sûr que si on faisait 10 ou 20 tirages on aurait toujours cet écart-là ?
085	00 :25 :19	E14	Non ! On n'aura pas cet écart, mais
086	00 :25 :22	P	Comment être sûr, si on n'a pas fait ?
087	00 :25 :25	E14	Non ! Si on fait les tirages-là, même si on faisait 30 tirages le nombre de billes blanches,
088	00 :25 :30	P	Tu ne peux pas parler ainsi.
089	00 :25 :35	C	Oui je t'écoute. Allez-y.
090	00 :25 :38	E14	Nous sommes en train de voir que, le nombre de bille blanche va dépasser largement le nombre de billes noires.

			On peut avoir, on peut avoir 21 billes blanches. Le nombre de billes blanches va largement dépasser le nombre de billes noires. Ça veut dire que le nombre de billes blanches est supérieur ; on ne peut pas avoir 3 billes blanches.
091	00 :26 :19	P	Bon ! Moi je voudrais bien que tu arrives à faire autant de tirages-là comme tu le dis et on verra ce que tu dis jusque-là tu n'es à 5. D'accord ? Peut-être en allant à 100 tu pourrais constater autre chose. Mais n'oublie pas que le résultat est dû au hasard. On est d'accord ? Donc tu peux trouver autre chose en allant peut-être à 100 ou à 200. Ça peut aller, ce n'est qu'en faisant que la certitude viendra peut-être. Maintenant, mais dire que de 5 tirages et tu tires déjà la conclusion. Je trouve que c'est un peu trop brusque. Je ne sais si les autres suivent avec moi.
092	00 :27 :10	EE	Oui !
093	00 :27 :11	P	Seulement 5 tirages et dire qu'il a 4 billes blanches et 1 bille noire ! Ok, groupe n°5.
094	00 :27 :45	E15	On a retourné, lorsqu'on a retourné 20 fois la bouteille, 20 fois la bouteille,
095	00 :27 :51	P	Oui !
096	00 :27 :52	E15	On a trouvé 12 billes blanches et 8 fois la bille noire sachant qu'il y a au total 5 billes blanches et noires dans la bouteille.
097	00 :28 :04	P	Vous avez fait 20 tirages et vous avez trouvé 12 billes blanches et 8 billes noires.
098	00 :28 :12	E15	Pour retrouver le nombre de billes blanches on multiplie le nombre de fois de billes blanches trouvées dans l'expérience par le nombre total de billes dans la bouteille.
099	00 :28 :25	P	Le nombre de billes blanches dans, trouvées, c'est-à-dire les 12.
100	00 :28 :29	E15	Oui.
101	00 :28 :30	P	Multiplié par ?
102	00 :28 :32	E15	le nombre total de billes dans la bouteille, c'est-à-dire, 5.
103	00 :28 :38	P	Cinq.
104	00 :28 :39	E15	Sur le nombre total de tirages.
105	00 :28 :46	P	Comment vous êtes arrivés à cette conclusion. Je veux juste savoir. Allez-y, allez-y ! Et vous avez trouvé combien ?
106	00 :29 :59	E15	Trois.
107	00 :29 :00	P	Trois billes blanches.
108	00 :29 :03	E15	Blanches.
109	00 :29 :09	P	Voilà le résultat de chaque groupe. J'aimerais un peu parler du résultat du groupe 5. D'accord ? Si je prends leur raisonnement, ils ont dit quand ils font 20 tirages ils trouvent 12 billes blanches et 8 billes noires. Vous suivez ?

110	00 :29 :34	EE	Oui.
111	00 :29 :36	P	En regardant les tirages comme les séries statistiques, c'est-à-dire quoi ? Tout à l'heure,
112	00 :29 :47	C	Excusez. C'est notre collaboration, c'est notre collaboration. Euh, déjà le groupe 4, le groupe 4 a fait le raisonnement suivant : quand nous faisons le tirage, on trouve généralement plus de blancs que de noirs et pour ça nous concluons que ou bien il y a 3 blancs ou bien 4 blancs. C'est une évolution. Ou bien il y a 3 ou bien il y a 4. Maintenant, c'est combien ? Ils ont dit nous avons fait 5 tirages et on a trouvé 4 blancs et 1 noir et pour ça, nous avons dit c'est 4 blancs et 1 noir. Et, le professeur dit où se trouve la certitude ? Le professeur dit, où se trouve la certitude, en disant mais est ce qu'on aurait la même chose s'il y avait, si on faisait 100 ou si on faisait 200, je ne sais pas. Mais celui qui raisonnait avait dit même si on faisait 30, même si on faisait 30, on aurait la même situation. Faisons alors 30. Mais la question qui se pose en ce moment-là, puisque nous on veut vérifier si ce qu'on a là est juste. Et on dit, même si on faisait 30, on aurait la même chose. Mais nous en tant que des scientifiques est ce qu'on peut croire à ça ? avant de croire même si on faisait 30 on aura la même chose c'est qu'il faut l'essayer.
113	00 :31 :45	E	Oui.
114	00 :31 :46	C	On est d'accord ? C'est qu'il faut essayer. Ça fait une première conclusion que le groupe 4 nous donne. Même si on fait 30 ça veut dire faisons 30 pour voir. L'autre chose est qu'on avait dit de faire 20 mais vous ne l'avez pas fait parce qu'il y a des gens qui ont dit j'ai fait 5. Mais ce n'est pas grave puisqu'on a décidé de raisonner comme ça. Le groupe 5 dit nous on a fait 20. Ils ont utilisé les résultats de la fois passée. Nous on a fait 20 et sur ces 20 on a eu 12 blancs et nous avons fait 12 fois 5 ; 5 étant le nombre total de billes dans la bouteille, sur le nombre de tirages. Et donc le professeur demande, a voulu demander, qu'est ce qui les a motivés ? Maintenant par rapport à ces deux types de raisonnement. Donner votre point de vue. Les autres donnez votre point de vue par rapport à ces deux types de raisonnement. Par rapport à ces deux types de raisonnements du groupe 5 et du groupe 4. Qu'est-ce que vous pensez ? Qu'est-ce que vous pensez ou qu'est-ce que vous pensez qu'on peut retenir ? Qu'on peut essayer ?

115	00 :33 :34	E	S'il vous plait Mr.
116	00 :33 :37	C	Oui.
117	00 :33 :38	E	Au niveau du groupe 4 on va essayer 20 fois ou bien 30 fois pour voir si,
118	00 :33 :45	C	Combien de fois ?
119	00 :33 :47	E	30 fois.
120	00 :33 :48	C	Trente fois.
121	00 :33 :50	E	Pour voir si on aura la même chose.
122	00 :33 :53	C	Oui ! on a qu'à retourner 30 fois puisqu'ils ont dit même si on retournait 30 fois on aura la même chose. Donc nous décidons, on a qu'à retourner alors,
123	00 :34 :04	EE	30 fois
124	00 :34 :06	C	30 fois pour voir si on aura la même conclusion. Oui !
125	00 :34 :10	E4	Au niveau du groupe 5, ils ont dit qu'ils ont fait 20 tirages et ils ont trouvé 12 billes blanches et 8 billes noires. Pourquoi ils ont utilisé les 12 billes blanches et non les 8 billes noires.
126	00 :34 :30	C	On dit pourquoi vous avez utilisé les 12 et les 8, le nombre de fois que vous avez obtenu la bille blanche. Pourquoi vous avez utilisé seulement ça et que vous n'avez pas utilisé le nombre de fois qu'il y a eu le noir ?
127	00 :34 :46	E16	Parce qu'on cherche le nombre de billes blanches qu'il y a dans la bouteille.
128	00 :34 :48	C	Parce qu'on cherche le nombre de billes blanches qu'il y a dans la bouteille. Et quand on connaît le nombre de billes blanches,
129	00 :34 :53	E	On peut déterminer le nombre de billes noires.
130	00 :34 :55	C	On est d'accord ?
131	00 :34 :59	EE	Oui.
132	00 :35 :00	C	Bien ! Donc, on, oui !
133	00 :35 :03	E14	Ils ont fait 20 fois ils ont trouvé 12.
134	00 :35 :08	C	Oui.
135	00 :35 :09	E14	Nous sommes d'accord. Ils n'ont qu'à faire 40 fois on va voir ce qu'ils vont trouver.
136	00 :35 :13	C	Ah. Ça c'est intéressant. Il dit qu'on a qu'à faire 40 fois. Alors ce n'est pas eux seuls. Tout le monde va le faire. Mais alors les 40 fois, on va les faire comment ? On va faire 40 fois en bloc ou bien on va faire 20 d'abord, observer et puis après 20 ensuite. Les 20 vont s'ajouter à l'autre et observer. Nous décidons. Oui.
137	00 :35 :38	E4	Je préfère qu'on fasse 20.
138	00 :35 :40	C	On fait 20.
139	00 :35 :41	E4	et après on fait encore 20.

140	00 :35 :43	C	On note et après on fait 20. Alors on va noter les résultats comment ? Puisque maintenant, on fait 20 et après on fait encore 20 pour faire les 40. Le groupe 4 a laissé les 30. Bon, quand on dit même 30 fois, ça veut dire 40 fois aussi. Donc c'est la même chose. On est d'accord ? On fait 20 fois, alors ça veut dire qu'on va présenter les résultats sous forme de tableau non ?
141	00 :36 :06	EE	Oui.
142	00 :36 :07	C	Ça va avoir quelle forme. Est-ce que vous allez noter dans ce tableau, parce qu'il faut qu'on s'entende sur la manière de présenter. Qu'est-ce qu'on va mettre dans ce tableau ? Premièrement 20 fois et on va noter quoi ?
143	00 :36 :28	EE	Le nombre de billes blanches
144	00 :36 :30	C	observées. Nombre de billes blanches observées. Nombre de billes blanches observées. On met quoi encore ?
145	00 :36 :45	EE	Le nombre de billes noires observées.
146	00 :36 :47	C	Oui mais si on a blanc on a déjà noir. en même temps. on a quoi encore sur les 20 là le nombre de blanc va s'ajouter
147	00 :36 :51	E1	20
148	00 :36 :52	C	Pardon ?
149	00 :36 :53	EE	20
149	00 :36 :54	C	On fait 20 encore. Qu'est-ce qu'on fait, les deux-là font combien ?
150	00 :37 :00	EE	40.
151	00 :37 :01	C	40. On fait 20 encore. Ça devient 40. Ou bien ?
152	00 :37 :07	EE	Oui.
153	00 :37 :08	C	Et sur les 20 là, le nombre de blancs qu'on va trouver va s'ajouter au nombre de blancs qu'il y avait ici. Ça va être noté et on va voir. C'est bien ça hein le groupe 4. Allons-y donc ! ça peut se faire en combien de minutes ? Vous êtes expérimentés !
154	00 :37 :28	E	10 minutes.
155	00 :37 :30	C	10. Pour aller jusqu'à 40. Ok. On est en travail en groupe. (00 :37 :35)
156	00 :48 :53	P	J'espère que tous les groupes ont fini.
157	00 :48 :56	E	Non !
158	00 :48 :57	P	Pour les 40 tirages, ça peut aller ?
159	00 :49 :02	EE	Oui.
160	00 :49 :03	P	Bien ! Le groupe numéro 1. Pour d'abord les 20 premiers tirages, on a combien de blancs ?
161	00 :49 :09	E3	10.
162	00 :49 :11	P	10. Après pour les 40, ça fait combien chez vous ?

163	00 :49 :14	E3	24.
164	00 :49 :15	P	24. On prend le groupe N°2 pour la première série de 20 tirages.
165	00 :49 :26	E2	11.
166	00 :49 :27	P	11. Et pour tous les 40 tirages ?
167	00 :49 :30	E7	24.
168	00 :49 :32	P	24. Le groupe n°3 pour la première série de 20.
169	00 :49 :38	E9	14.
170	00 :49 :39	P	14 ! Et pour tous les 40.
171	00 :49 :42	E9	25.
172	00 :49 :43	P	25. Le groupe n°4 la première série de 20, combien ?
173	00 :50 :01	E14	18.
174	00 :50 :03	P	18. Et pour tous les 40.
175	00 :50 :07	E11	Mr c'est 12.
176	00 :50 :09	E14	C'est 12, c'est 12
177	00 :50 :11	E11	C'est 12 hein !
178	00 :50 :13	E14	Et après, c'est 22.
179	00 :50 :15	P	22. Le groupe N°5.
180	00 :50 :20	E15	14
181	00 :50 :21	P	14. Et pour tous les 40.
182	00 :50 :22	E15, E17	27
183	00 :50 :23	P	27. Voilà écrit ce que vous avez obtenu après les 40 tirages. Ça peut aller ? Vous allez essayer de trouver le nombre de billes blanches que vous avez.
184	00 :50 :45	E3	Oui ! On a vu 3.
185	00 :50 :47	E2	3, 3.
186	00 :50 :49	P	3 3 3 3 partout. Maintenant la question est : est-ce qu'on est sûr de ça ? Est-ce que en faisant quelques séries de 20 tirages, est-ce que ça nous permet toujours d'avoir 3 boules blanches ? Selon vous, est-ce que en faisant une autre série de 20 tirages, est-ce qu'on sera sûr de toujours trouver 3 boule blanche ? Est-ce qu'on a cette certitude ?
187	00 :51 :20	E1	Non
188	00 :51 :21	P	en faisant une autre série de 20 tirages, on peut trouver 3 billes blanches ? Est-ce qu'on ne va pas faire pour voir ce que ça va donner ?
189	00 :51 :27	EE	Oui !
190	00 :51 :28	P	D'accord ? Essayez de faire encore une série de 20 tirages ; vous avez dit que vous avez. (00 :51 :33)
191	00 :56 :53	P	Ça y est ! Tout le monde a fini ?
192	00 :56 :58	E2	Oui !

193	00 :57 :08	P	Voilà ce qu'on va faire. On va prendre la série de 20 qu'on a faite tout de suite, on va ajouter aux autres. Ça va faire combien ?
194	00 :57 :20	E	60.
195	00 :57 :21	P	60. Le nombre de billes blanches que le groupe 1 a trouvé, ils vont ajouter au nombre de billes blanches qu'il y avait. Ça va faire combien ?
196	00 :57 :31	E1	37
197	00 :57 :32	P	37. On fait la même chose pour le groupe n°2. On a 60 tirages. Le groupe n°2, vous avez trouvé combien de billes blanches ? Ça fait ?
198	00 :57 :45	E7	35.
199	00 :57 :46	P	35. Groupe n°3. Vas-y !
200	00 :58 :18	E9	39.
201	00 :58 :19	P	Groupe n°4.
202	00 :58 :24	E11	35.
203	00 :58 :25	P	35.
204	00 :58 :26	E14	C'est 39.
205	00 :58 :29	P	Vous êtes sûr ? Faites bien le calcul !
206	00 :58 :35	E11	C'est 35.
207	00 :58 :37	P	35. Groupe n°5.
208	00 :58 :40	E	40
209	00 :58 :42	P	40. Vous avez utilisé quelle formule pour le calcul du nombre de billes blanches ?
210	00 :58 :54	E4	La formule du groupe n°5.
211	00 :58 :56	P	La formule du groupe n°5. Le groupe n°2
212	00 :58 :58	C	Est-ce que vous avez vérifié le nombre de billes blanches ou bien vous avez noté seulement ?
213	00 :58 :58	E4	Non.
214	00 :59 :04	C	Vous avez divisé ?
215	00 :59 :06	EE3	Oui.
216	00 :59 :07	C	Et ça donne quoi ?
217	00 :59 :09	EE	Trois.
218	00 :59 :10	C	Partout trois ?
219	00 :59 :14	E	Nous avons trouvé 3,
220	00 :59 :16	P	Vous avez trouvé combien ?
221	00 :59 :18	E1	3 virgule
222	00 :59 :18	EE	3 ; 3
223	00 :59 :19	E14	Trois moi aussi.
224	00 :59 :20	C	Non, non, non ! Ils disent autre chose. Ils disent c'est avec virgule.

225	00 :59 :23	E	Nous avons trouvé 3 virgule.
226	00 :59 :25	P	Il faut donner le nombre exact. (des chuchotements par rapport aux nombres exacts trouvés)
227	00 :59 :42	C	C'est avec des virgules. Vous, vous avez dit, vous avez ?
228	00 :59 :48	E	Trois.
229	00 :59 :50	E2	C'est 3,08.
230	00 :59 :51	C	3.08.
231	01 :00 :03	P	Groupe n°2.
232	01 :00 :12	C	Donc vous n'avez pas trouvé 3 c'est 3 virgule que vous avez trouvé.
233	01 :00 :16	E4	Oui.
234	01 :00 :41	P	Vous avez trouvé combien ?
235	01 :00 :43	EE	2,91.
236	01 :00 :45	P	2,91. Groupe n°3
237	01 :00 :50	E9	3.25.
238	01 :00 :51	P	3,25. Groupe n°4.
239	01 :00 :55	E11	2.91.
240	01 :00 :56	P	2,91. Et groupe n°5.
241	01 :01 :03	E17	3.30.
242	01 :01 :05	P	3,30. Revenons alors à la formule que vous avez tous utilisé. En considérant par exemple n le nombre de tirage que vous avez fait. D'accord ? Et en prenant comme, je vais nommer nb le nombre de billes blanches que vous avez trouvées, le nombre de billes blanches que vous avez trouvées ; Ici je nomme x le nombre de billes blanches dans les n tirages, dans les n tirages. Ce que vous avez observé. Non. Je note x le nombre de billes blanches dans la bouteille, le nombre de billes blanches dans la bouteille. Quelle sera alors la formule du calcul du nombre de billes blanches ?
243	01 :02 :10	E17	x est égal à
244	01 :02 :12	P	x est égal oui ?
245	01 :02 :15	E17	nb
246	01 :02 :16	P	nb
247	01 :02 :17	E17	fois 5.
248	01 :02 :18	P	fois 5
249	01 :02 :19	E17	sur n.

250	01 :02 :20	P	Sur n. Tout le monde est d'accord ?
251	01 :02 :22	E	Oui !
252	01 :02 :23	P	En prenant les tirages qu'on fait comme une série statistique, d'accord ? Que représente ce nombre-là ? On voit ça comme une série statistique. nb/20, c'est-à-dire je regarde les tirages comme une série statistique. Je vois sur certaine feuille, vous mettez blanc, blanc, blanc, après noir, noir, noir. on prend le blanc comme modalité ; donc nb, c'est l'effectif du blanc. On est d'accord ?
253	01 :02 :58	EE	Oui !
254	01 :02 :59	P	nb sur n représente quoi alors ? Le nombre nb sur n, ce rapport, si je vois nb comme l'effectif de la modalité blanc et le petit n représente quoi ?
255	01 :03 :20	EE	L'effectif total.
256	01 :03 :22	P	L'effectif total. Alors le nombre nb/n représente ?
257	01 :03 :29	E14	La fréquence.
258	01 :03 :31	P	La fréquence. Merci ! ça fait la fréquence d'apparition des billes blanches ; donc en allant dans la formule c'est comme si c'est la fréquence qui nous permet de calculer le nombre de billes blanches. Vous suivez ? Et il faut qu'on soit sûr sur ce nombre-là. Lorsqu'on fera le calcul, on va faire le calcul pour chaque groupe. On verra si la fréquence est la même. ça peut aller ? je prends le groupe n°1, je mets fréquence de billes blanches. Alors pour le groupe n°1, on fera alors,
259	01 :04 :30	E3	Six fois cinq.
260	01 :04 :32	P	Juste la fréquence, la fréquence.
261	01 :04 :40	C	Non ! On ne va pas évoluer dans ce sens. On ne va pas évoluer. Parce que, vous êtes venus à l'argument de fréquence. Comment ? C'est comme si on est en train de dire avec ... On ne sait pas si ce que on est en train de faire est la bonne méthode. Mais il semble que c'est ça que vous êtes en train de vérifier tous. On est d'accord.
262	01 :05 :02	EE	Oui !
263	01 :05 :03	C	C'est ça que vous êtes en train de vérifier tous. Le professeur vient de dire que, on n'a pas l'impression que c'est ça là qu'il faut trouver pour multiplier
264	01 :05 :13	EE	Par 5.
265	01 :05 :14	C	par 5. Donc ça veut dire que c'est la fréquence qu'il faut noter et si on note la fréquence, on va multiplier la fréquence par 5 pour avoir le nombre. Donc on va prendre toutes ces informations dans, dans le tableau désormais. D'accord ? Et c'est ça qu'on a mis ici, la fréquence. D'accord ! La fréquence, le nombre maintenant de billes blanches calculé.

			Le nombre calculé, c'est-à-dire les trucs avec les virgules-là. Puisque, nous on ne savait même pas qu'il y avait de virgule. Quand vous aviez dit 3, 3, 3, on a pensé que vous avez trouvé 3 ; 3. C'est quelqu'un qui a dit, ce n'est pas toi, que c'est 2 virgule quelque chose. Ça veut dire qu'on n'a pas trouvé rigoureusement 3. Ou bien ?
266	01 :06 :08	EE	Oui !
267	01 :06 :09	C	Donc, c'est pour ça qu'on va mettre cette ligne, le nombre de billes blanches
268	01 :06 :17	E11	Calculé.
269	01 :06 :20	C	Calculé c'est par rapport au nombre hein. Donc il n'y a pas de s là. Donc le nombre de billes blanches calculé et maintenant le nombre de billes blanches, le nombre de billes blanches calculé. Ce qu'on va faire par la suite certainement, c'est ça que le professeur vous demande. Donc, il faut qu'on ait ces nombre-là. Il faut qu'on ait ça et qu'on ait les nombre qu'il y a ici et maintenant qu'on n'a pas trouvé exactement 3 et c'est des nombres à virgule, est ce qu'on peut dire que c'est 3 ? Oui avec l'éducation que nous avons en mathématique. Maintenant qu'on n'a pas trouvé 3, on a trouvé 2 virgule, 3 virgule dans les groupes-là, pensez-vous que vous pouvez dire que dans les groupes c'est 3 ?
270	01 :07 :15	E7	On peut arrondir ?
271	01 :07 :16	C	Pardon ?
272	01 :07 :17	E7	On peut arrondir.
273	01 :07 :18	C	Oui mais en mathématique quand on arrondit, nous sommes en math, quand on arrondit, est-ce que c'est la valeur exacte ? c'est en physique que les gens arrondissent. Quand on dit racine carrée de 2, est ce que c'est 1,414 ? Non ! C'est quand on est dans le besoin pour pouvoir utiliser d'approximation par une valeur approché pour pouvoir évoluer, qu'on, ... Alors donc, je reviens là-dessus ; pensez-vous qu'on a trouvé les 3. Alors comment faire si on pense que c'est vraiment 3 ? Comment faire ? Que c'est 3 et on va trouver 3 ? Comment faire ? Alors qu'on était passé à 4, à au plus 4, au moins 1. Et vous êtes en train de dire 3 maintenant. Comment faire, comment faire pour trouver les 3 ? Si c'est 3 vraiment. Oui proposez ! Autrement dire, est-ce qu'avec 60 tirages, on peut être sûr que c'est 3 ? est-ce qu'avec 60 tirages, on peut être que c'est 3 ? Avec 5 tirages, c'était combien vous avez trouvé ? Combien déjà ? Avec 5 tirages, si on calcule, ça fait

			euh, vous avez trouvé 4. Avec 5 tirages, vous avez trouvé 4 et quand on a voulu vérifier, quand lui il a dit avec 30 ou bien 40, on va trouver la même chose ; à la vérification, on n'a pas trouvé la même chose. On a trouvé 3. Mais il se fait qu'on était dans les 3 virgule. On était dans les 3 ; les 3 virgule. Est-ce qu'avec les 60 tirages on peut être sûr qu'on a les 3 ou alors qu'on n'a pas les 3 ? On a les 3, et les 2, Quel que soit le nombre de tirages est ce qu'on va faire. Oui oui ! Parlez fort ; il ne faut pas parler bas. Oui oui allons-y non mais vous avez à parler mais pourquoi vous ne parlez pas.
274	01 :09 :08	E2	Selon moi, même si on dépasse les soixante, une fois que le nombre de billes à chaque fois dépasse le nombre, le nombre de billes blanches trouvées après est supérieure, est toujours supérieure au nombre de billes noires, on aura des valeurs approchées de trois ou de quatre. Je ne sais si on me comprend.
275	01 :09 :37	C	Oui. Mais on a évolué plus que ça. C'est comme si ce que vous éprouvez-là, c'est comme si on ne va pas, on ne sait pas ; c'est comme si on ne va pas retourner à 4. Mais c'est possible qu'on en retourne comme vous avez dit. Mais tu as dit, quel que soit le nombre de tirages, quel que soit le nombre de tirages. Est-ce que, nous les mathématiciens, on peut dire ça, quel que soit le nombre de tirages ? Quel que soit le nombre de tirages, ça veut dire qu'on a vérifié hein ! C'est ce que ça veut dire hein. Ça veut dire qu'on a fait de tirages et on est sûr que, quel que là, ça veut qu'on a fait des
276	01 :10 :15	EE	tirages.
277	01 :10 :16	C	On a fait des tirages et on est sûr qu'à partir de Vous, vous êtes vraiment sûrs ?
278	01 :10 :21	E11	Non.
279	01 :10 :22	C	Hè ! Qu'est-ce qu'on va faire ? Avec quel que soit le nombre de tirages, qu'est-ce qu'on va faire.
280	01 :10 :28	E	On va faire ...
281	01 :10 :32	C	Oui ! Oui ! Non ! Parlez fort. Il ne faut pas parler bas. Hum ? Oui, oui ! allons-y !
282	01 :10 :49	E	On
283	01 :10 :51	C	Vous avez à dire. Pourquoi est-ce que ...
284	01 :10 :56	E	Monsieur 80.
285	01 :10 :59	C	Pardon ?
286	01 :11 :00	E	80.

287	01 :11 :02	C	Est-ce qu'avec 80, on ne va pas dire la même chose ?
288	01 :11 :04	EE	Oui !
289	01 :11 :06	C	On peut dire la même chose. Avec combien par exemple ?
290	01 :11 :09	E	100.
291	01 :11 :11	C	100. Ce n'est pas loin de 60 hein !
292	01 :11 :14	E1	200
293	01 :11 :16	C	200. Pourquoi pas ? Déjà avec 200 on n'est déjà à une autre dimension. Est-ce que ce n'est pas possible de voir jusqu'à 200 ? en 40, 40 ? Ce n'est pas possible de voir ? Vous n'êtes pas curieux de voir ce qui va se passer ?
294	01 :11 :31	E	Oui !
295	01 :11 :32	C	Parce qu'on n'a pas les 3 hein ! On n'a pas les 3. Vous avez donné 3, ; quelqu'un est allé jusqu'à 3.33. 3,33 ; 3.25 ; 2.91. On n'a pas la certitude qu'on a les 3 et pourquoi ça ne peut pas devenir 4 si on continuait ? Pourquoi ? Oui, mais, vous avez dit que c'est clair, on ne peut pas avoir, que c'est 3 ou bien 4. Pourquoi ça na va devenir 4 si on continuait ? Moi je pense qu'il faut qu'on aille à 200. Qu'on essaie 200 pour voir. Même si quelqu'un est capable d'aller plus que ça. Tant qu'on n'a pas la certitude, quand vous arrivez quelque part et que vous avez la certitude, vous pouvez vous arrêter. Même si vous n'avez pas la certitude avec les 200, vous pouvez continuer. Mais il faut qu'on soit sûr, qu'on a 3.
296	01 :12 :25	E2	Monsieur.
297	01 :12 :26	C	Que c'est 3. Oui !
298	01 :12 :29	E2	Selon moi, même si on continue, on ne va pas arrêter de voir les nombres à virgule.
299	01 :12 :35	C	Pardon ?
300	01 :12 :36	E2	Même si on continue, on ne va pas arrêter de voir les nombres à virgule.
301	01 :12 :41	C	Attention ! On peut vérifier ça ! On peut vérifier ça ! Même si on continue on ne peut pas s'arrêter de voir les nombres à virgule. Mais on peut vérifier !
302	01 :12 :52	E	Oui.
303	01 :12 :53	C	Continuons alors pour voir si on peut continuer à voir les nombres à virgule. D'accord ? Et on s'entend sur 200 ?
304	01 :13 :02	EE	Oui !
305	01 :13 :03	C	Mais on va le faire 20 à 20 toujours ?
306	01 :13 :07	E11	40 à 40.

307	01 :13 :09	C	Mais on est déjà allé à 60 ici. Alors on continue de 20 à 20. Et là n'oubliez pas, on va vous donner de feuille et vous allez mettre le tableau. D'accord ? Je vais vous distribuer de feuilles pour avoir le tableau par groupe, pour que nous, on ne soit pas obligés de recopier quoi.
308	01 :13 :32	EE	Oui !
309	01 :13 :33	C	Ça peut aller ?
310	01 :13 :33	E11	Oui !
311	01 :13 :34	C	Donc nous sommes lancés pour 200.
312	01 :40 :05	C	Si un groupe finit, il va mettre ses résultats au tableau.
313	01 :45 :01	P	Si un groupe a fini, il peut mettre son résultat au tableau. il nous donne son tableau. Ne faites pas d'arrondi inh ! Au pire des cas vous prenez 2 chiffres après la virgule ; d'accord ? Si un groupe a fini il peut mettre son résultat au tableau.
314	01 :47 :29	C	A votre attention ! On va arrêter la séance là ! Vos bouteilles, on va les prendre. [...] On va analyser vos résultats la séance prochaine. Nous, on va récupérer simplement ce que vous avez trouvé. On va récupérer les résultats sur les feuilles-là. A la prochaine rencontre, on va vous retourner vos feuilles. N'oubliez pas d'écrire les numéros des groupes là-dessus. On vous retournera vos feuilles et c'est avec ça qu'on va travailler.
315	01 :48 :26		FIN

ANNEXE 11 : Transcription T₅

SITUATION 2, PHASE 2.1

12 AVRIL 2017

EFFECTIF : 16

HEURE : 08h30 min

Les élèves sont numérotés de E₁ à E₁₇. Lorsque l'élève qui intervient est identifié, il est indiqué par son numéro. La lettre E signifie que l'élève qui intervient n'est pas identifié. Par EE, nous exprimons que plusieurs élèves (au moins deux) interviennent simultanément. La lettre P désigne le professeur. Dans la colonne des échanges verbaux, les points de suspension indiquent des passages qui n'ont pas pu être déchiffrés. L'élève E₁₀ est absent.

Num.	Temps	Acteurs	Echanges verbaux
001	00 :00 :12	P	Bonjour tout le monde. J'espère que vous avez fini de recopier les cinq tableaux. Bon faites vite. La fois passée, on avait parlé, on avait fini les tirages avec les plastiques et la question était de déterminer le nombre de billes blanches qui était dans chaque bouteille. C'était ça non ?
002	00 :00 :45	EE	Oui.
003	00 :00 :46	P	Est-ce qu'on avait trouvé ?
004	00 :00 :53	EE	Non.
005	00 :00 :55	P	On avait trouvé des nombres à virgule. Il y a des groupes qui avaient trouvé 2,91, il y en a qui avaient trouvé trois virgule quelque chose. Enfin, ce n'était pas des nombres exacts. C'était des nombres à virgule. Selon vous, est-ce que en continuant les tirages, on arrivera à un nombre exact ?
006	00 :01 :19	EE	Non.
007	00 :01 :21	P	On n'arrivera pas à un nombre exact. Mais au moins on s'est compris sur la fréquence d'observation de billes blanches. Donc à chaque fois quand on fait 20 tirages, on observe le nombre de fois que les billes blanches apparaissent et on calcule la fréquence. Ce qu'on fera tout à l'heure on va essayer de, les tableaux qu'on a là, on peut les voir comme des tableaux de fréquence de séries statistiques. 20, 40, 60, 80, 100, 120 seront vus comme des modalités, et 0,5, je prends pour le groupe 1, 0,5 ; 0,6 seront vus comme les fréquences de ces modalités. Donc les papiers millimétrés qu'on vous a partagé, vous allez essayer de représenter le polygone de fréquence de chaque tableau. Je ne sais pas si vous comprenez. On a vu en

			statistique le polygone des fréquences. Qui va me rappeler ce que c'est qu'un polygone des fréquences ? (Silence) Personne ? C'est quoi le polygone des fréquences ? Oui Rachelle.
008	00 :03 :23	E1	Lorsqu'on a fait la statistique, on a représenté le diagramme. Vous avez dit lorsque ...
009	00 :03 :36	P	Voilà. Merci. On fait le diagramme d'accord ? Sur les abscisses, nous avons les modalités et sur les ordonnées nous avons les fréquences. On représente le diagramme en bâtons. Chaque point a pour abscisse la modalité et pour ordonnée sa fréquence et avec le diagramme en bâton, on joint les maintenant les sommets de chaque bâton et on a notre polygone de fréquence. On fera ainsi pour chaque tableau statistique qu'on a sur le même papier millimétré, c'est-à-dire sur la même figure. Donc dans un même repère vous avez pour chaque tableau statistique. Ça fait cinq polygones que vous avez à représenter. Ça peut aller pour tout le monde ?
010	00 :04 :45	EE	Oui.
011	00 :04 :46	C	On peut se passer de bâtons hein.
012	00 :04 :48	P	Oui. On peut se passer des bâtons.
013	00 :04 :50	C	Puisque vous joignez les sommets des bâtons. Mais les sommets, on sait qu'on peut représenter les sommets directement. Nous allons nous passer des bâtons. On ne va pas mettre le diagramme en bâtons d'abord, parce que nous ne sommes pas en classe ici. Si c'était des classes, on peut aller. Alors ce qu'il vous expliquait, c'est ceci. On va mettre en abscisses le nombre de tirages. Et on met quoi en ordonnées ?
014	00 :05 :29	EE	Les fréquences
015	00 :05 :30	C	Les fréquences. Maintenant l'échelle.
016	00 :05 :38	P	L'échelle, on prendra 1 cm pour 0,1.
017	00 :05 :41	C	Allez-y ! Pardon ! 1 cm pour 0,1. Donc on aura comme ça. On met en même temps 0,1 ; 0,2 ; 0,3 ainsi de suite jusqu'à 1. Mais si on vous demandait de mettre 0,23 ? Si on prend par exemple le point (40 ; 0,23). Comment on va placer les 0,23 ? Oui, alors c'est pour qu'on puisse faire la même chose. On veut s'entendre sur comment le réaliser. Oui.
018	00 :06 :45	E	On va placer 0,23 après 0,2.
019	00 :06 :51	C	On va mettre ça là ou bien il y aura des choses à côté ?
020	00 :06 :56	EE	Oui.
021	00 :06 :58	C	Il y aura des choses à côtés. Comme c'est un papier millimétré, il faut bien le faire. On fera très attention. Maintenant sur l'axe des abscisses, on va prendre quelle échelle ?

022	00 :07 :10	E14	1 centimètre pour 20.
023	00 :07 :12	C	Pardon ! 1cm pour 20. Donc on va comme ça 20, 40, ainsi de suite jusqu'à 200. Donc le prof vous demande de représenter le polygone des fréquences du groupe 1. Tout le monde fait pour le groupe 1. Et après pour le groupe 2 toujours dans la même partie. Ensuite pour le groupe 3 sur le même papier, le même repère. Ce n'est pas cinq repères différents, le même repère. Quand on finit pour le groupe 1, on va mettre à la fin G1, à la fin ou quelque part sur la ligne. Ça peut être à la fin ou au début G1. Et pour l'autre G2 mais ça va être sur le même graphique. C'est un seul repère. C'est compris. Les cinq là, on peut le faire pour combien de minutes ?
024	00 :08 :16	EE	Trente.
025	00 :08 :17	C	Donc c'est parti pour trente minutes. (jusqu'à 00 :08 :19)
026	00 :38 :42	P	Tout le monde a fini ?
027	00 :38 :44	EE	Oui.
028	00 :38 :53	P	Observez bien les graphiques que vous avez. Quelle interprétation vous en faites ? Observez bien. Quelle interprétation vous en faites ? C'est-à-dire, qu'est-ce que vous constatez sur ce graphique-là ? Les cinq polygones que vous avez construits. (Silence) Personne n'a rien à dire ? Oui Landry. Suivez
029	00 :40 :20	E11	On constate que les graphes se rencontrent sur leur itinéraire.
030	00 :40 :25	P	On constate que les graphes se rencontrent sur leur itinéraire. Qui a une autre interprétation ? Tout le monde a constaté que les graphes se rencontrent sur les itinéraires ?
031	00 :40 :50	E	Oui
032	00 :40 :51	P	Bien, lorsqu'ils se rencontrent, ils se rencontrent autour de quel nombre ?
033	00 :40 :57	E14	0,63
034	00 :41 :06	E	0,5 jusqu'à 0,7. Intervalle [0,5 ; 0,7].
035	00 :41 :20	P	Groupe 1, vous avez trouvé quel nombre ?
036	00 :41 :22	E3	0,6.
037	00 :41 :23	P	0,6, Là-bas ?
038	00 :41 :25	E6	0,5 à 0,7
039	00 :41 :32	P	0,5. Ici ?
040	E	E	0,5 à 0,7
041	00 :41 :40	P	0,5 à 0,7. Oui lorsqu'ils se rencontrent vraiment.
042	00 :41 :42	E11	Ah 0,6.
043	00 :41 :44	P	0,6, Ici. Le groupe 4.
044	00 :41 :47	E	0,6
045	00 :41 :57	P	0,6 ? C'est ça ? Groupe n°5.

046	00 :42 :00	E	Ils se croisent en 0,6
047	00 :42 :04	P	Donc on peut conclure que, enfin, les graphiques qu'on a construits tournent autour de 0,6. La fréquence des tirages tourne autour de 0,6. C'est ce qu'on peut conclure non ?
048	00 :42 :19	EE	Oui !
049	00 :42 :20	P	Mais cette fréquence qu'on a obtenue en faisant par groupes de 200 tirages, 200 tirages, selon vous, est-ce que en évoluant elle va changer ? Selon vous est-ce qu'en évoluant ça va changer ? Ce qu'on a obtenu, c'est en faisant par groupe de 100 tirages ou bien ?
050	00 :42 :53	EE	Oui !
051	00 :42 :54	P	Maintenant est-ce que en partant peut-être à 300, à 400, est-ce que ça va changer ?
052	00 :42 :59	EE	Oui !
053	00 :43 :00	P	Ce qui est sûr, on ne va pas recommencer encore par, par faire les tirages. Ce qu'on va faire, on va cumuler pour tous les groupes. C'est comme si un seul groupe avait fait tous les tirages. Ça peut aller ? Donc on va mettre tous les groupes ensemble. On va mettre les 20, 20 tirages ensemble, les 40, 40 ensemble et ça fera 100, 200, 300, 400, 500, jusqu'à mille tirages. Ce qu'on veut c'est de voir comment ça évolue lorsqu'on fait plus de tirages. Si on pouvait, on irait à 1000, 2000 tirages toujours pour voir avec quelle fréquence ça oscille. Je ne sais pas si vous voyez.
054	00 :44 :01	C	Le professeur vous dit. Le problème, vous avez dit exactement que ça, je vais utiliser vos termes. Vous avez dit que les graphes se rencontrent sur leur itinéraire. Le professeur a demandé : ils se rencontrent autour de quel nombre ? Vous avez dit entre 0,5 et 0,6 d'abord. Mais si ça évolue, puisque s'ils se rencontrent vraiment, ils vont se rencontrer vraiment, ils vont se rencontrer autour de quel nombre ? Vous avez conjecturé 0,6. Est-ce que c'est exactement 0,6 que vous avez vu là ?
055	00 :44 :40	EE	Non
056	00 :44 :49	C	Et c'est pour ça que le professeur demande est-ce que en évoluant, est-ce que vous pensez que les zéro virgule, enfin les zéro virgule, ce que vous avez dit ; si on continuait à faire des tirages, est-ce que qu'on observera que ça va effectivement vers les 0,6. Ce n'est pas ça le problème ?
057	00 :45 :08	P	C'est ça.
058	00 :45 :09	C	Si on continuait de faire des tirages, est-ce qu'on peut observer que ça va vers les 0,6. Si vous regardez comment ça évolue, vous pouvez répondre. Si on continuait à faire encore plus de

			tirages, est-ce que les graphes, tels que ça évolue chez vous pour se rencontrer là, est-ce qu'on ira, on va constater que la valeur est vraiment 0,6 ?
059	00 :45 :35	EE	Non ! Non ! (Silence)
060	00 :45 :44	C	On va constater oui ou non ?
061	00 :45 :46	EE	Non
062	00 :45 :47	C	Mais d'où est-ce que vous tenez votre 0,6 alors ? Si on ne doit pas constater, où est-ce que vous avez obtenu votre 0,6 ? Et alors le professeur a dit ceci. On ne va pas vous demander de faire de faire de tirages. Mais on va faire comme si, on va mettre les tirages de tous des cinq groupes ensemble. C'était comme si, il y a une seule bouteille, on est d'accord, de la même composition. On sait que c'est la même composition maintenant hein. Il y a une seule bouteille et que vous, vous avez lancé 200 fois. Ceux qui sont là ont aussi lancé 200 fois, ainsi de suite. On va faire le cumul de tous les cinq. Ce serait comme si on a lancé combien de fois ?
063	00 :46 :41	EE	Mille fois.
064	00 :46 :43	C	1000 fois. D'accord. Donc si on allait jusqu'à mille fois, qu'est-ce qu'on allait observer ? C'est la suite que le professeur est en train de vous dire. Alors regardons ! on va mettre les, les, les, les toutes premières ; la toute première colonne de tout le monde, si on réunit ça fait 100. Si on réunit les premières colonnes, ça fait 100.
065	00 :47 :07	EE	Oui
066	00 :47 :08	C	Mais alors sur les 100, ça fait combien de blancs on va observer ? Ce n'est pas là au tableau. Un groupe a obtenu 10, un autre 11, un autre 14, un autre 12 et un autre encore 14. Ça faisait 61 divisé par 100, ça fait 0,61. On est d'accord ? On a fait la même chose pour 200, d'ailleurs c'est 119 qui est trouvé, ça fait 0,595. On a fait la même chose, ça fait combien maintenant ?
067	00 :47 :54	EE	300
068	00 :47 :55	C	300 et avec ça c'est 190 qui fait 0,63. 400 c'est 250, ça fait 0,625. 500 ça fait 315 et c'est 0,63. 600, il y a 375, ça fait 0,625. 700, c'est 430, ça fait 0,614 ; Avec 800, c'est 491 et ça donne 0,613. Avec 900, c'est 551, ça fait 0,612 ; 1000, 615, ça donne 0,615. Et pour mieux observer on va réaliser dans la seconde partie le polygone de fréquence de ce tableau. Ça fait un seul graphe. Alors sur l'axe des ordonnées ça ne change pas. Mais pour l'axe des abscisses, on va prendre quoi comme échelle,
069	00 :49 :52	E	1 cm pour 100.

070	00 :50 :00	C	1cm pour 100. Donc c'est ce graphique que vous allez réaliser sur la deuxième partie. Ça fait le graphique du cumul des cinq groupes. Ça peut aller ? C'est compris le travail à faire ?
071	00 :50 :16	EE	Oui
072	00 :50 :17	C	Donc on peut faire ça pour combien de minutes ?
073	00 :50 :24	EE	10 minutes, 15 minutes, 20 minutes.
074	00 :50 :27	C	Vous avez fait 5 pour trente minutes et vous voulez faire un seul. Vous avez fait cinq en trente minutes. 10 minutes c'est trop. Mais on va prendre 10 minutes. Donc en 10 minutes. On sait qu'il y a des gens qui le font en 2 minutes, donc ils n'ont qu'à bien faire. Dans la seconde partie. (0 :50 :50)
075	01 :00 :18	P	Bien ! Alors vers quelle valeur, lorsqu'on fait le cumul, d'accord ? Lorsqu'on présente le tableau représentant le cumul, vers quelle valeur, quelle interprétation vous en faites ? Oui le deuxième graphe. Je vous écoute. Quelle interprétation vous, vous en faites du deuxième graphe ? Qui a fait l'interprétation ? Qu'est-ce que vous constatez ? Tout le monde a représenté non ? Oui autour de quelle valeur ça tourne ? De la représentation que vous avez effectuée ? Tout à l'heure, on avait dit que pour les cinq tableaux qu'on avait fait différemment, on a vu qu'ils se rencontrent effectivement autour de 0,6 et on a dit que si on continuait, est-ce qu'on allait trouver effectivement que ça tourne autour de 0,6 ? D'accord ? Et pour ce faire, on a regroupé les cinq tableaux. On est, on est allé jusqu'à mille tirages. A mille tirages, qu'est-ce que vous avez constaté ? Oui, Tohibou.
076	01 :02 :21	E4	On a constaté que ça tourne autour de 0,6.
077	01:02 :25	P	On a constaté que ça tourne autour de 0,6. Est-ce qu'un autre groupe a fait le même constat ?
078	01:02:34	E2	Ici.
079	01:02:37	P	Un autre groupe. Je préférerais un autre groupe. Vous, qu'est-ce que vous avez constaté ? Parlez, parlez.
080	01:02:45	E	On constate que
081	01:02:48	P	Parlez, parlez.
082	01:02 :51	E	On constate que ça tourne autour de 0,61.
083	01 :02 :53	P	0,61. Avant on avait dit 0,6 ; on a trouvé 0,61. Oui vous.
084	01 :03 :07	E	Autour de 0,6.
085	01 :03 :08	P	Autour de 0,6. D'accord. À 200, on a trouvé 0,6. A 1000, on a trouvé que ça tourne autour de 0,6. Selon vous, est-ce que si on évolue, ça va changer ?
086	01 :03 :19	EE	Non, oui.

087	01 :03 :24	P	D'accord ? On a remarqué qu'à chaque fois, ça va tourner autour de 0,6.
088	01 :03 :30	C	Oui. Tu dis que ça peut changer.
089	01 :03 :32	E4	Oui.
090	01 :03 :37	E3	Parle non ?
091	01 :03 :40	E4	Ça peut changer comme ça ne peut pas changer.
092	01 :03 :44	C	Oui mais vous avez fait le graphique. Vous avez vu. Maintenant si ça change, ça peut, c'est pour aller vers quoi ? (Silence) Non faisons le raisonnement correctement. Vous avez fait des courbes.
093	01 :04 :23	EE	Oui.
094	01 :04 :24	C	Vous avez dit que les courbes se rencontrent sur leur itinéraire. C'est du vécu désormais. Vous avez vu. Ça c'est pour 200. Quand on est allé à 1000, est-ce que ça confirme ce qui avait été vu ?
095	01 :04 :43	EE	Oui.
096	01 :04 :44	C	Ça confirme l'évolution de la fréquence-là.
097	01 :04 :48	E	Oui.
098	01 :04 :49	C	Et on a dit, si on continuait, qu'est-ce qui va se passer ? Vous avez dit que ça peut évoluer. Ça va évoluer vers quoi ? Est-ce que ça ne va pas confirmer parce que les 1000 tirages-là ont confirmé ce qu'on a obtenu pour
099	01 :05 :10	EE	200.
100	01 :05 :10	C	200. Maintenant quand tu dis, tu dis, on dit 0,61. On est d'accord qu'on dise que ça peut changer. Mais avec la confirmation que vous vous avez déjà, si ça change, ça va aller vers où ? Oui tu peux répondre non ?
101	01 :05 :35	E4	C'est 0,6
102	01 :05 :36	C	0 virgule ?
103	01 :05 :38	E	0,6
104	01 :05 :38	C	Oui. Parlez fort ? Parce qu'on n'entend pas.
105	01 :05 :42	E	Selon moi, ça peut être sur 0,6
106	01 :05 :46	C	Sur 0,6. Ça va confirmer que c'est votre point de vue. Ça peut confirmer que c'est votre point de vue. Ça peut, C'est l'évolution qu'on regarde hein. En 200, est-ce que à 200 là, on était très sûr que c'est 0,61 ? On était plus à 200, on était plus en haut que 0,61. On est d'accord ?
107	01 :06 :06	E	Oui.
108	01 :06 :07	C	Mais lorsqu'on est allé à 1000, c'est, voilà. Maintenant si on allait à 2000 ?
109	01 :06 :13	E	0,6
110	01 :06 :14	C	À 3000, ça, les 0,6 vont apparaître.
111	01 :06 :16	EE	Oui

112	01 :06 :17	C	Exactement. Est-ce que vous ne remarquez pas ça ?
113	01 :06 :23	EE	Oui.
114	01 :06 :23	C	C'est ça le, c'est pour ça qu'on a fait le graphique. On est d'accord ?
115	01 :06 :27	EE	Oui.
116	01 :06 :28	C	Le professeur va vous l'écrire tout-à-l'heure. Donc au fur et à mesure que nous augmentons le nombre de tirages pour observer les billes blanches, la fréquence évolue vers, de plus en plus vers 0,6. Et avec 0,6, quel est alors le nombre de billes blanches ?
117	01 :07 :00	EE	Trois.
118	01 :07 :02	C	Et c'est comme si on a, si vous êtes d'accord, c'est comme si on est venu à la réponse à la question.
119	01 :07 :06	EE	Oui.
120	01 :07 :07	C	Si vous êtes convaincus qu'en continuant de faire des tirages, la fréquence va évoluer vers 0,6. Plus le nombre est grand, plus le nombre de tirages est grand, plus ça évolue vers 0,6. On va trouver alors combien comme nombre de billes blanches.
121	01 :07 :33	E	Trois.
122	01 :07 :33	C	Trois. Il n'y aurait plus de virgule. Autrement dit, pourquoi y avait-il de virgule ?
123	01 :07 :40	E4	Parce que
124	01 :07 :42	C	Oui. Parlez fort. Pourquoi est-ce qu'on avait trouvé des virgules ? (Qu'est-ce que vous voulez là, il n'y a pas de. Ce n'est pas votre classe ici hein, c'est une autre classe). Oui on parle, parce que ?
125	01 :07 :58	E4	Il y avait virgule, parce le nombre de tirages était peu.
126	01 :08 :03	C	Parce que le nombre de tirages était peu et donc pour l'obtenir, il faut que le nombre de tirages soit grand. On va laisser le professeur tirer avec vous la leçon qu'on peut apprendre pour ça. Ou bien ?
127	01 :08 :23	P	Alors, on va dire, plus on fait le tirage, le nombre, la fréquence obtenue va tourner autour de 0,6. Au départ, on avait commencé par des tirages avec les bouteilles. Chaque bouteille contenait cinq et on essayait de tirer une bille à chaque fois. On peut voir ça comme une expérience aléatoire parce que le tirage qu'on obtenait était dû au
128	01 :09 :00	EE	hasard
129	01 :09 :00	P	était dû au hasard. Merci. Donc on peut dire déjà que ce qu'on fait comme tirage est une expérience aléatoire. On peut la nommer « tirer une bille de la bouteille ». Ça peut aller ? Alors

			lorsqu'on voit ça comme une expérience aléatoire, le nombre 0,6 qu'on a obtenu est la probabilité de l'événement « la boule tirée est blanche ». Je pense que vous suivez. L'expérience aléatoire étant de tirer une bille de la bouteille. Le nombre 0,6 qu'on a obtenu est la probabilité de l'événement « la bille tirée est blanche ». A base des graphiques qu'on a construits, on a que plus on évolue, plus le nombre de tirages sera grand, plus ce nombre va tendre vers 0,6. C'est ce nombre-là qu'on appelle la probabilité de l'événement, d'accord, « la bille tirée est blanche ». Parce que quand on tirait, on observait la couleur de la bille qui était, qui était blanche et on a pris le nombre de fois qu'on a vu la bille blanche apparaître. Ça suit ?
130	01 :10 :23	EE	Oui.
131	01 :10 :24	P	D'accord ? Donc ce 0,6 représentera pour nous alors la probabilité de l'événement, d'accord, « la bille tirée est blanche ». Voilà un peu la conclusion qu'on peut faire de toute cette activité qu'on a faite.
132	01 :10 :47	C	C'est une conclusion importante. Il faut noter la conclusion.
133	01 :10 :50	E2	J'ai une question.
134	01 :10 :51	P	Oui. Question ?
135	01 :10 :53	E2	Ce que j'aimerais demander, au départ le nombre obtenu tournait, euh, est plus élevé que 0,6. Maintenant, ça tourne autour de, en augmentant, ça tourne autour de 0,6. Je me demande, si en augmentant plus, ça ne va pas s'abaisser que 0,6. Sinon, c'était plus élevé que 0,6. En augmentant plus, en faisant plus de tirage.
136	01 :11 :32	C	La question, elle est juste, mais ce n'est pas que ça, ce n'est pas une décroissance. Ça ne va pas quitter les grandes valeurs pour venir à 0,6. Ça passe du haut vers le bas, du haut, ainsi de suite, jusqu'à rester autour de 0,6. Ce n'est pas que ça décroît mais. Ça fluctue. On imagine que si on continuait, ça va être, oui si on avait la possibilité de continuer indéfiniment, on trouverait à coup sûr 0,6. C'est la leçon qu'on peut tirer de, enfin si on regarde dans le futur comment le graphe en fait évolue. Vous voyez, les 0,7 ont disparu. Il y a des gens qui ont trouvé 0,7 au début. Il y a des gens qui ont trouvé 0,5 non ? les 0,5 du départ ont disparu aussi. D'accord ? On est, vous êtes d'accord ? est-ce que tout le monde a compris ce qu'on a dit là ?
137	01 :12 :36	EE	Oui.
138	01 :13 :01	C	Oui. C'est pour noter la conclusion de l'activité qu'on est en train de vous écrire ça au tableau. Ce qu'on est en train de vous dire. (Silence) (jusqu'à 1 :13 :08)

139	01 :15 :28	P	Donc voilà. Des graphiques obtenus, on a conclu que plus le nombre de tirages est grand, la valeur de la fréquence d'observation des billes blanches tourne autour de 0,6. En considérant l'expérience aléatoire « tirer une bille dans la bouteille », la valeur 0,6 est la probabilité de l'événement « la bille tirée est blanche ». On conclut de notre activité, la leçon du jour, c'est quoi ? Lorsque vous avez une expérience aléatoire et vous faites, vous essayez de, vous avez un événement que vous essayez de réaliser un grand nombre de fois, vous allez constater que sa fréquence va tourner autour d'un nombre réel. C'est ce nombre là qu'on va appeler la probabilité de cet événement. Et le théorème qui dit ça s'appelle la loi des grands nombres. Les grands nombres dont je parle, ce n'est pas 1000, 2000 hein. Ça peut aller à peut-être mille milliards, lorsqu'on tend vers vraiment des grands nombres. D'accord ?
140	01 :16 :38	EE	Oui.
141	01 :16 :39	P	Donc la probabilité d'un événement ici se définit par la fréquence d'observation, enfin de la réalisation d'un événement lorsqu'on va vers vraiment des grands nombres, dix à la puissance peut-être cent. On n'a pas encore, on n'a même pas encore commencé, mais avec le peu qu'on a, on a pu conclure. Donc, voilà la leçon qu'on a tirée de : la probabilité, la probabilité, c'est, comment on dit, lorsqu'on a une expérience aléatoire et un événement, la probabilité de cet événement, c'est la fréquence d'observation, c'est la fréquence d'apparition ou de réalisation de cet événement lorsqu'on réalise un très grand nombre de fois. C'est ce qu'on va écrire comme notre synthèse du jour. Est-ce qu'il y des questions ?
142	01 :17 :50		FIN

ANNEXE 12 : Transcription T₆

SITUATION 2, PHASES 2 ET 3

13 AVRIL 2017

EFFECTIF : 13

HEURE : 15h

Lorsque l'élève qui intervient est identifié, il est indiqué par son numéro. La lettre E signifie que l'élève qui intervient n'est pas identifié. Par EE, nous exprimons que plusieurs élèves (au moins deux) interviennent simultanément. La lettre P désigne le professeur et la lettre C le chercheur. Dans la colonne des échanges verbaux, les points de suspension indiquent des passages qui n'ont pas pu être déchiffrés. Pour la séance du 13 avril 2017, les élèves E4, E7, E9 et E10 sont absents.

Num.	Temps	Acteurs	Echanges verbaux
001	00 :00 :03	P	Bonjour tout le monde.
002	00 :00 :05	EE	Bonjour monsieur
003	00 :00 :07	P	Comment ça va ?
004	00 :00 :08	EE	Bien.
005	00 :00 :09	P	Ça va bien ?
006	00 :00 :11	EE	Oui.
007	00 :00 :12	P	En forme ?
008	00 :00 :13	EE	Oui.
009	00 :00 :14	P	Bien ! Nous voilà encore rassemblés pour notre enseignement en probabilité en classe de seconde. D'accord ? Depuis près de trois semaines, on est en train d'expérimenter la probabilité sur vous. Pour voir ce que ça va donner. Ça n'a jamais été fait en seconde. On cherche à savoir l'effet que ça aura. Euh ! Je suis un peu peiné de voir qu'il y a des gens qui manquent un tel événement. Euh ! Vous êtes la première classe au Bénin qui est en train de subir cela. Normalement, vous devez être content. Vraiment ! Bon ! Peut-être, on dirait que c'est la grève ou bien ? Normalement, vous venez tous les jours matin et soir non ? En temps normal, les jeudis, vous êtes là les soirs.
010	00 :01 :16	EE	Oui.
011	00 :01 :17	P	D'accord, ce n'est pas grave. Hier, on s'était vu et on a travaillé ou bien ?
012	00 :01 :27	EE	Oui
013	00 :01 :28	P	Qu'est-ce qu'on a fait ? De quoi on a parlé ? Ou bien hier on s'est regardé seulement ?

014	00 :01 :56	EE	Non !
015	00 :01 :57	P	Hein mais quand on s'est vu hier là, qu'est-ce qu'on a fait ? Oui.
016	00 :02 :01	E3	Hier on a trouvé le nombre de billes blanches à travers la probabilité de l'événement la bille tirée est blanche, qui est 0,6.
017	00 :02 :23	P	En faisant quoi ? Tu as dit qu'on a déterminé le nombre de billes blanches en déterminant la probabilité, c'est ça non ? de l'événement « la bille tirée est blanche ». En faisant quoi ? Comment déterminer cette probabilité ? Oui. Fadhy !
018	00 :02 :41	E6	On a construit les diagrammes
019	00 :02 :44	P	On a construit des diagrammes. Quel genre de diagramme ?
020	00 :02 :51	EE	Polygone, polygone des fréquences, diagramme en bâtons.
021	00 :02 :57	P	Diagramme en bâtons ! C'est le diagramme en bâton qu'on a tracé ?
022	00 :03 :00	EE	Non !
023	00 :03 :01	P	Qu'est-ce qu'on a fait ?
024	00 :03 :02	EE	Le polygone des fréquences, des effectifs.
025	00 :03 :05	P	Polygones des
026	00 :03 :07	EE	fréquences.
027	00 :03 :09	P	Des fréquences et non des effectifs. Polygone des fréquences de quoi ?
028	00 :03 :11	E	des séries statistiques
029	00 :03 :16	P	Comment on a obtenu ces fréquences-là ?
030	00 :03 :20	E6	Grace aux différents résultats des cinq groupes.
031	00 :03 :24	P	Grace aux différents résultats des
032	00 :03 :28	E6	cinq groupes.
033	00 :03 :29	P	Des cinq groupes. Les résultats de quoi ? qu'est-ce qu'on a fait pour obtenir ces résultats ?
034	00 :03 :43	E6	On a fait beaucoup de tirages.
035	00 :03 :49	P	Pour observer ?
036	00 :03 :54	E6	On a
037	00 :03 :57	P	Quelqu'un pour l'aider. Quand on a fait les tirages, c'était pour obtenir quoi ? Oui Juliette !
038	00 :04 :10	E3	Pour observer le nombre de billes blanches.
039	00 :04 :13	P	Pour observer le nombre de billes blanches. Eh, alors quand on a trouvé le nombre de billes blanches, comment on a trouvé la fréquence ? Lorsqu'on fait les tirages pour observer le nombre de billes blanches, comment on a pu déterminer la fréquence ? Oui.
040	00 :04 :31	E6	Parce que l'autre a dit, quand on a fait le tirage, on a représenté le polygone des fréquences sur un papier millimétré. On a vu la fréquence autour de laquelle tournent les résultats de chacun des cinq groupes, puis

041	00 :04 :49	P	On a observé la fréquence autour de laquelle tournent toutes les autres fréquences. C'est ça ?
042	00 :05 :01	E6	Oui !
043	00 :05 :03	P	Et combien de fois on a fait ça avant de trouver ça ?
044	00 :05 :06	E6	Un grand nombre.
045	00 :05 :06	E	20 fois.
046	00 :05 :12	P	Dites ce qu'on a fait hier non ! Ce qu'on a fait hier là, c'est ça que je veux.
047	00 :05 :15	E6	On a fait 200 fois.
048	00 :05 :17	P	200 fois par ?
049	00 :05 :18	EE	Groupe.
050	00 :05 :19	P	Par groupe hein ! Et après ?
051	00 :05 :21	E6	On a agencé, on a agencé le tout et ça a donné jusqu'à 1000.
052	00 :05 :27	P	Ça a donné jusqu'à 1000.
053	00 :05 :30	E6	Et on a déduit que c'était 0,6 la fréquence.
054	00 :05 :35	P	Pourquoi on avait déduit que c'était 0,6 ? C'était quelque chose qui a fait qu'on a déduit que c'était 0,6.
055	00 :05 :41	E6	Parce qu'on a constaté que plus on va
056	00 :05 :46	P	Voilà ! C'est ça ce que je voulais. Plus on évolue, plus il y a une précision par rapport à 0,6. D'accord ? On avait déduit que si on allait à des grands nombres, on allait constater que la fréquence d'apparition de billes blanches allait tourner autour de 0,6. Et ça se précisait à chaque fois. Quand on était à 200, on était à 0,7, 0,65 ; 0,68... Mais plus on allait, lorsqu'on est allé à 1000, on a vu que c'est devenu 0,61 ; 0,62 ; 0,6. D'accord ? Donc on a vu que plus on essayait d'aller vers les grands nombres d'accord, et on obtenait une précision par rapport au nombre 0,6. On a dit que ce nombre 0,6 représentait quoi ? Oui Rachelle.
057	00 :06 :42	E1	Le nombre 0,6 représente la probabilité
058	00 :06 :47	P	Parle plus fort.
059	00 :06 :52	E1	Le nombre 0,6 représente la probabilité de l'événement « la bille tirée est blanche »
060	00 :06 :57	P	Le nombre 0,6 représente la probabilité de l'événement « la bille tirée est »
061	00 :07 :02	EE	Blanche.
062	00 :07 :03	P	L'expérience aléatoire était
063	00 :07 :06	EE	« tirer une bille ».
064	00 :07 :07	P	Tirer une bille d'accord ? L'événement « tirer une bille blanche », sa probabilité, de cette manière-là, on a déduit que c'était 0,6. Pour aller jusque-là, qu'est-ce qu'on avait fait ? Pour aller jusqu'à ce niveau. On avait commencé par faire quoi ?

