



HAL
open science

Optimisation Topologique du Couple Pièce/Support pour la Fabrication Additive sur Lit de Poudre

Martin Bihr

► **To cite this version:**

Martin Bihr. Optimisation Topologique du Couple Pièce/Support pour la Fabrication Additive sur Lit de Poudre. Optimisation et contrôle [math.OC]. Institut Polytechnique de Paris, 2021. Français. NNT : 2021IPPAX110 . tel-03631143

HAL Id: tel-03631143

<https://theses.hal.science/tel-03631143v1>

Submitted on 5 Apr 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



INSTITUT
POLYTECHNIQUE
DE PARIS

NNT : 2021IPPAX110

Thèse de doctorat



Optimisation topologique du couple pièce/support pour la fabrication additive métallique sur lit de poudre

Thèse de doctorat de l'Institut Polytechnique de Paris
préparée à l'École Polytechnique

École doctorale n°626 École doctorale de l'Institut Polytechnique de Paris (EDIPP)
Spécialité de doctorat : Mathématiques et informatique

Thèse présentée et soutenue à Palaiseau, le 10 décembre 2021, par

MARTIN BIHR

Composition du Jury :

Christophe Tournier Professeur ENS Paris-Saclay (LURPA)	Président
Eric Bonnetier Professeur, Université Grenoble-Alpes (UJF)	Rapporteur
Francisco Chinesta Professeur, ENSAM (PIMM)	Rapporteur
Éric Charkaluk Professeur, École Polytechnique (LMS)	Examineur
Habibou Maitournam Professeur, ENSTA Paris (UME)	Examineur
Chiara Nardoni Ingénieure de recherche, IRT SystemX	Examinatrice
Grégoire Allaire Professeur, École Polytechnique (CMAP)	Directeur de thèse
Benjamin Bogosel Professeur assistant, École Polytechnique (CMAP)	Co-directeur de thèse
François Jouve Professeur, Université de Paris (LJLL)	Invité
Julie Querois Ingénieure, Safran Electronics & Defense	Invitée

THÈSE DE DOCTORAT
DE L'INSTITUT POLYTECHNIQUE DE PARIS
PRÉPARÉE À L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

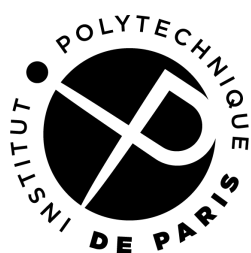
Optimisation topologique du couple
pièce/support pour la fabrication additive
métallique sur lit de poudre

Spécialité de doctorat : Mathématiques et Informatique

Martin Bihl

Directeur et Co-directeur :
Grégoire ALLAIRE (CMAP)
Benjamin BOGOSEL (CMAP)

Encadrants Industriels :
Xavier Betbeder-Lauque (Safran Additive
Manufacturing Campus)
Felipe BORDEU (Safran Tech)
Julie QUEROIS (Safran Electronics and
Defense)



Remerciements

Tout d'abord je tiens à remercier Grégoire pour m'avoir accueilli et accompagné dans ce monde des mathématiques que je ne connaissais pas, pour sa confiance, sa patience, sa bienveillance et très souvent son indulgence. Je remercie également Benjamin pour toutes ses réponses aux questions d'ordre mathématiques que je n'osais pas poser à Grégoire, pour son accompagnement technique et numérique et de manière générale tout au long de cette thèse. Merci à vous deux aussi pour vos relectures très attentives.

Cette thèse ne se serait pas faite sans la dimension industrielle apportée par Safran Tech. Je remercie Julie qui a eu l'idée de ce sujet de thèse passionnant, qui m'a accueilli (trop) tôt un matin du 2 janvier 2019 et qui m'a fait découvrir avec tant d'enthousiasme ce monde de la fabrication additive. Merci aussi pour ses relectures, sa vision du discours clair et concis qui n'a pas toujours été le mien et enfin pour nos quelques moments passés à chanter sur des chansons datées. Je remercie également Xavier qui a pris la suite de Julie dans mon encadrement à partir de la dernière année, je le félicite d'avoir su me donner tant de conseils après avoir suivi ma thèse de très loin auparavant, merci pour son dynamisme et sa disponibilité, pour avoir fait avancer les fabrications, relu mon manuscrit et m'accompagner dans mes démarches administratives. Je remercie également Clara de m'avoir accueilli dans l'équipe MOA ainsi que Romain, Calin (bon courage avec mes codes FreeFEM...), Charlotte, Fred' et tous les autres.

Je remercie Felipe pour son aide quotidienne tout au long de ces trois années de thèse et pour sa disponibilité indéfectible. Merci aussi pour nos conversations dans les bus, les voitures, les restaurants, les bars ou chez toi à la sortie d'un confinement, avec les règles de distanciation bien sûr. Je remercie également Julien pour ses précieux conseils et son enthousiasme quant à l'avancée de mes travaux. Mon bureau n'aurait pas été si bien entouré si Christian ne m'avait laissé m'y installer, un grand merci à lui et à l'ex-équipe CAM, Fabien, Nissrine, Thomas, Augustin, Sébastien, Clément, Xavier, Brian et les autres pour leur bonne humeur et aussi à toute l'équipe DST.

Merci aussi à Nassera, Alexandra et toute l'équipe administrative du CMAP pour leur accompagnement. Merci à l'équipe d'optimisation de forme de m'avoir accueilli. Merci à Florian, Mathilde, Lalaina, Jeet, Matías, Alex, Perle et à tous les autres pour nos échanges passionnants, votre bienveillance et votre enthousiasme au regard de mes travaux, souvent bien moins impressionnants que les vôtres.

J'aimerais également remercier ma famille qui m'a accompagné, soutenu et encouragé pendant ces trois ans et accueilli aussi pendant plusieurs confinements. Merci à Marie de m'avoir supporté, d'avoir fermé les yeux sur les en-nièmes casseroles que je ne pouvais résister d'acheter et qui n'arriveraient pas à rentrer dans la cuisine, et j'en passe. Merci aussi à mes amis pour m'avoir fait penser à autre chose, les membres du septrouple Antoine, Augustin, Claire, Julia, Nicolas et Thibal, les amis de Paris Ali & Francky, Louise, Pauline, Jess', Alexis et les autres, les membres de l'équipage de *Bois le Vent*, et enfin ma chère équipe de Strasbourg.

Je tiens à remercier le président du jury Christophe Tournier ainsi que les rapporteurs Eric Bonnetier et Paco Chinesta pour avoir lu et rapporté mon travail. Merci aussi à tous les membres du jury de s'y être intéressé.

Le premier jour où j'ai traversé le grand hall de l'École Polytechnique, avec tous ces portraits des grands noms du monde scientifique encadrés qui me regardaient, je me suis demandé si j'étais bien à ma place. J'en ressors aujourd'hui, pas forcément plus sûr de moi, mais avec cette sensation tout de même d'avoir apporté une petite pierre à l'édifice. Jamais je n'aurais cru être capable de réaliser "une thèse en maths", c'est ce que je réponds quand on me demande ce que je fais dans la vie, j'ajoute parfois même "...à Polytechnique" et tout ça paraît être incroyablement difficile. Ça peut l'être en effet, j'étais le premier à douter, à me demander pourquoi donc j'avais signé ce contrat de thèse, en mathématiques avec qui je ne m'étais jamais forcément bien entendu... Je ne sais pas si l'on s'entend mieux, mais je

REMERCIEMENTS

n'aurais jamais réussi si toutes les personnes citées plus haut n'avaient pas été autour de moi. Un grand merci encore.

Table des matières

1	Etat de l'art	9
1.1	Introduction	9
1.2	La fabrication additive métallique sur lit de poudre	11
1.3	Les contraintes du procédé SLM	12
1.3.1	Contraintes résiduelles	12
1.3.2	Déformations plastiques	14
1.3.3	Supports de fabrication	15
1.3.4	Dépoudrage	16
1.3.5	Gamme de fabrication	17
1.3.6	Simulation du procédé	18
1.4	Optimisation topologique pour la fabrication additive métallique sur lit de poudre	19
1.4.1	Prise en compte de contraintes géométriques dans l'optimisation	19
1.4.2	Optimisation de formes des supports	21
1.4.3	Prise en compte de la simulation du procédé dans l'optimisation	21
1.4.4	Optimisation conjointe de la pièce et des supports	22
1.5	Problématique	23
2	Optimisation de forme	25
2.1	Introduction	25
2.1.1	Catégories d'optimisation de forme	25
2.1.2	Méthode de densité	26
2.1.3	Méthode de lignes de niveau, ou level-set	26
2.2	Dérivée de forme	27
2.2.1	Définition	27
2.2.2	Méthode du Lagrangien	28
2.3	Gestion des contraintes d'optimisation - Lagrangien augmenté	30
2.3.1	Contraintes d'égalité	30
2.3.2	Contraintes d'inégalité	30
2.4	Application : minimisation de la compliance	31
2.4.1	Définition du problème	31
2.4.2	Calcul de la dérivée de forme et mise à jour de la forme par advection de la level-set	31
2.4.3	Algorithme	32
2.4.4	Exemple classique	32
3	Optimisation de supports de fabrication	35
3.1	Introduction	35
3.2	Chargements imposés sur les surfaces en <i>overhang</i>	36
3.3	Chargements thermoélastiques équivalents	38
3.3.1	Simulation du procédé	38
3.3.2	Validation du modèle	39
3.3.3	Optimisation de forme des supports	40
3.3.4	Évaluation de la performance des supports	43
3.4	Pénalisation de la surface de contact pièce/supports	43
3.5	Résultats numériques 3D	44
3.5.1	Chargements imposés sur les surfaces en <i>overhang</i>	44

3.5.2	Chargements thermoélastiques équivalents	47
3.6	Supports anisotropes	49
3.6.1	Définition du problème	49
3.6.2	Loi de Hooke homogénéisée et problème de cellule	50
3.6.3	Résultats numériques : Application aux supports 'alvéolés, type <i>Magics</i> '.	51
3.7	Conclusions et perspectives	54
4	Optimisation à partir de la méthode <i>inherent strain</i>	57
4.1	Simulation du procédé par la méthode <i>inherent strain</i>	58
4.2	Stratégie d'optimisation	60
4.2.1	Problème final	60
4.2.2	Problème intermédiaire	61
4.2.3	Problème d'optimisation	61
4.2.4	Dérivée de forme	62
4.3	Optimisation de forme de la pièce	62
4.3.1	Déplacements verticaux à chaque couche	63
4.3.2	Critère de Von Mises	64
4.3.3	Déplacement résiduel après séparation du plateau	66
4.3.4	Vérification expérimentale	69
4.4	Calibration des coefficients <i>inherent strain</i> par analyse inverse	75
4.4.1	Recherche des données synthétiques	76
4.4.2	Recherche des données mesurées	77
4.5	Optimisation de forme des supports	80
4.6	Conclusions et perspectives	81
5	Optimisation du couple pièce/support	83
5.1	Introduction	83
5.2	Optimisation de forme conjointe de la pièce et des supports	83
5.2.1	Problème d'optimisation	84
5.2.2	Dérivée de forme	86
5.2.3	Résultats numériques 2D	87
5.2.4	Résultats numériques 3D	90
5.3	Conclusions et perspectives	93
6	Contrainte d'accessibilité	95
6.1	Introduction	95
6.2	Définitions de l'accessibilité	96
6.3	Calcul de la distance signée avec obstacle	97
6.4	Dérivée de forme de l'obstacle	99
6.5	Dérivée de forme de forme du domaine accessible	101
6.6	Critères d'accessibilité	101
6.6.1	Critère d'accessibilité normale	102
6.6.2	Critère d'accessibilité multi-directionnelle	103
6.7	Résultats numériques 2D	105
6.7.1	Optimisation de l'obstacle	105
6.7.2	Optimisation du domaine accessible	108
6.7.3	Forme accessible et optimisée pour un problème mécanique	109
6.7.4	Optimisation conjointe de la forme de l'obstacle et du domaine accessible	111
6.8	Résultats numériques 3D	112
6.8.1	Optimisation de forme de l'obstacle	113
6.8.2	Optimisation de forme conjointe de l'obstacle et du domaine accessible	114
6.8.3	Optimisation de forme conjointe de l'obstacle et de la zone à accéder dans un problème mécanique	114
6.8.4	Problème d'accessibilité pour la fabrication additive	116
6.9	Conclusion	119

Liste des tableaux

- 3.1 Propriétés du matériau Ta6V utilisées pour la simulation du procédé 39
- 3.2 Comparaison des compliances obtenues après optimisation des supports avec et sans la pénalisation de la surface de contact entre la pièce et ses supports. 45
- 3.3 Comparaison des compliances pour un volume matière (ou poids) identique, obtenus après optimisation des supports aux propriétés mécaniques différentes. 54

- 4.1 Position sur l'axe x et déplacement vertical calculé au point x_i du peigne pour les coefficients $a_{1,ref}$ et $a_{2,ref}$ et calculé par les coefficients obtenus après convergence de l'algorithme. 78
- 4.2 Position et déplacement vertical $\hat{v}_z(x_i)$ mesuré au point x_i . $v_z(x_i)$ est le déplacement vertical au point x_i calculé par le modèle développé en section 4.3.3 avec les coefficients $\epsilon_{\mathcal{L}_i}^*$ obtenus par analyse inverse. 80

- 5.1 Valeurs à convergence des contraintes du problème (5.5) pour les deux résultats obtenus. Ces valeurs sont ajustées avec celles calculées avant la 1^{ière} itération, sur la structure initiale (Figure 5.4 (à droite)). 90
- 5.2 Valeurs à convergence des contraintes du problème (5.23). Ces valeurs sont ajustées avec celles calculées avant la 1^{ière} itération, sur la structure initiale (Figure 5.11). 93

Table des figures

1	Illustration du procédé SLM, le laser vient fusionner localement le lit de poudre puis après solidification, une nouvelle couche est étalée par dessus par le racleur.	1
2	Supports (en bleu) optimisés pour un chargement mécanique. La surface de contact entre la pièce (en blanc) et son support est pénalisée facilitant les opérations de retrait.	3
3	Supports optimisés pour un chargement thermoélastique limitant la déformation de la pièce lors de sa fabrication, couplé avec un chargement mécanique garantissant la fabrication de la pièce.	4
4	Comparaison des déformées numériques entre la géométrie de référence (à gauche) et celle optimisée (à droite) pour le critère mesurant le déplacement après découpe.	4
5	Fabrication des géométries optimisées pour les différents critères calculés avec les solutions de la méthode <i>inherent strain</i>	5
6	Résultats d'optimisation conjointe de la pièce et de ses supports, différents selon la pondération choisie pour chaque contrainte.	5
7	Distances d , solutions d'équations eikonales utilisées pour la résolution du problème d'accessibilité. En présence de l'obstacle (en blanc), le champ se voit perturbé (à droite) contrairement à celui où l'obstacle n'est pas considéré (à gauche). Cette perturbation mettra plus tard en valeur les points non-accessibles du domaine depuis le bord gauche .	6
8	L'optimisation conjointe de la pièce (en blanc) et de ses supports (en bleu) rend accessibles ces derniers depuis les bords verts du domaine.	6
1.1	Extrait de planche de "Tintin et le Lac aux Requins" [91]	10
1.2	Premier croquis déposé du concept de stéréolithographie, d'après [79]	10
1.3	Schéma explicatif du procédé de fusion laser sur lit de poudre	11
1.4	Expansion thermique de la zone affectée thermiquement par le laser	12
1.5	Retrait thermique du matériau durant la phase de refroidissement	13
1.6	Photographies d'éprouvettes montrant la déformation après relaxation des contraintes résiduelles extraites de [94]	13
1.7	Photographies de pièces présentant des défauts liés à des contraintes résiduelles trop importantes pendant la fabrication	14
1.8	Schéma du phénomène de déformation des couches lors de la construction de surfaces inclinées. Si les déformations sont trop importantes, le racleur peut heurter l'extrémité des couches.	15
1.9	Représentation de surfaces spécifique devant nécessiter un maintien par des supports de fabrication.	16
1.10	Géométries typiques de supports destinés à être retirés manuellement	16
1.11	Photographies prises pendant une opération de retrait de supports	17
1.12	Photographie du lit de poudre après fabrication pendant la première étape de dépoudrage	17
1.13	Étapes d'une gamme classique de fabrication	18
1.14	Optimisation topologique sans contrainte d'angle imposé (à gauche) et avec (30°) (à droite) pour former une structure autoportante.	20
1.15	Optimisation topologique sans contrainte d'épaisseur minimale de barre (à gauche) et avec (à droite) d'après [62]	20
1.16	Optimisation topologique sans la prise en compte de cavités (à gauche) et avec (à droite), extrait de [174]	20

1.17	Optimisation de forme de la pièce et de ses supports pour rendre ces derniers accessibles en ligne droite depuis les bords verts du domaine	21
1.18	Forme fixée (à gauche) maintenue par ses supports optimisés pour un chargement volumique type gravité (à droite) d'après [10].	21
1.19	Optimisation topologique sans minimisation des contraintes résiduelles (à gauche) et avec (à droite) extrait de [15]	22
1.20	Différents résultats d'optimisation topologique conjointe de la pièce et des supports, avec une contrainte sur le volume des supports (verts) variable d'après [84]	22
2.1	Solutions d'un problème d'optimisation avec la méthode des densités, sans pénalisation des densités intermédiaires (a) et avec (b) (schéma SIMP) [142]	26
2.2	Représentation d'une forme définie par une level-set où l'iso0 est représentée par le trait blanc (à gauche), et la représentation en dimension 3 de la fonction ligne de niveau (à droite)[60]	27
2.3	Transport de la forme Ω_0 par le champ de vecteurs $\theta(x)$	27
2.4	Evolution de la forme et des courbes de convergence en fonction des itérations	33
3.1	Le bord de la forme ω est considéré comme <i>overhang</i> s'il forme un angle supérieur ou égal à β avec la direction de fabrication e_d	36
3.2	Maillage exact du domaine extérieur (rouge) à la forme du cantilever (à gauche) et définition des bords Γ_β avec $\beta = 45^\circ$ et Γ_D (à droite)	37
3.3	Supports optimisés (en bleu) obtenus par minimisation de la compliance calculée à partir des chargements verticaux sur les surfaces en <i>overhang</i> d'une pièce fixe (en blanc), avec comme angle limite $\beta = 45^\circ$	37
3.4	Domaine D divisé en M macro-couches horizontales.	38
3.5	Déplacements verticaux sommés (dans la direction de fabrication) d'une plaque, obtenus avec le logiciel <i>Simufact.Additive</i> \mathbb{R} (haut) et avec le modèle développé 3.3.1 (bas).	40
3.6	Déplacements horizontaux sommés d'une plaque, obtenus avec le logiciel <i>Simufact.Additive</i> \mathbb{R} (haut) et avec le modèle développé en sous section 3.3.1 (bas).	41
3.7	Géométrie du double cantilever (tous les coins, excepté ceux collés au plateau, sont arrondis avec le même rayon de courbure)	41
3.8	Déplacement maximal montré sur la moitié du cantilever, simulé avec le modèle décrit dans 3.3.1 (à gauche), et visualisation des forces équivalentes obtenues de (3.7) (à droite). 41	41
3.9	Supports optimisés (en bleu) obtenus après minimisation de la compliance (3.10) calculée à partir des forces équivalentes uniquement (à gauche), et après minimisation de la somme des deux compliances (3.11) (à droite)	42
3.10	Résultats de la simulation du procédé obtenu avec <i>Simufact Additive</i> \mathbb{R} pour le cantilever maintenu par les supports optimisés pour les chargements d'origine thermique uniquement (à gauche) (déplacements maximum de la pièce : 0.17 mm), et pour les supports optimisés pour les chargements multiples (à droite) (déplacement maximum de la pièce : 0.31mm)	43
3.11	A gauche, les conditions aux limites pour les chargements imposés aux surfaces en <i>overhang</i> sont montrés, sans pénalisation de la surface de contact entre la pièce et ses supports, les supports peuvent s'appuyer sur les parties horizontales de la pièce. A droite, dans le cas où la pénalisation est prise en compte, les conditions aux limites de Dirichlet ne s'appliquent que sur le bord inférieur du domaine.	44
3.12	Optimisation de forme des supports sans pénalisation de la surface de contact pièce/supports (à gauche) et avec (à droite). Pour ce dernier cas, la condition aux limites de Dirichlet est restreinte à la base du domaine.	44
3.13	Forme du tube ω à supporter (à gauche), et visualisation des différentes parties du bord de ω (à droite) : en gris le bord libre, en vert les bords où les supports peuvent s'attacher, en bleu les bords en <i>overhang</i> Γ_β avec $\beta = 45^\circ$	45
3.14	Supports optimisés pour la minimisation de la compliance calculée à partir des chargements imposés sur les surfaces en <i>overhang</i> . Les supports peuvent s'appuyer sur d'autres parties du bord de la pièce.	46

3.15	Supports optimisés pour la minimisation de la compliance calculée à partir des charge- ments imposés sur les surfaces en <i>overhang</i> . Les supports ne sont fixés qu'au plateau et la surface de contact entre la pièce et ses supports est pénalisée.	46
3.16	Géométrie du double cantilever et de ses plans de symétrie. Les calculs ne sont effectués que sur un quart du domaine total.	47
3.17	Supports optimisés (en bleu) obtenus après minimisation de la compliance (3.10) calculée à partir des forces équivalentes uniquement.	47
3.18	Supports optimisés (en bleu) obtenus après minimisation de la somme des deux com- pliances (3.11)	48
3.19	Résultats de la simulation du procédé donnés par <i>Simufact Additive</i> $\text{\textcircled{R}}$ du double cantile- ver maintenu par les supports générés par <i>Materialise Magics</i> $\text{\textcircled{R}}$ (déplacement maximum de la pièce : 0.83) (en haut), et par les supports optimisés (déplacement maximum de la pièce : 0.40 mm) (en bas).	48
3.20	Supports bloc utilisés par le logiciel <i>Materialise Magics</i> $\text{\textcircled{R}}$ (à gauche), et le double can- tilever supporté par ces supports (à droite)	49
3.21	Cellule de périodicité considérée pour l'optimisation de forme des supports alvéolés. . .	51
3.22	Domaine D où g est normale à Γ_N	51
3.23	Optimisation de forme des supports avec des propriétés matériau isotropes.	52
3.24	Courbes de convergence pour la compliance (noir) et le volume (vert) des supports aux propriétés isotropes.	52
3.25	Optimisation de forme des supports en dimension 3 aux propriétés matériau orthotropes (avec $m = 0.8$).	53
3.26	Courbes de convergence pour la compliance (noir) et le volume (vert) des supports aux propriétés anisotropes.	54
3.27	Supports optimisés (en bleu) aux propriétés orthotropes (avec $m = 0.8$) obtenus après minimisation de la somme des deux compliances (3.11)	55
4.1	Construction couche par couche du domaine D	59
4.2	Construction couche par couche de la forme ω_i dans le domaine D_i , déformée par l'ap- plication successive de ϵ^* à chaque couche.	60
4.3	Visualisation du critère de Von Mises sur la coupe d'un cube dont la fabrication a été simulée en considérant 50 macro-couches, par <i>FreeFEM</i> (à gauche) et <i>Simufact Additive</i> $\text{\textcircled{R}}$ (à droite)	60
4.4	Conditions aux limites de Dirichlet et de Neumann pour la poutre MBB	63
4.5	Forme optimisée pour le problème de la poutre MBB	63
4.6	Somme des déplacements verticaux à chacune des 20 couches considérées pour simuler la fabrication de la poutre MBB initiale, vue sur le côté (à gauche) et de face (à droite). . .	64
4.7	Somme des déplacements verticaux à chacune des 20 couches considérées pour simuler la fabrication de la poutre MBB optimisée, vue sur le côté (à gauche) et de face (à droite). .	64
4.8	Courbes de convergence pour le critère $J_1(\omega)$ (en rouge), la compliance $C(\omega)$ (en noir) et le volume $ \omega $ (en vert)	65
4.9	Critère de Von Mises tracé sur la forme initiale, construite avec 20 couches. Valeur maxi- mum : 980 MPa.	65
4.10	Critère de Von Mises tracé sur la forme finale. Valeur maximum : 900 MPa.	66
4.11	Courbes de convergence pour le critère $J_2(\omega)$ (en rouge), la compliance $C(\omega)$ (en noir) et le volume $ \omega $ (en vert).	66
4.12	<i>Problème 1</i> , modélisant la construction couche par couche de la pièce avec la méthode <i>inherent strain</i> (4.3).	66
4.13	<i>Problème 2</i> , modélisant la séparation partielle de la pièce au plateau.	67
4.14	Conditions aux limites appliquées au domaine D du nouveau problème en service. . . .	68
4.15	Forme optimisée pour le nouveau problème final.	69
4.16	Conditions aux limites appliquées au domaine D pour le <i>problème 2</i>	69
4.17	Géométrie initiale (à gauche) et optimisée (à droite) pour le déplacement vertical après découpe partielle du plateau.	69
4.18	Comparaison des déformées numériques entre la géométrie de référence (à gauche) et optimisée (à droite).	70

4.19	Courbes de convergence pour le critère $J(\omega)$ (en rouge), la compliance $C(\omega)$ (en noir) et le volume $ \omega $ (en vert).	70
4.20	Plateau de fabrication après dépoufrage comprenant les 15 géométries nécessaires à la validation des critères. Dans le cadre vert (A) se trouvent les géométries optimisées pour le critère (4.18); dans le cadre rouge (B) les géométries de référence pour le test du critère (4.18) et dans le cadre bleu (C) sont les géométries de référence et optimisées pour le critère (4.27).	71
4.21	Géométrie optimisée pour le critère (4.27), fabriquée à l'aide d'un support fin (entouré en rouge) pour assurer la construction de la surface en <i>overhang</i> .	72
4.22	Géométries découpées partiellement du plateau. Une différence de flèche peut être observée entre les géométries de référence et optimisées.	72
4.23	Numérisation du plateau avant découpe partielle (à gauche) et après découpe partielle (à droite).	73
4.24	Superposition des plateaux numérisés.	73
4.25	Géométrie de la poutre MBB initiale (à gauche) et optimisée (à droite) pour le déplacement vertical après découpe partielle du plateau.	74
4.26	Géométries de référence et optimisées pour le critère (4.18).	74
4.27	Photo du lit de poudre de la couche 214 après lasage (à gauche) et de la couche 215 avant lasage (à droite). Certaines extrémités de couches précédemment fusionnées dépassent du lit de poudre (entourées en rouge).	75
4.28	Géométrie du peigne (à gauche) et fonctions caractéristiques $\chi_{B_\varepsilon}(x_i)$ du modèle numérique (à droite).	77
4.29	Courbes de convergence pour les coefficients a_1 et a_2 (à gauche) et pour la fonction $J_{inv}(a)$ (à droite).	77
4.30	Plans médians de la forme ω_{ref} fabriquée, avant et après découpe, sur lesquels sont pris les mesures $\bar{v}_z(x_i)$.	79
4.31	Fonctions caractéristiques $\chi_{B_\varepsilon}(x_i)$ du modèle numérique.	79
4.32	Courbes de convergence pour le coefficient a_1 (à gauche) et pour la fonction $J_{inv}(a)$ (à droite).	80
4.33	Forme ω fixe non supportée (à gauche) avec les déplacements verticaux induits par la fabrication (à droite).	81
4.34	Forme initiale des supports (à gauche, en bleu) et forme optimisée (à gauche) minimisant le critère (4.47) dans la structure complète Ω .	82
4.35	Courbe de convergence pour le critère $J_4(\Omega)$ (rouge) et pour le volume $ S $ (vert).	82
5.1	Les deux lignes de niveaux φ_1 (à gauche) et φ_0 (au milieu) permettent la distinction de trois phases (Ω, ω et ${}^c\Omega$, la phase S est définie par $\Omega \setminus \omega$ (à droite).	84
5.2	Pénalisation de la zone de contact pièce/support (montrée par une bande d'épaisseur ε , en rouge), calculée sur le bord $\partial\omega \cap S$.	85
5.3	Conditions aux limites pour le cantilever court (à gauche), forme optimisée ω_{ref} (au milieu) et déplacements verticaux associés après une simulation du procédé (à droite) considérant 70 macro-couches.	88
5.4	Conditions aux limites pour la structure Ω , différentes de celle de ω (Γ_{D_f} en pointillé) (à gauche) et initialisation de la structure Ω composée de la forme ω_{ref} et d'une forme trouée (à droite). La zone de pénalisation de la surface de contact pièce/supports est également identifiée (en rouge).	88
5.5	Première optimisation conjointe du cantilever court et de ses supports (à gauche) et courbe de convergence pour chaque critère (hormis la pénalisation $\mathcal{P}_\varepsilon(\Omega)$) (à droite).	89
5.6	Deuxième solution d'optimisation conjointe du cantilever court et de ses supports (à gauche) et courbe de convergence pour chaque critère (hormis la pénalisation $\mathcal{P}_\varepsilon(\Omega)$) (à droite).	89
5.7	Conditions aux limites pour l'attache, le cylindre central est une zone où la matière est exclue depuis laquelle est appliquée les chargements surfaciques (en bleu). L'encoche montrée à droite est également une zone où la matière est exclue.	90
5.8	Forme optimisée ω_{ref} (à gauche) et déplacements verticaux associés après une simulation du procédé (à droite) considérant 20 macro-couches.	90

5.9	Fonction caractéristique χ_β tracée sur la forme ω	91
5.10	Domaine D_S avec ses différentes conditions aux limites. La fonction caractéristique χ_β sur laquelle est appliquée la force g est tracée en bleu.	92
5.11	Forme optimisée des supports S pour le critère (5.21)	92
5.12	Forme optimisée des supports S pour le critère (5.21)	93
5.13	A gauche, les courbes de convergence pour la fonction objectif (en bleu) ainsi que pour le critère $J_{fab}(\Omega)$ (en rouge), la compliance $C(\omega)$ (en noir), le volume $ \omega $ (en vert) et le volume de la structure $ \Omega $ (en violet)(à changer). A droite, la courbe de convergence de la compliance $C_2(S)$, son évolution tout au long de l'optimisation est rendue chaotique par la surface sur laquelle est elle calculée, dépendant de la forme ω	93
6.1	Domaine Ω , séparé en deux sous-domaines par l'interface Σ	96
6.2	A gauche, le point x_1 n'est pas accessible de manière normale et le point x_2 ne l'est que depuis le point y_2 . A droite, le point x_1 est accessible de manière multi-directionnelle depuis y_2 , tout comme le point x_2	97
6.3	Squelette (en noir) de la distance signée d'un rectangle.	98
6.4	Exemple d'obstacle, en rouge, choisi pour la résolution de (6.3). La vitesse V_- y est imposée à l'intérieur, V_+ à l'extérieur.	98
6.5	Champ solution de l'Equation (6.3) avec $V_- = 0.1$ et $V_+ = 1$	98
6.6	Champ solution de (6.3) résolue sur Ω_+ (à gauche) et champ solution de (6.3) résolue sur le domaine complet Ω avec $V_- = 0.001$	99
6.7	Domaine Ω séparé en trois sous-domaines par l'interface Σ fixe et $\partial\Omega_{out}$ variable.	101
6.8	Solution de l'équation (6.3) avec $V_+ = V_- = 1$, n'étant rien d'autre que la distance euclidienne au bord Γ_D (bord gauche) sur le domaine.	102
6.9	Deux lignes de courant du champs $V\nabla d$	102
6.10	Le champ $d - d_{0,\Gamma_D}$ est tracé sur Ω montrant les points non-accessibles du domaine (à gauche). Fonction $h_\varepsilon(k(d))$ sur Ω , mettant mieux en valeur les points non-accessibles de manière normale depuis les points du bord Γ_D (à droite).	103
6.11	Visualisation des lignes de courant du champ $V\nabla d_{0,y_i}$ (à gauche) et d_{0,Γ_D} (à droite)	104
6.12	L'accessibilité du bord Γ_{out} est mesurée depuis trois points du bords Γ_D et en prenant en compte l'obstacle en rouge (à gauche). Le champ $\min_{y_i, i=1,2,3} (d_{y_i} - d_{0,y_i})$ tracé sur Ω (à droite).	104
6.13	Fonction $h_\varepsilon(d_{y_i})$ sur Ω , mettant mieux en valeur les points non accessibles depuis les points du bord Γ_D	105
6.14	Visualisation de l'état adjoint p résolu par différences finies pour le critère $J_{1,reg}(\Sigma)$	106
6.15	Optimisation de la forme de l'obstacle pour le critère $J_{1,reg}(\Sigma)$ intégrant la fonction $h_\varepsilon(k(d))$ sur Γ_{out} . La forme initiale de l'obstacle est montrée à gauche, la forme après convergence à droite.	106
6.16	Courbes de convergence pour le critère (6.20) (en rouge) et le volume (en vert) de l'obstacle107	107
6.17	Optimisation de la forme de l'obstacle pour le critère $J_{2,reg}(\Sigma)$ intégrant la fonction $h_\varepsilon(d_{y_i})$ sur le bord droit Γ_{out} . La forme initiale de l'obstacle est montrée à gauche, la forme après convergence à droite.	107
6.18	Courbes de convergence pour le critère (6.23) (en rouge) et le volume (en vert) de l'obstacle108	108
6.19	Optimisation du domaine accessible Ω_{out} pour le critère $J_{1,reg}(\partial\Omega_{out})$ intégrant la fonction $h_\varepsilon(k)$ sur le bord $\partial\Omega_{out}$. L'obstacle est considéré fixe. La forme initiale est montrée à gauche, la forme obtenue à convergence à droite.	108
6.20	Courbes de convergence pour le critère (6.20) (en rouge) et le volume (en vert) du domaine accessible.	109
6.21	Forme Ω_- optimisée pour la compliance et une contrainte sur le volume $ \Omega_{out} $	110
6.22	Optimisation de forme de l'obstacle Ω_- pour le problème d'accessibilité et le problème mécanique. L'optimisation début de la forme initiale $\Omega_{-,ref}$ montrée à gauche et converge vers la forme montrée à droite.	111
6.23	Courbes de convergence pour le critère (6.31) (en rouge) et la compliance (en noir) et le volume (en vert) de l'obstacle	111

6.24	Optimisation de la forme de l'obstacle et du domaine accessible pour le critère $J_{1,reg}(\Sigma)$ mesuré sur le bord $\partial\Omega_{out}$. Les formes initiales sont montrées à gauche, les formes optimisées à droite.	112
6.25	Courbes de convergence pour le critère $J_{1,reg}(\Sigma, \Omega_{out})$ (en rouge), pour le volume (en vert) de l'obstacle et du domaine accessible (en violet)	112
6.26	Conditions aux limites pour le cas test de l'accessibilité normale d'un bord à un autre. .	113
6.27	Optimisation de la forme de l'obstacle pour le critère $J_{1,reg}(\Sigma)$ mesuré sur le bord $\partial\Omega_{out}$. La forme initiale de l'obstacle est montrée à gauche, la forme optimisée à droite.	113
6.28	Courbes de convergence pour le critère (6.20) (en rouge) et le volume (en vert) de l'obstacle	114
6.29	Forme initiale de l'obstacle (en blanc) et du domaine accessible (en bleu).	114
6.30	Optimisation de la forme de l'obstacle et du domaine accessible pour le critère $J_{1,reg}(\Sigma)$ mesuré sur le bord $\partial\Omega_{out}$	115
6.31	Conditions aux limites pour le problème mécanique (6.38) (à gauche) et pour le problème d'accessibilité (à droite) avec les formes initiales pour Ω_- (en rouge) et Ω_{out} (en blanc).	115
6.32	Optimisation des formes Ω_- (en rouge) et Ω_{out} (en blanc) pour le critère (6.39)	116
6.33	Optimisation des formes Ω_- (en rouge) et Ω_{out} (en blanc) pour le problème (6.40)	116
6.34	Conditions aux limites pour le problème mécanique (6.44) (à gauche) et (6.42) (à droite)	117
6.35	Optimisation de la forme ω (en blanc) et de ses supports S (en bleu) pour la compliance $C_2(\omega, S)$	118
6.36	Courbes de convergence pour les compliances C_ω (en noir) et C_{spt} (en bleu), le volume de la forme ω (en vert) et de ses supports (en violet). L'évolution du critère (6.34) est également tracé (en rouge), mais il n'est pas pris en compte dans l'optimisation.	118
6.37	Optimisation de la forme ω (en blanc) et de ses supports S (en bleu) pour le problème (6.47)	119
6.38	Courbes de convergence pour les compliances C_ω (en noir) et C_{spt} (en bleu), le volume de la forme ω (en vert) et de ses supports (en violet) et du critère (6.34).	119

Introduction

I. Motivation

Contexte

Cette thèse est consacrée à l'optimisation de la forme et de la topologie de pièces construites en fabrication additive par le procédé fusion laser sur lit de poudre métallique. Les nouveaux procédés de fabrication suscitent beaucoup d'intérêts ces dernières années pour leur capacité à construire des pièces complexes. En particulier la fabrication additive (FA) métallique sur lit de poudre permet aux industries de ne plus être limitées par les contraintes de fabrication conventionnelles (fraisage, moulage,...). Plus spécifiquement, le procédé le plus utilisé est le SLM (*Selective Laser Melting*, ou aussi LBM pour *Laser Beam Melting*), où un laser fond le lit de poudre très localement avant qu'un racleur étale une nouvelle couche de poudre après la solidification.

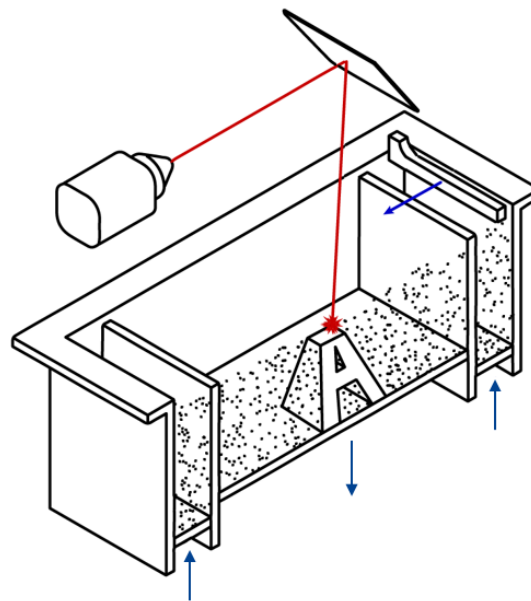


FIGURE 1 – Illustration du procédé SLM, le laser vient fusionner localement le lit de poudre puis après solidification, une nouvelle couche est étalée par dessus par le racleur.

Néanmoins, même si ce procédé offre une grande liberté dans le design de la pièce, il possède ses propres contraintes de fabrication. Les forts gradients de température apportés par la chaleur du laser de manière successive à chaque couche contraignent fortement la pièce et peuvent même la déformer lors de la fabrication, ne la rendant plus conforme au design voulu. Ces déformations, accumulées à chaque couche, peuvent parfois même causer l'arrêt de la machine si la partie déformée dépasse du lit de poudre lorsque le racleur étale une nouvelle couche. De plus, des contraintes résiduelles peuvent apparaître dû au jeu des dilatations et rétractations successives de chaque couche et fissurer la structure pendant sa fabrication. Une solution consiste alors à rajouter de la matière autour de la pièce, appelée supports de fabrication, pour la maintenir. Ces supports peuvent être optimisés [10],[9] pour minimiser la matière

utilisée, le temps de leur fabrication ou de leur retrait. Cependant, le concepteur peut préférer modifier la géométrie de la pièce plutôt que de rajouter cette matière supplémentaire onéreuse. L'objectif est donc de concevoir une pièce légèrement différente qui n'amène pas de défaut de fabrication tout en conservant une bonne performance de la pièce dans son utilisation finale. Une fois la pièce construite, il est nécessaire d'évacuer la poudre avant de la découper du plateau. Il faut alors s'assurer que la pièce ne comporte pas de cavité afin de ne pas enfermer de poudre dans sa structure. Lorsque la pièce est totalement dépoudrée, elle est séparée de son plateau de fabrication. Lors de cette étape, la pièce peut se déformer car elle relâche une partie de ses contraintes résiduelles accumulées pendant la fabrication.

Optimisation de forme

L'optimisation de forme [8],[29] est alors une solution pour obtenir des formes fabricables par le procédé de fusion laser sur lit de poudre en limitant ces différentes contraintes de fabrication. Cette méthode permet de trouver la forme optimale à un problème donné et suscite un fort intérêt ces dernières années du fait de son potentiel pour l'industrie. En effet, les formes générées sont la plupart du temps complexes et difficiles à fabriquer par des procédés de fabrication classiques (fraisage, moulage,...).

Parmi les méthodes d'optimisation de forme présentes dans l'industrie, on peut citer la méthode SIMP (Solid Isotropic Material Penalization) [33, 32] et la méthode des lignes de niveaux (ou level-sets)[19, 166]. La méthode SIMP vise à optimiser la densité de matière dans le domaine de conception. Cette densité est ensuite utilisée pour obtenir une géométrie. Cette approche est la plus populaire dans la littérature scientifique et est de fait très présente parmi les outils industriels d'optimisation de forme. La deuxième méthode s'appuie sur la variation d'une fonction ligne de niveaux, permettant une définition explicite de la forme en tout temps, ce que la méthode SIMP ne fait pas. Dans ces travaux, la méthode des lignes de niveaux sera utilisée répondre aux objectifs formulés.

Objectifs et cadre de la thèse

L'optimisation topologique du couple pièce/support consiste à modifier la géométrie de la pièce et de ses supports conjointement pour faire décroître une certaine fonction objectif, tout en préservant les éventuelles contraintes présentes dans le modèle. La structure finale obtenue sera optimisée en termes de coût de fabrication et d'utilisation pour un problème final donné. Plusieurs contraintes de fabrication liées à la technologie SLM devront être prises en compte dans le schéma d'optimisation de forme, et la majeure partie des travaux présentés ici y est dédiée. Différentes étapes de la gamme de production seront prises en compte en commençant par l'étape de fabrication, puis de la découpe de la pièce du plateau, et enfin du retrait des supports. L'étape de traitement thermique n'est pas abordée car elle nécessite une simulation trop fine du phénomène, et présente peu d'intérêt en terme d'optimisation de forme. On supposera également que l'orientation de la pièce sur le plateau de fabrication est fixée.

II. Résumé des chapitres

Ce mémoire de thèse s'articule autour de deux parties, la première permet d'introduire le contexte dans lequel se place cette thèse ainsi que les outils utilisés pour la réalisation des travaux. La deuxième présente les contributions de cette thèse constituées principalement de différentes contraintes d'optimisation développées pour limiter les contraintes de fabrication du procédé SLM. Les travaux sur l'optimisation du couple support/pièce seront également développés. Tous les modèles proposés sont validés à travers des simulations numériques en dimension 2 et 3.

Partie I : Contexte et outils

Chapitre I : État de l'art

Dans ce premier chapitre, le procédé de fabrication SLM est décrit. Les étapes nécessaires à la fabrication d'une pièce sont présentées, y compris celles n'étant pas considérées dans les travaux de cette thèse afin d'introduire largement le contexte technique. Surtout, les contraintes du procédé seront détaillées permettant de mieux comprendre les enjeux des travaux développés plus loin. Enfin, l'état de l'art concernant l'optimisation de forme pour des contraintes de fabrication additive est présenté, fixant le point de départ des travaux développés dans cette thèse.

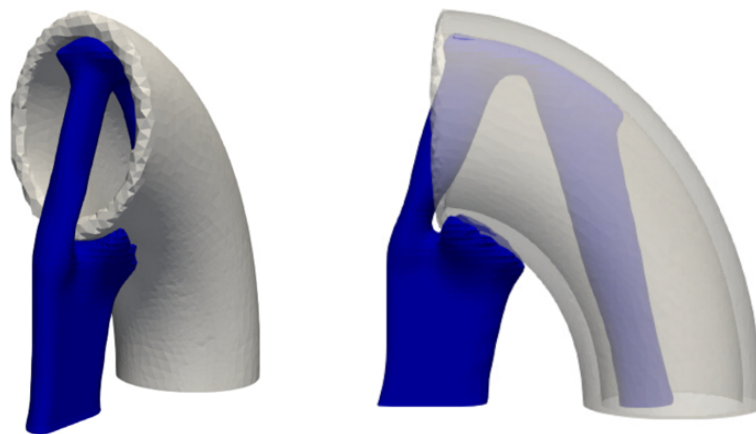


FIGURE 2 – Supports (en bleu) optimisés pour un chargement mécanique. La surface de contact entre la pièce (en blanc) et son support est pénalisée facilitant les opérations de retrait.

Chapitre II : Optimisation de forme

Ce deuxième chapitre présente les outils mathématiques utilisés lors de cette thèse. Un bref état de l'art des différentes méthodes d'optimisation de forme est présenté, puis la méthode de variation de frontière, ou méthode d'Hadamard, est introduite. Enfin, la méthode du Lagrangien Augmenté permettant de résoudre des problèmes d'optimisation sous contraintes, largement utilisés dans ces travaux, est brièvement décrit.

Partie II : Contributions

Chapitre III : Optimisation de forme de supports de fabrication

Les travaux de ce chapitre sont consacrés à l'optimisation de forme des structures supports. Un premier modèle de force mécanique est introduit permettant d'obtenir une forme de support maintenant les surfaces inclinées que présente la pièce. La prise en compte d'une pénalisation de la surface de contact entre la pièce et ses supports modélise également une contrainte de post-production, utile lors de l'opération de retrait des supports. La structure montrée en Figure 2 est ainsi obtenue, où un support (en bleu) permet la fabrication d'un tube coudé (en blanc) tout en minimisant les points de contact entre la pièce et son support ce qui facilite son retrait. Ce modèle a l'avantage d'être efficace, peu coûteux en temps calcul, car il garantit la fabrication de la pièce en n'utilisant qu'un problème mécanique, mais ne donne pas d'information sur les paramètres du procédé utilisé.

Un modèle de force équivalente aux déplacements d'origine thermique issus d'une simulation du procédé thermoélastique complète le modèle. La combinaison de ces deux modèles de force permettent d'obtenir des supports prévenant la déformation de la pièce pendant sa fabrication, tout en assurant la fabricabilité de ses surfaces inclinées. Un exemple des supports obtenus avec ce modèle est montré en Figure 3.

Une étude est également menée sur la modélisation du comportement des supports alvéolés, comme ceux utilisés par de nombreux industriels. Les performances de ces supports aux propriétés orthotropes sont ensuite analysées.

Chapitre IV : Optimisation de forme de supports de fabrication

Dans ce chapitre, une seconde méthode de simulation du procédé est présentée. Cette méthode, appelée *inherent strain* permet de simuler efficacement le procédé de fabrication couche par couche par un chargement purement mécanique. La simplicité de cette simulation permet son intégration dans le schéma d'optimisation de forme. Ainsi, plusieurs critères d'optimisation peuvent être formulés à partir des solutions de cette simulation pour limiter les défauts de fabrication. Par ailleurs, la pièce à fabriquer doit présenter une forme préservant autant que possible les performances mécaniques dans son utilisation finale, mesurées par le critère de compliance, ainsi que son volume.

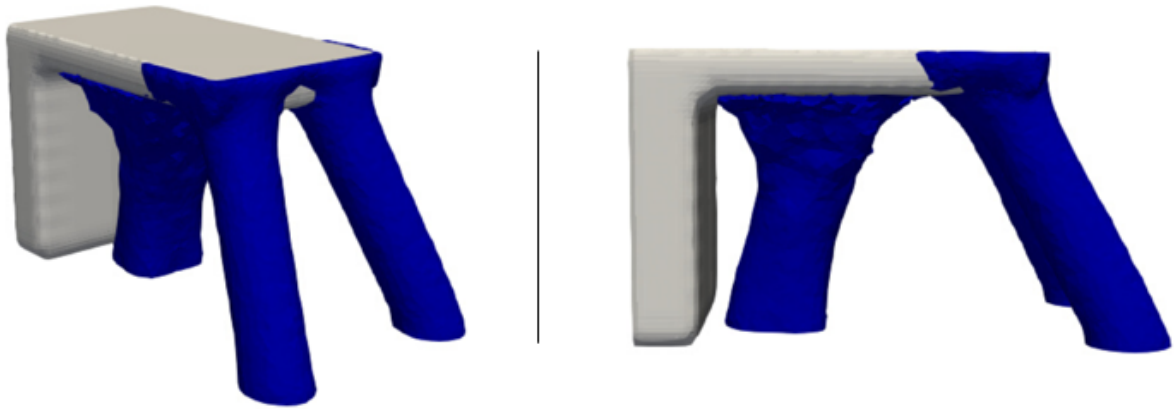


FIGURE 3 – Supports optimisés pour un chargement thermoélastique limitant la déformation de la pièce lors de sa fabrication, couplé avec un chargement mécanique garantissant la fabrication de la pièce.

Un critère visant à réduire les déplacements subits par la pièce après sa séparation du plateau est également considéré. La flèche présentée par la forme de la pièce obtenue après la minimisation de ce critère est comparée avec celle de la pièce optimisée uniquement pour le problème finale, comme montré en Figure 4.

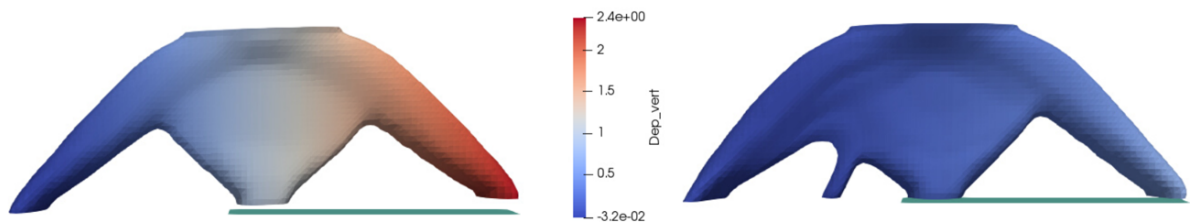


FIGURE 4 – Comparaison des déformées numériques entre la géométrie de référence (à gauche) et celle optimisée (à droite) pour le critère mesurant le déplacement après découpe.

La comparaison est également effectuée expérimentalement par la fabrication de ces géométries. Le plateau complet est d'ailleurs montré en Figure 5. Ces fabrications ont également permis de calibrer le modèle de simulation *inherent strain* par analyse inverse, permettant d'obtenir une simulation plus précise pour des géométries fabriquées avec ces mêmes paramètres de fabrication.

Enfin, un nouveau critère pour l'optimisation de forme des supports a été étudié, utilisant les solutions de ce modèle de simulation couche par couche.

Chapitre V : Optimisation de forme du couple pièce/support

Ce chapitre porte sur la problématique du sujet de thèse. Ici, les différents modèles de chargement pour l'optimisation de forme des supports ainsi que la méthode de simulation *inherent strain* seront utilisés pour optimiser conjointement la forme de la pièce et de ses supports. La forme de la structure à fabriquer (pièce et supports) devra présenter un volume minimal tout en garantissant sa fabricabilité et la bonne performance de la pièce dans un problème final. Différents résultats seront obtenus en fonction de la pondération choisie pour chaque contrainte, comme en témoignent ceux montrés en Figure 6 où plus ou moins de supports (en bleu) sont laissés pour supporter la forme (en blanc). On suppose dans ces travaux que plus le volume de matière à fabriquer est important, plus la pièce est chère à produire, plus le volume de la pièce, ou son poids, est important plus son coût de fonctionnement est élevé, dans un contexte aéronautique.

Un cas test plus complexe en 3 dimensions sera étudié dans ce chapitre.

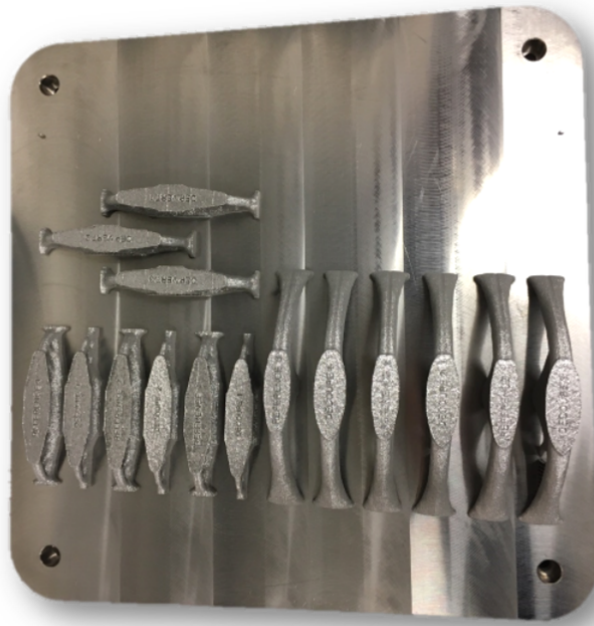


FIGURE 5 – Fabrication des géométries optimisées pour les différents critères calculés avec les solutions de la méthode *inherent strain*.

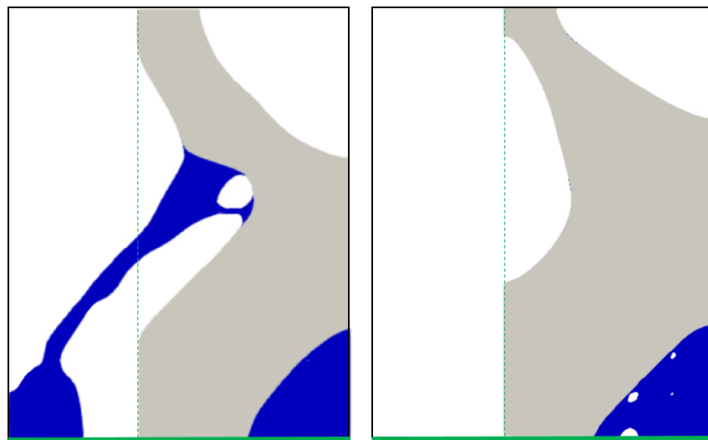


FIGURE 6 – Résultats d'optimisation conjointe de la pièce et de ses supports, différents selon la pondération choisie pour chaque contrainte.

Chapitre VI : Accessibilité

Les travaux de ce chapitre sont consacrés à une contrainte d'accessibilité qui peut être utilisée dans un processus d'optimisation de forme. On cherche ici à répondre à une contrainte de post-production en rendant une forme accessible en ligne droite depuis l'extérieur de son domaine de conception afin d'être parachevée par un outil coupant. Un critère d'optimisation est formulé grâce aux solutions d'équations eikonales résolues dans un domaine présentant un obstacle. Le champ solution des équations eikonales mesurant une distance à un bord donné se voit être perturbé par la présence de l'obstacle, permettant par la suite de mettre en valeur les points non-accessibles du domaine depuis ce bord. En Figure 7 sont montrés deux champs distance solutions d'équations eikonales utilisées pour résoudre le problème d'accessibilité. A gauche le champ, qui est la distance signée au bord gauche du domaine ne contenant

aucun obstacle, n'est pas perturbé contrairement au champ solution de l'équation résolue sur un domaine comportant un obstacle circulaire (en blanc), à droite.

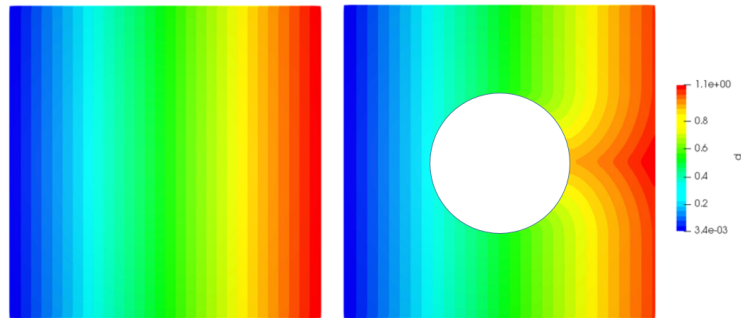


FIGURE 7 – Distances d , solutions d'équations eikonales utilisées pour la résolution du problème d'accessibilité. En présence de l'obstacle (en blanc), le champ se voit perturbé (à droite) contrairement à celui où l'obstacle n'est pas considéré (à gauche). Cette perturbation mettra plus tard en valeur les points non-accessibles du domaine depuis le bord gauche

Un cas test en 3 dimensions est montré où l'optimisation de forme conjointe de la pièce à fabriquer et de ses supports permet à ces derniers d'être accessibles depuis certains bords du domaine de conception, comme montré en Figure 8 où les supports bleus sont accessibles depuis les bords verts du domaine.

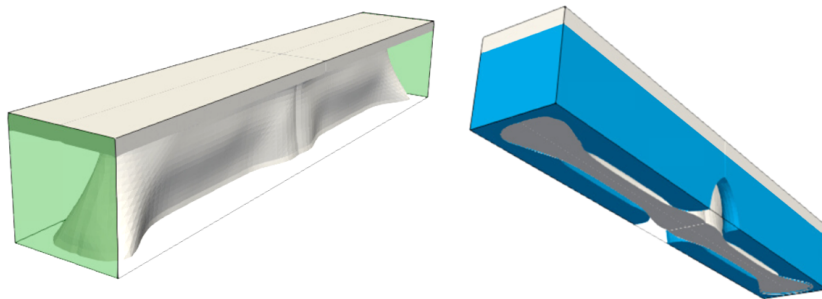


FIGURE 8 – L'optimisation conjointe de la pièce (en blanc) et de ses supports (en bleu) rend accessibles ces derniers depuis les bords verts du domaine.

LISTE DES PUBLICATIONS ET COMMUNICATIONS

Articles de journaux

- G. Allaire, M. Bihl and B. Bogosel. Support optimization in additive manufacturing for geometric and thermo-mechanical constraints. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, pages 1277-2399, 2020.
- M. Bihl, G. Allaire, B. Bogosel, F. Bordeu and J. Querois. Part and supports optimization in metal powder bed additive manufacturing using fast process simulation, en rédaction, 2021.
- Future publication en préparation sur la contrainte d'accessibilité.

Communications orales

- "Topology optimization of support structures for thermomechanical constraints in powder bed additive manufacturing", M.Bihl, G.Allaire, B.Bogosel, X.Betbeder, F.Bordeu, J.Querois, Book of abstracts - PGMO Days, 3-4 Décembre 2019, Palaiseau, FRANCE..
- "Topology optimization of support structures for thermomechanical constraints in powder bed additive manufacturing", M.Bihl, G.Allaire, B.Bogosel, X.Betbeder, F.Bordeu, J.Querois, Book of abstracts - 14th WCCM & ECCOMAS Congress, January 11-15, 2021.
- "Topology optimization in metal additive manufacturing using an inherent strain based simulation", M.Bihl, G.Allaire, B.Bogosel, X.Betbeder, F.Bordeu, J.Querois, Book of abstracts - WCSMO-14, June 13-18, 2021

Chapitre 1

Etat de l'art

Contents

1.1	Introduction	9
1.2	La fabrication additive métallique sur lit de poudre	11
1.3	Les contraintes du procédé SLM	12
1.3.1	Contraintes résiduelles	12
1.3.2	Déformations plastiques	14
1.3.3	Supports de fabrication	15
1.3.4	Dépoudrage	16
1.3.5	Gamme de fabrication	17
1.3.6	Simulation du procédé	18
1.4	Optimisation topologique pour la fabrication additive métallique sur lit de poudre	19
1.4.1	Prise en compte de contraintes géométriques dans l'optimisation	19
1.4.2	Optimisation de formes des supports	21
1.4.3	Prise en compte de la simulation du procédé dans l'optimisation	21
1.4.4	Optimisation conjointe de la pièce et des supports	22
1.5	Problématique	23

1.1 Introduction

La fabrication additive (FA) [23, 67] est un procédé de fabrication par ajout de couches successives [22]. Avant le *XX^{ième}*, l'Homme n'a cessé de fabriquer ses objets de manière soustractive, c'est à dire en partant d'un brut puis de lui enlever de la matière pour lui donner sa forme finale. En 1964, l'auteur de science fiction Arthur C. Clark rêve d'une "machine à répliquer" [46], puis en 1972, on peut voir l'imprimante tridimensionnelle du Professeur Tournesol dans "*Tintin et le Lac aux Requins*" (Figure 1.1) [91].

Ce n'est qu'en 1981 qu'Hideo Kodama publie deux articles [79, 78] dans lesquels il décrit une technique de prototypage rapide utilisant une résine photosensible pour fabriquer un objet couche par couche (Figure 1.2).

Le projet n'étant financé que de 545\$ par an par le laboratoire qui y portait peu d'intérêt, le projet est abandonné. Trois ans plus tard, c'est à la cantine de la Compagnie Générale d'Electricité (CGE, future Alcatel) qu'Alain Le Méhauté et Olivier de Witte ont l'idée de croiser deux lasers dans un bain de monomère afin de former un polymère, solide. Avec l'aide de Jean-Claude André qui suggère de déposer le monomère couche après couche, ils déposent un brevet en 1984 [20], trois semaines avant un certain Chuck Hull aux Etats-Unis [75]. La CGE abandonnera peu après le brevet pour manque de perspective commerciale... C'est donc l'Américain Chuck Hull, fondateur de l'entreprise 3DSystem [2] (entreprise très importante dans le secteur encore aujourd'hui) qui en 1988 lance la toute première machine à stéréolithographie (SLA, pour StereoLithography Apparatus). C'est de cette technologie

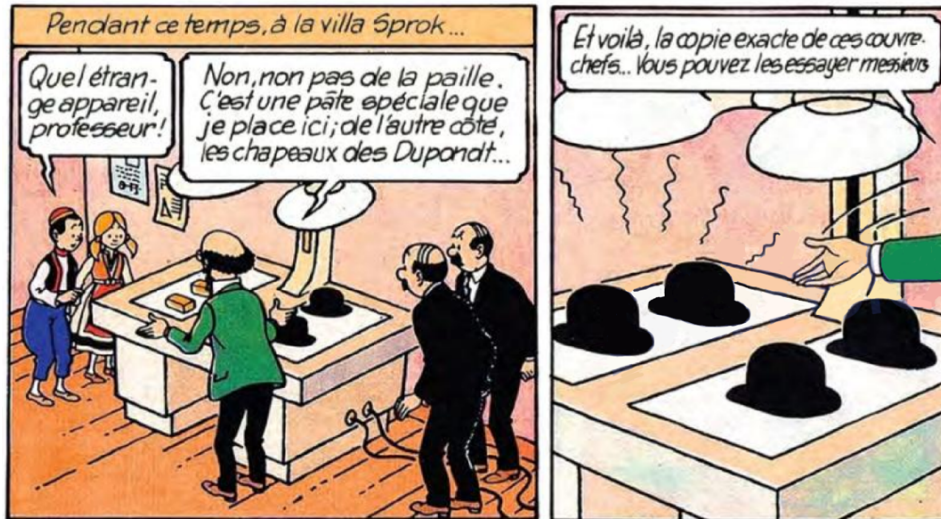


FIGURE 1.1 – Extrait de planche de "Tintin et le Lac aux Requins" [91]

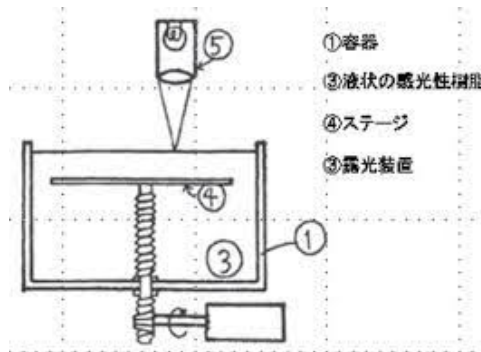


FIGURE 1.2 – Premier croquis déposé du concept de stéréolithographie, d'après [79]

qu'est nommé le format STL, encore utilisé aujourd'hui pour transférer un objet venant de la CAO (Conception Assistée par Ordinateur) à une machine de fabrication additive.

Aujourd'hui, la fabrication additive regroupe sept technologies différentes [22], du dépôt de filament polymère fondu à la fusion laser sur lit de poudre, et trouve ces applications chez les particuliers mais aussi et surtout chez les industriels dans les secteurs de l'aéronautique [83, 100, 82], l'automobile [138, 56, 170] ou encore le médical [149, 124]. Quelle que soit la technologie utilisée, la fabrication additive présente l'avantage majeur de fabriquer des pièces complexes sans surcoût [58] car elle est régie par moins de contraintes que ceux des procédés conventionnels comme la fonderie ou le fraisage. Ce procédé se prête au prototypage rapide [114], la personnalisation de pièce [113] ou la réparation d'objet [136]. Un autre avantage est le coût de démarrage d'une fabrication. Quelle que soit la complexité ou la taille de la pièce à fabriquer, le temps de préparation est faible, comparé aux autres procédés où il est nécessaire de fabriquer un moule, ou de programmer une machine CNC (*Computer Numerical Control*) [28]. Ce dernier point compense l'une des limitations majeures de la fabrication additive qui est le coût de production [127] et surtout de post production à grande échelle très élevé aujourd'hui comparé au moulage par injection par exemple. Enfin comme tout procédé d'élaboration de brut, la fabrication additive possède des contraintes de fabrication restreignant certaines libertés de conception pouvant impacter grandement la qualité structurelle de la pièce et son état de surface.

Dans la suite, nous nous intéresserons à la fabrication additive métallique sur lit de poudre. Cette technologie sera présentée en détails dans ce premier chapitre, en commençant par son fonctionnement, ses limites et les solutions mises en place pour les contourner.

