



HAL
open science

Égalité de Andreadakis et représentation pour des groupes de tresses généralisées

Abdoulrahim Ibrahim Youssouf

► **To cite this version:**

Abdoulrahim Ibrahim Youssouf. Égalité de Andreadakis et représentation pour des groupes de tresses généralisées. Topologie algébrique [math.AT]. Université Montpellier, 2021. Français. NNT : 2021MONT056 . tel-03612393

HAL Id: tel-03612393

<https://theses.hal.science/tel-03612393>

Submitted on 17 Mar 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**THÈSE POUR OBTENIR LE GRADE DE DOCTEUR
DE L'UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER**

En Mathématiques et modélisation

École doctorale I2S - Information, Structures, Systèmes

Unité de recherche UMR 5149 - IMAG - Institut Montpellierain Alexander Grothendieck

**Égalité d'Andreadakis et représentation
pour des groupes de tresses généralisées**

Présentée par Abdourahim IBRAHIM

Le 13 septembre 2021

Sous la direction de Emmanuel Wagner et Michele Bolognesi

Devant le jury composé de

Michele BOLOGNESI	Professeur des universités	Université de Montpellier	Directeur
Paolo BELLINGERI	Maître de conférences HDR	Université de Caen Normandie	Rapporteur
Stéphane BASEILHAC	Professeur des universités	Université de Montpellier	Examineur
Jacques DARNE	Chargé de recherche FNRS	Université catholique de Louvain	Examineur
Aurélien DJAMENT	Chargé de recherche au CNRS	Université de Lille	Rapporteur
Louis FUNAR	Directeur de recherche au CNRS	Université Grenoble Alpes	Président du jury
Hoel QUEFFELEC	Chargé de recherche CNRS	Université de Montpellier	Examineur
Emmanuel WAGNER	Professeur des universités	Université de Paris Diderot	Co-directeur



**UNIVERSITÉ
DE MONTPELLIER**

*Andreadakis equality and representation for
generalized braid groups*

Résumé-Abstract

Résumé. Le groupe de tresses soudées pures sur n brins ou groupe de McCool $P\Sigma_n$ ($n \geq 1$) possède des familles de sous-groupes remarquables telles que le groupe de tresses d'Artin pure P_n , le groupe de McCool triangulaire supérieur ou le groupe de tresses soudées pures triangulaires supérieures $P\Sigma_n^+$ et le groupe des automorphismes intérieurs partiels I_n . Il est montré que la conjecture d'Andreadakis généralisée vaut pour les groupes $P\Sigma_n^+$ et P_n . Nous démontrons un résultat analogue pour le groupe I_n et établissons un isomorphisme entre I_n et $\text{Int}(P\Sigma_{n+1}^+)$, le groupe des automorphismes intérieurs de $P\Sigma_{n+1}^+$.

Nous proposons une méthode itérative, comparable à la méthode de Long-Moody développée par D. Long et J. Moody, qui permet de relever des représentations de $P\Sigma_{n+1}$ à $P\Sigma_n$ généralisant ainsi la représentation de Gassner de P_n . Elle donne par exemple le produit tensoriel de deux extensions de la représentation de Gassner de P_n en le relevant successivement la représentation triviale de $P\Sigma_{n+2}$. Nous construisons également, en adaptant une méthode donnée par Lüdde et Toppan, une représentation du groupe de tresses virtuelles sur n brins VB_n dans des matrices à coefficients dans l'anneau du groupe de tresses soudées WB_n qui donne par la suite une nouvelle représentation de VB_n .

Abstract. The pure welded braid group on n strands or McCool group $P\Sigma_n$ ($n \geq 1$) has families of remarkable subgroups such as the pure Artin braid group P_n , the upper-triangular McCool group or the upper-triangular pure welded braid group $P\Sigma_n^+$ and the partial inner automorphisms group I_n . It is shown that the generalized Andreadakis conjecture holds for the groups $P\Sigma_n^+$ and P_n . We prove an analogous result for the group I_n and establish an isomorphism between I_n and the inner automorphism group $\text{Int}(P\Sigma_{n+1}^+)$ of $P\Sigma_{n+1}^+$.

We propose an iterative method, comparable to the Long-Moody method developed by D. Long and J. Moody, for "lifting" representations from $P\Sigma_{n+1}$ to $P\Sigma_n$ thus generalizing the Gassner representation of P_n . It gives for instance the tensor product of two extensions of the Gassner representation of P_n by lifting successively the trivial representation of $P\Sigma_{n+2}$. We also construct, by adapting a method given by Lüdde and Toppan, a representation of the virtual braid group on n strands VB_n in terms of matrices with values in the ring of the welded braid group WB_n which subsequently yields a new representation of VB_n .

“Les endurents auront leur pleine récompense sans compter.”

Sourate Az-Zoumar - verset 10

“ La vie n'est bonne qu'à étudier et à enseigner les mathématiques.”

Blaise Pascal

Remerciements

Un très grand merci à toutes les personnes qui ont contribué à mener ma thèse à terme avec succès.

Je veux plus particulièrement exprimer mes remerciements et ma profonde gratitude à Emmanuel Wagner qui m'a vraiment beaucoup soutenu pour mener à bien cette thèse. Je le suis reconnaissant pour le temps qu'il a dû relire plusieurs fois cette thèse. J'apprécie la chance d'avoir pu travailler avec lui afin de lui faire relire et corriger mes textes. Merci beaucoup ! J'espère que notre collaboration ne s'arrêtera pas là et que nous aurons encore l'occasion de travailler ensemble dans les années à venir.

Je tiens à associer à ces remerciements Michele Bolognesi ainsi qu'à tous les membres du jury pour leur présence, pour leur lecture attentive de ma thèse ainsi que pour les remarques et les questions qu'ils m'adresseront lors de ma soutenance afin d'améliorer mon travail : Aurélien Djament, Hoel Queffelec, Jacques Darné, Louis Funar, Paolo Bellingerie et Stéphane Baseilhac. Merci beaucoup à chacun de vous.

Je tiens à nouveau à remercier très chaleureusement les deux rapporteurs de cette thèse Aurélien Djament et Paolo Bellingerie, pour l'honneur qu'ils m'ont fait pour leur participation à mon jury de thèse en qualité de rapporteur de ma thèse et pour leurs remarques et commentaires.

Je remercie à toute l'équipe de séminaire AGATA et tous les membres de l'Institut Montpellierain Alexander Grothendieck (IMAG) ainsi que tous les personnels administratifs du bâtiment 9. Un merci sincère à Michel Nguiffo-Boyom et Thomas Haettel pour les discussions mathématiques et aussi pour leurs conseils. Mes remerciements vont également aux organisateurs de Winter Braids, une école de topologie en basse dimension et aux collègues doctorant.e.s (je ne prendrai pas le risque d'essayer de tous les citer). Un merci tout spécial à chacun de mes co-bureaux pour nos moments conviviaux et pour nos discussions mathématiques ou non dans le bureau 115 durant ces 4 années de thèse : Néstor Fernandez Vargas, Robert Rapadamnaba, Gwenaël Peltier, Harnist André.

De grands mercis à mes amis et patriotes: Ibrahim Moussa, Omar Yonis, Abdoufatah Mohamed, Ahmed-Nour Ainan, Abdourahman Idriss (Inza), Amin Galib, Houssein Abdillahi, Samatar Abdo, Fahmy Ibrahim, Youssouf Yonis.

À titre plus particulier, je remercie chaleureusement à Hamda Youssouf pour son soutien moral, pour ses conseils et ses encouragements durant ces 4 années de thèse. Je tiens à la remercier aussi pour la relecture de mon manuscrit.

Enfin, cette thèse n'aurait pas vu le jour si je n'avais été soutenu par mes parents, mes frères et mes sœurs. Il m'est impossible de ne pas remercier individuellement chacun de mes frères et sœurs, Dr Ahmed, Omar, Kadra-Habon, Bahja, Mohamed-Mahad, Anissa, Houssein-Aboubaker, Awo, Boussad-Ilwad, ainsi que mes très précieux parents, Ibrahim Youssouf et Amina Mohamed pour leurs soutiens inégalables tout au long de la thèse. Leurs soutiens qui étaient très importants pour moi durant ma thèse m'ont été bien utiles au succès de ma recherche et de ce travail. Je leur adresse toute ma gratitude du fond du cœur.

Un énorme merci à tou.t.e.s.

Table des matières

Résumé-Abstract	3
Remerciements	5
Table des matières	7
Dédicace	9
Notations	11
Chapitre 1 Introduction	15
Chapitre 2 Généralités	27
2.1 Suite centrale descendante d'un groupe	27
2.1.1 Suite centrale descendante d'un groupe libre de rang fini	31
2.1.2 Suite centrale descendante d'un produit semi-direct	33
2.2 Groupe des IA-automorphismes d'un groupe libre	35
2.3 Groupe de McCool $P\Sigma_n$	36
2.4 Filtration d'Andreadakis	38
2.5 L'homomorphisme de Johnson	43
2.6 Idéal d'augmentation relative d'un groupe	45
Chapitre 3 Étude sur l'égalité d'Andreadakis pour un sous-groupe du groupe de McCool	49

3.1	Le groupe des automorphismes intérieurs partiels	50
3.2	Suite centrale descendante du groupe I_n	52
3.3	Égalité d'Andreadakis pour I_n	54
Chapitre 4 Représentations matricielles de groupe de tresses généralisées		59
4.1	Deux généralisations du groupe de tresses ordinaires	60
4.1.1	Le groupe des automorphismes par permutation-conjugaison de F_n	60
4.1.2	Le groupe de tresses virtuelles	62
4.2	Généralisation de la représentation de Burau et de Gassner	64
4.2.1	Construction à partir de la représentation d'Artin	64
4.2.2	Comparaison entre deux constructions	68
4.2.3	Le groupe de McCool opérant sur l'idéal d'augmentation relative	71
4.3	Construction d'une méthode itérative	76
4.4	Un relèvement de représentation du groupe de tresses virtuelles	80
A Suite centrale descendante des groupes de McCool		85
A.1	Groupe quotient de la suite central descendante pour $P\Sigma_n$	85
A.2	Groupe quotient de la suite centrale descendante pour $P\Sigma_n^+$	90
B Anneau de cohomologie du groupe I_n		93
Bibliographie		95

Dédicace

Je dédie cette thèse

À mon très cher papa Ibrahim Youssouf plus connu sous le sobriquet de *Hassan Abouras*. Tu as été, es et seras toujours pour moi mon modèle, ma référence et la personne qui m'a fait tant aimer les mathématiques. Plus je grandis, plus j'apprécie tout ce que tu as fait pour moi. Grâce à toi papa, j'ai appris le sens du travail et de la responsabilité. Je tiens à honorer l'homme que tu es et je voudrais te remercier avec ce modeste travail qui est le fruit de tous les sacrifices que tu as déployés pour mon éducation et ma formation. Je t'aime papa et j'implore le tout-puissant pour qu'il t'accorde une bonne santé et une vie longue et heureuse.

À ma très chère maman Amina Mohamed plus connu sous le sobriquet de *Fatouma Omar Bilal*. Oh ma très précieuse maman ! Aucune dédicace ne saurait assez géniale pour exprimer tout l'amour, la tendresse et tous les sacrifices que tu m'as donnés depuis ma naissance, durant mon enfance, et même à mon âge adulte. Quoique je puisse écrire, je ne pourrais exprimer ma profonde reconnaissance. Tu étais, es et seras toujours pour moi la source inépuisable de patience et de sacrifice. Ton amour, ta générosité, tes prières, tes bénédictions, ton soutien... m'ont été une immense énergie tout au long de mon existence et d'un grand secours pour mener à bien mes études. En témoignage des années de sacrifices, d'encouragement, de prières et surtout de toute l'affection dont tu m'as toujours donné durant toute ma vie, je ne peux que m'incliner et te remercier en te dédiant ce travail. Que le tout-puissant t'accorde une bonne santé, une longue vie de bonheur. Je t'aime maman.

À mes frères et mes sœurs Dr Ahmed, Omar, Kadra, Bahja, Anissa, Mohamed, Awo, Houssein et Boussad. Tous les moments passés ensemble, mes frères et sœurs puissent se consolider et

Table des matières

perpétuer encore plus nos liens fraternels. Je vous dédie ce travail en témoignage de mon amour fraternel indéfectible.

À tous les membres de ma grande famille Mohamed Faaroleh et de Omar Bilal.

À tous mes enseignants depuis primaire jusqu'à mon cursus universitaire.

Notations

Tout au long de cette thèse, la lettre G désigne un groupe quelconque dont nous notons e_G l'élément neutre et nous utilisons la notation et les conventions suivantes. Soient \mathbb{Z} et \mathbb{C} l'ensemble des entiers relatifs et le corps des nombres complexes respectivement. Pour un entier non nul n fixé, soit F_n un groupe libre de rang n et de générateurs libres x_1, \dots, x_n .

1. On note $\text{Aut}(G)$ l'ensemble des automorphismes de G et 1 son élément identité.
2. Le groupe $\text{Aut}(G)$ agit naturellement sur G : pour tout $v \in \text{Aut}(G)$ et $x \in G$, l'action de v sur x est notée $v(x)$. Plus généralement, Les applications sont régulièrement écrites à gauche, l'image d'un élément x par une application f s'écrit $f(x)$ et non $(x)f$. La composition des applications $f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow Z$ est $g \circ f$, et non $f \circ g$.
3. Par $N \leq G$, nous voulons dire que N est un sous-groupe de G . Par $N \trianglelefteq G$, nous voulons dire que N est un sous-groupe normal de G . Étant donné un $N \trianglelefteq G$, nous noterons la classe d'un élément $g \in G$ dans le groupe quotient G/N par \bar{g} . On note $[G, G] = \langle \{[x, y] := x^{-1}y^{-1}xy \mid x, y \in G\} \rangle$ le groupe dérivé de G et il est le plus petit sous-groupe normal pour lequel le groupe quotient $G^{\text{ab}} := G/[G, G]$ est l'abélianisé de G .
4. Étant donné un sous-ensemble E de G , nous désignons par $\langle E \rangle$ le sous-groupe de G engendré par E .
5. Pour un autre groupe H , nous désignons par $Z(H)$ le centre de H et nous écrivons $\bar{H} = H/Z(H)$; \bar{H} est isomorphe au groupe $\text{Int}(H)$ des automorphismes intérieurs de H .
6. Pour tout anneau R et un entier positif arbitraire n , on note $\text{GL}(n, R)$ le groupe des matrices inversibles de taille $n \times n$ à coefficients dans R .

Aperçu de la thèse

Le groupe des IA-automorphismes, noté IA_n , est le sous-groupe de $\text{Aut}(F_n)$ agissant trivialement sur l'abélianisé de F_n et contient deux filtrations descendantes remarquables. L'une d'elles est la filtration d'Andreadakis $\{\mathcal{A}_n(k)\}_{k \geq 1}$, constituée en degré k des automorphismes de F_n agissant trivialement modulo le k -ième terme de la suite centrale descendante $\Gamma_k(F_n)$ de F_n et l'autre étant sa suite centrale descendante $\{\Gamma_k(IA_n)\}_{k \geq 1}$. Andreadakis [A65] a conjecturé que ces filtrations coïncident, ce que Laurent Bartholdi [B13, B16] a infirmé de nombreuses années plus tard à l'aide de calculs sur ordinateur. Cela est loin de clore la question dans la mesure où l'on ignore toujours à peu près tout de la façon dont ces deux filtrations diffèrent. Le problème d'Andreadakis donne lieu à des variantes pour tout sous-groupe B de IA_n : pour chaque entier k , on dispose d'inclusions $\Gamma_k(B) \subseteq B \cap \Gamma_k(IA_n) \subseteq B \cap \mathcal{A}_n(k)$ dont il est naturel de se demander si elles sont des égalités (conjecture d'Andreadakis généralisée pour B), ou à quel point elles en sont éloignées. En considérant un sous-groupe de IA_n , le groupe de tresses soudées pures sur n brins ou le groupe de McCool $P\Sigma_n$, Satoh a formulé dans [S12] la conjecture suivante.

Conjecture 0.1. *La filtration d'Andreadakis restreinte à $P\Sigma_n$ coïncide avec la suite centrale descendante de $P\Sigma_n$.*

Cette thèse est divisée en deux parties décrites ci-dessous :

- (i) Nous étudions une variante de la conjecture 0.1. Nous considérons un sous-groupe de $P\Sigma_n$, donc un sous-groupe de IA_n , le groupe des automorphismes intérieurs partiels I_n . Après avoir étudié ce groupe et déterminé l'algèbre de Lie associée à la suite centrale descendante de I_n , nous démontrons que la conjecture d'Andreadakis généralisée vaut pour I_n et démontrons également que I_n est isomorphe au groupe des automorphismes intérieurs $\text{Int}(P\Sigma_{n+1}^+)$ du groupe de McCool triangulaire supérieur ou encore appelé groupe de tresses soudées pures triangulaires supérieures $P\Sigma_{n+1}$.

(ii) Dès lors, après avoir introduit trois généralisations du groupe de tresses ordinaires, le groupe de tresses virtuelles sur n brins VB_n , le groupe de tresses soudées sur n brins WB_n et le groupe des automorphismes par permutation-conjugaison de F_n , noté $B\Sigma_n$, nous construisons des représentations matricielles (à coefficients dans des algèbres de groupes). Nous construisons à travers la méthode de Lüdde et Toppan [LT92] une représentation matricielle dans l'anneau de groupe de tresses soudées, qui permet d'obtenir une nouvelle représentation de VB_n dans $GL(n, \mathbb{R})$. Cette représentation ne se factorise pas en une représentation d'un groupe de tresses soudées WB_n (bien que, dans un certain cas, elle le soit). Dans le cas du groupe de tresses soudées pures ou groupe de McCool $P\Sigma_n$, nous présentons une méthode itérative inspirée des travaux [LT92, CL92, L96], comparable à la méthode de Long-Moody, qui permet de construire une représentation de $P\Sigma_n$ dans $GL(n, \mathbb{R}[F_n \rtimes P\Sigma_n])$ (où $\mathbb{R}[F_n \rtimes P\Sigma_n]$ est l'anneau du groupe $F_n \rtimes P\Sigma_n$) généralisant la représentation de Gassner de P_n , et qui permet également de relever des représentations de $P\Sigma_{n+1}$ à $P\Sigma_n$.

Introduction

Le groupe des IA-automorphismes IA_n est par définition égal au noyau de l'épimorphisme canonique $\mathcal{N} : \text{Aut}(F_n) \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{Z})$ induit par l'abélianisation $F_n \rightarrow F_n/[F_n, F_n] = \mathbb{Z}^n$ et est engendré par les automorphismes de F_n donnés par [M35]:

$$\xi_{k,s,t}(x_1) = \begin{cases} x_k [x_s, x_t] & \text{si } k = 1, \\ x_1 & \text{si } k \neq 1 \end{cases}, \quad \xi_{i,j}(x_1) = \begin{cases} x_j^{-1} x_i x_j & \text{si } l = i, \\ x_1 & \text{si } l \neq i \end{cases} \quad (1.1)$$

où $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$, $1 \leq i \neq j \leq n$, $1 \leq k, s, t \leq n$ et k, s, t sont distincts. Dans [N18, N24], il est montré que IA_2 coïncide avec le groupe $\text{Int}(F_2)$ des automorphismes intérieurs de F_2 ; donc IA_2 est un groupe libre de rang 2. Pour $n \geq 3$, IA_n est beaucoup plus grand que le groupe $\text{Int}(F_n)$ des automorphismes intérieurs de F_n . Bien que le groupe $IA_n (n \geq 1)$ soit de type fini, Krstić et McCool [KM97] ont montré qu'il n'est pas de présentation finie pour $n = 3$ et jusqu'à présent on ne sait toujours pas si IA_n est de présentation finie pour $n \geq 4$. Afin d'étudier le groupe IA_n , Andreadakis [A65] a introduit une filtration descendante de IA_n dite filtration d'Andreadakis :

$$IA_n = \mathcal{A}_n(1) \supset \mathcal{A}_n(2) \supset \mathcal{A}_n(3) \supset \cdots \supset \mathcal{A}_n(k) \supset \mathcal{A}_n(k+1) \supset \cdots \quad (1.2)$$

où $\mathcal{A}_n(k)$ ($k \geq 1$) est le sous-groupe de $\text{Aut}(F_n)$ constitué des automorphismes agissant trivialement modulo le k -ième terme de la suite centrale descendante $\Gamma_k(F_n)$ de F_n . Ce sous-groupe coïncide d'ailleurs avec le k -ième terme de la suite centrale descendante $\Gamma_k(IA_n)$ de IA_n dans certains cas.

Par exemple, par définition, $\mathcal{A}_n(1) = \Gamma_1(\text{IA}_n) = \text{IA}_n$ et $\mathcal{A}_n(2) = \Gamma_2(\text{IA}_n)$ pour tout $n \geq 1$ par [[B66], Lemme 5]. Par ailleurs, Andreadakis a démontré que $\mathcal{A}_3(3) = \Gamma_3(\text{IA}_3)$ et $\mathcal{A}_2(k) = \Gamma_k(\text{IA}_2)$ pour tout $k \geq 1$ dans [A65]. En outre, il a récemment été établi par Satoh [S19] que $\mathcal{A}_n(3) = \Gamma_3(\text{IA}_n)$ améliorant ainsi le résultat de Pettet [P05] qui montre que $\Gamma_3(\text{IA}_n)$ est au pire d'indice fini dans $\mathcal{A}_n(3)$. Toutefois, par la conjecture d'Andreadakis [A65] selon laquelle, $\mathcal{A}_n(k) = \Gamma_k(\text{IA}_n)$ pour tout $n, k \geq 1$ n'est pas vraie en général (cf. [B13, B16]). Dans [S12], Satoh étudie une variante de cette conjecture en considérant un sous-groupe $\text{P}\Sigma_n$ ($n \geq 1$) de IA_n engendré par $\xi_{i,j}$ ($1 \leq i \neq j \leq n$) et sa suite centrale descendante $\{\Gamma_k(\text{P}\Sigma_n)\}_{k \geq 1}$ pour formuler la conjecture suivante dont il montre qu'elle est vraie lorsque $k \in \{1, 2, 3\}$. Ce sous-groupe qui est mieux connu sous le nom de groupe de tresses soudées pures sur n brins ou groupe de McCool est aussi connu comme étant l'une des généralisations du groupe de tresses pures sur n brins P_n et nous renvoyons à [B03a, D17] pour plus d'informations à ce sujet.

Conjecture 1.1. (*Conjecture de Satoh*)

La filtration d'Andreadakis restreinte à $\text{P}\Sigma_n$ coïncide avec la suite centrale descendante de $\text{P}\Sigma_n$: pour tout $k \geq 4$,

$$\mathcal{M}_n(k) = \Gamma_k(\text{P}\Sigma_n) \quad (n \geq 2). \tag{1.3}$$

où $\mathcal{M}_n(k) := \mathcal{A}_n(k) \cap \text{P}\Sigma_n$ pour chaque $k \geq 1$.

- L'un de nos principaux objectifs durant cette thèse était de démontrer la conjecture de Satoh. La stratégie que nous avons mise en place pour la démontrer consiste en les points suivants :

- (1) Utiliser une application basée sur l'homomorphisme de Johnson τ_k de $\text{Aut}(\text{F}_n)$ (cf. section 2.5), déterminer l'image de cette application et calculer le rang de cette dernière,
- (2) Déterminer le rang $\phi_k(\text{P}\Sigma_n)$ des groupes $\text{gr}^k(\text{P}\Sigma_n) := \Gamma_k(\text{P}\Sigma_n)/\Gamma_{k+1}(\text{P}\Sigma_n)$ associés à la suite centrale descendante $\{\Gamma_k(\text{P}\Sigma_n)\}_{k \geq 1}$ de $\text{P}\Sigma_n$ et ensuite faire une comparaison de rang, si les

deux rangs sont égaux alors nous aurons une deuxième application, qui se révélera être un isomorphisme; enfin conclure en utilisant une récurrence sur $k \geq 1$.

Ce qui nous a ramenés d'abord à étudier le rang $\phi_k(\mathbb{P}\Sigma_n)$ de $\text{gr}^k(\mathbb{P}\Sigma_n)$ ($k \geq 1$) en étudiant la structure de groupe de $\mathbb{P}\Sigma_n$. Afin de déterminer $\phi_k(\mathbb{P}\Sigma_n)$ ($k \geq 1$), nous considérons la suite centrale descendante $\{\Gamma_k(\mathbb{F}_n)\}_{k \geq 1}$ de \mathbb{F}_n dont la structure des quotients $\Gamma_k(\mathbb{F}_n)/\Gamma_{k+1}(\mathbb{F}_n)$ ($k \geq 1$) est bien connue. Chaque $\mathcal{L}_n(k) := \Gamma_k(\mathbb{F}_n)/\Gamma_{k+1}(\mathbb{F}_n)$ est un groupe abélien libre de rang fini, $r_n(k)$. Dans [W37], Witt a montré que

$$r_n(k) = \frac{1}{k} \sum_{d|k} \mu(d) \cdot n^{\frac{k}{d}}, \quad (1.4)$$

où μ est la fonction de Möbius et d parcourt tous les diviseurs positifs de k . Les lecteurs pourront trouver davantage de détails dans [H50, H76, MKS76]. En fixant alternativement les entiers n et k , nous avons pu constater que le rang $\phi_k(\mathbb{P}\Sigma_n)$ de $\text{gr}^k(\mathbb{P}\Sigma_n)$ est donné dans certains cas par la formule suivante,

$$\phi_k(\mathbb{P}\Sigma_n) = (n-1) \cdot r_n(k) \quad \text{pour tout } n, k \geq 1. \quad (1.5)$$

Nous ne savons pas si la formule (1.5) est valable pour tous les cas, mais tout de même nous conjecturons que oui (cf. la conjecture A.4 dont la démonstration fait l'objet d'un travail en cours). L'auteur est convaincu qu'en étudiant en profondeur la structure de groupe, $\mathbb{P}\Sigma_n$ serait vraisemblablement un produit presque direct de $(n-1)$ copies de groupes libres de rang n . Jusqu'à ce jour, il n'est malencontreusement pas parvenu à montrer. Néanmoins, puisque dans une certaine mesure nous avons ici un certain nombre de calculs du rang $\phi_k(\mathbb{P}\Sigma_n)$ ($k \geq 1$), l'auteur en a fait état dans une annexe (voir l'annexe A.1). Ainsi, nous ne sommes pas en mesure aujourd'hui d'appliquer la stratégie susmentionnée et de tirer une conclusion générale concernant la conjecture de Satoh 1.1 qui est donc toujours un problème ouvert. Cependant, nous considérons une variante de cette conjecture consistant à établir une égalité, s'il y en a une, entre la filtration d'Andreadakis restreinte à un sous-groupe I_n , appelé le groupe des automorphismes intérieurs partiels, de IA_n et sa suite centrale descendante $\{\Gamma_k(I_n)\}_{k \geq 1}$. Ce sous-groupe qui a été introduit dans [BN17]

par Bardakov et Neshchadim est engendré par les automorphismes $\nu_{p,i} := \xi_{1,i} \cdot \xi_{2,i} \cdots \xi_{p,i}$ pour $2 \leq p \leq n$, $1 \leq i \leq p$. Nous montrons, dans un premier temps, que I_n ($n \geq 1$) est en lien très direct avec un sous-groupe très étudié appelé le groupe de McCool triangulaire supérieur ou le groupe de tresses soudées pures triangulaires supérieures, noté $P\Sigma_n^+$ (cf. [CCP07, CPVW08]). Nous démontrons dans le groupe de McCool que I_n est isomorphe à $\text{Int}(P\Sigma_{n+1}^+)$, le groupe des automorphismes intérieurs de $P\Sigma_{n+1}^+$ dont nous l'énonçons dans le théorème suivant.

Théorème 1.2. (*Théorème 3.2*)

L'application $P\Sigma_{n+1}^+ \subset I_{n+1} \xrightarrow{q_n} I_n$ induit un isomorphisme $\text{Int}(P\Sigma_{n+1}^+) \cong \overline{P\Sigma_{n+1}^+} \cong I_n$.

Dans un second temps, nous déterminons dans l'énoncé suivant la structure de l'algèbre de Lie graduée $\text{gr}^*(I_n) := \bigoplus_{k \geq 1} \Gamma_k(I_n)/\Gamma_{k+1}(I_n)$ sur \mathbb{Z} associée à la suite centrale descendante $\{\Gamma_k(I_n)\}_{k \geq 1}$ de I_n et tout particulièrement le rang $\phi_k(I_n)$ de $\text{gr}^k(I_n)$.

