



HAL
open science

Modélisations des écoulements fluviaux adaptées aux observations spatiales et assimilations de données altimétriques

Thibault Malou

► **To cite this version:**

Thibault Malou. Modélisations des écoulements fluviaux adaptées aux observations spatiales et assimilations de données altimétriques. Mathématiques générales [math.GM]. INSA de Toulouse, 2022. Français. NNT : 2022ISAT0001 . tel-03630148

HAL Id: tel-03630148

<https://theses.hal.science/tel-03630148v1>

Submitted on 4 Apr 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THÈSE

En vue de l'obtention du
DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE
Délivré par l'Institut National des Sciences Appliquées de
Toulouse

Présentée et soutenue par
Thibault MALOU

Le 7 mars 2022

**Modélisations des écoulements fluviaux adaptées aux
observations spatiales et assimilations de données altimétriques**

Ecole doctorale : **EDMITT - Ecole Doctorale Mathématiques, Informatique et
Télécommunications de Toulouse**

Spécialité : **Mathématiques et Applications**

Unité de recherche :
IMT : Institut de Mathématiques de Toulouse

Thèse dirigée par
Jérôme MONNIER

Jury

Mme Astrid DECOENE, Rapporteuse
M. Laurent DEBREU, Rapporteur
M. Olivier DELESTRE, Examineur
M. Eric GREINER, Examineur
M. Adrien PARIS, Examineur
M. Jérôme MONNIER, Directeur de thèse
M. Pierre-André GARAMBOIS, Co-directeur de thèse
M. Igor GEJADZE, Président

PRÉSENTÉE ET SOUTENUE LE 07/03/2022 PAR :
THIBAUT MALOU

MODÉLISATIONS DES ÉCOULEMENTS FLUVIAUX ADAPTÉES AUX
OBSERVATIONS SPATIALES ET ASSIMILATIONS DE DONNÉES
ALTIMÉTRIQUES

JURY

M. Laurent DEBREU DIRECTEUR DE RECHERCHE, INRIA GRENOBLE	RAPPORTEUR
Mme. Astrid DECOENE PROFESSEURE DES UNIVERSITÉS, UNIVERSITÉ DE BORDEAUX	RAPPORTEURE
M. Olivier DELESTRE MAÎTRE DE CONFÉRENCES, UNIVERSITÉ DE NICE SOPHIA ANTIPOLIS	EXAMINATEUR
M. Igor GEJADZE DIRECTEUR DE RECHERCHE, INRAE MONTPELLIER	EXAMINATEUR
M. Eric GREINER DOCTEUR-INGENIEUR, CLS	EXAMINATEUR
Mme. Aude RONDEPIERRE MAÎTRESSE DE CONFÉRENCES, INSA TOULOUSE	INVITÉE
M. Jean-Paul VILA PROFESSEUR ÉMÉRITE, INSA TOULOUSE	INVITÉ
M. Jérôme MONNIER PROFESSEUR DES UNIVERSITÉS, INSA TOULOUSE	DIRECTEUR DE THÈSE
M. Pierre-André GARAMBOIS CHARGÉ DE RECHERCHE, INRAE AIX-EN-PROVENCE	CO-DIRECTEUR DE THÈSE
M. Adrien PARIS DOCTEUR-INGENIEUR, HYDRO MATTERS	CO-DIRECTEUR INDUSTRIEL

Remerciements

N'ayant initialement aucune inspiration pour écrire les remerciements, je suis allé voir ce que d'autres personnes, maintenant docteurs, ont écrit. Il en ressort dans la grande majorité des cas (statistique inventée et à bête de nas) que ces lignes, à la fois les premières et les dernières, sont un mélange de soulagement et de nostalgie. Je dois bien reconnaître que je partage ce sentiment, ainsi qu'une probable addiction à la caféine, au terme de ces (un peu plus de) trois ans de doctorat et huit ans d'étude à l'INSA.

Je remercie tout d'abord Jérôme, qui a supervisé cette thèse mais aussi mon stage de master 2 avant cela, pour son aide et son soutien dans ma découverte du monde de la recherche scientifique et mathématique.

Je remercie aussi Pierre-André, qui a co-encadré cette thèse, pour son apport scientifique et humain complémentaire mais aussi pour les discussions autour des quelques bières ou cafés (parfois par écrans interposés) que nous avons partagés.

Merci à Adrien pour son aide et soutien au sein de CLS et mais aussi après son départ.

Je tiens aussi à remercier l'ensemble du jury pour avoir accepté de juger mon travail.

Un merci tout particulier à Astrid Decoene et Laurent Debreu qui ont pris le temps de lire ce manuscrit que j'espère (scientifiquement) intéressant.

Un grand merci à l'ensemble des personnes du GMM qui m'a accueilli pendant toutes ces années et dont la liste est trop longue. Mention spéciale à Kévin pour son aide, notamment avec le code de DassFlow-1D, Fortran et autres soucis informatiques. Merci à tous les doctorants du GMM avec qui j'ai pu partager tous mes tracas de doctorant. Un autre grand merci à CLS, aux collègues et à l'équipe (passée et présente), notamment Maxime, Nicolas et Beatrix, mais aussi Lionel et Julien.

Je remercie également toute ma famille, notamment pour m'avoir demandé à chaque réunion de famille d'expliquer mon travail. Mention spéciale à ma mère qui a pris le temps de relire les parties de ce manuscrit écrites en français pour corriger mes (indénombrables) fautes de grammaire. Autre mention à mon père qui conduisait pendant que ma mère relisait, les trajets en voitures devaient être passionnants.

Merci à tous mes amis qui m'ont apporté autre chose que de la science en cette période chargée.

Merci à la COVID d'exister et de mettre à l'eau (ironique pour une thèse portant sur l'hydrologie) tous les plans de voyages (scientifiques ou non) à l'étranger. C'est tellement mieux de passer tout son temps chez soit derrière un écran d'ordinateur.

Et enfin, et pas des moindres, спасибо большое, Женя, за все, за твою ежедневную поддержку и за то, что всегда веришь в меня.

Résumé

Ces travaux de thèse portent sur la modélisation des rivières adaptée à l’altimétrie spatiale, qui permet de mesurer la hauteur d’eau des rivières. Pour estimer le débit sur la base de ces données, les modèles mathématiques ont besoin d’être consistants avec l’échelle spatio-temporelle des observations (centaines de mètres et dizaines de jours) ainsi qu’une estimation de certaines grandeurs non-mesurées par ces satellites d’altimétrie, notamment la hauteur du fond et une paramétrisation physique (coefficient de friction).

La difficulté de l’estimation du débit à partir des données altimétriques vient notamment de la pente de la surface libre, qui n’est pas non plus mesurée à une échelle assez fine.

Une nouvelle méthodologie pour déterminer des lois algébriques locales d’estimation de débit (lois dites *Stage-Fall-Discharge*, SFD) à partir des données altimétriques issues de plusieurs satellites (e.g. Jason-3, Sentinel-3A et Sentinel-3B) est alors proposée. La méthode se base sur une modélisation hydrodynamique calibrée par assimilation des données altimétriques. Ces lois SFD sont déterminées de manière à reproduire le débit estimé par la modélisation hydrodynamique à partir de données altimétriques et de grandeurs hydrauliques simulées.

Ces lois sont obtenues avec succès sur le réseau hydrographique complexe du Rio Negro-Rio Branco.

La méthode devrait être applicable pour estimer le débit de manière opérationnelle.

La modélisation adaptée aux observations spatiales nécessite donc de choisir des modèles cohérents avec les données disponibles et les échelles spatio-temporelles observées. De ce fait, l’équation de l’onde diffusante a pour particularité d’avoir comme variable d’état la hauteur d’eau de la rivière qui est directement mesurée contrairement au débit.

Dans ces travaux, une double échelle spatio-temporelle est introduite pour prendre en compte l’échelle de la physique (petite échelle) et celle des observations (grande échelle). Les variations de la largeur sont négligeables à l’échelle de la physique, ce qui n’est pas le cas à l’échelle des observations. Une équation de l’onde diffusante adaptée à l’échelle des observations spatiales est établie. Cette nouvelle équation de l’onde diffusante prend en compte les variations de la largeur grâce à deux termes additionnels par rapport à l’équation classique.

Une étude numérique met en avant que l’équation à l’échelle des observations estime avec une meilleure précision la pente de la surface libre et donc le débit par rapport à l’équation classique. Un des termes additionnels de l’équation à l’échelle des observations est aussi mis en avant grâce à une quantification de l’importance des termes d’un dictionnaire basée sur une régression parcimonieuse.

Pour obtenir une estimation de la hauteur du fond et du coefficient de friction (non-observés par les satellites d’altimétrie), les données altimétriques sont assimilées dans les modèles hydrodynamiques en minimisant une fonction coût basée sur l’écart entre la hauteur modélisée et la hauteur mesurée. La qualité de cette assimilation de données dépend notamment de l’estimation de la covariance de l’erreur d’ébauche, i.e. erreur entre la valeur d’ébauche et la vraie valeur du paramètre, qui préconditionne la hessienne de la fonction coût. Cependant, cette covariance est couramment définie de manière empirique.

Ainsi, ces travaux proposent une méthode pour estimer la covariance de l'erreur d'ébauche et la longueur de corrélation à partir des équations de la physique (équations de l'onde diffusante dans le cas présent) en utilisant les noyaux de Green.

Ces nouveaux opérateurs ainsi que la longueur de corrélation consistante avec la physique couplée avec un noyau exponentiel décroissant donnent de meilleurs résultats que les opérateurs empiriques.

Mots clés. Modélisation d'écoulement fluvial 1D ; Lois algébriques équivalentes pour l'estimation du débit ; Équations de l'onde diffusante double-échelle ; Données altimétriques ; Assimilation variationnelle de données ; Covariance de l'erreur d'ébauche.

Abstract

This PhD work focuses on river modelling adapted to spatial altimetry, which allows the measurement of the height of water in rivers. In order to estimate the discharge using these data, the mathematical models need to be consistent with the spatio-temporal scale of the observations (hundreds of metres and tens of days) and an estimate of some quantities not measured by these altimetry satellites, notably the bottom elevation and a physical parametrization (friction coefficient).

The difficulty in estimating the discharge from altimetric data comes in particular from the slope of the free surface, which is also not measured at a fine enough scale.

A new methodology to determine local and algebraic discharge estimation laws (*Stage-Fall-Discharge* laws, SFD) from altimetry data from several satellites (e.g. Jason-3, Sentinel-3A and Sentinel-3B) is proposed. The method is based on a hydrodynamic model calibrated by assimilation of altimetry data. These SFD laws are determined to reproduce the discharge estimated by the hydrodynamic model from noisy altimetry data and physically consistent simulated hydraulic quantities.

These laws are successfully obtained on the complex hydrographic network of the Rio Negro-Rio Branco.

The method should be applicable for operational estimation of discharge.

Modelling adapted to spatial observations therefore requires choosing models that are coherent with the available data and with the observed spatio-temporal scales. As a result, the diffusive wave equation has the particularity of having the water height as state variable, which is directly measured in contrast to the discharge.

In this work, a double spatio-temporal scale is introduced to take into account the scale of physics (small scale) and the scale of observations (large scale). The width variations are negligible on the scale of physics, which is not the case on the scale of observations. A diffusive wave equation adapted to the scale of satellite observations is derived. This new diffusive wave equation takes into account width variations through two additional terms compared to the classical equation.

A numerical study shows that the observation-scale equation estimates the slope of the free surface and thus the discharge with better accuracy than the classical equation. One of the additional terms in the observation-scale equation is also highlighted by quantifying the importance of the terms of a dictionary based on sparse regression.

In order to obtain an estimate of the bottom elevation and the friction coefficient (non-observed by the altimetry satellites), altimetric data are assimilated into the hydrodynamic models by minimising the gap between the modelled height and the measured height. The quality of this data assimilation depends in particular on the estimation of the covariance of the background error, i.e. the error between the background value and the true value of the parameter, that preconditiones the Hessian of the cost function. However, this covariance is usually defined in an empirical manner.

Thus, this work proposes a method for estimating the covariance of the background error and the correlation length

from the equations governing the physics (here the diffusive wave equations) using the Green kernels. These new operators and the physically consistent correlation length coupled with a decreasing exponential kernel give better results than the empirical operators.

Keywords. 1D river flow modelling; Equivalent algebraic laws for the estimation of the discharge; Double-scale diffusive wave equations; Altimetric data; Variational data assimilation; Background error covariance.

Table des matières

Introduction	13
1 Données satellitaires, modélisations d'écoulements fluviaux et problèmes inverses	17
1.1 Altimétrie spatiale et données satellitaires	18
1.1.1 Historique de l'observation de la Terre par altimétrie satellitaire	19
1.1.2 Altimétrie spatiale : traitement des mesures et précision	21
1.2 Modélisation mathématique des écoulements	30
1.2.1 Géométries des rivières et écoulement	30
1.2.2 Les équations de Navier-Stokes pour les écoulements à surface libre	31
1.2.3 Les équations de Saint-Venant	32
1.2.3.1 Des équations Navier-Stokes aux équations primitives en eau peu profonde	33
1.2.3.2 Équation de conservation de la masse	35
1.2.3.3 Équation des moments	35
1.2.3.4 Le système de Saint-Venant	37
1.2.4 L'équation de l'onde diffusante 1D classique	39
1.2.4.1 Dérivation de l'équation de l'onde diffusante	40
1.2.4.2 Etat de l'art de l'analyse mathématique de cette équation	43
1.3 Problèmes inverses et assimilation de données	46
1.3.1 Des problèmes inverses et de l'assimilation de données	46
1.3.2 Assimilation de données : méthode variationnelle	49
1.3.3 Assimilation de données : méthodes stochastiques et filtrage	52
1.3.4 Sur la covariance de l'erreur d'ébauche en assimilation de données	56
1.3.5 Identification parcimonieuse de termes d'équations	59
Bibliographie	62
2 Generation and analysis of stage-fall-discharge laws from coupled hydrological-hydraulic river network model integrating sparse multi-satellite data	71
Résumé	72
2.1 Introduction	76
2.2 Flow models and observables	79
2.2.1 River network flow model	79
2.2.2 The computational inverse method	80
2.2.3 Stage-Fall-Discharge laws	81
2.2.3.1 From flow resistance to SFD	81
2.2.3.2 Computation of SFD laws coefficients	82
2.3 Study zone and calibrated river network model	83
2.3.1 Study area and multi-satellite data	83
2.3.2 Construction of the hydrodynamic model	85
2.3.3 Space-time simulation of hydraulic quantities with the river network model	87
2.3.3.1 Hydraulic quantities from the calibrated river network model	88
2.3.3.2 Slope computations	91

2.3.3.3	Extrapolation of the discharge	92
2.4	SFD calibration and analysis	92
2.4.1	Numerical experiment design	92
2.4.1.1	SFD and SD variants considered	92
2.4.1.2	Selection of altimetric virtual stations for SFD estimation	93
2.4.1.3	SFD extrapolation scenarii	94
2.4.2	Results	94
2.4.2.1	Performance of discharge SFD	94
2.4.2.2	Analysis of the SFD coefficients	98
2.5	Discussions	99
2.5.1	AMHG analysis of Negro-Branco SD coefficients	99
2.5.2	Influence of hydraulic controls and water masks on SFD	100
2.6	Conclusion	103
Appendices		
2.A	Performance evaluation metrics	105
2.B	Performance evaluation on the stations	105
2.C	AMHG	107
2.D	Usual parameterizations of flow resistance	108
Bibliography		
3	Double-scale diffusive wave equations dedicated to spatial rivers observations	115
	Résumé	116
3.1	Introduction	120
3.2	Derivation of the double-scale diffusive wave model	121
3.2.1	The Saint-Venant equations	121
3.2.2	Derivation of the double-scale diffusive wave equations	122
3.2.2.1	Additional hypothesis	122
3.2.2.2	The double-scale diffusive wave equations	124
3.3	Numerical results	126
3.3.1	Test cases description	126
3.3.2	Results and comparisons	128
3.3.2.1	Numerical results	128
3.3.2.2	Comparisons	129
3.4	Quantification of each term importance	131
3.4.1	Method	131
3.4.2	Numerical results	133
3.5	Conclusion	134
Bibliography		
4	Covariance operators investigation from diffusive wave equations for data assimilation in hydrology	139
	Résumé	140
4.1	Introduction	144
4.2	Variational Data Assimilation based on classical covariance operators	146
4.2.1	Inference of the bathymetry in the Saint-Venant equations	146
4.2.1.1	Direct model: the Saint-Venant equations	146
4.2.1.2	VDA for bathymetry $z_b(x)$ inference	147
4.2.2	Covariance operators in VDA	148
4.2.3	Numerical experiments description	149
4.2.3.1	Fully- and partially-observed experiments	149
4.2.3.2	The real-like Rio Negro dataset	150
4.2.4	Numerical results of the fully-observed experiment using classical covariance operators	151

4.2.4.1	With the identity covariance operator	151
4.2.4.2	Exponential covariance operator	152
4.2.4.3	Comparisons and choice of the reference method	154
4.3	Covariance operators from Green-like kernels of the double scale diffusive wave equations	155
4.3.1	Green-like kernels and their link to covariance operators	155
4.3.1.1	Green-like kernels: definition	155
4.3.1.2	When the Green kernel is naturally a covariance kernel	156
4.3.2	Green-like kernels derived from the double scale diffusive wave	156
4.3.2.1	The double scale diffusive wave model	156
4.3.2.2	Derivation of Green-like kernels	158
4.3.2.3	A by-product: sensitivity map	159
4.3.3	Building physically-derived covariance operators from Green-like kernels	161
4.3.3.1	On the symmetry of the covariance kernel	162
4.3.3.2	On the positive-definite property of the covariance kernel	162
4.3.3.3	Summary of the investigated physically-derived covariance operators	166
4.4	Inference of the bathymetry $z_b(x)$ using the physically-derived covariance operators	167
4.5	Inference of the pair $(z_b, K_s)(x)$ from lower quality data	170
4.5.1	Results	170
4.5.1.1	Using the variances $(\sigma_{z_b}, \sigma_{K_s}) = (0.5\bar{h}, 10)$	171
4.5.1.2	Using the variances $(\sigma_{z_b}, \sigma_{K_s}) = (0.1\bar{h}, 50)$	171
4.5.2	Comparisons	172
4.6	Conclusion	175
Appendices		
4.A	From the Green kernels G to the covariance operator \mathbf{C}	176
4.B	Summary of the numerical experiments results	177
Compléments		
4.C	Sur l'intérêt de la régularisation $j_{reg}(z_b) = \ \partial_x z_b\ _2^2$	178
Bibliography		
5	Travaux en perspectives et conclusion générale	185
5.1	Travaux en perspectives	186
5.1.1	Sur la quantification de l'importance de chaque terme et la calibration des équations de l'onde diffusante	186
5.1.2	Vers une utilisation opérationnelle des équations de l'onde diffusante double échelle	187
5.1.3	Sur des méthodes pour estimer \mathbf{R} , l'opérateur de covariance de l'erreur d'observations	189
5.1.3.1	Sur l'estimation de \mathbf{R} à partir des données altimétriques	189
5.1.3.2	Sur une modélisation de \mathbf{R} à partir de la physique	190
5.2	Conclusion	192
Bibliographie		
A	Intégration des équations de Navier-Stokes sur la section en travers	197
A.1	Intégration de l'équation de conservation de la masse	198
A.2	Intégration de l'équation des moments	199
Bibliographie		
B	Résolution numérique de l'onde diffusante	201
B.1	Semi-discrétisation implicite et algorithme de Newton-Raphson	202
B.2	Schéma aux différences finies	204
B.2.1	Différences finies pour la dérivé d'ordres 1 et 2 sur un maillage déstructuré	204
B.2.2	Discrétisation spatiale	204
B.3	Algorithme de résolution	206

Introduction

La modélisation des écoulements des rivières est un enjeu de taille, elle est notamment utilisée pour prévoir les inondations, les étiages, la gestion de la ressource en eau ou encore le flux d'eau douce vers les océans. Cette modélisation vise à prédire la hauteur de la surface libre de la rivière ainsi que le débit. Étant donné l'enjeu pour la société, l'OMM (*Organisation Météorologique Mondiale*) a défini en 2016 le débit des rivières comme étant une variable climatique essentielle dans le GCOS (*Global Climate Observation System*)¹.

Dans les années 1990, les satellites d'observation de la Terre, et plus particulièrement les satellites d'altimétrie², ont permis une nouvelle observabilité et le développement de nouvelles approches en hydrologie. En effet, ces nouveaux instruments de mesure permettent une observation globale des surfaces d'eaux continentales et sans certaines contraintes des observations in situ. Cependant, les données obtenues restent sous-exploitées.

Dans le but de valoriser ces données et de donner un retour vis-à-vis de la physique, ces travaux de thèse, effectués en partenariat avec l'entreprise CLS, portent sur la modélisation des rivières adaptée à l'altimétrie spatiale.

Ces satellites produisent des données de hauteur de la surface libre avec une résolution spatiale de l'ordre de la centaine de mètres, voire du kilomètre, ainsi qu'une résolution temporelle de l'ordre de la dizaine de jours.

Une des difficultés de l'estimation du débit à partir de ces données est l'échantillonnage spatial des données.

Cet échantillonnage ne permet notamment pas d'estimer correctement la pente de la surface libre. La pente de la surface libre est pourtant une grandeur hydraulique essentielle pour estimer le débit, en particulier dans les sections de rivières affectées par des remous hydrauliques. Cette pente est par exemple nécessaire pour calculer le débit avec des lois empiriques comme les lois *Stage-Fall-Discharge* (SFD) qui sont des relations algébriques entre le débit, la hauteur et la pente de la surface libre.

Bien que la future mission SWOT permettra d'observer la surface de manière quasiment globale, la précision des estimations de la pente reste incertaine, voir e.g. chapitre 2 et les références citées.

Une autre difficulté de l'estimation de débit et de la modélisation adaptée aux données altimétriques vient du fait que seule la surface libre de la rivière est observée par les satellites en question. Cela implique que la hauteur du lit de la rivière ainsi que le coefficient de friction du fond ne sont pas mesurables et connus dans ce contexte.

Pour obtenir une estimation de ces paramètres cohérente avec la physique et les données, les données altimétriques sont assimilées dans un modèle d'écoulement, notamment grâce à la méthode variationnelle. L'assimilation variationnelle de données consiste à minimiser l'écart entre les observations et les prédictions du modèle d'écoulement, au travers d'une fonction coût, par rapport aux paramètres en question. Cela permet d'améliorer une valeur connue a priori de ces paramètres, appelée ébauche.

Cependant, ce problème de minimisation est mal posé : du fait de la nature de l'écoulement et des équations sous-jacentes, l'optimisation de la fonction coût est un problème mal conditionnée et il existe plusieurs minima locaux.

1. voir le rapport sur https://library.wmo.int/doc_num.php?explnum_id=3417

2. voir plus d'information sur l'altimétrie spatiale et un historique sur <https://www.aviso.altimetry.fr/en/home.html>

Un terme de régularisation est alors classiquement ajouté au terme d'écart entre les observations et la prédiction du modèle.

Basé sur l'analyse statistique des erreurs, ce terme de régularisation permet d'introduire la covariance de l'erreur d'ébauche, i.e. l'erreur entre la valeur d'ébauche et la vraie valeur. L'estimation de cette covariance s'avère être un point crucial de l'assimilation dont dépend le conditionnement du problème d'optimisation et la précision des résultats de l'assimilation, voir e.g. chapitre 4 et les références citées.

Outre ces difficultés, du fait des caractéristiques des données, cette modélisation nécessite de choisir des modèles cohérents avec les données disponibles et avec les échelles spatio-temporelles observées.

Pour la modélisation des écoulements de rivières de manière générale, plusieurs modèles sont couramment utilisés. Le modèle le plus utilisé est le modèle de Saint-Venant. Ce modèle est une approximation des équations de Navier-Stokes pour un fluide incompressible en supposant que l'écoulement est un écoulement en eau peu profonde et que la variabilité sur la section en travers est assez faible. Cela permet d'intégrer sur l'aire mouillée et d'obtenir un système de deux équations dont les variables sont l'aire mouillée ainsi que le débit. Cependant, ce modèle nécessite d'imposer le débit en amont de la portion de rivière étudiée. Or, ce débit n'est pas précisément calculable à partir des données altimétriques uniquement, ce qui est source d'incertitude sans informations supplémentaires.

Un autre modèle très utilisé est l'équation de l'onde diffusante. Cette équation est une approximation des équations de Navier-Stokes obtenue de manière similaire aux équations de Saint-Venant mais basée sur une approximation d'ordre inférieur. L'avantage de cette dernière approximation est qu'une relation algébrique entre le débit et la hauteur de la surface libre est naturellement obtenue. Une fois injectée dans l'équation de conservation de la masse intégrée, on obtient une équation scalaire dont la variable est la hauteur de la surface libre. Ainsi, les conditions de Dirichlet appliquées aux bords du domaine pour résoudre cette équation sont plus cohérentes avec le contexte d'altimétrie spatiale, voir e.g. chapitre 3.

Ces différentes problématiques présentées liées à la modélisation des rivières adaptée à l'altimétrie spatiale sont donc étudiées dans ces travaux de thèse. Le présent manuscrit est organisé de la manière suivante.

Le chapitre 1 présente les données altimétriques et notamment la chaîne de traitement nécessaire pour obtenir les données de hauteur de la surface libre. Les modèles d'écoulement utilisés et étudiés dans ces travaux de thèse ainsi que l'assimilation de données sont aussi introduits.

Le chapitre 2 contient une publication qui propose une nouvelle méthodologie pour déterminer des lois d'estimation de débit locales de type SFD adaptées à une utilisation opérationnelle avec des données altimétriques issues de plusieurs satellites. Ces lois SFD sont calibrées pour reproduire, à partir des données altimétriques bruitées et des grandeurs hydrauliques simulées physiquement consistantes, le débit estimé par un modèle hydrodynamique calibré. La dérivation de l'équation de l'onde diffusante se base aussi sur l'hypothèse d'un écoulement graduellement varié. Cette hypothèse implique notamment que les variations de la largeur sont négligeables. Bien que valide à une certaine échelle relativement petite, l'implication de cette hypothèse n'est pas justifiée à l'échelle des observations. Dans le manuscrit (soumis à la publication) contenu dans le chapitre 3, une double échelle spatio-temporelle, permettant de prendre en compte à la fois cette petite échelle (appelée échelle de la physique) et l'échelle des observations, est introduite. Il en résulte une nouvelle équation de l'onde diffusante cohérente avec l'échelle des observations et qui permet de prendre en compte les variations spatio-temporelles de la largeur au travers de deux termes additionnels. Cette équation est alors étudiée numériquement dans ce contexte d'observations spatiales et est comparée avec l'équation de l'onde diffusante classique et avec les équations de Saint-Venant. L'importance des termes additionnels de cette équation pour modéliser l'écoulement est aussi étudiée.

Le choix du noyau pour modéliser l'opérateur de covariance de l'erreur d'ébauche est souvent basé sur des informations empiriques. La publication du chapitre 4 présente alors une méthode pour dériver une estimation de

l'opérateur de covariance de l'erreur d'ébauche ainsi qu'une longueur de corrélation à partir de la physique et des équations sous-jacentes.

Chapitre 1

Données satellitaires, modélisations d'écoulements fluviaux et problèmes inverses

Sommaire

1.1	Altimétrie spatiale et données satellitaires	18
1.1.1	Historique de l'observation de la Terre par altimétrie satellitaire	19
1.1.2	Altimétrie spatiale : traitement des mesures et précision	21
1.2	Modélisation mathématique des écoulements	30
1.2.1	Géométries des rivières et écoulement	30
1.2.2	Les équations de Navier-Stokes pour les écoulements à surface libre	31
1.2.3	Les équations de Saint-Venant	32
1.2.4	L'équation de l'onde diffusante 1D classique	39
1.3	Problèmes inverses et assimilation de données	46
1.3.1	Des problèmes inverses et de l'assimilation de données	46
1.3.2	Assimilation de données : méthode variationnelle	49
1.3.3	Assimilation de données : méthodes stochastiques et filtrage	52
1.3.4	Sur la covariance de l'erreur d'ébauche en assimilation de données	56
1.3.5	Identification parcimonieuse de termes d'équations	59
	Bibliographie	62

Ces travaux de thèse portent sur la modélisation des rivières adaptée aux observations satellitaires, dont l'altimétrie spatiale. Ces travaux permettent ainsi de valoriser les données altimétriques et de donner un retour sur ces données et sur leur précision, notamment vis-à-vis de la physique. Ces travaux ont été effectués au sein de l'entreprise CLS, filiale notamment du CNES qui propose des solutions d'observations et de surveillance de la Terre. Ce cas particulier de modélisation implique plusieurs problématiques. Celles-ci sont induites par les grandeurs mesurées mais aussi par les grandeurs qui ne peuvent pas être mesurées par ces satellites.

L'estimation du débit, qui n'est pas mesuré par les satellites, et la modélisation de l'état de la rivière à partir des données disponibles par les satellites sont des sujets étudiés dans le cadre de cette thèse.

Une autre problématique abordée est l'estimation de paramètres de l'écoulement. Un certain nombre de paramètres, tel que la hauteur du fond de la rivière ou le coefficient de friction du fluide sur le fond, sont nécessaires pour la modélisation de l'écoulement. Cependant, ces paramètres ne sont pas mesurables par les satellites. Cette problématique relève donc des problèmes inverses. Dans ce contexte d'observations satellitaires, une estimation de ces paramètres est obtenue par assimilation des données altimétriques dans les modèles d'écoulement. Cette assimilation de données fait l'objet d'une partie de ces travaux de thèse.

Ce chapitre vise à définir et présenter l'ensemble des données, des modèles d'écoulement et des méthodes d'assimilation de données et de problèmes inverses mis en œuvre et utilisé dans ces travaux de thèse.

Dans un premier temps, les données obtenues grâce aux satellites d'altimétrie, au cœur du sujet de cette thèse, sont présentées. En plus d'une courte introduction historique permettant de mettre en avant l'intérêt et l'apport de ces données, cette section présente plus particulièrement l'ensemble des traitements appliqués à la donnée brute pour arriver à la donnée utilisée dans nos modélisations mathématiques. Cela permet de comprendre l'origine des sources d'incertitude. La précision estimée de ces données est aussi présentée.

Ensuite, les modèles d'écoulement utilisés dans ces travaux de thèse sont présentés et rigoureusement dérivés à partir des équations de Navier-Stokes.

Dans la dernière section de ce chapitre, les problèmes inverses abordés dans cette thèse sont présentés. Cette section présente notamment l'assimilation de données qui permet de combiner de manière optimale les données d'altimétrie spatiale et les modèles d'écoulement, ainsi qu'une méthode d'identification parcimonieuse de termes des équations à partir de données qui se rapproche d'un problème inverse.

1.1 Altimétrie spatiale et données satellitaires

Cette section présente les données obtenues grâce aux satellites altimétriques. Dans ces travaux, les satellites altimétriques font référence essentiellement aux satellites d'altimétrie radar à visée nadir, zone du sol directement située à la verticale du satellite.

Ces satellites permettent d'obtenir des données de hauteurs de la surface libre de l'eau avec un échantillonnage spatial de l'ordre de la centaine de mètres ainsi qu'un échantillonnage temporel de l'ordre de la dizaine de jours, voir plus de détail ci-dessous. Dans le cadre de cette thèse, on s'intéresse principalement aux données altimétriques obtenues sur les réseaux hydrographiques.

Ces données et celles provenant de satellites de manière générale, bien que sous-exploitées, ont permis de développer une nouvelle approche de l'hydrologie car les satellites permettent l'observation des corps d'eau sur l'ensemble de la planète indépendamment des contraintes limitantes pour un suivi in situ (contexte géopolitique, navigabilité, éloignement, etc.).

Cependant, il faut noter que cette observation globale actuelle ne concerne que les surfaces libres observables, excluant notamment les cours d'eau trop petits. De plus, les fonds des rivières restent pour l'instant inobservables par les satellites, à l'exception de quelques rares applications. Cette observation de la surface ne permet toutefois

pas d'avoir de l'information sur le lit, notamment la hauteur du lit et les coefficients de friction. Ces questions sont donc des sujets de recherches ouverts. Dans les solutions étudiées, on citera notamment des nouveaux instruments de mesures qui auront la capacité de mesurer la hauteur du lit de la rivière en utilisant les mêmes techniques que l'altimétrie mais avec des ondes pouvant pénétrer l'eau, ou des techniques d'assimilation de données comme présentées dans la section 1.3.

Le lecteur peut se référer au site [Aviso](#), les documents disponibles dessus et les références citées pour des informations complémentaires sur les satellites d'altimétries et les données altimétriques.

Dans un premier temps, l'apport historique de ces nouveaux instruments de mesures dans la connaissance des océans et surtout des rivières sont présentés. Puis, l'ensemble des processus permettant d'obtenir des observations de la hauteur d'eau depuis les données brutes est présenté, et une discussion sur la précision et la pertinence des données est proposée.

1.1.1 Historique de l'observation de la Terre par altimétrie satellitaire

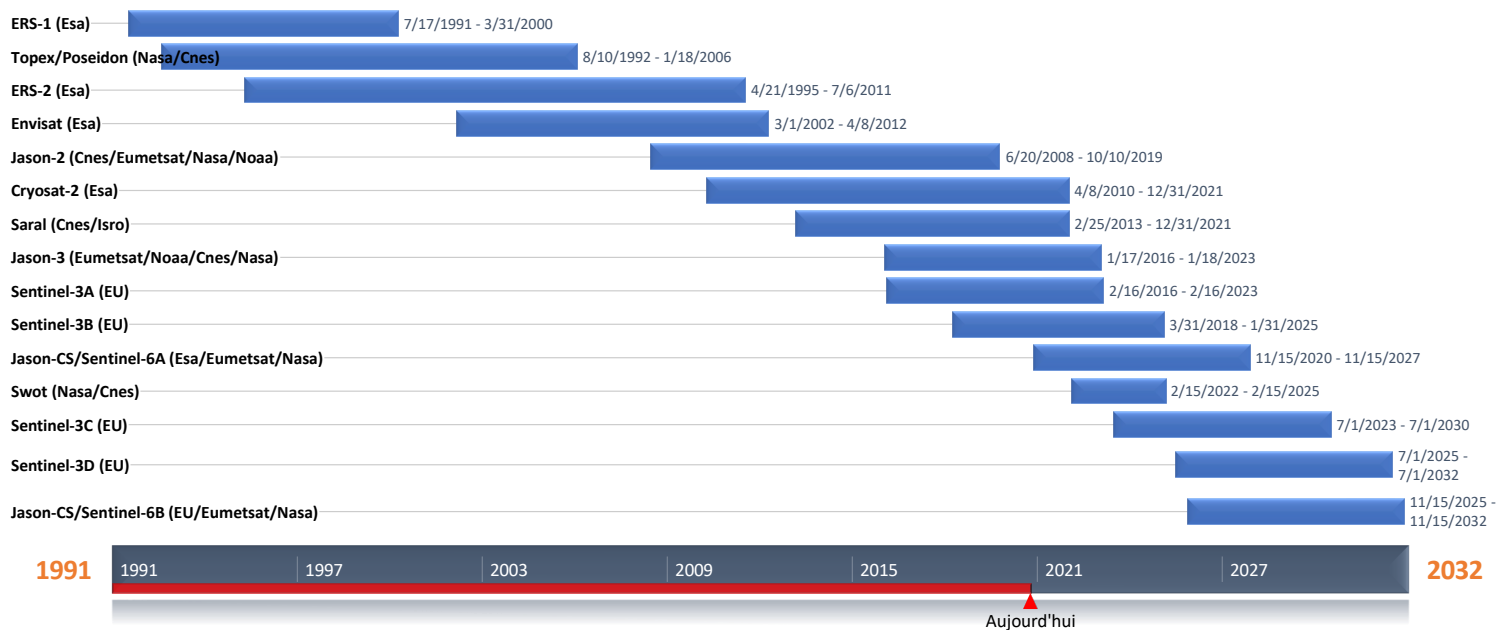


FIGURE 1.1 – Historique des principaux satellites d'altimétrie utilisés en hydrologie depuis 1991. Disponible sur le site [Aviso](#)

L'observation et la connaissance de l'hydrosphère (ensemble des zones où l'eau est présente), dont les rivières mais initialement surtout les mers et les océans, ont toujours été d'une grande importance. Les enjeux sont multiples, on peut notamment citer l'approvisionnement en eau douce et la prévention des crues des rivières ou encore le transport (des hommes ou des marchandises), la pêche et la géopolitique pour les océans et les rivières. Dans le contexte actuel, la connaissance de l'hydrosphère permet aussi de comprendre l'effet du changement climatique sur l'hydrologie et l'océanographie.

Cependant, la connaissance de l'hydrosphère et son exploration au cours du temps dépendent énormément du niveau technologique. Par exemple, les grandes expéditions maritimes du XV^e et XVI^e siècles ont été rendues possibles grâce au développement de techniques comme la construction navale et l'astrolabe, voir e.g. resp. [Boxer \[1977\]](#) et [Dutarte \[2006\]](#). Ce n'est qu'au $XVIII^e$ siècle que l'on commence à obtenir des cartes détaillées de l'Atlantique et du

Gulf Stream¹ permettant de réduire le temps de transport entre l'Europe et l'Amérique. Au XIX^e siècle, les expéditions de grandes envergures comme l'expédition du Challenger (de 1872 à 1876) permettent d'avoir de meilleures connaissances des océans, voir [Thoulet \[1895\]](#).

L'observation satellitaire, que ce soit les images obtenues grâce à des capteurs optiques ou les mesures de la surface libre obtenue par altimétrie radar, a permis un changement majeur dans l'observation de la Terre. Dès 1957, le premier satellite Spoutnik 1, qui a fourni des observations de la haute atmosphère, a montré que l'étude de la Terre est possible depuis l'espace. Dans les années 1960, la possibilité d'observer les océans dans leur globalité grâce à des instruments radar embarqués sur des satellites est mise en avant, voir e.g. sur la page de site [Aviso-historique](#). Jusque là, les données sont fournies essentiellement par des bateaux et quelques stations in situ. Ces données sont donc essentiellement situées autour des grands axes de navigations et la Terre est mal connue dans sa globalité.

Outre les satellites d'altimétrie, il convient aussi de mentionner le programme Landsat (satellites optiques) dont le premier est lancé par la NASA en 1972. Ce programme d'observation de la Terre est le premier prévu à des fins civiles. L'apport des satellites à la connaissance de la Terre est tel qu'une nouvelle île a été découverte au large du Canada en 1976 par le satellite Landsat 1 et porte son nom. Ces satellites ont notamment permis de calculer des masques de présence et de récurrence d'eau sur les continents et d'en calculer des estimations de largeurs de rivières à l'échelle globale avec une résolution inférieure à 30m, voir [Pekel et al. \[2016\]](#).

En 1978, Seasat est le premier satellite d'altimétrie à être envoyé par la NASA. Ce satellite a permis de tester la capacité de ces nouveaux instruments à observer la surface des océans et de définir les besoins pour les missions futures. Les données de hauteurs obtenues grâce à ce satellite atteignent une précision de l'ordre de 1m par rapport à des données in situ, voir e.g. [Frey et Brenner \[1990\]](#) et les références citées. Dans la continuité, la US Navy envoie le satellite Geosat en 1985.

Le premier satellite altimétrique européen ERS-1 est ensuite envoyé en 1991 par l'ESA. Puis la mission TOPEX/Poseidon, développée par la NASA et le CNES, a démarré en 1992 et restera en service jusqu'en 2006. Ces satellites étaient initialement prévus pour l'observation des océans et la quantité de données obtenues a permis de suivre l'évolution spatio-temporelle du phénomène El niño². Bien que prévus pour l'observation des océans, ces satellites ont rapidement été utilisés pour observer des très grands fleuves et lacs, voir e.g. [Cretaux et al. \[2018\]](#). La précision du satellite TOPEX/Poseidon est estimée à 5cm sur l'océan, voir e.g. section 1.3.1 de [Bercher \[2009\]](#) et les références citées. Le succès de ce satellite qui a fournit des données pendant 13 ans a largement permis d'accroître l'intérêt et la popularité de ces nouveaux instruments de mesures.

Les satellites ERS-2 (1995) et Jason-1 (2001) prennent la suite. L'utilisation de plusieurs missions avec des orbites différentes est rapidement mise en avant car cela permet d'obtenir une plus grosse quantité de données et avec un échantillonnage spatio-temporel de données plus dense. Plusieurs satellites se succèdent ensuite, on citera notamment les satellites Envisat (2002) et Saral (2013) dans la continuité du satellite ERS-2 et les satellites Jason-2 (2008) et -3 (2016) dans la continuité de Jason-1. L'évolution technologique a permis le développement de nouveaux instruments de mesure et notamment du mode SAR qui permet une meilleure résolution spatiale, voir e.g. [Raney \[1998\]](#). Les missions Cryosat-2 (2010) et Sentinel-3 (2016 et 2018) sont par exemple équipés d'altimètre SAR. Le lecteur peut se référer au site [Aviso](#) du CNES pour plus de détails sur les satellites d'altimétries et leur histoire.

Comme mentionné précédemment, les missions présentées sont historiquement prévues pour l'observation des océans mais ont aussi montré leur potentiel pour observer les eaux continentales (rivières et lacs). Par ailleurs, cela permet d'obtenir des données à des endroits difficiles d'accès, e.g. une grande partie du bassin amazonien pour ne citer

1. voir une des premières cartes du Gulf Stream datant 1786 sur <https://www.wdl.org/fr/item/20/>

2. voir plus de détail sur la mission TOPEX/Poseidon sur <https://www.aviso.altimetry.fr/fr/missions/past-missions/topex-poseidon/thirteen-eventful-years.html>

que le plus grand d'entre tous. Ces satellites altimétriques ont donc été rapidement utilisés pour observer les eaux continentales, voir une revue plus détaillée dans le chapitre 1 de Bercher [2009]. De plus, le nombre de station in situ tend globalement à décroître, voir e.g. Fekete et Vörösmarty [2007] et plus récemment la base de donnée du GRDC (*Global Runoff Data Centre*)³. Cette tendance donne ainsi encore plus d'importance aux données satellitaires.

Cependant, les instruments et les chaînes de traitement des données restent essentiellement prévus pour l'observation des océans. Certaines difficultés sont rencontrées pour l'observation des eaux continentales où la précision est donc moins bonne, voir e.g. Calmant et Seyler [2006], Bercher [2009] et section 1.1.2. Il faut cependant noter que la précision des données d'altimétrie ne cesse de s'améliorer avec le temps, de même que la capacité à interpréter les informations du corps d'eau reçues par le satellite (voir ci après).

Le satellite SWOT (*Surface Water Ocean Topography*), dont le lancement est prévu pour décembre 2022 (NASA/CNES), contiendra un altimètre à large fauchée, un nouvel instrument permettant d'observer sur une large fauchée, et donc avoir un meilleur échantillonnage spatial. De plus, il sera le premier satellite dont la mission porte à la fois sur l'hydrologie et sur l'océanographie.

Actuellement, la constellation de satellites altimétriques est composée du satellite Jason-3 ainsi que de la constellation opérationnelle composée des satellites Sentinel-3A, -3B et -6 (prévue pour remplacer Jason-3) du programme Copernicus⁴ qui garanti la continuité des observations.

Les missions de recherches, dont fera partie le satellite SWOT, continuent à améliorer nos connaissances sur les cours d'eau de manière globale.

Ces données sont essentiellement libres et gratuites, et mises à dispositions pré-traitées sur certains sites internet, le lecteur peut se référer au tableau 3 trouvé dans Fassoni-Andrade et al. [2021].

1.1.2 Altimétrie spatiale : traitement des mesures et précision

Un altimètre est un instrument de mesure qui permet de mesurer la hauteur d'un point, c'est à dire la distance entre le point et une surface de référence. Dans notre cas, le point est un point de la surface libre de l'eau et la surface de référence est par exemple le géoïde, i.e. la surface équipotentielle de référence du champ de pesanteur de la Terre. Dans le cas d'un satellite altimétrique, la mesure de la hauteur de la surface libre se fait grâce à deux instruments. Tout d'abord, la distance entre le satellite et la surface libre est mesurée grâce à un altimètre. Puis, un système de géo-localisation permet de connaître avec une haute précision la position du satellite (grâce aux stations au sol Doris⁵) et ainsi la distance entre le satellite et la surface de référence. À partir de ces deux mesures, on peut en déduire une mesure de la distance entre la surface libre et la surface de référence après la correction de certains phénomènes géophysiques, voir figure 1.2 et ci-dessous.

L'estimation de la hauteur de la surface libre est obtenue en plusieurs étapes avec différents niveaux de données explicités ci-dessous.

Données de niveau L1

Les altimètres principalement considérés dans les travaux présentés sont les altimètres radars à visée nadir (zone du sol directement située à la verticale du satellite).

Le principe de ces altimètres est simple : l'instrument envoie une onde électromagnétique, plus particulièrement radio dans le cas des altimètres radars, qui va se réfléchir sur la surface libre, puis le satellite reçoit un écho. L'évolution de la puissance en temps de cet écho est appelée forme d'onde et la succession de formes d'onde le long de la

3. disponible sur <https://www.bafg.de/GRDC/EN>

4. voir sur <https://www.copernicus.eu/fr>

5. voir sur <https://www.aviso.altimetry.fr/fr/techniques/doris.html>

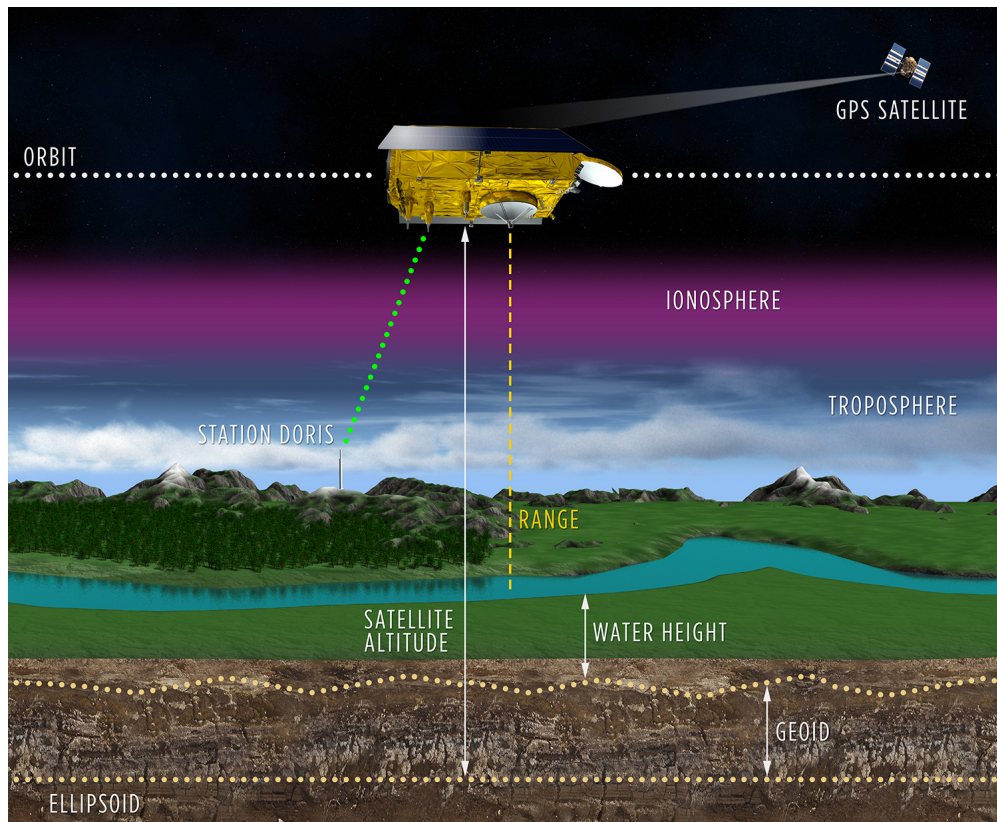


FIGURE 1.2 – Schéma du principe de l’altimétrie spatiale. Les stations Doris permettent de mesurer avec précision la localisation et la trajectoire des satellites. Le *range* correspond à la distance entre la surface libre et le satellite. Crédit CNES/Mira production, disponible sur [Aviso](#)

trajectoire du satellite est appelée radargramme. Cette forme d’onde permet ensuite de calculer le temps nécessaire à l’onde pour parcourir la distance entre la surface libre et le satellite et d’en déduire la distance.

Cette onde est émise à une certaine fréquence de répétition et avec une certaine longueur d’onde, toutes deux dépendantes de la technologie du capteur. Cependant, les formes d’onde résultantes sont très bruitées et inutilisables en l’état dû à un effet de Speckle. Ce bruit est la conséquence des aspérités de la surface libre. Pour réduire le bruit, plusieurs formes d’onde (environ 100) sont moyennées à bord du satellite qui transmet ensuite les formes d’onde moyennées à la fréquence obtenue.

Ces formes d’onde constituent les données de niveau L1.

Cette méthode d’altimétrie nadir présentée est dite conventionnelle ou LRM (*Low Resolution Mode*).

C’est par exemple le mode d’acquisition du satellite Jason-3. Ce satellite à une fréquence d’environ $2kHz$, ce qui donne des formes d’onde moyennées à $20Hz$, correspondant à une donnée environ tous les $350m$ au sol.

L’empreinte au sol⁶ d’une donnée de ce mode d’acquisition est de l’ordre de plusieurs dizaines de kilomètres. Il existe d’autres modes d’acquisition permettant de réduire la taille de l’empreinte au sol et le bruit de Speckle. On peut noter l’altimétrie SAR qui couple la méthode conventionnelle avec l’effet Doppler induit par le mouvement du satellite. Cela permet de réduire l’empreinte au sol dans la direction azimutale (direction de la trajectoire du satellite) à bande dite Doppler de $300m$ de large et le bruit dû à l’effet de Speckle. De plus, chaque bande Doppler

6. zone du sol qui est atteinte par l’onde et qui sera vu par le satellite dans une mesure, la taille de l’empreinte donne une idée de la résolution spatiale intrinsèque dépendant de l’onde émise

est observée plusieurs fois permettant un traitement multi-aspect (*multilooking*, [Boy et al. \[2017\]](#)) et ainsi de réduire le bruit. Pour les satellites Sentinel-3A et -3B, dont les données sont aussi obtenues environ tous les 300m au sol, cette réduction de bruit est estimée à 25%, voir e.g. [Aviso](#). Une extension appelée FFSAR [[Egido et Smith, 2017](#)] permet de descendre jusqu'à une empreinte au sol dans la direction azimutale de 50cm en théorie et de 10m en pratique pour réduire le bruit pour les satellites Sentinel-3A et -3B.

D'autres technologies existent comme l'altimètre LiDAR basé sur une onde laser plutôt qu'une onde radio, ou encore l'altimètre à large fauchée qui sera utilisé par le satellite SWOT (lancement prévu pour septembre 2022). Ce dernier utilise l'interférométrie radar, i.e. la différence de phase entre deux données radars SAR, permettant une empreinte au sol allant jusque 5m dans la direction azimutale et entre 10m et 70m dans la direction transversale pour une précision sur la hauteur mesurée déduite à 50cm et une précision estimée à 21cm pour un carré de $(250m)^2$, voir e.g. [Aviso](#) et [Rodríguez et al. \[2012\]](#).

Données de niveau L2 et retracking

La deuxième étape de traitement est appelée *retracking*.

Cette étape consiste à calculer la distance entre le satellite et la surface libre à partir des radargrammes obtenus dans l'étape précédente. Le cas le plus simple est le cas d'un écho radar d'un océan ou d'un grand lac où la forme d'onde a une forme bien spécifique. Cette forme d'onde est le résultat théorique d'un modèle d'interaction entre la surface de l'eau et l'onde, appelé modèle de Brown. Pour cette forme d'onde, il est possible de calculer facilement le temps de trajet de l'onde et d'en déduire la distance entre la surface libre et le satellite. Cependant, pour les eaux continentales, les formes d'onde sont beaucoup plus complexes. Cela vient notamment du fait de la présence dans l'empreinte au sol de terres émergées ou d'autres cours d'eau situés à proximité, le tout à des altitudes différentes de la rivière, voir une revue dans [Frappart et al. \[2006\]](#), [Bercher \[2009\]](#) et un exemple sur la figure 1.3.

On utilise alors des algorithmes de retracking qui sont soit empiriques soit basés sur des formes d'onde réelles ou théoriques. Ces algorithmes ont essentiellement été développés pour des radargrammes obtenus sur l'océan mais sont aussi utilisables pour des radargrammes d'eaux continentales. Il est aussi possible de classifier les formes d'onde et d'utiliser un traitement adapté en fonction de cette classification. À noter que, dans le cas d'eaux continentales, le traitement des formes d'onde obtenues nécessite la plupart du temps un algorithme de retracking empirique.

Des études sont en cours pour améliorer le retracking, notamment sur l'utilisation de méthode d'apprentissage automatique pour déduire la hauteur de la surface libre directement à partir du radargramme, voir [Coggiola et al. \[2019\]](#).

Une fois que la distance entre la surface libre et le satellite est obtenue par retracking du radargramme, et étant donné la distance entre le satellite et le géoïde qui est obtenue grâce au système de géo-localisation, la hauteur de la surface libre est corrigée. On citera notamment la correction du biais dû à la traversée de la ionosphère et aux conditions atmosphériques causant un retard de propagation de l'onde. Cette correction est calculée grâce à l'utilisation combinée de plusieurs longueurs d'onde ayant des capacités de pénétrations différentes et est de l'ordre de la dizaine de cm. Le retard de l'onde dû à la troposphères et plus particulièrement aux variations de pressions et d'humidités est aussi corrigé. Ces corrections sont calculées grâce à un modèle météorologique global et sont respectivement d'environ 2.3m et de quelques dizaines de cm. Les biais dus aux variations verticales de la croûte terrestre sont aussi corrigés. Lors de l'utilisation de données provenant de plusieurs satellites, et plus particulièrement de plusieurs missions, il est aussi important de corriger le biais intermission. Ce biais peut être estimé en utilisant les données lorsque les satellites se croisent dans une fenêtre temporelle relativement réduite, voir e.g. entre les satellites Jason-3 et Sentinel-3A dans [Cretaux et al. \[2018\]](#). Il est à noter que les biais inter-missions sont traditionnellement calculés sur les océans. L'estimation de ces biais sur les surfaces continentales fait l'objet de recherches. Pour les

satellites d'une même mission, par exemple Sentinel-3A et -3B, ils sont mis en phase tandem ⁷ durant les premiers cycles ⁸ pour calibrer le nouvel arrivant sur le satellite déjà calibré.

Les algorithmes de retracking donnent aussi une estimation du coefficient de retro-diffusion σ qui permet de quantifier la quantité d'énergie réfléchie par la surface libre.

Cette étape permet d'obtenir les données de niveau L2, voir figure 1.3.

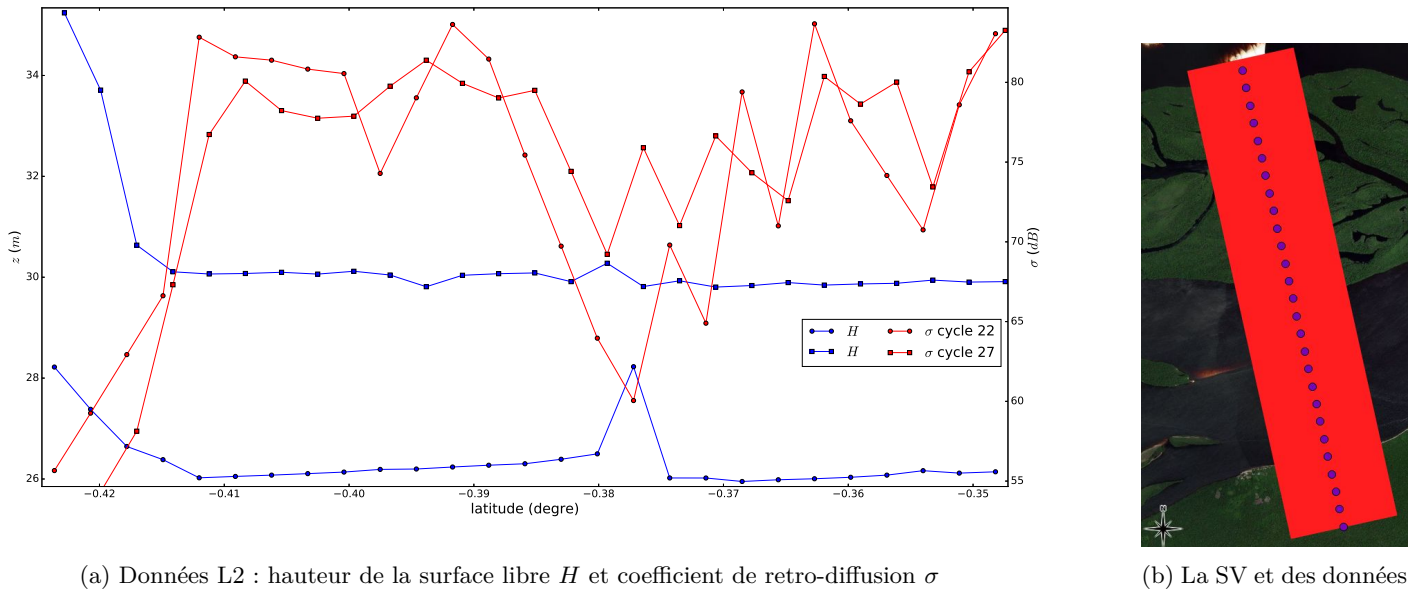


FIGURE 1.3 – Pour une Station Virtuelle (intersection théorique entre la projection de la trajectoire du satellite avec la rivière, notée SV) Sentinel-3B du Rio Negro. À gauche : données de niveau L2, hauteurs de la surface libre H et coefficient de retro-diffusion σ (quantité d'énergie réfléchie par la surface libre), vs la latitude (du sud vers le nord) sur deux cycles. À droite, carte de la station et de la position des données sur un cycle. On notera la présence d'une île sous la trace du satellite.

Données de niveau L3 et editing

La dernière étape de traitement est appelée *editing*. Le principe est de déterminer une valeur de hauteur de surface libre par Station Virtuelle (intersection théorique entre la projection de la trajectoire du satellite avec la rivière, notée SV) et par date de passage du satellite à partir des données L2 qui sont des données de hauteur de la surface libre obtenues avec une fréquence d'environ $20Hz$ (une distance de $350m$ au sol) le long de la trace ⁹ du satellite.

L'intérêt est de réduire le bruit de la mesure ainsi que de pouvoir éliminer des outliers. Ces outliers correspondent à des données où le retracking de la forme d'onde n'a pas permis de mesurer la hauteur de la surface de la rivière mais par exemple la hauteur d'une berge ou de la végétation humide. Ces outliers dépendent donc de la disposition de la trace du satellite vis à vis de la rivière.

7. le satellite Sentinel-3B a été positionné $223km$ devant le satellite Sentinel-3A pendant quatre mois, voir https://www.esa.int/Applications/Observing_the_Earth/Copernicus/Sentinel-3/Sentinel-3_flies_tandem

8. période de temps nécessaire au satellite pour repasser au dessus d'un même point

9. projection d'une demi-orbite du satellite sur la surface de la Terre

Plusieurs méthodes d'editing existent et nécessitent parfois de l'expertise humaine. Une méthode d'editing automatique qui ne nécessite pas, ou peu, d'interventions manuelles, est présentée ici. Cette méthode est utilisée par exemple pour éditer les séries temporelles de la plateforme Hydroweb¹⁰.

Dans un premier temps, seules les données situées dans un polygone décrivant grossièrement l'intersection entre la trace et la rivière sont gardées.

Puis une série de critères et de filtres permet de déduire les données altimétriques valides et d'éliminer d'éventuels outliers.

Lorsque la mesure correspond à de l'eau, on peut dire en premier approximation que le coefficient de retro-diffusion se situe au dessus d'une certaine valeur (dépendant du satellite et de l'algorithme de retracking). Inversement, un coefficient de retro-diffusion trop bas correspond généralement à de la terre ferme. Ainsi, il est possible de retirer tous les points dont le coefficient σ est inférieur à ce seuil. C'est notamment visible sur la figure 1.3 où les points les plus au sud (à gauche sur la figure 1.3a) correspondent probablement à la berge. De plus, le point vers la latitude -0.375° correspond probablement à l'île visible sous la trace du satellite sur la figure 1.3b qui est submergée durant le cycle 27 mais émergée pendant le cycle 22.

Ensuite, les données avec les coefficients σ les plus faibles (généralement 50% des données, dépendant des stations virtuelles) sont éliminées.

Les autres filtres correspondent à des filtres statistiques permettant une bonne cohérence temporelle des données mais présentant certains inconvénients évoqués plus bas. Le premier est basé sur la moyenne et l'écart type calculé sur toute la série temporelle. Le deuxième filtre est basé sur la moyenne et l'écart type instantanée, c'est à dire calculé sur le cycle courant. Ces deux filtres éliminent les points situés hors de l'intervalle délimité par la moyenne plus ou moins trois fois l'écart type. Le dernier filtre appliqué correspond à un filtrage calendaire récursif à partir d'un gabarit temporel. Ce gabarit correspond à une moyenne saisonnière plus ou moins 2.5 fois l'écart type calendaire. Cette moyenne saisonnière est calculée à partir du cycle courant, des trois cycles précédents et des trois cycles suivants. L'écart type calendaire est calculé pour chaque jour de l'année à partir des valeurs de hauteurs médianes et de leur dispersion sur toutes les années précédentes. Dans le cas où il n'y a pas encore assez de données (la première année), l'écart type est donné.

Une fois les outliers éliminés, la médiane des points restants est utilisée comme donnée de niveau L3 et il est possible de calculer plus de statistiques telles que les quantiles et l'écart type, voir figure 1.5.

Il convient de noter que ce type d'editing automatique ne peut pas être généralisé à 100% des SV et des passages du satellite. Plusieurs phénomènes sont à prendre en compte au cas par cas, et peuvent être, ou non, détectés par l'editing tel que présenté. C'est notamment le cas des événements exceptionnels et extrêmes qui peuvent être identifiés comme des outliers et retirés à tort, des formes d'onde particulières rendant les algorithmes de retracking standards inutilisables ou encore lorsque les observations ne correspondent majoritairement pas à la surface de l'eau. Dans de tels cas, il peut être nécessaire de faire l'editing manuellement et cela permet parfois d'atteindre une meilleure précision que l'editing automatique.

Données de hauteur d'eau multi-satellitaire sur un réseau hydrographique

L'échantillonnage spatio-temporel des données obtenues sur une rivière ou un réseau de rivières dépend notamment de l'orbite des satellites, de la latitude et de la géomorphologie de la rivière en question par rapport aux traces des satellites. L'échantillonnage, notamment spatial, peut être amélioré en considérant plusieurs satellites simultanément [Aviso].

Dans les travaux de cette thèse, notamment dans les travaux présentés dans le chapitre 2, les données de plusieurs satellites sont utilisées : le satellite Jason-3 (noté J3) ainsi que les satellites Sentinel-3A et -3B (notés S3A et S3B),

10. voir <http://hydroweb.theia-land.fr/?lang=fr>

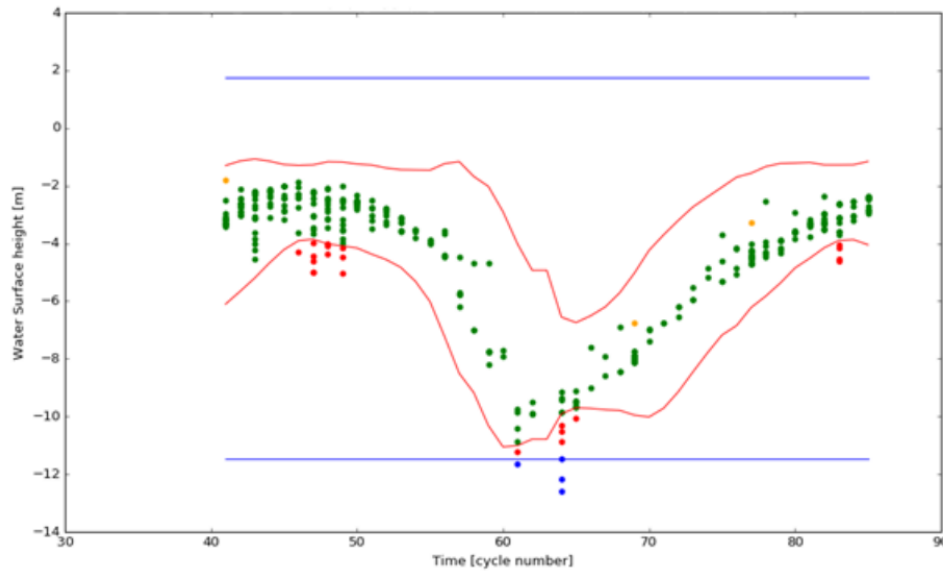


FIGURE 1.4 – Exemple d’editing et d’application des filtres statistiques sur les données de hauteurs de niveau L2. En bleu, le filtre basé sur la série temporelle entière, en rouge le filtre calendaire et en orange le filtre basé sur le cycle courant. Crédit CLS.

qui à eux trois constituent la constellation de satellites altimétriques opérationnels actuels. L’orbite du satellite J3 implique que la distance entre deux traces (distance inter-traces) est de 160km à l’équateur et des cycles de 10 jours environ. L’orbite du satellite S3A implique que la distance inter-traces est de 52km à l’équateur et des cycles de 27 jours environ. Le satellite S3B a les mêmes caractéristiques d’orbite que S3A en étant juste décalé de la moitié de la distance inter-traces.

Les données ont été éditées en utilisant le processus de retracking (empirique) et d’editing automatique décrits précédemment, et ont été vérifiées manuellement.

De plus, le réseau hydrographique principalement étudié est celui composé du Rio Negro (portion de 860km) et du Rio Branco (portion de 548km) dans le bassin amazonien, situé entre les latitudes -3° sud et 0° pour le Rio Negro et 2° nord pour le Rio Branco, voir figure 1.6. Les orbites des satellites et le réseau hydrographique impliquent qu’on a respectivement 7, 22 et 22 stations virtuelles pour les satellites J3, S3A et S3B. Ces stations virtuelles sont en moyenne séparées par une distance de 21.5km sur le Rio Negro et de 49.8km sur le Rio Branco, voir figure 1.7.

Bien que l’utilisation de données issues de plusieurs missions permet de grandement améliorer l’échantillonnage spatial des données, cet échantillonnage ne permet pas d’estimer certaines des grandeurs hydrauliques, notamment la pente de la surface libre, voir chapitre 2, avec une précision suffisante. De plus, l’échantillonnage spatial dépend de la disposition de la rivière par rapport aux traces des satellites. Par exemple, le Rio Branco s’écoule quasiment le long de l’axe nord-sud, ce qui a pour conséquence de réduire grandement le nombre d’intersections avec les traces des satellites, voir figures 1.6 et 1.7a.

L’échantillonnage temporel peut aussi être amélioré grâce à l’utilisation de plusieurs satellites. C’est notamment le cas lorsque pour plusieurs satellites, les stations virtuelles correspondantes sont proches l’une de l’autre, voir superposées. En effet, les zones du réseau qui sont dans ce cas sont alors observées plus souvent. Ce meilleur échantillonnage temporel est par exemple visible sur le Rio Negro à plusieurs endroits, voir figure 1.7b et les intersections des traces sur la figure 1.6.

On rappelle aussi que la précision du retracking, et celle des données altimétriques qui en découlent, dépend des

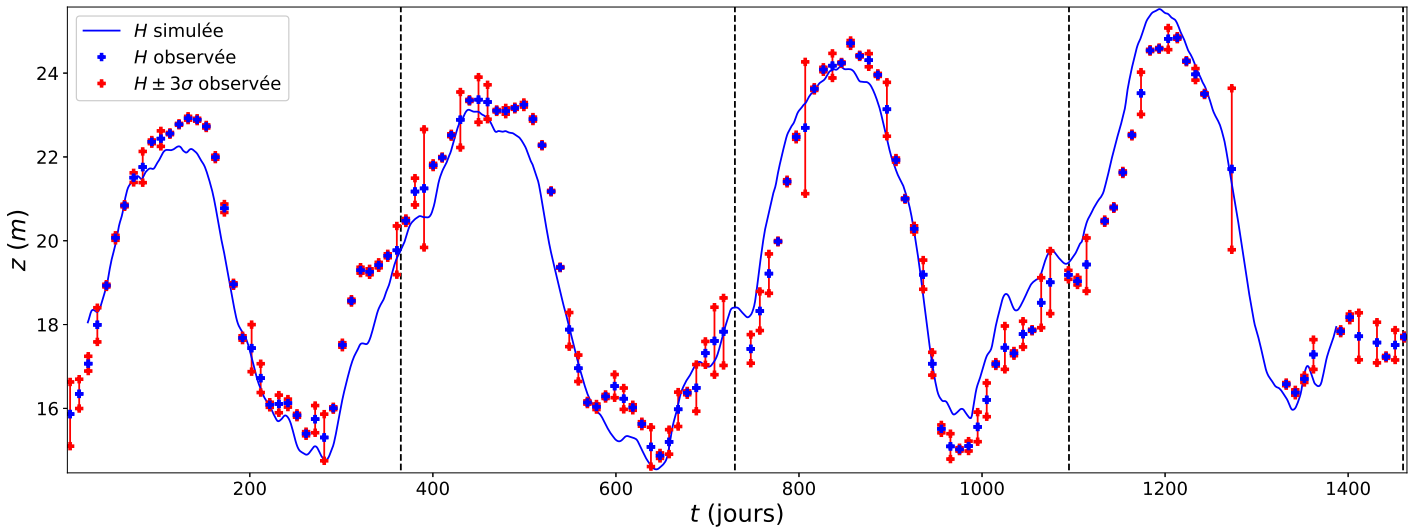


FIGURE 1.5 – Série temporelle des données L3 ainsi que l'intervalle $\pm 3\sigma$ avec σ l'écart type des données L2 valides et la hauteur de la surface libre simulée par les équations de Saint-Venant calibrées, voir chapitre 2, sur une station virtuelle Jason-3 sur une période de temps entre mars 2016 et mars 2020, $RMSE = 29cm$ entre les observations et la simulations, cet écart vient des erreurs de modélisation et du bruit des mesures. La série temporelle est obtenue grâce à la chaîne d'editing développée à CLS et présentée dans cette section. Les barres verticales correspondent à une année.

caractéristiques de la scène observée par l'empreinte au sol (topographie, occupation du sol, configuration des zones d'eau par rapport aux traces des satellites, etc.). Cette dépendance à la scène a eu tendance à se réduire aux cours des dernières années par la diminution des taches au sol, notamment grâce au mode SAR. On peut par exemple noter que de nombreuses îles sont situées sous les traces sur le Rio Negro. Sur le Rio Branco, la disposition nord-sud de la rivière implique que l'écoulement se fait dans la direction azimutale.

Précision des données

Les données altimétriques obtenues suite à l'ensemble des traitements mentionnés ci-dessus restent entachées d'erreurs du fait de plusieurs sources d'incertitudes.

On rappelle par exemple que des biais, notamment dû à la traversée de l'atmosphère, sont corrigés.

La présence de surfaces émergées à proximité (bancs de sable, plaines d'inondations, ...), qui risque d'être observée en même temps que la surface de l'eau, est aussi source d'incertitude. Ces surfaces émergées impliquent des formes d'onde complexes qui sont traitées par des algorithmes de retracking empiriques. Ainsi, la donnée altimétrique est moins précise pour les eaux continentales, et surtout pour les rivières, que pour les océans. Cette source d'incertitude est liée à la disposition de la rivière par rapport aux traces des satellites.

Dans Bercher [2009], l'auteur fait l'état d'un écart de $11cm$ à $60cm$ sur l'Amazonie et même de $1.01m$ en moyenne sur plusieurs rivières larges entre des données in situ et les données de TOPEX/Poseidon, voir plus de détail dans les sections 1.2 et 1.3 de cette thèse et les références citées à l'intérieur.

Des RMSE (*Root Mean Square Error*) entre des données in situ et les données obtenues par le satellite J3 sont esti-

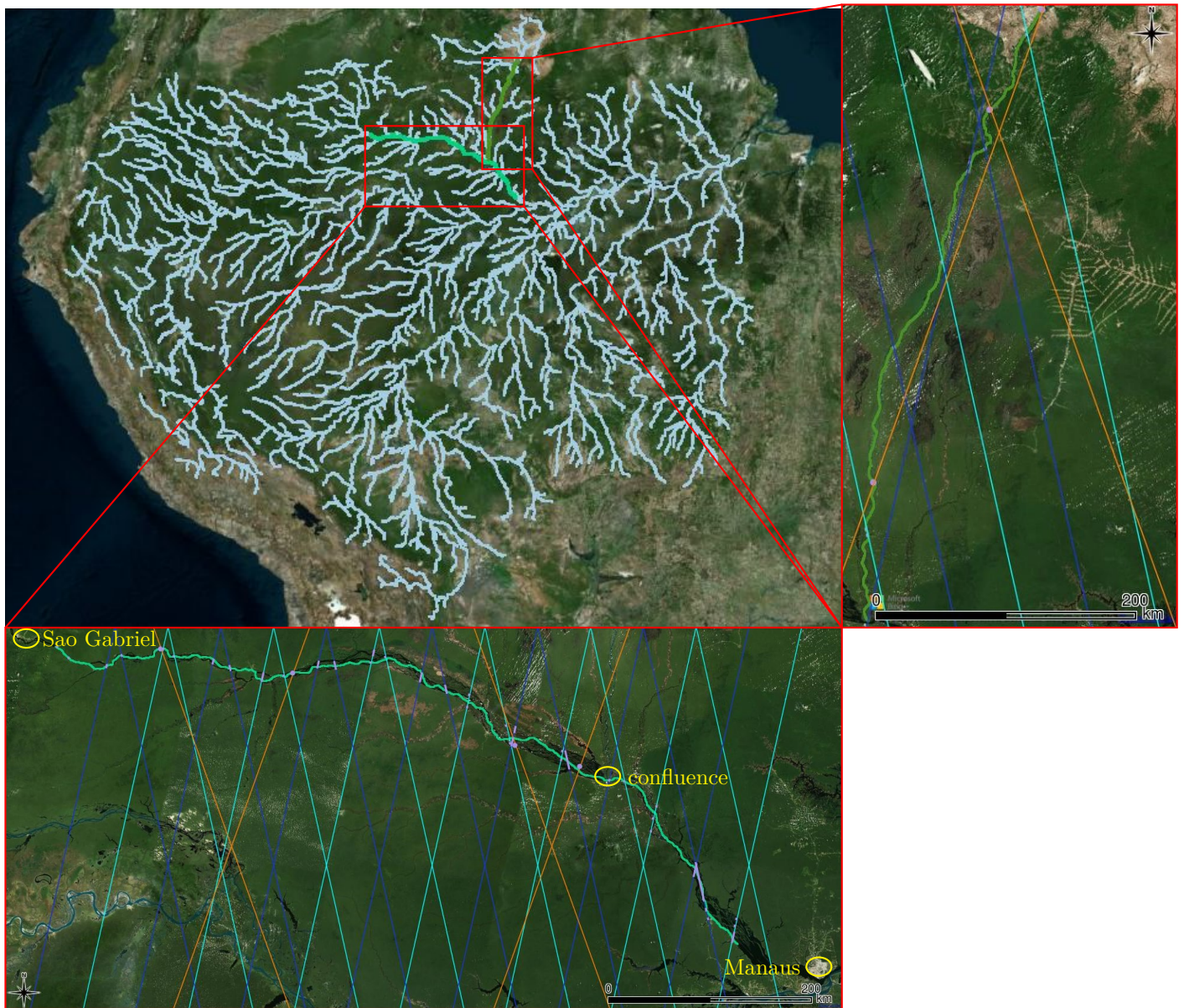


FIGURE 1.6 – Réseau hydrographique du Rio Negro (en bas) et du Rio Branco (à droite) dans le bassin amazonien (centre). Les traits correspondent aux traces des satellites Jason-3 (en orange), Sentinel-3A (en cyan) et Sentinel-3B (en bleu), les points violets correspondent aux stations virtuelles pour ces satellites sur ce réseau. Cette carte permet de mettre en avant la disposition des rivières par rapport aux traces des satellites.

mées entre 20 et 30cm par VS sur des rivières françaises relativement petites comme la Garonne dans [Biancamaria et al. \[2018\]](#).

Pour le satellite S3A, les RMSE obtenues sont entre 2.9 et 31.3cm sur le bassin du Zambeze dans [Kittel et al. \[2021\]](#) et entre 10 et 28cm sur le bassin du Congo dans [Kitambo et al. \[2021\]](#).

Cela est consistant avec d'autres estimations qui donnent entre 15cm et 80cm sur les rivières. À contrario, les estimations sont de 2cm sur les océans et 5cm sur des grands lacs où les données sont semblables aux données sur les océans, voir [Aviso](#).

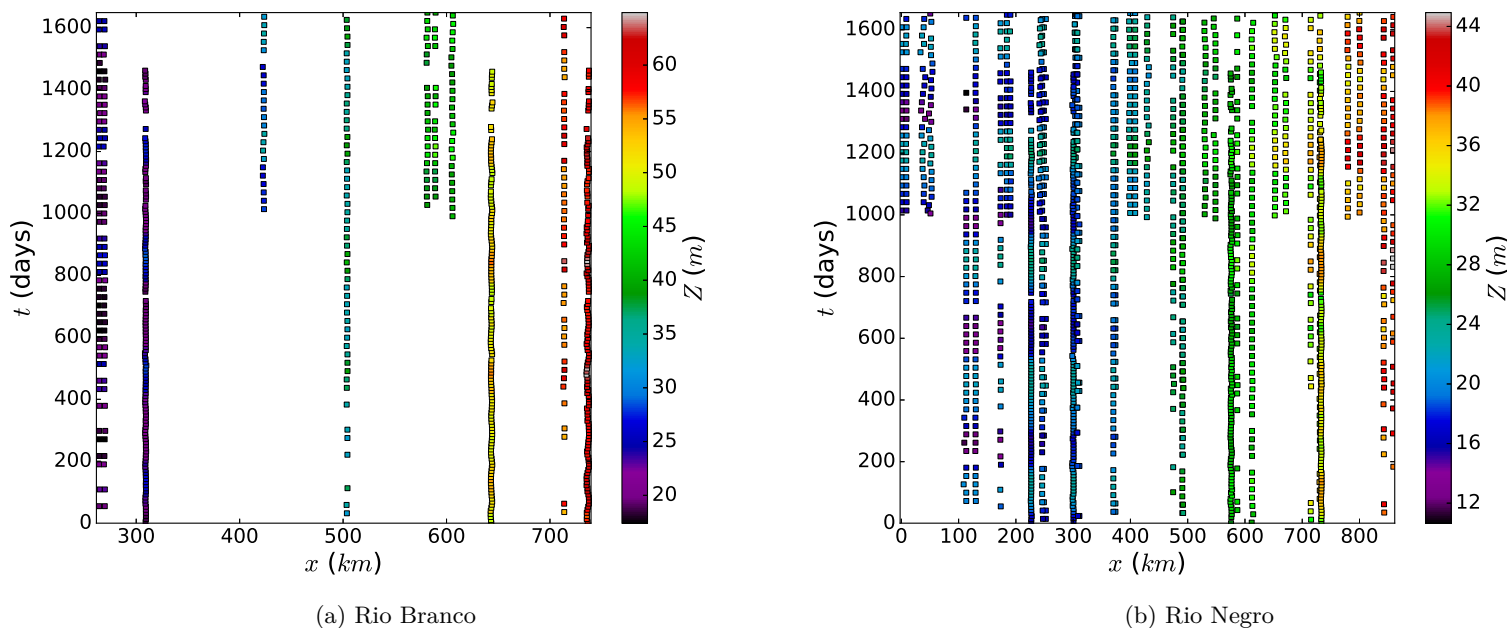


FIGURE 1.7 – Cartographie en temps et en espace des données de surface libre obtenues par les satellites Jason-3 et Sentinel-3A et -3B sur le réseau Rio Negro-Rio Branco sur une période allant de mars 2016 à septembre 2020. Les stations de J3 sont reconnaissables par la densité temporelle des données ($x \approx 300\text{km}$ sur le Rio Branco par exemple) et les stations S3B par le début de la mission vers $t = 1000$ jours ($x \approx 600\text{km}$ sur le Rio Branco par exemple). Figure issue du chapitre 2

La précision de ces données est toutefois compliquée à quantifier car cela nécessite d’avoir des mesures in situ de hauteurs d’eau géoréférencées et localisées sous la trace du satellite en question (qui peut osciller autour de la trace théorique et être source d’incertitude), ainsi que des bonnes connaissances des incertitudes de ces mesures, e.g. les erreurs de lectures d’une règle limnimétrique ou la dérive dans le temps du limnigraphe automatique.

L’utilisation d’une référence physique permet de critiquer les incertitudes des mesures altimétriques vis-à-vis de la physique de l’écoulement. On rappelle que les principales sources d’incertitude des données altimétriques proviennent du bruit des mesures mais aussi de l’ensemble des traitements appliqués aux données pour arriver à une mesure de la hauteur d’eau à partir des formes d’onde. De ce fait, la critique des données altimétriques par rapport à une référence physique peut permettre de donner un retour sur la méthode de traitement des formes d’onde.

Ainsi, un modèle hydraulique, permettant de simuler une surface libre physique sur un réseau hydrographique observé, semble être un outil fort intéressant pour intégrer des données altimétriques et évaluer leur consistance. La combinaison optimale entre le modèle et les données, avec leurs incertitudes respectives, grâce à l’assimilation de données permettrait de détecter les données les plus incertaines par rapport à la physique de l’écoulement modélisé. Cependant, cet écart entre les données et le modèle contient aussi les erreurs de modélisation. Celles-ci sont le résultat de plusieurs incertitudes dont les hypothèses de modélisation faites sur l’écoulement, les incertitudes liées aux conditions aux bords ainsi que les incertitudes liées à la simplification de la géométrie de la rivière.

Dans les études actuelles, cet écart est estimé entre 0.2m et 1.5m , voir e.g. [Silva et al. \[2010\]](#), [Ricko et al. \[2012\]](#), [Schwatke et al. \[2015\]](#), [Kittel et al. \[2021\]](#). Dans le chapitre 2, on obtient des ordres de grandeurs équivalents : un écart moyen de 53cm , plus de 80% des données ont un écart de moins de 1m et les écarts les plus importants sont

trouvés sur un très petit nombre de stations et potentiellement liés à une erreur de modélisation sur ces cours d'eau non-instrumenté. De plus, la station qui présente les plus grands écarts est la station J3 située à $x = 643\text{km}$ sur le Rio Branco, voir figure 2.5a, dont les données sont obtenues en mode LRM (voir paragraphe sur les données de niveau L1).

Sur les données présentées sur la figure 1.5, le RMSE entre les observations et la hauteur simulée par le modèle hydraulique 1D calé par assimilation variationnelle de données, voir section 1.3.2, est de 29cm pour une station J3. Cet ordre de grandeur correspond aux ordres de grandeurs donnés par [Biancamaria et al. \[2018\]](#).

1.2 Modélisation mathématique des écoulements

Cette section vise à présenter les modèles mathématiques utilisés pour modéliser l'écoulement fluvial.

Dans ces travaux de thèse, les écoulements fluviaux d'intérêt sont en une dimension. L'avantage des modèles 1D est de pouvoir modéliser des grandes portions de rivières et de réseaux de rivières avec un temps de calcul raisonnable. Sur ces portions de rivières, on suppose que les variations des grandeurs hydrauliques sur une section en travers sont négligeables. Cette hypothèse est justifiée par le fait que l'on s'intéresse à la modélisation de grandes portions de rivières très larges et donc, à des écoulements à grande échelle.

Il convient tout de même de noter que ces modèles 1D ne permettent pas de modéliser des phénomènes 2D et 3D, comme par exemple les champs d'écoulement sur les plaines d'inondations.

Dans un premier temps, les géométries des rivières, ainsi que les notations associées à l'écoulement sont présentées. Les équations de Navier-Stokes (voir e.g. [Batchelor \[2000\]](#)) dans le cadre particulier d'écoulements à surface libre, dont fait partie l'écoulement fluvial, sont présentées pour poser la base de la modélisation de l'écoulement en question. C'est à partir de ce modèle que les modèles 1D sont par la suite dérivés.

Le système de Saint-Venant est le premier système 1D qui est présenté, voir e.g. [Thual \[2010\]](#). Ces équations sont dérivées en intégrant celles de Navier-Stokes sur la section en travers et en utilisant l'hypothèse d'ondes longues pour traduire l'aspect "eau peu profonde" de l'écoulement.

Finalement, l'équation de l'onde diffusante est introduite, voir e.g. [Lighthill et Whitham \[1955\]](#), [Ponce et Simons \[1977\]](#). La dérivation rigoureuse de cette équation à partir des équations de Navier-Stokes est présentée.

1.2.1 Géométries des rivières et écoulement

Les variables d'état que l'on cherche à estimer sont l'aire mouillée $A(x, t)$ [m^2] ainsi que le débit $Q(x, t)$ [$m^3 \cdot s^{-1}$]. La variable qui est mesurée par les satellites d'altimétrie est la hauteur de la surface libre $H(x, y, t)$ [m], voir figure 1.8.

En 2D et 3D, la géométrie de la rivière est définie par la bathymétrie (hauteur du fond de la rivière) 2D $b(x, y)$ [m] ainsi que la largeur de la rivière à une certaine hauteur $\tilde{w}(x, z)$ [m]. La largeur au miroir $w(x, t)$ [m] correspond à la largeur de la rivière au niveau de la surface libre et est définie par la position des berges de gauche et de droite, resp. $y_g(x, t)$ et $y_d(x, t)$ [m] : $w(x, t) = y_d(x, t) - y_g(x, t)$.

En 3D, la variable d'état est la vitesse $\mathbf{u}(x, y, z, t) = (u_1, u_2, u_3)^T(x, y, z, t)$ [$m \cdot s^{-1}$]. La profondeur de l'eau, aussi appelée tirant d'eau, est définie comme $h(x, y, t) = H(x, y, t) - b(x, y)$ [m].

On définit la bathymétrie 1D comme étant $z_b(x) = \min_y b(x, y)$ [m]. Les variables d'états 1D A et Q sont définies grâce aux variables 3D :

$$A(x, t) = \int_{y_g(x, t)}^{y_d(x, t)} \int_{b(x, y)}^{H(x, y, t)} dz dy \quad \text{et} \quad Q(x, t) = \int_{y_g(x, t)}^{y_d(x, t)} \int_{b(x, y)}^{H(x, y, t)} u_1(x, y, z, t) dz dy$$

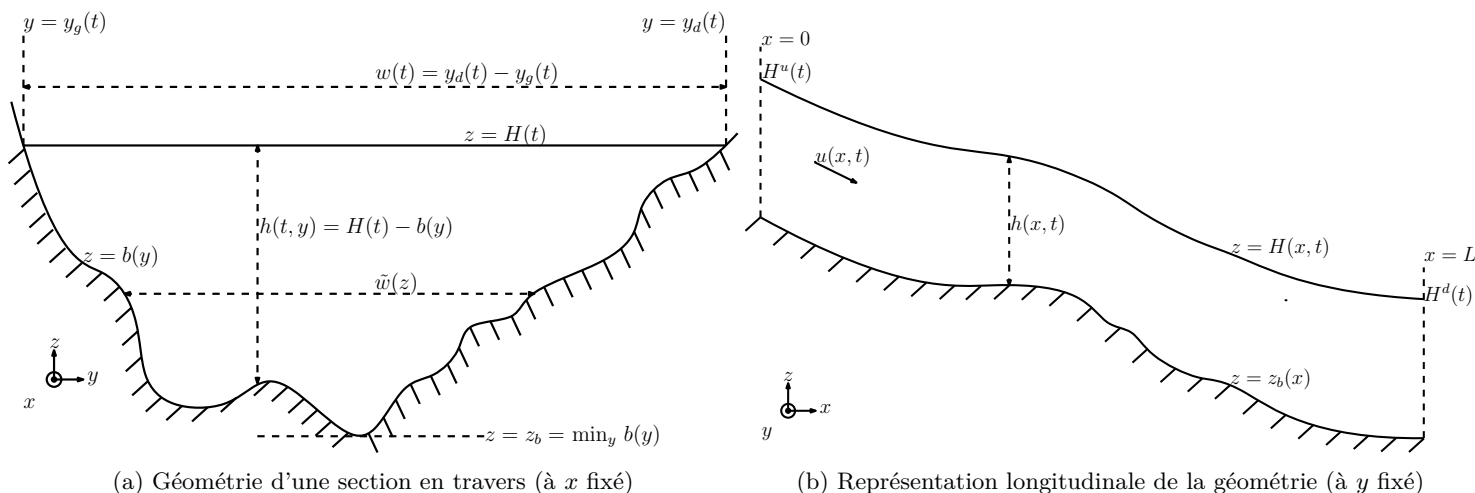


FIGURE 1.8 – Géométrie de la rivière et notations.

Les variables A et Q sont reliées par $Q(x, t) = u(x, t)A(x, t)$ avec u la vitesse 1D moyenne sur la section en travers [$m \cdot s^{-1}$]. On définit aussi le périmètre mouillé $P_m(x, t)$ [m] ainsi que le rayon hydraulique $R_h(x, t) = \frac{A(x, t)}{P_m(x, t)}$ [m]. En 1D et pour de très larges rivières, l'approximation $R_h \approx h$ est couramment utilisée et est valide, voir e.g. [Larnier et al. \[2021\]](#) et chapitre 2.

On s'intéresse à un tronçon de rivière de longueur L [m], d'abscisse curviligne $x \in [0, L]$ et sur une période de temps $t \in [0, T]$ [s].

On note aussi g l'accélération de la pesanteur ($g \approx 9.81 m \cdot s^{-2}$), ρ la masse volumique du fluide ($\rho \approx 10^3 kg \cdot m^{-3}$ pour l'eau) et ν la viscosité cinématique du fluide [$m^2 \cdot s^{-1}$]. Une grandeur importante dans l'étude des écoulements fluviaux est le nombre de Froude $Fr = \frac{U_0}{c}$ avec U_0 une vitesse caractéristique et c la célérité définie par $c = \sqrt{gA/w}$. Ce nombre permet d'évaluer l'importance de l'inertie par rapport aux effets de pesanteur. Les écoulements fluviaux, ou écoulements subcritiques, correspondent aux écoulements qui vérifient $Fr < 1$. À l'inverse, les écoulements vérifiant $Fr > 1$ sont appelés torrentiels, ou supercritiques. Lorsque l'écoulement vérifie $Fr \approx 1$, celui-ci est appelé critique. Dans le cas présent, les écoulements étudiés sont des écoulements fluviaux. En pratique, les écoulements 1D observés par les satellites d'altimétrie vérifient cette hypothèse et l'ordre de grandeur est $Fr \approx 0.3$, voir e.g. [Garambois et Monnier \[2015\]](#), [Frasson et al. \[2021\]](#).

1.2.2 Les équations de Navier-Stokes pour les écoulements à surface libre

On présente ici les équations de Navier-Stokes adaptées pour l'écoulement à surface libre.

Ce système d'équations est le fruit du travail de nombreux mathématiciens du **XIX**^e, dont Henri Navier et George Stokes, et fait partie d'un domaine de recherche toujours actif. Les équations de Navier-Stokes sont les lois de conservation pour des fluides newtoniens (rhéologie linéaire) et visqueux, voir e.g. [Batchelor \[2000\]](#).

Les équations de Navier-Stokes sont présentées ici dans un cadre d'écoulement à surface libre. On suppose tout d'abord que l'écoulement est incompressible, i.e. la masse volumique ρ est uniforme et constante. Le fluide est aussi supposé isotrope. Ainsi, les lois de conservation considérées sont celles de la masse et de la quantité de mouvement. Les conditions aux bords du domaine doivent aussi être déterminées. Dans cette section, les conditions à la frontière rigide qui est la bathymétrie du support de l'écoulement, ainsi qu'à la frontière mobile qui est la surface libre, sont données.

Les équations de Navier-Stokes pour un fluide incompressible s'écrivent dans ce contexte de la manière suivante :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 & \forall (x, y, z, t) \in \Omega \times [0; T] \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \nabla \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{u} & \forall (x, y, z, t) \in \Omega_t^{3D} \times [0; T] \end{cases} \quad (1.1a)$$

$$(1.1b)$$

avec $\Omega_t^{3D} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | b(x, y) \leq z \leq H(x, y, t)\}$ le domaine en 3D et p la pression qui s'exerce sur le fluide [$g \cdot m \cdot s^{-2}$].

Sur la frontière rigide $\Gamma^b = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z = b(x, y)\}$, i.e. sur la bathymétrie, le fluide ne pénètre pas le fond de la rivière.

Cette condition de non-pénétration peut se traduire par *la condition d'adhérence aux fonds* suivante :

$$\mathbf{u}(x, y, z, t) = 0 \quad \forall (x, y, z, t) \in \Gamma^b \times [0; T] \quad (1.2)$$

La non-pénétration peut aussi se traduire par une loi de friction empirique du fluide sur la paroi :

$$\nu \left(\frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) = \frac{1}{\rho} \tau^* \text{ et } \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_s = 0 \quad \forall (x, y, z, t) \in \Gamma^b \times [0; T] \quad (1.3)$$

avec τ^* la contrainte de cisaillement que le fluide exerce sur la paroi et \mathbf{n}_s le vecteur normal sortant.