065	00 :07 :29	EE-P	Tirage à partir de 20, après on est monté à 40, 60, 80, 100, 120, jusqu'à 200.
066	00 :07 :39	P	Et à chaque fois on notait le nombre de
067	00 :07 :40	E	billes.
068	00 :07 :41	P	De fois on observait de billes
069	00 :07 :43	EE	blanches.
070	00 :07 :44	P	Blanches. Après, on a fait quoi ?
071	00 :07 :47	EE	On a calculé la fréquence.
072	00 :07 :49	P	On a calculé la fréquence d'observation. Hein ! après ? Fadhyll a déjà dit ça tout à l'heure. Quand on a calculé les fréquences, qu'est-ce, qu'est-ce qu'on a fait après ?
073	00 :08 :03	E3	On a tracé le polygone
074	00 :08 :04	P	On a :
075	00 :08 :06	E	On a tracé le polygone
076	00 :08 :07	P	Parlez ! Si vous voulez parler-là, il faut lever le doigt et parler. Parler courageusement. Quand on a obtenu les fréquences, qu'est-ce qu'on a fait après ? Fadhyll, redis-nous ça. Quand on a calculé les fréquences, qu'est-ce qu'on a fait ?
077	00 :08 :36	E6	On a fait la représentation
078	00 :08 :39	P	On avait construit les polygones de fréquences avec les cinq tableaux, d'accord ? On a vu qu'ils se rencontraient souvent à un nombre qui est zéro virgule
079	00 :08 :50	EE	Six.
080	00 :08 :51	P	Six, d'accord ? Et on a regroupé les cinq qui étaient devenus 1000 tirages. Et après on a encore fait un autre polygone des fréquences et on a vu que ça se précisait. C'est ce que je voulais, d'accord ?
081	00 :09 :01	EE	Oui.
082	00 :09 :03	P	Mais on va noter d'abord la définition de probabilité selon la loi des grands nombres, qui dit que les fréquences d'observation d'un événement A pour de grands nombres de réalisations d'une expérience aléatoire oscillent autour d'un nombre réel qui est compris entre 0 et 1. Ce nombre est la probabilité de l'événement A pour une seule réalisation de cette expérience aléatoire. On la note $p(A)$. Toutefois, la fréquence de réalisation de l'événement A pour un nombre n donné de réalisation de l'expérience aléatoire n'est pas la probabilité de l'événement A. Elle est plutôt une estimation de cette probabilité. Qu'est-ce qu'on veut dire par là ? On a dit qu'on avait fait 1000 tirages et hier on s'était posé la question, si on allait à 5000, 10000, 20000, 30000, d'accord ? Est-ce qu'on allait obtenir la même chose ? On avait conclu que oui. Parce qu'à chaque fois qu'on allait, ça se précisait. Mais est-ce que

			les grands nombres s'arrêtent à 30000 ? Il faut aller à un million, un milliard. Est-ce qu'on a la possibilité de faire ça. Même le temps ne nous suffirait pas. D'accord ? Et lorsqu'on arrive à faire cette construction pour donner à peu près, d'accord, cette fréquence, on dit que la fréquence qu'on obtient n'est pas la probabilité. C'est juste une estimation de cette probabilité. D'accord ? Notre 0,6 qu'on a obtenus, on dirait pour l'instant que ce n'est pas
083	00 :10 :38	E3	la probabilité.
084	00 :10 :51	C	Lorsqu'on a lancé 1000 fois, la fréquence, la dernière fréquence qu'on a obtenue, c'était quoi ? C'était zéro virgule six cents, six cent quinze. Ce 0,615 là n'est pas la, n'est pas la probabilité de l'événement. C'est une estimation de la probabilité. La probabilité que vous avez trouvée, c'est que vous avez poussé le regard très loin. On est d'accord hein ? Vous avez dit, si on continuait. C'est, puisqu'on n'a pas la possibilité de continuer. Si on continuait, on ira vers zéro virgule
085	00 :11 :25	EE	Six.
086	00 :11 :27	C	0,6 est bel et bien, on peut dire que c'est la probabilité. Mais lorsqu'on a fait le truc, on a fait le tirage 1000 fois, ou bien 200 fois. La dernière fréquence qu'on a trouvée, les fréquences, les différentes fréquences qu'on a obtenues-là ne sont pas, ne constituent pas la probabilité. C'est le chemin qui conduit vers la probabilité. Si on prenait l'une de ces fréquences-là, on va dire qu'on n'a pas la probabilité mais une estimation de la probabilité. Je crois c'est ça hein ?
087	00 :12 :05	P	Comme le professeur l'a dit tout à l'heure, la probabilité de l'événement « tirer une bille blanche » est bel et bien 0,6. D'accord ? Lorsqu'on fait les tirages et qu'on calcule les fréquences, ce ne sont pas les probabilités mais les estimations de cette probabilité-là. C'est ce qu'on va faire dans la consigne qui va suivre. On va, on va vous repartager les bouteilles. Vous allez essayer d'estimer maintenant. Vous allez estimer la probabilité de tirer.
088	00 :12 :37	C	Est-ce qu'on ne va pas les laisser noter.
089	00 :12 :39	P	On va noter d'abord ? Oui ! Ok ! Donc on va noter la définition. Prenez la définition. (long silence)
090	00 :20 :00	P	Selon un théorème appelé la loi des grands nombres, la fréquence d'observation d'un événement A pour de grands nombres de réalisation d'une l'expérience aléatoire oscille autour d'un nombre réel compris entre 0 et 1. Ce nombre est la probabilité de l'événement A pour une seule réalisation de cette expérience aléatoire. On la note $p(A)$. La fréquence de

			réalisation de l'événement A pour un nombre n donné de réalisations de l'expérience aléatoire n'est pas la probabilité de l'événement A. Elle est plutôt une estimation de cette probabilité. Donc, le fait de faire un certain nombre de tirages, d'observer les fréquences n'est pas la probabilité mais une estimation. Tout à l'heure vous êtes, serez amenés à estimer la probabilité de l'événement « tirer une bille blanche dans les bouteilles qu'on va vous donner. (Silence) Alors faites une lecture silencieuse de la phase 2.2. Je dis la phase 2.2 pour l'instant. (Silence) Quelqu'un pour nous lire rapidement la phase 2.2
091	00 :25 :30	EE	Ici monsieur.
092	00 :25 :31	P	Oui ! Pacôme
093	00 :25 :33	E14	Vous disposez dans votre groupe d'une bouteille contenant 5 billes dont certaines sont de couleur blanche et d'autres de couleur noire. On considère l'expérience aléatoire « tirer une bille dans la bouteille » et l'événement A :« la bille tirée est blanche ». Estimez la probabilité de l'événement A, puis déduisez-en le nombre de billes blanches contenues dans la bouteille de votre groupe. Travail en groupe : 30 minutes.
094	00 :25 :54	P	Voilà. Les bouteilles ne sont pas à ouvrir.
095	00 :25 :58	C	Non. Ils connaissent le principe.
096	00 :26 :03	P	Tout le monde sait ça hein ! Donc si on vous demande d'estimer la probabilité, cela revient à faire, à faire tout le long trajet que vous aviez fait, c'est-à-dire, effectuer les tirages et (silence)
097	00 :26 :30	C	Euh ! Il y a quelques précisions à donner. Quand vous secouez, il ne faut pas secouer avec toute la force qu'on a. Vous comprenez ce que je dis.
098	00 :26 :40	E	Oui !
099	00 :26 :41	C	Il ne faut pas secouer avec toute la force qu'on a. Parce que chez certains, certains ont cassé les billes. Certains ont cassé, non, ont failli casser. Ce n'est pas cassé. Il y a le groupe 2, on a mis un peu de peinture quelque part, parce que ça a été gratté un peu. Ne grattez pas les bouteilles. D'ailleurs, vous avez déjà dépassé ça. (00 :27 :10)
100	01 :16 :45	P	Je crois que tout le monde a fini hein !
101	01 :19 :53	P	Bien !
102	01 :23 :09	P	Bien ! Je pense que tous les groupes ont fini hein ! Pour le groupe n°2, c'est bon ?
103	01 :23 :16	E	Oui.
104	01 :23 :21	P	Le groupe n°3, c'est bon ?
105	01 :23 :24	E	Oui.

106	01 :24 :19	P	La question était d'estimer la probabilité ; suivez ! La question était d'estimer la probabilité pour en donner le nombre de billes blanches qu'il y a dans la bouteille. On va commencer par le groupe n°1. Votre estimation. Oui, l'estimation de la probabilité, vous avez trouvé combien ?
107	01 :24 :54	E1	D'après ce qu'on a fait, l'estimation de la probabilité, c'est 0,2.
108	01 :25 :00	P	Ok. 0,2. Alors le nombre de billes blanches dans la bouteille.
109	01 :25 :12	E1	Une bille blanche.
110	01 :25 :14	P	Une bille blanche. Comment vous avez fait pour trouver le 1 ?
111	01 :25 :27	E1	Pour trouver le 1, la fois passée, pour trouver la probabilité,
112	01 :25 :34	P	Suivez, suivez. Votre camarade est en train de parler.
113	01 :25 :34	E1	La fois passée pour la probabilité, on avait fait le nombre de billes blanches sur 5, le nombre total. Maintenant de là, on a tiré ceci. Oui ! Pour trouver les 0,6 de la fois passée, c'est ce qu'on avait fait.
114	01 :25 :58	P	Pour trouver les 0,6.
115	01 :26 :01	E1	Pour trouver l'estimation,
116	01 :26 :03	P	Oui.
117	01 :26 :04	E1	Pour la probabilité, la fois passée, on avait fait, on avait trouvé 3 billes blanches.
118	01 :26 :09	P	Ça, ce n'est pas l'estimation. C'était le nombre de billes blanches après qu'on a trouvé la probabilité.
119	01 :26 :13	E4	Oui. C'est la probabilité.
120	01 :26 :15	E1	Oui ! C'est à de là qu'on a,
121	01 :26 :17	P	C'est ce que vous avez fait maintenant ?
122	01 :26 :20	EE	C'est à partir de là, qu'on a dit,
123	01 :26 :24	P	À partir de ? De l'estimation ou de la probabilité ?
124	01 :26 :28	E1	Nous avons.
125	01 :26 :35	E2	Ok. On a trouvé une bille blanche. C'est à partir de notre estimation qu'on a déduit du graphique.
126	01 :26 :44	C	Mais, qu'est-ce que vous avez fait du graphique ? Quand vous avez fait le graphique, vous avez fait quoi avec ?
127	01 :26 :50	E2	Oui ! Quand on a fait le graphique, on a trouvé qu'en faisant un grand nombre de fois, ça tourne autour de 0,2. (Silence) Puisque ça tourne autour de 0,2, nous là où on s'est arrêté, on a trouvé 0,1 qui est le,
128	01 :27 :54	C	0,21 ?
129	01 :27 :55	E2	0,21 qui est la valeur la plus approchée de 0,2.
130	01 :28 :02	P	C'est ce qui est votre estimation.
131	01 :28 :04	E2	Oui.
132	01 :28 :05	P	Comment vous avez fait pour trouver 0,1 ?
133	01 :28 :09	E2	Pour trouver 0,1, on a fait la probabilité qui est 0,2 fois Oméga qui est 5.

134	01 :28 :44	P	Ils ont dit, ils ont obtenu, le groupe n°1, tout d'abord en conjecturant sur la valeur de la fréquence qu'ils obtiendraient s'ils faisaient un grand nombre de tirages. Donc à base de leur graphique, ils ont conjecturé et ils ont trouvé que la probabilité est 0,2. Ce qui est obtenu lorsqu'on fait un grand nombre de fois, lorsqu'on réalise un grand nombre de fois l'expérience aléatoire. D'accord ? Mais en prenant cette probabilité maintenant, ils ont multiplié par le nombre de billes dans la bouteille et ça leur a donné 1 bille blanche qu'ils ont dans leur bouteille. Maintenant le groupe n°2, on vous écoute.
135	01 :29 :32	E6	On a fait 210 fois. On a retourné la bouteille 210 fois. Lorsqu'on a tourné 210 fois, on a noté les fréquences et on a fait le polygone des fréquences. Après cela, on a constaté que la fréquence va vers 0,4 si on continuait.
136	01 :30 :01	P	D'abord, vous avez trouvé combien pour l'estimation ?
137	01 :30 :04	E6	0,4.
138	01 :30 :09	P	C'est ce que vous avez trouvé pour l'estimation, après les 210 tirages ?
139	01 :30 :12	E6	Non ! C'est 0,4.
140	01 :30 :14	P	L'estimation, c'est la fréquence que vous avez obtenu après le nombre total de tirages. Après les tirages, la fréquence que vous avez obtenue, c'est ça l'estimation.
141	01 :30 :22	E6	C'est 0,38.
142	01 :30 :23	P	Ça fait 0,38. Maintenant,
143	01 :30 :34	E6	Si on avait continué, on allait voir que ça va aller vers 0,4.
144	01 :30 :37	P	Vers 0,4.
145	01 :30 :39	C	Qu'est-ce qui te fait dire ça ?
146	01 :30 :41	E6	On n'a fait que 210 fois ; si on avait fait 240 fois, on aura 0,4.
147	01 :30 :50	C	Oui ! Qu'est-ce qui te fait dire ça ? Qu'est-ce qui te fait dire que si vous continuez, vous irez à 0,4 ? (Silence). Ce n'est pas l'analyse, l'interprétation du graphique ? Tu l'avais dit.
148	01 :31 :03	E6	Oui ! Le graphe, euh, monte vers 0,4 ; c'est-à-dire, ça évolue vers 0,4. Au fur et à mesure qu'on fait plus de tirages, ça évolue vers 0,4
149	01 :31 :30	C	Prof, on ne va pas tout écrire. Ils le disent déjà. C'est enregistré. Oui. Ils ont donné l'estimation et ils ont conjecturé aussi la probabilité qui est 0,4.
150	01 :31 :58	P	Et le nombre de billes blanches de votre groupe.
151	01 :32 :01	E6	Deux.
152	01 :32 :12	P	Le groupe numéro 3.
153	01 :32 :20	E8	Estimation.
154	01 :32 :21	P	Oui !
155	01 :32 :21	E8	0,61

156	01 :32 :24	P	Estimation : 0,61.
157	01 :32 :30	E8	Nombre de billes blanches : 3.
158	01 :32 :34	P	Nombre de billes blanches : 3. Comment tu as fait ?
159	01 :32 :38	E8	J'ai, d'après le graphe,
160	01 :32 :40	P	Suivez votre camarade ! D'après le graphe, oui ?
161	01 :32 :43	E8	J'ai fait le polynôme de fréquence. J'ai fait le polynôme de fréquence.
162	01 :32 :49	P	Le polygone de fréquence. Oui !
163	01 :32 :51	E8	Et j'ai vu que 0,61 est la probabilité.
164	01 :33 :02	P	Tu as dit tout à l'heure que 0,61 est l'estimation de la probabilité.
165	01 :33 :07	E8	Oui !
166	01 :33 :09	P	Maintenant, la probabilité, elle, comment tu l'obtiens ?
167	01 :33 :14	E8	Après avoir fait le polygone.
168	01 :33 :16	P	Après avoir fait le polygone. Qu'est-ce que tu en fais pour ...
169	01 :33 :25	E8	J'ai vu que ça s'est arrêté à 0,61.
170	01 :33 :32	P	On ne t'entend pas bien. Parle un peu plus fort.
171	01 :33 :34	E8	J'ai vu que ça s'est arrêté à 0,6.
172	01 :33 :37	P	Ça s'est arrêté à 0,6. Et pourquoi tu avais dit 0,61. Lorsque tu as fait tous les tirages là, quelle est la valeur que tu as obtenue ?
173	01 :33 :55	C	Tenons-nous à ses déclarations.
174	01 :33 :59	E8	0,61.
175	01 :34 :01	P	0,61. Donc la probabilité selon toi, c'est
176	01 :34 :05	E8	0,61
177	01 :34 :06	P	0,61. Le nombre de billes blanches ?
178	01 :34 :16	E8	Trois.
179	01 :34 :26	P	Le nombre de billes blanches est
180	01 :34 :29	E8	Trois.
181	01 :34 :30	P	Trois. Groupe numéro 4.
182	01 :34 :41	E14	Estimation
183	01 :34 :42	P	Oui !
184	01 :34 :43	E14	Zéro virgule, zéro virgule soixante-deux.
185	01 :34 :47	P	Estimation : 0,62. Oui !
186	01 :34 :56	E14	Si on devrait conjecturer la probabilité, c'est qu'on allait dire 0,6, puisqu'on a fait 500 tirages. À 100 tirages, c'était à 0,79. Et ça descend jusqu'à 0,62.
187	01 :35 :10	C	Combien de tirages ?
188	01 :35 :11	E14	500.
189	01 :35 :12	C	Vous avez fait 500 tirages et à 100 tirages ?
190	01 :35 :17	E14	C'était 0,79.
191	01 :35 :21	C	À 100 tirages, la fréquence était à 0,79.
192	01 :35 :24	E14	0,79. Jusqu'à 200, jusqu'à 400, on est venu à 0,59.

193	01 :35 :30	C	À 400 oui ; à 200, c'est combien ?
194	01 :35 :33	E14	À 200, 0,83
195	01 :35 :36	C	À 200, c'est 0,83. 300 ?
196	01 :35 :40	E14	0,73
197	01 :35 :42	C	0,73. 400 ?
198	01 :35 :44	E	À 400 c'est venu à 0,59.
199	01 :35 :47	C	0,59.
200	01 :35 :49	E14	Et à 500, ça va à 0,62.
201	01 :35 :52	C	À 500, c'est 0,62.
202	01 :35 :54	E14	Donc de la manière dont ça évolue, si on allait voir ça plus, ça va plus évoluer vers 0,6. Donc si on devait considérer la probabilité, on pouvait dire 0,6. Et là pour déterminer le nombre de billes blanches, on prend 0,6 fois 5.
203	01 :36 :12	C	Oui ! Donc ils disent que
204	01 :36 :16	P	La probabilité selon eux
205	01 :36 :17	C	C'est 0,6.
206	01 :36 :24	P	Le nombre de billes blanches dans la bouteille ?
207	01 :36 :26	E14	Bon ! On peut dire 3 billes blanches.
208	01 :36 :34	P	Groupe n°5, groupe n°5. Estimation ?
209	01 :36 :37	E15	Au terme de nos tirages, nous avons eu comme estimation 1.
210	01 :36 :39	P	Un ?
211	01 :36 :39	E15	Oui. La probabilité est encore 1.
212	01 :36 :55	P	La probabilité est
213	01 :36 :57	E15	1. Et le nombre de billes blanches est 5.
214	01 :36 :58	P	Et le nombre de billes blanches ?
215	01 :37 :02	E15	Cinq.
216	01 :37 :11	P	Voilà les résultats, les résultats obtenus. Le groupe n°1 a trouvé, a estimé la probabilité à 0,21.
217	01 :37 :25	E14	Question ?
218	01 :37 :26	P	Oui !
219	01 :37 :27	E14	Je vais demander à Juliette, euh Ghislaine, comment elle a fait pour trouver les 0,3. Puisque selon elle, la probabilité c'est 0,61.
220	01 :37 :37	P	Elle a dit que la probabilité estimée est 0,61. Comment elle a trouvé 3 ?
221	01 :37 :44	E14	Ou bien, elle a arrondi.
222	01 :37 :46	E	Oui ?
223	01 :37 :48	P	Il faut lui poser la question.
224	01 :37 :49	E14	Tu as arrondi ? C'est ça ?
225	01 :37 :51	C	Oui ! euh, elle a arrondi. Non, non, attendez. Vous savez très bien que personne parmi nous ne peut donner la probabilité juste. On peut faire juste de conjecture. Et sa conjecture, c'est 0,61.

226	01 :38 :01	EE	Oui !
227	01 :38 :02	C	On est d'accord ?
228	01 :38 :03	EE	Oui !
229	01 :38 :03	C	Même ceux qui ont dit 0,2, est-ce qu'ils ont déjà observé 0,2 ? Ceux qui ont dit 0,4, est-ce qu'ils l'ont observé ? Ils se sont dits : mais telle que la courbe évolue, nous pensons que ça évolue jusqu'à 0,4. Mais, est-ce que c'est ça vraiment ? Personne ne peut le dire parce qu'on n'a pas fait, on n'a pas fait de très grands nombres de tirages. Seulement qu'on a vu que ça évolue vers ça. On peut être en train de dire 0,4 et ça peut encore être 0,39 hein ! On est d'accord ?
230	01 :38 :36	EE	Oui !
231	01 :38 :37	C	Mais il va falloir qu'on ait la possibilité de faire de grands nombres de tirages mais ça va prendre trop de temps. Donc, c'est son estimation si c'est pour donner la ... Ok.
232	01 :38 :52	P	Je disais tout à l'heure que le groupe numéro 1 a estimé la probabilité à 0,21 et a trouvé une ville blanche. Leur probabilité qu'ils ont conjecturée est 0,2. Le groupe n°2 a estimé la probabilité à 0,38. Sûrement que la probabilité serait 0,4 et le nombre de billes blanches serait 2. Le groupe n°3 a estimé la probabilité à 0,61 et le nombre de billes blanches serait donc 3. Le groupe n°4 a estimé à 0,6. La probabilité est 0,62, la probabilité est 0,6 et le nombre de billes blanches serait 3. Le groupe n°5 a estimé la probabilité à 1, la probabilité de l'événement « tirer une bille blanche » à 1 et le nombre de billes blanches est 5 chez eux.
233	01 :39 :56	E14	Question !
234	01 :39 :56	P	Oui !
235	01 :39 :58	E14	Je voulais demander au rapporteur du groupe n°5.
236	01 :40 :02	P	Oui.
237	01 :40 :02	E14	Si selon eux, il y a 5 billes blanches, ça veut dire que dans le contexte, ça ne va pas, puisqu'il y a d'autres qui sont de couleur noire. Or avec eux là ...
238	01 :40 :14	P	Oui !
239	01 :40 :15	E14	C'est 5 quoi. On ne sait pas comment ça veut dire. Tu as soit c'est 1 soit il y a problème au niveau du groupe 5, soit c'est eux, soit c'est le contexte. Je veux savoir.
240	01 :40 :43	E15	Après avoir, après les 300 tirages, on n'a pas, on n'a pas pu obtenir une bille noire. Donc c'est seulement des billes blanches.
241	01 :41 :00	P	Bien ! ça peut aller ?
242	01 :41 :01	EE	Oui !

243	01 :41 :03	P	Rien ne prouve que peut-être à mille tirages, on n'obtiendra pas de bille noire mais pour les 300 tirages qu'ils ont faits, ils n'ont vu que des billes blanches. On ne peut pas leur en vouloir. Ça peut aller ?
244	01 :41 :20	EE	Oui !
245	01 :41 :35	C	On va faire le point. On va faire le point. Ok. Avec ce que vous avez déjà, on va remplir le tableau. Les groupes, le nombre de billes blanches, le nombre de bille noire, la probabilité de tirer une bille blanche. C'est juste pour résumer ce que vous avez dit. Alors le groupe n°1 a dit que le nombre de billes blanches, c'est
246	01 :42 :53	E3	1.
247	01 :42 :54	C	1, le nombre de billes noires ?
248	01 :42 :57	E3	4.
249	01 :42 :58	C	4. La probabilité de tirer une bille blanche ?
250	01 :43 :02	E3	0,2.
251	01 :43 :04	C	0,2. Le groupe n°2. Le nombre de billes blanches.
252	01 :43 :11	E6	2.
253	01 :43 :12	C	2. Nombre de billes noires ?
254	01 :43 :14	E6	3.
255	01 :43 :16	C	3. La probabilité de tirer une bille blanche est conjecturée à
256	01 :43 :24	E6	0,4.
257	01 :43 :25	C	0,4. Groupe n°3. Nombre de billes blanches ?
258	01 :43 :32	E8	3.
259	01 :43 :33	C	3. Nombre de billes noires ?
260	01 :43 :35	E8	2.
261	01 :43 :36	C	2. La probabilité de tirer une bille blanche est
262	01 :43 :38	E8	0,61
263	01 :43 :40	C	0,61. Groupe n°4. Le nombre de billes blanches ?
264	01 :43 :50	E14	3.
265	01 :43 :52	C	Nombre de billes noires ?
266	01 :43 :53	E14	2.
267	01 :43 :55	C	La probabilité de tirer une bille blanche, c'est ?
268	01 :43 :57	E14	0,6.
269	01 :44 :01	C	C'est 0,6. Groupe n°5 ! Nombre de billes blanches ?
270	01 :44 :05	EE	5
271	01 :44 :06	C	5. Nombre de billes noires ?
272	01 :44 :08	EE	0.
273	01 :44 :09	C	0. La probabilité de tirer une bille blanche ?
274	01 :44 :12	EE	C'est 1.

275	01 :44 :13	C	1. Euh ! Faisons le point comme ça. Euh ! Il y a une question que vous aviez posée. Personne n'a eu exactement 0,2 ; 0,4 ou bien 0,6. Il n'y a que le groupe n°5 qui a eu exactement 1. Les 0,6 ; 0,2 et 0,4 ont été des prévisions de, de ce que, ce qu'on obtiendrait si on continuait en observant de la, de la, du graphe. C'est pour le groupe n°3 que je parle. En observant l'évolution du graphe, le groupe 3, à combien peut-on estimer la probabilité. L'évolution du graphe, donc on anticipe en disant que tel que ça évolue, si je devrais continuer indéfiniment, qu'est-ce que, combien sera la probabilité ?
276	01 :45 :18	E8	0,61
277	01 :45 :20	C	Zéro virgule
278	01 :45 :21	E8	61.
279	01 :45 :22	C	61. Donc ça ne bougera plus ? Ça va être exactement à combien de tirages tu as fait ?
280	01 :45 :30	E8	200.
281	01 :45 :31	C	Donc ça va être exactement à ce qu'on avait obtenu pour 200 ? Si ça devrait être à ce qu'on a obtenu pour 200, ça veut dire que... Qu'est-ce qu'on avait obtenu pour 180 ?
282	01 :45 :45	E8	La probabilité.
283	01 :45 :48	C	L'estimation de la probabilité. La fréquence, ce n'est pas encore la probabilité. La probabilité, c'est la valeur autour de laquelle la fréquence va évoluer lorsqu'on fera de plus en plus de grands nombres de
284	01 :46 :03	EE	tirages.
285	01 :46 :04	C	Tirages. C'est bien ça hein ! Donc ce qu'on a ne fait que donner une idée. C'est bien ça qu'on a dit hier. Alors à 180 tirages, tu étais à combien pour la fréquence d'observation de billes blanches ?
286	01 :46 :16	E8	0,68.
287	01 :46 :18	C	0,68. Et à 200 tirages, tu es à 0,61. Et pourquoi penses-tu qu'à 220 que ce sera toujours 0,61 et qu'à 240, ce sera toujours à 0,61, alors que pour les autres, ça a bougé. C'est ce que les autres groupes ont fait. Les autres groupes ont dit : mais si on continuait avec le graphe qu'on a eu à faire, si on continuait on a des chances que ça aille à ici on a obtenu 0,2 et là on a obtenu 0,4. Et chez toi, si on continuait on aurait ?
288	01 :46 :52	E	0,6.
289	01 :46 :52	E8	0,6.
290	01 :46 :53	C	0,6. Disons, c'est ce que, la tendance que nous sommes en train de prendre. C'est pour ça que je veux bientôt écrire 0,6 ici. En dehors du groupe 5 qui a observé réellement 1, on n'a pas eu autre chose. Mais seulement le mécanisme qu'on a eu hier pour

			pouvoir dire qu'est-ce qui pouvait être la probabilité, c'est ça que vous utilisez. On vient ici, ça là, ça a trop de variation. Le groupe numéro 4. On a dit quand on a fait 100, on a eu 0,79 ; quand on a fait 200, on a eu 0,83. Si on s'était arrêté à 200 tirages- comme les autres se sont arrêtés à 200 tirages- on allait dire quoi ? On allait dire que notre graphe qu'on avait fait exactement hier en évoluant de 20 à 20 jusqu'à 200 par exemple, arrivé ici, quelqu'un va me dire l'évolution du graphe. Ça évolue vers quoi ?
291	01 :47 :56	EE	0,8.
292	01 :47 :58	C	Oui ! Alors moi je conjecture comme vous que à partir d'ici, il n'y avait pas suffisamment de concentration si on tient compte des données. Je voudrais savoir s'il y a quelque chose comme ça. Sinon, ce qu'on devrait faire, c'est que vous devez reprendre parce que vous voyez ... Ce qu'on devrait faire, c'est comme si y a une légèreté quelque part. les, les, les nombres hein ; c'est comme si je dis hein ; c'est comme si les nombres n'ont pas été Mais comme vous êtes sûrs que vous avez fait les, on va peut-être le laisser, le laisser comme ça. On n'a pas le temps, sinon on peut reprendre, parce que le problème se trouve quelque part là. Mais vous avez travaillé sur ça hier non ? Vous avez dit, de plus en plus qu'on évolue que ça tourne autour de la même valeur, à partir déjà de 200. Hier vous avez vu que ça tourne autour de la même valeur. Voilà qu'on est à 200 et on passe à 300 et à 400 et ça commence par changer. C'est comme si on est plus dans les conditions d'hier. Mais c'est hier qu'on a eu les résultats. Vous comprenez ce que je dis.
293	01 :49 :12	EE	Oui !
294	01 :49 :13	C	C'est comme si on n'est pas dans les conditions et on, ce qu'on avait observé au niveau de 200, quand on était allé à 1000, ça a changé ?
295	01 :49 :19	EE	Non !
296	01 :49 :20	C	Ça n'a pas changé ; ça a continué son oscillation.
297	01 :49 :23	EE	Oui !
298	01 :49 :24	C	C'est ce qu'on n'a pas ici. C'est ça qui fait le, le, quand on prend votre courbe, on a vu. Quand vous avez dit que ça va évoluer vers 0,66. Votre courbe, est-ce que ça évolue vers 0,66 comme ici par exemple ? Regarde, regardez cette courbe, il y a, il y a une évolution vers quelque chose comme là. On est d'accord ? Donc on peut penser, je ne suis pas forcément en train de dire la vérité, mais on peut penser qu'il y a des pertes de données.

299	01 :49 :51	E2	Oui !
300	01 :49 :52	C	Des données mal, mal, mal expliquées, d'accord ? C'est pour ça, je ne dis pas que c'est faux, mais, c'est pour ça qu'on va enlever de ceci le résultat du groupe 4. Puisqu'on veut utiliser ces résultats-là pour la phase 2.3 qui va durer 20 minutes. On est d'accord ? On va, et à la fin, c'est là on va voir, à la fin, on va vous demander d'ouvrir. Aujourd'hui on va ouvrir les bouteilles. On va ouvrir les bouteilles. Et déjà pourquoi pas ? Ouvrez les bouteilles maintenant pour qu'on voit si vous avez dit la vérité. Ah oui. Allons-y !
301	01 :50 :52	C	On a ici une bille blanche. Et là ?
302	01 :50 :54	E	Deux.
303	01 :50 :56	C	Deux. Ici.
304	01 :50 :58	E8	Trois.
305	01 :50 :59	C	Et là ?
306	01 :51 :00	E	Quatre
307	01 :51 :02	C	Quatre. Et là ?
308	01 :51 :03	EE	Cinq.
309	01 :51 :04	C	Cinq. Ça veut dire que vous avez la méthode.
310	01 :51 :07	EE	Oui !
311	01 :51 :08	C	Vous avez la méthode. Est-ce que le groupe 4 est d'accord ?
312	01 :51 :11	E11	Oui. On est d'accord.
313	01 :51 :12	C	Que quelque chose s'est passé ?
314	01 :51 :13	EE	Oui.
315	01 :51 :14	C	Qu'est-ce qui s'est passé ?
316	01 :51 :17	E	C'est au niveau des données.
317	01 :51 :19	C	Pardon ?
318	01 :51 :20	EE	Dans les données ; dans les tirages.
319	01 :51 :21	C	Hein !
320	01 :51 :22	EE	Dans les données.
321	01 :51 :24	C	C'est ?
322	01 :51 :25	EE	Dans les données.
323	01 :51 :28	C	Dans les données. C'est dans les données. D'accord. Alors il faut voir ... Nous sommes comme ça à la phase 2.3, à la phase 2.3. Vous relisez, on a dit de compléter. Quelqu'un n'a qu'à lire, on va voir.
324	01 :51 :52	E11	Complète le tableau ci-dessous.
325	01 :51 :56	C	Suivez, suivez s'il vous plait.
326	01 :51 :58	E11	1) Complète le tableau ci-dessous, qui résume les résultats obtenus par les cinq groupes par rapport aux questions de la phase 2.2, dans laquelle le nombre total de billes est 5.

			Groupes	G1	G2	G3	G4	G5
			Billes blanches					
			Billes noires					
			Probabilité de tirer une bille blanche					
2)								
327	01 :52 :08	C	Dans la phase 2.2, le nombre total de billes est 5. On est d'accord ? Avec ces résultats-là, vous allez donc compléter le tableau. C'est une manière de recopier ce qui est ici devant vous. Qu'est-ce qu'on a mis dans le tableau. Première colonne, c'est bien ce qui est ici hein.					
328	01 :52 :25	EE	Oui !					
329	01 :52 :26	C	Oui le nombre de billes blanches, le groupe 1, le groupe 2, le groupe 3, le groupe 4, oui on va l'inscrire maintenant, le groupe 5.					
330	01 :52 :38	E1	S'il vous plait monsieur, on va écrire ça ici non ? Sur l'épreuve.					
331	01 :52 :45	C	Oui. Sur l'épreuve. Ça constitue des données que vous allez utiliser pour la suite. Allez-y chacun remplit le tableau, complète le tableau qu'il y a à la phase 2.3.					
332	01 :53 :02	E12	Sur l'épreuve.					
333	01 :53 :04	C	Sur l'épreuve. Si on l'avait pu faire hier, on allait recopier avant de venir. Mais comme on a fait aujourd'hui, on n'a pas pu. (Silence). C'est prêt déjà ?					
334	01 :54 :07	EE	Oui.					
335	01 :54 :08	C	Quelqu'un va relire encore la situation, la phase 2.3. Oui !					
336	01 :54 :15	E12	Phase 2.3. 1) Complétons le tableau ci-dessous. Complète le tableau ci-dessous qui résume les résultats obtenus par les cinq groupes par rapport aux questions de la phase 2.2.					
337	01 :54 :31	C	Ce qu'on vient de faire. 2)					
338	01 :54 :35	E12	Réalise un tableau semblable au tableau précédent dans chacun des cas suivants : a) le nombre de billes contenues dans la bouteille est 8. b) Le nombre de billes contenues dans la bouteille est 7.					
339	01 :54 :50	C	Oui. Permettez ! Tu peux reprendre la lecture ?					
340	01 :54 :53	E17	Phase 2.3					

			<p>1) Complète le tableau ci-dessous qui résume les résultats obtenus par les cinq groupes par rapport aux questions de la phase 2.2.</p> <p>2) Réalise un tableau semblable au tableau précédent dans chacun des cas suivants : a) le nombre de billes contenues dans la bouteille est 8.</p> <p>b) Le nombre de billes contenues dans la bouteille est 7.</p>
341	01 :55 :30	C	Voilà ! On veut réaliser alors combien de tableaux ?
342	01 :55 :36	EE	Deux, deux, deux tableaux.
343	01 :55 :38	C	Deux tableaux. Et on revient au tableau ici, une, une blanche, deux blanches, c'est bien ça hein.
344	01 :55 :48	EE	Oui !
345	01 :55 :49	C	Trois blanches,
346	01 :55 :51	E	Quatre.
347	01 :55 :33	C	Bon, on ne sait pas. On n'a pas vu. On a vu hein mais notre expérimentation ne nous a pas donné ça. Il y a cinq et puis après on a déduit le nombre de noires. Là il y a la troisième ligne qui a donné la probabilité. Donc pour le petit a), on aura un tableau comme ça. Pour le petit a), il y a combien de billes ?
348	01 :56 :22	EE	8
349	01 :56 :23	C	Avec 8 billes, on a combien de colonnes ? On va faire un tableau avec combien de colonne ?
350	01 :56 :31	EE	7, 8, 7.
351	01 :56 :34	C	Pourquoi pas. Quelqu'un a dit 8. Pourquoi pas. On peut faire huit hein, on ne peut pas mettre zéro aussi ?
352	01 :56 :39	E	Oui !
353	01 :56 :40	C	On peut mettre 0 ?
354	01 :56 :41	EE	Oui !
355	01 :56 :42	C	Donc, avec 8, on peut faire 8 colonnes en dehors de ce qui est là en commençant par
356	01 :56 :47	EE	Zéro.
357	01 :56 :48	C	0 jusqu'à 8. Avec 7, on peut faire combien de colonnes ? 7 colonnes sans compter celle de gauche là. Donc, c'est pour que vous, on puisse savoir ce que vous voulez faire. On est d'accord ? Vous voulez réaliser deux tableaux : pour le petit a) un tableau, pour le petit b) aussi un tableau, mais en réfléchissant. Cette fois-ci, il n'y a pas de bouteille. Vous travaillez sans bouteille. Vous travaillez sans bouteille en exploitant les résultats de vos expériences de la phase 2.2. C'est compris le travail ?
358	01 :57 :32	EE	Oui monsieur !

359	01 :57 :33	C	Oui, c'est lancé pour dix minutes de travail individuel. Travail individuel, 10 minutes. Le travail, si vous n'avez pas compris la question, vous posez de question. Oui ! Oui !
360	01 :57 :48	E4	On n'a pas compris comment on va faire le tableau là.
361	01 :57 :51	C	On a dit tableau semblable. Ce n'est pas ça ?
362	01 :57 :55	EE	Oui.
363	01 :57 :56	C	Semblable à l'autre. Le tableau qui est là. ça a combien de lignes ?
364	01 :58 :07	EE	Quatre.
365	01 :58 :08	C	Ça a quatre lignes.
366	01 :58 :09	EE	Oui.
367	01 :58 :10	C	Et ici on a travaillé pour combien de billes dans la bouteille ?
368	01 :58 :15	EE	Cinq.
369	01 :58 :16	C	Cinq. Quand on a travaillé pour cinq billes, on a eu combien de colonnes ?
370	01 :58 :21	EE	5 colonnes.
371	01 :58 :22	C	Et à ça, on va ajouter combien ?
372	01 :58 :25	EE	Trois.
373	01 :58 :26	C	Non ! à ajouter ; il a dit qu'on pouvait mettre ici 0.
374	01 :58 :31	EE	0
375	01 :58 :32	C	0. On est d'accord ?
376	01 :58 :37	EE	Oui !
377	01 :58 :38	C	Donc, au lieu de 1 ici, on peut mettre 0. Il y a 0 blanc, 1 blanc, 2 blancs jusqu'à
378	01 :58 :44	EE	8 blancs.
379	01 :58 :45	C	8 blancs. Maintenant les noirs et les probabilités de tirer une bille blanche. En exploitant ce que vous avez fait ici. Mais cette fois-ci, c'est chacun qui réfléchit et exploite les résultats là. Travail individuel, 10 minutes. C'est compris ?
380	01 :59 :04	EE	Oui.
381	01 :59 :05	C	Ce qu'on doit faire ? ça c'est pour gagner de temps, que chacun comprenne ce qui est à faire. (01 :59 :09)
382	02 :16 :49	C	Euh ! Vous faites encore combien de minutes pour le travail individuel ?
383	02 :19 :35	P	Bien ! Qui sont ceux qui ont fini ? Alors on va arrêter ce travail. Vous allez faire 5 minutes de travail en groupe. Essayez de vous concerter et de nous sortir un résultat. 5 minutes ! Rapidement ! (02 :19 :58)
384	02 :23 :52	C	Bon ! Ok ! Vous avez fini le travail en groupe ?
385	02 :23 :56	EE	Oui.
386	02 :23 :57	C	Partout ?
387	02 :23 :57	EE	Oui !

388	02 :23 :58	C	Oui ! Mais ok ! Lançons donc le travail collectif. Oui, euh, un groupe va présenter le premier tableau.
389	02 :24 :13	EE	Oui.
390	02 :24 :16	C	Un autre groupe va présenter le deuxième tableau et les autres vont amender. Oui ! Le groupe 1 et le groupe 3. Vous êtes sûrs que vous avez fait le travail en groupe ici ?
391	02 :24 :29	E14	Oui.
392	02 :24 :31	E11	Il est dans, il est allé dans le groupe 2.
393	02 :24 :32	E14	J'ai déjà quitté là hein. C'est le groupe des bavards.
394	02 :24 :34	C	Non ! Non ! Rejoins ton groupe Pacôme. Ok ! De toutes les façons, ce qu'ils vont écrire au tableau sera amendé par tout le monde. On est d'accord ?
395	02 :24 :51	EE	Oui.
396	02 :29 :57	P	Voilà ce que le groupe n°1 a fait. Voilà ce que le groupe n°5 a fait. Alors ! On va leur demander comment ils ont fait pour obtenir les probabilités. Résultat du groupe n°1. Oui ! Allez-y ! Parlez plus fort !
397	02 :30 :24	E2	Pour trouver le nombre de billes, on avait fait la probabilité fois le nombre de billes total.
398	02 :30 :36	P	Oui.
399	02 :30 :37	E2	De là, on a tiré.
400	02 :30 :44	P	Pour trouver le nombre de billes blanches, vous avez fait la probabilité fois le nombre de billes. C'est ça hein ?
401	02 :30 :54	E2	Oui.
402	02 :30 :55	P	Donc vous avez tiré, la probabilité, ça fait le nombre de billes blanches divisé par le nombre total de billes.
403	02 :31 :02	E2	Oui !
404	02 :31 :09	P	Mais comment vous avez fait pour obtenir ce résultat ?
405	02 :31 :16	E17	On a pris le nombre de billes blanches
406	02 :31 :19	P	Oui !
407	02 :31 :20	E17	Divisé par le nombre total de billes dans la bouteille.
408	02 :31 :25	P	C'est la même chose.
409	02 :31 :27	E17	Oui !
410	02 :31 :28	P	Le nombre de billes blanches divisé par le nombre total de billes.
411	02 :31 :30	C	Non ! Ce n'est pas la même chose hein !
412	02 :31 :34	P	Oui ! ils ont utilisé la même formule. C'est ça non ?
413	02 :31 :36	E3	Oui !
414	02 :31 :37	P	Vous avez fait le nombre de billes blanches divisé par le nombre de billes.
415	02 :31 :41	C	Non ! Mais ceux-ci n'ont pas dit ça.

416	02 :31 :50	P	Ils ont tiré de la formule de, ..., la probabilité, ça fait le nombre de billes blanches divisé par le nombre de billes. Est-ce que tout le monde est d'accord par rapport à leur formule ?
417	02 :32 :05	EE	Oui !
418	02 :32 :06	P	C'est ce qu'ils ont divisé pour trouver la probabilité. Tout le monde est d'accord par rapport à la formule qu'ils ont utilisée pour trouver la probabilité ?
419	02 :32 :23	E	Oui !
420	02 :32 :25	P	Parce que à chaque fois qu'on aura un nombre n de billes dans une, dans un sac et je connais nb de billes blanches, je suppose dans un sac, est-ce que la probabilité de tirer une bille blanche sera toujours nb sur n selon vous ?
421	02 :32 :50	E	Oui !
422	02 :32 :52	P	La probabilité de tirer une bille blanche sera toujours nb sur n ?
423	02 :32 :57	EE	Oui.
424	02 :33 :02	P	Vous avez dit oui. Imaginez qu'une boule était plus grosse qu'une autre ; imaginez qu'une boule était plus grosse qu'une autre. Vous êtes sûrs que ça va donner ça. Imaginez que les boules noires étaient plus grosses que les billes blanches, vous êtes sûrs que ça va toujours faire ça ?
425	02 :33 :29	E	Ici.
426	02 :33 :32	P	Hum ?
427	02 :33 :35	E	On pourra essayer.
428	02 :33 :36	P	On pourra essayer pour voir. Imaginez déjà ce truc là Imaginez que vous avez les boules noires qui étaient un peu plus grosses que les boules blanches. Est-ce que vous êtes sûrs que si vous retournez, vous aurez cette chance de, est-ce que ça va vraiment donner le nombre de billes blanches divisé par le nombre total de billes ?
429	02 :34 :00	EE	Non !
430	02 :34 :02	P	Il y aura quelque chose qui va changer, d'accord ? Donc c'est parce que toutes les billes ont la même forme, ont le même poids, ont les mêmes caractéristiques, qu'elles ont la même chance d'apparaître. Lorsqu'on fait le tirage, elles ont toutes la même chance de sortir. D'accord ? On dit que dans notre expérience aléatoire, on dira que tous les événements élémentaires ont la même probabilité. Si par exemple nous prenons un dé, les dés que nous utilisons, d'accord ? C'est des dés qui sont bien équilibrés ; toutes les faces ont la même chance de sortir, d'accord ? Et si je prends l'expérience aléatoire « lancer le dé pour observer le nombre qui apparaît sur la face supérieure », je dirai que les éventualités de cette expérience aléatoire qui constituent les événements

			élémentaires ont la même probabilité. Dans ce cas je dis que je suis dans la condition d'équiprobabilité. Ce n'est que dans ce cas que vous avez cette formule-là. La probabilité de l'événement, ça fait le nombre de cas favorables sur le nombre de cas possibles. Si j'avais une bouteille contenant 10 billes dont peut être, dont 7 blanches et 3 noires, la probabilité de tirer une bille blanche, ça fait 7 divisés par 10. Si toutes les billes sont, ont les mêmes caractéristiques ; d'accord, ont les mêmes chances d'être tirées. Ça peut aller ? C'est la leçon qu'on va tirer de
431	02 :35 :58	E2	S'il vous plaît monsieur.
432	02 :35 :59	P	Oui ! est-ce qu'il y a de question.
433	02 :36 :01	E2	Oui !
434	02 :36 :02	P	Oui ! Pose ta question
435	02 :36 :05	E2	Oui ! euh ! Cette formule, dans ce cas, ça ne marche pas.
436	02 :36 :10	P	Quel cas ?
437	02 :36 :11	E2	Ici. Tableau 2 là.
438	02 :36 :14	P	Tableau 2, oui ?
439	02 :36 :17	E2	0,14 là fois
440	02 :36 :19	E3	7.
441	02 :36 :19	E2	Le nombre de billes blanches ne donne pas ...
442	02 :36 :21	P	Oui ! Ils ont coupé. 1 sur 7 ne donne pas 0,14.
443	02 :36 :24	E2	Non ! ça ne donne pas exact.
444	02 :36 :26	P	Non ! Ils ont coupé ; ils ont fait la troncature ; ou bien ?
445	02 :36 :29	EE	Oui !
446	02 :36 :30	P	Ils ont coupé.
447	02 :36 :32	C	Oui, mais ! Oui ! d'accord ! Mais qu'est-ce qu'il propose ? On ne va pas justifier ce que les autres ont fait. Qu'est-ce que tu proposes ; qu'est-ce que ; parce qu'il faut qu'il amende.
448	02 :36 :41	E2	Non. Juste ; là je ne suis pas d'accord. Ce n'est pas par rapport à la formule, mais leur résultat-là.
449	02 :36 :50	C	Oui ! Quel résultat tu aimerais avoir ? Puisqu'ils ont dit qu'ils ont fait le nombre de billes blanches divisé par le nombre total de billes. Ce que, vous aussi, vous avez fait.
450	02 :37 :04	EE	Oui.
451	02 :37 :05	C	C'est une formule que tout le monde peut vérifier.
452	02 :37 :07	EE	Oui !
453	02 :37 :08	C	Mais vérifiez ça alors puisqu'il pose le problème. Vérifiez ça alors ! Ceux qui ont des calculatrices, voyez si, si ce qu'il a fait ici, on l'a obtenu par quelle opération ?
454	02 :37 :24	EE	zéro
455	02 :37 :25	C	0 divisé par
456	02 :37 :26	EE	7.

457	02 :37 :27	C	7. est-ce que 0 divisé par 7, ça fait 0 ?
458	02 :37 :30	EE	Oui.
459	02 :37 :32	C	Ici, ça fait quelle formule ?
460	02 :37 :33	EE	1 divisé par 7.
461	02 :37 :35	C	1 divisé par 7. Vérifiez-nous 1 divisé par 7 !
462	02 :37 :39	EE	Oui ; beaucoup de chiffres après la virgule.
463	02 :37 :42	C	Est-ce qu'on a ça ?
464	02 :37 :43	E1	Oui ! C'est zéro virgule
465	02 :37 :46	C	Parlez fort !
466	02 :37 :47	E1	Zéro virgule quatorze.
467	02 :37 :48	C	Mais avec beaucoup de
468	02 :37 :49	EE	chiffres.
469	02 :37 :51	C	De chiffres encore.
470	02 :37 :53	EE	Oui !
471	02 :37 :54	C	Alors, si je vous comprends bien, vous voulez dire qu'ici, c'est exactement ce que vous avez fait que vous avez trouvé.
472	02 :37 :59	EE	Oui !
473	02 :38 :00	C	Oui, mais, c'est pour ça que je demande, qu'est-ce que vous proposez. Vous proposez que j'aligne tous les chiffres.
474	02 :38 :04	EE3	Non ! Non !
475	02 :38 :05	C	Ou bien que je mette autre chose ?
476	02 :38 :06	E	Non ! Deux chiffres après la virgule.
477	02 :38 :08	C	Deux chiffres après
478	02 :38 :09	EE	la virgule.
479	02 :38 :10	C	la virgule. Mais si, pour régler un problème-là, quel nombre on aurait dû écrire ; pour ne pas avoir ce problème que vous êtes en train de souligner. Quel nombre on aurait dû écrire pour que ce problème des chiffres ne se pose pas. Oui ! est-ce, est-ce que les, les ; parlons des nombres. Quels sont les nombres, les différents types de nombres qui existent. Oui, les types de nombres que vous connaissez.
480	02 :39 :01	E	Il y a les nombres pairs.
481	02 :39 :03	C	Les nombres pairs. Je veux dire la nature. Les nombres pairs. 0,4 ; 0,14 ; c'est quel type de nombre.
482	02 :39 :09	EE	Décimal.
483	02 :39 :12	C	Voilà ! On parle des nombres pairs. Si on ne parle pas de nombres décimaux, on parle de quel nombre encore ?
484	02 :39 :16	E1	Fraction.
485	02 :39 :19	C	Les nombres fractionnaires, les nombres rationnels donc ; les nombres entiers
486	02 :39 :22	EE	Naturels.

487	02 :39 :22	C	Naturels. Est-ce que le problème que vous posez là, est-ce qu'on ne peut pas écrire avec d'autres types de nombres et on n'aura plus ce problème ?
488	02 :39 :33	EE	Oui !
489	02 :39 :34	C	Avec quel type de nombres ?
490	02 :39 :35	EE	Fraction.
491	02 :39 :36	C	Fraction. Donc, c'est ce problème qu'il pose. Alors si c'est les fractions, qu'est-ce qu'on va écrire ici.
492	02 :39 :41	E	0.
493	02 :39 :42	C	0. Et là ?
494	02 :39 :44	EE	Un sur sept.
495	02 :39 :45	C	Un septième. Qu'est-ce que vous en pensez ?
496	02 :39 :48	EE	C'est mieux.
497	02 :39 :49	C	C'est mieux.
498	02 :39 :50	E1	C'est mieux.
499	02 :39 :53	C	D'accord. On va mettre les nombres sous forme de fraction. (Silence). On ne va pas effacer ce qui est là. Peut-être on va mettre les fractions en bas. Peut-être, on va tirer comme ça, on va tirer comme ça et mettre les fractions. Revenons donc au problème posé par le prof. Vous avez coupé le prof. Vous avez dit dans ce cas, on va dit quoi. Il a dit que c'est sûrement parce que les billes-là ont les mêmes caractéristiques et que si les billes, il y en avait de plus lourdes que d'autres, que peut-être on ne l'aurait pas. Quelqu'un a dit : on va essayer et vous savez ce qui est dans essayer là. Pour essayer, il faut qu'on monte une expérimentation. On va monter l'expérimentation prochainement en cherchant les billes plus lourdes que d'autres pour voir. C'est ce que veut dire, on va essayer. Et le prof dit que c'est parce qu'ils ont les mêmes caractéristiques. Quand ils ont les mêmes caractéristiques, ça veut dire que la formule que vous êtes en train de donner n'est valable que lorsque les événements élémentaires ont la même chance d'être observés. Et en parlant de même chance, n'oubliez pas, ici, quand on avait lancé les cauris, il y a eu des gens qui ont dit que la face (C) va apparaître parce le cauri aura tendance à rester sur la face plane, à s'asseoir, à reposer sur la face plane. Vous vous souvenez ?
500	02 :42 :10	EE	Oui !
501	02 :42 :11	C	Est-ce que dans ce cas, on peut dire que toutes les faces ont la même chance d'apparaître ?
502	02 :42 :24	EE	Non !
503	02 :42 :26	C	Parce que ça n'a pas les mêmes caractéristiques. Alors, est-ce qu'on peut utiliser cette formule ?

504	02 :42 :29	EE	Non.
505	02 :42 :30	C	Le professeur vous a donné un autre exemple. Il a donné un exemple de dé. Vous voyez comment le dé est bien fait hein ! Il dit que c'est bien équilibré. Est-ce que vous pensez que toutes faces d'un dé ont la même probabilité d'apparaître ?
506	02 :42 :55	EE	Oui !
507	02 :42 :56	C	Oui ! Donc la formule peut être appliquée dans ce cas. Ça c'est ce que le professeur expliquait.
508	02 :43 :04	P	Bien ! Ce sera alors notre leçon du jour. Vous êtes dans une expérience aléatoire où tous les événements élémentaires ont la même probabilité, d'accord ? La probabilité d'un événement, ça fera alors le nombre de cas favorables de cet événement sur le nombre de cas possibles. C'est ce qu'on va écrire.
509	02 :43 :28	C	Et le nombre de cas favorables ici, ça veut dire quoi ? le nombre d'éléments appartenant ou bien le nombre d'éventualités appartenant à cet événement.
510	02 :49 :48	P	Bien. Nous sommes à la fin de notre séance. J'espère que vous avez trouvé ça plaisant. Quelqu'un pour nous rappeler brièvement en deux minutes ce qu'on a gardé aujourd'hui. Ce qu'il a gardé aujourd'hui, au moins deux minutes. Tout ce qu'on a fait aujourd'hui de 15h à 18h. Ce qu'il a gardé. (Silence) Donc vous n'avez rien gardé ?
511	02 :50 :24	EE	Oui !
512	02 :50 :25	P	Bon ! On continue alors les recherches. Oui Fadyl !
513	02 :50 :29	E6	Lorsqu'on veut déduire la probabilité d'un événement, cette probabilité est possible dans le cas où les événements possibles
514	02 :50 :57	P	Les événements élémentaires.
515	02 :50 :59	E6	Les éléments élémentaires ont les mêmes caractéristiques
516	02 :51 :07	P	il est en train de dire ça mal. Qui va l'aider ? Il est en train de dire ça mal. Est-ce que ce sont les événements qui ont les mêmes caractéristiques ? Oui.
517	02 :51 :24	E2	Ce que moi j'ai gardé, c'est la formule déduite, le second modèle, qui est la probabilité, qui est égale au nombre de cas possibles sur le nombre de cas, non, le nombre de cas favorables sur le nombre de cas possibles. Maintenant cette formule est appliquée dans le cas où les éléments élémentaires
518	02 :51 :50	P	Les événements élémentaires
519	02 :52 :00	E2	Les événements élémentaires sont identiques, ont les mêmes caractéristiques.
520	02 :52 :05	P	Mais, est-ce que c'est les événements qui ont les mêmes caractéristiques ou bien ce sont les billes qui ont les mêmes caractéristiques ?
521	02 :52 :10	EE	Oui, les billes.

522	02 :52 :12	P	Ce sont les billes qui ont les mêmes caractéristiques. C'est parce que les billes ont les mêmes caractéristiques que les événements élémentaires ont la même probabilité.
523	02 :52 :18	EE	Probabilité.
524	02 :52 :20	P	Probabilité ! Voilà. D'accord ?
525	02 :52 :22	EE	Oui !
526	02 :52 :23	P	Les mêmes caractéristiques des billes, c'est ça qui donne le fait qu'on a même probabilité pour les événements élémentaires. Comme une pièce de monnaie que vous avez, bien faite, vous allez voir les deux faces qui ont la même chance d'apparaître quand vous lancez. D'accord ? C'est comme ça. C'est parce que la pièce est bien faite et qu'il n'y a pas une face qui est gondolée plus que l'autre. A chaque fois que vous la lancez, vous aurez, chaque éventualité a la même chance d'apparaître. Dans ce cas, la probabilité d'un événement, ça fait le nombre d'éléments de cet événement sur le nombre total d'éléments de l'univers Oméga. Ça peut aller ?
527	02 :53 :08	EE	Oui !
528	02 :53 :09	P	On va s'arrêter là pour aujourd'hui et j'aimerais vous demander quand est-ce qu'on va se revoir encore.
529	02 :53 :22	EE	Pour l'expérimentation ou pour le cours.
530	02 :53 :25	P	Non ! Si vous venez pour l'expérimentation, c'est que vous venez déjà pour le cours.
531	02 :53 :28		FIN

ANNEXE 13 : Transcription T₇

SITUATION 3

18 AVRIL 2017

EFFECTIF : 16

HEURE : 08h30 min

Suite à l'absence répétée de l'élève E10, une nouvelle organisation des élèves est proposée aux élèves qui sont désormais disposés en quatre groupes, à raison de quatre par groupe. Aucune contrainte n'a été imposée pour la construction des groupes. Les élèves ont gardé leurs numéros de E1 à E17. Le groupe 1 (G1) est constitué des élèves E1, E2, E3 et E4 ; le groupe 2 (G2) est composé de E5, E6, E7 et E9 ; le groupe 3 (G3) de E8, E15, E16 et E17 et le groupe 4 (G4) est composé des élèves E11, E12, E13 et E14. Ces groupes seront maintenus ainsi jusqu'à la fin de l'expérimentation.

Num.	Temps	Acteurs	Echanges verbaux
001	00 :00 :06	P	Bonjour tout le monde.
002	00 :00 :08	EE	Bonjour monsieur.
003	00 :00 :10	P	Et ce matin ? (Silence) Répondez-moi non ? Et ce matin ?
004	00 :00 :13	EE	Ça va.
005	00 :00 :18	P	Ah. Bien. Alors avant de commencer, j'aimerais déjà vous remercier d'avoir eu le courage de continuer avec nous. D'accord. Euh. Avant qu'on entame ce qu'on a prévu faire ce matin, j'aimerais que quelqu'un nous rappelle ce qu'on a fait les séances passées ; tout ce qu'on a vu d'une manière générale jusque-là. Si quelqu'un s'en souvient ou bien a une idée générale, il peut bien nous le dire. Ou bien, on n'a rien fait ! Répondez-moi ! On a fait quelque chose non ?
006	00 :01 :20	EE	Oui
007	00 :01 :21	P	Jusque-là, pendant les six séances qu'on a faites ? Qu'est-ce que vous avez gardé d'une manière générale ? (Silence) Oui Tohibou !
008	00 :01 :45	E4	Moi. J'ai gardé la propriété.
009	00 :01 :48	P	Parlez plus fort !
011	00 :01 :50	E4	Moi, j'ai gardé la propriété.
012	00 :01 :53	P	Quelle, quelle propriété ?
013	00 :01 :56	E4	Qui dit si les éléments élémentaires d'une expérience aléatoire. Lorsque tous les éléments élémentaires d'une expérience aléatoire ont la même probabilité,

014	00 :02 :02	P	Lorsque tous les
015	00 :02 :04	E3	événements, événements
016	00 :02 :07	E4	Lorsque tous les événements élémentaires d'une expérience aléatoire ont la même probabilité, la probabilité de l'événement A est $p(A)$, nombre de cas favorables sur le nombre de cas possibles et probabilité de A est encore égale au nombre d'éléments de A sur le nombre d'éléments de l'univers.
017	00 :02 :30	P	Lorsque tous les événements élémentaires d'une même expérience, de l'univers d'une même expérience aléatoire ont la même probabilité, la probabilité d'un événement, ça fait le nombre de cas favorables sur le nombre de cas possibles. Ça fait le nombre d'éléments de A sur le nombre d'éléments de l'univers. Mais c'est quoi une probabilité ? C'est quoi un événement ? C'est quoi un univers ? C'est quoi une expérience aléatoire ? Tout ça c'est beaucoup de mots. Si quelqu'un vous rencontrait dans la ville et vous demandait ça, qu'est-ce que vous allez lui dire ? (Silence) C'est quoi une probabilité ? Vous avez dit si tous les événements élémentaires, c'est quoi un événement, c'est quoi un événement, c'est quoi un événement élémentaire, c'est quoi l'univers ? (Silence) Je vous écoute. (Silence) Allez-y, allez-y. Ou bien ce matin, vous ne voulez pas parler ?
018	00 :04 :03	E17	Ici monsieur.
019	00 :04 :07	P	Oui. Adéline.
020	00 :04 :10	E17	Une probabilité c'est un, c'est un nombre obtenu lorsqu'on réalise une expérience aléatoire un grand nombre de fois, après avoir calculé les... Après avoir réalisé l'expérience aléatoire plusieurs fois, un grand nombre de fois, on calcule la fréquence d'observation et par les nombres obtenus au cours de cette, au cours de la calcul,
021	00 :04 :45	P	du calcul
022	00 :04 :47	E17	du calcul des fréquences, on observe le nombre sur lequel ... Après avoir calculé les fréquences, on trace le polygone des fréquences et maintenant on observe si le nombre sur lequel le polygone des fréquences peut, peut se.
023	00 :05 :21	P	Le nombre vers lequel il peut tendre
024	00 :05 :24	E17	Oui.
025	00 :05 :25	P	Si on continuait
026	00 :05 :27	E17	à faire l'expérience aléatoire
027	00 :05 :29	P	à faire l'expérience aléatoire. Assieds-toi. Ce qu'elle vient de décrire, selon vous, c'est la probabilité ?
028	00 :05 :33	EE	Non.

029	00 :05 :40	P	Qu'est-ce qu'elle vient de décrire comme ça ?
030	00 :05 :44	E3	L'estimation de la probabilité.
031	00 :05 :46	P	Levez le doigt et parlez. Qu'est-ce qu'elle vient de décrire comme ça ? Le fait d'effectuer des tirages, de faire l'expérience aléatoire un certain nombre de fois, de considérer ça comme une série statistique, de construire le polygone des fréquences et de voir vers quelle valeur peut tendre ce polygone. Qu'est-ce qu'elle vient de décrire comme ça ?
032	00 :06 :13	E4	Ici monsieur
033	00 :06 :15	P	Oui
034	00 :06 :16	E4	L'estimation de la probabilité.
035	00 :06 :18	P	Elle vient de décrire l'estimation de la probabilité ou bien la méthode utilisée pour estimer la probabilité. La méthode qu'on a apprise, la méthode qu'on utilise pour estimer la probabilité. Mais ce n'est pas encore la probabilité. On est d'accord ? Maintenant, c'est quoi la probabilité ? C'est quoi un univers ? C'est quoi une expérience aléatoire ? L'autre s'est levé, il a parlé d'événement élémentaire, univers, tout ça. C'est quoi la probabilité ? Je vous écoute. (Silence) Faites un effort. Oui. Rachelle
036	00 :07 :21	E1	On appelle expérience aléatoire, une expérience
037	00 :07 :24	P	Parle, parle plus fort.
038	00 :07 :27	E1	On appelle expérience aléatoire une expérience dont on ne peut pas prévoir avec certitude le résultat mais dont on connaît tous les résultats possibles
039	00 :07 :34	P	Une expérience aléatoire est une expérience dont on connaît tous les résultats possibles mais dont on ne peut pas prévoir
040	00 :07 :35	E1	Le résultat
041	00 :07 :42	P	le résultat. C'est ça une expérience aléatoire ?
042	00 :07 :45	EE	Oui
043	00 :07 :46	P	Tout le monde est d'accord ?
044	00 :07 :49	EE	Oui
045	00 :07 :51	P	Bien. Qui a autre chose à ajouter ? De quoi quelqu'un d'autre se souvient ? Ça c'est une expérience aléatoire. C'est quoi l'univers d'une expérience aléatoire ? Oui. C'est quoi ton nom ? Rappelle-moi.
046	00 :08 :08	E12	Wilfried.
047	00 :08 :10	P	C'est
048	00 :08 :11	E12	Wilfried
049	00 :08 :14	P	Vas-y !
050	00 :08 :18	E12	L'univers des éventualités. L'univers, c'est l'ensemble des éventualités d'une expérience aléatoire.

