



HAL
open science

Modélisation et démarche d'optimisation robuste sous incertitudes pour l'ingénierie mécanique

Oussama Braydi

► **To cite this version:**

Oussama Braydi. Modélisation et démarche d'optimisation robuste sous incertitudes pour l'ingénierie mécanique. Génie mécanique [physics.class-ph]. Université de Technologie de Troyes; Université Libanaise, 2018. Français. NNT: 2018TROY0048 . tel-03609598

HAL Id: tel-03609598

<https://theses.hal.science/tel-03609598v1>

Submitted on 15 Mar 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Thèse
de doctorat
de l'UTT

Oussama BRAYDI

**Modélisation et démarche
d'optimisation robuste
sous incertitudes pour l'ingénierie
mécanique**

Champ disciplinaire :
Sciences pour l'Ingénieur

2018TROY0048

Année 2018

Thèse en cotutelle avec Université Libanaise – HADATH – LIBAN



THESE

pour l'obtention du grade de

DOCTEUR

de l'UNIVERSITE DE TECHNOLOGIE DE TROYES

EN SCIENCES POUR L'INGENIEUR

Spécialité : MATERIAUX, MECANIQUE, OPTIQUE, NANOTECHNOLOGIE

présentée et soutenue par

Oussama BRAYDI

le 10 décembre 2018

**Modélisation et démarche d'optimisation robuste
sous incertitudes pour l'ingénierie mécanique**

JURY

M. N. GAYTON	PROFESSEUR DES UNIVERSITES	Président
M. C. GOGU	MAITRE DE CONFERENCES - HDR	Rapporteur
M. W. RAPHAËL	PROFESSEUR - HDR	Rapporteur
M. K. EL-TAWIL	PROFESSEUR ASSOCIE	Examineur
Mme L. GIRAUD-MOREAU	MAITRE DE CONFERENCES - HDR	Examinatrice
M. P. LAFON	PROFESSEUR DES UNIVERSITES	Directeur de thèse
M. R. YOUNES	PROFESSEUR	Directeur de thèse

Personnalité invitée

M. E. CHÂTELET	PROFESSEUR DES UNIVERSITES
----------------	----------------------------




Mots clés : optimisation robuste, incertitude, génie mécanique, plan d'expérience, décision multicritère, emboutissage (travail des métaux)

Keywords: robust optimization, uncertainty, mechanical engineering, experimental design, multiple criteria decision making, deep drawing (metal-work)

Cette thèse a été préparée au

ICD-LASMIS



 +33 (0)3 25 71 76 00
 +33 (0)3 25 71 76 75
 secretariat-lasmis@utt.fr
Site <http://lasmis.utt.fr>

A Chawki, Hala et Samah

"Uncertainty is the only certainty
there is, and knowing how to live
with insecurity is the only security"

John Allen Paulos

Modélisation et démarche d'optimisation robuste sous incertitudes pour l'ingénierie mécanique

Résumé

L'optimisation sous incertitudes est maintenant fréquemment utilisée en ingénierie mécanique, ce type d'optimisation est capable de produire des résultats à la fois fiables et robustes. Le défi principal de l'optimisation sous incertitudes est son coût de calculs, qui est le produit du coût des itérations de l'algorithme d'optimisation et du coût de propagation des incertitudes. Ce coût est d'autant plus important que ces problèmes de design nécessitent des simulations numériques pour calculer leurs fonctions objectifs et contraintes. Ces fonctions originales sont souvent remplacées par des méta-modèles afin de compenser ces coûts de calculs. Dans ce travail nous abordons une nouvelle classification des problèmes d'optimisation sous incertitudes. Cette nouvelle classification est basée sur les conditions nécessaires à la définition de chaque type d'optimisation sous incertitudes. Une méthode générale pour détecter ces conditions est introduite, cette méthode est un outil efficace pour aider le designer à choisir le type d'optimisation sous incertitudes nécessaire à mettre en œuvre. Une démarche globale pour résoudre les problèmes d'optimisation robuste basée sur une version modifiée de l'algorithme EGO avec des métamodèles adaptatifs est également introduite. Cette nouvelle méthode est validée sur des problèmes académiques tests et son efficacité est mise en valeur sur un problème industriel d'emboutissage.

Mots clés : optimisation robuste, incertitude, génie mécanique, plan d'expérience, décision multicritère, emboutissage (travail des métaux)

Abstract

In last years, the optimization under uncertainties is frequently used in mechanical engineering, this type of optimization is capable of producing results that are both reliable and robust. The main challenge of optimization under uncertainties is its cost, which is the product of the costs of the optimization algorithm, and the propagation of uncertainties. In addition these design problems require numerical simulations to calculate their objective functions and constraints. These original functions are often replaced by metamodels to reduce the cost of the calculation. In this work, we propose a new classification of the optimization problems under uncertainties, this new classification is based on the necessary condition to define each type of optimization under uncertainty. In addition a general method for detecting these conditions is introduced, this method is an effective tool to help the designer to choose what type of optimization under uncertainties is necessary for its design. A global approach to solve robust optimization problems based on a modified version of EGO algorithm with adaptive metamodels is introduced. This new method is tested in academic problems and its effectiveness is highlighted on an industrial stamping problem.

Keywords: robust optimization, uncertainty, mechanical engineering, experimental design, multiple criteria decision making, deep drawing (metal-work)

Remerciements

Je tiens à remercier très chaleureusement toutes les personnes avec qui j'ai eu l'occasion de travailler pendant ces trois années de thèse et qui ont d'une manière ou d'une autre contribué à ce succès avec l'aide et le soutien de mon travail.

Avant tout, un très grand merci à M. Pascal Lafon et M. Rafic Younes, qui ont encadré ce travail, ils m'ont fait partager leur brillantes intuitions, leurs permanents conseils et leurs connaissances scientifiques. Je les remercie pour leur gentillesse, leur disponibilité permanente et pour les nombreux encouragements qu'ils m'ont prodigué.

Un grand merci à M. Eric Châtelet, pour sa contribution dans ce travail sur les techniques de propagation des incertitudes et pour avoir accepté notre invitation à la participation au jury de la thèse .

Je souhaite ensuite remercier M. Christian Gogu, et M. Wassim Raphael d'avoir accepté de rapporter ma thèse. Merci également aux autres membres du jury, M. Khaled El-Tawil, M. Nicolas Gayton et Mme Laurence Giraud-Moreau pour avoir accepté d'examiner ma thèse.

Merci à la région Grand-Est, au fonds européen de développement régional (FEDER) et à l'Université Libanaise pour avoir financé cette thèse.

Merci également à l'Université de Technologie de Troyes, et à l'Université Libanaise, qui ont offrir les équipements et les matériels nécessaires pour ce travail.

Merci aux écoles doctorales des deux universités, à l'équipe LASMIS et à la faculté de génie de l'Université Libanaise et au centre de modélisation pour m'avoir accueilli ces trois années de thèse.

Merci à mes amis, qui ont rendu ces trois années inoubliables!!! Spécifiquement je remercie les amis sur Troyes qui étaient ma deuxième famille, leur aide et soutien m'ont encouragé à achever ce travail.

Mon plus grand merci va, sans conteste, à ma famille au Liban, pour Chawki, Hala, Samah, Fatima, Mohamad, Mariam, Ali et tous les autres membres de ma famille, pour leur soutien, sans faille, et leur aide pendant ces années.

Sommaire

Résumé	xiii
Remerciements	xv
Sommaire	xvii
Liste des tableaux	xix
Table des figures	xxiii
1 Introduction	1
2 État de l'art	5
3 Incertitudes et robustesse	45
4 RO et méta-modèles adaptatifs	87
5 Conclusions et perspectives	137
Bibliographie	141
A Études des incertitudes sur les modèles de multiplication avec exposants	155
B Propagation des incertitudes sur les métamodèles RBF gaussiens	171
Table des matières	179

Liste des tableaux

2.1	Les Pôlynomes orthogonaux associés à chaque type de PDF	21
2.2	Exemples des fonctions à base radiales	30
2.3	Résumé des équations de la propagation des incertitudes pour les modèles multiplicatifs y compris les métamodèles polynomiaux	40
3.1	Le type de OU convenable pour chaque cas du design.	52
3.2	L'existence de l'antagonisme Espérance-Variance dans les modèles de multiplication et de sommation.	55
3.3	Identification de l'antagonisme sur les modèles de multiplication avec des exposants.	59
3.4	Les deux types de la modélisation des incertitudes.	63
3.5	Les bornes des variables du problème de deux barres.	66
3.6	Distributions des variables et des paramètres du problème de deux barres.	67
3.7	L'optimum du problème RBRDO de la structure de deux barres (cas 1).	69
3.8	Les mesures de Dispersion pour le problème de deux barres (cas 1).	70
3.9	l'optimum du problème RBRDO de la structure de deux barres (cas 2).	71
3.10	L'optimum déterministe du problème de deux barres.	71
3.11	Les bornes des variables du problème de la poutre console.	73
3.12	Distributions des variables et des paramètres du problème de la poutre console.	74
3.13	Points d'ancrage du problème RBRDO de la poutre console.	74
3.14	Mesures de dispersion du problème de la poutre console.	74
3.15	L'optimum déterministe du problème de la poutre console.	75
3.16	les Bornes des variables du problème de la poutre soudée.	77
3.17	Distributions des variables et des paramètres du problème de la poutre soudée.	79

3.18	Points d'ancrage du problème RBRDO de la poutre soudée.	80
3.19	Mesures de Dispersion du problème de la poutre soudée.	80
3.20	Optimum déterministe du problème de la poutre soudée.	80
3.21	Nouvelle modélisation des incertitudes des variables du design du problème de la poutre soudée.	80
3.22	Point optimum du problème RBRDO de la poutre soudée avec la nouvelle modélisation des incertitudes.	81
3.23	Les bornes des variables du problème de la poutre encastree.	81
3.24	Les Valeurs of des paramètres constants du problème de la poutre encastree.	82
3.25	Le point optimum D_c du problème DO de la poutre encastree.	83
3.26	Les PDF des variables du problème de la poutre encastree.	83
3.27	Points d'ancrage du problème RBRDO de la poutre encastree (cas de la rigidité).	83
3.28	Évaluation de D_c sous incertitudes.	83
4.1	Distributions des variables et des paramètres du problème de la poutre soudée.	94
4.2	Comparaison entre des deux calculs de EGO-Robuste basés sur les librairies "UQLAB" et "DACE" dans le problème d la poutre soudée.	98
4.3	Temps de calcul prises par les différents calculs de EGO-Robuste du problème de la poutre soudée	99
4.4	Dimension de l'outillage.	102
4.5	Constante matérielle pour le critère anisotrope de Hill 48 [162]	105
4.6	Données du matériaux DP780 [162].	106
4.7	Liste des paramètres d'entrée du modèle de simulation, paramètres dont les valeurs sont modifiables.	108
4.8	Variables et paramètres environnementaux de la formulation adoptée pour le problème d'optimisation	109
4.9	Comparaison entre les deux configurations de EGO-Robuste basés sur les librairies "UQLAB" et "DACE".	119
4.10	Les valeurs des indicateurs IGD et HV pour les différents fronts de Pareto construits dans les deux configurations ($n_{bd} = 200, n_0 = 15$) et pour le front de Pareto de référence	122
4.11	Les valeurs des indicateurs IGD et HV pour les fronts de Pareto qui correspondent aux trois cas de n_0 et au front de Pareto de référence	125
4.12	Les valeurs des indicateurs IGD et HV pour les fronts de Pareto qui correspondent à $n_{bd} = 100, 200$ et 300 et du front de Pareto de référence.	127
4.13	Les comparaisons effectuées entre les deux approches EGO-Robuste et classiques avec des budgets similaires et les figures correspondantes	129

4.14	Les valeurs des indicateurs IGD et HV pour les différents fronts de Pareto construits. Les meilleurs sont en bleus et les pires sont en rouges, EGO-Robuste ($n_{bd} = 300$) est en vert.	134
A.1	Les différents cas des modèles multiplicatifs	169

Table des figures

2.1	Front de Pareto tracé dans l'espace des objectifs $f_1(\mathbf{x})$ et $f_2(\mathbf{x})$. . .	11
2.2	L'existence de l'antagonisme entre $f_1(x)$ et $f_2(x)$ du problème d'optimisation biobjectif de Schaffer	13
2.3	Illustration de la méthode NBI pour le cas biobjectif	15
2.4	Neurone artificiel	27
2.5	Réseau de neurones à cinq entrées et une couche cachée constituée de trois neurones et une sortie	28
2.6	Construction des métamodèles adaptatifs	32
2.7	La valeur de EI en un point x_0	35
2.8	Construction des métamodèles adaptatifs par l'algorithme EGO . .	35
2.9	Exemple de l'enrichissement par l'algorithme EGO de la fonction de Forrester	36
3.1	Classification des différentes approches du design [122].	51
3.2	Distances entre les deux points d'ancrage du front de Pareto sur l'espace Espérance-Variance.	62
3.3	La méthode générale pour identifier l'antagonisme Espérance-Variance.	64
3.4	La structure de deux barres.	65
3.5	$\mathbb{E}[f_v]$ vs $\mathbb{V}[f_v]$ pour le problème de deux barres dans le premier cas qui correspond aux variances constantes. Les points A et B sont les points d'ancrage du problème RBRDO.	69
3.6	$\mathbb{E}[f_v]$ vs $\mathbb{V}[f_v]$ pour le problème de deux barres pour le second cas qui correspond aux variances proportionnelles. Le point O est l'optimum du problème RBRDO.	70
3.7	Le front de Pareto du problème de deux barres étudié dans le premier cas qui correspond à la variance constante.	71
3.8	La poutre console.	72
3.9	La poutre soudée.	75

3.10	Le front de Pareto pour le problème RBRDO et l'optimum déterministe du problème de la poutre soudée.	78
3.11	La poutre encastree.	81
3.12	Front de Pareto pour le problème RBRDO de la poutre encastree.	84
4.1	La démarche EGO-Robuste proposée.	93
4.2	Le front de Pareto pour le problème RDO de l'équation (4.10) de la poutre soudée calculé analytiquement.	95
4.3	Le front de Pareto du problème RDO de la poutre soudée construit en utilisant l'algorithme EGO-robuste et en utilisant les configurations du premier calcul.	97
4.4	Le front de Pareto du problème RDO de la poutre soudée construit en utilisant l'algorithme EGO-robuste et en utilisant les configurations du second calcul.	100
4.5	Vue schématique de l'outillage de l'emboutissage profond.	101
4.6	Effet du retour élastique.	102
4.7	Définition des mesures du profil après retour élastique.	103
4.8	Modèle des éléments finis d'emboutissage en U	104
4.9	Comparaison le modèle de simulation EF et des mesures expérimentales de Numisheet 2011[162].	107
4.10	Calcul des mesures du retour élastique à partir des résultats de la simulation par éléments finis.	107
4.11	Répartition des 1000 simulations numériques dans le domaine des variables de conception r_d, F_{BHF}	111
4.12	Réponse du méta-modèle de Krigeage haute fidélité	112
4.13	L'espérance $\mathbb{E}[U_T]$ tracée en fonction des variables du problème.	114
4.14	L'écart type $\sigma[U_T]$ tracé en fonction des variables du problème.	114
4.15	Image du domaine des variables dans le domaine des objectifs $\mathbb{E}[U_T]$ - $\sigma[U_T]$	115
4.16	Les fronts de Pareto construits par l'optimisation (NSGAI) et par la méthode de balayage en se basant sur le modèle de référence	117
4.17	Résultats de l'algorithme EGO-Robuste appliqué sur le problème d'emboutissage avec les bibliothèques "DACE" et "UQLAB" et avec $n_{bd} = 200$ et $n_0 = 15$	120
4.18	Résultats de l'algorithme EGO-Robuste appliqué sur le problème d'emboutissage qui correspond à la seconde configuration avec $n_{bd} = 200$ et $n_0 = 5$	123
4.19	Résultats de l'algorithme EGO-Robuste appliqué sur le problème d'emboutissage qui correspond à la seconde configuration avec $n_{bd} = 200$ et $n_0 = 15$	124

4.20	Résultats de l'algorithme EGO-Robuste appliqué sur le problème d'emboutissage qui correspond à la seconde configuration avec $n_{bd} = 200$ et $n_0 = 40$	125
4.21	Résultats de l'algorithme EGO-Robuste appliqué sur le problème d'emboutissage qui correspond à la seconde configuration avec $n_{bd} = 100$ et $n_0 = 15$	126
4.22	Résultats de l'algorithme EGO-Robuste appliqué sur le problème d'emboutissage qui correspond à la seconde configuration avec $n_{bd} = 300$ et $n_0 = 15$	127
4.23	Comparaison entre le front de Pareto construit sans EGO avec $n_{lhs} = 100$ et le front de Pareto de EGO-Robuste ($n_{bd} = 100$).	129
4.24	Comparaison entre le front de Pareto construit sans EGO avec $n_{lhs} = 200$ et le front de Pareto de EGO-Robuste ($n_{bd} = 200$).	130
4.25	Comparaison entre le front de Pareto construit sans EGO avec $n_{lhs} = 300$ et le front de Pareto de EGO-Robuste ($n_{bd} = 300$).	131
4.26	Comparaison entre le front de Pareto construit sans EGO avec $n_{lhs} = 600$ et le front de Pareto de EGO-Robuste ($n_{bd} = 300$).	132
4.27	Comparaison entre le front de Pareto construit sans EGO avec $n_{lhs} = 700$ et le front de Pareto de EGO-Robuste ($n_{bd} = 300$).	133

Sommaire du présent chapitre

1.1 Contexte	1
1.2 Problématique	2
1.3 Structure de la thèse	3

1.1 Contexte

Le processus de développement d'un produit nécessite de nombreuses prises de décisions. Dès que des modèles de comportement du produit ou des procédés associés sont disponibles, il est envisageable d'utiliser des techniques d'optimisation pour instrumenter les prises de décision. Les modèles font intervenir de nombreux paramètres liés aux produits ou aux procédés. Dans les démarches classiques d'optimisation, les variables de conception, choisies parmi ces paramètres, sont traitées comme des grandeurs déterministes, sans incertitude. Par contre les incertitudes dans les systèmes mécaniques existent par nature, elles sont irréductibles. Il faut donc les prendre en compte dans les modèles pour mieux prédire la fiabilité et la robustesse des systèmes étudiés.

A coté du problème des incertitudes dans les systèmes mécaniques, les modèles servant à prédire le comportement des systèmes complexes sont aujourd'hui assez performant mais au prix d'une complexité et d'un coût de calculs très significatifs. Dès l'instant où l'on souhaite développer des démarches d'optimisation à partir de ces modèles, la limite du temps de calculs nécessaire est rapidement atteinte y compris sur des gros calculateurs.

La prise en compte de ces incertitudes nécessite de les modéliser et les quantifier. Nous supposons que le niveau de connaissance sur les problèmes et leurs environnements est suffisant pour associer à chaque paramètre une loi de densité de probabilité adaptée. Ce qui est utile pour prendre en compte ces incertitudes dans les processus d'optimisation.

L'étude de l'optimisation en général et celle en contexte incertain spécifiquement sur les modèles numériques coûteux n'est pas pratique. En effet, la convergence vers les optimums nécessite d'évaluer ces modèles dans un grand nombre de points. En plus l'optimisation sous incertitudes nécessite de propager les incertitudes des entrées aux fonctions objectifs et aux fonctions contraintes du problème d'optimisation, ce qui est impossible à réaliser sur les modèles coûteux si la propagation des incertitudes est effectuée par les techniques d'échantillonnage. Pour surmonter ce problème, nous utilisons la technique de méta-modélisation pour construire des modèles substituant les modèles numériques coûteux. Ces modèles de substitution appelés aussi métamodèles sont très utiles en optimisation à cause de leurs faibles coûts. De même, nous considérons les modèles numériques utilisés comme des boîtes noires qui sont déjà validées, et nous nous intéressons à leurs entrées et sorties uniquement pour construire les métamodèles.

L'un des grands défis de l'optimisation sous incertitudes en ingénierie mécanique et son coût qui est la sommation du coût des itérations des algorithmes d'optimisation, de propagation des incertitudes et des simulations numériques. Ce coût rend la mise en œuvre de l'optimisation sous incertitudes assez compliquée. Nous partons de l'hypothèse que le coût des modèles numériques est borné par un budget fixe, et nous souhaitons optimiser ces systèmes mécaniques avec le moindre coût de simulation numérique.

1.2 Problématique

Dans cette thèse, nous nous intéressons à la problématique de l'optimisation sous incertitudes en ingénierie mécanique, notamment à l'optimisation robuste. La robustesse doit être, en première approche, comprise ici comme la stabilité du ou des critères d'optimisation par rapport aux variabilités induites par les incertitudes sur les variables de conception et plus généralement sur l'ensemble des paramètres du modèle du comportement du produit ou du procédé.

De manière générale les problèmes d'optimisation robuste peuvent se formuler de plusieurs façons. L'une d'entre elle consiste à considérer un problème multi-objectif où l'on cherche à optimiser d'un côté une mesure représentative des critères et de l'autre une mesure de la stabilité de ces critères. On obtient ainsi, sous certaines conditions, une information précieuse pour les conceptions qui est l'ensemble des meilleurs compromis performances-stabilité.

Dans cette thèse, nous avons identifié que l'optimisation robuste et l'optimisation robuste et fiable, qui sont relativement plus coûteuses que l'optimisation fiable, ne sont pas toujours demandées. Il existe beaucoup de problèmes où il n'y pas d'intérêt à résoudre ces problèmes dans le cas robuste à cause de l'absence du compromis entre la performance et sa stabilité. Par contre, cette problématique n'est pas étudiée dans la littérature. Dans ce travail nous introduisons un outil efficace pour aider le concepteur à choisir parmi les différents types d'optimisation sous incertitudes, celle qui est nécessaire pour le problème de conception traité.

De même, la construction du front de Pareto Performance-Stabilité n'est pas suffisamment étudiée dans la littérature. Dans notre travail, nous proposons une démarche d'optimisation robuste pour construire ce front de Pareto en utilisant des métamodèles adaptatifs. Ceci est à notre connaissance un premier pas dans l'utilisation des algorithmes adaptatifs pour construire le front de Pareto de l'optimisation robuste.

La méthode et la démarche citées ci-dessus sont appliquées sur des problèmes analytiques de la littérature et un problème industriel d'emboutissage dont l'évaluation de son comportement est coûteuse, elle nécessite deux heures de simulations numériques pour chaque point à évaluer.

1.3 Structure de la thèse

A coté de ce chapitre d'introduction, cette thèse est divisée en trois chapitres :

Dans le chapitre 2, l'état de l'art des sujets de l'optimisation déterministe mono-objectif et multi-objectif ainsi que le sujet des incertitudes en mécanique, et les différents types et techniques de métamodélisation sont abordés. Le sujet de la propagation des incertitudes est également étudié, et des formules analytiques sur la propagation des incertitudes sur quelques types des métamodèles sont proposées.

Dans le chapitre 3, le sujet de l'optimisation sous incertitudes est étudié, la mise en œuvre des incertitudes en optimisation, et les différents types d'optimisation sous incertitudes et leur classification sont détaillés. Ainsi une nouvelle classification de ces types est proposée, également une méthode capable d'identifier le type d'optimisation nécessaire pour un tel problème est introduite.

Dans le chapitre 4, le sujet des métamodèles adaptatifs en contexte probabiliste est abordé, une démarche d'optimisation robuste basée sur des métamodèles adaptatifs est introduite, l'efficacité est étudiée sur une application du procédé d'emboutissage profond en forme "U".

Les conclusions et les perspectives de notre travail sont finalement détaillées dans le dernier chapitre.

Cette thèse comporte également deux annexes, l'annexe A étudie les incertitudes sur les modèles de multiplication avec exposants. Et l'annexe B détaille les formules

de propagation des incertitudes sur les métamodèles basés sur les fonctions de base radiales gaussiennes.

Sommaire du présent chapitre

2.1 Design et optimisation déterministe	6
2.1.1 Algorithmes d'optimisation	6
2.1.2 Optimisation multiobjectifs	10
2.2 Les incertitudes en mécanique	16
2.2.1 Types des incertitudes	16
2.2.2 La modélisation des incertitudes	17
2.2.3 Propagation des incertitudes	17
2.3 Les métamodèles	24
2.3.1 Les types des métamodèles	25
2.3.2 Métamodèles adaptatifs et optimisation	31
2.3.3 Métamodèles adaptatifs en contexte probabiliste	39
2.3.4 Propagation des incertitudes sur les métamodèles	39
2.4 Conclusion	42

La phase du design en ingénierie mécanique nécessite de prendre beaucoup de décisions. Ces décisions sont basées sur les modèles mathématiques qui représentent le comportement du design et sur les outils d'optimisation qui instrumentent la recherche du meilleur design. L'optimisation déterministe est le type d'optimisation le plus utilisé en ingénierie mécanique.

2.1 Design et optimisation déterministe

L'optimisation déterministe (DO) est souvent utilisée en design mécanique. En effet le meilleur design est le résultat de plusieurs étapes d'optimisation. L'optimisation déterministe consiste à trouver la meilleure configuration du design afin d'optimiser la réalisation de ses objectifs et éviter la violation de ses contraintes. La formulation de DO mono-objectif est donnée dans l'équation (2.1). La fonction objectif du problème est $f(\mathbf{x})$, \mathbf{x} est le vecteur des variables du problème tel que : $\{\mathbf{x} \in D \subset \mathbb{R}\}$, le vecteur \mathbf{x} étant borné par \mathbf{x}_l et \mathbf{x}_u . Les vecteurs $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ et $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ sont respectivement les contraintes d'égalité et d'inégalité du problème.

$$\begin{aligned}
 & \text{Minimiser : } f(\mathbf{x}) \\
 & \text{Sous les contraintes : } \mathbf{h}(\mathbf{x}) = 0 \\
 & \quad \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq 0 \\
 & \quad \mathbf{x}_l \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}_u \\
 & \text{Tel que : } \mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \\
 & \quad \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \{h_1(\mathbf{x}), h_2(\mathbf{x}), \dots, h_l(\mathbf{x})\} \\
 & \quad \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \{g_1(\mathbf{x}), g_2(\mathbf{x}), \dots, g_s(\mathbf{x})\}
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Afin de résoudre ces problèmes d'optimisation, plusieurs algorithmes sont développés. Dans la section suivante on présente brièvement les principaux algorithmes d'optimisation utilisés en ingénierie.

2.1.1 Algorithmes d'optimisation

On peut citer deux grandes catégories des algorithmes d'optimisation utilisés dans le cas des variables continues, qui est le cas qui nous intéresse. Les algorithmes déterministes et les stochastiques

★ **Les algorithmes déterministes** Ces algorithmes utilisent des opérateurs à comportement déterministe. Ils sont classifiés en trois groupes :

1. Les algorithmes d'ordre 0, dans ces algorithmes, les opérateurs n'utilisent que les valeurs des fonctions objectifs et des contraintes, les méthodes les plus connues de ce type sont les méthodes des recherche directes (*Direct Search*). Ces méthodes ont été proposées depuis les années 50 et 60, on peut citer les algorithmes de Box (1957) [1], Hooke et Jeeves [2](pattern search method, 1961), et l'algorithme de Nelder-Mead (1965) [3], ces méthodes sont faciles à mettre en œuvre vu qu'elles ne nécessitent que les valeurs des fonctions à minimiser, par contre elles sont efficaces pour la recherche locale uniquement.

2. Les algorithmes d'ordre 1, ces algorithmes sont appelés aussi algorithmes à base de gradient, vu que leur opérateurs utilisent les gradients pour converger vers les optimums, les algorithmes à base de gradient les plus connus sont les algorithmes descentes à base de gradient [4]. Ces méthodes consistent à se diriger itérativement vers la direction de texte d'une fonction $f(\mathbf{x})$ à partir d'une position \mathbf{x}^i à l'itération i avec un pas h^i calculé par l'algorithme. Le point \mathbf{x}^{i+1} est déterminé par l'équation (2.2), tel que \mathbf{u}^i est le vecteur de la direction décente.

$$\mathbf{x}^{i+1} = \mathbf{x}^i + h^i \mathbf{u}^i \quad (2.2)$$

Les valeurs de \mathbf{u}^i et h^i sont déterminées par la résolution du système d'inéquations 2.3, avec ∇f est le gradient de la fonction f .

$$\begin{aligned} \nabla f(\mathbf{x}^i)^T \mathbf{u}^i &< 0 \\ f(\mathbf{x}^i + h^i \mathbf{u}^i) &< f(\mathbf{x}^i) \end{aligned} \quad (2.3)$$

La limite des méthodes à base de gradient est qu'elles ne sont applicables que sur les fonctions dérivables au moins une fois.

3. Les algorithmes d'ordre 2 dont le calculs des opérateurs sont basés sur les hessiennes des fonctions à optimiser. Cette catégorie comporte les méthodes de Newton et de quasi-Newton. Les méthodes de Newton consistent à approximer la fonction $f(\mathbf{x}^{i+1})$ au point de l'itération $i + 1$, en se basant sur la valeur de $f(\mathbf{x}^i)$ et ses dérivées par l'équation 2.4

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}^{i+1}) &\approx f(\mathbf{x}^i) + \nabla f(\mathbf{x}^i)^T (\mathbf{x}^{i+1} - \mathbf{x}^i) \\ &+ \frac{1}{2} (\mathbf{x}^{i+1} - \mathbf{x}^i)^T \nabla^2 f(\mathbf{x}^i) (\mathbf{x}^{i+1} - \mathbf{x}^i) \end{aligned} \quad (2.4)$$

En se basant sur la condition nécessaire que le gradient en \mathbf{x}^{i+1} est nul ou très petit, et en utilisant l'équation 2.5.

$$\nabla f(\mathbf{x}^{i+1}) = \nabla f(\mathbf{x}^i) + \nabla^2 f(\mathbf{x}^{i+1}) (\mathbf{x}^{i+1} - \mathbf{x}^i) \quad (2.5)$$

On obtient la solution \mathbf{x}^{i+1} de l'équation 2.5, donnée par l'équation 2.6

$$\mathbf{x}^{i+1} = \mathbf{x}^i - [\nabla^2 f(\mathbf{x}^{i+1})]^{-1} \nabla f(\mathbf{x}^{i+1}) \quad (2.6)$$

Ces équations montrent la nécessité de calculer l'inverse de l'hessienne de f dans la méthode de Newton ce qui n'est pas toujours possible.

La méthode Quasi-Newton est une alternative de la méthode de Newton lorsque la matrice hessienne et son inverse ne sont pas disponibles. Cela

est le cas lorsque les dérivées analytiques ne sont pas disponibles, ou trop complexes ou trop coûteuse à calculer par différences finies. Ces méthodes sont basées sur des approximations de la matrice hessiennes telles que la méthode de la sécante ou autre. Cette famille de méthode de quasi-Newton comporte les méthodes DFP (Davidon [5], Fletcher et Powell [6]) et les méthodes BFGS (Broyden [7], Fletcher [8], Goldfarb [9], Shanno [10]).

★ **Les algorithmes stochastiques** : Les algorithmes stochastiques s'appuient sur des processus aléatoires pour générer de nouveaux candidats. Ces méthodes s'adaptent facilement sans modification de leur algorithme à n'importe quel problème. Cette catégorie comporte plusieurs familles d'algorithmes, tel que :

- Les algorithmes évolutionnaires (EA) : les EA sont des méthodes s'inspirant de la théorie de l'évolution de Charles Darwin. Leur principe consiste à évaluer un grand nombre de solutions à chaque itération et à conserver les meilleurs en appliquant la loi de "survie des plus forts". La mise en œuvre des EA consiste à :
 1. Générer une population initiale $\mathbf{X}^0 = \{\mathbf{x}_1^0, \mathbf{x}_2^0, \dots, \mathbf{x}_n^0\}$ de taille n .
 2. Évaluer les fonctions objectifs de tous les individus $\{\mathbf{f}(\mathbf{X}^0) = f(\mathbf{x}_1^0), f(\mathbf{x}_2^0), \dots, f(\mathbf{x}_n^0)\}$
 3. Construire une nouvelle génération en appliquant trois opérations
 - Retirer les meilleurs individus selon leurs fonctions objectifs.
 - Appliquer deux opérations de **croisement** et de **mutation** de ces individus pour créer de nouveaux individus.

Cette nouvelle génération constitue alors l'ensemble des candidats de l'itération suivante.

Ces itérations sont répétées afin de converger vers l'optimum, en définissant un critère d'arrêt qui est généralement un nombre maximal d'itérations. La famille EA comporte plusieurs types d'algorithme tels que les algorithmes génétiques ([11], [12]) et les stratégies d'évolution [13].

- La méthode tabou : Elle est introduite par Glover [14], [15], c'est une méthode heuristique qui consiste à trouver le minimum dans un voisinage déterminé d'un point \mathbf{x}^i . Une fois ce minimum est trouvé, il est stocké dans la liste tabou même s'il existe un meilleur minimum dans la liste. Le but de ce stockage est d'éviter la visite d'un même minimum local plusieurs fois. La liste de tabou, dont la longueur est définie au début de l'exécution par l'utilisateur, est mise à jour après chaque itération. Le passage d'un point à l'autre dans chaque itération est réalisé d'une manière aléatoire.

- Méthode du recuit simulé : elle est connue sous le nom de *simulated annealing* (SA) [16], elle est inspirée du processus de recuit en métallurgie qui consiste à chauffer le métal puis abaisser lentement sa température afin de réduire ses contraintes résiduelles. Cette méthode consiste à générer aléatoirement à chaque fois un nouveau point candidat. Tous les meilleurs points sont acceptés. Certains mauvais points sont aussi acceptés avec une probabilité P exprimée en fonction de la température θ par l'équation (2.7), avec ΔE est la changement de l'énergie. Cette énergie est la fonction à minimiser. La valeur de θ est diminuée lentement au fur et à mesure des itérations afin de converger vers l'optimum.

$$P = \exp\left(-\frac{\Delta E}{\theta}\right) \quad (2.7)$$

Le choix de l'algorithme d'optimisation dépend de l'application envisagée. Il n'existe pas d'algorithme d'optimisation meilleur que tous les autres pour n'importe quel problème d'optimisation [17]. En comparant les deux grandes catégories citées ci-dessus (les algorithmes stochastiques et les algorithmes déterministes), on peut citer plusieurs avantages et limitations :

- i La mise en œuvre des algorithmes stochastiques est aisée, ils peuvent être appliqués à un grand nombre de types de fonctions. Par contre les algorithmes déterministes ont besoin de calculer les gradients et pour certains les matrices hessiennes des fonctions, ce qui rend les algorithmes stochastiques plus efficaces sur les fonctions discontinues.
- ii Les algorithmes stochastiques sont des algorithmes coûteux, ils nécessitent l'évaluation d'un très grand nombre d'échantillons. Par conséquent, ils nécessitent une longue durée d'exécutions en comparaison des temps d'exécution des algorithmes déterministes.
- iii Les algorithmes stochastiques sont incapables de donner les mêmes résultats après plusieurs exécutions à cause de leur caractère stochastique. Ce caractère stochastique impose de réaliser un nombre significatif d'exécutions pour obtenir une certaine assurance de la qualité de la solution. Ce qui n'est pas le cas des algorithmes à base de gradient.
- iv Les algorithmes stochastiques ne garantissent pas la convergence vers des optimums locaux et encore moins globaux, contrairement aux déterministes qui garantissent la convergence au moins vers un optimum local. Cependant, l'expérience accumulée à ce jour montre que les algorithmes stochastiques sont en moyennes plus efficaces que les méthodes déterministes pour converger vers un optimum global.

2.1.2 Optimisation multiobjectifs

Les problèmes rencontrés en ingénierie mécanique sont souvent des problèmes multiobjectifs. Par exemple lors du design d'une structure mécanique, un maximum de rigidité avec un minimum de masse sont demandés. De même, pour la plupart des problèmes de conception mécanique, on cherche à satisfaire des critères de performances antagonistes de sorte qu'il n'existe pas une solution unique permettant de minimiser ou de maximiser simultanément tous les critères de performances. L'optimisation multiobjectif (MO) est largement utilisée dans les différents domaines d'ingénierie mécanique, par exemple, Khodaygan et al. [18] ont utilisé la MO pour maximiser la qualité et réduire le temps dans la fabrication additive. Également MO est largement utilisée dans les problèmes d'optimisation des matériaux composites ([19], [20]). MO est aussi employée dans les problèmes de fabrication mécanique ([21], [22]) et les problèmes aéronautiques ([23]), etc.

Dans le cas multiobjectif, la minimisation de la fonction objectif $f(\mathbf{x})$, dans l'équation (2.1), est remplacée par une minimisation d'un vecteur des objectifs $\mathbf{f}(\mathbf{x})$.

$$\begin{aligned}
 & \text{Minimiser : } \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \{f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x})\} \\
 & \text{Sous les contraintes : } \mathbf{h}(\mathbf{x}) = 0 \\
 & \quad \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq 0 \\
 & \quad \mathbf{x}_l \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}_u \\
 & \text{Tel que : } \mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \\
 & \quad \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \{h_1(\mathbf{x}), h_2(\mathbf{x}), \dots, h_l(\mathbf{x})\} \\
 & \quad \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \{g_1(\mathbf{x}), g_2(\mathbf{x}), \dots, g_s(\mathbf{x})\}
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

Due au caractère contradictoire de ces objectifs, il est impossible de trouver un minimum unique comme solution du problème. Ce qui mène à la définition d'un front de Pareto. Un front de Pareto est l'ensemble des solutions dominantes du problème. Une solution est considérée dominante si il n'existe aucune autre solution qui la domine. La dominance notée \prec entre deux points \mathbf{a} et \mathbf{b} est définie par l'équivalence suivante :

$$\mathbf{a} \text{ domine } \mathbf{b} \Leftrightarrow a \prec b \Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} \forall i \in \{1, 2, \dots, m\} f_i(\mathbf{a}) \leq f_i(\mathbf{b}) \\ \exists j \in \{1, 2, \dots, m\} f_j(\mathbf{a}) < f_j(\mathbf{b}) \end{array} \right) \tag{2.9}$$

Pour illustrer le cas, considérant le front de Pareto d'un problème bi-objectif tracé dans la figure 2.1. Les Points A , P_1 et P_2 appartiennent au front de Pareto, tandis que les points B et C n'appartiennent pas. En effet, il n'existe aucun point qui domine A , P_1 et P_2 , contrairement aux points B et C qui sont dominés par A . Les zones de dominance de A , B et C sont indiquées par les grilles en rose, jaune et

vert respectivement y compris les frontières. Les points P_1 et P_2 sont appelés les points d'ancrages, ils correspondent aux minimums globaux des deux fonctions $f_1(\mathbf{x})$ et $f_2(\mathbf{x})$ respectivement.

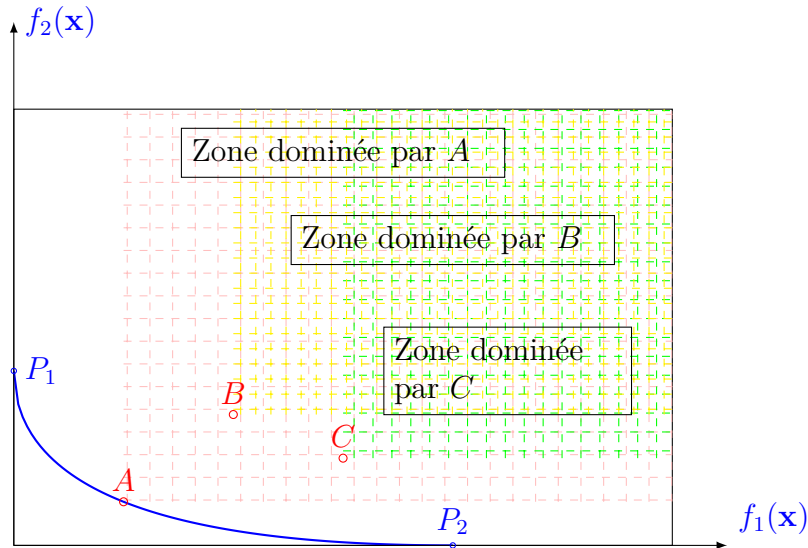


FIGURE 2.1 – Front de Pareto tracé dans l'espace des objectifs $f_1(\mathbf{x})$ et $f_2(\mathbf{x})$

L'antagonisme des objectifs en problème multiobjectif

L'antagonisme entre plusieurs fonctions objectifs est défini par le conflit entre les fonctions objectifs, ce conflit est assuré lorsqu'il est impossible de trouver une solution unique où tous les objectifs atteignent leur optimums simultanément. Si cette solution unique existe, le problème d'optimisation multiobjectif ne sera plus défini, et l'optimum de tous les objectifs est atteint par une optimisation mono-objectif de n'importe quel objectif choisi. Donc, la définition d'un problème multiobjectif nécessite que les objectifs du problème soient contradictoires ou antagonistes. Si cette antagonisme n'existe pas, le problème multiobjectif se réduit à un problème mono-objectif. En conséquence, un front de Pareto n'existe que si la condition d'antagoniste existe. On notera que deux fonctions peuvent être antagonistes dans une zone de l'espace des variables et pas antagonistes dans une autre zone. C'est pour cela, il est nécessaire que ces fonctions soient au moins antagonistes sur une zone du domaine de définition d'un problème d'optimisation, cette zone doit contenir une partie du front de Pareto.

Pour illustrer cette condition, considérons les fonctions de Schaffer [24] $f_1(x) = x^2 + 2$ et $f_2(x) = (x - 2)^2$ (voir figure 2.2a) et traçons leur front de Pareto (du problème de leur minimisation) sur le domaine de définition D où $x \in [-2, 4]$. Les

deux fonctions sont antagonistes sur la zone définie par $x \in [0, 2]$ qui est incluse dans le domaine de définition D . Dans ce cas un problème d'optimisation bi-objectif est défini et son front de Pareto est tracé sur la figure 2.2b. Si le domaine de définition du problème est changé de D à $x \in [-2, 0]$ ou $x \in [2, 4]$, l'antagonisme disparaît et le front de Pareto se réduit à un seul point qui correspond à $x = 0$ pour le premier cas et $x = 2$ pour le second. Cette condition de définition des problèmes multiobjectifs sera utilisée ci après pour classer les problèmes d'optimisation sous incertitudes.

Formulation et algorithmes des problèmes multiobjectifs

Il existe plusieurs approches pour formuler les problèmes multiobjectifs, nous présentons ci-dessous les deux approches principales, et nous citons quelques algorithmes convenables pour chaque approche :

★ **Conversion du problème multiobjectif en un autre mono-objectif :**

La première approche pour résoudre un problème MO est de le rendre mono-objectif. Cela peut être assuré par différentes méthodes, la première est de minimiser une fonction d'agrégation qui est la somme pondérée des fonctions objectives du problème [25] :

$$f_{ag}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m w_i f_i(\mathbf{x})$$

$$\sum_{i=1}^m w_i = 1$$
(2.10)

Cette méthode consiste à associer des poids w_i à chaque fonction objectif f_i selon son ordre d'importance. Cette méthode ne peut pas détecter les points situés dans les zones concaves du front de Pareto. Des améliorations ont été effectuées sur cette méthode pour atteindre les zones non-convexes de Pareto. Par exemple, l'utilisation de la fonction de Tchebycheff [26], [27]. En plus d'autres types de sommation ont été utilisés, tels que la sommation exponentielle des objectifs [28] et la méthode de produit pondérée.

Une autre manière pour passer de MO à un problème mono-objectif est d'utiliser la méthode ϵ -contraintes [29]. Cette méthode consiste à minimiser une seule fonction objectif et ajouter les autres aux contraintes des problèmes. Cette méthode peut trouver les points dans les zones non-convexe, mais sa problème est qu'elle nécessite des informations sur les intervalles de chaque fonction surtout son intervalle sur le front de Pareto.

Ces méthodes consistent à résoudre le problème plusieurs fois en modifiant les paramètres du problème. C'est à dire à résoudre le problème d'optimisation

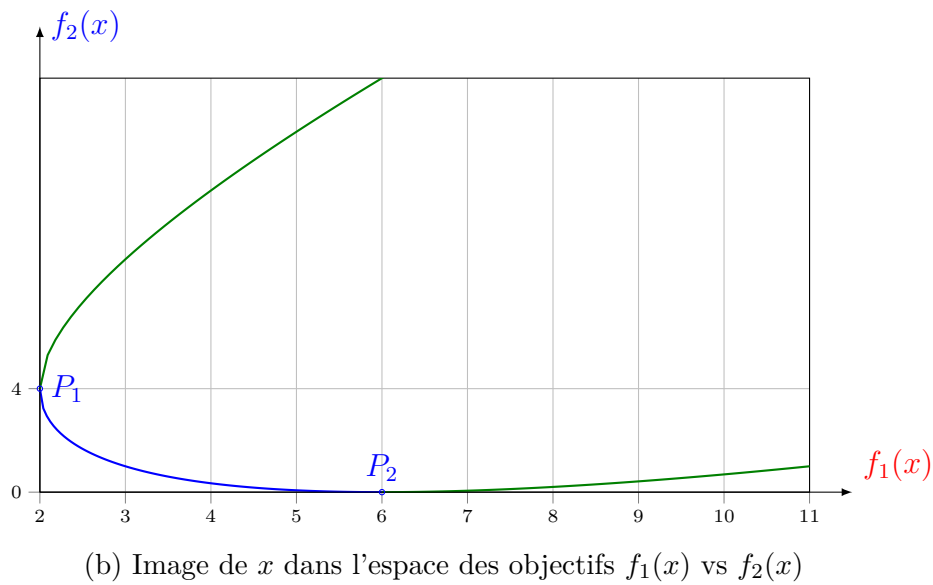
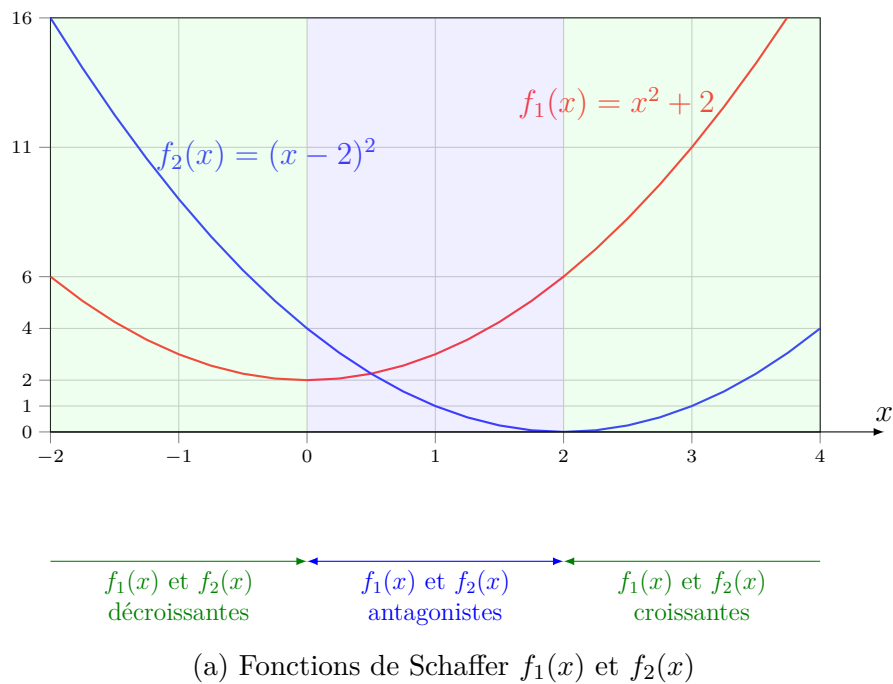


FIGURE 2.2 – L'existence de l'antagonisme entre $f_1(x)$ et $f_2(x)$ du problème d'optimisation biobjectif de Schaffer

avec plusieurs répartitions des poids w_i pour la méthode de sommation, ou avec plusieurs valeurs de ϵ pour la méthode ϵ -contraint. Mais la répartition des points sur le front de Pareto dépend de la nature et la forme du front de

Pareto. Une mauvaise répartition est obtenue sur les fronts non-convexes par la méthode de sommation, de même une bonne répartition nécessite parfois une répartition non égale des ϵ dans la méthode ϵ -contraint.

Plusieurs algorithmes sont introduits pour améliorer la répartition du front de Pareto, tels que les algorithmes NBI *Normal Boundary Intersection* ([30]), la méthode DSD (*Direct search domain*) [31], AWS (*Adaptative Weight Sampling* [32]) et autres. Parmi ces méthodes, on va expliquer le principe de la méthode NBI qui est utilisée dans plusieurs applications dans ce travail. Cette méthode consiste à calculer les points d'ancrages du problème par deux optimisations mono-objectifs. L'ensemble de ces points construit un hyperplan de la dimension du problème qui est définie par le nombre des critères. Ensuite, des optimisations mono-objectifs sont réalisées, chaque optimisation part d'un point de cet hyperplan et garde la direction du vecteur normal à cet hyperplan en imposant une contrainte d'égalité sur cette direction. Pour chaque direction, on obtient un point de Pareto. Cette méthode est illustrée dans la figure 2.3 qui est tirée de la thèse de Diab [33].

Le plus grand avantage de cette méthode est qu'elle est capable de donner un front de Pareto très bien réparti, en plus, le nombre désiré des points de Pareto peut être fixé a priori. Par contre elle peut converger vers des points locaux surtout dans les cas des fronts discontinus, ainsi que la contrainte d'égalité imposée complique la convergence des problèmes. Cette méthode est très efficace pour les problèmes bi-objectifs, mais elle avait quelques limitations dans les autres problèmes de plus hautes dimensions. Plusieurs améliorations ont été appliquées sur cette méthode NBI pour réduire ces limitations tels que le travail de Motta et al. [34], et de Siddiqui et al. [35].

- ★ **Approche de construire le front de Pareto :** la deuxième approche consiste à construire, directement, le front de Pareto par la formulation multiobjectif. Les algorithmes les plus utilisés dans cette approche sont les algorithmes de nature stochastique. Parmi ces algorithmes on peut citer le NSGAI (Elitist Non-dominated Sorting GA) [36], SPEA2 *Strength Pareto Evolutionary algorithm* [37], PESA *Pareto envelope-based selection algorithm* [38], etc.

La méthode NSGAI est l'une des méthodes les plus connues et éprouvées. Cette méthode de Deb et al. [36] est basée sur le principe des algorithmes évolutionnaires notamment les algorithmes génétiques qui ont été expliqués ci avant dans 2.1.1. Mais la différence en multiobjectif est que le meilleur individu est celui qui domine les autres par ces valeurs des critères d'optimisation du problème, une classification est imposée aux individus dans chaque itération en associant à chacun un rang de classement, les individus du rang 1 sont les points non dominés de la population classée, les individus du rang 2 sont ceux

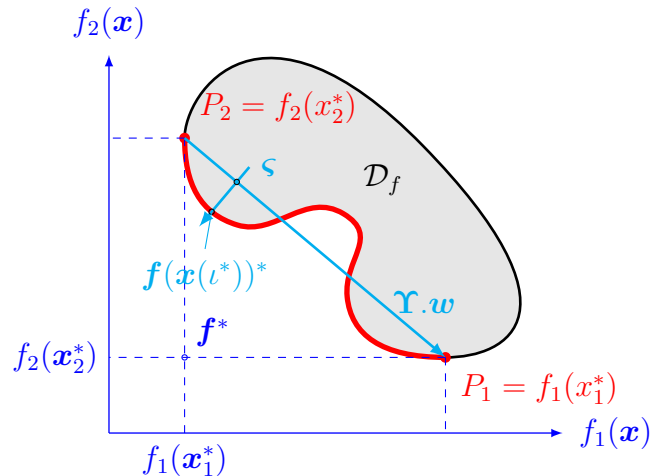


FIGURE 2.3 – Illustration de la méthode NBI pour le cas biobjectif

qui sont dominés par les individus du rang 1 uniquement et ainsi de suite. La particularité de l'algorithme NSGAI est qu'il fait la classification des individus en deux étapes, la première est selon leurs valeurs des critères, et la deuxième est selon leur diversité, ce qu'on appelle la technique de "nichage". Il s'agit d'imposer une distance minimale entre les individus survivants pour l'itération suivante. Cette particularité assure la diversité et la bonne répartition sur le front de Pareto. A côté de la diversité, la méthode NSGAI est capable d'assurer l'élitisme et la convergence vers des solutions non-dominées comme l'explique Deb dans son livre [39].

Pour plus de détails sur l'optimisation multiobjectif le lecteur intéressé pourra consulter les livres de Deb [39] et de Miettinen [40] et l'article de Marler et al. [41].

L'approche classique de l'optimisation en ingénierie mécanique est l'approche déterministe. Mais ce type ne prend pas en compte l'effet des incertitudes sur les résultats de l'optimisation. Ces incertitudes sont généralement irréductibles en mécanique, et leur influence sur la sortie des systèmes mécaniques ne peut pas être ignorée. Dans la partie suivante, on présente les différents types des incertitudes,

et comment on les modélise et les principales techniques de propagation des incertitudes vers les sorties des modèles.

2.2 Les incertitudes en mécanique

Dans les problèmes d'ingénierie mécanique, les incertitudes sont irréductibles. Elles proviennent de plusieurs sources, telles que les données expérimentales, la modélisation et la fabrication, comme il est énuméré dans le travail de Jaeger [42]. L'énorme influence des incertitudes sur le comportement du système a poussé les designers à les inclure dans le processus de conception du design. Ces incertitudes sont classifiées selon leurs types et leurs sources et leurs façons de modélisations.

2.2.1 Types des incertitudes

Ils existent deux principaux types d'incertitudes en ingénierie [43], les incertitudes aléatoires et les incertitudes épistémiques.

Les incertitudes aléatoires

Les incertitudes aléatoires, aussi nommées incertitudes objectives, sont de nature stochastique intrinsèquement irréductible. Elles sont de nature physique, tels que les séismes, la vitesse du vent, l'humidité, la température ambiante, et les propriétés des matériaux. Ces incertitudes reflètent la réalité de l'environnement du design, le designer doit s'adapter avec ses incertitudes et optimiser un design compatible avec cette réalité. Dans ce type, on peut mettre aussi les incertitudes des outils de mesures et les tolérances des machines qui ne sont pas complètement irréductibles, mais elles peuvent être minimiser en investissant dans des moyens plus performants. Grâce à leur nature probabiliste ces incertitudes sont modélisées par les fonctions de distributions probabilistes standards telles que les distributions gaussiennes, uniformes et autre.

Les incertitudes épistémiques

Contrairement aux incertitudes aléatoires, les incertitudes épistémiques proviennent du manque de connaissance sur le problème du design. Ces incertitudes sont considérées subjectives parce qu'elles sont reliées au manque d'information du designer. Ce manque d'information peut être réduit par plus d'effort. Parmi ces incertitudes, on cite les erreurs du modèle et ses états limites représentant la réalité, les erreurs des méthodes numériques. Ces incertitudes sont difficiles à modéliser, parfois, elles sont représentées par des intervalles de variation.

Dans ce travail on s'intéresse aux incertitudes aléatoires en optimisation du design mécanique, en supposant que le maximum d'effort pour réduire les incertitudes épistémiques est fait.

2.2.2 La modélisation des incertitudes

On distingue trois types de modélisation des incertitudes :

1. La modélisation déterministe est définie par un intervalle de réalisation sans connaître la fonction de distribution par exemple :
 $x \in [1.5, 4.1]$.
2. La modélisation probabiliste dont on associe à chaque variable aléatoire une loi de probabilité, les lois normales sont les plus utilisées dans l'ingénierie mécanique.
3. La modélisation possibiliste est définie par des mesures floues (fuzzy measures), pour plus de détails on peut consulter [44] et [45].

Les distributions de probabilité des entrées se propagent dans le modèle pour produire de nouvelles distributions de probabilité des sorties. Le choix de type de modélisation des incertitudes affecte les résultats obtenus. Des distributions de probabilité irréelles données aux variables d'entrée provoquent des résultats erronés. Chen [46] a comparé l'utilisation des modélisations probabilistes et possibilistes et constate qu'il ne faut pas utiliser la modélisation probabiliste qu'avant d'avoir des connaissances suffisantes sur les lois de distribution des variables.

Dans ce travail, nous utilisons la modélisation probabiliste. Nous associons à chaque paramètre incertain du problème, une des fonction de densité de probabilité (PDF) classiques.

2.2.3 Propagation des incertitudes

Les méthodes de propagation des incertitudes (*Uncertainty propagation UP*) sont les outils capables de propager les incertitudes des entrées du modèle aux sorties. La méthode évidente de UP est le calcul analytique qui est la seule méthode exacte et la plus rapide. Cette méthode est basée sur les intégrales analytiques des expressions des lois de densité de probabilité associées aux variables aléatoires. Par contre, cette méthode n'est pas toujours accessible à cause de l'existence des fonctions non-intégrables, ou même l'absence des équations analytiques du modèle. En plus, nous avons besoin des équations des fonctions de densité de probabilité des variables aléatoires pour effectuer le calcul analytique ce qui n'est possible que lorsque la modélisation probabiliste est utilisée. Différentes techniques de UP sont utilisées pour remplacer le calcul analytique. Lee et Chen [47] classifient les méthodes UP en cinq catégories.

1. Les méthodes à bases de simulation numériques comme les méthodes Monte Carlo (MC), les méthodes d'échantillonnage par importance (*Importance sampling* [48]) et les méthodes d'échantillonnage adaptatif (*Adaptatif sampling* [49]).
2. Les méthodes basées sur l'expansion locale, telles que les méthodes de série de Taylor ou méthodes de perturbation. Leurs premières applications en ingénierie mécaniques datent des années 1981 ([50], [51]) et 1985 ([52]), comme il est indiqué dans [53].
3. Les méthodes MPP qui sont connues par *Most Probable Point* [54]. Les méthodes (FORM [55]) et (SORM [56]) sont les plus populaires dans cette catégorie
4. Les méthodes à bases d'expansion fonctionnelle, le chaos polynomial [57] et les expansions de Neumann ([58], [59]) entrent dans cette catégorie.
5. Les méthodes basés sur les intégrations numériques [60], la méthode de réduction de dimension (*Dimension Reduction method DR*) [61] est incluse dans cette catégorie.

Dans la suite, nous décrivons les techniques de propagation des incertitudes les plus connues. Le calcul analytique, les méthodes de MC, les séries de Taylor et le Chaos polynomial.

★ **Le calcul analytique** : Cette technique consiste à calculer les intégrales des moments statistiques analytiquement. C'est la technique idéale de la propagation des incertitudes mais elle n'est pas accessible dans tous les problèmes comme il est indiqué ci avant. Considérant une variable aléatoire \tilde{x} avec une fonction de densité de probabilité $p_{\tilde{x}}(z)$, le calcul de l'espérance et de la variance d'une fonction $f(\tilde{x})$ est donné dans l'équation (2.11) :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[f(\tilde{x})] &= E_f = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z)p_{\tilde{x}}(z)dz \\ \mathbb{V}[f(\tilde{x})] &= \int_{-\infty}^{+\infty} (f(z) - E_f)^2 p_{\tilde{x}}(z)dz \\ &= \mathbb{E}[(f(\tilde{x}))^2] - (\mathbb{E}[f(\tilde{x})])^2\end{aligned}\tag{2.11}$$

Le calcul de quantile nécessite d'introduire la formulation de la fonction de répartition de probabilité connue par *Cumulative Distribution Function (CDF)*, l'équation de CDF $F_{\tilde{x}}$ d'un variable aléatoire \tilde{x} est exprimé dans l'équation (2.12) :

$$F_{\tilde{x}}(x) = \mathbb{P}[\tilde{x} \leq x] = \int_{-\infty}^x p_{\tilde{x}}(z)dz\tag{2.12}$$

Notant que par définition, la fonction $F_{\tilde{x}}(x)$ est toujours croissante positive et varie sur $[0, 1]$. La fonction quantile est la fonction inverse de la fonction CDF, elle est définie par :

$$\mathbb{Q}_\alpha [\tilde{x}] = q = F_{\tilde{x}}^{-1}(\alpha) \quad / \alpha = \mathbb{P}[\tilde{x} \leq q] = F_{\tilde{x}}(q) \in [0, 1] \quad (2.13)$$

d'une autre manière le quantile est exprimé par :

$$\mathbb{Q}_\alpha [\tilde{x}] = q = \inf(x \in \mathbb{R} : \alpha \leq F_{\tilde{x}}(x)) \quad (2.14)$$

Calculant maintenant la CDF de la fonction de variable aléatoire $f(\tilde{x})$. Afin de simplifier les nomenclatures, admettant que $\tilde{y} = f(\tilde{x})$ tel que $x = f^{-1}(y)$, l'équation de $F_{\tilde{y}}(y)$ est donnée dans l'équation (2.15)

$$F_{\tilde{y}}(y) = \mathbb{P}[\tilde{y} \leq y] = \mathbb{P}[a(y) \leq \tilde{x} \leq b(y)] = \int_{a(y)}^{b(y)} p_{\tilde{x}}(z) dz \quad (2.15)$$

Avec $a(y)$ et $b(y)$ sont les bornes de x qui satisfaisaient l'inégalité (2.16), ces bornes là peuvent prendre les valeurs $\pm\infty$.

$$f(x) \leq y \quad (2.16)$$

La quantile $\mathbb{Q}_\alpha [\tilde{y}]$ sera exprimée par l'équation (2.17) :

$$\mathbb{Q}_\alpha [\tilde{y}] = \inf(y \in \mathbb{R} : \alpha \leq F_{\tilde{y}}(y)) \quad (2.17)$$

Pour les cas des fonctions à plusieurs variables aléatoires $f(\tilde{\mathbf{x}})$ le calcul de l'espérance et de la variance est assuré en calculant la fonction de densité de probabilité jointe $J_{\tilde{\mathbf{x}}}(\mathbf{x})$:

$$J_{\tilde{\mathbf{x}}}(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n p_{\tilde{x}_i}(x_i) \quad (2.18)$$

$$\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

Les équations de l'espérance et de la variance seront :

$$\mathbb{E}[f(\tilde{\mathbf{x}})] = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f(\mathbf{z}) J_{\tilde{\mathbf{x}}}(\mathbf{z}) dz_1 dz_2 \dots dz_n$$

$$\mathbb{V}[f(\tilde{x})] = \mathbb{E}[(f(\tilde{\mathbf{x}}))^2] - (\mathbb{E}[f(\tilde{\mathbf{x}})])^2 \quad (2.19)$$

$$\mathbf{z} = \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$$

Comme dans le cas des fonctions à une seule variable, le cas de CDF d'une

fonction à plusieurs variables demande une définition de nouvelles bornes $[a_i(y), b_i(y)]$ de chaque variable x_i afin de satisfaire l'inégalité :

$$f(\mathbf{x}) \leq y \quad (2.20)$$

L'équation de $F_{\tilde{y}}(y)$ sera :

$$\begin{aligned} F_{\tilde{y}}(y) = \mathbb{P}[\tilde{y} \leq y] &= \mathbb{P}[\mathbf{a}(y) \leq \tilde{\mathbf{x}} \leq \mathbf{b}(y)] = \int_{a_1(y)}^{b_1(y)} \dots \int_{a_n(y)}^{b_n(y)} J_{\tilde{\mathbf{x}}}(\mathbf{z}) dz_1 dz_2 \dots dz_n \\ \mathbf{a} &= \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \\ \mathbf{b} &= \{b_1, b_2, \dots, b_n\} \end{aligned} \quad (2.21)$$

L'équation (2.17) est toujours valable pour calculer le quantile $\mathbb{Q}_\alpha[f(\tilde{\mathbf{x}})]$ de degré α . Pour plus de détails sur ses notions de probabilité et de statistique, les livres de Ayyub et McCuen [62] et de Soong [63] et de Yeh [64] sont recommandés.