La frontière mobile $\Gamma_t^s = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z = H(x, y, t)\}$ est la surface libre, c'est à dire la surface de contact entre l'eau et l'air.

Une difficulté dans le modèle 3D à surface libre est que le domaine de résolution varie dans le temps, voir les définitions du domaine Ω_t^{3D} et de la frontière mobile Γ_t^s . Il est donc nécessaire d'ajouter une condition pour modéliser cette surface libre.

Pour assurer la continuité de la vitesse, on a *la condition cinématique de la surface libre* suivante :

$$\frac{\partial H}{\partial t} + u_1 \frac{\partial H}{\partial x} + u_2 \frac{\partial H}{\partial y} = u_3 \quad \forall (x, y, z, t) \in \Gamma_t^s \times [0; T] \quad (1.4)$$

En supposant que le fluide est en contact avec l'air et que celui-ci est un fluide parfait, la continuité des forces à la surface libre implique la relation suivante :

$$(\sigma - pId) \cdot \mathbf{n}_s = 0 \quad \forall (x, y, z) \in \Gamma_t^s \times [0; T] \quad (1.5)$$

avec σ [$g \cdot m \cdot s^{-2}$] le tenseur des contraintes.

1.2.3 Les équations de Saint-Venant

On présente ici les équations de Saint-Venant dans un cadre 1D. Ces équations ont été décrites pour la première fois de manière heuristique par Adhémar Barré de Saint-Venant en 1871 pour un écoulement en une dimension, voir [de Saint-Venant \[1871\]](#).

Ces équations sont dérivées rigoureusement des équations de Navier-Stokes essentiellement en supposant que l'écoulement se fait en eau peu profonde et en intégrant sur la section en travers.

L'aspect *eau peu profonde* (aussi appelé "shallow water" en anglais, ou encore film mince) se traduit par l'hypothèse des ondes longues, i.e. le ratio $\epsilon = \frac{h_0}{L_0}$ entre la profondeur caractéristique h_0 et la longueur d'onde de la surface libre

L_0 est très petit : $\epsilon \ll 1$, voir e.g. [Dingemans \[1997\]](#), [Chang et Demekhin \[2002\]](#), [Thual \[2010\]](#).

En pratique, la profondeur est de l'ordre du mètre (maximum dizaine de mètres) et on suppose $\epsilon \approx 0.01$. Ainsi, la longueur d'onde minimale des phénomènes représentés dans le modèle est de l'ordre de la centaine de mètres, voire du kilomètre. Ce qui correspond bien à l'échelle des écoulements étudiés dans le cadre de cette thèse.

Une fois certains termes négligés du fait de l'hypothèse des ondes longues, une version 2D des équations de Saint-Venant est obtenue en intégrant sur la hauteur entre b et H . Puis les équations de Saint-Venant en 1D sont dérivées par intégration ses équations 2D sur la largeur de l'aire mouillée.

Ce modèle d'écoulement est très largement utilisé avec succès aussi bien en 1D que en 2D, voir e.g. [Hervouet \[2003\]](#) et [Hec-Ras](#). De plus, ce système n'est pas uniquement utilisé pour les écoulements fluviaux mais aussi, par exemple, pour la propagation de vagues tels que les tsunamis, voir e.g. [Dingemans \[1997\]](#).

A noter que dans les équations de Navier-Stokes, la hauteur de la surface libre H dépend de y . Cependant, dans les modèles 1D, on suppose que H est le même sur toute la section en travers. Les variations de H sur la section en travers sont du ressort de modèles 2D et ne font pas partie des modélisations étudiées ici. À partir de maintenant, H est supposé indépendant de y .

La dérivation des équations de Saint-Venant est par exemple présentée dans le chapitre 5 de [Thual \[2010\]](#) dans le cadre d'un canal rectangulaire uniforme.

1.2.3.1 Des équations Navier-Stokes aux équations primitives en eau peu profonde

Adimensionnalisation de l'équation des moments de Navier-Stokes

L'application de l'hypothèse des ondes longues nécessite dans un premier temps d'adimensionnaliser les équations de Navier-Stokes.

Pour ce faire, la longueur caractéristique et la profondeur caractéristique $[m]$, resp. L_0 et h_0 , sont introduites.

Il en résulte les variables spatiales adimensionnelles $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ qui vérifient les égalités suivantes : $x = L_0 \bar{x}$, $y = h_0 \bar{y}$ et $z = h_0 \bar{z}$.

En introduisant une vitesse caractéristique $U_0 [m \cdot s^{-1}]$, les vitesses adimensionnelles $(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3)$ satisfont les égalités suivantes : $u_1(x, y, z, t) = U_0 \bar{u}_1(x, y, z, t)$, $u_2(x, y, z, t) = U_0 \frac{h_0}{L_0} \bar{u}_2(x, y, z, t)$ et $u_3(x, y, z, t) = U_0 \frac{h_0}{L_0} \bar{u}_3(x, y, z, t)$.

On peut alors introduire la variable temporelle adimensionnelle \bar{t} qui satisfait $t = \frac{L_0}{U_0} \bar{t}$, et la pression adimensionnelle \bar{p} qui satisfait $p(x, y, z, t) = \rho g h_0 \bar{p}(x, y, z, t)$.

Il faut aussi introduire la hauteur de la surface libre adimensionnelle \bar{H} qui satisfait $H(x, t) = h_0 \bar{H}(x, t)$, pour pouvoir adimensionnaliser la condition cinématique de surface libre (1.4).

A partir de ces variables et grandeurs adimensionnelles et normalisées, on définit les nombres adimensionnels qui permettent de caractériser les régimes d'écoulement.

Le ratio entre la profondeur caractéristique et la longueur caractéristique est le ratio géométrique $\epsilon = \frac{h_0}{L_0}$.

Le nombre de Froude $Fr = \frac{U_0}{\sqrt{g h_0}}$, mentionné dans la section 1.2.1, caractérise l'importance de l'inertie par rapport aux effets de la gravité.

Le nombre de Reynolds $Re = \frac{h_0 U_0}{\nu}$ permet de caractériser l'importance des forces d'inertie par rapport à la viscosité.

Une fois adimensionnalisées, les équations de Navier-Stokes (1.1) deviennent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial \bar{z}} = 0 \\ \beta \left(\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \bar{t}} + \bar{u}_1 \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \bar{x}} + \bar{u}_2 \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \bar{y}} + \bar{u}_3 \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \bar{z}} \right) = -\delta \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \alpha \delta \frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial \bar{y}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial \bar{z}^2} \\ \alpha \beta \left(\frac{\partial \bar{u}_2}{\partial \bar{t}} + \bar{u}_1 \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial \bar{x}} + \bar{u}_2 \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial \bar{y}} + \bar{u}_3 \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial \bar{z}} \right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + \alpha \left(\alpha \delta \frac{\partial^2 \bar{u}_2}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}_2}{\partial \bar{y}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}_2}{\partial \bar{z}^2} \right) \\ \alpha \beta \left(\frac{\partial \bar{u}_3}{\partial \bar{t}} + \bar{u}_1 \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial \bar{x}} + \bar{u}_2 \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial \bar{y}} + \bar{u}_3 \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial \bar{z}} \right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} + \alpha \left(\alpha \delta \frac{\partial^2 \bar{u}_3}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}_3}{\partial \bar{y}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}_3}{\partial \bar{z}^2} \right) \end{array} \right. \quad (1.6a)$$

$$\beta \left(\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \bar{t}} + \bar{u}_1 \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \bar{x}} + \bar{u}_2 \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \bar{y}} + \bar{u}_3 \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \bar{z}} \right) = -\delta \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \alpha \delta \frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial \bar{y}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial \bar{z}^2} \quad (1.6b)$$

$$\alpha \beta \left(\frac{\partial \bar{u}_2}{\partial \bar{t}} + \bar{u}_1 \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial \bar{x}} + \bar{u}_2 \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial \bar{y}} + \bar{u}_3 \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial \bar{z}} \right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + \alpha \left(\alpha \delta \frac{\partial^2 \bar{u}_2}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}_2}{\partial \bar{y}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}_2}{\partial \bar{z}^2} \right) \quad (1.6c)$$

$$\alpha \beta \left(\frac{\partial \bar{u}_3}{\partial \bar{t}} + \bar{u}_1 \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial \bar{x}} + \bar{u}_2 \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial \bar{y}} + \bar{u}_3 \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial \bar{z}} \right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} + \alpha \left(\alpha \delta \frac{\partial^2 \bar{u}_3}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}_3}{\partial \bar{y}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}_3}{\partial \bar{z}^2} \right) \quad (1.6d)$$

Les paramètres adimensionnels qui apparaissent naturellement et permettent de caractériser les régimes d'écoulement, sont les suivants, voir e.g. [Fernández-Nieto et al. \[2010\]](#), [Boutounet et al. \[2016\]](#) :

- le coefficient $\beta = \epsilon Re$ représente le poids des termes d'inertie ;
- le coefficient $\alpha = \epsilon \frac{Fr^2}{Re}$ représente le poids du terme de viscosité ;
- le coefficient $\delta = \epsilon \frac{Re}{Fr^2}$ représente le poids du terme de pression.

A noter que $\alpha \delta = \epsilon^2$.

Une fois adimensionnalisées, la condition d'adhérence au fond (1.2) devient :

$$(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3)(x, y, z, t) = 0$$

et la condition cinématique de surface libre (1.4) devient :

$$\frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{t}} + \bar{u}_1 \frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{x}} + \bar{u}_2 \frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{y}} = \bar{u}_3$$

L'adimensionnalisation des conditions de continuité des forces n'est pas détaillée ici mais peut être trouvée dans e.g. [Gerbeau et Perthame \[2001\]](#) et le chapitre 5 de [Thual \[2010\]](#).

Les équations primitives en eau peu profonde du second ordre

Comme mentionné précédemment, le système de Saint-Venant repose notamment sur l'hypothèse des ondes longues qui se traduit par $\epsilon \ll 1$.

Les écoulements étudiés dans le cadre de cette thèse sont sous le régime suivant : $\alpha = O(\epsilon^2)$, $\beta = O(\epsilon)$ et $\delta = O(1)$, voir e.g. [Boutounet et al. \[2016\]](#).

Ce régime est caractérisé de manière équivalente par $Fr^2 = O(\epsilon)$ et $Re = O(1)$. Celui-ci correspond à un régime fluvial inertiel : l'écoulement est laminaire mais avec des termes d'inertie non-négligeables à l'ordre 1 en ϵ .

Les équations de Saint-Venant sont l'approximation à l'ordre 1 en ϵ des équations de Navier-Stokes adimensionnalisées (1.6) sous ce régime d'écoulement, voir e.g. [Fernández-Nieto et al. \[2010\]](#), [Noble et Vila \[2013\]](#), [Boutounet et al. \[2016\]](#). Les équations de Navier-Stokes deviennent les équations primitives en eau peu profonde du premier ordre

suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z} = 0 & (1.7a) \\ \frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial y} + u_3 \frac{\partial u_1}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} \right) & (1.7b) \\ \frac{\partial p}{\partial y} = 0 & (1.7c) \\ \frac{\partial p}{\partial z} = 0 & (1.7d) \end{cases}$$

On note que l'équation de conservation de la masse reste inchangée par l'hypothèse des ondes longues, voir les équations (1.1a) et (1.7a). La condition d'adhérence (1.2) et la condition cinématique (1.4) de la surface libre restent aussi inchangées.

La loi de friction empirique au niveau du fond de la rivière (1.3) reste aussi inchangée. Cependant, la condition de continuité des forces au niveau de la surface libre (1.5) devient $\partial_z u_1 = 0$ pour $z = H(x, t)$.

L'étude asymptotique de la pression met en avant le fait que pour ce régime d'écoulement, on obtient $p \approx p_{hs}$, voir e.g. Fernández-Nieto et al. [2010], Boutounet et al. [2016], avec p_{hs} la pression hydrostatique qui s'écrit :

$$p_{hs}(x, y, z, t) = -\rho g(z - H(x, y, t)) \quad (1.8)$$

Celle-ci correspond à la pression exercée par la colonne d'eau située au dessus du point.

1.2.3.2 Équation de conservation de la masse

L'équation de conservation de la masse (1.1a) peut s'intégrer sur l'aire mouillée et s'écrit alors :

$$\underbrace{\int_{y_g}^{y_d} \int_{z_b}^H \frac{\partial u_1}{\partial x} dz dy}_{=I_1} + \underbrace{\int_{y_g}^{y_d} \int_{z_b}^H \frac{\partial u_2}{\partial y} dz dy}_{=I_2} + \underbrace{\int_{y_g}^{y_d} \int_{z_b}^H \frac{\partial u_3}{\partial z} dz dy}_{=I_3} = 0 \quad (1.9)$$

Ces différentes intégrales peuvent être calculées en utilisant la règle d'intégration de Leibniz ainsi que la condition cinématique de la surface libre (1.4) et la condition d'adhérence (1.2), voir les détails de calcul dans la section A.1. L'équation de conservation de la masse du système de Navier-Stokes 1D (1.1a) devient l'équation de conservation de la masse du système de Saint-Venant 1D suivante :

$$\frac{\partial A}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial Q}{\partial x}(x, t) = 0$$

1.2.3.3 Équation des moments

Du fait de l'équation de conservation de la masse (1.7a), l'égalité suivante est obtenue :

$$u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial y} + u_3 \frac{\partial u_1}{\partial z} = \frac{\partial u_1^2}{\partial x} + \frac{\partial u_1 u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_1 u_3}{\partial z}$$

L'équation (1.7b) devient alors :

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial u_1^2}{\partial x} + \frac{\partial u_1 u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_1 u_3}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} \right)$$

Cette équation est maintenant intégrée sur l'aire mouillée :

$$\begin{aligned} & \underbrace{\int_{y_g}^{y_d} \int_{z_b}^H \frac{\partial u_1}{\partial t} dz dy}_{=I_4} + \underbrace{\int_{y_g}^{y_d} \int_{z_b}^H \frac{\partial u_1^2}{\partial x} dz dy}_{=I_5} + \underbrace{\int_{y_g}^{y_d} \int_{z_b}^H \frac{\partial u_1 u_2}{\partial y} dz dy}_{=I_6} + \underbrace{\int_{y_g}^{y_d} \int_{z_b}^H \frac{\partial u_1 u_3}{\partial z} dz dy}_{=I_7} \\ & = \underbrace{\int_{y_g}^{y_d} \int_{z_b}^H -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} dz dy}_{=I_8} + \underbrace{\int_{y_g}^{y_d} \int_{z_b}^H \nu \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} \right) dz dy}_{=I_9} \end{aligned} \quad (1.10)$$

De manière identique à l'intégration de l'équation de conservation de la masse, on utilise la formule de l'intégration de Leibniz ainsi que la condition d'adhérence aux fonds (1.2) et la condition cinématique de la surface libre (1.4) pour calculer les expressions des intégrales I_4 , I_5 , I_6 et I_7 , voir section A.2. On obtient alors :

$$I_4 + I_5 + I_6 + I_7 = \frac{\partial Q}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} \right)(x, t)$$

Étant donné que pour ce régime d'écoulement $p \approx p_{hs}$, voir e.g. Fernández-Nieto et al. [2010], et l'expression de la pression hydrostatique (1.8), on obtient :

$$\frac{\partial p}{\partial x}(x, t) = \rho g \frac{\partial H}{\partial x}(x, t) \Rightarrow I_8 = -gA(x, t) \frac{\partial H}{\partial x}(x, t) \quad (1.11)$$

L'intégrale I_9 correspond à un terme de frottement du fluide. En utilisant les conditions de continuité des forces (1.3) et (1.5), cette intégrale vaut $I_9 = -\frac{P_m(x, t)}{\rho} \bar{\tau}(x, t)$ avec $\bar{\tau}$ la contrainte de cisaillement moyenne exercée sur la paroi [$g \cdot m \cdot s^{-2}$], voir les détails de calcul dans la section A.2. Cette contrainte est modélisée par $\bar{\tau}(x, t) = \rho g R_h(x, t) S_f(x, t)$ avec S_f la pente de la ligne de frottement, voir e.g. dans Thual [2010].

L'intégrale vaut alors :

$$I_9 = -gA(x, t) S_f(x, t) \quad (1.12)$$

Pour calculer S_f , on utilise la paramétrisation de Manning-Strickler-Gauckler (MSG), voir e.g. Dingman [2009] et un peu plus de détails dans la section 1.2.4.1 :

$$S_f(x, t) = \frac{|u(x, t)|u(x, t)}{K_s^2 A(x, t) R_h(x, t)^{\frac{4}{3}}} = \frac{|Q(x, t)|Q(x, t)}{K_s^2 A(x, t)^2 R_h(x, t)^{\frac{4}{3}}} \quad (1.13)$$

avec K_s le coefficient de Strickler [$m^{1/3} \cdot s^{-1}$]. Ce coefficient de friction prend en compte un nombre non-exhaustif de paramètres, tel que la composition du lit, les irrégularités de la section en travers, la sinuosité de la rivière ou encore la végétation, voir e.g. Chow [1964], Dingman [2009].

Dans un contexte de problème inverse, il est fréquent d'inférer ce paramètre pour obtenir un modèle équivalent, voir e.g. Larnier et al. [2021] et section 1.3.

Dans ce cas, le coefficient K_s prend en compte toute la physique non-modélisée, tel que la physique négligée dans les équations et les approximations faites sur les sections en travers (a priori de forme par exemple).

Dans le contexte d'écoulement fluvial 1D, il est couramment supposé que l'écoulement se fait de l'amont vers l'aval et ne change jamais de direction. Ainsi, la vitesse est supposée positive $u > 0$ et donc $|u|u = u^2 > 0$ et $|Q|Q = Q^2 > 0$.

En sommant les différentes intégrales $I_4 + I_5 + I_6 + I_7 - I_8 = I_9$, on obtient alors :

$$\underbrace{\frac{\partial Q}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} \right) (x, t)}_{\text{inertie}} + \underbrace{gA(x, t) \frac{\partial H}{\partial x}(x, t)}_{\text{gradient de pression et de bathymétrie}} = \underbrace{-gA(x, t)S_f(x, t)}_{\text{friction}} \quad (1.14)$$

L'équation des moments de Saint-Venant (1.14) est non conservative du fait du terme de gradient de pression hydrostatique et de bathymétrie $gA(x, t) \frac{\partial H}{\partial x}(x, t)$. On introduit alors un terme de pression relative, voir Vila [1986] :

$$P(x, t) = g \int_{z_b(x)}^{H(x, t)} (H(x, t) - z) \tilde{w}(x, z, t) dz \quad (1.15)$$

A noter que ce terme est relatif à une pression mais n'est pas homogène à une pression.

On obtient alors :

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x, t) = g \int_{z_b(x)}^{H(x, t)} (H(x, t) - z) \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x}(x, z, t) dz + gA(x, t) \frac{\partial h}{\partial x}(x, t)$$

Ainsi,

$$gA(x, t) \frac{\partial H}{\partial x}(x, t) = \frac{\partial P}{\partial x}(A; x, t) - g \int_{z_b(x)}^{H(x, t)} (H(x, t) - z) \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x}(x, z, t) dz + gA(x, t) \frac{\partial z_{z_b}}{\partial x}(x)$$

On obtient alors que l'équation des moments (1.10) s'écrit dans la forme conservative suivante :

$$\frac{\partial Q}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} + P \right) (x, t) = g \int_{z_b(x)}^{H(x, t)} (H(x, t) - z) \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x}(x, z, t) dz - gA(x, t) \frac{\partial z_{z_b}}{\partial x}(x) - gA(x, t)S_f(x, t)$$

1.2.3.4 Le système de Saint-Venant

Les équations de Saint-Venant peuvent alors être résumées en : $\forall(x; t) \in \Omega \times [0; T]$

$$\begin{cases} \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 & (1.16a) \\ \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} + P \right) = g \int_{z_b}^H (H - z) \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x} dz - gA \frac{\partial z_{z_b}}{\partial x} - gAS_f & (1.16b) \end{cases}$$

avec S_f donnée par la paramétrisation de MSG (1.13) et P le terme de pression relative (1.15).

Le domaine Ω est désormais le domaine 1D de la rivière qui est donnée par l'abscisse curviligne de la ligne centrale de la rivière : $x \in \Omega = [0; L]$.

On remarquera que l'intégrale sur l'aire mouillée est bien définie à condition que celle-ci soit strictement positive et respecte une certaine régularité, voir e.g. Gerbeau et Perthame [2001].

Dans le cas présent, la viscosité du fluide n'est prise en compte qu'au travers du frottement du fluide avec le sol. Une version du système de Saint-Venant prenant en compte la viscosité, appelé système de Saint-Venant visqueux, a été introduit par Gerbeau et Perthame [2001].

La dérivation présentée peut être enrichie, voir e.g. Decoene et al. [2009], Parisot et Vila [2014], Michel-Dansac et al. [2021]. Par exemple, Decoene et al. [2009], Michel-Dansac et al. [2021] dérivent des équations de Saint-Venant améliorées pour être consistant avec des modèles d'écoulements resp. en 3D et 2D. Dans Parisot et Vila [2014] et les références citées, les équations de Saint-Venant sont étendues en multi-couches pour prendre en compte une partie de la variabilité sur la hauteur.

La dérivation peut aussi être déclinée pour d'autres régimes d'écoulement, voir le cas multi-régime laminaire dans

Boutoumet et al. [2016] ou encore en régime turbulent dans Richard et al. [2017].

Le système de Saint-Venant (1.16) dans sa forme conservative peut s'écrire :

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} = \mathbf{S}(\mathbf{U}) \quad (1.17)$$

avec $\mathbf{U} = \begin{pmatrix} A \\ Q \end{pmatrix}$, $\mathbf{F}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} Q \\ \frac{Q^2}{A} + P \end{pmatrix}$ et $\mathbf{S}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} 0 \\ g \int_{z_b}^H (H-z) \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} dz - gA \frac{\partial z_{z_b}}{\partial x} - gAS_f \end{pmatrix}$.

L'étude des valeurs propres de la matrice jacobienne de \mathbf{F} permet de montrer que le système de Saint-Venant 1D est un système strictement hyperbolique, voir e.g. Vila [1986].

L'étude des courbes caractéristiques permet d'étudier les propriétés mathématiques tel que l'existence et l'unicité de la solution du système hyperbolique de Saint-Venant (1.17), ainsi que la présence de chocs.

Pour cette étude des courbes caractéristiques, le lecteur peut se référer à la littérature sur les systèmes hyperboliques, dont ceux proches du système de Saint-Venant 1D (1.16) tels que le système de Saint-Venant 2D en variable (h, q_x, q_y) , voir e.g. Toro [2001], ou le système d'Euler, voir e.g. Toro [2008].

On rappelle que dans notre cas, et à notre relativement grande échelle, les écoulements sont fluviaux, i.e. $Fr < 1$. Cela implique que, à notre échelle, on suppose qu'il n'y a pas de transition de régime (entre le régime fluvial et torrentiel) et donc que l'écoulement se fait sans choc.

A noter que les équations de Saint-Venant en variables (A, Q) ne sont pas la forme la plus courante, celles-ci sont plus courantes en variables (h, u) , voir e.g. Thual [2010]. Bien que la forme en (h, u) à l'avantage de pouvoir éviter des transitions de régime et des chocs dues aux variations de géométrie de la section en travers, la forme en (A, Q) permet de prendre en compte des géométries réelles de rivières. On suppose alors que la relation géométrique $A(H)$ est une fonction bijective monotone et que la représentation de la géométrie des rivières, à l'échelle relativement grande considérée, est suffisamment régulière pour ne pas impliquer de changements de régime, et donc de chocs.

L'étude des courbes caractéristiques permet notamment de déterminer les conditions aux bords nécessaires pour obtenir un problème bien posé, i.e. l'existence et l'unicité de la solution.

Le système de Saint-Venant doit être fermé par une condition initiale ainsi que des conditions aux bords pour obtenir un problème bien posé.

Les conditions initiales sont naturellement $(A, Q)(x, t = 0) = (A_0, Q_0)(x) \forall x \in \Omega$. En pratique, celle-ci est classiquement définie par l'état stationnaire. Cet état implique que l'équation de conservation de la masse se réduit à $\partial_x Q_0 = 0$ et donc $Q_0(x) = Q_{in}(t = 0)$ est constant. Cette condition initiale permet d'être assez proche du vrai état du système, notamment si l'on suppose qu'à chaque instant l'état de la rivière est proche de son état stationnaire. De plus, lorsque le temps de modélisation est assez long, la condition initiale est oubliée après un certain temps et n'a pas d'impact à long terme.

Les conditions aux bords nécessaires en $x = 0$ et $x = L$ sont un peu plus compliquées à déterminer à partir des courbes caractéristiques et dépendent du régime d'écoulement, voir e.g. Cunge [1980]. Dans le cadre de ces travaux, le débit entrant Q_{in} est imposé en amont. En aval, La hauteur d'eau H_{out} ou la hauteur normale (H en régime permanent uniforme) est imposée.

Les équations de Saint-Venant peuvent être étendues pour pouvoir modéliser un réseau composé de plusieurs portions de rivières qui sont reliées par des conditions de continuité aux confluences, voir e.g. Hec-Ras.

Le système de Saint-Venant tel que donné par le système (1.16) ne prend pas en compte d'apport extérieur d'eau dans le système. Il est possible de rajouter un terme source dans chaque équation du système, permettant notam-

ment de modéliser des petites confluences ou encore les précipitations et l'évaporation, voir par exemple section 2.2.1 et l'équation (2.1).

Au cours des travaux présentés, les équations de Saint-Venant sont résolues grâce à la version 1D du logiciel de calcul DassFlow-1D, voir Monnier et al. [2018]. Ce logiciel de calcul permet de modéliser numériquement les écoulements géophysiques à surface libre et d'effectuer une assimilation variationnelle de données, voir section 1.3.2. Les différentes versions de DassFlow contiennent plusieurs modèles d'écoulement de rivières allant du réseau 1D au 3D en passant par le couplage 1D-2D, voir Marin et Monnier [2009], et une dégénérescence locale du 2D en 1D, voir Pujol [2022]. DassFlow contient aussi un modèle pour l'écoulement de fluide non-newtonien avec une rhéologie en loi de puissance (loi de Herschel-Buckler), adapté par exemple pour l'écoulement de glacier ou de lave.

Dans le cadre des travaux de cette thèse, les équations de Saint-Venant 1D sont résolues grâce au schéma de Preissmann qui est un schéma de différence finie implicite adapté à l'écoulement fluvial ($Fr < 1$), voir e.g. Cunge [1980]. Dans DassFlow-1D, les équations de Saint-Venant 1D en variable (A, Q) peuvent aussi être résolues grâce à un schéma volume fini usuel HLL, voir e.g. Toro [2001].

1.2.4 L'équation de l'onde diffusante 1D classique

Dans cette section, l'équation de l'onde diffusante telle que classiquement utilisée en hydraulique fluviale est présentée, voir e.g. Lighthill et Whitham [1955], Ponce et Simons [1977].

Cette équation est obtenue en dérivant une relation algébrique $Q(H, \partial_x H)$ qui est ensuite injectée dans l'équation de conservation de la masse intégrée sur la section en travers (1.16a) pour obtenir une équation scalaire.

L'équation de l'onde diffusante classique repose sur une approximation des équations de Navier-Stokes (1.1) à l'ordre 0 en ϵ qui permet d'obtenir facilement une relation $Q(H, \partial_x H)$.

En plus des termes négligés à l'ordre 1 pour obtenir les équations de Saint-Venant (1.16), cette approximation à l'ordre 0 implique que les termes d'inertie sont négligés. De ce fait, l'équation de l'onde diffusante est souvent présentée comme étant une approximation non-inertielle des équations de Saint-Venant.

Cette équation est très largement utilisée en pratique pour modéliser des écoulements 1D (voir e.g. Weill et al. [2014], chapitre 3 et les références citées), des écoulements 2D (voir e.g. Hromadka et al. [1985], Santillana et Dawson [2010]) ou même des écoulements couplant 1D et 2D (voir e.g. [Aricò et al., 2016]).

D'autres approximations sont couramment utilisées. Celles-ci sont obtenues en négligeant un certain nombre de termes des équations de Navier-Stokes en fonction du régime de l'écoulement considéré. Le lecteur peut se référer à Yen et Tsai [2001] et au chapitre 5 de Thual [2010] pour une revue des approximations classiques et à l'équation (55) Boutounet et al. [2016] pour un modèle à une équation multi-régime laminaire.

L'équation de l'onde diffusante a l'avantage, par rapport aux équations de Saint-Venant et aux autres approximations, d'être un bon compromis entre la simplification de l'équation des moments (1.14) et une modélisation relativement complexe et riche.

En effet, une relation algébrique relativement simple (1.20) est obtenue par l'approximation d'ordre 0 des équations de Navier-Stokes. Comme mentionné précédemment, cette relation algébrique permet d'obtenir une équation scalaire qui à l'avantage d'avoir une complexité computationnelle inférieure au système de Saint-Venant.

D'un autre côté, cette équation permet de modéliser une physique relativement riche, notamment les effets de remous hydraulique, voir e.g. Ponce et Simons [1977], Yen et Tsai [2001], Thual [2010].

L'équation de l'onde diffusante a plusieurs autres avantages par rapport au système de Saint-Venant qui justifie son utilisation.

Dans le cadre de la modélisation d'écoulement adaptée à l'altimétrie, les conditions aux bords nécessaires sont des avantages. Comme mentionné précédemment, la résolution du système de Saint-Venant requiert d'imposer Q_{in} en amont. Dans notre cadre de travail, imposer Q_{in} en n'ayant accès qu'à des données altimétriques est un enjeu de taille. L'équation de l'onde diffusante, quant à elle, nécessite d'imposer H^u et H^d resp. en amont et en aval. Ces hauteurs sont directement observées par les satellites d'altimétrie et à cet égard, l'équation de l'onde diffusante est avantageuse par rapport au système de Saint-Venant.

Dans le chapitre 3, cette équation est étudiée et enrichie pour les écoulements à l'échelle des observations spatiales.

La dérivation rigoureuse de l'équation de l'onde diffusante classique à partir des équations de Navier-Stokes est présentée dans cette section. Cette équation est obtenue en approximant les équations de Navier-Stokes à l'ordre 0 du ratio géométrique ϵ , ce qui permet d'obtenir une relation algébrique $Q(H, \partial_x H)$. Les étapes d'intégration sur l'aire mouillée sont identiques aux étapes d'intégration pour la dérivation des équations de Saint-Venant.

Puis, des résultats sur l'étude théorique et numérique de l'équation de l'onde diffusante issus de la littérature sont présentés.

1.2.4.1 Dérivation de l'équation de l'onde diffusante

Les équations primitives en eau peu profonde du premier ordre

La dérivation de l'équation de l'onde diffusante se base sur l'adimensionnalisation des équations de Navier-Stokes (1.6).

On rappelle que les écoulements étudiés dans cette thèse sont sous le régime $\alpha = O(\epsilon^2)$, $\beta = O(\epsilon)$ et $\delta = O(1)$, ce qui est équivalent à $Fr^2 = O(\epsilon)$ et $Re = O(1)$, voir e.g. Fernández-Nieto et al. [2010], Boutounet et al. [2016].

L'équation de l'onde diffusante est obtenue grâce à l'approximation à l'ordre 0 des équations de Navier-Stokes adimensionnalisées (1.6) sous ce régime d'écoulement. Cette approximation d'ordre 0 a pour effet de négliger les termes d'inertie, en plus des termes négligés à l'ordre 1.

Les équations de Navier-Stokes deviennent les équations primitives en eau peu profonde du premier ordre suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial x}(x, y, z, t) + \frac{\partial u_2}{\partial y}(x, y, z, t) + \frac{\partial u_3}{\partial z}(x, y, z, t) = 0 & (1.18a) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}(x, y, z, t) + \nu \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}(x, y, z, t) + \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2}(x, y, z, t) \right) & (1.18b) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}(x, y, z, t) & (1.18c) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}(x, y, z, t) & (1.18d) \end{cases}$$

Étant donné que l'équation de conservation de la masse du système de Navier-Stokes est inchangée avec l'hypothèse d'un nombre de Froude faible, voir l'équation adimensionnalisée (1.18a), l'intégration de l'équation de conservation de la masse sur l'aire mouillée est strictement identique pour le système de Saint-Venant et pour l'équation de l'onde diffusante, voir section 1.2.3.2.

La relation de Manning-Strickler-Gauckler

On peut maintenant re-utiliser le calcul des intégrales I_8 et I_9 effectué dans la section 1.2.3.3. On obtient alors l'approximation de l'équation des moments du système de Saint-Venant (1.14) suivante :

$$gA(x, t) \frac{\partial H}{\partial x}(x, t) = -gS_f(x, t)A(x, t) \iff S_f(x, t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(x, t) \quad (1.19)$$

On rappelle que S_f est donnée par la paramétrisation de MSG (1.13).

On rappelle aussi que Q et la vitesse moyenne u sont supposés positifs, $Q > 0$. Cela implique que la pente de la surface libre est strictement négative : $\partial_x H < 0$.

En injectant la paramétrisation de MSG dans l'approximation de l'équation des moments (1.19), on obtient alors la relation algébrique entre Q , R_h et $\partial_x H$ suivante, appelée relation de Manning-Strickler-Gauckler (MSG) :

$$Q(K_s A^\gamma; x, t) = K_s |\partial_x H(x, t)|^{\frac{1}{2}} A(x, t) R_h(x, t)^{\gamma-1} = K_s \left| \frac{\partial H}{\partial x}(x, t) \right|^{\frac{1}{2}} P_m(x, t)^{\gamma-1} A(x, t)^\gamma \quad (1.20)$$

avec le coefficient $\gamma = 5/3$ selon la paramétrisation de MSG.

Historiquement, des relations empiriques entre Q , R_h et $\partial_x H$ pour des écoulements stationnaires et localement uniformes ont été développées au cours du XVIII^e et XIX^e siècles. On citera notamment la relation de Chezy et la relation de MSG, voir e.g. Chow [1964].

Ces relations empiriques ont par la suite permis de définir des paramétrisations de S_f . Celles-ci sont utilisées de manière à ce que quand l'écoulement est stationnaire et uniforme, on obtient $S_f = |\partial_x H|$ avec $\partial_x H$ qui vérifie la relation empirique établie.

La relation de MSG (1.20) obtenue ici à partir des équations de Saint-Venant sous l'hypothèse d'un écoulement stationnaire et uniforme et avec la paramétrisation de MSG correspond en effet bien à la relation de MSG telle que trouvée classiquement dans la littérature sur l'hydraulique, voir e.g. Chow [1964].

Cependant, ces relations entre Q , R_h et $\partial_x H$ pour des écoulements stationnaires et uniformes sont empiriques. Ainsi, il est possible de définir une infinité ou des familles de relations dépendant de plus ou moins de paramètres. Ces familles de relations mèneront aussi à des familles de paramétrisations de S_f et donc à des lois de friction équivalentes. On peut notamment citer Decoene et al. [2009], Michel-Dansac et al. [2021] qui obtiennent des lois de friction plus générales permettant d'être consistant avec des modèles d'écoulements en 2D ou 3D.

En supposant que la rivière est très large ($R_h \approx h$ et $P_m \approx w$) et que la section en travers est rectangulaire ($A = w(H - z_b)$), on obtient la relation de MSG suivante :

$$Q(x, t) = K_s w(x) |\partial_x H(x, t)|^{\frac{1}{2}} h(x, t)^\gamma \quad (1.21)$$

Cette relation de MSG peut se généraliser en une famille de lois empiriques appelée lois SFD (*Stage-Fall-Discharge*) :

$$Q = \alpha w^\beta |\partial_x H|^\delta (H - b_{sfd})^\gamma \quad (1.22)$$

Cette loi empirique est couramment utilisée en pratique, voir e.g. Paris et al. [2016], Mansanarez et al. [2016], Malou et al. [2021].

Le modèle à une équation

La relation algébrique $Q(H, \partial_x H)$ de MSG (1.20) est maintenant injectée dans l'équation de conservation de la masse moyennée sur l'aire mouillée (1.16a). Cela permet d'obtenir un modèle à une équation (modèle “one-equation”), dans le même principe que la théorie de la lubrification, voir e.g. Chang et Demekhin [2002].

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(K_s \left| \frac{\partial H}{\partial x} \right|^{\frac{1}{2}} P_m^{\gamma-1} A^\gamma \right) = 0 \tag{1.23} \\
& \Leftrightarrow \frac{\partial A}{\partial t} + K_s \left| \frac{\partial H}{\partial x} \right|^{\frac{1}{2}} P_m^{\gamma-1} \frac{\partial(A^\gamma)}{\partial x} + K_s P_m^{\gamma-1} A^\gamma \frac{\partial}{\partial x} \left(\left| \frac{\partial H}{\partial x} \right|^{\frac{1}{2}} \right) = 0 \\
& \Leftrightarrow \frac{\partial A}{\partial t} + \gamma K_s \left| \frac{\partial H}{\partial x} \right|^{\frac{1}{2}} P_m^{\gamma-1} A^{\gamma-1} \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{1}{2} K_s P_m^{\gamma-1} A^\gamma \left| \frac{\partial H}{\partial x} \right|^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial x} \left(\left| \frac{\partial H}{\partial x} \right| \right) = 0 \\
& \Leftrightarrow \frac{\partial A}{\partial t} + \underbrace{\gamma K_s \left| \frac{\partial H}{\partial x} \right|^{\frac{1}{2}} P_m^{\gamma-1} A^\gamma A^{-1}}_{= \frac{Q(K_s A^\gamma)}{A} = u(K_s A^\gamma)} \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{1}{2} \underbrace{K_s \left| \frac{\partial H}{\partial x} \right|^{\frac{1}{2}} P_m^{\gamma-1} A^\gamma}_{= Q(K_s A^\gamma) = u(K_s A^\gamma) A} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)^{-1} = 0
\end{aligned}$$

A noter que cela nécessite de supposer que $\partial_x P_m$ est négligeable, cela vient de l'hypothèse d'un écoulement graduellement varié, voir les détails ci-dessous.

On arrive alors à l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\partial_t A(H; x, t) + \frac{1}{2} u(K_s A^\gamma; x, t) \frac{A(H; x, t)}{\partial_x H(x, t)} \partial_{xx}^2 H(x, t) + \gamma u(K_s A^\gamma; x, t) \partial_x A(H; x, t) = 0 \tag{1.24}$$

A noter que la dérivation de cette équation nécessite de supposer que $\partial_x H$ est non-nulle.

L'équation de l'onde diffusante classique

La dernière étape consiste à injecter une bijection entre l'aire mouillée A et la hauteur de la surface libre H , ce qui permet d'obtenir une équation dont la variable d'état est H et non A . Cette bijection est définie par un a priori de forme donné à la section en travers, voir e.g. figure 1.9.

Dans les travaux présentés, la bijection $A(x, t) = g_s(\tilde{w}; x, t) (H(x, t) - z_b(x))$ est utilisée avec g_s une fonction dépendant de la géométrie de la section en travers.

Par exemple, dans le cas de sections en travers rectangulaires, on a $g_s(x) = w(x)$. Dans le cas de sections en travers trapézoïdales, on a $g_s(\tilde{w}; x, t) = 0.5(\tilde{w}(x, z = H(x, t)) - \tilde{w}(x, z = z_b(x)))$, voir e.g. les géométries utilisées en pratique dans les chapitres suivants. Du fait des données disponibles grâce aux observations satellitaires (données du futur SWOT ou combinaison des données optiques et altimétriques), on peut naturellement supposer que la section en travers peut se modéliser par une superposition de trapèzes, voir e.g. Brisset et al. [2018], Monnier et al. [2018] et figure 1.9.

Une hypothèse couramment utilisée et mentionnée précédemment est celle d'un écoulement graduellement varié, i.e. la profondeur de l'écoulement varie relativement lentement voir e.g. Chow [1964], Yen et Tsai [2001], ou que la section en travers est uniformément rectangulaire, voir e.g. Ponce et Simons [1977], Ferrick [1985]. Ces deux hypothèses impliquent que les variations spatio-temporelles de la largeur et de cette fonction géométrique sont négligeables : $\partial_x A(x, t) = g_s(\tilde{w}; x, t) (\partial_x H(x, t) - \partial_x z_b(x))$ et $\partial_t A(x, t) = g_s(\tilde{w}; x, t) \partial_t H(x, t)$.

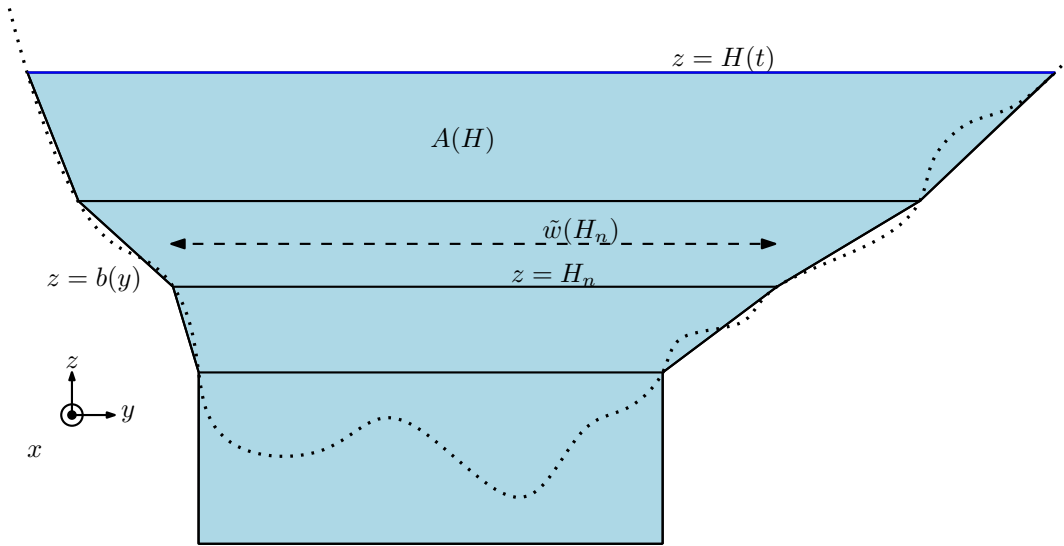


FIGURE 1.9 – Géométrie d'une section en travers constituée d'une superposition de trapèzes (à x fixé). Une bathymétrie réelle en pointillé et la bathymétrie effective associée en trait plein, en bleu clair l'aire mouillée $A(H)$.

On obtient alors l'équation de l'onde diffusante suivante :

$$\partial_t H(x, t) - \frac{1}{2} u(K_s A^\gamma; x, t) \frac{H(x, t) - z_b(x)}{|\partial_x H(x, t)|} \partial_{xx}^2 H(x, t) + \gamma u(K_s A^\gamma; x, t) \partial_x H(x, t) = \gamma u(K_s A^\gamma; x, t) \partial_x z_b(x) \quad (1.25)$$

On rappelle que $\gamma = 5/3$ selon la paramétrisation de MSG (1.13).

Cette équation correspond à celle classiquement obtenue dans la littérature, voir e.g. Yen et Tsai [2001], Thual [2010], Weill et al. [2014].

L'équation de l'onde diffusante est fermée avec la vitesse qui est donnée par la relation de MSG (1.20).

Pour que la résolution de cette équation soit un problème bien posé, il convient d'imposer une condition initiale ainsi qu'une condition en amont et en aval.

Étant donné que la variable d'état de l'équation de l'onde diffusante est H , la condition initiale $H(x, t = 0) = H_0(x) \forall x \in \Omega$ est imposée.

En pratique, la hauteur H est imposée en amont et en aval, resp. H^u et H^d . Comme mentionné précédemment, ces conditions aux bords sont un avantage par rapport au système de Saint-Venant qui nécessite d'imposer Q_{in} en amont.

Dans ces travaux de thèse, cette équation est résolue grâce à un schéma différence finie centré avec un algorithme de type Newton-Raphson qui a été implémenté dans le logiciel de calcul DassFlow-1D, voir chapitre B.

1.2.4.2 État de l'art de l'analyse mathématique de cette équation

Sous l'hypothèse d'une rivière très large et d'un écoulement graduellement varié, l'équation (1.23) peut aussi s'écrire sous la forme d'une équation de type chaleur non-linéaire :

$$\partial_t H - \partial_x \left(\underbrace{K_s \frac{(H - z_b)^\gamma}{|\partial_x H|^{1-\alpha}}}_{=a(H, \partial_x H)} \partial_x H \right) = 0 \quad (1.26)$$

avec $\gamma = \frac{5}{3}$ et $\alpha = \frac{1}{2}$.

Un terme source $f(x, t)$ est classiquement rajouté dans la littérature en supposant $f \geq 0$. Dans le cadre de ces travaux et pour être en accord avec la dérivation présentée précédemment, ce terme source est supposé nul.

Cette forme de l'équation est celle utilisée pour étudier les propriétés mathématiques de l'équation de l'onde diffusante. À noter que l'équation l'onde diffusante en 2D s'écrit aussi de manière naturelle sous cette forme. De plus, écrite dans cette forme plus générale, l'équation de l'onde diffusante permet aussi d'étudier d'autres équations non-linéaires, tel que l'équation des milieux poreux ($z_b = 0$ et $\gamma = 1$) et l'équation du p-laplacien avec $1 < p < 2$ ($\alpha = 0$ et $p = \gamma + 1$), voir e.g. [Santillana \[2008\]](#) et les références citées.

L'équation de l'onde diffusante est une équation parabolique dite "doublement non linéaire" à cause du numérateur et du dénominateur du coefficient de diffusion a qui dépendent respectivement de H et de $\partial_x H$. Les non-linéarités impliquent que cette équation est dégénérée quand $H = z_b$ et singulière quand $\partial_x H$ tend vers 0.

La nature doublement non-linéaire, dégénérée et singulière de l'équation fait de son analyse et de son étude un sujet compliqué. On peut notamment citer les travaux de J.-L. Lions (fin du XX^e siècle) sur l'étude d'équations non-linéaires dégénérées, voir e.g. [Lions \[1969\]](#), bien que ce sujet de recherche est encore d'actualité, voir e.g. [Alonso et al. \[2008\]](#), [Bögelein et al. \[2021\]](#).

Du fait de la complexité de l'équation de l'onde diffusante dans sa forme générale, avec le terme source, les études de cette équation se font essentiellement au travers de sa forme faible : $\forall \phi \in W_0^{1,1+\alpha}(\Omega)$

$$\int_{\Omega} \partial_t H \phi \, dx + \int_{\Omega} K_s \frac{(H - z_b)^\gamma}{|\partial_x H|^{1-\alpha}} \partial_x H \partial_x \phi \, dx = \int_{\Omega} f \phi \, dx \quad (1.27)$$

De plus, de nombreuses propriétés ont été démontrées uniquement dans le cas $z_b = 0$. Bien que l'existence de solutions faibles a été montré dans un cadre général ($z_b \neq 0$) très récemment, l'unicité de solution faible, par exemple, n'est démontrée que dans le cas $z_b = 0$. Pour une revue plus exhaustive des propriétés de cette équation dans le cas $z_b = 0$, le lecteur peut se référer aux travaux de thèse [Santillana \[2008\]](#).

On rappelle que l'espace de fonctions $L^p(X, Y)$, appelé espace de Lebesgue, avec $1 \leq p < +\infty$, est l'espace des fonctions dont la puissance d'exposant p est intégrable sur l'ensemble X et à valeurs dans Y :

$L^p(X, Y) = \{f \mid f(x) \in Y \, \forall x \in X \text{ et } \int_X f(x)^p dx < +\infty\}$. Le cas $p = +\infty$ correspond à l'espace des fonctions bornées sur X et à valeurs dans Y .

Cet espace de fonctions est muni de la norme $\|f\|_{L^p(X)} = (\int_X f(x)^p dx)^{1/p}$. Lorsque $p = 2$, on définit aussi le produit scalaire associé $\langle f, g \rangle_{L^2(X)} = \int_X f(x)g(x) dx$.

L'espace de Sobolev $W^{m,p}(X, Y)$ correspond à l'espace des fonctions dont toutes les dérivées jusqu'à l'ordre m sont dans $L^p(X, Y)$. De plus, l'espace $W_0^{m,p}(X, Y)$ correspond à l'espace des fonctions dans $W^{m,p}(X, Y)$ et à support compact dans X .

A noter que quand l'ensemble Y n'est pas précisé, on prend par défaut $Y = \mathbb{R}$.

Sur l'aspect dégénéré et singulier de l'équation de l'onde diffusante

Les cas de figure où l'équation dégénère ou est singulière doivent être évités pour que cette équation puisse servir de modèle d'écoulement.

L'étude numérique d'une équation approchée non-dégénérée de l'équation de l'onde diffusante en forme faible est faite dans [Santillana et Dawson \[2010\]](#). La méthode proposée par les auteurs donne de bons résultats et la solution faible approchée converge numériquement vers la solution faible exacte, permettant ainsi d'avoir une estimation de la solution faible tout en évitant le cas de figure d'une équation dégénérée.

Si l'on suppose que l'écoulement est assez près de l'écoulement uniforme, i.e. $\partial_x H$ est proche de $\partial_x z_b$, alors l'équation

ne présente pas de singularité.

Cependant, cela est compliqué à vérifier en pratique, et nécessite que la pente du lit ne change pas de signe non plus. De plus, même si cela est vérifié, la pente $\partial_x H$ peut être très petite, ce qui peut poser des problèmes pour la résolution numérique.

Cette difficulté numérique a notamment été rencontrée dans le cadre de ces travaux. Elle est aussi mentionnée dans les travaux en perspective rapidement présentés dans la section 5.1.1.

Un traitement numérique particulier est alors nécessaire. Une possibilité est d'utiliser un limiteur de flux dans les schémas aux volumes finis, voir [Weill et al. \[2014\]](#), ou bien de seuiliser $\partial_x H$ lorsque celle-ci devient trop petite, voir chapitre B.

De plus, pour que cette équation serve de modèle d'écoulement viable, il est nécessaire d'obtenir la positivité de la profondeur de l'eau : $h = H - z_b \geq 0$. La résolution de l'équation de l'onde diffusante peut alors être posée comme un problème d'obstacle pour lequel la hauteur de la surface libre doit être supérieure à la bathymétrie de la rivière : $H \geq z_b$, et cela indépendamment du signe de f .

Cependant, le cas $f < 0$ peut poser des problèmes de positivité de h et comme mentionné précédemment, il est souvent supposé $f \geq 0$. Des résultats sur cette propriété issus de la littérature sont présentés plus loin dans cette section.

La stricte positivité de la solution dans un cadre général et pratique, permettant d'obtenir une condition assurant que la solution est physique et que l'équation ne dégénère pas, n'est cependant pas démontrée. Un tel résultat serait probablement complexe à obtenir étant donné les effets conjugués de la bathymétrie et des conditions aux bords.

Sur l'existence de solutions faibles

En mettant en œuvre des techniques déjà utilisées pour d'autres équations paraboliques doublement non linéaires, [Alonso et al. \[2008\]](#) propose une démonstration de l'existence et de l'unicité de la solution faible dans le cas $z_b = 0$ pour l'équation de l'onde diffusante avec des conditions aux bords de Dirichlet nulles et $K_s = 1$ (pour simplifier les calculs).

Supposons $f \in L^\beta(\Omega \times [0; T]; \mathbb{R}^+)$ avec $\beta > \frac{n+\alpha+1}{\alpha}$, $z_b \in W^{1,\sigma}(\Omega)$ avec $\sigma > (n + \alpha + 1)(1 + \frac{\gamma}{\alpha})$ et n la dimension du domaine Ω (et pas nécessairement $z_b = 0$) et $H_0 - z_b \in L^{+\infty}(\Omega; \mathbb{R}^+)$. Sous ces hypothèses, [Bögelein et al. \[2021\]](#) démontre l'existence (mais pas l'unicité) de la solution faible de l'équation de l'onde diffusante avec des conditions aux bords de Dirichlet nulles $H = z_b$.

Les deux démonstrations sont basées à peu près sur les mêmes types d'ingrédients :

- On construit un problème approché, soit par une méthode de type Galerkin [[Alonso et al., 2008](#)], soit en prenant un problème régularisé [[Bögelein et al., 2021](#)].
- Des estimations a priori sont calculées pour la solution faible approchée (i.e. solution faible du problème approché) et son gradient.
- Des arguments de compacité et de monotonie sont utilisés pour démontrer la convergence de la solution faible du problème approché vers la solution faible du problème de base, voir e.g. [Lions \[1969\]](#).

Sur l'unicité de la solution faible

Comme mentionné précédemment et à ma connaissance, l'unicité de la solution faible de l'équation de l'onde diffusante n'est démontrée que dans le cas $z_b = 0$.

En se basant sur les travaux de [Bamberger \[1977\]](#) et dans ce cas, [Alonso et al. \[2008\]](#) démontrent que si la solution faible est suffisamment régulière, notamment continue et dérivable en temps et à minima $H \in C^1([0; T], L^1(\Omega))$,

alors la solution faible est unique.

Dans cet article, les auteurs donnent des pistes pour la démonstration de l'existence, de l'unicité et de la régularité de la solution faible dans le cas $z_b \neq 0$. Au sujet de l'unicité, ils émettent l'hypothèse que des conditions supplémentaires, voir [Alonso et al. \[2008\]](#) et les références citées, permettraient d'identifier l'unique solution ayant un sens physique.

Autres propriétés des solutions faibles

La positivité de la solution faible, qui est une propriété importante pour assurer que la solution est physique, a aussi été démontrée dans le cas $z_b = 0$ sous les mêmes conditions que l'unicité de la solution faible. La démonstration de l'unicité de la solution faible présentée dans [Alonso et al. \[2008\]](#) permet aussi de montrer que si $f \geq 0$ et $H_0 \geq 0$ alors la solution faible est positive.

D'autres propriétés démontrées dans le cas $z_b = 0$ sont mentionnées dans [Alonso et al. \[2008\]](#). On citera notamment [Bamberger \[1977\]](#) qui a démontré la propriété d'extinction : si $f = 0$ et les conditions aux bords de Dirichlet sont nulles, alors les solutions positives deviennent nulles en temps fini. Bien qu'intéressant d'un point de vue analyse car elle illustre notamment que la masse n'est pas conservée, les conditions aux bords considérées traduisent une situation irréalisable d'un point de vue hydraulique.

1.3 Problèmes inverses et assimilation de données

Cette section vise à présenter les problèmes inverses abordés dans ces travaux de thèse.

Dans un premier temps, une définition de problèmes inverses pour la modélisation physique est donnée puis déclinée pour les problèmes d'assimilation de données. Puis, l'approche variationnelle de l'assimilation de donnée, appelée VDA dans les autres chapitres, qui est utilisée dans ces travaux, est présentée plus en détail.

Ensuite, l'approche stochastique est rapidement abordée. Bien que cette dernière ne soit pas utilisée dans ces travaux, cela permet de comprendre le choix de l'approche variationnelle et les liens qu'il peut y avoir entre celles-ci. Les problématiques de la covariance de l'erreur d'ébauche, point crucial de l'assimilation de données aussi bien pour l'approche variationnelle que stochastique, sont aussi présentées dans cette section.

Par ailleurs, une méthode d'identification parcimonieuse de termes de dynamique d'un modèle au sein d'un dictionnaire et à partir de données, qui s'apparente à un problème inverse, est introduit à la fin de cette section.

1.3.1 Des problèmes inverses et de l'assimilation de données

Problèmes directs et problèmes inverses

De manière générale, un problème est dit l'inverse d'un autre problème lorsque les paramètres ou conditions nécessaires à la résolution du problème sont au moins partiellement la solution de cet autre problème, et inversement. Il peut être alors souligné que le choix de quel problème est direct et quel problème es inverse peut être assez arbitraire.

La modélisation d'un système physique peut se formaliser par le problème suivant : connaissant les équations de la physique modélisant ce système, les paramètres du modèle ainsi que des conditions initiales et aux bords, trouver les variables d'état qui vérifient ces équations. Ce modèle et ce problème sont donc naturellement le modèle et le problème directs.

Cependant, en pratique, une difficulté majeure rentre en jeu : certains paramètres (dans un sens large, paramètres du modèle ou conditions) nécessaires pour résoudre le problème direct ne sont pas mesurés avec une précision et/ou

une densité spatio-temporelle suffisantes, impliquant une prédiction des variables d'état peu ou pas assez précise. D'un autre côté, les techniques de mesures permettent souvent de mesurer plus facilement une grandeur calculable à partir des variables d'état du système.

De ce fait, dans le contexte des systèmes physiques et de leurs observations, on définit ainsi les problèmes inverses : connaissant des observations d'une grandeur calculable à partir des variables d'état du modèle direct ainsi que certains paramètres du modèle direct, trouver les paramètres méconnus qui permettent au modèle direct de reproduire les états observés.

En mécanique des fluides, les modèles d'écoulements visent généralement à prédire la masse ainsi que le moment du fluide.

Dans le cas des équations de Saint-Venant 1D (1.16), cela se traduit par la prédiction des variables d'état (A, Q) . Cependant, dans le cas d'observations spatiales, la bathymétrie et le coefficient de Strickler sont difficilement mesurables tandis que la hauteur de la surface libre H est facilement observable grâce à l'altimétrie et peut aisément être calculée à partir de A .

La bathymétrie z_b et le coefficient de Strickler K_s seront donc nos paramètres méconnus du problème direct que l'on cherche à obtenir grâce à un problème inverse.

L'idée de trouver les causes d'un phénomène en observant les conséquences a de tous temps occupée les scientifiques dans différents domaines. Bien que de nombreux scientifiques se sont intéressés à des problèmes inverses spécifiques, les travaux de F. Gauss et de A.-M. Legendre au début du XIX^e siècle ont posé la base de la méthode des moindres carrés et de beaucoup de problèmes inverses étudiés de nos jours.

Le lecteur peut se référer à [Tarantola \[2005\]](#) ou encore [Kirsch \[2011\]](#) pour plus de détails sur la théorie mathématique des problèmes inverses et des exemples issus de différents domaines de la science.

Problèmes bien/mal posés au sens de Hadamard

La principale difficulté d'un problème inverse est souvent le caractère mal posé de ce dernier.

On dit d'un problème qu'il est bien posé au sens de Hadamard, introduit par J. Hadamard dans les années 1920, si la solution du problème existe, est unique et est stable.

A l'inverse, un problème est mal posé si une de ces trois conditions n'est pas vérifiée. Le lecteur peut se référer à [Kirsch \[2011\]](#) pour plus de détails et des exemples.

L'existence peut ne pas être vérifiée si, par exemple, on cherche le paramètre qui permet au système d'atteindre exactement les observations alors que celles-ci sont bruitées et plus nombreuses que le nombre de degrés de liberté du paramètre.

Pour palier cette difficulté, l'approche la plus courante est alors de considérer le problème inverse comme un problème de minimisation, qui vise à trouver le paramètre qui permet au modèle direct d'être au plus proche, dans un sens à définir, des états observés.

Lorsque les informations contenues dans les observations ne permettent pas de retrouver de manière univoque le paramètre recherché, il peut y avoir une infinité de solutions au problème inverse et l'unicité n'est alors pas garantie. C'est notamment le cas lorsque le nombre d'observations est inférieur au nombre de degrés de liberté du paramètre du fait du caractère épars des observations. On citera aussi le cas où l'échantillonnage spatial des observations ne permet pas de déduire le paramètre de manière univoque entre les points d'observations.

Pour pouvoir cibler une solution, que l'on espère suffisamment proche de la vraie valeur du paramètre, il faut régulariser le problème inverse en rajoutant de l'information a priori permettant d'anticiper certaines propriétés de la solution ou de cibler des propriétés souhaitées, voir e.g. [Tarantola \[2005\]](#), [Kaltenbacher et al. \[2008\]](#).

La stabilité de la solution permet d'assurer que celle-ci varie de manière raisonnable lorsque les données varient légèrement. À l'inverse, le problème est instable, ou mal conditionné, lorsque des petites variations dans les données impliquent des variations disproportionnées dans la solution du problème inverse.

Le mauvais conditionnement est notamment observée lors de l'inférence de z_b et/ou de K_s dans les équations de Saint-Venant (1.16) : des petites variations dans les observations de la hauteur d'eau peuvent conduire à des variations significatives dans l'estimation de z_b et de K_s du fait de la nature de l'écoulement, voir section 4.C.

L'assimilation de données

Le but de l'assimilation de données est de minimiser l'écart, dans un sens à définir, entre une prédiction donnée par un modèle mathématique d'écoulement et les observations contenant l'information physique dans le but de corriger la valeur a priori d'un paramètre et d'ajuster le modèle d'écoulement aux données. Le lecteur peut se référer aux livres [Bennett \[2005\]](#), [Asch et al. \[2016\]](#), aux résumés [Blum et al. \[2009\]](#), [Carrassi et al. \[2018\]](#) ainsi qu'aux cours [Bouttier et Courtier \[2002\]](#), [Bocquet \[2014\]](#), [Monnier \[2018\]](#).

Ce paramètre que l'on cherche à corriger est appelé le contrôle et noté k . Initialement, seule une ébauche de ce contrôle, notée k^b , est donnée (avec plus ou moins de précision) et la correction de l'ébauche permet d'obtenir une analyse, notée k^a , que l'on espère être proche de la vraie valeur du contrôle, notée k^t . Remarquons que, du fait des erreurs de modélisation notamment, l'analyse k^a peut être assez éloignée de la vraie valeur k^t .

Dans ces travaux de thèse, La résolution du modèle d'écoulement permet de calculer une prédiction de la hauteur d'eau et définit l'opérateur d'observation $k \mapsto H(k)$, que l'on notera aussi H par abus de notation.

Lorsqu'il y a plusieurs variables de contrôle, comme z_b et K_s , k est un vecteur de contrôle, bien qu'appelé contrôle par abus de notation. Le problème est alors dit multi-varié. Dans la suite de ce chapitre, par soucis de simplification, on supposera que le problème est univarié, i.e. on considère une seule variable de contrôle. Cependant, la présentation de l'assimilation de données faite ici peut être étendue pour un problème multi-varié.

Deux approches de ce problème d'assimilation de données, à la fois différentes et complémentaires, existent.

L'approche stochastique se base sur l'estimation statistique optimale, et notamment sur les techniques de filtrage et de lissage, voir e.g. [Jazwinski \[1970\]](#). La technique de filtrage consiste à utiliser uniquement les données passées et présentes de manière séquentielle pour améliorer l'état du système futur. D'un autre côté, la technique de lissage vise à prendre en compte l'ensemble des données disponibles sur une période de temps pour corriger l'état du système sur toute la période de temps.

Le filtre utilisé en assimilation de données s'appelle le filtre de Kalman introduit dans [Kalman \[1960\]](#). Celui-ci a été développé dans les années 1960 pour améliorer le calcul des trajectoires de la mission Apollo.

Il a par la suite été introduit pour des problèmes d'assimilation de données en météorologie dans les années 1980, voir [Ghil et al., 1980](#).

La deuxième approche, celle utilisée dans ces travaux, est une approche dite variationnelle.

Celle-ci se base sur le calcul variationnel et la minimisation d'une fonctionnelle introduits au XVIII^e siècle par L. Euler et J.-L. Lagrange. Ces méthodes variationnelles ont été appliquées pour la première fois à la météorologie dans les années 1950 par [Sasaki \[1958\]](#).

A la fin des années 1950 et au début des années 1960, la théorie du contrôle optimal a pris son essor dans le cadre d'équations différentielles ordinaires, notamment sous l'impulsion de L. S. Pontryagin (voir [Pontryagin et al. \[1974\]](#)) et de R. Bellman (voir [Bellman \[1957\]](#)). Dans la fin des années 1960, cette théorie a été généralisée par J.-L. Lions pour les équations aux dérivées partielles (EDP), voir e.g. [Lions \[1971\]](#). Cette théorie vise à analyser un système dynamique que l'on peut contrôler, i.e. amener le système d'un état initial à un état final, en agissant sur un contrôle. Les avancées dans le domaine de l'optimisation et du contrôle optimal dans les années 1970 ont permis l'application de ces méthodes variationnelles à l'assimilation de données dans un cadre de travail rigoureux dans les années 1980, voir e.g. [Hall et Cacuci \[1983\]](#), [Le Dimet et Talagrand \[1986\]](#), [Courtier et Talagrand \[1990\]](#), [Marchuk et Zalesny \[1993\]](#).

Du fait de son histoire, une majorité des avancées et des techniques d'assimilation de données, que ce soient l'approche stochastique ou variationnelle, ont été développées pour les besoins de la prédiction météorologique. Un des grands enjeux de cette prédiction est la connaissance de la condition initiale du système. En effet, le caractère chaotique de l'écoulement de l'atmosphère implique qu'une petite différence dans la condition initiale mène à des prédictions très différentes, voir e.g. [Carrassi et al. \[2018\]](#).

Pour cela, les méthodes intermittentes (i.e. les observations sont assimilées par lots) sont utilisées, voir e.g. [Bouttier et Courtier \[2002\]](#). Ces méthodes sont soit séquentielles comme les méthodes de filtrage, voir e.g. [Carrassi et al. \[2018\]](#), soit basées sur une assimilation cyclique comme l'algorithme 4D-Var, voir e.g. une revue dans [Mirouze \[2010\]](#). Ces méthodes permettent à la nouvelle prédiction obtenue après l'analyse de servir de conditions initiales pour le cycle suivant. De plus, elles permettent une utilisation opérationnelle.

A contrario, les méthodes d'assimilation continues consistent à assimiler les données sur toute la période de temps, voir e.g. [Bouttier et Courtier \[2002\]](#). Celles-ci sont aussi utilisées pour permettre d'analyser l'état du système, y compris passé, en assimilant l'ensemble des données, cette assimilation est appelée réanalyse. Cela permet d'obtenir une trajectoire du modèle qui est optimale sur l'ensemble de la fenêtre temporelle considérée.

Comme mentionné précédemment, les contrôles considérés dans ces travaux de thèse sont z_b ainsi que K_s . Il convient de noter que ces contrôles ne dépendent pas du temps et sont statiques. Ainsi, les valeurs du contrôle optimal intermédiaires dans le temps ont peu d'intérêt et les méthodes d'optimisation continues sur toute la période de temps sont plus adaptées à notre problème et permettent d'obtenir un modèle d'écoulement calibré.

1.3.2 Assimilation de données : méthode variationnelle

Problème d'optimisation pour l'assimilation variationnelle

L'approche variationnelle de l'assimilation de données consiste à traiter le problème d'assimilation de données comme étant le problème d'optimisation suivant, voir e.g. [Bouttier et Courtier \[2002\]](#) :

$$\begin{cases} \text{trouver } k^a(x) \text{ tel que :} \\ k^a(x) = \arg \min_{k(x) \in \mathcal{K}_{ad}} j(k) \end{cases} \quad (1.28)$$

La fonction de coût j permet de définir dans quel sens l'écart entre la prédiction et l'observation est minimisé par rapport au contrôle k .

Le contrôle et ses différentes valeurs appartiennent à un espace de fonctions appelé l'espace des contrôles et noté \mathcal{K} , correspondant à l'espace donnant à k la régularité nécessaire pour résoudre le modèle direct. L'espace dans lequel on cherche k^a est l'ensemble des contrôles admissibles \mathcal{K}_{ad} , sous-ensemble de \mathcal{K} ($\mathcal{K}_{ad} \subset \mathcal{K}$). On suppose que l'espace de fonctions \mathcal{K} est un espace de Hilbert, bien qu'un espace de Banach peut être suffisant, voir [Lions \[1971\]](#).

En assimilation de données mais aussi en problème inverse de manière générale, voir e.g. [Tarantola \[2005\]](#), la fonction coût est séparée en deux parties de la manière suivante :

$$j(k) = j_{obs}(k) + \alpha_{reg} j_{reg}(k) \quad (1.29)$$

Le premier terme j_{obs} est le terme d'écart entre la prédiction et l'observation, voir e.g. les publications historiques [Sasaki \[1958\]](#), [Le Dimet et Talagrand \[1986\]](#) et les cours [Bouttier et Courtier \[2002\]](#), [Monnier \[2018\]](#). Celui-ci est classiquement défini comme étant :

$$j_{obs}(k) = \|H(k) - H^{obs}\|_{\mathbf{R}^{-1}}^2 = \langle H(k) - H^{obs}, \mathbf{R}^{-1}(H(k) - H^{obs}) \rangle_{L^2(\Omega^{obs} \times [0;T])} \quad (1.30)$$

avec \mathbf{R} l'opérateur de covariance de l'erreur d'observation ε_{obs} , i.e. l'erreur entre les observations et la prédiction calculée avec la vraie valeur du contrôle : $\varepsilon_{obs} = H^{obs} - H(k^t)$.

Comme mentionné précédemment, la minimisation de ce terme d'observation uniquement n'est pas un problème bien posé. Étant donné le caractère épars des observations par rapport au nombre de degrés de liberté du contrôle (typiquement un par nœud du maillage numérique), cette minimisation du terme d'observation est sous-déterminée. De ce fait, un terme de régularisation, pondéré par un coefficient de poids α_{reg} , est couramment ajouté à j_{obs} . Le terme de régularisation le plus connu est la régularisation de Tikhonov, voir e.g. [Kaltenbacher et al. \[2008\]](#). Le terme de régularisation le plus couramment utilisé en assimilation de données est le suivant :

$$j_{reg}(k) = \|k - k^b\|_{\mathbf{C}^{-1}}^2 = \langle k - k^b, \mathbf{C}^{-1}(k - k^b) \rangle_{L^2(\Omega)} \quad (1.31)$$

avec \mathbf{C} l'opérateur de covariance de l'erreur d'ébauche ε_b , i.e. l'erreur entre la valeur d'ébauche et la vraie valeur du contrôle : $\varepsilon_b = k^b - k^t$.

En supposant que l'opérateur \mathbf{C} peut se décomposer en $\mathbf{C} = \mathbf{D}\mathbf{D}^*$ et donc que $\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{D}^{*-1}\mathbf{D}^{-1} = \mathbf{D}^{-1*}\mathbf{D}^{-1}$, on obtient $\langle k - k^b, \mathbf{C}^{-1}(k - k^b) \rangle_{L^2(\Omega)} = \langle \mathbf{D}^{-1}(k - k^b), \mathbf{D}^{-1}(k - k^b) \rangle_{L^2(\Omega)}$.

Le changement de variable suivant peut être introduit à partir de ce terme de régularisation, voir e.g. [Parrish et Derber \[1992\]](#) :

$$\tilde{k}(x) = \mathbf{D}^{-1}(k(x) - k^b(x)) \Leftrightarrow k(x) = \mathbf{D}\tilde{k}(x) + k^b(x) \quad (1.32)$$

Ce changement de variable a l'avantage de se comporter comme une régularisation implicite menant à un préconditionnement de la matrice hessienne de la fonction coût, voir [Haben et al. \[2011\]](#) et section 1.3.4.

On notera par la suite \tilde{j} la fonction coût tel que $\tilde{j}(\tilde{k}) = j(k = \mathbf{D}\tilde{k} + k^b)$. Dans la suite, la notation j est utilisée pour désigner la fonction coût, bien que la fonction minimisée en pratique est \tilde{j} .

Étant donné que la matrice associée à l'opérateur de corrélation de l'erreur d'ébauche (aussi notée \mathbf{C} par abus de notation) est symétrique, semi-définie et positive (voir ci-dessous), l'existence de décompositions $\mathbf{C} = \mathbf{D}\mathbf{D}^*$ est assurée mais ces décompositions ne sont pas uniques. En pratique, la décomposition de Cholesky est utilisée, i.e. $\mathbf{D} = \mathbf{L}$ avec \mathbf{L} une matrice triangulaire inférieure.

Dans le contexte de ces travaux, l'inférence de z_b avec le terme (1.31) ne donne pas de très bons résultats. Cela vient notamment du fait que z_b n'est initialement pas bien connue impliquant que l'ébauche z_b^0 se résume souvent à une bathymétrie avec une pente constante moyenne. Étant donné que l'écoulement a tendance à se comporter comme un filtre passe-bas¹¹, la bathymétrie optimale obtenue a beaucoup d'oscillations en espace, voir plus de détails dans la section complémentaire 4.C.

Pour éviter ce comportement indésirable, en plus du changement de variable (1.32) déjà introduit, le terme de

11. Cette insensibilité par rapport aux hautes fréquences de la bathymétrie a déjà été soulignée pour d'autres écoulements géophysiques modélisés par le modèle de Stokes, notamment dans [Gudmundsson et Raymond \[2008\]](#), [Martin et Monnier \[2014\]](#).

régularisation suivant est utilisé en pratique à la place du terme (1.31) :

$$j_{reg}(k) = \|\partial_x k\|_{L^2(\Omega)}^2 = \|\partial_x (\mathbf{D}\tilde{k} + k^b)\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad (1.33)$$

A noter que les termes (1.30) et (1.31) introduisent les opérateurs de covariance \mathbf{C} et \mathbf{R} .

Ces opérateurs traduisent la précision, au moins supposée, de respectivement la valeur d'ébauche et des données. Ceux-ci ressortent naturellement de l'approche stochastique, voir e.g. [Bouttier et Courtier \[2002\]](#). Étant donné que ces opérateurs définissent des produits scalaires et par nature de la covariance, ils sont à minima symétriques et semi-définis positifs. Cependant, il est couramment supposé que ces opérateurs sont strictement définis positifs, cela permet notamment qu'ils soient inversibles.

La précision des résultats de l'optimisation de la fonction coût dépend significativement de l'estimation de ces opérateurs de covariance, voir e.g. [Bannister \[2008a,b\]](#), [Stewart et al. \[2013\]](#). Ainsi, ils constituent un sujet de recherche important et encore d'actualité, ils sont notamment le sujet de la publication présentée dans le chapitre 4. La section 1.3.4 introduit rapidement les opérateurs de covariance et surtout l'opérateur de covariance de l'erreur d'ébauche.

Sur l'existence et l'unicité de solution du problème d'optimisation

Bien qu'un terme de régularisation est ajouté pour espérer avoir un problème d'optimisation bien posé, l'existence et l'unicité de la solution sont rarement garanties.

Supposons que le système d'équations régissant le modèle direct est linéaire et coercive. On considère la fonction coût définie par l'expression (1.29) avec les termes (1.30) et (1.31), i.e. la fonction coût est linéaire quadratique, et \mathcal{K}_{ad} est un ensemble convexe fermé. Alors, la fonction coût est strictement convexe et le problème de minimisation (1.28) admet un unique minimiseur. La démonstration, classique en théorie du contrôle optimal, peut être trouvée e.g. dans [Lions \[1971\]](#).

En pratique, le système d'équations régissant le modèle direct n'est évidemment pas linéaire, voir par exemple les équations de Saint-Venant (1.16) ou l'équation de l'onde diffusante (1.25).

Dans ce cas de figure, l'existence et l'unicité du minimiseur ne sont pas garanties. Bien que l'on suppose l'existence de minimiseurs sans le démontrer, la fonction coût n'est très probablement pas convexe et il peut y avoir plusieurs minima locaux, voir e.g. [Bocquet \[2014\]](#), [Monnier \[2018\]](#). Le terme de régularisation permet de "convexifier" la fonction coût. Cependant, il est compliqué de savoir à partir de quel moment le terme de régularisation a "assez convexifié", i.e. la fonction coût est convexe dans un voisinage du minimum global qui contient k^b , et même si le minimum global est proche de k^t , ce qui dépend de la pertinence du terme de régularisation.

De plus, du fait de la nature des écoulements considérés dans les présents travaux et de leur sensibilité aux contrôles, la fonction coût a tendance à être relativement plate et à varier peu quand le contrôle est significativement perturbé. Cela implique que la hessienne de j est mal conditionnée impliquant le mauvais conditionnement et donc le caractère mal posé du problème d'optimisation.

Sur la différentielle de la fonction coût

Les algorithmes d'optimisation globale n'étant pas abordables pour ce genre de problème, les algorithmes de descente de gradient sont très largement utilisés pour résoudre ce type de problème d'optimisation. Ces algorithmes sont basés sur la condition d'optimalité du premier ordre pour une fonction coût différentiable :

$$j'(k^*) \cdot \delta k = 0 \quad \forall \delta k \in \mathcal{K} \quad (1.34)$$

Rappelons qu'en l'absence de la convexité de la fonction coût, cette condition est nécessaire mais pas suffisante pour trouver le minimum global.

L'utilisation de ces algorithmes requiert que la fonction coût soit différentiable et que le gradient de la fonction coût soit calculable. Une manière de démontrer la différentiabilité de la fonction coût est d'utiliser le théorème de la fonction implicite, voir e.g. [Monnier \[2018\]](#). Cependant, dans le cas d'un système d'équations non-linéaires, l'application de ce théorème nécessite l'étude du problème linéarisé associé au problème direct, ce qui peut être non-trivial. Dans le cas présent, on suppose que j est différentiable.

L'algorithme d'optimisation utilisé ici est l'algorithme L-BFGS-B, algorithme du premier ordre de type quasi-Newton, voir [Gilbert et Lemaréchal \[1989\]](#).

En supposant que la fonction coût est différentiable, le calcul de la différentielle, ou du gradient en dimension finie, peut s'avérer très couteux en pratique. En effet, cela peut nécessiter de résoudre un grand nombre de fois le modèle direct ou le modèle linéaire tangent, ce qui peut être couteux en temps de calcul, voire impossible.

Il existe deux solutions majoritairement utilisées pour outrepasser cette contrainte.

La première méthode est de calculer la différentielle de la fonction coût grâce à l'état adjoint. Cet état adjoint est une fonction test particulière de l'espace des états permettant de simplifier le calcul de la différentielle et qui ne nécessite que la résolution d'une équation linéaire en plus, voir [Lions \[1971\]](#) et dans le cadre de l'assimilation de données e.g. [Monnier \[2018\]](#).

Une autre solution numérique est d'utiliser un outil de différentiation automatique. Cet outil va calculer le gradient discret de la fonction coût en utilisant la dérivation des fonctions composées. Dans ces travaux de thèse, le gradient de la fonction coût est calculé par différentiation automatique en utilisant le programme Tapenade, voir la documentation dans [Hascoet et Pascual \[2013\]](#) pour plus de détails sur la différentiation automatique et Tapenade. Dans ces travaux de thèse et dans le code [DassFlow-1D](#), la différentiation automatique est utilisée grâce à Tapenade.

1.3.3 Assimilation de données : méthodes stochastiques et filtrage

On présente maintenant l'approche stochastique et filtrage de l'assimilation de données. Cette approche n'est pas utilisée dans les travaux. Cependant, il convient de la présenter pour ensuite discuter des avantages et inconvénients de celle-ci et de recontextualiser notre choix de l'approche variationnelle. De plus, cette approche permet de mettre naturellement en avant les opérateurs de covariance qui définissent les normes dans les termes (1.30) et (1.31) de la fonction coût (1.29) et donc le sens de la minimisation du problème variationnel (1.28).

Probabilité conditionnelle des erreurs et estimateur BLUE

Cette approche se base sur les probabilités conditionnelles des erreurs d'ébauche et d'observation.

En effet, l'analyse k^a recherchée correspond à un estimateur de la densité de probabilité de l'analyse :

$P^a(k) = P(k = k^t | H(k) = H^{obs})$. Par le théorème de Bayes, on obtient la relation de proportionnalité suivante :

$$P^a(k) \propto P(k = k^t) P(H(k) = H^{obs} | k = k^t).$$

On suppose par la suite que les erreurs d'ébauche et d'observation sont indépendantes.

La probabilité $P(k = k^t)$ correspond à la probabilité que k est égal a priori (i.e. avant d'obtenir de l'information des observations) à la vraie valeur k^t . Ainsi, cette probabilité correspond à la densité de probabilité de l'ébauche k^b , i.e. l'information connue a priori sur le contrôle : $P(k = k^t) = P^b(k = k^b)$.

La probabilité conditionnelle $P(H(k) = H^{obs} | k = k^t)$ correspond à la probabilité de prédire les observations connaissant la vraie valeur du contrôle et donc connaissant le vrai état du système. L'aléa étant porté par les observations, cette probabilité conditionnelle correspond à la densité de probabilité des observations : $P(H(k) = H^{obs} | k = k^t) =$

$P^{obs} (H(k) - H^{obs})$.

Ainsi, on obtient la densité de probabilité de l'analyse qui satisfait $P^a(k) \propto P^b(k - k^b) P^{obs}(H(k) - H^{obs})$.

Le lecteur peut se référer à [Lorenc \[1986\]](#) pour plus de détail sur les statistiques des erreurs et sur ces probabilités conditionnelles.

Bien que la moyenne ou la médiane peuvent être utilisées comme estimateur, voir e.g. dans [Mirouze \[2010\]](#) et les références citées, l'estimateur optimal considéré dans ce contexte est l'estimateur du maximum de log-vraisemblance, ce qui est équivalent à résoudre le problème variationnel suivant :

$$\begin{cases} \text{trouver } k^a \text{ tel que :} \\ k^a = \arg \min_{k \in \mathcal{K}_{ad}} l(k) \end{cases} \quad (1.35)$$

avec, dans cette section, l la fonction de log-vraisemblance $l(k) = -\ln(P^a(k))$. On rappelle que, étant donné la monotonie de la fonction logarithmique, le maximum de log-vraisemblance est égal au maximum de vraisemblance $\arg \max_{k \in \mathcal{K}_{ad}} P^a(k)$.

Lorsque les densités de probabilité de l'ébauche et des observations sont supposées gaussiennes, voir e.g. [Lorenc \[1986\]](#), [Mirouze \[2010\]](#) :

$$P^b(k - k^b) \propto \exp[-0.5 \langle k - k^b, \mathbf{C}^{-1}(k - k^b) \rangle_{L^2(\Omega)}]$$

et

$$P^{obs}(H(k) - H^{obs}) \propto \exp[-0.5 \langle H(k) - H^{obs}, \mathbf{R}^{-1}(H(k) - H^{obs}) \rangle_{L^2(\Omega^{obs} \times [0;T])}]$$

alors la densité de probabilité de l'analyse devient :

$$P^a(k|H^{obs}) \propto \exp[-0.5 \langle k - k^b, \mathbf{C}^{-1}(k - k^b) \rangle_{L^2(\Omega)} - 0.5 \langle H(k) - H^{obs}, \mathbf{R}^{-1}(H(k) - H^{obs}) \rangle_{L^2(\Omega^{obs} \times [0;T])}]$$

et la fonction de log-vraisemblance devient :

$$l(k) = \langle k - k^b, \mathbf{C}^{-1}(k - k^b) \rangle_{L^2(\Omega)} + \langle H(k) - H^{obs}, \mathbf{R}^{-1}(H(k) - H^{obs}) \rangle_{L^2(\Omega^{obs} \times [0;T])} \quad (1.36)$$

Ainsi, dans le cas où les densités de probabilité sont supposées gaussiennes, cet estimateur de l'analyse est identique à la solution du problème variationnel (1.28) avec la fonction coût (1.29) définie par les termes (1.30) et (1.31).

Dans la présente section, on suppose que les variations de l'opérateur d'observation sont linéaires dans le voisinage de la valeur d'ébauche du contrôle. Ainsi, l'opérateur linéaire tangent d'observation \mathbf{H} satisfait

$$H(k + \delta k) = H(k) + \mathbf{H}\delta k + O(\|\delta k\|^2) \approx H(k) + \mathbf{H}\delta k \quad (1.37)$$

Dans le cas d'un opérateur d'observation linéaire, cette approximation est exacte et l'opérateur linéaire tangent est identique à l'opérateur d'observation. Sous cette hypothèse, le gradient de la fonction de log-vraisemblance vaut :

$$\nabla l(k) = 2\mathbf{C}^{-1}(k - k^b) + 2\mathbf{H}^*\mathbf{R}^{-1}(H(k) - H^{obs}) \quad (1.38)$$

La condition d'optimalité du premier ordre devient alors :

$$\nabla l(k^a) = 0 \iff k^a = k^b + (\mathbf{C}^{-1} + \mathbf{H}^* \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^* \mathbf{R}^{-1} (H^{obs} - H(k^b)) \quad (1.39)$$

Ainsi, l'analyse BLUE (*Best Linear Unbiased Estimator*) est obtenue grâce à l'expression suivante :

$$k^a = k^b + \mathbf{G} (H^{obs} - H(k^b)) \quad (1.40)$$

avec l'opérateur de gain :

$$\mathbf{G} = \mathbf{C} \mathbf{H}^* (\mathbf{H} \mathbf{C} \mathbf{H}^* + \mathbf{R})^{-1} \quad (1.41)$$

Cette analyse BLUE peut être vue comme le résultat de l'interpolation de l'erreur d'analyse : $\varepsilon_a = k^a - k^t = (I - \mathbf{G} \mathbf{H}) \varepsilon_b + \mathbf{G} \varepsilon_{obs}$. De cette manière, on peut aussi calculer l'opérateur de covariance de l'erreur d'analyse \mathbf{A} qui vaut : $\mathbf{A} = (I - \mathbf{G} \mathbf{H}) \mathbf{C} (I - \mathbf{G} \mathbf{H})^* + \mathbf{G} \mathbf{R} \mathbf{G}^*$.

Le lecteur peut se référer à [Bouttier et Courtier \[2002\]](#), [Bocquet \[2014\]](#) pour plus de détails de calcul.

Filtre de Kalman et variantes

Le filtre de Kalman consiste à assimiler de manière séquentielle les données dans l'ordre chronologique en alternant une phase de prédiction et une phase d'analyse en utilisant l'analyse BLUE (1.40), voir e.g. [Bouttier et Courtier \[2002\]](#), [Carrassi et al. \[2018\]](#). De plus, la prédiction issue de la propagation de l'analyse, quand le contrôle est dynamique, sert d'ébauche pour le cycle suivant. La covariance de l'analyse ainsi que la covariance de l'erreur du modèle permettent aussi de calculer la covariance de la prédiction et donc la covariance de l'erreur d'ébauche pour le cycle suivant.

Étant donné les hypothèses utilisées pour dériver l'analyse BLUE, le filtre de Kalman est exact dans le cas d'erreurs gaussiennes et pour un opérateur d'observation linéaire.

L'algorithme du filtre de Kalman présenté est couramment généralisé pour les équations et opérateurs d'observation non-linéaires, celui-ci est alors appelé filtre de Kalman étendu, voir e.g. [Bouttier et Courtier \[2002\]](#). Cependant, ce filtre n'est évidemment plus optimal et exact.

Une autre variante du filtre de Kalman est le filtre de Kalman d'ensemble, voir [Evensen \[1994\]](#). Cette méthode consiste à générer un ensemble de prédictions à la manière de la méthode de Monte-Carlo et d'appliquer le filtre de Kalman étendu à cet ensemble, voir des revues e.g. dans [Bocquet \[2014\]](#), [Carrassi et al. \[2018\]](#). Cet ensemble de prédiction est généré en perturbant les paramètres du modèle, dont la valeur d'ébauche du contrôle, avec une perturbation qui suit la distribution de l'erreur du paramètre associé. Cette méthode permet de mieux prendre en compte les non-linéarités de l'opérateur d'observation, notamment quand celles-ci sont trop fortes.

D'autres variantes existent, notamment le filtre SEEK voir [Pham et al. \[1998\]](#), et le lecteur peut se référer à [Bocquet \[2014\]](#), [Carrassi et al. \[2018\]](#) pour des listes plus exhaustives.

Les algorithmes de filtrage présentés sont surtout adaptés pour des contrôles dynamiques ou qui se propagent dans le temps du fait de l'assimilation intermittente, voir e.g. [Bouttier et Courtier \[2002\]](#). Comme mentionné précédemment, une assimilation continue est plus adaptée à notre problème d'assimilation.

Les techniques similaires au filtrage mais adaptées pour une assimilation continue en temps sont les techniques de lissage.

Le lisseur de Kalman consiste donc à faire juste une phase d'analyse en utilisant toutes les données et l'analyse

BLUE, voir e.g. Carrassi et al. [2018]. Les variantes du filtre de Kalman peuvent aussi être adaptées en un lisseur. A noter que, sur une même fenêtre temporelle et à modèle et observations donnés, la solution du filtre de Kalman au temps final de la fenêtre temporelle considérée est équivalente à la solution du lisseur de Kalman.

Équivalence entre les approches variationnelles et stochastiques

Comme mentionné précédemment, l'estimateur du maximum de log-vraisemblance de l'analyse (donné par l'expression (1.35)) pour des erreurs gaussiennes (impliquant que la fonction de log-vraisemblance est donnée par l'expression (1.36)) est identique à la solution du problème variationnel (1.28) avec la fonction coût (1.29) définie par les termes (1.30) et (1.31).

On rappelle que le filtre de Kalman est exact et optimal lorsque les erreurs sont gaussiennes et l'opérateur d'observation est linéaire. On peut conclure qu'il y a équivalence entre le filtre Kalman et l'algorithme 4D-Var au temps final lorsque le modèle direct est parfait (i.e. l'erreur de modélisation est nulle) pour un même problème d'assimilation de données (mêmes observations et ébauche initiale). Ainsi, l'analyse finale calculée par le filtre de Kalman et la valeur finale de la trajectoire optimale (prédiction effectuée à partir de l'analyse) calculée par l'algorithme 4D-Var sont égales dans ce contexte, voir e.g. Bouttier et Courtier [2002], Bocquet [2014].

Avantages et inconvénients des deux approches

Le filtre de Kalman étendue se base sur la linéarisation (1.37) de l'opérateur d'observation non-linéaires. Cependant, cela suppose que l'opérateur d'observation est linéaire dans le voisinage de la valeur d'ébauche du contrôle. En pratique, il est alors nécessaire que les non-linéarités sont "relativement faibles", i.e. les phénomènes physiques impliquant les non-linéarités dans les équations ont un impact relativement limité sur l'écoulement modélisé.

Dès lors que ces non-linéarités sont fortes, le filtre de Kalman étendu peut diverger, voir plus de détails sur cette hypothèse dans Bouttier et Courtier [2002] et un exemple de filtre divergent dans Bocquet [2014].

Le filtre de Kalman d'ensemble a été introduit dans le but de mieux prendre en compte ces non-linéarités.

Par ailleurs, dans l'approche variationnelle, les non-linéarités sont naturellement prises en compte et sans avoir besoin d'une approximation. Ainsi, dans notre cas d'inférence de z_b et/ou K_s dans les modèles d'écoulement considérés ici, l'approche variationnelle est bien adaptée du fait d'opérateurs d'observation non-linéaires.

Le filtre de Kalman et ses variantes reposent sur la probabilité conditionnelle des différentes erreurs qui peuvent être étudiées comme des processus aléatoires, voir e.g. Lorenc [1986].

Cependant, cela nécessite des connaissances sur les propriétés statistiques de ces erreurs. Cela est surtout vrai pour le filtre de Kalman d'ensemble où la perturbation de la valeur d'ébauche du contrôle doit suivre la densité de probabilité de l'erreur d'ébauche, voir Evensen [1994].

Dans notre contexte applicatif, on rappelle que le contrôle est z_b et/ou K_s . En pratique, celui-ci est soit très mal mesuré, soit mesuré de manière indirecte et dépendante des données, soit pas mesuré du tout, voir section 1.1. Cela implique que les propriétés statistiques de l'erreur d'ébauche sont peu ou pas connues. Cette méconnaissance de l'erreur d'ébauche et de ses statistiques est aussi une raison qui pousse à utiliser le terme de régularisation (1.33) basé sur le gradient du contrôle plutôt que le terme d'écart à la valeur d'ébauche (1.31) dans l'approche variationnelle.

Ainsi, lorsque les propriétés statistiques des erreurs sont mal connues, l'approche stochastique est plus difficile à mettre en place que l'approche variationnelle qui semble être plus adaptable.

Dans le filtre de Kalman, il est possible de prendre en compte l'erreur du modèle direct, notamment pour améliorer la covariance de l'erreur d'ébauche du cycle suivant. À l'inverse, dans l'approche variationnelle, il est supposé que le modèle est parfait ou que les erreurs de celui-ci sont négligeables, voir e.g. Carrassi et al. [2018]. Dans le cas de ces travaux, les erreurs de modélisation sont multiples et peu connues. On peut notamment citer les erreurs relatives aux conditions aux bords ou les erreurs dues aux hypothèses de modélisation telles que l'hypothèse d'un écoulement 1D ou les hypothèses sur la forme des sections en travers. Ainsi, du fait de ces erreurs, le contrôle optimal sert de contrôle équivalent qui permet au modèle 1D de compenser les erreurs de modélisation. Ce contrôle équivalent peut être assez éloigné de k^t mais permet d'obtenir un modèle 1D cohérent avec les observations.

Des discussions détaillées sur les avantages et inconvénients de chaque approche peuvent être trouvées dans la littérature, voir e.g. Bouttier et Courtier [2002], Bocquet [2014], Carrassi et al. [2018].

Dans notre contexte d'observations des écoulements fluviaux par les satellites, du fait des non-linéarités des modèles d'écoulement et de la méconnaissance de l'erreur d'ébauche, l'approche variationnelle nous semble plus adaptée que l'approche stochastique. Cela explique le choix de la méthode variationnelle dans le contexte de ces travaux de thèse. L'assimilation variationnelle permet d'obtenir un contrôle équivalent et optimal. Ainsi, le modèle d'écoulement 1D associé et la prédiction du débit qui en découle, sont cohérents avec les mesures altimétriques de la hauteur de la surface libre.