051	00 :08 :21	P	L'univers c'est l'ensemble des éventualités d'une expérience aléatoire. C'est quoi une éventualité d'une expérience aléatoire ?
052	00 :08 :26	E12	C'est tout résultat possible.
053	00 :08 :28	P	C'est tout résultat possible. D'accord ? C'est quand on regroupe tous ses résultats possibles dans un ensemble qu'on dit qu'on obtient l'univers d'une expérience aléatoire. C'est quoi un événement ? Oui. Monsieur Wilfried.
054	00 :08 :45	E12	Un événement, c'est un sous-ensemble de l'univers.
055	00 :08 :49	P	Un événement, c'est tout sous-ensemble de l'univers. Quels sont les types d'événements que vous connaissez ?
056	00 :08 :58	E12	On a l'événement impossible.
057	00 :09 :00	E3	Hum
058	00 :09 :00	P	Impossible, qui est ?
059	00 :09 :03	E12	Qui est l'ensemble vide.
060	00 :09 :05	P	L'ensemble vide.
061	00 :09 :07	E12	L'événement certain
062	00 :09 :10	P	Certain, qui est ?
063	00 :09 :13	E12	Oméga.
064	00 :09 :14	P	Oméga.
065	00 :09 :16	E12	L'univers des éventualités. (Silence) On a l'événement élémentaire.
066	00 :09 :25	P	C'est quoi un événement élémentaire ?
067	00 :09 :29	E12	A inter B,
068	00 :09 :33	P	C'est quoi un événement élémentaire ?
069	00 :09 :36	E12	C'est un événement composé d'une seule éventualité
070	00 :09 :50	P	C'est un événement composé d'une seule éventualité. Il y a quoi encore ? C'est fini les types d'événements ? Assieds-toi. Quelqu'un d'autre pour compléter. (Silence) Les types d'événements que vous connaissez. (Silence). A part les événements élémentaires, l'événement certain, l'événement impossible, il y a encore quels types d'événements ?
071	00 :10 :52	E3	Ici monsieur
072	00 :10 :54	P	Oui. Juliette
073	00 :10 :56	E3	Deux événements incompatibles.
074	00 :10 :58	P	Deux événements incompatibles hein. Ils sont comment ?
075	00 :11 :00	E3	Deux événements sont incompatibles lorsque leur intersection donne l'ensemble vide.
076	00 :11 :04	P	Deux événements sont incompatibles lorsque leur intersection est vide. Après ça, il y a ?
077	00 :11 :09	E3	Deux événements sont contraires
078	00 :11 :11	P	Parle plus fort
079	00 :11 :12	E3	Deux événements contraires

080	00 :11 :14	P	Oun !
081	00 :11 :15	E3	Deux événements sont contraires lorsque leur intersection est l'ensemble vide et leur réunion donne l'univers.
082	00 :11 :20	P	Deux événements sont contraires lorsque leur intersection est vide, c'est-à-dire lorsqu'ils sont incompatibles et leur réunion donne oméga. Mais jusque-là, vous n'avez pas encore défini ce qu'est la probabilité d'un événement ? Oui Mohamed.
083	00 :11 :36	E13	Selon un théorème appelé la loi des grands nombres, la fréquence de réalisation d'un événement A pour un grand nombre de fois oscille autour d'un nombre réel compris entre 0 et 1. Ce réel est la probabilité de A et noté p(A).
084	00 :12 :04	P	Selon un théorème appelé la loi des grands nombres, la fréquence d'observation de réalisation d'un événement A pour un grand nombre de fois ou pour un grand nombre de réalisations oscille autour d'un nombre réel compris entre 0
085	00 :12 :21	EE	et 1
086	00 :12 :22	P	D'accord ? Ce réel est la probabilité de cet événement A qu'on note p(A). Et lorsque tous les événements élémentaires ont la même probabilité, la probabilité de A devient le nombre de cas favorables à l'événement A sur le nombre de cas possibles, le nombre d'éléments de A sur le nombre d'éléments de l'univers. D'accord ? Tout à l'heure on a parlé de la méthode qu'on a prise pour estimer la probabilité d'un événement. Elle consiste à ; Qui va me rappeler ? La méthode qu'on a apprise pour estimer la probabilité d'un événement. C'est toi qui nous a rappelé ça non ? Ce n'était pas toi. C'était Adeline. Adeline, rappelle-nous ça encore.
087	00 :13 :36	E17	Pour estimer la probabilité, on réalise l'expérience aléatoire un grand nombre de fois et après,
088	00 :13 :45	P	Un grand nombre-là veut dire combien ?
089	00 :13 :47	E17	100, 200, ou bien
090	00 :13 :49	P	100, 200
091	00 :13 :50	E17	1000
092	00 :13 :51	P	1000. Ok. Vas-y.
093	00 :13 :53	E17	Et après, on calcule la fréquence d'observation. Ensuite, on trace le polygone des effectifs
094	00 :14 :04	P	Est-ce que c'est une seule fréquence ?
095	00 :14 :06	E17	Non ; des fréquences
096	00 :14 :09	P	des fréquences d'observation.
097	00 :14 :15	E17	Après ça, on trace euh le polygone des fréquences pour observer le nombre sur lequel, autour duquel euh
098	00 :14 :30	P	Je voulais mettre le point sur, comment on obtient les fréquences-là ? Comment on obtient ces fréquences ?

099	00 :14 :46	E17	On fait le nombre de fois qu'on a obtenu la bille
100	00 :14 :52	P	on a observé
101	00 :14 :54	E17	observé
102	00 :14 :55	P	l'événement
103	00 :14 :56	E17	l'événement sur le nombre total de fois
104	00 :15 :00	P	qu'on a fait de tirages.
105	00 :15 :03	E17	Oui.
106	00 :15 :04	P	D'accord ? Et on fait ça chaque fois qu'on évolue, on cumule les résultats. C'est ça hein ?
107	00 :15 :10	EE	Oui
108	00 :15 :11	P	Et après, qu'est-ce qu'on fait ?
109	00 :15 :14	E17	Et on observe le nombre autour duquel tourne euh le résultat de
110	00 :15 :21	P	Le nombre vers lequel tend le polygone de de fréquence
111	00 :15 :25	E17	de fréquence.
112	00 :15 :27	P	C'est ça qui est l'estimation de notre probabilité. Bien, le contexte que vous avez,
113	00 :15 :38	C	D'accord. Disons que vous avez fait tout le le rappel qu'il faut mais il faut qu'on insiste sur quelque chose. Pourquoi est-ce qu'on a fait le graphique ? Pourquoi on a fait ça ?
114	00 :15 :58	E	Pour la fréquence d'observation
115	00 :16 :04	C	Non. Pacôme veut dire autre chose.
116	00 :16 :08	E14	On a fait la courbe, euh le graphique pour voir l'évolution
117	00 :16 :11	C	Pour voir l'évolution, l'évolution de la
118	00 :16 :14	EE	fréquence
119	00 :16 :16	C	fréquence. C'est bien ça hein ?
120	00 :16 :18	EE	Oui
121	00 :16 :19	C	Et donc pour voir quoi ?
122	00 :16 :24	EE	L'estimation de la probabilité.
123	00 :16 :26	C	Non. Pas l'estimation. Puisque ce que, quand on voit l'évolution, qu'est ce ça donne ? C'est que ça nous permet de dire, de dire à peu près vers où la fréquence peut aller. Et c'est ça la probabilité. Ce n'est pas ça ?
124	00 :16 :51	EE	Oui.
125	00 :16 :52	C	C'est-à-dire donc le graphique va servir à conjecturer, c'est-à-dire à voir tel que ça évolue, je pense que si on continue à faire avec de grand nombre, ça va tendre vers telle valeur. Et selon le cours que vous avez reçu, cette valeur pourrait être la probabilité de l'événement. Mais c'est une valeur théorique, c'est-à-dire c'est une valeur qu'on ne peut pas... parce qu'on a dit un grand nombre de fois. Quand est-ce qu'on va finir de la faire un grand nombre de fois ? On ne fait que conjecturer mais là j'ai la probabilité. Quand on a lancé, on a fait le tirage

			200 ou 500 fois, la fréquence qu'on a trouvée, est-ce que ce n'est pas ça une estimation de la probabilité ? Donc je vais venir sur ce que ..., c'est quel nom ici ?
126	00 :18 :02	E17	Adeline
127	00 :18 :03	C	Oui ! Ce que Adeline a dit. C'est comme, dans son rapport, c'est comme si on est obligé de faire le polygone des fréquences, mais le polygone des fréquences, c'est pour voir, c'est pour pouvoir conjecturer la probabilité même, c'est-à-dire pour pouvoir devancer les choses pour dire : mais tel que je le vois évoluer, la probabilité devrait être telle. Vous vous souvenez la probabilité devrait être 0,6, alors qu'on n'a pas observé 0,6 ou bien ?
128	00 :18 :34	E1	Non !
129	00 :18 :35	C	Ici, on a observé 0,61 avec ce qui a été fait, mais on a dit si on continuait, c'est possible que ça soit 0,6. Donc le graphique ne fait pas partie forcément de l'estimation, mais le graphique est un outil qui permet de voir loin. On est d'accord hein ? de voir loin et de toucher la probabilité. Je crois que le professeur a défini la probabilité, comme il vient de le dire : lorsqu'on répète, réalise de grands nombres de fois une fois expérience aléatoire, la fréquence d'observation d'un événement donné oscille (et c'est ce que le graphe est venu faire), oscille autour d'un nombre compris entre 0 et 1 qu'on appelle probabilité de A et qu'on note $p(A)$. Et il a ajouté à la fin ; lorsque vous réalisez l'événement un certain nombre de fois, la fréquence que vous obtenez là, ce n'est pas, ce n'est pas la probabilité mais une estimation de la probabilité. Donc on part de l'estimation pour pouvoir conjecturer la probabilité et vous êtes venus par là où vous êtes arrêtés au début : si tous les événements élémentaires ont la même probabilité, la même probabilité, ça vient du fait de l'observation de la régularité, est-ce que les objets qui sont en jeu sont réguliers ? leurs formes, leurs poids, mais est-ce qu'il y a la même chance de les extraire du lot ou bien de les tirer, et ça, on a dit que dans ces conditions, ça va être le nombre de cas favorables divisé par le nombre de cas possibles
130	00 :20 :30	EE	possibles.
131	00 :20 :42	P	Pour la situation 3 d'aujourd'hui, nous avons une deuxième consigne qui va nous demander d'estimer la probabilité, mais cette fois-ci ce sera avec des cauris. Partageons-leur les cauris. Bien ! Alors chacun va lire le contexte silencieusement pour une minute puis quelqu'un le lira à haute voix et après on va passer à la lecture de la consigne. Ça peut aller ?

132	00 :21 :36	EE	Oui !
133	00 :24 :22	P	Bien ! Quelqu'un pour nous lire le contexte et la consigne. Oui Landry !
134	00 :24 :28	E11	Contexte : Pour confirmer les résultats d'une consultation chez le devin Gouton à propos de sa réussite ou non à l'examen, Dansou se rend chez un second devin nommé Adandé. Ce dernier dispose de quatre cauris qu'il doit lancer simultanément. Chaque cauri étant composé de deux surfaces : une plane (P) et une courbe (C). L'obtention de deux surfaces planes suppose que Dansou réussira avec une bonne mention à son examen ; avec quatre faces (P), il réussira avec la mention assez bien ; l'obtention de trois faces (P) annonce la réussite de Dansou avec la mention passable ; dans les autres cas, il faudra beaucoup de sacrifices à Dansou pour réussir.
135	00 :25 :23	P	Consigne
136	00 :25 :24	E11	Consigne : Vous disposez avec vos camarades d'un gobelet contenant quatre cauris et d'un plateau. Le gobelet servira à agiter les quatre cauris avant de les jeter dans le plateau. Pour chaque cauri, la face (C) est obtenue lorsque le cauri repose de façon stable sur la face plane et la face (P) est supposée obtenue dans tous les autres cas. Estimez la probabilité que Dansou réussisse à son examen sans avoir de sacrifice à faire.
137	00 :26 :01	P	Bien ! Voilà la consigne ! Est-ce que vous avez des questions à poser par rapport à la consigne ? Je voudrais vous notifier que tout ce que vous allez, tout ce que vous allez faire comme tirage, vous allez noter ça. C'est-à-dire, si vous faites un tirage, le résultat que vous obtenez là, je voudrais que vous notiez ça. Je ne sais pas si vous comprenez ce que je viens de dire ?
138	00 :26 :29	EE	Oui !
139	00 :26 :32	P	Si peut-être vous avez obtenu la face (P) une fois ou deux fois, vous allez noter comme vous avez fait lors des tirages.
140	00 :26 :42	C	Oui, mais avant ça, entendons-nous. Si vous lancez les cauris, si on lance les cauris, on a dit c'est pour agiter hein, n'est-ce pas ? ça c'est pour agiter. Pourquoi on veut agiter ? Vous savez pourquoi ?
141	00 :26 :54	E	Oui !
142	00 :26 :55	C	C'est pour ?
143	00 :26 :56	E	Le hasard.
144	00 :26 :58	C	Pardon ?
145	00 :26 :59	E	C'est pour le hasard.

146	00 :27 :01	C	C'est pour le hasard. C'est pour que le résultat soit aléatoire. Alors si on le lançait avec la main comme les gens le faisaient, il se peut qu'on ne respecte pas beaucoup ..., c'est pour ça qu'on a prévu le gobelet. Mais si vous obtenez par exemple, quand c'est la face courbe, on sait le cauri est dans une position stable. Houn ! c'est bien ça hein ? ça se ferme et on voit. Nous décidons de prendre, si ce n'est pas la face courbe qu'on voit, tout ce qu'on voit autre-là, on va appeler ça face plane. Vous comprenez ce que je dis ! Parce que comme le plateau n'est pas du sable, on peut voir ça de profil. On est d'accord ? C'est-à-dire le cauri peut être de côté, de profil et on prend ça comme la face plane. On est d'accord ? On prend ça comme la face plane et quand c'est fermé on prend ça comme la face (C), courbe. Mais revenons à quelque chose. Si vous obtenez une fois la face courbe et trois fois la face plane, comment on va noter ça ? Parce qu'il a dit qu'il faut noter tous les résultats. Mais entendons-nous sur comment on peut noter les résultats pour qu'on puisse les noter uniformément. Oui ! Tu proposes quelque chose ?
147	00 :28 :36	E14	On fait un tableau.
148	00 :28 :38	C	Avant de faire le tableau, c'est qu'il faut noter les résultats.
149	00 :28 :44	E14	Oui ! On va noter 3P1C
150	00 :28 :48	C	Donc il propose qu'on écrive comme ça. C'est ça hein ! Trois P un C. C'est comme ça ?
151	00 :28 :55	E3	Non !
152	00 :28 :56	C	Il faut qu'on s'entende pour qu'on note la même chose. C'est ce que je veux dire. Si on obtient trois P et un C, est-ce qu'on peut tous noter ça comme ça 3P1C ? et on va les séparer peut-être avec des tirets ?
153	00 :29 :13	EE	Oui !
154	00 :29 :14	E14	Et chaque fois qu'on va trouver ça, on va faire turet.
155	00 :29 :18	C	Pardon ?
156	00 :29 :19	E14	Chaque fois qu'on va trouver trois P un C, on va faire turet.
157	00 :29 :23	C	Ok. Bon, d'accord. C'est comment noter les résultats que j'ai voulu voir. C'est compris la consigne ? ça peut aller ? Vous avez de feuilles ?
158	00 :29 :37	P	Je peux les lancer ?
159	00 :29 :39	C	Oui ! Tu les lances.
160	00 :29 :41	P	Vous avez trente minutes.
161	00 :29 :44	C	En trente minutes, on peut faire l'estimation non ? Vous êtes champions désormais en estimation de probabilité.
162	00 :29 :50	E	C'est peu.

163	00 :29 :52	C	C'est peu ? On commence pour voir ce que ça va donner. Bon travail ! (00 :29 :55)
164			<p>Discussion dans le groupe 3</p> <p>E16 (00:33 :08) : Nous, on n'a rien compris de ça (en langue locale)</p> <p>E17(00 :33 :10) : Nous jouons au ludo (en langue locale)</p> <p>E15 (00 :33 :15) : Dis-le à monsieur (en langue locale)</p> <p>E17 (00 :33 :24) : Monsieur, on n'a pas bien compris.</p> <p>P(00 :33 :25) : Vous n'avez pas bien compris.</p> <p>E17 (00 :33 :28): Oui</p> <p>P(00 :33 :29) : Vous ne savez pas comment on estime la probabilité ?</p> <p>E15 (00 :33 :36) : Oui !</p> <p>P (00 :33 :37) : Comment on estime la probabilité ?</p> <p>E15 (00 :33 :42) : On réalise plusieurs fois l'expérience aléatoire, après ça on cherche les fréquences et on construit le polygone des fréquences.</p> <p>P(00 :34 :00) C'est la dernière fréquence obtenue qui est l'estimation de la probabilité. Si tu as fait 100 fois, c'est la fréquence obtenue pour les 100 qui est l'estimation ; Si tu as fait 200 fois, c'est la fréquence obtenue pour les 200 qui est l'estimation. Maintenant, ici on vous dit, quelle est la probabilité que Dansou réussisse à son examen sans avoir des sacrifices à faire ?</p> <p>E17 (00 :34 :25) : On va noter comme ça ?</p> <p>P (00 :34 :27) : Quoi ?</p> <p>E17 (00 :34 :28) : On va faire ça là ?</p> <p>P (00 :34 :29) : La notation ?</p> <p>EE (00 :34 :30) : Oui !</p> <p>P (00 :34 :32) Vous notez ..., par exemple vous faites ; essayez de faire ici, on va voir. Vous avez quoi là ?</p> <p>E17 (00 :34 :40) : 2P2C</p> <p>P (00 :34 :41) Vous écrivez 2P2C. Et chaque fois vous écrivez. Même si c'est 100 fois que vous faites, vous notez ça. Après vous allez faire le comptage, mais il faut noter.</p> <p>E15 (00 :34 :57) Là, tu mets 2P2C</p> <p>P (00 :35 :00) : Vous écrivez encore. Ce que vous trouvez, vous notez.</p>
165	00 :58 :26	P	<p>Quel est l'événement dont on veut la probabilité ici ?</p> <p>L'événement dont on veut la probabilité. Quel est l'événement ? Oui ! Dis-nous ça. L'événement, c'est ?</p>
166	00 :58 :48	E1	Dansou réussit à son examen sans avoir de sacrifice à faire.

167	00 :58 :51	P	Voilà ! C'est que Dansou réussit à son examen sans faire de sacrifice. Cet événement-là, quand est-ce qu'il est réalisé ? Quelles sont les éventualités de cet événement ?
168	00 :59 :04	E1	Lorsqu'on a
169	00 :59 :04	EE	2P2C ; 4P ...
170	01 :00 :19	P	Vous avez fini ?
171	01 :00 :20	EE	Oui !
172	01 :00 :21	P	L'événement, c'est Dansou réussit à l'examen sans avoir fait de sacrifice. D'accord ? Quelles sont les éventualités contenues dans cet événement ?
173	01 :00 :40	E	2P, 3P, 4P
174	01 :00 :46	P	Et 3P1C. Quand est-ce qu'un événement sera dit réalisé ? Un événement est réalisé lorsque si on fait notre expérience, on obtient que l'éventualité obtenue est un des éléments de l'événement. Si ce qu'on a obtenu comme résultat est un, est un élément de l'événement, on dit que l'événement est réalisé. Ce qu'on veut voir, c'est la fréquence de réalisation de l'événement pour le nombre n de lancers que vous avez à faire. ça peut aller ? Chez qui ce n'est pas clair ? C'est bon hein !
175	01 :01 :39	E	Non ! Ce n'est pas clair.
176	01 :01 :41	P	On veut voir la fréquence de réalisation pour le nombre de tirages que vous avez fait. On dit que c'est réalisé lorsque ce qu'on obtient est un élément de l'événement A. Je ne sais pas si vous comprenez ce que je dis. Mais c'est à vous de voir comment vous allez trouver l'événement. C'est votre travail. Moi je vous clarifie juste la question, c'est-à-dire ... L'événement, c'est réussir sans avoir fait de sacrifice. On sait que c'est quand il obtient 2P, 3P, 4P. C'est ça hein ! ou bien 3P1C.
177	01 :02 :20	EE	Oui !
178	01 :02 :21	P	Donc à vous de voir comment vous allez faire pour estimer la probabilité. Avant, l'événement, c'était tiré une bille blanche, on a essayé de calculer la fréquence du nombre de fois on a vu une bille blanche apparaître. Donc c'est à vous de voir. On a dit qu'un événement est réalisé lorsque ce qui est obtenu est un élément de l'événement. (01 :02 :50)
179	01 :04 :46	P	Est-ce que c'est un élément de l'événement A ?
180	01 :04 :47	EE	Non.
181	01 :04 :50	E	Vous notez. Tout ce que vous trouvez, vous notez.
182	01 :14 :58	P	Est-ce qu'il y a un groupe qui a fini ?
183	01 :31 :24	C	Vous avez fini ?
184	01 :31 :25	E	Oui !

185	01 :31 :26	C	Vous pouvez mettre le résultat au tableau. C'est quel groupe ici ?
186	01 :31 :31	E17	Groupe 3
187	01 :31 :32	C	Une colonne peut vous suffire non ? Vous choisissez votre colonne. Vous pouvez mettre ça au tableau ?
188	01 :34 :00	P	Quel groupe a encore fini ? (Silence) Quel groupe a encore fini ?
189	01 :34 :10	E	Ici !
190	01 :34 :11	P	Ok. Allez mettre votre résultat au tableau. Ça peut rester dans une colonne non ?
191	01 :34 :16	E	C'est deux tableaux.
192	01 :34 :18	P	C'est deux tableaux ! Essayez de faire un résumé. C'est possible ?
193	01 :34 :30	EE	Oui !
194	01 :34 :11	P	Voilà ! Tout le monde a déjà fini
195	01 :56 :21	C	Oui ! On va arrêter ça là. Si on veut faire, euh, attendre encore longtemps pour les résultats, ça va prendre encore de temps. Vous avez écrit vos noms sur les
196	01 :56 :34	EE	les feuilles.
197	01 :56 :36	C	Nous allons les prendre. Maintenant analysons, analysons ce qui est
198	01 :56 :39	EE	ce qui est au tableau.
199	01 :56 :41	C	Ce qui est au tableau. Parce que ce n'est pas peu. On a déjà les résultats de trois groupes sur quatre. Il y a déjà trois groupes sur quatre qui ont mis leurs résultats au tableau (Silence). Alors, il y a le groupe 2 qui a fait au total ?
200	01 :57 :14	EE	100 tirages.
201	01 :57 :16	C	Est-ce des tirages ? Comment on va les appeler ?
202	01 :57 :22	EE	Des lancers
203	01 :57 :23	C	Ou bien ? Eh, le groupe 2 a fait au total 100 lancers et a noté l'observation des événements 2P2C, 3P1C, 4P0C et les autres ne sont pas notés par hasard ? Les autres sont notés aussi ? Ok ! Pour voir l'évolution n'est-ce pas ? l'évolution des fréquences et vous estimez que l'estimation de la probabilité de l'événement pour 100 tirages c'est 0,35. Le groupe 3 bon ! Le groupe 3 a fait 200 lancers mais on peut dire que c'est pareil hein. Non suivez, je vous en prie. Ils ont fait 200 lancers, on peut dire que c'est
204	01 :58 :49	E11	Pareil.
205	01 :58 :50	C	Pardon ?
206	01 :58 :51	E11	Non !

207	01 :58 :53	C	Est-ce qu'il y a de différence entre ce qui est proposé par le groupe 2 et le groupe 3 ?
208	01 :58 :57	EE	Non ! Non ! Oui ! Non !
209	01 :59 :01	C	Bon ! Allons au groupe 4. 150 lancers, on peut dire que c'est la même chose ?
210	01 :59 :09	E	Oui !
211	01 :59 :11	C	Eh ! Arrêtez de travailler là ! Suivons pour voir quelle exploitation on peut en faire. Vous faites comme si c'est fini. Ce n'est pas encore fini. Donc, ils sont arrivés dans leur groupe, eux, ils ont complété d'autres, d'autres, à savoir 4C, et l'événement
212	01 :59 :37	E	3C1P
213	01 :59 :38	C	3C1P. Ils sont allés plus loin. D'accord. On les prend comme ça. Mais vous avez, puisque c'est la même méthode, et puis c'est la méthode qu'on connaît, l'évolution des fréquences. Pour l'estimation ici, vous avez pris le dernier qu'on a trouvé pour, le dernier tirage-là, la fréquence que vous avez trouvé pour le nombre total de tirage, c'est ç a que vous avez pris comme estimation. Bien maintenant, est-ce qu'on ne peut pas faire ça là autrement ? Est-ce qu'on ne peut pas trouver cette fréquence-là autrement ? Par quelle autre manière on peut-on trouver les fréquences que vous avez calculées. Voir les fréquences de 2P mais ..., Si on veut désigner l'événement, on peut le désigner par quoi déjà ? L'événement dont on veut connaître la probabilité. D'abord qu'est-ce que c'est l'expérience aléatoire ?
214	02 :00 :56	E	Une expérience dont on ne peut pas prévoir le résultat.
215	02 :01 :02	C	Non ! Je ne veux pas la définition ! Ici, quelle est l'expérience aléatoire ?
216	02 :01 :09	E	Si
217	02 :01 :16	C	Non ! Ce que je n'aime pas chez vous ici, c'est quand vous avez à dire, vous ne dites pas, vous le dites très bas-là. Quelle est l'expérience aléatoire ? On a l'impression que quand vous dites faux, on vous coupe la tête. Personne n'a envie de dire quelque chose qui n'est pas juste. Oui ! Une fois encore Pacôme.
218	02 :01 :38	E14	L'expérience aléatoire, c'est lancer le dé pour observer, lancer simultanément les cauris pour observer au moins deux faces planes.
219	02 :01 :48	C	Alors ! Pacôme dit, l'expérience aléatoire c'est lancer simultanément 4 cauris pour observer au moins deux
220	02 :01 :58	E11,E	faces planes.

221	02 :01 :59	C	au moins deux faces P. Voilà ! C'est ce que lui il dit. Qui dit autre chose ? Au niveau de l'expérience aléatoire ? Qui dit autre chose ? Donc pour tout le monde, l'expérience aléatoire, c'est lancer simultanément les 4 cauris oui pour observer
222	02 :02 :31	EE	2 ou 3 ou 4 faces P.
223	02 :02 :37	C	Si c'est ça l'expérience aléatoire, quel est l'événement ? Quel est l'événement dont vous voulez calculer la probabilité ? (Silence) Quel est l'événement dont vous voulez calculer la probabilité si ça-là est l'expérience aléatoire. Oui ! Pacôme revient sur sa décision.
224	02 :03 :02	E14	L'expérience aléatoire, c'était lancer les 4 cauris simultanément pour observer les faces.
225	02 :03 :08	C	Pour observer les faces. Lancer simultanément les 4 cauris pour observer les faces supérieures. Est-ce qu'on peut le retenir comme ça ? comme expérience aléatoire ? Donc l'expérience aléatoire ici, c'est lancer simultanément les 4 cauris pour observer les faces supérieures. L'événement dont on veut calculer la probabilité ici, c'est quoi ?
226	02 :03 :55	EE	Réussir son examen.
227	02 :03 :56	C	Pardon ?
228	02 :04 :01	EE	Réussir son examen.
229	02 :04 :03	C	Pourquoi vous hésitez quand vous voulez parler ?
230	02 :04 :06	EE	Réussir son examen.
231	02 :04 :08	C	Réussir à son examen.
232	02 :04 :11	E	Sans faire de sacrifice.
234	02 :04 :13	C	Sans faire de sacrifice.
235	02 :04 :14	EE	Oui !
236	02 :04 :15	C	Si on doit lier ça à l'expérience aléatoire, ça devient quoi ? Réussir à son examen sans faire de sacrifice. Si on doit lier ça à cette expérience aléatoire là, l'événement devient quoi ? Parce que dans l'expérience aléatoire-là, il n'y a pas de réussir à un examen là. Donc par rapport à l'expérience aléatoire, on ne peut pas comprendre ce que c'est que réussir à un examen. Maintenant, donc réussir à un examen, c'est notre événement mais si on doit formuler ça en tenant compte de l'expérience aléatoire qu'on a écrite là, qu'est-ce que ça devient ? Oui !
237	02 :05 :04	E14	Lancer quatre cauris pour observer.
238	02 :05 :07	C	Lancer, c'est l'expérience aléatoire. Observer maintenant.
239	02 :05 :11	E14	Observer
240	02 :05 :12	C	Observer ?
241	02 :05 :13	E14	Observer au moins deux faces planes.
242	02 :05 :14	C	Voilà ! Obtenir, on peut dire, obtenir au moins deux faces planes. Obtenir au moins deux faces planes. Et je disais donc

			les probabilités que vous avez estimées, c'est la probabilité de cet événement-là : obtenir au moins deux faces planes. Comment est-ce que vous avez fait pour exprimer cette probabilité. Comment est-ce que vous avez calculé les fréquences ? On connaît déjà la méthode, on est d'accord ? Comment est-ce que vous avez calculé les fréquences ? (Silence) Oui ! Expliquez comment est-ce que vous avez obtenu les fréquences, comment vous avez procédé pour obtenir les fréquences ? Si je comprends bien, les fréquences-là sont tombées du ciel ?
243	02 :06 :22	EE	Non !
244	02 :06 :23	C	Vous n'avez rien fait pour les obtenir.
245	02 :06 :30	E1	Comment le dire ?
246	02 :06 :32	EE	Chaque groupe. Chaque groupe dit.
247	02 :06 :34	C	Chaque groupe dit. Groupe 1.
248	02 :06 :40	E14	Eux, ils n'ont pas fait. C'est le groupe 2.
249	02 :06 :50	C	Eux, ils disent n'avoir pas fait ça. Oui, groupe 2.
250	02 :06 :58	E6	On a réalisé cent fois l'expérience aléatoire.
251	02 :07 :03	C	On a réalisé cent fois l'expérience aléatoire.
252	02 :07 :06	E6	On a, on a pris 4, on a pris chaque élément possible. Maintenant le nombre de fois qu'on a trouvé chaque élément possible, on a noté.
253	02 :07 :26	C	Ok ! Donc vous avez noté le nombre, oui évidemment, vous avez noté ici, vous avez noté ça, vous avez noté ça.
254	02 :07 :34	E6	Et après
255	02 :07 :35	C	Oui.
256	02 :07 :36	E6	Et le total, jusqu'à 100, la fréquence a donné 0,35
257	02 :07 :44	C	Oui ! obtenu en faisant quoi ? $6+0$, c'est ça ?
258	02 :07 :47	E6	Non !
259	02 :07 :49	C	Non je parle de ces choses-là par exemple.
260	02 :07 :53	E6	6 sur 20
261	02 :07 :55	C	6 sur 20 et ici ?
262	02 :07 :56	E6	11 sur 40
263	02 :07 :57	C	Là, 24 sur 60 et ainsi de suite. Et je demandais, est-ce qu'on ne peut pas l'obtenir autrement ?
264	02 :08 :03	E6	Oui !
265	02 :08 :05	C	Oui, comment ?
266	02 :08 :06	E6	Par le polygone des fréquences.
267	02 :08 :11	C	Non ! Le polygone des fréquences, on l'utilisait pour faire quoi ?
268	02 :08 :13	EE	Pour la probabilité
269	02 :08 :15	C	Pour conjecturer la probabilité elle-même.
270	02 :08 :17	EE	Oui !

271	02 :08 :18	C	Non ! Je dis, la fréquence que vous avez calculée, les 0,3 là, est-ce qu'on ne peut pas obtenir ça autrement ? Les 0,275 que vous avez obtenu ici en faisant 11 sur 40, est-ce qu'on ne peut pas calculer ça autrement ? Les 0 virgule, je ne sais pas, quatre que vous avez obtenu en faisant (24+7+1) sur 80, est-ce qu'on ne peut pas l'obtenir autrement ?
272	02 :08 :42	E6	Oui
273	02 :08 :43	C	Comment ?
274	02 :08 :44	E6	En faisant le nombre de cas favorables sur le nombre de cas possibles.
275	02 :08 :46	C	Mais c'est ce que vous avez fait pour calculer les fréquences. Vous avez fait le nombre de fois que vous avez observé divisé par le nombre de lancers. C'est le nombre de lancers qui remplace le nombre de cas possibles, si on devrait être dans ce cas, mais la fréquence qu'on a calculée ici. Mais, c'est déjà bien. Groupe 3 ?
276	02 :09 :12	E17	On a fait la somme des éventualités divisé par le nombre de lancers.
277	02 :09 :21	C	Donc vous avez fait la somme des, enfin, la somme des nombres de fois que vous avez obtenu les éventualités-là ?
278	02 :09 :30	E17	Oui !
279	02 :09 :31	C	Divisé par le nombre de lancers. C'est ça qui fait 0,3 ici.
280	02 :09 :34	E17	Oui !
281	02 :09 :35	C	C'est ça qui fait 0,35 là.
282	02 :09 :36	E17	Oui.
283	02 :09 :37	C	Ainsi de suite. Ma question est la suivante : Ne peut-on pas retrouver ça autrement ? Est-ce qu'on est obligé de faire la somme des trois divisée par le nombre total. Bien, vous allez reprendre votre travail et vous allez déterminer, et ça ne va pas durer, c'est sûr, On prend une autre consigne. Alors donner les estimations des probabilités des événements, des événements, vous les avez appelés 2P2C, 3P1C et 4P. Donnez les estimations des probabilités des événements 2P2C, 3P1C et 4P puis comparez-les, puis trouver une relation entre ces probabilités, entre ces estimations de probabilités, et une relation entre ça et l'estimation de probabilités de l'évènement-là, on va l'appeler l'évènement A, de l'évènement A et de l'estimation de la probabilité de l'évènement A. Donner les estimations des probabilités et des événements 2P2C, 3P1C et 4P puis trouver une relation entre ces estimations là et l'estimation de la probabilité de l'évènement A que vous avez trouvé globalement ici. C'est compris ?

284	02 :12 :33	EE	Oui.
285	02 :12 :34	C	Ce que j'ai donné ?
286	02 :12 :35	EE	Oui.
287	02 :12 :36	C	C'est compris ?
288	02 :12 :37	EE	Oui
289	02 :12 :38	C	On peut faire ça en combien de minutes ?
290	02 :12 :40	EE	15 min, 10 min.
291	02 :12 :41	C	15 minutes c'est trop.
292	02 :12 :42	E	10 minutes.
293	02 :12 :43	C	Non. 10 aussi, c'est trop.
294	02 :12 :43	EE	5, 3, 5
295	02 :12 :44	C	Est-ce qu'il y a des expérimentations à faire encore ?
296	02 :12 :46	EE	Non !
297	02 :12 :47	C	Non ! En 5 minutes ; donc après 5 minutes on va faire le point. (02 :12 :50)
298	02 :19 :34	C	Ça ne doit pas durer hein ! Est-ce qu'on a bien compris ce que j'ai demandé de faire ?
299	02 :19 :48	EE	Oui !
300	02 :19 :49	C	Cela que vous avez pris, on le fera juste pour une colonne. On va faire la vérification pour une seule colonne, puisque quand vous avez fini vous avez pris seulement les résultats d'une seule colonne.
301	02 :20 :03	EE	Oui !
302	02 :20 :04	C	Par rapport à ça, c'est le travail d'une seule colonne. C'est compris ?
303	02 :20 :11	EE	Oui !
304	02 :21 :12	C	On peut faire le point.
305	02 :22 :38	C	On peut faire le point ? Vous avez fini là ? Ici, vous avez fini ? Ici ? Vous avez fini là ?
306	02 :22 :48	E	Oui !
307	02 :22 :49	C	D'accord. On peut commencer. Les autres n'ont qu'à suivre. On va prendre les deux groupes. (Silence) Oui ! On est à vous !
308	02 :23 :22	E11	Oui ! ça y est !
309	02 :23 :23	C	Oui ! Quelle est la relation que vous avez trouvée ? Si nous appelons $p(2P2C)$ la probabilité, nous avons fait des estimations mais on parlera de probabilités, la probabilité de l'événement $2P2C$, $p(3P1C)$ la probabilité de l'événement $3P1C$ et $p(4P)$ la probabilité de l'événement $4P$. Et bien entendu, A est l'événement « obtenir au moins deux faces planes ». Qu'est-ce que vous avez obtenu ? $p(A)$?
310	02 :23 :59	E16	$P(A)=p(2P2C)$

311	02 :24 :04	C	$P(A)=$
312	02 :24 :05	E16	2P2C
313	02 :24 :07	C	P de ?
314	02 :24 :09	E16	2P2C
315	02 :24 :10	C	2P2C
316	02 :24 :13	E16	plus
317	02 :24 :14	C	plus
318	02 :24 :16	E16	$P(3P1C)$
319	02 :24 :18	C	$P(3P1C)$
320	02 :24 :20	E16	plus
321	02 :24 :22	C	plus
322	02 :24 :23	E16	$P(4P)$
323	02 :24 :24	C	$P(4P)$. ça c'est le groupe 3. Il y a un autre groupe qui a fini aussi. C'est le groupe 4.
324	02 :24 :33	E14	On a fait,
325	02 :24 :34	C	Oui ! Oui ! Précisez bien.
326	02 :24 :40	E14	Ce qu'on a fait, on a calculé les estimations des probabilités des événements 2P2C, on a trouvé 0,28 ; 3P1C, 0,086 ; 4P, 0. Lorsqu'on fait la somme, on retrouve 0,336. Or 0,336 était l'estimation qu'on avait trouvée pour l'événement A.
327	02 :24 :59	C	Donc vous avez trouvé la même relation. Vous avez fini là aussi non ? Et ici ? Bon mais comme je le demandais, est-ce qu'on peut dire maintenant qu'il y a une autre méthode caractéristique de ce que vous avez fait là au lieu de tout compter ensemble ? On peut calculer, déterminer les probabilités, hé, comment on va dire, de chaque
328	02 :25 :25	E	événement.
329	02 :25 :26	C	Quel type d'événement on a là ?
330	02 :25 :28	E	Élémentaire.
331	02 :25 :29	C	Elémentaire ; de chaque événement
332	02 :25 :31	EE	Elémentaire.
333	02 :25 :32	C	Elémentaire qui compose notre événement A. On peut déterminer la probabilité de chaque événement élémentaire qui compose l'événement A. Et faire après
334	02 :25 :43	EE	la somme
335	02 :25 :43	C	la somme. Ce sera une deuxième méthode. On est d'accord ?
336	02 :25 :46	E	Oui !
337	02 :25 :47	C	Ce sera une deuxième méthode et ça, c'est déjà une formule de calcul de probabilité, une formule de calcul de probabilité. Qui peut essayer de nous donner la formule ? essayer, puisqu'on n'a pas encore dit que ce qu'on a écrit est déjà une formule, une autre formule de calcul de probabilité. Qui peut essayer de nous le dire ?

338	02 :26 :11	E14	Soit A un événement.
339	02 :26 :13	C	Oui !
340	02 :26 :15	E14	On va dire que l'événement A est composé des événements élémentaires A', B', C'.
341	02 :26 :21	C	Oui !
342	02 :26 :22	E	$P(A)=p(A')+p(B')+p(C')$
343	02 :26 :26	C	Vous avez écouté ?
344	02 :26 :27	EE	Oui
345	02 :26 :28	C	Est-ce que ça traduit ce qui est là ?
346	02 :26 :31	EE	Oui.
347	02 :26 :32	C	Ok. Mais lui, il parle seulement de trois événements élémentaires. Et si on avait plus ?
348	02 :26 :36	E14	Plus ... + P(n)
349	02 :26 :38	C	D'accord ? Si on avait deux événements élémentaires ?
350	02 :26 :41	E14	Ça fait p(l'un) plus p(l'autre).
351	02 :26 :44	C	Ok. Est-ce qu'on ne peut pas donner une phrase pour que ça soit plus généraliste, qui ne dit pas que c'est 2, c'est 3, ou bien c'est ... , un peu plus généraliste.
352	02 :26 :54	E14	Somme des événements élémentaires qui composent cet événement.
353	02 :26 :59	C	Reprend.
354	02 :27 :00	E14	La probabilité de l'événement A est égale à la somme de la probabilité des événements élémentaires
355	02 :27 :06	C	des probabilités
356	02 :27 :07	E14	des probabilités des événements élémentaires qui composent l'événement A.
357	02 :27 :11	C	Ok. Je vais mettre ça au tableau. La probabilité de l'événement A, oui je recopie ce que tu dis ; quelle est la suite ?
358	02 :27 :26	E14	est égale à la somme
359	02 :27 :29	C	est égale, est la somme donc.
360	02 :27 :32	EE	Oui !
361	02 :27 :33	E14	des probabilités
362	02 :27 :34	C	des probabilités
363	02 :27 :41	E14	des événements élémentaires.
364	02 :27 :42	C	des événements élémentaires ; la suite ?
365	02 :27 :52	E14	Qui composent l'événement A.
366	02 :27 :57	C	qui compose l'événement A. C'est-à-dire que si on connaissait la probabilité de chaque événement élémentaire, on peut aussi calculer la probabilité par cette phrase-là. C'est la finalité du travail d'aujourd'hui. C'est ça qu'on voulait obtenir en demandant l'expérimentation. C'est exactement ça

			la leçon. La probabilité d'un événement A est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le composent ou bien qui le constituent. Ça peut aller comme ça ?
367	02 :28 :41	EE	Oui !
368	02 :28 :42	C	Est-ce que Kenneth, tu peux répéter ça ? Pas lire hein ? C'est possible ?
369	02 :28 :54	E7	Oui ! La probabilité d'un événement est la somme des probabilités de cet événement.
370	02 :29 :00	C	Des événements élémentaires.
371	02 :29 :02	E7	des événements élémentaires qui la composent
372	02 :29 :04	C	qui le composent. Qui peut encore dire quelque chose ? Même leçon ; on va au groupe 1. Le groupe 1 qui est un peu déçu parce qu'on n'a pas ses résultats mais c'est la classe qui compte. Ce n'est pas un groupe qui trouve, c'est la classe qui trouve. La leçon est pour toute la classe. On est d'accord ? Vous n'avez pas à vous plaindre. Ok ?
373	02 :29 :35	EE	Oui. Oui
374	02 :29 :36	C	Soyez suffisamment à l'aise là. Qui va nous répéter la leçon dans le groupe 1, parce qu'on est déjà passé dans le groupe 2 et le groupe 4.
375	02 :29 :50	E1	La probabilité d'un événement A est la somme des probabilités des événements élémentaires qu'il comporte.
376	02 :29 :48	C	Un peu plus fort.
377	02 :29 :50	E1	La probabilité d'un événement A est la somme des probabilités des événements élémentaires que comporte l'événement A.
378	02 :30 :00	P	Tout à fait. Le groupe 3 qui nous a permis d'écrire cette formule qui est finalement formalisée par Pacôme. Qui est chargé, qui sera chargé de nous dire la même leçon dans le groupe 3.
379	02: 30 :19	E16	La probabilité d'un événement A est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le composent ;
380	02:30 :26:	C	Des événements élémentaires qui le composent. Alors on a trouvé comme ça combien de formule de calcul de probabilité ?
381	02: 30 : 32	EE	2.
382	02: 30 :33	C	2. Première formule ?
383	02: 30 :39	E	Nombre de cas favorables sur nombre de cas possibles.
384	02: 30 :41	P	Vous n'avez pas précisé les conditions.
385	02: 30 :45	E15	Lorsque tous les événements élémentaires,
386	02: 30 :51	P	Lorsque

387	02: 30 :53	EE	Tous les éléments élémentaires ont les mêmes caractéristiques,
388	02: 30 :54	C	Tous les événements élémentaires, on ne parlera pas, il y a des termes techniques ici. Tous les évènements élémentaires
389	02: 31 :01	E15	ont la même probabilité
390	02: 31 :02	C	ont la même probabilité que vous expliquez par
391	02:31 :08	EE	les objets qui les composent ont les mêmes caractéristiques.
392	02: 31 :09	C	Caractéristique d'accord ? Alors lorsque tous les évènements élémentaires ont la même probabilité, la probabilité est égale au nombre de cas favorables sur le nombre de cas
393	02: 31 :22	EE	Possibles.
394	02: 31 :22	C	Possibles, très bien ! Et la deuxième formule c'est ?
395	02: 31 :26	EE	La probabilité d'un évènement est la somme des probabilités des évènements élémentaires qui le composent.
396	02: 31 :35	C	Voilà ! Eh ! Je pense que la séance qui va suivre, on va revenir sur cette conclusion pour démarrer la séance. On est d'accord ?
397	02: 31 :44	EE	Oui
398	02: 31 :45	C	Donc on ne va pas noter, on va prendre ça pour pouvoir noter pour commencer cette séance. Nous arrêtons la séance d'aujourd'hui là. Ou bien quelqu'un a des questions à poser ? On se retrouve quand ? On se retrouve quand ? demain matin !
399	02: 32 :01	EE	Oui
400	02: 32 :03	C	Demain matin à ?
401	02: 32 :04	EE	8h.
402	02: 32 :06	C	Non, on ne va pas dire 8h.
403	02: 32 :08	EE	7h.
404	02: 32 :09	C	7h ou bien, non, n'abusons pas disons 7h30.
405	02: 32 :11	E	Oui
406	02: 32 :12	C	On est d'accord ?
407	02: 32 :13	EE	Oui.
408	02:32 :14	C	On va être là à 7h 30 pour qu'à 8h on puisse faire tous les préparatifs pour ne pas rater la séance. Je vous remercie.

ANNEXE 14 : Transcription T₈

TRANSCRIPTION DE L'ENREGISTREMENT AUDIO DE L'EXPÉRIMENTATION DE L'INGÉNIERIE :

SITUATION 4

19 AVRIL 2017

EFFECTIF : 16

HEURE : 08h50 min

Les élèves ont gardé leurs numéros de E1 à E17 ainsi que leurs groupes respectifs constitués à la séance précédente. Lorsque l'élève qui intervient est identifié, il est indiqué par son numéro. La lettre E signifie que l'élève qui intervient n'est pas identifié. Par EE, nous exprimons que plusieurs élèves (au moins deux) interviennent simultanément. La lettre P désigne le professeur et la lettre C désigne le chercheur intervenant dans son statut d'enseignant. Dans la colonne des échanges verbaux, les points de suspension indiquent des passages qui n'ont pas pu être déchiffrés.

Num.	Temps	Acteurs	Echanges verbaux
001	00 :00 :00	P	... Je considère une expérience aléatoire dans l'univers oméga. Je définis une probabilité p sur Ω . Ainsi à chaque fois que je prends un événement, c'est-à-dire un sous-ensemble de Ω , j'associe le nombre réel $p(A)$ qui est la probabilité de l'événement A . On est d'accord ? qui est un nombre compris entre
002	00 :00 :25	EE	0 et 1.
003	00 :00 :27	P	Entre 0 et 1. Lorsque je prends l'événement impossible, selon vous, quelle est sa probabilité ? p de l'ensemble vide.
004	00 :00 :40	EE	0
005	00 :00 :48	P	Oui. Wilfried.
006	00 :00 :49	E12	0
007	00 :00 :50	P	Ça fait 0. La probabilité de l'événement impossible, ça fait 0. Parce que ça ne se réalise jamais. D'accord ? La probabilité de l'événement certain. D'abord, c'est quoi l'événement certain ?
008	00 :01 :13	E	C'est l'ensemble
009	00 :01 :14	P	C'est
010	00 :01 :14	E	C'est l'ensemble Ω lui-même.
011	00 :01 :15	P	C'est l'ensemble Ω lui-même. Maintenant sa probabilité ? Oui !
012	00 :01 :20	E	1

013	00 :01 :21	P	<p>Ça fait 1 parce qu'il est toujours réalisé. D'accord ? Et donc lorsque je prends alors un événement, comme on l'a dit hier, sa probabilité c'est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le constituent. Et on va écrire ça. Oui, c'est une question ?</p> <p>Soit une expérience aléatoire d'univers des éventualités Ω. On dit que l'on a défini une probabilité sur Ω lorsque à tout événement A de Ω on peut associer, on peut associer un nombre réel, un nombre réel, noté $p(A)$, appelé probabilité de A, probabilité de A vérifiant les conditions suivantes, vérifiant les conditions suivantes : la probabilité d'un événement est compris entre 0 et 1, la probabilité d'un événement, la probabilité d'un événement est comprise entre 0 et 1 ; la probabilité de l'événement impossible est 0, la probabilité de l'événement impossible est 0 ; la probabilité de l'événement certain, de l'événement certain est 1 ; la probabilité d'un événement, la probabilité, la probabilité d'un événement est la somme des probabilité des événements élémentaires qui le composent, est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le composent.</p> <p>(Prise de notes par les élèves)</p>
014	00 :10 :57	P	<p>Tout le monde a fini d'écrire ? Alors vous allez faire une lecture silencieuse comme d'habitude et quelques minutes après quelqu'un va nous lire le contexte et la consigne.</p>
015	00 :12 :18	P	<p>On peut lancer la lecture ? Quelqu'un pour nous lire à haute voix le contexte et la consigne. Pas toujours Landry. Hé ! Adeline.</p>
016	00 :12 :29	E17	<p>Situation 4 Contexte La définition précédente de la probabilité sur un univers des éventualités d'une expérience aléatoire Ω indique que la probabilité de l'événement certain est 1 et que la probabilité d'un événement est la somme des événements élémentaires qui le composent.</p>
017	00 :12 :54	P	<p>des probabilités. La somme des probabilités</p>
018	00 :12 :57	E17	<p>est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le composent. Tu utiliseras cette définition pour démontrer les propriétés ci-dessous.</p> <p>Consigne 1) On considère deux événements A et B de Ω composés respectivement des éventualités $e_1, e_2, \dots, e_m, e_1, e_2 \dots e_q$ et $e_1, e_2,$</p>

019	00 :13 :29	P	e_1'' , e_2'' , c'est ça hein.
020	00 :13 :36	E17	Oui
021	00 :13 :40	P	e_1'' , e_2'' jusqu'à e_q''
022	00 :13 :48	E17	<p>e_1'', e_2'' jusqu'à e_q'' et e_1', e_2' jusqu'à e_l', e_1'', e_2'' jusqu'à e_q''</p> <p>a) Démontre que $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.</p> <p>b) Que devient cette relation si A et B sont incompatibles ?</p> <p>2) Démontre que pour deux événements contraires A et \bar{A} de Ω on a : $p(\bar{A}) + p(A) = 1$.</p> <p>3) On suppose que Ω est composé des éventualités e_1, e_2, à e_n et on considère un événement A composé de n_0 éventualités e_1', e_2' à e_{n_0}'.</p> <p>Démontre que si tous les événements élémentaires de Ω ont la même probabilité, alors $p(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$, où $\text{Card}(A)$ et $\text{Card}(\Omega)$ désignent respectivement les nombres d'éléments de A et de Ω.</p>
023	00 :15 :33	P	Ok. Est-ce qu'il y a des incompris dans la consigne ou le contexte ? Bon on peut supposer que c'est clair chez tout le monde ? D'accord. Il n'y a pas de question. Vous avez 5 minutes pour le travail individuel. Bon pour le, pour la question une d'abord, on va faire la question une d'abord. Vous avez cinq minutes de travail individuel, juste pour la consigne une. (00 :16 :08)
024	00 :22 :00	P	<p>Bien les cinq minutes sont déjà passées. Qui a pu trouver quelque chose ? Je vous écoute. La question était de démontrer que $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$...</p> <p>1.a. Démontrons que $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$ en se basant sur, sur quoi ? Sur, Sur quoi on va se baser pour faire ?</p>
025	00 :22 :51	EE	La définition
026	00 :22 :52	P	Sur la définition qui dit que
027	00 :22 :55	E	La probabilité d'un événement est la somme des événements élémentaires qui le composent.
028	00 :22 :58	P	La probabilité d'un événement est la somme des événements élémentaires qui le, qui le composent. D'accord ? Bien. Ce que nous avons à faire : on veut démontrer que la probabilité de l'événement A, ça suit, plus la probabilité de l'événement

			B moins la probabilité de l'événement A inter, A inter B. On a une égalité à démontrer. Quels sont les méthodes que vous connaissez pour démontrer une égalité d'abord ? Commençons par-là !
029	00 :23 :36	E2	Les méthodes qu'on a pour démontrer que euh une égalité, on prend l'un pour démontrer l'autre, soit on prend l'un sur l'autre on va trouver 1
030	00 :23 :50	P	On va trouver 1
031	00 :23 :52	E2	Soit on prend l'un moins l'autre pour trouver 0.
032	00 :23 :54	P	Pour trouver 0, d'accord ? Soit on prend ceci et on développe jusqu'à trouver ceci ; soit on prend ceci divisé par ceci et on trouve 1 ; soit on prend ceci moins ceci et on trouve 0. On peut aussi calculer ceci pour trouver une autre expression Q, calculer ceci pour trouver une autre expression ; lorsque je veux démontrer que $P=Q$, je peux démontrer que le P est R, une autre expression, démontrer que le Q aussi est une autre expression R. Alors je déduis que $P=Q$. Je peux aussi faire ça. D'accord ? Maintenant prenons d'abord la probabilité de A union B. Comment je vais calculer la probabilité de A union B selon vous ? (silence) Selon la définition qui dit que c'est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le composent. Comment on va faire ? Oui Camir.
033	00 :25 :17	E2	Ici ce que je faisais, je fais probabilité de A union B.
034	00 :25 :24	P	A union
035	00 :25 :26	E2	A union B égale à la somme de e1 plus e2'' plus e1' i allant de 1
036	00 :25 :43	P	Egale à somme, somme comme ça ?
037	00 :25 :48	E2	C'est ce que je disais. e1
038	00 :25 :52	P	e1
039	00 :25 :55	E2	virgule, virgule.
040	00 :25 :58	P	virgule
041	00 :25 :59	E2	e2
042	00 :25 :59	P	e2
043	00 :26 :00	E2	Seconde,
044	00 :26 :02	P	e2''
045	00 :26 :03	E2	e'
046	00 :26 :05	P	e'
047	00 :26 :06	E2	Oui. Le i allant
048	00 :26 :14	P	Est-ce que c'est ce qu'il voulait dire ? La probabilité de l'événement A union B, d'après la définition, on a dit que c'est

			la probabilité, c'est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le composent. Ce qu'on devrait chercher c'est quoi ?
049	00 :26 :22	E12	La probabilité de A union B
050	00 :26 :33	P	Ce sont les...
051	00 :26 :34	E15	La probabilité des événements A et B.
052	00 :26 :36	P	Parlez plus fort.
053	00 :26 :38	E15	Probabilité de l'événement A et B.
054	00 :26 :41	P	La probabilité de A et B. C'est ça qu'on cherche. Et on sait ça fait la somme des probabilités des événements élémentaires qui le composent. Alors ce qu'on devrait chercher normalement c'est quoi ? Oui Wilfried.
055	00 :26 :50	E12	Les événements élémentaires.
056	00 :26 :51	P	Ce sont les événements é
057	00 :26 :53	E	élémentaires
058	00 :26 :53	P	élémentaires de
059	00 :26 :54	E	A union B
060	00 :26 :55	P	de
061	00 :26 :56	EE	A union B
062	00 :26 :56	P	De A union B. Voilà. Ce sont les événements élémentaires de A union de B. D'accord ? Maintenant, quels sont les élémentaires de A union B ?
063	00 :27 :06	EE	A et B
064	00 :27 :08	P	Pourquoi vous dites que c'est A et B. Même tout à l'heure, Ghislaine écrivait A égale à e_1, e_2, \dots, e_m . C'est ça que tu écrivais hein ?
065	00 :27 :26	E8	Oui
066	00 :27 :28	P	e_1, e_2, \dots, e_m , après e_1'' , e_2'' , jusqu'à e_q'' . Voilà ce qu'elle avait écrit, je pense hein. e_2'' , ..., e_q'' si je me fie à son cahier. Selon vous, est-ce que A c'est ça ?
067	00 :27 :56	EE	Oui
068	00 :27 :57	P	A c'est ça ? Qui n'est pas d'accord ?
069	00 :28 :04	E	Ici
070	00 :28 :06	P	J'ai ne n'ai pas dit que c'est faux hein. Je demande seulement qui n'est pas d'accord. Oui Wilfried
071	00 :28 :14	E2	Moi je ne suis pas d'accord.
072	00 :28 :16	P	Pourquoi, tu n'es pas d'accord ?
073	00 :28 :22	E2	En temps normal, elle a écrit A est égal à e_1, e_2, \dots, e_m . En temps normal, selon moi, pour A il ne devait pas avoir les e_2''
074	00 :28 :36	P	Il ne devait pas avoir les e_2'' . Pourquoi ? Quelqu'un pour nous relire la con, la question une de la consigne.

075	00 :28 :48	E11	1. On considère deux événements A et B de Ω composés respectivement des éventualités $e_1, e_2, \dots, e_m, e_1'', e_2'', \dots, e_q''$ et e_1', e_2', \dots, e_l'
076	00 :29 :05	P	Voilà. D'accord ? Les événements A et B sont composés des éventualités $e_1, e_2, \dots, e_m, e_1'', e_2'', \dots, e_q''$. C'est pour l'événement A.
077	00 :29 :18	EE	A
078	00 :29 :18	P	A voilà ce que Ghislaine a écrit. J'ai demandé si c'est vrai.
079	00 :29 :24	EE	Oui. C'est vrai.
080	00 :29 :25	P	C'est vrai ?
081	00 :29 :26	EE	Oui.
082	00 :29 :27	P	A d'abord c'est quoi ? Oui Camir, qu'est-ce qui n'est pas clair ?
083	00 :29 :32	E2	Monsieur ici.
084	00 :29 :34	P	Oui
085	00 :29 :34	E2	Ils ont dit, on considère deux événements A et B.
086	00 :29 :39	P	Oui
087	00 :29 :40	E2	Composés respectivement, composés respectivement des éventualités et ils ont cité. Maintenant par-là là, je ne suis pas d'accord parce que A serait jusqu'au
088	00 :30 :04	E	C'est ça.
089	00 :30 :06	E2	Non. Elle a écrit...
090	00 :30 :09	E1	Non. C'est e'' .
091	00 :30 :14	P	C'est bon ? Donc toi aussi, tu es d'accord ?
092	00 :30 :16	E2	Oui.
093	00 :30 :17	P	Bien ! A c'est un événement non ?
094	00 :30 :18	EE	Oui.
095	00 :30 :19	P	Et un événement, c'est quoi ?
096	00 :30 :22	E17	C'est un ...
097	00 :30 :22	P	C'est un ...
098	00 :30 :25	P	C'est un ...
099	00 :30 :26	EE	sous-ensemble.
100	00 :30 :28	P	C'est un sous-ensemble. Est-ce qu'on note un ensemble comme ça ?
101	00 :30 :30	EE	Non.
102	00 :30 :32	P	Il manque quoi ?
103	00 :30 :33	EE	Les accolades.
104	00 :30 :34	P	Les accolades. Voilà. D'accord ? Bien voilà l'événement A composé des éventualités e_1, e_2, \dots, e_m et puis $e_1'', e_2'', \dots, e_q''$. On peut aussi écrire l'événement B de cette
105	00 :30 :50	EE	manière.
106	00 :30 :50	P	manière. Ça nous fait :
107	00 :30 :51	EE	e_1'

108	00 :30 :54	P	e1'
109	00 :30 :57	EE	e2'
110	00 :30 :58	P	e2' jusqu'à
111	00 :30 :59	EE	e1'
112	00 :31 :00	P	e1'
113	00 :31 :02	EE	e1''
114	00 :31 :03	P	e1''
115	00 :31 :04	EE	e2''
116	00 :31 :06	P	e2'' jusqu'à
118	00 :31 :07	EE	eq''
119	00 :31 :08	P	eq''. La probabilité qu'on veut c'est la probabilité de l'événement A union B. Il nous faut d'abord l'ensemble A union B, connaître les événements élémentaires qui le
120	00 :31 :19	EE	composent.
121	00 :31 :19	P	Composent. L'événement A union B d'abord, ça va nous donner quoi ?
122	00 :31 :25	E17	Monsieur, monsieur c'est e', c'est e1'' euh e1'.
123	00 :31 :31	P	Ici c'est e1', e1'. Maintenant l'événement A union B, ça va donner quoi ? Oui Fadil.
124	00 :31 :44	E6	Ça va donner l'ensemble e1, e2, ..., em et
125	00 :31 :50	P	e1, e2. Vas-y, vas-y doucement.
126	00 :31 :55	E6	Jusqu'à em.
127	00 :31 :56	P	Jusqu'à em.
128	00 :31 :58	E6	e1''
129	00 :32 :00	P	e1''
130	00 :32 :02	E6	e2''
131	00 :32 :02	P	e2''
132	00 :32 :04	E6	Jusqu'à eq''
133	00 :32 :05	P	Jusqu'à eq''. C'est fini non ?
134	00 :32 :09	E6	Oui.
135	00 :32 :10	P	Union
136	00 :32 :12	E6	e1'
137	00 :32 :14	P	e1'
138	00 :32 :15	E6	e2'
139	00 :32 :16	P	e2'
140	00 :32 :19	E6	Jusqu'à e1'
141	00 :32 :19	P	Jusqu'à e1'. C'est ça hein ?
142	00 :32 :21	E6	Oui.
143	00 :32 :22	P	Et puis e1'', e2'' jusqu'à
144	00 :32 :26	E6	eq''.

145	00 :32 :27	P	eq''. Maintenant, ça va donner quoi encore ? On peut essayer de les regrouper ensemble pour que ça donne un seul ensemble.
146	00 :32 :34	EE	Oui.
147	00 :32 :35	P	C'est possible non ? ça va donner quoi ?
148	00 :32 :37	E6	Ça va donner e1,
149	00 :32 :40	P	e1
150	00 :32 :41	E6	e2
151	00 :32 :42	P	e2
152	00 :32 :44	E6	Jusqu'à em
153	00 :32 :45	P	Jusqu'à em
154	00 :32 :49	E6	e1''
155	00 :32 :52	P	e1''
156	00 :32 :54	E6	e2''
157	00 :32 :54	P	e2''
158	00 :32 :56	E6	Jusqu'à eq''
159	00 :32 :58	P	Jusqu'à eq''
160	00 :33 :00	E6	e1'
161	00 :33 :01	P	e1'
162	00 :33 :04	E6	e2'
163	00 :33 :05	P	e2'
164	00 :33 :07	E6	Jusqu'à e1'
165	00 :33 :11	P	e1'. C'est fini non ? Ou bien ça continue encore ?
166	00 :33 :17	E	Ça continue.
167	00 :33 :17	P	A vous de le dire. Moi je ne fais qu'écrire ce que vous dites.
168	00 :33 :19	E	Ça continue.
169	00 :33 :20	P	C'est fini où ça continue encore ?
170	00 :33 :21	E	Ça continue.
171	00 :33 :22	P	Ça continue ? Je réécris encore e1'', e2'' jusqu'à
172	00 :33 :28	EE, P	eq''
173	00 :33 :30	P	Oui, oui. Wilfried
174	00 :33 :33	E12	Selon moi, on a e1'' là jusqu'à eq'' deux fois.
175	00 :33 :36	P	Deux fois
176	00 :33 :38	E12	Et si on écrivait 2e1'' jusqu'à eq''
177	00 :33 :44	P	Donc on va écrire ça deux fois ?
178	00 :33 :48	E12	Oui
179	00 :33 :48	P	On met 2 devant ?
180	00 :33 :50	E12	Ça fait 2 facteurs de e1''
181	00 :33 :52	P	On ne fait pas la somme. C'est quand on a la somme de deux choses identiques qu'on trouve deux fois la chose. D'accord ? Est-ce que dans un ensemble un élément peut se répéter ?
182	00 :34 :01	EE	Non.

183	00 :34 :02	P	Non. Il y a déjà e_1'' , e_2'' jusqu'à e_q'' .
184	00 :34 :06	EE	seconde.
185	00 :34 :07	P	On n'a plus besoin de les remettre. D'accord ? Ça s'arrête là. Ça peut aller ?
186	00 :34 :15	EE	Oui
187	00 :34 :16	P	Bien. Maintenant alors, je peux alors calculer la probabilité de A union B. Maintenant les événements élémentaires seront quoi ? (silence) Ça c'est l'événement A union B. Maintenant les événements élémentaires de A union B ; parce qu'on a dit que ça fait la somme des probabilités des événements élémentaires qui le composent. Les événements élémentaires de A union B ; nous savons ce qu'on appelle événement élémentaire. C'est quoi un événement élémentaire ? c'est un événement ?
188	00 :35 :06	E17	Composé d'une seule éventualité
189	00 :35 :08	P	d'une seule éventualité. Quelles sont les éventualités de A union B ?
190	00 :35 :12	E17	e_1 , e_2 , jusqu'à e_m , e_1'' , e_2'' jusqu'à e_q'' et e_1' , e_2' , jusqu'à e_l' .
191	00 :35 :28	P	Jusqu'à e_l' . Maintenant les événements élémentaires de A union B. Ça va faire ? Parlez
192	00 :35 :40	E	L'ensemble
193	00 :35 :41	E15	e_1
194	00 :35 :42	P	e_1
195	00 :35 :43	E15	e_2
196	00 :35 :44	E	l'ensemble
197	00 :35 :44	P	L'ensemble, merci. L'ensemble $\{e_1\}$, c'est ça un événement élémentaire. e_1 comme ça, c'est une éventualité. Ça c'est un événement élémentaire.
198	00 :35 :55	E	Élémentaire.
199	00 :35 :56	P	Donc les événements élémentaires de A union B seront : ensemble $\{e_1\}$, ensemble $\{e_2\}$, jusqu'à ensemble $\{e_m\}$, ensemble $\{e_1''\}$, ensemble $\{e_2''\}$, jusqu'à ensemble $\{e_q''\}$ et ainsi de suite. D'accord ? La probabilité de A union B fera la probabilité de l'événement $\{e_1\}$, l'événement $\{e_2\}$ jusqu'à $\{e_l'\}$. Ça peut aller ?
200	00 :36 :21	EE	Oui
201	00 :36 :22	P	Bien. On va écrire ça. $P(A \cup B)$ ça fait $p(\{e_1\})$ plus $p(\{e_2\})$ plus $p(\{e_m\})$ plus $p(\{e_1''\})$ plus $p(\{e_2''\})$ jusqu'à $p(\{e_q''\})$ plus encore $p(\{e_1'\})$ plus $p(\{e_2'\})$ plus jusqu'à $p(\{e_l'\})$. Ça c'est $P(A \cup B)$. D'accord ?