Théorème 1.3. (*Proposition 3.3 et Proposition 3.4*)

L'algèbre de Lie $\text{gr}^*(I_n)$ ($n \geq 2$) est le quotient de l'algèbre de Lie libre $L[\mathfrak{N}]$ sur \mathbb{Z} engendré par les éléments η_{pi} pour $2 \leq p \leq n$ et $1 \leq i \leq p$ modulo les relations suivantes.

$$\begin{aligned} [\eta_{pi}, \eta_{qj}] &= 0 \text{ si } j = i \\ [\eta_{pi}, \eta_{qj}] &= 0 \text{ si } i > q \\ [\eta_{pi}, \eta_{qj} - \eta_{pj}] &= 0 \text{ si } j \neq i \text{ et } i \leq q \end{aligned} \tag{1.6}$$

où η_{pi} est l'image de $\nu_{p,i}$ dans $\text{gr}^1(I_n)$ avec $1 \leq i \leq p$, $1 \leq j \leq q$ et $2 \leq q < p \leq n$. En particulier, $\text{gr}^k(I_n)$ est un groupe abélien libre dont le rang est $\phi_k(I_n) = \sum_{m=2}^n r_m(k)$, où $r_m(k)$ est le rang du groupe abélien libre $\mathcal{L}_m(k)$.

Dans l'étape suivante, nous utilisons la stratégie mentionnée plus haut et en conséquence, nous démontrons que la conjecture d'Andreadakis généralisée vaut pour le groupe I_n :

Théorème 1.4. (*Théorème 3.8*)

Le sous-groupe I_n de IA_n vérifie l'égalité d'Andreadakis:

$$\forall k \geq 1, \mathcal{I}_n(k) := I_n \cap \mathcal{A}_n(k) = \Gamma_k(I_n). \quad (1.7)$$

Par ailleurs, nous verrons que I_n est un produit presque-direct des groupes libres. Nous savons déterminer l'anneau de cohomologie $H^*(I_n, \mathbb{Z})$ de I_n . D. Cohen [C08] a étudié la structure d'un produit arbitraire presque direct des groupes libres et il a déterminé la structure de l'anneau de cohomologie d'un tel groupe. Comme conséquence du travail de D. Cohen [Théorème 3.1, [C08]], nous obtenons le résultat suivant que l'auteur a préféré mettre en annexe (voir l'annexe B) parce que c'est différent des sujets principaux de la thèse.

Proposition 1.5. (*Proposition B.2*)

L'anneau $H^*(I_n, \mathbb{Z})$ de I_n est isomorphe à E_I/J_I où $E_I = \wedge H^1(I_n, \mathbb{Z})$ est l'algèbre extérieure engendrée par les éléments de degré un, $a_{p,i}$, $2 \leq p \leq n$, $1 \leq i \leq p$ et J_I est l'idéal engendré par les éléments $a_{p,i} \wedge a_{p,j} + a_{q,j} \wedge a_{p,i}$, où $a_{p,i}$ représente le dual du générateur $\bar{v}_{p,i}$ de $H^1(I_n, \mathbb{Z}) = I_n^{\text{ab}}$ et $j < i \leq q < p$.

- Un autre de nos principaux objectifs consiste à mener une étude des représentations linéaires de $P\Sigma_n$ afin de déterminer une représentation fidèle. C'est d'ailleurs un des moyens d'étudier les sous-groupes de $\text{Aut}(F_n)$. En fait, l'un des intérêts de cette étude réside dans la question de savoir si $P\Sigma_n$ est linéaire, c'est-à-dire s'il admet une représentation fidèle dans un groupe de matrices sur un anneau commutatif (cf. [KN20]). Malheureusement, on sait très peu de choses sur l'étude des représentations de $P\Sigma_n$. On utilise classiquement la représentation de Magnus (au sens originel considéré par Magnus [M74] et au sens de Birman [B75]) pour construire des représentations de certains sous-groupes de $\text{Aut}(F_n)$. Dans [B05], la représentation au sens de Birman a été utilisée par Bardakov pour construire une représentation de Magnus $\mathcal{P}_n : P\Sigma_n \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{Z}[F_n/[F_n, F_n]])$. Il est à noter cependant que \mathcal{P}_n est une extension de la représentation de Gassner de P_n et que de plus \mathcal{P}_n n'est pas fidèle pour tout $n \geq 2$ (voir encore [B05]). On sait depuis longtemps que la représentation

de Gassner $\mathcal{P}_n|_{\mathcal{P}_n}$ est fidèle pour $n = 2, 3$, mais on ne sait toujours pas si la représentation $\mathcal{P}_n|_{\mathcal{P}_n}$ pour $n \geq 4$ est fidèle ou non. Nous renvoyons les lecteurs aux références [MP69, B75] pour plus de détails à ce sujet. Une des approches possibles pour résoudre ce problème est d'essayer de généraliser la représentation linéaire connue de $P\Sigma_n$.

Dans le présent manuscrit, nous proposons une procédure permettant de retrouver et généraliser la représentation \mathcal{P}_n ($n \geq 1$) en nous inspirant des travaux [L96, LT92, CL92]. Nous verrons qu'il s'agit d'une procédure comparable à celle d'une construction itérative dite méthode de Long-Moody décrite dans [BLM92, L94, BT08] (cf. la proposition 4.5 et le début de la section 4.2.2). Voici comment nous procédons : à commencer par le fait qu'on se donne un sous-groupe B du groupe $\text{Aut}(F)$ où F est un groupe libre de rang fini. Rappelons qu'on a un plongement naturel $B \hookrightarrow \text{Aut}(F)$ de sorte qu'il existe une manière canonique de former un produit semi-direct $F \rtimes B$. On note $\mathfrak{p} : R[F \rtimes B] \twoheadrightarrow R[B]$ dont le noyau est par définition l'idéal d'augmentation relative, noté \bar{I}_F . Ici, la lettre R désigne un anneau commutatif unitaire. Cet idéal est engendré par tous les $x - 1$ où $1 \neq x \in F$. De fait, si nous supposons qu'une action à droite de B sur \bar{I}_F est définie, l'action sur celui-ci donne une représentation matricielle de B dont les coefficients sont dans $R[F \rtimes B]$ puisque \bar{I}_F est libre comme $R[F \rtimes B]$ -module à droit (voir la section 2.6). Nous appliquons cette démarche dans le cas $B = P\Sigma_n$. En désignant par \mathbb{F}_n le sous-groupe libre de $P\Sigma_{n+1}$ de rang n sur $\{\xi_{n+1,1}, \dots, \xi_{n+1,n}\}$. Il est possible de voir $P\Sigma_n$ comme un sous-groupe de $\text{Aut}(\mathbb{F}_n)$. Ainsi, on peut définir en utilisant $P\Sigma_n \hookrightarrow \text{Aut}(\mathbb{F}_n)$ un produit semi-direct $\mathbb{F}_n \rtimes P\Sigma_n$ pour que l'on puisse par la suite définir un idéal d'augmentation relative $\hat{I}_{\mathbb{F}_n}$ qui est engendré par les éléments $\{\xi_{n+1,1} - 1, \dots, \xi_{n+1,n} - 1\}$. Grâce à [Théorème 3.9, [B75]], nous définissons via la formule fondamentale de calcul de Fox [[F53], (2.3)] l'action suivante de $P\Sigma_{n+1}$ sur $\hat{I}_{\mathbb{F}_n}$ en posant

$$(\xi_{n+1,l} - 1) \cdot \xi_{i,j} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial(\xi_{n+1,l} \cdot \xi_{i,j})}{\partial \xi_{n+1,k}} (\xi_{n+1,k} - 1), \quad (1 \leq l \leq n). \quad (1.8)$$

Cette action produit ce que nous appelons ici la représentation généralisée de Gassner de $P\Sigma_n$ qui est une représentation matricielle fidèle de $P\Sigma_n$ dans $GL(n, R[\mathbb{F}_n \rtimes P\Sigma_n])$ et généralisant ainsi la représentation \mathcal{P}_n dont voici l'énoncé :

Théorème 1.6. (Théorème 4.6)

L'application $\xi_{i,j} \mapsto \mathcal{C}(\xi_{i,j})$, $1 \leq i \neq j \leq n$, détermine une représentation matricielle fidèle $\Psi_n : P\Sigma_n \rightarrow GL(n, R[\mathbb{F}_n \rtimes P\Sigma_n])$ où

$$\mathcal{C}(\xi_{i,j}) = \begin{pmatrix} & i & & & j & \\ & \xi_{i,j} \cdot I_{i-1} & & & & \\ & \xi_{i,j} \cdot \xi_{n+1,j} & & \xi_{i,j} \cdot (1 - \xi_{n+1,j} \cdot \xi_{n+1,i} \cdot \xi_{n+1,j}^{-1}) & & \\ & 0 & & \xi_{i,j} \cdot I_{j-i} & & \\ & & & & & \xi_{i,j} \cdot I_{n-j} \end{pmatrix} \quad (i < j) \quad (1.9)$$

et

$$\mathcal{C}(\xi_{i,j}) = \begin{pmatrix} & & j & & i & \\ & \xi_{i,j} \cdot I_{j-1} & & & & \\ & & \xi_{i,j} \cdot I_{i-j} & & 0 & \\ & & \xi_{i,j} \cdot (1 - \xi_{n+1,j} \cdot \xi_{n+1,i} \cdot \xi_{n+1,j}^{-1}) & & \xi_{i,j} \cdot \xi_{n+1,j} & \\ & & & & & \xi_{i,j} \cdot I_{n-i} \end{pmatrix} \quad (j < i). \quad (1.10)$$

Nous présentons à la suite de ce théorème une stratégie pour pouvoir itérer notre démarche comme décrite ci-dessus (cf. section 4.3). En le réitérant par exemple deux fois à partir d'une représentation triviale, notre procédé donne, dès la première itération, la représentation \mathcal{P}_n de $P\Sigma_n$ et il entraîne lors de la deuxième itération un produit tensoriel $\mathcal{P}_n \otimes \mathcal{P}_n$ de deux extensions \mathcal{P}_n de la représentation de Gassner. En adaptant la méthode de Long-Moody au groupe des tresses soudées noté WB_n ($n \geq 1$), les auteurs de [BS20] sont parvenus à la même conclusion après avoir

construit une représentation

$$\lambda : \text{WB}_n \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{I}_{\mathbb{F}_n} \otimes_{\mathbb{R}[\mathbb{F}_n]} V) \quad (1.11)$$

où ici $\mathbb{I}_{\mathbb{F}_n}$ est l'idéal d'augmentation, $\mathbb{R}[\mathbb{F}_n]$ est l'anneau de groupe libre et V est un \mathbb{R} -espace. À savoir que le résultat de la deuxième itération de cette méthode donne un produit tensoriel de deux représentations de Burau de WB_n . Ce groupe est le quotient d'un groupe de tresses virtuelles sur n brins VB_n par une relation dite *relation interdite* et il est considéré comme l'une des extensions du groupe des tresses d'Artin sur n brins B_n engendré par les générateurs habituels $\rho_1, \dots, \rho_{n-1}$ par le groupe symétrique S_n engendré par $\vartheta_1, \dots, \vartheta_{n-1}$. Le groupe WB_n possède plusieurs définitions dans la littérature avec des noms et des notations différents. Dans [S96, FRR97], où il est montré que WB_n est isomorphe au groupe $\text{B}\Sigma_n$ des automorphismes par permutation-conjugaison de \mathbb{F}_n . De plus, $\text{B}\Sigma_n$ est un produit semi-direct $\text{P}\Sigma_n \rtimes \Sigma_n$, où Σ_n est un sous-groupe de permutations de $\text{Aut}(\mathbb{F}_n)$ engendré par les automorphismes :

$$\tau_i : \begin{cases} x_i & \mapsto x_{i+1} \\ x_{i+1} & \mapsto x_i \\ x_j & \mapsto x_j \quad \forall j \neq \{i, i+1\}. \end{cases} \quad (1.12)$$

Nous renvoyons les lecteurs à [D17] pour une présentation unifiée des différentes définitions de WB_n . Mentionnons qu'il est possible que $\text{B}\Sigma_n$ ait une représentation fidèle comme un groupe des automorphismes de $\mathbb{F}_n = \langle \xi_{n+1,1}, \dots, \xi_{n+1,n} \rangle$. À partir de cela, il se trouve qu'il y a une manière classique de construire la représentation λ de WB_n sans avoir besoin de passer par la méthode de Long-Moody ni notre procédé. Nous notons respectivement $\hat{\sigma}_i$ et $\hat{\tau}_i$ l'image de ρ_i et ϑ_i dans $\text{Aut}(\mathbb{F}_n)$ via l'isomorphisme $\mathbf{art}_n^{\text{B}\Sigma} : \text{WB}_n \rightarrow \text{B}\Sigma_n$. Pour ce faire, nous considérons respectivement la $(n \times n)$ -matrice jacobienne des dérivées de Fox

$$J(\sigma_i) = \left(\frac{\partial \hat{\sigma}_i(\xi_{n+1,l})}{\partial \xi_{n+1,k}} \right) \text{ et } J(\tau_i) = \left(\frac{\partial \hat{\tau}_i(\xi_{n+1,l})}{\partial \xi_{n+1,k}} \right) \quad (1.13)$$

de $\hat{\sigma}_i : \mathbb{F}_n \rightarrow \mathbb{F}_n$ et $\hat{\tau}_i : \mathbb{F}_n \rightarrow \mathbb{F}_n$ pour chaque $i = 1, \dots, n$. Un calcul simple de ces matrices permet d'établir que la représentation λ de WB_n est donnée par :

$$\sigma_i \mapsto \sigma_i \cdot J(\sigma_i) = \begin{pmatrix} & i & & i+1 & \\ \sigma_i \cdot I_{i-1} & & & & \\ & \sigma_i \cdot (1 - \xi_{n+1,i} \cdot \xi_{n+1,i+1} \cdot \xi_{n+1,i}^{-1}) & & \sigma_i \cdot \xi_{n+1,i} & \\ & & \sigma_i & & 0 \\ & & & & & \sigma_i \cdot I_{n-i-1} \end{pmatrix} \quad (1.14)$$

et

$$\tau_i \mapsto \tau_i \cdot J(\tau_i) = \begin{pmatrix} & i & & i+1 & \\ \tau_i \cdot I_{i-1} & & & & \\ & 0 & & \tau_i & \\ & & \tau_i & & 0 \\ & & & & & \tau_i \cdot I_{n-i-1} \end{pmatrix}. \quad (1.15)$$

pour chaque $1 \leq i \leq n$. En nous appuyant sur ces matrices, nous construisons une représentation matricielle ϕ_n du groupe de tresses virtuelles VB_n ($n \geq 1$) suivant une méthode de Lüdde et Toppan [LT92] (cf. section 4.4). La représentation ϕ_n s'énonce comme suit :

Théorème 1.7. (*Lemme 4.12*)

Soient α, β des paramètres non nuls dans l'anneau commutatif unitaire R avec $\alpha \neq \beta$. Alors on a la représentation matricielle $\phi_n : VB_n \rightarrow GL(n, R[\mathcal{WB}_{n+1}])$ définie par

$$\sigma_i \mapsto \mathcal{V}(\sigma_i) := \begin{pmatrix} & i & & i+1 & \\ \sigma_i \cdot I_{i-1} & & & & \\ & \sigma_i \cdot (1 - \alpha \cdot \xi_{n+1,i} \ \xi_{n+1,i+1} \ \xi_{n+1,i}^{-1}) & & \alpha \cdot \sigma_i \cdot \xi_{n+1,i} & \\ & & \sigma_i & & 0 \\ & & & & & \sigma_i \cdot I_{n-i-1} \end{pmatrix} \quad (1.16)$$

et

$$\tau_i \mapsto \mathcal{V}(\tau_i) := \begin{pmatrix} & i & & i+1 & \\ \tau_i \cdot I_{i-1} & & & & \\ & 0 & & \beta^{-1} \cdot \tau_i & \\ & & \beta \cdot \tau_i & & 0 \\ & & & & & \tau_i \cdot I_{n-i-1} \end{pmatrix} \quad (1.17)$$

De plus, la représentation ϕ_n se factorise par \mathcal{WB}_n si et seulement si $\beta = \alpha$ et \mathcal{WB}_n si et seulement si $\beta = 1$.

Enfin nous dérivons de cette proposition le résultat suivant.

Théorème 1.8. (Théorème 4.13)

Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ deux paramètres non nuls avec $\alpha \neq \beta$ et $\beta \neq 1$. L'application $\tilde{h} : \mathcal{B}\Sigma_{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\sigma_i \mapsto 1$ et $\tau_i \mapsto 1$, appliquée à chaque coefficient des matrices ci-dessus donne la variante de la représentation de Burau $\tilde{h}\phi_n : \mathcal{VB}_n \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{R}[\alpha^{\pm 1}, \beta^{\pm 1}])$ définie par

$$\sigma_i \mapsto \tilde{\mathfrak{h}}\mathcal{V}(\sigma_i) = \begin{pmatrix} & i & i+1 & \\ & I_{i-1} & & \\ & 1-\alpha & \alpha & \\ & 1 & 0 & \\ & & & I_{n-i-1} \end{pmatrix} \quad (1.18)$$

$$\tau_i \mapsto \tilde{\mathfrak{h}}\mathcal{V}(\tau_i) = \begin{pmatrix} & i & i+1 & \\ & I_{i-1} & & \\ & 0 & \beta^{-1} & \\ & \beta & 0 & \\ & & & I_{n-i-1} \end{pmatrix} \quad (1.19)$$

qui ne se factorise pas en une représentation du groupe de tresses soudées sur n brins. Mais en revanche, $\tilde{\mathfrak{h}}\phi_n$ se factorise en une représentation de \mathcal{WB}_n si et seulement si $\beta = \alpha$ et $\tilde{\mathfrak{h}}\phi_n$ se factorise en une représentation de \mathcal{WB}_n si et seulement si $\beta = 1$.

Plan de la thèse :

Le premier chapitre est l'introduction et un résumé des résultats obtenus dans la thèse. Dans le chapitre 2, nous exposons toutes les notions et propriétés nécessaires pour les chapitres suivants.

Le chapitre 3 étudie le groupe des automorphismes intérieurs partiels I_n et vise à établir l'égalité entre la filtration d'Andreadakis restreinte à I_n et la suite centrale descendante de ce groupe.

Le dernier chapitre introduit les définitions de groupes $B\Sigma_n$, \mathcal{WB}_n et \mathcal{VB}_n et étudie des représentations matricielles de ces groupes. Il porte sur une discussion du procédé itératif susmentionné et explique plus en détail l'application de ce procédé au groupe de tresses soudées

pures sur n brins ou groupe de McCool $P\Sigma_n$. Ce chapitre met surtout en avant la procédure d'adaptation de la méthode de Lüdde et Toppan au groupe de tresses virtuelles VB_n visant à construire une variante de la représentation de Burau de VB_n .

Enfin la thèse se termine avec deux annexes. L'une porte sur les groupes quotients de la suite centrale descendante pour le groupe de McCool et l'autre énonce l'anneau de cohomologie de I_n .

Généralités

Ce premier chapitre a pour but de donner toutes les notions et propriétés nécessaires pour les chapitres suivants.

2.1 Suite centrale descendante d'un groupe

Dans cette section, nous rappelons quelques définitions de base de la suite centrale descendante d'un groupe. Nous renvoyons les lecteurs aux [MP09, R82] pour plus de détails. On désignera par $[g_1, g_2]$ le commutateur $g_1^{-1}g_2^{-1}g_1g_2$ de deux éléments g_1 et g_2 du groupe G noté multiplicativement. Plus généralement, si n est un entier non nul et g_1, g_2, \dots, g_n sont n éléments de G ; un commutateur simple de poids $n \geq 1$ est donné par :

$$\begin{aligned}
 [g_1] &= g_1 \\
 [g_1, g_2] &= g_1^{-1}g_2^{-1}g_1g_2 \\
 [g_1, g_2, g_3] &= [[g_1, g_2], g_3] = [g_1, g_2]^{-1}g_3^{-1}[g_1, g_2]g_3 \\
 &\vdots \\
 [g_1, g_2, \dots, g_n] &= [[g_1, \dots, g_{n-1}], g_n]
 \end{aligned}$$

Nous donnons ci-dessous quelques identités portant sur les commutateurs et qui sont faciles à vérifier, voir par exemple [H50, H76].

Propriété 2.1. *Soit $a, b, c \in G$. Alors*

1. $a^b := a[a, b] = b^{-1}ab$ et $[a, b] = [b, a]^{-1}$,
2. $[ab, c] = [a, c]^b [b, c]$ et $[a, bc] = [a, c][a, b]^c$,
3. $[a, b^{-1}, c]^b [b, c^{-1}, a]^c [c, a^{-1}, b]^a = e_G$, (*identité de Witt-Hall*).

Définition 2.2. *Si A et B sont des sous-groupes de G . On définit le commutateur de A et B comme le sous-groupe de G engendré par l'ensemble des commutateurs $[a, b]$ tels que $a \in A$ et $b \in B$:*

$$[A, B] = \langle [a, b] : a \in A \text{ et } b \in B \rangle. \quad (2.1)$$

Plus généralement, si m est un entier non nul et A_1, \dots, A_m sont des sous-groupes de G , on définit le commutateur de A_1, \dots, A_{m-1} et A_m comme le sous-groupe de G donné par

$$[A_1, A_2, \dots, A_m] = \langle [a_1, a_2, \dots, a_m] : a_k \in A_k \text{ pour } k \in \{1, \dots, m\} \rangle. \quad (2.2)$$

Si on note $\text{End}(G)$ (resp. $\text{Aut}(G)$) l'ensemble des endomorphismes (resp. des automorphismes) de G , on dit qu'un sous-groupe A de G est dit pleinement invariant lorsqu'il est stable par tout endomorphisme de G ,

$$\forall f \in \text{End}(G), f(A) \leq A. \quad (2.3)$$

Un sous-groupe A de G est dit caractéristique lorsqu'il est stable par tout automorphisme de G ,

$$\forall f \in \text{Aut}(G), f(A) \leq A. \quad (2.4)$$

La propriété ci-dessous est un résultat classique.

Propriété 2.3. (*[2.2 dans [MKS76]]*)

1. Tous les sous-groupes pleinement invariants et tous les sous-groupes caractéristiques sont des sous-groupes normaux.
2. Soient A_1, \dots, A_m des sous-groupes pleinement invariants. Le commutateur simple $[A_1, A_2, \dots, A_m]$ de poids m est un sous-groupe pleinement invariant.

On définit maintenant les sous-groupes pleinement invariants, noté $\Gamma_k(G)$ de G au moyen des relations suivantes :

$$\Gamma_1(G) := G \text{ et } \Gamma_{k+1}(G) = [\Gamma_k(G), G], \quad k \geq 1. \quad (2.5)$$

Remarquer que $\Gamma_{k+1}(G) \leq \Gamma_k(G)$ car $\Gamma_k(G) \trianglelefteq G$ et que $G^{\text{ab}} = G/\Gamma_2(G)$ est l'abélianisé de G car $\Gamma_2(G)$ est le sous-groupe dérivé de G .

Définition 2.4. *La suite centrale descendante d'un groupe G est la filtration*

$$G = \Gamma_1(G) \supseteq \Gamma_2(G) \supseteq \dots \Gamma_k \supseteq \Gamma_{k+1}(G) \supseteq \dots$$

de G par des sous-groupes pleinement invariants $\Gamma_k(G)$, (par conséquent, caractéristiques).

Définition 2.5. *Un groupe G est appelé nilpotent s'il existe un entier r tel que $\Gamma_r(G) = \{e_G\}$, élément neutre de G . Pour un groupe nilpotent G , le plus petit entier non nul r tel que $\Gamma_r(G) \neq \{e_G\}$ et $\Gamma_{r+1}(G) = \{e_G\}$ est appelé la classe de nilpotence de G et on dit alors que G nilpotent de classe r .*

Par exemple, le groupe $G/\Gamma_{k+1}(G)$ est un groupe nilpotent de classe k pour tout $k \geq 1$. Ce groupe est appelé le k -ième quotient nilpotent de G et nous le désignons par $N_k(G)$. Et en fait :

Lemme 2.6. (5.1.11 dans [R82])

Pour tout entier $p, q \geq 1$, on a

$$[\Gamma_p(G), \Gamma_q(G)] \subseteq \Gamma_{p+q}(G). \quad (2.6)$$

A partir de là, il est facile de voir que $\Gamma_k(G)/\Gamma_{k+1}(G)$ est abélien et on le note $\text{gr}^k(G)$ pour chaque $k \geq 1$.

Théorème 2.7. (5.25 dans [R82])

Pour chaque entier $k \geq 2$, l'application $\Upsilon : \text{gr}^{k-1}(G) \otimes_{\mathbb{Z}} G^{\text{ab}} \rightarrow \text{gr}^k(G)$ définie par

$$x \bmod \Gamma_k(G) \otimes y \bmod \Gamma_2(G) \mapsto [x, y] \bmod \Gamma_{k+1}(G) \quad (x \in \Gamma_{k-1}(G), y \in G) \quad (2.7)$$

est un épimorphisme de groupe abélien.

Notations 2.8. Si M est un groupe abélien, alors le produit tensoriel de k fois de M s'écrit

$$M^{\otimes k} := \underbrace{M \otimes_{\mathbb{Z}} \cdots \otimes_{\mathbb{Z}} M}_{k\text{-fois}}. \quad (2.8)$$

On désignera par 0 l'élément neutre d'un groupe abélien.

On déduit du théorème 2.7 le corollaire suivant.

Corollaire 2.9. Pour chaque $k \geq 2$, il existe un épimorphisme de groupes abéliens suivant

$$(G^{\text{ab}})^{\otimes k} \twoheadrightarrow \text{gr}^k(G) \quad (2.9)$$

défini par $g_1 \bmod \Gamma_2(G) \otimes \cdots \otimes g_k \bmod \Gamma_2(G) \mapsto [g_1, \dots, g_k] \bmod \Gamma_{k+1}(G)$.

On peut utiliser ce corollaire 2.9 pour montrer la proposition suivante et les lecteurs pourront consulter le livre de Hall [H76] pour sa preuve.

Proposition 2.10. *Supposons que G est engendré par des éléments g_1, \dots, g_r . Alors $\text{gr}^k(G)$ ($k \geq 1$) est engendré par les commutateurs simples $[h_1, \dots, h_k] \pmod{\Gamma_{k+1}(G)}$ où les h_j sont choisis parmi les éléments $\bar{g}_1, \dots, \bar{g}_r \in G^{\text{ab}}$ et ne sont pas nécessairement distincts. Si G est de type fini alors $\text{gr}^k(G)$ est un groupe abélien de type fini.*

Notations 2.11. *Si $\text{gr}^k(G)$ est un groupe abélien de type fini, alors on note pour chaque $k \geq 1$*

$$\phi_k(G) := \text{rang}(\text{gr}^k(G)) \quad (2.10)$$

son rang qui est la cardinalité d'un sous-ensemble maximal linéairement indépendant.

2.1.1 Suite centrale descendante d'un groupe libre de rang fini

Pour chaque $k \geq 1$, on note ici $\Gamma_k(F_n)$ pour le k -ième terme de la suite centrale descendante de F_n et on désignera par $\mathcal{L}_n(k)$ le quotient $\Gamma_k(F_n)/\Gamma_{k+1}(F_n)$.

Définition 2.12. *(Commutateurs-bases, [H50, H76])*

Un commutateur-base c_j de poids $w(c_j)$ est défini récursivement de la façon suivante:

1. *Les commutateurs-bases de poids un sont les*

$$c_i = x_i \text{ et } w(x_i) = 1, \forall i = 1, \dots, n. \quad (2.11)$$

On leur impose ensuite un ordre total arbitraire comme $c_1 \leq c_2 \leq \dots \leq c_n$.

2. *Supposons que nous ayons défini et ordonné les commutateurs-bases de poids strictement inférieur à $l \geq 1$. Les commutateurs-bases de poids l sont des $c_k = [c_i, c_j]$ où*

a) c_i et c_j sont des commutateurs-bases distincts de poids $< l$ et $w(c_i) + w(c_j) = l$;

b) $c_i > c_j$;

c) si $c_i = [c_s, c_t]$ alors $c_j \geq c_t$.

3. Les commutateurs de poids 1 arrivent après ceux de poids inférieurs à 1 et sont ordonnés arbitrairement les uns par rapport aux autres.

Illustrons les commutateurs-bases au moyen d'un exemple simple.

Exemple 2.13. Nous illustrons comment construire les commutateurs-bases jusqu'au poids 3 de F_3 avec une base $X = \{x_1, x_2, x_3\}$. D'abord les éléments x_1, x_2, x_3 sont ordonnés comme il suit:

$$x_1 < x_2 < x_3. \quad (2.12)$$

Ils ne sont que les commutateurs-bases de poids 1. Nous imposons l'ordre lexicographique aux éléments $[x_i, x_j]$. Les commutateurs-bases de poids 2 sont:

$$[x_2, x_1] < [x_3, x_1] < [x_3, x_2]. \quad (2.13)$$

Les commutateurs-bases de poids 3 sont:

$$[x_2, x_1, x_1] < [x_2, x_1, x_2] < [x_2, x_1, x_3] < [x_3, x_1, x_1] < \quad (2.14)$$

$$[x_3, x_1, x_2] < [x_3, x_1, x_3] < [x_3, x_2, x_2] < [x_3, x_2, x_3]. \quad (2.15)$$

Il convient de remarquer que $[x_3, x_2, x_1]$ n'apparaît pas parmi les commutateurs-bases de poids 3 parce-que, par (c) de la définition 2.12, on a $c_j = x_1 \not\geq c_t = x_2$.