1.3.4 Sur la covariance de l'erreur d'ébauche en assimilation de données

En assimilation de données, le terme de régularisation (1.31) et le changement de variable (1.32) mettent en avant l'opérateur de covariance de l'erreur d'ébauche \mathbf{C} .

L'estimation de cet opérateur peut avoir un impact important sur la qualité du résultat de l'assimilation, notamment en terme de précision et en terme de vitesse de convergence, voir e.g. Haben [2011].

Il est mis en avant comme étant un préconditionnement de la hessienne de la fonction coût dans Haben et al. [2011]. De plus, sous les hypothèses menant à l'analyse BLUE, la fonction coût (1.29) définie par les termes (1.30) et (1.31) vaut : $\nabla^2 j(k) = 2(\mathbf{C}^{-1} + \mathbf{H}^* \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H})$. Ainsi, le caractère convexe de la fonction coût j dépend fortement de l'opérateur \mathbf{C} , voir e.g. Bouttier et Courtier [2002], Haben [2011] pour plus de détail sur la hessienne et figure 1.10.

Il s'agit donc d'un sujet crucial mais aussi complexe, voir une revue sur la question dans Bannister [2008a,b].

Deux types de méthodes pour estimer cet opérateur de covariance sont principalement utilisées et sont rapidement présentées ici.

Le lecteur peut se référer à la revue faite dans Mirouze [2010] qui listent de manière assez complètes les différentes méthodes pour estimer cet opérateur ou même son inverse.

Dans le cadre d'un problème d'assimilation multi-varié (plusieurs variables de contrôle dans le vecteur de contrôle), l'opérateur de covariance ne contient pas seulement la covariance associée à une variable de contrôle en plusieurs points de l'espace (covariance univariée) mais aussi la covariance entre les variables de contrôles (covariance croisée). Par exemple, dans un cadre discret, la matrice de covariance contient les matrices de covariance univariée dans les blocs sur la diagonale et les matrices de covariance croisée dans les autres blocs.

Il est couramment supposé que les variables sont décorréelées entre elles. Les covariances croisées sont alors nulles et la matrice de covariance est diagonale par blocs. C'est notamment le cas dans ces travaux de thèse.

Une possibilité pour prendre en compte la corrélation entre les variables est de trouver un changement de variable qui permet d'obtenir des variables décorréelées, ou du moins pour lesquelles l'hypothèse de variables décorréelées est mieux respectée. Ensuite, le problème est traité comme un problème avec des variables de contrôle décorréelées, voir

e.g. [Derber et Bouttier \[1999\]](#).

Sauf si cela est précisé, l'opérateur de covariance réfère par la suite à l'opérateur de covariance univariée.

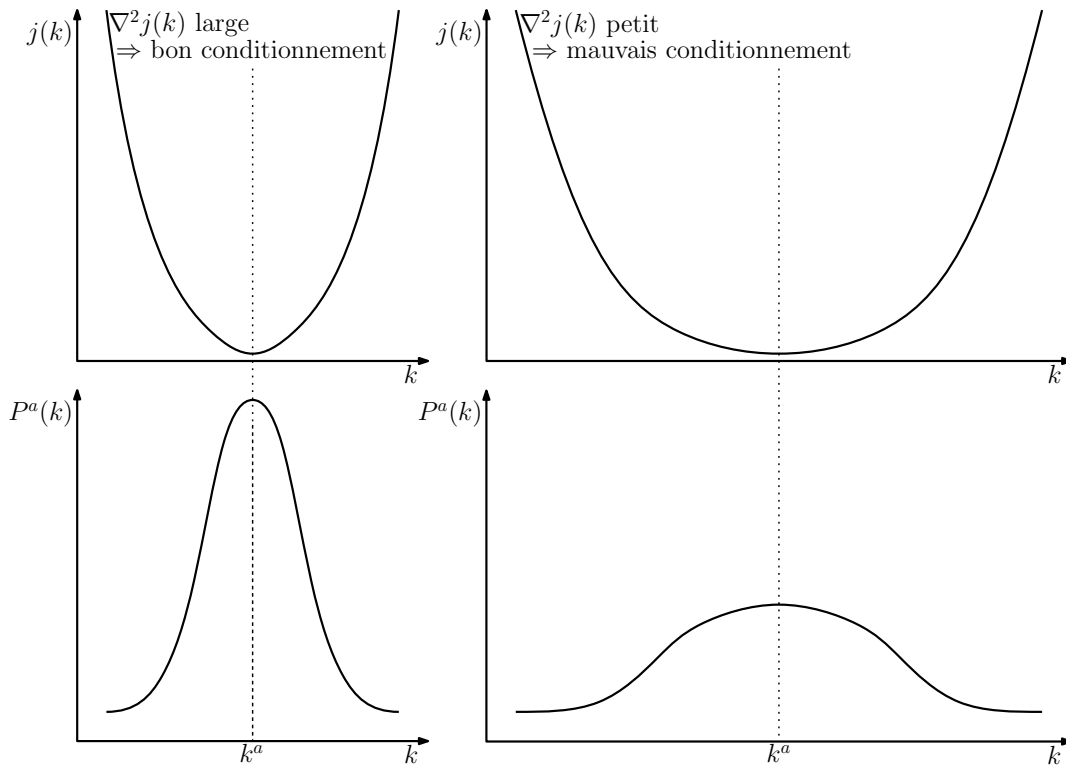


FIGURE 1.10 – Schéma 1D illustrant la relation entre la fonction coût j (graphiques du haut), sa hessienne $\nabla^2 j$ et la précision et qualité de l'analyse k^a (densité de probabilité de l'analyse P^a sur les graphiques du bas) : plus la fonction coût est convexe, i.e. sa hessienne grande, plus l'optimisation de la fonction coût est précise et rapide. On rappelle que la hessienne dépend de la covariance de l'erreur d'ébauche du fait de l'égalité $\nabla^2 j(k) = 2(\mathbf{C}^{-1} + \mathbf{H}^* \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H})$ dans le contexte de l'analyse BLUE. Inspirée de la figure 14 page 38 de [Bouttier et Courtier \[2002\]](#).

Le premier type de méthode est basé sur une estimation statistique de \mathbf{C} et les propriétés statistiques de l'erreur d'ébauche.

Une des difficultés est qu'il n'est pas forcément possible de connaître les propriétés statistiques de l'erreur d'ébauche. Cela vient notamment du fait que la vraie valeur du contrôle n'est pas disponible et que les mesures de l'ébauche (et le nombre de réalisations de l'erreur à un endroit) ne permettent pas d'en déduire les statistiques. Pour contourner le problème, il est possible de chercher les propriétés statistiques de l'erreur d'ébauche en utilisant des quantités ayant des statistiques similaires.

Le lecteur peut se référer à [Bouttier et Courtier \[2002\]](#), [Mirouze \[2010\]](#) pour plus de détails sur ces méthodes. Les méthodes les plus classiques qui utilisent cette approche, sont les deux suivantes.

Dans [Hollingsworth et Lönnberg \[1986\]](#), la covariance \mathbf{C} est reliée à la covariance de l'innovation, i.e. la différence $H^{obs} - H(k^b)$.

Une autre méthode, appelée méthode NMC (*National Meteorological Center*) et introduit dans [Parrish et Derber \[1992\]](#), se base sur deux prédictions entachées d'erreurs ayant la même covariance que l'erreur d'ébauche.

Une autre manière d'estimer l'opérateur de covariance de l'erreur d'ébauche est de le modéliser.

La principale méthode pour modéliser l'opérateur de covariance est de spécifier le noyau de covariance. L'opérateur

de covariance est alors un opérateur intégral linéaire donné par le noyau c :

$$\mathbf{C} : z \mapsto \left(x \mapsto \int_{\Omega} c(x; x') z(x') dx' \right) \quad (1.42)$$

En supposant que la distribution de l'erreur ε_b est connue, le noyau c est défini par :

$$c(x; x') = \mathbb{E} \left[(\varepsilon_b(x) - \mathbb{E}[\varepsilon_b(x)]) (\varepsilon_b(x') - \mathbb{E}[\varepsilon_b(x')]) \right]$$

Cette expression implique que le noyau c et la matrice de Gram (matrice de covariance) sont symétriques. Il est aussi possible de montrer que c est semi-défini et positif. Pour définir une norme et être inversible, on supposera dans ces travaux de thèse que le noyau est strictement défini positif.

La modélisation de l'opérateur par son noyau consiste à supposer l'expression et les paramètres de c . Supposons que le noyau de covariance est homogène et peut donc s'écrire :

$$c(x; x') = \mathbf{c}(x - x')$$

Cela implique alors que l'opérateur de covariance peut alors s'écrire :

$$\mathbf{C} : z \mapsto \mathbf{c} * z$$

Seuls quelques noyaux de covariance sont utilisés dans la littérature sur les problèmes inverses et l'assimilation de données. Voici une liste non-exhaustive d'opérateurs et des noyaux associés.

- L'opérateur $\mathbf{C}_{L_c}^{AR, M}$ est associé au noyau AutoRegressif (AR) d'ordre M , cas particulier de la famille des fonctions de Matérn :

$$c_{L_c}^{AR, M}(x, x') = \sigma^2 \sum_{j=0}^{M-1} \beta_j \left(\frac{|x - x'|}{L_c} \right)^j \exp \left(-\frac{|x - x'|}{L_c} \right) \quad (1.43)$$

avec β_j un coefficient tel que $\beta_j = \frac{2^j (M-1)! (2M-j-2)!}{j! (m-j-1)! (2M-2)!}$. Ces noyaux sont utilisés notamment pour leur lien avec l'équation de diffusion, voir e.g. [Mirouze et Weaver \[2010\]](#) et les références citées.

- L'opérateur $\mathbf{C}_{L_c}^G$ est défini par le noyau gaussien, utilisé e.g. en météorologie dans [Egbert et al. \[1994\]](#), plus récemment dans [Pannekoucke et al. \[2016, 2018\]](#), étudié dans [Haben \[2011\]](#) et correspond au noyau AR (1.43) avec $M \rightarrow +\infty$:

$$c_{L_c}^G(x, x') = \sigma^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi L_c^2}} \exp \left(-\frac{1}{2} \frac{(x - x')^2}{L_c^2} \right) \quad (1.44)$$

- L'opérateur $\mathbf{C}_{L_c}^e$ est défini par un noyau exponentiel décroissant, correspond au noyau FOAR (*First Order Auto-Regressive*) i.e. le noyau AR (1.43) avec $M = 1$, e.g. utilisé en glaciologie dans [Monnier et Zhu \[2019\]](#) ou en hydraulique fluvial dans [Larnier et Monnier \[2020\]](#) :

$$c_{L_c}^e(x, x') = \sigma^2 \exp \left(-\frac{|x - x'|}{L_c} \right) \quad (1.45)$$

- L'opérateur $\mathbf{C}_{L_c}^{SOAR}$ est donné par le noyau SOAR (*Second Order Auto-Regressive*) i.e. le noyau AR (1.43) avec $M = 2$, e.g. utilisé en météorologie dans [Ingleby \[2001\]](#) et plus récemment dans [Haben et al. \[2011\]](#),

Pannekoucke et al. [2016] :

$$c_{L_c}^{SOAR}(x, x') = \sigma^2 \left(1 + \sqrt{3} \frac{|x - x'|}{L_c} \right) \exp \left(-\sqrt{3} \frac{|x - x'|}{L_c} \right) \quad (1.46)$$

avec L_c la longueur de corrélation et σ^2 la variance.

Le noyau et la longueur de corrélation sont classiquement choisis de manière relativement empirique. L'étude menée dans le chapitre 4, qui est à l'origine de la publication Malou et Monnier [2022a], propose une méthode pour estimer un noyau et une longueur de corrélation à partir des équations de la physique.

1.3.5 Identification parcimonieuse de termes d'équations

On présente ici une méthode d'identification parcimonieuse de termes d'équations, y compris non-linéaires. Ce problème d'identification est un autre type de problème inverse. En effet, sa résolution ne vise pas à prédire l'état du système mais à identifier la dynamique qui le compose et qui permet de reproduire des observations de l'état du système, et donc d'apprendre le modèle qui régit le système physique.

Brunton et al. [2016] ont proposés une méthode de régression parcimonieuse, appelée SINDy (*Sparse Identification of Nonlinear Dynamics*). Cette méthode vise à identifier les termes les plus importants d'un système d'EDO, qui sont inclus dans un dictionnaire, afin de pouvoir déterminer les équations du système à partir de données. Cette méthode a par la suite été étendue à des EDP par Rudy et al. [2017].

Supposons un système à une équation 1D, celle-ci peut s'écrire $\partial_t H(x, t) = D(H; x, t)\Theta^T$ avec D le dictionnaire contenant l'ensemble des termes parmi lesquels on cherche les principaux termes et Θ le vecteur de coefficients associés. La méthode vise à résoudre le problème d'optimisation linéaire suivant :

$$\begin{cases} \text{trouver } \Theta^* \text{ tel que :} \\ \Theta^* = \arg \min_{\Theta} J_{res}(\Theta; H) \\ \text{sous la contrainte } \|\Theta\|_0 \leq N \end{cases} \quad (1.47)$$

avec le coût du résidu de l'équation $J_{res}(\Theta; H, z_b, w) = \|\partial_t H - D(H)\Theta^T\|_2^2$, le nombre de coefficients non-nuls $\|\Theta\|_0 = \#\{\Theta_i; \Theta_i \neq 0\}$ et N le nombre de coefficients non-nuls visés.

Ce problème d'optimisation linéaire est classique, notamment dans le domaine de l'apprentissage statistique, voir e.g. Hastie et al. [2009]. Il permet de minimiser le problème de moindre carré tout en ne conservant que les termes les plus importants (acquisition comprimée ou compressed sensing en anglais). D'un point de vue statistique, cela permet de réduire la variance de l'estimateur, qui sera cependant légèrement biaisé. Cependant, ce problème n'est pas un problème d'optimisation convexe et différentiable.

La méthode de sélection du meilleur sous-ensemble (*best-subset selection*) consiste à parcourir tous les sous-ensembles de Θ de taille N ou moins. Ensuite, le sous-ensemble dont la régression linéaire donne le plus petit coût de résidu J_{res} , est sélectionné.

Cette méthode est cependant limitée par le nombre de coefficients non-nuls recherchés N car le nombre de combinaisons de coefficients peut rapidement être limitant du fait du temps de calcul. Dans Hastie et al. [2009], il est mentionné que des algorithmes efficaces, tel que l'algorithme *leaps and bound*, permettent d'utiliser cette méthode jusqu'à environ $N = 30$.

Dans le cadre de ces travaux de thèse, la méthode SINDy est appliquée à l'équation de l'onde diffusante (1.25). Le nombre de termes dans le dictionnaire ne dépasse donc pas 10 et la méthode de sélection du meilleur sous-ensemble pourrait être appliquée à la méthode SINDy et pour résoudre le problème (1.47).

Plusieurs méthodes existent cependant pour approcher le problème (1.47) par un problème d'optimisation convexe. Une classe de méthodes très utilisée est la classe des méthodes appelées de contraction (*shrinkage* en anglais) qui a pour but d'avoir le plus de coefficients très petits voir nuls. Le lecteur peut se référer à [Hastie et al. \[2009\]](#) pour plus de détails sur ces méthodes de contraction.

Une première méthode de contraction est la méthode Ridge qui vise à limiter la taille des coefficients en pénalisant la norme 2, à la place du terme $\|\cdot\|_0$. L'avantage de cette méthode est que le problème d'optimisation est convexe et différentiable. Cependant, cette méthode a tendance à favoriser des petits coefficients et non des coefficients nuls. Une variante appelée STRidge (*Sequential Threshold Ridge*) qui consiste à appliquer un seuil à chaque itérations de l'algorithme d'optimisation sur les coefficients qui sont inférieurs à une certaine tolérance. Cette méthode est connue sous le nom de dégradation des pondérations (*weight decay*) dans le domaine de l'apprentissage automatique.

Une autre méthode très utilisée est la méthode LASSO, voir [Tibshirani \[1996\]](#). Elle consiste à limiter la taille des coefficients en pénalisant la norme 1. Le problème d'optimisation s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{cases} \text{trouver } \Theta^* \text{ tel que :} \\ \Theta^* = \arg \min_{\Theta} J_{res}(\Theta; H) + \lambda \|\Theta\|_1 \end{cases} \quad (1.48)$$

avec λ le coefficient de poids de la contraction de la méthode LASSO. L'avantage de cette méthode est que la pénalisation se comporte comme un seuillage doux des coefficients. Ce problème d'optimisation est aussi convexe et sous-différentiable, mais n'est plus différentiable. Il peut cependant être résolu grâce à un algorithme de gradient proximal ou à un algorithme basé sur la sous-différentielle.

Une dernière méthode s'appelle ElasticNet qui consiste à combiner à la fois Ridge et LASSO.

Le comportement général de la pénalisation en norme 1 et en norme 2 peut être illustrer par la figure 1.11. La forme de la zone des contraintes de la pénalisation en norme 1 a tendance à favoriser un coefficient nul et à favoriser une solution parcimonieuse. A l'opposée, la forme de la zone des contraintes de la pénalisation en norme 2 a tendance à favoriser un coefficient petit mais non nul.

Dans les travaux présentés, la méthode LASSO est utilisée. Le problème d'optimisation (1.48) est résolu grâce un algorithme FISTA inspiré du code de [Brunton et al. \[2016\]](#)¹². Cet algorithme FISTA est un algorithme de gradient proximal avec des méthodes d'accélération de Nesterov adaptées, voir [Beck et Teboulle \[2009\]](#).

La méthode d'identification SINDy a l'avantage de pouvoir considérer des données bruitées et de trouver les dynamiques principales malgré ce bruit. Cependant, plusieurs inconvénients apparaissent.

Le problème d'optimisation se décline de manière très naturelle en un problème d'optimisation discret. On note $(x^n, t^n)_{n \in \{1 \dots N^{obs}\}}$ la localisation en temps et en espace des observations.

Cependant, la méthode nécessite que l'ensemble des termes du dictionnaire D doivent être observés à chaque (x^n, t^n) . Or, dans le cadre de données satellitaires, nous ne disposons que de données sur la hauteur H et sur la largeur w . Or, la pente $\partial_x H$ est un terme très important (voir chapitre 2) et la courbure $\partial_{xx} H$ est aussi nécessaire pour modéliser

12. disponible sur : <https://github.com/snagcliffs/PDE-FIND>

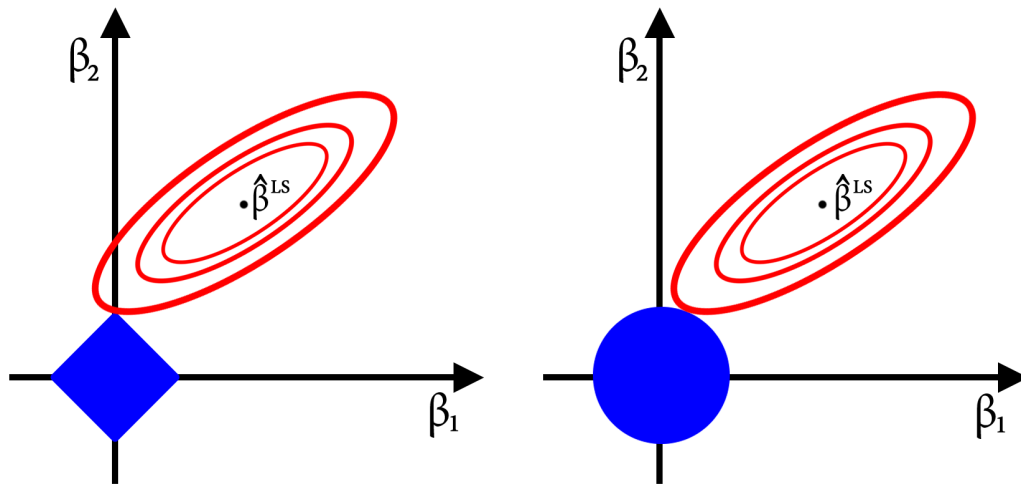


FIGURE 1.11 – Schéma de la pénalisation en norme 1 (méthode LASSO, à gauche) versus la pénalisation en norme 2 (méthode Ridge, à droite) : les lignes de niveaux d’une erreur de moindre carré linéaire en rouge et les zones des contraintes de la pénalité en bleu. Figure issue de [https://fr.wikipedia.org/wiki/Lasso_\(statistiques\)](https://fr.wikipedia.org/wiki/Lasso_(statistiques)) et inspirée de Tibshirani [1996]

un phénomène de diffusion. Cependant, ces deux termes ne sont pas mesurables avec une précision suffisante par les satellites actuelles (et à venir dans un futur proche).

Ainsi, cette méthode ne permet pas de trouver la dynamique non linéaire qui gouverne l’écoulement fluvial à cette échelle.

Un autre inconvénient vient du choix relativement empirique du nombre de coefficients non-nuls ou du coefficient de poids de la contraction λ . Le choix peut par exemple être basé sur une cross-validation. Une autre possibilité est basée sur le front de Pareto qui met en opposition le coût de résidu et le nombre de coefficients non-nuls. Cependant, dans le cadre de ces travaux de thèse et des écoulements étudiés, ces méthodes sont peu efficaces en pratique.

Dans ces travaux, la méthode SINDy sera utilisée dans le chapitre 3 comme base pour une méthode permettant de quantifier l’importance d’un terme pour prédire certaines données ou états du système.

Dans le chapitre 3, une nouvelle équation de l’onde diffusante (3.4b) adaptée à nos observations spatiales et aux ordres de grandeurs spatio-temporels associés est dérivée. Cette nouvelle équation contient deux termes supplémentaires par rapport à l’équation de l’onde diffusante classique (1.25), présentée dans la section 1.2.4.

Ainsi, on cherche à déterminer l’importance de ces deux nouveaux termes pour prédire l’état du système qui est donné par les équations de Saint-Venant (1.16). Pour ce faire, on étudie l’évolution des coefficients obtenus par la méthode SINDy lorsque l’on fait décroître le coefficient de poids λ . On obtient ainsi un ordre d’importance qui correspond à l’ordre dans lequel les coefficients s’activent, i.e. deviennent non-nuls, lorsque λ décroît.

Bibliographie

- R. Alonso, M. Santillana, et C. Dawson. On the diffusive wave approximation of the shallow water equations. *European Journal of Applied Mathematics*, 19(5) :575–606, 2008. doi : 10.1017/S0956792508007675.
- C. Aricò, P. Filianoti, M. Sinagra, et T. Tucciarelli. The flo diffusive 1d-2d model for simulation of river flooding. *Water*, 8(5), 2016. doi : 10.3390/w8050200. URL <https://www.mdpi.com/2073-4441/8/5/200>.
- M. Asch, M. Bocquet, et M. Nodet. *Data assimilation : methods, algorithms, and applications*. Fundamentals of Algorithms. SIAM, 2016. URL <https://hal.inria.fr/hal-01402885>.
- A. Bamberger. Étude d’une équation doublement non linéaire. *Journal of Functional Analysis*, 24(2) :148–155, 1977. ISSN 0022-1236. doi : 10.1016/0022-1236(77)90051-9. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0022123677900519>.
- R. N. Bannister. A review of forecast error covariance statistics in atmospheric variational data assimilation. i : Characteristics and measurements of forecast error covariances. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 134(637) :1951–1970, 2008a. doi : 10.1002/qj.339. URL <https://rmets.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/qj.339>.
- R. N. Bannister. A review of forecast error covariance statistics in atmospheric variational data assimilation. ii : Modelling the forecast error covariance statistics. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 134(637) :1971–1996, 2008b. doi : 10.1002/qj.340. URL <https://rmets.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/qj.340>.
- G. K. Batchelor. *An introduction to fluid dynamics*. Cambridge university press, 2000.
- A. Beck et M. Teboulle. A fast iterative shrinkage-thresholding algorithm for linear inverse problems. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, 2(1) :183–202, 2009. doi : 10.1137/080716542. URL <https://doi.org/10.1137/080716542>.
- R. Bellman. *Dynamic programming*. Press Princeton, New Jersey, 1957.
- A. F. Bennett. *Inverse modeling of the ocean and atmosphere*. Cambridge University Press, 2005.
- N. Bercher. *Accuracy of satellite radar altimetry over rivers : development and application of a standardized method to characterize the quality of radar altimetry products for inland water hydrology*. PhD thesis, AgroParisTech, 2009. URL <https://pastel.archives-ouvertes.fr/file/index/docid/501224/filename/nbercher-memoire-these-final.pdf>.
- S. Biancamaria, T. Schaedele, D. Blumstein, F. Frappart, F. Boy, J.-D. Desjonquères, C. Pottier, F. Blarel, et F. Niño. Validation of jason-3 tracking modes over french rivers. *Remote Sensing of Environment*, 209 :77–89, 2018. ISSN 0034-4257. doi : 10.1016/j.rse.2018.02.037. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S003442571830049X>.
- J. Blum, F.-X. Le Dimet, et I. M. Navon. Data Assimilation for Geophysical Fluids. In *Computational Methods for the Atmosphere and then Oceans*, volume 14 of *Handbook of Numerical Analysis*, pages 385–442. Elsevier, 2009. doi : 10.1016/S1570-8659(08)00209-3. URL <https://hal.inria.fr/inria-00391892>.
- M. Bocquet. *Introduction to the principles and methods of data assimilation in the geosciences*, 2014. URL <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.714.6844&rep=rep1&type=pdf>.

- M. Boutounet, J. Monnier, et J.-P. Vila. Multi-regime shallow free surface laminar flow models for quasi-newtonian fluids. *European Journal of Mechanics - B/Fluids*, 55 :182–206, 2016. ISSN 0997-7546. doi : 10.1016/j.euromechflu.2015.10.005. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0997754615001168>.
- F. Bouttier et P. Courtier. Data assimilation concepts and methods, 2002. URL http://msi.ttu.ee/~elken/Assim_concepts.pdf.
- C. R. Boxer. *The portuguese seaborne empire 1415-1825*. Hutchinson of London, 1977.
- F. Boy, J.-D. Desjonquères, N. Picot, T. Moreau, et M. Raynal. Cryosat-2 sar-mode over oceans : Processing methods, global assessment, and benefits. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 55(1) :148–158, 2017. doi : 10.1109/TGRS.2016.2601958.
- P. Brisset, J. Monnier, P.-A. Garambois, et H. Roux. On the assimilation of altimetric data in 1d saint-venant river flow models. *Advances in Water Resources*, 119 :41–59, 2018. ISSN 0309-1708. doi : 10.1016/j.advwatres.2018.06.004. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0309170817302476>.
- S. L. Brunton, J. L. Proctor, et J. N. Kutz. Discovering governing equations from data by sparse identification of nonlinear dynamical systems. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 113(15) :3932–3937, 2016. ISSN 0027-8424. doi : 10.1073/pnas.1517384113. URL <https://www.pnas.org/content/113/15/3932>.
- V. Bögelein, N. Dietrich, et M. Vestberg. Existence of solutions to a diffusive shallow medium equation. *Journal of Evolution Equations*, 21(1) :845–889, 2021. doi : 10.1007/s00028-020-00604-y.
- S. Calmant et F. Seyler. Continental surface waters from satellite altimetry. *Comptes Rendus Geoscience*, 338(14) :1113–1122, 2006. ISSN 1631-0713. doi : 10.1016/j.crte.2006.05.012. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1631071306001210>. La Terre observée depuis l’espace.
- A. Carrassi, M. Bocquet, L. Bertino, et G. Evensen. Data assimilation in the geosciences : An overview of methods, issues, and perspectives. *WIREs Climate Change*, 9(5) :e535, 2018. doi : 10.1002/wcc.535.
- H.-C. Chang et E. A. Demekhin. Complex wave dynamics on thin films. *Elsevier*, 2002.
- V. T. Chow. Handbook of applied hydrology. *McGraw-Hill Book Co., New-York, 1467 pages*, 1964.
- CNES, CTOH, et OMP. Aviso+, a. URL <https://www.aviso.altimetry.fr/en/home.html>.
- CNES, CTOH, et OMP. Aviso+ : Histoire de l’altimétrie, b. URL <https://www.aviso.altimetry.fr/fr/techniques/altimétrie/historique.html>.
- C. Coggiola, D. Blumstein, F. Niño, S. Calmant, S. Biancamaria, et L. Lasson. Apprentissage profond et altimétrie satellitaire pour le suivi des eaux continentales, 2019. URL https://sourcesup.renater.fr/wiki/atelieromp/_media/dl4ess_27juin2019_dblusmtein_altimétrie_eaux_continentales.pdf.
- P. Courtier et O. Talagrand. Variational assimilation of meteorological observations with the direct and adjoint shallow-water equations. *Tellus A : Dynamic Meteorology and Oceanography*, 42(5) :531–549, 1990. doi : 10.3402/tellusa.v42i5.11896. URL <https://doi.org/10.3402/tellusa.v42i5.11896>.
- J.-F. Cretaux, M. Berge-Nguyen, S. Calmant, N. Jamangulova, R. Satylkanov, F. Lyard, F. Perosanz, J. Verron, A. Samine Montazem, G. Le Guilcher, D. Leroux, J. Barrie, P. Maisongrande, et P. Bonnefond. Absolute calibration or validation of the altimeters on the sentinel-3a and the jason-3 over lake issykkul (kyrgyzstan). *Remote Sensing*, 10(11), 2018. ISSN 2072-4292. doi : 10.3390/rs10111679. URL <https://www.mdpi.com/2072-4292/10/11/1679>.

- J. Cunge. Practical aspects of computational river hydraulics. *Pitman Publishing Ltd. London, (17 CUN), 1980, 420*, 1980.
- A. de Saint-Venant. Théorie du mouvement non permanent des eaux, avec application aux crues des rivières et à l'introduction de marées dans leurs lits. *Comptes Rendus De L'académie Des Sciences*, pages 3–4, 1871.
- A. Decoene, L. Bonaventura, E. Miglio, et F. Saleri. Asymptotic derivation of the section-averaged shallow water equations for natural river hydraulics. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 19(03) :387–417, 2009. doi : 10.1142/S0218202509003474. URL <https://doi.org/10.1142/S0218202509003474>.
- J. Derber et F. Bouttier. A reformulation of the background error covariance in the ecmwf global data assimilation system. *Tellus A : Dynamic Meteorology and Oceanography*, 51(2) :195–221, 1999. doi : 10.3402/tellusa.v51i2.12316. URL <https://doi.org/10.3402/tellusa.v51i2.12316>.
- M. W. Dingemans. *Water Wave Propagation Over Uneven Bottoms*. World Scientific Publishing Company, 1997. doi : 10.1142/1241. URL <https://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/1241>.
- S. L. Dingman. *Fluvial hydraulics*. oxford university press, 2009.
- P. Dutarte. *Les instruments de l'astronomie ancienne de l'Antiquité à la Renaissance*. Vuibert, 2006.
- G. D. Egbert, A. F. Bennett, et M. G. G. Foreman. Topex/poseidon tides estimated using a global inverse model. *Journal of Geophysical Research : Oceans*, 99(C12) :24821–24852, 1994. doi : 10.1029/94JC01894.
- A. Egido et Walter H. F. Smith. Fully focused sar altimetry : Theory and applications. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 55(1) :392–406, 2017. doi : 10.1109/TGRS.2016.2607122.
- Geir Evensen. Sequential data assimilation with a nonlinear quasi-geostrophic model using monte carlo methods to forecast error statistics. *Journal of Geophysical Research : Oceans*, 99(C5) :10143–10162, 1994. doi : 10.1029/94JC00572. URL <https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1029/94JC00572>.
- A. C. Fassoni-Andrade, A. S. Fleischmann, F. Papa, R. C. D. de Paiva, S. Wongchuig, J. M. Melack, A. A. Moreira, A. Paris, A. Ruhoff, C. Barbosa, D. Andrade Maciel, E. Novo, F. Durand, F. Frappart, F. Aires, G. M. Abrahão, J. Ferreira-Ferreira, J. C. Espinoza, L. Laipelt, M. H. Costa, R. Espinoza-Villar, S. Calmant, et V. Pellet. Amazon hydrology from space : Scientific advances and future challenges. *Reviews of Geophysics*, 59(4) :e2020RG000728, 2021. doi : 10.1029/2020RG000728. URL <https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1029/2020RG000728>. e2020RG000728 2020RG000728.
- B. M. Fekete et C. J. Vörösmarty. The current status of global river discharge monitoring and potential new technologies complementing traditional discharge measurements. *IAHS publ*, 309 :129–136, 2007.
- E. D. Fernández-Nieto, P. Noble, et J.-P. Vila. Shallow water equations for non-newtonian fluids. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 165(13) :712–732, 2010. ISSN 0377-0257. doi : 10.1016/j.jnnfm.2010.03.008. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377025710000947>.
- M. G. Ferrick. Analysis of river wave types. *Water Resources Research*, 21(2) :209–220, 1985. doi : 10.1029/WR021i002p00209. URL <https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1029/WR021i002p00209>.
- F. Frappart, S. Calmant, M. Cauhopé, F. Seyler, et A. Cazenave. Preliminary results of envisat ra-2-derived water levels validation over the amazon basin. *Remote Sensing of Environment*, 100(2) :252–264, 2006. ISSN 0034-4257. doi : 10.1016/j.rse.2005.10.027. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0034425705003585>.

- R. P. M. Frasson, M. T. Durand, K. Larnier, C. Gleason, K. M. Andreadis, M. Hagemann, R. Dudley, D. Bjerklie, H. Oubanas, P.-A. Garambois, P.-O. Malaterre, P. Lin, T. M. Pavelsky, J. Monnier, C. B. Brinkerhoff, et C. H. David. Exploring the factors controlling the error characteristics of the surface water and ocean topography mission discharge estimates. *Water Resources Research*, 57(6) :e2020WR028519, 2021. doi : 10.1029/2020WR028519. URL <https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1029/2020WR028519>.
- H. Frey et A. C. Brenner. Australian topography from seasat overland altimetry. *Geophysical Research Letters*, 17(10) :1533–1536, 1990. doi : 10.1029/GL017i010p01533. URL <https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1029/GL017i010p01533>.
- P.-A. Garambois et J. Monnier. Inference of effective river properties from remotely sensed observations of water surface. *Advances in Water Resources*, 79 :103–120, 2015. ISSN 0309-1708. doi : 10.1016/j.advwatres.2015.02.007. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0309170815000330>.
- J.-F. Gerbeau et B. Perthame. Derivation of viscous saint-venant system for laminar shallow water ; numerical validation. *Discrete and Continuous Dynamical Systems - B*, 2001. URL <https://hal.inria.fr/inria-00072549>.
- M. Ghil, S. E. Cohn, J. Tavantzis, K. Bube, et E. Isaacson. Applications of estimation theory to numerical weather prediction. pages 249–334, 1980. URL <https://www.ecmwf.int/node/9553>.
- J. C. Gilbert et C. Lemaréchal. Some numerical experiments with variable-storage quasi-newton algorithms. *Mathematical programming*, 45(1-3) :407–435, 1989. doi : 10.1007/BF01589113.
- G. H. Gudmundsson et M. Raymond. On the limit to resolution and information on basal properties obtainable from surface data on ice streams. *The Cryosphere*, 2(2) :167–178, 2008. doi : 10.5194/tc-2-167-2008. URL <https://tc.copernicus.org/articles/2/167/2008/>.
- S. A. Haben. *Conditioning and preconditioning of the minimisation problem in variational data assimilation*. PhD thesis, University of Reading, 2011. URL <http://www.reading.ac.uk/web/files/maths/HabenThesis.pdf>.
- S. A. Haben, A. S. Lawless, et N. K. Nichols. Conditioning and preconditioning of the variational data assimilation problem. *Computers and Fluids*, 46(1) :252–256, 2011. ISSN 0045-7930. doi : 10.1016/j.compfluid.2010.11.025. 10th ICFD Conference Series on Numerical Methods for Fluid Dynamics (ICFD 2010).
- M. C. G. Hall et D. G. Cacuci. Physical interpretation of the adjoint functions for sensitivity analysis of atmospheric models. *Journal of Atmospheric Sciences*, 40(10) :2537 – 2546, 1983. doi : 10.1175/1520-0469(1983)040<2537:PIOTAF>2.0.CO;2. URL https://journals.ametsoc.org/view/journals/atsc/40/10/1520-0469_1983_040_2537_piotaf_2_0_co_2.xml.
- L. Hascoet et V. Pascual. The tapenade automatic differentiation tool : Principles, model, and specification. 39(3), 2013. ISSN 0098-3500. doi : 10.1145/2450153.2450158.
- T. Hastie, R. Tibshirani, et J. Friedman. *The elements of statistical learning : data mining, inference and prediction*. Springer series in statistics, 2009. URL <https://web.stanford.edu/~hastie/Papers/ESLII.pdf>.
- J.-M. Hervouet. *Hydrodynamique des écoulements à surface libre*. 2003.
- A. Hollingsworth et P. Lönnberg. The statistical structure of short-range forecast errors as determined from radiosonde data. part i : The wind field. *Tellus A*, 38A(2) :111–136, 1986. doi : 10.1111/j.1600-0870.1986.tb00460.x.

- T. V. Hromadka, C. E. Berenbrock, J. R. Freckleton, et G. L. Guymon. A two-dimensional dam-break flood plain model. *Advances in Water Resources*, 8(1) :7–14, 1985. ISSN 0309-1708. doi : 10.1016/0309-1708(85)90074-0. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0309170885900740>.
- N. B. Ingleby. The statistical structure of forecast errors and its representation in the met. office global 3-d variational data assimilation scheme. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 127(571) :209–231, 2001. doi : 10.1002/qj.49712757112.
- A. H. Jazwinski. *Stochastic Processes and Filtering Theory*. Dover Publications, 1970.
- R. E. Kalman. A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems. *Journal of Basic Engineering*, 82 (1) :35–45, 03 1960. ISSN 0021-9223. doi : 10.1115/1.3662552. URL <https://doi.org/10.1115/1.3662552>.
- B. Kaltenbacher, A. Neubauer, et O. Scherzer. *Iterative regularization methods for nonlinear ill-posed problems*, volume 6. Walter de Gruyter, 2008. doi : 10.1515/9783110208276.
- A. Kirsch. *An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems*. Springer, 2011.
- B. Kitambo, F. Papa, A. Paris, R. Tshimanga, S. Calmant, A. S. Fleischmann, F. Frappart, M. Becker, M. J. Tourian, C. Prigent, et J. Andriambelolon. A combined use of in situ and satellite-derived observations to characterize surface hydrology and its variability in the congo river basin. *Hydrology and Earth System Sciences Discussions*, 2021 :1–47, 2021. doi : 10.5194/hess-2021-315. URL <https://hess.copernicus.org/preprints/hess-2021-315/>.
- C. Kittel, L. Jiang, C. Tottrup, et P. Bauer-Gottwein. Sentinel-3 radar altimetry for river monitoring—a catchment-scale evaluation of satellite water surface elevation from sentinel-3a and sentinel-3b. *Hydrology and Earth System Sciences*, 25(1) :333–357, 2021. doi : 10.5194/hess-25-333-2021. URL <https://hess.copernicus.org/articles/25/333/2021/>.
- K. Larnier et J. Monnier. Hybrid neural network – variational data assimilation algorithm to infer river discharges from swot-like data. *Nonlinear Processes in Geophysics Discussions*, 2020 :1–30, 2020. doi : 10.1016/10.5194/npg-2020-32. URL <https://npg.copernicus.org/preprints/npg-2020-32/>.
- K. Larnier, J. Monnier, P.-A. Garambois, et J. Verley. River discharge and bathymetry estimation from swot altimetry measurements. *Inverse Problems in Science and Engineering*, 29(6) :759–789, 2021. doi : 10.1080/17415977.2020.1803858. URL <https://doi.org/10.1080/17415977.2020.1803858>.
- F.-X. Le Dimet et O. Talagrand. Variational algorithms for analysis and assimilation of meteorological observations : theoretical aspects. *Tellus A : Dynamic Meteorology and Oceanography*, 38(2) :97–110, 1986. doi : 10.3402/tellusa.v38i2.11706.
- M. J. Lighthill et G. B. Whitham. On kinematic waves i. flood movement in long rivers. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 229(1178) :281–316, 1955. doi : 10.1098/rspa.1955.0088. URL <https://royalsocietypublishing.org/doi/abs/10.1098/rspa.1955.0088>.
- J.-L. Lions. *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*. Dunod, 1969.
- J.-L. Lions. *Optimal control of systems governed by partial differential equations*, volume 170. Springer Verlag, 1971.

- A. C. Lorenc. Analysis methods for numerical weather prediction. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 112(474) :1177–1194, 1986. doi : 10.1002/qj.49711247414. URL <https://rmets.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/qj.49711247414>.
- T. Malou et J. Monnier. Covariance kernels investigation from diffusive wave equations for data assimilation in hydrology. *Inverse Problems*, 2022a. URL <http://iopscience.iop.org/article/10.1088/1361-6420/ac509d>.
- T. Malou, P.-A. Garambois, A. Paris, J. Monnier, et K. Larnier. Generation and analysis of stage-fall-discharge laws from coupled hydrological-hydraulic river network model integrating sparse multi-satellite data. *Journal of Hydrology*, 603 :126993, 2021. ISSN 0022-1694. doi : 10.1016/j.jhydrol.2021.126993. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S002216942101043X>.
- V. Mansanarez, J. Le Coz, B. Renard, M. Lang, G. Pierrefeu, et P. Vauchel. Bayesian analysis of stage-fall-discharge rating curves and their uncertainties. *Water Resources Research*, 52(9) :7424–7443, 2016. doi : 10.1002/2016WR018916. URL <https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/2016WR018916>.
- G. I. Marchuk et V. B. Zalesny. A numerical technique for geophysical data assimilation problems using pontryagin’s principle and splitting-up method. 8(4) :311–326, 1993. doi : 10.1515/rnam.1993.8.4.311. URL <https://doi.org/10.1515/rnam.1993.8.4.311>.
- J. Marin et J. Monnier. Superposition of local zoom models and simultaneous calibration for 1d–2d shallow water flows. *Mathematics and Computers in Simulation*, 80(3) :547–560, 2009. ISSN 0378-4754. doi : 10.1016/j.matcom.2009.09.001. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378475409002870>.
- N. Martin et J. Monnier. Adjoint accuracy for the full-Stokes ice flow model : limits to the transmission of basal friction variability to the surface. *The Cryosphere*, 8 :721–741, April 2014. doi : 10.5194/tc-8-721-2014. URL <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00957142>.
- V. Michel-Dansac, P. Noble, et J.-P. Vila. Consistent section-averaged shallow water equations with bottom friction. *European Journal of Mechanics - B/Fluids*, 86 :123–149, 2021. ISSN 0997-7546. doi : 10.1016/j.euromechflu.2020.12.005. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0997754620306476>.
- I. Mirouze. *Régularisation de problèmes inverses à l’aide de l’équation de diffusion, avec application à l’assimilation variationnelle de données océaniques*. PhD thesis, 2010. URL <http://www.theses.fr/2010TOU30150>. Thèse de doctorat dirigée par Gratton, S. et Weaver, A.
- I. Mirouze et A. Weaver. Representation of correlation functions in variational assimilation using an implicit diffusion operator. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 136(651) :1421–1443, 2010. doi : 10.1002/qj.643.
- J. Monnier. Data assimilation, optimal control and model learning, 2018. URL <https://www.math.univ-toulouse.fr/~jmonnie/Enseignement/CourseVDA.pdf>.
- J. Monnier et J. Zhu. Inference of the bottom topography in anisothermal mildly-sheared shallow ice flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 348 :954–977, 2019. ISSN 0045-7825. doi : 10.1016/j.cma.2019.01.003.
- J. Monnier, K. Larnier, P. Brisset, et al. Dassflow 1d : Data assimilation for free surface flows. open-source computational software. Technical report, Mathematics Institute of Toulouse - INSA - CNES - CNRS - CS Group, 2018. URL <http://www.math.univ-toulouse.fr/DassFlow>.

- P. Noble et J.-P. Vila. Thin power-law film flow down an inclined plane : consistent shallow-water models and stability under large-scale perturbations. *Journal of Fluid Mechanics*, 735 :29–60, 2013. doi : 10.1017/jfm.2013.454.
- O. Pannekoucke, S. Ricci, S. Barthelemy, R. Ménard, et O. Thual. Parametric kalman filter for chemical transport models. *Tellus A : Dynamic Meteorology and Oceanography*, 68(1) :31547, 2016. doi : 10.3402/tellusa.v68.31547.
- O. Pannekoucke, M. Bocquet, et R. Ménard. Parametric covariance dynamics for the nonlinear diffusive burgers equation. *Nonlinear Processes in Geophysics*, 25(3) :481–495, 2018. doi : 10.5194/npg-25-481-2018.
- A. Paris, R. Dias de Paiva, J. Santos Da Silva, D. Medeiros Moreira, S. Calmant, P.-A. Garambois, W. Collischonn, M.-P. Bonnet, et F. Seyler. Stage-discharge rating curves based on satellite altimetry and modeled discharge in the amazon basin. *Water Resources Research*, 52(5) :3787–3814, 2016. doi : 10.1002/2014WR016618. URL <https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/2014WR016618>.
- M. Parisot et J.-P. Vila. Numerical scheme for multilayer shallow-water model in the low-froude number regime. *Comptes Rendus Mathématique*, 352(11) :953–957, 2014. ISSN 1631-073X. doi : 10.1016/j.crma.2014.09.020. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1631073X1400226X>.
- D. F. Parrish et J. C. Derber. The national meteorological center’s spectral statistical-interpolation analysis system. *Monthly Weather Review*, 120(8) :1747 – 1763, 1992. doi : 10.1175/1520-0493(1992)120<1747:TNMCSS>2.0.CO; 2.
- J.-F. Pekel, A. Cottam, N. Gorelick, et A. S. Belward. High-resolution mapping of global surface water and its long-term changes. *Nature*, 540(7633) :418–422, 2016. doi : 10.1038/nature20584.
- D. T. Pham, J. Verron, et M.-C. Roubaud. A singular evolutive extended kalman filter for data assimilation in oceanography. *Journal of Marine Systems*, 16(3) :323–340, 1998. ISSN 0924-7963. doi : 10.1016/S0924-7963(97)00109-7. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0924796397001097>.
- V. M. Ponce et D. B. Simons. Shallow wave propagation in open channel flow. *Journal of the Hydraulics Division*, 103(12) :1461–1476, 1977. doi : 10.1061/JYCEAJ.0004892. URL <https://ascelibrary.org/doi/abs/10.1061/JYCEAJ.0004892>.
- L. S. Pontryagin, V. G. Boltyanski, et R. V. Gamkrelidze. *Théorie mathématique des processus optimaux*. Éditions Mir., 1974. paru en russe en 1962 puis traduit en français en 1974.
- L. Pujol. *Optimal synergy of remote-sensed multi-sensors data for the cartographic modeling of complex hydrosystems*. PhD thesis, Université de Strasbourg, 2022.
- R.K. Raney. The delay/doppler radar altimeter. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 36(5) : 1578–1588, 1998. doi : 10.1109/36.718861.
- G. L. Richard, A. Rambaud, et J.-P. Vila. Consistent equations for open-channel flows in the smooth turbulent regime with shearing effects. *Journal of Fluid Mechanics*, 831 :289–329, 2017. doi : 10.1017/jfm.2017.626.
- M. Ricko, J. A. Carton, C. M. Birkett, et J.-F. Crétaux. Intercomparison and validation of continental water level products derived from satellite radar altimetry. *Journal of Applied Remote Sensing*, 6(1) :1 – 24, 2012. doi : 10.1117/1.JRS.6.061710. URL <https://doi.org/10.1117/1.JRS.6.061710>.
- E. Rodríguez et al. Swot science requirements document. *JPL document*, JPL, 2012.

- S. H. Rudy, S. L. Brunton, J. L. Proctor, et J. N. Kutz. Data-driven discovery of partial differential equations. *Science Advances*, 3(4) :e1602614, 2017. doi : 10.1126/sciadv.1602614. URL <https://www.science.org/doi/abs/10.1126/sciadv.1602614>.
- M. Santillana. *Analysis and Numerical Simulation of the Diffusive Wave Approximation of the Shallow Water Equations*. PhD thesis, University of Texas, 2008. URL <https://repositories.lib.utexas.edu/handle/2152/17749>.
- M. Santillana et C. Dawson. A numerical approach to study the properties of solutions of the diffusive wave approximation of the shallow water equations. *Computational Geosciences*, 14 :31–53, 2010. URL <https://link.springer.com/content/pdf/10.1007/s10596-009-9131-4.pdf>.
- Y. Sasaki. An objective analysis based on the variational method. *Journal of the Meteorological Society of Japan. Ser. II*, 36(3) :77–88, 1958. doi : 10.2151/jmsj1923.36.3_77.
- C. Schwatke, D. Dettmering, W. Bosch, et F. Seitz. Dahiti—an innovative approach for estimating water level time series over inland waters using multi-mission satellite altimetry. *Hydrology and Earth System Sciences*, 19(10) : 4345–4364, 2015. doi : 10.5194/hess-19-4345-2015. URL <https://hess.copernicus.org/articles/19/4345/2015/>.
- J. S. Da Silva, S. Calmant, F. Seyler, O. C. R. Filho, G. Cochonneau, et W. J. Mansur. Water levels in the amazon basin derived from the ers 2 and envisat radar altimetry missions. *Remote Sensing of Environment*, 114 (10) :2160–2181, oct 2010. doi : 10.1016/j.rse.2010.04.020. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0034425710001331>.
- L. M. Stewart, S. L. Dance, et N. K. Nichols. Data assimilation with correlated observation errors : experiments with a 1-d shallow water model. *Tellus A : Dynamic Meteorology and Oceanography*, 65(1) :19546, 2013. doi : 10.3402/tellusa.v65i0.19546. URL <https://doi.org/10.3402/tellusa.v65i0.19546>.
- A. Tarantola. *Inverse problem theory and methods for model parameter estimation*, volume 89. SIAM, 2005. URL <http://www.ipgp.fr/~tarantola/Files/Professional/Books/InverseProblemTheory.pdf>.
- J. Thoulet. Les deux derniers volumes des " reports of the challenger expedition". In *Annales de Géographie*, volume 4, pages 500–506. JSTOR, 1895. URL https://www.persee.fr/doc/geo_0003-4010_1895_num_4_17_5733.
- O. Thual. *Hydrodynamique de l'environnement*. Les éditions de l'école polytechnique, 2010.
- R. Tibshirani. Regression shrinkage and selection via the lasso. *Journal of the Royal Statistical Society : Series B (Methodological)*, 58(1) :267–288, 1996. doi : 10.1111/j.2517-6161.1996.tb02080.x. URL <https://rss.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1111/j.2517-6161.1996.tb02080.x>.
- E. F. Toro. *Shock-Capturing Methods for Free-Surface Shallow Flows*. Wiley and Sons Ltd, 2001.
- E. F. Toro. *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics*. Springer, 2008.
- Hydrologic Engineering Center US Army Corps of Engineers. Hec-ras : River analysis system, user's manual version 6.0. Technical report, 2021. URL https://www.hec.usace.army.mil/software/hecras/documentation/HEC-RAS_6.0_Reference_Manual.pdf.
- J.-P. Vila. *Sur la théorie et l'approximation numérique de problèmes hyperboliques non linéaires : Applications aux équations de Saint Venant et à la modélisation des avalanches de neige dense*. PhD thesis, Université Paris 6, 1986. URL <https://www.theses.fr/1986PA066092>.

- S. Weill, R. di Chiara-Roupert, et P. Ackerer. Accuracy and efficiency of time integration methods for 1d diffusive wave equation. *Computational Geosciences*, 2014. doi : 10.1007/s10596-014-9417-z. URL <https://link.springer.com/article/10.1007/s10596-014-9417-z>.
- B. C. Yen et C. W.-S. Tsai. On noninertia wave versus diffusion wave in flood routing. *Journal of Hydrology*, 244 (1) :97–104, 2001. ISSN 0022-1694. doi : 10.1016/S0022-1694(00)00422-4. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022169400004224>.

Chapitre 2

Generation and analysis of stage-fall-discharge laws from coupled hydrological-hydraulic river network model integrating sparse multi-satellite data

Sommaire

Résumé	72
2.1 Introduction	76
2.2 Flow models and observables	79
2.2.1 River network flow model	79
2.2.2 The computational inverse method	80
2.2.3 Stage-Fall-Discharge laws	81
2.3 Study zone and calibrated river network model	83
2.3.1 Study area and multi-satellite data	83
2.3.2 Construction of the hydrodynamic model	85
2.3.3 Space-time simulation of hydraulic quantities with the river network model	87
2.4 SFD calibration and analysis	92
2.4.1 Numerical experiment design	92
2.4.2 Results	94
2.5 Discussions	99
2.5.1 AMHG analysis of Negro-Branco SD coefficients	99
2.5.2 Influence of hydraulic controls and water masks on SFD	100
2.6 Conclusion	103
Appendices	
2.A Performance evaluation metrics	105
2.B Performance evaluation on the stations	105
2.C AMHG	107
2.D Usual parameterizations of flow resistance	108
Bibliography	108

Ce chapitre est basé sur la publication [Malou et al. \[2021\]](#) :

T. Malou, P.-A. Garambois, A. Paris, J. Monnier, and K. Larnier. Generation and analysis of stage-fall-discharge laws from coupled hydrological-hydraulic river network model integrating sparse multi-satellite data. *Journal of Hydrology*, 603 :126993, 2021. ISSN 0022-1694. doi : 10.1016/j.jhydrol.2021.126993. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S002216942101043X>.

Résumé

Les caractéristiques de surface des rivières et leurs déformations sont détectables grâce à l’altimétrie satellitaire et représentent une source d’informations fort intéressante, en vue d’estimer des flux en hydrologie de surface, notamment pour les bassins peu instrumentés. Cependant, l’estimation du débit Q à partir de données altimétriques seules reste un problème difficile, d’une part lorsque la bathymétrie et la friction sont inconnues ou incertaines (car non observables par les satellites), d’autre part à cause de l’échantillonnage épars et de la qualité des données télédéteçtées, voir section 1.1.

Ce chapitre propose une nouvelle méthodologie pour déterminer des lois d’estimation de débit locales adaptées à une utilisation opérationnelle avec des données altimétriques issues de plusieurs satellites. L’idée est d’établir ces lois à partir de grandeurs simulées lorsque celles-ci sont non-observables (e.g. la pente de la surface libre) par un modèle hydrodynamique (e.g. le modèle de Saint-Venant dans ces travaux) intégrant de manière optimale des données altimétriques bruitées et hétérogènes en espace-temps en plus de données optiques. L’intégration des données dans ce modèle, construit à partir d’un modèle hydrologique régionalisé, est effectuée via un processus d’assimilation de données. L’avantage de cette méthode est d’être applicable à l’échelle d’un réseau hydrographique entier, à partir de données télédéteçtées hétérogènes seulement (observations hydrauliques et des forçages du modèle hydrologique), y compris sur des portions de rivières affectées par un remous hydraulique dû à un important contrôle hydraulique aval variable en régime fluvial.

On s’intéresse à des lois de type “Stage-Fall-Discharge” (SFD, voir e.g. [Paris et al. \[2016\]](#), [Mansanarez et al. \[2016\]](#)) qui sont une généralisation de l’équation algébrique de Manning-Strickler-Gauckler (MSG) (1.21) qui, pour des sections en travers rectangulaires et larges, s’écrit :

$$Q_{sfd} = \alpha w^\beta (H - b_{sfd})^\gamma |\partial_x H|^\delta$$

où α , β , b_{sfd} , γ , δ sont des paramètres à estimer, et où H , w et $\partial_x H$ sont respectivement la hauteur, la largeur et la pente locale de la surface libre.

La méthode se base sur une modélisation hydrodynamique d’un réseau hydrographique calibré par assimilation des données multi-satellitaires. Cette modélisation permet ensuite d’estimer les paramètres d’une loi SFD locale à partir des observations satellitaires (de H et de w) et des grandeurs hydrauliques (Q et $\partial_x H$) simulées par le modèle hydrodynamique. Cela présente d’une part l’avantage de travailler à partir de grandeurs physiquement consistantes car simulées par un modèle hydraulique. D’autre part, le modèle de réseau hydrographique peut être utilisé comme extrapolateur spatio-temporel des grandeurs hydrauliques, et en particulier de $\partial_x H$ et d’un débit de référence Q_{ref} en tout point du domaine de calcul.

La pente $\partial_x H$ est une grandeur cruciale pour l’estimation précise de Q , en particulier sur des portions de rivières affectées par des effets de remous hydrauliques, impliquant un hystérésis entre Q et H , voir e.g. [Mansanarez et al. \[2016\]](#) et la partie de gauche de la figure 2.1. Cependant, l’échantillonnage et la qualité des données altimétriques ne permettent pas de calculer des estimations de $\partial_x H$ avec une précision suffisante. Une estimation fine de $\partial_x H$ est calculée à l’aide du modèle hydrodynamique calibré, cf. partie de droite en haut de la figure 2.1.

Des lois SFD sont estimées à partir des observations altimétriques H^{obs} . Ainsi, la calibration des coefficients

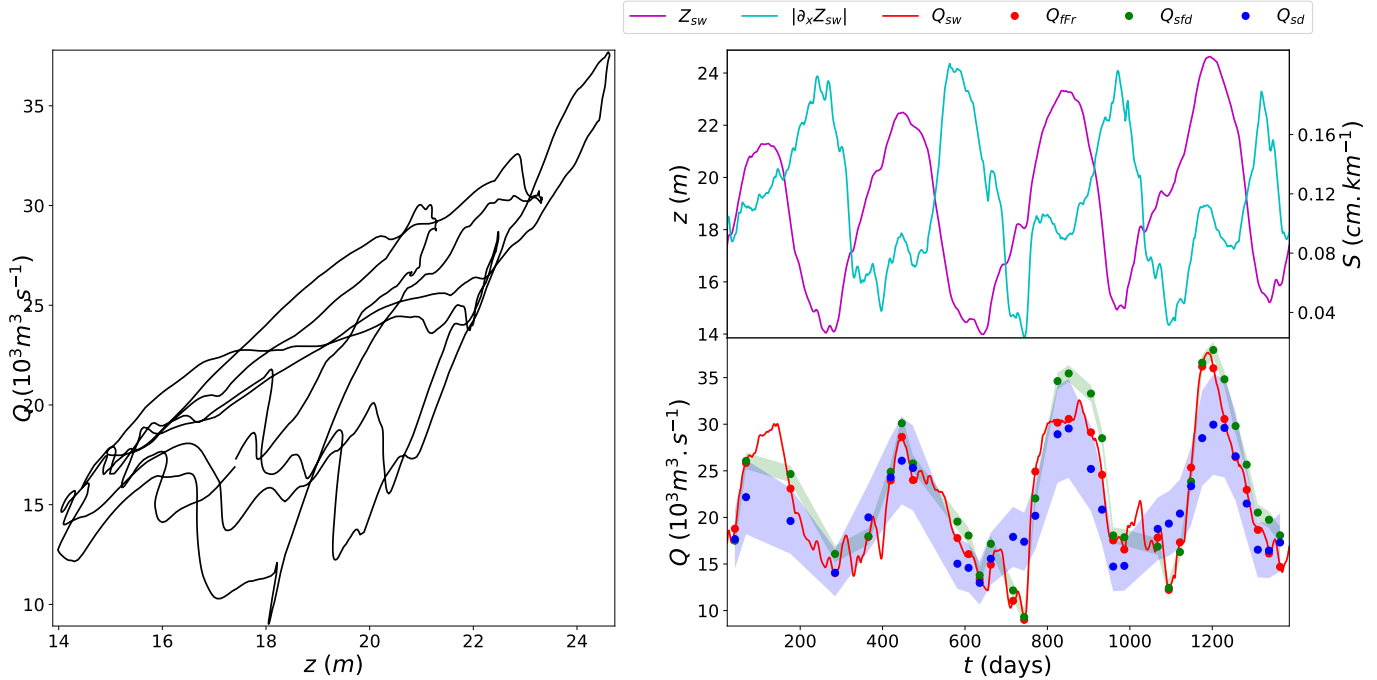


FIGURE 2.1 – A la station virtuelle d’intérêt en aval du Rio Negro et soumis à un remous hydraulique. A gauche : hystérésis entre H et Q . A droite en haut : la hauteur H et la pente $S = |\partial_x H|$ (à la plus fine échelle) estimées par le modèle hydrodynamique. A droite en bas : le débit estimé par le modèle hydrodynamique (Q_{sw}), par la relation de MSG de référence (Q_{fFr}), par la loi SFD avec une pente à échelle fine (Q_{SFD}) et par la loi SFD sans pente (i.e. $\delta = 0$, Q_{SD}), les enveloppes de couleurs correspondent à l’intervalle d’incertitude à 95% calculé à partir des distributions données par l’algorithme MCMC pour les lois SFD associées.

de la loi SFD permet de prendre en compte, en partie du moins, le bruit qui affecte ces données.

L’estimation d’une loi SFD à une station virtuelle d’intérêt, correspondant à une section hydraulique du domaine de calcul, revient à calibrer un sous-ensemble des coefficients $\eta \subset \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, b_{sfd}\}$ tel que

$$\eta^* = \arg \min_{\eta} \sum_p (Q_{ref}(t_p) - Q_{sfd}(\partial_x H, H^{obs}, w; t_p; \eta))^2.$$

Ainsi, le débit Q_{sfd} prédit par la suite sera similaire à Q_{ref} .

Notons que les coefficients des lois SFD, ainsi que les incertitudes associées, peuvent être calés en utilisant une méthode d’optimisation bayésienne. La méthode de Monte-Carlo par chaînes de Markov est utilisée ici, voir e.g. [Gelman et al. \[2013\]](#).

Dans le cadre de cette étude, le modèle de réseau fluvial est le modèle de Saint-Venant 1D (1.16) alimenté en amont et latéralement par le modèle hydrologique régional MGB, voir [Collischonn et al. \[2007\]](#). Ce modèle hydraulique est combiné de manière optimale avec des données altimétriques hétérogènes multi-satellites via l’assimilation variationnelle de ces données (VDA), voir section 1.3.2. Celle-ci est réalisée à l’aide du modèle numérique [DassFlow-1D](#), voir e.g. [Larnier et al. \[2021\]](#).

Cette méthode est appliquée sur le large et complexe réseau hydrographique composé du Rio Negro et du Rio

Branco dans le bassin amazonien, voir figure 2.2. Le modèle est entièrement construit à partir de données satellitaires (voir figures 2.4 et 2.3), sur une période temporelle allant de février 2016 à septembre 2020 à l'aide de données des satellites d'altimétrie J3 et S3A et S3B, voir section 1.1 et figure 2.3. L'aval de ce réseau est affecté par un fort remous hydraulique provoqué par la confluence avec le Rio Solimoes quelques kilomètres en aval du domaine considéré, voir e.g. Montazem et al. [2019], Pujol et al. [2020].

Un modèle équivalent est obtenu par une VDA des observations des satellites d'altimétrie J3 et S3A entre février 2016 et juin 2016. Un écart relativement petit est obtenu entre H mesurée et H estimée, de 53cm en moyenne et de moins de 1m pour 80% des observations, voir figure 2.5. Ces erreurs sont de l'ordre de celles obtenues dans d'autres études, voir e.g. O'Loughlin et al. [2020], Pujol et al. [2020]. Ces erreurs ne sont pas uniquement dues aux erreurs des données satellitaires mais aussi à d'autres sources d'erreurs entrant dans la modélisation, tels que les apports hydrologiques, la largeur estimée à partir d'images ou encore les hypothèses de modélisation.

Cette méthode est testée au niveau de 4 stations virtuelles représentant différentes situations et complexités hydrauliques. Une de ces stations (trace du satellite S3A) est située sur le Rio Negro dans une portion affectée par le remous hydraulique dû à la confluence avec le Rio Solimoes. Une autre de ces stations est une station du satellite S3B dont les données n'ont pas été utilisées ni dans la construction du modèle ni dans son calage par assimilation de données. Ainsi cette station permet de tester les capacités d'extrapolation spatiale de la méthode proposée.

Des lois SFD sont calées à ces différentes stations de tests en considérant plusieurs sous-ensembles η (mais $\beta = 1$ car la section hydraulique du modèle est rectangulaire) et pour différentes estimations de $\partial_x H$ et sans pente, i.e. $\delta = 0$. Les résultats de la calibration de ces lois SFD sont comparés entre eux mais aussi avec les résultats d'une relation de MSG (1.21) de référence. Pour cette loi de référence, seul un coefficient de Strickler équivalent est calé, la hauteur H est extrapolée à partir du modèle hydrodynamique et la pente $\partial_x H$ est l'estimation à l'échelle la plus fine permise par la grille du modèle numérique. Cette loi permet d'avoir une idée sur la meilleure précision possible pour une loi SFD ou une relation de MSG appliquée aux sorties d'un modèle hydraulique 1D. L'écart entre Q obtenu par cette loi et Q_{ref} calculé par les équations de Saint-Venant est dû à l'hypothèse d'un nombre de Froude faible.

La méthode proposée donne globalement de bonnes estimations de Q ainsi qu'une quantification de l'incertitude de ces estimations. Ces estimations ont entre 2% et 10% d'écart par rapport à l'estimation Q simulée par le modèle de Saint-Venant, voir tableau 2.3. Ainsi l'extrapolation spatio-temporelle de $\partial_x H$ et de Q_{ref} est un succès dans les cas étudiés. De plus, les coefficients obtenus sont consistants avec les coefficients donnés par la relation de MSG (1.21). Au niveau de la station virtuelle soumise à un remous hydraulique, voir partie de droite de la figure 2.1, la loi SFD obtenue avec l'estimation de $\partial_x H$ à fine échelle extrapolée du modèle hydrodynamique donne la meilleure estimation de Q .

Au niveau des autres stations virtuelles, voir figures 2.9b et 2.10, qui ne sont pas affectées par un remous hydraulique, les lois SFD obtenues avec une estimation de $\partial_x H$ extrapolée donne des résultats sensiblement aussi précis que quand la pente n'est pas prise en compte (i.e. $\delta = 0$).

Au niveau d'une des stations virtuelles, voir figure 2.9c, l'écart entre H_{obs} et l'estimation de H simulée par le modèle hydrodynamique dû aux bruits de mesure et aux hypothèses de modélisation implique que les résultats de la calibration des lois SFD sont moins précis. A cette station, les estimations de Q calculées par les lois SFD ont jusqu'à 25% d'écart par rapport à l'estimation de Q simulé par le modèle de Saint-Venant. La comparaison des lois SFD avec la relation de MSG de référence permet de mettre en avant l'impact du bruit de mesure sur l'estimation de Q .

Au niveau de la station virtuelle du satellite S3B, les résultats de la calibration et l'estimation de Q sont bons et de précisions similaires à celles obtenues aux autres stations virtuelles. Ainsi, l'extrapolation spatiale est un succès sur le cas étudié. Cependant, il convient de noter que le modèle hydrodynamique, bien que non contraint par des observations à cet endroit, donne une estimation de H relativement proche des mesures H^{obs} . On peut supposer

que les principaux contrôles hydrauliques influençant le comportement hydraulique à cet endroit ont été assez bien représentés. Dans le cas où l'écart entre l'estimation de H calculée par le modèle hydrodynamique et les mesures H^{obs} est trop grand, une recalibration du modèle hydrodynamique peut être nécessaire.

Des analyses sont aussi effectuées sur un modèle hydraulique détaillé d'une portion de la Garonne en aval de Toulouse, basé sur des données bathymétriques à fine échelle spatiale, voir figures 2.12 et 2.13. Cette analyse permet d'étudier la méthode sur une géométrie plus complexe et d'étudier l'impact de l'exposant β de la largeur dans la loi SFD. Il en ressort que ce coefficient n'est pas nécessaire pour l'estimation d'une loi SFD, l'estimation de $\partial_x H$ prend en compte les effets sur l'écoulement dus aux variations de la géométrie de la portion de rivière. Avec la présente méthode, il est donc intéressant de prendre en compte des données de largeur dans la modélisation hydrodynamique mais cela n'est pas nécessaire pour l'estimation d'une SFD.

L'avantage de la méthode proposée pour déterminer des lois locales d'estimation de débit est donc son applicabilité à des données multi-satellitaires bruitées tout en assurant la consistance physique.

Elle devrait être applicable en temps réel à n'importe quel bassin fluvial en utilisant l'altimétrie nadir seulement ou combinée avec les futures données du satellite SWOT (H , w et $\partial_x H$). La seule contrainte pour estimer Q de manière opérationnelle à partir d'une loi SFD calibrée avec cette méthode est de pouvoir modéliser et extrapoler en temps réel, à partir du modèle hydrodynamique, une estimation de $\partial_x H$.

De plus, cette méthode permet de tirer profit des observations variables des masques d'eaux ainsi que de la segmentation physique des réseaux fluviaux au travers d'un modèle hydrodynamique.

La méthode est implémentée dans la plateforme de VDA hydrodynamique libre d'accès [DassFlow-1D](#).

Abstract

Current and forthcoming altimetry satellites provide increasing hydraulic visibility of river surface variabilities. However, due to unobservable river bathymetry and friction, as well as the sampling and quality of remote sensing data, discharge estimation remains a challenging problem. This paper proposes a new rigorous methodology to estimate stage-fall-discharge laws at any point of a hydrographic network including backwater affected reaches. This methodology is adapted to operational estimation of discharge from multi-mission satellite altimetry data. The cornerstone of the method is to take advantage of meaningful hydraulic signatures, including water surface slopes, simulated by a river network model optimally combined with multi-satellite noisy observations. This optimal combination of heterogeneous multi-source data with a river network model is achieved variational data assimilation performed using the DassFlow-HiVDI hydraulic model inflowed by MGB regional hydrological model. It is newly applied to the large and complex Negro-Branco River network in the Amazon basin. An effective model is obtained by variational calibration using Jason-3 and Sentinel-3A and -3B altimetry observations between February 2016 and May 2019. A fairly good fit below $1m$ for 80% of the altimetric observations is obtained. Using this hydrodynamic model as a fine spatio-temporal extrapolator of hydraulic quantities, and in particular of multi-scale water surface slope signatures, the parameters of a general SFD law, as well as the uncertainties estimations, can be constrained at any location within the river network domain using a Bayesian optimization method. This methodology is tested over 4 virtual stations representing various hydraulic complexities. Accurate discharge estimates and meaningful SFD parameters are obtained compared to those of the reference low Froude model at these locations. Analyses are also performed on a reference case with fine-scale bathymetry data of the Garonne River, France. The strength of the method lies in its applicability to noisy multi-satellite data while ensuring physical consistency. It should be applicable in real time to any river basin, using nadir altimetry only or combined to the forthcoming SWOT data. Moreover, the method allows to take full advantage, via the hydrodynamic model, of variable water masks observations and physical segmentations of river networks. The method is implemented in the open source hydrodynamic data assimilation platform DassFlow.

Keywords. Hydrological-hydraulic modeling; river networks; variational data assimilation; multisatellite altimetry; stage-fall-discharge laws.

2.1 Introduction

River discharge estimation is a key issue in hydrological sciences and water management, especially under the ongoing climate change. In order to characterize hydrological fluxes, river discharge is defined as an essential physical variable (see Global Climate Observing System (WMO, 2011, 1997)). Streamflow records are classically established at water level monitoring stations using Stage-Discharge (SD) laws derived from sparse in situ measurements of water levels and discharge. However, the number of gauging stations is decreasing worldwide (see [Fekete and Vörösmarty \[2007\]](#)). On the other hand, new generations of earth observation satellites provide an increasing hydraulic visibility of continental Water Surfaces (WS) variabilities (see [Garambois et al. \[2017\]](#), [Montazem et al. \[2019\]](#)). Dynamic estimates of WS Elevations (WSE) are derived from radar altimetry for large rivers (see recent reviews in [Ricko et al. \[2012\]](#), [Cretaux et al. \[2017\]](#)) or more recently from Lidar measurements (see [O’Loughlin et al. \[2016\]](#), [Zwally et al. \[2012\]](#)). Although only available at river cross-sections located at the intersection of a

satellite nadir track with a river (so-called Virtual Stations, VS), multi-mission WS measurements are compiled to form relatively sparse but quickly improving global datasets (e.g. the Hydroweb project¹). In addition to decades of nadir altimetry, the upcoming NASA/CNES SWOT mission (Surface Water Ocean Topography mission, expected to be launched in 2022) will provide an unprecedented near global dynamic mapping of river WS height, width and slope (e.g. Alsdorf et al. [2007], Durand et al. [2010], Rodríguez et al. [2012], Biancamaria et al. [2016], Rodriguez et al. [2018], Rodríguez et al. [2020]). Nevertheless, discharge estimation from satellite data remains a challenging problem because of: (i) nonlinear open channel flow physics and hydrological processes, (ii) their limited observability but also the sampling and quality of remote sensing data, (iii) uncertain or even unknown channel bathymetry and/or friction and/or lateral exchanges for many rivers, (iv) the correlated effect of those flow controls on the WS (observable).

Open-channel inverse problems have been studied relatively recently in a satellite data context and assuming more or less unknown hydraulic parameters (see Biancamaria et al. [2016] for a review and also Larnier et al. [2021] and references therein). Satellite altimetry measurement scales enable to observe mostly low Froude flows as remarked in Garambois and Monnier [2015]. The estimation of river discharge from satellite and ancillary data is investigated using flow models of different complexities, from simple algebraic models (e.g. Smith et al. [1996], Bjerklie et al. [2003, 2005], Leon et al. [2006], Durand et al. [2014], Garambois and Monnier [2015], Paris et al. [2016]) to dynamic and spatially distributed models with data assimilation systems (e.g. Paiva et al. [2013b], Biancamaria et al. [2011], Schneider et al. [2018], Brisset et al. [2018], Pujol et al. [2020], Wongchuig-Correa et al. [2020]), eventually combined to algebraic low complexity systems based on the low Froude model for real-time estimates [Larnier et al., 2021]. The present contribution originally combines the advantages of both approaches: (i) using a fine hydrological-hydraulic river network model integrating, via variational data assimilation, multi-satellite data and (ii) enabling to derive hydraulically meaningful local discharge laws adapted to backwater affected reaches and to operational discharge estimates from multi-mission altimetric data.

Concerning at-a-station discharge laws, Smith et al. [1996] calibrated width-discharge rating curves, i.e. hydraulic geometry relationships [Leopold and Maddock, 1953], from effective width derived from ERS1 SAR images of the braided Tanana River (Alaska) and discharges from a model. Next, a general flow resistance equation, similar to Manning equation and adapted to in bank river discharge estimation with remote sensing data, is proposed and adjusted using statistical methods and a ground based dataset in Bjerklie et al. [2003, 2005]. Recently, Birkinshaw et al. [2010] used the equations from Bjerklie et al. [2003], water depth estimated from altimetric data ERS-2 and ENVISAT and WS width from Landsat imagery to estimate discharge on the Mekong River. In Paris et al. [2016], altimetric rating curves are calibrated using water levels at 711 ENVISAT and 209 Jason-2 virtual stations and discharges simulated by the hydrological-hydrodynamic model MGB (portuguese acronym of *Modelo de Grandes Bacias*, see e.g. Collischonn et al. [2007], Paiva et al. [2013a]) over the Amazon basin. Similar methodologies were subsequently applied on large basins such as the Congo River basin [Paris et al., 2020] and the Ogooue River basin [Bogning et al., 2020], but also on smaller scale basins [Andriambeloston et al., 2020]. Using a 1D hydraulic model of a 135 km reach of the Brahmaputra River validated on Saral/Altika altimetric data, Dhote et al. [2020] build simple rating curves at 4 virtual stations. For backwater affected river reaches, hence reaches with stage-discharge hysteresis, the method of Paris et al. [2016] uses WS slopes estimated from altimetric data to constrain the discharge estimation. Indeed, WS slope enables to measure the signatures triggered by transient flow effects and potential variable backwater from downstream conditions. WS slope is required in the so-called Stage-Fall-Discharges (SFD) law that is adapted to reaches with variable flow energy slope - see bibliography and SFD investigations using a Bayesian method with in situ data in Mansanarez et al. [2016] and with fine-scale hydraulic model outputs in Mansanarez et al. [2019].

1. <http://hydroweb.theia-land.fr>

However, an accurate WS slope estimation using altimetric data only remains difficult, because of measurements spatio-temporal sparsity and errors. Their physical extrapolation in space and time can be leveraged by using a fine river network flow model. Indeed, recent progress have been made in fine river network flow modeling using/assimilating multi-satellite data (e.g. [Paiva et al. \[2013b\]](#), [Schneider et al. \[2018\]](#), [O’Loughlin et al. \[2020\]](#), [Garambois et al. \[2020\]](#), [Pujol et al. \[2020\]](#), [Fleischmann et al. \[2020\]](#)). These models enable a fairly good fit to the altimetric data (e.g. [O’Loughlin et al. \[2020\]](#), [Pujol et al. \[2020\]](#) respectively on the Congo and Amazon basins) and simulating realistic hydraulic signatures. Those have seldom been used to estimate stage-fall-discharge laws with simulated WS slopes, including at newly acquired virtual stations. Moreover, investigating simulated WS slope signatures at fine scale, in relation to river segmentation scales and hydraulic controls (cf. [Montazem et al. \[2019\]](#)), is relevant given the hydraulic visibility [[Garambois et al., 2017](#)] expected from the future SWOT mission at relatively long spatial wavelength for the slope terms especially for low slope rivers [[Rodríguez et al., 2020](#)]. A new method is presented here for deriving SFD laws from flow signatures simulated by a fine river network model in coherence with multi-satellite data, and using Bayesian optimization.

Reaching consistency between the hydraulic signatures simulated by a river network model and sparse multi-satellite data is crucial to take advantage of their informative content. This can be achieved via data assimilation techniques. Recent studies investigate the assimilation of WS observables for hydraulic modeling and parameter inference, with sequential or variational methods (see review in [Biancamaria et al. \[2016\]](#)).

Concerning sequential methods, in [Paiva et al. \[2013b\]](#), the ensemble Kalman filter is applied to correct discharges simulated by the MGB large scale hydrological model over the Amazon basin via the assimilation of ENVISAT WS anomalies at 212 virtual stations. They also experiment the use of in situ discharge data from 109 gauges or altimetric discharge from 287 virtual stations from [Getirana and Peters-Lidard \[2013\]](#). [Emery et al. \[2018\]](#) introduced a spatial localization treatment in the Kalman filter for correcting the storage and discharge of the ISBA-CTRIP model of the Amazon basin via the assimilation of discharges obtained with the altimetric rating curves of [Paris et al. \[2016\]](#) at 368 ENVISAT virtual stations. They point out the low temporal sampling of the ENVISAT data and the potential interest of combining multi-mission data, confirmed in [Emery et al. \[2020\]](#). In [Brêda et al. \[2019\]](#), a hydraulically-based variance and covariance is introduced in the Ensemble Kalman filter method to assimilate multi-mission altimetry data in the MGB model and correct the effective river bathymetry.

The Variational Data Assimilation (VDA) approach (e.g. [Cacuci et al. \[2013\]](#) and references therein) used in the HiVDI inverse method [Larnier et al. \[2021\]](#) is well-suited to accurately infer hydraulic parameters of dynamic models (see [Brisset et al. \[2018\]](#), [Oubanas et al. \[2018\]](#), [Larnier et al. \[2021\]](#) with synthetic SWOT data and [Tuozzolo et al. \[2019\]](#), [Garambois et al. \[2020\]](#), [Pujol et al. \[2020\]](#) also considering real data). It consists in fitting the hydraulic model response to observed WS variations by optimizing, in a variational framework, parameters among in/outflows, channel bathymetry and friction. Recall that the simultaneous inference of all those flow controls in a shallow water model from WS observables only is an ill-posed inverse problem because of their correlated influence on WS (cf. [Larnier et al. \[2021\]](#)). Inferable channel parameters patterns but also inferable discharge frequencies given data spatio-temporal sparsity are investigated in [Brisset et al. \[2018\]](#) and [Larnier et al. \[2021\]](#) from synthetic SWOT data (dense in space) and in [Garambois et al. \[2020\]](#) and [Pujol et al. \[2020\]](#) using ENVISAT or synthetic SWOT data. Hydraulic model construction from multi-satellite data and simultaneous inference of discharge and channel parameters using VDA is investigated on ungauged rivers in the Amazon basin in [[Garambois et al., 2020](#), [Pujol et al., 2020](#)]. A 71 km braided portion of the Xingu River with a single inflow [[Garambois et al., 2020](#)] and a 800 km long reach of the Negro River with multiple inflows from MGB model [Pujol et al. \[2020\]](#) are studied with the DassFlow 1D hydraulic model [[Brisset et al., 2018](#)] and the HiVDI inverse method [[Larnier et al., 2021](#)].

Meaningful hydraulic signatures are obtained with a fairly good fit to altimetry data in [Pujol et al. \[2020\]](#) on a long and nearly ungauged river portion using a hydrological-hydraulic approach calibrated with VDA (DassFlow). This

approach is therefore adequate to simulate fine hydraulic variability from sparse multi-satellite data and extrapolate SFD laws at any virtual station, including newly acquired ones.

Optimally combining sparse multi-mission altimetry data with a coupled hydrological-hydraulic model of river network via VDA is newly investigated here. Besides, it is newly addressed that the physically meaningful and "satellite compatible" flow signatures obtained, including WS slopes, enable to extrapolate altimetric SFD laws at any virtual station on the spatio-temporal domain.

In order to allow operational estimation of discharge from altimetry data, the present contribution proposes a rigorous methodology to estimate SFD laws amenable to sparse multi-mission altimetry data and reaches affected by variable friction slope. The proposed method is based on a river network hydraulic modeling performed with DassFlow-1D using inflows from the large scale hydrological model MGB, and calibrated on multi-mission altimetric data using VDA. A general SFD law is used and its parameters are estimated from altimetric data and hydraulic model outputs, including multi-scale WS slopes and discharge. These parameters are computed using a MCMC (Markov Chain Monte Carlo) algorithm that also enables to estimate the uncertainty (following Paris et al. [2016], Le Coz et al. [2014], Mansanarez et al. [2019]),

The method is applied on the Negro-Branco river network located in the Amazon basin and representing a challenging case including anabranching reaches, confluences and backwater affected reaches. The multi-satellite dataset contains altimetric data from Jason-3 and Sentinel-3A and -3B and covers the period from February 2016 to May 2019.

The added value of using model derived WS slopes to estimate rating curve parameters is investigated along with the link to "hydraulic geometry" coefficients and their spatial variations. The extrapolation of discharge outside the altimetry calibration set is tested.

The paper is structured as follows. Section 2.2 presents the different flow models and how they are calibrated. Section 2.3 introduces the study zone, the multi-satellite data and the different hydrological quantities computed by the river network flow model. Section 2.4 presents the numerical experiments and their results, and Section 2.5 is dedicated to discussions.

2.2 Flow models and observables

This section presents the flow models and the inverse method for integrating multi-satellite data and deriving hydraulically meaningful flow lines, WS slopes and SFD relationships over a river network domain. The method is based on the following: (i) the 1D Saint-Venant river network flow model weakly coupled to the MGB hydrological model to account for spatially distributed hydrological fluxes, (ii) the computational inverse method HiVDI (see Brisset et al. [2018], Larnier et al. [2021]) enabling to calibrate the hydraulic model (of a large river network here) on multi-satellite data (see e.g. Pujol et al. [2020]), (iii) the SFD laws enabling to estimate discharge by taking into account (iv) the uncertainties from satellite data and the outputs of the hydrodynamic model. These components of our method are introduced in this section in the same order.

2.2.1 River network flow model

A river network domain Ω is described by connected close-line segments. For a flow cross-section orthogonal to the main (longitudinal) flow direction of curvilinear abscissa $x \in \Omega$ (distance from downstream), at time $t \in [0, T]$, let $A(x, t)$ be the flow cross-sectional area [m^2] and $Q(x, t)$ the discharge [$m^3.s^{-1}$] such that $Q = UA$ with $U(x, t)$ defined as the longitudinal cross-section averaged velocity [$m.s^{-1}$]. The 1D Saint-Venant equations in (A, Q)

variables at a flow cross-section write as follows:

$$\begin{cases} \partial_t A + \partial_x Q & = k_{lat} q_{lat} \\ \partial_t Q + \partial_x \left(\frac{Q^2}{A} \right) + gA \partial_x Z & = -gAS_f + k_{lat} U q_{lat} \end{cases} \quad (2.1)$$

where $Z(x, t)$ is the WSE [m] and $Z = (z_b + h)$ with $z_b(x)$ the river bed level [m] and $h(x, t)$ the water depth [m], g is the gravity magnitude [$m.s^{-2}$], $q_{lat}(x, t)$ is the lineic lateral discharge [$m^2.s^{-1}$] and k_{lat} is a lateral discharge coefficient chosen equal to one here since we consider inflows only.

The friction term S_f is classically parameterized with the empirical Manning-Strickler law established for uniform flows $\frac{|Q|Q}{K^2 A^2 R_h^{4/3}}$ where K is the Strickler coefficient [$m^{1/3}.s^{-1}$], $R_h(x, t) = A/P_h$ the hydraulic radius [m], $P_h(x, t)$ the wetted perimeter [m].

Let us recall the Froude number definition $Fr = U/c$ which compares the cross-section averaged flow velocity U to pressure wave celerity $c = \sqrt{\frac{gA}{W}}$ [$m.s^{-1}$] where W is the flow top width [m].

The Saint-Venant equations (2.1) are solved on each segment of the river network and the continuity of the flow between segments is ensured by applying an equality constraint on water levels at the confluence between two segments.

Boundary conditions are classically imposed (subcritical flows here) at the boundary nodes with inflow discharges $Q(t)$ at upstream nodes and WSE $Z(t)$ at downstream node; lateral hydrographs $q_{lat}(t)$ at in/outflow nodes. The initial condition is defined as the steady state backwater curve profile $Z_0(x) = Z(Q_{in}(t_0), q_{lat,1..L}(t_0))$ for hot-start. This 1D Saint-Venant model is discretized using the classical implicit Preissmann scheme (e.g. Cunge [1980]) on a regular grid of spacing Δx using a double sweep method enabling to deal with flow regimes changes with a one-hour time step Δt . This is implemented in the DassFlow computational software [Monnier et al., 2018].

2.2.2 The computational inverse method

The inverse method employed here to calibrate the spatially distributed friction against altimetric data is the VDA method presented in Larnier et al. [2021]. The principle of this inverse method is to estimate the (discrete) flow controls that minimize the discrepancy between the observed and simulated flow lines, Z_{obs} and $Z(k)$ respectively, the latter depending on the unknown parameters vector k through the hydrodynamic model described in the section 2.2.1. In this study, the control vector consisting in spatially distributed friction patches is $k = (K_1, \dots, K_N)^T$ as done in Garambois et al. [2020], Pujol et al. [2020] and proposed in 2D in Monnier et al. [2016]. The water level discrepancy is measured with a classical quadratic cost function:

$$j(k) = \sum_{p=1} \sum_{n=1} (Z(k; x_n, t_p) - Z_{obs}(x_n, t_p))^2 \quad (2.2)$$

From now, p denotes the index of the satellite overpass, n denotes the index of a virtual station and the $N + 1$ virtual stations divide the river in N patches.

The calibration consists in finding an optimal control vector such that: $k^* = \arg \min_k j(k)$. This minimization problem is solved using the L-BFGS-B algorithm presented in Gilbert and Lemaréchal [1989] and available in the python library `scipy.optimize`². It is a Quasi-Newton descent algorithm requiring the evaluation of the cost function gradient $\nabla j(k)$ that is computed by solving the adjoint model; the latter is obtained by automatic differentiation

2. see the documentation of the minimize function of the `scipy.optimize` library and its implementation of the LBFGS algorithm in <https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/optimize.minimize-lbfgsb.html>

using Tapenade software [Hascoet and Pascual \[2013\]](#). The misfit between the model outputs and the observations is measured with (2.2). The Morozov discrepancy principle is applied to avoid overfitting of the model and reaching a misfit below measurement error, which order of magnitude is roughly 10cm for our altimetric data. The stopping criteria are based on the evolution of the cost function (relative difference between the costs at two consecutive optimization iterations less than 2×10^{-9}) and the maximum of its gradient ($\max(\nabla j(k)) \leq 1$). The VDA method is used for the calibration of the flow control vector and leads to physically meaningful flow lines that goes through a noisy altimetric data cloud.

2.2.3 Stage-Fall-Discharge laws

This section proposes SFD laws adapted for operational discharge estimations from satellite altimetric data and river network model outputs.

In the case of a locally variable friction slope, and hence a stage-discharge hysteresis, SFD approach is commonly applied to estimate discharge from WS observations including WS slope (cf. [Mansanarez et al. \[2016\]](#), [Paris et al. \[2016\]](#)). Indeed, WS slope enables to measure signatures triggered by combinations of hydraulic controls: unsteady boundary conditions and backwater effects at confluences for instance - see signatures analysis in a satellite context in [Garambois et al. \[2017\]](#), [Montazem et al. \[2019\]](#), [Garambois et al. \[2020\]](#), [Pujol et al. \[2020\]](#) with multiple inflows.

A simple and rigorous framework is proposed here to derive SFD relationships using physically meaningful flow lines and slopes simulated with a hydrodynamic model integrating sparse multi-satellite observations of river networks. The optimized hydrodynamic model can be seen as a powerful spatio-temporal interpolator/extrapolator of sparse multi-satellite and in situ data considering river flow physics. It enables to extrapolate in space and time fine hydraulic signatures, which can be triggered by combinations of hydraulic controls, on the river domain and provide meaningful constrains for SFD laws written here.

2.2.3.1 From flow resistance to SFD

The discharge of gradually varied flows (cf. [Chow \[1964\]](#)) can be locally (at a cross-section) related to the friction slope as:

$$Q = \kappa S_f^{1/2} = \prod p_i^{\alpha_i} \quad (2.3)$$

with κ the conveyance (e.g. [Dingman \[2009\]](#)). The conveyance is inversely proportional to a friction parameter ρ ($p_1 = 1/\rho$) and proportional to the product of flow parameters p_i with the corresponding exponent α_i as written in [Rodríguez et al. \[2020\]](#). Note that an infinity of empirical parametrizations of flow resistance could be possible such as Chezy or Manning-Strickler ones for open channel flows (classical parameters values are recalled in the appendix, see Tab. 2.8).

Out of the inflow points and under the low Froude assumption in a satellite altimetry context ([Garambois and Monnier, 2015](#)), typically $\text{Fr} < 0.3$), the momentum equation in the system (2.1) reduces to an equality between the WS slope $S = -\partial_x Z$ and S_f which combined to Manning-Strickler parametrization (see Sec. 2.2) under steady state gives the low Froude equation:

$$Q = K A R_h^{2/3} S^{1/2} \quad (2.4)$$

Low Froude discharges will be denoted Q_{lFr} in the following. For rivers with large width-to-depth ratio and assuming rectangular cross-sections, the above expression simplifies in $Q = KW h^{5/3} S^{1/2} = KW (Z - b_{lFr})^{5/3} S^{1/2}$ with W the river top width, h and Z respectively the flow depth and level, b_{lFr} the effective river bottom elevation in the low Froude model. The low Froude model under the wide rectangular cross-sections assumption can be

generalized into a SFD law:

$$Q = \alpha W^\beta (Z - b_{sfd})^\gamma S^\delta \quad (2.5)$$

This SFD law enables to deal with stage-discharge hysteresis and is amenable to satellite observables. Note that with $\beta = 1$, $\gamma = 5/3$ and $\delta = 0.5$, the general SFD defined by (2.5) corresponds to a low Froude model assuming wide rectangular cross-sections. Parameters of the general SFD model will be calibrated in the following using hydrodynamic model outputs integrating sparse satellite altimetry data and optical water masks. This river network model enables to simulate the required hydraulic quantities Q and S , even outside the sparse spatio-temporal sample of altimetry data used for calibration. SFD discharges will be denoted Q_{sfd} in the following - note that β is set to 1 or 0 and some/all the other parameters will be optimized.

Note that SFD are estimated in [Mansanarez et al. \[2016\]](#) in a situ measurements context using piecewise SFD laws to handle the transition to backwater affected regime, and in [Paris et al. \[2016\]](#) in a satellite altimetry context without fine WS slope estimates. The present method uses a generalized SFD law and flow signatures from a hydrodynamic network model enabling to continuously handle flow conditions and non-linearities over a river network.

2.2.3.2 Computation of SFD laws coefficients

The coefficients of a SFD power law (2.5) can be computed at a point where the discharge and the flow vein features are known at times t_p , $p \in [1, \dots, P]$ using optimization. One can choose to optimize more or less parameters depending on channel-flow complexity for instance (see Sec. 2.4.1.1).

Let η be a subset of the set of parameters $\{\alpha, \gamma, \delta, b_{sfd}\}$. The goal is to find optimal SFD coefficients that satisfy $\eta^* = \arg \min_{\eta} \epsilon(\eta)$ with ϵ the quadratic error between the discharge computed using a SFD law (2.5) Q_{sfd} and a target discharge Q such that: $\epsilon(\eta) = \sum_{p=1}^P (Q(t_p) - Q_{sfd}(S, Z_{obs}, W; t_p; \eta))^2$.