			Maintenant comment on va faire par la suite. Est-ce que on va essayer d'arranger ceci pour obtenir ça ou bien calcule ceci et compare ça à ce qu'on a obtenu ? Selon vous, quel est le chemin qui sera un peu facile ? Est-ce qu'il faudrait essayer d'arranger pour trouver $p(A)+p(B)$ maintenant, ça fait toujours moins $p(A \cap B)$ ou bien on va encore à la ligne, calculer $p(A)+p(B)-p(A \cap B)$. Ce qu'on obtiendra, on va essayer de comparer ça à ce qu'on a là pour voir si les deux sont les
202	00 :38 :40	E3	Mêmes.
203	00 :38 :41	P	Sont les mêmes. D'accord ?
204	00 :38 :42	EE	Oui.
205	00 :38 :44	P	Bien. S'il en est ainsi $p(A)$, qui va me donner ça ? $p(A)$, si vous avez compris ce qu'on appelle $p(A)$. Oui Pacôme.
206	00 :39 :10	E14	$P(A)$ égale à $p(\{e1\})$
207	00 :39 :14	P	$p(\{e1\})$
208	00 :39 :18	E14	plus
209	00 :39 :18	P	plus
210	00 :39 :19	E14	$p(\{e2\})$
211	00 :39 :21	P	$p(\{e2\})$
212	00 :39 :22	E14	jusqu'à $p($
213	00 :39 :24	P	Jusqu'à $p($
214	00 :39 :25	E14	$\{em\}$
215	00 :39 :26	P	$\{em\}$. $P(B)$?
216	00 :39 :31	E14	Plus
217	00 :39 :31	P	Ah ! Ça reste encore $p(\{e1''\})$ plus $p($
218	00 :39 :36	E14	$\{e2''\}$
219	00 :39 :36	P	$\{e2''\}$ jusqu'à $p($
220	00 :39 :45	E14	$\{eq''\}$
221	00 :39 :46	P	$\{eq''\}$. C'est fini ? Maintenant $p(B)$. Quelqu'un d'autre pour me donner $p(B)$. Oui Adeline.
222	00 :40 :07	E17	$P(B)$ est égale à
223	00 :40 :12	P	$P(B)$ est égale à
224	00 :40 :13	E17	$P(\{e1'\})$
225	00 :40 :16	P	$P(\{e1'\})$
226	00 :40 :19	E17	Plus $P(\{e2'\})$
227	00 :40 :22	P	$P(\{e2'\})$
228	00 :40 :25	E17	Jusqu'à
229	00 :40 :26	P	Jusqu'à
230	00 :40 :26	E17	$P(\{e1'\})$
231	00 :40 :29	P	$P(\{e1'\})$
232	00 :40 :31	E17	plus
233	00 :40 :33	P	plus

234	00 :40 :34	E17	$P(\{e1''\})$
235	00 :40 :37	P	$e1''$
236	00 :40 :38	E17	Plus $P(\{e2''\})$
237	00 :40 :42	P	Plus $P(\{e2''\})$
238	00 :40 :44	E17	Jusqu'à $P(\{eq''\})$
239	00 :40 :47	P	Jusqu'à $P(\{eq''\})$. Alors voilà $p(A)$, voilà $p(B)$. Ça reste quoi ?
240	00 :40 :57	EE	$P(A \cap B)$
241	00 :41 :00	P	$P(A \cap B)$. Pour calculer $P(A \cap B)$, comment on va faire ?
242	00 :41 :00	EE	$P(A \cap B)$
243	00 :41 :11	E	$P(A) \cap p(B)$
244	00 :41 :15	P	Parlez plus fort. On va faire quoi ?
245	00 :41 :18	E	$P(A) \cap p(B)$
246	00 :41 :20	P	Les autres, parlez ? Vous avez des choses à dire. Juliette comment on va calculer $p(A \cap B)$?
247	00 :41 :36	E3	On va d'abord calculer $A \cap B$.
248	00 :41 :39	P	On va d'abord déterminer l'ensemble
249	00 :41 :41	E3	$A \cap B$
250	00 :41 :41	P	$A \cap B$. Voilà ! D'accord ? Bien ! $A \cap B$! ça va donner quoi ?
251	00 :41 :48	E	Ça va donner
252	00 :41 :50	E6	$e1, e2$
253	00 :41 :51	P	Qui veut parler ? Qu'il lève le doigt et parle. Oui Fadil
254	00 :41 :55	E6	$e1, e2$
255	00 :41 :57	P	$e1, e2$
256	00 :41 :58	E6	Jusqu'à em.
257	00 :42:01	P	Jusqu'à em. Je peux continuer ?
258	00 :42:04	E6	$e1''$
259	00 :42:06	P	$e1''$
260	00 :42:08	E6	$e2''$
261	00 :42:09	P	$e2''$
262	00 :42:12	E6	Jusqu'à
263	00 :42:14	P	Jusqu'à eq''
264	00 :42:15	E6	inter
265	00 :42:18	P	inter
266	00 :42:21	E6	$e1'$
267	00 :42:23	P	$e1'$
268	00 :42:24	E6	$e2'$
269	00 :42:26	P	$e2'$ jusqu'à $e1'$
270	00 :42:28	E6	$e1'', e1'$
271	00 :42:31	P	$e1'', e2''$ jusqu'à
272	00 :42:34	E	eq''

273	00 :42:35	P	eq''. Maintenant l'intersection donne quoi ? Si on essaie de regarder ce qu'ils ont de commun.
274	00 :42:43	EE	Ici monsieur.
275	00 :42:45	P	Oui. Kenneth. Ça donne quoi ?
276	00 :42:50	E7	Ça donne e1'',
277	00 :42:52	P	e1''
278	00 :42:54	E7	e2''
279	00 :42 :55	P	e2''
280	00 :42 :55	E7	Jusqu'à eq''
281	00 :42 :57	P	Jusqu'à eq''. C'est fini ?
282	00 :42 :59	E7	Oui.
283	00 :42 :59	P	Tout le monde est d'accord ?
284	00 :42 :59	EE	Oui.
285	00 :43 :01	P	Donc, ça c'est $A \cap B$. Alors la probabilité de $A \cap B$ alors nous donne quoi ?
286	00 :43 :11	E17	Ça fait p de l'ensemble
287	00 :43 :13	P	Qui n'a pas encore parlé ?
288	00 :43 :15	E17	Sergio.
289	00 :43 :19	P	$P(A \cap B)$
290	00 :43 :19	E17	Rachelle n'a pas parlé.
291	00 :43 :27	P	Oui Rachelle.
292	00 :43 :29	E1	$P(A \cap B)$
293	00 :43 :31	P	Oui.
294	00 :43 :32	E1	égale p de l'ensemble
295	00 :43 :34	P	L'ensemble ?
296	00 :43 :35	E1	e1''
297	00 :43 :36	P	e1''
298	00 :43 :37	E1	plus
299	00 :43 :38	P	plus
300	00 :43 :38	E1	P de l'ensemble {e2''}
301	00 :43 :41	P	{e2''}
302	00 :43 :42	E1	Jusqu'à p de l'ensemble {eq''}
303	00 :43 :46	P	eq''. Maintenant, on va calculer p(A) plus p(B) moins p
304	00 :43 :57	EE	$A \cap B$
305	00 :43 :59	P	$A \cap B$. Voilà. Ça va nous donner ; Le p(A), c'est ceci. C'est p({e1}) plus p({e2}) plus jusqu'à p({em}) plus p({e1''}) plus p({e2''}) jusqu'à p({eq''}) plus maintenant, j'ai fini avec p(A). p(B) maintenant : p({e1'}) plus p({e2'}) jusqu'à p({e1''}) plus p({e1''}) plus p({e2''}) jusqu'à p({eq''}) maintenant moins p({e1''}) plus p({e2''}) jusqu'à p({eq''}). Voilà p(A)+p(B)-p($A \cap B$). Alors on va faire le compte. P({e1}) jusqu'à p({em}), ça va rester là. D'accord ? Ceci il y

			a $p(\{e1\})$ jusqu'à $p(\{eq\})$ ici plus $p(\{e1\})$ jusqu'à $p(\{eq\})$, ça fait déjà deux fois. Maintenant moins encore $p(\{e1\})$ jusqu'à $p(\{eq\})$. Donc ça reste une seule fois.
306	00 :46 :32	EE	Oui.
307	00 :46 :32	P	D'accord ? Maintenant $p(\{e1'\})$ jusqu'à $p(\{e1'\})$ reste aussi là.
308	00 :46 :39	EE	Oui !
309	00 :46 :40	P	Ça peut aller ? Donc ça reste $p(\{e1\})$ plus $p(\{e2\}$
310	00 :46 :50	E	$\{e2\}$
311	00 :46 :50	P	$\{e2\}$ jusqu'à $p(\{em\})$ plus $p(\{e1''\})$ plus $p(\{e2''\}$
312	00 :47 :05	E	$\{e2''\}$
313	00 :47 :05	P	$\{e2''\}$
314	00 :47 :07	E17	Jusqu'à
315	00 :47 :08	P	Jusqu'à $p(\{eq''\}$
316	00 :47 :11	EE	$\{eq''\}$
318	00 :47 :13	P	$\{eq''\}$ plus maintenant $p(\{e1'\})$ plus $p(\{e2''\})$ plus jusqu'à $p(\{e1'\}$
319	00 :47 :25	E17	$\{e1'\}$
320	00 :47 :25	P	$\{e1'\}$. Maintenant, voilà le résultat qu'on a obtenu pour $p(A)+p(B)-p(A \text{ inter } B$.
321	00 :47 :37	E17	$A \text{ inter } B$.
322	00 :47 :39	P	$A \text{ inter } B$. Comparez ça à ce qu'on a obtenu pour $p(A \cup B)$. Est-ce que les deux sont les mêmes ?
323	00 :47 :45	EE	Oui !
324	00 :47 :46	P	D'accord ? Donc effectivement on aura alors $p(A \cup B)$ est égale à $p(A)+p(B)-p(A \cap B)$. D'où $p(A \cup B) = p(A)+p(B)-p(A \cap B)$. La probabilité de la réunion de deux événements d'accord ? ça fait la probabilité, la somme des probabilités des deux événements moins la probabilité de leur intersection. Qui a des questions ? S'il n'y a pas de question, on va lancer cinq minutes de travail individuel pour la question 2.
325	00 :48 :44	E3	Ça reste.
326	00 :48 :49	E	b)
327	00 :48 :50	E	Ce n'est pas terminé.
328	00 :48 :50	P	1.b)
329	00 :48 :51	E	1.b)
330	00 :48 :54	P	Ok. Prenez note alors. Ecrivez, écrivez d'abord.
331	00 :49 :00	E	Dans le cahier de cours ?
332	00 :49 :01	P	Oui, oui !
333	00 :49 :09	C	Moi, je propose que, il y a, il y a ... Si on vous laisse comme ça, vous allez tous recopier même ce que vous connaissez déjà. Moi je propose qu'on enlève certaines choses que vous connaissez déjà. Par exemple, celle ligne. $A \cup B$. Qu'est-ce

			qu'on a changé ici ; c'est seulement le symbole union qu'on a placé.
334	00 :49 :30	E	Oui
335	00 :49 :31	C	On connaissait A. Donc la vraie réponse que vous avez trouvée, c'est ça hein ?
336	00 :49 :35	E	Oui !
337	00 :49 :36	C	Ça va vous permettre de ne pas prendre trop de temps pour noter. On fait la même chose ailleurs.
338	00 :49 :46	E	$A \cap B$.
339	00 :49 :48	C	$A \cap B$ aussi.
340	00 :50 :13	C	Oui, même, avec votre permission, est-ce qu'on ne peut pas ... C'est $p(A \cup B)$ ici non ?
341	00 :50 :20	EE	Oui !
342	00 :50 :21	C	Avec votre permission, est-ce qu'on ne peut pas enlever $p(A)$ là ; pour dire que c'est ça qu'on a écrit avec les crochets puisque c'est quelque chose qu'on connaît. Ce qui est entre crochet ici, jusque-là.
343	00 :50 :38	E	Oui !
344	00 :50 :38	C	C'est ça le $p(A)$?
345	00 :50 :39	EE	Oui !
346	00 :50 :40	C	Et vous savez que c'est ça ?
347	00 :50 :41	EE	Oui.
348	00 :50 :43	C	Est-ce qu'on ne peut pas les enlever de là pour réduire ce que vous avez à recopier ? Parce que ce sont des explications qu'on a données. Pareil, on peut enlever ça aussi ?
349	00 :50 :57	EE	Oui.
350	00 :51 :01	C	Et là, ce que vous avez à recopier, ça ne va pas être long et vous avez compris parce que c'est vous qui l'avez ... (00 :51 :07)
351	01 :02 :52	P	On attend encore ceux qui n'ont pas fini pour lancer la question 1.b). Ceux qui ont fini peuvent commencer par réfléchir à la question 1.b). Essayez déjà de réfléchir sur comment vous allez résoudre la question 1.b) Fady !
352	01 :03 :22	E6	Oui !
353	01 :03 :22	P	Commencez déjà par réfléchir. Ceux qui ont fini, essayez de réfléchir à la question 1.b). (Silence)
354	01 :04 :35	P	Bien ! On peut lancer la question 1.b) ; juste pour deux minutes. Vous allez essayer de réfléchir et on va passer à la correction. Juste pour deux minutes pour le 1.b). On demande de, que devient cette relation si A et B étaient incompatibles ?

			Que devient cette relation si A et B étaient incompatibles ? (01 :05 :04)
355	01 :08 :00	P	Bien, on peut passer à la correction non ?
356	01 :08 :03	EE	Oui monsieur, oui.
357	01 :08 :04	P	D'accord ? Alors la question disait, la question dit plutôt : que devient cette relation, c'est-à-dire probabilité de $A \cup B$ égale à probabilité de A plus probabilité de B moins la probabilité de $A \cap B$. Qu'est-ce qu'elle devient si A et B sont incompatibles ? Ce qu'elle devient si A et B sont incompatibles ? Je vous écoute. Beaucoup de doigts en l'air. Oui Pacôme.
358	01 :08 :57	E14	Lorsque A et B sont incompatibles
359	01 :09 :01	P	Oui.
360	01 :09 :01	E14	La probabilité de l'évènement $A \cup B$ serait égale à probabilité de A plus probabilité de B.
361	01 :09 :09	P	Si, j'écris hein, si A et B sont incompatibles, $P(A \cup B)$ donne quoi ? $P(A) + P(B)$. Pourquoi ?
362	01 :09 :29	E14	Parce que normalement ça devrait nous faire $P(A) + P(B)$ plus maintenant $P(A \cap B)$. Or
363	01 :09 :36	P	Moins.
364	01 :09 :37	E14	Bon, si on supposait que, si on supposait que les deux étaient incompatibles.
365	01 :09 :40	P	Oui.
366	01 :09 :41	E14	$P(A \cap B)$ va donner 0.
367	01 :09 :42	P	P de
368	01 :09 :43	E14	$A \cap B$
369	01 :09 :44	P	Va donner 0 parce que $A \cap B$ égale à
370	01 :09 :47	E14	Ensemble vide.
371	01 :09 :49	P	Egale à vide. D'accord ? Puisque A et B sont incompatibles, alors $A \cap B = \{ \}$ et donc $P(A \cap B) = 0$. D'où $P(A \cup B)$ qui est normalement $P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ donne $P(A) + P(B)$. Voilà ! Alors on va relancer pour la question 2 maintenant ; ça vous allez faire ça directement en travail en groupe. Cinq minutes, vous aller réfléchir sur la question 2.
372	01 :11 :33	P	La question 2 dit : démontre que deux évènements contraires A et \bar{A} , $P(A) + P(\bar{A}) = 1$. En groupe. Cinq minutes. (01 :11 :49)
373	01 :16 :35	P	Quel groupe a trouvé ? Je vais demander d'après le groupe de Emmanuel. Recopiez-nous votre proposition au tableau. Rapidement, rapidement, faites vite.
374	01 :19 :12	P	Alors, voilà ce que vos camarades ont proposé. Vos réactions. Mets, mets petit 2). Tu n'as pas écrit la consigne pour que... Ghislaine, mets petit 2). Et écris la consigne. Mets 2). Efface.

			Vos réactions. Si c'est juste, si ce n'est pas juste, s'il y a des choses à ajouter, s'il y a des choses à retrancher ou carrément. On efface. Oui Fadyl.
375	01 : 20 : 06	E6	Après avoir mis $A \cup \bar{A} = \Omega$, elle, lorsqu'elle a mis $p(A \cup \bar{A}) = p(A) + p(\bar{A})$ ou bien lorsqu'elle a mis $p(A \cap \bar{A})$, elle devrait mettre, or $p(A \cap \bar{A})$ est égal à l'ensemble vide, ce qui est égal à zéro. Maintenant, après avoir mis $p(A \cup \bar{A}) = p(A) + p(\bar{A})$, elle doit mettre, or $p(A \cup \bar{A})$ est égal à Ω , ce qui est égal à 1.
376	01 : 21 : 00	P	Ce qui est égale à 1. Donc tu proposes qu'on ajoute deux choses. La première : avant de passer à la ligne de $p(A \cup \bar{A}) = p(A) + p(\bar{A})$, on devrait rappeler que $p(A \cap \bar{A})$ est égal à $p(\{\})$, égal à 0. C'est ça hein ?
377	01 : 21 : 21	EE	Oui
378	01 : 21 : 22	P	On ajoute non ? Ici. C'est là ? Jusqu'ici. Mets un point. Or $p(A \cap \bar{A}) = p(\{\}) = 0$, donc ; mets donc là-bas. Donc $p(A \cup \bar{A}) = p(A) + p(\bar{A})$. Mets encore, or $p(A \cup \bar{A}) = p(\Omega)$. C'est ça hein ? égale à 1. Mets un point. Alors, c'est ici. Efface ceci. Mets donc seulement un point. C'est un point. Il y a point. Ce sont des paragraphes hein. Quand vous prenez ça, ce sont des éléments mathématiques. Ce sont des phrases en français aussi. D'accord ? Voilà ! Est-ce qu'il y a d'autres remarques à apporter ? On peut valider ?
379	01 : 22 : 49	EE	Oui
380	01 : 22 : 51	P	Donc effectivement, c'est leur démonstration. Lorsque A et \bar{A} sont contraires, leur intersection est vide et leur union donne Ω . D'accord ? Donc $p(A \cup \bar{A}) = p(A) + p(\bar{A}) - p(A \cap \bar{A})$, ce qu'on a démontré dans la question 1.a). Or $p(A \cap \bar{A}) = p(\{\}) = 0$. On en déduit alors que $p(A \cup \bar{A})$ ça fait $p(A) + p(\bar{A})$. Or $A \cup \bar{A}$ donne l'ensemble Ω dont sa probabilité est égale à 1. Et on a : $p(A) + p(\bar{A}) = 1$.
381	01 : 23 : 25	P	La troisième question ! Je n'ai pas encore dit de recopier non ! Einhein ! On va lancer la troisième question. Il y a encore de la place au tableau. Après vous allez recopier le tout. D'accord ? Alors la troisième question, on va encore lancer cinq minutes de travail en groupe pour la troisième question. On suppose que Ω est composé de n éventualités, est composé des éventualités e_1, e_2, \dots, e_n et on considère un événement A composé de n_0 éventualités $e_1', e_2', \dots, e_{n_0}'$. Démontre que si tous les événements élémentaires de Ω ont la même probabilité, alors $p(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$, où $\text{Card}(A)$ et $\text{Card}(\Omega)$ désignent respectivement les nombres d'éléments de A et de Ω . Ça peut aller ? Cinq minutes de travail en groupe. (01 : 24 : 25)

382	01 :33 :47	P	Bien ! Alors, vous avez pu trouver quelque chose ? Bien on va passer à la résolution. La question est de montrer que si tous les événements élémentaires ont la même probabilité, alors $p(A)$, démontrons que $p(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$. La supposition ici, c'est que tous les événements élémentaires ont la même
383	01 :34 :38	E	probabilité
384	01 :34 :39	P	probabilité. Alors l'ensemble Ω , on pourrait l'écrire comme $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$. Ça peut aller ?
385	01 :34 :57	E	Oui.
386	01 :34 :58	P	L'ensemble A , c'est l'ensemble $\{e_1'$,
387	01 :35 :02	E	e_2'
388	01 :35 :03	P	e_2' jusqu'à e
389	01 :35 :06	EE	e_n'
390	01 :35 :07	P	e_{n_0}' . On sait que tous les événements élémentaires ont la même probabilité, tous les événements élémentaires ont la même probabilité, probabilité. Donc normalement, on dira $p(\{e_1\})$, parce que ce sont des événements élémentaires, d'accord ?
391	01 :35 :46	E	Oui !
292	01 :35 :47	P	égale à $p(\{e_2\})$, je continue hein,
393	01 :35 :50	E	Oui !
394	01 :35 :51	P	Égale à p jusqu'à $p(\{e_n\})$. Alors si je cherchais à calculer $p(\Omega)$, normalement ça me donne 1.
395	01 :36 :27	E	Oui !
396	01 :36 :28	P	qui est égal à la somme des probabilités des événements élémentaires qui le
397	01 :36 :33	EE	composent
398	01 :36 :33	P	qui le composent. Ça fait $p(\{e_1\})$, $p(\{e_1\})$ plus $p(\{e_2\})$ jusqu'à $p(\{e_n\})$, mais eux tous étant les mêmes, d'accord ?
399	01 :36 :50	EE	Oui
400	01 :36 :51	P	Je peux dire que ça fait $p(\{e_1\})$ plus $p(\{e_1\})$ plus $p(\{e_1\})$, jusqu'à plus $p(\{e_1\})$. Combien de fois ? n fois. Donc ça fait $np(\{e_1\})$, d'accord ? qui est égale à 1. C'est-à-dire la probabilité d'un événement élémentaire, ça fait $\frac{1}{n}$; puisque j'ai $np(\{e_1\})=1$. Ainsi $p(\{e_1\})$ est encore $p(\{e_2\})$ jusqu'à $p(\{e_n\})$, qui nous donne $\frac{1}{n}$. C'est bon ?
401	01 :37 :52	EE	Oui !
402	01 :37 :53	P	On peut continuer ? Ça, c'est la probabilité d'un événement élémentaire de l'univers Ω . Donc tous les événements élémentaires ont la même probabilité qui est égale à $\frac{1}{n}$.

			Maintenant $p(A)$, $p(A)$ nous fait normalement $p(\{e_1\})+p(\{e_2\})+\dots+p(\{e_{n_0}\})$. A est un événement, donc un sous-ensemble de Ω ; donc tous les, toutes les éventualités de A sont aussi les éventualités de Ω . Ça peut aller ?
403	01 :38 :42	E	Oui
404	01 :38 :43	P	Donc ce qui fait que tous les événements élémentaires de A ont aussi la même probabilité égale à
405	01 :38 :52	EE	$\frac{1}{n}$.
406	01 :38 :54	P	$\frac{1}{n}$. D'accord ? ça nous fait alors ici $\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}$, combien de fois ?
407	01 :39 :06	EE	n fois.
408	01 :39 :09	P	Combien de fois ? ça fait $\frac{1}{n}$ pour celui-ci, plus $\frac{1}{n}$ pour celui-là, jusqu'à $\frac{1}{n}$ pour cela. Combien de fois ?
409	01 :39 :26	E16	n_0 fois.
410	01 :39 :28	P	n_0 fois. Ça nous fait $n_0 \times \frac{1}{n}$ et ça nous fait $\frac{n_0}{n}$. n_0 c'est ? Fady !
411	01 :39 :43	E6	Le nombre d'éventualités.
412	01 :39 :46	P	C'est le nombre d'éléments de
413	01 :39 :47	E	A
414	01 :39 :47	P	de A , ce qui est $\text{card}(A)$. D'accord ? Et n ?
415	01 :39 :53	EE	Nombre d'éléments de
416	01 :39 :55	P	Le nombre d'éléments de Ω , c'est le cardinal de
417	01 :39 :58	EE	Ω .
418	01 :39 :59	P	Ω . Voilà le résultat. Qui était sur le chemin ? Au moins j'ai vu des gens démarrer par ceci non ?
419	01 :40 :19	E	Oui !
420	01 :40 :20	P	J'ai vu des gens démarrer comme ça. D'accord ? Donc voilà la démonstration. Est-ce qu'il y a des questions ? Lorsque vous avez une expérience aléatoire dans lesquelles, dans laquelle tous les événements élémentaires ont la même probabilité, comme on l'a déjà dit ici, la probabilité d'un événement est le nombre d'éléments de cet événement sur le nombre d'éléments de l'univers. Ça fait le nombre de cas favorables sur le nombre de cas
421	01 :40 :48	EE	Le nombre de cas possibles
422	01 :40 :49	P	possibles. Ça fait encore cardinal de A sur cardinal de Ω .
423	01 :40 :54	EE	Ω .
424	01 :40 :55	P	Cardinal étant le nombre d'éléments qu'il y a dans l'ensemble. Bien ! Écrivez rapidement.

ANNEXE 15 : Transcription T₉

SITUATION 5, Exercices 1, 2 et 3

26 AVRIL 2017

EFFECTIF : 15 sur 16

HEURE : 07h30 min

Les élèves ont gardé leurs numéros de E₁ à E₁₇ et leurs groupes respectifs. L'élève E₅ n'a pas suivi le cours de ce jour.

Lorsque l'élève qui intervient est identifié, il est indiqué par son numéro. La lettre E signifie que l'élève qui intervient n'est pas identifié. Par EE, nous exprimons que plusieurs élèves (au moins deux) interviennent simultanément. La lettre P désigne le professeur et la lettre C désigne le chercheur intervenant dans son statut d'enseignant. Dans la colonne des échanges verbaux, les points de suspension indiquent des passages qui n'ont pas pu être déchiffrés.

N°	Horaire	Acteur	Les échanges verbaux
001	00 :00 :02	P	Ok bonjour tout le monde.
002	00 :00 :04	EE	Bonjour monsieur.
003	00 :00 :05	P	Et ce matin ?
004	00 :00 :06	E	Ça va ?
005	00 :00 :08	P	On est encore là pour notre expérimentation en probabilité, d'accord ? et on a déjà fini le cours sur la probabilité. Aujourd'hui on est là pour la séance d'exercice, c'est ça non ?
006	00 :00 :28	EE	Oui monsieur.
007	00 :00 :28	P	Mais avant ça, il faudrait qu'on se rappelle un peu de ce qu'on a fait jusque-là. Alors qui va nous faire un bref résumé de tout ce qu'on a fait sur la probabilité ? Enfin ce que lui il a compris depuis ? Qu'est-ce qu'on appelle probabilité ? Qu'est-ce qu'on appelle événement ? Qu'est-ce qu'on appelle expérience ? Comment définir la probabilité ? (Silence) Oui qui veut parler ? On a appris ce que sait qu'une expérience aléatoire ou bien ?
008	00 :01 :19	E	Oui
009	00 :01 :19	P	C'est quoi une expérience aléatoire ? Oui oui Wilfried.
010	00 :01 :30	E12	Une expérience aléatoire, une expérience aléatoire est une expérience dont on ne peut pas prévoir avec certitude le résultat mais dont on connaît les résultats possibles.
011	00 :01 :50	P	Voilà ! Lorsque je prends une expérience aléatoire, d'accord ? Les résultats possibles, comment on les appelle ? Oui Landry
012	00 :02 :02	E11	Les événements, non ! les éventualités.

013	00 :02 :05	P	Les éventualités. Lorsqu'on a une expérience aléatoire, les résultats possibles, on les appelle les éventualités. C'est quoi un événement d'une expérience aléatoire ? Oui ! Adeline.
014	00 :02 :30	E17	Un évènement est un sous ensemble de l'univers des éventualités.
015	00 :02 :40	P	Parlez plus fort
016	00 :02 :42	E	Un évènement est un sous ensemble de l'univers des éventualités
017	00 :02 :48	P	Un évènement est un sous ensemble de l'univers des éventualités. D'accord ? Quand est ce qu'on dit qu'un évènement est impossible ? Quand est ce qu'on dit qu'un évènement est impossible ? Oui Mohamed.
018	00 :03 :15	E13	Un évènement est impossible lorsque le résultat est l'ensemble vide.
019	00 :03 :19	P	Lorsque le résultat
020	00 :03 :20	E13	Est l'ensemble vide
021	00 :03 :21	P	Lorsque le résultat est l'ensemble vide, lorsque le résultat est l'ensemble vide. Qui va dire ça mieux ? Le résultat, c'est une ? Oui !
022	00 :03	E	Un évènement est impossible lorsqu'il n'est jamais réalisé.
023	00 :03 :48	P	Lorsqu'il n'est jamais réalisé, d'accord ? Quand je fais l'expérience aléatoire le résultat que j'obtiens, comment on l'appelle ?
024	00 :03 :54	E	Une éventualité.
025	00 :03 :55	P	Une éventualité ! D'accord ?
026	00 :03 :56	E	Oui
027	00 :03 :57	P	D'accord ? Mais quand je mets ça dans un ensemble, j'obtiens un événement. Mais quand un évènement ne se réalise jamais, on dit qu'il est impossible. On l'appelle ensemble
028	00 :04 :08	E	Vide
029	00 :04 :09	P	L'ensemble qui se réalise, l'évènement qui se réalise toujours, c'est l'évènement ?
030	00 :04 :13	E1	Ω
031	00 :04 :14	P	Certain qui est l'ensemble Ω , l'univers des éventualités. A part ça, on a parlé de quoi ?
032	00 :04 :39	P	Parlez, parlez. Après ça, on a parlé de quoi ? Oui
033	00 :04 :52	E16	On a parlé encore des évènements élémentaires.
034	00 :04 :55	P	Parlez plus fort.
035	00 :04 :56	E16	On a parlé encore des évènements élémentaires.
036	00 :04 :59	P	C'est quoi un évènement élémentaire ?
037	00 :05 :00	E16	Un évènement élémentaire est un évènement qui comporte une seule éventualité.
038	00 :05 :04	P	Un évènement élémentaire est un évènement qui comporte une seule éventualité. On a parlé de quoi encore ?
039	00 :05 :11	E16	Des évènements incompatibles ?
040	00 :05 :14	P	C'est quoi deux évènements incompatibles ?
041	00 :05 :16	E16	Deux évènements sont dits incompatibles lorsque,
042	00 :05 :19	P	Parle fort !

043	00 :05 :20	E16	Deux évènements sont dits incompatibles lorsque leur intersection donne l'ensemble vide.
044	00 :05 :21	P	Lorsque l'intersection donne l'ensemble vide. Après
045	00 :05 :26	E16	Des évènements contraires
046	00 :05 :27	P	Ounhoun !
047	00 :05 :27	E16	Deux évènements sont dits contraires lorsque l'intersection donne l'ensemble vide mais leur réunion donne l'ensemble Ω .
048	00 :05 :36	P	Vous êtes forts hein ! Après ça. Qu'est-ce qu'on a vu encore ? (Silence) Je vous écoute. Les filles, parlez ! Ou bien ! Où est Michkath ?
049	00 :05 :59	E14	Elle est malade.
050	00 :06 :03	P	Elle est malade. Oui Pacôme !
051	00 :06 :06	E14	On a encore vu ce que c'est que la probabilité d'un évènement.
052	00 :06 :09	P	C'est quoi une probabilité d'un évènement.
053	00 :06 :10	E14	On a dit : selon un théorème appelé la loi des grands nombres,
054	00 :06 :12	P	Oui
055	00 :06 :14	E14	La fréquence d'observation d'une expérience aléatoire
056	00 :06 :18	P	Parle plus fort.
057	00 :06 :20	E14	La fréquence d'observation d'une expérience aléatoire oscille autour d'un nombre compris entre 0 et 1. Ce nombre est la probabilité d'un évènement.
058	00 :06 :35	P	Selon la loi des grands nombres, la fréquence d'observation d'un évènement pour un nombre grand nombre de réalisations, d'accord, oscille entre 0 et 1 ; ce nombre est la probabilité de l'évènement. C'est ce qu'on a dit hein ?
059	00 :06 :54	EE	Oui !
060	00 :06 :55	P	Qu'est-ce qu'on a dit encore sur la probabilité ? Ce n'est pas la seule définition qu'on a eue non ? (Silence) Vous, vous avez gardé quoi ? Oui !
061	00 :07 :32	E16	On a encore dit que la fréquence d'observation d'un évènement un grand nombre de fois n'est pas la probabilité de cet évènement mais une estimation de la probabilité de cet évènement.
062	00 :07 :43	P	Est-ce que c'est exactement ce qu'on a dit ? on a dit que la fréquence d'observation pour un certain nombre n de réalisations, pour un certain nombre n de réalisations n'est pas la probabilité mais une estimation de la probabilité. Lorsque je réalise l'expérience aléatoire un certain nombre n de fois, la fréquence d'observation que j'obtiens pour l'évènement n'est pas la probabilité mais une estimation de la probabilité. D'accord ? On a aussi encore d'autre, une autre définition pour la probabilité ! Einhein. Oui Camir !
063	00 :08 :31	E2	On a même dit que la probabilité, la probabilité d'un évènement est la somme des évènements élémentaires.
064	00 :08 :41	P	La somme

065	00 :08 :43	E2	La somme des probabilités des événements élémentaires.
066	00 :08 :47	P	D'accord ? La probabilité d'un événement est la somme de probabilités des événements élémentaires qui le
067	00 :08 :52	EE	composent.
068	00 :08 :53	P	Et avec ça on a eu des propriétés. Qui va me rappeler ces propriétés ? Oui
069	00 :09 :01	E15	Lorsque que tous les événements élémentaires d'une expérience aléatoire ont la même probabilité.
070	00 :09 :09	P	Oui.
071	00 :09 :10	E15	La probabilité d'un événement A noté $p(A)$ est égale au nombre de cas favorables,
072	00 :09 :18	P	Oui.
073	00 :09 :19	E15	Sur le nombre de cas possibles.
074	00 :09 :21	P	Ça fait, nombre de cas favorables sur nombre de cas possibles. D'accord ? On a eu aussi d'autres propriétés telles que P de la probabilité de la réunion de deux événements A et B, ça fait la probabilité de A plus la probabilité de B moins la probabilité de l'intersection de A et B.
075	00 :09 :42	E17	B.
076	00 :09 :43	P	Et s'ils sont incompatibles la probabilité de la réunion $A \cup B$ donne $P(A) +$
077	00 :09 :50	E17	$P(B)$
078	00 :09 :50	P	$P(B)$. On a aussi dit que si je prends un événement A, lorsque je prends son complémentaire \bar{A} , j'ai $p(A) + p(\bar{A})$ qui donne, qui donne combien ?
079	00 :10 :07	E	1.
080	00 :10 :09	P	Qui donne combien ?
081	00 :10 :10	E	1.
082	00 :10 :11	P	Je n'entends pas
083	00 :10 :12	P	Qui donne 1. D'accord ? Bien on va, on va les écrire et entamer la séance d'exercices. Tout ce que vous avez appris vous allez appliquer maintenant et voir comment on peut utiliser les propriétés. (Silence) Vous avez fini ? C'est à écrire hein, ce qui est au tableau là. Dans le cahier de cours, est-ce-que vous avez deux cahiers ?
084	00 :14 :58	P	Vous avez fini ? C'est à écrire hein ? Ce qui est écrit au tableau là.
085	00 :15 :07	E14	Dans le cahier de cours ou bien dans le cahier d'exercices ?
086	00 :15 :10	P	Dans le cahier de cours non ! Est-ce que vous avez deux cahiers même ?
087	00 :15 :13	E12	On a divisé ça en deux
088	00 :15 :15	P	Dans le cahier de cours parce que c'est un cours. On a démontré tout ça-là hein !
089	00 :16 :58	P	A chaque fois, mettez la date. Quand on vient, ça permet de se repérer après.

090	00 :18 :17	C	Non non ! On n'a pas dit de recopier. Pas du tout ! Il vous a dit de recopier ?
091	00 :18 :20	E	Oui.
092	00 :18 :21	C	Mais ce qu'ils ont dans leur cours. Ce n'est pas grave. Ça c'est une stratégie. (Silence) Non ce qu'on va faire, arrêter de recopier. C'est des choses que vous avez dans votre cahier. On les a résumés là pour que vous les ayez devant vous. On est d'accord ? Vous les ayez directement devant. Au lieu d'aller fouiller le cahier si vous en avez besoin, vous allez utiliser. C'est tout. Bien, je lance l'exercice 1. Oui, quelqu'un pour lire l'exercice 1.
093	00 :19 :10	E6	Exercice 1 Dans une enquête effectuée dans les classes de terminale d'un lycée, 20% des élèves aiment les mathématiques, 30% des élèves aiment la philosophie ; 15% des élèves aiment les mathématiques et la philosophie, 10% des élèves sont paresseux. L'enquête a révélé que les élèves paresseux n'aiment pas les mathématiques. On choisit un élève de terminale au hasard et on définit les événements : A : « l'élève aime les mathématiques » B : « l'élève aime la philosophie » C : « l'élève est paresseux » 1) Donne les probabilités des événements A, B et C, A, B, C et $A \cap B$. 2) Calcule les probabilités de l'évènement choisi.
094	00 :20 :04	E	Que l'élève choisi
095	00 :20 :06	E6	Que l'élève choisi : a) aime les mathématiques ou la philosophie b) aime les mathématiques ou est paresseux c) n'aime ni les mathématiques ni la philosophie.
096	00 :20 :19	C	Oui voilà. Héé selon vous que représente. On va reprendre la lecture une deuxième fois. On va s'arrêter sur les pourcentages. Oui vas-y !
097	00 :20 :33	E6	Dans une enquête effectuée dans les classes de terminale d'un lycée, 20% des élèves aiment les mathématiques,
098	00 :20 :39	C	Voilà ! Ce texte est donné dans le langage courant, dans le langage qu'on utilise. Maintenant nous on veut travailler en langage mathématique. Il faut quand c'est le cas, c'est qu'il faut traduire ce qui est dans le langage courant en langage mathématique. Selon vous, que représente les 20% ? Oui Jérôme.
099	00 :21 :05	E14	C'est Pacôme.
100	00 :21 :06	C	Pacôme plutôt oui !
101	00 :21 :09	E14	Si on prend 100 élèves, on a 20 qui aiment les mathématiques.

102	00 :21 :16	C	Oui c'est ça les 20%, ce que ça veut dire 20%. Mais ici en termes de probabilité, les 20% représente quoi ?
103	00 :21 :24	E14	La probabilité de l'événement aimer les mathématiques.
104	00 :21 :29	C	La probabilité de l'événement « l'élève aime la mathématique » Est-ce que tout le monde est d'accord ?
105	00 :21 :36	E	Oui
106	00 :21 :36	C	20% représente, mais est-ce que les probabilités se notent en pourcentage ?
107	00 :21 :41	E	Non
108	00 :21 :42	C	Alors la probabilité de l'événement « l'élève aime les mathématiques-là » est égale à combien ?
109	00 :21 :54	E12	20
110	00 :21 :55	C	Est-ce que 20% c'est 20 ?
111	00 :21 :56	E	Non
112	00 :22 :02	C	Bon mais c'est toutes mes questions ça et on peut déjà vous lancer. C'est pour que vous ne traîniez pas qu'on a posé ces questions. On est d'accord ? Maintenant ce sont des questions, (silence) juste d'éclairage, de compréhension des nombres qui sont ici. C'est combien de minutes ?
113	00 :22 :17	P	C'est dix minutes
114	00 :22 :18	C	Travail en groupe, dix minutes pour l'exercice 1.
115	00 :22 :35	P	Allez-y ! Travail en groupe, dix-minutes. (00 :22 :37)
116	00 :33 :22	P	Les dix minutes sont finies hein. On va désigner un groupe pour aller au tableau. Va au tableau ! La première question dit quoi ?
117	00 :36 :48	E	Donne la probabilité des événements A, B, C et $A \cap B$.
118	00 :39 :19	P	Bien ! Voilà ce qu'ils ont fait pour la première question : $p(A)$ est 20%, égale à 0,2. Réaction ? Est-ce que tout le monde valide ça ? Ou bien est-ce qu'il y a des gens qui ont des remarques à faire ? On a dit : dans une enquête effectuée dans une classe de terminale d'un lycée, 20% des élèves aiment les mathématiques. D'accord ? Et en termes de probabilité, ça fait les 20 sur les 100 et 20 sur 100, ça fait 0 virgule
119	00 :40 :15	E12	deux
120	00 :40 :15	P	0 virgule deux. Alors, après on dit : 70% aiment la philosophie. L'événement B : « l'élève aime la philosophie », sa probabilité, ça fait 70 sur 100, ce qui fait 0,7. L'événement C : « l'élève est paresseux ». On a dit 10% des élèves sont paresseux. Ça fait 10 sur cent, 0 virgule 1. Jusque-là c'est bon ?
121	00 :40 :45	E12	Oui !
122	00 :40 :46	P	Maintenant $A \cap B$. Voilà ce que le groupe a fait. Ils ont utilisé la formule de la réunion : $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$ et ils ont tiré $p(A \cap B)$. Et ici, vous avez mis quoi ?
123	00 :41 :09	E16	On a calculé $p(A \cup B)$.

124	00 :41 :12	P	$P(A \cup B)$ einhein ! Par quelle formule ?
125	00 :41 :16	E15	$P(A) + P(B)$
126	00 :41 :20	P	Par quelle formule vous avez établi ?
127	00 :41 :22	E16	$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
128	00 :41 :24	P	$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. Mais est-ce que cette formule s'utilise comme ça ?
129	00 :41 :30	E	Non.
130	00 :41 :31	P	C'est à quelle condition ?
131	00 :41 :32	EE	Lorsque A et B sont incompatibles.
132	00 :41 :35	P	Est-ce que A et B sont incompatibles ? Je repose la question ? Est-ce que A et B sont incompatibles ?
133	00 :41 :43	EE	Non
134	00 :41 :45	P	Est-ce que de ce qui est dit dans l'exercice, on peut dire que A et B sont incompatibles ? qu'est-ce qu'on a dit sur A et B ? Oui Pacôme.
135	00 :41 :54	E14	Selon moi dans le texte, dans le texte 15% des élèves aime les mathématiques et la philosophie.
136	00 :42 :05	P	15% aiment les maths et la philosophie. De ça là, qu'est-ce qu'on peut tirer ?
137	00 :42 :14	E14	Le cardinal des événements, de l'événement $A \cap B$
138	00 :42 :17	P	Le cardinal ?
139	00 :42 :21	E14	Ça fait 15 sur 100.
140	00 :42 :23	P	Qu'est-ce qui est 15 sur 100 ?
141	00 :42 :24	E14	Probabilité de l'événement $A \cap B$.
142	00 :42 :26	P	Probabilité de l'événement
143	00 :42 :27	E14	de l'événement $A \cap B$
144	00 :42 :28	P	$A \cap B$. Est-ce que tout le monde est d'accord ? D'accord ? Maintenant pourquoi c'est $A \cap B$?
145	00 :42 :38	E14	Parce qu'ils ont dit que les élèves aiment les mathématiques et aiment la philosophie.
146	00 :42 :41	P	Les élèves aiment les maths et la philosophie en même temps. D'accord ?
147	00 :42 :45	E	Oui.
148	00 :42 :46	P	Donc ça fait alors l'intersection des deux événements A et
149	00 :42 :51	E	B
150	00 :42 :51	P	A et B. Donc 15% des élèves aiment les maths et la philosophie, par-là déjà on peut tirer la probabilité de l'événement A et B. De plus, on n'a pas parlé de l'incompatibilité des événements A et B dans l'exercice. Donc on ne peut pas de là utiliser cette propriété. D'accord ? Je ne sais pas si vous avez compris. Avant d'utiliser cette propriété il faut qu'on soit sûr que les événements A et B sont incompatibles. Donc ils ont même des choses en commun. Il faut corriger. (Silence) Bien ! La dernière question !

151	00 :44 :09	E12	Calcule la probabilité que l'élève choisi : a) aime les mathématiques ou la philosophe.
152	00 :44 :16	P	La probabilité que l'élève aime les mathématiques ou a philosophie.
153	00 :46 :01	P	Oui. On va réagir par rapport à la question. lis-nous ce que vous avez écrit
154	00 :46 :09	E16	Calculons la probabilité que l'élève choisi : a. Aime les maths pu la philosophie $P(A \cup B)$, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0,2 + 0,7$ Alors $P(A \cup B) = 0,9$.
155	00 :46 :27	E7	É tchi nou on blo (Il a mal fait la chose). Non c'est faux. Ils ont dit si A et B sont incompatibles.
156			
157	00 :46 :33	P	Réaction ? Oui Kenneth !
158	00 :46 :39	E7	Normalement, il devrait écrire : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
159	00 :46 :50	P	$P(A \cup B)$ devrait être égale à $P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ parce qu'on ne sait pas si A et B sont
160	00 :46 :57	E3	incompatibles.
161	00 :46 :58	P	Incompatibles. D'accord ? Il faut d'abord être sûr que A et B sont incompatibles avant d'utiliser cette formule-là. Je veux vous poser la question : selon vous est-ce que A et B sont incompatibles ?
162	00 :47 :11	EE	Non.
163	00 :47 :12	P	Pourquoi ?
164	00 :47 :13	E14	Ils ont déjà dit qu'il y a des élèves qui aiment la mathématique et la philosophie.
165	00 :47 :17	P	Il y a des élèves qui aiment à la fois les maths et la philosophe donc ils ont quelque chose en commun ?
166	00 :47 :21	E	Oui
167	00 :47 :22	P	Si leur intersection était vide, on allait dire qu'ils sont incompatibles. Donc ils ne sont pas incompatibles. Ce qui fait même que la formule-là $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ ne peut pas s'utiliser pour les événement A et B. D'accord ? Et on connaît P(A), on connaît P(B), on connaît P(A ∩ B). (Silence) Bien la question b)
168	00 :48 :06	E12	Aime les mathématiques ou est paresseux.
169	00 :48 :19	P	Mais pourquoi ? Attendez ! Pourquoi ici il a calculé la réunion des deux ?
170	00 :48 :30	E7	Parce qu'ils ont dit « aime les mathématiques ou la philosophie ». Ici ou indique l'union.
171	00 :48 :31	E12	On a dit ou
172	00 :48 :35	P	ou c'est l'union.

173	00 :48 :35	E7	Oui !
174	00 :48 :36	P	L'élève aime les maths ou la philosophie donc il est dans l'un des deux. D'accord ? ça fait les réunions des événements A et B. (Silence) Voilà la question b). Ce qu'ils ont fait. Vos réactions ? Oui Tohibou.
175	00 :49 :28	E4	Selon moi, A et B sont incompatibles.
176	00 :49 :33	P	A et B ?
177	00 :49 :33	E4	A et C sont incompatibles.
178	00 :49 :35	P	Qu'est-ce qui nous permet de dire que A et C sont incompatibles ?
179	00 :49 :38	E4	Là ils ont dit : il y a des élèves qui aiment la mathématique et d'autre qui aiment la philosophie.
180	00 :49 :57	P	Est-ce qu'il y a quelque chose dans l'exercice qui nous indique ça ?
181	00 :50 :01	E17	Oui !
182	00 :50 :02	P	Oui Adeline !
183	00 :50 :05	E17	Ils ont dit dans le texte que : l'enquête a relevé que les élèves paresseux n'aiment pas les mathématiques.
184	00 :50 :17	P	L'enquête a relevé que les élèves paresseux n'aiment pas les mathématiques. Ce qui veut dire qu'il n'y pas un élève qui peut être paresseux et aimer les maths. Donc l'événement l'élève aime les maths et l'événement l'élève est paresseux n'ont rien en
185	00 :50 :32	E3	commun.
186	00 :50 :32	P	En commun. Donc $A \cap C$ est vide. Je tiens à préciser ça avant d'utiliser la formule. Soit c'est-à-dire il écrit la formule générale et il vient préciser que $A \cap C$ est un événement impossible ; soit il dit d'abord que les deux événements sont impossibles et il utilise la formule directement. Je ne suis pas si vous voyez.
187	00 :50 :36	E	Oui.
188	00 :50 :57	P	C'est-à-dire il y a l'option d'utiliser la formule générale avant de préciser que les deux événements sont incompatibles ou bien il dit que les deux sont incompatibles et il utilise la propriété. Bien question 2.c.
189	00:52 :02	E12	c.) n'aime ni les mathématiques ni la philosophie.
190	00 :52 :47	P	Oui. Ah ! Vous n'avez pas fait. Ils disent qu'ils n'ont pas fait cette question. Quel groupe a pu faire ça ? Quel groupe a pu faire cette question ? C'est n'est pas grave. Comment pensez-vous qu'on puisse faire ça ? Oui Camille.
191	00 :53 :28	E2	Ce que moi je pense qu'on peut faire, ici ils ont dit : n'aime ni la mathématique ni la philosophie.
192	00 :53 :35	P	Oui.
193	00 :53 :35	E2	Donc là maintenant ça ne veut pas dire que l'élève est paresseux.
194	00 :53 :43	P	Et ça veut dire quoi ?

195	00 :53 :44	E2	Parce qu'on nous avait dit que l'élève paresseux n'aime pas la mathématique ici maintenant la philosophie, nous avons la philosophie donc ça selon moi serait $B \cap C$.
196	00 :54 :01	P	$B \cap C$. B c'est l'élève aime la philosophie hein. Est-ce que l'élève aime la philosophie ici ?
197	00 :54 :11	EE	Non ! Il n'aime pas la philosophie.
198	00 :54 :15	P	L'élève n'aime pas la philosophie, c'est quel événement ?
199	00 :54 :19	E16	C'est l'événement non B.
200	00 :54 :24	EE	Non B.
201	00 :54 :26	P	Non B. ça fait B barre c'est ça hein ?
202	00 :54 :30	EE	Oui.
203	00 :54 :31	P	Bien. Qu'est-ce qu'on a dit encore dedans.
204	00 :54 :37	E	Ni la philosophie
205	00 :54 :41	P	L'élève n'aime pas la philosophie et
206	00 :54 :49	E	Ça fait B barre inter A barre
207	00 :54 :52	P	Ça fait B barre inter A barre. L'élève n'aime pas les mathématiques et n'aime pas la philosophie. C'est les deux à la fois. D'accord ?
208	00 :55 :02	EE	Oui.
209	00 :55 :03	P	L'événement B barre inter A barre. Alors B barre inter A barre pourrait être vu comme le contraire de l'événement $A \cup B$. $A \cup B$ barre, ça fait A barre inter B barre. D'accord ? Et est-ce qu'on connaît $A \cup B$?
210	00 :55 :48	EE	Oui !
211	00 :55 :49	P	On connaît sa probabilité ?
212	00 :55 :50	EE	Oui !
213	00 :55 :51	P	Si on connaît la probabilité d'un événement, est-ce qu'on peut avoir la probabilité de l'événement contraire ? Si on connaît la probabilité d'un événement, est-ce qu'on peut voir la probabilité de l'événement contraire ? Par quelle formule ? Par quelle formule ? Oui.
214		E14	$p(A) +$
215		P	Parle plus fort !
216	00 :56 :21	E14	$P(A) + P(A \text{ barre}) = 1$
217	00 :56 :26	P	$P(A) + P(A \text{ barre})$ égale à 1. Lorsqu'on connaît la probabilité d'un événement, on peut avoir la probabilité de l'événement contraire. D'accord ? Puisque je ne sais pas que A barre inter B barre ça fait $A \cup B$ barre, l'événement contraire de $A \cup B$. Si j'ai la probabilité de l'événement $A \cup B$ je peux avoir la probabilité $A \cup B$ barre. D'accord ? La probabilité de $A \cup B$ barre est la probabilité de A barre inter B barre ; égale à la probabilité de ceci qui va donner ? Selon la formule ça va donner quoi ? Lorsque j'ai $P(A)$ et que je veux $P(A \text{ barre})$, ça va faire ? J'ai $P(A)$, je veux $P(A \text{ barre})$. Oui ! Mohammed.
218	00 :57 :59	E15	$1 - P(A)$.

219	00 :58 :00	P	Ça fait $1-P(A)$. Donc $P(A \cup B \text{ barre})$ ça va faire ?. $P(A \cup B \text{ le tout barre})$? ça fait ?
220	00 :58 :25	E	1-0,75.
221	00 :58 :29	P	Je veux d'abord la formule. Le 0,75 représente quoi ?
222	00 :58 :39	E14	$P(A \cup B)$
223	00 :58 :41	P	Ça fait 1moins
224	00 :58 :42	E14	$P(A \cup B)$
225	00 :58 :43	P	$1-P(A \cup B)$. D'accord ? Ça fait $1-P(A \cup B)$. (Silence) Voilà la probabilité que l'élève n'aime ni les maths ni la philosophie. On va lancer l'exercice 2. Quelqu'un pour nous lire ça.
226	00 :59 :30	E8	Un cauri est tel que.
227	00 :59 :33	C	Oui on va faire le point de l'exercice là, de comment vous l'avez fait. Voilà ce que vous avez fait on peut résumer ça comme ceci. Le texte a été donné en français. La première question a demandé en réalité de traduire le texte en langage des probabilités c'est-à-dire les données qu'il y a là sous forme de pourcentage ont été traduites en langage de probabilité par la première question. On aurait dû ne pas vous poser la première question. C'est nous même qui devons savoir ce que chacune de ces données représente. On devrait le savoir. Bien mais après quand vous avez fait cette traduction vous avez commencé par chercher à utiliser les formules pour répondre aux questions 2. Mais regardons notre parcours, plusieurs fois, on s'est trompé sur $P(A \cup B)$, par deux fois c'est-à-dire il y a deux formules pour ça : il y a la formule numéro 3 et la formule numéro 4.
228	01 :01 :00	E3	5.
229	01 :01 :01	C	3 et 5. Mais ceci pose une condition. C'est quand vous êtes sûr que A et B sont incompatibles. Ceci c'est dans le cas général donc on peut dire que ce qu'on a appris de l'exercice comment appliquer les deux-là. La deuxième formule est générale ça peut marcher mais la première si on n'a pas la certitude que les deux sont incompatibles, on ne va pas l'écrire. Ça fait le premier enseignement. Le deuxième enseignement qu'il y a c'est ça-là. Vous avez fini par dire que l'événement dont on veut calculer la probabilité dans la question 2.c c'est B barre, c'est l'événement contraire de B inter l'événement contraire de A. Ce qu'on a écrit par la suite c'est ça qui nous a donné ça. Parce que vous n'avez pas fait la théorie des ensembles, le professeur nous a donné B barre inter A barre c'est $A \cup B \text{ barre}$ c'est comme c'est une propriété qu'il nous a donné sans démontrer. Peut-être on peut être intéressé par ça plus tard après sa démonstration. Et quand on va l'utiliser nous sommes arrivés ici. Dans cette propriété, c'est vrai qu'on a dit $P(A)+P(A \text{ barre})=1$ mais c'est pour tout événement. $A \cup B$ est un événement même si on l'a écrit même

			si c'est l'on c'est aussi un événement contraire. Ça fera 1 moins cette probabilité. Ça nous a gênés aussi un peu. J'ai voulu qu'on fasse le point. Quand on finit un exercice, on fait le point. On est d'accord ? On passe à l'exercice 2. Vous n'avez pas nécessairement à recopier d'abord. On va passer à l'exercice 2.
230	01 :02 :58	E8	<p>Un cauri est tel que la probabilité qu'il repose sur la face courbe plane (C) est le double de la probabilité qu'il repose sur la face courbe (P). On lance ce cauris et on note la face sur laquelle il repose.</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Déterminer l'univers des éventualités de cette expérience aléatoire. 2. Calcule la probabilité que le cauris repose sur la face courbe et celle qu'il repose sur la face plane. 3. On lance le cauri 100 fois ; on lance le cauris 100 fois de suite. Combien de fois le cauris pourrait-il reposer sur la face plane ?
231	01 :03 :41	C	On comprend ainsi que P c'est plane et C c'est courbe.
232	01 :03 :48	P	Est-ce que l'exercice est bien compris ? Il n'y a pas de question par rapport à la compréhension. S'il n'y en a pas. Vous avez 10 minutes.
233	01 :04 :07	C	Oui les faces P c'est plane, C c'est courbe. D'accord ? Vous pourrez corriger. (Silence jusqu'à 01 :08 :15) Pour la donnée, entendons-nous très bien. Relisons pour que tout le monde ait la même chose parce qu'on a vu que 'est pas la même chose. Relisons l'exercice.
234	01 :08 :22	E12	Un cauri est tel que la probabilité qu'il repose sur la face courbe (P)
235	01 :08 :26	C	Plane. La probabilité qu'il repose sur la face plane (P). La probabilité qu'il repose sur la face plane (P) est le double, oui corrigez comme ça. Est le double de la probabilité qu'il repose sur la face (C) plane (P) et courbe (C). Ça peut aller ?
236	01 :08 :59	EE	Oui.
237	01 :15 :08	P	On va passer au travail en groupe. Vous avez 5 minutes pour le travail en groupe. Allez-y ! (01 :15 :11)
238	01 :22 :40	P	Ok. On va arrêter le travail en groupe et on va passer au travail collectif et on va désigner un groupe pour aller au tableau. Donc le groupe de Camir au tableau. Mets exercice 2 ! (Silence) . Hé ! Suivez, suivez. (Silence) La Première question demandait de déterminer l'univers des éventualités de cette expérience aléatoire. Vous avez écrit quoi ?
239	01 :25 :09	E2	On a dit que l'univers ça fait l'ensemble {P, C}.
240	01 :25 :16	P	Ensemble {P, C}. Quand on lance le cauris soit on a la face P soit on a la face C. Ce sont les deux éventualités. Donc l'univers est {C, P}. La deuxième question : calculer la probabilité que le cauris repose sur la face C et celle qu'il repose sur la face plane. (Silence) Tu as fini ? Ou bien ça reste encore ? Finis d'abord ! Finis d'abord !

			(Silence) Tu réfléchis au tableau ou bien tu écris ce que vous avez fait ? (Silence)
241	01 :33 :37	P	Bien alors voilà ce qu'ils ont fait pour la deuxième question. Lisez ! lisez la question !
242	1 :33 :46	E2	Calculons la probabilité que le cauri repose sur la face courbe. On sait que la probabilité de Ω égale à la probabilité de P plus probabilité de C. Or la probabilité de P égale à deux fois la probabilité de C. On a remplacé ça. Ça fait 3 probabilité de C. On a tiré la probabilité de $\{C\}$. Ça nous donne probabilité de Ω sur 3. Or probabilité de P égale à 1.
243	01 :34 :34	E3	De, $P(\Omega)$
244	01 :34 :35	E2	De Ω égale à 1. Ça fait probabilité de C égale à $1/3$.
245	01 :34 :42	P	Voilà. Réactions.
246	01 :34 :47	E	Aucune. Aucune.
247	01 :34 :50	P	Réaction, je vous écoute. Est-ce qu'on valide ça ou bien vous avez autres choses à soulever dedans ? La probabilité de Ω est la probabilité des événements qui
248	01 :35 :21	E	le composent.
249	01 :35 :26	P	Qui le composent. La probabilité de P plus la probabilité de C. Probabilité de P, on a dit dans le texte que ça fait le double de la probabilité de C. donc on a la probabilité de Ω qui fait 3 fois la probabilité de C, probabilité de Ω faisant 1, la probabilité de C ça fait alors $1/3$. D'accord ? le second : probabilité que le cauris repose sur la face P. Il a utilisé la même formule mais il a tiré probabilité de P, ça fait alors $1-1/3$ ça fait $2/3$. Tout à l'heure, il a écrit 0,6, il a encore effacé, je voulais savoir pourquoi il a effacé.
250	01 :36 :05	E2	J'avais effacé 0,6. $2/3$ nous avait donné zéro virgule six, six, six jusqu'à infini.
251	01 :36 :13	P	Einhein
252	01 :36 :14	E	Donc pour écrire zéro virgule...
253	01 :36 :26	P	Encore 0,6 et $2/3$ quelle est la vraie valeur de P, de la probabilité P.
254	01 :36 :35	EE	0,6
255	01 :36 :37	P	Selon vous entre 0,6 et $2/3$ quelle est la valeur exacte de la probabilité de P ?
256	01 :36 :43	EE	0,6
257	01 :36 :44	P	0,6
258	01 :36 :46	E17	C'est 0,66
259	01 :36 :47	P	C'est 0,6 ou bien 0,66 ou bien
260	01 :36 :50	E	0,67
261	01 :36 :50	P	0,666 ou bien 0,6666
262	01 :36 :55	E	6 ; 0,6.
263	01 :36 :56	P	C'est 0,6
264	01 :36 :58	EE	C'est $2/3$.

265	01 :36 :01	P	C'est ?
266	01 :36 :02	E	2/3.
267	01 :37 :05	P	Oui. C'est 0,66. Et celui qui dit 0,
268	01 :37 :14	E	666.
269	01 :37 :15	P	6666666.
270	01 :37 :18	E	C'est la même chose. Ils n'ont pas encore terminé.
271	01 :37 :22	P	Mais est-ce que ce ne serait pas mieux d'écrire 2/3 tout simplement ?
272	01 :37 :24	EE	Oui
273	01 :37 :25	P	La valeur exacte, d'accord ? Si on ne va écrire les 6, on ne finira jamais d'écrire. La valeur exacte de 2/3 c'est 2/3. Tout simplement. D'accord ? Dans le cas où, si vous avez envie d'écrire un nombre à virgule, il faut que ce soit enfin un nombre de chiffres limités après la virgule. Par exemple 0,25 ça vous pouvez écrire mais si vous voyez que c'est infini mettez ça sous la forme fractionnaire. Ça peut aller ?
274	01 :37 :54	EE	Oui
275	01 :37 :56	P	Bien. Maintenant la dernière question. J'ai vu que personne ne l'a fait. Enfin vous n'avez même pas eu le temps d'aller là-bas. On dit qu'on lance le cauris 1000 fois de suite. Combien de fois le cauris pourrait-il reposer sur la face P ? Lorsqu'on lance le cauris 1000 fois, combien de fois on voit, on va voir l'événement {P} se réaliser ? Si on lançait le cauris 1000 fois, combien de fois, on voit la face P apparaître ? Combien de fois on va voir le cauris reposer sur la face P ? Normalement quelle est la meilleure manière de le savoir ? Quelle est la meilleure manière de savoir combien de fois le cauris va reposer sur la face P ?
276	01 :39 :08	E	L'expérience
277	01 :39 :10	P	C'est ?
278	01 :39 :10	E	L'expérience aléatoire
279	01 :39 :11	P	Parlez à haute voix
280	01 :39 :12	E	On va d'abord faire l'expérience
281	01 :39 :14	P	C'est de faire l'expérience, c'est de lancer le cauris 1000 fois.
282	01 :39 :14	E	1000 fois
283	01 :39 :17	P	Et de voir ? D'accord ? De la même manière qu'il a fallu qu'on ouvre la bouteille pour être sûr du nombre de billes blanches qui étaient dedans. Mais quand même on a pu donner ce qu'on appelle une
284	01 :39 :24	E	Une estimation
285	01 :39 :35	P	Estimation de la probabilité. D'accord ? Et on a effectué les 1000 tirages pour calculer la fréquence. Quand on a calculé la fréquence, qu'est-ce qu'on a fait de ça ??
286	01 :39 :48	E16	On a observé nombre de billes.

287	01 :39 :51	P	Pour avoir le nombre de tirages qu'est-ce qu'on a fait ? Lorsqu'on a eu ce qu'on a appelé l'estimation de la probabilité qu'est-ce qu'on a fait de ça ? Pour déterminer le nombre de billes blanches qu'il y avait dans la bouteille. Vous avez oublié. On avait déterminé une estimation de la probabilité de bille blanche. D'accord ? La probabilité de tirer une boule blanche, on avait estimé ça à 0,6 et quand on voulait le nombre de billes blanches qu'est-ce qu'on a fait ?
288	01 :40 :30	E	0,6 fois le nombre total de billes.
289	01 :40 :34	P	0,6 fois le nombre total de boules. D'accord ? Le nombre total de boules qu'il y avait dans la bouteille. Si on arrive à trouver une estimation de la probabilité de notre événement qui est là, comment on va faire pour avoir le nombre de fois qu'on pourrait voir le cauris se reposer sur la face P. je suppose qu'on arrive à avoir une estimation de de
290	01 :41 :17	C	Vous avez fait des expériences pour déterminer les probabilités. Quand vous avez fait votre tirage, par exemple, 100 fois, 200 fois, qu'est-ce qui a été votre probabilité ? Vous avez trouvé la probabilité comment ? Oui.
291	01 :41 :40	E1	On a calculé la fréquence.
292	01 :41 :47	C	Parlez fort.
293	01 :41 :53	E1	Pour trouver la probabilité, on a fait l'expérience aléatoire.
294	01 :41 :59	C	Oui.
295	01 :42 :00	E1	On a fait un grand nombre.
296	01 :42 :02	P	Oui.
297	01 :42 :03	E1	On a fait le graphique.
298	01 :42 :05	C	D'accord ! Maintenant il n'y a pas de graphique. Vous avez lancé un nombre de fois non ? et vous avez calculé la fréquence. Ici on a dit : vous faites 1000 fois. En réalité on donne l'exercice à des gens qui ont fait l'expérience. Si on avait le cauris 1000 fois, on aurait trouvé la face P, que le cauris repose sur la face P combien de fois ? vous avez fait l'expérience. Parce que vous avez fait l'expérience, ce serait, c'est possible que vous puissiez donner une estimation de ce nombre.
299	01 :42 :39	E17	Proposition.
300	01 :42 :40	C	Oui.
301	01 :42 :46	E17	On va faire la probabilité fois le nombre total de tirages.
302	01 :42 :47	C	Parle fort pour qu'ils entendent.
303	01 :42 :50	E17	Pour trouver le nombre de fois qu'on obtiendra, peut-être la face C là.
304	01 :42 :58	C	Oui la face P.
305	01 :42 :58	E17	La face P.
306	01 :42 :59	E17	La face P.