Théorème 2.14. (*Théorème 11.2.4 dans [H76]*)

Soit F_n un groupe libre de rang fini, n , et soit $\Gamma_k(F_n)$ le k -ième sous-groupe de sa suite centrale descendante. Alors $\mathcal{L}_n(k) = \Gamma_k(F_n)/\Gamma_{k+1}(F_n)$ est un groupe abélien libre de type finie avec une base constituée de commutateurs-bases de poids k , ainsi tout élément f de F_n peut être écrit comme

$$f = c_1^{\epsilon_1} \cdot c_2^{\epsilon_2} \cdots c_t^{\epsilon_t} \pmod{\Gamma_{k+1}(F_n)}, \quad \epsilon_i = \pm 1, \forall i = 1, \dots, t. \quad (2.16)$$

où les c_i sont les commutateurs-bases de poids au plus n disposés dans l'ordre et les ϵ_i sont des entiers. Ces commutateurs-bases de poids k sont dits parfois la base de Hall.

Par exemple,

1. $\mathcal{L}_n(1) = F_n^{\text{ab}}$ a pour base de Hall les classes $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n \in F_n^{\text{ab}}$ de x_1, \dots, x_n ;
2. $\mathcal{L}_n(2) = \Lambda^2 F_n^{\text{ab}}$ a pour base les classes de $[x_i, x_j]$ avec $i > j$.

De plus, une formule due à Witt [W37] donne le rang de $\mathcal{L}_n(k)$ pour tout $k \geq 1$. La formule est donnée par

$$r_n(k) := \frac{1}{k} \sum_{d|k} \mu(d) n^{\frac{k}{d}} \quad (2.17)$$

où μ est la fonction de Möbius et d parcourt tous les diviseurs positifs de k . D'excellentes références pour tout cela sont les livres de Hall [H76, H50].

2.1.2 Suite centrale descendante d'un produit semi-direct

Soit $G := N \rtimes H$ le produit semi-direct de deux groupes associé à un homomorphisme θ de H dans $\text{Aut}(N)$. On rappelle que $G = N \rtimes H$ équivaut à avoir une action de H sur N par automorphisme de groupe. Une action de H sur N donne lieu à une action de H sur N^{ab} . On dit que $N \rtimes H$ est un produit presque-direct si l'action de H sur N^{ab} est triviale. Pour un produit presque-direct arbitraire $G = N \rtimes H$, Falk et Randell [FR85] montrent que

$$\Gamma_k(G) = \Gamma_k(N) \rtimes \Gamma_k(H). \quad (2.18)$$

Théorème 2.15. (Théorème 3.1 dans [FR85])

Soit $G = N \rtimes H$ un produit presque-direct. La suite exacte scindée de groupes $\{e_G\} \rightarrow N \rightarrow G \rightarrow H \rightarrow \{e_G\}$ induit une suite exacte courte scindée de groupes abéliens

$$\{0\} \rightarrow \text{gr}^k(N) \rightarrow \text{gr}^k(G) \rightarrow \text{gr}^k(H) \rightarrow \{0\} \quad \text{pour chaque } k \geq 1. \quad (2.19)$$

De plus, on a pour tout $k \geq 1$,

$$\text{gr}^k(G) \cong \text{gr}^k(N) \oplus \text{gr}^k(H) \quad \text{et} \quad \phi_k(G) = \phi_k(N) + \phi_k(H). \quad (2.20)$$

Remarque 2.16. Un énoncé similaire est donné dans [I90, K85].

Par ailleurs, $G = N \rtimes_{\theta} H$ peut s'inscrire dans une suite exacte courte scindée

$$\{e_G\} \longrightarrow N \xrightarrow{\iota} G \begin{array}{c} \xrightarrow{p} \\ \xleftarrow{s} \end{array} H \longrightarrow \{e_G\}, \quad (2.21)$$

où $\iota(n) = (n, e_G)$, $s(h) = (e_G, h)$ et $p(n, h) = h$. En identifiant les groupes N et H avec leurs images par ι et s respectivement, on peut voir que G est engendré par N et H et que les relations $hnh^{-1} = \theta(h)(n)$ sont satisfaites dans G . Comme indiqué dans [J97], si N et H sont des groupes de présentations $\langle X, R \rangle$ et $\langle Y, S \rangle$ respectivement, alors $G = N \rtimes_{\theta} H$ admet la présentation

$$\langle X \cup Y \mid R \cup S \cup \{h^{-1}nh = \theta(h)(n) \mid h \in H, n \in N\} \rangle. \quad (2.22)$$

Si N et H sont maintenant tous les deux des groupes libres, alors $h^{-1}nh = \theta(h)(n)$ est la seule relation dans $G = N \rtimes_{\theta} H$. Étant donné des groupes libres G_1, \dots, G_k de rangs finis où $G_p = \langle x_{p,1}, \dots, x_{p,n_p} \rangle$ ($1 \leq p \leq k$), on considère un produit presque direct de groupes libres c'est-à-dire un produit semi-direct itéré

$$G_k \rtimes_{\alpha_k} (G_{k-1} \rtimes_{\alpha_{k-1}} \cdots (\rtimes_{\alpha_4} (G_3 \rtimes_{\alpha_3} (G_2 \rtimes_{\alpha_2} G_1)) \cdots)) = \rtimes_{p=1}^k G_p \quad (2.23)$$

de groupes libres de rangs n_p dans lequel l'action du groupe $\rtimes_{p=1}^q G_p$ sur G_r^{ab} est triviale pour chaque $1 \leq q < r \leq k$. Autrement dit, la structure du produit semi-direct itéré de (2.23) est donnée par des homomorphismes de groupes $\alpha_l : \rtimes_{p=1}^{l-1} G_p \rightarrow \text{IA}(G_l)$ ($l = 2, \dots, k$) où $\text{IA}(G_1)$ désigne le groupe des automorphismes de G_1 agissant trivialement sur son abélianisé G_1^{ab} . Par conséquent, $\rtimes_{p=1}^k G_p$ a la présentation

$$\langle x_{p,i} \ (1 \leq i \leq n_p, 1 \leq p \leq k) \mid x_{p,i}^{-1} x_{q,j} x_{p,i} = \alpha_q(x_{p,i})(x_{q,j}) \ 1 \leq p < q \leq k, 1 \leq j \leq n_q \rangle \quad (2.24)$$

et son abélianisé est un groupe abélien libre de rang $\sum_{p=1}^k n_p$.

2.2 Groupe des IA-automorphismes d'un groupe libre

Le groupe des IA-automorphismes IA_n est le sous-groupe du groupe $\text{Aut}(F_n)$ des automorphismes de F_n induisant l'identité sur son abélianisation:

$$IA_n = \{\phi \in \text{Aut}(F_n) \mid x^{-1}\phi(x) \in \Gamma_2(F_n), \forall x \in F_n\}. \quad (2.25)$$

Magnus [M35] a fourni un ensemble fini de générateurs pour IA_n . Ce sont les automorphismes donnés par :

$$\xi_{k,s,t}(x_l) = \begin{cases} x_k [x_s, x_t] & \text{si } k = l, \\ x_l & \text{si } k \neq l \end{cases}, \quad \xi_{i,j}(x_l) = \begin{cases} x_j^{-1} x_i x_j & \text{si } l = i, \\ x_l & \text{si } l \neq i \end{cases} \quad (2.26)$$

où $1 \leq i \neq j \leq n$, $1 \leq k, s, t \leq n$ et k, s, t sont distincts. Réécrivons maintenant la présentation (2.24) ci-dessus pour un produit presque direct $\times_{p=1}^k G_p$ de groupes libres.

Proposition 2.17. (*Proposition 2.1 dans [C08]*)

Soit $G = \times_{p=1}^k G_p$ un produit presque direct de groupes libres $G_p = F_{n_p} = \langle x_{p,1}, \dots, x_{p,n_p} \rangle$. Alors G admet une présentation avec des générateurs $x_{p,i}$, $1 \leq p \leq k$, $1 \leq i \leq n_p$ et relations

$$x_{q,j} \cdot x_{p,i} = x_{p,i} \cdot x_{q,j} \cdot w_{i,j}^{p,q}, \quad 1 \leq p < q \leq k, \quad 1 \leq i \leq n_p, \quad 1 \leq j \leq n_q \quad (2.27)$$

où $w_{i,j}^{p,q} \in \Gamma_2(G)$ est un mot dans les générateurs $x_{q,1}, \dots, x_{q,n_q}$.

Preuve. Par (2.24) le groupe G a pour relations

$$\begin{aligned} x_{p,i}^{-1} \cdot x_{q,j} \cdot x_{p,i} &= \alpha_q(x_{p,i})(x_{q,j}) \\ x_{q,j} \cdot x_{p,i} &= x_{p,i} \cdot \alpha_q(x_{p,i})(x_{q,j}) \end{aligned} \quad (2.28)$$

où $\alpha_q(x_{p,i}) \in IA_{n_q} := IA(F_{n_q})$. Il est clair que $w_{i,j}^{p,q} := \alpha_q(x_{p,i})(x_{q,j})$ est un mot dans les générateurs $x_{q,1}, \dots, x_{q,n_q}$. Puisque $\alpha_q(x_{p,i}) \in IA_{n_q}$, on a $\alpha_q(x_{p,i}) = \xi_1^{\epsilon_1} \cdots \xi_m^{\epsilon_m}$ où $\epsilon_s \in \{\pm 1\}$ et chaque $\xi_r^{\epsilon_r}$ est soit $\xi_{k,s,t}$ ou soit $\xi_{i,j}$ pour $1 \leq r \leq m$. On remarque que

$$\xi_{j,i}(x_{q,j}) = x_{q,j} [x_{q,i}, x_{q,j}] \quad \xi_{j,s,t}(x_{q,j}) = x_{q,j} [x_{q,s}, x_{q,t}]. \quad (2.29)$$

Donc, une récurrence sur m montre que $w_{i,j}^{p,q} := x_{q,j}^{-1} \alpha_q(x_{p,i})(x_{q,j})$ est un élément de $\Gamma_2(G)$. À partir de (2.28) on arrive donc à $x_{q,j} \cdot x_{p,i} = x_{p,i} \cdot x_{q,j} \cdot w_{i,j}^{p,q}$. \square

Pour un produit presque direct $G = \times_{p=1}^k G_p$ de groupes libres G_p , le théorème 2.15 implique que

$$\text{gr}^d(G) = \bigoplus_{p=1}^k \text{gr}^d(G_p) = \bigoplus_{p=1}^k \mathcal{L}_{n_p}(d), \quad \forall d \geq 1. \quad (2.30)$$

Désignons l'image de chaque $x_{p,i}$ dans $\text{gr}^*(G)$ par $X_{p,i}$ et l'image du commutateur $[a, b]$ de deux éléments $a, b \in G$ dans $\text{gr}^*(G)$ par $[A, B]$. Soit $\mathcal{X}_p := \{X_{p,1}, \dots, X_{p,n_p}\}$ et soit $L[\mathcal{X}_p]$ son algèbre de Lie libre correspondante. Par [[I90], Lemme 3.1.1], l'algèbre de Lie $\text{gr}^*(G)$ obtenue à partir de la suite centrale descendante pour un produit presque direct $G = \times_{p=1}^k G_p$ de groupes libres est additivement isomorphe à une somme directe de sous-algèbres de Lie libres $\bigoplus_{p=1}^k L[\mathcal{X}_p]$. Dans $\text{gr}^*(G)$, les relations suivantes sont satisfaites

$$[X_{q,j}, X_{p,i}] = \mathcal{U}_{i,j}^{p,q}, \quad (2.31)$$

où $\mathcal{U}_{i,j}^{p,q}$ désigne l'image de $w_{i,j}^{p,q}$ (2.27) dans $\text{gr}^2(G)$, $1 \leq p < q \leq k$, $1 \leq i \leq n_p$ et $1 \leq j \leq n_q$.

2.3 Groupe de McCool $P\Sigma_n$

Le groupe de McCool $P\Sigma_n$, également connu de nos jours sous le nom de groupe de tresses soudées pures ou groupe des automorphismes de conjugaison de base du groupe libre (appelé dans la littérature anglophone sous le nom de *basis-conjugating automorphism group*), est un sous-groupe de IA_n engendré par les automorphismes [H85] :

$$\xi_{i,j}(x_l) = \begin{cases} x_j^{-1} x_i x_j & \text{si } l = i, \\ x_l & \text{si } l \neq i \end{cases} \quad (2.32)$$

pour tout $1 \leq i \neq j \leq n$. McCool [M86] a prouvé que les relations suivantes connues sous le nom de *relations de McCool* déterminent une présentation de $P\Sigma_n$:

$$\begin{aligned} [\xi_{k,j}, \xi_{s,t}] &= 1 \text{ si } \{i,j\} \cap \{s,t\} = \emptyset, \\ [\xi_{i,j}, \xi_{k,j}] &= 1 \text{ pour } i,j,k \text{ distincts,} \\ [\xi_{i,j} \cdot \xi_{k,j}, \xi_{i,k}] &= 1 \text{ pour } i,j,k \text{ distincts.} \end{aligned} \quad (2.33)$$

À partir des *relations de McCool* (2.33), les formules de conjugaison suivantes tiennent dans $P\Sigma_n$.

Propriété 2.18. (*Lemme 1 dans [B03a]*)

1. $\xi_{i,j}^{-v} \cdot \xi_{k,l} \cdot \xi_{i,j}^v = \xi_{k,l}$
2. $\xi_{i,j}^{-v} \cdot \xi_{k,j} \cdot \xi_{i,j}^v = \xi_{k,j}$
3. $\xi_{i,j}^{-v} \cdot \xi_{k,i} \cdot \xi_{i,j}^v = \xi_{k,j}^v \cdot \xi_{k,i} \cdot \xi_{k,j}^{-v}$
4. $\xi_{i,j}^{-v} \cdot \xi_{i,k} \cdot \xi_{i,j}^v = \xi_{k,j}^v \cdot \xi_{i,k} \cdot \xi_{k,j}^{-v}$
5. $\xi_{i,j}^{-v} \cdot \xi_{j,k} \cdot \xi_{i,j}^v = [\xi_{k,j}^{-v}, \xi_{i,k}] \cdot \xi_{j,k}$

où $v = \pm 1$.

Comme le montre [CPVW08, B03b], $P\Sigma_n$ admet une décomposition en produit semi-direct itéré:

$$P\Sigma_n = K_{n-1} \rtimes (K_{n-2} \rtimes \cdots (\rtimes (K_2 \rtimes K_1)) \cdots) \quad (n \geq 2) \quad (2.34)$$

où $K_i = \langle \xi_{i+1,1}, \xi_{i+1,2}, \dots, \xi_{i+1,i}, \xi_{1,i+1}, \xi_{2,i+1}, \dots, \xi_{i,i+1} \rangle$. En particulier, $P\Sigma_1 = \{1\}$ est le groupe trivial. Pour chaque $i \geq 1$, soit \mathbb{F}_i le sous-groupe de $P\Sigma_n$ engendré par les éléments $\xi_{i+1,1}, \xi_{i+1,2}, \dots, \xi_{i+1,i}$ et soit \mathbb{D}_i le sous-groupe de $P\Sigma_n$ engendré par les éléments $\xi_{1,i+1}, \xi_{2,i+1}, \dots, \xi_{i,i+1}$. Comme noté dans [Théorème 1.1 dans [B03a]], le sous-groupe \mathbb{F}_i est un groupe libre de rang i et le sous-groupe \mathbb{D}_i est un groupe abélien libre de rang i pour tout

$i = 1, \dots, n$. Le groupe $P\Sigma_n$ contient un sous-groupe très bien étudié. Il s'agit du groupe de McCool triangulaire supérieur $P\Sigma_n^+$. Ce sous-groupe a été étudié en détail dans [CPVW08]. Le sous-groupe $P\Sigma_n^+$ est engendré par les automorphismes $\xi_{i,j}$ (2.32) avec $i > j$ soumis aux relations correspondantes (2.33). Dans [CPVW08], il est montré que $P\Sigma_n^+$ peut être réalisé comme un produit presque-direct itéré de groupes libres. Nous pouvons donc utiliser Proposition 2.17 pour lui fournir une présentation de groupe. Les lecteurs sont renvoyés à l'annexe A.2 pour plus de détails.

2.4 Filtration d'Andreadakis

Dans cette section, nous définissons la *filtration d'Andreadakis* de IA_n . Pour définir ce concept, nous commençons tout d'abord par rappeler la définition d'une N-série sur un groupe G introduite par Lazard dans les années 50. Une bonne référence de ce sujet est le document original de Lazard [L54]. Une N-série est par définition une filtration décroissante

$$G = H_1 \supseteq H_2 \supseteq \dots \supseteq H_k \supseteq H_{k+1} \supseteq \dots \quad (2.35)$$

de G par des sous-groupes $\{H_k\}_{k \geq 1}$ de G vérifiant

$$[H_p, H_q] \subseteq H_{p+q}, \quad \forall p, q \geq 1. \quad (2.36)$$

Pour $q = 1$, les relations $[H_p, G] \subseteq H_{p+1}$ signifient que H_p est un sous-groupe normal dans G et aussi que H_p/H_{p+1} est un sous-groupe du centre de G/H_{p+1} . Il est clair que H_p/H_{p+1} est un groupe abélien puisque $[H_p, H_p] \subseteq H_{2p} \subseteq H_{p+1}$. Soit $\text{Gr}^p(H) = H_p/H_{p+1}$ pour tout $p \geq 1$. Nous le noterons additivement, à savoir pour tout $x, y \in H_p$ on a $\overline{xy} = \overline{x} + \overline{y}$ dans $\text{Gr}^p(H)$. Formons la somme directe

$$\text{Gr}(G) = \bigoplus_{p \geq 1} \text{Gr}^p(H). \quad (2.37)$$

On peut facilement vérifier, en utilisant les identités 2 et 3 Propriété 2.1 que $\text{Gr}(G)$ a la structure d'une algèbre de Lie graduée avec un crochet de Lie $[x, y] := \overline{[x, y]}$ induit par le commutateur de

G . L'exemple le plus célèbre d'une N -série sur G est la suite centrale descendante $\{\Gamma_k(G)\}_{k \geq 1}$ et son algèbre de Lie résultante $\text{gr}(G) = \bigoplus_{k \geq 1} \text{gr}^k(G)$ est l'algèbre de Lie graduée standard sur \mathbb{Z} . La suite centrale descendante est la plus petite des N -séries sur G , c'est-à-dire que, étant donné une N -série arbitraire $\{H_k\}_k$ sur G , on a les relations $\Gamma_k(G) \subseteq H_k$, pour tout $k \geq 1$ qui s'établissent par récurrence sur k . Il existe une application canonique

$$\text{gr}^k(G) \rightarrow \text{Gr}^k(H) \quad (k \geq 1). \quad (2.38)$$

Définition 2.19. Une N -série $\{H_k\}_k$ sur un groupe G est dite séparante si l'intersection des sous-groupes H_k se réduit à l'élément neutre, c'est-à-dire $\bigcap_{k \geq 1} H_k = \{e_G\}$. Le groupe G est dit résiduellement nilpotent si la suite centrale descendante $\Gamma_k(G)$ de G est séparante, c'est-à-dire $\bigcap_{k \geq 1} \Gamma_k(G) = \{e_G\}$.

Nous sommes à présent en mesure d'introduire la filtration d'Andreadakis. L'action de $\text{Aut}(G)$ sur le k -ième quotient nilpotent $N_k(G) = G/\Gamma_{k+1}(G)$ ($k \geq 1$) induit un homomorphisme de groupes

$$\lambda_k : \text{Aut}(G) \longrightarrow \text{Aut}(N_k(G)) \quad (k \geq 1). \quad (2.39)$$

Le noyau $\mathcal{A}_G(k)$ de λ_k est constitué des automorphismes agissant trivialement sur le k -ième quotient nilpotent de G ;

$$\mathcal{A}_G(k) = \{\phi \in \text{Aut}(G) \mid g^{-1} \phi(g) \in \Gamma_{k+1}(G), \forall g \in G\}. \quad (2.40)$$

Le premier terme $\mathcal{A}_G(1) := \text{IA}(G)$ est le groupe des IA-automorphismes de G aussi connu comme le groupe Torelli de G . Par construction les groupes $\mathcal{A}_G(k)$ sont des sous-groupes normaux de $\text{Aut}(G)$. Andreadakis [A65] a montré que

(A0) Pour tout entier $k \geq 1$, $\mathcal{A}_G(k+1) \subset \mathcal{A}_G(k)$.

(A1) Pour tous entiers $k, d \geq 1$, $[\mathcal{A}_G(k), \mathcal{A}_G(d)] \subseteq \mathcal{A}_G(k+d)$.

(A2) Pour tous entiers $k, d \geq 1$, $\phi \in \mathcal{A}_G(k)$ et $g \in \Gamma_d(G)$, $g^{-1} \phi(g) \in \Gamma_{k+d}(G)$.

(A3) Si $\bigcap_{d \geq 1} \Gamma_d(G) = \{e_G\}$ alors $\bigcap_{d \geq 1} \mathcal{A}_G(d) = \{1\}$.

À partir de (A0)-(A1), on a donc une N-série

$$IA(G) := \mathcal{A}_G(1) \supset \mathcal{A}_G(2) \supset \cdots \supset \mathcal{A}_G(k) \supset \cdots \quad (2.41)$$

de $IA(G)$. Par conséquent, le k -ième terme $\mathcal{A}_G(k)$ de la N-série de $IA(G)$ contient alors celui de la suite centrale descendante de $IA(G)$,

$$\mathcal{A}_G(k) \supseteq \Gamma_k(IA(G)) \quad \text{pour tout } k \geq 1. \quad (2.42)$$

La filtration descendante $\{\mathcal{A}_G(k)\}_{k \geq 1}$ définie sur $IA(G)$ est dite parfois de Johnson, mais est due à Andreadakis [A65].

Définition 2.20. La N-série $\{\mathcal{A}_G(k)\}_{k \geq 1}$ sur $IA(G)$ est appelée ici la filtration d'Andreadakis de $IA(G)$. On écrit $\text{Gr}^k(\mathcal{A}_G) := \mathcal{A}_G(k)/\mathcal{A}_G(k+1)$ pour chaque $k \geq 1$

Les groupes $\text{Gr}^k(\mathcal{A}_G)$ ($k \geq 1$) admettent une action de $\text{Aut}(G)/IA(G)$ définie comme suit: puisque $\mathcal{A}_G(k) \trianglelefteq \text{Aut}(G)$, le groupe $\text{Aut}(G)$ agit naturellement sur $\mathcal{A}_G(k)$ par conjugaison. Soit $\bar{\phi} \in \text{Gr}^k(\mathcal{A}_G)$ un représentant d'un automorphisme $\phi \in \mathcal{A}_G(k)$ et soit $\bar{\psi} \in \text{Aut}(G)/IA(G)$ un représentant d'un automorphisme $\psi \in \text{Aut}(G)$. L'action de $\bar{\psi}$ sur $\bar{\phi}$ est donnée par

$$\bar{\psi} \cdot \bar{\phi} := \overline{\psi \phi \psi^{-1}}. \quad (2.43)$$

Les groupes $\text{gr}^k(G)$ ($k \geq 1$), à leurs tours, admettent une action de $\text{Aut}(G)/IA(G)$ définie comme suit : puisque $\Gamma_k(G)$ est un sous-groupe caractéristique de G , (voir Propriété.2.3), $\text{Aut}(G)$ agit naturellement sur $\Gamma_k(G)$ et donc aussi sur $\text{gr}^k(G)$. Soit $\phi \in \text{Aut}(G)$ et soit $\bar{g} \in \text{gr}^k(G)$ un représentant d'un élément $g \in \Gamma_k(G)$. L'action de ϕ sur \bar{g} est donnée par

$$\phi \cdot \bar{g} := \overline{\phi(g)}. \quad (2.44)$$

La restriction de cette action (2.44) à $IA(G)$ est triviale par (A2). On a donc une action de $\text{Aut}(G)/IA(G)$ sur $\text{gr}^k(G)$. Pour illustrer les concepts ci-dessus, considérons le cas où G est un groupe libre F_n de rang n . Nous écrivons, sauf indication contraire, $V, \Gamma_k(F_n), \mathcal{L}_n(k), IA_n, \mathcal{A}_n(k)$ et $\text{Gr}^k(\mathcal{A}_n)$ pour $F_n^{\text{ab}}, \Gamma_k(F_n), \text{gr}^k(F_n), IA(F_n), \mathcal{A}_{F_n}(k)$ et $\text{Gr}^k(\mathcal{A}_G)$ respectivement. Magnus, Witt et Hall ont élucidé la structure de l'algèbre de Lie graduée standard $\text{gr}^*(F_n)$ sur \mathbb{Z} associée à la suite centrale descendante de F_n , voir par exemple le livre [MKS76] et nous rappelons deux de leurs résultats :

(1) Le groupe F_n est résiduellement nilpotent, c'est-à-dire $\bigcap_{k \geq 1} \Gamma_k(F_n) = \{e_{F_n}\}$,

(2) L'algèbre de Lie $\text{gr}^*(F_n) := \bigoplus_{k \geq 1} \mathcal{L}_n(k)$ est isomorphe à une algèbre de Lie libre de rang n .

Retournons maintenant à la filtration d'Andreadakis. Cette série descendante de IA_n donnée par les sous-groupes $\mathcal{A}_n(k)$ a la propriété de $\Gamma_k(IA_n) \subseteq \mathcal{A}_n(k)$ pour tout $k \geq 1$. Ces inclusions deviennent des égalités pour certains cas, à savoir

(a1) $\Gamma_1(IA_n) = \mathcal{A}_n(1)$ par définition ;

(a2) $\Gamma_2(IA_n) = \mathcal{A}_n(2)$ pour tout $n \geq 2$ par [[B66], Lemme 5] ;

(a3) $\Gamma_k(IA_2) = \mathcal{A}_2(k)$ pour tout $k \geq 2$ et $\Gamma_3(IA_3) = \mathcal{A}_3(3)$ par [[A65], Théorème 6.1 et 6.2].

Satoh [S19] a récemment prouvé que $\Gamma_3(IA_n) = \mathcal{A}_n(3)$ pour tout $n \geq 3$. Il a ainsi amélioré le résultat de Pettet [P05] où elle a montré que $\Gamma_3(IA_n)$ est au pire d'indice fini dans $\mathcal{A}_n(3)$. Il a été conjecturé par Andreadakis [A65] que

$$\Gamma_k(IA_n) = \mathcal{A}_n(k) \quad \forall k \geq 3, \quad \text{et } \forall n \geq 3 \quad (\text{Conjecture d'Andreadakis}). \quad (2.45)$$

Bartholdi [B13, B16] a montré que cette conjecture n'est pas vraie en général. En revanche, le problème d'Andreadakis donne lieu à des variantes pour tout sous-groupe B de IA_n : pour chaque entier $k \in \mathbb{N}^*$, on dispose d'inclusions $\Gamma_k(B) \subseteq B \cap \Gamma_k(IA_n) \subseteq B \cap \mathcal{A}_n(k)$ dont il est naturel de se demander si elles sont des égalités (conjecture d'Andreadakis généralisée pour B), ou à quel point

elles en sont éloignées. Des avancées importantes sur la conjecture d'Andreadakis généralisée ont été réalisées par T. Satoh [S17], Ş. Papadima [P01] et J. Darné [D18]. On sait d'après [S17] que la filtration d'Andreadakis restreinte à $P\Sigma_n^+$, comme un sous-groupe IA_n , coïncide avec la suite centrale descendante de $P\Sigma_n^+$, c'est-à-dire que pour tout $n \geq 1$ on a

$$\mathcal{M}_n^+(k) := \mathcal{A}_n(k) \cap P\Sigma_n^+ = \Gamma_k(P\Sigma_n^+) \quad (\forall k \geq 1). \quad (2.46)$$

Dans [D18, P01], un résultat similaire se produit pour le groupe de tresses pures P_n qui est le sous-groupe de IA_n laissant le mot $x_1 \cdots x_n \in F_n$ invariant. En d'autres termes, on a pour tout $n \geq 1$,

$$\mathcal{P}_n(k) := \mathcal{A}_n(k) \cap P_n = \Gamma_k(P_n) \quad (\forall k \geq 1). \quad (2.47)$$

Le groupe de tresses pures P_n et le groupe de McCool triangulaire supérieur $P\Sigma_n^+$ sont tous les deux des sous-groupes de $P\Sigma_n$ et ont tous les deux une structure de produit presque-direct de groupes libres. Il est naturel de se poser la question: quels autres sous-groupes B de $P\Sigma_n$ qui se décomposent en un produit presque-direct itéré de groupes libres satisfont l'égalité suivante dite *égalité d'Andreadakis*,

$$\mathcal{B}_n(k) := \mathcal{A}_n(k) \cap B = \Gamma_k(B) \quad (\forall k \geq 1) \quad ? \quad (2.48)$$

Dans [BN17], où il est montré que le groupe de tresses d'Artin pures P_n et le groupe des automorphismes intérieures partiels I_n engendrent $P\Sigma_n$:

$$P\Sigma_n = \langle I_n, P_n \rangle \quad (n \geq 2). \quad (2.49)$$

Le groupe I_n est le sous-groupe de $P\Sigma_n$ engendré par les automorphismes $\nu_{p,i} = \xi_{1,i}\xi_{2,i}\cdots\xi_{p,i}$ ($1 \leq i \leq p \leq n$) et est un produit presque-direct itéré de groupes libres. Ce groupe est donc un bon candidat pour vérifier l'égalité d'Andreadakis (2.48). Dans le chapitre 3, nous introduisons le groupe I_n et montrons, en utilisant un outil appelé *homomorphisme de Johnson*, que I_n satisfait l'égalité d'Andreadakis. L'homomorphisme de Johnson introduit dans les années 80 par Johnson

[J83, J85] est un bon outil pour étudier les groupes $\text{Gr}^k(\mathcal{B}) = \mathcal{B}_n(k)/\mathcal{B}_n(k+1)$ ($k \geq 1$) associés à la filtration d'Andreadakis $\{\mathcal{B}_n(k)\}_{k \geq 1}$ sur \mathcal{B} . Cette contribution au problème d'Andreadakis peut être vue comme une étape supplémentaire vers la résolution de la conjecture de Satoh 1.1.