★ **La méthode de Monte-Carlo** : Cette méthode consiste à évaluer les valeurs des sorties du modèle dans un échantillon $\{\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{x}^i, \dots, \mathbf{x}^n\}$ du voisinage du point \mathbf{x} , l'échantillonnage tiré doit être une réalisation de la variable aléatoire $\tilde{\mathbf{x}}$. L'espérance et la variance seront estimées par les équations suivantes :

$$\mathbb{E}[f(\tilde{\mathbf{x}})] = \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y^i \quad / y^i = f(\mathbf{x}^i) \quad (2.22)$$

$$\mathbb{V}[f(\tilde{\mathbf{x}})] = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (y^i - \bar{y})^2 \quad (2.23)$$

Le quantile $\mathbb{Q}_\alpha[f(\tilde{\mathbf{x}})]$ sera estimé par classement des valeurs du modèle par ordre croissant, puis on choisit le $\alpha n - i^{\text{ème}}$ membre du classement qui correspondra à la valeur du quantile de degré α :

$$\mathbb{Q}_\alpha[f(\tilde{\mathbf{x}})] = y^{\alpha n} \quad (2.24)$$

La méthode de Monte-Carlo est la plus évidente parmi les méthodes de propagation des incertitudes, mais son désavantage est qu'elle nécessite un échantillonnage assez riche, plus cet échantillonnage est riche plus les estimations sont fiables. Plusieurs améliorations au niveau de type d'échantillonnage sont appliquées pour diminuer le nombre n nécessaire pour obtenir des estimations précises. Martin et al. [65] ont utilisé la méthode de LHS (Latin Hypercube Sampling) qui consiste à distribuer l'échantillonnage d'une manière équivalente sur le voisinage de \mathbf{x} . Yang et al. [66] introduisent l'utilisation de

CRN (Common Random Number) dans l'échantillonnage, le CRN consiste à utiliser la même base d'échantillonnage pour tous les points \mathbf{x} . Cette technique rend le calcul des gradients accessible et donne une forme régulière de $f(\tilde{\mathbf{x}})$ ce qui permet d'utiliser les algorithmes à bases de gradient dans les problèmes d'optimisation sous incertitude. Cependant, cette technique a un certain danger si on a un biais initial qui s'introduit à cause d'un mauvais échantillonnage, ce biais persiste tout au long de l'optimisation. La combinaison du CRN avec un bon type d'échantillonnage tel que le LHS peut limiter ces inconvénients, comme l'explique Pujol et al. dans [67].

- ★ **Chaos polynomial** : La méthode des polynômes de Chaos [57] consiste à construire un métamodèle polynomial local dans le voisinage du point à évaluer en se basant sur un échantillonnage beaucoup plus petit que celui de la méthode de Monte-Carlo, ce qui économise le calcul de l'espérance et de la variance. Pour chaque fonction de densité de probabilité classique, il y a une série adaptée de polynômes orthogonaux comme il est indiqué dans le tableau 2.1. Dans tous ces cas, les polynômes orthogonaux sont définis sur les lois normalisées (loi uniforme sur $[0, 1]$, loi normale centrée réduite, etc). Il est essentiel de normaliser toutes les variables aléatoires pour utiliser ces polynômes, et après le calcul des moments statistiques dans l'espace dé-normalisé peut être effectué par chemin inverse. Le principe de construction

PDF	Polynômes orthogonaux
Normal	Hermite
Uniforme	Legendre
Gamma	Laguerre
Beta	Jacobi

TABLEAU 2.1 – Les Polynômes orthogonaux associés à chaque type de PDF

de ces métamodèles est le même que celui de la construction des métamodèles à base polynomiales classiques. Cette technique est expliquée en détails dans le chapitre des métamodèles dans la section 2.3.1. Dans le cas des fonctions à plusieurs variables, la forme du métamodèle remplaçant cette fonction est

donnée dans l'équation (2.25) :

$$\begin{aligned}
 \hat{f}_{pc}(\tilde{\mathbf{x}}) &= \sum_{\alpha: \|\alpha\|_1 \leq k} C_\alpha \prod_{i=1}^n H_i^{\alpha_i}(\tilde{x}_i) \\
 \tilde{\mathbf{x}} &= \{\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n\} \\
 \alpha &= \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} \in \mathbb{N}^n \\
 \|\alpha\|_1 &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \\
 k &\in \mathbb{N} \text{ (l'ordre du polynôme de chaos)} \\
 C_\alpha &\in \mathbb{R} \text{ (les coefficients du modèle)}
 \end{aligned} \tag{2.25}$$

Le polynôme orthogonal $H_i(\tilde{x}_i)$ est celui qui correspond à chaque variable aléatoire \tilde{x}_i .

Les polynômes de Chaos admettent la propriété d'orthogonalité dépendant de la densité de probabilité $p_{\tilde{x}_i}$ de \tilde{x}_i par la relation suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_i^a(z) H_i^b(z) p_{\tilde{x}_i}(z) dz = \delta_{ab} = \begin{cases} 1 & \text{si } a=b \\ 0 & \text{si } a \neq b \end{cases} \tag{2.26}$$

Cette relation est la clé pour calculer facilement l'espérance et la variance de \hat{f}_{pc} . En développant analytiquement l'intégrale qui calcule $\mathbb{E}[\hat{f}_{pc}(\tilde{\mathbf{x}})]$ et $\mathbb{E}[\hat{f}_{pc}^2(\tilde{\mathbf{x}})]$ on obtient les résultats suivants :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[f(\tilde{\mathbf{x}})] &\approx \mathbb{E}[\hat{f}_{pc}(\tilde{\mathbf{x}})] = C_0 \\
 \mathbb{V}[f(\tilde{\mathbf{x}})] &\approx \mathbb{V}[\hat{f}_{pc}(\tilde{\mathbf{x}})] = \sum_{\alpha \neq 0} C_\alpha^2
 \end{aligned} \tag{2.27}$$

Avec C_0 est le coefficient C_α associé aux polynômes d'ordre zéro, pour plus de détails vous pouvez référer à [68].

Il est clair que les polynômes de Chaos sont très efficaces pour estimer rapidement l'espérance et la variance, malgré la nécessité de construire un modèle local pour chaque point à évaluer. Cette méthode est utilisée dans plusieurs travaux récents, parmi ces travaux on cite le travail de Sudret [69] et plus récemment le travail de Dubreuil et al. [70]. L'inconvénient de cette méthode est que le nombre d'échantillons nécessaires pour construire le méta modèle augmente exponentiellement avec le nombre de variable n et le degré du polynôme k .

★ **Série de Taylor** : Le développement des séries de Taylor d'ordre 2 d'une

fonction à plusieurs variables $f(\mathbf{x})$ au voisinage d'un point donné \mathbf{x}^0 s'écrit :

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^0) + \sum_{i=1}^n (x_i - x_i^0) \frac{\delta f}{\delta x_i}(\mathbf{x}^0) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0) \frac{\delta^2 f}{\delta x_i \delta x_j}(\mathbf{x}^0) + o(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2) \quad (2.28)$$

Avec x_i et x_i^0 sont les $i^{\text{ème}}$ composantes des vecteurs \mathbf{x} et \mathbf{x}^0 respectivement. Ici la fonction $o(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2)$ est considérée négligeable devant $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2$. Considérant maintenant que \mathbf{x} est une variable aléatoire notée $\tilde{\mathbf{x}}$, tel que m_i et σ_i sont l'espérance et l'écart type du composant \tilde{x}_i . En se basant sur la linéarité de l'opérateur de l'espérance, on peut calculer $\mathbb{E}[f(\tilde{\mathbf{x}})]$ par l'équation (2.29) :

$$\mathbb{E}[f(\tilde{\mathbf{x}})] \approx f(\mathbf{m}) + \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[\tilde{x}_i - m_i] \frac{\delta f}{\delta x_i}(\mathbf{m}) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathbb{E}[(\tilde{x}_i - m_i)(\tilde{x}_j - m_j)] \frac{\delta^2 f}{\delta x_i \delta x_j}(\mathbf{m}) \quad (2.29)$$

Par définition, on a $\mathbb{E}[\tilde{x}_i - m_i] = 0 \forall i$, en plus $\mathbb{E}[(\tilde{x}_i - m_i)(\tilde{x}_j - m_j)] = C_{ij}$, avec C_{ij} est le terme générique de matrice de covariance de $\tilde{\mathbf{x}}$, l'équation précédente s'écrit :

$$\mathbb{E}[f(\tilde{\mathbf{x}})] \approx f(\mathbf{m}) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n C_{ij} \frac{\delta^2 f}{\delta x_i \delta x_j}(\mathbf{m}) \quad (2.30)$$

Le premier terme de l'équation (2.30) est considéré une approximation du premier ordre de $\mathbb{E}[f(\tilde{\mathbf{x}})]$. En plus dans le cas où toutes les variables aléatoires \tilde{x}_i sont indépendantes, l'équation (2.30) se ramène à :

$$\mathbb{E}[f(\tilde{\mathbf{x}})] \approx f(\mathbf{m}) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 \frac{\delta^2 f}{\delta x_i^2}(\mathbf{m}) \quad (2.31)$$

En se basant sur l'équation (2.30) et en prenant son premier terme, on peut estimer la variance $\mathbb{V}[f(\tilde{\mathbf{x}})]$ par :

$$\mathbb{V}[f(\tilde{\mathbf{x}})] = \mathbb{E}[f(\tilde{\mathbf{x}}) - \mathbb{E}[f(\tilde{\mathbf{x}})]]^2 \approx \mathbb{E}[f(\tilde{\mathbf{x}}) - f(\mathbf{m})]^2 \quad (2.32)$$

En pratiquant la même démarche, l'approximation d'ordre 1 de série de Taylor

s'écrit :

$$\mathbb{V}[f(\tilde{\mathbf{x}})] \approx \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n C_{ij} \frac{\delta f}{\delta x_i}(\mathbf{m}) \frac{\delta f}{\delta x_j}(\mathbf{m}) \quad (2.33)$$

De même, si les variables sont indépendantes, on obtient :

$$\mathbb{V}[f(\tilde{\mathbf{x}})] \approx \sum_{i=1}^n \left(\frac{\delta f}{\delta x_i}(\mathbf{m}) \right)^2 \sigma_i^2 \quad (2.34)$$

La mise en œuvre de la méthode des séries de Taylor pour propager les incertitudes est rapide et efficace, et elle ne nécessite aucun échantillonnage mais elle n'est pas applicable que sur les fonctions dérivables sur plusieurs ordres, en plus ces résultats dépendent de l'ordre de l'approximation, ces approximations ne sont pas précises dans le cas des fonctions non linéaires avec des incertitudes assez importantes.

Les deux dernières méthodes citées ci-dessus ne permettent pas d'estimer le quantile. Pour résoudre ce problème dans le cas où le calcul analytique direct n'est pas accessible, la méthode de MC peut être utilisée. Une autre manière pour approcher la valeur du quantile est d'utiliser l'équation (2.35), qui est celle du quantile de la loi normale et qui ne nécessite que le calcul de l'espérance et de la variance, avec $\Phi^{-1}(\alpha)$ est l'inverse de la fonction CDF de la loi normale centrée réduite.

$$\mathbb{Q}_\alpha[f(\tilde{\mathbf{x}})] = \mathbb{E}[f(\tilde{\mathbf{x}})] + \Phi^{-1}(\alpha) \sqrt{\mathbb{V}[f(\tilde{\mathbf{x}})]}. \quad (2.35)$$

Mais cette méthode n'est précise que si la fonction $f(\tilde{\mathbf{x}})$ subit la loi normale, dans les autres cas elle n'est pas précise surtout pour les degrés de probabilité importants α qui sont généralement utilisées dans l'analyse de fiabilité des structures. Pour plus de détails sur cette méthode, vous pouvez consulter la thèse de Baudouin [71] où cette méthode a été utilisée pour estimer la quantile.

2.3 Les métamodèles

Les métamodèles aussi appelés modèles de substitution sont des modèles capables de se substituer au modèle original lorsque celui-ci est trop coûteux à évaluer, ou pour construire une réponse continue à partir des évaluations discrètes, qu'elles soient numériques ou expérimentales. Ces techniques sont utilisées dans l'ingénierie pour prédire le comportement d'un système dans des conditions définies à l'entrée. On recourt à ses modèles dans les problèmes où l'évaluation de la fonction originale est très coûteuse, cette évaluation est souvent effectuée par des modèles haute fidélité de simulations numériques.

Les métamodèles sont largement utilisés dans les problèmes d'optimisation, en

effet ces problèmes nécessitent un très grand nombre d'évaluations des fonctions objectifs et des fonctions contraintes. Par contre les métamodèles ne remplacent pas les simulations numériques mais ils réduisent leur nombre nécessaire pour résoudre un problème d'optimisation.

Leur principe consiste à construire une prédiction $\hat{f}(\mathbf{x})$ de la fonction originale $f(\mathbf{x})$ à partir d'une base d'apprentissage B de taille n_s (équation (2.36)), telle que \mathbf{X}^b est la matrice de n_s vecteurs des variables \mathbf{x}^b qui constituent le plan d'expérience (*Design of experiments* DOE) construit dans l'espace des variables D de dimension n_x et \mathbf{y}^b l'image de \mathbf{X}^b dans l'espace des objectifs.

$$\begin{aligned} B &= \{\mathbf{X}^b, \mathbf{y}^b\} \\ \mathbf{X}^b &= \{\mathbf{x}_1^b, \mathbf{x}_2^b, \dots, \mathbf{x}_{n_s}^b\}^T \quad / \mathbf{x}_i^b \in D \subset \mathbb{R}^{n_x} \\ \mathbf{y}^b &= \{y_1^b, y_2^b, \dots, y_{n_s}^b\}^T \\ &= \{f(\mathbf{x}_1^b), f(\mathbf{x}_2^b), \dots, f(\mathbf{x}_{n_s}^b)\}^T \end{aligned} \quad (2.36)$$

On peut distinguer plusieurs types des métamodèles selon la nature du modèle obtenu ou selon la technique d'apprentissage utilisée. Dans la section suivante nous présentons quatre principaux types des métamodèles utilisés en ingénierie.

2.3.1 Les types des métamodèles

Les métamodèles à bases polynomiales

Les métamodèles à bases polynomiales sont introduits dans [72] comme une partie de *Response surface methodology (RSM)*. Cette méthode consiste à construire une fonction polynomiale $\hat{f}(x)$ de degré k bien déterminée sous la forme :

$$\begin{aligned} \hat{f}(\mathbf{x}) &= \sum_{j=1}^{n_\alpha} c_j \psi_j(\mathbf{x}) \quad \text{avec } c_j \in \mathbb{R} \\ \mathbf{x} &= \{x_1, x_2, \dots, x_{n_x}\} \in \mathbb{R}^{n_x} \\ n_\alpha &= \frac{(k + n_x)!}{k! n_x!} \\ \psi_j(\mathbf{x}) &= \prod_{i=1}^{n_x} x_i^{\alpha_{ji}} / \sum_{i=1}^{n_x} \alpha_{ji} \leq k \\ \alpha_{ji} &\in \mathbb{N} \end{aligned} \quad (2.37)$$

La fonction $\hat{f}(x)$ sera une somme des monômes ψ_j pondérée par des coefficient c_j à calculer. Pour construire ce polynôme on a besoin d'estimer un nombre n_α de coefficient c_j . Il existe deux types de polynômes, les polynômes d'interpolation et les polynômes de régression. La méthode d'interpolation consiste à construire un

métamodèle qui passe par tous les points du DOE. Dans ce cas, on a besoin d'un DOE contenant n_α points pour déterminer les coefficients c_j en résolvant le système linéaire de l'équation (2.38). Ce chiffre augmente d'une manière exponentielle lorsque n_x augmente. Pour surmonter ce problème, on peut supposer que certains coefficients c_j sont nuls, mais il est difficile de savoir quels sont les coefficients importants pour les calculer et quels sont les coefficients moins importants à ignorer. La détermination des coefficients c_α se fait par résolution d'un système linéaire de la forme :

$$\begin{aligned} \Psi(\mathbf{X}^b)C &= \mathbf{y}^b \\ C &= \{c_1, c_2, \dots, c_{n_\alpha}\}^T \end{aligned} \quad (2.38)$$

tel que :

$$\Psi(\mathbf{X}^b) = \begin{pmatrix} \psi_1(\mathbf{x}_1^b) & \psi_2(\mathbf{x}_1^b) & \dots & \psi_{n_\alpha}(\mathbf{x}_1^b) \\ \psi_1(\mathbf{x}_2^b) & \psi_2(\mathbf{x}_2^b) & \dots & \psi_{n_\alpha}(\mathbf{x}_2^b) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \psi_1(\mathbf{x}_{n_s}^b) & \psi_2(\mathbf{x}_{n_s}^b) & \dots & \psi_{n_\alpha}(\mathbf{x}_{n_s}^b) \end{pmatrix} \quad (2.39)$$

Par contre la méthode de régression ne nécessite pas le passage par tous les points du DOE. Elle vise à minimiser l'erreur ϵ entre la prédiction du métamodèle construit et la valeur du modèle original dans les points du DOE. Plusieurs méthodes pour calculer cette erreur sont utilisées, la méthode des moindres carrés (*Mean Square Error (MSE)*) est la plus utilisée :

$$MSE = \sum_{i=1}^{n_s} \|\hat{f}(\mathbf{x}_i^b) - y_i^b\|^2 \quad (2.40)$$

L'importance de ces métamodèles découle de leur simplicité pour les construire et les implémenter. Par contre leur précision est faible pour les fonctions multimodales. Cette précision peut être améliorée en augmentant le degré k du polynôme, mais cela peut provoquer l'apparition des oscillations artificielles dans le métamodèle.

Les réseaux de neurones

Les réseaux de neurones sont des méthodes utilisées pour approximer une fonction analytique, l'algorithme des réseaux de neurones artificiels est inspiré du fonctionnement des neurones biologiques. Cette idée a été proposée par McCulloch et al en 1943 [73], et le premier réseau a été introduit et construit par [74]. Le neurone artificiel est constitué d'un vecteur $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ d'entrée appelé couche d'entrée et d'une sortie unique $Z(a) \in \mathbb{R}$ reliées par l'équation (2.41). Tel que $w = (w_0, w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ est le vecteur contenant le biais w_0 et les poids w_i associés à chaque entrée. La fonction d'activation est représenté par t . Un neurone

artificiel est tracé dans la figure.

$$Z(a) = t(w_0 + \sum_{i=1}^n w_i a_i) \quad (2.41)$$

La fonction t peut prendre plusieurs formes :

1. La fonction de Heaviside ou fonction seuil qui dépend du seuil $k \in \mathbb{R}$.
 $t(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq k \\ 0 & \text{si } x < k \end{cases}$
2. La fonction linéaire $t(x) = x$.
3. La fonction sigmoïde $t(x) = \frac{1}{1+e^{-\lambda x}}$, cette fonction dépend du λ choisi.

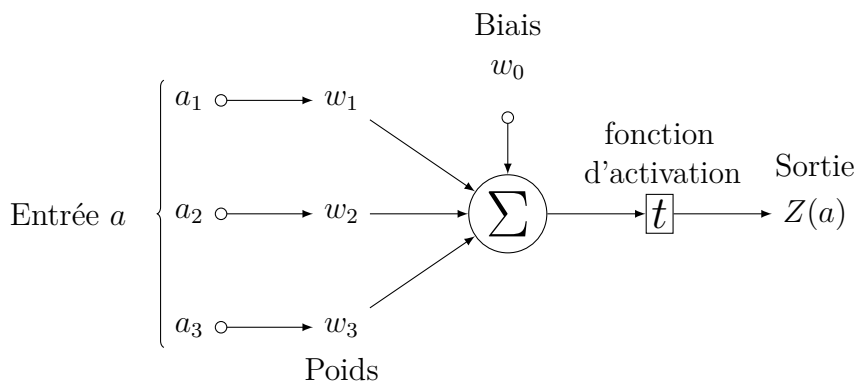


FIGURE 2.4 – Neurone artificiel

Le réseau de neurone est formé de la couche d'entrée, d'un nombre n_c de couches cachées et de la couche de sortie, chaque neurone prend la sortie des neurones de la couche précédente comme entrée. La figure 2.5 représente un exemple de réseau de neurones comprenant un vecteur \mathbf{x} de cinq variables d'entrée $n_x = 5$ et une seule couche cachée $n_c = 1$ contenant un nombre $n_n = 3$ de neurones et un seul neurone dans la couche de sortie. En considérant que $w = \{w_0, w_1, \dots, w_{n_n}\} \in \mathbb{R}^{n_n+1}$ est le vecteur du biais et des poids des entrées du neurone de sortie et $w'_i = (w'_{i_0}, w'_{i_1}, \dots, w'_{i_{n_x}}) \in \mathbb{R}^{n_x+1}$ est le vecteur du biais et des poids d'entrée du i ème neurone de la couche cachée, l'approximation $\hat{f}(x)$ du modèle sera :

$$\hat{f}(\mathbf{x}) = w_0 + \sum_{i=1}^{n_n} w_i t(w'_{i_0} + \sum_{j=1}^{n_x} w'_{i_j} x_j) = w_0 + \sum_{i=1}^{n_n} w_i t(w'_{i_0} + w'_i \mathbf{x}^T) \quad (2.42)$$

$$\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_{n_x}\}$$

L'approximation $\hat{f}(x)$ est obtenue après la détermination des $(1 + n_n(1 + n_x))$ poids w associés. Les poids sont déterminés en minimisant l'erreur MSE qui est

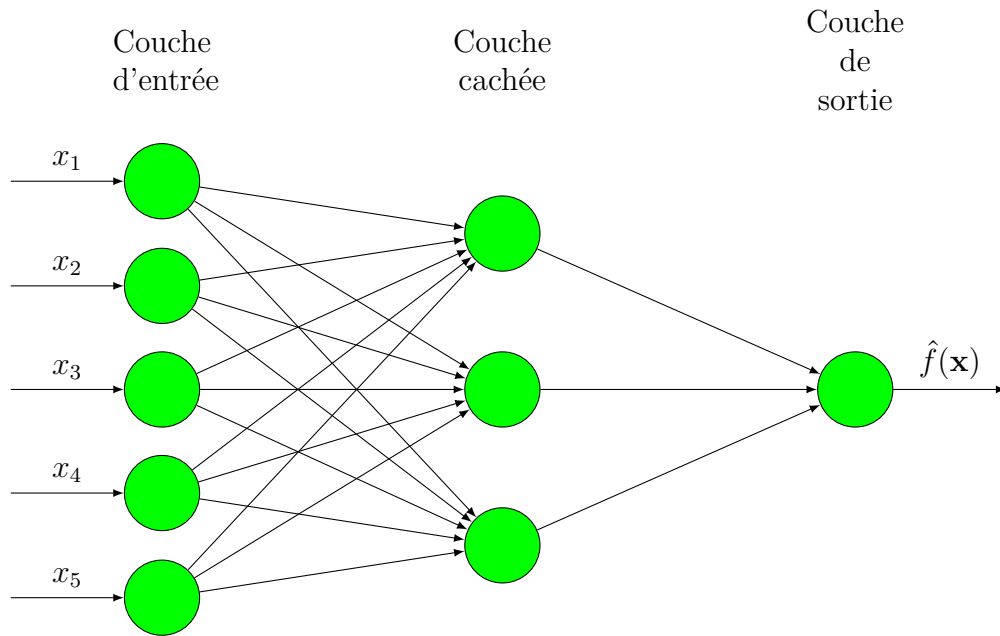


FIGURE 2.5 – Réseau de neurones à cinq entrées et une couche cachée constituée de trois neurones et une sortie

représentée par la fonction $\epsilon(w)$:

$$MSE = \epsilon(w) = \frac{1}{n_s} \sum_{i=1}^{n_s} \|\hat{f}(\mathbf{x}_i^b) - y_i^b\|^2 \quad (2.43)$$

Le Krigeage

Les métamodèles de krigeage ont pris leur nom de leur auteur Krige [75] qui les a utilisés dans le domaine de la géologie pour estimer les gisements de mines d'or. Cette méthode a été proposée par Sacks et al. [76] et [77] pour approximer les fonctions originales dans un contexte d'optimisation avec simulations numériques. Cette méthode est capable de donner des prédictions avec une bonne précision en se basant sur des DOE qui ne sont pas assez riches. A côté de l'estimation de la valeur moyenne de $\hat{f}(\mathbf{x})$, le krigeage est capable d'estimer l'erreur de cette estimation. Cette estimation est accessible grâce à une l'hypothèse que la fonction $\hat{f}(\mathbf{x})$ est une réalisation d'une processus gaussienne $Z(\mathbf{x})$:

$$\hat{f}(\mathbf{x}) = \mu(\mathbf{x}) + \epsilon(\mathbf{x}) \quad (2.44)$$

avec $\mu(\mathbf{x})$ représente la tendance moyenne de $Z(\mathbf{x})$ et $\epsilon(\mathbf{x})$ est une variable aléatoire d'espérance nulle et de variance $\sigma^2 \in \mathbb{R}^+$ et de covariance C_v telle que :

$$C_v(\epsilon(\mathbf{x}), \epsilon(\mathbf{x}^b)) = \sigma^2 R(\mathbf{x}, \mathbf{x}^b) \quad (2.45)$$

avec $R(\mathbf{x}, \mathbf{x}^b)$ est une fonction de corrélation entre deux points et qui ne dépend que de leur distance :

$$\begin{aligned} R(\mathbf{x}, \mathbf{x}^b) &= \prod_{i=1}^{n_x} R_i(|x_i, x_i^b|) \\ \mathbf{x} &= \{x_1, x_2, \dots, x_{n_x}\} \in \mathbb{R}^{n_x} \\ \mathbf{x}^b &= \{x_1^b, x_2^b, \dots, x_{n_x}^b\} \in \mathbb{R}^{n_x} \end{aligned} \quad (2.46)$$

la construction du modèle de Krigage consiste à approcher $Z(\mathbf{x})$ par un processus stochastique $\hat{Z}(\mathbf{x})$, en considérant que $\hat{f}(\mathbf{x})$ est une approximation de la fonction originale $f(\mathbf{x})$.

On distingue trois différents types de Krigage selon la valeur de μ :

1. Le Krigage simple où $\mu(\mathbf{x}) = m$ avec m est une constante connue.
2. Le Krigage ordinaire où $\mu(\mathbf{x}) = \mu$ avec μ est une constante inconnue.
3. Le Krigage universel où $\mu(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \beta_i P_i(\mathbf{x})$ avec $\beta_i \in \mathbb{R}$ sont des coefficients à déterminer et P_i est généralement une base polynômiale.

Certains utilisent le Krigage universel en estimant la tendance moyenne du modèle en estimant $\mu(\mathbf{x})$, puis raffine cette tendance par la fonction $\epsilon(\mathbf{x})$, et certains préfèrent utiliser le Krigage ordinaire pour faciliter l'estimation de $\mu(\mathbf{x})$ et cède la mission du raffinage à la fonction $\epsilon(\mathbf{x})$. L'estimation $\hat{f}(\mathbf{x})$ de $f(\mathbf{x})$ est l'espérance de $\hat{Z}(\mathbf{x})$, on cherche à minimiser la valeur de l'erreur quadratique moyenne du modèle $\mathbb{E}[(\hat{Z}(\mathbf{x}) - Z(\mathbf{x}))^2]$ avec la contrainte $\mathbb{E}[Z(\mathbf{x})] = \mathbb{E}[\hat{Z}(\mathbf{x})]$ pour éviter le biais.

Les fonctions de base radiale (RBF)

Les métamodèles basés sur des fonctions de base radiale consistent à approximer la fonction originale par une sommation pondérée des fonctions de base radiale. Il s'agit des fonctions dépendant de la distance entre le point à estimer et les points du DOE. Cette technique est introduite pour interpoler les fonctions multivariées comme dans [78], [79] et [80]. Cette méthode est une bonne alternative aux réseaux de neurones en considérant son coût de construction faible. Quelques références existent pour ces méthodes telles que [81] et [82]. La forme générale des métamodèles RBF est donnée dans l'équation (2.47). Les fonctions $\phi_i(r_i)$ sont des fonctions de base radiales qui dépendent de la distance euclidienne r_i . Le nombre de points du DOE \mathbf{x}_i^b est n_s , le vecteur $\boldsymbol{\alpha}$ est celui des paramètres inconnus à déterminer. Ces

paramètres sont choisis d'une façon à interpoler tous les points du DOE comme c'est indiqué dans l'équation (2.48). Cette somme conduit à l'écriture matricielle de l'équation (2.49).

$$\begin{aligned}\hat{f}(\mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^{n_s} \alpha_i \phi_i(r_i) = \boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}) \\ \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}) &= \{\phi_1(r_1), \phi_2(r_2), \dots, \phi_{n_s}(r_{n_s})\}^T \\ r_i &= \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i^b\| \\ \boldsymbol{\alpha} &= \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n_s}\} \in \mathbb{R}^{n_s}\end{aligned}\tag{2.47}$$

$$\forall j \in \{1, 2, \dots, n_s\}, \hat{f}(\mathbf{x}_j^b) = \sum_{i=1}^{n_s} \alpha_i \phi_i(\|\mathbf{x}_j^b - \mathbf{x}_i^b\|) = f(\mathbf{x}_j^b)\tag{2.48}$$

$$\begin{aligned}\Phi \boldsymbol{\alpha}^T &= \mathbf{y}_{n_s}, \quad \text{tel que :} \quad \mathbf{y}_{n_s} = \{f(\mathbf{x}_1^b), f(\mathbf{x}_2^b), \dots, f(\mathbf{x}_{n_s}^b)\}^T \\ \Phi &= \begin{pmatrix} \phi_1(\|\mathbf{x}_1^b - \mathbf{x}_1^b\|) & \phi_2(\|\mathbf{x}_1^b - \mathbf{x}_2^b\|) & \dots & \phi_{n_s}(\|\mathbf{x}_1^b - \mathbf{x}_{n_s}^b\|) \\ \phi_1(\|\mathbf{x}_2^b - \mathbf{x}_1^b\|) & \phi_2(\|\mathbf{x}_2^b - \mathbf{x}_2^b\|) & \dots & \phi_{n_s}(\|\mathbf{x}_2^b - \mathbf{x}_{n_s}^b\|) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \phi_1(\|\mathbf{x}_{n_s}^b - \mathbf{x}_1^b\|) & \phi_2(\|\mathbf{x}_{n_s}^b - \mathbf{x}_2^b\|) & \dots & \phi_{n_s}(\|\mathbf{x}_{n_s}^b - \mathbf{x}_{n_s}^b\|) \end{pmatrix}\end{aligned}\tag{2.49}$$

En remplaçant la valeur de $\boldsymbol{\alpha}$ calculée dans l'équation (2.49), l'équation (2.47) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\hat{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}_{n_s}^T \Phi^{-1} \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x})\tag{2.50}$$

Il existe plusieurs formes de $\phi(r)$, on cite quelques formes dans le tableau ci-dessous :

Noms	Forme	Paramètre
Gaussienne	$e^{-(\epsilon r)^2}$	$\epsilon > 0$
Multi-quadratique	$(1 + (\epsilon r)^2)^{\frac{1}{2}}$	$\epsilon > 0$
Multi-quadratique inverse	$(1 + (\epsilon r)^2)^{-\frac{1}{2}}$	$\epsilon > 0$
Quadratique inverse	$(1 + (\epsilon r)^2)^{-1}$	$\epsilon > 0$
Splines cubiques	r^k	$k = 3$
Thin plate splines	$r^k \ln(r)$	$k = 2p + 1$ avec $p \in \mathbb{N}$

TABLEAU 2.2 – Exemples des fonctions à base radiales

De façon similaire aux cas des métamodèles de krigeage, l'estimation de l'erreur de prédiction σ^2 des RBF est possible en considérant que les réponses \mathbf{y}_{n_s} utilisées pour construire ce métamodèle sont des réalisations d'un processus gaussien.

L'équation de σ^2 est donnée par ([83], [84]) dans l'équation (2.51).

$$\sigma^2(\mathbf{x}) = 1 - \phi(\mathbf{x}^T \Phi^{-1} \phi(\mathbf{x})) \quad (2.51)$$

2.3.2 Métamodèles adaptatifs et optimisation

La méthode classique de construction des métamodèles consiste à fixer un plan DOE, dont on calcule la fonction originale ou le modèle de haute fidélité. Ce DOE est utilisé pour la construction des métamodèles. Cette méthode est efficace pour une prédiction globale du comportement de la fonction originale. Par contre elle nécessite un DOE assez riche ce qui est évidemment très coûteux quand l'évaluation du modèle haute fidélité est très coûteuse.

Une faible erreur de prédiction n'est pas toujours demandée sur tout le domaine de définition. Dans ce travail, nous nous intéressons aux métamodèles qui sont utilisés dans les problèmes d'optimisation. En optimisation, on distingue deux catégories de métamodèles, la première catégorie comporte les métamodèles remplaçant les fonctions objectifs qui doivent posséder une bonne approximation des zones où sont localisées les optimums exclusivement. La deuxième catégorie comporte les métamodèles qui remplacent les contraintes, dans ce cas, une bonne prédiction des frontières des contraintes est nécessaire. La qualité de prédiction des métamodèles dans une zone donnée est reliée à la densité de points dans cette zone. Afin de contrôler la répartition des points du DOE sur les différentes zones du domaine de définition, des techniques d'enrichissement adaptatif sont utilisées dans la construction des métamodèles. Le travail de Liu et al. [85] présente une étude de revue des différentes techniques utilisées dans la construction des métamodèles adaptatifs. Dans [86], Jones et al. identifient et comparent deux catégories d'enrichissement :

- **Les méthodes à deux phases (*Two-stage approach*)** : Il s'agit de construire un métamodèle préliminaire à partir d'un DOE initial contenant un petit nombre de points. Ce métamodèle sert à donner une approximation globale de la fonction originale. Ensuite ce DOE est enrichi itérativement d'une manière à améliorer l'approximation dans les zones d'intérêts. Ces métamodèles sont appelés adaptatifs, l'algorithme général de leur construction est donné dans la figure 2.6.
- **Les méthodes à une seule phase (*One-stage approach*)** : Ces méthodes sont utilisées dans les problèmes où une cible t pour une fonction $f(\mathbf{x})$ est désirée et on cherche dans le domaine des variables le point \mathbf{x}^* qui atteint cette cible, ce point correspond à :

$$\text{Trouver } \mathbf{x}^* \text{ tel que } f(\mathbf{x}^*) = t \quad (2.52)$$

La différence entre cette approche est celle de deux phases, est que dans cette

approche le métamodèle initial n'est pas construit. Cependant les points DOE sont utilisés pour estimer la probabilité qu'un point candidat \mathbf{x} atteigne la cible. Le candidat qui possède la meilleure probabilité (*Credibility*) est choisi pour enrichir le DOE.

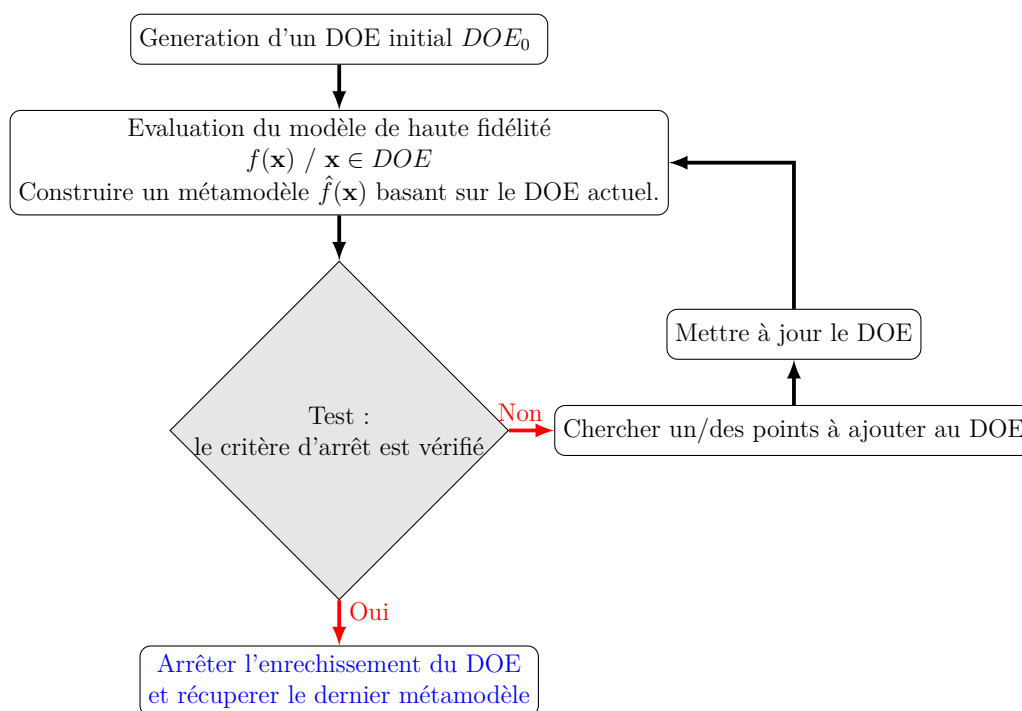


FIGURE 2.6 – Construction des métamodèles adaptatifs

Dans le cadre de ce travail nous nous intéressons à l'approche de deux phases d'enrichissement. Elle est souvent utilisée en optimisation et elle convient mieux aux problèmes dont l'évaluation de la fonction originale est très coûteuse [87].

Dans la suite, nous présentons les différents critères adaptatifs utilisés pour enrichir les métamodèles remplaçant les fonctions objectifs et les métamodèles remplaçant les fonctions contraintes.

Métamodèles adaptatifs remplaçant les fonctions objectifs

Les métamodèles servant à remplacer les fonctions objectifs, doivent être capables de détecter l'optimum de ces fonctions avec le moins possible d'échantillons DOE. Laurent dans [87] identifie les différents critères employés dans l'enrichissement des DOE pour les métamodèles remplaçant les fonctions objectifs.

- ★ **Enrichissement par l'optimum du métamodèle** : cette méthode consiste à ajouter l'optimum du métamodèle dans chaque itération. Par exemple si

le métamodèle remplace une fonction à minimiser, le point qui minimise le métamodèle est ajouté en chaque itération, comme c'est indiqué dans l'équation (2.53). L'avantage de cette technique est qu'elle est applicable à n'importe quel type de métamodèles. Par contre, cette technique risque de converger vers un optimum local de la fonction originale notamment lorsque l'optimum global se situe dans une zone mal prédite par le métamodèle. Cette méthode est appliquée dans [88] et dans [89].

$$\mathbf{x}^a = \arg \min \hat{f}(\mathbf{x}) \quad (2.53)$$

- ★ **Enrichissement par la variance de l'estimateur (métamodèle)** : cette technique est utilisable dans les métamodèles où une information sur la variance de l'estimateur est disponible, cette variance est l'erreur des moindres carrés (MSE) comme dans le cas du krigeage et du RBF. Il s'agit d'ajouter le point qui possède la plus grande MSE, le point à ajouter est défini par l'équation (2.54) ce qui permet d'obtenir une bonne estimation sur l'ensemble de l'espace des variables. Mais la convergence vers l'optimum de la fonction est lente surtout dans le cas des fonctions avec de nombreuses variables. Un exemple sur l'application de cette méthode est trouvé dans le travail de Jin et al. [90].

$$\mathbf{x}^a = \arg \max s^2(\mathbf{x}) \quad (2.54)$$

- ★ **Enrichissement par compromis optimum-variance** : cette méthode consiste à enrichir le DOE en cherchant les points du front de Pareto du problème bi-objectif optimum-variance. L'avantage ici est d'obtenir un nombre important des points à ajouter dans une seule itération. Par ailleurs la construction du front de Pareto est coûteux surtout dans les problèmes complexes et non convexes où l'utilisation des algorithmes évolutionnaires est indispensable. Jones et al. ont utilisé cette technique dans [91].
- ★ **Enrichissement par intervalle de confiance** : cette approche introduite par Cox et al. [92] est connue sous le nom de *Lower Confidence Bound* (LCB), ce critère est exprimé dans l'équation (2.55). Le choix du paramètre k contrôle ce compromis entre l'exploitation des zones optimums de la fonction (k assez faible) et l'exploration des zones possédant une grande erreur de prédiction (k assez grand). Contrairement à l'enrichissement optimum-variance, la mise en œuvre de cette approche est plus simple et moins coûteuse vue de la présence d'une seule fonction objective.

$$\mathbf{x}^a = \arg \min \hat{f}(\mathbf{x}) - ks(\mathbf{x}) \quad (2.55)$$

- ★ **Enrichissement basé sur la probabilité d'amélioration** : cette méthode

est basés sur le critère aléatoire du krigeage et du RBF en considérant que $\hat{f}(x)$ est une réalisation du processus gaussienne défini par $\tilde{y}(z) \sim N(\hat{f}(x), s^2(x))$ dans chaque point x . Cette méthode consiste à trouver le point qui maximise la probabilité d'amélioration (*Probability of Improvement* PI) de la fonction originale [93]. Il s'agit de la probabilité de trouver un point inférieur à une valeur donnée T , comme c'est exprimé dans l'équation (2.56).

$$PI(\mathbf{x}) = P(\hat{f}(\mathbf{x}) < T) = \Phi\left(\frac{T - \hat{f}(\mathbf{x})}{s(\mathbf{x})}\right) \quad (2.56)$$

Une des approches pour choisir T est de prendre le minimum f_{min} de $f(\mathbf{x})$ parmi les points du DOE. Parfois on prend des valeurs inférieures à f_{min} si on souhaite une amélioration plus grande telle que $T = f_{min} - 0.25|f_{min}|$. Jones [86] aborde le sujet du choix de T et il propose d'utiliser plusieurs valeurs de T qui correspondent à : faible, moyenne et grande amélioration souhaitée dans chaque itération.

★ **Enrichissement basé sur l'amélioration espérée** : Cette méthode envisagée par [94] est connue par *Expected Improvement* (EI). Le concept de EI est introduit par Mockus et al. en 1978 [95]. Il est basé sur le critère précédent, mais en quantifiant la probabilité d'amélioration en se basant sur le critère bayésien des métamodèles tel que le krigeage. la formulation de EI est donné dans l'équation (2.57), tel que Φ et ϕ sont les fonctions CDF et PDF de la loi normale centrée réduite respectivement. Le point \mathbf{x}^a à ajouter est celui qui maximise EI. Un exemple sur EI est donnée dans la figure 2.7 en un point x_0 donné.

$$EI(\mathbf{x}) = (f_{min} - \hat{f}(\mathbf{x}))\Phi\left(\frac{f_{min} - \hat{f}(\mathbf{x})}{s(\mathbf{x})}\right) + s(\mathbf{x})\phi\left(\frac{f_{min} - \hat{f}(\mathbf{x})}{s(\mathbf{x})}\right) \text{ tel que :} \\ f_{min} = \min(f(\mathbf{x}_i), i \in \{1, 2, \dots, n_s\}) \quad (2.57)$$

Le critère EI est utilisé par Jones et al. [96] pour introduire l'algorithme EGO *Efficient Global Optimization*. Cette algorithme est très utilisé en optimisation par des métamodèles. Un diagramme détaillé expliquant l'algorithme EGO appliqué pour minimiser une fonction $f(\mathbf{x})$ remplacer par un métamodèle $\hat{f}(\mathbf{x})$ est donné dans la figure 2.8. Un exemple sur l'enrichissement par l'algorithme EGO sur la fonction de Forrester de l'équation 2.58 est donné dans la figure 2.9.

$$f(x) = 0.5(6x - 2)^2 \sin(12x - 4) + 10(x - 0.5) - 5 \quad (2.58)$$

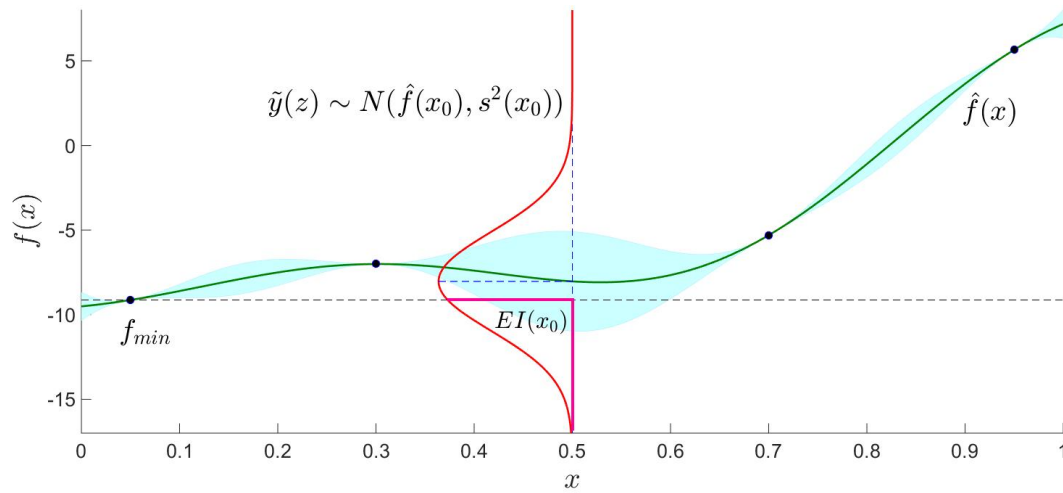
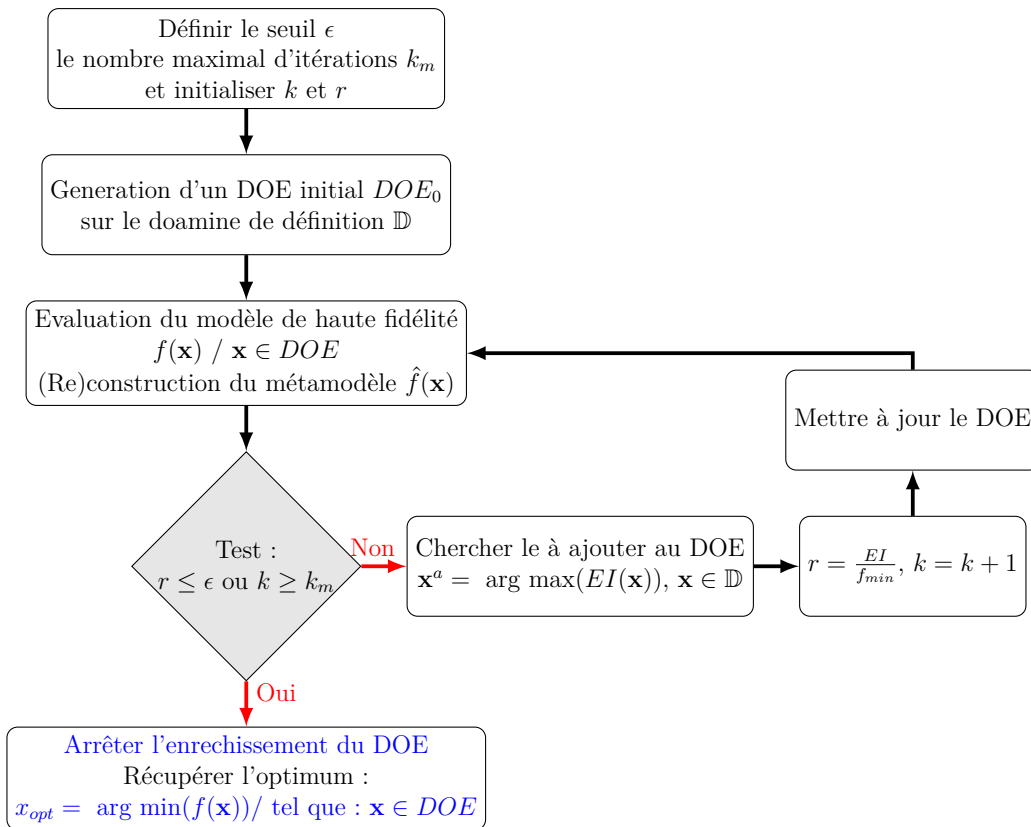
FIGURE 2.7 – La valeur de EI en un point x_0 

FIGURE 2.8 – Construction des métamodèles adaptatifs par l'algorithme EGO

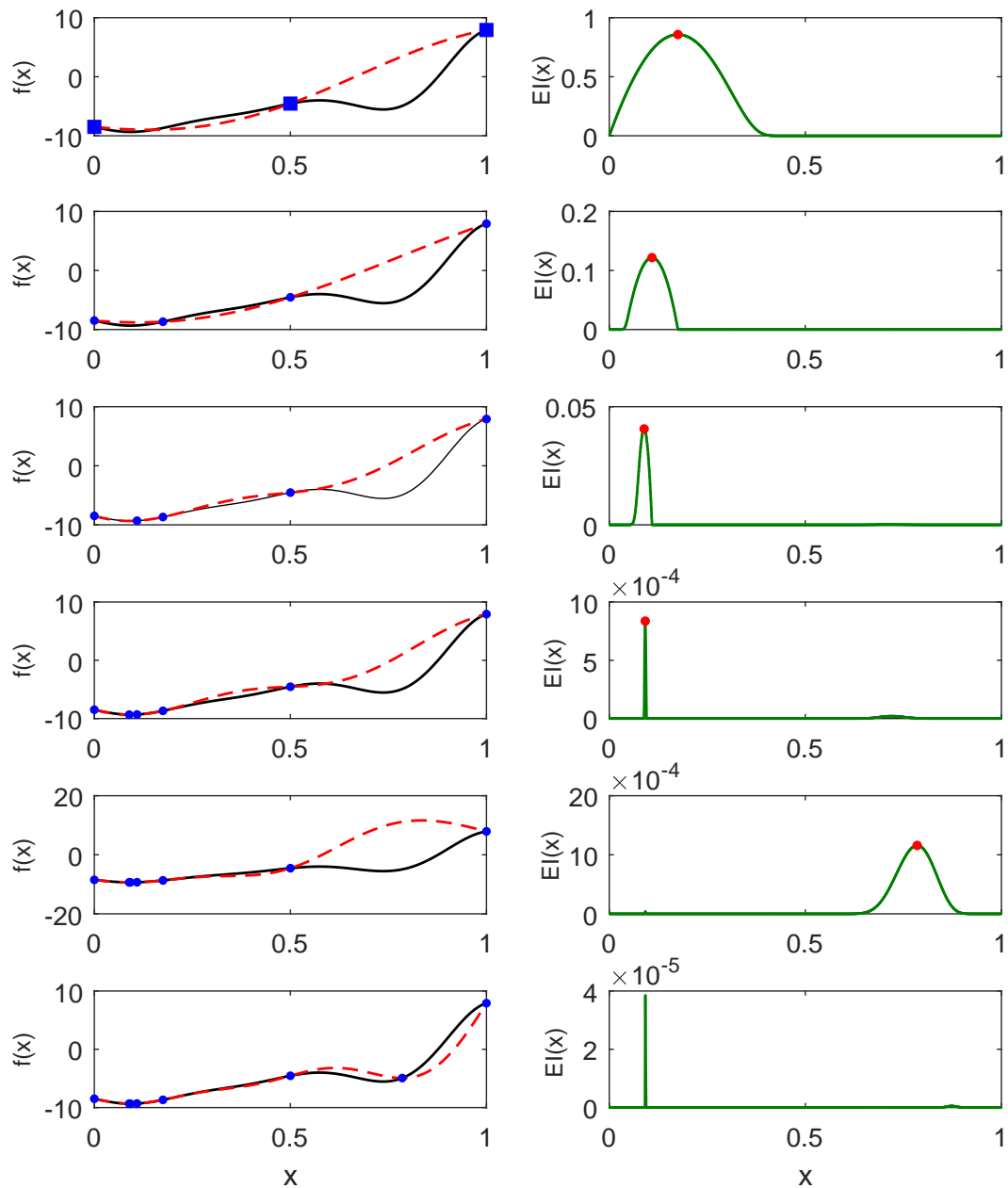


FIGURE 2.9 – Exemple de l'enrichissement par l'algorithme EGO de la fonction de Forrester

Métamodèles adaptatifs remplaçant les fonctions contraintes

Les critères identifiés ci-dessus sont uniquement applicables pour les métamodèles des fonctions à optimiser. Par contre, dans plusieurs problèmes en ingénierie

mécanique il existe des fonctions contraintes dont leurs coûts d'évaluation sont élevés ce qui nécessite de les remplacer par des métamodèles. Comme pour le cas des fonctions objectifs, il existe des techniques adaptatives pour enrichir ces métamodèles d'une manière économique. Moustapha dans [97] identifie plusieurs critères d'amélioration utilisés pour ce type de métamodèles. Il distingue quatre principaux types

★ **Critères adaptés de EI** : ce type comporte l'ensemble des critères améliorés de EI pour l'optimisation sous contraintes tel que :

1. **Critère ajusté de EI** : cette méthode, introduite par Schonlau et al. [98], consiste à multiplier la valeur de EI par la probabilité de respecter les contraintes comme il est indiqué dans l'équation (2.59). La valeur de $\mathbb{P}[\hat{g}_i(\mathbf{x}) \leq 0]$ est estimée en se basant sur le critère aléatoire du métamodèle. Le nombre de contraintes est représenté par n_g , g_t est l'état limite des contraintes, $g_t = 0$ pour les contraintes inégalités du type $g(\mathbf{x}) \leq 0$ comme dans l'équation (2.1).

$$EI_a(\mathbf{x}) = EI(\mathbf{x}) \prod_{i=1}^{n_g} \mathbb{P}[\hat{g}_i(\mathbf{x}) \leq g_t] \quad (2.59)$$

2. **Critère de violation espérée** : Audet et al. [99] proposent le critère de violation espérée (*Expected violation EV*), la formulation de EV est donnée dans l'équation (2.60). Le point à ajouter est celui qui maximise EV.

$$EV(\mathbf{x}) = \begin{cases} (g_t - \hat{g}(\mathbf{x}))\Phi\left(\frac{g_t - \hat{g}(\mathbf{x})}{s(\mathbf{x})}\right) + s(\mathbf{x})\phi\left(\frac{g_t - \hat{g}(\mathbf{x})}{s(\mathbf{x})}\right) & \text{si } s(\mathbf{x}) > 0 \\ 0 & \text{si } s(\mathbf{x}) = 0 \end{cases} \quad (2.60)$$

3. **Critère de reformulation de EGO avec des contraintes** : Bichon et al. [100] proposent un critère appelé *Constrained EGFO Formulation*, dont ils utilisent le principe du lagrangien augmenté pour reformuler le problème d'optimisation original en un problème unique sans contraintes en minimisant la fonction de l'équation (2.61). Les deux paramètres $\lambda \geq 0$ et $r_p \geq 0$ sont les multiplicateurs de Lagrange et des coefficients de pénalisation respectivement.

$$f(\mathbf{x}) + \lambda g(\mathbf{x}) + r_p g^2(\mathbf{x}) \quad (2.61)$$

En considérant que les fonctions $f(\mathbf{x})$ et $g(\mathbf{x})$ seront remplacées par des processus gaussiens, Bichon et al. proposent de remplacer la fonction

contraintes $g(\mathbf{x})$ par EV de l'équation (2.60), l'équation (2.61) sera :

$$f(\mathbf{x}) + \lambda EV(\mathbf{x}) + r_p EV^2(\mathbf{x}) \quad (2.62)$$

4. **Critère EI pour les contours des contraintes** : Une fonction d'amélioration pour améliorer l'approximation des contours des contraintes est proposée par Ranjan et al. [101]. Sa forme analytique est donnée dans l'équation (2.63), avec α est un coefficient de multiplication.

$$\begin{aligned} I_c(\mathbf{x}) &= \epsilon^2(\mathbf{x}) - \min((\hat{g}(\mathbf{x}) - g_t)^2, \epsilon^2(\mathbf{x})) \\ \epsilon(\mathbf{x}) &= \alpha s(\mathbf{x}), \quad \alpha \geq 0 \end{aligned} \quad (2.63)$$

- ★ **Le critère EF** : Ce critère connu par *Expected Feasibility Function EF* est introduit par Bichon et al. [102] qui se sont inspirés du travail de Ranjan et al. [101] et de EGO pour développer une technique d'optimisation appelée *Efficient Global Reliability Analysis*. Le critère *EF* est calculé en utilisant l'équation suivante avec ϵ est un voisinage près de g_t .

$$\begin{aligned} EF(\mathbf{x}) &= (\hat{g}(\mathbf{x}) - g_t) \left[2\Phi\left(\frac{g_t - \hat{g}}{s(\mathbf{x})}\right) - \Phi\left(\frac{(g_t - \epsilon) - \hat{g}(\mathbf{x})}{s(\mathbf{x})}\right) - \Phi\left(\frac{(g_t + \epsilon) - \hat{g}(\mathbf{x})}{s(\mathbf{x})}\right) \right] \\ &\quad - s(\mathbf{x}) \left[2\phi\left(\frac{g_t - \hat{g}}{s(\mathbf{x})}\right) - \phi\left(\frac{(g_t - \epsilon) - \hat{g}(\mathbf{x})}{s(\mathbf{x})}\right) - \phi\left(\frac{(g_t + \epsilon) - \hat{g}(\mathbf{x})}{s(\mathbf{x})}\right) \right] \\ &\quad + \epsilon \left[\Phi\left(\frac{(g_t + \epsilon) - \hat{g}(\mathbf{x})}{s(\mathbf{x})}\right) - \Phi\left(\frac{(g_t - \epsilon) - \hat{g}(\mathbf{x})}{s(\mathbf{x})}\right) \right] \end{aligned} \quad (2.64)$$

- ★ **Le critère DA** : Ce critère nommé *Deviation number DA* est utilisé dans la méthode *AK - MCS*. Cette méthode est introduite par Echard et al. [103]. Elle consiste à ajouter le point qui minimise la fonction $U(\mathbf{x})$, qui est exprimée dans l'équation (2.65). Dans cette méthode le point est choisi parmi un nombre de candidats tirés par Monte Carlo.

$$U(\mathbf{x}) = \frac{|g_t - \hat{g}(\mathbf{x})|}{s(\mathbf{x})} \quad (2.65)$$

L'algorithme *AK - MCS* a été amélioré dans plusieurs travaux, actuellement la famille AK comporte (*AK - IS* [104], *AK - SYS* [105], *AK - IS²* [106],...). L'amélioration la plus récente de AK-MCS est effectuée par Lelièvre et al. [107] en proposant la méthode AK-MCSi qui permet de paralléliser le calcul et d'évaluer les petites probabilités de défaillance.

- ★ **Le critère MP** : Ce critère est développé dans le travail de la thèse de

Dubourg [108]. Il consiste à calculer la probabilité d'un point se situant à proximité du contour des contraintes avec un intervalle de confiance de degré $1 - \alpha$. Cette probabilité nommée *Margin Probability function* MP est calculée par l'équation (2.66). Le coefficient k est le quantile d'ordre $\frac{\alpha}{2}$ de la loi normale. Dubourg a employé $k = 1.96$ qui correspond à $\alpha = 5\%$.

$$\begin{aligned} MP(\mathbf{x}) &= \mathbb{P}[\hat{g}(\mathbf{x}) \leq g_t + ks(\mathbf{x})] - \mathbb{P}[\hat{g}(\mathbf{x}) \leq g_t - ks(\mathbf{x})] \\ &= \Phi\left(\frac{g_t + ks(\mathbf{x}) - \hat{g}(\mathbf{x})}{s(\mathbf{x})}\right) - \Phi\left(\frac{g_t - ks(\mathbf{x}) - \hat{g}(\mathbf{x})}{s(\mathbf{x})}\right) \end{aligned} \quad (2.66)$$

2.3.3 Métamodèles adaptatifs en contexte probabiliste

Les critères d'enrichissement présentés précédemment sont utilisés en optimisation déterministe. Cependant, plusieurs travaux ont été effectués sur l'adaptation de ces critères aux problèmes sous incertitudes. Comme dans le cas déterministe il y a deux grandes types de critères :

- o Les critères qui sont utilisés dans la construction des métamodèles remplaçant les fonctions objectifs qui sont souvent utilisés en optimisation robuste comme dans [109], [110], [111] et [112].
- o Les critères qui sont utilisés pour remplacer les contraintes du problème surtout dans les problèmes qui s'intéressent à l'aspect fiable des systèmes [97], [107] ...

La littérature sur ces critères est détaillé dans le chapitre 3.