1.2 La fabrication additive métallique sur lit de poudre

C'est en 1999 que les Allemands Matthias Fockele et Dieter Schwarze introduisent sur le marché la première machine de fabrication additive métallique sur lit de poudre [171]. Aujourd'hui, trois procédés différents s'appuient sur cette technologie : le metal binder jetting (MBJ) [182, 96], la fusion par faisceau d'électrons (EBM pour *Electron Beam Melting*) [119, 81] et la fusion laser sur lit de poudre (PBF pour *Powder Bed Fusion*) [90, 146, 145].

Le metal binder jetting consiste à déposer très localement de fines gouttelettes de liant sur un lit de poudre reposant sur un plateau de fabrication, en suivant la section transversale de la pièce. Une fois ce liant déposé, la chambre de fabrication contenant la pièce en construction et le lit de poudre descend de la hauteur d'une couche (quelques dizaines de microns) puis un dispositif appelé racleur ou rouleau étale une très fine couche de poudre par dessus. Le processus est réitéré jusqu'à construction de la pièce, dite "verte", c'est le procédé couche par couche. La pièce est ensuite débarrassée de la poudre qui l'entoure, retirée du plateau puis placée dans un four de déliantage, afin d'éliminer le liant par évaporation, puis dans un four de frittage pour combler les espaces laissés par la disparition du liant et coalescer les grains. On observe donc un retrait dimensionnel entre la pièce verte sortant du lit de poudre et la pièce finale, qui doit être évidemment uniforme sur toute la pièce. C'est pourquoi ce procédé est surtout utilisé pour des pièces de petite taille pour l'instant, car le retrait est moins délicat à contrôler. Néanmoins, le MBJ offre la possibilité de fabriquer des pièces extrêmement détaillées, nécessitant peu de retouches tout en ayant une cadence de production importante. Cette technologie est aujourd'hui regardée de très près par les industriels.

La fusion par faisceau d'électron repose cette fois sur la fusion très locale du lit de poudre par un faisceau d'électrons focalisé. L'énergie dissipée par les électrons heurtant la poudre fait chauffer celle-ci qui, au point de fusion, passe à l'état liquide puis se solidifie lors de l'étape de refroidissement. De même que pour le MBJ, une fois le lit de poudre balayé par le faisceau, une autre fine couche de poudre est étalée par dessus. Cette technologie est intéressante car elle apporte peu de contraintes résiduelles aux pièces. Néanmoins, les pièces doivent avoir une taille minimale et la qualité de l'état de surface est moyenne. De plus, le lit de poudre doit être entièrement préchauffé à une température élevée (autour de 600°C pour du Ta6V [6]) et la chambre de fabrication doit être maintenue quasiment sous vide [119]. Cette technologie a été beaucoup utilisée ces dernières années mais perd peu à peu d'intérêt aux vues de ses contraintes de fabrication, au profit de sa concurrente directe : la fusion laser sur lit de poudre.

La fusion laser sur lit de poudre reprend le même principe que l'EBM mais utilise un laser comme source d'énergie pour transformer le lit de poudre (Figure 1.3). On distingue deux procédés dans cette catégorie : le frittage laser direct de métal (DMLS pour *Direct Metal Laser Sintering*) et la fusion sélective par laser (SLM pour *Selective Laser Melting* ou LBM pour *Laser Beam Melting*). Le procédé DMLS chauffe seulement la poudre à des températures proches de celle de fusion du matériau et fritte simplement les particules métalliques, tandis que le SLM fond complètement la poudre.

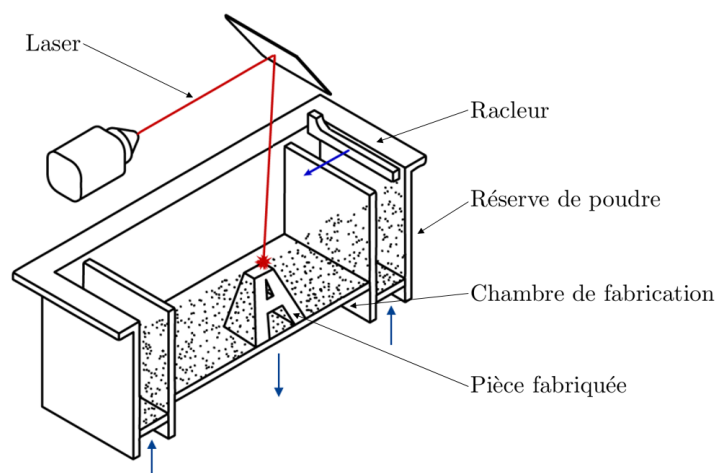


FIGURE 1.3 – Schéma explicatif du procédé de fusion laser sur lit de poudre

Dans ces travaux, le SLM sera étudié. C'est aujourd'hui le procédé le plus mature, il offre une qualité de pièce relativement bonne, et permet de construire des géométries plutôt massives, avec des chambres de fabrication allant jusque 400 cm^3 aujourd'hui. Les matériaux les plus répandus sont l'aluminium, les alliages base nickel (en particulier l'Inconel 718, qui conserve de très bonnes propriétés mécaniques après soudage [133]) ou le titane (en particulier le Ti-6Al-4V, ou Ta6V, offrant un bon compromis entre masse et propriété mécanique, ainsi qu'une bonne résistance à la corrosion [92]). Ces matériaux se présentent bien sûr avant la fabrication sous forme de poudres, réalisées par atomisation et dont les grains ont une taille située entre $15 \mu\text{m}$ et $50 \mu\text{m}$ [39]. L'épaisseur de couche utilisée est généralement située entre $20 \mu\text{m}$ et $60 \mu\text{m}$, permettant d'obtenir un bon niveau de détails [132, 147].

1.3 Les contraintes du procédé SLM

1.3.1 Contraintes résiduelles

Origines et conséquences

La plupart des contraintes de fabrication du procédé SLM viennent de l'interaction entre le laser et le lit de poudre [139]. L'énergie apportée (entre 150 et 1000W en fonction de la machine et de son réglage, pour une taille de spot comprise entre 80 et $500 \mu\text{m}$ [148]) chauffe la poudre la faisant passer de l'état solide à liquide. La solidification advient ensuite lors de la phase de refroidissement. La fusion a l'avantage d'être très locale mais elle augmente aussi la différence de température entre le bain de fusion et le reste du lit de poudre ou de la structure déjà construite. On observe alors une expansion thermique du matériau autour de la zone affectée thermiquement (Figure 1.4). Néanmoins, cette expansion est restreinte par le reste de la structure, moins chauffée, et on observe l'apparition des premières contraintes résiduelles en compression [105, 94, 104, 161, 94, 125]. Par définition, les contraintes résiduelles sont les contraintes restantes dans un matériau déformé après que le chargement l'ayant déformé ait été retiré [34], en l'occurrence la chaleur apportée par le laser à chaque couche dans le cas du SLM.

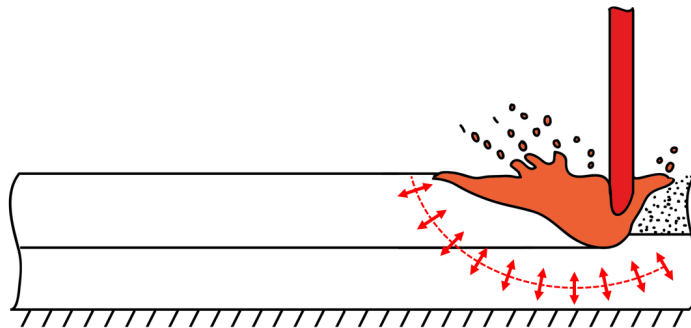


FIGURE 1.4 – Expansion thermique de la zone affectée thermiquement par le laser

Après le passage du laser, la matière fusionnée se refroidit et se solidifie. Passé ce point de solidification, on observe cette fois un retrait thermique du matériau durant toute la phase de refroidissement (Figure 1.5). Celle-ci peut durer plusieurs dizaines de secondes, le temps pris par le laser pour parcourir le reste du lit de poudre puis au racleur d'étaler une nouvelle couche. Une fois encore, le reste de la structure attachée au plateau empêche ce retrait amenant de nouvelles contraintes résiduelles, en traction cette fois, responsables de divers problèmes.

Par le jeu des cycles de chauffe et de refroidissement et au fur et à mesure des couches, la pièce une fois fabriquée est très contrainte, accélérant sa fatigue et sa plastification en service [26, 38]. Aussi, après fabrication lorsque la pièce est découpée de son plateau, certaines contraintes résiduelles sont relâchées obligeant la pièce à se déformer, pouvant faire apparaître des fissures ou simplement une non conformité de la pièce [94]. Ce phénomène est très visible lors de la fabrication de l'éprouvette dite 'peigne' (Figure 1.6a), très classique en fabrication additive métallique. Lorsque les 'dents' du peigne sont coupés, les contraintes résiduelles accumulées dans la partie haute se relâchent et n'étant plus reliée au plateau, cette dernière se déforme (Figure 1.6b).

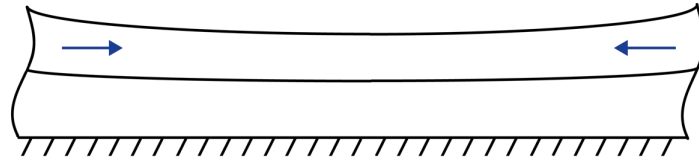
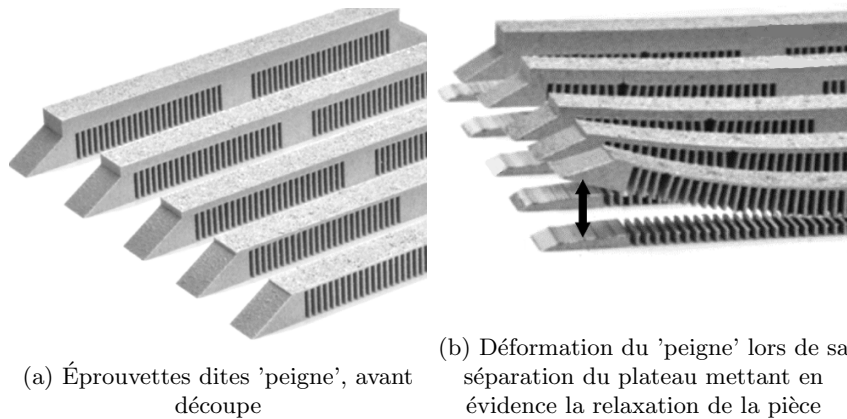


FIGURE 1.5 – Retrait thermique du matériau durant la phase de refroidissement



(a) Éprouvettes dites 'peigne', avant découpe

(b) Déformation du 'peigne' lors de sa séparation du plateau mettant en évidence la relaxation de la pièce

FIGURE 1.6 – Photographies d'éprouvettes montrant la déformation après relaxation des contraintes résiduelles extraites de [94]

Solutions pour limiter les contraintes résiduelles

Heureusement, ces contraintes dépendent fortement de nombreux facteurs, elles peuvent donc être limitées en choisissant les bons paramètres machine, en particulier ceux influant sur le gradient thermique généré par l'énergie du laser. On peut citer ici :

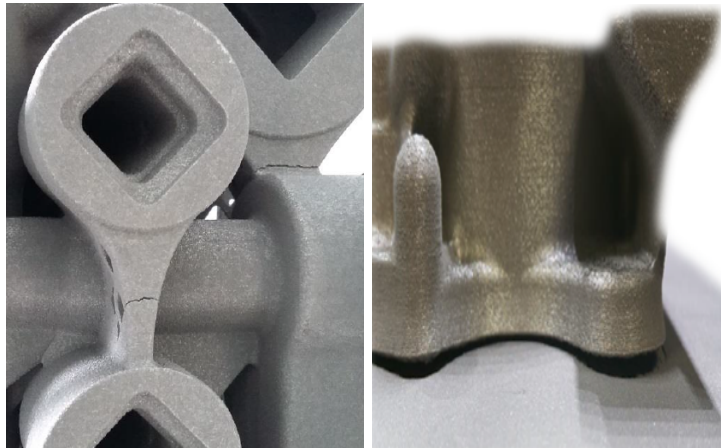
1. **L'épaisseur de couche** : Plus les couches sont épaisses, plus la quantité de gaz entre les particules de poudre est importante, limitant le gradient thermique et la vitesse du refroidissement du cordon [173],[116],[155].
2. **La vitesse et puissance du laser** : Plus la vitesse du laser est importante, plus le gradient thermique dans le lit de poudre augmentera à densité d'énergie équivalente pour une vitesse plus faible. De même, il est observé que plus la puissance du laser est grande, plus les contraintes résiduelles sont importantes au sein du matériau après fabrication [173],[116].
3. **La stratégie de lasage** : Une trajectoire de passe longitudinale augmente la longueur du cordon de fusion, apportant plus de contraintes résiduelles lors de sa solidification [176]. Une des stratégies communes la plus adaptée pour la réduction des contraintes est la stratégie dite en damier [5],[42], mais elle peut détériorer l'état de surface de la pièce. Il existe également des méthodes pour optimiser la trajectoire des lasers afin de réduire ces contraintes [35, 36]. Néanmoins, le choix des paramètres laser dépend aussi d'autres facteurs et leur gestion n'est pas aussi triviale. Une discussion plus approfondie est nécessaire mais ne sera pas faite ici.
4. **Les traitements thermiques** : Cette pratique est sans doute la plus utilisée pour se débarrasser de la majeure partie des contraintes résiduelles et améliorer les performances mécaniques de la pièce. Une fois les pièces dépoutrées et souvent avant qu'elles soient détachées du plateau, elles subissent un traitement de détensionnement, consistant à les faire monter en température, jusqu'à celle de transition afin de réarranger les dislocations pendant une période pouvant durer quelques heures. Cette chauffe est ensuite suivie d'une redescende en température très contrôlée [65]. On observe alors une baisse significative des contraintes résiduelles [152],[137]. Cependant, en modifiant la microstructure du matériau, il se peut que les performances de la pièce fabriquée soient altérées. Un compromis est alors à trouver entre réduction des contraintes et performances

de la pièce.

1.3.2 Déformations plastiques

Origines et conséquences

Les gradients de température très importants apportés par le passage du laser peuvent également avoir un effet indésirable sur la pièce lors de sa fabrication. Lorsque les contraintes générées par l'expansion et le retrait thermique des couches atteignent la limite élastique du matériau, elles donnent lieu à des déformations plastiques. Des fissures peuvent alors apparaître non loin d'une concentration de contraintes dans la pièce, et généralement après le dépôt de plusieurs couches au dessus de l'endroit de ces fissures (Figure 1.7a). Ces contraintes peuvent être tellement importantes qu'on peut assister, surtout pour les pièces massives, à un décollement de leur base du plateau (Figure 1.7b).



(a) Fissures apparues pendant la fabrication (b) Décollement de la base de la pièce du plateau

FIGURE 1.7 – Photographies de pièces présentant des défauts liés à des contraintes résiduelles trop importantes pendant la fabrication

Ces déformations plastiques peuvent aussi avoir lieu à l'échelle de la couche lors de la construction de surfaces inclinées vers le plateau, dites en *downskin*, ou en *overhang* [125, 163]. Avec les procédés couche par couche, il est nécessaire de fabriquer ces types de surface en escalier, laissant l'extrémité de chaque couche non soudée à la couche inférieure. Plus l'angle que présente la surface en *downskin* par rapport à la direction de fabrication (verticale) est important, plus ces extrémités non maintenues seront longues et donc sujettes à des déformations plastiques lors du retrait thermique de la couche. L'accumulation de ces déformations locales peut engendrer un état de surface dégradé [162] en plus d'une non conformité dimensionnelle, et parfois même arrêter le processus de fabrication. En effet, si les extrémités non maintenues sont trop longues, le racleur peut venir les heurter si leur déformation les amène à dépasser du lit de poudre de la couche suivante (Figure 1.8). Avant cela, le racleur peut déformer de manière élastique ces parties dépassant du lit de poudre. Lorsque celles-ci reviennent brusquement à leur état d'équilibre, elles projettent de la poudre autour d'elles rendant le lit de poudre non uniforme pouvant altérer la qualité de la fabrication autour. En règle générale, l'angle limite de *downskin* pour lequel la fabrication ne pose aucun problème est de 45° avec la direction de fabrication [80]. Néanmoins selon les paramètres machine, des surfaces présentant un angle jusqu'à 60° peuvent être fabriquées.

Solutions pour limiter les déformations plastiques

Concernant les déformations plastiques amenant à des fissures ou à des décollements de la base de la pièce au plateau, il existe aujourd'hui des règles de conception afin limiter ces phénomènes. Il est par exemple préférable de réduire au maximum les changements de section brusques afin d'éviter les concentrations de contraintes. De même, il est de mise de rattacher la pièce au plateau par un rayon

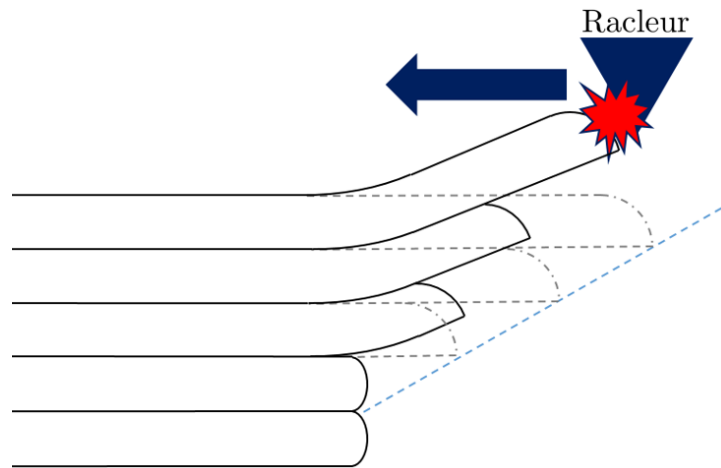


FIGURE 1.8 – Schéma du phénomène de déformation des couches lors de la construction de surfaces inclinées. Si les déformations sont trop importantes, le racleur peut heurter l'extrémité des couches.

de raccordement plutôt que de construire les premières couches formant un angle vif avec la surface du plateau. Bien sûr il ne s'agit que de règles de conception générales, une simulation complète du procédé de fabrication est souvent nécessaire afin de prédire correctement l'état de contraintes et les déformations subis par la pièce. Ce point est détaillé plus bas.

1.3.3 Supports de fabrication

Afin de limiter les déformations très locales à l'échelle de la couche observées lors de la fabrication de surface en *downskin*, il est nécessaire d'utiliser des supports de fabrication. Ces structures se construisent aux côtés de la pièce, dans le même lit de poudre (éventuellement avec une stratégie de lasage différente), et rattachent les surfaces de la pièce devant être supportées au plateau. Ces supports ont plusieurs fonctions :

1. **Faciliter la conduction thermique** : Les supports étant de la matière fusionnée, ils peuvent servir à évacuer la chaleur apportée par le laser et réduire les gradients thermiques accumulés dans la pièce [48, 123].
2. **Limiter les déformations de la pièce pendant la fabrication** : Comme expliqué plus haut, les contraintes apportées par l'expansion et le retrait thermique rapide du matériau peuvent donner lieu à des déformations, très locales ou non. Les supports sont donc utilisés pour contenir ces déformations, en reliant la partie de la pièce déformée au plateau. Il est habituel de les voir attachés à une surface en *overhang*, car c'est aujourd'hui le seul moyen de fabriquer ces surfaces. Pour des volumes plus importants il est préférable de prévoir des supports plutôt massifs, voire une extrusion de matière à partir de la surface à supporter.
3. **Maintenir les éléments suspendus** : Dans les procédés lit de poudre, le racleur parcourt la surface du lit de poudre en étalant une fine couche de poudre. Il faut donc que les parties solidifiées soient en tout point rattachées au plateau afin d'éviter d'être emportées par le passage du racleur. Or si la pièce présente un élément dit 'suspendu' (Figure 1.9a), sa première couche se trouvera être directement lasée sur le lit de poudre et se verra emportée au passage de racleur suivant. Enfin, si une couche devait relier deux parties de la pièce (pour former un pont parfaitement horizontal)(Figure 1.9b), la longueur suspendue de la couche dans le lit de poudre ne peut pas excéder 1 mm sans être supportée (cette valeur dépend des paramètres machine).

Néanmoins, les supports ne participant pas à l'utilisation finale de la pièce, il est nécessaire de les retirer après fabrication. Ce dernier point représente un problème majeur dans leur utilisation car ils devront être retirés le plus souvent à la main lorsque cela est possible, augmentant largement le coût et le temps de production. Généralement la géométrie de ce type de supports, dits sécables, est relativement simple (sous forme de bloc sous les surfaces en *overhang* ou de mur très fin) avec une faible fraction volumique

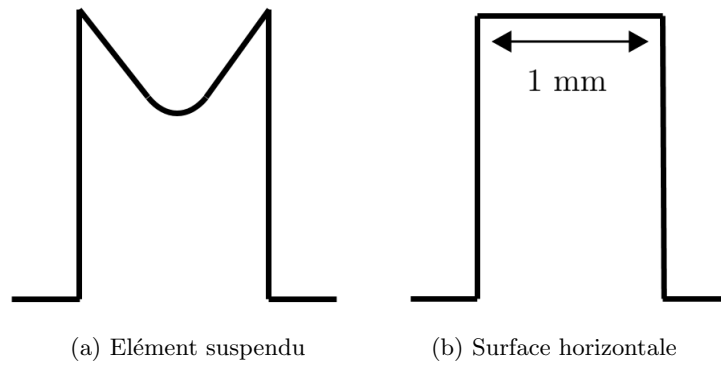


FIGURE 1.9 – Représentation de surfaces spécifique devant nécessiter un maintien par des supports de fabrication.

puisqu'ils sont construits à partir d'un quadrillage de murs fins (Figure 1.10a). Ils sont également reliés à la pièce par une interface irrégulière (Figure 1.10b) permettant le retrait manuel avec une pince ou un burin (Figure 1.11a). L'autre solution est d'utiliser des supports pleins, ne possédant pas de géométrie interne particulière (la stratégie de lasage peut en revanche être différente de celle de la pièce pour accélérer leur fabrication). Ils sont préférés pour des géométries à supporter plus massives. Néanmoins il devront être retirés par usinage, augmentant également leur temps de retrait mais rendant l'opération efficace, répétable, sûre pour l'opérateur et permet un état de surface soigné de la pièce. Cette solution nécessite tout de même de prévoir des zones de bridage sur la pièce afin de la maintenir pendant l'usinage. Aussi, l'opération de retrait, manuelle ou automatisée, nécessite une interface entre la pièce et le support accessible en ligne droite depuis l'extérieur pour permettre le passage d'un outil, ce qui peut ne pas être le cas pour une pièce complexe.

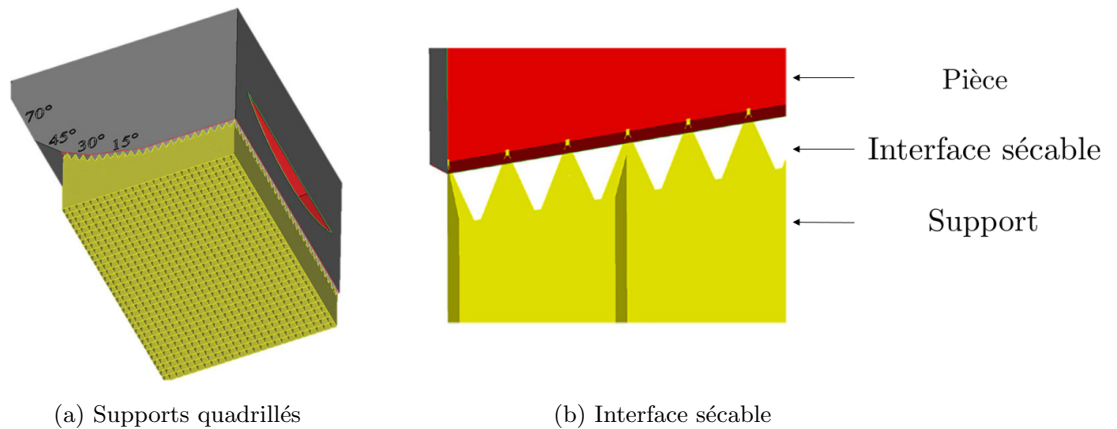


FIGURE 1.10 – Géométries typiques de supports destinés à être retirés manuellement

Enfin cette matière solidifiée, contrairement à la poudre, ne pourra pas être réutilisée (Figure 1.11b).

1.3.4 Dépoudrage

Une fois la fabrication terminée la poudre non fusionnée, remplissant entièrement le bac de fabrication, doit être retirée afin de manipuler la pièce et son plateau (Figure 1.12). La majeure partie de la poudre est simplement aspirée avant que le plateau soit retiré de la machine, puis la poudre résiduelle est soufflée. Cette opération doit être effectuée avec minutie car d'une part la poudre non fusionnée présente un risque en matière de Santé, Sécurité et Environnement (SSE), et elle peut engendrer d'autre part plusieurs problèmes pour les étapes suivantes. Lors du traitement thermique, les poudres résiduelles pourraient se fritter à la pièce et il deviendra alors difficile de les retirer. Ensuite, l'étape de désolidarisation de la pièce du plateau se fait généralement par électro-érosion, ou EDM

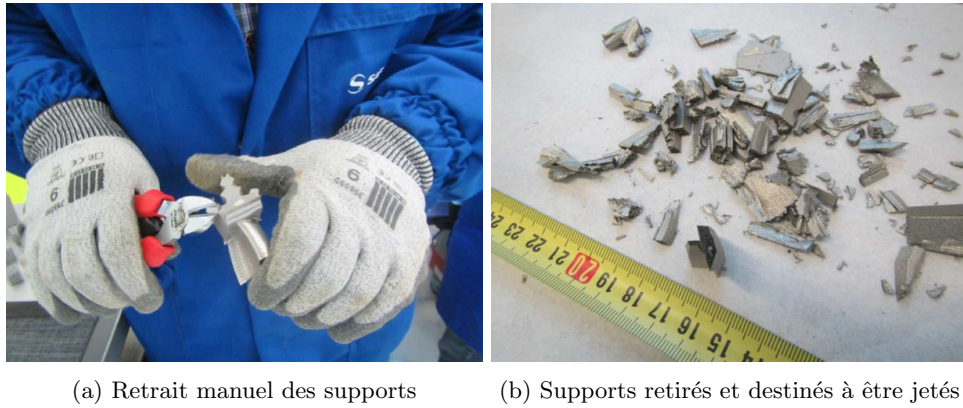


FIGURE 1.11 – Photographies prises pendant une opération de retrait de supports

(*Electrical Discharge Machining*). Le plateau est plongé dans un bain d'eau ou d'huile et un fil chargé électriquement parcourt la surface du plateau, découpant la base des pièces fabriquées. La présence de poudres résiduelles dans ce bain formerait une sorte de boue qui serait également très difficile à retirer par la suite. Il est donc important de retirer correctement toutes les particules de poudre pouvant être incrustées dans les aspérités de la surface de la pièce, ce qui nécessite là aussi que toutes les surfaces de la pièce soient accessibles depuis l'extérieur. De manière évidente, les cavités internes à la pièce ne peuvent pas être dépoudrées, il faut donc prévoir un passage d'évacuation les reliant à l'extérieur.



FIGURE 1.12 – Photographie du lit de poudre après fabrication pendant la première étape de dépoudrage

1.3.5 Gamme de fabrication

Les principales étapes de la gamme de fabrication sont montrées dans le schéma en Figure 1.13.

Cette gamme est la plus commune et peut-être utilisée pour la fabrication de pièces standards, néanmoins elle peut être modifiée dans certains cas :

1. **Traitement thermique de détentionnement avant séparation pièce-plateau** : Comme expliqué en 1.3.1, ce traitement thermique réduit fortement la quantité de contraintes résiduelles dans la pièce en sortie de fabrication. Il n'est pas nécessaire mais très conseillé pour réduire les déformations après séparation du plateau et relaxer la pièce, surtout si la pièce et le plateau sont constitués du même matériau.
2. **Traitement thermique de détentionnement après séparation pièce-plateau** Il est également possible de réaliser ce traitement de détentionnement après la séparation du plateau. Il se peut

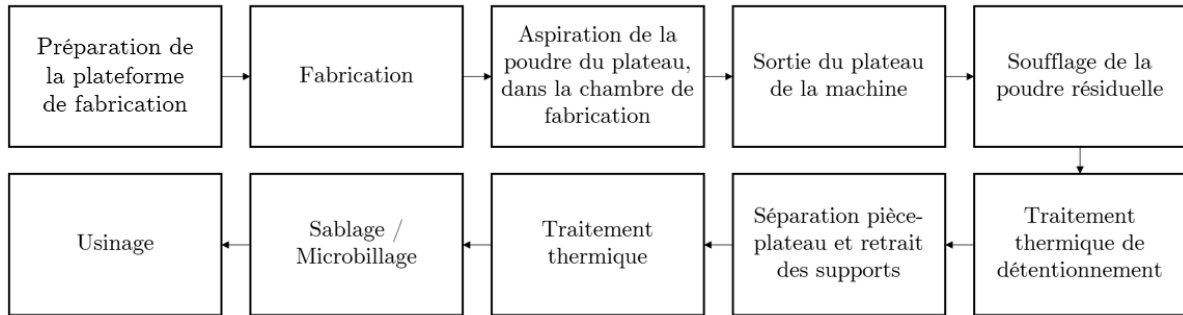


FIGURE 1.13 – Étapes d'une gamme classique de fabrication

en effet que les pièces ne soient pas fabriquées avec le même matériau que celui du plateau et n'aient pas le même comportement lors du traitement thermique. Aussi, il peut être intéressant de regrouper les traitements thermiques de détentionnement et de maturation, ce dernier étant aussi facultatif et utilisé pour atteindre certaines caractéristiques mécaniques en modifiant sa microstructure. En effet, dans le cas où la fabrication, les traitements thermiques et les autres opérations de post production de s'effectuent pas au même endroit, il peut-être intéressant de limiter les transports de pièces. Il faudra en revanche toujours veiller à ce que les pièces ne présentent pas de géométrie favorisant leur déformation après découpe.

- 3. Traitement de surface et usinage** Ces étapes permettent d'améliorer l'état de surface de la pièce lui permettant une meilleure tenue en fatigue [158] et de fonctionnaliser certaines de ces surfaces, elle ne sont encore une fois pas obligatoires mais conseillées. En général, la pièce est sablée ou microbillée afin de retirer toutes les poudres résiduelles et améliorer dans le même temps l'état de surface qui est généralement grossier en sortie de fabrication. La valeur du R_a (hauteur moyenne arithmétique) associé peut varier entre $5\mu m$ et $25\mu m$ en fonction des paramètres machine, la taille de poudre ou l'inclinaison de la surface [76, 43]. En revanche cette valeur peut être réduite à une valeur inférieure à $1\mu m$ après sablage ou usinage [106, 101]. L'usinage est également utilisé pour retirer les supports ou faire respecter les côtes aux tolérances exigeantes sur certaines surfaces fonctionnelles. Une fois de plus, toutes les surfaces nécessitent d'être accessibles afin d'effectuer ces opérations.

1.3.6 Simulation du procédé

La simulation du procédé permet en pratique d'anticiper les effets néfastes induits par le procédé sur la pièce, mais également de mieux comprendre ce procédé de fabrication complexe. En effet le phénomène de fusion du lit de poudre voit la poudre passer à l'état liquide et gazeux (évaporation, pour certaines puissances de laser) puis redevenir solide sous un autre état. Sa simulation nécessite des analyses thermiques, mécaniques et métallurgiques, toutes couplées les unes aux autres rendant très difficile voire impossible aujourd'hui la simulation complète à l'échelle de la pièce. Deux stratégies de simulation différentes sont observées, microscopique (à l'échelle du cordon de fusion) et macroscopique (à l'échelle de la pièce).

Simulation à l'échelle microscopique

Afin de comprendre les phénomènes intervenant lors de la fusion de la poudre puis de la solidification du bain de fusion, des prédictions sont réalisées à l'échelle du cordon de fusion. Il faut donc prendre en compte l'interaction du bain de fusion avec le lit de poudre, passant de l'état solide à liquide et gazeux [130, 109, 49, 47, 102]. L'étude de la progression du bain de fusion dans le lit de poudre doit ensuite prendre en compte les phénomènes mécaniques, fluides et thermiques influant sur la microstructure et la formation de contraintes résiduelles [37, 95, 21, 99, 167]. Néanmoins au vue des nombreux paramètres à prendre en compte et de la non-linéarité des phénomènes, il est aujourd'hui impossible de simuler le comportement à l'échelle de la pièce.

Simulation à l'échelle macroscopique

Afin de prédire le comportement de la pièce complète, une simulation macroscopique doit être utilisée nécessitant plusieurs simplifications des phénomènes. Cette échelle ne modélise généralement pas le changement de phase de la poudre lors de sa fusion et ne considère que la phase solide avec les propriétés du matériau sous forme de poudre ou solidifié après fusion. La source thermique peut être dynamique en modélisant le passage du laser sur la couche, permettant d'obtenir l'influence de la trajectoire ainsi que des champs thermiques et mécaniques plus réalistes [134, 155, 51, 121]. Néanmoins ces études nécessitent aussi des ressources de calcul importantes.

La méthode de simulation *inherent strain* est également de plus en plus utilisée par les industriels car très rapide. A l'origine développée pour la soudure [154], cette étude est purement mécanique et fait l'hypothèse que les déformations apportées par le dépôt d'une couche sur la pièce sont les mêmes à chaque couche [44, 40, 140, 4]. Ces déformations 'inhérentes' dépendent fortement des paramètres du procédé et sont calculées pour chaque machine et changement de paramètres par analyse inverse après l'étude d'une pièce fabriquée. Cette étape de calibration est lourde et destinée aux industriels, mais une fois réalisée la méthode se révèle fidèle pour n'importe quelle géométrie et efficace car elle n'utilise qu'une analyse mécanique. Enfin, quelle que soit la méthode, les couches physiques sont modélisées par des macro-couches, représentant plusieurs couches réelles pour limiter le coût de calcul.

1.4 Optimisation topologique pour la fabrication additive métallique sur lit de poudre

Comme expliqué précédemment, la fabrication additive métallique sur lit de poudre possède de nombreux avantages mais il existe encore plusieurs barrières technologiques ne permettant pas la fabrication de n'importe quelle géométrie. Aujourd'hui, de nombreuses recherches sont faites pour limiter ces contraintes de fabrication. On peut noter l'étude du préchauffage du lit de poudre pour réduire le gradient thermique entre la poudre et le bain de fusion [169] ou l'optimisation de la trajectoire du laser pour réduire les contraintes résiduelles [35, 45, 36]. Une autre solution est de s'affranchir de ces contraintes par la modification du design original de la pièce. Comme expliqué plus haut, l'avantage majeur de la fabrication additive est la possibilité de fabriquer des structures complexes, souvent optimisées topologiquement [8, 32]. Cette optimisation permet d'obtenir le plus classiquement un poids minimal de la pièce pour satisfaire une contrainte de rigidité mécanique (aussi appelée compliance). Ce point sera détaillé plus tard. Il est également possible d'ajouter d'autres contraintes d'optimisation qui, bien choisies, pourront avoir un impact positif sur le design de la pièce et permettre une meilleure fabrication. Cette section donne un aperçu des recherches en la matière.

1.4.1 Prise en compte de contraintes géométriques dans l'optimisation

Contrainte d'autoportance

Selon l'adage célèbre dans le milieu de la fabrication additive, "un bon support de fabrication est un support de fabrication qui n'existe pas". Comme vu plus tôt, les supports de fabrication permettent entre autre la fabrication des surfaces dites *overhang*, mais ils augmentent également considérablement le coût et le temps de fabrication. C'est donc dans le but de limiter leur utilisation que les premiers travaux en optimisation topologique pour la fabrication additive furent menés, en utilisant des contraintes géométriques, c'est à dire qui ne dépendent que de la forme de la pièce (angle, épaisseur, courbure,...). On peut donc citer classiquement les travaux portants sur la minimisation de ces surfaces *overhang*, en évaluant les angles formés par la pièce (Figure 1.14) [13, 168], en s'assurant que tout point soit supporté par la structure [175, 85, 157, 13] ou encore par une simulation thermique du procédé et en minimisant les points chauds [25]. Il faut préciser que ces contraintes géométriques doivent être respectées tout en conservant une bonne performance de la pièce pour son utilisation finale. Néanmoins, l'angle critique est à choisir explicitement dans la plupart des méthodes, or l'inclinaison maximale que peut présenter une surface sans qu'elle soit dégradée dépend tout de même des paramètres de la machine de fabrication.

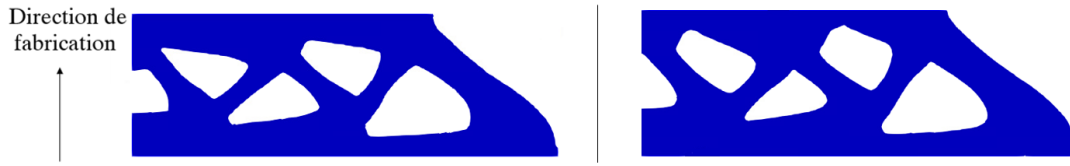


FIGURE 1.14 – Optimisation topologique sans contrainte d’angle imposé (à gauche) et avec (30°) (à droite) pour former une structure autoportante.

Contrôle des échelles de longueur

Tous les procédés de fabrication sont limités par un niveau de résolution en dessous duquel il n’est pas possible de fabriquer de manière répétable. Avec le procédé SLM, on retiendra que la fabrication d’une paroi fine verticale n’est pas répétable en dessous de 0,4 mm [57]. De nombreux travaux ont donc été réalisés afin de contrôler les tailles caractéristiques des solutions issues d’optimisation topologique, par des contraintes sur l’épaisseur minimale ou maximale des barres ou de l’écart entre elles (Figure 1.19)[62, 129, 181, 18].

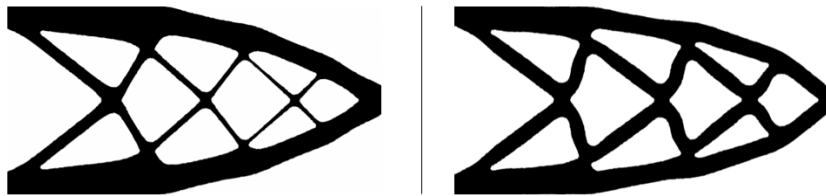


FIGURE 1.15 – Optimisation topologique sans contrainte d’épaisseur minimale de barre (à gauche) et avec (à droite) d’après [62]

Contrainte de dépoudrabilité

L’optimisation topologique peut parfois mener à une structure comportant des cavités. Dans le cas des procédés lit de poudre elles sont bien sûr proscrites car la poudre y resterait enfermée. Il est donc nécessaire de s’assurer dans un premier temps que le domaine extérieur à la forme soit connexe [174, 179]. Des recherches ont été effectuées à ce sujet pouvant très bien s’appliquer aux procédés lit de poudre (Figure 1.16).

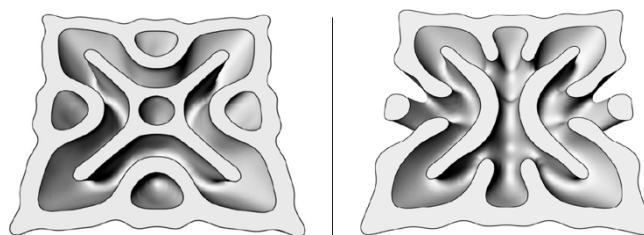


FIGURE 1.16 – Optimisation topologique sans la prise en compte de cavités (à gauche) et avec (à droite), extrait de [174]

Contrainte d’accessibilité

Pour plusieurs opérations de post-fabrication, il est nécessaire d’accéder à certaines zones particulières de la pièce, comme l’interface entre la pièce et ses supports, les surfaces fonctionnelles pour l’usinage ou le polissage. Or pour une pièce complexe issue d’optimisation topologique, certaines de ces

surfaces peuvent ne pas être accessibles depuis l'extérieur de la pièce ou selon une direction donnée. Quelques travaux récents abordent ce problème en imposant l'accès des supports depuis une direction donnée en ligne droite (Figure 1.17) [103, 156, 9].

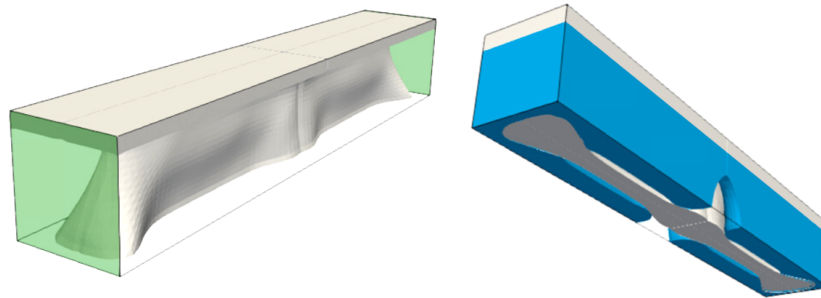


FIGURE 1.17 – Optimisation de forme de la pièce et de ses supports pour rendre ces derniers accessibles en ligne droite depuis les bords verts du domaine

1.4.2 Optimisation de formes des supports

Lorsque la géométrie de la pièce est fixée, pour des raisons fonctionnelles par exemple, il n'est pas possible d'optimiser la forme de la pièce pour la rendre autoportante. En revanche, les supports eux peuvent être optimisés topologiquement pour la fabrication. Le sujet a été largement traité, une méthode classique est de détecter les surfaces de la pièce en *overhang* puis de leur appliquer un chargement de type gravité (Figure 1.18) [10, 112], ou en rendant la structure complète (ensemble pièce et supports) autoportante [107]. Les supports peuvent aussi être optimisés pour des critères thermiques, maximisant la conduction de la chaleur dans la structure complète [10, 180]. Leur optimisation peut également intégrer une contrainte de post-production qui limite leur surface de contact avec la pièce, réduisant a priori le coût de leur retrait [87, 112].

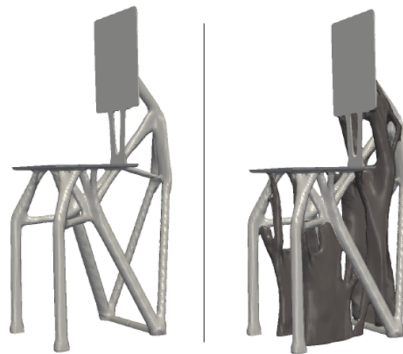


FIGURE 1.18 – Forme fixée (à gauche) maintenue par ses supports optimisés pour un chargement volumique type gravité (à droite) d'après [10].

1.4.3 Prise en compte de la simulation du procédé dans l'optimisation

La contrainte de fabrication principale est due aux retraits thermiques successifs des couches qui provoquent l'apparition de déformations et de contraintes résiduelles. Par expérience, on sait que certaines déformations sont localisées sur les surfaces en *overhang*. On peut alors utiliser l'optimisation topologique avec les contraintes vues plus haut pour anticiper ces déformations et rendre la structure autoportante ou optimiser les supports de fabrication. Néanmoins pour des géométries complexes, le recours à la simulation est nécessaire pour prédire les contraintes ou les déformations, et modifier la

géométrie de la pièce en conséquence. Afin de trouver une forme optimisée pour limiter ces phénomènes, il faut simuler le procédé de fabrication. Puisque le changement de géométrie entraîne une modification des solutions de la simulation, celle-ci doit être calculée à chaque itération d'optimisation. Pour rendre possible cette optimisation en terme de coût calcul, la simulation doit être envisagée à l'échelle macroscopique. Plusieurs stratégies sont adoptées aujourd'hui, comme une simulation thermoélastique de la pièce à fabriquer pour optimiser sa forme (Figure 1.19) [141, 15] ou celle de ses supports [151, 9]. Plus récemment, des travaux utilisent la méthode *inherent strain* pour simuler plus rapidement le procédé et optimiser la pièce [151] ou les supports [178, 97, 126].



FIGURE 1.19 – Optimisation topologique sans minimisation des contraintes résiduelles (à gauche) et avec (à droite) extrait de [15]

1.4.4 Optimisation conjointe de la pièce et des supports

La stratégie d'optimisation de la structure à fabriquer (pièce et supports) la plus commune dans la littérature est décomposée en deux étapes : l'optimisation topologique de la pièce fonctionnelle, puis dans un deuxième temps de ses supports. Une stratégie plus ambitieuse et moins commentée consiste à optimiser ces deux formes simultanément pour aboutir à un couple pièce fonctionnelle et supports de fabrication optimisés. Des travaux portant sur cette stratégie visent à réduire le coût de fabrication, qui peut être lié dans un premier temps au volume de la structure fabriquée [98, 112, 10] et à l'orientation de la pièce sur le plateau, considérée en dimension deux pour l'instant [86]. Néanmoins le coût de production n'est pas seulement lié aux phénomènes ayant lieu pendant la fabrication. Encore peu d'études s'intéressent à la prise en compte d'étapes de post-production dans l'optimisation de la structure à fabriquer (Figure 1.20) [88, 84].

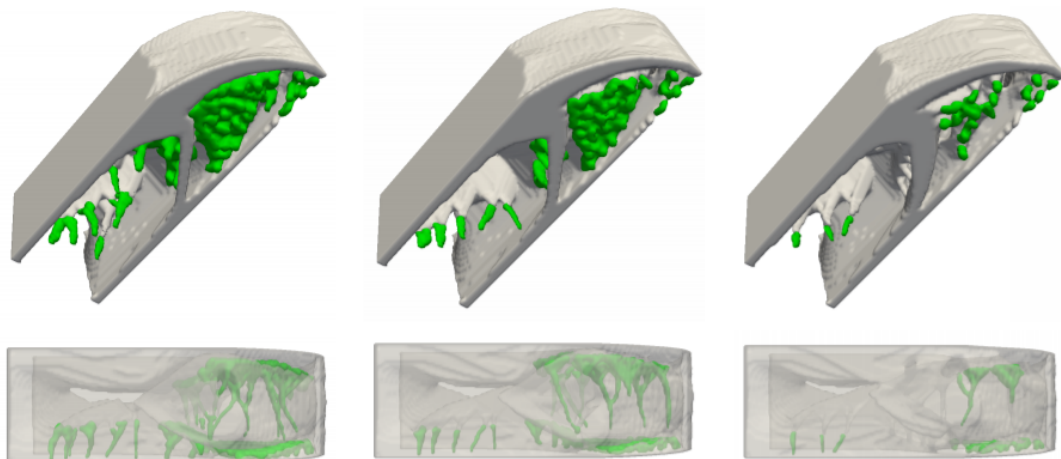


FIGURE 1.20 – Différents résultats d'optimisation topologique conjointe de la pièce et des supports, avec une contrainte sur le volume des supports (verts) variable d'après [84]

1.5 Problématique

Dans cette première partie, les avantages et les contraintes de la fabrication additive sur lit de poudre, et plus particulièrement ceux de la technologie SLM, ont été abordés. Cette technologie prometteuse encore récente, souffre d'un phénomène qui lui confère aussi son intérêt : l'interaction du laser avec la poudre sur chaque couche. Il est à l'origine de la plupart des contraintes de fabrication (déformations, contraintes résiduelles, présence de supports,...), qui peuvent néanmoins être limitées grâce à un choix de paramètres judicieux (vitesse et puissance du laser, stratégie de lasage,...). Si elles peuvent être limitées, ces contraintes inhérentes au procédé restent aujourd'hui bloquantes pour la production industrielle de certaines pièces. Aussi, la fabrication de pièces complexes peut poser problème en post-production avec la dépoudrabilité des cavités ou l'accessibilité de certaines zones qui n'est pas garantie. Une solution est le recours à l'optimisation topologique qui permet d'obtenir une géométrie optimisée pour un problème donné. La fabrication additive a tout à prendre de cette technique puisque les solutions obtenues montrent souvent des formes très complexes, difficiles à fabriquer, mais très performantes d'un point de vue fonctionnel. Le défi est alors d'inclure les contraintes de fabrication du procédé SLM dans l'optimisation pour que les géométries résultantes les prennent en considération. C'est un schéma classique dans le processus d'optimisation et de nombreux travaux ont été menés pour prendre en compte les contraintes d'autres procédés de fabrication comme la fonderie [108, 16, 17, 70] ou l'usinage [89, 110]. La majorité des travaux réalisés au cours de ces trois années porte sur la prise en compte d'un maximum de contraintes de fabrication dans le processus d'optimisation afin de rendre une géométrie complexe fabricable et performante dans un problème fonctionnel. La problématique des supports de fabrication est aussi étudiée pour les rendre le plus efficace possible tout en limitant les contraintes qu'ils apportent. D'un point de vue industriel, il est nécessaire de minimiser les coûts de production. Comme vu plus haut, certaines géométries complexes ne peuvent être industrialisées car leur coût de production est onéreux (car trop de supports ou trop complexes à parachever). Il a été montré précédemment que les supports de fabrication peuvent fortement impacter le coût de la pièce, mais c'est leur présence qui garantit une bonne fabricabilité de cette dernière. En contraignant la géométrie optimisée à être autoportante, le coût de fabrication est réduit mais la performance de la pièce est dégradée, ou le poids est augmenté ce qui peut engendrer un coût supplémentaire en service. Une question se pose alors : Quelle stratégie est la moins chère du point de vue de la fabrication et de l'utilisation de la pièce ? Faut-il utiliser des supports partout où ils sont nécessaires pour garantir la fabrication de la géométrie optimale ou faut-il modifier cette dernière, au risque de la rendre moins performante, pour réduire le coût de fabrication ? La réponse est dans l'intitulé de cette thèse, un compromis peut être trouvé en optimisant le couple pièce/support. Le chapitre 5 sera d'ailleurs consacré à l'optimisation conjointe de la pièce et de ses supports dont le résultat sera donné naturellement en fonction des contraintes de fabrication considérées et des choix de l'utilisateur. Les autres chapitres quant à eux concerneront la prise en compte des différentes contraintes de fabrication dans le schéma d'optimisation de forme.

Chapitre 2

Optimisation de forme

Contents

2.1 Introduction	25
2.1.1 Catégories d'optimisation de forme	25
2.1.2 Méthode de densité	26
2.1.3 Méthode de lignes de niveau, ou level-set	26
2.2 Dérivée de forme	27
2.2.1 Définition	27
2.2.2 Méthode du Lagrangien	28
2.3 Gestion des contraintes d'optimisation - Lagrangien augmenté	30
2.3.1 Contraintes d'égalité	30
2.3.2 Contraintes d'inégalité	30
2.4 Application : minimisation de la compliance	31
2.4.1 Définition du problème	31
2.4.2 Calcul de la dérivée de forme et mise à jour de la forme par advection de la level-set	31
2.4.3 Algorithme	32
2.4.4 Exemple classique	32

2.1 Introduction

L'optimisation topologique suscite un fort intérêt de la communauté scientifique ces vingt-cinq dernières années du fait de son potentiel pour l'industrie, en particulier par l'introduction de cette méthode de conception dans les logiciels de simulation du commerce et aider le concepteur à explorer des nouveaux domaines . Jacques Hadamard pose les fondements théoriques de cette discipline au début du XX^{ieme} avec [69]. Cette méthode a pour but de trouver la forme optimale pour un problème donné, dans un ensemble de formes admissibles. Mathématiquement, le problème peut classiquement s'écrire :

$$\min_{\Omega \in \mathcal{U}_{ad}} J(\Omega) \tag{2.1}$$

où Ω est la structure candidate à la minimisation de la fonction objectif J en respectant les contraintes imposées, et \mathcal{U}_{ad} est l'ensemble des formes admissibles.

2.1.1 Catégories d'optimisation de forme

On distingue classiquement trois catégories d'optimisation de forme :

- 1. Optimisation paramétrique** : La structure n'est modifiée qu'avec quelques paramètres uniquement, comme son épaisseur, le diamètre minimal de ses barres ou sa hauteur par exemple. Ce type d'optimisation est très utilisé en industrie mais il restreint fortement la variation de la forme.

2. **Optimisation géométrique** : Ici, la frontière de la forme évolue, c'est elle la variable d'optimisation. Elle offre plus de possibilités dans la variation de la forme, néanmoins la topologie est fixée.
3. **Optimisation topologique** : C'est le type d'optimisation qui offre la plus grande liberté dans la variation de la forme puisque la frontière et la topologie peuvent changer. C'est la méthode la plus intéressante pour résoudre (2.1) car la moins restreinte et la plus à même de se rapprocher de la solution optimale. La littérature est très large à son sujet et plusieurs méthodes ont été développées pour résoudre le problème (2.1).

2.1.2 Méthode de densité

C'est la méthode la plus ancienne (avec la publication de M.Bendsøen 1988 [31]) et la plus rependue dans la littérature scientifique [143], la quasi-totalité des logiciels commerciaux l'utilise aujourd'hui. L'idée est de résoudre (2.1) à la manière d'une optimisation paramétrique classique avec comme variable la densité ρ , valant 1 dans la structure et 0 en dehors. La résolution de ce problème donne alors une solution non interprétable, aux frontières non définies puisque le problème autorise les densités intermédiaires ($0 \leq \rho \leq 1$) (Figure 2.1a). Un aspect fondamental de cette méthode est de construire un schéma d'interpolation afin que les densités intermédiaires soient pénalisées. La formulation la plus populaire est le schéma SIMP (Solid Isotropic Material with Penalization) [32] :

$$E_i(\rho_i) = \rho_i^p E^* \quad (2.2)$$

où p est le paramètre de pénalisation et E^* le module de Young du matériau solide. Le choix de $p > 1$ tend à rendre les densités intermédiaires moins efficaces et fait converger la solution vers une structure aux contours bien définis (Figure 2.1b). Le « nombre magique » souvent utilisé est $p=3$, satisfaisant les bornes de Hashin-Shtrikman [30].

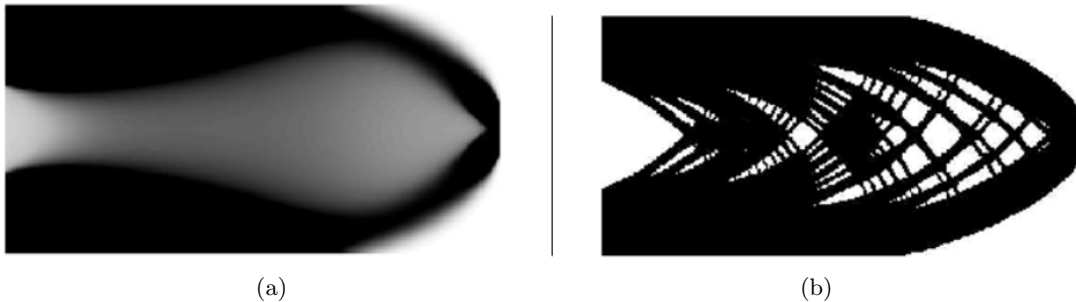


FIGURE 2.1 – Solutions d'un problème d'optimisation avec la méthode des densités, sans pénalisation des densités intermédiaires (a) et avec (b) (schéma SIMP) [142]

2.1.3 Méthode de lignes de niveau, ou level-set

La méthode de lignes de niveau consiste à représenter cette fois la forme Ω de manière implicite par une fonction scalaire généralement notée ϕ et appelée level-set, définie dans tout le domaine de conception $\mathcal{D} \in \mathbb{R}^N$ telle que :

$$\begin{cases} \phi(x) < 0 & \text{si } x \in \Omega, \\ \phi(x) = 0 & \text{si } x \in \partial\Omega \cap \mathcal{D}, \\ \phi(x) > 0 & \text{si } x \in \mathcal{D} \setminus \Omega. \end{cases} \quad (2.3)$$

La forme est ici bien définie à travers la position de son interface avec l'ensemble des points situés sur la courbe de niveau $\phi = 0$, aussi appelée *iso0* (Figure 2.2). C'est grâce à cette définition claire de l'interface et la non-nécessité de filtrer la solution que cette méthode est très utilisée pour les problèmes de dynamique des fluides (notamment pour la simulation du procédé SLM pour suivre l'évolution du bain de fusion [131, 177]), d'analyse d'image [93, 135] ou d'optimisation de forme [19, 60]. Cette interface évolue ensuite au cours de l'optimisation grâce à l'équation de transport de type Hamilton-Jacobi, en utilisant une notion de temps artificiel :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(x, t) + V(x, t) |\nabla \phi(x, t)| = 0, \forall t, \forall x \in \mathcal{D} \quad (2.4)$$

où la vitesse $V(x, t)$ correspond à une direction de descente obtenue après le calcul de la dérivée de forme. Un cas classique d'optimisation utilisant cette méthode sera donné un peu plus loin pour plus de détails.

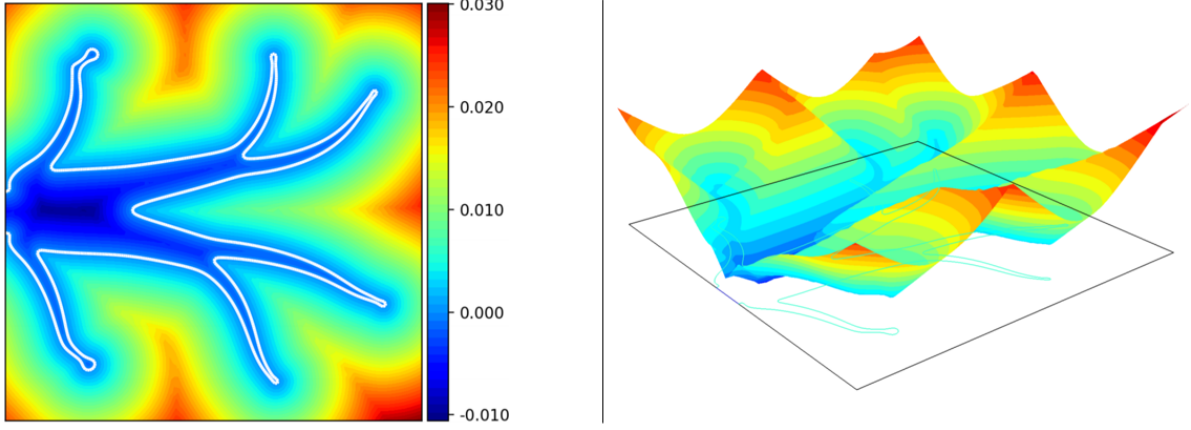


FIGURE 2.2 – Représentation d'une forme définie par une level-set où l'iso0 est représentée par le trait blanc (à gauche), et la représentation en dimension 3 de la fonction ligne de niveau (à droite)[60]

2.2 Dérivée de forme

2.2.1 Définition

Le but de l'optimisation de forme est de minimiser la valeur d'une fonction objectif en changeant de manière itérative la forme de la structure. La méthode numérique mise en œuvre nécessite le calcul d'un gradient et donc de dérivation par rapport au domaine. L'analyse de Murat et Simon [118] est utilisée ici, qui s'appuie sur la méthode de variation de frontière d'Hadamard [69]. Soit Ω_0 un domaine de référence, ouvert borné et régulier de \mathbb{R}^N ($N = 2$ ou 3). On suppose que l'ensemble des formes admissibles Ω est obtenu par transport du champ vecteur $\theta \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$:

$$\Omega = \{x + \theta(x) \text{ tel que } x \in \Omega_0\}. \quad (2.5)$$

Toute forme admissible pourra donc être représentée par un champ de vecteurs $\theta : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ et pourra s'écrire $\Omega = (\text{Id} + \theta)(\Omega_0)$. Autrement dit, le champ de vecteurs $\theta(x)$ déplace chaque point x de Ω_0 à un point déformé $x + \theta(x)$ (Figure 2.3).

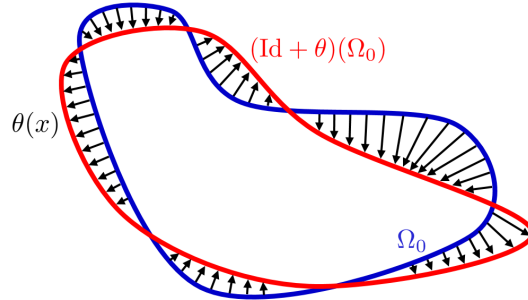


FIGURE 2.3 – Transport de la forme Ω_0 par le champ de vecteurs $\theta(x)$

Definition 2.2.1. Soit $J(\Omega)$ une fonction de l'ensemble admissible \mathcal{U}_{ad} dans \mathbb{R} . La fonction J est dite différentiable s'il existe une forme linéaire continue $J'(\Omega)$ sur $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$ telle que

$$J((Id + \theta)(\Omega_0)) = J(\Omega_0) + \langle J'(\Omega_0), \theta \rangle + o(\theta), \text{ où } \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{|o(\theta)|}{\|\theta\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)}} = 0 \quad (2.6)$$

La fonction $J'(\Omega_0)$ est appelée dérivée de forme de J .

Aussi, la dérivée de forme ne dépend que de la composante normale de θ sur la frontière $\partial\Omega_0$, c'est un résultat classique obtenu de la méthode d'Hadamard [69, 8].

Deux exemples classiques de dérivées de formes d'intégrales, dont l'intégrande ne dépend pas du domaine, sont données. Pour plus de détails, le lecteur peut se référer aux nombreux travaux déjà effectués sur le sujet [144, 118, 14, 8].

Proposition 1. Soit un Ω_0 un ouvert borné régulier de \mathbb{R}^N et $f \in W^{1,2}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ et J une fonction de forme de \mathcal{U}_{ad} dans \mathbb{R}^N définie par

$$J(\Omega_0) = \int_{\Omega_0} f dx,$$

alors J est différentiable et sa dérivée s'écrit

$$J'(\Omega_0)(\theta) = \int_{\Omega_0} \text{div}(f\theta) dx = \int_{\partial\Omega_0} f\theta \cdot n dS, \forall \theta \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N) \quad (2.7)$$

où n est la normale à Ω_0

Proposition 2. Soit un Ω_0 un ouvert borné régulier de \mathbb{R}^N et $f \in W^{2,2}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ et J une fonction de forme de \mathcal{U}_{ad} dans \mathbb{R}^N définie par

$$J(\Omega_0) = \int_{\partial\Omega_0} f dx,$$

alors J est différentiable et sa dérivée s'écrit

$$J'(\Omega_0)(\theta) = \int_{\partial\Omega_0} \left(\frac{\partial f}{\partial n} + Hf \right) \theta \cdot n dS, \forall \theta \in C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N) \quad (2.8)$$

où H est la courbure moyenne, soit $H = \text{div}(n)$. Pour plus de détails, le lecteur peut se référer à [8].

2.2.2 Méthode du Lagrangien

Dans le cas où l'intégrande dépend du domaine, typiquement une solution d'une équation aux dérivées partielles posée dans Ω , une méthode formelle est souvent utilisée pour trouver la dérivée de forme : la méthode du Lagrangien, ou de Céa [41]. Dans cette section, un exemple classique d'optimisation sera utilisé pour expliquer la méthode.

Dans cet exemple, $D \subset \mathbb{R}^2$ est le domaine de conception et \mathcal{U}_{ad} un ouvert borné de \mathcal{D} à frontière lipschitzienne, considéré comme l'espace des formes admissibles. Avec $\Omega \in \mathcal{U}_{ad}$, la frontière Γ est divisée en trois parties disjointes tel que $\Gamma = \partial\Gamma_D \cup \Gamma_N \cup \Gamma_F$. Γ_D est le bord où les déplacements sont imposés (conditions aux limites de Dirichlet), Γ_N correspond au bord où le chargement est appliqué (conditions aux limites de Neumann) et Γ_F est le bord libre, optimisable. Aussi, $H_\Gamma^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega); u = 0 \text{ sur } \Gamma_D\}$. Le déplacement élastique $u \in H^1(\Omega)^N$ de la forme Ω est solution du problème élastique linéarisé suivant :

$$\begin{cases} -\text{div}(Ae(u)) = g & \text{dans } \Omega, \\ Ae(u)n = f & \text{sur } \Gamma_N, \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_D. \end{cases} \quad (2.9)$$

où $e(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T)$ est le tenseur des déformations linéarisé, $g \in L^2(\Omega)^N$ le chargement volumique, $f \in H^1(\Omega)^N$ le chargement surfacique et n le vecteur unité normal à Ω . Aussi, $A(x)$ est le tenseur de rigidité, valant A^* dans Ω et les propriétés d'un matériau mou, dit Ersatz ('substitut' en allemand) dans $D \setminus \Omega$, tel que :

$$A(x) = \rho(x)A^* \text{ avec } \rho = \begin{cases} 1 & \text{dans } \Omega, \\ \epsilon \ll 1 & \text{dans } \mathcal{D} \setminus \Omega, \end{cases} \quad (2.10)$$

où $\epsilon = 10^{-3}$ généralement. Enfin, $Ae(u) = 2\mu e(u) + \lambda \operatorname{div}(u)\operatorname{Id}$, où μ et λ sont les coefficients de Lamé et Id la matrice identité.