2.5 L'homomorphisme de Johnson

Nous rappelons ici le k -ième homomorphisme de Johnson de $\text{Aut}(F_n)$. Nous renvoyons les lecteurs aux [J83, J85, S16] pour plus de détails. Soit $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, B)$ l'ensemble de tous les homomorphismes de groupes abéliens A vers B . Considérons l'homomorphisme $\tau'_k : \mathcal{A}_n(k) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(V, \mathcal{L}_n(k+1))$ défini par la formule $\sigma \mapsto \tau_k(\sigma) : x \pmod{\Gamma_n(2)} \mapsto x^{-1}\sigma(x) \pmod{\Gamma_n(k+2)}$ pour $x \in V$. Le noyau $\ker(\tau'_k)$ de τ'_k est par définition $\mathcal{A}_n(k+1)$, (voir (2.40)). Soit $V^* := \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(V, \mathbb{Z})$ le groupe dual de V avec $\{x_1^*, \dots, x_n^*\}$ sa base duale. Donc $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(V, \mathcal{L}_n(k+1)) \cong V^* \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{L}_n(k+1)$ comme groupe abélien, voir par exemple [B89]. On peut donc obtenir un homomorphisme injectif que l'on désigne par τ_k ,

$$\begin{aligned} \tau_k : \text{Gr}^k(\mathcal{A}_n) &\hookrightarrow V^* \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{L}_n(k+1) \\ \bar{\sigma} &\mapsto x_1^* \otimes \overline{x_1^{-1}\sigma(x_1)}. \end{aligned} \tag{2.50}$$

Dans [K06], il est montré que τ_k n'est pas surjectif pour $k \geq 2$ mais que

$$\tau'_1 : \text{IA}_n \rightarrow V^* \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda^2 V \tag{2.51}$$

induit un isomorphisme $\tau_1 : \text{Gr}^1(\mathcal{A}_n) = \text{IA}_n^{\text{ab}} \xrightarrow{\cong} V^* \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda^2 V$ de groupes abéliens. En restreignant τ'_1 (2.51) à $\text{P}\Sigma_n$, nous arrivons à ce qui suit:

Lemme 2.21. $\text{P}\Sigma_n^{\text{ab}}$ est un groupe abélien libre et une base est donnée par les classes $\bar{\xi}_{ij}$ de $\xi_{i,j}$, $1 \leq i \neq j \leq n$.

Preuve. Les générateurs de Magnus $\xi_{i,j}$ (2.32) ($1 \leq i \neq j \leq n$) engendrent $\text{P}\Sigma_n$ de sorte que les classes $\bar{\xi}_{ij}$ sont une famille génératrice de $\text{P}\Sigma_n^{\text{ab}}$. L'homomorphisme $\tau_1^{\text{P}\Sigma} : \text{P}\Sigma_n^{\text{ab}} \rightarrow \text{IA}_n^{\text{ab}} \xrightarrow{\cong}$

$V^* \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda^2 V$ envoie ces générateurs $\bar{\xi}_{ij}$ sur la famille libre $\{x_i^* \otimes [x_i, x_j] : 1 \leq i \neq j \leq n\}$ de $V^* \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda^2 V$. Par conséquent, $\tau_1^{P\Sigma}$ est un isomorphisme sur son image. \square

Le groupe $\text{Aut}(F_n)/IA_n$ (isomorphe à $GL(n, \mathbb{Z})$) agit sur $\text{Gr}^k(\mathcal{A}_n)$ via l'action donnée par (2.43) et aussi sur $\mathcal{L}_n(k)$ via l'action donnée par (2.44) pour chaque $k \geq 1$. Le résultat suivant est remarquable.

Lemme 2.22. (*Lemma 3.11 dans [S16]*)

Le monomorphisme τ_k (2.50) est $\text{Aut}(F_n)/IA_n$ -équivariant.

Définition 2.23. Pour chaque $k \geq 1$, le monomorphisme $\text{Aut}(F_n)/IA_n$ -équivariant τ_k est appelé le k -ième homomorphisme de Johnson de $\text{Aut}(F_n)$.

Soit $\mathcal{B}_n(k) = \mathcal{A}_n(k) \cap B$ le k -ième terme de la filtration d'Andreadakis restreinte pour un sous-groupe B de $P\Sigma_n$. Il est clair que le groupe $\text{Gr}^k(\mathcal{B}) = \mathcal{B}_n(k)/\mathcal{B}_n(k+1)$ est un sous-groupe de $\text{Gr}^k(\mathcal{A}_n)$. Désignons par τ_k^B le k -ième homomorphisme de Johnson restreint à $\text{Gr}^k(\mathcal{B})$, nous définissons l'homomorphisme suivant

$$\tau_1^{(B)} := \tau_1^B \circ \mathfrak{J}_1 : \text{gr}^1(B) \rightarrow \text{Gr}^1(\mathcal{B}) \hookrightarrow IA_n^{\text{ab}} \quad (2.52)$$

obtenu en composant l'homomorphisme canonique $\mathfrak{J}_1 : \text{gr}^1(B) \rightarrow \text{Gr}^1(\mathcal{B})$ induit par l'inclusion $\Gamma_k(B) \subseteq \mathcal{B}_n(k)$ avec l'homomorphisme $\tau_1^B : \text{Gr}^1(\mathcal{B}) \hookrightarrow IA_n^{\text{ab}}$.

Proposition 2.24.

Soit B un sous-groupe de $P\Sigma_n$. Si l'homomorphisme $\tau_1^{(B)} : \text{gr}^1(B) \rightarrow IA_n^{\text{ab}}$ est injectif, alors on a $\mathcal{B}_n(2) = \Gamma_2(B)$.

Preuve. Supposons que $\tau_1^{(B)} : \text{gr}^1(B) \rightarrow IA_n^{\text{ab}}$ est injectif. On a donc $\Gamma_2(B) = \Gamma_2(IA_n) \cap B$. Puisque $\Gamma_2(IA_n) = \mathcal{A}_n(2)$ par [[B66], Lemme 5], on en déduit $\Gamma_2(B) = \Gamma_2(IA_n) \cap B = \mathcal{A}_n(2) \cap B = \mathcal{B}_n(2)$. \square

2.6 Idéal d'augmentation relative d'un groupe

Dans cette section, nous rappelons quelques définitions et propriétés de base des idéaux d'augmentation relative. Nous renvoyons les lecteurs aux [R82, CMZ17] pour plus de détails. Soient G un groupe de type fini et R un anneau commutatif unitaire. L'anneau de groupe $R[G]$ de G sur R est défini comme l'ensemble de toutes les sommes formelles finies $\sum_{g \in G} r_g g$ muni des opérations addition et multiplication suivantes :

$$\begin{aligned} \left(\sum_{g \in G} r_g g \right) + \left(\sum_{g \in G} s_g g \right) &= \sum_{g \in G} (r_g + s_g) g \\ \left(\sum_{g \in G} r_g g \right) \left(\sum_{h \in G} s_h h \right) &= \sum_{g, h \in G} (r_g s_h) gh. \end{aligned} \tag{2.53}$$

Par abus de notation, nous allons désigner l'élément neutre dans R , l'élément neutre dans $R[G]$ et celui du groupe dans G par 1 . L'homomorphisme $\pi : R[G] \rightarrow R$ donné par

$$\pi \left(\sum_{g \in G} r_g g \right) = \sum_{g \in G} r_g \tag{2.54}$$

est appelé l'*homomorphisme d'augmentation* de $R[G]$ et son noyau I_G est appelé l'*idéal d'augmentation* de $R[G]$. Rappelons que I_G est librement engendré comme un R -module par les éléments $g - 1, g \in G, g \neq 1$, ce qui signifie que c'est le groupe abélien libre avec l'ensemble $\{g - 1 : 1 \neq g \in G\}$ comme base,

$$I_G = \left\{ \sum_{g \in G} r_g (g - 1) : g \in G, g \neq 1, r_g \in R \right\}. \tag{2.55}$$

Si $G = \mathbb{F}$ est un groupe libre sur un ensemble X , alors $R[\mathbb{F}]$ est connu comme l'anneau de groupe libre. La propriété suivante de l'idéal d'augmentation d'un groupe libre \mathbb{F} est importante.

Propriété 2.25. ([R82], 11.3.1)

Si \mathbb{F} est un groupe libre sur un ensemble X , alors $I_{\mathbb{F}}$ est libre comme \mathbb{F} -module à droite sur l'ensemble $\bar{X} = \{x - 1 \mid x \in X\}$.

Notations 2.26. Si $g \in G$ et $r \in R$, alors il est conventionnel d'écrire les éléments $1 \cdot g \in R[G]$ et $r \cdot 1 \in R[G]$ simplement comme g et r respectivement.

Pour un sous-groupe normal N donné de G , la projection canonique $\tilde{\pi}_N : G \rightarrow G/N$ s'étend par fonctorialité de $R[-]$ à un épimorphisme naturel $\pi_N : R[G] \rightarrow R[G/N]$ donné par

$$\pi_N \left(\sum_{g \in G} r_g g \right) = \sum_{g \in G} r_g \tilde{\pi}_N(g) = \sum_{g \in G} r_g \bar{g}. \quad (2.56)$$

Soit \bar{I}_N le noyau de π_N . On peut observer que \bar{I}_N est l'idéal bilatère de $R[G]$ engendré par I_N . En plus, à cause de la normalité de N ,

$$\bar{I}_N = R[G] \cdot I_N = I_N \cdot R[G], \quad (2.57)$$

voir par exemple [Lemme 6.3 dans [CMZ17]]. Par conséquent, \bar{I}_N est l'idéal à droite de $R[G]$ engendré par tous les $x - 1$ où $1 \neq x \in N$. Donc, si N est engendré comme un sous-groupe normal par un sous-ensemble fini $\{n_s\}_s$, alors chaque élément de \bar{I}_N peut être écrit comme $\sum_s (1 - n_s)r_s$ où $r_s \in R[G]$.

Proposition 2.27. N est de type fini comme un sous-groupe normal de G si et seulement si \bar{I}_N est de type fini comme un idéal à droite de $R[G]$.

Preuve. Supposons que N est engendré comme un sous-groupe normal par n_1, \dots, n_s pour un certain entier positif non nul s et soit I l'idéal à droite de $R[G]$ engendré par les éléments $1 - n_i$ ($i = 1, \dots, s$). Clairement $I \subset \bar{I}_N$. Considérons un homomorphisme de groupes $\mathfrak{i} : G \subseteq R[G] \rightarrow R[G]/I$. On remarque que $N \subseteq \ker(\mathfrak{i})$ car les éléments $n_1, \dots, n_s \in \ker(\mathfrak{i})$ et on doit donc avoir $\bar{I}_N \subseteq I$. Par conséquence $I = \bar{I}_N = I_N \cdot R[G]$ est de type fini, engendré par les éléments $1 - n_i$. Réciproquement, supposons que \bar{I}_N est de type fini comme un idéal. Puisque cet idéal est engendré par plusieurs $1 - n$, où $n \in N$, il s'ensuit qu'il est de type fini, engendré par $1 - n_1, \dots, 1 - n_s$ pour certains $n_i \in N$. Soit maintenant N' le sous-groupe normal de G engendré par n_1, \dots, n_s . Donc N' est de type fini comme un sous-groupe normal de G , et $N' \subseteq N$. De plus, chaque $1 - n_i$ est contenu dans $\bar{I}_{N'} \subseteq \bar{I}_N$.

Mais les éléments $1 - n_i$ engendrent le plus grand idéal, donc $\bar{I}_{N'} = \bar{I}_N$. D'où $N = N'$ est de type fini comme un sous-groupe normal. □

Définition 2.28. *L'idéal bilatère \bar{I}_N est appelé idéal d'augmentation relative de N dans $R[G]$.*

Remarque 2.29. L'idéal d'augmentation relative peut être vu comme une généralisation de l'idéal d'augmentation, il suffit de remarquer que si $N = G$, alors il est facile de voir que $\bar{I}_G = I_G$.

La propriété suivante donne un résultat qui généralise la proposition 2.25 .

Propriété 2.30. (*[R82], 11.3.3*)

Soit N un sous-groupe normal d'un groupe libre \mathbb{F} . Si N est libre sur un ensemble Y , alors \bar{I}_N est libre comme \mathbb{F} -module à droite sur $\{y - 1 | y \in Y\}$.

Pour un sous-groupe donné B du groupe des automorphismes $\text{Aut}(\mathbb{F})$ d'un groupe libre \mathbb{F} de rang fini, il est possible de définir explicitement un produit semi-direct de \mathbb{F} et B , écrit $\mathbb{F} \rtimes B$. Soit $\tilde{\mathfrak{p}} : \mathbb{F} \rtimes B \rightarrow B$ la projection canonique dont son noyau est \mathbb{F} . On note $\mathfrak{p} : R[\mathbb{F} \rtimes B] \rightarrow R[B]$. Le noyau $\bar{I}_{\mathbb{F}}$ de \mathfrak{p} est l'idéal d'augmentation relative de \mathbb{F} dans $R[\mathbb{F} \rtimes B]$. En utilisant par le plongement $B \hookrightarrow \text{Aut}(\mathbb{F})$, il est possible de définir une action de B sur $\bar{I}_{\mathbb{F}}$. Puisque l'idéal d'augmentation relative $\bar{I}_{\mathbb{F}}$ est libre comme $\mathbb{F} \rtimes B$ -module à droite, il existe une représentation de B en termes de matrices dont les coefficients sont dans $R[\mathbb{F} \rtimes B]$. Dans le chapitre 4, nous appliquons ce procédé au groupe de McCool $P\Sigma_n$ pour obtenir dans le théorème 4.6 une représentation matricielle fidèle de ce groupe généralisant ainsi la représentation de Gassner du groupe de tresses pures sur n brins P_n . Nous verrons que ce procédé est comparable à celui d'une construction itérative dite méthode de Long-Moody exposée dans [BLM92, L94, BT08].

Étude sur l'égalité d'Andreadakis pour un sous-groupe du groupe de McCool

Ce chapitre comporte trois volets: dans le premier, nous démontrons que I_n a un lien direct avec le groupe de McCool triangulaire supérieur; le deuxième volet détermine la structure de l'algèbre $\text{gr}^*(I_n)$ de Lie graduée standard sur \mathbb{Z} ; dans le troisième, nous démontrons une égalité entre la filtration d'Andreadakis restreinte à I_n et la suite centrale descendante de ce groupe. À partir de maintenant, sauf mention expresse du contraire, le chiffre 1 désigne l'élément neutre de $\text{Aut}(F_n)$ et le groupe $F_n = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ est le groupe libre de rang n .

3.1 Le groupe des automorphismes intérieurs partiels

Bardakov et Neshchadim [BN17] ont défini le sous-groupe V_p ($2 \leq p \leq n$) de $P\Sigma_n$ engendré par $\nu_{p,i} = \xi_{1,i} \cdot \xi_{2,i} \cdots \xi_{p,i}$ qui agissent sur F_n comme il suit:

$$\begin{aligned} \nu_{p,i} : F_n &\longrightarrow F_n \\ x_k &\longmapsto \begin{cases} x_i^{-1} x_k x_i & \text{si } 1 \leq k \leq p \\ x_k & \text{si } p < k \leq n \end{cases} \end{aligned}$$

où $1 \leq i \leq p$. Chaque automorphisme $\nu_{p,i}$ induit un automorphisme intérieur de $F_p = \langle x_1, \dots, x_p \rangle$. Le sous-groupe V_p est isomorphe au groupe des automorphismes intérieurs $\text{Int}(F_p)$ de F_p . Le groupe libre F_p a un centre trivial pour $p \geq 2$ d'où $V_p \cong F_p$. Donc V_p est un groupe libre de rang p sur $\{\nu_{p,1}, \dots, \nu_{p,p}\}$. Le groupe des automorphismes intérieurs partiels I_n ($n \geq 2$) est défini comme le sous-groupe engendré par les sous-groupes V_2, \dots, V_n , noté $I_n = \langle V_2, V_3, \dots, V_n \rangle$. Le groupe I_n peut être réalisé comme un produit presque direct de groupes libres décrits comme il suit. C'est le produit semi-direct itéré,

$$I_n = V_n \rtimes_{\eta_n} (V_{n-1} \rtimes_{\eta_{n-1}} (\dots (V_3 \rtimes_{\eta_3} V_2) \dots)) =: \rtimes_{k=2}^n V_k. \quad (3.1)$$

La structure de produit semi-direct itéré (3.1) est donnée par $\eta_p : \rtimes_{k=2}^{p-1} V_k \rightarrow \text{IA}(V_p)$ tel que

$$\eta_m(\nu_{q,j})(\nu_{p,i}) = \nu_{q,j}^{-1} \cdot \nu_{p,i} \cdot \nu_{q,j} = \begin{cases} \nu_{p,i} & j = i \\ \nu_{p,i} & i > q \\ \nu_{p,j}^{-1} \cdot \nu_{p,i} \cdot \nu_{p,j} & j \neq i \text{ et } i \leq q \end{cases} \quad (3.2)$$

où $1 \leq i \leq p$, $1 \leq j \leq q$ et $2 \leq q < p \leq n$. Ici $\text{IA}(V_p)$ est le groupe des automorphismes de V_p agissant trivialement sur son abélianisé. La Proposition 2.17 implique immédiatement la proposition suivante.

Proposition 3.1. (Proposition 1 dans [BN17])

Le groupe $I_n = \rtimes_{k=2}^n V_k$ a une présentation finie avec des générateurs $\nu_{p,i}$ pour $2 \leq p \leq n$,

3.1. Le groupe des automorphismes intérieurs partiels

$1 \leq i \leq p$ et avec les relations suivantes

$$\begin{aligned}
 [\nu_{p,i}, \nu_{q,j}] &= 1 \text{ si } j = i \\
 [\nu_{p,i}, \nu_{q,j}] &= 1 \text{ si } i > q \\
 [\nu_{p,i}, \nu_{q,j}] &= [\nu_{p,i}, \nu_{p,j}] \text{ si } j \neq i \text{ et } i \leq q
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

où $1 \leq i \leq p$, $1 \leq j \leq q$ et $2 \leq q < p \leq n$. De plus l'abélianisé I_n^{ab} est un groupe abélien libre de rang $\frac{n(n+1)}{2} - 1$, une base étant donnée par les classes $\bar{\nu}_{p,i}$ de $\nu_{p,i}$.

Nous remarquons que le groupe de McCool triangulaire supérieur $P\Sigma_n^+ = \langle \xi_{i,j} \rangle_{1 \leq j < i \leq n}$ est contenu dans I_n pour tout $n \geq 1$. En fait, on peut exprimer les générateurs $\xi_{i,j}$ ($j < i$) de $P\Sigma_n^+$ via ceux de $I_n = \times_{k=2}^n V_k$:

$$\xi_{i,j} = \nu_{(i-1),j}^{-1} \cdot \nu_{i,j} \text{ pour tout } 1 \leq j < i \leq n. \tag{3.4}$$

Nous remarquons également que I_n ($n \geq 1$) est le produit $V_n \cdot P\Sigma_n^+$. En effet, puisque V_n est normal dans I_n , le produit $V_n \cdot P\Sigma_n^+$ est un sous-groupe de I_n , et on peut exprimer tout générateur ν_{ij} ($i \geq j$) de I_n par $\nu_{ij} = \nu_{nj} \xi_{nj}^{-1} \xi_{(n-1),j}^{-1} \cdots \xi_{(i+1),j}^{-1}$. Par ailleurs, il est clair que nous pouvons voir le groupe I_n comme un sous-groupe de I_{n+1} . De plus I_{n+1} est un produit semi-direct $V_{n+1} \rtimes I_n$. Nous définissons la projection $q_n : I_{n+1} \rightarrow I_n$ provenant de cette décomposition produit semi-directe. Elle induit un isomorphisme entre I_n ($n \geq 1$) et le groupe $\text{Int}(P\Sigma_{n+1}^+)$ des automorphismes intérieurs de $P\Sigma_{n+1}^+$:

Théorème 3.2. *L'application $P\Sigma_{n+1}^+ \subset I_{n+1} \xrightarrow{q_n} I_n$ induit un isomorphisme:*

$$\overline{P\Sigma_{n+1}^+} = P\Sigma_{n+1}^+ / Z(P\Sigma_{n+1}^+) \cong I_n, \tag{3.5}$$

où $Z(P\Sigma_{n+1}^+)$ est le centre de $P\Sigma_{n+1}^+$.

Preuve. La projection q_n est le quotient de $I_{n+1} = V_{n+1} \cdot P\Sigma_{n+1}^+$ par V_{n+1} . Elle induit donc

$$P\Sigma_{n+1}^+ / (V_{n+1} \cap P\Sigma_{n+1}^+) \cong V_{n+1} \cdot P\Sigma_{n+1}^+ / V_{n+1} \cong I_n. \tag{3.6}$$

Nous avons d'autre part $V_{n+1} \cap P\Sigma_{n+1}^+ = Z(P\Sigma_{n+1}^+)$. En effet, un élément de cette intersection doit être un automorphisme intérieur fixant x_1 , ce qui implique qu'il doit être dans $\langle \nu_{n+1,1} \rangle$. Inversement $\langle \nu_{n+1,1} \rangle$ est clairement dans cette intersection. Donc $V_{n+1} \cap P\Sigma_{n+1}^+ = \langle \nu_{n+1,1} \rangle$. Puisque $Z(P\Sigma_{n+1}^+) = \langle \nu_{n+1,1} = \xi_{2,1} \cdot \xi_{3,1} \cdots \xi_{n+1,1} \rangle$ par [[CP08], Proposition 2.3], on en déduit $V_{n+1} \cap P\Sigma_{n+1}^+ = Z(P\Sigma_{n+1}^+)$. Par conséquent, on a $\text{Int}(P\Sigma_{n+1}^+) = P\Sigma_{n+1}^+/Z(P\Sigma_{n+1}^+) \cong I_n$. \square

3.2 Suite centrale descendante du groupe I_n

À partir de (3.1), on peut définir la suite exacte courte scindée

$$\{1\} \rightarrow V_n \rightarrow I_n \rightarrow I_{n-1} \rightarrow \{1\}. \quad (3.7)$$

Le groupe I_{n-1} agit par conjugaison sur V_n^{ab} trivialement. En effet l'action par conjugaison de $\nu_{j,q}$ sur $\nu_{n,p}$ est donnée par

$$\nu_{j,q}^{-1} \cdot \nu_{n,p} \cdot \nu_{j,q} = \begin{cases} \nu_{n,p} & \text{si } p = q \text{ ou } p > j \\ \nu_{n,p} \cdot [\nu_{n,p}, \nu_{n,q}] & \text{si } p \neq q \text{ et } p \leq j, \end{cases} \quad (3.8)$$

où $q \leq j \leq n-1$. Par le Théorème 2.15, il existe une suite exacte courte

$$\{0\} \rightarrow \text{gr}^k(V_n) \rightarrow \text{gr}^k(I_n) \rightarrow \text{gr}^k(I_{n-1}) \rightarrow \{0\} \text{ pour tout } k \geq 1. \quad (3.9)$$

Par récurrence sur n , on a des isomorphismes de groupes abéliens

$$\text{gr}^k(I_n) \cong \bigoplus_{m=2}^n \text{gr}^k(V_m) \cong \bigoplus_{m=2}^n \mathcal{L}_m(k) \text{ pour tout } k \geq 1. \quad (3.10)$$

En conséquence, nous arrivons au résultat suivant.

Proposition 3.3. $\text{gr}^k(I_n)$ est un groupe abélien libre dont le rang est

$$\phi_k(I_n) = \sum_{m=2}^n r_m(k), \quad (3.11)$$

où $r_m(k)$ est le rang du groupe abélien libre $\mathcal{L}_m(k)$ (2.17).

3.2. Suite centrale descendante du groupe I_n

Nous allons maintenant déterminer la structure de l'algèbre de Lie graduée $\text{gr}^*(I_n)$ sur \mathbb{Z} . Soit η_{pi} ($1 \leq i \leq p \leq n$) l'image de $\nu_{p,i}$ dans $\text{gr}^1(I_n)$. Pour $2 \leq p \leq n$, soit $\mathfrak{N} := \{\eta_{p1}, \dots, \eta_{pp}\}$ et $L[\mathfrak{N}]$ soit l'algèbre de Lie libre correspondante de rang p sur \mathbb{Z} . Puisque V_n est le groupe libre de rang n sur $\nu_{n,1}, \dots, \nu_{n,n}$, $\text{gr}^*(V_n)$ est l'algèbre de Lie libre $L[\mathfrak{N}]$ de rang n sur \mathbb{Z} engendrée par les classes $\eta_{n1}, \dots, \eta_{nn} \in \text{gr}^1(V_n)$ (par Proposition 2.10) de $\nu_{n,1}, \dots, \nu_{n,n}$. Par [Lemme 3.1.1 dans [I90]], on a

$$\text{gr}^*(I_n) = L[\mathfrak{N}] \oplus \text{gr}^*(I_{n-1}). \quad (3.12)$$

La proposition suivante décrit la structure de l'algèbre de Lie $\text{gr}^*(I_n)$.

Proposition 3.4. *L'algèbre de Lie $\text{gr}^*(I_n)$ ($n \geq 2$) est le quotient de l'algèbre de Lie libre $L[\mathfrak{N}]$ sur \mathbb{Z} engendrée par les éléments η_{pi} pour $2 \leq p \leq n$ et $1 \leq i \leq p$ modulo les relations suivantes.*

$$\begin{aligned} [\eta_{pi}, \eta_{qj}] &= 0 \text{ si } j = i \\ [\eta_{pi}, \eta_{qj}] &= 0 \text{ si } i > q \\ [\eta_{pi}, \eta_{qj} - \eta_{pj}] &= 0 \text{ si } j \neq i \text{ et } i \leq q \end{aligned} \quad (3.13)$$

où $1 \leq i \leq p$, $1 \leq j \leq q$ et $2 \leq q < p \leq n$.

Preuve. Premièrement, par Prop.2.10 et Prop.3.1, les $\bar{\nu}_{p,i}$ engendrent $\text{gr}^*(I_n)$ et satisfont les relations (3.13). Notons ∇_n le quotient de l'algèbre de Lie libre sur \mathbb{Z} engendré par les symboles η_{pi} modulo ces relations. Soit $q_n : \nabla_n \rightarrow \text{gr}^*(I_n)$ la projection induite par $\eta_{pi} \mapsto \bar{\nu}_{p,i}$ et soit $\pi_n : \nabla_n \rightarrow \nabla_{n-1}$ l'épimorphisme défini par $\eta_{ni} \mapsto 0$ ($1 \leq i \leq n$). Nous montrerons par récurrence sur $n \geq 2$ que q_n un isomorphisme. Notez que pour $n = 2$, c'est évidemment un isomorphisme. Pour $n \geq 3$, nous supposons que q_{n-1} est un isomorphisme et avons un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} \{0\} & \longrightarrow & \mathfrak{K}_n & \longrightarrow & \nabla_n & \xrightarrow{\pi_n} & \nabla_{n-1} & \longrightarrow & \{0\} \\ & & \downarrow k_n & & \downarrow q_n \text{ (surjective)} & & \downarrow \text{isomorphisme par hypothèse de récurrence} & & \\ \{0\} & \longrightarrow & L[\mathfrak{N}_n] & \longrightarrow & \text{gr}^*(I_n) & \longrightarrow & \text{gr}^*(I_{n-1}) & \longrightarrow & \{0\} \end{array} \quad (3.14)$$

où $\mathfrak{K}_n := \ker(\pi_n)$ et la deuxième ligne provient de la décomposition (3.12). Le noyau \mathfrak{K}_n de π_n est un idéal de ∇_n engendré par $\eta_{n1}, \dots, \eta_{nn}$. Mais en fait \mathfrak{K}_n est engendré par η_{nj} comme une

sous-algèbre de Lie. Puisque $L[\mathfrak{Y}_n]$ est libre de rang n sur le \mathfrak{h}_{nj} et \mathfrak{K}_n est engendré par ces \mathfrak{h}_{nj} de ($1 \leq j \leq n$). Donc k_n doit être un isomorphisme. Par hypothèse de récurrence et en utilisant le lemme des cinq, on en déduit que q_n est un isomorphisme. \square

Remarque 3.5. Une présentation de $\text{gr}^*(I_n)$ est aussi donnée dans [[KMP19], corollaire 6] et [[BN17], proposition 9], mais la preuve repose sur des techniques différentes de celle donnée ici.