In the context of discharge estimation using WS elevations from altimetric data, the target discharge and the slope are the outputs of the river network model (see Sec. 2.3.3 and Sec. 2.3.1).

This optimization can be performed as long as the system to resolve is over-determined, i.e. when there are more observations than parameters ($\#\eta \leq P$). Depending on the unknown SFD parameters in η embedded in the SFD expression that is a product, the optimization problem is more or less difficult.

To compute SFD parameters and uncertainties, a widely used Bayesian inference method is chosen: the Monte-Carlo Markov Chain (MCMC, see e.g. [Gelman et al. \[2013\]](#)) algorithm. Bayesian inference seeks to find the distribution of $p(\eta|Q)$ in our context. An MCMC algorithms enables to sample distributions using a Markov chain and its properties. The MCMC algorithm being based on the construction of a sampled distribution sequence, the algorithm has to be initialized and input and target distribution types chosen.

First, the distribution of the discharge is assumed to be normal of mean $\mu_Q = Q_{sfd}(\eta)$. The advantage of using stochastic algorithms instead of deterministic algorithms is that the target is a distribution. Hence, the standard deviation of the desired distribution provides an estimate of the uncertainty of the SFD relationship. If the uncertainty on the observations and on the SFD law parameters are known, the standard deviation of the desired distribution can be set by the user. However, when a part of the uncertainty is unknown, the expression of the standard deviation of the distribution can be specified and coefficients of the expression can be added as parameters to infer. [Le Coz et al. \[2014\]](#) discusses the use of affine standard deviations written $\sigma_{sfd} = \sigma_1 Q + \sigma_2$ and such standard deviations are used in [Mansanarez et al. \[2016\]](#), assuming a constant standard deviation at low flows and linear at higher flows. We also use the same affine standard deviation and add σ_1 and σ_2 in the set of SFD parameters to be estimated using the MCMC algorithm.

Initial, prior distributions of the parameters are needed for the initialization. In [Mansanarez et al. \[2016\]](#), estimates of the parameters of the affine standard deviation are provided from (in situ) measurements and the estimation of

the measurements error provides uncertainties. However, in the present ungauged context, we do not have such estimates for our coefficients and for the uncertainties. Hence, we use uniform distributions with parameters defining relatively wide intervals not to be restrictive (see Tab. 2.1). For the coefficients β , γ , δ and b_{sfd} , the uniform law is centered around the value given by the Manning-Strickler equation (2.4) and the boundaries are given by the experience (mostly, negative coefficients must be avoided). For the coefficient α , the support is wider to compensate the other parameters. As for the other parameters, the prior distributions of the standard deviation σ_1 and σ_2 are set uniform on a very large interval since no estimates are known.

parameter	α	γ	δ	b_{sfd}	σ_1	σ_2
distribution	$\mathcal{U}(0, 10^{16})$	$\mathcal{U}(0, \frac{10}{3})$	$\mathcal{U}(0, 1)$	$\mathcal{U}(z_b - 1.5, z_b + 1.5)$	$\mathcal{U}(0, 10^6)$	$\mathcal{U}(0, 10^6)$

Table 2.1 – Parameters of the SFD law (2.5) and associated prior distributions.

The MCMC provides a sampled distribution of the different parameters. The parameters are then estimated from this discretized distribution by the Maximum A Posteriori (MAP, see e.g. Gelman et al. [2013]) estimation of the expected value.

The choice of the subset η (i.e. the sought parameters of the SFD law (2.5)) and the estimation of the slope are explored in the following.

2.3 Study zone and calibrated river network model

The study zone consists of a real branched river network in the Amazon basin for which are available a large scale hydrological model and a rich multi-satellite dataset composed of multi-mission altimetric data and optical observations. An effective river network hydraulic model is set up in coherence with both hydrological fluxes and satellite observations of river surface deformations. This model will then be used as spatio-temporal extrapolator of hydraulic variables, especially slope and discharge. This extrapolation will enable to compute SFD law's coefficients (as in Sec. 2.2.3.2) and hence to estimate the discharge on the river network domain.

2.3.1 Study area and multi-satellite data

The Negro-Branco River network

This river network has to be chosen because of its size, complexity and satellite observability.

We focus on one of the major rivers in the Amazon basin and in the world, the Negro River. We consider the reach that is upstream of the city of Manaus (where the Negro River encounters the Solimoes River to form the Amazon River) up to Sao Gabriel da Cachoeira (860km long reach). We also consider its major tributary the Rio Branco (548km long reach) up to Boa Vista. The other tributaries are included as lateral inflows (see yellow circles on Fig. 2.2).

Note that the confluence with the Solimoes river triggers strong backwater controls, mostly affecting the downstream part of this river network (see analysis in Montazem et al. [2019], Pujol et al. [2020]).

At their upstream point, the drained area of the Rio Negro and Rio Branco are respectively around 209000km² and 9700km². At the Negro-Branco confluence, the area drained by the network is about 596000km² while it reaches 704000km² downstream at Manaus.

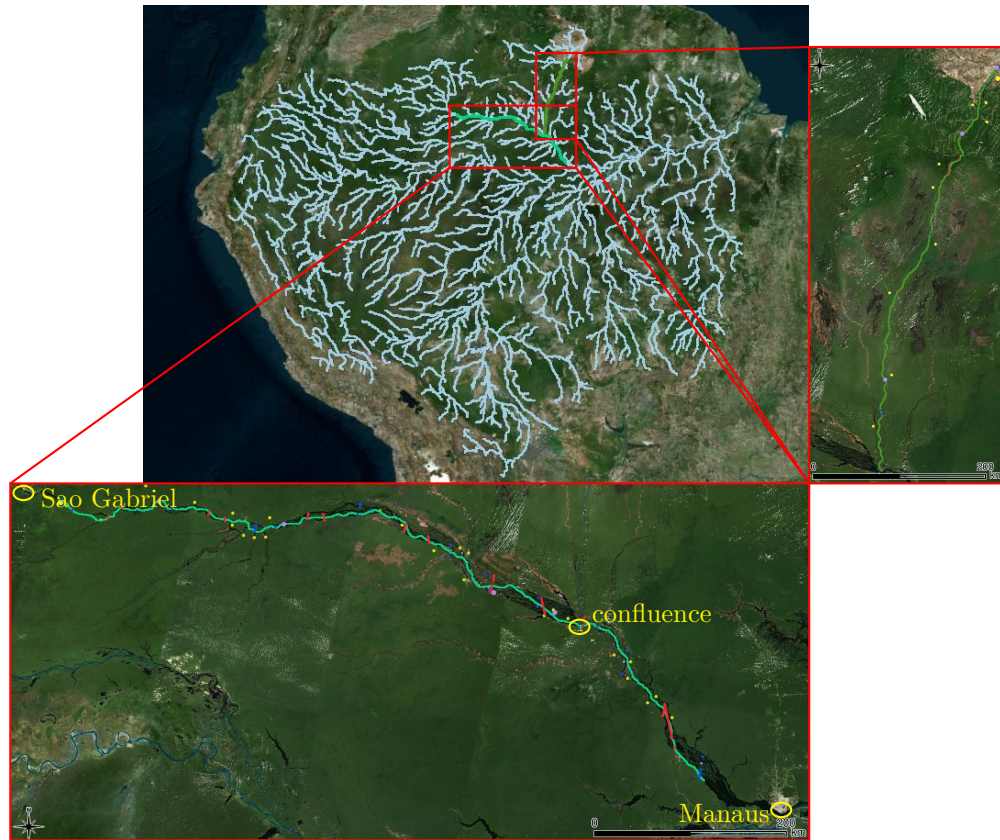


Figure 2.2 – Study zone and observability: the Negro-Branco River network in the Amazon basin with hydrological inflow points in yellow, and multi-mission virtual stations locations - S3A stations in blue, S3B stations in red and J3 stations in purple.

Altimetric data

The used multi-satellite database of WSE is composed of altimetric observations of Jason-3 (J3), Sentinel-3A and -3B (S3A and S3B) satellites.

The satellite J3 orbit provides data every 10 days while the satellites S3A and S3B provide data every 27 days. Two consecutive tracks are separated at the equator by 160km for J3 and 100km for S3A and S3B. The intersections between the satellite tracks and the river define the virtual stations (VS), respectively 7, 22 and 22 with J3, S3A and S3B ground tracks (see VS on 2.2).

These data cover a time window between March 2016 and September 2020 and the space time representation (see Fig. 2.3) highlights the observed flow signatures variabilities: typical inter-annual variations with seasonal floods in this tropical hydrological regime (the highest flow is around $t = 1200$ days and the lowest around $t = 600$ days). This map also illustrates the sparsity of the data that is reduced considering multi-missions satellite data. However, the spatio-temporal resolution is still insufficient to compute accurate reach scale WS slopes (especially on the Rio Branco which presents a North-South pattern with comparatively less intersections with satellite ground tracks). A drawback of using multi-mission datasets lies in the difficulty to estimate accurate inter-mission biases. A rough estimate of this bias is obtained by comparing the time series at cross-overs and is applied to the altimetric data to ensure the compatibility from one VS to another.

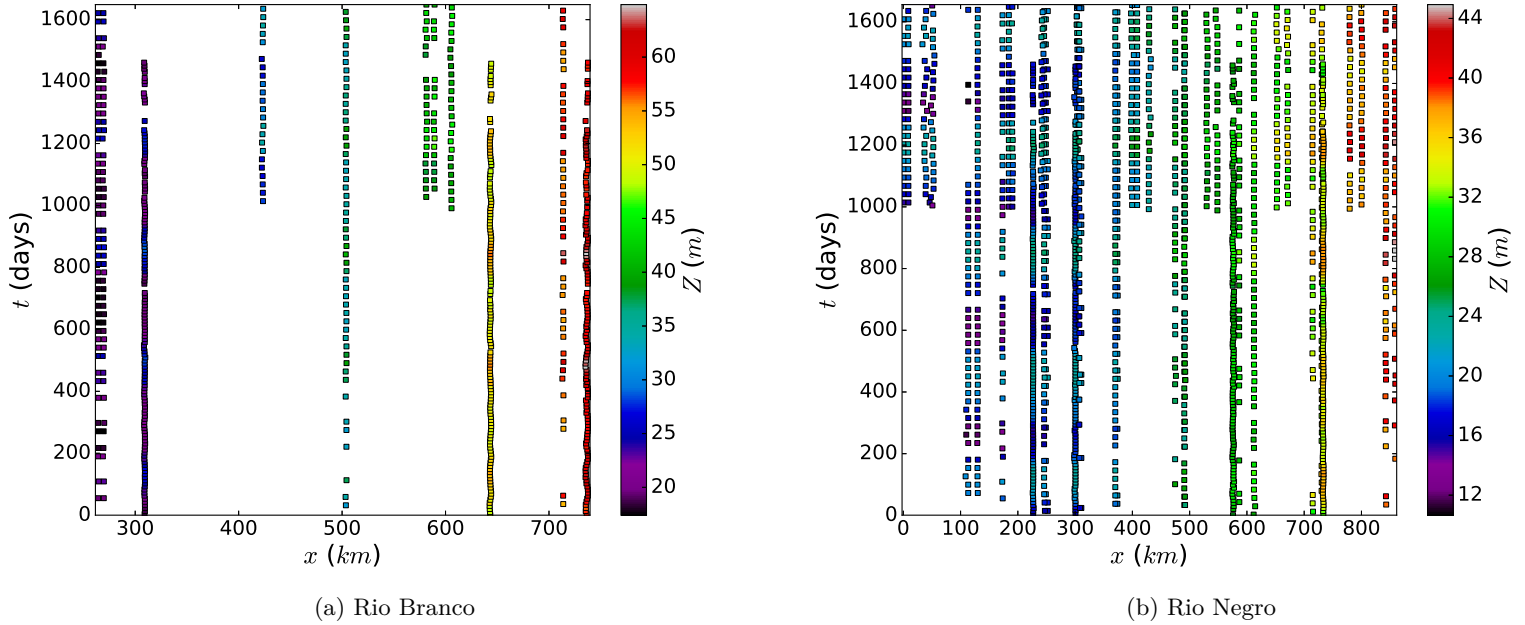


Figure 2.3 – Time and space map of the free surface elevation from multi-mission altimetric observability. The J3 stations are recognizable by the temporal density of the data at a station ($x \approx 300\text{km}$ on the Rio Branco for example) and the S3B stations by the beginning of the mission around $t = 1000\text{days}$ ($x \approx 600\text{km}$ on the Rio Branco for example).

River width

In order to build an effective hydraulic model, longitudinal river width variations are estimated (as in Pujol et al. [2020]) at each VS using the Peckel water mask (see Pekel et al. [2016] and Fig. 2.2). For anabranching river sections, the effective width consists in the sum of the top width of all channels at the virtual station.

2.3.2 Construction of the hydrodynamic model

In order to estimate the spatio-temporal variations in discharge and WSE from the Saint-Venant flow equations (2.1), one needs to provide boundary conditions and channels parameters. That is here (fluvial flows) an estimation of the upstream inflow discharge hydrograph, the lateral inflow discharge hydrographs and the downstream water level, as well as river channel bathymetry and friction. Recall from Sec. 2.2.1 that the initial condition is set as the steady state backwater curve profile, the uneven spatial step $\Delta x \approx 200\text{m}$ and the time step $\Delta t = 1\text{h}$. Given the multi-satellite dataset of WSE and width longitudinal profile, an effective 1D hydraulic model is set up on the Negro-Branco River network, including anabranching portions, following the methodology proposed in Pujol et al. [2020].

Hence, the model consists in (i) a 1D Saint-Venant model (2.1) applied here on a large branched network (ii) based on effective cross-sections defined from multi-satellite data and (iii) inflowed by the large scale hydrological model MGB (see Collischonn et al. [2007], Paiva et al. [2013b], Pontes et al. [2017]).

Hydrology-hydraulics setup (MGB-DassFlow network):

The hydraulic model is inflowed with MGB time series at daily time step upstream of the river domain (2 inflows) and at 24 tributaries for the Negro River and 9 tributaries for the Branco River. These inflows correspond to the 35 catchment cells inflowing the Negro-Branco river network cells in the large scale hydrological model MGB (see Collischonn et al. [2007], Pontes et al. [2017]). In our hydraulic model DassFlow, only inflows are considered in this study. Some relatively small negative discharge (698 negative values over 45804 values and on 13 of the tributaries) values are thresholded to 0. This is a reasonable hypothesis given small outflows (locally the highest outflow is less than 4.9% of the minimal discharge in the main channel) and because the scope is not to study the hydrological functioning of the basin but effective SFD laws inference in relation with hydraulics controls. These daily time series cover the time window between mid March 2016 and end of September 2020.

Effective 1D river channels construction

An effective 1D river channel is built from the available multi-satellite data (altimetry and width) at virtual stations following Garambois et al. [2017] and Pujol et al. [2020]. The cross-section shape is rectangular which is a reasonable hypothesis given the high width-to-depth ratio of the Negro River (see Latrubesse and Franzinelli [2005]). The effective cross-sections width W is imposed at virtual stations from the top width measured from the (optical) water mask presented above.

The unknown channel bottom elevation z_b in (2.1) or equivalently b_{sfd} in (2.5) is obtained following Pujol et al. [2020] using the effective bottom elevations from altimetric discharge laws (see Paris et al. [2016]) with $\beta = 0$ and $\delta = \frac{1}{2}$ in the SFD law (2.5). The calibration of the hydraulic model is done using the WSE Z_{obs} (at every VS and on a time window between March 2016 and 1st January 2019, see Fig. 2.3) and the discharge computed by MGB (see previous paragraph). Hence, a reference bathymetry z_b is obtained at the altimetric virtual station/satellite scale.

Due to the lack of information out of the VS at the scale of current altimetric data, the channel shape is linearly interpolated in-between the VS in order to provide an effective channel geometry in the network. It contains the required complexity, including stage-discharge hysteresis, given the scope of this paper. This complexity is enough for a meaningful hydraulic calibration and for deriving SFD laws, at any VS located in the river network domain Ω and time window, using hydraulic signatures (see slopes in Fig. 2.4).

Effective friction calibration from multi-mission altimetry

A calibration of the river network model is performed in order to fit it as well as possible to the altimetric observations. The river network model (2.1) is inflowed with MGB discharge time series. Its downstream boundary condition is set using the water level time series from the most downstream altimetric VS. The model is fitted on altimetric data at virtual stations using the inverse method explained in section 2.2.2. The control vector consists in spatially distributed friction coefficients as done in Garambois et al. [2020], Pujol et al. [2020]. Constant friction patches are defined for each reach in-between two consecutive virtual stations (dashed lines on Fig. 2.4) to avoid over-parameterization while having enough free parameters to fit spatially distributed altimetric time series. Hence, the control $k = (K_1, \dots, K_N)$ is composed of constant Strickler friction coefficients on the N patches of the river domain defined in-between the N altimetric virtual stations that will be considered for the calibration of the hydrodynamic model. The time period considered for calibration consists in the 117 first days corresponding to a wide range of flow regimes. This time window implies that the calibration is performed on the S3A and J3 data (resp. blue and green dashed lines on Fig. 2.4, 29 virtual stations and not using the S3B data, cyan dashed lines

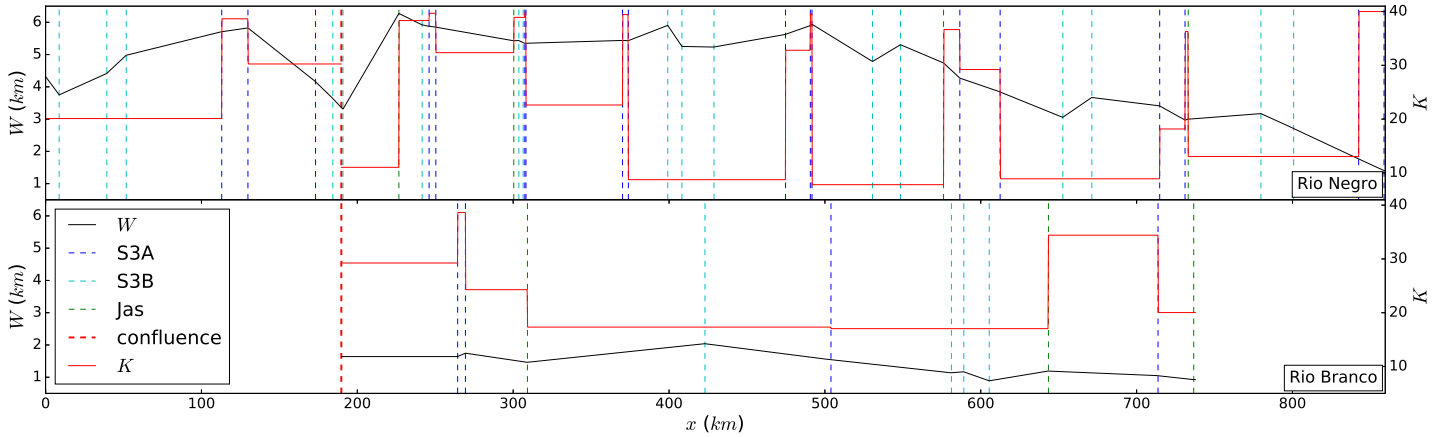


Figure 2.4 – Spatial patterns of channel parameters of the river network hydraulic model: width W determined from water extent images, Strickler friction coefficient K calibrated against altimetric data (control points at the virtual stations). The dashed vertical lines are the location of the VS (blue and cyan for resp. Sentinel-3A and -3B, and green for Jason-3) and the location of the confluence of the Negro-Branco river network (in red).

on Fig. 2.4). The optimal Strickler coefficients (red lines on Fig. 2.4) are consistent with usual values (between 5 and 40) and especially those found in Pujol et al. [2020] on the Negro River with ENVISAT data. Note that in the present case, a calibration over the whole first year, that is including annual flood propagation and recession dynamics, leads to a similar friction pattern. Hence the simulated hydraulic variabilities include similar hysteresis and the slope profiles are very similar. Finer altimetric datasets with unstationary estimates of data uncertainties would be needed to perform more advanced calibrations.

2.3.3 Space-time simulation of hydraulic quantities with the river network model

The set of coefficients η of a SFD law (2.5) is calibrated using the MCMC calibration method presented in Sec. 2.2.3.2, considering the WSE time series of Z_{obs} at a given satellite virtual station, the target discharge Q_{sw} , and the WS slope S of the river network model at satellite observation times.

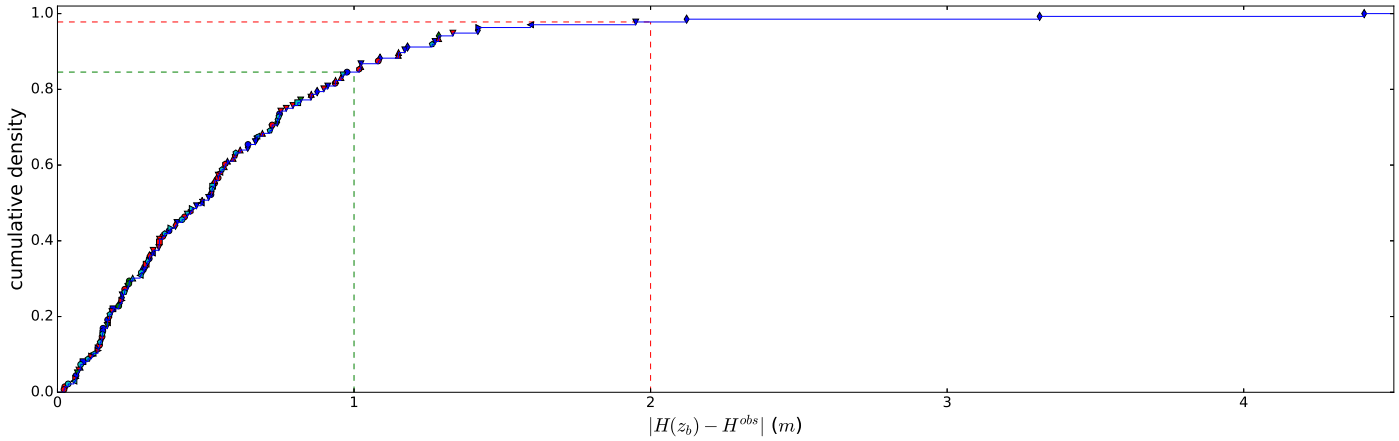
As a matter of facts, accurate discharges and slopes are hardly inferable at fine scale from satellite altimetry data only. Indeed, the spatio-temporal sparsity of altimetric data prevents to estimate accurate slopes which may be insufficient to capture the influence of hydraulic controls (see Sec. 2.3.1 and Fig. 2.3).

Moreover, we seek a method that is easily adaptable if new satellite or in situ measurements are available.

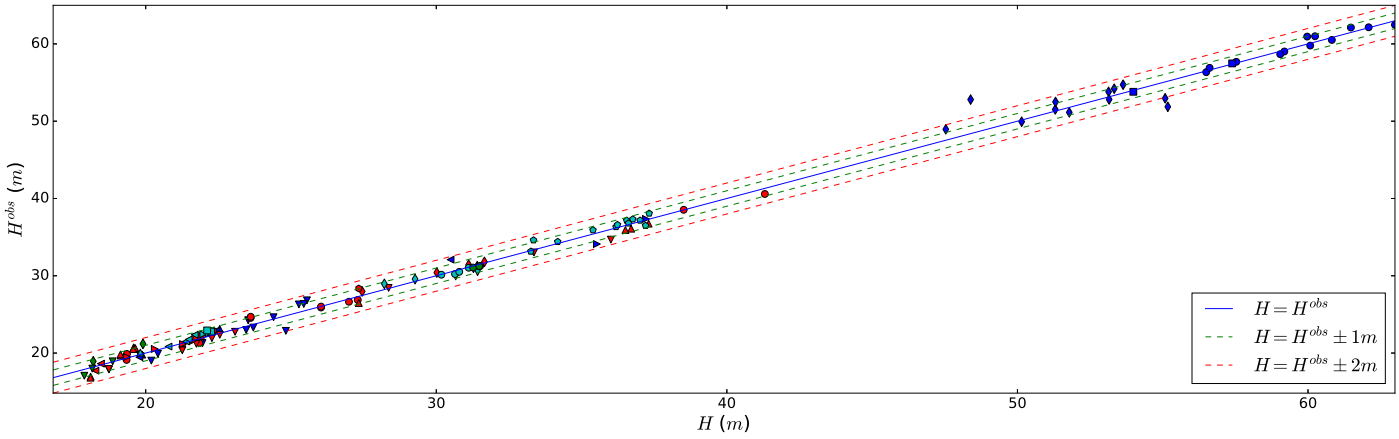
Those missing hydraulic quantities can be extrapolated from the calibrated hydraulic model (see Sec. 2.2.1) at any time given hydrological forcings and at each numerical node over the whole river network domain. It enables to simulate, physically meaningful WSE, slopes and discharges in coherence with both altimetric observations and hydrological inflows.

The hydraulic quantities simulated by this river network model are analyzed here. Such a hydrological-hydraulic model of a river network, integrating multi-satellite altimetry data via assimilation, can be viewed as a powerful spatio-temporal extrapolator.

2.3.3.1 Hydraulic quantities from the calibrated river network model



(a) Cumulative density of the absolute error.



(b) Calibrated model output vs observation.

Figure 2.5 – Comparison of simulated and observed water surface elevations at virtual stations on the whole dataset using the calibrated river network model. For each VS station a different symbol is used, in blue for the Rio Branco, in green for the downstream segment of the Rio Negro and other colors for the upstream segment of the Rio Negro.

The WSE Z_{sw} simulated with the calibrated river network model are relatively close to the altimetric observations Z_{obs} (see Fig. 2.5): the average difference is about 53cm and on the bottom of Fig. 2.5, more than 80% of the points are within the interval $Z_{obs} \pm 1m$. Moreover, just a few points are out of the interval $Z_{obs} \pm 2m$. Fig. 2.5 highlights that the Z_{sw} out of the interval $Z_{obs} \pm 1m$ are mostly on the Rio Branco and especially at one particular virtual station (denoted by a blue rhombus on Fig. 2.5).

These errors are consistent with those found in other studies (e.g. Pujol et al. [2020], O’Loughlin et al. [2020]) and recall that between 0.2 and 1.5 m height error are often reported for altimetric data over rivers (e.g. Silva et al. [2010], Ricko et al. [2012], Schwatke et al. [2015], Kittel et al. [2021]). Moreover, these errors have been reduced for last generation satellites.

The flow modeling errors stem from the following uncertainty sources: (i) the modeling hypothesis with respect to real flow physics, (ii) inflow discharges from the regionalized MGB hydrological model, (iii) simplified channel geometry, (iv) satellite data errors.

Note that on the figures 2.7, the river network model seems to underestimate the WSE in comparison with the observations, which may come from the calibration time window. For example, the misfits of more than $2m$ between some simulated and observed WSE are all located at one station denoted by blue rhombus on the figures 2.5 (located on the Rio Branco at $x = 643km$) and may stem from combined uncertainties (as previously mentioned). Finally, the calibrated hydraulic network model can be seen as a way to get physically meaningful flow lines that go through a noisy altimetric data cloud.

The simulated outputs of the river network model contain real-like flow complexities such as stage-discharges hysteresis, as shown on the left of Fig. 2.7 for some virtual stations. It illustrates the hysteresis from the Z_{sw}, Q_{sw} hydraulic model outputs, which stems from variable backwater effect or transient flow. Recall that our hydraulic network model is inflowed with 37 discharge hydrographs representing different temporal signals of mass input that can be responsible for complex upstream-downstream propagation of information and corresponding WS signatures (cf. analysis in Pujol et al. [2020] on the Negro River). For example, the inflow signal from a tributary can be out of phase with the one of its confluent and responsible for variable backwater as it is the case downstream of the Negro River as highlighted on Fig. 2.7a downstream of the Negro River at $x = 250km$. Figure 2.6 summarizes the spatio-temporal variability of the flow lines simulated on the two river network branches along with inflow points and confluence location.

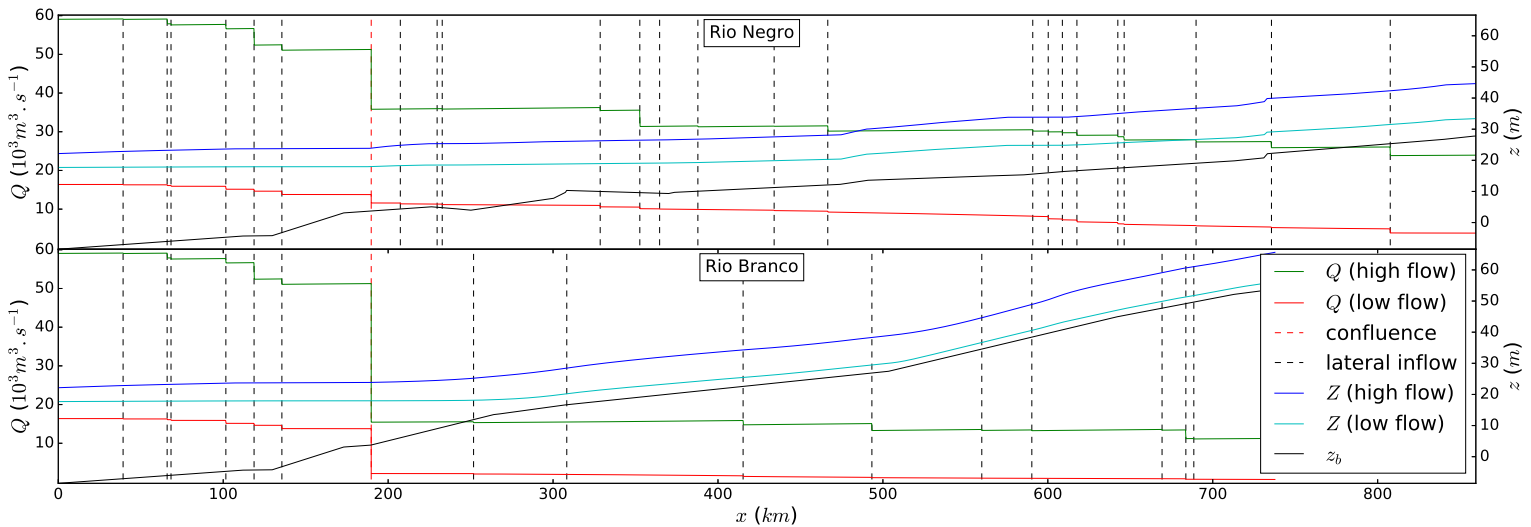
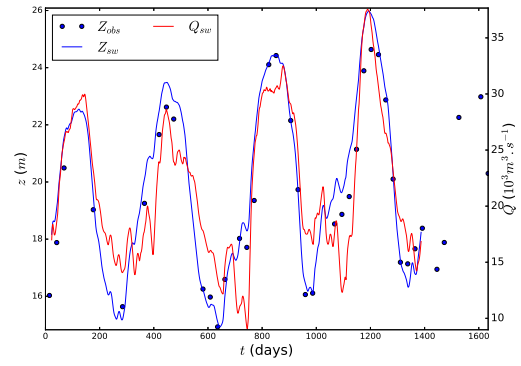
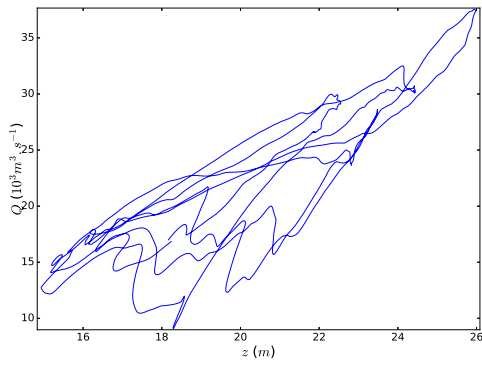
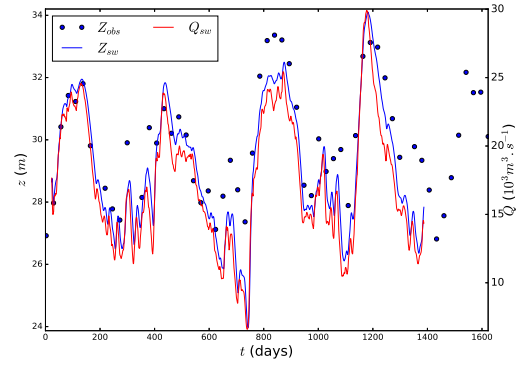
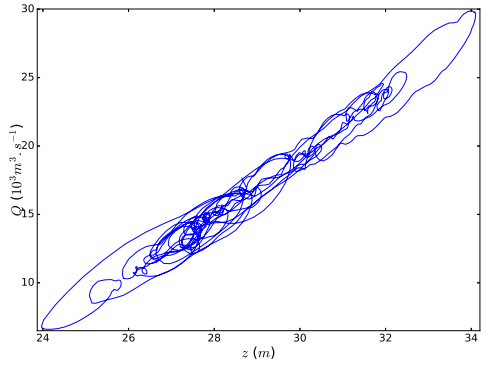


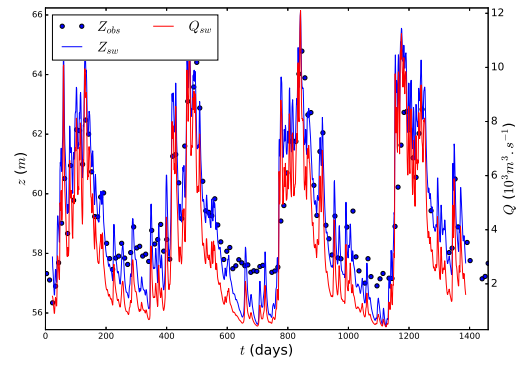
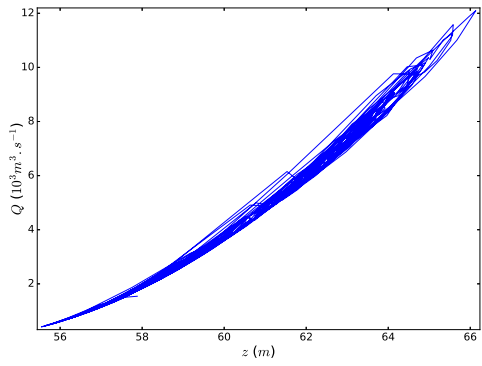
Figure 2.6 – Discharge and WSE simulated with the calibrated 1D Saint-Venant river network model for high and low flow on the Rio Negro (upper figure) and on the Rio Branco (with the downstream part of the Rio Negro, lower figure). The black dashed lines correspond to the locations of the lateral inflows and the red one to the location of the confluence of the Negro-Branco river network.



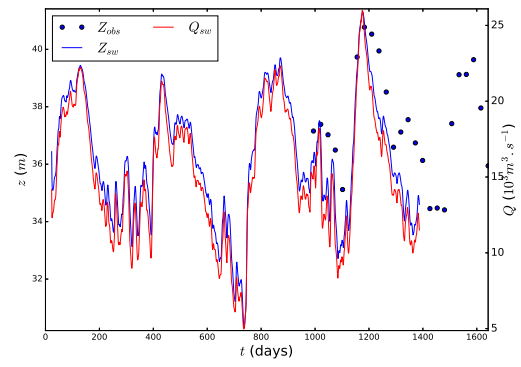
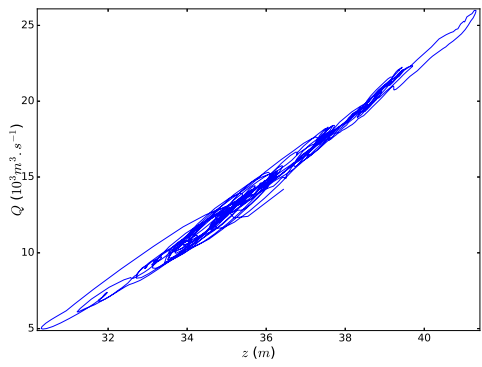
(a) $x = 250km$, Rio Negro (S3A VS).



(b) $x = 612km$, Rio Negro (S3A VS).



(c) $x = 736km$, Rio Branco (J3 VS).



(d) $x = 779km$, Rio Negro (S3B VS).

Figure 2.7 – Simulated stage-discharge hysteresis at the hourly time step over the whole time period of 4 hydrological years investigated (Z_{sw} versus Q_{sw}) (left column) and temporal variations of simulated versus observed water levels (Z_{sw} , Z_{obs}) and simulated discharge Q_{sw} (right column) at virtual stations of interest.

2.3.3.2 Slope computations

One crucial flow variable needed for estimating discharge from SFD laws is the downstream WS slope S . The river network model calibrated on sparse multi-satellite data provides flow lines including nonlinear spatio-temporal variations and stage-discharge hysteresis induced by the considered hydraulic controls. In order to investigate the impact of the slope estimation on the SFD laws, the following WS slopes are then derived at different scales using the flow lines of this river network model.

- Hydraulic (fine) scale: a slope calculated at fine spatial scale from the numerical grid of our numerical river network model, between two successive nodes whose spatial spacing is $\approx 300m$. Because of the fluvial nature of the considered flows and downstream hydraulic control, the slope is estimated from simulated WSE Z with a standard downstream finite difference at a given time. This fine scale estimate of the slope will be denoted S_{fs} . It is the finest slope that can be estimated here using the free surface elevation simulated with the 1D Saint-Venant network model at the numerical grid scale.
- Reach (large) scale: a reach averaged WS slope such as those expected from the future SWOT mission - averaging at several kilometers in length of a river to reduce measurement noise (see [Rodríguez et al. \[2020\]](#)). The estimation of the slope at this scale is computed by averaging the fine scale slope, computed previously, over a $10km$ reach downstream within the altimetric grid. This estimate of the slope will be denoted S_{ls} . In the context of rivers' altimetry, a large scale slope $S_{ls,\sigma}$ including synthetic measurement errors is also considered.

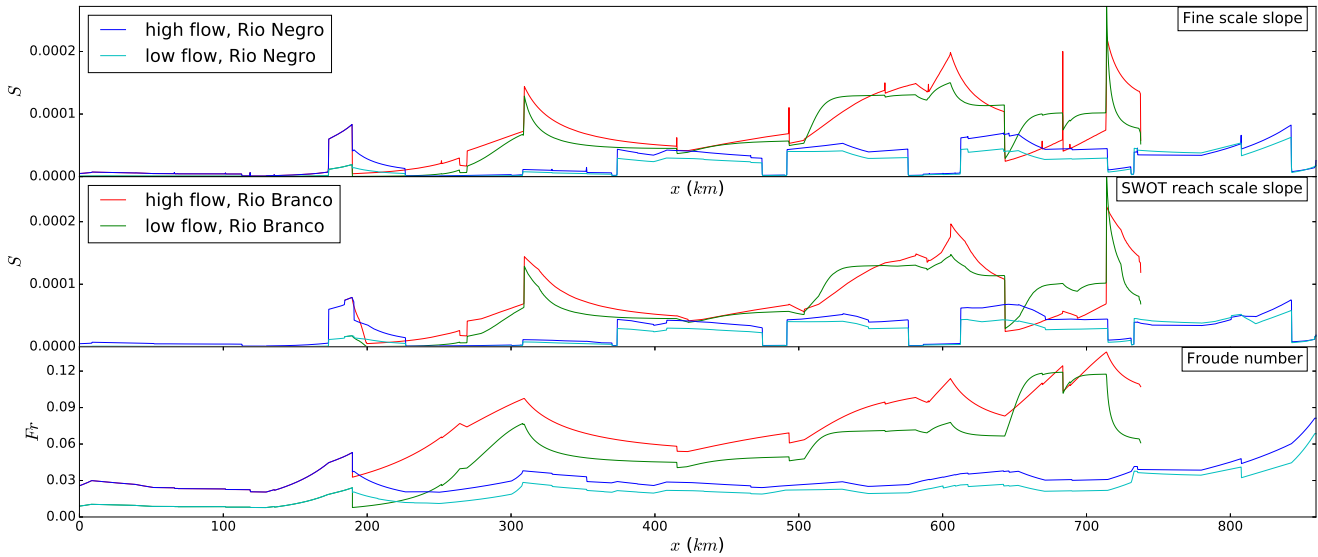


Figure 2.8 – Slope signatures simulated by the calibrated 1D Saint-Venant river network model over the Rio Negro and Rio Branco for high and low flow: WS slopes at fine scale (downstream finite difference on the numerical grid) and spatially averaged at "SWOT reach scale" ($10km$ averaged slope in the altimetric grid). Corresponding Froude numbers are given in the lower panel.

The resulting WS slopes are summarized on Fig. 2.8 and show real like spatial and temporal variations. The difference between the large scale and the fine scale slope stems from the WS curvatures, due to hydraulic controls

[Montazem et al., 2019], on the averaging length.

Note that the slope at the finest scale (on the top of Fig. 2.8), is discontinuous because the Strickler friction coefficient is set to be piecewise constant (see figures 2.4) and each lateral inflow also introduces a small discontinuity. Under the low Froude assumption, the momentum equation of the Saint-Venant system (2.1) is $S_f = S + \frac{1}{gA} k_{lat} U q_{lat}$, which indeed implies the slope is discontinuous at the locations of the inflows. However, we suppose that the inflows are located between the reaches and we focus on the inside of those reaches. As said previously, the S_{ls} reach scale slope is computed here at a 10 km downstream averaging length of the fine scale slope, inside the altimetric grid not to create artificial slopes variations between slope discontinuities (see the calibration grid of the Strickler coefficient in Fig. 2.4). The noised large scale slope $S_{ls,\sigma}$ is computed as S_{ls} but using WSE plus Gaussian noise $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ with $\sigma = 10cm$.

Locally (at a VS), the difference between the large scale and the fine scale slope (both on the top figures of Figs. 2.9a, 2.9b, 2.9c and 2.10) keeps, on the whole time window, the same sign. It can be explained by the fact that the curvature keeps locally (downstream of the VS) the same sign on the whole time window. Hence, one can deduce a trend between the fine and large scale slope. The link between the WS curvature and hydraulic control is studied in details in Montazem et al. [2019].

2.3.3.3 Extrapolation of the discharge

The altimetric WSE Z_{obs} and the reference discharge Q_{sw} from the river network model are used to calibrate SFD laws. Consequently, the calibrated SFD will take into account the noisy altimetric data and produce model-like discharge estimates. In Mansanarez et al. [2016], the discharge target used for SFD calibration stems from in situ measurements whose error is estimated to be a Gaussian noised with a given standard deviation σ_m . Assuming the measurements errors and the rating curve errors are independent, the standard deviation of the distribution of Q is chosen here as: $\mu_Q = \sqrt{\sigma_m^2 + \sigma_{sfd}^2}$. In the context of extrapolating hydraulic variables from the network model, the standard deviation of the reference discharge is obtained from the output of the network model and hence depends on all uncertainties introduced by and in the model.

The numerical experiment design is detailed hereafter, including the choice of SFD parameter sets to optimize.

2.4 SFD calibration and analysis

We now present the investigations on the calibration of SFD laws and their use for discharge estimation. The spatio-temporal extrapolation of hydraulic quantities is performed using the river network model optimally combined with the satellite altimetric observations of the complex Negro-Branco River network.

2.4.1 Numerical experiment design

An experimental design is proposed to investigate the calibration of SFD laws from altimetric data Z_{obs} and target discharges Q_{sw} and WS slopes S simulated with the Negro-Branco River network model used as a spatio-temporal extrapolator (see Sec. 2.3.3). Tests are performed at some VS representing different flow complexities, using more or less SFD parameters in calibration as explained here.

2.4.1.1 SFD and SD variants considered

In order to investigate the ability of SFD laws to capture flow variabilities, the calibration of the general SFD model (2.5) and the resulting performance in the estimation of the discharge are studied considering various parameters sets η . Several configurations are tested with more less SFD parameters optimized at the same time,

from a classical SD relationship (see Mansanarez et al. [2016], Paris et al. [2016]) with $\eta = (\alpha, \gamma, b_{sfd})$ and $\delta = 0$ to the complete set of SFD parameters $\eta = (\alpha, \gamma, \delta, b_{sfd})$ including a free exponent for the slope (see η sets considered in Tab. 2.2). A SFD configuration with $\delta = 0.5$, as the slope exponent in the low Froude model (2.4), is also tested. For all tested configurations, the exponent of the width is set to $\beta = 1$ so that the effective width (rectangular cross-sections from satellite water masks here) is taken into account and the coefficients α can be compared to an effective Strickler coefficient (hence denoted α in Tab. 2.3 for the sake of comparison).

A reference low Froude law is also calibrated using the fine scale WSE Z_{sw} and the slope S_{fs} simulated with the river network model. The resulting estimation of the discharge is the best estimation that a low Froude or SFD law can provide locally. Since only noise-free data are used, the gap between the discharge estimated by the reference low Froude and by the river network model is only the results of the Low Froude hypothesis.

Parameter sets η of the SFD model (2.5) are estimated using the MCMC algorithm, which also provides uncertainties on the estimated quantities. Since we also aim to investigate SFD parameters compensations arising when they are optimized simultaneously, a deterministic nonlinear least square algorithm is also used³.

The numerical experiments are summed up in Tab. 2.2 which details the parameters sets optimized along with the input data considered for the various SFD laws, the reference and estimated discharge from the low Froude equation.

notation	law	parameters	inputs
Q_{ref}	(2.4)	K	Z_{sw}, S_{fs}
Q_{sfd}	(2.5)	$(\alpha, \gamma, \delta, b_{sfd})$	Z^{obs}, S_{fs}
		$(\alpha, \gamma, \delta, b_{sfd})$	Z^{obs}, S_{ls}
		$(\alpha, \gamma, \delta, b_{sfd})$	$Z^{obs}, S_{ls,\sigma}$
		$(\alpha, \gamma, b_{sfd})$	Z^{obs}
		$(\alpha, \gamma, b_{sfd})$	$Z^{obs}, S_{fs}, \delta = 0.5$
Q_{lFr}	(2.4)	K	Z^{obs}, S_{fs}
		K	Z^{obs}, S_{ls}
		K	$Z^{obs}, S_{ls,\sigma}$
		K	Z^{obs}

Table 2.2 – Summary and notations of the different discharge estimations performed with various SFD parameter sets and inputs (hydraulic signatures including multiscale WS slopes).

2.4.1.2 Selection of altimetric virtual stations for SFD estimation

The estimation of the discharge depends on the hydraulic context of a virtual station resulting in more or less nonlinearities in the WS variabilities, including variable friction slope and stage-discharge hysteresis reflected in WS slope signatures. Hence, the following three VS are chosen to illustrate diverse hydraulic contexts among the S3A and J3 stations in function of flow signatures (see Fig. 2.8) and the hysteresis behavior.

- A first station is chosen on the downstream part of the Rio Negro (or just above the confluence with the Rio Branco), where the slope and the Froude number are rather low. On this section, the hysteresis behavior is not negligible (due to the strong backwater of the Solimoes river on the Rio Negro, see Sec. 2.3.1).
- A second station is chosen on the upstream part of the Rio Branco, where the slope and the Froude number are the highest. At this location, the hysteresis behavior is quite low and the left figure of Fig. 2.7c seems to be close to a power law between Z and Q .

³. the deterministic nonlinear square algorithm of the scipy.optimize library least_squares, see documentation https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.optimize.least_squares.html

- A third station is chosen on the far upstream part of the Rio Negro, where the Froude number is still quite low but the slope is a bit higher. The relation between Z and Q (see left figure of Fig. 2.7b) is relatively linear but there are important lateral inflows nearby (around 3 ~ 5% of the total discharge at the inflow location) with different temporal signals (implying the more complex structure of the stage-discharge hysteresis curve, see Sec. 2.3.3.1).

A S3B station is chosen to test the spatial extrapolation of SFD. A good candidate is a virtual station rather far from any S3A or J3 station used for calibrating the river network model. Hence, the S3B station at $x = 779km$ on the Rio Negro is selected. At this S3B station, the calibrated hydraulic model reproduces quite well the altimetric data not included in the calibration dataset of the river network model (see Fig. 2.7d).

These four stations are the one represented on Fig. 2.7.

2.4.1.3 SFD extrapolation scenarii

Scenarii are proposed here to test the influence of the time windows corresponding to S3A or J3 data (river network model calibration period), and next S3B, on the resulting SFD parameters and discharge extrapolation capability in time:

- ($T1$) a first time window (one year period) after the hydraulic model calibration (the 117 first days, see Sec. 2.3.2 and the black bars on Figs. 2.9 and 2.10);
- ($T2-A$) a second time window after the first one above to test the calibrated SFD laws with the remaining altimetric data at S3A or J3 VS;
- ($T2-B$) last, a time window corresponding to the use of previously calibrated SFD laws but with a new S3B altimetric VS, not used for model construction and calibration, hence representing a spatial extrapolation scenario.

2.4.2 Results

The calibration of SFD laws from altimetric data and hydraulic model outputs is investigated here following the method detailed in Sec. 2.2.3.2 and Sec. 2.3.3 over the experiments described in Sec. 2.4.1. First, the calibration of SFD laws is investigated in terms of discharge estimation efficiency, and then regarding the inferred values of SFD parameters. The estimates of the discharge are compared to the reference one from the calibrated river network model at the four stations of interest using metrics described in Sec. 2.A (see Figs. 2.9 and 2.10), as well as the hydraulic parameters obtained with different SFD laws compared with those of the low Froude model (see Tab. 2.2).

2.4.2.1 Performance of discharge SFD

The comparison of the estimated discharge time series with uncertainties (see Figs. 2.9 and 2.10) and the related scores (see Tab. 2.3) shows overall good discharge estimates for the 4 virtual stations. The NSE (Nash-Sutcliffe Efficiency coefficient) obtained with the different SFD sets is of the order of 0.9 or more. Moreover, considering the WS slope improves the estimation especially for two stations. Note that overall, the coefficients of the standard deviations σ_1 and σ_2 (see Sec. 2.2.3.2) imply that the estimated discharge uncertainties are larger for higher discharges. Note that unsurprisingly, the discharge estimated with the calibrated Low Froude model based on river network model outputs (including unobservable water depth and hydraulic radius) gives nearly perfect discharges in the present case.

For each virtual station considered, the SFD performances remain comparable for the successive time windows

considered in our experiments, including temporal extrapolation at S3B station. Performance decrease can be noted around $t = 1200$ days for the VS on the Rio Branco station at $x = 736km$, with underestimates of high discharges (see Fig. 2.9c). The RMSNE (Root Mean Square Normalized Error) ranges between 24 and 29% and the NSE between 0.81 and 0.68, which is less accurate than at the 3 others VS. This performance decrease might be attributable to the misfit between river network model and altimetric data (see Fig. 2.7c) as highlighted by the nearly perfect discharge estimate obtained with the low Froude model and river network model outputs only (red points on Fig. 2.9c). The misfit between altimetric Z_{obs} and simulated Z_{sw} (see analysis in Sec. 2.3.3.1) seems more important at low flows. Given the higher number of observations points at low flows, this misfit impacts the SFD calibration resulting in lower prediction capability for high flows. This is highlighted by the coefficients of the standard deviation: σ_1 is rather high (in comparison to other SFD obtained), σ_2 is negligible, which coupled with the wide range of discharges implies larger uncertainty envelopes for high discharge.

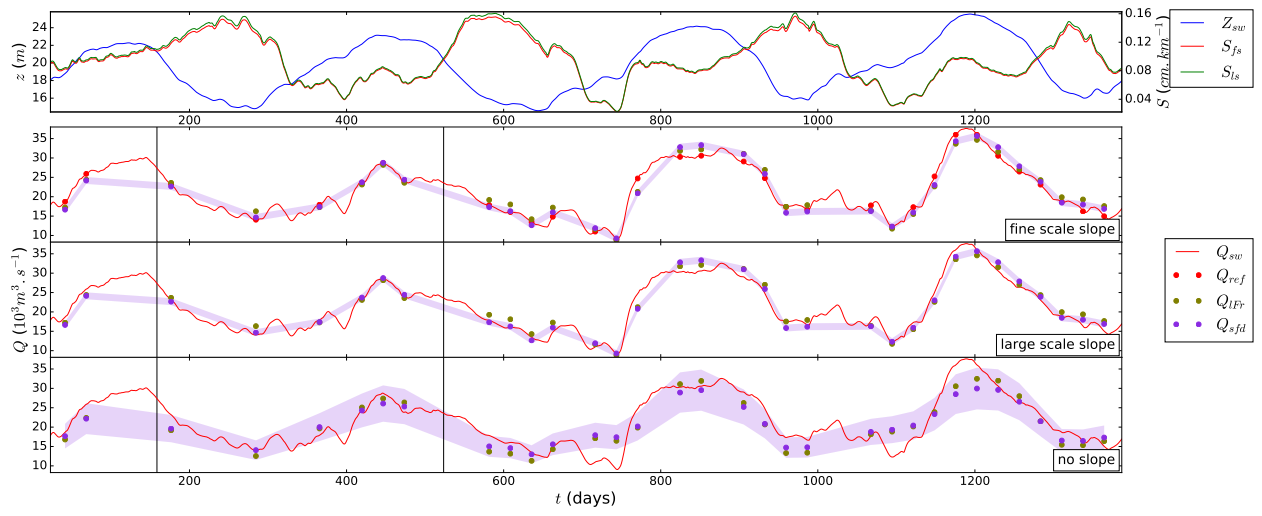
The benefit of considering the WS slopes in the SFD is highlighted for each of the 4 stations in terms of discharge performance, fine scale S_{fs} and large scale S_{ls} slopes or no slope - i.e. a SD law - (see Figs. 2.9 and 2.10). At the station downstream of the Rio Negro ($x = 250km$, see Figs. 2.9a and 2.7a), the NSE and RMSNE (see Tab. 2.3) for the different SFD laws show that using the slopes computed with the river network model improves the discharge estimation: the NSE is greater than 0.99 and the RMSNE less than 2.5% when the fine and large scale slopes are used. On the other hand, the NSE is around 0.826 and the RMSNE is around 9% without slope (i.e. with $\delta = 0$). Moreover, at this station, the uncertainties envelopes are rather small and constant (σ_1 is negligible and σ_2 rather small) using fine scale S_{fs} or large scale S_{ls} slopes while the uncertainty envelop obtained without slope is larger and depends on the discharges. At the other stations, the NSE and RMSNE for the SFD discharges are also better when S_{fs} and S_{ls} are used but the difference is smaller: except for the Rio Branco VS, the difference with and without slope estimation is less than 0.73% for the RMSNE and less than 0.02 for the NSE.

Hence, when the flow is affected by a backwater effect, the slope improves the estimation of the discharge while when the flow is not affected by a backwater effect, the SD or SFD laws provide comparable discharge estimates.

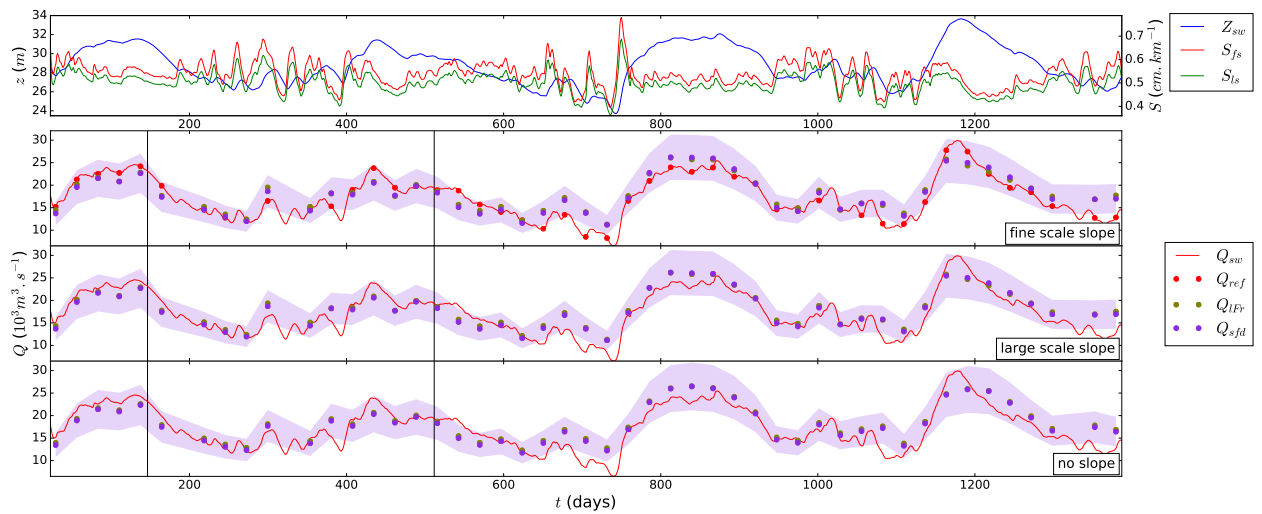
Concerning the spatio-temporal extrapolation of SFD, the results at the S3B station (Rio Negro $x = 779km$, see Figs. 2.10 and 2.7d) are also accurate and comparable to those at other stations: the RMSNE is between 9% and 10% and the NSE is around 0.85. Hence, the discharge extrapolation is good in the present case where the fit of the river network model with these new altimetry data is correct (as mentioned in Sec. 2.4.1.2). Enough hydraulic controls may already be represented in the river network model for the present extrapolation. This is further studied in Discussion section.

		S_{fs}	S_{ls}	$S_{ls,\sigma=0.1}$	$\delta = 0$	$S_{fs}, \delta = 0.5$	low Froude ref
Rio Negro $x = 250km$	α	18.94	17.71	0.18	0.06	524.73	39.35
	γ	1.67	1.68	1.21	1.45	0.96	5/3
	δ	0.44	0.43	0.03	0	0.5	0.5
	$b_{sfd} (m)$	5.47	5.48	4.06	2.48	11.44	3.98
	σ_1	2.6×10^{-5}	1.63×10^{-9}	4.37×10^{-9}	8.99×10^{-2}		
	σ_2	4.44×10^2	4.47×10^2	1.96×10^3	7.22×10^{-46}		
	$NSE_{Q_{sfd}}$	0.99	0.99	0.83	0.81	≈ 1	≈ 1
	$RMSNE_{Q_{sfd}}$	2.48%	2.49%	8.49%	8.99%	1.69%	0.32%
Rio Negro $x = 612km$	α	3.87	7.09	0.02	0.06	10^{-3}	29.54
	γ	1.63	1.66	2.11	1.68	4.5	5/3
	δ	0.32	0.38	0.01	0	0.5	0.5
	$b_{sfd} (m)$	17.68	17.38	15.03	17.09	0.87	16.53
	σ_1	9.62×10^{-2}	9.56×10^{-2}	1.75×10^{-11}	$\times 10^{-1}$		
	σ_2	3.25×10^{-2}	5.99×10^{-3}	1.75×10^3	1.06×10^{-2}		
	$NSE_{Q_{sfd}}$	0.73	0.74	0.74	0.72	0.74	≈ 1
	$RMSNE_{Q_{sfd}}$	9.62%	9.56%	10.29%	10.03%	9.19%	0.24%
Rio Branco $x = 736km$	α	4602.42	4412.12	2858.11	0.29	216.92	19.96
	γ	1.231	1.214	1.156	1.533	0.648	5/3
	δ	1.0	1.0	0.95	0	0.5	0.5
	$b_{sfd} (m)$	55.27	55.27	55.27	55.27	57.29	53.77
	σ_1	2.41×10^{-1}	2.37×10^{-1}	2.55×10^{-1}	2.94×10^{-1}		
	σ_2	2.07×10^{-27}	5.37×10^{-91}	1.1×10^{-32}	5.9×10^{-4}		
	$NSE_{Q_{sfd}}$	0.81	0.81	0.76	0.69	0.83	≈ 1
	$RMSNE_{Q_{sfd}}$	24.12%	23.67%	25.51%	29.42%	33.36%	0.16%
Rio Negro $x = 779km$	α	4.14	6.14	0.01	0.03	10^{-3}	13.04
	γ	2.1	1.97	2.21	2	4.17	5/3
	δ	0.52	0.51	≈ 0.0	0	0.5	0.5
	$b_{sfd} (m)$	24.71	25.57	22.99	24.46	11.8	24.12
	σ_1	9.47×10^{-2}	9.47×10^{-2}	9.86×10^{-2}	9.83×10^{-2}		
	σ_2	2.21×10^{-1}	1.55×10^{-1}	8.01×10^{-15}	2.71		
	$NSE_{Q_{sfd}}$	0.85	0.85	0.86	0.86	0.86	≈ 1
	$RMSNE_{Q_{sfd}}$	9.47%	9.47%	9.86%	9.85%	9.4%	0.06%

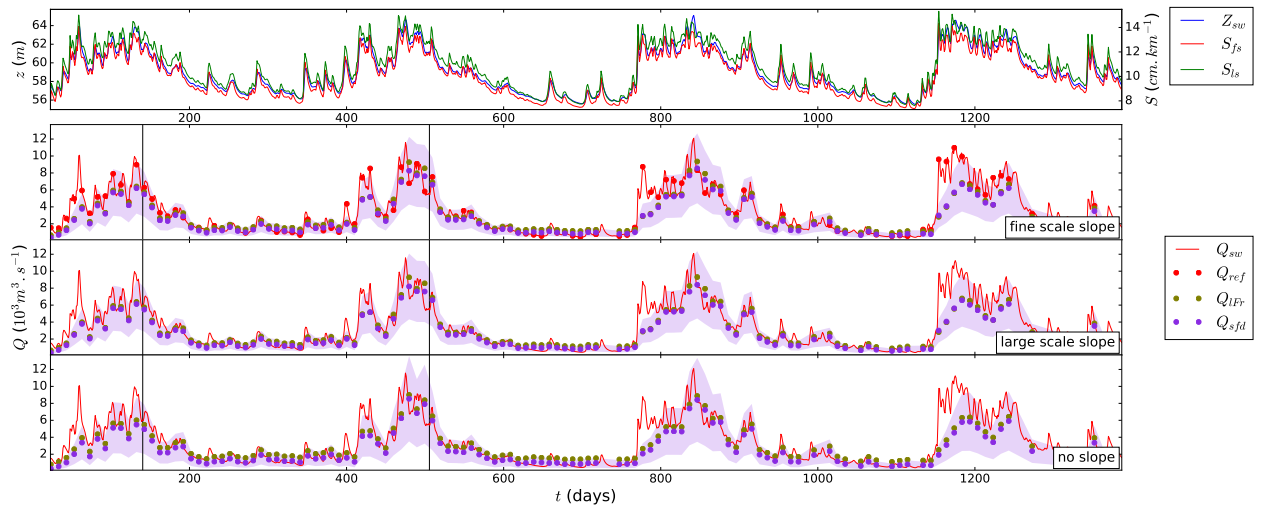
Table 2.3 – Coefficients and efficiency criteria (see Sec. 2.A) obtained with SFD on the calibration time period at the 4 VS of interest, in bold face the coefficients imposed by physical a priori (slope exponents δ) or given by the reference low Froude model from river network model outputs (last column). In all cases, the width exponent $\beta = 1$ (rectangular cross sections in the reference river network model).



(a) $x = 250km$, Rio Negro (S3A VS).



(b) $x = 612km$, Rio Negro (S3A VS).



(c) $x = 736km$, Rio Branco (J3 VS).

Figure 2.9 – Simulated time series of hydraulic variables and discharges inferred from SFD and J3 or S3A altimetric data at the VS of interest using multi-scale WS slopes (fine and SWOT reach scales, see Sec. 2.3.3.2). Comparison to reference discharge Q_{ref} given by the low Froude model and "true" discharge of the river network model Q_{sw} . The red envelopes correspond to 95% uncertainty intervals computed from the distribution given by the MCMC algorithm. Vertical black lines delimit the calibration time window for the SFD laws and low Froude model.

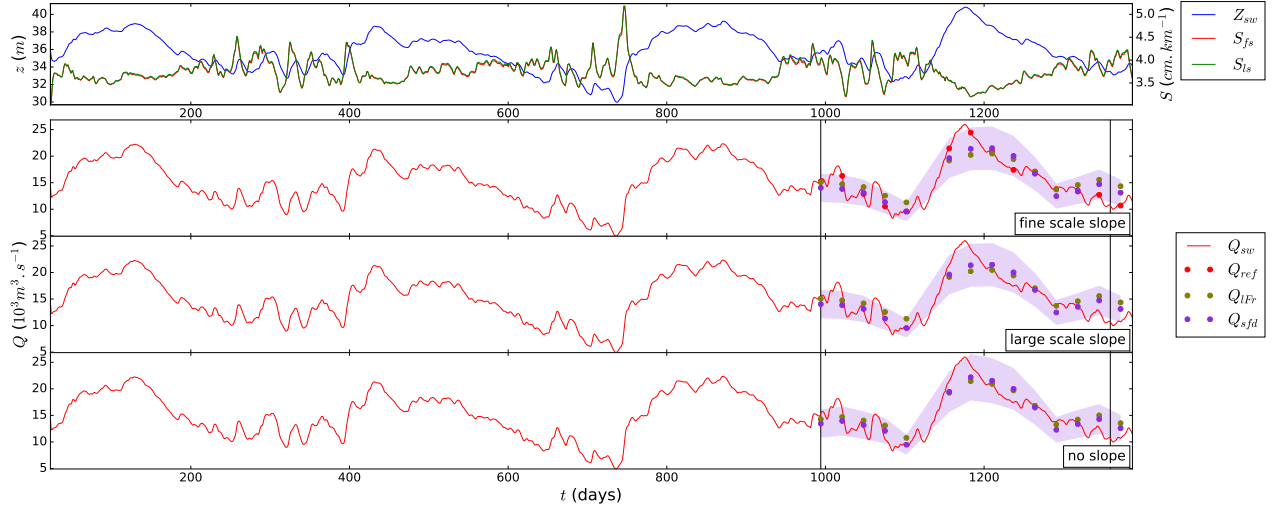


Figure 2.10 – Simulated time series of hydraulic variables and discharges inferred from SFD and altimetric data at S3B VS on the Rio Negro at $x = 779km$, using multi-scale WS slopes (fine and SWOT reach scales, see Sec. 2.3.3.2). Comparison to reference discharge Q_{ref} given by the low Froude model and "true" discharge of the river network model Q_{sw} . The red envelopes correspond to 95% uncertainty intervals computed from the distribution given by the MCMC algorithm. Vertical black lines delimit the calibration time window for the SFD laws and low Froude model.

2.4.2.2 Analysis of the SFD coefficients

The computed SFD coefficients are presented in Tab. 2.3 and analyzed against the reference ones from the low Froude equation (2.4). When the fine scale S_{fs} or large scale S_{ls} slopes are used, and except on the Rio Branco station, the estimated SFD coefficients, especially γ , δ and b_{sfd} , are rather close from the corresponding values in the low Froude model: between 0.322 and 0.517 for δ , between 1.631 and 2.104 for γ and less than 1.5m from the reference bathymetry for the effective bathymetry elevation b_{sfd} (for the reference low Froude $b_{sfd} = z_b$, with z_b the bathymetry of the river network model).

Moreover, when the slope is considered noised or not, the value of α and δ are much lower. Since the slope is less accurate, the value of δ is lower (or 0 if no slope is considered). Because of the magnitude of the slope (between 10^{-6} and 10^{-4}), the coefficient α is also lower to compensate the magnitude of the slope. This trend and magnitude of α can be retrieved in Mansanarez et al. [2016] between the SD and SFD relationships. In our cases, b_{sfd} and γ also vary and compensations with other parameters exist.

Considering the VS on the Rio Branco, the coefficients are rather different from the trends analyzed above. When $\eta = (\alpha, \delta, \gamma, b_{sfd})$ (i.e. a slope estimation is considered with a free exponent δ), the estimated δ is nearly equal to 1 and the coefficient α becomes large. The coefficient δ is constrained between 0 and 1 (see Sec. 2.2.3.2) to avoid large non-physical values - we find $\delta \approx 4$ when using unconstrained minimization.

As mentioned previously, at this station, the misfit between Z^{obs} and Z_{sw} is significant at low flows and impacts the calibration of SFD coefficients. Note also the the variations in time of the WS slope that are nearly correlated to the variations in time of the WSE. Using altimetric WSE Z^{obs} and simulated slopes and discharges results in rather low γ values, compared to those at other VS. This calibration compensates the misfit between the observed

and the river network model WSE with the slope that is consistent with model discharges Q_{sw} . This compensation implies this high coefficient δ .

This trend is confirmed by the SD law (with $\delta = 0$) that provides more physical coefficients - even though the NSE and the RMSNE are not as good as for the other stations: the noisy WSE observations can not be compensated by the slope in such case. This is also supported by the very close K values of both the calibrated river network and reference low Froude models.

For the SFD with $\delta = 0.5$, the coefficient α is always either rather low with high value of γ and of b_{sfd} , or rather high with low value of γ and of b_{sfd} . It can be explained by the fact that a deterministic algorithm is used with the only constraint that $\alpha, \beta, \delta, \gamma$ must not be negative. Without more constraint, the coefficients compensate each other. If some more restrictive constraints near the physical values are added (even just on one coefficient), then these physical values are nearly retrieved and the performance are almost the same. This is further studied in Discussion section.

Overall, the coefficients of the SFD laws obtained with our method are rather consistent with the coefficients given by the low Froude law (2.4) under the wide rectangular cross-section assumption. Some compensations appear in case of poor constraint on SFD parameters and/or of noisy altimetric observations. In Mansanarez et al. [2016], the coefficients of the SFD laws obtained are closer to the coefficients given by the low Froude law (2.4) than ours. This comes from the fact that their prior estimations are based on in situ measurements of known accuracy. Hence, they can estimate more constraining standard deviations. On the other hand, the satellite data does not provide such estimations and the standard deviations of the prior distributions are larger (see Sec. 2.2.3.2). Hence, the coefficients of our SFD laws tend to deviate more from the coefficients of the low Froude law in comparison of the coefficients found in Mansanarez et al. [2016].

2.5 Discussions

Having investigated the computation of SFD laws at virtual stations in contrasted hydraulic contexts, we discuss in this section the spatial variability of the SD coefficients, estimation issues for real river bathymetry and also the use of dynamic water masks. Finally, we discuss the applicability of the method with the future SWOT data.

2.5.1 AMHG analysis of Negro-Branco SD coefficients

In an attempt to relate river discharge to flow vein features, At-a-station Hydraulic Geometry (AHG) relationships were proposed in Leopold and Maddock [1953]. Using log linearization of hydraulic geometry expressed in water depth at different locations along a river gives the so-called AMHG [Gleason and Smith, 2014]:

$$\frac{1}{\ln Q(x, t)} \ln(h(x, t)) = \frac{1}{\ln Q(x, t)} \ln(c(x)) + d(x) \quad (2.6)$$

In Gleason and Smith [2014], the coefficients of the AHG relationships are computed over many stations (AMHG relationships) and a log-linear correlation of those coefficients is highlighted. This representation is applied to our discharge laws.

The AHG coefficients c and d of the AHG relation $h = cQ^d$ are obtained at all virtual stations on the Negro-Branco River network from the outputs of the river network model using a linear least square algorithm. The linear trends between $\log(c)$ and d from the AMHG analysis is then computed over the three main reaches (see Fig. 2.11), i.e. between the main flow variations upstream and downstream of the Negro-Branco confluence, using a linear

least square algorithm.

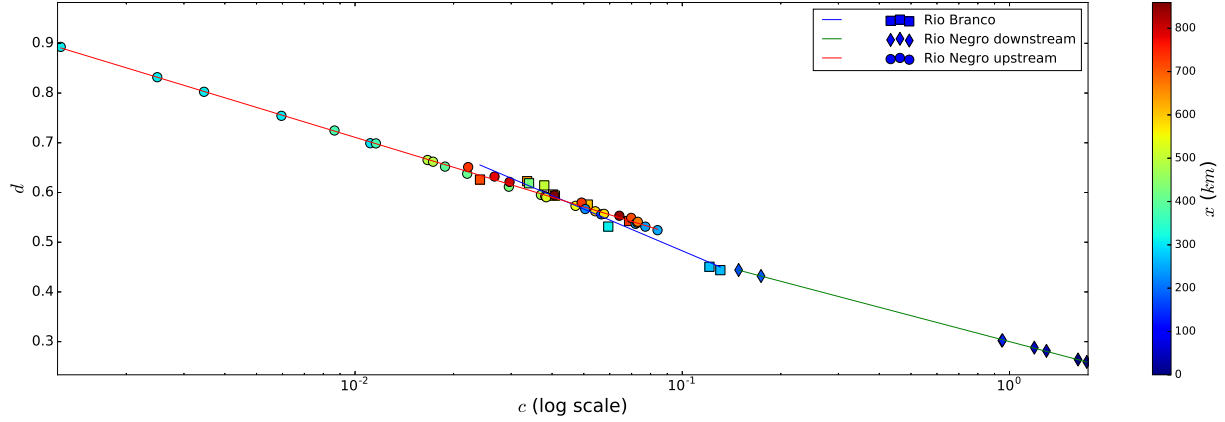


Figure 2.11 – AMHG relationship applied to the outputs of the calibrated hydraulic model on the full Negro-Branco river network over the whole simulation time window, c vs d in the AMHG relationship for the simulated $h - Q$ hydraulic geometry.

In Paris et al. [2020], the hydraulic geometry $h = cQ^d$ is highlighted as equivalent to a SD relationship: assuming (2.5) with $\beta = 0$, $\delta = 0$ and $b_{sfd} = z_b$ then $\alpha = c^{-\frac{1}{d}}$ and $\gamma = \frac{1}{d}$. Once the relation established by AMHG between c and d (equation (2.11)) is computed over a reach, one can check that a newly added SD relationship satisfies the trend in order to validate the SD relation.

From this analysis, one can even spot the SD with problematic coefficients or lower quality: for example, the Rio Branco VS at $x = 736km$ provides lower quality SFD and SD laws (because of the misfit between the river network model and observed WSE, see Sec. 2.4.2) and is visible as the red square (the most right one) on 2.11 (rather far from the blue line).

However, this AHG relationship is a power law between h and Q . Hence, the resulting estimation of the discharge will not take into account the effect of the slope, which is crucial when the flow is affected by backwater effect. Moreover, it implies the bathymetry is needed to estimate h from the satellite observation. At last, computing the coefficients of a local AHG relationship from an already existing AMHG relationship is difficult. As a matter of fact, a simple way to infer a priori values for AHG coefficients is highlighted in Paris et al. [2020]. However, the uncertainties behind turns it almost impossible to generalize with no prior information.

The AMHG method represents an interesting analysis tool of the SD laws coherence.

2.5.2 Influence of hydraulic controls and water masks on SFD

The SFD estimation has been investigated on the Negro-Branco River network representing a complex case, yet with rectangular cross-sections and channel flow controls (bathymetry-friction) defined at the virtual stations. A real complex river geometry is now considered in order to investigate SFD estimation in presence of fine scale hydraulic controls due to the complex river geometry including cross-sections of varying width.

A reach of the Garonne river downstream of Toulouse is studied (75km long reach during 90 days) (see. Brisset et al. [2018] and references therein, constant friction in space). We study the SFD estimate considering hydraulic quantities simulated with a fine 1D hydraulic model (here equation (2.1)) built from the in situ Garonne data including bathymetric surveys (non-rectangular cross-sections, see top figure of Fig. 2.12) and gauging stations

records. Note that the Froude number goes up to about 0.5 on the space-time domain which is higher than on the Negro-Branco River. The SFD are calibrated with a deterministic algorithm (same as presented in Sec. 2.4.1.1) applied to the parameter set $\eta = \{\alpha, \beta, \gamma, b_{sfd}\}$ with $\delta = 0.5$ and using Z, S, Q and W from the river flow model (on the whole time period). In order to avoid non-physical coefficient values because of compensations, we bound the coefficient $\gamma \in [0; 10/3]$. The impact of considering width data or not is tested by setting $\beta \neq 0$ or $\beta = 0$.

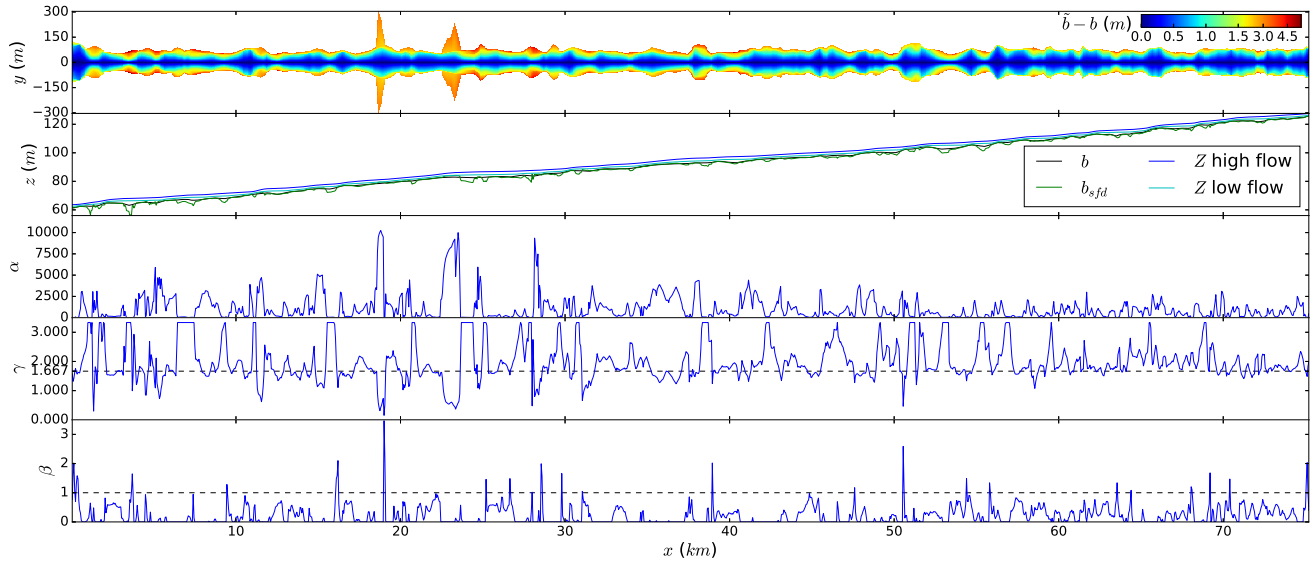


Figure 2.12 – Deterministic SFD calculated on the fine scale Garonne River case downstream of Toulouse, France, based on reference hydraulic model built on detailed bathymetry from in situ surveys (width profile on top panel in flow cross sectional direction y). Spatial variations of river channel geometry (effective bottom elevation \tilde{b} and inferred one b) and of the coefficients α, γ, b_{sfd} of the SFD law ($\delta = 0.5$ and $\gamma \in [0, 10/3]$). The dashed lines are the values given by the low Froude equation (2.4) under the rectangular cross-section assumption.

The resulting SFD laws are accurate: overall the NSE is greater than 0.95 and the $RMSNE$ is less than 7%. For only two reaches, less accurate SFD are found (around $x = 19km$ and $x = 24km$) corresponding to issues related to sudden overbank bathymetry enlargements - floodplain flows are not in the scope of this study.

The fine scale spatial variability obtained for the SFD coefficients (see Fig. 2.12) shows limited compensations, and stems from the succession of riffle and pools reflected in both WSE and (fine scale) slopes signatures used for SFD calibrations.

The effective bathymetry determined that way is fairly good ($RMSE$, Root Mean Square Error, between b_{sfd} and b is around $1m$, see Fig. 2.13). For similar discharge efficiencies, the riffle and pools are correctly retrieved in effective bottom elevation b_{sfd} only when the slope exponent is $\delta = 0.5$ (see zoom on top figure of Fig. 2.13).

In that case ($\delta = 0.5$), but when $\eta = \{\alpha, \gamma, b_{sfd}\}$ (with or without width, i.e. $\beta \neq 0$ or $\beta = 0$) the pools bottom elevations are underestimated. The effective bottom elevation is retrieved with better accuracy, including pools, when the SFD law free parameters are $\eta = \{\alpha, b_{sfd}\}$ and using the $\delta = 0.5, \gamma = 5/3$ as in the Manning-Strickler equation, setting $\beta = 0$ for the width. Hence, compensations between SFD parameters are reduced when using hydraulic meaningful values.

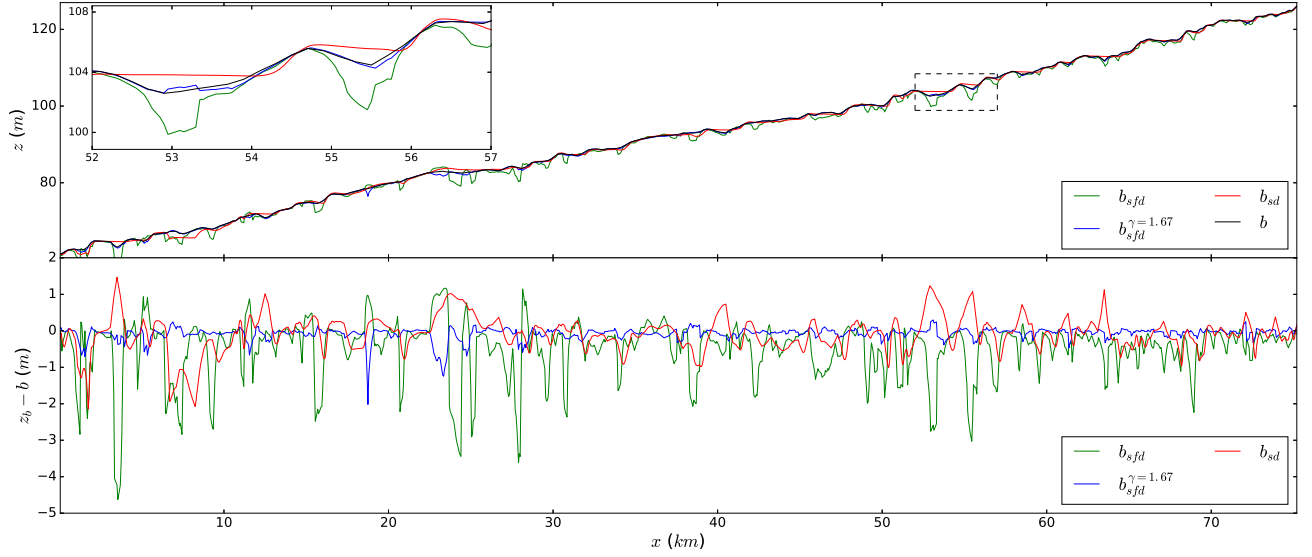


Figure 2.13 – Estimations of river channel bottom elevation using different SFD laws (2.5) with deterministic calibration of their parameter set $\eta = (\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ for each river cross section using reference hydraulic outputs of the Garonne River model: $_{sd}$ denotes the standard SD law ($\beta = 0$ and $\delta = 0$, $RMSE_b = 0.24m$), $_{sfd}$ denotes the full SFD law with $\delta = 0.5$ and $\beta = 0$ ($RMSE_b = 0.85m$), $_{sfd}^{\gamma=1.67}$ denotes a full SFD law with $\delta = 0.5$, $\gamma = 5/3$ and $\beta = 0$ ($RMSE_b = 0.03m$) that is the exponents of the Low Froude model (Manning equation (2.4) using WS slope). The obtained river bottom elevations are compared to the one of the 1D hydraulic model obtained from in situ bathymetry surveys.

Moreover, using SFD laws estimated without width data, i.e. $\beta = 0$, results in comparable discharge estimation efficiencies: overall the $RMSNE$ and NSE are respectively less than 7% and greater than 0.95. It shows that considering width time series do not improve SFD performance in estimating discharge and effective bottom elevation. However, considering WS slope time series reveals to be crucial. Indeed, WS slope represents a fine hydraulic signature containing both at a section and longitudinal channel-flow signatures. This highlights how valuable is a river network hydraulic model for combining multi-source data including WSE and water masks to reproduce nonlinear flow signatures arising from spatio-temporal combinations of flow controls with various influence length (along and against flow direction).

The ability of a flow model to simulate accurate WS signatures and especially meaningful slopes pertains to the representation of hydraulic controls. In the case of the Negro-Branco River network model, the segmentation of the river is based on the grid imposed by the relatively sparse spatial sampling of altimetric VS. Hence, the question of the accuracy of the space extrapolation (illustrated over the S3B station in Sec. 2.4.2) is related to the question of the hydraulic controls represented by this segmentation.

The impact of river segmentation on simulated flow signatures including slope is investigated in Montazem et al. [2019] on the reach of the Garonne and also of the Negro River studied here. The authors proposed a segmentation strategy preserving hydraulic signal. This strategy could be used for tailoring river models, at different scales depending on river network morphological features, in future works for example using the forthcoming SWOT observations of rivers profiles worldwide.

Note that physically sound representations of river networks flows signatures can also be obtained while assimilating

noisy SWOT-like data using DassFlow-1D hydraulic model (e.g. [Brisset et al. \[2018\]](#), [Tuozzolo et al. \[2019\]](#), [Larnier et al. \[2021\]](#), [Garambois et al. \[2020\]](#), [Pujol et al. \[2020\]](#)). Therefore the present method for estimating SFD laws would also be applicable in that case.

Regarding operational applications, such network models fusing the available information represent pertinent analysis tools and enable to calibrate SFD laws. These SFD laws provide discharge estimations using the simulated WS slopes given hydrological forcings. The computation time needed to run MGB on the full window is around 20 minutes, and the update with new forcings takes about 30 seconds. The computation time needed to run the DassFlow river network model over the Negro-Branco river network is about 40 seconds for a one year time period and about 150 seconds for the whole time window presented in [Sec. 2.3.1](#). Hence this method can provide (near-)real time discharge estimation as long as the forcing is available as well as altimetry data.

2.6 Conclusion

This paper proposed a methodology to derive stage-fall-discharge laws aimed at operational discharge estimates at any point of a hydrographic network. Moreover, this method is amenable to reaches affected by variable friction slope, hence affected by stage-discharge hysteresis. This methodology takes advantage of meaningful hydraulic signatures simulated with a river network hydraulic model in coherence with multi-satellite data. The estimation of the discharge is provided by SFD laws calibrated with discharges from the river network model and multi-mission satellite altimetry data enabling operational estimation.

A coupling between the river network hydraulic model DassFlow-1D [[Brisset et al., 2018](#), [Larnier et al., 2021](#)] and the large scale hydrological model MGB [[Collischonn et al., 2007](#)] is performed (following [Pujol et al. \[2020\]](#)) to ensure hydrological consistency of water fluxes. It is applied in this paper on the Negro-Branco River network Amazon basin, a case with complex morphology and hydrodynamics [[Pujol et al., 2020](#)], using a rich multi-satellite dataset. The effective hydraulic model built from optical water masks is put in coherence with multi-mission altimetric data (Jason-3 and Sentinel-3A and -3B measurements between February 2016 to May 2019) through a variational calibration of spatially distributed friction patches (see [Garambois et al. \[2020\]](#)). The obtained river network model fits the WSE on the calibration-validation period with a satisfying median accuracy of 53cm (80% elevations below $\pm 1\text{m}$ fit at observation times, similar height error reported e.g. in [Silva et al. \[2010\]](#)) in space and time regarding potential altimetric uncertainties along with those from hydrological fluxes and effective channel bathymetry-friction on this ungauged basin. By means of data assimilation, given the noisy altimetric dataset and our modeling hypothesis, an optimal numerical representation of river network WS signatures is obtained on the segmentation imposed by altimetric spatial sampling in the present case. Such a model enables to extrapolate fine scale reference discharges and WS slopes over the whole space-time domain which remains difficult from sparse altimetric data.

The SFD laws obtained with the proposed method provide rather good discharge estimates with uncertainties and the temporal and spatial extrapolation of SFD laws is successful. The obtained coefficients are consistent with the estimate provided by the low Froude model (2.4) under the wide rectangular cross-section assumption. The spatial extrapolation of SFD laws requires that the network model contains the main flow controls affecting the reach of interest. As expected from flow physics, when the VS is affected by backwater effect, the best discharge estimation from altimetric data is provided by the SFD law using the fine scale WS slope. When the VS is not affected by backwater effect, the SFD law performs well and a SD law, that is without considering water surface slope time series, is also sufficient for an efficient discharge estimation. Using reference (nearly perfect) discharges computed by a local low Froude model from hydrodynamic outputs (including unobservable reference flow area and friction), the direct impact of altimetry measurement noise on SFD discharges is highlighted. For similar measurement noise, the SFD model can be as accurate as the Low Froude model, even for irregular channel geometry as shown on the

gauged Garonne case thanks to WS slope signatures.

WS slope is shown to be a crucial hydraulic signature for computing accurate discharge estimates with SFD laws since it reflects both cross-sectional and longitudinal channel-flow nonlinearities. This is particularly highlighted in the Garonne case, which takes into account fine variations in the channel shape from bathymetric surveys. Accurate discharge estimates are obtained with model derived SFD laws using WSE and slopes signatures that reflect geometrical variabilities. As shown on this case, dynamic water masks would bring useful additional constraint for building river network model which makes the proposed method adapted to tackle multi-satellite datasets and derive SFD laws for operational discharge computations. It is adapted to a wide range of hydrological-hydraulic complexities including stage-discharge hysteresis as for instance backwater affected reaches. The present SFD method is applicable to newly acquired altimetric data in time and space, from forthcoming altimetric missions including SWOT data.

Further research could tackle improved representations of river networks and especially of the main flow controls using hydraulic-preserving segmentations [Montazem et al., 2019] from multi sourced datasets as well as uncertainty propagation. Real time estimates of discharge could be eased by using slopes estimators for example obtained using machine learning techniques trained with river network (models) following the intent of Larnier and Monnier [2020] in a SWOT context. The present method could also be applied to 2D hydraulic models in coherence with multi-source datasets.

Author contributions

This work is part of the PhD thesis work of TM (CIFRE PhD 2018/0725, funded by ANRT). Research and experimental plan: PAG, TM, JM. Data curation: TM, AP. DassFlow network solver upgrade: KL. Numerical experiments: TM. Analysis: TM, PAG, JM, AP. Writing: all.

Appendices

2.A Performance evaluation metrics

In order to evaluate the performance of the different estimates of Q , we define 4 criteria. The first is the Nash-Sutcliff efficiency coefficient :

$$NSE_Q = 1 - \sum \frac{(Q - Q_{sw})^2}{(\bar{Q}_{sw} - Q_{sw})^2} \quad (2.7)$$

The second is the Root Mean Square Error [$m^3 \cdot s^{-1}$]:

$$RMSE_Q = \sqrt{(Q - Q_{sw})^2} \quad (2.8)$$

And the third and fourth are the Normalized Root Mean Square Error and the Root Mean Square Normalized Error:

$$NRMSE_Q = \frac{\sqrt{(Q - Q_{sw})^2}}{\bar{Q}_{sw}} \text{ and } RMSNE_Q = \sqrt{\left(\frac{Q}{\bar{Q}_{sw}} - 1\right)^2} \quad (2.9)$$

2.B Performance evaluation on the stations

	S_{fs}	S_{ls}	$S_{ls, \sigma=0.1}$	$\delta = 0$	low Froude ref
W (m)	5853.708				
z_b (m)	3.979				
K_{sw}	39.677				
K_{lFr}	40.378	39.966	8.135	0.036	39.348
α	18.943	17.709	0.184	0.057	
γ	1.668	1.676	1.212	1.451	
δ	0.435	0.433	0.031	0.5	
b_{sfd} (m)	5.468	5.479	4.062	2.479	
σ_1	≈ 0.0	≈ 0.0	≈ 0.0	0.09	
σ_2	444.306	447.079	1959.641	≈ 0.0	
$NSE_{Q_{rc}}$	0.991 (0.953)	0.991 (0.952)	0.826 (0.719)	0.805 (0.749)	
$RMSE_{Q_{rc}}$ ($m^3 \cdot s^{-1}$)	444.8 (1515)	446.8 (1531)	1960 (3698)	2071 (3492)	
$NRMSE_{Q_{rc}}$	2.029% (7.082%)	2.039% (7.154%)	8.941% (17.28%)	9.448% (16.32%)	
$RMSNE_{Q_{rc}}$	2.481% (6.832%)	2.487% (6.898%)	8.485% (25.3%)	8.987% (24.23%)	
$NSE_{Q_{lFr}}$	0.954 (0.942)	0.949 (0.939)	-1.28 (-1.031)	0.769 (0.775)	≈ 1
$RMSE_{Q_{lFr}}$ ($m^3 \cdot s^{-1}$)	1008 (1676)	1056 (1716)	7084 (9933)	2255 (3309)	74.93 (62.72)
$NRMSE_{Q_{lFr}}$	4.601% (7.834%)	4.818% (8.02%)	32.32% (46.42%)	10.29% (15.47%)	0.342% (0.293%)
$RMSNE_{Q_{lFr}}$	6.687% (8.64%)	6.973% (8.88%)	35.68% (42.79%)	10.49% (22.98%)	0.32% (0.264%)

Table 2.4 – Coefficients and efficiency criteria (see Sec. 2.A) on both the calibration and validation (in parenthesis) time window for SFD and low Froude laws for the virtual station downstream of the Rio Negro ($x = 250km$).