On considère une fonction objectif du type

$$J(\Omega, u(\Omega)) = \int_{\Omega} j(x, u(\Omega, x))dx + \int_{\partial\Omega} l(x, u(\Omega, x))ds, \quad (2.11)$$

Proposition 3. *La dérivée de forme de (2.11) s'écrit*

$$\begin{aligned} J'(\Omega, u(\Omega))(\theta) = & \int_{\partial\Omega} \theta \cdot n (j(u) + Ae(u) \cdot e(p) - gp)ds + \int_{\partial\Omega} \theta \cdot n \left(\frac{\partial l(u)}{\partial n} + Hl(u) \right) ds \\ & - \int_{\Gamma_N} \theta \cdot n \left(\frac{\partial(f \cdot p)}{\partial n} + H(f \cdot p) \right) \\ & - \int_{\Gamma_D} \theta \cdot n \left(\frac{\partial(u \cdot Ae(p)n + p \cdot Ae(u)n)}{\partial n} + H(u \cdot Ae(p)n + p \cdot Ae(u)n) \right) ds, \end{aligned} \quad (2.12)$$

avec p solution du problème adjoint

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(Ae(p)) & = -j'(u) & \text{dans } \Omega, \\ Ae(p)n & = l' & \text{sur } \Gamma_N, \\ p & = 0 & \text{sur } \Gamma_D. \end{cases} \quad (2.13)$$

Preuve : On introduit le Lagrangien, qui est la somme de la fonction objectif et de la formulation variationnelle de l'équation d'état

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\Omega, v, q, \mu) = & \int_{\Omega} j(v)dx + \int_{\partial\Omega} l(v)dx + \int_{\Omega} (-\operatorname{div}(Ae(v)) - g) \cdot qdx \\ & + \int_{\Gamma_N} (Ae(v)n - f) \cdot qds + \int_{\Gamma} Ae(v)n \cdot qds + \int_{\Gamma_D} v \cdot \mu ds, \end{aligned} \quad (2.14)$$

où $v, q, \mu \in H^1(\mathbb{R}^N)^N$ ne dépendent pas du domaine. On les suppose dérivables, de même que j . La dérivée partielle de \mathcal{L} par rapport à Ω dans la direction θ est obtenue lorsque les dérivées partielles de \mathcal{L} par rapport u, p et μ s'annulent [8]

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Omega}(\Omega, u, p, \mu)(\theta) = J'(\Omega)(\theta). \quad (2.15)$$

Pour plus de détails, le lecteur peut se référer à [19]

Extension et régularisation. Il est à noter que θ n'est définie que sur l'interface $\partial\Omega$, ne donnant qu'une information sur la perturbation du bord qui diminuerait la fonction objectif. Il est nécessaire d'étendre le champ vitesse sur tout le domaine et de le régulariser pour prévenir certaines oscillations à la frontière.

En prenant la dérivée de forme suivante

$$J'(\Omega)(\theta) = \int_{\partial\Omega} j\theta \cdot n ds \quad (2.16)$$

et avec une vitesse d'advection du type $\theta = wn$, on peut écrire

$$J'(\Omega)(wn) = \int_{\partial\Omega} jw ds \quad (2.17)$$

Au lieu de choisir $w = -j$, il est plus judicieux de résoudre un problème variationnel permettant à la fois d'étendre le champ vitesse et de le régulariser. On cherche $\nu \in H^1(\mathcal{D})$:

$$\int_{\mathcal{D}} (\alpha^2 \nabla \nu \cdot \nabla W + \nu W)dx = J'(\Omega_0)(W) \text{ pour tout } W \in H^1(\mathcal{D}) \quad (2.18)$$

où $\alpha > 0$ est un scalaire de l'ordre d'une taille de maille. C'est cette étape qui relie la dérivée de forme à une direction de descente, utilisée dans un algorithme de type gradient et adaptée à la méthode level-set. Ici, $\theta = \nu n$ garantit une bonne direction de descente pour J .

Changement topologique. Une caractéristique de la dérivée de forme est l'absence d'information sur le changement de topologie. En particulier, pour les problèmes en 2 dimensions, il est impossible de créer de nouveaux « trous » au milieu de la forme. Les trous existants peuvent toutefois disparaître ou fusionner suivant le champ donné par la dérivée de forme. Cette particularité s'applique uniquement à la méthode des lignes de niveaux. Il est alors de mise de débiter l'optimisation par une forme initiale composée de nombreuses inclusions. En 3 dimensions néanmoins, la topologie de la forme initiale importe moins puisqu'un trou peut être créé dans la forme par la réunion de deux zones du matériau Ersatz dans la troisième dimension.

2.3 Gestion des contraintes d'optimisation - Lagrangien augmenté

Plusieurs algorithmes d'optimisation peuvent s'appliquer à l'optimisation de forme, comme l'algorithme MMA (Method of Moving Asymptotes) [150], SQP (*Sequential Quadratic Programming*) [63, 120] ou encore les algorithmes de pénalisation [120]. Ces derniers seront considérés dans cette partie.

Soit $J : \mathcal{U}_{ad} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction objectif dérivable, on considère le problème d'optimisation avec contraintes suivant :

$$\begin{aligned} \min_{\Omega \subset \mathcal{U}_{ad}} \quad & J(\Omega), \\ \text{s.t.} \quad & C_1(\Omega) = 0, \\ & C_2(\Omega) \leq 0. \end{aligned} \tag{2.19}$$

où $C_1, C_2 : \mathcal{U}_{ad} \rightarrow \mathbb{R}$ sont respectivement les contraintes d'égalité et d'inégalité. Le problème d'optimisation avec contraintes (2.19) peut être remplacé par un problème d'optimisation non contraint en considérant la fonction auxiliaire suivante :

$$\mathcal{L}(\Omega) = J(\Omega) + P(\Omega), \tag{2.20}$$

où le terme $P(\Omega)$ pénalise les violations de contrainte. Cette nouvelle fonction peut être minimisée par la méthode du Lagrangien augmenté, utilisée tout au long de ces travaux.

2.3.1 Contraintes d'égalité

Considérons d'abord le problème d'optimisation suivant :

$$\begin{aligned} \min_{\Omega \subset \mathcal{U}_{ad}} \quad & J(\Omega), \\ \text{s.t.} \quad & C_1(\Omega) = 0. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Le Lagrangien augmenté à minimiser s'écrit :

$$\mathcal{L}(\Omega, \lambda, \mu) = J(\Omega) - \lambda C_1(\Omega) + \frac{\mu}{2} |C_1(\Omega)|^2, \tag{2.22}$$

où λ est le multiplicateur de Lagrange et μ le coefficient de pénalisation. En pratique, le multiplicateur de Lagrange est mis à jour à chaque itération k d'après la condition d'optimalité $\lambda^{k+1} = \lambda^k - \mu C_1(\Omega)$ [120].

2.3.2 Contraintes d'inégalité

Considérons maintenant le problème d'optimisation avec contrainte d'inégalité suivant :

$$\begin{aligned} \min_{\Omega \subset \mathcal{U}_{ad}} \quad & J(\Omega), \\ \text{s.t.} \quad & C_2(\Omega) \leq 0. \end{aligned} \tag{2.23}$$

Ici, (2.23) peut être ramené à un problème d'optimisation avec contrainte d'égalité en introduisant une variable d'écart s :

$$C_2(\Omega) - s = 0, \quad s \leq 0. \tag{2.24}$$

Le Lagrangien augmenté est alors écrit comme suit :

$$\mathcal{L}(\Omega, \lambda, \mu) = J(\Omega) - \lambda(C_2(\Omega) + s) + \frac{\mu}{2} |C_2(\Omega) + s|^2. \quad (2.25)$$

Optimiser (2.25) par rapport à s donne une valeur optimale de la variable d'écart telle que $s_{opt} = \max(0, -\frac{\lambda}{\mu} - C_2(x))$. Finalement, le Lagrangien augmenté à minimiser s'écrit :

$$\mathcal{L}(\Omega, \lambda, \mu) = J(\Omega) - \lambda \max(C_2(\Omega), -\frac{\lambda}{\mu}) + \frac{\mu}{2} | \max(C_2(\Omega), -\frac{\lambda}{\mu}) |^2. \quad (2.26)$$

Le lecteur peut se référer à [120] pour plus de détails.

2.4 Application : minimisation de la compliance

Un problème classique d'optimisation de forme avec la méthode level-set est proposé ci-dessous, dont la solution est obtenue grâce au logiciel de résolution d'équations différentielles partielles FreeFEM [71]. Ce logiciel a d'ailleurs été utilisé pour obtenir tous les résultats d'optimisation de forme montrés dans ce mémoire. Aussi, les calculs sont effectués sur un CPU 2.50 GHz Intel(R)i7 Xeon(R).

2.4.1 Définition du problème

La forme recherchée doit être la plus rigide possible avec un volume restreint, elle doit donc minimiser la fonction suivante :

$$J(\Omega) = \int_{\Gamma_N} f \cdot u \, ds + l \int_{\Omega} dx, \quad (2.27)$$

avec u le déplacement solution de (2.28) et l le multiplicateur de Lagrange, fixe dans notre exemple, qui pondère la contrainte sur le volume.

On définit l'espace suivant :

$$H_{\Gamma_D}^1(\Omega)^N = \{u \in H^1(\Omega)^N : u = 0 \text{ sur } \Gamma_D\}$$

Le déplacement élastique u de la forme Ω est solution dans l'espace $H_{\Gamma_D}^1(\omega)^N$ du problème élastique linéarisé suivant :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(Ae(u)) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ Ae(u)n = f & \text{sur } \Gamma_N, \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_D. \end{cases} \quad (2.28)$$

2.4.2 Calcul de la dérivée de forme et mise à jour de la forme par advection de la level-set

Pour minimiser la fonctionnelle J , la forme Ω doit être déformée dans la direction de descente θ tel que $J'(\Omega)$ est négative. En s'appuyant sur le résultat de (2.12) et en prenant $p = -u$ (résultat particulier pour la compliance, le problème est autoadjoint), la dérivée de forme s'écrit [8] :

$$J'(\Omega)(\theta) = \int_{\partial\Omega} \theta \cdot n (l - Ae(u)e(u)) \, ds. \quad (2.29)$$

Le champ $\theta(x)$ doit ensuite être étendu grâce à (2.18) en prenant $v = (l - Ae(u)e(u))$, donnant une direction de descente définie sur tout le domaine et pouvant être utilisée pour résoudre l'équation de transport (2.4).

La fonction ϕ est initialisée comme la distance à l'interface permettant d'obtenir un gradient $\nabla\phi$ de magnitude uniforme et de calculer correctement les normales n à la frontière. On appelle cette fonction la distance signée $d_{\Omega}(x)$ [54, 122] telle que $x \in \mathbb{R}^N \rightarrow d_{\Omega}(x)$, et est solution de l'équation Eikonal :

$$|\nabla d_{\Omega}| = 1 \text{ dans } D. \quad (2.30)$$

Au fur et à mesure des itérations, la level-set peut 's'aplatir' [54, 122], il est alors nécessaire de réinitialiser ϕ régulière à d_{Ω} pour rétablir l'uniformité du gradient autour de $\partial\Omega$.

2.4.3 Algorithme

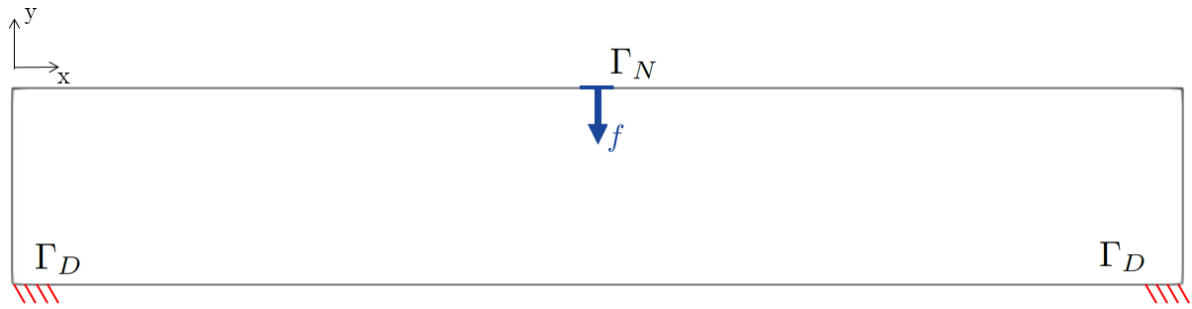
L'algorithme classique d'optimisation de forme avec la méthode level-set utilisé tout au long des travaux est résumé ci-dessous :

1. Définition de la forme initiale, avec une topologie suffisamment riche (en 2D).
2. Itération jusqu'à convergence, pour $k \geq 0$:
 - Résolution du problème direct et calcul de la fonction objectif $J(\Omega_k)$.
 - Résolution du problème adjoint (si besoin) et calcul de la dérivée de forme.
 - Extension et régularisation de la vitesse ν
 - Résolution de l'équation d'Hamilton-Jacobi (2.4) pour obtenir ϕ_{k+1} .
 - Redistanciation de ϕ_{k+1} .
 - Calcul de $J(\Omega_{k+1})$.
 - Si $J(\Omega_{k+1}) \leq (1 + tol)J(\Omega_k)$, avec tol un réel positif, l'itération est acceptée, sinon le pas t_k est diminué.

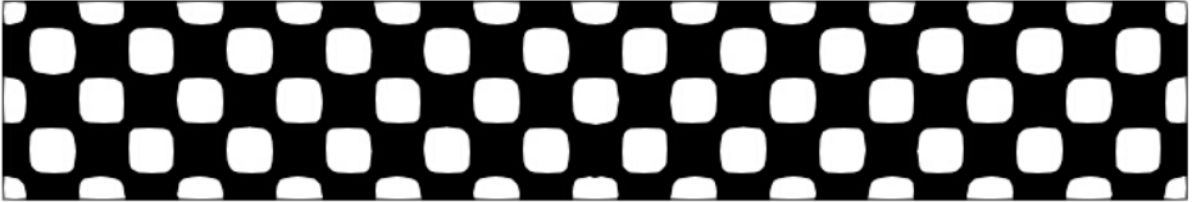
Si la norme de ν_k est suffisamment petite ou si t_k est trop petit, la convergence est atteinte et l'algorithme est arrêté.

2.4.4 Exemple classique

Dans cet exemple, le cas de la poutre MBB est considéré. Le domaine de calcul est de taille $3mm \times 1mm$ correspondant à la moitié de la poutre et représenté en Figure (2.4a) avec les différentes conditions aux limites. Une condition de symétrie est imposée sur le bord gauche vertical en bloquant le déplacement horizontal. Le domaine est discrétisé en 120×40 éléments P1 utilisés pour résoudre le problème mécanique (2.28). Le chargement vertical vaut $f = (0, -1)$ et est appliqué au milieu de la poutre, soit à l'extrémité gauche du domaine. Les conditions aux limites de Dirichlet sont appliquées à chaque extrémité de la face inférieure de la poutre, soit à l'extrémité droite du bord inférieur du domaine de calcul. Aussi, le module de Young $E = 1$ et le coefficient de Poisson $\nu = 0.3$. La convergence est obtenue après 200 itérations, avec un multiplicateur de Lagrange fixe $l = 0.2$ (Figure 2.4e). Tout au long du mémoire, pour les figures où les courbes de convergence sont montrées, l'axe des abscisses indique le nombre d'itérations de l'algorithme et celui des ordonnées la valeur de chaque critère. Ici, on remarque que la fonction objectif dépend fortement de la valeur de la compliance, cela est dû à une valeur du multiplicateur de Lagrange plutôt faible.



(a) Domaine de conception symétrisé



(b) Forme initiale



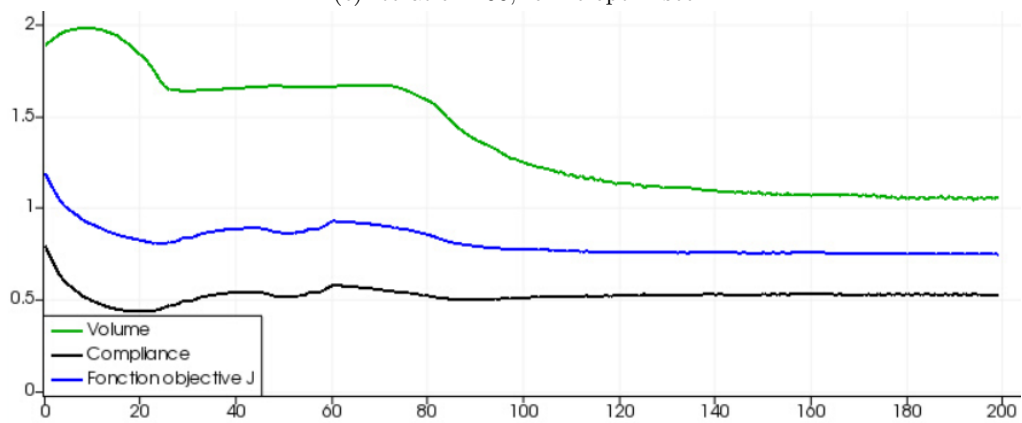
(c) Itération 50



(d) Itération 100



(e) Itération 200, forme optimisée

(f) Evolution de $J(\Omega)$, de la compliance et du volume

Chapitre 3

Optimisation de supports de fabrication

Contents

3.1	Introduction	35
3.2	Chargements imposés sur les surfaces en <i>overhang</i>	36
3.3	Chargements thermoélastiques équivalents	38
3.3.1	Simulation du procédé	38
3.3.2	Validation du modèle	39
3.3.3	Optimisation de forme des supports	40
3.3.4	Évaluation de la performance des supports	43
3.4	Pénalisation de la surface de contact pièce/supports	43
3.5	Résultats numériques 3D	44
3.5.1	Chargements imposés sur les surfaces en <i>overhang</i>	44
3.5.2	Chargements thermoélastiques équivalents	47
3.6	Supports anisotropes	49
3.6.1	Définition du problème	49
3.6.2	Loi de Hooke homogénéisée et problème de cellule	50
3.6.3	Résultats numériques : Application aux supports 'alvéolés, type <i>Magics</i> '	51
3.7	Conclusions et perspectives	54

3.1 Introduction

Pour parvenir à fabriquer certaines géométries avec le procédé SLM, des supports de fabrication sont nécessaires. Les supports sont de la non valeur ajoutée, leur utilisation augmente notamment le temps de fabrication, le temps de parachèvement et la consommation de poudre métallique. Il est donc nécessaire d'optimiser leur géométrie afin de maximiser leurs performances tout en minimisant leur volume. Pour se faire, deux modèles de force sont introduits dans cette partie. Des travaux ont déjà été effectués sur le sujet, notamment dans [10, 107] où les supports sont optimisés pour maintenir les surfaces en *overhang* en considérant un chargement de type gravité s'appliquant sur la structure à fabriquer. Ce modèle présente quelques défauts pour le procédé SLM puisque certaines surfaces en *overhang* sont supportées de manière discontinue. Aussi, ce modèle ne prend pas en compte le procédé de fabrication qui peut avoir un impact conséquent sur la géométrie des supports pour certaines pièces, en particulier les plus massives. Dans cette partie, plusieurs travaux présentés sont issus de la publication [9]. Deux modèles sont proposés pour corriger ces problèmes. Dans le premier, un chargement de type gravité sera toujours considéré mais appliqué cette fois uniquement sur les surfaces en *overhang*, sans prendre en compte le comportement mécanique de la pièce fabriquée. Des travaux similaires ont été effectués dans [64] avec la méthode SIMP. Le deuxième modèle prend lui en compte le procédé de fabrication couche par couche en déduisant des forces équivalentes aux déplacements d'origine thermique, obtenus après une simulation

du procédé thermoélastique. Ces forces équivalentes seront ensuite utilisées dans un problème purement mécanique pour évaluer la performance des supports. Cette méthode est également utilisée dans [27], et a l'avantage d'être relativement efficace pour un temps calcul raisonnable. Les résultats numériques seront montrés en 2 et 3 dimensions, en considérant la pièce à fabriquer fixe, l'optimisation de ses supports sera uniquement étudiée. Une contrainte pour la post-fabrication sera également introduite, pénalisant la surface de contact entre la pièce et les supports réduisant le nombre de zones à parachever. Enfin, l'optimisation de forme de supports alvéolés (composés d'une grille de murs verticaux très fins) sera approchée avec l'utilisation d'un matériau homogénéisé aux propriétés anisotropes. Ce type de support est régulièrement utilisé en industrie pour réduire le temps de fabrication et la consommation de matière.

Notations : Tout au long de cette partie, la forme à fabriquer sera notée $\omega \subset \mathbb{R}^N$ avec $N \in \{2, 3\}$ et ses supports $S \subset \mathbb{R}^N$. La direction de fabrication est considérée comme la direction verticale allant du bas vers le haut.

3.2 Chargements imposés sur les surfaces en *overhang*

Ce premier modèle de chargement consiste à assurer la fabricabilité des surfaces en *overhang* de la pièce. Dans la plupart des cas, il suffit que les supports relient la surface en *overhang* au plateau afin de ne pas laisser les extrémités de couches formant cette surface se déformer. Une idée développée dans [9] est d'imposer un chargement vertical constant sur ces surfaces, notées $\Gamma_\beta(\partial\omega)$, où β est l'angle limite observé entre le bord de la pièce $\partial\omega$ et la direction de fabrication e_d au delà duquel la surface est considérée comme *overhang*, comme illustré en Figure 3.1. La compliance calculée à la suite de la résolution d'un problème élastique pourra être minimisée par l'optimisation de la forme des supports. Ces derniers, notés S et évoluant dans le domaine D seront alors forcés de maintenir ces surfaces en tout point sous peine de voir la compliance augmenter.

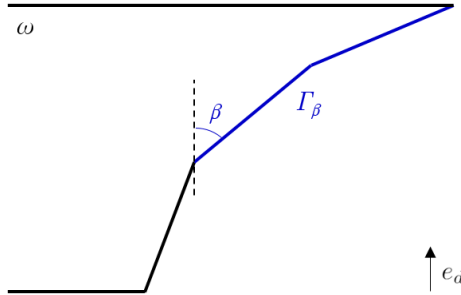


FIGURE 3.1 – Le bord de la forme ω est considéré comme *overhang* s'il forme un angle supérieur ou égal à β avec la direction de fabrication e_d .

Le nouveau domaine de conception est alors l'extérieur de la forme, maillé en utilisant la librairie de remaillage MMG [52]. Les chargements sont imposés sur les bords inclinés d'un angle supérieur à β avec la direction de fabrication. Les conditions aux limites de Dirichlet quant à elles sont imposées sur les bords Γ_D qui sont ici le bord inférieur du domaine modélisant le plateau et les bords de la forme qui ne sont pas considérés comme *overhang*. La Figure 3.2 montre le nouveau domaine de conception pour les supports (à gauche) et les bords $\Gamma_\beta(\partial\omega)$ (à droite) où les chargements verticaux seront imposés, ainsi que les bords Γ_D .

On introduit l'espace suivant :

$$H_{\Gamma_D}^1(S)^N = \{u \in H^1(S)^N : u = 0 \text{ sur } \Gamma_D\} \quad (3.1)$$

Le déplacement élastique u subit par les supports S est l'unique solution dans l'espace $H^1(S)^N$ du problème élastique linéarisé suivant :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A_S e(u)) = 0 & \text{dans } S, \\ A_S e(u)n = g & \text{sur } \Gamma_\beta, \\ A_S e(u)n = 0 & \text{sur } \partial\omega \setminus \Gamma_\beta, \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_D \end{cases} \quad (3.2)$$

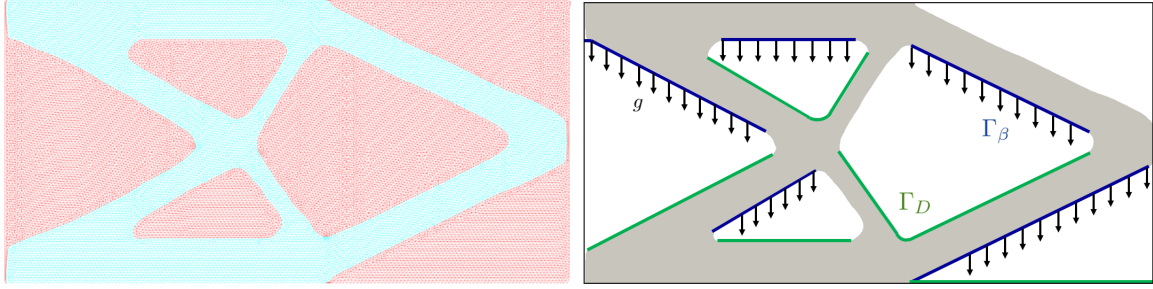


FIGURE 3.2 – Maillage exact du domaine extérieur (rouge) à la forme du cantilever (à gauche) et définition des bords Γ_β avec $\beta = 45^\circ$ et Γ_D (à droite)

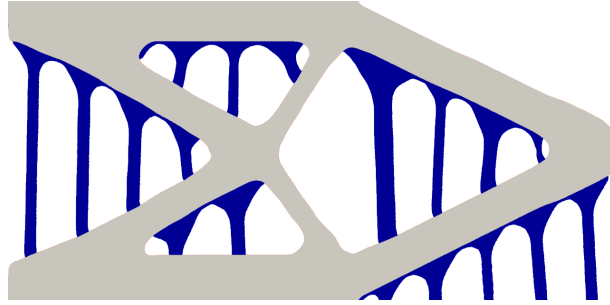


FIGURE 3.3 – Supports optimisés (en bleu) obtenus par minimisation de la compliance calculée à partir des chargements verticaux sur les surfaces en *overhang* d'une pièce fixe (en blanc), avec comme angle limite $\beta = 45^\circ$.

où $e(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T)$ est le tenseur des déformations linéarisé associé au déplacement u , g est le chargement vertical et n le vecteur normal unité. Aussi, A_S est le tenseur de Hooke associé aux supports. La compliance est le critère choisi pour évaluer la performance mécanique des supports S et sera par la suite minimisée. Elle est définie comme suit :

$$C(S) = \int_{\Gamma_\beta} g \cdot u \, ds. \quad (3.3)$$

Comme souvent, il est nécessaire d'ajouter une contrainte sur le volume de la forme. Ici, une contrainte d'égalité est considérée afin que le volume des supports atteigne une valeur cible $|S_{cible}|$ imposée par l'utilisateur. Cela a d'ailleurs du sens en pratique puisque le volume des supports doit être rigoureusement contrôlé, la matière nécessaire à leur construction devra être enlevée puis jetée après fabrication. Le problème d'optimisation s'écrit alors

$$\begin{aligned} \min_{S \subset D} \quad & J(S) \\ \text{tel que} \quad & |S| = |S_{cible}|, \end{aligned} \quad (3.4)$$

La Figure 3.3 montre la forme des supports après minimisation de (3.4). Ce résultat a été obtenu en choisissant $E_S = 1$, $\nu_S = 0.3$, $g = 1$ et $\beta = 45^\circ$. Comme attendu, les supports maintiennent entièrement les surfaces Γ_β d'une pièce fixe, ici un cantilever. La contrainte de volume choisie est $|S_{cible}| = 0.22 \mid D \mid = 0.25$.

Remarque 3.2.1. *En pratique, il serait préférable de minimiser le volume des supports en respectant une contrainte de compliance. La stratégie contraire est ici choisie car il est plus aisé de fixer un volume de support final et de contrôler ainsi leur épaisseur. Avec une valeur de compliance cible bien choisie, les mêmes résultats peuvent être obtenus.*

Un critère géométrique simple a été développé afin de garantir la fabricabilité des surfaces en *overhang* bien qu'elle ne modélise pas le vrai phénomène physique. Le chargement surfacique garantit le contact entre les supports et les surfaces en *overhang* de la pièce et assure sa fabricabilité, là où les

travaux présentés dans [10] portent sur un supportage structurel. Les valeurs de g et de β sont choisies par l'utilisateur et la forme des supports en dépend fortement. Néanmoins elle reste très efficace si le besoin est de générer rapidement des supports de fabrication lorsque la pièce est fixe. D'autres cas seront montrés en trois dimensions en section 3.5.

3.3 Chargements thermoélastiques équivalents

Un critère géométrique et mécanique pour l'optimisation de forme des supports de fabrication vient d'être décrit en Section 3.2. Il se révèle efficace puisqu'a priori toutes les surfaces de la pièce en *overhang* nécessitent d'être supportées. Néanmoins les déformations d'origine thermique ne sont pas toujours localisées au niveau de ces surfaces, surtout pour les pièces massives. Un autre modèle de force prenant en compte les chargements thermiques est proposé dans cette section, venant compléter le précédent modèle. Pour estimer ces chargements induits par la fabrication, une simulation du procédé couche par couche est utilisée, s'appuyant sur les travaux développés dans [15]. Un chargement mécanique équivalent aux déplacements subis par la pièce en sera ensuite déduit et utilisé dans un problème d'élasticité linéaire pour l'optimisation de la forme des supports. Des travaux similaires ont également été réalisés avec la méthode SIMP dans [27].

3.3.1 Simulation du procédé

Pour ce modèle, le domaine D représente la chambre de fabrication et est composé de deux sous-domaines Ω_1 et Ω_2 , séparés par une interface $\Gamma = \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$. Ces deux sous-domaines sont remplis de deux matériaux thermoélastiques, représentant le métal solidifié et la poudre. Les propriétés matériaux ξ sont constantes dans chaque sous-domaine et sont notées comme suit :

$$\xi(x) = \xi_1\chi_{\Omega_1}(x) + \xi_2(1 - \chi_{\Omega_1}(x)),$$

où ξ_i sont les propriétés matériaux définies dans le sous-domaine Ω_i et χ_{Ω_i} la fonction caractéristique de Ω_i (valant 1 si $x \in \Omega_i$ et 0 ailleurs). Le domaine D est divisé en M macro-couches horizontales et D_i correspond aux i premières couches construites tel que

$$D_1 \subset \dots \subset D_i \subset \dots \subset D_f \equiv D.$$

Le domaine divisé en couches est schématisé en Figure 3.4.

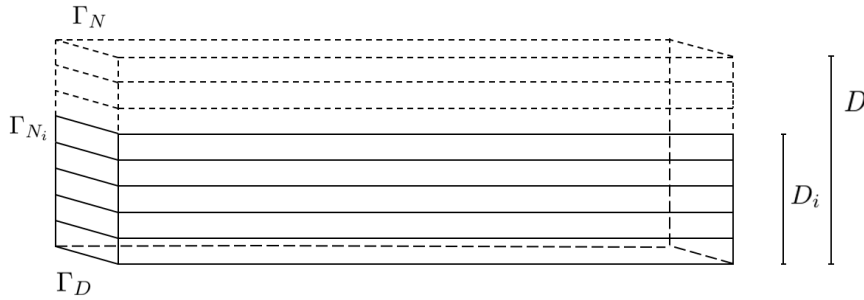


FIGURE 3.4 – Domaine D divisé en M macro-couches horizontales.

Les équations d'état utilisées pour simuler le procédé sont l'équation de la chaleur et un système thermoélastique. L'équation de la chaleur s'écrit :

$$\begin{cases} \rho \frac{T_i - T_{i-1}}{\Delta t} - \operatorname{div}(\lambda \nabla T_i) = Q_{\mathcal{L}i} & \text{dans } D_i, \\ (\lambda \nabla T_i) \cdot n = -\beta(T_i - T_{init}) & \text{sur } \Gamma_{N,i}, \\ T_i = T_{init} & \text{sur } \Gamma_{D,i}, \end{cases} \quad (3.5)$$

où T_i est le champ de température, $\Delta t > 0$ le pas de temps, $\rho > 0$ est le produit de la densité du matériau par la capacité thermique massique, $\lambda > 0$ est le coefficient de conductivité thermique et $\beta > 0$ le coefficient de transfert thermique. La source thermique $Q = Q_1\chi_{\Omega_1} + Q_2(1 - \chi_{\Omega_1})$ est

appliquée en une seule fois sur la dernière couche de chaque de chaque sous-domaine D_i , à l'image de l'apport de chaleur au passage du laser. La trajectoire de ce dernier n'est pas modélisée. Enfin, T_{init} est la température de la chambre de fabrication avant le passage du laser.

Le système thermoélastique lui s'écrit :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\sigma_i) = f_i & \text{dans } D_i, \\ \sigma_i = \sigma_i^{el} + \sigma_i^{th} & \text{dans } D_i, \\ \sigma_i^{el} = Ae(u_i) & \sigma_i^{th} = K(\min(T_i, T_{ref}) - T_{ref})\mathbb{I}_d, \\ \sigma_i n = 0 & \text{sur } \Gamma_{N,i}, \\ u_i = 0 & \text{sur } \Gamma_{D,i}. \end{cases} \quad (3.6)$$

où σ est le tenseur des contraintes, f une force volumique, σ_{el} les contraintes élastiques, σ_{th} les contraintes d'origine thermique, A le tenseur de rigidité d'un matériau isotrope avec un module de Young $E > 0$, $-1 < \nu < 1/2$ le coefficient de Poisson, \mathbb{I}_d la matrice identité, α le coefficient d'expansion thermique et $K = -E\alpha/(1 - 2\nu)$. T_{ref} est appelé température de référence pour laquelle le matériau ne subit aucune déformation d'origine thermique. Elle est donc différente selon la phase, telle que $T_{ref} = T_{ref1}\chi_{\Omega_1} + T_{ref2}(1 - \chi_{\Omega_1})$. Dans le métal solide, cette température de référence est la température de fusion et dans la poudre la température ambiante, ou celle du lit de poudre s'il est préchauffé. Aussi, la température ne peut pas être plus importante que la température de fusion T_{ref} pour le métal solide. Puisque l'équation de la chaleur ne prend pas en compte le changement de phase, cette borne supérieure de température est imposée explicitement. Une étape de refroidissement est également considérée après la phase de chauffe (correspondant au temps pris par la machine pour étaler une nouvelle couche), permettant en pratique au métal fondu de se solidifier, puis se rétracter. Lors de cette étape, la source Q est nulle dans l'équation de la chaleur (3.5) et le pas de temps Δt est différent.

3.3.2 Validation du modèle

Les résultats obtenus à l'issue de cette simulation du procédé ont été comparés avec ceux d'un logiciel de simulation commercial, *Simufact Additive* [®] [1] pour la fabrication d'une plaque de taille 3cm×1cm, en deux dimensions. Pour les calculs numériques, les propriétés mécaniques et thermiques sont tirées de [92]. L'alliage de titane Ta6V, commun en SLM, est considéré et ses propriétés mécaniques et thermiques sont notées dans la Table 3.1.

Paramètre	Solide	Poudre
Module de Young E (GPa)	110	1.6
Coefficient de Poisson ν	0.25	0.25
Capacité thermique massique C ($J.kg^{-1}.K^{-1}$)	610	700
Coefficient de transfert thermique β ($W.m^{-2}.K^{-1}$)	50	50
Coefficient d'expansion thermique α (K^{-1})	0.000009	0.0000001
Coefficient de conductivité thermique λ ($W.m^{-1}.^{\circ}K^{-1}$)	15	0.25
Densité ρ ($kg.m^{-3}$)	4300	2100
Température de référence T_{ref} (K)	1923	290

TABLE 3.1 – Propriétés du matériau Ta6V utilisées pour la simulation du procédé

Les autres paramètres utilisés sont : $Q_1 = 8000 W.cm^{-2}$, $Q_2 = 10^{-3}Q_1$. Il y a $M = 20$ couches considérées et chaque couche est construite en un seul pas de temps de $\Delta t_{chauffe} = 0.1 s$, correspondant à la phase de chauffe. Elle est suivie par la phase de refroidissement, également calculée avec un seul pas de temps par couche $\Delta t_{cool} = 5 s$, avec $Q = 0$.

Les déplacements horizontaux et verticaux calculés sur chaque domaine intermédiaire D_i sont sommés puis comparés en Figure 3.5 et 3.6 avec les résultats de *Simufact Additive* [®] : les résultats des deux modèles montrent de bonnes similitudes. On peut noter néanmoins une différence dans les résultats sur la partie basse de la plaque (Figure 3.5) où notre modèle ne prédit aucun déplacement. Cela est dû à la condition aux limites de Dirichlet imposée sur Γ_D , alors que *Simufact Additive* [®] simule également le comportement mécanique du plateau lors de la fabrication, sujet aux déplacements. Notre modèle peut être donc amélioré en incluant le plateau de fabrication dans le domaine de calcul

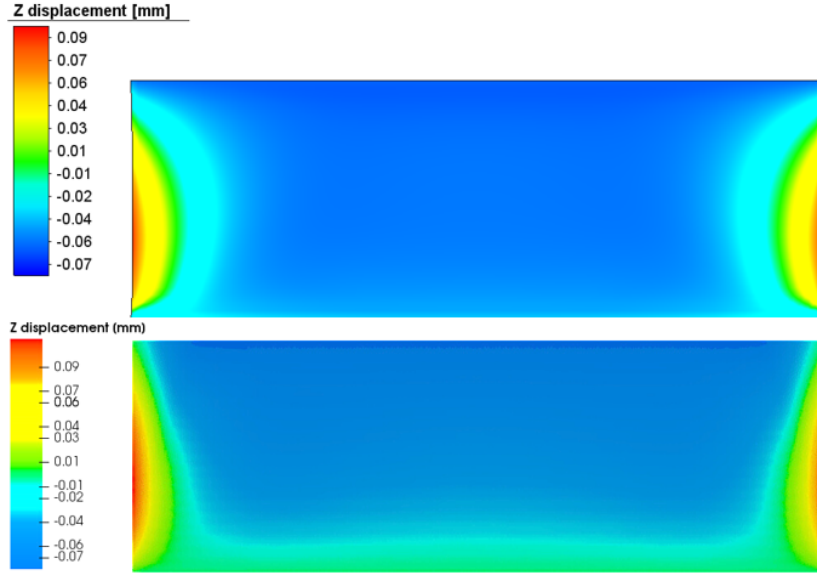


FIGURE 3.5 – Déplacements verticaux sommés (dans la direction de fabrication) d’une plaque, obtenus avec le logiciel *Simufact.Additive* [®] (haut) et avec le modèle développé 3.3.1 (bas).

et en prenant en compte des propriétés matériaux dépendantes de la température afin de se rapprocher davantage des résultats prédits par *Simufact Additive* [®]. Ce dernier utilise un solveur éléments finis non-linéaire et prédit les comportements plastiques du matériau, donc plus complexe que notre modèle simplifié. De plus, les résultats obtenus par ce logiciel ont été vérifiés expérimentalement par plusieurs industriels. Ainsi, on fait le choix d’utiliser cet outil pour vérifier nos résultats.

La comparaison entre le modèle de la sous-section 3.3.1 et *Simufact Additive* [®] est faite avec une géométrie de mur vertical très simple (néanmoins commune pour la simulation de procédé SLM). En l’absence de support pour une géométrie plus complexe (comme la géométrie en ’T’ montrée en Figure 3.7), le calcul de *Simufact Additive* [®] s’interrompt dû à une déformation de maillage trop importante. C’est l’une des raisons pour laquelle les forces équivalentes sont déduites du modèle de simulation simplifié, le calcul ne risque pas de s’arrêter car il s’appuie sur l’élasticité linéarisée et est réalisé sur un maillage fixe. Aussi, *Simufact Additive* [®] possède son propre générateur de maillage, les résultats de la simulation sont donc difficiles à exporter dans notre algorithme d’optimisation.

3.3.3 Optimisation de forme des supports

Une géométrie à supporter en 2 dimensions est considéré pour l’instant, montrée en Figure 3.7. Celle-ci comporte de grandes surfaces en *overhang* et est a priori sujette à des déformations d’origine thermique importantes. Une symétrie par rapport à l’axe verticale est prise en compte, seulement la moitié de la structure sera montrée et considérée dans les calculs. Après résolution de (3.5) et (3.6), le déplacement maximal (en norme) par rapport à l’indice i est calculé en tout point x . Ce champ de déplacement maximal, appelé u_{th} , ne dépend maintenant que de la variable d’espace x et est montré, pour la moitié de la structure en ’T’, en Figure 3.8. De ce champ de déplacement sont ensuite extraits des chargements équivalents, statiques, comme suit. Le champ u_{th} est imposé comme condition aux limites de Dirichlet sur $\partial\omega$ et le problème d’élasticité linéarisée est ensuite résolu :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(Ae(u_{reac})) &= 0 & \text{dans } \omega \\ u_{reac} &= u_{th} & \text{sur } \partial\omega \end{cases} \quad (3.7)$$

Il est à noter que $u_{th} = 0$ sur Γ_D dans (3.6), donc u_{reac} garde cette condition. Des contraintes normales peuvent alors être calculées et les forces équivalentes f_{th} , appliquées sur le bord de la forme $\partial\omega$, s’écrivent :

$$f_{th} = Ae(u_{reac})n \quad (3.8)$$

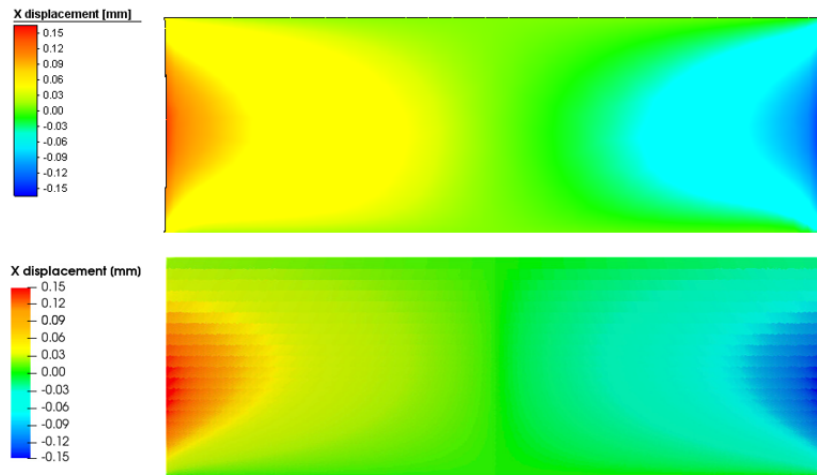


FIGURE 3.6 – Déplacements horizontaux sommés d’une plaque, obtenus avec le logiciel *Simufact.Additive*® (haut) et avec le modèle développé en sous section 3.3.1 (bas).

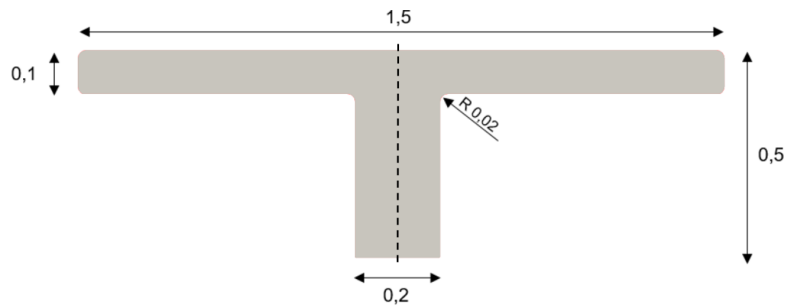


FIGURE 3.7 – Géométrie du double cantilever (tous les coins, excepté ceux collés au plateau, sont arrondis avec le même rayon de courbure)

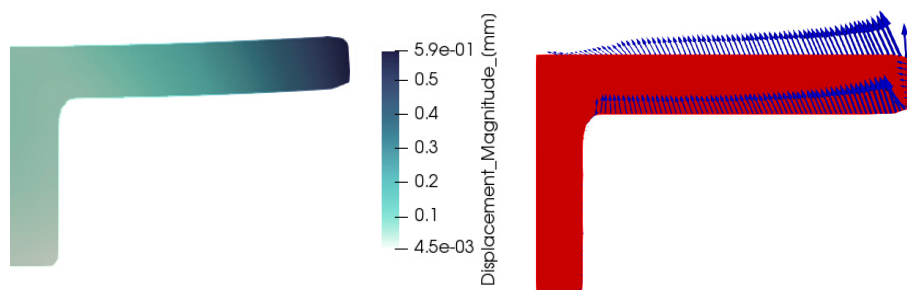


FIGURE 3.8 – Déplacement maximal montré sur la moitié du cantilever, simulé avec le modèle décrit dans 3.3.1 (à gauche), et visualisation des forces équivalentes obtenues de (3.7) (à droite).



FIGURE 3.9 – Supports optimisés (en bleu) obtenus après minimisation de la compliance (3.10) calculée à partir des forces équivalentes uniquement (à gauche), et après minimisation de la somme des deux compliances (3.11) (à droite)

où n est le vecteur normal unité. Une représentation de ces forces équivalentes f_{th} pour la moitié de la structure est montrée en Figure 3.8.

Dans un deuxième temps, les supports S sont optimisés. La performance de ces supports est évaluée en résolvant un problème d'élasticité linéarisé dans la structure complète, la pièce et ses supports, notée Ω et définie par $\bar{\Omega} = \bar{S} \cup \bar{\omega}$ dans D . Les chargements équivalents aux déplacements d'origine thermique f_{th} sont imposés aux bords de ω :

$$\begin{cases} -\text{div}(A_{Se}(u_{spt})) &= f_{th} \delta_{\partial\omega} & \text{dans } \Omega \\ A_{Se}(u_{spt})n &= 0 & \text{sur } \partial\Omega \setminus \partial\omega \\ u_{spt} &= 0 & \text{sur } \Gamma_D \cap \bar{\Omega} \end{cases} \quad (3.9)$$

où $\delta_{\partial\omega}$ est la mesure de Dirac pour le bord $\partial\omega$.

Classiquement, la compliance est donnée par :

$$J_1(S) = \int_{\partial\omega} f_{th} \cdot u_{spt} \, ds. \quad (3.10)$$

La Figure 3.9 (à gauche) montre les supports obtenus dans un domaine D de taille $[0, 1] \times [0, 0.5]$ en minimisant la compliance avec une contrainte de volume appliquée à la forme des supports : $|S| = 0.3|D| = 0.15$. Le domaine de calcul D est discrétisé en utilisant 140×70 noeuds dans une triangulation sur laquelle des éléments finis triangulaires P1 sont considérés. Aussi, la forme à fabriquer ainsi que ses supports ont les mêmes propriétés thermiques et mécaniques.

Le résultat obtenu est logique, mais non satisfaisant pour la fabrication car la forme des supports ne garantit pas la fabricabilité de la pièce. Comme montré en Figure 3.8, la barre horizontale de la structure est sujette aux déplacements d'origine thermique sur toute sa longueur. Néanmoins, lorsque les supports s'accrochent à l'extrémité de cette barre, les déplacements u_{th} sont fortement réduits car cette dernière n'est plus libre. Lorsque la première couche constituant la barre horizontale est chauffée puis refroidie, les supports limitent son retrait thermique et donc son déplacement. Or comme vu au chapitre 1, il n'est pas possible de laisser une surface horizontale non supportée. Pour satisfaire également cette autre contrainte de fabrication, ce dernier modèle de force est complété par celui décrit en sous-section 3.2 et une nouvelle fonction objectif est considérée comme étant la somme des deux compliances :

$$J_2(S) = \int_{\partial\omega} f_{th} \cdot u_{spt} \, ds + \int_{\Gamma_\beta} g \cdot u \, ds, \quad (3.11)$$

où u_{spt} solution de (3.9) et u solution de (3.2). Comme précédemment, la fonctionnelle (3.11) est minimisée avec une contrainte sur le volume des supports, donnant le résultat montré en Figure 3.9 (à droite), qui est plus satisfaisant pour la fabrication additive. Il est à noter également que la prise en compte du déplacement maximal u_{th} en tout point pendant toute la durée du procédé préserve un historique de la construction couche par couche. Ce champ met en valeur les déplacements importants pouvant être cachés si les déplacements en fin de fabrication étaient uniquement considérés.

Pour les résultats de la Figure 3.9 (à droite), la compliance calculée à partir des chargements équivalents f_{th} est deux fois plus importante que la compliance calculée à partir des chargements

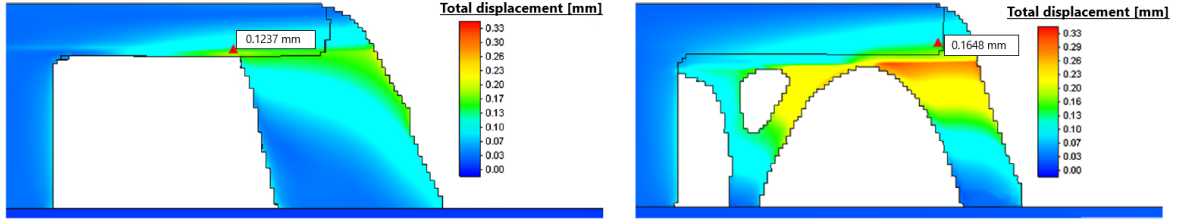


FIGURE 3.10 – Résultats de la simulation du procédé obtenu avec *Simufact Additive* $\text{\textcircled{R}}$ pour le cantilever maintenu par les supports optimisés pour les chargements d’origine thermique uniquement (à gauche) (déplacements maximum de la pièce : 0.17 mm), et pour les supports optimisés pour les chargements multiples (à droite) (déplacement maximum de la pièce : 0.31mm)

de type gravité. Une fois encore, ces derniers sont appliqués arbitrairement de sorte à ce que les supports puissent être en contact avec les surfaces en *overhang*. La proportion entre ces chargements et les chargements d’origine thermique ne reflètent donc pas la réalité. Aussi, puisque leur norme est choisie par l’utilisateur, les deux compliances sont simplement additionnées entre elles, sans pondération particulière.

3.3.4 Évaluation de la performance des supports

Afin de vérifier la validité des supports optimisés, une simulation en 2 dimensions a d’abord été effectuée avec *Simufact Additive* $\text{\textcircled{R}}$. Les simulations de la fabrication des structure montrées en Figure 3.9 sont montrées en Figure 3.10. Les déplacements tracés proposés par *Simufact Additive* $\text{\textcircled{R}}$ sont ceux auxquels s’attendre à la fin du procédé de fabrication. Ils sont calculés comme la norme du vecteur déplacement à la dernière couche et différents de ceux montrés en Figure 3.5 ou 3.6. Selon *Simufact Additive* $\text{\textcircled{R}}$, la pièce maintenue par les supports obtenus par l’optimisation multi-critère (3.11) subie plus de déplacements que celle maintenue par les supports obtenus par l’optimisation de (3.10) (chargements équivalents uniquement), pour un même volume. Bien sûr, ces derniers supports sont plus efficaces car toute la matière composant le support est localisée à l’extrémité de la barre, là où les chargements sont les plus importants. Néanmoins comme mentionné plus haut, la fabricabilité n’est pas assurée. Étonnement, *Simufact Additive* $\text{\textcircled{R}}$ ne détecte aucun problème autour des surfaces horizontales non-supportées, du fait du modèle de dépôt de couche, identique à celui détaillé dans cette partie. Cela met en valeur la difficulté de capturer ce phénomène se produisant autour des surfaces horizontales. Des résultats en trois dimensions sont montrés en section 3.5.

3.4 Pénalisation de la surface de contact pièce/supports

Comme mentionné au chapitre 1, il est préférable de limiter la surface de contact entre la pièce et ses supports pour faciliter les opérations de post-production. Pour prendre en compte cette contrainte, un terme de pénalisation peut être ajouté à la fonction objectif, qui intègre le bord de la forme ω qui n’est pas en *overhang* et en contact avec le support S . La dérivée de forme d’une telle intégrale nécessite le calcul de la courbure, qui peut être coûteux numériquement. Une approximation volumique est alors considérée :

$$\mathcal{P}_\varepsilon(S) = \frac{1}{\varepsilon L} \text{Vol}(\{x \in {}^c\omega : d(x, \omega \setminus \Gamma_\beta(\omega)) < \varepsilon L\} \cap \{\varphi_S < \varepsilon L\}), \quad (3.12)$$

où ${}^c\omega$ est le complémentaire de ω , d est la fonction distance signée, φ_S est la fonction level-set du support et L est une longueur caractéristique de la forme ω . La fonction $\mathcal{P}_\varepsilon(S)$ intègre le volume d’une bande d’épaisseur εL autour du bord $\partial\omega \setminus \Gamma_\beta(\partial\omega)$, n’étant pas en *overhang* et contenant S . En pratique, le paramètre ε est choisi tel que $\varepsilon = dx/L$, où dx est la taille de maille. Lorsque ce terme est ajouté à la fonction objectif et pondéré par un multiplicateur de Lagrange, les supports sont forcés de s’appuyer sur le plateau de fabrication car tout volume de support contenu autour d’une surface non-*overhang* se verra intégré dans la fonction objectif. Lorsque cette pénalisation est considérée, la condition aux limites de Dirichlet n’est appliquée qu’au bord inférieur du domaine, modélisant uniquement l’attache

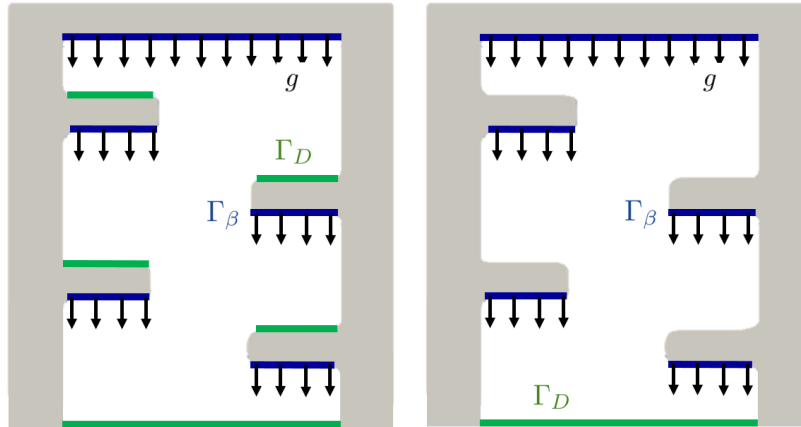


FIGURE 3.11 – A gauche, les conditions aux limites pour les chargements imposés aux surfaces en *overhang* sont montrés, sans pénalisation de la surface de contact entre la pièce et ses supports, les supports peuvent s’appuyer sur les parties horizontales de la pièce. A droite, dans le cas où la pénalisation est prise en compte, les conditions aux limites de Dirichlet ne s’appliquent que sur le bord inférieur du domaine.



FIGURE 3.12 – Optimisation de forme des supports sans pénalisation de la surface de contact pièce/supports (à gauche) et avec (à droite). Pour ce dernier cas, la condition aux limites de Dirichlet est restreinte à la base du domaine.

au plateau, comme montré en Figure 3.11 (à droite). Les résultats de l’optimisation de supports sont montrés en Figure 3.12 avec et sans cette pénalisation. Des résultats en trois dimensions seront montrés en section 3.5

3.5 Résultats numériques 3D

Dans cette section, tous les modèles décrits plus haut sont appliqués à des cas test plus réalistes en 3 dimensions. Ces derniers sont des cas académiques afin que la simulation ne prennent pas plus que quelques heures en temps calcul. Celui-ci reste important en industrie : typiquement, le temps de simulation doit être moins important que le temps de fabrication d’une pièce.

3.5.1 Chargements imposés sur les surfaces en *overhang*

Dans cette sous-section, les critères et contraintes d’optimisation seront évalués en considérant la fabrication d’un tube coudé ω , montré en Figure 3.13. L’orientation de la pièce sur le plateau n’est pas optimisée [9] afin de mettre en valeur la géométrie parfois complexe des supports. Les supports

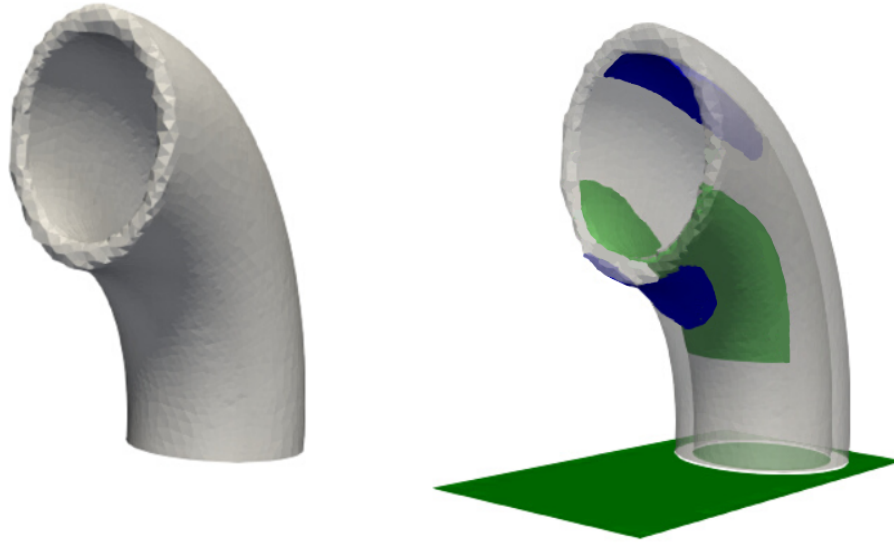


FIGURE 3.13 – Forme du tube ω à supporter (à gauche), et visualisation des différentes parties du bord de ω (à droite) : en gris le bord libre, en vert les bords où les supports peuvent s’attacher, en bleu les bords en *overhang* Γ_β avec $\beta = 45^\circ$.

	Supports fixés à $\partial\omega$	Avec pénalisation de la surface de contact
Compliance	0.49	1.07

TABLE 3.2 – Comparaison des compliances obtenues après optimisation des supports avec et sans la pénalisation de la surface de contact entre la pièce et ses supports.

sont optimisés dans un premier temps en utilisant le modèle décrit en sous-section 3.2. L’angle limite considéré est $\beta = 45^\circ$ et les forces statiques verticales sont imposées sur toutes les surfaces $\Gamma_\beta(\partial\omega)$ possédant un angle avec la direction de fabrication supérieur à β , montrées en Figure 3.13.

Le domaine de calcul D , contenant ω est de taille $[0, 2] \times [0, 1] \times [0, 2]$ et composé de 171500 éléments P1 tétraédriques. Le coût calcul d’une itération de la boucle d’optimisation dans FreeFEM [71] est d’environ cinq minutes, incluant la résolution du problème d’élasticité linéarisé, l’advection et la ré-initialisation de la level-set. Les paramètres mécaniques choisis sont $E_S = 1$ et $\nu_S = 0.3$ pour le module de Young et le coefficient de Poisson respectivement.

Les premiers résultats de supports optimisés sont montrés en Figure 3.14. Ils sont obtenus en autorisant les supports à s’attacher au plateau de fabrication et au bord de la pièce $\partial\omega$. Dans ce calcul, la partie de $\partial\omega$ où les supports peuvent s’appuyer est identifiée par la condition $n \cdot e_d > 0.2$, où e_d est le vecteur unité de la direction de fabrication et n le vecteur unité normal à $\partial\omega$. Aussi la contrainte de volume est $0.14|D|$. Ces supports maintiennent en effet les surfaces identifiées comme *overhang* en s’appuyant en partie sur une surface non-*overhang* de la pièce. Néanmoins, il est préférable pour des questions de temps retrait des supports de limiter les contacts entre la pièce et ses supports. C’est en introduisant le terme de pénalisation (3.12) et en imposant Γ_D sur le bord inférieur de D uniquement que le résultat montré en Figure 3.15 est obtenu. La nouvelle fonction objectif à minimiser est de la forme

$$C(S) + P_\varepsilon(S),$$

où la compliance $C(S)$ est définie par (3.3). Le paramètre ε est fixé à 0.02 et la contrainte de volume est de $0.17|D|$. Le processus d’optimisation lui nécessite 150 itérations. Ici, les supports s’appuient uniquement sur le plateau et ne touchent $\partial\omega$ qu’aux endroits où la forme ω doit être supportée, c’est à dire sur les bords Γ_β . La compliance calculée est de fait plus importante que pour le premier modèle car les supports ne s’alignent plus forcément avec la direction du chargement. Les deux valeurs sont notées dans la Table 3.2.

Remarque 3.5.1. Une critique possible est le manque de contrôle des surfaces en *overhang* dans les

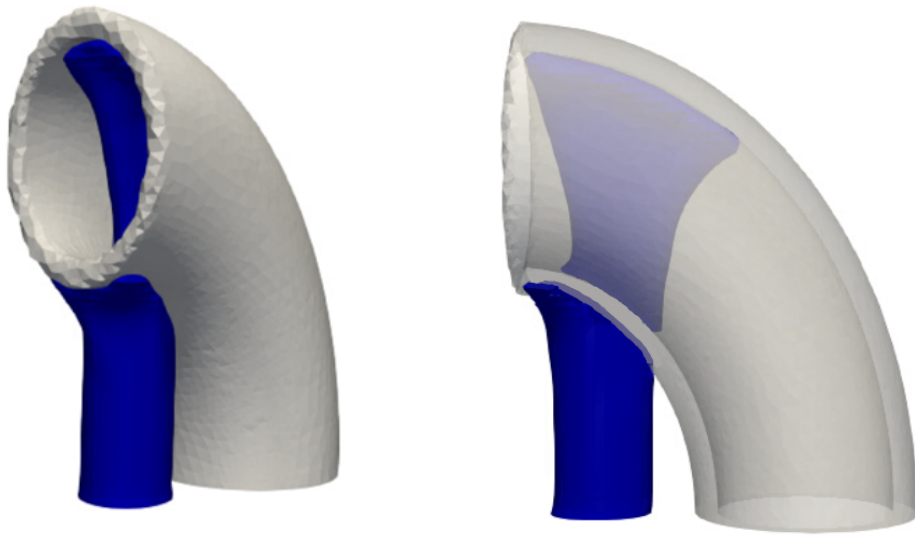


FIGURE 3.14 – Supports optimisés pour la minimisation de la compliance calculée à partir des chargements imposés sur les surfaces en *overhang*. Les supports peuvent s'appuyer sur d'autres parties du bord de la pièce.

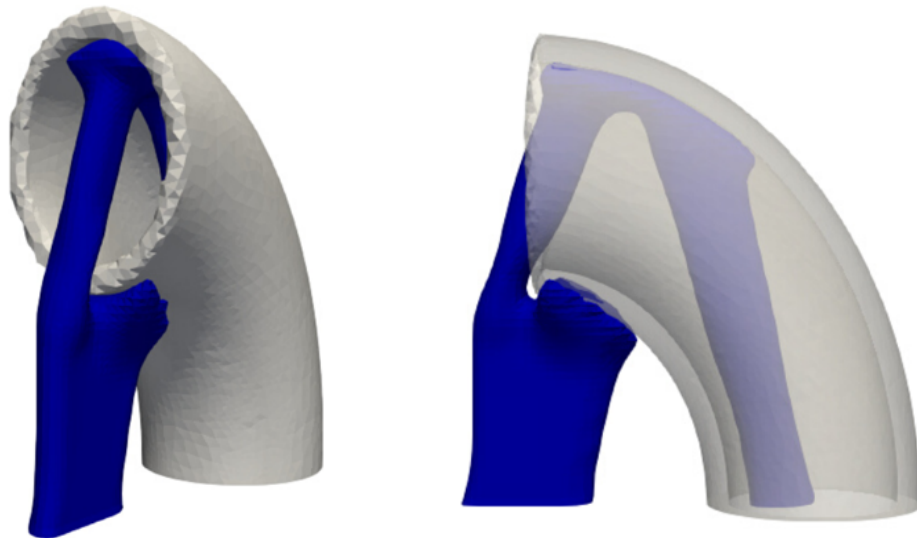


FIGURE 3.15 – Supports optimisés pour la minimisation de la compliance calculée à partir des chargements imposés sur les surfaces en *overhang*. Les supports ne sont fixés qu'au plateau et la surface de contact entre la pièce et ses supports est pénalisée.

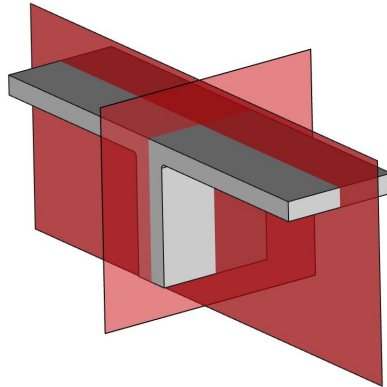


FIGURE 3.16 – Géométrie du double cantilever et de ses plans de symétrie. Les calculs ne sont effectués que sur un quart du domaine total.



FIGURE 3.17 – Supports optimisés (en bleu) obtenus après minimisation de la compliance (3.10) calculée à partir des forces équivalentes uniquement.

supports eux-mêmes. Des travaux sur le sujet seront effectués dans un prochain chapitre.

3.5.2 Chargements thermoélastiques équivalents

Le modèle décrit en Section 3.3 est ici appliqué à un cas test en 3 dimensions, plus précisément un double cantilever en T, à l'image du cas test en 2 dimensions cette fois extrudé. Cette forme est un exemple classique car elle subit de larges déformations à ses extrémités lorsqu'elle est fabriquée en SLM. Afin de réduire le temps calcul, la symétrie de la forme est exploitée pour que la simulation et l'optimisation ne soient faites que sur un quart du domaine, comme montré en Figure 3.16. Les dimensions du domaine de calcul D sont $[0, 5] \times [0, 2] \times [0, 1.5]$, maillé en utilisant 50675 noeuds.

Comme expliqué en section 3.3, le modèle de force équivalente aux déplacements d'origine thermique ne suffit pas à assurer une bonne fabrication de la pièce, comme en témoigne la géométrie montrée en Figure 3.17. Seulement la moitié du cantilever est montrée ici. Considérant le chargement multiple, défini par (3.11), de meilleurs supports sont obtenus, en Figure 3.18. Ici, les supports préviennent des déplacements d'origine thermique et maintiennent également les surfaces horizontales. La contrainte de volume pour les supports est $|S| = 0.2$ $|D| = 3$ pour le modèle de force équivalente seul et $|S| = 0.3$ $|D| = 4.5$ pour le modèle multi-chargeement.

