



HAL
open science

Super résolution modale à partir d'une antenne linéaire horizontale

Thomas Paviet-Salomon

► **To cite this version:**

Thomas Paviet-Salomon. Super résolution modale à partir d'une antenne linéaire horizontale. Traitement du signal et de l'image [eess.SP]. ENSTA Bretagne - École nationale supérieure de techniques avancées Bretagne, 2021. Français. NNT : 2021ENTA0005 . tel-03612391

HAL Id: tel-03612391

<https://theses.hal.science/tel-03612391v1>

Submitted on 17 Mar 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE DE DOCTORAT DE

L'ÉCOLE NATIONALE SUPERIEURE DES TECHNIQUES AVANCEES
BRETAGNE – ENSTA BRETAGNE

ECOLE DOCTORALE N° 601
*Mathématiques et Sciences et Technologies
de l'Information et de la Communication*
Spécialité : *Signal, Image, Vision*

Par

Thomas PAVIET-SALOMON

Super résolution modale à partir d'une antenne linéaire horizontale.

Thèse présentée et soutenue à Brest, le 11 Mai 2021
Unité de recherche : Lab-STICC UMR CNRS 6285

Rapporteurs avant soutenance :

Alexandre BAUSSARD Professeur, Université de Technologie de Troyes
Jérôme MARS Professeur, Grenoble - INP

Composition du Jury :

Président :

Emmanuel RADOI Professeur, Université Bretagne Occidentale

Examineurs :

Alexandre BAUSSARD Professeur, Université de Technologie de Troyes
Abdel BOUDRAA Professeur, Ecole Navale - Brest
Dominique FATTACCIOLI Expert scientifique, DGA Technique Navale
Jérôme MARS Professeur, Grenoble - INP

Directeur de thèse :

Thierry CHONAVEL Professeur, IMT Atlantique

Encadrants :

Angélique DREMEAU Maître de conférences, ENSTA Bretagne
Barbara NICOLAS Directrice de recherche CNRS, Créatis Lyon

Invité :

Julien BONNEL Associate scientist, Woods Hole Oceanographic Institution

Remerciements

Je tenais tout d'abord à remercier Emmanuel Radoi pour avoir présidé le jury lors de la soutenance de ces travaux de thèse ainsi que tous les membres pour leurs questions qui ont amené à une discussion enrichissante. Je remercie également Alexandre Baussard et Jérôme Mars pour avoir accepté d'être les rapporteurs de ce manuscrit et pour leurs corrections.

Je remercie l'ensemble de mes encadrants Barbara, Julien, Thierry et Angélique qui en dépit de la distance et du télétravail ont toujours répondu présents et m'ont permis d'avoir le recul nécessaire au cours de nos entrevues et de leurs conseils pertinents. Des remerciements tout particuliers pour Thierry qui m'a accueilli à l'IMT et convertit à la caféine ainsi qu'à Angélique qui m'a intégré dans l'équipe AP de l'ENSTA Bretagne et m'a initié aux algorithmes bayésiens.

Un grand merci à mon "grand frère" de thèse le docteur Clément Dorffer qui a également grandement contribué à ma nouvelle addiction à la caféine mais également à une sympathique stimulation intellectuelle lors de ces fameuses pauses café. Je remercie également mes deux co-bureaux Guillaume Beaumont et Milan Courcoux-Caro pour leur bonne humeur ainsi que pour les magnifiques conversations sur de nombreux sujets.

Je remercie aussi l'ensemble de l'équipe AP lors de ces trois années (en espérant oublier personne) Flore, Julie, Maëlle, Gaëtan, Juliette, Fabio, Dorian, Paul, Alexandre (le petit nouveau) et Charles. Une pensée également aux stagiaires numérotés abusivement en fonction de leur ordre d'arrivée dans l'équipe et que quelqu'un aurait enfermé un mercredi après-midi (Guillaume je n'ai pas oublié).

Un grand merci aux copains qui m'ont soutenu et qui ont pu faire le déplacement : Morgan et Iñaki. Mais je n'oublie pas les anciens "yétis" : Julien "Cat", Romain, Camille, Adrien et enfin mes anciens collocataires Lou et Simon ; la CPC est toujours dans mon coeur ainsi que son légendaire panneau (n'est ce pas Simon ?).

Mes derniers remerciements vont naturellement à ma famille. A mes parents qui m'ont toujours soutenu et toujours trouvé les mots lors des moments difficiles. A ma soeur qui a aussi toujours été présente quand j'en avais besoin. A mes grand-parents qui ont toujours consciencieusement hoché la tête quand je parlais de mes travaux de thèse pour me faire comprendre que tout était clair. Et enfin je remercie Aurélia Pellen pour m'avoir supporté au quotidien durant ces trois années et qui a dû surmonter bien des

moments difficiles (notamment la rédaction), je la remercie donc du fond du coeur.

Table des matières

Table des matières	3
Introduction	5
1 Propagation acoustique sous-marine	11
1.1 Propriétés acoustiques de l'océan	11
1.1.1 Equation d'onde	11
1.1.2 Vitesse du son	12
1.1.3 Amortissement des ondes	13
1.2 Théorie modale	14
1.2.1 Résolution de l'équation d'onde	15
1.2.2 Guide parfait	20
1.2.3 Guide de Pekeris	21
1.2.4 Cas général	23
Conclusion	24
2 Acquisition compressée	25
2.1 Représentations parcimonieuses	26
2.1.1 Mesure de parcimonie	26
2.1.2 Intégration de l'a priori parcimonieux dans les problèmes d'inversion	27
2.2 Estimation parcimonieuse	28
2.2.1 Cas (sur-)déterminé	28
2.2.2 Cas sous-déterminé	30
2.2.3 Dictionnaires continus	40
2.3 Conditions de reconstruction exacte	43
2.3.1 Cohérence	43
2.3.2 Constante d'isométrie restreinte	46
2.4 Acquisition compressée	47
2.4.1 Incohérence	48
2.4.2 Echantillonnage aléatoire de matrices incohérentes	49
2.4.3 Matrices aléatoires	50
Conclusion	50

3	Reconstruction modale	53
3.1	Cas d'une source mono-fréquentielle	54
3.1.1	Formalisation du problème	54
3.1.2	Etat de l'art	56
3.2	Cas d'une source large bande	60
3.2.1	Formalisation du problème	60
3.2.2	Un a priori supplémentaire : la relation de dispersion	61
3.2.3	Etat de l'art	62
3.2.4	Limitations	67
3.3	Métriques de performance	68
3.3.1	Métriques de performances en détection	68
3.3.2	Métriques adaptées au cas continu	71
	Conclusion	73
4	Approche continue intégrant la relation de dispersion	75
4.1	Description de la méthode	76
4.1.1	Estimation "off-grid"	77
4.1.2	Intégration de la relation de dispersion	78
4.1.3	Seuils de détection	80
4.2	Etude de performances	83
4.2.1	Sensibilité aux paramètres	83
4.2.2	Guide de Pekeris	84
4.2.3	Guide plus complexe et réaliste	97
4.3	Application sur données réelles	99
4.3.1	Données "Mer du Nord"	99
4.3.2	Données SBCEX	102
	Conclusion	104
	Conclusion et perspectives	107
A	Acquisition compressée	113
A.1	Rappel sur les normes	113
A.2	Notions de convexité	113
A.3	Condition de reconstruction d'OMP	114
B	Approche continue intégrant la relation de dispersion	117
B.1	Etude de performance : cas du guide de Pekeris	117
B.2	Application sur données réelles : Mer du Nord	120

Introduction

Recouvrant à plus de 70% la surface de la Terre, l'océan reste un milieu encore mal connu et peu exploré. Longtemps en effet, les propriétés corrosives de l'eau salée ainsi que la faible propagation des ondes lumineuses dans ce milieu ont constitué des freins à son étude. On date du début du vingtième siècle, avec notamment la première guerre mondiale, l'utilisation concrète de l'acoustique pour le milieu marin. L'océan est en effet un merveilleux milieu de propagation pour les ondes acoustiques qui peuvent - selon leur fréquence - voyager sur plusieurs kilomètres. De nos jours, l'acoustique sous-marine est un domaine de recherche très foisonnant. Qu'elle soit active (analysant le signal réfléchi d'une source émettrice sur différents supports) ou passive (extrayant de l'information utile du paysage acoustique), elle est au cœur de trois grands enjeux d'intérêts civil et défense :

- la caractérisation du milieu marin,
- la détection et la localisation de source,
- la communication sous-marine.

Lorsque l'on considère une source naturelle ou artificielle, on s'intéresse plus généralement aux deux premiers enjeux. Pour les réaliser, on doit avoir recours à deux domaines scientifiques que sont la mécanique des fluides (la physique de la propagation acoustique) et le traitement du signal (la résolution de problèmes inverses). En se propageant dans l'eau, une onde acoustique (un son) va causer une succession de compressions et décompressions de l'eau. Ce sont ces variations de pression qui sont finalement détectées par un capteur, oreille ou hydrophone. Mathématiquement, les variations de la pression acoustique sont régies par une équation d'onde. Selon les environnements et la fréquence de l'onde, la résolution de l'équation peut être réalisée selon des modélisations différentes. Un premier travail consiste donc à délimiter un cadre d'étude et choisir en conséquence la modélisation adéquate. Ensuite, l'équation d'onde dépend de paramètres propres à l'environnement de propagation et à la source (nature et position). Dans le contexte d'un milieu et d'une source inconnus, il s'agit alors d'extraire de la modélisation choisie et à partir de pressions acoustiques mesurées, les grandeurs susceptibles d'être porteuses de ces informations.

Contexte d'étude et contribution

Cette thèse s'inscrit dans la problématique générale de la caractérisation du milieu marin par acoustique. Nous nous sommes focalisés sur le contexte d'étude suivant : l'environnement de propagation est dit "petit-fond" (la colonne d'eau est d'une hauteur inférieure à 200 m) et la source considérée est supposée émettre sur une large bande de fréquences ultra basses (inférieures à 400 Hz, UBF). Les environnements petit-fond correspondent typiquement au plateau continental, *i.e.* aux zones littorales. Ces zones sont d'intérêt stratégique pour la défense, étant le lieu privilégié des théâtres d'opérations. Par ailleurs, les UBF constituent des fréquences importantes contenant notamment les signatures acoustiques des sous-marins.

Dans ce double contexte, l'océan se comporte comme un guide d'onde et la propagation acoustique est régie par la théorie des modes [Pekeris, 1945]. La pression acoustique reçue par un hydrophone situé à une certaine profondeur z_r et la distance r de la source (située à une profondeur z_s et émettant à la fréquence f) peut être modélisée comme la somme d'un petit nombre $M(f)$ de composantes dites modales. Chaque mode propagatif à cette fréquence f est caractérisé par un nombre d'onde $k_{rm}(f)$ et une amplitude modale associée $A_m(f)$.

De plus, dans ce contexte d'étude portant sur des sources UBF en environnement petit-fond, les paramètres géoacoustiques définissant le milieu de propagation (célérité du son dans l'eau, célérité du son dans le sédiment, profondeur du guide, etc...) peuvent être estimés par des méthodes appartenant à deux principaux axes d'étude :

1. Méthodes basées sur l'étude du signal brut, notamment :
 - le traitement par champ d'ondes adaptés (MFP pour Matched Field Processing) : proposée par Bucker [Bucker, 1976], cette méthode consiste à estimer à partir d'un jeu de données réelles un ensemble de paramètres caractérisant le milieu de propagation. Cette approche, bien qu'appréciée, est toutefois très coûteuse en temps de calcul et sensible aux erreurs de modèle.
 - la méthode dite de Full waveform : cette méthode consiste à extraire l'information à partir de la série temporelle ou fréquentielle du signal mesuré. A la différence du MFP, elle peut être appliquée sur des données collectées par un unique hydrophone [Lin et al., 2019].
2. Inversion après estimation modale :
 - le traitement par modes adaptés (MMP pour Matched Mode Processing) : réalisé par [Shang et al., 1985], ce traitement est similaire à la méthode MFP mais compare à la place les amplitudes des modes à la place des champs de pression.

- une inversion à partir des nombres d'onde modaux k_m : les premiers travaux réalisés par Frisk et Lynch [Frisk and Lynch, 1984] utilisent la transformée de Hankel. Depuis des alternatives ont été proposées comme la méthode de Prony [Roux et al., 2004] ou une méthode auto-régressive [Becker et al., 2003].
- une méthode d'identification dans le plan f-k : à partir du travail de McAulay [McAulay, 1986] une première méthode a été proposée par Amundsen et Ursin [Amundsen and Ursin, 1991] permettant de réaliser l'inversion directement dans le plan f-k (obtenu à partir d'une transformée de Fourier bi-dimensionnelle appliquée au signal reçu sur l'antenne). Une autre approche propose de s'intéresser au plan f-k obtenu après avoir appliqué un recalage de vitesse au signal enregistré, on parle alors de plan f-k recalé [Nicolas et al., 2003].
- la représentation en temps - fréquence [Flandrin et al., 1994] exploite la non-stationnarité du signal ainsi que la dispersion inter et intra modale afin de représenter les différentes composantes modales du signal avec un capteur. Toutefois il est impossible de localiser avec certitude un signal en temps et en fréquence selon l'incertitude d'Heisenberg- Gabor [Gabor, 1946]. Des méthodes comme le warping [Bonnell et al., 2020] permettent d'adapter le signal à cette représentation en temps - fréquence. Néanmoins ces méthodes nécessitent des connaissances sur la nature de la source afin de fonctionner.

Dans cette thèse, on souhaite, à partir des mesures réalisées par exemple par un réseau d'hydrophones, d'estimer ces nombres d'onde le plus précisément possible.

Dans la littérature, de nombreuses contributions se sont intéressées à ce problème. Selon les contraintes posées sur l'antenne d'hydrophones (position par rapport à la source, nombre d'hydrophones, taille de l'antenne...), les méthodes seront plus ou moins adaptées. Notre travail s'est intéressé à l'exploitation d'une antenne horizontale alignée avec la source. Ce cas d'application est intéressant dans la mesure où *i*) il correspond à des contextes opérationnels concrets (déploiement d'une antenne tractée, positionnement d'hydrophones sur le sol à des fins d'observations sismiques...) et *ii*) du point de vue du traitement du signal, une simple transformée de Fourier spatiale (effectuée le long de l'antenne) permet d'estimer les nombres d'onde si l'antenne est suffisamment résolue. Cette méthode est cependant mise en défaut dès lors que l'antenne présente des capteurs irrégulièrement espacés et/ou peu nombreux.

Cette thèse s'intéresse à ce cas de figure d'antenne dégradée avec peu de capteurs. Pour répondre à ces problèmes, nous proposons de tirer parti de deux informations apportées par la physique de la propagation :

1. peu de composantes modales décrivent la pression acoustique reçue par l'antenne,

2. dans tout guide d'onde, tel que l'on suppose que se comporte l'océan dans notre contexte, il existe une relation liant les nombres d'ondes verticaux et horizontaux d'un même mode.

Le premier *a priori* peut être modélisé par des représentations parcimonieuses [Elad, 2010]. Ces représentations supposent que le signal d'intérêt peut être représenté par un petit nombre de coefficients non nuls dans un espace de représentation que l'on connaît.

En outre, le fait que le signal soit acquis dans le domaine spatial et qu'il dispose d'une représentation parcimonieuse dans le domaine des nombres d'ondes place l'étude dans le contexte de l'acquisition dite compressée, permettant de caractériser les modes propagatifs par un échantillonnage spatial obtenu avec un nombre restreint de capteurs [Candès and Wakin, 2008]. La reconstruction de nombre d'onde est donc un cadre idéal pour l'application de l'acquisition compressée.

Il existe dans la littérature de nombreux algorithmes s'attachant à l'estimation de représentations parcimonieuses [Drémeau et al., 2012]. La plupart exploite une grille de recherche (ici de nombres d'onde) discrète [Mallat and Zhang, 1993, Pati et al., 1993]. L'amplitude des modes étant fonction des nombres d'ondes, même en absence de bruit, une amplitude modale estimée à partir d'une valeur discrète peut donc différer de sa valeur théorique. Ce phénomène appelé "basis mismatch" est le sujet de nouvelles études [Ekanadham et al., 2011]. De fait, dans cette thèse, nous proposons de considérer les approches plus récentes de recherche "hors grille" (grid-free) ou "continue" [Denoyelle et al., 2017] qui, par construction, autoriseront une estimation plus précise des nombres d'onde.

Le deuxième *a priori*, constitué par la relation de dispersion, n'a été que très peu envisagé dans la littérature [Le Courtois and Bonnel, 2015, Drémeau et al., 2017]. Il est pourtant d'intérêt dès lors que la source considérée est supposée large bande. Dans cette thèse, nous proposons d'intégrer la relation de dispersion dans un schéma itératif, permettant de prédire d'une fréquence à l'autre les nombres d'onde susceptibles de se propager. Nous proposons d'adapter cette relation de dispersion afin de pouvoir l'appliquer à des données sur lesquelles une correction des vitesses est réalisée au préalable afin de pouvoir nous affranchir du phénomène de repliement spectral et ainsi reconstruire les nombres d'onde à de plus hautes fréquences.

Notre méthode cible des sources avec un spectre relativement blanc. Cependant, cette condition peut être levée par l'application préalable d'un traitement de blanchiment :

les amplitudes modales seront alors altérées mais pas les nombres d'onde sur lesquels se focalise notre effort.

Organisation du manuscrit

Le manuscrit est organisé en quatre chapitres. Les trois premiers peuvent être vus comme des états de l'art de domaines différents de la littérature et sont indépendants les uns des autres :

- Le chapitre 1 rappelle les bases de propagation acoustique qui seront exploitées dans la suite du manuscrit. Nous y décrivons ainsi la théorie des modes, et exposons les principaux guides d'onde qui sont considérés comme premiers modèles simples de l'océan en environnement petit-fond.
- Le chapitre 2 introduit le paradigme de l'acquisition compressée (compressed sensing). Née dans les années 2000, cette théorie élabore un schéma d'acquisition (ou d'échantillonnage) exploitant l'hypothèse que le signal recherché est parcimonieux dans une base que l'on connaît. Ce chapitre fait le point sur les algorithmes proposés dans la littérature permettant la reconstruction du signal parcimonieux et les conditions nécessaires à la mise en pratique de la théorie de l'acquisition compressée.
- Le chapitre 3 enfin, dresse un état de l'art des approches proposées dans la littérature pour l'estimation modale en acoustique sous-marine.

Le chapitre 4 rassemble nos principales contributions :

- Nous y décrivons le nouvel algorithme élaboré pour une estimation des nombres d'onde dans des contextes d'acquisition moins contraints (en terme de nombres de capteurs). Notre approche repose sur un algorithme bien connu en représentation parcimonieuse appelé "Orthogonal Matching Pursuit" [Pati et al., 1993]. Cet algorithme est étendu au cas de recherche sur grille continue et intégré dans un schéma itératif permettant de prendre en compte la relation de dispersion.
- L'algorithme - appelé CPOMP pour Continuous Propagating Orthogonal Matching Pursuit - est appliqué à des données réelles, issues d'une campagne en Mer du Nord dirigée par la Compagnie Générale de Géophysique et de la récente campagne SBCEX, réalisée sur le NEMP (New England Mud Patch) en 2017 par un consortium international.

Enfin, la conclusion de ce manuscrit synthétise les contributions de cette thèse et ouvre sur quelques axes de recherche qu'il semble pertinent d'explorer dans le cadre de travaux futurs. Certains d'entre eux ont déjà fait l'objet d'études préliminaires que le chapitre met également en lumière.

1. Propagation acoustique sous-marine

Sommaire

1.1 Propriétés acoustiques de l’océan	11
1.1.1 Equation d’onde	11
1.1.2 Vitesse du son	12
1.1.3 Amortissement des ondes	13
1.2 Théorie modale	14
1.2.1 Résolution de l’équation d’onde	15
1.2.2 Guide parfait	20
1.2.3 Guide de Pekeris	21
1.2.4 Cas général	23
Conclusion	24

Ce chapitre rappelle brièvement les principes fondamentaux de l’acoustique sous-marine. Nous nous focalisons plus spécifiquement sur la théorie des modes, au cœur de notre problématique. Nous renvoyons cependant le lecteur intéressé à l’ouvrage [Jensen et al., 2011] pour une description plus complète du domaine.

1.1. Propriétés acoustiques de l’océan

Le son a une tendance naturelle à rester piégé dans l’océan. Le milieu océanique peut alors être considéré comme un guide d’onde dans lequel la propagation est mathématiquement décrite par une équation d’onde. Les paramètres de cette équation, ainsi que ses conditions aux limites décrivent complètement l’environnement océanique. Cette section lui est consacrée.

1.1.1. Equation d’onde

Dans un milieu fluide comme l’air ou l’eau, les ondes acoustiques qui s’y propagent résultent en des variations de la pression du milieu. Ces variations sont fonctions du

temps t et de coordonnées spatiales \vec{r} , et il est commun de considérer qu'elles sont plus rapides que les variations temporelles océaniques¹. Elles sont ainsi décrites par l'équation d'onde (ou équation de D'Alembert) :

$$\rho \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = f(\vec{r}, t), \quad (1.1)$$

où $\vec{\nabla}$ représente l'opérateur divergence lorsqu'il est comme ici appliqué à un champ vectoriel et le gradient lorsqu'il est appliqué à un champ scalaire, $p = p(\vec{r}, t)$ représente la pression, ρ est la masse volumique moyenne du milieu de propagation (moyenne temporelle car ρ peut dépendre de \vec{r}), c la vitesse du son dans le milieu de propagation et $f(\vec{r}, t)$ représente l'action d'une source située au point \vec{r} et à l'instant t . Sous l'hypothèse que les variations dues à la propagation acoustique sont plus rapides que celles du milieu, ρ et c sont indépendantes du temps. Si, en outre, on suppose l'homogénéité volumique du milieu ($\vec{\nabla} \rho = \vec{0}$), on obtient l'équation d'onde classiquement énoncée dans la littérature :

$$\nabla^2 p - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = f(\vec{r}, t), \quad (1.2)$$

où ∇^2 représente le laplacien d'un champ scalaire.

1.1.2. Vitesse du son

L'océan est un guide d'onde particulier délimité par la surface de la mer et un socle sur lequel repose le fond sédimentaire. Si l'on considère que la vitesse du son est constante dans tout le guide d'onde, alors la propagation du son se fait de façon rectiligne avec des changements significatifs de trajectoire quand celle-ci rencontre une interface. En pratique, si la vitesse du son varie effectivement assez peu dans la colonne d'eau - entre 1450 m/s et 1540 m/s - ses petites variations impactent largement la propagation du son. On cherche donc à connaître le plus précisément possible la vitesse du son dans le milieu étudié.

On recourt classiquement à deux moyens de mesure :

- par une sonde perdable comme XBT (Expendable Bathythermograph pour des mesures de température), ou XCTD (Expendable Conductivity-Temperature-Depth pour des mesures de température et de conductivité),
- par une sonde CTD (Conductivity-Temperature-Depth) qui mesure simultanément la conductivité (donc la salinité), la température et la profondeur. Ces grandeurs permettent ensuite d'inférer la vitesse moyennant l'exploitation de formules empiriques. La plus couramment utilisée est celle proposée dans [Clay and Medwin, 1977] liant

1. Cette hypothèse est cependant mise à mal dans de nombreux contextes opérationnels, en présence d'ondes internes par exemple.

la vitesse du son c à la température (T , exprimée en degrés centigrades), la salinité (S , exprimée en pour-mille, et la profondeur (z , exprimée en mètres) par la relation

$$c(T, S, z) = 1449.2 + 4.6T - 0.055T^2 + 0.00029T^3 + (1.34 - 0.01T)(S - 35) + 0.016z. \quad (1.3)$$

L'ensemble des mesures de vitesse du son permet de tracer ce que l'on nomme un profil de célérité dépendant de la profondeur. On en présente une illustration générique (issue de [Jensen et al., 2011]) dans la figure 1.1. Sous nos latitudes, les premiers mètres

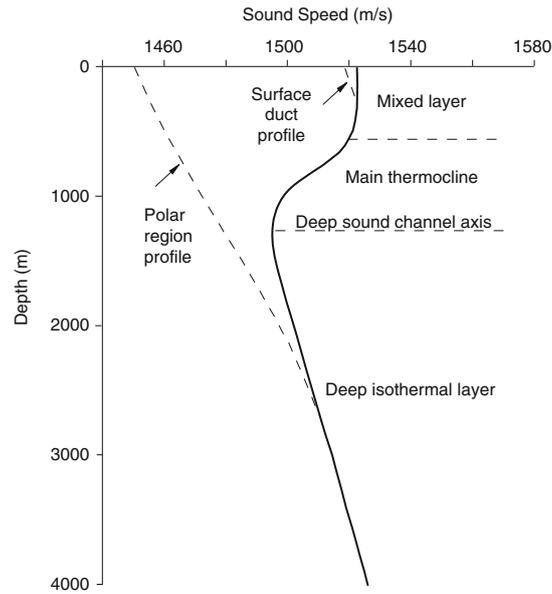


FIGURE 1.1. – Profil de célérité générique (source : [Jensen et al., 2011])

sous la surface de l'océan constituent une couche de mélange, agitée par les vagues et le vent.

1.1.3. Amortissement des ondes

Lors de son trajet en milieu sous-marin (donc un fluide réel, donc visqueux), l'onde acoustique rencontre une résistance venant du milieu de propagation. Généralement cette opposition se traduit par des frottements lors des mouvements de particules déplacées. Il y a donc dissipation de l'énergie acoustique sous forme de chaleur. Généralement l'atténuation acoustique dans la colonne d'eau est négligée dans de nombreux modèles de propagation acoustique à moins de considérer des sources très hautes fréquences et/ou des distances conséquentes. Prenons l'exemple d'une source émettant à 100 Hz, l'amortissement dans l'eau étant d'environ 0.005 dB/km [Urlick, 1997], il faudrait que

l'onde parcourt 600 km avant que la moitié de son énergie acoustique ne se soit dissipée. Si l'on considère maintenant une source émettant à 10 kHz, on aurait la même dissipation après une distance de parcours de seulement 3 km. Dans ce manuscrit nous présenterons essentiellement des sources dont la fréquence maximale d'émission est de 200 Hz et les distances inférieures à 10 km, nous négligerons donc l'amortissement dans la colonne d'eau. L'amortissement des ondes dans le fond sera négligée dans le premier modèle que nous considérerons (guide de Pekeris) avant d'être pris en compte lors de l'étude d'un modèle stratifié.

1.2. Théorie modale

Pour résoudre l'équation d'onde (1.1), on peut recourir à différentes méthodes. Elles se distinguent principalement par les hypothèses faites sur les sources en présence (haute/basse fréquence), sur l'environnement (plateau continental/bassin océanique) :

- la théorie des rayons : il s'agit d'une approche valable uniquement pour les hautes fréquences. Cette méthode se base sur la résolution de l'équation iconale et de l'équation de transport qui découlent de Helmholtz (1.1) et de l'hypothèse de fréquence infinie [Keller, 1978],
- l'intégration du nombre d'onde : cette approche suppose des milieux stratifiés invariant horizontalement. Elle consiste en l'application de différentes transformées intégrales à l'équation d'Helmholtz (résultant de l'application d'une transformée de Fourier temporelle l'équation (1.1)) permettant d'obtenir un système d'équations différentielles dépendant uniquement de la profondeur et reliées par des conditions de continuité aux interfaces. On peut résoudre ces équations analytiquement ou numériquement, et les transformées intégrales inverses permettent d'accéder au champ acoustique [Jensen et al., 2011], [Ewing et al., 1957],
- les méthodes par différences ou éléments finis : il s'agit de méthodes de calcul numérique. Elles permettent de traiter tout type de configurations mais au prix d'un coup de calcul conséquent [Kuperman and Schmidt, 1989],
- les équations paraboliques : cette approche est adaptée aux moyennes fréquences et/ou aux environnements peu profonds. Elle permet notamment de traiter les problèmes de transmission acoustique (émetteur vers récepteur) pour une ouverture angulaire limitée avec un coût de calcul moindre qu'avec les méthodes par différences finies [Leontovich and Fock, 1946], [Hardin, 1973], [Lee et al., 2000],
- les modes normaux, cette théorie est adaptée aux basses fréquences (inférieures à 500 Hz) et aux environnements petit-fond (la colonne d'eau est d'une hauteur inférieure à 200 m), stratifiés et invariant en distance. Cette méthode repose sur la technique de séparation des variables pour résoudre l'équation d'Helmholtz

[Jensen et al., 2011], [Ide et al., 1943], [Ewing et al., 1957].

Dans cette thèse, nous nous intéressons aux environnements petit-fond et aux sources émettant en ultra basses fréquences. Dans ce contexte, la théorie des modes est la plus à même à décrire la propagation acoustique.

1.2.1. Résolution de l'équation d'onde

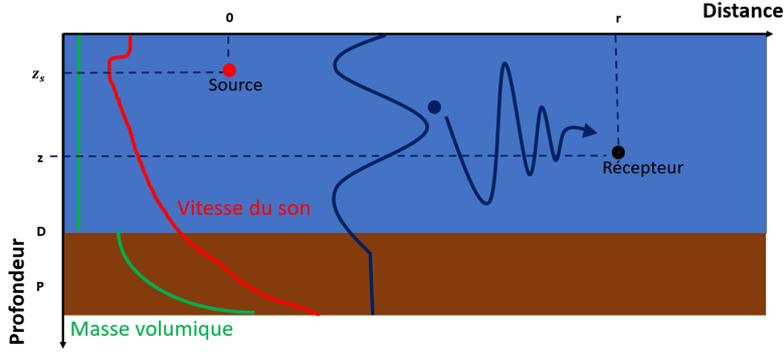


FIGURE 1.2. – Illustration de la propagation modale dans un guide d'onde quelconque entre une source ponctuelle et un unique capteur

La théorie modale modélise l'océan comme un milieu stratifié verticalement, fini en profondeur (la dimension z) et infini en distance (la dimension r). La figure 1.2 illustre cette modélisation. Ce modèle appelle naturellement la représentation en coordonnées cylindriques (r, θ, z) dans laquelle on suppose une invariance en θ , coordonnée que l'on omettra donc dans la formalisation. Dans ce milieu, la vitesse du son et la masse volumique sont en outre considérées comme ne dépendant que de la profondeur z .

Supposons maintenant une source monochromatique ponctuelle de fréquence f et immergée à la profondeur z_s . La pression acoustique reçue par un hydrophone positionné à une distance r de la source et à une profondeur z peut être décomposée en

$$p(r, z, t) = p^s(r, z)e^{j2\pi ft},$$

avec $p^s(r, z)$ contenant les dépendances spatiales de la pression. Injectant cette formulation dans l'équation d'onde (1.1) et réalisant une transformée de Fourier temporelle, on obtient l'équation de Helmholtz :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p^s(r, z)}{\partial r} \right) + \rho(z) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\rho(z)} \frac{\partial p^s(r, z)}{\partial z} \right) + \left(\frac{2\pi f}{c(z)} \right)^2 p^s(r, z) = -\frac{\delta(r)\delta_{z_s}(z)}{2\pi r}, \quad (1.4)$$

où δ correspond à la distribution de Dirac et formalise le caractère ponctuel de la source.

Pour résoudre cette nouvelle équation aux dérivées partielles, on se concentre classiquement sur l'équation différentielle homogène (annulant le terme de source) :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p^s(r, z)}{\partial r} \right) + \rho(z) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\rho(z)} \frac{\partial p^s(r, z)}{\partial z} \right) + \left(\frac{2\pi f}{c(z)} \right)^2 p^s(r, z) = 0. \quad (1.5)$$

Une approche possible consiste ensuite à rechercher une solution satisfaisant un critère de séparation de variables, *i.e.* telle que

$$p^s(r, z) = \xi(r)\varphi(z),$$

où $\xi(r)$ et $\varphi(z)$ peuvent être interprétées comme les composantes horizontale et verticale de la pression acoustique. Cette astuce a pour objectif d'extraire des équations différentielles ordinaires plus faciles à résoudre.

Injectant cette factorisation dans l'équation (1.5), on obtient :

$$\frac{1}{\xi(r)} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \xi(r)}{\partial r} \right) \right] = -\frac{1}{\varphi(z)} \left[\rho(z) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\rho(z)} \frac{\partial \varphi(z)}{\partial z} \right) + \left(\frac{2\pi f}{c(z)} \right)^2 \varphi(z) \right]. \quad (1.6)$$

Le membre de gauche de cette égalité est une fonction qui ne dépend que de la variable r , tandis que le membre de droite est une fonction qui ne dépend que de la variable z . Pour que cette égalité soit vérifiée quel que soit r et quel que soit z , il faut que les deux membres soient des fonctions constantes :

$$\frac{1}{\xi(r)} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \xi(r)}{\partial r} \right) \right] = -k_{rm}^2(f), \quad (1.7)$$

$$\frac{1}{\varphi(z)} \left[\rho(z) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\rho(z)} \frac{\partial \varphi(z)}{\partial z} \right) + \left(\frac{2\pi f}{c(z)} \right)^2 \varphi(z) \right] = k_{rm}^2(f), \quad (1.8)$$

où $k_{rm}^2(f)$ est un paramètre a priori quelconque (mais dépendant des paramètres physiques du problème, notamment la fréquence f). Soient $\xi_m(r)$ et $\varphi_m(z)$ les solutions générales de ces deux équations différentielles ordinaires.

Equation modale L'équation (1.8) réécrite sous la forme

$$\rho(z) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\rho(z)} \frac{\partial \varphi_m(z)}{\partial z} \right) + \left[\left(\frac{2\pi f}{c(z)} \right)^2 - k_{rm}^2(f) \right] \varphi_m(z) = 0, \quad (1.9)$$

est appelée *équation modale*. Pour aller plus loin dans sa résolution et notamment restreindre le choix du paramètre $k_{rm}^2(f)$, elle est complétée par des conditions aux frontières :

— la surface de l'eau ($z = 0$) est supposée parfaitement réfléchissante :

$$\varphi_m(0) = 0.$$

— le fond situé à une profondeur $z = P$ est supposé parfaitement rigide :

$$\frac{\partial \varphi_m}{\partial z}(P) = 0.$$

La condition de surface est classique en acoustique sous-marine : l'air est un fluide de masse volumique nulle, l'impédance qui lui est associée est donc nulle et aucune énergie ne peut dès lors être transmise de l'eau vers l'air. La condition de fond n'est guère plus restrictive : rien n'empêche de supposer la profondeur P tendant vers l'infini. Nous verrons un exemple pratique d'une telle hypothèse à travers le guide de Pekeris (cf. section 1.2.3).

Ces conditions aux frontières associées à l'équation modale (1.9) conduisent à la définition d'un problème de Sturm-Liouville [de Snoo, 1980]. Ce type de problème présente des caractéristiques appréciables qui, particularisées à notre contexte, peuvent se résumer comme suit :

— Les solutions $\{\varphi_m(z)\}_m$ sont les fonctions propres et les constantes $\{k_{rm}^2(f)\}_m$ les valeurs propres de l'opérateur

$$\varphi \mapsto \rho(z) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\rho(z)} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) + \left(\frac{2\pi f}{c(z)} \right)^2 \varphi. \quad (1.10)$$

— Les valeurs propres sont toutes réelles (mais non forcément positives) et ordonnées comme

$$k_{r1}^2(f) > k_{r2}^2(f) > \dots > k_{rm}^2(f) > \dots \rightarrow -\infty.$$

— Les fonctions propres $\{\varphi_m(z)\}_m$ forment une base orthogonale de l'espace des fonctions d'énergie finie sur $[0, P]$. Plus spécifiquement

$$\int_0^P \frac{\varphi_m(z) \varphi_n(z)}{\rho(z)} dz = \delta_{mn}, \quad (1.11)$$

où δ_{mn} est le symbole de Kronecker qui est égal à 1 si $m = n$ et 0 sinon. La m -ième fonction propre s'annule m fois sur l'intervalle $[0, P]$.

Retour à l'équation d'onde On peut maintenant chercher la solution générale à l'équation aux dérivées partielles homogène (1.5). A $r = r_0$ fixé, la pression $p^s(r_0, z)$ est une

fonction de la variable z . Nous sommes en droit de la décomposer sur la base des $\{\varphi_m\}_m$:

$$p^s(r_0, z) = \sum_{m=1}^{+\infty} a_m(r_0) \varphi_m(z), \quad (1.12)$$

où les coefficients a_m sont appelés amplitudes modales. En faisant varier r_0 , on obtient intuitivement :

$$p^s(r, z) = \sum_{m=1}^{+\infty} a_m(r) \varphi_m(z). \quad (1.13)$$

Injectant cette décomposition dans l'équation (1.5), on obtient :

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial a_m(r)}{\partial r} \right) \varphi_m(z) = - \sum_{m=1}^{+\infty} \left[\rho(z) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\rho(z)} \frac{\partial \varphi_m(z)}{\partial z} \right) + \left(\frac{2\pi f}{c(z)} \right)^2 \varphi_m(z) \right] a_m(r), \quad (1.14)$$

où l'on reconnaît l'équation différentielle ordinaire (1.8) résultant en :

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial a_m(r)}{\partial r} \right) \varphi_m(z) = - \sum_{m=1}^{+\infty} k_{rm}^2(f) \varphi_m(z) a_m(r). \quad (1.15)$$

Comme $\{\varphi_m\}_m$ est une base de fonctions propres, on peut identifier les composantes et ainsi $\forall m$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial a_m(r)}{\partial r} \right) = -k_{rm}^2(f) a_m(r). \quad (1.16)$$

Nous retrouvons ainsi la seconde équation (1.7) des deux équations différentielles ordinaires obtenues par séparation des variables. Nous avons noté $\xi_m(r)$ les solutions de cette équation.

Reprenons l'équation (1.4). Au regard de ce que nous avons élaboré ci-dessus, nous pouvons écrire :

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \xi_m(r)}{\partial r} \right) \varphi_m(z) + \sum_{m=1}^{+\infty} k_{rm}^2(f) \varphi_m(z) \xi_m(r) = - \frac{\delta(r) \delta_{zs}(z)}{2\pi r}. \quad (1.17)$$

Pour un entier n donné, appliquant l'opérateur $\int_0^P \frac{(\cdot) \varphi_n(z)}{\rho(z)} dz$ et rappelant que les $\{\varphi_m\}_m$ forment une base orthogonale, on a

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \xi_n(r)}{\partial r} \right) + k_{rn}^2(f) \xi_n(r) = - \frac{\delta(r) \varphi_n(z_s)}{2\pi r \rho(z_s)}. \quad (1.18)$$

Cette équation est bien connue en acoustique sous-marine [Jensen et al., 2011, Chap.2].

Sa solution s'exprime selon une fonction de Hankel comme

$$\xi_n(r) = \frac{j}{4\rho(z_s)} \varphi_n(z_s) H_0^{(1)}(rk_{rn}(f)), \quad (1.19)$$

où $H_0^{(1)}$ représente la fonction de Hankel de premier type, prenant en compte l'atténuation de l'onde acoustique lorsque la distance de propagation tend vers l'infini. Finalement, on obtient la solution

$$p^s(r, z) = \frac{j}{4\rho(z_s)} \sum_{m=1}^{+\infty} \varphi_m(z_s) \varphi_m(z) H_0^{(1)}(rk_{rm}(f)), \quad (1.20)$$

soit encore, si l'on remplace la fonction de Hankel par son approximation asymptotique (valable pour $rk_{rm}(f) \gg 1$) :

$$p^s(r, z) \simeq \frac{j e^{j\pi/4}}{\rho(z_s) \sqrt{8\pi}} \sum_{m=1}^{+\infty} \varphi_m(z_s) \varphi_m(z) \frac{e^{-jr k_{rm}(f)}}{\sqrt{r k_{rm}(f)}}. \quad (1.21)$$

Dans l'hypothèse où la source se situe assez loin du récepteur (cette hypothèse se nomme hypothèse de champ lointain ; concrètement, cette distance doit être de l'ordre du kilomètre), il est commun de considérer (1.21) comme une égalité.

Modes, fonctions modales et nombres d'onde L'équation (1.21) exprime la pression acoustique comme la somme infinie de composantes dites modales. Les modes sont caractérisés par leur *fonction modale* $\varphi_m(z)$ et leur *nombre d'onde horizontal* $k_{rm}(f)$, exprimé en m^{-1} . Les nombres d'ondes horizontaux sont analogues à des fréquences de vibration et sont tous distincts.

Pour une fréquence donnée f , les nombres d'onde horizontaux sont bornés supérieurement : $\forall m$

$$k_{rm}(f) < \frac{2\pi f}{c_{min}}, \quad (1.22)$$

où c_{min} est le minimum de célérité du problème. En revanche, comme nous l'avons vu dans la résolution du problème de Sturm-Liouville, ils ne sont pas bornés inférieurement. On note cependant qu'il existe un entier $M(f)$ en deça duquel les $k_{rm}^2(f)$ sont négatifs : les nombres d'onde $k_{rm}(f)$ deviennent alors imaginaires purs et les exponentielles $e^{-jr k_{rm}(f)}$ qui leur sont associées deviennent réelles, décroissantes avec la distance r . On appelle *propagatifs* les $M(f)$ premiers modes, les suivants sont dits *évanescents* : ils s'atténuent rapidement avec la distance.