2.3.4 Propagation des incertitudes sur les métamodèles

Comme il est expliqué dans ce chapitre, les métamodèles sont fréquemment utilisés en ingénierie pour remplacer les modèles de simulation. Ces métamodèles se substituent souvent aux fonctions objectifs et aux fonctions contraintes dans la plupart des applications industrielles. L'étude de l'optimisation sous incertitudes (OU) dans ces types de problèmes nécessite de propager les incertitudes sur les objectifs et les contraintes des problèmes. Dans le cas de l'utilisation des métamodèles, la recherche des formulations analytiques pour propager les incertitudes sur ces métamodèles peut être plus facile, dans certains cas, vu que les métamodèles sont divisés en plusieurs types et chaque type admet sa propre forme analytique. Par contre, la recherche de ces formules analytiques n'est pas toujours possible, elle est reliée aux formes générales des métamodèles et aux PDF des variables aléatoires, ce qui aboutit parfois à des équations non-intégrables. Chen et al. [113], [114], introduisent des formules analytiques pour propager les incertitudes sur quelques types de métamodèles en passant des intégrales multivariées à des intégrales uni-variées.

Ces formules sont données dans des cas bien déterminés et qui sont identifiés dans ces articles.

Dans ce travail nous introduisons des formules analytiques pour propager les incertitudes sur les métamodèles polynomiaux, et les métamodèles RBF gaussiens.

Les métamodèles polynomiaux

Les modèles de multiplications $g(\tilde{\mathbf{x}})$ sont donnés dans l'équation (2.67), avec $\nu_i \in \mathbb{R}$.

$$g(\tilde{\mathbf{x}}) = K \prod_{i=1}^n \tilde{x}_i^{\nu_i} \quad (2.67)$$

Les formulations de l'espérance $\mathbb{E}[g(\tilde{\mathbf{x}})]$ et de la variance $\mathbb{V}[g(\tilde{\mathbf{x}})]$ sont données dans l'équation (2.68). Ces équations nécessitent les moments $\mathbb{E}[\tilde{x}^\nu]$, qui sont calculés dans le tableau 2.3 pour quelques PDF communes. Les équations correspondantes et leurs démonstrations sont données dans l'annexe A.

$$\begin{aligned} g(\tilde{\mathbf{x}}) &= K \prod_{i=1}^n \tilde{x}_i^{\nu_i} \text{ where } K, \nu_i \in \mathbb{R}^2 \\ \mathbb{E}[g(\tilde{\mathbf{x}})] &= K \prod_{i=1}^n \mathbb{E}[\tilde{x}_i^{\nu_i}] \\ \mathbb{V}[g(\tilde{\mathbf{x}})] &= K^2 \left\{ \prod_{i=1}^n \mathbb{E}[\tilde{x}_i^{2\nu_i}] - \prod_{i=1}^n \mathbb{E}[\tilde{x}_i^{\nu_i}]^2 \right\} \end{aligned} \quad (2.68)$$

Modèle à minimiser	Type de distribution	Valeurs de ν	Propagation des incertitudes
$f(\tilde{x}) = \tilde{x}^\nu$	Uniforme	$\nu \in \mathbb{R}$	Équation (A.6)
	Normale	$\nu \in]-1, +\infty[$	Équation (A.20)
	Log-Normale	$\nu \in \mathbb{R}$	Équation (A.23)
	Weibull	$\nu \in \mathbb{R} \setminus \beta \cdot \mathbb{Z}^{*-}$	Équation (A.28)
	Gumbel	$\nu \in \mathbb{N}$	Équation (A.40)
$g(\tilde{\mathbf{x}}) = K \prod_{i=1}^n \tilde{x}_i^{\nu_i}$	Ci-dessus	Ci-dessus	Équation (A.66)
$h(\tilde{\mathbf{x}}) = \sum_{j=1}^m g_j(\tilde{\mathbf{x}})$	Ci-dessus	Ci-dessus	Équation (A.67)

TABLEAU 2.3 – Résumé des équations de la propagation des incertitudes pour les modèles multiplicatifs y compris les métamodèles polynomiaux

D'après les résultats ci-dessus, nous pouvons calculer l'espérance et la variance des modèles $h(\tilde{\mathbf{x}})$ qui sont la somme des modèles multiplicatifs. Les formules de calcul de $\mathbb{E}[h(\tilde{\mathbf{x}})]$ et $\mathbb{V}[h(\tilde{\mathbf{x}})]$ sont données dans l'équation (2.69). Les modèles polynomiaux sont des cas particuliers de $h(\mathbf{x})$, ils correspondent à $\nu \in \mathbb{N}$. D'où les équations de l'espérance et de la variance d'un métamodèle à base polynomiale sont obtenues par l'équation (2.69).

$$\begin{aligned} h(\tilde{\mathbf{x}}) &= \sum_{j=1}^m g_j(\tilde{\mathbf{x}}) \\ \mathbb{E}[h(\tilde{\mathbf{x}})] &= \sum_{j=1}^m \mathbb{E}[g_j(\tilde{\mathbf{x}})] \\ \mathbb{V}[h(\tilde{\mathbf{x}})] &= \sum_{j=1}^m \mathbb{V}[g_j(\tilde{\mathbf{x}})] + 2 \sum_{1 \leq j < k \leq m} cov(g_j(\tilde{\mathbf{x}}), g_k(\tilde{\mathbf{x}})) \\ cov(g_j(\tilde{\mathbf{x}}), g_k(\tilde{\mathbf{x}})) &= \mathbb{E}[g_j(\tilde{\mathbf{x}})g_k(\tilde{\mathbf{x}})] - \mathbb{E}[g_j(\tilde{\mathbf{x}})]\mathbb{E}[g_k(\tilde{\mathbf{x}})] \end{aligned} \quad (2.69)$$

Les métamodèles RBF gaussiens

Une fonction à base radiales gaussiennes $g_{\epsilon, G}$ est définie par l'équation (2.70) :

$$g_{\epsilon, G} = e^{-(\epsilon r)^2} = \exp\left(-\epsilon^2 \sum_{i=1}^n (x_i - x_i^b)^2\right) \quad (2.70)$$

Un métamodèle à base RBF gaussienne G_{n_s} est écrit sous la forme de la somme des $g_{\epsilon, G}$, comme il est présenté dans l'équation (2.71).

$$G_{n_s} = \sum_{j=1}^{n_s} \alpha_j g_{\epsilon, G}^{(j)} = \sum_{j=1}^{n_s} \alpha_j \exp\left(-\epsilon_j^2 \sum_{i=1}^n (x_i - x_i^{(j)})^2\right) \quad (2.71)$$

Les équations de l'espérance et de la variance sont données dans les travaux de Chen et al. [113], [114]. Dans notre travail, nous reformulons ces équations d'une manière plus claire, en plus, nous introduisons la formule du moment d'ordre N de G_{n_s} . Les équations du moment d'ordre N , $\mathbb{E}[G_{n_s}^N]$, de l'espérance $\mathbb{E}[G_{n_s}]$ et de la variance $\mathbb{V}[G_{n_s}]$ sont données ci-dessous.

$$\mathbb{E}[G_{n_s}^N] = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \frac{1}{\prod_{i=1}^n \sigma_i} \cdot \sum_{k_j \in E_{n_s, N}} \binom{N}{k_1 \dots k_{n_s}} \left(\prod_{j=1}^{n_s} \alpha_j^{k_j} \right) \left(\prod_{i=1}^n \kappa_{i, k_j} \cdot e^{-b_{i, k_j}} \right) \quad (2.72)$$

Avec :

$$\kappa_{i, k_j} = \left(1 + 2\sigma_i^2 \sum_{j=1}^{n_s} k_j \epsilon_j^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (2.73)$$

Tel que $E_{n_s, N}$ est l'ensemble des entiers k_j :

$$E_{n_s, N} = \{k_j \in \mathbb{N}, \sum_{j=1}^{n_s} k_j = N\}$$

Et :

$$\binom{N}{k_1 \dots k_{n_s}} = \frac{N!}{\prod_{i=1}^{n_s} k_i!}$$

Par exemple, si on prend le cas $n_s = 2$ et $N = 2$, l'ensemble des éléments de $E_{n_s, N}$ sera :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.74)$$

L'espérance est facilement obtenue en mettant $N = 1$ dans l'équation (2.72) :

$$\mathbb{E}[G_{n_s}] = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \frac{1}{\prod_{i=1}^n \sigma_i} \cdot \sum_{j=1}^{n_s} \alpha_j \binom{n}{\prod_{i=1}^n \kappa_i^{(j)}} \cdot \exp\left(-\epsilon^2 \sum_{i=1}^n \kappa_i^{(j)2} (\mu_i - x_i^{(j)})^2\right) \quad (2.75)$$

Avec :

$$\kappa_i^{(j)} = \frac{1}{(1 + 2\epsilon_j^2 \sigma_i^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (2.76)$$

Le moment d'ordre 2 qui correspond à $N = 2$ dans l'équation (2.72) s'écrit :

$$\mathbb{E}[G_{n_s}^2] = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \frac{1}{\prod_{i=1}^n \sigma_i} \cdot \sum_{k_j \in E_{n_s, 2}} \binom{2}{k_1 \dots k_{n_s}} \left(\prod_{j=1}^{n_s} \alpha_j^{k_j}\right) \left(\prod_{i=1}^n \kappa_{i, k_j}\right) \cdot e^{-b_{i, k_j}} \quad (2.77)$$

La variance pourra être directement calculée avec :

$$\mathbb{V}[G_{n_s}] = \mathbb{E}[G_{n_s}^2] - (\mathbb{E}[G_{n_s}])^2$$

Les détails et la démonstration de ces équations sont données dans l'annexe B.

2.4 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons balayé l'état de l'art des sujets d'optimisation déterministe mono-objectif et multi-objectif, les différentes approches et algorithmes d'optimisation ont été présentés. En plus nous avons identifié la présence des incertitudes en ingénierie mécanique, leur types et comment elles sont modélisées et les différents outils de propagation des incertitudes des entrées aux sorties des

problèmes. De même, nous avons expliqué la notion des métamodèles et leurs différents types ainsi que l'approche adaptative de construction des métamodèles, enfin nous avons introduit quelques formules analytiques pour propager les incertitudes sur les métamodèles polynômiaux et RBF.

Dans le chapitre suivant, nous traitons le sujet de l'optimisation sous incertitudes, et nous identifions ses différents types, nous introduisons une nouvelle stratégie pour formuler et choisir le type d'OU nécessaire pour une application donnée. Pour illustrer cette partie nous utilisons plusieurs exemples des problèmes d'optimisation en mécanique, formulés à partir des modèles analytiques simples en contexte incertain. Pour résoudre ces problèmes nous utilisons la méthode NBI ou la méthode NSGAI selon la non-linéarité des problèmes, tandis que pour les problèmes mono objectifs nous avons utilisé des algorithmes déterministes avec plusieurs points de départ. La propagation des incertitudes est effectuée d'une manière analytique sur quelques applications simples, par contre elle est effectuée par les méthodes MC et Taylor lorsqu'elle n'est plus possible analytiquement.

Incertitudes et robustesse : contribution dans la modélisation des problèmes d'optimisation robuste

Sommaire du présent chapitre

3.1 Etat de l'art de l'optimisation sous incertitudes	46
3.1.1 La mise en œuvre des incertitudes en optimisation . . .	46
3.1.2 Les différents types d'optimisation sous incertitudes . . .	47
3.1.3 Classification des problèmes OU	50
3.2 Nouvelle classification de OU	51
3.3 Identification de l'antagonisme performance-stabilité	53
3.3.1 Identification explicite de l'existence de l'antagonisme	53
3.3.2 Méthode générale pour identifier l'antagonisme	60
3.3.3 Facteurs influençant l'existence de l'antagonisme	62
3.4 Applications	64
3.4.1 Le problème de deux barres	65
3.4.2 La poutre console	72
3.4.3 La poutre soudée	75
3.4.4 La poutre encastree	79
3.5 Conclusion	84

L'optimisation déterministe, décrite dans le chapitre 2, risque de produire des résultats non fiables ou non robustes. L'optimisation sous incertitudes (*Optimisation under uncertainty* OU) est fréquemment utilisée durant cette dernière décade, ce type d'optimisation est capable de produire des résultats avec haut degré de fiabilité et de robustesse.

Yao et al. [115] définissent la fiabilité par : *the likelihood that a component (or a system) will perform its intended function without failure for a specified period of time under stated operating conditions.*

De même, ils définissent la robustesse par : *The degree of tolerance of the system to be insensitive to variations in both the system itself and the environment.*

Dans la plupart des applications, il est presque impossible d'obtenir des systèmes 100% fiables et robustes. Cependant, un système est considéré fiable lorsqu'il remplit ses fonctions avec une probabilité de défaillance inférieure ou égale à celle fixée par le cahier des charges. De même, les systèmes, qui sont peu sensibles aux variations ou incertitudes de leurs entrées, sont considérés robustes.

Le défi principal de l'OU est son coût, ce dernier est relié dans le cas fiabiliste à l'évaluation de la probabilité de violation des contraintes, en utilisant les techniques de propagation des incertitudes déjà détaillées dans la section 2.2.3. Ces techniques sont parfois coûteuses, surtout dans le cas de l'utilisation de la méthode MC. Dans le cas de la robustesse, le coût est relié à la formulation multiobjective du problème de OU, en considérant les mesures de performance et de stabilité simultanément comme des objectifs du problème. Cela nécessite l'évaluation de ces mesures en utilisant une des techniques de la propagation des incertitudes, à côté du coût de la propagation des incertitudes, le coût total de l'optimisation robuste comporte celui de la construction du front de Pareto.

En plus dans la plupart des applications mécaniques, l'évaluation des objectifs et des contraintes du problème nécessite des simulations numériques coûteuses. Ces coûts cités ci-dessus multipliés par le coût de l'algorithme d'optimisation constituent le coût total de l'OU.

3.1 Etat de l'art de l'optimisation sous incertitudes

L'optimisation sous incertitudes est utilisée dans les différents domaines de l'ingénierie mécanique, par exemple, l'OU est utilisée dans le domaine de *crashworthiness* des structures des automobiles dans [97] et [116]. l'optimisation fiabiliste pour le procédé du moulage sous pression est étudié dans [117]. Baudoui et al. [71], [118] proposent une méthode pour l'optimisation robuste appliquée sur des systèmes aéronautiques, l'OU des panneaux composites est étudiée dans [119] et [120].

3.1.1 La mise en œuvre des incertitudes en optimisation

La prise en compte des incertitudes en optimisation est assuré par l'étude des incertitudes sur les variables de décision ou les variables de contrôle et les

paramètres environnementaux. Taguchi [121] a introduit l'étude des effets des paramètres environnementaux ou les facteurs de bruit (*Noise Factors*) comme il les a nommés dans le processus de l'optimisation. Les paramètres environnementaux sont des paramètres que le designer ne peut pas les contrôler, ils sont imposés par l'environnement du design, telles que la température ambiante, la pression atmosphérique et même les paramètres qui sont reliés aux caractéristiques des matériaux telles que les impuretés des matériaux et autres comme c'est identifié par Beyer et al. [43]. Les variables de design sont les paramètres qui pilotent l'optimisation, contrairement aux paramètres environnementaux qui ne pilotent pas l'optimisation mais dont les incertitudes interviennent dans la propagation des incertitudes. Beyer et al. [43] ont distingué quatre classes de sources des incertitudes en optimisation.

1. Classe A : Les incertitudes qui sont reliées aux paramètres environnementaux et pas aux variables de décision qui sont pilotés par le designer, tels que les propriétés des matériaux (densité, limite d'élasticité, module de young,..), la température et l'humidité, ...
2. Classe B : Les incertitudes qui sont reliées aux variables de décision. Ces incertitudes sont présentées dans les tolérances de fabrication pour les problèmes du design des structures mécaniques.
3. Classe C : Ces incertitudes sont reliées au modèle du problème, on les rencontrent souvent dans les problèmes de métamodélisation, où les fonctions originales sont remplacés par des modèles de substitution.
4. Classe D : Ces incertitudes sont de même type de A, B et C mais elles sont reliées aux contraintes du problème au lieu des objectifs.

Baudoui [71] a considéré que ce n'est pas nécessaire et pas justifié de diviser entre les contraintes des fonctions objectives et des fonctions contraintes. En considérant que les trois premières classes sont suffisantes pour les appliquer aux fonctions objectifs et aux fonctions contraintes.

Afin de classifier les incertitudes selon leur importance, l'analyse de sensibilité est l'outil utilisé, c'est une étape importante avant l'optimisation, elle permet de déterminer le degré d'influence des incertitudes de chacune des variables et des paramètres sur la sortie des fonctions et sur les solutions optimales d'une manière générale.

Dans ce travail, les incertitudes associées aux variables de contrôle et aux paramètres environnementaux sont modélisées par des lois de densité de probabilité classiques, qui seront précisées pour chaque application.

3.1.2 Les différents types d'optimisation sous incertitudes

On peut identifier trois principaux types de OU dans la littérature [122] :

★ **L'optimisation fiabiliste** : elle est connue sous le nom de *Reliability based design optimisation* (RBDO) :

Ce type de OU est capable de donner des résultats avec un haut degré de fiabilité. Il a été étudié dans plusieurs travaux, tels que [123], [124], [125] et [126]. La reformulation en RBDO pour les problèmes DO mono-objectifs est donnée dans l'équation (3.1). Tel que $\mathbb{E}[f(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{p}})]$ est l'espérance de f , $\tilde{\mathbf{x}}$ et $\tilde{\mathbf{p}}$ sont les vecteurs des variables aléatoires de décision et des paramètres environnementaux probabilistes respectivement. Le vecteur des paramètres déterministes de taille m est représenté par \mathbf{p} . Les incertitudes associées aux variables et aux paramètres du problème sont $\tilde{\chi}_x$ et $\tilde{\chi}_p$ respectivement. Les contraintes déterministes \mathbf{h} et \mathbf{g} sont remplacées par leurs quantiles $Q_\alpha[\mathbf{h}]$ et $Q_\alpha[\mathbf{g}]$, avec α est le degré de fiabilité.

$$\begin{aligned}
& \text{Minimiser : } \mathbb{E}[f(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{p}})] \\
& \text{Sous : } Q_\alpha[\mathbf{h}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{p}})] = 0 \\
& \quad Q_\alpha[\mathbf{g}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{p}})] \leq 0 \\
& \quad \mathbf{x}_l \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}_u \\
& \text{Tel que : } \tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} + \tilde{\chi}_x \\
& \quad \tilde{\mathbf{p}} = \mathbf{p} + \tilde{\chi}_p \\
& \quad \mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \\
& \quad \mathbf{p} = \{p_1, p_2, \dots, p_m\} \\
& \quad \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \{h_1(\mathbf{x}), h_2(\mathbf{x}), \dots, h_l(\mathbf{x})\} \\
& \quad \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \{g_1(\mathbf{x}), g_2(\mathbf{x}), \dots, g_s(\mathbf{x})\}
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Notons qu'il est suffisant de remplacer une seule contrainte déterministe par son quantile pour définir un problème RBDO. En plus la fonction objectif peut être remplacée par son espérance ou étudiée en cas déterministe. Il existe d'autres formulations pour le RBDO, parmi ces formulations, on cite celle du pire des cas qui est un cas particulier de l'équation (3.1), mais en considérant $\alpha = 100\%$. Dans ce travail, on a choisi la formulation de l'équation (3.1) parce qu'elle est générale. Pour les autres formulations, nous recommandons le travail de Yao et al. [115].

★ **L'optimisation robuste** : Ce type est connu sous le nom de *Robust design optimisation* (RDO) :

Le concept du design robuste est introduit par l'ingénieur japonais Genichi Taguchi, qui a développé la méthode de Taguchi afin d'améliorer la qualité des produits et les rendre insensible aux variations des variables [127], [128]. RDO est étudiée dans [129], [130], [43], [131] et [132]. RDO vise à produire des résultats qui sont peu sensibles aux incertitudes des entrées. Plusieurs

métriques sont utilisées dans la littérature pour mesurer la robustesse d'un design, Gohler et al. [133] identifient 38 métriques différentes. Dans ce travail nous utilisons la formulation classique de RDO en insérant une mesure de stabilité de la fonction f dans les objectives du problème. En RDO, nous intéressons plutôt aux incertitudes dans les objectifs du problème, alors que les contraintes, si elles existent, sont étudiées dans le cas déterministe. L'implémentation d'une mesure de stabilité peut être assurée par l'ajout comme une seconde fonction objectif à coté de la mesure de performance, ou par une simple agrégation des deux mesures comme dans [122] et [115]. La variance, l'écart type ou la différence de quantile peuvent être utilisés comme mesures de stabilité.

La formulation bi-objective de RDO basée sur l'espérance et la variance est utilisée dans ce travail. Elle est donnée dans l'équation (3.2), avec $\mathbb{V}[f(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{p}})]$ est la variance de f .

$$\begin{aligned}
& \text{Minimiser : } \mathbb{E}[f(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{p}})] ; \mathbb{V}[f(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{p}})] \\
& \text{Sous : } \mathbf{h}(\mathbf{x}) = 0 \\
& \quad \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq 0 \\
& \quad \mathbf{x}_l \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}_u \\
& \text{Tel que : } \tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} + \tilde{\chi}_x \\
& \quad \tilde{\mathbf{p}} = \mathbf{p} + \tilde{\chi}_p \\
& \quad \mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \\
& \quad \mathbf{p} = \{p_1, p_2, \dots, p_m\} \\
& \quad \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \{h_1(\mathbf{x}), h_2(\mathbf{x}), \dots, h_l(\mathbf{x})\} \\
& \quad \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \{g_1(\mathbf{x}), g_2(\mathbf{x}), \dots, g_s(\mathbf{x})\}
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Notant que la formulation de l'agrégation de l'espérance et la variance est capable de donner un seul point du front de Pareto du problème objectif. Par contre, la formulation de l'équation (3.2) est capable de fournir le front de Pareto tout entier, ce qui donne au designer une large gamme de configurations et d'options.

★ **L'optimisation fiabiliste et robuste**, *Reliability based robust design optimisation* (RBRDO) :

RBRDO est le type de OU qui combine les deux autres types RDO et RBDO. Ce type est étudié dans plusieurs travaux tels que [134], [135], [136], et [137]. Ce type est employé lorsque des résultats stables avec haut degré de fiabilité sont demandés. La fonction f est remplacée par ces deux mesures de performance et de stabilité comme dans le cas RDO, de même les contraintes du problème sont remplacées par leurs quantiles. Malgré son aptitude à produire

des résultats qui satisfaisaient les requis du design concernant sa fiabilité et sa robustesse, le coût de RBRDO reste son défi principal. Il est trop élevé notamment lorsque les simulations numériques sont demandées pour évaluer les objectifs et les contraintes du problème. La formulation de RBRDO est donnée dans l'équation (3.3).

$$\begin{aligned}
& \text{Minimiser : } \mathbb{E}[f(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{p}})] ; \mathbb{V}[f(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{p}})] \\
& \text{Sous : } Q_\alpha[\mathbf{h}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{p}})] = 0 \\
& \quad Q_\alpha[\mathbf{g}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{p}})] \leq 0 \\
& \quad \mathbf{x}_l \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}_u \\
& \text{Tel que : } \tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} + \tilde{\chi}_x \\
& \quad \tilde{\mathbf{p}} = \mathbf{p} + \tilde{\chi}_p \\
& \quad \mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \\
& \quad \mathbf{p} = \{p_1, p_2, \dots, p_m\} \\
& \quad \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \{h_1(\mathbf{x}), h_2(\mathbf{x}), \dots, h_l(\mathbf{x})\} \\
& \quad \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \{g_1(\mathbf{x}), g_2(\mathbf{x}), \dots, g_s(\mathbf{x})\}
\end{aligned} \tag{3.3}$$

3.1.3 Classification des problèmes OU

Dans le travail de Lelièvre et al. [122], les différentes approches du design en générale et celles de l'optimisation sous incertitudes spécifiquement sont classifiées selon les fonctions objectifs et les fonctions contraintes, et l'étude des incertitudes dans ces fonctions, comme il est indiqué dans la figure 3.1. Cette classification est basée sur la formulation des problèmes, et sur l'étude probabiliste des fonctions objectifs et contraintes. Mais, elle ne fournit pas d'aide pour aider le designer à choisir quel type de OU est nécessaire pour son design. Dans la section suivante, nous proposons une nouvelle classification de OU basée sur les conditions nécessaires pour définir chaque type de OU.

		Robustness →		
		No objective function	Objective function X, P deterministic	Objective function X, P uncertain
Reliability ↓	No constraint function		Optimal design (optimization without constraint)	Robust design
	Constraint function X, P deterministic	Admissible design (sizing)	Optimal and admissible design (optimization under constraint)	Robust and admissible design (Section 4.4)
	Constraint function X, P uncertain	Reliable design (reliability)	Optimal and reliable design (RBDO)	Robust and reliable design (RBRDO)

FIGURE 3.1 – Classification des différentes approches du design [122].

3.2 Nouvelle classification de OU

Cette nouvelle classification proposée dans ce travail est basée sur la condition de définition des différents types de OU. Cette nouvelle classification est capable de guider le designer pour l'aider à identifier quel type de OU est nécessaire pour son problème. Ce type de classification n'existe pas dans la littérature.

Premièrement, identifions les conditions nécessaires de chaque type de OU :

- RBDO : La condition nécessaire pour définir un problème RBDO est la présence des contraintes, un problème d'optimisation avec des contraintes résolu de manière déterministe aboutit à des résultats avec un taux de fiabilité proche de 50%. D'où l'intérêt de le résoudre en RBDO. Cette condition qui est explicite, est facile à détecter.
- RDO : Comme il est défini, dans l'équation (3.2) un problème RDO est un problème multiobjectif, et dans ce cas particulier, où on a un seul critère déterministe, il est biobjectif. Sa condition de définition est celle de tous les problèmes multiobjectifs, c'est l'antagonisme entre les fonctions objectifs dans la zone optimale du domaine de définition, comme il a été détaillé dans la section 2.1.2. Contrairement à celle du RBDO, cette condition est implicite, elle est facile à détecter.
- RBRDO : Comme nous avons expliqué qu'un problème RBRDO est la combinaison des deux problèmes RDO et RBDO, ses conditions nécessaires sont donc la combinaison de leurs conditions nécessaires citées ci-dessus.

La condition nécessaire pour définir les problèmes RDO et RBRDO est l'existence de l'antagonisme entre l'espérance et la variance (ou l'écart type) de la fonction objectif. Cet antagonisme ne peut pas être traité comme tous les autres problèmes multiobjectifs, en effet $\mathbb{E}[f]$ et $\mathbb{V}[f]$ sont deux fonctions particulières. Elles sont les deux moments statistiques d'une même fonction f . Cet aspect particulier nous pousse à poser plusieurs questions :

- Est ce que cet antagonisme existe systématiquement ?
- Si non, est ce qu'il peut être détecté explicitement ?
- Quels sont les facteurs qui influent sur l'existence de cet antagonisme ?
- Comment, peut-on détecter cet antagonisme avant la construction du front de Pareto ?

Des réponses à ces questions seront proposées dans la suite du chapitre. Dans les applications ci-après, nous démontrons que cet antagonisme n'existe pas systématiquement. Nous montrons également qu'il peut être détecté explicitement pour certains types de problèmes, nous identifions quelques facteurs influençant l'existence de cet antagonisme et nous introduisons une nouvelle méthode générale pour le détecter avant la construction du front de Pareto.

Revenons à notre classification, après l'identification des conditions de définition des types de OU, nous proposons la classification du tableau 3.1. Dans cette classifi-

Existence des contraintes	Antagonisme : performance-stabilité	
	N'existe pas	Existe
Non	PDOU	RDO
Oui	RBDO	RBRDO

TABLEAU 3.1 – Le type de OU convenable pour chaque cas du design.

cation, nous proposons un quatrième type de OU qui est l'optimisation performante sous incertitudes ou *Performance design optimization under uncertainty* (PDOU). Ce type est conseillé lorsqu'une optimisation sous incertitudes est demandée pour un problème d'optimisation défini sans contraintes, et dont l'antagonisme est absent entre les mesures de performance et de stabilité de ses objectifs. PDOU consiste à optimiser la performance des objectifs uniquement comme il est indiqué dans

l'équation (3.4).

$$\begin{aligned}
& \text{Minimiser : } \mathbb{E} [f(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{p}})] \\
& \text{Sous : } \mathbf{h}(\mathbf{x}) = 0 \\
& \quad \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq 0 \\
& \quad \mathbf{x}_l \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}_u \\
& \text{Tel que : } \tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} + \tilde{\boldsymbol{\chi}}_x \\
& \quad \tilde{\mathbf{p}} = \mathbf{p} + \tilde{\boldsymbol{\chi}}_p \\
& \quad \mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \\
& \quad \mathbf{p} = \{p_1, p_2, \dots, p_m\} \\
& \quad \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \{h_1(\mathbf{x}), h_2(\mathbf{x}), \dots, h_l(\mathbf{x})\} \\
& \quad \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \{g_1(\mathbf{x}), g_2(\mathbf{x}), \dots, g_s(\mathbf{x})\}
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Le tableau 3.1 montre comment un problème RDO et RBRDO peut être converti en un autre PDOU et RBDO respectivement si l'antagonisme performance-stabilité n'existe pas. Ce changement n'affecte pas les résultats de l'optimisation, cependant, il réduit son coût significativement.

3.3 Identification de l'antagonisme performance-stabilité

Le sujet de l'existence de l'antagonisme performance-stabilité, n'est pas traité dans la littérature, nous avons étudié ce sujet pour la première fois dans [138]. Dans les travaux précédents, l'agrégation de l'espérance et la variance est largement utilisée à cause du coût élevé de la formulation multiobjective [115]. Dans les travaux existants, la pratique habituelle est de formuler les problèmes RDO et RBRDO par agrégation, sans poser la question sur l'existence de cet antagonisme. Dans ce travail nous abordons cet antagonisme en identifiant les cas explicites et nous proposons une méthode générale pour les autres cas où la détection explicite est impossible.

3.3.1 Identification explicite de l'existence de l'antagonisme

L'existence de l'antagonisme performance-stabilité peut être détectée explicitement dans plusieurs types de problèmes dont la fonction à minimiser possède des formes particulières.

Modèle de sommation

Dans un modèle de sommation $f(\tilde{\mathbf{x}}) = \sum_{i=1}^n a_i \tilde{x}_i$ tel que $a_i \in \mathbb{R}$, l'antagonisme n'existe pas dans certaines conditions. Ces conditions sont présentées dans le tableau 3.2, la démonstration est donnée dans la preuve suivante :

Démonstration. Considérons $f(\tilde{\mathbf{x}}) = \sum_{i=1}^n a_i \tilde{x}_i$ avec $a_i \in \mathbb{R}$. $\tilde{\mathbf{x}}$ est un vecteur des variables aléatoires indépendantes \tilde{x}_i , alors :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[f(\tilde{\mathbf{x}})] &= \sum_{i=1}^n a_i \mathbb{E}[\tilde{x}_i] \\ \mathbb{V}[f(\tilde{\mathbf{x}})] &= \sum_{i=1}^n a_i^2 \mathbb{V}[\tilde{x}_i] \\ &\text{if } \mathbb{V}[\tilde{x}_i] = c_i, \text{ tel que } c_i \in \mathbb{R}^+ \\ \mathbb{V}[f(\tilde{\mathbf{x}})] &= \sum_{i=1}^n a_i^2 c_i = \text{constant } \forall \tilde{\mathbf{x}}\end{aligned}$$

$\mathbb{E}[f(\tilde{\mathbf{x}})]$ et $\mathbb{V}[f(\tilde{\mathbf{x}})]$ ont le même minimum, qui est celui de $\mathbb{E}[f(\tilde{x})]$. \square

Le modèle de sommation est utilisé sur des modèles simples tels que les longueurs et les périmètres.

Modèle de multiplication

Dans cette section, nous étudions le modèle de multiplication $f(\tilde{\mathbf{x}}) = K \prod_{i=1}^n \tilde{x}_i$ avec $K \in \mathbb{R}$. Dans [139], une méthode analytique pour calculer l'espérance et la variance pour ce modèle est introduite, leurs formules sont détaillées dans l'équation (3.6), telle que la fonction $f(\tilde{\mathbf{x}})$ est un cas particulier de $g(\tilde{\mathbf{x}})$ avec tous les $\nu_i = 1$. Nous avons trouvé que l'antagonisme Espérance-Variance de ce modèle peut être évalué explicitement dans certains cas, comme il est montré dans le tableau 3.2, ces cas sont démontrés ci-dessous :

Démonstration. Considérons $f(\tilde{\mathbf{x}}) = K \prod_{i=1}^n \tilde{x}_i$ avec $K \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[f] &= K \prod_{i=1}^n \mathbb{E}[\tilde{x}_i] \\ \mathbb{V}[f] &= K^2 \left\{ \prod_{i=1}^n \mathbb{E}[\tilde{x}_i^2] - \prod_{i=1}^n \mathbb{E}[\tilde{x}_i]^2 \right\} \\ &= K^2 \left\{ \prod_{i=1}^n (\mathbb{V}[\tilde{x}_i] + \mathbb{E}[\tilde{x}_i]^2) - \prod_{i=1}^n \mathbb{E}[\tilde{x}_i]^2 \right\}\end{aligned}$$

Si $\mathbb{V}[\tilde{x}_i] = c_i \mathbb{E}[\tilde{x}_i]^2$, tel que $c_i \in \mathbb{R}^+$:

$$\begin{aligned}\mathbb{V}[f] &= K^2 \prod_{i=1}^n \mathbb{E}[\tilde{x}_i]^2 \left\{ \prod_{i=1}^n (1 + c_i) - 1 \right\} \\ &= C \mathbb{E}[f]^2 \\ C &= \prod_{i=1}^n (1 + c_i) - 1 \geq 0\end{aligned}$$

$\mathbb{V}[f]$ et $\mathbb{E}[f]$ sont reliés par une équation parabolique, alors :

1. Si $\mathbb{E}[f(\tilde{\mathbf{x}})] \geq 0 \quad \forall \tilde{\mathbf{x}}$, $\mathbb{V}[f]$ et $\mathbb{E}[f]$ ont le même minimum, ils ne sont pas antagonistes.
2. Si $\mathbb{E}[f(\tilde{\mathbf{x}})] < 0 \quad \forall \tilde{\mathbf{x}}$, $\mathbb{V}[f]$ et $\mathbb{E}[f]$ sont antagonistes dans tous les points, l'antagonisme existe sur tout le domaine de définition.

Les modèles de multiplication sont utilisés pour calculer les surfaces et les volumes. \square

Modélisation des incertitudes	$f(\tilde{\mathbf{x}}) = K \prod_{i=1}^n \tilde{x}_i$ avec $K \in \mathbb{R}$	
	$\mathbb{E}[f(\tilde{\mathbf{x}})] \geq 0 \quad \forall \mathbf{x}$	$\mathbb{E}[f(\tilde{\mathbf{x}})] < 0 \quad \forall \mathbf{x}$
$\mathbb{V}[\tilde{x}_i] = c_i \mathbb{E}[\tilde{x}_i]^2$ avec $c_i \in \mathbb{R}^+$	L'antagonisme n'existe pas	L'antagonisme existe dans tous les points
	$f(\tilde{\mathbf{x}}) = \sum_{i=1}^n a_i \tilde{x}_i$ $a_i \in \mathbb{R}$	
$\mathbb{V}[\tilde{x}_i] = c_i$; $c_i \in \mathbb{R}^+$	L'antagonisme n'existe pas	

TABLEAU 3.2 – L'existence de l'antagonisme Espérance-Variance dans les modèles de multiplication et de sommation.

Modèle de multiplication avec des exposants

Dans la section précédente, nous avons étudié l'existence de l'antagonisme dans les modèles de multiplication simple $f(\tilde{\mathbf{x}}) = K \prod_{i=1}^n \tilde{x}_i$. Cette démarche peut être généralisée aux modèles de multiplication avec des exposants $g(\tilde{\mathbf{x}})$ (équation (3.5)),

tel que $\nu_i \in \mathbb{R}$.

$$g(\tilde{\mathbf{x}}) = K \prod_{i=1}^n \tilde{x}_i^{\nu_i} \quad (3.5)$$

Les formules analytiques de $\mathbb{E}[g(\tilde{\mathbf{x}})]$ et $\mathbb{V}[g(\tilde{\mathbf{x}})]$ sont données dans l'équation (3.6), en se basant sur les travaux de [139] et en considérant que toutes les variables \tilde{x}_i sont indépendantes.

$$\begin{aligned} g(\tilde{\mathbf{x}}) &= K \prod_{i=1}^n \tilde{x}_i^{\nu_i} \text{ tel que } K, \nu_i \in \mathbb{R}^2 \\ \mathbb{E}[g(\tilde{\mathbf{x}})] &= K \prod_{i=1}^n \mathbb{E}[\tilde{x}_i^{\nu_i}] \\ \mathbb{V}[g(\tilde{\mathbf{x}})] &= K^2 \left\{ \prod_{i=1}^n \mathbb{E}[\tilde{x}_i^{2\nu_i}] - \prod_{i=1}^n \mathbb{E}[\tilde{x}_i^{\nu_i}]^2 \right\} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Afin d'identifier l'antagonisme Espérance-Variance dans ces modèles, nous allons calculer le rapport v_g de l'équation (3.7) :

$$\begin{aligned} v_g &= \frac{\mathbb{V}[g]}{\mathbb{E}[g]^2} = \prod_{i=1}^n \frac{\mathbb{E}[\tilde{x}_i^{2\nu_i}]}{\mathbb{E}[\tilde{x}_i^{\nu_i}]^2} - 1 \\ &= \prod_{i=1}^n \frac{\mathbb{V}[\tilde{x}_i^{\nu_i}] + \mathbb{E}[\tilde{x}_i^{\nu_i}]^2}{\mathbb{E}[\tilde{x}_i^{\nu_i}]^2} - 1 \\ &= \prod_{i=1}^n (v_{\nu_i} + 1) - 1 \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\text{Tel que : } v_{\nu_i} = \frac{\mathbb{V}[\tilde{x}_i^{\nu_i}]}{\mathbb{E}[\tilde{x}_i^{\nu_i}]^2}$$

L'équation (3.7) montre que le problème se ramène à identifier les cas où les v_{ν_i} sont constants $\forall i$. Il est impossible d'étudier l'antagonisme sur ce modèle sur un cas général de la variable aléatoire \tilde{x}_i comme dans 3.3.1. C'est pour cela nous avons choisi cinq PDF particulières qui sont utilisées dans la littérature en ingénierie mécanique, ces cinq PDF sont les lois : uniforme, normale, log-normale, Weibull et Gumbel. Pour résoudre ce problème, nous avons calculer les équations de v_{ν} pour chaque type de PDF. Dans la suite on va essayer d'exprimer v_{ν} en en fonction de la variance réduite v_1 d'ordre 1 de la variable aléatoire \tilde{x} telle que la formule de v_1 est exprimée dans l'équation (3.8).

$$v_1 = \frac{\mathbb{V}[\tilde{x}]}{\mathbb{E}[\tilde{x}]^2} \quad (3.8)$$

Les calculs des équations de cette section sont détaillés dans l'annexe A.

1. Loi uniforme, considérons la variable aléatoire \tilde{x} qui subit une loi uniforme de moyenne $\mu = m$ et de variance $v = \sigma^2$, l'expression de v_ν est obtenue pour $\nu \in \mathbb{R} - \left\{-1, -\frac{1}{2}\right\}$:

$$v_\nu = \sqrt{3v} \frac{2(2\nu + 1)}{(\nu + 1)^2} \frac{((m + \sqrt{3v})^{2\nu+1} - (m - \sqrt{3v})^{2\nu+1})}{((m + \sqrt{3v})^{\nu+1} - (m - \sqrt{3v})^{\nu+1})^2} - 1 \quad (3.9)$$

Si $\nu = -1$:

$$v_{-1} = \frac{12v}{m^2 - 3v} \frac{1}{\ln^2\left(\frac{m+\sqrt{3v}}{m-\sqrt{3v}}\right)} - 1 \quad (3.10)$$

Si $\nu = -\frac{1}{2}$:

$$v_{-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3v}}{4} \frac{\ln\left(\frac{m+\sqrt{3v}}{m-\sqrt{3v}}\right)}{m - \sqrt{m^2 - 3v}} - 1 \quad (3.11)$$

Selon les équations ci-dessus, nous pouvons exprimer v_ν en fonction de v_1 quelque soit $\nu \in \mathbb{R}$ pour la loi uniforme.

2. Loi normale, considérons $\tilde{x} \sim N(\mu, \sigma)$: Pour $\nu \in]-1, +\infty[$, v_ν est calculé par :

$$v_\nu = e^{\frac{\mu^2}{4\sigma^2}} \frac{D_{2\nu}\left(i \cdot \frac{\mu}{\sigma}\right)}{\left(D_\nu\left(i \cdot \frac{\mu}{\sigma}\right)\right)^2} - 1 \quad (3.12)$$

Tel que la fonction $D_\nu(z)$ est exprimée en fonction de la fonction hypergéométrique confluyente $\Phi(a, b, c)$ et $\nu > -1$:

$$D_\nu(z) = 2^{\frac{\nu}{2}} e^{-\frac{z^2}{4}} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}\right)} \Phi\left(-\frac{\nu}{2}, \frac{1}{2}, \frac{z^2}{2}\right) - \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma\left(-\frac{\nu}{2}\right)} \Phi\left(\frac{1-\nu}{2}, \frac{3}{2}, \frac{z^2}{2}\right) \right) \quad (3.13)$$

Il est clair que v_ν ne dépend que de v_1

3. Loi log-normale, considérons $\tilde{x} \sim \log - Normale(\mu, \sigma^2)$, l'expression générale de v_ν pour $\nu \in \mathbb{R}$ est :

$$v_\nu = \left(\frac{v}{m^2} + 1\right)^{\nu^2} - 1 = (v_1 + 1)^{\nu^2} - 1$$

Tel que : (3.14)

$$m = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$$

$$v = e^{2\mu + \sigma^2} (e^{\sigma^2} - 1)$$

4. Loi Weibull, la PDF correspondante est définie sur \mathbb{R}^+ par :

$$f_{\beta,\lambda}(x) = \beta\lambda^\beta \cdot x^{\beta-1} \cdot e^{-(\lambda x)^\beta} \quad (3.15)$$

tel que $\beta \in \mathbb{R}^{*+}$, $\lambda \in \mathbb{R}^{*+}$ et $f_{\beta,\lambda}(0) = 0$. L'expression de v_ν pour $\nu \in \mathbb{R} \setminus \beta \cdot \mathbb{Z}^{*-}$ est :

$$\begin{aligned} v_\nu &= \frac{1}{\lambda^\nu} \frac{\Gamma\left(1 + \frac{2\nu}{\beta}\right)}{\Gamma^2\left(1 + \frac{\nu}{\beta}\right)} - 1 \\ &= \frac{2\beta}{\nu} \frac{\Gamma\left(\frac{2\nu}{\beta}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{\nu}{\beta}\right)} - 1 \end{aligned} \quad (3.16)$$

D'après l'équation (3.16), il n'est pas possible de formuler v_ν en fonction de v_1 directement. Cependant, à cause de la dépendance de v_ν du paramètre β uniquement, on peut déduire que si v_1 est donné, β sera connu et consécutivement on peut déduire la valeur de v_ν .

5. Loi Gumbel, la PDF Gumbel est définie sur \mathbb{R} par :

$$f_{\theta,\alpha}(x) = \frac{1}{\alpha} \exp\left(-\frac{x-\theta}{\alpha} - e^{-\frac{x-\theta}{\alpha}}\right) \quad (3.17)$$

Tel que : $\theta \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}^{*+}$.

L'équation de v_ν pour la loi Gumbel avec $\theta \neq 0$ et $\nu \in \mathbb{N}$, $\nu \geq 2$ est donnée dans (3.18) :

$$v_\nu = \frac{1 + \sum_{k=1}^{2\nu} \binom{2\nu}{k} \left(\frac{\alpha}{\theta}\right)^k \cdot \left(\gamma^k + \sum_{i=0}^{k-2} \gamma^i (k-i-1)! \zeta(k-i)\right)}{\left(1 + \sum_{k=1}^{\nu} \binom{\nu}{k} \left(\frac{\alpha}{\theta}\right)^k \cdot \left(\gamma^k + \sum_{i=0}^{k-2} \gamma^i (k-i-1)! \zeta(k-i)\right)\right)^2} - 1 \quad (3.18)$$

tel que γ est la constante d'Euler-Mascheroni :

$$\gamma = \lim_{m \rightarrow +\infty} \left(\sum_{i=1}^m \frac{1}{i} - \ln(m) \right) = 0,5772156649$$

Si $\theta = 0$, l'expression de v_ν sera :

$$v_\nu = \frac{\gamma^{2\nu} + \sum_{i=0}^{2\nu-2} \gamma^i (2\nu-i-1)! \zeta(2\nu-i)}{\left(\gamma^\nu + \sum_{i=0}^{\nu-2} \gamma^i (\nu-i-1)! \zeta(\nu-i)\right)^2} - 1 \quad (3.19)$$

Dans l'équation (3.18), il est clair que v_ν peut être exprimé en fonction de v_1

et dans le cas où $\theta = 0$, elle est une valeur constante ne dépend que de ν .

Pour toutes les PDF citées ci-dessus, nous avons montré que v_ν ne dépend que de v_1 et d'autres paramètres constants. Alors, lorsque v_1 est aussi constante, v_ν prend une valeur constante et v_g est par conséquent constante, d'où l'on déduit que l'antagonisme n'existe pas dans ce cas pour tout $g(\tilde{\mathbf{x}}) \geq 0$. Le tableau 3.3 résume ces cas, en identifiant deux cas. Le premier est lorsque $\mathbb{V}[\tilde{x}] = c\mathbb{E}[\tilde{x}]^2$ avec $c \in \mathbb{R}^{*+}$ dans ce cas $v_1 = c$, le deuxième cas correspond à $\mathbb{V}[\tilde{x}] = a$ avec $a \in \mathbb{R}^{*+}$ dans ce cas v_1 n'est pas constante et dépend de $\mathbb{E}[\tilde{x}]$ par la relation suivante :

$$v_1 = \frac{a}{\mathbb{E}[\tilde{x}]^2} \quad (3.20)$$

Model à minimiser	PDF	Valeurs de ν	Calcul de v_ν	Évaluation de l'antagonisme	
				$\mathbb{V}[\tilde{x}] = c\mathbb{E}[\tilde{x}]^2$ $v_1 = c$	$\mathbb{V}[\tilde{x}] = a$ $v_1 = \frac{a}{\mathbb{E}[\tilde{x}]^2}$
$f(\tilde{x}) = \tilde{x}^\nu$	Uniforme	$\nu \in \mathbb{R}$	Équations (3.9) (3.10) (3.11)	N'existe pas (NEP)	Méthode de la dérivation
	Normale	$\nu \in]-1, +\infty[$	Équation (3.12)		
	Log Normale	$\nu \in \mathbb{R}$	Équation (3.14)		
	Weibull	$\nu \in \mathbb{R} \setminus \beta.\mathbb{Z}^{*-}$	Équation (3.16)		
	Gumbel	$\nu \in \mathbb{N}$	Équations (3.18) (3.19)		
$g(\tilde{\mathbf{x}}) = K \prod_{i=1}^n \tilde{x}_i^{\nu_i}$	Ci-dessus	Ci-dessus	Équation (3.7)	NEP si $K \geq 0$ Existe si $K < 0$	Méthode générale Section 3.3.2

TABEAU 3.3 – Identification de l'antagonisme sur les modèles de multiplication avec des exposants.

La méthode de la dérivation, mentionnée dans le tableau 3.3, est applicable sur les fonctions à une seule variable. Elle consiste à calculer les dérivées de la variance

et de l'espérance, la zone de l'antagonisme est celle dans laquelle les deux dérivées sont de signes contraires.

3.3.2 Méthode générale pour identifier l'antagonisme

Les modèles cités ci-dessus sont des cas particuliers où nous avons détecté l'existence de l'antagonisme explicitement. Cependant, cette évaluation explicite n'est pas toujours possible, ce qui nécessite d'introduire une méthode efficace qui permet au designer de capturer l'existence de cet antagonisme avant de résoudre les problèmes d'OU.

Une idée évidente, est d'explorer l'espace des objectifs Espérance-Variance en balayant l'espace des variables, et tester l'allure de la variance en fonction de l'espérance. Par contre, cette méthode est coûteuse surtout lorsque la méthode MC est utilisée pour propager les incertitudes, de même elle nécessite un très grand nombre d'échantillons surtout pour les problèmes de grande dimension. La méthode d'échantillonnage est utilisée dans la section 3.4.1, ce problème admet deux variables de décision, et les incertitudes sont propagées analytiquement. Par contre, lorsque le nombre de variables augmente, le nombre des échantillons nécessaire pour garder la même densité de points augmente exponentiellement. Dans le cas de MC, le nombre total des points à évaluer est le produit du nombre des échantillons de balayage avec le nombre des échantillons de MC.

Pour surmonter ces difficultés, une méthode générale est introduite dans ce travail pour évaluer l'antagonisme sans perdre le temps dans la construction du front de Pareto tout entier. A côté de l'évaluation de l'antagonisme, la méthode proposée évalue l'amélioration possible de la stabilité des résultats si le problème est traité en RDO ou RBRDO au lieu du PDOU ou RBDO. En effet, cette méthode est capable de trouver le point qui correspond au maximum de stabilité parmi les configurations possibles du design qui seront obtenues en RDO et RBRDO. En plus cette méthode est capable de trouver le point qui maximise la performance du critère de l'optimisation, ce point est normalement le résultat souhaité en RBDO et PDOU, et il n'ai jamais plus stable que le point précédent. La différence entre les stabilités de ces deux points représente le maximum d'amélioration que le designer peut obtenir en changeant les configurations de son design. Ces informations sont très utiles pour le designer, elles l'aident à choisir le type de OU nécessaire pour son problème.

Dans cette proposition, nous considérons que l'espérance et la variance, comme des mesures de performance et de stabilité respectivement. Notons que cette méthode peut être employée pour toute autre mesure. Cette méthode consiste à mesurer les longueurs du front de Pareto du problème Espérance-Variance dans l'espace des objectifs et des variables, comme il est expliqué ci-après et illustré dans la figure 3.2.

Premièrement, les deux points d'ancrage du problème sont calculés, ces points sont obtenus en minimisant $\mathbb{E}[f]$ et $\mathbb{V}[f]$ séparément sous les mêmes contraintes et le domaine de définition du problème bi-objectif. Les points obtenus sont nommés $A_E(E_E, V_E)$ et $A_V(E_V, V_V)$ respectivement, avec E et V sont leurs coordonnées dans l'espace des objectifs. De même, ils sont représentés dans l'espace des variables par leurs coordonnées $\tilde{\mathbf{x}}_E$ et $\tilde{\mathbf{x}}_V$ respectivement.

Si A_E et A_V sont confondus, le minimum obtenu est le meilleur design. Dans le cas où un des deux points domine l'autre, le point dominant est le design optimal. Dans ces deux situations, aucun calcul additionnel est nécessaire. Si ces deux points sont différents, et aucun des deux points ne domine pas l'autre, l'antagonisme existe. Mais, il est important d'évaluer les longueurs du front de Pareto afin de savoir si le calcul des points d'ancrage est suffisant, où la construction du front de Pareto est demandée.

Deuxièmement, les distances D_E et D_V entre ces deux points dans l'espace des objectifs suivant chaque axe sont évaluées. Puis, les deux mesures de dispersion δ_E et δ_V sont calculées par l'équation (3.21). Finalement, δ_E et δ_V devront être comparées respectivement avec les valeurs limites Δ_E , Δ_V , qui sont imposées par le designer.

Si au moins δ_E ou δ_V est plus grande que sa valeur limite correspondante, le problème biobjectif devrait être résolu, et des points additionnels du front de Pareto devront être générés. Si les deux mesures δ_E et δ_V sont inférieures à leurs valeurs limites, l'évaluation de la longueur du front de Pareto dans le domaine des variables est nécessaire pour prendre la décision. La distance euclidienne D_x entre A_E et A_V dans l'espace des variables est calculée. Puis, une autre mesure de dispersion δ_x qui sera obtenue par l'équation (3.22) est comparée à sa valeur limite Δ_x . Si δ_x est inférieure à Δ_x , on n'a pas besoin de traiter le problème en RDO ou RBRDO, le designer peut choisir un des points d'ancrage comme design optimal. Si δ_x est supérieure à Δ_x , la résolution du problème biobjectif est nécessaire pour explorer de nouvelles configurations. Cette méthode est décrite dans l'algorithme 1, et dans la figure 3.3.

$$\begin{aligned} D_E &= E_V - E_E \\ D_V &= V_E - V_V \\ \delta_E &= \frac{D_E}{\max\{|E_E|, |E_V|\}} \\ \delta_V &= \frac{D_V}{V_E} \end{aligned} \tag{3.21}$$

$$\delta_x = \frac{\|\tilde{\mathbf{x}}_E - \tilde{\mathbf{x}}_V\|}{\max\{\|\tilde{\mathbf{x}}_E\|, \|\tilde{\mathbf{x}}_V\|\}} \tag{3.22}$$

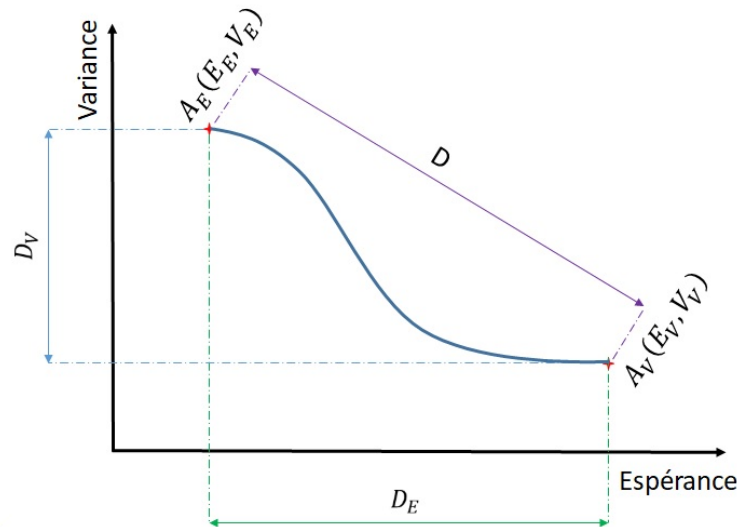


FIGURE 3.2 – Distances entre les deux points d’ancrage du front de Pareto sur l’espace Espérance-Variance.

3.3.3 Facteurs influençant l’existence de l’antagonisme

Il existe plusieurs facteurs qui affectent l’existence de l’antagonisme entre l’espérance et la variance. Ces facteurs ne sont pas étudiés dans les travaux précédents, nous proposons la première étude sur ce sujet dans [140] où nous avons identifié l’influence de la modélisation des incertitudes sur l’existence de cet antagonisme. A côté de la modélisation des incertitudes, nous identifions ci-dessus un second facteur qui est le choix de la fonction objectif :

★ La modélisation des incertitudes :

La modélisation des incertitudes dans les variables probabilistes d’un problème d’OU a une grande influence sur l’existence de l’antagonisme Espérance-Variance. Dans la littérature, deux types de modélisation des incertitudes sont utilisés pour les problèmes d’OU en ingénierie mécanique. Le premier type correspond à un écart-type constant et le second est celui d’un écart-type proportionnel à l’espérance, ces deux types sont présentés dans le tableau 3.4. Cette influence était claire dans la section 3.3.1, nous avons démontré que pour les écarts-types constants, l’antagonisme est absent dans les modèles de sommation. Par contre, nous avons démontré qu’elle n’existe pas dans le cas des écarts-types proportionnels pour les modèles de multiplication positifs, et elle existe dans tous les points pour les modèles de multiplication négatifs. Cette absence d’antagonisme a été généralisée sur les problèmes de multiplication avec des exposants sous certaines conditions. Dans la section 3.4, nous testons cette influence sur d’autres types de modèles.

Algorithm 1 La Méthode générale.

Entrées Δ_E , Δ_V et Δ_x .

Calculer A_E et A_V

if $A_E \equiv A_V$ ou $A_E \prec A_V$ (A_E domine A_V) **then**
 A_E est le meilleur design

end if

if $A_V \prec A_E$ **then**
 A_V est le meilleur design

end if

if $A_E \not\prec A_V$ et $A_V \not\prec A_E$ **then**
Calculer $D_E, D_V, \delta_E, \delta_V$

if $\delta_E > \Delta_E$ ou $\delta_V > \Delta_V$ **then**
Des points additionnels du front de Pareto doivent être générés

else
Calculer δ_x

if $\delta_x \leq \Delta_x$ **then**
 A_E et A_V sont le meilleur design

else
Des points additionnels du front de Pareto doivent être générés

end if

end if

end if

★ **Le choix de la fonction objectif :**

Le deuxième facteur que nous identifions, est le choix de la fonction objectif. Dans l'optimisation déterministe, il existe plusieurs cas dont l'optimisation de deux différentes fonctions objectifs amène aux mêmes optimums, telle que la minimisation du volume et du masse, la minimisation de la déflexion maximale d'une structure et la maximisation de sa rigidité. Par contre ce n'est pas le même dans l'OU, par exemple la résolution du problème d'une poutre encastree en RBRDO dont l'espérance et la variance de la déflexion maximale de la poutre sont prises comme fonctions objectifs ne donne pas un

Ecart-type constant	Ecart-type proportionnel à l'espérance
$\sigma[\tilde{x}] = c \quad \forall \mathbb{E}[\tilde{x}]$ tel que $c \in \mathbb{R}^{*+}$	$\sigma[\tilde{x}] = \beta \mathbb{E}[\tilde{x}]$ tel que $\beta \in \mathbb{R}^{*+}$

TABLEAU 3.4 – Les deux types de la modélisation des incertitudes.

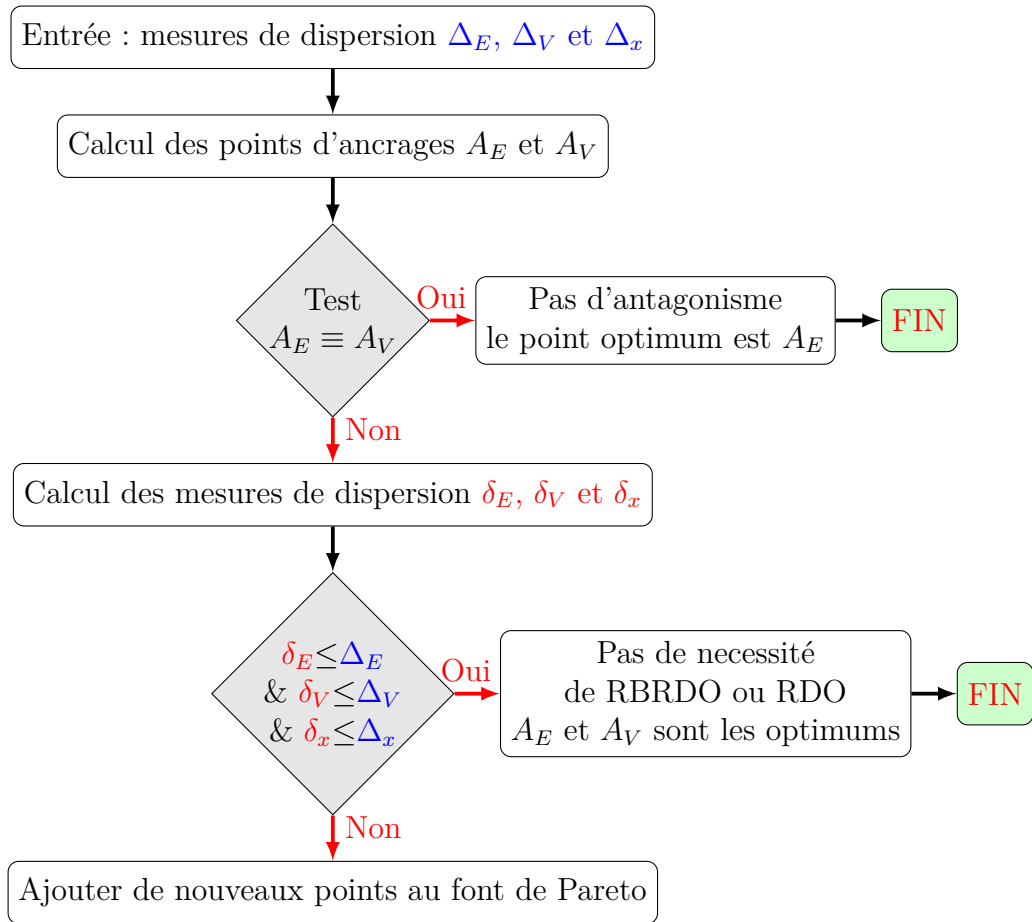


FIGURE 3.3 – La méthode générale pour identifier l’antagonisme Espérance-Variance.

front de Pareto et l’antagonisme Espérance-Variance n’existe pas. Par contre lorsque l’espérance et la variance de la rigidité de la poutre sont prises comme fonctions objectifs, l’ensemble des solutions forment un large front de Pareto, et l’antagonisme Espérance-Variance existe. Malgré que les problèmes de la minimisation de la déflexion et de la maximisation de la rigidité de la poutre donne le même optimum dans le cas déterministe. Ce cas sera détaillé dans la section 3.4.4.

3.4 Applications

Dans ce chapitre nous présentons quatre applications tirées de la littérature pour illustrer les cas précédents. Ces applications seront la structure de deux barres,

la poutre console, la poutre soudée et la poutre encastrée.

Mise en œuvre numérique Dans les applications ci-dessus, L'optimisation est réalisée en utilisant la fonction MATLAB "fmincon", avec l'option "multi-start". La fonction "fmincon" utilise les algorithmes à base de gradient pour converger vers les optimums, et l'option "multi-start" permet d'exécuter l'optimisation plusieurs fois, selon les options définies, avec plusieurs solutions initiales, cette option est efficace pour améliorer significativement la convergence vers des optimums globales. Les problèmes bi-objectifs sont résolus en utilisant la méthode NBI qui est très efficace sur les problèmes dont le front de Pareto est convexe, et elle donne des résultats bien répartis sur le front de Pareto. Pour propager les incertitudes, nous avons utilisé deux méthodes, la méthode de Monte-Carlo et le calcul analytique selon la disponibilité des équations analytiques des moments statistiques. Dans tous nos calculs, la technique CRN est toujours utilisée lorsque la méthode MC est appliquée, étant donné que le calculs des gradients est nécessaire pour effectuer l'optimisation, ce qui n'est pas possible sans l'utilisation de CRN, comme il est déjà expliqué dans la section 2.2.3.