3.3 Égalité d'Andreadakis pour I_n

Soit $\mathcal{I}_n(k)$ la k -ième filtration d'Andreadakis sur I_n définie par $\mathcal{I}_n(k) := I_n \cap \mathcal{A}_n(k)$. Nous écrivons $\text{Gr}^k(\mathcal{I}_n) := \mathcal{I}_n(k)/\mathcal{I}_n(k+1)$ pour tout $k \geq 1$. Soit $\tau_k^I := \tau_k|_{\text{Gr}^k(\mathcal{I}_n)} : \text{Gr}^k(\mathcal{I}_n) \hookrightarrow V^* \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{L}_n(k+1)$ le monomorphisme induit par la restriction de τ_k (2.50) à $\text{Gr}^k(\mathcal{I}_n)$. Il existe un morphisme naturel

$$\check{\delta}_k : \text{gr}^k(I_n) \longrightarrow \text{Gr}^k(\mathcal{I}_n) \quad (3.15)$$

induit par l'inclusion $\Gamma_k(I_n) \subseteq \mathcal{I}_n(k)$. Nous définissons l'homomorphisme $\tau_k^{(I)}$ comme étant la composition de $\check{\delta}_k$ avec τ_k^I

$$\tau_k^{(I)} := \tau_k^I \circ \check{\delta}_k : \text{gr}^k(I_n) \longrightarrow V^* \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{L}_n(k+1). \quad (3.16)$$

Nous allons déterminer maintenant les valeurs de l'image $\text{Im}(\tau_k^{(I)})$ de $\tau_k^{(I)}$. Rappelons que I_n est engendré par les automorphismes $\nu_{i,p} = \xi_{1,p} \cdot \xi_{2,p} \cdots \xi_{i,p}$ ($2 \leq i \leq n$, $1 \leq p \leq i$) qui agissent sur les générateurs de F_n par la règle suivante

$$\nu_{i,p}(x_r) = \begin{cases} x_p^{-1} x_r x_p & \text{si } 1 \leq r \leq i \\ x_r & \text{si } r > i. \end{cases} \quad (3.17)$$

Donc pour $1 \leq p_1, p_2 \leq i$, nous avons

$$(\nu_{i,p_1} \nu_{i,p_2})(x_r) = \nu_{i,p_1}(\nu_{i,p_2}(x_r)) = \begin{cases} x_{p_1}^{-1} x_{p_2}^{-1} x_r x_{p_2} x_{p_1} & \text{si } 1 \leq r \leq i \\ x_r & \text{si } r > i \end{cases} \quad (3.18)$$

Considérons maintenant un produit donné par $\Theta = \nu_{i,p_1}^{\epsilon_1} \cdot \nu_{i,p_2}^{\epsilon_2} \cdots \nu_{i,p_k}^{\epsilon_k}$ où $\epsilon_t = \pm 1$ et $1 \leq p_t \leq i$ avec $t \in \{1, \dots, k\}$. Voyons comment Θ agit sur chaque générateur $x_r \in F_n$. L'action de Θ sur $x_r \in F_n$ est donnée par

$$\Theta(x_r) = \begin{cases} (x_{p_1}^{\epsilon_1} \cdot x_{p_2}^{\epsilon_2} \cdots x_{p_k}^{\epsilon_k})^{-1} \cdot x_r \cdot x_{p_1}^{\epsilon_1} \cdot x_{p_2}^{\epsilon_2} \cdots x_{p_k}^{\epsilon_k} & \text{si } 1 \leq r \leq i \\ x_r & \text{si } r > i. \end{cases} \quad (3.19)$$

Par conséquent, l'action de commutateur $[\nu_{i,p_1}, \nu_{i,p_2}] \in \Gamma_2(I_n)$ sur chaque générateur $x_r \in F_n$ est alors donnée par

$$[\nu_{i,p_1}, \nu_{i,p_2}](x_r) = \begin{cases} [x_{p_1}, x_{p_2}]^{-1} \cdot x_r \cdot [x_{p_1}, x_{p_2}] & \text{si } 1 \leq r \leq i \\ x_r & \text{si } r > i. \end{cases} \quad (3.20)$$

Nous faisons agir ensuite le k -commutateur $\mathfrak{T} = [\dots [\dots [\nu_{i,p_1}, \nu_{i,p_2}] \dots], \nu_{i,p_k}] \in \Gamma_k(I_n)$ sur chaque générateur $x_r \in F_n$ et on obtient

$$\mathfrak{T}(x_r) = \begin{cases} [\dots, [x_{p_1}, x_{p_2}] \dots], x_{p_k}]^{-1} \cdot x_r \cdot [\dots, [x_{p_1}, x_{p_2}] \dots], x_{p_k}] & \text{si } 1 \leq r \leq i \\ x_r & \text{si } r > i \end{cases} \quad (3.21)$$

Proposition 3.6. *Soit $\mathfrak{T} = [\dots, [\nu_{i,p_1}, \nu_{i,p_2}], \dots], \nu_{i,p_k}] \in \Gamma_k(I_n)$. Si $1 \leq p_1, p_2, \dots, p_k \leq i$ pour $2 \leq i \leq n$, alors*

$$\tau_k^{(I)}(\overline{\mathfrak{T}}) = \begin{cases} x_r^* \otimes [x_{p_1}, \dots, x_{p_k}, x_r] & \text{si } 1 \leq r \leq i \\ x_r & \text{si } r > i \end{cases} \quad (3.22)$$

De plus, $\text{Im}(\tau_k^{(I)})$ est engendré par

$$\{x_r^* \otimes [x_{p_1}, \dots, x_{p_k}, x_r] \in V^* \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{L}_n(k+1) : 1 \leq p_1, p_2, \dots, p_k, r \leq i \text{ et } 2 \leq i \leq n\}. \quad (3.23)$$

Preuve. Il découle de (3.10) que $\text{Im}(\tau_k^{(I)})$ est engendré par l'ensemble (3.23). \square

Pour tout $k \geq 1$ et $1 \leq s \leq n$, nous désignons par $\{c_j^s(k)\}_{1 \leq j \leq n_k^s}$ tous les commutateurs-bases de poids k parmi les composants $\{x_1, \dots, x_s\}$. Comme on sait maintenant, voir Théorème 2.14, les commutateurs-bases de poids k forment une base du groupe abélien libre $\mathcal{L}_s(k)$. Nous arrivons au résultat suivant

Lemme 3.7. $\mathcal{H} := \{x_s^* \otimes [c_1^s(k), x_s], \dots, x_s^* \otimes [c_{n_k^s}^s(k), x_s] : 1 \leq s \leq n\}$ est une base de $\text{Im}(\tau_k^{(I)})$ comme un groupe abélien libre de rang $\sum_{s=2}^n r_s(k)$ où $r_s(k)$ est le rang du groupe abélien libre $\mathcal{L}_s(k)$.

Preuve. Clairement, \mathcal{H} engendre $\text{Im}(\tau_k^{(I)})$. Il suffit donc de montrer que les éléments de \mathcal{H} sont linéairement indépendants. Supposons que

$$\sum_{s=1}^n \sum_{j=1}^{n_k^s} \lambda_{s,j} x_s^* \otimes [c_j^s(k), x_s] = 0$$

pour $\lambda_{s,j} \in \mathbb{Z}$. Pour chaque $1 \leq s \leq n$ fixé, on a alors

$$\sum_{j=1}^{n_k^s} \lambda_{s,j} [c_j^s(k), x_s] = 0.$$

On considère l'homomorphisme injectif $\beta : \mathcal{L}_s(k) \hookrightarrow \mathcal{L}_s(k+1)$. Puisque les éléments $[c_j^s(k), x_s]$ appartiennent à $\mathcal{L}_s(k+1)$ et les éléments $c_j^s(k)$ pour $1 \leq j \leq n_k^s$ sont linéairement indépendants dans $\mathcal{L}_s(k)$, les éléments $[c_j^s(k), x_s]$ sont linéairement indépendants dans $\mathcal{L}_s(k+1)$. Ceci montre que $\lambda_{s,j} = 0$ pour $1 \leq j \leq n_k^s$. Les éléments dans \mathcal{H} sont donc linéairement indépendants et par conséquent $\text{rang}(\mathcal{H}) = \sum_{s=2}^n r_s(k)$. \square

L'énoncé suivant est une réponse affirmative à la question (2.48) sur l'égalité d'Andreadakis pour le groupe I_n .

Théorème 3.8.

Le sous-groupe I_n de IA_n satisfait l'égalité d'Andreadakis:

$$\forall k \geq 1 \quad \mathcal{I}_n(k) := I_n \cap \mathcal{A}_n(k) = \Gamma_k(I_n). \quad (3.24)$$

Preuve. Nous montrons ce théorème par récurrence sur $k \geq 1$. Par définition on a $\Gamma_1(I_n) = \mathcal{I}_n(1) = I_n$. L'homomorphisme canonique $\mathfrak{S} : I_n^{\text{ab}} \rightarrow P\Sigma_n^{\text{ab}}$ est injectif car les classes $\bar{\nu}_{i,p}$ de $\nu_{i,p}$ (qui engendrent I_n) sont une famille génératrice de I_n^{ab} et l'homomorphisme \mathfrak{S} envoie cette

famille génératrice $\bar{v}_{i,p}$ sur une famille libre de $P\Sigma_n^{\text{ab}}$, (voir Lemme 2.21). On a donc $\Gamma_2(I_n) = \Gamma_2(P\Sigma_n) \cap I_n$. Puisque $\Gamma_2(P\Sigma_n) = \mathcal{A}_n(2) \cap P\Sigma_n$ par [[S12], Corollaire 2.2.], on en déduit $\Gamma_2(I_n) = \mathcal{I}_n(2)$. Supposons que nous ayons $\Gamma_k(I_n) = \mathcal{I}_n(k)$ pour un $k \geq 2$. Alors nous avons l'homomorphisme surjectif

$$\tau_k^{(I)} : \text{gr}^k(I_n) \xrightarrow{\check{\delta}_k} \text{Gr}^k(\mathcal{I}_n) \xrightarrow{\tau_k^I} \text{Im}(\tau_k^I) = \text{Im}(\tau_k^{(I)}). \quad (3.25)$$

Par le lemme 3.7, $\text{Im}(\tau_k^{(I)})$ a le même rang que $\text{gr}^k(I_n)$, comme groupe abélien libre. L'homomorphisme $\tau_k^{(I)}$ est alors un isomorphisme et ainsi l'homomorphisme $\check{\delta}_k$ doit être injectif. Par conséquent $\Gamma_{k+1}(I_n) = \mathcal{I}_n(k+1)$. □

Représentations matricielles de groupe de tresses généralisées

Ce chapitre vise à proposer une procédure, comparable à celle d'une construction itérative de Long-Moody, qui permet de relever des représentations de $P\Sigma_{n+1}$ à $P\Sigma_n$ et à étendre une méthode de Lüdde et Toppan au groupe de tresses virtuelles sur n brins VB_n afin de mettre en avant une nouvelle représentation de VB_n . À partir de maintenant, le chiffre 1 désigne l'élément neutre de groupes de tresses virtuelles et soudées et R désigne un anneau commutatif unitaire dont l'élément neutre est noté aussi 1. Sauf mention contraire, le groupe $F_n = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ sera toujours le groupe libre de rang n .

4.1 Deux généralisations du groupe de tresses ordinaires

4.1.1 Le groupe des automorphismes par permutation-conjugaison de F_n

Un résultat d'Artin [B75] montre que l'ensemble des automorphismes $b \in \text{Aut}(F_n)$ qui satisfont les deux conditions suivantes forment un sous-groupe de $\text{Aut}(F_n)$:

$$(B1) \quad b(x_i) = v_i^{-1} x_{s(i)} v_i, \quad 1 \leq i \leq n,$$

$$(B2) \quad b(x_1 \cdots x_n) = x_1 \cdots x_n,$$

où $v_i \in F_n$ et s est une permutation sur $\{1, \dots, n\}$. Ce sous-groupe est isomorphe au groupe de tresses d'Artin B_n qui est le groupe défini par la présentation sur les générateurs $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ soumis aux relations de tresses

$$\begin{aligned} \sigma_i \sigma_j &= \sigma_j \sigma_i \quad \text{si } 1 \leq i \leq j-2 \leq n-3 \\ \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i &= \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \quad \text{si } 1 \leq i \leq n-2. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Via cet isomorphisme, le générateur σ_i correspond à un automorphisme $\tilde{\sigma}_i$ de F_n :

$$\tilde{\sigma}_i : \begin{cases} x_i & \mapsto x_i x_{i+1} x_i^{-1} \\ x_{i+1} & \mapsto x_i \\ x_j & \mapsto x_j \quad \forall j \neq \{i, i+1\}. \end{cases} \tag{4.2}$$

Le monomorphisme $\mathbf{art}_n : B_n \hookrightarrow \text{Aut}(F_n)$ défini par $\sigma_i \mapsto \tilde{\sigma}_i$ est appelé la *représentation d'Artin*. Le groupe des automorphismes par permutation-conjugaison de F_n , $B\Sigma_n$, a été étudié en détail par exemple dans [S96]. Ses éléments sont les automorphismes $b \in \text{Aut}(F_n)$ satisfaisant la condition (B1) ci-dessus, connue sous le nom des automorphismes par permutation-conjugaison et le produit

4.1. Deux généralisations du groupe de tresses ordinaires

du groupe est la composition des automorphismes. Il est clair que le sous-groupe de $B\Sigma_n$ constitué de ces automorphismes par permutation-conjugaison qui fixent le mot $x_1 \cdots x_n \in F_n$ est le groupe de tresses B_n . Soit $\tau_i \in \text{Aut}(F_n)$, $i = 1, \dots, n-1$ donné par

$$\tau_i : \begin{cases} x_i & \mapsto x_{i+1} \\ x_{i+1} & \mapsto x_i \\ x_j & \mapsto x_j \quad \forall j \neq \{i, i+1\}. \end{cases} \quad (4.3)$$

Les éléments $(\tau_i)_{i=1}^{n-1}$ engendrent le sous-groupe de permutation Σ_n de $\text{Aut}(F_n)$ qui est isomorphe au groupe symétrique S_n de degré n . Le sous-groupe Σ_n a une présentation finie avec les générateurs $\tau_1, \dots, \tau_{n-1}$ et avec les relations suivantes

$$\begin{aligned} \tau_i^2 &= 1 \text{ pour } i = 1, \dots, n-1 \\ \tau_i \tau_j &= \tau_j \tau_i \text{ si } 1 \leq i \leq j-2 \leq n-3 \\ \tau_i \tau_{i+1} \tau_i &= \tau_{i+1} \tau_i \tau_{i+1} \text{ si } 1 \leq i \leq n-2. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Dans [[S96], Théorème 1], il est montré que $B\Sigma_n$ est le produit libre de B_n et Σ_n modulo les relations mixtes :

$$\begin{aligned} \sigma_i \tau_j &= \tau_j \sigma_i \text{ pour } |i-j| \geq 2 \\ \sigma_i \tau_{i+1} \tau_i &= \tau_{i+1} \tau_i \sigma_{i+1} \text{ pour } i = 1 \dots n-2 \\ \sigma_{i+1} \sigma_i \tau_{i+1} &= \tau_i \sigma_{i+1} \sigma_i \text{ pour } i = 1 \dots n-2. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Par définition, $B\Sigma_1 = \{1\}$ est le groupe trivial et $B\Sigma_2$ est un produit libre $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}$. Par ailleurs, $B\Sigma_n$ ($n \geq 1$) contient le groupe de McCool $P\Sigma_n$. Dans [S96], Savushkina a montré que $B\Sigma_n$ est le produit semi-direct $B\Sigma_n = P\Sigma_n \rtimes \Sigma_n$ de $P\Sigma_n$ et Σ_n . Les éléments de Σ_n agissent sur $P\Sigma_n$ via conjugaison :

$$\begin{aligned} \tau_i \xi_{i,i+1} &= \xi_{i+1,i} \tau_i \text{ pour } 1 \leq i \leq n-1 \\ \tau_k \xi_{i,j} &= \xi_{i,j} \tau_k \text{ pour } i, j, k \text{ distincts} \\ \tau_j \xi_{i,j} &= \xi_{i,j+1} \tau_j \text{ pour } i, j, \text{ distincts} \\ \tau_i \xi_{i,j} &= \xi_{i+1,j} \tau_i \text{ pour } i, j, \text{ distincts} \end{aligned} \quad (4.6)$$

En écrivant le groupe $B\Sigma_n$ comme un produit semi-direct, nous obtenons une présentation pour celui-ci.

Proposition 4.1. (Lemme 1 dans [S96])

Le groupe $B\Sigma_n$ ($n \geq 1$) admet une présentation avec les générateurs de Magnus $\xi_{i,j}$ ($1 \leq i \neq j \leq n$) et τ_i ($1 \leq i \leq n-1$), avec les relations suivantes :

1. Les relations McCool (2.33),
2. Les relations pour les générateurs τ_i de Σ_n (4.4),
3. Les relations exprimant l'action de Σ_n agissent sur $P\Sigma_n$ (4.6).

4.1.2 Le groupe de tresses virtuelles

Dans cette section, nous rappelons les définitions standards en termes de générateurs et relations des groupes de tresses virtuelles et soudées sur n brins. Soit VB_n le groupe de tresses virtuel sur les n brins. Ce groupe introduit dans [K99] est le groupe défini par la présentation avec les générateurs $\rho_1, \dots, \rho_{n-1}, \vartheta_1, \dots, \vartheta_{n-1}$ et les relations suivantes :

$$\rho_i \rho_{i+1} \rho_i = \rho_{i+1} \rho_i \rho_{i+1} \text{ pour } i = 1, 2, \dots, n-2 \quad (4.7)$$

$$\rho_i \rho_j = \rho_j \rho_i \text{ pour } |i-j| \geq 2 \quad (4.8)$$

$$\vartheta_i^2 = 1 \text{ pour } i = 1, \dots, n-1 \quad (4.9)$$

$$\vartheta_i \vartheta_{i+1} \vartheta_i = \vartheta_{i+1} \vartheta_i \vartheta_{i+1} \text{ pour } i = 1, 2, \dots, n-2 \quad (4.10)$$

$$\vartheta_i \vartheta_j = \vartheta_j \vartheta_i \text{ pour } |i-j| \geq 2 \quad (4.11)$$

$$\rho_i \vartheta_j = \vartheta_j \rho_i \text{ pour } |i-j| \geq 2 \quad (4.12)$$

$$\rho_i \vartheta_{i+1} \vartheta_i = \vartheta_{i+1} \vartheta_i \rho_{i+1} \text{ pour } i = 1 \dots n-2 \quad (4.13)$$

Il est bien connu que les relations (4.7)-(4.8) définissent les relations du groupe de tresses classique sur n brins, B_n , où les éléments $\rho_1, \dots, \rho_{n-1}$ engendrent le groupe de tresses classique B_n dans

4.1. Deux généralisations du groupe de tresses ordinaires

VB_n . Il est également connu que les relations (4.9)-(4.11) sont des relations définissant le groupe symétrique S_n sur n lettres, où les éléments $\vartheta_1, \dots, \vartheta_{n-1}$ engendrent le groupe symétrique S_n dans VB_n . Ainsi VB_n peut être présenté par le produit libre B_n et S_n modulo les relations (4.12)-(4.13). Le miroir de la relation (4.13) (c'est-à-dire lorsqu'il est lu à l'envers) est valable dans VB_n :

$$\vartheta_i \vartheta_{i+1} \rho_i = \rho_{i+1} \vartheta_i \vartheta_{i+1} \quad (i = 1, \dots, n-2). \quad (4.14)$$

Mais toutefois, la relation suivante n'est pas valable dans VB_n [GPV00]:

$$\vartheta_i \rho_{i+1} \rho_i = \rho_{i+1} \rho_i \vartheta_{i+1} \quad (i = 1, \dots, n-2). \quad (4.15)$$

Le groupe de tresses soudées sur n brins WB_n est par définition le groupe obtenu à partir de VB_n en introduisant la *relation interdite* (4.15). De plus, WB_n possède un groupe *jumeau* noté \mathcal{WB}_n . C'est le groupe correspondant à WB_n en tant qu'ensemble, et nous avons toutes les relations comme dans WB_n sauf que la relation interdite (4.15) qui est remplacée par la relation suivante qui est aussi une *relation interdite* :

$$\vartheta_{i+1} \rho_i \rho_{i+1} = \vartheta_i \rho_{i+1} \rho_i \quad (i = 1, \dots, n-2). \quad (4.16)$$

Les deux groupes \mathcal{WB}_n et WB_n sont isomorphes et l'isomorphisme est donné par l'application $\mathfrak{I}_n : \mathcal{WB}_n \rightarrow WB_n$ qui envoie

$$\rho_i \mapsto \rho_i^{-1} \text{ et } \vartheta_i \mapsto \vartheta_i \quad (i = 1, \dots, n). \quad (4.17)$$

Fenn, Rimanyi et Rourke [FRR97] ont montré que le groupe de tresses soudées WB_n est isomorphe au groupe $B\Sigma_n$. Autrement dit, la représentation d'Artin \mathbf{art}_n s'étend en un monomorphisme $\mathbf{art}_n^{B\Sigma} : WB_n \hookrightarrow \text{Aut}(F_n)$ donné par

$$\rho_i \mapsto \sigma_i \text{ et } \vartheta_i \mapsto \tau_i \text{ pour tout } i = 1, \dots, n-1. \quad (4.18)$$

Donc, WB_n et \mathcal{WB}_n ($n \geq 1$) peuvent être donc considérés comme des sous-groupes de $\text{Aut}(F_n)$.

4.2 Généralisation de la représentation de Burau et de Gassner

Dans cette section, nous construisons des représentations matricielles qui généralisent la représentation de Burau du groupe de tresses ordinaires ainsi la représentation de Gassner du groupe de tresses pures ordinaires.

4.2.1 Construction à partir de la représentation d'Artin

Soit $\iota : B\Sigma_n \hookrightarrow B\Sigma_{n+1}$ l'inclusion canonique et soit \mathbb{F}_n le sous-groupe de $P\Sigma_{n+1}$ librement engendré par les n éléments $\{\xi_{n+1,1}, \xi_{n+1,2}, \dots, \xi_{n+1,n}\}$ (cf. [B03a, CPVW08]). Considérons les deux inclusions suivantes

$$B\Sigma_n \xhookrightarrow{\iota} B\Sigma_{n+1} \hookrightarrow \mathbb{F}_n. \quad (4.19)$$

Lemme 4.2. *Les formules suivantes sont vraies dans $B\Sigma_{n+1}$:*

$$\xi_{n+1,k}^{\tau_i} : \begin{cases} \xi_{n+1,i} & \mapsto \xi_{n+1,i+1} \\ \xi_{n+1,i+1} & \mapsto \xi_{n+1,i} \\ \xi_{n+1,j} & \mapsto \xi_{n+1,k} \quad \forall k \neq \{i, i+1\}. \end{cases}, \quad \xi_{n+1,k}^{\sigma_i} : \begin{cases} \xi_{n+1,i} & \mapsto \xi_{n+1,i} \cdot \xi_{n+1,i+1} \cdot \xi_{n+1,i}^{-1} \\ \xi_{n+1,i+1} & \mapsto \xi_{n+1,i} \\ \xi_{n+1,j} & \mapsto \xi_{n+1,k} \quad \forall k \neq \{i, i+1\}. \end{cases} \quad (4.20)$$

et

$$\xi_{n+1,k}^{\xi_{i,j}} : \begin{cases} \xi_{n+1,i} & \mapsto \xi_{n+1,j} \cdot \xi_{n+1,i} \cdot \xi_{n+1,j}^{-1} \quad k = i, \\ \xi_{n+1,k} & \mapsto \xi_{n+1,k} \quad \forall k \neq i. \end{cases} \quad (4.21)$$

où $a^b := b^{-1}ab$.

Il n'est pas surprenant que l'action de conjugaison dans le lemme 4.2 définisse une représentation $\mathfrak{A}_n : B\Sigma_n \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{F}_n)$ donnée par $\mathfrak{A}_n(\omega)(f) = \omega^{-1} \cdot f \cdot \omega$ où $\omega \in B\Sigma_n$ et $f \in \mathbb{F}_n$. Puisque le diagramme suivant est commutatif, \mathfrak{A}_n est un monomorphisme

$$\begin{array}{ccc} B\Sigma_n & \xrightarrow{\mathfrak{A}_n} & \text{Aut}(\mathbb{F}_n) \\ \text{id} \downarrow & & \downarrow \iota_\omega^{-1} \circ (\) \circ \iota_\omega \\ B\Sigma_n & \xrightarrow{\text{art}_n^{B\Sigma}} & \text{Aut}(\mathbb{F}_n) \end{array} \quad (4.22)$$

4.2. Généralisation de la représentation de Burau et de Gassner

où $\iota_\omega : \mathbb{F}_n \rightarrow \mathbb{F}_n$ est l'isomorphisme de groupes libres donné par $\iota_\omega(x_i) = \xi_{n+1,i}$ pour tout $1 \leq i \leq n$. Désormais $B\Sigma_n$ ($n \geq 1$) doit avoir une représentation fidèle comme groupe des automorphismes de $\mathbb{F}_n = \langle \xi_{n+1,1}, \xi_{n+1,2}, \dots, \xi_{n+1,n} \rangle$. Désignons les images par \mathfrak{A}_n des générateurs σ_i et τ_i par $\hat{\sigma}_i$ et $\hat{\tau}_i$ respectivement. Dans le groupe $B\Sigma_n \leq \text{Aut}(\mathbb{F}_n)$, les générateurs de Magnus $\xi_{i,j}$ peuvent être exprimés via les générateurs $\hat{\sigma}_1, \dots, \hat{\sigma}_{n-1}$ de B_n et les générateurs $\hat{\tau}_1, \dots, \hat{\tau}_{n-1}$ de Σ_n par les formules [S96]:

$$\begin{aligned}
 \xi_{i,i+1} &= \hat{\sigma}_i \hat{\tau}_i \\
 \xi_{i,j} &= \hat{\tau}_{j-1} \hat{\tau}_{j-2} \cdots \hat{\tau}_{i+1} \cdot \hat{\xi}_{i,i+1} \cdot \hat{\tau}_{i+1} \cdots \hat{\tau}_{j-2} \hat{\tau}_{j-1} \quad (i < j) \\
 \xi_{j,i} &= \hat{\tau}_{j-1} \tau_{j-2} \cdots \hat{\tau}_{i+1} \cdot \hat{\tau}_i \cdot \hat{\xi}_{i,i+1} \cdot \hat{\tau}_i \hat{\tau}_{i+1} \cdots \hat{\tau}_{j-2} \cdot \hat{\tau}_{j-1} \quad (i < j).
 \end{aligned} \tag{4.23}$$

Introduisons maintenant la *dérivée de Fox* $\frac{\partial}{\partial \xi_{n+1,j}} : \mathbb{R}[\mathbb{F}_n] \rightarrow \mathbb{R}[\mathbb{F}_n]$ par rapport à $\xi_{n+1,j}$ qui est l'extension linéaire de l'application définie sur les éléments de \mathbb{F}_n par

$$\frac{\partial \xi_{n+1,i}}{\partial \xi_{n+1,j}} = \delta_{i,j}, \quad \frac{\partial \xi_{n+1,i}^{-1}}{\partial \xi_{n+1,j}} = -\delta_{i,j} \xi_{n+1,i}^{-1} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \mu \nu}{\partial \xi_{n+1,j}} = \frac{\partial \mu}{\partial \xi_{n+1,j}} + \mu \frac{\partial \nu}{\partial \xi_{n+1,j}} \tag{4.24}$$

pour tout $\nu, \mu \in \mathbb{F}_n$ où $\delta_{i,j}$ désigne le symbole de Kronecker. On définit la $n \times n$ -matrice jacobienne des dérivés de Fox d'un automorphisme $\Psi : \mathbb{F}_n \rightarrow \mathbb{F}_n$ par $J(\Psi) = \left(\frac{\partial \Psi(\xi_{n+1,l})}{\partial \xi_{n+1,k}} \right)_{1 \leq l, k \leq n}$. D'excellentes références pour la dérivée de Fox est le livre de Birman [B75] et l'article original de Fox [F53]. Désignons, pour chaque i donné, la matrice jacobienne de $\hat{\sigma}_i$ et $\hat{\tau}_i$ par $J(\sigma_i)$ et $J(\tau_i)$ respectivement. Le fait que

$$\begin{aligned}
 (\tau_i \cdot J(\tau_i) \cdot \tau_i) \cdot J(\tau_i) &= I_{n \times n} \quad \text{pour } i = 1, \dots, n-1, \\
 (\tau_i \cdot J(\tau_j) \cdot \tau_i) \cdot J(\tau_i) &= (\tau_j \cdot J(\tau_i) \cdot \tau_j) \cdot J(\tau_j) \quad |i-j| \geq 2, \\
 (\sigma_i^{-1} \cdot J(\sigma_j) \cdot \sigma_i) \cdot J(\sigma_i) &= (\sigma_j^{-1} \cdot J(\sigma_i) \cdot \sigma_j) \cdot J(\sigma_j) \quad |i-j| \geq 2, \\
 (\tau_j \cdot J(\sigma_i) \cdot \tau_j) \cdot J(\tau_j) &= (\sigma_i^{-1} \cdot J(\tau_j) \cdot \sigma_i) \cdot J(\sigma_i) \quad |i-j| \geq 2, \\
 (\tau_i \cdot (\tau_{i+1} \cdot J(\tau_i) \cdot \tau_{i+1}) \cdot J(\tau_{i+1}) \cdot \tau_i) \cdot J(\tau_i) &= (\tau_{i+1} \cdot (\tau_i \cdot J(\tau_{i+1}) \cdot \tau_i) \cdot J(\tau_i) \cdot \tau_{i+1}) \cdot J(\tau_{i+1}) \\
 (\sigma_i^{-1} \cdot (\tau_{i+1} \cdot J(\tau_i) \cdot \tau_{i+1}) \cdot J(\tau_i) \cdot \sigma_i) \cdot J(\sigma_i) &= (\tau_{i+1} \cdot (\tau_i \cdot J(\sigma_{i+1}) \cdot \tau_i) \cdot J(\tau_i) \cdot \tau_{i+1}) \cdot J(\tau_{i+1}) \\
 (\tau_i \cdot (\sigma_{i+1}^{-1} \cdot J(\sigma_i) \cdot \sigma_{i+1}) \cdot J(\sigma_{i+1}) \cdot \tau_i) \cdot J(\tau_i) &= (\sigma_{i+1}^{-1} \cdot (\sigma_i^{-1} \cdot J(\tau_{i+1}) \cdot \sigma_i) \cdot J(\sigma_i) \cdot \sigma_{i+1}) \cdot J(\sigma_{i+1}) \\
 (\sigma_i^{-1} \cdot (\sigma_{i+1}^{-1} \cdot J(\sigma_i) \cdot \sigma_{i+1}) \cdot J(\sigma_{i+1}) \cdot \sigma_i) \cdot J(\sigma_i) &= (\sigma_{i+1}^{-1} \cdot (\sigma_i^{-1} \cdot J(\sigma_{i+1}) \cdot \sigma_i) \cdot J(\sigma_i) \cdot \sigma_{i+1}) \cdot J(\sigma_{i+1})
 \end{aligned} \tag{4.25}$$

est une conséquence des relations de $B\Sigma_n$ ($n \geq 1$) de (4.5) et de la formule suivante qui fait référence à la règle de chaîne de calcul de Fox :

Lemme 4.3. (Lemme 1.4.7 dans [MSY04])

Désignons la $n \times n$ -matrice d'identité par $I_{n \times n}$. Si Ψ, Φ sont deux automorphismes de \mathbb{F}_n , alors on a $J(\Phi \circ \Psi) = \tilde{\Phi}(J(\Psi)) \cdot J(\Phi)$ et $J(1) = I_{n \times n}$ où $\tilde{\Phi} : (\mathbb{R}[\mathbb{F}_n])^n \rightarrow (\mathbb{R}[\mathbb{F}_n])^n$ est une extension de Φ donnée par la functorialité de $\mathbb{R}[-]^n$.