L'entier $M(f)$ qui marque le passage d'un mode propagatif à un mode évanescent dépend de la fréquence : plus la fréquence est élevée, plus grand est le nombre de modes

propagatifs. Il faut donc comprendre que lorsqu'on augmente en fréquence, certains modes qui étaient évanescents deviennent propagatifs. Ainsi, à chaque mode, on définit une *fréquence de coupure* marquant son apparition, *i.e.* son passage de l'état d'évanescence à propagatif. Cette fréquence de coupure dépend des propriétés du guide d'ondes considéré.

Enfin, dès lors que l'on a défini un nombre d'onde horizontal $k_{rm}(f)$, il est intuitif d'introduire son pendant vertical $k_{zm}(f)$. Ces deux composantes forment les deux coordonnées d'un *vecteur d'onde*, noté $\vec{k}_m(f)$, définissant la direction de propagation d'un mode. Sa norme est alors telle que

$$\|\vec{k}_m(f, z)\|_2 = \sqrt{k_{rm}^2(f) + k_{zm}^2(f, z)} = \frac{2\pi f}{c(z)}, \quad (1.23)$$

où $c(z)$ est rappelée être la vitesse du son dans le milieu de propagation, dépendant de la profondeur. Cette expression constitue ce que nous appellerons *relation de dispersion* dans la suite du manuscrit. Elle nous sera notamment précieuse dès lors que nous aurons à traiter des signaux à large bande fréquentielle.

1.2.2. Guide parfait

Le guide parfait constitue la modélisation de l'environnement océanique petit-fond la plus simple. Il est constitué d'une colonne d'eau d'une hauteur $P = D$ délimitée d'un côté par une surface parfaitement réfléchissante, de l'autre par le fond, supposé parfaitement rigide. La colonne d'eau est supposée en outre présenter une célérité du son et une masse volumique constantes, notées respectivement c et ρ .

Le milieu étant homogène, la solution à l'équation modale (1.9) se présente sous une forme analytique simple comme

$$\varphi_m(z) = A_m \sin(zk_{zm}(f)) + B_m \cos(zk_{zm}(f)). \quad (1.24)$$

Les paramètres A_m , B_m et $k_{zm}(f)$ sont ensuite précisés par les conditions aux frontières :

- puisque $\varphi_m(0) = 0$ alors $B_m = 0$,
- puisque $\frac{\partial \varphi_m}{\partial z}(D) = 0$ alors $A_m = \sqrt{\frac{2\rho}{D}}$ et $k_{zm}(f) = \frac{(2m-1)\pi}{2D}$, où nous pouvons remarquer que le nombre d'onde vertical $k_{zm}(f)$ ne dépend pas de la fréquence.

L'expression du nombre d'onde vertical permet de remonter au nombre d'onde horizontal par la relation de dispersion (1.23) :

$$k_{rm}(f) = \sqrt{\left(\frac{2\pi f}{c}\right)^2 - \left(\frac{(2m-1)\pi}{2D}\right)^2}, \quad (1.25)$$

et il est alors aisé d'en déduire la fréquence de coupure en deça de laquelle le m -ième mode cesse d'être propagatif ($k_{rm}(f)$ réel) pour devenir évanescence ($k_{rm}(f)$ imaginaire

pur) :

$$f_{cm} = \frac{(2m-1)c}{4D}. \quad (1.26)$$

Le guide parfait est l'un des rares guides pour lesquels autant d'informations physiques peuvent être calculées analytiquement. Mais il n'a de parfait que le nom et constitue une modélisation relativement pauvre de l'environnement océanique. On lui préfère généralement le guide de Pekeris.

1.2.3. Guide de Pekeris

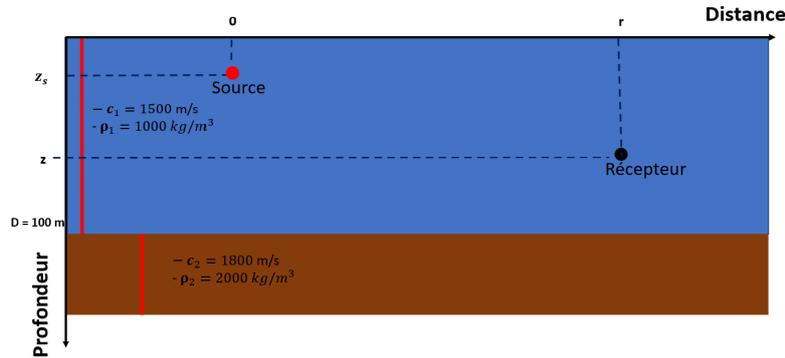


FIGURE 1.3. – Guide de Pekeris

Le guide de Pekeris [Pekeris, 1945] se propose d'ajouter une couche que l'on peut interpréter comme sédimentaire au modèle mono-couche du guide parfait. Dans les deux milieux qui le constituent, célérité et masse volumique sont supposées constantes. On pose en outre les conditions aux frontières suivantes :

- la surface de l'eau est parfaitement réfléchissante
- le fond est fluide et semi-infini : $P' \rightarrow +\infty$

On suppose de plus la continuité des modes à l'interface entre les deux couches. La figure 1.3 illustre le modèle. Par la suite, l'indice 1 est réservé aux grandeurs physiques attachées à la colonne d'eau, l'indice 2 aux grandeurs physiques attachées au fond fluide semi-infini. Enfin on suppose que $c_2 > c_1$. Ce cas est courant en acoustique sous-marine.

Dans la couche d'eau, la propagation est similaire à celle d'un guide parfait. On retrouve ainsi une expression analytique identique pour la fonction modale du m -ième mode :

$$\varphi_m(z) = A_m \sin(zk_{zm_1}(f)), \quad \text{pour } z \in]0, D[, \quad (1.27)$$

où $k_{zm_1}(f)$ est le nombre d'onde vertical attaché à la colonne d'eau.

Le fond étant supposé semi-infini ($P \rightarrow +\infty$), la seule solution physiquement réaliste dans cette couche est une propagation évanescence, *i.e.* s'atténuant avec la profondeur :

$$\varphi_m(z) = C_m e^{-zk_{zm_2}(f)}, \quad \text{pour } z > D, \quad (1.28)$$

où $k_{zm_2}(f)$ est le nombre d'onde vertical attaché au fond fluide semi-infini.

Comme pour le guide parfait, les conditions aux frontières permettent ensuite de déterminer les paramètres A_m , C_m et $k_{zm}(f)$. Nous renvoyons le lecteur à l'ouvrage [Jensen et al., 2011] pour de plus amples détails. Deux propriétés sont cependant à relever :

- Contrairement au guide parfait (même si l'indépendance en z est conservée), le nombre d'onde vertical $k_{zm_1}(f)$ attaché à la colonne d'eau est bien dépendant de la fréquence f . On retrouve cette dépendance dans l'écriture du paramètre A_m et donc finalement dans la fonction modale $\varphi_m(z)$.
- Les nombres d'onde horizontaux $k_{rm}(f)$ s'obtiennent par l'expression

$$\tan\left(D\sqrt{\left(\frac{2\pi f}{c_1}\right)^2 - k_{rm}^2(f)}\right) = -\frac{\rho_2}{\rho_1}\sqrt{\frac{\left(\frac{2\pi f}{c_1}\right)^2 - k_{rm}^2(f)}{k_{rm}^2(f) - \left(\frac{2\pi f}{c_2}\right)^2}}. \quad (1.29)$$

De même que pour le guide parfait, on peut déduire de l'expression (1.29) les fréquences de coupure attachées aux modes :

$$f_{cm} = \frac{(2m-1)c_1c_2}{4D\sqrt{c_2^2 - c_1^2}}. \quad (1.30)$$

Le cas $c_2 \leq c_1$ implique une absence de fréquence de coupure : les modes restent propagatifs quelle que soit la fréquence considérée.

Dans la figure 1.4 nous représentons (la simulation a été réalisée sous le logiciel Matlab, qui sera utilisé pour produire les résultats présentés dans ce manuscrit) les quatre premières fonctions modales d'une source émettant à 100 Hz dans un guide de Pekeris avec les caractéristiques suivantes :

- vitesse du son dans l'eau, $c_1 = 1500$ m/s
- masse volumique de l'eau, $\rho_1 = 1000$ kg/m³
- vitesse du son dans le sédiment, $c_2 = 1800$ m/s
- masse volumique du sédiment, $\rho_2 = 2000$ kg/m³
- profondeur de la colonne d'eau, $D = 100$ m

Nous pouvons remarquer que le mode m s'annule bien m fois et que les conditions limites sont respectées.

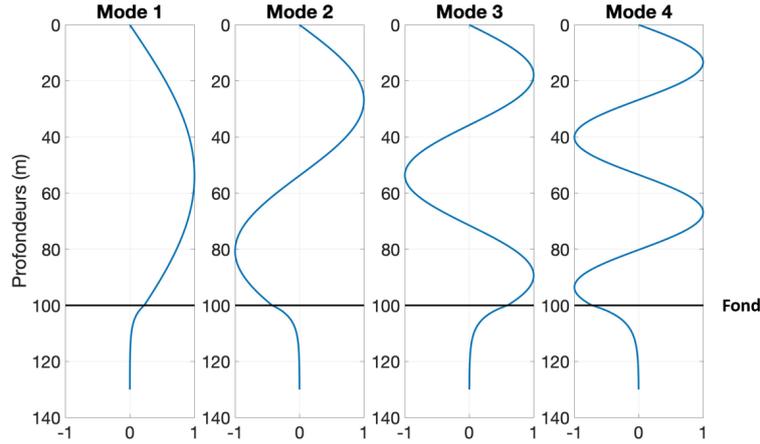


FIGURE 1.4. – Quatre premières fonctions modales dans un guide d’onde de Pekeris à $f = 100$ Hz

1.2.4. Cas général

Les deux guides présentés sont des cadres théoriques certes utiles pour générer et exploiter des données synthétiques. Cependant lorsque l’on souhaite traiter des données réelles, le cadre d’acquisition de ces données est similaire à celui présenté sur la figure 1.2. C’est à dire que la célérité de l’eau n’est pas constante dans la colonne d’eau et dans la ou les couches sédimentaires.

En outre il est possible que les profils de célérité viennent à changer quand l’environnement est dépendant en distance, c’est à dire que le milieu peut se décomposer en plusieurs segments chacun disposant de ces propres paramètres environnementaux. Dans cette thèse nous nous considérerons uniquement des milieux indépendants en distance.

De plus, lorsque l’on se place dans un environnement petit-fond et que l’on considère une source émettant en ultra-basse fréquence, l’équation (1.23) peut être ré-écrite en omettant la dépendance en z . Cette hypothèse est utilisée dans des études exploitant la relation de dispersion [Le Courtois and Bonnel, 2015, Drémeau et al., 2017, Niu et al., 2020] puisque les erreurs engendrées par son application sont négligeables devant les erreurs liées au bruit des mesures. Nous pouvons donc réécrire l’équation (1.23) :

$$\sqrt{k_{rm}^2(f) + k_{zm}^2(f)} = \frac{2\pi f}{c_0}, \quad (1.31)$$

où c_0 représente une valeur moyenne du profil de célérité (dans le cas du guide parfait ou de Pekeris on a $c_0 = c_1$). Cette hypothèse nous sera utile dans la suite du manuscrit lors de la correction des vitesses (méthode que l’on présentera dans le chapitre 3). Une

hypothèse supplémentaire consiste en l'exploitation de la faible dépendance en f de k_{zm} [Jensen et al., 2011, p.133-139] afin de pouvoir exprimer le nombre d'onde associé à un mode m à une fréquence supérieure f' en fonction du nombre d'onde de ce mode m à partir d'une fréquence f . La validité de cette dernière hypothèse peut être mise à défaut lorsque $f' \gg f$.

Enfin, dans tout guide d'onde, les nombres d'onde associés à des modes propagatifs sont contenus dans l'intervalle $[\frac{2\pi f}{c_{max}}, \frac{2\pi f}{c_{min}}]$, où c_{max} et c_{min} sont respectivement la vitesse maximale et minimale de l'environnement [Jensen et al., 2011, Chap. 5].

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons brièvement exposé les principes physiques soutenant notre problème d'intérêt : en acoustique sous-marine, les environnements petit-fond (avec une hauteur d'eau inférieure à 200 m) soumis à des émissions en ultra basses fréquences (inférieures à quelques 200 Hz) se comportent comme des guides d'onde et la propagation acoustique peut être modélisée par la théorie modale. Cette théorie met en jeu des grandeurs physiques qu'il s'agit de bien comprendre afin de les exploiter convenablement dans des problèmes inverses d'intérêt.

Notamment, les nombres d'onde au coeur de la théorie modale sont porteurs d'information sur l'environnement. Réussir à les estimer à partir de mesures in-situ est un problème qui a suscité et suscite encore de nombreuses études dans la littérature. Les contraintes opérationnelles liées au déploiement d'antennes acoustiques très résolues incitent les chercheurs à rechercher des techniques nécessitant de moindres efforts matériels. Pour contre-balancer l'appauvrissement des mesures, une connaissance pointue des modèles de propagation est nécessaire.

Cependant, cette connaissance seule n'est pas suffisante : il s'agit ensuite de savoir la prendre en compte de façon pertinente dans les stratégies de résolution des problèmes inverses afférents. Dans cette thèse et dans la continuité de récents travaux, nous proposons d'exploiter des représentations parcimonieuses. Nous présentons ces outils dans le chapitre suivant.

2. Acquisition compressée

Sommaire

2.1	Représentations parcimonieuses	26
2.1.1	Mesure de parcimonie	26
2.1.2	Intégration de l'a priori parcimonieux dans les problèmes d'inversion	27
2.2	Estimation parcimonieuse	28
2.2.1	Cas (sur-)déterminé	28
2.2.2	Cas sous-déterminé	30
2.2.2.1	Algorithmes de poursuite	31
2.2.2.2	Algorithmes de relaxation convexe	33
2.2.2.3	Algorithmes de seuillages itératifs	34
2.2.2.4	Algorithmes bayésiens	36
2.2.3	Dictionnaires continus	40
2.2.3.1	Les méthodes d'interpolation	40
2.2.3.2	Les normes adaptées aux dictionnaires continus	42
2.3	Conditions de reconstruction exacte	43
2.3.1	Cohérence	43
2.3.2	Constante d'isométrie restreinte	46
2.4	Acquisition compressée	47
2.4.1	Incohérence	48
2.4.2	Echantillonnage aléatoire de matrices incohérentes	49
2.4.3	Matrices aléatoires	50
	Conclusion	50

Dans le chapitre précédent, nous avons introduit les notions physiques qui nous seront utiles dans cette thèse. La connaissance de la physique inhérente à la propagation d'une onde acoustique dans un milieu petit fond à basse fréquence constitue une information a priori qu'il est important de prendre en compte lorsque l'on se penche sur la reconstruction des composantes modales. Dans le premier chapitre nous avons présenté l'équation caractérisant la propagation modale ; le champ de pression reçu par un capteur peut être

décrit comme la somme d'un petit nombre de composantes modales. Ainsi, en cherchant à reconstruire ces nombres d'onde sur une grille discrétisée, le vecteur représentant le nombre d'onde associés à des modes propagatifs contient un grand nombre de coefficients nuls. De plus, la volonté de diminuer le nombre de capteurs impose l'emploi de nouvelles méthodes en traitement du signal. Dans la suite de ce manuscrit, nous établirons un état de l'art des différentes méthodes disponibles dans la littérature et proposerons de nouvelles approches. Pré-requis aux chapitres 3 et 4, nous avons besoin d'introduire le paradigme d'acquisition compressée ou *compressed sensing*. C'est l'objet du présent chapitre.

La théorie de l'acquisition compressée est née dans les années 2000 [Candès and Wakin, 2008]. La prise en compte de la nature parcimonieuse des signaux dans certains espaces de représentation constitue une hypothèse a priori forte qui permet de relâcher les contraintes de l'échantillonnage présentes dans le cadre générale de la théorie de Shannon.

Propre à sa définition, l'acquisition compressée repose sur l'hypothèse que le signal recherché est parcimonieux, *i.e.* possède beaucoup de coefficients nuls, dans un domaine que l'on connaît. Formellement, soit un signal complexe \mathbf{y} de taille L ; \mathbf{y} est supposé s'écrire sous la forme :

$$\mathbf{y} = \mathbf{D}\mathbf{a}, \quad (2.1)$$

avec \mathbf{D} matrice de taille $(L \times G)$ et \mathbf{a} un vecteur complexe de taille G contenant peu de coefficients non nuls. Le vecteur \mathbf{a} est appelé représentation parcimonieuse de \mathbf{y} dans l'espace engendré par \mathbf{D} .

Nous verrons dans le chapitre suivant que ces représentations sont particulièrement adaptées au problème d'estimation modale où l'on suppose qu'un petit nombre de modes seulement se propage dans le milieu. Ce chapitre s'ouvre sur cette notion de parcimonie.

2.1. Représentations parcimonieuses

2.1.1. Mesure de parcimonie

La parcimonie d'un vecteur \mathbf{a} est mesurée par la pseudo-norme ℓ_0 , qui compte le nombre de coefficients non-nuls dans \mathbf{a} . Elle est notée $\|\cdot\|_0$ et est définie par

$$\|\mathbf{a}\|_0 = \sum_{i=1}^G |a_i|^0 = \text{Card}(\mathcal{S}), \quad (2.2)$$

où il est implicitement formulé que $0^0 = 1$ et $\mathcal{S} \triangleq \{i \in \{1, \dots, G\} \mid a_i \neq 0\}$. Nous appellerons support de la représentation parcimonieuse le vecteur \mathbf{s} tel que le i -ème

coefficient est

$$s_i = \begin{cases} 1 & \text{si } i \in \mathcal{S} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.3)$$

Notons que la mesure de parcimonie (2.2) ne satisfait pas l'une des trois propriétés des normes, la condition d'homogénéité (cf. équation (A.2)), d'où son appellation de pseudo-norme. Les propriétés des normes sont rappelées en annexe A.1.

On dira enfin qu'un vecteur \mathbf{a} est k -parcimonieux si ce vecteur comporte au plus k coefficients non nuls.

Si la parcimonie semble constituer une hypothèse forte posée sur les représentations des signaux, elle n'en demeure pas moins pertinente au regard d'une grande variété des signaux. Elle a ainsi été considérée avec succès en analyse de signaux biomédicaux [Raj and Ray, 2018], de signaux audio [Naseem et al., 2010] ou en compression d'image [Yang et al., 2008].

En pratique, elle est souvent associée à la résolution de problèmes inverses : observant \mathbf{y} et connaissant \mathbf{D} , quel est le vecteur parcimonieux \mathbf{a} approchant au mieux, au sens d'un certain critère, le modèle (2.1) ? Il existe plusieurs formulations de ce problème, selon que la mesure \mathbf{y} est supposée bruitée ou non, selon l'hypothèse ou non que l'on se donne sur la parcimonie de \mathbf{a} , etc. Dans la suite de ce chapitre, nous nous focaliserons sur le problème dit d'approximation parcimonieuse, où le signal \mathbf{y} est supposé bruité

$$\mathbf{y} = \mathbf{D}\mathbf{a} + \mathbf{n}, \quad (2.4)$$

avec \mathbf{n} supposé gaussien centré de variance σ_n^2 .

2.1.2. Intégration de l'a priori parcimonieux dans les problèmes d'inversion

Supposant le modèle (2.4) et en l'absence d'hypothèse sur le vecteur de représentation \mathbf{a} , le problème d'inversion se formalise classiquement sous la forme d'une minimisation des moindres carrés

$$\min_{\mathbf{a}} \|\mathbf{y} - \mathbf{D}\mathbf{a}\|_2^2. \quad (2.5)$$

La prise en compte de l'a priori parcimonieux sur \mathbf{a} est alors réalisée par régularisation du problème aux moindres carrés et peut s'exprimer de deux façons : explicitement, ou implicitement.

La régularisation explicite intègre la connaissance de la parcimonie exacte de \mathbf{a} , disons k dans le problème d'inversion :

$$\min_{\mathbf{a} \mid \|\mathbf{a}\|_0 \leq k} \|\mathbf{y} - \mathbf{D}\mathbf{a}\|_2^2. \quad (2.6)$$

Ce qui est aussi équivalent à :

$$\min_{\mathbf{a}} \|\mathbf{y} - \mathbf{D}\mathbf{a}\|_2^2 \text{ tel que } \|\mathbf{a}\|_0 \leq k. \quad (2.7)$$

La régularisation implicite, quant à elle, ne s'appuie pas sur une connaissance explicite du nombre de coefficients non nuls dans \mathbf{a} , mais cherche à le minimiser au regard de paramètres en lien avec le bruit supposé \mathbf{n} . On la trouve selon deux formes :

- la version avec contrainte :

$$\min_{\mathbf{a}} \|\mathbf{a}\|_0 \text{ tel que } \|\mathbf{y} - \mathbf{D}\mathbf{a}\|_2^2 \leq \epsilon, \quad (2.8)$$

où ϵ est un paramètre lié à la norme supposée du bruit.

- la version pénalisée :

$$\min_{\mathbf{a}} \|\mathbf{y} - \mathbf{D}\mathbf{a}\|_2^2 + \lambda \|\mathbf{a}\|_0, \quad (2.9)$$

où $\lambda \geq 0$ fixe le compromis entre parcimonie et distorsion.

Notons que, dans le cas de la pseudo-norme ℓ_0 (non-convexe), il n'existe aucun lien entre les formulations explicite (2.6) et implicites (2.8)-(2.9).

2.2. Estimation parcimonieuse

Dans cette section nous étudierons la résolution du problème d'estimation parcimonieuse selon les formalismes listés précédemment.

On distinguera deux cas pour une matrice \mathbf{D} de L lignes et G colonnes :

- Le cas (sur-)déterminé : $L \geq G$
- Le cas sous-déterminé : $L < G$

Dans la suite de ce manuscrit, la matrice \mathbf{D} sera également appelée **dictionnaire**.

2.2.1. Cas (sur-)déterminé

Le cas (sur-)déterminé est un cas simple d'estimation parcimonieuse lorsque l'on suppose que \mathbf{D} est isométrique (c'est à dire : $\mathbf{D}^H \mathbf{D} = I_G$). Lorsque l'on considère un tel cas d'étude, on dispose alors d'une solution explicite :

$$\min_{\mathbf{a}} \|\mathbf{y} - \mathbf{D}\mathbf{a}\|_2^2 \text{ tel que } \|\mathbf{a}\|_0 \leq k. \quad (2.10)$$

Rappelant l'hypothèse $\mathbf{D}^H \mathbf{D} = \mathbf{I}_G$, on a :

$$\min_{\mathbf{a} \mid \|\mathbf{a}\|_0 \leq k} \|\mathbf{y} - \mathbf{D}\mathbf{a}\|_2^2 \Leftrightarrow \min_{\mathbf{a} \mid \|\mathbf{a}\|_0 \leq k} \|\mathbf{D}^H \mathbf{y} - \mathbf{a}\|_2^2 \quad (2.11)$$

$$\Leftrightarrow \min_{\mathbf{a} \mid \|\mathbf{a}\|_0 \leq k} \sum_{i=1}^G |\mathbf{d}_i^H \mathbf{y} - a_i|^2, \quad (2.12)$$

où a_i est le i -ième élément dans \mathbf{a} et \mathbf{d}_i la i -ème colonne de \mathbf{D} .

En posant \mathcal{S} l'ensemble des indices des k plus grands coefficients de $|\mathbf{D}^H \mathbf{y}|$, on peut résoudre notre problème comme suit :

$$\min_{\mathbf{a} \mid \|\mathbf{a}\|_0 \leq k} \|\mathbf{y} - \mathbf{D}\mathbf{a}\|_2^2 = \sum_{i \notin \mathcal{S}} |\mathbf{d}_i^H \mathbf{y}|^2, \quad (2.13)$$

Menant à : $\tilde{\mathbf{a}} = \underset{\mathbf{a} \mid \|\mathbf{a}\|_0 \leq k}{\operatorname{argmin}} \|\mathbf{y} - \mathbf{D}\mathbf{a}\|_2^2$ avec :

$$\tilde{a}_i = \begin{cases} \mathbf{d}_i^H \mathbf{y} & \text{si } i \in \mathcal{S} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.14)$$

Par la suite, on verra qu'il est parfois plus commode de remplacer le problème avec une contrainte sur la norme par un problème approché obtenu en pénalisant le critère initial.

On cherche alors à résoudre la version pénalisée du problème d'optimisation :

$$\min_{\mathbf{a}} \|\mathbf{y} - \mathbf{D}\mathbf{a}\|_2^2 + \lambda \|\mathbf{a}\|_0. \quad (2.15)$$

La résolution de ce problème dans le cas où \mathbf{D} est isométrique met clairement en évidence l'importance de la notion de seuillage dans la résolution de ce type de problème. En effet, rappelant l'hypothèse $\mathbf{D}^H \mathbf{D} = \mathbf{I}_G$, on a :

$$\min_{\mathbf{a}} \|\mathbf{y} - \mathbf{D}\mathbf{a}\|_2^2 + \lambda \|\mathbf{a}\|_0 \Leftrightarrow \min_{\mathbf{a}} \|\mathbf{D}^H \mathbf{y} - \mathbf{a}\|_2^2 + \lambda \|\mathbf{a}\|_0 \quad (2.16)$$

$$\Leftrightarrow \min_{\mathbf{a}} \sum_{i=1}^G |\mathbf{d}_i^H \mathbf{y} - a_i|^2 + \lambda |a_i|^0 \quad (2.17)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^G \min_{a_i} (|\mathbf{d}_i^H \mathbf{y} - a_i|^2 + \lambda |a_i|^0). \quad (2.18)$$

En posant $f(a_i) \triangleq (|\mathbf{d}_i^H \mathbf{y} - a_i|^2 + \lambda |a_i|^0)$, on remarque que $f(a_i)$ ne peut prendre que deux valeurs intéressantes (puisque $a_i \neq 0$ implique $|a_i|^0 = 1$, on choisit la valeur qui

minimise $|\mathbf{d}_i^H \mathbf{y} - a_i|^2$, c'est à dire $a_i = \mathbf{d}_i^H \mathbf{y}$:

$$f(a_i) = \begin{cases} \lambda & \text{si } a_i = \mathbf{d}_i^H \mathbf{y} \\ |\mathbf{d}_i^H \mathbf{y}|^2 & \text{si } a_i = 0 \end{cases} \quad (2.19)$$

On en déduit donc que :

$$\min_{a_i} f(a_i) = \min(\lambda, |\mathbf{d}_i^H \mathbf{y}|^2), \quad (2.20)$$

et que :

$$\tilde{a}_i = \operatorname{argmin}_{a_i} f(a_i) = \mathcal{H}_\lambda^0(\mathbf{d}_i^H \mathbf{y}), \quad (2.21)$$

où :

$$\mathcal{H}_\lambda^0(\mathbf{d}_i^T \mathbf{y}) \triangleq \begin{cases} \mathbf{d}_i^T \mathbf{y} & \text{si } |\mathbf{d}_i^T \mathbf{y}| > \sqrt{\lambda} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.22)$$

L'opérateur \mathcal{H}_λ^0 est appelé opérateur de seuillage dur.

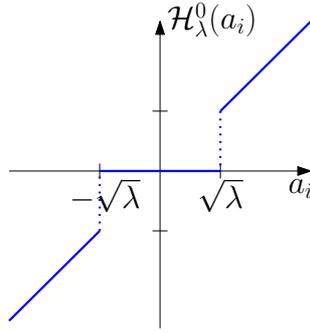


FIGURE 2.1. – Illustration du seuillage dur

2.2.2. Cas sous-déterminé

Nous allons maintenant considérer le cas où $L < G$. Dans ce contexte la matrice \mathbf{D} est dite redondante. L'usage de dictionnaires redondants est intéressant car pour un nombre k de coefficients non nuls, plus un dictionnaire est redondant plus le modèle parcimonieux pourra conduire à une solution proche du signal \mathbf{y} . Réciproquement si l'on se fixe une erreur d'approximation ϵ , l'usage d'un dictionnaire redondant peut significativement faire décroître le nombre d'atomes nécessaires pour reconstruire \mathbf{y} .

Toutefois, dans le cas où $L < G$, résoudre l'un ou l'autre des problèmes formalisés dans la section 2.1.2 exige une complexité de calculs combinatoire : il faudrait pouvoir tester toutes les combinaisons possibles des colonnes de \mathbf{D} . En pratique, on ne peut espérer atteindre que des solutions sous-optimales. La littérature fourmille de propositions

algorithmiques s’attachant à la résolution de l’un ou l’autre des problèmes. Nous en listons les principales dans les sections suivantes.

2.2.2.1. Algorithmes de poursuite

Les approches de poursuite (ou “gloutonnes”) s’attachent à la résolution des problèmes d’optimisation (2.7) ou (2.8). Leurs procédures reposent sur une succession d’itérations consistant à sélectionner un ou plusieurs atomes pour reconstruire le support de la décomposition parcimonieuse. Les itérations se poursuivent jusqu’à ce que la reconstruction satisfasse un critère d’arrêt. Ce critère peut porter soit sur la valeur de l’erreur d’approximation soit sur le nombre d’atomes utilisés dans la reconstruction. La sous-optimalité de ces approches vient de l’approche itérative, basée sur une succession d’optimisations locales qui ne garantit pas d’obtenir l’optimum global pour un dictionnaire \mathbf{D} fixé. Néanmoins ces algorithmes gloutons sont en général intuitifs et rapides. Ils sont donc souvent utilisés.

Des nombreux algorithmes de poursuite existants nous présenterons en détails les deux plus connus : Matching Pursuit (MP) [Mallat and Zhang, 1993] et Orthogonal Matching Pursuit (OMP) [Pati et al., 1993]. Dans ces algorithmes le support et les coefficients de la décompositions parcimonieuses sont estimés successivement.

Dans MP, on sélectionne à chaque itération l’atome de \mathbf{D} le plus corrélé avec le signal. On indique avec le pseudo-code suivant le fonctionnement global de cet algorithme. A chaque itération, on définit le “résidu courant” comme le vecteur d’observation \mathbf{y} auquel on a retranché les contributions des atomes sélectionnés jusqu’à l’itération courante.

Algorithm 1 Matching Pursuit (MP)

Initialisation : $\mathbf{r}^{(0)} = \mathbf{y}$, $\tilde{\mathbf{s}}^{(0)} = \mathbf{0}_G$, $\mathbf{a}^{(0)} = \mathbf{0}_G$.

while critère d’arrêt non satisfait, **do** :

1. Mise à jour du support \mathbf{s} de la décomposition parcimonieuse, on sélectionne l’atome le plus corrélé avec le résidu

$$\tilde{\mathbf{s}}_j^{(t)} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = \underset{i}{\operatorname{argmax}} |\mathbf{d}_i^H \mathbf{r}^{(t-1)}|^2 \\ \tilde{\mathbf{s}}_j^{(t-1)} & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.23)$$

2. Calcul du coefficient du vecteur \mathbf{a} correspondant

$$\tilde{\mathbf{a}}_j^{(t)} = \begin{cases} \tilde{\mathbf{a}}_j^{(t-1)} + \mathbf{d}_i^H \mathbf{r}^{(t-1)} & \text{si } j = \underset{i}{\operatorname{argmax}} |\mathbf{d}_i^H \mathbf{r}^{(t-1)}|^2 \\ \tilde{\mathbf{a}}_j^{(t-1)} & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.24)$$

3. Mise à jour du résidu : $\mathbf{r}^{(t)} = \mathbf{r}^{(t-1)} - \mathbf{d}_i^H \mathbf{r}^{(t-1)} \mathbf{d}_j$
end while

On remarque que dans cette approche rien n’interdit de sélectionner plusieurs fois le même atome ce qui peut entraîner un certain nombre d’itérations avant d’atteindre le critère d’arrêt. Notons toutefois que si le signal \mathbf{y} appartient à l’espace engendré par les

atomes du dictionnaire, alors l'algorithme va nécessairement converger [Jones, 1987].

Les atomes sont sélectionnés de la même manière dans OMP mais contrairement à MP qui estime uniquement un coefficient par itération, cet algorithme réestime l'intégralité des coefficients non nuls en projetant le signal \mathbf{y} sur l'espace engendré par les atomes sélectionnés, de cette façon on évite de sélectionner à plusieurs reprises le même atome. OMP est donc assuré de converger en un nombre fini d'itérations. On donne la description de cette approche avec le pseudo-code suivant :

Algorithm 2 Orthogonal Matching Pursuit (OMP)

Initialisation : $\mathbf{r}^{(0)} = \mathbf{y}$, $\tilde{\mathbf{s}} = \mathbf{0}_G$.

while Tant que le critère d'arrêt n'est pas atteint, **do**

1. Mise à jour du support \mathbf{s} de la décomposition parcimonieuse, on sélectionne l'atome le plus corrélé avec le résidu

$$\tilde{\mathbf{s}}_j^{(t)} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = \operatorname{argmax}_i |\mathbf{d}_i^H \mathbf{r}^{(t-1)}|^2 \\ \tilde{\mathbf{s}}_j^{(t-1)} & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.25)$$

2. Calcul des coefficients du vecteur \mathbf{a} correspondants

$$\hat{\mathbf{a}}_{\tilde{\mathbf{s}}(t)} = \mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{s}}(t)}^+ \mathbf{y} \quad (2.26)$$

où $\mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{s}}(t)}^+$ est la pseudo-inverse de $\mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{s}}(t)}$, matrice formée des colonnes \mathbf{d}_i telle que $\tilde{\mathbf{s}}_i^{(t)} \neq 0$.

3. Mise à jour du résidu : $\mathbf{r}^{(t)} = \mathbf{y} - \mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{s}}(t)} \hat{\mathbf{a}}_{\tilde{\mathbf{s}}(t)}$

end while

Pour résumer sommairement les avantages de ces deux algorithmes :

- algorithmes faciles à prendre en main
- convergence garantie
- complexité par itération raisonnable : $\mathcal{O}(LG)$ pour MP et $\mathcal{O}(LG + k^3 + kL)$ pour OMP

Cependant ces deux approches ne peuvent sélectionner qu'un atome par itération ; afin d'accélérer le processus global d'optimisation on peut se tourner vers les algorithmes de poursuite dits "par étapes" (stagewise dans la littérature). Parmi les plus populaires on peut mentionner l'algorithme StOMP [Donoho et al., 2012] (Stagewise Orthogonal Matching Pursuit) et CoSaMP [Needell and Tropp, 2009] (Compressive Sampling Matching Pursuit). Le premier peut être vu comme une variante d'OMP dans laquelle on sélectionne non pas l'atome le plus corrélé avec le signal mais les atomes dont la corrélation avec le signal dépasse un paramètre $T^{(n)}$. Le second algorithme s'appuie sur la connaissance du nombre de coefficients non nuls autorisés pour résoudre le problème (2.15) en autorisant la désélection d'atomes.

2.2.2.2. Algorithmes de relaxation convexe

Plutôt que d’approcher la solution des problèmes (2.6)-(2.9) par des procédures sous-optimales mais praticables, un autre champ de la littérature s’intéresse à la résolution de problèmes différents mais plus faciles et partageant l’ensemble des solutions des problèmes (2.6)-(2.9). En pratique, il s’agit essentiellement de remplacer la pseudo-norme ℓ_0 par la norme ℓ_1 , *i.e.*

$$\min_a \|\mathbf{y} - \mathbf{D}\mathbf{a}\|_2^2 \text{ tel que } \|\mathbf{a}\|_1 \leq \tau, \quad (2.27)$$

ou

$$\min_a \|\mathbf{a}\|_1 \text{ tel que } \|\mathbf{y} - \mathbf{D}\mathbf{a}\|_2^2 \leq \epsilon, \quad (2.28)$$

ou enfin, sous sa forme pénalisée

$$\min_a \|\mathbf{y} - \mathbf{D}\mathbf{a}\|_2^2 + \lambda \|\mathbf{a}\|_1. \quad (2.29)$$

On parle de problèmes d’optimisation convexes car la fonction objective et la fonction de contrainte sont des fonctions convexes (cf. annexe A.2 pour un rappel des notions des fonctions convexes). Par rapport au problème d’optimisation initial, la sous-optimalité de ce type d’approches réside dans le remplacement de la norme ℓ_0 par la norme ℓ_1 (la norme ℓ_0 n’étant pas convexe tandis que la norme ℓ_1 l’est).

Cette approximation est intéressante si on peut s’assurer que les deux problèmes partagent un même ensemble de solutions. A cet égard, les contributions [Donoho and Elad, 2003] et [Gribonval and Nielsen, 2008] se sont penchées sur des conditions basées sur la *cohérence* du dictionnaire \mathbf{D} garantissant l’unicité et l’équivalence des solutions aux problèmes considérant la norme ℓ_0 et ℓ_1 .

En pratique, les problèmes convexes ont des propriétés désirables :

- Pour une fonction convexe : les minimiseurs locaux sont des minimiseurs globaux.
- Pour une fonction strictement convexe : il existe au plus un minimiseur global.

Parmi les différentes approches s’attachant à la résolution des problèmes (2.27)-(2.29), on peut citer les méthodes ADMM (Alternating Direction Method of Multipliers) [Boyd et al., 2011] et les méthodes homotopiques [Foucart and Rauhut, 2013].

Enfin, il est important de souligner que les méthodes de relaxation convexe doivent en grande partie leur succès aux nombreuses “boîtes à outils” disponibles (<https://stanford.edu/~boyd/software.html>). Ces boîtes à outils permettent une implémentation facile des techniques de résolution dans différents langages de programmation. Notons cependant leur complexité algorithmique généralement plus élevée que pour les algorithmes de poursuite (en $\mathcal{O}(G^3)$ pour le Global Matched Filter [Fuchs, 2001], basé sur une programmation quadratique pour exemple).

2.2.2.3. Algorithmes de seuillages itératifs

Nous allons maintenant nous intéresser aux algorithmes de seuillages itératifs, la sous-optimalité de ces approches vient de l'emploi de la projection d'une descente de gradient. On regarde d'abord le problème général suivant :

$$\min_{\mathbf{a}} f(\mathbf{a}) + h(\mathbf{a}). \quad (2.30)$$

Les méthodes que nous allons présenter proposent un seuillage dur ou doux. On commencera par l'étude du seuillage dur, pour lequel on choisit :

- $f(\mathbf{a}) = \|\mathbf{y} - \mathbf{D}\mathbf{a}\|_2^2$ est une fonction convexe, propre, fermée et différentiable (cf. annexe A.2)
- $h(\mathbf{a}) = \lambda\|\mathbf{a}\|_0$ est une fonction convexe, propre et fermée

Cet algorithme est composé de deux étapes successives :

- On calcule d'abord la descente de gradient :

$$\mathbf{c}^{(g)} = \mathbf{a}^{(g)} - \gamma \nabla f(\mathbf{a}^{(g)}), \quad (2.31)$$

où $\nabla f(\mathbf{a}^{(g)}) = -2\mathbf{D}^T(\mathbf{y} - \mathbf{D}\mathbf{a}^{(g)})$

- On effectue ensuite la projection :

$$\mathbf{a}^{(g+1)} = \text{prox}_{\gamma h}(\mathbf{c}^{(g)}), \quad (2.32)$$

avec $\text{prox}_{\gamma h} \triangleq \underset{\mathbf{a}}{\text{argmin}} \|\mathbf{a} - \mathbf{c}\|_2^2 + \gamma h(\mathbf{a})$, appelé opérateur proximal. Dans le cas du seuillage dur on obtient :

$$\text{prox}_{\gamma\lambda\|\cdot\|_0}(\mathbf{c}) \triangleq \underset{\mathbf{a}}{\text{argmin}} \|\mathbf{a} - \mathbf{c}\|_2^2 + \gamma\lambda\|\mathbf{a}\|_0 \quad (2.33)$$

$$= \underset{\mathbf{a}}{\text{argmin}} \sum_{i=1}^G (|a_i - c_i|^2 + \gamma\lambda|a_i|^0) \quad (2.34)$$

$$= \sum_{i=1}^G \underset{a_i}{\text{argmin}} (|a_i - c_i|^2 + \gamma\lambda|a_i|^0). \quad (2.35)$$

On reconnaît une expression similaire à (2.18), et on en déduit :

$$\mathbf{a}^{(g+1)} = \text{prox}_{\gamma\lambda\|\cdot\|_0}(\mathbf{c}^{(g)}) = \mathcal{H}_{\gamma\lambda}^0(\mathbf{c}^{(g)}) = \mathcal{H}_{\gamma\lambda}^0(\mathbf{a}^{(g)} - \gamma \nabla J(\mathbf{a}^{(g)})), \quad (2.36)$$

avec $\mathcal{H}_{\gamma\lambda}^0$ opérateur du seuillage "dur" défini (élément par élément) en (2.22). Dans la littérature on se référera aux travaux de [Blumensath and Davies, 2008] pour une implémentation de cette méthode.