3.4.1 Le problème de deux barres

La structure de deux barres présentée dans la figure 3.4, est un problème introduit par [141], elle a été aussi étudiée dans [142] et [67]. Le but est de trouver

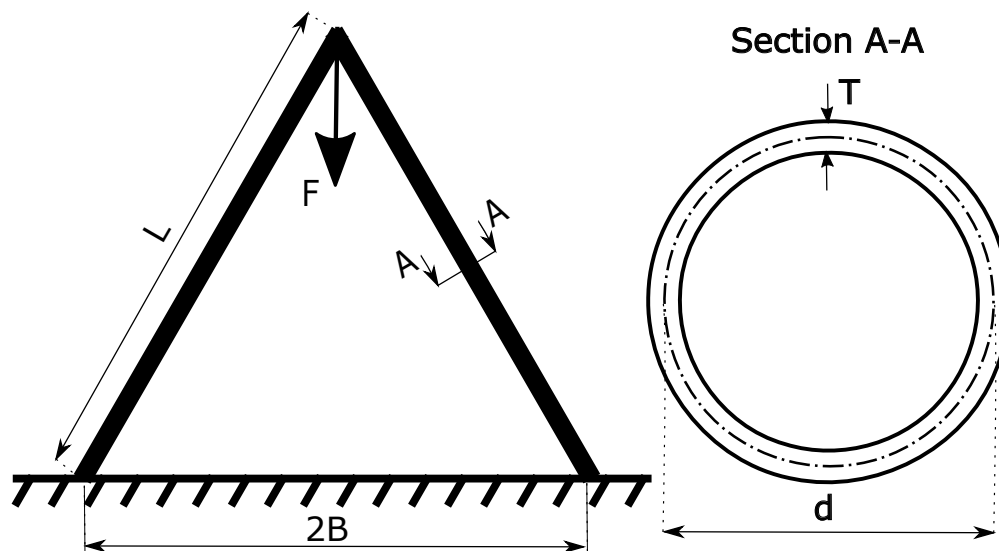


FIGURE 3.4 – La structure de deux barres.

la meilleure configuration géométrique des variables d et l qui minimise le volume

de la structure tout en respectant les contraintes mécaniques du problème, les bornes des variables sont données dans le tableau 3.5. La formulation déterministe du problème est donnée dans 3.23.

$$\begin{aligned}
& \text{Minimiser : } f_v(\mathbf{x}) = 2\pi T d l \\
& \text{sous : } g_1(\mathbf{x}) = s(\mathbf{x}) - s_{max} \leq 0 \\
& \quad \quad g_2(\mathbf{x}) = s(\mathbf{x}) - s_{crit} \leq 0 \\
& \text{Tel que : } \mathbf{x} = \{d, l\} \tag{3.23} \\
& \quad \quad s(\mathbf{x}) = \frac{Fl}{2\pi T d \sqrt{l^2 - B^2}} \\
& \quad \quad s_{crit}(\mathbf{x}) = \frac{\pi^2 E (T^2 + d^2)}{8l^2}
\end{aligned}$$

Le volume de la structure est représenté par $f_v(\mathbf{x})$. La contrainte normale s ne

Variable	Borne inférieure	Borne supérieure
$d(\text{mm})$	20	80
$l(\text{mm})$	800	1200

TABLEAU 3.5 – Les bornes des variables du problème de deux barres.

doit pas dépasser la limite d'élasticité s_{max} ni la contrainte limite de flambage s_{crit} .

Dans ce problème, l'existence de l'antagonisme Espérance-Variance est évaluée analytiquement sans aucun lancement de l'optimisation. Ce problème est étudié dans les deux cas de la modélisation des incertitudes associées aux variables aléatoires \tilde{d} et \tilde{l} , comme il est présenté dans le tableau 3.6. Les incertitudes associées aux paramètres environnementaux sont toujours les mêmes dans les deux cas. Les types de distribution et leurs paramètres pour les variables du design et les paramètres environnementaux dans les deux cas sont données dans le tableau 3.6, tel que l'espérance de chaque variable et paramètre correspond à sa valeur déterministe.

Afin d'évaluer la condition nécessaire pour la formulation RBRDO, l'antagonisme Espérance-Variance de ce problème est étudié analytiquement en calculant la relation entre $\mathbb{E}[f_v]$ et $\mathbb{V}[f_v]$ dans les deux cas en se basant sur l'équation (3.24). Notant que dans tous les calculs effectués sur le problème de deux barres, nous avons bénéficié de l'équation (3.24) pour propager les incertitudes analytiquement,

Variable ou paramètre	Type de distribution	Espérance	Ecart type
\tilde{d} (mm) (cas 1)/(cas 2)	Normale	d	$1/0.05d$
\tilde{l} (mm) (cas 1)/(cas 2)	Normale	l	$5/0.01l$
\tilde{T} (mm)	Normale	2.5	0.1
\tilde{B} (mm)	Normale	750	5
\tilde{E} (N/mm ²)	Normale	21×10^4	21×10^3
\tilde{F} (N)	Normale	15×10^4	3×10^3
s_{max} (N/mm ²)	Déterministe	400	—

TABLEAU 3.6 – Distributions des variables et des paramètres du problème de deux barres.

cela assure des calculs précise et très rapides.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} [f_v(\tilde{d}, \tilde{l})] &= 2\pi \mathbb{E} [\tilde{T}] \mathbb{E} [\tilde{d}] \mathbb{E} [\tilde{l}] \\
\mathbb{V} [f_v(\tilde{d}, \tilde{l})] &= 4\pi^2 \mathbb{E} [f_v(\tilde{d}, \tilde{l})]^2 \Psi(\tilde{d}, \tilde{l}) \\
\Psi(\tilde{d}, \tilde{l}) &= \frac{\mathbb{V} [\tilde{d}]}{\mathbb{E} [\tilde{d}]^2} + \frac{\mathbb{V} [\tilde{l}]}{\mathbb{E} [\tilde{l}]^2} + \frac{\mathbb{V} [\tilde{T}]}{\mathbb{E} [\tilde{T}]^2} + \frac{\mathbb{V} [\tilde{d}] \mathbb{V} [\tilde{l}]}{\mathbb{E} [\tilde{d}]^2 \mathbb{E} [\tilde{l}]^2} \\
&\quad + \frac{\mathbb{V} [\tilde{d}] \mathbb{V} [\tilde{T}]}{\mathbb{E} [\tilde{d}]^2 \mathbb{E} [\tilde{T}]^2} + \frac{\mathbb{V} [\tilde{T}] \mathbb{V} [\tilde{l}]}{\mathbb{E} [\tilde{T}]^2 \mathbb{E} [\tilde{l}]^2} \\
&\quad + \frac{\mathbb{V} [\tilde{d}] \mathbb{V} [\tilde{l}] \mathbb{V} [\tilde{T}]}{\mathbb{E} [\tilde{d}]^2 \mathbb{E} [\tilde{l}]^2 \mathbb{E} [\tilde{T}]^2}
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Dans le premier cas qui correspond aux écarts-types constants, considérons $\mathbb{V} [\tilde{d}] = c_1^2$ et $\mathbb{V} [\tilde{l}] = c_2^2$, avec $\{c_1, c_2\} \in \mathbb{R}^{2*+}$, nous obtenons l'équation (3.25), qui correspond à l'équation d'une famille de paraboles, dans ce cas, l'antagonisme peut

exister mais il dépend du domaine de définition et donc des fonctions contraintes.

$$\begin{aligned}\mathbb{V}[f_v(\tilde{d}, \tilde{l})] &= 4\pi^2 \mathbb{E}[f_v]^2 \Psi(d, l) \\ \Psi(d, l) &= 1,6 \times 10^{-3} \left\{ 1 + \frac{c_1^2}{d^2} + \frac{c_2^2}{l^2} + \frac{c_1^2 c_2^2}{d^2 l^2} \right\} \\ &\quad + \frac{c_1^2}{d^2} + \frac{c_2^2}{l^2} + \frac{c_1^2 c_2^2}{d^2 l^2}\end{aligned}\tag{3.25}$$

Dans le second cas, nous supposons que $\mathbb{V}[\tilde{d}] = \beta_1^2 \mathbb{E}[\tilde{d}]^2$ et $\mathbb{V}[\tilde{l}] = \beta_2^2 \mathbb{E}[\tilde{l}]^2$, avec $\{\beta_1, \beta_2\} \in \mathbb{R}^{2^{**}}$. L'équation (3.26) est obtenue, elle est celle d'une parabole, alors que l'antagonisme n'existe pas dans ce cas.

$$\begin{aligned}\mathbb{V}[f_v(\tilde{d}, \tilde{l})] &= 4\pi^2 \mathbb{E}[f_v]^2 \Psi(d, l) \\ \Psi(d, l) &= 1,6 \times 10^{-3} \{ 1 + \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_1^2 \beta_2^2 \} \\ &\quad + \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_1^2 \beta_2^2 = \text{constant} > 0.\end{aligned}\tag{3.26}$$

Ensuite, le domaine des solutions est exploré dans l'espace des objectifs dans les deux cas. Les valeurs de $\mathbb{E}[f_v]$ et $\mathbb{V}[f_v]$ sont calculées dans 400 points équi-répartis et distribuées sur tout le domaine. Ces calculs sont effectués en utilisant l'équation (3.6). Les résultats obtenus sont tracés dans la figure 3.5 pour le premier cas et la figure 3.6 pour le second cas.

Les résultats du second cas confirment la démonstration analytique présentée dans l'équation (3.26), une forme parabolique est obtenue dans la figure 3.6, d'où l'antagonisme est absent sur tout le domaine. Par contre, les résultats de la figure 3.5 forme une famille de courbes. Dans ce cas, l'existence de l'antagonisme dépend des contraintes du problème qui peuvent changer son domaine de définition. Cette situation est similaire à celle identifiée dans l'exemple de Schaffer étudié dans la section 2.1.2 où le front de Pareto dépend du domaine de définition.

Le problème RBRDO est formulé dans (3.27), il a été résolu dans les deux cas.

$$\begin{aligned}\text{Minimiser : } & \mathbb{E}[f_v(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{p}})] ; \mathbb{V}[f_v(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{p}})] \\ \text{Sous : } & Q_\alpha[g_j(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{p}})] \leq 0 \quad j = 1, 2 \\ & \mathbf{x}_l \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}_u \\ \text{Tel que : } & \tilde{\mathbf{x}} = \{\tilde{d}, \tilde{l}\} \\ & \tilde{\mathbf{p}} = \{\tilde{B}, \tilde{E}, \tilde{F}, \tilde{T}\} \\ & \alpha = 0.95\end{aligned}\tag{3.27}$$

Pour le premier cas, les points d'ancrage sont donnés dans le tableau 3.7. Les valeurs des mesures de dispersion correspondantes sont présentées dans le tableau

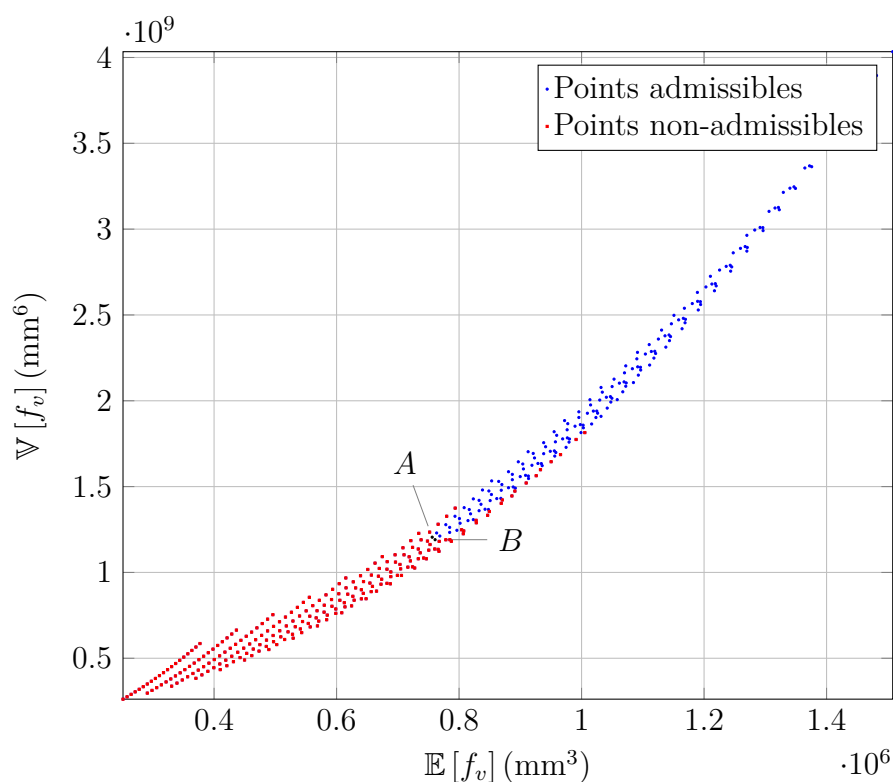


FIGURE 3.5 – $\mathbb{E}[f_v]$ vs $\mathbb{V}[f_v]$ pour le problème de deux barres dans le premier cas qui correspond aux variances constantes. Les points A et B sont les points d’ancrage du problème RBRDO.

$\mathbb{E}[d]$ (mm)	$\mathbb{E}[l]$ (mm)	$\mathbb{E}[f_v]$ (mm^3)	$\mathbb{V}[f_v]$ (mm^6)
45.4	1060.5	$7,5612 \times 10^5$	$1,2054 \times 10^9$
48.16	1005.9	$7,6087 \times 10^5$	$1,1907 \times 10^9$

TABLEAU 3.7 – L’optimum du problème RBRDO de la structure de deux barres (cas 1).

3.8. Ces valeurs reflètent la distance courte entre ces points d’ancrage dans les deux espaces des objectives et des variables. La nécessité de construire le front du Pareto dépend du choix des valeurs limites. Nous considérons des valeurs limites égales à 1%, le front de Pareto correspondant est donné dans la figure 3.7.

Pour le second cas, il n’y a pas d’antagonisme donc pas de front de Pareto à tracer, les deux points d’ancrage sont coïncidents, l’optimum obtenu est donné dans

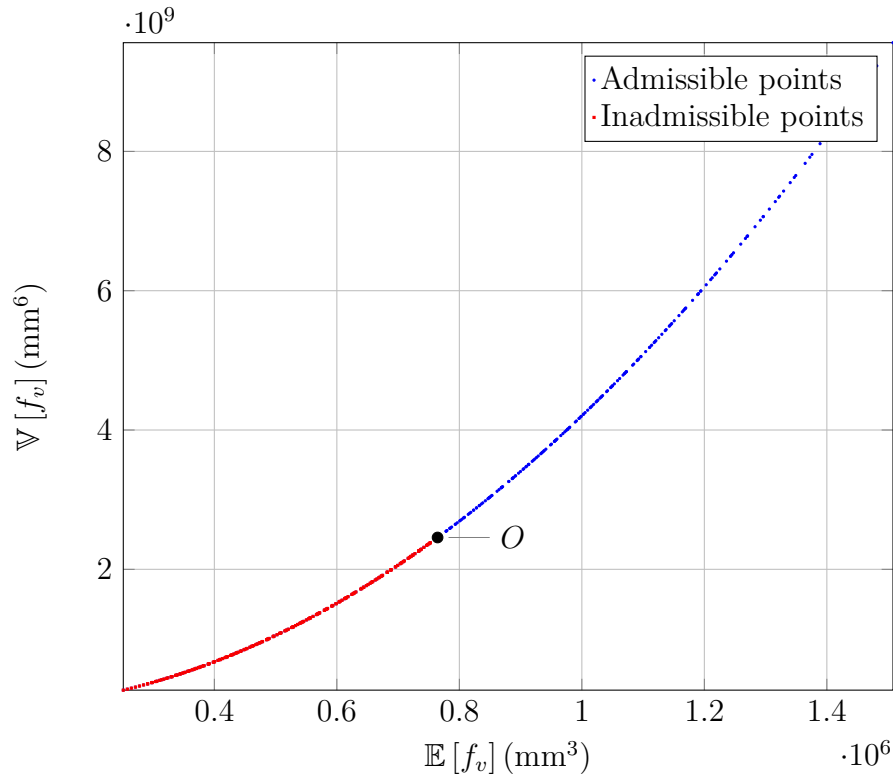


FIGURE 3.6 – $\mathbb{E}[f_v]$ vs $\mathbb{V}[f_v]$ pour le problème de deux barres pour le second cas qui correspond aux variances proportionnelles. Le point O est l'optimum du problème RBRDO.

Mesures de Dispersion	$\delta_E(\%)$	$\delta_V(\%)$	$\delta_x(\%)$
Valeurs	0,6	1,2	5,4

TABEAU 3.8 – Les mesures de Dispersion pour le problème de deux barres (cas 1).

le tableau 3.9. Ces résultats montrent l'influence de la modélisation des incertitudes sur l'existence de l'antagonisme Espérance-Variance et l'existence du front de Pareto.

L'optimum déterministe est calculé, et les valeurs de l'espérance et de la variance correspondantes sont calculées dans le premier cas de la modélisation des incertitudes. Ces résultats sont donnés dans le tableau 3.10. L'optimum déterministe domine tous les points de Pareto, cependant il n'est pas acceptable à cause de sa valeur de fiabilité basse correspondant à 50% pour tous les deux contraintes. Ce qui révèle la supériorité de la formulation RBRDO sur la formulation DO dans

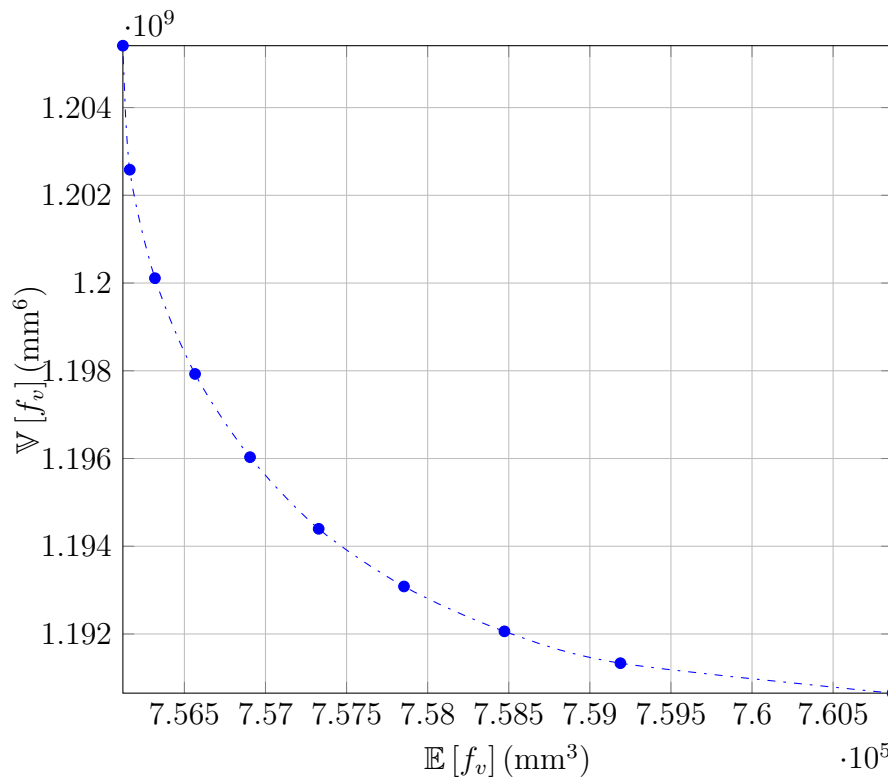


FIGURE 3.7 – Le front de Pareto du problème de deux barres étudié dans le premier cas qui correspond à la variance constante.

$\mathbb{E}[d]$ (mm)	$\mathbb{E}[l]$ (mm)	$\mathbb{E}[f_v]$ (mm ³)	$\mathbb{V}[f_v]$ (mm ⁶)
45.8	1061.9	$7,6445 \times 10^5$	$2,457 \times 10^9$

TABLEAU 3.9 – l’optimum du problème RBRDO de la structure de deux barres (cas 2).

l’obtention des designs robustes et fiables.

d (mm)	l (mm)	$\mathbb{E}[f_v]$ (mm ³)	$\mathbb{V}[f_v]$ (mm ⁶)
37.88	966.05	$5,7476 \times 10^5$	$7,6807 \times 10^8$

TABLEAU 3.10 – L’optimum déterministe du problème de deux barres.

3.4.2 La poutre console

La poutre console est introduite par [143], elle est utilisée comme un exemple pour le RDO dans [122]. Cette structure est illustrée dans la figure 3.8.

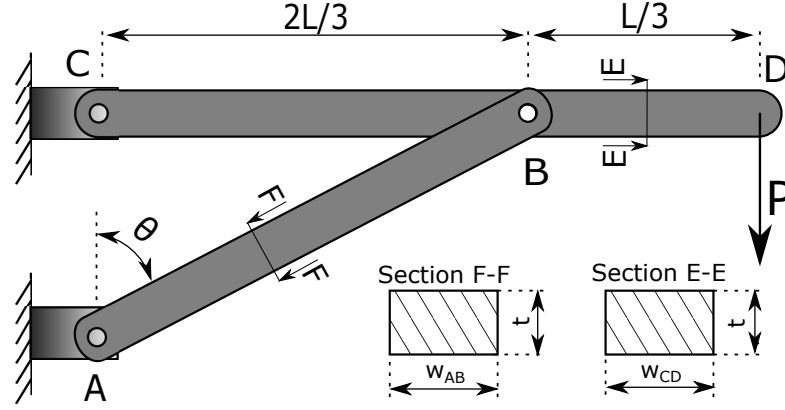


FIGURE 3.8 – La poutre console.

Ce problème est conçu d'une façon à minimiser le poids de la structure en respectant les contraintes mécaniques. Le problème DO est formulé dans l'équation (3.28). Le poids de la structure est représenté par f_w , σ_y et σ_B sont respectivement la limite d'élasticité et la contrainte maximale de flexion de la barre CD respectivement. De même, F_{AB} représente la force axiale maximale de la barre AB, et F_{Bk} représente la charge critique de flambage. Les bornes des variables sont présentées dans le tableau 3.11.

$$\begin{aligned}
 \text{Minimiser : } f_w(\mathbf{x}) &= 2\rho t L \left(\frac{2w_{AB}}{3 \sin(\theta)} + w_{CD} \right) \\
 \text{Sous : } g_1(x) &= \sigma_B(\mathbf{x}) - \sigma_y \leq 0 \\
 g_2(x) &= F_{AB}(\mathbf{x}) - F_{Bk}(\mathbf{x}) \leq 0 \\
 \text{Tel que : } \mathbf{x} &= \{w_{AB}, w_{CD}, t, \theta\} \\
 \sigma_B(\mathbf{x}) &= \frac{6M_B}{w_{CD}t^2} \\
 M_B(\mathbf{x}) &= \frac{PL}{3} \frac{\rho g w_{CD} t L^2}{18} \\
 F_{Bk}(\mathbf{x}) &= \frac{9\pi^2 E t w_{AB}^3 \sin^2 \theta}{48L^2} \\
 F_{AB}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{\cos \theta} \left(\frac{3P}{2} + \frac{3\rho g w_{CD} t L}{4} \right)
 \end{aligned} \tag{3.28}$$

Variable	Borne inférieure	Borne supérieure
$w_{AB}(\text{mm})$	50	300
$w_{CD}(\text{mm})$	50	300
$t(\text{mm})$	50	300
$\theta(^{\circ})$	45	80

TABLEAU 3.11 – Les bornes des variables du problème de la poutre console.

Le problème RBRDO est formulé par les expressions (3.29). Dans le problème RBRDO, les variables et les paramètres déterministes sont convertis en variables aléatoires. Les types de distribution et leurs paramètres sont donnés dans le tableau 3.12, les valeurs déterministes des variables et paramètres sont considérées comme étant leurs valeurs moyennes.

$$\begin{aligned}
& \text{Minimiser : } \mathbb{E} [f_w(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{p}})] ; \mathbb{V} [f_w(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{p}})] \\
& \text{Sous : } Q_{\alpha}[g_j(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{p}})] \leq 0 \quad j = 1, 2 \\
& \text{Tel que : } \tilde{\mathbf{x}} = \{\tilde{w}_{AB}, \tilde{w}_{CD}, \tilde{t}, \tilde{\theta}\} \\
& \quad \tilde{\mathbf{p}} = \{\tilde{P}, \tilde{E}, \tilde{\sigma}_y, \tilde{\rho}, \tilde{L}\} \\
& \quad \alpha = 0.977
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Dans ce problème la propagation des incertitudes pour effectuer les différents calculs de l'optimisation est effectué en utilisant la méthode Monte-Carlo avec un nombre d'échantillons $ns = 1 \times 10^6$ de type CRN. La méthode générale est appliquée sur ce problème, afin d'évaluer la condition nécessaire de RBRDO. Les points d'ancrage correspondants A_E et A_V sont présentés dans le tableau 3.13. Ils sont deux points différents, et aucun point ne domine l'autre. Les valeurs de mesure de dispersion sont présentées dans le tableau 3.14. Elles sont inférieures à 1 % qui correspond aux valeurs des valeurs limites, d'où la non nécessité de traiter ce problème en RBRDO. Tous les deux points obtenus sont considérés les meilleurs designs. Ce cas montre bien la nécessité de tester l'antagonisme avant la résolution du problème, si une résolution du problème RBRDO est démarrée, l'ensemble des points de Pareto sera réparti dans une petite zone entre les deux points d'ancrage, sans apporter d'informations supplémentaires au niveau de la configuration du design.

Ce problème est aussi résolu en DO, le point optimum et les estimations de $\mathbb{E} [f_w(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{p}})]$ et $\mathbb{V} [f_w(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{p}})]$ correspondant sont donnés dans le tableau 3.15. Comme pour le problème de deux barres, l'optimum déterministe domine les deux points

Variable ou paramètre	Type de distribution	Espérance	Ecart type
$\tilde{w}_{AB}(\text{mm})$	Normale	w_{AB}	$0.05w_{AB}$
$\tilde{w}_{CD}(\text{mm})$	Normale	w_{CD}	$0.05w_{CD}$
$\tilde{t}(\text{mm})$	Normale	t	$0.05t$
$\tilde{\theta}(\text{°})$	Normale	θ	0.1θ
$\tilde{P}(\text{kN})$	Gumbel	100	14
$\tilde{E}(\text{GPa})$	Gumbel	200	16
$\tilde{\sigma}_y(\text{MPa})$	Lognormal	225	18
$\tilde{\rho}(\text{kg/m}^3)$	Weibull	7860	786
$\tilde{L}(\text{mm})$	Normale	5000	250
$g(\text{ms}^2)$	-	9.81	-

TABLEAU 3.12 – Distributions des variables et des paramètres du problème de la poutre console.

Points	$\mathbb{E}[\tilde{w}_{AB}]$ (mm)	$\mathbb{E}[\tilde{w}_{CD}]$ (mm)	$\mathbb{E}[\tilde{t}]$ (mm)	$\mathbb{E}[\tilde{\theta}]$ (°)	$\mathbb{E}[f_w]$ (kg)	$\mathbb{V}[f_w]$
A_E	55.4	75.6	300	60.68	1394.4	32832
A_V	56.0	75.6	300	61.62	1395.3	32830

TABLEAU 3.13 – Points d’ancrage du problème RBRDO de la poutre console.

Mesures de dispersion	$\delta_E(\%)$	$\delta_V(\%)$	$\delta_x(\%)$
Values	$6,5 \times 10^{-2}$	$6,1 \times 10^{-3}$	$3,5 \times 10^{-1}$

TABLEAU 3.14 – Mesures de dispersion du problème de la poutre console.

optimums du RBRDO, cependant, il admet des degrés de fiabilité faibles qui correspondent à 52% pour g_1 et 47% pour g_2 .

$\mathbb{E}[\tilde{w}_{AB}]$	$\mathbb{E}[\tilde{w}_{CD}]$	$\mathbb{E}[\tilde{t}]$	$\mathbb{E}[\tilde{\theta}]$	$\mathbb{E}[f_w]$	$\mathbb{V}[f_w]$
(mm)	(mm)	(mm)	(°)	(kg)	
50	50	300	72.1	1005	16818

TABLEAU 3.15 – L'optimum déterministe du problème de la poutre console.

3.4.3 La poutre soudée

La poutre soudée est introduite par [144] et étudiée dans [145] comme une application pour introduire la robustesse dans les problèmes multiobjectifs. La structure est montrée dans la figure 3.9. L'optimisation sous incertitudes de la poutre soudée est étudiée dans ce travail pour la première fois dans la littérature.

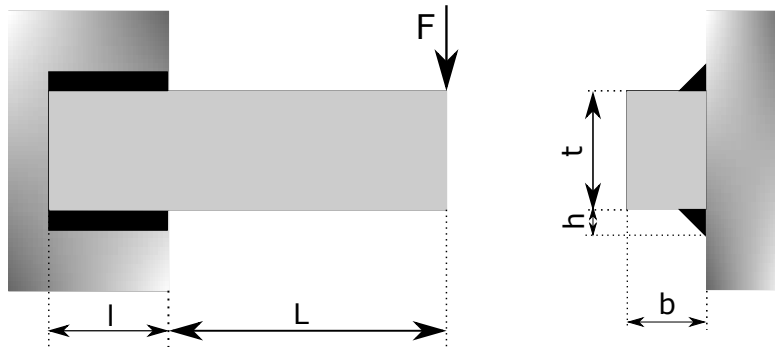


FIGURE 3.9 – La poutre soudée.

Le coût de la poutre soudée est à minimiser, ce coût dépend des variables géométriques de la poutre et de sa liaison de la soudure. Les problèmes DO et RBRDO sont formulés dans l'équation (3.30) et l'équation (3.31) respectivement, avec :

f_c : Le coût total du soudage.

τ_d : Contrainte du cisaillement du design.

$\tau(\mathbf{x})$: Contrainte maximale du cisaillement.

σ_d : Contrainte normale de la matière de la poutre.

$\sigma(\mathbf{x})$: Contrainte normale maximale de la poutre.

$P_c(\mathbf{x})$: Charge du flambage sur la poutre.

$\lambda(\mathbf{x})$: Flèche maximale de la poutre.

E : Module de Young du matériau de la poutre.

G : Module d'élasticité en cisaillement du matériau de la poutre.

$$\text{Minimiser : } f_c(\mathbf{x}) = c_1 h^2 l + c_2 t b (L + l)$$

$$\text{Sous : } g_1(\mathbf{x}) = \tau(\mathbf{x}) - \tau_d \leq 0$$

$$g_2(\mathbf{x}) = \sigma(\mathbf{x}) - \sigma_d \leq 0$$

$$g_3(\mathbf{x}) = F - P_c(\mathbf{x}) \leq 0$$

$$g_4(\mathbf{x}) = h - b \leq 0$$

$$g_5(\mathbf{x}) = \lambda(\mathbf{x}) - \lambda_{max} \leq 0$$

$$\text{Tel que : } \mathbf{x} = \{h, l, t, b\}$$

$$c_1 = 6,74 \times 10^4 \text{ \$/m}^3$$

$$c_2 = 2,94 \times 10^3 \text{ \$/m}^3$$

$$\tau_1 = \frac{F}{\sqrt{2}hl}$$

$$\tau_2 = \frac{MR}{J}$$

$$M = F[L + 0.5l]$$

$$R = \sqrt{0.25[l^2 + (t + h)^2]} \quad (3.30)$$

$$J = 2\{0.707hl[\frac{l^2}{12} + 0.25(t + h)^2]\}$$

$$\tau = \sqrt{\tau_1^2 + 2\tau_1\tau_2\frac{l}{2R} + \tau_2^2}$$

$$\sigma(\mathbf{x}) = \frac{6FL}{bt^2}$$

$$P_c(\mathbf{x}) = \frac{4.013\sqrt{EI\alpha}}{L^2} [1 - \frac{t}{2L}\sqrt{\frac{EI}{\alpha}}]$$

$$I(\mathbf{x}) = \frac{1}{12}tb^3$$

$$\alpha(\mathbf{x}) = \frac{1}{3}Gtb^3$$

$$\lambda(\mathbf{x}) = \frac{4FL^3}{Et^3b}$$

$$\lambda_{max} = 6,35 \text{ mm (maximum deflection)}$$

$$\begin{aligned}
& \text{Minimiser : } \mathbb{E}[f_c(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{p}})] ; \mathbb{V}[f_c(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{p}})] \\
& \text{Sous : } Q_\alpha[g_j(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{p}})] \leq 0 \quad j = 1, \dots, 5 \\
& \text{Tel que : } \tilde{\mathbf{x}} = \{\tilde{h}, \tilde{l}, \tilde{t}, \tilde{b}\} \\
& \quad \tilde{\mathbf{p}} = \{\tilde{G}, \tilde{E}, \tilde{F}, \tilde{\sigma}_d, \tilde{\tau}_d, \tilde{L}\} \\
& \quad \alpha = 0.95
\end{aligned} \tag{3.31}$$

Les bornes des variables sont données dans le tableau 3.16, et les types de distribution et leurs paramètres associés aux variables sont présentés dans le tableau 3.17.

Variable	borne inférieure	borne supérieure
$h(\text{mm})$	5	127
$l(\text{mm})$	5	254
$t(\text{mm})$	5	254
$b(\text{mm})$	5	127

TABLEAU 3.16 – les Bornes des variables du problème de la poutre soudée.

Comme dans le problème de la poutre console, la méthode MC avec $ns = 1 \times 10^6$ échantillons de type CRN est utilisée pour propager les incertitudes dans tous les calculs d'optimisation. La méthode générale est appliquée sur ce problème, les points d'ancrage obtenus sont présentés dans le tableau 3.18. Comme dans le cas du problème de la poutre console, deux points distincts et dominant sont obtenus. Les mesures de dispersion sont calculées et comparées avec les valeurs limites correspondantes de 1 %. Le tableau 3.19 montre les valeurs de ces mesures qui sont élevées. D'où l'on déduit que l'antagonisme existe entre les fonctions objectifs du problème RBRDO, et le front de Pareto correspondant est illustré dans la figure 3.10.

Le problème déterministe (3.30) est aussi résolu, l'optimum déterministe et les valeurs de $\mathbb{E}[f_c(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{p}})]$ et $\mathbb{V}[f_c(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{p}})]$ correspondantes sont données dans le tableau 3.20. Comme les deux applications précédentes, l'optimum déterministe n'est pas admissible, ses degrés de fiabilité sont faibles, ils correspondent à 0.499, 0.0, 0.4175 et 0.5 pour les quatre contraintes respectivement, cependant la dernière contrainte admet un degré de fiabilité égal à 1.

Afin d'évaluer l'influence de la modélisation des incertitudes sur l'existence de l'antagonisme des problèmes RBRDO, ce problème est résolu en changeant la modélisation des incertitudes des variables du design. Le nouveau type de modélisation des incertitudes qui correspond aux écarts-types proportionnels est

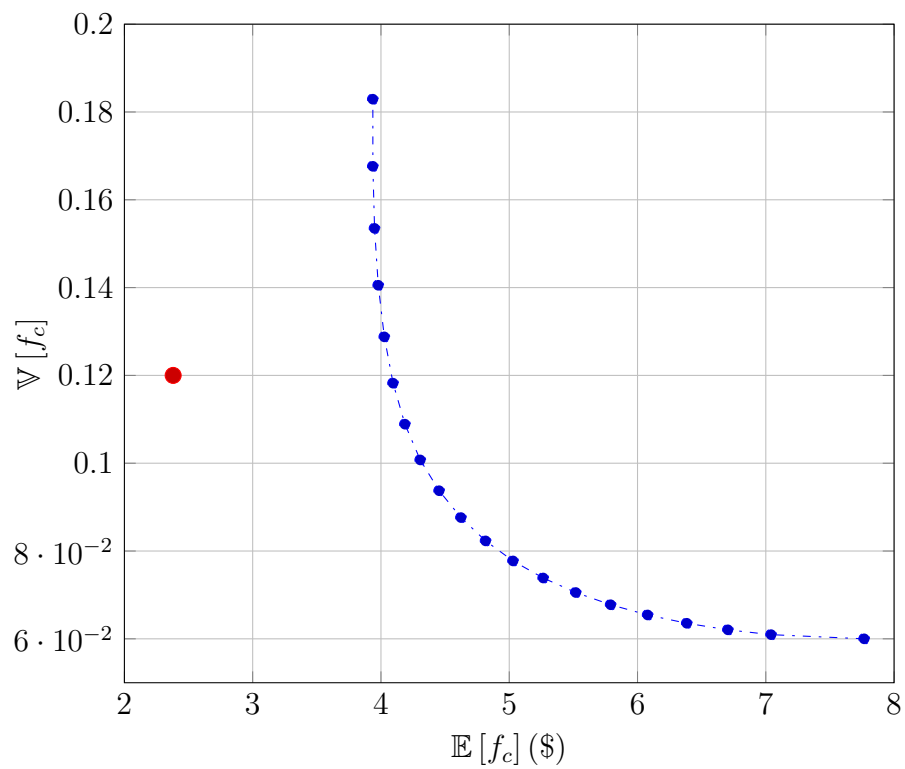


FIGURE 3.10 – Le front de Pareto pour le problème RBRDO et l'optimum déterministe du problème de la poutre soudée.

Variable ou paramètre	Type de distribution	Espérance	Ecart type
\tilde{h} (mm)	Normal	h	1
\tilde{l} (mm)	Normal	l	1
\tilde{t} (mm)	Normal	t	1
\tilde{b} (mm)	Normal	b	1
\tilde{F} (kN)	Gumbel	26,7	$0.1\mathbb{E}[\tilde{F}]$
\tilde{E} (MPa)	Gumbel	$2,07 \times 10^5$	$0.08\mathbb{E}[\tilde{E}]$
$\tilde{\sigma}_d$ (MPa)	Lognormal	207	$0.08\mathbb{E}[\tilde{\sigma}_d]$
$\tilde{\tau}_d$ (MPa)	Lognormal	94	$0.08\mathbb{E}[\tilde{\tau}]$
\tilde{L} (mm)	Normal	356	1
G (MPa)	Gumbel	$8,3 \times 10^4$	$0.08\mathbb{E}[\tilde{G}]$

TABLEAU 3.17 – Distributions des variables et des paramètres du problème de la poutre soudée.

donné dans le tableau 3.21. Le front de Pareto disparaît et l'antagonisme Espérance-Variance n'existe plus, l'optimum obtenu est présenté dans le tableau 3.22.

3.4.4 La poutre encadrée

Dans les applications précédentes, nous avons illustré l'identification de l'antagonisme explicitement et par la méthode générale, en plus, nous avons bien testé l'influence de la modélisation des incertitudes sur l'existence de l'antagonisme. L'influence du second facteur qui est le choix de la fonction objectif sur l'existence de l'antagonisme est testée sur ce problème de la poutre encadrée.

La poutre encadrée est représentée sur la figure 3.11. Le but est de maximiser la rigidité de la structure. Le problème DO est donné dans la formulation (3.32), b et h sont les variables du problème, leurs bornes sont données dans le tableau 3.23. Les paramètres environnementaux sont la charge P , la masse maximale M_{max} , la limite d'élasticité σ_y et le module de Young E . Les valeurs de ces paramètres sont données dans le tableau 3.24.

Points	$\mathbb{E}[\tilde{h}]$ (mm)	$\mathbb{E}[\tilde{l}]$ (mm)	$\mathbb{E}[\tilde{t}]$ (mm)	$\mathbb{E}[\tilde{b}]$ (mm)	$\mathbb{E}[f_c]$ (\$)	$\mathbb{V}[f_c]$
A_E	6.45	251.7	205.3	8.8	3.9	0.183
A_V	30.65	39.9	136.8	33	7.77	0.06

TABLEAU 3.18 – Points d’ancrage du problème RBRDO de la poutre soudée.

Mesures de Dispersion	$\delta_E(\%)$	$\delta_V(\%)$	$\delta_x(\%)$
Values	49,9	67,2	54

TABLEAU 3.19 – Mesures de Dispersion du problème de la poutre soudée.

h (mm)	l (mm)	t (mm)	b (mm)	$\mathbb{E}[f_c]$ (\$)	$\mathbb{V}[f_c]$
6.2	158	210.9	6.2	2.38	0.12

TABLEAU 3.20 – Optimum déterministe du problème de la poutre soudée.

Variable ou paramètre	Type de distribution	Espérance	Ecart type
$\tilde{h}(\text{mm})$	Normale	h	$0.1h$
$\tilde{l}(\text{mm})$	Normale	l	$0.1l$
$\tilde{t}(\text{mm})$	Normale	t	$0.1t$
$\tilde{b}(\text{mm})$	Normale	b	$0.1b$

TABLEAU 3.21 – Nouvelle modélisation des incertitudes des variables du design du problème de la poutre soudée.

$\mathbb{E}[\tilde{h}]$	$\mathbb{E}[\tilde{l}]$	$\mathbb{E}[\tilde{t}]$	$\mathbb{E}[\tilde{b}]$	$\mathbb{E}[f_c]$	$\mathbb{V}[f_c]$
(mm)	(mm)	(mm)	(mm)	(\\$)	
5.3	251.1	254	6.7	3.5	0.22

TABLEAU 3.22 – Point optimum du problème RBRDO de la poutre soudée avec la nouvelle modélisation des incertitudes.

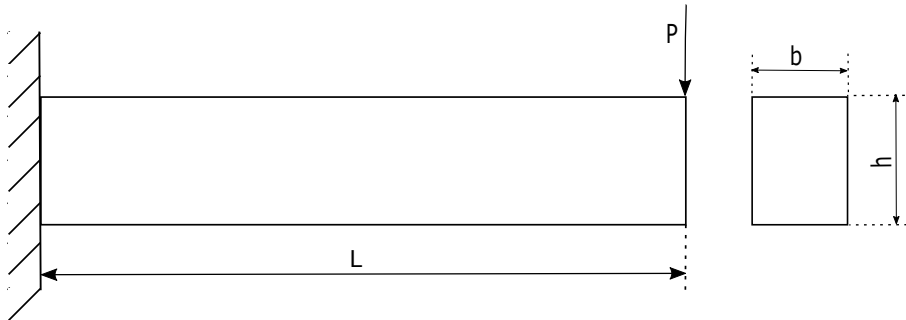


FIGURE 3.11 – La poutre encastrée.

$$\begin{aligned}
 \text{Minimiser : } & -R(b, h) = \frac{-3EI}{L^3} \\
 \text{Sous : } & g_1(b, h) = \frac{PL}{6bh^2} - \sigma_y \leq 0 \\
 & g_2(b, h) = \rho bLh - M_{max} \leq 0 \\
 \text{Tel que : } & I = \frac{bh^3}{12} \\
 & M_{max} = 70kg
 \end{aligned} \tag{3.32}$$

Variable	Borne inférieure	Borne supérieure
$b(\text{mm})$	10	200
$h(\text{mm})$	10	200

TABLEAU 3.23 – Les bornes des variables du problème de la poutre encastrée.

L'optimum déterministe D_c du problème 3.32 est donné dans le tableau 3.25. Si le problème 3.32 est reformulé en remplaçant la maximisation de la rigidité par la minimisation de la déflexion maximale δ (Équation (3.33)), le même optimum déterministe est obtenu.

Paramètres	$\rho(\text{kg}/\text{mm}^3)$	$L(\text{mm})$	$P(\text{kN})$	$E(\text{GPa})$	$\sigma_y(\text{GPa})$
Valeurs	$7,8 \times 10^{-6}$	1×10^3	5	200	0.25

TABLEAU 3.24 – Les Valeurs of des paramètres constants du problème de la poutre encastrée.

$$\delta = \frac{PL^3}{3EI} \quad (3.33)$$

La valeur de δ est donnée dans le tableau 3.25. D'où le choix de δ ou R aboutit aux mêmes résultats en DO. Cependant, ce choix entre la déflexion et la rigidité aboutit à des résultats différents dans le cas de RBRDO.

Le problème RBRDO est formulé dans l'équation (3.34). Dans ce cas, l'espérance et la variance de la rigidité de la structure sont les fonctions objectifs du problème. Les deux variables du design sont \tilde{b} et \tilde{h} qui sont étudiées sous incertitudes, alors que les paramètres restent déterministes. Les PDF associées à \tilde{b} et \tilde{h} sont identifiées dans le tableau 3.26. De même, la méthode de propagation des incertitudes MC avec la technique CRN et un nombre d'échantillonnage $ns = 1 \times 10^6$ est utilisée dans tous les calculs sur ce problème. la résolution de ce problème biobjectif donne un front de Pareto qui est tracé dans la figure 3.12, les points d'ancrage correspondants sont donnés dans le tableau 3.27. Prenons le cas de la déflexion maximale et traitons le problème en RBRDO, la formulation du problème est similaire à celle de l'équation (3.34), la différence est au niveau des fonctions objectifs qui sont remplacées par celles de l'équation (3.35). Dans ce cas le front de Pareto disparaît, l'antagonisme entre les fonctions objectifs n'existe plus, l'optimum correspondant est le point P_1 du tableau 3.27.

En plus, la fiabilité et les moments statistiques de R et δ pour le point D_c sont donnés dans le tableau 3.28. De même ces résultats montrent que la fiabilité est faible pour la première contrainte, ce qui le rend non faisable. En opposition, il avait des valeurs de $\mathbb{E}[R]$, $\mathbb{E}[\delta]$ et $\mathbb{V}[\delta]$ mieux que celle de P_1 , cependant P_1 admet une valeur de $\mathbb{V}[R]$ mieux que celle de D_c .

Ces résultats mettent en lumière la puissance de RBRDO à produire des résultats fiables et robustes. En plus, ils reflètent l'importance du choix de la fonction objectif dans ce type d'optimisation. Ce qui n'est pas le cas de DO, dont les résultats sont indifférents quand R ou δ sont choisis comme fonction objectif.

Point	$b(\text{mm})$	$h(\text{mm})$	$R(\text{N/mm})$	$\delta(\text{mm})$
D_c	44.87	200	$1,7948 \times 10^4$	0.2786

TABLEAU 3.25 – Le point optimum D_c du problème DO de la poutre encastrée.

$$\begin{aligned}
& \text{Minimiser : } \mathbb{E}[-R(\tilde{\mathbf{x}})], \mathbb{V}[-R(\tilde{\mathbf{x}})] \\
& \text{Sous : } \mathbb{Q}_\alpha [g_1(\tilde{\mathbf{x}})] \leq 0 \\
& \quad \mathbb{Q}_\alpha [g_2(\tilde{\mathbf{x}})] \leq 0 \\
& \text{Tel que : } \alpha = 0.95 \\
& \quad \tilde{\mathbf{x}} = \{\tilde{b}, \tilde{h}\}
\end{aligned} \tag{3.34}$$

Variables	PDF	Espérance	Écart type
$\tilde{b}(\text{mm})$	normale	b	$0.01b$
$\tilde{h}(\text{mm})$	normale	h	$0.01h$

TABLEAU 3.26 – Les PDF des variables du problème de la poutre encastrée.

Points	$b(\text{mm})$	$h(\text{mm})$	$\mathbb{E}[R] (\text{N/mm})$	$\mathbb{V}[R]$	$\mathbb{E}[\delta] (\text{mm})$	$\mathbb{V}[\delta]$
P_1	43.85	200	$1,7544 \times 10^4$	308025	0.2853	$8,1000 \times 10^{-5}$
P_2	34.6	10	1,73	0.003	2892.6	$8,3906 \times 10^3$

TABLEAU 3.27 – Points d'ancrage du problème RBRDO de la poutre encastrée (cas de la rigidité).

$$\text{Minimize : } \mathbb{E}[\delta(\tilde{\mathbf{x}})], \sigma[\delta(\tilde{\mathbf{x}})] \tag{3.35}$$

Point	b (mm)	h (mm)	$\mathbb{P}[g_1] \leq 0$	$\mathbb{P}[g_2] \leq 0$	$\mathbb{E}[R]$ (N/mm)	$\mathbb{V}[R]$	$\mathbb{E}[\delta]$ (mm)	$\mathbb{V}[\delta]$
D_c	44.87	200	0.502	1	$1,7954 \times 10^4$	322624	0.2788	$7,7440 \times 10^{-5}$

TABLEAU 3.28 – Évaluation de D_c sous incertitudes.

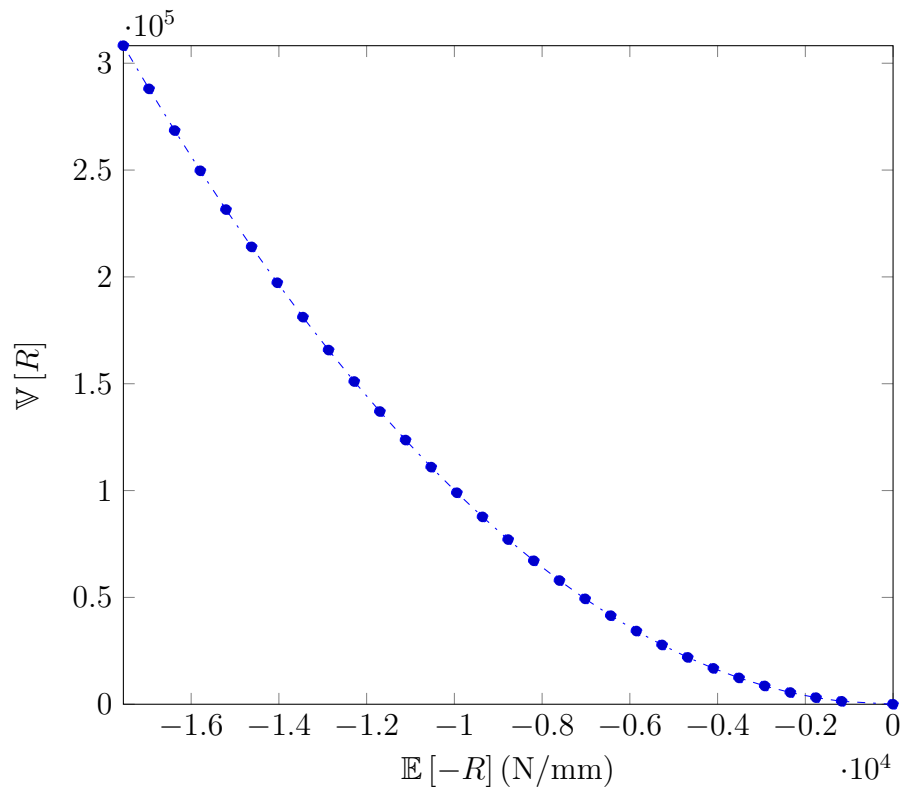


FIGURE 3.12 – Front de Pareto pour le problème RBRDO de la poutre encastree.

3.5 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons traité le sujet de l'optimisation sous incertitudes en ingénierie mécanique. Nous avons identifié les différents types d'OU et précisé les classifications existantes dans la littérature. Nous avons proposé une nouvelle classification des problèmes OU en se basant sur les conditions nécessaires pour définir chaque type de OU. Cette nouvelle classification peut aider à choisir le type de OU convenable pour un problème donné. L'antagonisme entre la performance et sa stabilité est considéré comme la condition nécessaire pour définir les problèmes RDO et RBRDO. Le sujet de l'existence de cet antagonisme n'est jamais traité dans la littérature. Cependant nous avons démontré qu'il n'existe pas systématiquement dans tous les problèmes. L'antagonisme entre la performance et sa stabilité peut être détecté explicitement dans certains problèmes dont la fonction objectif prend des formes particulières, cependant sa détection n'est pas toujours possible explicitement. Une méthode générale basée sur les points d'ancrage du front de Pareto des problèmes RDO et RBRDO a été proposée. Cette méthode est un outil qui peut aider un designer à évaluer la robustesse de son design et si ce problème nécessite

une optimisation robuste. Cette méthode est appliquée sur plusieurs problèmes analytiques et elle a montré son efficacité. Également, nous avons identifié deux facteurs influençant l'existence de cet antagonisme qui sont la modélisation des incertitudes et le choix de la fonction objectif.

Dans le chapitre suivant nous abordons le sujet de l'optimisation robuste basée sur des métamodèles adaptatifs. Une démarche modifiée de EGO pour construire le front de Pareto de l'optimisation robuste est proposée. L'efficacité de cette démarche est montrée sur une application industrielle d'emboutissage.

Contribution dans la démarche d'optimisation robuste avec métamodèles adaptatifs

Sommaire du présent chapitre

4.1 État de l'art	88
4.1.1 Métamodèles adaptatifs pour les fonctions contraintes probabilistes	88
4.1.2 Métamodèles adaptatifs des objectifs probabilistes	89
4.2 Démarche proposée	92
4.3 Application analytique	94
4.4 Application à un procédé d'emboutissage	101
4.4.1 Présentation du procédé d'emboutissage	101
4.4.2 Modèle de simulation	103
4.4.3 Formulation du problème d'optimisation robuste	108
4.4.4 Méta-modèle haute fidélité	110
4.5 Application de EGO-Robuste sur le problème d'emboutissage	113
4.5.1 Calcul de l'espérance et l'écart type sur le modèle de référence	113
4.5.2 Optimisation du modèle de référence avec l'algorithme NSGAI	116
4.5.3 Application de EGO-Robuste	117
4.5.4 Comparaison de EGO-Robuste avec l'approche classique d'optimisation	128
4.6 Conclusion	135

4.1 État de l'art

Comme, nous avons déjà expliqué dans le chapitre 2, les métamodèles adaptatifs sont utilisés dans l'optimisation déterministe. Le critère EGO est le plus connu parmi les techniques adaptatives qui servent à construire les métamodèles et à les optimiser. Comme dans le cas déterministe il y a deux grands types de critères :

- o Les critères qui sont utilisés dans la construction des métamodèles remplaçant les fonctions objectifs qui sont souvent utilisés en optimisation robuste comme dans [109], [146], [111] et [112].
- o Les critères qui sont utilisés pour remplacer les fonctions contraintes du problème surtout dans les problèmes qui s'intéressent à l'aspect fiabiliste des systèmes [97], [107].

4.1.1 Métamodèles adaptatifs pour les fonctions contraintes probabilistes

Ce sujet est étudié dans plusieurs travaux, Moustapha et al. [147], [97], proposent une approche basée sur les quantiles pour résoudre les problèmes RBDO. Ils forment les contraintes, qui sont habituellement formulées en probabilités de défaillance admissibles, en quantiles des critères de performance. Dans cette formulation, le niveau de quantile contrôle le degré de conservatisme de la conception. Ils utilisent des métamodèles de krigeage pour établir une procédure avec deux étapes d'enrichissement du DOE utilisé pour construire le métamodèle. La première étape réduit globalement l'erreur du krigeage et ajoute des points au voisinage des surfaces à l'état limite décrivant la performance du système à atteindre. La deuxième étape vérifie localement et, si nécessaire, améliore la précision des quantiles estimés selon les itérations d'optimisation. Ils appliquent cette méthode sur des problèmes de "Crashworthiness".

Lelièvre et al. [107], améliorent la performance des méthodes AK-MCs décrites dans la section 2.3.2, en introduisant une technique de simulation séquentielle de Monte Carlo pour traiter les petites probabilités de défaillance. Une technique d'enrichissement à points multiples est également proposée pour permettre la parallélisation et réduire ainsi les efforts numériques. Ces deux nouvelles techniques donnent lieu à la proposition d'une nouvelle condition d'arrêt plus conservatrice pour l'apprentissage. Cette nouvelle méthode est appelée AK-MCSi, ces résultats montrent une réduction significative du temps nécessaire et / ou du nombre d'itérations nécessaires pour une évaluation précise de la probabilité de défaillance.

4.1.2 Métamodèles adaptatifs des objectifs probabilistes

Dans ce travail nous nous intéressons aux métamodèles adaptatifs utilisés pour estimer l'espérance et la variance de l'objectif des problèmes RDO et RBRDO. Les travaux de Havinga et al. [112], [148], ont abordé ce sujet. Dans ces travaux, ils identifient qu'il faut bien distinguer entre les incertitudes reliées à la qualité de prédiction d'un métamodèle M , qui remplacent une fonction $f(\mathbf{x})$ (voir l'équation (4.1)), et les incertitudes associées à la prédiction de la fonction objectif formulée sous incertitudes. Cette fonction originale, qui n'est pas accessible à cause de son coût, est représentée par $\mu(\tilde{\mathbf{x}})$ et sa prédiction est nommée $\hat{\mu}(\tilde{\mathbf{x}})$.

$$M = \hat{f}(\mathbf{x}) \quad (4.1)$$

Les incertitudes de prédiction de $\hat{f}(\mathbf{x})$ sont représentées par l'erreur MSE représentée par $s^2(\mathbf{x})$ dans la section 2.3.2, alors que celles de $\hat{\mu}(\tilde{\mathbf{x}})$ sont représentée par $\hat{s}^2(\tilde{\mathbf{x}})$. Une fois $\hat{s}^2(\tilde{\mathbf{x}})$ déterminée, le calcul d'un critère d'amélioration similaire à celui de l'équation (2.57) sera accessible. Afin de calculer $\hat{s}^2(\tilde{\mathbf{x}})$, Havinga utilise l'équation (4.2) qui est utilisée aussi par Wiebenga [149] et Jurecka et al. [110]. L'idée consiste à considérer que l'erreur de prédiction de la fonction de $\hat{\mu}(\tilde{\mathbf{x}})$ est égale à la moyenne de $s^2(\tilde{\mathbf{x}})$.

$$\hat{s}^2(\tilde{\mathbf{x}}) = \mathbb{E} [s^2(\tilde{\mathbf{x}})] \quad (4.2)$$

La valeur de $\mathbb{E} [s^2(\tilde{\mathbf{x}})]$ est calculée en utilisant une des techniques de propagation des incertitudes telle que celles détaillées dans la section 2.2.3, Havinga et al. les calculent en utilisant la méthode de Monte-Carlo.

Il est intéressant de noter que $\hat{s}^2(\tilde{\mathbf{x}})$ est toujours supérieure à zéro dans tous les points \mathbf{x} même dans les points qui appartiennent au DOE, en opposition avec le cas déterministe où l'erreur de prédiction $s^2(x)$ est nulle sur les points DOE. Des valeurs faibles de $\hat{s}^2(\tilde{\mathbf{x}})$ sont obtenues dans les zones où les points DOE sont plus denses. Afin d'utiliser un critère similaire à EI , il est indispensable de trouver le point \mathbf{x}_b qui représente le meilleur point parmi les points DOE. Plusieurs approches ont été utilisées pour trouver \mathbf{x}_b , la première est identifiée par l'équation (4.3), cette méthode est la même utilisée dans l'algorithme EGO déterministe par Jones et al. [96], cette technique est utilisée en EGO robuste par Jurecka [146] et Wiebenga et al. [111].

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_b = & \arg \min \{ \mu(\tilde{\mathbf{x}}) \} \\ & \text{Tel que : } \mathbf{x} \in \text{DOE} \end{aligned} \quad (4.3)$$

Une autre approche a été utilisée par Havinga et al. [112], afin de trouver le point \mathbf{x}_b qui admet la meilleure valeur de $\mu(\tilde{\mathbf{x}})$ et en même temps qui possède une valeur faible de $\hat{s}^2(\tilde{\mathbf{x}})$, ce point est calculé par l'équation (4.4).

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_b = & \arg \min \{ \mu(\tilde{\mathbf{x}}) + 6\hat{s}(\tilde{\mathbf{x}}) \} \\ & \text{Tel que : } \mathbf{x} \in \text{DOE} \end{aligned} \quad (4.4)$$

Dans le cas de EGO déterministe, \mathbf{x}_b est calculé en trouvant le meilleur point parmi les points du DOE, cela est assuré en comparant leur fonctions objectifs $f(\mathbf{x})$. Ce point appartient au DOE ($\mathbf{x}_b \in \text{DOE}$), alors elle possède une valeur déterministe $f(\mathbf{x}_b)$ qui est calculée par le modèle de haute fidélité. Cependant dans le cas étudié sous incertitudes, il est impossible de calculer la valeur de $\mu(\mathbf{x}_b)$ en utilisant le modèle haute fidélité qui est coûteux. La seule solution est d'utiliser le métamodèle construit pour estimer la valeur de la fonction objectif dans ce point d'où la notation $\hat{\mu}_b$ est utilisée au lieu de $\mu(\mathbf{x}_b)$ comme il est expliqué dans [112]. La valeur de $\hat{\mu}(\tilde{\mathbf{x}})$ est aussi calculée en utilisant le métamodèle $\hat{f}(\mathbf{x})$.