307	01 :43 :26	C	La face P. Alors si on appelle N_p ce nombre, on l'obtient comment ? C'est ce que tu es entrain de donner.
308	01 :43 :36	E17	N_p serait égal à la probabilité de P.
309	01 :43 :41	C	Probabilité de P.
310	01 :43 :43	E17	Fois 1000.
311	01 :43 :44	C	Fois 1000.
312	01 :43 :47	E17	Fois le nombre de tirages.
313	01 :43 :50	C	Parce que vous avez, c'est, vous avez avec vos expériences, vu que c'est la fréquence qui devient la probabilité. On bien ?
314	01 :44 :00	E17	Oui.
315	01 :44 :01	C	Vous avez vu que c'est la fréquence qui devient la probabilité mais cette fréquence c'est le nombre de fois observées divisé par le nombre total. C'est-à-dire on a quitté la probabilité pour aller en statistique et vous avez commencé par la statistique. Je ne sais pas. Apprécier si ce qu'elle a dit, ici c'est qui déjà ?
316	01 :44 :19	EE	Adeline.
317	01 :44 :20	P	Ce que Adéline a dit est-ce que ça peut être accepté comme ça ou bien vous pensez qu'on peut le faire autrement ? On peut le prendre comme ça. Le calcul donne combien ?
318	01 :44 :37	E	2/3
319	01 :44 :40	C	Oui c'est 2/3 non ? fois 1000
320	01 :44 :45	E16	6 ; 66 ; 666.
321	01 :44 :51	C	Il faut l'arrondir puisque c'est le nombre de fois. D'accord ? Mais si on doit aller à un autre exercice et on doit résumer ici. Quelles ont les formules que vous avez utilisées dans l'exercice. Notons déjà les formules.
322	01 :45 :05	E	La formule 2
323	01 :45 :06	C	2. Donc $P(\Omega)=1$. Quelle formule encore ?
324	01 :45 :08	E	Oui !
325	01 :45 :09	C	Quelle formule encore ?
326	01 :45 :12	E17	3.
327	01 :45 :13	E	6.
328	01 :45 :14	C	6 ou 3. Lequel, laquelle on a utilisé ?
329	01 :45 :17	E	3.
330	01 :45 :18	E	6.
331	01 :45 :18	E	6.
332	01 :45 :19	C	C'est 6 que tu as utilisé. Oui c'est 6 ou 3.
333	01 :45 :25	E	C'est 6.
334	01 :45 :26	C	C'est 6. Si ce n'est pas 6, ça doit être encore quoi ?
335	01 :45 :30	EE	5 ; 5.
336	01 :45 :34	C	Ah 5 ici. Vous avez utilisé ça là ?
337	01 :45 :34	E	Non !
338	01 :45 :37	E	C'est 6

339	01 :45 :38	C	Non ! Non ! Soyons sérieux. On ne va pas réciter les formules. Est-ce qu'on ne doit pas ; l'événement {P} et l'évènement {C}, comment on peut les appeler ? Les deux sont de quelle nature ? {P} et {C} ? Les événements élémentaires {P} et {C}. On peut dire qu'ils sont comment ?
340	01 :46 :00	E17	Incompatibles.
341	01 :46 :01	C	Incompatibles. Donc c'est pour ça que vous avez dit qu'on peut utiliser. Après incompatibles, on peut dire qu'ils ont comment ?
342	01 :46 :08	E	Ils sont élémentaires.
343	01 :46 :10	C	Ils sont ?
344	01 :46 :11	E	Contraires
345	01 :46 :12	C	Ils sont contraires ! Parce que c'est seulement deux. Si c'est deux c'est l'un ou
346	01 :46 :17	E	L'autre
347	01 :46 :18	C	L'autre. Donc ils sont contraires. Donc on peut dire : celui qui a travaillé et a utilisé 6, c'est très bien. Mais quelqu'un pourrait penser à ça. Quelqu'un pourrait penser au fait que les deux sont contraires et penser que c'est ça qu'il est en train d'utiliser. En ce moment la formule n°1 va sortir. Donc bien la formule n°6 qui a été utilisée. Bon mais quoi encore ? Pour la dernière question ça vient de l'expérimentation que vous avez eu à faire et comment est-ce que la probabilité est sortie de cette expérimentation. Ça peut aller !
348	01 :46 :53	E	Oui.
349	01 :46 :54	C	On peut lancer l'exercice 3.
350	01 :46 :57	P	Quelqu'un pour lire l'exercice 3.
351	01 :47 :01	E9	Ici monsieur
352	01 :47 :03	P	Oui Luc.!
353	01 :47 :04	E9	Un sac contient six cartons carrés identiques dont deux jaunes numérotés de 1 à 2 et 4 rouges numérotées de 3 à 6. On choisit au hasard un carton dans le sac. 1) Calcule la probabilité que le carton tiré porte : a) le numéro 1 ; b) le numéro 5. 2) Calcule la probabilité que le carton tiré : a) soit jaune b) porte un numéro pair. 3) On procède à 2500 tirages d'un carton dans le sac. Donne une estimation du nombre de fois qu'on pourrait obtenir un carton rouge.
354	01 :47 :50	C	On a combien de minutes ?
355	01 :47 :53	E	10 minutes pour le travail individuel et 10 minutes en groupes
356	01 :48 :33	P	On va passer au travail en groupe directement. D'accord ? Donc vous allez faire 10 minutes de travail en groupe. On y va ! (01 :48 :39).

357	01 :58 :13	P	Bien ! Vous avez fini déjà les 10 minutes. (Silence) On va passer au travail collectif. Vous effacez le tableau. Rapidement, rapidement. Allez-y !
358	02 :01 :32	P	Mets au moins l'événement. Tu peux écrire : soit A l'événement le carton porte le numéro 1 Si l'événement n'a pas un nom dans l'exercice, on peut donner un nom à ça. Soit A l'événement le carton tiré porte le numéro 1. Ferme les guillemets. Maintenant, sa probabilité ? Comment vous avez fait pour trouver 1/6.
359	02 :02 :37	E9	On a pris le nombre de fois on peut trouver le numéro sur.
360	02 :02 :44	P	Le nombre de fois qu'on trouve le numéro sur
361	02 :02 :46	E9	Le nombre total de cartons.
362	02 :02 :47	P	Le nombre total de cartons. Ça fait nombre de cas favorables sur le nombre de cas
363	02 :02 :50	EE	possibles.
364	02 :02 :51	P	Pourquoi vous avez fait ça comme ça ?
365	02 :02 :52	E9	C'est comme ça.
366	02 :02 :57	E14	Les six cartons sont identiques.
367	02 :02 :58	P	Voilà les six cartons sont identiques. Donc on est dans la condition.
368	02 :03 :04	E11	Oui ils ont la même probabilité.
369	02 :03 :06	P	Probabilité. Ecris les six cartons sont identiques avant d'écrire la
370	02 :03 :15	E17	la formule.
371	02 :03 :22	P	Les six cartons sont identiques. Ça veut dire que tous les événements élémentaires ont la même probabilité. Les six cartons sont identiques donc tous les événements élémentaires ont la même probabilité. $P(A)$ ça fait. Selon la formule $P(A)$ va faire ?
372	02 :04 :49	E11	Cardinal de A.
373	02 :04 :50	P	Cardinal de A
374	02 :04 :52	E4	sur cardinal de Ω .
375	02 :04 :56	P	Cardinal de A sur
376	02 :04 :58	EE	cardinal de Ω
377	02 :05 :06	P	Cardinal de A sur
378	02 :05 :07	EE	cardinal de Ω .
379	02 :04 :09	P	Sur cardinal de Ω . C'est que j'ai l'impression que vous ne suivez pas. Surtout le groupe de Emmanuel !
380	02 :05 :17	E	Emmanuel.
381	02 :05 :24	P	Cardinal de A, ça fait ?
382	02 :05 :29	E	1.
383	02 :05 :30	P	Ça fait 1 pourquoi ? Pourquoi le cardinal de A fait 1 ? Oui.
384	02 :05 :50	E16	Parce que c'est un seul carton qui porte le numéro 1.
385	02 :05 :52	P	C'est un seul carton qui le numéro 1
386	02 :05 :54	EE	1.
387	02 :05 :54	P	Le numéro 1. Voilà. Ça fait 1 sur

388	02 :05 :57	EE	6.
389	02 :07 :32	P	Comme on est toujours dans la condition d'équiprobabilité, $P(B)$ aussi va faire cardinal de B sur cardinal de Ω . Et le cardinal de B ça fait 1. Il y a un seul carton pour le numéro.
390	02 :07 :45	E	5.
391	02 :08 :10	P	5. Question 2a) : probabilité que le carton tiré soit jaune. Il y a combien de cartons jaunes ?
392	02 :08 :15	E	2 cartons jaunes.
393	02 :08 :17	P	Deux cartons jaunes ça va faire $2/6$. $P(C)$ ça fait cardinal de C sur cardinal de Ω . (Silence) On peut simplifier non ? $1/3$. Probabilité que le carton porte un numéro pair. Ça fait 3 sur 6. Il y a trois cartons qui portent un numéro pair.
394	02 :09 :53	C	Bien on va arrêter pour aujourd'hui là. Mais écrivez vos noms sur les ; est-ce qu'on en a même besoin ? On va ramasser les épreuves parce qu'on ne veut pas que vous travailliez sur ça à la maison. On est d'accord ? Vous comprenez on ne veut pas qu'on demande à des gens à la maison. Est-ce que ce que vous avez fait maintenant on est allé demander à un grand-frère avant de travailler.
395	02 :10 :21	EE	Non.
396	02 :10 :24	C	Non, et donc on ne veut pas qu'arriver à la maison qu'on pense qu'on est incapable et qu'on demande. Eh donnez-nous les épreuves. On vous les ramène, d'accord ? ou bien ça ne gêne pas vous allez vous occuper de, non nous allons vous donner d'autres. Oui ramasse !
397	02 :10 :50	C	Donc eh dans l'exercice qu'on vient de faire, on a utilisé quelle formule au tableau.
398	02 :11 :00	EE	7
399	02 :11 :01	C	7. Tout le temps jusque-là on a utilisé le 7. La dernière question on va utiliser quelle méthode ? On va d'abord calculer la probabilité de tirer un carton et après ça. Donc 'est pour dire qu'on va par revenir sur l'exercice 3 hein. Je vais faire une autre fiche qui va commencer directement par l'exercice 4 et c'est avec ça qu'on va travailler si on finissait tant mieux. Sinon. Bien mais on travaille encore quand ? Le professeur n'est pas libre cet après-midi. (02 :12 :11)

ANNEXE 16 : Transcription T₁₀

SITUATION 5, Exercices 4 et 5

1^{er} MAI 2017

EFFECTIF : 16

HEURE : 08h30 min

Les élèves sont toujours disposés en quatre groupes de 4 comme dans la première séance de la situation 5. Le professeur étant indisponible pour cette séance, le chercheur est le seul dans le rôle de professeur cumulativement avec son rôle de chercheur.

Lorsque l'élève qui intervient est identifié, il est indiqué par son numéro. La lettre E signifie que l'élève qui intervient n'est pas identifié. Par EE, nous exprimons que plusieurs élèves (au moins deux) interviennent simultanément. La lettre P désigne ici le professeur-chercheur intervenant dans son statut d'enseignant. Dans la colonne des échanges verbaux, les points de suspension indiquent des passages qui n'ont pas pu être déchiffrés.

N°	Horaire	Acteur	Les échanges verbaux
001	00 :00 :11	P	Bonjour chers élèves.
002	00 :00 :13	EE	Bonjour monsieur.
003	00 :00 :15	P	Oui comment ça va ?
004	00 :00 :16	EE	Ça va.
005	00 :00 :17	P	Nous nous retrouvons pour notre dixième séance. Je ne sais pas si vous avez compté. C'est notre dixième séance et c'est la deuxième séance d'exercices. La dernière fois, on a fait les exercices 1 jusqu'à 3 et il reste 4. C'est huit exercices. Et il reste les exercices 4, 5, 6, 7, 8. On verra combien on peut en faire aujourd'hui. Euh la dernière fois, qui peut nous rappeler les formules qu'on avait utilisées pour travailler. On a calculé des probabilités.
006	00 :01 :01	EE	Oui
007	00 :01 :02	P	Pendant ce calcul de probabilités, quelles avaient été les formules utilisées ? (Silence) Oui Pacôme.
008	00 :01 :23	E14	On avait utilisé la formule selon laquelle lorsque deux événements ont la même probabilité, la probabilité est égale au cardinal de l'événement sur le cardinal de l'univers.
009	00 :01 :35	P	Est-ce que c'est lorsque deux événements ont la même probabilité ?
010	00 :01 :41	E14	Lorsque les événements élémentaires qui composent l'événement ont la même probabilité

011	00 :01 :48	P	Oui c'est vrai mais ce n'est pas comme ça qu'on l'a dit. Ce n'est pas qui compose l'événement. Oui oui réponse.
012	00 :02 :01	E12	Lorsque tous les événements élémentaires d'une expérience aléatoire ont la même probabilité.
013	00 :02 :05	P	Lorsque tous les événements élémentaires. Vous vous souvenez, il y avait eu démonstration dedans ; e_1, e_2 jusqu'à e_n avaient la même probabilité qui était égale à $\frac{1}{n}$. C'est ça qui avait permis d'établir. Donc lorsque, vous vous souvenez, quel était le numéro qu'on avait donné à ça là ? On avait mis les numéros pour les formules. Numéro 7.
014	00 :02 :24	E	Numéro 7.
015	00 :02 :25	P	Numéro 7. Et dans ce cas-là, qu'est-ce qu'on dit ? On dit qu'on est dans quelle situation ? On parle de situations d'équiprobabilité. Equi, égalité, équiprobabilité. Quand tous les événements élémentaires sont equi, ont la même probabilité, on dit aussi que tous les événements élémentaires sont équiprobables. En réalité, deux événements sont équiprobables lorsqu'ils ont la même probabilité. Et ici, si tous les événements élémentaires sont équiprobables, alors calculer la probabilité d'un événement, revient à faire le cardinal de l'événement divisé par le cardinal de Ω . Ce qu'on avait vu a un moment donné comme étant le nombre de cas favorables à l'événement divisé par le nombre de cas possibles. Nous l'avons utilisé dans quel exercice ?
016	00 :03 :23	E	Exercice 3.
017	00 :03 :23	P	On l'a utilisé dans l'exercice
018	00 :03 :24	E	3.
019	00 :03 :25	P	3 notamment. Donc si tous les événements élémentaires sont équiprobables, alors pour tout événement A, $P(A) = \frac{\text{Card } A}{\text{Card } \Omega}.$ Une fois encore c'est n'est pas à recopier. C'est juste pour que ça reste au tableau pour qu'on regarde pour utiliser. Très bien ! Quelles autres formules on a encore utilisées ? Encore Pacôme. Oui.
020	00 :04 :18	E14	On a utilisé $P(A) + P(\bar{A}) = 1$.
021	00 :04 :21	P	On avait dit que : $P(A) + P(\bar{A}) = 1$. C'était quel numéro ?
022	00 :04 :26	EE	4, 4.
023	00 :04 :28	P	Numéro 4. On a dit : pour tout événement A, $P(A) + P(\bar{A}) = 1$
024	00 :04 :42	E	On avait dit que : $\bar{A} \cup \bar{B} = ;$ Non ! $\bar{A} \cap \bar{B} = \overline{A \cup B}$.
025	00 :04 :54	P	Le tout barre ! Oui on avait vu ça comme dans la théorie des ensembles, on avait appris pour calculer, euh, justement pour utiliser cette formule-là, là où on l'a utilisé, c'était dans quel

			exercice ? Le premier hein ! Oui d'accord. Bien autres choses qu'on a utilisées. C'est Luc.
026	00 :05 :16	E9	$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
027	00:05: 23	P	$P(A \cup B)$. Pour deux événements quelconques, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. C'était quel numéro ?
028	00 :05 :33	E1	2 non 3
029	00 :05 :35	P	C'est 3 ? Ok pour deux événements quelconques.
030	00 :05 :40	E	Ce n'est pas 3 hein, c'est 5.
031	00 :05 :42	P	C'est 5.
032	00 :05 :43	E	Oui
033	00 :05 :47	P	Pour deux événements quelconques $p(A \cup B)$ c'est $p(A) + p(B) - p(A \cap B)$. Oui Mohamed.
034	00 :06 :00	E13	Si A et B sont incompatibles, $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.
035	00 :06 :05	P	Si A et B sont incompatibles, $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$. Rappelez-moi le numéro encore ?
036	00 :06 :11	EE	3.
037	00 :06 :12	P	3. $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$ si A et B sont incompatibles. Oui oui.
038	00 :06 :33	E4	On avait aussi utilisé $P(\Omega) = 1$.
039	00 :06 :36	P	On a utilisé $P(\Omega) = 1$. Ça je dis que c'est la formule 1.
040	00 :06 :40	E4	2.
041	00 :06 :41	P	C'est 2 ?
042	00 :06 :41	EE	Oui.
043	00 :06 :42	P	Ok. $P(\Omega) = 1$ et on avait complété.
044	00 :06 :48	E	Oui.
045	00 :06 :49	P	P de l'événement impossible égale à
046	00 :06 :52	EE	0.
047	00 :06 :54	P	0. On a utilisé tout ça.
048	00 :06 :57	E15	Ça reste encore $0 \leq p(A) \leq 1$.
049	00 :07 :01	P	Oui, on sait que toute probabilité est, on a fait l'expérimentation on n'en a pas vu. On a vu aucune, on est parti des fréquences, des fréquences pour trouver les probabilités mais on a trouvé aucune fréquence qui dépasse 1 ou bien qui soit inférieure à 0. Oui il reste alors une seule formule, est-ce qu'on l'a utilisée aussi ? il nous reste une seule formule, est-ce qu'on l'a utilisée ? (Silence) Oui une formule. Sergio. Non. Oui Pacôme alors.
050	00 :07 :58	E14	On avait dit que la probabilité d'un événement A est égale à la somme des probabilités des événements élémentaires qui le composent.
051	00 :08 :02	P	La probabilité d'un événement A est égale à la somme des probabilités des événements élémentaires qui le composent.

			Alors si vous êtes d'accord, je peux mettre : si A est composé des événements élémentaires qui sont connus, par exemple comme ça, alors $p(A) = p(\{e_1\}) + p(\{e_2\}) + \dots + p(\{e_k\})$
052	00 :08 :35	E3	e_k
053	00 :08 :35	P	On peut l'écrire comme ça hein !
053 bis	00 :08 :37	EE	Oui
054	00 :08 :38	P	Si on connaît les événements élémentaires de l'événement. Alors ce qui est important est que quand vous avez voulu calculer les probabilités, on a noté tout ça comme formules qu'on a expérimentées nous-même et qu'on a démontrées aussi. Il y en a qu'on a démontré ; il y en a qu'on a expérimenté et démontré aussi après. Il se fait qu'avec la liste que vous venez de faire maintenant, il se fait que toutes les formules, on les a utilisé en trois exercices. Ou bien ?
055	00 :09 :04	E	Oui
056	00 :09 :06	P	Toutes ! Bon, ce qui est en haut est une évidence. Mais il semble qu'on a fait le tour chaque fois. Je pense que c'est comme ça pour... Donc ça veut dire que c'est les formules qui sont bien utilisées. Très bien nous allons continuer avec les exercices et ça va être maintenant exercice numéro 4.
057	00 :09 :26	E4	S'il vous plaît monsieur, on n'a pas fait la troisième question.
058	00 :09 :29	P	Non pour la 3 ^{ème} question la dernière fois, on a commenté et on a dit qu'on ne revient plus là-dessus. Et ça va se passer comme pour l'exercice 2 et c'est Lasatou qui avait dit qu'il faut chercher la probabilité d'obtenir, c'est ça non ? un carton rouge
059	00 :10 :00	P	Euh ! Pour cet exercice 4 là, vous avez dix minutes de travail en groupe. Dix minutes de travail en groupe. (Silence) Qu'est-ce qu'on appelle numéro de même parité ? C'est la question que qu'on me pose là-bas ça. Numéro de même parité, qui peut nous expliquer ça ? Numéro de même parité. Parité fait recours à quel mot ?
060	00 :11 :39	E15	Egalité
061	00 :11 :40	P	Non pas égalité. Pair, pair ou bien impair. De même parité. Ça veut dire que les numéros pairs sont des numéros de même parité. Les numéros impairs aussi sont les numéros de même parité. Ça peut aller ? Les numéros pairs sont des numéros de même parité. Les numéros impairs sont des numéros de même parité aussi. Y a-t-il encore des mots qui gênent ? (00 :12 :12)
062	00 :23 :46	P	Alors bien que vous n'avez pas fini tous, nous allons passer à la correction, au travail collectif. Vous avez déjà eu le mérite de réfléchir sur ça. Donc vous avez des idées et ça suffit pour le

			reste. Il y a un groupe qui a fini. Ou bien ? Ici ! Le groupe 3 ! Donc on va demander au groupe 3 de nous exposer ce qu'ils ont fait et comme toujours on va analyser et amender. (Silence)
063	00 :29 :46	P	Non ! On finit la question 1) d'abord avant d'aller à la question 2). Tu nous présentes le 1 d'abord. En attendant qu'il nous le présente, quelqu'un pour nous lire encore à haute voix l'exercice.
064	00 :29 :59	E11	Exercice 4 On lance un dé à six faces numérotées de 1 à 6 et on note le numéro de face supérieure. Ce dé est pipé de la façon suivante : les numéros de même parité ont la même chance d'apparaître, un numéro pair a deux fois plus la chance d'apparaître qu'un numéro impair. 1. Calcule la probabilité d'apparition de chacune des faces. 2. Calcule de chacun des événements : A : « Le numéro obtenu est un chiffre pair » ; B : « Le numéro obtenu est impair ».
065	00 :30:40	P	D'accord. Et Edgard nous présente ce qu'il a écrit.
066	00 :30 :42	E15	1). La probabilité d'apparition de chacune des faces : $p(1) = \frac{1}{6}$; $p(1)=0,16$.
067	00 :30 :54	P	Oui ! On va d'abord s'arrêter là d'abord : $p(1) = \frac{1}{6}$. C'est à justifier. Vous avez trouvé $\frac{1}{6}$ comment ? Je crois que vous êtes d'avis que ça fait $\frac{1}{6}$.
068	00 :31 :16	EE	Oui
069	00 :31 :17	P	Comment est-ce qu'on peut, comment est-ce que vous le justifiez ? (Silence) Car $p = \frac{\text{Card}(1)}{\text{Card } \Omega}$. Qu'est-ce que vous en pensez ? déjà quand on parle de Card(1), ici, on calcule la probabilité de quoi ? D'un événement non ?
070	00 :32 :20	EE	Oui.
071	00 :32 :21	P	Est-ce que ce 1 tel que c'est écrit, c'est un événement ?
072	00 :32 :25	E	Non.
073	00 :32 :26	P	Tel que c'est écrit, c'est quoi ?
074	00 :32 :30	E3	Éventualité.
075	00 :32 :31	P	Parlez fort, je n'entends pas.
076	00 :32 :36	E3	Une éventualité.
077	00 :32 :38	P	Une éventualité. Qu'on fasse la part des choses chaque fois. C'est pour un événement que nous calculons la probabilité. Donc si on veut calculer la probabilité de quelque chose, il faut que ça soit un événement. Voilà ! Maintenant, la formule qui est utilisée, est-ce qu'il n'y a pas de condition pour l'utiliser ?
078	00 :32 :56	EE	Oui ! Oui !

079	00 :32 :57	P	Quelle est la condition ?
080	00 :32 :59	E	Lorsque tous les événements élémentaires ont la même probabilité.
081	00 :33 :01	P	Lorsque tous les événements élémentaires ont la même probabilité. Donc ce n'est pas une formule qu'on va utiliser sans vérifier, sans vérifier que tous les événements élémentaires ont la même probabilité. Est-ce que dans notre exercice, tous les événements élémentaires ont la même probabilité ? Oui allons-y. Est-ce que dans notre exercice, tous les événements élémentaires ont la même probabilité ?
082	00 :33 :27	E	Non !
083	00 :33 :30	E11	Oui ! Les numéros de même parité.
084	00 :33 :31	P	Oui ! Parlez fort, parlez fort pour qu'on puisse entendre.
085	00 :33 :33	E11	Les numéros de même parité ont la même chance.
086	00 :33 :35	E14	Lève-toi et parle.
087	00 :33 :37	E11	Les numéros de même parité ont la même chance d'apparaître.
088	00 :33 :42	P	Quand on dit les numéros de même parité ont la même chance d'apparaître, ça veut dire quoi ?
089	00 :33 :46	E11	Ça veut dire que les numéros pairs ont la même chance d'apparaître ainsi que les numéros impairs.
090	00 :33 :51	P	Voilà est-ce que ça veut dire que les mêmes, tous les événements élémentaires ont la même probabilité ?
091	00 :33 :57	EE	Non
092	00 :34 :00	P	C'est-à-dire c'est les événements élémentaires composés de numéros pairs ont la même probabilité ; les événements élémentaires composés de numéros impairs ont la même probabilité. Et il y a encore autre chose qu'on a dit là.
093	00 :34 :14	E	Les numéros pairs, un numéro pair a deux fois plus de chance d'apparaître qu'un numéro impair.
094	00 :34 :18	P	D'accord. Un numéro pair a plus, deux fois plus chance, a deux fois plus de chances apparaître qu'un numéro
095	00 :34 :27	EE	Impair
096	00 :34 :27	P	Impair. Ça là, si on le traduisait ça dévient quoi ? N'hésitez pas, si vous voulez intervenir, intervenez vite mais n'hésitez pas, ne ronronnez pas les choses en bas. Non. Vous avez d'idées, vous l'exprimez et ça va être débattu par toute la classe. Oui.
097	00 :34 :53	E14	Selon, si on veut traduire, cela veut dire que la probabilité d'un nombre pair est deux fois la probabilité d'un nombre impair.
098	00 :34 :57	P	La probabilité de
099	00 :34 :57	EE	d'un nombre pair
100	00 :35 :00	P	nombre pair est deux fois la probabilité d'un événement élémentaire composé d'un numéro
101	00 :35 :05	EE	impair.

102	00 :35 :06	P	Impair et alors à ce moment-là, surtout avec ça, est-ce qu'on peut dire que tous les événements élémentaires sont équiprobables ? Non et à partir de ça, est-ce qu'on peut accepter cette formule ?
103	00 :35 :18	EE	Non !
104	00 :35 :19	P	Faites beaucoup attention ou bien faisons beaucoup attention. Cette formule, c'est vrai, elle est simple. Pacôme, il faut qu'on travaille, pourquoi tu tapes les gens ?
105	00 :35 :30	E14	Non ! Je ne tape pas. Il est en train de me parler.
106	00 :35 :32	E11	Non ! Ils parlent.
107	00 :35 :34	P	Alors cette formule, elle est simple, mais ce n'est pas parce qu'elle est simple qu'il faut se jeter là-dessus sans précautions. Il y a deux formules au tableau où on a mis « si ». Il y a ça : si A et B sont incompatibles alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$; et il y a le deuxième, la deuxième formule ici : si tous les événements élémentaires sont équiprobables, alors pour tout événement A, $p(A) = \frac{\text{Card } A}{\text{Card } \Omega}$. Ces formules qui portent de « si », si on veut les utiliser, c'est qu'il faut qu'on puisse s'assurer que la condition demandée ou bien les conditions demandées sont vérifiées. Et pour l'exercice 3 qu'on avait traité la dernière fois, c'est peut-être parce qu'on avait parlé de « cartons identiques ». Identiques, quand on a dit cartons identiques, on a pensé qu'avec ça, toutes les, euh tous les événements élémentaires ont la même probabilité et pour ça on a utilisé la formule. Ça peut aller ? Bien qu'est-ce qu'on va faire maintenant ?
108	00 :36 :41	E14	On va reprendre
109	00 :36 :43	P	On va reprendre. Oui en commençant par quoi ? Oui.
110	00 :36 :52	E14	J'ai une idée. Je ne sais pas hein. Si on veut, comme on sait que les numéros de même parité ont même probabilité là, on peut prendre l'événement qui est composé des numéros pairs. Maintenant, pour les événements, l'événement qui est composé de numéros pairs, la face là, euh l'univers ça va faire 3 et lorsqu'on veut calculer on va faire cardinale sur 3.
111	00 :37 :16	P	Non. Si vous faites cardinale sur 3, vous êtes toujours dans. Non, non, non ! Euh je te comprends très bien. Je te comprends bien mais on a une seule expérience aléatoire. C'est-à-dire si tu casses encore l'univers en deux autres univers, c'est comme s'il y a deux expériences aléatoires. Chaque fois, dans un exercice, dans un exercice de calcul de probabilités, c'est qu'il y a une

			expérience aléatoire qui est donnée et donc il y a combien d'univers ?
112	00 :37 :45	E14	Un seul
113	00 :37 :46	P	Un seul. Donc on va travailler selon le seul univers. Mais ce n'est pas grave. On peut déjà écrire l'univers. Avec votre permission, est-ce qu'on peut effacer ?
114	00 :37 :54	EE	Oui
115	00 :37 :55	P	Puisque on est allé à l'hors sujet hein.
116	00 :37 :57	E	Oui
117	00 :37 :58	P	Donc Edgard tu vas effacer. On va voir. Bien donc je disais on connaît au moins l'univers non ?
118	00 :38 :06	E	Oui
119	00 :38 :07	P	On peut déjà écrire l'univers. Edgard va nous écrire l'univers au tableau. Ω égale à quoi ? Juliette
120	00 :38 :20	E3	Ω égal à l'ensemble $\{1,2,3,4,5,6\}$.
121	00 :38 :25	P	$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$. Edgard écris-nous ça ! (Silence) C'est le premier élément important de l'exercice. On sait que Ω est égal à ça. On a dit des choses, il faut qu'on les traduise. On a dit des choses, il faut qu'on les traduise. Le fait de dire que les événements élémentaires composés des numéros pairs on la même probabilité, comment on peut traduire ça ? Traduire simplement, ce n'est pas un calcul. Ecrire ça. Les événements élémentaires composés des numéros pairs ont la même probabilité. Ça va s'écrire comment ? Oui oui.
122	00 :39 :27	E	On sait que les nombres pairs sont 2, 4, 6
123	00 :39 :28	P	Oui
124	00 :39 :30	E	Donc ça veut dire que probabilité de 2 est égale à la probabilité de 4 est égale à la probabilité de 6.
125	00 :39 :34	P	Est-ce que vous êtes d'accord ?
126	00 :39 :36	EE	Oui.
127	00 :39 :37	P	Donc probabilité de 2, ça c'est une information de l'exercice et on avait dit les informations, il faut les traduire en langage mathématique avant de répondre à la première question. S'il y a des données, il faut traduire d'abord les données en langage mathématique avant de s'intéresser aux questions. Voilà, nous avons $p(2) = p(4) = p(6)$. C'est comme ça qu'on va écrire 2 ? C'est comme ça qu'on va écrire 4 ? C'est comme ça qu'on va écrire 6 ?
128	00 :40 :04	E	Non.
129	00 :40 :05	P	On va les écrire comment ?
130	00 :40 :06	EE	Ensemble $\{2\}$, singleton.
131	00 :40 :08	P	Avec les accolades ; sinon tel que c'est écrire là, ça fait des
132	00 :40 :11	EE	éventualités.

133	00 :40 :11	P	Éventualités. Non il y a la parenthèse aussi. La parenthèse d'abord. Voilà, maintenant, on a autre chose a écrit aussi. Oui Edgard avec nos données, il n'y a pas que ça. On le sait, d'une manière générale, pour résoudre un problème, c'est qu'il faut cerner les données. C'est les données plus les connaissances. Ce sont les deux-là qu'on va mettre ensemble pour aller vers la solution. Donc nous sommes là. Il y a encore autre interprétation. On a la probabilité d'un numéro, d'apparaître d'un numéro pair est 2 fois, vous avez dit, celle d'un numéro impair. Puisqu'il y a égalité là, on va prendre $p(\{2\})$ égale à, on va prendre $p(\{2\})$
134	00 :41 :41	E	égale à
135	00 :41 :41	P	égale à 2 fois $p(\{1\})$. Ce n'est pas la peine de parler $p(\{4\})$ parce que $p(\{4\}) = p(\{2\})$ ou bien. Ainsi de suite. Ça c'est les données du problème. Et il me semble que c'est ce que vous n'avez écrit ça. C'est possible si vous l'avez écrit, je ne sais pas, si vous l'avez écrit on ne va pas aller vers $\frac{Card(A)}{Card(\Omega)}$. C'est, c'est possible hein. Non on va prendre 1, 2 fois $p(\{1\})$. Attention.
136	00 :42 :07	E3	Non $p(\{2\})$
137	00 :42 :07	P	La probabilité de ; On va prendre pour le numéro pair 2 et pour le numéro impair
138	00 :42 :12	EE	1
139	00 :42 :13	P	1. Le 1 représente le 3, le 5 aussi
140	00 :42 :17	EE	Oui
141	00 :42 :18	P	Est-ce qu'on n'a pas traduit toutes les données de l'exercice là ?
142	00 :42 :21	E	Oui
143	00 :42 :22	P	Vous vous donnez de coude. Pourquoi ? C'est un jeu de football ici ? On va décaler les groupes après. Vous donnez de coude facilement au gens. Bien maintenant, on va répondre à la question. Maintenant on va nous intéresser à la question posée. Supposons que là où nous sommes, on peut se dire qu'on ne sait même pas ce qui est demandé mais on s'est intéressé aux données. On dit mais, avec tel que le problème est posé, Ω , l'univers est composé de 1, 2, 3, 4, 5, 6. Avec ce qui est donné : $p(\{2\}) = p(\{4\}) = p(\{6\})$, $p(\{1\}) = p(\{3\}) = p(\{5\})$ et $p(\{2\}) = 2 \times p(\{1\})$. On a fini avec les données. Maintenant, on vient première question. La question était bien comprise par Edgard et son groupe, et par tout le monde d'ailleurs : la probabilité d'apparition de chacune des faces. D'après ce qui a été écrit tout à l'heure, c'est que on veut $p(\{1\})$, on veut $p(\{2\})$, $p(\{3\})$, $p(\{4\})$, $p(\{5\})$, $p(\{6\})$. Et dans les méthodes, la méthode qu'on a utilisée jusque-là, quand les données sont claires et que la question est claire, c'est qu'on commence par regarder les

			formules. Quelle est la formule qui peut nous aider ? Déjà on a dit que la formule 7, nous ne sommes pas dedans. On est d'accord hein ? On commence par dire mais qu'est-ce qui peut nous, qu'est-ce qui peut nous aider ? On sait ce qu'on cherche : $p(\{1\})$, $p(\{2\})$, $p(\{3\})$, $p(\{4\})$. Maintenant, on sait là où se trouve les : $e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6$. Alors selon vous, quelle est la première formule qui peut nous aider à nous, pour nous mettre sur le chemin ?
144	00 :43 :59	E	6
145	00 :44 :00	P	La formule 6. La formule 6 ne demande-t-elle pas qu'on ait un événement ? Pour quel événement, veut-on l'appliquer ? Si un événement est composé de e_1, e_2, \dots, e_k , alors la probabilité de cet événement c'est la probabilité de e_1 plus la probabilité. Je suis d'accord pour le 6 mais pour quel événement ? Quel est l'événement que vous pouvez choisir et qui va permettre d'utiliser le 6 pour avoir les réponses à vos questions ? Oui.
146	00 :44 :40	E14	C'est l'événement certain.
147	00 :44 :41	P	L'événement certain. Oui prenons ça pour voir parce que l'événement certain contient tous ces événements dont vous cherchez la probabilité. Alors l'écriture devient quoi ?
148	00 :44 :51	E14	On a : $p(\Omega) = p(\{1\})$ plus
149	00 :44 :58	P	On peut l'écrire : $p(\Omega) = p(\{1\})$, et sur ça, moi, il me plaît même de vous laisser encore cinq minutes dans les groupes pour revoir, pour revoir l'exercice. On est d'accord ?
150	00 :45 :09	EE	Oui !
151	00 :45 :10	P	Je vous, tu peux laisser, je vous donne encore cinq minutes de travail pour revoir, pour continuer avec l'exercice sur le chemin que vous êtes en train de trouver. (00 :45 :25)
152	00 :49 :38	P	Travail en groupe parce que les idées sont déjà avancées. Il reste seulement à discuter.
153	00 :52 :18	P	Tous les groupes, tous les groupes ont déjà, ont fini effectivement en cinq minutes la première question. Est-ce qu'il y a un groupe qui voudrait aller au tableau pour continuer ? Ok. On vous a désigné vous traitez, on vous a désigné vous vous êtes en train de traiter. Oui le groupe 4 mais euh presque tout ce qui est fait c'est uniforme en dehors de la manière de rédiger, l'idée est la même dans les quatre groupes. L'idée est la même et la finalité la même. Donc on va analyser ensemble si c'est la bonne idée.
154	00 :56 :48	P	Ce n'est pas comme ça que nous faisons. Il faut nous présenter hein.

155	00 :56 :53	E14	p de l'univers égale à $p(\{1\}) + p(\{2\}) + p(\{3\}) + p(\{4\}) + p(\{5\}) + p(\{6\})$. Or $p(\{2\})$, $p(\{4\})$, $p(\{6\})$ ont la même probabilité
156	00 :57 :07	P	Ce n'est pas à moi hein, c'est à tout le monde, à la classe surtout.
157	00 :57 :12	E14	$p(\{2\}) = p(\{4\}) = p(\{6\})$. Donc la somme des trois ça fait $3 \times p(\{2\})$
158	00 :57 :20	E	Oui.
159	00 :57 :21	E14	Ceci aussi ça fait $3 \times P(\{1\})$. Or $P(\{2\}) = 2P(\{1\})$. Si on tire $P(\{1\})$, ça fait $\frac{P(\{2\})}{2}$. Donc on a remplacé ça là. Ça fait $3P(\{2\}) + \frac{3}{2}P(\{2\})$. On a calculé ça là. Or nous savons que la probabilité de l'univers est égale à 1. Donc $\frac{9}{2}P(\{2\}) = 1$. On a tiré $p(\{2\})$. On sait aussi que $p(\{1\}) = p(\{3\}) = p(\{5\})$ et ça fait la probabilité de $\{2\}$ sur 2.
160	00 :57 :56	P	Donc la probabilité d'apparition d'un numéro pair est $\frac{2}{9}$ et la probabilité d'un numéro impair est $\frac{1}{9}$. Qu'est-ce que vous avez à ajouter ? J'ai circulé ce sont les réponses que vous avez trouvées. Ce n'est pas ça ?
161	00 :58 :13	EE	Oui !
162	00 :58 :15	P	Est-ce que vous avez quelques choses à ajouter ? Cette réponse mais ce n'est pas sûr que ce sont les mêmes chemins. Donc on n'a rien à ajouter ? Oui toi tu veux parler non ? Il faut parler !
163	00 :58 :54	E4	On n'a pas pris par même méthode.
164	00 :58 :58	P	Oui. Qu'est-ce que vous avez fait ? Proposez !
165	00 :59 :00	E4	On a trouvé la même chose.
166	00 :59 :02	P	J'ai circulé et j'ai vu ce que vous avez fait. Maintenant j'ai vu les réponses mais ce n'est pas forcément qu'on prenne par exactement la même chose. Maintenant, s'il y a de différence à signaler, signalez la différence à la classe pour qu'on puisse analyser. Tout le monde à faire, or $P(\{1\}) = \frac{P(\{2\})}{2}$?
167	00 :59 :25	E	Oui.
168	00 :59 :25	E	Non.
169	00 :59 :27	P	Bon si on n'a pas fait, on va intervenir pour dire voici la différence qu'il y a eu entre ce qu'on a mis et ce qu'on fait dans son groupe pour qu'on analyse ça. Bien maintenant passons à la question 2, à la question 2. Qu'est-ce qu'on fait ? je vous donne encore cinq minutes ?

170	00 :59 :59	EE	Oui.
171	01 :00 :00	P	OK. Cinq minutes pour la question 2. (01 :00 :02)
172	01 :04 :56	P	Hé ! Le groupe 3, on vous remet le tour qu'on vous avait arraché tout à l'heure. Vous présentez rapidement votre proposition de réponse pour la question 2.
173	01 :07 :56	P	Et oui commentons rapidement ça là avant de passer à l'événement B. Oui Edgard, présente-nous ça rapidement c'est en quatre ligne.
174	01 :08 :12	E15	On sait que P de.
175	01 :08 :14	P	Parle plus fort. C'est pour toute la classe.
176	01 :08 :16	E15	On sait que $P(\{2\}) = P(\{4\}) = P(\{6\})$, alors alors $p(A) = \frac{\text{Card}A}{\text{Card}\Omega}$. Donc $p(A) = \frac{3}{6}$. D'où $p(A) = 0.5$.
177	01 :08 :28	P	Donc vous avez utilisé quelle formule ?
178	01 :08 :30	E15	7.
179	01 :08 :32	P	7. Oui ! Qu'est-ce que vous en pensez ?
180	01 :08 :37	EE	Non, non.
181	01 :08 :41	P	Non Pourquoi ?
182	01 :08 :47	E17	On peut aussi, on peut aussi utiliser la propriété 6.
183	01 :08 :57	E6	On a dit qu'un numéro pair à deux fois plus de chance d'apparaître qu'un numéro impair et s'ils utilisent la formule pour calculer aussi la probabilité de l'événement B, ils vont trouver la même chose. Or on a déjà calculé ces probabilités, on a dit qu'ils n'ont pas les mêmes probabilités.
184	01 :09 :20	P	Mais il y a les 2, 4, 6 pour cette question-là, c'est ça vous êtes en train de dire non ?
185	01 :09 :25	E15	Oui !
186	01 :09 :26	P	Ont la même probabilité. Pardon.
187	01 :09 :36	E	Si tous les événements ont la même probabilité
188	01 :09 :38	P	On a dit si tous les événements
189	01 :09 :38	E	Si tous les événements
190	01 :09 :39	P	Elémentaires. Les événements, ce sont les, ce sont les événements élémentaires de l'univers hein !
191	01 :09 :45	EE	Oui.
192	01 :09 :45	P	Tous les événements élémentaires de l'univers. Quand on parle des événements, tous les événements élémentaires de l'univers, on, peut-être qu'on va ajouter ici de Ω . Tous les événements élémentaires de Ω sont équiprobables, alors $p(A) = \frac{\text{Card}A}{\text{Card}\Omega}$. Edgard qu'est-ce qu'on fait ?
193	01 :10 :16	E15	On efface.
194	01 :10 :17	P	On efface. On va utiliser quelle formule ? On efface. Le 7 ne marche pas. On n'est pas dans le cas de 7.
195	01 :10 :24	E3	6.

196	01 :10 :24	P	le
197	01 :10 :25	E3	6.
198	01 :10 :25	P	Le 6. Oui qui nous applique le 6 ? Oui, oui, oui pourquoi pas ? Et donc nous sommes passés de, donc tu passes au tableau. Nous sommes passés du groupe 3 au groupe 4, au 3 maintenant nous sommes en 2. Donc c'est important de bien regarder les conditions.
199	01 :14 :23	P	Je sais qu'il pleut. Je sais qu'il pleut, parlez fort.
200	01 :14 :39	E6	Les nombres pairs, on a : 2, 4, 6. On a dit que $p(A) = p(\{2\}) + p(\{4\}) + p(\{6\})$. Or on avait dit que : $p(\{2\}) = p(\{4\}) = p(\{6\})$. Donc ça fait : $3 \times p(\{2\})$. Et si on fait les 3 fois la probabilité qu'on a trouvée, ça donne $\frac{2}{3}$. C'est la même chose que $p(B)$.
201	01 :15 :13	P	Oui votre appréciation sur ce qu'il a présenté.
202	01 :15 :19	E4	On est du même avis que lui.
203	01 :15 :21	P	Vous êtes du même avis ?
204	01 :15 :23	EE	Oui !
205	01 :15 :29	P	Est-ce qu'on ne peut pas, oui ça va déjà. Mais vous ne pensez pas qu'il y a, on peut calculer encore le $p(B)$ par une autre méthode ? Que c'est possible de calculer le $p(B)$ à l'aide d'une autre formule ?
206	01 :15 :46	E	Oui.
207	01 :15 :47	P	Oui laquelle ? Sergio !
208	01 :15 :49	E16	La formule 4
209	01 :15 :50	P	La formule 4. Pourquoi ? Parce que le B est l'événement contraire de
210	01 :15 :57	E	A.
211	01 :15 :58	P	De A. Donc $P(B)$, devrait être égale à
212	01 :16 :02	E16	$1-p(A)$.
213	01 :16 :04	P	$1-P(A)$. Donc ici il y a deux possibilités : si on remarque, si on remarque que B est l'événement contraire de, de A. Ne serait-ce que dans le parler hein ?
214	01 :16 :15	E	Oui.
215	01 :16 :16	P	D'accord. On peut utiliser. OK on va passer à un autre exercice. Nous sommes à la fin. Il reste un seul qu'on va faire aujourd'hui. Et ce qu'on peut retenir de ceci, c'est que le groupe 3 nous a aidés à dire que la formule 7 ne s'utilise pas n'importe comment. Il faut s'assurer que tous les événements élémentaires sont équiprobables. Le groupe 3 est revenu encore nous aider pour dire que ce n'est pas les événements élémentaires d'un événement qu'on a dit que c'est tous les événements élémentaires de l'univers. Il y a pas mal d'enseignement dans ce qui est fait. Maintenant autre chose, quand vous avez

			travaillé, il y a certain qui ont trouvé 0,11 ici. Quand j'ai demandé d'intervenir on n'a pas dit. Un neuvième et 0,11 est-ce que c'est la même chose ? On peut se prononcer là-dessus. J'en ai vu, par exemple, 0,11 ; 0,11 ; 0,22. Alors qu'est-ce qu'on prend ? 0,11 ou bien $\frac{1}{9}$?
216	01 :17 :29	EE	$\frac{1}{9}$
217	01 :17 :30	P	Pourquoi on ne peut pas prendre 0,11 ?
218	01 :17 :32	E16	Parce que c'est les mêmes choses.
219	01 :17 :34	E17	C'est les mêmes choses.
220	01 :17 :36	P	Est-ce que c'est les mêmes choses 0,11 ?
221	01 :17 :38	E	Non il y a encore.
222	01 :17 :39	P	Voilà 0,11 n'est qu'une valeur approchée. Ce n'est pas une valeur exacte. Donc on va faire attention aux calculatrices, ce n'est pas tous les calculs. Les nombres qu'on a vus, on a vu aussi les nombres rationnels.
223	01 :17 :50	EE	Oui.
224	01 :17 :51	P	Pourquoi on va travailler et on va trouver un nombre rationnel et ne pas s'arrêter. Et quand on voit un nombre rationnel, qu'est-ce qui est exigé ? Comme vous l'avez fait c'est de simplifier et de mettre ça sous sa forme irréductible.
225	01 :18 :00	EE	fraction
226	01 :18 :01	P	Fraction d'accord. Dès que c'est irréductible, le nombre est trouvé. On a plus besoin d'une calculatrice pour ça à moins que ça soit dans le cas où comme ici, par exemple, c'est exact : 0,5. $\frac{1}{2}$ ça fait 0,5. 0,5 et $\frac{1}{2}$ ça passe mais $\frac{1}{9}$ et 0,11 ce n'est pas. On est d'accord ? Bien je vous donne la suite : deux exercices sur les quatre qui restent. (Silence). Lisez bien c'est la page 3. C'est la page 3 ? Quelqu'un n'a qu'à nous lire. Non attendez. Attends, attends, attends. Oui celui qui veut lire n'a qu'à lire maintenant.
227	01 :19 :26	E	On lance deux fois de suite un dé parfaitement équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on lit les numéros inscrits sur la face supérieure pour en former un nombre de deux chiffres. a. Détermine toutes les éventualités de cette expérience aléatoire. b. Calcule la probabilité que le nombre formé soit impair. c. Calcule la probabilité que la somme des 2. On lance trois fois de suite le dé et on lit les numéros inscrits sur la face supérieure pour en former un nombre de trois chiffres. a. Détermine toutes les éventualités de cette expérience aléatoire.

			b. Calcule la probabilité que le nombre formé comporte uniquement des chiffres pairs. Travail en groupe
228	01 :20 :16	P	Oui travail en groupe. Vous allez faire 10 minutes pour le 1. 10 pour le 1 j'ai dit. On va clarifier le 1. D'abord avant d'aller au 2. 10 minutes. (01 :20 :32)
229	00 :25 :39	P	Euh ! Est-ce qu'on ne va pas suspendre la séance à cause de la pluie ? Ou bien on continue ?
230	01 :25 :44	EE	Oui.
231	01 :25 :49	E1	On continue.
232	01 :33 :26	P	C'est quel groupe ici maintenant ?
233	01 :33 :28	E16	Groupe 3 plus 2.
234	01 :33 :30	P	Trois plus une partie de 2. (Silence). Vous avez trouvé Oméga. Il contient combien d'éléments ?
235	01 :34 :16	EE	Trente-huit éléments.
236	01 :34 :18	P	Trente-huit. Il faut compter. Et ça fait combien maintenant ?
237	01 :34 :47	E16	Trente-huit.
238	01 :34 :49	P	Non ! trente-six.
339	01 :34 :51	E16	Oui ! trente-six.
240	01 :35 :03	P	Et la probabilité calculée ? Soit A l'événement « le nombre formé est pair ». Vous avez déterminé les éléments de A. La probabilité a donné combien ?
241	01 :35 :24	E16	Un demi.
242	01 :35 :30	P	Pourquoi vous avez utilisé ici cardinal de A sur cardinal de Oméga ? Vous êtes sûr que cette fois-ci, c'est ça ? Qu'est-ce qui fait dire que les événements élémentaires ont la même probabilité ? Dans l'exercice, qu'est-ce qui vous permet de dire ça ? Ou bien, vous ne vous êtes pas préoccupé de ça.
243	01 :35 :57	E5	Un dé parfaitement équilibré.
244	01 :36 :00	P	Oui. Parfaitement équilibré. Je pense que c'est ça. Ce que vous avez fait est juste. Jusque-là, c'est juste. Donc vous pouvez faire le 2). Si tout le monde l'a compris comme ça, c'est bon. Nous sommes dans le cas d'équiprobabilité à cause du fait que le dé est parfaitement équilibré. Si ce n'était même pas le cas, il n'y a pas de données pour nous permettre d'avoir les probabilités des événements élémentaires. Contrairement à l'exercice 4 où il y a des données qui nous permettraient de connaître les probabilités des événements élémentaires. Ok ! Allez-y !
245	01 :37 :02	P	Ici, c'est le groupe 3 prime. Les groupes ont changé. Ok. Ce sont les éléments ici. Le petit a). Déterminons toutes les éventualités. Pourquoi vous avez mis les résultats entre parenthèse ? C'est juste une question. Pourquoi vous avez choisi de les écrire entre parenthèse.

246	01 :37 :48	E14	...
247	01 :37 :52	P	Mais si on voit bien, l'expérience aléatoire dit que c'est pour voir le nombre de deux chiffres qu'il faut former. Une éventualité serait quoi ? Ce n'est pas les nombres ?
248	01 :38 :08	E14	On peut voir, si on lance le dé pour la première fois, on peut voir 1 et la seconde fois, on peut voir 1.
249	01 :38 :15	P	Voilà ! Donc l'un après l'autre. Mais n'empêche qu'on pouvait l'écrire directement mais qui a la même signification que ceci. C'est-à-dire pour obtenir les 11, on voit 1 d'abord et ensuite 1. Et c'est pour ça que vous avez mis les parenthèses. Mais si on écrivait aussi 11 directement, c'est la même signification. Ici c'est la signification mathématique que vous avez mise. D'accord ? Moi je suis d'accord. Alors la probabilité de A, vous avez trouvé combien ? Le cardinal de Oméga a donné combien ?
250	01 :38 :49	E	Trente-six.
251	01 :38 :50	P	Trente-six. Et la probabilité de A ?
252	01 :38 :52	E14	Ça a donné 17 sur 36.
253	01 :38 :54	P	Pourquoi 17 ? Vous avez compté ? Comptez encore, je vais voir.
254	01 :39 :42	EE	Ça fait un, deux,
255	01 :39 :55	P	Est-ce que ce n'est pas mieux d'écrire l'événement ? Est-ce qu'on l'a nommé dans l'exercice ?
256	01 :40 :03	E14	Non, on ne l'a pas aimé.
257	01 :40 :06	P	Donc on va dire, soit A l'événement. Est-ce que ce n'est pas mieux d'écrire l'événement. Puisque le nombre n'est pas juste. La méthode est juste, mais le nombre 17-là. Ce n'est pas 17. Mais pour la deuxième question, le nombre 4 est juste. Mais pour ça, ce n'est pas 17. Donc, ça veut dire, qu'il faut écrire l'ensemble d'abord. Soit A l'événement « le nombre obtenu est impair. A est égal ; on met les éléments et puis après comme on connaît les éléments, on peut les compter. D'accord ?
258	01 :41 :05	P	Nous sommes dans le groupe 1. Qu'est-ce qu'on a dit ? On calcule la probabilité des événements non ? Ici, on veut la probabilité de quel événement ?
259	01 :41 :20	E1	On dit de calculer la probabilité de l'événement « le nombre formé est impair ».
260	01 :41 :28	P	Il faut commencer par là. Soit A l'événement « le nombre formé est impair ». Ce A là, est-ce que vous le connaissez ? Il faut le former. A est égal quoi ? Avec quelle formule, on va calculer la probabilité ?
261	01 :42 :22	E4	Avec la formule 6.

262	01 :42 :26	P	La formule 6 ? On ne connaît pas la probabilité des événements élémentaires.
263	01 :42 :35	E1	Ils n'ont pas dit qu'il y a équiprobabilité.
264	01 :42 :40	P	Moi je vous informe. Les autres l'ont dit. On a dit, parfaitement équilibré. Même si on n'est pas informé, est-ce qu'il y a la possibilité qu'on puisse trouver la probabilité de chaque événement élémentaire ? Est-ce que l'exercice permet de trouver la probabilité de chaque événement élémentaire ? est-ce qu'il y a des données comme dans l'exercice 4 qui peuvent nous permettre de trouver la probabilité de chaque événement élémentaire ?
265	01 :43 :05	E	Non !
266	01 :43 :06	P	Alors, ça veut dire qu'on ne peut pas appliquer la formule 6. C'est votre problème ça ?
267	01 :43 :10	E1	Oui !
268	01 :43 :11	P	Ok. (Silence pendant le temps de travail en groupe pour la question 2) 01 :52 :45
269	01 :52 :59	P	Bien ! On va faire le point. Il semble que tout le monde est convaincu que c'est la formule 7 qu'il faut utiliser. Qu'est-ce qui nous donne cette conviction ? Qu'est-ce qui nous permet de dire que c'est cette formule qu'il faut utiliser ? Oui ! Sergéo.
270	02 :00 :22	E16	Parce que le dé est parfaitement équilibré.
271	02 :00 :25	P	Le dé est parfaitement équilibré. Même si le dé n'était pas parfaitement équilibré et qu'on ne nous donne pas les moyens de calculer la probabilité de chaque événement élémentaire, on va faire quoi ?
272	02 :00 :47	E1	On va utiliser la formule 7.
273	02 :00 :50	P	La formule 7 ! Dans l'exercice 4, on nous a donné les moyens de connaître la probabilité de chaque événement élémentaire et on a utilisé la formule 6. Dans l'exercice 5, il y a eu une expression claire qui nous permet de comprendre que tous les événements élémentaires sont équiprobables. Mais, il se peut, qu'on peut oublier de préciser « parfaitement équilibré », alors qu'on a rien donné qui permet de connaître la probabilité de chaque événement élémentaire, on utilisera toujours la formule 7. On est d'accord !
274	02 :01 :34	EE	Oui !
275	02 :01 :35	P	Mais maintenant la formule 7 là, quelle est la plus grande difficulté ? Pour la question 1), le problème ne se pose pas.
276	02 :01 :40	EE	Non !
277	02 :01 :41	P	C'est arriver à compter sans oublier un seul et sans en compter en plus. Donc il faut être suffisamment concentré pour les déterminer. Alors, c'est au niveau de la deuxième question 2

			qu'écrire les éventualités, ça devient quelque chose de bien long. Vous avez trouvé combien ?
278	02 :02 :03	E14	Nous, on n'a pas terminé.
279	02 :02 :05	P	Vous n'avez pas terminé. Vous, vous avez trouvé combien ?
280	02 :02 :08	E7	217.
281	02 :02 :08	E	216.
282	02 :02 :10	P	217. Et quelqu'un a dit 216.
283	02 :02 :12	E15	Oui.
284	02 :02 :13	P	Comment as-tu trouvé 216 ?
285	02 :02 :28	E15	J'ai fait 6 fois 6 fois 6.
286	02 :02 :30	P	Voilà ! Il a contesté les 217. Les 217 ont été obtenus comment ? Vous avez 1 en plus. On peut se tromper. On essaie son raisonnement. On prend 1, on peut écrire 11, 12, 13, 14, 15, 16 comme les chiffres des centaines et des dizaines. Et il dit, pour chacun de ces nombres, on peut écrire 6 nombres. Oui ! Tu continues.
287	02 :03 :30	E15	Maintenant, on fait le tout fois 6.
288	02 :03 :34	P	Oui ! On prend le tout. Le tout, ça fait combien ?
289	02 :03 :40	E15	Ça fait 36. Pour le 1, ça fait 6 fois 6 quoi.
290	02 :03 :48	P	Donc pour les nombres commençant par 1, on peut dénombrer 6 fois 6 égale 36. Maintenant pour tous les nombres, ça fait 36 fois 6. C'est avec ce raisonnement, qu'il remet en cause les 217 que le groupe s'apprête à recompter. Quand c'est complexe comme ça, c'est qu'il faut avoir des méthodes, comme il le dit, pour avoir le nombre cherché. Avec la liste des éventualités, on peut avoir aussi les événements élémentaires de l'événement « les chiffres sont pairs ». On peut raisonner de cette manière et trouver aussi. On est d'accord ?
291	02 :04 :53	EE	Oui !
292	02 :04 :54	P	Quand, vous étiez en train de travailler entre temps, le professeur vous a appris l'arbre de choix. Vous pouvez utiliser l'arbre de choix.
293	02 :05 :08	E	Nous l'avons utilisé, mais nous l'avons mal utilisé.
294	02 :05 :12	P	C'est juste long. On a 1, 2, 3, 4, 5, 6. Et comme Edgar vient d'expliquer, avec 1, on aura 6 possibilités pour le deuxième chiffre. Si ce n'est que le nombre qu'on veut, ce que Edgar vient d'expliquer, c'est ça. Avec 1 comme deuxième chiffre, on peut avoir encore 6 possibilités. Donc au total, il doit avoir combien de nombres ici ?
295	02 :06 :05	E3	36.
296	02 :06 :09	E	36.
297	02 :06 :10	P	Pardon ?
298	02 :06 :11	E	36.

299	02 :06 :12	P	6 possibilités pour le premier choix et 6 possibilités pour le deuxième choix, donc 36. Et donc pour le chiffre 2, on va avoir combien ?
300	02 :06 :22	E	36.
301	02 :06 :23	P	36 aussi. On peut donc utiliser des techniques pour connaître le nombre de tous les élèves u lieu de les écrire tous. Ceux-ci, on les écrivant, étaient obligés de mettre des points. Ils écrivent 221, point, point, point, point et après 226. Maintenant pour 23, ils ont écrit 231, point, point, point, point, 236. Et c'est sûr que parmi les points, il y a peut-être quelque part, où vous avez mis 5 points au lieu de quatre. Bon ! Je pense qu'on peut arrêter la séance là. D'accord ? Donc, si on lançait le dé quatre fois, est-ce qu'on va écrire tous les nombres ?
302	02 :07 :11	EE	Non ! Quatre c'est trop.
303	02 :07 :12	P	Donc il faut réfléchir un peu comme Edgar. Pour le dernier exercice, qu'est-ce vous voulez, je prends les feuilles ou je vous laisse ça.
304	02 :07 :28	EE	Laissez-nous ça.
305	02 :07 :30	P	Vous connaissez la condition.
306	02 :07 :32	EE	Oui !
307	02 :07 :32	P	Quelle est la condition ?
308	02 :07 :34	EE	Nous ne devons pas remettre à un grand frère pour nous le traiter.
309	02 :07 :37	P	Ne pas remettre à quelqu'un. Parce que jusque-là, vous avez fait 5 exercices sans l'aide de quelqu'un. Donc je vous le laisse. Mais on sera obligé de faire une autre séance d'exercices. Ça va être mercredi soir.
310	02 :07 :56	EE	Oui !
311	02 :07 :57	P	Donc je vous remercie. (Fin de la séance : 02 :08 :00).