Le cas du seuillage "doux" résulte du remplacement de la norme l_0 par la pseudo-norme l_1 , l'étape de descente de gradient reste inchangée, en revanche l'étape de projection devient :

$$\mathbf{a}^{(g+1)} = \text{prox}_{\gamma\lambda|\cdot|_1}(\mathbf{c}^{(g)}), \quad (2.37)$$

avec

$$\text{prox}_{\gamma\lambda|\cdot|_1}(\mathbf{c}) = \underset{\mathbf{a}}{\text{argmin}} \|\mathbf{a} - \mathbf{c}\|_2^2 + \gamma\lambda\|\mathbf{a}\|_1 \quad (2.38)$$

$$= \underset{\mathbf{a}}{\text{argmin}} \sum_{i=1}^G (|a_i - c_i|^2 + \gamma\lambda|a_i|) \quad (2.39)$$

$$= \sum_{i=1}^G \underset{a_i}{\text{argmin}} (|a_i - c_i|^2 + \gamma\lambda|a_i|). \quad (2.40)$$

On obtient finalement :

$$\mathbf{a}^{(g+1)} = \text{prox}_{\gamma\lambda|\cdot|_1}(\mathbf{c}^{(g)}) = \mathcal{H}_{\gamma\lambda}^1(\mathbf{c}^{(g)}) = \mathcal{H}_{\gamma\lambda}^1(\mathbf{a}^{(g)} - \gamma\nabla J(\mathbf{a}^{(t)})), \quad (2.41)$$

où $\mathcal{H}_{\gamma\lambda}^1$ est un opérateur défini élément par élément comme

$$\mathcal{H}_{\gamma\lambda}^1(a_i) = \begin{cases} a_i - \frac{\lambda}{2} & \text{si } a_i \geq \frac{\lambda}{2} \\ 0 & \text{si } |a_i| < \frac{\lambda}{2} \\ a_i + \frac{\lambda}{2} & \text{si } a_i \leq -\frac{\lambda}{2}. \end{cases} \quad (2.42)$$

Une implémentation d'algorithme de seuillage doux peut se trouver dans [Daubechies et al., 2004]. Les figures 2.1 et 2.2 illustrent bien la terminologie de seuillage dur et de seuillage doux employée pour les fonctions $\mathcal{H}_{\gamma\lambda}^0$ et $\mathcal{H}_{\gamma\lambda}^1$.

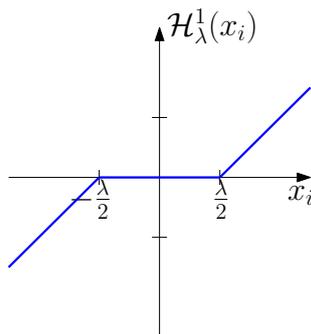


FIGURE 2.2. – Illustration du seuillage doux

2.2.2.4. Algorithmes bayésiens

Les approches bayésiennes expriment le problème d'estimation parcimonieuse comme un problème d'inférence bayésienne et s'appuient sur des outils probabilistes pour les résoudre. Elles se différencient les unes des autres notamment par l'a priori utilisé pour définir le modèle. Une approche populaire consiste à modéliser \mathbf{a} comme une variable aléatoire continue suivant une loi à queue lourde. Parmi les plus utilisées dans la littérature on peut citer les distributions de Cauchy [Olshausen and Field, 1997], de Laplace [Lewicki and Sejnowski, 2000],[Girolami, 2001], de Student de paramètre t [Févotte and Godsill, 2006] ou de Jeffrey [Févotte and Godsill, 2006].

Plus récemment, la littérature s'est accordée sur la pertinence du modèle Bernoulli-gaussien [Schniter et al., 2008], [Herzet and Drémeau, 2010b]. Plusieurs variantes de ce modèle existent. Une première approche consiste à supposer les éléments de \mathbf{a} comme indépendants et suivant une loi gaussienne dont la variance est contrôlée par une loi de Bernoulli [Marshall and Olkin, 1985]. Une deuxième exprime \mathbf{a} comme le produit élément par élément d'une variable gaussienne \mathbf{x} et d'une variable de Bernoulli \mathbf{s} , *i.e.* $\mathbf{a} = \mathbf{x} \odot \mathbf{s}$ avec

$$p(\mathbf{x}) = \prod_i^L p(x_i) \text{ avec } p(x_i) = \mathcal{CN}(0, \sigma_x^2), \quad (2.43)$$

où $\mathcal{CN}(\mu, \Gamma)$ représente la distribution circulaire gaussienne de moyenne μ et de variance Γ ¹, et

$$p(\mathbf{s}) = \prod_i^L p(s_i) \text{ avec } p(s_i) = \text{Ber}(p_i), \quad (2.44)$$

où $p_i \triangleq p(s_i = 1)$ est classiquement choisie très petite ($p_i \ll 1$) pour décrire une parcimonie forte. Cette version du modèle Bernoulli-gaussien a gagné en popularité de par son utilisation dans l'estimation au sens du maximum a posteriori et la preuve que ce problème partage un ensemble de solutions identique au problème d'optimisation (2.9) [Levy, 2008], [Herzet and Drémeau, 2010a].

Outre le modèle posé sur la représentation parcimonieuse \mathbf{a} , une hypothèse classique consiste à considérer le modèle d'observation suivant :

$$\mathbf{y} = \mathbf{D}\mathbf{a} + \mathbf{n}, \quad (2.45)$$

1. La variable aléatoire vectorielle $\mathbf{x} = \mathbf{x}_r + i\mathbf{x}_i$ de dimension G suit une distribution circulaire gaussienne de moyenne $\boldsymbol{\mu}$ et de variance Γ si la densité de $(\mathbf{x}_r, \mathbf{x}_i)$ est donnée par

$$p(\mathbf{x}_r, \mathbf{x}_i) = \frac{1}{\pi^G \det(\Gamma)} \exp(-(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^H \Gamma^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}))$$

avec \mathbf{n} vecteur circulaire gaussien centré de variance $\sigma^2 \mathbf{I}_L$. Plusieurs estimateurs bayésiens peuvent être considérés. On peut par exemple s’attacher à l’estimation au sens du maximum a posteriori (MAP) tel que

$$(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{s}}) = \underset{\mathbf{x}, \mathbf{s}}{\operatorname{argmax}} \log p(\mathbf{x}, \mathbf{s} | \mathbf{y}). \quad (2.46)$$

Exprimer le problème de reconstruction parcimonieuse sous la forme d’un problème d’inférence bayésienne ne rend pas le problème moins difficile à résoudre pour autant. Plusieurs stratégies peuvent alors être envisagées pour résoudre le problème (2.46) (cf. par exemple [Herzet and Drémeau, 2010a, Soussen et al., 2011]). Des contributions récentes ont montré l’intérêt des approximations variationnelles bayésiennes [Beal, 2003]. Ces approximations approchent la distribution a posteriori cible, ici $p(\mathbf{x}, \mathbf{s} | \mathbf{y})$, par des distributions ayant des factorisations aisément manipulables et minimisant la divergence de Kullback-Leibler avec la distribution cible :

$$\tilde{q}(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \underset{q(\mathbf{x}, \mathbf{s})}{\operatorname{argmin}} \sum_{\mathbf{s}} \int_{\mathbf{x}} q(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \log \left(\frac{q(\mathbf{x}, \mathbf{s})}{p(\mathbf{x}, \mathbf{s} | \mathbf{y})} \right) d\mathbf{x}. \quad (2.47)$$

Parmi les plus populaires, on trouve l’approximation de Bethe [Yedidia et al., 2005] et l’approximation de champ moyen [Consonni and Marin, 2007, Bali and Mohammad-Djafari, 2008]. Si l’approximation de Bethe a prouvé sa supériorité dans le contexte de l’acquisition compressée (cf. section suivante) avec des matrices aléatoires, l’approximation de champ moyen constitue une approche robuste au bruit et peu complexe [Drémeau et al., 2012]. Nous la présentons plus en détail ci-après.

L’approximation de champ moyen a été particularisée au modèle (2.43)-(2.44) dans [Drémeau et al., 2012] et a été baptisée SoBaP pour Soft Bayesian Pursuit. L’approche s’intéresse à la minimisation (2.47) sous la contrainte :

$$q(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \prod_{i=1}^G q(x_i, s_i). \quad (2.48)$$

L’approximation $\tilde{q}(\mathbf{x}, \mathbf{s})$ de $p(\mathbf{x}, \mathbf{s} | \mathbf{y})$ permet de remplacer le problème (2.46) par un problème qui admet une solution analytique, grâce au couplage introduit entre les variables (x_i, s_i) .

La résolution du problème (2.47) sous la contrainte (2.48) peut être effectuée par l’algorithme VBEM (pour variational bayesian expectation maximisation). Cet algorithme est une procédure itérative mettant à jour l’ensemble des facteurs de l’approximation

(2.48) à chaque itération selon l'expression :

$$q(x_i, s_i) \propto \exp \left(\sum_{\mathbf{s}_{-i}} \int_{\mathbf{x}_{-i}} \prod_{j \neq i} q(\mathbf{x}_j, \mathbf{s}_j) \log p(\mathbf{x}, \mathbf{s}, \mathbf{y}) d\mathbf{x}_{-i} \right), \quad (2.49)$$

où \mathbf{x}_{-i} (resp. \mathbf{s}_{-i}) désigne le vecteur composé des \mathbf{x}_j (resp. \mathbf{s}_j) pour $j \neq i$. Après développement des calculs, on obtient :

$$q(x_i, s_i) = q(x_i | s_i) q(s_i), \quad (2.50)$$

avec

$$q(x_i | s_i) = \mathcal{CN}(m(s_i), \Sigma(s_i)), \quad (2.51)$$

$$q(s_i) \propto \sqrt{\Sigma(s_i)} \exp \left(\frac{1}{2} \frac{|m(s_i)|^2}{\Sigma(s_i)} \right) p(s_i), \quad (2.52)$$

et

$$\Sigma(s_i) = \frac{\sigma_x^2 \sigma^2}{\sigma^2 + s_i \sigma_x^2 \mathbf{d}_i^H \mathbf{d}_i}, \quad (2.53)$$

$$m(s_i) = s_i \frac{\sigma_x^2}{\sigma^2 + s_i \sigma_x^2 \mathbf{d}_i^H \mathbf{d}_i} \langle \mathbf{r}_i \rangle^H \mathbf{d}_i, \quad (2.54)$$

$$\langle \mathbf{r}_i \rangle = \mathbf{y} - \sum_{j \neq i} q(s_j = 1) m(s_j = 1) \mathbf{d}_j. \quad (2.55)$$

En pratique, SoBaP itère la mise à jour des quantités (2.52), (2.53) et (2.54) jusqu'à atteindre un certain critère d'arrêt, par exemple un nombre d'itérations donné ou un seuil minimal posé sur la diminution attendue de la divergence de Kullback-Leibler entre l'estimée courante $q(\mathbf{x}, \mathbf{s})$ et la distribution vraie $p(\mathbf{x}, \mathbf{s} | \mathbf{y})$.

La vitesse de convergence de l'algorithme peut être améliorée par une étape d'estimation de la variance de bruit σ^2 adjointe à la procédure, selon une étape M d'un algorithme

EM, *i.e.*

$$\hat{\sigma}^2 = \operatorname{argmax}_{\sigma^2} \left\{ \sum_{\mathbf{s}} \int_{\mathbf{x}} \prod_i q(x_i, s_i) \log p(\mathbf{x}, \mathbf{s}, \mathbf{y} | \sigma^2) d\mathbf{x} \right\}, \quad (2.56)$$

$$= \frac{1}{M} \sum_{\mathbf{s}} \int_{\mathbf{x}} \prod_i q(x_i, s_i) \left(\|\mathbf{y} - \sum_i s_i x_i \mathbf{d}_i\|^2 \right) d\mathbf{x}, \quad (2.57)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{M} \left(\mathbf{y}^H \mathbf{y} - 2 \sum_i q(s_i = 1) m(s_i = 1) \mathbf{y}^H \mathbf{d}_i \right. \\ &+ \sum_i \sum_{j \neq i} q(s_i = 1) q(s_j = 1) m(s_i = 1) m(s_j = 1) \mathbf{d}_i^H \mathbf{d}_j \\ &\left. + \sum_i q(s_i = 1) (\Sigma(s_i = 1) + |m(s_i = 1)|^2) \mathbf{d}_i^H \mathbf{d}_i \right). \end{aligned} \quad (2.58)$$

Dans [Drémeau et al., 2012], les auteurs considèrent, au lieu du problème (2.46), le problème d'estimation MAP marginalisé

$$\tilde{s}_i = \operatorname{argmax}_{s_i} p(s_i | \mathbf{y}), \quad (2.59)$$

où

$$p(s_i | \mathbf{y}) = \int_{\mathbf{x}} \sum_{\mathbf{s} \neq i} p(\mathbf{x}, \mathbf{s} | \mathbf{y}) \simeq \int_{\mathbf{x}} \sum_{\mathbf{s} \neq i} \prod_j q(x_j, s_j) \simeq q(s_i). \quad (2.60)$$

L'approximation de champ moyen permet alors la résolution de (2.59), puisqu'une simple opération de seuillage peut ensuite être appliquée : $\tilde{s}_i = 1$ si $q(s_i) > \Theta$ et $\tilde{s}_i = 0$ sinon, avec Θ fixé à 0.5. Une estimation de $\tilde{\mathbf{x}}$ peut alors être réalisée par estimation MAP étant donné le support $\tilde{\mathbf{s}}$, soit

$$\tilde{\mathbf{x}} = \operatorname{argmax}_{\mathbf{x}} \log p(\mathbf{x} | \mathbf{y}, \tilde{\mathbf{s}}). \quad (2.61)$$

La solution de ce dernier problème s'exprime comme

$$\tilde{\mathbf{x}}_{\tilde{\mathbf{s}}} = (\mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{s}}}^H \mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{s}}} + \Omega)^{-1} \mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{s}}}^H \mathbf{y} \quad (2.62)$$

$$\text{et } \tilde{x}_i = 0 \text{ si } \tilde{s}_i = 0, \quad (2.63)$$

où Ω est une matrice diagonale dont le i -ème élément est $\frac{\sigma_x^2}{\sigma^2}$ et $\tilde{\mathbf{x}}_{\tilde{\mathbf{s}}}$ (resp. $\mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{s}}}$) représente $\tilde{\mathbf{x}}$ (resp. \mathbf{D}) restreint au support $\tilde{\mathbf{s}}$. Lorsque $\sigma_x^2 \rightarrow +\infty$, on obtient simplement

$$\tilde{\mathbf{x}}_{\tilde{\mathbf{s}}} = \mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{s}}}^+ \mathbf{y} \quad (2.64)$$

$$\text{et } \tilde{x}_i = 0 \text{ si } \tilde{s}_i = 0, \quad (2.65)$$

où \mathbf{D}_s^+ est la pseudo-inverse de \mathbf{D}_s . On conclut cette section par un pseudo-code de l'algorithme 3 :

Algorithm 3 Soft Bayesian Pursuit (SoBaP)

Entrées : $\mathbf{y}, \mathbf{D}, \{p_i\}_{i \in \{1, \dots, G\}}$
Initialisation : $\{q^{(0)}(s_i), m_x^{(0)}(s_i)\}_{s_i \in \{0,1\}, i \in \{1, \dots, G\}}, k = 0, \text{KL} = 0, \text{KL}_{\text{old}} = \infty$

- 1: **while** $\text{KL}_{\text{old}} - \text{KL} > 10^{-1}$ **do**
- 2: **optionnel :** mise à jour de σ_n^2 selon (2.58)
- 3: **for** $i = 1 \dots G$ **do**
- 4: mise à jour de $\langle \mathbf{r}_i \rangle^{(k+1)}$ selon (2.55)
- 5: **optionnel :** si step 2, mise à jour de $\Sigma_x^{(k+1)}(s_i)$ selon (2.53)
- 6: mise à jour de $m_x^{(k+1)}(s_i)$ selon (2.54) pour $s_i \in \{0, 1\}$
- 7: mise à jour de $q^{(k+1)}(s_i)$ selon (2.52) pour $s_i \in \{0, 1\}$
- 8: **end for**
- 9: $k \leftarrow k + 1$
- 10: $\text{KL}_{\text{old}} \leftarrow \text{KL}$
- 11: calcul de la divergence de Kullback-Leibler courante, KL, puis
- 12: **if** $\text{KL}_{\text{old}} - \text{KL} \leq 10^{-1}$ **then**, $k_{\text{max}} = k$
- 13: **end if**
- 14: **end while**

Sorties : $\{q^{(k_{\text{max}})}(s_i = 1), m_x^{(k_{\text{max}})}(s_i = 1)\}_{i \in \{1, \dots, G\}}$

2.2.3. Dictionnaires continus

Les différentes approches présentées précédemment peuvent être appelées méthodes discrètes. En effet, le dictionnaire disposant de G atomes (*i.e.* colonnes) on dispose d'un nombre fini d'atomes sélectionnables. On peut également parler d'approches discrètes. Puisqu'une grille est utilisée cela peut impliquer un pas de grille très petit pour reconstruire avec précision le support de la décomposition parcimonieuse ; toutefois un faible pas de grille a un impact négatif sur les performances de reconstruction car cela provoque le phénomène de l'inadéquation de la base [Chi et al., 2011],[Duarte and Baranuik, 2013] ainsi que des atomes fortement corrélés (on présentera cet aspect plus en détails dans la section suivante). Une approche classique, notamment utilisée en estimation de direction d'arrivée est l'ajout d'une étape de descente de gradient une fois la détection sur grille réalisée [Chen et al., 2019]. Cette méthode a l'avantage d'être aisément implémentable et de ne pas alourdir de façon conséquente la complexité de l'algorithme auquel on l'ajoute. Elle est cependant à replacer dans une littérature plus vaste dont nous dressons les grandes lignes dans la suite de cette sous-section.

2.2.3.1. Les méthodes d'interpolation

La méthode par interpolation consiste à recourir à un dictionnaire que l'on complète avec des copies de la dérivée de chaque atome. On peut alors reconstruire une représentation continue parcimonieuse de \mathbf{y} par le formalisme d'un développement de Taylor dont

on rappelle l'expression :

$$\mathbf{d}_{i+l} = \mathbf{d}_i + j\mathbf{d}'_i + O(j), \quad (2.66)$$

où \mathbf{d}_i correspond au i -ième atome du dictionnaire \mathbf{D} . En notant θ la variable de discrétisation de la grille de recherche on a $\mathbf{d}_i = \mathbf{d}(\theta_i)$ et $\mathbf{d}'_i = \frac{d}{d\theta}(\mathbf{d}_i)$.

On se donne une base pour laquelle l'écart entre deux atomes consécutifs de \mathbf{D} conduit à une approximation de Taylor du premier ordre qui satisfait une précision δ donnée :

$$\Delta \triangleq \max \left\{ \Delta' : \max_{|j| < \frac{\Delta'}{2}} \|\mathbf{d}_{i+j} - (\mathbf{d}_i + j\mathbf{d}'_i)\|_2 \leq \delta \right\}. \quad (2.67)$$

On peut écrire le signal \mathbf{y} en utilisant des combinaisons linéaires avec contraintes :

$$\mathbf{y} \simeq \left\{ \begin{array}{l} a \geq 0, \\ a\mathbf{d}_i + j\mathbf{d}'_i : |j| \leq \frac{\Delta}{2}a, \\ i = 1, \dots, G \end{array} \right\}. \quad (2.68)$$

Par identification à l'expression de \mathbf{y} par le dictionnaire on obtient :

$$\sum_i a_i \mathbf{d}_{i\Delta} + j_i \mathbf{d}'_{i\Delta} \simeq \sum_i a_i \mathbf{d}_{i\Delta - j_i/a_i}. \quad (2.69)$$

Avec $\mathbf{d}_{i\Delta} = \mathbf{d}(\theta_0 + i\Delta_\theta)$ où θ_0 correspond au premier point de la grille de recherche. L'identification est valable tant que $|\frac{j_i}{a_i}| \neq \frac{\Delta}{2}$. Cette contrainte sur j permet de rester dans le domaine de validité de l'approximation de Taylor et d'assurer l'unicité de la solution.

On doit donc maintenant résoudre le problème d'optimisation convexe suivant :

$$\min_{\mathbf{a}, \mathbf{j}} \|\mathbf{y} - (\mathbf{D}\mathbf{a} - \mathbf{D}\mathbf{j})\|_2^2 + \lambda \|\mathbf{a}\|_1, \quad (2.70)$$

soumis aux contraintes suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_i \geq 0, \\ |j_i| \leq \frac{\Delta}{2}a_i \end{array} \right\} \text{ pour } i = 1, \dots, N. \quad (2.71)$$

Cette approche a été implémentée dans l'algorithme Basis Pursuit (BP) permettant d'aboutir à sa version continue CBP (Continuous Basis Pursuit) dans les travaux d'Ekanadham [Ekanadham et al., 2011] et également par Knudson [Knudson et al., 2014] dans une version d'OMP continu. On trouve dans les deux travaux la possibilité d'opter pour un autre interpolateur comme l'interpolation polaire ou la décomposition en valeurs singulières [Knudson et al., 2014].

2.2.3.2. Les normes adaptées aux dictionnaires continus

On peut également noter des méthodes d'optimisations convexes qui remplacent la norme ℓ_1 par une norme adaptée aux dictionnaires continus. En particulier, la norme de variation totale [Candès and Fernandez-Granda, 2014], est souvent considérée. On la définit par

$$\|\mathbf{a}\|_{TV} = \sup \sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{|a(B_j)|^2}, \quad (2.72)$$

où B_1 est la première mesure (*i.e.* premier coefficient parcimonieux) et B_{∞} la dernière. On peut reconstruire le vecteur parcimonieux en résolvant le problème initial suivant :

$$\min_{\tilde{\mathbf{a}}} \|\tilde{\mathbf{a}}\|_{TV} \text{ tel que } F\tilde{\mathbf{a}} = \mathbf{y}, \quad (2.73)$$

où F désigne l'opérateur de passage du domaine d'acquisition du signal au domaine où la représentation du signal est parcimonieuse. De fait, les contraintes de ce problème primal sont exigeantes car la variable $\tilde{\mathbf{a}}$ est continue. Pour cela on va dès à présent regarder le problème dual pour l'exprimer comme un programme semi-défini avec des variables de dimensions finies pour estimer les coefficients cherchés. Afin d'exprimer le problème dual de notre problème primal précédent, on construit le lagrangien associé au problème primal en rendant explicites les égalités de la contrainte comme suit :

$$L(\tilde{\mathbf{a}}, \mathbf{c}) = \|\tilde{\mathbf{a}}\|_{TV} + \langle \mathbf{c}, \mathbf{y} - F\tilde{\mathbf{a}} \rangle, \quad (2.74)$$

où \mathbf{c} est le vecteur des multiplicateurs de Lagrange relatif aux contraintes d'égalité. Le problème dual est défini en maximisant la fonction dual correspondant ainsi à la borne inf du lagrangien exprimé selon la variable du problème primal. On a donc :

$$g(\mathbf{c}) = \inf_{\tilde{\mathbf{a}}} L(\tilde{\mathbf{a}}, \mathbf{c}) \quad (2.75)$$

$$= \langle \mathbf{c}, \mathbf{y} \rangle + \inf_{\tilde{\mathbf{a}}} \left(\|\tilde{\mathbf{a}}\|_{TV} - \langle \mathbf{c}, F\tilde{\mathbf{a}} \rangle \right). \quad (2.76)$$

Après calcul [Candès and Fernandez-Granda, 2014],[Park et al., 2019] on arrive à l'expression suivante pour la fonction duale $g(\mathbf{c})$

$$g(\mathbf{c}) = \begin{cases} \langle \mathbf{c}, \mathbf{y} \rangle & \text{si } |F_n \mathbf{c}|^2 \leq 1 \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.77)$$

Le problème dual s'obtient en maximisant la fonction dual :

$$\max_{\mathbf{c}} \langle \mathbf{c}, \mathbf{y} \rangle \text{ tel que } |F_n \mathbf{c}|^2 \leq 1. \quad (2.78)$$

On reconnaît un problème semi-défini que l'on peut à nouveau résoudre en utilisant par exemple une méthode de point intérieur.

2.3. Conditions de reconstruction exacte

Les approches parcimonieuses avec moins de mesures disponibles que d'atome dans le dictionnaire invitent nécessairement à se poser la question des conditions sous lesquelles elles réussissent à reconstruire parfaitement un signal parcimonieux donné. Dans le cas des dictionnaires continus qui vont particulièrement nous intéresser dans cette thèse, il n'existe à notre connaissance que très peu de contributions se penchant sur cette caractérisation. Concernant les approches gloutonnes, le récent travail [Elvira et al., 2020] propose des résultats théoriques sur les performances d'OMP en reconstruction exacte en k étapes, mais l'analyse ne s'applique toutefois qu'à une famille de dictionnaires très particulière.

Les approches considérant la norme de variation totale (TV) ont fait l'objet de davantage de contributions [Candès and Fernandez-Granda, 2014, Denoyelle et al., 2017, Duval and Peyré, 2015], mais elles sont plus ardues et comme ces méthodes ne sont pas au coeur de cette thèse, nous les laisserons de côté ici.

Dans cette section, nous nous focaliserons donc sur les conditions de reconstruction exacte des algorithmes considérant des dictionnaires discrets. Nous verrons ainsi comment ces conditions nous permettront d'anticiper le comportement des approches que nous considérerons par la suite. Plusieurs métriques ont été introduites dans la littérature pour quantifier les performances des algorithmes. Nous présentons les deux plus populaires : la cohérence du dictionnaire et la condition d'isométrie restreinte.

2.3.1. Cohérence

La cohérence d'un dictionnaire (ou matrice) est une mesure assez intuitive. En général lorsque la cohérence du dictionnaire est faible l'algorithme de reconstruction est performant.

Définition 2.1. On définit la cohérence d'une matrice $\mathbf{D} \in \mathbb{C}^{L \times G}$ dont les colonnes sont normalisées (c'est à dire que $\forall i \in \{1, \dots, G\}, \|\mathbf{d}_i\|_2 = 1$) comme suit :

$$\mu = \max_{1 \leq i \neq j \leq G} |\langle \mathbf{d}_i, \mathbf{d}_j \rangle|. \quad (2.79)$$

Définition 2.2. On introduit de plus la cohérence ℓ_1 que l'on peut définir pour tout $k \in \{1, \dots, G-1\}$ par :

$$\mu_1(k) = \max_{i \in \{1, \dots, G\}} \max_{j \in K} |\langle \mathbf{d}_i, \mathbf{d}_j \rangle|, K \subset G, \text{card}(K) = k, i \notin K. \quad (2.80)$$

On peut aisément vérifier que :

- $\mu \leq 1$ (inégalité de Cauchy - Schwartz)
- pour $1 \leq k \leq G - 1$ on a :

$$\mu \leq \mu_1(k) \leq k\mu. \quad (2.81)$$

- pour $1 \leq k, t \leq G - 1$ avec $k + t \leq G - 1$ on a :

$$\max \{ \mu_1(k), \mu_1(t) \} \leq \mu_1(k + t) \leq \mu_1(k) + \mu_1(t). \quad (2.82)$$

Nous compléterons la définition de la cohérence par un théorème [Candès and Wakin, 2008] :

Théorème 2.1. — *Soit \mathbf{D} une matrice dont les colonnes sont normalisées et $k \in \{1, \dots, G\}$, alors pour tout vecteur $\mathbf{a} \in \mathbb{C}^k$ parcimonieux on a :*

$$(1 - \mu_1(k - 1)) \|\mathbf{a}\|_2^2 \leq \|\mathbf{D}\mathbf{a}\|_2^2 \leq (1 + \mu_1(k - 1)) \|\mathbf{a}\|_2^2. \quad (2.83)$$

De manière équivalente, pour chaque ensemble $K \subset \{1, \dots, G\}$ tel que $\text{card}(K) \leq k$, les valeurs propres de la matrice $\mathbf{D}_K^* \mathbf{D}_K$ sont comprises dans l'intervalle $[1 - \mu_1(k - 1), 1 + \mu_1(k - 1)]$. En particulier, si $\mu_1(k - 1) < 1$ alors $\mathbf{D}_K^* \mathbf{D}_K$ est inversible (où \mathbf{D}_K représente le dictionnaire \mathbf{D} restreint aux colonnes associées à l'ensemble K).

Des conclusions de ce théorème on peut énoncer le corollaire suivant :

Corollaire 2.1. — *Soit \mathbf{D} une matrice dont les colonnes sont normalisées et $k \geq 1$ un entier, si*

$$\mu_1(k) + \mu_1(k - 1) < 1, \quad (2.84)$$

alors pour chaque ensemble $K \subset \{1, \dots, G\}$ tel que $\text{card}(K) \leq 2k$ la matrice $\mathbf{D}_K^ \mathbf{D}_K$ est inversible et la matrice \mathbf{D}_K est injective. Il est intéressant de noter que la conclusion est également valide si*

$$\mu < \frac{1}{2k - 1}. \quad (2.85)$$

Le cas des matrices de faible cohérence :

On s'intéresse maintenant à donner une borne inférieure à la cohérence et à la cohérence ℓ_1 d'une matrice $\mathbf{D} \in \mathbb{K}^{L \times G}$. Il se peut même que ces bornes inférieures soient atteintes. Toutefois cela requiert des colonnes du dictionnaire que ces dernières forment un repère fermé équiangulaire. Nous allons définir les conditions pour qu'un système de vecteurs soit nommé ainsi. On définira d'abord les système équiangulaires puis les repères fermés.

Définition 2.3. Un système de vecteurs normalisés $(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_G)$ de \mathbb{K}^L est appelé équiangulaire si et seulement si il existe une constante $\kappa > 0$ telle que :

$$|\langle \mathbf{d}_i, \mathbf{d}_j \rangle| = \kappa, \quad \forall i, j \in \{1, \dots, G\}, \quad i \neq j \quad (2.86)$$

Définition 2.4. Un système de vecteurs $(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_G)$ de \mathbb{K}^L forme un repère dit fermé s'il existe une constante $\zeta > 0$ telle qu'elle permet de vérifier une des conditions équivalentes suivantes :

- $\|\mathbf{a}\|_2^2 = \zeta \sum_{j=1}^G |\langle \mathbf{a}, \mathbf{d}_j \rangle|^2, \forall \mathbf{a} \in \mathbb{K}$
- $\mathbf{a} = \zeta \sum_{j=1}^G |\langle \mathbf{a}, \mathbf{d}_j \rangle| \mathbf{d}_j, \forall \mathbf{a} \in \mathbb{K}$
- $\mathbf{D}\mathbf{D}^H = \frac{1}{\zeta} \mathbf{I}_L$

On notera qu'un système de vecteur normalisés peut à la fois être qualifié de système équiangulaire et d'ensemble fermé, on parlera alors d'ensemble fermé équiangulaire. Ce sont ces ensembles de vecteurs qui permettent d'atteindre la borne inférieure pour la cohérence que nous allons présenter et que l'on appelle généralement la borne de Welch [Xia et al., 2005].

Propriété 2.1. — La cohérence d'une matrice $\mathbf{D} \in \mathbb{K}^{L \times G}$ dont les colonnes sont normalisées satisfait :

$$\mu \geq \sqrt{\frac{G-L}{L(G-1)}}. \quad (2.87)$$

Comme mentionné précédemment, l'égalité est atteinte si les colonnes de la matrice forment un repère fermé équiangulaire. On peut de plus étendre la borne de Welch pour la cohérence ℓ_1 pour de faibles valeurs de parcimonie :

Propriété 2.2. — La cohérence ℓ_1 d'une matrice $\mathbf{D} \in \mathbb{K}^{L \times G}$ dont les colonnes sont normalisées satisfait :

$$\mu_1(k) \geq k \sqrt{\frac{G-L}{L(G-1)}}; \text{ pour } k < \sqrt{G-1} \quad (2.88)$$

On obtient également l'égalité si les colonnes de la matrice forment un repère fermé équiangulaire. Il est cependant nécessaire de noter qu'il existe une condition sur G afin que le nombre de colonnes de la matrice \mathbf{D} ne soit pas excessivement plus grand que le nombre de mesures M . En effet pour qu'un système de vecteurs $(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_N)$ de \mathbb{K}^L forme un système équiangulaire on a alors :

- $G \leq \frac{L(L+1)}{2}$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$
- $G \leq L^2$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Remarquons que si l'égalité est atteinte alors le système de vecteurs $(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_G)$ forme également un repère fermé.

Ces propriétés ont notamment permis de démontrer les conditions de reconstruction de l'algorithme OMP en utilisant la cohérence du dictionnaire utilisé [Foucart and Rauhut, 2013], nous plaçons la démonstration en annexe (A.3).

2.3.2. Constante d'isométrie restreinte

La cohérence est une mesure simple de la qualité d'un dictionnaire. Toutefois la borne inférieure de la cohérence limite les analyses de performances aux algorithmes de reconstruction à des vecteurs de parcimonie très faibles. On définira maintenant une mesure plus fine pour aller au delà de cette limitation. On définit la constante d'isométrie restreinte δ_k du dictionnaire \mathbf{D} par :

$$(1 - \delta_k) \|\mathbf{a}\|_2^2 \leq \|\mathbf{D}\mathbf{a}\|_2^2 \leq (1 + \delta_k) \|\mathbf{a}\|_2^2. \quad (2.89)$$

Pour tout vecteur \mathbf{a} k -parcimonieux. Notons tout d'abord que la suite des constantes d'isométrie restreinte est croissante, c'est à dire :

$$\delta_1 \leq \delta_2 \leq \dots \leq \delta_k \leq \delta_{k+1} \leq \dots \leq \delta_G. \quad (2.90)$$

On s'intéresse maintenant aux implications de cette constante d'isométrie restreinte sur la reconstruction ℓ_0 , c'est à dire lors de la résolution du problème suivant :

$$\min_{\mathbf{a}} \|\mathbf{a}\|_0 \text{ tel que } \mathbf{y} = \mathbf{D}\mathbf{a}. \quad (2.91)$$

Pour ce problème, les propriétés suivantes sont équivalentes :

- a) tout vecteur \mathbf{a} , k -parcimonieux et tel que $\mathbf{D}\mathbf{a} = \mathbf{y}$, est l'unique solution k -parcimonieuse. Cela signifie que si $\mathbf{D}\mathbf{c} = \mathbf{D}\mathbf{a}$ où \mathbf{a} , \mathbf{c} sont deux vecteurs k -parcimonieux ; alors $\mathbf{a} = \mathbf{c}$,
- b) le noyau de \mathbf{D} ne contient pas d'autre vecteur $2k$ -parcimonieux autre que le vecteur nul,
- c) chaque ensemble de $2k$ colonnes de \mathbf{D} est linéairement indépendant,
- d) $\delta_{2k} < 1$.

La démonstration de l'équivalence de ces différentes propriétés a été réalisée dans [Foucart and Rauhut, 2013]. On retiendra donc que pour le problème ℓ_0 , si la constante d'isométrie restreinte δ_{2k} est inférieure à 1, alors il existe une seule solution k -parcimonieuse du problème.

On s'intéresse maintenant au problème ℓ_1 , dont on rappelle qu'il s'exprime par :

$$\min_{\mathbf{a}} \|\mathbf{a}\|_1 \text{ tel que } \|\mathbf{y} - \mathbf{D}\mathbf{a}\|_2 \leq \epsilon. \quad (2.92)$$

Pour ce cas de figure (reconstruction d'un signal non bruité), si la condition d'isométrie restreinte est vérifiée alors le programme linéaire suivant donne une solution exacte :

$$\min_{\mathbf{a}} \|\mathbf{a}\|_1 \text{ tel que } \mathbf{D}\mathbf{a} = \mathbf{y}. \quad (2.93)$$

En supposant que $\delta_{2k} < \sqrt{2} - 1$, alors la solution $\tilde{\mathbf{a}}$ à (2.93) respecte [Candes, 2008] :

$$\|\tilde{\mathbf{a}} - \mathbf{a}\|_2 \leq C_0 \|\mathbf{a} - H_k(\mathbf{a})\|_1 / \sqrt{k}, \quad (2.94)$$

de même que

$$\|\tilde{\mathbf{a}} - \mathbf{a}\|_1 \leq C_0 \|\mathbf{a} - H_k(\mathbf{a})\|_1, \quad (2.95)$$

pour une certaine constante C_0 et où $H_k(\mathbf{a})$ est le vecteur \mathbf{a} dont on a gardé que les k plus grands coefficients et mis tous les autres à 0.

Supposons maintenant que l'on souhaite reconstruire un vecteur parcimonieux d'un signal bruité. On a alors le problème d'optimisation suivant :

$$\min_{\mathbf{a}} \|\mathbf{a}\|_1 \text{ tel que } \|\mathbf{y} - \mathbf{D}\mathbf{a}\|_2^2 \leq \epsilon, \quad (2.96)$$

où ϵ borne la variance du bruit ajouté aux mesures. En supposant que $\delta_{2k} < \sqrt{2} - 1$, alors la solution $\tilde{\mathbf{a}}$ de (2.96) respecte [Candes, 2008] :

$$\|\tilde{\mathbf{a}} - \mathbf{a}\|_2 \leq C_0 \|\tilde{\mathbf{a}} - \mathbf{a}\|_1 / \sqrt{k} + C_1 \epsilon, \quad (2.97)$$

pour deux constantes C_0 et C_1 . L'erreur de reconstruction est donc bornée par la somme de deux termes. Le premier terme correspond à l'erreur en considérant qu'il n'y a pas de bruit sur les données. Le second terme est quant à lui proportionnel au niveau de bruit. De plus les constantes C_0 et C_1 sont petites. Dans la prochaine section on essayera de relier ces constantes pour déterminer un nombre de mesures minimales nécessaires à la bonne reconstruction d'un vecteur parcimonieux.

2.4. Acquisition compressée

Dans cette dernière partie nous allons introduire la théorie de l'acquisition compressée. Dans la littérature on se réfère souvent à "CS-theory", CS pouvant signifier "Compressed sensing", "Compressive sensing", "Compressed sampling" ou "Compressive sampling". Cette théorie, qui met en valeur les modèles parcimonieux avec lesquels on la confond aisément, est apparue au début des années 2000. Elle permet d'établir des conditions nécessaires sur l'acquisition et sur le signal pour permettre sa reconstruction exacte.

De prime abord on pourrait rapidement penser au théorème de Shannon-Nyquist dont on rappelle les deux conditions d'application :

- condition sur le signal : le signal est à bande limitée (et sa fréquence maximale est connue)

- condition sur l'acquisition : le signal est uniformément échantillonné et la fréquence d'échantillonnage est au moins deux fois plus grande que la fréquence maximale du signal

Il suffit que ces deux conditions soient respectées pour que l'on puisse reconstruire le signal d'origine à partir des échantillons en utilisant les formules d'interpolation de Shannon. Généralement, si l'une de ces deux conditions n'est pas respectée la reconstruction souffrira d'effets de repliement (d'aliasing en anglais). L'acquisition compressée offre une alternative au théorème de Shannon-Nyquist, en proposant un autre couple "signal-acquisition" :

- Il existe une base dans laquelle le signal est parcimonieux.
- Le domaine d'acquisition du signal est incohérent avec le domaine dans lequel la représentation est parcimonieuse.

Mathématiquement parlant, on peut donc décrire le signal \mathbf{y} de la façon suivante : $\mathbf{y} = \mathbf{\Phi}\mathbf{\Psi}\mathbf{a}$. Où le couple de matrices $\mathbf{\Phi}$, $\mathbf{\Psi}$ décrit respectivement le milieu d'acquisition du signal et le milieu dans lequel le signal peut être représenté de façon parcimonieuse. Dans la suite de cette section, on notera \mathbf{c} le signal défini par : $\mathbf{c} = \mathbf{\Psi}\mathbf{a}$.

On présentera dans un premier temps la notion d'incohérence, puis le cas des matrices aléatoires. On conclura en illustrant le cas des bases incohérentes par la reconstruction modale que l'on détaillera dans le chapitre suivant.