Dans (4.25), nous imbriquons les relations de $B\Sigma_n$ de (4.5) pour en arriver à

$$\begin{aligned}
 (\tau_i \cdot J(\tau_i)) \cdot (\tau_i \cdot J(\tau_i)) &= I_{n \times n} \quad \text{pour } i = 1, \dots, n-1, \\
 (\tau_j \cdot J(\tau_j)) \cdot (\tau_i \cdot J(\tau_i)) &= (\tau_i \cdot J(\tau_i)) \cdot (\tau_j \cdot J(\tau_j)) \quad |i-j| \geq 2, \\
 (\sigma_j \cdot J(\sigma_j)) \cdot (\sigma_i \cdot J(\sigma_i)) &= (\sigma_i \cdot J(\sigma_i)) \cdot (\sigma_j \cdot J(\sigma_j)) \quad |i-j| \geq 2, \\
 (\sigma_i \cdot J(\sigma_i)) \cdot (\tau_j \cdot J(\tau_j)) &= (\tau_j \cdot J(\tau_j)) \cdot (\sigma_i \cdot J(\sigma_i)) \quad |i-j| \geq 2, \\
 (\tau_i \cdot J(\tau_i)) \cdot (\tau_{i+1} \cdot J(\tau_{i+1})) \cdot (\tau_i \cdot J(\tau_i)) &= (\tau_{i+1} \cdot J(\tau_{i+1})) \cdot (\tau_i \cdot J(\tau_i)) \cdot (\tau_{i+1} \cdot J(\tau_{i+1})) \\
 (\sigma_i \cdot J(\sigma_i)) \cdot (\sigma_{i+1} \cdot J(\sigma_{i+1})) \cdot (\sigma_i \cdot J(\sigma_i)) &= (\sigma_{i+1} \cdot J(\sigma_{i+1})) \cdot (\sigma_i \cdot J(\sigma_i)) \cdot (\sigma_{i+1} \cdot J(\sigma_{i+1})) \\
 (\sigma_i \cdot J(\sigma_i)) \cdot (\tau_{i+1} \cdot J(\tau_{i+1})) \cdot (\tau_i \cdot J(\tau_i)) &= (\tau_{i+1} \cdot J(\tau_{i+1})) \cdot (\tau_i \cdot J(\tau_i)) \cdot (\sigma_{i+1} \cdot J(\sigma_{i+1})) \\
 (\sigma_{i+1} \cdot J(\sigma_{i+1})) \cdot (\sigma_i \cdot J(\sigma_i)) \cdot (\tau_{i+1} \cdot J(\tau_{i+1})) &= (\tau_i \cdot J(\tau_i)) \cdot (\sigma_{i+1} \cdot J(\sigma_{i+1})) \cdot (\sigma_i \cdot J(\sigma_i)). \quad (4.26)
 \end{aligned}$$

À partir de ces relations, il résulte que l'application $\Phi_n : B\Sigma_n \rightarrow \text{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}[\mathbb{F}_n \rtimes B\Sigma_n])$ telle que

$$\sigma_i \mapsto \sigma_i \cdot J(\sigma_i) \quad \text{et} \quad \tau_i \mapsto \tau_i \cdot J(\tau_i) \quad (i = 1, \dots, n-1) \quad (4.27)$$

définit une représentation matricielle de $B\Sigma_n$. Nous affirmons que Φ_n est fidèle, car $\Phi_n = \mathcal{J} \circ \mathfrak{A}_n$ où $\mathcal{J} : \text{Aut}(\mathbb{F}_n) \subset \text{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}[\mathbb{F}_n]) \hookrightarrow \text{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}[\mathbb{F}_n \rtimes B\Sigma_n])$. Un simple calcul des $J(\sigma_i)$ et $J(\tau_i)$ donne

respectivement pour tout $1 \leq i \leq n-1$

$$\sigma_i \mapsto \Phi_n(\sigma_i) = \begin{pmatrix} & i & & i+1 & \\ & & & & \\ \sigma_i \cdot I_{i-1} & & & & \\ & \sigma_i \cdot (1 - \xi_{n+1,i} \cdot \xi_{n+1,i+1} \cdot \xi_{n+1,i}^{-1}) & & \sigma_i \cdot \xi_{n+1,i} & \\ & & \sigma_i & & 0 \\ & & & & \\ & & & & \sigma_i \cdot I_{n-i-1} \end{pmatrix} \quad (4.28)$$

et

$$\tau_i \mapsto \Phi_n(\tau_i) = \begin{pmatrix} & i & & i+1 & \\ & & & & \\ \tau_i \cdot I_{i-1} & & & & \\ & 0 & & \tau_i & \\ & & \tau_i & & 0 \\ & & & & \tau_i \cdot I_{n-i-1} \end{pmatrix} \quad \text{et } \tau_i^{-1} \mapsto \Phi_n^{-1}(\tau_i) = \Phi_n(\tau_i). \quad (4.29)$$

L'inverse de (4.28) est donné par

$$\sigma_i^{-1} \mapsto \Phi_n^{-1}(\sigma_i) := \begin{pmatrix} & i & & i+1 & \\ & & & & \\ \sigma_i^{-1} \cdot I_{i-1} & & & & \\ & 0 & & \sigma_i^{-1} & \\ & & \sigma_i^{-1} \cdot \xi_{n+1,i+1}^{-1} & & \sigma_i^{-1} \cdot \xi_{n+1,i+1}^{-1} \cdot (\xi_{n+1,i} - 1) \\ & & & & \\ & & & & \sigma_i^{-1} \cdot I_{n-i-1} \end{pmatrix} \quad (4.30)$$

Il existe une autre manière de construire la représentation Φ_n (4.27) de $B\Sigma_n$ dont l'idée vient de [L96]: on considère le produit semi-direct $\mathbb{F}_n \rtimes B\Sigma_n$ relatif à l'action de $B\Sigma_n$ sur \mathbb{F}_n donnée par \mathfrak{A}_n . On note $\mathfrak{p}_n : R[\mathbb{F}_n \rtimes B\Sigma_n] \twoheadrightarrow R[B\Sigma_n]$. Le noyau $\widehat{\mathbb{I}}_{\mathbb{F}_n}$ de \mathfrak{p}_n est par définition l'*idéal d'augmentation relative* de \mathbb{F}_n dans $R[\mathbb{F}_n \rtimes B\Sigma_n] \subset R[B\Sigma_{n+1}]$ (voir 2.28). L'idéal $\widehat{\mathbb{I}}_{\mathbb{F}_n}$ est un $R[\mathbb{F}_n \rtimes B\Sigma_n]$ -module (à droite) libre de

base $\{\xi_{n+1,1}-1, \dots, \xi_{n+1,n}-1\}$ (cf. section 2.6). On considère l'action de $B\Sigma_n$ sur $\widehat{\mathbb{I}}_{\mathbb{F}_n}$ par multiplication à gauche:

$$\begin{aligned} \xi_{n+1,k}-1 &\mapsto b \cdot (\xi_{n+1,k}-1) = (1, b) \cdot (\xi_{n+1,k}-1, 1) \\ &= (b(\xi_{n+1,k}-1), b) = (b(\xi_{n+1,k})-1, b) = (\widehat{b}(\xi_{n+1,k})-1) \cdot b, \end{aligned} \quad (4.31)$$

où \widehat{b} est l'image de b par \mathfrak{A}_n . Donc on peut dire que $\widehat{\mathbb{I}}_{\mathbb{F}_n}$ est un module à gauche sur $B\Sigma_n$. Puisque $\widehat{\mathbb{I}}_{\mathbb{F}_n}$ est libre comme $R[\mathbb{F}_n \rtimes B\Sigma_n]$ -module à droite, nous pouvons construire une représentation Φ_n de $B\Sigma_n$ en termes de matrices dont les coefficients sont donnés dans $(\widehat{\mathbb{I}}_{\mathbb{F}_n} \subset) R[\mathbb{F}_n \rtimes B\Sigma_n]$. Par contre, les représentations de σ_i, τ_i sont respectivement données par

$$\sigma_i \mapsto J(\sigma_i) \cdot \sigma_i \text{ et } \tau_i \mapsto J(\tau_i) \cdot \tau_i \text{ pour } i = 1, \dots, n-1. \quad (4.32)$$

Remarque 4.4. Dans [BS20], les matrices (4.28) et (4.29) ci-dessus ont été déterminées sur la base d'une procédure itérative développée dans [L94] dite méthode de Long-Moody. Ladite méthode a été introduite pour la première fois dans [BLM92] et il semble qu'elle est étroitement liée à celle donnée ici en prenant $V = R[\mathbb{F}_n \rtimes B\Sigma_n]$ la construction que nous développons dans la section ci-après.

4.2.2 Comparaison entre deux constructions

La méthode de Long-Moody s'articule comme suit: soit $B \leq \text{Aut}(\mathbb{F}_n)$ et soit $I_{\mathbb{F}_n}$ l'idéal d'augmentation vu comme $R[\mathbb{F}_n]$ -module à droite engendré par $\{x_1-1, \dots, x_n-1\}$. Supposons que nous ayons un R -espace vectoriel V qui est simultanément une représentation de B et \mathbb{F}_n . Alors B agit à la fois sur $\mathbb{F}_n, I_{\mathbb{F}_n}$ et V , et pareillement \mathbb{F}_n agit sur $I_{\mathbb{F}_n}$ et V . Désignons l'action d'un automorphisme $b \in B$ sur un élément $f \in \mathbb{F}_n$ par ${}^b f$. Si la condition $b \cdot f \cdot v = {}^b f \cdot b \cdot v$, dite condition de Magnus, est vérifiée et que nous voyons V comme un $R[\mathbb{F}_n]$ -module à gauche alors on peut définir une action de B sur $I_{\mathbb{F}_n} \otimes_{R[\mathbb{F}_n]} V$ par

$$\begin{aligned} \lambda : B &\rightarrow \text{Aut}_R(I_{\mathbb{F}_n} \otimes_{R[\mathbb{F}_n]} V) \\ b &\mapsto (f \otimes v \mapsto {}^b f \otimes b.v). \end{aligned} \quad (4.33)$$

En posant $V_k := (x_k - 1) \otimes V$ pour chaque $k = 1, \dots, n$, la représentation (4.33) peut être écrite comme $\lambda : B \rightarrow \text{Aut}_R(V_1 \oplus \dots \oplus V_n)$. Nous allons maintenant nous pencher sur le cas où B est le groupe de

4.2. Généralisation de la représentation de Burau et de Gassner

tresses $B_n = \langle \rho_i \rangle_{1 \leq i \leq n-1}$. En utilisant la représentation d'Artin \mathbf{art}_n , nous avons une action de B_n sur le groupe libre F_n et un produit semi-direct $F_n \rtimes B_n$ du groupe de tresses B_n avec le groupe libre F_n de rang n peut être définie. Cette action de B_n peut être naturellement étendue sur l'anneau de groupe libre $R[F_n]$. Le groupe B_n opère sur I_{F_n} car ${}^b I_{F_n} = I_{F_n}$ pour tout $b \in B_n$. L'action de chaque générateur ρ_i ($i = 1, \dots, n-1$) de B_n sur le générateur $x_l - 1$ ($l = 1, \dots, n$) de I_{F_n} est donnée par

$$\rho_i(x_l - 1) = \begin{cases} (1 - x_i x_{i+1} x_1^{-1}) \cdot (x_i - 1) + x_i \cdot (x_{i+1} - 1) & \text{si } l = i \\ x_i - 1 & \text{si } l = i + 1 \\ x_l - 1 & \text{si } l \neq \{i, i + 1\}. \end{cases} \quad (4.34)$$

Soit $\mu_{n+1} : B_{n+1} \rightarrow S_{n+1}$ l'épimorphisme canonique défini par $\mu_n(\rho_i) = (i, i + 1)$ pour $1 \leq i \leq n - 1$. Par exemple, dans [L94], le produit semi-direct $F_n \rtimes B_n$ est isomorphe au sous-groupe $\{b \in B_{n+1}; \mu_{n+1}(b)(n + 1) = n + 1\}$ de B_{n+1} . Donc, chaque représentation $\lambda : B_{n+1} \rightarrow \text{Aut}_R(V)$ donnée de B_{n+1} induit une représentation de $F_n \rtimes B_n$. Alors on peut construire une représentation $\lambda^+ : B_n \rightarrow \text{Aut}_R(V^{\oplus n})$ et l'action de $\lambda^+(\rho_i)$ sur $V^{\oplus n}$ est donnée par:

$$(v_1 \oplus \dots \oplus v_n) \mapsto \left[\text{id}_V^{\oplus(i-1)} \oplus \begin{pmatrix} \lambda(1 - x_i x_{i+1} x_1^{-1}) & \lambda(x_i) \\ \text{id}_V & 0 \end{pmatrix} \oplus \text{id}_V^{\oplus(n-i-1)} \right] \lambda(\rho_i). \quad (4.35)$$

où id_V est l'application identité de V . Voir également [BT08, K07]. En l'appliquant à une représentation unidimensionnelle $\lambda : B_{n+1} \rightarrow R^*$ de B_{n+1} , la construction donne une variante de la représentation non réduite de Burau. Dans [BS20], cette méthode décrite ci-dessus est étendue à WB_n . Comme ce groupe est une extension de B_n par S_n , l'action (4.34) peut être facilement étendue à:

$$\begin{aligned} \rho_i(x_l - 1) &= \begin{cases} (1 - x_i x_{i+1} x_1^{-1}) \cdot (x_i - 1) + x_i \cdot (x_{i+1} - 1) & \text{si } l = i \\ x_i - 1 & \text{si } l = i + 1 \\ x_l - 1 & \text{si } l \neq \{i, i + 1\}, \end{cases} \\ \vartheta_i(x_l - 1) &= \begin{cases} x_{i+1} - 1 & \text{si } l = i \\ x_i - 1 & \text{si } l = i + 1 \\ x_l - 1 & \text{si } l \neq \{i, i + 1\}. \end{cases} \end{aligned} \quad (4.36)$$

Chapitre 4. Représentations matricielles de groupe de tresses généralisées

A partir de (4.36), l'action $\lambda^+(\vartheta_i)$ sur $V^{\oplus n}$, écrite également en notation matricielle par blocs, est donnée par

$$(v_1 \oplus \cdots \oplus v_n) \mapsto \left[\text{id}_V^{\oplus(i-1)} \oplus \begin{pmatrix} 0 & \text{id}_V \\ \text{id}_V & 0 \end{pmatrix} \oplus \text{id}_V^{\oplus(n-i-1)} \right] \lambda(\vartheta_i). \quad (4.37)$$

Ainsi on peut obtenir une nouvelle représentation $\hat{\lambda}^+ : \text{WB}_n \rightarrow \text{Aut}_R(V^{\oplus n})$ définie par

$$\rho_i \mapsto \lambda^+(\rho_i) \quad (4.35) \quad \text{et} \quad \vartheta_i \mapsto \lambda^+(\vartheta_i) \quad (4.37). \quad (4.38)$$

Nous considérons le diagramme suivant où t, ϕ, r sont les monomorphismes et π_n est la projection canonique:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & \mathbb{F}_n & \xrightarrow{t} & \mathbb{F}_n \rtimes \text{WB}_n & \xleftarrow{\phi} & \text{WB}_n & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow \iota_\omega & & \downarrow \mathfrak{a}_{n+1} & & \downarrow \mathfrak{a}_n & & \\ 1 & \longrightarrow & \mathbb{F}_n & \xrightarrow{r} & \mathbb{F}_n \rtimes \text{B}\Sigma_n & \xrightarrow{\pi_n} & \text{B}\Sigma_n & \longrightarrow & 1. \end{array} \quad (4.39)$$

Proposition 4.5. *En se plaçant dans le contexte de la construction de Long-Moody adapté au groupe de tresses soudées, il existe un isomorphisme de WB_n -modules*

$$\mathbb{I}_{\mathbb{F}_n} \otimes_{\mathbb{R}[\mathbb{F}_n]} V \cong \widehat{\mathbb{I}}_{\mathbb{F}_n} \otimes_{\mathbb{R}[\mathbb{F}_n \rtimes \text{WB}_n]} V. \quad (4.40)$$

En particulier, on a pour $V = \mathbb{R}[\mathbb{F}_n \rtimes \text{WB}_n]$ un isomorphisme de WB_n -modules

$$\mathbb{I}_{\mathbb{F}_n} \otimes_{\mathbb{R}[\mathbb{F}_n]} V \cong \widehat{\mathbb{I}}_{\mathbb{F}_n}. \quad (4.41)$$

Preuve. Supposons tout d'abord que V soit un WB_{n+1} -module à gauche et considérons l'isomorphisme des modules sur $\mathbb{R}[\mathbb{F}_n]$

$$\mathbb{I}_{\mathbb{F}_n} \otimes_{\mathbb{R}[\mathbb{F}_n]} V \xrightarrow{\iota_\omega^* \otimes \text{id}} \widehat{\mathbb{I}}_{\mathbb{F}_n} \otimes_{\mathbb{R}[\mathbb{F}_n \rtimes \text{WB}_n]} V \quad (4.42)$$

où $\iota_\omega^* : \mathbb{R}[\mathbb{F}_n] \rightarrow \mathbb{R}[\mathbb{F}_n]$ et $\text{id} : V \rightarrow V$ est l'application identité. Maintenant cet isomorphisme $\iota_\omega^* \otimes \text{id}$ est compatible avec l'action de WB_n . En effet: on rappelle qu'on a dans $\mathbb{I}_{\mathbb{F}_n} \otimes_{\mathbb{R}[\mathbb{F}_n]} V$ l'action donnée comme suit

$$b \cdot (x_i - 1 \otimes v) = {}^b(x_i - 1) \otimes b \cdot v \quad \text{pour tout } b \in \text{WB}_n. \quad (4.43)$$

Chapitre 4. Représentations matricielles de groupe de tresses généralisées

peut définir un produit semi-direct $\mathbb{F}_n \rtimes P\Sigma_n$, et puis on peut également définir un idéal d'augmentation relative $\widehat{\mathbb{I}}_{\mathbb{F}_n}$ dans $R[\mathbb{F}_n \rtimes P\Sigma_n]$. On rappelle que $\widehat{\mathbb{I}}_{\mathbb{F}_n}$ est engendré par les éléments $\{\xi_{n+1,k} - 1 : k = 1, \dots, n\}$ et tout générateur $(\xi_{n+1,i} - 1)$ de $\widehat{\mathbb{I}}_{\mathbb{F}_n}$ peut s'écrire en utilisant la formule fondamentale du calcul différentiel libre [[F53], (2.3)] :

$$\xi_{n+1,i} - 1 = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \xi_{n+1,i}}{\partial \xi_{n+1,k}} (\xi_{n+1,k} - 1) \quad \text{pour tout } i = 1, \dots, n. \quad (4.47)$$

Grâce à [Théorème 3.9, [B75]], nous définissons l'action à droite de $P\Sigma_{n+1}$ sur $\widehat{\mathbb{I}}_{\mathbb{F}_n}$ en posant

$$(\xi_{n+1,l} - 1) \cdot \xi_{i,j} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial(\xi_{n+1,l} \cdot \xi_{i,j})}{\partial \xi_{n+1,k}} (\xi_{n+1,k} - 1), \quad (1 \leq l \leq n). \quad (4.48)$$

En calculant les coefficients $\left(\frac{\partial(\xi_{n+1,l} \cdot \xi_{i,j})}{\partial \xi_{n+1,k}} \right)_{l,k}$ de (4.48), nous obtenons

$$(\xi_{n+1,l} - 1) \cdot \xi_{i,j} = \sum_{k=1}^n \mathcal{C}(\xi_{i,j})_l^k \cdot (\xi_{n+1,k} - 1) \quad (4.49)$$

avec

$$\mathcal{C}(\xi_{i,j})_l^k = \begin{pmatrix} & i & & & j & \\ & & & & & \\ \xi_{i,j} \cdot I_{i-1} & & & & & \\ & \xi_{i,j} \cdot \xi_{n+1,j} & & \xi_{i,j} \cdot (1 - \xi_{n+1,j} \cdot \xi_{n+1,i} \cdot \xi_{n+1,j}^{-1}) & & \\ & & & & & \\ & 0 & & & \xi_{i,j} \cdot I_{j-i} & \\ & & & & & \\ & & & & & \xi_{i,j} \cdot I_{n-j} \end{pmatrix} \quad (i < j) \quad (4.50)$$

$$\mathcal{C}(\xi_{i,j})_1^k = \begin{pmatrix} & j & & i & \\ \xi_{i,j} \cdot I_{j-1} & & & & \\ & \xi_{i,j} \cdot I_{i-j} & & 0 & \\ & & \xi_{i,j} \cdot (1 - \xi_{n+1,j} \cdot \xi_{n+1,i} \cdot \xi_{n+1,j}^{-1}) & \xi_{i,j} \cdot \xi_{n+1,j} & \\ & & & & \xi_{i,j} \cdot I_{n-i} \end{pmatrix} \quad (j < i) \quad (4.51)$$

où $1 \leq i \neq j \leq n$. En passant des générateurs $\xi_{i,j}$ dans $P\Sigma_{n+1}$ à leur matrice correspondante $\mathcal{C}(\xi_{i,j})_1^k$, on trouve que le nombre de générateurs diminue de un, puis nous attribuons chaque générateur $\xi_{i,j}$ de $P\Sigma_n$ à cette matrice. On arrive au résultat suivant.

Théorème 4.6. *L'application $\xi_{i,j} \mapsto \mathcal{C}(\xi_{i,j})$, $1 \leq i \neq j \leq n$, détermine une représentation matricielle fidèle $\Psi_n : P\Sigma_n \rightarrow GL(n, R[\mathbb{F}_n \rtimes P\Sigma_n])$ où*

$$\mathcal{C}(\xi_{i,j}) = \begin{pmatrix} & i & & j & \\ \xi_{i,j} \cdot I_{i-1} & & & & \\ & \xi_{i,j} \cdot \xi_{n+1,j} & \xi_{i,j} \cdot (1 - \xi_{n+1,j} \cdot \xi_{n+1,i} \cdot \xi_{n+1,j}^{-1}) & & \\ & & & \xi_{i,j} \cdot I_{j-i} & \\ & 0 & & & \xi_{i,j} \cdot I_{n-j} \end{pmatrix} \quad (i < j) \quad (4.52)$$

et

$$\mathcal{C}(\xi_{i,j}) = \begin{pmatrix} & j & & i & \\ & & & & \\ \xi_{i,j} \cdot I_{j-1} & & & & \\ & \xi_{i,j} \cdot I_{i-j} & & 0 & \\ & & \xi_{i,j} \cdot (1 - \xi_{n+1,j} \cdot \xi_{n+1,i} \cdot \xi_{n+1,j}^{-1}) & \xi_{i,j} \cdot \xi_{n+1,j} & \\ & & & & \xi_{i,j} \cdot I_{n-i} \end{pmatrix} \quad (j < i). \quad (4.53)$$

Preuve. Puisque l'action fidèle de $P\Sigma_n$ sur \mathbb{F}_n s'étend sur l'anneau de groupe libre $R[\mathbb{F}_n]$ et, de plus, la représentation matricielle donnée dans ce théorème est équivalente à l'action à droite de $P\Sigma_n$ sur l'idéal d'augmentation $I_{\mathbb{F}_n}$. \square

Remarque 4.7. En vertu de ce théorème et (4.49), nous pourrions dire que $\widehat{\mathbb{I}}_n$ satisfait l'écriture abstraite suivante :

$$\widehat{\mathbb{I}}_{\mathbb{F}_n} \cdot \mathfrak{s} = \sum \mathcal{C}(\mathfrak{s}) \cdot \widehat{\mathbb{I}}_{\mathbb{F}_n} \quad (4.54)$$

où \mathfrak{s} représente les générateurs de $P\Sigma_{n+1}$ et $\mathcal{C}(\mathfrak{s})$ est leur matrice correspondante considérée comme des générateurs de $P\Sigma_n$. Nous verrons dans la section 4.3 ci-dessous comment cette écriture peut être itérée.

Proposition 4.8.

L'application $\mathfrak{a} : R[\mathbb{F}_n \rtimes P\Sigma_n] \rightarrow R[t_1^{\pm 1}, \dots, t_n^{\pm 1}]$ telle que $\xi_{n+1,k} \mapsto t_k$ et $\xi_{i,j} \mapsto 1$ appliquée à chaque coefficient des matrices ci-dessus donne la représentation ${}^{\mathfrak{a}}\Psi_n : P\Sigma_n \rightarrow GL(n, R[t_1^{\pm 1}, \dots, t_n^{\pm 1}])$ donnée par $\xi_{i,j} \mapsto {}^{\mathfrak{a}}\mathcal{C}(\xi_{i,j})$ avec

$${}^a\mathcal{C}(\xi_{i,j}) = \begin{pmatrix} & i & j & \\ & I_{i-1} & & \\ t_j & & 1-t_i & \\ & 0 & I_{j-i} & \\ & & & I_{n-j} \end{pmatrix} \quad (i < j) \quad (4.55)$$

et

$${}^a\mathcal{C}(\xi_{i,j}) = \begin{pmatrix} & j & i & \\ & I_{j-1} & & \\ I_{i-j} & & 0 & \\ & 1-t_i & t_j & \\ & & & I_{n-i} \end{pmatrix} \quad (j < i) \quad (4.56)$$

où $1 \leq i \neq j \leq n$.