	S_{fs}	S_{ls}	$S_{ls,\sigma=0.1}$	$\delta = 0$	low Froude ref
W (m)	3844.449				
z_b (m)	16.53				
K_{sw}	29.219				
K_{lFr}	26.932	27.974	16.055	0.063	29.538
α	3.87	7.094	0.017	0.063	
γ	1.631	1.658	2.108	1.68	
δ	0.322	0.379	0.006	0.5	
b_{sfd} (m)	17.679	17.382	15.03	17.089	
σ_1	0.096	0.096	≈ 0.0	0.1	
σ_2	0.033	0.006	1752.623	0.011	
$NSE_{Q_{rc}}$	0.731 (0.774)	0.735 (0.782)	0.738 (0.663)	0.718 (0.724)	
$RMSE_{Q_{rc}}$ ($m^3 \cdot s^{-1}$)	1777 (2275)	1764 (2234)	1753 (2775)	1818 (2510)	
$NRMSE_{Q_{rc}}$	10.41% (13.09%)	10.32% (12.85%)	10.26% (15.97%)	10.64% (14.44%)	
$RMSNE_{Q_{rc}}$	9.616% (17.44%)	9.563% (17.09%)	10.29% (20.89%)	10.03% (19.53%)	
$NSE_{Q_{lFr}}$	0.718 (0.767)	0.732 (0.771)	-2.324 (-1.174)	0.725 (0.694)	≈ 1
$RMSE_{Q_{lFr}}$ ($m^3 \cdot s^{-1}$)	1817 (2310)	1772 (2288)	6243 (7052)	1795 (70522645)	38.11 (48.91)
$NRMSE_{Q_{lFr}}$	10.64% (13.29%)	10.38% (13.17%)	36.55% (40.58%)	10.51% (15.22%)	0.223% (0.281%)
$RMSNE_{Q_{lFr}}$	10.18% (18.15%)	9.994% (17.99%)	41.09% (44.79%)	10.42% (21.23%)	0.246% (0.285%)

Table 2.5 – Coefficients and efficiency criteria (see Sec. 2.A) on both the calibration and validation (in parenthesis) time window for SFD and low Froude laws for the virtual station downstream of the Rio Negro ($x = 612km$).

	S_{fs}	S_{ls}	$S_{ls,\sigma=0.1}$	$\delta = 0$	low Froude ref
W (m)	926.0429				
z_b (m)	53.774				
K_{sw}	20.028				
K_{lFr}	16.813	16.21	15.525	0.178	19.955
α	4602.418	4412.119	2858.112	0.287	
γ	1.231	1.214	1.156	1.533	
δ	1.0	1.0	0.946	0.5	
b_{sfd} (m)	55.274	55.274	55.274	55.274	
σ_1	0.241	0.237	0.255	0.294	
σ_2	≈ 0.0	≈ 0.0	≈ 0.0	0.001	
$NSE_{Q_{rc}}$	0.809 (0.712)	0.809 (0.71)	0.756 (0.65)	0.685 (0.569)	
$RMSE_{Q_{rc}}$ ($m^3 \cdot s^{-1}$)	1051 (1487)	1050 (1492)	1187 (1640)	1349 (1819)	
$NRMSE_{Q_{rc}}$	33.91% (42.38%)	33.88% (42.52%)	38.32% (46.74%)	43.53% (51.85%)	
$RMSNE_{Q_{rc}}$	24.12% (28.97%)	23.67% (28.44%)	25.51% (31.44%)	29.42% (34.36%)	
$NSE_{Q_{lFr}}$	0.778 (0.71)	0.777 (0.709)	0.744 (0.675)	0.729 (0.66)	≈ 1
$RMSE_{Q_{lFr}}$ ($m^3 \cdot s^{-1}$)	1133 (1492)	1135 (1496)	1214 (1580)	1250 (1616)	9.281 (18.94)
$NRMSE_{Q_{lFr}}$	36.56% (42.54%)	36.62% (42.63%)	39.19% (45.04%)	40.33% (46.07%)	0.3% (0.54%)
$RMSNE_{Q_{lFr}}$	34.7% (41.3%)	34.14% (40.41%)	31.37% (37.96%)	46.78% (55.58%)	0.152% (0.241%)

Table 2.6 – Coefficients and efficiency criteria (see Sec. 2.A) on both the calibration and validation (in parenthesis) time window for SFD and low Froude laws for the virtual station downstream of the Rio Branco ($x = 736km$).

	S_{fs}	S_{ls}	$S_{ls,\sigma=0.1}$	$\delta = 0$	low Froude ref
W (m)	3170.011				
z_b (m)	24.138				
K_{sw}	20.028				
K_{lFr}	10.491	10.471	10.204	0.063	13.035
α	4.135	6.144	0.012	0.027	
γ	2.104	1.97	2.214	1.996	
δ	0.517	0.509	0.0	0.5	
b_{sfd} (m)	24.714	25.569	22.991	24.46	
σ_1	0.095	0.095	0.099	0.098	
σ_2	0.221	0.155	≈ 0.0	2.71	
$NSE_{Q_{rc}}$	0.852 (0.845)	0.852 (0.844)	0.859 (0.86)	0.859 (0.86)	
$RMSE_{Q_{rc}}$ ($m^3 \cdot s^{-1}$)	1622 (1692)	1622 (1694)	1584 (1608)	1585 (1609)	
$NRMSE_{Q_{rc}}$	10.25% (10.95%)	10.25% (10.96%)	10.01% (10.4%)	10.02% (10.41%)	
$RMSNE_{Q_{rc}}$	9.472% (10.96%)	9.471% (10.97%)	9.855% (10.6%)	9.852% (10.61%)	
$NSE_{Q_{lFr}}$	0.793 (0.763)	0.792 (0.761)	-0.168 (-0.109)	0.836 (0.821)	≈ 1
$RMSE_{Q_{lFr}}$ ($m^3 \cdot s^{-1}$)	1919 (2090)	1925 (2098)	4563 (4521)	1712 (1815)	8.419 (8.123)
$NRMSE_{Q_{lFr}}$	12.13% (13.52%)	12.17% (13.58%)	28.84% (29.25%)	10.82% (11.74%)	0.053% (0.053%)
$RMSNE_{Q_{lFr}}$	12.46% (15.07%)	12.5% (15.13%)	23.11% (24.34%)	11.67% (13.28%)	0.05% (0.049%)

Table 2.7 – Coefficients and efficiency criteria (see Sec. 2.A) on both the calibration and validation (in parenthesis) time window for SFD and low Froude laws for the virtual station downstream of the Rio Negro ($x = 779km$).

2.C AMHG

Hydraulic geometries from Leopold and Madock (1956) writes as:

$$\begin{cases} W = aQ^{b_{hg}} \\ h = cQ^d \\ U = eQ^f \end{cases} \quad (2.10)$$

with a, b_{hg}, c, d, e, f being positive constants. As remarked by Leopold and Maddock [1953] and by definition of discharge (for a rectangular cross-section) $Q = WhU$ the combination of the three above equations gives $ace = 1$ and $b_{hg} + d + f = 1$. This study also highlights that "similar variations in relation to discharge exist in length of a river under the condition that discharge at all points is equal in frequency of occurrence". Using a log linearization of those hydraulic geometries gives the AMHG relationships (see [Gleason and Smith, 2014], PNAS) rewritten here so as to make clearly appear the spatial variability:

$$\begin{cases} \frac{1}{\ln Q(x,t)} \ln(W(x,t)) = \frac{1}{\ln Q(x,t)} \ln(a(x)) + b_{hg}(x) \\ \frac{1}{\ln Q(x,t)} \ln(h(x,t)) = \frac{1}{\ln Q(x,t)} \ln(c(x)) + d(x) \\ \frac{1}{\ln Q(x,t)} \ln(U(x,t)) = \frac{1}{\ln Q(x,t)} \ln(e(x)) + f(x) \end{cases} \quad \forall x, \forall t, \quad (2.11)$$

2.D Usual parameterizations of flow resistance

The discharge of gradually varied flows can be locally (at a cross-section) related to the friction slope and the flow parameters can be empirically parametrized by any product of flow parameters with the appropriate coefficients. Usual hydraulic friction parameterizations are recalled in the following table (inspired by Rodríguez et al. [2020])

parameter	Manning	Manning Shallow 1	Manning Shallow 2	Darcy-Weisbach	Chezy
A	1	$5/3$	0	0	0
W	0	$-2/3$	1	0	1
S_f	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
R_h	$2/3$	0	$5/3$	$5/3$	$3/2$
ρ^{-1}	K	K	K	$\sqrt{\frac{\pi^2 g}{8f_D}}$	$\frac{\sqrt{g}}{\Omega}$

Table 2.8 – Usual parameterizations of hydraulic friction: significance and values of parameters p_i and exponents α_i in general equation (2.3) adapted from Rodríguez et al. [2020].

with f_D the Darcy friction factor, Ω the Chezy flow resistance.

Bibliography

- D. E. Alsdorf, E. Rodríguez, and D. P. Lettenmaier. Measuring surface water from space. *Reviews of Geophysics*, 45(2), 2007. doi: 10.1029/2006RG000197. URL <https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1029/2006RG000197>.
- J. A. Andriambelason, A. Paris, S. Calmant, and S. Rakotondraompiana. Re-initiating depth-discharge monitoring in small-sized ungauged watersheds by combining remote sensing and hydrological modelling: a case study in madagascar. *Hydrological Sciences Journal*, 65(16):2709–2728, nov 2020. doi: 10.1080/02626667.2020.1833013.
- S. Biancamaria, M. Durand, K. M. Andreadis, P. D. Bates, A. Boone, N. M. Mognard, E. Rodriguez, D. E. Alsdorf, D. P. Lettenmaier, and E. A. Clark. Assimilation of virtual wide swath altimetry to improve arctic river modeling. *Remote Sensing of Environment*, 115(2):373–381, 2011. ISSN 0034-4257. doi: 10.1016/j.rse.2010.09.008. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0034425710002816>.
- S. Biancamaria, D. P. Lettenmaier, and T. M. Pavelsky. The swot mission and its capabilities for land hydrology. *Surveys in Geophysics*, 37(2):307–337, 2016.
- S. J. Birkinshaw, G. M. O’donnell, P. Moore, C. G. Kilsby, H. J. Fowler, and P. A. M. Berry. Using satellite altimetry data to augment flow estimation techniques on the mekong river. *Hydrological Processes*, 24(26):3811–3825, 2010. doi: 10.1002/hyp.7811. URL <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/hyp.7811>.
- D. M. Bjerklie, S. L. Dingman, C. J. Vorosmarty, C. H. Bolster, and R. G. Congalton. Evaluating the potential for measuring river discharge from space. *Journal of Hydrology*, 278(1):17–38, 2003. ISSN 0022-1694. doi: 10.1016/S0022-1694(03)00129-X. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S002216940300129X>.
- D. M. Bjerklie, S. L. Dingman, and C. H. Bolster. Comparison of constitutive flow resistance equations based on the manning and chezy equations applied to natural rivers. *Water Resources Research*, 41(11), 2005.

- S. Bogning, F. Frappart, A. Paris, F. Blarel, F. Niño, S. Saux Picart, P. Lanet, F. Seyler, G. Mahé, R. Onguene, J.-P. Bricquet, J. Etame, M.-C. Paiz, and J.-J. Braun. Hydro-climatology study of the ogooué river basin using hydrological modeling and satellite altimetry. *Advances in Space Research*, apr 2020. doi: 10.1016/j.asr.2020.03.045.
- J. Brêda, R. Paiva, J. M. Bravo, O. A. Passaia, and D. M. Moreira. Assimilation of satellite altimetry data for effective river bathymetry. *Water Resources Research*, 55(9):7441–7463, 2019. doi: 10.1029/2018WR024010. URL <https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1029/2018WR024010>.
- P. Brisset, J. Monnier, P.-A. Garambois, and H. Roux. On the assimilation of altimetric data in 1d saint-venant river flow models. *Advances in Water Resources*, 119:41–59, 2018. ISSN 0309-1708. doi: 10.1016/j.advwatres.2018.06.004. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0309170817302476>.
- D. G. Cacuci, I. M. Navon, and M. Ionescu-Bujor. *Computational methods for data evaluation and assimilation*. CRC press, 2013.
- V. T. Chow. *Handbook of applied hydrology*. McGraw-Hill Book Co., New-York, 1467 pages, 1964.
- W. Collischonn, D. Allasia, B. C. Da Silva, and C. E. M. Tucci. The mgb-iph model for large-scale rainfall—runoff modelling. *Hydrological Sciences Journal*, 52(5):878–895, 2007. doi: 10.1623/hysj.52.5.878.
- J.-F. Cretaux, K. Nielsen, F. Frappart, F. Papa, S. Calmant, and J. Benveniste. Hydrological applications of satellite altimetry rivers, lakes, man-made reservoirs, inundated areas. In *Satellite Altimetry Over Oceans and Land Surfaces*, pages 459–504. CRC Press, 2017.
- J. Cunge. *Practical aspects of computational river hydraulics*. Pitman Publishing Ltd. London,(17 CUN), 1980, 420, 1980.
- P. R. Dhote, P. K. Thakur, A. Domeneghetti, A. Chouksey, V. Garg, S.P. Aggarwal, and P. Chauhan. The use of saral/altika altimeter measurements for multi-site hydrodynamic model validation and rating curves estimation: An application to brahmaputra river. *Advances in Space Research*, 2020. ISSN 0273-1177. doi: 10.1016/j.asr.2020.05.012. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0273117720303355>.
- S. L. Dingman. *Fluvial hydraulics*. oxford university press, 2009.
- M. Durand, L.-L. Fu, D. P. Lettenmaier, D. E. Alsdorf, E. Rodriguez, and D. Esteban-Fernandez. The surface water and ocean topography mission: Observing terrestrial surface water and oceanic submesoscale eddies. *Proceedings of the IEEE*, 98(5):766–779, 2010. doi: 10.1109/JPROC.2010.2043031.
- M. Durand, J. Neal, E. Rodríguez, K. M. Andreadis, L. C. Smith, and Y. Yoon. Estimating reach-averaged discharge for the river severn from measurements of river water surface elevation and slope. *Journal of Hydrology*, 511: 92–104, 2014. ISSN 0022-1694. doi: 10.1016/j.jhydrol.2013.12.050. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S002216941400002X>.
- C. M. Emery, A. Paris, S. Biancamaria, A. Boone, S. Calmant, P.-A. Garambois, and J. Santos Da Silva. Large-scale hydrological model river storage and discharge correction using a satellite altimetry-based discharge product. *Hydrology and Earth System Sciences*, 22(4):2135–2162, 2018. doi: 10.5194/hess-22-2135-2018. URL <https://hess.copernicus.org/articles/22/2135/2018/>.
- C. M. Emery, A. Paris, S. Biancamaria, A. Boone, S. Calmant, P.-A. Garambois, J. Da Silva, and C. H. David. Discharge estimation via assimilation of multisatellite-based discharge products: Case study over the amazon basin. *IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters*, 2020. doi: 10.1109/LGRS.2020.3020285.

- B. M. Fekete and C. J. Vörösmarty. The current status of global river discharge monitoring and potential new technologies complementing traditional discharge measurements. *IAHS publ*, 309:129–136, 2007.
- A. S. Fleischmann, R. C. D. Paiva, W. Collischonn, V. A. Siqueira, A. Paris, D. M. Moreira, F. Papa, A. A. Bitar, M. Parrens, F. Aires, et al. Trade-offs between 1-d and 2-d regional river hydrodynamic models. *Water Resources Research*, 56(8):e2019WR026812, 2020. doi: 10.1029/2019WR026812. URL <https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1029/2019WR026812>.
- P.-A. Garambois and J. Monnier. Inference of effective river properties from remotely sensed observations of water surface. *Advances in Water Resources*, 79:103–120, 2015. ISSN 0309-1708. doi: 10.1016/j.advwatres.2015.02.007. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0309170815000330>.
- P.-A. Garambois, S. Calmant, H. Roux, A. Paris, J. Monnier, P. Finaud-Guyot, A. Montazem, and J. Santos Da Silva. Hydraulic visibility: Using satellite altimetry to parameterize a hydraulic model of an ungauged reach of a braided river. *Hydrological Processes*, 31(4):756–767, 2017. doi: 10.1002/hyp.11033. URL <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/hyp.11033>.
- P.-A. Garambois, K. Larnier, J. Monnier, P. Finaud-Guyot, J. Verley, A. Montazem, and S. Calmant. Variational estimation of effective channel and ungauged anabranching river discharge from multi-satellite water heights of different spatial sparsity. *Journal of Hydrology*, 581:124409, 2020. ISSN 0022-1694. doi: 10.1016/j.jhydrol.2019.124409. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022169419311448>.
- A. Gelman, J. B. Carlin, H. S. Stern, D. B. Dunson, A. Vehtari, and D. B. Rubin. *Bayesian data analysis*. CRC press, 2013.
- A. C. V. Getirana and C. Peters-Lidard. Estimating water discharge from large radar altimetry datasets. *Hydrology and Earth System Sciences*, 17(3):923–933, 2013. doi: 10.5194/hess-17-923-2013. URL <https://hess.copernicus.org/articles/17/923/2013/>.
- J. C. Gilbert and C. Lemaréchal. Some numerical experiments with variable-storage quasi-newton algorithms. *Mathematical programming*, 45(1-3):407–435, 1989. doi: 10.1007/BF01589113.
- C. J. Gleason and L. C. Smith. Toward global mapping of river discharge using satellite images and at-many-stations hydraulic geometry. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 111(13):4788–4791, 2014. ISSN 0027-8424. doi: 10.1073/pnas.1317606111. URL <https://www.pnas.org/content/111/13/4788>.
- L. Hascoet and V. Pascual. The tapenade automatic differentiation tool: Principles, model, and specification. 39 (3), 2013. ISSN 0098-3500. doi: 10.1145/2450153.2450158.
- C. Kittel, L. Jiang, C. Tottrup, and P. Bauer-Gottwein. Sentinel-3 radar altimetry for river monitoring—a catchment-scale evaluation of satellite water surface elevation from sentinel-3a and sentinel-3b. *Hydrology and Earth System Sciences*, 25(1):333–357, 2021. doi: 10.5194/hess-25-333-2021. URL <https://hess.copernicus.org/articles/25/333/2021/>.
- K. Larnier and J. Monnier. Hybrid neural network – variational data assimilation algorithm to infer river discharges from swot-like data. *Nonlinear Processes in Geophysics Discussions*, 2020:1–30, 2020. doi: 10.1016/10.5194/npg-2020-32. URL <https://npg.copernicus.org/preprints/npg-2020-32/>.
- K. Larnier, J. Monnier, P.-A. Garambois, and J. Verley. River discharge and bathymetry estimation from swot altimetry measurements. *Inverse Problems in Science and Engineering*, 29(6):759–789, 2021. doi: 10.1080/17415977.2020.1803858. URL <https://doi.org/10.1080/17415977.2020.1803858>.

- E. M. Latrubesse and E. Franzinelli. The late quaternary evolution of the negro river, amazon, brazil: implications for island and floodplain formation in large anabranching tropical systems. *Geomorphology*, 70(3):372–397, 2005. ISSN 0169-555X. doi: 10.1016/j.geomorph.2005.02.014. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0169555X05000826>. Tropical Rivers.
- J. Le Coz, B. Renard, L. Bonnifait, F. Branger, and R. Le Boursicaud. Combining hydraulic knowledge and uncertain gaugings in the estimation of hydrometric rating curves: A bayesian approach. *Journal of Hydrology*, 509:573–587, 2014. ISSN 0022-1694. doi: 10.1016/j.jhydrol.2013.11.016. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022169413008329>.
- J. G. Leon, S. Calmant, F. Seyler, M.-P. Bonnet, M. Cauhopé, F. Frappart, N. Filizola, and P. Fraizy. Rating curves and estimation of average water depth at the upper negro river based on satellite altimeter data and modeled discharges. *Journal of Hydrology*, 328(3):481–496, 2006. ISSN 0022-1694. doi: 10.1016/j.jhydrol.2005.12.006. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022169406000163>. The ICWRER - Symposium in Dresden, Germany.
- L. B. Leopold and T. Maddock. *The hydraulic geometry of stream channels and some physiographic implications*, volume 252. US Government Printing Office, 1953.
- T. Malou, P.-A. Garambois, A. Paris, J. Monnier, and K. Larnier. Generation and analysis of stage-fall-discharge laws from coupled hydrological-hydraulic river network model integrating sparse multi-satellite data. *Journal of Hydrology*, 603:126993, 2021. ISSN 0022-1694. doi: 10.1016/j.jhydrol.2021.126993. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S002216942101043X>.
- V. Mansanarez, J. Le Coz, B. Renard, M. Lang, G. Pierrefeu, and P. Vauchel. Bayesian analysis of stage-fall-discharge rating curves and their uncertainties. *Water Resources Research*, 52(9):7424–7443, 2016. doi: 10.1002/2016WR018916. URL <https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/2016WR018916>.
- V. Mansanarez, I. K. Westerberg, N. Lam, and S. W. Lyon. Rapid stage-discharge rating curve assessment using hydraulic modeling in an uncertainty framework. *Water Resources Research*, 55(11):9765–9787, 2019. doi: 10.1029/2018WR024176. URL <https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1029/2018WR024176>.
- J. Monnier, F. Couderc, D. Dartus, K. Larnier, R. Madec, and J-P. Vila. Inverse algorithms for 2D shallow water equations in presence of wet dry fronts. application to flood plain dynamics. *Advances in Water Resources*, 97: 11–24, 2016. doi: 10.1016/j.advwatres.2016.07.005.
- J. Monnier, K. Larnier, P. Brisset, et al. Dassflow 1d: Data assimilation for free surface flows. open-source computational software. Technical report, Mathematics Institute of Toulouse - INSA - CNES - CNRS - CS Group, 2018. URL <http://www.math.univ-toulouse.fr/DassFlow>.
- A. Montazem, P-A. Garambois, S. Calmant, P. Finaud-Guyot, J. Monnier, D. Medeiros Moreira, J. T. Minear, and S. Biancamaria. Wavelet-based river segmentation using hydraulic control-preserving water surface elevation profile properties. *Geophysical Research Letters*, 46(12):6534–6543, 2019. doi: 10.1029/2019GL082986. URL <https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1029/2019GL082986>.
- F. E. O’Loughlin, J. Neal, D. Yamazaki, and P. D. Bates. Icesat-derived inland water surface spot heights. *Water Resources Research*, 52(4):3276–3284, 2016. doi: 10.1002/2015WR018237. URL <https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/2015WR018237>.

- F. E. O'Loughlin, J. Neal, G. J. P. Schumann, E. Beighley, and P. D. Bates. A lisflood-fp hydraulic model of the middle reach of the congo. *Journal of Hydrology*, 580:124203, 2020. ISSN 0022-1694. doi: 10.1016/j.jhydrol.2019.124203. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022169419309382>.
- H. Oubanas, I. Gejadze, P.-O. Malaterre, M. Durand, R. Wei, R. Frasson, and A. Domeneghetti. Discharge estimation in ungauged basins through variational data assimilation: The potential of the swot mission. *Water Resources Research*, 54(3):2405–2423, 2018. doi: 10.1002/2017WR021735. URL <https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/2017WR021735>.
- D. Paiva, W. Collischonn, M.-P. Bonnet, F. Frappart, S. Calmant, and C. Bulhques Mendes. Large-scale hydrologic and hydrodynamic modeling of the amazon river basin. *Water Resources Research*, 49(3):1226–1243, 2013a. doi: 10.1002/wrcr.20067. URL <https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/wrcr.20067>.
- R. C. D. Paiva, W. Collischonn, M.-P. Bonnet, L. G. G. De Goncalves, S. Calmant, A. Getirana, and J. S. Da Silva. Assimilating in situ and radar altimetry data into a large-scale hydrologic-hydrodynamic model for streamflow forecast in the amazon. *Hydrology and Earth System Sciences*, 17(7):2929–2946, 2013b. doi: 10.5194/hess-17-2929-2013. URL <https://hess.copernicus.org/articles/17/2929/2013/>.
- A. Paris, R. Dias de Paiva, J. Santos Da Silva, D. Medeiros Moreira, S. Calmant, P.-A. Garambois, W. Collischonn, M.-P. Bonnet, and F. Seyler. Stage-discharge rating curves based on satellite altimetry and modeled discharge in the amazon basin. *Water Resources Research*, 52(5):3787–3814, 2016. doi: 10.1002/2014WR016618. URL <https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/2014WR016618>.
- A. Paris, S. Calmant, M. Gosset, A. Fleischmann, T. Conchy, J.-P. Bricquet, P.-A. Garambois, F. Papa, R. Tshimanga, G. Gulemvuga Guzanga, and et al. Monitoring hydrological variables from remote sensing and modelling in the congo river basin. *Earth and Space Science Open Archive*, page 53, 2020. doi: 10.1002/essoar.10505518.1. URL <https://doi.org/10.1002/essoar.10505518.1>.
- J.-F. Pekel, A. Cottam, N. Gorelick, and A. S. Belward. High-resolution mapping of global surface water and its long-term changes. *Nature*, 540(7633):418–422, 2016. doi: 10.1038/nature20584.
- P. R. M. Pontes, F. M. Fan, A. S. Fleischmann, R. Paiva, D. C. Buarque, V. A. Siqueira, P. F. Jardim, M. V. Sorribas, and W. Collischonn. MGB-IPH model for hydrological and hydraulic simulation of large floodplain river systems coupled with open source GIS. *Environmental Modelling & Software*, 94:1–20, aug 2017. doi: 10.1016/j.envsoft.2017.03.029.
- L. Pujol, P.-A. Garambois, P. Finaud-Guyot, J. Monnier, K. Larnier, R. Mosé, S. Biancamaria, H. Yésou, D. Moreira, A. Paris, and S. Calmant. Estimation of multiple inflows and effective channel by assimilation of multi-satellite hydraulic signatures: The ungauged anabranching negro river. *Journal of Hydrology*, 2020. doi: 10.1016/j.jhydrol.2020.125331.
- M. Ricko, J. A. Carton, C. M. Birkett, and J.-F. Crétaux. Intercomparison and validation of continental water level products derived from satellite radar altimetry. *Journal of Applied Remote Sensing*, 6(1):1 – 24, 2012. doi: 10.1117/1.JRS.6.061710. URL <https://doi.org/10.1117/1.JRS.6.061710>.
- E. Rodriguez, D. Esteban Fernandez, E. Peral, C. W. Chen, J.-W. De Bleser, and B. Williams. Wide-swath altimetry: a review. *Satellite altimetry over oceans and land surfaces*, 2, 2018.
- E. Rodríguez et al. Swot science requirements document. *JPL document*, JPL, 2012.

- E. Rodríguez, M. Durand, and R. Frasson. Observing rivers with varying spatial scales. *Water Resources Research*, 56(9):e2019WR026476, 2020. doi: 10.1029/2019WR026476. URL <https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1029/2019WR026476>. e2019WR026476 10.1029/2019WR026476.
- R. Schneider, M.-E. Ridler, P. N. Godiksen, H. Madsen, and P. Bauer-Gottwein. A data assimilation system combining cryosat-2 data and hydrodynamic river models. *Journal of Hydrology*, 557:197–210, 2018. ISSN 0022-1694. doi: 10.1016/j.jhydrol.2017.11.052. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S002216941730817X>.
- C. Schwatke, D. Dettmering, W. Bosch, and F. Seitz. Dahiti—an innovative approach for estimating water level time series over inland waters using multi-mission satellite altimetry. *Hydrology and Earth System Sciences*, 19(10): 4345–4364, 2015. doi: 10.5194/hess-19-4345-2015. URL <https://hess.copernicus.org/articles/19/4345/2015/>.
- J. S. Da Silva, S. Calmant, F. Seyler, O. C. R. Filho, G. Cochonneau, and W. J. Mansur. Water levels in the amazon basin derived from the ers 2 and envisat radar altimetry missions. *Remote Sensing of Environment*, 114(10):2160–2181, oct 2010. doi: 10.1016/j.rse.2010.04.020. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0034425710001331>.
- L. C. Smith, B. L. Isacks, A. L. Bloom, and A. B. Murray. Estimation of discharge from three braided rivers using synthetic aperture radar satellite imagery: Potential application to ungaged basins. *Water Resources Research*, 32(7):2021–2034, 1996. doi: 10.1029/96WR00752. URL <https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1029/96WR00752>.
- S. Tuozzolo, G. Lind, B. Overstreet, J. Mangano, M. Fonstad, M. Hagemann, R. Frasson, K. Larnier, P.-A. Garambois, J. Monnier, et al. Estimating river discharge with swath altimetry: A proof of concept using air-swot observations. *Geophysical Research Letters*, 46(3):1459–1466, 2019. doi: 10.1029/2018GL080771. URL <https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1029/2018GL080771>.
- S. Wongchuig-Correa, R. C. D. de Paiva, S. Biancamaria, and W. Collischonn. Assimilation of future swot-based river elevations, surface extent observations and discharge estimations into uncertain global hydrological models. *Journal of Hydrology*, 590:125473, 2020. ISSN 0022-1694. doi: 10.1016/j.jhydrol.2020.125473. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022169420309331>.
- H. J. Zwally, R. Schutz, C. Bentley, J. Bufton, T. Herring, J. Minster, J. Spinhirne, and R. Thomas. Glas/icesat l2 antarctic and greenland ice sheet altimetry data v031, boulder, colorado: Nasa distributed active archive center at the national snow and ice data center. *Digital media*, 2012.

Chapitre 3

Double-scale diffusive wave equations dedicated to spatial rivers observations

Sommaire

Résumé	116
3.1 Introduction	120
3.2 Derivation of the double-scale diffusive wave model	121
3.2.1 The Saint-Venant equations	121
3.2.2 Derivation of the double-scale diffusive wave equations	122
3.3 Numerical results	126
3.3.1 Test cases description	126
3.3.2 Results and comparisons	128
3.4 Quantification of each term importance	131
3.4.1 Method	131
3.4.2 Numerical results	133
3.5 Conclusion	134
Bibliography	136

Ce chapitre est basé sur le manuscrit [Malou and Monnier \[2022b\]](#) soumis dans une revue internationale à comité de lecture :

T. Malou and J. Monnier. Double scale diffusive wave equations dedicated to spatial rivers observations. 2022.

Résumé

Dans ce chapitre, une nouvelle équation de l'onde diffusante est dérivée et étudiée de manière consistante avec le contexte de l'altimétrie spatiale.

On rappelle que l'équation de l'onde diffusante classique (1.25) peut s'interpréter comme une approximation des équations de Saint-Venant (1.16) dans lesquelles les termes d'inertie de l'équation des moments (1.14) sont négligés, impliquant la possibilité d'écrire une relation algébrique $Q(H, \partial_x H)$ (1.20) qui est ensuite injectée dans l'équation de conservation de la masse (1.16a), voir section 1.2.4.

Dans le but d'adapter la modélisation de l'écoulement aux observations spatiales, on introduit une double échelle spatio-temporelle. Celle-ci distingue l'échelle de la physique et l'échelle des observations.

L'échelle de la physique est caractérisée par des temps et distances assez courts. Typiquement, le temps caractéristique est de l'ordre de l'heure et la distance caractéristique de l'ordre du mètre.

L'échelle des observations est caractérisée par des temps et distances beaucoup plus longs, voir section 1.1. Par exemple, la période de temps écoulée entre deux passages d'un satellite au dessus d'une station virtuelle est de l'ordre de la dizaine de jours. L'ordre de grandeur de la distance caractéristique va de plusieurs centaines de mètres (distance sur laquelle les données sont moyennées pour réduire le bruit) à plusieurs dizaines de kilomètres (distance entre deux stations virtuelles).

A partir de maintenant, les variables de l'échelle de la physique sont notées (x, t) et les variables de l'échelle des observations sont notées (y, τ) . Les variables génériques $(\mathcal{X}, \mathcal{T})$ seront utilisées pour remplacer les variables de l'échelle de la physique ou de l'échelle des observations par soucis de simplification. Les deux échelles sont reliées par :

$$(y, \tau) = \varepsilon \times (x, t) \quad (3.1)$$

avec ε définissant le ratio entre les deux échelles. Sur des écoulements de rivières réelles, ce ratio satisfait typiquement $\varepsilon \sim 1/250$.

Lors de la dérivation de l'équation de l'onde diffusante en une dimension, il est classiquement supposé que l'écoulement est graduellement varié, impliquant que les variations spatio-temporelles de la largeur sont négligeables, voir e.g. [Chow \[1964\]](#), [Yen and Tsai \[2001\]](#). Il est aussi couramment supposé que la géométrie du canal considéré est uniformément rectangulaire, impliquant que les variations spatio-temporelles de la largeurs sont nulles, voir e.g. [Ponce and Simons \[1977\]](#), [Ferrick \[1985\]](#). Ces deux hypothèses ont pour effet de négliger des termes de variations spatio-temporelles de la largeur.

Cette implication est justifiée à l'échelle de la physique (de l'ordre du mètre et de l'heure) car les variations relatives de la largeur $\frac{\partial_x w}{w}$ et $\frac{\partial_t w}{w}$ sont très faibles pour des larges rivières, voir figure 3.2. Dans un contexte d'altimétrie spatiale, le fait de moyenner les données sur une distance comparable à l'échelle des observations ne permet pas d'observer de variations de largeur à l'échelle de la physique qui est plus petite, voir figure 3.3a. De plus, deux données de largeurs sont séparées par un intervalle de temps et d'espace comparable à l'échelle des observations, voir figure 3.3b.

Ainsi, à l'échelle de la physique, a :

$$\partial_x w \ll 1 \text{ et } \partial_t w \ll 1 \quad (3.2)$$

et l'équation de l'onde diffusante à cette échelle (3.4a) est l'équation obtenue de manière classique dans la littérature, voir e.g. [Ponce and Simons \[1977\]](#).

Dans ce contexte d'observations satellitaires, négliger ces variations de largeur n'est pas justifié à l'échelle des observations. On a :

$$\partial_y w \sim 1 \text{ et } \partial_\tau w \sim 1 \quad (3.3)$$

On introduit maintenant l'expression de l'aire mouillée pour une section trapézoïdale $A = \bar{w}(H - z_b)$ avec la largeur moyenne $\bar{w} = 0.5(w + \tilde{w}(z = z_b))$, ainsi que les expressions des dérivées de la largeur données par les expressions (3.2) à l'échelle de la physique et par les expressions (3.3) à l'échelle des observations dans l'équation (1.24). On obtient les équations de l'onde diffusante à double échelle suivantes, composées de l'équation à l'échelle de la physique et de l'équation à l'échelle des observations :

$$\boxed{\begin{aligned} (\partial_t H - \mu(H)\partial_{xx}^2 H + v(H)\partial_x H) & (x, t) &= (v(H)\partial_x z_b) & (x, t) & (3.4a) \\ (\partial_\tau H - \mu(H)\partial_{yy}^2 H + v(H)\partial_y H + \rho(H)H) & (y, \tau) &= (v(H)\partial_y z_b + \rho(H)z_b) & (y, \tau) & (3.4b) \end{aligned}}$$

avec le coefficient de diffusion effective :

$$\mu(H; \mathcal{X}, \mathcal{T}) = \frac{1}{2} u(H; \mathcal{X}, \mathcal{T}) \frac{(H(\mathcal{X}, \mathcal{T}) - z_b(\mathcal{X}))}{|\partial_{\mathcal{X}} H(\mathcal{X}, \mathcal{T})|} \quad (3.5)$$

la vitesse d'onde :

$$v(H; \mathcal{X}, \mathcal{T}) = \gamma u(H; \mathcal{X}, \mathcal{T}) \quad (3.6)$$

et le coefficient de variations de largeur, spécifique à l'échelle des observations :

$$\boxed{\rho(H; y, \tau) = \frac{1}{\bar{w}(y, \tau)} (\partial_\tau \bar{w}(y, \tau) + \gamma u(H; y, \tau) \partial_y \bar{w}(y, \tau))} \quad (3.7)$$

On rappelle que le débit, et de ce fait la vitesse moyenne, sont aussi des variables d'états à estimer. Les équations de l'onde diffusante à double échelle sont alors fermées avec les expressions de la vitesse moyenne u et du débit Q données par la relation de Manning-Strickler-Gauckler (MSG), avec $K_s^y = \varepsilon^{\frac{1}{2}} K_s^x$ du fait de la double échelle :

$$\begin{aligned} Q(H; \mathcal{X}, \mathcal{T}) &= K_s^{\mathcal{X}} |\partial_{\mathcal{X}} H(\mathcal{X}, \mathcal{T})|^{\frac{1}{2}} (H(\mathcal{X}, \mathcal{T}) - z_b(\mathcal{X}))^{\gamma-1} A(\mathcal{X}, \mathcal{T}) & (3.8) \\ \iff u(H; \mathcal{X}, \mathcal{T}) &= K_s^{\mathcal{X}} |\partial_{\mathcal{X}} H(\mathcal{X}, \mathcal{T})|^{\frac{1}{2}} (H(\mathcal{X}, \mathcal{T}) - z_b(\mathcal{X}))^{\gamma-1} \end{aligned}$$

L'équation de l'onde diffusante à l'échelle des observations (3.4b) correspond à l'équation de l'onde diffusante à l'échelle de la physique avec un terme de réaction $\rho(H)H$ et un terme source $\rho(H)z_b$ additionnels.

Des résultats d'existence et d'unicité de la solution faible ont été présentés dans la section 1.2.4.2 pour l'équation de l'onde diffusante classique et donc à l'échelle de la physique (3.4a). Dans le but d'étendre ces résultats à l'équation de l'onde diffusante à l'échelle des observations (3.4b), cette dernière peut s'écrire dans la forme suivante :

$$\partial_\tau H - \partial_y \left(K_s \frac{(H - z_b)^\gamma}{|\partial_y H|^{1-\alpha}} \partial_y H \right) + \frac{\partial_\tau \bar{w}}{\bar{w}} (H - z_b) + \gamma \frac{\partial_y \bar{w}}{\bar{w}} \underbrace{K_s^y |\partial_y H|^{\frac{1}{2}} (H - z_b)^\gamma}_{=u \times (H - z_b)} = 0 \quad (3.9)$$

L'équation à l'échelle des observations (3.9) comporte le même terme de diffusion non-linéaire que l'équation classique dans la forme (1.27), mais aussi deux termes supplémentaires.

Le terme d'ordre 0 $\frac{\partial_x \bar{w}}{\bar{w}}(H - z_b)$ ne présente que peu de difficulté pour étendre ces résultats d'existence et d'unicité de la solution faible, il serait probablement nécessaire de supposer que $\partial_x \bar{w}$ est minoré pour assurer la coercivité. Le terme d'auto-convection $\gamma \frac{\partial_y \bar{w}}{\bar{w}} K_s^y |\partial_y H|^{\frac{1}{2}} (H - z_b)^\gamma$ nécessiterait cependant une analyse plus approfondie pour arriver à de tels résultats.

La résolution numérique de l'équation de l'onde diffusante à l'échelle des observations est similaire à la résolution de l'équation de l'onde diffusante à l'échelle de la physique en ajoutant simplement ces deux nouveaux termes, voir chapitre B.

Ces équations de l'onde diffusante à double échelle sont étudiées numériquement sur des canaux tests construits avec des grandeurs de rivières réelles (Rio Negro et Garonne) et de manière consistante avec les observations spatiales. Les équations de l'onde diffusante à double échelle sont étudiées au travers de leur état stationnaire. La solution des équations de Saint-Venant est utilisée comme référence.

Pour avoir un cadre dans lequel les résultats des équations de l'onde diffusante à double-échelle sont comparables entre eux et avec le résultat des équations de Saint-Venant, le coefficient K_s est considéré comme constant et la valeur est la même pour les équations de l'onde diffusante et pour les équations de Saint-Venant, mis à part le changement d'échelle pour l'équation de l'onde diffusante à l'échelle des observations $K_s^y = \varepsilon^{\frac{1}{2}} K_s^x$. De plus, les conditions aux bords de Dirichlet en amont et en aval, resp. H_u et H_d , pour les équations de l'onde diffusante sont les hauteurs H calculées par les équations de Saint-Venant en amont et en aval.

Les deux équations de l'onde diffusante estiment l'aire mouillée A avec des précisions relativement similaires, bien que l'équation de l'onde diffusante à l'échelle des observations donne toujours une estimation de A sensiblement meilleurs. La masse est relativement bien préservée par ces deux équations de l'onde diffusante.

L'estimation de H calculée par l'équation de l'onde diffusante à l'échelle de la physique est influencée uniquement par la bathymétrie z_b et par les conditions aux bords. D'un autre côté, l'estimation de H calculée par l'équation de l'onde diffusante à l'échelle des observations est aussi influencée par la largeur au travers des deux termes $\rho(H)H$ et $\rho(H)z_b$ spécifique à cette équation. Il en résulte que l'estimation de la pente $\partial_x H$ calculée par l'équation de l'onde diffusante à l'échelle des observations prend en compte les variations de la largeur contrairement à l'estimation calculée par l'équation de l'onde diffusante à l'échelle de la physique. Étant donné que Q estimé par les équations de l'onde diffusante est calculé à partir de la relation de MSG (3.8), la précision de l'estimation de Q est directement liée à la précision de l'estimation de $\partial_x H$. Ainsi, l'onde diffusante à l'échelle des observations estime Q avec une bien meilleure précision que l'onde diffusante à l'échelle de la physique. Cela est encore plus vrai dans des portions de rivières où la largeur a une influence non-négligeable sur l'écoulement.

La quantification de l'importance des termes d'une équation est ensuite étudiée. Dans le cadre des équations de l'onde diffusante à double échelle, cette quantification de l'importance vise à déduire si les termes $\rho(H)H$ et $\rho(H)z_b$, spécifiques à l'équation à l'échelle des observations, sont des termes importants ou non.

Celle-ci est basée sur la méthode SINDy, voir Brunton et al. [2016] et section 1.3.5. Dans le cas de l'onde diffusante à l'état stationnaire, l'équation peut se réécrire :

$$\frac{1}{2} \frac{(H(x) - z_b(x))}{|\partial_x H(x)|} \partial_{xx}^2 H(x) = D(x; H, z_b, w) \Theta^T \quad (3.10)$$

avec le dictionnaire suivant :

$$D(x; H, z_b, w) = \left[\partial_x H, \frac{\partial_x \bar{w}}{\bar{w}} H, \partial_x z_b, \frac{\partial_x \bar{w}}{\bar{w}} z_b, \partial_{xx}^2 H, H \partial_x H, \partial_{xx} z_b \right] \quad (3.11)$$

Ainsi, l'ensemble des termes de l'équation de l'onde diffusante à l'échelle des observations ainsi que des termes additionnels tels qu'un terme de diffusion supplémentaire, sont présents dans D . On rappelle que la méthode SINDy vise à trouver les coefficients Θ^* qui optimise la norme du résidu de l'équation J_{res} pénalisée par la norme L_1 de Θ pour assurer la parcimonie de la solution (problème d'optimisation linéaire classique) : $\Theta^* = \arg \min_{\Theta} J_{res}(\Theta; H) + \lambda \|\Theta\|_1$.

Pour étudier l'ordre d'importance des termes, cette optimisation sera faite pour un ensemble de valeurs de λ , poids du terme de parcimonie. Quand λ est assez grand, tous les coefficients seront nuls. Puis quand λ décroît, les coefficients vont progressivement s'activer. Ainsi, l'ordre d'importance des termes correspond à l'ordre dans lequel les coefficients associés s'activent quand λ décroît.

Dans le cas présent, l'ensemble des termes est observé grâce à la hauteur H estimée par les équations de Saint-Venant (1.16) et les différentes dérivées sont calculées par différences finies centrées. Cette expérience permet donc de déterminer quels sont les principaux termes de l'équation de l'onde diffusante pour reproduire l'estimation de H calculée par les équations de Saint-Venant sous l'hypothèse d'un nombre de Froude faible. L'expérience étant appliquée sur le Rio Negro avec des vraies données, cette dernière hypothèse est vérifiée.

De cette expérience, il en ressort que le terme $\rho(H)H$ est un terme très important : il s'active en 4^e position dans l'ordre d'importance, presque en même temps que le terme $\partial_x H$ en 3^e position, et la norme du résidu décroît significativement à l'activation de ce terme. Le terme $\rho(H)z_b$, quant à lui, s'avère être peu important. Ainsi, au moins un des termes spécifiques à l'équation de l'onde diffusante à l'échelle des observations est un terme important et dominant.

Le terme de diffusion additionnel $\partial_{xx}^2 H$ s'active en premier, en même temps que le terme $\partial_x z_b$. Cependant, il décroît significativement vers 0 quand λ décroît. Ainsi, ce terme est un terme de compensation dont l'influence décroît au fur et à mesure que de nouveaux termes, et surtout le terme $\rho(H)H$, s'activent. Ce terme et son activation précoce montre la sensibilité de l'équation de l'onde diffusante au coefficient de diffusion $\frac{1}{2} \frac{(H(x) - z_b(x))}{|\partial_x H(x)|}$ et plus particulièrement à la pente $\partial_x H$.

Abstract

In river flow modeling, the diffusive wave equation can be an interesting approximation of the Saint-Venant equations because it is simpler and still allows a rich modeling. Moreover, the computed variable is the water surface elevation which can be directly measured, unlike the discharge. This study introduces a space-time double scale that considers both the physical scale (the small scale) and the observations scale (the large scale). At the physical scale, the gradually varied assumption holds and the spatio-temporal variations of the river width are negligible. However, this is often not true at the observations scale. Then, an enriched diffusive wave equation in agreement with the observations scale, called the observations-scale diffusive wave equation, is rigorously derived. The latter takes into account the spatio-temporal variations of the width through additional terms. This new equation and the classical diffusive wave equation are numerically compared with each other, and with the Saint-Venant system taken as reference. This new diffusive wave equation provides better estimates of the slope of the free surface and of the discharge than the classical one. Finally, the importance of the additional terms specific to the observations-scale diffusive wave is quantified using a sparse identification method in a dictionary of differential model terms. This original approach highlights that one of the newly introduced terms is one of the dominant terms.

Keywords. Diffusive wave equations; double-scale asymptotic derivation; river flow modeling; satellite observations; quantification of model terms.

3.1 Introduction

The Diffusive Wave (DW) equation is an approximation of the Saint-Venant (SV) equations used to model gradually varied free surface of river flows, see e.g. [Ponce and Simons \[1977\]](#). It is derived from the SV equations assuming the inertia term is negligible, hence it is also called noninertial wave equation, see e.g. [Yen and Tsai \[2001\]](#). The DW equation has been proven to be a reliable approximation of the SV system [[Ponce et al., 1978](#), [Santillana and Dawson, 2010](#)]. It is a rather simple approximation but it still is capable of modeling backwater effects, unlike the kinematic wave that also neglects the pressure term, see e.g. [Ponce and Simons \[1977\]](#), [Yen and Tsai \[2001\]](#).

The choice of a mathematical model can be influenced by the data available too. For example, solving the 1D SV system, which state variables are the wet area A and the discharge Q , requires imposing Q as upstream boundary condition which can be complex to measure. On the other hand, the DW equation, which state variable is the water surface elevation H , can be solved with H as Dirichlet boundary conditions, which is much easier to measure. This is especially true in a altimetry satellite context where the water surface elevation H is observed. Moreover, in this context, the assumption that the inertia terms are negligible (low Froude assumption) is rather well respected, see e.g. [[Garambois and Monnier, 2015](#), [Larnier and Monnier, 2020](#)].

In other respects, features such as the sensitivity with respect to the bathymetry may influence the choice of the mathematical model too. For example, [Guinot and Cappelaere \[2009\]](#) have analysed the sensitivity of the SV system with respect to parameters such as the bathymetry. Based on this study, [Aricò et al. \[2011\]](#) came to the conclusion that the DW equation might be less sensitive to variations in the bathymetry than the SV system.

The DW equation is a doubly nonlinear, potentially degenerated, equation. The nature of the equation makes the study of its mathematical properties rather difficult, see e.g. [Alonso et al. \[2008\]](#) and [Bögelein et al. \[2021\]](#) for

results on the existence and uniqueness of weak solutions. Still, it has been used in practical applications to model 1D flows (see e.g. [Bates and De Roo \[2000\]](#)), 2D flows (see e.g. [Hromadka et al. \[1985\]](#), [Santillana and Dawson \[2010\]](#)) or even 1D-2D coupling [[Aricò et al., 2016](#)].

In the present study, we introduce a double scale which distinguishes the so-called physical scale that is a relatively small scale represented by the usual space-time variables (x, t) , and the observations scale represented by the variables (y, τ) . These two scales are linked by a single small scaling ratio ε : $(y, \tau) = \varepsilon \times (x, t)$. In the present altimetry context, one typically has $\varepsilon \approx 1/250$.

In the derivation of the DW equation, the flow is classically assumed to be gradually varied i.e. the water depth h varies slowly enough, see e.g. [Chow \[1964\]](#), [Yen and Tsai \[2001\]](#). For sake of simplicity, the assumption that the geometry of the channel is a uniform rectangular is also quite common, see e.g. [Ponce and Simons \[1977\]](#), [Ferrick \[1985\]](#). Both assumptions lead to neglecting the terms related to the width and its spatio-temporal variations in the derivation of the DW equation. These assumptions can be justified at the physical scale.

In the present study, we investigate the derivation of a diffusive wave like equation in a context of spatial altimetry observations. In this context, the scale of the observations, width included, does not justify neglecting the width variations terms. The corresponding enriched DW equation in agreement with the observations scale, called the observations-scale DW equation, is rigorously derived.

The outline of the article is as follows.

In the first section, we present the double scale assumption and the derivation of the double-scale DW equations from the SV system. These double-scale DW equations include the new observations-scale and the classical physical-scale one. In the second section, the observations-scale DW equation is compared with the physical-scale DW equation and with the SV system that is taken as reference. In the third section, we present a method to assess the importance of the different terms of the DW equation, based on the method to identify the terms of a model proposed in [Brunton et al. \[2016\]](#).

3.2 Derivation of the double-scale diffusive wave model

In this section, the derivation of the double-scale diffusive wave equations from the Saint-Venant system is presented. First of all, the Saint-Venant system is recalled. Then, the additional hypothesis, especially the double-scale assumption, are presented. Finally, the double-scale diffusive wave equations are derived.

3.2.1 The Saint-Venant equations

The most classical dynamical river flow model is the one-dimension Saint-Venant¹ equations, see e.g. [Chow \[1964\]](#). In these equations, the natural state variables are the wet area $A(x, t)$ and the discharge $Q(x, t)$:

$$\begin{cases} \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 & (3.12a) \\ \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} \right) + gA \frac{\partial H}{\partial x} = -gAS_f & (3.12b) \end{cases}$$

with g the gravity magnitude and $H(x, t)$ the free surface height. The friction term $S_f(x, t)$ is defined by the classical Manning-Strickler formula. Assuming $Q > 0$ and the hydraulics radius R_h satisfies $R_h \approx h$, the expression

1. The 1D Saint-Venant system are denoted by SV.

reads:

$$S_f = \frac{Q^2}{K_s^2 A^2 h^{\frac{4}{3}}} \quad (3.13)$$

with K_s the Strickler roughness coefficient.

The bathymetry is denoted $z_b(x)$, the average cross-section velocity $u(x, t) = \frac{Q(x, t)}{A(x, t)}$, the water depth $h(x, t) = H(x, t) - z_b(x)$ and the top width $w(x, t)$, see Fig. 3.1. The average width $\bar{w}(x, t)$ is the river width averaged over a cross-section located at x , at time t , see Fig. 3.1. The abscissa x is the curvilinear abscissa of the centreline of the river and $x \in \Omega = [0, L]$. The modeling time window is $t \in [0, T]$.

the SV system are solved using the Preissmann scheme [Cunge, 1980] implemented in the DassFlow-1D software [Monnier et al., 2018].

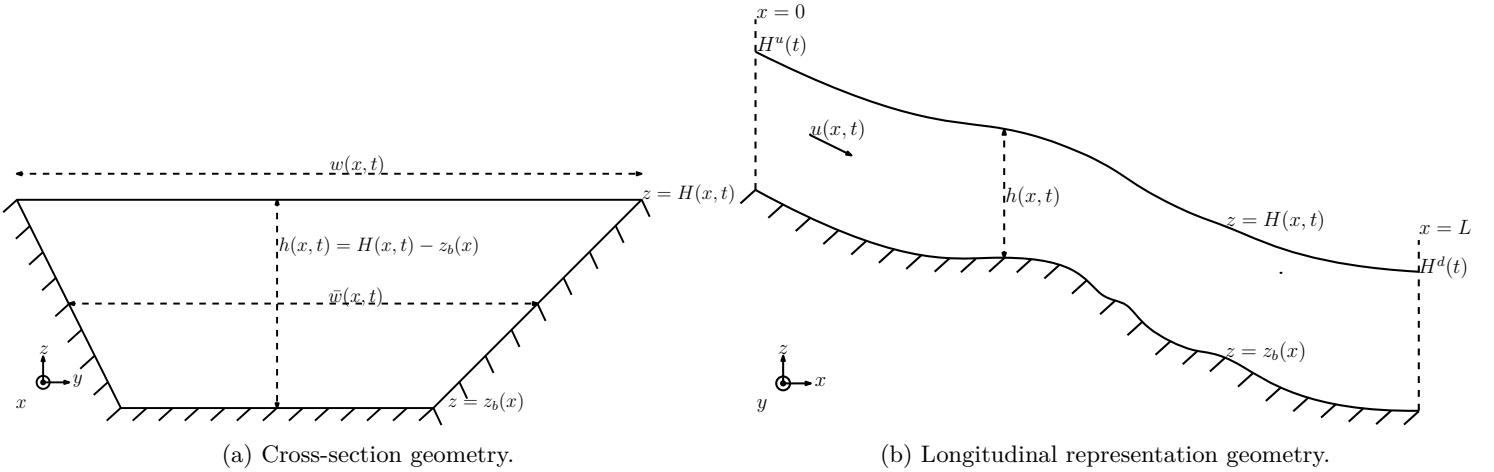


Figure 3.1 – Overall assumed geometry of the river.

3.2.2 Derivation of the double-scale diffusive wave equations

To derive the diffusive wave from the SV system, some additional hypothesis must be made. In a first time, we present some additional but classical hypothesis such as an hypothesis on the geometry of the cross-sections and the low Froude assumption. Then, the hypothesis specific to our double-scale diffusive wave equations, namely the double-scale assumption, is presented. Finally, these hypothesis are injected in the SV system to derive the double-scale diffusive wave equations.

3.2.2.1 Additional hypothesis

Geometry and low Froude assumptions

While the state variables of the SV system (3.12) are naturally (A, Q) , the natural state variable of the spatial observations is H . However, a bijective relation between A and H is naturally built up. Following e.g. Brisset et al. [2018], Larnier and Monnier [2020], the effective geometry is chosen as trapezoid, Fig. 3.1a:

$$A(H; x, t) = \bar{w}(x, t) (H(x, t) - z_b(x)) \quad (3.14)$$

with $\bar{w}(x, t)$ the average width of the wet area at a given time and location.

The geometrical ratio of the flow is defined by $\epsilon = \frac{h_0}{L_0}$ with h_0 a characteristic height and L_0 a characteristic length

of the flow. For large rivers, the shallow water feature of the flow is based on the long-wave assumption: $\epsilon \ll 1$ (see e.g. [Dingemans \[1997\]](#)). The fluvial motion is considered that is the Froude number is assumed to be small:

$$Fr^2 = O(\epsilon) \quad (3.15)$$

This assumption is common and is justified on a large number of river through databases such as Pepsi 2, cf. [Garambois and Monnier \[2015\]](#), [Larnier and Monnier \[2020\]](#).

The double-scale assumption

The double-scale assumption is motivated by differences between the usual flow scale (continuum mechanics derivation scale) and the scale of the altimetry observations.

The time and distance characteristics of the "physical scale" are quite small, of the order of magnitude of an hour and a meter.

On the contrary, the time and distance characteristics of the altimetry observations are quite large. Typically, the time between two satellite flybys at a virtual station (intersection of the satellite track with the river) is a dozen days (10 for the Jason-3 satellite, 27 for Sentinel-3 and 21 for the upcoming SWOT satellite). Also, the characteristic lengths are between a few hundred meters (scale of a satellite swath, $\sim 250m$ for the SWOT satellite, see [Rodríguez et al. \[2012\]](#)) and several tens of kilometres (distance between 2 virtual stations, e.g. between $0.7km$ and $100km$ on the Rio Negro, see Fig. 3.2 and e.g. [Malou et al. \[2021\]](#)).

Thus, the "physical scale" and the "observation scale" are distinct. Henceforth, the variables of the physical scale are denoted by (x, t) and the variables of the observation scale by (y, τ) . They are supposed to satisfy:

$$(y, \tau) = \epsilon \times (x, t) \quad (3.16)$$

with ϵ defining the ratio between the two scales. In real-world flows, this ratio typically satisfies: $\epsilon \sim 1/250$. The long wave assumption parameter and the scales ratio are defined as being the same, see eg [Chang and Demekhin \[2002\]](#) for asymptotic flow model derivations with respect to a small parameter.

In the river hydraulics community, flows are considered to be "gradually varied", i.e. the water depth h varies slowly enough, see e.g. [[Chow, 1964](#), p. 6] and [Yen and Tsai \[2001\]](#). This assumption is used to satisfy:

$$\partial_x \bar{w} \ll 1 \text{ and } \partial_t \bar{w} \ll 1 \quad (3.17)$$

At physical scale, this assumption is justified since the relative width variations $\frac{\partial_x w}{w}$ and $\frac{\partial_t w}{w}$ are very small, in particular for large rivers (see Fig. 3.2). Moreover, in an altimetry context:

- At a given virtual station and flyby, the width data measured by the satellite are averaged over the swath to provide a single width value with better accuracy. The swath size is comparable to the characteristic length of the observation scale. Hence, spatial variations in the width at a scale smaller than the swath size are not observed (see Fig. 3.3a).
- The average width mentioned above is computed at a virtual station at each flyby. Thus, the time and space intervals between two width values are comparable to the observation scale (see Figs. 3.3b and 3.2).

On the other hand, the width variations are not negligible at the observation scale, see Fig. 3.2. One has:

$$\partial_y \bar{w} \sim 1 \text{ and } \partial_\tau \bar{w} \sim 1 \quad (3.18)$$

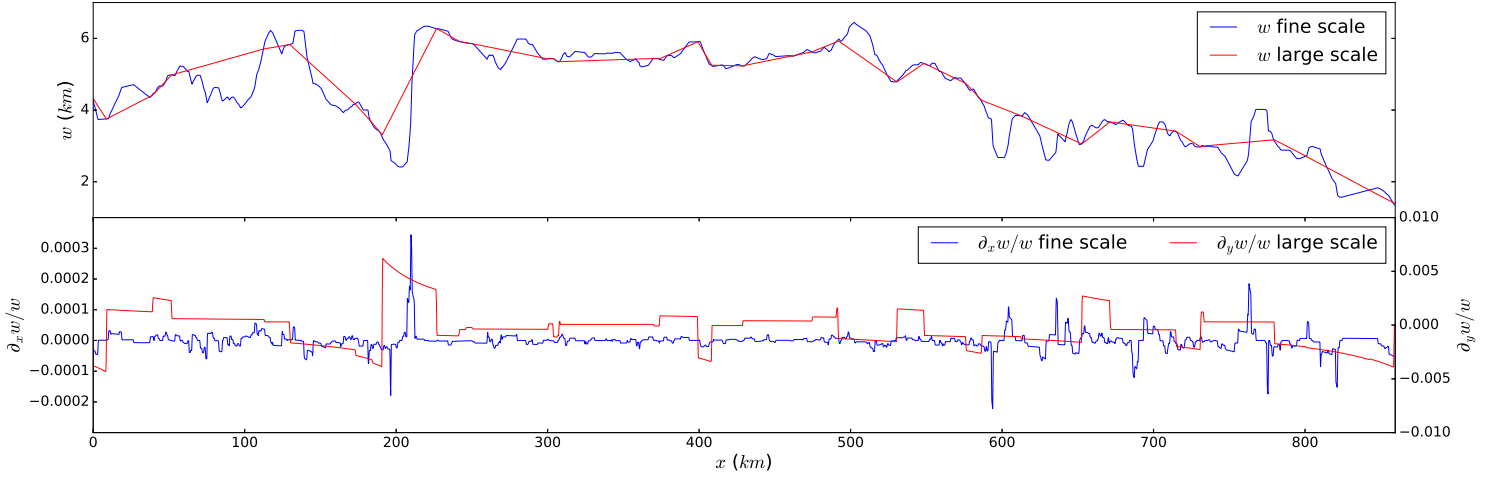


Figure 3.2 – Width and its relative variation on the Rio Negro (Amazon basin). Fine scale values of w are computed from satellite images (static estimation derived from the optic landsat imagery with a 30-meter resolution, as in Pujol et al. [2020]). Large scale values of w are the altimetric-like derived values from the fine scale width (one point per virtual station with linear interpolation between). In this test case, $\varepsilon = 1/250$.

These variations can be computed from the satellite measurements of width; it will be computed in particular with the upcoming SWOT data [Rodríguez et al., 2012, Rodríguez et al., 2020].

Finally, the double-scale assumption states that the flow can be considered gradually varied at physical scale but not at the observation scale.

From now, the generic variables $(\mathcal{X}, \mathcal{T})$ denote either (x, t) for the physical scale or (y, τ) for the observation scale.

3.2.2.2 The double-scale diffusive wave equations

First, the low Froude assumption (3.15) implies that the momentum equation (3.12b) becomes :

$$gA\partial_{\mathcal{X}}H = -gS_fA \quad (3.19)$$

The Manning-Strickler formula (3.13) with the low Froude momentum equation (3.19) implies the following Manning-Strickler law (assuming that $\partial_{\mathcal{X}}H < 0$):

$$Q = K_s^{\mathcal{X}} |\partial_{\mathcal{X}}H|^{\frac{1}{2}} h^{\gamma-1} A \iff u = K_s^{\mathcal{X}} |\partial_{\mathcal{X}}H|^{\frac{1}{2}} h^{\gamma-1} \quad (3.20)$$

The power law is set here at its classical value: $\gamma = \frac{5}{3}$ [Chow, 1964].

Note that the expression of u depends on the scale considered. However, the value u does not depends on the scale since time and space are scaled with the same scaling factor ε . In order to keep the same value of u between the two scales, the Strickler coefficient for the observation scale K_s^y has to be scaled accordingly: $K_s^y = \varepsilon^{\frac{1}{2}} K_s^x$, with K_s^x the Strickler coefficient for the physical scale (that is the classical Strickler coefficient).

The Manning-Strickler law (3.20) [Durand et al., 2014, Garambois and Monnier, 2015], or similar stage-fall-discharge laws [Malou et al., 2021, Mansanarez et al., 2016], are often used to provide an estimate of Q from H and $\partial_x H$.

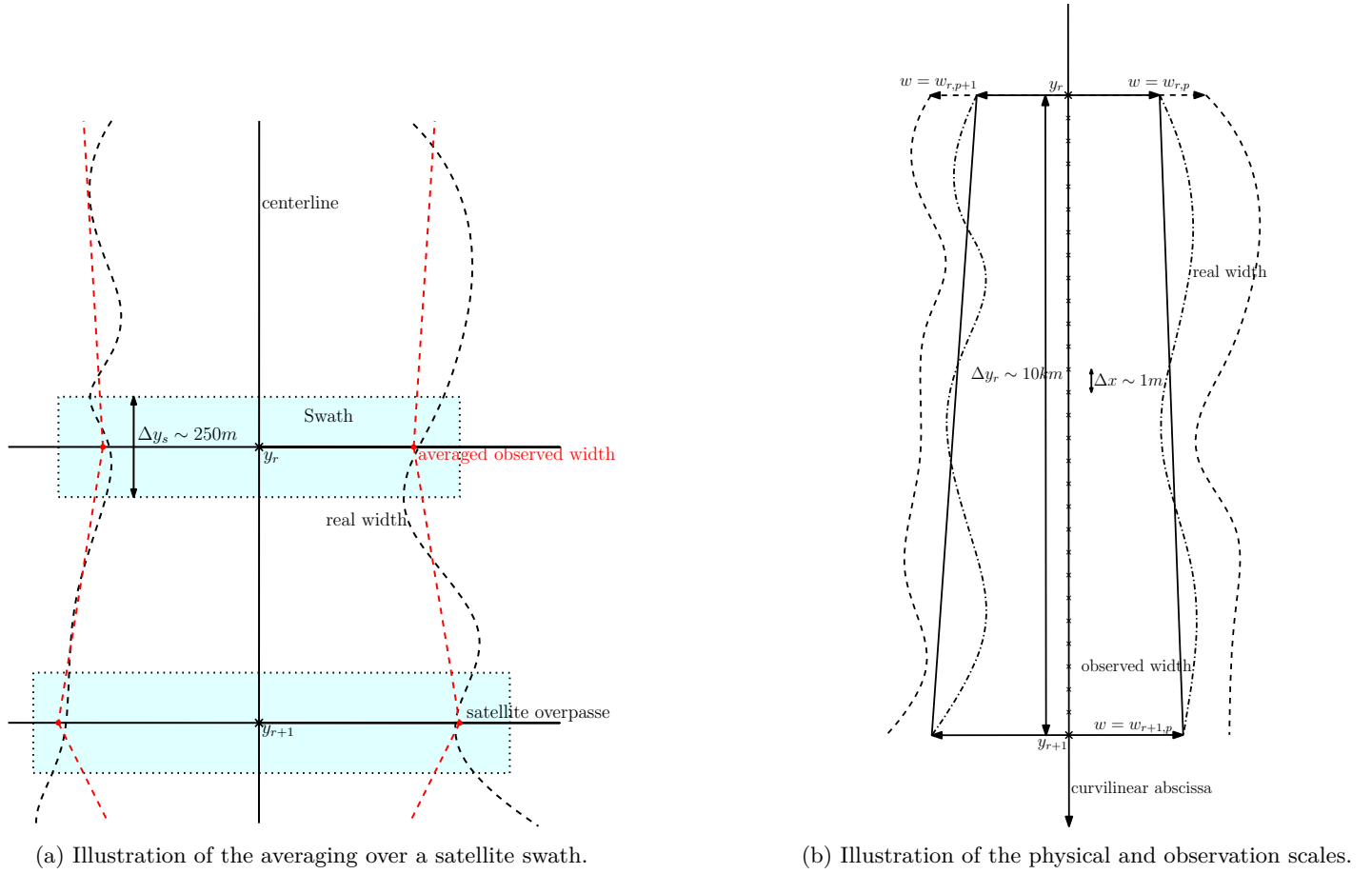


Figure 3.3 – Illustration of the double-scale of the river width: real value and value averaged over a swath (providing an effective width). The index r is for the virtual station; the index p is for the pass of the satellite above the virtual station.

A scalar equation (called the "one-equation" model, see e.g. [Chang and Demekhin \[2002\]](#)) is obtained by injecting the Manning-Strickler law (3.20) into the mass equation (3.12a) ("lubrication theory"):

$$\partial_{\mathcal{T}} A(H) + \gamma u(H) \partial_{\mathcal{X}} A(H) + \frac{1}{2} u(H) \frac{\partial_{\mathcal{X}\mathcal{X}}^2 H}{\partial_{\mathcal{X}} H} A(H) = 0 \quad (3.21)$$

with $u(H)$ defined by the parametrization (3.20).

From the geometry (3.14) and the double-scale assumptions (3.17) and (3.18), the derivatives of A become :

$$\partial_t A(H) = \bar{w} \partial_t H \text{ and } \partial_x A(H) = \bar{w} (\partial_x H - \partial_x z_b) \quad (3.22)$$

$$\partial_{\mathcal{T}} A(H) = (H - z_b) \partial_{\mathcal{T}} \bar{w} + \bar{w} \partial_{\mathcal{T}} H \text{ and } \partial_y A(H) = (H - z_b) \partial_y \bar{w} + \bar{w} (\partial_y H - \partial_y z_b) \quad (3.23)$$

Then, the assumptions (3.14), (3.22) and (3.23) are injected in the one-equation model (3.21). Finally, the double-scale diffusive wave² equations $\forall(x, t) \in [0, L] \times [0; T]$ are the following :

$$\boxed{(\partial_t H - \mu(H)\partial_{xx}^2 H + v(H)\partial_x H)}(x, t) = (v(H)\partial_x z_b)(x, t) \quad (3.24a)$$

$$\boxed{(\partial_\tau H - \mu(H)\partial_{yy}^2 H + v(H)\partial_y H + \rho(H)H)}(y, \tau) = (v(H)\partial_y z_b + \rho(H)z_b)(y, \tau) \quad (3.24b)$$

with the effective diffusion coefficient :

$$\mu(H; \mathcal{X}, \mathcal{T}) = \frac{1}{2}u(H; \mathcal{X}, \mathcal{T})\frac{(H(\mathcal{X}, \mathcal{T}) - z_b(\mathcal{X}))}{|\partial_{\mathcal{X}}H(\mathcal{X}, \mathcal{T})|} \quad (3.25)$$

the wave velocity :

$$v(H; \mathcal{X}, \mathcal{T}) = \gamma u(H; \mathcal{X}, \mathcal{T}) \quad (3.26)$$

and the width variation coefficient :

$$\boxed{\rho(H; y, \tau) = \frac{1}{\bar{w}(y, \tau)}(\partial_\tau \bar{w}(y, \tau) + \gamma u(H; y, \tau)\partial_y \bar{w}(y, \tau))} \quad (3.27)$$

Recall the DW equations are closed with the Manning-Strickler law (3.20).

Since Q is assumed positive, u is also positive. Since $h = (H - z_b)$ is positive by construction, μ defined by (3.25) is strictly positive.

Note that $|\partial_{\mathcal{X}}H|$ appears as the denominator in μ . For large rivers under the low Froude assumption (3.15), $|\partial_{\mathcal{X}}H|$ is likely to be low (see e.g. Fig. 3.5). Therefore, μ is likely to be large or even extremely large in some locations.

If $(y, \tau) \mapsto \bar{w}(y, \tau)$ is sufficiently smooth, the coefficient ρ , defined by (3.27), is bounded in finite time.

The observations-scale DW equation (3.24b) corresponds to the classical gradually varied physical-scale DW equation (3.24a) (see e.g. Yen and Tsai [2001], Weill et al. [2014]) plus the reaction term $\rho(H)(H - z_b)$ related to the width variations.

3.3 Numerical results

The objective of this section is to study numerically the solutions of the previously derived DW equations (3.24). The solutions of the double-scale DW equations are compared to each other in order to highlight the impact of the width variation coefficient (3.27) specific to the observations-scale DW equation (3.24b). The solutions of the DW equations are also compared to a reference solution, the latter being a fine grid solution of the SV system (3.12). First, the experiment is presented. This experiment is applied on channels that have real river magnitudes and are then presented. Then, the numerical results are presented and analysed.

3.3.1 Test cases description

The different equation solutions are compared in an altimetry-like context in the steady state cases. For steady flows and assuming that $\frac{\partial_x \bar{w}}{\bar{w}} \approx 0$, the DW equations (3.24) simplifies as:

$$-\frac{1}{2}\frac{(H(\mathcal{X}) - z_b(\mathcal{X}))}{|\partial_{\mathcal{X}}H(\mathcal{X})|}\partial_{\mathcal{X}\mathcal{X}}^2 H(\mathcal{X}) + \gamma\partial_{\mathcal{X}}H(\mathcal{X}) + \gamma\frac{\partial_{\mathcal{X}}\bar{w}(\mathcal{X})}{\bar{w}(\mathcal{X})}H(\mathcal{X}) = \gamma\partial_{\mathcal{X}}z_b(\mathcal{X}) + \gamma\frac{\partial_{\mathcal{X}}\bar{w}(\mathcal{X})}{\bar{w}(\mathcal{X})}z_b(\mathcal{X}) \quad (3.28)$$

2. The Diffusive Wave equations are denoted by DW and the Physical Scale and Observation Scale one by resp. physical-scale DW and observations-scale DW.

Note that the velocity u does not appear anymore in the steady-state equation (3.28).

Recall that the state variables of the SV system (3.12) are (A, Q) . The SV system is closed by imposing a discharge value Q_{in} at inflow and a water surface elevation H_{out} at outflow. The Strickler coefficient K_s is assumed constant, $K_s = 20$. The state variable of the DW equations is H only. H is the measured variable in an altimetry context too. Therefore, this is a variable to be preserved. Thus, the upstream and downstream water surface elevations of the reference solution, resp. denoted by H_u^{ref} and $H_d^{ref} = H_{out}$, are imposed as boundary conditions of the DW equations.

Calibrating K_s to impose simultaneously at inflow the same elevation H_u^{ref} and the same discharge Q_{in} on the DW and SV equations is not straightforward (especially in unsteady cases).

In the steady case, the calibration of K_s only rescales and shifts the resulting discharge so $Q = Q_{in}$ is satisfied upstream. This shift depends on the geometry of the channel. Hence, the estimation of Q and the resulting comparison of the double-scale DW equations are biased with respect to the geometry of the channel.

In order to study only the behavior of the DW equation solutions, such calibrations are not performed. In all the numerical results below, we have: $K_s = K_s^x = 20$ and $K_s^y = \varepsilon^{\frac{1}{2}} K_s^x$.

The solutions of the steady-state DW equations are compared through their differences with the reference solution (SV system). For a state variable η computed by a DW equation, the following relative difference is computed: $\epsilon_\eta(x) = \frac{|\eta(x) - \eta^{SV}(x)|}{|\eta^{SV}(x)|}$, with η^{SV} the state variable computed by the SV system.

The presented results are obtained on two different numerically built channels. The geometry and boundary conditions Q_{in} and H_d^{ref} are constructed with orders of magnitude of real rivers, see Tab. 3.1.

The cross-sections are assumed to be rectangular: $\bar{w} = w$. The channel bathymetry z_b is the linear interpolation of the upstream and downstream bathymetry of the real river values; $\partial_x z_b$ is constant.

A fine-scale width is constructed from the mean width (denoted w_m), the standard deviation of the width (denoted σ_w) and a characteristic wavelength (denoted λ_w) of the real river width, see Figs. 3.2 and 3.4. Then, the large-scale width is constructed from the values of the fine-scale width at virtual stations which are separated by a distance depending on a characteristic length of the observation scale (denoted by L_{vs}). Between the virtual stations, the large-scale width is interpolated linearly, see the lower part of Figs. 3.5 and 3.6.

The first channel is based on a 900 km section of the Rio Negro (Amazon basin), see the width and its variations on Fig. 3.2. The distance $L_{vs} \approx 22$ km corresponds to the average distance between two virtual stations on this river considering the Sentinel-3A, -3B and Jason-3 satellites.

The second channel is based on the Garonne River, see the width on Fig. 3.4. On this channel, the distance $L_{vs} = 300$ m corresponds to the magnitude of a swath size [Rodríguez et al., 2012]. The Froude number of this channel is higher than the one of the Rio Negro-like channel, see Tab. 3.1. This is among the smallest rivers on which the low Froude assumption (3.15) is valid. Note on Fig. 3.4 that the Garonne river suddenly widens around $x = 52$ km and $x = 57$ km. This is due to the floodplains that are (erroneously) included in the in situ data.

River	w_m (km)	λ_w (km)	σ_w (m)	L_{vs} (km)	$\frac{\partial_x w}{w}$	Fr	Q_{in} ($m^3 \cdot s^{-1}$)	$z_b^d + h_d^{ref}$ (m)
Rio Negro	4.5	22	1126	22	$\sim 10^{-4}$	< 0.15	8.2×10^3	$0 + 4.86$
Garonne	0.149	4	43.46	0.3	$\sim 10^{-4}$	< 0.22	99	$61.41 + 1.23$

Table 3.1 – Characteristics numbers of the two river-like channels.

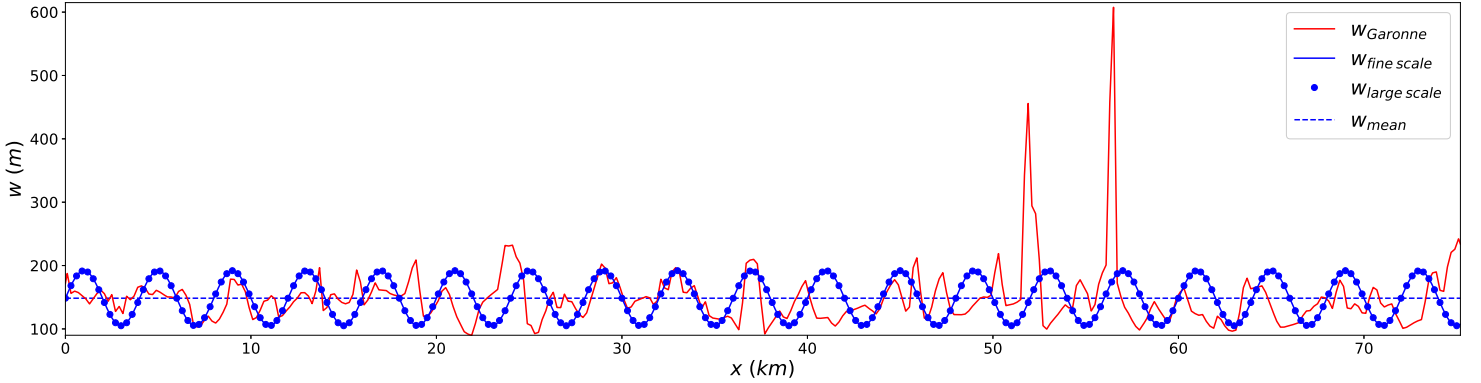


Figure 3.4 – Width of the Garonne river (in red, from in situ data) and Garonne-like width (in blue, at fine-scale in full line, at large-scale in dots, the mean width in dashed line).

3.3.2 Results and comparisons

In the first part of this section, the results obtained on the two academic but real-like channels (Rio Negro-like and Garonne-like) are presented. Then, the results of the double-scale DW equations (3.24) are compared with each other and with the reference solution (solution of the SV system (3.12)).

3.3.2.1 Numerical results

Recall that the SV equations (3.12) constitute a conservative hyperbolic system whose state variables are (A, Q) . Moreover, in the steady state cases (like the present test case), the mass equation (3.12a) becomes $\partial_x Q = 0$, which implies that Q is constant over the whole domain. The surface elevation H is then deduced from the geometry relation: $A = wh$ with $h = H - z_b$.

On the contrary, the DW equations (3.24) are non-conservative diffusive equations, which state variable is H . The DW equations are closed by the algebraic Manning-Strickler relation (3.20) (modeling locally uniform steady-state flows) between the three state variables H and (A, Q) . In the present context of rectangular cross-sections this relation reads:

$$Q = K_s^{\mathcal{X}} |\partial_x H|^{\frac{1}{2}} w h^{5/3} \quad (3.29)$$

Given a constant friction coefficient $K_s^{\mathcal{X}}$ (like in the present test case), (3.20) does not enable to preserve simultaneously Q and A (and hence H) everywhere and at every time.

Finally recall that, due to the boundary conditions imposed on the DW equations and to the Strickler coefficient K_s , Q and A are not both conserved upstream, see Fig. 3.5 and Fig. 3.6.

On both the Rio Negro-like channel (see Fig. 3.5) and the Garonne-like channel (see Fig. 3.6), the solution of the observations-scale DW equation (green curve) provides an estimate of H which has similar variations and oscillations to those of w . The estimate of Q computed by the observations-scale DW equation also has similar variations (but with opposite sign) to those of w .

Since z_b is defined as a constant slope and there is no width variation term in the physical-scale DW equation (it is equivalent to consider a rectangular channel of constant width), the depth $h = (H - z_b)$ estimated by the physical-scale DW equation (blue curve) is almost constant, except at the outflow boundary where the boundary condition must be satisfied. This implies that the slope $\partial_x H$ is almost constant. Thus, the state variables A and Q

estimated by flow law (3.29) present similar variations and oscillations to those of the width as well.

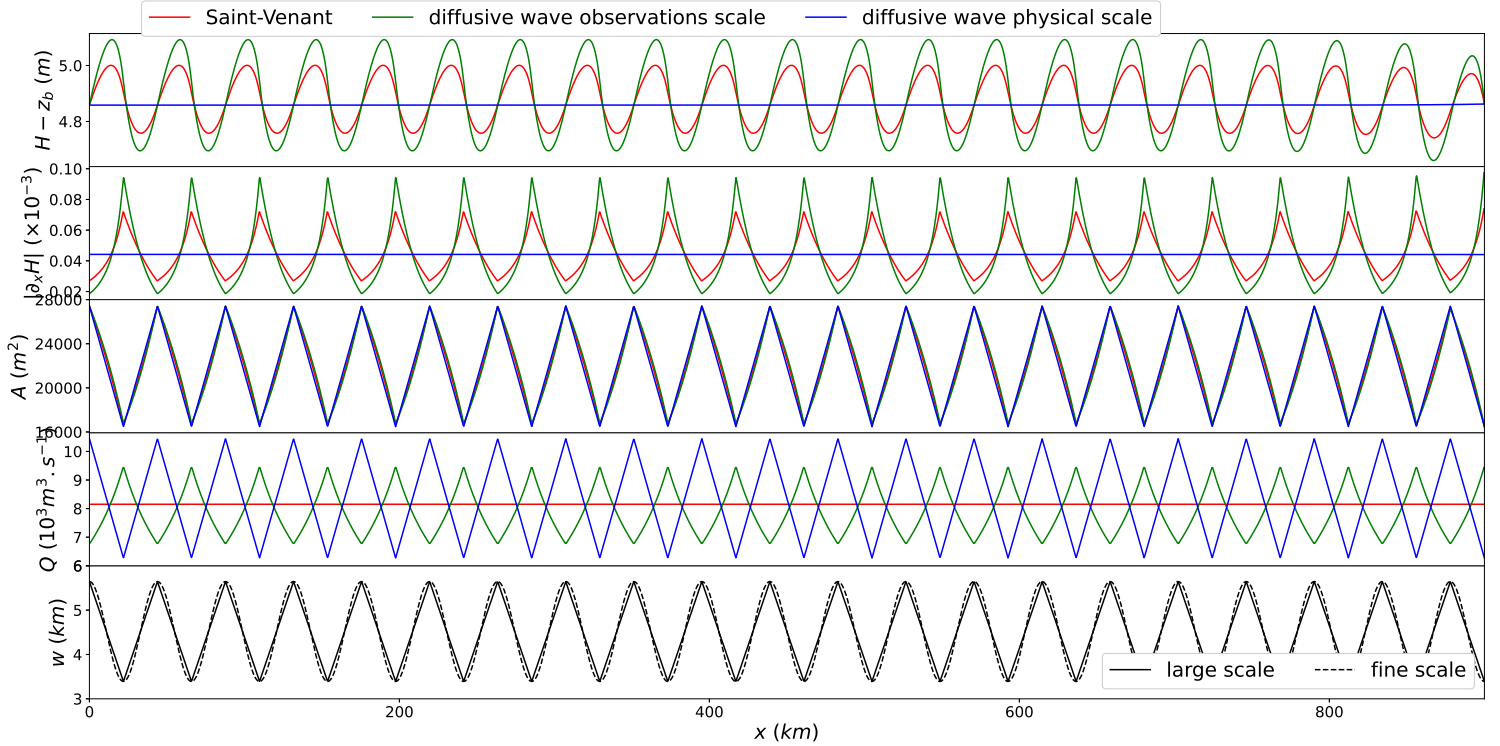


Figure 3.5 – Rio Negro-like channel, steady state. Outputs of the double-scale DW equation (3.24) (Physical-Scale and Observations-Scale) and the reference Saint-Venant system (3.12) on the four top figures: H (state variable of the DW equations), $\partial_x H$ and (A, Q) (state variables of the SV system) versus x . On the lowest figure: the physical (fine) scale and observations (large) scale width versus x , large scale width deduced from the fine scale width at the virtual stations.

3.3.2.2 Comparisons

	Rio Negro-like		Garonne-like	
	PS DW	OS DW	PS DW	OS DW
$\max(\epsilon_A)$	2.84%	1.87%	21.69%	15.14%
$\max(\epsilon_Q)$	28.15%	16.86%	37.03%	32.95%
$\max(\epsilon_S)$	63.65%	32.57%	57.14%	58.5%

Table 3.2 – Maximum relative error of h , $S = \partial_x H$ and Q for both Physical-Scale and Observations-Scale Diffusive Wave equations (resp. PS and OS DW), for the Rio Negro-like and Garonne-like channels. Since $A = w(H - z_b) = wh$, $\max(\epsilon_A) = \max(\epsilon_h)$.

Comparison of the classical physical-scale DW equation with the reference SV system

Overall, the classical physical-scale DW equation provides an estimate of A that is close to the reference solution computed by the SV equations, see Tab. 3.2 and Figs. 3.5 and 3.6. Note that, since the cross-sections are rectangular, w is constant and the estimates of h have the same accuracy than the estimates of A .

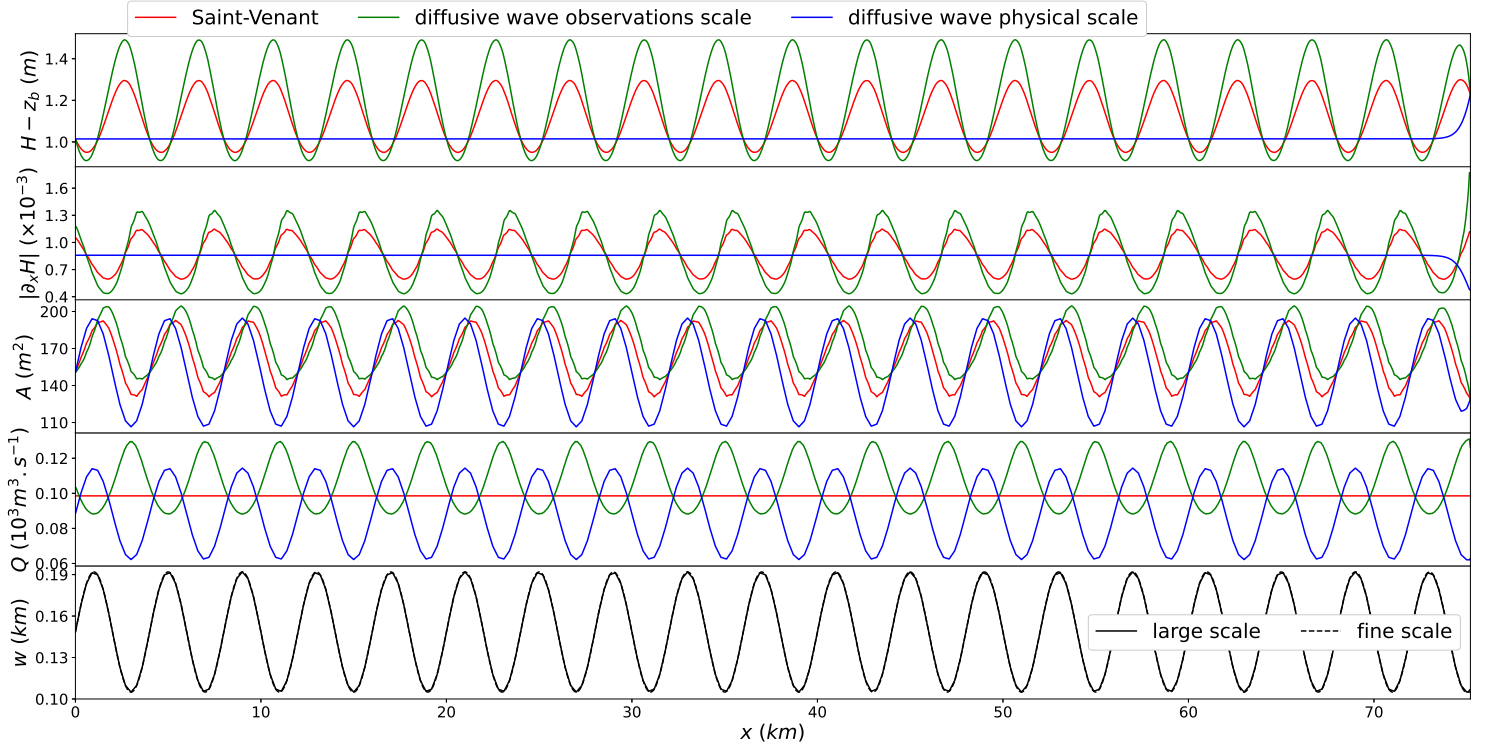


Figure 3.6 – Garonne-like channel, steady state. Outputs of the double-scale DW equation (3.24) (physical-scale and observations-scale) and the reference Saint-Venant system (3.12) on the four top figures: H (state variable of the DW equations), $\partial_x H$ and (A, Q) (state variables of the SV system) versus x . On the lowest figure: the physical (fine) scale and observations (large) scale width versus x , large scale width deduced from the fine scale width at the virtual stations.

However, the estimate of Q computed by the physical-scale DW equation is not so close to the reference solution. The reason is the following.

Recall that to obtain an estimate of Q from the DW equations, we evaluate the Manning-Strickler law (3.29). Hence, the accuracy of Q depends on the accuracy of the estimates of the slope $\partial_x H$. Even though H computed by the physical-scale DW equation approximates rather accurately the reference solution, the variations of the reference surface elevation H (induced by w) are not well approximated by the physical-scale DW equation (whose solution $H - z_b$ is nearly constant). As a result, the physical-scale DW equation estimates the slope $\partial_x H$ rather poorly, and consequently also estimates Q rather poorly.

Analysis and contribution of the new observations-scale DW equation

The observations-scale DW equation also provides an estimate of A that is close to the reference solution. The observations-scale DW equation provides an estimate of Q that is fairly close to the reference (especially on the Rio Negro-like case, where the Froude number is low). Indeed, on Figs. 3.5 and 3.6, the estimate of h computed by the observations-scale DW equation has similar variations and oscillations (that are induced by w) than the one computed by the SV system. Therefore, the estimate of the slope $\partial_x H$ computed by the observations-scale DW equation is close enough to the one computed by the reference solution.

Hence, the observations-scale DW equation provides a similar (even though a bit better) accuracy for the estimate

of A but a significantly better accuracy for the estimate of Q than the physical-scale DW equation.

The differences between the solutions of the physical-scale DW and observations-scale DW equations are less significant on the Garonne-like channel, see Fig. 3.6. Indeed, on this channel, the difference between the DW equations and the SV system are mainly due to the low Froude assumption which is less respected here.

One can note that A estimated by the three models are a bit out-of-phase between each other, see e.g. the Garonne-like channel on Fig. 3.6. The oscillations of A computed by the physical-scale DW equation are in phase with w since h is (nearly) constant, see the blue curve on Fig. 3.6. The oscillations of A computed by the SV system (red curves) are out-of-phase with w because of the inertia term and the kinetic induced by the variations of w . The out-of-phase between the A estimated by observations-scale DW equation and by the physical-scale DW equation (and hence w) is the result of the kinetic induced by the variations of w .

The comparison of the physical-scale DW and observations-scale DW equations (3.24) can be summarized as follows:

- The observations-scale DW equation provides more accurate estimates of A than the physical-scale DW equation, although both estimates are relatively accurate. Both equations preserve the mass rather well.
- On the one hand, the estimate of H computed by the physical-scale DW equation (3.24a) is controlled only by z_b (and the boundary conditions). On the other hand, the estimate of H computed by the observations-scale DW equation is also controlled by w through the width variation terms $\rho(H)H$ and $\rho(H)z_b$ in the equation (3.24b). Thus, the estimate of the slope $\partial_x H$ computed by the observations-scale DW equation takes into account the variations of w . The same is true for the estimate of Q computed by (3.20). Hence, Q is better estimated by the observations-scale DW equation than by the physical-scale DW equation, in particular in reaches where w has a non-negligible influence.
- The difference of accuracy between the physical-scale DW and the observations-scale DW are less significant on rivers with higher Froude number, even though the observations-scale DW equation provides better results than the physical-scale DW equation.
- Same experiments have been done on channels with more complex w and z_b (the real Rio Negro channel e.g.). The conclusions of the comparison of the observations-scale DW and physical-scale DW equations are similar to the one mentioned above.

3.4 Quantification of each term importance

The purpose of this section is to quantify the importance of each term of the flow model equations (3.24), and in particular the width-variation terms $\rho(H)H$ and $\rho(H)z_b$ specific to the observations-scale DW equation (3.24b).

3.4.1 Method

Brunton et al. [2016] proposed a sparse regression method, named SINDy (Sparse Identification of Nonlinear Dynamics). This method aims at determining the most important terms of an ODE, which are contained in a dictionary, and discover the governing equation from observations. The method was then applied to PDE in Rudy et al. [2017]. We adopt this approach to the equation (3.28) at physical scale. The latter can be rewritten as:

$$\frac{1}{2} \frac{(H(x) - z_b(x))}{|\partial_x H(x)|} \partial_{xx}^2 H(x) = D(x; H, z_b, w) \Theta^T \quad (3.30)$$

with Θ the vector containing the coefficient associated to the (potential) terms of the equation. These terms are contained in the dictionary D , that is in the present case:

$$D(x; H, z_b, w) = \left[\partial_x H, \frac{\partial_x \bar{w}}{\bar{w}} H, \partial_x z_b, \frac{\partial_x \bar{w}}{\bar{w}} z_b, \partial_{xx}^2 H, H \partial_x H, \partial_{xx} z_b \right] \quad (3.31)$$

The method aforementioned aims to solve the following multi-objective optimization problem:

$$\begin{cases} \text{find } \Theta^* \text{ such that:} \\ \Theta^* = \arg \min_{\Theta} J_{res}(\Theta; H, z_b, w) + \kappa \|\Theta\|_0 \end{cases} \quad (3.32)$$

with the norm of the residual:

$$J_{res}(\Theta; H, z_b, w) = \left\| \frac{1}{2} \frac{(H - z_b)}{|\partial_x H|} \partial_{xx}^2 H - D(x; H, z_b, w) \Theta^T \right\|_2^2$$

and the number of non-zero coefficients $\|\Theta\|_0 = \#\{\Theta_i; \Theta_i \neq 0\}$.