2.4.1. Incohérence

Pour un couple de bases orthonormées $(\mathbf{\Phi}, \mathbf{\Psi})$ de $\mathbb{R}^{G \times G}$, la cohérence (à ne pas confondre avec la cohérence mutuelle, qui mesure le degré de "variété" au sein d'un dictionnaire) entre la base d'acquisition $\mathbf{\Phi}$ et la base de représentation $\mathbf{\Psi}$ est définie par :

$$\mu(\mathbf{\Phi}, \mathbf{\Psi}) = \sqrt{G} \cdot \max_{1 \leq i, j \leq G} |\langle \phi_i, \psi_j \rangle|, \quad (2.98)$$

avec ϕ_i la i -ième colonne de la matrice $\mathbf{\Phi}$ et ψ_j la j -ième colonne de la matrice $\mathbf{\Psi}$. La cohérence mesure la corrélation maximale entre des couples de $\mathbf{\Phi}$ et $\mathbf{\Psi}$. Si il y a des éléments corrélés alors la valeur de la cohérence est élevée (*i.e.* $\mu(\mathbf{\Phi}, \mathbf{\Psi})$ est élevé), inversement si il n'y a aucun éléments corrélés alors la cohérence est faible (*i.e.* $\mu(\mathbf{\Phi}, \mathbf{\Psi})$ est faible). Les deux familles étant orthonormées on a alors :

$$\mu(\mathbf{\Phi}, \mathbf{\Psi}) \in [1, \sqrt{G}]. \quad (2.99)$$

On peut prendre exemple de la représentation de Fourier pour présenter un cas de figure d'incohérence maximale (i.e. de cohérence minimale). Dans le cas de l'analyse de Fourier on peut écrire la base d'acquisition du signal par la matrice identité :

$$\Phi = \mathbf{I}_G \quad (\text{i.e. } \phi_{i,l} = \delta_{i,l}), \quad (2.100)$$

et la base dans laquelle le signal est parcimonieux par la base de Fourier représentée par la matrice Ψ dont les coefficients s'expriment par :

$$\psi_{i,l} = \frac{1}{\sqrt{G}} e^{-j2\pi i \frac{l}{G}}. \quad (2.101)$$

On a alors $\mu = 1$ ce qui correspond à une incohérence maximale.

2.4.2. Echantillonnage aléatoire de matrices incohérentes

Dans l'exemple précédent nous avons mis en avant l'existence de matrices naturellement incohérentes entre elles. Nous allons maintenant énoncer le principal théorème de la théorie de l'acquisition compressée qui nous permettra de réduire le nombre de mesures nécessaires à la reconstruction de notre signal à l'aide de matrices aléatoires [Candès and Wakin, 2008].

Théorème 2.2. — *Comme pour le théorème de Shannon il faut satisfaire une condition sur le signal et sur l'acquisition du signal :*

- *condition sur le signal* : le signal \mathbf{c} admet une représentation k -parcimonieuse \mathbf{a} dans la base Ψ
- *condition sur l'acquisition* : on sélectionne aléatoirement L mesures réalisées dans la base Φ de façon à ce qu'on ait pour une certaine constante C :

$$L \geq C\mu^2(\Phi, \Psi)k \log^4 G. \quad (2.102)$$

Alors la solution $\tilde{\mathbf{a}}$ du problème vaut :

$$\operatorname{argmin}_{\mathbf{a}} \|\mathbf{a}\|_1 \text{ tel que } \|\mathbf{y} - \Phi_L \Psi \mathbf{a}\|_2^2 \leq \epsilon, \quad (2.103)$$

où Φ_L est la restriction de la matrice Φ aux L lignes sélectionnées aléatoirement, est exacte et le signal \mathbf{c} peut être exactement reconstruit en utilisant $\mathbf{c} = \Psi \tilde{\mathbf{a}}$.

On peut donc constater que plus la cohérence entre les deux bases est faible moins on a besoin de mesures pour reconstruire le signal.

2.4.3. Matrices aléatoires

La théorie de l'acquisition compressée doit son succès à un résultat plus générique que le précédent. Elle énonce en effet qu'en l'absence de connaissance d'une base Φ adaptée au problème considéré, on peut la remplacer par une base orthonormée uniformément distribuée. Dans ce cas, si Ψ est une base orthonormée quelconque, alors la cohérence μ de ces bases vaudra avec une forte probabilité :

$$\mu(\Phi, \Psi) \simeq \sqrt{2 \ln G}. \quad (2.104)$$

De plus, on est en droit de se demander si la matrice Φ se doit nécessairement d'être une base. De fait il existe plusieurs façon de concevoir l'écriture d'une telle matrice. Il peut s'agir de vecteurs échantillonnés aléatoirement :

- uniformément sur la sphère unité de \mathbb{R}^L
- selon une loi normale de moyenne nulle et de covariance $(1/L)\mathbf{I}_L$
- avec des composantes tirées selon une loi de Bernoulli ou de n'importe quelle loi sous-gaussienne

Théorème 2.3. — *Comme précédemment, ce théorème nécessite de vérifier une condition sur le signal et sur son acquisition :*

- *condition sur le signal* : le signal \mathbf{c} admet une représentation k -parcimonieuse \mathbf{a} dans la base Ψ
- *condition sur l'acquisition* : la matrice d'acquisition Φ est construite selon une des trois propositions de sélection aléatoire décrites ci-dessus, et pour une certaine constante positive C

$$L \geq Ck \log\left(\frac{G}{k}\right). \quad (2.105)$$

Alors la solution $\tilde{\mathbf{a}}$ de :

$$\underset{\mathbf{a}}{\operatorname{argmin}} \|\mathbf{a}\|_1 \text{ tel que } \|\mathbf{y} - \Phi\Psi\mathbf{a}\|_2^2 \leq \epsilon, \quad (2.106)$$

est exacte et \mathbf{c} peut être reconstruit en utilisant $\Psi\tilde{\mathbf{a}}$

Conclusion

Ce chapitre nous a permis d'introduire la notion de vecteurs de parcimonieux désignant des vecteurs dont la majorité des coefficients sont nuls ou négligeables devant une minorité de coefficients. Cette notion de parcimonie nous permet d'envisager divers problèmes

d'optimisation dont nous avons présenté diverses méthodes de résolutions. Nous avons présenté les méthodes discrètes et continues amenant à une reconstruction de vecteurs parcimonieux. Nous avons de plus introduit la théorie de l'acquisition compressée qui permet de reconstruire des vecteurs parcimonieux dans des cadres où le théorème de Shannon ne permettrait pas de garantir la-dite reconstruction. L'étude de la théorie de l'acquisition compressée montre la nécessité d'une incohérence entre la base d'acquisition des mesures et la base dans laquelle la représentation du signal est parcimonieuse. Cet angle de vue nous permet de regarder la problème de la propagation modale introduit dans le premier chapitre comme un problème de reconstruction de vecteurs parcimonieux. Nous étudierons l'application des méthodes d'acquisition comprssée à la reconstruction modale dans le prochain chapitre.

3. Reconstruction modale

Sommaire

3.1	Cas d'une source mono-fréquentielle	54
3.1.1	Formalisation du problème	54
3.1.2	Etat de l'art	56
3.2	Cas d'une source large bande	60
3.2.1	Formalisation du problème	60
3.2.2	Un a priori supplémentaire : la relation de dispersion	61
3.2.3	Etat de l'art	62
3.2.3.1	Méthodes intégrant la relation de dispersion	62
3.2.3.2	Impact de l'espacement inter-capteur sur la reconstruction	64
3.2.3.3	Le recalage de vitesse	65
3.2.3.4	Impact du recalage de vitesse sur la reconstruction modale	66
3.2.4	Limitations	67
3.3	Métriques de performance	68
3.3.1	Métriques de performances en détection	68
3.3.2	Métriques adaptées au cas continu	71
	Conclusion	73

Dans ce chapitre nous allons présenter le cas d'étude que nous intéressera dans la suite du manuscrit. En nous appuyant sur les notions introduites dans les chapitres 1 et 2 nous présenterons dans un premier temps un état de l'art de la résolution de ce problème puis l'application des méthodes d'évaluation des performances de ces algorithmes.

Nous nous intéressons au cas d'étude suivant : on considère une colonne d'eau de profondeur D , la colonne d'eau est séparée du fond du guide par plusieurs couches sédimentaires, la source est située à une profondeur $z_s \in [0 D]$ et les capteurs constituant l'antenne horizontale se situent à une profondeur $z_r \in [0 D]$. La figure 3.1 schématise le cas général de notre environnement d'étude.

En pratique on restreint notre étude au cas où la source se trouve au fond du guide, cela permet d'assurer que tous les modes propagatifs sont associés à une amplitude

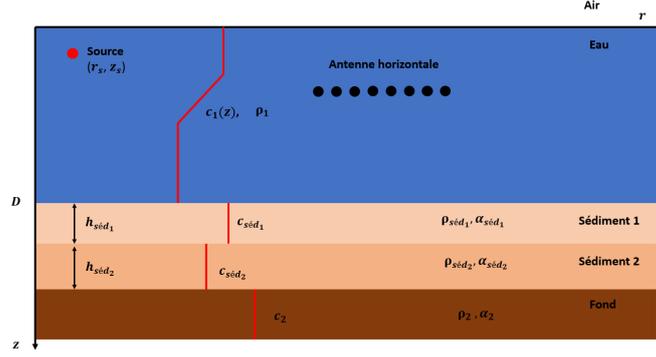


FIGURE 3.1. – Illustration de l'environnement de simulation

non-nulle (on re-justifiera cet aspect dans la première section), on suppose de plus que la source et l'antenne sont alignées (on parle de position "endfire").

On étudie d'abord le cas mono-fréquentiel avant de s'intéresser au cas des sources large bande qui nous permet d'introduire un a priori physique pour améliorer la reconstruction et de conclure sur l'évaluation des performances des dites reconstruction.

3.1. Cas d'une source mono-fréquentielle

3.1.1. Formalisation du problème

Dans le premier chapitre nous avons introduit les bases de la théorie de la propagation modale selon laquelle, sous certaines hypothèses, on peut décrire le signal acoustique enregistré par un capteur comme la somme d'un petit nombre de composantes modales. On rappelle que les deux hypothèses nécessaires sont les suivantes :

- L'environnement est dit "petit fond" : la distance entre la surface et le fond sédimentaire, D , est inférieure à 200 m
- La source émet en ultra-basse fréquence (inférieure à 400 Hz)

Nous rappelons l'équation du chapitre 1 permettant de décrire le champ acoustique y reçu par un hydrophone, appartenant à une antenne de longueur \mathcal{L} , de profondeur z_r situé à une distance r d'une source acoustique, située à une profondeur z_s , émettant à une ultra-basse fréquence f par :

$$y(f, r, z_r, z_s) = Q \frac{s(f)}{\sqrt{r}} \sum_{m=1}^{M(f)} \varphi_m(f, z_s) \varphi_m(f, z_r) \frac{e^{-jrk_{rm}(f)}}{\sqrt{k_{rm}(f)}} + n(f, r, z_r, z_s), \quad (3.1)$$

où Q est une constante, $M(f)$ le nombre de mode se propageant à la fréquence f , $k_{rm}(f) \in \mathbb{R}$ est le nombre d'onde horizontal du m -ième mode associé à l'amplitude modale $\varphi_m(f, z_r)$. Le terme n correspond lui à la transformée de Fourier temporelle du bruit relié à la mesure. Notons que dans notre cas d'étude on travaillera à z_s et z_r constantes.

Dans le cas d'une antenne horizontale, le l -ième hydrophone se trouve à une distance $r_l = \sum_{i=1}^l \Delta_{r_i} + r_{min}$ de la source, avec r_{min} la distance entre la source et le premier hydrophone de l'antenne et Δ_{r_i} l'espacement inter-capteur entre le i -ième capteur et le capteur précédant (dans le cas d'une antenne régulière, l'espacement inter-capteur est constant et noté Δ_r , et l'expression précédente devient : $r_l = (l - 1)\Delta_r + r_{min}$). Dans la suite du manuscrit on considèrera que l'on se trouve en champ lointain, c'est à dire que r_{min} est suffisamment grand, et sous cette hypothèse l'atténuation géométrique $\frac{1}{\sqrt{r}}$ peut être considérée comme constante le long de l'antenne horizontale.

En discrétisant selon l'axe des fréquences ($f = \nu\Delta_f$ avec Δ_f le pas fréquentiel) et en simplifiant l'équation précédente en notant $a_m(f) = \varphi_m(f, z_s)\varphi_m(f, z_r)$ l'amplitude modale du m -ième mode se propageant à la fréquence f le problème peut se réécrire sous la forme matricielle suivante :

$$\mathbf{y}_\nu = \mathbf{D}\mathbf{a}_\nu + \mathbf{n}_\nu, \quad (3.2)$$

où $\mathbf{D} \in \mathbb{C}^{L \times G}$ (L correspond au nombre de mesures (i.e. d'hydrophones) et G au nombre de points de la grille de recherche) est un dictionnaire dont les colonnes sont des atomes de Fourier (c'est à dire les terme exponentiels complexes), $\mathbf{a}_\nu \in \mathbb{C}^G$ représente les amplitudes modales à l'indice fréquentiel ν et $\mathbf{n}_\nu \in \mathbb{C}^L$ est le bruit additif le long de l'antenne. Le (l, g) -ième élément de \mathbf{D} est donc défini par $d_{lg} = e^{-jr_l\kappa_g}$, où r_l est la distance entre le l -ième capteur et la source, et κ_g est le g -ième élément de la grille de recherche des nombres d'onde. Le dictionnaire \mathbf{D} s'écrit donc :

$$D = \begin{pmatrix} e^{-jr_1\kappa_1} & e^{-jr_1\kappa_2} & \dots & e^{-jr_1\kappa_G} \\ e^{-jr_2\kappa_1} & e^{-jr_2\kappa_2} & \dots & e^{-jr_2\kappa_G} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{-jr_L\kappa_1} & e^{-jr_L\kappa_2} & \dots & e^{-jr_L\kappa_G} \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

Ainsi le vecteur \mathbf{a}_ν aura des coefficients non nuls aux positions g pour lesquelles un nombre d'onde κ_g est propagatif. Notons que l'équation (3.2) nécessite la connaissance du réseau d'acquisition mais non de celle de la distance entre la source et l'antenne (si on suppose que la source est alignée avec l'antenne¹). Dans ce cas de figure, r_l peut être référencé par rapport au premier capteur de l'antenne (i.e. $r_{min} = 0$). Il en résulte une solution équivalente à celle obtenue en utilisant la distance absolue entre la

1. Le terme e^{jr_1} peut être vu comme une ambiguïté de phase sur les amplitudes modales

source et l'antenne. On associe à la g -ième colonne de \mathbf{D} la notation suivante \mathbf{d}_{κ_g} , i.e. $\mathbf{d}_{\kappa_g} = [1, \dots, e^{-jr_L \kappa_g}]^T$.

On présentera dans la suite un état de l'art regroupant les différentes méthodes permettant de reconstruire les nombres d'ondes caractérisant la propagation modale à partir du vecteur d'observation \mathbf{y} .

3.1.2. Etat de l'art

Une première approche intuitive consiste à identifier le problème de reconstruction modale comme un problème d'estimation spectrale. Les premiers travaux réalisés dans [Frisk and Lynch, 1984] utilisent la transformée de Hankel afin d'obtenir les fonctions de Green du milieu de propagation; l'étude des pics de ces fonctions permettent ensuite d'estimer les nombres d'ondes. On peut également recourir à l'application d'une transformée de Fourier dans le domaine spatial [Yilmaz, 2001], [Nicolas et al., 2003]. Cette solution bien connue en traitement du signal souffre néanmoins des inconvénients classiques de la transformée de Fourier : cette méthode nécessite une antenne horizontale avec une grande ouverture d'antenne afin d'avoir une résolution suffisante; de plus l'espacement inter-capteur doit être petit afin de prévenir le phénomène de repliement spectral. En raison de ces deux restrictions il faudrait déployer systématiquement de très longues antennes horizontales ce qui peut être très encombrant et très coûteux.

Afin d'améliorer les performances d'estimation spectrale on peut mentionner les méthodes dites de haute résolution (HR pour High Resolution), ces méthodes permettent d'être plus précis dans la reconstruction en exprimant des hypothèses supplémentaires sur le signal recherché [Kay, 1988]. Ainsi une méthode de haute résolution a déjà été appliquée dans le cas de reconstruction de nombres d'onde en utilisant un modèle auto-régressif (noté AR dans la suite, [Becker and Frisk, 2006], [Le Courtois and Bonnel, 2014a]). Modéliser le signal acoustique avec un modèle auto-régressif revient à exprimer le l -ième échantillon récupéré comme une somme des N_{AR} échantillons précédents (N_{AR} représente l'ordre du modèle). Les nombres d'ondes sont estimés en étudiant le spectre de densité spectral du modèle AR.

Parmi les méthodes HR on peut également citer l'algorithme MUSIC [Schmidt, 1986] (Multiple Signal Classification) généralement considéré dans des études d'estimation de directions d'arrivée [Xenaki et al., 2014], [Drémeau and Herzet, 2017]. La méthode consiste en l'étude de la décomposition en valeurs propres de la matrice de covariance et de la séparation en sous-espaces du signal et du bruit. L'algorithme se sert de l'orthogonalité supposé entre les sous-espaces du signal et du bruit pour localiser les

maxima du spectre. L'algorithme dispose d'une meilleure résolution, cependant ses performances diminuent quand le nombre de mesures diminue ou quand le rang de la matrice de covariance diminue.

Dans la continuité des méthodes HR, la description du signal reçu comme la somme d'un petit nombre de composantes modales appelle naturellement l'exploitation d'un modèle parcimonieux. En outre, on remarque que le problème de reconstruction modale est un cas typique d'acquisition compressée : le signal que l'on veut reconstruire est parcimonieux dans le domaine des nombres d'ondes, qui est incohérent avec le domaine d'acquisition du signal (le signal est enregistré par des hydrophones, donc dans le domaine spatial). Comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, un choix judicieux dans le cas des bases incohérentes est alors de considérer un échantillonnage aléatoire des mesures (i.e. des hydrophones).

Des différents algorithmes discrets présentés dans le chapitre 2 nous nous concentrons ici sur l'application d'OMP, dont l'utilisation dans la reconstruction de nombres d'onde a déjà été présenté dans les travaux de Harley [Harley and Moura, 2013] dans le cadre d'une reconstruction des ondes de Lamb. Nous avons mis en avant lors de la présentation de cet algorithme qu'il existe deux critères d'arrêt notables. Chacun de ces critères va influencer le nombre d'itérations de l'algorithme. Le premier critère fixe le nombre d'itérations au nombre de points à reconstruire (dans notre cas cela correspondrait aux nombres de modes se propageant la fréquence de la source), tandis que le second critère aura pour effet de réaliser autant d'itérations nécessaires à ce que l'énergie du résidu soit suffisamment faible. On visualise le résultat de ces deux critères sur les figures 3.2 et 3.3 pour une source monochromatique émettant à 27 Hz dans un guide de Pekeris avec les caractéristiques suivantes :

- la profondeur du guide : 130 m
- une antenne horizontale constituée de 240 capteurs régulièrement espacés de 25 m
- la source et l'antenne se situent au fond du guide
- célérité du son dans l'eau : 1500 m/s
- célérité du son dans le sédiment : 2000 m/s
- la masse volumique de l'eau : 1000 kg/m³
- la masse volumique du sédiment : 2000 kg/m³

Pour les reconstructions présentées on a réalisé un tirage aléatoire de 30 capteurs tout en gardant intacte l'ouverture d'antenne. Sur chaque figure on superpose également le modèle théorique (que l'on considéra comme vérité terrain ou GT pour Ground Truth

en anglais). Sur la figure 3.2 on observe bien autant de nombres d'onde reconstruits que de nombres d'onde théoriques, cela est naturellement lié à la définition du premier critère d'arrêt ; notons toutefois que ce critère d'arrêt bien que puissant est en principe uniquement applicable sur des données pour lesquelles on dispose avec certitude des paramètres permettant de déterminer le nombre de modes se propageant à la fréquence d'étude. Pour une application plus concrète et réaliste on pourra s'orienter vers le second critère dont la reconstruction des nombres d'onde principaux sur la figure 3.3 est similaire à celle réalisée avec le premier critère d'arrêt. Il faut cependant noter la détection de deux nombres d'onde supplémentaires à cette fréquence en raison du changement du critère.

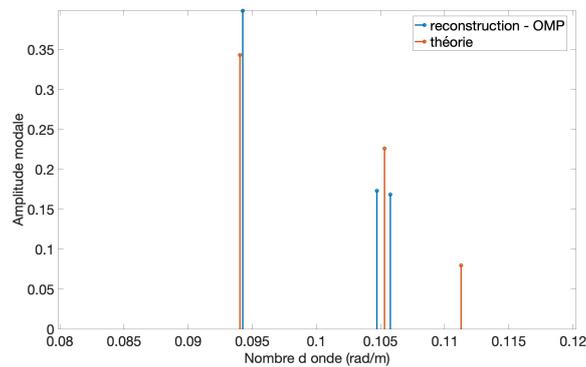


FIGURE 3.2. – Reconstruction des nombres d'ondes par l'algorithme OMP avec un nombre d'itérations fixé sur le nombre de modes à reconstruire

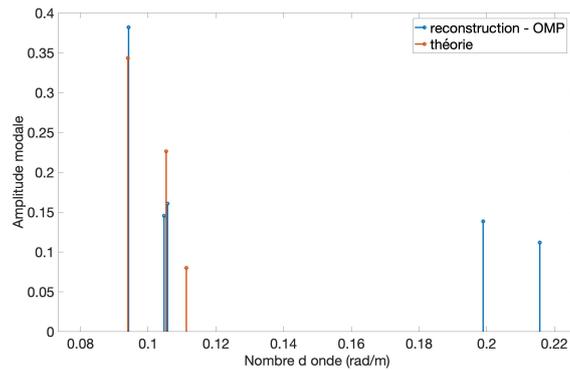


FIGURE 3.3. – Reconstruction des nombres d'ondes par l'algorithme OMP avec un nombre d'itération basé sur l'énergie du résidu

De ces deux figures nous portons notre attention sur deux points précis. Le premier

est la non détection du premier mode à 0.105 rad/m (on pourrait augmenter le nombre de capteurs pour l'estimer mais l'on souhaite proposer une méthode permettant de réduire le nombre de capteurs). Il est en effet nécessaire de souligner qu'OMP peine à reconstruire les modes lorsque ces derniers sont associés à une faible amplitude modale, cela a pour conséquence le dédoublement de modes ou la présence de modes supplémentaires. Le second point à soulever est la non superposition du modèle théorique avec la reconstruction (on s'intéressera uniquement à la superposition des abscisses). Ce phénomène est lié au caractère continu du problème. En effet, à une fréquence donnée on sait que le signal peut être décrit comme la somme d'un petit nombre de composantes modales chacune reliée à un nombre d'onde. Mais rien ne garantit que ces nombres correspondent exactement à un point de notre grille de recherche. De plus l'amplitude modale étant liée au nombre d'onde, une erreur sur le nombre d'onde entrainera une erreur sur l'amplitude modale, donc sur le résidu et donc sur l'estimation du prochain nombre d'onde. Afin de palier à ce souci de représentation sur grille nous pouvons avoir recours aux méthodes de résolution avec des dictionnaires continus dont nous avons présenté un bref état de l'art dans le chapitre précédent.

A cet égard nous présentons les résultats de l'application de l'approche avec la norme de variation totale, initialement introduite dans le cas d'estimation de directions d'arrivée par Xenaki [Xenaki and Gerstoft, 2015] puis adaptée à la reconstruction de nombres d'onde par Park [Park et al., 2019]. Ayant déjà présenté la résolution de cette approche dans le chapitre précédent nous nous intéressons ici au cadre d'application de l'étude. Dans ces travaux, on considère une antenne verticale constituée d'un certain nombre de capteurs, chacun de ces capteurs va récupérer un signal émis par une source mono-chromatique qui se déplace à vitesse constante et que l'on enregistre M fois, on illustre ce cadre d'étude par la figure 3.4.

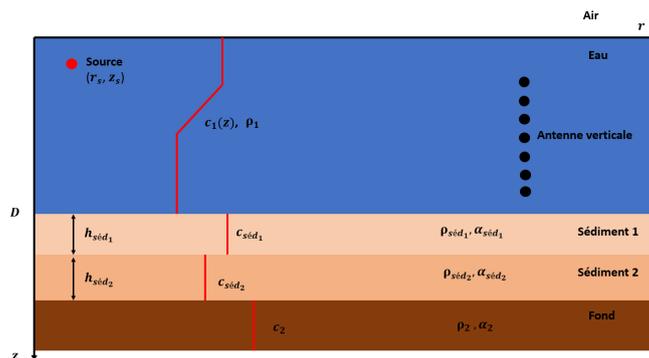


FIGURE 3.4. – Illustration de l'environnement avec une antenne verticale

Chaque capteur aura donc L enregistrements, et on remarque bien que pour un capteur donné on se retrouve bien dans la même configuration que le cas de l'antenne horizontale avec une source immobile, on dispose dans les deux cas de L échantillons qui diffèrent entre eux par une augmentation régulière de la distance entre la source et le capteur. L'intérêt de considérer une antenne verticale est de pouvoir ainsi réaliser une reconstruction du support pour diverses profondeurs (on a vu dans le premier chapitre que l'amplitude modale était une fonction de la profondeur). Certains capteurs pourront donc reconstruire les nombres d'ondes dont les amplitudes sont trop faibles pour certains capteurs placés à différentes profondeur phénomène que l'on peut visualiser sur la figure 3.5 issue de [Park et al., 2019].

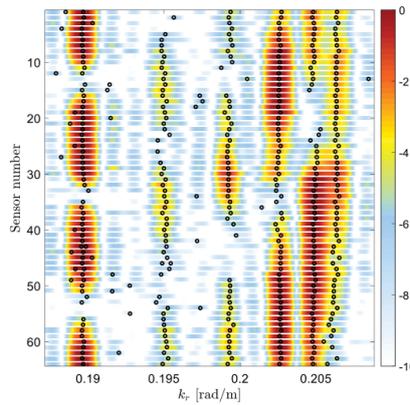


FIGURE 3.5. – Support obtenu pour chaque capteurs de l'antenne verticale, résultat issu des travaux de Park [Park et al., 2019]

Sur cette figure, on constate par exemple que la valeur 0.19 rad/m est reconstruite par un grand nombre de capteurs. En itérant sur l'ensemble des nombres d'onde reconstruits par chaque capteur on obtient donc un support moyen. Cette approche nécessite toutefois une résolution d'un programme semi-défini (comme présenté dans le chapitre 2), amenant à un temps de calcul significatif même dans le cas d'une source mono-fréquentielle. Nous allons étudier à présent, dans la section suivante, la reconstruction de nombres d'onde dans le cas d'une source large-bande.

3.2. Cas d'une source large bande

3.2.1. Formalisation du problème

Lorsque l'on suppose être en présence d'une source large bande, une approche intuitive est de traiter les fréquences les unes après les autres. La concaténation de tous les résultats obtenus permet d'établir la représentation sous forme de diagramme fréquence -

nombre d'onde (noté "f-k" par la suite). On représente sur la figure 3.6 le résultat obtenu après transformée de Fourier d'un signal provenant de l'acquisition d'une source large bande émettant entre 0 et 50 Hz simulé dans un guide de Pekeris [Jensen et al., 2011] de profondeur $D = 130$ m et dont les caractéristiques des milieux sont $c_1 = 1500$ m/s, $\rho_1 = 1000$ kg/m³, $c_2 = 2000$ m/s et $\rho_2 = 2000$ kg/m³.

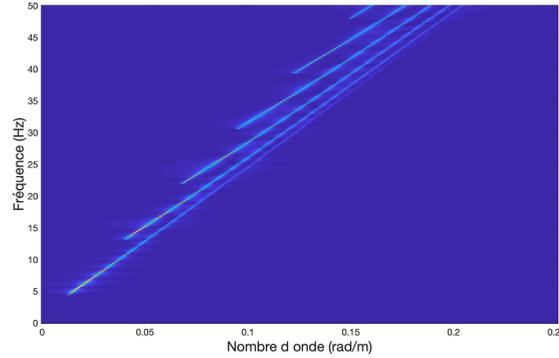


FIGURE 3.6. – Diagramme "f-k" réalisé par transformée de Fourier spatiale et temporelle sur une antenne de 240 capteurs

On distingue sur cette figure des structures obliques, correspondant chacune à un mode se propageant selon la relation de dispersion.

3.2.2. Un a priori supplémentaire : la relation de dispersion

Dans le chapitre 1, nous avons établi la relation de dispersion valable pour tout guide d'onde :

$$\left(\frac{2\pi f}{c_1}\right)^2 = k_{rm}(f)^2 + k_{zm}(f)^2, \quad (3.4)$$

où la variable c_1 correspond à la célérité du son dans l'eau et k_{rm} et k_{zm} sont respectivement les composantes horizontale et verticale du nombre d'onde associé à un mode propagatif (nous avons vu dans le chapitre 1 que la dépendance en z de c_1 et k_{zm} pouvait être levée).

Nous pouvons proposer une autre écriture de cette équation plus propice à l'implémentation algorithmique en l'écrivant de façon discrète. Pour cela il nous faut connaître l'écart entre deux fréquences Δ_f , on peut alors écrire $f = \nu\Delta_f$ avec ν un entier. Pour faciliter l'écriture des prochaines équations on pose : $k_{rm}[\nu] = k_{rm}(\nu\Delta_f)$. Les nombres d'onde d'un même mode pour deux indices fréquentiels successifs sont donc reliés par

[Le Courtois and Bonnel, 2014b] :

$$k_{rm}[\nu + 1]^2 = k_{rm}[\nu]^2 + (2\nu + 1) \left(\frac{2\pi\Delta_f}{c_1} \right)^2 + \epsilon[\nu], \quad (3.5)$$

où $\epsilon[\nu] = k_{zm}[\nu]^2 - k_{zm}[\nu + 1]^2$ correspond à l'écart entre les parties verticales des nombres d'onde. En environnement petit fond, les nombres d'ondes verticaux varient peu avec la fréquence, ce terme peut donc être négligé entre deux indices successifs, toutefois aux fins des fréquences cette erreur se cumule et un écart notable se creuse entre le nombre d'onde prédit par la relation et celui que l'on souhaite reconstruire.

3.2.3. Etat de l'art

Nous présentons maintenant les différentes approches ayant pris en compte la relation de dispersion reliant les nombres d'onde d'un même mode. Il est utile de rappeler que dans le cas d'une source large bande une application fréquence par fréquence d'un des algorithmes présentés dans l'état de l'art du cas mono-fréquentiel est tout à fait envisageable. Nous insistons cependant ici sur les approches ayant retenu ce prior physique. Nous introduirons de plus les difficultés à reconstruire des nombres d'ondes lorsque les fréquences deviennent élevées. Aux difficultés rencontrées nous proposons une solution usuellement utilisée en sismique. Nous concluons cette section par une nouvelle formulation de la relation de dispersion reliant les nombres d'ondes.

3.2.3.1. Méthodes intégrant la relation de dispersion

La première prise en compte de la relation de dispersion se trouve dans les travaux de Le Courtois et Bonnel [Le Courtois and Bonnel, 2014b]. Dans cette étude les auteurs proposent un post-traitement afin de traquer les nombres d'ondes à partir de diagrammes "f-k" dont la résolution ne permet pas de distinguer distinctement les nombres d'ondes. Les nombres d'ondes sont traqués à partir d'un filtrage particulière [Djuric et al., 2003]. Ainsi, pour chaque fréquence on modélise le spectre des nombres d'ondes par un système dynamique que l'on caractérise par deux équations. La première équation permet de générer le spectre des nombres d'onde si l'on connaît les-dits nombres d'onde (ces derniers seront obtenus sur une grille, c'est à dire de façon discrétisée). La seconde porte sur la relation permettant de relier les nombres d'ondes d'un même mode à deux fréquences différentes. Le filtrage particulière est réalisé à partir d'un algorithme connu sous le nom de filtre Bootstrap [Smith, 2013].

La relation de dispersion a également été prise en compte couplée à l'algorithme SoBaP, que nous avons présenté dans le chapitre précédent, dans [Drémeau et al., 2017]. Dans

cette étude le vecteur \mathbf{a}_ν que l'on cherche à reconstruire est vu comme le produit du support d'une représentation parcimonieuse (c'est à dire un vecteur constitué uniquement de 0 et de 1) avec un vecteur regroupant les amplitudes modales, plus spécifiquement comme la réalisation d'un modèle Bernoulli-Gaussien. La prise en compte de la relation de dispersion intervient dans l'écriture de l'a priori du support de la fréquence suivante que l'on intègre au pseudo-code présenté dans le chapitre 2 (cf. algorithme 3). Il s'agit en effet d'un algorithme où l'on reconstruit le support de la représentation parcimonieuse fréquence après fréquence ; quand la résolution est achevée pour une fréquence représentée par un indice ν alors on attribue directement une probabilité plus élevée aux indices du support de la fréquence $\nu + 1$ centrés sur l'indice du support obtenu après la prédiction par la relation de dispersion. Concrètement pour tout $g \in \{1, \dots, G\}$, le paramètre de Bernoulli $p_{\nu+1,g}$ associé au g -ième élément du support s_ν s'écrit :

$$p_{\nu+1,g} = \begin{cases} 0.7 & \text{si } g \in \mathcal{I}_\nu \\ 0.3 & \text{si } (g-1) \in \mathcal{I}_\nu \\ 0.3 & \text{si } (g+1) \in \mathcal{I}_\nu \\ M[\nu+1]/G & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.6)$$

avec :

$$\mathcal{I}_\nu = \left\{ g \mid g = \left[\sqrt{g'^2 + (2\nu+1) \left(\frac{G\Delta_r\Delta_f}{c_1} \right)^2} \right], \hat{s}_{\nu,g'} = 1 \right\}, \quad (3.7)$$

où $M[\nu+1]$ est le nombre de modes attendu à l'indice fréquentiel $\nu+1$, $[\cdot]$ est l'opérateur mathématique retournant l'entier naturel le plus proche et $\hat{s}_{\nu,g'} = 1$ correspond à la détection d'un nombre d'onde associé à un mode propagatif au point g' de la grille de recherche du support reconstruit $\hat{\mathbf{s}}_\nu$. L'équation (3.7) est dérivée de l'équation (3.5) que l'on a discrétisée selon l'axe des nombres d'onde. On associe à cette valeur une probabilité plus forte qu'aux autres points de la grille de recherche. Toutefois l'opérateur $[\cdot]$ ne prend pas en compte le terme d'erreur lié à la faible variation entre les composantes verticales. Pour palier à cette absence on attribue une probabilité plus faible mais néanmoins plus élevée que pour les autres points de la grille aux points situés directement à côté du résultat fourni par l'opérateur $[\cdot]$ (cf. (3.6)). On illustre cette procédure dans la figure 3.7 issue de [Drémeau et al., 2017].

Enfin, une publication récente [Niu et al., 2020] propose de concaténer l'ensemble des signaux fréquentiels afin de se placer dans le cadre de modèle parcimonieux par blocs [Zhang and Rao, 2012]. La reconstruction du support parcimonieux se fait à partir d'une approche BSBL (pour Block Sparse Bayesian Learning) déjà utilisé pour reconstruire des nombres d'ondes à partir d'une antenne horizontale dans [Li et al., 2018]. L'étude

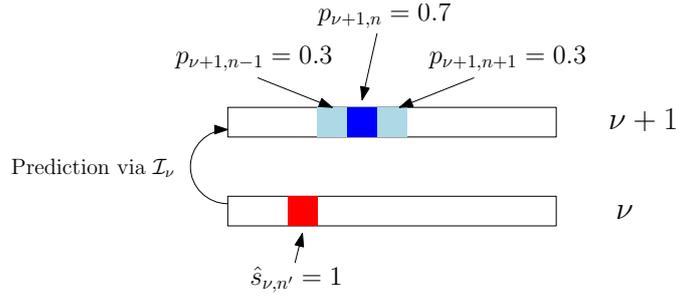


FIGURE 3.7. – Illustration de la définition des paramètres de Bernoulli exprimés dans (3.6),(3.7) sur deux lignes successives du diagramme f-k

de Niu adapte cette dernière au cas de l’antenne verticale afin de pouvoir reconstruire également les fonctions modales en fonction de la profondeur. La prise en compte de la relation de dispersion se trouve dans l’écriture du dictionnaire dans lequel les nombres d’ondes sont discrétisés pour la première fréquence puis sont calculés selon la relation de dispersion pour la fréquence suivante.

3.2.3.2. Impact de l’espacement inter-capteur sur la reconstruction

Si la relation de dispersion permet de traquer les nombres d’onde dans le plan f-k, elle reste assujettie à la grille des nombres d’onde recherchés. Or de par la construction de notre problème, il y a une limite quant au nombre d’onde maximal que l’on peut reconstruire. Cette limite est définie par le théorème de Shannon (Nyquist-Shannon) et se calcule comme suit : $K = \frac{2\pi}{\Delta_r}$; où Δ_r représente l’espacement inter-capteur (la distance entre deux capteurs successifs). Si l’on s’essaye à reconstruire des nombres d’ondes supérieurs à cette limite nous observerons sur le diagramme f-k un phénomène de repliement spectral. Nous illustrons ce phénomène sur la figure 3.8. Un petit espacement inter-capteur est donc nécessaire afin d’éviter le phénomène de repliement spectral.

De plus, à n’importe quelle fréquence, le support des nombres d’onde du signal est limité à une bande relativement étroite. L’environnement simulé dans la figure 3.8 est le même que dans la figure 3.6, sauf que dans ce cas l’intervalle de fréquences va jusqu’à 200 Hz. On peut observer, qu’à partir de 60 Hz, les nombres d’onde subissent un repliement spectral. Cela est lié au fait que à la valeur maximale théorique d’un nombre d’onde à cette fréquence $\frac{2\pi f}{c_{min}}$ est supérieure à la valeur donnée par le théorème de Shannon $K = \frac{2\pi}{\Delta_r}$, avec Δ_r l’échantillonnage spatial (i.e. l’espacement inter-capteur).

Le phénomène de repliement spectral peut être évité en réduisant l’espacement

inter-capteur, toutefois cela n'est pas forcément réalisable dans la pratique. Une opération bien connue en traitement du signal permettant de contourner le problème est de réaliser une translation en bande de base. En géophysique, l'opération a pris le nom de recalage de vitesse [Yilmaz, 2001, Freire and Ulrych, 1988, Duncan and Beresford, 1995] et a également été utilisée dans le cadre de l'acoustique sous-marine [Nicolas et al., 2003, Nardin et al., 1998].

3.2.3.3. Le recalage de vitesse

Le recalage de vitesse consiste en l'application d'un retard pour que le signal soit reçu en même temps par tous les capteurs de l'antenne. Si l'on note $p(t, r)$ le signal reçu par un capteur, on peut écrire le signal $\tilde{p}(r, t)$ obtenu après correction de vitesse C comme suit :

$$\tilde{p}(r, t) = p(r, t - r/C), \quad (3.8)$$

où C est la valeur de la célérité du son dans l'eau utilisée lors de la correction. Dans la pratique on attribue à C la valeur moyenne du profil de célérité dans la colonne d'eau. En utilisant les propriétés de la transformée de Fourier, on peut également relier les représentations f-k avant et après recalage. De fait, un point P de coordonnées (f, k_r) dans le plan f-k sera déplacé au point P' de coordonnées $(f, k_r - 2\pi f/C)$. Ce pré-traitement permet de faire disparaître le phénomène d'aliasing que nous avons mis en avant précédemment. Pour un même guide de Pekeris on présentera la représentation en plan f-k et en plan f-k après recalage d'une source large bande émettant jusqu'à 100 Hz. On peut très bien visualiser cette relation sur les figures 3.8 et 3.9.

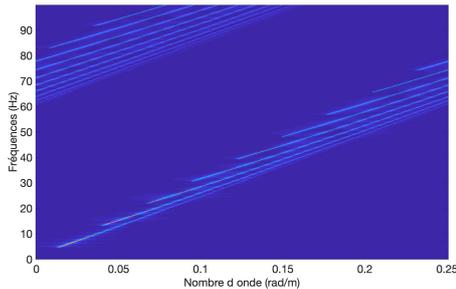


FIGURE 3.8. – plan f-k avant recalage

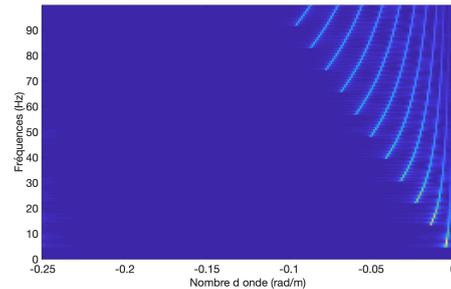


FIGURE 3.9. – plan f-k après recalage

Par la suite nous posons $C = c_1$, avec c_1 la vitesse moyenne dans la colonne d'eau. Maintenant que nous avons présenté le traitement que l'on pouvait facilement appliquer à nos données pour pouvoir reconstruire les nombres d'ondes à de plus hautes fréquences nous allons maintenant étudier les conséquences de ce traitement sur notre problème.