Remarque 4.9. La représentation ${}^a\Psi_n$ ($n \geq 1$) a été construite respectivement : par Bardakov [B05] en utilisant la construction de Magnus au sens de Birman définie dans [B75] et par Rubinsztein [R02] en utilisant la construction au sens originel considéré par Magnus dans [M74]. Cette représentation n'est pas fidèle pour $n \geq 2$ et est une extension de la représentation de Gassner du groupe de tresses pures P_n (voir [B05]). Bien sûr, la représentation ${}^a\Psi_n$ s'étend facilement à la représentation $\tilde{f}\Phi_n$ (4.46) de $B\Sigma_n$ dite extension de représentation de Burau. Compte tenu du fait que ${}^a\Psi_n$ et ${}^a\widehat{\Psi}_n$ sont des extensions des représentations de Burau et Gassner, c'est pour cette raison que nous appelons Ψ_n comme *représentation généralisée de Gassner* de $P\Sigma_n$ et Φ_n comme *représentation généralisée de Burau* de $B\Sigma_n$. En outre, M. Nasser et M. Abdulrahim ont récemment étudié l'irréductibilité des extensions des représentations de Burau et Gassner dans [NA20].

4.3 Construction d'une méthode itérative

Nous donnons ici une méthode itérative consistante avec (4.48)-(4.49) et (4.54). Pour ce faire, nous construisons itérativement des produits semi-directs

$$\begin{aligned}
 P\Sigma_n(1) &:= \mathbb{F}_n \rtimes P\Sigma_n \leq P\Sigma_{n+1} \\
 P\Sigma_n(2) &:= \mathbb{F}_n \rtimes (\mathbb{F}_{n-1} \rtimes P\Sigma_{n-1}) \leq P\Sigma_{n+1} \\
 &\vdots \\
 P\Sigma_n(r) &:= \mathbb{F}_n \rtimes (\mathbb{F}_{n-1} \rtimes (\dots (\mathbb{F}_{n+1-r} \rtimes P\Sigma_{n+1-r}) \dots)) \leq P\Sigma_{n+1} \quad (1 \leq r \leq n),
 \end{aligned} \tag{4.57}$$

où \mathbb{F}_k est le groupe libre sur $\{\xi_{k+1,1}, \dots, \xi_{k+1,k}\}$ (voir [B03a, CPVW08]). À partir des décompositions (4.57), nous définissons itérativement les idéaux d'augmentation relatives $\widehat{\mathbb{I}}_{\mathbb{F}_{n+1-r}}$ associés aux groupes libres \mathbb{F}_{n+1-r} , puis considérons l'action de $P\Sigma_{n+1}$ sur le produit direct $\mathfrak{d}_1^r \cdot \mathfrak{d}_{1^{r-1}} \cdots \mathfrak{d}_{1^2} \cdot \mathfrak{d}_{1^1}$, où $\mathfrak{d}_{1^s} := (\xi_{n-r+2,1^s} - 1)$ pour chaque $s = 1, \dots, r$. Ici, l'action de $\xi_{i,j}$ ($1 \leq i \neq j \leq n+1$) sur le produit direct $\mathfrak{d}_1^r \cdot \mathfrak{d}_{1^{r-1}} \cdots \mathfrak{d}_{1^2} \cdot \mathfrak{d}_{1^1}$ est donnée par itération de (4.48) comme suit :

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{d}_1^r \cdot \mathfrak{d}_{1^{r-1}} \cdots \mathfrak{d}_{1^2} \cdot \mathfrak{d}_{1^1} \cdot \xi_{i,j} &= \mathfrak{d}_1^r \cdot \mathfrak{d}_{1^{r-1}} \cdots \mathfrak{d}_{1^2} \cdot \sum_{k^1=1}^n \mathcal{C}(\xi_{i,j})_{1^1}^{k^1} \cdot \mathfrak{d}_{k^1} \text{ par (4.49)} \\
 &= \mathfrak{d}_1^r \cdot \mathfrak{d}_{1^{r-1}} \cdots \mathfrak{d}_{1^3} \cdot \sum_{k^2=1}^{n-1} \sum_{k^1=1}^n \mathcal{C}(\mathcal{C}(\xi_{i,j})_{1^1}^{k^1})_{1^2}^{k^2} \cdot \mathfrak{d}_{k^1} \cdot \mathfrak{d}_{k^2} \text{ par (4.54) et (4.49)} \\
 &\vdots \\
 &= \sum_{k^r=1}^{n+1-r} \cdots \sum_{k^2=1}^{n-1} \sum_{k^1=1}^n \mathcal{C}(\cdots \mathcal{C}(\mathcal{C}(\xi_{i,j})_{1^1}^{k^1})_{1^2}^{k^2} \cdots)_{1^r}^{k^r} \cdot \mathfrak{d}_{k^1} \cdots \mathfrak{d}_{k^r} \text{ par itération de (4.54) et (4.49)}.
 \end{aligned} \tag{4.58}$$

où les coefficients $\mathcal{C}(\mathcal{C}(\xi_{i,j})_{1^1}^{k^1})_{1^2}^{k^2}$ sont exactement comme les matrices (4.51), mais les éléments matriciels présents $\xi_{i,j}$ ($1 \leq i \neq j \leq n+1$) dans ces matrices sont remplacés par leurs représentations matricielles correspondantes $\mathcal{C}(\xi_{i,j})_{1^1}^{k^1}$. Il en va de même pour $\mathcal{C}(\cdots \mathcal{C}(\mathcal{C}(\xi_{i,j})_{1^1}^{k^1})_{1^2}^{k^2} \cdots)_{1^r}^{k^r}$. Les substitutions de $\xi_{i,j}$ par $\mathcal{C}(\xi_{i,j})_{1^1}^{k^1}$ réduisent le nombre de générateurs de $P\Sigma_{n+1}$ par deux et, de plus, comme ces substitutions respectent les relations de McCool (2.33), il doit être clair que l'application $\xi_{i,j} \mapsto \mathcal{C}(\mathcal{C}(\xi_{i,j})_{1^1}^{k^1})_{1^2}^{k^2}$ établit une représentation matricielle de $P\Sigma_{n-1}$ dans $GL(2(n-1), R[P\Sigma_n(2)])$. Pour la même raison, l'application $\xi_{i,j} \mapsto \mathcal{C}(\cdots \mathcal{C}(\mathcal{C}(\xi_{i,j})_{1^1}^{k^1})_{1^2}^{k^2} \cdots)_{1^r}^{k^r}$ définit une représentation de $P\Sigma_{n+1-r}$ dans

4.3. Construction d'une méthode itérative

$GL(r(n+1-r), \mathbb{R}[P\Sigma_n(r)])$. Pour illustrer plus précisément la forme de ces représentations matricielles, si nous utilisons $\xi_{i,j}^{(r)}$ pour représenter la représentation matricielle de $\xi_{i,j}$ au r -ième itération, alors la représentation matricielle $\Psi_n^{(r)}$ de $P\Sigma_{n+1-r}$ dans $GL(r(n+1-r), \mathbb{R}[P\Sigma_n(r)])$ est donnée par

$$\xi_{i,j}^{(0)} = \xi_{i,j} \in P\Sigma_{n+1} \quad (\text{représentation initiale})$$

$$\xi_{i,j}^{(r)} = \begin{pmatrix} & i & & & j & \\ \xi_{i,j}^{(r-1)} \cdot I_{i-1} & & & & & \\ & \xi_{i,j}^{(r-1)} \cdot t_j^{(r)} \cdot \xi_{n+1,j}^{(r-1)} & & \xi_{i,j}^{(r-1)} \cdot (I^{(r)} - t_i^{(r)} \cdot \xi_{n+1,j}^{(r-1)} \cdot \xi_{n+1,i}^{(r-1)} \cdot \xi_{n+1,j}^{-(r-1)}) & & \\ & & 0 & & \xi_{i,j}^{(r-1)} \cdot I_{j-i} & \\ & & & & & \xi_{i,j}^{(r-1)} \cdot I_{n+1-r-j} \end{pmatrix} \quad (i < j) \quad (4.59)$$

et

$$\xi_{i,j}^{(r)} = \begin{pmatrix} & & j & & i & \\ \xi_{i,j}^{(r-1)} \cdot I_{j-1} & & & & & \\ & \xi_{i,j}^{(r-1)} \cdot I_{i-j} & & & 0 & \\ & \xi_{i,j}^{(r-1)} \cdot (I^{(r)} - t_i^{(r)} \cdot \xi_{n+1,j}^{(r-1)} \cdot \xi_{n+1,i}^{(r-1)} \cdot \xi_{n+1,j}^{-(r-1)}) & & \xi_{i,j}^{(r-1)} \cdot t_j^{(r)} \cdot \xi_{n+1,j}^{(r-1)} & & \\ & & & & & \xi_{i,j}^{(r-1)} \cdot I_{n+1-r-i} \end{pmatrix} \quad (j < i) \quad (4.60)$$

où $r = 1, \dots, n$; $t_j^{(r)}$ et $t_i^{(r)} \in \mathbb{R}$ sont des paramètres non nuls, pas nécessairement distincts introduits à chaque itération de chaque représentation matricielle. Ici, $I^{(r)}$ est la matrice identité de taille égale aux tailles des matrices récurrentes $\xi_{i,j}^{(r-1)}$. En les appliquant à une représentation triviale $\xi_{i,j}^{(0)} = 1$ pour tout $1 \leq i \neq j \leq n+1$ de $P\Sigma_{n+1}$, les formules (4.59)-(4.60) donnent pour la première itération, l'extension de la représentation de Gassner ${}^a\Psi_n$ (voir Proposition 4.8) et produisent pour la deuxième itération, le produit tensoriel ${}^a\Psi_n \otimes {}^a\Psi_n$ de deux extensions ${}^a\Psi_n$ de la représentation de Gassner. Cela découle de la proposition 4.5 et [Théorème 2.6, [BS20]]. Illustrons cela au moyen d'un exemple simple.

Exemple 4.10. En l'appliquant à une représentation triviale $\xi_{i,j}^{(0)} = 1$ pour tout $1 \leq i \neq j \leq n+1$ de $P\Sigma_{n+1}$, la formule décrite ci-dessus donne, sans véritable surprise, à la première itération l'extension de la représentation de Gassner ${}^a\Psi_n$ de $P\Sigma_n$ (voir la Proposition 4.8). Pour la deuxième itération $r = 2$, prenons le cas de $n = 4$: nous obtenons par exemple en appliquant la formule (4.59) sur ${}^a\Psi_4(\xi_{1,2})$,

$$\xi_{1,2}^{(2)} = \begin{pmatrix} s_2 t_2 & s_2(1-t_1) & 0 & 0 & t_2(1-s_1) & (1-t_1)(1-s_1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 & 0 & 0 & 1-s_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_2 & 0 & 0 & 0 & 1-s_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_2 t_2 & 0 & 0 & 0 & 1-s_1 t_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t_2 & 1-t_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_2 & 1-t_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.61)$$

Comme nous pouvons le constater en omettant les colonnes 4,8 et 12 ainsi leurs lignes dans la matrice ci-dessus, le résultat de $\xi_{1,2}^{(2)}$ devient un produit tensoriel de deux matrices $\xi_{1,2}^{(1)}$:

$$\widehat{\xi}_{1,2}^{(2)} = \begin{pmatrix} s_2 t_2 & s_2(1-t_1) & 0 & t_2(1-s_1) & (1-t_1)(1-s_1) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 & 0 & 1-s_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_2 & 0 & 0 & 1-s_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t_2 & 1-t_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_2 & 1-t_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \xi_{1,2}^{(1)} \otimes \xi_{1,2}^{(1)}. \quad (4.62)$$

Autrement dit, il s'agit d'un produit tensoriel (${}^a\Psi_3 \otimes {}^a\Psi_3$) ($\xi_{1,2}$). À cause de la proposition 4.5 et [Théorème 2.6, [BS20]], la même situation comme $\xi_{1,2}^{(2)}$ arrive dans le contexte plus général : à la 2ème itération nous avons toujours à partir de ${}^a\Psi_n$ ($n \geq 1$) :

$$\widehat{\xi}_{i,j}^{(2)} = \xi_{i,j}^{(1)} \otimes \xi_{i,j}^{(1)} = ({}^a\Psi_n \otimes {}^a\Psi_n) (\xi_{i,j}) \text{ pour tout } 1 \leq i \neq j \leq n. \quad (4.63)$$

4.4 Un relèvement de représentation du groupe de tresses virtuelles

L'idée de cette section est basé sur [LT92]. Pour fixer les idées à partir de maintenant nous identifions \mathcal{WB}_n avec $\mathcal{B}\Sigma_n$ via l'identification des générateurs ρ_i et ϑ_i et σ_i et τ_i respectivement. Ici, $\mathcal{B}\Sigma_n$ est le groupe qui coïncide avec $B\Sigma_n$ comme un ensemble et on a toutes les relations (4.5) comme dans $B\Sigma_n$ sauf la dernière relation qui est remplacée par $\sigma_i\sigma_{i+1}\tau_i = \tau_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}$. Prenons maintenant $R[\mathcal{WB}_{n+1}]$ comme l'anneau de groupe de \mathcal{WB}_{n+1} et considérons un ensemble abstrait $\Delta_n := \{\delta_1, \dots, \delta_n\}$. Ensuite, nous construisons de manière formelle un module libre à gauche sur $R[\mathcal{WB}_{n+1}]$ à partir de cet ensemble. Le $R[\mathcal{WB}_{n+1}]$ -module libre à gauche de rang n ainsi obtenu est noté $\mathcal{F}_n^{(1)}$ et il est engendré par les éléments $\delta_1, \dots, \delta_n$. Ce module porte l'action à droite suivante du groupe de tresses virtuelles VB_n : les générateurs $(\sigma_i)_{i=1}^{n-1}$ et $(\tau_i)_{i=1}^{n-1}$ dans cette représentation agissent selon

$$\begin{aligned}
 \delta_j \cdot \sigma_i &= \sigma_i \times \left(1 - \alpha \cdot \xi_{n+1,i} \xi_{n+1,i+1}^{-1} \xi_{n+1,i}^{-1}\right) \cdot \delta_i + \alpha \cdot \xi_{n+1,i} \cdot \delta_{i+1} \quad \text{si } j = i \\
 &\sigma_i \times \delta_i \quad \text{si } j = i + 1 \\
 &\sigma_i \times \delta_j \quad \text{si } j \neq \{i, i + 1\} \\
 \\
 \delta_j \cdot \tau_i &= \tau_i \times \beta^{-1} \cdot \delta_{i+1} \quad \text{si } j = i \\
 &\tau_i \times \beta \cdot \delta_i \quad \text{si } j = i + 1 \\
 &\tau_i \times \delta_j \quad \text{si } j \neq \{i, i + 1\}
 \end{aligned} \tag{4.65}$$

où α, β sont des paramètres dans R non nuls (pas nécessairement distincts). L'action à droite (4.65) peut s'écrire de la façon suivante :

4.4. Un relèvement de représentation du groupe de tresses virtuelles

$$\begin{aligned}\delta_j \cdot \sigma_i &= \sum_{k=1}^n \mathcal{V}(\sigma_i)_j^k \delta_k, \quad (1 \leq j \leq n) \\ \delta_j \cdot \tau_i &= \sum_{k=1}^n \mathcal{V}(\tau_i)_j^k \delta_k, \quad (1 \leq j \leq n)\end{aligned}\tag{4.66}$$

avec

$$\mathcal{V}(\sigma_i)_j^k := \begin{pmatrix} & & i & & i+1 & & \\ & & & & & & \\ \sigma_i \cdot \mathbf{I}_{i-1} & & & & & & \\ & \sigma_i \cdot (1 - \alpha \cdot \xi_{n+1,i} \cdot \xi_{n+1,i+1} \cdot \xi_{n+1,i}^{-1}) & & & \sigma_i \cdot \alpha \cdot \xi_{n+1,i} & & \\ & & \sigma_i & & 0 & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \sigma_i \cdot \mathbf{I}_{n-i-1} \end{pmatrix} \in \text{GL}(n, \mathbb{R}[\mathcal{WB}_{n+1}])\tag{4.67}$$

et

$$\mathcal{V}(\tau_i)_j^k := \begin{pmatrix} & & i & & i+1 & & \\ & & & & & & \\ \tau_i \cdot \mathbf{I}_{i-1} & & & & & & \\ & 0 & & \beta^{-1} \cdot \tau_i & & & \\ & & \beta \cdot \tau_i & & 0 & & \\ & & & & & & \tau_i \cdot \mathbf{I}_{n-i-1} \end{pmatrix} \in \text{GL}(n, \mathbb{R}[\mathcal{WB}_{n+1}]).\tag{4.68}$$

Lemme 4.12. *Soient α, β des paramètres non nuls dans \mathbb{R} avec $\alpha \neq \beta$. Alors on a la représentation matricielle $\phi_n : \text{VB}_n \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{R}[\mathcal{WB}_{n+1}])$ définie par*

$$\sigma_i \mapsto \mathcal{V}(\sigma_i) := \begin{pmatrix} & & i & & i+1 & & \\ & & & & & & \\ \sigma_i \cdot \mathbf{I}_{i-1} & & & & & & \\ & \sigma_i \cdot (1 - \alpha \cdot \xi_{n+1,i} \cdot \xi_{n+1,i+1} \cdot \xi_{n+1,i}^{-1}) & & & \alpha \cdot \sigma_i \cdot \xi_{n+1,i} & & \\ & & \sigma_i & & 0 & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \sigma_i \cdot \mathbf{I}_{n-i-1} \end{pmatrix}\tag{4.69}$$

et

$$\tau_i \mapsto \mathcal{V}(\tau_i) := \begin{pmatrix} & i & i+1 & & \\ & \tau_i \cdot I_{i-1} & & & \\ & 0 & \beta^{-1} \cdot \tau_i & & \\ & \beta \cdot \tau_i & 0 & & \\ & & & & \tau_i \cdot I_{n-i-1} \end{pmatrix} \quad (4.70)$$

Mais en revanche, la représentation ϕ_n se factorise par \mathcal{WB}_n si et seulement si $\beta = \alpha$ et \mathcal{WB}_n si et seulement si $\beta = 1$.

Preuve. C'est une conséquence des relations de \mathcal{VB}_n qu'il suffit de vérifier par un calcul direct. \square

On dérive du lemme 4.12 une variante de la représentation de Burau du groupe de tresses virtuel qui semble être nouvelle et nous énonçons dans le théorème suivant.

Théorème 4.13. *Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ deux paramètres non nuls avec $\alpha \neq \beta$ et $\beta \neq 1$. L'application $\tilde{h} : \mathcal{B}\Sigma_{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\sigma_i \mapsto 1$ et $\tau_i \mapsto 1$, appliquée à chaque coefficient des matrices ci-dessus donne la variante de la représentation de Burau $\tilde{h}\phi_n : \mathcal{VB}_n \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{R}[\alpha^{\pm 1}, \beta^{\pm 1}])$ définie par*

$$\sigma_i \mapsto \tilde{h}\mathcal{V}(\sigma_i) = \begin{pmatrix} & i & i+1 & & \\ & I_{i-1} & & & \\ & 1 - \alpha & \alpha & & \\ & 1 & 0 & & \\ & & & & I_{n-i-1} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \tau_i \mapsto \tilde{h}\mathcal{V}(\tau_i) = \begin{pmatrix} & i & i+1 & & \\ & I_{i-1} & & & \\ & 0 & \beta^{-1} & & \\ & \beta & 0 & & \\ & & & & I_{n-i-1} \end{pmatrix} \quad (4.71)$$

qui ne se factorise pas en une représentation du groupe de tresses soudées sur n brins. Mais en revanche, $\tilde{h}\phi_n$ se factorise en une représentation de \mathcal{WB}_n si et seulement si $\beta = \alpha$ et $\tilde{h}\phi_n$ se factorise en une représentation de \mathcal{WB}_n si et seulement si $\beta = 1$.

4.4. *Un relèvement de représentation du groupe de tresses virtuelles*

Preuve. Il découle par un simple calcul que les matrices satisfont les relations de VB_n ($n \geq 1$). \square

Clairement, les représentations $\tilde{h}\phi_1$ et $\tilde{h}\phi_2$ sont fidèles. En revanche, la représentation $\tilde{h}\phi_n$ n'est pas fidèle pour $n \geq 5$, puisque la restriction de $\tilde{h}\phi_n$ au groupe de tresses B_n n'est pas fidèle (voir [LP93, B99]). Nous ne savons pas si les représentations $\tilde{h}\phi_3$ et $\tilde{h}\phi_4$ sont fidèles ou non. La question de la fidélité de la restriction de $\tilde{h}\phi_4$ à B_4 est ouverte depuis très longtemps.

Suite centrale descendante des groupes de McCool

A.1 Groupe quotient de la suite central descendante pour $P\Sigma_n$

Dans cette annexe, nous étudions le rang de $\text{gr}^k(P\Sigma_n)$ pour tout $k, n \geq 1$. Tout d'abord, le groupe abélien $P\Sigma_n^{\text{ab}}$ est isomorphe à $\mathbb{Z}^{n(n-1)}$ de base $\bar{\xi}_{i,j}$ ($1 \leq i \neq j \leq n$.) Soit $\{\xi_{i,j}^* \mid 1 \leq i \neq j \leq n\}$ le dual de la base $\{\bar{\xi}_{i,j} \mid 1 \leq i \neq j \leq n\}$ de $P\Sigma_n^{\text{ab}}$. Puisque le premier groupe d'homologie $H_1(P\Sigma_n, \mathbb{Z})$ de $P\Sigma_n$ est égal à $P\Sigma_n^{\text{ab}}$, $H_1(P\Sigma_n, \mathbb{Z})$ est un groupe abélien de base $\bar{\xi}_{i,j}$ ($1 \leq i \neq j \leq n$.) Donc

$$H_1(P\Sigma_n, \mathbb{Z}) = \bigoplus_{1 \leq i \neq j \leq n} \mathbb{Z} \cdot \bar{\xi}_{i,j}. \quad (\text{A.1})$$

Par conséquent le premier groupe de cohomologie $H^1(P\Sigma_n, \mathbb{Z})$ de $P\Sigma_n$ est donné par la base duale

$$\xi_{i,j}^* (\bar{\xi}_{k,l}) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = i \text{ et } j = l \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

Brownstein et Lee [BL93] sont les premiers à avoir déterminé dans les années 93, le groupe de cohomologie $H^k(P\Sigma_n, \mathbb{Z})$ de $P\Sigma_n$ pour $k = 1, 2$ et ont conjecturé une présentation de l'anneau

de cohomologie $H^*(P\Sigma_n, \mathbb{Z})$ de $P\Sigma_n$. Cette conjecture a été prouvée par Jensen, McCammond et Meier [JMM06]. En particulier, ils ont déterminé le rang de chaque k -ième groupe de cohomologie $H^k(P\Sigma_n, \mathbb{Z})$ de $P\Sigma_n$ donné par

$$\text{rang} \left(H^k(P\Sigma_n, \mathbb{Z}) \right) = \binom{n-1}{k} n^k. \quad (\text{A.3})$$

Soit V_n le sous-groupe libre de $P\Sigma_n$ de rang n sur $\nu_{n,1}, \dots, \nu_{n,n}$. Il est facile de voir que V_n (qui est égal à $\text{Int}(F_n)$) est normal dans $P\Sigma_n$. A savoir, les générateurs $\xi_{i,j}$ de $P\Sigma_n$ agissent par conjugaison sur les générateurs de V_n . L'action de $\xi_{i,j}$ sur $\nu_{n,p}$ pour tout $1 \leq p \leq n$ est donnée par:

$$\xi_{i,j} \cdot \nu_{n,p} := \xi_{i,j}^{-1} \nu_{n,p} \xi_{i,j} = \begin{cases} \nu_{n,p} & \text{si } p \neq i \\ \nu_{n,j}^{-1} \nu_{n,p} \nu_{n,j} & \text{si } p = i \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

Puisque $\xi_{n,j} = \nu_{(n-1),j}^{-1} \nu_{n,j}$ pour tout $1 \leq j \leq n$ et $\xi_{n-1,n} = (\xi_{1,n} \cdots \xi_{n-2,n})^{-1} \nu_{n,n}$, $\text{OP}\Sigma_n := P\Sigma_n/V_n$ est engendré par les images de tous les générateurs de $P\Sigma_{n-1}$ et des éléments $\xi_{1,n}, \dots, \xi_{n-2,n}$ modulo V_n . Nous avons aussi $P\Sigma_n = V_n \rtimes \text{OP}\Sigma_n$ qui est donné par la suite exacte courte scindée

$$\{1\} \longrightarrow V_n \longrightarrow P\Sigma_n \longrightarrow \text{OP}\Sigma_n \longrightarrow \{1\}. \quad (\text{A.5})$$

Par (A.4), l'action par conjugaison de $\text{OP}\Sigma_n$ sur V_n^{ab} est triviale. Par Théorème 2.15, nous avons

$$\text{gr}^k(P\Sigma_n) = \text{gr}^k(V_n) \oplus \text{gr}^k(\text{OP}\Sigma_n) \quad \text{pour tout } k \geq 1 \quad (\text{A.6})$$

Jusqu'à présent, à ma connaissance, une base du groupe abélien $\text{gr}^k(P\Sigma_n)$ n'est pas encore connue et donc les rangs $\phi_k(P\Sigma_n)$ de $\text{gr}^k(P\Sigma_n)$ ne sont pas encore généralement déterminés pour tous les $k \geq 2$ et $n \geq 4$. Nous allons maintenant examiner les rangs $\phi_k(P\Sigma_n)$ de $\text{gr}^k(P\Sigma_n)$ dans certains cas. Nous commençons par les cas $n = 2$ et $n = 3$ (parce que $P\Sigma_1 = \{1\}$, il n'y a rien à dire dans ce cas). Les groupes $P\Sigma_2$ et $P\Sigma_3$ ont des structures simples et donc leurs rangs associés respectifs $\phi_k(P\Sigma_2)$ et $\phi_k(P\Sigma_3)$ peuvent être rapidement déterminés.

Le cas $n = 2$. Puisque $\text{OP}\Sigma_2$ est le groupe trivial, $P\Sigma_2 = V_2 = \langle \nu_{2,1}, \nu_{1,2} \rangle$ est un groupe libre de rang 2. Par conséquent, il est immédiate que $\text{gr}^k(P\Sigma_2) \cong \mathcal{L}_2(k)$, le groupe abélien libre de rang $r_2(k)$. Donc

$$\phi_k(P\Sigma_2) = r_2(k) \quad \text{pour tout } k \geq 1. \quad (\text{A.7})$$

A.1. Groupe quotient de la suite central descendante pour $P\Sigma_n$

Le cas $n = 3$. Le groupe quotient $OP\Sigma_3$ a trois générateurs $\{\bar{\xi}_{1,2}, \bar{\xi}_{2,1}, \bar{\xi}_{1,3}\}$ (modulo V_3). Les générateurs de $P\Sigma_3$ satisfont au total les neuf relations suivantes

$$\begin{aligned} [\xi_{1,2}, \xi_{3,2}] &= 1, [\xi_{1,3}, \xi_{2,3}] = 1, [\xi_{2,1}, \xi_{3,1}] = 1, \\ [\xi_{2,3}, \xi_{2,1} \cdot \xi_{3,1}] &= 1, [\xi_{1,3}, \xi_{1,2} \cdot \xi_{3,2}] = 1, [\xi_{1,2}, \xi_{1,3} \cdot \xi_{2,3}] = 1, \\ [\xi_{3,2}, \xi_{2,1} \cdot \xi_{3,1}] &= 1, [\xi_{3,1}, \xi_{1,2} \cdot \xi_{3,2}] = 1, [\xi_{2,1}, \xi_{1,3} \cdot \xi_{2,3}] = 1, \end{aligned}$$

Toutes ces relations dégénèrent dans $OP\Sigma_3$. Il en résulte que $OP\Sigma_3 = \langle \bar{\xi}_{1,2}, \bar{\xi}_{2,1}, \bar{\xi}_{1,3} \rangle$ est un groupe libre de rang 3 et on arrive au résultat suivant.

Lemme A.1. *$P\Sigma_3$ est un produit presque-direct de deux copies de groupes libres $V_3 = F_3$ et $OP\Sigma_3 = F_3$ de rang 3. À savoir*

$$P\Sigma_3 = V_3 \rtimes OP\Sigma_3. \tag{A.8}$$

En conséquence Théorème 2.15, nous avons le résultat suivant:

Proposition A.2. *Il existe une suite exacte courte scindée*

$$\{0\} \rightarrow \text{gr}^k(V_3) \rightarrow \text{gr}^k(P\Sigma_3) \rightarrow \text{gr}^k(OP\Sigma_3) \rightarrow \{0\}. \tag{A.9}$$

En d'autre terme nous avons pour tout $k \geq 1$ les isomorphismes de groupes abéliens,

$$\text{gr}^k(P\Sigma_3) \cong \text{gr}^k(V_3) \oplus \text{gr}^k(OP\Sigma_3) \cong \mathcal{L}_3(k) \oplus \mathcal{L}_3(k), \tag{A.10}$$

où $\mathcal{L}_3(k)$ est le groupe abélien libre de rang $r_3(k)$.