Après la connaissance des valeurs de $\hat{\mu}(\tilde{\mathbf{x}})$, $\hat{\mu}_b$, $\hat{s}^2(\tilde{\mathbf{x}})$ et \hat{s}_b^2 , il faut choisir un critère pour enrichir le DOE. Jurecka et al. [110] propose d'ignorer l'erreur de prédiction \hat{s}_b^2 sur \mathbf{x}_b en utilisant le EI_J de l'équation (4.5), tel que Φ et ϕ sont les fonctions CDF et PDF de la loi normale centrée réduite respectivement.

$$\begin{aligned} EI_J(\tilde{\mathbf{x}}) = & (\hat{\mu}_b - \hat{\mu}(\tilde{\mathbf{x}})) \Phi\left(\frac{\hat{\mu}_b - \hat{\mu}(\tilde{\mathbf{x}})}{\hat{s}(\tilde{\mathbf{x}})}\right) \\ & + \hat{s}(\tilde{\mathbf{x}}) \phi\left(\frac{\hat{\mu}_b - \hat{\mu}(\tilde{\mathbf{x}})}{\hat{s}(\tilde{\mathbf{x}})}\right) \end{aligned} \quad (4.5)$$

Havinga et al. [112], introduisent un critère d'amélioration basé sur les travaux de Jurecka [146], et adapté pour l'optimisation robuste. Ce critère part de l'hypothèse que les fonctions objectifs aux points \mathbf{x}_b et \mathbf{x} sont caractérisées par les probabilités suivantes :

$$\mathbb{P} [\mu(\mathbf{x}_b)] \sim N(\hat{\mu}_b, \hat{s}_b^2)$$

et

$$\mathbb{P} [\mu(\mathbf{x})] \sim N(\hat{\mu}(\tilde{\mathbf{x}}), \hat{s}^2(\tilde{\mathbf{x}}))$$

La formule correspondante de EI_H proposée par Havinga est donnée par l'équation (4.6).

$$\begin{aligned} EI_H(\tilde{\mathbf{x}}) = & (\hat{\mu}_b - \hat{\mu}(\tilde{\mathbf{x}})) \Phi \left[\frac{(\hat{\mu}_b - \hat{\mu}(\tilde{\mathbf{x}}))}{\sqrt{\hat{s}_b^2 + \hat{s}^2(\tilde{\mathbf{x}})}} \right] + \sqrt{\hat{s}_b^2 + \hat{s}^2(\tilde{\mathbf{x}})} \phi \left[\frac{(\hat{\mu}_b - \hat{\mu}(\tilde{\mathbf{x}}))}{\sqrt{\hat{s}_b^2 + \hat{s}^2(\tilde{\mathbf{x}})}} \right] \\ \hat{\mu}(\tilde{\mathbf{x}}) = & \mathbb{E} [\hat{f}(\tilde{\mathbf{x}})] + 3\sigma [\hat{f}(\tilde{\mathbf{x}})] \end{aligned} \quad (4.6)$$

Dans leur travail, Havinga et al. utilisent la fonction d'agrégation de l'espérance et de l'écart type suivante :

$$\mu(\tilde{\mathbf{x}}) = \mathbb{E} [f(\tilde{\mathbf{x}})] + 3\sigma [f(\tilde{\mathbf{x}})] \quad (4.7)$$

Le critère de Havinga EI_H est appliqué sur l'optimisation robuste avec une formulation mono-objectif d'agrégation, dans ce travail nous utilisons ce critère pour proposer une démarche d'optimisation robuste avec métamodèles adaptatifs capable de résoudre le problème biobjectif Espérance-Variance.

Le sujet de l'utilisation des métamodèles adaptatifs en optimisation multiobjective est déjà traité dans la littérature dans plusieurs travaux tel que l'algorithme ParEGO qui est proposée par Knowles [150], le travail de Hussein et al. [151], la méthode MOEA/D-EGO [152] et la méthode SMS-EGO [153] et autres méthodes, les articles de Deb [154] et de Lie et al. [85] présentent plusieurs travaux sur ce sujet. Les méthodes citées ci-dessus ne sont pas applicables à notre cas, en effet ces méthodes consistent à construire des métamodèles pour chaque fonction objectif du problème multiobjectif. Cependant, dans notre travail nous essayons de construire le front de Pareto du problème biobjectif Espérance-Variance à partir d'un seul métamodèle construit sur la fonction déterministe, à partir des points DOE calculés sur le modèle de haute fidélité, ces points sont la seule information précise dont nous disposons. En plus, pour appliquer les méthodes citées ci-dessus, on a besoin de construire des métamodèles remplaçant l'espérance et la variance et d'enrichir ces métamodèles d'une manière adaptative. La seule méthode pour construire ces métamodèles serait d'utiliser le métamodèle déterministe, c'est à dire construire un méta-modèle de méta-modèle, avec le risque d'une très grande erreur de prédiction.

4.2 Démarche proposée

Dans ce travail, nous proposons une démarche EGO-Robuste, capable de résoudre les problèmes RDO formulés en biobjectif. Notre démarche consiste à utiliser deux critères EI chacun adapté pour l'espérance et la variance ou l'écart type, la variance est remplacée par l'écart type dans la suite du chapitre. Ces EI sont nommés EI_e et EI_σ respectivement, leurs expressions sont précisées dans l'équation (4.8) et l'équation (4.9), tel que Φ et ϕ sont les fonctions CDF et PDF de la loi normale centrée réduite respectivement.

$$\begin{aligned}
 EI_e(\tilde{\mathbf{x}}) &= (\mathbb{E} [\hat{f}(\tilde{\mathbf{x}}_b)] - \mathbb{E} [\hat{f}(\tilde{\mathbf{x}})]) \Phi\left(\frac{(\mathbb{E} [\hat{f}(\tilde{\mathbf{x}}_b)] - \mathbb{E} [\hat{f}(\tilde{\mathbf{x}})])}{\sqrt{\hat{s}_b^2 + \hat{s}^2(\tilde{\mathbf{x}})}}\right) \\
 &\quad + \sqrt{\hat{s}_b^2 + \hat{s}^2(\tilde{\mathbf{x}})} \phi\left(\frac{(\mathbb{E} [\hat{f}(\tilde{\mathbf{x}}_b)] - \mathbb{E} [\hat{f}(\tilde{\mathbf{x}})])}{\sqrt{\hat{s}_b^2 + \hat{s}^2(\tilde{\mathbf{x}})}}\right)
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

$$\begin{aligned}
 EI_\sigma(\tilde{\mathbf{x}}) &= (\sigma [\hat{f}(\tilde{\mathbf{x}}_b)] - \sigma [\hat{f}(\tilde{\mathbf{x}})]) \Phi\left(\frac{(\sigma [\hat{f}(\tilde{\mathbf{x}}_b)] - \sigma [\hat{f}(\tilde{\mathbf{x}})])}{\sqrt{\hat{s}_b^2 + \hat{s}^2(\tilde{\mathbf{x}})}}\right) \\
 &\quad + \sqrt{\hat{s}_b^2 + \hat{s}^2(\tilde{\mathbf{x}})} \phi\left(\frac{(\sigma [\hat{f}(\tilde{\mathbf{x}}_b)] - \sigma [\hat{f}(\tilde{\mathbf{x}})])}{\sqrt{\hat{s}_b^2 + \hat{s}^2(\tilde{\mathbf{x}})}}\right)
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

Ces deux critères font partie de la démarche proposée qui contient les étapes suivantes :

1. Fixer un nombre de budget n_{bd} des simulations numériques ou des évaluations du modèle haute fidélité.
2. Choisir un nombre petit n_0 de points dans l'espace des variables pour construire le DOE initial DOE_1 .
3. Fixer un nombre maximal k_m d'itérations.
4. Initialiser les valeurs des compteurs de simulations numériques $n_p = n_0$ et le nombre d'itération $k = 1$.
5. Évaluer $f(\mathbf{x})$ sur les points du DOE_k ($\mathbf{x} \in DOE_k$).
6. Construire le métamodèle $\hat{f}_k(\mathbf{x})$ de l'itération k .
7. Chercher les deux points à ajouter au DOE_k :

$$\mathbf{x}^e = \arg \max(EI_e(\mathbf{x}))$$

$$\mathbf{x}^\sigma = \arg \max(EI_\sigma(\mathbf{x}))$$
8. Mettre à jour le DOE_k , et les compteurs n_p et k
9. Répéter les étapes de 5 à 8 autant que $n_p \leq n_{bd}$ et $k \leq k_m$.

10. Lorsque les conditions d'arrêt sont satisfaites, arrêter l'enrichissement du DOE et tracer le front de Pareto du problème biobjectif :
- $$\{\mathbb{E}[\hat{f}(\tilde{\mathbf{x}})], \sigma[\hat{f}(\tilde{\mathbf{x}})]\} \text{ tel que : } \mathbf{x} \in DOE_k.$$

Cette démarche est décrite dans la figure 4.1

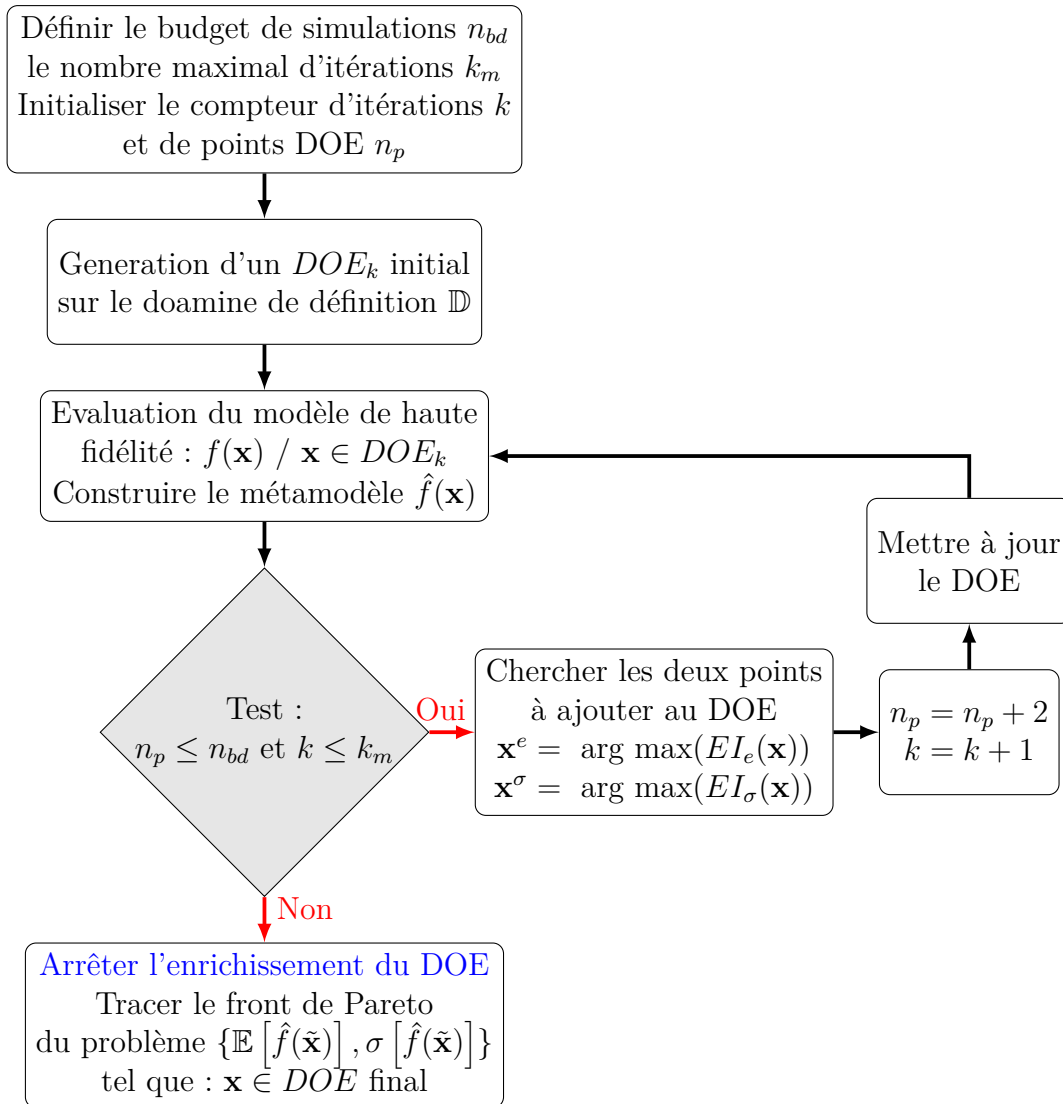


FIGURE 4.1 – La démarche EGO-Robuste proposée.

4.3 Application analytique

La démarche proposée est appliquée sur un problème analytique dont nous pouvons déterminer le front de Pareto, afin de valider son efficacité. Ce problème est celui d'une structure de poutre soudée qui a été traitée dans le chapitre 3, dans la section 3.4.3. Dans cette partie nous étudions le problème avec des fonctions objectives en contexte incertain, par contre les contraintes sont étudiées dans le cas déterministe. Le problème sera formulé dans (4.10).

$$\begin{aligned}
 & \text{Minimiser : } \mathbb{E}[f_c(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{p}})] ; \sigma[f_c(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{p}})] \\
 & \text{Sous : } g_j(\mathbf{x}) \leq 0 \quad j = 1, \dots, 5 \\
 & \text{Tel que : } \tilde{\mathbf{x}} = \{\tilde{h}, \tilde{l}, \tilde{t}, \tilde{b}\} \\
 & \quad \tilde{\mathbf{p}} = \{\tilde{L}\}
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

Les incertitudes associées aux variables de décision $\tilde{\mathbf{x}}$ et au paramètre \tilde{L} sont données dans le tableau 4.1, les bornes des variables sont les mêmes que celles du tableau 3.16, et les valeurs déterministes des autres paramètres environnementaux sont égales à leurs espérances indiquées dans le tableau 3.17.

Variable	Type de distribution	Espérance	Ecart type
$\tilde{h}(\text{mm})$	Normal	h	1
$\tilde{l}(\text{mm})$	Normal	l	1
$\tilde{t}(\text{mm})$	Normal	t	1
$\tilde{b}(\text{mm})$	Normal	b	1
$\tilde{L}(\text{mm})$	Normal	355	1

TABLEAU 4.1 – Distributions des variables et des paramètres du problème de la poutre soudée.

Le problème est résolu analytiquement sans métamodèle afin d'obtenir un front de Pareto de référence. Le front obtenu est tracé dans la figure 4.2. L'optimisation est effectuée en utilisant la méthode NBI, avec la fonction MATLAB "fmincon" et l'option "multi-start" qui permet de résoudre le problème d'optimisation avec plusieurs points de départ afin de minimiser les risques de convergence vers des optimums locaux. Les moments statistiques $\mathbb{E}[f_c]$ et $\sigma[f_c]$ sont calculés analytiquement en utilisant

les formules de l'équation (4.11)

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[f_c] &= c_1 l (h^2 + \sigma [\tilde{h}]^2) + c_2 t b (l + L) \\
 \mathbb{V}[f_c] &= \sigma [f_c]^2 = V_1 + V_2 + COV(V_1, V_2) \\
 V_1 &= c_1^2 \left\{ \mathbb{E}[\tilde{h}]^4 \left(\sigma [\tilde{l}]^2 + l^2 \right) - l^2 \left(\sigma [\tilde{h}]^2 + h^2 \right)^2 \right\} \\
 \mathbb{E}[\tilde{h}]^4 &= 3\sigma [\tilde{h}]^4 + 6\sigma [\tilde{h}]^2 h^2 + h^4 \\
 V_2 &= c_2^2 \left\{ \left(\sigma [\tilde{t}]^2 + t^2 \right) \left(\sigma [\tilde{b}]^2 + b^2 \right) \left((L + l)^2 + \sigma [\tilde{l}]^2 \right) - \left(t^2 b^2 (L + l)^2 \right) \right\} \\
 COV(V_1, V_2) &= c_1 c_2 t b \left[\sigma [\tilde{h}]^2 + h^2 \right] \left[lL + \left(\sigma [\tilde{l}]^2 + l^2 \right) \right] - \left(c_2 t b (l + L) \right) \left(c_1 l (h^2 + \sigma [\tilde{h}]^2) \right)
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

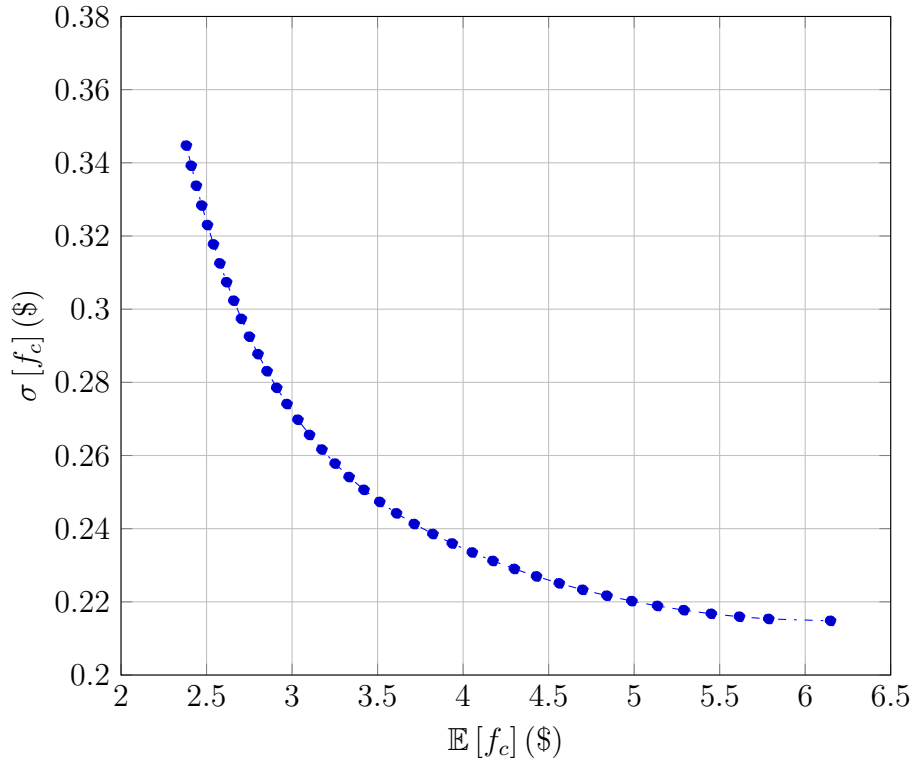


FIGURE 4.2 – Le front de Pareto pour le problème RDO de l'équation (4.10) de la poutre soudée calculé analytiquement.

La démarche de la figure 4.1 est appliquée sur ce problème. L'optimisation des EI_e et EI_σ est effectuée par la fonction "fmincon" et l'option "multi-start". Le

calcul des moments statistiques inclus dans les équations des deux EI est effectué par la méthode des séries de Taylor du premier ordre (voir section 2.2.3), qui est une technique très rapide. La librairie "DACE" [155] est utilisée pour construire les métamodèles de krigeage, cette librairie permet l'utilisation de la méthode des séries de Taylor du premier ordre parce qu'elle calcule le gradient du krigeage. Afin d'améliorer la précision de l'outil de propagation des incertitudes, la construction du front de Pareto final dans l'étape 10 du section 4.2 est effectuée par la méthode de Monte Carlo avec un échantillonnage de taille 1×10^6 . Le DOE initial est construit en utilisant 15 points répartis sur l'espace des quatre variables de décision, grâce à une technique *Latin hypercube sampling* (LHS) [156]. Le DOE initial comporte aussi 15 points de L qui sont ajoutés au vecteur de \mathbf{x} , ces points sont choisis aléatoirement mais ils construisent une population qui réalise la PDF de \tilde{L} .

Cet algorithme est testé avec différents budgets, nous avons choisi les valeurs $\{50, 60, 70, 90\}$, le nombre maximal des itérations est fixé à 200. Les résultats pour ces trois cas sont tracés dans la figure 4.3

Dans les trois premiers cas, l'algorithme est arrêté lorsque le budget de stimulations est épuisé. Cependant, dans le cas où $n_{bd} = 90$, l'algorithme est arrêté après avoir atteint le nombre maximal d'itérations fixé à 200. Alors que le nombre final de points dans le DOE est de 82.

Les résultats montrent comment le front de Pareto évolue avec le budget disponible, avec les budgets de 50 et 60 points, nous avons un seul point sur le front de Pareto qui correspond au minimum de $\mathbb{E}[f_c]$ et cela était attendu car l'estimation de $\mathbb{E}[f_c]$ à partir du krigeage déterministe est beaucoup plus simple que l'estimation de l'écart type $\sigma[f_c]$. En plus dans ces cas la qualité des estimations du krigeage n'est pas précise, comme le montre la dispersion entre les cercles verts et les triangles rouges dans la figure 4.3 surtout dans la zone proche du minimum de $\sigma[f_c]$. Les cercles verts représentent le front de Pareto obtenue par EGO-Robuste dont les objectifs sont estimés en se basant sur le dernier krigeage construit, cependant les triangles rouges sont les re-estimations des objectifs des points du Pareto EGO, en utilisant le modèle de haute fidélité (équation (4.11)). Lorsque le budget augmente, la prédiction de $\mathbb{E}[f_c]$ et $\sigma[f_c]$ par le krigeage s'améliore, pour arriver à des points confondus dans le cas de $n_{bd} = 90$ et l'algorithme est capable de produire des points bien répartis sur le front de Pareto original.

Les étoiles noirs représentent le front de Pareto construit parmi les points du DOE final en se basant sur l'équation (4.11). Ces points donnent une signification sur le DOE final construit par EGO-robuste, et sur la qualité des points qui appartiennent à ce DOE. Notamment, si ils sont situés proches des points optimaux dans l'espace des variables, même si la prédiction des moments statistiques par le krigeage est toujours pas précise, comme dans le cas de $n_{bd} = 70$ où l'algorithme a détecté 3 points sur le fronts de Pareto, malgré le fait que les cercles verts

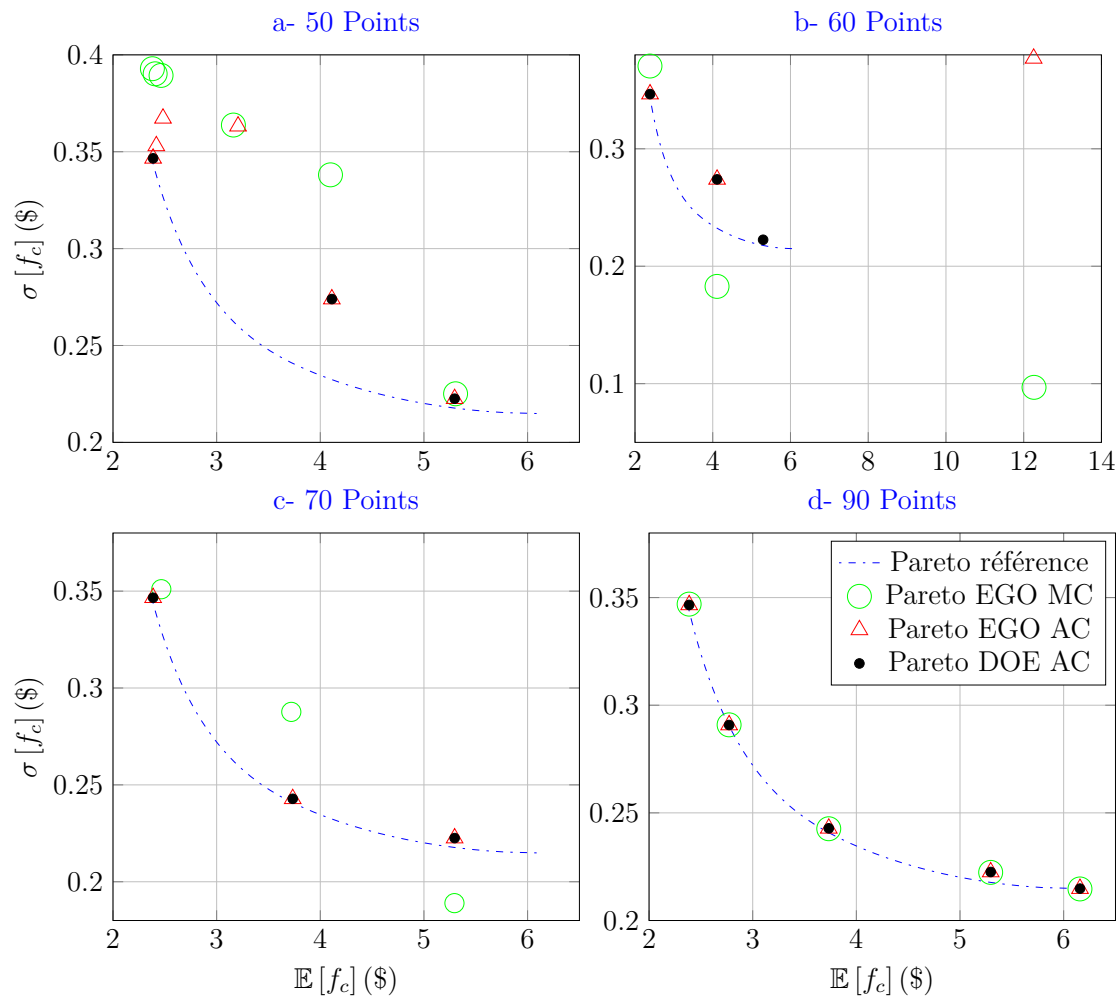


FIGURE 4.3 – Le front de Pareto du problème RDO de la poutre soudée construit en utilisant l’algorithme EGO-robuste et en utilisant les configurations du premier calcul.

n’appartiennent pas au front de Pareto.

Le problème de la poutre soudée est également résolu en utilisant la librairie "UQLAB" [157], qui permet d’utiliser d’autres types de fonctions de corrélation. Nous avons utilisé une corrélation de type ellipsoïdale anisotropie, de la famille des corrélation Matérn (5/2) [158]. Le choix de cette fonction est basée sur les travaux de Laurent [87], qui a constaté que les fonctions Matérn sont plus performantes que la fonctions gaussiennes pour le cas de krigeage à plusieurs variables, cependant la fonction gaussienne est mieux pour les métamodèles de krigeage à variable unique. Nous n’avons pas traité ce sujet dans ce travail par contre nous présentons quelques

résultats sur ces deux types de fonctions afin de mentionner leur influence sur la qualité du krigeage construit.

La librairie "UQLAB" comporte plus de choix de configurations du krigeage que la librairie "DACE", par contre elle ne fournit pas les valeurs du gradient du krigeage construit, alors la méthode de Taylor ne peut pas être utilisée pour propager les incertitudes. La méthode de Monte Carlo est utilisée, ce qui impose des calculs longs. Les deux différentes configurations de deux calculs sont donnés dans le tableau 4.2

Paramètres	Calcul 1	Calcul 2
Librairie	DACE	UQLAB
Outil de UP pour EI	Taylor	MC avec CRN ($n_s = 1 \times 10^4$)
Outil de UP pour Pareto	MC avec CRN $n_s = 1 \times 10^6$	MC avec CRN $n_s = 1 \times 10^6$
Fonction de corrélation	Gaussienne	Ellipsoïdale (famille Matérn 5/2)

TABLEAU 4.2 – Comparaison entre des deux calculs de EGO-Robuste basés sur les librairies "UQLAB" et "DACE" dans le problème d la poutre soudée.

Les calculs EGO-Robuste sont effectués avec un nombre de points initiaux $n_0 = 15$, le nombre maximal d'itérations est de 200, le calcul est effectué avec plusieurs budgets, nous présentons dans la figure 4.4 les résultats qui correspondent à $n_{bd} = \{40, 50, 80, 90\}$.

Les résultats pour que $n_{bd} = 40$ ne sont pas suffisants pour explorer tout le domaine de Pareto. Cependant les nouvelles configurations de l'algorithme EGO qui correspondent au calcul 2 sont capables de capturer plusieurs points répartis sur le front de Pareto même avec $n_{bd} = 50$ mais avec des erreurs de prédiction qui sont représentées par l'écart entre les cercles verts et les triangles rouges. Pour les cas qui correspondent à $n_{bd} = 80$ et $n_{bd} = 90$, l'algorithme a trouvé 6 points du front de Pareto, par contre l'erreur de prédiction entre le krigeage construit et le modèle analytique existe toujours même pour $n_{bd} = 90$ et même si $n_{bd} = 100$, ce dernier cas n'est pas tracé ici vue que ces résultats correspondants sont très similaires à ceux de $n_{bd} = 90$.

Afin de mettre en évidence l'effet de l'utilisation de Monte-Carlo au lieu de la méthode de Taylor sur le temps de calcul, les durées de calcul des huit problèmes sont représentées dans le tableau 4.3. Les résultats montrent la différence de temps de calcul entre les deux types de calcul, et comment la MC est très coûteuse même avec $n_s = 1 \times 10^4$.

On constate que le premier calcul qui est basé sur la librairie "DACE", a donné une bonne approximation du front de Pareto après 82 points d'appel de la fonction

Calcul 1 (DACE-Taylor)	Temps de calcul (heures)	Calcul 2 (UAQLAB-MC)	Temps de calcul (heures)
$n_{bd} = 50$	0.52	$n_{bd} = 40$	11.3
$n_{bd} = 60$	1.2	$n_{bd} = 50$	13.6
$n_{bd} = 70$	2.6	$n_{bd} = 80$	29
$n_{bd} = 90$	7.5	$n_{bd} = 90$	38

TABLEAU 4.3 – Temps de calcul prises par les différents calculs de EGO-Robuste du problème de la poutre soudée

originale et avec une krigeage de haute précision. Cependant le second calcul, qui est basé sur la librairie "UQLAB", est meilleur pour les cas où le budget fixé est plus faible. Par contre il n'a pas atteint le même niveau de précision qui a été atteint par le krigeage du premier calcul. Ces résultats montrent que la taille du DOE n'est pas le seul facteur qui pilote la performance de notre EGO, il y a d'autres facteurs comme l'outil de krigeage utilisé, les paramètres de krigeage et le choix des configurations du calcul.

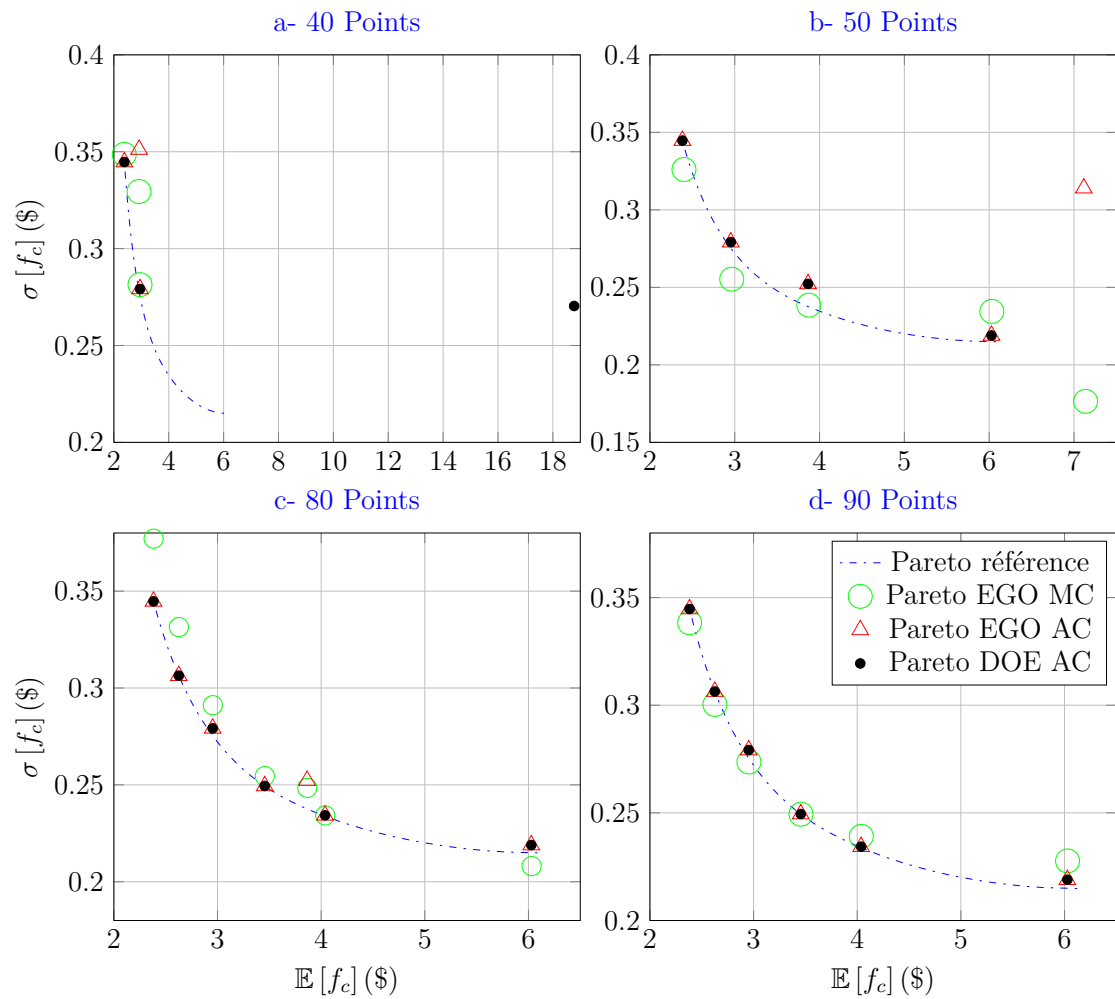


FIGURE 4.4 – Le front de Pareto du problème RDO de la poutre soudée construit en utilisant l’algorithme EGO-robuste et en utilisant les configurations du second calcul.

4.4 Application à un procédé d'emboutissage

La démarche EGO-Robuste a été également appliquée sur une application d'emboutissage. Avant de présenter les résultats de EGO-Robuste, nous allons décrire cette application dans cette section.

4.4.1 Présentation du procédé d'emboutissage

On considère le cas d'un emboutissage profond en forme de "U" de la figure 4.6, d'une tôle en acier à haute limite d'élasticité de type DP780. Ce type d'acier est sujet à d'important "retour élastique" après sa mise en forme. Dans les procédés d'emboutissage ces retours élastiques sont indésirables et conduisent à des défauts de forme variés (plissements, variation de forme par rapport à la forme imposée par les outillages etc..). La géométrie de ce cas test est simple mais elle permet de mettre en évidence l'importance des effets du retour élastique. Ce retour élastique dépend du matériau utilisé, de son état initial avant l'emboutissage et également des paramètres liés au procédé (coefficient de frottement, effort sur le serre-flan) ainsi que de la géométrie des outillages.

On étudie ici la configuration de la figure 4.5 servant de test pour les outils de simulation numérique de l'emboutissage, cette configuration est tirée d'un des "benchmark" de la conférence NUMISHEET 2011 [159].

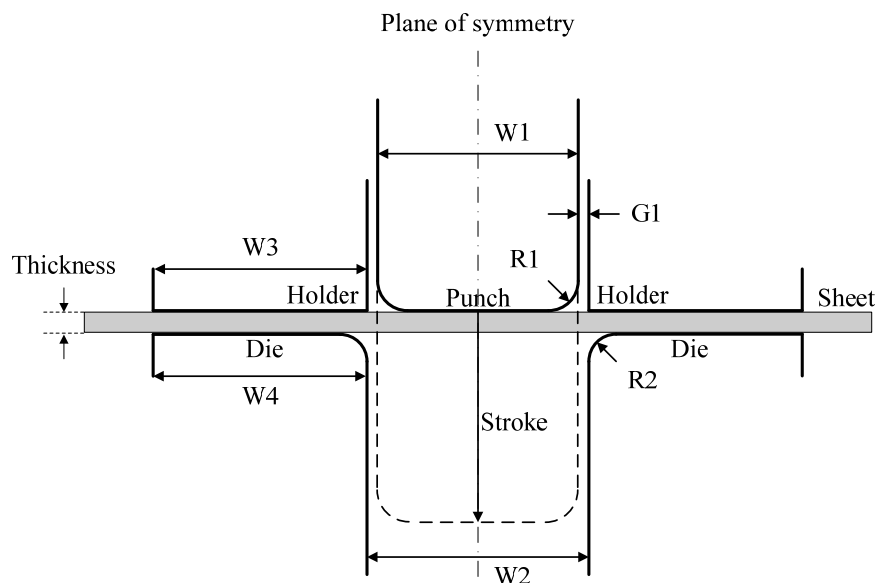


FIGURE 4.5 – Vue schématique de l'outillage de l'emboutissage profond.

Ce cas d'étude d'un emboutissage d'une forme simple d'une tôle type d'acier

Paramètres	W1	W2	W3	W4	R1	R2	G1	Stroke	Thickness
Dimensions [mm]	50,0	54,0	89,0	89,0	5,0	7,0	2,0	71,8	1,4

TABLEAU 4.4 – Dimension de l'outillage.

permet de mettre en évidence des phénomènes marqués de retour élastique après emboutissage. Ces phénomènes déforment la pièce (voir figure 4.6) et leur ampleur est très dépendante des conditions d'emboutissage (congés du poinçon et de la matrice, effort de serrage des serres flancs, lubrification, etc ..).

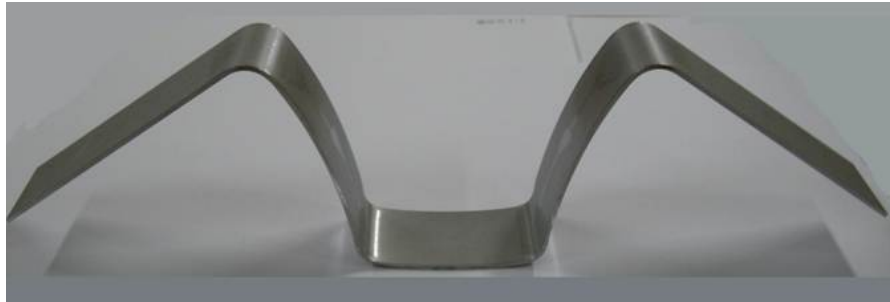


FIGURE 4.6 – Effet du retour élastique.

Pour étudier les effets du retour élastique, et quantifier ses effets, plusieurs mesures de la variation de forme ont été définies dans le cas test de la conférence NUMISHEET 2011 [159]. Le profil après retour élastique est représenté par des segments de droites et des arcs de cercle et les points A_i , B_i , C_i , D_i et E_i , $i = \{0, 1\}$ définis sur la figure 4.7 permettent de calculer les valeurs des 3 "mesures" : 2 angles β_1 et β_2 et un rayon de courbure ρ .

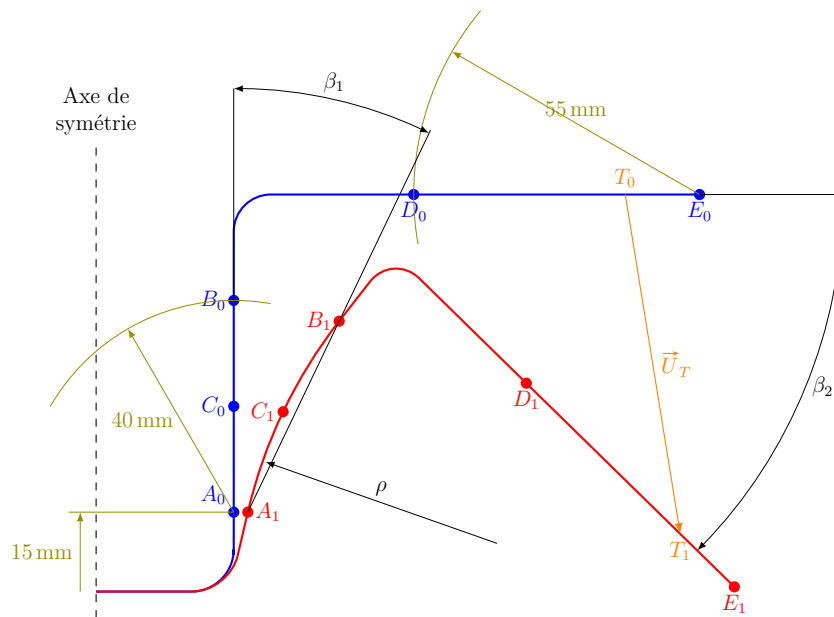


FIGURE 4.7 – Définition des mesures du profil après retour élastique.

A ces paramètres de forme β_1 , β_2 et ρ , nous ajoutons un paramètre représentant la distance $\|\vec{U}_T\|$ entre un point "fictif" sur le profil idéal (donc imposé par la forme des outils) et ce même point sur le profil après retour élastique. Ce point fictif pourrait être, par exemple, le centre d'un perçage permettant de fixer ce profil dans un produit. On exprime ainsi un besoin fonctionnel au delà des considérations sur la forme du profil lui-même. On peut en effet considérer, qu'après emboutissage, un profil d'une forme légèrement différente du profil idéal, puisse néanmoins convenir dans la mesure où la distance $\|\vec{U}_T\|$ reste dans les tolérances fixées par un cahier des charges fonctionnel.

4.4.2 Modèle de simulation

Description

Modélisation par éléments finis La géométrie des outillages et celle de la tôle présente deux plans de symétrie, les plans $[Y, Z]$ et $[X, Z]$ de la figure 4.8. On ne considérera donc qu'un quart de la géométrie de la tôle et des outillages dans ce modèle.

- La tôle est discrétisée par un maillage de 1935 éléments coques à 4 nœuds S4R avec 7 points d'intégration sur l'épaisseur. Une condition de symétrie est appliquée sur la moitié du profil de la tôle dans laquelle la translation le long de l'axe X, les rotations autour des axes Y et Z sont bloquées.

- Les outillages, (matrice, poinçon et serre-flan) ne sont pas discrétisés mais représentés par des surfaces analytiques dans Abaqus et sont donc considérés comme rigides. Le déplacement du poinçon et du porte-flan est une translation selon l'axe Z , les autres degrés de liberté sont bloqués. La matrice est complètement encastrée.
- La force du serre-flan reste constante pendant le procédé d'emboutissage.

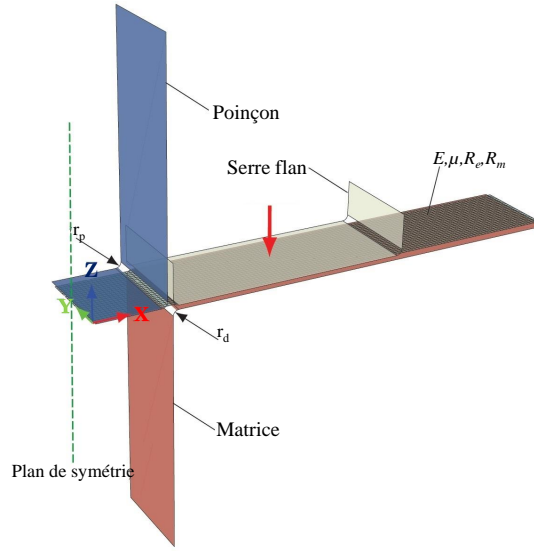


FIGURE 4.8 – Modèle des éléments finis d'emboutissage en U

Le frottement entre les outils et la tôle est basé sur un modèle de Coulomb. Dans la forme de base du modèle de frottement de Coulomb, deux surfaces de contact peuvent porter des contraintes de cisaillement avant qu'elles ne commencent à glisser l'une par rapport à l'autre. Le modèle de frottement de Coulomb est défini par :

$$\tau_{crit} = \mu p \quad (4.12)$$

où τ_{crit} est la contrainte de cisaillement critique à laquelle le glissement des surfaces commence, p la pression de contact entre les surfaces et μ est le coefficient de frottement entre la tôle et les outillages.

Loi de comportement Le comportement de l'acier DP780 sera modélisé comme un comportement élastoplastique de type Swift [160], avec un critère de plasticité $f(\bar{\sigma}, \varepsilon_p)$ utilisant une norme de contrainte $\bar{\sigma}$ de Hill'48 [161] permettant de traduire l'anisotropie du comportement des tôles d'acier laminées.

Le critère $f(\bar{\sigma}, \varepsilon_p)$ s'écrit :

$$f(\bar{\sigma}, \varepsilon_p) = \bar{\sigma} - R(\varepsilon_p) \quad (4.13)$$

Avec :

$$\bar{\sigma}^2 = F(\sigma_{YY} - \sigma_{ZZ})^2 + G(\sigma_{XX} - \sigma_{ZZ})^2 + H(\sigma_{XX} - \sigma_{YY})^2 + \dots \quad (4.14)$$

$$2L\sigma_{YZ}^2 + 2M\sigma_{XZ}^2 + 2N\sigma_{XY}^2$$

et :

$$R(\varepsilon_p) = K(\varepsilon_p + \varepsilon_0)^n \quad (4.15)$$

Dans ces relations K est une constante et n est le coefficient d'érouissage, ε_0 et ε_p sont la pré-déformation et déformation plastique équivalente, respectivement. Les constantes F, G, H, L, M, N sont les six paramètres scalaires qui caractérisent l'état d'érouissage anisotrope $\bar{\sigma}$ en fonction des composantes des contraintes $\sigma_{XX}, \sigma_{YY}, \sigma_{ZZ}, \sigma_{XY}, \sigma_{YZ}, \sigma_{XZ}$ dans le repère de la figure 4.8. Dans ce repère on a :

- X : la direction de laminage,
- Y : la direction perpendiculaire à la direction de laminage,
- Z : la direction normale au plan de la tôle

Les 6 constantes de la relation (4.14) peuvent être déterminées à l'aide d'essais de traction et de cisaillement, en utilisant le coefficient de Lankford pour caractériser l'anisotropie de la tôle. Pour l'acier DP780 de cet exemple on utilisera les valeurs fournies dans le tableau 4.5. De même à partir des caractéristiques du DP780,

Coefficient	F	G	H	L	M	N
DP780	0.4640	0.5615	0.4385	1.5000	1.5000	1.5926

TABLEAU 4.5 – Constante matérielle pour le critère anisotrope de Hill 48 [162]

module d'Young, limite élastique et à la rupture, allongement à rupture on peut aisément identifier les paramètres K, n, ε_0 de la loi de Swift, de la relation (4.15). Le tableau 4.6 récapitule les valeurs utilisées.

La simulation du procédé complet est réalisée en deux étapes :

1. L'emboutissage avec le solveur dynamique explicite d'Abaqus-CAETM avec une vitesse de poinçon de 1 mm s^{-1} pour un déplacement total du poinçon de 78,1 mm.
2. Le retour élastique avec le solveur en statique implicite en ayant pris soin de retirer les outils avant de démarrer cette étape de simulation.

Paramètres	Valeurs
Module de Young E	198,8 GPa
Coefficient de poisson ν	0,3
Densité	7800 kg/m ³
La constante K	1278,793 MPa
Coefficient d'écroutissement n	0,142
Pré-déformation ε_0	0,0027
Limite élastique R_e	550 MPa
Résistance à la rupture	840 MPa
Allongement uniforme	13,1 %
Coefficient de frottement	0,1

TABLEAU 4.6 – Données du matériaux DP780 [162].

Ces deux simulations du procédé nécessitent environ 1h45-1h50 de calculs parallélisés sur 4 cœurs cadencés à 2.9GHz.

Validation du modèle

Dans la référence Numisheet 2011 [162], les mesures expérimentales sont rapportées pour la configuration des outils de tableau 4.4 et pour les paramètres du procédé suivant :

- Effort du serre-flan $F_{BHF} = 2,49$ kN.
- Coefficient de frottement outil/tôle : $\mu = 0.1$.

La figure 4.9 montre le profil mesuré et le profil issu de la simulation numérique après retour élastique. On constate le bon accord entre les résultats de la simulation et les mesures expérimentales disponibles.

Calculs des paramètres de forme du profil après retour élastique

A partir des coordonnées des nœuds du maillage de la tôle après retour élastique, on peut aisément obtenir les valeurs des paramètres de forme du profil β_1 , β_2 , ρ . Ce calcul est réalisé avec un code MATLAB, qui lit des fichiers de sortie des nœuds du maillage déformé, fourni par ABAQUS.

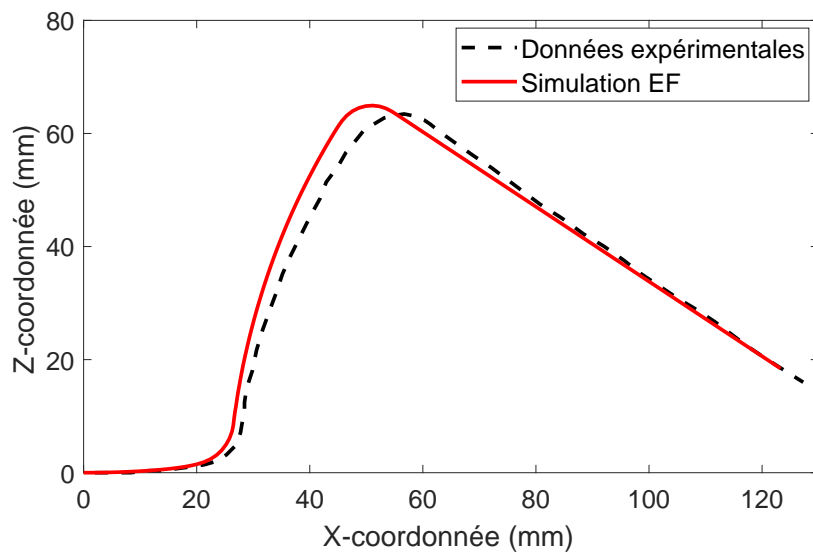


FIGURE 4.9 – Comparaison le modèle de simulation EF et des mesures expérimentales de Numisheet 2011[162].

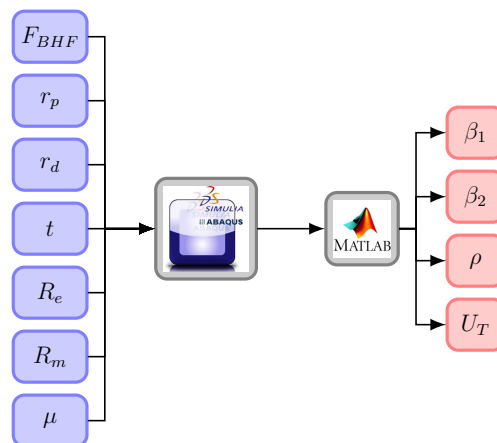


FIGURE 4.10 – Calcul des mesures du retour élastique à partir des résultats de la simulation par éléments finis.

Finalement le modèle de simulation peut être vu comme une "boite noire" avec en entrée les 7 paramètres du tableau 4.7 permettant de piloter le modèle et en sortie les 3 paramètres de forme du profil et la distance $\|\vec{U}_T\|$.

Nom	Paramètre	Unité
Effort du serre-flan	F_{BHF}	[kN]
Rayon matrice	r_d	[mm]
Rayon poinçon	r_p	[mm]
Épaisseur de la tôle	t	[mm]
Limite élastique acier de la tôle	R_e	[MPa]
Limite à rupture de la tôle	R_m	[MPa]
Coeff. de friction outils/tôle	μ	[]

TABLEAU 4.7 – Liste des paramètres d’entrée du modèle de simulation, paramètres dont les valeurs sont modifiables.

4.4.3 Formulation du problème d’optimisation robuste

Identification des variables et de la fonction objectif

A partir du modèle de simulation décrit précédemment, le problème d’optimisation robuste peut être formulé de plusieurs manières. Ici on supposera que le contexte de cette étude impose le choix du matériau, ici un acier DP780 et l’épaisseur de la tôle utilisée. Par conséquent on peut considérer les paramètres t , R_e , R_m comme fixés. On supposera également, qu’en pratique, il est difficile de maîtriser les valeurs du coefficient de friction entre la tôle et les outillages. Finalement sur les 7 paramètres le contexte de l’étude nous permet d’établir que :

- Les 4 paramètres t , R_e , R_m et μ sont des paramètres environnementaux.
- Les 3 paramètres F_{BHF} , r_d et r_p peuvent être des variables de conception (donc du problème d’optimisation).

Ce problème d’optimisation a déjà fait l’objet de travaux antérieurs [163]. Dans ces travaux le problème a été abordé en contexte déterministe, et il est montré sur la base de plans d’expériences numériques que :

- Les valeurs optimales de l’effort sur le serre-fan F_{BHF} , sont supérieurs à 3,15 kN.
- Le rayon du poinçon r_p a très peu d’influence sur le retour élastique après simulation.

Dans ces travaux, on a pu également déterminer les bornes de l’intervalle des valeurs du rayon r_d permettant de limiter les effets du retour élastique. Finalement, on adoptera une formulation avec 2 variables de conception et les 5 paramètres environnementaux et avec les valeurs données dans le tableau 4.8.

Le critère à minimiser, donc la fonction objectif du problème, sera celui de la distance $\|\vec{U}_T\|$. On pourra considérer dans ce problème d’optimisation des fonctions

Nom	Paramètres	Unité	Valeurs
Variabes			
Effort du serre-flan	F_{BHF}	[kN]	[3.15, 9]
Rayon matrice	r_d	[mm]	[2, 3.95]
Paramètres environnementaux			
Rayon poinçon	r_p	[mm]	5
Épaisseur de la tôle	t	[mm]	1,4
Limite élastique acier de la tôle	R_e	[MPa]	550
Limite à rupture de la tôle	R_m	[MPa]	840
Coeff. de friction outils/tôle	μ	[]	0,1

TABLEAU 4.8 – Variables et paramètres environnementaux de la formulation adoptée pour le problème d'optimisation

contraintes exprimant une limite sur valeurs de paramètre de forme β_1 , β_2 et ρ , garantissant que, même si la distance $\|\vec{U}_T\|$ est minimale, voire nulle, la forme du profil ne soit pas trop éloignée du profil idéal.

Dans une première approche on se limitera au cas d'un problème sans fonctions contrainte pour simplifier l'étude.

Modélisation des incertitudes

Pour simplifier l'étude on fait le choix de ne pas associer d'incertitude aux paramètres environnementaux. Dans le cas de notre étude cela nécessiterait un plan d'expériences sur les 2 variables de conception et les 5 paramètres environnementaux. Pour balayer cet espace à 7 dimensions avec une précision raisonnable, cela nécessiterait un nombre très importants de simulations.

Pour le rayon de la matrice r_d on choisit de représenter les incertitudes par une loi normale centrée avec un écart type fixe :

$$\sigma [\tilde{r}_d] = 0,005 \text{ mm}$$

Pour l'effort du serre-flan F_{BHF} , en s'appuyant sur les précisions de capteurs d'effort couramment disponibles soit $\pm 0,5\%$, on fera le choix ici d'une loi normale centrée, avec un écart type proportionnel à la valeur de moyenne de F_{BHF} :

$$\sigma [\tilde{F}_{BHF}] = \frac{0,005}{3} \mathbb{E} [\tilde{F}_{BHF}]$$

Les valeurs de $\mathbb{E} [\tilde{F}_{BHF}]$ et $\mathbb{E} [\tilde{r}_d]$ sont égales aux valeurs déterministes de F_{BHF} et r_d respectivement.

Le problème traité dans ce travail est le problème RDO de cette application, sa formulation est donnée dans (4.16)

$$\begin{aligned}
& \text{Minimiser : } \mathbb{E} [U_T(\tilde{\mathbf{x}})], \sigma [U_T(\tilde{\mathbf{x}})] \\
& \text{Sous : } 3000 \leq \mathbb{E} [\tilde{F}_{BHF}] \leq 9000 \\
& \quad 2 \leq \mathbb{E} [\tilde{r}_d] \leq 4 \\
& \text{Tel que : } \tilde{\mathbf{x}} = \{\tilde{F}_{BHF}, \tilde{r}_d\}
\end{aligned} \tag{4.16}$$

4.4.4 Méta-modèle haute fidélité

Le coût de calcul pour ce problème étant significatif, nous avons profité des résultats de nos travaux antérieurs [163] pour construire une méta-modèle haute fidélité à partir d'un plan d'expérience assez dense, sur les 2 variables de conception en utilisant le domaine de variation du tableau 4.8. Nous avons ainsi réparti 1000 évaluations du modèle de simulation selon la grille de la figure 4.11, avec un pas beaucoup plus fin dans la zone d'intérêt du domaine (zone comprise entre $r_d = 2$ mm et $r_d = 2,2$ mm), celle qui contient les valeurs minimales de la distance $\|\vec{U}_T\|$.

La librairie "UQLAB" [157] est utilisée pour construire le métamodèle du krigeage remplaçant U_T , la construction du métamodèle est effectuée par les configurations prises par défaut dans "UQLAB". Une fonction de corrélation ellipsoïdale de la famille Matérn 5/2 est utilisée, l'optimisation des hyper-paramètres de krigeage est effectuée par un algorithme génétique hybride. Le métamodèle obtenue est donné dans la figure 4.12. Dans la suite ce modèle est considéré la référence des calculs effectués, on lui associe la nomenclature "**le modèle de référence**".

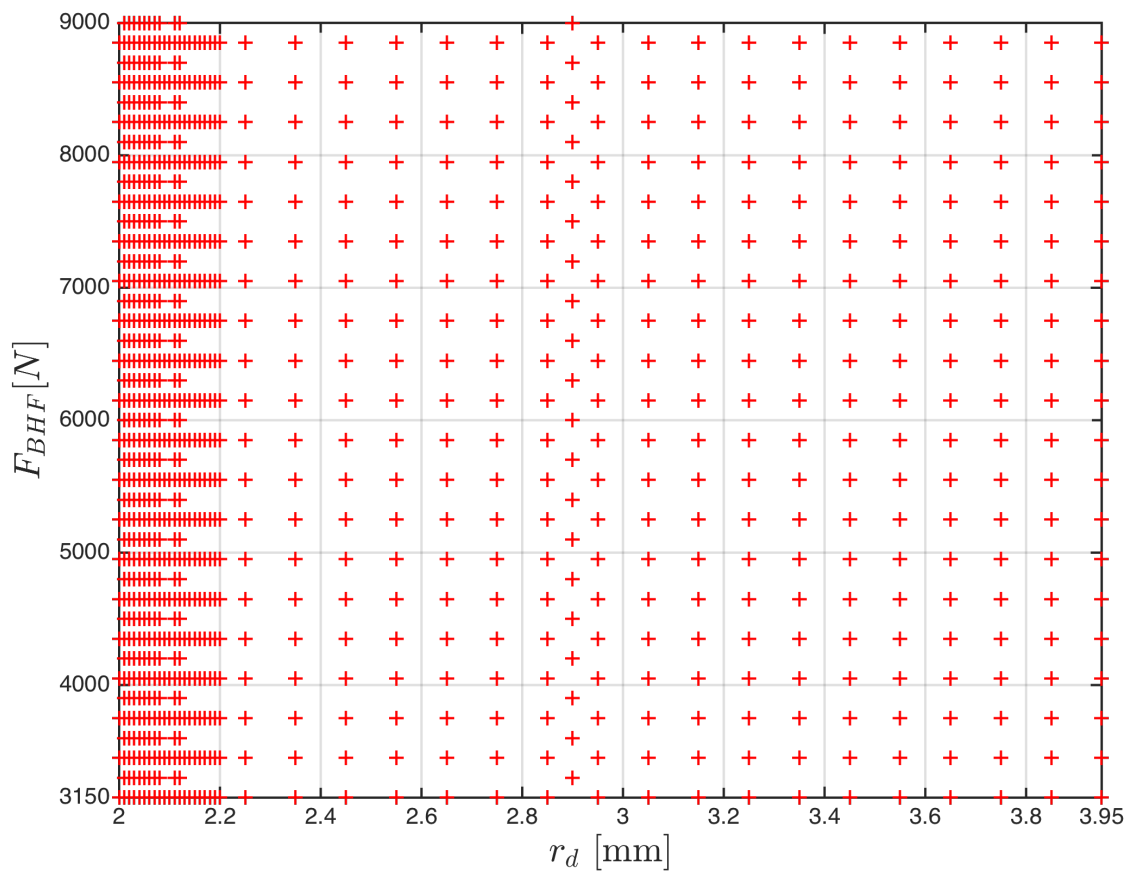


FIGURE 4.11 – Répartition des 1000 simulations numériques dans le domaine des variables de conception r_d , F_{BHF} .