Pour vérifier la performance de ces supports optimisés, une comparaison est faite avec les supports alvéolés issus de l'outil commercial *Materialise Magics* [®] [73]. Le logiciel *Simufact Additive* [®] est ensuite utilisé pour simuler la fabrication de la pièce maintenue par les deux types de supports, optimisés et générés par le logiciel *Materialise Magics* [®]. Le volume de matière utilisé pour construire les supports est le même dans les deux cas. Le résultat des deux simulations est montré en Figure 3.19 où les déplacements en fin de fabrication sont calculés.

La comparaison montre que les déplacements calculés à la fin du procédé de fabrication sont plus

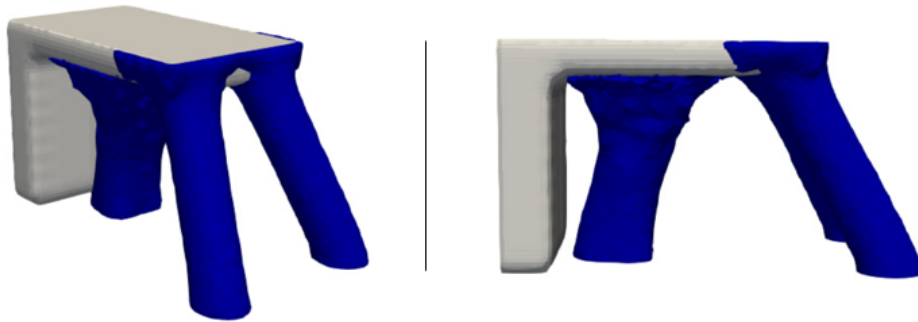


FIGURE 3.18 – Supports optimisés (en bleu) obtenus après minimisation de la somme des deux compliances (3.11)

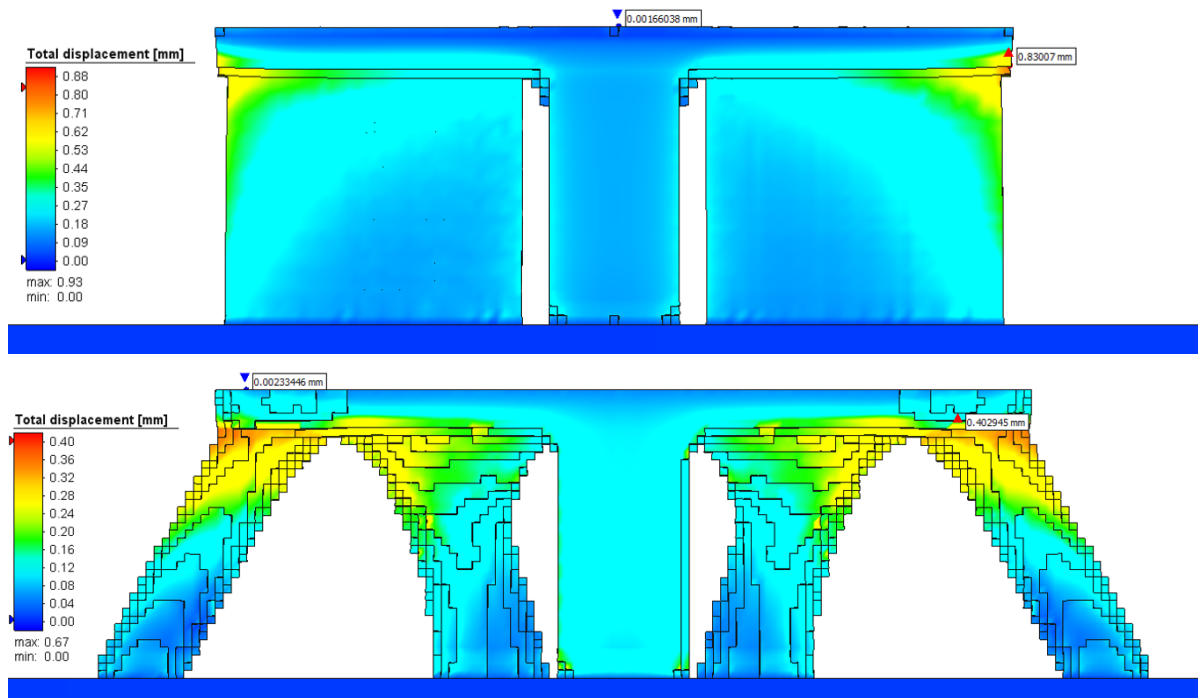


FIGURE 3.19 – Résultats de la simulation du procédé donnés par *Simufact Additive* [®] du double cantilever maintenu par les supports générés par *Materialise Magics* [®] (déplacement maximum de la pièce : 0.83) (en haut), et par les supports optimisés (déplacement maximum de la pièce : 0.40 mm) (en bas).

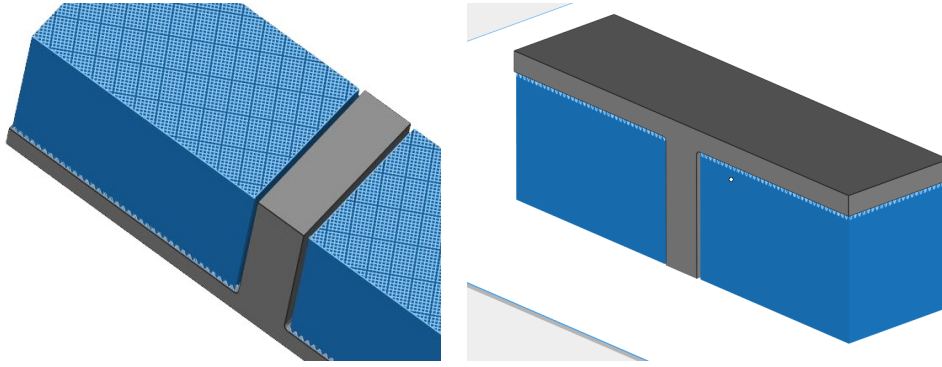


FIGURE 3.20 – Supports bloc utilisés par le logiciel *Materialise Magics* [®] (à gauche), et le double cantilever supporté par ces supports (à droite)

faibles pour le double cantilever maintenu par les supports optimisés (déplacement maximum : 0.40 mm) que pour les supports générés par *Materialise Magics* [®] (déplacement maximum : 0.83 mm). Cette comparaison est juste puisqu'elle est réalisée avec des supports de même volume. Le coût en temps de production et en matière est donc identique. Néanmoins, la forme des supports optimisés ne prend pas en compte l'opération de retrait puisque la level-set du support est directement en contact avec la level-set de la pièce et donc après fabrication, le support ne peut pas être retiré à la main. Les supports *Magics* eux ont une interface imparfaite avec la pièce à maintenir, les rendant sécables et facilitant le retrait manuel. En prenant en compte cet aspect, la comparaison est moins juste. Il est à noter que d'un point de vue industriel, pour obtenir une bonne qualité de surface, il est indispensable de parachever l'interface entre la pièce et le support, y compris lors de l'utilisation de supports sécables. Les supports optimisés ne nécessitent donc pas d'étape de post-production supplémentaire, simplement un usinage pouvant être plus lourd.

3.6 Supports anisotropes

Les supports générés par le logiciel *Materialise Magics* [®] sont montrés en Figure 3.20 pour le double cantilever, extrudé dans la troisième dimension. Ils sont constitués de blocs de murs très fins, rendant leur fraction volumique relativement faible. En effet, les supports ne participant pas à l'utilisation finale de la pièce, il peut être judicieux de les fabriquer plus rapidement en considérant une structure intérieure alvéolée, classiquement sous forme de grille. Le caractère sacrificiel des supports permet aussi de ne pas se soucier de la poudre enfermée à l'intérieur de cette grille, néanmoins celle-ci sera difficile à récupérer une fois les supports retirés. Cette structure interne différente a donc pour but de limiter le temps de lasage et le volume de matériau fusionné, à condition que les supports remplissent leur rôle. Dans cette sous-section, la forme de ce type de support sera optimisée. Naturellement, leur comportement mécanique ne sera pas connu de manière directe sous peine de mailler intégralement la structure interne, rendant le calcul très coûteux surtout si les murs sont rapprochés. Une technique d'homogénéisation sera donc utilisée afin de rechercher les paramètres moyens, ou homogènes, de ce milieu hétérogène. Dans ce problème mécanique, le paramètre homogène est le tenseur de Hooke homogénéisé A^* , caractérisant la microstructure du support. Le nouveau matériau homogène sera alors considéré pour l'optimisation de forme des supports en dimension $N = 3$, soumis à un chargement surfacique. Leur géométrie sera ensuite comparée à celle de supports optimisés pour le même problème, constitués cette fois d'un matériau aux propriétés isotropes. Certains travaux ont déjà été effectués sur le sujet [68, 77, 172, 66].

3.6.1 Définition du problème

Par simplicité, on considérera uniquement la forme des supports S dans cette étude. S est un ouvert borné de \mathbb{R}^N et constitué d'un matériau orthotrope. Une force g est appliquée sur le bord supérieur et incliné Γ_N du domaine D montré en Figure 3.22, modélisant une surface de la forme à supporter, à l'image du modèle développé en Section 3.2. Les bords latéraux Γ_L sont libres et les supports sont fixés au bord inférieur Γ_D . Leur déplacement élastique u est solution du problème mécanique suivant :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A^*e(u)) = 0 & \text{dans } S, \\ (A^*e(u))n = g & \text{sur } \Gamma_N \\ (A^*e(u))n = 0 & \text{sur } \Gamma_L \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_D. \end{cases} \quad (3.13)$$

où A^* est le tenseur de rigidité dont la forme explicite dépend des propriétés du matériau considéré. Ce point est détaillé dans la sous-section suivante. La performance des supports sera évaluée avec la compliance, donnée par

$$C(S) = \int_{\Gamma_N} A^*e(u) \cdot e(u) dx = \int_{\Gamma_N} g \cdot u dx. \quad (3.14)$$

L'algorithme d'optimisation tentera alors de minimiser ce critère pour un volume cible des supports $|S_{cible}|$.

3.6.2 Loi de Hooke homogénéisée et problème de cellule

Pour simplifier les notations, on note la direction $x = 1$, $y = 2$ et $z = 3$. Les propriétés du matériau homogénéisé au point x sont données par la loi de Hooke sous la forme suivante :

$$\sigma_{ij} = A_{ijkl}^* \epsilon_{kl}, \text{ avec } (1 \leq i, j, k, l \leq N) \quad (3.15)$$

Plus particulièrement, pour un matériau orthotrope :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{1111} & A_{1122} & A_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ A_{2211} & A_{2222} & A_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ A_{3311} & A_{3322} & A_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{2323} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{1313} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{1212} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ 2\epsilon_{23} \\ 2\epsilon_{13} \\ 2\epsilon_{12} \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

avec, par symétrie $A_{2211} = A_{1122}$, $A_{1133} = A_{3311}$, $A_{2233} = A_{3322}$.

Pour trouver les coefficients A_{ijkl}^* , une technique d'homogénéisation périodique est utilisée permettant de modéliser grâce à un milieu aux propriétés homogènes le comportement d'un milieu hétérogène. Les résultats importants de la théorie d'homogénéisation seront présentés ici, pour plus de détails, le lecteur peut se référer à [7]. Dans le cas des supports, on considère une cellule cubique unité notée $Y(m)$ de taille $(0, 1)^3$, répétée périodiquement dans le domaine. La cellule, montrée en Figure 3.21, est perforée d'un pavé droit dans la direction 3, de largeur m et de longueur $(0, 1)$, la rendant invariante dans cette direction verticale. Pour cette cellule de périodicité, le domaine solide est noté $Y \subset (0, 1)^3$ et les bords du trou notés Γ_{int} . Un problème de cellule est introduit, décrivant la déformation à l'échelle de la micro-structure :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(A(e_{ij} + e(w_{ij}))) = 0 & \text{dans } Y(m), \\ A(e_{ij} + e(w_{ij}))n = 0 & \text{sur } \Gamma_{int} \\ y \mapsto w_{ij}(y) & (0, 1)^3 \text{ - périodique.} \end{cases} \quad (3.17)$$

où A est le tenseur de rigidité du matériau composant la cellule et w_{ij} , appelé correcteur, correspond aux déplacements de la cellule $Y(m)$ définis pour les indices $(i, j) \in \{1, 2, 3\}$. Aussi, $e_{ij} = \frac{1}{2}(e_i \otimes e_j + e_j \otimes e_i)$ est un tenseur symétrique d'ordre 2 et n la normale au bord Γ_{int} . La formulation variationnelle du problème (3.17) s'écrit : trouver $w_{ij} \in H_{\#}^3(Y(m))$ pour tout $\phi \in H_{\#}^3(Y(m))$ (le symbole $\#$ indique que les fonctions sont $(0, 1)^3$ -périodique) tel que

$$\int_{Y(m)} Ae(w_{ij}) : e(\phi) + \int_{Y(m)} Ae_{ij} : e(\phi) = 0. \quad (3.18)$$

Le tenseur A^* est donné par les solutions w_{ij} du problème de cellule (3.17) par

$$A_{ijkl}^* = \int_{Y(m)} A(e_{ij} + e(w_{ij})) : (e_{kl} + e(w_{kl})) dy \quad \forall i, j, k, l \in \{1, 2, 3\}. \quad (3.19)$$

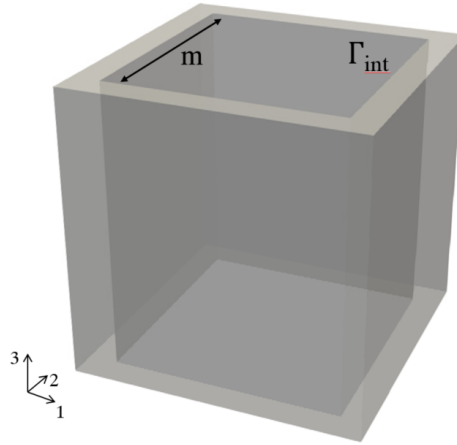
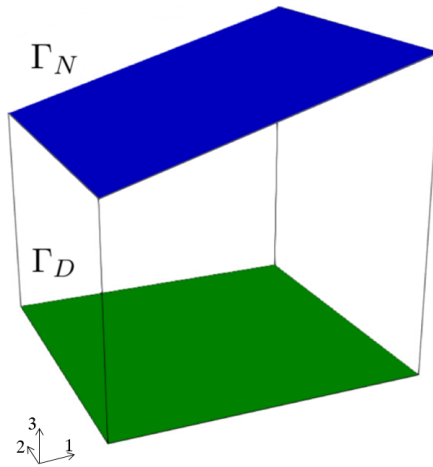


FIGURE 3.21 – Cellule de périodicité considérée pour l’optimisation de forme des supports alvéolés.

FIGURE 3.22 – Domaine D où g est normale à Γ_N .

3.6.3 Résultats numériques : Application aux supports ‘alvéolés, type *Magic*’.

Un cas test est ici considéré afin d’évaluer le changement de géométrie entre les supports aux propriétés isotropes et orthotropes. Le domaine choisi $D = [0, 1] \times [0, 0.3x + 0.7] \times [0, 1]$ dont le bord supérieur Γ_N est incliné est montré en Figure 3.22. La condition aux limites de Dirichlet est appliquée sur le bord inférieur pour modéliser l’accroche au plateau. Une force de pression $g = 1$ est appliquée dans une direction normale au bord Γ_N pour modéliser le maintien d’une surface en *overhang*. Rappelons que cette étude est réalisée pour évaluer l’influence de l’anisotropie des supports. Ce bord supérieur pourrait être incliné davantage, néanmoins au delà de 45° d’inclinaison, l’utilisation des supports n’est plus nécessaire car la surface n’est plus considérée comme *overhang*. Le domaine modélise donc une utilisation classique d’un support, avec une inclinaison moyenne de la surface à supporter.

Le premier cas considère des propriétés matériaux isotropes pour les supports dont l’optimisation débute par un volume plein remplissant le domaine D . Cette initialisation est choisie de manière à n’introduire aucune anisotropie structurelle au départ. Une initialisation composée de barres verticales par exemple orienterait trop la géométrie finale des supports. Le volume cible choisi est $|S| = 1.0$. Le résultat de l’optimisation est montré en Figure 3.23. Les supports s’alignent avec la direction de la force et se ramifient pour maintenir uniformément le bord supérieur. Les courbes de convergence sont également montrées en Figure 3.23.

Dans un deuxième temps des propriétés matériau orthotropes sont considérées. Au vu de la géométrie de la cellule montrée en Figure 3.21 qui est invariante par symétrie cubique dans le plan 12 et invariante

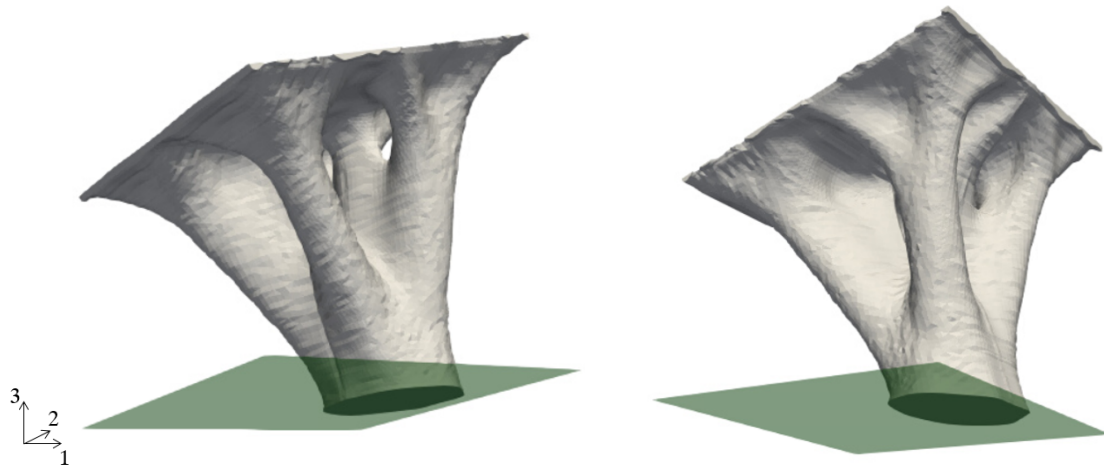


FIGURE 3.23 – Optimisation de forme des supports avec des propriétés matériau isotropes.

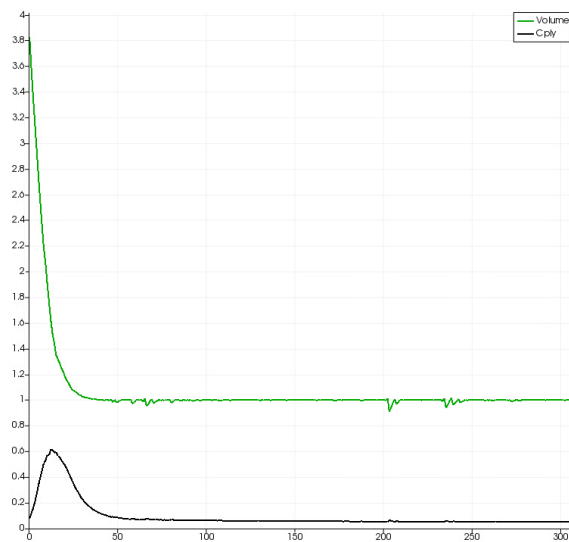


FIGURE 3.24 – Courbes de convergence pour la compliance (noir) et le volume (vert) des supports aux propriétés isotropes.

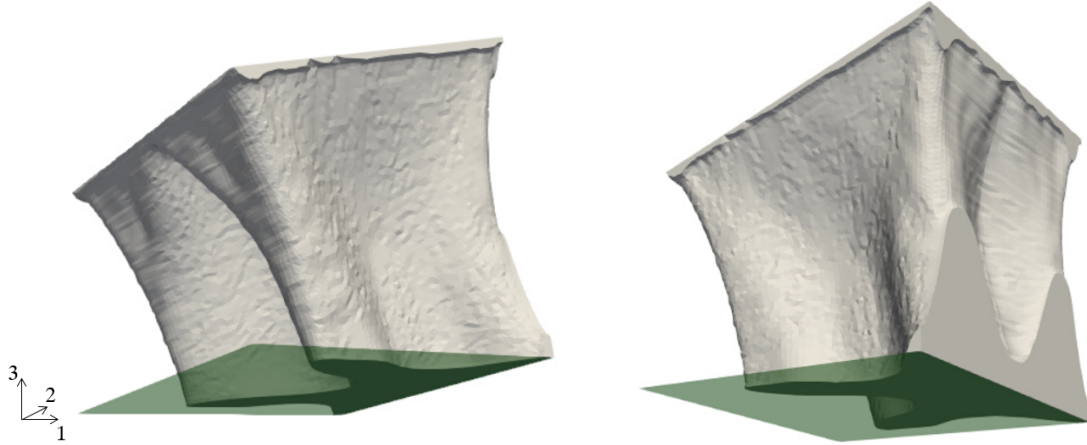


FIGURE 3.25 – Optimisation de forme des supports en dimension 3 aux propriétés matériau orthotropes (avec $m = 0.8$).

par translation dans la direction 3, le matériau homogénéisé est isotrope transverse, c'est à dire orthotrope et invariant par rotation de 90° autour d'un axe du repère. L'axe invariant est l'axe vertical $z = 3$ et par définition $A_{1111} = A_{2222}$, $A_{2323} = A_{1313}$, $A_{1133} = A_{2233}$. Le tenseur A_{ijkl}^* est donc composé de six coefficients indépendants. Les six problèmes de cellule (3.17) sont résolus sur $Y(m)$, puis les correcteurs w_{ij} obtenus permettent de calculer les 6 coefficients de A_{ijkl}^* grâce à (3.19). Ces différents calculs sont effectués sur le logiciel FreeFEM pour une cellule cubique, montrée en Figure 3.21 et constituée de $20 \times 20 \times 20$ éléments P1. En prenant $E = 1$, $\nu = 0.3$ pour la résolution de (3.17) et $m = 0.8$ pour la largeur de l'inclusion, le tenseur de rigidité obtenu s'écrit :

$$A_{ijkl}^* = \begin{bmatrix} 0.23 & 0.02 & 0.05 & 0 & 0 & 0 \\ 0.02 & 0.23 & 0.05 & 0 & 0 & 0 \\ 0.05 & 0.05 & 0.41 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.13 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.13 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.14 \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

Aussi, le volume apparent occupé par ce type de supports est plus important pour la même quantité de matière utilisée, ou poids. Pour que la comparaison ait du sens d'un point de vue pratique, le même volume de matière dans les supports, ou poids, appelé $|S_{matiere}|$, doit être considéré pour les supports pleins et alvéolés. Ce volume de matière, ou poids, est fonction de la fraction volumique f_m du matériau plein dans la cellule $Y(m)$, celle-ci s'écrit :

$$f_m = 1 - m^2 \quad (3.21)$$

Le volume à contraindre lors de l'optimisation s'écrit donc avec la relation :

$$|S_{matiere}| = f_m \cdot |S| \quad (3.22)$$

où $|S|$ est le volume occupé par la level-set, le volume apparent. Avec $m = 0.8$, la fraction volumique dans la cellule vaut $f_m = 0.36$. La contrainte de volume reste la même que pour le cas isotrope, $|S_{matiere}| = |S_{cible}| = 1.0$, cette fois calculée avec la relation (3.22).

Les supports obtenus sont montrés en Figure 3.25, les courbes de convergence pour la compliance et le volume en Figure 3.26. De part leur volume apparent plus important et leurs propriétés mécaniques différentes, ces supports s'étalent sur leur base et limitent les contraintes de cisaillement dans leur structure interne. Aussi, pour le même volume matière $|S_{matiere}|$, ou poids, ces supports présentent une performance mécanique plus importante que les supports aux propriétés isotropes. Les valeurs de compliance et de volume pour les deux types de supports sont rassemblées dans la Table 3.3.

Enfin, ce modèle a été considéré dans l'optimisation des supports pour la fonction (3.11), couplant le modèle de chargements thermoélastiques équivalents et de chargements surfaciques pour la même pièce

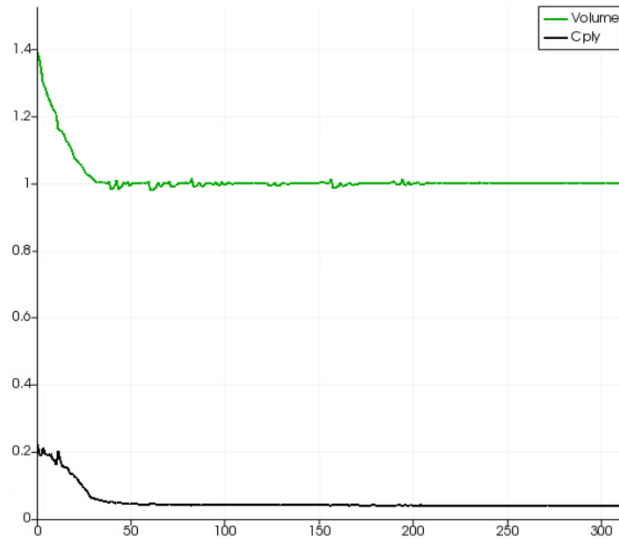


FIGURE 3.26 – Courbes de convergence pour la compliance (noir) et le volume (vert) des supports aux propriétés anisotropes.

	Compliance	Volume matière
Cas isotrope	0.048	1.0
Cas orthotrope	0.040	1.0

TABLE 3.3 – Comparaison des compliances pour un volume matière (ou poids) identique, obtenus après optimisation des supports aux propriétés mécaniques différentes.

fixe, la forme en T. La géométrie de cellule reste la même, avec toujours $m = 0.8$. L'initialisation choisie est le volume sous la partie de la pièce en *overhang*, soit le volume pris par les supports *Magics* (Figure 3.20). Le résultat de l'optimisation est montré en Figure 3.27. Une contrainte d'égalité est appliquée au volume de matière, ou poids, des supports. Pour rappel, les supports aux propriétés isotropes optimisés pour la même fonction sont montrés en Figure 3.18.

3.7 Conclusions et perspectives

Dans cette partie, plusieurs solutions sont montrées afin d'optimiser la forme des supports d'une pièce fixe. Un premier modèle de force permet la génération de supports maintenant entièrement les surfaces en *overhang*. L'angle limite β doit être choisi arbitrairement tout comme la norme de la force appliquée. Ces deux paramètres cruciaux dépendent en réalité de la géométrie, du matériau et des paramètres machines. Néanmoins ce modèle se révèle efficace car il assure le maintien uniforme de ces surfaces et donc la fabricabilité d'une pièce simple quelque soit les valeurs de ces paramètres. Cette méthode est de plus peu coûteuse en temps calcul. Les supports générés peuvent cependant prendre plus de temps à être retirés dans une opération de post-production car ils ont la possibilité de s'appuyer sur toutes les zones non-*overhang* de la pièce, augmentant le nombre de zones à parachever. Une pénalisation de la zone de contact entre la pièce et les supports a donc été proposée afin que ceux-ci ne soient en contact qu'avec les zones à supporter, les obligeant à s'appuyer sur le plateau de fabrication uniquement. La combinaison de cette pénalisation et du dernier modèle de force offre une géométrie de supports garantissant la fabrication de pièces simples en maîtrisant le positionnement des interfaces pièce/support. Le modèle de force équivalente aux déplacements d'origine thermique issu d'une simulation du procédé thermoélastique complète le modèle précédent permettant d'obtenir des supports prévenant la déformation de la pièce pendant sa fabrication, tout en assurant la fabricabilité de ses surfaces en *overhang*. Enfin, une étude a été menée sur la modélisation du comportement des supports alvéolés, comme ceux utilisés par le logiciel *Magics Materialise*®. Un matériau aux propriétés orthotropes et dépendantes de l'épaisseur de la grille interne est alors considéré dans la résolution du

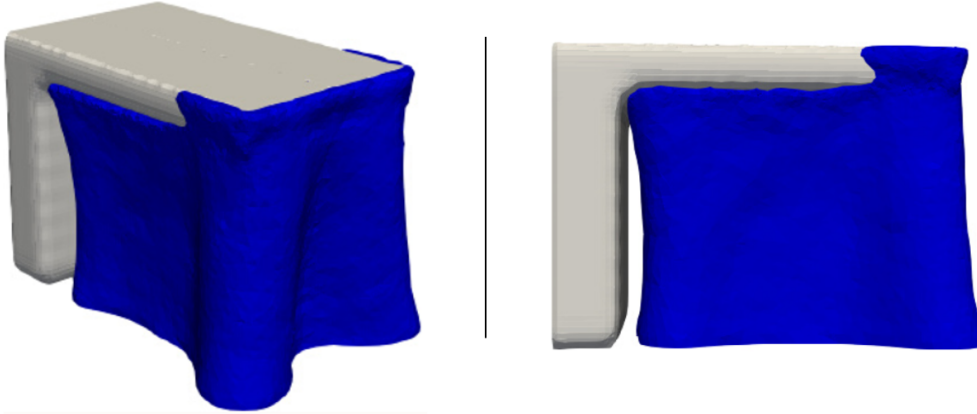


FIGURE 3.27 – Supports optimisés (en bleu) aux propriétés orthotropes (avec $m = 0.8$) obtenus après minimisation de la somme des deux compliances (3.11)

problème mécanique. Des comparaisons avec des supports optimisés aux propriétés isotropes ont aussi été effectuées pour le même volume de matière utilisé, dépendant lui aussi de l'épaisseur de la grille. Les calculs montrent que les supports aux propriétés orthotropes sont plus performants pour un volume de matière utilisé identique. Pour ces différents critères et modèles, des cas test plus réalistes en 3 dimensions ont été considérés, montrant qu'ils peuvent être utilisés pour des cas industriels. Néanmoins, les surfaces en *overhang* des supports eux-mêmes ne sont pas considérées dans cette étude. Aussi, le comportement des supports pendant leur fabrication n'est pas pris en compte dans la simulation du procédé. L'objectif de ce modèle de force équivalente est de répondre à un besoin formulé par certains industriels pour obtenir rapidement une géométrie de supports prenant en compte le comportement de la pièce pendant sa fabrication. Considérer le comportement des supports pendant leur fabrication nécessite d'effectuer la simulation du procédé et de résoudre un problème adjoint rétrograde en temps à chaque itération d'optimisation, à l'image des travaux effectués dans [15]. Aussi, une modélisation plus fine du comportement des supports alvéolés peut être envisagée, plus particulièrement au niveau de l'interface imparfaite entre les supports et la pièce que propose *Magics Materialise*® pour faciliter le retrait des supports. De récents travaux ont d'ailleurs été effectués sur le sujet [11].

Chapitre 4

Optimisation à partir de la méthode *inherent strain*

Contents

4.1	Simulation du procédé par la méthode <i>inherent strain</i>	58
4.2	Stratégie d'optimisation	60
4.2.1	Problème final	60
4.2.2	Problème intermédiaire	61
4.2.3	Problème d'optimisation	61
4.2.4	Dérivée de forme	62
4.3	Optimisation de forme de la pièce	62
4.3.1	Déplacements verticaux à chaque couche	63
4.3.2	Critère de Von Mises	64
4.3.3	Déplacement résiduel après séparation du plateau	66
4.3.4	Vérification expérimentale	69
4.4	Calibration des coefficients <i>inherent strain</i> par analyse inverse	75
4.4.1	Recherche des données synthétiques	76
4.4.2	Recherche des données mesurées	77
4.5	Optimisation de forme des supports	80
4.6	Conclusions et perspectives	81

Comme mentionné dans les parties précédentes, le procédé SLM possède de nombreuses contraintes de fabrication. Les forts gradients de température apportés par la chaleur du laser de manière successive à chaque couche contraignent fortement la pièce et peuvent même entraîner sa déformation lors de la fabrication. Une solution consiste rajouter des supports autour la pièce pour maintenir ces surfaces. Cependant, il peut être parfois préférable de modifier la forme de la pièce plutôt que de rajouter des supports qui représentent de la non valeur ajoutée. L'objectif est donc de rendre une pièce fabricable, sans supports, tout en conservant une bonne performance de la pièce dans son utilisation finale. Lorsqu'une pièce est conforme en fin de fabrication (aidée par des supports de fabrication ou non), rien ne garantit sa bonne santé matière. En effet, comme expliqué au chapitre 1, les performances de la pièce peuvent être dégradées par la présence de contraintes résiduelles. Une solution classique est de faire subir à la pièce un traitement thermique de détentionnement, mais une fois encore, c'est une étape de post-fabrication longue et chère. Une idée consiste à trouver une forme de pièce, sans supports, limitant la présence de contraintes résiduelles tout au long de la fabrication. Après fabrication, la pièce peut être séparée du plateau avant ou après traitement thermique en fonction de la gamme de fabrication définie. En absence de traitement thermique, une partie des contraintes résiduelles accumulées lors de la construction de la pièce se relâchent et se traduisent en déformations. Une fois encore, la question est de savoir si l'optimisation de la forme de la pièce peut minimiser ce phénomène tout en conservant ses bonnes propriétés mécaniques pour son utilisation finale.

La deuxième section de ce chapitre étudie la prise en compte des phénomènes induit par le procédé à l'échelle macroscopique, en utilisant la méthode *inherent strain*. En effet, il est nécessaire d'inclure une

étape de simulation du procédé dans le schéma d'optimisation pour pouvoir limiter pertinemment les défauts de fabrication. La section 4.2 traite des critères formulés avec les solutions de la simulation du procédé, de la stratégie d'optimisation et expose les résultats en dimension $N = 3$. Un critère limitant les déplacements de la pièce à chaque couche pendant la fabrication, à l'image des travaux effectués dans [15], y sera formulé. Le critère de Von Mises est également étudié lors de la fabrication, étant un indicateur fiable pour estimer la quantité de contraintes résiduelles dans la structure fabriquée. La section 4.3.3 traite le cas de la déformation de la pièce après sa découpe du plateau. Un deuxième problème modélisant cette séparation sera introduit afin de calculer un nouveau critère qui sera minimisé par la suite, toujours en limitant la dégradation des performances de la pièce. La géométrie obtenue sera ensuite fabriquée avec le procédé SLM, ainsi que la géométrie de référence non optimisée pour ce dernier critère. Des mesures seront ensuite faites sur chaque géométrie pour mesurer l'influence de l'optimisation de forme. Elles serviront également pour un problème d'analyse inverse permettant de calibrer au mieux les paramètres nécessaires à la simulation du procédé. Enfin, l'optimisation de forme des supports est de nouveau abordée dans la dernière section avec un nouveau chargement couche par couche directement issu de la simulation du procédé.

4.1 Simulation du procédé par la méthode *inherent strain*

Les premiers travaux sur la méthode *inherent strain* sont apparus en 1975 avec Ueda et al. [154] et s'intéressaient à la prédiction des contraintes résiduelles le long d'un cordon de soudure. Cette approche a récemment été étendue au procédé SLM [117], [44], [40], [140], n'étant rien d'autre qu'un procédé de soudage, couche par couche. Lors de ces soudures successives, le matériau est sujet à de forts gradients de température induisant des déformations. Les déformations ϵ induites par les gradients de température importants résultent d'une contribution élastique ϵ_e et inélastique ϵ^* , aussi appelée déformation inhérente, ou *inherent strain*. Celle-ci regroupe les contributions plastiques, thermiques ou encore de changements de phase. Ainsi :

$$\epsilon = \epsilon_e + \epsilon^*. \quad (4.1)$$

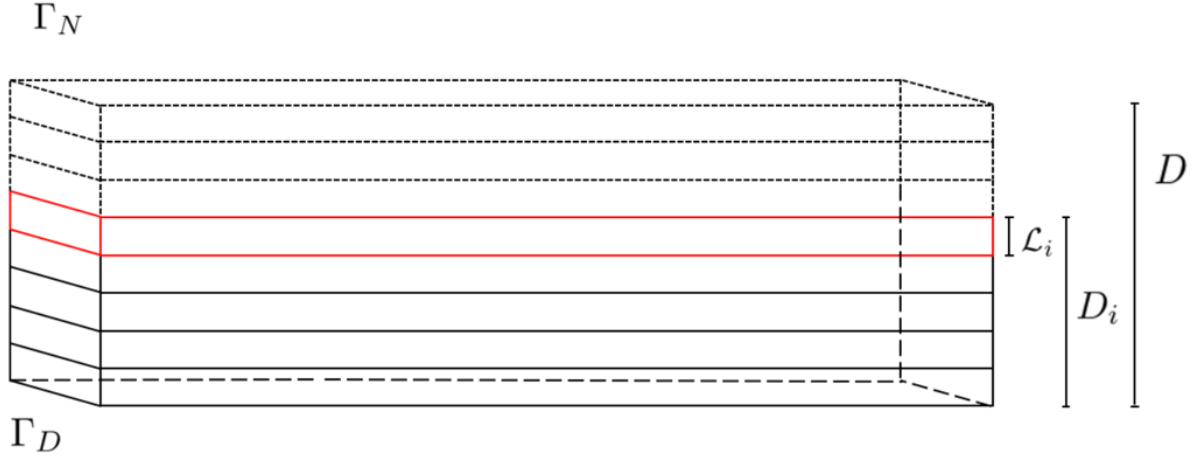
Il est alors aisé de résoudre l'équation (4.1) et d'obtenir la déformation totale ϵ si le terme ϵ^* est connu. Ce dernier point est clé dans cette méthode de simulation. Comme vu au chapitre 1, de nombreux paramètres influent sur la déformation de la pièce, naturellement les propriétés matériaux, mais aussi les paramètres machine (puissance, vitesse, trajectoire du laser ou encore épaisseur de couche [128],[115],[36],[116]). Ceux-ci ont des effets directs sur les phases de chauffe et de refroidissement de la pièce, provoquant sa déformation. Pour trouver le tenseur *inherent strain* ϵ^* correspondant à cet ensemble de paramètres, une solution simple est de construire une pièce test puis de faire correspondre la déformation mesurée expérimentalement et numériquement par analyse inverse. Les coefficients obtenus permettront alors de prédire les tendances du comportement de n'importe quelle géométrie lors de sa fabrication, à condition que le même ensemble de paramètres soit utilisé. Aussi, chaque tenseur ϵ^* est propre à une taille de maille dans la simulation par éléments finis. Dans ces travaux on considère une forme ω , un ouvert de \mathbb{R}^N (avec $N = 2$ ou 3 en pratique) construite dans la chambre de fabrication représentée par le domaine D , un ouvert borné et toujours de forme rectangulaire. Les conditions aux limites de Dirichlet sont appliquées sur Γ_D le bord inférieur de D , modélisant l'accroche au plateau de fabrication. Les autres bords Γ_N sont considérés comme libres. D est également divisé en M macro-couches de même épaisseur et chaque domaine intermédiaire $D_i (i \geq 1)$ est composé des i premières couches tel que :

$$D_1 \subset \dots \subset D_i \subset \dots \subset D_M \equiv D.$$

On appelle \mathcal{L}_i la dernière couche du domaine D_i et $\chi_{\mathcal{L}_i}$ la fonction caractéristique du domaine \mathcal{L}_i , définie par

$$\chi_{\mathcal{L}_i}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathcal{L}_i, \\ 0 & \text{si } x \notin \mathcal{L}_i. \end{cases} \quad (4.2)$$

Aussi, on note Γ_{N_i} le bord libre du domaine D_i . Un schéma représentatif du domaine complet D composé de ses domaines intermédiaires D_i est donné en Figure 4.1.


 FIGURE 4.1 – Construction couche par couche du domaine D

La forme finale ω est également divisée en M macro-couches et chaque forme intermédiaire $\omega_i (i \geq 1)$ est composée des i premières couches tel que $\omega_i = \omega \cap D_i$. On note aussi l'ensemble $H_{\Gamma_D}^1(\omega_i) := \{v \in H^1(\omega_i)^N : v = 0 \text{ sur } \Gamma_D\}$.

Le déplacement u_i est l'unique solution dans $H_{\Gamma_D}^1(\omega_i)$ du problème direct suivant :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\sigma_i) = 0 & \text{dans } \omega_i, \\ \sigma_i = A(e(u_i) + \epsilon_{\mathcal{L}_i}^*) & \text{avec } \epsilon_{\mathcal{L}_i}^*(x) = \epsilon^* \chi_{\mathcal{L}_i}(x), \\ \sigma_i n = 0 & \text{sur } \Gamma_{N_i}, \\ u_i = 0 & \text{sur } \Gamma_D \cap \partial\omega_i, \end{cases} \quad (4.3)$$

où A est le tenseur de rigidité tel que :

$$A\xi = 2\mu\xi + \lambda(\operatorname{tr} \xi)\mathbb{I}_N.$$

Aussi, λ et μ sont les coefficients de Lamé, \mathbb{I}_N la matrice identité et le tenseur des déformations élastiques, appelé ϵ_e dans (4.1) est défini par $e(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T)$. Le tenseur des contraintes σ_i est défini comme la somme des déformations élastiques et inhérentes. ϵ^* est le tenseur *inherent strain* constant. En pratique, la plupart des déformations induites par le procédé provient de la phase de rétraction de la dernière couche fusionnée. Dans ces travaux, on suppose que ce retrait thermique intervient uniquement dans \mathcal{L}_i . Cette dernière macro-couche représente donc la zone affectée thermiquement et le reste du domaine D_{i-1} est supposé à température de repos où aucune déformation d'origine thermique n'intervient. Il est rappelé que les macro-couches M représentent plusieurs couches du procédé réel. Un schéma représentatif de la forme intermédiaire ω_i déformée par le chargement *inherent strain* à chaque couche est montré en Figure 4.2.

En utilisant le problème (4.3), la fabrication d'un cube simple de dimension $50\text{mm} \times 50\text{mm} \times 50\text{mm}$ est simulée. Le module de Young choisi est $E = 125$ GPa et le coefficient de Poisson $\nu = 0.3$. L'étape de calibration n'a pas été réalisée ici, et le tenseur *inherent strain* choisi s'écrit :

$$\epsilon_{\mathcal{L}_i}^* = \begin{bmatrix} -0.0001 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0001 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

Le retrait thermique ayant lieu dans le plan horizontal, on considèrera tout au long de ces travaux la composante en z (verticale) du tenseur *inherent strain* nulle. Le domaine D est divisé en 50 couches horizontales. Le résultat de cette simulation est montré en Figure 4.3 (à gauche) où le critère de Von Mises $\sigma_{vm}(x)$ est calculé et cumulé sur chaque domaine intermédiaire D_i tel que

$$\sigma_{vm} = \left| \sum_{i=1}^M 2\mu e(u_i)_D \right|, \quad (4.5)$$

avec u_i la solution de (4.3) calculé sur ω_i et étendue par 0 au-dessus.

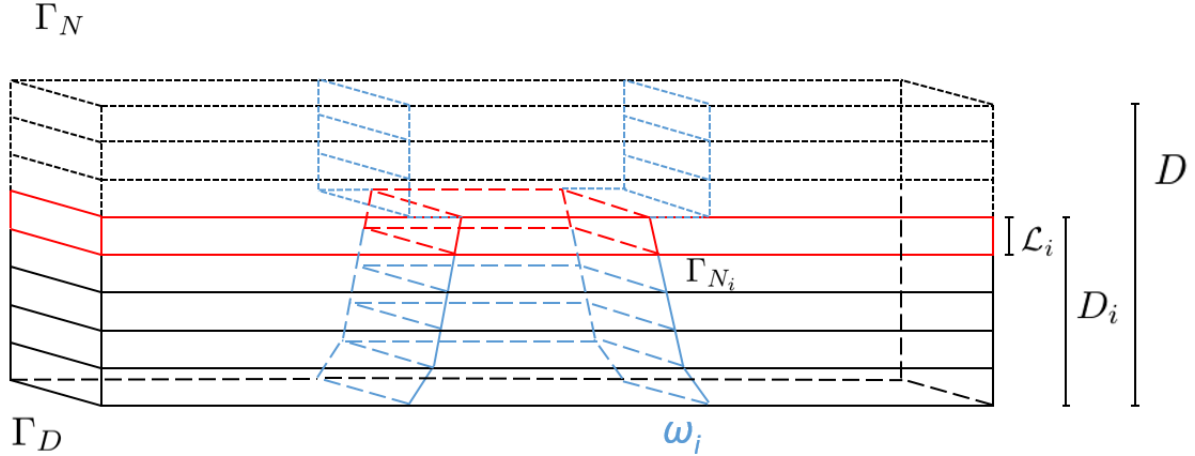


FIGURE 4.2 – Construction couche par couche de la forme ω_i dans le domaine D_i , déformée par l'application successive de ϵ^* à chaque couche.

Cette hypothèse supposant que l'état de contrainte final est la somme des états de contrainte intermédiaires ne peut être faite que dans le cadre de l'élasticité linéaire, dans lequel se place cette étude. Pour vérifier ces résultats, une comparaison est faite avec le logiciel de simulation *Simufact Additive* [®] [1], utilisant également la méthode *inherent strain* (un module différent de celui utilisé au chapitre 3). La même géométrie est considérée ainsi que le même ensemble de paramètres numériques (propriétés matériaux, nombre de macro-couches, coefficients du tenseur *inherent strain*). Le critère de Von Mises est également calculé et le résultat est montré en Figure 4.3 (à droite).

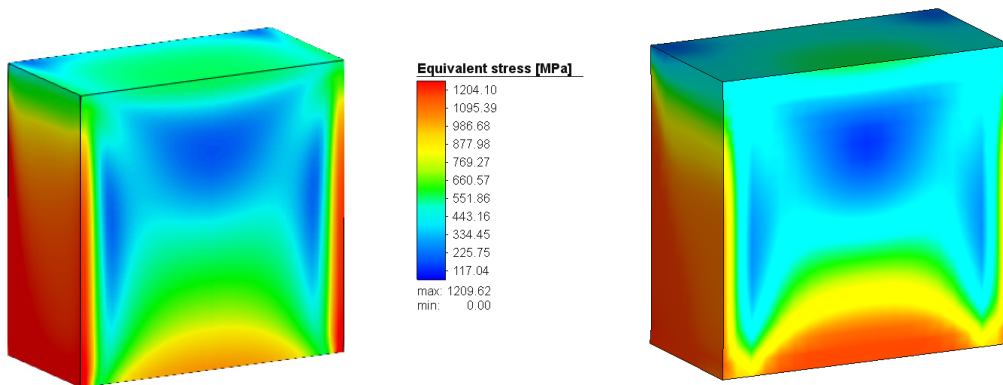


FIGURE 4.3 – Visualisation du critère de Von Mises sur la coupe d'un cube dont la fabrication a été simulée en considérant 50 macro-couches, par *FreeFEM* (à gauche) et *Simufact Additive* [®] (à droite)

Comme mentionné plus haut, ce modèle n'est valide que dans le domaine élastique, les déformations sont donc surestimées au delà de la limite d'élasticité. Afin de mieux comparer les résultats avec la simulation de *Simufact Additive* [®], la valeur maximum du critère de Von Mises calculé par notre modèle a été bornée par celle calculée par *Simufact Additive* [®] utilisant un modèle de plasticité, soit 1204.10MPa . Compte tenu de cette nouvelle hypothèse, les résultats des deux simulations s'accordent en terme de tendance.

4.2 Stratégie d'optimisation

4.2.1 Problème final

Une fois de plus, le but de ces travaux est de réduire les défauts de fabrication en optimisant la forme de la pièce à fabriquer ou de ses supports tout en assurant sa bonne performance lors de son

utilisation après fabrication. Un nouveau problème définissant l'utilisation en service de la pièce est alors introduit.

On définit d'abord l'espace $H_{\Gamma_{D_f}}^1(\omega) = \{v \in H^1(\omega)^N : v = 0 \text{ sur } \Gamma_{D_f}\}$.

Pour un chargement donnée $f \in L^2(\Gamma_{N_f}^N)$, le déplacement u_{fin} dans $H_{\Gamma_{D_f}}^1(\omega)$ est l'unique solution du problème final suivant :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(Ae(u_{fin})) &= 0 & \text{dans } \omega, \\ Ae(u_{fin})n &= 0 & \text{sur } \Gamma, \\ Ae(u_{fin})n &= f & \text{sur } \Gamma_{N_f}, \\ u_{fin} &= 0 & \text{sur } \Gamma_{D_f}, \end{cases} \quad (4.6)$$

où A est le tenseur de rigidité, Γ_{N_f} et Γ_{D_f} les bords du domaine où les conditions aux limites de Neumann et Dirichlet sont appliquées respectivement dans le problème final. Il est à noter que celles-ci ne sont pas nécessairement les mêmes que pour le problème de fabrication (4.3). Ici, le problème est résolu dans ω car on s'intéresse au comportement de la pièce après sa fabrication couche par couche. La solution de (4.6) permet de calculer la compliance, critère choisi pour évaluer la performance de la pièce en service et définie comme

$$C(\omega) = \int_{\Gamma_{N_f}} f \cdot u_{fin} \, ds. \quad (4.7)$$

Le problème est donc autoadjoint, et on a, avec p_{fin} dans $H_{\Gamma_{D_f}}^1(\omega)$ l'état adjoint, $p_{fin} = -u_{fin}$.

4.2.2 Problème intermédiaire

Un critère dépendant de chaque couche de fabrication est également défini et calculé avec les solutions du problème de fabrication (4.3) :

$$J(\omega) = \sum_{i=1}^M \int_{\omega_i} j(u_i) \, dx. \quad (4.8)$$

Ce critère évalue la fabricabilité de la pièce, avec j une fonction régulière. Pour ces déplacements intermédiaires u_i , $1 \leq i \leq M$, le problème adjoint associé à (4.3) s'écrit, avec pour solution p_i dans $H_{\Gamma_D}^1(\omega_i)$:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(Ae(p_i)) &= -j'(u_i) & \text{dans } \omega_i, \\ (Ae(p_i))n &= 0 & \text{sur } \Gamma_{N_i}, \\ p_i &= 0 & \text{sur } \Gamma_D. \end{cases} \quad (4.9)$$

La formulation variationnelle de ce dernier problème adjoint est définie comme suit : trouver $p_i \in H_{\Gamma_D}^1(\omega_i)$, pour tout $\phi \in H_{\Gamma_D}^1(\omega_i)$:

$$\int_{D_i} (Ae(\phi_i)) : e(p_i) \, dx = - \int_{\omega_i} j'(u_i) \cdot \phi_i \, dx \quad (4.10)$$

4.2.3 Problème d'optimisation

L'objectif de l'algorithme est de minimiser un critère modélisant une contrainte de fabrication du procédé tout en préservant autant que possible les performances mécaniques de la pièce en service, à savoir la compliance $C(\omega_{ref})$ et le volume $|\omega_{ref}|$ de référence. Le problème d'optimisation s'écrit alors

$$\begin{aligned} \min_{\omega \subset D} \quad & J(\omega) \\ \text{tel que} \quad & |\omega| = |\omega_{ref}| \\ & C(\omega) \leq (1+k)C(\omega_{ref}), \end{aligned} \quad (4.11)$$

où $k > 0$ est un petit coefficient autorisant l'augmentation de la compliance finale pour la pièce en service.

4.2.4 Dérivée de forme

Pour trouver une solution au problème (4.11), la dérivée de forme pour la fonction objectif et chaque contrainte est calculée grâce à la méthode d'Hadamard [8]. Pour tout vecteur $\theta \in W^{1,\infty}(D, D)$, la perturbation de ω par θ est définie par

$$\omega_\theta = (\text{Id} + \theta)\omega$$

Proposition 4.2.1. *Pour tout vecteur $\theta \in W^{1,\infty}(D, D)$, la dérivée de forme de $J(\omega)$ définie par (4.8) s'écrit*

$$J'(\omega)(\theta) = \sum_{i=1}^M \int_{\partial\omega_i} \theta \cdot n (j(u_i) + (A(e(u_i) + \epsilon_{\mathcal{L}_i}^*)) : e(p_i)) ds \quad (4.12)$$

Preuve : On introduit un sous-espace de dimension fini V^h de $H^N(D)$. Il sera utilisé pour définir les éléments finis $\mathbb{P}1$ associés au maillage D^h (avec comme taille de maille h). La méthode de dérivation rapide de Céa [41] est utilisée pour calculer la dérivée de forme de la fonction objectif. Le Lagrangien complet est d'abord introduit, dépendant de la forme ω et des fonctions $\hat{u}_i, \hat{p}_i \in V^h$:

$$\mathcal{L}(\omega, \hat{u}_i, \hat{p}_i) = \sum_{i=1}^M \int_{\omega_i} j(\hat{u}_i) dx + \sum_{i=1}^M \int_{\omega_i} (A(e(\hat{u}_i) + \epsilon_{\mathcal{L}_i}^*)) : e(\hat{p}_i) dx \quad (4.13)$$

Il est à noter que les variables générales \hat{u}_i, \hat{p}_i ne sont pas solutions des problèmes (4.3) et (4.9).

Par définition, la dérivée de \mathcal{L} par rapport à \hat{p}_i dans la direction d'une fonction test $\phi_i \in V^h$ donne à optimalité la formulation variationnelle du problème de fabrication couche par couche (4.3) :

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\omega, \{\hat{u}_i\}, \{\hat{p}_i\})}{\partial \hat{p}_i}(\phi_i) = \int_{\omega_i} (A(e(\hat{u}_i) + \epsilon_{\mathcal{L}_i}^*)) : e(\phi_i) dx = 0. \quad (4.14)$$

Ensuite, différentier \mathcal{L} par rapport à \hat{u}_i dans la direction d'une fonction test $\phi_i \in V^h$ donne à optimalité :

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\omega, \{\hat{u}_i\}, \{\hat{p}_i\})}{\partial \hat{u}_i}(\phi_i) = \int_{\omega_i} (Ae(\phi_i) : e(\hat{p}_i)) dx + \int_{\omega_i} j'(\hat{u}_i) \cdot \phi_i dx = 0, \quad (4.15)$$

qui n'est rien d'autre que la formulation variationnelle du problème adjoint associé au problème (4.3).

Enfin, les solutions discrètes u_i, p_i sont dérivables et dérivant \mathcal{L} par rapport à ω dans la direction du champ de vecteurs θ , la dérivée de forme de la fonction J s'écrit [41] :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}(\omega, \{u_i\}, \{p_i\})}{\partial \omega}(\theta) &= \sum_{i=1}^M \int_{\partial\omega_i} j(u_i) \theta \cdot n dx \\ &+ \sum_{i=1}^M \int_{\partial\omega_i} (A(e(u_i) + \epsilon_{\mathcal{L}_i}^*)) : e(p_i) \theta \cdot n dx \end{aligned} \quad (4.16)$$

En regroupant les intégrales, le résultat désiré (4.12) est obtenu.

Proposition 4.2.2. *Pour tout vecteur $\theta \in W^{1,\infty}(D, D)$, la dérivée de forme de $C(\omega)$ définie par (4.7) s'écrit*

$$C'(\omega)(\theta) = - \int_{\partial\omega} \theta \cdot n (A(e(u_{fin})) : e(u_{fin})) ds \quad (4.17)$$

On rappelle que les contraintes $C(\omega)$ et $|\omega|$ sont prises en compte avec un Lagrangien augmenté.

4.3 Optimisation de forme de la pièce

Dans cette section, on considère une poutre MMB comme cas test. L'objectif est de construire une telle pièce en limitant ses défauts de fabrication. Les différents bords Γ_D et Γ_N où les conditions aux limites sont appliquées sont montrées en Figure 4.4, sur le domaine de taille $[0, 60mm] \times [0, 10mm] \times [0, 10mm]$. L'optimisation débutera de la forme montrée en Figure 4.5, qui n'est rien d'autre que la forme optimisée pour la compliance et une contrainte sur son volume. Le domaine de calcul D est discrétisé en

40500 noeuds et correspondant à un quart de la poutre totale, deux plans verticaux sont utilisés pour la symétrie. Les propriétés mécaniques considérés sont $E = 125$ GPa et $\nu = 0.3$. La force $f = (0, 0, -0.5)$ est appliquée sur une surface de 5mm^2 centrée sur la face supérieure du domaine complet. Γ_{D_f} est appliqué aux bords de la face inférieure du domaine, sur une surface de 2.5mm^2 . Enfin, le tenseur *inherent strain* utilisé dans toute cette section est (4.4).

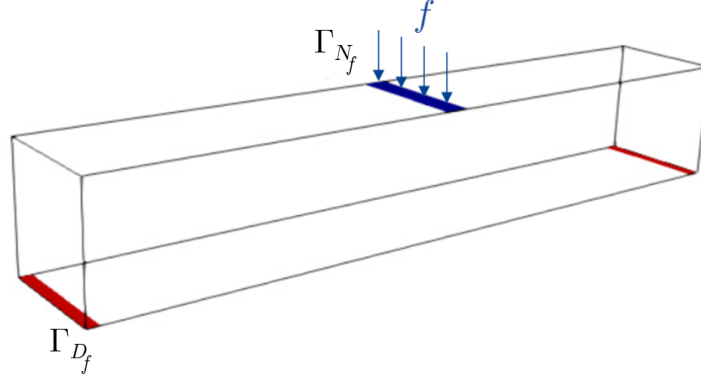


FIGURE 4.4 – Conditions aux limites de Dirichlet et de Neumann pour la poutre MBB

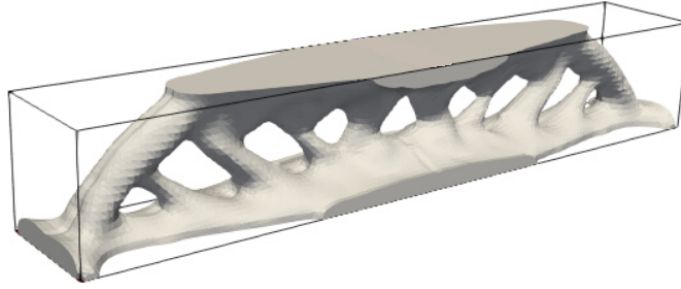


FIGURE 4.5 – Forme optimisée pour le problème de la poutre MBB

Pour les cas tests suivants, le problème d'optimisation (4.11) est résolu, minimisant un critère principal $J(\omega)$ et prenant en compte une contrainte d'égalité sur le volume $|\omega|$ de la pièce et d'inégalité pour la compliance finale $C(\omega)$.

4.3.1 Déplacements verticaux à chaque couche

Les déplacements verticaux que subissent chaque couche lors de leur refroidissement peuvent rendre une pièce non conforme sur le plan dimensionnel, produire un mauvais état de surface ou encore arrêter la machine si les extrémités des couches non maintenues dépassent de manière trop importante du lit de poudre de la couche suivante. Un premier critère de minimisation est considéré prenant en compte ces déplacements verticaux positifs (dans la direction de fabrication) cumulés à chaque couche et calculés avec les solutions de (4.3) pour chaque domaine intermédiaire ω_i . Il s'écrit comme suit :

$$J_1(\omega) = \sum_{i=1}^M \int_{\omega_i} |\max(0, u_i \cdot e_d)|^2 \chi_{\mathcal{L}_i} dx, \quad (4.18)$$

avec e_d la direction de fabrication (verticale).

Le résultat de la simulation du procédé sur la géométrie initiale de la poutre MBB est montré en Figure 4.6, où les déplacements verticaux cumulés à chaque couche sont tracés. Ceux-ci sont plus importants au niveau des surfaces en *overhang*, confirmant les résultats expérimentaux connus [164] et motivant l'utilisation de ce modèle de simulation.

La pièce optimisée pour le critère (4.18) est montrée en Figure 4.7 après avoir résolu le problème (4.11) avec $J(\omega) = J_1(\omega)$, et $M = 20$. Les surfaces en *overhang* les plus importantes ont disparu, et

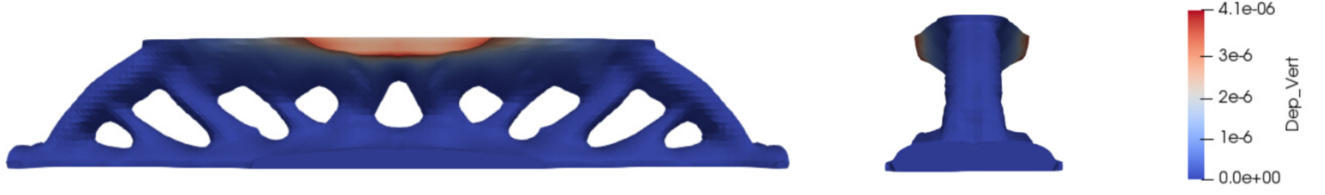


FIGURE 4.6 – Somme des déplacements verticaux à chacune des 20 couches considérées pour simuler la fabrication de la poutre MBB initiale, vue sur le coté (à gauche) et de face (à droite).

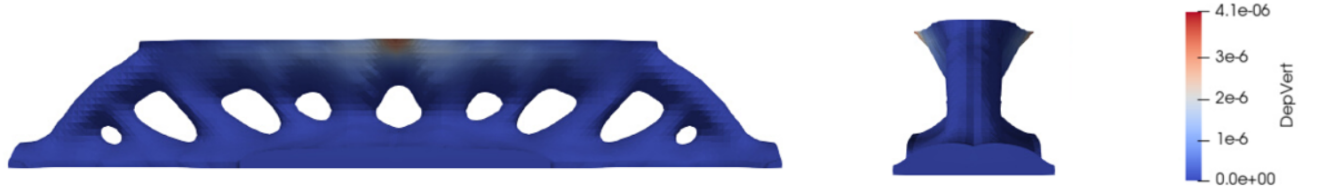


FIGURE 4.7 – Somme des déplacements verticaux à chacune des 20 couches considérées pour simuler la fabrication de la poutre MBB optimisée, vue sur le côté (à gauche) et de face (à droite).

le volume les constituant a été redistribué sur les barres verticales pour respecter les contraintes sur le volume et la compliance. Les courbes de convergence sont montrées en Figure 4.8. Le calcul a nécessité 200 itérations pour une durée totale d'environ 10 heures..

4.3.2 Critère de Von Mises

Le nouveau critère d'optimisation considéré est le critère de Von Mises, noté σ_{vm} et donnant une estimation de l'état de contrainte dans la pièce pendant la fabrication. On écrit à nouveau le champ de Von Mises, noté $\sigma_{vm}(x)$ comme suit :

$$\sigma_{vm} = \left| \sum_{i=1}^M 2\mu e(u_i)_D \right|, \quad (4.19)$$

avec u_i la solution de (4.3) calculé sur ω_i et étendue par 0 au-dessus.

Comme mentionné en Section 4.1, le modèle de simulation donne de bonnes prédictions dans le domaine élastique et surestime les contraintes au delà de la limite d'élasticité. Un point intéressant serait de limiter les régions où σ_{vm} est le plus important. Pour se faire, on applique au champ de Von Mises une norme L^p . Pour éviter toute confusion avec l'état adjoint déjà appelé p , on notera l'exposant de la norme $\alpha > 0$. Le critère s'écrit :

$$J_2(\omega) = \left(\int_{\omega} j_2(e(u)) dx \right)^{\frac{1}{\alpha}} \text{ avec } j_2(e(u)) = |\sigma_{vm}|^{2\alpha}. \quad (4.20)$$

Proposition 4.3.1. *La dérivée de forme de $J_2(\omega)$ dans la direction θ est toujours donnée par (4.12) mais avec un nouvel adjoint, défini pour $1 \leq i \leq M$, par*

Le problème adjoint s'écrit :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(Ae(p_i)) &= \operatorname{div}(K_1 4|\sigma_{vm}|^{2\alpha-2} \sum_{j=1}^M \sigma_{j,D}) & \text{dans } \omega_i, \\ (Ae(p_i))n &= -(K_1 4|\sigma_{vm}|^{2\alpha-2} \sum_{j=1}^M \sigma_{j,D})n & \text{sur } \Gamma_{i,N}, \\ p_i &= 0 & \text{sur } \Gamma_D. \end{cases} \quad (4.21)$$

avec $K_1 = 4\mu \left(\int_{\omega} |\sigma_{vm}|^{2\alpha} dx \right)^{\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)}$ et $\sigma_{j,D} = 2\mu e(u_j)_D$

Preuve : Le Lagrangien associé défini pour ω et des fonctions $\{\hat{u}_i\}, \{\hat{p}_i\} \in H_{\Gamma_D}^1(\omega_i)$ s'écrit :

$$\mathcal{L}(\omega, \{\hat{u}_i\}, \{\hat{p}_i\}) = \left(\int_{\omega} j_2(e(u)) dx \right)^{\frac{1}{\alpha}} + \sum_{i=1}^M \int_{\omega_i} A(e(\hat{u}_i) + \epsilon_{\mathcal{L}_i}^*) : e(\hat{p}_i) dx. \quad (4.22)$$

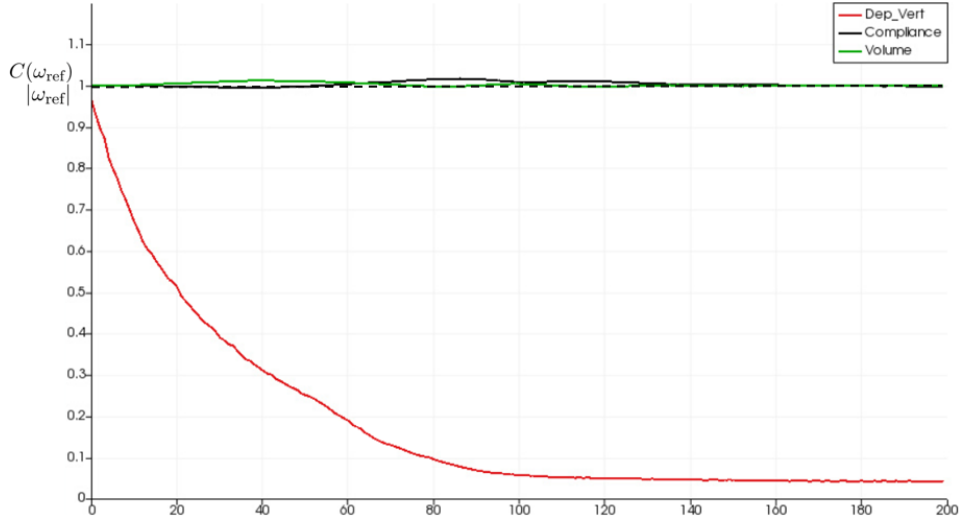


FIGURE 4.8 – Courbes de convergence pour le critère $J_1(\omega)$ (en rouge), la compliance $C(\omega)$ (en noir) et le volume $|\omega|$ (en vert)

Différentiant par rapport à \hat{u}_i dans la direction d'une fonction test $\phi_i \in V^h$, on obtient

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\omega, \{\hat{u}_i\}, \{\hat{p}_i\})}{\partial \hat{u}_i}(\phi_i) = \frac{1}{\alpha} \left(\int_{\omega} j_2(e(\hat{u})) dx \right)^{\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)} \left(\int_{\omega} j_2'(e(\hat{u})) \cdot e(\phi_i) dx \right) + \int_{\omega_i} (Ae(\phi_i) : e(\hat{p}_i)) dx = 0. \quad (4.23)$$

Plus précisément,

$$\frac{1}{\alpha} \left(\int_{\omega} |\sigma_{vm}|^{2\alpha} dx \right)^{\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)} \left(\int_{\omega} \alpha |\sigma_v m|^{2\alpha-2} 4\mu \left(\sum_{j=1}^M \sigma_{j,D} \right) : e(\phi_i) dx \right) + \int_{\omega_i} Ae(\phi_i) : e(\hat{p}_i) dx = 0 \quad (4.24)$$

qui est la formulation variationnelle du problème adjoint couche par couche.