3.2.3.4. Impact du recalage de vitesse sur la reconstruction modale

Si le recalage de vitesse peut être appliqué a priori en pré-traitement de tout algorithme d'estimation modale, nous illustrons, par souci de simplicité, son intérêt sur une simple opération de transformée de Fourier spatiale. Dans le plan f-k avant recalage (prenons comme illustration un plan f-k où il n'y a pas de repliement spectral 3.6) quand on parcourt l'axe des fréquences on constate que l'on utilise une grande partie de la grille pour décrire la reconstruction des modes. On dira donc qu'on a une grille adaptée à la description de la reconstruction si la limite définie par le théorème de Shannon est proche du dernier nombre d'onde reconstruit. On remarque alors que dans le plan f-k après recalage des vitesses il y a une majeure partie de l'axe des abscisses, avant une certaine valeur \tilde{K} , qui ne servira jamais à décrire un mode propagatif. Connaissant la relation entre un point du plan f-k avant / après recalage des vitesses on peut facilement exprimer cette valeur en fonction de valeurs connues :

$$\tilde{K} = \frac{2\pi f_{max}(c_{min} - c_{max})}{c_{min}c_{max}}, \quad (3.9)$$

où c_{min} est la vitesse utilisée pour la correction de vitesse et correspondant à la vitesse minimale du son dans le guide (généralement associée à celle dans la colonne d'eau, donc $C = c_{min} = c_1$) et c_{max} la vitesse max du son dans le guide (généralement associée à celle dans le fond, donc $c_{max} = c_2$). On souhaiterait donc que cette valeur coïncide avec la valeur donnée par le théorème de Shannon. On aura donc une antenne (dont on gardera la même longueur) avec un espacement inter-capteur différent et défini comme suit dans le cas particulier d'une antenne régulière :

$$\frac{2\pi}{\Delta_{r'}} = -\tilde{K}. \quad (3.10)$$

De plus, $\Delta_{r'}$ est également lié à la taille de l'antenne \mathcal{L} (qui ne change pas) par le nouveau nombre de capteurs nécessaires L' avec la relation :

$$\Delta_{r'} = \frac{\mathcal{L}}{L'}. \quad (3.11)$$

Ce qui nous amène à :

$$L' = \mathcal{L} \frac{f_{max}(c_{max} - c_{min})}{c_{min}c_{max}}. \quad (3.12)$$

Identifions maintenant des termes connus. On sait que la valeur maximale de l'intervalle défini par Shannon (pour l'antenne initiale) vaut : $\frac{2\pi}{\Delta_r}$. S'il n'y a pas de repliement spectral (ie tous les nombres d'ondes sont compris entre les deux droites définies précédemment) on sait que : $\frac{2\pi f_{max}}{c_{min}} \leq \frac{2\pi}{\Delta_r}$, avec $\Delta_r = \frac{\mathcal{L}}{L}$ où L est le nombre de capteurs de l'antenne initiale.

On obtient donc l'inégalité suivante par identification :

$$L' \leq L \frac{c_{max} - c_{min}}{c_{max}}. \quad (3.13)$$

On voit ainsi que le recalage de vitesse autorise une diminution du nombre de capteurs nécessaires à l'estimation des nombres d'ondes.

Maintenant que nous avons vu une des conséquences du recalage de vitesse sur la construction de notre problème, nous allons voir maintenant la conséquence sur la résolution du problème. En effet, nous avons mis en avant dans la section précédente une relation permettant de suivre l'évolution de la propagation d'un mode en fonction des fréquences. Toutefois, dans le plan f-k après recalage des vitesses on remarque que, "visuellement" (cf. fig.3.9), cette relation n'est pas aussi évidente qu'avant recalage (cf. fig.3.8). Nous allons maintenant exprimer la relation de dispersion dans le plan f-k après recalage des vitesses.

On connaît l'expression de nos nombres d'ondes dans le plan "f-k" recalé par rapport à l'original :

$$\tilde{k}_{rm}(f) = k_{rm}(f) - \frac{2\pi}{c_{min}} f, \quad (3.14)$$

la notation \tilde{k}_{rm} qualifiant les nombres d'ondes du plan recalé. Après discrétisation de l'axe fréquentiel on obtient

$$k_{rm}[\nu] = \tilde{k}_{rm}[\nu] + \gamma\nu, \quad (3.15)$$

avec $\gamma = \frac{2\pi\Delta f}{c_{min}}$.

En injectant ces expressions dans la relation de dispersion (3.5) on obtient :

$$(\tilde{k}_{rm}[\nu + 1] + \gamma(\nu + 1))^2 = (\tilde{k}_{rm}[\nu] + \gamma\nu)^2 + (2\nu + 1)\gamma^2 + \epsilon[\nu]. \quad (3.16)$$

3.2.4. Limitations

De même que dans le cas d'une source mono-fréquentielle, il convient de remarquer que les différentes approches présentées souffrent d'une précision liée à la discrétisation de la grille de recherche. En effet, même si l'on traite les fréquences les unes après les autres on considère systématiquement un modèle théorique où les nombres d'onde associés aux modes propagatifs sont continus et peuvent être compris entre deux points de la grille de recherche. L'application de méthodes continues (comme celle de Park

[Park et al., 2019]) avec une complexité élevée est contraignante lorsque l'on considère une source large bande et que le nombre de fréquences à étudier est important.

Les méthodes présentées utilisant la relation de dispersion souffrent également de la nécessité de connaître les a priori essentiels à leur implémentation. Dans le cas du filtrage particulière, l'algorithme a besoin de connaître les fréquences de coupure des modes. Le nombre de modes doit être connu afin d'attribuer une probabilité initiale dans l'algorithme SoBaP [Drémeau et al., 2017]. De plus dans la méthode basée sur la reconstruction par BSBL [Niu et al., 2020], le nombre de modes est supposé constant sur l'ensemble des fréquences, restreignant ainsi l'algorithme à des applications sur de faibles intervalles fréquentiels ; enfin l'absence du terme d'erreur ϵ dans l'intégration de la relation de dispersion apporte une restriction supplémentaire sur l'intervalle de fréquences étudié afin que l'accumulation des erreurs ne devienne pas trop importante.

Nous allons maintenant étudier les différentes métriques utilisables dans le cadre de l'évaluation de performance de reconstruction de nombres d'onde.

3.3. Métriques de performance

Lorsque l'on considère une grille discrète de recherche, l'estimation de nombres d'onde s'exprime comme un problème de détection. Dans cette section, nous rappelons les outils classiquement considérés dans ce type de problème et les étendons au cas de la recherche sur grille "continue".

3.3.1. Métriques de performances en détection

Considérons d'abord le cas d'une grille de recherche discrète et supposons que les k nombres d'ondes recherchés sont sur cette grille : pour une fréquence f donnée, $\forall m \in \{1, \dots, M(f)\}, \exists !, g \in \{1, \dots, G\}$ tel que $\kappa_g = k_{rm}(f)$. On note \mathbf{s} le support des nombres d'onde sur cette grille, ie $s_g = 1$ si $\kappa_g = k_{rm}(f)$ et $s_g = 0$ sinon ; le support est donc un vecteur de taille G avec $M(f)$ coefficients égaux à 1. On souhaite maintenant savoir si le support estimé par un des algorithmes précédemment cités est "proche" du modèle que l'on souhaite reconstruire. De l'algorithme utilisé on récupère donc l'estimation de notre support $\hat{\mathbf{s}}$ constitué également de G éléments avec $\hat{M}(f)$ coefficients non nuls. Dans un cas idéal on a $M(f) = \hat{M}(f)$ et les indices des coefficients non nuls sont les mêmes. Pour poursuivre l'analyse des différents cas de figure pouvant se produire nous devons d'abord définir les notions de "bonnes détections" (True Positive en anglais, TP), de "détections manquées" (False Negative, FN), de "fausses alarmes" (False Positive, FP) et de "bons négatifs" (True Negative, TN). Ayant défini les supports des

nombres d'onde "vrais" et "estimés", ces quantités peuvent se définir simplement par :

- TP : $s_i = \hat{s}_i = 1$
- FN : $s_i = 1 \ \& \ \hat{s}_i = 0$
- FP : $s_i = 0 \ \& \ \hat{s}_i = 1$
- TN : $s_i = \hat{s}_i = 0$

Un usage connu de ces notions se trouve dans les matrices de confusion [Townsend, 1971]. Dans le domaine de la reconstruction de modèle, une matrice de confusion est un tableau à deux lignes (l'estimation) et deux colonnes (le modèle) regroupant les termes suivants :

		Modèle	
		Positif	Négatif
Estimation	Positif	TP	FP
	Négatif	FN	TN

On remarque rapidement que ces notions ne permettent pas individuellement d'évaluer une performance satisfaisante de la qualité de reconstruction d'un algorithme. En effet même si $TP = k$ c'est à dire que l'algorithme a bien reconstruit les coefficients non nuls aux bons indices, on ne peut exclure les autres notions de la matrice de confusion. Pour cela on regardera les notions dites $(N + 1)$; c'est à dire des quantités faisant intervenir dans leurs calculs les quatre notions introduites. Nous citerons les plus connues comme :

- la précision : $P = \frac{TP}{TP+FP}$
- le rappel (ou "recall" en anglais) : $R = \frac{TP}{TP+FN}$
- l'indice (ou index) de Jaccard : $I_J = \frac{TP}{TP+FP+FN}$

Notons que ces trois valeurs sont systématiquement comprises entre 0 et 1. Une précision égale à 1 garantit une reconstruction sans fausses alarmes tandis qu'un rappel égal à 1 assure une reconstruction aux bon endroits. L'indice de Jaccard propose un compromis de ces deux métriques. Si $I_J = 1$, on a alors reconstruit l'intégralité des points attendus sans y ajouter de fausses alarmes. L'indice de Jaccard est parfois substitué à sa "distance" D_J définie comme :

$$D_J = 1 - I_J. \quad (3.17)$$

On peut facilement vérifier que D_J est symétrique et qu'elle vérifie l'inégalité des indiscernables. La vérification de l'inégalité triangulaire étant moins

triviale, nous référons le lecteur aux travaux de [Simovici and Djeraba, 2008] ou [Marczewski and Steinhaus, 1958]. Cette métrique a été appliquée dans plusieurs études de reconstruction, comme l'étude de structure chimique, de machine learning [Gower, 1985] et de reconstruction parcimonieuse [Denoyelle, 2018].

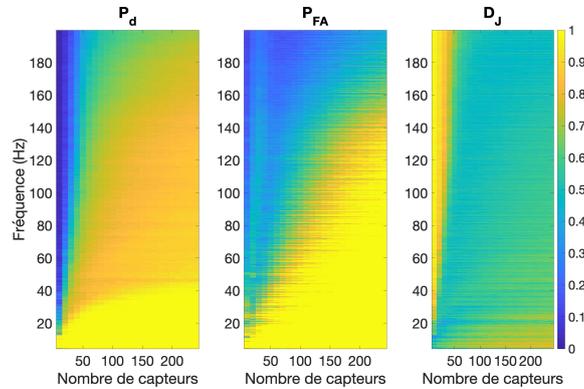


FIGURE 3.10. – Evaluation de la performance de reconstruction de nombres d’onde dans un guide de Pekeris simulé par la méthode OMP avec pour critère d’arrêt l’énergie du résidu : %TP (gauche), %FP (milieu) and D_J (droite).

La pertinence de la distance de Jaccard est illustrée à l’aide de données simulées dans notre guide d’ondes Pekeris que nous avons présenté précédemment. Par souci de simplicité, les nombres d’ondes sont estimés à l’aide d’une approche OMP classique. On rappelle qu’OMP est un algorithme itératif, qui sélectionne un nouveau nombre d’onde à chaque itération. Deux critères d’arrêt sont classiquement pris en compte pour cet algorithme : il peut s’arrêter soit lorsque l’erreur de reconstruction estimée tombe en dessous d’un seuil donné, soit lorsque le nombre de modes estimés atteint un nombre donné. Ce dernier critère est très pratique dans notre contexte, car le nombre d’itérations est équivalent au nombre de modes à récupérer. Bien que pratique, cela nécessite une information précise sur le nombre de modes à chaque fréquence. En revanche, le critère d’arrêt basé sur l’énergie du résidu est moins exigeant en termes de connaissances a priori. Ce critère est similaire à celui qui est utilisé dans la méthode proposée. Il sera donc utilisé pour illustrer l’intérêt de la distance du Jaccard.

Les performances d’estimation sont illustrées sur la Fig. 3.10. Le taux de TP augmente lorsque le nombre de capteurs augmente (parce que plus d’observations facilitent l’estimation), et augmente lorsque la fréquence diminue (parce que la densité modale diminue ce qui facilite également l’estimation). D’autre part, le taux de FP est élevé à des fréquences très basses (parce que le nombre de modes est très faible, et donc un seul faux positif augmente considérablement le taux de FP). Le taux de FP a également

tendance à augmenter avec le nombre de capteurs. Ceci est dû au critère d'arrêt choisi qui implique un nombre croissant d'itérations dans OMP, et donc augmente la probabilité de faire des erreurs de faux positifs.

L'adaptation des métriques présentées au cas continu peut être réalisée assez intuitivement par l'introduction d'intervalle de tolérance autour des valeurs recherchées.

3.3.2. Métriques adaptées au cas continu

Notons $k_{rm}(f)$ un nombre d'onde théorique "vrai", $\hat{k}_{rm}(f)$ un nombre d'onde estimé et R_J le rayon de tolérance (ou rayon de Jaccard). On définit les notions de bonne détection (TP), fausse alarme (FP) et détection manquée (FN) comme suit (avec R_J plus petit que la moitié du plus petit espace entre deux k_{rm}) :

- si l'intervalle $[k_{rm}[\nu] - R_J, k_{rm}[\nu] + R_J]$ contient une seule détection $\hat{k}_{rm}[\nu]$, alors $\hat{k}_{rm}[\nu]$ est supposée une bonne détection (TP) ;
- si $[k_{rm}[\nu] - R_J, k_{rm}[\nu] + R_J]$ contient plusieurs détections, alors la détection la plus proche $\hat{k}_{rm}[\nu]$ de $k_{rm}[\nu]$ est supposée une bonne détection (TP) tandis que les autres seront considérées comme des fausses alarmes (FP) ;
- s'il n'y a pas de détection $\hat{k}_{rm}[\nu]$ satisfaisant $|k_{rm}[\nu] - \hat{k}_{rm}[\nu]| \leq R_J$ alors $k_{rm}[\nu]$ est considérée comme une détection manquée (FN).

Nous illustrons les cas intuitifs de bonne détection, détection manquée et fausse alarme sur la figure 3.11. La figure présente également le cas où il existe plusieurs nombres d'onde estimés pouvant satisfaire la condition de détection ; dans un tel cas on considère que la bonne détection est liée au point le plus proche.

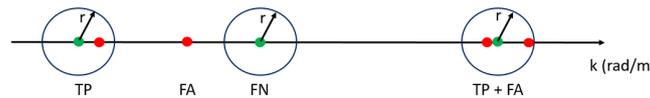


FIGURE 3.11. – Illustration des notions de bonne détection, détection manquée, fausse alarme et fausse alarme induite avec un rayon de tolérance R_J

Notons que ce processus est facilement adaptable au cas de détections sur grille en prenant $R_J = \frac{\Delta_k}{2}$ ou Δ_k représente le pas de la grille de recherche. L'ensemble des métriques classiquement considérées en détection sur grille peut être adapté à la grille continue moyennant la considération de cet intervalle de tolérance. Parmi elles, la distance de Jaccard que nous avons présenté dans la section précédente,

retient particulièrement notre attention dans la mesure où elle permet une évaluation du compromis TP/FP/FN la démarquant des autres métriques usuelles comme la précision ou le rappel. En outre la distance de Jaccard a été récemment considérée dans l'évaluation des performances de reconstructions parcimonieuses [Denoyelle, 2018].

Nous concluons cette section en présentant l'impact de la variation du rayon de tolérance dans la métrique de Jaccard. Cette étude se mène en parallèle d'une brève étude sur l'influence de la finesse du pas de discrétisation de la grille de recherche. De fait on présente sur la figure 3.12 la distance de Jaccard moyennée sur l'intervalle $[0 - 50]$ Hz de la reconstruction proposée par l'algorithme OMP (dont le critère d'arrêt est le nombre de mode à reconstruire) en sélectionnant aléatoirement 40 capteurs. Nous faisons varier le pas de la grille de 10^{-5} rad/m à 10^{-3} rad/m par pas de 10^{-5} rad/m ; de même nous faisons varier le rayon de tolérance de $5 \cdot 10^{-6}$ rad/m à $5 \cdot 10^{-4}$ rad/m par pas de 10^{-5} rad/m.

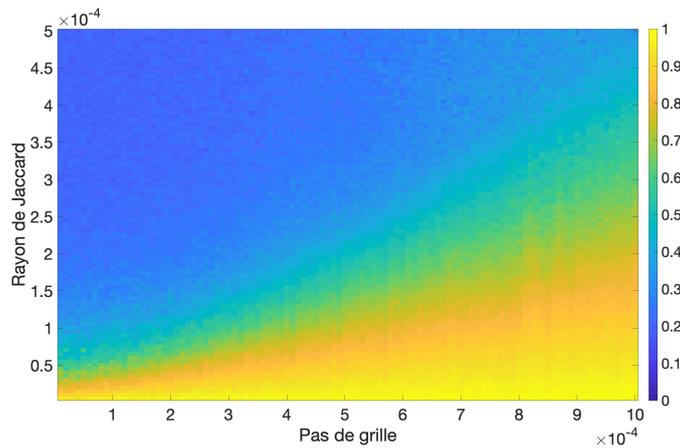


FIGURE 3.12. – Distance de Jaccard moyennée sur la gamme de fréquence $[0 - 50]$ Hz que l'on calcule avec différents rayons de Jaccard pour l'algorithme OMP avec 40 capteurs aléatoirement sélectionnés

La diagonale de la figure (partant du coin en bas à gauche au coin haut droit) représente donc le cas classique que nous présenterons lors du chapitre quatre, c'est à dire que le rayon de tolérance vaut un demi pas de grille. Les bons résultats de la partie supérieure à la diagonale s'expliquent par une plus grande tolérance tandis que la dégradation des résultats dans la partie inférieure s'explique par une exigence supérieure à la discrétisation de la grille (on exige une précision supérieure à la précision de recherche). Notons toutefois que quand le rayon de tolérance est adapté au pas de la grille (cas de la diagonale) les performances sont moins bonnes quand le pas de la grille est plus petit. Ces résultats s'expliquent par le phénomène de cohérence que nous avons introduit dans

le chapitre précédent. En effet, un grand nombre d'atomes présent dans le dictionnaire entraîne une plus grande cohérence du dictionnaire ainsi qu'un non respect de la condition de reconstruction exacte. De plus, un grand nombre d'atome augmente significativement le temps de calcul de l'algorithme.

Conclusion

Ce chapitre nous a permis de mettre en avant l'avantage de l'acquisition compressée dans le cadre de la reconstruction modale par rapport aux méthodes spectrales usuelles. L'acquisition compressée nous permet en effet de tirer profit de priors dans les deux domaines du plan f - k : on exploite le côté parcimonieux de la représentation dans le domaine des nombres d'onde ainsi que la relation de dispersion qui caractérise l'évolution de ces nombres d'onde en fonction des fréquences. Nous avons également pu insister sur le caractère continu du modèle considéré ainsi que la difficulté de le représenter intégralement par une approche discrète. Cette difficulté de représentation encourage le recours à des dictionnaires continus et à des métriques adaptées afin d'évaluer les performances de reconstruction. Nous nous intéresserons dans les prochains chapitres à présenter les approches étudiées durant cette thèse afin de reconstruire efficacement et avec un temps de calcul décent ces nombres d'ondes.

4. Approche continue intégrant la relation de dispersion

Sommaire

4.1	Description de la méthode	76
4.1.1	Estimation “off-grid”	77
4.1.2	Intégration de la relation de dispersion	78
4.1.3	Seuils de détection	80
4.2	Etude de performances	83
4.2.1	Sensibilité aux paramètres	83
4.2.2	Guide de Pekeris	84
4.2.3	Guide plus complexe et réaliste	97
4.3	Application sur données réelles	99
4.3.1	Données “Mer du Nord”	99
4.3.2	Données SBCEX	102
	Conclusion	104

Le chapitre précédent a permis de dresser un état de l’art des approches s’intéressant à l’estimation modale en acoustique sous-marine UBF petit fond et d’en décrire les limitations. Nous avons ainsi souligné l’intérêt de l’intégration des connaissances de la physique de la propagation (faible nombre de modes propagatifs, relation de dispersion) dans les algorithmes et la pertinence des approches continues.

Dans ce chapitre, nous introduisons notre principale contribution : le développement et la validation d’un nouvel algorithme d’estimation modale exploitant un a priori parcimonieux sur le nombre de modes et s’aidant de la relation de dispersion pour délimiter un intervalle de recherche du nombre d’onde entre fréquences successives. Nous proposons une version de cet algorithme s’affranchissant des erreurs liées à la recherche d’une solution sur une grille de discrétisation. Cependant, à la différence des travaux de [Park et al., 2019], cet algorithme repose sur une procédure de type OMP [Pati et al., 1993] offrant une faible complexité calculatoire.

Ce chapitre s’articule autour de 3 parties. Nous décrirons tout d’abord le développement et les bases théoriques de l’algorithme proposé. Nous appliquerons ensuite notre approche à des données synthétiques dont nous évaluerons les performances avec la distance de Jaccard et nous comparerons ces résultats avec des méthodes issues de l’état de l’art. Nous regarderons enfin les résultats obtenus avec l’algorithme sur des données réelles issues de deux expériences différentes dans la troisième partie.

4.1. Description de la méthode

Comme nous l’avons indiqué dans le chapitre précédent, la pression acoustique reçue par une antenne linéaire de L capteurs peut être représentée par un modèle linéaire discret tel que l’on ait, pour chaque indice fréquentiel ν compris entre 1 et F , la relation (3.2).

Ce problème peut être résolu par des approches parcimonieuses classiques. Parmi celles-ci, l’algorithme OMP présente de bonnes performances avec une complexité calculatoire acceptable. Et de fait, il a été considéré dans la littérature [Harley and Moura, 2015] dans le cas des ondes de Lamb (contexte différent de l’acoustique sous-marine), intégré dans une procédure d’estimation du plan f-k, fréquence après fréquence, considérées indépendamment l’une de l’autre.

Actant des qualités intrinsèques d’OMP, notre travail s’est intéressé à l’amélioration de deux de ses faiblesses :

- l’affranchissement de la grille de discrétisation des nombres d’onde,
- la prise en compte de la relation de dispersion, liant les lignes fréquentielles du plan f-k les unes aux autres.

Afin de pouvoir étudier une gamme de fréquences importante, nous nous sommes concentrés sur le traitement de données auxquelles nous avons appliqué une correction de vitesse (cf. 3.2.3.3). Dans le cadre de l’application de notre algorithme à des jeux de données réelles nous avons choisi de prendre la moyenne du profil de célérité comme valeur de correction. En effet nous avons discuté de cette hypothèse dans le chapitre 1 et conclu que les erreurs de cette approximation étaient négligeables devant le bruit des mesures. De plus, la représentation en plan f-k recalé offre une représentation visuelle plus commode.

Dans notre étude, nous avons considéré une source large-bande émettant jusqu’à 200 Hz. Le nombre de modes se propageant à cette fréquence étant important il a fallu s’assurer que la grille de recherche utilisée par les algorithmes n’associe pas deux nombres

d'onde différents à un même point de grille. La figure suivante illustre la construction de la grille.

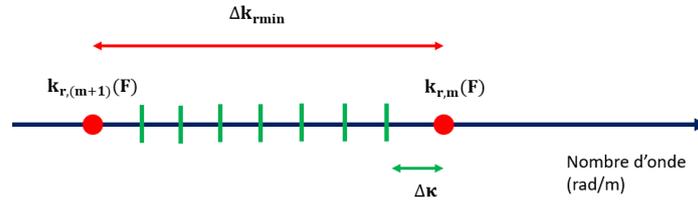


FIGURE 4.1. – Illustration de la construction de la grille de recherche des nombres d’ondes κ .

Dans la figure 4.1, F est le dernier indice fréquentiel, Δk_{rmin} l’écart entre les deux nombres d’onde les plus proches à cet indice de fréquence $k_{r,(m+1)}$ et $k_{r,m}$. Lorsque l’on considère des données simulées, cette quantité est aisée à estimer. Dans le cadre de l’application aux jeux de données réelles on suppose posséder une estimation grossière de l’environnement permettant la définition de ces grilles. Une fois Δk_{rmin} estimé on divise cette quantité par un nombre arbitrairement choisi afin d’obtenir le pas de la grille de recherche $\Delta \kappa$ (dans notre étude on a $\Delta \kappa_r = \frac{\Delta k_{rmin}}{5}$).

Les deux sous-sections suivantes traitent respectivement de l’affranchissement de la grille discrète de recherche puis de l’intégration de la relation de dispersion dans le plan f-k recalé.

4.1.1. Estimation “off-grid”

Comme nous l’avons mentionné dans le chapitre précédent, une façon intuitive et simple d’affiner les résultats obtenus par l’application d’OMP sur une grille discrète de nombres d’onde est d’ajouter une étape de descente de gradient après celle de la recherche du maximum de corrélation entre le résidu courant et les éléments du dictionnaire, classiquement implémentée dans OMP. Cette approche a notamment été considérée dans les travaux de Knudson [Knudson et al., 2014].

Cette approche vise à lever les restrictions de l’approche discrète d’OMP lorsqu’un même point de la grille de recherche est éloigné du modèle que l’on souhaite reconstruire. Nous illustrons ce phénomène sur la figure 4.2.

Sur cette figure, le modèle est issu du guide de Pekeris auquel on a appliqué un recalage de vitesse. On présentera les caractéristiques de ce guide en section 4.2. Ce

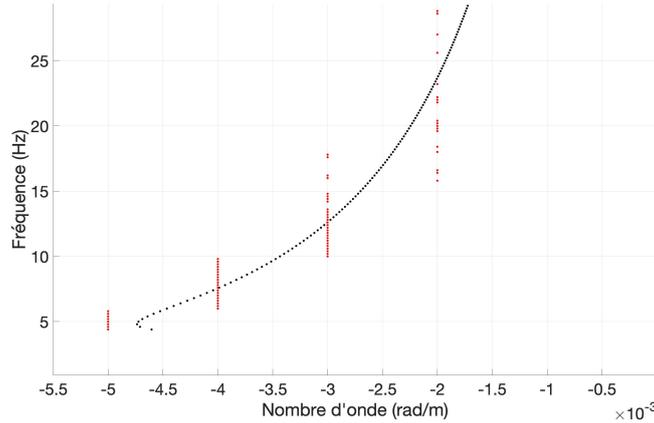


FIGURE 4.2. – Illustration du phénomène de "basis mismatch", avec la reconstruction d'OMP avec 40 capteurs (en rouge) et les nombres d'onde théoriques (en noir)

phénomène entraîne donc une erreur lors de l'estimation des amplitudes modales associées.

Le pseudo-code 4 décrit l'algorithme résultant de l'intégration de l'étape de descente de gradient dans la procédure OMP avec les notations du problème d'estimation modale. Nous baptiserons par la suite cette approche COMP pour "Continuous Orthogonal Matching Pursuit". En tant que tel, il peut être appliqué pour estimer les nombres d'ondes de chaque ligne de fréquence du diagramme (f-k) indépendamment les uns des autres. Comme OMP, deux critères d'arrêt sont considérés : COMP peut être stoppé dès lors qu'un nombre donné de nombres d'ondes est atteint, ou lorsque l'énergie du résidu est inférieure à un certain seuil. L'ajout de la descente de gradient suppose l'absence d'optimum local entre deux points de grille. La présence d'optimum local apparaît dans le cas où la grille de recherche initiale est grossière et sur laquelle il est difficile de lancer un algorithme.

4.1.2. Intégration de la relation de dispersion

Ainsi que nous l'avons introduite précédemment, la relation de dispersion lie les nombres d'onde d'une fréquence à l'autre selon l'expression (discrète) (3.5).

Dans [Drémeau et al., 2017], cette relation est utilisée pour prédire les intervalles dans lesquels la présence des nombres d'onde est plus probable et ainsi propager, fréquence après fréquence, les modes dans le plan f-k (cf. section 3.2.2 du chapitre précédent).

Notre proposition repose sur une procédure dans le même esprit. Supposant un mode estimé comme se propageant avec un nombre d'onde $\hat{k}_{rm}[\nu]$ à la fréquence ν , un intervalle

Algorithm 4 Continuous Orthogonal Matching Pursuit (COMP)

 Initialisation : $\mathbf{r}_\nu = \mathbf{y}_\nu$, $\mathcal{S}_\nu = \emptyset$
while Tant que le critère d'arrêt n'est pas atteint, **do**

1. Détection d'un nouveau mode

$$\hat{k}_{rg} = \underset{\kappa_{rg}}{\operatorname{argmax}} |\langle \mathbf{r}_\nu, \mathbf{d}_{\kappa_{rg}} \rangle|, \quad (4.1)$$

 où κ correspond à la grille de recherche discrétisée en G points; $\mathbf{d}_{\kappa_{rg}}$ est la g -ième colonne of \mathbf{D} .

 2. Affinement de l'estimation précédente par descente du gradient et obtention d'une nouvelle estimée $\hat{k}_{rm}[\nu]$.

 Mise à jour de l'ensemble $\mathcal{S}_\nu = \mathcal{S}_\nu \cup \hat{k}_{rm}[\nu]$.

3. Calcul des amplitudes modales correspondantes

$$\hat{\mathbf{a}}_{\nu, \mathcal{S}_\nu} = \mathbf{D}_{\mathcal{S}_\nu}^+ \mathbf{y}_\nu, \quad (4.2)$$

 avec $\mathbf{D}_{\mathcal{S}_\nu}^+$ la pseudo-inverse de $\mathbf{D}_{\mathcal{S}_\nu}$, matrice composée d'atomes de Fourier spécifiés par \mathcal{S}_ν .

4. Mise à jour du résidu

$$\mathbf{r}_\nu = \mathbf{y}_\nu - \mathbf{D}_{\mathcal{S}_\nu} \hat{\mathbf{a}}_{\nu, \mathcal{S}_\nu}. \quad (4.3)$$

end while

 de prédiction de son nombre d'onde à la fréquence $\nu + 1$ est défini selon

$$I_{m, \nu+1} \triangleq [k_{rm}^*[\nu + 1] - \xi_\nu; k_{rm}^*[\nu + 1] + \xi_\nu], \quad (4.4)$$

où $k_{rm}^*[\nu + 1] = \sqrt{\hat{k}_{rm}[\nu]^2 + (2\nu + 1) \left(\frac{2\pi\Delta_f}{c} \right)^2}$. Le paramètre ξ_ν assure la prise en compte de l'incertitude posée par la quantité $\epsilon[\nu]$ dans (3.5). Une façon de prendre en compte son caractère négligeable par rapport au nombre d'onde prédit $k_{rm}^*[\nu + 1]$ est de le définir comme une petite proportion de ce nombre d'onde :

$$\xi_\nu = \frac{k_{rm}^*[\nu + 1]}{2\mu}. \quad (4.5)$$

Adaptation au recalage de vitesse. Le recalage de vitesse tel que présenté dans le chapitre précédent, section 3.2.3.3, peut être facilement combiné à l'approche que nous proposons. En pratique, il s'agit de prendre en compte la relation de dispersion modifiée (3.16) :

$$(\tilde{k}_{rm}[\nu + 1] + \gamma(\nu + 1))^2 = (\tilde{k}_{rm}[\nu] + \gamma\nu)^2 + (2\nu + 1)\gamma^2 + \epsilon[\nu], \quad (4.6)$$

où la notation \tilde{k}_{rm} renvoie au nombre d'onde estimé dans le plan f-k recalé, on a donc pour un indice fréquentiel ν , $\tilde{k}_{rm}[\nu] = \hat{k}_{rm}[\nu] - \gamma\nu$ avec $\gamma = \frac{2\pi\Delta_f}{c_1}$. Retranscrivant alors l'approche proposée, on obtient ainsi un intervalle de prédiction $I_{m, \nu+1}^{rec}$ tel que

$$I_{m, \nu+1}^{rec} \triangleq [\tilde{k}_{rm}^*[\nu + 1] - \xi_\nu; \tilde{k}_{rm}^*[\nu + 1] + \xi_\nu], \quad (4.7)$$

où $\tilde{k}_{rm}^*[\nu + 1] = -\gamma(\nu + 1) + \sqrt{(\tilde{k}_{rm}[\nu] + \gamma\nu)^2 + (2\nu + 1)\gamma^2}$ pour un mode m estimé comme se propageant avec un nombre d'onde $\tilde{k}_{rm}[\nu]$ à l'indice fréquentiel ν . Notons que

l'adaptation au recalage de vitesse n'a pas d'influence sur ξ_ν qui s'exprime toujours en fonction de l'estimé :

$$\xi_\nu = \frac{\tilde{k}_{rm}^*[\nu + 1]}{2\mu}. \quad (4.8)$$

Nous terminons cette étude de l'intégration de la relation de dispersion par une précision de l'implémentation de l'intervalle $I_{m,\nu+1}^{rec}$. En effet, la variable d'ajustement ξ_ν dépendant de la fréquence, Il est important de faire en sorte qu'au fil des fréquences deux intervalles ne se chevauchent pas. Nous bornons donc la variable d'ajustement ξ_ν par $\frac{\Delta k_{rmin}}{2}$ (cf. figure 4.1) lorsque cela est nécessaire et posons $\mu = 10^2$. C'est à dire :

$$\xi_\nu = \min \left(\frac{\tilde{k}_{rm}^*[\nu + 1]}{2\mu}, \frac{\Delta k_{rmin}}{2} \right). \quad (4.9)$$

4.1.3. Seuils de détection

En combinant l'estimation off-grid et le recalage des vitesses, l'algorithme résultant démarre ainsi à la première ligne de fréquence $\nu = 1$ et estime l'atome le plus corrélé de \mathbf{D} avec la mesure \mathbf{y}_ν . Si le produit scalaire entre cet atome et les données est supérieur (en valeur absolue) à un seuil spécifique noté T_0 , l'algorithme le considère comme un mode propagatif. Il affine alors l'estimation du mode par descente de gradient et prédit l'intervalle $I_{m,\nu+1}^{rec}$ dans lequel le nombre d'onde de ce mode est susceptible de se trouver à la fréquence $\nu + 1$.

A la fréquence suivante $\nu + 1$, les modes propagés sont recherchés dans leurs intervalles prédits par descente de gradient. Ils sont conservés si la corrélation des atomes correspondants du dictionnaire avec le résidu courant est supérieure (en valeur absolue) à un nouveau seuil donné.

Dans les applications ciblées, les nombres d'ondes des modes sont suffisamment séparés (c'est à dire que la grille de recherche est construite de façon à ce que pour chaque ligne fréquentielle, un point de la grille ne soit pas associé à deux nombres d'ondes différents) : les modes qui apparaissent éventuellement à cette nouvelle fréquence peuvent être recherchés parmi les nombres d'ondes en dehors des intervalles prédits. Notons également que les modes qui sont apparus à une fréquence donnée continueront d'exister à des fréquences plus élevées. Cette propriété peut être utilisée pour concevoir une stratégie adaptative pour le seuil de détection.

Dans le chapitre 1, nous avons présenté la dépendance fréquentielle des amplitudes

modales. En considérant une valeur de seuil T_m pour un mode m ; si l'amplitude de ce mode augmente entre les indices fréquentiels ν et $\nu + 1$, il est logique que le seuil à $(\nu + 1)$ pour ce mode soit choisit de sorte que l'amplitude modale de mode à l'indice fréquentiel $\nu + 1$ dépasse la valeur du seuil de propagation. De fait, le cas charnière que nous devons pouvoir traiter est celui de la décroissance des amplitudes modales. Il est donc naturel de définir T_m comme une fonction décroissante de ν .

Notons $\nu_{0,m}$ l'indice fréquentiel auquel le m -ième mode apparaît (il s'agit de la fréquence de coupure du mode estimé) et $\nu_{c,m}$ l'indice fréquentiel correspondant à la fréquence de coupure "vraie". Pour $\nu \geq \nu_{0,m}$, on peut choisir le seuil comme dépendant du seuil T_0 selon

$$T_{m,\tilde{\nu}_m} = \lambda^{\tilde{\nu}_m} T_0, \quad (4.10)$$

avec $\lambda < 1$ et $\tilde{\nu}_m = \nu - \nu_{0,m}$ mesure l'éloignement fréquentiel du mode relativement à la fréquence à laquelle il a été détecté (idéalement on a $\nu_{0,m} = \nu_{c,m}$, c'est à dire qu'on détecte le mode à sa fréquence de coupure). L'intérêt du seuil $T_{m,\tilde{\nu}_m}$ lorsque $\nu_{0,m}$ correspond à une bonne détection, est d'éviter de mauvaises valeurs d'estimées entre les fréquences en vérifiant que les amplitudes des modes trouvées dans les intervalles de nombres d'onde prédits ne sont pas trop faibles (on sait que le mode existe mais on ne souhaite pas propager des pics de bruit).

Cependant, il n'est pas toujours facile d'ajuster λ . On peut alors proposer une autre définition :

$$T_{m,\tilde{\nu}_m} = T_0 - \sum_{i=1}^{\tilde{\nu}_m} \lambda^i T_0. \quad (4.11)$$

De cette façon, en considérant que le nombre de ligne fréquentielle à traiter est suffisamment grand, on note T_∞ un seuil limite. Un calcul rapide montre que nous devons avoir

$$\lambda = \frac{1 - \frac{T_\infty}{T_0}}{2 - \frac{T_\infty}{T_0}}. \quad (4.12)$$

Il est alors intéressant de noter que $1 - 2\lambda = (1 - \lambda) \frac{T_\infty}{T_0} \geq 0$, et donc $\lambda \in [0, 1/2]$. Notons que le choix $\lambda = 1/2$ correspond à $T_\infty = 0$. De façon alternative, on peut se donner une probabilité de fausses alarmes asymptotique β_∞ que nous pouvons accepter pour les modes qui se propagent. Sous hypothèse de bruit circulaire gaussien de variance σ_n^2 , on

obtient alors

$$T_\infty = \sigma_n \sqrt{-2 \log \beta_\infty}. \quad (4.13)$$

Une définition similaire peut être proposée pour T_0 ,

$$T_0 = \sigma_n \sqrt{-2 \log \beta_0},$$

où β_0 est une probabilité de fausses alarmes initiale. Nous considérons donc cette écriture dans l'adaptation du seuil de propagation.

Le pseudo-code 5 résume l'approche proposée (un algorithme continu exploitant la relation de dispersion au travers de seuil de détection et de propagation). Nous la baptisons CPOMP pour Continuous Propagating Orthogonal Matching Pursuit.

Algorithm 5 Continuous Propagating Orthogonal Matching Pursuit (CPOMP)

Initialisation : $\forall \nu \in \{1, \dots, F\}$, $\mathbf{r}_\nu = \mathbf{y}_\nu$, $\mathcal{S}_\nu = \emptyset$, $I_{0,\nu}^{rec} = \emptyset$, $M_k = 0$, $\nu_{0,0} = 0$, β_0 , β_∞ .

for $\nu = 1 : F$ **do**

if $M_k \geq 1$, propagation des modes existants **then**

for $m = 1 : M_k$ **do**

 – Estimation des nombres d'onde correspondant par descente de gradient sur l'intervalle $I_{m,\nu}^{rec}$ pour obtenir $\hat{k}_{rm}[\nu]$. Si $|\langle \mathbf{r}_\nu, \mathbf{d}_{\hat{k}_{rm}[\nu]} \rangle| \geq T_{m,\nu_m}$, mise à jour de $\mathcal{S}_\nu = \mathcal{S}_\nu \cup \hat{k}_{rm}[\nu]$, avec $\tilde{\nu}_m = \nu - \nu_{0,m}$ comptant la propagation du mode.

 – Calcul des amplitudes modales associées et mise à jour du résidu :

$\mathbf{r}_\nu = \mathbf{y}_\nu - \mathbf{D}_{\mathcal{S}_\nu} \hat{\mathbf{a}}_{\nu, \mathcal{S}_\nu}$ avec $\hat{\mathbf{a}}_{\nu, \mathcal{S}_\nu} = \mathbf{D}_{\mathcal{S}_\nu}^+ \mathbf{y}_\nu$.

end for

end if

 Recherche d'un nouveau mode propagatif

$$\hat{k}_{rg} = \underset{\kappa_{rg}}{\operatorname{argmax}} |\langle \mathbf{r}_\nu, \tilde{\mathbf{d}}_{\kappa_{rg}} \rangle|, \quad (4.14)$$

où κ_{rg} correspond à la grille de recherche discrétisée en G points, $\tilde{\mathbf{d}}_{\kappa_{rg}}$ est la g -ième colonne de $\mathbf{D}_{\cup_{m \in \{0, \dots, M_k\}} I_{m,\nu}^{rec}}$ constituée des atomes de Fourier en dehors de l'intervalle $\cup_{m \in \{0, \dots, M_k\}} I_{m,\nu}^{rec}$.

if $|\langle \mathbf{r}_\nu, \tilde{\mathbf{d}}_{\hat{k}_{rg}} \rangle| \geq T_0$ **then**

 – $M_k = M_k + 1$, $\nu_{0,M_k} = \nu$

 – Affinement de l'estimation précédente par descente du gradient et obtention d'un nouvel estimé $\hat{k}_{rm}[\nu]$. Mise à jour de l'ensemble $\mathcal{S}_\nu = \mathcal{S}_\nu \cup \hat{k}_{rm}[\nu]$.