Since this optimization problem can not be resolved, the sparsity-objective term $\|\cdot\|_0$ is approached by a L_1 term (LASSO method [Tibshirani, 1996]). Hence, the following convex but non-differentiable optimization problem is solved:

$$\begin{cases} \text{find } \Theta^* \text{ such that:} \\ \Theta^* = \arg \min_{\Theta} J_{res}(\Theta; H, z_b, w) + \lambda \|\Theta\|_1 \end{cases} \quad (3.33)$$

The choice of λ or κ (weights between the different objectives of the optimization) is not straightforward but crucial to adjust the number of non-zeros coefficients.

In the present study, the optimal coefficients are computed for several values of λ (LASSO path) in order to investigate the order of importance of each mathematical terms. This order is defined as the order in which the coefficients of the terms activate (i.e. are non-zero) as λ decreases. Indeed, when λ is large enough, the optimization will not keep any non-zeros coefficients. Then, when λ decreases the terms will progressively activate.

The purpose of this order is to determine whether or not the terms $\rho(H)H$ and $\rho(H)z_b$ are important terms in the double-scale DW equations (3.24) compared to the other terms.

To do so, the considered observations of H are the steady state solution values of the SV system over the entire domain: $H = H_{SV}$. The derivatives of H_{SV} must also be observed or estimated. Here, they are computed using the standard centered finite differences.

Recall from the definition of the dictionary (3.31) that all the terms of the observations-scale DW equations (3.24b), except $\frac{1}{2} \frac{(H_{SV} - z_b)}{|\partial_x H_{SV}|} \partial_{xx}^2 H_{SV}$, are in the dictionary $D(H_{SV}, z_b, w)$. Several terms are also added, such as an additional diffusion term.

Note that this numerical experiment aims at investigating what are the most important term in a DW equations to approximate H_{SV} computed by the SV system under the low Froude assumption (3.15). This order of importance is the order of importance to counterbalance the term in the left hand side of (3.30). By expertise, the left hand side, which is the diffusion term, is a dominant term.

The optimization problem (3.33) with $H = H_{SV}$ is solved in two steps using a python routine derived from the routine developed by Brunton et al. [2016]³. In a first step, the optimization problem is solved using the FISTA algorithm with the Nesterov step [Beck and Teboulle, 2009]. This step helps at determining the non-zeros

3. available at: <https://github.com/snagcliffs/PDE-FIND>

coefficients, denoted Θ^+ . In the second step, J_{res} is minimized with respect of the non-zero coefficients in order to avoid the effect of the L_1 norm: $\Theta^* = \arg \min_{\Theta} J_{res}(\Theta^+; H_{SV}, z_b, w)$.

3.4.2 Numerical results

The following numerical investigation is performed over the real Rio Negro set-up, see Fig. 3.2 and a few information in Tab. 3.1. Note that the low Froude assumption is here well respected.

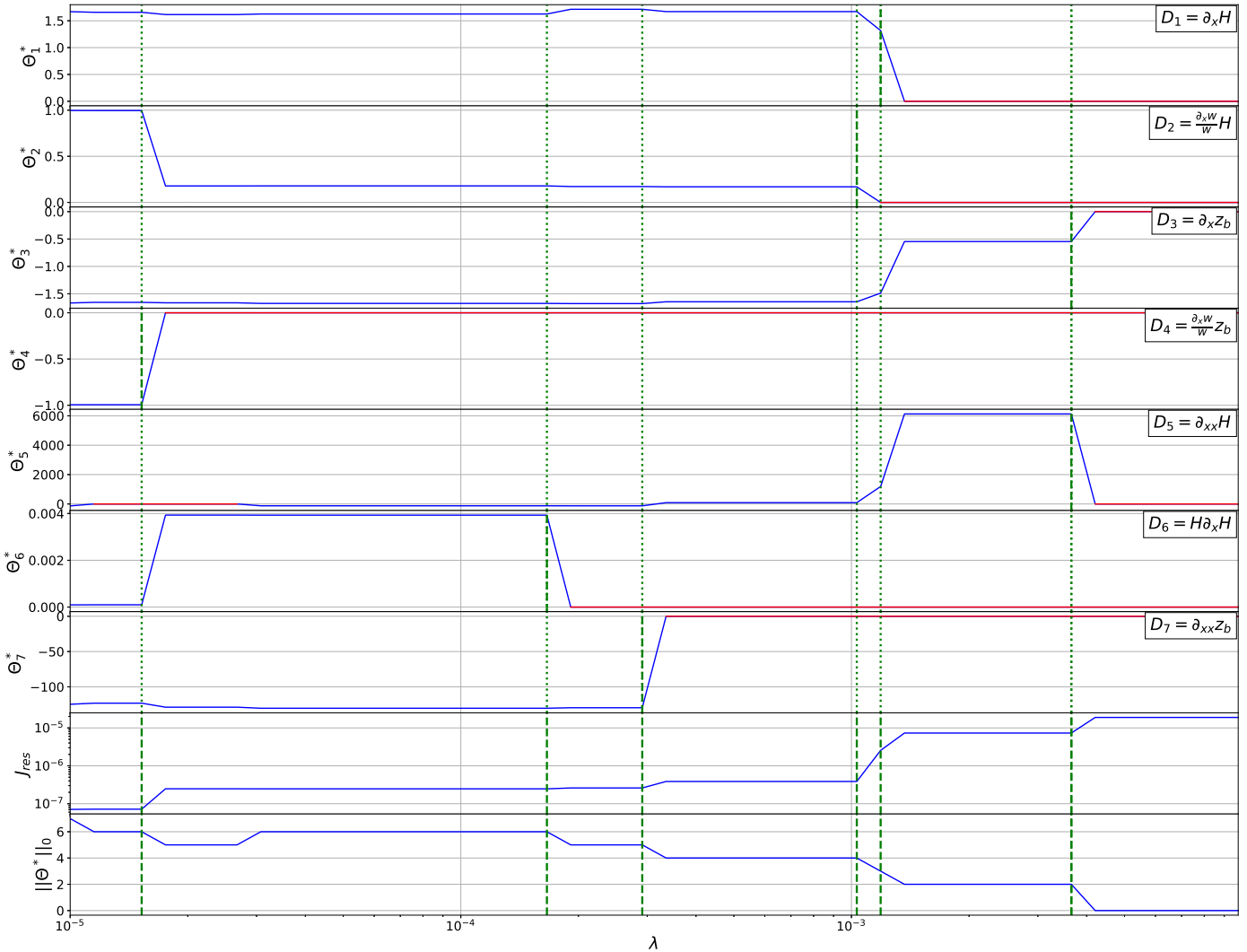


Figure 3.7 – From top to bottom: optimal coefficients Θ_i^* ($i \in \{1, \dots, 7\}$, top 7 figures, in red when = 0 and in blue otherwise), the norm of the residual $J_{res}(\Theta^*)$ and the number of non-zero coefficients $\|\Theta^*\|_0$ vs the weight coefficient λ . The vertical green lines are located at the largest value of λ such that $\Theta_i^* \neq 0$ (on the i^{th} figure: dashed line for the considered Θ_i^* and dotted lines otherwise). The order of importance is the order in which the Θ_i^* activate (see vertical green lines) as λ decreases.

The results of the optimization with respect to the weight coefficient λ are presented on Fig. 3.7. Recall that the order of importance is investigated as λ decreases and indeed, the coefficients activate progressively as λ decreases. The coefficients Θ_i^* such that $D_i = \partial_x z_b$ and $D_i = \partial_{xx}^2 H$ (resp. $i = 3$ and $i = 5$) are simultaneously the 1st terms

to activate as λ decreases.

Afterwards, the coefficients Θ_i^* such that $D_i = \partial_x H$ and $D_i = \frac{\partial_x \bar{w}}{\bar{w}} H$ (resp. $i = 1$ and $i = 2$) activate nearly at the same time.

The terms $D_i = \partial_{xx} z_b$ and $D_i = H \partial_x H$ (resp. $i = 7$ and $i = 6$) activate next.

Finally, the coefficient Θ_4^* , associated to the term $D_4 = \frac{\partial_x \bar{w}}{\bar{w}} z_b$, is by far the last one to activate.

From this experiment, one can deduce that the term $D_3 = \partial_x z_b$ is the main term of the double-scale DW equations, see (3.24), which counterbalances the diffusion term $\frac{1}{2} \frac{(H-z_b)}{|\partial_x H|} \partial_{xx}^2 H$.

Note that the coefficient related to the term $D_5 = \partial_{xx}^2 H$ activates rather early even though it does not appear in the DW equations. However, the coefficient Θ_5 becomes negligible for lower values of λ .

The coefficient of the term $D_2 = \frac{\partial_x \bar{w}}{\bar{w}} H$ activates at the 4th position in the order of importance and almost at the same time as the 3rd coefficient that activates, which is the transport term $D_1 = \partial_x H$. Moreover, the norm of the residual J_{res} decreases significantly (by a factor 10) after the activation of the coefficients of the terms D_1 and D_2 . The already-activated coefficients (i.e. of the terms $D_3 = \partial_x z_b$ and $D_5 = \partial_{xx}^2 H$) also significantly vary after the activation of the coefficients of the terms D_1 and D_2 . Indeed, the coefficient of $D_5 = \partial_{xx}^2 H$ almost vanishes, decreases from 6×10^3 to 90. The coefficient of $D_3 = \partial_x z_b$ changes a lot and reaches a value that will nearly not change when λ decreases further. This implies that the term $D_2 = \frac{\partial_x \bar{w}}{\bar{w}} H$ is one of the dominating terms.

In this experiment, the coefficient of $D_4 = \frac{\partial_x \bar{w}}{\bar{w}} z_b$ is activated in the last position in the order of importance. Hence, it is likely to be negligible.

In sum, the $\rho(H)H$ term, specific to the new observations-scale DW equation (3.24b), is important to accurately approximate the solution of the SV system (3.12) by a DW equation. On the contrary, the $\rho(H)z_b$ term is negligible. The term $D_5 = \partial_{xx}^2 H$ activates very early when λ is rather high. The coefficient Θ_5 is rather large, $\Theta_5 \approx 6 \times 10^3$ while the nonlinear diffusion coefficient satisfies $3 \times 10^3 < \frac{1}{2} \frac{(H-z_b)}{|\partial_x H|} < 3 \times 10^5$, when only the coefficients of $D_3 = \partial_x z_b$ and $D_5 = \partial_{xx}^2 H$ activate. However, Θ_5 drops significantly, $\Theta_5 \approx 90$, when λ decreases and the coefficients of $D_1 = \partial_x H$ and $D_2 = \frac{\partial_x \bar{w}}{\bar{w}} H$ activate. The diffusion term $D_5 = \partial_{xx}^2 H$ enables to compensate the non-modelled phenomena. The non-modelled phenomena include, at λ given, the phenomena from terms not yet activated or the phenomena specific to the SV system that are not classically present in the DW equation. Since more terms active when λ decreases and therefore less phenomena are non-modelled, the coefficient Θ_5 naturally becomes much less significant.

The compensation of the non-modelled phenomena by a diffusion term highlights the sensitivity of the DW equations, and more specifically of the capability of the DW equations to reproduce the estimate of H computed by the SV system, with respect to the nonlinear diffusion coefficient $\frac{1}{2} \frac{(H-z_b)}{|\partial_x H|}$ and more specifically to the slope $\partial_x H$.

Recall that this analysis is done in the steady case of the Rio Negro channel constructed from satellite data, and thus on a channel at the scale of the satellite observations. The 5th and 6th terms in the order of importance, resp. $D_7 = \partial_{xx}^2 z_b$ and $D_6 = H \partial_x H$, are likely related to overfitting and non-physical compensations that are induced by the considered framework.

3.5 Conclusion

This article presents a rigorous derivation of double-scale Diffusive Wave (DW) equations dedicated to spatial altimetry observations. The derivation of these equations are based on a small parameter ϵ measuring the ratio between the "physical" (usual) space-time scale and the observations one, see (3.16). The derivation shows that the width variations are negligible at the physical scale (classical assumption) but not at the observations scale. The obtained physical-scale DW equation is the classical DW equation presented in the literature. The obtained

observations-scale DW equation is an enriched version in which the time and space derivatives of the width lead to an additional term $\rho(H)H$ and an additional source term $\rho(H)z_b$, see (3.24b) and (3.27).

The observations-scale DW equation is numerically studied over channels build from real-river characteristic lengths in the altimetry observations context and in a steady-state case.

The results of the observations-scale DW and of the physical-scale DW equations, which the state variable is the water surface elevation H , are compared with each other and with a reference solution that is computed by the Saint-Venant (SV) system, which state variables are the wet area A and of the discharge Q .

Overall, the new observations-scale DW equation provides better estimation of A and Q than the classical physical-scale DW. Both DW equations estimate A with similar accuracy: the mass is overall well preserved by the DW equations at both observations-scale and physical-scale.

Since the estimate of Q provided by the DW equations are computed using the Manning-Strickler relationship (3.20), the accuracy of the estimate of Q is partly related to the accuracy of the estimate of the slope $\partial_x H$. Unlike the slope estimated by the physical-scale DW equation, the estimate of the slope $\partial_x H$ computed by the observations-scale DW is influenced by the width and its variations. As a consequence, the observations-scale DW equation provides a much more accurate estimate of $\partial_x H$, and therefore of Q , than the physical-scale one. Of course, this is true especially on portions of rivers where the width affects in a significant way the flow.

Moreover, the contribution of the new width variations terms has been highlighted by a method to quantify the importance of the terms of a model. Following the sparse identification method presented in Brunton et al. [2016], Rudy et al. [2017], this section presents a method to quantify the importance of terms. It is used to find the order of importance of the terms of the observations-scale DW equation, and some additional terms present in a dictionary, to reproduce the estimate of H computed by the SV system. The investigation of the importance of the terms shows that the newly introduced term $\rho(H)H$, specific to the observations-scale DW equation, is a rather important one. It also highlights the sensitivity of the DW equations to the (nonlinear) diffusion coefficient μ (3.25) and hence to the slope $\partial_x H$.

In the present study, the DW equations have been studied over numerically constructed channels. The validity of the DW equations can be tested on large dataset of real rivers such as the PEPSI 2 dataset, see Larnier and Monnier [2020], Frasson et al. [2021].

Observe that the estimate of the slope $\partial_x H$ is known to be a crucial point to estimate Q from Stage-Fall-Discharge (SFD) laws, see e.g. Mansanarez et al. [2016], Malou et al. [2021]. As a consequence, the present work could be combined with such laws to provide better estimate of Q .

Bibliography

- R. Alonso, M. Santillana, and C. Dawson. On the diffusive wave approximation of the shallow water equations. *European Journal of Applied Mathematics*, 19(5):575–606, 2008. doi: 10.1017/S0956792508007675.
- C. Aricò, M. Sinagra, L. Begnudelli, and T. Tucciarelli. Mast-2d diffusive model for flood prediction on domains with triangular delaunay unstructured meshes. *Advances in Water Resources*, 34(11):1427–1449, 2011. ISSN 0309-1708. doi: 10.1016/j.advwatres.2011.08.002. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0309170811001436>.
- C. Aricò, P. Filianoti, M. Sinagra, and T. Tucciarelli. The flo diffusive 1d-2d model for simulation of river flooding. *Water*, 8(5), 2016. doi: 10.3390/w8050200. URL <https://www.mdpi.com/2073-4441/8/5/200>.
- P. D. Bates and A. P. J. De Roo. A simple raster-based model for flood inundation simulation. *Journal of Hydrology*, 236(1):54–77, 2000. ISSN 0022-1694. doi: 10.1016/S0022-1694(00)00278-X. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S002216940000278X>.
- A. Beck and M. Teboulle. A fast iterative shrinkage-thresholding algorithm for linear inverse problems. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, 2(1):183–202, 2009. doi: 10.1137/080716542. URL <https://doi.org/10.1137/080716542>.
- P. Brisset, J. Monnier, P.-A. Garambois, and H. Roux. On the assimilation of altimetric data in 1d saint-venant river flow models. *Advances in Water Resources*, 119:41–59, 2018. ISSN 0309-1708. doi: 10.1016/j.advwatres.2018.06.004. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0309170817302476>.
- S. L. Brunton, J. L. Proctor, and J. N. Kutz. Discovering governing equations from data by sparse identification of nonlinear dynamical systems. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 113(15):3932–3937, 2016. ISSN 0027-8424. doi: 10.1073/pnas.1517384113. URL <https://www.pnas.org/content/113/15/3932>.
- V. Bögelein, N. Dietrich, and M. Vestberg. Existence of solutions to a diffusive shallow medium equation. *Journal of Evolution Equations*, 21(1):845–889, 2021. doi: 10.1007/s00028-020-00604-y.
- H.-C. Chang and E. A. Demekhin. Complex wave dynamics on thin films. *Elsevier*, 2002.
- V. T. Chow. Handbook of applied hydrology. *McGraw-Hill Book Co., New-York, 1467 pages*, 1964.
- J. Cunge. Practical aspects of computational river hydraulics. *Pitman Publishing Ltd. London, (17 CUN), 1980, 420*, 1980.
- M. W. Dingemans. *Water Wave Propagation Over Uneven Bottoms*. World Scientific Publishing Company, 1997. doi: 10.1142/1241. URL <https://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/1241>.
- M. Durand, J. Neal, E. Rodríguez, K. M. Andreadis, L. C. Smith, and Y. Yoon. Estimating reach-averaged discharge for the river severn from measurements of river water surface elevation and slope. *Journal of Hydrology*, 511: 92–104, 2014. ISSN 0022-1694. doi: 10.1016/j.jhydrol.2013.12.050. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S002216941400002X>.
- M. G. Ferrick. Analysis of river wave types. *Water Resources Research*, 21(2):209–220, 1985. doi: 10.1029/WR021i002p00209. URL <https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1029/WR021i002p00209>.

- R. P. M. Frasson, M. T. Durand, K. Larnier, C. Gleason, K. M. Andreadis, M. Hagemann, R. Dudley, D. Bjerklie, H. Oubanas, P.-A. Garambois, P.-O. Malaterre, P. Lin, T. M. Pavelsky, J. Monnier, C. B. Brinkerhoff, and C. H. David. Exploring the factors controlling the error characteristics of the surface water and ocean topography mission discharge estimates. *Water Resources Research*, 57(6):e2020WR028519, 2021. doi: 10.1029/2020WR028519. URL <https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1029/2020WR028519>.
- P.-A. Garambois and J. Monnier. Inference of effective river properties from remotely sensed observations of water surface. *Advances in Water Resources*, 79:103–120, 2015. ISSN 0309-1708. doi: 10.1016/j.advwatres.2015.02.007. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0309170815000330>.
- V. Guinot and B. Cappelaere. Sensitivity analysis of 2d steady-state shallow water flow. application to free surface flow model calibration. *Advances in Water Resources*, 32(4):540–560, 2009. ISSN 0309-1708. doi: 10.1016/j.advwatres.2009.01.005. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0309170809000153>.
- T. V. Hromadka, C. E. Berenbrock, J. R. Freckleton, and G. L. Guymon. A two-dimensional dam-break flood plain model. *Advances in Water Resources*, 8(1):7–14, 1985. ISSN 0309-1708. doi: 10.1016/0309-1708(85)90074-0. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0309170885900740>.
- K. Larnier and J. Monnier. Hybrid neural network – variational data assimilation algorithm to infer river discharges from swot-like data. *Nonlinear Processes in Geophysics Discussions*, 2020:1–30, 2020. doi: 10.1016/10.5194/npg-2020-32. URL <https://npg.copernicus.org/preprints/npg-2020-32/>.
- T. Malou and J. Monnier. Double scale diffusive wave equations dedicated to spatial rivers observations. *Submitted for publication*, 2022b.
- T. Malou, P.-A. Garambois, A. Paris, J. Monnier, and K. Larnier. Generation and analysis of stage-fall-discharge laws from coupled hydrological-hydraulic river network model integrating sparse multi-satellite data. *Journal of Hydrology*, 603:126993, 2021. ISSN 0022-1694. doi: 10.1016/j.jhydrol.2021.126993. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S002216942101043X>.
- V. Mansanarez, J. Le Coz, B. Renard, M. Lang, G. Pierrefeu, and P. Vauchel. Bayesian analysis of stage-fall-discharge rating curves and their uncertainties. *Water Resources Research*, 52(9):7424–7443, 2016. doi: 10.1002/2016WR018916. URL <https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/2016WR018916>.
- J. Monnier, K. Larnier, P. Brisset, et al. Dassflow 1d: Data assimilation for free surface flows. open-source computational software. Technical report, Mathematics Institute of Toulouse - INSA - CNES - CNRS - CS Group, 2018. URL <http://www.math.univ-toulouse.fr/DassFlow>.
- V. M. Ponce and D. B. Simons. Shallow wave propagation in open channel flow. *Journal of the Hydraulics Division*, 103(12):1461–1476, 1977. doi: 10.1061/JYCEAJ.0004892. URL <https://ascelibrary.org/doi/abs/10.1061/JYCEAJ.0004892>.
- V. M. Ponce, D. B. Simons, and R.-M. Li. Applicability of kinematic and diffusion models. *Journal of the Hydraulics Division*, 104(3):353–360, 1978. doi: 10.1061/JYCEAJ.0004958. URL <https://ascelibrary.org/doi/abs/10.1061/JYCEAJ.0004958>.
- L. Pujol, P.-A. Garambois, P. Finaud-Guyot, J. Monnier, K. Larnier, R. Mosé, S. Biancamaria, H. Yésou, D. Moreira, A. Paris, and S. Calmant. Estimation of multiple inflows and effective channel by assimilation of multi-satellite hydraulic signatures: The ungauged anabranching negro river. *Journal of Hydrology*, 2020. doi: 10.1016/j.jhydrol.2020.125331.

- E. Rodríguez et al. Swot science requirements document. *JPL document*, *JPL*, 2012.
- E. Rodríguez, M. Durand, and R. Frasson. Observing rivers with varying spatial scales. *Water Resources Research*, 56(9):e2019WR026476, 2020. doi: 10.1029/2019WR026476. URL <https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1029/2019WR026476>. e2019WR026476 10.1029/2019WR026476.
- S. H. Rudy, S. L. Brunton, J. L. Proctor, and J. N. Kutz. Data-driven discovery of partial differential equations. *Science Advances*, 3(4):e1602614, 2017. doi: 10.1126/sciadv.1602614. URL <https://www.science.org/doi/abs/10.1126/sciadv.1602614>.
- M. Santillana and C. Dawson. A numerical approach to study the properties of solutions of the diffusive wave approximation of the shallow water equations. *Computational Geosciences*, 14:31–53, 2010. URL <https://link.springer.com/content/pdf/10.1007/s10596-009-9131-4.pdf>.
- R. Tibshirani. Regression shrinkage and selection via the lasso. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)*, 58(1):267–288, 1996. doi: 10.1111/j.2517-6161.1996.tb02080.x. URL <https://rss.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1111/j.2517-6161.1996.tb02080.x>.
- S. Weill, R. di Chiara-Roupert, and P. Ackerer. Accuracy and efficiency of time integration methods for 1d diffusive wave equation. *Computational Geosciences*, 2014. doi: 10.1007/s10596-014-9417-z. URL <https://link.springer.com/article/10.1007/s10596-014-9417-z>.
- B. C. Yen and C. W.-S. Tsai. On noninertia wave versus diffusion wave in flood routing. *Journal of Hydrology*, 244(1):97–104, 2001. ISSN 0022-1694. doi: 10.1016/S0022-1694(00)00422-4. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022169400004224>.

Chapitre 4

Covariance operators investigation from diffusive wave equations for data assimilation in hydrology

Sommaire

Résumé	140
4.1 Introduction	144
4.2 Variational Data Assimilation based on classical covariance operators	146
4.2.1 Inference of the bathymetry in the Saint-Venant equations	146
4.2.2 Covariance operators in VDA	148
4.2.3 Numerical experiments description	149
4.2.4 Numerical results of the fully-observed experiment using classical covariance operators	151
4.3 Covariance operators from Green-like kernels of the double scale diffusive wave equations	155
4.3.1 Green-like kernels and their link to covariance operators	155
4.3.2 Green-like kernels derived from the double scale diffusive wave	156
4.3.3 Building physically-derived covariance operators from Green-like kernels	161
4.4 Inference of the bathymetry $z_b(x)$ using the physically-derived covariance operators	167
4.5 Inference of the pair $(z_b, K_s)(x)$ from lower quality data	170
4.5.1 Results	170
4.5.2 Comparisons	172
4.6 Conclusion	175
Appendices	
4.A From the Green kernels G to the covariance operator \mathbf{C}	176
4.B Summary of the numerical experiments results	177
Compléments	
4.C Sur l'intérêt de la régularisation $j_{reg}(z_b) = \ \partial_x z_b\ _2^2$	178
Bibliography	181

Ce chapitre est basé sur la publication [Malou and Monnier \[2022a\]](#) :

T. Malou and J. Monnier. Covariance kernels investigation from diffusive wave equations for data assimilation in hydrology. *Inverse Problems*, 2022. URL <http://iopscience.iop.org/article/10.1088/1361-6420/ac509d>.

L'annexe 4.C contient des résultats de travaux absents de la publication mais utiles à mentionner pour la thèse.

Résumé

En VDA, estimer l'opérateur de covariance de l'erreur d'ébauche, noté \mathbf{C} , est un sujet important et peut avoir un impact considérable sur la qualité du résultat de l'assimilation, voir une revue sur le sujet dans [Bannister \[2008a,b\]](#) et une rapide présentation dans la section 1.3.2.

Lorsque les statistiques de l'erreur d'ébauche sont suffisamment bien connues, il est possible de calculer la matrice de cet opérateur de covariance à partir d'un estimateur de la covariance.

Une autre possibilité est de modéliser cet opérateur de covariance notamment en spécifiant un noyau de covariance. Cependant, les choix du noyau et des paramètres sont souvent basés sur des informations empiriques et des propriétés mathématiques pratiques du noyau, voir section 1.3.4. On peut notamment citer l'opérateur de covariance exponentielle décroissante qui est associé au noyau suivant :

$$c_{L_c}^e(x, x') = \exp\left(-\frac{|x - x'|}{L_c}\right) \quad (4.1)$$

avec L_c la longueur de corrélation. L'avantage de ce noyau est que l'expression de la norme associée $\|\cdot\|_{\mathbf{C}^{-1}}$ est connue, voir [Tarantola \[2005\]](#).

Le lecteur peut se référer à la section 1.3.4 pour plus de détails. Une revue plus complète est faite dans [Mirouze \[2010\]](#).

Le but de ce chapitre est d'investiguer la corrélation entre z_b et H à partir de la connaissance de la physique et des équations sous-jacentes et d'en déduire une estimation consistante avec la physique de l'opérateur \mathbf{C} .

Cette méthode permet (1) d'obtenir un noyau de covariance consistant avec l'impact physique d'une erreur en un point sur le reste du domaine, et (2) d'obtenir une estimation de la longueur de corrélation consistante avec la physique.

La méthode proposée est basée sur les noyaux de Green (historiquement dérivés pour des besoins en électromagnétisme dans [Green \[1828\]](#) et voir e.g. [Evans \[1998\]](#) pour une utilisation plus moderne) et une extension appelée noyau dit de type Green (voir ci-dessous).

Supposons une EDP linéaire en 1D, dépendante du temps et d'inconnue H notée $\partial_t H(x, t) + \mathcal{A}H(x, t) = \mathcal{B}k(x, t)$ avec \mathcal{A} un opérateur différentiel linéaire à coefficients constants et \mathcal{B} un opérateur linéaire par rapport au contrôle k et aussi à coefficients constants. Le noyau de Green associé à cette EDP est la fonction $G^{\mathcal{B}}$ qui satisfait formellement l'équation $\partial_t G^{\mathcal{B}} + \mathcal{A}G^{\mathcal{B}}(x, t) = \delta(x, t)$ avec δ la distribution de Dirac. Le noyau de type Green associé est la fonction G qui satisfait formellement l'équation :

$$\partial_t G + \mathcal{A}G(x, t) = \mathcal{B}\delta(x, t) \quad (4.2)$$

Ces noyaux sont la réponse du système à une distribution de Dirac, i.e. l'impact d'une perturbation à un endroit sur le reste du domaine, dans le membre de droite pour le noyau de Green et dans le contrôle pour le noyau de type

Green. A noter que l'hypothèse d'opérateurs linéaires à coefficients constants est nécessaire pour pouvoir calculer et assurer l'existence et l'unicité de ces noyaux, voir le théorème de Malgrange-Ehrenpreis e.g. dans [Brezis \[2010\]](#). Des liens ont déjà été établis entre les noyaux de Green et les noyaux de covariance. Ce lien est notamment établi dans [Nagai \[2020\]](#) pour une application dans le domaine de l'apprentissage automatique ou encore dans [Nolen and Papanicolaou \[2009\]](#) pour l'estimation de la covariance de l'erreur d'observations dans le domaine des EDP stochastiques.

Si l'équation considérée est l'équation de diffusion 1D $\partial_t H(x, t) - \frac{D}{2} \partial_{xx}^2 H(x, t) = k(x, t)$ avec la condition initiale $H(x, t = 0) = 0$ et le coefficient de diffusion D , le noyau de Green est naturellement un noyau de covariance gaussien (1.44) avec la longueur de corrélation $L_c = \sqrt{Dt}$. Ce lien entre l'équation de la chaleur et le noyau gaussien peut notamment être utilisé pour modéliser une covariance gaussienne (1.44) ou de la famille de Matern (1.43) sans avoir à stocker la matrice de l'opérateur, voir [Egbert et al. \[1994\]](#), [Mirouze and Weaver \[2010\]](#).

Si l'équation établie par la physique contient plus de termes que juste un terme de diffusion, on peut s'attendre à ce que le noyau de Green (ou de type Green) constitue un noyau de covariance contenant de l'information sur la dynamique et donne une longueur de corrélation consistante avec la physique. Cela nécessite toutefois que le noyau obtenue soit symétrique défini positif. Dans le cas échéant, il faut construire une approximation symétrique définie positive du noyau de Green.

Cette méthode d'estimation de l'opérateur de covariance à partir des équations est utilisée pour l'inférence de la bathymétrie z_b dans les équations de Saint-Venant (1.16). Ces équations ne permettant pas de calculer un noyau de Green, nous allons les calculer à partir des équations de l'onde diffusante à double échelle, voir chapitre 3 et plus particulièrement les équations (3.4a) et (3.4b). Étant donné que les noyaux de Green ne sont calculables que pour des équations linéaires à coefficients constants, nous allons considérer l'équation de l'onde diffusante linéarisée à l'échelle des observations suivante :

$$\left(\partial_\tau H - \mu_r^y \partial_{yy}^2 H + v_r \partial_y H + \rho_r H \right)(y, \tau) = \left(v_r \partial_y z_b + \left(\rho_r - \eta_r^y \right) z_b \right)(y, \tau) \quad (4.3)$$

avec les coefficients de référence :

$$\mu_r^y = \frac{1}{2} u_r \frac{H_r}{|\partial_y H_r|}, \quad v_r = \gamma u_r, \quad \eta_r^y = \frac{1}{2} u_r \frac{\partial_{yy}^2 H_r}{|\partial_y H_r|} \quad (4.4)$$

$$\rho_r = \frac{1}{\bar{w}_r} \left(\partial_\tau \bar{w}_r + \gamma u_r \partial_y \bar{w}_r \right) \quad (4.5)$$

L'état de référence est donnée par une hauteur de la surface libre de référence H_r , une vitesse de référence u_r et une largeur moyenne de référence \bar{w}_r . A noter qu'il conviendrait plutôt de considérer un tirant d'eau de référence h_r plutôt que H_r qui dépend d'une hauteur de référence.

Les équations et raisonnements présents et suivants sont valides à l'échelle de la physique en supposant $\rho_r = 0$.

Le noyau de type Green résultant de l'introduction d'une masse de Dirac $\delta(x)$ dans z_b dans le terme de droite de l'équation (4.3) est calculé en utilisant la transformation de Fourier en espace et la transformation de Laplace en temps. On obtient l'expression suivante :

$$G_{os}(y, \tau) = \int_0^\tau \left(-v_r \frac{(y - v_r \tau')}{2\mu_r^y \tau'} + \rho_r - \eta_r^y \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi(2\mu_r^y \tau')}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(y - v_r \tau')^2}{2\mu_r^y \tau'}\right) \exp(-\rho_r \tau') d\tau' \quad (4.6)$$

Cette expression nous donne immédiatement une expression pour la longueur de corrélation issue de la physique :

$$L_{pc} = \sqrt{2\mu_r^y \Delta\tau} \quad (4.7)$$

Cependant, le noyau $(y, y') \mapsto G_{os}(y - y', \tau)$ n'est pas symétrique.

Cela vient notamment de l'advection de $h = H - z_b$ dans les équations de l'onde diffusante. L'advection implique que le terme de gaussienne dans l'intégrande n'est pas centré en y' mais en $y' + v_r\tau'$, l'onde se déplace de l'amont vers l'aval. Le terme $v_r\partial_y z_b$ dans le terme de droite dans l'équation (4.3), aussi issu de l'advection, implique le terme $-v_r \frac{(y-y'-v_r\tau')}{2\mu_r^y\tau'}$ dans l'intégrande des noyaux de type Green, l'intégrande est positif en amont de $y' + v_r\tau'$ et négatif en aval.

Pour assurer la symétrie du noyau, le noyau $(y, y') \mapsto G_{os}(|y - y'|, \tau)$ est considéré.

Toutefois, il n'y a aucune preuve que le noyau symétrique obtenu soit défini positif.

L'aspect défini positif est assuré par une approximation définie positive d'une matrice symétrique.

Pour une matrice symétrique M , l'approximation proposée, notée p^ϵ , consiste alors à seuilier à ϵ les valeurs propres inférieures à ϵ :

$$p^\epsilon(M) = V\Lambda^\epsilon V^T \quad (4.8)$$

avec $\Lambda_{i,i}^\epsilon = \max(\lambda_i, \epsilon) \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, λ_i la i^e valeur propre de M et V la matrice orthogonale contenant les vecteurs propres de M comme colonnes.

Cette approximation est une approximation de la projection d'une matrice symétrique sur l'ensemble des matrices symétriques semi-définies positives pour la norme de Frobenius. Dans Higham [2002], il est démontré que cette projection consiste simplement à seuilier les valeurs propres négatives à 0 dans la décomposition spectrale.

L'opérateur de covariance associé à l'approximation symétrique définie positive (4.8) de la matrice obtenue par la discrétisation spatiale du noyau $(y, y') \mapsto G_{os}(|y - y'|, \tau)$ avec G_{os} donné par l'expression (4.6), est appelé ici opérateur de covariance *pseudo-physique* et est noté \mathbf{C}^{pp} . On étudie aussi des opérateurs plus classiques, tels que l'opérateur gaussien $\mathbf{C}_{L_c}^G$ (1.44) et l'opérateur exponentiel décroissant $\mathbf{C}_{L_c}^\epsilon$ (4.1) avec la longueur de corrélation physique (4.7) $L_c = L_{pc}$, voir figure 4.7.

On remarque que le noyau de type Green $G_{os}(y, \tau)$ (4.6) est la réponse sur $H(y, \tau)$ d'une perturbation local en espace dans $z_b(y)$. Ainsi, l'opérateur de covariance \mathbf{C}^{pp} est lié à l'opérateur (direct) $z_b \mapsto H$.

De plus, la symétrisation $(y, y') \mapsto G_{os}(|y - y'|, \tau)$ revient à considérer que les termes de transport ($\gamma u \partial_y (H - z_b)$) et d'ordre 0 ($\gamma u \frac{\partial_y \bar{w}}{\bar{w}} (H - z_b)$) du modèle de l'onde diffusante à double échelle (3.4) ont pour vitesse d'onde $\pm \gamma u$. D'une autre part, l'opérateur de covariance recherché est \mathbf{C} , l'opérateur de covariance de l'erreur d'ébauche de z_b . Celui-ci est lié à l'opérateur (inverse) $H \mapsto z_b$.

On peut alors écrire un modèle de l'onde diffusante en variable z_b , qui est rétrograde en temps :

$$-\partial_\tau z_b - \frac{1}{2}u \frac{(z_b - H)}{|\partial_y H_r|} \partial_{yy}^2 z_b + \gamma u \partial_y (z_b - H) + \gamma u \frac{\partial_y \bar{w}}{\bar{w}} (z_b - H) = \partial_\tau h - \frac{1}{2}u \frac{h}{|\partial_y H_r|} \partial_{yy}^2 h \quad (4.9)$$

Notons que l'intégration en temps (voir l'équation (4.31)) implique que le changement de variable de τ en $-\tau$ ne change pas le signe du noyau de type Green.

Ainsi, sous cette symétrisation (non-physique), le Noyau de Green de l'équation en H (3.4b) et celui de l'équation en z_b (4.9) sont les mêmes.

De plus, en supposant que les termes (en $\partial_{yy}^2 h$ et en $\partial_\tau h$) du membres de droite de l'équation en z_b (4.9) sont

négligeables, les noyaux de type Green sont aussi les mêmes.

Sous ces hypothèses, l'opérateur \mathbf{C}^{pp} est alors utilisé comme estimation de l'opérateur de covariance \mathbf{C} .

De plus, étant donné que les noyaux de Green sont les mêmes, il en résulte que la longueur de corrélation consistante avec la physique L_{pc} reste la même.

Cette méthode est appliquée sur un cas test réel du Rio Negro, voir figure 4.2. Les coefficients de références μ_r^y , v_r , ρ_r et η_r^y sont calculés en moyennant sur l'espace leur expression en utilisant les données issues du modèle direct au temps initial. Pour simplifier l'expression (4.6), la méthode des rectangles est utilisée avec $\tau = \Delta\tau$ et $\Delta\tau$ le pas de temps de l'intégration, ainsi l'intégrale se simplifie en une multiplication de l'intégrande par $\Delta\tau$. Dans ce cas, on a $L_{pc} \approx 35km$.

L'investigation menée vise à comparer des opérateurs de covariance classiques (opérateurs exponentiels décroissants (4.1) avec trois valeurs de L_c choisies empiriquement) avec les opérateurs de covariances dérivés de la physique. Cette comparaison se fait au travers de deux expériences. La première, appelée totalement observée, se fait avec des observations directement calculées à partir d'une bathymétrie cible sur tout le domaine et très fréquemment. La deuxième, appelée partiellement observée, se fait avec des données plus éparées et bruitées et avec le coefficient de Strickler comme contrôle à inférer en plus de z_b .

Une première expérience totalement observée utilisant uniquement les opérateurs de covariance classiques permet de mettre en avant un opérateur de covariance, noté $\mathbf{C}_{30\Delta x}^e$, qui donne de meilleurs résultats et donc qui sert de noyau de covariance classique de référence, voir figure 4.4.

Au cours de toutes les expériences, l'opérateur $\mathbf{C}_{L_{pc}}^e$ donne de meilleurs résultats que l'opérateur classique de référence $\mathbf{C}_{30\Delta x}^e$, voir figures 4.9, 4.12 et 4.13.

L'opérateur \mathbf{C}^{pp} donne des résultats à minima comparables, surtout durant l'expérience totalement observée, à $\mathbf{C}_{30\Delta x}^e$: la vitesse de convergence et la précision sont similaires.

Dans notre contexte, l'opérateur classique $\mathbf{C}_{L_c}^G$ n'a aucune justification physique et donne de mauvais résultats, y compris avec la longueur de corrélation physique $L_c = L_{pc}$. De ce fait, la covariance gaussienne ici est une mauvaise estimation de \mathbf{C} .

A partir de ces expériences numériques et notamment de l'expérience partiellement observée, on peut observer que les opérateurs de covariance dérivés de la physique mettent en avant de meilleures directions de descente. De ce fait, l'algorithme d'optimisation avec ces opérateurs converge plus rapidement et avec une meilleure précision, surtout durant les premières itérations.

Cela surligne que ces opérateurs de covariance dérivés de la physique sont de meilleurs préconditionnement de la hessienne de la fonction coût et donc améliorent l'aspect convexe de la fonction coût.

Donc, la méthode pour dériver des opérateurs de covariance consistant avec la physique nous donne de bonnes estimations de \mathbf{C} , notamment \mathbf{C}^{pp} . De plus, cette méthode nous donne une longueur de corrélation physique L_{pc} qui, combinée avec $\mathbf{C}_{L_c}^e$, est plus efficace que n'importe quelles longueurs de corrélation empiriques.

Abstract

In data assimilation, the estimation of the background error covariance operator is a classical and still open topic. However, this operator is often modeled using empirical information. In order to exploit at best the potential of the knowledge of the physics, the present study proposes a method to derive covariance operators from the underlying equations. In addition, Green's kernels can be used to model covariance operators and are naturally linked to them. Therefore, Green's kernels of equations representing physics can provide physically-derived estimates of the background error covariance operator, and also physically-consistent parameters. In this context, the present covariance operators are used in a Variational Data Assimilation (VDA) process of altimetric data to infer bathymetry in the Saint-Venant equations. In order to investigate these new physically-derived covariance operators, the associated VDA results are compared to the VDA results using classical operators with physically-consistent and arbitrary parameters. The physically-derived operators and physically-consistent exponential operator provide better accuracy and faster convergence than empirical operators, especially during the first iterations of the VDA optimization process.

Keywords. Variational data assimilation; background error; covariance modeling; Green's kernel; diffusive wave equations; river hydraulics.

4.1 Introduction

Data Assimilation (DA) is a class of inverse problems that aims to improve the background value of a control by combining a physical model with observations of the system state. For example, in meteorology, DA aims to improve the initial state of the atmosphere using a weather prediction model and observations of the atmosphere on an assimilation time window, see e.g. [Bouttier and Courtier \[2002\]](#). In hydrology, DA also aims to improve bathymetry, roughness coefficient and boundary conditions from observations of the water surface elevation, see e.g. [Honnorat et al. \[2009\]](#). In the Variational DA methods (VDA), the assimilation is based on the minimization of a cost function which aims at fitting the model outputs to the observations, see e.g. [Sasaki \[1958\]](#), [Le Dimet and Talagrand \[1986\]](#), [Bouttier and Courtier \[2002\]](#).

The quality of the VDA depends strongly on the estimation of the covariance of the background error (i.e. the error between the true and the background value of the control). This topic is therefore crucial but also complex, e.g. see a review on the topic in [Bannister \[2008a,b\]](#).

The covariance can be estimated statistically by means of sample covariance using methods such as observation-based methods (see e.g. [Hollingsworth and Lönnberg \[1986\]](#)), the NMC method (see e.g. [Parrish and Derber \[1992\]](#)) or ensemble methods (see e.g. [Carrassi et al. \[2018\]](#)). Another possibility is to model the covariance operator. In the present study, the modeling is performed by specifying the covariance kernel. However, the choice of the covariance kernel and the parameters are so far based on empirical information and useful mathematical properties of the kernels. For example, [Egbert et al. \[1994\]](#), [Weaver and Courtier \[2001\]](#) and [Mirouze and Weaver \[2010\]](#) use the Gaussian and Matérn kernels, respectively, for their connection with the diffusion equation. The Gaussian kernel is also studied in [Haben \[2011\]](#), used in [Pannekoucke et al. \[2016, 2018\]](#) and mentioned in [Daley \[1993\]](#) p. 117. The second order auto-regressive kernel (SOAR, a special case of the Matérn kernel) is also widely used, e.g. in [Ingleby \[2001\]](#) for the Met Office 3DVar system, but see also in [Daley \[1993\]](#) p. 117 and [Pannekoucke et al. \[2016\]](#), [Haben et al. \[2011\]](#). In [Monnier and Zhu \[2019\]](#), the decreasing exponential kernel (another specific case of the Matérn kernel) is used because of the known expression of the associated weighted L_2 norm. In atmospheric science, the

turbulent microscale is used to estimate the correlation length as mentioned in Daley [1993] p. 110. However, alternative estimates are often discussed as mentioned in Mirouze and Weaver [2010] and references therein. In Larnier and Monnier [2020], which treats an inverse problem including the present ones, the correlation lengths are taken empirically.

Several studies have provided methods to improve the covariance estimate based on prior knowledge of physics or topography.

Inflation is one method used to improve the statistical estimate of the covariance, see e.g. Carrassi et al. [2018] Sec. 4.4. In Wang et al. [2008], the statistical estimate is improved by using a static covariance that includes more long term knowledge/physics, for example climatological information in a meteorological context. In Lopez-Restrepo et al. [2021], prior topographic knowledge is used. This study also highlights that prior knowledge of the physics, parameters, any environmental information or expertise on the covariance structure could be used to improve the statistical estimate.

In order to reduce the number of stored parameters, the Lagrangian Kalman filter (see Lyster et al. [2004]) takes advantage of a transport model. In this method, the covariance is physically transported along the characteristics. In Pannekoucke et al. [2016], the parametric Kalman filter aims not only to physically transport but also to diffuse an initially known covariance matrix. In Pannekoucke et al. [2018], the previous method is extended to nonlinear behaviors with the example of the Burgers equation. These studies use topographical or physical information. However, this information is only used to improve an already known estimate of the covariance operator.

The present study investigates a method for modeling the covariance kernel based on knowledge of the physics and the underlying equations. It allows (1) to provide covariance kernels consistent with the physical impact of the error at a point on the rest of the domain and (2) to provide an estimate of the correlation length consistent with physics.

The presented method is based on Green's kernels and an extension, called here, the Green-like kernels. These kernels represent the response of the system to a Dirac distribution, i.e. the impact of a perturbation at a given location on the rest of the domain. The Green's kernel can naturally be related to the covariance kernel, see e.g. the application to machine learning in Nagai [2020] and references therein.

An alternative approach to the DA problem is to assimilate noisy data into a stochastic partial differentiable equation in order to infer, using a Bayesian estimator such as the maximum a posteriori, the low-frequency part of a parameter and to estimate the uncertainty due to the high-frequency part. A strategy for this inference problem is proposed by Nolen and Papanicolaou [2009] and is applied to infer the diffusion coefficient in a steady diffusion equation with random potential. This approach also makes a link between Green's kernels and covariance operators. The proposed method is investigated through the inference of the bathymetry in the Saint-Venant equations. These equations can be simplified and provide the double-scale diffusive wave equations, see Malou and Monnier [2022b]. These last equations are adapted to river altimetry observations that we assimilate. Moreover, they allow to derive Green-like kernels.

The outline of the article is as follow. In a first time, the VDA is adapted to infer bathymetry in the Saint-Venant equations from altimetry data. The inference is first performed using so-called classical covariance operators, i.e. based on empirical information. Then, the method to derive covariance kernels from the equations is presented. Finally, the results of the inference using the physically derived covariance operators are compared to those using the classical covariance operators.

4.2 Variational Data Assimilation based on classical covariance operators

In this 1st section, the formulation of the Variational Data Assimilation (VDA) for a river flow model, the 1D Saint-Venant equations, is presented. Then, covariance operators, which constitute the central part of this study, are recalled, as well as their link with VDA.

Numerical experiments to compare these covariance operators are then defined. A real-like dataset will be used in these experiments and will be presented.

The classical covariance operators are investigated in this section. This will also allow us to determine a reference classical covariance.

4.2.1 Inference of the bathymetry in the Saint-Venant equations

First, the direct model is presented. Then, the VDA formulation to infer the bathymetry in these equations is presented.

4.2.1.1 Direct model: the Saint-Venant equations

The most classical dynamic river flow model is the one-dimension Saint-Venant equations, see e.g. [Chow \[1964\]](#). In these equations, the natural variables are the wet area $A(x, t)$ and the discharge $Q(x, t)$. The equations are the following:

$$\begin{cases} \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} \right) + gA \frac{\partial H}{\partial x} = -gAS_f \end{cases} \quad (4.10)$$

with g the gravity magnitude and $H(x, t)$ the free surface height. The friction term $S_f(x, t)$ is defined by the classical Manning-Strickler relation $S_f = \frac{Q^2}{K_s^2 A^2 h^{\frac{4}{3}}}$ (assuming Q is positive and that for large river, the hydraulics radius is $R_h \approx h$) with K_s the Strickler roughness coefficient. The bathymetry is denoted $z_b(x)$, the average cross-section velocity $u(x, t) = \frac{Q(x, t)}{A(x, t)}$, the water depth $h(x, t) = H(x, t) - z_b(x)$ and the width $w(x, t)$, see Fig. 4.1. The average width \bar{w} is the river width averaged over a cross-section at a given time. The abscissa x is the curvilinear abscissa of the centerline of the river and $x \in \Omega = [0; L]$. The modeling time window is $t \in [0; T]$. The Saint-Venant equations

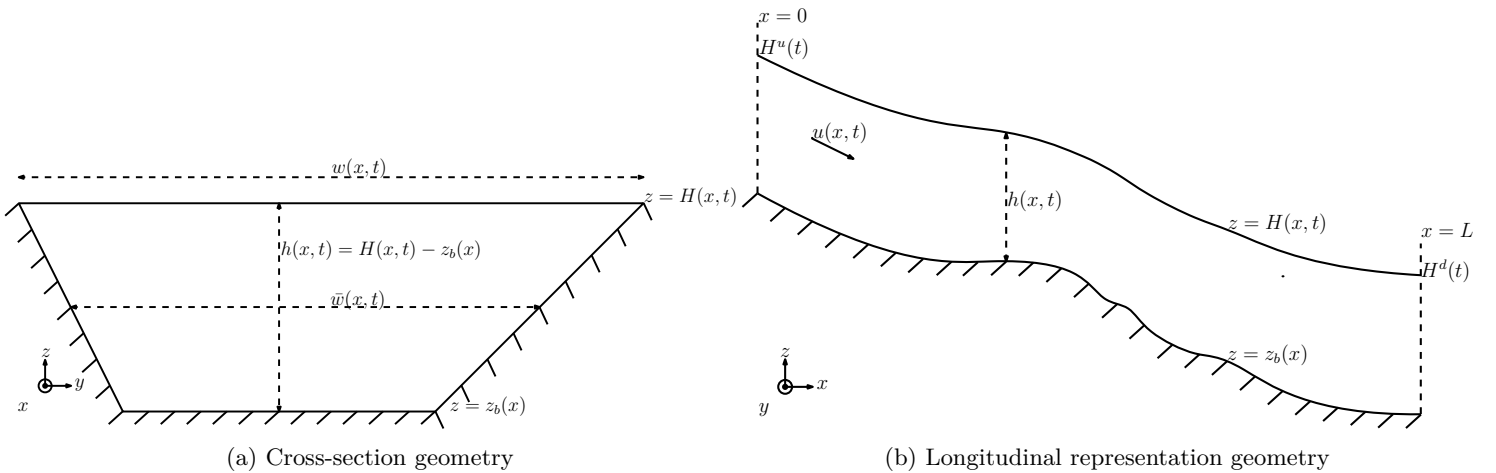


Figure 4.1 – Assumed geometry of the river and summary of the notations.

are solved using the Preissmann scheme [Cunge, 1980] implemented in the DassFlow-1D software [Monnier et al., 2018].

4.2.1.2 VDA for bathymetry $z_b(x)$ inference

The goal of VDA is to determine the control (denoted k , in a first time $k(x) = z_b(x)$ and in a second time $k(x) = (z_b(x), K_s(x))$) that makes the physical model (called direct, here the Saint-Venant equations (4.10)) fits with some observations. The identification of the optimal control is done by minimizing a cost function j , see e.g. Bouttier and Courtier [2002]:

$$\begin{cases} \text{find } k^*(x) \text{ such that:} \\ k^*(x) = \arg \min_{k(x)} j(k) \end{cases} \quad (4.11)$$

The cost function is commonly defined as:

$$j(k) = j_{obs}(k) + \alpha_{reg} j_{reg}(k) \quad (4.12)$$

with α_{reg} the regularization weight coefficient. The observation term j_{obs} aims to minimize the distance between the observations H^{obs} and the output of the direct model (4.10) $H(z_b)$, see e.g. Sasaki [1958], Le Dimet and Talagrand [1986], Bouttier and Courtier [2002]:

$$j_{obs}(k) = \int_0^T \|H(k; t) - H^{obs}(t)\|_{L^2(\Omega^{obs})}^2 dt \quad (4.13)$$

where Ω^{obs} is the domain of observations.

A regularization term j_{reg} is added to deal with the non-uniqueness of the solution of the problem (4.11) (Thikhonov regularization term, see e.g. Kaltenbacher et al. [2008]).

For a sake of simplicity, the following is detailed for a single control variable, namely $k = z_b$.

The commonly used expression for j_{reg} is $j_{reg}(z_b) = \|z_b - z_b^b\|_{\mathbf{C}^{-1}}^2 = \|r_b\|_{\mathbf{C}^{-1}}^2 = \langle r_b, \mathbf{C}^{-1}(r_b) \rangle_{L^2(\Omega)}$. This term tends to minimize the background residual $r_b = z_b - z_b^b$ with z_b^b the background value of z_b . This minimization is done with respect to a norm defined by an positive-definite and symmetric operator \mathbf{C}^{-1} .

In the Bayesian framework and under the assumption of Gaussian errors, this expression of j_{reg} follows naturally from the maximum log-likelihood of the conditional probability density function of the analysis error $z_b - z_b^t$, with z_b^t the true value of the control. In the same framework, the operator \mathbf{C} is the covariance operator of the background error $\varepsilon_b = z_b^b - z_b^t$ (sometimes denoted $\varepsilon_b^{z_b}$, see Sec. 4.2.2 and e.g. Bouttier and Courtier [2002]).

Following Parrish and Derber [1992], one introduces the change of variable:

$$z_b(x) = \mathbf{L}\tilde{z}_b(x) + z_b^b(x) \quad (4.14)$$

This change of variable implies that the operator \mathbf{L} , that satisfies $\mathbf{C} = \mathbf{L}\mathbf{L}^T$, must be estimated instead of \mathbf{C}^{-1} . This change of variable acts as a preconditioning of the Hessian of j , see Haben et al. [2011]. The change of variable can be understood as an implicit regularization, while the addition of a j_{reg} is an explicit regularization.

From now, j denotes the cost function computed without distinction from z_b or from \tilde{z}_b defined by (4.14).

The regularization term $j_{reg}(z_b) = \|r_b\|_{\mathbf{C}^{-1}}^2$ does not prevent high frequency oscillations of z_b . The following regularization term is here more adequate:

$$j_{reg}(\tilde{z}_b) = \|\partial_x z_b\|_{L^2(\Omega)}^2 = \|\partial_x (\mathbf{L}\tilde{z}_b + z_b^b)\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad (4.15)$$

This regularization term aims to minimize the variations of z_b with respect to the background value z_b^b .

It is also common to infer the Strickler coefficient (as in the sequel experiences, see Sec. 4.2.3.1) and/or the inflow discharge in addition to the bathymetry in order to provide an effective model (see e.g. Larnier and Monnier [2020] for the inversion of the triplet and Honnorat et al. [2009]).

The optimization algorithm used to solve the problem (4.11) is the L-BFGS-B algorithm, see Gilbert and Lemaréchal [1989], implemented in the minimize function of the python package `scipy.optimize`¹. The gradient of j is estimated by DassFlow-1D solver, see Monnier et al. [2018], using the automatic differentiation algorithm TAPENADE, see Hascoet and Pascual [2013].

4.2.2 Covariance operators in VDA

In the previous section, the change of variable (4.14) introduces the ε_b covariance operator. \mathbf{C} is a linear integral operator defined by a covariance kernel c :

$$\mathbf{C} : z \mapsto \left(x \mapsto \int_{\Omega} c(x; x') z(x') dx' \right)$$

Assuming that the distribution of ε_b is known, c is defined by: $c(x; x') = \mathbb{E}[(\varepsilon_b(x) - \mathbb{E}[\varepsilon_b(x)])(\varepsilon_b(x') - \mathbb{E}[\varepsilon_b(x')])]$. As mentioned previously, this expression can be estimated using the sample covariance if there are enough realizations or estimations of $\varepsilon_b(x)$ and $\varepsilon_b(x')$.

This expression directly implies that c (and the associated covariance matrix, also denoted \mathbf{C}) is symmetric. Moreover, one can show that c is also positive semi-definite. However, since it defines a norm and must be invertible, c is assumed to be positive-definite.

The modeling of the covariance consists in assuming the expression of c . We first consider homogeneous covariance kernels, i.e. which can be written : $c(x; x') = \mathbf{c}(x - x') \Rightarrow \mathbf{C} : z \mapsto \mathbf{c} * z$.

Only very few covariance operators are used in the literature on inverse problem and VDA. Let us mention them.

- \mathbf{C}^{Id} is defined by the identity kernel $c^{Id} = Id$ for uncorrelated variables.
- $\mathbf{C}_{L_c}^G$ is defined by the Gaussian kernel (e.g. in meteorology Egbert et al. [1994]):

$$c_{L_c}^G(x, x') = \frac{1}{\sqrt{2\pi L_c^2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x - x')^2}{L_c^2}\right) \quad (4.16)$$

- $\mathbf{C}_{L_c}^e$ is defined by the decreasing exponential kernel (also called First Order Auto-Regressive, FOAR, e.g. used in glaciology Monnier and Zhu [2019]):

$$c_{L_c}^e(x, x') = \exp\left(-\frac{|x - x'|}{L_c}\right) \quad (4.17)$$

1. see the documentation of the minimize function of the `scipy.optimize` package and its implementation of the L-BFGS-B algorithm in <https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/optimize.minimize-lbfgsb.html>

with L_c the correlation length.

Note that the Gaussian and decreasing exponential kernels are specific cases of the Matérn covariance kernel, e.g. used in [Mirouze and Weaver \[2010\]](#). The Second Order Auto-Regressive kernel (SOAR) is another specific case of the Matérn kernel often used, e.g. in [Haben et al. \[2011\]](#).

In [Tarantola \[2005\]](#), the expression of the $\|\cdot\|_{\mathbf{C}^{-1}}$ norm associated to $\mathbf{C}_{L_c}^e$, see (4.17), is calculated. One has:

$$\|r_b\|_{\mathbf{C}^{-1}}^2 = \frac{1}{L_c} \|r_b\|_2^2 + L_c \|\partial_x r_b\|_2^2 \tag{4.18}$$

In this first part of the study, the operator $\mathbf{C}_{L_c}^e$ is mainly used to model \mathbf{C} .

In the context of inferring z_b in the Saint-Venant equations, no prior information provides a value of L_c . Recall that this correlation length is often estimated from empirical information. For example, in atmospheric data assimilation, the turbulent microscale is used to estimate L_c , see [Daley \[1993\]](#) p.110, [Pannekoucke et al. \[2008\]](#), [Mirouze and Weaver \[2010\]](#) and references therein for related discussions.

In the sequel, the *classical covariance operator* is $\mathbf{C}_{L_c}^e$ defined by (4.17) with the arbitrary correlation length values L_c equal to $3\Delta x$, $30\Delta x$ and $300\Delta x$, Δx the average space step of the numerical grid.

By abuse of notation, the matrix associated to a covariance operator discretized on the numerical grid, called covariance matrix, is noted by the same symbol.

Since the kernels presented above satisfy $c(x, x) = 1$, they are more specifically correlation kernels. The covariance kernel should be $\sigma(x)\sigma(x')c(x, x')$ with σ the variances.

If σ is considered to be non-constant, the choice of L_c may be influenced by issues related to the positive-definite property, see e.g. [Monnier and Zhu \[2019\]](#). Here σ is assumed to be constant.

In the case z_b is the only control variable, the constant σ acts as a rescaling factor. Therefore, σ has no impact on the results. In order to have equivalent termination criteria for the optimization algorithm equivalent for each operator, the kernels will be rescaled so that the maximum is 1. In this case, by abuse of language, the correlation kernels are still called covariance kernels.

If two (or more) controls are inferred, the rescaled kernels is then weighted by specified constant variances.

4.2.3 Numerical experiments description

The numerical experiments, which are analysed in next sections, are here presented. They aim at comparing the classical covariance operator, see Sec. 4.2.2 and later Sec. 4.2.4, and the original ones derived from physics, see later Sec. 4.3.3.3 and Sec. 4.4. These VDA experiments are performed over a real-like case presented in the last part of this section.

4.2.3.1 Fully- and partially-observed experiments

The fully-observed experiment

The purpose of the experiments is to investigate the inference of z_b using different covariance operators. To do this, the experiments are based on a target bathymetry z_b^t .

From this target, the observations are $H^{obs} = H(z_b^t) \forall x \in \Omega$, see upper Fig. 4.2a. Moreover, the observations are made over almost the entire time window (every 6 hours on a 10-days time window). This experiment is called *fully-observed*.

To fit to a real-like inference problem, the background z_b^b is assumed to be the linear interpolation of two points (the upstream and downstream points of the target, see upper Fig. 4.2a). For the same reason, z_b^b is the first guess value of the iterative VDA algorithm.

The partially-observed experiment

In order to consider an experiment closer to real world problems, H^{obs} is in this experiment computed at the km scale by averaging $H(z_b^t) + \varepsilon_{obs}$ between the observations points, with $\varepsilon_{obs} \sim \mathcal{N}(0, 0.1^2)$. Moreover, H^{obs} is taken at only two times ($t = 6\text{hour}$ and $t = 234\text{hour}$) over the (10-days) time window. This is the so-called *partially-observed*. Moreover, the partially-observed experiment is a multivariate inverse problem that aims at inferring the pair (z_b, K_s) . The two control variables are assumed to be uncorrelated: the cross-covariance is $Cov(\varepsilon_b^K(x), \varepsilon_b^{z_b}(x')) = 0 \forall x, x'$. Hence, the multivariate covariance matrix (containing both the univariate covariance matrices \mathbf{C}_{K_s} and \mathbf{C}_{z_b} , and cross-covariance matrix) is block diagonal. This assumption may not be accurate. However, this assumption is necessary without further knowledge of the cross-covariance and hence, is classically made.

The univariate covariance of K_s is assumed to be modeled by $\mathbf{C}_{K_s} = \mathbf{C}_{\Delta x}^e$. As mentioned in Sec. 4.2.3.2, the assumed value of the Strickler is $K_s^t = 30$. We assume that the background and initial value is $K_s^b = 45$.

In the present study, two pairs of constant are used.

- The 1st pair $(\sigma_{z_b}, \sigma_{K_s}) = (0.5\bar{h}, 10)$ is consistent with the estimate suggested by Larnier and Monnier [2020]. It denotes a realistic estimate of the accuracy of $k^b = (z_b^b, K_s^b)$.
- The 2nd pair is $(\sigma_{z_b}, \sigma_{K_s}) = (0.1\bar{h}, 50)$. This means that the accuracy of z_b^b and K_s^b are respectively overestimated and underestimated. The purpose of this pair is to investigate the inference of z_b in a case in which K_s is mainly inferred .

In the present case, the mean water depth value $\bar{h} \approx 4m$.

Performance criteria

The performance of the optimization with a given c is evaluated by the evolution through the optimization iterations of the Root Mean Square Errors ($RMSE X = \sqrt{(X - X')^2}$, in m). The $RMSE$ between z_b and z_b^t is denoted $RMSE z_b$; $RMSE H$ denotes the $RMSE$ between $H(z_b)$ and H^{obs} .

According to Morozov's discrepancy principle, one should optimize until the distance between the observations and the system state reaches the accuracy of the observations, see e.g. Kaltenbacher et al. [2008]. In real-like experiments, the error of altimetric H^{obs} is of the order of $10cm$. Therefore, the evolution of $RMSE$ and z_b until the accuracy $RMSE H \approx 10cm$ is reached, is also studied as a criterion of the inference performance.

The performance criteria and their evolution through the optimization iterations are also studied until the optimization algorithm terminates. The termination criteria of the L-BFGS-B algorithm used² are based on the evolution of j between two iterations and on the maximum of the gradient of j . The values of the tolerances of these criteria (resp. 10^{-4} and 3×10^{-2}) are taken so that the first fully-observed experiment (presented in Sec. 4.2.4.1 and on Fig. 4.3) has, by expertise, converged sufficiently well. In the following, this stage of the optimization process is called "complete convergence".

The number of iterations to reach these two stages of the optimization process, the stage $RMSE H \approx 10cm$ and the complete convergence, is also studied to highlight the number of iteration needed to reach a given accuracy on z_b or on $H(z_b)$ and as a measure of the convexity of the cost j around a given z_b .

4.2.3.2 The real-like Rio Negro dataset

The VDA experiments are performed over a dataset derived from a Rio Negro dataset (Amazon basin). On Fig. 4.2a, the width w is measured using the Peckel water mask, as in Pujol et al. [2020], at the intersection of the river with Sentinel-3A/B and Jason3 satellite tracks called virtual stations. Since only the value of w at the free surface is provided, the cross-sections are assumed to be rectangular.

2. see more details in the documentation of the L-BFGS-B algorithm in <https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/optimize.minimize-lbfgsb.html>

The target z_b^t is estimated from satellite measurements of H and Q estimated by the large-scale hydraulic model MGB (see Collischonn et al. [2007]) at the same virtual stations, see Fig. 4.2a. The inflow Q , see Fig. 4.2b, is also estimated by the daily large-scale hydraulic model MGB over a 10-days time interval. More details on the test case construction can be found in Malou et al. [2021]. For simplicity, the Strickler coefficient is considered as constant: $K_s = 30$. The numerical mesh has a mean space step $\Delta x \sim 250m$. The time step of the solver is fixed to $\Delta t = 10min$.

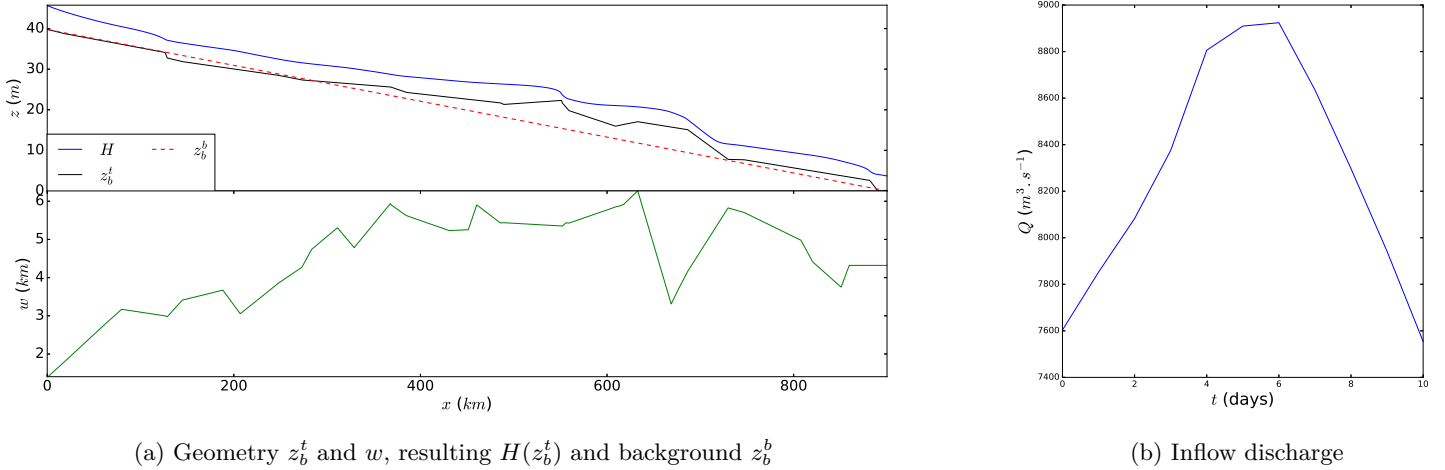


Figure 4.2 – Given geometry and inflow discharge, and target outputs at $t = 10$ days of the Rio Negro-like channel test case.

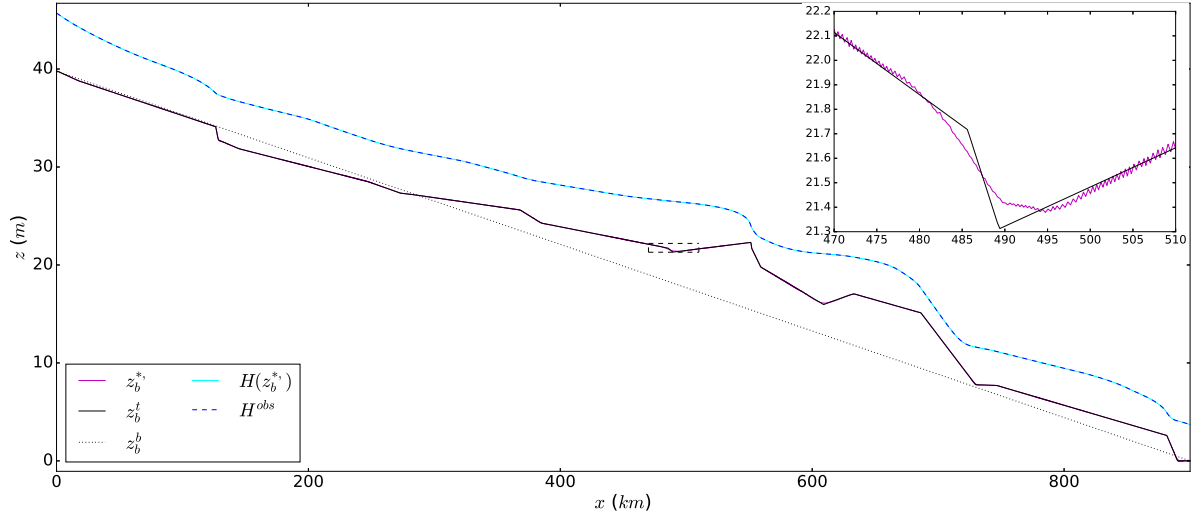
4.2.4 Numerical results of the fully-observed experiment using classical covariance operators

In this section, the inference of z_b is performed using the different classical covariance operators: the decreasing exponential $\mathbf{C}_{L_c}^e$ defined by (4.17) with different arbitrary values of L_c , and the identity \mathbf{C}^{Id} , see Sec. 4.2.2.

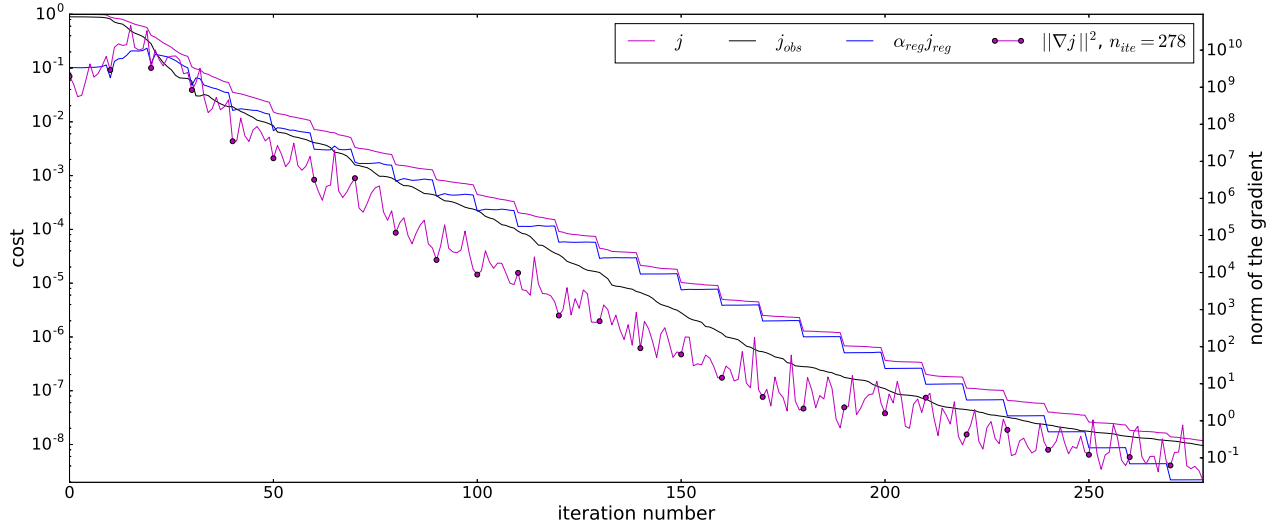
4.2.4.1 With the identity covariance operator

By expertise, the change of variable (4.14) with \mathbf{C}^{Id} may not regularize the optimization problem (4.11) enough: the regularization term of the cost function j_{reg} , defined here by (4.15), may be needed to converge. In the present experiment, the regularization weight coefficient α_{reg} , see the cost defined by (4.12), is taken such that $j_{obs}(z_b^b) = 10\%j(z_b^b)$. Moreover, an adaptive regularization strategy is adopted, see e.g. Kaltenbacher et al. [2008]: α_{reg} is divided by 2 every 10 iterations, see on Fig. 4.15b.

The resulting z_b^* is then very close to z_b^t (nearly indiscernible on Fig. 4.15a). The main difference comes from the corners of the z_b^t curve which are smoothed on the z_b^* curve, see the zoom on $x \in [470; 510]km$. This is the consequence of j_{reg} (4.15) that aims to provide smoother solutions (but that is needed to converge).



(a) Bathymetry $z_b^\square(x)$ (target t , background b and optimal *) and the resulting H at $t = 10$ days.

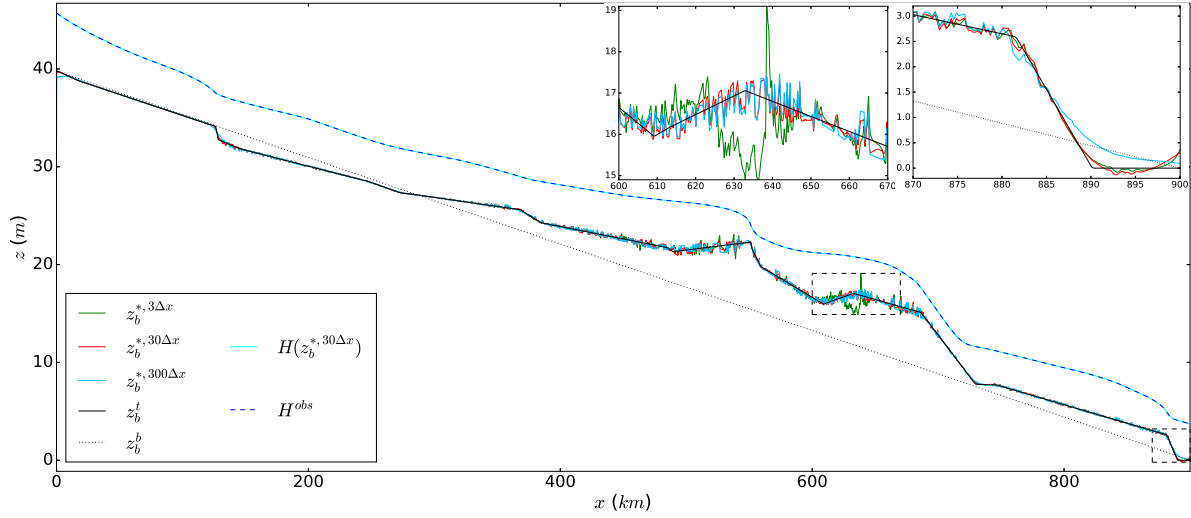


(b) Cost: total j , observation j_{obs} and regularization $\alpha_{reg} j_{reg}$ (normalized by the initial total cost $j(z_b^b)$, log scale), and the norm of the gradient vs optimization iterations.

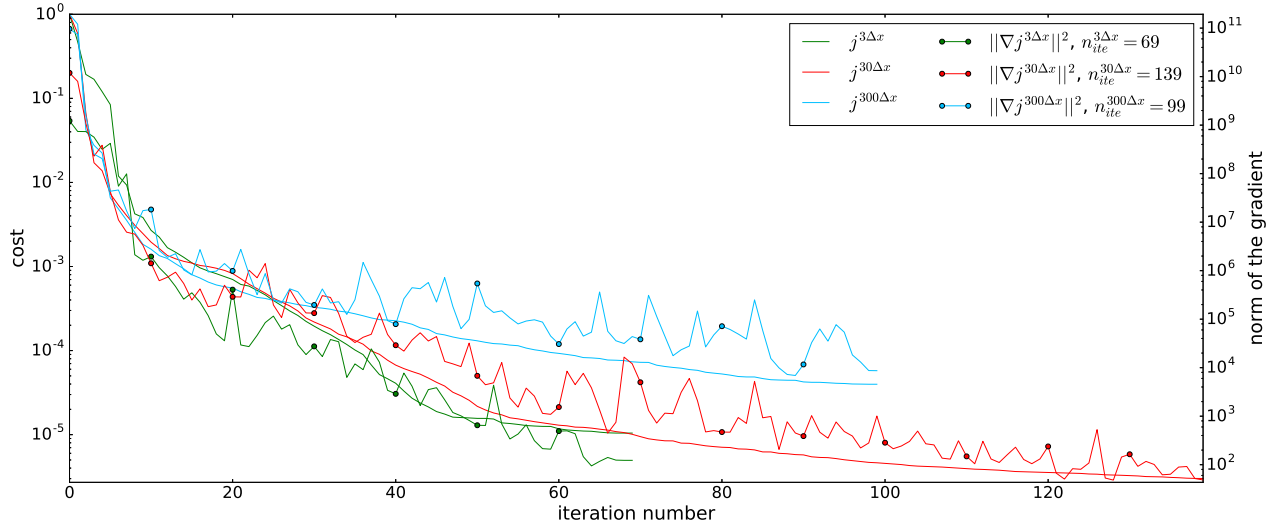
Figure 4.3 – Inference of $z_b(x)$ (fully-observed experiment) with \mathbf{C}^{Id} and the regularization term (4.15) (α_{reg} initially such that $\alpha_{reg} j_{reg}(z_b^b) \sim 10^{-1} j(z_b^b)$ and divided by 2 every 10 iterations).

4.2.4.2 Exponential covariance operator

Following (4.18), high values of L_c tend to provide smooth solutions z_b^* . On the other hand, low values of L_c tend to provide z_b^* closer to z_b^b (in this case $\mathbf{C}_{L_c}^e$ tends to behave like \mathbf{C}^{Id}). By expertise, $\mathbf{C}_{L_c}^e$ regularizes (implicitly) well the optimization problem (4.11). Therefore, no additional/explicit regularization terms ($\alpha_{reg} = 0$) are needed to converge to a convincing z_b^* .



(a) Bathymetry $z_b^{\square}(x)$ (target t , background b and optimal with $\mathbf{C}_{L_c}^e$, $^*, L_c$) and the resulting H at $t = 10$ days.



(b) Total cost j^{L_c} (with $\mathbf{C}_{L_c}^e$, normalized by the initial total cost $j^{L_c}(z_b^b)$, log scale) and the norm of the gradient vs optimization iterations.

Figure 4.4 – Inference of $z_b(x)$ (fully-observed experiment) with $\mathbf{C}_{L_c}^e$ and arbitrary values of L_c ($L_c = 3\Delta x$ in green, $L_c = 30\Delta x$ in red and $L_c = 300\Delta x$ in blue) and no regularization term ($\alpha_{reg} = 0$). The total number of iteration is denoted n_{ite} .

On Fig. 4.4a, z_b^* obtained using $L_c = 3\Delta x$ has oscillations of larger amplitudes (e.g. over $x \in [600; 670]km$) than when $L_c = 30\Delta x$ or $L_c = 300\Delta x$ are used. Also, the use of $L_c = 300\Delta x$ seems to provide smoother z_b^* than smaller L_c values, especially at the location of the corners of the z_b^t curve, e.g. on $x \in [870; 900]km$.

4.2.4.3 Comparisons and choice of the reference method

Covariance operators		\mathbf{C}^{Id}	$\mathbf{C}_{3\Delta x}^e$	$\mathbf{C}_{30\Delta x}^e$	$\mathbf{C}_{300\Delta x}^e$
till $RMSE H \approx 10cm$	n_{ite}	69	11	10	9
	$RMSE z_b (m)$	0.44	0.6	0.78	0.31
till complete convergence	n_{ite}	278	69	139	99
	$RMSE z_b (m)$	0.02	0.23	0.14	0.22
	$RMSE H (m)$	0.21×10^{-3}	6.61×10^{-3}	3.55×10^{-3}	1.29×10^{-2}

Table 4.1 – Performance (number of iteration n_{ite} and $RMSE z_b$ and H) of the inference of z_b using classical covariance operator and \mathbf{C}^{Id} at different stage of the optimization process (till $RMSE H \approx 10cm$ and till complete convergence as described in Sec. 4.2.3.1). The reference classical covariance operator is indicated in blue.

The optimization algorithm with \mathbf{C}^{Id} converges very slowly (278 iterations to reach z_b^* and 69 iterations to reach the $RMSE H \approx 10cm$ stage, see Tab. 4.1). On the other hand, optimizations with $\mathbf{C}_{L_c}^e$ reach the $RMSE H \approx 10cm$ stage and z_b^* faster (less than 11 and 139 iterations respectively) than with \mathbf{C}^{Id} .

Therefore, $\mathbf{C}_{L_c}^e$ greatly improves the convergence speed of the optimization algorithm, especially in the first iterations.

Moreover, $\|\nabla j\|_2^2$ with \mathbf{C}^{Id} increases a lot during the 15 first iterations (by a factor 10^2). With $\mathbf{C}_{L_c}^e$, $\|\nabla j\|_2^2$ decreases very quickly during the first iterations. This can be explained by the fact that $\mathbf{C}_{L_c}^e$ provides "more convex" cost functions around the reached (local) minimum. This difference in the behavior of ∇j is in agreement with the difference in convergence speed.

One can underline that \mathbf{C}^{Id} provides a higher accuracy. This accuracy comes from the regularization term (4.15) with a well chosen α_{reg} . Recall that $\alpha_{reg} \neq 0$ is necessary with \mathbf{C}^{Id} , unlike with $\mathbf{C}_{L_c}^e$. However, this accuracy is unnecessary in practice and all estimates of \mathbf{C} provide sufficiently accurate z_b^* , see Sec. 4.2.3.1.

With the operator $\mathbf{C}_{L_c}^e$, using a large value of L_c (e.g. $L_c = 300\Delta x$) implies that the corners of the z_b^t curve are smoothed on the z_b^* curve. On the other hand, using a low value of L_c (e.g. $L_c = 3\Delta x$) implies some oscillations on z_b^* . This explains why a low value of L_c implies at complete convergence a similar $RMSE z_b$ but a lower $RMSE H$ than a large value of L_c .

Using an intermediate value of L_c (e.g. $L_c = 30\Delta x$) implies that z_b^* has less oscillations than when a low value of L_c is used, and the corners of the z_b^t curve are better approximated than when a high value of L_c is used. This implies that the $RMSE H$ and the $RMSE z_b$ are (slightly) better, see Fig. 4.9.

The operator $\mathbf{C}_{L_c}^e$ has the advantage of providing a self-sufficient implicit regularization through the change of variable (4.14). Recall that no explicit regularization term is needed, i.e. $\alpha_{reg} = 0$. This implicit regularization improves the convergence speed of the optimization algorithm. The algorithm also converges to a solution with more than sufficient accuracy. Moreover, $\mathbf{C}_{L_c}^e$ with $L_c = 30\Delta x$ is a good compromise since it benefits from the advantage of a high value of L_c (less oscillations than a low value of L_c) but mitigate its disadvantage (the corners of the z_b^t curve are better approximated).

In the sequel, $\mathbf{C}_{30\Delta x}^e$ is then selected as the so-called "classical covariance operator of reference".

4.3 Covariance operators from Green-like kernels of the double scale diffusive wave equations

The purpose of this section is to derive physically-consistent estimates of \mathbf{C} , see Sec. 4.2.1.2. These physically-consistent covariance operators are derived using Green-like kernels.

In a first part, the definitions of Green's kernel and Green-like kernel are given. Then, a link between a Green's kernel and a covariance operator is established. The inference is made using the Saint-Venant equations (4.10). However, these equations do not allow to derive Green's kernels (or Green-like). Therefore, these kernels will be derived from the double-scale diffusive wave equations (see Malou and Monnier [2022b]), which are first recalled. These Green-like kernels also provide a tool to quantify the sensitivity of the equations with respect to the control, here z_b . This tool is called the "sensitivity map".

In this context, Green-like kernels do not directly provide covariance kernels. The last part of this section is about obtaining a covariance operator from a Green-like kernel.

4.3.1 Green-like kernels and their link to covariance operators

4.3.1.1 Green-like kernels: definition

Suppose a time-dependent 1D linear PDE in the unknown H : $\partial_t H(x, t) + \mathcal{A}H(x, t) = \mathcal{B}k(x, t)$. The linear differential operator \mathcal{A} is assumed to be with constant coefficients, the right hand side operator \mathcal{B} is linear in k with constant coefficient too.

The Green's kernel associated to this PDE is the function $G^{\mathcal{B}}$ which satisfies the equation: $\partial_t G^{\mathcal{B}} + \mathcal{A}G^{\mathcal{B}}(x, t) = \delta(x, t)$, where δ is the Dirac distribution, see Green [1828] and e.g. Evans [1998] for modern use with the similar concept of fundamental solutions.

Since the operator \mathcal{A} is assumed to be linear with constant coefficients, the solution of the PDE can be written as $H(x, t) = [G^{\mathcal{B}} * \mathcal{B}k](x, t)$. The Malgrange-Ehrenpreis theorem states that a Green kernel exists, see e.g. Brezis [2010].

One can be interested in the response of the system to an impulse in k . Hence, the kernel G , called here *Green-like kernel*, satisfies the equation:

$$\partial_t G + \mathcal{A}G(x, t) = \mathcal{B}\delta(x, t) \quad (4.19)$$

Since the operator \mathcal{B} is a linear operator with constant coefficients, the solution of the PDE can be written as:

$$H(x, t) = [G * k](x, t) \quad (4.20)$$

with G solution of (4.19).

If the Green kernel exists and is unique, and if the operator \mathcal{B} is linear continuous, then the Riesz representation theorem (see e.g. Brezis [2010]) ensures the existence and uniqueness of the Green-like kernel.

Solving the equation (4.19) with non-linear operators \mathcal{A} and \mathcal{B} , or operators with non-constant coefficients, is generally not possible. Moreover, in such cases, the existence and uniqueness of such kernels are not ensured.

4.3.1.2 When the Green kernel is naturally a covariance kernel

Let us consider the 1D heat equation with source term:

$$\partial_t H(x, t) - \frac{D}{2} \partial_{xx}^2 H(x, t) = k(x, t) \quad (4.21)$$

with the initial condition $H(x, t = 0) = 0$, D the diffusion coefficient. The associated Green's kernel reads :

$$G^{\mathcal{B}}(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi Dt}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{x^2}{Dt}\right) \quad (4.22)$$

This Green's kernel is the Gaussian covariance kernel (4.16) with the correlation length $L_c = \sqrt{Dt}$: $G^{\mathcal{B}}(x - x', t) = c_{\sqrt{Dt}}^G(x, x')$. Therefore, if this diffusion equation (4.21) is used to model a given physical phenomenon, then the value of the diffusion coefficient is naturally obtained. Thus, the correlation length can be estimated from D and a characteristic time. Recall from Sec. 4.2.2 that the correlation lengths for more complex phenomena are classically taken empirically.

Note that here the Green's kernel is naturally symmetric and positive-definite.

The solution of Eqn (4.21) can then be written as (4.20): $H = G^{\mathcal{B}} * k = c_{\sqrt{Dt}}^G * k$.

Observe that the same analysis can be done for the 1D homogeneous heat equation $\partial_t H(x, t) - \frac{D}{2} \partial_{xx}^2 H(x, t) = 0$ with the initial condition $H(x, t = 0) = k(x)$. As suggested by Egbert et al. [1994], the solution of this equation can then be used to estimate $\mathbf{C}_{\sqrt{Dt}}^G(k) = c_{\sqrt{Dt}}^G * k$ without storing the matrix of $\mathbf{C}_{\sqrt{Dt}}^G$. Mirouze and Weaver [2010] links the implicit time discretization of this equation and the Matérn kernel.

If the PDE contains more terms than a simple diffusion term, it is likely that the associated Green's kernel (or Green-like kernel, as in the sequel) provides a covariance kernel containing more dynamics information. The resulting kernel may provide physically-consistent parameters. However, this is valid as long as the resulting Green's kernel is symmetric positive-definite. If this is not the case, one may build up a symmetric positive-definite approximation of the Green's kernel.

4.3.2 Green-like kernels derived from the double scale diffusive wave

4.3.2.1 The double scale diffusive wave model

We recall here the double scale-diffusive wave equations which are dedicated to altimetric observations, see Malou and Monnier [2022b]. These equations are derived from the Saint-Venant equations (4.10) under the low Froude assumption ($Fr^2 \ll 1$) and a double scale assumption.

The double-scale distinguishes the physical scale and the observations scale. The physical scale variables are denoted by (x, t) , the observations scale variables by (y, τ) . These two sets of space-time variables are linked by $(y, \tau) = \epsilon_s (x, t)$ with ϵ_s the scaling factor [Malou and Monnier, 2022b]. The double scale assumption aims at taking into account width variations that are neglected in the classical diffusive wave equation (the "physical scale" equation) but which are not negligible at the observations scale. These are the following two scalar equations:

$$\begin{aligned} \left(\partial_t H - \mu(H) \partial_{xx}^2 H + v(H) \partial_x H \right) (x, t) &= \left(v(H) \partial_x z_b \right) (x, t) \\ \left(\partial_\tau H - \mu(H) \partial_{yy}^2 H + v(H) \partial_y H + \rho(H) H \right) (y, \tau) &= \left(v(H) \partial_y z_b + \rho(H) z_b \right) (y, \tau) \end{aligned} \quad (4.23)$$

with the initial condition $H(\mathcal{X}, \mathcal{T} = 0) = H_0(\mathcal{X})$.

4.3. COVARIANCE OPERATORS FROM GREEN-LIKE KERNELS OF THE DOUBLE SCALE DIFFUSIVE WAVE EQUATION

The effective diffusion coefficient μ , wave velocity v , width variation coefficients ρ and the fluid velocity u are defined by:

$$\begin{aligned} \mu(H; \mathcal{X}, \mathcal{T}) &= \frac{1}{2} u(H; \mathcal{X}, \mathcal{T}) \frac{(H(\mathcal{X}, \mathcal{T}) - z_b(\mathcal{X}))}{|\partial_{\mathcal{X}} H(\mathcal{X}, \mathcal{T})|} & v(H; \mathcal{X}, \mathcal{T}) &= \gamma u(H; \mathcal{X}, \mathcal{T}) \\ \rho(H; y, \tau) &= \frac{1}{\bar{w}(y, \tau)} (\partial_{\tau} \bar{w}(y, \tau) + \gamma u(H; y, \tau) \partial_y \bar{w}(y, \tau)) & u(H; \mathcal{X}, \mathcal{T}) &= K_s (H(\mathcal{X}, \mathcal{T}) - z_b(\mathcal{X}))^{\gamma-1} |\partial_{\mathcal{X}} H(\mathcal{X}, \mathcal{T})|^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (4.24)$$

The expression of u comes from the Manning-Strickler parametrization (with $\gamma = \frac{5}{3}$), see Sec. 4.2.1.1. The generic variables $(\mathcal{X}, \mathcal{T})$ denote either (x, t) for the physical scale or (y, τ) for the observations scale.

The non-linear equations (4.23) do not provide a framework for deriving Green's kernels and their existence is not even ensured, see Sec. 4.3.1.1. Therefore, the double-scale diffusive wave equations (4.23) are linearized around a reference state that gives constant coefficients.

The linearized diffusive wave equations (4.23) are non-homogeneous linear reaction-advection-diffusion equations: $\forall (x, t) \in [0, L] \times [0; T]$,

$$\boxed{\begin{aligned} (\partial_t H - \mu_r^x \partial_{xx}^2 H + v_r \partial_x H) (x, t) &= (v_r \partial_x z_b - \eta_r^x z_b) (x, t) \\ (\partial_{\tau} H - \mu_r^y \partial_{yy}^2 H + v_r \partial_y H + \rho_r H) (y, \tau) &= (v_r \partial_y z_b + (\rho_r - \eta_r^y) z_b) (y, \tau) \end{aligned}} \quad (4.25a)$$

$$\boxed{\begin{aligned} (\partial_t H - \mu_r^x \partial_{xx}^2 H + v_r \partial_x H) (x, t) &= (v_r \partial_x z_b - \eta_r^x z_b) (x, t) \\ (\partial_{\tau} H - \mu_r^y \partial_{yy}^2 H + v_r \partial_y H + \rho_r H) (y, \tau) &= (v_r \partial_y z_b + (\rho_r - \eta_r^y) z_b) (y, \tau) \end{aligned}} \quad (4.25b)$$

with the reference coefficients³:

$$\mu_r^{\mathcal{X}} = \frac{1}{2} u_r \frac{H_r}{|\partial_{\mathcal{X}} H_r|}, \quad v_r = \gamma u_r, \quad \eta_r^{\mathcal{X}} = \frac{1}{2} u_r \frac{\partial_{\mathcal{X}\mathcal{X}}^2 H_r}{|\partial_{\mathcal{X}} H_r|} \quad (4.26)$$

$$\rho_r = \frac{1}{\bar{w}_r} (\partial_{\tau} \bar{w}_r + \gamma u_r \partial_y \bar{w}_r) \quad (4.27)$$

The reference state is given by the reference water surface height H_r , the reference velocity u_r and the reference mean width \bar{w}_r . We must make sure that μ_r , defined in (4.26), is positive; if not, a change of reference height solves the issue.