ANNEXE 17 : Transcription T₁₁

SITUATION 5

06 MAI 2017

EFFECTIF : 16

HEURE : 09h30 min

Suite à la non-disponibilité du professeur expérimentateur, le chercheur a dirigé la séance en lieu et place du professeur. Les élèves ont gardé leurs numéros et leurs groupes

Num.	Temps	Acteurs	Echanges verbaux
001	00 :00 :02	P	Oui. Bonjour chers élèves.
002	00 :00 :04	EE	Bonjour monsieur
003	00 :00 :06	P	Eh oui. On veut commencer. En probabilité, c'est très certainement notre dernière séance. La onzième séance de l'expérimentation et notre dernière séance d'exercices. Et nous avons dit la fois dernière que même si on ne finissait pas on peut donner des indications et ça va rester juste l'évaluation. Euh, c'est dommage votre professeur n'est pas libre pour qu'on puisse encore euh encore faire le travail ensemble comme on a fait jusque-là. Mais comme la dernière fois je vais essayer de faire les deux à la fois. Ce n'est qu'une séance d'exercices et on a besoin beaucoup plus de vos réactions que de mes réactions. Bien nous allons comme toujours rappeler ce qu'on avait fait. On n'ira pas jusqu'au début puisqu'on utilise, vous voyez qu'on utilise le vocabulaire des probabilités hein.
004	00 :01 :18	EE	Oui
005	00 :01 :19	P	Le vocabulaire. On parle d'événement, d'événement élémentaire, d'expérience aléatoire. Dans tous les exercices, on trouve d'expérience aléatoire.
006	00 :01 :25	EE	Oui
007	00 :01 :26	P	On en trouve, euh, on dit parfois on a besoin des événements élémentaires, on a des événements tout courts et puis voilà mais on va juste reprendre les formules que nous avons utilisées jusque-là. On va les rappeler. Nous avons dit si euh Oméga est un univers et que p est une probabilité définie sur Oméga, la probabilité de tout événement est comprise entre 0 et
008	00 :02 :08	EE	et 1
009	00 :02 :08	P	et 1 ; c'est-à-dire qu'on aura jamais de probabilité négative et on ne peut pas avoir de probabilité qui soit plus grande que

010	00 :02 :16	E	1
011	00 :02 :16	P	Plus grand que 1. C'était ce qu'on avait appelé 1. Je crois bien hein.
012	00 :02 :25	EE	Oui oui
013	00 :02 :26	P	Ce qu'on a appelé 2 c'est que la probabilité de l'univers
014	00 :02 :30	E	l'univers est 1
015	00 :02 :32	P	Est 1 parce qu'on a dit c'est l'événement certain
016	00 :02 :35	E	Oui !
017	00 :02 :36	P	Et la probabilité de l'événement impossible c'est 0. Ça se comprend comme ça. Qu'est-ce qu'on a mis en 3 ? Je ne me souviens pas
018	00 :02 :46	EE	A et B sont incompatibles
019	00 :02 :49	P	A et B sont
020	00 :02 :51	E	Sont des événements incompatibles
021	00 :02 :52	P	incompatibles
022	00 :02 :54	E	$p(A)$
023	00 :02 :58	P	$p(A)$
024	00 :03 :00	E	union B
025	00 :03 :00	P	ou B
026	00 :03 :01	E	égal à $P(A)$
027	00 :03 :01	P	c'est $p(A) + p(B)$
028	00 :03 :03	E	$p(B)$.
029	00 :03 :08	P	Le 4, pour tout événement
030	00 :03 :08	E17	A
031	00 :03 :09	P	A, la probabilité de l'événement plus la probabilité de l'événement contraire est égal à 1
032	00 :03 :15	E17	égal à 1
033	00 :03 :17	P	5. Je suis sûr que ça va être ça là.
034	00 :03 :21	E16	Si
035	00 :03 :22	P	quel que soit
036	00 :03 :23	E16	Si A et B sont
037	00 :03 :23	P	deux événements, c'est ça ? P de
038	00 :03 :26	E16	A union B
039	00 :03 :27	P	$A \cup B$
040	00 :03 :28	E16	égale à $P(A) + P(B)$
041	00 :03 :29	P	égale à $P(A)$
042	00 :03 :30	E16	plus $P(B)$
043	00 :03 :31	P	plus $P(B)$
044	00 :03 :32	EE	moins $p(A \cap B)$
045	00 :03 :34	P	moins $p(A \cap B)$ et 6,
046	00 :03 :40	E	Si A

047	00 :03 :43	P	Oui ! On avait dit si A est composé de
048	00 :03 :46	E	e_1
049	00 :03 :47	P	J'ai changé l'écriture hein. Jusqu'à e_k alors la probabilité l'événement A.
050	00 :03 :56	E	A
051	00 :03 :57	P	est la somme des
052	00 :03 :58	E	des
053	00 :03 :58	P	des probabilités des événements élémentaires qui le composent. Et en 7. Oui j'écoute.
054	00 :04 : 14	E4	Si tous les événements ont la même probabilité
055	00 :04 : 15	P	Attention. Si tous les événements
056	00 :04 : 16	E	Si tous les événements
057	00 :04 : 19	EE	élémentaires
058	00 :04 : 20	P	les événements élémentaires
059	00 :04 : 25	EE	ont la même probabilité
060	00 :04 : 25	E	sont équiprobables,
061	00 :04 : 29	E	Equiprobables
062	00 :04 : 31	P	Voilà sont équiprobables ça veut dire ont la même probabilité, sont équiprobables alors pour tout événement A.
063	00 :04 : 39	EE	A.
064	00 :04 : 40	P	$P(A)$
065	00 :04 : 41	E	égale à cardinal de A
066	00 :04 : 42	P	égale à cardinal de A
067	00 :04 : 43	E	sur cardinal de Oméga
068	00 :04 : 45	P	sur cardinal de Oméga.
069	00 :04 : 46	E	Oméga.
070	00 :04 : 46	P	Alors voyons, il semble qu'on a utilisé tout ce qu'il y a là hein ?
071	00 :04 : 48	EE	Oui !
072	00 :04 : 49	P	Bon ceci c'est un constat de tout le temps ; mais ça-là a été utilisé plusieurs fois, le 2 ; le 3 aussi a été utilisé ; le 4 plusieurs fois ; le 5 aussi. Maintenant tout dernièrement on tournait autour de 6.
073	00 :05 : 04	E	et de 7.
074	00 :05 : 06	P	Et de 7, c'est-à-dire on ne nous avait donné aucune probabilité, on dit de calculer la probabilité de l'événement. Alors on voyait si on a la probabilité des événements élémentaires, qu'on est dans le 6 ; mais si on n'a pas les moyens d'avoir la probabilité des événements élémentaires et surtout s'il y a des mots qui nous permettent de comprendre que les événements élémentaires sont équiprobables, nous avons utilisé le 7. On a trouvé que le 7, la formule 7 là est ; on a tendance à la dernière séance, c'est qu'on a tendance à

			l'utiliser parce qu'elle est facile à utiliser et on a dit qu'il faut de précautions, il faut s'assurer que
075	00 :05 : 55	E	Tous les événements
076	00 :05 : 55	P	Tous les événements élémentaires sont
077	00 :05 : 57	P	équiprobables
078	00 :05 : 58	P	Equiprobables, sinon c'est le 6 qu'on va utiliser. Donc c'est là où on était et maintenant nous allons aborder l'exercice 6. Et qui va nous lire ça ?
079	00 :06 : 11	E17	Ici.
080	00 :06 : 11	P	Oui.
081	00 :06 : 12	E17	Exercice.
082	00 :06 : 13	P	Adéline.
083	00 :06 : 17	E17	On considère une cible de tirs à l'arc comme l'indique la figure ci-après.
084	00 :06 : 21	E14	S'il vous plaît monsieur, on n'a pas terminé l'exercice 5.
085	00 :06 : 25	EE	Non. On a terminé.
086	00 :06 : 27	P	Non on a donné des indications sur ça. Ça va être la même méthode. Oui il dit qu'on n'a pas terminé l'exercice 5. C'était quoi déjà ? à quel niveau ?
087	00 :06 : 37	E14	Déterminer ; calculer la probabilité que le nombre formé comporte uniquement des chiffres pairs.
088	00 :06 : 43	P	Oui, qu'est-ce qu'on, ici déjà, on sait que vous avez déjà déterminé toutes les éventualités.
089	00 :06 : 51	E	Oui
090	00 :06 : 52	P	On a dit à défaut de déterminer c'est qu'il faut un moyen de trouver leur nombre parce qu'on voulait utiliser la formule 7. C'est bien ça hein ?
091	00 :06 : 59	EE	Oui.
092	00 :07 :01	P	Il faut trouver un moyen d'avoir leur nombre. Nous avons trouvé 216 à partir d'une méthode indiquée par euh
093	00 :07 :08	E3	Edgard
094	00 :07 : 10	P	Edgard, très bien. Maintenant Pacôme tu es d'accord qu'on veut utiliser cardinal de A sur cardinal de Oméga.
095	00 :07 : 18	E14	Oui.
096	00 :07 : 18	P	Et A c'est l'événement le nombre formé comporte uniquement des chiffres pairs. Il faut les compter aussi de la même manière qu'on a compté les éléments d'Oméga. Les chiffres pairs sont composés de quoi ?
097	00 :07 : 33	EE	2, 4.
098	00 :07 : 35	P	2.
099	00 :07 : 35	E	4, 6.
100	00 :07 : 38	P	6.
101	00 :07 : 40	E	Pas 8 hein.

102	00 :07 : 40	P	Maintenant quel est leur nombre ?
103	00 :07 : 42	E	On a :
104	00 :07 : 43	P	Edgard a dit : on sait qu'il y a, ça peut commencer par 2 ou ça peut commencer 4, enfin en regardant sa méthode ça peut par 6. Ce qui commence par 2 et le 2 ^e chiffre peut être
105	00 :08 : 00	E	2.
106	00 :08 : 01	P	2 ou bien
107	00 :08 : 03	E	4
108	00 :08 : 04	P	Ou bien
109	00 :08 : 06	E	6.
110	00 :08 : 06	P	6 Ce qui commence par 2 et le deuxième chiffre est 2 le troisième chiffre peut être
111	00 :08 : 13	E	2.
112	00 :08 : 14	P	2 ou bien 4
113	00 :08 : 17	E	Ou bien 6
114	00 :08 : 18	P	Ici pareil 2, 4, 6. Comment on a appelé ça ?
115	00 :08 : 22	E14	Arbre de choix
116	00 :08 : 24	P	Arbre de choix. Alors pour les nombres qui commencent par 2, on peut avoir au total combien ? 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Les nombres qui sont formés de chiffres pairs et qui commencent par
117	00 :08 : 44	E	par 2.
118	00 :08 : 45	P	On a 9. On est d'accord ?
119	00 :08 : 52	EE	Oui.
120	00 :08 : 53	P	Alors et au total, on va avoir combien ? Les nombres pour 4 on aura combien ?
121	00 :08 : 59	E3	9 fois 4.
122	00 :08 : 59	P	9 et pour 6 on aura combien ?
123	00 :09 : 01	EE	9.
124	00 :09 : 01	P	9.
125	00 :09 :02	E3	9 fois 4
126	00 :09 :03	P	Donc on peut trouver ce cardinal de A, ça fait 9 fois.
127	00 :09 : 05	E	3.
128	00 :09 : 06	P	9 fois 3. Bon on pensait l'avoir comme ça en partant la dernière fois. Pacôme c'est bien ? Sinon on sera obligé de les déterminer, de les écrire tous. On sait que quand il s'était agi d'avoir seulement deux lancés, c'était facile à faire mais là avec trois on a vu comment c'est compliqué. Avec 4 on voit déjà que vous n'allez même pas accepter commencer par les écrire ou bien on va essayer ?
129	00 :09 : 35	EE	Non.

130	00 :09 : 36	P	Mais alors en ce moment c'est qu'il faut trouver des méthodes puisque c'est le nombre qu'on veut, cardinal de Oméga et cardinal de A. C'est qu'il faut voir mais par quelles méthodes, les arbres de choix sont indiqués ici pour avoir le nombre. Donc on va faire l'arbre de choix quand c'est long on ne va pas tout présenter mais avec 1 déjà on peut avoir une idée de ce que les autres peuvent être. Bon alors on peut passer à l'exercice 6 Pacôme ?
131	00 :10 : 02	E14	Oui.
132	00 :10 : 03	P	Ok ! Euh Adéline on t'écoute.
133	00 :10 : 05	E17	On considère une cible de tirs à l'arc comme l'indique la figure ci-après. Lorsque la fléchette atteint la cible le tireur note le nombre des points inscrits dans la couronne où se trouve la fléchette. Sachant que la probabilité d'atteindre une couronne est proportionnelle au nombre de points inscrits dans la couronne, calcule : 1) les probabilités des événements élémentaires de l'univers. 2) la probabilité de l'événement le tireur note un nombre premier.
134	00 :10 : 50	P	Voilà mais est-ce qu'il y a des mots qui ne sont pas compris ? Ce texte est compris par tout le monde ? Oui oui Sergio ?
135	00 :11 : 06	E16	La phrase-là, je n'ai pas compris. Sachant que la probabilité d'atteindre une couronne est proportionnelle au nombre de points inscrits dans la couronne.
136	00 :11 : 14	P	Sergio dit la phrase là : sachant que la probabilité d'atteindre une couronne est proportionnelle au nombre de points inscrits dans la couronne. Est-ce qu'il y a des couronnes là vraiment ? Sur la figure on a les couronnes non ?
137	00 :11 : 32	EE	Oui.
138	00 :11 : 33	P	Il y a des nombres qui sont inscrits ?
139	00 :11 : 35	EE	Oui.
140	00 :11 : 36	P	Vous lisez quoi comme nombre
141	00 :11 : 38	EE	2, 3, 5, 10.
142	00 :11 : 40	P	2, 3, 5, 10. On dit que la probabilité d'atteindre une couronne est proportionnelle au nombre de points inscrits dans la couronne. Qui peut, qui a une compréhension de ça ? Et qui peut essayer de nous expliquer ce qu'il comprend par ça ? (Silence) Quel est le mot qui pose problème ici ?
143	00 :12 :25	EE	Proportionnelle
144	00 :12 :26	P	Proportionnelle ; quand dit-on que des nombres sont proportionnels ?
145	00 :12 :30	E3	Sont égaux, sont égaux. (tout bas)

146	00 :12 :31	P	Quand ; quand dit-on ; lorsque je prends a et b, a et b sont proportionnels à x, y veut dire quoi ? a et b sont proportionnels aux nombres x, y, ça veut dire quoi ? oui a sur b ! Non Ghislaine refuse. Tu refuses non ?
147	00 :13 : 07	E9	Non hein monsieur.
148	00 :13 : 07	E	a sur b.
149	00 :13 : 09	P	Non pas a sur b a sur ?
150	00 :13 : 12	E	x
151	00 :13 : 12	P	a sur x
152	00 :13 : 16	EE	égale à b sur y.
153	00 :13 : 18	P	Egale à b sur y. ça c'est pour 2. Ici on a combien ? Oui combien ?
154	00 :13 : 30	EE	On a 4.
155	00 :13 : 31	E	4.
156	00 :13 : 32	P	On a 4. Donc on peut dire les probabilités d'obtention de 2, de 3, de 5, et de 10 sont proportionnelles à quels nombres ? Aux nombres
157	00 :13 : 49	E	2
158	00 :13 : 50	P	2
159	00 :13 : 50	EE	3
160	00 :13 : 51	P	3,5
161	00 :13 : 52	E	5
162	00 :13 : 52	P	et 10. C'est ce que signifie l'expression-là ça. En réalité, on veut dire les quatre probabilités dans l'ordre là sont proportionnelles à ces quatre nombres dans l'ordre avec la définition qu'il y a là. Maintenant le passage est compris ?
163	00 :14 : 04	EE	Oui !
164	00 :14 : 05	P	Oui vous travaillez pour dix minutes en groupe.
165	00 :29 : 13	P	Bien nous allons faire le point. Groupe 3 vous avez fini non ?
166	00 :29 :17	E	Non !
167	00 :29 :18	E	On a fini.
168	00 :29 :19	E17	Non ! On n'a pas fini.
169	00 :29 :21	E	C'est faux hein. On a fini.
170	00 :29 :21	E	On a fini. On a fini.
171	00 :29 :23	E	Il reste quoi ?
172	00 :29 :26	P	Oui comme la dernière fois, on envoie le groupe 3 au tableau ? Ou bien c'est le groupe 2 qui ira au tableau ?
173	00 :29 :42	E14	Non ! Le groupe 4 ira au tableau.
174	00 :29 :44	P	Oui mais vous savez que c'est tout le monde qui veut faire.
175	00 :29 :47	E	Oui.
176	00 :29 :48	P	Même si un groupe va au tableau finalement c'est tout le monde ...

177	00 :29 :53	E14	Nous, on a envie d'écrire ce qu'on a fait pour voir.
178	00 :29 :56	P	Ce qui est sûr est que tout le monde a écrit, c'est valable. À travers vos interventions, on saura ce que chaque groupe a écrit. D'accord ? Non mais le groupe 2 n'a pas fonctionné, ils ont disputé même. Il y a les groupes 1,3 et 4 qui ont fonctionné. Je ne sais pas ce qu'il y a eu dans le groupe 2. Ils ont cassé le groupe en deux. Ça n'a pas fonctionné parce que ce n'est pas le travail individuel, on n'a pas entendu d'échanges entre eux.
179	00 :36 :20	P	Non on ne va pas ; on discute de la première question d'abord. Comme on a l'habitude de faire. Donc tu nous présentes ce que tu as mis au tableau.
180	00 :36 :37	E17	Calculons.
181	00 :36 :39	P	Les autres, vous pouvez suivre ce qu'elle nous présente.
182	00 :36 :48	E17	Calculons : 1) La probabilité des événements élémentaires de l'univers Ω $\Omega = \{2, 3, 5, 10\}$. Et la probabilité de Ω est égale à, d'après la propriété 6, probabilité de Ω est égale à $p(\{2\}) + p(\{3\}) + p(\{5\}) + p(\{10\})$ Sachant que la probabilité d'atteindre une couronne
183	00 :37 :28	EE	une couronne
184	00 :37 :33	E17	est proportionnelle au nombre de points inscrit dans la couronne, $\frac{p(\{2\})}{2} = \frac{p(\{3\})}{3} = \frac{p(\{5\})}{5} = \frac{p(\{10\})}{10}$. Donc $p(\{2\}) = \frac{1}{4} = 0,25$.
185	00 :38 :00	EE	Pourquoi ? Pourquoi ?
186	00 :38 :07	P	Si vous avez de questions à poser, levez le doigt et posez la question et qu'on entende.
187	00 :38 :14	E14	Monsieur
188	00 :38 :18	P	Oui !
189	00 :38 :19	E14	Ils ont posé la formule lorsqu'il y a équiprobabilité, ce que je vais demander, est-ce qu'ils ont eu la preuve, euh où est ce qu'ils ont eu la preuve que les événements sont équiprobables ?
190	00 :38 :30	P	Pour $p(\{2\}) = \frac{1}{4}$ là, vous avez utilisé quelle formule ?
191	00 :38 :35	E17	7 C'est la formule 7.
192	00 :38 :38	P	Voilà ! Pacôme demande si vous avez utilisé la formule 7, où est-ce que vous avez eu l'information que les événements élémentaires sont équiprobables ? C'est sa question ça. Oui répondez ! Oui Edgard !

193	00 :39 :05	E15	Dans l'exercice, on avait dit que la probabilité d'atteindre une couronne est proportionnelle au nombre de points inscrits dans la couronne. Donc c'est cette partie-là que nous avons traduit au tableau.
194	00 :39 :21	P	Que vous avez traduit par cette ligne ?
195	00 :39 :23	E15	Oui
196	00 :39 :23	P	D'accord. Maintenant et ici ? C'est ici. La question de Pacôme est ici.
197	00 :39 :33	E15	D'après cette relation-là, euh P de l'événement A, c'est égal à $\frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$.
198	00 :39 :43	P	D'après cette relation. Comment ? Non non il dit d'après cette relation, alors $p(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$. Moi il me plaît bien de comprendre comment est-ce que c'est d'après cette relation. C'est parce qu'il y a des dénominateurs ? Je ne sais pas hein ! Je pose la question. Parce que pour avoir, pour utiliser cardinal de A sur cardinal de Oméga, c'était à quelle condition ?
199	00 :40 :21	E	Si tous les événements élémentaires sont équiprobables.
200	00 :40 :25	P	Oui qui veut parler pour qu'on entende ? Oui restons là.
201	00 :40 :31	E11	C'est lorsque les événements élémentaires ont la même probabilité.
202	00 :40 :34	P	Lorsque, c'est-à-dire, si vraiment c'est $\frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$ comme vous le dites là, c'est lorsque les événements élémentaires ont la même probabilité. Mais votre relation dont vous avez parlé là, est-ce que ça montre que $p(2) = p(3) = p(5) = p(10)$? Vous avez dit que $\frac{p(\{5\})}{5} = \frac{p(\{10\})}{10}$. Il y a déjà de différence entre les deux. Dans cette relation-là on n'a pas $p(\{5\}) = p(\{10\})$.
203	00 :41 :02	E	Non !
204	00 :41 :04	P	Dans ça là non plus on n'a pas $p(\{2\})$. Donc on a déjà les événements élémentaires visiblement qu'on voit qu'ils n'ont pas la même probabilité. Donc c'est clair que comme le propose, voudrait proposer Pacôme certainement que c'est clair que on ne devrait pas utiliser $\frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$. Une fois encore le groupe3 résiste à ça. Le groupe 3 a trop de facilité à aller vers $\frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$. C'est très bien, c'est très bien mais pour tout le monde, il faut que la condition quand dans toute propriété où on met "si" on donne une hypothèse avant de mettre la conclusion, c'est qu'il faut que l'hypothèse soit toujours vérifiée d'abord avant qu'on ait le courage d'utiliser

			l'hypothèse. Donc jusqu'ici on peut dire c'est bien écrit mais qu'est-ce que vous proposez pour la suite. Là le groupe, oui vous voulez proposer quelque chose.
205	00 :42 :06	E2	On peut utiliser la formule 4.
206	00 :42 :16	P	Comment ?
207	00 :42 :19	E2	Selon moi on va dire probabilité de 2 plus probabilité de
208	00 :42 :33	E	3.
209	00 :42 :34	E	Non ! 2 barre.
210	00 :42 :36	P	Oui ! 2 barre là c'est quoi ?
211	00 :42 :38	E	C'est
212	00 :42 :38	P	l'événement contraire de 2 c'est quoi ?
213	00 :42 :42	E2	-2.
214	00 :42 :43	P	Ah Comment -2, Non non attention. Quand on dit un événement contraire, il faut comprendre dans le sens de l'événement contraire. L'événement contraire d'un événement, c'est l'événement qui n'est pas réalisé lorsque cet événement-là est réalisé. Si vous n'avez pas 2 vous avez quoi ? C'est ça le contraire.
215	00 :43 :07	E	3.
216	00 :43 :08	P	C'est 3 seul ?
217	00 :43 :09	E	4.
218	00 :43 :10	E	5.
219	00 :43 :11	P	Si on n'a pas 2, qu'est-ce qu'on a ? Quel événement on a ? L'événement oui mais ce n'est pas un événement élémentaire on va dire. Les événements contraires. La réunion de deux événements contraires donne quoi ? donne ? La réunion de deux événements contraires ça donne quoi ?
220	00 :43 :37	E16	Oméga.
221	00 :43 :38	P	Je n'entends pas
222	00 :43 :42	E16	Oméga.
223	00 :43 :43	P	Ça donne Oméga. L'événement contraire de {2} c'est quoi alors ?
224	00 :43 :51	E6	C'est Oméga.
225	00 :43 :54	P	On a dit la réunion de deux événements contraires donne Oméga. Et l'événement contraire d'un événement A c'est l'événement qui n'est pas réalisé lorsque A est réalisé. Maintenant tu parles de l'événement {2}, l'événement élémentaire {2}. Quel est son contraire ? Quel événement on va trouver pour que quand on va prendre l'événement {2} union cet événement là on ait Oméga et que l'intersection des deux soit l'ensemble vide. C'est ça la question. Donc ce n'est pas -2 comme tu le dis mais c'est quoi ici l'événement contraire de {2}.

226	00 :44 :33	E	Oméga-{2}.
227	00 :44 :34	E	L'événement
228	00 :44 :34	P	Oméga privé
229	00 :44 :35	E	privé de 2
230	00 :44 :37	P	de 2 mais c'est quoi Oméga-{2}.
231	00 :44 :39	E	Ça veut dire que
232	00 :44 :41	P	C'est composé de
233	00 :44 :42	EE	3
234	00 :44 :42	P	3
235	00 :44 :42	E	3
236	00 :44 :43	P	5
237	00 :44 :43	E	5
238	00 :44 :43	P	10
239	00 :44 :43	E	10
240	00 :44 :44	P	Donc ce n'est pas 3 seul qu'on va dire, ce n'est pas 10 seul qu'on va dire parce que c'est des événements contraires. Donc ce n'est pas -2 rien ne peut s'appeler comme ça. Mais le 4 si on veut utiliser le 4 dans quelle condition, dans quelle condition on utilise le 4 ? La formule 4 ? On a utilisé le 4 deux fois déjà.
241	00 :45 :06	E	Si A est un événement.
242	00 :45 :08	P	Oui mais c'est clair, quand on parle de probabilité ce n'est que des probabilités d'événements ; Non nous on l'a utilisé ici. Dans quelle condition on l'a utilisé ? Oui oui Pacôme ?
243	00 :45 :22	E14	On l'utilisait souvent lorsqu'on a deux événements.
244	00 :45 :22	P	Oui !
245	00 :45 :25	E14	Qui sont contraires.
246	00 :45 :27	P	Voilà. On a déjà un événement dont on connaît la probabilité et on veut maintenant la probabilité de l'événement contraire. C'est en ce moment qu'on a utilisé le 4 les deux fois. On a un événement dont on connaît déjà la probabilité et on veut la probabilité de l'événement contraire. Donc on peut laisser le 4 hein ?
247	00 :45 :47	EE	Oui !
248	00 :45 :48	P	Oui !
249	00 :45 :50	E14	Si on veut, on peut écrire les autres probabilités en fonction de la probabilité de 2
250	00 :45 :50	P	D'accord viens présenter pour nous. Il propose, il propose qu'on puisse écrire les autres probabilités, toutes les autres probabilités en fonction de la probabilité de {2}. En réalité c'est le mot proportionnel qui pose problème ici. Il serait bien de suivre pour voir.

251	00 :51 :00	P	Arrêtons-nous là pour analyser ce qui est écrit jusque, jusqu'ici. Non prend le chiffon. Analysons. Il a dit qu'on peut écrire, euh, suivez ! suivez ! suivez ! Il a dit qu'il va écrire les autres probabilités en fonction de la probabilité de {2}. On a cette égalité. Est-ce que de l'égalité là, on peut dire que $p(\{3\}) = \frac{3}{2}p(\{2\})$?
252	00 :51 :31	EE	Oui monsieur !
253	00 :51 :32	P	Oui, je crois. C'est la même chose qu'il a eu à faire pour ceci. D'accord ? On l'accepte ?
254	00 :51 :39	EE	Oui !
255	00 :51 :40	P	Maintenant, $p(\Omega)$, permettez que je m'arrête là. Ω ça va s'écrire avec accolade ?
256	00 :51 :49	E	Non !
257	00 :51 :49	P	Il est déjà ensemble. Ω désigne déjà un ensemble. Maintenant $p(\Omega)$ est-ce que l'accolade là ça marche ?
258	00 :52 :00	E	Non.
259	00 :52 :01	P	C'est comme si on écrivait Ω . On écrivait les éléments comme ici par exemple. Alors donc c'est comme il a repris $p(\Omega)$ qui était développé par le groupe 3. Le groupe 3, vous l'avez développé mais ça n'a pas été utilisé. On est d'accord ? vous avez écrit $P(\Omega)$ égal à $p(\{2\}) + p(\{3\}) + p(\{5\}) + p(\{10\})$ mais ça n'a plus servi. Maintenant eux ils le font, ils l'utilisent et on trouve comme ça $p(\{2\}) = \frac{P(\Omega)}{10}$, avec $P(\Omega)=1$. Donc $p(\{2\})$ ça va fait 1 sur 10 égal à 0,1. Ça peut aller non ?
260	00 :52 :47	E	Oui
261	00 :52 :49	P	OK ! Maintenant il veut calculer les autres, bon si je l'ai arrêté pour qu'on gagne un peu de temps. Il avait déjà la relation. On ne va pas démontrer plusieurs fois. Mais non, non vas-y ! On peut connaître $p(\{3\})$ qui est $\frac{3}{2}p(\{2\})$. Donc au lieu de reprendre, on a $\frac{3}{2} \times \frac{1}{10}$. C'est bien ça non ?
262	00 :53 :20	E	Oui !
263	00 :53 :21	P	Ça fait $\frac{3}{20}$.
264	00 :53 :31	E	Combien ?
265	00 :53 :32	EE	0,15
266	00 :53 :35	P	Juliette dit qu'elle s'entend qu'il n'y a pas de virgule, c'est ça ?
267	00 :53 :39	E3	Il n'y a pas de chiffre après les deux chiffres
268	00 :53 :42	P	Qu'il n'y a pas deux d'autres nombres après les 15. Ok ! (Silence) $\frac{5}{2}p(\{2\})$. Oui $p(5)$ ça donne ?
269	00 :54 :16	E	0,25

270	00 :54 :25	P	Oui P(10) ça fait 5x P(2). Oui je crois qu'on peut accepter comme parce qu'on a utilisé non seulement la proportionnalité, la proportionnalité a été exploitée. Le groupe 3 l'a écrit aussi mais ne l'a pas exploité. On est d'accord. On l'a écrit mais on ne l'a pas exploité. Si ça a été, si on exploitait effectivement les deux formules, les deux développements faits par le groupe 3, on pouvait arriver à ce que le groupe 4 a complété. Alors je crois qu'on va conclure la question, l'exercice par la question 2. On ne va pas traîner pour ça, pour qu'on puisse passer à autre chose. Le petit 2 dit quoi ? Calculer la probabilité pour que
271	00 :55 :37	E	De l'événement.
272	00 :55 :38	E11	Calculer la probabilité de l'événement « le tireur note un nombre premier ».
273	00 :55 :43	P	Oui. Quelqu'un pour proposer comment est-ce qu'on va rédiger ça ? On va juste donner la rédaction puisque le plus important est fait. Non une question, une question bête que je veux poser hein : on va utiliser quelle formule ? Oui Sergio ; on va utiliser quelle formule ? Oui si Sergio ne veut pas quelqu'un du groupe 3. Je pose la question autrement : on va utiliser la formule 7 non ?
274	00 :56 :18	E16	Non.
275	00 :56 :20	P	Voilà, le groupe 3 a dit non déjà. Mais si ce n'est pas 7 on va utiliser quoi ?
276	00 :56 :22	EE	6.
277	00 :56 :24	P	6. Puisqu'on n'a pas les probabilités des autres. Ce n'est pas 7. C'est 6. Alors petit 2. Oui sa rédaction, on veut la probabilité.
278	00 :56 :34	EE	De l'événement le tireur note un nombre premier.
279	00 :56 :37	P	Quelqu'un pour me proposer la, ce qu'on va écrire.
280	00 :56 :42	E	Ici monsieur.
281	00 :56 :42	P	On commence par toi.
282	00 :56 :44	E16	Soit A l'événement « le tireur note un nombre premier »
283	00 :56 :47	P	Oui très bien. On avait dit si l'événement n'est pas encore nommé on va le nommer.
284	00 :56 :51	E	Nommer.
285	00 :56 :53	P	Soit A l'événement « le tireur note un nombre premier »
286	00 :57 :02	E16	le tireur note un nombre premier.
287	00 :57 :06	P	Le Tireur
288	00 :57 :08	E	note
289	00 :57 :08	P	note donc il atteint un nombre premier.
290	00 :57 :20	E16	A est composé des éventualités.
291	00 :57 :20	P	A est composé des éventualités

292	00 :57 :24	E16	2
293	00 :57 :24	P	2
294	00 :57 :25	E16	3
295	00 :57 :25	P	3
296	00 :57 :26	E16	5
297	00 :57 :27	P	5.
298	00 :57 :30	E16	D'après la formule 6
299	00 :57 :31	P	D'après la formule 6
300	00 :57 :33	E16	$P(A)$
301	00 :57 :34	P	$P(A)$
302	00 :57 :35	E16	égal à $P(\{2\})$
303	00 :57 :42	P	2
304	00 :57 :43	E16	plus P de l'événement élémentaire 3 plus P de l'événement élémentaire 5
305	00 :57 :50	P	Bon on avait les valeurs : 0,1
306	00 :57 :53	E16	plus
307	00 :57 :54	EE	$0,15+0,25$
308	00 :58 :00	P	25
309	00 :58 :04	E	C'est 0,25
310	00 :58 :08	P	Ça fait 0,5. C'est –à dire à partir du moment où vous avez réglé la première question. Toujours par la formule 6, je ne vois pas qu'est-ce qui peut nous bloquer pour la question.
311	00 :58 :22	E	2.
312	00 :58 :22	P	2 Est-ce que c'est compris ?
313	00 :58 :25	EE	Oui monsieur.
314	00 :58 :26	P	Quelqu'un a-t-il de question de clarification d'éclairage ? Oui.
315	00 :58 :36	E	C'est parce que 10 n'est pas un nombre premier qu'il n'est pas dans l'ensemble ?
316	00 :58 :41	P	Oui parce qu'on a dit l'événement « le tireur note un nombre premier ». Si le tireur doit noter un nombre premier, quelles sont les possibilités qu'il a ? C'est 2,3 et 5. 10 n'est pas premier parce qu'il admet plus de deux diviseurs.
317	00 :59 :00	E	Oui.
318	00 :59 :01	P	On a dit : un nombre premier est un nombre qui admet exactement deux diviseurs, exactement deux, pas 1. 10 admet comme diviseurs 1
319	00 :59 :10	E	1, 2
320	00 :59 :11	P	2
321	00 :59 :12	E	5
322	00 :59 :13	P	5 et 10. Admet déjà,4. Qu'est-ce qu'on fait ? Vous prenez note ou bien on passe à l'exercice suivant.

323	00 :59 :25	E	Suivant.
324	00 :59 :27	P	On passe à l'exercice suivant. Donc c'est compris.
325	00 :59 :30	EE	Oui.
326	00 :59 :31	P	Exercice 7, Ah ! vous vous n'avez pas ! (Silence) hé ! reconstituez-moi le groupe2. Le groupe 2 il ne faut pas que le groupe 2 soit en deux groupes. Quel est le problème nous on tranche non ? Eh vous, vous deux ici là poussez un peu vers ici. Vous qui ne voulez pas vous bougez, chacun va bouger un peu. C'est parce que vous ne voulez pas, vous discutez de tous. Vous bougez un Peu. C'est bon. Vous aussi, vous bougez. Qui a le sac ? ça y est, c'est vrai qu'il un petit soleil mais savez que ça part progressivement. Oui Kenneth l'exercice 7 là, tu nous lis ça.
327	01 :01 :38	E7	Un sac contient deux jetons rouges et trois jetons blancs indiscernables au toucher. 1) On tire au hasard un jeton dans le sac, on note sa couleur puis on le remet dans le sac. On tire un deuxième jeton, on note sa couleur puis on remet ce dernier dans le sac. On tire un troisième jeton, on note sa couleur. a) Calcule la probabilité de tirer deux jetons rouges et un jeton blanc dans cet ordre b) Calcule la probabilité de tirer deux jetons rouges et un jeton blanc. 2) On tire au hasard simultanément trois jetons dans le sac. Quelle est la probabilité que les trois jetons soient rouges.
328	01 :02 :34	P	Oui, euh question de compréhension. Oui.
329	01 :02 :44	E4	Question : je veux savoir ce qu'on appelle jeton
330	01 :02 :49	P	jeton
331	01 :02 :50	E4	Oui !
332	01 :02 :54	P	Bon mais considère que c'est un objet. C'est un objet. Par exemple lorsque vous jouez les dés là, les pions que vous déplacez pour le jeu de dé, c'est des jetons c'est comme des pièces d'argent mais il y a pas mal de, c'est des objets comme un peu les pions que vous déplacez euh pour jouer au jeu de ludo. Oui, autre clarification, autre question de clarification ; Il y a combien d'expériences aléatoires dans l'exercice ?
333	01 :03 :46	EE	3.
334	01 :03 :48	P	Expérience aléatoire. Parce que quand on n'a pas l'expérience aléatoire, on ne peut pas bien cerner hein.
335	01 :03 :58	E14	Il y a 1.
336	01 :03 :59	P	Non il n'y a pas une seule expérience aléatoire ; Non il n'y a pas trois.

337	01 :04 :04	EE	2.
338	01 :04 :05	P	La première est où ? Oui qui va me lire entièrement la première ? Oui oui.
339	01 :04 :17	E	On tire au hasard un jeton du sac, on note sa couleur puis on remet. On tire un deuxième jeton et on note sa couleur. C'est la première expérience aléatoire.
340	01 :04 :29	P	Non, ce n'est pas fini ; est ce que l'expérience là est finie ?
341	01 :04 :34	E	Non.
342	01 :04 :35	P	C'est-à-dire ce qu'on est en train de décrire comme expérience là est fini ?
343	01 :04 :38	EE	Non.
344	01 :04 :38	P	Non, on dit : on tire au hasard un jeton dans le sac, on note sa couleur puis sans le remettre dans le sac, on tire un deuxième jeton, on note sa couleur puis sans remettre ce dernier dans le sac on tire un troisième jeton, on note sa couleur point. Ça c'est là, donc le petit 1) a une expérience aléatoire. L'expérience aléatoire c'est comme ça que c'est constitué. Ça là, on a dit, on a tiré les jetons l'un après l'autre non ?
345	01 :05 :05	EE	Oui.
346	01 :05 :05	P	On dit qu'on a fait un tirage successif et on a dit sans remettre, on dit qu'on a fait un tirage successif sans remise. Je ne veux pas, ce n'est pas le vocabulaire-là qui importe. Je veux dire mais si vous trouvez quelque part on parle de « on tire trois jetons successivement sans remise » c'est ce que ça veut dire ça. On en tire une première fois, on a regardé et sans remettre dans l'urne ou dans le sac on tire une deuxième ainsi de suite. Regardons le petit 2), c'est là où il y a la deuxième expérience aléatoire ?
347	01 :05 :41	E	Oui.
348	01 :05 :41	P	Donc on a deux probabilités différentes si on veut. Quelle est l'expérience aléatoire du petit 2) ? Oui
349	01 :05 :52	E17	On tire au hasard simultanément trois jetons dans le sac.
350	01 :05 :55	P	On tire au hasard simultanément trois jetons dans le sac. Ça veut dire quoi simultanément ?
351	01 :06 :05	E	En même temps, ça se suit.
352	01 :06 :06	P	En même temps. Ça ne se suit pas hein. Si on prend les, quand on veut prendre, on prend les trois d'un coup. Alors que dans la première expérience aléatoire quand on veut prendre les trois, on va prendre un d'abord,
353	01 :06 :20	E	D'abord deux.
354	01 :06 :21	P	Après deux mais sans remettre, après. Ça peut aller ? On a mis combien de minutes ? 10 minutes

355	01 :06 :30	E16	Ça fait vingt-cinq minutes en tout.
356	01 :06 :33	P	Non on va le faire en euh euh, on va le faire en travail en groupe. Non pas les vingt-cinq minutes. On peut les décomposer après. Dix minutes d'abord. C'est sûr 10 minutes pour le petit 1), on va régler ça et 10 minutes pour le 2)
357	01 :08 :04	E4	S'il vous plaît monsieur, une question. Ils ont dit indiscernables au toucher, cela veut dire quoi ?
358	01 :08 :10	P	Indiscernables au toucher, ça veut dire quoi ?
359	01 :08 :12	E11	En les touchant, on ne peut pas connaître la couleur.
360	01 :08 :12	E16	On ne peut pas savoir si c'est le rouge ou bien blanc.
361	01 :08 :19	P	Donc en prenant, on ne peut pas savoir ce qu'on, on ne peut pas distinguer, on ne peut pas distinguer en faisant le tirage ; au toucher on ne peut pas distinguer si on ne voit pas. Donc seulement au toucher. (01 :08 :35)
362	01 :15 : 15	P	Hé vous n'allez pas faire les 10 minutes ; On va faire un premier point. Quand on circule pour voir ce que vous avez écrit. Mais ces formules-là on les connaît maintenant. On peut effacer hein ?
363	01 :15 : 25	EE	Oui !
364	01 :15 : 27	P	Ça c'est pour nous laisser la possibilité que ce qui est là soit recopié après. D'accord ?
365	01 :15 : 33	EE	Oui !
366	01 :15 : 34	P	On les, on connaît. Exercice 7 alors petit 1) Pour calculer la, d'abord écrivons soit A
367	01 :15 : 53	E	la probabilité.
368	01 :15 : 54	P	Non pas la probabilité.
369	01 :15 : 55	E	Non.
370	01 :15 : 55	E	L'événement
371	01 :15 : 56	P	l'événement
372	01 :15 : 58	E16	tirer deux jetons rouges et un jeton blanc.
373	01 :16 : 00	P	L'événement
374	01 :16 : 02	EE	tirer deux jetons rouges et un jeton blanc
375	01 :16 : 06	P	tirer deux jetons
376	01 :16 : 08	E	rouges
377	01 :16 : 10	P	rouges et un jeton
378	01 :16 : 15	E	blanc
379	01 :16 : 16	P	blanc dans cet ordre. Alors j'ai entendu quelqu'un dire dans cet ordre. « Dans cet ordre » veut dire quoi ? ça signifie quoi ?
380	01 :16 : 35	E4	Suivant l'ordre donné
381	01 :16 : 36	P	Oui mais suivant l'ordre. Vous expliquez ordre par ordre. Il faut qu'on clarifie. Qu'est-ce qu'on veut ? le mot ordre là.

382	01 :16 : 45	E16	En suivant comment on tire.
383	01 :16 : 47	P	Non non. Si vous le dites comme ça vous n'avez pas encore dit ; dans cet ordre, ça veut dire quoi ? deux jetons rouges et un jeton blanc dans cet ordre.
384	01 :17 : 00	E4	Il faut prendre l'expérience en suivant la même démarche.
385	01 :17 : 03	P	Non ! on tourne autour des mots. Ce n'est pas comme ça qu'on explique les choses.
386	01 :17 : 07	E6	Lors des trois tirages, il y aura d'abord deux jetons rouges puis un jeton blanc.
387	01 :17 : 12	P	Voilà ! Lors des trois tirages il va avoir deux rouges donc le premier est
388	01 :17 : 19	E	rouge.
389	01 :17 : 19	P	Rouge le deuxième est rouge et le troisième est blanc.
390	01 :17 : 22	E	Blanc
391	01 :17 : 23	P	C'est parce qu'ici c'est le tirage de combien de jetons ?
392	01 :17 : 26	E	3.
393	01 :17 : 27	P	3. L'expérience aléatoire comporte un tirage de combien de jetons ?
394	01 :17 : 30	E	3 jetons.
395	01 :17 : 31	P	Et si on veut écrire alors une éventualité, ça va être composé comment ? De combien d'éléments ? De 3.
396	01 :17 : 40	E	De 3
397	01 :17 : 41	P	Je vous ai vu écrire les éventualités avec une seule chose. De, un, j'ai vu des éventualités qui sont composées d'un seul élément ou bien ? C'est pour ça que j'ai justement arrêté pour qu'on s'entende. Dès qu'on a défini, vous avez défini l'expérience aléatoire il faut avoir une idée de comment se présentent les éventualités. Ou bien quand on trouve $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Non ! Ω est constitué de quoi ? Des éventualités. Est-ce qu'il y a une éventualité ici qui peut s'appeler 1.
398	01 :18 : 12	E	Non !
399	01 :18 : 12	P	Non, puisque l'expérience aléatoire c'est qu'on a fait le tirage de trois jetons. Les éventualités sont composées chacune de trois jetons. Donc on ne peut pas dire que c'est 1, 2, 3, 4, 5. C'est-à-dire il faut suivre l'expérience aléatoire pour aller jusque comment sont les éventualités avant d'apprécier. On est d'accord ?

400	01 :18 : 35	EE	Oui !
401	01 :18 : 36	P	Bien ! Voilà ! On comprend ce que c'est dans cet ordre. Mais nous voulons utiliser quelle formule ? Parce que c'est le problème qu'il faut régler. C'est par rapport aux formules qu'on peut savoir ce qu'on veut aller chercher. On ne va pas chercher d'abord avant d'utiliser la formule. Oui Fadyl, on va utiliser ?
402	01 :18 :	E6	6 et 3.
403	01 :18 :59	P	6 et 3. Et à quelle, dans quelle condition... Pour le 6 c'est qu'il faut connaître les probabilités des événements élémentaires. Vous pouvez le connaître ? Oui c'est vrai que pour le 6 on a aussi un "si" hein. Si A est composé de, alors la probabilité de A c'est la somme des probabilités des événements élémentaires qui compose A. Mais là il faut qu'on puisse avoir les probabilités des événements élémentaires. Est-ce qu'on peut l'avoir ? c'est possible hein ?
404	01 :19 : 46	E	Oui.
405	01 : 19 :51	P	Pour l'utiliser, c'est qu'il faut qu'on ait un moyen d'avoir la probabilité des événements élémentaires. Oui Adéline.
406	01 : 20 :04	E17	Je ne sais pas
407	01 : 20 :05	P	Est-ce qu'il y a des données dans l'exercice qui permettent d'obtenir la probabilité de chaque événement élémentaire ?
408	01 :20 : 13	E	Non.
409	01 :20 : 20	P	Le non là n'est pas franc. Oui Camir
410	01 :20 : 26	E2	Ici selon moi, notre première phrase, ils ont dit : un sac contient deux jetons rouges et trois jetons blanc indiscernable au toucher. Donc selon moi, ils ont les mêmes probabilités. Une fois que eux tous sont indiscernable au toucher donc ils ont les mêmes probabilités selon moi.
411	01 : 20 :58	P	Oui Camir dit parce que, c'est à cause du mot indiscernable au toucher qu'il pense que les événements élémentaires ont tous la même
412	01 : 21 :04	E	probabilité.
413	01 : 21 :05	P	Probabilité. Qu'est-ce que vous en pensez ? Parce qu'on a dit indiscernable au toucher, que les événements élémentaires ont tous la même probabilité. Oui Fadyl en pense quoi ? Oui entendons-nous parce qu'on n'a pas encore décidé de la formule. Mais ce n'est pas un vote qu'on va faire. On est d'accord ?
414	01 : 21 :33	E6	Oui.
415	01 : 21 :33	P	C'est qu'on sera tous d'accord et c'est pour ça que il ne doit pas avoir des gens qui vont dire, je ne suis pas pour, je ne suis

			pas contre. Nous sommes sur le terrain de raisonnement. On revient donc à la proposition de Camir. Il dit : on a dit indiscernable au toucher. Et par rapport à ça les évènements élémentaires ont la même probabilité
416	01 : 22 :01	E6	S'il vous plaît monsieur. Et si les jetons rouges étaient plus, étaient plus de taille que les jetons blancs ?
417	01 : 22 :08	P	Ils seraient indiscernables ? Ils ne seraient pas indiscernables au toucher. S'il y a plus de taille c'est qu'on peut, on peut distinguer. Au toucher on va dire mais il y a tel qui est plus grand que l'autre. Oui Fadhil on conclut quoi ? Que les évènements élémentaires ont la même
418	01 : 22 :27	E6	probabilité.
419	01 :22 : 27	P	Et moi j'ajoute même si on ne disait pas que c'est indiscernable au toucher, comment peut-on connaître la probabilité de chaque évènement élémentaire ici ? Il n'y a pas de données. Comme dans l'exercice 6 où on nous avait envoyé chercher la probabilité des évènements élémentaires. Ce n'est pas, ce n'est pas à cause de la question hein. On a dit : la probabilité de chaque évènement élémentaire, est proportionnelle au numéro. On est d'accord ? Donc il y a une donnée qui permettait d'aller chercher la probabilité de chaque évènement élémentaire. Ici il y a aucune indication qui nous qui nous envoie vers la probabilité de chaque évènement élémentaire. Non seulement on n'a pas donné mais il n'y a pas d'indication pour aller les chercher. Mais il y a le mot surtout indiscernable au toucher parce que ça peut être oublié hein. Même si c'est oublié, on ne serait que dans la formule 7 ; D'accord ? Mais le mot indiscernable au toucher renforce l'hypothèse que les évènements élémentaires sont équiprobables. D'accord ? Donc on peut. Alors ça veut dire qu'on utilise quelle formule ?
420	01 :23 : 30	EE	7.
421	01 :23 : 31	P	7. Et quand on veut utiliser la formule 7, on a besoin de déterminer quoi ?
422	01: 23 : 38	EE	Ω , cardinal de Ω .
423	01: 23 : 39	P	Cardinal de Ω et comment est-ce que nous déterminons cardinal de Ω ?
424		E	Avec l'expérience aléatoire.
425	01 :23 :56	P	Oui avec l'expérience aléatoire. On a déjà déterminé cardinal de Ω ici hein Comment on a fait pour déterminer ?
426	01 :23 : 59	E4	On a écrit l'ensemble

427	01 :24 : 01	P	On a écrit l'ensemble. Donc c'est exprès qu'on n'a pas dit d'écrire. Dans les autres, dans les autres, peut être que si on avait demandé écrire toutes les éventualités vous allez écrire. Maintenant que vous avez défini la formule qui est cardinal de A sur cardinal de Ω . Ah vous allez chercher le Ω et compter le nombre. S'il faut écrire tous les éléments de Ω , on va écrire tous les éléments de Ω et compter le nombre. Si comme Edgard, on a une méthode pour les déterminer, on va les déterminer. C'est le nombre qu'on cherche. Ça peut aller ? C'est le nombre qu'on cherche. Donc on ne va pas oublier ça. Soit Ω l'univers des éventualités. On a besoin de ça aussi. Vous avez dit les jetons étant indiscernable au toucher
428	01 :24 :54	E	Oui
429	01 : 24 :56	P	Les jetons étant indiscernables au toucher, les évènements élémentaires sont équiprobables, alors $P(A)$ donne quoi ?
430	01 :25 :32	E	Cardinal de A
431	01 :25 :34	P	Cardinal de A
432	01 :25 :36	E	sur cardinal de Ω
433	01 :25 :38	P	sur cardinal de Ω . Si on n'a pas déjà donné les probabilités et que on a, on a donné une expérience aléatoire et on donne un évènement on demande calculer la probabilité, c'est 6 ou 7. Dans les autres, les autres là sont fonctions des probabilités hein. On est d'accord ? Quand on a dit $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$, c'est que il faut connaître $P(A)$, il faut connaître P de
434	01: 25 : 58	EE	B.
435	01 :25 :59	P	B et autre. Mais ici c'est qu'on n'a pas P de quelque chose. On dit, voici l'expérience aléatoire, calculer la probabilité. Depuis le premier mai, depuis le lundi passé, c'est où le six ou le sept mais c'est maintenant quand on connaît les probabilités d'un évènement et en nous donne un autre évènement qui est fonction des évènements qui existent déjà que les autres formules peuvent venir. Bien maintenant à vous de savoir comment déterminer cardinal de Ω surtout le Ω . Est-ce que on n'a pas besoin de clarifier un peu en disant qu'on n'a noté les jetons rouges là comment ?
436	01 :26 :38	EE	R.
437	01 :26 :39	P	R_1 . Ils sont combien ?
438	01 :26 :43	EE	2.
439	01 :26 :44	P	Non ça c'est l'évènement ça. On a besoin de cardinal de Ω et dans, on a besoin de Ω .
440	01 :26 :50	E	Ω .
441	01 :26 :50	P	Et de Ω , on a besoin aussi de ?

442	01 :26 :52	E	A.
443	01 :26 :53	P	De A ; Alors je disais : il y a combien de jetons rouges ?
444	01 :27 :00	E	2.
445	01 :27 :01	P	Et combien de jetons blancs ?
446	01 :27 :01	E	1.
447	01 :27 :03	E	3.
448	01 :27 :03	P	3. Et si on les notait R_1, R_2 .
449	01 :27 :06	EE	Oui.
450	01 :27 :07	P	Et J_1 .
451	01 :27 :08	E	J.
452	01 :27 :08	P	Non B_1, B .
453	01 :27 :09	E	B_1 .
454	01 :27 :20	P	2, B_3 . Peut-être pour encore R_1 et R_2 , les jetons rouges et B_1, B_2 ,
455	01 :27 :28	E	B_3
456	01 :27 :28	P	B_3 les jetons blancs. Pour vous laisser continuer.
457	01 :27 :35	E	Oui.
458	01 :27 :36	P	Je demande. Donnez-moi un exemple d'une éventualité. Oui.
459	01 :27 :47	E12	Blanc, rouge, blanc.
460	01 :27 :48	P	Pardon
461	01 :27 :50	E	Blanc, Rouge, Blanc.
462	01 :27 :52	P	Bon on ne peut plus dire ça puisqu'on les a notés. Quel blanc ? On les a distingués.
463	01 :27 :57	E	B_1 .
464	01 :27 :57	P	C'est vrai, Blanc Rouge Blanc est comme une éventualité mais c'est presque un évènement parce que ça peut se composer des plusieurs éventualités. Ah je veux une seule éventualité. Une seule éventualité et non un évènement
465	01 :28 :19	E16	R_1, R_1 .
466	01 :28 :20	P	Pardon.
467	01 :28 :22	E	R_1 .
468	01 :28 :22	P	Non. R_1 ne peut pas être une éventualité parce qu'on a dit c'est trois, c'est une éventualité est composée de
469	01 :28 :28	EE	3.
470	01 :28 :29	P	Est composé de 3 jetons. Ce n'est pas ça ? Oui
471	01 :28 :33	E	$R_2 B_2$
472	01 :28 :34	P	R.
473	01 :28 :35	E	2.
474	01 :28 :38	P	$R_2 B_2$ est composé de combien de jetons ?
475	01 :28 :41	EE	2.
476	01 :28 :43	P	Est-ce que pour cette expérience là un résultat et une éventualité peuvent être comme ça ?

477	01 :28 :46	EE	Non.
478	01 :28 :47	P	Non.
479	01 :28 :49	E16	$R_1R_2B_1$.
480	01 :28 :51	P	Par exemple. C'est-à-dire que lorsque vous avez l'expérience aléatoire, il faut aller jusqu'à déterminer quelques exemples d'éventualités pour bien comprendre ; parce que si on n'a pas d'exemple d'éventualité bien compris, comment on va déterminer Ω ? On va on va le constituer comment ? Donc R_1
481	01 :29 :11	E	R_2 .
482	01 :29 :13	P	R_2 par exemple.
483	01 :29 :14	E	B_1 .
484	01 :29 :15	P	B_1 . Ça fait une éventualité. Une autre par exemple oui
485	01 :29 :30	E	$B_1B_2R_1$.
486	01 :29 :32	E	$R_1R_2B_2$.
487	01 :29 :36	P	Ici, on veut en donner. Il y a en plein hein. Même si chacun donne une éventualité on ne va pas finir les éventualités
488	01 :29 :49	E	B_3 .
489	01 :29 :50	P	Oui c'est Adéline qui donne !
490	01 :29 :52	E	Parle non.
491	01 :29 :54	E	R_1 .
492	01 :29 :56	P	Bon je prends ici
493	01 :29 :56	E	B_3
494	01 :29 :57	P	B_3
495	01 :29 :59	E	R_1
496	01 :30 :00	P	R_1
497	01 :30 :01	E	R_2
498	01 :30 :03	P	R_2 . C'est possible.
500	01 :30 :04	E	Oui.
501	01 :30 :05	P	B_3 d'accord. Non mais oui Adéline voulait donner pour elle
502	01 :30 :11	E17	$R_1R_2B_2$.
503	01 :30 :14	P	R_1R_2 .
504	01 :30 :15	E17	B_2 .
505	01 :30 :16	P	B_2 . Comme ici alors. Oui qui trouve une éventualité pertinente à donner encore ?
506	01 :30 :23	E	R_1R_2
507	01 :30 :24	P	Oui pourquoi c'est R_1R_2 . On ne peut pas avoir R_1R_2 ? Oui je parle à Adéline. Pourquoi c'est toujours R_1R_2 . Est-ce qu'on ne peut pas avoir R_2 et avoir R_1 .
508	01 :30 :34	EE	Oui.
509	01 :30 :35	P	R_2
510	01 :30 :37	E	R_2
511	01 :30 :38	P	R_1

512	01 :30 :39	E	B_3
513	01 :30 :39	P	B_3 . Est-ce que $R_2R_1B_2$ C'est la même chose que ce qui est ici ?
514	01 :30 :47	EE	Non.
515	01 :30 :49	P	Donc.
516	01 :30 :49	EE	Non.
517	01 :30 :50	P	On a dit on tire l'un après
518	01 :30 :51	EE	l'autre.
519	01 :30 :52	P	Voilà donc vous pouvez, on peut faire comme avant. C'est-à-dire déterminer tout Ω . Et avoir cardinal de Ω . Déterminer aussi le A comme on l'a fait sous la pluie là quoi et avoir... Oui c'est pour ça ; c'est caché ; c'est pour ça que l'expérience aléatoire se lit correctement pour être comprise. On calcule, on ne peut pas calculer la probabilité d'un évènement sans bien cerner, appréhender l'expérience aléatoire jusqu'à avoir une idée de comment se présente les éventualités. Bon à partir de là si on a décidé d'une formule on saura quoi faire. Donc votre travail de groupe reprend encore maintenant pour dix minutes. (01 :31 :33)
520	01 :36 :58	P	On a vu démarrer, on avait dit qu'on ne va pas traîner. On a vu certains démarrer on a vu euh bon d'autre, il y a ici où on n'a pas respecté exactement les éventualités donc on a dû reprendre. Là dans le groupe 4, ils sont en train de faire les arbres de choix pour déterminer le nombre, dans les groupes 1 et 3, ils sont entrain de déterminer toutes les éventualités. D'accord ? On va le faire directement puisque vous avez, vous vous êtes déjà engagés. Maintenant le drame c'est qu'il ne faut pas oublier une seule éventualité, il faut s'organiser de manière que toutes les éventualités puissent sortir et qu'il n'y ait pas une en moins. La dernière fois, on a raté une ici ou bien on a eu une en plus. Quand vous avez fait le compte ça fait les deux cents seize ?
521	01 :38 :02	E	Oui !
522	01 :38 :03	P	Bien donc. Héé supposons qu'on ait fait, qu'on, qu'on cherche à mettre les, l'arbre de choix ici par exemple pour le cardinal de Ω . Au premier tirage, au premier tirage quelles sont les possibilités qu'il y a ? On peut avoir ? Oui j'écoute
523	01 :38 :37	EE	R_1, R_2 .
524	01 :38 :39	P	On peut avoir R_1 .
525	01 :38 :42	E	R_2 .
526	01 :38 :43	P	On peut avoir R_2 .
527	01 :38 :46	EE	B_1 .
528	01 :38 :47	P	Quoi encore ?

529	01 :38 :48	E	B ₁
530	01 :38 :48	P	B ₁
531	01 :38 :50	E	B ₂
532	01 :38 :52	P	B ₂ , B ₃ . Pour faire l'arbre de choix si on opte pour l'arbre de choix. C'est la préoccupation du groupe 4 par exemple. Oui est ce qu'il, est ce que le groupe 4 suit ?
533	01 :39 :05	E	Oui.
534	01 :39 :06	P	Ça c'est les possibilités pour le premier tirage. Possibilité du deuxième tirage. Pour le deuxième tirage quelles sont les possibilités ? Ici
535	01 :39 :22	E	R ₂ .
536	01 :39 :24	P	R ₂ . Pourquoi pas R ₁ ?
537	01 :39 :26	EE	R ₁ .
538	01 :39 :28	P	Attention. Il n'y a pas R ₁
539	01 :39 :31	E	Il n'y a pas R ₁ .
540	01 :39 :33	P	Parce qu'il faut suivre l'expérience aléatoire. On a dit : on prend un jeton et sans le remettre. Donc on ne peut pas prendre R ₁ et revenir encore
541	01 :39 :41	E	sur R ₁ .
542	01 :39 :42	P	Prendre R ₁ . L'expérience aléatoire ne permet pas. Donc ici comme il y a R ₁ , il ne peut pas avoir R ₁ encore. Il peut avoir alors ?
543	01 :39 :52	EE	R ₂
544	01 :39 :53	P	R ₂
545	01 :39 :54	EE	B ₁
546	01 :39 :56	P	B ₁
547	01 :39 :56	EE	B ₂
548	01 :39 :58	P	B ₂
549	01 :39 :59	E	B ₃
550	01 :40 :00	P	B ₃ . Avant de continuer. Je mets troisième tirage
551	01 :40 :04	P	Oui.
552	01 :40 :05	P	Et au troisième tirage, premier tirage, deuxième, troisième tirage. Ici on va avoir quoi ?
553	01 :40 :13	EE	B ₁ .
554	01 :40 :13	P	On peut avoir.
555	01 :40 :14	EE	B ₁
556	01 :40 :15	P	B ₁
557	01 :40 :16	EE	B ₂
558	01 :40 :17	P	B ₂
559	01 :40 :19	EE	B ₃
560	01 :40 :21	P	B ₃ . Et ici ?
561	01 :40 :23	EE	B ₂ , B ₃
562	01 :40 :27	P	B ₂

563	01 :40 :28	E	R ₁
564	01 :40 :29	E	R ₂ .
565	01 :40 :30	P	R ₂ c'est possible
566	01 :40 :31	E	Oui
567	01 :40 :31	P	R ₂ parce qu'il n'y a pas R ₂ sur la ligne
568	01 :40 :34	EE	Non.
569	01 :40 :35	P	On peut avoir R ₂
570	01 :40 :37	EE	B ₂
571	01 :40 :37	P	B ₂
572	01 :40 :38	EE	B ₃
573	01 :40 :39	P	B ₃ . Ce serait bien peut-être que c'est ennuyant.
574	01 :40 :40	P	Vous allez fait donc tous l'arbre de choix et donner le cardinal de Ω .
575	01 :40 :46	E	Oui.
576	01 :40 :47	P	Si on fait l'arbre de choix comme ça de toutes les façons si on fait seulement pour ceci ça va être la même chose pour les autres hein ?
577	01 :40 :51	EE	Oui.
578	01 :40 :52	P	Si on connaît le nombre pour ça comme Edgard nous avait indiqué ; là on peut avoir le cardinal de Ω . Faites-le et trouvez donc le cardinal de Ω . Ce que moi j'ai pris en compte c'est le fait que on ne remet pas là hein.
579	01 :41 :08	E	Oui.
580	01 :41 :09	P	C'est ça qui ne sortait pas dans le groupe 4 le fait qu'on ne remet. Alors qu'on avait lancé les dés, le même numéro pouvait revenir
581	01 :41 :16	E	Oui.
582	01 :41 :17	P	Pour les dés là, ça peut revenir c'est pour ça qu'on les a répétés mais ici ça ne revient pas. (01 :41 :20)
583	01 :49 :15	P	Vous n'évoluez pas exactement par rapport au temps qu'on s'est donné. Il semble que vous 3relâchez un peu. Si on a le cardinal de Ω donc c'est clair je peux enlever ceci pour dire que vous avez cardinal de Ω qui est égal à combien ?
584	01 :49 :28	EE	60.
585	01 :49 :29	P	60. Maintenant après cardinal de Ω qui est 60 avec l'arbre de choix que vous avez fait, cardinal de A on va déterminer.
586	01 :49 :41	E	Oui.
587	01 :49 :42	P	Que dit A ? les deux jetons rouges et un jeton blanc. Bon voilà donnons tous les cas. Alors quand on veut deux jetons rouges et un jeton blanc, le premier choix va donner quoi ?
588	01 :49 :57	EE	R ₁ .
589	01 :49 :58	P	R ₁ ou

590	01 :50 :00	EE	R ₂ .
591	01 :50 :01	P	Ou R ₂ voilà. Maintenant si le premier choix est R ₁ , le deuxième choix va être quoi ?
592	01 :50 :07	EE	R ₂ .
593	01 :50 :08	P	R ₂ . C'est un seul choix hein ?
594	01 :50 :11	EE	Oui.
595	01 :50 :12	P	D'accord. Et si le premier choix est R ₂
596	01 :50 :17	P	Le deuxième choix va être quoi ?
597	01 :50 :19	E	R ₁ .
598	01 :50 :19	P	R ₁ . Donc et ça c'est un seul choix. Maintenant le premier choix est R ₁ , le deuxième choix R ₂ , le troisième choix va être quoi ?
599	01 :50 :30	P	B ₁
600	01 :50 :31	P	B ₁
601	01 :50 :31	E	Soit B ₂
602	01 :50 :33	P	Soit B ₁ soit
603	01 :50 :35	E	B ₂
604	01 :50 :37	P	Soit B ₃
605	01 :50 :37	E	B ₃
606	01 :50 :38	P	Et ici ?
607	01 :50 :41	EE	B ₂
608	01 :50 :43	E	B ₁
609	01 :50 :44	P	B ₁
610	01 :50 :45	EE	B ₂
611	01 :50 :45	P	B ₂
612	01 :50 :47	EE	B ₃
613	01 :50 :47	P	B ₃ et que donne alors cardinal de A ?
614	01 :50 :52	EE	6.
615	01 :50 :53	P	Parce qu'on a 3 là-bas et 2 3 ici. Ça fait 6. Donc la probabilité de A ça fait 6 sur
616	01 :51 :00	E	60
617	01 :51 :01	P	60, égal à 1/10. On est d'accord ?
618	01 :51 :07	E	Oui !
619	01 :51 :08	P	Ça ils ont dit dans cet ordre. Rouge d'abord, et blanc ça peut aller ?
620	01 :51 :14	EE	Oui.
621	01 :51 :15	P	C'est le petit a ça hein. Petit b. soit B l'évènement quoi ici ? tirer deux jetons, deux jetons rouges et un jeton blanc. Quelle est la différence entre les deux évènements là ? Entre A et B ? Quelle est la différence entre l'évènement A : « tirer deux jetons rouges et un blanc dans cet ordre » et « tirer deux jetons rouges et un jeton blanc » ? Oui oui

622	01 :51 :59	E11	Pour la première expérience aléatoire, on suit un ordre.
623	01 :52 :03	P	Non c'est la même expérience aléatoire. Le premier évènement
624	01 :52 :06	E11	Oui ! Pour le premier évènement, on suit sur un ordre et pour le second il n'a pas d'ordre.
625	01 :52 :10	P	Non le second a d'ordre.
626	01 :52 :13	E16	Oui mais ce n'est pas
627	01 :52 :14	P	le second a d'ordre. C'est-à-dire quand on dit suit un ordre pour l'expérience aléatoire, il y a d'ordre.
628	01 :52 :20	E	Oui.
629	01 :52 :21	P	On prend un d'abord, on prend un ensuite et on prend. Donc généralement il y a d'ordre. C'est au niveau des évènements que la différence se pose. Oui tu veux parler ? Ok
630	01 :52 :34	E14	La différence c'est que pour le premier évènement on aura deux rouges et un blanc mais ici il suffit d'avoir un blanc et deux rouges.
631	01 :52 :46	P	Voilà c'est ce que tu veux nuancer. C'est-à-dire ici on peut avoir aussi un blanc d'abord avant d'avoir.
632	01 :52 :55	E	Deux rouges.
633	01 :52 :57	P	Deux rouges. Que bien on peut avoir un rouge, ensuite
634	01 :53 :01	E	Un blanc.
635	01 :53 :02	P	Un blanc et après ?
636	01 :53 :04	E	Un rouge.
637	01 :53 :04	P	Un rouge donc comme on n'a pas précisé l'ordre c'est un peu comme les, ce que vous entendez, les problèmes de tiercés et autres. Eh on a gagné en désordre, on a gagné dans l'ordre. Ici on pouvait dire que ça fait le désordre. Donc il y a un ordre dans le choix mais pour les évènements il y a d'autres ordres. Alors est-ce que le cardinal de Ω va changer ?
638	01 :53 :27	E	Non.
639	01 :53 :27	P	Ici. Non puisque on a la même expérience aléatoire
640	01 :53 :30	EE	Oui.
641	01 :53 :31	P	Quand on n'a pas changé d'expérience aléatoire le cardinal de Ω ne va pas changer. Qu'est ce qui va changer ?
642	01 :53 :37	EE	Cardinal de A.
643	01 :53 :38	P	Cardinal de B.
644	01 :53 :39	P	Bien voyons le cardinal de B. On fait l'arbre de choix aussi non ?
645	01 :53 :50	E	Oui.
646	01 :53 :50	P	Pour pour B, le premier choix peut nous donner quoi ?
647	01 :54 :03	E	R_1 .
648	01 :54 :04	E	B_1 .