De la Proposition A.2, nous en déduisons alors que

$$\phi_k(P\Sigma_3) = 2 \cdot r_3(k) \quad \text{pour tout } k \geq 1 \tag{A.11}$$

Le cas $n \geq 4$. La structure de $OP\Sigma_n$ est assez compliquée, il est difficile de déterminer le rang $\phi_k(OP\Sigma_n)$ de $gr^k(OP\Sigma_n)$ et surtout celui de $gr^k(P\Sigma_n)$. Toutefois pour $k = 1$ ce n'est pas surprenant que $gr^1(P\Sigma_n) = P\Sigma_n^{ab} = \mathbb{Z}^{n(n-1)}$ et donc

$$\phi_1(P\Sigma_n) = (n-1) \cdot r_n(1) \quad \forall n \geq 1. \quad (\text{A.12})$$

Nous allons calculer le rang $\phi_2(P\Sigma_n)$ de $gr^2(P\Sigma_n)$ et en même temps nous déterminons une base pour $gr^2(P\Sigma_n)$. Pour déterminer le rang $\phi_2(P\Sigma_n)$, nous allons appliquer la suite exacte d'homologie à 5 termes. Rappelons que si nous avons une extension de groupe $\{e_G\} \rightarrow N \rightarrow G \rightarrow Q \rightarrow \{e_G\}$, alors il existe une suite exacte de la forme (voir [[JS65], Théorème 2.1])

$$H_2(G) \rightarrow H_2(Q) \rightarrow N/[G, N] \rightarrow H_1(G) \rightarrow H_1(Q) \rightarrow \{e_G\}. \quad (\text{A.13})$$

Nous appliquons ceci à la suite exacte courte

$$\{1\} \rightarrow \Gamma_2(P\Sigma_n) \rightarrow P\Sigma_n \rightarrow P\Sigma_n^{ab} \rightarrow \{1\}. \quad (\text{A.14})$$

Donc, nous obtenons

$$H_2(P\Sigma_n, \mathbb{Z}) \rightarrow H_2(P\Sigma_n^{ab}, \mathbb{Z}) \rightarrow gr^2(P\Sigma_n) \rightarrow H_1(P\Sigma_n, \mathbb{Z}) \rightarrow P\Sigma_n^{ab} \rightarrow \{1\} \quad (\text{A.15})$$

Or $H_1(P\Sigma_n, \mathbb{Z}) = P\Sigma_n^{ab}$, donc (A.15) devient

$$H_2(P\Sigma_n, \mathbb{Z}) \rightarrow H_2(P\Sigma_n^{ab}, \mathbb{Z}) \rightarrow gr^2(P\Sigma_n) \rightarrow \{1\} \quad (\text{A.16})$$

Théorème A.3. *Pour tout $n \geq 1$, $gr^2(P\Sigma_n)$ a pour base possible*

$$\{[\xi_{ij}, \xi_{ji}] \mid 1 \leq i < j \leq n\} \cup \{[\xi_{ij}, \xi_{it}] \mid 1 \leq i \leq n, i \neq j, t, 1 \leq j < t \leq n\}, \quad (\text{A.17})$$

dont le rang est

$$\phi_2(P\Sigma_n) = (n-1) \cdot r_n(2) \quad \forall n \geq 1. \quad (\text{A.18})$$

A.1. Groupe quotient de la suite central descendante pour $P\Sigma_n$

Preuve. D'abord, il découle de (A.16) et (A.3) que le rang $\phi_2(P\Sigma_n)$ de $\text{gr}^2(P\Sigma_n)$ est au moins

$$\binom{n(n-1)}{2} - \binom{n-1}{2}n^2 = \frac{n(n-1)^2}{2} = (n-1) \cdot r_n(2). \quad (\text{A.19})$$

D'autre part, comme indiqué dans [[B03a], Lemme 7], chacun des deux sous-groupes de $P\Sigma_n$ suivants

$$\langle \xi_{i,j}, \xi_{j,i} \rangle_{1 \leq i < j \leq n} \quad \text{et} \quad \langle \xi_{i,j}, \xi_{i,t} \rangle_{1 \leq i \leq n, i \neq j, t, 1 \leq j < t \leq n} \quad (\text{A.20})$$

est isomorphe à un groupe libre de rang 2. Par Proposition 2.10, $\text{gr}^2(P\Sigma_n)$ est engendré par $[\xi_{i,j}, \xi_{s,t}] \pmod{\Gamma_3(P\Sigma_n)}$ pour des indices i, j, s, t distincts 2 à 2. Il est à noter qu'à partir de (A.20)

$$0 \neq [\xi_{i,j}, \xi_{j,i}] \in \text{gr}^2(P\Sigma_n) \quad \text{et} \quad 0 \neq [\xi_{i,j}, \xi_{i,t}] \in \text{gr}^2(P\Sigma_n). \quad (\text{A.21})$$

Nous affirmons que $\text{gr}^2(P\Sigma_n)$ est engendré par tous les éléments de (A.21). En effet par les relations McCool (2.33), nous avons

- Si $\{i, j\} \cap \{s, t\} = \emptyset$, alors $[\xi_{i,j}, \xi_{s,t}] = 1$ et donc $[\xi_{i,j}, \xi_{s,t}] = 0$ dans $\text{gr}^2(P\Sigma_n)$.
- Si $t = j$, alors $[\xi_{i,j}, \xi_{s,j}] = 1$ et donc $[\xi_{i,j}, \xi_{s,j}] = 0$ dans $\text{gr}^2(P\Sigma_n)$.
- Si $i = t$, nous avons alors $[\xi_{i,j}, \xi_{s,i}] = \begin{cases} [\xi_{i,j}, \xi_{j,i}] & \text{si } s = j \\ 1 & \text{sinon,} \end{cases}$

et nous obtenons donc

$$[\xi_{i,j}, \xi_{s,i}] = \begin{cases} [\xi_{i,j}, \xi_{j,i}] & \text{si } s = j \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad \text{dans } \text{gr}^2(P\Sigma_n).$$

- Si $s = j$, nous avons alors $[\xi_{i,j}, \xi_{j,t}]$, or par la formule 4 de Propriété 2.1 nous avons

$$1 = [\xi_{i,j}, \xi_{i,t} \cdot \xi_{j,t}] = [\xi_{i,j}, \xi_{j,t}] [\xi_{i,j}, \xi_{i,t}] [[\xi_{i,j}, \xi_{i,t}], \xi_{j,t}] \quad (\text{A.22})$$

et donc $[\xi_{i,j}, \xi_{j,t}] = -[\xi_{i,j}, \xi_{i,t}]$ dans $\text{gr}^2(P\Sigma_n)$.

Donc $\text{gr}^2(\text{P}\Sigma_n)$ est engendré par tous les éléments $[\xi_{ij}, \xi_{it}]$ et $[\xi_{ij}, \xi_{ji}]$ de de (A.21). Par conséquent le rang $\phi_2(\text{P}\Sigma_n)$ de $\text{gr}^2(\text{P}\Sigma_n)$ est au plus

$$\begin{aligned} \#(\{[\xi_{ij}, \xi_{ji}] | 1 \leq i < j \leq n\} \cup \{[\xi_{ij}, \xi_{i,t}] | 1 \leq i \leq n, i \neq j, t, 1 \leq j < t \leq n\}) \\ = \frac{1}{2}n(n-1)^2 = (n-1) \cdot r_n(2). \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

Ainsi, en gardant à l'esprit (A.19), $\phi_2(\text{P}\Sigma_n) = (n-1) \cdot r_n(2)$. \square

Comme nous venons de le voir tous les rangs de $\text{gr}^k(\text{P}\Sigma_n)$ déterminés ici s'obtiennent par la formule

$$\phi_k(\text{P}\Sigma_n) = (n-1) \cdot r_n(k) \quad (\text{A.24})$$

Nous terminons cette section en conjecturant que cette formule (A.24) tient pour tout $n \geq 4$ et $k \geq 3$ dont la preuve fait l'objet d'un travail en cours.

Conjecture A.4. *Soit k, n des entiers tels que $k \geq 3$ et $n \geq 4$. Le rang $\phi_k(\text{P}\Sigma_n)$ de $\text{gr}^k(\text{P}\Sigma_n)$ est donné par $(n-1) \cdot r_n(k)$.*

Si nous arrivons à établir la véracité de cette conjecture et que nous appliquons la stratégie telle que susmentionnée dans l'introduction, nous pouvons tirer une conclusion générale concernant la conjecture de Satoh (1.1).

A.2 Groupe quotient de la suite centrale descendante pour $\text{P}\Sigma_n^+$

Soit $\text{P}\Sigma_n^+$ le groupe de McCool triangulaire supérieur ou le groupe de tresses soudées pures triangulaires supérieures (appelé dans la littérature anglophone sous le nom *the upper-triangular pure welded braid group*, le sous-groupe de $\text{P}\Sigma_n$ engendré par tous les automorphismes $\xi_{i,j}$ avec $1 \leq j < i \leq n$. Dans [CPVW08], il est montré que $\text{P}\Sigma_n^+$ peut être réalisé comme un produit

A.2. Groupe quotient de la suite centrale descendante pour $P\Sigma_n^+$

presque-direct itéré de groupes libres. Si nous mettons $x_{p,i} := \xi_{n-i+1,n-p}$ pour tout $1 \leq i \leq p \leq n-1$, alors

$$P\Sigma_n^+ = \mathbf{F}_{n-1} \rtimes_{\mu_{n-1}} (\mathbf{F}_{n-2} \rtimes_{\mu_{n-2}} (\dots (\mathbf{F}_2 \rtimes_{\mu_2} \mathbf{F}_1) \dots)) =: \rtimes_{p=1}^{n-1} \mathbf{F}_p \quad (\text{A.25})$$

où \mathbf{F}_p est un sous-groupe libre de $P\Sigma_n$ de rang p sur $\{x_{p,1}, \dots, x_{p,p}\}$ et le morphisme $\mu_p : \rtimes_{j=1}^{p-1} \mathbf{F}_j \rightarrow \text{IA}(\mathbf{F}_p)$ qui détermine la structure de ce produit semi-direct itéré est donnée par

$$\mu_p(x_{q,j})(x_{p,i}) = x_{q,j}^{-1} x_{p,i} x_{q,j} = \begin{cases} x_{p,j} x_{p,i} x_{p,j}^{-1} & \text{si } q = i \\ x_{p,i} & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{A.26})$$

où $1 \leq i \leq p$, $1 \leq j \leq q$ et $1 \leq q < p \leq n-1$. En conséquence de la proposition.2.17, nous avons la présentation finie suivante de $P\Sigma_n^+$ [C08]:

Proposition A.5. *Le groupe $P\Sigma_n^+ = \rtimes_{p=1}^{n-1} \mathbf{F}_p$ où $\mathbf{F}_p = \langle x_{p,i} : 1 \leq i \leq p \rangle$ admet une présentation de groupe avec les générateurs $x_{p,i}$ ($1 \leq i \leq p \leq n-1$), et avec les relations suivantes:*

$$\begin{aligned} [x_{p,i}, x_{q,j}] &= [x_{p,i}, x_{p,j}^{-1}] \text{ si } q = i \\ [x_{p,i}, x_{q,j}] &= 1 \text{ sinon} \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

où $1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq q$ et $1 \leq q < p \leq n-1$.

À partir de la décomposition presque-directe du produit $P\Sigma_n^+ = \rtimes_{p=1}^{n-1} \mathbf{F}_p$, nous pouvons décrire $P\Sigma_n^+ = \mathbf{F}_{n-1} \rtimes P\Sigma_{n-1}^+$. Notez que $P\Sigma_{n-1}^+$ agit par conjugaison sur $\mathbf{F}_{n-1}^{\text{ab}}$ trivialement. Il résulte de [Lemme 3.1.1 dans [I90]] que le produit presque-direct $P\Sigma_n^+ = \mathbf{F}_{n-1} \rtimes P\Sigma_{n-1}^+$ induit une décomposition de l'algèbre de Lie associée sur \mathbb{Z}

$$\text{gr}^*(P\Sigma_n^+) = \text{gr}^*(\mathbf{F}_{n-1}) \oplus \text{gr}^*(P\Sigma_{n-1}^+). \quad (\text{A.28})$$

Soit $\mathbf{e}_{p,i}$ ($1 \leq i \leq p \leq n-1$) l'image de chaque $x_{p,i}$ dans $\text{gr}^1(P\Sigma_n^+)$. Pour chaque $1 \leq p \leq n-1$, soit $\mathfrak{E} := \{\mathbf{e}_{p,1}, \dots, \mathbf{e}_{p,p}\}$ et soit $L[\mathfrak{E}]$ l'algèbre de Lie libre correspondante de rang p sur \mathbb{Z} . On sait que $\text{gr}^*(\mathbf{F}_{n-1})$ est l'algèbre de Lie libre $L[\mathfrak{E}]$ de rang $n-1$ sur \mathbb{Z} engendrée par les classes $\mathbf{e}_{(n-1),1}, \dots, \mathbf{e}_{(n-1),(n-1)} \in \text{gr}^1(\mathbf{F}_{n-1})$ de $x_{(n-1),1}, \dots, x_{(n-1),(n-1)}$. D'où

$$\text{gr}^*(P\Sigma_n^+) = L[\mathfrak{E}_{n-1}] \oplus \text{gr}^*(P\Sigma_{n-1}^+). \quad (\text{A.29})$$

Annexe A. Suite centrale descendante des groupes de McCool

Proposition A.6. *L'algèbre de Lie $\text{gr}^*(P\Sigma_n^+)$ est le quotient de l'algèbre de Lie libre $L[\mathfrak{E}]$ sur \mathbb{Z} engendrée par tous les éléments $\mathfrak{e}_{p,i}$ ($1 \leq i \leq p \leq n-1$) modulo les relations suivantes*

$$\begin{aligned} [\mathfrak{e}_{p,i}, \mathfrak{e}_{p,j} + \mathfrak{e}_{q,j}] &= 0 \text{ si } q = i \\ [\mathfrak{e}_{p,i}, \mathfrak{e}_{q,j}] &= 0 \text{ sinon} \end{aligned}$$

où $1 \leq i \leq p$, $1 \leq j \leq q$ et $1 \leq q < p \leq n$.

Preuve. La preuve s'adapte textuellement du preuve de la proposition 3.4 en considérant $P\Sigma_n^+$ au lieu de I_n . □

Anneau de cohomologie du groupe I_n

Ici, nous déterminons la structure de l'anneau de cohomologie $H^*(I_n, \mathbb{Z})$ de I_n . Rappelons d'abord qu'un produit presque-direct $G = \times_{p=1}^k G_p$ de groupes libres $G_p = \langle x_{p,1}, \dots, x_{p,n_p} \rangle$ est un produit semi-direct itéré de groupes libres dans lequel l'action de groupes libres constituants sur l'abélianisé les uns des autres est triviale. Dans [C08], Cohen a déterminé la structure de l'anneau de cohomologie $H^*(G, \mathbb{Z})$ d'un tel groupe comme étant un quotient de l'algèbre extérieure $E = \wedge H^1(G, \mathbb{Z})$. Soit $\{e_{p,i} \mid 1 \leq i \leq n_p, 1 \leq p \leq k\}$ désigne la base duale de la base $\{\bar{x}_{p,i} \mid 1 \leq i \leq n_p, 1 \leq p \leq k\}$ de $H_1(G, \mathbb{Z}) = G^{\text{ab}}$. Nous reprenons son résultat comme il suit: soient $E = \wedge H^1(G)$ l'algèbre extérieure sur \mathbb{Z} engendrée par les éléments $e_{p,i}$ ($1 \leq i \leq n_p, 1 \leq p \leq k$) et soit $\eta_p^{i,j}$ les éléments de la forme

$$\eta_p^{i,j} = e_{p,i} \wedge e_{p,j} + \sum_{q=1}^{p-1} \sum_{r=1}^{n_q} \sum_{s=1}^{n_p} \kappa_{q,p}^{i,j,r,s} e_{q,r} \wedge e_{p,s} \quad (\text{B.1})$$

où les coefficients $\kappa_{q,p}^{i,j,r,s}$ sont les coefficients d'une matrice, voir [C08] pour les détails. L'ensemble suivant $\mathfrak{J} = \{\eta_p^{i,j} : 1 \leq p \leq k, 1 \leq i \leq j \leq n_p\}$ est une base de $\ker(H^2(\mathbb{Z}^m) \rightarrow H^2(G))$, le noyau du dual de l'homomorphisme $H_2(\mathbb{Z}^m) \rightarrow H_2(G)$ avec $m = \sum_{p=1}^k n_p$. Soit J l'idéal bilatère engendré par les éléments de l'ensemble \mathfrak{J} . Le résultat de Cohen [[C08], théorème 3.1] montre qu'alors l'anneau de cohomologie $H^*(G)$ de G est isomorphe au quotient E par J .

Exemple B.1. Pour le groupe $G = P\Sigma_n^+$ est engendré par les éléments $x_{p,i} = \xi_{n-i+1, n_p}$ ($1 \leq i \leq$

$p \leq n - 1$) soumis les relations suivantes

$$\begin{aligned} [x_{p,i}, x_{q,j}] &= [x_{p,i}, x_{p,j}^{-1}] \text{ si } q = i \\ [x_{p,i}, x_{q,j}] &= 1 \text{ sinon} \end{aligned}$$

où $1 \leq i \leq p$, $1 \leq j \leq q$ et $1 \leq q < p \leq n$, (voir Prop.A.5 dans Appendice A2). En conséquence du [Théorème 3.1 dans [C08]], nous avons $H^*(P\Sigma_n^+, \mathbb{Z}) = E_P/J_P$ où $E_P = \wedge H^1(P\Sigma_n^+, \mathbb{Z})$ est engendré par les éléments de degré un $e_{p,i}$, $1 \leq i < p \leq n - 1$ où $e_{p,i}$ représente le dual des générateurs $\bar{x}_{p,i}$ de $H_1(P\Sigma_n^+, \mathbb{Z})$ et J_P est l'idéal engendré par

$$e_{p,i} \wedge e_{p,j} - e_{p,i} \wedge e_{i,j}, \text{ où } j < i < p. \quad (\text{B.2})$$

Cette description de $H^*(P\Sigma_n^+, \mathbb{Z})$ est exactement celle donnée dans [CPVW08] mais la preuve est différente.

Un résultat similaire peut se produire pour le groupe I_n . Soit $\{a_{p,i} \mid 2 \leq p \leq n, 1 \leq i \leq p\}$ la base dual de la base $\{\bar{v}_{p,i} \mid 2 \leq p \leq n, 1 \leq i \leq p\}$ de $H^1(I_n, \mathbb{Z}) = I_n^{\text{ab}}$.

Proposition B.2. *L'anneau $H^*(I_n, \mathbb{Z})$ de I_n est isomorphe à E_I/J_I où $E_I = \wedge H^1(I_n, \mathbb{Z})$ est l'algèbre extérieure engendrée par les éléments de degré un $a_{p,i}$, $2 \leq p \leq n, 1 \leq i \leq p$ et J_I est l'idéal engendré par les éléments*

$$a_{p,i} \wedge a_{p,j} + a_{q,j} \wedge a_{p,i} \text{ où } j < i \leq q < p. \quad (\text{B.3})$$

Preuve. Puisque I_n est un produit-presque direct de groupes libres, l'anneau $H^*(I_n, \mathbb{Z})$ découle directement des résultats de [Théorème 3.1 dans [C08]]. □

Bibliographie

- A19a. I. Abdoullrahim, *On the Andreadakis equality for a subgroup of the McCool group*, 2019.
- A21. I. Abdoullrahim, *On matrix representations for generalized braid groups*, 2021.
- A65. S. Andreadakis: *On the automorphisms of free groups and free nilpotent groups*, 1965.
- B01. S.J. Bigelow, *Braid groups are linear*, 2001.
- B03a. V. Bardakov, *Structure of a conjugating automorphism group*, 2003.
- B03b. V. Bardakov, *The structure of the group of conjugating automorphisms and the linear representation of the braid groups of some manifolds*, 2003.
- B05. V. Bardakov, *Extending representations of braid groups to the automorphism groups of free groups*, 2005.
- B13. L. Bartholdi, *Automorphisms of free groups. I*, 2013.
- B16. L. Bartholdi, *Automorphisms of free groups. I. — erratum*, 2016.
- B36. W. Burau, *Über Zopfgruppen und gleichsinnig verdrillte Verkettungen*, 1936.
- B66. S. Bachmuth, *Induced automorphisms of free groups and free metabelian groups*, 1966.
- B75. J. Birman, *Braids, Links and Mapping Class Groups*, 1974.
- B89. N. Bourbaki, *Lie Groups and Lie Algebras, Chapters 1-3.*, 1989.
- B99. S. Bigelow, *The Burau representation of B_5 is not faithful*, 1999.
- BB16. V. Bardakov and P. Bellingeri, *Subgroups, On representations of braids as automorphisms of free groups and corresponding linear representations.*, 2016.
- BH13. T. Brendle and A. Hatcher, *Configuration spaces of rings and wickets*, 2013.
- BL93. A. Brownstein, R. Lee, *Cohomology of the group of motions of n strings in 3-space Mapping Class Groups and Moduli Spaces of Riemann Surfaces*, 1993.
- BLM92. J. Birman, Darren D. Long and J. Moody, *Finite-Dimensional Representations of Artin's*

- Braid Group, 1992.
- BN17. V. Bardakov and M. Neshchadim, Subgroups, *Automorphisms and Lie algebras related to the basis-conjugating automorphism group*, 2017.
- BS20. P. Bellingeri and A. Soulié. A note on representations of welded braid groups, 2020.
- BT08. S. Bigelow and J. Tian. *Generalized Long-Moody representations of braid groups*, 2008.
- C08. D. Cohen, *Cohomology rings of almost-direct products of free groups*, 2008.
- CCP07. D. Cohen, F. Cohen and S. Prassidis, *Centralizers of Lie algebras associated to descending central series of certain poly-free groups*, 2007.
- CF10. T. Church, B. Farb, *Infinite generation of the kernels of the Magnus and Burau representations*, 2011.
- CL92. F. Constantinescu and M. Lüdde, *Braid modules*, 1992.
- CMZ17. Anthony E Clement, Stephen Majewicz, and Marcos Zyman, *The Theory of Nilpotent Groups*, 2017.
- CP08. D. Cohen, G. Pruidze, *Topological complexity of basis-conjugating automorphism groups*, 2008.
- CPVW08. F. Cohen, J. Pakianathan, V. Vershinin, and J. Wu, *Basis-conjugating automorphisms of a free group and associated Lie algebras*, 2008.
- CS98. D. Cohen, A. Suciú, *Homology of iterated semidirect products of free groups*, 1998.
- D17. C. Damiani. A journey through loop braid groups, 2017.
- D18. J. Darné, *On the Andreadakis problem for subgroups of IA_n* , 2018.
- DFG82. J. Dyer, E. Formanek, E. Grossman, *On the linearity of automorphism groups of free groups*, 1982.
- F53. R.H. Fox, *Free differential calculus. I. Derivation in the free group ring.*, 1953.
- FM12. B. Farb and D. Margalit, *A Primer on Mapping Class Groups*, 2012.
- FP92. E. Formanek and C. Procesi, *The automorphism groups of a free group is not linear*, 1992.
- FR85. M. Falk, R. Randell, *The lower central series of a fiber-type arrangement*, 1985.
- FRR97. R. Fenn, R. Rimányi, and C. Rourke. *The braid-permutation group*, 1997.

- G61. B.J. Gassner, *On braid groups*, 1961
- G81. D. Goldsmith, *The theory of motion groups*, 1981.
- GPV00. M. Goussarov, M. Polyak and O. Viro, *Finite type invariants of classical and virtual knots*, 2000.
- H50. M. Hall, *A basis for free Lie rings and higher commutators in free groups*, 1950.
- H76. M. Hall, Jr., *The Theory of Groups*, 1976.
- H85. S. Humphries, *On Weakly Distinguished Bases and Free Generating Sets Of Free Groups*, 1985.
- I90. Y. Ihara, *Automorphisms of pure sphere braid groups and Galois representations* , 1990.
- J83. D. Johnson, *The structure of the Torelli group I, A Finite Set of Generators for I*, 1983.
- J85. D. Johnson, *The structure of the Torelli group II: A characterization of the group generated by twists on bounding curves*, 1985.
- J91. V. Jones, *Subfactors and knots*, 1991.
- J97. D. Johnson. *Some Popular Groups. In Presentations of Groups*, 1997.
- JMM06. C. Jensen, J. McCammond, J. Meier, *The integral cohomology of the group of loops* ,2006
- JS65. J. Stallings, *Homology and central series of groups*, 1965.
- K02. D. Kramer, *Braid groups are linear*, 2002.
- K06. N. Kawazumi, *Cohomological aspects of magnus expansions*, 2006.
- K07. Arkadius Kalka, *Representations of braid groups and braid-based cryptography*, PhDthesis, Ruhr-Universität Bochum, 2007.
- K85. T. Kohno, *Série de Poincaré-Koszul associée aux groupes de tresses pures*, 1985.
- K99. Louis H. Kauffman, *Virtual Knot Theory* , 1999.
- KM97. S. Krstić and J. McCool, *The non-finite presentability of $IA(F_3)$ and $GL_2(\mathbb{Z}[t^{-1}, t])$* , 1997.
- KMP19. C. E. Kofinas and V. Metaftsis and A. I. Papistas, *IA-automorphisms and Lie Algebras related to the McCool group* , 2019.
- KN20. The Kourovka Notebook (Unsolved Problems in Group Theory), 19th ed., Sobolev Institute, Novosibirsk, 2020.

- L07. X. S. Lin, *The motion group of the unlink and its representations* , 2007.
- L54. M. Lazard, *Sur les groupes nilpotents et les anneaux de Lie*, 1954.
- L90. R. Lawrence, *Homological representations of the Hecke algebra*, 1990.
- LP93. D. Long and M. Paton, *The Burau representation is not faithful for $n \geq 5$* , 1993.
- L94. D. Long, *Constructing representations of braid groups* , 1994.
- L96. M. Lüdde, *Generalised Magnus modules over the braid group*, 1996.
- LT92. M. Lüdde and F. Toppan, *Matrix solutions of Artin's braid relations*, 1992.
- M35. W. Magnus, *Über n -dimensionale Gittertransformationen*, 1935.
- M74. W. Magnus, *Braid groups: A survey* , 1974.
- M86. J. McCool, *On basis-conjugating automorphisms of free groups*, 1986.
- M91. J. A. Moody, *The Burau representation of the braid group B_n is unfaithful for large n* , 1991.
- MK99. K. Murasugi and B. Kurpita, *A study of braids*, 1999.
- MKS76. W. Magnus, A. Karrass, D. Solitar, *Combinatorial group theory*, 1976.
- MP09. R. Mikhailov and I. Passi, *Lower Central and Dimension Series of Groups*, 2009.
- MP69. W. Magnus and A. Peluso, *On a theorem of V. I. Arnol'd*, 1969.
- MSY04. A. Mikhalev, V. Shpilrain, J.-T. Yu, *Combinatorial methods. Free groups, polynomials, and free algebras*, 2004.
- N18. J. Nielsen, *Die Isomorphismen der allgemeinen unendlichen Gruppe mit zwei Erzeugenden*, 1918.
- N24. J. Nielsen, *Die Isomorphismengruppe der freien Gruppen*, 1924.
- NA20. Mohamad N. Nasser and Mohammad N. Abdulrahim, *On the irreducibility of the extensions of Burau and Gassner representations*, 2020.
- P01. S. Papadima, *Braid commutators and homogenous Campbell–Hausdorff tests*, 2001.
- P05. A. Pettet, *The Johnson homomorphism and the second cohomology of IA_n* , 2005.
- R02. R. Rubinsztein, *On the group of motions of oriented, unlinked and unknotted circles in \mathbb{R}^3* , 2002.
- R82. D. Robinson *A course in the theory of groups*, 1982.

- S12. T. Satoh, *On the Johnson filtration of the basis-conjugating automorphism group of a free group*, 2012.
- S12. T. Satoh, *On the lower central series of the IA-automorphism group of a free group*, 2012.
- S15. T. Satoh, *On the basis-conjugating automorphism groups of free groups and free metabelian groups*, 2015.
- S16. T. Satoh, *A survey of the Johnson homomorphisms of the automorphism groups of free groups and related topics*, 2016.
- S17. T. Satoh, *On the Andreadakis conjecture restricted to the “lower-triangular” automorphism groups of free groups.*, 2017.
- S19. T. Satoh, *The third subgroup of the Andreadakis–Johnson filtration of the automorphism group of a free group* , 2019.
- S96. A. G. Savushkina, *On the conjugating automorphism group of a free group* , 1996.
- V01. V. Vershinin *On homology of virtual braids and Burau representation*, 2001.
- W37. E. Witt, *Treue Darstellung Liescher Ringe*, 1937.