Le critère de Von Mises est tracé sur la Figure 4.9 et comparé à celui tracé sur la forme optimisée, montrée en Figure 4.10. Ce résultat a été obtenu en résolvant (4.11) avec $J(\omega) = J_2(\omega)$ et $\alpha = 12$. Aussi, 20 macro couches sont considérées.

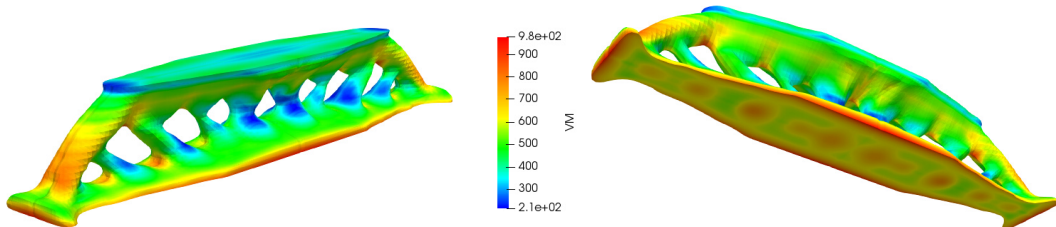


FIGURE 4.9 – Critère de Von Mises tracé sur la forme initiale, construite avec 20 couches. Valeur maximum : 980 MPa.

Un résultat classique en SLM est la présence de contraintes importantes à la jonction entre la pièce et le plateau [105]. Puisque la norme α amplifie les valeurs importantes du critère, l'algorithme réduit l'accroche de la forme au plateau lors de l'optimisation en préservant autant que possible la compliance initiale, d'où la formation de petites cornes aux coins de la poutre, gardant un contact avec Γ_{D_f} . Les courbes de convergence sont montrées en Figure 4.11.

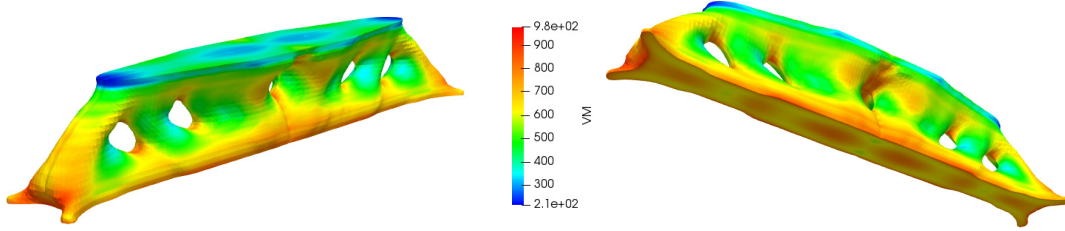


FIGURE 4.10 – Critère de Von Mises tracé sur la forme finale. Valeur maximum : 900 MPa.

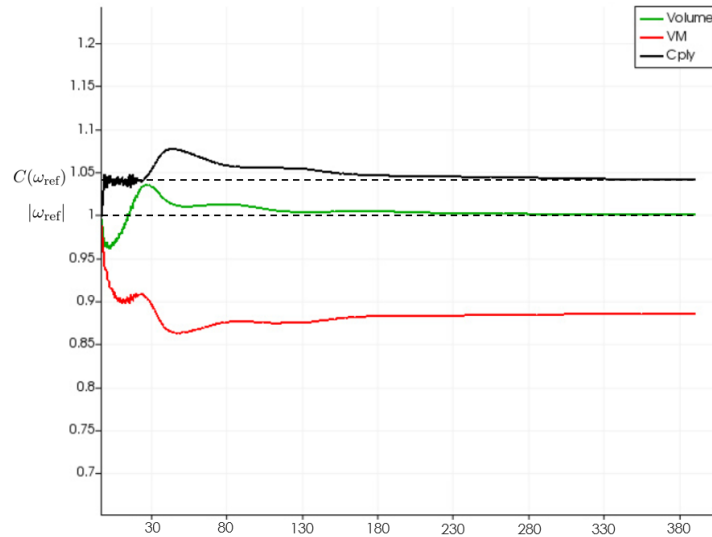


FIGURE 4.11 – Courbes de convergence pour le critère $J_2(\omega)$ (en rouge), la compliance $C(\omega)$ (en noir) et le volume $|\omega|$ (en vert).

4.3.3 Déplacement résiduel après séparation du plateau

La forme de la pièce à fabriquer peut également être optimisée pour réduire sa déformation observée lors de sa découpe du plateau, lorsque les contraintes résiduelles se relâchent. Pour cela, deux problèmes doivent être considérés, le premier modélisant la fabrication, appelé *Problème 1* et identique à (4.3), et représenté en Figure 4.12.

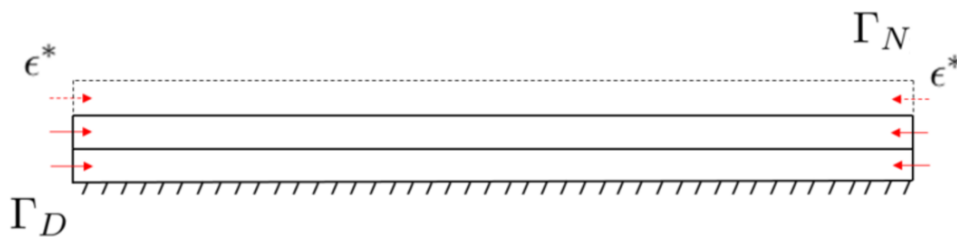
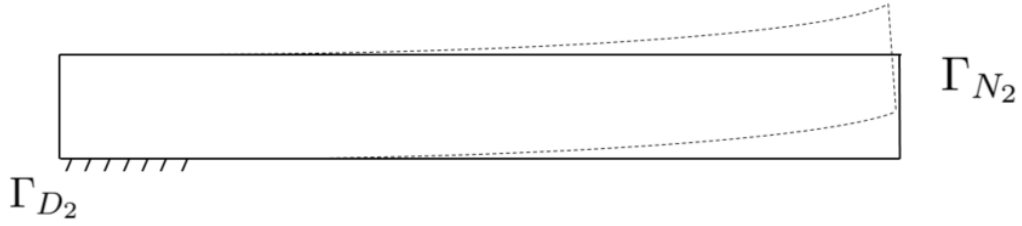


FIGURE 4.12 – *Problème 1*, modélisant la construction couche par couche de la pièce avec la méthode *inherent strain* (4.3).

Le deuxième problème concerne la séparation de la pièce au plateau et appelé *Problème 2*, représenté en Figure 4.13 où les conditions aux limites ont changé. Plus précisément, ce deuxième problème modélise une découpe partielle du plateau en changeant la condition aux limites de Dirichlet du *Problème 1*, appelée Γ_{D_1} , en Γ_{N_2} , partie du bord libre du domaine du *Problème 2*. Il est à noter qu'une partie de la pièce reste accrochée au plateau sur Γ_{D_2} pour assurer un problème bien posé.

On introduit l'espace suivant :


 FIGURE 4.13 – *Problème 2*, modélisant la séparation partielle de la pièce au plateau.

$$H_{\Gamma_{D_2}}^1(\omega) = \{v \in H^1(\omega)^N : v = 0 \text{ sur } \Gamma_{D_2}\}$$

Le déplacement élastique u_i l'unique solution dans $H_{\Gamma_D}^1(\omega_i)$ du *Problème 1* modélisant la fabrication :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A(e(u_i) + \epsilon_{\mathcal{L}_i}^*)) = 0 & \text{dans } \omega_i, \\ Ae(u_i)n = 0 & \text{sur } \Gamma_{N_i}, \\ u_i = 0 & \text{sur } \Gamma_D. \end{cases} \quad (4.25)$$

La somme des états de contraintes $A(e(u_i))$ obtenues après résolution de (4.25) est utilisée pour calculer un état pré-contraint de ω , chargement du *Problème 2*. Une déformée v de la pièce est donc observée à l'équilibre, conséquence de l'application des *inherent strain* et du changement de conditions aux limites. Le déplacement v est l'unique solution dans $H_{\Gamma_{D_2}}^1(\omega)$ du *Problème 2*, également résolu dans ω :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left(Ae(v) + \sum_{j=1}^M Ae(u_j)\right) = 0 & \text{dans } \omega, \\ Ae(v)n = 0 & \text{sur } \Gamma_{N_2}, \\ v = 0 & \text{sur } \Gamma_{D_2}. \end{cases} \quad (4.26)$$

N'étant défini que sur ω_j , u_j est étendu par 0 sur les couches supérieures. Le critère de minimisation considéré est fonction du déplacement vertical v de la pièce obtenu à l'issue de la résolution du *Problème 2* (4.26) :

$$J_3(\omega) = \int_{\omega} j_3(v) dx. \quad (4.27)$$

avec

$$j_3(v) = |\max(0, v \cdot e_d)|^2. \quad (4.28)$$

Le premier problème adjoint, associé au *Problème 2* (4.26) s'écrit

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(Ae(\eta)) = -j_3'(v) & \text{dans } \omega, \\ (Ae(\eta))n = 0 & \text{sur } \Gamma_{N_2}, \\ \eta = 0 & \text{sur } \Gamma_{D_2}. \end{cases} \quad (4.29)$$

La formulation variationnelle associée au problème (4.29) s'écrit comme suit. Trouver $\eta \in H_{\Gamma_{D_2}}^1(\omega)$, pour tout $\phi \in H_{\Gamma_{D_2}}^1(\omega)$

$$\int_{\omega} j_3'(v) \cdot \phi dx + \int_{\omega} (Ae(\phi)) : e(\eta) dx = 0. \quad (4.30)$$

Le deuxième problème adjoint, associé au *Problème 1* (4.25) s'écrit :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(Ae(p_i)) = \operatorname{div}\left(\sum_{j=1}^M Ae(\eta_j)\right) & \text{dans } \omega_i, \\ (Ae(p_i))n = 0 & \text{sur } \Gamma_{N_i}, \\ p_i = 0 & \text{sur } \Gamma_D. \end{cases} \quad (4.31)$$

La formulation variationnelle associée au problème (4.31) s'écrit comme suit. Trouver $p_i \in H_{\Gamma_D}^1(\omega_i)$, pour tout $\phi_i \in H_{\Gamma_D}^1(\omega_i)$

$$\int_{\omega_i} \left(\sum_{j=1}^M Ae(\phi_j) \right) : e(\eta) dx = - \int_{\omega_i} (Ae(\phi_i)) : e(p_i) dx. \quad (4.32)$$

Proposition 4.3.2. *La dérivée de forme de $J_3(\omega)$ dans la direction θ est donnée par*

$$J'_3(\omega) = \int_{\partial\omega} \theta \cdot n (j_3(v) + \left(Ae(v) + \sum_{j=1}^M Ae(u_j) \right) : e(\eta)) + \sum_{i=1}^M \int_{\partial\omega_i} \theta \cdot n (Ae(u_i) + \epsilon^*) : e(p_i) ds \quad (4.33)$$

Preuve : La preuve est similaire à celle de la proposition (4.12). On introduit le Lagrangien défini comme la somme de la fonction objectif et des deux formulations variationnelles du problème (4.3) et (4.26) :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\omega, \hat{v}, \hat{\eta}, \{\hat{u}_i\}, \{\hat{p}_i\}) = & \int_{\omega} j_3(\hat{v}) dx + \int_{\omega} \left(Ae(\hat{v}) + \sum_{j=1}^M Ae(\hat{u}_j) \right) : e(\hat{\eta}) dx \\ & - \int_{\Gamma_{N_2}} \sum_{j=1}^M Ae(\hat{u}_j) \cdot n \cdot \hat{\eta} ds \\ & + \sum_{i=1}^M \int_{\omega_i} (Ae(\hat{u}_i) + \epsilon_{\mathcal{L}_i}^*) : e(\hat{p}_i) dx. \end{aligned} \quad (4.34)$$

En différentiant \mathcal{L} par rapport à $\hat{v} \in H_{\Gamma_D}^1(\omega)$ on obtient la formulation variationnelle du problème adjoint (4.29). En différentiant \mathcal{L} par rapport à \hat{u}_i on obtient la formulation variationnelle du problème adjoint (4.9). En supposant que les solutions v, u_i sont différentiables par rapport à la forme et en différentiant \mathcal{L} par rapport à ω dans la direction d'un champ de vecteur θ , on a obtenu de résultat voulu (4.33).

Un nouveau problème de référence est considéré pour mettre au mieux en valeur ce critère. Les conditions aux limites appliquées sont montrées en Figure 4.14. L'optimisation débute de la forme montrée en Figure 4.15, qui n'est rien d'autre que la forme optimisée pour la compliance avec une contrainte sur le volume. Le domaine de calcul est de taille $[0, 90mm] \times [0, 30mm] \times [0, 9mm]$ discrétisé en 56000 noeuds. Il correspond à la moitié du domaine montré en Figure 4.14 (une symétrie selon l'axe y est utilisée). Les propriétés mécaniques considérées sont $E = 125$ GPa et $\nu = 0.26$. La force $f = (0, 0, -0.5)$ est appliquée sur une surface de $6mm^2$ centrée sur la face inférieure du domaine complet. Γ_{D_f} est appliqué aux bords de la face inférieure du domaine, sur une surface de $2.5mm^2$. Aussi, 20 macro couches horizontales divisent le domaine.

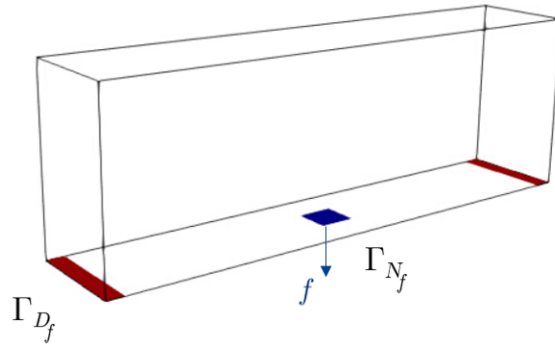


FIGURE 4.14 – Conditions aux limites appliquées au domaine D du nouveau problème en service.

Les conditions aux limites du *Problème 2* sont montrées en Figure 4.16. Le bord Γ_{D_2} (en rouge) modélise la partie du plateau qui ne sera pas découpée.

La forme optimisée après résolution du problème (4.11) avec $J(\omega) = J_3(\omega)$ est montrée en Figure 4.17 (à droite). On remarque qu'une fine barre apparaît, permettant de relier la partie massive de la pièce partiellement découpée au plateau. Les déformées numériques de la géométrie initiale et optimisée montrées en Figure 4.18 le confirme. Les courbes de convergence sont montrées en Figure 4.19. Pour ce calcul, 500 itérations ont été nécessaires, pour une durée d'environ 30 heures.

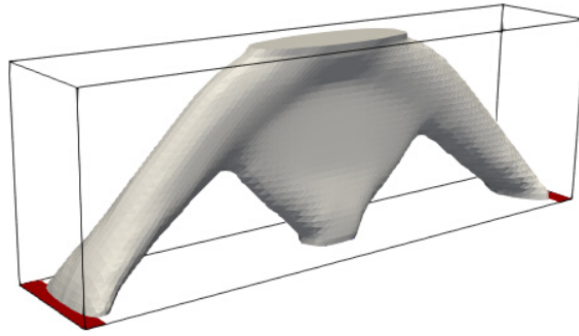


FIGURE 4.15 – Forme optimisée pour le nouveau problème final.

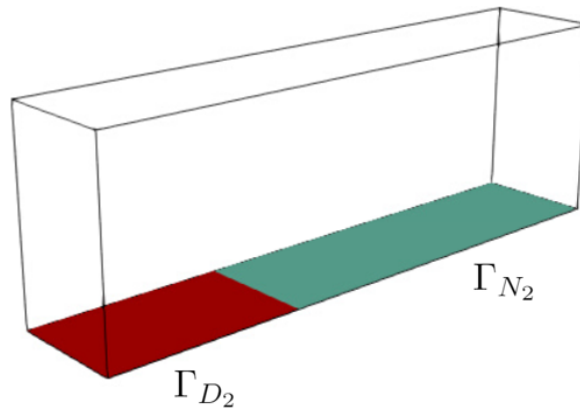
FIGURE 4.16 – Conditions aux limites appliquées au domaine D pour le problème 2.

FIGURE 4.17 – Géométrie initiale (à gauche) et optimisée (à droite) pour le déplacement vertical après découpe partielle du plateau.

4.3.4 Vérification expérimentale

Le modèle *inherent strain* utilisé dans ces travaux offre au mieux des tendances de comportement de la pièce lors de sa fabrication. Afin de confirmer sa validité, une étude expérimentale a été menée en fabriquant en SLM certaines géométries vues plus haut, à savoir la poutre MBB optimisée pour les déplacements verticaux à chaque couche (4.18) et la forme optimisée pour le déplacement vertical après découpe (4.27). Aussi, la poutre MBB initiale montrée en Figure 4.5 ainsi que la géométrie initiale montrée en Figure 4.15 ont été construites pour servir de référence. Une photo du plateau terminé est montrée en Figure 4.20, après dépoudrage. L'expérience considère quinze pièces, trois géométries de référence pour chaque cas test (sauf pour le critère (4.18), où six géométries de référence ont été fabriquées) ainsi que trois géométries optimisées pour chaque critère. Trois pièces sont fabriquées pour chaque géométrie afin de moyenniser les résultats, pouvant quelque peu varier en fonction de la position sur plateau (dû notamment au flux d'argon qui peut ne pas être uniforme sur le plateau). La fabrication a été effectuée en 10 heures avec une machine *Renishaw* [®][74], pour une épaisseur de couche de $50\mu\text{m}$. Aussi, le matériau utilisé pour cette expérience est le Ta6V. Enfin, une stratégie de lasage croisée (ou

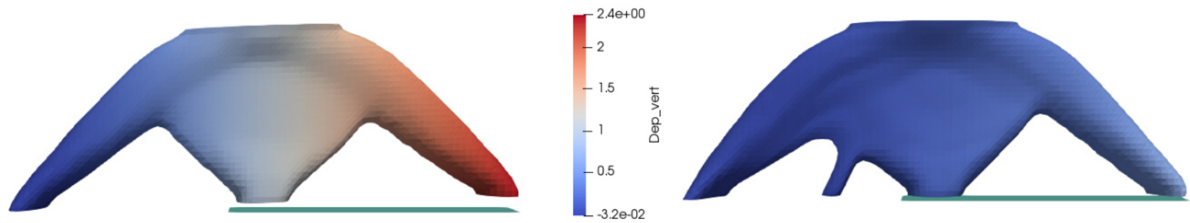


FIGURE 4.18 – Comparaison des déformées numériques entre la géométrie de référence (à gauche) et optimisée (à droite).

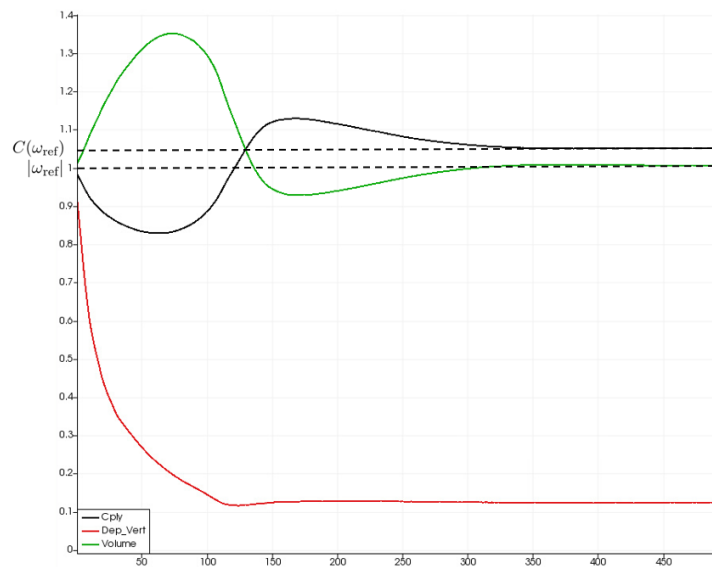


FIGURE 4.19 – Courbes de convergence pour le critère $J(\omega)$ (en rouge), la compliance $C(\omega)$ (en noir) et le volume $|\omega|$ (en vert).

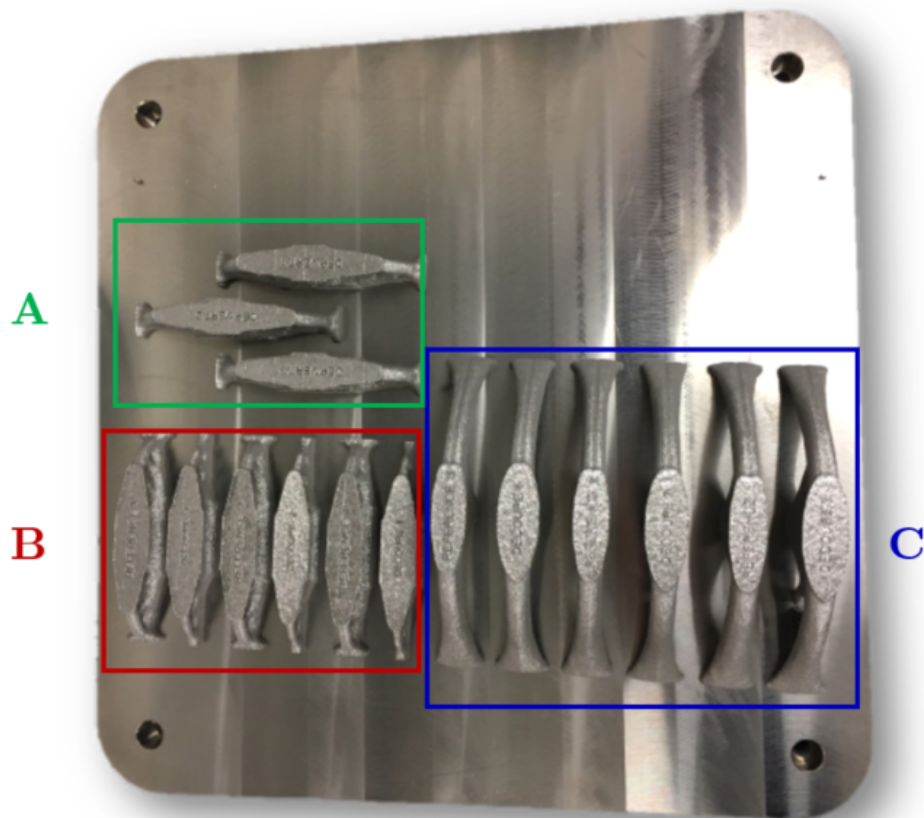


FIGURE 4.20 – Plateau de fabrication après dépoudrage comprenant les 15 géométries nécessaires à la validation des critères. Dans le cadre vert (A) se trouvent les géométries optimisées pour le critère (4.18); dans le cadre rouge (B) les géométries de référence pour le test du critère (4.18) et dans le cadre bleu (C) sont les géométries de référence et optimisées pour le critère (4.27).

”bandes”) a été utilisée, consistant à balayer le lit de poudre par des trajectoires de laser parallèles. Une rotation d’un angle de 67° de la direction de ces trajectoires est effectuée entre chaque couche, homogénéisant les contraintes dans le plan d’étalement de poudre.

Mesures du déplacement après séparation partielle de la pièce au plateau

Cette sous section concernent les 6 pièces positionnées à droite du plateau. Trois d’entre elles sont les géométries de référence (Figure 4.15), les autres sont les géométries optimisées pour le problème (4.27) (Figure 4.17). Une autre vue de la fabrication d’une géométrie optimisée pour ce dernier problème est montrée en Figure 4.21. Un support fin a été ajouté après optimisation entre les deux dernières barres verticales afin d’assurer la fabrication de la surface en *downskin*. Ce support, généré par le logiciel *Magics Materialise®* présente une épaisseur de 0.1 mm, n’impactant pas le comportement de la pièce lors de sa découpe partielle. Le critère (4.18) intégrant les déplacements verticaux à chaque couche aurait pu être considéré dans l’optimisation pour limiter l’angle de cette surface, néanmoins le changement de géométrie engendré aurait pu avoir un impact difficile à mesurer sur le comportement de la pièce lors de sa découpe partielle. Ici, seulement le critère (4.27) doit être évalué. Ce support fin, uniquement présent pour les géométries optimisées (la géométrie de référence est autoportante) est retiré manuellement après fabrication et dépoudrage. L’opération de découpe est ensuite effectuée, séparant partiellement les six géométries alignées du plateau. Celles-ci sont montrées en Figure 4.22, où une différence de flèche peut déjà être observée à l’œil nu entre les géométries de référence et les géométries optimisées, confirmant les bonnes tendances numériques.

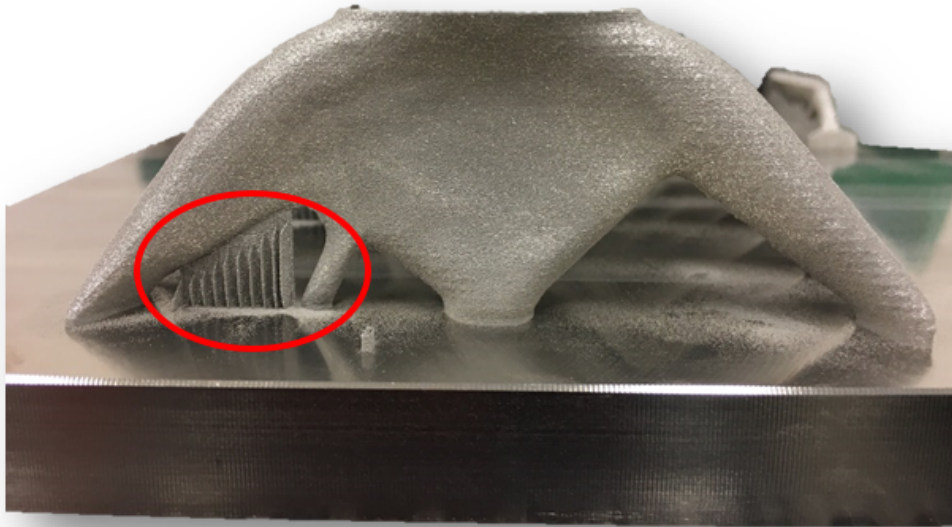


FIGURE 4.21 – Géométrie optimisée pour le critère (4.27), fabriquée à l'aide d'un support fin (entouré en rouge) pour assurer la construction de la surface en *overhang*.

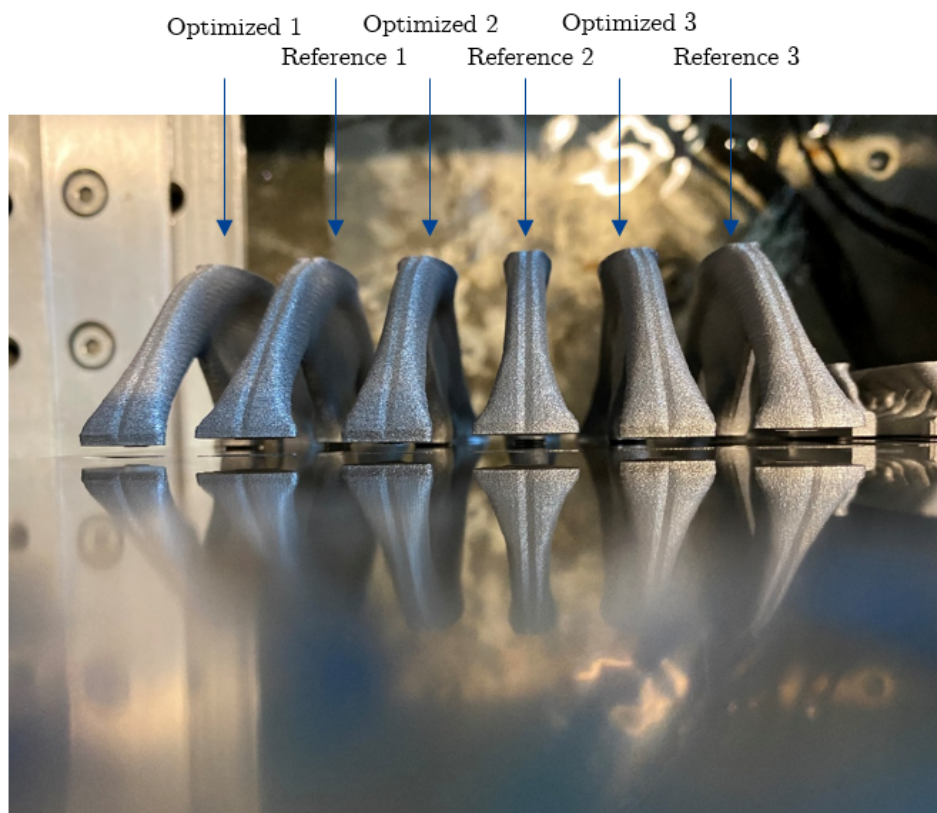


FIGURE 4.22 – Géométries découpées partiellement du plateau. Une différence de flèche peut être observée entre les géométries de référence et optimisées.

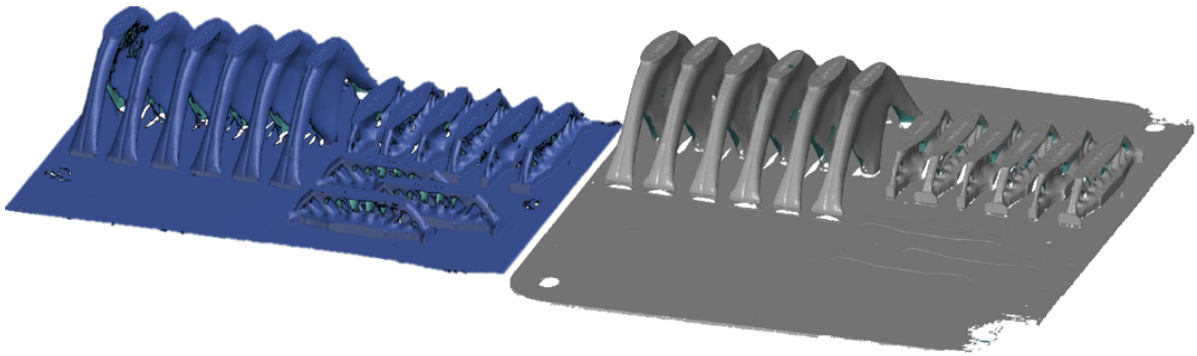


FIGURE 4.23 – Numérisation du plateau avant découpe partielle (à gauche) et après découpe partielle (à droite).

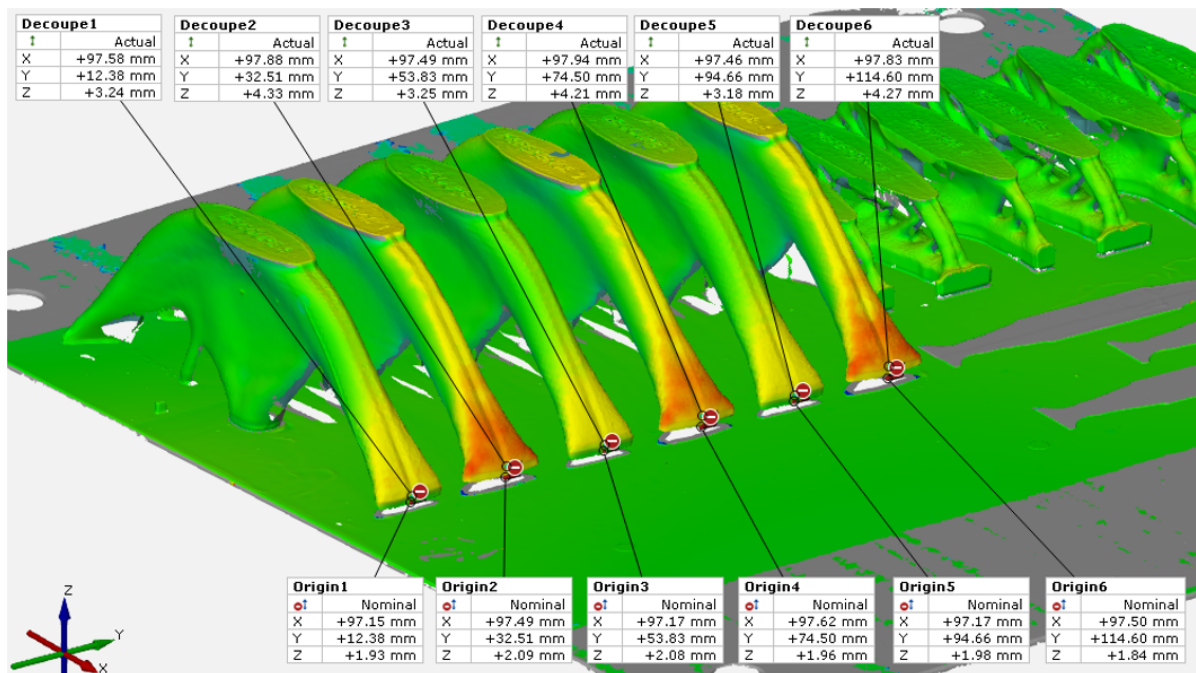


FIGURE 4.24 – Superposition des plateaux numérisés.

Afin de mesurer plus précisément cet écart, le plateau est numérisé avant et après l'opération de découpe partielle. Ces deux différents scans sont montrés en Figure 4.23.

La superposition de ces deux mesures, réalisée grâce au logiciel *GOM Inspect*®[72] permet de mettre en valeur la différence de position en tout point, montrée en Figure 4.24. La position verticale de l'extrémité de chaque pièce est ensuite mesurée sur les deux scans. En moyennant les différentes mesures, le déplacement vertical moyen à l'extrémité de la géométrie de référence est de 2.31mm et de 1.23mm pour la géométrie optimisée, soit une réduction de 47% pour un volume équivalent des deux pièces.

Remarque 4.3.3. *Un premier cas test avait été envisagé pour le critère (4.27) avec le problème de la poutre MBB. Les résultats de cette optimisation sont montrés en Figure 4.25 (à droite), où le déplacement vertical après découpe est tracé pour cette géométrie ainsi que pour la géométrie de référence (à gauche). Le critère est également minimisé avec une contrainte sur la compliance et le volume. Néanmoins, la poutre MBB doit résister à une flexion 3 points, proche du problème de relâchement des contraintes résiduelles lors de la séparation de la pièce du plateau. La déformation après découpe sera donc difficile à observer en pratique car la géométrie le limite par nature. Pour cette raison, un autre problème final a été envisagé pour que la pièce soit davantage sujette à la déformation après découpe.*

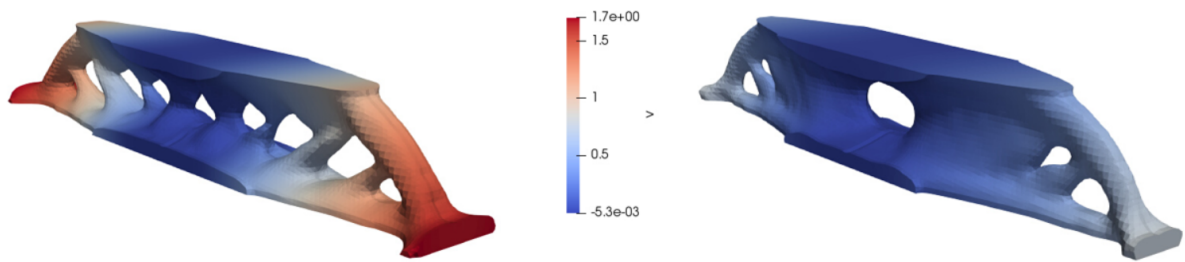


FIGURE 4.25 – Géométrie de la poutre MBB initiale (à gauche) et optimisée (à droite) pour le déplacement vertical après découpe partielle du plateau.



FIGURE 4.26 – Géométries de référence et optimisées pour le critère (4.18).

Cette poutre MBB optimisée pour le problème (4.27) a tout de même été fabriquée sur le même plateau, néanmoins la flèche était difficilement mesurable (moins de 1mm).

Observation du lit de poudre pour le critère des déplacements verticaux à chaque couche

Comme dit plus haut, chaque couche subit un retrait thermique lors de la phase de refroidissement. Les extrémités non maintenues de ces couches peuvent alors se voir être déformées verticalement produisant un état de surface dégradé. Certaines extrémités peuvent même dépasser du lit de poudre étalé pour la couche suivante et provoquer un arrêt de la machine si un racleur dur vient les heurter. Si un racleur souple est utilisé (comme c'est le cas pour cette expérience), ces extrémités peuvent le déchirer impactant la qualité du lit de poudre pour les couches suivantes. Pour limiter cet effet, le critère (4.18) a été formulé, donnant la forme montrée en Figure 4.7 après minimisation. Afin de vérifier expérimentalement les bons résultats numériques, trois géométries de référence et optimisées pour le critère 4.18 ont été fabriquées. Elles sont montrées en Figure 4.26.

Lors de la fabrication, des photos du lit de poudre sont prises à chaque couche, avant et après le passage du racleur, permettant de détecter a posteriori d'éventuels problèmes de fabrication, en particulier lorsque certaines couches dépassent du lit de poudre lors du dépôt de la couche suivante. Ce phénomène est observé à la couche n°214, où le lit de poudre avant le passage du racleur est montré en Figure 4.27 (à gauche) et après passage du racleur (à droite). Les extrémités de couche non supportées des géométries de référence sont visibles sur la photo 4.27 (à droite, entourées en rouge), synonyme de leur déformation verticale importante. Ici, elles ont été touchées par le racleur, manquant de le

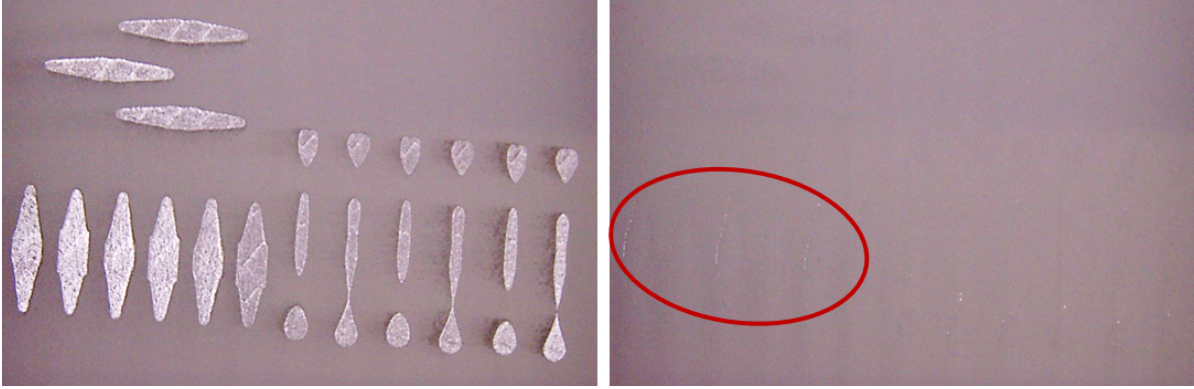


FIGURE 4.27 – Photo du lit de poudre de la couche 214 après lasage (à gauche) et de la couche 215 avant lasage (à droite). Certaines extrémités de couches précédemment fusionnées dépassent du lit de poudre (entourées en rouge).

détériorer. En revanche, la zone du lit de poudre au-dessus des géométries optimisées pour le critère (4.18) est vierge, montrant que les couches se sont moins déformées et confirmant les bonnes tendances numériques.

4.4 Calibration des coefficients *inherent strain* par analyse inverse

Dans ces travaux, la stratégie pour déterminer les déformations inhérentes est obtenue par analyse inverse, s'appuyant sur les résultats expérimentaux montrés précédemment. Le retour élastique mesuré sur la pièce fabriquée sert de référence pour l'analyse inverse permettant de retrouver numériquement les composantes du tenseur ϵ^* du problème direct (4.3). Les paramètres d'optimisation sont rassemblés dans une matrice diagonale 3×3 appelée $a \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ tel que

$$\text{diag}(a)\epsilon^* = \begin{bmatrix} a_1 \epsilon_{11,0} & 0 & 0 \\ 0 & a_2 \epsilon_{22,0} & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \epsilon_{33,0} \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

Les valeurs $\epsilon_{11,0}$, $\epsilon_{22,0}$ et $\epsilon_{33,0}$ sont fixes.

Les problèmes directs nécessaires au calcul du déplacement vertical v s'écrivent alors :

$$\begin{cases} -\text{div}(A(e(u_i) + \text{diag}(a)\epsilon_{\mathcal{L}_i}^*)) = 0 & \text{dans } \omega_i, \\ Ae(u_i)n = 0 & \text{sur } \Gamma_{N_i}, \\ u_i = 0 & \text{sur } \Gamma_D. \end{cases} \quad (4.36)$$

$$\begin{cases} -\text{div}(Ae(v) + \sum_{j=1}^M Ae(u_j)) = 0 & \text{dans } \omega, \\ Ae(v)n = 0 & \text{sur } \Gamma_{N_2}, \\ v = 0 & \text{sur } \Gamma_{D_2}. \end{cases} \quad (4.37)$$

L'objectif est de minimiser une fonction coût de type "moindres carrés" quantifiant les écarts de modèle aux mesures :

$$J_{inv}(a) = \int_{\omega} j_{inv}(v), \quad (4.38)$$

avec,

$$j_{inv}(v) = \int_{\omega} \sum_{i=1}^{N_{mesure}} ((\bar{v}_z(x_i) - v_z(x))^2) \chi_{\mathcal{B}_\varepsilon}(x_i), \quad (4.39)$$

où N_{mesure} est le nombre de mesures effectuées sur la pièce fabriquée, $\bar{v}_z(x_i)$ le déplacement vertical mesuré au point x_i et $v_z(x)$ le déplacement vertical calculé par le modèle en considérant le tenseur *inherent strain* $\text{diag}(a)\epsilon^*$.

On note $\chi_{\mathcal{B}_\varepsilon}(X)$ la fonction caractéristique associée à la boule $\mathcal{B}_\varepsilon(x)$ de rayon ε centrée au point x tel que :

$$\chi_{\mathcal{B}_\varepsilon}(X) = \begin{cases} 1 & \text{si } X \in \mathcal{B}_\varepsilon(x), \\ 0 & \text{si } X \notin \mathcal{B}_\varepsilon(x). \end{cases} \quad (4.40)$$

En pratique, ε est de l'ordre d'une taille de maille, autrement dit les déplacements calculés par le modèle numérique sont capturés sur une petite zone autour de chaque point x_i .

Pour résoudre ce problème d'optimisation sans contrainte, la méthode de Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS) [3, 50] est utilisée. Afin de minimiser la fonction J_{inv} , sa dérivée doit être obtenue par rapport à la variable a .

Pour cela, deux problèmes adjoints, très similaires aux problèmes (4.29) et (4.31) sont résolus. Le premier problème adjoint, associé à (4.37) s'écrit

$$\begin{cases} -\text{div}(Ae(\eta)) & = -j'_{inv}(v) & \text{dans } \omega, \\ (Ae(\eta))n & = 0 & \text{sur } \Gamma_{N_2}, \\ \eta & = 0 & \text{sur } \Gamma_{D_2}. \end{cases} \quad (4.41)$$

avec

$$j'_{inv}(v) = 2 \sum_{i=1}^{N_{mesure}} ((\bar{v}_z(x_i) - v_z(x))\chi_{\mathcal{B}_\varepsilon}(x_i)) \quad (4.42)$$

Le deuxième problème adjoint à résoudre s'écrit quant à lui de la même manière que le problème (4.31).

De cette manière, on peut écrire la dérivée de la fonction (4.38) comme suit :

$$J'_{inv}(a) = \sum_{i=1}^M \int_{\partial\omega_i} A(\text{diag}(\delta a)\epsilon^*) : e(p_i) dx \quad (4.43)$$

Plus précisément, $J'_{inv}(a)$ est obtenu en remplaçant $\delta a \in \mathbb{R}^3$ par les vecteurs de la base canonique.

Preuve : On écrit le nouveau Lagrangien :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(a, \hat{v}, \hat{\eta}, \{\hat{u}_i\}, \{\hat{p}_i\}) &= \int_{\Omega} j_{inv}(\hat{v}) dx + \int_{\omega} \left(Ae(\hat{v}) + \sum_{j=1}^M Ae(\hat{u}_j) \right) : e(\hat{\eta}) dx \\ &\quad - \int_{\Gamma_{N_2}} \sum_{j=1}^M Ae(\hat{u}_j)n \cdot \hat{\eta} ds \\ &\quad + \sum_{i=1}^M \int_{\omega_i} (Ae(\hat{u}_i) + \text{diag}(\delta a)\epsilon_{\mathcal{L}_i}^*) : e(\hat{p}_i) dx. \end{aligned} \quad (4.44)$$

En dérivant \mathcal{L} par rapport aux variables $\hat{v}, \hat{\eta}, \{\hat{u}_i\}, \{\hat{p}_i\}$, on obtient les formulations variationnelles des problèmes (4.29), (4.31), (4.9) et (4.3) respectivement.

Enfin, pour δa , on a :

$$\frac{\mathcal{L}(a, \hat{v}, \hat{\eta}, \{\hat{u}_i\}, \{\hat{p}_i\})}{\delta a}(\delta a) = \sum_{i=1}^M \int_{\partial\omega_i} A(\text{diag}(\delta a)\epsilon^*) : e(p_i) dx \quad (4.45)$$

D'après l'hypothèse faite en section 4.1, $\epsilon_{33,0} = 0$, donc $a_3 = 0$.

4.4.1 Recherche des données synthétiques

Dans un premier temps, un cas test numérique est considéré afin d'évaluer l'algorithme. Une géométrie de type 'peigne', bien connue de la méthode *inherent strain* est utilisée et montrée en Figure 4.28, dans un domaine de dimension $[0, 72] \times [0, 10] \times [0, 6]$, discrétisée en 5621 noeuds. Une symétrie selon le plan XZ est utilisée pour réduire la taille du domaine. Ici, le problème de découpe partielle est d'abord résolu en utilisant un chargement *inherent strain*, considérant des coefficients de référence $a_{1,ref} = 1$ et $a_{2,ref} = 0.5$. Les propriétés mécaniques utilisées sont $E = 125GPa$, $\nu = 0.3$ et le domaine est divisé en 10 couches horizontales. 19 points espacés de manière régulière le long de la face supérieure du peigne

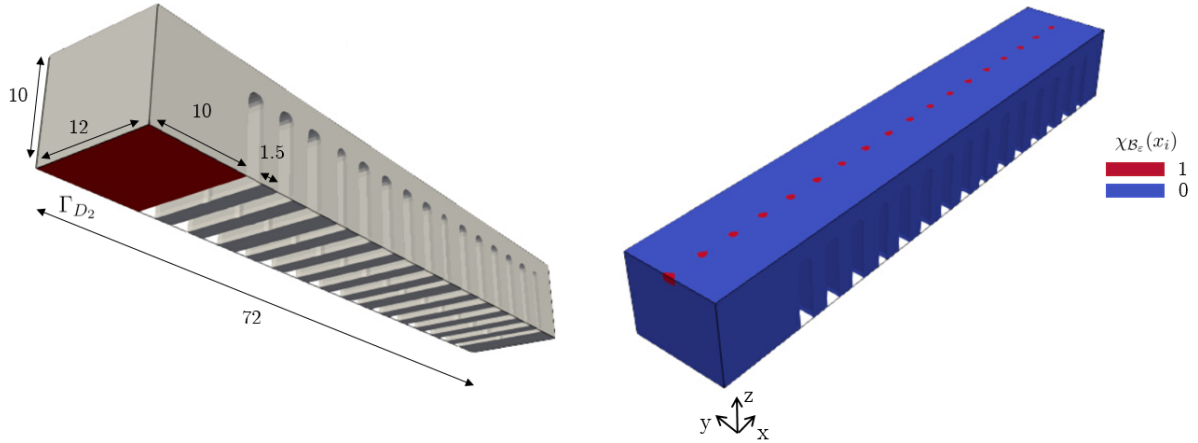


FIGURE 4.28 – Géométrie du peigne (à gauche) et fonctions caractéristiques $\chi_{B_\varepsilon}(x_i)$ du modèle numérique (à droite).

sont considérés. Leurs coordonnées le long de l'axe x ainsi que la valeur du déplacement vertical après la découpe partielle en chaque point sont reportés dans la Table 4.1.

Dans un deuxième temps, l'optimisation des coefficients a_1 et a_2 sera faite de manière à faire correspondre le déplacement vertical de chaque point $v_z(x_i)$ avec les données synthétiques $\bar{v}_z(x_i)$ obtenues précédemment avec $a_{1,ref}$ et $a_{2,ref}$. Les paramètres d'optimisation sont initialisés par $a_1 = a_2 = 0.1$. A convergence, les coefficients obtenus sont $a_1 = 1.00001$ et $a_2 = 0.499992$, pour une valeur de $J_{inv}(a) = 4.465 \times 10^{-11}$. Les courbes de convergence pour les deux coefficients et la fonctionnelle sont montrées en Figure 4.29. La valeur du déplacement vertical de chaque point après convergence de l'algorithme est reportée dans la Table 4.1.

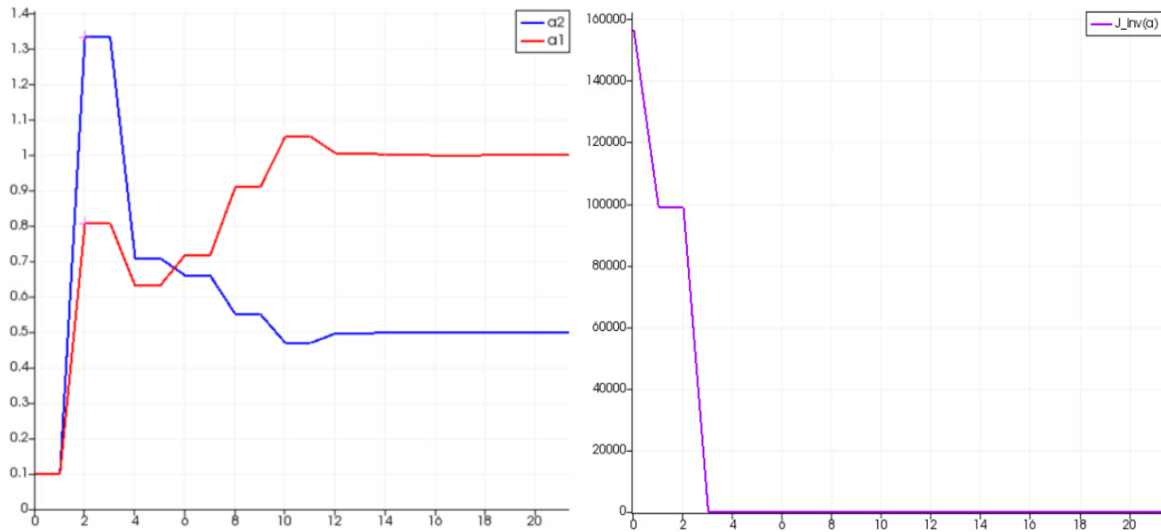


FIGURE 4.29 – Courbes de convergence pour les coefficients a_1 et a_2 (à gauche) et pour la fonction $J_{inv}(a)$ (à droite).

Les déplacements $v_z(x_i)$ correspondent aux données synthétiques et sont obtenus pour des valeurs des coefficients a_1 et a_2 très similaires à $a_{1,ref}$ et $a_{2,ref}$. On choisit alors d'utiliser cet algorithme pour faire correspondre les données numériques aux données mesurées physiquement.

4.4.2 Recherche des données mesurées

Cette fois, la méthode est appliquée aux valeurs de déplacement mesurées en plusieurs points de la pièce fabriquée. Les coordonnées de ces points mesurés x_i sont montrées sur la Figure 4.30 et leur

points	position $x(mm)$	$\bar{v}_z(x_i)(mm)$	$v_z(x_i)(mm)$
x_1	720	13.355	13.355
x_2	680	12.2336	12.2336
x_3	640	11.1128	11.1128
x_4	600	9.99829	9.99829
x_5	560	8.89586	8.89586
x_6	520	7.8123	7.8123
x_7	480	6.75565	6.75565
x_8	440	5.73536	5.73536
x_9	400	4.73597	4.73597
x_{10}	360	3.78729	3.79222
x_{11}	320	2.92246	2.92246
x_{12}	280	2.14332	2.14332
x_{13}	240	1.4738	1.4738
x_{14}	200	0.863232	0.863232
x_{15}	160	0.391997	0.391997
x_{16}	120	0.0956187	0.0956187
x_{17}	80	0.00775823	0.00775823
x_{18}	40	-0.00479469	-0.00479469
x_{19}	0	-0.0136172	-0.0136172

TABLE 4.1 – Position sur l’axe x et déplacement vertical calculé au point x_i du peigne pour les coefficients $a_{1,ref}$ et $a_{2,ref}$ et calculé par les coefficients obtenus après convergence de l’algorithme.

déplacement vertical après découpe rapportées dans la Table 4.2. Ici, 10 points de mesure sont choisis et répartis sur le bord de la barre la plus déformée. Les fonctions caractéristiques $\chi_{B_e}(x_i)$ associées sont montrés sur la forme ω_{ref} , en Figure 4.31.

Remarque 4.4.1. *Suite à une erreur de manipulation dans l’outil de mise en plateau, la pièce fabriquée possède des dimensions légèrement plus grandes que celles considérées numériquement (agrandissement d’un facteur de 1.18 dans les trois dimensions). Le problème reste le même : l’algorithme doit converger vers les coefficients inherent strain qui ont permis la déformation mesurée sur la pièce. La forme numérique a bien sûr été agrandie elle aussi avant d’effectuer l’analyse inverse. Cela ne remet pas en cause les résultats montrés en sous section 4.3.4 puisque les proportions restent les mêmes et que les problèmes mécaniques considérés se placent dans le cadre de l’élasticité linéaire. L’allure de la forme finale n’est donc pas dépendante de la taille du domaine.*

Aussi, comme indiqué plus haut, une stratégie de balayage du laser dite croisée (ou ”bande”) a été utilisée pour construire les géométries. Le caractère périodique de cette stratégie de balayage permet de considérer une application isotrope des déformations inhérentes dans le plan de la couche et indépendante de l’angle de rotation. Considérant cette nouvelle hypothèse, un seul paramètre peut être considéré sachant que $a_1 = a_2$. Le nouveau tenseur des déformations inhérentes recherché prend alors la forme :

$$\epsilon_{\mathcal{L}_i}^* = \begin{bmatrix} a_1 \epsilon_{11,0} & 0 & 0 \\ 0 & a_1 \epsilon_{22,0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.46)$$

Le paramètre d’optimisation est initialisé par $a_1 = 1$ et les coefficients constants de $\epsilon_{\mathcal{L}_i}^*$ sont fixes avec $\epsilon_{11} = \epsilon_{22} = -0.0001$.

A convergence, on obtient $a_1 = 0.53597$ après 20 itérations. La courbe de convergence est montrée en Figure 4.32 (à gauche). Aussi, la fonction (4.38) atteint la valeur de 0.367. La courbe de convergence est montrée en Figure 4.32 (à droite).

Les déplacements $v_z(x_i)$ calculés par le modèle développé en section 4.3.3 avec le nouveau tenseur $\epsilon_{\mathcal{L}_i}^*$ sont également rassemblés dans la Table 4.2 ainsi que leur position sur le plan de coupe par rapport à l’extrémité gauche de la pièce (l’origine est montrée en Figure 4.31).

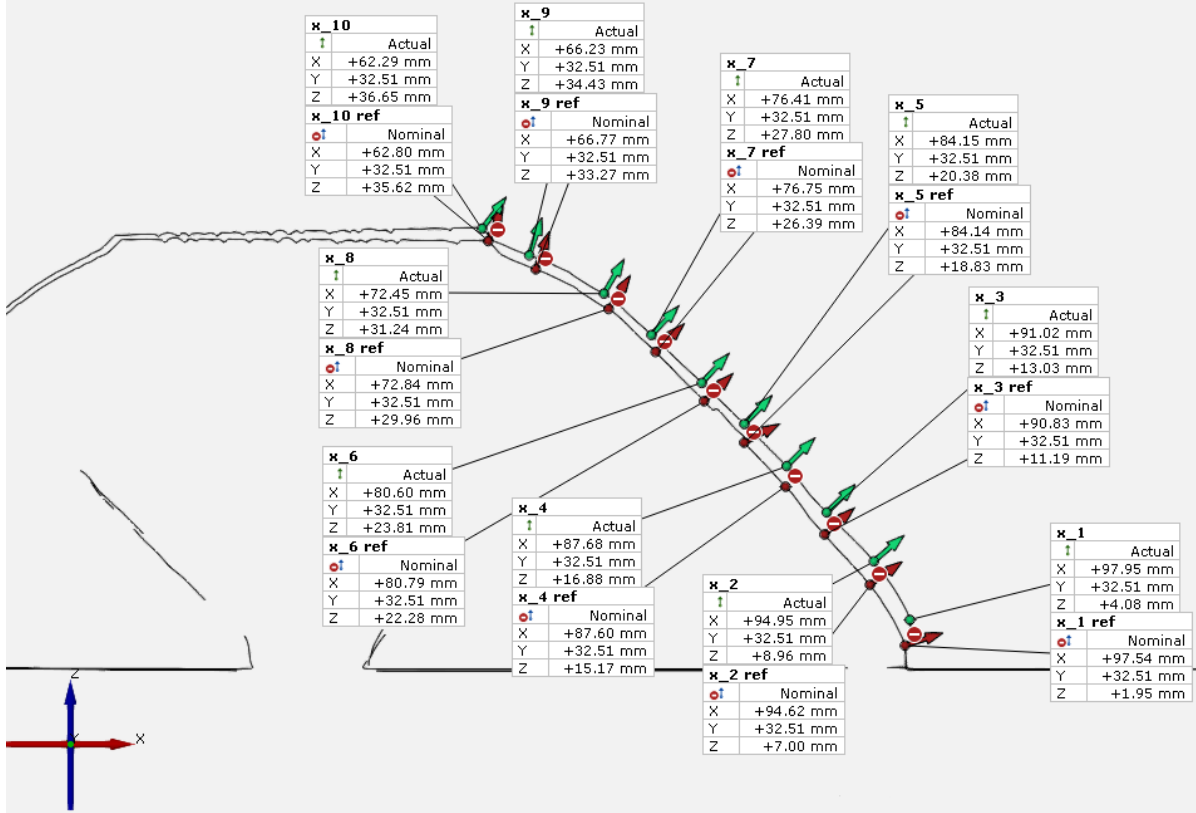


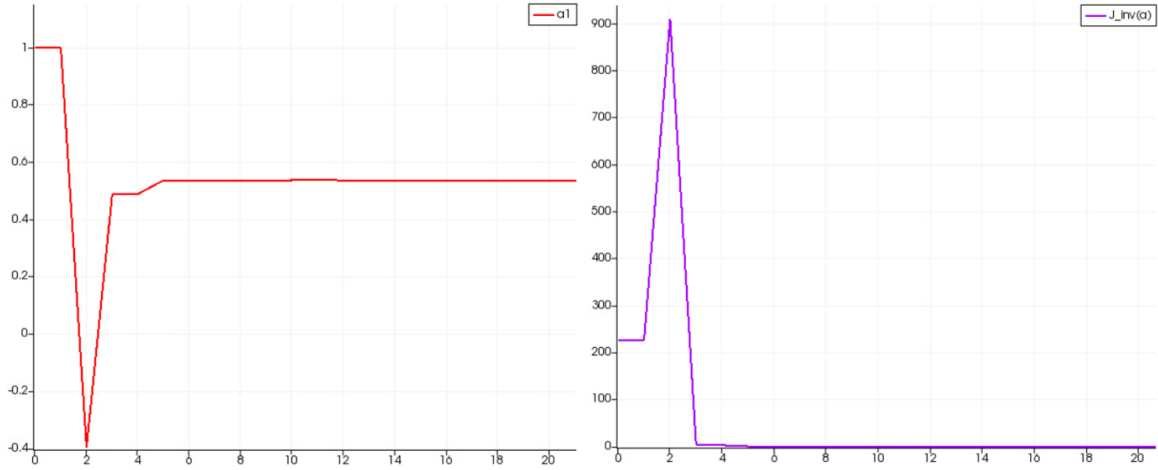
FIGURE 4.30 – Plans médians de la forme ω_{ref} fabriquée, avant et après découpe, sur lesquels sont pris les mesures $\bar{v}_z(x_i)$.



FIGURE 4.31 – Fonctions caractéristiques $\chi_{B_\varepsilon}(x_i)$ du modèle numérique.

Remarque 4.4.2. Une des difficultés a été de faire correspondre les coordonnées numériques et physiques du point x_i sur le bord de la pièce. Celles-ci ont été déterminées par leur position par rapport au repère situé à l'autre extrémité de la pièce (Figure 4.31), placé de manière identique sur FreeFEM et GOM Inspect. Néanmoins, il n'est pas garanti que la position de chaque point sur la pièce physique corresponde exactement à la position de ceux sur la forme numérique. Les mesures étant précises au centième de millimètre, une très légère variation de position peut impacter la valeur finale de la fonctionnelle $J_{inv}(a)$ ainsi que les résultats de l'optimisation.

La comparaison des valeurs de $\bar{v}_z(x_i)$ et $v_z(x_i)$ est plutôt satisfaisante compte tenu de la simplicité du modèle *inherent strain* et de la difficulté dans la prise de mesure sur la pièce fabriquée. Dans de futurs travaux, il serait intéressant de comparer ces mesures en prenant en compte d'autres géométries pour conclure de sa bonne efficacité. Aussi, la stratégie de lasage utilisée ici permet de faire des hypothèses arrangeantes pour l'analyse inverse en terme de nombre de coefficients à varier. D'autres recherches doivent être effectuées pour obtenir les bons coefficients du tenseur $\epsilon_{\mathcal{L}_i}^*$ lorsqu'une autre stratégie de lasage est utilisée pour fabriquer la pièce. Aussi, des repères physiques doivent être prévus lors de la mise en plateau afin d'améliorer la prise de mesure.


 FIGURE 4.32 – Courbes de convergence pour le coefficient a_1 (à gauche) et pour la fonction $J_{inv}(a)$ (à droite).

points	position $x(mm)$	position $z(mm)$	$\bar{v}_z(x_i)(mm)$	$v_z(x_i)(mm)$
x_1	97,7	1.1	2.13	1.979
x_2	95.5	4.7	1.96	1.919
x_3	93.3	8.3	1.84	1.860
x_4	88.8	14.2	1.71	1.739
x_5	84.4	17.8	1.58	1.624
x_6	80.9	22.3	1.53	1.535
x_7	76.6	27.2	1.41	1.429
x_8	72.7	30.2	1.28	1.336
x_9	66.6	33.4	1.16	1.194
x_{10}	62.2	35.6	1.05	1.092

 TABLE 4.2 – Position et déplacement vertical $\hat{v}_z(x_i)$ mesuré au point x_i . $v_z(x_i)$ est le déplacement vertical au point x_i calculé par le modèle développé en section 4.3.3 avec les coefficients $\epsilon_{\mathcal{L}_i}^*$ obtenus par analyse inverse.