Note that v_r does not depend on the scale but that $\mu_r^{\mathcal{X}}$ and $\eta_r^{\mathcal{X}}$ do (see Tab. 4.2).

scale	$\mu_r^{\mathcal{X}}$	v_r	$\eta_r^{\mathcal{X}}$	ρ_r
physical scale	10^5	1	10^{-6}	
observation scale	10^2	1	10^{-5}	10^{-4}

Table 4.2 – Magnitudes of the reference coefficients, defined by (4.26) and (4.27), at both physical and observations scale with a scaling factor $\epsilon_s = 1/250$

From now, the calculations are performed at the observations scale. Indeed and if not specified, the calculations also hold for the physical scale⁴ assuming that $\rho_r = 0$.

We set: $\mathcal{A} = -\mu_r^{\mathcal{X}} \partial_{\mathcal{X}\mathcal{X}}^2 + v_r \partial_{\mathcal{X}} + \rho_r$ and $\mathcal{B} = v_r \partial_{\mathcal{X}} + (\rho_r - \eta_r^{\mathcal{X}})$ respectively the right and left hand side operators of (4.25b).

The operator \mathcal{B} is linear and continuous and the existence of a unique Green's kernel is ensured for the linearized diffusive wave equations (4.25). Therefore, the existence of a unique Green-like kernel is ensured (by virtue of the Riesz representation theorem, see Sec. 4.3.1.1).

3. the subscript r relates to the reference state and the resulting coefficients

4. If needed, the observations and physical scales are distinguished by the subscripts ps and os .

4.3.2.2 Derivation of Green-like kernels

First, the classical Green's kernel of the linear diffusive wave equations (4.25b), denoted by $G^{\mathcal{B}}$, is derived⁴. The Green's kernel is calculated using the Fourier transform in space and the Laplace transform in time (following e.g. Evans [1998]). Moreover, it is assumed that $G^{\mathcal{B}}(\mathcal{X}, \mathcal{T} = 0) = 0$. To perform the Fourier transform, the equations (4.25) are defined $\forall \mathcal{X} \in \mathbb{R}$.

We are interested in the response of the system to a perturbation, and not in finding the solution of the initial and boundary values problem. Therefore, the Green's kernel (and later Green-like kernels) does not seek to satisfy either the boundary conditions or the initial condition.

The obtained Green's kernel expression is the following⁵ :

$$G^{\mathcal{B}}(\mathcal{X}, \mathcal{T}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(2\mu_r^{\mathcal{X}}\mathcal{T})}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(\mathcal{X} - v_r\mathcal{T})^2}{2\mu_r^{\mathcal{X}}\mathcal{T}}\right) \exp(-\rho_r\mathcal{T}) \mathbf{1}_{]0;+\infty[}(\mathcal{T}) \quad (4.28)$$

The advection and diffusion terms of the equations (4.25) involve the Gaussian term (the classical Green's kernel) in $G^{\mathcal{B}}$, see Sec. 4.3.1.2 or e.g. Evans [1998]. This Gaussian is centered in $v_r\mathcal{T}$ with the correlation length $L_c = \sqrt{2\mu_r^{\mathcal{X}}\mathcal{T}}$ ($\mu_r^{\mathcal{X}} > 0$, v_r is defined by (4.26)). Therefore, the Green's kernel (4.28) provides a physically meaningful estimate of the characteristic length L_c , see later (4.38). Moreover, because of the Gaussian term in the expression of $G^{\mathcal{B}}$, the Gaussian operator, defined by (4.16), seems to be a natural physically-consistent estimate of \mathbf{C} in this context.

Since the equation (4.25b) is linear with constant coefficients, the solution $\forall (\mathcal{X}, \mathcal{T}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}$ can be written as: $H(\mathcal{X}, \mathcal{T}) = [G^{\mathcal{B}} * \mathcal{B}z_b](\mathcal{X}, \mathcal{T})$. On the other hand, the Green-like kernel, denoted G^{ts} , implies that the solution can also be written as the relation (4.20). Therefore, the following equality holds: $[G^{\mathcal{B}} * \mathcal{B}z_b](\mathcal{X}, \mathcal{T}) = [G^{ts} * z_b](\mathcal{X}, \mathcal{T})$. Using the convolution product differentiation property, the Green-like kernel reads as follows⁶:

$$G^{ts}(\mathcal{X}, \mathcal{T}) = \left(-v_r \frac{(\mathcal{X} - v_r\mathcal{T})}{2\mu_r^{\mathcal{X}}\mathcal{T}} + \rho_r - \eta_r^{\mathcal{X}}\right) G^{\mathcal{B}}(\mathcal{X}, \mathcal{T}) \mathbf{1}_{]0;+\infty[}(\mathcal{T}) \quad (4.29)$$

with $G^{\mathcal{B}}$ defined by (4.28).

However, z_b is constant in time. Therefore, the appropriate perturbation to consider is one that is local in space and constant in time (not local in time). To do this, we must first consider a Dirac comb of $n + 1$ equidistant Dirac distributions on the time interval $[0; T]$: $\mathbb{III}(\mathcal{T}) = \sum_{i=0}^n \delta(\mathcal{T} - \frac{T}{n}i)$.

We denote by G^{dc} ⁷ the kernel that formally satisfies: $(\partial_{\mathcal{T}}G^{dc} + \mathcal{A}G^{dc})(\mathcal{X}, \mathcal{T}) = \mathcal{B}\mathbb{III}(\mathcal{T})\delta(\mathcal{X})$. This kernel is easily calculated from the kernels (4.29) using the linearity and time shifting property of the Laplace transform:

$$G^{dc}(\mathcal{X}, \mathcal{T}) = \sum_{i=0}^{n_t} G^{ts}(\mathcal{X}, \mathcal{T} - \frac{T}{n}i) \quad (4.30)$$

with G^{ts} defined by (4.29) and the index of the current time $n_t = \lfloor \frac{n}{T}\mathcal{T} \rfloor$.

The next step is to sum an infinite number of Dirac distributions, i.e. $n \rightarrow +\infty$. Hence, formally, $\mathbb{III}(\mathcal{T}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathbf{1}_{]0;T]}(\mathcal{T})$. Then, G^{dc} tends to solve the equation: $\forall \mathcal{T} \in [0; T] \quad (\partial_{\mathcal{T}}G + \mathcal{A}G)(\mathcal{X}, \mathcal{T}) = \mathcal{B}\delta(\mathcal{X})$.

5. the superscript \mathcal{B} relates to the result of a Dirac distribution as right hand side $\mathcal{B}z_b$

6. the superscript ts refers to the result of a Dirac distribution local in time and space as z_b

7. the superscript dc refers to the result of a Dirac comb as z_b

Since, formally, Dirac combs are related to the rectangle rule:

$$G^{dc}(\mathcal{X}, \mathcal{T}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\mathcal{T}} G^{ts}(\mathcal{X}, \mathcal{T}') d\mathcal{T}' \quad (4.31)$$

This limit (4.31) provides the following new Green-like kernels :

$$\boxed{\begin{aligned} G_{ps}(x, t) &= \int_0^t \left(-v_r \frac{(x - v_r t')}{2\mu_r^x t'} - \eta_r^x \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi(2\mu_r^x t')}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x - v_r t')^2}{2\mu_r^x t'}\right) dt' \\ G_{os}(y, \tau) &= \int_0^\tau \left(-v_r \frac{(y - v_r \tau')}{2\mu_r^y \tau'} + \rho_r - \eta_r^y \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi(2\mu_r^y \tau')}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(y - v_r \tau')^2}{2\mu_r^y \tau'}\right) \exp(-\rho_r \tau') d\tau' \end{aligned}} \quad (4.32)$$

with the coefficients μ_r^x , v_r , ρ_r and η_r^x defined by (4.26).

Note that since $G^B(\mathcal{X}, 0) = 0 \quad \forall \mathcal{X} \in \mathbb{R}$ and formally $G^B(\mathcal{X}, \mathcal{T}) \xrightarrow{\mathcal{T} \rightarrow 0} \delta(\mathcal{X}) \quad \forall \mathcal{X} \in \mathbb{R}$, see e.g. Evans [1998], the kernel G^B is discontinuous in $(0, 0)$.

The kernel G^{ts} (4.29) also satisfies $G^{ts}(\mathcal{X}, \mathcal{T}) \xrightarrow{\mathcal{T} \rightarrow 0} 0 \quad \forall \mathcal{X} \in \mathbb{R}^*$. Since $G^{ts}(\mathcal{X}, 0) = 0 \quad \forall \mathcal{X} \in \mathbb{R}$, the kernel defined by (4.29) is continuous for $\forall(\mathcal{X}, \mathcal{T}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \setminus (0, 0)$.

This continuity property of the kernel G^{ts} implies that the sum G^{dc} , defined by (4.30), and the integrals (4.31) are well-defined $\forall \mathcal{X} \in \mathbb{R}^*$. Hence, the kernels G_{ps} and G_{os} obtained above are well-defined $\forall(\mathcal{X}, \mathcal{T}) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^+$.

There is, nevertheless, no proof that the integral (4.31) is defined and finite $\forall(\mathcal{X}, \mathcal{T}) \in \{0\} \times \mathbb{R}^+$. However, we are interested in the response the impulsion, not the impulsion itself. Hence, the impulsion (i.e. when $\mathcal{T}' = 0$) is not taken into account by the numerical integration.

Note that $\mathcal{X} \mapsto G^B(\mathcal{X}, \mathcal{T}) \quad \forall \mathcal{T} \in \mathbb{R}^+$, defined by (4.28), is not an even function because of the advection term in the equations (4.25) ($v_r \neq 0$). Similarly, the kernels (4.29) and (4.32) are not even with respect to \mathcal{X} . Therefore, $(\mathcal{X}, \mathcal{X}') \mapsto G(\mathcal{X} - \mathcal{X}', \mathcal{T})$ is not symmetric. Moreover, there is no proof that this kernel are positive-definite. Therefore, the kernels G_{ps} and G_{os} do not directly provide a covariance kernel.

4.3.2.3 A by-product: sensitivity map

The purpose of the following section is to highlight the sensitivity of the double-scale diffusive wave equations (4.23) with respect to k (here z_b) resulting from the Green-like kernels previously derived. This investigation also stands for the Saint-Venant equations (4.10) as long as the low Froude and double-scale assumptions stand.

Since v_r is constant, $v_r \mathcal{T}$ is the distance traveled by the wave till the time \mathcal{T} . Since v , defined in (4.24), is a function of $(\mathcal{X}, \mathcal{T})$, it can be integrated along the characteristic curve to provide the traveled length l .

The same way, α and ω are respectively the diffusion and the width variation coefficients integrated along the characteristic curve.

From the sum G^{dc} defined by (4.30), we know that the integrands of the kernels (4.32) at a given \mathcal{T}' are actually the propagation of this integrand from the time $\mathcal{T} - \mathcal{T}'$ till the time \mathcal{T} .

The characteristic curve $X(\mathcal{X}, \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)$ is the position at time \mathcal{T}_2 of the particle that was located at the position \mathcal{X} at time \mathcal{T}_1 : $X(\mathcal{X}, \mathcal{T} - \mathcal{T}', \mathcal{T}) = \mathcal{X} + l(\mathcal{X}, \mathcal{T}, \mathcal{T}')$.

Hence, the traveled length, diffusion coefficient and width variation coefficient integrated along the characteristic curve read:

$$\begin{aligned} l(\mathcal{X}, \mathcal{T}, \mathcal{T}') &= \int_{\mathcal{T}-\mathcal{T}'}^{\mathcal{T}} v(X(\mathcal{X}, \mathcal{T} - \mathcal{T}', s), s) ds \\ \alpha(\mathcal{X}, \mathcal{T}, \mathcal{T}') &= \int_{\mathcal{T}-\mathcal{T}'}^{\mathcal{T}} 2\mu(X(\mathcal{X}, \mathcal{T} - \mathcal{T}', s), s) ds \\ \omega(\mathcal{X}, \mathcal{T}, \mathcal{T}') &= \int_{\mathcal{T}-\mathcal{T}'}^{\mathcal{T}} \rho(X(\mathcal{X}, \mathcal{T} - \mathcal{T}', s), s) ds \end{aligned} \quad (4.33)$$

with the coefficients v , ρ and u defined in (4.24). The coefficients μ and η are similarly defined as in (4.26):

$$\mu(\mathcal{X}, \mathcal{T}) = \frac{1}{2} u(\mathcal{X}, \mathcal{T}) \frac{H(\mathcal{X}, \mathcal{T})}{|\partial_{\mathcal{X}} H(\mathcal{X}, \mathcal{T})|}, \quad \eta(\mathcal{X}, \mathcal{T}) = \frac{1}{2} u(\mathcal{X}, \mathcal{T}) \frac{\partial_{\mathcal{X}\mathcal{X}}^2 H(\mathcal{X}, \mathcal{T})}{|\partial_{\mathcal{X}} H(\mathcal{X}, \mathcal{T})|} \quad (4.34)$$

Then an expression of the sensitivities derives from the Green kernels (4.32). For a perturbation at \mathcal{X}' , i.e. for a Dirac distribution $\delta(\mathcal{X} - \mathcal{X}')$, the expressions of the sensitivities S are the following :

$$\begin{aligned} S(\mathcal{X}, \mathcal{X}', \mathcal{T}) &= \int_0^{\mathcal{T}} \left(-v(\mathcal{X}, \mathcal{T} - \mathcal{T}') \frac{(\mathcal{X} - \mathcal{X}' - l(\mathcal{X}, \mathcal{T}, \mathcal{T}'))}{\alpha(\mathcal{X}, \mathcal{T}, \mathcal{T}')} + \rho(\mathcal{X}, \mathcal{T} - \mathcal{T}') - \eta(\mathcal{X}, \mathcal{T} - \mathcal{T}') \right) \\ &\quad \times \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha(\mathcal{X}, \mathcal{T}, \mathcal{T}')}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(\mathcal{X} - \mathcal{X}' - l(\mathcal{X}, \mathcal{T}, \mathcal{T}'))^2}{\alpha(\mathcal{X}, \mathcal{T}, \mathcal{T}')} \right) \exp(-\omega(\mathcal{X}, \mathcal{T}, \mathcal{T}')) d\mathcal{T}' \end{aligned} \quad (4.35)$$

The so-called *sensitivity map* represents the sensitivity, at a given scale, of the control at one point (located at a given \mathcal{X}') on the rest of the domain through time: $S^{\mathcal{X}'} : (\mathcal{X}, \mathcal{T}) \mapsto S(\mathcal{X}, \mathcal{X}', \mathcal{T})$.

Here the sensitivity maps are computed on the whole domain for a perturbation in the middle of the domain $\mathcal{X}' = 0.5L$. The integrals are computed using a rectangle method on the right with a time step of 1h.

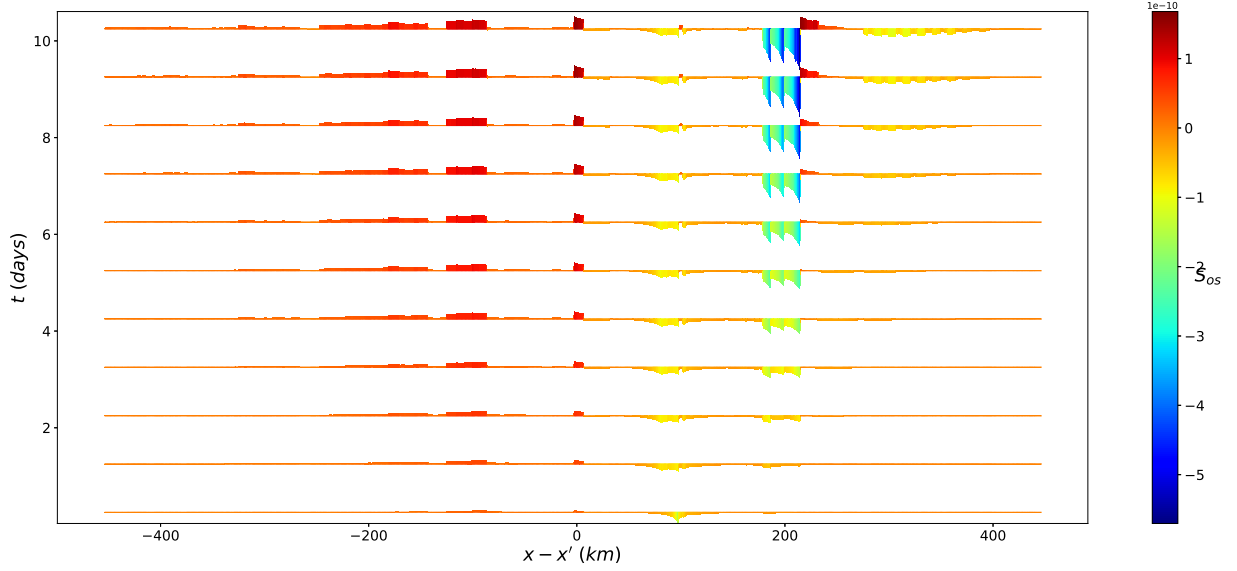
We notice that the sensitivity at observations scale S_{os} is discontinuous with respect to \mathcal{X} , see Fig. 4.5. Moreover, on Fig. 4.5b, the discontinuities are located at the same positions as the discontinuities in the space derivative of the width, see Sec. 4.2.3.2 for the construction of the width.

The sensitivities are mostly positive upstream and negative downstream of \mathcal{X}' .

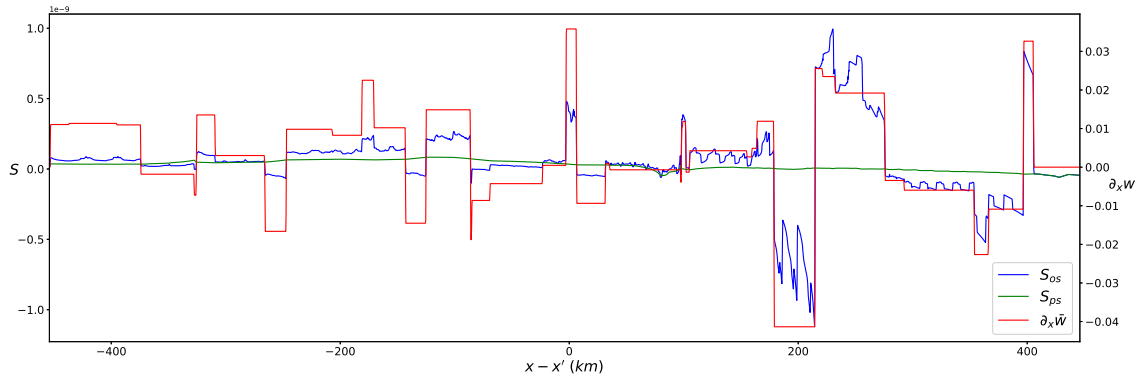
In absolute value, S_{os} seems to increase in time, see Fig. 4.5a. Also, the sensitivity map highlights that more information are located far from \mathcal{X}' when the time increases. These phenomena come from the increasing integration domain in time of the integral and from the advection and diffusion phenomena in the integrand of the sensitivities (4.35).

Finally, one can deduce that the sensitivity of the double scale diffusive wave equations with respect to the z_b is related to the w variations. Moreover, introducing an error in z_b at a point has a positive impact upstream and negative impact downstream on H , Fig. 4.5a.

This sensitivity map represents the spatio-temporal propagation of the local sensitivity. This sensitivity analysis also stands for the Saint-Venant equations under the low Froude and double gradually varied assumptions.



(a) Sensitivity map at observations scale



(b) Sensitivity maps ($S_{ps}^{\mathcal{X}'}$ at the physical scale and $S_{os}^{\mathcal{X}'}$ at the observations scale) at $t = 10days$ and the river width derivative.

Figure 4.5 – Sensitivity maps (4.35) for perturbations in the middle of the domain ($\mathcal{X}' = 0.5L$) with the coefficients (4.24), (4.33) and (4.34) computed with the output of the Saint-Venant equations for Rio Negro-like case, see Fig. 4.2.

4.3.3 Building physically-derived covariance operators from Green-like kernels

Covariance operators and their associated matrices are by definition symmetric and positive-definite. The kernels $(\mathcal{X}, \mathcal{X}') \mapsto G(\mathcal{X} - \mathcal{X}', \mathcal{T})$ defined by (4.32) are not symmetric. Moreover, there is no proof that they are positive-definite.

Note that the same issues arise when \mathbf{C} is estimated statistically from the sample covariance, see e.g. Bannister [2008a]. In this case, the number of realizations or estimates of ε_b may not be sufficient to correctly estimate the covariance. Consequently, spurious correlations may appear and the resulting matrix may not be symmetric

positive-definite.

If the inverse operator of the Green-like kernel (the operator G^{-1} such that $z_b = G^{-1}H$) and if a covariance operator of H is known, an estimate of \mathbf{C} can be computed using the bilinear property of the covariance operator, see e.g. [Rasmussen and Williams \[2006\]](#) chap. 4. However, it is based on a prior knowledge of the covariance of H . Therefore, this approach is not used here.

Thus, the purpose of this section is to construct covariance operators from the Green-like kernels G previously defined.

4.3.3.1 On the symmetry of the covariance kernel

The kernels $(\mathcal{X}, \mathcal{X}') \mapsto G(\mathcal{X} - \mathcal{X}', \mathcal{T})$, see (4.32), are not symmetric because of the advection of h , $h = H - z_b$, in (4.23). This advection implies :

- the Gaussian term of $(\mathcal{X}, \mathcal{X}') \mapsto G^{\mathcal{B}}(\mathcal{X} - \mathcal{X}', \mathcal{T}')$, defined by (4.28), is not centered in \mathcal{X}' but in $(\mathcal{X}' + v_r \mathcal{T}')$ (the wave travels from upstream to downstream),
- the term $v_r \partial_{\mathcal{X}} z_b$ in the right hand side of (4.25) implies that the term $(-v_r \frac{\mathcal{X} - \mathcal{X}' - v_r \mathcal{T}'}{2\mu_r^{\mathcal{X}} \mathcal{T}'})$ in $G^{ts}(\mathcal{X} - \mathcal{X}', \mathcal{T}')$, see (4.29) ($\mathcal{X} \mapsto G^{ts}(\mathcal{X} - \mathcal{X}', \mathcal{T}')$ is positive upstream of $\mathcal{X}' + v_r \mathcal{T}'$ and negative downstream).

In [Cheng et al. \[2020\]](#), the symmetry is forced by considering the kernel $(\mathcal{X}, \mathcal{X}') \mapsto \frac{1}{2} (G(\mathcal{X} - \mathcal{X}', \mathcal{T}) + G(\mathcal{X}' - \mathcal{X}, \mathcal{T}))$. Another possibility to force the symmetry is to neglect the advection i.e. to assume that $v_r \approx 0$.

However, this two approximations are inefficient in our case.

Assuming that $v_r \approx 0$ implies that the integrands of Green-like kernels (4.32) are centered Gaussian. Moreover, the numerical experiments performed below show that the Gaussian kernel is a poor estimate of \mathbf{C} in this context, see Sec. 4.4 and Sec. 4.5.

In the present context, forcing symmetry by considering the mean kernel $(\mathcal{X}, \mathcal{X}') \mapsto \frac{1}{2} (G(\mathcal{X} - \mathcal{X}', \mathcal{T}) + G(\mathcal{X}' - \mathcal{X}, \mathcal{T}))$ provides a kernel that resembles a Gaussian kernel. The results of the optimization algorithm obtained using this mean symmetric kernel are similar to those obtained with the Gaussian kernel. Hence, forcing symmetry in this way provides a poor estimate of \mathbf{C} .

Here in order to derive a locally physically-consistent symmetric kernel from G , one consider the kernel $(\mathcal{X}, \mathcal{X}') \mapsto G(|\mathcal{X} - \mathcal{X}'|, \mathcal{T})$.

4.3.3.2 On the positive-definite property of the covariance kernel

Given the symmetric kernels $(\mathcal{X}, \mathcal{X}') \mapsto G(|\mathcal{X} - \mathcal{X}'|, \mathcal{T})$ with the Green-like kernels (4.32), we now ensure that the resulting operators are positive-definite.

As mentioned earlier, when \mathbf{C} is estimated by the sample covariance, the estimate may not be positive-definite. Several methods have been developed in the Data Assimilation community to solve this issue, see a review in [Carrasi et al. \[2018\]](#) Sec. 4.4. A first method, called localization, consists in cutting off spurious correlations when $|\mathcal{X} - \mathcal{X}'|$ is empirically too large. However, the cut-off distance which is arbitrary chosen implies a loss of information.

Another method, called inflation, consists in applying a convex combination of the covariance matrix estimate with a target matrix. Usually, this target matrix is either a diagonal or contains some prior/empirical information from static/long-term knowledge (see e.g. [Wang et al. \[2008\]](#)), topography knowledge (see e.g. [Lopez-Restrepo et al. \[2021\]](#)) or expertise on the covariance structure.

In the present study, we try to respect the physics as much as possible. Thus, the previous empirical approaches are not adopted. First, several symmetric kernels with more or less physical terms are presented. Next, given the symmetric matrices associated with these kernels, we enforce the positive-definite property. This results to covariance matrices, defined on the numerical grid.

In (4.32), the constant coefficients $\mu_r^{\mathcal{X}}$, v_r , ρ_r and $\eta_r^{\mathcal{X}}$ are obtained by averaging their expressions over the space, see (4.24) and (4.34), using the output of the direct model (4.10) at initial time.

Building up symmetric kernels

Using the rectangle method and setting $\mathcal{T} = \Delta\mathcal{T}$ with $\Delta\mathcal{T}$ the integration time step, the kernel $(\mathcal{X}, \mathcal{X}') \mapsto G(|\mathcal{X} - \mathcal{X}'|, \mathcal{T})$ becomes:

$$K^{ts}(\mathcal{X}, \mathcal{X}') = \Delta\mathcal{T} \left(-v_r \frac{(|\mathcal{X} - \mathcal{X}'| - v_r \Delta\mathcal{T})}{2\mu_r^{\mathcal{X}} \Delta\mathcal{T}} + \rho_r - \eta_r^{\mathcal{X}} \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi(2\mu_r^{\mathcal{X}} \Delta\mathcal{T})}} \exp \left(-\frac{1}{2} \frac{(|\mathcal{X} - \mathcal{X}'| - v_r \Delta\mathcal{T})^2}{2\mu_r^{\mathcal{X}} \Delta\mathcal{T}} \right) \exp(-\rho_r \Delta\mathcal{T}) \quad (4.36)$$

This approximated kernel, denoted by K^{ts} , can be linked to the symmetrization of the Green-like kernel (4.32), which is the response to a Dirac distribution local in time and space.

This kernel is the product of the Gaussian symmetrized with an exponential and the term derived from the right hand side of the diffusive wave equations (4.25). The Gaussian results from the physical diffusion and the advection phenomena. The exponential results from the reaction term of the observations-scale diffusive wave equation (4.25b) and is constant.

Next if we assume that the term derived from the right hand side of the diffusive wave equations $(-v_r \left(\frac{|\mathcal{X} - \mathcal{X}'| - v_r \Delta\mathcal{T}}{2\mu_r^{\mathcal{X}} \Delta\mathcal{T}} \right) + \rho_r - \eta_r^{\mathcal{X}})$ is constant and if omitting the constant multiplicative coefficient for scaling reasons, see Sec. 4.2.2, the expression (4.36) becomes:

$$K^{\mathcal{B}}(\mathcal{X}, \mathcal{X}') = \frac{1}{\sqrt{2\pi(2\mu_r^{\mathcal{X}} \Delta\mathcal{T})}} \exp \left(-\frac{1}{2} \frac{(|\mathcal{X} - \mathcal{X}'| - v_r \Delta\mathcal{T})^2}{2\mu_r^{\mathcal{X}} \Delta\mathcal{T}} \right) \quad (4.37)$$

This symmetrized Gaussian kernel can be seen as the symmetrization of the Green kernel (4.28).

The derivation of the Green's kernel (4.28) provide a physically meaningful estimate of L_c depending on a characteristic time. By taking the integration time step as characteristic time, the *physically-derived correlation length* reads :

$$L_{pc} = \sqrt{2\mu_r^{\mathcal{X}} \Delta t} \quad (4.38)$$

In the forthcoming test cases, one has $\Delta t = 1h$ and $L_{pc} \sim 140\Delta x \sim 35km$.

Also, one can couple the classical covariance kernels $c_{L_c}^G$ defined by (4.16), which is equivalent to (4.37) under the assumption that the advection is negligible, and $c_{L_c}^e$ defined by (4.17) with the physically-derived correlation length L_{pc} .

Symmetric positive-definite approximation of a symmetric matrix

As already mentioned, the operators \mathbf{K}^{ts} and $\mathbf{K}^{\mathcal{B}}$, defined by (4.36) and (4.37) respectively, are not guaranteed to be positive definite. We here apply an approximation that imposes this property, and evaluate the consequence of the approximation.

The presented approximation is based on the work of Higham [2002] in a mathematical finance context. The method presented in Higham [2002] aims at computing the closest correlation matrix to a symmetric matrix for a distance based on a weighted Frobenius norm. Since the set of symmetric positive-semi definite matrices is a closed set, the projection of a symmetric matrix onto this set is defined for this Frobenius norm [Higham, 2002].

The spectral decomposition of a symmetric matrix $M \in \mathcal{M}^{n \times n}(\mathbb{R})$ reads: $M = V\Lambda V^T$. The matrix V is the orthogonal matrix containing the eigenvectors of M as columns and Λ is the diagonal matrix containing the eigenvalues $\Lambda_{i,i} = \lambda_i \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. The Frobenius norm is: $\|M\|_{Fr} = \sqrt{\text{tr}(MM^T)} = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n M_{i,j}^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \lambda_i^2}$.

Higham [2002] demonstrates that the projection p of a symmetric matrix on the set of the symmetric positive-semidefinite matrices for $\|\cdot\|_{Fr}$ is: $p(M) = V\Lambda^+V^T$ with Λ^+ is the diagonal matrix such that $\Lambda_{i,i}^+ = \max(\lambda_i, 0) \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

As recalled before, we are looking for strictly positive-definite not positive-semidefinite matrices. Therefore, the same projection p is not suitable. Also, the set of positive-definite matrices is not a closed set. Hence, the projection of symmetric matrices on this set is not defined. To overcome this issue, the following natural positive-definite approximation is used:

$$p^\epsilon(M) = V\Lambda^\epsilon V^T \quad (4.39)$$

with Λ^ϵ the approximation of Λ^+ such that $\Lambda_{i,i}^\epsilon = \max(\lambda_i, \epsilon) \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Ideally, the threshold should satisfy $\epsilon < \min_{\lambda \in \{\lambda_i | i \in \llbracket 1, n \rrbracket \text{ and } \lambda_i > 0\}} \lambda$.

Symmetric positive-definite approximation of the kernels' matrix

The positive-definite approximation (4.39) is now applied on the matrix of kernels (4.36) at observations scale and (4.37), respectively denoted \mathbf{K}^{ts} and \mathbf{K}^B .

The approximation is performed with the threshold $\epsilon = 10^{-14}$. The choice of the value of ϵ is discussed in the last paragraph of this section.

The eigenvalues are computed using the `eigh` routine of the `numpy.linalg` python package⁸.

We denote: n the number of nodes in the discretization of the domain Ω , $\lambda = \{\lambda_i | i \in \llbracket 1, n \rrbracket\}$, $\lambda_+ = \{\lambda_i \in \lambda | \lambda_i > 0\}$ and $n_+ = \#\lambda_+$. We have: $n = 3548$.

In order to quantify the accuracy of the approximations, for a matrix \mathbf{K} and two approximations \mathbf{K}_1 and \mathbf{K}_2 , we compute the following criteria:

- the averaged relative difference $\bar{\epsilon}_{Fr}(\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2) = \frac{1}{|\mathbf{K}|n^2} \|\mathbf{K}_1 - \mathbf{K}_2\|_{Fr}$
- the maximal relative difference $\bar{\epsilon}_\infty(\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2) = \frac{1}{|\mathbf{K}|} \max_{i,j} (|(\mathbf{K}_1 - \mathbf{K}_2)_{i,j}|)$.

\mathbf{K}	n_+/n	$\min \lambda$	$\min \lambda_+$	$\bar{\lambda}$	$\max \lambda$
\mathbf{K}^{ts}	3538/3548	-2.325×10^{-4}	2.892×10^{-9}	1.255×10^{-7}	8.733×10^{-5}
\mathbf{K}^B	26/3548	-2.211×10^{-5}	2.235×10^{-6}	1.140×10^{-5}	4.258×10^{-3}
\mathbf{C}_{Lpc}^G	1725/3548	-2.294×10^{-18}	7.365×10^{-24}	1.144×10^{-5}	4.006×10^{-3}

Table 4.3 – Spectral properties (the number of positive eigenvalues, the minimum, mean and maximum of the eigenvalues, the minimum of the positive eigenvalues estimated numerically) of the different kernels.

\mathbf{K}	$\bar{\epsilon}_{Fr}(\mathbf{K}, p^\epsilon(\mathbf{K}))$	$\bar{\epsilon}_\infty(\mathbf{K}, p^\epsilon(\mathbf{K}))$	$\bar{\epsilon}_{Fr}(p^\epsilon(\mathbf{K}), p(\mathbf{K}))$	$\bar{\epsilon}_\infty(p^\epsilon(\mathbf{K}), p(\mathbf{K}))$
\mathbf{K}^{ts}	6.089×10^{-4}	6.306	4.029×10^{-15}	1.708×10^{-10}
\mathbf{K}^B	5.442×10^{-6}	1.893×10^{-1}	4.102×10^{-15}	8.645×10^{-10}
\mathbf{C}_{Lpc}^G	4.333×10^{-15}	9.098×10^{-10}	4.333×10^{-15}	9.098×10^{-10}

8. See the documentation of the `eigh` function in <https://numpy.org/doc/stable/reference/generated/numpy.linalg.eigh.html>. This function compute the eigenvalues and eigenvectors for a real symmetric matrix. The eigenvalues are computed using a QR algorithm

Table 4.4 – Performance criteria (average and maximal relative error) of the approximation of the matrices (between the matrix and its positive-definite approximation and between the semidefinite-positive projection and its definite positive approximation).

The approximation $p^\epsilon(\mathbf{K}^{ts})$ is accurate on averaged: $\bar{\epsilon}_{Fr}(\mathbf{K}^{ts}, p^\epsilon(\mathbf{K}^{ts})) \sim 10^{-4}$, see Tab. 4.4. It is less good in terms of maximum relative difference: $\bar{\epsilon}_\infty(\mathbf{K}^{ts}, p^\epsilon(\mathbf{K}^{ts})) \approx 6.306$. This can be explained on Fig. 4.6 by the fact that the values close to zero are fairly well approximated but the higher values are less so.

The kernel \mathbf{K}^B is closer to its positive-definite approximation than \mathbf{K}^{ts} : $\bar{\epsilon}_{Fr}(\mathbf{K}^B, p^\epsilon(\mathbf{K}^B)) \sim 10^{-6}$ and $\bar{\epsilon}_\infty(\mathbf{K}^B, p^\epsilon(\mathbf{K}^B)) \sim 10^{-1}$. Note that, since $\mathbf{C}_{L_c}^G$ (4.16) is positive-definite, \mathbf{K}^B is not positive-definite because of the advection phenomena.

The Gaussian operator $\mathbf{C}_{L_{pc}}^G$ defined by (4.16), with (4.38), is a well-known covariance operator. Hence, the associated matrix is positive-definite. However, the numerical estimation of the eigenvalues shows the opposite for the matrix $\mathbf{C}_{L_{pc}}^G$, see the negative eigenvalues in Tab. 4.3. This issue may be the result of positive eigenvalues that are smaller than the accuracy of the algorithm used to estimate them and that are estimated by negative values. The approximation p^ϵ will be applied even if $\mathbf{C}_{L_{pc}}^G$ is positive-definite in theory.

The very small eigenvalues imply that the matrix is ill-conditioned. The ill-conditioned issue of $\mathbf{C}_{L_c}^G$ has already been studied in Koivunen and Kostinski [1999] and in Haben [2011] with respect to L_c .

The approximation $p^\epsilon(\mathbf{C}_{L_{pc}}^G)$ in Tab. 4.4 is still very close to $\mathbf{C}_{L_{pc}}^G$: $\bar{\epsilon}_{Fr}(\mathbf{C}_{L_{pc}}^G, p^\epsilon(\mathbf{C}_{L_{pc}}^G)) \sim 10^{-15}$ and $\bar{\epsilon}_\infty(\mathbf{C}_{L_{pc}}^G, p^\epsilon(\mathbf{C}_{L_{pc}}^G)) \sim 10^{-10}$.

The differences $\bar{\epsilon}_{Fr}(p^\epsilon(\mathbf{K}), p(\mathbf{K}))$ and $\bar{\epsilon}_\infty(p^\epsilon(\mathbf{K}), p(\mathbf{K}))$ for all three kernels imply that p^ϵ is almost as accurate as the projection p (resp. $\sim 10^{-15}$ and $\sim 10^{-10}$ in Tab. 4.4).

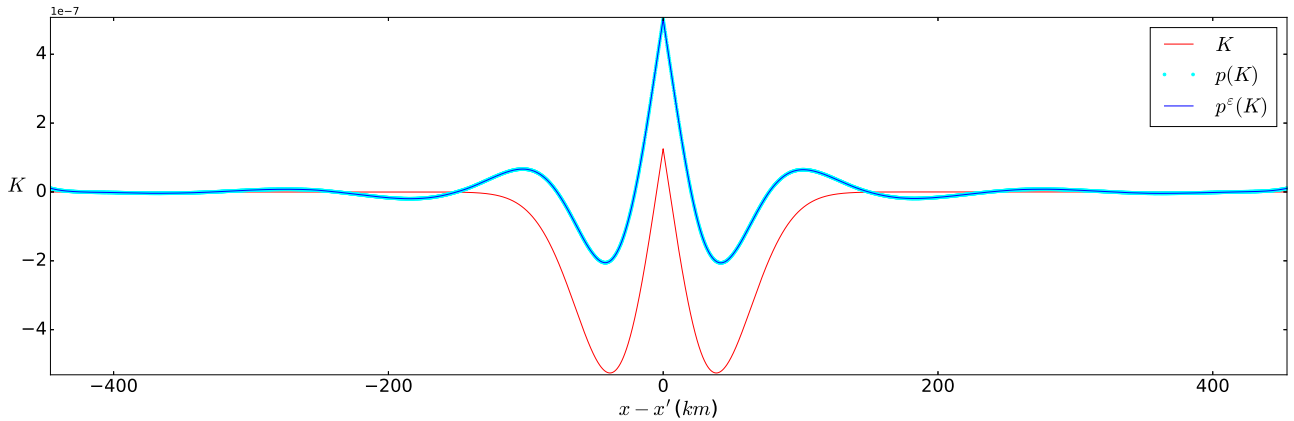


Figure 4.6 – Kernel K_{os}^{ts} (4.36) (in red), its semidefinite-positive projection p (in cyan) and its positive-definite approximation p^ϵ (4.39) (in blue) for $x' = 0.5L$.

On the choice of the threshold ϵ

As mentioned previously, the threshold ϵ should ideally satisfy $\epsilon < \min_{\lambda \in \lambda_+} \lambda$. The threshold is here set to $\epsilon = 10^{-14}$.

The approximation p^ϵ has also been tested on the matrix \mathbf{K}^{ts} with $\epsilon = 10^{-9}$, which is still less than the lowest positive eigenvalue, see Tab. 4.3.

The results of the VDA associated to $\epsilon = 10^{-9}$ are much less accurate than those obtained with $\epsilon = 10^{-14}$ presented below. For example, at complete convergence (see Sec. 4.2.3.1), the accuracy reached on z_b implies $RMSE z_b = 87cm$ when $\epsilon = 10^{-9}$ and $RMSE z_b = 33cm$ when $\epsilon = 10^{-14}$, the latter being used in the following and see the performance in Tab. 4.7.

Therefore, these small eigenvalues may have an impact on the results of the VDA. Let us note that, with $\epsilon = 10^{-9}$, the positive definite approximation p^ϵ is still close to the semidefinite-positive projection p , $\bar{\epsilon}_{Fr}(p^\epsilon(\mathbf{K}^{ts}), p(\mathbf{K}^{ts})) \approx 10^{-9}$ and $\bar{\epsilon}_\infty(p^\epsilon(\mathbf{K}^{ts}), p(\mathbf{K}^{ts})) \approx 10^{-4}$.

On the other hand, a too low value of ϵ implies that the matrix obtained using the positive-definite approximation is ill-conditioned. This may lead to numerical issues: the Cholesky decomposition algorithm, that is used to compute the change of variable (4.14), may fail computing the Cholesky decomposition.

This may imply that, as in the case of the Gaussian operator $\mathbf{C}_{L_{pc}}^G$ mentioned above, some very small but positive eigenvalues are lower than the threshold ϵ .

Hence, the value of ϵ is chosen as small as possible in order not to lose information and to have an approximation p^ϵ as close as possible to the projection p (since p^ϵ tends towards p when ϵ goes towards 0).

However, it should not be too small to avoid numerical issues with the Cholesky decomposition algorithm.

4.3.3.3 Summary of the investigated physically-derived covariance operators

The pseudo-physical covariance operator

In order to get a physically-derived covariance matrix, the approximation p^ϵ is applied to the symmetric matrix \mathbf{K}^{ts} . The symmetric matrix \mathbf{K}^{ts} is obtained by forcing the symmetry of the Green-like kernels G given by (4.32). In the present study, the way considered to force symmetry is $(\mathcal{X}, \mathcal{X}') \mapsto G(|\mathcal{X} - \mathcal{X}'|, \mathcal{T})$. Other ways to force symmetry have been mentioned in Sec. 4.3.3.1, but they provide poor estimates of \mathbf{C} . There are therefore several ways to force symmetry and, so far, the choice of which one to use is based on the experiments.

As in the previous section, the approximation p^ϵ (4.39) is applied with a threshold $\epsilon = 10^{-14}$. The numerical study of this approximation highlights that one may seek to obtain the smallest ϵ possible to avoid losing some information, but not too small to avoid the matrix being too ill-conditioned and numerical issues.

In the following, the approximation p^ϵ of \mathbf{K}^{ts} is referred as the *pseudo-physical covariance operator*⁹:

$$\boxed{\mathbf{C}^{pp} = p^\epsilon(\mathbf{K}^{ts})} \quad (4.40)$$

The operator (4.40) is here used as physically-consistent estimates of the background error covariance operator \mathbf{C} .

The physically-derived Gaussian and physically-derived exponential covariance operators

The covariance operators $\mathbf{C}_{L_{pc}}^G$ and $\mathbf{C}_{L_{pc}}^\epsilon$, resp. defined by (4.16) and (4.17) with L_{pc} the physically-derived correlation length (4.38), are called *physically-derived Gaussian and physically-derived exponential covariance operators*.

The physically-derived correlation length L_{ps} is directly obtained from the Green's kernel (4.28). Let us note that no approximation is needed to derive this correlation length.

So far there is here no physical argument for which of these classical operators should be considered. However, they are the most employed covariance operators in the literature for complex highly non linear problems.

9. the superscript pp refers to the pseudo-physical covariance

Comparison of the physically-derived covariance operators

From Fig. 4.7, the curves of c_{ps}^{pp} and c_{os}^{pp} (the kernel c^{pp} , associated to the operator (4.40), resp. physical and observations scale) are rather close to the curve of $c_{30\Delta x}^e$. The curves of the kernels c_{ps}^{pp} and c_{os}^{pp} (and especially their decrease near $\mathcal{X} = \mathcal{X}'$) are even closer to the curve of $c_{30\Delta x}^e$ than to the curve of $c_{L_c}^G$ with any L_c . This is contrary to the idea that $\mathbf{C}_{L_c}^G$ is a natural covariance operator as suggested by the kernels G^B (4.28) and K^B (4.37).

The sensitivity map, see Fig. 4.5, highlights that the variations of w can have a major impact on the sensitivity of the double-scale diffusive wave equations (4.23) with respect to z_b , see Sec. 4.3.2.3. However, the curves of c_{ps}^{pp} and c_{os}^{pp} are quite similar on Fig. 4.7. Therefore, the coefficient ρ_r in the kernel (4.36), specific to the observations scale and defined by (4.27), does not have a great impact on the covariance operator. This could be the result of averaging over the space to obtain constant coefficients.

In all the sequel and if not specified, \mathbf{C}^{pp} is considered at observations scale. Note that one can try to take

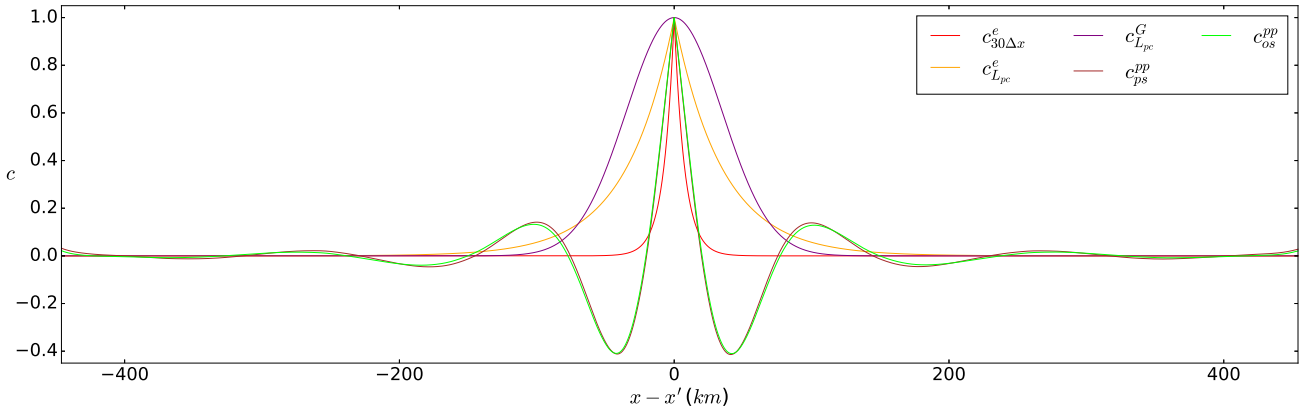


Figure 4.7 – Pseudo-physical covariance kernels c_{ps}^{pp} and c_{os}^{pp} (4.40) (resp. in brown and in lime green), Gaussian kernel $c_{L_{pc}}^G$ (in purple) and exponential kernels $c_{L_{pc}}^e$ (in orange) and $c_{30\Delta x}^e$ (in red) for $x' = 0.5L$.

spatially-distributed coefficients in the expression of K^{ts} (4.36), as done in Sec. 4.3.2.3. However, the associated fully-observed experiment has shown that these spatially-distributed coefficients imply the kernels to vary in space by several order of magnitude. As a result, the optimization algorithm does not converge correctly.

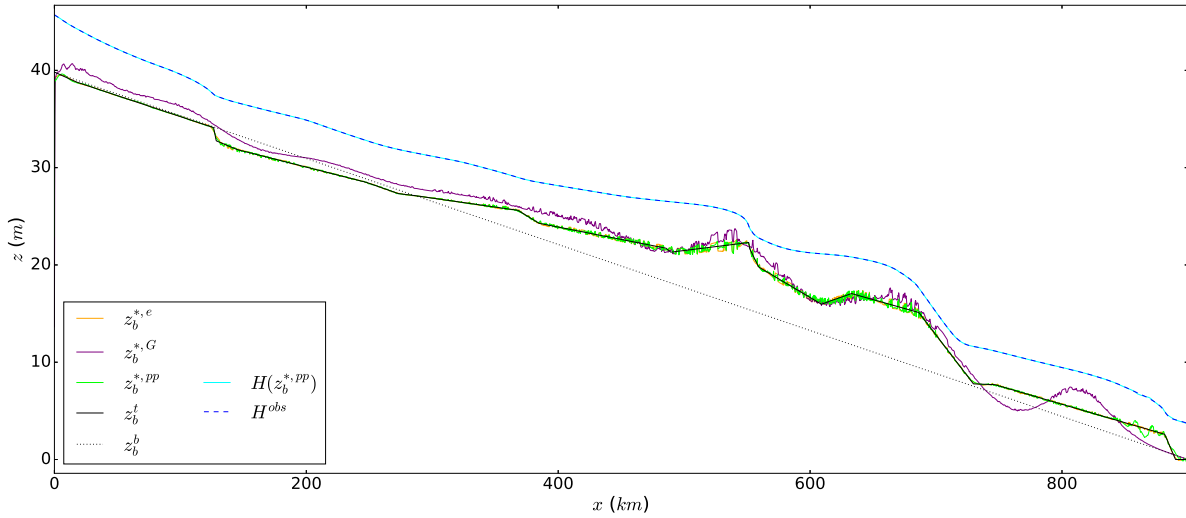
4.4 Inference of the bathymetry $z_b(x)$ using the physically-derived covariance operators

In this section, we infer the river bathymetry z_b following the fully-observed experiment by using the different covariance operators previously defined. The performance of the physically-derived covariance operators, Gaussian $\mathbf{C}_{L_{pc}}^G$, exponential $\mathbf{C}_{L_{pc}}^e$ and pseudo-physical \mathbf{C}_{os}^{pp} , derived in Sec. 4.3.3, are compared with the performance of the reference covariance operator $\mathbf{C}_{30\Delta x}^e$, see Sec. 4.2.4.

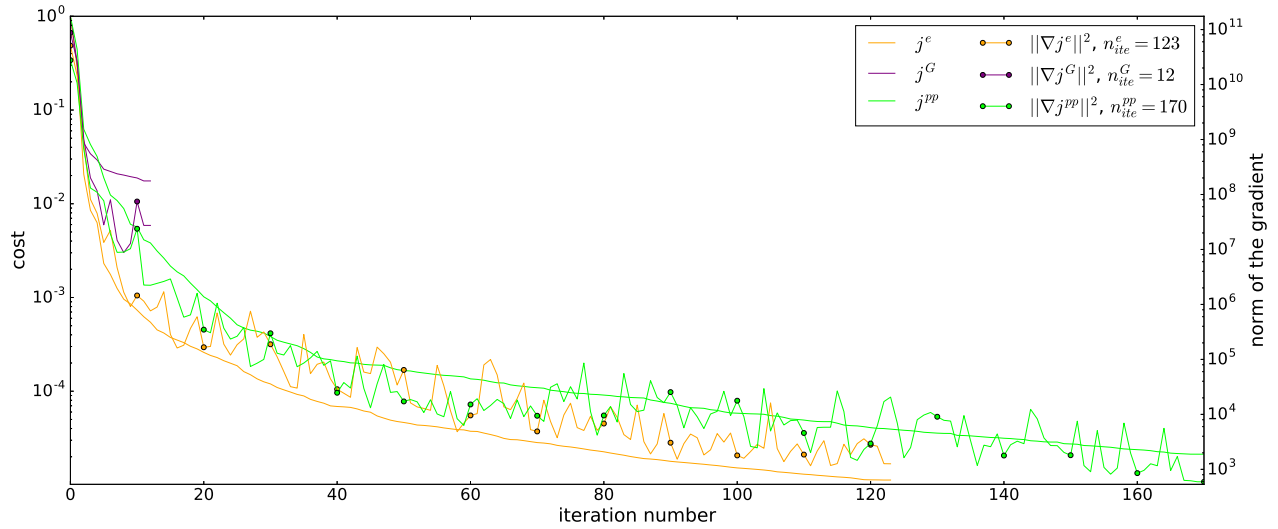
Results and comparison

Overall in Tab. 4.7 and on Fig. 4.9, with the exception of $\mathbf{C}_{L_{pc}}^G$, the fully-observed experiment with the physically-derived covariance operators and the reference covariance operator provide similar z_b^* .

In terms of convergence speed, $\mathbf{C}_{L_{pc}}^e$ is better especially in the first iterations. Still, $\mathbf{C}_{30\Delta x}^e$ and \mathbf{C}_{os}^{pp} have similar convergence speed.



(a) Bathymetry $z_b^\square(x)$ (target t , background b and optimal with the covariance kernel $i^{*,i}$) and the resulting H at $t = 10$ days.



(b) Total cost j^i (with the covariance kernel i , normalized by the initial total cost $j^i(z_b^b)$) and the norm of the gradient vs optimization iterations, log scale.

Figure 4.8 – Inference of the bathymetry (fully-observed experiment) with the pseudo-physical at observations scale covariance operator (4.40) ($i = pp$, in lime green), physically-derived Gaussian (4.16) ($i = G$, in purple) and exponential (4.17) ($i = e$, in orange) covariance operators, with $L_c = L_{pc}$ (4.38) and no regularization term ($\alpha_{reg} = 0$).

The operator $\mathbf{C}_{L_{pc}}^G$ does not enable the VDA algorithm to converge properly: the minimization stops after 12 iterations without reaching the $RMSE H \approx 10cm$ stage, see Figs. 4.8 and 4.9. As mentioned in Sec. 4.3.3.2, the matrix $\mathbf{C}_{L_{pc}}^G$ has many very low eigenvalues. This fact may explain the bad convergence.

Recall from Sec. 4.3.3.3 that there is no physical argument for using a $\mathbf{C}_{L_c}^G$ as estimate of \mathbf{C} .

Covariance operators		Reference a priori	Physically-derived	
		$\mathbf{C}_{30\Delta x}^e$	$\mathbf{C}_{L_{pc}}^e$	\mathbf{C}_{os}^{pp}
till $RMSE H \approx 10cm$	n_{ite}	10	5	15
	$RMSE z_b (m)$	0.78	0.33	0.49
till complete convergence	n_{ite}	139	123	170
	$RMSE z_b (m)$	0.15	0.18	0.33
kernels' expressions		a priori L_c	$L_c = L_{pc}$, see (4.38)	c^{pp} , see (4.40)
		$c_{L_c}^e$, see (4.17)		

Table 4.5 – Performance (number of iteration n_{ite} and $RMSE z_b$) of the inference of z_b using different covariance operators (classical/reference and physically-derived) at different stage of the optimization process (till $RMSE H \approx 10cm$ and till complete convergence as described in Sec. 4.2.3.1).

On Fig. 4.9, $RMSE H$ decreases rather rapidly during the first iterations for \mathbf{C}_{os}^{pp} , $\mathbf{C}_{L_{pc}}^e$ and $\mathbf{C}_{30\Delta x}^e$.

Moreover, during the first iterations, $RMSE z_b$ decreases faster with \mathbf{C}_{os}^{pp} and $\mathbf{C}_{L_{pc}}^e$ (respectively $0.32m$ and $0.49m$ at $RMSE H \approx 10cm$) than with $\mathbf{C}_{30\Delta x}^e$ ($0.78m$).

These physically-derived covariance operators seem to improve the convexity feature of the cost function. Indeed, better descent directions are promoted during the first iterations.

In Sec. 4.2.4.3, the classical operator $\mathbf{C}_{30\Delta x}^e$ is chosen as reference. The choice is motivated by a good performance compromise among the decreasing exponential operator $\mathbf{C}_{L_c}^e$ with arbitrary L_c values.

During the first few iterations, the optimization using $\mathbf{C}_{L_{pc}}^e$ converges faster to a more accurate z_b than the optimization using any of the classical $\mathbf{C}_{L_c}^e$, see the dots on Fig. 4.9. Also, z_b^* computed with $\mathbf{C}_{L_{pc}}^e$ has very similar accuracy to the one obtained with $\mathbf{C}_{30\Delta x}^e$ but is reached more quickly, see Tab. 4.7. In this regard, the physically-derived $\mathbf{C}_{L_{pc}}^e$ offers a better performance trade-off than the reference $\mathbf{C}_{30\Delta x}^e$.

The performance (accuracy and speed) of \mathbf{C}_{os}^{pp} is similar to all other $\mathbf{C}_{L_c}^e$ used on Fig. 4.9. This highlights that the derivation of a covariance operator from a Green-like kernel is promising and provides a credible covariance operator.

Summary

Finally, this investigation of the physically-derived covariance operators through the fully-observed experiment can be summarized as follows.

- The proposed method for estimating the background error covariance operator \mathbf{C} from physics provides good estimates, especially the pseudo-physical covariance operator \mathbf{C}_{os}^{pp} , although some approximations have been made in Sec. 4.3.3.2 to provide symmetric positive-definite matrix. These pseudo-physical operators rely on approximate physics only. However, they rely on the most physics to date.
- The exponential operator $\mathbf{C}_{L_c}^e$ is a good approximation of \mathbf{C} . The curve of its kernel (on Fig. 4.7) is consistent with the curve of c^{pp} (unlike $c_{L_c}^G$).
- In the present context, the widely used kernel $\mathbf{C}_{L_c}^G$ is not a good estimate of \mathbf{C} .
- The derivation of the Green-like kernels, see Sec. 4.3.2.2, provides an estimate of the correlation length consistent with the physics: $L_c = L_{pc}$ defined by (4.38). The operator $\mathbf{C}_{L_c}^e$ coupled with L_{pc} provides the best results.

Experiments have been performed with lower quality data as in the partially-observed experiment, see Sec. 4.2.3.1, but inferring only z_b . The results are not shown here because the conclusion is the same than the present one.

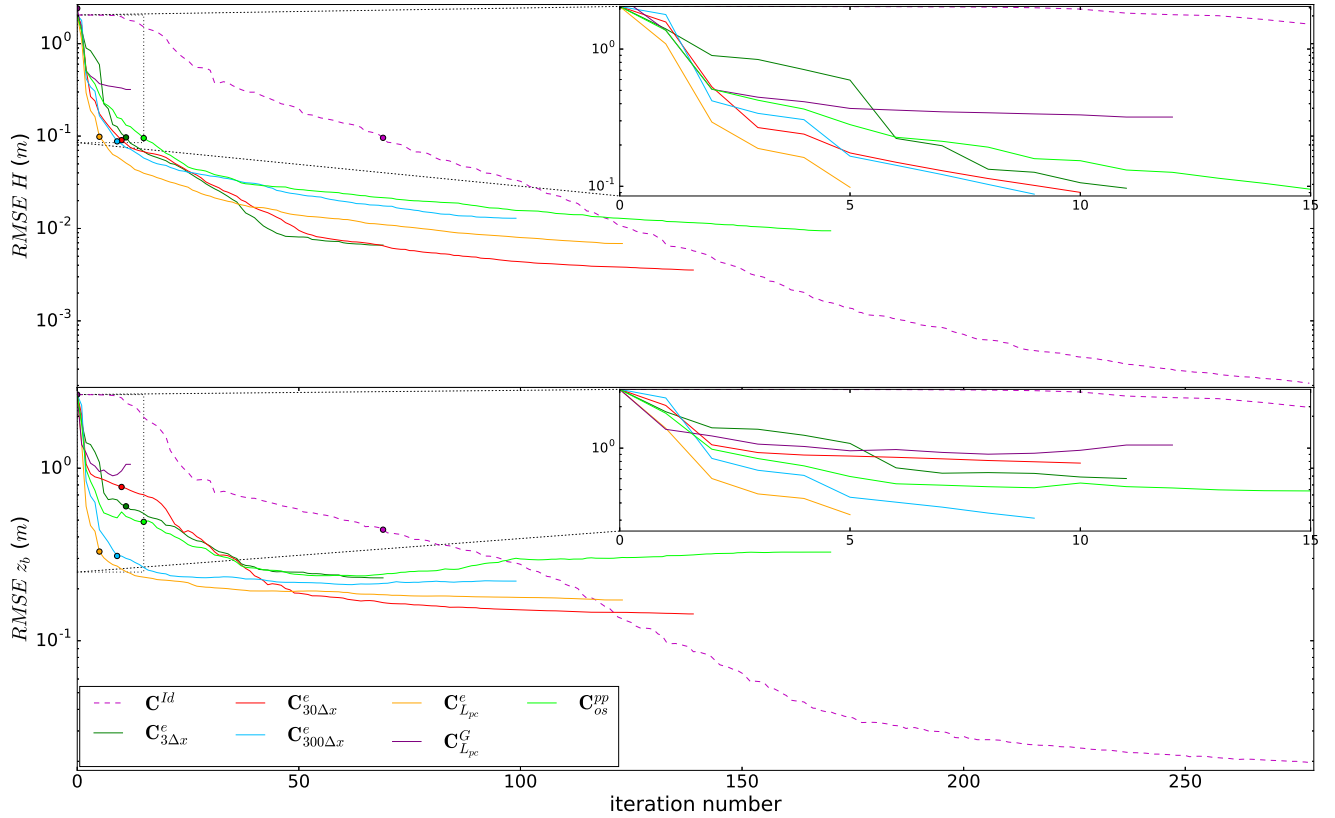


Figure 4.9 – $RMSE_{z_b}$ (upper) and $RMSE_H$ (lower, log scale) vs optimization iteration for different covariance operators: \mathbf{C}^{Id} and $\alpha_{reg} \neq 0$ (in purple dashed line), see Fig. 4.3, $\mathbf{C}_{L_c}^e$ (4.17) with several L_c , see Fig. 4.4 including L_{pc} (with the empirical values of L_c in green, red and blue, with $L_c = L_{pc}$ in orange), $\mathbf{C}_{L_{pc}}^G$ (4.16) (in purple) and the pseudo-physical covariance kernel \mathbf{C}_{os}^{pp} (4.40) (in lime green), see Fig. 4.8, L_{pc} is the physical correlation length (4.38). The zooms and the dots correspond to the first iterations until $RMSE_H \approx 10cm$.

4.5 Inference of the pair $(z_b, K_s)(x)$ from lower quality data

In this section, the VDA based on the same various estimates of \mathbf{C} is analysed through the partially-observed experiment, that is the inference of the composite control variable (z_b, K_s) from perturbed data (and not perfect ones), see Sec. 4.2.3.1.

4.5.1 Results

Recall from Sec. 4.2.3.1 that, for this multivariate inverse problem, the covariance matrix is assumed to be block diagonal with the block related to the friction $\mathbf{C}_{K_s} = \mathbf{C}_{\Delta x}^e$. We consider two pairs of constant variances: $(\sigma_{z_b}, \sigma_{K_s}) = (0.5\bar{h}, 10)$ and $(\sigma_{z_b}, \sigma_{K_s}) = (0.1\bar{h}, 50)$, see Sec. 4.2.3.1.

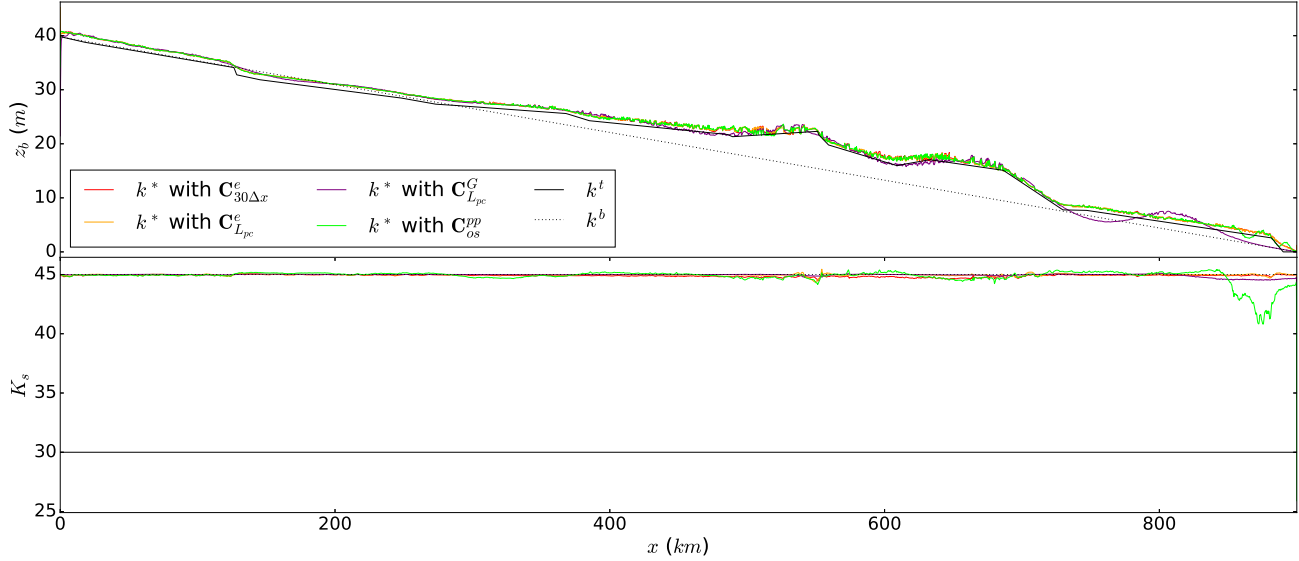
4.5.1.1 Using the variances $(\sigma_{z_b}, \sigma_{K_s}) = (0.5\bar{h}, 10)$ 

Figure 4.10 – Control $k(x) = (z_b, K_s)(x)$ (target t , background b and optimal *) of the partially-observed experiment computed with the variances $(\sigma_{z_b}, \sigma_{K_s}) = (0.5\bar{h}, 10)$, using the reference $\mathbf{C}_{30\Delta x}^e$ ((4.17) with $L_c = 30\Delta x$, in red), the physically-derived $\mathbf{C}_{L_{pc}}^e$, $\mathbf{C}_{L_{pc}}^G$ (resp. (4.17) in orange and (4.16) in purple with $L_c = L_{pc}$ (4.38)) and the pseudo-physical \mathbf{C}_{os}^{pp} (4.40) (in lime green) as estimates of \mathbf{C}_{z_b} , with no regularization term ($\alpha_{reg} = 0$).

On Fig. 4.10, except for the result computed with $\mathbf{C}_{L_{pc}}^G$, z_b^* is similar to the one obtained in the fully-observed experiment, see Fig. 4.8. Moreover, K_s^* varies very little from K_s^b .

One can note that z_b^* is almost a translation upward of z_b^t . This comes from the fact that essentially z_b is optimized in this case. The optimization compensates the discrepancy between K_s^* and K_s^t by this translation on z_b^* .

Note that $\mathbf{C}_{L_{pc}}^G$ still does not allow the inference to reach the $RMSE H \approx 10cm$ stage.

4.5.1.2 Using the variances $(\sigma_{z_b}, \sigma_{K_s}) = (0.1\bar{h}, 50)$

On Fig. 4.11, for each covariance operator, the z_b^* curve is a combination of the z_b^t curve (e.g. on $x \in [400; 700]km$) and the constant slope z_b^b curve.

On the other hand, K_s^* varies a lot. These variations compensate the discrepancy between z_b^* and z_b^t .

In this case the operator $\mathbf{C}_{L_{pc}}^G$ provides good results.

With $\mathbf{C}_{30\Delta x}^e$ and \mathbf{C}_{os}^{pp} , K_s^* is locally strictly negative, despite the fact that, physically, $K_s(x)$ must be strictly positive (for all x). However these negative values are very local and can be easily avoided by adding a regularization term such as $j_{reg}(K_s) = \|\partial_x K_s\|_2^2$.

In order to study only the effect of the estimate of \mathbf{C} , such additional regularization term is not used here.

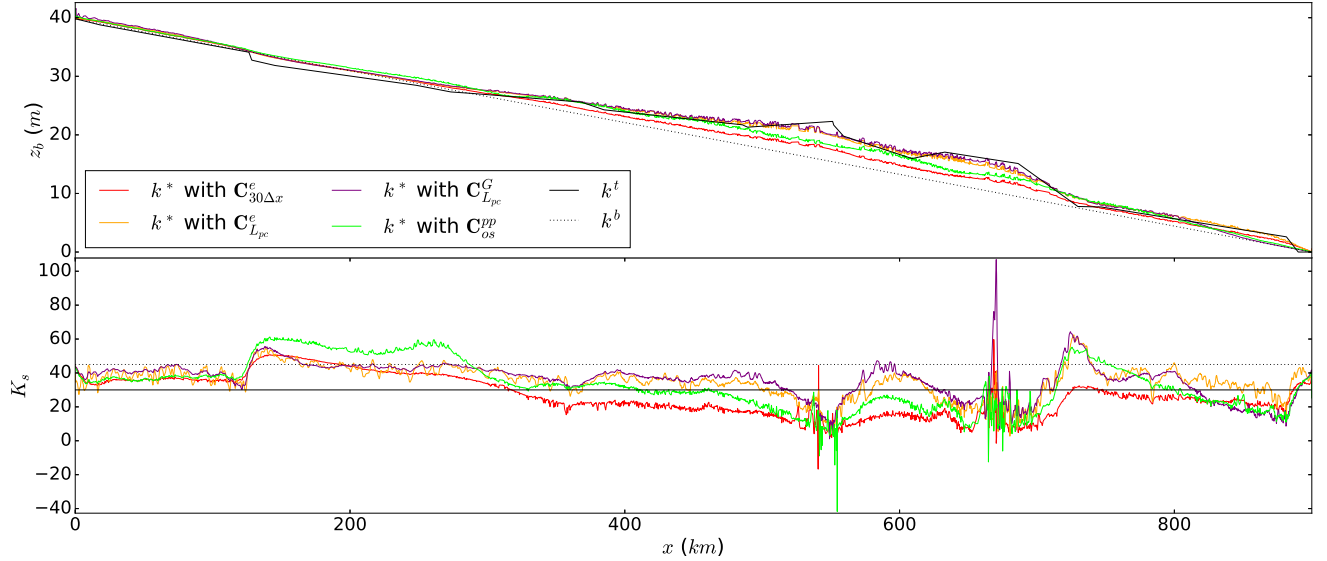


Figure 4.11 – Control $k(x) = (z_b, K_s)(x)$ (target t , background b and optimal *) of the partially-observed experiment computed with the variances $(\sigma_{z_b}, \sigma_{K_s}) = (0.1\bar{h}, 50)$, using the reference $\mathbf{C}_{30\Delta x}^e$ ((4.17) with $L_c = 30\Delta x$, in red), the physically-derived $\mathbf{C}_{L_{pc}}^e$, $\mathbf{C}_{L_{pc}}^G$ (resp. (4.17) in orange and (4.16) in purple with $L_c = L_{pc}$ (4.38)) and the pseudo-physical \mathbf{C}_{os}^{pp} (4.40) (in lime green) as estimates of \mathbf{C}_{z_b} , with no regularization term ($\alpha_{reg} = 0$).

4.5.2 Comparisons

With the variances $(\sigma_{z_b}, \sigma_{K_s}) = (0.5\bar{h}, 10)$

Overall, in this case, the comparison of the covariance operators is similar to the comparison in the fully-observed experiment, see Sec. 4.4.

At the $RMSE H \approx 10cm$ stage, $RMSE z_b$ is slightly better using $\mathbf{C}_{L_{pc}}^e$ and \mathbf{C}_{os}^{pp} (resp. 0.9 and 0.87m) than with $\mathbf{C}_{30\Delta x}^e$ (0.97m, see Tab. 4.6).

In terms of convergence speed, $\mathbf{C}_{L_{pc}}^e$ is better especially during the first iterations but the result remains similar to the results with $\mathbf{C}_{30\Delta x}^e$ and with \mathbf{C}_{os}^{pp} .

On Fig. 4.12, the inference of z_b with $\mathbf{C}_{30\Delta x}^e$ follows three different steps. At the 2^{nd} iteration, the resulting z_b is close to z_b^t . However, z_b^t , and especially its variations, is not well-approximated everywhere by z_b . For example, z_b^t is well-approximated by z_b on $x \in [400; 550]km$ but not on $x \in [600; 660]km$. Then, z_b is slowly shifted upward until the 6^{th} iteration. After this 6^{th} iterations, the variations of z_b evolves slowly toward the variations of z_b^t , especially where the variations of z_b^t was not well-approximated by z_b during the first iterations.

On the other hand, with \mathbf{C}_{os}^{pp} and especially with $\mathbf{C}_{L_{pc}}^e$, z_b approximates well z_b^t , and its variations, more quickly and everywhere at once. Moreover, with \mathbf{C}_{os}^{pp} and $\mathbf{C}_{L_{pc}}^e$, $RMSE z_b$ hardly decreases between the $RMSE H \approx 10cm$ stage and the complete convergence, unlike with $\mathbf{C}_{30\Delta x}^e$.

Note that with $\mathbf{C}_{30\Delta x}^e$ and $\mathbf{C}_{L_{pc}}^e$, on Fig. 4.12, after resp. the 2^{nd} and 3^{rd} iteration, the $RMSE z_b$ increases a bit. Recall from Sec. 4.2.3.1 that the optimization algorithm starts from z_b^b . Thus, at some point in the optimization iterations, z_b becomes quite close to z_b^t . Then, z_b is translated upward to reach z_b^* .

		Covariance operators	Reference a priori	Physically-derived	
			$\mathbf{C}_{30\Delta x}^e$	$\mathbf{C}_{L_{pc}}^e$	\mathbf{C}_{os}^{pp}
$\sigma_{z_b} = 0.5\bar{h}$	At $RMSE H \approx 10cm$	n_{ite}	11	7	18
		$RMSE z_b (m)$	0.97	0.9	0.88
$\sigma_{K_s} = 10$	till complete convergence	n_{ite}	57	43	48
		$RMSE z_b (m)$	0.86	0.87	0.87
$\sigma_{z_b} = 0.1\bar{h}$	At $RMSE H \approx 10cm$	n_{ite}	61	25	67
		$RMSE z_b (m)$	1.67	0.82	1.32
$\sigma_{K_s} = 50$	till complete convergence	n_{ite}	173	102	151
		$RMSE z_b (m)$	1.67	0.75	1.32

Table 4.6 – Performance (number of iteration n_{ite} and $RMSE z_b$) of the inference of (z_b, K_s) using different covariance operator (classical/reference and physically-derived) at different stage of the optimization process (till $RMSE H \approx 10cm$ and till complete convergence as described in Sec. 4.2.3.1).

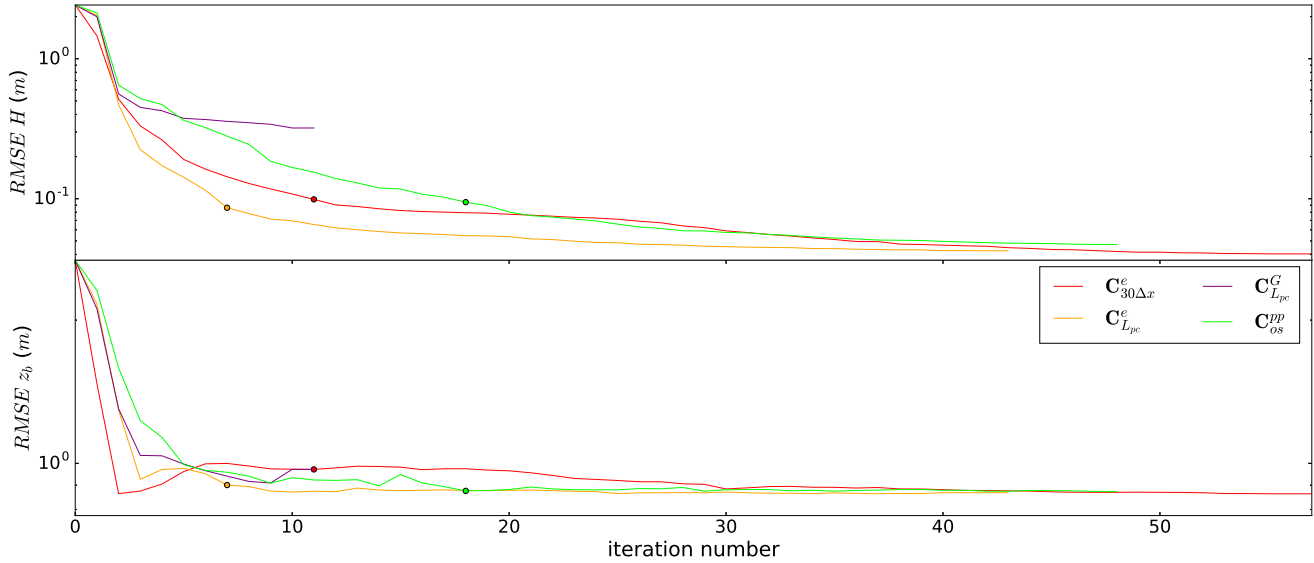


Figure 4.12 – $RMSE z_b$ and $RMSE H$ (log scale) during the partially observed experiment with the variances $(\sigma_{z_b}, \sigma_{K_s}) = (0.5\bar{h}, 10)$ using the reference exponential covariance operator $\mathbf{C}_{30\Delta x}^e$ (4.17) (in red), the physically-derived exponential $\mathbf{C}_{L_{pc}}^e$ (4.17) (in orange), Gaussian $\mathbf{C}_{L_{pc}}^G$ (4.16) (in purple, with L_{pc} (4.38)) and the pseudo-physical \mathbf{C}_{os}^{pp} covariance operators (4.40) (in lime green) as estimates of the covariance operator \mathbf{C}_{z_b} vs iteration number of the $(z_b, K)(x)$ inference. Dots corresponds to $RMSE H \approx 10cm$.

With the variances $(\sigma_{z_b}, \sigma_{K_s}) = (0.1\bar{h}, 50)$

The results in this case are different from the previous cases. The inference of z_b with $\mathbf{C}_{L_{pc}}^e$ provides the most accurate z_b^* ($RMSE z_b \approx 0.82m$ at complete convergence). Moreover, the inference provides more accurate results with \mathbf{C}_{os}^{pp} than with $\mathbf{C}_{30\Delta x}^e$ (resp. $RMSE z_b \approx 1.31m$ and $RMSE z_b \approx 1.67m$).

The inference with $\mathbf{C}_{L_{pc}}^e$ converges much faster (resp. 25 et 102 iterations to reach the $RMSE H \approx 10cm$ stage and

the complete convergence) than with \mathbf{C}_{os}^{pp} (resp. 67 and 151 iterations) or with $\mathbf{C}_{30\Delta x}^e$ (resp. 61 and 173 iterations). In this case, $\mathbf{C}_{L_{pc}}^G$ provides results close to those computed with $\mathbf{C}_{L_{pc}}^e$ (just a little faster to reach complete convergence).

Between the 6th and 8th iterations with $\mathbf{C}_{L_{pc}}^e$, the $RMSE z_b$ decreases a lot, from $RMSE z_b \approx 1.84m$ to $RMSE z_b \approx 0.91m$, see Fig. 4.13. Moreover, between these iterations, the norm of the gradient increases a lot (by a factor 10^2) and then decreases very rapidly (by a factor 10^4 between the 8th and 15th iterations). Similarly, during the first iterations with \mathbf{C}_{os}^{pp} , the $RMSE z_b$ decreases rapidly (compared to with $\mathbf{C}_{30\Delta x}^e$).

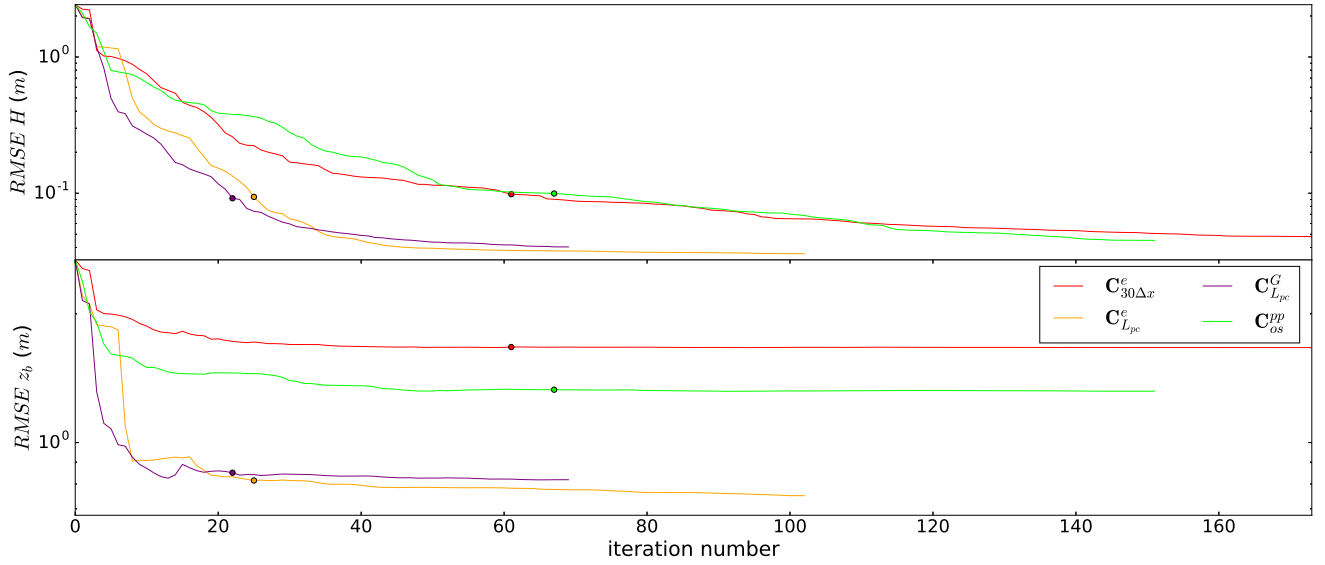


Figure 4.13 – $RMSE z_b$ and $RMSE H$ (log scale) during the partially observed experiment with the variances $(\sigma_{z_b}, \sigma_{K_s}) = (0.1\bar{h}, 50)$ using the reference exponential covariance operator $\mathbf{C}_{30\Delta x}^e$ (4.17) (in red), the physically-derived exponential $\mathbf{C}_{L_{pc}}^e$ (4.17) (in orange), Gaussian $\mathbf{C}_{L_{pc}}^G$ (4.16) (in purple, with L_{pc} (4.38)) and the pseudo-physical \mathbf{C}_{os}^{pp} covariance operators (4.40) (in lime green) as estimates of the covariance operator \mathbf{C}_{z_b} vs iteration number of the $(z_b, K)(x)$ inference. Dots corresponds to $RMSE H \approx 10cm$.

This investigation of the physically-derived covariance operators through the partially-observed experiments can be summarized as follows.

- The operators \mathbf{C}_{os}^{pp} and $\mathbf{C}_{L_{pc}}^e$ promote better descent directions than the reference operator $\mathbf{C}_{30\Delta x}^e$, especially during the first iterations of the optimization algorithm. With $(\sigma_{z_b}, \sigma_{K_s}) = (0.1\bar{h}, 50)$ and $\mathbf{C}_{L_{pc}}^e$, the cost function is such that the descent directions and the line search allow for a change in local minima during the optimization iterations. Thus, in this case, the optimization finds a local minima closer to z_b^t more quickly.
- The conclusions of the fully-observed experiment are confirmed: the pseudo-physical operator \mathbf{C}_{os}^{pp} is a good estimate and the physically-derived $\mathbf{C}_{L_{pc}}^e$ provides the best results. The Gaussian operator $\mathbf{C}_{L_{pc}}^G$ remains a poor estimate of \mathbf{C} even if it provides good results in one case.
- The physically-derived operators \mathbf{C}_{os}^{pp} and $\mathbf{C}_{L_{pc}}^e$ seem to improve the convexity feature of the cost function. As a result, the optimization algorithm converges to a more accurate z_b^* , especially when the second control, here K_s , is assumed highly uncertain.

4.6 Conclusion

This paper investigates, for Data Assimilation purposes, a method for deriving estimates of the background error covariance operator \mathbf{C} , see Sec. 4.2.1.2, from governing physical equations. The physically-derived kernels are built up from Green-like kernels representing the system response to a perturbation of the control, see (4.19). In the literature, \mathbf{C} is classically modeled from empirical or arbitrary information. The present investigation compares these classical empirical operators with the physically-derived ones.

The method is investigated for the inference of the bathymetry z_b in the Saint-Venant equations (4.10) in a satellite observation framework. In this context, the resulting Green-like kernels (4.32) are neither symmetric (due to the advection phenomena) nor positive-definite. The present method constructs, from the Green-like kernels, discrete covariance operators partly consistent with the underlying physics. These operators are obtained by applying (i) a locally symmetric approximation and (ii) the positive-definite approximation (4.39).

This provides an original covariance operator \mathbf{C}^{pp} , see (4.40), called pseudo-physical covariance operator. Moreover, a physically-consistent estimate of the correlation length L_{pc} , defined by (4.38), is also provided. Thus, the correlation length value $L_c = L_{pc}$ is tested with covariance operators such as the Gaussian $\mathbf{C}_{L_c}^G$ and the decreasing exponential $\mathbf{C}_{L_c}^e$ operators.

The operator $\mathbf{C}_{30\Delta x}^e$ is a priori the empirical covariance operator that provide the best numerical results and features. Thus, it is chosen as the reference operator.

During all the numerical experiments, the operator $\mathbf{C}_{L_{pc}}^e$ provides better results than the $\mathbf{C}_{30\Delta x}^e$.

The operator \mathbf{C}^{pp} provides results at least comparable, especially during the fully-observed experiment, to $\mathbf{C}_{30\Delta x}^e$: the convergence speeds and the accuracies are similar.

Here, the classical operator $\mathbf{C}_{L_c}^G$ has no physical justification and the associated numerical experiments provide poor results. Hence, it is a bad estimate of \mathbf{C} .

From these numerical experiments and especially from the partially-observed experiment, we can observe that the physically-derived operators promote better descent directions and converge faster and with better accuracy, especially during the first iterations.

This highlights that the physically-derived covariance operators are better preconditioning of the Hessian of the cost function therefore improving convexity features of the cost function.

Therefore, the method for deriving physically-consistent covariance operators provides good estimates of \mathbf{C} such as \mathbf{C}^{pp} . Furthermore, it provides a physically-consistent L_{pc} which is more efficient than empirical correlation lengths when combined with $\mathbf{C}_{L_c}^e$.

The presented method is available in the open-source computational software Dassflow [Monnier et al., 2018]. This method has been successfully implemented to the 2D version of the Shallow-water river flow models too, see e.g. Monnier et al. [2016].

Appendices

4.A From the Green kernels G to the covariance operator \mathbf{C}

Let us note that the Green-like kernel $G(y, \tau)$, given by the expression (4.32), is the response on the state variable $H(y, \tau)$ of a local perturbation in the control $z_b(y)$.

Recall that the covariance operator \mathbf{C}^{pp} is computed by the symmetrization $(y, y') \mapsto G(|y - y'|, \tau)$ and positive-definite approximation (4.39) of the Green-like kernels (4.32).

Therefore, the operator \mathbf{C}^{pp} is related to the (direct) operator $z_b \mapsto H$.

Moreover, the symmetrization $(y, y') \mapsto G(|y - y'|, \tau)$ is equivalent to consider that the transport $(\gamma u \partial_y (H - z_b))$ and order 0 $\left(\gamma u \frac{\partial_y \bar{w}}{\bar{w}} (H - z_b)\right)$ terms of the double-scale diffusive wave model (4.23) have locally as wave velocity $-\gamma u$ instead of $+\gamma u$.

On the other hand, let us recall that the operator to estimate is \mathbf{C} , the background error covariance operator related to the control $k = z_b$. This operator \mathbf{C} intervenes in the cost function j (4.12) through the change of variable $z_b(x) = \mathbf{D}\tilde{z}_b(x) + z_b^b(x)$ with $\mathbf{C} = \mathbf{D}\mathbf{D}^T$.

Hence, the covariance operator \mathbf{C} is related to the (inverse) operator $H \mapsto z_b$.

We can then rewrite the double-scale diffusive wave model (4.23) (for rectangular cross-sections) as a diffusive wave model in variable z_b :

$$-\partial_\tau z_b - \frac{1}{2} u \frac{(z_b - H)}{|\partial_y H_r|} \partial_{yy}^2 z_b + \gamma u \partial_y (z_b - H) + \gamma u \frac{\partial_y \bar{w}}{\bar{w}} (z_b - H) = \partial_\tau h - \frac{1}{2} u \frac{h}{|\partial_y H_r|} \partial_{yy}^2 h \quad (4.41)$$

with $\partial_y H_r$ the reference slope.

The change of variable of τ in $-\tau$ implies that the model is retrograde in time and requires a final condition. However, the integration over time of the (see equation (4.31)) implies that the change of variable of τ does not change the sign of the Green-like kernel.

Hence, under this (non-physical) symmetrization, the Green kernel of the model in H (4.23) and the one of the model in z_b (4.41) are the same.

Moreover, if the terms (in $\partial_{yy}^2 h$ and in $\partial_\tau h$) of the right hand side of the model in variable z_b (4.41) are negligible and by integrating over time, the Green-like kernels is the same as well for both models. Let us note that, on river such as the Rio Negro, the assumption that $\partial_{yy}^2 h$ is negligible is satisfied.

Therefore, under these assumptions (the symmetrization and terms of the right hand side of the equation (4.41) are negligible), the operator \mathbf{C}^{pp} can be used as estimate of the covariance operator \mathbf{C} .

Moreover, given the fact that the Green kernels of the model in H (4.23) and the one of the model in z_b (4.41) are the same, it follows that the physically-derived correlation length L_{pc} is the same for both models.

4.B Summary of the numerical experiments results

Covariance operators		Classical covariances				Physically-derived covariances				
		\mathbf{C}^{Id}	$\mathbf{C}_{3\Delta x}^e$	$\mathbf{C}_{30\Delta x}^e$	$\mathbf{C}_{300\Delta x}^e$	$\mathbf{C}_{L_{pc}}^e$	$\mathbf{C}_{L_{pc}}^G$	\mathbf{C}_{os}^{pp}		
kernels' expressions		$c^{Id} = Id$	arbitrary L_c values			$L_c = L_{pc}$ see (4.38)		c^{pp} see (4.40)		
			$c_{L_c}^e$ see (4.17)			$c_{L_c}^G$ see (4.16)				
fully- observed experiment	till $RMSE H \approx 10cm$	n_{ite}	69	11	10	9	5	not reached	15	
		$RMSE z_b (cm)$	44.02	60.151	77.839	31.002	32.875		48.881	
	till complete convergence	n_{ite}	278	69	139	99	123	12	170	
		$RMSE z_b (cm)$	1.969	23.142	14.299	22.164	17.228	105.313	32.638	
		$RMSE H (cm)$	0.021	0.661	0.355	1.29	0.687	31.956	0.944	
	partially- observed experiment	$\sigma_{z_b} = 0.5\bar{h}$ $\sigma_{K_s} = 10$	At $RMSE H \approx 10cm$	n_{ite}			11		7	not reached
$RMSE z_b (cm)$						97.109		90.019	87.539	
till complete convergence			n_{ite}			57		43	11	48
			$RMSE z_b (cm)$			86.296		86.754	97.143	87.262
		$RMSE H (cm)$			4.038		4.251	32.019	4.713	
$\sigma_{z_b} = 0.1\bar{h}$ $\sigma_{K_s} = 50$		At $RMSE H \approx 10cm$	n_{ite}			61		25	22	67
			$RMSE z_b (cm)$			167.176		81.538	85.022	132.907
		till complete convergence	n_{ite}			173		102	69	151
			$RMSE z_b (cm)$			166.696		75.14	81.875	131.855
			$RMSE H (cm)$			4.811		3.598	4.038	4.512

Table 4.7 – Summary of the performance (number of iteration n_{ite} and $RMSE z_b$ and H) of the inferences of z_b using different covariance operators (classical and physically-derived) at different state of the optimization process (till $RMSE H \approx 10cm$ and till complete convergence as described in Sec. 4.2.3.1) for all the experiments, reference classical covariance in blue, blank boxes corresponds to inferences not performed.

Compléments

4.C Sur l'intérêt de la régularisation $j_{reg}(z_b) = \|\partial_x z_b\|_2^2$

Dans cette section complémentaire, le terme de régularisation

$$j_{reg}(z_b) = \|z_b - z_b^b\|_2^2 \quad (4.42)$$

est étudié dans le cadre de l'expérience totalement observée. Le but cet étude est de mettre en avant les inconvénients du terme de régularisation (4.42) dans le contexte des écoulements étudiés dans cette thèse. Ainsi, cela met en avant l'intérêt d'utiliser le terme (4.15) $j_{reg}(z_b) = \|\partial_x z_b\|_2^2$ à la place dans ce contexte.

On rappelle que l'expérience totalement observée consiste à prendre pour observations les estimations de H calculées directement par le système de Saint-Venant (4.10) avec la bathymétrie objectif z_b^t (courbe rouge sur la figure 4.14a), voir section 4.2.3.1. Dans cette expérience, le noyaux de covariance considéré est l'identité : $\mathbf{C} = \mathbf{C}^{Id}$, et le poids de la régularisation α_{reg} est constant. Comme on peut le voir sur la figure 4.14a, la bathymétrie optimale obtenue z_b^* est globalement entre z_b^b et z_b^t .

De plus, z_b^* a des oscillations de larges amplitudes et hautes fréquences.

Étant donné que l'écoulement a tendance à se comporter comme un filtre passe-bas, les oscillations à hautes fréquences de z_b n'ont pas ou très peu d'impact sur l'estimation de H . Ainsi, ces oscillations permettent de minimiser le terme de régularisation $j_{reg}(z_b) = \|z_b - z_b^b\|_2^2$ car contenues entre z_b^b et z_b^t , et de limiter l'impact sur le terme j_{obs} car de hautes fréquences.

On peut noter que le terme $j_{reg}(z_b) = \|z_b - z_b^b\|_2^2$ est nul initialement car $z_b = z_b^b$.