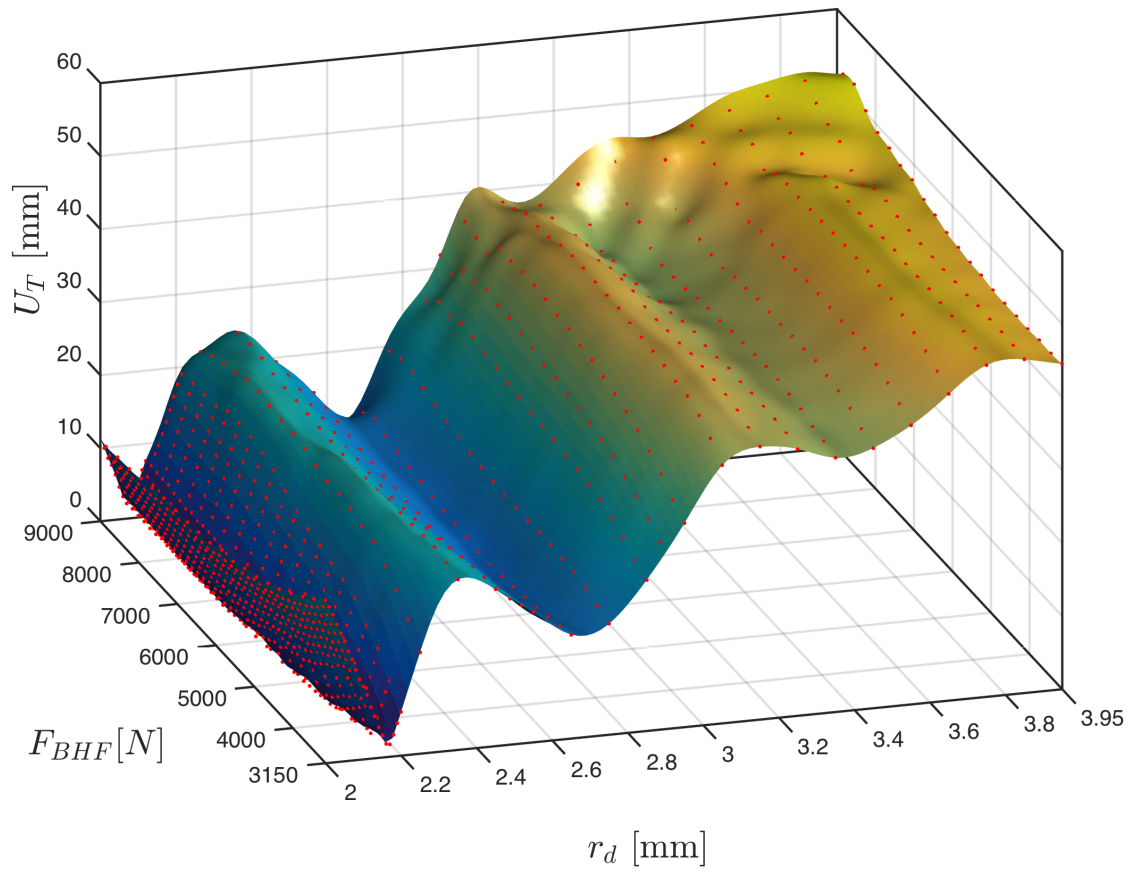


FIGURE 4.12 – Réponse du méta-modèle de Krigage haute fidélité

4.5 Application de EGO-Robuste sur le problème d'emboutissage

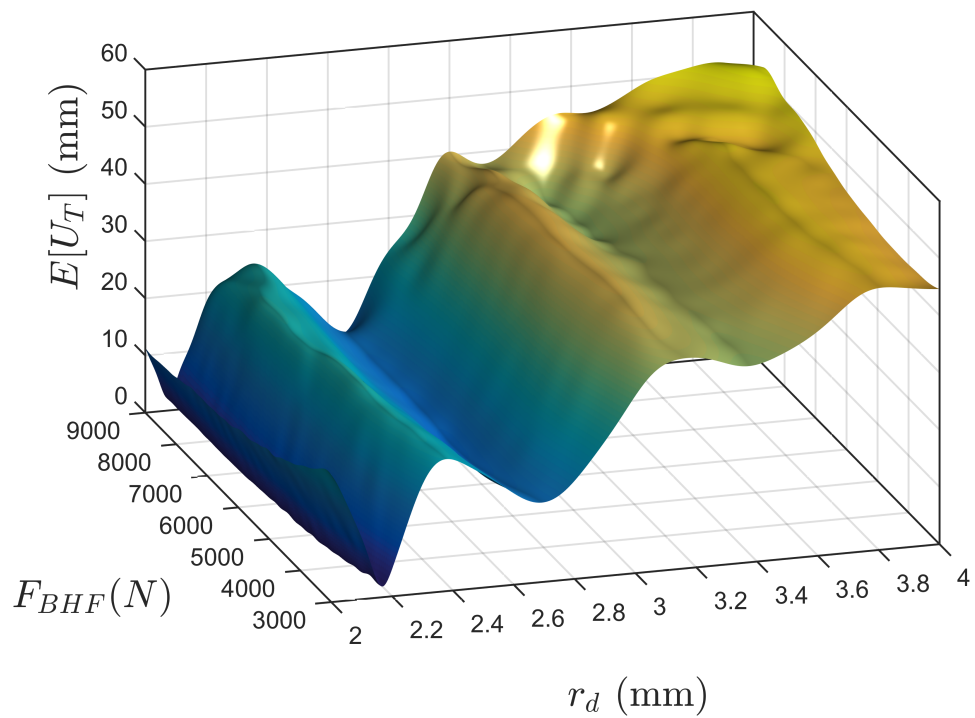
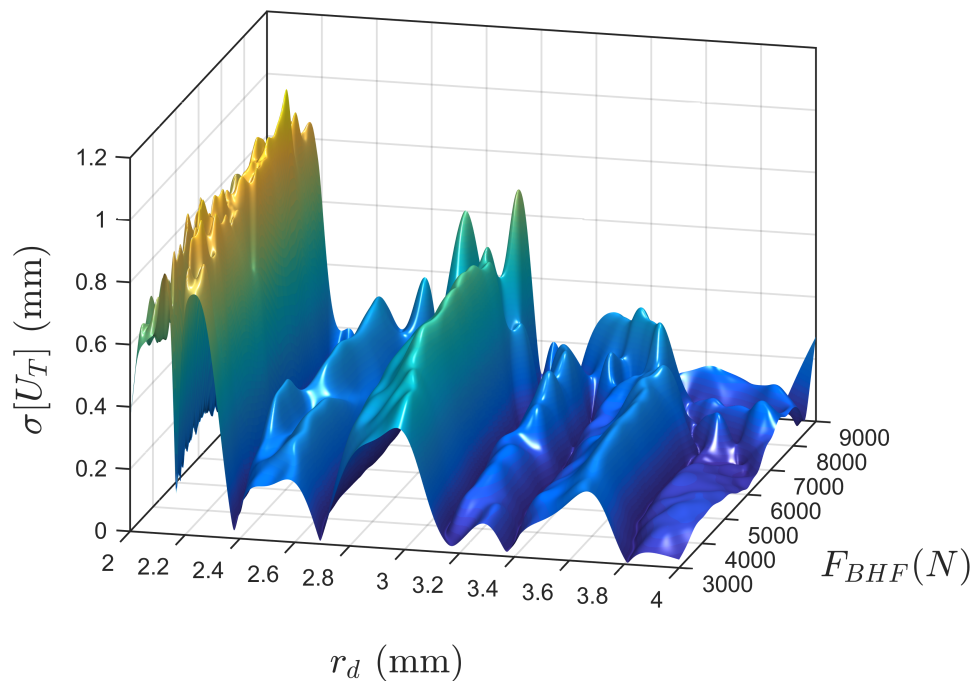
La démarche EGO-Robuste est appliquée pour résoudre le problème RDO (4.16) de cette application d'emboutissage.

4.5.1 Calcul de l'espérance et l'écart type sur le modèle de référence

L'espérance et l'écart type de U_T sont calculés pour 1×10^6 échantillons en mode "full factoriel" du domaine des 2 variables en utilisant le modèle de référence. L'espérance $\mathbb{E}[U_T]$ et l'écart type $\sigma[U_T]$ sont estimés pour chacun de ces échantillons avec un second échantillonnage de Monte-Carlo de types CRN de taille $n_s = 1 \times 10^3$, ces grandeurs sont représentées sur les figures 4.13 et 4.14 respectivement. Ce calcul a nécessité 22 heures avec un échantillonnage de MC de type CRN et $n_s = 1 \times 10^3$, soit $n_s = 1 \times 10^9$ évaluations du modèle de référence. Si une simulation de Monte-Carlo plus riche est souhaitée, le temps de calcul augmente proportionnellement. Par exemple pour $n_s = 1 \times 10^4$, le temps de calcul durerait environ 8 jours. Les deux figures montrent la complexité du problème traité, l'espérance possède une forme non linéaire avec plusieurs minimums locaux. La figure 4.14 présente la forte non linéarité de l'écart-type, ainsi cette fonction comporte un très grand nombre de minimas locaux. La forme de l'espérance $\mathbb{E}[U_T]$ qui est tracé sur la figure 4.13 est très similaire à la forme de la valeur déterministe de U_T de la figure 4.12. Par contre la forme de l'écart type $\sigma[U_T]$ est très différente de celle de la fonction U_T déterministe.

Cette différence de forme met en relief l'enjeu de notre algorithme EGO qui est basé sur l'estimation de l'espérance et de l'écart type en utilisant un métamodèle unique construit sur la fonction déterministe. Notamment l'estimation de l'écart type qui nécessite un DOE riche autour du point dont on souhaite calculer son écart type, contrairement à l'espérance dont la prédiction peut être efficace à partir de la valeur déterministe du modèle remplacé sur le point DOE correspondant, notamment si les incertitudes associées aux paramètres du métamodèle sont assez faibles en comparaison des valeurs déterministes.

L'image du domaine des variables dans l'espace des objectifs est tracée sur la figure 4.15, cette figure montre aussi le front de Pareto du problème RDO. Ce front de Pareto, **considéré comme référence**, est obtenu par la recherche des points dominants dans l'espace des critères $\mathbb{E}[U_T]$ et $\sigma[U_T]$ des 1×10^6 échantillons. Cette figure montre la complexité de ce front de Pareto qui est discontinu, et réparti sur un large domaine.

FIGURE 4.13 – L'espérance $\mathbb{E}[U_T]$ tracée en fonction des variables du problème.FIGURE 4.14 – L'écart type $\sigma[U_T]$ tracée en fonction des variables du problème.

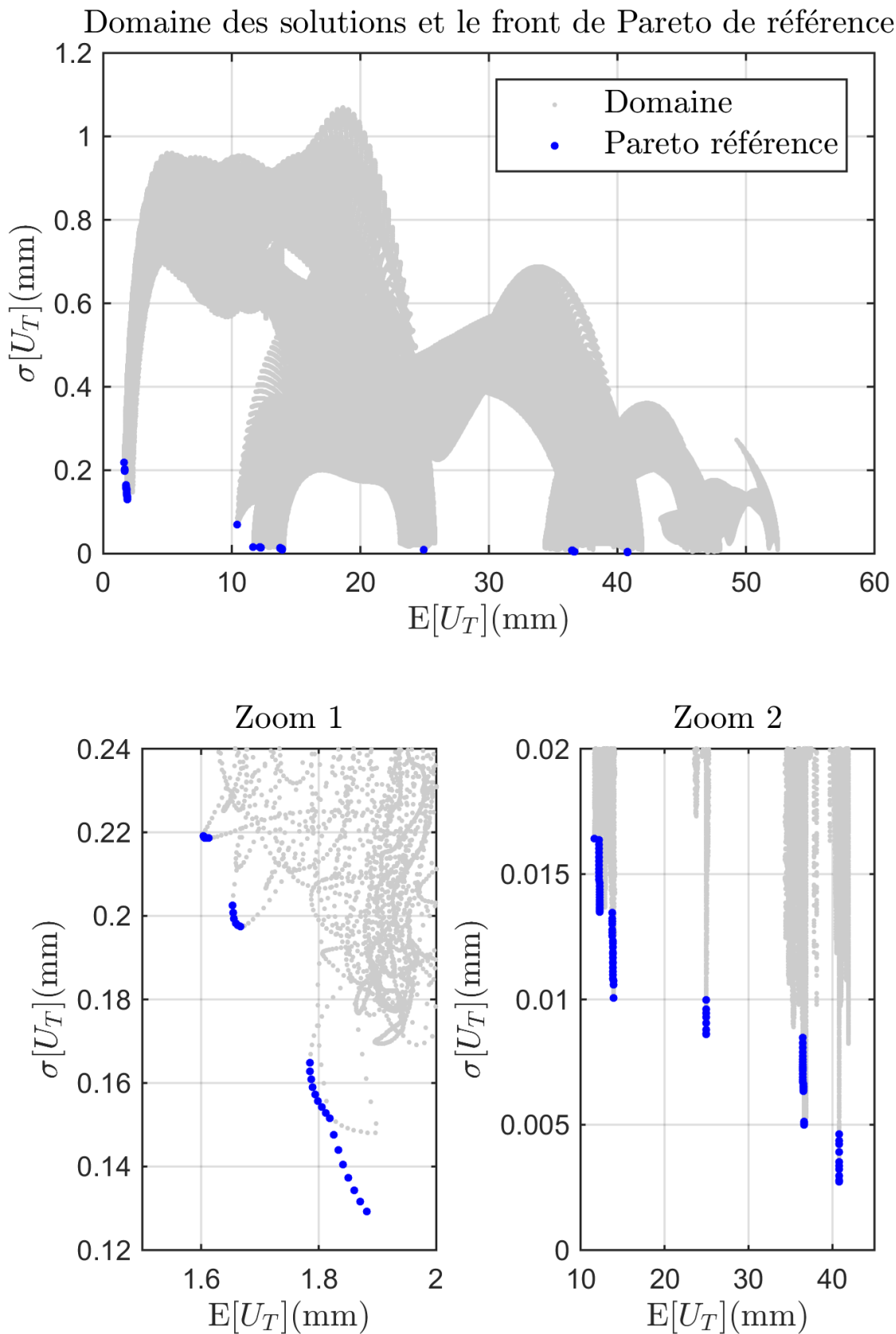


FIGURE 4.15 – Image du domaine des variables dans le domaine des objectifs $E[U_T]$ - $\sigma[U_T]$.

4.5.2 Optimisation du modèle de référence avec l'algorithme NSGAI

La méthode utilisée pour construire le front de Pareto de référence de la figure 4.15 n'est pas applicable sur les problèmes possédant un grand nombre de variables. En effet le nombre d'évaluations nécessaires pour garder une densité constante de points, augmente exponentiellement avec la dimension du problème.

La détection du front de Pareto exact est presque impossible par les techniques d'optimisation dédiées aux problèmes fortement non linéaires, comme nous l'avons déjà expliqué dans la section 2.1. Les algorithmes déterministes risquent de tomber dans des minimas locaux, et les algorithmes stochastiques se rapprochent du front de Pareto exact mais ils ne garantissent pas la détection du front de Pareto exact.

Pour illustrer cette difficulté, nous avons résolu ce problème biobjectif en appliquant l'algorithme NSGAI [36] qui est un des algorithmes multiobjectifs les plus efficaces et les plus utilisés. L'optimisation est lancée avec un nombre de population égale à 100 pour 500 générations. Les calculs sont faits sur le modèle de référence (celui de la figure 4.12). Les fonctions objectifs à minimiser, l'espérance $\mathbb{E}[U_T]$ et l'écart type $\sigma[U_T]$, sont estimées avec échantillonnage de Monte-Carlo de types CRN de taille $n_s = 1 \times 10^3$. La figure 4.16 montre que le front de Pareto obtenu par NSGAI. Il est représenté par les losanges noirs et s'approche du front de référence, mais l'algorithme ne capture qu'un petit nombre de points du front de référence.

Ces résultats montrent aussi que l'algorithme NSGAI n'a pas pu explorer certaines zones, notamment les zones du front de référence qui sont dans la voisinage de $\mathbb{E}[U_T] = 25$, la zone limitée par $40 \leq \mathbb{E}[U_T] \leq 42$ et celle située vers $\mathbb{E}[U_T] \approx 10$. Ils montrent la complexité du front de Pareto de ce problème, qui n'est détecté que partiellement par l'algorithme NSGAI appliqué au modèle de référence sans méta-modélisation.

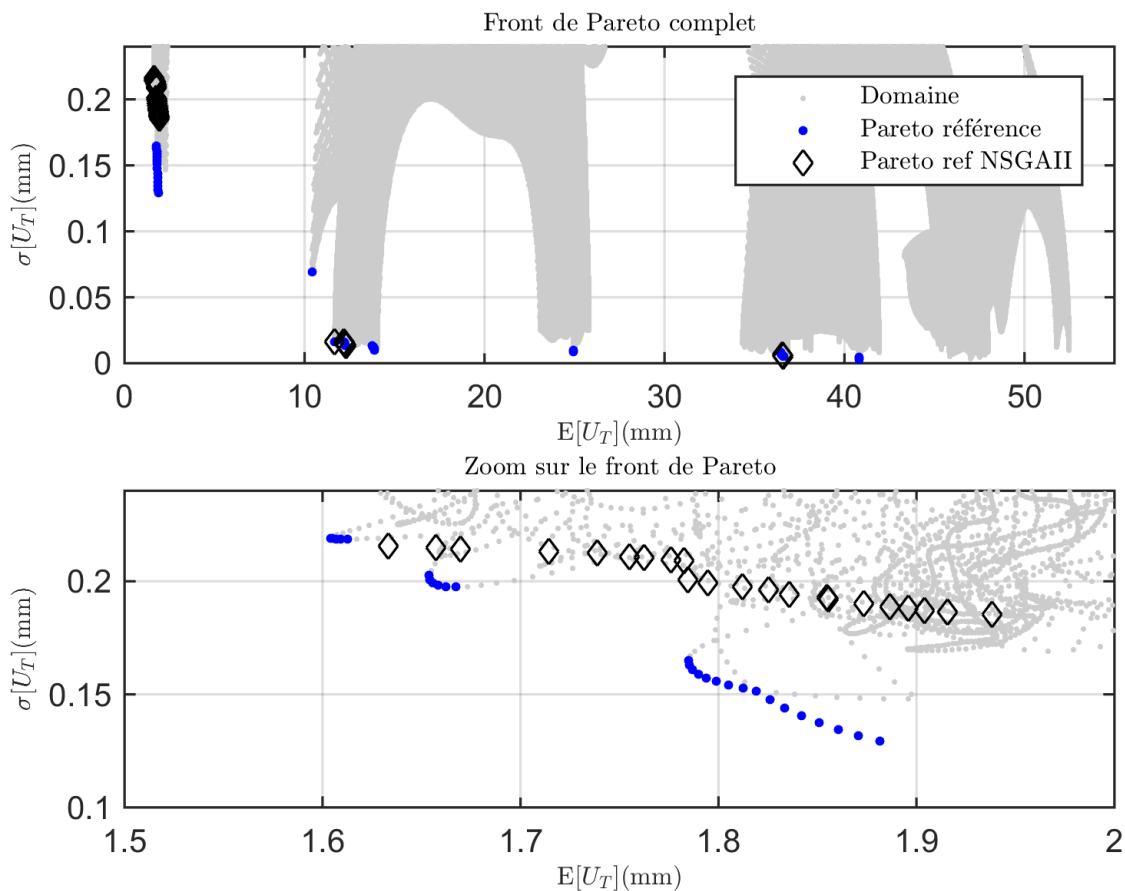


FIGURE 4.16 – Les fronts de Pareto construits par l'optimisation (NSGAI) et par la méthode de balayage en se basant sur le modèle de référence

4.5.3 Application de EGO-Robuste

La démarche utilisée sur le problème de la poutre soudée, est appliquée sur ce problème d'emboutissage. Nous avons effectué plusieurs essais pour trouver la meilleure configuration de EGO-Robuste. Dans les paragraphes suivants nous comparons les différentes configurations afin de choisir la meilleure. Afin de mieux comparer les résultats du front de Pareto, nous les comparons de deux manières :

1. La première manière est qualitative, nous comparons les différents fronts de Pareto en utilisant leurs représentations graphiques.
2. La deuxième manière est quantitative, nous calculons les valeurs des indicateurs *Inverted generational distance* (IGD) [164] et *Hypervolume* (HV) [165] pour chaque front de Pareto construit.

L'indicateur IGD calcule la distance minimale entre le front de Pareto de référence et le front de Pareto à évaluer, un $IGD = 0$ correspond au front de

référence, donc le meilleur front de Pareto sera celui qui possède la valeur de IGD la plus faible. Au contraire l'indicateur HV est un indicateur à maximiser, il mesure la portion de l'espace des objectifs dominée par un front de Pareto donné.

Nous ne voulons pas entrer dans les détails de ces indicateurs, nous les utilisons uniquement, les calculs de ces indicateurs sont effectués en se basant sur la plateforme MATLAB [166]. Habituellement, ces indicateurs sont utilisés pour comparer des fronts de Pareto produits par plusieurs méthodes d'optimisation mais à partir d'un même problème d'optimisation, donc d'un même modèle. Par contre dans notre cas, chaque front de Pareto est obtenu à partir d'une métamodèle différent puisque ce métamodèle évolue à chaque itération de l'algorithme. Nous proposons donc d'utiliser deux valeurs pour chaque indicateur IGD et HV :

- Les deux premières valeurs sont calculées en se basant sur le front de Pareto calculé par le métamodèle obtenu à l'issue de chaque optimisation. Ces indicateurs sont représentés par IGD (meta) et HV (meta).
- Les secondes valeurs seront calculées sur les re-estimations des fronts de Pareto sur le même modèle qui est le modèle de référence de figure 4.12, ces valeurs sont représentées par IGD (ref) et HV (ref).

Les indicateurs IGD (ref) et HV (ref) sont plus judicieux pour comparer deux fronts de Pareto parce qu'ils sont calculés sur le même modèle de référence. De même, il est possible d'obtenir des valeurs parfaites de IGD (meta) et HV (meta) avec des fronts de Pareto mauvais, dans le cas d'une mauvaise estimation de l'écart type et de l'espérance par le métamodèle.

Afin de mieux comparer les résultats, nous avons tracés plusieurs ensembles de points (des fronts de Pareto ou autres) sur toutes les figures de cette section. Les significations de chaque ensemble de points tracé avec leurs identifiants et nomenclatures utilisés dans les légendes des figures sont résumés dans la liste suivante :

1. Points **gris** ("Domaine") : l'image du domaine des variables tracée dans l'espace des objectifs, c'est le même domaine tracé sur la figure 4.15.
2. Points **bleus** ("Pareto référence") : le front de Pareto de référence qui est construit sur le modèle de référence par la méthode de balayage, ce front de Pareto est tracé sur les figures 4.15
3. Cercles **verts** ("Pareto EGO krig") : Le front de Pareto construit par l'algorithme EGO-Robuste. Ces points représentent les résultats de l'algorithme EGO-Robuste.
4. Triangles **rouges** ("Pareto EGO ref") : L'ensemble des points obtenus par **re-estimation** des points de "Pareto EGO krig" en utilisant le **modèle de référence**, en utilisant la même méthode UP que celle utilisée pour "Pareto EGO krig". Il ne s'agit pas de construire un nouveau front de Pareto, mais

nous gardons les mêmes configurations dans l'espace des variables des points de "Pareto EGO krig", et nous recalculons leurs fonctions objectifs en utilisant le modèle de référence. Ces points reflètent la qualité de prédiction du krigeage (construit par EGO-Robuste) des valeurs de $\mathbb{E}[U_T]$ et $\sigma[U_T]$ de l'ensemble des points "Pareto EGO krig".

5. Étoiles **noires** ("Pareto DOE ref") : Dans ce cas il s'agit de construire un nouveau front de Pareto, c'est le front de Pareto **reconstruit** avec les points du DOE final uniquement et en calculant les fonctions objectifs par le **modèle de référence**, la méthode UP est la même que celle pour "Pareto EGO krig". Ces points reflètent la qualité du DOE final obtenu, et leur proximité avec le front de Pareto de référence.

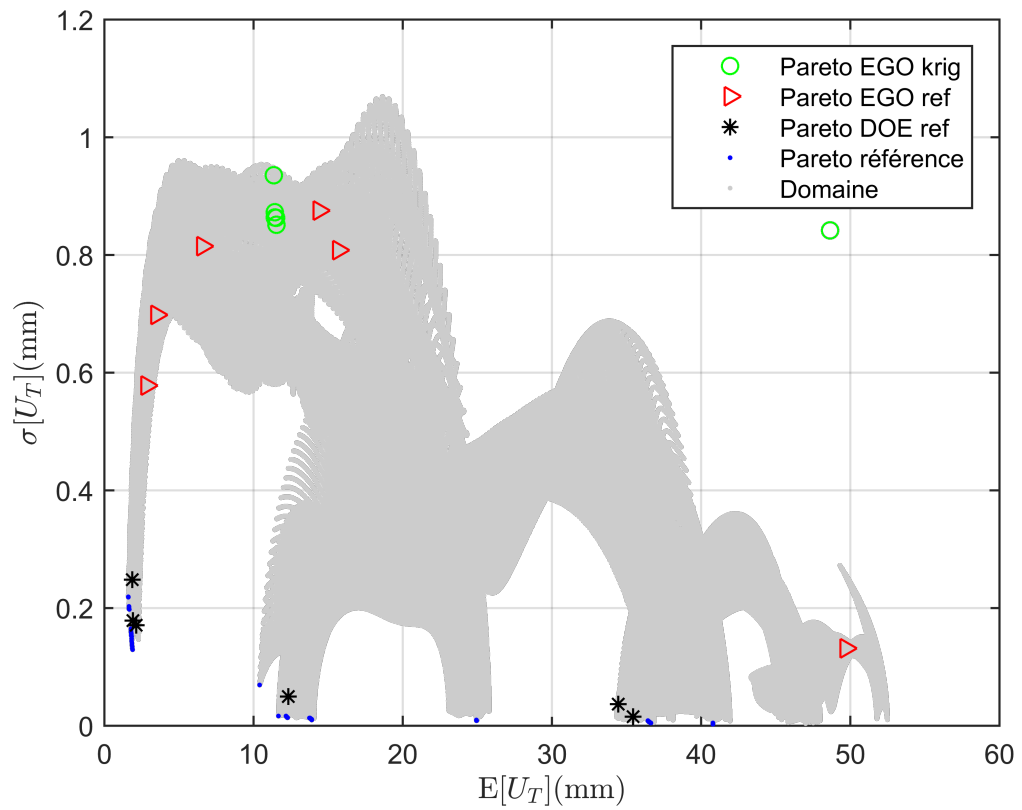
Choix de la librairie de krigeage et de la méthode de propagation des incertitudes

Tout d'abord, nous allons choisir la meilleure configuration de calcul du krigeage y compris la librairie de krigeage, la fonction de corrélation ainsi que la technique de propagation des incertitudes. Nous étudierons les deux configurations indiquées dans le tableau 4.9.

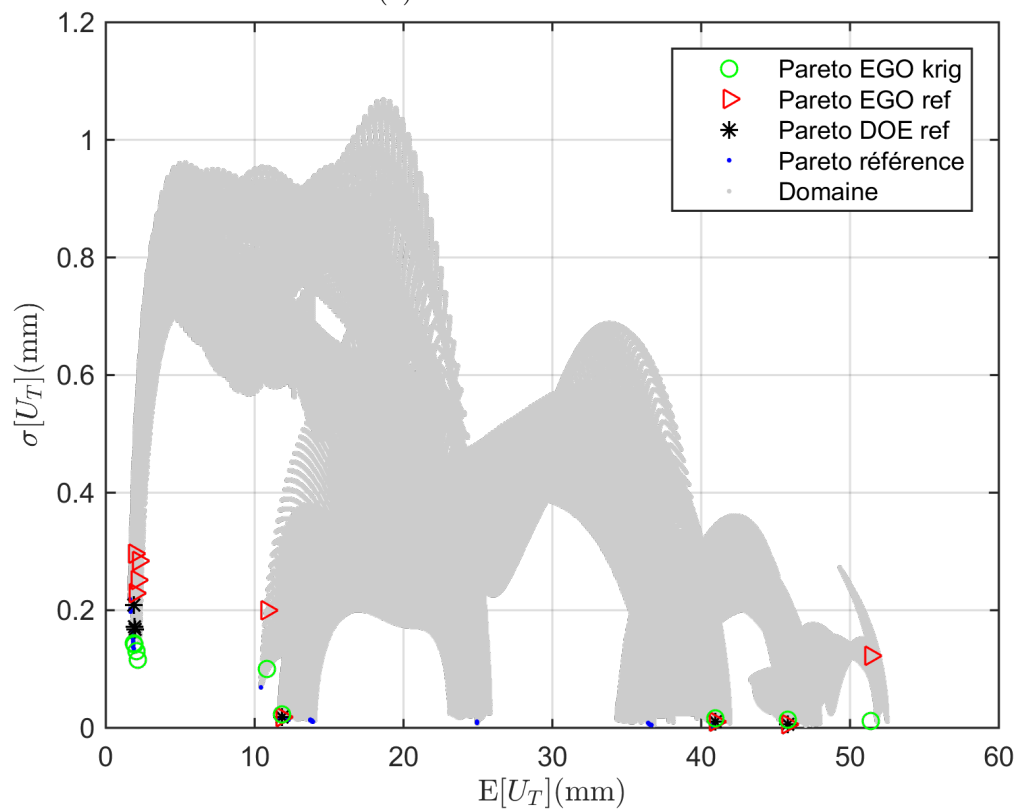
Paramètres	Configuration 1	Configuration 2
Librairie	DACE	UQLAB
Outil de UP pour <i>EI</i>	Taylor	MC (CRN)
Outil de UP pour Pareto	MC (CRN)	MC (CRN)
Échantillonnages de MC	$n_s = 1 \times 10^3$	$n_s = 1 \times 10^3$
Fonction de corrélation	Gaussienne	Ellipsoïdale (famille Matérn 5/2)

TABLEAU 4.9 – Comparaison entre les deux configurations de EGO-Robuste basés sur les librairies "UQLAB" et "DACE".

Pour la première configuration du tableau 4.9, nous avons utilisé la librairie "DACE", avec la méthode de Taylor pour propager les incertitudes dans le calcul des *EI*, et la méthode MC pour la dernière itération. Les résultats obtenus sont présentés dans la figure 4.17a. Ces résultats correspondent à un budget $n_{bd} = 200$ et un nombre initial de DOE $n_0 = 15$. La surface grisée représente l'image de l'espace des variables sur l'espace des objectifs. Cette surface permet de situer les solutions calculées dans l'image du domaine admissible dans l'espace des objectifs.



(a) Librairie "DACE"



(b) Librairie "UQLAB"

FIGURE 4.17 – Résultats de l'algorithme EGO-Robuste appliqué sur le problème d'emboutissage avec les librairies "DACE" et "UQLAB" et avec $n_{bd} = 200$ et $n_0 = 15$

Les résultats montrent que le krigeage construit par "DACE" est très mauvais. En effet on constate que sur la figure 4.17a, le front "DOE ref" est assez proche du Pareto de référence, ce qui montre que ce DOE final contient de nombreux points dans l'espace des variables qui sont proches des solutions de Pareto de référence. On constate également pour ce même DOE que les solutions dans l'espace des critères calculées par EGO-Robuste (front "EGO ref" et "EGO krig") sont assez éloignés du front "DOE ref" et que cet éloignement est dû à une très mauvaise prédiction de l'écart type par le krigeage fourni par la librairie "DACE".

Afin d'améliorer la qualité du krigeage construit, nous avons modifié la fonction de corrélation utilisée pour construire le krigeage. Nous avons utilisé les possibilités de la librairie "UQLAB", qui comporte plus de choix de configuration du krigeage que la librairie "DACE". Nous avons choisi une fonction de corrélation de type ellipsoïdale de la famille Matérn 5/2. Comme il a été déjà expliqué dans la section 4.3, l'utilisation de la méthode de Taylor n'est pas compatible avec le choix de "UQLAB", alors la méthode MC a été utilisée pour propager les incertitudes dans toutes les itérations ce qui augmente la durée de l'exécution de EGO. Cette configuration correspond à la seconde configuration du tableau 4.9.

Nous avons appliqué l'algorithme EGO-Robuste en utilisant cette seconde configuration sur le problème d'emboutissage et en gardant le même budget $n_{bd} = 200$ et le même $n_0 = 15$.

Les résultats correspondants sont présentés dans la figure 4.17b. Les résultats montrent la grande différence entre les deux fronts de Pareto des deux configurations. Cette deuxième configuration est clairement meilleure. L'EGO-Robuste de la deuxième configuration est capable d'explorer plusieurs zones de Pareto, même s'il existe certaines zones non explorées par notre EGO-Robuste (zones correspondant à $20 \leq \mathbb{E}[U_T] \leq 37$).

Finalement les résultats des deux configurations sont également comparés de manière plus quantitative en se basant sur les indicateurs IGD et HV. Les valeurs de IGD et de HV pour les fronts de Pareto des deux configurations et du Pareto de référence sont données dans le tableau 4.10. Les résultats des indicateurs valident les résultats comparés sur les deux figures. Les deux valeurs de IGD et de HV de la deuxième configuration sont significativement meilleures que celles de la première configuration.

Front de Pareto	IGD (meta)	IGD (ref)	HV(meta)	HV(ref)
Pareto référence	-	0	-	0.9973
Configuration 1 "DACE"	3.6819	0.9372	0	0
Configuration 2 "UQLAB"	0.105	0.1126	0.9499	0.8424

TABLEAU 4.10 – Les valeurs des indicateurs IGD et HV pour les différents fronts de Pareto construits dans les deux configurations ($n_{bd} = 200$, $n_0 = 15$) et pour le front de Pareto de référence

Après ces comparaisons, nous choisissons donc la deuxième configuration qui est basée sur la librairie "UQLAB" et à la méthode MC pour notre EGO-Robuste. Cette configuration sera utilisée dans tous les calculs de EGO-Robuste qui viennent ci-après, dont l'objectif est de déterminer le nombre de points initiaux du DOE n_0 et le budget n_{bd} .

Choix du nombre de points n_0 dans le DOE initial

Afin de choisir le meilleur n_0 , nous faisons trois calculs EGO-Robuste avec $n_{bd} = 200$ en choisissant trois autres valeurs de n_0 qui sont 5, 15 et 40. Les résultats qui correspondent au couple $n_{bd} = 200$ et $n_0 = 15$ sont représentés dans la figure 4.19.

Les résultats pour $n_0 = 5$ et $n_0 = 40$ sont représentés dans les figures 4.18 et 4.20 respectivement. Les résultats de la figure 4.18 montrent que la première zone qui correspond à $20 \leq \mathbb{E}[U_T] \leq 55$ n'est pas explorée par l'EGO-Robuste. Cependant la deuxième moitié de la figure est bien explorée et même mieux que celle de la configuration $n_{bd} = 200$ avec $n_0 = 15$ dans la figure 4.19. Cela peut s'expliquer par la mauvaise qualité de krigeage sur la première zone.

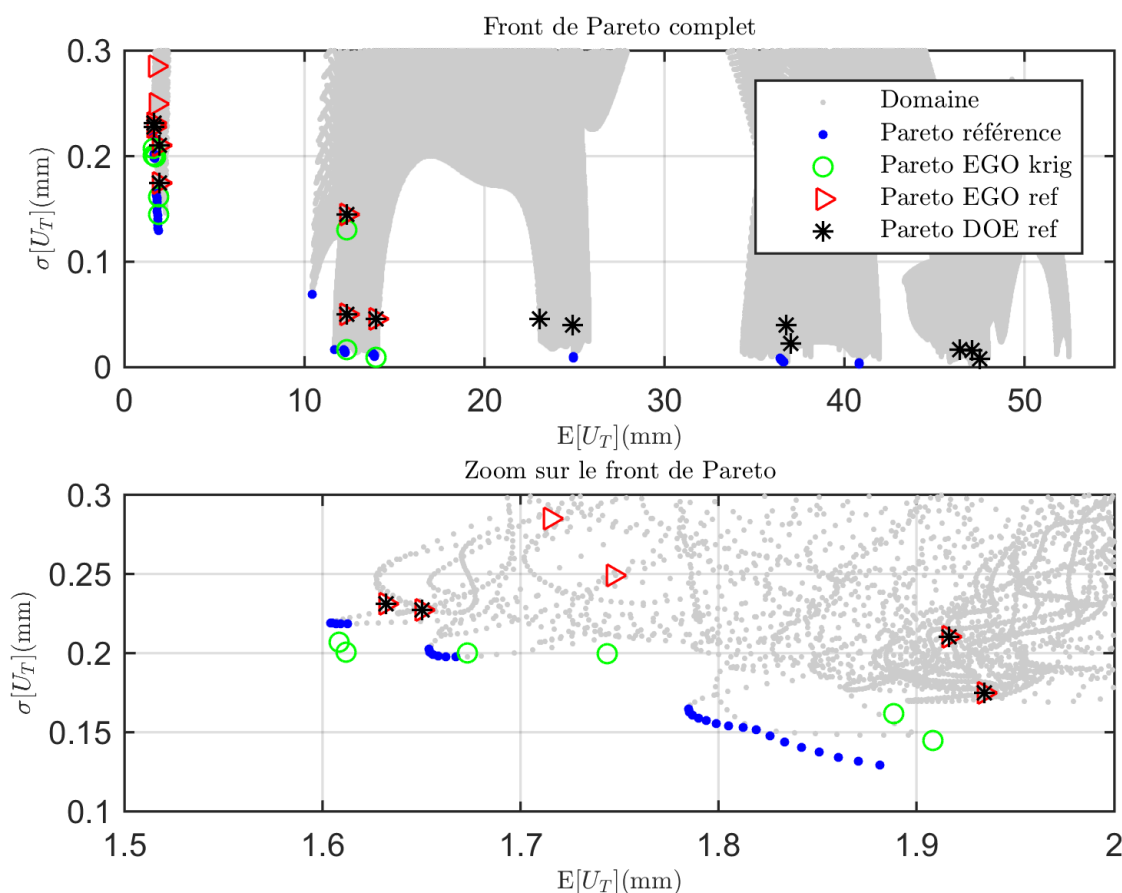


FIGURE 4.18 – Résultats de l'algorithme EGO-Robuste appliqué sur le problème d'emboutissage qui correspond à la seconde configuration avec $n_{bd} = 200$ et $n_0 = 5$

Les résultats pour le cas de $n_0 = 40$ sont tracés dans la figure 4.20. En comparant ces résultats avec ceux de la figure 4.19 qui correspond à la configuration $n_{bd} = 200$ avec $n_0 = 15$, on trouve que chacun des deux est meilleure sur une zone de Pareto. Les résultats de $n_0 = 15$ sont meilleurs que ceux de $n_0 = 40$ sur la zone qui correspond à $12 \leq \mathbb{E}[U_T] \leq 55$, alors que c'est le cas inverse pour la zone qui correspond à $0 \leq \mathbb{E}[U_T] \leq 12$.

Les indicateurs IGD et HV sont calculés pour les trois cas et présentés dans le tableau 4.11. Les indicateurs qui correspondent à $n_0 = 5$ sont les pires entre tous les trois, sauf l'indicateur HV (meta) qui est meilleur que celui de $n_0 = 15$, mais on ne va pas se baser uniquement sur cette valeur pour choisir la meilleure valeur de n_0 . On s'intéresse plutôt aux indicateurs de IGD (ref) et HV(ref) parce qu'ils sont les plus pertinents.

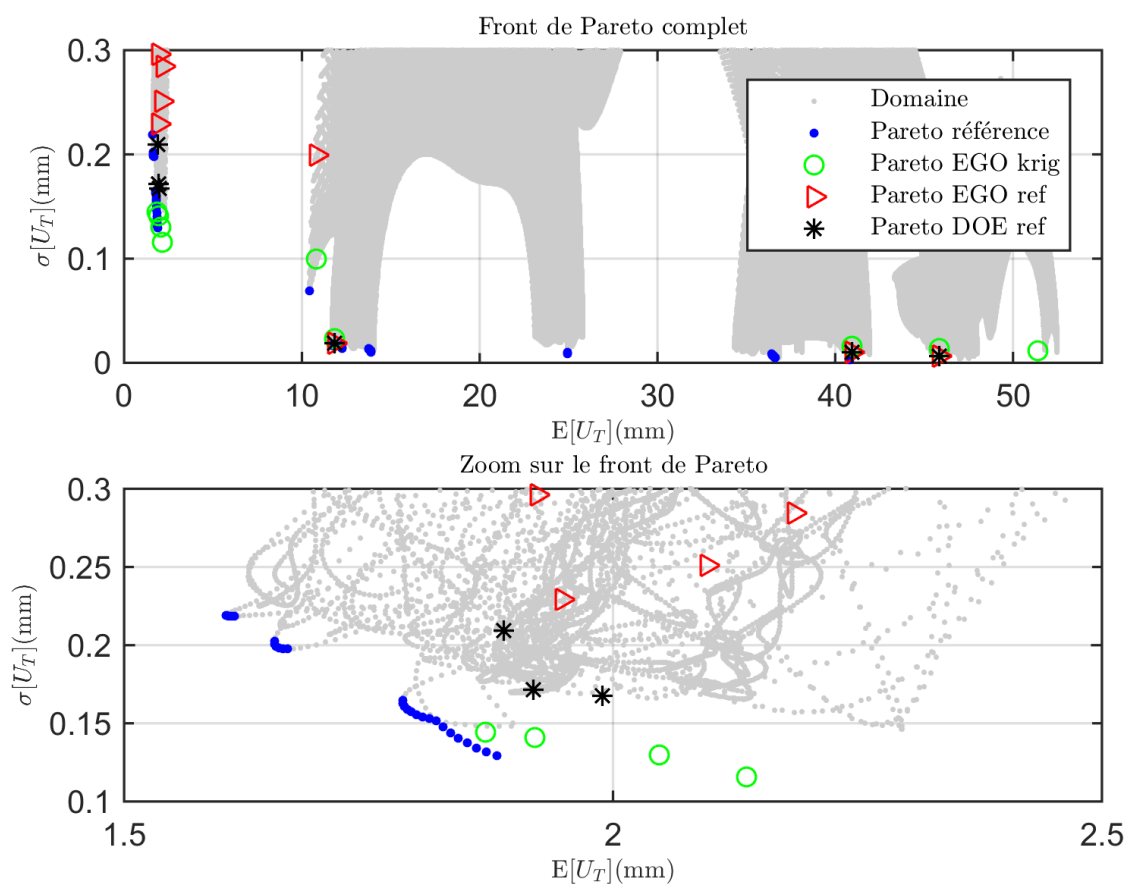


FIGURE 4.19 – Résultats de l'algorithme EGO-Robuste appliqué sur le problème d'emboutissage qui correspond à la seconde configuration avec $n_{bd} = 200$ et $n_0 = 15$

Pour les deux autres cas de n_0 , la valeur de IGD (ref) est meilleure pour le cas de $n_0 = 15$, tandis que la valeur de HV (ref) est meilleure pour $n_0 = 40$. Ces résultats reflètent l'état des deux fronts sur les figures que chacun est meilleur sur une zone

Nous allons utiliser le cas de $n_0 = 15$ pour les autres calculs effectués ci-après, parce que la zone où ce cas est meilleur est plus large que celle de $n_0 = 40$. En plus, un petit n_0 nous permet d'ajouter plus de points par enrichissement pour un même budget.

Front de Pareto	IGD (meta)	IGD (ref)	HV(meta)	HV(ref)
Pareto référence	-	0	-	0.9973
Pareto EGO $n_{bd} = 200$				
$n_0 = 5$	0.2124	0.2926	0.9566	0.7876
$n_0 = 15$	0.105	0.1126	0.9499	0.8424
$n_0 = 40$	0.0798	0.1234	0.9786	0.8838

TABLEAU 4.11 – Les valeurs des indicateurs IGD et HV pour les fronts de Pareto qui correspondent aux trois cas de n_0 et au front de Pareto de référence

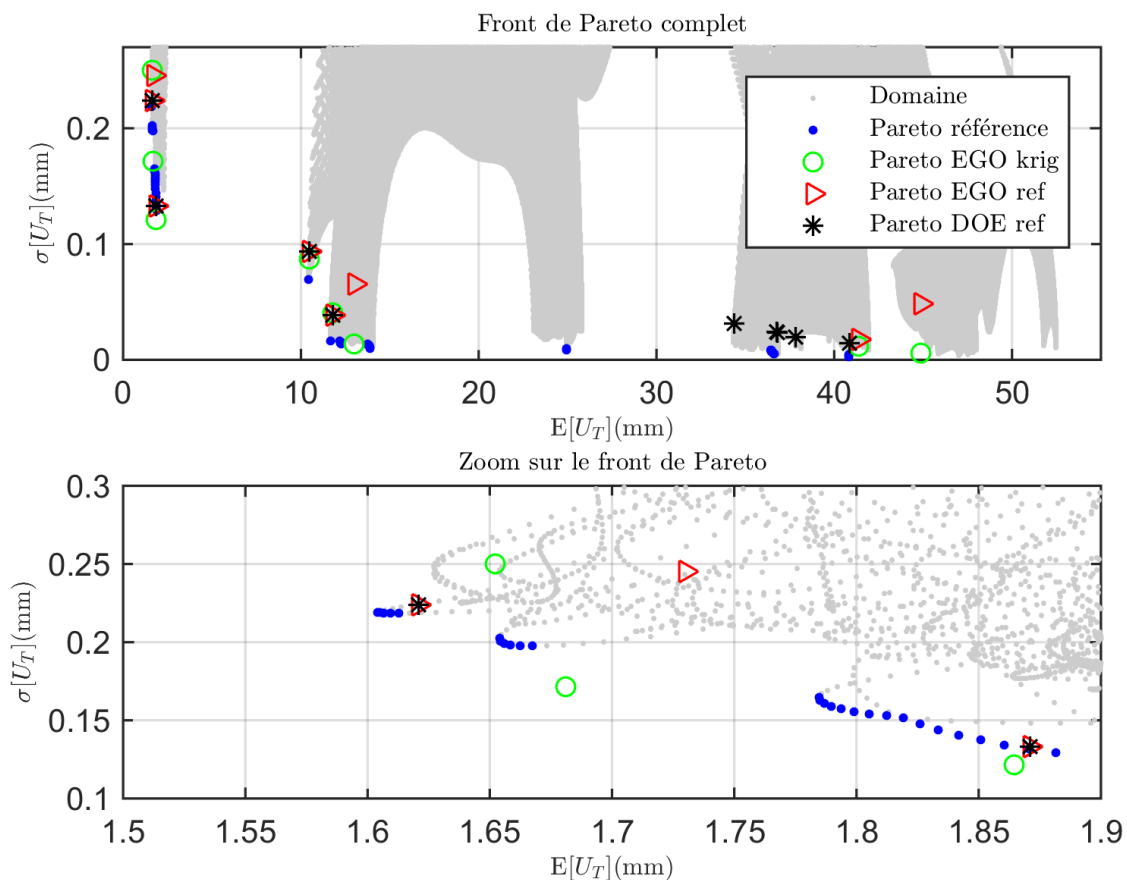


FIGURE 4.20 – Résultats de l'algorithme EGO-Robuste appliqué sur le problème d'emboutissage qui correspond à la seconde configuration avec $n_{bd} = 200$ et $n_0 = 40$

Choix de la taille du budget n_{bd}

Le dernier paramètre dont nous étudierons l'influence sur les résultats de EGO-Robuste, est le budget de simulations numériques. Pour ce problème d'emboutissage

nous comparons les résultats pour trois cas $n_{bd} = 100, 200$ et 300 . La valeur de n_0 est fixée à 15 dans tous les trois cas et nous utilisons, la deuxième configuration du tableau 4.9. Les résultats de $n_{bd} = 200$ sont déjà présentés dans la figure 4.19, les résultats qui correspondent à $n_{bd} = 100$ et $n_{bd} = 300$ sont donnés dans les figures 4.21 et 4.22 respectivement.

Les résultats montrent comment le front de Pareto est exploré par l'algorithme EGO-Robuste (cercles verts) et comment cette exploration s'améliore avec l'augmentation de la taille du DOE. De même pour la qualité de prédiction du krigeage construit qui s'améliore avec la taille du DOE pour finalement aboutir à des cercles et triangles et étoiles confondus dans plusieurs points pour $n_{bd} = 300$.

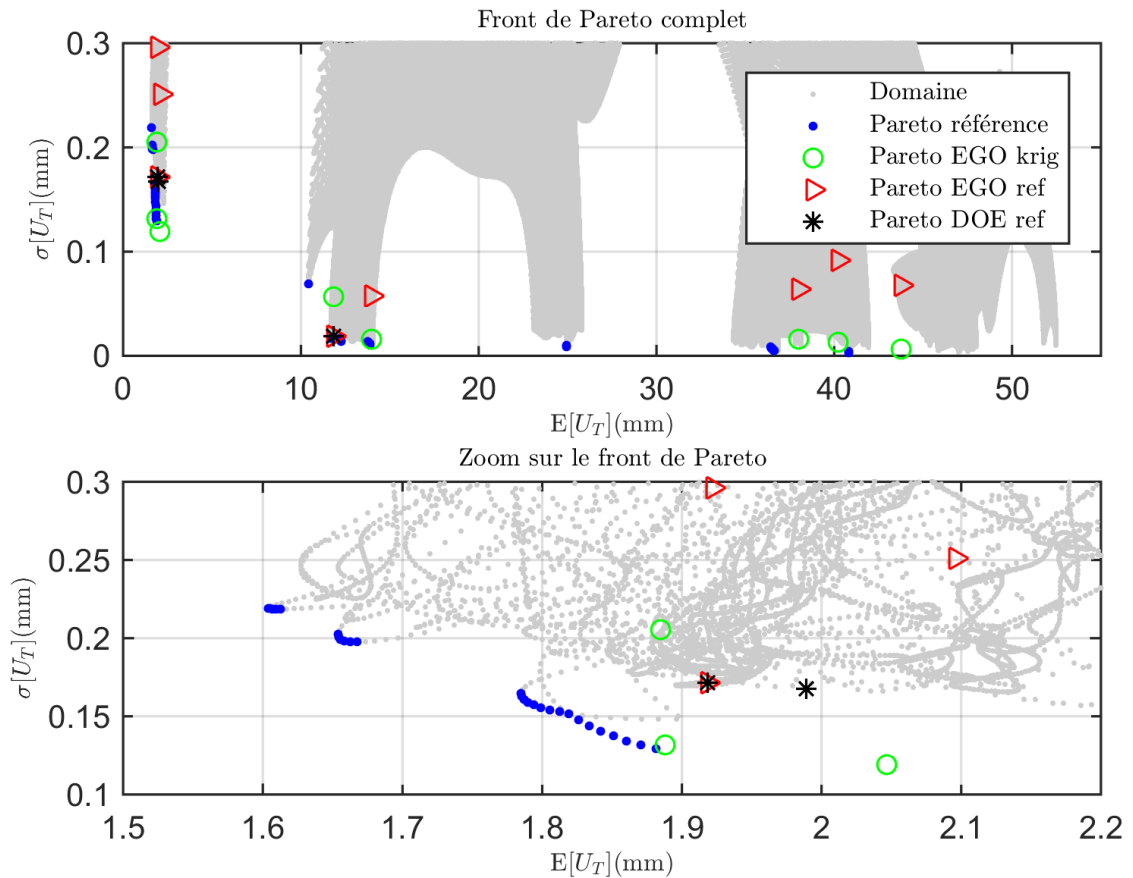


FIGURE 4.21 – Résultats de l'algorithme EGO-Robuste appliqué sur le problème d'emboutissage qui correspond à la second configuration avec $n_{bd} = 100$ et $n_0 = 15$

Les valeurs de IGD et de HV correspondantes sont données dans le tableau 4.12. Le front de Pareto qui correspond à $n_{bd} = 300$ admet la meilleure valeur de IGD (ref), par contre le cas de $n_{bd} = 100$ possède la plus grande valeur de HV (ref), malgré que les figures montrent clairement, la supériorité de $n_{bd} = 300$. Ces

résultats mettent en évidence la difficulté de quantifier la qualité d'un front de Pareto à partir d'une seule grandeur scalaire. Les scalaires peuvent approximer une caractéristique unique du front de Pareto telle que sa diversité ou sa dominance.

Front de Pareto	IGD (meta)	IGD (ref)	HV(meta)	HV(ref)
Pareto référence	-	0	-	0.9973
Pareto EGO $n_0 = 15$				
$n_{bd} = 100$	0.0622	0.1458	0.9592	0.8992
$n_{bd} = 200$	0.105	0.1126	0.9499	0.8424
$n_{bd} = 300$	0.0682	0.0962	0.8729	0.8457

TABLEAU 4.12 – Les valeurs des indicateurs IGD et HV pour les fronts de Pareto qui correspondent à $n_{bd} = 100, 200$ et 300 et du front de Pareto de référence.

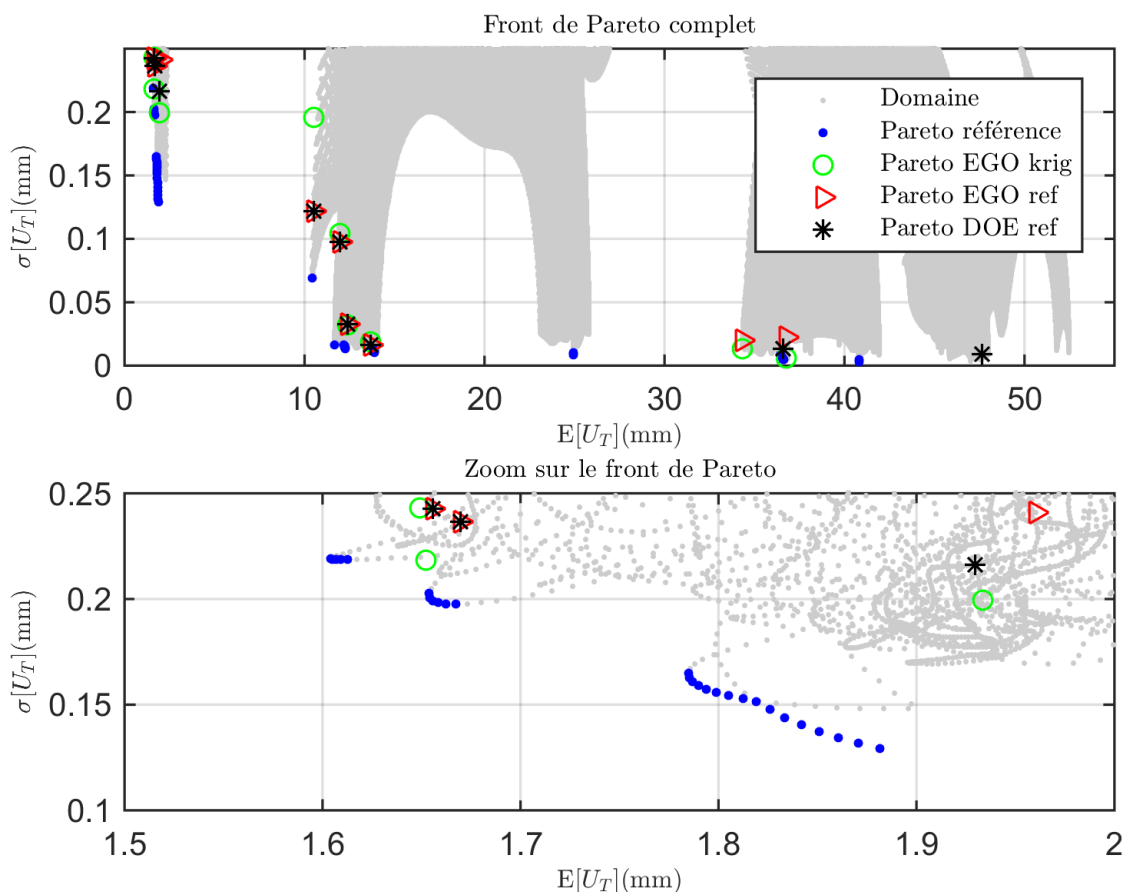


FIGURE 4.22 – Résultats de l'algorithme EGO-Robuste appliqué sur le problème d'emboutissage qui correspond à la second configuration avec $n_{bd} = 300$ et $n_0 = 15$

Après ces comparaisons, nous pouvons considéré que le cas que l'ensemble de $n_{bd} = 300$, $n_0 = 15$ et les paramètres de la deuxième configuration du tableau 4.9 est la meilleure configuration de EGO-Robuste.

4.5.4 Comparaison de EGO-Robuste avec l'approche classique d'optimisation

Les résultats de EGO-Robuste sont comparés à une approche classique d'optimisation avec des métamodèles. Cette approche classique ne contient aucun enrichissement du métamodèle, elle consiste à générer un DOE initial assez dense et à l'utiliser durant tout le processus d'optimisation. Cette approche classique est appliquée sur ce problème en construisant plusieurs métamodèles qui remplacent le modèle déterministe de U_T , ces métamodèles sont basés sur des DOE de type LHS avec un nombre de points variant entre 100 et 1000 points. Les métamodèles sont ensuite utilisés pour résoudre le problème RDO biobjectif $\mathbb{E}[U_T] - \sigma[U_T]$. L'optimisation est effectuée en utilisant un algorithme NSGAI, l'optimisation est lancée avec un nombre de population égale à 100 et 500 générations. La méthode MC avec 1000 échantillons de type CRN est utilisée pour propager les incertitudes.

Dans les deux sections suivantes, nous présentons les figures de comparaison des deux approches, et dans la dernière section nous comparons les valeurs des indicateurs IGD et HV des front de Pareto de chaque approche.

Les figures représentées dans cette section contiennent, en plus des représentations introduites dans la section 4.5.3, deux nouveaux ensembles de points, identifiés dans la liste suivante :

1. Triangles en **cyan** ("Pareto sans EGO krig") : Le front de Pareto construit par une **approche classique** d'optimisation d'un méta-modèle construit sur un DOE identique, sans enrichissement au cours des itérations de l'optimisation.
2. Triangles en **magenta** ("Pareto sans EGO ref") : L'ensemble des points obtenus par **re-estimation** des points de "Pareto sans EGO krig" en utilisant le **modèle de référence**, avec la même méthode UP que celle utilisée pour "Pareto EGO krig". Ces points reflètent la qualité de prédiction du krigeage (construit sans EGO) des valeurs de $\mathbb{E}[U_T]$ et $\sigma[U_T]$ de l'ensemble des points "Pareto sans EGO krig".

Comparaison de EGO-Robuste avec une approche classique pour un DOE de même taille

Premièrement, les résultats des trois cas de EGO-Robuste, déjà analysés dans la section 4.5.3 ($n_{bd} = \{100, 200, 300\}$ et $n_0 = 15$), sont comparés individuellement

avec les résultats de l'approche classique possédant le même budget, comme il est indiqué dans le tableau 4.13

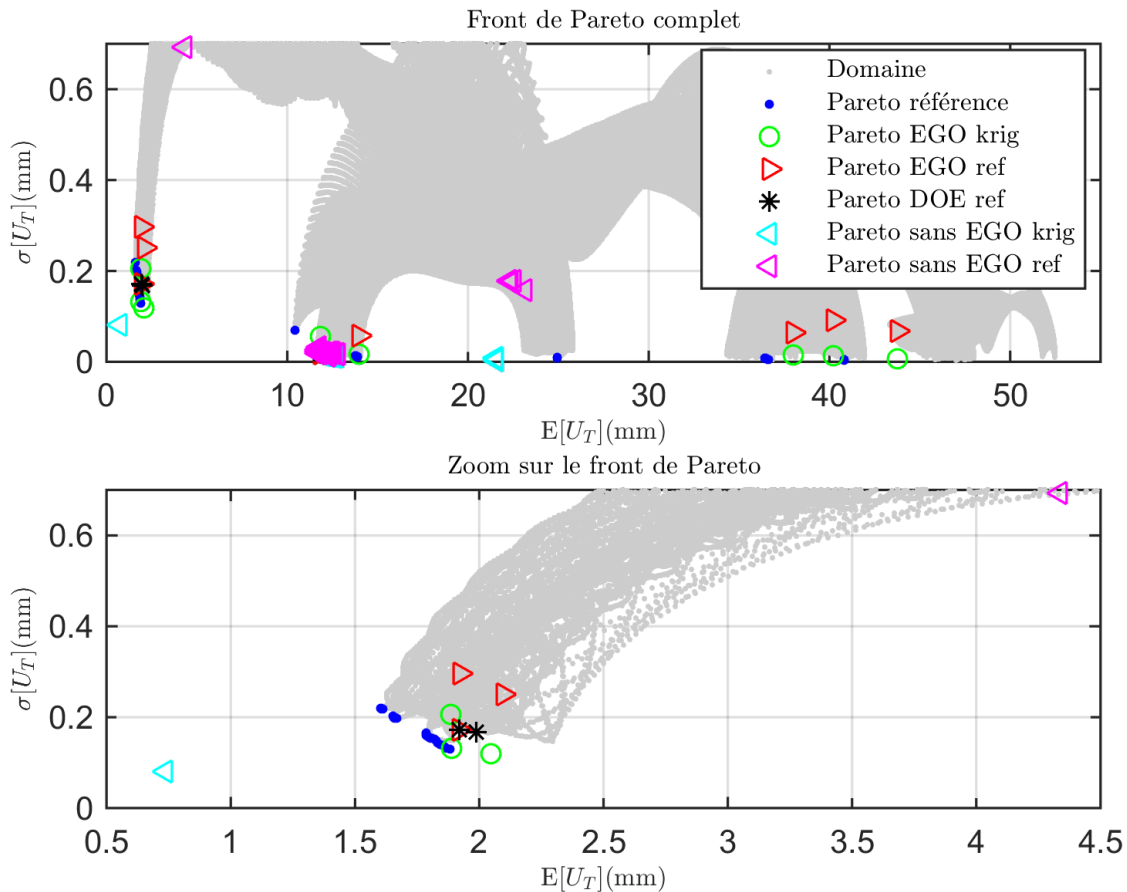


FIGURE 4.23 – Comparaison entre le front de Pareto construit sans EGO avec $n_{lhs} = 100$ et le front de Pareto de EGO-Robuste ($n_{bd} = 100$).

Approche EGO-Robuste	Approche classique	Figure correspondante
$n_{bd} = 100, n_0 = 15$	$n_{lhs} = 100$	Figure 4.23
$n_{bd} = 200, n_0 = 15$	$n_{lhs} = 200$	Figure 4.24
$n_{bd} = 300, n_0 = 15$	$n_{lhs} = 300$	Figure 4.25

TABLEAU 4.13 – Les comparaisons effectuées entre les deux approches EGO-Robuste et classiques avec des budgets similaires et les figures correspondantes

Les résultats sont présentés sur les figures 4.23, 4.24 et 4.25. Ces figures montrent que l'ajout des points DOE d'une manière adaptative est plus efficace que l'approche

classique. On constate également une meilleure qualité de prédiction de l'espérance et de l'écart types dans les trois cas.

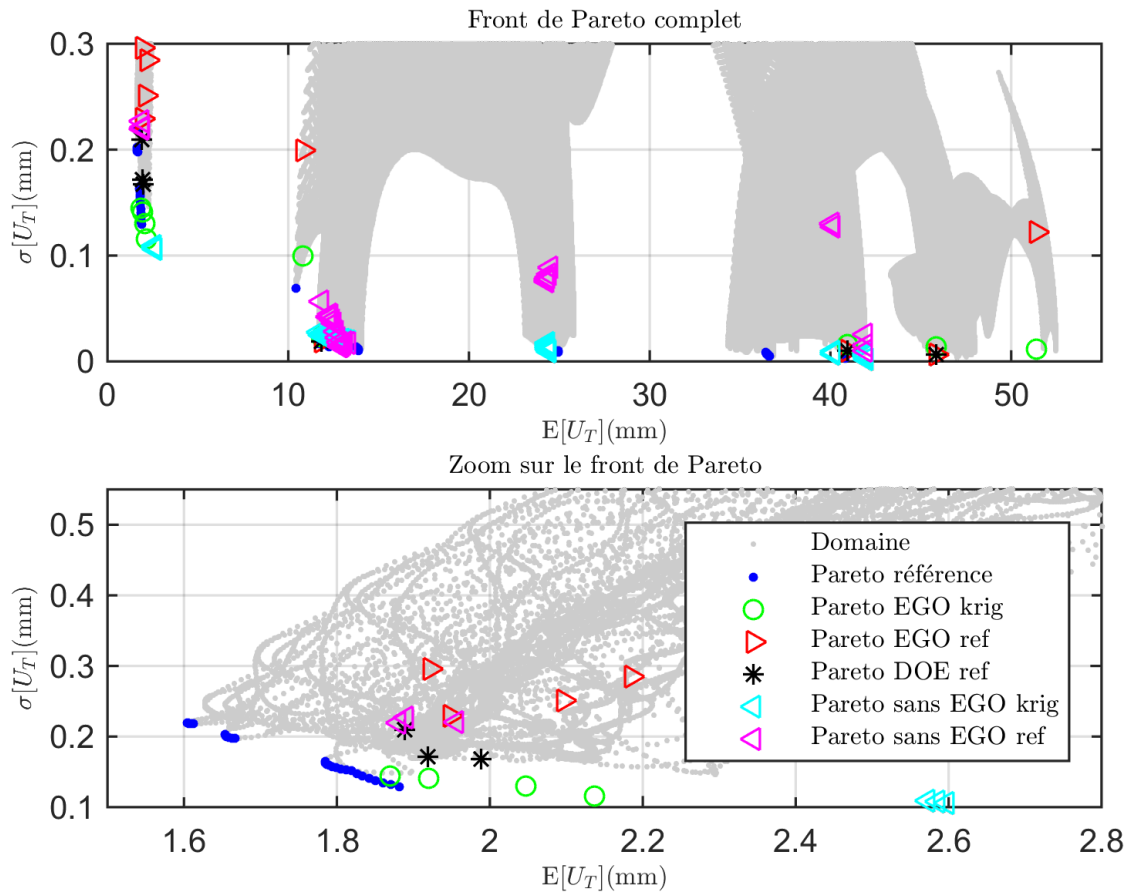


FIGURE 4.24 – Comparaison entre le front de Pareto construit sans EGO avec $n_{lhs} = 200$ et le front de Pareto de EGO-Robuste ($n_{bd} = 200$).