4.5 Optimisation de forme des supports

Dans un deuxième temps, l'optimisation de forme des supports S est considérée. La pièce ω dont la fabricabilité est assurée par ces supports est cette fois fixe. Dans ce cas, les déplacements induits par le procédé seront minimisés par la présence des supports. Le problème (4.3) est résolu dans D , contenant la structure complète Ω tel que $\Omega = S \cup \omega$. Tout comme ω , Ω est divisé en M macro-couches de même épaisseur. Ici, le critère considérant la somme des déplacements verticaux (4.18) à chaque couche est utilisé, cette fois calculé sur la structure Ω :

$$J_4(S) = \sum_{i=1}^M \int_{\Omega_i} j_4(u_i) dx, \quad (4.47)$$

avec

$$j_4(u_i) = |\max(0, u_i \cdot e_d)|^2 \chi_{\mathcal{L}_i}, \quad (4.48)$$

où $\chi_{\mathcal{L}_i}$ est la fonction caractéristique du domaine \mathcal{L}_i définie par (4.2). Puisque la géométrie de la pièce ω est fixée, sa performance mécanique n'est pas considérée. Le nouveau problème d'optimisation s'écrit :

$$\begin{aligned} \min_{\Omega \subset D} J_4(S) \\ \text{tel que } |S| &= |S_{cible}| \end{aligned} \quad (4.49)$$

où $|S|$ et $|S_{cible}|$ sont respectivement le volume pris par les supports et leur volume cible respectivement.

Proposition 4.5.1. *On considère l'interface $\partial S \cap \partial \omega$ fixe, on restreint donc $\theta \in W^{1,\infty}(D, \mathbb{R}^N)$ à S tel que $\theta \cdot n = 0$ sur $\partial S \cap \partial \omega$. La dérivée de forme de $J_4(\Omega)$ dans la direction θ est donnée par :*

$$J'_4(S)(\theta) = \sum_{i=1}^M \int_{\partial S \cap \omega_i^c} \theta \cdot n \left\{ j_4(u_i) + (A(e(u_i) + \epsilon_{\mathcal{L}_i}^*)) : e(p_i) \right\} ds. \quad (4.50)$$

où ω_i^c est le complémentaire de ω_i tel que $\omega_i^c = D_i \setminus \omega$.

Preuve : Suivant la méthode de Céa [41], le Lagrangien complet est introduit :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\Omega, \{u_i\}, \{p_i\}) &= \sum_{i=1}^M \int_{\Omega_i} j_4(u_i) dx \\ &+ \sum_{i=1}^M \int_{\Omega_i} (A(e(u_i) + \epsilon_{\mathcal{L}_i}^*)) : e(p_i) dx. \end{aligned} \quad (4.51)$$

Une fois de plus, différenciant \mathcal{L} par rapport à chaque variable permet de retrouver le résultat voulu (4.50).

La forme fixe ω non supportée est montrée en Figure 4.33 (à gauche) et sujette aux déplacements verticaux montrés à droite. Comme attendu, les déplacements verticaux les plus importants sont localisés sur les surfaces en *overhang* non supportées. Le domaine de calcul est de taille $[0, 80mm] \times [0, 10mm] \times [0, 80mm]$, discretisé en 48000 noeuds et correspondant à un quart du domaine total, deux plans verticaux orthogonaux sont utilisés pour la symétrie. Les propriétés mécaniques sont $E = 125GPa$ et $\nu = 0.3$, considérées pour les deux sous-domaines ω et S . Le domaine est divisée en 20 macro couches horizontales et Γ_D est toujours appliquée sur le bord inférieur du domaine.

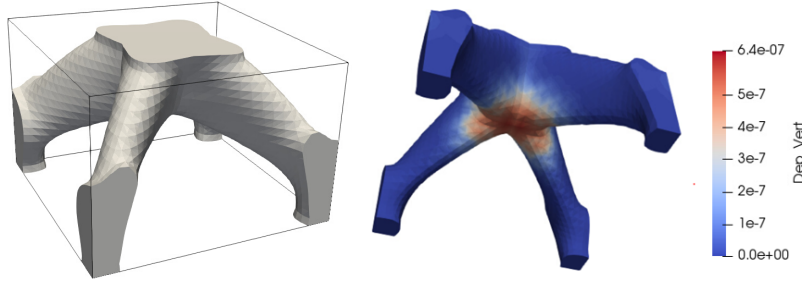


FIGURE 4.33 – Forme ω fixe non supportée (à gauche) avec les déplacements verticaux induits par la fabrication (à droite).

L'optimisation débute avec une forme initiale de supports montrée en Figure 4.34 (à gauche, en bleu). Les supports optimisés, montrés en Figure 4.34 (à droite) touchent chaque bras de la forme ω sur toute leur longueur. Aussi, ces supports ne forment pas de surface en *overhang* dans leur géométrie puisque le problème (4.3) est également résolu sur S . L'algorithme converge en 300 itérations, nécessitant environ 10 h de calcul.

Grâce à ce seul critère, les surfaces en *overhang* sont donc limitées dans Ω , garantissant la fabricabilité de la structure complète. Les courbes de convergence sont montrées en Figure 4.35.

4.6 Conclusions et perspectives

Dans cette partie, plusieurs critères d'optimisation ont été proposés afin de réduire les défauts de fabrication. Ceux ci sont mesurés après une modélisation purement mécanique du procédé de fabrication grâce à la méthode *inherent strain*. La simplicité de cette simulation permet son intégration dans le schéma d'optimisation de forme. Ainsi, les critères mesurant les déplacements verticaux sur chaque couche ou encore le critère de Von Mises calculé tout au long de la fabrication ont pu être minimisés. Un critère visant à réduire les déplacements après la découpe de la pièce du plateau a également été considéré, puis vérifié expérimentalement par la fabrication des géométries initiales et optimisées. Ces

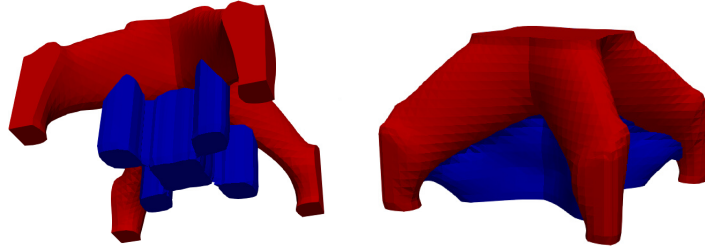


FIGURE 4.34 – Forme initiale des supports (à gauche, en bleu) et forme optimisée (à gauche) minimisant le critère (4.47) dans la structure complète Ω .

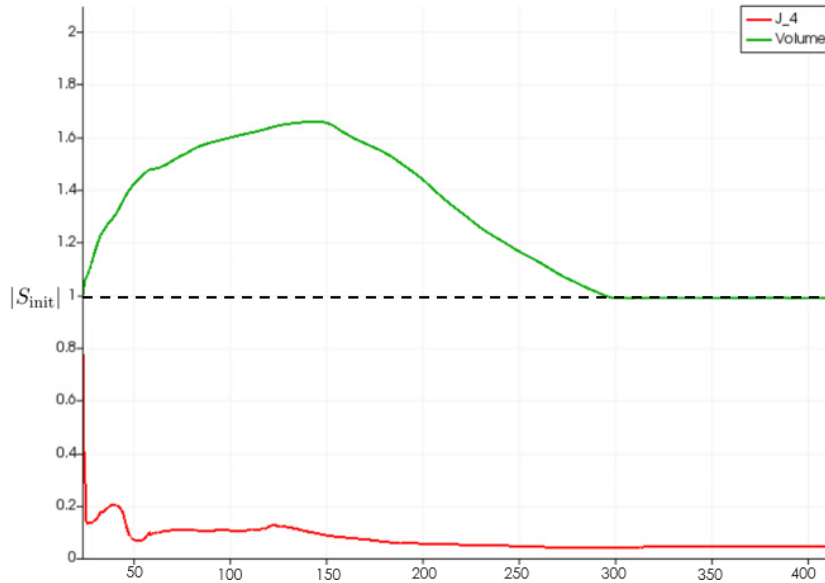


FIGURE 4.35 – Courbe de convergence pour le critère $J_4(\Omega)$ (rouge) et pour le volume $|S|$ (vert).

fabrications ont également permis de calibrer les coefficients du tenseur des *inherent strains* par analyse inverse, permettant d'obtenir une simulation plus précise pour des géométries fabriquées avec ce même jeu de paramètres machine. Cette expérience a également servi à vérifier les bonnes tendances numériques observées pour le critère des déplacements verticaux. Enfin, un nouveau critère pour l'optimisation de forme des supports a été abordé, limitant les déplacements verticaux dans la pièce calculé à partir de cette simulation du procédé. Ces méthodes sont clés pour l'optimisation de forme du couple pièce/support, abordée dans une prochaine partie.

Chapitre 5

Optimisation du couple pièce/support

Contents

5.1	Introduction	83
5.2	Optimisation de forme conjointe de la pièce et des supports	83
5.2.1	Problème d'optimisation	84
5.2.2	Dérivée de forme	86
5.2.3	Résultats numériques 2D	87
5.2.4	Résultats numériques 3D	90
5.3	Conclusions et perspectives	93

5.1 Introduction

Dans cette partie, l'optimisation de forme du couple support/pièce est étudiée. Les différentes contraintes d'optimisation développées précédemment pour la pièce à fabriquer et ses supports sont désormais prises en compte pour l'optimisation de forme de la structure à fabriquer. Cette partie a donc une vision plus industrielle, où un compromis doit être trouvé entre la performance de la pièce dans son problème final et son coût de production, mesuré par le volume de matière nécessaire à sa fabrication (pièce et supports). Ce compromis sera trouvé par une optimisation de forme conjointe de la pièce et de ses supports. Un critère de fabricabilité devra être respecté par la forme de la structure à fabriquer. Celui-ci sera obtenu grâce aux solutions de la méthode de simulation *inherent strain* détaillée au chapitre 4. Les modèles de force développés aux chapitres 3 et 4 seront également utilisés pour obtenir une forme optimisée de supports. Toutes ces contraintes devront alors être pénalisées correctement afin d'obtenir une structure à fabriquer optimisée pour la fabrication additive métallique sur lit de poudre. La première partie de ce chapitre détaillera les aspects théoriques et numériques de l'optimisation de forme pour plusieurs phases, ainsi que la stratégie d'optimisation choisie. Dans un second temps, des cas tests numériques en 2 et 3 dimensions seront étudiés.

5.2 Optimisation de forme conjointe de la pièce et des supports

Le problème de l'optimisation du couple support/pièce sera résolu par l'optimisation simultanée de plusieurs fonctions ligne de niveaux (level-sets) dans un même domaine D par la méthode des lignes de niveaux "colorées" [159, 12, 165]. Une fonction ligne de niveaux, notée φ_0 permet de distinguer deux phases occupant les sous-domaines $\Psi_0 \subset D$ et $\Psi_1 = {}^c\Psi_0 \subset D$ où c est la partie complémentaire dans D . Grâce à m fonctions ligne de niveaux $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{m-1}$, il est donc possible de distinguer 2^m sous-domaines. Dans le contexte de la fabrication additive et de l'optimisation du couple pièce/supports deux fonctions level-sets sont considérées, représentant trois sous-domaines : la structure à fabriquer (la pièce et ses supports) notée Ω , le domaine extérieur ${}^c\Omega$ (la poudre) et la pièce ω . Le sous-domaine

occupé par les supports S est construit grâce à Ω et ω . Ici, seulement deux matériaux sont à considérer, le métal solide (constituant Ω , ω et S) et la poudre, modélisée par un matériau Ersatz et remplissant ${}^c\Omega$. Plus particulièrement, la structure Ω est décrite par la région où la fonction φ_0 est négative, la pièce ω par la région où la fonction φ_1 est négative, la poudre par la région où φ_0 est positive et enfin l'union des régions où $\varphi_1 < 0$ et $\varphi_0 > 0$ décrit la forme des supports S (voir la Figure 5.1).

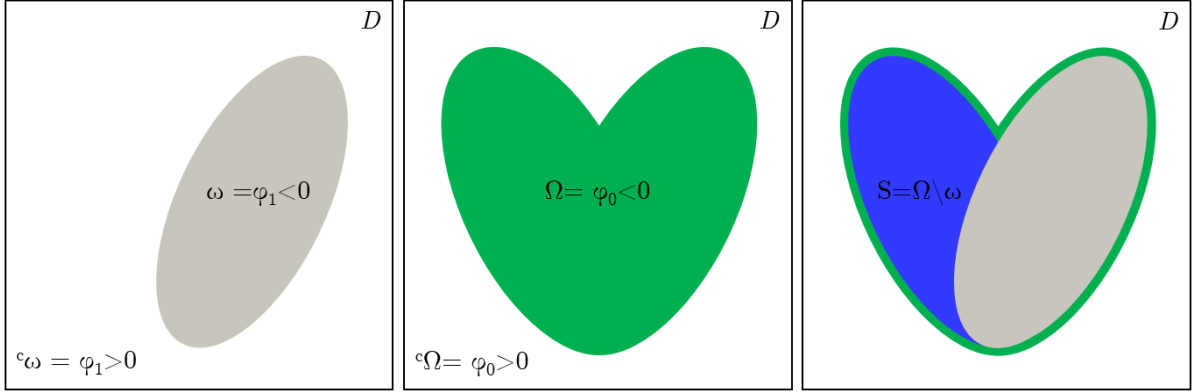


FIGURE 5.1 – Les deux lignes de niveaux φ_1 (à gauche) et φ_0 (au milieu) permettent la distinction de trois phases (Ω , ω et ${}^c\Omega$, la phase S est définie par $\Omega \setminus \omega$ (à droite)).

5.2.1 Problème d'optimisation

Tout comme au chapitre 4, un problème final définit l'utilisation en service de la pièce. On rappelle ici la forme de ce problème, avec comme solution $u_{fin} : D \rightarrow \mathbb{R}^N$:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(Ae(u_{fin})) = 0 & \text{dans } \omega, \\ Ae(u_{fin})n = 0 & \text{sur } \Gamma, \\ Ae(u_{fin})n = f & \text{sur } \Gamma_{N_f}, \\ u_{fin} = 0 & \text{sur } \Gamma_{D_f}, \end{cases} \quad (5.1)$$

où A est le tenseur de rigidité, Γ_{N_f} et Γ_{D_f} les bords du domaine où les conditions aux limites de Neumann et Dirichlet sont appliquées respectivement dans le problème final. La forme optimale ω_{ref} pour ce problème est obtenue après minimisation de la compliance $C(\omega)$ définie par :

$$C(\omega) = \int_{\Gamma_{N_f}} f \cdot u_{fin} \, ds. \quad (5.2)$$

Une contrainte sur volume $|\omega|$ doit également être prise en compte.

Aussi, un critère d'optimisation est calculé avec les solutions d'un problème mécanique modélisant la fabrication couche par couche de la structure complète Ω . On considère un domaine D divisé en M macro-couches de même épaisseur et chaque domaine intermédiaire $D_i (i \geq 1)$ est composé des i premières couches tel que :

$$D_1 \subset \dots \subset D_i \subset \dots \subset D_M \equiv D.$$

Le problème s'écrit :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\sigma_i) = 0 & \text{dans } \Omega_i, \\ \sigma_i = A(e(u_i) + \epsilon_{\mathcal{L}_i}^*) & \\ \sigma_i n = 0 & \text{sur } \Gamma_{N_i}, \\ u_i = 0 & \text{sur } \Gamma_D, \end{cases} \quad (5.3)$$

avec comme solution le champ de déplacement $u_i : D \rightarrow \mathbb{R}^N$. $\epsilon_{\mathcal{L}_i}^*$ est le chargement *inherent strain* sur la dernière couche de la forme Ω_i . Celle-ci est divisée en M macro-couches horizontales et chaque forme intermédiaire $\Omega_i (i \geq 1)$ est composée des i premières couches tel que $\Omega_i = \Omega \cap D_i$.

L'objectif de l'algorithme est cette fois de minimiser le volume des supports S tout en garantissant la fabricabilité de la pièce, mesurée par un critère appelé $J_{fab}(\Omega)$, formulé sur Ω et calculé avec les

solutions du problème (5.3). La forme des supports S et de la pièce ω participera donc au respect de cette dernière contrainte à travers la forme Ω . Aussi, les performances de la pièce en service doivent être préservées, à savoir la compliance $C(\omega_{ref})$ et le volume $|\omega_{ref}|$ de référence. Enfin, un terme de pénalisation $\mathcal{P}_\varepsilon(\Omega)$ de la surface de contact entre la pièce Ω et les supports S est introduit à l'image des travaux montrés au chapitre 3 tel que :

$$\mathcal{P}_\varepsilon(\Omega) = \frac{1}{\varepsilon L} \text{Vol}(\{x \in {}^c\omega : d(x, \omega \setminus \Gamma_\beta(\omega)) < \varepsilon L\} \cap \{\varphi_0 < \varepsilon L\}), \quad (5.4)$$

où ${}^c\omega$ est le complémentaire de ω , d est la fonction distance signée, $\Gamma_\beta(\omega)$ est le bord de ω présentant un angle supérieur à β avec la direction de fabrication, $\varepsilon > 0$ est un petit paramètre de l'ordre d'une taille de maille, φ_0 est la fonction level-set associée à la structure Ω et L est une longueur caractéristique de la forme ω . La bande pénalisée d'épaisseur ε est montrée en rouge sur le schéma de la Figure 5.2.

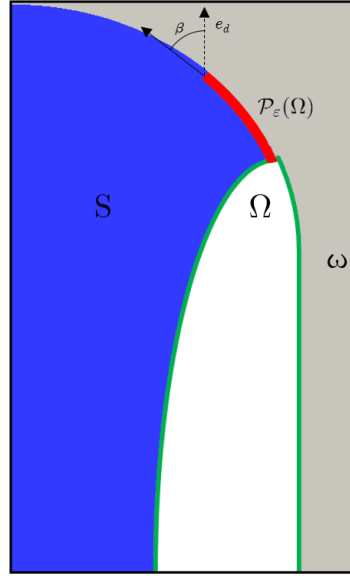


FIGURE 5.2 – Pénalisation de la zone de contact pièce/support (montrée par une bande d'épaisseur ε , en rouge), calculée sur le bord $\partial\omega \cap S$.

Le problème d'optimisation s'écrit :

$$\begin{aligned} \min_{\Omega \subset D} \quad & |\Omega| \\ \text{tel que} \quad & |\omega| \leq (1 + k_V)|\omega_{ref}|, \\ & C(\omega) \leq (1 + k_C)C(\omega_{ref}), \\ & J_{fab}(\Omega) \leq J_{fab}(\Omega_{init}), \\ & \mathcal{P}_\varepsilon(\Omega) \leq \mathcal{P}_\varepsilon(\Omega_{init}). \end{aligned} \quad (5.5)$$

où $k_V > 0$ est un petit coefficient autorisant l'augmentation du volume de la pièce ω et $k_C > 0$ autorise l'augmentation de la compliance. Aussi, Ω_{init} est la forme initiale de la structure Ω .

Dans ce chapitre, le critère mesurant la fabricabilité est calculé à chaque couche et s'écrit :

$$J_{fab}(\Omega) = \sum_{i=1}^M \int_{\Omega_i} j(u_i) dx \quad (5.6)$$

avec

$$j(u_i) = |\max(0, u_i \cdot e_d) \chi_{\mathcal{L}_i}|^2 \quad (5.7)$$

où u_i est solution du problème (5.3) et $\chi_{\mathcal{L}_i}$ la fonction caractéristique de la couche i , définie par (4.2).

On considère la fonction objectif suivante :

$$J(\Omega, \omega) = J_{fab}(\Omega) + \lambda_C C(\omega) + \lambda_V |\omega|. \quad (5.8)$$

où λ_C et λ_V sont les deux multiplicateurs de Lagrange pour la compliance et le volume, respectivement. En pratique, la compliance $C(\omega)$ et le volume $|\omega|$ sont pondérées par un Lagrangien augmenté. On notera la pondération λ_C et λ_V dans les calculs pour plus de lisibilité.

5.2.2 Dérivée de forme

Pour trouver une solution au problème (5.5), les dérivées de forme pour chaque contrainte sont calculées grâce à la méthode d'Hadamard [8, 69] pour les sous-domaines Ω et ω . Pour tout vecteur $\theta \in W^{1,\infty}(D, \mathbb{R}^N)$, la perturbation de Ω par θ est définie par

$$\Omega_\theta = (\text{Id} + \theta)\Omega$$

Aussi, celle de ω par θ s'écrit

$$\omega_\theta = (\text{Id} + \theta)\omega$$

Proposition 5.2.1. *Les dérivées de forme pour la fonctionnelle (5.8) par rapport à Ω et ω dans la direction θ s'écrivent respectivement :*

$$\frac{\partial J(\Omega, \omega)}{\partial \Omega}(\theta) = \sum_{i=1}^M \int_{\partial \Omega_i} \theta \cdot n_0 \{j_{fab}(u_i) + (A(e(u_i) + \epsilon_{\mathcal{L}_i}^*)) : e(p_i)\} ds. \quad (5.9)$$

avec n_0 le vecteur normal unité extérieur de $\partial \Omega$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial J(\Omega, \omega)}{\partial \omega}(\theta) = & \sum_{i=1}^M \int_{\partial \Omega_i \cap \partial \omega} \theta \cdot n_1 \{j_{fab}(u_i) + (A(e(u_i) + \epsilon_{\mathcal{L}_i}^*)) : e(p_i)\} ds \\ & - \int_{\partial \omega} \theta \cdot n_1 \{\lambda_C(A(e(u_{fin}))) : e(u_{fin})\} ds. \end{aligned} \quad (5.10)$$

avec n_1 le vecteur normal unité extérieur de $\partial \omega$.

Preuve : On introduit un sous-espace de dimension finie V^h de $H^N(D)$. Il sera utilisé pour définir les éléments finis $\mathbb{P}1$ associé au maillage D^h (avec comme taille de maille h). La méthode de dérivation rapide de Céa est utilisée ici et on introduit le Lagrangien complet dépendant des formes Ω et ω et des fonctions $\hat{u}_i, \hat{p}_i, \hat{u}_{fin}, \hat{p}_{fin} \in V^h$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\Omega, \omega, \hat{u}_i, \hat{p}_i, \hat{u}_{fin}, \hat{p}_{fin}) = & \sum_{i=1}^M \int_{\Omega_i} j_{fab}(\hat{u}_i) dx + \sum_{i=1}^M \int_{\Omega_i} A(e(\hat{u}_i) + \epsilon_{\mathcal{L}_i}^*) : e(\hat{p}_i) dx \\ & + \lambda_C \left(\int_{\Gamma_{N_f}} f \cdot u_{fin} ds + \int_{\omega} Ae(u_{\hat{fin}}) : e(\hat{p}_{fin}) dx - \int_{\Gamma_{N_f}} f \cdot p_{fin} ds \right) \end{aligned} \quad (5.11)$$

Par définition, la dérivée de \mathcal{L} par rapport à \hat{p}_i dans la direction d'une fonction test $\phi_i \in V^h$ donne à optimalité la formulation variationnelle du problème de fabrication couche par couche (5.3) :

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\Omega, \omega, \{\hat{u}_i\}, \{\hat{p}_i\}, \{\hat{u}_{fin}\}, \{\hat{p}_{fin}\})}{\partial \hat{p}_i}(\phi_i) = \int_{\Omega_i} (A(e(\hat{u}_i) + \epsilon_{\mathcal{L}_i}^*)) : e(\phi_i) dx = 0. \quad (5.12)$$

Ensuite, différentier \mathcal{L} par rapport à \hat{u}_i dans la direction d'une fonction test $\phi_i \in V^h$ donne à optimalité :

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\Omega, \omega, \{\hat{u}_i\}, \{\hat{p}_i\}, \{\hat{u}_{fin}\}, \{\hat{p}_{fin}\})}{\partial \hat{u}_i}(\phi_i) = \int_{\Omega_i} (Ae(\phi_i) : e(\hat{p}_i)) dx + \int_{\Omega_i} j'_{fab}(\hat{u}_i) \cdot \phi_i dx = 0, \quad (5.13)$$

qui est la formulation variationnelle du problème adjoint associé au problème (5.3).

Aussi, différentier par rapport aux variables $\{\hat{u}_{fin}\}$ puis $\{\hat{p}_{fin}\}$ donne les résultats bien connus pour le cas de la compliance.

Les solution discrètes $u_i, p_i, u_{fin}, p_{fin}$ sont dérivables et dérivant \mathcal{L} par rapport à Ω dans la direction du champ de vecteurs θ , la dérivée de forme de la fonction J s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}(\Omega, \omega, \{u_i\}, \{p_i\}, \{u_{fin}\}, \{p_{fin}\})}{\partial \Omega}(\theta) = & \sum_{i=1}^M \int_{\partial \Omega_i} j_{fab}(u_i) \theta \cdot n_0 dx \\ & + \sum_{i=1}^M \int_{\partial \Omega_i} (A(e(u_i) + \epsilon_{\mathcal{L}_i}^*)) : e(p_i) \theta \cdot n_0 dx \end{aligned} \quad (5.14)$$

Enfin, les solutions discrètes $u_i, p_i, u_{fin}, p_{fin}$ sont dérivables et dérivant \mathcal{L} par rapport à ω dans la direction du champ de vecteurs θ , la dérivée de forme de la fonction J s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}(\Omega, \omega, \{u_i\}, \{p_i\}, \{u_{fin}\}, \{p_{fin}\})}{\partial \omega}(\theta) &= \sum_{i=1}^M \int_{\partial \Omega_i \cap \partial \omega} j_{fab}(u_i) \theta \cdot n_1 \, dx \\ &+ \sum_{i=1}^M \int_{\partial \Omega_i \cap \partial \omega} (A(e(u_i) + \epsilon_{\mathcal{L}_i}^*) : e(p_i)) \theta \cdot n_1 \, dx \\ &+ \lambda_C \int_{\partial \omega} Ae(u_{fin}) : e(p_{fin}) \theta \cdot n_1 \, dx \end{aligned} \quad (5.15)$$

On remarque que des termes dépendants de u_i solution du problème (5.3) apparaissent sur le bord commun de la forme Ω_i et ω . La fonction J_{fab} dépend en effet du bord $\partial \Omega_i \cap \partial \omega$ puisque $\Omega = \omega \cup S$. En revanche, J_{fab} n'est pas sensible aux variations du bord $\partial \omega \cup S$, où $S = \Omega \setminus \omega$.

En sachant que $p_{fin} = -u_{fin}$ et en regroupant les intégrales, les résultats (5.9) et (5.10) sont obtenus.

5.2.3 Résultats numériques 2D

Les sous-domaines sont représentées dans ces travaux par des fonctions level-sets définies sur un maillage fixe. Comme vu plus haut deux level-sets φ_0 et φ_1 sont nécessaires pour représenter les trois phases :

$$\begin{cases} \varphi_0(x) < 0 & = x \in \Omega, \\ \varphi_0(x) = 0 & = x \in \partial \Omega \cap D, \\ \varphi_0(x) > 0 & = x \in D \setminus \Omega, \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \varphi_1(x) < 0 & = x \in \omega, \\ \varphi_1(x) = 0 & = x \in \partial \omega \cap D, \\ \varphi_1(x) > 0 & = x \in D \setminus \omega. \end{cases} \quad (5.16)$$

Lors de l'optimisation, chaque level-set $\varphi_i, i = 0, 1$ est transportée indépendamment par l'équation d'Hamilton Jacobi, avec $V_i, i = 0, 1$ donné par (5.9) et (5.10) respectivement.

Dans ce cas test en 2 dimensions, un domaine de taille $[0, 1] \times [0, 2]$, discrétisé en 35×70 éléments P1 est considéré et montré en Figure 5.3 (à gauche). Le déplacement est fixé sur le bord gauche et soumis à une force verticale au milieu du bord droit. La forme optimisée ω_{ref} pour la compliance avec une contrainte sur le volume est montrée en Figure 5.3 (au milieu), en considérant $f = 1$ appliquée dans la direction verticale, $E = 1, \nu = 0.3$ et $|\omega_{ref}| = 0.5|D|$. Une simulation de la fabrication est effectuée sur cette forme dont les résultats sont montrés en Figure 5.3 (à droite) considérant 70 macro-couches et le tenseur *inherent strain* en 2D suivant :

$$\epsilon_{\mathcal{L}_i}^* = \begin{bmatrix} -0.0001 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

Le domaine d'optimisation pour la structure Ω utilisé est montré en Figure 5.4 (à gauche), de dimension $[-0.6, 1] \times [0, 2]$ et discrétisé en 56×70 éléments P1. Celui-ci est plus grand que le domaine considéré pour l'optimisation du cantilever afin de laisser la possibilité aux supports de s'accrocher au plateau puisque la présence du terme de pénalisation $\mathcal{P}_\varepsilon(\Omega)$ les empêche de s'appuyer sur la forme ω . L'initialisation de la forme Ω est montrée en Figure 5.4 (à droite), composée de la forme optimisée ω_{ref} entourée d'un volume troué. La zone de pénalisation des supports est également identifiée (en rouge). Il est à noter que la géométrie initiale est déjà supportée, donc la valeur du J_{fab} est faible pour cette initialisation.

Le résultat d'une première optimisation conjointe de Ω et de ω est montré en Figure 5.5 (à gauche). Il a été obtenu en considérant $k_V = 0.12, k_c = 0.05$. Une itération d'optimisation nécessite 55 secondes de calcul. Ici, les supports ne maintiennent plus qu'une partie de la barre supérieure du cantilever. Comme attendu, ils s'appuient sur le plateau de fabrication et non sur la pièce, augmentant leur volume mais facilitant leur retrait. Une forme de structure est donc trouvée pour optimiser le couple supports/pièce, prenant en compte toutes les contraintes mentionnées plus haut. Les courbes de convergence pour les différentes contraintes (hormis pour la pénalisation $\mathcal{P}_\varepsilon(\Omega)$ pour plus de lisibilité) sont montrées en Figure 5.5 (à droite) et leur valeur à convergence notée dans la Table 5.1.

Le résultat d'une autre optimisation conjointe de Ω et de ω est montré en Figure 5.6 (à gauche). Cette fois, la contrainte sur le volume final de la pièce ω est pondérée de manière plus faible dans la fonction objectif et les coefficients $k_V = 0.2, k_c = 0.05$ sont considérés. La barre supérieure du cantilever ω s'est

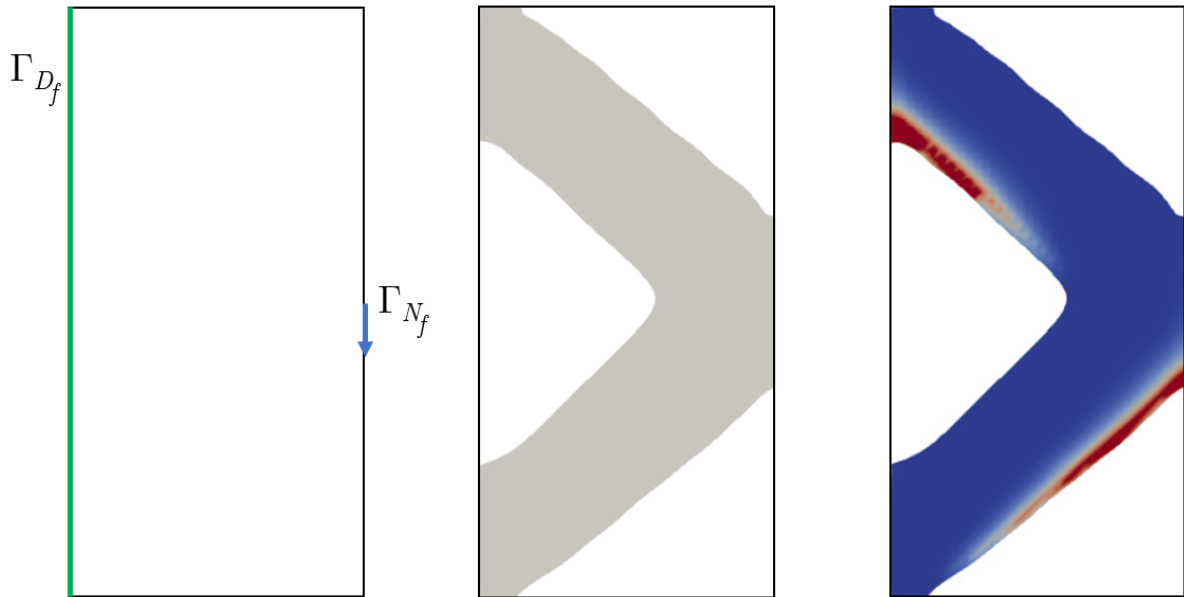


FIGURE 5.3 – Conditions aux limites pour le cantilever court (à gauche), forme optimisée ω_{ref} (au milieu) et déplacements verticaux associés après une simulation du procédé (à droite) considérant 70 macro-couches.

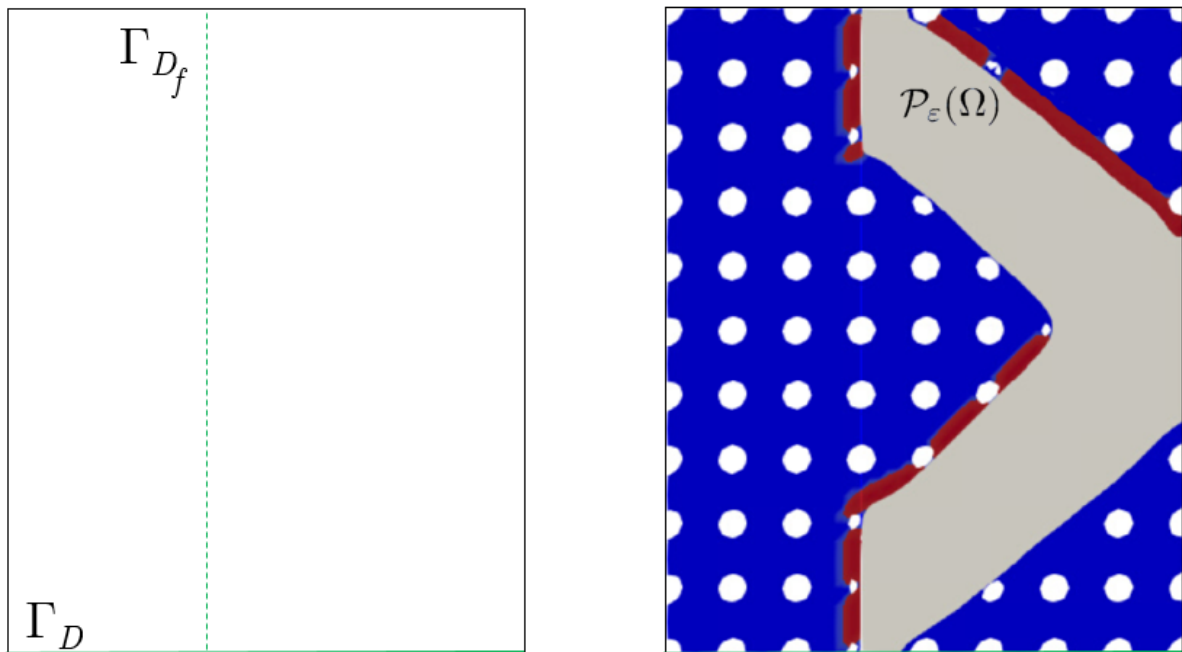


FIGURE 5.4 – Conditions aux limites pour la structure Ω , différentes de celle de ω (Γ_{D_f} en pointillé) (à gauche) et initialisation de la structure Ω composée de la forme ω_{ref} et d'une forme trouée (à droite). La zone de pénalisation de la surface de contact pièce/supports est également identifiée (en rouge).

donc redressée afin de limiter les déplacements verticaux sans l'aide des supports. Le volume occupé par les supports est donc moins important, contrairement à celui de la pièce ω . Aussi, les supports restent conservés sous la barre inférieure du cantilever. Les courbes de convergence sont montrées en Figure 5.6 (à droite) et les valeurs de chaque contrainte sont rassemblées dans la Table 5.1.

On remarque que la solution de l'optimisation est sensible à l'augmentation du volume accordée à la pièce ω . Plus $|\omega|$ est contraint, plus la quantité de supports nécessaire à son supportage est important

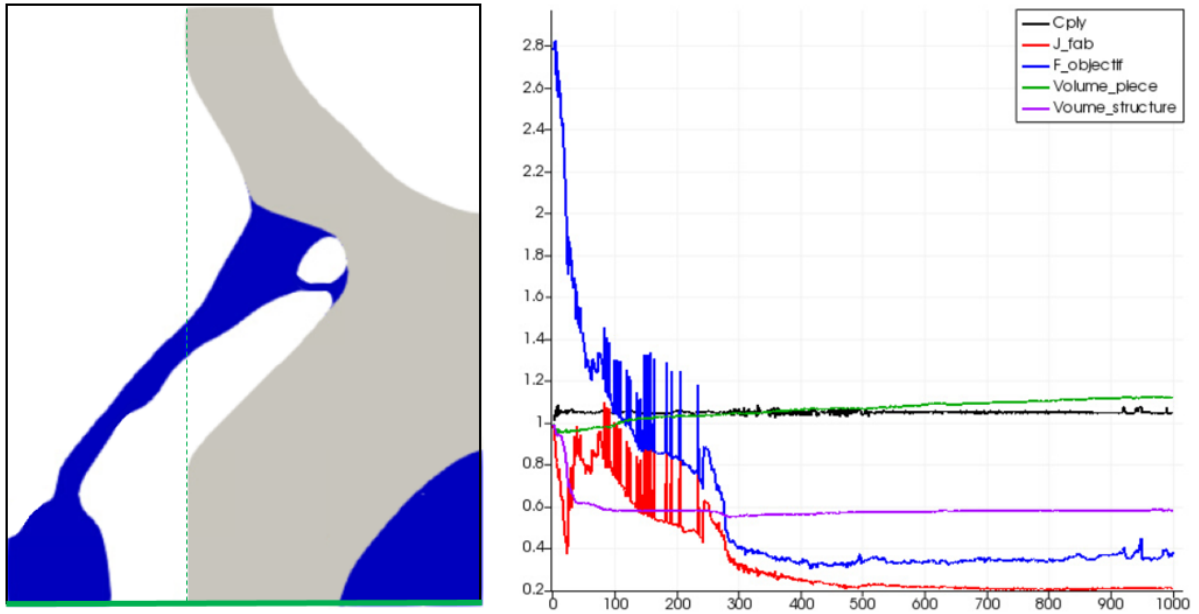


FIGURE 5.5 – Première optimisation conjointe du cantilever court et de ses supports (à gauche) et courbe de convergence pour chaque critère (hormis la pénalisation $\mathcal{P}_\epsilon(\Omega)$) (à droite).

et inversement. On se place finalement entre les deux cas de figure vus précédemment aux chapitres 3 et 4 : la géométrie de la pièce n'est plus fixée et on optimise également les supports. La meilleure solution dépend donc du choix de l'utilisateur, dans un cas la forme de la pièce ω est proche de celle optimisée pour le problème finale mais nécessite l'utilisation d'une certaine quantité de supports. Dans l'autre cas, le poids de la pièce ω est plus important mais elle nécessite moins de supports pour sa fabrication, donc moins de zones à parachever et moins de matière nécessaire à sa fabrication.

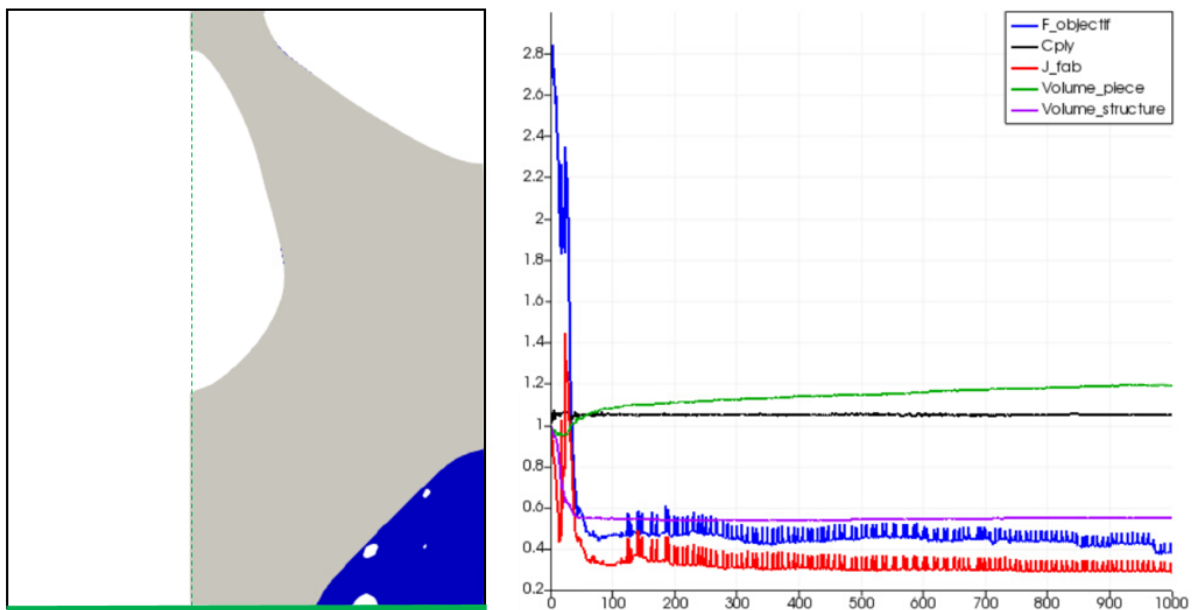


FIGURE 5.6 – Deuxième solution d'optimisation conjointe du cantilever court et de ses supports (à gauche) et courbe de convergence pour chaque critère (hormis la pénalisation $\mathcal{P}_\epsilon(\Omega)$) (à droite).

	$J_{fab}(\Omega)$	$C(\omega)$	$ \omega $	$ \Omega $
Résultat 1	0.2	1.05	1.12	0.6
Résultat 2	0.3	1.05	1.2	0.54

TABLE 5.1 – Valeurs à convergence des contraintes du problème (5.5) pour les deux résultats obtenus. Ces valeurs sont ajustées avec celles calculées avant la 1^{ière} itération, sur la structure initiale (Figure 5.4 (à droite)).

5.2.4 Résultats numériques 3D

Dans un cas test en trois dimensions inspiré d'une attache aéronautique, un domaine de dimension $[0, 1] \times [0, 0.5] \times [0, 0.5]$, discrétisé en 16000 éléments P1 est considéré. Le déplacement est fixé sur quatre coins du domaine notés Γ_{D_f} et montrés en Figure 5.7 (en vert). Une charge de cylindre est appliquée dans la direction y sur la surface de deux cylindres situés au milieu du domaine (Figure 5.7, à gauche en bleu). Aussi, l'encoche rouge montrée sur la Figure 5.7 à droite ne fait pas partie du domaine, tout comme le cylindre vertical. La forme optimisée ω_{ref} pour la compliance avec une contrainte sur le volume $|\omega| = 0.4|D|$ est montrée en Figure 5.8 (à gauche). On remarque qu'une arche se forme autour de l'encoche non-optimisable, reliant la partie inférieure et supérieure de la pièce. Elle permet de limiter le déplacement vertical engendré par le moment de la force appliquée sur le cylindre supérieur. Une simulation de la fabrication est effectuée sur cette forme dont les résultats sont montrés en Figure 5.8 (à droite) considérant 20 macro-couches et le tenseur *inherent strain* suivant :

$$\epsilon_{\mathcal{L}_i}^* = \begin{bmatrix} -0.0001 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0001 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

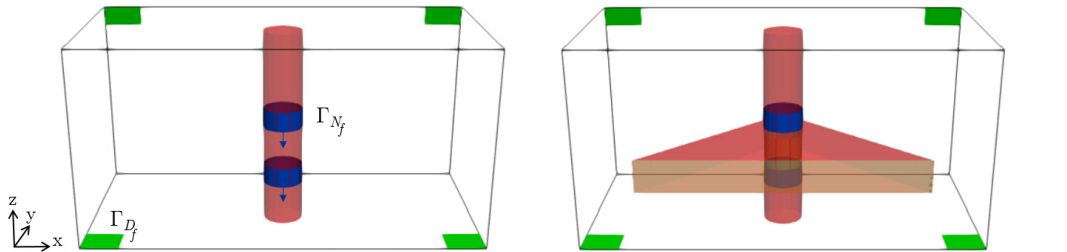


FIGURE 5.7 – Conditions aux limites pour l'attache, le cylindre central est une zone où la matière est exclue depuis laquelle est appliquée les chargements surfaciques (en bleu). L'encoche montrée à droite est également une zone où la matière est exclue.

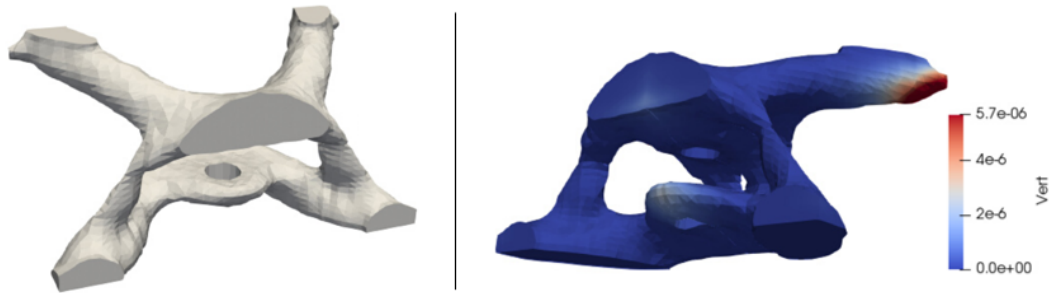


FIGURE 5.8 – Forme optimisée ω_{ref} (à gauche) et déplacements verticaux associés après une simulation du procédé (à droite) considérant 20 macro-couches.

Optimisation de forme des supports S_{init} de l'attache ω_{ref}

Dans un premier temps, l'optimisation de forme des supports S de ω_{ref} est considérée. Contrairement au cas test précédent, l'initialisation de la structure Ω sera composée de la forme ω_{ref} et de ses supports optimisés une première fois. Cette première optimisation considérera un chargement depuis la forme ω_{ref} , fixe lors de l'optimisation. L'idée est ici de débiter l'optimisation de la forme Ω par une structure $\omega_{ref} \cup S_{init}$ déjà fabricable, pour un volume de supports S_{init} 'pré-optimisé'. Aussi, les déplacements verticaux à chaque couche, chargements des supports pour le cas test précédent, ne suffisent plus pour que les supports assurent la fabricabilité de la pièce. A l'image du problème rencontré en section 3.3, les supports ne maintiennent pas les surfaces horizontales que présentent ω_{ref} car le modèle de simulation ne calcule aucun déplacement sur ces zones. Un problème mécanique complémentaire à (5.3) est proposé pour l'optimisation des supports. Il est résolu dans un domaine appelé D_S , un ouvert borné, représentant cette fois la chambre de fabrication. Les conditions aux limites de Dirichlet Γ_{D_S} sont appliquées sur le bord inférieur du domaine D_S modélisant l'accroche au plateau. Les autres bords Γ_{N_S} sont libres. Ce problème ayant pour solution $u_S : D_S \rightarrow \mathbb{R}^N$ s'écrit :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(Ae(u_S)) &= -g\chi_\beta\delta_{\partial\omega} & \text{dans } S, \\ (Ae(u_S))n &= 0 & \text{sur } \Gamma_{N_S}, \\ u_S &= 0 & \text{sur } \Gamma_{D_S}. \end{cases} \quad (5.19)$$

où g est un chargement vertical, $\delta_{\partial\omega}$ est la mesure de Dirac pour le bord $\partial\omega$ et χ_β est la fonction caractéristique du bord $\partial\omega$ en *overhang*, définie par :

$$\chi_\beta(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in -\partial\omega \cdot n \geq \cos(\beta), \\ 0 & \text{si } x \in -\partial\omega \cdot n < \cos(\beta), \end{cases} \quad (5.20)$$

où n est la composante normale à ω et β l'angle au delà duquel le bord $\partial\omega$ est considéré en *overhang*. Bien sûr, la forme à supporter ω_{ref} étant fixe, le modèle de force décrit par le problème (3.2) au chapitre 3, section 3.2 aurait pu être utilisé. Néanmoins, ces supports sont destinés à être ensuite optimisés pour supporter une forme ω variable. L'utilisation du problème mécanique (3.2) nécessiterait alors son remaillage à chaque itération pour définir Γ_β . Une approche volumique a donc été considérée pour que la fonction caractéristique χ_β puisse être calculée rapidement à chaque changement de forme de ω . La visualisation de χ_β sur ω_{ref} est montrée en Figure 5.9.



FIGURE 5.9 – Fonction caractéristique χ_β tracée sur la forme ω .

Seule la compliance calculée avec les solutions de (5.19) est utilisée pour l'optimisation de forme de S_{init} , évitant une nouvelle résolution d'un problème couche par couche. Elle s'écrit comme suit :

$$C_2(S_{init}) = \int_{\partial\omega} -g\chi_\beta \cdot u_S ds \quad (5.21)$$

La pénalisation de la surface de contact entre la pièce et ses supports $\mathcal{P}_\varepsilon(S_{init})$ est également considérée tel que :

$$\mathcal{P}_\varepsilon(S_{init}) = \frac{1}{\varepsilon L} \operatorname{Vol}(\{x \in \omega^c : d(x, \omega \setminus \chi_\beta\partial\omega) < \varepsilon L\} \cap \{\varphi_S < \varepsilon L\}), \quad (5.22)$$

avec φ_S la fonction level-set représentant S_{init} .

Le domaine D_S est montré en Figure 5.10, avec la condition aux limites ainsi que les bords de la fonction caractéristique χ_β utilisée pour résoudre le problème (5.19).

La contrainte sur le volume des supports considérée est $|S_{init}| = 0.2D$, l'optimisation débute d'une level-set remplissant le domaine. Le résultat obtenu est montré en Figure 5.11. On remarque que les

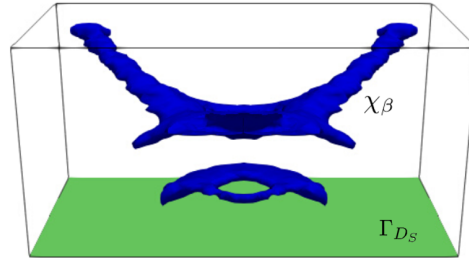


FIGURE 5.10 – Domaine D_S avec ses différentes conditions aux limites. La fonction caractéristique χ_β sur laquelle est appliquée la force g est tracée en bleu.

supports ne sont en contact qu'avec les surfaces de ω_{ref} à supporter, et qu'ils profitent du trou au centre de la pièce pour supporter la surface horizontale créée par la présence de la zone non-optimisable (Figure 5.11, à droite).

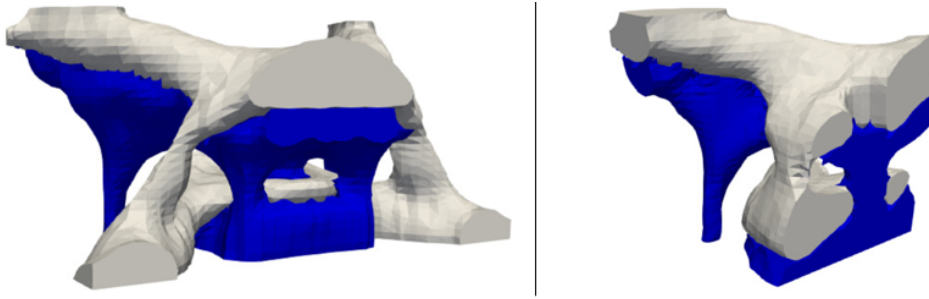


FIGURE 5.11 – Forme optimisée des supports S pour le critère (5.21)

Optimisation de forme conjointe de l'attache et de ses supports

Comme pour le cas en deux dimensions, seulement deux level-sets φ_0 et φ_1 sont utilisées pour représenter les trois phases. Par ailleurs, la structure à fabriquer Ω est définie comme l'union de la forme et des supports, et sa forme initiale avant optimisation est $\Omega_{init} = \omega_{ref} \cup S_{init}$, montrée en Figure 5.11. Aussi, le nouveau chargement mécanique des supports doit être pris en compte lors de cette optimisation, le problème (5.5) devient donc :

$$\begin{aligned}
 & \min_{\Omega \subset D} && |\Omega| \\
 & \text{tel que} && |\omega| \leq (1 + k_V)|\omega_{ref}| \\
 & && C(\omega) \leq (1 + k_C)C(\omega_{ref}), \\
 & && J_{fab}(\Omega) \leq J_{fab}(\Omega_{init}), \\
 & && C_2(S) \leq (1 + k_{C_2})C(S_{init}), \\
 & && \mathcal{P}_\varepsilon(\Omega) \leq \mathcal{P}_\varepsilon(\Omega_{init}).
 \end{aligned} \tag{5.23}$$

Le résultat d'une optimisation conjointe de Ω et de ω est montré en Figure 5.12. Il a été obtenu en considérant $k_V = 0.1$, $k_c = 0.05$ et $k_{C_2} = 0.6$. Une itération d'optimisation nécessite 11 minutes de calcul. Ce temps est particulièrement long compte tenu du nombre de macro-couches considérées et des problèmes mécaniques (5.1), (5.3) et (5.19) à résoudre. Ici la matière formant l'arche de ω s'est redistribuée afin de supporter les barres horizontales à l'arrière de la pièce. Cela a pour conséquence de réduire les zones de la pièce en *overhang* à supporter. Les supports ont donc également disparu à ces endroits et ne servent plus qu'à supporter la zone non-optimisable (où la matière est exclue) de ω . Les courbes de convergence pour les différentes contraintes (hormis pour la pénalisation $\mathcal{P}_\varepsilon(\Omega)$ pour plus de lisibilité) sont montrées en Figure 5.13 et leur valeur à convergence est notée dans la Table 5.2. Une forme de structure est donc trouvée pour optimiser le couple pièce/support, prenant en compte toutes les contraintes mentionnées plus haut. A convergence, la structure reste fabricable tout en ayant

réduit son volume de 26% par rapport à $|\Omega_{init}|$. Aussi, le volume $|\Omega|$ et la compliance finale $C(\omega)$ ont respectivement augmenté de 9% et 5%.

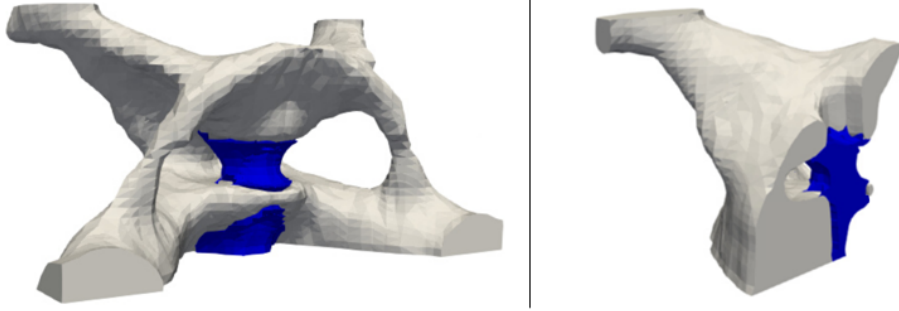


FIGURE 5.12 – Forme optimisée des supports S pour le critère (5.21)

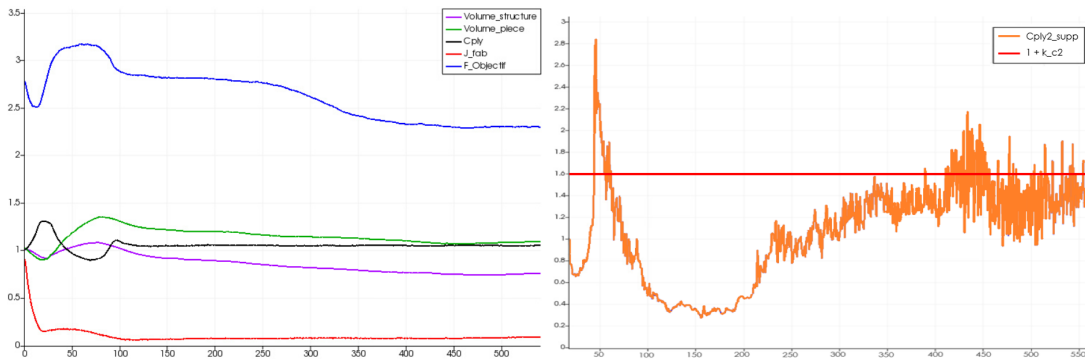


FIGURE 5.13 – A gauche, les courbes de convergence pour la fonction objectif (en bleu) ainsi que pour le critère $J_{fab}(\Omega)$ (en rouge), la compliance $C(\omega)$ (en noir), le volume $|\omega|$ (en vert) et le volume de la structure $|\Omega|$ (en violet)(à changer). A droite, la courbe de convergence de la compliance $C_2(S)$, son évolution tout au long de l'optimisation est rendue chaotique par la surface sur laquelle est elle calculée, dépendant de la forme ω .

	$J(\Omega, \omega)$	$J_{fab}(\Omega)$	$C(\omega)$	$C_2(S)$	$ \omega $	$ \Omega $	$\mathcal{P}_\varepsilon(\Omega)$
Valeur à convergence	2.26	0.08	1.05	1.5	1.09	0.74	0.9

TABLE 5.2 – Valeurs à convergence des contraintes du problème (5.23). Ces valeurs sont ajustées avec celles calculées avant la 1^{ière} itération, sur la structure initiale (Figure 5.11).

5.3 Conclusions et perspectives

Dans ce chapitre l'optimisation du couple pièce/support a été étudiée. Plusieurs modèles de force ainsi qu'une simulation du procédé ont du être utilisés afin d'obtenir une pièce ω fabricable et performante tout en réduisant le coût de sa fabrication (approché ici par le volume de la structure ω). Comme vu dans la dernière section de ce chapitre, l'optimisation simultanée de la pièce et de ses supports offre une géométrie plus performante du point de vue de la fonction objectif qu'une optimisation de la pièce dans un premier temps puis de ses supports dans un deuxième temps en fixant la géométrie de la pièce. Néanmoins, les coefficients nécessaires à pondérer les différentes contraintes dans la fonction objectif ont été ici bien choisis et sont à définir en fonction des besoins de l'utilisateur (plus ou moins de volume de pièce, de supports,...). En pratique, l'optimisation du couple pièce/support rend une pièce fabricable soit par l'ajout de supports, soit par son auto-soutènement (on ne prend pas en compte pour l'instant les phénomènes de fissuration pouvant rendre la pièce non-fabricable). La présence ou non d'un support

maintenant une surface de la pièce est donc fonction des pondérations choisies. Dans de futurs travaux, il serait intéressant de pondérer les contraintes à l'aide de modèles de coût adaptés au procédé SLM et à l'aéronautique. S'en servir permettrait de connaître le coût engendré par l'ajout de matière dans un composant ω d'un avion (en terme de consommation de carburant par exemple) et de le comparer au coût de l'ajout de matière dans la structure support S (en terme de consommation matière, coût de parachèvement). Ainsi, la fonction coût serait davantage représentative du coût de production et d'utilisation de la pièce, et l'utilisateur serait mieux guidé pour pondérer le reste des contraintes.

Chapitre 6

Contrainte d'accessibilité

Contents

6.1	Introduction	95
6.2	Définitions de l'accessibilité	96
6.3	Calcul de la distance signée avec obstacle	97
6.4	Dérivée de forme de l'obstacle	99
6.5	Dérivée de forme du domaine accessible	101
6.6	Critères d'accessibilité	101
6.6.1	Critère d'accessibilité normale	102
6.6.2	Critère d'accessibilité multi-directionnelle	103
6.7	Résultats numériques 2D	105
6.7.1	Optimisation de l'obstacle	105
6.7.2	Optimisation du domaine accessible	108
6.7.3	Forme accessible et optimisée pour un problème mécanique	109
6.7.4	Optimisation conjointe de la forme de l'obstacle et du domaine accessible	111
6.8	Résultats numériques 3D	112
6.8.1	Optimisation de forme de l'obstacle	113
6.8.2	Optimisation de forme conjointe de l'obstacle et du domaine accessible	114
6.8.3	Optimisation de forme conjointe de l'obstacle et de la zone à accéder dans un problème mécanique	114
6.8.4	Problème d'accessibilité pour la fabrication additive	116
6.9	Conclusion	119

6.1 Introduction

Dans ce chapitre, l'accessibilité d'une forme optimisée depuis le domaine extérieur (ici considéré comme le bord du domaine de conception) sera étudiée. Comme mentionné au chapitre 1, il est nécessaire lors de certaines étapes de post-fabrication d'accéder à différentes zones de la pièce. Cet accès se fait le plus souvent par un outil longiligne comme un foret. Il faut donc assurer à ces surfaces, issues d'une optimisation de forme, un accès en ligne droite depuis le bord du domaine de conception. Dans le cas de la fabrication additive, le problème d'accessibilité le plus commun se fait lors du retrait des supports. Il est nécessaire de pouvoir accéder à ceux-ci pour les usiner ou les retirer manuellement sans toucher la pièce supportée faisant obstacle au passage de l'outil. De plus, dans le cas d'un resurfaçage, il est nécessaire d'accéder à une zone précise de la pièce sans qu'une autre partie de cette même pièce fasse obstacle. Plusieurs travaux ont déjà été effectués sur ce sujet, dans [9] où plusieurs critères géométriques sont développés permettant de détecter les zones inaccessibles d'une pièce et d'y empêcher l'accroche des supports; dans [160] où la forme des supports est optimisée à l'aide de la méthode SIMP pour un problème d'accessibilité ou encore dans [111] où la forme d'une pièce est optimisée pour que ses bords soient usinables. Dans ces travaux, deux définitions de l'accessibilité seront d'abord introduites. Un critère d'optimisation permettant de les mesurer grâce aux solutions d'équations eikoniales sera ensuite

formulé puis minimisé au travers d'un algorithme d'optimisation de forme. L'optimisation de la forme de l'obstacle, du domaine à accéder, ou des deux conjointement sera ensuite étudiée dans des cas tests simples en 2 et 3 dimensions. Enfin les résultats d'une optimisation de la forme d'une pièce à fabriquer et de ses supports minimisant le critère d'accessibilité seront montrés.

6.2 Définitions de l'accessibilité

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert borné régulier. On appelle $\Gamma_{out} \subset \partial\Omega$ le bord sur lequel est mesurée l'accessibilité. Aussi $\Gamma_D \subset \partial\Omega$ est le bord depuis lequel l'accessibilité du bord Γ_{out} est évaluée. Enfin, on appelle $\Gamma_c \subset \partial\Omega$ le reste du bord et on a $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_c \cup \Gamma_{out}$. Par ailleurs, on appelle $\Sigma \subset \Omega$ l'interface qui sépare Ω en deux sous-domaines tel que $\Omega = \Omega_+ \cup \Sigma \cup \Omega_-$. On suppose enfin que le domaine Ω_- ne touche pas le bord Ω_{out} . La Figure 6.1 montre les différents sous-domaines et bords de Ω .

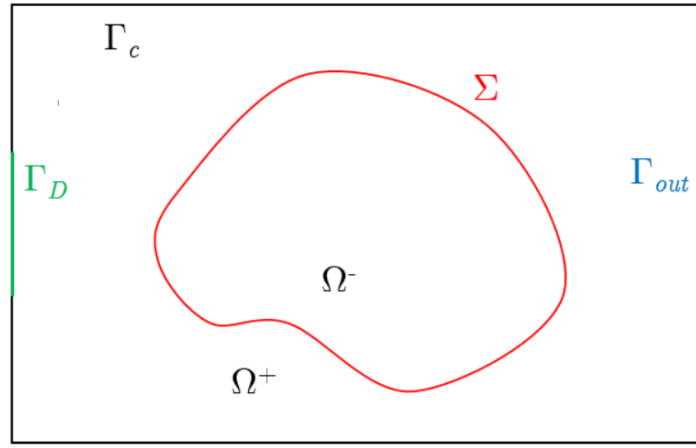


FIGURE 6.1 – Domaine Ω , séparé en deux sous-domaines par l'interface Σ

Dans ces travaux, deux définitions de l'accessibilité sont introduites. La première est appelée accessibilité multi-directionnelle. On suppose qu'un point $x \in \Gamma_{out}$ est accessible depuis Γ_D s'il existe un point $y \in \Gamma_D$ tel que le segment $[xy]$ ne coupe pas le sous-domaine Ω_- . Autrement dit, on considère le point x accessible si l'on peut y accéder en ligne droite depuis au moins un point du bord Γ_D sans traverser Ω_- , considéré comme un obstacle. On définit la distance suivante :

$$L_{\Sigma}(x, y) = \inf\{l(\gamma) \text{ avec } \gamma(t) : [0, 1] \rightarrow \Omega_+, \gamma(0) = x, \gamma(1) = y\}, \quad (6.1)$$

où $l(\gamma)$ est la longueur géodésique de la courbe γ dans Ω_+ .

Définition 6.2.1. *Un point $x \in \Gamma_{out}$ est accessible de manière multi-directionnelle depuis un point $y \in \Gamma_D$ si $L_{\Sigma}(x, y) = |x - y|$, c'est à dire si la distance contournant l'obstacle vaut la distance euclidienne. Par ailleurs, x est accessible de manière multi-directionnelle depuis Γ_D s'il existe au moins un point $y \in \Gamma_D$ tel que x est accessible depuis y .*

La même définition est utilisée dans [9] où un critère d'accessibilité permet de détecter les régions inaccessibles en ligne droite d'une forme. Ces travaux s'inspirent de cette méthode mais cette fois la forme de l'obstacle empêchant l'accès en ligne droite sera optimisée. Cette définition veut se rapprocher de la pratique où un seul point y du bord suffit pour accéder au point x . Néanmoins, elle est longue à vérifier puisqu'il est nécessaire de mesurer l'accessibilité depuis tous les points y jusqu'à ce qu'elle soit satisfaite.