649	01 :54 :05	EE	R ₁ .
650	01 :54 :05	P	On peut avoir R ₁ ? Oui.
651	01 :54 :07	EE	Oui.
652	01 :54 :07	P	Le premier choix c'est toutes les possibilités qu'on donne hein ?
653	01 :54 :09	E	R ₁ .
654	01 :54 :11	P	Ça peut être R ₁ , le deuxième ?
655	01 :54 :13	EE	R ₂ .
656	01 :54 :15	P	R ₂ c'est possible. Troisième ?
657	01 :54 :17	EE	B ₁
658	01 :54 :18	P	B ₁
659	01 :54 :19	E	B ₂ .
660	01 :54 :19	P	Non ! toujours premier choix hein. B ₂ ou bien
661	01 :54 :22	E	B ₃ .
662	01 :54 :23	P	B ₃ . Tout le monde est d'accord ?
663	1 :54 :25	EE	Oui.
664	01 :54 :26	P	On peut pour ça là, comme ils ont dit, comme ce n'est pas dans cet ordre, on peut bien avoir blanc d'abord avant d'avoir rouge. On est d'accord. Comme on peut avoir rouge. Maintenant quand a le premier choix a été R ₁ , le deuxième choix peut être quoi ? le premier, le deuxième choix peut être quoi ?
665	01 :54 :56	E	B ₁ .
666	01 :54 :57	P	B ₁ .
667	01 :54 :58	E	R ₂ .
668	01 :54 :59	P	Ça ne veut pas R ₂ ?
669	01 :55 :00	E	Oui
670	01 :55 :01	P	Oui ça peut être R ₂ . Ou bien
671	01 :55 :06	E	B ₁
672	01 :55 :07	P	B ₁
673	01 :55 :09	E	B ₂
674	01 :55 :10	P	B ₂
675	01 :55 :10	E	B ₃
676	01 :55 :12	P	ou B ₃ . Et ici on a déjà R ₁ , R ₂ , le troisième choix donne quoi ?
677	01 :55 :19	EE	B ₁ .
678	01 :55 :20	P	B ₁ .
679	01 :55 :20	EE	B ₂ .
680	01 :55 :22	P	Ou bien B ₂
681	01 :55 :23	E	B ₃ .
682	01 :55 :24	P	Ou bien B ₃ . Quand on a R ₁ B ₁ , le troisième choix donne quoi ?
683	01 :55 :29	EE	R ₂ .

684	01 :55 :31	P	R ₂ seul. Quand on a R ₁ B ₂ ? le troisième choix va donner quoi ?
685	01 :55 :36	EE	R ₂ .
686	01 :55 :39	P	R ₂ toujours et ici ?
687	01 :55 :42	E	R ₂ .
688	01 :55 :44	P	R ₂ . Donc voilà tous les, tous les choix lors que ça va être R ₁ le premier. Ici est ce que ce n'est pas pareil ? il y a combien d'éléments ici ?
689	01 :55 :55	E	6.
690	01 :55 :56	P	Au total 6 éventualités. C'est ça non ?
691	01 :56 :02	E	Oui.
692	01 :56 :03	P	Et ici on aura si le premier choix est R ₁ ? on aura combien d'éventualités au total ?
693	01 :56 :10	E	6.
694	01 :56 :11	P	6. ça va se passer comme ici ?
695	01 :56 :12	E	Oui
696	01 :56 :13	P	Exactement. Donc on va dire, on a 6 éventualités. Je ne sais pas. Maintenant faisons pour le B ₁ . Si le premier choix est B ₁ , le deuxième choix peut être quoi ?
697	01 :56 :29	EE	R ₁ .
698	01 :56 :29	P	R ₁ .
699	01 :56 :32	EE	R ₂ .
700	01 :56 :32	P	R ₂ . Il ne peut pas avoir B hein ?
701	01 :56 :34	E	Non.
702	01 :56 :35	P	Non parce qu'on veut un seul blanc.
703	01 :56 :36	E	Un seul blanc.
704	01 :56 :38	P	On est d'accord ? il ne peut pas avoir B. Dans Ω C'est qu'on a tout compté. Là il n'y a rien, on a pris toutes les éventualités. Mais ici par rapport à chaque évènement, on va suivre ce que l'évènement dit pour R ₁ R ₂ Ok. Et quand le premier choix B, le deuxième choix est R ₁ , qu'est ce qui peut être le troisième choix ?
705	01 :56 :57	EE	R ₂ .
706	01 :56 :58	P	Ah R ₂ .
707	01 :57 :05	EE	R ₁ .
708	01 :57 :06	P	Ici R ₁ . Bon mais on a combien d'éventualités ?
709	01 :57 :11	EE	2.
710	01 :57 :12	P	2 éventualités
711	01 :57 :14	EE	Pareil pour les autres.

712	01 :57 :15	P	Vous voyez ce n'est pas à multiplier par 5 hein. Ici pareil. Deux éventualités
713	01 :57 :25	E	Ici aussi pareil ?
714	01 :57 :25	P	Et ici ?
715	01 :57 :26	E	Pareil.
716	01 :57 :26	P	Pareil. Et quel est le cardinal de B ? cardinal de donne ?
717	01 :57 :36	E	18.
718	01 :57 :37	P	18.
719	01 :57 :38	E	18.
720	01 :57 :38	P	Et alors P(B) ça fait 18.
721	01 :57 :44	E	Sur 60.
722	01 :57 :44	P	Sur 60. Ça fait 3/10. Surtout ici c'est des choses qu'on est en train de prendre : l'un après l'autre avec l'arbre de choix, ça là, tout ce qu'on prend l'un après l'autre avec l'arbre de choix on peut le faire. Mais il faut tout faire pour respecter ce qui est indiqué. Quand on était au niveau de Ω , on sait que c'est tout qu'on voulait. Donc on dit bon au premier choix, on peut tout avoir mais au deuxième choix comme il n'y a pas de remise, comme c'est sans remise ça veut dire quand on a déjà le premier, le premier exclu, on ne gêne pas. Donc l'expérience aléatoire c'est quelque chose qu'il faut nettement comprendre pour pouvoir mieux réaliser, déterminer le cardinal de Ω et les autres cardinaux. Ça peut aller ?
723	01 :58 :31	EE	Oui !
724	01 :58 :33	P	J'avais dit on va finir à dix heures, c'est pour ça que je précipite. Il est dix heures depuis mais je ne veux pas qu'on dépasse onze heures. C'est pour ça que je suis revenu au tableau. Si c'est compris, c'est bien. Si non c'est bien que je vous laisse finir mais ça va nous amener très loin. D'accord ? bien le le le 2. L'expérience aléatoire a changé.
725	01 :58 :53	EE	Oui.
726	01 :58 :54	P	Donc on a un autre Ω .
727	01 :58 :56	E	Oui.
728	01 :58 :57	P	On est d'accord ? Qu'est-ce qu'on a dit là ?
729	01 :58 :59	E7	On tire au hasard simultanément trois jetons. Quelle est la probabilité que les trois jetons soient rouges.
730	01 :59 :07	P	Est-ce qu'on peut faire un arbre de choix ici ? Parce que pour l'arbre de choix c'est ceux qui vient l'un après
731	01 :59 :16	E	l'autre.

732	01 :59 :17	P	L'autre. Ici c'est qu'on prend tous. Il n'y a pas d'arbre de choix. On sera obligé de les écrire, d'écrire Ω lui-même. D'accord ? donc pour le petit 2, calcule la probabilité. Vous avez dix minutes pour calculer. On a pris simultanément. Ce n'est pas l'un après l'autre. Vous vous déterminez Ω et vous déterminer et c'est quel évènement déjà ?
733	01 :59 :44	E17	Tirer au hasard simultanément trois jetons.
734	01 :59 :50	P	C'est l'expérience aléatoire ça. L'évènement dont on veut calculer la probabilité.
735	01 :59 :55	EE	Trois jetons
736	01 :59 :56	P	les trois jetons
737	01 :59 :59	EE	soient rouges.
738	01 :59 :59	P	C'est possible ? il y a trois jetons rouges ?
739	02 : 00 :02	E16	Non il y a trois jetons à tirer dans le sac.
740	02 : 00 :08	P	Je dis l'évènement dont on veut calculer la probabilité
741	02 : 00 :13	E16	trois jetons soient rouges.
742	02 : 00 :14	P	Mais ce n'est pas possible ça !
743	02 : 00 :16	E17	Non ! Ce n'est pas possible.
744	02 : 00 :20	P	Non ! Les trois jetons soient blancs. Corrigez ça. Sinon ça fait l'évènement impossible. Ça peut aller ?
745	02 : 00 :36	E	Oui.
746	02 : 00 :36	P	Bon mais c'est ça que je vous laisse déterminer. Si un groupe fini, le groupe rentre. Je regarde et si c'est trouvé, le groupe rentre. Dès que c'est trouvé le groupe rentre. Hein ! Non. N'oubliez pas d'écrire dans les cahiers.
747	02 : 02 :51	P	Hé nous sommes d'accord que c'est toujours la formule 7 hein, pour le petit 2.
748	02 : 02 :55	EE	Oui.
749	02 : 05 :40	P	La première chose à déterminer c'est Ω . Vous vous intéressez trop d'abord à la question. C'est à Ω . Il faut, il faut déterminer d'abord Ω avant d'aller vers l'évènement. Peut-être que c'est moi qui aie mal présenté. Sinon que, en réalité c'est Ω qui est le premier, la première chose qui va, qui va intéresser
750	02 : 06 :00	E	Oui
751	02 : 06 :02	P	Est-ce qu'on se comprend ? c'est Ω d'abord, la première chose et c'est après ça que l'évènement va venir. On a pris simultanément on a dit non ?
752	02 : 06 :32	E	Oui.
753	02 : 06 :33	P	Donnez-moi une éventualité. C'est comme ça, ça se fait. Si vous voulez comprendre donner des exemples d'éventualités d'abord avant de commencer par travailler. Donnez-moi une éventualité de ce qui est ici, de cette expérience aléatoire
754	02 : 06 :51	E6	B_1

755	02 : 06 :52	P	Oui une seule, je reviens une fois encore. On a tiré combien de boules ?
756	02 : 06 :59	EE	3
757	02 : 06 :59	P	Est-ce qu'une éventualité peut être constituée d'une seule boule ?
758	02 : 07 :02	E	Non
759	02 : 07 :02	P	Pour avoir l'éventualité, c'est l'expérience aléatoire on suit
760	02 : 07 :06	E	Ici
761	02 : 07 :07	P	On, d'ailleurs c'est comme ça on a défini hein
762	02 : 07 :10	E	Oui
763	02 : 07 :11	P	Une expérience aléatoire, qui se souvient encore de la définition ? Tout le monde d'ailleurs. Oui mais il faut t'asseoir pour répondre.
764	02 : 07 :25	E4	Une expérience aléatoire est une expérience dont on ne peut pas prévoir avec certitude le résultat mais dont on connaît le résultat possible.
765	02 : 07 :35	P	Dont on peut connaître les résultats possibles, dont on ne peut pas prévoir avec certitude le résultat. Voilà donc et on a dit ce qu'on appelle éventualités c'est les résultats possibles. On ne peut pas avoir donc des éventualités sans suivre l'expérience aléatoire. il faut d'abord prendre l'expérience aléatoire, voir qu'est-ce qu'on a dit et la finalité. Ça permet d'obtenir quoi ? c'est ce que ça permet d'obtenir maintenant qui va être les éventualités. Donc ici B_1 n'en est pas une. C'est bien que tu aies posé le problème. Enfin que tu es donné directement. Oui maintenant hé (nom) tu peux donner, tu peux donner une éventualité ?
766	02 : 08 :17	E5	$R_1R_2B_1$.
767	02 : 08 :18	P	R_1 . On peut avoir $R_1R_2B_1$. Ça fait une éventualité. Mais et ici est-ce qu'il y a l'ordre ? il faut avoir forcément R_1 , R_2 ensuite et B_1 à la fin ?
768	02 : 08 :33	EE	Non.
769	02 : 08 :36	P	Parce qu'on a, on a pris une seule fois, une autre éventualité. Oui.
770	02 : 08 :44	E	R_2R_1B .
771	02 : 08 :46	P	R_2
772	02 : 08 :48	E	R_1B_2
773	02 : 08 :49	P	R_1
774	02 : 08 :50	E	B_2
775	02 : 08 :51	P	B_2 . Pourquoi tu ne mets pas B_1 ? Moi je prends B_1 . Est-ce que les deux-là sont différents ?
776	02 : 09 :00	E	Oui.

777	02 : 09 :01	P	Non ce n'est pas différent parce qu'on les a pris ensemble. Vous avez dit simultanément non ? On est a pris ensemble. Ce n'est pas différent. C'est la même chose. Oui mais c'est comme si on vous prend vous trois et on dit, mais écoutez, formez-moi une équipe de trois personnes. Et on prend une équipe de trois personnes. Quand on prend une équipe de trois personnes, on voit ça comme une seule chose hein.
778	02 : 09 :21	E	Oui.
779	02 : 09 :21	P	Maintenant comment on va dite cette équipe-là de trois personnes, c'est encore plusieurs équipes. Non quand on vous voit ensemble, c'est l'ensemble qu'on considère. Ce qui est différent de ce qu'on avait noté tout à l'heure.
780	02 : 09 :33	E	Oui.
781	02 : 09 :34	P	Là c'était les choses qui viennent successivement, l'un après
782	02 : 09 :37	E	L'autre
783	02 : 09 :38	P	L'autre. Mais ici c'est ensemble c'est pour aider le groupe 4. Les deux-là c'est la même. Ce sont des ensembles. C'est la même chose. On ne peut pas les compter deux fois. Ça peut aller ? donc si ça peut aller, donnons-en pour cette question Ω
784	02 : 09 :55	E4	Monsieur.
785	02 : 10 :01	P	Quoi ?
786	02 : 10 :02	E4	Ce que vous avez barré là n'est pas dedans ?
787	02 : 10 :03	P	Non c'est la même chose que ceux-ci. C'est –à-dire $R_1R_2B_1$ c'est la même chose que $R_2R_1B_1$. Celui qui a écrit ça là déjà dans, dans ce cas ici parce qu'on a dit qu'on a pris les trois ensembles. Les trois constituent un seul. En réalité, ce n'est pas R_1B_1 , je ne sais pas qu'est-ce qu'il faut effacer hein. J'efface quoi ?
788	02 : 10 :30	E	Milieu du tableau.
789	02 : 10 :39	P	En réalité parce qu'on a pris ça ensemble, les éventualités peuvent être notées avec accolade. Chaque éventualité est notée avec accolade. On l'a une fois. On est d'accord ? donc $\{R_1, R_2, B_1\}$ par exemple ça fait une éventualité. Une autre
790	02 : 11 :04	E11	$\{R_1, R_2, B_2\}$
791	02 : 11 :08	P	$\{R_1, R_2, B_2\}$
792	02 : 11 :13	E	R_1R_2
793	02 : 11 :14	P	R_1
794	02 : 11 :15	E	R_2
795	02 : 11 :16	P	R_2
796	02 : 11 :17	E	B_3
797	02 : 11 :17	P	B_3 . Une autre éventualité. R_1B_1
798	02 : 11 :32	E	B_2

799	02 : 11 :33	P	$B_2. R_1B_1B_3. R_1$
800	02 : 11 :46	E	B_2
801	02 : 11 :47	P	B_2
802	02 : 11 :48	E	B
803	02 : 11 :48	P	$B_3. \text{ On a fini avec tous les } R_1.R_2B_1.$
804	02 : 11 :59	E	B_3
805	02 : 12 :00	P	B_2
806	02 : 12 :02	E	R_2
807	02 : 12 :03	P	R_2
808	02 : 12 :05	E	B_3
809	02 : 12 :07	P	B_1
810	02 : 12 :09	E	B_3
811	02 : 12 :10	P	$B_3. R_2$
812	02 : 12 :14	E	B_2
813	02 : 12 :15	P	$B_2B_3. \text{ Il y en a encore hein. } B_1B_2$
814	02 : 12 :24	E	$B_3.$
815	02 : 12 :25	P	$B_3. \text{ Il semble que c'est tout. C'est les groupes d'éléments. Si on n'a pas ce groupe } 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. \text{ D'accord ? cardinal de } \Omega \text{ ici c'est égal à}$
816	02 : 12 :39	E	10.
817	02 : 12 :40	P	10. Et on peut chercher cardinal de de l'évènement
818	02 : 12 :44	EE	oui
819	02 : 12 :48	E	jeton
820	02 : 12 :48	P	de Ω c'est 10. Et cardinal de l'évènement. L'évènement c'est avoir
821	02 : 12 :54	E	trois
822	02 : 12 :55	P	trois boules
823	02 : 12 :57	E	trois jetons
824	02 : 12 :57	E	blanches.
825	02 : 12 :58	P	Trois jetons blancs. Cardinal de l'évènement, ça fait combien ?
826	02 : 13 :03	EE	1.
827	02 : 13 :03	P	1. Il y a une seule possibilité, c'est $B_1B_2B_3.$
828	02 : 13 :06	E	$B_3.$
829	02 : 13 :06	P	Or si on était dans ce qu'on avait fait tout à l'heure successivement, on n'aurait pas un seul.
830	02 : 13 :09	EE	Non.
831	02 : 13 :10	P	Il faut chercher le nombre de possibilités. Donc la probabilité sera 1 sur 10.
832	02 : 13 :15	E	Un dixième.
833	02 : 13 :16	P	Un dixième. Ça peut aller ?

834	02 : 13 :17	E	Oui.
835	02 : 13 :18	P	Bon mais on va arrêter la séance là.
836	02 : 13 :20	E	On n'a la même réponse.
837	02 : 13 :22	P	Bon ce n'est pas notre problème. C'est deux choses différentes. C'est deux choses différentes. Ça a donné la même réponse. On s'en fout. Surtout que les questions n'étaient pas, n'étaient pas les
838	02 : 13 :32	E	Mêmes.
839	02 : 13 :33	P	Les mêmes du tout. Et des expériences aléatoires différentes. Bon mais nous arrêtons la séance là. L'exercice 8, euh, ça je le permets. Vous allez chercher ça
840	02 : 13 :45	E	On va le fait en même temps.
841	02 : 13 :46	P	Non. Vous allez chercher ça dans, chacun dans son cahier. D'accord ?
842	02 : 13 :56	E	Oui !
843	02 : 13 :58	P	Et puis le jour de la composition vous allez échanger sur ça avant qu'on ne commence. C'est juste, c'est juste à regarder. D'accord ? ou bien on compose d'abord avant de voir.
844	02 : 14 :10	E	Oui !
845	02 : 14 :11	E	Monsieur.
846	02 : 14 :12	P	Lequel vous voulez ?
847	02 : 14 :13	EE	On voit d'abord.
848	02 : 14 :14	P	On voit d'abord
849	02 : 14 :15	E	Oui
850	02 : 14 :15	P	Avant de composer. Bien c'est bien. On va, on arrête la séance là. On compose quand maintenant ?
851	02 : 14 :24	E	On compose le samedi.
852	02 : 14 :31	P	Le samedi, c'est bon ?
853	02 : 14 :32	E	Non !
854	02 : 14 :33	P	Matin ou soir ?
855	02 : 14 :35	E	Matin
856	02 : 14 :36	P	A quelle heure ? 10h ou 08h ?
857	02 : 14 :38	E	10h.
858	02 : 14 :39	P	10h c'est bon parce que vous allez réviser aussi hein
859	02 : 14 :41	E	Oui !
860	02 : 14 :42	P	Vous finissez les devoirs quand ?
861	02 : 14 :43	EE	le mercredi soir.
862	02 : 14 :47	P	Vous finissez le devoir le mercredi ?
863	02 : 14 :48	E	Mercredi soir.
864	02 : 14 :51	P	Jeudi il n'y a pas devoir
865	02 : 14 :53	EE	Mercredi soir.

866	02 : 14 :56	P	Houn ?
867	02 : 14 :57	EE	Mercredi soir.
868	02 : 14 :59	P	Bien donc si vous finissez. Certainement vous allez réviser ce qui a été fait. Ou bien, ou bien vous allez venir composer sans rien. Eh pour cette révision, j'aurais voulu que vous ne. Bon en tout cas réviser, c'est quand même réviser ce qu'on a sous sa main.
869	02 : 15 :28	EE	Oui.
870	02 : 15 :29	P	Si ça vous plaît d'aller faire d'exercices de probabilités avec d'autres, enfin, pas avec d'autres. Mais entendons qu'on va utiliser, on va rester dans ce qu'on a fait là. Euh très bien donc on se retrouve le samedi à
871	02 : 15 :46	E	10h.
872	02 : 15 :47	P	A 8h alors. Puisque si vous avez le temps, vous avez le jeudi pour vous reposer, vous avez vendredi. Donc on peut le faire à 8h.

ANNEXE 18 : Quelques productions d'élèves dans le cadre du post test de 2013

Copie N°1 : Alexandre

B- LE TEST

Exercice 1

- 1) Donne la définition d'une expérience aléatoire en complétant la phrase suivante.

On appelle expérience aléatoire *une expérience qui se fait au hasard et dont l'on ne peut connaître les résultats à l'avance les résultats à obtenir.*

- 2) A et B sont deux événements de l'univers des éventualités Ω d'une expérience aléatoire et p est une probabilité définie sur Ω . Pour chacune des questions a), b) et c), encercle le numéro de la bonne réponse parmi les trois qui sont proposées.

- a) A et B sont incompatibles signifie que :

- (i) $A = \emptyset$ et $B = \emptyset$.
 (ii) $A \cap B = \emptyset$
 (iii) $A \cup B = \Omega$.

- b) A et B sont contraires signifie que :

- ~~(i) $A \cap B = \emptyset$.~~
 (ii) $A \cup B = \Omega$
 (iii) $A \cap B = \emptyset$ et $A \cup B = \Omega$.

- c) A et B sont équiprobables signifie que:

- (i) $p(A \cap B) = 0$;
 (ii) $p(A) = p(B)$;
 (iii) $p(A) + p(B) = 1$.

- 3) On considère une probabilité p sur l'univers des éventualités Ω d'une expérience aléatoire. Complète chacune des égalités suivantes :

a) $p(\Omega) = \sum_{\lambda=1}^p P(\{\omega_\lambda\})$

b) Si A et B sont deux événements de Ω , alors $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

- c) Si A est un événement composé des éventualités e_1, e_2, \dots, e_k , alors :

$$p(A) = p(e_1) + p(e_2) + \dots + p(e_k)$$

- d) Si tous les événements élémentaires sont équiprobables, alors pour tout événement A , on a :

$$p(A) = \frac{1}{n}$$

Exercice 2

On lance onze fois de suite un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on obtient les résultats suivants :

2 - 5 - 3 - 4 - 1 - 1 - 6 - 5 - 2 - 3 - 6.

Quel résultat obtiendrait-on si on lançait le dé une douzième fois ? Justifie ta réponse.

On ne pourra pas connaître le résultat avant la ^{12^e} lance car c'est une expérience aléatoire dont tout se fait dans le hasard.

Exercice 3

Dans l'un des bureaux d'une entreprise de vente par correspondance arrivent plusieurs catégories de courrier. Parmi les lettres reçues, 90% contiennent une commande, 45% contiennent une demande de cadeau et 40% contiennent une commande et une demande de cadeau. Les autres lettres ne sont jamais accompagnées de commande, ni de demande de cadeau. On prend une lettre au hasard dans ce bureau. On désigne par A l'événement « la lettre contient une commande » et par B l'événement « la lettre contient une demande de cadeau ».

- 1) Identifie dans le texte ci-dessus (de l'exercice 3) la proposition qui représente l'expérience aléatoire en complétant la phrase suivante :

La proposition qui désigne l'expérience aléatoire est : 40% contiennent une commande et une demande de cadeau

- 2) Calcule la probabilité que la lettre prise :
- a) ne contienne pas une demande de cadeau ;

$$P = \frac{0,9}{1,75}$$

$$p = 0,50$$

- b) contienne une commande ou une demande de cadeau.

$$P = \frac{0,9 + 0,4 + 0,45}{1,75}$$

$$P = 1$$

Exercice 4

Un sac contient trois jetons blancs et deux jetons noirs, tous indiscernables au toucher. On tire successivement sans remise trois jetons dans le sac.

Calcule la probabilité qu'exactement deux des trois jetons tirés soient blancs.

On a un tirage successive sans remise donc un arrangement.

$$P = \frac{A_3^2 \times A_2^1}{A_5^3}$$

$$P = \frac{3 \times 2 \times 2}{5 \times 4 \times 3}$$

$$P = \frac{4}{20}$$

Exercice 5

On lance un dé tétraédrique dont les quatre faces sont marquées a, b, c, d. et on note la marque de la face sur laquelle le dé se repose. Le dé est pipé de telle sorte que :

- les faces portant les marques a, b et d ont la même probabilité que le dé repose sur elles ;
- la probabilité que le dé repose sur la face marquée c est quatre fois plus grande que la probabilité que le dé repose sur l'une quelconque des autres faces.

1) Détermine la probabilité que le dé repose sur chacune des 4 faces.

$$p(a) = \frac{1}{4}$$

$$p(b) = \frac{1}{4}$$

$$p(d) = \frac{1}{4}$$

$$\text{on a } p(c) = 4p(a) \Leftrightarrow$$

$$p(c) = 4 \times \frac{1}{4} \Leftrightarrow p(c) = 1 \quad N$$

2) Calcule la probabilité que le dé repose sur une face dont la marque est une consonne.

on a: $\{b, c, d\}$ pour les consonnes.

soit Ω l'univers et P_C la probabilité que le dé repose sur une face dont la marque est une consonne on a :

$$P_C = \frac{\text{card } C}{\text{card } \Omega}$$

$$\text{card } C = 3$$

$$\text{card } \Omega = 4$$

$$\text{donc } P_C = \frac{3}{4} \quad N$$

4

Exercice 6

Un jour, un passant a été témoin d'un accident de circulation et a décidé d'appeler les sapeurs pompiers. Il dispose de 5 numéros des sapeurs pompiers mais ce jour-là, 3 des numéros étaient hors service. Le passant a composé au hasard un des numéros.

Calcule la probabilité que l'appel du passant tombe sur un numéro en service:

a) au premier essai ;

$$P = \frac{2}{5}$$

b) au second essai sachant qu'il n'a pas repris le premier numéro essayé.

$$P = \frac{2}{5} \times \frac{2}{4}$$

$$P = \frac{1}{5}$$

Exercice 7

L'univers des éventualités d'une expérience aléatoire étant $\Omega = \{0; 1; 2; 3\}$, on donne dans le tableau ci-dessous les probabilités des événements élémentaires.

e_i	0	1	2	3
$p(e_i)$	0,17	0,64	a	0,01

1) Détermine le nombre réel a.

On a: $p(0) + p(1) + p(2) + p(3) = p(\Omega)$ or $p(\Omega) = 1 \Leftrightarrow$
 $p(0) + p(1) + p(2) + p(3) = 1$ or $p(2) = a$ donc
 $a = 1 - (p(0) + p(1) + p(3))$; $a = 1 - (0,17 + 0,64 + 0,01)$
 $a = 0,18$

2) Calcule la probabilité que le résultat de l'expérience aléatoire soit un nombre impair.

Soit A « événement désignant les nombre impair » et Ω l'univers des éventualités de l'expérience :

On a: $P_A = \frac{\text{Card} A}{\text{Card} \Omega}$ $\text{Card} A = 2$ $\text{Card} \Omega = 4$ donc $P_A = \frac{2}{4}$; $P_A = \frac{1}{2}$

N

5

Exercice 1

- 1) Donne la définition d'une expérience aléatoire en complétant la phrase suivante.

On appelle expérience aléatoire ...

Aucune idée

- 2) A et B sont deux événements de l'univers des éventualités Ω d'une expérience aléatoire et p est une probabilité définie sur Ω . Pour chacune des questions a), b) et c), encerle le numéro de la bonne réponse parmi les trois qui sont proposées.

a) A et B sont incompatibles signifie que :

(i) $A = \emptyset$ et $B = \emptyset$.

(ii) $A \cap B = \emptyset$

(iii) $A \cup B = \Omega$

b) A et B sont contraires signifie que :

(i) $A \cap B = \emptyset$

(ii) $A \cup B = \Omega$

(iii) $A \cap B = \emptyset$ et $A \cup B = \Omega$.

c) A et B sont équiprobables signifie que:

(i) $p(A \cap B) = 0$;

(ii) $p(A) = p(B)$;

(iii) $p(A) + p(B) = 1$

- 3) On considère une probabilité p sur l'univers des éventualités Ω d'une expérience aléatoire. Complète chacune des égalités suivantes :

a) $p(\Omega) = 1$

b) Si A et B sont deux événements de Ω , alors $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

- c) Si A est un événement composé des éventualités e_1, e_2, \dots, e_k , alors :

$$p(A) = P(\{e_1\}) + P(\{e_2\}) + \dots + P(\{e_k\})$$

- d) Si tous les événements élémentaires sont équiprobables, alors pour tout événement A , on a :

$$p(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$$

On lance onze fois de suite un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on obtient les résultats suivants :

2-5-3-4-1-1-6-5-2-3-6.

Quel résultat obtiendrait-on si on lançait le dé une douzième fois ? Justifie ta réponse.

si on lançait le dé une douzième fois on peut obtenir comme résultat possible suivant :

5-3-4-1-1-6-5-2-3-6-1 ou 2-5-3-4-1-1-6-5-2-3-6-2

1-3-4-1-1-6-5-2-3-6-3 ou

5-3-4-1-1-6-5-2-3-6-4 ou

5-3-4-1-1-6-5-2-3-6-5 ou 2-5-3-4-1-1-6-5-2-3-6-6

Exercice 3

Dans l'un des bureaux d'une entreprise de vente par correspondance arrivent plusieurs catégories de courrier. Parmi les lettres reçues, 90% contiennent une commande, 45% contiennent une demande de cadeau et 40% contiennent une commande et une demande de cadeau. Les autres lettres ne sont jamais accompagnées de commande, ni de demande de cadeau. On prend une lettre au hasard dans ce bureau. On désigne par A l'événement « la lettre contient une commande » et par B l'événement « la lettre contient une demande de cadeau ».

- 1) Identifie dans le texte ci-dessus (de l'exercice 3) la proposition qui représente l'expérience aléatoire en complétant la phrase suivante :

La proposition qui désigne l'expérience aléatoire est : le hasard

- 2) Calcule la probabilité que la lettre prise :
- a) ne contienne pas une demande de cadeau ;

soit \bar{B} l'événement « lettre ne contenant pas une demande de cadeau »

$$P(\bar{B}) = 1 - P(B) \quad P(B) = 45\% = 0,45$$

$$P(\bar{B}) = 1 - 0,45 \Rightarrow \underline{P(\bar{B}) = 0,55}$$

- b) contienne une commande ou une demande de cadeau.

soit C l'événement « contienne une commande ou une lettre demande de cadeau »

$$\underline{P(C) = P(A) + P(B)}$$

$$P(C) = 0,9 + 0,45$$

$$\underline{P(C) = 1,35}$$

Exercice 4

Un sac contient trois jetons blancs et deux jetons noirs, tous indiscernables au toucher. On tire successivement sans remise trois jetons dans le sac.

Calcule la probabilité qu'exactement deux des trois jetons tirés soient blancs.

Soit X l'unique variable associée à cette expérience aléatoire

$$\text{card}(\Omega) = 5$$

et S l'événement « jetons tirés soient blancs »

$$P(S) = \frac{A_3^3 \times A_2^2}{A_5^3} \Rightarrow P(S) = \frac{3 \times 2}{20}$$

$$\underline{P(S) = 0,45}$$

Exercice 5

On lance un dé tétraédrique dont les quatre faces sont marquées a, b, c, d. et on note la marque de la face sur laquelle le dé se repose. Le dé est pipé de telle sorte que :

- les faces portant les marques a, b et d ont la même probabilité que le dé repose sur elles ;
- la probabilité que le dé repose sur la face marquée c est quatre fois plus grande que la probabilité que le dé repose sur l'une quelconque des autres faces.

1) Détermine la probabilité que le dé repose sur chacune des 4 faces.

$$P(\{a\}) = P(\{b\}) = P(\{d\}) = M$$

$$P(\{c\}) = J$$

$$J = 4M \quad ; \quad P(\Omega) = 1 = M + M + M + J$$

$$1 = 3M + J$$

$$1 = 3M + 4M$$

$$M = \frac{1}{7}$$

$$J = 4\left(\frac{1}{7}\right) \Rightarrow \underline{J = \frac{4}{7}} \quad (\text{suite voir page suivante})$$

2) Calcule la probabilité que le dé repose sur une face dont la marque est une consonne.

soit N l'événement « la marque est une consonne »

$$P(N) = P(\{b\}) + P(\{c\}) + P(\{d\})$$

$$= \frac{1}{7} + \frac{4}{7} + \frac{1}{7}$$

$$\boxed{P(N) = \frac{3}{7}}$$

Exercice 6

Un jour, un passant a été témoin d'un accident de circulation et a décidé d'appeler les sapeurs pompiers. Il dispose de 5 numéros des sapeurs pompiers, mais ce jour-là, 3 des numéros étaient hors service. Le passant a composé au hasard un des numéros

Calcule la probabilité que l'appel du passant tombe sur un numéro en service:

a) au premier essai ;

Aucune idée

b) au second essai sachant qu'il n'a pas repris le premier numéro essayé.

Aucune idée

Exercice 7

L'univers des éventualités d'une expérience aléatoire étant $\Omega = \{0; 1; 2; 3\}$, on donne dans le tableau ci-dessous les probabilités des événements élémentaires.

e_i	0	1	2	3
$p(\{e_i\})$	0,17	0,64	a	0,01

1) Détermine le nombre réel a.

$$P(\Omega) = 1 \Rightarrow 0,17 + 0,64 + a + 0,01 = 1$$

$$a = 1 - 0,82$$

$$\underline{\underline{a = 0,18}}$$

2) Calcule la probabilité que le résultat de l'expérience aléatoire soit un nombre impair.

-FIN-

Exercice 1

- 1) Donne la définition d'une expérience aléatoire en complétant la phrase suivante.

On appelle expérience aléatoire *l'ensemble des éventualités possibles qui composent cet événement.*

- 2)
- A
- et
- B
- sont deux événements de l'univers des éventualités
- Ω
- d'une expérience aléatoire et
- p
- est une probabilité définie sur
- Ω
- . Pour chacune des questions a), b) et c), encercle le numéro de la bonne réponse parmi les trois qui sont proposées.

- a)
- A
- et
- B
- sont incompatibles signifie que :

- (i) $A = \emptyset$ et $B = \emptyset$.
 (ii) $A \cap B = \emptyset$
 (iii) $A \cup B = \Omega$.

- b)
- A
- et
- B
- sont contraires signifie que :

- (i) $A \cap B = \emptyset$.
 (ii) $A \cup B = \Omega$
 (iii) $A \cap B = \emptyset$ et $A \cup B = \Omega$.

- c)
- A
- et
- B
- sont équiprobables signifie que:

- (i) $p(A \cap B) = 0$;
 (ii) $p(A) = p(B)$;
 (iii) $p(A) + p(B) = 1$.

- 3) On considère une probabilité
- p
- sur l'univers des éventualités
- Ω
- d'une expérience aléatoire. Complète chacune des égalités suivantes :

a) $p(\Omega) = 1$

b) Si A et B sont deux événements de Ω , alors $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.

- c) Si
- A
- est un événement composé des éventualités
- e_1, e_2, \dots, e_k
- , alors :

$$p(A) = p(\{e_1\}) + p(\{e_2\}) + \dots + p(\{e_k\})$$

- d) Si tous les événements élémentaires sont équiprobables, alors pour tout événement
- A
- , on a :

$$p(A) = p(\omega)$$

Exercice 2

On lance onze fois de suite un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on obtient les résultats suivants :

2 - 5 - 3 - 4 - 1 - 1 - 6 - 5 - 2 - 3 - 6.

Quel résultat obtiendrait-on si on lançait le dé une douzième fois ? Justifie ta réponse.

Soit A l'événement une expérience de cette preuve.

$A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. Parce que obligatoirement le dé se présentera une des six faces. mais pas plus d'une et ni aucune.

Exercice 3

Dans l'un des bureaux d'une entreprise de vente par correspondance arrivent plusieurs catégories de courrier. Parmi les lettres reçues, 90% contiennent une commande, 45% contiennent une demande de cadeau et 40% contiennent une commande et une demande de cadeau. Les autres lettres ne sont jamais accompagnées de commande, ni de demande de cadeau. On prend une lettre au hasard dans ce bureau. On désigne par A l'événement « la lettre contient une commande » et par B l'événement « la lettre contient une demande de cadeau ».

- 1) Identifie dans le texte ci-dessus (de l'exercice 3) la proposition qui représente l'expérience aléatoire en complétant la phrase suivante :

La proposition qui désigne l'expérience aléatoire est : *l'arrivée des catégories de courrier courrier.*

- 2) Calcule la probabilité que la lettre prise :

a) ne contienne pas une demande de cadeau ; *soit p(C) cette probabilité.*

$$p(C) = p(A) - p(B) - p(A \cap B) \\ = 0,9 - 0,45 - 0,4$$

$$p(C) = 0,05$$

- b) contienne une commande ou une demande de cadeau.

Soit

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) \\ = (0,9 + 0,45) - 0,4$$

$$p(A \cup B) = 0,95$$

Exercice 4

Un sac contient trois jetons blancs et deux jetons noirs, tous indiscernables au toucher. On tire successivement sans remise trois jetons dans le sac.

Calcule la probabilité qu'exactement deux des trois jetons tirés soient blancs.

Soit A l'événement « deux des trois jetons tirés soient blancs ». Soit Ω l'univers associé à cette preuve.

$$\text{Card}(\Omega) = 5 \quad ; \quad \text{Card}(A) = \frac{2}{3} = 5 \quad . \quad A = \{W\}; \{B\}; \text{Card}(A) = 2$$

$$P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{2}{5}$$

$$P(A) = \frac{2}{5}$$

Exercice 5

On lance un dé tétraédrique dont les quatre faces sont marquées a, b, c, d. et on note la marque de la face sur laquelle le dé se repose. Le dé est pipé de telle sorte que :

- les faces portant les marques a, b et d ont la même probabilité que le dé repose sur elles ;
- la probabilité que le dé repose sur la face marquée c est quatre fois plus grande que la probabilité que le dé repose sur l'une quelconque des autres faces.

1) Détermine la probabilité que le dé repose sur chacune des 4 faces.

Soit Ω l'univers associé à cette preuve. Désignons par Ω

$$P(\Omega) = 1$$

$$P(\Omega) = P(a) + P(b) + P(c) + P(d) \quad (\ast)$$

$$P(a) + P(b) + P(c) + P(d) = 1 \quad (\ast)$$

$$P(a) + P(a) + 4P(a) + P(a) = 1 \quad (\ast)$$

$$7P(a) = 1 \quad (\ast)$$

$$P(a) = \frac{1}{7} \quad ; \quad P(a) = P(b) = P(d) = \frac{1}{7} \quad ; \quad P(c) = 4P(a) = \frac{4}{7}$$

2) Calcule la probabilité que le dé repose sur une face dont la marque est une consonne.

Désignons par E l'événement « le dé repose sur une face dont la marque est une consonne. »

$$\text{Card}(E) = 3 \quad \text{et} \quad \text{Card}(\Omega) = 4.$$

$$P(E) = \frac{\text{Card}(E)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{3}{4}$$

$$P(E) = \frac{3}{4}$$

Exercice 6

Un jour, un passant a été témoin d'un accident de circulation et a décidé d'appeler les sapeurs pompiers. Il dispose de 5 numéros des sapeurs pompiers mais ce jour-là, 3 des numéros étaient hors service. Le passant a composé au hasard un des numéros.

Calcule la probabilité que l'appel du passant tombe sur un numéro en service:

a) au premier essai ;

Soit Ω l'univers associé à cette expérience. Désignons par A l'événement « l'appel tombe sur un numéro en service ».
 $\text{card}(\Omega) = 5$ et $\text{card}A = \text{card}A_1 = 2$

$$P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{2}{5} \quad \boxed{P(A) = \frac{2}{5}}$$

b) au second essai sachant qu'il n'a pas repris le premier numéro essayé.

Désignons par B l'événement «

$$P(B) = 2 \times (2-1) = 2 \times 1 = 2$$
$$\boxed{P(B) = 2}$$

Exercice 7

L'univers des éventualités d'une expérience aléatoire étant $\Omega = \{0; 1; 2; 3\}$, on donne dans le tableau ci-dessous les probabilités des événements élémentaires.

e_i	0	1	2	3
$p(\{e_i\})$	0,17	0,64	a	0,01

1) Détermine le nombre réel a.

$$P(\Omega) = P(0) + P(1) + P(2) + P(3)$$

$$\Leftrightarrow P(0) + P(1) + P(2) + P(3) = 1 \quad \text{Car } P(\Omega) = 1$$

$$\Leftrightarrow 0,17 + 0,64 + a + 0,01 = 1$$

$$\Leftrightarrow a + 0,82 = 1$$

$$\Leftrightarrow \boxed{a = 1 - 0,82} \quad , \quad \boxed{a = 0,18}$$

2) Calcule la probabilité que le résultat de l'expérience aléatoire soit un nombre impair.

Désignons par B l'événement « le nombre obtenu soit impair ».
 $\Omega = \{0,17; 0,64; 0,18; 0,01\}$ Car $\text{card}(B) = 2$, $\text{card}(\Omega) = 4$.

$$P(B) = \frac{2}{4} \quad \boxed{P(B) = \frac{1}{2}}$$

-FIN-

Exercice 1

- 1) Donne la définition d'une expérience aléatoire en complétant la phrase suivante.

On appelle expérience aléatoire *toute expérience dont on ne peut connaître de façon certaine le résultat.*

- 2)
- A
- et
- B
- sont deux événements de l'univers des éventualités
- Ω
- d'une expérience aléatoire et
- p
- est une probabilité définie sur
- Ω
- . Pour chacune des questions a), b) et c), encerle le numéro de la bonne réponse parmi les trois qui sont proposées.

- a)
- A
- et
- B
- sont incompatibles signifie que :

- (i) $A = \emptyset$ et $B = \emptyset$.
 (ii) $A \cap B = \emptyset$.
 (iii) $A \cup B = \Omega$.

- b)
- A
- et
- B
- sont contraires signifie que :

- (i) $A \cap B = \emptyset$.
 (ii) $A \cup B = \Omega$.
 (iii) $A \cap B = \emptyset$ et $A \cup B = \Omega$.

- c)
- A
- et
- B
- sont équiprobables signifie que:

- (i) $p(A \cap B) = 0$;
 (ii) $p(A) = p(B)$;
 (iii) $p(A) + p(B) = 1$.

- 3) On considère une probabilité
- p
- sur l'univers des éventualités
- Ω
- d'une expérience aléatoire. Complète chacune des égalités suivantes :

a) $p(\Omega) = 1$

b) Si A et B sont deux événements de Ω , alors $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

- c) Si
- A
- est un événement composé des éventualités
- e_1, e_2, \dots, e_k
- , alors :

$$p(A) = p(e_1) + p(e_2) + \dots + p(e_k)$$

- d) Si tous les événements élémentaires sont équiprobables, alors pour tout événement
- A
- , on a :

$$p(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$$

Exercice 2

On lance onze fois de suite un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on obtient les résultats suivants :

2 - 5 - 3 - 4 - 1 - 1 - 6 - 5 - 2 - 3 - 6.

Quel résultat obtiendrait-on si on lançait le dé une douzième fois ? Justifie ta réponse.

On pourrait obtenir la face 4 puisque le dé étant cubique toutes les faces ont la même probabilité (chance) d'être obtenues. Toutefois, comme la face 4 n'est pas encore apparue, il est plus à espérer de la retrouver au douzième lancé même si obtenir une autre face est également possible.

Exercice 3

Dans l'un des bureaux d'une entreprise de vente par correspondance arrivent plusieurs catégories de courrier. Parmi les lettres reçues, 90% contiennent une commande, 45% contiennent une demande de cadeau et 40% contiennent une commande et une demande de cadeau. Les autres lettres ne sont jamais accompagnées de commande, ni de demande de cadeau. On prend une lettre au hasard dans ce bureau. On désigne par A l'événement « la lettre contient une commande » et par B l'événement « la lettre contient une demande de cadeau ».

- 1) Identifie dans le texte ci-dessus (de l'exercice 3) la proposition qui représente l'expérience aléatoire en complétant la phrase suivante :

La proposition qui désigne l'expérience aléatoire est : *On prend une lettre au hasard dans ce bureau.*

- 2) Calcule la probabilité que la lettre prise :

- a) ne contienne pas une demande de cadeau ;

Désignons par $p(\bar{B})$ cette probabilité puisqu'elle est contraire à l'événement B.

$$\text{On a : } p(\bar{B}) = 1 - p(B) \text{ or } p(B) = \frac{45}{100} = \frac{9}{20} \text{ donc } p(\bar{B}) = 1 - \frac{9}{20}$$

$$\text{d'où } \boxed{p(\bar{B}) = \frac{11}{20}}$$

- b) contienne une commande ou une demande de cadeau.

Il s'agit ici de la probabilité de l'événement $A \cup B$

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) \text{ or } p(A) = \frac{90}{100} = \frac{9}{10}, p(B) = \frac{9}{20}$$

$$\text{et } p(A \cap B) = \frac{40}{100} = \frac{2}{5}$$

$$\text{Donc } p(A \cup B) = \frac{9}{10} + \frac{9}{20} - \frac{2}{5}$$

$$\boxed{p(A \cup B) = \frac{19}{20}}$$

Exercice 4

Un sac contient trois jetons blancs et deux jetons noirs, tous indiscernables au toucher. On tire successivement sans remise trois jetons dans le sac.

Calcule la probabilité qu'exactement deux des trois jetons tirés soient blancs.

Notons les boules blanches : B_1, B_2 et B_3 , puis les boules noires : N_1 et N_2 .
Voici dans le désordre, les résultats désirés : $\{ (B_1, B_2, N_1) (B_1, B_3, N_1) (B_2, B_3, N_1) (B_1, B_2, N_2) (B_1, B_3, N_2) (B_2, B_3, N_2) \}$ Chaque résultat admet 6 permutations c'est-à-dire ordres d'arrivée différents. Les événements élémentaires sont équiprobables. Aussi, le nombre de résultats possibles est $A_5^3 = 60 = \text{Card}(\Omega)$ avec Ω l'univers des événements associés à l'expérience. Désignons par S , l'événement « exactement deux des trois jetons tirés sont blancs ». On a : $\text{Card}(S) = (6+6+6+6+6) = 36$

$$p(S) = \frac{\text{Card}(S)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{36}{60}$$

d'où $p(S) = \frac{3}{5}$

Exercice 5

On lance un dé tétraédrique dont les quatre faces sont marquées a, b, c, d. et on note la marque de la face sur laquelle le dé se repose. Le dé est pipé de telle sorte que :

- les faces portant les marques a, b et d ont la même probabilité que le dé repose sur elles ;
- la probabilité que le dé repose sur la face marquée c est quatre fois plus grande que la probabilité que le dé repose sur l'une quelconque des autres faces.

1) Détermine la probabilité que le dé repose sur chacune des 4 faces.

$$\text{On a : } p(a) + p(b) + p(c) + p(d) = 1 \text{ or } p(c) = 4p(a) = 4p(b) = 4p(d) \\ \text{et } p(a) = p(b) = p(d)$$

$$\text{donc } 3p(a) + 4p(a) = 1 \Leftrightarrow 7p(a) = 1 \\ \Leftrightarrow p(a) = \frac{1}{7}$$

$$\text{Par suite, on a : } p(b) = \frac{1}{7}, p(d) = \frac{1}{7} \text{ et } p(c) = \frac{4}{7}$$

2) Calcule la probabilité que le dé repose sur une face dont la marque est une consonne.

Soit P cette probabilité; elle correspond à $p(d \cup b \cup c)$

Or d, b et c sont des événements deux à deux disjoints.

$$\text{Donc } p(d \cup b \cup c) = p(d) + p(b) + p(c) = \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{4}{7}$$

d'où $P = \frac{6}{7}$

Exercice 6

Un jour, un passant a été témoin d'un accident de circulation et a décidé d'appeler les sapeurs pompiers. Il dispose de 5 numéros des sapeurs pompiers mais ce jour-là, 3 des numéros étaient hors service. Le passant a composé au hasard un des numéros.

Calcule la probabilité que l'appel du passant tombe sur un numéro en service:

a) au premier essai ;

Soit P_a cette probabilité. Le passant pouvait prendre n'importe quel numéro. Les événements élémentaires de l'univers des éventualités Ω_a associée à cette expérience aléatoire sont équiprobables. Soit a l'événement « l'appel du passant tombe sur un numéro en service ».

$$\text{On a : } P_a = \frac{\text{Card}(a)}{\text{Card}(\Omega_a)} = \frac{2}{5} \quad \text{d'où } \boxed{P_a = \frac{2}{5}}$$

b) au second essai sachant qu'il n'a pas repris le premier numéro essayé.

Soit P_b cette probabilité. A ce niveau, il ne reste que 4 numéros. Soit Ω_b l'univers des éventualités associée à cette nouvelle expérience aléatoire. Ici, $\text{Card}(a)$ par rapport à Ω_b est égale à 1.

$$\text{Donc } P_b = \frac{\text{Card}(a)}{\text{Card}(\Omega_b)} = \frac{1}{4} \quad \text{d'où } \boxed{P_b = \frac{1}{4}}$$

Exercice 7

L'univers des éventualités d'une expérience aléatoire étant $\Omega = \{0; 1; 2; 3\}$, on donne dans le tableau ci-dessous les probabilités des événements élémentaires.

e_i	0	1	2	3
$p(\{e_i\})$	0,17	0,64	a	0,01

1) Détermine le nombre réel a.

$$\text{On a } 0,17 + 0,64 + a + 0,01 = 1 \quad \text{d'où } a = 1 - 0,17 - 0,64 - 0,01$$

$$\underline{\underline{a = 0,18}}$$

2) Calcule la probabilité que le résultat de l'expérience aléatoire soit un nombre impair.

Soit P_i cette probabilité.

On a $P_i = p(\{1 \cup 3\})$ 1 et 3 étant des événements élémentaires, on a $\{1 \cap 3\} = \emptyset$ d'où $p(\{1 \cup 3\}) = p(1) + p(3) = 0,64 + 0,01$. Donc $\underline{\underline{P_i = 0,65}}$

-FIN-

ANNEXE 19 : Quelques productions d'élèves dans le cadre du post test de 2017

Copie N°1 : Adeline

B- LE TEST

Exercice 1

1) Donne la définition d'une expérience aléatoire.

Une expérience aléatoire est une expérience dont on ne peut pas prévoir avec certitude le résultat mais dont on peut connaître les résultats possibles.

2) A et B sont deux événements de l'univers des éventualités Ω d'une expérience aléatoire et p est une probabilité définie sur Ω . Pour chacune des questions a), b) et c), encerle le numéro de la bonne réponse parmi les trois qui sont proposées.

a) « A et B sont incompatibles » signifie que :

(i) $A = \emptyset$ et $B = \emptyset$.

(ii) $A \cap B = \emptyset$.

(iii) $A \cup B = \Omega$.

b) « A et B sont contraires » signifie que :

(i) $A \cap B = \emptyset$.

(ii) $A \cup B = \Omega$

(iii) $A \cap B = \emptyset$ et $A \cup B = \Omega$.

c) « A et B sont équiprobables » signifie que :

(i) $p(A \cap B) = 0$;

(ii) $p(A) = p(B)$;

(iii) $p(A) + p(B) = 1$.

3) On considère une probabilité p sur l'univers des éventualités Ω d'une expérience aléatoire. Complète chacune des égalités suivantes :

a) $p(\Omega) = 1$

b) Si A et B sont deux événements de Ω , alors $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

c) Si A est un événement composé des éventualités e_1, e_2, \dots, e_k , alors :

$$p(A) = p(\{e_1\}) + p(\{e_2\}) + \dots + p(\{e_k\})$$

d) Si tous les événements élémentaires sont équiprobables, alors pour tout événement A , on a :

$$p(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$$

Exercice 2

On lance onze fois de suite un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on obtient les résultats suivants :

2 - 5 - 3 - 4 - 1 - 1 - 6 - 5 - 2 - 3 - 6.

Quel résultat obtiendrait-on si on lançait le dé une douzième fois ? Argumente ta réponse.

Si on lançait ce dé une douzième fois on pourrait peut être obtenir le résultat 4 parce que ça dépend de la manière ou on va lancer le dé la douzième fois.

Exercice 3

Dans l'un des bureaux d'une entreprise de vente par correspondance arrivent plusieurs catégories de courrier. Parmi les lettres reçues, 90% contiennent une commande, 45% contiennent une demande de cadeau et 40% contiennent une commande et une demande de cadeau. Les autres lettres ne sont jamais accompagnées de commande, ni de demande de cadeau. On prend une lettre au hasard dans ce bureau. On désigne par A l'événement « la lettre contient une commande » et par B l'événement « la lettre contient une demande de cadeau ».

- 1) Identifie dans le texte ci-dessus (de l'exercice 3) la phrase qui indique l'expérience aléatoire en compétant :

La phrase qui indique l'expérience aléatoire est : "...Prendre une lettre au hasard dans le bureau".

- 2) Calcule la probabilité que la lettre prise :
- a) ne contienne pas une demande de cadeau ;

A l'événement « la lettre contient une commande »
soit $P(A)$ la probabilité de ce événement

$$P(A) = \frac{90\%}{100} = 0,9 \text{ donc } \underline{\underline{P(A) = 0,9}}$$

- b) contienne une commande ou une demande de cadeau.

soit $P(C)$ la probabilité de l'événement C « la lettre contient une commande et une demande de cadeau »

$$P(C) = \frac{40\%}{100} = 0,4 \text{ donc } \underline{\underline{P(C) = 0,4}}$$

Exercice 4

Un sac contient trois jetons blancs B_1, B_2, B_3 et deux jetons noirs N_1, N_2 , tous indiscernables au toucher. On tire au hasard un jeton dans le sac et on note sa couleur puis sans le remettre dans le sac on tire un second jeton et on note sa couleur.

Calcule la probabilité que les deux jetons tirés soient de couleurs différentes.

on sait que le sac contient trois jetons blancs B_1, B_2, B_3 et deux jetons noirs N_1, N_2 tous indiscernables au toucher

Soit A un événement tel que

$A = \{B_1, B_2, B_3, N_1, N_2\}$ car les jetons ont la même probabilité

$$P(A) = P(\{B_1\}) + P(\{B_2\}) + P(\{B_3\}) + P(\{N_1\}) + P(\{N_2\})$$

$$P(\{B_1\}) = P(\{B_2\}) = P(\{B_3\}) = P(\{N_1\}) = P(\{N_2\})$$

Exercice 5

On lance un dé tétraédrique dont les quatre faces sont marquées a, b, c, d. et on note la marque de la face sur laquelle le dé se repose. Le dé est pipé de telle sorte que :

- les faces portant les marques a, b et d ont la même probabilité que le dé repose sur elles ;
- la probabilité que le dé repose sur la face marquée c est quatre fois plus grande que la probabilité que le dé repose sur l'une quelconque des autres faces.

1) Détermine la probabilité que le dé repose sur chacune des 4 faces.

$$\Omega = \{a, b, c, d\}$$

$$P(\Omega) = P(\{a\}) + P(\{b\}) + P(\{c\}) + P(\{d\}) \quad \text{car } P(a) = P(b) = P(d)$$

$$P(\Omega) = 3P(a) + P(c) \quad \text{car } P(c) = 4P(a)$$

$$P(\Omega) = 3P(a) + 4P(a)$$

$$P(\Omega) = 7P(a) \quad \text{car } P(\Omega) = 1$$

2) Calcule la probabilité que le dé repose sur une face dont la marque est une consonne.

$$P(a) = P(b) = P(d) \quad \text{donc } P(b) = \frac{\text{card } b}{\text{card } \Omega}$$

$$P(b) = \frac{1}{3}$$

$$P(b) = 0,33$$

Exercice 4

la probabilité de tirer deux jetons de couleur différents est

$$P = P(\overline{B|F}) = P(\overline{N|F})$$

$$P = 2 P(B|F)$$

$$\text{or } P(B|F) = \frac{4}{6} = 0,66$$

$$P = 2 \times \frac{4}{6}$$

$$P = \frac{8}{6}$$

Exercice 6

Un jour, un passant a été témoin d'un accident de circulation et a décidé d'appeler les sapeurs-pompiers. Il dispose de 5 numéros des sapeurs-pompiers mais ce jour-là, 3 des numéros étaient hors service. Le passant a composé au hasard un des numéros.

Calcule la probabilité que l'appel du passant tombe sur un numéro en service:

la probabilité pour que l'appel du passant tombe sur un numéro en service

$$P = \frac{4}{5}$$

$$P = 0,8$$

Exercice 7

L'univers des éventualités d'une expérience aléatoire étant $\Omega = \{0; 1; 2; 3\}$, on donne dans le tableau ci-dessous les probabilités des événements élémentaires.

e_i	0	1	2	3
$p(\{e_i\})$	0,17	0,64	a	0,01

1) Détermine le nombre réel a.

$$\Omega = \{0, 1, 2, 3\}$$

$$P(\Omega) = P(0) + P(1) + P(2) + P(3)$$

$$P(\Omega) = P(0) + P(1) + P(2) + P(3)$$

$$P(2) = 0,48$$

2) Calcule la probabilité que le résultat de l'expérience aléatoire soit un nombre impair.

la probabilité P(A) pour que le résultat soit un nombre impair est:

$$P(A) = \frac{\text{Card } A}{\text{Card } \Omega}$$

$$P(A) = \frac{4}{8} \quad P(A) = 0,5$$

Exercice 8

Exercice 8

Un sac contient cinq boules dont deux blanches et trois noires. On tire au hasard une boule dans le sac. Calcule la probabilité que la boule tirée soit blanche.

Soit $P(b)$ la probabilité de tirer une boule blanche

$$P(b) = \frac{2}{5} \quad ; \quad 2 \text{ le nombre de bille blanche ou boule et } 5 \text{ le nombre total de bille dans le sac.}$$

$$\underline{\underline{P(b) = 0,4}}$$

-FIN-

5

Exercice 1

1) Donne la définition d'une expérience aléatoire.

une expérience aléatoire est une expérience dont on ne peut pas prévoir avec certitude le résultat mais dont on connaît tout les résultats possible

2) A et B sont deux événements de l'univers des éventualités Ω d'une expérience aléatoire et p est une probabilité définie sur Ω . Pour chacune des questions a), b) et c), encerle le numéro de la bonne réponse parmi les trois qui sont proposées.

a) « A et B sont incompatibles » signifie que :

(i) $A = \emptyset$ et $B = \emptyset$.

(ii) $A \cap B = \emptyset$.

(iii) $A \cup B = \Omega$.

b) « A et B sont contraires » signifie que :

(i) $A \cap B = \emptyset$.

(ii) $A \cup B = \Omega$.

(iii) $A \cap B = \emptyset$ et $A \cup B = \Omega$.

c) « A et B sont équiprobables » signifie que :

(i) $p(A \cap B) = 0$;

(ii) $p(A) = p(B)$;

(iii) $p(A) + p(B) = 1$.

3) On considère une probabilité p sur l'univers des éventualités Ω d'une expérience aléatoire. Complète chacune des égalités suivantes :

a) $p(\Omega) = 1$

b) Si A et B sont deux événements de Ω , alors $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

c) Si A est un événement composé des éventualités e_1, e_2, \dots, e_k , alors :

$$p(A) = p(\{e_1\}) + p(\{e_2\}) + \dots + p(\{e_k\})$$

d) Si tous les événements élémentaires sont équiprobables, alors pour tout événement A, on a :

$$p(A) = \frac{\text{card } A}{\text{card } \Omega}$$

Exercice 2

On lance onze fois de suite un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on obtient les résultats suivants :

2-5-3-4-1-1-6-5-2-3-6.

Quel résultat obtiendrait-on si on lançait le dé une douzième fois ? Argumente ta réponse.

si on lançait le dé une douzième fois, on peut obtenir soit 1, soit 2, soit 3, soit 4, soit 5 ou soit 6 car c'est le hasard qui est mis en jeu

Exercice 3

Dans l'un des bureaux d'une entreprise de vente par correspondance arrivent plusieurs catégories de courrier. Parmi les lettres reçues, 90% contiennent une commande, 45% contiennent une demande de cadeau et 40% contiennent une commande et une demande de cadeau. Les autres lettres ne sont jamais accompagnées de commande, ni de demande de cadeau. On prend une lettre au hasard dans ce bureau. On désigne par A l'événement « la lettre contient une commande » et par B l'événement « la lettre contient une demande de cadeau ».

- 1) Identifie dans le texte ci-dessus (de l'exercice 3) la phrase qui indique l'expérience aléatoire en compétant :

La phrase qui indique l'expérience aléatoire est : dans l'un des bureaux d'une entreprise de vente par correspondance arrivent plusieurs catégories de courrier

- 2) Calcule la probabilité que la lettre prise :

a) ne contienne pas une demande de cadeau;

$$P(B) + P(\bar{B}) = 1 \quad \text{soit } P(\bar{B}) \text{ cette probabilité}$$

$$P(\bar{B}) = 1 - P(B)$$

$$P(\bar{B}) = 1 - 0,45$$

$$P(\bar{B}) = 0,55$$

b) contienne une commande ou une demande de cadeau.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = 0,9 + 0,45 - 0,4$$

$$P(A \cup B) = 0,95$$

Exercice 4

Un sac contient trois jetons blancs B_1, B_2, B_3 et deux jetons noirs N_1, N_2 , tous indiscernables au toucher. On tire au hasard un jeton dans le sac et on note sa couleur puis sans le remettre dans le sac on tire un second jeton et on note sa couleur.

Calcule la probabilité que les deux jetons tirés soient de couleurs différentes.

Soit A l'événement "tirer un jeton dans le sac et $p(A)$ la probabilité le jeton tiré est de couleur différente".

$$p(A) = \frac{\text{card } A}{\text{card } \Omega}$$

$$p(A) = \frac{12}{60}$$

$$p(A) = 0,2$$

Exercice 5

On lance un dé tétraédrique dont les quatre faces sont marquées a, b, c, d. et on note la marque de la face sur laquelle le dé se repose. Le dé est pipé de telle sorte que :

- les faces portant les marques a, b et d ont la même probabilité que le dé repose sur elles ;
- la probabilité que le dé repose sur la face marquée c est quatre fois plus grande que la probabilité que le dé repose sur l'une quelconque des autres faces.

1) Détermine la probabilité que le dé repose sur chacune des 4 faces.

on a :

$$p(\Omega) = p(\{a\}) + p(\{b\}) + p(\{c\}) + p(\{d\}) \text{ or } p(\{a\}) = p(\{b\}) = p(\{d\})$$

or $p(\{c\}) = 4 p(\{a\})$

$$p(\Omega) = 3 p(\{a\}) + 4 p(\{a\}) \Rightarrow p(\Omega) = 7 p(\{a\}) \text{ or } p(\{a\}) = \frac{p(\Omega)}{7}$$
$$p(\{a\}) = \frac{1}{7} \text{ car } p(\Omega) = 1. \text{ or } p(\{a\}) = p(\{b\}) = p(\{d\}) = \frac{1}{7}$$
$$p(\{c\}) = 4 p(\{a\}) \Rightarrow p(\{c\}) = 4 \times \frac{1}{7} \text{ or } p(\{c\}) = \frac{4}{7}$$

2) Calcule la probabilité que le dé repose sur une face dont la marque est une consonne.

Soit $p(A)$ cette probabilité

$$p(A) = p(\{b\}) + p(\{c\}) + p(\{d\}) \text{ or } p(\{b\}) = p(\{d\})$$

$$p(A) = 2 p(\{b\}) + p(\{c\})$$

$$p(A) = \frac{2}{7} + \frac{4}{7}$$

$$p(A) = \frac{6}{7}$$

Exercice 6

Un jour, un passant a été témoin d'un accident de circulation et a décidé d'appeler les sapeurs-pompiers. Il dispose de 5 numéros des sapeurs-pompiers mais ce jour-là, 3 des numéros étaient hors service. Le passant a composé au hasard un des numéros.