De plus, les deux termes de la fonction coût deviennent très rapidement stationnaires et l'optimisation s'arrête au bout de 10 itérations seulement. Cela vient du fait que l'équilibre entre les deux termes est très rapidement atteint. Cette stationnarité très rapide de la fonction coût peut venir du fait qu'on a atteint rapidement une zone de l'espace des contrôles où la fonction coût est relativement plate et que le problème d'optimisation est mal conditionné.

Pour permettre à l'assimilation d'optimiser plus le terme j_{obs} , il est possible de mieux choisir un coefficient α_{reg} . Cependant, le choix de l'incrément peut être compliqué et cela ne résoudra pas entièrement le problème des oscillations.

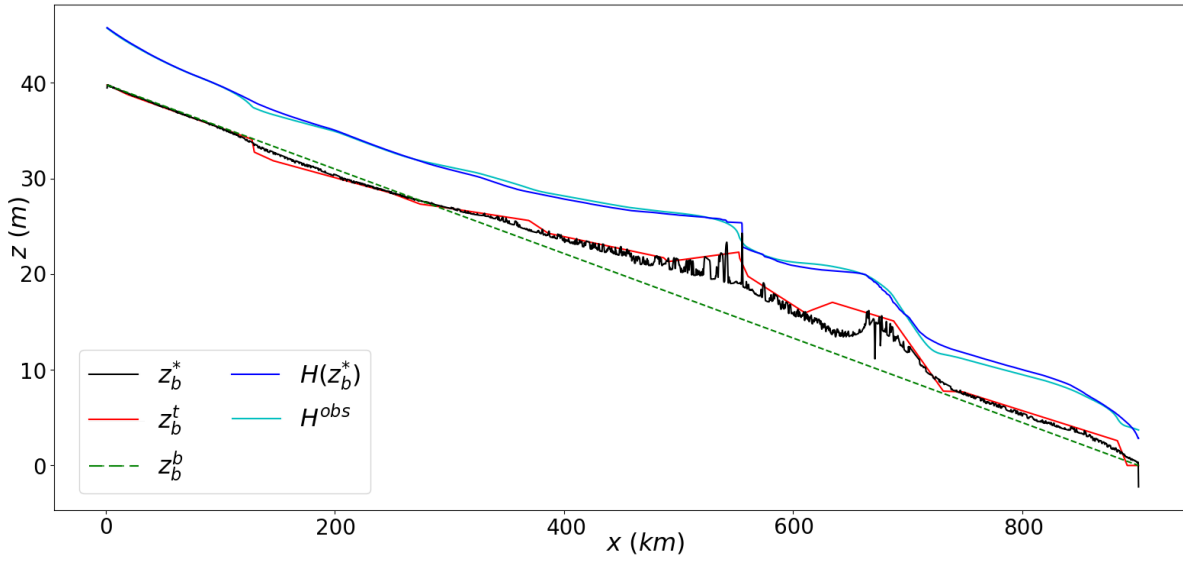
Cette expérience peut être comparée avec une expérience avec le terme de régularisation $j_{reg}(z_b) = \|\partial_x z_b\|_2^2$ et un coefficient α_{reg} constant tel que $\alpha_{reg} j_{reg}(z_b^b) \sim 10^{-1} j(z_b^b)$, voir les résultats sur la figure 4.15.

Ces deux expériences sont comparables car, dans les deux cas, on obtient $j_{obs}(z_b^*) \approx 10^{-2} j_{obs}(z_b^b)$.

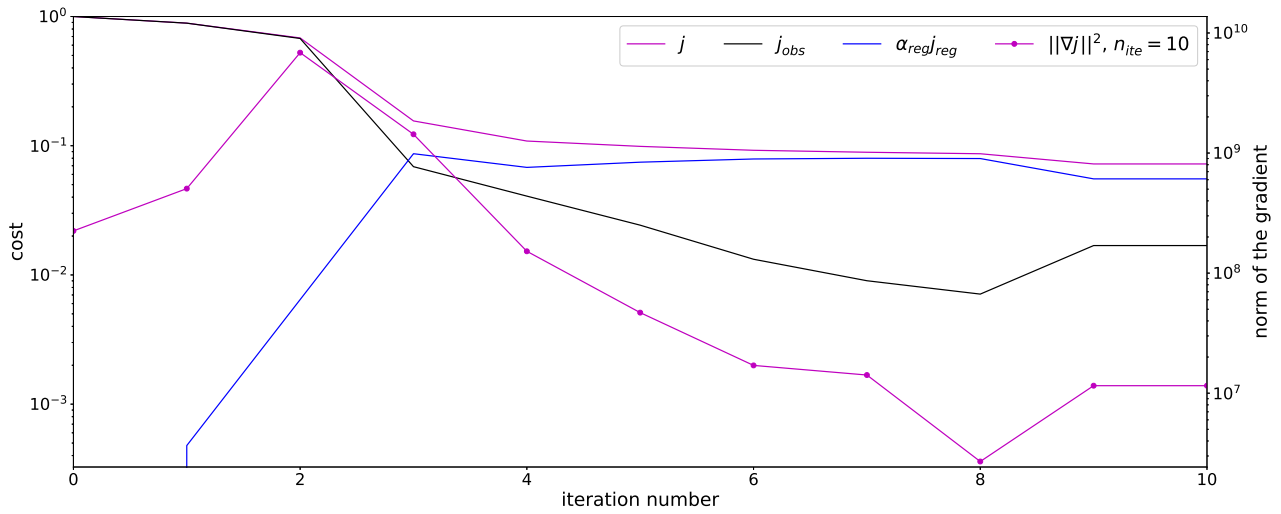
Comme attendu, la bathymétrie z_b^* obtenue avec cette deuxième expérience est beaucoup plus lisse. Cependant, cela permet d'obtenir une estimation de H qui est aussi beaucoup plus lisse et ne comporte pas de ressaut non physique comme lors de la première expérience vers $x \approx 550km$.

Ainsi, à j_{obs} et donc à proximité aux données égales, dans une expérience où les observations sont parfaites, l'optimisation avec le terme de régularisation $j_{reg}(z_b) = \|z_b - z_b^b\|_2^2$ donne de moins bon résultats que l'optimisation avec le terme de régularisation $j_{reg}(z_b) = \|\partial_x z_b\|_2^2$. En effet, avec le terme (4.42) et du fait de celui-ci, z_b^* a des oscillations non-physique de grandes amplitudes et hautes fréquences impliquant des irrégularités non-physiques dans l'estimation de H .

De plus, comme mentionné précédemment, aucun terme de régularisation n'est nécessaire lorsque l'estimation de \mathbf{C} est bien choisie et le changement de variable (4.14) effectué.

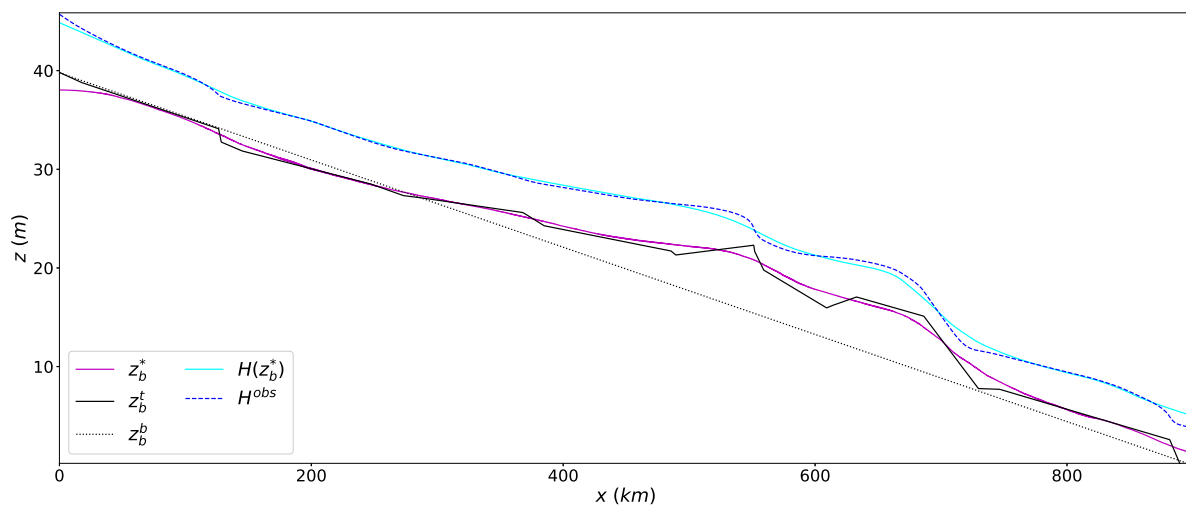


(a) Bathymétrie $z_b^\square(x)$ (cible t , a priori b et optimale *) et les H résultants à $t = 10$ days.

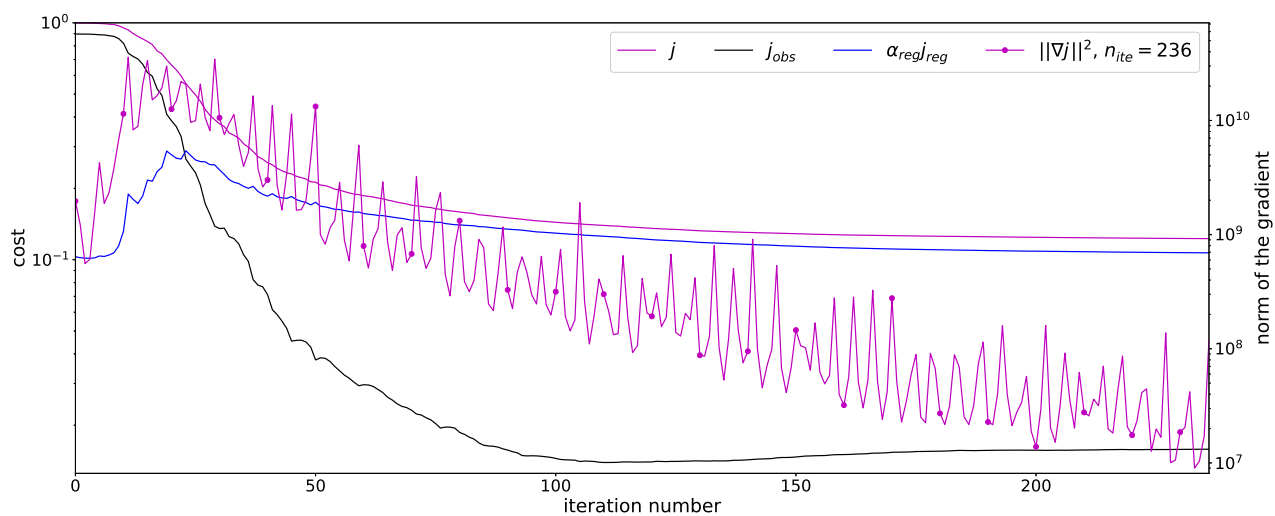


(b) Coût : total j , observation j_{obs} et régularisation $\alpha_{reg}j_{reg}$ (normalisé par le coût total initial $j(z_b^b)$, échelle log), et la norme du gradient vs les itérations d'optimisation.

FIGURE 4.14 – Inférence de $z_b(x)$ (expérience totalement observée) avec \mathbf{C}^{Id} et le terme de régularisation $j_{reg}(k) = \|k - k_b\|_2^2$ (α_{reg} constant).



(a) Bathymétrie $z_b^\square(x)$ (cible t , a priori b et optimale *) et les H résultants à $t = 10$ days.



(b) Coût : total j , observation j_{obs} et régularisation $\alpha_{reg} j_{reg}$ (normalisé par le coût total initial $j(z_b^b)$, échelle log), et la norme du gradient vs les itérations d'optimisation.

FIGURE 4.15 – Inférence de $z_b(x)$ (expérience totalement observée) avec \mathbf{C}^{Id} et le terme régularisation (4.15) avec un coefficient α_{reg} constant tel que $\alpha_{reg} j_{reg}(z_b^b) \sim 10^{-1} j(z_b^b)$.

Bibliography

- R. N. Bannister. A review of forecast error covariance statistics in atmospheric variational data assimilation. i: Characteristics and measurements of forecast error covariances. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 134(637):1951–1970, 2008a. doi: 10.1002/qj.339. URL <https://rmets.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/qj.339>.
- R. N. Bannister. A review of forecast error covariance statistics in atmospheric variational data assimilation. ii: Modelling the forecast error covariance statistics. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 134(637):1971–1996, 2008b. doi: 10.1002/qj.340. URL <https://rmets.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/qj.340>.
- F. Boultier and P. Courtier. Data assimilation concepts and methods, 2002. URL http://msi.ttu.ee/~elken/Assim_concepts.pdf.
- H. Brezis. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Springer, 2010.
- A. Carrassi, M. Bocquet, L. Bertino, and G. Evensen. Data assimilation in the geosciences: An overview of methods, issues, and perspectives. *WIREs Climate Change*, 9(5):e535, 2018. doi: 10.1002/wcc.535.
- S. Cheng, J.-P. Argaud, B. Iooss, D. Lucor, and A. Ponçot. Error covariance tuning in variational data assimilation: application to an operating hydrological model. *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment*, pages 1–20, 2020. doi: 10.1007/s00477-020-01933-7.
- V. T. Chow. Handbook of applied hydrology. *McGraw-Hill Book Co., New-York, 1467 pages*, 1964.
- W. Collischonn, D. Allasia, B. C. Da Silva, and C. E. M. Tucci. The mgb-iph model for large-scale rainfall—runoff modelling. *Hydrological Sciences Journal*, 52(5):878–895, 2007. doi: 10.1623/hysj.52.5.878.
- J. Cunge. Practical aspects of computational river hydraulics. *Pitman Publishing Ltd. London, (17 CUN), 1980, 420*, 1980.
- R. Daley. *Atmospheric data analysis*. Number 2. Cambridge university press, 1993. URL <https://www.cambridge.org/fr/academic/subjects/earth-and-environmental-science/atmospheric-science-and-meteorology/atmospheric-data-analysis?format=PB&isbn=9780521458252>.
- G. D. Egbert, A. F. Bennett, and M. G. G. Foreman. Topex/poseidon tides estimated using a global inverse model. *Journal of Geophysical Research: Oceans*, 99(C12):24821–24852, 1994. doi: 10.1029/94JC01894.
- L. C. Evans. *Partial Differential Equations*. Graduate studies in mathematics. American Mathematical Society, 1998. ISBN 9780821807729.
- J. C. Gilbert and C. Lemaréchal. Some numerical experiments with variable-storage quasi-newton algorithms. *Mathematical programming*, 45(1-3):407–435, 1989. doi: 10.1007/BF01589113.
- G. Green. An essay on the application of mathematical analysis to the theories of electricity and magnetism. 1828. URL <https://arxiv.org/pdf/0807.0088.pdf>.
- S. A. Haben. *Conditioning and preconditioning of the minimisation problem in variational data assimilation*. PhD thesis, University of Reading, 2011. URL <http://www.reading.ac.uk/web/files/maths/HabenThesis.pdf>.

- S. A. Haben, A. S. Lawless, and N. K. Nichols. Conditioning and preconditioning of the variational data assimilation problem. *Computers and Fluids*, 46(1):252–256, 2011. ISSN 0045-7930. doi: 10.1016/j.compfluid.2010.11.025. 10th ICFD Conference Series on Numerical Methods for Fluid Dynamics (ICFD 2010).
- L. Hascoet and V. Pascual. The tapenade automatic differentiation tool: Principles, model, and specification. 39 (3), 2013. ISSN 0098-3500. doi: 10.1145/2450153.2450158.
- N. J. Higham. Computing the nearest correlation matrix—a problem from finance. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 22(3):329–343, 2002. doi: 10.1093/imanum/22.3.329.
- A. Hollingsworth and P. Lönnberg. The statistical structure of short-range forecast errors as determined from radiosonde data. part i: The wind field. *Tellus A*, 38A(2):111–136, 1986. doi: 10.1111/j.1600-0870.1986.tb00460.x.
- M. Honnorat, J. Monnier, and F.-X. Le Dimet. Lagrangian data assimilation for river hydraulics simulations. *Computing and visualization in science*, 12(5):235–246, 2009. doi: 10.1007/s00791-008-0089-x.
- N. B. Ingleby. The statistical structure of forecast errors and its representation in the met. office global 3-d variational data assimilation scheme. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 127(571):209–231, 2001. doi: 10.1002/qj.49712757112.
- B. Kaltenbacher, A. Neubauer, and O. Scherzer. *Iterative regularization methods for nonlinear ill-posed problems*, volume 6. Walter de Gruyter, 2008. doi: 10.1515/9783110208276.
- A. C. Koivunen and A. B. Kostinski. The feasibility of data whitening to improve performance of weather radar. *Journal of Applied Meteorology*, 38(6):741–749, 1999. doi: 10.1175/1520-0450(1999)038<0741:TFODWT>2.0.CO;2.
- K. Larnier and J. Monnier. Hybrid neural network – variational data assimilation algorithm to infer river discharges from swot-like data. *Nonlinear Processes in Geophysics Discussions*, 2020:1–30, 2020. doi: 10.1016/10.5194/npg-2020-32. URL <https://npg.copernicus.org/preprints/npg-2020-32/>.
- F.-X. Le Dimet and O. Talagrand. Variational algorithms for analysis and assimilation of meteorological observations: theoretical aspects. *Tellus A: Dynamic Meteorology and Oceanography*, 38(2):97–110, 1986. doi: 10.3402/tellusa.v38i2.11706.
- S. Lopez-Restrepo, E. D. Nino-Ruiz, L. G. Guzman-Reyes, A. Yarce, O. L. Quintero, N. Pinel, A. Segers, and A. W. Heemink. An efficient ensemble kalman filter implementation via shrinkage covariance matrix estimation: exploiting prior knowledge. *Computational Geosciences*, pages 1–19, 2021. doi: 10.1007/s10596-021-10035-4.
- P. M. Lyster, S. E. Cohn, B. Zhang, L.-P. Chang, R. Ménard, K. Olson, and R. Renka. A lagrangian trajectory filter for constituent data assimilation. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 130(601):2315–2334, 2004. doi: 10.1256/qj.02.234.
- T. Malou and J. Monnier. Covariance kernels investigation from diffusive wave equations for data assimilation in hydrology. *Inverse Problems*, 2022a. URL <http://iopscience.iop.org/article/10.1088/1361-6420/ac509d>.
- T. Malou and J. Monnier. Double scale diffusive wave equations dedicated to spatial rivers observations. *Submitted for publication*, 2022b.
- T. Malou, P.-A. Garambois, A. Paris, J. Monnier, and K. Larnier. Generation and analysis of stage-fall-discharge laws from coupled hydrological-hydraulic river network model integrating sparse multi-satellite data. *Journal of Hydrology*, 603:126993, 2021. ISSN 0022-1694. doi: 10.1016/j.jhydrol.2021.126993. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S002216942101043X>.

- I. Mirouze. *Régularisation de problèmes inverses à l'aide de l'équation de diffusion, avec application à l'assimilation variationnelle de données océaniques*. PhD thesis, 2010. URL <http://www.theses.fr/2010TOU30150>. Thèse de doctorat dirigée par Gratton, S. et Weaver, A.
- I. Mirouze and A. Weaver. Representation of correlation functions in variational assimilation using an implicit diffusion operator. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 136(651):1421–1443, 2010. doi: 10.1002/qj.643.
- J. Monnier and J. Zhu. Inference of the bottom topography in anisothermal mildly-sheared shallow ice flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 348:954–977, 2019. ISSN 0045-7825. doi: 10.1016/j.cma.2019.01.003.
- J. Monnier, F. Couderc, D. Dartus, K. Larnier, R. Madec, and J-P. Vila. Inverse algorithms for 2D shallow water equations in presence of wet dry fronts. application to flood plain dynamics. *Advances in Water Resources*, 97: 11–24, 2016. doi: 10.1016/j.advwatres.2016.07.005.
- J. Monnier, K. Larnier, P. Brisset, et al. Dassflow 1d: Data assimilation for free surface flows. open-source computational software. Technical report, Mathematics Institute of Toulouse - INSA - CNES - CNRS - CS Group, 2018. URL <http://www.math.univ-toulouse.fr/DassFlow>.
- T. Nagai. The covariance matrix of green's functions and its application to machine learning, 2020. URL <https://arxiv.org/abs/2004.06481>.
- J. Nolen and G. Papanicolaou. Fine scale uncertainty in parameter estimation for elliptic equations. *Inverse Problems*, 25(11):115021, nov 2009. doi: 10.1088/0266-5611/25/11/115021. URL <https://doi.org/10.1088/0266-5611/25/11/115021>.
- O. Pannekoucke, L. Berre, and G. Desroziers. Background-error correlation length-scale estimates and their sampling statistics. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 134(631):497–508, 2008. doi: <https://doi.org/10.1002/qj.212>. URL <https://rmets.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/qj.212>.
- O. Pannekoucke, S. Ricci, S. Barthelemy, R. Ménard, and O. Thual. Parametric kalman filter for chemical transport models. *Tellus A: Dynamic Meteorology and Oceanography*, 68(1):31547, 2016. doi: 10.3402/tellusa.v68.31547.
- O. Pannekoucke, M. Bocquet, and R. Ménard. Parametric covariance dynamics for the nonlinear diffusive burgers equation. *Nonlinear Processes in Geophysics*, 25(3):481–495, 2018. doi: 10.5194/npg-25-481-2018.
- D. F. Parrish and J. C. Derber. The national meteorological center's spectral statistical-interpolation analysis system. *Monthly Weather Review*, 120(8):1747 – 1763, 1992. doi: 10.1175/1520-0493(1992)120<1747:TNMCSS>2.0.CO;2.
- L. Pujol, P.-A. Garambois, P. Finaud-Guyot, J. Monnier, K. Larnier, R. Mosé, S. Biancamaria, H. Yésou, D. Moreira, A. Paris, and S. Calmant. Estimation of multiple inflows and effective channel by assimilation of multi-satellite hydraulic signatures: The ungauged anabranching negro river. *Journal of Hydrology*, 2020. doi: 10.1016/j.jhydrol.2020.125331.
- C. E. Rasmussen and C. K. I. Williams. *Gaussian Processes for Machine Learning*. MIT Press, 2006.
- Y. Sasaki. An objective analysis based on the variational method. *Journal of the Meteorological Society of Japan. Ser. II*, 36(3):77–88, 1958. doi: 10.2151/jmsj1923.36.3_77.

- A. Tarantola. *Inverse problem theory and methods for model parameter estimation*, volume 89. SIAM, 2005. URL <http://www.ipgp.fr/~tarantola/Files/Professional/Books/InverseProblemTheory.pdf>.
- X. Wang, D. M. Barker, C. Snyder, and T. M. Hamill. A hybrid etkf-3dvar data assimilation scheme for the wrf model. part i: Observing system simulation experiment. *Monthly Weather Review*, 136(12):5116–5131, 2008. doi: 10.1175/2008MWR2444.1.
- A. Weaver and P. Courtier. Correlation modelling on the sphere using a generalized diffusion equation. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 127(575):1815–1846, 2001.

Chapitre 5

Travaux en perspectives et conclusion générale

Sommaire

5.1	Travaux en perspectives	186
5.1.1	Sur la quantification de l'importance de chaque terme et la calibration des équations de l'onde diffusante	186
5.1.2	Vers une utilisation opérationnelle des équations de l'onde diffusante double échelle	187
5.1.3	Sur des méthodes pour estimer \mathbf{R} , l'opérateur de covariance de l'erreur d'observations	189
5.2	Conclusion	192
	Bibliographie	195

5.1 Travaux en perspectives

5.1.1 Sur la quantification de l'importance de chaque terme et la calibration des équations de l'onde diffusante

Dans la section 1.3.5, la méthode SINDy (Sparse Identification of Nonlinear Dynamics) proposée par Brunton et al. [2016] est présentée.

On rappelle que le but de cette méthode est d'identifier les termes d'un système d'équations présent dans un dictionnaire à partir de données au travers d'une régression parcimonieuse.

Sur l'ordre d'importance des termes d'un modèle

Dans la section 3.4, la méthode SINDy est employée pour quantifier l'ordre d'importance des termes d'une équation. L'évolution de la valeur des coefficients lorsque le poids de la pénalisation λ décroît, a été étudiée et permet de définir un ordre d'importance. Ainsi, cette utilisation de la méthode SINDy ne permet pas de trouver une équation et ses coefficients, mais elle permet de hiérarchiser les termes et l'importance de leur contribution à la donnée.

Étant donné que cette utilisation de la méthode SINDy permet de hiérarchiser les termes d'une équation, elle peut être utilisée pour comparer deux modèles, e.g. en regardant lequel a le plus de termes importants, pour tester une hypothèse, e.g. en regardant si les termes négligés par l'hypothèse sont effectivement peu importants, ou encore pour hiérarchiser des approximations.

Dans le cas présenté dans la section 3.4 par exemple, la méthode vise à comparer les deux équations de l'onde diffusante et à tester si les termes négligés par l'hypothèse graduellement varié à l'échelle de la physique sont importants ou non pour approcher la hauteur d'eau modélisée par les équations de Saint-Venant dans un cadre d'altimétrie spatiale.

Comme mentionné dans la section 1.2.4, l'équation de l'onde diffusante (1.25) est souvent présentée comme étant une approximation non-inertielle des équations de Saint-Venant (1.16). L'application de cette méthode à l'équation des moments (1.14) permettrait par exemple d'étudier l'ordre dans lequel il convient de négliger les termes de l'équation des moments pour cet écoulement donné et ainsi l'ordre d'importance des phénomènes physiques pour cet écoulement et la validité de l'équation de l'onde diffusante dans un certain sens.

Étant donné les performances des relations de MSG dans le chapitre 2 pour approcher le débit Q estimé par les équations de Saint-Venant (de l'ordre de 0.5% d'écart entre les deux estimations) en ne calibrant localement que le coefficient de Strickler, on peut s'attendre à ce que les termes de gradient de pression et de bathymétrie soient les termes principaux pour contrebalancer le terme de friction dans l'équation des moments (1.14), et que les autres termes ne contribuent que très peu au résidu de l'équation pour les écoulements étudiés ici.

Appliquée à l'équation de l'onde diffusante dans la section 3.4, l'étude de l'évolution des coefficients met aussi en avant que le terme $\partial_{xx}^2 H$ permet de compenser l'ensemble de la physique non-modélisée. L'activation de ce terme traduit donc la sensibilité de l'écoulement au phénomène de diffusion et au coefficient de diffusion.

Il peut alors être intéressant de se pencher sur la calibration des paramètres (dont la bathymétrie et le coefficient de friction) du coefficient (non-linéaire) de diffusion car il semble être une contribution importante à l'estimation de la hauteur d'eau pour les écoulements étudiés.

L'étude de cet ordre d'importance menée dans la section 3.4 peut être étendue dans un cas non-stationnaire et ainsi avoir une idée de quels termes doivent être recalibrés pour permettre aux équations de l'onde diffusante de calculer

une estimation de la hauteur d'eau la plus proche possible de l'estimation calculée par le système de Saint-Venant. De plus, dans le cas présent, il est possible de tester une méthode de sélection du meilleur sous-ensemble plutôt qu'une méthode de contraction pour prendre en compte la parcimonie recherchée. Cette méthode permettrait d'obtenir une estimation des coefficients des termes et surtout une combinaison de coefficients non-nuls qui ne sont pas biaisées par un terme de pénalisation, notamment en norme 1.

Sur la calibration des équations de l'onde diffusante et l'assimilation de données pour cette équation

La calibration du coefficient de Strickler K_s et de la bathymétrie z_b dans l'équation de l'onde diffusante (à l'échelle de la physique ou à l'échelle des observations) grâce à l'assimilation de données est aussi à étudier de manière complémentaire. Cela permettrait d'obtenir une géométrie équivalente pour chaque équation de l'onde diffusante.

Il serait intéressant de comparer la géométrie équivalente obtenue pour les équations de l'onde diffusante à l'échelle des observations et de la physique, ainsi qu'avec une géométrie de référence choisie pour le système de Saint-Venant. L'assimilation dans les équations de l'onde diffusante de l'estimation de H calculée par les équations de Saint-Venant permettrait aussi d'étudier les capacités de la VDA à compenser les erreurs de modélisation dues à la négligence des termes d'inertie pour les écoulements étudiés.

Cependant, la calibration de z_b et de K_s dans les équations de l'onde diffusante peut se révéler être une tâche difficile.

On rappelle que les équations de l'onde diffusante sont des équations doublement non-linéaires et dégénérées. Bien que l'existence d'une solution faible est démontrée pour l'équation de l'onde diffusante classique, voir section 1.2.4.2, il est possible de rencontrer des difficultés dans la résolution numérique du problème direct.

Pour la résolution d'une équation de l'onde diffusante, on peut supposer que l'équation de l'onde diffusante est un modèle approprié pour modéliser l'écoulement dans le cadre physique et le régime d'écoulement considérés. On rappelle que cela implique de considérer que $H > z_b$ et que $\partial_x H \neq 0$.

Cependant, la résolution numérique du problème d'optimisation de la VDA associé à l'équation de l'onde diffusante peut impliquer que cette hypothèse n'est pas tout le temps respectée au cours des itérations d'optimisation. Au cours d'une itération de l'optimisation, la bathymétrie considéré peut impliquer $\partial_x H \approx 0$. Cela peut empêcher la convergence du modèle direct, et de l'algorithme d'optimisation par la même occasion.

Ainsi, ces cas qui ne sont pas considérés dans la résolution du problème direct doivent quand même être étudiés et considérés dans le cadre du problème de VDA.

Deuxièmement, comme souligné dans Aricò et al. [2011] et dans la section 3.1, l'équation de l'onde diffusante classique (1.25) est moins sensible à z_b que le système de Saint-Venant (1.16). Cela implique qu'une perturbation relativement conséquente dans z_b à moins d'impact sur l'estimation de H calculée par une équation de l'onde diffusante que celle calculée par le système de Saint-Venant.

Ainsi, l'optimisation de la fonction coût associée à cette équation de l'onde diffusante risque d'être moins bien conditionnée que l'optimisation de la fonction coût associée aux équations de Saint-Venant.

5.1.2 Vers une utilisation opérationnelle des équations de l'onde diffusante double échelle

On rappelle que le débit estimé par les équations de l'onde diffusante est calculé par la relation algébrique de MSG (1.20) $Q = K_s |\partial_x H|^{\frac{1}{2}} R_h^{\gamma-1} A \approx K_s |\partial_x H|^{\frac{1}{2}} h^{\gamma-1} A$.

En pratique, la loi empirique SFD (1.22) est une généralisation de la relation de MSG très largement utilisée dans

la communauté hydrologique pour estimer Q à partir de la hauteur d'eau H et de la pente de la surface libre $\partial_x H$, voir chapitre 2.

Comme souligné dans le chapitre 2, un des points clés pour l'estimation de Q par une loi SFD, notamment sur des tronçons de rivières affectés par des remous hydrauliques, est l'estimation de $\partial_x H$, qui n'est pas calculable avec une précision suffisante à partir des données altimétriques.

Dans la méthode proposée dans le chapitre 2, un modèle hydrodynamique calibré est utilisé comme extrapolateur spatio-temporel de $\partial_x H$. Dans le cadre du chapitre 2, le modèle utilisé est le modèle de Saint-Venant.

Une fois le calibrage de la loi SFD effectué, pour estimer Q de manière opérationnelle, il est nécessaire d'estimer en temps réel $\partial_x H$.

Dans le chapitre 3, il est mis en avant que la modélisation de l'écoulement par les équations de Saint-Venant nécessite d'imposer le débit entrant Q_{in} en amont. Cette condition aux bords n'est pas adaptée au cadre d'observations altimétriques, notamment pour une modélisation opérationnelle. Par exemple, dans le chapitre 3, Q_{in} est calculé par le modèle à grande échelle MGB, voir Collischonn et al. [2007]. Bien que le temps de calcul pour estimer Q avec MGB est relativement faible, celui-ci prend en entrée des données météorologiques sur l'ensemble de l'aire drainée du bassin, ce qui peut être long à obtenir.

A contrario, les équations de l'onde diffusante ont pour variable d'état H et ne nécessitent que des conditions aux bords de Dirichlet, donc d'imposer aux bords H qui est la grandeur observée par les satellites altimétriques. Ainsi, les équations de l'onde diffusante semblent être appropriées pour modéliser l'écoulement, et donc estimer $\partial_x H$, de manière opérationnelle dans ce contexte d'observations altimétriques.

Les équations de l'onde diffusante ont cependant besoin d'être étendues à un réseau hydrographique entier, y compris à des apports latéraux qui peuvent, en pratique, nécessiter d'estimer des débits latéraux.

Dans le chapitre 3, l'équation de l'onde diffusante à l'échelle des observations est dérivée pour être adaptée à l'échelle de l'écoulement. Cette nouvelle équation prend en compte les variations de largeurs qui ne sont pas négligeables à cette échelle.

Il en résulte que l'estimation de $\partial_x H$ calculée par cette nouvelle équation de l'onde diffusante est influencée par les variations de largeur. Ainsi, l'estimation de Q calculée par l'équation de l'onde diffusante à l'échelle des observations est bien meilleure que l'estimation calculée par l'équation de l'onde diffusante à l'échelle de la physique, surtout dans les portions de rivières où l'écoulement est influencé par la largeur de la rivière et ces variations.

Ainsi, les lois SFD peuvent être combinées avec le modèle de l'onde diffusante à l'échelle des observations de la manière décrite dans le chapitre 2 pour pouvoir estimer Q de manière opérationnelle.

En effet, les équations de l'onde diffusante semblent être adaptées pour extrapoler une estimation de $\partial_x H$ de manière opérationnelle dans ce cadre d'altimétrie spatiale. De plus, l'équation de l'onde diffusante à l'échelle des observations permet d'extrapoler une estimation de $\partial_x H$ plus précise, élément clé pour l'estimation de Q , que l'équation de l'onde diffusante à l'échelle de la physique.

De plus, il est possible d'étendre la méthode proposée dans le chapitre 2 pour extrapoler la surface libre à partir de l'équation de l'onde diffusante à l'échelle des observations et l'estimation de référence du débit utilisée pour calibrer la loi SFD à partir du système de Saint-Venant. L'étude d'une telle méthode permettrait d'étudier la capacité des équations de l'onde diffusante à reproduire l'estimation de Q calculée par les équations de Saint-Venant, notamment grâce à une loi empirique de type SFD.

Cependant, il faut noter que cela nécessiterait d'étudier dans un premier temps la calibration des équations de l'onde diffusante, voir section 5.1.1.

La méthode proposée dans cette perspective repose sur la disponibilité des données altimétriques dans un temps court permettant de modéliser $\partial_x H$ et d'estimer Q à partir d'une loi SFD. Cela nécessite donc une automatisation complète de la chaîne de traitement des données pour obtenir les données de niveaux L3, voir section 1.1.2.

5.1.3 Sur des méthodes pour estimer \mathbf{R} , l'opérateur de covariance de l'erreur d'observations

Dans la définition la plus classique de la fonction coût (1.29) à minimiser dans le processus de VDA, le terme (1.30) $j_{obs}(k) = \|H(k) - H^{obs}\|_{\mathbf{R}^{-1}}^2$, i.e. l'écart entre la prédiction et la donnée, prend en compte \mathbf{R} , la covariance de l'erreur d'observations $\varepsilon_{obs} = H^{obs} - H(k^t)$, voir section 1.3.2. On rappelle que cet opérateur de covariance a un impact sur le conditionnement du problème d'optimisation résolu dans le processus de VDA, voir les remarques sur la hessienne de la fonction coût dans section 1.3.4.

Cependant, en pratique, les données sont couramment supposées décorréelées et la covariance est supposée être l'identité. Cela est notamment le cas dans les travaux présentés, voir chapitre 2 et chapitre 4.

Lorsque les données proviennent de plusieurs instruments de mesures, notamment de stations in situ, cette hypothèse est justifiée par le fait que les instruments de mesures sont indépendants entre eux, voir e.g. Stewart et al. [2013] et les références citées utilisant la même hypothèse.

Cependant, dans le cadre d'assimilation des données altimétriques uniquement, les données assimilées ne proviennent que d'un nombre réduit de satellite, voir section 1.1. Par exemple, dans l'étude menée dans le chapitre 2, les données assimilées proviennent de seulement trois satellites d'altimétrie : J3, S3A et S3B. Ainsi, les données provenant d'un même satellite, localisées à différents endroits et à différents temps, ne sont pas décorréelées entre elles. De plus, la calibration des satellites entre eux, phase tandem de S3A et S3B e.g., et la correction des biais inter-missions impliquent que les données, même entre les différents satellites, ne sont pas complètement décorréelées. Ainsi, l'hypothèse de données décorréelées n'est pas justifiée, hormis par le fait d'une mauvaise connaissance des statistiques des observations.

Cette hypothèse implique une perte de l'information sur les observations dans le processus de VDA. Cela est notamment constaté dans Stewart et al. [2013]. Les auteurs de cet article étudient cette covariance dans une expérience synthétique de VDA. Elles mettent en avant qu'une estimation, même approximative, de cet opérateur de covariance donne une meilleure estimation du paramètre inféré que l'hypothèse d'observations décorréelées.

Ainsi, dans cette section, plusieurs méthodes potentielles pour estimer cet opérateur de covariance \mathbf{R} dans le contexte de l'hydrologie spatiale, et ainsi pour améliorer les inférences de la bathymétrie et du coefficient de Strickler, sont rapidement présentées.

On rappelle que les travaux menés dans le chapitre 4 proposent une méthode pour estimer \mathbf{C} , l'opérateur de covariance de l'erreur d'ébauche $\varepsilon_b = k^b - k^t$.

5.1.3.1 Sur l'estimation de \mathbf{R} à partir des données altimétriques

Comme mentionné précédemment, la structure et les propriétés statistiques de l'erreur d'observations sont souvent méconnues, poussant à considérer que les valeurs de cette erreur en différents points et temps sont indépendantes. Cependant, cela n'est pas le cas dans notre contexte d'observations altimétriques.

On rappelle que les données qui sont assimilées dans le modèle 1D sont les données de niveaux L3 : une unique mesure de la hauteur d'eau est obtenue à chaque passage du satellite au dessus d'une station virtuelle, voir section 1.1.

Cette donnée L3 est calculée à partir des données de niveau L2, qui sont obtenues à peu près tous les 300m au sol.

Ainsi, les données L2 valides, i.e. les données L2 restantes après l'élimination de outliers correspondant à autre chose que la mesure de la hauteur de la surface d'eau, peuvent être comprises comme étant des réalisations (supposément) indépendantes de la véritable hauteur d'eau à une station virtuelle et à un passage du satellite. Il est alors possible d'en tirer des propriétés statistiques et une structure de l'erreur d'observations à partir des données L2.

A noter que l'on cherche les propriétés statistiques de l'erreur entre les observations L3 et les véritables hauteurs d'eau. Cependant, tout l'aléa est porté par les observations qui sont supposées sans biais. Donc l'erreur est de moyenne nulle et a la même variance et covariance que les observations L3.

On peut alors estimer la covariance de l'erreur d'observations à partir de la covariance empirique des données L2 valides :

$$\mathbf{R}_{i,j} \approx \frac{1}{N} \sum_{p=1}^N \left(H_p^{obs,i} - \overline{H^{obs,i}} \right) \left(H_p^{obs,j} - \overline{H^{obs,j}} \right) \quad (5.1)$$

i et j sont les indices des observations L3, N est le nombre de données L2, nombre minimal entre les nombres de données L2 associés aux observations L3 i et j : $N = \min(N_i, N_j)$.

Cette méthode permet à la fois d'obtenir une estimation de la variance et de la corrélation des données L3.

Cependant, les difficultés suivantes peuvent survenir.

Du fait de l'editing (voir section 1.1), il est possible que pour une observation $H^{obs,i}$, une seule réalisation est disponible, i.e. $N_i = 1$. Dans ce cas, à défaut d'avoir des informations statistiques sur les observations, il est possible d'imposer que l'observation est indépendante des autres, i.e. $\mathbf{R}_{i,i} = \sigma^2$ et $\mathbf{R}_{i,j} = 0$ avec σ est valeur approchée de la variance.

A cause de l'approximation faite par la covariance empirique, il est possible que la matrice ne soit pas définie positive. Il conviendra d'employer des méthodes couramment utilisées telles que l'approximation dans l'ensemble des matrices symétriques définies positives, l'inflation ou la localisation, voir section 4.3.3.2. Ces méthodes sont déjà le sujet d'une littérature fournie, voir e.g. une revue dans la section 4.4 de Carrassi et al. [2018].

5.1.3.2 Sur une modélisation de \mathbf{R} à partir de la physique

Cette section propose une ébauche de méthode pour calculer une estimation consistante avec la physique de l'écoulement de \mathbf{R} , l'opérateur de covariance de l'erreur d'observations. Cette estimation de \mathbf{R} est calculée à partir des noyaux de type Green G_{ps} et G_{os} donnés par les expressions (4.32), voir la définition des noyaux de Green et de type Green dans la section 4.3.1.1.

L'opérateur \mathbf{R} est estimé au travers de son noyau de covariance noté r , voir section 1.3.4 et plus particulièrement l'équation (1.42) pour une définition.

On rappelle que dans le chapitre 4, les noyaux de type Green sont utilisés pour estimer \mathbf{C} , l'opérateur de covariance de l'erreur d'ébauche $\varepsilon_b = z_b^b - z_b^t$.

Pour estimer \mathbf{R} , on peut utiliser une approximation basée sur l'innovation d définie par :

$$d(x, t) = H^{obs}(x, t) - H(z_b^b = z_b^t + \varepsilon_b)(x, t) \approx \mathbf{H}\varepsilon_b(x, t) + \varepsilon_{obs}(x, t)$$

avec \mathbf{H} l'opérateur linéaire tangent de l'opérateur $z_b \mapsto H(z_b)$ avec la hauteur de la surface libre H calculée par un modèle d'écoulement, cet opérateur est aussi noté H par abus de notation.

Cette approximation de l'innovation est utilisée e.g. dans Hollingsworth et Lönnberg [1986] pour estimer \mathbf{C} , ou du moins certaines de ses caractéristiques, à partir de l'estimation de la covariance de d .

Dans cette section, l'opérateur linéaire tangent \mathbf{H} est approximé par l'opérateur linéaire $z_b \mapsto [G(t) * z_b](x)$, avec G un des noyaux de type Green calculés dans la section 4.3.2 : $\mathbf{H}\varepsilon_b(x, t) \approx [G(t) * \varepsilon_b](x)$.

Ainsi, on obtient l'égalité : $d(x, t) \approx [G(t) * \varepsilon_b](x) + \varepsilon_{obs}(x, t)$.

Par linéarité de la covariance et en supposant que ε_{obs} et ε_b sont des erreurs indépendantes, on a alors :

$$cov(d(x, t), d(x', t')) \approx r((x, t), (x', t')) + cov([G(t) * \varepsilon_b](x), [G(t') * \varepsilon_b](x'))$$

avec $r((x, t); (x', t')) = \mathbb{E}[(\varepsilon_{obs}(x, t) - \mathbb{E}[\varepsilon_{obs}(x, t)])(\varepsilon_{obs}(x', t') - \mathbb{E}[\varepsilon_{obs}(x', t')])]$ le noyau de covariance associé à l'opérateur \mathbf{R} .

Pour calculer $cov([G(t) * \varepsilon_b](x), [G(t') * \varepsilon_b](x'))$, on utilise la propriété suivante.

Soit $g(x)$ et $f(x)$ deux processus gaussiens et $h(x)$ une fonction déterministe qui sont reliés par $g(x) = (h * f)(x)$.

Du fait de la bilinéarité de la covariance, on obtient :

$$cov(g(x), g(x')) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} h(x - \chi) cov(f(\chi), f(\chi')) h(x' - \chi') d\chi d\chi' \quad (5.2)$$

Cette propriété est communément utilisée dans le domaine des processus gaussiens pour construire un nouveau noyau de covariance à partir d'un noyau de covariance connu a priori, voir e.g. un résumé sur la construction de noyaux de covariance dans le chapitre. 4 de [Rasmussen et Williams \[2006\]](#). Celle-ci est notamment utilisée dans le contexte d'inférence de paramètre dans une EDP stochastique pour construire la covariance de l'erreur d'observations, voir e.g. [Nolen et Papanicolaou \[2009\]](#). L'utilisation de cette propriété pour l'estimation de l'opérateur de covariance de l'erreur d'observations nous a été suggérée lors de discussions avec O. Roustant et I. Henderson (INSA Toulouse - IMT).

En utilisant cette propriété et en supposant que d , ε_{obs} et ε_b sont des processus gaussiens, on obtient alors :

$$cov(d(x, t), d(x', t')) \approx r((x, t), (x', t')) + \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} G(x - \chi, t) c(\chi, \chi') G(x' - \chi', t') d\chi d\chi' \quad (5.3)$$

avec c le noyau de covariance associé à \mathbf{C} , l'opérateur de corrélation de l'erreur d'ébauche.

La relation (5.3) permettrait alors d'avoir une estimation du noyau de covariance de l'erreur d'observations r à partir des connaissances de la physique, d'une estimation du noyau de covariance de l'erreur d'ébauche c et de la covariance de l'innovation d .

Ainsi, la relation (5.3) permettrait d'avoir une estimation de r qui est consistante avec la physique et qui dépend de l'écoulement.

Cependant, la relation (5.3) nécessite de donner une estimation de c et de la covariance de d . Une estimation de c peut par exemple être celle obtenue par la méthode proposée dans le chapitre 4. L'estimation de la covariance de d n'a en revanche pas été étudiée et est potentiellement basée sur des informations empiriques.

Réciproquement, pour les écoulements étudiés dans cette thèse, il n'est a priori pas possible d'utiliser la relation (5.3) pour estimer c à partir de r . La difficulté vient de la nécessité de trouver le noyau F qui vérifie $z_b(x) = F * H(x, t)$ alors que ce noyau n'est pas calculable à partir des équations de l'onde diffusante tel que présenté dans la section 4.3.2.2.

5.2 Conclusion

Dans cette thèse, la modélisation des écoulements fluviaux est étudiée dans un contexte d'observations des rivières depuis l'espace grâce à l'altimétrie spatiale.

Les réseaux de rivières observés dans ce contexte sont des réseaux d'échelle relativement grande et de rivières très larges. Sur ces rivières et aux échelles étudiées, le régime fluvial ($Fr < 1$) est largement respecté.

Un des principaux enjeux de la modélisation des écoulements fluviaux dans ce contexte et à cette échelle est l'estimation du débit Q à partir des mesures de la hauteur de la surface libre H obtenues par les satellites altimétriques. Cet enjeu regroupe plusieurs problématiques, dont certaines sont traitées dans ces travaux de thèse.

Premièrement, l'échantillonnage spatio-temporel du jeu de données altimétriques ne permet pas d'en déduire une estimation de certaines grandeurs hydrauliques, notamment la pente de la surface libre $\partial_x H$, qui sont nécessaires pour estimer localement Q avec précision.

Ainsi, la publication [Malou et al. \[2021\]](#) présentée dans le chapitre 2 propose une méthode qui tire profit d'estimations de ces grandeurs hydrauliques extrapolées d'un modèle d'écoulement. Ce modèle d'écoulement étant calibré par assimilation des données altimétriques, les grandeurs simulées sont donc consistantes avec la physique et cohérentes avec les données multi-satellitaires.

Une relation algébrique empirique de type *Stage-Fall-Discharge* (1.22) est alors calibrée à partir de l'extrapolation de Q et de $\partial_x H$ ainsi que de H mesurée par altimétrie. Cela permet de prédire une estimation de Q similaire à l'estimation calculée par le modèle d'écoulement tout en prenant en compte le bruit des mesures altimétriques.

La pente $\partial_x H$ est un point particulièrement crucial dans les sections de rivières affectées par un remous hydraulique impliquant un hystérésis entre Q et H . Cette méthode est alors testée à plusieurs stations virtuelles du réseau Rio Negro-Rio Branco de contextes hydrauliques différents et avec différentes estimations de $\partial_x H$. On notera qu'une des stations est affectée par un remous hydraulique, et une autre n'a pas été utilisée dans le calibrage du modèle d'écoulement.

Les lois SFD obtenues donnent de bonnes estimations de Q (moins de 10% d'écart avec l'estimation calculée par le modèle de Saint-Venant) et l'extrapolation spatio-temporelle de grandeurs hydrauliques non-observées est un succès.

Comme attendu, l'estimation de Q à la station virtuelle affectée par le remous hydraulique est meilleure avec une estimation fine de $\partial_x H$ que sans estimation ou avec une estimation bruitée. Aux autres stations, la loi avec une estimation fine de $\partial_x H$ donne de meilleures estimations de Q , quand bien même les autres lois donnent des estimations avec des précisions similaires.

A la station virtuelle non-utilisée pour le calibrage du modèle d'écoulement, la précision des estimations de Q est similaire à celle aux stations virtuelles utilisées pour le calibrage. Il convient également de noter que la hauteur de surface libre simulée par le modèle d'écoulement à cette station s'ajuste assez bien aux données altimétriques. Dans le cas contraire, un recalibrage du modèle d'écoulement peut être nécessaire.

Au travers d'un autre cas de géométrie fine et complexe basé sur la Garonne, il a aussi été mis en avant que les variations spatio-temporelles de la géométrie, dont de la largeur, peuvent être prises en compte par ces lois SFD au travers de l'estimation de $\partial_x H$.

La méthode proposée dans ce chapitre pourrait donner lieu à une mise en place opérationnelle de l'estimation de Q en des points non jaugés du réseau hydrographique, notamment sur la base des données à venir de la mission SWOT ou de toutes les autres futures missions d'altimétrie satellitaire.

Deuxièmement, cette modélisation adaptée à l'altimétrie spatiale nécessite un modèle cohérent avec les échelles de l'écoulement étudié dans ces travaux de thèse et adapté aux données disponibles.

Le modèle le plus utilisé pour estimer le débit Q et l'aire mouillée A est le modèle de Saint-Venant (1.16). Cependant, celui-ci nécessite d'imposer un débit rentrant en amont, ce qui est source d'incertitude dans le contexte de ces travaux de thèse.

L'équation de l'onde diffusante (1.25) est une équation dont la variable d'état est H . Ainsi, la résolution de cette équation nécessite d'imposer les hauteurs H^u et H^d resp. en amont et en aval, ce qui est plus naturelle du fait du contexte d'altimétrie spatiale. Cependant, l'équation de l'onde diffusante, telle que classiquement obtenue dans la littérature, n'est pas adaptée à l'échelle spatio-temporelle des observations. Cette équation repose sur l'hypothèse d'un écoulement graduellement varié qui implique que les variations de largeurs sont négligeables, ce qui n'est pas justifié à l'échelle des observations.

Pour adapter l'équation de l'onde diffusante à l'échelle des observations, le manuscrit Malou et Monnier [2022b] présentée dans le chapitre 3 introduit une double échelle. Cette double échelle permet de distinguer l'échelle de la physique qui représente une échelle relativement petite, et l'échelle des observations. Celles-ci sont reliées par un facteur multiplicatif ε , et typiquement $\varepsilon \sim 1/250$.

L'étude met en avant que les variations de la largeur sont effectivement négligeables à l'échelle de la physique mais ne le sont pas à l'échelle des observations.

Cette double échelle permet la dérivation des équations de l'onde diffusante à double échelle (3.4). L'équation de l'onde diffusante à l'échelle de la physique correspond donc à l'équation de l'onde diffusante telle que trouvée classiquement dans la littérature. A contrario, les dérivées en temps et en espace de la largeur impliquent que l'équation de l'onde diffusante à l'échelle des observations est enrichie par deux termes supplémentaires.

Ces deux équations ont été comparées entre elles et avec les équations de Saint-Venant dans une expérience consistante avec le contexte d'observations spatiales.

Il en ressort que l'estimation de H est prédite par ces équations de l'onde diffusante avec une précision similaire. Cependant, l'équation à l'échelle des observations estime $\partial_x H$ avec une meilleure précision que l'équation à l'échelle de la physique. Étant donné que Q est estimé grâce à la relation de MSG (1.20) pour les équations de l'onde diffusante, cela implique que Q est mieux estimé par l'équation à l'échelle des observations que par l'équation à l'échelle de la physique, notamment sur des sections de rivières où les variations de la largeur ont une influence non-négligeable sur l'écoulement. Ce résultat peut être mis en relation avec la conclusion faite dans la première étude sur le cas de la Garonne.

L'intérêt de cette équation de l'onde diffusante à l'échelle des observations est aussi mis en avant par une méthode permettant la quantification de l'importance des termes d'une équation. Cette quantification de l'importance des termes permet de définir un ordre d'importance des termes contenus dans un dictionnaire. Il en ressort qu'un des nouveaux termes de l'équation à l'échelle des observations est un des termes dominants.

Troisièmement, seule la surface libre de la rivière est observée. Cela implique que certains paramètres nécessaires à la modélisation de l'écoulement, tel que la bathymétrie ou le coefficient de friction du lit, ne sont pas mesurés par les satellites.

Pour obtenir une estimation de ces paramètres, les données altimétriques peuvent être assimilées grâce à une méthode variationnelle dans un modèle d'écoulement, voir section 1.3.2. Cependant, ce type de problème inverse est mal posé : cette assimilation se fait par minimisation d'une fonction coût notamment dont la hessienne est mal conditionnée.

L'estimation de la covariance de l'erreur d'ébauche est un point crucial de l'assimilation de données. Cet opérateur de covariance a un impact important sur le conditionnement du problème et la qualité du résultat de l'assimilation de données.

Cependant, la modélisation de cet opérateur de covariance est couramment basée sur des informations empiriques. Dans le but d'améliorer l'assimilation de données, la publication Malou et Monnier [2022a] présentée dans le cha-

pitre 4 investigate une méthode pour estimer cet opérateur de covariance à partir des équations de la physique. La méthode se base sur les noyaux de Green.

La méthode a permis non seulement d’obtenir de nouveaux opérateurs de covariance dérivés de la physique, définis par l’approximation symétrique définie-positive de (4.6) à l’échelle de la physique, mais aussi une longueur de corrélation consistante avec la physique (4.7).

Un des nouveaux opérateurs, ainsi que cette nouvelle longueur de corrélation couplée avec un noyau exponentiel décroissant sont testés dans des expériences numériques synthétiques et les résultats sont comparés avec les résultats obtenus avec un opérateur de covariance empirique de référence.

Il en ressort que ces opérateurs dérivés de la physique permettent de mettre en avant des meilleurs directions de descente et donc de converger plus rapidement et vers une solution optimale plus précise, surtout dans les premières itérations de l’algorithme d’optimisation. Cela permet de souligner que ces opérateurs dérivés de la physique améliorent le préconditionnement de la hessienne et l’aspect convexe de la fonction coût.

De ce fait, la méthode proposée permet d’obtenir une estimation de l’opérateur de covariance de l’erreur d’ébauche dérivée de la physique et une longueur de corrélation consistante avec la physique qui donnent de résultats aussi bons, voire meilleurs, que les opérateurs de covariance empiriques.

Ces études ont permis de valoriser les données altimétriques, notamment au travers de l’étude menée dans le chapitre 2 qui propose une méthode pour estimer Q de manière opérationnelle à partir de ces données.

Un modèle d’écoulement calibré à partir de ces données permet de comparer les estimations calculées par le modèle et les mesures. Cette comparaison permet d’étudier la cohérence physique des données. Cette cohérence peut aider à détecter des données incertaines, notamment du fait des traitements parfois empiriques des formes d’ondes qui sont dépendants dans la disposition de la rivière par rapport aux traces des satellites.

Cependant, cette cohérence est dépendante de la qualité du modèle. L’absence de cohérence entre le modèle et les données peut venir d’erreurs de modélisation, notamment sur la géométrie locale de la rivière. Dans ce cas, l’incohérence permet de remettre en question le modèle et potentiellement de l’améliorer localement.

Cette analyse de la cohérence entre les données et les modèles physiques reste toutefois de l’ordre de l’expertise et du travail manuel. Ce traitement manuel potentiellement nécessaire pour obtenir des données cohérentes constitue un frein à l’utilisation opérationnelle systématique de l’ensemble des méthodes présentées dans cette thèse.

L’assimilation des formes d’onde (données de plus bas niveau) dans les modèles d’écoulement pourrait améliorer l’automatisation de la chaîne car ne nécessiterait plus (ou du moins, nécessiterait moins) de traitements empiriques des données (comme le retracking) qui sont sources d’incertitudes. Cependant, pour cette assimilation, il faut pouvoir définir un opérateur d’observation permettant de calculer une forme d’onde théorique à partir des estimations de H calculées par le modèle d’écoulement.

Bibliographie

- C. Aricò, M. Sinagra, L. Begnudelli, et T. Tucciarelli. Mast-2d diffusive model for flood prediction on domains with triangular delaunay unstructured meshes. *Advances in Water Resources*, 34(11) :1427–1449, 2011. ISSN 0309-1708. doi : 10.1016/j.advwatres.2011.08.002. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0309170811001436>.
- S. L. Brunton, J. L. Proctor, et J. N. Kutz. Discovering governing equations from data by sparse identification of nonlinear dynamical systems. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 113(15) :3932–3937, 2016. ISSN 0027-8424. doi : 10.1073/pnas.1517384113. URL <https://www.pnas.org/content/113/15/3932>.
- A. Carrassi, M. Bocquet, L. Bertino, et G. Evensen. Data assimilation in the geosciences : An overview of methods, issues, and perspectives. *WIREs Climate Change*, 9(5) :e535, 2018. doi : 10.1002/wcc.535.
- W. Collischonn, D. Allasia, B. C. Da Silva, et C. E. M. Tucci. The mgb-iph model for large-scale rainfall—runoff modelling. *Hydrological Sciences Journal*, 52(5) :878–895, 2007. doi : 10.1623/hysj.52.5.878.
- A. Hollingsworth et P. Lönnberg. The statistical structure of short-range forecast errors as determined from radiosonde data. part i : The wind field. *Tellus A*, 38A(2) :111–136, 1986. doi : 10.1111/j.1600-0870.1986.tb00460.x.
- T. Malou et J. Monnier. Covariance kernels investigation from diffusive wave equations for data assimilation in hydrology. *Inverse Problems*, 2022a. URL <http://iopscience.iop.org/article/10.1088/1361-6420/ac509d>.
- T. Malou et J. Monnier. Double scale diffusive wave equations dedicated to spatial rivers observations. *Submitted for publication*, 2022b.
- T. Malou, P.-A. Garambois, A. Paris, J. Monnier, et K. Larnier. Generation and analysis of stage-fall-discharge laws from coupled hydrological-hydraulic river network model integrating sparse multi-satellite data. *Journal of Hydrology*, 603 :126993, 2021. ISSN 0022-1694. doi : 10.1016/j.jhydrol.2021.126993. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S002216942101043X>.
- J. Nolen et G. Papanicolaou. Fine scale uncertainty in parameter estimation for elliptic equations. *Inverse Problems*, 25(11) :115021, nov 2009. doi : 10.1088/0266-5611/25/11/115021. URL <https://doi.org/10.1088/0266-5611/25/11/115021>.
- C. E. Rasmussen et C. K. I. Williams. *Gaussian Processes for Machine Learning*. MIT Press, 2006.
- L. M. Stewart, S. L. Dance, et N. K. Nichols. Data assimilation with correlated observation errors : experiments with a 1-d shallow water model. *Tellus A : Dynamic Meteorology and Oceanography*, 65(1) :19546, 2013. doi : 10.3402/tellusa.v65i0.19546. URL <https://doi.org/10.3402/tellusa.v65i0.19546>.

Annexe A

Intégration des équations de Navier-Stokes sur la section en travers

Sommaire

A.1	Intégration de l'équation de conservation de la masse	198
A.2	Intégration de l'équation des moments	199
	Bibliographie	200

Dans cette section, l'intégration sur l'aire mouillée de l'équation de conservation de la masse et de conservation du moment des équations primitives (1.7), présentée rapidement dans la section 1.2.3.2 et la section 1.2.3.3, est présentée plus en détails. On rappelle que la géométrie et les variables d'état sont présentées dans la section 1.2.1 et sur la figure 1.8. Le lecteur peut se référer notamment à Thual [2010] pour certains détails de cette intégration. On remarquera que l'intégrale sur l'aire mouillée est bien définie à condition que celle-ci soit strictement positive et respecte une certaine régularité, voir e.g. Gerbeau et Perthame [2001].

Pour calculer les différentes intégrales, la règle d'intégration de Leibniz, qui s'écrit comme suit, est utilisée :

$$\frac{d}{dx} \left(\int_{a(x)}^{b(x)} f(x, z) dz \right) = f(x, b(x)) \frac{db}{dx}(x) - f(x, a(x)) \frac{da}{dx}(x) + \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{df}{dx}(x, z) dz$$

A.1 Intégration de l'équation de conservation de la masse

Dans cette section, l'intégration de l'équation de conservation de la masse (1.1a) sur l'aire mouillée est présentée. Celle-ci s'écrit alors :

$$\underbrace{\int_{y_g}^{y_d} \int_{z_{bs}}^H \frac{\partial u_1}{\partial x} dz dy}_{=I_1} + \underbrace{\int_{y_g}^{y_d} \int_{z_{bs}}^H \frac{\partial u_2}{\partial y} dz dy}_{=I_2} + \underbrace{\int_{y_g}^{y_d} \int_{z_{bs}}^H \frac{\partial u_3}{\partial z} dz dy}_{=I_3} = 0 \quad (\text{A.1})$$

A noter qu'au niveau des berges, i.e. $y = y_g$ et $y = y_d$, la profondeur de l'eau est nulle, i.e. $H = z_{bs}$. Cela implique que pour $y = y_g$ et $y = y_d$, l'intégrale sur la hauteur est nulle : $\int_{z_{bs}}^H u_{\square} dz = 0$ pour $y = y_g$ et $y = y_d$ avec $\square = 1, 2, 3$. En utilisant la formule d'intégration de Leibniz ainsi que la condition d'adhérence aux fonds (1.2), on obtient les expressions suivantes pour les intégrales I_1 et I_2 :

$$I_1 = \frac{\partial}{\partial x} \left(\underbrace{\int_{y_g(x,t)}^{y_d(x,t)} \int_{z_{bs}(x,y)}^{H(x,t)} u_1(x, y, z, t) dz dy}_{=Q(x,t)} \right) - \int_{y_g(x,t)}^{y_d(x,t)} u_1(x, y, z = H(x, t), t) \frac{\partial H}{\partial x}(x, t) dy$$

$$I_2 = - \int_{y_g(x,t)}^{y_d(x,t)} u_2(x, y, z = H(x, t), t) \frac{\partial H}{\partial y}(x, t) dy$$

En utilisant uniquement la condition d'adhérence aux fonds (1.2), on obtient l'expression suivante pour I_3 :

$$I_3 = \int_{y_g(x,t)}^{y_d(x,t)} u_3(x, y, z = H(x, t), t) dy$$

En sommant les composantes I_1 , I_2 et I_3 et en utilisant la condition cinématique de la surface libre (1.4), on obtient :

$$I_1 + I_2 + I_3 = \int_{y_g(x,t)}^{y_d(x,t)} \frac{\partial H}{\partial t}(x, t) dy + \frac{\partial Q}{\partial x}(x, t)$$

Grâce à la formule de Leibniz et en supposant que $H(y = y_g) = H(y = y_d)$:

$$\frac{\partial A}{\partial t}(x, t) = \int_{y_g(x,t)}^{y_d(x,t)} \frac{\partial H}{\partial t}(x, t) dy$$

Ainsi, l'équation de conservation de la masse du système de Navier Stokes (1.1a) devient l'équation de conservation de la masse du système de Saint-Venant 1D suivante :

$$\frac{\partial A}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial Q}{\partial x}(x, t) = 0$$

A.2 Intégration de l'équation des moments

Dans cette section, l'intégration de l'équation de conservation du moment (1.1b) sur l'aire mouillée est présentée. Celle-ci s'écrit alors :

$$\begin{aligned} & \overbrace{\int_{y_g}^{y_d} \int_{z_{bs}}^H \frac{\partial u_1}{\partial t} dz dy}^{=I_4} + \overbrace{\int_{y_g}^{y_d} \int_{z_{bs}}^H \frac{\partial u_1^2}{\partial x} dz dy}^{=I_5} + \overbrace{\int_{y_g}^{y_d} \int_{z_{bs}}^H \frac{\partial u_1 u_2}{\partial y} dz dy}^{=I_6} + \overbrace{\int_{y_g}^{y_d} \int_{z_{bs}}^H \frac{\partial u_1 u_3}{\partial z} dz dy}^{=I_7} \\ & = \underbrace{\int_{y_g}^{y_d} \int_{z_{bs}}^H -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} dz dy}_{=I_8} + \underbrace{\int_{y_g}^{y_d} \int_{z_{bs}}^H \nu \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} \right) dz dy}_{=I_9} \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

En utilisant la formule d'intégration de Leibniz ainsi que la condition d'adhérence aux fonds (1.2), on obtient les expressions suivantes pour les intégrales I_4 , I_5 , I_6 et I_7 :

$$I_4 = \frac{\partial Q}{\partial t}(x, t) - \int_{y_g(x,t)}^{y_d(x,t)} u_1(x, y, z = H(x, t), t) \frac{\partial H}{\partial t}(x, t) dy \quad (\text{A.3})$$

$$I_5 = \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_{y_g(x,t)}^{y_d(x,t)} \int_{z_{bs}(x,y)}^{H(x,t)} u_1(x, y, z, t)^2 dz dy \right) - \int_{y_g(x,t)}^{y_d(x,t)} u_1(x, y, z = H(x, t), t)^2 \frac{\partial H}{\partial x}(x, t) dy \quad (\text{A.4})$$

$$I_6 = - \int_{y_g(x,t)}^{y_d(x,t)} u_1(x, y, z = H(x, t), t) u_2(x, y, z = H(x, t), t) \frac{\partial H}{\partial y}(x, t) dy \quad (\text{A.5})$$

$$I_7 = \int_{y_g(x,t)}^{y_d(x,t)} u_1(x, y, z = H(x, t), t) u_3(x, y, z = H(x, t), t) dy \quad (\text{A.6})$$

En sommant $I_4 + I_5 + I_6 + I_7$ et en utilisant la condition cinématique de la surface libre (1.4), on obtient alors :

$$\begin{aligned} I_4 + I_5 + I_6 + I_7 &= \frac{\partial Q}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_{y_g(x,t)}^{y_d(x,t)} \int_{z_{bs}(x,y)}^{H(x,t)} u_1(x, y, z, t)^2 dz dy \right) \\ &= \frac{\partial Q}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} \right)(x, t) \end{aligned}$$

Cette étape de calcul nécessite de supposer que $\int_{y_g}^{y_d} \int_{z_{bs}}^H u_1^2 dz dy \approx u^2 A$ avec u la vitesse moyenne du fluide sur la section en travers. Le coefficient $\beta = \frac{\int_{y_g}^{y_d} \int_{z_{bs}}^H u_1^2 dz dy}{u^2 A}$ permet de relier le comportement 1D du fluide à l'écoulement 3D. L'hypothèse $\beta \approx 1$ est valide tant que la vitesse u_1 est quasiment constante sur la section en travers, voir e.g. Thual [2010] et plus de détail dans Marin et Monnier [2009], Michel-Dansac et al. [2021].

Étant donné que pour le régime d'écoulement considéré $p \approx p_{hs}$ et l'expression de la pression hydrostatique (1.8), on obtient :

$$\frac{\partial p}{\partial x}(x, y, t) = \rho g \frac{\partial H}{\partial x}(x, t)$$

On rappelle que, dans le cadre de la modélisation 1D, H ne dépend pas de y . On obtient alors :

$$I_8 = -gA(x, t) \frac{\partial H}{\partial x}(x, t) \quad (\text{A.7})$$

L'intégrale I_9 correspond aux forces de frottements. En utilisant les conditions de continuité aux fonds (1.3) et à la surface libre (1.5), on obtient l'expression suivante pour l'intégrale I_9 :

$$\begin{aligned} I_9 &= - \int_{P_m(x, t)} \nu \left(\frac{\partial u_1}{\partial z}(x, l, t) + \frac{\partial u_1}{\partial y}(x, l, t) \right) dl \\ &= - \int_{P_m(x, t)} \frac{1}{\rho} \tau^*(x, l, t) dl \end{aligned}$$

On peut alors définir la contrainte de cisaillement moyenne exercée sur la paroi : $\bar{\tau}(x, t) = \frac{1}{P_m(x, t)} \int_{P_m(x, t)} \tau^* dl$.

On obtient alors l'expression de l'intégrale $I_9 = -\frac{P_m(x, t)}{\rho} \bar{\tau}(x, t)$.

La contrainte de cisaillement moyenne sur la paroi est modélisée par $\bar{\tau}(x, t) = \rho g R_h(x, t) S_f(x, t)$ avec S_f la pente de la ligne de frottement, voir e.g. dans Thual [2010].

De plus, cette pente est calculée en utilisant la paramétrisation de Manning-Strickler, voir e.g. dans Dingman [2009] :

$$S_f(x, t) = \frac{|u(x, t)|u(x, t)}{K_s^2 A(x, t) R_h(x, t)^{\frac{4}{3}}} = \frac{|Q(x, t)|Q(x, t)}{K_s^2 A(x, t)^2 R_h(x, t)^{\frac{4}{3}}} \quad (\text{A.8})$$

On obtient alors :

$$I_9 = -gA(x, t) S_f(x, t) \quad (\text{A.9})$$

En sommant les différentes intégrales $I_4 + I_5 + I_6 + I_7 - I_8 = I_9$, on obtient alors :

$$\frac{\partial Q}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} \right)(x, t) + gA(x, t) \frac{\partial H}{\partial x}(x, t) = -gA(x, t) S_f(x, t) \quad (\text{A.10})$$

Bibliographie

S. L. Dingman. *Fluvial hydraulics*. oxford university press, 2009.

J.-F. Gerbeau et B. Perthame. Derivation of viscous saint-venant system for laminar shallow water ; numerical validation. *Discrete and Continuous Dynamical Systems - B*, 2001. URL <https://hal.inria.fr/inria-00072549>.

J. Marin et J. Monnier. Superposition of local zoom models and simultaneous calibration for 1d-2d shallow water flows. *Mathematics and Computers in Simulation*, 80(3) :547-560, 2009. ISSN 0378-4754. doi : 10.1016/j.matcom.2009.09.001. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378475409002870>.

V. Michel-Dansac, P. Noble, et J.-P. Vila. Consistent section-averaged shallow water equations with bottom friction. *European Journal of Mechanics - B/Fluids*, 86 :123-149, 2021. ISSN 0997-7546. doi : 10.1016/j.euromechflu.2020.12.005. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0997754620306476>.

O. Thual. *Hydrodynamique de l'environnement*. Les éditions de l'école polytechnique, 2010.

Annexe B

Résolution numérique de l'onde diffusante

Sommaire

B.1	Semi-discrétisation implicite et algorithme de Newton-Raphson	202
B.2	Schéma aux différences finies	204
B.2.1	Différences finies pour la dérivé d'ordres 1 et 2 sur un maillage déstructuré	204
B.2.2	Discrétisation spatial	204
B.3	Algorithme de résolution	206

Cette section détaille l'algorithme implémenté dans le logiciel de calcul DassFlow-1D durant ces travaux de thèse pour la résolution l'équation de l'onde diffusante.

Cet algorithme est un algorithme de type Newton-Raphson et l'équation linéarisée est résolue par un schéma aux différences finies.

Dans un premier temps, on rappelle que l'équation de l'onde diffusante classique (à l'échelle physique) est la suivante :

$$\partial_t H(x, t) - \mu(x, t) \partial_{xx}^2 H(x, t) + v(x, t) \partial_x H(x, t) = v(x, t) \partial_x z_b(x) \quad (\text{B.1})$$

avec

$$\mu(x, t) = \frac{1}{2} u(KA^\gamma; x, t) \frac{H(x, t) - z_b(x)}{|\partial_x H(x, t)|} \quad (\text{B.2})$$

$$v(x, t) = \gamma u(x, t) \quad (\text{B.3})$$

On rappelle que la vitesse u et le débit Q sont donnés par la relation de Manning-Strickler-Gauckler (MSG) :

$$u = K_s |\partial_x H|^{\frac{1}{2}} R_h^{\gamma-1} \Leftrightarrow Q = uA = K_s |\partial_x H|^{\frac{1}{2}} R_h^{\gamma-1} A \quad (\text{B.4})$$

avec $\gamma = 5/3$ et $R_h \approx H - z_b$.

On présente dans un premier temps l'algorithme de Newton-Raphson adapté pour cette équation de l'onde diffusante. Puis, on présente le schéma aux différences finies utilisé.

Enfin, l'algorithme dans sa globalité est présenté.

B.1 Semi-discrétisation implicite et algorithme de Newton-Raphson

Dans un premier temps, l'équation est écrite dans la forme suivante :

$$\mathcal{M}(H) = 0 \quad (\text{B.5})$$

Pour obtenir la racines de cette équation, on utilise l'algorithme de Newton-Raphson. Celui ci se base sur le développement de Taylor à l'ordre 1 :

$$\mathcal{M}(H + \delta H) = \mathcal{M}(H) + \partial_H \mathcal{M}(H) \cdot \delta H + o(\|\delta H\|) \quad (\text{B.6})$$

Ainsi, à l'itération k de l'algorithme de Newton-Raphson, on résout l'équation linéaire suivante :

$$\partial_H \mathcal{M}(H^k) \cdot \delta H = -\mathcal{M}(H^k) \quad (\text{B.7})$$

en mettant à jour après chaque itération : $H^{k+1} = H^k + \delta H$.

Dans notre cas, au pas de temps n , on résout à chaque itération l'équation linéaire résultante de la discrétisation temporelle implicite et de la linéarisation de l'équation de l'onde diffusante discrétisée en temps avec une vitesse u^k fixe.

Par soucis de simplification, cette vitesse est fixée à chaque itération et est mise à jour après chaque itération de l'algorithme de Newton-Raphson, à la manière d'un point fixe.

L'équation discrétisée en temps et à vitesse fixe s'écrit de la manière suivante à l'intérieur du domaine :

$$\mathcal{M}^k(H^n) = \frac{H^n - H^{n-1}}{\Delta t} - \mu^k(H^n) \partial_{xx}^2 H^n + v^k \partial_x H^n - v^k \partial_x z_b \quad (\text{B.8})$$

On obtient alors la linéarisation suivante :

$$\partial_H \mathcal{M}^k(H^n) \cdot \delta H = \frac{1}{\Delta t} \delta H - \mu^k(H^n) \partial_{xx}^2 \delta H - (\partial_H \mu^k(H^n) \cdot \delta H) \partial_{xx}^2 H + v^k \partial_x \delta H \quad (\text{B.9})$$

et la dérivé du terme non linéaire vaut :

$$\partial_H \mu^k(H^n) \cdot \delta H = -\frac{1}{2} u^k \left(\frac{\delta H}{\partial_x H^n} - (H^n - z_b) \frac{\partial_x \delta H}{(\partial_x H^n)^2} \right) \quad (\text{B.10})$$

Ce qui implique :

$$\partial_H \mathcal{M}^k(H^n) \cdot \delta H = -\mu^k(H^n) \partial_{xx}^2 \delta H + \left(v^k - \frac{1}{2} u^k \frac{H^n - z_b}{(\partial_x H^n)^2} \partial_{xx}^2 H^n \right) \partial_x \delta H + \left(\frac{1}{\Delta t} - \frac{1}{2} u^k \frac{\partial_{xx}^2 H^n}{\partial_x H^n} \right) \delta H \quad (\text{B.11})$$

Pour une condition aux bords de Dirichlet, l'équation s'écrit aux bords de la manière suivante : $\mathcal{M}(H^n) = H^n - H^{obs,n}$.

On obtient la linéarisation suivante : $\partial_H \mathcal{M}(H^{n,k}) \cdot \delta H = \delta H$.

Cette linéarisation implique que l'équation linéaire résolue aux bords à chaque itération est :

$$\partial_H \mathcal{M}(H^{n,k}) \cdot \delta H = -\mathcal{M}(H^{n,k}) \Rightarrow \delta H = H^{obs,n} - H^{n,k}.$$

Ainsi, on obtient $\delta H = H^{obs,n} - H^{n,1} \Rightarrow H^{n,2} = H^{n,1} + \delta H = H^{obs,n}$ pour $k = 1$, et $\delta H = 0$ pour $k > 1$.

Il est aussi possible d'imposer un débit Q_{in} comme condition de Neumann. On rappelle que Q est calculé par la relation de MSG (B.4) dans l'équation de l'onde diffusante. Pour cette condition aux bords, avec $A(H) = \bar{w}(H - z_b)$ et $R_h \approx H - z_b$, l'équation s'écrit aux bords de la manière suivante : $\mathcal{M}(H^n) = K_s \bar{w}(H - z_b)^\gamma |\partial_x H^n|^{\frac{1}{2}} - Q_{in}^n$.

On obtient la linéarisation suivante : $\partial_H \mathcal{M}(H^n) \cdot \delta H = \gamma K_s \bar{w}^n (H^n - z_b)^{\gamma-1} |\partial_x H^n|^{\frac{1}{2}} \delta H - \frac{1}{2} K_s \bar{w} (H^n - z_b)^\gamma |\partial_x H^n|^{-\frac{1}{2}} \partial_x \delta H$.

Cette linéarisation implique que l'équation linéaire résolue aux bords à chaque itération est :

$$\partial_H \mathcal{M}(H^n) \cdot \delta H = -\mathcal{M}(H^n) \Rightarrow -\frac{1}{2} |\partial_x H^n|^{-1} \partial_x \delta H + \gamma (H^n - z_b)^{-1} \delta H = \frac{Q_{in}^n}{K_s \bar{w}^n (H^n - z_b)^\gamma |\partial_x H^n|^{\frac{1}{2}}} - 1.$$

Ainsi, l'équation linéaire (B.7) à résoudre à chaque itération de l'algorithme de Newton Raphson dont la variable est δH , devient :

Connaissant $H^{n,k}$ et H^{n-1} , trouver δH tel que

$$\begin{aligned} & -\mu^k(H^{n,k}) \partial_{xx}^2 \delta H + \phi^k(H^{n,k}) \partial_x \delta H + \psi^k(H^{n,k}) \delta H \\ & = \mu^k(H^{n,k}) \partial_{xx}^2 H^{n,k} - v^k \partial_x H^{n,k} - \frac{1}{\Delta t} H^{n,k} + v^k \partial_x z_b + \frac{1}{\Delta t} H^{n-1} \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

avec des conditions aux bords linéarisées.

Les coefficients valent :

$$\mu^k(H^n; x) = -\frac{1}{2} u^k(x) \frac{(H^n(x) - z_b(x))}{\partial_x H^n(x)} \quad (\text{B.13})$$

$$v^k(x) = \gamma u^k(x) \quad (\text{B.14})$$

$$\phi^k(H^n; x) = \gamma u^k(x) - \frac{1}{2} u^k(x) \frac{H^n(x) - z_b(x)}{(\partial_x H^n(x))^2} \partial_{xx}^2 H^n(x) \quad (\text{B.15})$$

$$\psi^k(H^n; x) = \frac{1}{\Delta t} - \frac{1}{2} u^k(x) \frac{\partial_{xx}^2 H^n(x)}{\partial_x H^n(x)} \quad (\text{B.16})$$

et la vitesse qui :

$$u^k(x) = K_s |\partial_x H^{n,k}(x)|^{\frac{1}{2}} (H^{n,k}(x) - z_b(x))^{\gamma-1} \quad (\text{B.17})$$

A la fin de chaque itérations, on met à jour : $H^{k+1} = H^k + \delta H$.

B.2 Schéma aux différences finies

On présente ici le schéma aux différences finies utilisé pour résoudre l'équation linéaire introduite au dessus. Le schéma aux différences finies se fait sur un maillage déstructuré. On note alors les pas d'espace Δx_i tels que $x_{i+1} = x_i + \Delta x_i$ et $x_{i-1} = x_i - \Delta x_{i-1}$. Ainsi, le pas moyen est $\overline{\Delta x}_i = 0.5(\Delta x_i + \Delta x_{i-1})$.

B.2.1 Différences finies pour la dérivé d'ordres 1 et 2 sur un maillage déstructuré

On présente ici les approximations aux différences finies centrées d'ordre 1 pour les dérivées d'ordres 1 et 2 sur un maillage déstructuré utilisé dans ce schéma.

On rappelle que les développement limités à l'ordre 2 sont les suivants :

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + \Delta x_i f'(x_i) + O(\Delta x_i^2) \quad (\text{B.18})$$

et

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) - \Delta x_{i-1} f'(x_i) + O(\Delta x_{i-1}^2) \quad (\text{B.19})$$

On obtient alors l'approximation de la dérivée d'ordre 1 suivante :

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2\Delta x_i} + O\left(\frac{\Delta x_{i-1}^2 + \Delta x_i^2}{\Delta x_i}\right) \quad (\text{B.20})$$

On rappelle que les développement limités à l'ordre 3 sont les suivants :

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + \Delta x_i f'(x_i) + \frac{\Delta x_i^2}{2} f''(x_i) + O(\Delta x_i^3) \quad (\text{B.21})$$

et

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) - \Delta x_{i-1} f'(x_i) + \frac{\Delta x_{i-1}^2}{2} f''(x_i) + O(\Delta x_{i-1}^3) \quad (\text{B.22})$$

On obtient alors l'approximation de la dérivée d'ordre 2 suivante :

$$f''(x_i) = \frac{1}{\Delta x_i \overline{\Delta x}_i} f(x_{i+1}) - \frac{2}{\Delta x_i \Delta x_{i-1}} f(x_i) + \frac{1}{\Delta x_{i-1} \overline{\Delta x}_i} f(x_{i-1}) + O\left(\frac{\Delta x_{i-1}^2 + \Delta x_i^2}{\Delta x_i}\right) \quad (\text{B.23})$$

B.2.2 Discrétisation spatial

Grace aux approximation des dérivées (B.20) et (B.23), l'équation (B.12) peut être discrétisée en espace et s'écrit comme l'équation matricielle suivante :

$$A^{n,k} \delta H = B^{n,k} H^{n,k} + C^n z_b + \frac{1}{\Delta t} I_\Omega H^{n-1} + H^{obs,n} \quad (\text{B.24})$$

avec les matrice $A^{n,k} \in \mathbb{R}^{I \times I}$, $B^{n,k} \in \mathbb{R}^{I \times I}$, $C^n \in \mathbb{R}^{I \times I}$ et $I_\Omega \in \mathbb{R}^{I \times I}$ à déterminer, et I le nombre de nœud dans le maillage.

Dans la suite, ces matrices sont spécifiées pour des conditions aux bords de Dirichlet, mais elles peuvent aussi être spécifiées pour imposer Q_{in} en amont.

Calcul de $A^{n,k}$: $A^{n,k}$ est une matrice tri-diagonale.

Pour $i \in \{2, \dots, I-1\}$, i.e. l'intérieur du domaine, on a :

$$\begin{aligned}
& -\mu^n(H^{n,k})\partial_{xx}^2\delta H + \phi^n(H^{n,k})\partial_x\delta H + \psi^n(H^{n,k})\delta H \\
& \approx -\mu_i^{n,k} \left(\frac{1}{\Delta x_i \Delta x_i} \delta H_{i+1} - \frac{2}{\Delta x_i \Delta x_{i-1}} \delta H_i + \frac{1}{\Delta x_{i-1} \Delta x_i} \delta H_{i-1} \right) + \phi_i^{n,k} \left(\frac{\delta H_{i+1} - \delta H_{i-1}}{2\Delta x_i} \right) + \psi_i^{n,k} \delta H_i \\
& \approx \underbrace{\left(-\frac{\mu_i^{n,k}}{\Delta x_i \Delta x_i} + \frac{\phi_i^{n,k}}{2\Delta x_i} \right)}_{A_{i,i+1}^{n,k}} \delta H_{i+1} + \underbrace{\left(\frac{2\mu_i^{n,k}}{\Delta x_i \Delta x_{i-1}} + \psi_i^{n,k} \right)}_{A_{i,i}^{n,k}} \delta H_i + \underbrace{\left(-\frac{\mu_i^{n,k}}{\Delta x_{i-1} \Delta x_i} - \frac{\phi_i^{n,k}}{2\Delta x_i} \right)}_{A_{i,i-1}^{n,k}} \delta H_{i-1}
\end{aligned} \tag{B.25}$$

Pour les conditions aux bords de Dirichlet, on impose $A_{1,1}^{n,k} = A_{I,I}^{n,k} = 1$ ainsi que $A_{1,2}^{n,k} = A_{I,I-1}^{n,k} = 0$.

Calcul de $B^{n,k}$: $B^{n,k}$ est une matrice tri-diagonale.

Pour $i \in \{2, \dots, I-1\}$, i.e. l'intérieur du domaine, on a :

$$\begin{aligned}
& \mu^n(H^{n,k})\partial_{xx}^2 H^{n,k} - v^{n,k}\partial_x H^{n,k} - \left(\frac{1}{\Delta t}\right)H^{n,k} \\
& \approx \mu_i^{n,k} \left(\frac{1}{\Delta x_i \Delta x_i} H_{i+1}^{n,k} - \frac{2}{\Delta x_i \Delta x_{i-1}} H_i^{n,k} + \frac{1}{\Delta x_{i-1} \Delta x_i} H_{i-1}^{n,k} \right) - v_i^{n,k} \left(\frac{H_{i+1}^{n,k} - H_{i-1}^{n,k}}{2\Delta x_i} \right) - \left(\frac{1}{\Delta t} + c_i^n \right) H_i^{n,k} \\
& \approx \underbrace{\left(\frac{\mu_i^{n,k}}{\Delta x_i \Delta x_i} - \frac{v_i^{n,k}}{2\Delta x_i} \right)}_{B_{i,i+1}^{n,k}} H_{i+1}^{n,k} + \underbrace{\left(-\frac{2\mu_i^{n,k}}{\Delta x_i \Delta x_{i-1}} - \frac{1}{\Delta t} \right)}_{B_{i,i}^{n,k}} H_i^{n,k} + \underbrace{\left(\frac{\mu_i^{n,k}}{\Delta x_{i-1} \Delta x_i} + \frac{v_i^{n,k}}{2\Delta x_i} \right)}_{B_{i,i-1}^{n,k}} H_{i-1}^{n,k}
\end{aligned} \tag{B.26}$$

Pour les conditions aux bords de Dirichlet, on impose $B_{1,1}^{n,k} = B_{I,I}^{n,k} = -1$ ainsi que $B_{1,2}^{n,k} = B_{I,I-1}^{n,k} = 0$.

Calcul de $C^{n,k}$: $C^{n,k}$ est une matrice tri-diagonale.

Pour $i \in \{2, \dots, I-1\}$, i.e. l'intérieur du domaine, on a :

$$C_{i,i+1}^n = -C_{i,i-1}^n = \frac{v_i^{n,k}}{2\Delta x_i} \text{ et } C_{i,i}^n = 0 \tag{B.27}$$

Au bords, on impose $C_{1,1}^n = C_{I,I}^n = C_{1,2}^n = C_{I,I-1}^n = 0$.

Calcul de I_Ω et $H^{obs,n}$:

La matrice diagonale I_Ω est la matrice indicatrice de l'intérieur du domaine : $(I_\Omega)_{i,i} = 1$ si $i \in \{2, \dots, I-1\}$, 0 sinon.

Les conditions aux bords $H^{obs,n}$ sont mises dans un vecteur colonne : $H_i^{obs,n} = 0$ si $i \in \{2, \dots, I-1\}$, $H_1^{obs,n} = H^{up,n}$ et $H_I^{obs,n} = H^{down,n}$ avec $H^{up,n}$ et $H^{down,n}$ la valeur de la condition aux bords de Dirichlet resp. au bord amont et aval, au pas de temps n .

Les coefficients $\mu_i^{n,k}$, $v_i^{n,k}$, $\phi_i^{n,k}$ et $\psi_i^{n,k}$ sont les approximations des coefficients donnés dans les expressions (B.13), (B.14), (B.15) et (B.16) en utilisant les approximations différences finies centrées (B.20) et (B.23) :

$$\mu_i^{n,k} = \frac{1}{2} u_i^{n,k} \frac{(H_i^{n,k} - z_{b,i})}{S_i^{n,k}} \quad (\text{B.28})$$

$$v_i^{n,k} = \gamma u_i^{n,k} \quad (\text{B.29})$$

$$\phi_i^{n,k} = \gamma u_i^{n,k} - \frac{1}{2} u_i^{n,k} \frac{(H_i^{n,k} - z_{b,i})}{(S_i^{n,k})^2} \left(\frac{1}{\Delta x_i \Delta x_i} H_{i+1}^{n,k} - \frac{2}{\Delta x_i \Delta x_{i-1}} H_i^{n,k} + \frac{1}{\Delta x_{i-1} \Delta x_i} H_{i-1}^{n,k} \right) \quad (\text{B.30})$$

et

$$\psi_i^{n,k} = \frac{1}{\Delta t} + \frac{u_i^{n,k}}{2S_i^{n,k}} \left(\frac{1}{\Delta x_i \Delta x_i} H_{i+1}^{n,k} - \frac{2}{\Delta x_i \Delta x_{i-1}} H_i^{n,k} + \frac{1}{\Delta x_{i-1} \Delta x_i} H_{i-1}^{n,k} \right) \quad (\text{B.31})$$

avec la vitesse $u_i^{n,k}$, donnée par la relation de MSG discrétisée :

$$u_i^{n,k} = K(H_i^{n,k} - z_{b,i})^{\gamma-1} (S_i^{n,k})^{\frac{1}{2}} \quad (\text{B.32})$$

On rappelle que l'équation de l'onde diffusante est dérivée supposant $\partial_x H > 0$ pour éviter une singularité. Comme mentionné dans la section 1.2.4.2, des problèmes de convergence sont rencontrés lorsque $\partial_x H$ est trop faible. Pour éviter ce problème numérique, la pente discrète $\left| \frac{H_{i+1}^{n,k} - H_{i-1}^{n,k}}{2\Delta x_i} \right|$ est seuillée lorsque celle-ci devient inférieure au seuil ϵ . Typiquement, on prend ϵ de l'ordre de 10^{-6} ou 10^{-7} . Ainsi la pente discrète est donnée par :

$$S_i^{n,k} = \min \left(\left| \frac{H_{i+1}^{n,k} - H_{i-1}^{n,k}}{2\Delta x_i} \right|, \epsilon \right) \quad (\text{B.33})$$

A noter que sur des rivières très larges comme le Rio Negro, la pente est de l'ordre de 10^{-4} .

A noter que cette discrétisation est détaillée pour l'équation de l'onde diffusante classique et à l'échelle de la physique (B.1). Dans le chapitre 3, l'équation de l'onde diffusante à l'échelle des observations (3.4b) est dérivée et contient deux termes supplémentaires permettant de prendre en compte les variations de largeur : $\rho(H)H$ et $\rho(H)z_b$ avec $\rho = \frac{1}{\bar{w}} (\partial_\tau \bar{w} + \gamma u \partial_y \bar{w})$, y et τ respectivement les variables d'espace et de temps à l'échelle des observations. Ces deux termes peuvent être facilement rajoutés dans le schéma en calculant les dérivés en temps et en espace de la largeur et en rajoutant un terme sur la diagonal de $A^{n,k}$, $B^{n,k}$ et de $C^{n,k}$.

B.3 Algorithme de résolution

Trois critères d'arrêt sont définis pour déterminer quand l'algorithme doit s'arrêter.

L'algorithme s'arrête si la convergence est atteinte, i.e. lorsque la norme 2 du résidu de l'équation de l'onde diffusante discrétisée $B^{n,k}H^{n,k} + C^n z_b + \frac{1}{\Delta t} I_\Omega H^{n-1} + H^{obs,n}$ est inférieure à un certain seuil.

L'algorithme s'arrête si la stationnarité est atteinte, i.e. lorsque la norme 2 de l'incrément δH est inférieure à un certain seuil.

L'algorithme s'arrête si un nombre maximal d'itération est dépassé. Dans ce cas, la convergence de l'algorithme n'est pas assurée, alors l'algorithme renvoie un message avec les valeurs des normes du résidu et de l'incrément pour une vérification manuelle.

En pratique, la valeur du seuil est 10^{-9} et le nombre maximal d'itération est de 100.

L'algorithme de résolution de l'onde diffusante peut alors se résumer de la manière suivante :

```

A  $t_n = t_0$ ,  $H^0$  est donné;
tant que  $t_n \leq T$  faire
  A l'itéré initial  $k = 1$ ,  $H^{n,1} = H^{n-1}$  et  $H^{obs,n}$  est donné;
  tant que les critères d'arrêt de l'algorithme de Newton-Raphson ne sont pas satisfaits faire
    La vitesse  $u^{n,k}$  est calculé grâce à la relation de MSG discrétisée (B.32);
    Les matrices  $A^{n,k}$ ,  $B^{n,k}$  et  $C^n$  sont calculés grâce aux expressions (B.25), (B.26) et (B.27);
    L'équation  $A^{n,k} \delta H = B^{n,k} H^{n,k} + C^n z_b + \frac{1}{\Delta t} I_\Omega H^{n-1} + H^{obs,n}$  est résolue;
    On met à jour la hauteur  $H^{n,k+1} = H^{n,k} + \delta H$  et  $k \leftarrow k + 1$ ;
  fin
  On met à jour :  $H^n = H^{n,k}$  et  $t_{n+1} = t_n + \Delta t$  et  $n \leftarrow n + 1$ ;
fin

```