Une deuxième définition de l'accessibilité est maintenant introduite, plus simple à mettre en oeuvre numériquement mais moins souvent vérifiée.

Définition 6.2.2. *Un point $x \in \Gamma_{out}$ est dit accessible de manière normale s'il existe un point $y \in \Gamma_D$ tel que le segment $[xy]$ de direction normale au bord Γ_D n'intersecte pas le domaine Ω_- .*

Cette deuxième définition de l'accessibilité, appelée normale, est plus facile à mettre en oeuvre car cela ne nécessite qu'un seul calcul de distance signée comme nous allons le voir. Cette notion d'accessibilité normale sera utilisée dans les sections 6.3 à 6.5 et également pour la plupart des résultats numériques.

Les deux définitions de l'accessibilité sont schématisées en Figure 6.2. A gauche, le point x_1 n'est pas accessible de manière normale à Γ_D puisque le segment $[y_1, x_1]$ normal à Γ_D coupe Ω_- . Le point x_2 lui n'est accessible de manière normale que par le point y_2 . A droite, le point x_1 n'est pas accessible depuis le point y_1 , en revanche il l'est depuis le point y_2 si on utilise la définition de l'accessibilité multi-directionnelle car les segments d'origine y_2 ne sont plus forcés d'être dans une direction normale à Γ_D .

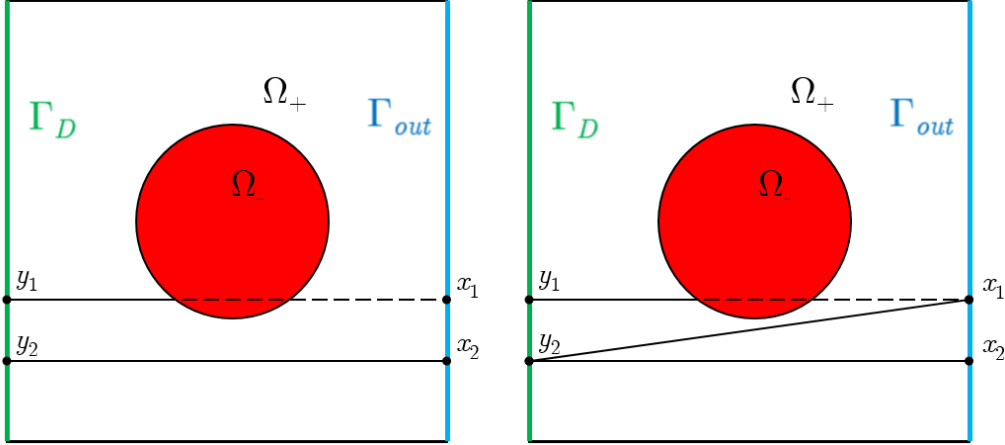


FIGURE 6.2 – A gauche, le point x_1 n'est pas accessible de manière normale et le point x_2 ne l'est que depuis le point y_2 . A droite, le point x_1 est accessible de manière multi-directionnelle depuis y_2 , tout comme le point x_2 .

6.3 Calcul de la distance signée avec obstacle

On définit une fonction vitesse $V(x) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$ tel que :

$$V(x) = \begin{cases} V_+ & \text{dans } \Omega_+, \\ V_- & \text{dans } \Omega_-, \end{cases} \quad \text{avec } V_+, V_- > 0 \quad (6.2)$$

Puisqu'ici Ω_- est l'obstacle, $V_- < V_+$.

Formellement, d'après la théorie des solutions de viscosité exposée dans [24], on admet qu'il existe une unique fonction distance $d \in W^{1,\infty}(\Omega)$ solution de

$$\begin{cases} V(x) | \nabla d(x) | = 1 & \text{dans } \Omega, \\ d = 0 & \text{sur } \Gamma_D, \end{cases} \quad (6.3)$$

Remarque 6.3.1. La solution d est continue sur Ω , dans la suite on la suppose régulière sur Ω sauf sur Σ où la dérivée est discontinue, d'après la forme de (6.3). Elle ne l'est également pas sur le squelette [18] qui peut être défini comme l'ensemble des lignes de crêtes de d (voir en Figure 6.3) et où d n'est pas dérivable.

On prend l'exemple d'un obstacle de la forme d'un cercle au milieu du domaine Ω , montré en Figure 6.4. Après résolution de (6.3), en prenant $V_- = 0.1$ à l'intérieur du cercle, $V_+ = 1$ à l'extérieur et considérant Γ_D comme le bord gauche, on obtient un champ solution d montré en Figure 6.5. On s'aperçoit que les lignes de niveaux sont déformées par l'obstacle au centre. En effet, la faible vitesse imposée au domaine Ω_- rend la valeur de la distance signée plus importante en son sein et "derrière" lui par rapport à Γ_D .

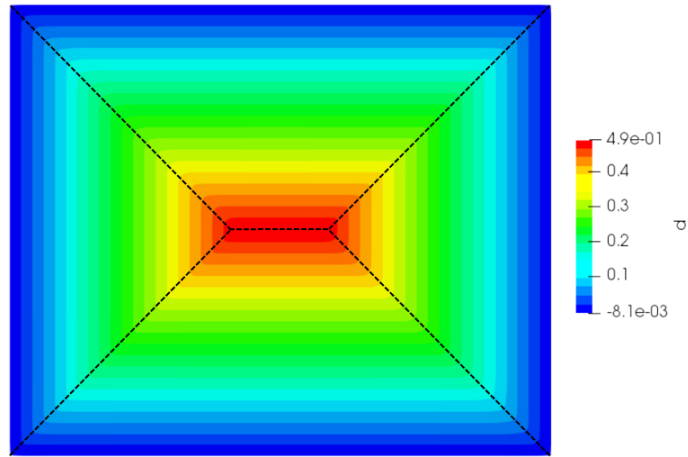


FIGURE 6.3 – Squelette (en noir) de la distance signée d'un rectangle.

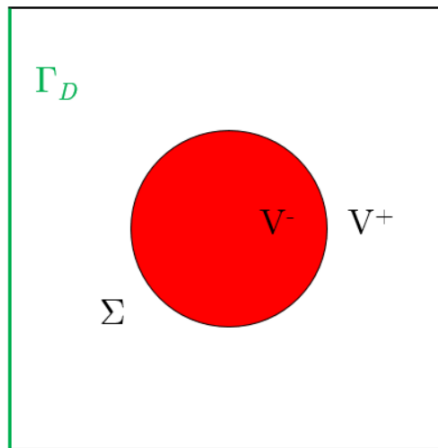


FIGURE 6.4 – Exemple d'obstacle, en rouge, choisi pour la résolution de (6.3). La vitesse V_- y est imposée à l'intérieur, V_+ à l'extérieur.

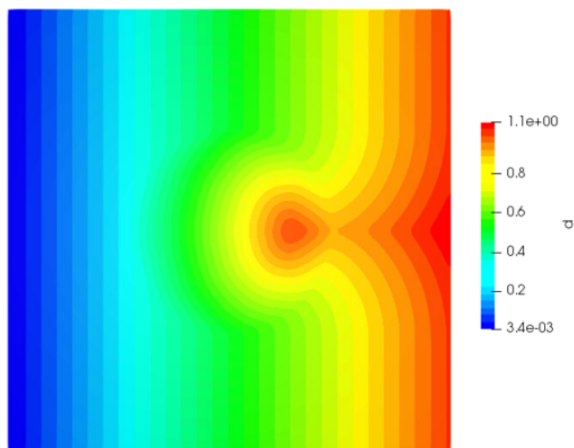


FIGURE 6.5 – Champ solution de l'Equation (6.3) avec $V_- = 0.1$ et $V_+ = 1$.

Remarque 6.3.2. *Intuitivement, l'équation (6.3) ne devrait être résolue que sur Ω_+ et donc le sous-domaine occupé par l'obstacle ne devrait pas faire partie du domaine de calcul. Le champ solution montré en Figure 6.5 n'en serait que mieux perturbé. Or on cherchera plus tard à modifier la frontière*

Σ de cet obstacle et la dérivée de forme dans le cas où l'équation (6.3) n'est pas résolue dans Ω_- n'est pas encore connue. On choisit tout de même de résoudre (6.3) dans le sous-domaine Ω_+ uniquement. Pour cela, une condition aux limites numérique de type "miroir" est imposée au bord de l'obstacle. La solution est montrée en Figure 6.6 (à gauche). La solution de (6.3) résolue sur Ω avec $V_- = 0.001$ dans Ω_- est également montrée sur la même Figure (à droite). La forte similarité des solutions dans le sous-domaine Ω_+ pour chaque cas confirme que l'approximation d'un "trou", ou d'un réel obstacle par l'imposition d'une vitesse très faible dans ce sous-domaine est suffisante.

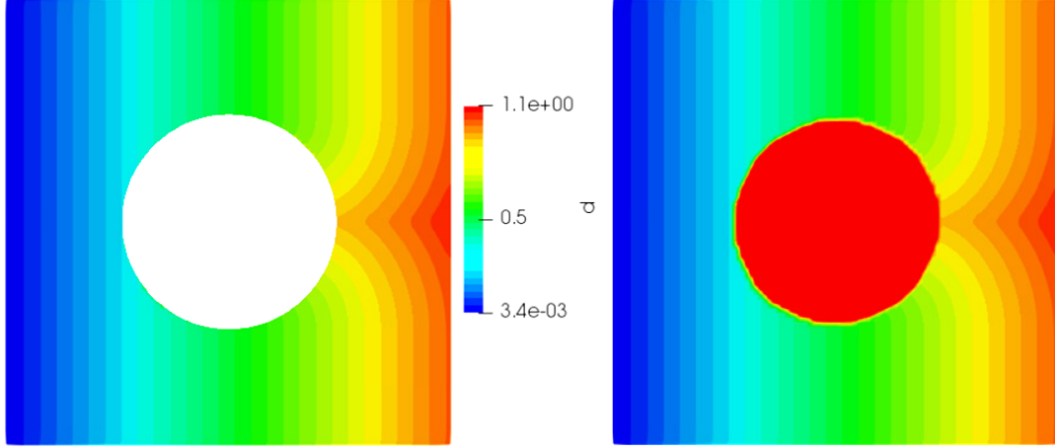


FIGURE 6.6 – Champ solution de (6.3) résolue sur Ω_+ (à gauche) et champ solution de (6.3) résolue sur le domaine complet Ω avec $V_- = 0.001$.

6.4 Dérivée de forme de l'obstacle

On souhaite optimiser la forme de l'interface Σ du domaine Ω_- .

Soit $\theta(x) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ un champ de vecteurs. On pose $\Sigma_\theta = (I_d + \theta)\Sigma$ et

$$V_\theta(x) = \begin{cases} V_+ & \text{dans } (I_d + \theta)\Omega_+, \\ V_- & \text{dans } (I_d + \theta)\Omega_-, \end{cases} \quad (6.4)$$

Pour la suite, la fonctionnelle suivante est considérée :

$$J(\Sigma) = \int_{\Omega} j(d) dx + \int_{\Gamma_{out}} k(d) ds \quad (6.5)$$

avec $j, k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions régulières et d solution de (6.3) qui dépend implicitement de Σ .

Proposition 6.4.1. *La fonction $J(\Sigma)$ définie par (6.5) est différentiable par rapport à la forme de l'interface Σ et sa dérivée s'écrit, pour tout champ $\theta \in C^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$:*

$$\langle J'(\Sigma), \theta \rangle = \int_{\Sigma} V_+^3 \nabla d_+ \cdot n_+ p_+ n \cdot (\nabla d_+ - \nabla d_-) \theta \cdot n \, ds \quad (6.6)$$

avec d_+ , respectivement d_- , la solution de (6.3) dans Ω_+ , respectivement dans Ω_- et p_+ l'état adjoint dans Ω_+ défini par (6.10). De plus, n_+ , respectivement n_- , est le vecteur normal unité extérieur à Ω_+ , respectivement Ω_- , et on choisit de noter $n = n_-$ le vecteur normal à Σ .

Preuve : Une preuve formelle est ici faite, supposant que la solution d est régulière sauf sur Σ et le squelette, et dérivable par rapport à la forme. En écrivant (6.3) sur chaque sous-domaine et en l'élevant au carré on obtient

$$\begin{cases} V_+^2 |\nabla d_+|^2 = 1 & \text{dans } \Omega_+, \\ V_-^2 |\nabla d_-|^2 = 1 & \text{dans } \Omega_-, \\ d_- = d_+ = 0 & \text{sur } \Gamma_D, \\ d_+ = d_- & \text{sur } \Sigma, \end{cases} \quad (6.7)$$

En dérivant (6.7) par rapport à Σ dans la direction θ [55, 53] et en notant d' cette dérivée directionnelle (qui dépend linéairement de θ), on obtient

$$\begin{cases} V_+^2 \nabla d_+ \nabla d'_+ & = 0 & \text{dans } \Omega_+, \\ V_-^2 \nabla d_- \nabla d'_- & = 0 & \text{dans } \Omega_-, \\ d'_- = d'_+ & = 0 & \text{sur } \Gamma_D, \end{cases} \quad (6.8)$$

Sur l'interface Σ , $d_- = d_+$, alors pour toute fonction test φ :

$$\int_{\Sigma} (d_- - d_+) \varphi \, ds = 0$$

En dérivant également par rapport à Σ dans la direction θ , on obtient

$$\int_{\Sigma} (d'_- - d'_+) \varphi \, ds + \int_{\Sigma} \left(\frac{\partial}{\partial n} + H \right) ((d_- - d_+) \varphi) \theta \cdot n \, ds = 0$$

où n est le vecteur normal unité de Σ (égal à celui de Ω_-), et H la courbure moyenne définie par $H = \operatorname{div}(n)$. Puisque $d_+ = d_-$ sur Σ , on a

$$\int_{\Sigma} \varphi \left[(d'_- - d'_+) + \frac{\partial}{\partial n} (d_- - d_+) \theta \cdot n \right] \, ds = 0$$

D'où l'équation complète suivante :

$$\begin{cases} V_+^2 \nabla d_+ \nabla d'_+ & = 0 & \text{dans } \Omega_+, \\ V_-^2 \nabla d_- \nabla d'_- & = 0 & \text{dans } \Omega_-, \\ d'_- = d'_+ & = 0 & \text{sur } \Gamma_D, \\ d'_- - d'_+ + (n \cdot \nabla d_- - n \cdot \nabla d_+) \theta \cdot n & = 0 & \text{sur } \Sigma. \end{cases} \quad (6.9)$$

Cette équation de transport linéaire admet une solution unique $d' \in L^\infty(\Omega)$. D'abord la condition $V^2 \nabla d \cdot \nu < 0$ est vérifiée sur Γ_D , avec ν le vecteur normal unité extérieur de Ω , car la distance d est croissante à partir de la valeur 0, indiquant un champ rentrant. A l'inverse, on a $V^2 \nabla d \cdot \nu \geq 0$ sur $\Gamma_c \cup \Gamma_{out}$ car la distance serait croissante si on continuait à la calculer à l'extérieur de Ω , synonyme d'un champ sortant sur ces autres bords et garantissant une solution unique. De plus, la solution d peut être calculée de part et d'autre de l'interface Σ malgré la discontinuité du champ V à cet endroit. La solution existe bien par la présence d'une condition de saut pour calculer d'_- en fonction de d'_+ si $n \cdot \nabla d < 0$ (saut de Ω_+ vers Ω_-) sur Σ . A l'inverse, d'_+ est calculé grâce à d'_- si $n \cdot \nabla d > 0$.

On introduit l'équation adjointe linéaire associée à (6.3), dont la solution est notée p :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(V^3 p \nabla d) & = & j'(d) & \text{dans } \Omega_+ \text{ et } \Omega_-, \\ p & = & \frac{k'(d)}{V^3 \nabla d \cdot n} & \text{sur } \Gamma_{out}, \\ p & = & 0 & \text{sur } \Gamma_c, \\ V_+^3 p_+ \nabla d \cdot n & = & V_-^3 p_- \nabla d \cdot n & \text{sur } \Sigma. \end{cases} \quad (6.10)$$

Il est à noter que cette équation est la forme conservative de (6.9) au changement de signe de la vitesse près. Par ailleurs pour le champ de vecteurs $-V^3 \nabla d$, cette équation admet une solution unique p car la condition $-V^3 \nabla d \cdot \nu < 0$ est vérifié sur le bord $\Gamma_{out} \cup \Gamma_c$, tout comme $-V^3 \nabla d \cdot \nu \geq 0$ sur les autres bords de Ω , indiquant un champ sortant et garantissant une solution unique. Une condition de raccord est également présente pour garantir la continuité de la composante normale de $V^3 p \nabla d$ à travers l'interface Σ .

En multipliant l'équation (6.9) par V puis par p , ainsi que (6.10) par d' et en intégrant par parties séparément sur Ω_+ et Ω_- , on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_+} V_+^3 \nabla d_+ \cdot \nabla d'_+ p_+ \, dx & - \int_{\partial \Omega_+} V_+^3 \nabla d_+ \cdot n_+ p_+ d'_+ \, ds + \int_{\Omega_-} V_-^3 \nabla d_- \cdot \nabla d'_- p_- \, dx \\ & - \int_{\partial \Omega_-} V_-^3 \nabla d_- \cdot n_- p_- d'_- \, ds & = \int_{\Omega} j'(d) d' \, dx + \int_{\Gamma_{out}} k'(d) d' \, ds \end{aligned} \quad (6.11)$$

On en déduit, puisque $\partial\Omega_+ \cup \partial\Omega_- = \partial\Omega \cup \Sigma$:

$$\int_{\Omega} V^3 \nabla d \cdot \nabla d' p \, dx - \int_{\Sigma} (d'_+ - d'_-) V_+^3 \nabla d_{+ \cdot n} p_+ \, ds = \int_{\Omega} j'(d) d' + \int_{\Gamma_{out}} k'(d) d' \, ds \, dx \quad (6.12)$$

Enfin, d'après (6.9), on obtient

$$- \int_{\Sigma} (d'_+ - d'_-) V_+^3 \nabla d_{+ \cdot n} p_+ \, ds = \int_{\Omega} j'(d) d' \, dx + \int_{\Gamma_{out}} k'(d) d' \, ds \quad (6.13)$$

Enfin, d'après la condition de saut sur Σ , on a bien

$$\langle J'(\Sigma), \theta \rangle = \int_{\Sigma} V_+^3 \nabla d_{+ \cdot n} p_+ n \cdot (\nabla d_+ - \nabla d_-) \theta \cdot n \quad (6.14)$$

6.5 Dérivée de forme du domaine accessible

Dans cette partie, on suppose la forme de l'obstacle Ω_- fixe. Un nouveau sous-domaine $\Omega_{out} \subset \Omega_+$ est introduit et on a toujours $\Omega = \Omega_+ \cup \Omega_-$. Le bord de ce sous-domaine est appelé $\partial\Omega_{out}$. Par ailleurs, on a $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_c$. Le nouveau domaine Ω est montré en Figure 6.7.

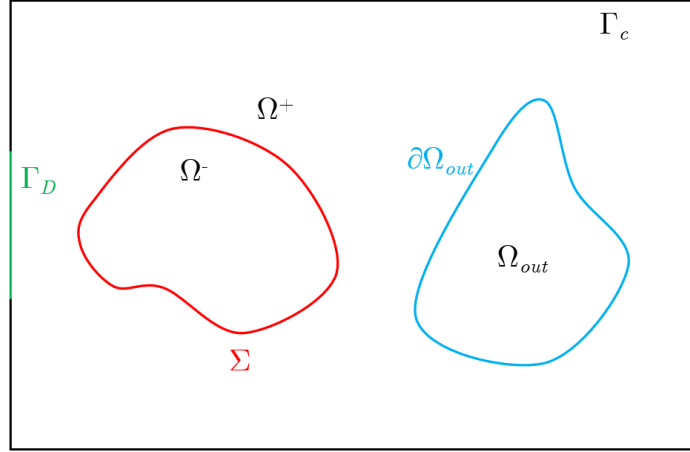


FIGURE 6.7 – Domaine Ω séparé en trois sous-domaines par l'interface Σ fixe et $\partial\Omega_{out}$ variable.

On souhaite maintenant optimiser le bord $\partial\Omega_{out}$ afin de minimiser la fonctionnelle suivante, inspirée de (6.5) et calculée grâce aux solutions d de (6.3) indépendantes de Ω_{out} :

$$J(\Omega_{out}) = \int_{\Omega_{out}} j(d) dx + \int_{\partial\Omega_{out}} k(d) ds \quad (6.15)$$

avec $j, k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ toujours des fonctions régulières. En revanche, puisque la distance d dans (6.15) ne dépend pas de Ω_{out} , la dérivée de (6.15) est facile à calculer.

Proposition 6.5.1. *La dérivée de forme de $J(\Omega_{out})$ définie par (6.15) est différentiable pour toute forme admissible $\Omega_{out} \in \mathcal{U}_{ad}$. Elle s'écrit :*

$$\langle J'(\Omega_{out}), \theta \rangle = \int_{\partial\Omega_{out}} j \theta \cdot n ds + \int_{\partial\Omega_{out}} \left(\frac{\partial k}{\partial n} + Hk \right) \theta \cdot n ds \quad (6.16)$$

avec n le vecteur normal unité extérieur de $\partial\Omega_{out}$ et H la courbure moyenne définie par $H = \operatorname{div}(n)$.

6.6 Critères d'accessibilité

Ces différents travaux sur la distance signée vont permettre de vérifier les deux définitions de l'accessibilité introduites en section 6.2. Un critère est alors présenté pour chaque définition.

6.6.1 Critère d'accessibilité normale

Dans un premier temps, on étudie le cas de l'accessibilité normale. D'une part, le point $x \in \Gamma_{out}$ est accessible de manière normale depuis $y \in \Gamma_D$ si un champ distance signée au bord Γ_D calculée au point x vaut simplement la distance euclidienne à $|x - y|$. Ce champ non perturbé par un obstacle est appelé d_{0,Γ_D} et est montré en Figure 6.8, Γ_D étant ici le bord gauche du domaine.

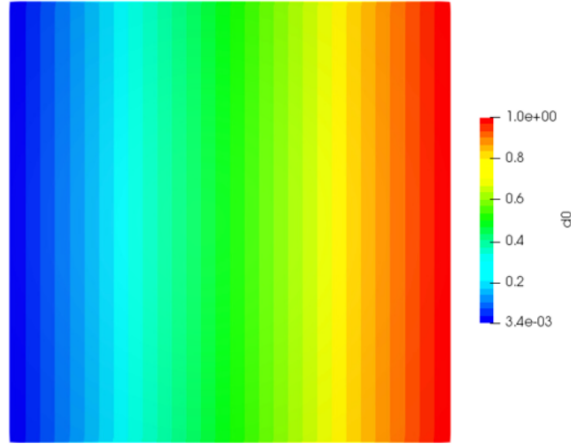


FIGURE 6.8 – Solution de l'équation (6.3) avec $V_+ = V_- = 1$, n'étant rien d'autre que la distance euclidienne au bord Γ_D (bord gauche) sur le domaine.

D'autre part, la solution de l'équation (6.3) avec $V_+ > V_-$, appelée d , donne un champ distance déformé par l'obstacle. La Figure 6.9 montre un champ d très peu déformé, obtenu avec $V_- = 0.9$. Y sont également tracées deux lignes de courant du champ $V\nabla d$. On remarque que celle traversant le domaine Ω_- dévie de sa trajectoire rectiligne qu'elle adopte lorsque le champ n'est pas perturbé par l'obstacle. L'analogie est ici faite avec les notions de segment introduites en Section 6.2. On peut alors supposer que si la valeur du champ d au point x n'est pas identique à la valeur du champ d_{0,Γ_D} alors la ligne de champ $V\nabla d$ partant de y et atteignant x n'est pas un segment de direction normale à Γ_D . Il implique donc que le point x n'est pas accessible de manière normale depuis le point y .

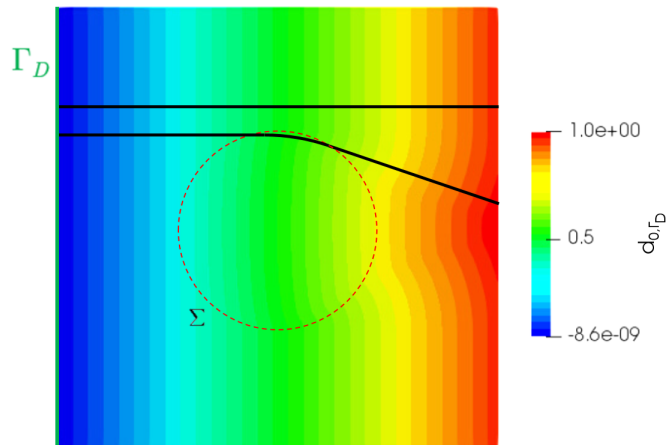


FIGURE 6.9 – Deux lignes de courant du champs $V\nabla d$.

L'accessibilité normale peut être évaluée par le critère suivant :

$$J_1(\Sigma) = \int_{\Gamma_{out}} k(d) ds \tag{6.17}$$

avec

$$k(d) = |d - d_{0,\Gamma_D}|^2 \tag{6.18}$$

où $k : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^1 , d dépendant de $x \in \Gamma_{out}$ est la distance signée au bord Γ_D calculée avec $V_+ > V_-$ (en présence de l'obstacle) et d_{0,Γ_D} est la distance signée au bord Γ_D sans obstacle. Le champ $d - d_{0,\Gamma_D}$ est montré en Figure 6.10 (à gauche) pour une vitesse $V_- = 0.5$.

Le critère $J_1(\Sigma)$ intègre donc la fonction $k(d)$ sur le bord Γ_{out} devant être accessible. Néanmoins, le critère tel qu'il est formulé donne aussi une information sur la position du point x à accéder par rapport à l'obstacle. En effet, plus le point x est "caché" par l'obstacle, plus la distance parcourue par la ligne de courant $V\nabla d$ atteignant le point x sera importante. La valeur de $J_1(\Sigma)$ au point x sera alors plus élevée. En pratique, un point x est accessible ou ne l'est pas, il faut alors modifier légèrement le critère pour répondre à cette nouvelle condition. Une solution est de donner à la fonction k une valeur constante lorsque celle-ci est non-nulle, et la valeur 0 sinon, en utilisant une fonction de Heaviside régularisée. Pour $\varepsilon > 0$ de l'ordre d'une taille de maille, on a la fonction h_ε définie comme :

$$h_\varepsilon(k(d)) = \begin{cases} 0 & \text{si } k(d) = 0, \\ \frac{1}{2} \left(1 + \frac{k(d)}{\varepsilon} + \frac{1}{\pi} \sin\left(\frac{\pi k(d)}{\varepsilon}\right) \right) & \text{si } 0 \leq k(d) \leq 2\varepsilon, \\ 1 & \text{si } k(d) > 2\varepsilon. \end{cases} \quad (6.19)$$

Selon [12], l'épaisseur du saut entre les valeurs 0 et 1 de la fonction $h_\varepsilon(k(d))$ n'excède pas une valeur de 2ε et surtout, le nouveau critère $J_{1,reg}(\Sigma)$ est dérivable. Celui-ci s'écrit alors :

$$J_{1,reg}(\Sigma) = \int_{\Gamma_{out}} h_\varepsilon(k(d)) ds. \quad (6.20)$$

La fonction $h_\varepsilon(k(d))$ est tracée en Figure 6.10 (à droite) où cette fois tous les points non-accessibles sont affectés de la même valeur.

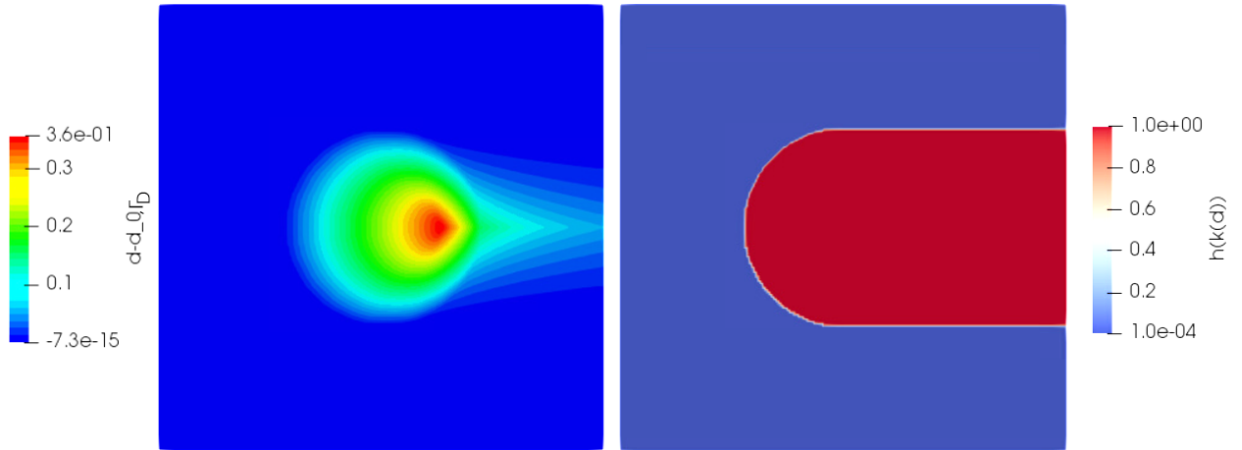


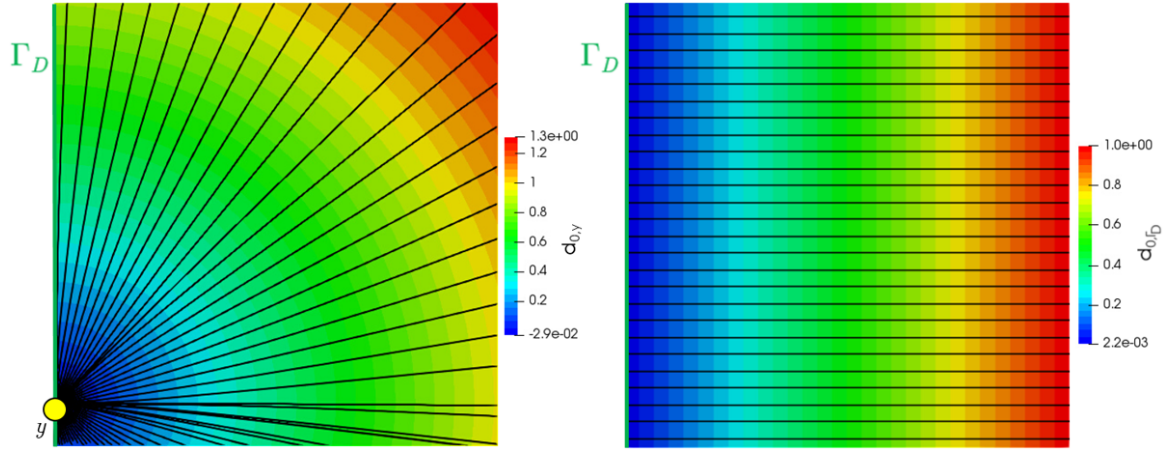
FIGURE 6.10 – Le champ $d - d_{0,\Gamma_D}$ est tracé sur Ω montrant les points non-accessibles du domaine (à gauche). Fonction $h_\varepsilon(k(d))$ sur Ω , mettant mieux en valeur les points non-accessibles de manière normale depuis les points du bord Γ_D (à droite).

6.6.2 Critère d'accessibilité multi-directionnelle

Ici, le cas de l'accessibilité caractérisée par la définition 6.2.1 est étudiée. Cette fois, la distance signée d n'est plus calculée depuis un bord mais depuis N_y points $y_i, i = 1, \dots, N_y$ d'un bord. En pratique, l'accessibilité d'un point $x \in \Gamma_{out}$ est évaluée depuis une boule \mathcal{B}_{y_i} d'un petit rayon ε et centrée au point $y_i \in \Gamma_D$. On appelle la fonction distance d_{y_i} calculée depuis le bord $\partial\mathcal{B}_{y_i}$ de cette boule et solution de l'équation :

$$\begin{cases} V(x) |\nabla d_{y_i}(x)| = 1 & \text{dans } \Omega \setminus \mathcal{B}_{y_i}, \\ d_{y_i} = 0 & \text{sur } \partial\mathcal{B}_{y_i}, \end{cases} \quad (6.21)$$

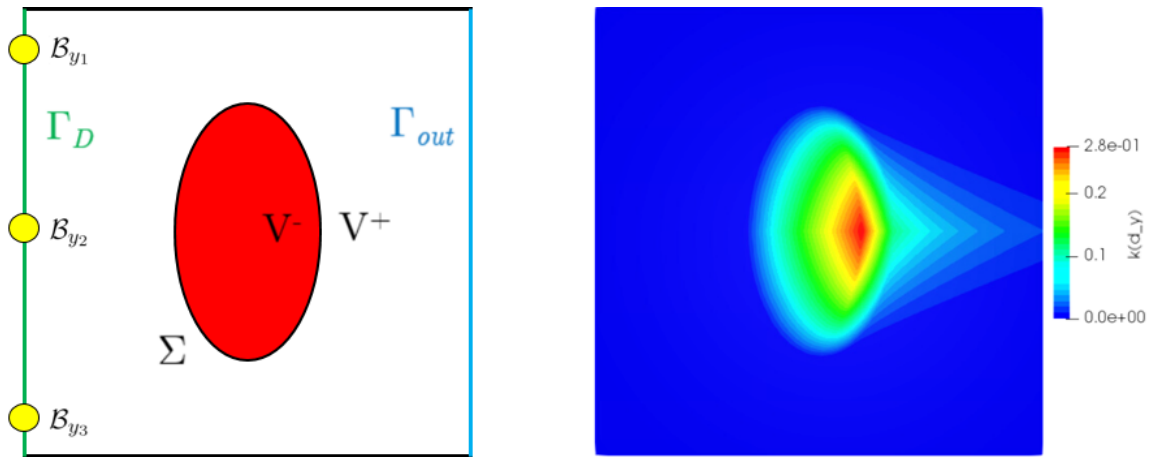
La solution d_{y_i} pour $V_+ = V_- = 1$, appelée d_{0,y_i} ainsi que les lignes de courant $V\nabla d_{0,y_i}$ sont montrées en Figure 6.11 (à gauche). Les lignes de courant de la fonction d_{0,Γ_D} sont également tracées à droite montrant la différence entre les deux définitions de l'accessibilité définies en section 6.2.


 FIGURE 6.11 – Visualisation des lignes de courant du champ $V\nabla d_{0,y_i}$ (à gauche) et d_{0,Γ_D} (à droite)

L'accessibilité multi-directionnelle à partir d'une collection de points y_i peut alors être évaluée par le critère suivant :

$$J_2(\Sigma) = \int_{\Gamma_{out}} \left| \min_{y_i, i=1, \dots, N_y} (d_{y_i} - d_{0,y_i}) \right|^2 ds \quad (6.22)$$

où d_{y_i} dépendant de $x \in \Gamma_{out}$ est la distance signée au bord \mathcal{B}_{y_i} calculée avec $V_+ > V_-$ (en présence de l'obstacle) et d_{0,y_i} est la distance signée au bord \mathcal{B}_{y_i} sans obstacle. On décide dans un premier exemple d'évaluer l'accessibilité du bord Γ_{out} depuis trois points $(y_1, y_2, y_3) \in \Gamma_D$ répartis uniformément sur le bord. Trois boules ($\mathcal{B}_{y_1}, \mathcal{B}_{y_2}, \mathcal{B}_{y_3}$) de rayon 0.001, pour un domaine de taille $[0, 1] \times [0, 1]$, sont considérées et montrées en Figure 6.12 (à gauche, en jaune). Par ailleurs, un nouvel obstacle de forme ovale est pris en compte et à l'intérieur duquel une vitesse $V_- = 0.5$ est imposée. Le champ $\min_{y_i, i=1,2,3} (d_{y_i} - d_{0,y_i})$ tracé en Figure 6.12 (à droite) met en valeur la zone non-accessible depuis les points $(y_1, y_2, y_3) \in \Gamma_D$.


 FIGURE 6.12 – L'accessibilité du bord Γ_{out} est mesurée depuis trois points du bords Γ_D et en prenant en compte l'obstacle en rouge (à gauche). Le champ $\min_{y_i, i=1,2,3} (d_{y_i} - d_{0,y_i})$ tracé sur Ω (à droite).

Comme précédemment, la fonction h_ϵ est appliquée au critère J_2 afin que tous les points non-accessibles soient affectés de la même valeur. Le nouveau critère s'écrit alors :

$$J_{2,reg}(\Sigma) = \int_{\Gamma_{out}} h_\epsilon \left(\left| \min_{y_i, i=1, \dots, N_y} (d_{y_i} - d_{0,y_i}) \right|^2 \right) ds. \quad (6.23)$$

En pratique, on ignore la non-différentiabilité du minimum. Autrement dit, pour une fonction $f \in \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $f = \min(f_1, f_2)$ on fait l'approximation suivante : $f' = f'_1$ si $f_1 < f_2$ et $f' = f'_2$ si $f_2 < f_1$ et on ignore le cas où $f_1 = f_2$.

La nouvelle équation adjointe linéaire associée à (6.21) dont la solution est notée p_{y_i} s'écrit :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(V^3 p_{y_i} \nabla d_{y_i}) & = & j'(d_{y_i}) & \text{dans } \Omega_+ \text{ et } \Omega_-, \\ p_{y_i} & = & \frac{k'(d_{y_i})}{V^3 \nabla d_{y_i} \cdot n} & \text{sur } \Gamma_{out}, \\ p_{y_i} & = & 0 & \text{sur } \Gamma_c, \\ V_+^3 p_{y_i} \nabla d_{y_i} \cdot n & = & V_-^3 p_{y_i} \nabla d_{y_i} \cdot n & \text{sur } \Sigma. \end{cases} \quad (6.24)$$

Pour un nombre fini de points y_i , $i = 1, \dots, N_y$ pris sur Γ_D , (6.21) et (6.24) doivent être résolues N_y fois pour calculer la dérivée de forme de $J_{2,reg}(\Sigma)$.

Proposition 6.6.1. *La fonction $J_{2,reg}(\Sigma)$ définie par (6.23) est différentiable par rapport à la forme de l'interface Σ et sa dérivée s'écrit, pour tout champ $\theta \in C^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$:*

$$\langle J'_{2,reg}(\Sigma), \theta \rangle = \int_{\Sigma} \theta \cdot n V_+^3 \left(\sum_{i=1}^{N_y} \nabla d_{y_i} \cdot n + p_{y_i} \nabla d_{y_i} \cdot n \right) ds \quad (6.25)$$

avec d_{y_i+} , respectivement d_{y_i-} , la solution de (6.21) dans Ω_+ , respectivement dans Ω_- et p_{y_i+} l'état adjoint dans Ω_+ défini par (6.24).

La fonction $h_\varepsilon(d_{y_i})$ est tracée en Figure 6.13.

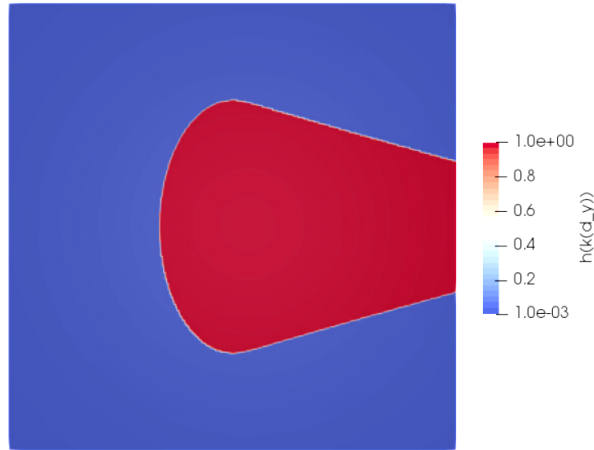


FIGURE 6.13 – Fonction $h_\varepsilon(d_{y_i})$ sur Ω , mettant mieux en valeur les points non accessibles depuis les points du bord Γ_D .

6.7 Résultats numériques 2D

6.7.1 Optimisation de l'obstacle

Accessibilité normale

Une première optimisation est considérée en évaluant l'accessibilité du bord Γ_{out} de manière normale au bord Γ_D .

La fonction $h_\varepsilon(k(d))$ est visualisée en Figure 6.15 (à gauche). Sur cette figure, le domaine Ω_+ est uniquement montré et l'on considère un obstacle en forme de cercle dont la forme doit être optimisée pour minimiser le critère $J_{1,reg}(\Sigma)$. L'accessibilité est mesurée sur le bord droit Γ_{out} depuis le bord gauche Γ_D . Afin d'obtenir une forme exploitable à convergence et de la comparer avec la forme initiale, une contrainte d'égalité sur le volume de l'obstacle, notée $|\Omega_-|$ est considérée. Les calculs sont effectués sur une grille de dimension $[1 \times 1]$ comprenant 40000 noeuds. L'équation de transport (6.3) est résolue dans le domaine Ω à chaque itération par différences finies avec le schéma *TVD Superbee* [59, 153] dans le logiciel Python. Pour rappel, cette solution est montrée en Figure 6.5. Il en est de même pour la solution

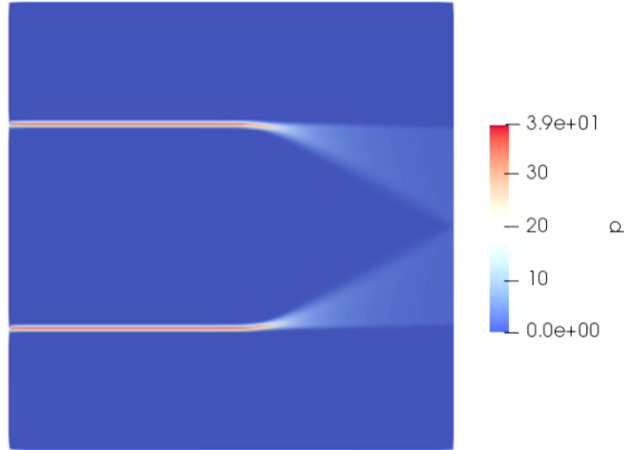


FIGURE 6.14 – Visualisation de l'état adjoint p résolu par différences finies pour le critère $J_{1,reg}(\Sigma)$

adjointe p , montrée en Figure 6.14. Ces champs sont ensuite transférés sur le logiciel FreeFEM pour les réaliser les dernières étapes dans boucle d'optimisation (calcul de la dérivée de forme, advection,...).

Le résultat de l'optimisation est montré en Figure 6.15 (à droite). La convergence a été obtenue après 600 itérations, chaque itérations nécessitant 18 secondes de calcul (incluant la résolution du problème (6.3), (6.10) ainsi que les autres étapes classiques nécessaires à l'advection de la forme).

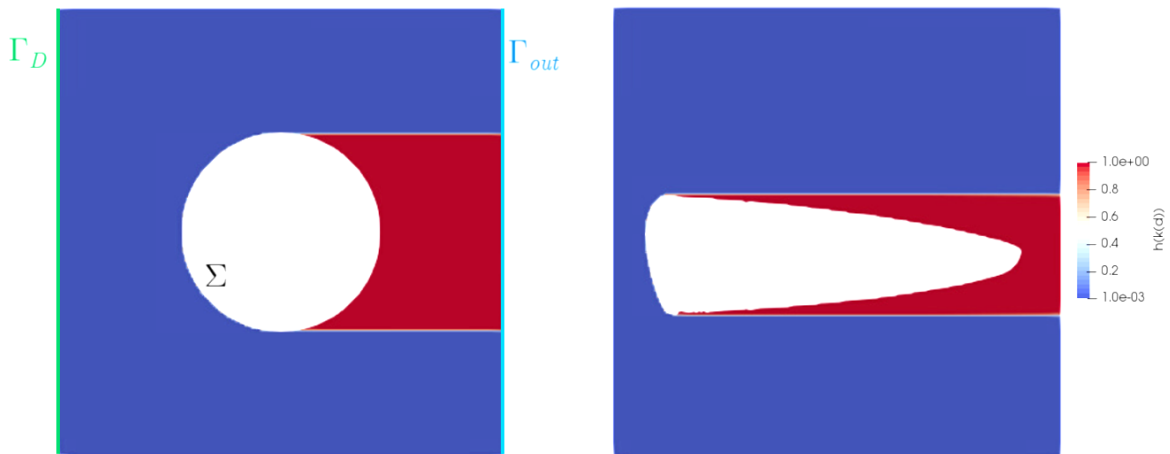


FIGURE 6.15 – Optimisation de la forme de l'obstacle pour le critère $J_{1,reg}(\Sigma)$ intégrant la fonction $h_\varepsilon(k(d))$ sur Γ_{out} . La forme initiale de l'obstacle est montrée à gauche, la forme après convergence à droite.

Les courbes de convergence pour le critère (6.20) et la contrainte de volume sont montrées en Figure 6.16. On remarque que la valeur du critère évolue en escalier, du fait de la forte régularisation de la fonction $k(d)$.

Remarque 6.7.1. *La forme de l'obstacle n'est pas optimale pour ce problème. Celle-ci devrait être un rectangle faisant la largeur du domaine et dont la hauteur serait minimum pour respecter la contrainte sur le volume. De plus, il n'y a a priori pas de raison pour que la forme optimisée ne soit pas symétrique. Ce dernier point est notamment dû à la solution de l'état adjoint, calculée à partir d'un schéma décentré amont où la solution est obtenue en 'remontant le courant' à partir du bord Γ_{out} . Celle-ci ne donne aucune information sur le côté gauche de l'obstacle (voir la Figure 6.14) puisque qu'il est de l'autre côté de l'obstacle par rapport à la source de l'équation (6.10). La sensibilité est donc évaluée sur le côté droit de Σ , face à Γ_{out} . Cet effet se ressent légèrement à chaque itération jusqu'à convergence mais n'empêche pas le critère principale de diminuer.*

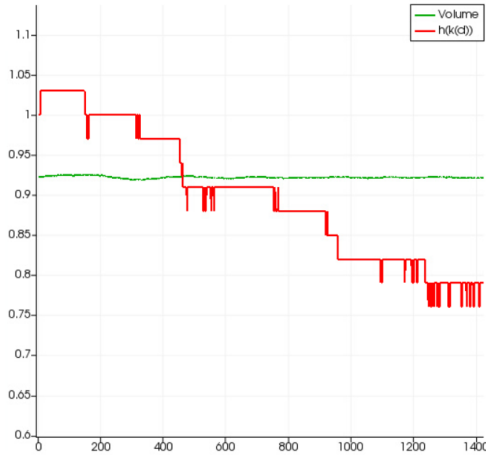


FIGURE 6.16 – Courbes de convergence pour le critère (6.20) (en rouge) et le volume (en vert) de l'obstacle

Accessibilité multi-directionnelle

D'après la définition 6.2.1, un point $x \in \Gamma_{out}$ est accessible de manière multi-directionnelle s'il existe au moins un point $y \in \Gamma_D$ tel que $L_\Sigma(x, y) = |x - y|$. Comme dit précédemment, le critère $J_2(\Sigma)$ doit alors être calculé sur Γ_{out} à partir de d_y et $d_{0,y}$, pour tout $y \in \Gamma_D$. Même s'il est plus cher, ce cas est étudié ici, avec deux points $(y_1, y_2) \in \Gamma_D$ montrés en Figure 6.17 (à gauche, en jaune). La fonction $h_\epsilon(d_{y_i})$ est également tracée, considérant un obstacle de forme ovale au centre du domaine. De même que précédemment, une contrainte d'égalité sur le volume du sous-domaine Ω_- est imposée. Le processus d'optimisation est le même que précédemment, les problèmes (6.21), (6.24) sont cette fois résolus deux fois pour chaque itération d'optimisation. Pour des raisons de coût calcul, deux points sont uniquement considérés ici. Le résultat de l'optimisation est montré en Figure 6.17 (à droite). On remarque que le critère est quasi-nul à convergence, donc la forme obtenue est proche de l'optimalité pour ce problème.

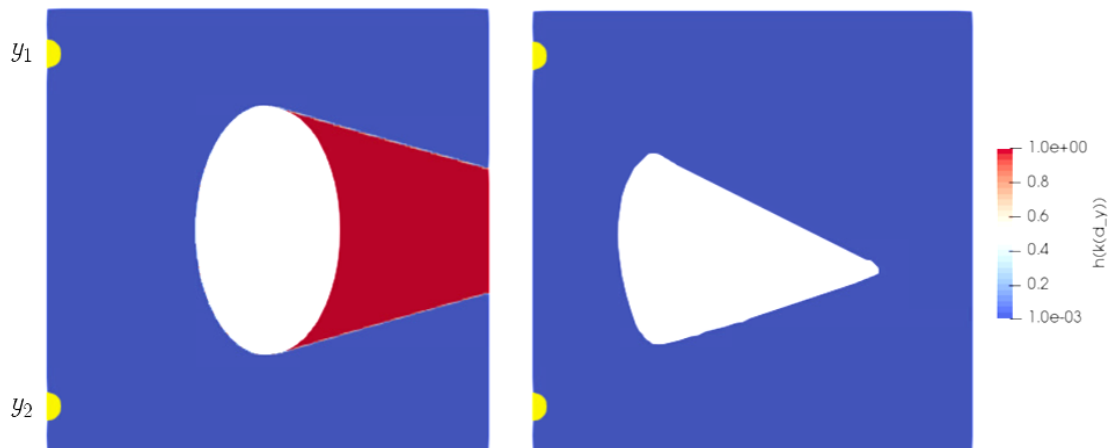


FIGURE 6.17 – Optimisation de la forme de l'obstacle pour le critère $J_{2,reg}(\Sigma)$ intégrant la fonction $h_\epsilon(d_{y_i})$ sur le bord droit Γ_{out} . La forme initiale de l'obstacle est montrée à gauche, la forme après convergence à droite.

Les courbes de convergence pour le critère (6.23) et la contrainte de volume sont montrées en Figure 6.18.

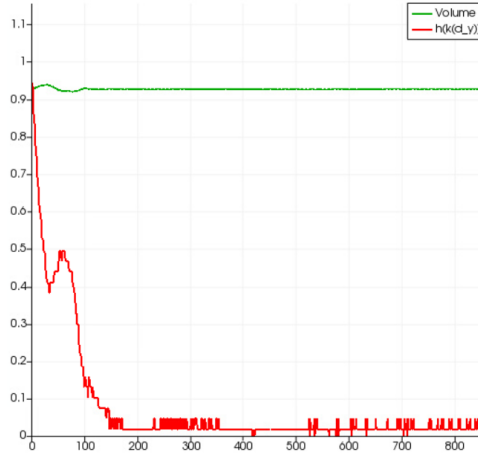


FIGURE 6.18 – Courbes de convergence pour le critère (6.23) (en rouge) et le volume (en vert) de l'obstacle

6.7.2 Optimisation du domaine accessible

Dans cette partie, on s'intéresse à l'optimisation de forme du sous-domaine Ω_{out} lorsque l'obstacle Ω_- est fixe. On choisit de minimiser le critère (6.20).

Dans ce cas test numérique simple, on souhaite accéder depuis le bord entier Γ_D au bord $\partial\Omega_{out}$, variable. Un obstacle fixe Ω_- , en forme de cercle, est placé entre le bord Γ_D et la forme Ω_{out} initiale, comme montré en Figure 6.19. Les résultats présentés en section 6.5 sont utilisés pour optimiser la forme Ω_{out} . Aussi, une contrainte d'égalité sur le volume $|\Omega_{out}|$ est considérée. La forme obtenue après convergence de l'algorithme est montrée en Figure 6.19 (à droite).

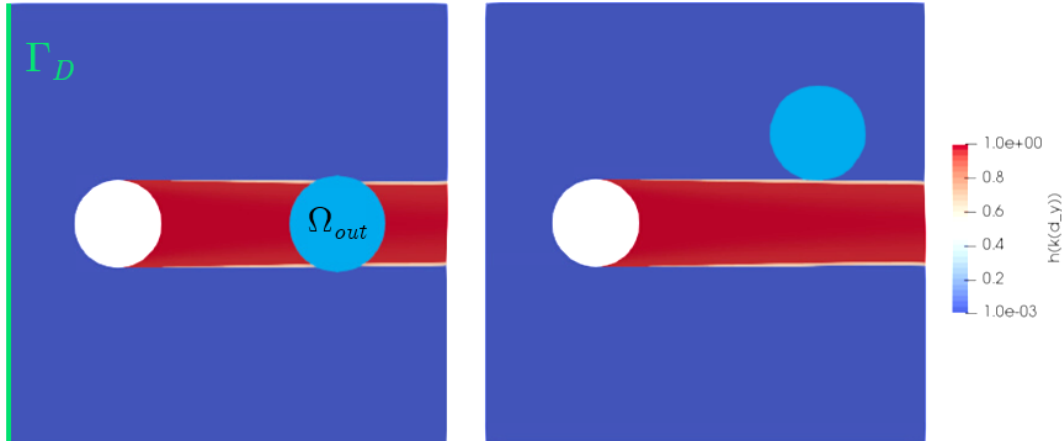


FIGURE 6.19 – Optimisation du domaine accessible Ω_{out} pour le critère $J_{1,reg}(\partial\Omega_{out})$ intégrant la fonction $h_\varepsilon(k)$ sur le bord $\partial\Omega_{out}$. L'obstacle est considéré fixe. La forme initiale est montrée à gauche, la forme obtenue à convergence à droite.

Les courbes de convergence pour le critère (6.20) et la contrainte de volume sont montrées en Figure 6.20.

Remarque 6.7.2. Le critère $J_{1,reg}(\Omega_{out})$ est mesuré sur le bord $\partial\Omega_{out}$ pour respecter la définition de l'accessibilité considérée dans ces travaux. Aussi en pratique, c'est le bord de la forme qui doit être atteint pour le parachever. Néanmoins le critère peut se mesurer aussi dans Ω_{out} . Les deux sont équivalents sur ce genre de cas test puisque l'accessibilité se mesure sur le bord complet $\partial\Omega_{out}$, et ce même sur la partie du bord dos à Γ_D . On aurait en effet tendance à penser que le critère se calcule uniquement sur le bord face à Γ_D , seulement ici $\partial\Omega_{out}$ ne fait pas office d'obstacle. La propagation de d et d_{0,Γ_D} a donc bien lieu dans Ω_{out} .

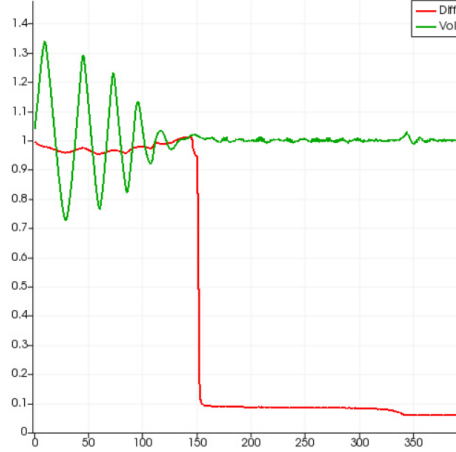


FIGURE 6.20 – Courbes de convergence pour le critère (6.20) (en rouge) et le volume (en vert) du domaine accessible.

6.7.3 Forme accessible et optimisée pour un problème mécanique

Comme dit précédemment, pour certains cas la surface d'une forme doit être accessible en tout point pour des opérations de traitement de surface, ou de dépoudrage dans le cas particulier de la fabrication additive sur lit de poudre. Pour résoudre un tel problème avec le modèle développé dans ce chapitre, le critère d'accessibilité doit être mesuré sur le bord de la forme à optimiser qui est elle-même l'obstacle.

On introduit d'abord l'espace suivant :

$$H_{\Gamma_{D_{meca}}}^1(\Omega)^N = \{u \in H^1(\Omega)^N : u = 0 \text{ sur } \Gamma_{D_{meca}}\} \quad (6.26)$$

On considère ensuite le déplacement élastique u la solution unique dans $H_{\Gamma_{D_{meca}}}^1(\Omega)^N$ du problème élastique linéarisé suivant :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(Ae(u)) = 0 & \text{dans } \Omega_-, \\ Ae(u)n = f & \text{sur } \Gamma_{N_{meca}}, \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_{D_{meca}}. \end{cases} \quad (6.27)$$

où $A(x)$ est le tenseur de rigidité associé à Ω_- , $e(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T)$ est le tenseur des déformations linéarisé, f le chargement surfacique. Les bords $\Gamma_{N_{meca}}$ et $\Gamma_{D_{meca}}$ sont montrés en Figure 6.21, ainsi que la forme optimisée pour le critère de compliance défini par :

$$C(\Omega_-) = \int_{\Gamma_{N_{meca}}} f \cdot u \, ds. \quad (6.28)$$

Aussi, on considère pour cette première optimisation une contrainte sur le volume $|\Omega_-|$.

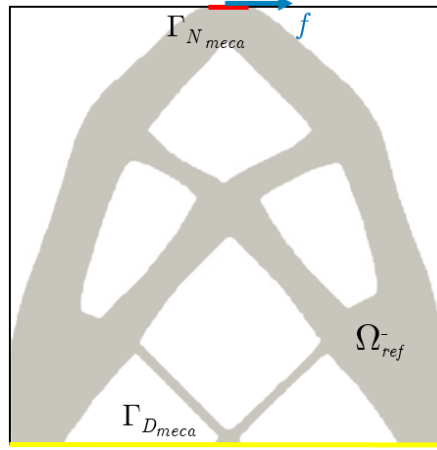
Cette forme optimisée pour le problème mécanique possède à convergence un volume noté $|\Omega_{-,ref}|$ et une compliance $C(\Omega_{-,ref})$. Elle est obtenue avec $E = 1, \nu = 0.3$ sur une grille de dimension $[1 \times 1]$ composée de 40000 points.

La forme finale souhaitée doit être accessible tout en préservant autant que possible les performances mécaniques de la pièce en service, à savoir la compliance $C(\Omega_{-,ref})$ et le volume $|\Omega_{-,ref}|$ de référence. Le problème d'optimisation s'écrit alors

$$\begin{aligned} \min_{\Omega_- \subset \Omega} \quad & J_1(\Sigma) \\ \text{tel que} \quad & |\Omega_-| = |\Omega_{-,ref}| \\ & C(\Omega) \leq (1+k)C(\Omega_{-,ref}), \end{aligned} \quad (6.29)$$

où $k > 0$ est un petit coefficient autorisant l'augmentation de la compliance finale pour la pièce en service.

On souhaite accéder à Ω_- de manière normale depuis un deux bords supérieurs du domaine, appelés $\Gamma_{D,i}$ avec $i = 1, 2$. On considère l'équation suivante avec $d_{\Gamma_{D,i}}$ la fonction distance calculée depuis le bord $\Gamma_{D,i}$


 FIGURE 6.21 – Forme Ω_- optimisée pour la compliance et une contrainte sur le volume $|\Omega_{out}|$.

$$\begin{cases} V(x) |\nabla d_{i,\Gamma_D}(x)| = 1 & \text{dans } \Omega, \\ d_{\Gamma_D,i} = 0 & \text{sur } \Gamma_{D,i}, \end{cases} \quad (6.30)$$

L'accessibilité normale mesurée à partir d'un des deux bords $\Gamma_{D,i}$ est évaluée par le critère suivant :

$$J_3(\Sigma) = \int_{\Sigma} k(d_{\Gamma_D}) ds \quad (6.31)$$

avec

$$k(d_{\Gamma_D}) = \left| \min_{\Gamma_{D,i}, i=1,2} (d_{\Gamma_{D,i}} - d_{0,\Gamma_{D,i}}) \right|^2 \quad (6.32)$$

où $d_{0,\Gamma_{D,i}}$ est la solution de l'équation (6.30) avec $V_+ = V_- > 0$.

Pour trouver une solution au problème (6.29), la dérivée de forme pour la fonction objectif et chaque contrainte est calculée grâce à la méthode d'Hadamard [69]. La dérivée de forme pour le critère (6.31) est obtenue grâce à la composition des résultats (6.9) et (6.16), puisque Σ est à la fois le bord de l'obstacle et le bord depuis lequel l'accessibilité est mesurée.

Proposition 6.7.3. *Pour tout vecteur $\theta \in W^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^2)$, la dérivée de forme de $J_3(\Sigma)$ s'écrit*

$$\langle J'_3(\Sigma), \theta \rangle = \int_{\Sigma} \left(V_+^3 \sum_{i=1}^2 (\nabla d_{\Gamma_{D,i,+}} \cdot n_{\Gamma_{D,i,+}} + n \cdot (\nabla d_{\Gamma_{D,i,+}} - \nabla d_{\Gamma_{D,i,-}})) + \left(\frac{\partial k}{\partial n} + Hk \right) \right) \theta \cdot n ds \quad (6.33)$$

avec $d_{\Gamma_{D,i,+}}$, respectivement $d_{\Gamma_{D,i,-}}$, la solution de (6.30) dans Ω_+ , respectivement dans Ω_- et $p_{\Gamma_{D,i,+}}$ l'état adjoint associé dans Ω_+ , calculé de la même manière qu'en section 6.6.2 où Γ_{out} est cette fois Σ .

L'expression des dérivées de forme pour la compliance $C(\Omega_-)$ et $|\Omega_-|$ sont bien connues et déjà écrites plus haut.

La fonction $k(d_{\Gamma_D})$ y est aussi tracée sur la forme $\Omega_{-,ref}$. Aussi, on considère le coefficient $k = 0.05$ et les différentes contraintes d'égalité et d'inégalité sont traitées par l'algorithme du Lagrangien augmenté. La forme optimisée pour le problème (6.29) est montrée en Figure 6.22 (à droite).

Les courbes de convergence pour le critère (6.31) et les contraintes de compliance et de volume sont montrées en Figure 6.23.

Pour la forme $\Omega_{-,ref}$, on remarque sur la figure à gauche que la fonction $k(d_{\Gamma_D})$ est non nulle sur les bords des trous de la structure. Lors de l'optimisation, les croisillons sont d'abord cassés par l'algorithme pour rendre le bord Σ accessible, puis le domaine retrouve une forme bien connue du cantilever, composé seulement de deux barres. Cette forme est optimisée pour la compliance mais on peut voir aussi que son bord est accessible en ligne droite depuis le bord supérieur ou inférieur du domaine.

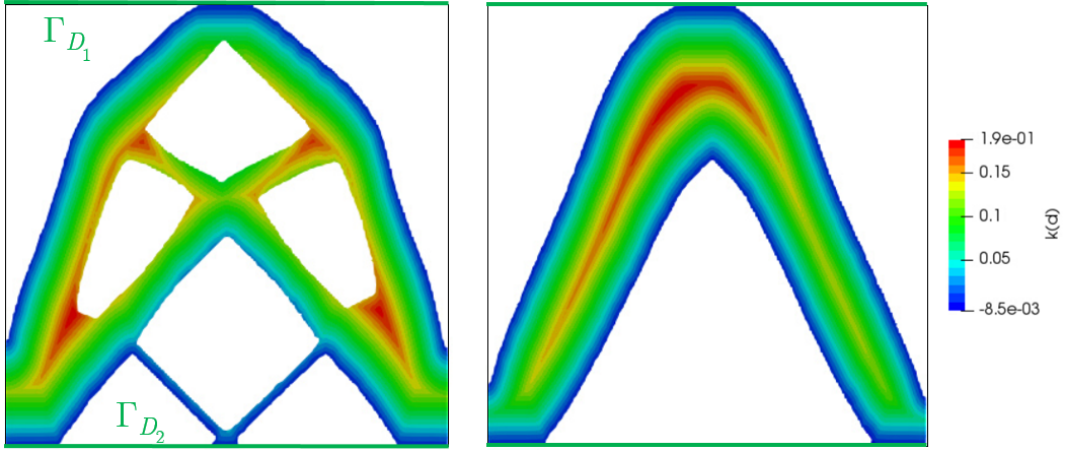


FIGURE 6.22 – Optimisation de forme de l’obstacle Ω_- pour le problème d’accessibilité et le problème mécanique. L’optimisation début de la forme initiale $\Omega_{-,ref}$ montrée à gauche et converge vers la forme montrée à droite.

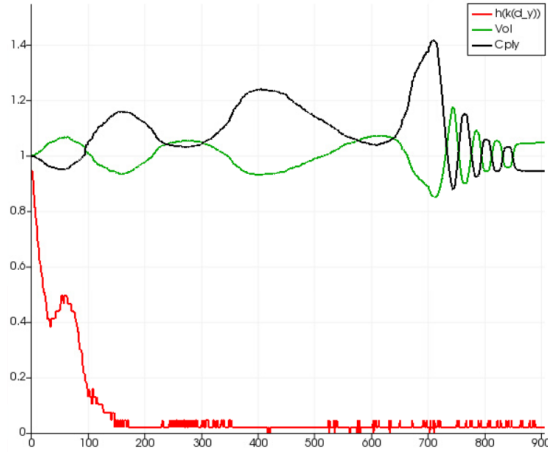


FIGURE 6.23 – Courbes de convergence pour le critère (6.31) (en rouge) et la complianc (en noir) et le volume (en vert) de l’obstacle

6.7.4 Optimisation conjointe de la forme de l’obstacle et du domaine accessible

Dans cette sous section, l’optimisation de forme de l’obstacle Ω_- ainsi que du sous-domaine Ω_{out} est étudiée. A l’image d’une optimisation multi-matériaux [12], ce problème sera résolu par l’optimisation simultanée de plusieurs level-sets, à l’image des travaux effectués au chapitre 5.