 – Calcul des amplitudes modales associées et mise à jour du résidu :

$\mathbf{r}_\nu = \mathbf{y}_\nu - \mathbf{D}_{\mathcal{S}_\nu} \hat{\mathbf{a}}_{\nu, \mathcal{S}_\nu}$ with $\hat{\mathbf{a}}_{\nu, \mathcal{S}_\nu} = \mathbf{D}_{\mathcal{S}_\nu}^+ \mathbf{y}_\nu$.

end if

for $m \in \{1, \dots, M_k\}$, **do**

 prédiction des intervalles de propagation pour la fréquence suivante selon (4.4) ou (4.7)

end for

Notons que le seul a priori que l'algorithme doit avoir porte sur le bruit des mesures. Ainsi la méthode proposée se démarque par exemple de méthodes ayant besoin de connaître la nature de la source ou ne fonctionnant que pour certains types de sources comme les méthodes de warping (méthodes utilisées pour la représentation en temps -

fréquence) [Bonnell et al., 2013]. Cependant, la prise en compte du bruit se fait sur le plan fréquence - distance, notre algorithme suppose donc que la source dispose d'un spectre relativement blanc. Toutefois, vu que nous proposons une méthode ayant pour but de reconstruire les nombres d'ondes (et non les amplitudes modales) nous pourrions recourir à un blanchiment de spectre dans les cas où cela se révélerait nécessaire (en effet, un blanchiment de spectre affecterait les amplitudes modales mais non les nombres d'onde).

4.2. Etude de performances

Dans cette partie, nous présentons les simulations menées pour évaluer et quantifier les performances de l'algorithme proposé.

4.2.1. Sensibilité aux paramètres

Nous nous intéressons ici à l'impact des valeurs des termes β_0 et β_∞ sur la qualité de la reconstruction de l'algorithme.

Impact de la probabilité de fausse alarme initiale

Nous nous intéressons d'abord à la valeur β_0 , le taux de fausses alarmes, cible pour la détection d'un nouveau mode. On étudiera quatre cas : $\beta_0 = 10^{-x}$ pour $x \in \{2, 3, 4, 5\}$.

Dans les quatre cas on prendra $\beta_\infty = 0.5$. L'algorithme est appliqué sur des données bruitées simulées à partir d'un guide de Pekeris [Jensen et al., 2011]. On considère les paramètres suivants : $D = 130$ m, $c_1 = 1500$ m/s, $c_2 = 2000$ m/s, $\rho_1 = 1000$ kg/m³ et $\rho_2 = 2000$ kg/m³. L'antenne de réception est supposée linéaire alignée avec la source. Ce cas de figure très théorique est cependant utile dans notre étude car l'hypothèse sur la profondeur de la source assure l'excitation de chaque mode pour toute les fréquences et l'hypothèse sur la profondeur de l'antenne permet de récupérer l'intégralité des modes.

L'antenne est constituée de 240 capteurs régulièrement espacés de 25 m. L'antenne et la source sont toutes deux posées sur le fond à 2 km d'écart ; et on fixe le SNR à 12 dB. On montre la distance de Jaccard (avec un rayon de tolérance d'un demi pas de grille) en fonction du nombre de capteur de l'antenne. Les performances sont moyennées sur l'ensemble d'un plan f-k allant jusqu'à une fréquence de 50 Hz et les capteurs sont sélectionnés aléatoirement en conservant la longueur d'antenne.

On remarque qu'à partir de $\beta_0 = 10^{-3}$ les performances de CPOMP sont très proches les unes des autres. Au contraire, avec $\beta_0 = 10^{-2}$ l'algorithme est plus souvent sujet à la détection de fausses alarmes et à leur propagation.

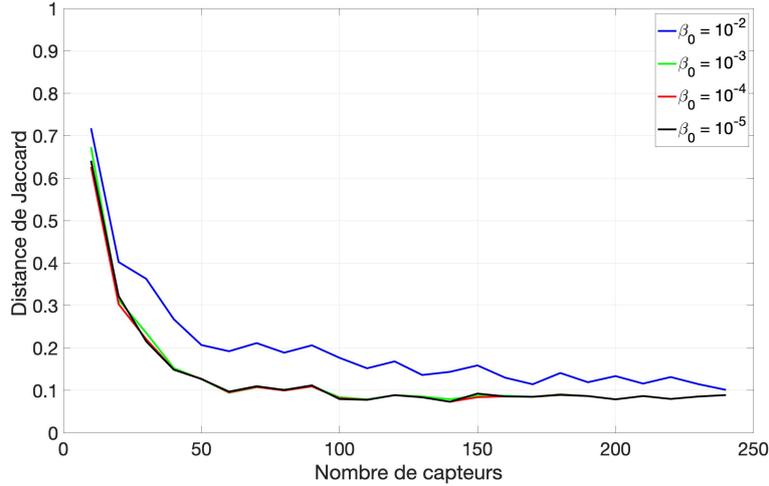


FIGURE 4.3. – Impact du seuil de détection sur la distance de Jaccard moyennée sur l'ensemble des lignes fréquentielles d'un jeu de données simulées par un guide de Pekeris.

Impact de la probabilité de fausse alarme asymptotique

Intéressons-nous maintenant à l'impact de la valeur β_∞ sur la reconstruction, comme précédemment on considérera quatre cas d'étude : $\beta_\infty = 0.3 + 0.2x$ pour $x \in \{0, 1, 2, 3\}$.

Dans les quatre cas on prendra $\beta_0 = 10^{-3}$. On appliquera l'algorithme au même jeu de données synthétiques simulées avec le guide de Pekeris précédent.

Contrairement au seuil de détection la variation de la valeur du seuil de propagation limite influence peu la qualité de la reconstruction. En se référant aux figures annexes on remarquera qu'avec un seuil de propagation exigeant (exemple $\beta_\infty = 0.3$) l'algorithme reconstruit moins de fausses alarmes mais atténue plus vite la propagation des modes. En prenant $\beta_\infty = 0.9$ l'algorithme augmente le nombre de bonnes détections mais également son nombre de fausses alarmes. Par la suite on prendra comme valeurs $\beta_0 = 10^{-3}$ et $\beta_\infty = 0.5$.

4.2.2. Guide de Pekeris

Dans cette section nous étudions la performance de notre approche par rapport aux méthodes présentées dans le chapitre précédent. On commence par envisager un guide de Pekeris dont on a vu dans le chapitre 1 qu'il s'agit d'une modélisation simple du guide océanique. On évaluera les performances des différents algorithmes selon leur reconstruction dans le plan f-k recalé. On étudiera des données simulées dans un second

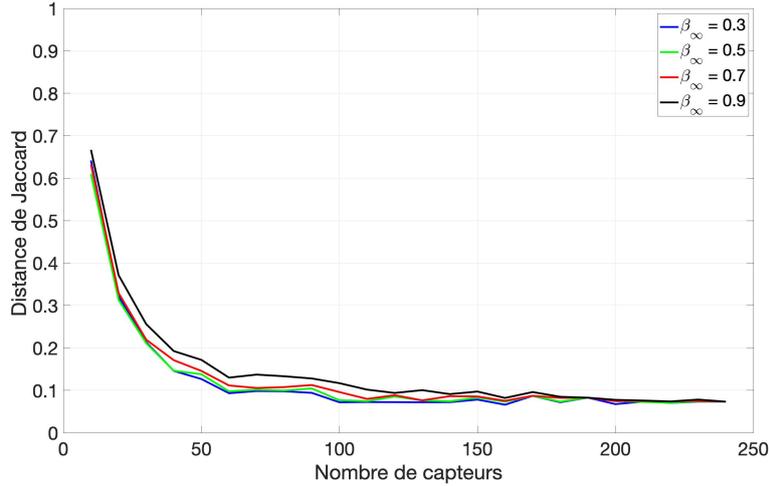


FIGURE 4.4. – Impact du seuil asymptotique sur la distance de Jaccard moyennée sur l'ensemble des lignes fréquentielles d'un jeu de données simulées par un guide de Pekeris.

guide d'onde plus complexe mais plus réaliste dans la section suivante.

Le guide de Pekeris considéré est le même que dans l'étude précédente, on insistera uniquement sur le pas de la grille que l'on fixera de façon à ce qu'il soit inférieur à l'écart minimal entre deux nombres d'onde associés à des modes propagatifs différents à la dernière fréquence étudiée. De cette manière on assure que deux nombres d'onde théoriques associés à deux modes propagatifs ne sont pas représentés par le même point de la grille.

On compare les performances moyennes de la distance de Jaccard en fonction du nombre de capteurs pour les approches suivantes :

- OMP avec le nombre de modes à reconstruire comme critère d'arrêt
- COMP avec le nombre de modes à reconstruire comme critère d'arrêt
- SoBaP en utilisant la relation de dispersion et la divergence de Kullback-Leibler comme critère d'arrêt
- CPOMP qui itère tant que l'amplitude d'un mode associé à un nombre d'onde discret est supérieure à T_0 .

La métrique d'évaluation de performance que nous avons présentée dans le chapitre précédent est appliquée pour chaque ligne fréquentielle. Nous proposons avant de présenter les principaux résultats de ces travaux de thèse d'illustrer les valeurs de cette métrique.

Pour cela nous rappelons brièvement la formule de la distance de Jaccard :

$$D_J = 1 - \frac{TP}{TP + FN + FP}, \quad (4.15)$$

où TP compte le nombre de bonnes détections (modulo un rayon de tolérance $R_J = \Delta\kappa_r$, cf. figure 4.1) tandis que FN et FP représentent respectivement les détections manquées et les fausses alarmes. Dans l'étude qui nous intéresse (le cas d'une source large-bande) le nombre de mode à reconstruire (donc de bonnes détections) augmente au fil des fréquences (cf. sections 1.2.2, 1.2.3). La valeur de la distance de Jaccard globale est donc moyennée sur l'ensemble des lignes fréquentielles étudiées. Nous proposons d'illustrer ces valeurs premièrement par des tableaux théoriques puis par une visualisation des diagrammes f-k reconstruits par les différentes approches.

Concernant les tableaux de valeurs théoriques, on considère l'étude d'une source large-bande émettant jusqu'à 200 Hz. Nous distinguons quatre intervalles d'étude d'une largeur de 50 Hz. Pour chacun de ces intervalles nous calculons une distance de Jaccard moyenne théorique. Pour chaque indice fréquentiel ν on calcule la distance de Jaccard théorique comme suit :

$$D_{Jth}(\nu) = 1 - \frac{\lfloor P_d M(\nu) \rfloor}{M(\nu) + \lfloor P_{FA} M(\nu) \rfloor}, \quad (4.16)$$

où P_d représente le pourcentage de bonnes détections, P_{FA} le pourcentage de fausses alarmes, $\lfloor \cdot \rfloor$ la fonction partie entière et $M(\nu)$ le nombre de bonnes détections à réaliser (c'est à dire le nombre de modes se propageant à l'indice fréquentiel ν). Dans l'étude théorique qui nous intéresse ici nous faisons varier le pourcentage de bonnes détections de 50% à 90% par pas de 10%. Concernant le pourcentage de fausses alarmes nous lui faisons prendre les valeurs suivante : {5%, 10%, 20%}.

Nous illustrons ces valeurs dans le tableau 4.1 pour l'intervalle de fréquence [0 – 50] Hz et nous renvoyons le lecteur, si intéressé, aux figures B.1, B.2 et B.3 placées en annexe pour les tableaux concernant respectivement les trois autres intervalles fréquentiels ([50 – 100] Hz, [100 – 150] Hz et [150 – 200] Hz). Ces tableaux renseignent sur ce que représente une distance de Jaccard satisfaisante en fonction de l'intervalle d'étude choisit. En effet, le nombre de modes augmentant au fil des fréquences, il est attendu que nous ne pouvons garder la même attente sur la distance de Jaccard.

	$P_d = 50\%$	$P_d = 60\%$	$P_d = 70\%$	$P_d = 80\%$	$P_d = 90\%$
$P_{FA} = 0\%$	0.35	0.35	0.26	0.16	0
$P_{FA} = 5\%$	0.35	0.35	0.26	0.16	0
$P_{FA} = 10\%$	0.38	0.37	0.29	0.19	0.05
$P_{FA} = 20\%$	0.43	0.42	0.35	0.25	0.13

TABLE 4.1. – Tableau récapitulatif des valeurs de la distance de Jaccard moyenne théorique sur l'intervalle $[0 - 50]$ Hz en fonction des probabilités de bonnes détections et de fausses alarmes

Afin d'apporter un support visuel aux valeurs de distance de Jaccard présentées dans ces tableaux, nous traçons sur les deux figures suivantes la reconstruction du diagramme f-k obtenu par les algorithmes OMP, SoBaP, COMP et CPOMP. La figure 4.5 représente le diagramme f-k pour l'intervalle $[0 - 50]$ Hz tandis que la figure 4.6 correspond à l'intervalle $[50 - 100]$ Hz. La distance de Jaccard moyenne est indiquée au dessus de chaque reconstruction. Pour ces reconstructions le SNR est de 12 dB et nous avons sélectionné 30 capteurs aléatoirement en conservant la longueur d'antenne. La reconstruction des différents algorithmes est représentée par les courbes colorées (bleu pour OMP, mauve pour SoBaP, vert pour COMP et rouge pour CPOMP), les courbes noires représentent le diagramme f-k théorique que l'on souhaite reconstruire (ou vérité terrain).

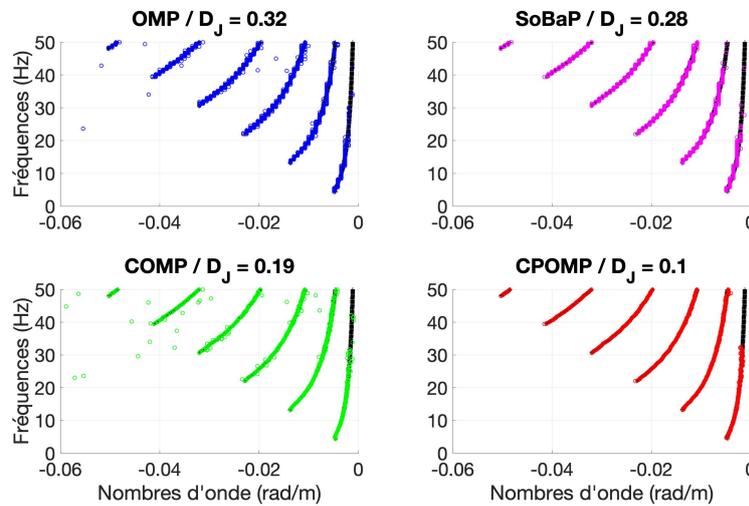


FIGURE 4.5. – (haut-gauche) : diagramme f-k reconstruit par OMP sur $[0 - 50]$ Hz. (haut-droite) : diagramme f-k reconstruit par SoBaP sur $[0 - 50]$ Hz. (bas-gauche) : diagramme f-k reconstruit par COMP sur $[0 - 50]$ Hz. (bas-droite) : diagramme f-k reconstruit par CPOMP sur $[0 - 50]$ Hz.

Les diagrammes f-k qu'illustre la figure 4.5 valident la présentation du tableau précédent puisque les deux approches utilisant la relation de dispersion (SoBaP et CPOMP) s'inscrivent dans le premier cas présenté (pas de fausse alarme apparente) tandis que les deux autres approches (OMP et COMP) sont à comparer avec le tableau B.1 placé en annexe. L'algorithme SoBaP se trouverait au couple ($P_d = 70\%$, $P_{FA} = 0\%$) alors que COMP présente un résultat similaire au cas ($P_d = 80\%$, $P_{FA} = 10\%$) et que l'approche que nous proposons s'apparente à ($P_d = 80\%$, $P_{FA} = 0\%$).

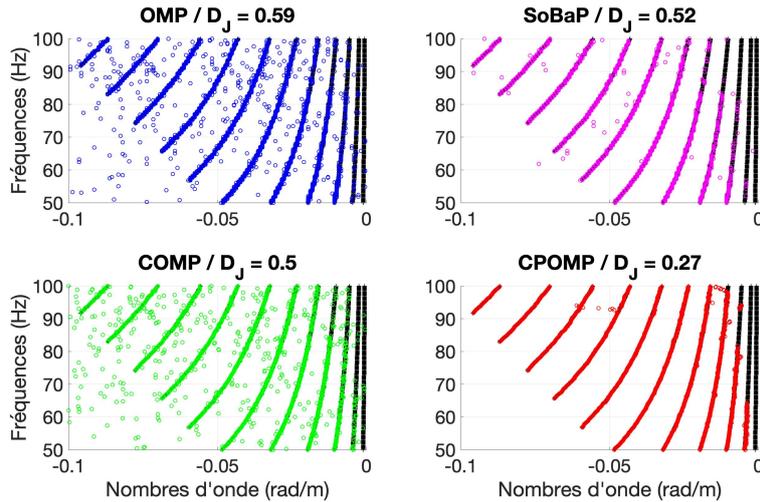


FIGURE 4.6. – (haut-gauche) : diagramme f-k reconstruit par OMP sur [50 100] Hz.
 (haut-droite) : diagramme f-k reconstruit par SoBaP sur [50 100] Hz.
 (bas-gauche) : diagramme f-k reconstruit par COMP sur [50 100] Hz.
 (bas-droite) : diagramme f-k reconstruit par CPOMP sur [50 100] Hz..

Cette deuxième illustration introduit la faiblesse majeure des algorithmes OMP et COMP qu'est la reconstruction systématique de fausses alarmes. Nous illustrerons et commenterons plus en détails cette faiblesse dans la suite de cette partie. La distinction entre les deux approches utilisant la relation de dispersion vient du plus faible nombre de fausses alarmes détectées par CPOMP et le tracking des premiers modes qui sont en partie présents dans la reconstruction de CPOMP (mode 2 et 3).

Afin de compléter cette première étude qualitative, nous allons à présent nous concentrer sur une étude quantitative.

Au cours de cette étude nous regarderons les impacts des variations du nombre de capteurs aléatoirement sélectionnés ainsi que la valeur du SNR sur la distance de Jaccard. L'étude de l'impact de la variation du nombre de capteurs sera réalisé avec un SNR

de 12 dB ; tandis que celle portant sur l'impact du SNR sera menée en sélectionnant aléatoirement 30 capteurs. Pour chaque algorithme nous illustrerons les résultats par une figure représentant l'impact de la variation du paramètre choisi (capteur ou SNR) en fonction des fréquences. Nous traçons pour chaque figure le pourcentage de bonne détection P_d , le pourcentage de fausse alarme P_{FA} ainsi que la distance de Jaccard D_J .

Les figures 4.7 et B.1 représentent les résultats pour la variation du nombre de capteurs (avec un SNR de 12 dB) puis pour la variation du SNR (avec 30 capteurs sélectionnés aléatoirement en gardant la longueur d'antenne). Les figures 4.9 et 4.10 représentent les résultats pour l'algorithme SoBaP, les figures 4.8 et B.2 pour COMP et les figures 4.11 et 4.12 pour notre approche CPOMP.

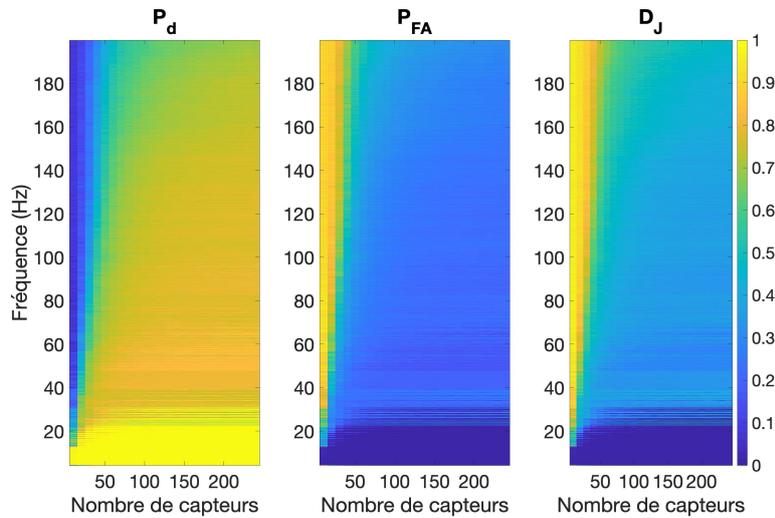


FIGURE 4.7. – Impact de la variation du nombre de capteurs en fonction des fréquences pour l'algorithme OMP avec le nombre de modes pour critère d'arrêt.

Pour l'algorithme OMP dont on rappelle que le critère est le nombre de modes à reconstruire, on constate comme attendu que la tendance des trois figures est la même. On attendait cela puisqu'avec un nombre d'itérations fixe à chaque fréquence tout nombre d'onde non reconstruit donc fatalement estimé sur un autre point de la grille ce qui amène donc à une fausse alarme. Pour un SNR de 12 dB on constate qu'à partir de 30 capteurs on arrive à récupérer l'intégralité des nombres d'onde jusqu'à 25 Hz. On constate ensuite une baisse des performances liée, comme dit précédemment, à la diminution des amplitudes modales rendant plus difficile la détection de ces nombres d'onde.

L'étude de la variation du SNR (figure B.1) conforte l'idée que la méthode fonctionne mieux quand le bruit est modéré (nous la plaçons donc en annexe B).

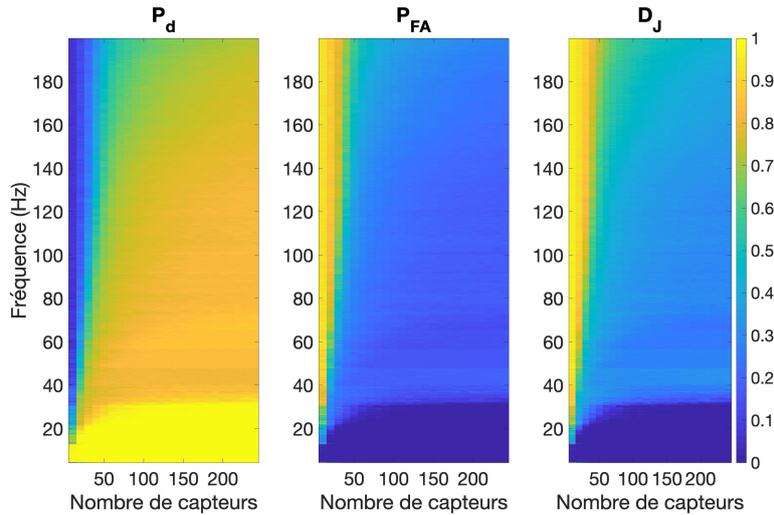


FIGURE 4.8. – Impact de la variation du nombre de capteurs en fonction des fréquences pour l’algorithme COMP avec le nombre de modes pour critère d’arrêt.

On apportera les mêmes remarques que précédemment sur l’étude de COMP en comparaison de l’algorithme OMP (cf figure 4.8). Le passage au cadre "off-grid" permet d’améliorer les performances. On a un aperçu de la fréquence jusqu’à laquelle la méthode reconstruit l’intégralité des nombres d’onde, environ 35 Hz. Au delà, la diminution des performances est liée au même phénomène de diminution d’amplitudes modales. Cette méthode ayant le même critère d’arrêt que la version discrète on remarque que la méthode a les mêmes tendances sur les ratios de bonnes détections, de fausses alarmes ainsi que pour la distance de Jaccard. De même que pour la version discrète, l’étude de la variation du SNR (cf figure B.2) n’apporte pas de renseignement supplémentaire autre que l’information intuitive indiquant que la méthode fonctionne mieux avec peu de bruit (figure également placée en annexe B).

En prenant compte la relation de dispersion dans l’approche bayésienne SoBaP on remarque que cette approche récupère l’intégralité des nombres d’ondes à reconstruire jusqu’à presque 40 Hz (cf figure 4.9). Toutefois, contrairement aux approches étudiées précédemment, cette méthode peut reconstruire plus de nombres d’onde qu’il n’en existe réellement, on remarque que cette approche est légèrement handicapée par quelques fausses alarmes. L’étude de l’impact de la variation du SNR (cf figure 4.10) nous renseigne cependant sur la qualité du tracking réalisé par SoBaP. En tenant compte du ratio de bonnes détections on remarque que ce dernier est moins bon à faible SNR (comme pour OMP et COMP) toutefois c’est sur le ratio de fausses alarmes qu’on

portera notre attention. On remarque en effet qu'à faible SNR l'algorithme ne reconstruit pas de fausses alarmes mais que ces dernières apparaissent à fort SNR. Ce phénomène s'explique par le faible nombre de capteurs sélectionnés ici ainsi que de la valeur de la variance du bruit en paramètre d'entrée. En effet, avec peu de capteurs à faible SNR l'algorithme ne reconstruit que peu de points car il est difficile de distinguer un point de la grille associé à un mode propagatif ou non. En abaissant la variance on augmente les détections en rendant également possible la détection de fausses alarmes.

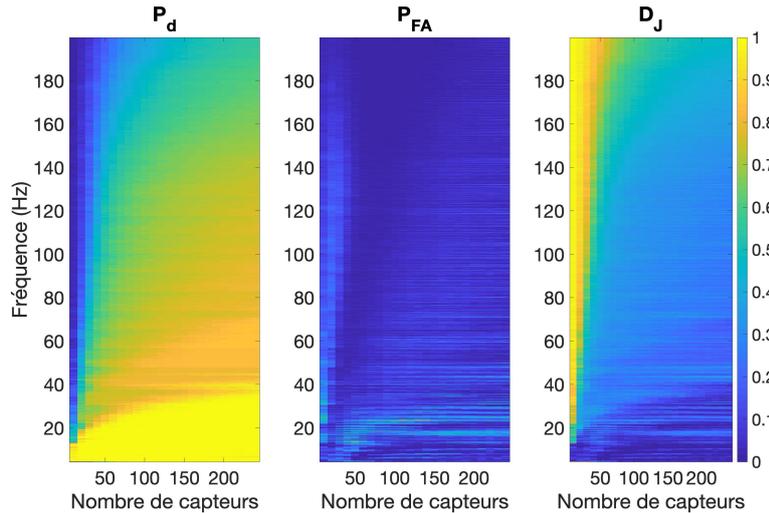


FIGURE 4.9. – Impact de la variation du nombre de capteurs en fonction des fréquences pour l'algorithme SoBaP.

L'approche continue intégrant la relation de dispersion que nous proposons dans ces travaux de thèse possède le même ratio de bonnes détections avec moins de capteurs que les autres méthodes présentées et parvient à reconstruire l'intégralité du support jusqu'à 50 Hz quand le nombre de capteurs est suffisamment grand (cf figure 4.11). Certaines fausses alarmes sont à noter dans les basses fréquences mais notre tracking parvient à ne pas les propager avec la confrontation au seuil de propagation. L'étude de la variation du SNR (cf figure 4.12) montre que, comme pour l'approche bayésienne, notre méthode parvient bien à ne pas détecter de fausses alarmes lorsque le niveau de bruit est élevé mais que la détection de fausses alarmes se fait quand le SNR est modéré car la valeur du seuil de détection est plus faible. Les fausses alarmes détectées quand la fréquence augmente sont reliées aux faibles nombres de capteurs utilisés (30 capteurs sélectionnés).

Nous terminerons cette étude des données synthétiques en résumant sur la figure 4.13 les résultats de la distance de Jaccard que l'on aura moyenné sur $[0 - 50]$ Hz (nous plaçons les figures illustrant les moyennes sur les intervalles $[50 - 100]$ Hz, $[100 - 150]$

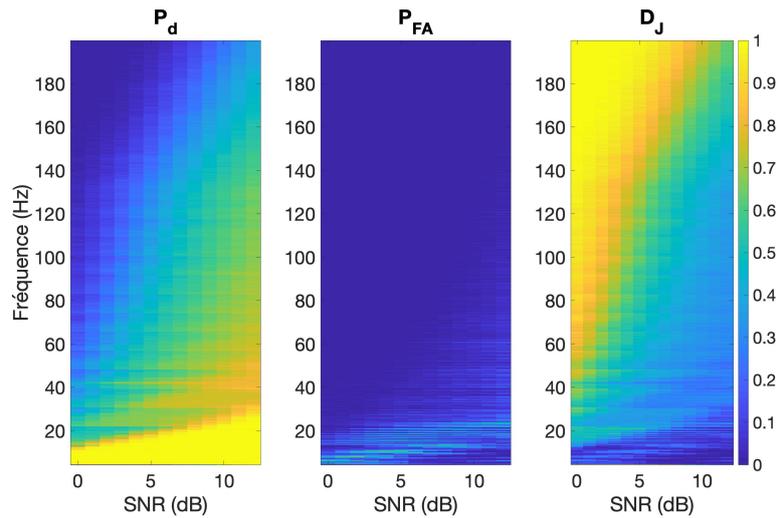


FIGURE 4.10. – Impact de la variation du SNR en fonction des fréquences pour l’algorithme SoBaP.

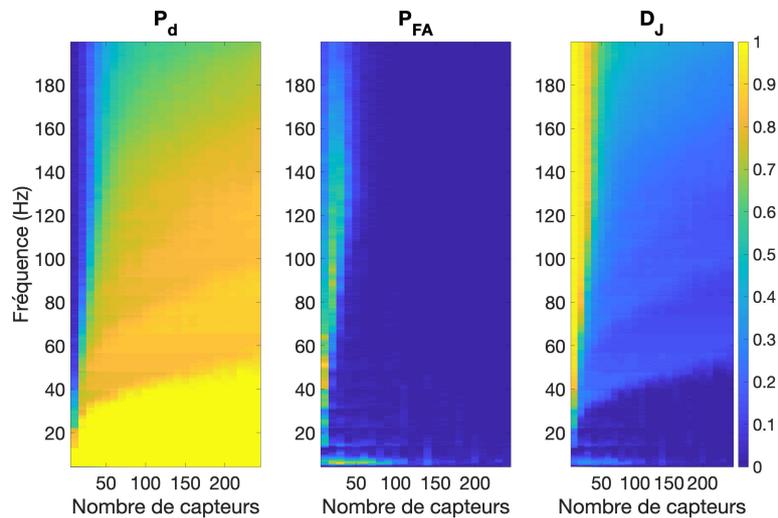


FIGURE 4.11. – Impact de la variation du nombre de capteurs en fonction des fréquences pour l’algorithme CPOMP.

Hz et [150 – 200] Hz en annexe B). L’axe des abscisses représente systématiquement le nombre de capteurs sélectionnés aléatoirement et l’axe des ordonnées correspond à la valeur du rapport signal à bruit. Ces quatre figures résument l’ensemble des remarques que l’on a été amené à faire dans ce chapitre : la dégradation des performances quand les fréquences sont trop élevées liée à l’atténuation des amplitudes modales des premiers modes ; les performances dégradées dans les premières fréquences sont liées soit à un faible SNR soit à un faible nombre de capteurs sélectionnés. Cette représentation

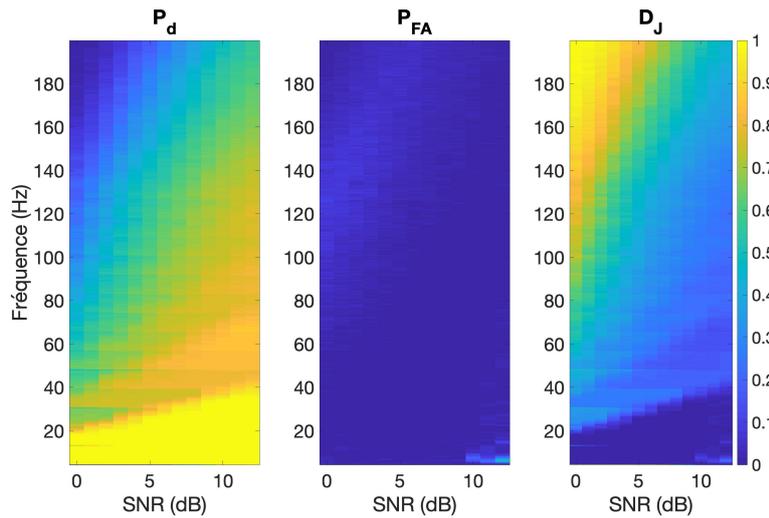


FIGURE 4.12. – Impact de la variation du SNR en fonction des fréquences pour l’algorithme CPOMP.

nous permet également de visualiser l’apport de la prise en compte du cadre "off-grid" et/ou l’intégration de la relation de dispersion. Ces apports peuvent aisément se voir grâce aux variations des tendances de performances (notamment dans l’intervalle de fréquence $[0 - 50]$ Hz ; la colorbar est la même que pour les figures présentées auparavant).

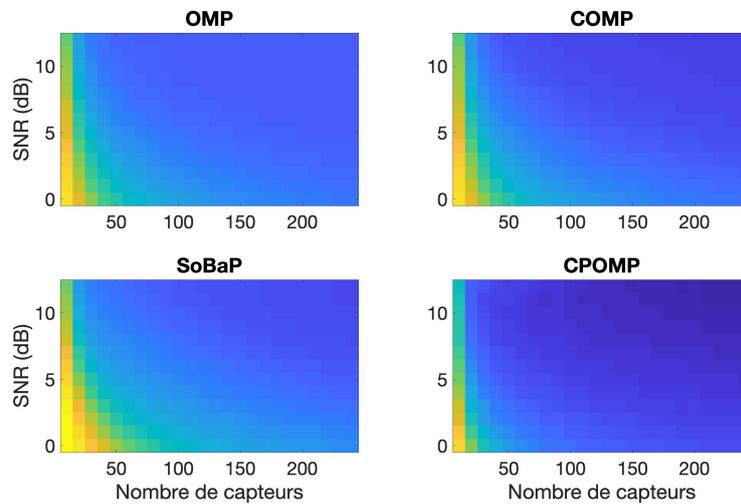


FIGURE 4.13. – Impact de la variation du nombre de capteur et du SNR sur la distance de Jaccard moyennée sur l’intervalle $[0 - 50]$ Hz pour : (haut-gauche) OMP, (haut-droite) SoBaP, (bas-gauche) COMP, (bas-droite) CPOMP.

Nous complétons et concluons cette analyse de données synthétiques simulées dans un guide de Pekeris par l'étude de deux cas particuliers. Dans le premier on fixe le SNR à 12 dB et on regarde la variation du nombre de capteurs sélectionnés aléatoirement tout en conservant la longueur d'antenne (c'est à dire qu'on sélectionne systématiquement le premier et le dernier capteur de l'antenne). Dans la seconde configuration on fixe le nombre de capteurs sélectionnés aléatoirement à 30 et on regardera l'impact de la variation du SNR sur la distance de Jaccard.

Les résultats de ces deux cas particuliers sont illustrés par les figures 4.14 et 4.15. Les courbes présentées sur ces figures correspondent à la moyenne des valeurs des distances de Jaccard sur l'ensemble des lignes fréquentielles. Afin de simplifier la compréhension des résultats, nous divisons chaque figure en quatre cadres, chaque cadre représentant un intervalle de 50 Hz. Les résultats d'OMP sont illustrés par la courbe bleue, ceux de SoBaP par la courbe noire, ceux de COMP par la courbe verte et ceux de CPOMP par la courbe rouge.

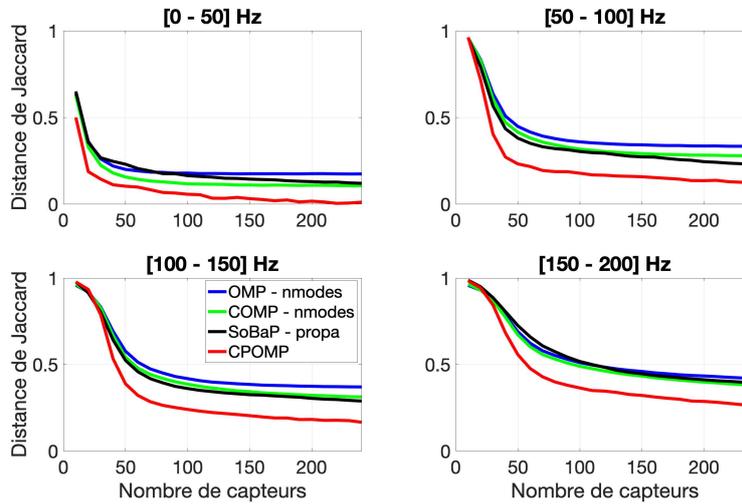


FIGURE 4.14. – (haut-gauche) : distance de Jaccard moyenne sur $[0 \ 50]$ Hz. (haut-droite) : distance de Jaccard moyenne sur $]50 \ 100]$ Hz. (bas-gauche) : distance de Jaccard moyenne sur $]100 \ 150]$ Hz. (bas-droite) : distance de Jaccard moyenne sur $]150 \ 200]$ Hz.

En fixant le SNR à 12 dB on remarque que les performances de reconstruction des quatre approches étudiées dans l'intervalle $[0 - 50]$ Hz (cadre haut-gauche) sont satisfaisantes. Nous pouvons remarquer l'efficacité de l'ajout de l'étape du gradient dans l'algorithme OMP. En effet à partir de 30 capteurs la courbe de COMP est systématiquement en dessous de celle d'OMP. Ces performances sont toutefois également atteintes par la seconde approche discrète qu'est SoBaP, cela est dû à la prise en compte de la relation de dispersion dans la reconstruction du support

d'une ligne fréquentielle à l'autre. Notre algorithme intégrant la relation de dispersion par rapport à COMP et étant une approche continue par rapport à SoBaP, la courbe représentant ses performances est donc logiquement la plus satisfaisante, atteignant même une reconstruction totale quand le nombre de capteurs devient assez élevé.

La dégradation des performances dans les trois autres intervalles d'étude s'explique par l'augmentation significative du nombre de modes à reconstruire d'une part et l'atténuation des amplitudes modales rendant leurs détections plus laborieuses voire impossibles. D'autre part on observe toutefois que les performances de CPOMP dans l'intervalle $[50 - 100]$ Hz sont acceptables et qu'avec suffisamment de capteurs on obtient également des performances convenables pour l'intervalle $[100 - 150]$ Hz. Toutefois les performances deviennent trop faibles dans le dernier intervalle considéré. La dégradation des performances est liée à notre valeur de β_∞ , la valeur de notre seuil de propagation diminue plus lentement que les valeurs des amplitudes modales, l'algorithme arrête donc le tracking des modes. Une fois le tracking d'un mode arrêté, un nouveau nombre d'onde sujet à être détecté sera confronté au seuil de détection et non au seuil de propagation. Une valeur plus tolérante de β_∞ permettrait d'allonger le tracking des modes, toutefois plus la valeur de ce paramètre est proche de 1 plus le seuil de propagation sera diminué rapidement, le risque de cette solution est de propager la détection malheureuse de fausses alarmes.

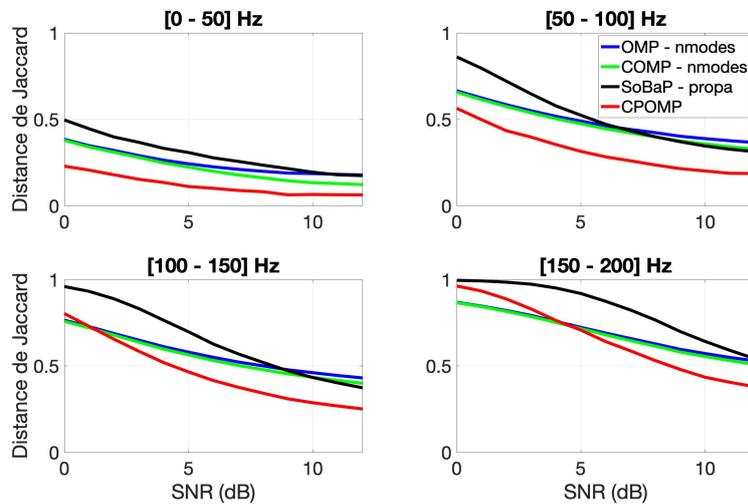


FIGURE 4.15. – (haut-gauche) : distance de Jaccard moyenne sur $[0 - 50]$ Hz. (haut-droite) : distance de Jaccard moyenne sur $]50 - 100]$ Hz. (bas-gauche) : distance de Jaccard moyenne sur $]100 - 150]$ Hz. (bas-droite) : distance de Jaccard moyenne sur $]150 - 200]$ Hz.