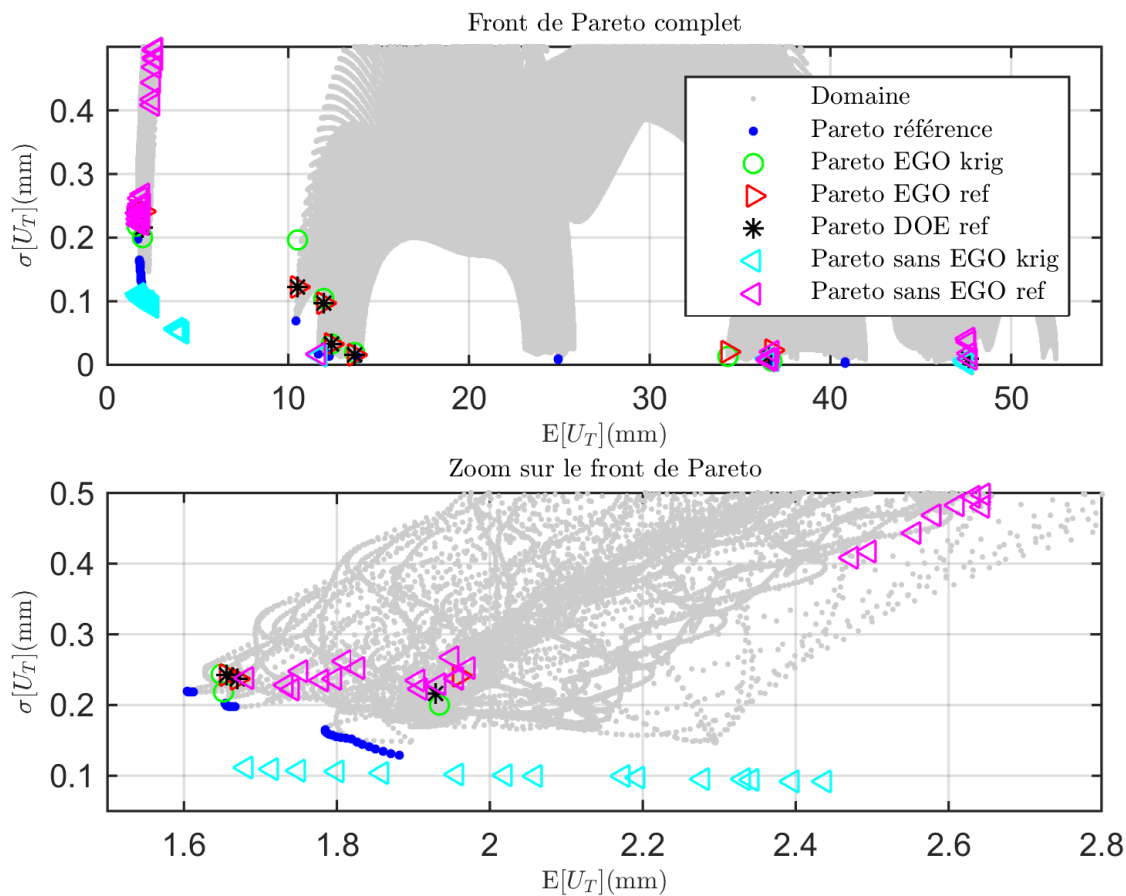


FIGURE 4.25 – Comparaison entre le front de Pareto construit sans EGO avec $n_{lhs} = 300$ et le front de Pareto de EGO-Robuste ($n_{bd} = 300$).

Comparaison de la meilleure configuration de EGO-Robuste avec une approche classique pour un DOE plus dense

Les résultats de la meilleure configuration de EGO-robuste qui sont identifiés dans la section précédente, présentés dans la figure 4.22, sont comparés avec les résultats de l'approche classique possédant une taille de DOE plus importante.

Le front de Pareto, qui correspond à EGO-Robuste avec $n_{bd} = 300$ et $n_0 = 15$, est comparé avec ceux de l'approche classique de $n_{lhs} = 600$ et de $n_{lhs} = 700$ dans les figures 4.26 et 4.27 respectivement.

Les résultats montrent que le front de Pareto construit par EGO-Robuste et $n_{bd} = 300$ est comparable avec celui qui est construit avec 600 points LHS. Le front de Pareto de EGO-Robuste ($n_{bd} = 300$) est meilleur dans la zone qui correspond à $0 \leq \mathbb{E}[U_T] \leq 5$ où la prédiction du front de Pareto de 600 points LHS n'est pas précise sur certains points. Cette mauvaise prédiction a abouti à associer des

mauvais points au front de Pareto ($n_{lhs} = 600$) dont leurs re-estimations par le modèle de référence montrent qu'ils sont très loin du front de Pareto de référence. Par contre les cercles verts et les triangles rouges sont presque confondus sauf sur le point qui correspond à $\mathbb{E}[U_T] \approx 10$. Cette zone qui est le voisinage de $\mathbb{E}[U_T] = 10$ n'est pas explorée par l'approche classique. De même, l'approche classique n'a pas explorée la région qui est proche de $\mathbb{E}[U_T] \approx 14$ sur la figure 4.26, zone bien détectée par EGO-Robuste. On notera que les deux méthodes d'optimisation n'ont pas pu capturer les zones du front de Pareto de référence correspondant à $\mathbb{E}[U_T] \approx 25$ et $\mathbb{E}[U_T] \approx 41$ (figure 4.26).

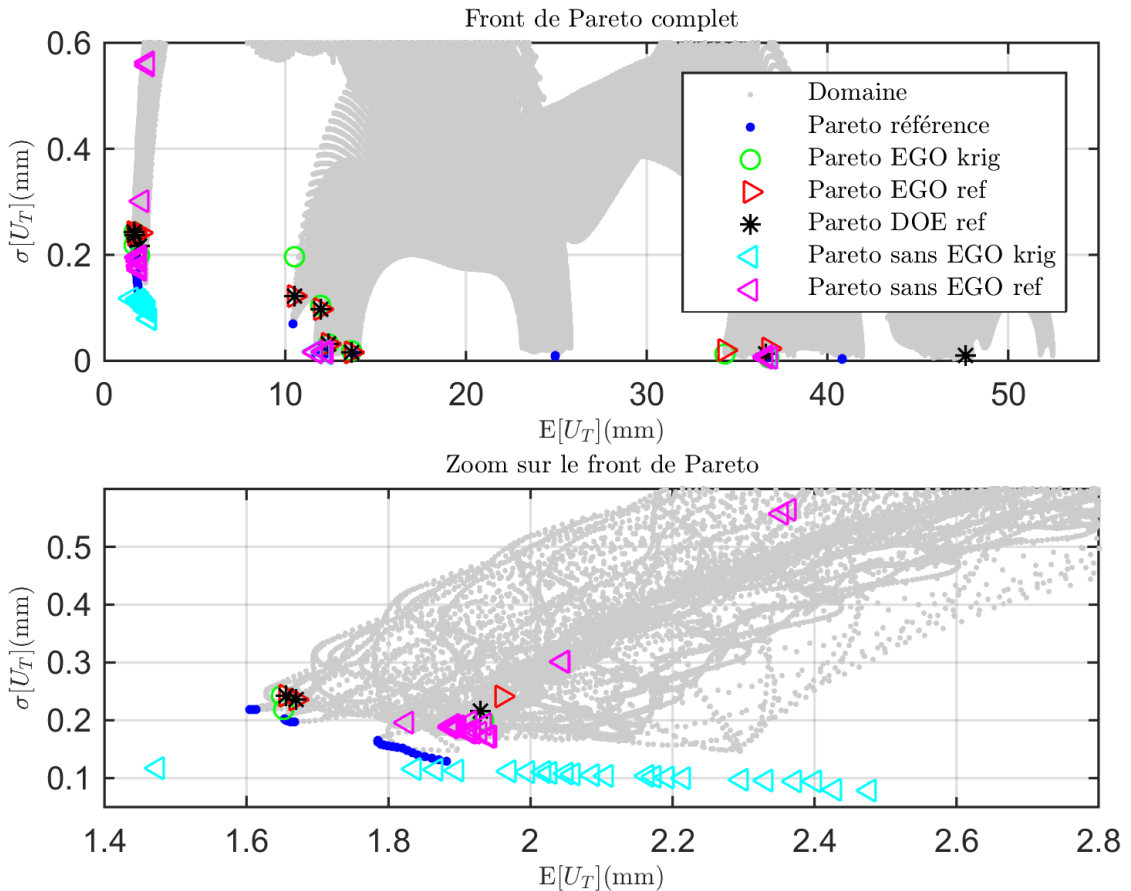


FIGURE 4.26 – Comparaison entre le front de Pareto construit sans EGO avec $n_{lhs} = 600$ et le front de Pareto de EGO-Robuste ($n_{bd} = 300$).

Pour le cas de $n_{lhs} = 700$, la prédiction par l'approche classique est meilleure que le cas précédent, notamment sur la zone qui correspond à $0 \leq \mathbb{E}[U_T] \leq 5$. Dans les autres zones on observe peu d'amélioration, on notera toutefois que le nombre de points de Pareto obtenue est beaucoup plus dense que celui de notre démarche

ce qui est un avantage de cette approche classique, notamment lorsque tous les points sont bien prédits.

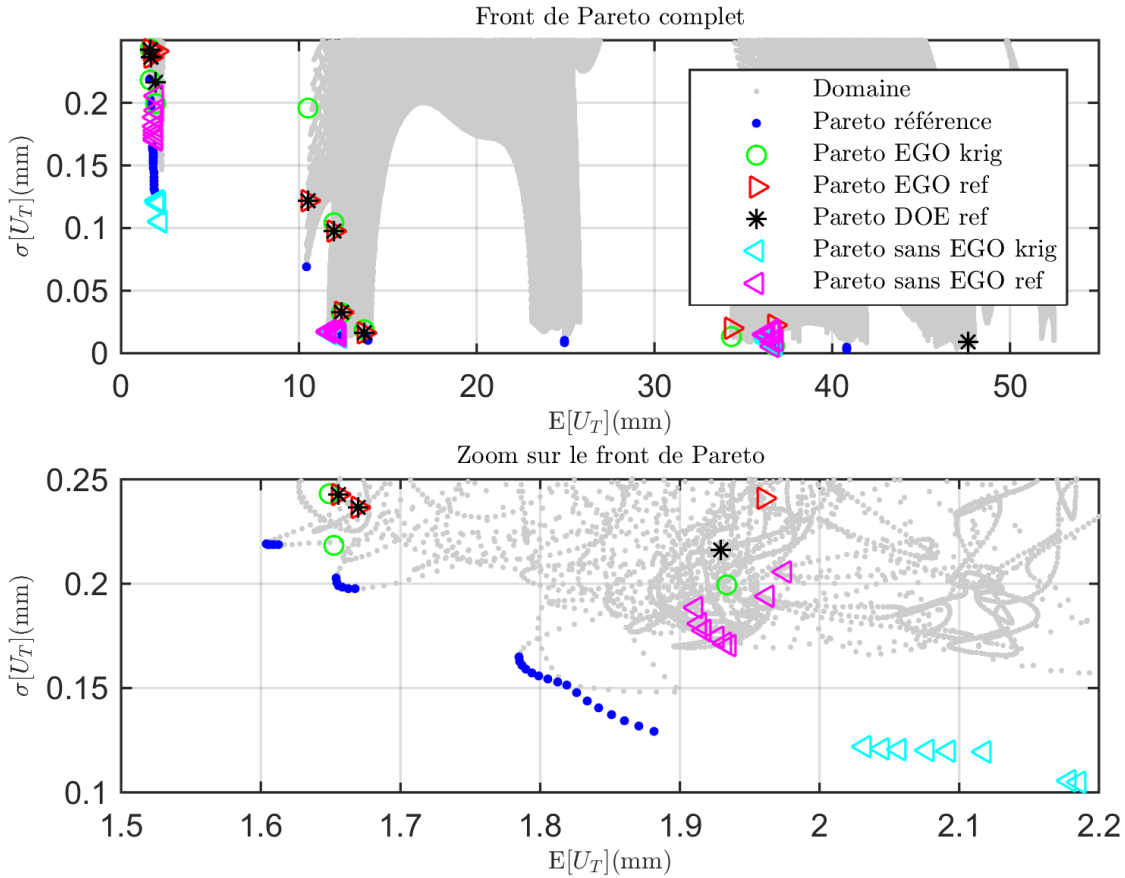


FIGURE 4.27 – Comparaison entre le front de Pareto construit sans EGO avec $n_{lhs} = 700$ et le front de Pareto de EGO-Robuste ($n_{bd} = 300$).

Comparaison des deux approches avec sur les indicateurs IGD et HV

Les valeurs de IGD et de HV pour les différents fronts de Pareto construits des deux approches sont données dans le tableau 4.14. On retrouve le fait que les indices IGD (ref) et HV(ref) valident bien que le front de Pareto de référence est le meilleur. De même, ces indicateurs valident bien que le front de Pareto obtenu par "DACE" qui correspond à la figure 4.17a est le pire pour tous les quatre indicateurs, les valeurs correspondantes sont marquées en rouge dans le tableau.

Les valeurs des indicateurs de notre EGO-Robuste sont comparées avec celles de l'approche classique. On observe que IGD (ref) pour $n_{bd} = 300$ est meilleur que celui de l'approche sans EGO pour les $n_{lhs} = \{100, 200, 400, 500, 800\}$. La valeur de HV (ref) pour EGO-Robuste est meilleure que les valeurs obtenues

par l'approche classique pour $n_{lhs} = \{100, 400, 500\}$. Par contre l'indicateur HV (ref) de l'EGO-Robuste pour $n_{bd} = 100$ est meilleur que celui des cas $n_{lhs} = \{100, 200, 300, 400, 500, 800\}$ pour l'approche classique.

Certains de ces résultats cités et d'autres valeurs de tableau 4.14 sont cohérents avec ceux que nous avons obtenus dans les figures. Par contre certains autres reflètent l'impuissance de ces indicateurs à juger la qualité d'un front de Pareto.

Concernant, la comparaison des différents configurations de EGO-Robuste les valeurs de IGD (ref) valide notre choix qui correspond à $n_{bd} = 300$ et $n_0 = 15$, ce cas est marqué en vert dans le tableau 4.14, alors que pour HV (ref) c'est le cas de $n_{bdg} = 100$ qui possède le meilleur HV (ref) parmi les différentes configurations de EGO-robuste.

Front de Pareto	IGD (meta)	IGD (ref)	HV(meta)	HV(ref)
Pareto référence	-	0	-	0.9973
Pareto NSGAI référence	-	0.0562	-	0.9148
Pareto EGO "DACE" $n_{bd} = 200, n_0 = 15$	3.6819	0.9372	0	0
Pareto EGO "UQLAB"				
$n_{bd} = 100, n_0 = 15$	0.0622	0.1458	0.9592	0.8992
$n_{bd} = 200, n_0 = 15$	0.105	0.1126	0.9499	0.8424
$n_{bd} = 300, n_0 = 15$	0.0682	0.0962	0.8729	0.8457
$n_{bd} = 200, n_0 = 5$	0.2124	0.2926	0.9566	0.7876
$n_{bd} = 200, n_0 = 40$	0.0798	0.1234	0.9786	0.8838
Pareto approche classique	"UQLAB"			
$n_{lhs} = 100$	0.2198	0.3231	1.0662	0.8436
$n_{lhs} = 200$	0.0972	0.1057	0.9863	0.8597
$n_{lhs} = 300$	0.0973	0.0873	1.0511	0.8640
$n_{lhs} = 400$	0.1152	0.2310	1.0098	0.8432
$n_{lhs} = 500$	0.0950	0.1877	1.0160	0.8372
$n_{lhs} = 600$	0.0867	0.0532	1.0314	0.9239
$n_{lhs} = 700$	0.0825	0.0508	0.9994	0.9289
$n_{lhs} = 800$	0.1058	0.1477	1.0287	0.8518
$n_{lhs} = 900$	0.0449	0.0523	1.0202	0.9119
$n_{lhs} = 1000$	0.0381	0.0548	0.9808	0.9178

TABLEAU 4.14 – Les valeurs des indicateurs IGD et HV pour les différents fronts de Pareto construits. Les meilleurs sont en bleus et les pires sont en rouges, EGO-Robuste ($n_{bd} = 300$) est en vert.

4.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé une démarche d'optimisation robuste basée sur une version adaptée du critère EGO. Cette démarche est le premier pas dans le domaine de la construction du front de Pareto des problèmes RDO, ce sujet n'a jamais été traité dans la littérature. Cette démarche a été appliquée à un problème analytique de la poutre soudée, elle a montrée son efficacité pour construire le front de Pareto du problème RDO avec un nombre minimal d'appel au modèle de haute fidélité. Cette démarche a été également appliquée à un problème d'optimisation du retour élastique d'un emboutissage. La fonction objectif définie sur cette application est fortement non linéaire et très multi-modale pour sa variance. On obtient ainsi pour ce problème, un front de Pareto discontinue et fortement non linéaire. L'EGO-Robuste a exploré les différentes zones de Pareto même celles qui n'ont pas été explorées ni par l'algorithme NSGAIII appliqué sur le modèle de référence, ni par l'approche classique de méta-modélisation construit avec un DOE deux fois plus dense que celui utilisé dans notre EGO-Robuste. On a pu observer que la qualité de prédiction des points situés aux voisinages des points de Pareto référence était meilleure que l'approche classique avec un DOE pourtant deux fois plus dense. Par contre l'approche classique est capable de fournir un très grand nombre de points du front de Pareto ce qui n'est pas le cas de notre algorithme. Nous avons constaté que les résultats de notre démarche sont sensibles à plusieurs facteurs tels que l'outil de méta-modélisation la méthode de propagation des incertitudes, ainsi que le choix du nombre de DOE initial et la taille du budget. Une configuration bien choisie de ces paramètres peut améliorer l'efficacité de la démarche proposée.

Conclusions et perspectives

Sommaire du présent chapitre

5.1 Conclusions	137
5.2 Perspectives	140

5.1 Conclusions

Les travaux effectués dans cette thèse visaient à élaborer une démarche d'optimisation sous incertitudes adaptée pour l'ingénierie mécanique. En particulier, nous nous sommes intéressés à l'optimisation robuste en résolvant le problème d'optimisation biobjectif de la maximisation de la performance et de sa stabilité. Les incertitudes sont par nature implémentées dans les problèmes d'ingénierie mécanique. Elles sont irréductibles et leur étude est indispensable pour évaluer le comportement, la fiabilité et la robustesse des systèmes mécaniques.

Un des plus grand défi de l'optimisation sous incertitudes en général, et de l'optimisation robuste, est leur coût de calcul. Ce coût est le produit du coût de l'exécution de l'algorithme d'optimisation et de la propagation des incertitudes des entrées aux sorties des problèmes. A cela s'ajoute le fait que les problèmes en ingénierie mécanique sont généralement basés sur des modèles de simulations numériques souvent coûteuses. La réduction de ces coûts est l'enjeu de notre travail dans cette thèse.

Pour résoudre les problèmes en optimisation robuste, nous utilisons la formulation biobjectif. La résolution de ce problème et la construction du front de Pareto des critères de la performance et de sa stabilité avec le moindre coût d'optimisation et le moindre nombre de simulations numériques est le but de cette thèse.

Afin d'atteindre ce but nous avons traité deux principaux sujets :

- Le premier sujet est la formulation des problèmes d'optimisation sous incertitudes. Nous avons étudié la nécessité de traiter un tel problème en optimisation robuste. Et nous avons établi qu'elle n'est pas toujours nécessaire. Nous avons proposé une méthode générale pour détecter cette nécessité.
- Le second sujet est celui de la résolution de l'optimisation robuste, nous avons proposé une démarche d'optimisation robuste capable de construire le front de Pareto de la performance et de sa stabilité. Cette démarche est une version adaptée et modifiée de l'algorithme EGO qui est largement utilisé en optimisation déterministe. Ces algorithmes consistent à construire des métamodèles de type adaptatif qui sont très efficaces en optimisation et capables de converger vers les optimums avec le moindre coût de simulations numériques.

Les thématiques de l'optimisation déterministe mono-objectifs et multiobjectifs, des incertitudes en mécanique et des métamodèles ont fait l'objet, dans le premier chapitre, d'une étude bibliographique détaillée. Les différentes approches et algorithmes d'optimisation ont été étudiés. Les différents types d'incertitudes ainsi que leur modélisation et les techniques de propagation des incertitudes sont également abordées. De même, les différents types de métamodèles ainsi que les approches adaptatives de construction des métamodèles sont décrits. Dans ce premier chapitre nous avons aussi introduits des formules analytiques de propagation des incertitudes sur les modèles de multiplication y compris les métamodèles polynomiaux, et les métamodèles des fonctions à base radiales.

L'optimisation sous incertitudes a fait l'objet du second chapitre, la mise en œuvre des incertitudes en optimisation ainsi les différents types des problèmes OU et leur classification ont été étudiés. Ensuite une nouvelle classification des problèmes OU a été proposée, cette classification est basée sur les conditions nécessaires de définition de chaque type de OU. Nous avons considéré que l'existence de l'antagonisme entre la performance et sa stabilité est la condition nécessaire pour définir un problème d'optimisation robuste. Le sujet de l'antagonisme entre la performance et la stabilité n'est jamais traité dans la littérature. Nous avons démontré qu'il n'existe pas d'une manière systématique, ainsi nous avons identifié analytiquement cette existence sur des modèles mathématiques particuliers de sommation et de multiplication. L'existence de cet antagonisme ne peut pas être identifiée explicitement, sans calcul d'optimisation, sur tous les problèmes. Par conséquent, nous avons proposé une méthode générale capable d'identifier cet antagonisme avant de résoudre le problème biobjectif de RDO et de RBRDO. Cette méthode est capable d'aider le designer à choisir le type de OU qui est nécessaire pour son problème et de lui fournir quelques informations utiles sur la robustesse de son design. La capacité de cette méthode, à détecter la nécessité des problèmes

RDO avant de construire le front de Pareto tout entier, contribue au but principal de cette thèse qui est la minimisation du coût de l'OU et notamment l'optimisation robuste. En effet, si l'optimisation robuste n'est pas nécessaire, le problème se réduit à un problème mono-objectif par l'optimisation de la performance uniquement, ce qui réduit significativement le coût du calcul. Ensuite cette méthode a été mise en œuvre sur des problèmes de structures mécaniques. Également deux facteurs influençant l'existence de l'antagonisme, qui sont la modélisation des incertitudes et le choix de la fonction objectif, ont été identifiés dans ce chapitre.

Dans le dernier chapitre, nous avons traité le sujet des démarches d'optimisation basées sur des métamodèles adaptatifs en contexte incertain. Tout d'abord, nous avons identifié les derniers travaux sur cette thématique. Ensuite, nous avons proposée la démarche EGO-Robuste pour résoudre le problème RDO biobjectif. Cette démarche est le premier pas dans ce sujet, les anciens travaux de ces algorithmes en contexte incertain ont traité les formulations mono-objectifs de RDO. Tandis que les travaux de EGO multiobjectif en contexte déterministe, qui consistent à construire un métamodèle pour chaque fonction objectif, ne sont pas applicables sur les problèmes RDO qui sont de nature particulière. Cette particularité est que les deux fonctions objectifs sont les mesures de performance (espérance) et de stabilité (variance ou écart type) du même critère d'optimisation. Par conséquent, nous avons souhaité résoudre ce problème biobjectif à partir d'un métamodèle unique remplaçant la fonction objectif déterministe. La démarche a été appliquée sur un problème analytique test, où elle a montré son efficacité. Ensuite, nous avons appliqué cette démarche d'optimisation sur une application industrielle d'emboutissage profond en forme de "U". La complexité de ce problème, typique des problèmes d'ingénierie, vient de sa forme non linéaire, ainsi il requiert des calculs numériques coûteux, l'évaluation du modèle de ce problème nécessitant environ deux heures de calcul pour chaque simulation. Le problème traité vise à minimiser le retour élastique d'une tôle en acier emboutie. Le retour élastique est quantifié en mesurant la distance entre la position désirée et la position résultant de l'emboutissage pour un point fictif sur la surface horizontale de la tôle. Les résultats du front de Pareto de la démarche proposée ont été comparés avec le front de Pareto d'un modèle de référence de haute fidélité. Ces résultats ont été aussi comparés aux résultats de l'approche classique de la méta-modélisation sans critère adaptatif. Les résultats montrent l'efficacité de notre démarche pour explorer les différentes zones du front de Pareto de référence, malgré que ce front de référence soit discontinu et complexe. Les résultats de notre démarche sont comparables aux résultats de l'approche classique mais avec une taille de DOE deux fois plus importante. Par contre la démarche proposée est sensible à plusieurs facteurs tel que la configuration de la construction du métamodèle, la technique de la propagation des incertitudes, la taille du DOE initial et la taille du budget.

5.2 Perspectives

Dans la continuité des travaux de cette thèse, plusieurs perspectives sont envisageables :

1. Dans le sujet de la propagation des incertitudes, nous avons proposé des formules analytiques pour propager les incertitudes sur les métamodèles polynomiaux et de type RBF gaussiens. Nous continuons ce travail pour les métamodèles RBF non gaussiens, ce qui est très utile en optimisation sous incertitudes.
2. La méthode proposée pour identifier l'existence de l'antagonisme entre la performance et sa stabilité est applicable à une seule fonction objectif, une amélioration aux problèmes multiobjectifs est envisageable.
3. Il existe plusieurs modèles dont l'évaluation de cet antagonisme est effectuée explicitement sans aucun processus d'optimisation. Des travaux pour détecter autres modèles que ceux identifiés dans cette thèse peuvent être effectués.
4. Dans ce même sujet, nous avons identifié deux facteurs influençant l'existence de l'antagonisme. Des efforts supplémentaires dans cette direction sont nécessaires pour identifier d'autres facteurs.
5. Pour la démarche EGO-Robuste proposée, nous avons tester l'influence de quelques facteurs sur la performance de cette démarche, des travaux supplémentaires sont envisageables pour étudier ces facteurs afin d'aboutir à la meilleure configuration pour appliquer EGO-Robuste.
6. L'application de la démarche proposée sur le modèle numérique directement sans l'intermédiaire du métamodèle de haute fidélité est envisageable.
7. La démarche proposée ne prend pas en compte les fonctions contraintes sur les applications qui nécessitent des calculs numériques, une amélioration de cette démarche en ajoutant d'autres *EI* spécifiés pour enrichir des métamodèles remplaçant les fonctions contraintes est envisageable.
8. La démarche proposée est appliquée à un problème RDO possédant un seul critère objectif déterministe, une amélioration aux problèmes multi-critères serait nécessaire.

Bibliographie

- [1] G. E. BOX. « Evolutionary operation : A method for increasing industrial productivity ». In : *Applied statistics* (1957), p. 81-101 (cf. p. 6).
- [2] R. HOOKE et T. A. JEEVES. « “Direct Search” Solution of Numerical and Statistical Problems ». In : *Journal of the ACM (JACM)* 8.2 (1961), p. 212-229 (cf. p. 6).
- [3] J. A. NELDER et R. MEAD. « A simplex method for function minimization ». In : *The computer journal* 7.4 (1965), p. 308-313 (cf. p. 6).
- [4] A. CAUCHY. « Méthode générale pour la résolution des systemes d'équations simultanées ». In : *Comp. Rend. Sci. Paris* 25.1847 (1847), p. 536-538 (cf. p. 7).
- [5] W. DAVIDON. « Variable metric method for minimization, Argonne Natl ». In : *Lab., ANL-5990* (1959) (cf. p. 8).
- [6] R. FLETCHER et M. J. POWELL. « A rapidly convergent descent method for minimization ». In : *The computer journal* 6.2 (1963), p. 163-168 (cf. p. 8).
- [7] C. G. BROYDEN. « The convergence of a class of double-rank minimization algorithms 1. general considerations ». In : *IMA Journal of Applied Mathematics* 6.1 (1970), p. 76-90 (cf. p. 8).
- [8] R. FLETCHER. « A new approach to variable metric algorithms ». In : *The computer journal* 13.3 (1970), p. 317-322 (cf. p. 8).
- [9] D. GOLDFARB. « A family of variable-metric methods derived by variational means ». In : *Mathematics of computation* 24.109 (1970), p. 23-26 (cf. p. 8).
- [10] D. F. SHANNO. « Conditioning of quasi-Newton methods for function minimization ». In : *Mathematics of computation* 24.111 (1970), p. 647-656 (cf. p. 8).
- [11] J. H. HOLLAND. « Outline for a logical theory of adaptive systems ». In : *Journal of the ACM (JACM)* 9.3 (1962), p. 297-314 (cf. p. 8).

- [12] J. H. HOLLAND. *Adaptation in natural and artificial systems : an introductory analysis with applications to biology, control, and artificial intelligence*. MIT press, 1992 (cf. p. 8).
- [13] I. RECHENBERG. « Evolutionsstrategie–Optimierung technischer Systeme nach Prinzipien der biologischen Evolution ». In : (1973) (cf. p. 8).
- [14] F. GLOVER. « Future paths for integer programming and links to artificial intelligence ». In : *Computers & operations research* 13.5 (1986), p. 533-549 (cf. p. 8).
- [15] F. GLOVER et M. LAGUNA. *Tabu Search*. Springer, 2013 (cf. p. 8).
- [16] S. KIRKPATRICK, C. D. GELATT, M. P. VECCHI et al. « Optimization by simulated annealing ». In : *science* 220.4598 (1983), p. 671-680 (cf. p. 9).
- [17] D. H. WOLPERT et W. G. MACREADY. « No Free Lunch Theorems for Optimization ». In : *IEEE Transactions on Evolutionary Computation* 1.1 (avr. 1997), p. 67-82. ISSN : 1089-778X. DOI : [10.1109/4235.585893](https://doi.org/10.1109/4235.585893) (cf. p. 9).
- [18] S. KHODAYGAN et A. GOLMOHAMMADI. « Multi-criteria optimization of the part build orientation (PBO) through a combined meta-modeling /NSGAI /TOPSIS method for additive manufacturing processes ». In : *International Journal on Interactive Design and Manufacturing (IJIDeM)* (2017), p. 1-15 (cf. p. 10).
- [19] A. EL SAMROUT et al. « A new hybrid method to solve the multi-objective optimization problem for a composite hat-stiffened panel ». In : *META*. Marrakech, Marocco, 2016 (cf. p. 10).
- [20] A. NDIAYE et al. « Multi-objective preliminary ecodesign ». In : *International Journal on Interactive Design and Manufacturing (IJIDeM)* 3.4 (2009), p. 237 (cf. p. 10).
- [21] L. WEI et Y. YUYING. « Multi-objective optimization of sheet metal forming process using Pareto-based genetic algorithm ». In : *Journal of materials processing technology* 208.1-3 (2008), p. 499-506 (cf. p. 10).
- [22] R. V. RAO. « Single-and Multi-objective Optimization of Casting Processes Using Jaya Algorithm and Its Variants ». In : *Jaya : An Advanced Optimization Algorithm and its Engineering Applications*. Springer, 2019, p. 273-289 (cf. p. 10).
- [23] F. MENG et al. « Multi-objective optimization based on meta-models of an aeronautical hub including the ductile damage constraint ». In : *International Journal of Damage Mechanics* 23.8 (2014), p. 1055-1076 (cf. p. 10).

- [24] J. D. SCHAFFER. « Some experiments in machine learning using vector evaluated genetic algorithms (artificial intelligence, optimization, adaptation, pattern recognition) ». In : (1984) (cf. p. 11).
- [25] L. ZADEH. « Optimality and non-scalar-valued performance criteria ». In : *IEEE transactions on Automatic Control* 8.1 (1963), p. 59-60 (cf. p. 12).
- [26] R. E. STEUER et E.-U. CHOO. « An interactive weighted Tchebycheff procedure for multiple objective programming ». In : *Mathematical programming* 26.3 (1983), p. 326-344 (cf. p. 12).
- [27] I. KALISZEWSKI. « A modified weighted Tchebycheff metric for multiple objective programming ». In : *Computers & operations research* 14.4 (1987), p. 315-323 (cf. p. 12).
- [28] T. W. ATHAN et P. Y. PAPALAMBROS. « A note on weighted criteria methods for compromise solutions in multi-objective optimization ». In : *Engineering Optimization* 27.2 (1996), p. 155-176 (cf. p. 12).
- [29] Y. HAIMES. « On a bicriterion formulation of the problems of integrated system identification and system optimization ». In : *IEEE transactions on systems, man, and cybernetics* 1.3 (1971), p. 296-297 (cf. p. 12).
- [30] I. DAS et J. E. DENNIS. « Normal-boundary intersection : A new method for generating the Pareto surface in nonlinear multicriteria optimization problems ». In : *SIAM Journal on Optimization* 8.3 (1998), p. 631-657 (cf. p. 14).
- [31] T. ERFANI et S. V. UTUYUZHNIKOV. « Directed search domain : a method for even generation of the Pareto frontier in multiobjective optimization ». In : *Engineering Optimization* 43.5 (2011), p. 467-484 (cf. p. 14).
- [32] I. Y. KIM et O. DE WECK. « Adaptive weighted sum method for multiobjective optimization : a new method for Pareto front generation ». In : *Structural and multidisciplinary optimization* 31.2 (2006), p. 105-116 (cf. p. 14).
- [33] H. DIAB. « Modélisation et optimisation de structures flottantes pour l'aide à la décision d'aménagement portuaire ». Thèse de doct. Université de Technologie de Troyes, 2016 (cf. p. 14).
- [34] R. d. S. MOTTA, S. M. AFONSO et P. R. LYRA. « A modified NBI and NC method for the solution of N-multiobjective optimization problems ». In : *Structural and Multidisciplinary Optimization* 46.2 (2012), p. 239-259 (cf. p. 14).

- [35] S. SIDDIQUI, S. AZARM et S. A. GABRIEL. « On improving normal boundary intersection method for generation of Pareto frontier ». In : *Structural and Multidisciplinary Optimization* 46.6 (2012), p. 839-852 (cf. p. 14).
- [36] K. DEB et al. « A fast and elitist multiobjective genetic algorithm : NSGA-II ». In : *IEEE transactions on evolutionary computation* 6.2 (2002), p. 182-197 (cf. p. 14, 116).
- [37] E. ZITZLER, M. LAUMANN et L. THIELE. « SPEA2 : Improving the strength Pareto evolutionary algorithm ». In : *TIK-report* 103 (2001) (cf. p. 14).
- [38] D. W. CORNE, J. D. KNOWLES et M. J. OATES. « The Pareto envelope-based selection algorithm for multiobjective optimization ». In : *International conference on parallel problem solving from nature*. Springer, 2000, p. 839-848 (cf. p. 14).
- [39] K. DEB. « Multi-objective optimization ». In : *Search methodologies*. Springer, 2014, p. 403-449 (cf. p. 15).
- [40] K. MIETTINEN. *Nonlinear Multiobjective Optimization, volume 12 of International Series in Operations Research and Management Science*. 1999 (cf. p. 15).
- [41] R. T. MARLER et J. S. ARORA. « Survey of multi-objective optimization methods for engineering ». In : *Structural and multidisciplinary optimization* 26.6 (2004), p. 369-395 (cf. p. 15).
- [42] L. JAEGER. « Optimisation multidisciplinaire sous incertitude en phase conceptuelle avion ». Thèse de doct. Université de Toulouse, Université Toulouse III-Paul Sabatier, 2013 (cf. p. 16).
- [43] H.-G. BEYER et B. SENDHOFF. « Robust optimization—a comprehensive survey ». In : *Computer methods in applied mechanics and engineering* 196.33 (2007), p. 3190-3218 (cf. p. 16, 47, 48).
- [44] D. DUBOIS et al. *Soft methods for handling variability and imprecision*. T. 48. Springer Science & Business Media, 2008 (cf. p. 17).
- [45] G. J. KLIR et T. A. FOLGER. *Fuzzy Sets, Uncertainty, and Information*. Englewood Cliffs, NJ, USA : Prentice Hall, 1988 (cf. p. 17).
- [46] Q. CHEN. « Comparing probabilistic and fuzzy set approaches for design in the presence of uncertainty ». Thèse de doct. Ph. D. Thesis, Virginia Polytechnic Institute, State University, 2000 (cf. p. 17).
- [47] S. H. LEE et W. CHEN. « A comparative study of uncertainty propagation methods for black-box-type problems ». In : *Structural and Multidisciplinary Optimization* 37.3 (2009), p. 239 (cf. p. 17).

- [48] R. MELCHERS. « Importance sampling in structural systems ». In : *Structural safety* 6.1 (1989), p. 3-10 (cf. p. 18).
- [49] C. G. BUCHER. « Adaptive sampling—an iterative fast Monte Carlo procedure ». In : *Structural safety* 5.2 (1988), p. 119-126 (cf. p. 18).
- [50] K. HANDA. « Application of finite element methods in the statistical analysis of structures ». In : *Proc. 3rd Int. Conf. on Structural Safety and Reliability, Sydney*. 1981, p. 409-417 (cf. p. 18).
- [51] T. HISADA. « Stochastic finite element method development for structural safety and reliability ». In : *proc. third international conference on structural safety and reliability*. T. 395. 1981 (cf. p. 18).
- [52] T. HISADA et S. NAKAGIRI. « Role of the stochastic finite element method in structural safety and reliability ». In : *Proc. 4th. Int. Conf. Struct. Safety and Reliability, ICOSSAR'85*. 1985, p. 385-395 (cf. p. 18).
- [53] B. SUDRET. « Uncertainty propagation and sensitivity analysis in mechanical models—Contributions to structural reliability and stochastic spectral methods ». In : *Habilitations diriger des recherches, Université Blaise Pascal, Clermont-Ferrand, France* (2007) (cf. p. 18).
- [54] A. M. HASOFER et N. C. LIND. « Exact and invariant second-moment code format ». In : *Journal of the Engineering Mechanics division* 100.1 (1974), p. 111-121 (cf. p. 18).
- [55] M. HOHENBICHLER et R. RACKWITZ. « First-order concepts in system reliability ». In : *Structural safety* 1.3 (1982), p. 177-188 (cf. p. 18).
- [56] K. BREITUNG. « Asymptotic approximations for multinormal integrals ». In : *Journal of Engineering Mechanics* 110.3 (1984), p. 357-366 (cf. p. 18).
- [57] N. WIENER. « The homogeneous chaos ». In : *American Journal of Mathematics* 60.4 (1938), p. 897-936 (cf. p. 18, 21).
- [58] F. YAMAZAKI, M. SHINOZUKA et G. DASGUPTA. « Neumann expansion for stochastic finite element analysis ». In : *Journal of Engineering Mechanics* 114.8 (1988), p. 1335-1354 (cf. p. 18).
- [59] B. LALLEMAND et al. « Neumann expansion for fuzzy finite element analysis ». In : *Engineering computations* 16.5 (1999), p. 572-583 (cf. p. 18).
- [60] D. H. EVANS. « An application of numerical integration techniques to statistical tolerancing, III—general distributions ». In : *Technometrics* 14.1 (1972), p. 23-35 (cf. p. 18).
- [61] S. RAHMAN et H. XU. « A univariate dimension-reduction method for multi-dimensional integration in stochastic mechanics ». In : *Probabilistic Engineering Mechanics* 19.4 (2004), p. 393-408 (cf. p. 18).

- [62] B. M. AYYUB et R. H. MCCUEN. *Probability, statistics, and reliability for engineers and scientists*. CRC press, 2016 (cf. p. 20).
- [63] T. T. SOONG. *Fundamentals of probability and statistics for engineers*. John Wiley & Sons, 2004 (cf. p. 20).
- [64] A. B. YEH. *Fundamentals of Probability and Statistics for Engineers*. 2005 (cf. p. 20).
- [65] J. D. MARTIN et T. W. SIMPSON. « A Monte Carlo method for reliability-based design optimization ». In : *Rapport technique, American Institute of Aeronautics and Astronautics* (2006) (cf. p. 20).
- [66] W.-N. YANG et B. L. NELSON. « Using common random numbers and control variates in multiple-comparison procedures ». In : *Operations Research* 39.4 (1991), p. 583-591 (cf. p. 20).
- [67] G. PUJOL et al. *L'incertitude en conception : formalisation, estimation*. 2009 (cf. p. 21, 65).
- [68] C. LATANIOTIS, S. MARELLI et B. SUDRET. « Gaussian process modelling using UQLab ». In : *arXiv preprint arXiv :1709.09382* (2017) (cf. p. 22).
- [69] B. SUDRET. « Global sensitivity analysis using polynomial chaos expansions ». In : *Reliability Engineering & System Safety* 93.7 (2008), p. 964-979 (cf. p. 22).
- [70] S. DUBREUIL et al. « Propagation of modeling uncertainty by polynomial chaos expansion in multidisciplinary analysis ». In : *Journal of Mechanical Design* 138.11 (2016), p. 111411 (cf. p. 22).
- [71] V. BAUDOUI. « Optimisation robuste multiobjectifs par modèles de substitution ». Thèse de doct. Toulouse, ISAE, 2012 (cf. p. 24, 46, 47).
- [72] G. E. BOX et K. B. WILSON. « On the experimental attainment of optimum conditions ». In : *Breakthroughs in statistics*. Springer, 1992, p. 270-310 (cf. p. 25).
- [73] W. S. McCULLOCH et W. PITTS. « A logical calculus of the ideas immanent in nervous activity ». In : *The bulletin of mathematical biophysics* 5.4 (1943), p. 115-133 (cf. p. 26).
- [74] F. ROSENBLATT. « The perceptron : a probabilistic model for information storage and organization in the brain. » In : *Psychological review* 65.6 (1958), p. 386 (cf. p. 26).
- [75] D. KRIGE. « A statistical approach to some mine valuation and allied problems ». Thèse de doct. University of Witwatersrand, 1951 (cf. p. 28).

- [76] J. SACKS, S. B. SCHILLER et W. J. WELCH. « Designs for computer experiments ». In : *Technometrics* 31.1 (1989), p. 41-47 (cf. p. 28).
- [77] J. SACKS et al. « Design and analysis of computer experiments ». In : *Statistical science* (1989), p. 409-423 (cf. p. 28).
- [78] R. L. HARDY. « Multiquadric equations of topography and other irregular surfaces ». In : *Journal of geophysical research* 76.8 (1971), p. 1905-1915 (cf. p. 29).
- [79] J. DUCHON. « Splines minimizing rotation-invariant semi-norms in Sobolev spaces ». In : *Constructive theory of functions of several variables*. Springer, 1977, p. 85-100 (cf. p. 29).
- [80] M. J. D. POWELL. *Approximation theory and methods*. Cambridge university press, 1981 (cf. p. 29).
- [81] M. J. ORR. « Recent advances in radial basis function networks ». In : *Institute for Adaptive and Neural Computation* (1999) (cf. p. 29).
- [82] R. SCHABACK. « A practical guide to radial basis functions ». In : *Electronic Resource* 11 (2007) (cf. p. 29).
- [83] M. N. GIBBS. « Bayesian Gaussian processes for regression and classification ». Thèse de doct. Citeseer, 1998 (cf. p. 31).
- [84] A. SÓBESTER, S. J. LEARY et A. J. KEANE. « On the design of optimization strategies based on global response surface approximation models ». In : *Journal of Global Optimization* 33.1 (2005), p. 31-59 (cf. p. 31).
- [85] H. LIU, Y.-S. ONG et J. CAI. « A survey of adaptive sampling for global metamodeling in support of simulation-based complex engineering design ». In : *Structural and Multidisciplinary Optimization* (2017), p. 1-24 (cf. p. 31, 91).
- [86] D. R. JONES. « A taxonomy of global optimization methods based on response surfaces ». In : *Journal of global optimization* 21.4 (2001), p. 345-383 (cf. p. 31, 34).
- [87] L. LAURENT. « Stratégie multiparamétrique et métamodèles pour l'optimisation multiniveaux de structures ». Thèse de doct. École normale supérieure de Cachan-ENS Cachan, 2013 (cf. p. 32, 97).
- [88] S. J. LEARY, A. BHASKAR et A. J. KEANE. « Global approximation and optimization using adjoint computational fluid dynamics codes ». In : *AIAA journal* 42.3 (2004), p. 631-641 (cf. p. 33).

- [89] J. PETER et al. « Comparison of surrogate models for the actual global optimization of a 2D turbomachinery flow ». In : *Proceedings of the 7th WSEAS international conference on simulation, modelling and optimization*. World Scientific, Engineering Academy et Society (WSEAS). 2007, p. 46-51 (cf. p. 33).
- [90] R. JIN, W. CHEN et A. SUDJIANTO. « On sequential sampling for global metamodeling in engineering design ». In : *ASME 2002 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*. American Society of Mechanical Engineers. 2002, p. 539-548 (cf. p. 33).
- [91] D. R. JONES, C. D. PERTTUNEN et B. E. STUCKMAN. « Lipschitzian optimization without the Lipschitz constant ». In : *Journal of Optimization Theory and Applications* 79.1 (1993), p. 157-181 (cf. p. 33).
- [92] D. D. COX et S. JOHN. « A statistical method for global optimization ». In : *Systems, Man and Cybernetics, 1992., IEEE International Conference on*. IEEE. 1992, p. 1241-1246 (cf. p. 33).
- [93] H. J. KUSHNER. « A new method of locating the maximum point of an arbitrary multipeak curve in the presence of noise ». In : *Journal of Basic Engineering* 86.1 (1964), p. 97-106 (cf. p. 34).
- [94] M. SCHONLAU. « Computer experiments and global optimization ». In : (1997) (cf. p. 34).
- [95] J. MOČKUS, V. TIESIS et A. ŽILINSKAS. *The Application of Bayesian Methods for Seeking the Extremum. Vol. 2*. 1978 (cf. p. 34).
- [96] D. R. JONES, M. SCHONLAU et W. J. WELCH. « Efficient global optimization of expensive black-box functions ». In : *Journal of Global optimization* 13.4 (1998), p. 455-492 (cf. p. 34, 89).
- [97] M. MOUSTAPHA. « Métamodèles adaptatifs pour l'optimisation fiable multiprestations de la masse de véhicules ». Thèse de doct. Clermont-Ferrand 2, 2016 (cf. p. 37, 39, 46, 88).
- [98] M. SCHONLAU, W. J. WELCH et D. R. JONES. « Global versus local search in constrained optimization of computer models ». In : *Lecture Notes-Monograph Series* (1998), p. 11-25 (cf. p. 37).
- [99] C. AUDET et al. « A surrogate-model-based method for constrained optimization ». In : *8th Symposium on Multidisciplinary Analysis and Optimization*. 2000, p. 4891 (cf. p. 37).

- [100] B. BICHON, S. MAHADEVAN et M. ELDRED. « Reliability-based design optimization using efficient global reliability analysis ». In : *50th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference*. 2009, p. 2261 (cf. p. 37).
- [101] P. RANJAN, D. BINGHAM et G. MICHAILIDIS. « Sequential experiment design for contour estimation from complex computer codes ». In : *Technometrics* 50.4 (2008), p. 527-541 (cf. p. 38).
- [102] B. J. BICHON et al. « Efficient global reliability analysis for nonlinear implicit performance functions ». In : *AIAA journal* 46.10 (2008), p. 2459-2468 (cf. p. 38).
- [103] B. ECHARD, N. GAYTON et M. LEMAIRE. « AK-MCS : an active learning reliability method combining Kriging and Monte Carlo simulation ». In : *Structural Safety* 33.2 (2011), p. 145-154 (cf. p. 38).
- [104] B. ECHARD et al. « A combined importance sampling and kriging reliability method for small failure probabilities with time-demanding numerical models ». In : *Reliability Engineering & System Safety* 111 (2013), p. 232-240 (cf. p. 38).
- [105] W. FAURIAT et N. GAYTON. « AK-SYS : An adaptation of the AK-MCS method for system reliability ». In : *Reliability Engineering & System Safety* 123 (2014), p. 137-144 (cf. p. 38).
- [106] F. CADINI, F. SANTOS et E. ZIO. « An improved adaptive kriging-based importance technique for sampling multiple failure regions of low probability ». In : *Reliability Engineering & System Safety* 131 (2014), p. 109-117 (cf. p. 38).
- [107] N. LELIÈVRE et al. « AK-MCSi : A Kriging-based method to deal with small failure probabilities and time-consuming models ». In : *Structural Safety* 73 (2018), p. 1-11 (cf. p. 38, 39, 88).
- [108] V. DUBOURG. « Adaptive surrogate models for reliability analysis and reliability-based design optimization ». Thèse de doct. Université Blaise Pascal-Clermont-Ferrand II, 2011 (cf. p. 39).
- [109] D. HUANG et al. « Global optimization of stochastic black-box systems via sequential kriging meta-models ». In : *Journal of global optimization* 34.3 (2006), p. 441-466 (cf. p. 39, 88).
- [110] F. JURECKA et al. *Robust design optimization based on metamodeling techniques*. Shaker Aachen, 2007 (cf. p. 39, 89, 90).

- [111] J. WIEBENGA, A. H. van den BOOGAARD et G. KLASEBOER. « Sequential robust optimization of a V-bending process using numerical simulations ». In : *Structural and multidisciplinary optimization* 46.1 (2012), p. 137-153 (cf. p. 39, 88, 89).
- [112] J. HAVINGA, A. H. van den BOOGAARD et G. KLASEBOER. « Sequential improvement for robust optimization using an uncertainty measure for radial basis functions ». In : *Structural and multidisciplinary optimization* 55.4 (2017), p. 1345-1363 (cf. p. 39, 88-90).
- [113] W. CHEN, R. JIN et A. SUDJIANTO. « Analytical variance-based global sensitivity analysis in simulation-based design under uncertainty ». In : *Journal of mechanical design* 127.5 (2005), p. 875-886 (cf. p. 39, 41).
- [114] W. CHEN, R. JIN et A. SUDJIANTO. « Analytical uncertainty propagation via metamodels in simulation-based design under uncertainty ». In : *10th AIAA/ISSMO Multidisciplinary Analysis and Optimization Conference*. 2004, p. 4356 (cf. p. 39, 41).
- [115] W. YAO et al. « Review of uncertainty-based multidisciplinary design optimization methods for aerospace vehicles ». In : *Progress in Aerospace Sciences* 47.6 (2011), p. 450-479 (cf. p. 46, 48, 49, 53).
- [116] E. ACAR et K. SOLANKI. « System reliability based vehicle design for crashworthiness and effects of various uncertainty reduction measures ». In : *Structural and Multidisciplinary Optimization* 39.3 (2009), p. 311-325 (cf. p. 46).
- [117] T. YOURUI, D. SHUYONG et Y. XUJING. « Reliability modeling and optimization of die-casting existing epistemic uncertainty ». In : *International Journal on Interactive Design and Manufacturing (IJIDeM)* 10 (2016), p. 51-57 (cf. p. 46).
- [118] V. BAUDOUI et al. « Local Uncertainty Processing (LOUP) method for multidisciplinary robust design optimization ». In : *Structural and Multidisciplinary Optimization* 46.5 (2012), p. 711-726 (cf. p. 46).
- [119] O. BRAYDI et al. « Reliability based optimization of a hat stiffened panel ». In : *S3-Fiabilité et robustesse des systèmes mécaniques* (2017) (cf. p. 46).
- [120] O. BACARREZA, M. ALIABADI et A. APICELLA. « Robust design and optimization of composite stiffened panels in post-buckling ». In : *Structural and Multidisciplinary Optimization* 51.2 (2015), p. 409-422 (cf. p. 46).
- [121] G. TAGUCHI. « Introduction to Quality Engineering ». In : *American Supplier Institute* (1989) (cf. p. 47).

- [122] N. LELIÈVRE et al. « On the consideration of uncertainty in design : optimization-reliability-robustness ». In : *Structural and Multidisciplinary Optimization* 54.6 (2016), p. 1423-1437 (cf. p. 47, 49-51, 72).
- [123] Y. AOUES et A. CHATEAUNEUF. « Benchmark study of numerical methods for reliability-based design optimization ». In : *Structural and multidisciplinary optimization* 41.2 (2010), p. 277-294 (cf. p. 48).
- [124] I. ENEVOLDSEN et J. D. SØRENSEN. « Reliability-based optimization in structural engineering ». In : *Structural safety* 15.3 (1994), p. 169-196 (cf. p. 48).
- [125] H. JENSEN et al. « Reliability-based optimization of stochastic systems using line search ». In : *Computer methods in applied mechanics and engineering* 198.49 (2009), p. 3915-3924 (cf. p. 48).
- [126] E. H. VANMARCKE. « Matrix formulation of reliability analysis and reliability-based design ». In : *Computers & Structures* 3.4 (1973), p. 757-770 (cf. p. 48).
- [127] G. TAGUCHI, E. A. ELSAYED et T. C. HSIANG. *Quality engineering in production systems*. McGraw-Hill College, 1989 (cf. p. 48).
- [128] K. N. OTTO et E. K. ANTONSSON. « Extensions to the Taguchi method of product design ». In : *Journal of Mechanical Design* 115.1 (1993), p. 5-13 (cf. p. 48).
- [129] W. CHEN et al. « A procedure for robust design : minimizing variations caused by noise factors and control factors ». In : *Journal of mechanical design* 118.4 (1996), p. 478-485 (cf. p. 48).
- [130] A. T. BECK et al. « A comparison between robust and risk-based optimization under uncertainty ». In : *Structural and Multidisciplinary Optimization* 52.3 (2015), p. 479-492 (cf. p. 48).
- [131] D. BERTSIMAS, D. B. BROWN et C. CARAMANIS. « Theory and applications of robust optimization ». In : *SIAM review* 53.3 (2011), p. 464-501 (cf. p. 48).
- [132] I. DOLTSINIS et Z. KANG. « Robust design of structures using optimization methods ». In : *Computer methods in applied mechanics and engineering* 193.23 (2004), p. 2221-2237 (cf. p. 48).
- [133] S. M. GÖHLER, T. EIFLER et T. J. HOWARD. « Robustness metrics : Consolidating the multiple approaches to quantify robustness ». In : *Journal of Mechanical Design* 138.11 (2016), p. 111407 (cf. p. 49).
- [134] A. F. SHAHRAKI et R. NOOROSSANA. « Reliability-based robust design optimization : a general methodology using genetic algorithm ». In : *Computers & Industrial Engineering* 74 (2014), p. 199-207 (cf. p. 49).

- [135] O. P. YADAV, S. S. BHAMARE et A. RATHORE. « Reliability-based robust design optimization : A multi-objective framework using hybrid quality loss function ». In : *Quality and Reliability Engineering International* 26.1 (2010), p. 27-41 (cf. p. 49).
- [136] I. LEE et al. « Dimension reduction method for reliability-based robust design optimization ». In : *Computers & Structures* 86.13 (2008), p. 1550-1562 (cf. p. 49).
- [137] V. RATHOD et al. « Optimizing reliability-based robust design model using multi-objective genetic algorithm ». In : *Computers & Industrial Engineering* 66.2 (2013), p. 301-310 (cf. p. 49).
- [138] O. BRAYDI, P. LAFON et R. YOUNES. « On the formulation of optimization problems under uncertainty in mechanical design ». In : *International Journal on Interactive Design and Manufacturing (IJIDeM)* (2018), p. 1-13 (cf. p. 53).
- [139] P. WIWATANADATE et H. G. CLAYCAMP. « Exact propagation of uncertainties in multiplicative models ». In : *Human and Ecological Risk Assessment* 6.2 (2000), p. 355-368 (cf. p. 54, 56).
- [140] O. BRAYDI, P. LAFON et R. YOUNES. « On the influence of uncertainties modeling on reliability based robust design optimization in mechanical engineering ». In : *ICVRAM-ISUMA-UNCERTAINTIES conferences*. 2018 (cf. p. 62).
- [141] J. GEILEN. « Sensitivity analysis at optimal point ». In : *Studienarbeit, UNJ-GH Siegen, Institut für Mechanik und Regelungstechnik* (1986) (cf. p. 65).
- [142] R. JIN, X. DU et W. CHEN. « The use of metamodeling techniques for optimization under uncertainty ». In : *Structural and Multidisciplinary Optimization* 25.2 (2003), p. 99-116 (cf. p. 65).
- [143] Y. TSOMPANAKIS, N. D. LAGAROS et M. PAPADRAKAKIS. *Structural Design Optimization Considering Uncertainties : Structures & Infrastructures Book, Vol. 1, Series, Series Editor : Dan M. Frangopol*. CRC Press, 2008 (cf. p. 72).
- [144] K. RAGSDALL et D. PHILLIPS. « Optimal design of a class of welded structures using geometric programming ». In : *Journal of Engineering for Industry* 98.3 (1976), p. 1021-1025 (cf. p. 75).
- [145] K. DEB et H. GUPTA. « Introducing Robustness in Multi-Objective Optimization ». In : *Evolutionary Computation* 14.4 (nov. 2006), p. 463-494. ISSN : 1063-6560. DOI : [10.1162/evco.2006.14.4.463](https://doi.org/10.1162/evco.2006.14.4.463). (Visité le 27/06/2016) (cf. p. 75).

- [146] F. JURECKA. « Robust design optimization based on metamodeling techniques ». Thèse de doct. Technische Universität München, 2007 (cf. p. 88-90).
- [147] M. MOUSTAPHA et al. « Quantile-based optimization under uncertainties using adaptive Kriging surrogate models ». In : *Structural and multidisciplinary optimization* 54.6 (2016), p. 1403-1421 (cf. p. 88).
- [148] G. T. HAVINGA. « Optimization and control of metal forming processes ». Thèse de doct. University of Twente, 2016 (cf. p. 89).
- [149] J. H. WIEBENGA. « Robust design and optimization of forming processes ». Thèse de doct. University of Twente, 2014 (cf. p. 89).
- [150] J. KNOWLES. « ParEGO : a hybrid algorithm with on-line landscape approximation for expensive multiobjective optimization problems ». In : *IEEE Transactions on Evolutionary Computation* 10.1 (2006), p. 50-66 (cf. p. 91).
- [151] R. HUSSEIN et K. DEB. « A generative kriging surrogate model for constrained and unconstrained multi-objective optimization ». In : *Proceedings of the Genetic and Evolutionary Computation Conference 2016*. ACM. 2016, p. 573-580 (cf. p. 91).
- [152] Q. ZHANG et al. « Expensive multiobjective optimization by MOEA/D with Gaussian process model ». In : *IEEE Transactions on Evolutionary Computation* (2010) (cf. p. 91).
- [153] W. PONWEISER et al. « Multiobjective Optimization on a Limited Budget of Evaluations Using Model-Assisted S-Metric Selection ». In : *International Conference on Parallel Problem Solving from Nature*. Springer. 2008, p. 784-794 (cf. p. 91).
- [154] K. DEB et al. « A Taxonomy for Metamodeling Frameworks for Evolutionary Multi-Objective Optimization ». In : *IEEE Transactions on Evolutionary Computation* (2018) (cf. p. 91).
- [155] S. N. LOPHAVEN, H. B. NIELSEN et J. SØNDERGAARD. *DACE : a Matlab kriging toolbox*. T. 2. Citeseer, 2002 (cf. p. 96).
- [156] M. D. MCKAY, R. J. BECKMAN et W. J. CONOVER. « Comparison of three methods for selecting values of input variables in the analysis of output from a computer code ». In : *Technometrics* 21.2 (1979), p. 239-245 (cf. p. 96).
- [157] S. MARELLI et B. SUDRET. « UQLab user manual—Polynomial chaos expansions ». In : *Chair of Risk, Safety & Uncertainty Quantification, ETH Zürich, 0.9-104 edition* (2015) (cf. p. 97, 110).
- [158] B. MATÉRN. « Spatial Variation ». In : *Lecture Notes in Statistics* 36 (1960), p. 21 (cf. p. 97).

- [159] ALCOA et al. « Benchmark study of the 8th International Conference and Workshop on Numerical Simulation of 3D Sheet Metal Forming Processes ». In : *Numisheet 2011*. Numisheet 2011. Söul : Huh, Hoon ; Chung Kwansoo ; Han, Soo Sik ; Chung, Wan Jin, 21 août 2011. ISBN : 978-89-89453-48-2 (cf. p. [101](#), [102](#)).
- [160] H. SWIFT. « Plastic instability under plane stress ». In : *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 1.1 (1952), p. 1-18 (cf. p. [104](#)).
- [161] R. HILL. « A theory of the yielding and plastic flow of anisotropic metals ». In : *Proc. R. Soc. Lond. A* 193.1033 (1948), p. 281-297 (cf. p. [104](#)).
- [162] H. SHWCH et K. CHUNG. « Benchmark study of the 8th international conference and workshop on numerical simulation of 3d sheet metal forming processes ». In : *Proceedings of Numisheet 2011* 37 (2011), p. 8930-8945 (cf. p. [105-107](#)).
- [163] V.-T. DANG, C. LABERGÈRE et P. LAFON. « Adaptive metamodel-assisted shape optimization for springback in metal forming processes ». In : *International Journal of Material Forming* (2018), p. 1-18 (cf. p. [108](#), [110](#)).
- [164] E. ZITZLER et al. « Performance assessment of multiobjective optimizers : An analysis and review ». In : *IEEE Transactions on evolutionary computation* 7.2 (2003), p. 117-132 (cf. p. [117](#)).
- [165] J. D. KNOWLES, L. THIELE et E. ZITZLER. « A tutorial on the performance assessment of stochastic multiobjective optimizers ». In : *TIK-Report* 214 (2006) (cf. p. [117](#)).
- [166] Y. TIAN et al. « PlatEMO : A MATLAB platform for evolutionary multi-objective optimization [educational forum] ». In : *IEEE Computational Intelligence Magazine* 12.4 (2017), p. 73-87 (cf. p. [118](#)).