Calcule la probabilité que l'appel du passant tombe sur un numéro en service:

soit $p(B)$ cette probabilité

$$p(B) = \frac{\text{card } B}{\text{card } \Omega}$$

$$p(B) = \frac{2}{5}$$

$$p(B) = 0,4$$

Exercice 7

L'univers des éventualités d'une expérience aléatoire étant $\Omega = \{0; 1; 2; 3\}$, on donne dans le tableau ci-dessous les probabilités des événements élémentaires.

e_i	0	1	2	3
$p(\{e_i\})$	0,17	0,64	a	0,01

1) Détermine le nombre réel a. on a :

$$p(\Omega) = p(\{0\}) + p(\{1\}) + p(\{2\}) + p(\{3\})$$

$$p(\Omega) = 0,17 + 0,64 + a + 0,01$$

$$p(\Omega) = 0,82 + a \text{ or } p(\Omega) = 1 \text{ alors}$$

$$a = 1 - 0,82 \text{ ainsi } a = 0,18$$

2) Calcule la probabilité que le résultat de l'expérience aléatoire soit un nombre impair.

soit $p(C)$ cette probabilité

$$p(C) = \frac{\text{card } C}{\text{card } \Omega} \Rightarrow p(C) = p(\{1\}) + p(\{3\})$$

$$p(C) = 0,64 + 0,01 \text{ alors } p(C) = 0,65$$

Exercice 8

Un sac contient cinq boules dont deux blanches et trois noires. On tire au hasard une boule dans le sac. Calcule la probabilité que la boule tirée soit blanche.

soit $p(A)$ cette probabilité

$$p(A) = \frac{\text{card } A}{\text{card } \Omega}$$

$$p(A) = \frac{2}{5}$$

$$p(A) = 0,4$$

-FIN-

5

Exercice 1

1) Donne la définition d'une expérience aléatoire.

une expérience aléatoire est une expérience dont-on ne peut pas prévoir avec certitude le résultat, mais dont-on connait les résultats possible.

2) A et B sont deux événements de l'univers des éventualités Ω d'une expérience aléatoire et p est une probabilité définie sur Ω . Pour chacune des questions a), b) et c), encercle le numéro de la bonne réponse parmi les trois qui sont proposées.

a) « A et B sont incompatibles » signifie que :

(i) $A = \emptyset$ et $B = \emptyset$.

(ii) $A \cap B = \emptyset$.

(iii) $A \cup B = \Omega$.

b) « A et B sont contraires » signifie que :

(i) $A \cap B = \emptyset$.

(ii) $A \cup B = \Omega$

(iii) $A \cap B = \emptyset$ et $A \cup B = \Omega$.

c) « A et B sont équiprobables » signifie que:

(i) $p(A \cap B) = 0$;

(ii) $p(A) = p(B)$;

(iii) $p(A) + p(B) = 1$.

3) On considère une probabilité p sur l'univers des éventualités Ω d'une expérience aléatoire. Complète chacune des égalités suivantes :

a) $p(\Omega) = 1$

b) Si A et B sont deux événements de Ω , alors $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

c) Si A est un événement composé des éventualités e_1, e_2, \dots, e_k , alors :

$$p(A) = p(\{e_1\}) + p(\{e_2\}) + \dots + p(\{e_k\})$$

d) Si tous les événements élémentaires sont équiprobables, alors pour tout événement A , on a :

$$p(A) = \frac{\text{Card } A}{\text{Card } \Omega}$$

Exercice 2

On lance onze fois de suite un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on obtient les résultats suivants :

2 - 5 - 3 - 4 - 1 - 1 - 6 - 5 - 2 - 3 - 6.

Quel résultat obtiendrait-on si on lançait le dé une douzième fois ? Argumente ta réponse.

Si on lançait le dé une douzième fois, on peut trouver comme résultat 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Cela est dit, par ce qu'il s'agit là du Hazard.

Exercice 3

Dans l'un des bureaux d'une entreprise de vente par correspondance arrivent plusieurs catégories de courrier. Parmi les lettres reçues, 90% contiennent une commande, 45% contiennent une demande de cadeau et 40% contiennent une commande et une demande de cadeau. Les autres lettres ne sont jamais accompagnées de commande, ni de demande de cadeau. On prend une lettre au hasard dans ce bureau. On désigne par A l'événement « la lettre contient une commande » et par B l'événement « la lettre contient une demande de cadeau ».

- 1) Identifie dans le texte ci-dessus (de l'exercice 3) la phrase qui indique l'expérience aléatoire en compétant :

La phrase qui indique l'expérience aléatoire est : on prend une lettre au hasard dans le bureau.

- 2) Calcule la probabilité que la lettre prise :

a) ne contienne pas une demande de cadeau ;

on sait que $P(A) + P(\bar{A}) = 1$ (\Rightarrow) $P(A) = 1 - P(\bar{A})$

$$\Rightarrow P(A) = 1 - 0,45$$

$$\Rightarrow \underline{P(A) = 0,55}$$

b) contienne une commande ou une demande de cadeau.

on sait que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) + P(A \cap B)$

Déterminons d'abord $P(B)$: $P(B) + P(\bar{B}) = 1$ (\Rightarrow) $P(B) = -P(\bar{B}) + 1$

$$\Rightarrow P(B) = 1 - 0,4$$

$$\Rightarrow \underline{P(B) = 0,6}$$

Alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B) + P(A \cap B)$ (\Rightarrow) $P(A \cup B) = 0,55 + 0,6 + 0$

$$\Rightarrow \underline{P(A \cup B) = 1}$$

Exercice 4

Un sac contient trois jetons blancs B_1, B_2, B_3 et deux jetons noirs N_1, N_2 , tous indiscernables au toucher. On tire au hasard un jeton dans le sac et on note sa couleur puis sans le remettre dans le sac on tire un second jeton et on note sa couleur.

Calcule la probabilité que les deux jetons tirés soient de couleurs différentes. soit $p(A)$ la probabilité.

on sait que $p(A) = \frac{\text{Card } A}{\text{Card } \Omega}$ or $\text{Card } A = 6$
 $\text{Card } \Omega = 36$

$$p(A) = \frac{6}{36}$$

$$p(A) = \frac{3}{16}$$

$$p(A) = \underline{\underline{0,1875}}$$

Exercice 5

On lance un dé tétraédrique dont les quatre faces sont marquées a, b, c, d. et on note la marque de la face sur laquelle le dé se repose. Le dé est pipé de telle sorte que :

- les faces portant les marques a, b et d ont la même probabilité que le dé repose sur elles ;
- la probabilité que le dé repose sur la face marquée c est quatre fois plus grande que la probabilité que le dé repose sur l'une quelconque des autres faces.

1) Détermine la probabilité que le dé repose sur chacune des 4 faces.

on sait que dans ce cas $p(A) = p(b) = p(d) = 3 p(A)$.

De plus $4 p(A) = p(C)$ Alors or

$$p(A) = \frac{1}{7} \text{ or } p(C) = 4 p(A)$$

$$\text{donc } p(C) = 4 \times \frac{1}{7}$$

$$p(C) = \frac{4}{7}$$

somme $p(A) = p(b) = p(d) = \frac{1}{7}$ et $p(C) = \frac{4}{7}$

$$p(\Omega) = 3 p(A) + p(C) \text{ donc}$$

$$p(\Omega) = 3 p(A) + 4 p(A)$$

$$p(\Omega) = 7 p(A) \Leftrightarrow p(A) = \frac{p(\Omega)}{7}$$

$$\Leftrightarrow p(A) = \underline{\underline{\frac{1}{7}}}$$

2) Calcule la probabilité que le dé repose sur une face dont la marque est une consonne.

Au cune idée.

Exercice 6

Un jour, un passant a été témoin d'un accident de circulation et a décidé d'appeler les sapeurs-pompiers. Il dispose de 5 numéros des sapeurs-pompiers mais ce jour-là, 3 des numéros étaient hors service. Le passant a composé au hasard un des numéros.

Calcule la probabilité que l'appel du passant tombe sur un numéro en service: soit $P(A)$ cette probabilité

$$P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$$

$$P(A) = \frac{2}{5}$$

$$P(A) = \underline{\underline{0,4}}$$

Exercice 7

L'univers des éventualités d'une expérience aléatoire étant $\Omega = \{0; 1; 2; 3\}$, on donne dans le tableau ci-dessous les probabilités des événements élémentaires.

e_i	0	1	2	3
$P(e_i)$	0,17	0,64	a	0,01

1) Détermine le nombre réel a.

on sait que $P(0) + P(1) + P(2) + P(3) = 1$ (\Rightarrow) $P(2) = -P(0) - P(1) - P(3) + 1$

$$(\Rightarrow) P(2) = -0,17 - 0,64 - 0,01 + 1$$

$$\Rightarrow P(2) = 0,18$$

$$P(2) = a \text{ donc}$$

$$a = \underline{\underline{0,18}}$$

2) Calcule la probabilité que le résultat de l'expérience aléatoire soit un nombre impair. soit $P(A)$ la prob.

on a $P(A) = P(1) + P(3)$

$$= 0,64 + 0,01 + 0,17$$

$$P(A) = \underline{\underline{0,82}}$$

Exercice 8

Un sac contient cinq boules dont deux blanches et ^{trois} deux noires. On tire au hasard une boule dans le sac. Calcule la probabilité que la boule tirée soit blanche.

soit $P(A)$ la probabilité.

$$P(A) = \frac{\text{Card } A}{\text{Card } \Omega}$$

$$P(A) = \frac{2}{5}$$

$$P(A) = \underline{\underline{0,4}}$$

B- LE TEST

Exercice 1

1) Donne la définition d'une expérience aléatoire. Une expérience aléatoire est toute expérience dont - on ne peut pas prévoir avec certitude le résultat définitif, mais dont - on peut connaître les résultats possibles

2) A et B sont deux événements de l'univers des éventualités Ω d'une expérience aléatoire et p est une probabilité définie sur Ω . Pour chacune des questions a), b) et c), encercle le numéro de la bonne réponse parmi les trois qui sont proposées.

a) « A et B sont incompatibles » signifie que :

(i) $A = \emptyset$ et $B = \emptyset$.

(ii) $A \cap B = \emptyset$.

(iii) $A \cup B = \Omega$.

b) « A et B sont contraires » signifie que :

(i) $A \cap B = \emptyset$.

(ii) $A \cup B = \Omega$

(iii) $A \cap B = \emptyset$ et $A \cup B = \Omega$.

c) « A et B sont équiprobables » signifie que:

(i) $p(A \cap B) = 0$;

(ii) $p(A) = p(B)$;

(iii) $p(A) + p(B) = 1$.

3) On considère une probabilité p sur l'univers des éventualités Ω d'une expérience aléatoire. Complète chacune des égalités suivantes :

a) $p(\Omega) = \underline{1}$

b) Si A et B sont deux événements de Ω , alors $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

c) Si A est un événement composé des éventualités e_1, e_2, \dots, e_k , alors :

$$p(A) = p(\{e_1\}) + p(\{e_2\}) + \dots + p(\{e_k\})$$

d) Si tous les événements élémentaires sont équiprobables, alors pour tout événement A , on a :

$$p(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card } \Omega}$$

Exercice 2

On lance onze fois de suite un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on obtient les résultats suivants :

2-5-3-4-1-1-6-5-2-3-6.

Quel résultat obtiendrait-on si on lançait le dé une douzième fois ? Argumente ta réponse.

Comme le dé a une forme cubique, alors ses faces ont la même possibilité d'apparaître, donc elles sont équiprobables.

$$P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$$

$$P(1) = \frac{2}{11} = P(2) = P(3) = P(5) = P(6) \text{ et } P(4) = \frac{1}{11}$$

Comme $P(1) = P(2) = P(3) = P(5) = P(6)$
alors le résultat qu'on obtiendrait si on lançait le dé une douzième fois est :

$P(2) \times 12 = 2$ Car ~~on~~ par l'estimation de sa probabilité est $\frac{2}{11}$

En conclusion le résultat qu'on obtiendrait serait la face 2.

Exercice 3

- 1) Identifie dans le texte ci-dessus (de l'exercice 3) la phrase qui indique l'expérience aléatoire en compétant :

La phrase qui indique l'expérience aléatoire est : dans l'un des bureaux d'une entreprise de vente par correspondance arrivent plusieurs catégories de courrier.

- 2) Calcule la probabilité que la lettre prise :

- a) ne contienne pas une demande de cadeau ;
soit n_c cette probabilité

$$P(n_c) = \frac{90}{100} \quad P(n_c) = 0,9$$

- b) contienne une commande ou une demande de cadeau.

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B})$$

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P(A \cup B)$$

$$= 1 - 0,4 + 0,15$$

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,15$$

$$P(\bar{A} \cap B) = 0,15$$

Exercice 4

Un sac contient trois jetons blancs B_1, B_2, B_3 et deux jetons noirs N_1, N_2 , tous indiscernables au toucher. On tire au hasard un jeton dans le sac et on note sa couleur puis sans le remettre dans le sac on tire un second jeton et on note sa couleur.

Calcule la probabilité que les deux jetons tirés soient de couleurs différentes.

Déterminons l'univers des éventualités Ω
 $\Omega = \{B_1 N_1; B_1 N_2; B_2 N_1; B_2 N_2; B_3 N_1; B_3 N_2; B_1 B_2; B_2 B_3; B_3 B_1; N_1 N_2\}$
Comme ils sont indiscernables au toucher, alors ils sont équiprobables

$$\text{Donc } P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card } \Omega}$$

Soit ainsi A l'événement les jetons tirés soient de couleur différentes

$$P(A) = \frac{6}{10}$$

$$P(A) = 0,6$$

Exercice 5

On lance un dé tétraédrique dont les quatre faces sont marquées a, b, c, d. et on note la marque de la face sur laquelle le dé se repose. Le dé est pipé de telle sorte que :

- les faces portant les marques a, b et d ont la même probabilité que le dé repose sur elles ;
- la probabilité que le dé repose sur la face marquée c est quatre fois plus grande que la probabilité que le dé repose sur l'une quelconque des autres faces.

1) Détermine la probabilité que le dé repose sur chacune des 4 faces.

~~$\Omega = \{a, b, c, d\}$; $P(a) = \frac{P(b)}{4} = \frac{P(d)}{4}$~~

* ~~$P(a) = \frac{1}{4}$~~

* ~~$P(a) = 0,25$; $P(b) = 0,25$; $P(d) = 0,25$~~

* $P(c) = 4 P(a)$ Voir vers 10

$$P(c) = 1$$

2) Calcule la probabilité que le dé repose sur une face dont la marque est une consonne.

~~$P(c)$~~ = Soit $P(m)$ cette probabilité -

~~$P(b)$~~ = ~~$\frac{3}{4}$~~

$$P(m) = 4P(a) - (P(b) + P(d))$$

$$P(m) = 0,75$$

Exercice 6

Un jour, un passant a été témoin d'un accident de circulation et a décidé d'appeler les sapeurs-pompiers. Il dispose de 5 numéros des sapeurs-pompiers mais ce jour-là, 3 des numéros étaient hors service. Le passant a composé au hasard un des numéros.

Calcule la probabilité que l'appel du passant tombe sur un numéro en service:

Soit $P(C)$ cette probabilité

$$P(C) = \frac{2}{5}$$

$$P(C) = 0,4$$

Exercice 7

L'univers des éventualités d'une expérience aléatoire étant $\Omega = \{0; 1; 2; 3\}$, on donne dans le tableau ci-dessous les probabilités des événements élémentaires.

e_i	0	1	2	3
$p(\{e_i\})$	0,17	0,64	a	0,01

1) Détermine le nombre réel a.

$$P(\Omega) = P(0) + P(1) + P(2) + P(3)$$

$$P(\Omega) = P(\Omega) = (P(0) + P(1) + P(2) + P(3))$$

$$P(\Omega) = 1 - (0,64 + 0,17 + 0,01)$$

$$P(\Omega) = 0,18 \quad \text{Donc } a = 0,18$$

2) Calcule la probabilité que le résultat de l'expérience aléatoire soit un nombre impair.

Soit $P(Z)$ cette probabilité

$$P(Z) = P(1) + P(3) \quad P(Z) = 0,65$$
$$= 0,64 + 0,01$$

Exercice 8

Un sac contient cinq boules dont deux blanches et ~~deux~~ trois noires. On tire au hasard une boule dans le sac. Calcule la probabilité que la boule tirée soit blanche.

Soit $P(b)$ cette probabilité

$$P(b) = \frac{\text{Card}(b)}{\text{Card } \Omega} = \frac{2}{5}$$

$$P(b) = 0,4$$

-FIN-

5

B- LE TEST**Exercice 1**

1) Donne la définition d'une expérience aléatoire.

Une expérience aléatoire est une expérience dont on ne peut dire avec certitude le résultat mais dont t-on connaît tout les résultats possibles

2) A et B sont deux événements de l'univers des éventualités Ω d'une expérience aléatoire et p est une probabilité définie sur Ω . Pour chacune des questions a), b) et c), encerle le numéro de la bonne réponse parmi les trois qui sont proposées.

a) « A et B sont incompatibles » signifie que :

(i) $A = \emptyset$ et $B = \emptyset$.

(ii) $A \cap B = \emptyset$.

(iii) $A \cup B = \Omega$.

b) « A et B sont contraires » signifie que :

(i) $A \cap B = \emptyset$.

(ii) $A \cup B = \Omega$

(iii) $A \cap B = \emptyset$ et $A \cup B = \Omega$.

c) « A et B sont équiprobables » signifie que:

(i) $p(A \cap B) = 0$;

(ii) $p(A) = p(B)$;

(iii) $p(A) + p(B) = 1$.

3) On considère une probabilité p sur l'univers des éventualités Ω d'une expérience aléatoire. Complète chacune des égalités suivantes :

a) $p(\Omega) = 1$

b) Si A et B sont deux événements de Ω , alors $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

c) Si A est un événement composé des éventualités e_1, e_2, \dots, e_k , alors :

$$p(A) = p(\{e_1\}) + p(\{e_2\}) + \dots + p(\{e_k\})$$

d) Si tous les événements élémentaires sont équiprobables, alors pour tout événement A , on a :

$$p(A) = \frac{\text{card } A}{\text{card } \Omega}$$

Exercice 2

On lance onze fois de suite un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on obtient les résultats suivants :

2 - 5 - 3 - 4 - 1 - 1 - 6 - 5 - 2 - 3 - 6.

Quel résultat obtiendrait-on si on lançait le dé une douzième fois ? Argumente ta réponse.

est 1
Si on lançait le dé une douzième fois on ~~lançait~~ car la
estimation de la probabilité est 0,2 et le
nombre de obtenu est 1,2 qui arrondi est 1
donc le résultat obtenu est 1

Exercice 3

Dans l'un des bureaux d'une entreprise de vente par correspondance arrivent plusieurs catégories de courrier. Parmi les lettres reçues, 90% contiennent une commande, 45% contiennent une demande de cadeau et 40% contiennent une commande et une demande de cadeau. Les autres lettres ne sont jamais accompagnées de commande, ni de demande de cadeau. On prend une lettre au hasard dans ce bureau. On désigne par A l'événement « la lettre contient une commande » et par B l'événement « la lettre contient une demande de cadeau ».

- 1) Identifie dans le texte ci-dessus (de l'exercice 3) la phrase qui indique l'expérience aléatoire en compétant :

La phrase qui indique l'expérience aléatoire est : ...

La lettre contient une commande ou une demande de cadeau

- 2) Calcule la probabilité que la lettre prise :

- a) ne contienne pas une demande de cadeau ;

La probabilité que la lettre prise ne contienne pas une demande de cadeau est de 90%

- b) contienne une commande ou une demande de cadeau.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$= 90 + 45 - 40$$

$$\underline{P(A \cup B) = 95\%}$$

Exercice 4

Un sac contient trois jetons blancs B_1, B_2, B_3 et deux jetons noirs N_1, N_2 , tous indiscernables au toucher. On tire au hasard un jeton dans le sac et on note sa couleur puis sans le remettre dans le sac on tire un second jeton et on note sa couleur.

Calcule la probabilité que les deux jetons tirés soient de couleurs différentes.

$$P(A) = \frac{\text{card } A}{\text{card } \Omega}$$
$$= \frac{6}{10}$$

$$P(A) = 0,6$$

Exercice 5

On lance un dé tétraédrique dont les quatre faces sont marquées a, b, c, d. et on note la marque de la face sur laquelle le dé se repose. Le dé est pipé de telle sorte que :

- les faces portant les marques a, b et d ont la même probabilité que le dé repose sur elles ;
- la probabilité que le dé repose sur la face marquée c est quatre fois plus grande que la probabilité que le dé repose sur l'une quelconque des autres faces.

1) Détermine la probabilité que le dé repose sur chacune des 4 faces.

$$P(\Omega) = P(\{a\}) + P(\{b\}) + P(\{c\}) + P(\{d\}) \text{ ou } P(\{a\}) = P(\{b\}) = P(\{d\})$$
$$= 3P(\{a\}) + P(\{c\}) \text{ ou } P(\{c\}) = 4P(\{a\})$$

$$\text{alors } P(\Omega) = 3P(\{a\}) + 4P(\{a\})$$

$$P(\Omega) = 7P(\{a\}) \text{ ou } P(\Omega) = 1 \text{ alors}$$

$$1 = 7P(\{a\}) \text{ alors } P(\{a\}) = \frac{1}{7}$$

$$P(\{a\}) = P(\{b\}) \text{ alors } P(\{b\}) = \frac{1}{7} \text{ et } P(\{d\}) = \frac{1}{7} \quad P(\{c\}) = 4P(\{a\}) \text{ alors } P(\{c\}) = \frac{4}{7}$$

2) Calcule la probabilité que le dé repose sur une face dont la marque est une consonne.

$$P(A) = P(\{a\}) + P(\{b\}) + P(\{d\}) \text{ ou } P(\{a\}) = P(\{b\}) = P(\{d\})$$

$$\text{alors } P(A) = 3P(\{a\})$$

$$= 3 \times \frac{1}{7}$$

$$P(A) = \frac{3}{7}$$

Exercice 6

Un jour, un passant a été témoin d'un accident de circulation et a décidé d'appeler les sapeurs-pompiers. Il dispose de 5 numéros des sapeurs-pompiers mais ce jour-là, 3 des numéros étaient hors service. Le passant a composé au hasard un des numéros.

Calcule la probabilité que l'appel du passant tombe sur un numéro en service:

$$P(A) = \frac{\text{card } A}{\text{card } \Omega}$$

$$= \frac{2}{5}$$

$$P(A) = 0,4$$

Exercice 7

L'univers des éventualités d'une expérience aléatoire étant $\Omega = \{0; 1; 2; 3\}$, on donne dans le tableau ci-dessous les probabilités des événements élémentaires.

e_i	0	1	2	3
$P(\{e_i\})$	0,17	0,64	a	0,01

1) Détermine le nombre réel a.

$$P(\Omega) = P(\{0\}) + P(\{1\}) + P(\{2\}) + P(\{3\})$$

$$P(\{2\}) = P(\Omega) - (P(\{0\}) + P(\{1\}) + P(\{3\}))$$

$$= 1 - 0,82$$

$$P(\{2\}) = 0,18$$

2) Calcule la probabilité que le résultat de l'expérience aléatoire soit un nombre impair.

$$P(A) = P(\{2\}) + P(\{3\})$$

$$= 0,18 + 0,01$$

$$P(A) = 0,19$$

Exercice 8

Un sac contient cinq boules dont deux blanches et deux noires. On tire au hasard une boule dans le sac. Calcule la probabilité que la boule tirée soit blanche.

$$P(A) = \frac{\text{card } A}{\text{card } \Omega}$$

$$= \frac{3}{5}$$

$$P(A) = 0,6$$

-FIN-

5

Calculons la probabilité de chaque éventualité

	n	11
éventualité		
1		
2		
3		
4		
5		

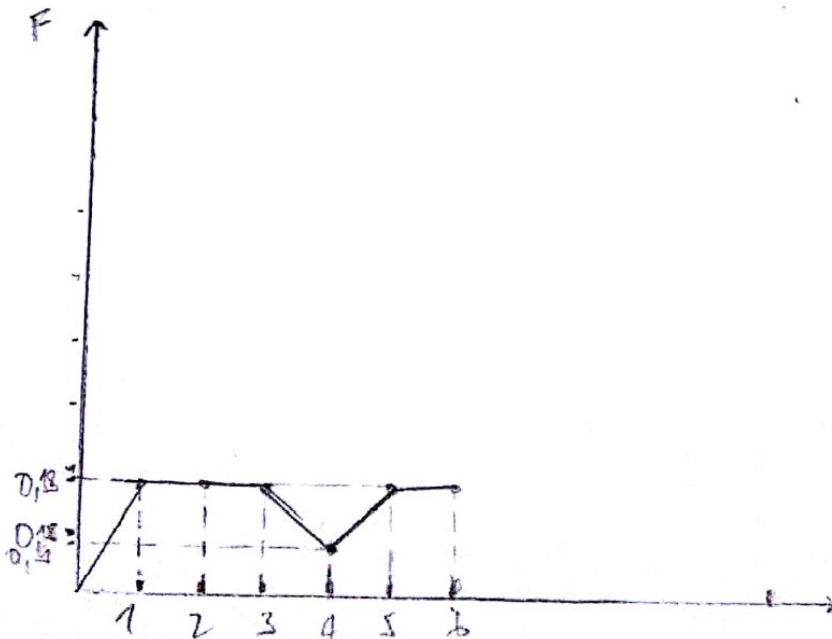
éventualités	1	2	3	4	5	6
n_i	2	2	2	1	2	2
Fréquence	0,18	0,18	0,18	0,09	0,18	0,18

La probabilité externe est 0,2

$$n = 0,2 \times 6$$

$$n = 1,2 = 1$$

Faisons le polynôme des fréquences



Exercice 1

1) Donne la définition d'une expérience aléatoire.

Une expérience aléatoire est toute expérience dont on ne peut pas prévoir avec certitude les résultats mais dont on connaît tous les résultats possibles.

2) A et B sont deux événements de l'univers des éventualités Ω d'une expérience aléatoire et p est une probabilité définie sur Ω . Pour chacune des questions a), b) et c), encerle le numéro de la bonne réponse parmi les trois qui sont proposées.

a) « A et B sont incompatibles » signifie que :

(i) $A = \emptyset$ et $B = \emptyset$.

(ii) $A \cap B = \emptyset$.

(iii) $A \cup B = \Omega$.

b) « A et B sont contraires » signifie que :

(i) $A \cap B = \emptyset$.

(ii) $A \cup B = \Omega$.

(iii) $A \cap B = \emptyset$ et $A \cup B = \Omega$.

c) « A et B sont équiprobables » signifie que :

(i) $p(A \cap B) = 0$;

(ii) $p(A) = p(B)$.

(iii) $p(A) + p(B) = 1$.

3) On considère une probabilité p sur l'univers des éventualités Ω d'une expérience aléatoire. Complète chacune des égalités suivantes :

a) $p(\Omega) = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$

b) Si A et B sont deux événements de Ω , alors $p(A \cup B) = P(A) + P(B)$

c) Si A est un événement composé des éventualités e_1, e_2, \dots, e_k , alors :

$$p(A) = p(\{e_1\}) + p(\{e_2\}) + \dots + p(\{e_k\})$$

d) Si tous les événements élémentaires sont équiprobables, alors pour tout événement A , on

a :

$$p(A) = \frac{\text{Card } A}{\text{Card } \Omega}$$

Exercice 2

On lance onze fois de suite un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on obtient les résultats suivants :

2-5-3-4-1-1-6-5-2-3-6..

Quel résultat obtiendrait-on si on lançait le dé une douzième fois ? Argumente ta réponse.

~~Le résultat qu'on obtiendrait est 2-5-3-4-1-1-6-5-2-3-6-6~~
Le résultat qu'on obtiendrait est 2-5-3-4-1-1-6-5-2-3-6-6 car lorsqu'on n'avait lancé pour onze fois le dé c'est reposé sur 6 d'où cet résultat

Exercice 3

Dans l'un des bureaux d'une entreprise de vente par correspondance arrivent plusieurs catégories de courrier. Parmi les lettres reçues, 90% contiennent une commande, 45% contiennent une demande de cadeau et 40% contiennent une commande et une demande de cadeau. Les autres lettres ne sont jamais accompagnées de commande, ni de demande de cadeau. On prend une lettre au hasard dans ce bureau. On désigne par A l'événement « la lettre contient une commande » et par B l'événement « la lettre contient une demande de cadeau ».

- 1) Identifie dans le texte ci-dessus (de l'exercice 3) la phrase qui indique l'expérience aléatoire en compétant :

La phrase qui indique l'expérience aléatoire est : on prend une lettre au hasard dans ce bureau

- 2) Calcule la probabilité que la lettre prise :

a) ne contienne pas une demande de cadeau ; on sait que $P(\Omega) = 1$

$$1 = P(A) + P(B) + P(AB) + P(C) \text{ où } P(C) \text{ est la probabilité ne contienne pas une demande de cadeau}$$
$$P(C) = 1 - P(A) + P(B) + P(AB)$$

b) contienne une commande ou une demande de cadeau.

$$P(B) = \frac{45 + 40}{100} = P(B) = \frac{85}{100}$$

$$\underline{P(B) = 0,85}$$

$P(AB)$ est la probabilité contient une commande et une demande de cadeau

$$P(C) = 1 - (0,9 + 0,45 + 0,4)$$

$$= 2,75 - 1$$

$$\underline{P(C) = 0,75}$$

Exercice 4

Un sac contient trois jetons blancs B_1, B_2, B_3 et deux jetons noirs N_1, N_2 , tous indiscernables au toucher. On tire au hasard un jeton dans le sac et on note sa couleur puis sans le remettre dans le sac on tire un second jeton et on note sa couleur.

Calcule la probabilité que les deux jetons tirés soient de couleurs différentes.

Calculons la probabilité que les deux jetons tirés soient de couleurs différentes

$$P(\Omega) = 1$$
$$P = \frac{\text{card } A}{\text{card } \Omega} \quad // \quad P = \frac{5}{48} \quad // \quad P = \frac{5}{48}$$
$$P = 0,12 \quad // \quad P = 0,12$$

Exercice 5

On lance un dé tétraédrique dont les quatre faces sont marquées a, b, c, d. et on note la marque de la face sur laquelle le dé se repose. Le dé est pipé de telle sorte que :

- les faces portant les marques a, b et d ont la même probabilité que le dé repose sur elles ;
- la probabilité que le dé repose sur la face marquée c est quatre fois plus grande que la probabilité que le dé repose sur l'une quelconque des autres faces.

1) Détermine la probabilité que le dé repose sur chacune des 4 faces.

A, b et d ayant la même probabilité

$$P(A) = \frac{1}{4} = 0,25 ; P(b) = \frac{1}{4} = 0,25 ; P(d) = \frac{1}{4} = 0,25$$

$$P(c) = 0,25 \times 4$$

$$P(c) = 1$$

2) Calcule la probabilité que le dé repose sur une face dont la marque est une consonne.

Calculons la probabilité que le dé repose sur une face dont la marque est une consonne

$$P(\Omega) = 1$$

$$1 = P(a) + P(b) + P(c) + P(d)$$
$$= 0,25 + 0,25 + 1 + P(d)$$

$$P(d) = 1,5 - 1$$

$$P(d) = 0,5 \quad // \quad P(d) = 0,5$$

Exercice 6

Un jour, un passant a été témoin d'un accident de circulation et a décidé d'appeler les sapeurs-pompiers. Il dispose de 5 numéros des sapeurs-pompiers mais ce jour-là, 3 des numéros étaient hors service. Le passant a composé au hasard un des numéros. Calcule la probabilité que l'appel du passant tombe sur un numéro en service:

Calculons la probabilité que l'appel du passant tombe sur un numéro en service

$$P = \frac{\text{card} A}{\text{card} \Omega} = \frac{2}{50} // \underline{\underline{P = 0,2}}$$

Exercice 7

L'univers des éventualités d'une expérience aléatoire étant $\Omega = \{0; 1; 2; 3\}$, on donne dans le tableau ci-dessous les probabilités des événements élémentaires.

e_i	0	1	2	3
$p(\{e_i\})$	0,17	0,64	a	0,01

1) Détermine le nombre réel a.

Déterminons le nombre réel a:

$$P(\Omega) = 1$$
$$P(\{e_i\}) = 0,17 + 0,64 + a + 0,01$$
$$1 = 0,82 + a // \underline{\underline{a = 0,18}}$$
$$a = 1 - 0,82$$

2) Calcule la probabilité que le résultat de l'expérience aléatoire soit un nombre impair.

Calculons la probabilité que le résultat soit un nombre impair

$$P = \frac{2}{4} // \underline{\underline{P = 0,5}}$$

Exercice 8

Un sac contient cinq boules dont deux blanches et trois noires. On tire au hasard une boule dans le sac. Calcule la probabilité que la boule tirée soit blanche.

Calculons la probabilité que la boule tirée soit blanche

$$P = \frac{2}{8}$$

$$\underline{\underline{P = 0,25}}$$

-FIN-

B- LE TEST**Exercice 1**

1) Donne la définition d'une expérience aléatoire.

Une expérience aléatoire est une expérience dont on ne peut pas prévoir avec certitude le résultat mais dont on connaît tous les résultats possibles

2) A et B sont deux événements de l'univers des éventualités Ω d'une expérience aléatoire et p est une probabilité définie sur Ω . Pour chacune des questions a), b) et c), encerle le numéro de la bonne réponse parmi les trois qui sont proposées.

a) « A et B sont incompatibles » signifie que :

- (i) $A = \emptyset$ et $B = \emptyset$.
 (ii) $A \cap B = \emptyset$.
 (iii) $A \cup B = \Omega$.

b) « A et B sont contraires » signifie que :

- (i) $A \cap B = \emptyset$.
 (ii) $A \cup B = \Omega$.
 (iii) $A \cap B = \emptyset$ et $A \cup B = \Omega$.

c) « A et B sont équiprobables » signifie que :

- (i) $p(A \cap B) = 0$;
 (ii) $p(A) = p(B)$;
 (iii) $p(A) + p(B) = 1$.

3) On considère une probabilité p sur l'univers des éventualités Ω d'une expérience aléatoire. Complète chacune des égalités suivantes :

a) $p(\Omega) = 1$.

b) Si A et B sont deux événements de Ω , alors $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

c) Si A est un événement composé des éventualités e_1, e_2, \dots, e_k , alors :

$$p(A) = p(\{e_1\}) + p(\{e_2\}) + \dots + p(\{e_k\})$$

d) Si tous les événements élémentaires sont équiprobables, alors pour tout événement A , on

a :

$$p(A) = \frac{\text{Card } A}{\text{Card } \Omega}$$

Exercice 2

On lance onze fois de suite un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on obtient les résultats suivants :

2-5-3-4-1-1-6-5-2-3-6.

Quel résultat obtiendrait-on si on lançait le dé une douzième fois ? Argumente ta réponse.

On peut obtenir les résultats suivants 1 ou 2/3/4/5/6. Car lancé de suite un dé est une expérience de hasard, donc c'est une expérience aléatoire on ne peut pas prévoir le résultat.

Exercice 3

Dans l'un des bureaux d'une entreprise de vente par correspondance arrivent plusieurs catégories de courrier. Parmi les lettres reçues, 90% contiennent une commande, 45% contiennent une demande de cadeau et 40% contiennent une commande et une demande de cadeau. Les autres lettres ne sont jamais accompagnées de commande, ni de demande de cadeau. On prend une lettre au hasard dans ce bureau. On désigne par A l'événement « la lettre contient une commande » et par B l'événement « la lettre contient une demande de cadeau ».

- 1) Identifie dans le texte ci-dessus (de l'exercice 3) la phrase qui indique l'expérience aléatoire en compétant :

La phrase qui indique l'expérience aléatoire est : ~~Soit~~ On prend une lettre au hasard dans ce bureau.

- 2) Calcule la probabilité que la lettre prise :

a) ne contienne pas une demande de cadeau ; Soit K l'événement la lettre prise contient une demande de cadeau.

$$P(K) = \frac{1 \times 45}{100}, P(K \cup \bar{K}) = P(\Omega) = 1$$

$$P(K) = 0,45 \quad \text{donc } P(K \cup \bar{K}) = 1 \text{ alors } P(K) + P(\bar{K}) = 1$$

$$P(\bar{K}) = 1 - P(K) \quad P(\bar{K}) = 0,55 \quad P(\bar{K}) = P(\bar{K})$$

- b) contienne une commande ou une demande de cadeau.

Soit S l'événement

$$P(S) = \frac{1 \times 40}{100}$$

$$P(S) = 0,4$$

Exercice 4

Un sac contient trois jetons blancs B_1, B_2, B_3 et deux jetons noirs N_1, N_2 , tous indiscernables au toucher. On tire au hasard un jeton dans le sac et on note sa couleur puis sans le remettre dans le sac on tire un second jeton et on note sa couleur.

Calcule la probabilité que les deux jetons tirés soient de couleurs différentes.

Comme les deux jetons tirés seront de couleurs différents alors: soit G l'événement les deux jetons tirés soient de couleurs différentes.

$$P(G) = P(B_i) \text{ probabilité d'un jeton blanc} + P(N_i) \text{ probabilité d'un Noir}$$

donc $P(B_1) = \frac{1}{5}$ et $P(N_1) = \frac{1}{5}$ puisque les jetons sont indiscernables au toucher alors $P(B_i) = P(N_i)$

Exercice 5

On lance un dé tétraédrique dont les quatre faces sont marquées a, b, c, d. et on note la marque de la face sur laquelle le dé se repose. Le dé est pipé de telle sorte que :

- les faces portant les marques a, b et d ont la même probabilité que le dé repose sur elles ;
- la probabilité que le dé repose sur la face marquée c est quatre fois plus grande que la probabilité que le dé repose sur l'une quelconque des autres faces.

1) Détermine la probabilité que le dé repose sur chacune des 4 faces.

La probabilité que le dé repose sur a, b et d est:

$$P(a) = P(b) = P(d) \text{ donc}$$

$$P(a) = \frac{3}{4}; P(b) = \frac{3}{4} \text{ et } P(c) = \frac{3}{4} \text{ or } P(c) = 4(P(a) \text{ or } P(b) \text{ or } P(d))$$

$$\text{donc } P(c) = 4 \times \frac{3}{4} = 3 \text{ or } \frac{P(a) + P(c)}{1} = \frac{1}{4} + P(c)$$

$$P(\Omega) = P(a) + P(b) + P(c) + P(d) \text{ or } P(\Omega) = 1 \text{ donc}$$

2) Calcule la probabilité que le dé repose sur une face dont la marque est une consonne.

Les consonnes sont: b, c et d

donc la probabilité que le dé repose sur l'une des faces, b, c et d est: $P(b) = \frac{3}{4}$

Exercice 4

$$\text{sera: } \frac{\text{Card } B}{\text{Card } \Omega} \text{ or } \frac{\text{Card } N}{\text{Card } \Omega}$$

donc

$$P(B) = \frac{1}{5} \text{ et } P(N) = \frac{1}{5} \text{ alors } P(B \cup N) = P(N \cup B)$$

d'où la probabilité de G :

$$P(G) = \frac{1}{5}$$

Exercice 6

Un jour, un passant a été témoin d'un accident de circulation et a décidé d'appeler les sapeurs-pompiers. Il dispose de 5 numéros des sapeurs-pompiers mais ce jour-là, 3 des numéros étaient hors service. Le passant a composé au hasard un des numéros.

Calcule la probabilité que l'appel du passant tombe sur un numéro en service:

Puisque trois des numéros étaient hors service alors 2 sont possible.

$$N = 5$$

$$P(2) = \frac{\text{card } E}{\text{card } \Omega} \text{ donc } P(2) = \frac{2}{5}$$

$$P(2) = 0,4$$

Exercice 7

L'univers des éventualités d'une expérience aléatoire étant $\Omega = \{0; 1; 2; 3\}$, on donne dans le tableau ci-dessous les probabilités des événements élémentaires.

e_i	0	1	2	3
$P(\{e_i\})$	0,17	0,64	a	0,01

1) Détermine le nombre réel a.

On sait que

$$P(\Omega) = P(\{e_0\}) + P(\{e_1\}) + P(\{e_2\}) + P(\{e_3\})$$

$$P(\Omega) = 0,17 + 0,64 + a + 0,01 \text{ donc } P(\Omega) = 1$$

1) $P(2) = a$ Exercice 7

$$a = P(\Omega) - 0,17 - 0,64 - 0,01 \text{ car } P(\Omega = 2)$$

$$a = 1 - 0,17 - 0,64 - 0,01$$

$$a = 1 - 0,82$$

$$a = 0,18$$

2) Calcule la probabilité que le résultat de l'expérience aléatoire soit un nombre impair.

Elles n'ont pas les mêmes probabilités

(Aucune idée)

Exercice 8

Un sac contient cinq boules dont deux blanches et deux noires. On tire au hasard une boule dans le sac. Calcule la probabilité que la boule tirée soit blanche.

Soit A l'événement la boule tirée est blanche

$$P(A) = \frac{2}{5}$$

$$P(A) = 0,4$$

-FIN-

5

Exercice 1

1) Donne la définition d'une expérience aléatoire.

Une expérience aléatoire, est une expérience dont on ne peut pas prédire avec certitude le résultat mais dont on connaît tous les résultats possible

2) A et B sont deux événements de l'univers des éventualités Ω d'une expérience aléatoire et p est une probabilité définie sur Ω . Pour chacune des questions a), b) et c), encercle le numéro de la bonne réponse parmi les trois qui sont proposées.

a) « A et B sont incompatibles » signifie que :

(i) $A = \emptyset$ et $B = \emptyset$.

(ii) $A \cap B = \emptyset$.

(iii) $A \cup B = \Omega$.

b) « A et B sont contraires » signifie que :

(i) $A \cap B = \emptyset$.

(ii) $A \cup B = \Omega$

(iii) $A \cap B = \emptyset$ et $A \cup B = \Omega$.

c) « A et B sont équiprobables » signifie que :

(i) $p(A \cap B) = 0$;

(ii) $p(A) = p(B)$;

(iii) $p(A) + p(B) = 1$.

3) On considère une probabilité p sur l'univers des éventualités Ω d'une expérience aléatoire. Complète chacune des égalités suivantes :

a) $p(\Omega) = 1$

b) Si A et B sont deux événements de Ω , alors $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

c) Si A est un événement composé des éventualités e_1, e_2, \dots, e_k , alors :

$$p(A) = p(\{e_1\}) + p(\{e_2\}) + \dots + p(\{e_k\})$$

d) Si tous les événements élémentaires sont équiprobables, alors pour tout événement A , on a :

$$p(A) = \frac{\text{card } A}{\text{card } \Omega}$$

Exercice 2

On lance onze fois de suite un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on obtient les résultats suivants :

2-5-3-4-1-1-6-5-2-3-6.

Quel résultat obtiendrait-on si on lançait le dé une douzième fois ? Argumente ta réponse.

On ne peut pas prédire le résultat, car la fait d'avoir lancé un dé pour observer le numéro constitue une expérience aléatoire. mais on sait que le résultat sera soit : 1, 2, 3, 4, 5 ou 6.

Exercice 3

Dans l'un des bureaux d'une entreprise de vente par correspondance arrivent plusieurs catégories de courrier. Parmi les lettres reçues, 90% contiennent une commande, 45% contiennent une demande de cadeau et 40% contiennent une commande et une demande de cadeau. Les autres lettres ne sont jamais accompagnées de commande, ni de demande de cadeau. On prend une lettre au hasard dans ce bureau. On désigne par A l'événement « la lettre contient une commande » et par B l'événement « la lettre contient une demande de cadeau ».

- 1) Identifie dans le texte ci-dessus (de l'exercice 3) la phrase qui indique l'expérience aléatoire en compétant :

La phrase qui indique l'expérience aléatoire est : ... « on prend une lettre au hasard dans ce bureau. »

- 2) Calcule la probabilité que la lettre prise :
- a) ne contienne pas une demande de cadeau ;

soit A l'événement la lettre contient une commande et \bar{A} l'événement contraire
 $P(A) + P(\bar{A}) = 1 \Rightarrow P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ d'où $P(\bar{A}) = 1 - \frac{90}{100} \Rightarrow P(\bar{A}) = 0,10$

- b) contienne une commande ou une demande de cadeau.

soit A l'événement la lettre contient une commande et B l'événement la lettre contient une demande de cadeau
 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
 $= 0,9 + 0,45 - 0,4$
 $P(A \cup B) = 0,95$

Exercice 4

Un sac contient trois jetons blancs B_1, B_2, B_3 et deux jetons noirs N_1, N_2 , tous indiscernables au toucher. On tire au hasard un jeton dans le sac et on note sa couleur puis sans le remettre dans le sac on tire un second jeton et on note sa couleur.

Calcule la probabilité que les deux jetons tirés soient de couleurs différentes.

soit Ω l'univers de cette expérience aléatoire

$$\Omega = \{(B_1, B_2), (B_1, B_3), (B_1, N_1), (B_1, N_2), (B_2, B_1), (B_2, B_3), (B_2, N_1), (B_2, N_2), (B_3, B_1), (B_3, B_2), (B_3, N_1), (B_3, N_2), (N_1, B_1), (N_1, B_2), (N_1, B_3), (N_1, N_2), (N_2, B_1), (N_2, B_2), (N_2, B_3), (N_2, N_1), (N_2, N_2)\}$$

soit A l'événement qu'il y a deux jetons de couleurs différentes

$$P(A) = \frac{\text{card } A}{\text{card } \Omega}$$

$$= \frac{12}{20}$$

$$P(A) = 0,6$$

Exercice 5

On lance un dé tétraédrique dont les quatre faces sont marquées a, b, c, d. et on note la marque de la face sur laquelle le dé se repose. Le dé est pipé de telle sorte que :

- les faces portant les marques a, b et d ont la même probabilité que le dé repose sur elles ;
- la probabilité que le dé repose sur la face marquée c est quatre fois plus grande que la probabilité que le dé repose sur l'une quelconque des autres faces.

1) Détermine la probabilité que le dé repose sur chacune des 4 faces.

~~soit A l'événement que le dé repose sur la face c. on sait que $P(A|a) = P(A|b) = P(A|d)$~~
et $P(A|c) = 4P(A|a)$ alors que

$$\Omega = \{a, b, c, d\}$$

$$P(\Omega) = P(\{a\}) + P(\{b\}) + P(\{c\}) + P(\{d\})$$

$$= 3P(\{a\}) + P(\{c\})$$

$$= 3P(\{a\}) + 4P(\{a\})$$

$$P(\Omega) = 7P(\{a\}) \text{ or } P(\Omega) = 1 \text{ d'où } 7P(\{a\}) = 1 \Rightarrow P(\{a\}) = P(\{b\}) = P(\{d\}) = \frac{1}{7}$$

$$P(\{c\}) = 4P(\{a\}) = \frac{4}{7}$$

2) Calcule la probabilité que le dé repose sur une face dont la marque est une consonne.

soit B l'événement que le dé repose sur une face dont la marque est consonne

$$B = \{b, c, d\}$$

$$P(B) = P(\{b\}) + P(\{c\}) + P(\{d\})$$

$$= 2 \times \frac{1}{7} + \frac{4}{7}$$

$$P(B) = \frac{6}{7}$$

Exercice 6

Un jour, un passant a été témoin d'un accident de circulation et a décidé d'appeler les sapeurs-pompiers. Il dispose de 5 numéros des sapeurs-pompiers mais ce jour-là, 3 des numéros étaient hors service. Le passant a composé au hasard un des numéros.

Calcule la probabilité que l'appel du passant tombe sur un numéro en service:

soit B l'événement l'appel du passant tombe sur un numéro en service

$$P(B) = \frac{\text{card } B}{\text{card } \Omega}$$

l'univers des éventualités

$$\Omega = \{N_1; N_2; N_3; N_4; N_5\}$$

$$P(B) = \frac{2}{5}$$

$$P(B) = 0,4$$

Exercice 7

L'univers des éventualités d'une expérience aléatoire étant $\Omega = \{0; 1; 2; 3\}$, on donne dans le tableau ci-dessous les probabilités des événements élémentaires.

e_i	0	1	2	3
$P(\{e_i\})$	0,17	0,64	a	0,01

1) Détermine le nombre réel a.

$$P(\Omega) = P(\{0\}) + P(\{1\}) + a + P(\{3\})$$

$$= 0,17 + 0,64 + a + 0,01$$

$$= 0,82 + a \quad P(\Omega) = 1 \text{ donc on a: } 0,82 + a = 1$$

$$a = 1 - 0,82 \Rightarrow$$

$$a = 0,18$$

2) Calcule la probabilité que le résultat de l'expérience aléatoire soit un nombre impair.

soit B l'événement le résultat de l'expérience est un nombre impair

$$B = \{1; 3\}$$

$$P(B) = P(\{1\}) + P(\{3\})$$

$$= 0,64 + 0,01$$

$$P(B) = 0,65$$

Exercice 8

Un sac contient cinq boules dont deux blanches et deux noires. On tire au hasard une boule dans le sac. Calcule la probabilité que la boule tirée soit blanche.

soit P l'événement la boule tirée est blanche

$$P(P) = \frac{\text{card } P}{\text{card } \Omega}$$

$$= \frac{2}{5}$$

$$P(P) = 0,4$$

-FIN-

5

B- LE TESTExercice 1

1) Donne la définition d'une expérience aléatoire.

Une expérience aléatoire est une expérience dont on connaît les résultats possibles mais on ne peut pas, prévoir avec certitude le résultat.

2) A et B sont deux événements de l'univers des éventualités Ω d'une expérience aléatoire et p est une probabilité définie sur Ω . Pour chacune des questions a), b) et c), encercle le numéro de la bonne réponse parmi les trois qui sont proposées.

a) « A et B sont incompatibles » signifie que :

(i) $A = \emptyset$ et $B = \emptyset$.

(ii) $A \cap B = \emptyset$.

(iii) $A \cup B = \Omega$.

b) « A et B sont contraires » signifie que :

(i) $A \cap B = \emptyset$.

(ii) $A \cup B = \Omega$

(iii) $A \cap B = \emptyset$ et $A \cup B = \Omega$.

c) « A et B sont équiprobables » signifie que :

(i) $p(A \cap B) = 0$;

(ii) $p(A) = p(B)$;

(iii) $p(A) + p(B) = 1$.

3) On considère une probabilité p sur l'univers des éventualités Ω d'une expérience aléatoire. Complète chacune des égalités suivantes :

a) $p(\Omega) = 1$

b) Si A et B sont deux événements de Ω , alors $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

c) Si A est un événement composé des éventualités e_1, e_2, \dots, e_k , alors :

$$p(A) = p(\{e_1\}) + p(\{e_2\}) + \dots + p(\{e_k\})$$

d) Si tous les événements élémentaires sont équiprobables, alors pour tout événement A , on a :

$$p(A) = \frac{\text{Card } A}{\text{Card } \Omega}$$

Exercice 2

On lance onze fois de suite un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on obtient les résultats suivants :

2 - 5 - 3 - 4 - 1 - 1 - 6 - 5 - 2 - 3 - 6.

Quel résultat obtiendrait-on si on lançait le dé une douzième fois ? Argumente ta réponse.

Si on lançait le dé pour une douzième fois, on pourrait obtenir le résultat 1 ou 2 ou 3 ou 4 ou 5 ou 6, car d'après la définition d'une expérience aléatoire, on ne pourrait pas connaître avec certitude le résultat qui on obtiendrait.

Exercice 3

Dans l'un des bureaux d'une entreprise de vente par correspondance arrivent plusieurs catégories de courrier. Parmi les lettres reçues, 90% contiennent une commande, 45% contiennent une demande de cadeau et 40% contiennent une commande et une demande de cadeau. Les autres lettres ne sont jamais accompagnées de commande, ni de demande de cadeau. On prend une lettre au hasard dans ce bureau. On désigne par A l'événement « la lettre contient une commande » et par B l'événement « la lettre contient une demande de cadeau ».

- 1) Identifie dans le texte ci-dessus (de l'exercice 3) la phrase qui indique l'expérience aléatoire en compétant :

La phrase qui indique l'expérience aléatoire est : Parmi les lettres reçues, 90% contiennent une commande, 45% contiennent une demande de cadeau et 40% contiennent une commande et une demande de cadeau.

- 2) Calcule la probabilité que la lettre prise :

a) ne contienne pas une demande de cadeau ; soit C l'événement contraire de l'événement B. Comme C et B sont contraires, alors on a :

$$P(B) + P(C) = 1 \text{ donc } P(C) = 1 - P(B), \quad P(B) = \frac{45}{100} = 0,45 \text{ alors}$$
$$P(C) = 1 - 0,45$$
$$\underline{P(C) = 0,55}$$

- b) contienne une commande ou une demande de cadeau.

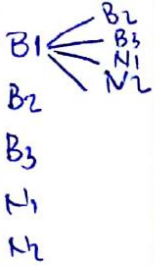
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B), \quad P(A) = \frac{90}{100} = 0,9 \text{ et } P(A \cap B) = \frac{40}{100} = 0,4$$
$$P(A \cup B) = 0,9 + 0,45 - 0,4$$
$$\underline{P(A \cup B) = 0,95}$$

Exercice 4

Un sac contient trois jetons blancs B_1, B_2, B_3 et deux jetons noirs N_1, N_2 , tous indiscernables au toucher. On tire au hasard un jeton dans le sac et on note sa couleur puis sans le remettre dans le sac on tire un second jeton et on note sa couleur.

Calcule la probabilité que les deux jetons tirés soient de couleurs différentes.

Soit A l'événement « les deux jetons tirés soient de couleurs différentes »
De ce tableau de choix, on a :



$$\text{Card } \Omega = 20$$

$$\text{Card } A = 6$$

$$\text{donc } P(A) = \frac{\text{Card } A}{\text{Card } \Omega} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10} = 0,3 \text{ alors}$$

$$\underline{\underline{P(A) = 0,3}}$$

Exercice 5

On lance un dé tétraédrique dont les quatre faces sont marquées a, b, c, d, et on note la marque de la face sur laquelle le dé se repose. Le dé est pipé de telle sorte que :

- les faces portant les marques a, b et d ont la même probabilité que le dé repose sur elles ;
- la probabilité que le dé repose sur la face marquée c est quatre fois plus grande que la probabilité que le dé repose sur l'une quelconque des autres faces.

1) Détermine la probabilité que le dé repose sur chacune des 4 faces : $\Omega = \{a, b, c, d\}$

$P(\Omega) = P(\{a\}) + P(\{b\}) + P(\{c\}) + P(\{d\})$. Comme les faces a, b et d ont la même probabilité d'apparaître donc $P(\{a\}) = P(\{b\}) = P(\{d\})$ et comme la probabilité de la face c est 4 fois plus grande que la probabilité que le dé repose sur l'une quelconque des autres faces donc on a :

$$P(\Omega) = 3P(\{a\}) + 4P(\{a\}) = 7P(\{a\}) \text{ alors } P(\{a\}) = \frac{P(\Omega)}{7} = \frac{1}{7} \text{ or}$$
$$P(\{a\}) = P(\{b\}) = P(\{d\}) \text{ donc par conséquent } P(\{a\}) = P(\{b\}) = P(\{d\}) = \frac{1}{7} \text{ et}$$

comme $P(\{c\}) = 4P(\{a\}) = 4 \times \frac{1}{7} = \frac{4}{7}$ donc alors $P(\{c\}) = \frac{4}{7}$.

2) Calcule la probabilité que le dé repose sur une face dont la marque est une consonne.

Soit A l'événement « le dé repose sur une face dont la marque est une consonne » donc

$$A = \{b, c, d\}$$

$$P(A) = P(\{b\}) + P(\{c\}) + P(\{d\})$$
$$= \frac{1}{7} + \frac{4}{7} + \frac{1}{7}$$

$$P(A) = \frac{5}{7}$$

Exercice 6

Un jour, un passant a été témoin d'un accident de circulation et a décidé d'appeler les sapeurs-pompiers. Il dispose de 5 numéros des sapeurs-pompiers mais ce jour-là, 3 des numéros étaient hors service. Le passant a composé au hasard un des numéros.

Calcule la probabilité que l'appel du passant tombe sur un numéro en service:

Soit A l'événement : « l'appel du passant tombe sur un numéro en service ».
 $\Omega = \{5 \text{ numéros}\}$ or 3 numéros étaient hors service donc
 $A = \{2 \text{ numéros en service}\}$ alors $\text{card } \Omega = 5$ et $\text{card } A = 2$.
$$P(A) = \frac{\text{Card } A}{\text{Card } \Omega} = \frac{2}{5} = \underline{\underline{0,4}}$$

Exercice 7

L'univers des éventualités d'une expérience aléatoire étant $\Omega = \{0; 1; 2; 3\}$, on donne dans le tableau ci-dessous les probabilités des événements élémentaires.

e_i	0	1	2	3
$p(\{e_i\})$	0,17	0,64	a	0,01

1) Détermine le nombre réel a.

On sait que $\Omega = \{0; 1; 2; 3\}$ donc
$$P(\Omega) = P(\{0\}) + P(\{1\}) + P(\{2\}) + P(\{3\})$$

$$= 0,17 + 0,64 + a + 0,01$$
$$P(\Omega) = 0,82 + a \quad \text{donc} \quad a = P(\Omega) - 0,82 = 1 - 0,82 = 0,18 \text{ alors}$$
$$\underline{\underline{a = 0,18}}$$

2) Calcule la probabilité que le résultat de l'expérience aléatoire soit un nombre impair.

Soit B l'événement : « le résultat de l'expérience aléatoire soit un nombre impair »

$$B = \{1; 3\} \quad P(B) = \frac{\text{Card } B}{\text{Card } \Omega} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = \underline{\underline{0,5}}$$

Exercice 8

Un sac contient cinq boules dont deux blanches et ^{trois} deux noires. On tire au hasard une boule dans le sac.

Calcule la probabilité que la boule tirée soit blanche.

Soit A l'événement : « la boule tirée est blanche ».

$$\Omega = \{B_1; B_2; N_1; N_2; N_3\}$$

$$A = \{B_1; B_2\}$$

$$P(A) = \frac{\text{Card } A}{\text{Card } \Omega} = \frac{2}{5} = \underline{\underline{0,4}}$$

-FIN-

B- LE TEST

Exercice 1

1) Donne la définition d'une expérience aléatoire.

Une expérience aléatoire est une expérience dont on ne peut pas prévoir avec certitude le résultat mais dont on connaît les résultats possibles.

2) A et B sont deux événements de l'univers des éventualités Ω d'une expérience aléatoire et p est une probabilité définie sur Ω . Pour chacune des questions a), b) et c), encercle le numéro de la bonne réponse parmi les trois qui sont proposées.

a) « A et B sont incompatibles » signifie que :

- (i) $A = \emptyset$ et $B = \emptyset$.
- (ii) $A \cap B = \emptyset$.
- (iii) $A \cup B = \Omega$.

b) « A et B sont contraires » signifie que :

- (i) $A \cap B = \emptyset$.
- (ii) $A \cup B = \Omega$
- (iii) $A \cap B = \emptyset$ et $A \cup B = \Omega$.

c) « A et B sont équiprobables » signifie que:

- (i) $p(A \cap B) = 0$;
- (ii) $p(A) = p(B)$;
- (iii) $p(A) + p(B) = 1$.

3) On considère une probabilité p sur l'univers des éventualités Ω d'une expérience aléatoire. Complète chacune des égalités suivantes :

a) $p(\Omega) = p(A) + p(B) = 1$

b) Si A et B sont deux événements de Ω , alors $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

c) Si A est un événement composé des éventualités e_1, e_2, \dots, e_k , alors :

$p(A) = p(\{e_1\}) + p(\{e_2\}) + \dots + p(\{e_k\})$

d) Si tous les événements élémentaires sont équiprobables, alors pour tout événement A , on a :

$p(A) = \dots$
~~C'est favorable~~
~~C'est possible~~
 $p(\{e_1\}) = p(\{e_2\}) = \dots = p(\{e_k\})$

Exercice 2

On lance onze fois de suite un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on obtient les résultats suivants :

2-5-3-4-1-1-6-5-2-3-6.

Quel résultat obtiendrait-on si on lançait le dé une douzième fois ? Argumente ta réponse.

Même si on lançait le dé une douzième fois, soit on obtient : 4-1-1-2-5-3-2-6-5-3-6) soit 1-1-3-4-6-5-2-6-2-5-3
Parce qu'il s'agit d'une expérience aléatoire qui se fait au hasard, même si on lançait 1000 fois le dé on ne peut pas trouver le même résultat, de plus on ne peut pas prévoir avec certitude le résultat, mais on connaît les résultats possibles.

Exercice 3

Dans l'un des bureaux d'une entreprise de vente par correspondance arrivent plusieurs catégories de courrier. Parmi les lettres reçues, 90% contiennent une commande, 45% contiennent une demande de cadeau et 40% contiennent une commande et une demande de cadeau. Les autres lettres ne sont jamais accompagnées de commande, ni de demande de cadeau. On prend une lettre au hasard dans ce bureau. On désigne par A l'événement « la lettre contient une commande » et par B l'événement « la lettre contient une demande de cadeau ».

- 1) Identifie dans le texte ci-dessus (de l'exercice 3) la phrase qui indique l'expérience aléatoire en compétant :

La phrase qui indique l'expérience aléatoire est : ... on prend une lettre au hasard dans ce bureau.

- 2) Calcule la probabilité que la lettre prise :

- a) ne contienne pas une demande de cadeau ;

Soit D la lettre ne contient pas une demande de cadeau

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$P(A \cap B) = P(A \cup B) - P(A) - P(B) \quad \text{ou} \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 1$$
$$P(A \cap B) = 1 - 1 = 0 \quad \text{ou} \quad D = 0$$

- b) contienne une commande ou une demande de cadeau.

Aucune idée

Exercice 4

Un sac contient trois jetons blancs B_1, B_2, B_3 et deux jetons noirs N_1, N_2 , tous indiscernables au toucher. On tire au hasard un jeton dans le sac et on note sa couleur puis sans le remettre dans le sac on tire un second jeton et on note sa couleur.

Calcule la probabilité que les deux jetons tirés soient de couleurs différentes.

Aucune idée

Exercice 5

On lance un dé tétraédrique dont les quatre faces sont marquées a, b, c, d. et on note la marque de la face sur laquelle le dé se repose. Le dé est pipé de telle sorte que :

- les faces portant les marques a, b et d ont la même probabilité que le dé repose sur elles ;
- la probabilité que le dé repose sur la face marquée c est quatre fois plus grande que la probabilité que le dé repose sur l'une quelconque des autres faces.

1) Détermine la probabilité que le dé repose sur chacune des 4 faces.

Soit a pour $P(a) = \frac{1}{4} = 0,25$
 $P(b) = \frac{1}{4} = 0,25$
 $P(d) = \frac{1}{4} = 0,25$ comme a, b et d ont la même probabilité.
 $P = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$
- Pour $P(c)$
Soit b est une face du dé
 $P(c) = 4P(b)$ or $P(b) = 0,25$
 $P(c) = 4 \times 0,25$
 $P(c) = 1$

2) Calcule la probabilité que le dé repose sur une face dont la marque est une consonne.

Aucune idée

Exercice 6

Un jour, un passant a été témoin d'un accident de circulation et a décidé d'appeler les sapeurs-pompiers. Il dispose de 5 numéros des sapeurs-pompiers mais ce jour-là, 3 des numéros étaient hors service. Le passant a composé au hasard un des numéros.

Calcule la probabilité que l'appel du passant tombe sur un numéro en service:

Soit $P(A)$ la probabilité que l'appel du passant tombe et A l'événement l'appel du passant tombe.
 $A = \{1, 3\}$ donc
 $P(A) = P(\{1\}) + P(\{3\})$
 $P(A) = \frac{1+3}{4}$
 $P(A) = \frac{4}{4}$

Exercice 7

L'univers des éventualités d'une expérience aléatoire étant $\Omega = \{0; 1; 2; 3\}$, on donne dans le tableau ci-dessous les probabilités des événements élémentaires.

e_i	0	1	2	3
$p(\{e_i\})$	0,17	0,64	a	0,01

1) Détermine le nombre réel a.

Aucune idée

2) Calcule la probabilité que le résultat de l'expérience aléatoire soit un nombre impair.

Soit B l'événement des éventualités de résultat de l'expérience
ce soit un nombre impair.

$$B = \{0; 1; 2; 3\}$$

$$P(B) = P(\{0\}) + P(\{1\}) + P(\{2\}) + P(\{3\})$$

$$P(B) = 0 + 1 + 2 + 3$$

Exercice 8

Un sac contient cinq boules dont deux blanches et ^{trois} deux noires. On tire au hasard une boule dans le sac.
Calcule la probabilité que la boule tirée soit blanche.

Soit A l'événement la boule tirée soit blanche
et B le nombre de boules que contient le sac

$$P = \frac{\text{cans } A}{\text{cans } B}$$

$$P = \frac{1}{5} = 0,2$$

-FIN-