Dans le second cas d'étude, on fixe le nombre de capteurs à 30 capteurs et on fait varier le SNR de 0 à 12 dB. On ne s'attardera pas sur l'impact de ces variations pour les méthodes OMP et COMP. En effet ces méthodes ayant pour critère d'arrêt un nombre d'itérations fixe, les mauvaises performances de ces approches dans l'intervalle [0 – 50] Hz sont liées uniquement au niveau de bruit. Pour les autres intervalles le faible nombre de capteurs et le nombre croissant de modes à reconstruire diminuent également les performances. L'étude de l'impact de la variation du SNR montre son intérêt dans la comparaison des deux méthodes intégrant la relation de dispersion. Toutefois, dans le cas de l'algorithme bayésien SoBaP, il n'y a pas de réel critère d'arrêt. En cas de détection de fausse alarme, on ne pourra pas immédiatement assimiler les mauvaises performances à un manque de détection des nombres d'onde à reconstruire ou à des fausses alarmes. L'approche que nous proposons permet au contraire de constater l'impact de la variation du SNR car cette valeur intervient dans la formulation des seuils de détection et de propagation. Le rebond dans les performances de CPOMP entre 11 et 12 dB s'explique par la diminution de la valeur de seuil de détection conjugué au petit nombre de capteurs utilisés.

4.2.3. Guide plus complexe et réaliste

Dans cette section nous proposons d'appliquer les différents algorithmes à un jeu de données simulé dans un guide plus complexe mais plus réaliste. En effet, contrairement au guide de Pekeris, il arrive souvent qu'il y ait au moins une couche de sédiments supplémentaire entre le fond de la colonne d'eau et le sol sédimentaire à proprement parler. On illustre ce type de guide par la figure 4.16.

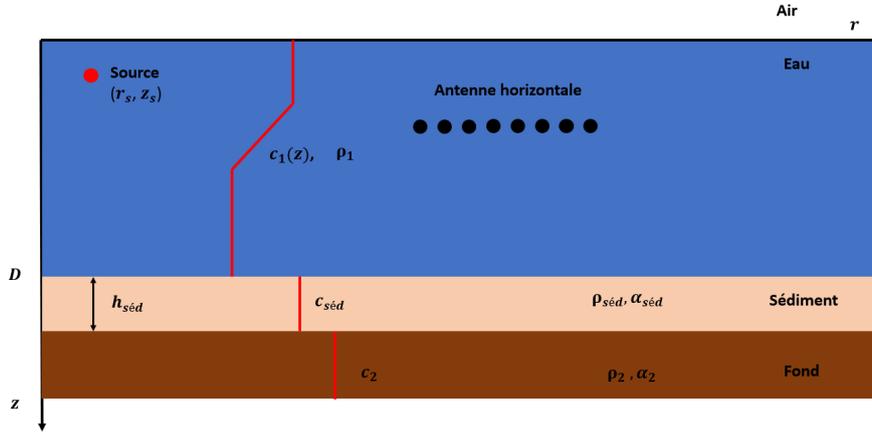


FIGURE 4.16. – Illustration d'un guide stratifié similaire au cadre de la campagne SBCEX

Pour cette étude, on considérera une source large-bande émettant jusqu'à 100 Hz. La géométrie de l'antenne est réalisée de façon à imiter celle utilisée lors de l'acquisition des données de la campagne SBCEX (Seabed Characterization Experiment) [Wilson et al., 2020] que nous étudierons par la suite. Les informations sur cette antenne sont son ouverture (de l'ordre du kilomètre), son nombre de capteurs (64, dont l'espacement est irrégulier le long de l'antenne) et la distance par rapport à la source (10 km). Les paramètres utilisés pour simuler cet environnement particulier sont les suivants :

- la colonne d'eau, d'une hauteur $D = 65$ m. La célérité du son dans l'eau c_1 suit un gradient allant de 1468 m/s au haut de la colonne d'eau à 1469 m/s au fond de la colonne d'eau ;
- la couche sédimentaire, d'une épaisseur $h_{sed} = 5$ m. La célérité du son dans cette couche est $c_{sed} = 1500$ m/s, de masse volumique $\rho_{sed} = 1600$ kg/m³ et d'atténuation $\alpha_{sed} = 0.1$ dB/λ ;
- le fond sédimentaire : célérité du son $c_2 = 1700$ m/s, de masse volumique $\rho_2 = 2000$ kg/m³ et d'atténuation $\alpha_2 = 0.2$ dB/λ.

Les données sont obtenues en utilisant le code des modes normaux ORCA

[Westwood et al., 1996]. Comme dans le guide précédent on considère la version recalée de ces données, c'est à dire les données obtenues après avoir appliquée l'opération de correction de vitesse. La performance des algorithmes est évaluée en utilisant la distance de Jaccard. Nous présentons d'abord en figure 4.17 l'étude portant sur l'impact de la variation du nombre de capteurs sur la qualité de la reconstruction (pour cette étude le SNR est fixé à 12 dB, en faisant l'hypothèse que le bruit est un bruit blanc gaussien). La seconde étude (cf. figure 4.18) porte sur l'impact de la variation du SNR sur la qualité de la reconstruction (dans cette seconde étude le nombre de capteurs est fixé à 32).

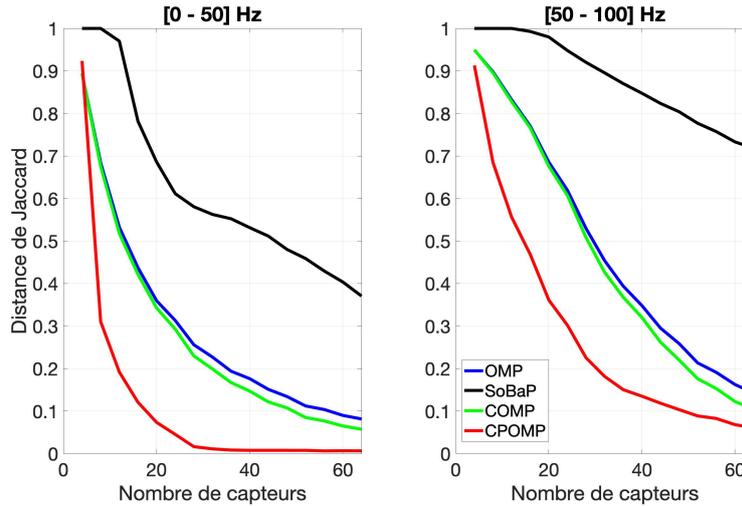


FIGURE 4.17. – Impact de la variation du nombre de capteur sur l'intervalle $[0 - 50]$ Hz (gauche) et $[50 - 100]$ Hz (droite) pour : (bleu) OMP, (noire) SoBaP, (vert) COMP, (rouge) CPOMP

On remarque que notre approche se démarque une nouvelle fois par le tracking des modes dans l'intervalle $[50 - 100]$ Hz. Comme dans l'étude dans le guide de Pekeris on observe une chute des performances quand les fréquences sont trop élevées, cette baisse de performances est également liée à l'abandon du tracking d'un mode qui est ensuite irrécupérable car devant de nouveau passer par le seuil de détection. De plus, nous pouvons observer que notre approche fonctionne bien jusqu'à un SNR de 3 dB. Notons cependant un comportement anormal de la part de l'approche bayésienne. Ces mauvais résultats peuvent s'expliquer car SoBaP présente des paramètres difficiles à fixer et impactant fortement ses performances. D'une part l'algorithme possède une variable d'entrée représentant la variance des coefficients non nuls, ce paramètre peut être estimé aisément dans le cas d'une antenne régulière (application d'une transformée de Fourier spatiale) mais non envisageable ici en raison de l'antenne irrégulière.

Maintenant que nous avons validé notre algorithme par deux applications sur des données

synthétiques différentes nous allons l’appliquer à des données réelles.

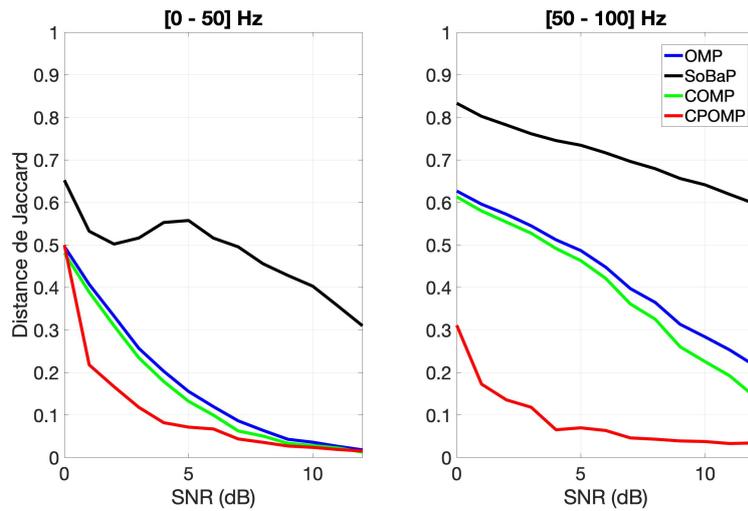


FIGURE 4.18. – Impact de la variation du SNR sur l’intervalle $[0 - 50]$ Hz (gauche) et $[50 - 100]$ Hz (droite) pour : (bleu) OMP, (noire) SoBaP, (vert) COMP, (rouge) CPOMP

4.3. Application sur données réelles

Dans cette section nous allons présenter deux jeux de données réelles. Chacun de ces lots de données peut être approché par un jeu de données synthétiques que nous avons présenté précédemment. Nous commencerons par le lot de données provenant de la campagne de relevés sismiques fait en Mer du Nord [Le Roux, 1996]. Nous étudierons ensuite un lot de données plus récent provenant de la récente campagne SBCEX [Wilson et al., 2020]. Dans les deux situations, le bruit est estimé sur le signal reçu par l’antenne après application d’une transformée de Fourier temporelle (donc sur le signal en fréquence - distance). On repère sur le signal une zone contenant uniquement du bruit et de cette zone on calcule le niveau de bruit en moyennant le résultat obtenu par rapport à la taille de l’échantillon étudié.

4.3.1. Données “Mer du Nord”

Les données Mer du Nord sont des données acquises dans un environnement proche d’un guide de Pekeris [Le Roux, 1996] et ont été utilisées dans diverses publications et études (cf [Nicolas, 2004] et [Drémeau et al., 2017]). Lors de cette campagne l’enregistrement a été effectué par un OBS (Ocean Bottom Seismometer) qui a enregistré 240 tirs d’un canon à air tracté par le bateau. Chacun des tirs a été réalisé après que le bateau ait

effectué un déplacement de 25 mètres. Le milieu étant invariant en distance on peut donc également décrire cet enregistrement comme un seul tir de canon à air qui aurait été enregistré par 240 OBS régulièrement espacés de 25 mètres (antenne synthétique). Pour commencer l'étude nous présentons sur la figure 4.19 le résultat de la transformée de Fourier spatiale réalisée sur les données spatiaux-temporelles enregistrées après recalage des vitesses (on prend la moyenne du profil de célérité comme nous l'avons vu dans le chapitre 1).

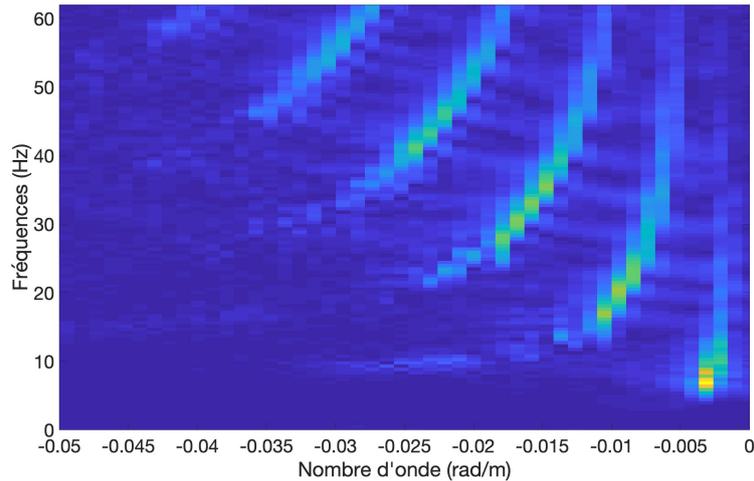


FIGURE 4.19. – Visualisation des données Mer du Nord après une fft bi-dimensionnelle

L'analyse de la figure 4.19 nous permet d'estimer le nombre de modes que l'on s'attend à reconstruire. Cette analyse de Fourier nous indique qu'il y a 6 modes à reconstruire entre $[-0.05, 0]$ rad/m après recalage. On présente les résultats de la façon suivante : on superpose les résultats de CPOMP à la figure obtenue après analyse de Fourier (à gauche sur chaque figure) et on compare cette figure avec le résultat obtenu par OMP (à droite sur chaque figure). On présente les résultats obtenus en sélectionnant aléatoirement 20 et 60 capteurs. Nous plaçons en annexe les résultats obtenus pour 40 et 80 capteurs.

Avec 60 capteurs (figure 4.20), CPOMP reconstruit une majeure partie des modes, le tracking du premier mode s'arrêtant à 42 Hz. Notre algorithme se distingue significativement d'OMP qui ne parvient pas à reconstruire les deux premiers modes, coupant le premier à 20 Hz et le deuxième à 38 Hz malgré quelques détections sporadiques.

Sur la figure 4.21 où l'on a sélectionné 20 capteurs on remarque que par rapport à la reconstruction réalisé par OMP notre méthode parvient à suivre les troisième et quatrième modes jusqu'à la fin des fréquences étudiées (on ne comptera pas le cinquième mode car détecté trop tardivement). Les deux premiers modes sont de plus reconstruits

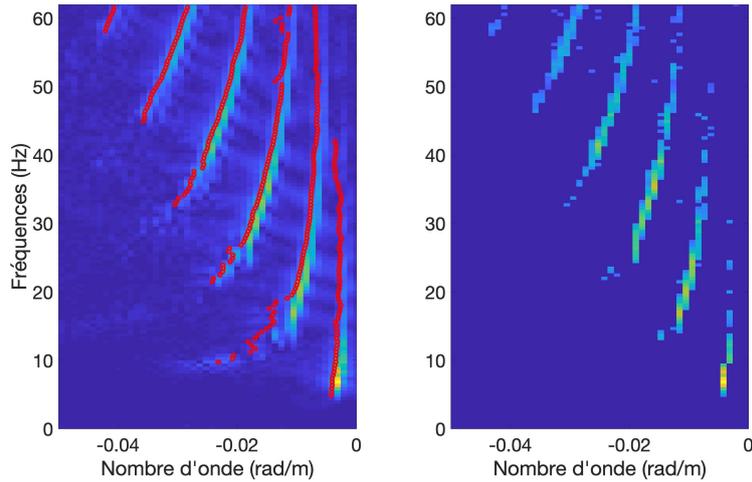


FIGURE 4.20. – Application de CPOMP avec 60 capteurs : la reconstruction est superposée au résultat obtenu par la transformée de Fourier avec l'ensemble de l'antenne (gauche) et la reconstruction d'OMP avec 60 capteurs (droite)

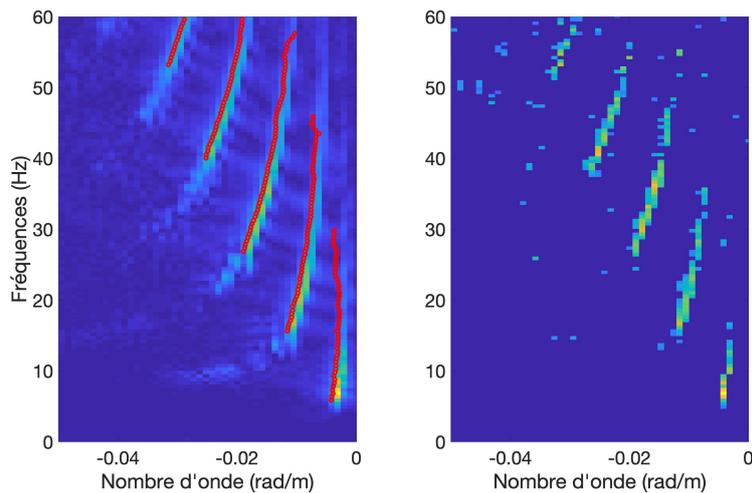


FIGURE 4.21. – Application de CPOMP avec 20 capteurs : la reconstruction est superposée au résultat obtenu par la transformée de Fourier avec l'ensemble de l'antenne (gauche) et la reconstruction d'OMP avec 20 capteurs (droite)

sur plus de fréquences que dans la reconstruction d'OMP. Toutefois, CPOMP n'arrive pas à reconstruire le sixième mode et manque régulièrement le début des modes, c'est à dire qu'il ne les détecte pas à leur fréquence de coupure. Cependant on peut noter que notre approche n'affiche pas de fausses alarmes contrairement à l'approche classique.

De cette première étude sur données réelles nous pouvons retenir que notre approche donne des résultats satisfaisants avec 60 capteurs et que les résultats à 20 capteurs sont encourageants en comparaison des résultats des méthodes issues de la littérature.

4.3.2. Données SBCEX

Cette section se concentre sur un jeu de données plus récent provenant de la campagne SBCEX (seabed characterization experiment). La campagne SBCEX était dédiée à la compréhension de la propagation du son dans des sédiments à grain fin. La campagne s'est déroulée sur plusieurs années, multi-institutionnelle et pluri-disciplinaire au NEMP (New-England Mud Patch). Le NEMP est situé à environ 100 km au sud de Cape Cod. La zone est caractérisée par une bathymétrie relativement plate (la profondeur de l'eau est entre 70 et 75 mètres) et une épaisse couche supérieure de sédiments boueux. Une première étude environnementale a été réalisée en 2015, elle comprenait notamment des carottages ainsi qu'une étude sismique à haute résolution.

L'expérience principale a eu lieu en Mars-Avril 2017 ; elle a impliqué trois navires de recherche, de nombreux récepteurs et de nombreuses sources ont été déployées. Les fréquences couvertes par les diverses sources déployées allaient de 10 Hz à 10 kHz. Un premier numéro spécialisé de IEEE Journal of Oceanic Engineering a été consacré à cette campagne [Wilson et al., 2020].

La source considérée dans cette thèse est un CSS (Combustive sound Source). Un CSS émet une impulsion à large bande suivie de plusieurs impulsions secondaires appelées impulsions à bulles [McNeese et al., 2014]. Les données sont enregistrées par une antenne horizontale de 1016 mètres de long, constituée de 64 capteurs et déployée par l'établissement de recherche de la défense norvégienne (FFI). L'espacement des hydrophones le long du réseau n'est pas uniforme. Les différents capteurs ont un espacement approximativement logarithmique (de 0,8 à 72 mètres), avec une symétrie autour du centre du réseau.

Cette antenne a déjà été utilisée lors de l'acquisition de données issues de bruit de bateaux et traitées dans le cadre de l'inversion géoacoustique (cf. [Tollefsen et al., 2019]). Nous nous intéressons ici aux données CSS enregistrées sur cette antenne dans le cadre de la reconstruction de nombres d'onde. Il est important de noter que les données ont été enregistrées sur une antenne irrégulière ; de ce fait l'usage classique d'une transformée de Fourier spatiale n'est pas possible et il faut passer par une projection dans l'espace de Fourier. On illustre le résultat de cette projection sur la figure 4.22 .

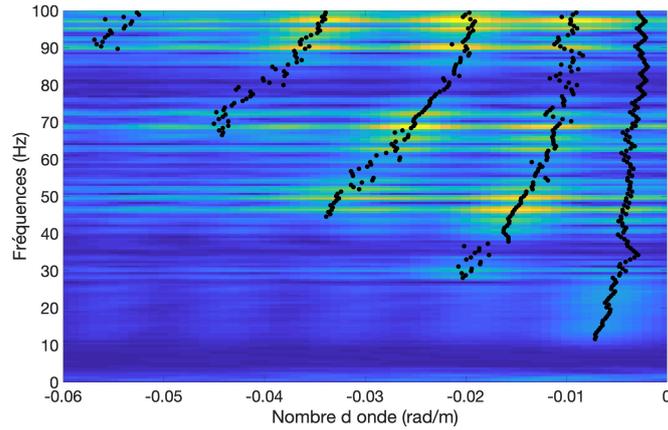


FIGURE 4.22. – Visualisation des données CSS après projection sur l'espace de Fourier avec superposition de la reconstruction de CPOMP avec 64 capteurs (courbes noires).

Un oeil averti pourra distinguer quatre modes propagatifs au fil des fréquences. On notera donc l'intérêt de recourir aux algorithmes de reconstruction parcimonieuse pour faciliter le tracking des modes. Comme l'analyse de Fourier avec l'intégralité de l'antenne ne permet pas de fournir une référence visuellement satisfaisante, nous utiliserons le résultat de CPOMP avec l'intégralité de l'antenne comme référence. Ce choix est motivé par les résultats obtenus lors des études sur données synthétiques ainsi que par les reconstructions obtenus sur les données Mer du Nord. On sélectionne aléatoirement 10 et 40 capteurs avant d'appliquer les algorithmes COMP et CPOMP. Les reconstructions obtenues sont respectivement représentées (figure 4.23) à gauche et en vert pour COMP, et à droite et en rouge pour CPOMP. Comme précisé en début de paragraphe on superpose en noir la reconstruction de CPOMP avec les 64 capteurs.

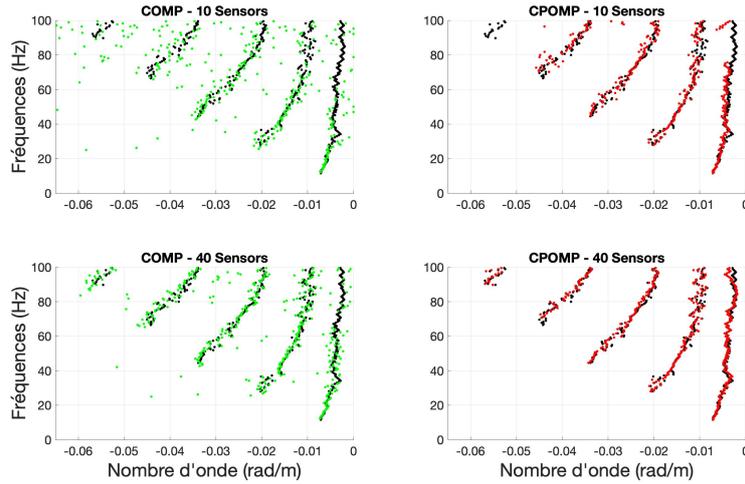


FIGURE 4.23. – Application de COMP (à gauche) et CPOMP (à droite) aux données CSS, avec 10 (haut) et 40 (bas) capteurs. La reconstruction est représentée par les points verts (COMP) ou rouge (CPOMP) avec en comparaison la sortie de CPOMP avec les 64 capteurs (points noirs).

Le premier résultat notable est qu'en sélectionnant 40 capteurs, on parvient à visualiser un cinquième mode que l'on ne parvenait pas à distinguer sur la projection dans l'espace de Fourier (figure 4.22). De plus le tracking des premiers modes est réussi sur l'ensemble de la gamme de fréquences considérées. En comparaison, COMP peine à reconstruire le premier mode à partir de 60 Hz ce qui entraîne de part son implémentation (nombre d'itération fixe en fonction des fréquences) des détections de fausses alarmes. Ces fausses alarmes sont encore plus présentes lorsque l'on diminue le nombre de capteurs là où pour CPOMP la diminution du nombre de capteurs n'entraîne pas plus de détection de fausses alarmes. Toutefois, en diminuant le nombre de capteurs, le premier mode est coupé à partir de 75 Hz avant d'être maladroitement récupéré aux dernières fréquences. Le cinquième n'est tout simplement pas reconstruit mais les modes 2 à 4 sont globalement bien reconstruits sur l'ensemble de la gamme de fréquences. Cette seconde étude sur données réelles valide les résultats théoriques de notre approche. L'aspect tracking de la méthode s'illustre bien dans l'intervalle $[0\ 100]$ Hz.

Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre un algorithme de reconstruction des nombres d'onde par une approche continue à laquelle nous avons incorporé la relation de dispersion introduite dans le chapitre précédent. Les performances de reconstruction de cet algorithme ont été validées sur deux lots de données synthétiques. Suite à cette étude sur

données synthétiques nous avons confronté notre approche à deux jeux de données réelles. Sur les données Mer du Nord, la configuration de l'antenne nous a permis de nous servir de l'analyse de Fourier pour juger la qualité de la reconstruction de notre algorithme ; reconstruction qui s'avère satisfaisante dès 60 capteurs. L'application sur les données de la campagne SBCEX nous a toutefois conduit à nous servir de la reconstruction de CPOMP comme référence en raison de l'impossibilité d'exploiter décemment les résultats d'une analyse de Fourier. Cette seconde étude sur données réelles nous permet une nouvelle fois de valider la possible diminution du nombre de capteurs nécessaires à la reconstruction du diagramme f-k d'intérêt. Ces travaux ont de plus fait l'objet d'un article de conférence [Paviet-Salomon et al., 2020] et d'un article de revue soumis à IEEE Journal of Oceanic Engineering et actuellement en relecture.

Conclusion et perspectives

Conclusion

Les travaux de recherche présentés dans ce manuscrit ont permis de réaliser une estimation des nombres d'ondes associés à des modes propagatifs pour une source large-bande émettant en ultra-basse fréquence dans un environnement petit fond. Nous avons proposé une méthode de suivi basée sur la connaissance d'informations physiques combinée à une approche continue afin de pouvoir reconstruire ces nombres d'ondes avec un petit nombre de capteurs. Nous avons confronté notre méthode sur des données synthétiques simulées dans deux environnements différents et deux jeux de données réelles. Les différents chapitres de cette thèse peuvent être brièvement présentés comme suit :

- nous avons tout d'abord posé les bases de la théorie des modes et présenté les enjeux de l'estimations modales dans le premier chapitre,
- nous avons ensuite expliqué la notion de représentation parcimonieuse ainsi que la théorie de l'acquisition compressée dans le deuxième chapitre,
- le chapitre trois nous a permis de faire le lien entre la théorie des modes que l'on peut assimiler à un modèle parcimonieux et de présenter un état de l'art des approches existantes adaptées à la reconstruction ainsi qu'une présentation d'une métrique adaptée à l'évaluation des performances de reconstruction,
- dans le dernier chapitre nous avons présenté l'algorithme issu des travaux de cette thèse, cette approche a tout d'abord été validée sur des données synthétiques avant d'être appliquée à deux lots de données réelles.

La contribution de ces travaux de thèse réside dans l'élaboration d'un algorithme continu permettant de suivre les nombres d'ondes sur un intervalle de fréquence d'une centaine d'Hertz. L'étude réalisée dans ce manuscrit s'est orientée sur le cas des données recalées afin de pouvoir reconstruire les nombres d'ondes sur une plus grande gamme de fréquences.

Cette étude a permis de mettre en avant les limites de l'approche discrète par rapport à l'approche continue.

Nous allons maintenant présenter les axes principaux de recherche pour la suite de ces travaux ainsi que certains résultats obtenus.

Perspectives

Les principales perspectives dégagées par ces travaux de thèse sont :

- un seuil secondaire pour récupérer les modes dont le tracking est interrompu
- la prise en compte de la relation de dispersion sans l'implémenter directement dans un algorithme au travers d'un traitement 2D par une machine de Boltzmann restreinte (RBM en anglais),
- une sélection optimisée des capteurs sélectionnés au lieu d'une sélection aléatoire,
- l'impact des approches continues dans le processus d'inversion géo-acoustique.

Adaptation du seuil de propagation

En premier lieu, il serait intéressant de regarder la décroissance du seuil de propagation afin de pouvoir récupérer un mode dont le tracking a été coupé. En effet pour un mode m , nous avons vu qu'à chaque indice de fréquence ν on compare l'amplitude modale estimée à partir de la détection off-grid à un seuil de propagation $T_{m,\nu}$. Toutefois si à un indice fréquence ν_p le tracking est perdu, mais qu'à l'indice fréquentiel $\nu_p + o$ l'amplitude de ce mode soit plus excitée, pour pouvoir être détecté de nouveau le mode m devra être une nouvelle fois à T_0 et non T_{m,ν_p+o} . Cela rend ainsi extrêmement difficile la récupération d'un mode si le tracking est interrompu.

Une solution serait d'implémenter un vecteur gardant en mémoire l'ensemble des modes traqués. Sur chaque intervalle on appliquerait une descente de gradient et on comparerait l'amplitude modale associée à un nouveau seuil de détection T'_0 . La difficulté de l'implémentation réside dans l'écriture de T'_0 afin d'avoir un seuil dont on connaît la paramétrisation.

Traitement 2D : DSSoBaP

Contrairement à la méthode présentée dans ce manuscrit et aux autres méthodes présentées dans l'état de l'art, le traitement 2D qui nous intéresse dans ces perspectives consiste à intégrer la relation de dispersion. Pour ce faire nous nous basons sur l'approche bayésienne SoBaP dans laquelle nous adaptons le prior du modèle en proposant d'utiliser une machine de Boltzmann restreinte [Hinton, 2012].

Les RBM s'emploient intuitivement dans les approches bayésiennes, par exemple dans l'algorithme SoBaP on rappelle que le vecteur parcimonieux \mathbf{a} est décomposé comme le produit terme à terme d'un vecteur \mathbf{x} suivant une loi Gaussienne et d'un vecteur \mathbf{s} représentant le support de la représentation parcimonieuse et suivant une loi de Bernoulli. Dans cette nouvelle approche nous changeons l'a priori sur \mathbf{s} pour l'exprimer avec une RBM :

$$p(\mathbf{s}) = \sum_{\mathbf{h}} p(\mathbf{s}, \mathbf{h}) \propto \sum_{\mathbf{h}} \exp(\theta^T \mathbf{h} + \mathbf{b}^T \mathbf{s} + \mathbf{s}^T \mathbf{W} \mathbf{h}), \quad (4.17)$$

où \mathbf{h} est une variable binaire cachée de dimension P , θ et \mathbf{b} représentent des paramètres de biais tandis que la matrice \mathbf{W} représente les liens entre les coefficients de \mathbf{h} et de \mathbf{s} .

Les RBM suscitent aujourd'hui un certain intérêt en raison de leur faculté de représentation [Le Roux and Bengio, 2008] ainsi qu'à l'existence d'algorithmes efficaces pour les entraîner (comme la Constrictive Divergence, CD, [Hinton, 2012]). Ces raisons rendent les RBM très attrayantes pour apprendre des structures parcimonieuses suivant un modèle décrit par une relation physique.

Cette nouvelle approche se nomme DS-SoBaP pour "Deep Structured Soft Bayesian Pursuit".

Une première étude menée avec un post-doctorant de l'ENSTA Bretagne a été réalisée afin de pouvoir utiliser cet algorithme sur les données issues de la campagne sismique en Mer du Nord. Pour ce faire les RBM ont été entraînées sur un grand nombre de guides de Pekeris pour lesquels les paramètres environnementaux ont été variées. La figure 4.24 présente les différents diagrammes f-k obtenus tour à tour par :

- une projection sur l'espace de Fourier en utilisant l'intégralité de l'antenne
- une projection sur l'espace de Fourier en utilisant 36 capteurs aléatoirement sélectionnés
- l'algorithme discret SoBaP utilisant la relation de dispersion avec les mêmes 36 capteurs et en utilisant la divergence de Kullback-Leibler comme critère d'arrêt
- l'algorithme DS-SoBaP avec le même nombre de capteurs et le même critère d'arrêt

Cette figure illustre bien les apports de chaque méthode. La projection sur l'espace de Fourier avec antenne complète présente un diagramme f-k aisément exploitable, néanmoins la qualité du diagramme est sujet au nombre de capteurs utilisés puisqu'en diminuant drastiquement ce nombre on obtient un diagramme moins exploitable. Le passage aux algorithmes parcimonieux améliore significativement la reconstruction des

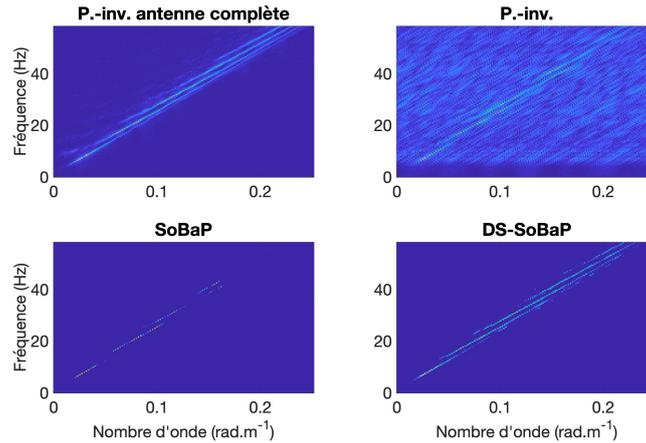


FIGURE 4.24. – Visualisation des différentes approches sur les données Mer du Nord avec 36 capteurs

nombre d'onde. La reconstruction faite par l'algorithme SoBaP met en évidence le début de chaque mode, tandis que l'approche DS-SoBaP améliore la reconstruction des modes sur l'ensemble du plan "f-k". Ces travaux encore naissant ont fait l'objet d'une première publication [Dorffer et al., 2020] ainsi que d'une soumission à la conférence ICASSP. Une étude plus approfondie est en cours afin de comparer entre autre cette approche avec des méthodes continues.

Sélection optimisée contre sélection aléatoire

Un autre axe de recherche porte sur la détermination d'une sélection optimisée afin de lever la condition aléatoire de l'acquisition compressée. A ce sujet, une méthode basée sur les travaux de [Chou, 1995, Goodwin and Elko, 1993, Tucker, 1957] testée par un post-doctorant de l'IMT-Atlantique a permis de déterminer une sélection de capteur optimisée. Cette sélection s'est faite à partir de plusieurs sous-sélections à diverses fréquences, les capteurs les plus régulièrement sélectionnés à chaque fréquence sont ensuite sélectionnés pour former la sélection optimisée. Cette sélection optimisée a été proposée pour des données synthétiques simulées avec un guide de Pekeris dont les caractéristiques sont les mêmes que celui présenté dans le chapitre 4. Toutefois la configuration de l'antenne est différente puisqu'elle est composée de 534 capteurs espacés de 3.75 mètres.

La méthode de sélection propose une solution à 72 capteurs dont nous comparons l'efficacité aux histogrammes des algorithmes OMP, COMP et CPOMP pour lesquels nous avons sélectionné aléatoirement 72 capteurs et réalisé 500 itérations.

La figure 4.25 présente les résultats de la distance de Jaccard moyennée sur la gamme de

fréquence [050] Hz où le SNR vaut 12 dB. Nous diminuons le SNR à 6 dB sur la figure 4.26.

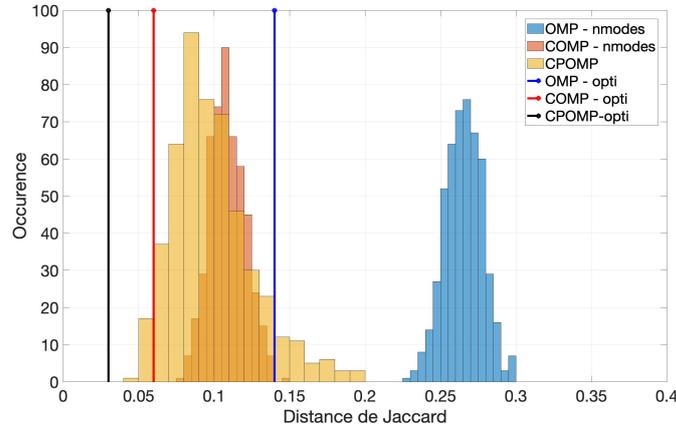


FIGURE 4.25. – Histogramme de la distance de Jaccard pour 500 itérations avec 72 capteurs aléatoirement sélectionnés. Superposition du résultat obtenu avec la sélection optimisée. SNR de 12 dB.

Lorsque le SNR est de 12 dB on observe que la sélection de capteurs proposée donne de bien meilleurs résultats que ceux obtenus par une sélection aléatoire. Cependant lorsque le SNR diminue, les performances de la sélection optimisée diminuent et correspondent au mieux aux meilleurs résultats de CPOMP (dans les 5% de la gaussienne), pour COMP le résultat de la sélection se trouve noyé dans le milieu de la gaussienne tandis que pour OMP la sélection donne un résultat figurant parmi les plus mauvais possibles.

Cette première étude n'est donc pas robuste par rapport au niveau de bruit, elle reste néanmoins satisfaisante et encourageante de part les résultats obtenus à fort SNR. D'autres méthodes de sélections de capteurs (notamment des méthodes avec des critères de pénalité) sont à l'étude afin d'améliorer la robustesse de la sélection.

Impact des approches continues dans le processus d'inversion géo-acoustique

Les travaux de cette thèse ayant eu pour objectif de proposer une approche permettant de reconstruire les nombres d'ondes associés aux modes propagatifs, il serait intéressant d'exploiter ensuite les diagrammes f-k obtenus par cet algorithme avec un nombre réduit de capteurs dans un processus d'inversion géo-acoustique. Les résultats obtenus seraient alors à comparer avec les résultats obtenus en premier lieu par une analyse de Fourier puis par différents algorithmes de la littérature.

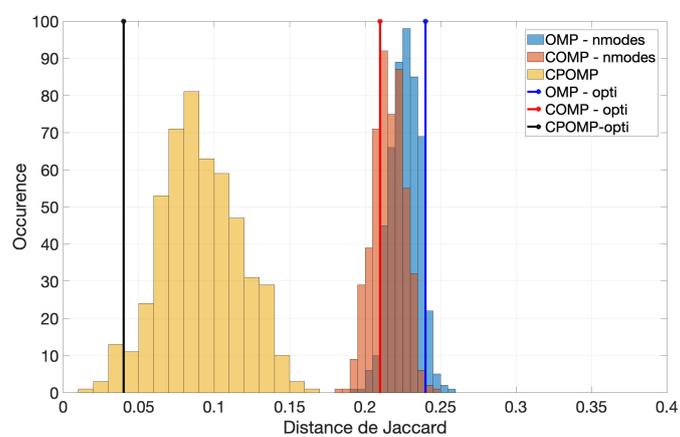


FIGURE 4.26. – Histogramme de la distance de Jaccard pour 500 itérations avec 72 capteurs aléatoirement sélectionnés. Superposition du résultat obtenu avec la sélection optimisée. SNR de 6 dB.

A. Acquisition compressée

Sommaire

A.1 Rappel sur les normes	113
A.2 Notions de convexité	113
A.3 Condition de reconstruction d'OMP	114

A.1. Rappel sur les normes

On appelle *norme* sur un espace vectoriel E de $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} toute application f de E vers \mathbb{R}_+ vérifiant les propriétés suivantes :

- Positivité :

$$\forall \mathbf{a} \in E \setminus \{0\}, f(\mathbf{a}) > 0. \quad (\text{A.1})$$

- Homogénéité :

$$\forall \mathbf{a} \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, f(\lambda \mathbf{a}) = |\lambda| f(\mathbf{a}). \quad (\text{A.2})$$

- Inégalité triangulaire :

$$\forall (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) \in (E)^2, f(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) \leq f(\mathbf{a}_1) + f(\mathbf{a}_2). \quad (\text{A.3})$$

A.2. Notions de convexité

Un problème d'optimisation convexe se présente de la façon suivante :

$$\min_{\mathbf{a} \in A} J(\mathbf{a}). \quad (\text{A.4})$$

Si :

- A est un ensemble convexe
- $J(\mathbf{a})$ est une fonction convexe sur A

On rappellera les définitions suivantes :

- A est un ensemble convexe si tout segment entre deux points de A reste dans A . Mathématiquement pour deux points $a_1, a_2 \in A$ et $0 < \theta < 1$ cela se traduit par :

$$\theta a_1 + (1 - \theta)a_2 \in A. \quad (\text{A.5})$$

- une fonction f est dite convexe si $\mathbf{dom} f \triangleq \{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^N | f(\mathbf{a}) < +\infty\}$ est un ensemble convexe et si pour tout $a, b \in \mathbf{dom} f$ et $\theta \in [0, 1]$ on a :

$$f(\theta a + (1 - \theta)b) \leq \theta f(a) + (1 - \theta)f(b). \quad (\text{A.6})$$

On en profitera pour rappeler de plus certaines propriétés des fonctions convexes :

- Si f est une fonction convexe, alors $g(a) = f(\mathbf{D}\mathbf{a} - \mathbf{y})$ est une fonction convexe
- Si f et h sont deux fonctions convexes, et m et n deux scalaires positifs, alors : $w(\mathbf{a}) = mf(\mathbf{a}) + nh(\mathbf{a})$ est une fonction convexe
- Si f est une fonction convexe non décroissante et que h est une fonction convexe ; alors $f(h(\mathbf{a}))$ est une fonction convexe
- Si f est une fonction convexe et $v > 0$ un scalaire positif quelconque ; alors l'ensemble défini par $A = \{\mathbf{a} | f(\mathbf{a}) \leq v\}$ est un ensemble convexe
- Une fonction convexe f est dite "propre" si $\mathbf{dom} f \neq \emptyset$ et que quelque soit \mathbf{a} , $f(\mathbf{a}) > -\infty$
- une fonction convexe f est dite "fermée" si pour $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ l'ensemble défini par $\{\mathbf{a} \in \mathbf{dom} f | f(\mathbf{a}) \leq \alpha\}$ est un ensemble fermé

A.3. Condition de reconstruction d'OMP

Rappelons d'abord les propriétés que nous allons utiliser dans cette démonstration :

Propriété A.1. — *La cohérence d'une matrice $\mathbf{D} \in \mathbb{K}^{L \times G}$ dont les colonnes sont normalisées satisfait :*

$$\mu \geq \sqrt{\frac{G - L}{L(G - 1)}}. \quad (\text{A.7})$$

et

Propriété A.2. — *La cohérence ℓ_1 d'une matrice $\mathbf{D} \in \mathbb{K}^{L \times G}$ dont les colonnes sont normalisées satisfait :*

$$\mu_1(k) \geq k \sqrt{\frac{G - L}{L(G - 1)}}; \text{ pour } k < \sqrt{G - 1} \quad (\text{A.8})$$

Démontrons maintenant, que si la fonction de cohérence μ_1 d'un dictionnaire $\mathbf{D} \in$

$\mathbb{C}^{M \times N}$ dont les colonnes sont normalisées vérifie

$$\mu_1(k) + \mu_1(k-1) < 1, \quad (\text{A.9})$$

alors tout vecteur k -parcimonieux $\mathbf{a} \in \mathbb{C}^N$ peut être exactement reconstruit à partir d'un vecteur de mesure $\mathbf{y} = \mathbf{D}\mathbf{a}$ après au plus k itérations de l'algorithme OMP.