Études des incertitudes sur les modèles de multiplication avec exposants

Sommaire du présent chapitre

A.1 Propriété générale	156
A.1.1 Hypothèses et propriétés	156
A.1.2 Théorème	156
A.1.3 Preuve	156
A.2 Propriétés des PDF classiques	157
A.2.1 Loi uniforme	157
A.2.2 Loi Normale	158
A.2.3 Loi Log-normale	160
A.2.4 Loi Weibull	161
A.2.5 Loi Gumbel	161
A.3 Cas particuliers	165
A.3.1 PDF d'une loi uniforme	165
A.3.2 PDF d'une loi normale	166
A.3.3 PDF d'une loi log-normale	166
A.3.4 PDF d'une loi Weibull	167
A.3.5 PDF d'une loi Gumbel	167
A.3.6 Conclusion	167
A.4 Sommaire	168

A.1 Propriété générale

A.1.1 Hypothèses et propriétés

Considérons une fonction de densité de probabilité (PDF) d'une variable aléatoire \tilde{x} , $f_{a,b}$ est définie sur \mathbb{R} (ou dans certains cas \mathbb{R}^+) et caractérisée par deux paramètres réels (a, b) . Le moment d'ordre n de $f_{a,b}$ est défini (si l'intégrale de Riemann-Stieltjes existe) sur $n \in \mathbb{N}$ (peut être généralisé pour $n \in \mathbb{R}$) par l'équation (A.1) :

$$\mathbb{E}[\tilde{x}^n] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n f_{a,b}(x) dx \quad (\text{A.1})$$

Si $n = 0$, $\mathbb{E}[\tilde{x}^0] = 1$ selon la propriété de la sommation de la PDF $f(a, b)$. Si $\mathbb{E}[\tilde{x}^n]$ et $\mathbb{E}[\tilde{x}^{2n}]$ existent, on peut définir la variance d'ordre n par l'équation (A.2) :

$$\mathbb{V}[\tilde{x}^n] = \mathbb{E}[\tilde{x}^{2n}] - \mathbb{E}[\tilde{x}^n]^2 \quad (\text{A.2})$$

Si $\mathbb{E}[\tilde{x}^n] \neq 0$, la variance réduite d'ordre n est définie par l'équation (A.3) :

$$v_n = \frac{\mathbb{V}[\tilde{x}^n]}{\mathbb{E}[\tilde{x}^n]^2} = \frac{\mathbb{E}[\tilde{x}^{2n}]}{\mathbb{E}[\tilde{x}^n]^2} - 1 \quad (\text{A.3})$$

Tous ces expressions sont aussi valable pour $n = \nu \in \mathbb{R}$.

A.1.2 Théorème

Considérons la PDF $f_{a,b}$ définie sur \mathbb{R} de la variable \tilde{x} , avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Si $\mathbb{E}[\tilde{x}^\nu]$ existe pour tout $\nu \in \mathbb{R}$ et $E(X^\nu) \neq 0$, alors il existe une relation entre $\mathbb{E}[\tilde{x}^\nu]$, $m = \mathbb{E}[\tilde{x}]$ et $v = \mathbb{V}[\tilde{x}]$ pour tout $\nu \in \mathbb{R}$ (i.e. une fonction implicite $F_\nu(m, v) = \mathbb{E}[\tilde{x}^\nu]$ pour chaque ν).

A.1.3 Preuve

Si $\mathbb{E}[\tilde{x}^\nu]$ existe, et en se basant sur l'équation (A.1), on peut dire que :

$$\mathbb{E}[\tilde{x}^\nu] = g_\nu(a, b)$$

Avec $g_\nu(a, b)$ est une fonction dépendante des paramètres (a, b) uniquement. D'une manière plus spécifique, nous obtenons $\mathbb{E}[\tilde{x}] = g_1(a, b) = m$ et $\mathbb{V}[\tilde{x}] = g_2(a, b) - g_1^2(a, b) = v$ avec $\mathbb{E}[\tilde{x}^2] = g_2(a, b) = m_2$. Notant que, dans certains cas, on peut obtenir $a = h_a(m, v)$ et $b = h_b(m, v)$ avec $h_a(m, v)$ et $h_b(m, v)$ sont les fonctions de (m, v) définies pour $v \in \mathbb{R}^{*+}$ et $m \in \mathbb{R}$. Dans certains cas, $\mathbb{E}[\tilde{x}^\nu]$ peut exprimer

en fonction de (m, v) . Généralement, la méthode consiste à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} g_1(a, b) & = m \\ g_2(a, b) - g_1^2(a, b) & = v \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

Alors, Les relations entre a et (m, v) peuvent être déduites, et entre b et (m, v) par les fonctions implicites $f_a(a, m, v) = 0$ et $f_b(b, m, v) = 0$. Par conséquent, $\mathbb{E}[\tilde{x}^\nu]$ est reliée à deux paramètres (m, v) par la fonction $g_\nu(a, b)$. Ce qui démontre que $F_\nu(m, v) = \mathbb{E}[\tilde{x}^\nu]$ existe pour tout ν . Si $v = Cm^2$, on peut déduire que $\mathbb{E}[\tilde{x}^\nu]$ ne dépend que de m , et par conséquent, v_ν dépend de m uniquement.

A.2 Propriétés des PDF classiques

Dans cette section, nous calculons v_ν sur quelques lois classiques, en fonction de ces paramètres et de ν et, si possible, en fonction de m et v ou en fonction de

$$v_1 = \frac{v}{m^2}$$

A.2.1 Loi uniforme

La PDF d'une loi uniforme est constante et définie sur un intervalle $[x_l, x_u]$ de \mathbb{R} par l'équation (A.5). Sa variance d'ordre ν , avec $\nu \in \mathbb{R} - \{-1, -\frac{1}{2}\}$, est donnée par l'équation (A.6).

$$f_{x_l, x_u} = \frac{1}{x_u - x_l} \quad (\text{A.5})$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\tilde{x}^\nu] &= \int_{x_l}^{x_u} x^\nu \cdot f(a, b)(x) dx \\ &= \frac{1}{x_u - x_l} \int_{x_l}^{x_u} x^\nu dx \\ &= \frac{1}{\nu + 1} \frac{1}{x_u - x_l} (x_u^{\nu+1} - x_l^{\nu+1}) \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

D'où, $m = \frac{x_u + x_l}{2}$ et $v = \frac{(x_u - x_l)^2}{12}$, et $x_u = m + \sqrt{3v}$ et $x_l = m - \sqrt{3v}$. Par conséquent, l'expression de v_ν avec $\nu \in \mathbb{R} - \{-1, -\frac{1}{2}\}$ est donnée dans l'équation (A.7).

$$v_\nu = \sqrt{3v} \frac{2(2\nu + 1) ((m + \sqrt{3v})^{2\nu+1} - (m - \sqrt{3v})^{2\nu+1})}{(\nu + 1)^2 ((m + \sqrt{3v})^{\nu+1} - (m - \sqrt{3v})^{\nu+1})^2} - 1 \quad (\text{A.7})$$

Si $\nu = -1$:

$$v_{-1} = \frac{12v}{m^2 - 3v} \frac{1}{\ln^2\left(\frac{m+\sqrt{3v}}{m-\sqrt{3v}}\right)} - 1 \quad (\text{A.8})$$

Si $\nu = -\frac{1}{2}$:

$$v_{-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3v}}{4} \frac{\ln\left(\frac{m+\sqrt{3v}}{m-\sqrt{3v}}\right)}{m - \sqrt{m^2 - 3v}} - 1 \quad (\text{A.9})$$

D'après ces équations, on peut conclure que v_ν peut être exprimé en fonction de $v_1 = \frac{v}{m^2}$ pour toutes les valeurs de $\nu \in \mathbb{R}$ pour la loi uniforme.

A.2.2 Loi Normale

La PDF d'une loi normale (Laplace-Gauss) est définie sur \mathbb{R} par l'équation (A.10), avec $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma \in \mathbb{R}^{*+}$.

$$f_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (\text{A.10})$$

Ses moments d'ordre n pour $n \in \mathbb{N}$ sont calculés en se basant sur l'intégrale I_n de l'équation (A.11), avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et H_n est le polynôme d'Hermite de degré n défini par l'équation (A.12). Donc, $H_0(x) = 1$, $H_1(x) = 2x$, $H_2(x) = 4x^2 - 2$, etc.

$$I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n \cdot e^{-(x-\alpha)^2} dx = (2i)^{-n} \sqrt{\pi} H_n(i\alpha) \quad (\text{A.11})$$

$$H_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \binom{n}{2k} (2x)^{n-2k} \quad (\text{A.12})$$

Par conséquent, si nous admettons que $u = x\sqrt{2}\sigma$ et $\mu = \alpha\sqrt{2}\sigma$ dans l'équation (A.11), nous obtenons l'équation (A.13) de $\mathbb{E}[\tilde{x}^n]$.

$$\mathbb{E}[\tilde{x}^n] = \frac{(\sqrt{2}\sigma)^n}{\sqrt{\pi}} I_n = \frac{(\sqrt{2}\sigma)^n}{(2i)^n} H_n\left(i \cdot \frac{\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right) \quad (\text{A.13})$$

La valeur de v_n est obtenue par l'équation (A.14)

$$v_n = \frac{H_{2n}\left(i \cdot \frac{\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right)}{H_n^2\left(i \cdot \frac{\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right)} - 1 \quad (\text{A.14})$$

Puis, en se basant sur les relations $m = \mu$ et $v = \sigma^2$, la valeur de v_n est une fonction de v_1 . En plus, les termes du polynôme d'Hermite sont de degrés impairs uniquement si n est impair, et de degrés pairs si n est pair. L'équation (A.14), montre que v_n peut être exprimé en fonction de v_1 quelque soit n pair ou impair. Par exemple, les valeurs de v_n pour $n = 2$, $n = 3$ et $n = 4$ sont :

$$v_2 = \frac{4v_1 + 2v_1^2}{(1 + v_1)^2} \quad (\text{A.15})$$

$$v_3 = 9 \frac{v_1 + 4v_1^2 + \frac{5}{3}v_1^3}{(1 + 3v_1)^2} \quad (\text{A.16})$$

$$v_4 = 16 \frac{v_1 + \frac{21}{2}v_1^2 + 24v_1^3 + 6v_1^4}{(1 + 6v_1 + 3v_1^2)^2} \quad (\text{A.17})$$

Ces calculs peuvent être généralisés pour $\nu \in \mathbb{R}$. Dans ce cas l'intégrale I_n est remplacée par l'intégrale J_ν qui peut être résolue en utilisant la fonction du cylindre parabolique D_ν par l'équation (A.18)

$$J_\nu = \int_{-\infty}^{+\infty} (i.x)^\nu . e^{-\beta^2 x^2 - iqx} dx = 2^{-\frac{\nu}{2}} \sqrt{\pi} \beta^{-\nu-1} . e^{-\frac{q^2}{8\beta^2}} D_\nu \left(\frac{q}{\beta\sqrt{2}} \right) \quad (\text{A.18})$$

La fonction $D_\nu(z)$ est exprimée dans l'équation (A.19) en fonction de la fonction confluyente hypergéométrique $\Phi(a, b, c)$ et $\nu > -1$ (dans les autres cas, l'intégrale J_ν est divergente pour $x \rightarrow 0$).

$$D_\nu(z) = 2^{\frac{\nu}{2}} e^{-\frac{z^2}{4}} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{1-\nu}{2})} \Phi \left(-\frac{\nu}{2}, \frac{1}{2}, \frac{z^2}{2} \right) - \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-\frac{\nu}{2})} \Phi \left(\frac{1-\nu}{2}, \frac{3}{2}, \frac{z^2}{2} \right) \right) \quad (\text{A.19})$$

En prenant, $q = i \frac{m}{\sigma^2}$ et $\beta = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma}$, la formule de $\mathbb{E}[\tilde{x}^\nu]$ est obtenue dans l'équation (A.20). Par conséquent, pour $\nu \in]-1, +\infty[$, v_ν est obtenu dans l'équation (A.21).

$$\mathbb{E}[\tilde{x}^\nu] = \frac{e^{-\frac{m^2}{2\sigma^2}}}{i^\nu \sigma \sqrt{2\pi}} . J_\nu = (-i\sigma)^\nu . e^{-\frac{m^2}{4\sigma^2}} D_\nu \left(i \cdot \frac{m}{\sigma} \right) \quad (\text{A.20})$$

$$v_\nu = e^{\frac{m^2}{4\sigma^2}} \frac{D_{2\nu} \left(i \cdot \frac{m}{\sigma} \right)}{\left(D_\nu \left(i \cdot \frac{m}{\sigma} \right) \right)^2} - 1 \quad (\text{A.21})$$

A.2.3 Loi Log-normale

La PDF de la loi log-normale est définie sur \mathbb{R}^{*+} par l'équation (A.22), avec $f_{\mu,\sigma}(0) = 0$, $\mu \in \mathbb{R}^{*+}$ et $\sigma \in \mathbb{R}^{*+}$.

$$f_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \frac{1}{x} e^{-\frac{(\ln(x)-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (\text{A.22})$$

Le moment d'ordre ν pour $\nu \in \mathbb{R}$ est donné dans l'équation (A.23).

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\tilde{x}^\nu] &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sigma} \int_0^\infty x^{\nu-1} e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\nu(\sqrt{2}\sigma u + \mu) - u^2} du \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{\frac{\nu^2}{2}\sigma^2 + \nu\mu} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy \\ &= e^{\frac{\nu^2}{2}\sigma^2 + \nu\mu} \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

En substituant x par $u = \frac{\ln x - \mu}{\sqrt{2}\sigma}$, qui correspond $x = e^{\sqrt{2}\sigma \cdot u + \mu}$, et $y = u - \frac{\nu}{\sqrt{2}}\sigma$, et sachant que l'intégrale de la fonction e^{-y^2} égale à $\sqrt{\pi}$. On peut déduire que $\mathbb{E}[\tilde{x}^\nu] = 1$ pour $\nu = 0$ et $\nu = -\frac{2\mu}{\sigma^2}$. De même, il est claire que :

$$m = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$$

et

$$v = e^{2\mu + \sigma^2} (e^{\sigma^2} - 1)$$

Par conséquent, il est possible de déduire μ et σ en fonction de m et v par :

$$\mu = \ln \left(\frac{m}{\sqrt{\frac{v}{m^2} + 1}} \right) \quad (\text{A.24})$$

$$\sigma = \sqrt{\ln \left(\frac{v}{m^2} + 1 \right)} \quad (\text{A.25})$$

L'expression générale de v_ν pour $\nu \in \mathbb{R}$ est donnée dans l'équation (A.26), où elle exprimée en fonction de ν_1 .

$$v_\nu = \left(\frac{v}{m^2} + 1 \right)^{\nu^2} - 1 = (v_1 + 1)^{\nu^2} - 1 \quad (\text{A.26})$$

A.2.4 Loi Weibull

La PDF Weibull est définie sur \mathbb{R}^+ par l'équation (A.27), tels que $\beta \in \mathbb{R}^{*+}$, $\lambda \in \mathbb{R}^{*+}$ et $f_{\mu,\sigma}(0) = 0$.

$$f_{\beta,\lambda}(x) = \beta\lambda^\beta \cdot x^{\beta-1} \cdot e^{-(\lambda x)^\beta} \quad (\text{A.27})$$

Le moment d'ordre ν pour $\nu \in \mathbb{R} \setminus \beta \cdot \mathbb{Z}^{*-}$ est obtenu par l'équation (A.28)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\tilde{x}^\nu] &= \int_0^{+\infty} \beta\lambda^\beta x^{\beta-1+\nu} e^{-(\lambda x)^\beta} dx \\ &= \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{\lambda} y^{\frac{1}{\beta}}\right)^\nu \cdot e^{-y} dy \\ &= \frac{1}{\lambda^\nu} \Gamma\left(1 + \frac{\nu}{\beta}\right) \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

En substituant $y = (\lambda x)^\beta$, où $x = \frac{1}{\lambda} y^{\frac{1}{\beta}}$, et en utilisant la fonction Gamma (équation (A.29) qui est définie sur $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-$, la formule de v_ν sur $\nu \in \mathbb{R} \setminus \beta \cdot \mathbb{Z}^{*-}$ est donnée par l'équation (A.30). Notant que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, et que l'intégrale de l'équation (A.29) est divergente pour les valeurs exclues ($x \in \mathbb{Z}^-$).

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \quad (\text{A.29})$$

$$v_\nu = \frac{1}{\lambda^\nu} \frac{\Gamma\left(1 + \frac{2\nu}{\beta}\right)}{\Gamma^2\left(1 + \frac{\nu}{\beta}\right)} - 1 \quad (\text{A.30})$$

$$= \frac{2\beta}{\nu} \frac{\Gamma\left(\frac{2\nu}{\beta}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{\nu}{\beta}\right)} - 1 \quad (\text{A.31})$$

Il n'est pas possible d'exprimer v_n explicitement en fonction de v_1 en se basant sur l'équation (A.30). Cependant, il est clair que sa valeur dépend du paramètre β uniquement, donc lorsque v_1 est connue, β et v_n seront connus. Pour les cas exclus ($\nu \notin \beta \cdot \mathbb{Z}^{*-}$), c'est à dire $\nu \in \beta \mathbb{Z}^-$, il est facile de vérifier que v_n est divergent, le rapport de $\mathbb{E}[\tilde{x}^{2\nu}]$ sur $\mathbb{E}[\tilde{x}^\nu]^2$ est divergent.

A.2.5 Loi Gumbel

La PDF de la loi Gumbel est définie sur \mathbb{R} par l'équation (A.32), avec $\theta \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}^{*+}$.

$$f_{\theta,\alpha}(x) = \frac{1}{\alpha} \exp\left(-\frac{x-\theta}{\alpha} - e^{-\frac{x-\theta}{\alpha}}\right) \quad (\text{A.32})$$

Le moment d'ordre ν pour $\nu \in \mathbb{N}$ est donné dans l'équation (A.33), avec $\mu = e^{\frac{\theta}{\alpha}}$ et la variable x est substituée par $x = -\alpha \ln u$ ($dx = -\alpha \frac{du}{u}$).

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [\tilde{x}^\nu] &= \frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} x^\nu \exp\left(-\frac{x-\theta}{\alpha} - e^{-\frac{x-\theta}{\alpha}}\right) dx \\ &= \alpha^\nu \mu (-1)^\nu \int_0^{+\infty} (\ln u)^\nu e^{-\mu \cdot u} du \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

Puis, en substituant t^{x-1} par $e^{(x-1)\ln t}$, pour $n \in \mathbb{N}^*$ (Γ est une fonction de classe C^∞) et en utilisant la loi de Leibnitz (équation (A.34)), nous obtenons l'équation (A.35). Ensuite, l'expression de $\mathbb{E} [\tilde{x}^\nu]$ sera l'équation (A.36), avec $\mu u = t$ et en utilisant $\ln \mu = \frac{\theta}{\alpha}$.

$$\frac{d^n}{dx^n} \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^n t^{x-1} e^{-t} dt \quad (\text{A.34})$$

$$\frac{d^n}{dx^n} \Gamma(1) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^n \cdot e^{-t} dt \quad (\text{A.35})$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [\tilde{x}^\nu] &= \alpha^\nu \mu (-1)^\nu \int_0^{+\infty} \left(\ln t - \frac{\theta}{\alpha}\right)^\nu e^{-t} dt \\ &= \alpha^\nu \mu (-1)^\nu \sum_{k=0}^{\nu} \int_0^{+\infty} \binom{\nu}{k} (\ln t)^k \left(-\frac{\theta}{\alpha}\right)^{\nu-k} e^{-t} dt \\ &= \theta^\nu + \alpha^\nu \sum_{k=1}^{\nu} (-1)^k \binom{\nu}{k} \left(\frac{\theta}{\alpha}\right)^{\nu-k} \cdot \frac{d^k}{dx^k} \Gamma(1) \end{aligned} \quad (\text{A.36})$$

A fin de trouver la formule de v_ν , $\frac{d^k}{dx^k} \Gamma(1)$ est exprimé en fonction des termes de $\psi^{(k)}(x) = \frac{d^k \psi(x)}{dx^k}$ pour $k \in \mathbb{N}$, avec $\psi^{(0)}(x) = \psi(x) = \frac{d\Gamma(x)}{dx}$. Les valeurs de ces fonctions pour $x = 1$ sont connues en fonction des termes de la fonction de Riemann ζ (pour $k \in \mathbb{N}^*$) :

$$\psi^{(k)}(1) = (-1)^{k+1} k! \zeta(k+1) = (-1)^{k+1} k! \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(i+1)^{k+1}}$$

Si $n = 0$, $\psi^{(0)}(1) = \psi(1) = -\gamma = -\zeta(1)$, γ étant la constante d'Euler-Mascheroni :

$$\gamma = \lim_{m \rightarrow +\infty} \left(\sum_{i=1}^m \frac{1}{i} - \ln(m) \right) = 0,5772156649$$

De plus, on peut voir que :

$$\begin{aligned}\frac{d^k \Gamma(x)}{dx^k} &= \frac{d^{k-1} \Gamma(x)}{dx^{k-1}} \\ &= \psi(x) \frac{d^{k-1} \Gamma(x)}{dx^{k-1}} + \Gamma(x) \psi^{(k-1)}(x)\end{aligned}\quad (\text{A.37})$$

Un calcul récurrent conduit à l'équation (A.38), pour $x = 1$, nous obtenons l'équation (A.39)

$$\frac{d^k \Gamma(x)}{dx^k} = \psi^k(x) + \Gamma(x) \sum_{i=0}^{k-2} \psi^{(k-i-1)}(x) \psi^i(x) \quad (\text{A.38})$$

$$\frac{d^k \Gamma(1)}{dx^k} = (-\gamma)^k + \sum_{i=0}^{k-2} \psi^{(k-i-1)}(1) (-\gamma)^i \quad (\text{A.39})$$

En remplaçant l'équation (A.39) dans l'équation (A.36), nous obtenons l'équation (A.40) $\mathbb{E}[\tilde{x}^\nu]$ pour $\nu \geq 2$.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\tilde{x}^\nu] &= \theta^\nu + \alpha^\nu \sum_{k=1}^{\nu} \binom{\nu}{k} \left(\frac{\theta}{\alpha}\right)^{\nu-k} \left(\gamma^k + \sum_{i=0}^{k-2} (-1)^{k+i} \gamma^i \psi^{(k-i-1)}(1)\right) \\ &= \theta^\nu + \alpha^\nu \sum_{k=1}^{\nu} \binom{\nu}{k} \left(\frac{\theta}{\alpha}\right)^{\nu-k} \left(\gamma^k + \sum_{i=0}^{k-2} \gamma^i (k-i-1)! \zeta(k-i)\right)\end{aligned}\quad (\text{A.40})$$

En se basant sur l'équation (A.40), les deux premiers moments sont (m est obtenu en substituant la somme de $i = 0$ à $k - 2$ par zéro) :

$$m = \theta + \alpha \gamma \quad (\text{A.41})$$

$$m_2 = \theta^2 + \alpha^2 \left(2 \frac{\theta}{\alpha} \gamma + (\gamma^2 + \zeta(2))\right) \quad (\text{A.42})$$

Avec $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$, Les valeurs paires $\zeta(2k)$ sont obtenues par :

$$\zeta(2k) = \frac{|B_{2k}| (2\pi)^{2k}}{2(2k)!}$$

B_{2k} est le nombre de Bernoulli, défini par la relation de récurrence :

$$(m+1)B_m = - \sum_{i=0}^{m-1} \binom{m+1}{i} B_i$$

Les valeurs impaires $\zeta(2k+1)$ sont supposées irrationnelles (conjecture démontrée

seulement pour $\zeta(3) \simeq 1.2020569$). Puis, v_1 est obtenue directement en fonction de $\frac{\alpha}{\theta}$ par l'équation (A.43).

$$v_1 = \left(\frac{\alpha}{\theta}\right)^2 \frac{\pi^2}{6 \left(1 + \frac{\alpha}{\theta} \gamma\right)^2} \quad (\text{A.43})$$

De cette équation, nous obtenons :

$$\left|\frac{\alpha}{\theta}\right| = \frac{\sqrt{6v_1}}{\pi} \left|1 + \frac{\alpha}{\theta}\right|$$

Connaissant que $\alpha > 0$, il est possible d'obtenir $\frac{\alpha}{\theta}$ en fonction de v_1 pour $\theta \neq 0$ par l'équation (A.44).

$$\frac{\alpha}{\theta} = \frac{\sqrt{6v_1}}{\pi(1 - 2\chi) - \sqrt{6v_1}} \quad (\text{A.44})$$

$$\text{avec } \chi = \begin{cases} 1 & \text{if } \theta \in [-\alpha, 0[\\ 0 & \text{else } \in \mathbb{R}^* \end{cases} \quad (\text{A.45})$$

Si $\theta = 0$:

$$v_1 = \frac{\pi^2}{6\gamma^2}$$

v_1 est une constante indépendante de α . Alors, il est possible d'exprimer v_n pour une loi Gumbel, pour $\theta \neq 0$ et $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, par l'équation (A.46).

$$v_\nu = \frac{1 + \sum_{k=1}^{2\nu} \binom{2\nu}{k} \left(\frac{\alpha}{\theta}\right)^k \cdot \left(\gamma^k + \sum_{i=0}^{k-2} \gamma^i (k-i-1)! \zeta(k-i)\right)}{\left(1 + \sum_{k=1}^{\nu} \binom{\nu}{k} \left(\frac{\alpha}{\theta}\right)^k \cdot \left(\gamma^k + \sum_{i=0}^{k-2} \gamma^i (k-i-1)! \zeta(k-i)\right)\right)^2} - 1 \quad (\text{A.46})$$

Si $\theta = 0$, l'expression de v_ν est l'équation (A.47)

$$v_\nu = \frac{\gamma^{2\nu} + \sum_{i=0}^{2\nu-2} \gamma^i (2\nu-i-1)! \zeta(2\nu-i)}{\left(\gamma^\nu + \sum_{i=0}^{\nu-2} \gamma^i (\nu-i-1)! \zeta(\nu-i)\right)^2} - 1 \quad (\text{A.47})$$

Selon l'équation (A.46), il est clair que v_ν peut être exprimé en fonction de v_1 et si $\theta = 0$, v_ν est une valeur constante qui ne dépend que de ν .

A.3 Cas particuliers

Dans cette section, nous prenons les formulations de v_ν calculées ci-avant et nous les recalculons dans deux cas particuliers de la variance v :

1. $v = cm^2$ avec $c \in \mathbb{R}^+$
2. $v = a$ avec $a \in \mathbb{R}^+$

A.3.1 PDF d'une loi uniforme

L'expression de v_ν est obtenue par l'équation (A.7) si $\nu \in \mathbb{R} - \{-1, -\frac{1}{2}\}$.
Si $v = cm^2$ nous obtenons l'équation (A.48),

$$v_\nu = \sqrt{3c} \frac{2(2\nu + 1)}{(\nu + 1)^2} \frac{((1 + \sqrt{3c})^{2\nu+1} - (1 - \sqrt{3c})^{2\nu+1})}{((1 + \sqrt{3c})^{\nu+1} - (1 - \sqrt{3c})^{\nu+1})^2} - 1 \quad (\text{A.48})$$

Si $v = a$, les valeurs de v_ν , $\mathbb{E}[\tilde{x}_\nu]$, $\mathbb{V}[\tilde{x}_\nu]$, $\frac{d[\mathbb{E}[\tilde{x}^\nu]]}{dx}$ et $\frac{d[\mathbb{V}[\tilde{x}^\nu]]}{dx}$ sont données ci-après :

$$v_\nu = \sqrt{3a} \frac{2(2\nu + 1)}{(\nu + 1)^2} \frac{((m + \sqrt{3a})^{2\nu+1} - (m - \sqrt{3a})^{2\nu+1})}{((m + \sqrt{3a})^{\nu+1} - (m - \sqrt{3a})^{\nu+1})^2} - 1 \quad (\text{A.49})$$

$$\mathbb{E}[\tilde{x}^\nu] = \frac{(x + \sqrt{3a})^{\nu+1} - (x - \sqrt{3a})^{\nu+1}}{2 \cdot \sqrt{3a} (\nu + 1)} \quad (\text{A.50})$$

$$\frac{d[\mathbb{E}[\tilde{x}^\nu]]}{dx} = \frac{(x + \sqrt{3a})^\nu - (x - \sqrt{3a})^\nu}{2 \cdot \sqrt{3a}} \quad (\text{A.51})$$

$$\mathbb{V}[\tilde{x}_\nu] = \frac{(2\nu + 1) \left((x + \sqrt{3a})^{2\nu+1} - (x - \sqrt{3a})^{2\nu+1} \right)}{2 \cdot \sqrt{3a} (\nu + 1)^4} - \frac{\left((x + \sqrt{3a})^{\nu+1} - (x - \sqrt{3a})^{\nu+1} \right)^2}{12a (\nu + 1)^2} \quad (\text{A.52})$$

$$\begin{aligned} \frac{d[\mathbb{V}[\tilde{x}^\nu]]}{dx} &= \frac{\sqrt{3a} (2\nu + 1) \left((2\nu + 1) (x + \sqrt{3a})^{2\nu} - (2\nu + 1) (x - \sqrt{3a})^{2\nu} \right)}{6a (\nu + 1)^4} \\ &- \frac{(\nu + 1)^2 \left((\nu + 1) (x + \sqrt{3a})^\nu - (\nu + 1) (x - \sqrt{3a})^\nu \right) \left((x + \sqrt{3a})^{\nu+1} - (x - \sqrt{3a})^{\nu+1} \right)}{6a (\nu + 1)^4} \end{aligned} \quad (\text{A.53})$$

Si $\nu = -1$, l'équation (A.7) est remplacée par l'équation (A.8), pour $v = cm^2$ et $v = a$ les équations de v_{-1} sont l'équation (A.54) et l'équation (A.55) respectivement.

$$v_{-1} = \frac{12c}{1 - 3c} \frac{1}{\ln^2\left(\frac{1+\sqrt{3c}}{1-\sqrt{3c}}\right)} - 1 \quad (\text{A.54})$$

$$v_{-1} = \frac{12a}{m^2 - 3a} \frac{1}{\ln^2\left(\frac{m+\sqrt{3a}}{m-\sqrt{3a}}\right)} - 1 \quad (\text{A.55})$$

Nous répétons le même démarche pour l'équation (A.9), nous obtenons l'équation (A.56) si $v = cm^2$ et l'équation (A.57) si $v = a$.

$$v_{-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3c}}{4} \frac{\ln\left(\frac{1+\sqrt{3c}}{1-\sqrt{3c}}\right)}{1 - \sqrt{1-3c}} - 1 \quad (\text{A.56})$$

$$v_{-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3a}}{4} \frac{\ln\left(\frac{m+\sqrt{3a}}{m-\sqrt{3a}}\right)}{m - \sqrt{m^2 - 3a}} - 1 \quad (\text{A.57})$$

A.3.2 PDF d'une loi normale

Pour $\nu \in]-1, +\infty[$, v_ν est obtenue par l'équation (A.14), Cette équation est recalculée dans les deux cas cités ci-dessus, nous obtenons :

Si $v = cm^2$:

$$v_\nu = e^{\frac{1}{4c}} \frac{D_{2\nu}\left(i, \frac{1}{\sqrt{c}}\right)}{\left(D_\nu\left(i, \frac{1}{\sqrt{c}}\right)\right)^2} - 1 \quad (\text{A.58})$$

Si $v = a$:

$$v_\nu = e^{\frac{m^2}{4a}} \frac{D_{2\nu}\left(i, \frac{m}{\sqrt{a}}\right)}{\left(D_\nu\left(i, \frac{m}{\sqrt{a}}\right)\right)^2} - 1 \quad (\text{A.59})$$

A.3.3 PDF d'une loi log-normale

L'expression générale de v_ν pour $\nu \in \mathbb{R}$ est obtenue par l'équation (A.26) :

Si $v = cm^2$

$$v_\nu = (c + 1)^{\nu^2} - 1 \quad (\text{A.60})$$

Si $v = a$

$$v_\nu = \left(\frac{a}{m^2} + 1\right)^{\nu^2} - 1 \quad (\text{A.61})$$

Dans ce cas, les équations de $\mathbb{E}[x_\nu]$ et $\mathbb{V}[x_\nu]$ seront :

$$\mathbb{E}[\tilde{x}^\nu] = \frac{x^{2\nu} (x^2 + a)^{\frac{\nu^2}{2} - \frac{\nu}{2}}}{(x)^{\nu^2}} \quad (\text{A.62})$$

$$\mathbb{V}[\tilde{x}^\nu] = \frac{(x^2 + a)^{(\nu-1)\nu} \left((x^2 + a)^{\nu^2} - x^{2\nu^2} \right)}{x^{4(\nu-1)\nu}} \quad (\text{A.63})$$

Afin d'évaluer l'antagonisme entre $\mathbb{V}[x_\nu]$ et $\mathbb{E}[x_\nu]$, il suffit de calculer leurs dérivées $\frac{d[\mathbb{V}[x_\nu]]}{dx}$ et $\frac{d[\mathbb{E}[x_\nu]]}{dx}$:

$$\frac{d[\mathbb{E}[\tilde{x}^\nu]]}{dx} = \frac{\nu x^{2\nu-1} (x^2 + a)^{\frac{(\nu-2)(\nu+1)}{2}} (x^2 - a(\nu-2))}{(x)^{\nu^2}} \quad (\text{A.64})$$

$$\frac{d[\mathbb{V}[\tilde{x}^\nu]]}{dx} = \frac{2\nu (x^2 + a)^{(\nu-1)\nu-1} \left((x^2 + a)^{\nu^2} (x^2 - 2a(\nu-1)) - x^{2\nu^2} (x^2 - a(\nu-2)) \right)}{x^{(2\nu-1)^2}} \quad (\text{A.65})$$

A.3.4 PDF d'une loi Weibull

Pour la loi Weibull, comme il est déjà expliqué v_ν ne dépend que de β et ν . Alors, si v_1 est constant alors β est constant, donc nous obtenons un v_ν constant pour une valeur connue de ν .

A.3.5 PDF d'une loi Gumbel

Pour une loi Gumbel v_n est obtenu dans l'équation (A.46) pour $\theta \neq 0$ et $\nu \in \mathbb{N}, \nu \geq 2$, tel que v_1 est obtenue par l'équation (A.43) qui est une fonction de $\frac{\alpha}{\theta}$, si $v = cm^2$ alors $v_1 = c$, donc $\frac{\alpha}{\theta} = c_1$ (c_1 est un constant). En plus, v_ν dépend de $\frac{\alpha}{\theta}$ uniquement, donc, dans ce cas v_ν est connu pour ν donné. Pour le cas où $\theta = 0$, v_ν est constant pour ν prédéterminé comme il est indiqué précédemment.

A.3.6 Conclusion

Il est clair que dans tous les cas cités ci-avant, si $v = cm^2$, alors v_ν et v_n sont constants. Dans ces cas, si nous supposons $x \in \mathbb{R}^+$, l'antagonisme n'existe pas entre l'espérance et la variance de la fonction $f(x) = x^\nu$.

Cependant, dans le second cas, il est difficile de tester l'existence de cet antagonisme pour cette fonction $f(x) = x^\nu$. Dans ce cas, on peut évaluer les dérivées de $\frac{d[\mathbb{V}[\tilde{x}^\nu]]}{dx}$

et $\frac{d[\mathbb{E}[\tilde{x}^\nu]]}{dx}$ et on détermine les régions de x , l'antagonisme est absent dans les régions, où ces deux dérivées possèdent le même signe.

A.4 Sommaire

Les résultats de cette annexe sont résumés dans le tableau A.1. Les équations de la propagation des incertitudes pour le modèle de multiplication sont données dans l'équation (A.66), et celles pour les modèles de sommation des modèles de multiplication sont données dans l'équation (A.67).

$$\begin{aligned}
 g(\tilde{\mathbf{x}}) &= K \prod_{i=1}^n \tilde{x}_i^{\nu_i} \text{ where } K, \nu_i \in \mathbb{R}^2 \\
 \mathbb{E}[g(\tilde{\mathbf{x}})] &= K \prod_{i=1}^n \mathbb{E}[\tilde{x}_i^{\nu_i}] \\
 \mathbb{V}[g(\tilde{\mathbf{x}})] &= K^2 \left\{ \prod_{i=1}^n \mathbb{E}[\tilde{x}_i^{2\nu_i}] - \prod_{i=1}^n \mathbb{E}[\tilde{x}_i^{\nu_i}]^2 \right\}
 \end{aligned} \tag{A.66}$$

$$\begin{aligned}
 h(\tilde{\mathbf{x}}) &= \sum_{j=1}^m g_j(\tilde{\mathbf{x}}) \\
 \mathbb{E}[h(\tilde{\mathbf{x}})] &= \sum_{j=1}^m \mathbb{E}[g_j(\tilde{\mathbf{x}})] \\
 \mathbb{V}[h(\tilde{\mathbf{x}})] &= \sum_{j=1}^m \mathbb{V}[g_j(\tilde{\mathbf{x}})] + 2 \sum_{1 \leq j < k \leq m} cov(g_j(\tilde{\mathbf{x}}), g_k(\tilde{\mathbf{x}})) \\
 cov(g_j(\tilde{\mathbf{x}}), g_k(\tilde{\mathbf{x}})) &= \mathbb{E}[g_j(\tilde{\mathbf{x}})g_k(\tilde{\mathbf{x}})] - \mathbb{E}[g_j(\tilde{\mathbf{x}})]\mathbb{E}[g_k(\tilde{\mathbf{x}})]
 \end{aligned} \tag{A.67}$$

Modèle à minimiser	Type de distribution	Valeurs de ν	Propagation des incertitudes	Évaluation de l'antagonisme	
				$v = cm^2$	$v = a$
$f(\tilde{x}) = \tilde{x}^\nu$	Uniforme	$\nu \in \mathbb{R}$	Équation (A.6)	N'existe pas (NEP)	Méthode des dérivés
	Normale	$\nu \in]-1, +\infty[$	Équation (A.20)		
	Log-Normale	$\nu \in \mathbb{R}$	Équation (A.23)		
	Weibull	$\nu \in \mathbb{R} \setminus \beta.\mathbb{Z}^{*-}$	Équation (A.28)		
	Gumbel	$\nu \in \mathbb{N}$	Équation (A.40)		
$g(\tilde{\mathbf{x}}) = K \prod_{i=1}^n \tilde{x}_i^{\nu_i}$	Ci-dessus	Ci-dessus	Équation (A.66)	NEP si $K \geq 0$ Existe si $K < 0$	Méthode générale
$h(\tilde{\mathbf{x}}) = \sum_{j=1}^m g_j(\tilde{\mathbf{x}})$	Ci-dessus	Ci-dessus	Équation (A.67)	Méthode générale	Méthode générale

TABLEAU A.1 – Les différents cas des modèles multiplicatifs



Propagation des incertitudes sur les métamodèles RBF gaussiens

Sommaire du présent chapitre

B.1 Formulation générale	171
B.1.1 Les moments d'une fonction probabiliste	171
B.1.2 Fonctions à base radiale	172
B.1.3 Formulation générale des moments de RBF	172
B.2 Les moments de RBF avec une PDF d'une loi normale	173
B.2.1 PDF d'une loi normale pour des variables indépendantes	173
B.2.2 Formulation générale des moments de la fonction RBF avec une PDF d'une loi normale	173
B.2.3 Moments d'ordre N pour la somme de $g_{\epsilon, G}$ avec une PDF d'une loi normale	175

B.1 Formulation générale

B.1.1 Les moments d'une fonction probabiliste

Considérons la fonction de densité de probabilité f d'une fonction aléatoire ϕ , définie sur \mathbb{R}^n . Le moment d'ordre N de ϕ est défini (si l'intégrale de Riemann-Stieltjes existe) sur $n \in \mathbb{N}$ (peut être généralisé pour $n \in \mathbb{R}$) par l'équation (B.1) :

$$\mathbb{E} [\phi^N] = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \phi^N(x_1, \dots, x_n) \cdot f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n \quad (\text{B.1})$$

Si $n = 0$, $\mathbb{E} [\tilde{x}^0] = 1$ selon la propriété de la sommation de la PDF f .

Si $\mathbb{E}[\tilde{x}^n]$ et $\mathbb{E}[\tilde{x}^{2n}]$ existent, on peut définir la variance d'ordre n par l'équation (B.2) :

$$\mathbb{V}[\phi^N] = \mathbb{E}[\phi^{2N}] - \mathbb{E}[\phi^N]^2 \quad (\text{B.2})$$

Toutes ces expressions sont valables pour $N = \nu \in \mathbb{R}$.

B.1.2 Fonctions à base radiale

Considérons la fonction $g_{\epsilon,G}(x_1, \dots, x_n)$, avec $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \in \mathbb{R}^n$ et $\epsilon \in \mathbb{R}$, définie avec des valeurs sur \mathbb{R}^+ . Une fonction RBF gaussienne est donnée par l'équation (B.3)

$$g_{\epsilon,G} = e^{-(\epsilon r)^2} = \exp\left(-\epsilon^2 \sum_{i=1}^n (x_i - x_i^b)^2\right) \quad (\text{B.3})$$

Tel que x_i^b sont fixes (coordonnées d'un point fixe dans l'espace \mathbb{R}^n).

$$g_{\epsilon,G} = 1 \text{ pour } x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$$

En plus

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} g_{\epsilon,G} = 0$$

B.1.3 Formulation générale des moments de RBF

En se basant sur l'équation (B.1), le moment d'ordre N de $g_{\epsilon,G}$ avec la fonction PDF f est :

$$\mathbb{E}[g_{\epsilon,G}^N] = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} g_{\epsilon,G}^N(x_1, \dots, x_n) f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n \quad (\text{B.4})$$

Ce moment d'ordre N est défini si cette intégrale est convergente, ce qui est assuré lorsque $f \rightarrow 0$ plus rapidement que l'augmentation de $g_{\epsilon,G}$ lorsque $x_i \rightarrow \infty$ pour $i = 1, \dots, n$. Cette condition est généralement vérifiée et la fonction f est définie avec $\{x_1, \dots, x_n\} \in (\mathbb{R}^+)^n$ ou sur une intervalle finie lorsqu'une divergence est possible.

B.2 Les moments de RBF avec une PDF d'une loi normale

B.2.1 PDF d'une loi normale pour des variables indépendantes

Considérons les variables indépendantes $\{x_1, \dots, x_n\} \in \mathbb{R}^n$, la PDF d'une loi normale (Laplace-Gauss) est définie par :

$$f_{\mu_1, \dots, \mu_n, \sigma_1, \dots, \sigma_n}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \frac{1}{\prod_{i=1}^n \sigma_i} \cdot \exp\left(-\sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \mu_i)^2}{2\sigma_i^2}\right) \quad (\text{B.5})$$

Tels que $\mu_i \in \mathbb{R}$ et $\sigma_i \in \mathbb{R}^{*+}$, pour $i = \{1, \dots, n\}$, sont respectivement la moyenne et l'écart-type pour la variable x_i .

B.2.2 Formulation générale des moments de la fonction RBF avec une PDF d'une loi normale

En se basant sur l'équation (B.5) et l'équation (B.4) nous obtenons :

$$\mathbb{E} [g_{\epsilon, G}^N] = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \frac{1}{\prod_{i=1}^n \sigma_i} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} g_{\epsilon}^N(x_1, \dots, x_n) \cdot \exp\left(-\sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \mu_i)^2}{2\sigma_i^2}\right) dx_1 \dots dx_n \quad (\text{B.6})$$

La PDF d'une loi normale converge vers 0 très rapidement quand $x_i \rightarrow \infty$ pour $i = \{1, \dots, n\}$, ce qui est suffisant pour assurer la convergence de cette intégrale et l'existence du moment $\mathbb{E} [g_{\epsilon, G}^N]$. En remplaçant $g_{\epsilon, G}$ par l'équation (B.3) dans l'équation (B.6), nous obtenons :

$$\mathbb{E} [g_{\epsilon, G}^N] = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \frac{1}{\prod_{i=1}^n \sigma_i} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\sum_{i=1}^n \left(N \cdot \epsilon^2 \cdot (x_i - x_i^b)^2 + \frac{(x_i - \mu_i)^2}{2\sigma_i^2}\right)\right) dx_1 \dots dx_n \quad (\text{B.7})$$

Il est clair que chaque intégrale en fonction de x_i peut être calculée indépendamment, d'où l'équation de $\mathbb{E} [g_{\epsilon, G}^N]$ sera :

$$\mathbb{E} [g_{\epsilon, G}^N] = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \frac{1}{\prod_{i=1}^n \sigma_i} \cdot \prod_{i=1}^n \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-N \cdot \epsilon^2 \cdot (x_i - x_i^b)^2 - \frac{(x_i - \mu_i)^2}{2\sigma_i^2}\right) dx_i \right) \quad (\text{B.8})$$

Par conséquent, il est possible d'obtenir le résultat en calculant indépendamment chaque intégrale de la fonction exponentielle avec la variable x_i . Après le développement de l'argument de la fonction exponentielle, nous obtenons :

$$-N.\epsilon^2.(x_i - x_i^b)^2 - \frac{(x_i - \mu_i)^2}{2\sigma_i^2} = \left(N\epsilon^2 + \frac{1}{2\sigma_i^2}\right) \left(x_i^2 - \frac{2N.\epsilon^2 x_i^b + \frac{\mu_i}{\sigma_i^2}}{N.\epsilon^2 + \frac{1}{2\sigma_i^2}}.x_i + \left(\frac{\mu_i^2}{2\sigma_i^2} + N.\epsilon^2(x_i^b)^2\right)\right) \quad (\text{B.9})$$

Cette fonction peut être écrite sous cette forme :

$$\exp\left(-N.\epsilon^2.(x_i - x_i^b)^2 - \frac{(x_i - \mu_i)^2}{2\sigma_i^2}\right) = \exp\left(-\left(N\epsilon^2 + \frac{1}{2\sigma_i^2}\right)(x_i - a_i)^2 - b_i\right) \quad (\text{B.10})$$

avec :

$$a_i = \frac{N.\epsilon^2 x_i^b + \frac{\mu_i}{2\sigma_i^2}}{N\epsilon^2 + \frac{1}{2\sigma_i^2}} \quad (\text{B.11})$$

$$b_i = N.\epsilon^2(x_i^b)^2 + \frac{\mu_i^2}{2\sigma_i^2} - \left(N\epsilon^2 + \frac{1}{2\sigma_i^2}\right)a_i^2 = \frac{N\epsilon^2(\mu_i - x_i^b)^2}{1 + 2N\epsilon^2\sigma_i^2} \quad (\text{B.12})$$

Sachant que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-px^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{p}}$$

Nous obtenons l'intégrale de la fonction exponentielle :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-N.\epsilon^2.(x_i - x_i^b)^2 - \frac{(x_i - \mu_i)^2}{2\sigma_i^2}\right) dx_i = e^{-b_i} \sqrt{\frac{\pi}{N\epsilon^2 + \frac{1}{2\sigma_i^2}}} \quad (\text{B.13})$$

Puis, la formule de $\mathbb{E}[g_{\epsilon,G}^N]$ avec une PDF d'une loi normale est obtenue par l'équation (B.14) :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[g_{\epsilon,G}^N] &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \frac{1}{\prod_{i=1}^n \sigma_i} \cdot \prod_{i=1}^n \left(e^{-b_i} \sqrt{\frac{\pi}{N\epsilon^2 + \frac{1}{2\sigma_i^2}}} \right) \\ &= \prod_{i=1}^n \left(\frac{e^{-b_i}}{(1 + 2N.\epsilon^2\sigma_i^2)^{\frac{1}{2}}} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

Cette équation peut être écrite sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}\mathbb{E} \left[g_{\epsilon, G}^N \right] &= \prod_{i=1}^n \left(\kappa_i \cdot e^{-N\epsilon^2 \kappa_i^2 (\mu_i - x_i^b)^2} \right) \\ &= \left(\prod_{i=1}^n \kappa_i \right) \cdot \exp \left(-N\epsilon^2 \sum_{i=1}^n \kappa_i^2 (\mu_i - x_i^b)^2 \right)\end{aligned}\quad (\text{B.15})$$

Tel que :

$$\kappa_i = \frac{1}{(1 + 2N \cdot \epsilon^2 \sigma_i^2)^{\frac{1}{2}}}\quad (\text{B.16})$$

B.2.3 Moments d'ordre N pour la somme de $g_{\epsilon, G}$ avec une PDF d'une loi normale

Formulation générale

La fonction G_{n_s} qui est la somme d'un nombre n_s de fonctions $g_{\epsilon, G}$ est donnée par :

$$G_{n_s} = \sum_{j=1}^{n_s} \alpha_j g_{\epsilon, G}^{(j)} = \sum_{j=1}^{n_s} \alpha_j \exp \left(-\epsilon_j^2 \sum_{i=1}^n (x_i - x_i^{(j)})^2 \right)\quad (\text{B.17})$$

Par conséquent, le moment d'ordre N de G_{n_s} existe et il est défini par :

$$\begin{aligned}E(G_{n_s}^N) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \frac{1}{\prod_{i=1}^n \sigma_i} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{j=1}^{n_s} \alpha_j \exp \left(-\epsilon_j^2 \sum_{i=1}^n (x_i - x_i^{(j)})^2 \right) \right)^N \\ &\quad \cdot \exp \left(-\sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \mu_i)^2}{2\sigma_i^2} \right) dx_1 \dots dx_n\end{aligned}\quad (\text{B.18})$$

Après le développement de $G_{n_s}^N$, on peut l'écrire sous cette forme :

$$G_{n_s}^N = \sum_{k_j \in E_{n_s, N}} \binom{N}{k_1 \dots k_{n_s}} \left(\prod_{j=1}^{n_s} \alpha_j^{k_j} \right) \cdot \exp \left(-\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n_s} k_j \epsilon_j^2 (x_i - x_i^{(j)})^2 \right)\quad (\text{B.19})$$

Tel que $E_{n_s, N}$ est l'ensemble des entiers k_j :

$$E_{n_s, N} = \left\{ k_j \in \mathbb{N}, \sum_{j=1}^{n_s} k_j = N \right\}$$

Et :

$$\binom{N}{k_1 \dots k_{n_s}} = \frac{N!}{\prod_{i=1}^{n_s} k_i!}$$

Alors, l'expression générale de $\mathbb{E} \left[G_{n_s}^N \right]$ avec une PDF d'une loi normale sera :

$$\mathbb{E} [G_{n_s}^N] = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \frac{1}{\prod_{i=1}^n \sigma_i} \cdot \sum_{k_j \in E_{n_s, N}} \binom{N}{k_1 \dots k_{n_s}} \left(\prod_{j=1}^{n_s} \alpha_j^{k_j} \right) \cdot \left(\prod_{i=1}^n I_{i, k_j} \right) \quad (\text{B.20})$$

Avec :

$$I_{i, k_j} = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left(- \sum_{j=1}^{n_s} k_j \epsilon_j^2 (x_i - x_i^{(j)})^2 - \frac{(x_i - \mu_i)^2}{2\sigma_i^2} \right) dx_i \quad (\text{B.21})$$

Cette expression admet la même forme que celle de l'équation (B.8), par conséquent, il est possible de simplifier la forme de l'intégrant :

$$\begin{aligned} & \exp \left(- \sum_{j=1}^{n_s} k_j \epsilon_j^2 (x_i - x_i^{(j)})^2 - \frac{(x_i - \mu_i)^2}{2\sigma_i^2} \right) = \\ & \exp \left(- \left(\sum_{j=1}^{n_s} k_j \epsilon_j^2 + \frac{1}{2\sigma_i^2} \right) (x_i - a_{i, k_j})^2 - b_{i, k_j} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

Tel que :

$$a_{i, k_j} = \frac{\sum_{j=1}^{n_s} k_j \epsilon_j^2 \cdot x_i^{(j)} + \frac{\mu_i}{2\sigma_i^2}}{\sum_{j=1}^{n_s} k_j \epsilon_j^2 + \frac{1}{2\sigma_i^2}} \quad (\text{B.23})$$

$$b_{i, k_j} = \left(\sum_{j=1}^{n_s} k_j \epsilon_j^2 \cdot x_i^{(j)2} + \frac{\mu_i^2}{2\sigma_i^2} \right) - a_{i, k_j}^2 \cdot \left(\sum_{j=1}^{n_s} k_j \epsilon_j^2 + \frac{1}{2\sigma_i^2} \right) \quad (\text{B.24})$$

Alors, chaque I_{i, k_j} sera déduite de la même manière que pour l'équation (B.13) :

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left(- \sum_{j=1}^{n_s} k_j \epsilon_j^2 (x_i - x_i^{(j)})^2 - \frac{(x_i - \mu_i)^2}{2\sigma_i^2} \right) dx_i \\ & = e^{-b_{i, k_j}} \sqrt{\frac{\pi}{\sum_{j=1}^{n_s} k_j \epsilon_j^2 + \frac{1}{2\sigma_i^2}}} \end{aligned} \quad (\text{B.25})$$

Et finalement :

$$\mathbb{E} [G_{n_s}^N] = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \frac{1}{\prod_{i=1}^n \sigma_i} \cdot \sum_{k_j \in E_{n_s, N}} \binom{N}{k_1 \dots k_{n_s}} \left(\prod_{j=1}^{n_s} \alpha_j^{k_j} \right) \left(\prod_{i=1}^n \kappa_{i, k_j} \cdot e^{-b_{i, k_j}} \right) \quad (\text{B.26})$$

Avec :

$$\kappa_{i, k_j} = \left(1 + 2\sigma_i^2 \sum_{j=1}^{n_s} k_j \epsilon_j^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (\text{B.27})$$

Espérance et Variance

L'espérance est facilement obtenue en mettant $N = 1$ dans l'équation (B.26) et l'équation (B.15) :

$$\mathbb{E}[G_{n_s}] = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \frac{1}{\prod_{i=1}^n \sigma_i} \cdot \sum_{j=1}^{n_s} \alpha_j \left(\prod_{i=1}^n \kappa_i^{(j)} \right) \cdot \exp \left(-\epsilon^2 \sum_{i=1}^n \kappa_i^{(j)^2} (\mu_i - x_i^{(j)})^2 \right) \quad (\text{B.28})$$

Avec :

$$\kappa_i^{(j)} = \frac{1}{(1 + 2\epsilon_j^2 \sigma_i^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (\text{B.29})$$

Le moment d'ordre 2 qui correspond à $N = 2$ dans l'équation (B.26) :

$$\mathbb{E}[G_{n_s}^2] = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \frac{1}{\prod_{i=1}^n \sigma_i} \cdot \sum_{k_j \in E_{n_s, 2}} \binom{2}{k_1 \dots k_{n_s}} \left(\prod_{j=1}^{n_s} \alpha_j^{k_j} \right) \left(\prod_{i=1}^n \kappa_{i, k_j} \right) \cdot e^{-b_{i, k_j}} \quad (\text{B.30})$$

Donc la variance $\mathbb{V}[G_{n_s}] = \mathbb{E}[G_{n_s}^2] - (\mathbb{E}[G_{n_s}])^2$ sera directement calculée.

Table des matières

Résumé	xiii
Remerciements	xv
Sommaire	xvii
Liste des tableaux	xix
Table des figures	xxiii
1 Introduction	1
1.1 Contexte	1
1.2 Problématique	2
1.3 Structure de la thèse	3
2 État de l’art	5
2.1 Design et optimisation déterministe	6
2.1.1 Algorithmes d’optimisation	6
2.1.2 Optimisation multiobjectifs	10
2.2 Les incertitudes en mécanique	16
2.2.1 Types des incertitudes	16
2.2.2 La modélisation des incertitudes	17
2.2.3 Propagation des incertitudes	17
2.3 Les métamodèles	24
2.3.1 Les types des métamodèles	25
2.3.2 Métamodèles adaptatifs et optimisation	31
2.3.3 Métamodèles adaptatifs en contexte probabiliste	39
2.3.4 Propagation des incertitudes sur les métamodèles	39
2.4 Conclusion	42
3 Incertitudes et robustesse	45
3.1 Etat de l’art de l’optimisation sous incertitudes	46

3.1.1	La mise en œuvre des incertitudes en optimisation	46
3.1.2	Les différents types d'optimisation sous incertitudes	47
3.1.3	Classification des problèmes OU	50
3.2	Nouvelle classification de OU	51
3.3	Identification de l'antagonisme performance-stabilité	53
3.3.1	Identification explicite de l'existence de l'antagonisme	53
3.3.2	Méthode générale pour identifier l'antagonisme	60
3.3.3	Facteurs influençant l'existence de l'antagonisme	62
3.4	Applications	64
3.4.1	Le problème de deux barres	65
3.4.2	La poutre console	72
3.4.3	La poutre soudée	75
3.4.4	La poutre encastree	79
3.5	Conclusion	84
4	RO et méta-modèles adaptatifs	87
4.1	État de l'art	88
4.1.1	Métamodèles adaptatifs pour les fonctions contraintes proba- bilistes	88
4.1.2	Métamodèles adaptatifs des objectifs probabilistes	89
4.2	Démarche proposée	92
4.3	Application analytique	94
4.4	Application à un procédé d'emboutissage	101
4.4.1	Présentation du procédé d'emboutissage	101
4.4.2	Modèle de simulation	103
4.4.3	Formulation du problème d'optimisation robuste	108
4.4.4	Méta-modèle haute fidélité	110
4.5	Application de EGO-Robuste sur le problème d'emboutissage	113
4.5.1	Calcul de l'espérance et l'écart type sur le modèle de référence	113
4.5.2	Optimisation du modèle de référence avec l'algorithme NS- GAI	116
4.5.3	Application de EGO-Robuste	117
4.5.4	Comparaison de EGO-Robuste avec l'approche classique d'op- timisation	128
4.6	Conclusion	135
5	Conclusions et perspectives	137
5.1	Conclusions	137
5.2	Perspectives	140
	Bibliographie	141

A Études des incertitudes sur les modèles de multiplication avec exposants	155
A.1 Propriété générale	156
A.1.1 Hypothèses et propriétés	156
A.1.2 Théorème	156
A.1.3 Preuve	156
A.2 Propriétés des PDF classiques	157
A.2.1 Loi uniforme	157
A.2.2 Loi Normale	158
A.2.3 Loi Log-normale	160
A.2.4 Loi Weibull	161
A.2.5 Loi Gumbel	161
A.3 Cas particuliers	165
A.3.1 PDF d'une loi uniforme	165
A.3.2 PDF d'une loi normale	166
A.3.3 PDF d'une loi log-normale	166
A.3.4 PDF d'une loi Weibull	167
A.3.5 PDF d'une loi Gumbel	167
A.3.6 Conclusion	167
A.4 Sommaire	168
B Propagation des incertitudes sur les métamodèles RBF gaussiens	171
B.1 Formulation générale	171
B.1.1 Les moments d'une fonction probabiliste	171
B.1.2 Fonctions à base radiale	172
B.1.3 Formulation générale des moments de RBF	172
B.2 Les moments de RBF avec une PDF d'une loi normale	173
B.2.1 PDF d'une loi normale pour des variables indépendantes	173
B.2.2 Formulation générale des moments de la fonction RBF avec une PDF d'une loi normale	173
B.2.3 Moments d'ordre N pour la somme de $g_{\epsilon,G}$ avec une PDF d'une loi normale	175
Table des matières	179

Oussama BRAYDI

Doctorat : Matériaux, Mécanique, Optique, Nanotechnologie

Année 2018

Modélisation et démarche d'optimisation robuste sous incertitudes pour l'ingénierie mécanique

L'optimisation sous incertitudes est maintenant fréquemment utilisée en ingénierie mécanique, ce type d'optimisation est capable de produire des résultats à la fois fiables et robustes. Le défi principal de l'optimisation sous incertitudes est son coût de calculs, qui est la somme du coût des itérations de l'algorithme d'optimisation et du coût de propagation des incertitudes. Ce coût est d'autant important que ces problèmes de design nécessitent des simulations numériques pour calculer leurs fonctions objectifs et contraintes. Ces fonctions originales sont souvent remplacées par des méta-modèles afin de compenser ces coûts de calculs.

Dans ce travail nous abordons une nouvelle classification des problèmes d'optimisation sous incertitudes. Cette nouvelle classification est basée sur les conditions nécessaires à la définition de chaque type d'optimisation sous incertitudes. Une méthode générale pour détecter ces conditions est introduite, cette méthode est un outil efficace pour aider le designer à choisir le type d'optimisation sous incertitudes nécessaire à mettre en œuvre. Une démarche globale pour résoudre les problèmes d'optimisation robuste basée sur une version modifiée de l'algorithme EGO avec des métamodèles adaptatifs est également introduite. Cette nouvelle méthode est validée sur des problèmes académiques tests et son efficacité est mise en valeur sur un problème industriel d'emboutissage.

Mots clés : optimisation robuste – incertitude – génie mécanique – plan d'expérience – emboutissage (travail des métaux) – décision multicritère.

Modelling and Robust Optimization Framework under Uncertainties for Mechanical Engineering

In last years, the optimization under uncertainties is frequently used in mechanical engineering, this type of optimization is capable of producing results that are both reliable and robust. The main challenge of optimization under uncertainties is its cost, which is the summation of the cost of the optimization algorithm, and the propagation of uncertainties. In addition, these design problems require numerical simulations to calculate their objective functions and constraints. These original functions are often replaced by metamodels to reduce the cost of the calculation.

In this work, we propose a new classification of the optimization problems under uncertainties, this new classification is based on the necessary condition to define each type of optimization under uncertainty. In addition, a general method for detecting these conditions is introduced, this method is an effective tool to help the designer to choose what type of optimization under uncertainties is necessary for its design. A global approach to solve robust optimization problems based on a modified version of EGO algorithm with adaptive metamodels is introduced. This new method is tested in academic problems and its effectiveness is highlighted on an industrial stamping problem.

Keywords: robust optimization – uncertainty – mechanical engineering – experimental design – deep drawing (metal-work) – multiple criteria decision making.

Thèse réalisée en partenariat entre :