On considère une famille de vecteurs $\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_N$ normalisés. Il nous faut montrer que pour tout support $K \subset \{1, \dots, N\}$ dont $\text{card}(K) = k$ la matrice \mathbf{D}_K est injective et que $\max_{j \in K} |\langle \mathbf{r}, \mathbf{d}_j \rangle| > \max_{l \in \bar{K}} |\langle \mathbf{r}, \mathbf{d}_l \rangle|$ pour tout vecteur résiduel $\mathbf{r} \in \{\mathbf{D}\mathbf{c}, \text{supp}(\mathbf{c}) \subset K\}$.

Posons $\mathbf{r} = \sum_{i \in K} r_i \mathbf{d}_i$ et $s \in K$ choisie de manière à ce que $|r_s| = \max_{i \in K} |r_i| > 0$. D'une part on a pour $l \in \bar{K}$:

$$|\langle \mathbf{r}, \mathbf{d}_l \rangle| = \left| \sum_{i \in K} r_i \langle \mathbf{d}_i, \mathbf{d}_l \rangle \right| \leq \sum_{i \in K} |r_i| |\langle \mathbf{d}_i, \mathbf{d}_l \rangle| \leq |r_s| \mu_1(k), \quad (\text{A.10})$$

et d'autre part on a :

$$|\langle \mathbf{r}, \mathbf{d}_s \rangle| = \left| \sum_{i \in K} r_i \langle \mathbf{d}_i, \mathbf{d}_s \rangle \right| \geq |r_s| |\langle \mathbf{d}_s, \mathbf{d}_s \rangle| - \sum_{i \in K, i \neq s} |r_i| |\langle \mathbf{d}_i, \mathbf{d}_s \rangle| \geq |r_s| - |r_s| \mu_1(k-1). \quad (\text{A.11})$$

On a donc bien l'injectivité de notre matrice \mathbf{D}_K .

B. Approche continue intégrant la relation de dispersion

Sommaire

B.1 Etude de performance : cas du guide de Pekeris	117
B.2 Application sur données réelles : Mer du Nord	120

B.1. Etude de performance : cas du guide de Pekeris

	$P_d = 50\%$	$P_d = 60\%$	$P_d = 70\%$	$P_d = 80\%$	$P_d = 90\%$
$P_{FA} = 0\%$	0.47	0.39	0.29	0.19	0,12
$P_{FA} = 5\%$	0.49	0.41	0.32	0.22	0 ,15
$P_{FA} = 10\%$	0.53	0.46	0.37	0.28	0.22
$P_{FA} = 20\%$	0.56	0.49	0.41	0.32	0.26

TABLE B.1. – Tableau récapitulatif des valeurs de la distance de Jaccard moyenne théorique sur l'intervalle [50 – 100] Hz en fonction des probabilités de bonnes détections et de fausses alarmes

	$P_d = 50\%$	$P_d = 60\%$	$P_d = 70\%$	$P_d = 80\%$	$P_d = 90\%$
$P_{FA} = 0\%$	0.48	0.41	0.29	0.2	0,07
$P_{FA} = 5\%$	0.51	0.45	0.34	0.26	0 ,13
$P_{FA} = 10\%$	0.53	0.46	0.36	0.28	0.16
$P_{FA} = 20\%$	0.57	0.51	0.41	0.34	0.23

TABLE B.2. – Tableau récapitulatif des valeurs de la distance de Jaccard moyenne théorique sur l'intervalle [100 – 150] Hz en fonction des probabilités de bonnes détections et de fausses alarmes

	$P_d = 50\%$	$P_d = 60\%$	$P_d = 70\%$	$P_d = 80\%$	$P_d = 90\%$
$P_{FA} = 0\%$	0.47	0.4	0.27	0.2	0,07
$P_{FA} = 5\%$	0.5	0.44	0.31	0.25	0,13
$P_{FA} = 10\%$	0.53	0.47	0.35	0.29	0.18
$P_{FA} = 20\%$	0.56	0.5	0.39	0.3	0.22

TABLE B.3. – Tableau récapitulatif des valeurs de la distance de Jaccard moyenne théorique sur l'intervalle [150 – 200] Hz en fonction des probabilités de bonnes détections et de fausses alarmes

Impact de la variation du SNR sur la distance de Jaccard pour l'algorithme OMP (nombre de mode comme critère d'arrêt) avec 30 capteurs sélectionnés aléatoirement en gardant la longueur d'antenne.

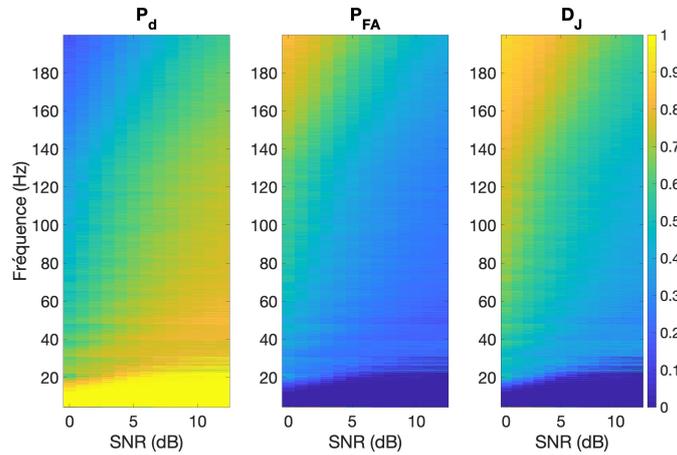


FIGURE B.1. – Impact de la variation du SNR en fonction des fréquences pour l'algorithme OMP avec le nombre de modes pour critère d'arrêt

Impact de la variation du SNR sur la distance de Jaccard pour l'algorithme COMP (nombre de mode comme critère d'arrêt) avec 30 capteurs sélectionnés aléatoirement en gardant la longueur d'antenne.

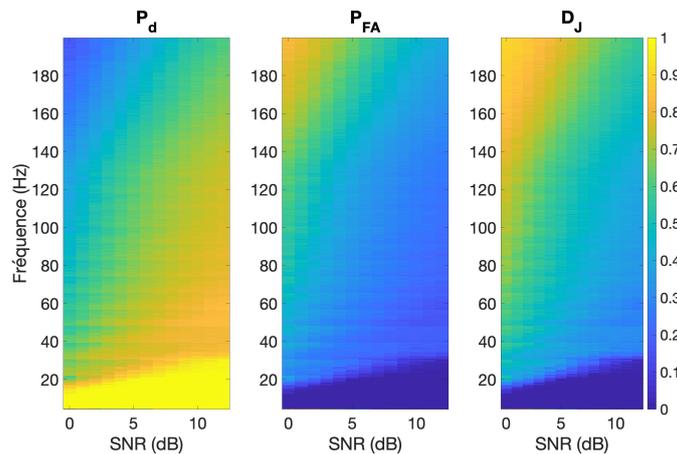


FIGURE B.2. – Impact de la variation du SNR en fonction des fréquences pour l'algorithme COMP avec le nombre de modes pour critère d'arrêt

Impact de la variation du SNR et du nombre de capteurs sélectionnés aléatoirement (en gardant la longueur d'antenne) sur la distance de Jaccard moyenne pour les intervalles $[50 - 100]$ Hz, $[100 - 150]$ Hz et $[150 - 200]$ Hz.

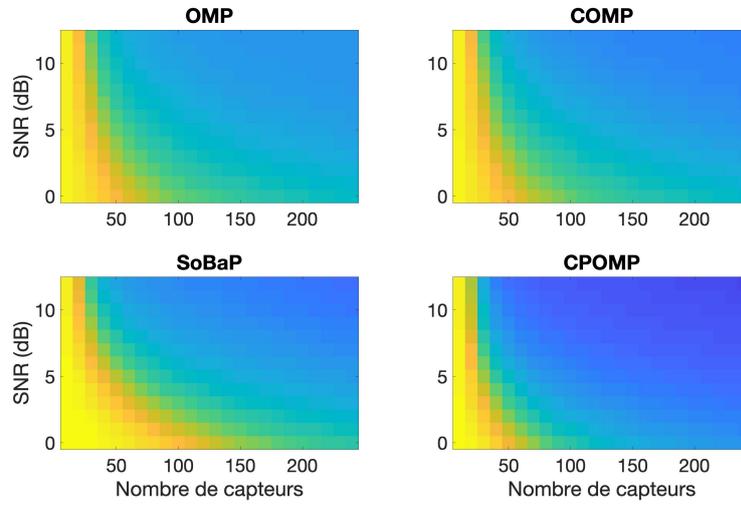


FIGURE B.3. – Impact de la variation du nombre de capteur et du SNR sur l'intervalle $[50 - 100]$ Hz pour : (haut-gauche) OMP, (haut-droite) SoBaP, (bas-gauche) COMP, (bas-droite) CPOMP

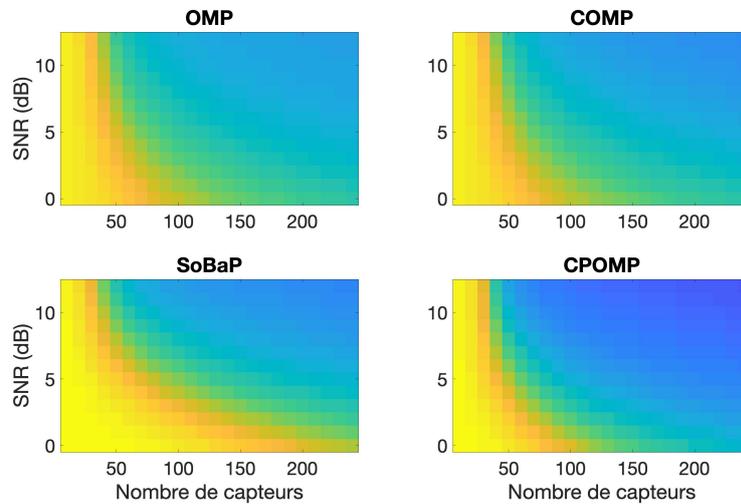


FIGURE B.4. – Impact de la variation du nombre de capteur et du SNR sur l'intervalle $[100 - 150]$ Hz pour : (haut-gauche) OMP, (haut-droite) SoBaP, (bas-gauche) COMP, (bas-droite) CPOMP

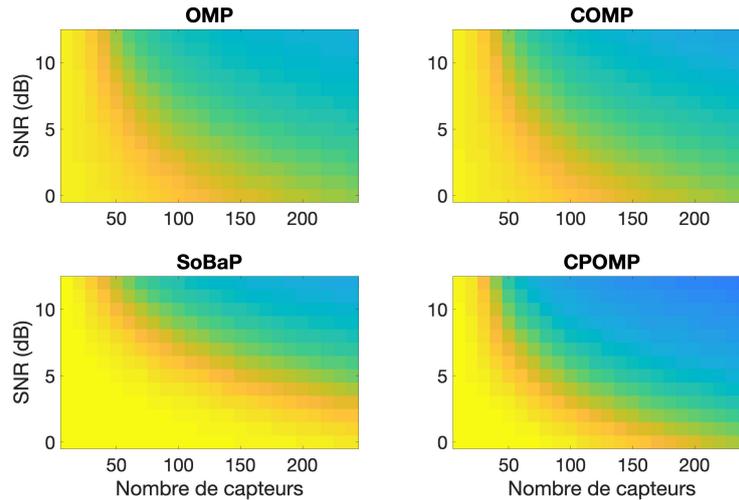


FIGURE B.5. – Impact de la variation du nombre de capteur et du SNR sur l'intervalle [150 – 200] Hz pour : (haut-gauche) OMP, (haut-droite) SoBaP, (bas-gauche) COMP, (bas-droite) CPOMP

B.2. Application sur données réelles : Mer du Nord

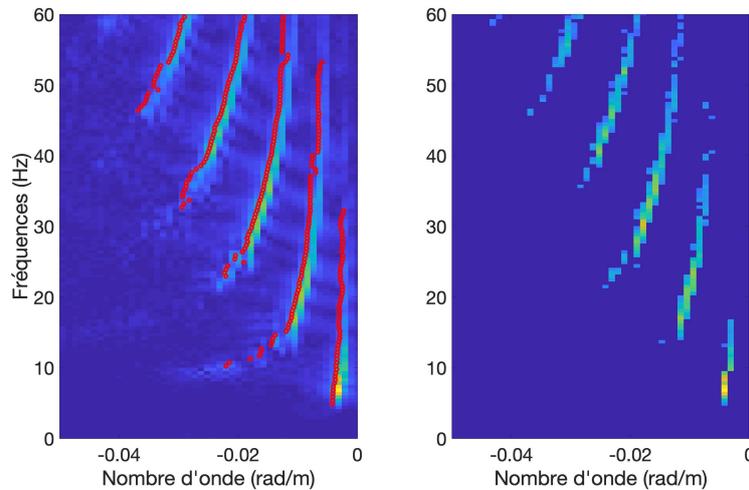


FIGURE B.6. – Application de CPOMP avec 40 capteurs : la reconstruction est superposée au résultat obtenu par la transformée de Fourier avec l'ensemble de l'antenne (gauche) et la reconstruction d'OMP avec 40 capteurs (droite)

En passant à 40 capteurs sélectionnés, on observe sur la figure B.6 que notre algorithme parvient à reconstruire l'intégralité du cinquième mode. On observe de plus sur les figures 4.20 et B.7 que le dernier mode est finalement récupéré par notre approche. De plus

l'ensemble des modes, en dehors cependant du premier, est reconstruit sur l'ensemble des fréquences d'étude. L'apport de la relation de dispersion permet bien de reconstruire les nombres d'ondes au fil des fréquences, on remarque bien que les deux premiers modes sont coupés sur la reconstruction d'OMP et non sur celles de CPOMP.

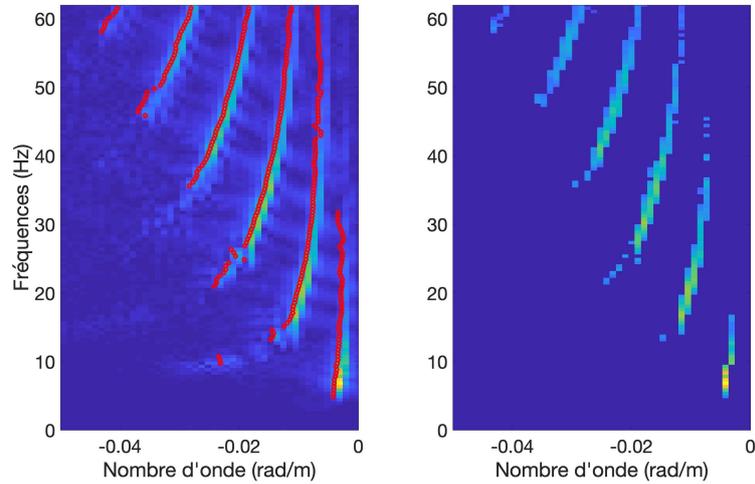


FIGURE B.7. – Application de CPOMP avec 80 capteurs : la reconstruction est superposée au résultat obtenu par la transformée de Fourier avec l'ensemble de l'antenne (gauche) et la reconstruction d'OMP avec 80 capteurs (droite)

Bibliographie

- [Amundsen and Ursin, 1991] Amundsen, L. and Ursin, B. (1991). Frequency-wavenumber inversion of acoustic data. *Geophysics*, 56(7) :1027–1039.
- [Bali and Mohammad-Djafari, 2008] Bali, N. and Mohammad-Djafari, A. (2008). Bayesian approach with hidden markov modeling and mean field approximation for hyperspectral data analysis. *IEEE Transactions on Image Processing*, 17(2) :217–225.
- [Beal, 2003] Beal, M. J. (2003). *Variational algorithms for approximate Bayesian inference*. PhD thesis, UCL (University College London).
- [Becker and Frisk, 2006] Becker, K. M. and Frisk, G. V. (2006). Evaluation of an autoregressive spectral estimator for modal wave number estimation in range-dependent shallow water waveguides. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 120(3) :1423–1434.
- [Becker et al., 2003] Becker, K. M., Rajan, S. D., and Frisk, G. V. (2003). Results from the geoacoustic inversion techniques workshop using modal inverse methods. *IEEE journal of oceanic engineering*, 28(3) :331–341.
- [Blumensath and Davies, 2008] Blumensath, T. and Davies, M. E. (2008). Iterative thresholding for sparse approximations. *Journal of Fourier analysis and Applications*, 14(5-6) :629–654.
- [Bonnell et al., 2013] Bonnell, J., Le Touzé, G., Nicolas, B., and Mars, J. I. (2013). Physics-based time-frequency representations for underwater acoustics : Power class utilization with waveguide-invariant approximation. *IEEE Signal Processing Magazine*, 30(6) :120–129.
- [Bonnell et al., 2020] Bonnell, J., Thode, A., Wright, D., and Chapman, R. (2020). Non-linear time-warping made simple : A step-by-step tutorial on underwater acoustic modal separation with a single hydrophone. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 147(3) :1897–1926.
- [Boyd et al., 2011] Boyd, S., Parikh, N., and Chu, E. (2011). *Distributed optimization and statistical learning via the alternating direction method of multipliers*. Now Publishers Inc.
- [Bucker, 1976] Bucker, H. P. (1976). Use of calculated sound fields and matched-field detection to locate sound sources in shallow water. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 59(2) :368–373.

- [Candes, 2008] Candes, E. J. (2008). The restricted isometry property and its implications for compressed sensing. *Comptes rendus mathématique*, 346(9-10) :589–592.
- [Candès and Fernandez-Granda, 2014] Candès, E. J. and Fernandez-Granda, C. (2014). Towards a mathematical theory of super-resolution. *Communications on pure and applied Mathematics*, 67(6) :906–956.
- [Candès and Wakin, 2008] Candès, E. J. and Wakin, M. B. (2008). An introduction to compressive sampling. *IEEE signal processing magazine*, 25(2) :21–30.
- [Chen et al., 2019] Chen, P., Cao, Z., Chen, Z., and Yu, C. (2019). Sparse off-grid doa estimation method with unknown mutual coupling effect. *Digital Signal Processing*, 90 :1–9.
- [Chi et al., 2011] Chi, Y., Scharf, L. L., Pezeshki, A., and Calderbank, A. R. (2011). Sensitivity to basis mismatch in compressed sensing. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 59(5) :2182–2195.
- [Chou, 1995] Chou, T. (1995). Frequency-independent beamformer with low response error. In *1995 International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, volume 5, pages 2995–2998. IEEE.
- [Clay and Medwin, 1977] Clay, C. S. and Medwin, H. (1977). *Acoustical oceanography : principles and applications*.
- [Consonni and Marin, 2007] Consonni, G. and Marin, J.-M. (2007). Mean-field variational approximate bayesian inference for latent variable models. *Computational Statistics & Data Analysis*, 52(2) :790–798.
- [Daubechies et al., 2004] Daubechies, I., Defrise, M., and De Mol, C. (2004). An iterative thresholding algorithm for linear inverse problems with a sparsity constraint. *Communications on Pure and Applied Mathematics : A Journal Issued by the Courant Institute of Mathematical Sciences*, 57(11) :1413–1457.
- [de Snoo, 1980] de Snoo, H. (1980). *I. stakgold, green’s functions and boundary value problems*, john wiley & sons, ltd., chiches-ter/new york, 1979. xvi+ 638 pp., price£ 18,-.
- [Denoyelle, 2018] Denoyelle, Q. (2018). *Theoretical and numerical analysis of super-resolution without grid*. PhD thesis.
- [Denoyelle et al., 2017] Denoyelle, Q., Duval, V., and Peyré, G. (2017). Support recovery for sparse super-resolution of positive measures. *Journal of Fourier Analysis and Applications*, 23(5) :1153–1194.
- [Djuric et al., 2003] Djuric, P. M., Kotecha, J. H., Zhang, J., Huang, Y., Ghirmai, T., Bugallo, M. F., and Miguez, J. (2003). Particle filtering. *IEEE signal processing magazine*, 20(5) :19–38.

- [Donoho and Elad, 2003] Donoho, D. L. and Elad, M. (2003). Optimally sparse representation in general (nonorthogonal) dictionaries via l_1 minimization. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 100(5) :2197–2202.
- [Donoho et al., 2012] Donoho, D. L., Tsaig, Y., Drori, I., and Starck, J.-L. (2012). Sparse solution of underdetermined systems of linear equations by stagewise orthogonal matching pursuit. *IEEE transactions on Information Theory*, 58(2) :1094–1121.
- [Dorffer et al., 2020] Dorffer, C., Paviet-Salomon, T., Chenadec, G. L., and Drémeau, A. (2020). Learning sparse structures for physics-inspired compressed sensing. *arXiv preprint arXiv :2011.12831*.
- [Drémeau and Herzet, 2017] Drémeau, A. and Herzet, C. (2017). Doa estimation in structured phase-noisy environments. In *2017 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*, pages 3176–3180. IEEE.
- [Drémeau et al., 2012] Drémeau, A., Herzet, C., and Daudet, L. (2012). Boltzmann machine and mean-field approximation for structured sparse decompositions. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 60(7) :3425–3438.
- [Drémeau et al., 2017] Drémeau, A., Le Courtois, F., and Bonnel, J. (2017). Reconstruction of dispersion curves in the frequency-wavenumber domain using compressed sensing on a random array. *IEEE Journal of Oceanic Engineering*, 42(4) :914–922.
- [Duarte and Baranuik, 2013] Duarte, M. F. and Baranuik, R. G. (2013). Spectral compressive sensing Applied and Computational Harmonic Analysis.
- [Duncan and Beresford, 1995] Duncan, G. and Beresford, G. (1995). Median filter behaviour with seismic data 1. *Geophysical prospecting*, 43(3) :329–345.
- [Duval and Peyré, 2015] Duval, V. and Peyré, G. (2015). Exact support recovery for sparse spikes deconvolution. *Foundations of Computational Mathematics*, 15(5) :1315–1355.
- [Ekanadham et al., 2011] Ekanadham, C., Tranchina, D., and Simoncelli, E. P. (2011). Recovery of sparse translation-invariant signals with continuous basis pursuit. *IEEE transactions on signal processing*, 59(10) :4735–4744.
- [Elad, 2010] Elad, M. (2010). *Sparse and redundant representations : from theory to applications in signal and image processing*. Springer Science & Business Media.
- [Elvira et al., 2020] Elvira, C., Gribonval, R., Soussen, C., and Herzet, C. (2020). When does omp achieve exact recovery with continuous dictionaries ?
- [Ewing et al., 1957] Ewing, W. M., Jardetzky, W. S., Press, F., and Beiser, A. (1957). Elastic waves in layered media. *PhT*, 10(12) :27.
- [Fevotte and Godsill, 2006] Fevotte, C. and Godsill, S. J. (2006). A bayesian approach for blind separation of sparse sources. *IEEE Transactions on Audio, Speech, and Language Processing*, 14(6) :2174–2188.

- [Févotte and Godsill, 2006] Févotte, C. and Godsill, S. J. (2006). Blind separation of sparse sources using jeffrey’s inverse prior and the em algorithm. In *International Conference on Independent Component Analysis and Signal Separation*, pages 593–600. Springer.
- [Flandrin et al., 1994] Flandrin, P., Baraniuk, R. G., and Michel, O. (1994). Time-frequency complexity and information. In *Proceedings of ICASSP’94. IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*, volume 3, pages III–329. IEEE.
- [Foucart and Rauhut, 2013] Foucart, S. and Rauhut, H. (2013). An invitation to compressive sensing. In *A mathematical introduction to compressive sensing*, pages 1–39. Springer.
- [Freire and Ulrych, 1988] Freire, S. L. M. and Ulrych, T. J. (1988). Application of singular value decomposition to vertical seismic profiling. *Geophysics*, 53(6) :778–785.
- [Frisk and Lynch, 1984] Frisk, G. V. and Lynch, J. F. (1984). Shallow water waveguide characterization using the Hankel transform. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 76(1) :205–216.
- [Fuchs, 2001] Fuchs, J.-J. (2001). On the application of the global matched filter to doa estimation with uniform circular arrays. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 49(4) :702–709.
- [Gabor, 1946] Gabor, D. (1946). Theory of communication. part 1 : The analysis of information. *Journal of the Institution of Electrical Engineers-Part III : Radio and Communication Engineering*, 93(26) :429–441.
- [Girolami, 2001] Girolami, M. (2001). A variational method for learning sparse and overcomplete representations. *Neural computation*, 13(11) :2517–2532.
- [Goodwin and Elko, 1993] Goodwin, M. M. and Elko, G. W. (1993). Constant beamwidth beamforming. In *1993 IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, volume 1, pages 169–172. IEEE.
- [Gower, 1985] Gower, J. C. (1985). Measures of similarity, dissimilarity and distance. *Encyclopedia of Statistical Sciences, Johnson and CB Read*, 5 :397–405.
- [Gribonval and Nielsen, 2008] Gribonval, R. and Nielsen, M. (2008). Beyond sparsity : Recovering structured representations by l_1 minimization and greedy algorithms. *Advances in computational mathematics*, 28(1) :23–41.
- [Hardin, 1973] Hardin, R. H. (1973). Applications of the split-step Fourier method to the numerical solution of nonlinear and variable coefficient wave equations. *SIAM Review (Chronicles)*, 15.
- [Harley and Moura, 2013] Harley, J. B. and Moura, J. M. F. (2013). Broadband localization in a dispersive medium through sparse wavenumber analysis. In *2013 IEEE*

- International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*, pages 4071–4075. IEEE.
- [Harley and Moura, 2015] Harley, J. B. and Moura, J. M. F. (2015). Dispersion curve recovery with orthogonal matching pursuit. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 137(1) :EL1—EL7.
- [Herzet and Drémeau, 2010a] Herzet, C. and Drémeau, A. (2010a). Bayesian pursuit algorithms. In *2010 18th European Signal Processing Conference*, pages 1474–1478. IEEE.
- [Herzet and Drémeau, 2010b] Herzet, C. and Drémeau, A. (2010b). Sparse representation algorithms based on mean-field approximations. In *2010 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*, pages 2034–2037. IEEE.
- [Hinton, 2012] Hinton, G. E. (2012). A practical guide to training restricted boltzmann machines. In *Neural networks : Tricks of the trade*, pages 599–619. Springer.
- [Ide et al., 1943] Ide, J. M., Post, R. F., and Fry, W. J. (1943). The Propagation of Underwater Sound at Low Frequencies, as a Function of the Acoustic Properties of the Bottom. Technical report, NAVAL RESEARCH LAB WASHINGTON DC.
- [Jensen et al., 2011] Jensen, F. B., Kuperman, W. A., Porter, M. B., and Schmidt, H. (2011). *Computational ocean acoustics*. Springer Science & Business Media.
- [Jones, 1987] Jones, L. K. (1987). On a conjecture of huber concerning the convergence of projection pursuit regression. *The annals of statistics*, pages 880–882.
- [Kay, 1988] Kay, S. M. (1988). *Modern spectral estimation : theory and application*. Pearson Education India.
- [Keller, 1978] Keller, J. B. (1978). Rays, waves and asymptotics. *Bulletin of the American mathematical society*, 84(5) :727–750.
- [Knudson et al., 2014] Knudson, K. C., Yates, J., Huk, A., and Pillow, J. W. (2014). Inferring sparse representations of continuous signals with continuous orthogonal matching pursuit. In *Advances in neural information processing systems*, pages 1215–1223.
- [Kuperman and Schmidt, 1989] Kuperman, W. A. and Schmidt, H. (1989). Self-consistent perturbation approach to rough surface scattering in stratified elastic media. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 86(4) :1511–1522.
- [Le Courtois and Bonnel, 2014a] Le Courtois, F. and Bonnel, J. (2014a). Autoregressive model for high-resolution wavenumber estimation in a shallow water environment using a broadband source. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 135(4) :EL199—EL205.

- [Le Courtois and Bonnel, 2014b] Le Courtois, F. and Bonnel, J. (2014b). Wavenumber tracking in a low resolution frequency-wavenumber representation using particle filtering. In *2014 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*, pages 6805–6809. IEEE.
- [Le Courtois and Bonnel, 2015] Le Courtois, F. and Bonnel, J. (2015). Compressed sensing for wideband wavenumber tracking in dispersive shallow water. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 138(2) :575–583.
- [Le Roux and Bengio, 2008] Le Roux, N. and Bengio, Y. (2008). Representational power of restricted boltzmann machines and deep belief networks. *Neural computation*, 20(6) :1631–1649.
- [Le Roux, 1996] Le Roux, S. (1996). *Propagation acoustique océanique UBF : 5-50 Hz : approche expérimentale de l'influence du fond marin*. PhD thesis, Grenoble INPG.
- [Lee et al., 2000] Lee, D., Pierce, A. D., and Shang, E.-C. (2000). Parabolic equation development in the twentieth century. *Journal of Computational Acoustics*, 8(04) :527–637.
- [Leontovich and Fock, 1946] Leontovich, . M. A. and Fock, V. A. (1946). Solution of the problem of propagation of electromagnetic waves along the earth’s surface by the method of parabolic equation. *J. Phys. Ussr*, 10(1) :13–23.
- [Levy, 2008] Levy, B. C. (2008). *Principles of signal detection and parameter estimation*. Springer Science & Business Media.
- [Lewicki and Sejnowski, 2000] Lewicki, M. S. and Sejnowski, T. J. (2000). Learning overcomplete representations. *Neural computation*, 12(2) :337–365.
- [Li et al., 2018] Li, Z., Niu, H., Gong, Z., and Zhang, R. (2018). Sparse bayesian learning for horizontal wavenumber retrieval in underwater acoustical signal processing. In *2018 IEEE 23rd International Conference on Digital Signal Processing (DSP)*, pages 1–4. IEEE.
- [Lin et al., 2019] Lin, Y.-T., Bonnel, J., Knobles, D. P., and Wilson, P. S. (2019). Broad-band waveform geoaoustic inversions with absolute travel time. *IEEE Journal of Oceanic Engineering*, 45(1) :174–188.
- [Mallat and Zhang, 1993] Mallat, S. G. and Zhang, Z. (1993). Matching pursuits with time-frequency dictionaries. *IEEE Transactions on signal processing*, 41(12) :3397–3415.
- [Marczewski and Steinhaus, 1958] Marczewski, E. and Steinhaus, H. (1958). On a certain distance of sets and the corresponding distance of functions. In *Colloquium Mathematicum*, volume 6, pages 319–327. Institute of Mathematics Polish Academy of Sciences.

- [Marshall and Olkin, 1985] Marshall, A. W. and Olkin, I. (1985). A family of bivariate distributions generated by the bivariate bernoulli distribution. *Journal of the American Statistical Association*, 80(390) :332–338.
- [McAulay, 1986] McAulay, A. D. (1986). Plane-layer prestack inversion in the presence of surface reverberation. *Geophysics*, 51(9) :1789–1800.
- [McNeese et al., 2014] McNeese, A. R., Wilson, P. S., Sagers, J. D., and Knobles, D. P. (2014). An impulsive source with variable output and stable bandwidth for underwater acoustic experiments. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 136(1) :EL8–EL12.
- [Nardin et al., 1998] Nardin, M., Glangeaud, F., and Mauuary, D. (1998). 1-200 Hz wave propagation in shallow water. In *IEEE Oceanic Engineering Society. OCEANS'98. Conference Proceedings (Cat. No. 98CH36259)*, volume 1, pages 390–394. IEEE.
- [Naseem et al., 2010] Naseem, I., Togneri, R., and Bennamoun, M. (2010). Sparse representation for speaker identification. In *2010 20th International Conference on Pattern Recognition*, pages 4460–4463. IEEE.
- [Needell and Tropp, 2009] Needell, D. and Tropp, J. A. (2009). Cosamp : Iterative signal recovery from incomplete and inaccurate samples. *Applied and computational harmonic analysis*, 26(3) :301–321.
- [Nicolas, 2004] Nicolas, B. (2004). *Identification du milieu océanique et localisation de source en ultra basse fréquence (1-100 Hz)*. PhD thesis, Grenoble INPG.
- [Nicolas et al., 2003] Nicolas, B., Mars, J., and Lacoume, J.-L. (2003). Geoacoustical parameters estimation with impulsive and boat-noise sources. *IEEE Journal of Oceanic Engineering*, 28(3) :494–501.
- [Niu et al., 2020] Niu, H., Gerstoft, P., Ozanich, E., Li, Z., Zhang, R., Gong, Z., and Wang, H. (2020). Block sparse Bayesian learning for broadband mode extraction in shallow water from a vertical array. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 147(6) :3729–3739.
- [Olshausen and Field, 1997] Olshausen, B. A. and Field, D. J. (1997). Sparse coding with an overcomplete basis set : A strategy employed by v1 ? *Vision research*, 37(23) :3311–3325.
- [Park et al., 2019] Park, Y., Gerstoft, P., and Seong, W. (2019). Grid-free compressive mode extraction. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 145(3) :1427–1442.
- [Pati et al., 1993] Pati, Y. C., Rezaifar, R., and Krishnaprasad, P. S. (1993). Orthogonal matching pursuit : Recursive function approximation with applications to wavelet decomposition. In *Proceedings of 27th Asilomar conference on signals, systems and computers*, pages 40–44. IEEE.

- [Paviet-Salomon et al., 2020] Paviet-Salomon, T., Dorffer, C., Bonnel, J., Nicolas, B., Chonavel, T., and Drémeau, A. (2020). Dispersive Grid-free Orthogonal Matching Pursuit for Modal Estimation in Ocean Acoustics. In *ICASSP 2020-2020 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*, pages 4602–4606. IEEE.
- [Pekeris, 1945] Pekeris, C. L. (1945). *Theory of propagation of explosive sound in shallow water*.
- [Raj and Ray, 2018] Raj, S. and Ray, K. C. (2018). Sparse representation of ecg signals for automated recognition of cardiac arrhythmias. *Expert systems with applications*, 105 :49–64.
- [Roux et al., 2004] Roux, P., Cassereau, D., and Roux, A. (2004). A high-resolution algorithm for wave number estimation using holographic array processing. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 115(3) :1059–1067.
- [Schmidt, 1986] Schmidt, R. (1986). Multiple emitter location and signal parameter estimation. *IEEE transactions on antennas and propagation*, 34(3) :276–280.
- [Schniter et al., 2008] Schniter, P., Potter, L. C., and Ziniel, J. (2008). Fast bayesian matching pursuit. In *2008 Information Theory and Applications Workshop*, pages 326–333. IEEE.
- [Shang et al., 1985] Shang, E., Clay, C., and Wang, Y. (1985). Passive harmonic source ranging in waveguides by using mode filter. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 78(1) :172–175.
- [Simovici and Djeraba, 2008] Simovici, D. A. and Djeraba, C. (2008). Mathematical tools for data mining. *SpringerVerlag, London*.
- [Smith, 2013] Smith, A. (2013). *Sequential Monte Carlo methods in practice*. Springer Science & Business Media.
- [Soussen et al., 2011] Soussen, C., Idier, J., Brie, D., and Duan, J. (2011). From bernoulli-gaussian deconvolution to sparse signal restoration. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 59(10) :4572–4584.
- [Tollefsen et al., 2019] Tollefsen, D., Dosso, S. E., and Knobles, D. P. (2019). Ship-of-opportunity noise inversions for geoacoustic profiles of a layered mud-sand seabed. *IEEE Journal of Oceanic Engineering*, 45(1) :189–200.
- [Townsend, 1971] Townsend, J. T. (1971). Theoretical analysis of an alphabetic confusion matrix. *Perception & Psychophysics*, 9(1) :40–50.
- [Tucker, 1957] Tucker, D. (1957). Arrays with constant beam-width over a wide frequency-range. *Nature*, 180(4584) :496–497.
- [Urlick, 1997] Urlick, R. J. (1997). Sound propagation in the sea.

- [Westwood et al., 1996] Westwood, E. K., Tindle, C. T., and Chapman, N. R. (1996). A normal mode model for acousto-elastic ocean environments. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 100(6) :3631–3645.
- [Wilson et al., 2020] Wilson, P. S., Knobles, D. P., and Neilsen, T. B. (2020). Guest editorial an overview of the seabed characterization experiment. *IEEE Journal of Oceanic Engineering*, 45(1) :1–13.
- [Xenaki and Gerstoft, 2015] Xenaki, A. and Gerstoft, P. (2015). Grid-free compressive beamforming. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 137(4) :1923–1935.
- [Xenaki et al., 2014] Xenaki, A., Gerstoft, P., and Mosegaard, K. (2014). Compressive beamforming. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 136(1) :260–271.
- [Xia et al., 2005] Xia, P., Zhou, S., and Giannakis, G. B. (2005). Achieving the Welch bound with difference sets. *IEEE Transactions on Information Theory*, 51(5) :1900–1907.
- [Yang et al., 2008] Yang, J., Wright, J., Huang, T., and Ma, Y. (2008). Image super-resolution as sparse representation of raw image patches. In *2008 IEEE conference on computer vision and pattern recognition*, pages 1–8. IEEE.
- [Yedidia et al., 2005] Yedidia, J. S., Freeman, W. T., and Weiss, Y. (2005). Constructing free-energy approximations and generalized belief propagation algorithms. *IEEE Transactions on information theory*, 51(7) :2282–2312.
- [Yilmaz, 2001] Yilmaz, Ö. (2001). *Seismic data analysis : Processing, inversion, and interpretation of seismic data*. Society of exploration geophysicists.
- [Zhang and Rao, 2012] Zhang, Z. and Rao, B. D. (2012). Recovery of block sparse signals using the framework of block sparse bayesian learning. In *2012 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*, pages 3345–3348. IEEE.

Résumé

L'objectif de ces travaux de thèse est de proposer une méthode permettant de reconstruire les nombres d'onde associés à des modes propagatifs au fil des fréquences dans le cas de sources large-bande émettant dans un milieu petit fond. Nous présentons dans un premier temps la propagation acoustique régissant notre cas d'étude, ce faisant nous pourrions décrire le signal reçu par un capteur comme la somme d'un petit nombre de composantes modales. Tant que l'acquisition du signal se fait de façon régulière dans le domaine spatial, une analyse de Fourier classique permet d'estimer ces nombres d'onde. Toutefois l'approche par transformée de Fourier est sujet à la disposition d'un nombre important de capteurs ce qui résulte au déploiement d'antenne de plusieurs kilomètres de long.

Nous verrons ensuite une nouvelle méthode de traitement de signal permettant de reconstruire un signal en disposant d'un plus petit nombre de mesures que celles nécessaires pour l'analyse de Fourier.

Après un état de l'art sur les méthodes de reconstruction parcimonieuse utilisées dans le cadre de la reconstruction de nombre d'onde nous aborderons le cas des approches continues permettant d'affiner la détection des nombres d'onde. La prise en compte d'une relation physique liant les nombres d'onde d'un même mode à deux indices fréquentiels successifs dans une approche continue de type gloutonne nous permet de proposer l'algorithme CPOMP.

Nous soumettrons notre approche à une étude quantitative menée sur deux jeux de données synthétiques issues de deux modèles : un guide de Pekeris et un guide plus générique car stratifié. Nous proposons de plus une analyse qualitative de notre approche menée sur des jeux de données réelles issus de la campagne sismique menée en Mer du Nord ainsi que de la campagne SBCEX.

Mots clés : propagation modale, représentations parcimonieuses, acquisition compressée, dictionnaire continu.