L’objectif est toujours d’accéder de manière normale au domaine Ω_{out} depuis un bord Γ_D , cette fois en rendant également la frontière Σ variable. Il est exprimé par le critère :

$$J_{1,reg}(\Sigma, \Omega_{out}) = \int_{\partial\Omega_{out}} h_\varepsilon(k(d)) ds. \quad (6.34)$$

Deux champs de vecteur $\theta_0, \theta_1 \in W^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^2)$ distincts sont alors considérés.

Proposition 6.7.4. *La dérivée de forme pour la fonctionnelle (6.34) par rapport à Ω_- et Ω_{out} dans la direction θ s’écrit :*

$$\langle J'(\Sigma), \theta \rangle = \int_{\Sigma} V_+^3 \nabla d_+ \cdot n p_+ \cdot n \cdot (\nabla d_+ - \nabla d_-) \theta \cdot n_0 ds \quad (6.35)$$

avec n_0 le vecteur normal unité extérieur de Σ .

$$\langle J'(\Omega_{out}), \theta \rangle = \int_{\partial\Omega_{out}} \left(\frac{\partial h}{\partial n_1} + Hh \right) \theta \cdot n_1 ds \quad (6.36)$$

avec n_1 le vecteur normal unité de $\partial\Omega_{out}$ et H la courbure moyenne définie par $H = \text{div}(n_1)$.

Le cas test considéré ici est celui vu en sous section 6.7.2, où l'obstacle est considéré fixe. Deux contraintes d'égalité sur les volumes Ω_- et Ω_{out} sont maintenant considérées. Les formes initiales de chaque sous-domaine sont montrées en Figure 6.24 (à gauche) ainsi que les formes obtenues à convergence (à droite). Les courbes de convergence sont montrées en Figure 6.25.

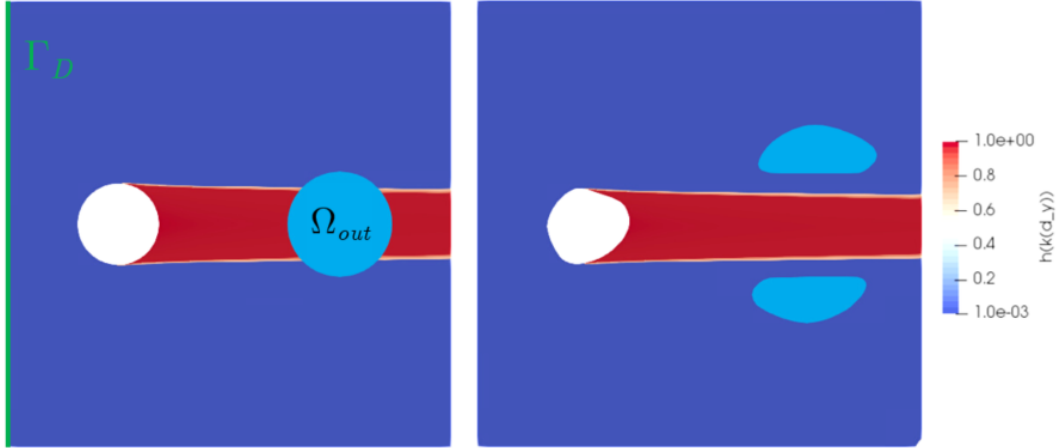


FIGURE 6.24 – Optimisation de la forme de l'obstacle et du domaine accessible pour le critère $J_{1,reg}(\Sigma)$ mesuré sur le bord $\partial\Omega_{out}$. Les formes initiales sont montrées à gauche, les formes optimisées à droite.

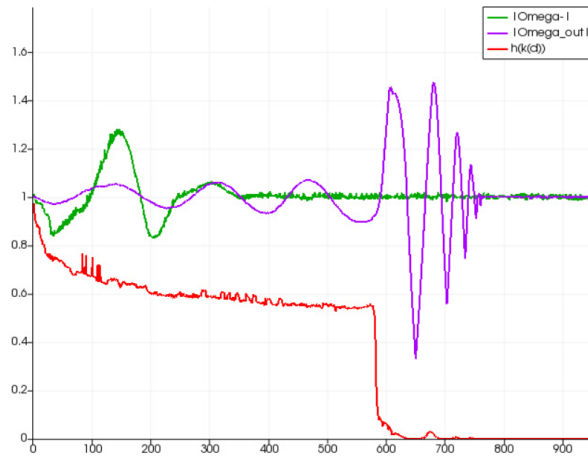


FIGURE 6.25 – Courbes de convergence pour le critère $J_{1,reg}(\Sigma, \Omega_{out})$ (en rouge), pour le volume (en vert) de l'obstacle et du domaine accessible (en violet)

6.8 Résultats numériques 3D

Dans cette section, les principaux résultats numériques vus précédemment seront étendus en dimension 3. La notation des différents sous-domaines reste la même, tout comme les interfaces à optimiser. Des cas simples seront présentés puis le lien avec la fabrication additive sera établi avec un problème d'accessibilité des structures supports.

6.8.1 Optimisation de forme de l'obstacle

Comme en sous section 6.7.1 l'accessibilité sera ici évaluée de manière normale depuis le bord Γ_D pour simplifier les calculs numériques. L'obstacle considéré est une boule au milieu du domaine Ω , montrée en Figure 6.26. L'accessibilité est évaluée sur le bord Γ_{out} fixe, montré sur la même figure.

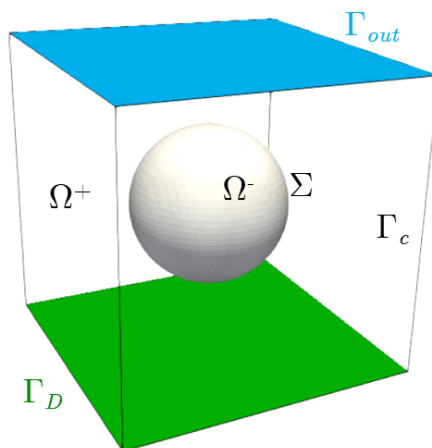


FIGURE 6.26 – Conditions aux limites pour le cas test de l'accessibilité normale d'un bord à un autre.

Le critère choisi reste $J_{1,reg}(\Sigma)$ et une contrainte d'égalité sur le volume Ω_- est également considérée. Les calculs sont effectués sur une grille de dimension $[1 \times 1 \times 1]$ et comprenant 132000 noeuds. La fonction $h_\varepsilon(k(d))$ est tracée sur le bord Γ_{out} à accéder pour la forme Ω_- initiale en Figure 6.27 (à gauche) et finale (à droite). On remarque que la forme optimisée prend la même allure, non symétrique, observée pour le même cas test en dimension 2 (sous-section 6.7.1). Néanmoins, un autre problème de nature numérique s'ajoute ici. En effet, la forme prend une forme de croix. Cela est dû aux calculs des différents gradients ∇d_+ et ∇d_- nécessaires au calcul de la dérivée. Lorsque ces quantités sont calculées sur un bord droit de la grille régulière (dans les directions du système de coordonnées), les résultats obtenus sont légèrement différents que ceux obtenus sur le reste de la grille. Ces petites différences provoquent à terme une forme non symétrique et non optimale. Les courbes de convergence sont montrées en Figure 6.28. Pour ce cas test, une itération d'optimisation nécessite environ une minute de calcul.

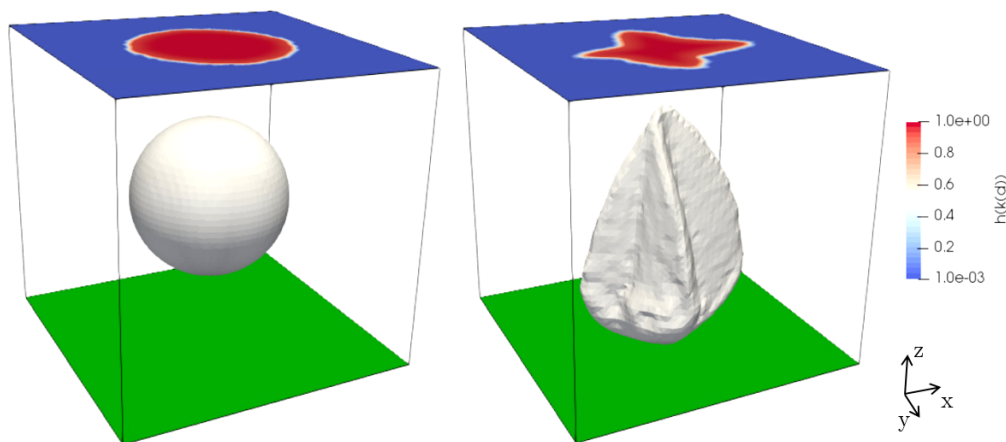


FIGURE 6.27 – Optimisation de la forme de l'obstacle pour le critère $J_{1,reg}(\Sigma)$ mesuré sur le bord $\partial\Omega_{out}$. La forme initiale de l'obstacle est montrée à gauche, la forme optimisée à droite.

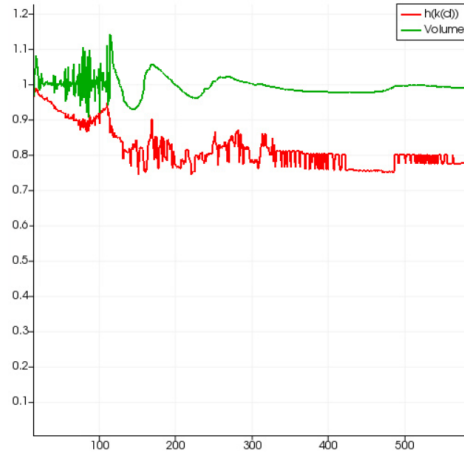


FIGURE 6.28 – Courbes de convergence pour le critère (6.20) (en rouge) et le volume (en vert) de l'obstacle

6.8.2 Optimisation de forme conjointe de l'obstacle et du domaine accessible

Ici, les travaux présentés en sous section 6.7.4 sont étendus en dimension 3. L'accessibilité du bord $\partial\Omega_{out}$ variable sera évaluée depuis le bord Γ_D fixe. Les domaines Ω_- et Ω_{out} variables initiaux sont montrés en Figure 6.29. Leur volume est conservé à convergence grâce à deux contraintes d'égalité. Les deux formes optimisées sont montrées en Figure 6.30.

On remarque cette fois qu'un trou s'est formé dans le domaine accessible, de la forme du domaine Ω_- projetée dans la direction normale à Γ_D sur Ω_{out} .

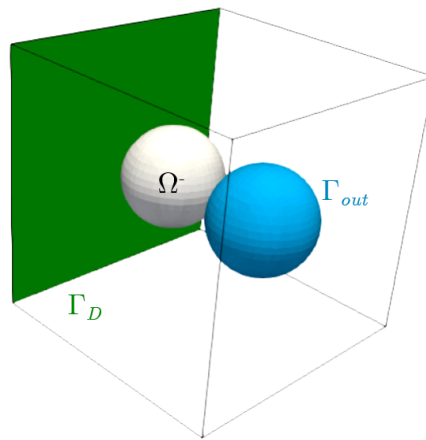


FIGURE 6.29 – Forme initiale de l'obstacle (en blanc) et du domaine accessible (en bleu).

6.8.3 Optimisation de forme conjointe de l'obstacle et de la zone à accéder dans un problème mécanique

Dans cette sous section, on souhaite répondre au problème d'accessibilité et à un problème mécanique simple via l'optimisation de forme des sous-domaines Ω_- et Ω_{out} .

Dans un premier temps, un problème mécanique est considéré. Celui-ci s'applique dans la structure $\Omega^M = \Omega_- \cup \Omega_{out}$ et on définit un nouvel espace :

$$H_{\Gamma_{D_{meca,2}}}^1(\Omega^M)^N = \{u \in H^1(\Omega^M)^N : u = 0 \text{ sur } \Gamma_{D_{meca,2}}\} \quad (6.37)$$

On note u la solution unique dans $H_{\Gamma_{D_{meca,2}}}^1(\Omega^M)^N$, avec $N = 3$, du problème suivant :

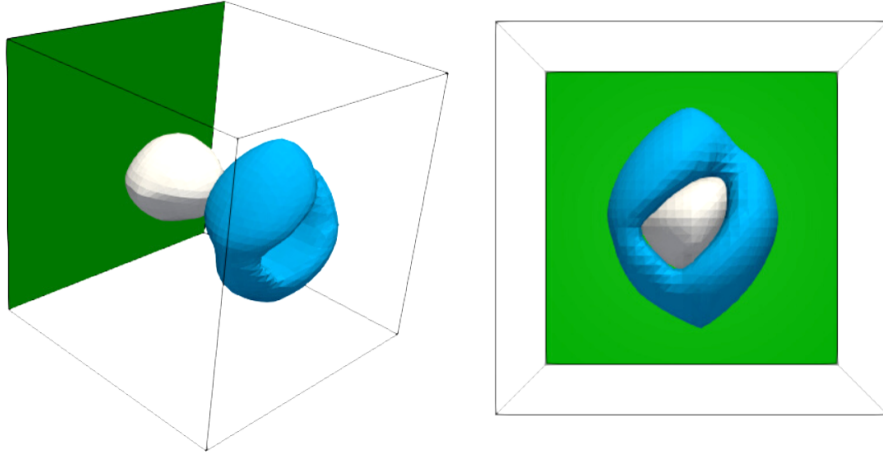


FIGURE 6.30 – Optimisation de la forme de l'obstacle et du domaine accessible pour le critère $J_{1,reg}(\Sigma)$ mesuré sur le bord $\partial\Omega_{out}$.

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A^M e(u)) = 0 & \text{dans } \Omega^M, \\ A^M e(u)n = f & \text{sur } \Gamma_{N_{meca,2}}, \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_{D_{meca,2}}. \end{cases} \quad (6.38)$$

où $A^M(x)$ est le tenseur de rigidité associé à Ω^M , $e(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T)$ est le tenseur des déformations linéarisé, f le chargement surfacique. Les bords $\Gamma_{N_{meca,2}}$ et $\Gamma_{D_{meca,2}}$ sont montrés en Figure 6.32 (à gauche). Aussi, la structure initiale Ω_{init}^M , union des sous-domaines Ω_- (en rouge) et Ω_{ref} (en blanc) y est montrée (à droite), avec le bord Γ_D d'où sera mesurée l'accessibilité dans un second problème.

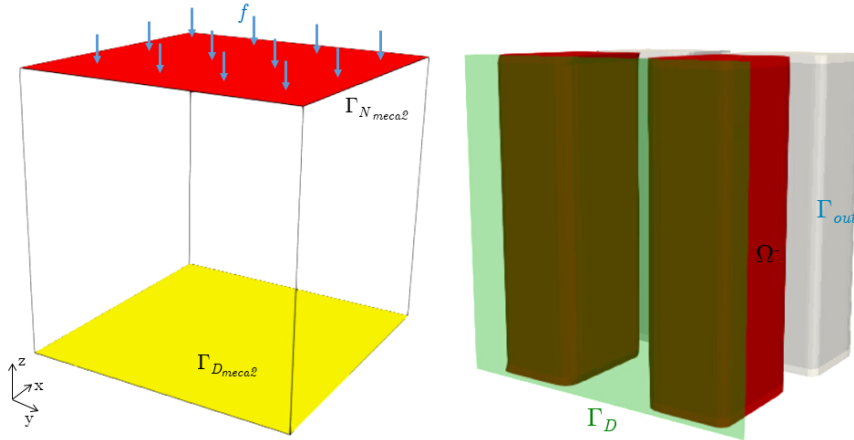


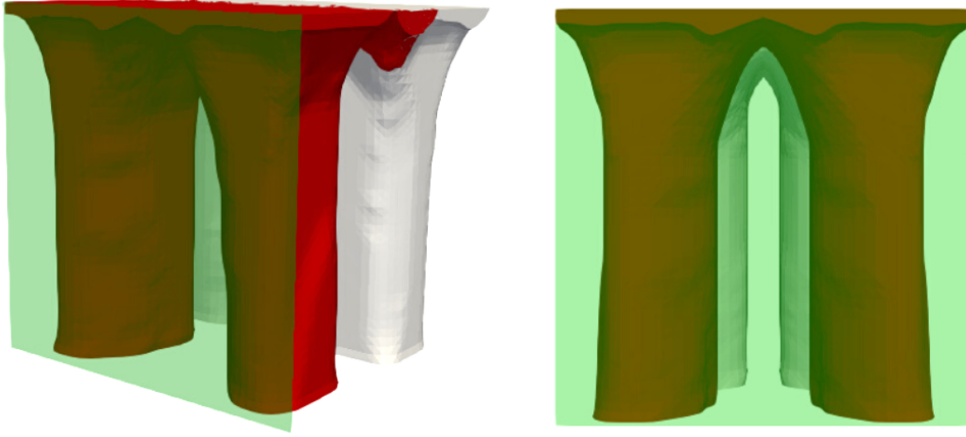
FIGURE 6.31 – Conditions aux limites pour le problème mécanique (6.38) (à gauche) et pour le problème d'accessibilité (à droite) avec les formes initiales pour Ω_- (en rouge) et Ω_{out} (en blanc).

Sur la Figure 6.32 sont montrées les formes Ω_- et Ω_{out} optimisées pour le critère de compliance suivant :

$$C(\Omega^M) = \int_{\Gamma_{N_{meca,2}}} f \cdot u ds. \quad (6.39)$$

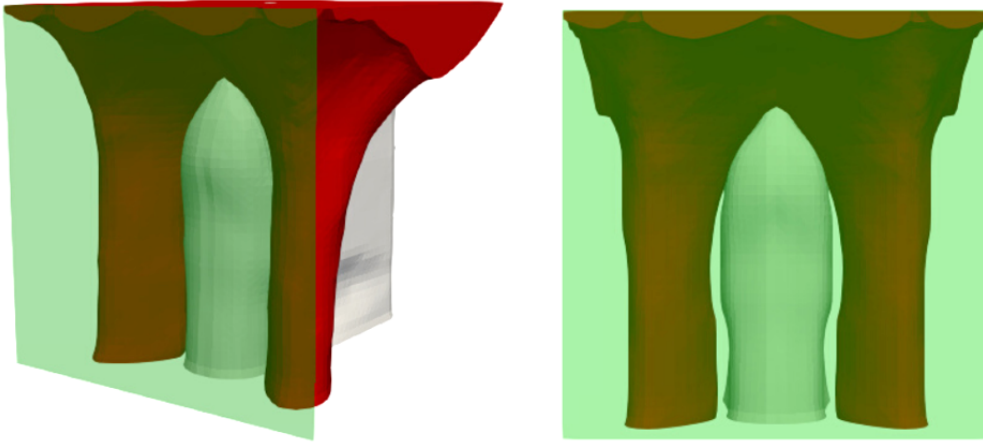
Pour cette première optimisation, les contraintes d'égalités sur les volumes $|\Omega_-|$ et $|\Omega_{out}|$ sont considérées.

Dans un deuxième temps, on considère en plus un problème d'accessibilité. Le bord du sous-domaine Ω_{out} doit être accessible depuis le bord complet Γ_D . On considère alors le critère (6.34) à minimiser dans le problème d'optimisation suivant :


 FIGURE 6.32 – Optimisation des formes Ω_- (en rouge) et Ω_{out} (en blanc) pour le critère (6.39)

$$\begin{aligned}
 \min_{\Omega^M \subset \Omega} \quad & J_{1,reg}(\Sigma, \Omega_{out}) \\
 \text{tel que} \quad & |\Omega_-| = |\Omega_{-,init}|, \\
 & |\Omega_{out}| = |\Omega_{out,init}|, \\
 & C(\Omega^M) < C(\Omega_{init}^M),
 \end{aligned} \tag{6.40}$$

Les formes Ω_- et Ω_{out} optimisées pour le problème (6.40) sont montrées en Figure 6.33. Les calculs sont réalisés sur une grille de dimension $[1 \times 0.5 \times 1]$ et comprenant 35300 noeuds. Une symétrie est réalisée selon le plan XZ pour obtenir les résultats montrés.


 FIGURE 6.33 – Optimisation des formes Ω_- (en rouge) et Ω_{out} (en blanc) pour le problème (6.40)

6.8.4 Problème d'accessibilité pour la fabrication additive

Dans cette dernière partie, le problème d'accessibilité sera appliqué à la fabrication additive. Comme dit plus haut, les supports S parfois nécessaires à la fabrication d'une pièce ω doivent être accessibles afin d'être retirés. Pour les rendre accessibles, on s'autorise à optimiser conjointement la forme de la pièce et de ses supports. Par simplicité, on introduit dans un premier temps un problème mécanique pour la structure à fabriquer notée $\Omega^M = \omega \cup S$ dans Ω . On définit l'espace suivant :

$$H_{\Gamma_{D_{spt}}}^1(\Omega)^N = \{u \in H^1(\Omega)^N : u = 0 \text{ sur } \Gamma_{D_{spt}}\} \tag{6.41}$$

On note $u_{spt} \in H_{\Gamma_{D_{spt}}}^1(\Omega)^N$ la solution de ce problème :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A^M e(u_{spt})) = g_\omega & \text{dans } \Omega^M, \\ A^M e(u_{spt})n = 0 & \text{sur } \Gamma_{N_{spt}}, \\ u_{spt} = 0 & \text{sur } \Gamma_{D_{spt}}. \end{cases} \quad (6.42)$$

où g_ω est un chargement vertical s'appliquant dans la pièce ω . A noter que ce problème modélisant la fabrication fait l'objet de travaux dans [10].

Un deuxième problème sert quand à lui à décrire le comportement de la forme ω dans un problème final. On introduit l'espace suivant :

$$H_{\Gamma_{D_{meca,3}}}^1(\omega)^N = \{u \in H^1(\omega)^N : u = 0 \text{ sur } \Gamma_{D_{meca,3}}\} \quad (6.43)$$

Le problème s'écrit, avec comme solution le déplacement u_ω dans $H_{\Gamma_{D_{meca,3}}}^1(\omega)^N$:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A_\omega e(u_\omega)) = 0 & \text{dans } \omega, \\ A_\omega e(u_\omega)n = 0 & \text{sur } \Gamma_{N_{meca,3}}, \\ u_\omega = f & \text{sur } \Gamma_{D_{meca,3}}. \end{cases} \quad (6.44)$$

Le domaine Ω et les différentes conditions aux limites des problèmes (6.44) et (6.42) sont montrées en Figure 6.34. Deux termes de compliances calculés à partir des problèmes (6.42) et (6.44) sont introduits :

$$C_S(S) = \int_{\Omega^M} g \cdot u_{spt} dx \quad \text{et} \quad C_\omega(\omega) = \int_{\Gamma_{meca,3}} f \cdot u_\omega ds \quad (6.45)$$

La fonction objectif à minimiser sera alors la somme des deux compliances et on note

$$C_2(S, \omega) = C_S(S) + C_\omega(\omega) \quad (6.46)$$

En considérant une contrainte sur le volume de chaque sous-domaine ω et S , on obtient à convergence la structure Ω^M montrée en Figure 6.35.

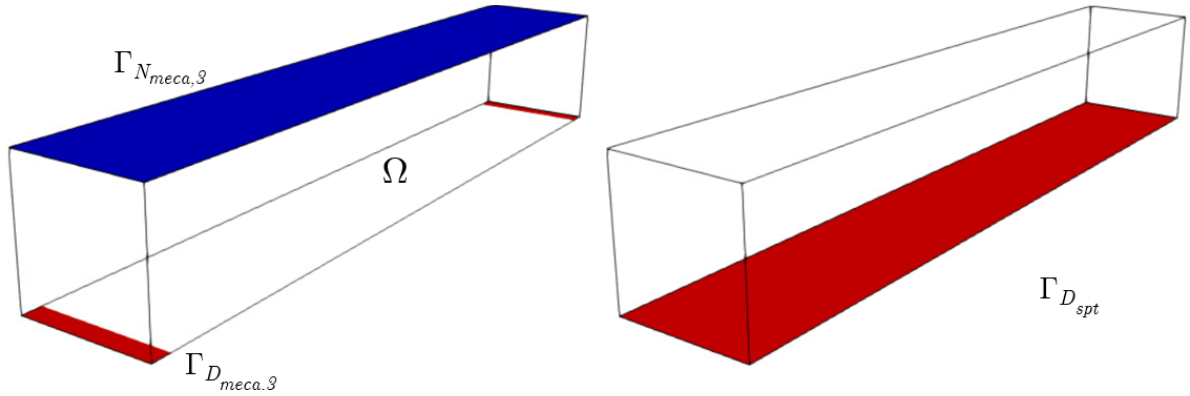


FIGURE 6.34 – Conditions aux limites pour le problème mécanique (6.44) (à gauche) et (6.42) (à droite)

Dans un deuxième temps, le problème d'accessibilité est considéré sur ce même domaine. Cette fois, les supports S doivent remplir leur rôle de supportage tout en restant accessibles depuis un bord du domaine Ω , toujours noté Γ_D . De même qu'en sous section 6.8.3, le critère (6.34) est considéré et noté $J_{1,reg}(\Sigma, S)$. Ici, la forme ω joue donc le rôle d'obstacle et est séparée du reste du domaine par sa frontière Σ . Enfin, on peut écrire le problème d'optimisation suivant :

$$\begin{aligned} \min_{\Omega^M \subset \Omega} \quad & J_{1,reg}(\Sigma, S) \\ \text{tel que} \quad & |\omega| = |\omega_{init}|, \\ & |S| = |S_{init}|, \\ & C_2(\omega, S) < C_2(\omega_{init}, S_{init}), \end{aligned} \quad (6.47)$$

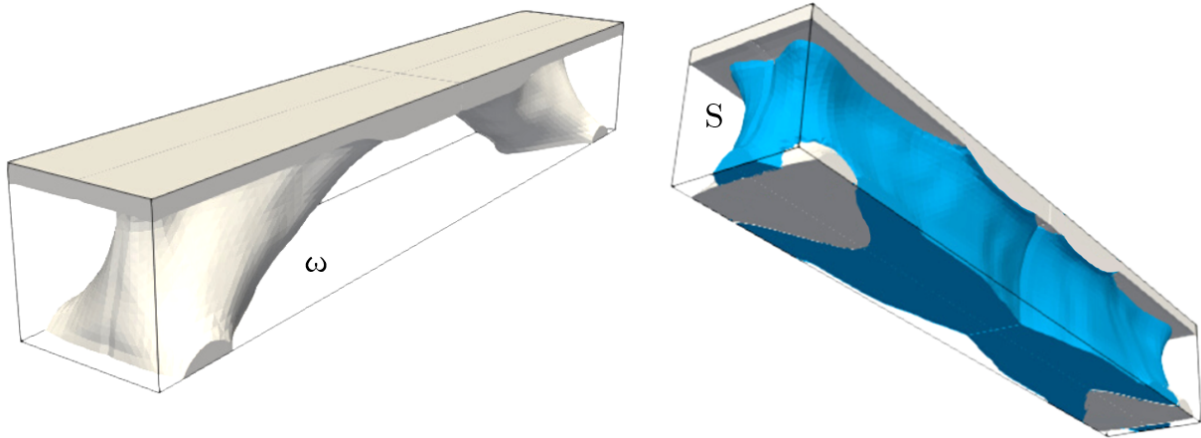


FIGURE 6.35 – Optimisation de la forme ω (en blanc) et de ses supports S (en bleu) pour la compliance $C_2(\omega, S)$

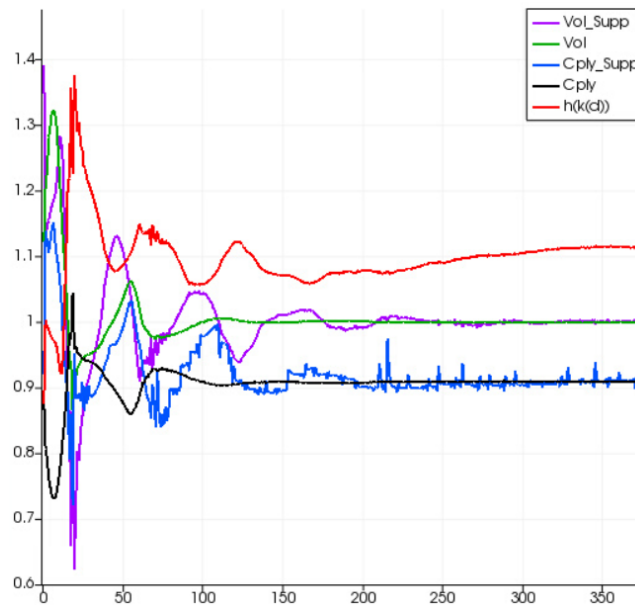


FIGURE 6.36 – Courbes de convergence pour les compliances C_ω (en noir) et C_{spt} (en bleu), le volume de la forme ω (en vert) et de ses supports (en violet). L'évolution du critère (6.34) est également tracé (en rouge), mais il n'est pas pris en compte dans l'optimisation.

Pour le cas test du pont, les bords Γ_D depuis lesquels les supports doivent être accessibles sont montrés en Figure 6.37 (en vert). Ici, deux symétries verticales sont considérées, l'accessibilité normale est donc mesurée en pratique depuis un seul bord. Par symétrie, on obtient une mesure de l'accessibilité depuis deux bords opposés (voir en Figure 6.37).

Les résultats de l'optimisation sont montrés sur cette même figure. On remarque que la forme ω garde les pieds du pont pleins, assurant le supportage du centre du tablier rendu inaccessible depuis Γ_D par les extrémités du pont.

Les courbes de convergence du critère et des différentes contraintes sont tracés en Figure 6.38.

Remarque 6.8.1. *En pratique, la zone à accéder se situe à l'intersection entre la pièce ω et les supports S , un cas simplifié est étudié ici.*

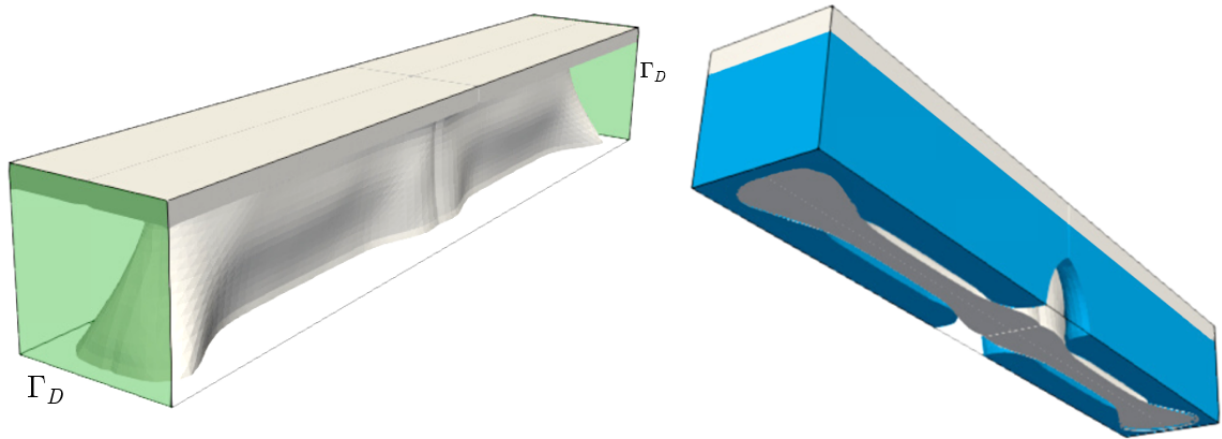


FIGURE 6.37 – Optimisation de la forme ω (en blanc) et de ses supports S (en bleu) pour le problème (6.47)

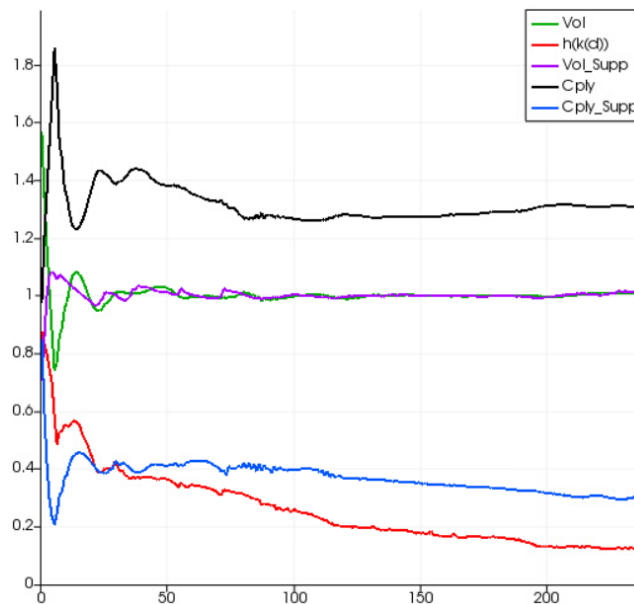


FIGURE 6.38 – Courbes de convergence pour les compliances C_ω (en noir) et C_{spt} (en bleu), le volume de la forme ω (en vert) et de ses supports (en violet) et du critère (6.34).

6.9 Conclusion

Dans ce chapitre, le problème de l'accessibilité d'une forme depuis l'extérieur de son domaine de conception a été étudié. Deux définitions de l'accessibilité ont été introduites, l'une plus générale appelée accessibilité multi-directionnelle, évalue l'accès en ligne droite dans toutes les directions depuis les points d'un bord du domaine. L'autre, appelée accessibilité normale, mesure l'accès de manière normale à un bord permettant une évaluation rapide et moins chère numériquement. Néanmoins, cette dernière définition est plus exigeante et moins souvent vérifiée. Deux critères d'optimisation sont alors introduits, un pour chaque définition et formulés grâce aux solutions d'équations eikonales. Un champ vitesse faible dans le domaine occupé par l'obstacle produit une perturbation du champ distance signée au bord, ou au point du bord du domaine depuis lequel est évalué l'accessibilité. La comparaison du champ perturbé et non perturbé met alors en valeur les zones non-accessibles du domaine depuis son bord ou un point de son bord. Les dérivées de forme d'un obstacle ou d'un domaine à accéder ont alors été formulées puis des cas test simples d'optimisation de forme ont été montrés vérifiant le modèle. Pour inclure le

problème d'accessibilité dans le cas pratique de la fabrication additive, celui-ci a d'abord été mêlé à un problème mécanique puis au problème d'optimisation conjointe de deux sous-domaines. Enfin, un cas test en 3 dimensions a été montré où l'optimisation de forme conjointe de la pièce à fabriquer et de ses supports permettent à ces derniers d'être accessibles depuis certains bords du domaine de conception.

Conclusions et perspectives

Ce mémoire de thèse présente une méthode pour optimiser la forme et la topologie de la pièce et de ses supports pour la fabrication additive métallique sur lit de poudre. L'étude des contraintes de fabrication de ce procédé prometteur a permis leur modélisation et leur intégration dans le processus d'optimisation de forme s'appuyant sur la méthode des lignes de niveaux. Les contraintes prises en compte sont celles rencontrées lors de l'étape de fabrication, de la découpe de la pièce du plateau et de retrait des supports. Les autres étapes comme celles de dépoudrage ou de traitement thermique n'ont pas été étudiées. Aussi, la question de l'orientation de la pièce par rapport au plateau n'est pas abordée. La prise en compte de ces contraintes dans le schéma d'optimisation a permis ensuite d'étudier l'optimisation de forme conjointe de la pièce et de ses supports, aussi appelée optimisation du couple pièce/support. L'objectif est d'obtenir à convergence une structure fabricable en limitant l'utilisation de matière et préservant la performance de la pièce dans un problème final.

Pour se faire, l'optimisation de forme des supports a d'abord été étudiée. Un problème mécanique simple a été mis en place pour maintenir les surfaces inclinées d'une pièce fixe. Ces surfaces sont détectées par un critère géométrique où l'angle à partir duquel la surface n'est plus considérée comme fabricable est donné par l'utilisateur, ainsi que la force imposée sur cette surface. La minimisation du critère de compliance calculé à partir des solutions de ce problème mécanique en respectant une contrainte sur le volume des supports permet à ceux-ci de maintenir ces surfaces inclinées tout en maîtrisant leur volume. Un terme de pénalisation peut également être pris en compte dans le processus d'optimisation permettant à ces supports de n'être en contact avec la pièce qu'aux endroits nécessaires. Ainsi, ils ne s'appuient que sur le bord inférieur du domaine de conception, modélisant le plateau. Ce nouveau terme de pénalisation permet de faciliter le retrait des supports en limitant les étapes de parachèvement. Le modèle de force précédent se révèle très efficace pour assurer la fabricabilité de la pièce car il nécessite peu de temps calcul, néanmoins aucune information concernant le procédé de fabrication n'est prise en compte. Un deuxième modèle est introduit s'appuyant sur une simulation thermoélastique couche par couche du procédé. Celui-ci calcule des forces équivalentes aux déplacements que subit la pièce lors de sa fabrication qui serviront à calculer un critère de compliance. Ce dernier sera à son tour minimisé. Ces deux modèles mécaniques et thermoélastiques couplés offrent une forme de support limitant les déplacements de la pièce lors de sa fabrication et assurant la fabricabilité des surfaces horizontales. En effet, le modèle de simulation ne détecte aucun déplacement au niveau des surfaces parfaitement horizontales. Aucune force n'est donc calculée sur ces zones et le recours au premier modèle de force purement mécanique est essentiel pour fabriquer ces surfaces. Jusqu'ici, les supports optimisés étaient pleins et caractérisés par un matériau aux propriétés isotropes. Cependant il est parfois utile d'utiliser des supports dits alvéolés, composés d'un quadrillage de murs fins verticaux pour limiter le volume de matière fusionnée et le temps de fabrication. Ces supports sont plutôt destinés au maintien de pièce de faible volume. Ne pouvant raisonnablement pas simuler le comportement d'une telle grille, un matériau homogénéisé au comportement orthotrope est pris en compte dans le problème mécanique résolu pour l'optimisation de forme des supports. Une contrainte sur le volume de matière utilisée pour les fabriquer est également considérée. La géométrie obtenue s'aligne cette fois légèrement plus avec la direction verticale de la grille et occupe surtout un espace plus important que les supports pleins, pour un volume de matière égal.

Le modèle de simulation couche par couche mentionné précédemment pourrait être utilisé pour l'optimisation de la forme à fabriquer, ou de ses supports, pour minimiser un critère formulé directement avec les solutions de la simulation. Néanmoins, une telle optimisation nécessiterait le calcul

du problème direct couche par couche ainsi que d'un problème adjoint rétrograde en temps à chaque itération d'optimisation. Le coût calcul serait trop important, surtout pour des cas en 3 dimensions. Un autre modèle de simulation plus simple a alors été choisi pour réaliser cette optimisation s'appuyant sur la méthode *inherent strain*. Dans ce modèle, l'hypothèse est faite que les déformations subies par la pièce sont les mêmes à chaque couche. Un chargement mécanique constant est alors imposé sur chaque forme intermédiaire indépendamment des couches précédentes, nécessitant peu de temps calcul. Les résultats obtenus ne sont que des tendances. Il est néanmoins possible de formuler des critères simples permettant l'optimisation de la forme de la pièce pour la rendre fabricable, tout en dégradant le moins possible sa performance dans un problème final. De plus, la déformation de la pièce après sa découpe partielle du plateau a pu être limitée grâce à l'optimisation de sa forme, préservant sa performance dans un problème final et son volume. Ces résultats numériques ont été vérifiés expérimentalement par la fabrication de ces géométries par le procédé SLM. La mesure physique de cette déformée a ensuite servi de référence lors d'un problème inverse permettant d'obtenir les paramètres numériques nécessaires à la calibration du modèle pour ce jeu de paramètres machine (épaisseur de couche, trajectoire du laser,...). Enfin, un critère utilisé pour l'optimisation de la forme des supports a été formulé à partir des solutions de la simulation *inherent strain*. Les supports obtenus limitent les déplacements subis par la pièce, minimisant un critère calculé directement à partir des solutions de la simulation (et non plus à partir de forces équivalentes). Aussi, ces supports ne présentent cette fois pas de surfaces inclinées.

Les différents modèles développés précédemment sont ensuite utilisés lors de l'optimisation conjointe de la pièce et de ses supports. L'objectif ici est d'obtenir une pièce fabricable et performante tout en ayant un coût de production limité. Celui-ci est calculé par le volume de la structure à fabriquer, composée de la pièce et de ses supports. Les résultats obtenus sont différents en fonction de la pénalisation des différentes contraintes d'optimisation choisie par l'utilisateur. Si les dégradations de performances de la pièce dans son problème final, à savoir la compliance et le volume, sont fortement pénalisées dans la fonction coût, alors le problème revient à considérer uniquement l'optimisation de forme des supports pour une pièce fixe. Le coût de fabrication sera alors fonction de leur volume et de leur surface de contact avec les bords non-inclinés de la pièce. On se place alors dans les cas de figure étudiés au chapitre 3. Si au contraire le coût de production est priorisé, alors le volume des supports peut être moins important, voire nul, obligeant la pièce à s'auto-supporter pour rester fabricable mais à s'éloigner de la géométrie optimisée pour le problème final. Un compromis entre les deux cas de figure est obtenu en fonction de la pénalisation de chaque contrainte, choisie dans ces travaux par l'utilisateur.

Le problème de l'accessibilité d'une forme depuis l'extérieur de son domaine de conception est abordé dans une dernière partie. Une fois fabriquée, la pièce doit être accessible par un outil longiligne pour être parachevée, notamment lors de l'étape de retrait des supports. Le critère d'accessibilité est calculé grâce aux solutions d'équations eikonales mesurant ici la distance au bord depuis lequel est défini l'accessibilité. Les points du domaine rendus non-accessibles par la présence d'un obstacle peuvent être identifiés par la perturbation du champ distance par cet obstacle. La dérivée de forme proposée permet ensuite d'optimiser la forme de l'obstacle, la pièce en pratique, ou du domaine accessible, les supports. Le lien est fait avec la fabrication additive en optimisant les deux conjointement rendant les supports accessibles en ligne droite.

L'optimisation du couple pièce/support est donc traité sous deux aspects. Dans un premier temps, un critère de fabricabilité est considéré. La géométrie optimisée de cet ensemble pièce/support dépend de la pénalisation des différentes contraintes choisie par l'utilisateur en fonction du cahier des charges. Une deuxième étude est réalisée où l'optimisation conjointe est cette fois utilisée pour résoudre un problème d'accessibilité en ligne droite des supports. Les résultats obtenus montrent une géométrie de pièce, considérée comme un obstacle, n'empêchant plus le passage d'un outil pour accéder aux supports destinés à être retirés. Ce critère est satisfait tout en garantissant une certaine performance de la pièce dans un problème final ainsi que sa fabricabilité grâce à la présence des supports.

Le sujet abordé lors de ces travaux est très large. En effet, l'optimisation de la forme de la pièce et de ses supports dépend du nombre de contraintes du procédé prises en compte. Grâce à ces travaux, la géométrie de la pièce est rendue fabricable ainsi que celle de ses supports. Néanmoins d'autres contraintes peuvent être considérées pour limiter les coûts de production. Par exemple, la prise en compte d'une contrainte de dépoudrabilité pour limiter les cavités dans la géométrie optimisée afin que la poudre ne soit pas piégée à l'intérieur. Aussi, une interface imparfaite entre la pièce et les supports

peut être prise en compte afin de modéliser le maintien de la pièce par des supports sécables. Des travaux récents ont été publiés sur le sujet [11]. Parmi les modèles développés ici, des améliorations sont aussi à envisager. Par exemple, l'intégration d'un modèle de plasticité dans les simulations du procédé développées aux chapitres 3 et 4 pourrait les rendre plus fidèles. Par ailleurs, une méthode permettant de paralléliser le calcul de la simulation *inherent strain* pourrait être étudiée. En effet le calcul de chaque couche est indépendant, il serait alors très intéressant d'un point de vue du temps de calcul de résoudre ce problème mécanique sur les différents domaines intermédiaires de manière simultanée. Toujours à propos de la méthode de simulation *inherent strain*, une simulation du procédé beaucoup plus fidèle pourrait être utilisée en amont afin de déduire les coefficients du tenseur *inherent strain* par analyse inverse. Il ne serait alors plus nécessaire de fabriquer les géométries pour calibrer le modèle. Concernant l'optimisation du couple pièce/support, un modèle de coût adapté au procédé SLM et au milieu aéronautique pourrait être utilisé pour la pondération de chaque contrainte. Connaître ainsi les véritables coûts de matière ou de parachèvement ainsi que d'utilisation en vol rendrait la fonction objectif plus représentative du véritable coût de production et d'utilisation de la pièce. Enfin d'un point de vue pratique il serait intéressant d'utiliser un algorithme de minimisation plus efficace pour la gestion de nombreuses contraintes d'optimisation. En effet, la pondération de chaque contrainte est parfois difficile à trouver pour obtenir des résultats convaincants, notamment pour ceux du chapitre 5. Des travaux ont également été effectués sur le sujet [61].

Bibliographie

- [1] Simufact additive. <https://www.simufact.com/additive-manufacturing.html>.
- [2] 3DSystem, <https://www.3dsystems.com>.
- [3] A. Abdessamad and A. Yassine. Bfgs method for linear programming. *Journal of Mathematics and System Science*, 5 :537–543, 2015.
- [4] A. Agouzoul. *Nouvelles méthodes numériques pour la simulation de l'impression 3D métallique*. PhD thesis, Université de Bordeaux, 2020.
- [5] H. Ali, H. Ghadbeigi, and K. Mumtaz. Effect of scanning strategies on residual stress and mechanical properties of selective laser melted ti6al4v. *Materials Science and Engineering : A*, 712 :175–187, 2018.
- [6] H. Ali, L. Ma, H. Ghadbeigi, and K. Mumtaz. In-situ residual stress reduction, martensitic decomposition and mechanical properties enhancement through high temperature powder bed pre-heating of selective laser melted ti6al4v. *Materials Science and Engineering : A*, 695 :211–220, 04 2017.
- [7] G. Allaire. Shape optimization by the homogenization method. *Springer Science and Business Media*, 146, 2002.
- [8] G. Allaire. *Conception optimale de structures*. Springer, Palaiseau, 2007.
- [9] G. Allaire, M. Bihr, and B. Bogosel. Support optimization in additive manufacturing for geometric and thermo-mechanical constraints. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 61 :2377–2399, 2020.
- [10] G. Allaire and B. Bogosel. Optimizing supports for additive manufacturing. *Struct. Multidiscip. Optim.*, 58(6) :2493–2515, Dec. 2018.
- [11] G. Allaire, B. Bogosel, and M. Godoy. Shape optimization of an imperfect interface : steady-state heat diffusion. preprint, Jan. 2021.
- [12] G. Allaire, C. Dapogny, G. Delgado, and G. Michailidis. Multi-phase structural optimization via a level set method. *European Series in Applied and Industrial Mathematics (ESAIM) : Control, Optimization and Calculus of Variations*, 20 :576–611, 2014.
- [13] G. Allaire, C. Dapogny, R. Estevez, A. Faure, and G. Michailidis. Structural optimization under overhang constraints imposed by additive manufacturing technologies. *Journal of Computational Physics*, 351 :295–328, Dec. 2017.
- [14] G. Allaire, C. Dapogny, and F. Jouve. *Shape and topology optimization*, pages 1–132. 2020.
- [15] G. Allaire and L. Jakabcin. Taking into account thermal residual stresses in topology optimization of structures built by additive manufacturing. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 28 :2313–2366, 07 2018.
- [16] G. Allaire, F. Jouve, and G. Michailidis. Molding direction constraints in structural optimization via a level-set method. pages 1–39, 12 2016.
- [17] G. Allaire, F. Jouve, and G. Michailidis. Thickness control in structural optimization via a level set method. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 53 :1349–1382, 06 2016.
- [18] G. Allaire, F. Jouve, and G. Michailidis. Thickness control in structural optimization via a level set method. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 53 :1349–1382, 2016.
- [19] G. Allaire, F. Jouve, and A.-M. Toader. Structural optimization using sensitivity analysis and a level-set method. *Journal of Computational Physics*, 194(1) :363–393, 2004.

- [20] J.-C. André. Dispositif pour réaliser un modèle de pièce industrielle, Juillet 1984. FR2567668.
- [21] X. Ao, H. Xia, J. Liu, and Q. He. Simulations of microstructure coupling with moving molten pool by selective laser melting using a cellular automaton. *Materials & Design*, 185 :108–230, 2020.
- [22] I. . ASTM52900-15. Standard Terminology for Additive Manufacturing – General Principles – Terminology, ASTM International, West Conshohocken, PA, USA, 2015.
- [23] A. Bandyopadhyay and S. Bose. *Additive manufacturing*. CRC press, 2019.
- [24] G. Barles. *Solution de viscosité des équations de Hamilton-Jacobi*. Springer-Verlag, 1994.
- [25] B. Barroqueiro, A. Andrade-Campos, and R. A. F. Valente. Designing self supported slm structures via topology optimization. *Journal of Manufacturing and Materials Processing*, 3(3), 2019.
- [26] Z. Barsoum and I. Barsoum. Residual stress effects on fatigue life of welded structures using lefm. *Engineering Failure Analysis*, 16(1) :449–467, 2009.
- [27] K. Bartsch, F. Lange, M. Gralow, and C. Emmelmann. Novel approach to optimized support structures in laser beam melting by combining process simulation with topology optimization. *J. of Laser Applications*, 31 :022302, 2019.
- [28] M. Baumers, P. Dickens, C. Tuck, and R. Hague. The cost of additive manufacturing : machine productivity, economies of scale and technology-push. *Technological forecasting and social change*, 102 :193–201, 2016.
- [29] M. Bendsøe. Optimal shape design as a material distribution problem. *structural optimization* 1, 193-202. *Structural Optimization*, 1 :193–202, 1989.
- [30] M. Bendsøe. Recent developments in topology design of materials and mechanisms. *ESAIM*, 11 :41–60, 2002.
- [31] M. Bendsøe and N. Kikuchi. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 71(2) :197–224, 1988.
- [32] M. Bendsøe and O. Sigmund. *Topology Optimization - Theory, Methods, and Applications*. Springer Verlag, Germany, 2004.
- [33] M. P. Bendsøe and O. Sigmund. *Topology Optimization*. Springer Berlin Heidelberg, 2004.
- [34] J. Black and R. Kohser. *Materials and Processes in Manufacturing, 13th Edition*, volume 13. DeGarmo’s, 2019.
- [35] M. Boissier. *Coupling structural optimization and trajectory optimization methods in additive manufacturing*. PhD thesis, Institut Polytechnique de Paris, 2020.
- [36] M. Boissier, G. Allaire, and C. Tournier. Additive manufacturing scanning paths optimization using shape optimization tools. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 61 :2437–2466, 2020.
- [37] O. E. L. Botello. *Simulation of Microstructural Evolution of Selective Laser Melting of Metal Powders*. PhD thesis, The University of Sheffield, 2016.
- [38] Z. Bozic, S. Schmauder, and H. Wolf. The effect of residual stresses on fatigue crack propagation in welded stiffened panels. *Engineering Failure Analysis*, 84 :346–357, 2018.
- [39] S. E. Brika, M. Letenneur, C. A. Dion, and V. Brailovski. Influence of particle morphology and size distribution on the powder flowability and laser powder bed fusion manufacturability of ti-6al-4v alloy. *Additive Manufacturing*, 31 :100929, 2020.
- [40] M. Bugatti and Q. Semeraro. Limitations of the inherent strain method in simulating powder bed fusion processes. *Additive Manufacturing*, 23 :329 – 346, 2018.
- [41] J. C ea. Conception optimale ou identification de formes, calcul rapide de la dérivée directionnelle de la fonction co ut. *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis - Modélisation Math ematique et Analyse Numérique*, 20(3) :371–402, 1986.
- [42] L. N. Carter, C. Martin, P. J. Withers, and M. M. Attallah. The influence of the laser scan strategy on grain structure and cracking behaviour in slm powder-bed fabricated nickel superalloy. *Journal of Alloys and Compounds*, 615 :338–347, 2014.

-
- [43] A. Charles, A. Elkaseer, L. Thijs, V. Hagenmeyer, and S. Scholz. Effect of process parameters on the generated surface roughness of down-facing surfaces in selective laser melting. *Applied Sciences*, 9(6), 2019.
- [44] Q. Chen, X. Liang, D. Hayduke, J. Liu, L. Cheng, J. Oskin, R. Whitmore, and A. C. To. An inherent strain based multiscale modeling framework for simulating part-scale residual deformation for direct metal laser sintering. *Additive Manufacturing*, 28 :406 – 418, 2019.
- [45] Q. Chen, J. Liu, X. Liang, and A. C. To. A level-set based continuous scanning path optimization method for reducing residual stress and deformation in metal additive manufacturing. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 360 :112719, 2020.
- [46] A. Clark. interview at BBC Horizon, 1964.
- [47] P. S. Cook and A. B. Murphy. Simulation of melt pool behaviour during additive manufacturing : Underlying physics and progress. *Additive Manufacturing*, 31 :100909, 2020.
- [48] T. Craeghs, S. Clijsters, J.-P. Kruth, F. Bechmann, and M.-C. Ebert. Detection of process failures in layerwise laser melting with optical process monitoring. *Physics Procedia*, 39 :753–759, 12 2012.
- [49] D. Dai and D. Gu. Effect of metal vaporization behavior on keyhole-mode surface morphology of selective laser melted composites using different protective atmospheres. *Applied Surface Science*, 355 :310–319, 2015.
- [50] Y. Dai. Convergence properties of the bfgs algorithm. *SIAM Journal on Optimization*, 13 :693–701, 2002.
- [51] L. D’Alvise, E. Komi, P. Kokkonen, and A. Majumdar. Numerical simulation of the selective laser melting process to support defect tolerant design. *NAFEMS conference : “Exploring the Design Freedom of Additive Manufacturing through Simulation”*, 11 2016.
- [52] C. Dapogny, C. Dobrzynski, and P. Frey. Three-dimensional adaptive domain remeshing, implicit domain meshing, and applications to free and moving boundary problems. *J. Comput. Phys.*, 262 :358–378, 2014.
- [53] C. Dapogny, A. Faure, G. Michailidis, G. Allaire, A. Couvelas, and R. Estevez. Geometric constraints for shape and topology optimization in architectural design. *Computational Mechanics*, 59 :933–965, 06 2017.
- [54] C. Dapogny and P. Frey. Computation of the signed distance function to a discrete contour on adapted triangulation. *Calcolo*, 49 :193–219, 2012.
- [55] M. C. Delfour and J.-P. Zolésio. Shape identification via metrics constructed from the oriented distance function. *Control and Cybernetics*, 34 :137–164, 2005.
- [56] Y. Devesh, R. Srivastava, and K. Dev. Design and fabrication of abs part by fdm for automobile application. *Materials Today : Proceedings*, 26 :2089–2093, 2020. 10th International Conference of Materials Processing and Characterization.
- [57] O. Diegel, A. Nordin, et al. *A practical Guide to Design for Additive Manufacturing*. 2019.
- [58] B. Durakovic. Design for additive manufacturing : Benefits, trends and challenges. *Periodicals of Engineering and Natural Sciences*, 6(2) :179–191, 2018.
- [59] P. R. E. Godlewski. *Hyperbolic systems of conservation laws*. Collection Mathématiques et Applications de la SMAI, Ellipses, 1991.
- [60] F. Feppon, G. Allaire, F. Bordeu, J. Cortial, and C. Dapogny. Shape optimization of a coupled thermal fluid-structure problem in a level set mesh evolution framework. page 413–458, 2018.
- [61] F. Feppon, G. Allaire, and C. Dapogny. Null space gradient flows for constrained optimization with applications to shape optimization. *ESAIM : Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 26, 2020.
- [62] F. Feppon, G. Allaire, and C. Dapogny. A variational formulation for computing shape derivatives of geometric constraints along rays. *ESAIM : M2AN*, 54 :181–228, 01 2020.
- [63] R. Fletcher, I. Bomze, V. Demyanov, and T. Terlaky. The sequential quadratic programming method. pages 165–214, 2010.
- [64] M. Francesco, B. Vladimir, and Q. Xiaoping. Topology optimization of self-supporting support structures for additive manufacturing. *Additive Manufacturing*, 21 :666–682, 2018.

- [65] M. Frkan, R. Konecna, G. Nicoletto, and L. Kunz. Microstructure and fatigue performance of slm-fabricated ti6al4v alloy after different stress-relief heat treatments. *Transportation Research Procedia*, 40 :24–29, 01 2019.
- [66] P. Geoffroy-Donders. *Homogenization method for topology optimization of structures built with lattice materials*. PhD thesis, Université Paris Saclay, 2018.
- [67] I. Gibson, D. Rosen, B. Stucker, and M. Khorasani. *Additive manufacturing technologies*, volume 17. Springer, 2014.
- [68] M. Godoy. Topology optimization for orthotropic supports in additive manufacturing. *Internal Report, SOFIA Project*, 2020. hal-03037101f.
- [69] J. Hadamard. *Mémoire sur le problème d’analyse relatif à l’équilibre des plaques élastiques encastrees*, volume 1. Imprimerie Nationale, 1908.
- [70] L. Harzheim and G. Graf. A review of optimization of cast parts using topology optimization - i - topology optimization without manufacturing constraints. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 30 :491–497, 12 2005.
- [71] F. Hecht. New development in FreeFem++. *J. Numer. Math.*, 20(3-4) :251–265, 2012.
- [72] <https://www.gominspect.com>. Gom inspect.
- [73] <https://www.materialise.com>. Magics materialise.
- [74] <https://www.renishaw.com>. Renishaw.
- [75] C. Hull. Apparatus for production of three-dimensional objects by stereolithography, August 1984. US4575330A.
- [76] E. P. Imade Koutiri. Influence of slm process parameters on the surface finish, porosity rate and fatigue behavior of as-built inconel 625 parts. *Journal of Materials Processing Technology*, 255 :536–546, 2018.
- [77] M. Jansen and O. Pierard. A hybrid density/level set formulation for topology optimization of functionally graded lattice structures. *Computers and Structures*, 231 :106–205, 2020.
- [78] H. Kodama. Automatic method for fabricating a three-dimensional plastic model with photo-hardening polymer. *Review of Scientific Instruments*, 52 :1770–73, 11 1981.
- [79] H. Kodama. A scheme for three-dimensional display by automatic fabrication of three-dimensional model. *IEICE Transactions on Electronics (Japanese Edition)*, J64-C, No.4 :237–41, 1981.
- [80] P. Kokkonen, L. Salonen, et al. Design guide for additive manufacturing of metal components by slm process. *Public report*, 2016.
- [81] C. Körner. Additive manufacturing of metallic components by selective electron beam melting—a review. *International Materials Reviews*, 61(5) :361–377, 2016.
- [82] H. Krueger. Standardization for additive manufacturing in aerospace. *Engineering*, 3(5) :585, 2017.
- [83] L. J. Kumar and C. G. Krishnadas Nair. *Current Trends of Additive Manufacturing in the Aerospace Industry*, pages 39–54. Springer Singapore, Singapore, 2017.
- [84] M. Langelaar. Topology optimization for additive manufacturing with contrrollable support costs. pages 3689–3699, 2016.
- [85] M. Langelaar. Topology optimization of 3d self-supporting structures for additive manufacturing. *Additive manufacturing*, 12 :60–70, 2016.
- [86] M. Langelaar. Combined optimization of part topology, support structure layout and build orientation for additive manufacturing. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 57 :1985–2004, 2018.
- [87] M. Langelaar. Integrated component-support topology optimization for additive manufacturing with post-machining. *Rapid Prototyping Journal*, 25 :255–265, 2018.
- [88] M. Langelaar. Integrated component-support topology optimization for additive manufacturing with post-machining. *Rapid Prototyping Journal*, 25 :255–265, 2019.
- [89] M. Langelaar. Topology optimization for multi-axis machining. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 351 :226–252, 2019.

- [90] M. Leary. Chapter 11 - powder bed fusion. In M. Leary, editor, *Design for Additive Manufacturing, Additive Manufacturing Materials and Technologies*, pages 295–319. Elsevier, 2020.
- [91] R. Leblanc. *Tintin et le lac aux requins*, Dargaud Films, 1972.
- [92] S. Lemkeddem, F. Khelfaoui, and O. Babahani. Calculation of energy lost by radiation and convection during laser welding of ta6v titanium alloy. *Journal of Theoretical and Applied Physics*, 12(2) :113–120, Jun 2018.
- [93] C. Li, R. Huang, Z. Ding, C. Gatenby, D. Metaxas, and J. Gore. A level set method for image segmentation in the presence of intensity inhomogeneities with application to mri. *IEEE transactions on image processing : a publication of the IEEE Signal Processing Society*, 20 :2007–16, 2011.
- [94] C. Li, J. Liu, X. Fang, and Y. Guo. Efficient predictive model of part distortion and residual stress in selective laser melting. *Additive Manufacturing*, 17 :157–168, 2017.
- [95] J. Li, X. Zhou, M. Brochu, N. Provatas, and Y. F. Zhao. Solidification microstructure simulation of ti-6al-4v in metal additive manufacturing : A review. *Additive Manufacturing*, 31 :100989, 2020.
- [96] M. Li, W. Du, A. Elwany, Z. Pei, and C. Ma. Metal binder jetting additive manufacturing. *Journal of Manufacturing Science and Engineering*, 142(9), 2020.
- [97] X. Liang, L. Cheng, Q. Chen, Q. Yang, and A. To. A modified method for estimating inherent strains from detailed process simulation for fast residual distortion prediction of single-walled structures fabricated by directed energy deposition. *Additive Manufacturing*, 23, 08 2018.
- [98] J. Liu, Q. Chen, X. Liang, and A. To. Manufacturing cost constrained topology optimization for additive manufacturing. *Frontiers of Mechanical Engineering*, 14 :213–221, 03 2019.
- [99] S. Liu, H. Zhu, G. Peng, J. Yin, and X. Zeng. Microstructure prediction of selective laser melting als10mg using finite element analysis. *Materials & Design*, 142 :319–328, 2018.
- [100] K. Manish and R. Gregory. Design for metal additive manufacturing for aerospace applications. In *Additive Manufacturing for the Aerospace Industry*, pages 67–86. Elsevier, 2019.
- [101] A. Matras. Research and optimization of surface roughness in milling of slm semi-finished parts manufactured by using the different laser scanning speed. *Materials*, 13(1), 2020.
- [102] Y. Mayi, M. Dal, P. Peyre, M. Bellet, C. Metton, and C. Moriconi. Laser-induced plume investigated by finite element modelling and scaling of particle entrainment in laser powder bed fusion. *Journal of Physics D : Applied Physics*, 53, 2019.
- [103] M. McConaha, V. Venugopal, and S. Anand. Integration of machine tool accessibility of support structures with topology optimization for additive manufacturing. *Procedia Manufacturing*, 48 :634–642, 2020. 48th SME North American Manufacturing Research Conference, NAMRC 48.
- [104] M. Megahed, H.-W. Mindt, N. N'Dri, H. Duan, and O. Desmaison. Metal additive-manufacturing process and residual stress modeling. *Integrating Materials and Manufacturing Innovation*, 5 :61–93, 2016.
- [105] P. Mercelis and J.-P. Kruth. Residual stresses in selective laser sintering and selective laser melting. *Rapid Prototyping Journal*, 12 :254–265, 10 2006.
- [106] J. Mesicek, Q.-P. Ma, J. Hajnys, J. Zelinka, M. Pagac, J. Petru, and O. Mizera. Abrasive surface finishing on slm 316l parts fabricated with recycled powder. *Applied Sciences*, 11(6), 2021.
- [107] F. Mezzadri, V. Bouriakov, and X. Qian. Topology optimization of self-supporting support structures for additive manufacturing. *Additive Manufacturing*, 21 :666–682, 2018.
- [108] G. Michailidis. *Manufacturing Constraints and Multi-Phase Shape and Topology Optimization via a Level-Set Method*. PhD thesis, Ecole Polytechnique X, 2014.
- [109] P. Michaleris. Modeling metal deposition in heat transfer analyses of additive manufacturing processes. *Finite Elements in Analysis and Design*, 86 :51–60, 2014.
- [110] A. M. Mirzendehtdel, M. Behandish, and S. Nelaturi. Topology optimization with accessibility constraint for multi-axis machining. *Computer-Aided Design*, 122 :102825, 2020.
- [111] A. M. Mirzendehtdel, M. Behandish, and S. Nelaturi. Topology optimization with accessibility constraint for multi-axis machining. *ArXiv*, abs/2002.07627, 2020.

- [112] A. M. Mirzendehtel and K. Suresh. Support structure constrained topology optimization for additive manufacturing. *Computer-Aided Design*, 81 :1–13, 2016.
- [113] M. Mohammed, J. Tatineni, B. Cadd, P. Peart, and I. Gibson. Applications of 3d topography scanning and multi-material additive manufacturing for facial prosthesis development and production. In *Proceedings of the 27th Annual International Solid Freeform Fabrication Symposium*, pages 1695–1707, 2016.
- [114] B. Mueller. Additive manufacturing technologies—rapid prototyping to direct digital manufacturing. *Assembly Automation*, 2012.
- [115] L. Mugwagwa, D. Dimitrov, S. Matope, and I. Yadroitsev. Influence of process parameters on residual stress related distortions in selective laser melting. *Procedia Manufacturing*, 21 :92–99, 2018.
- [116] L. Mugwagwa, I. Yadroitsev, and S. Matope. Effect of process parameters on residual stresses, distortions, and porosity in selective laser melting of maraging steel 300. *Metals*, 9(10), 2019.
- [117] D. Munro, C. Ayas, M. Langelaar, and F. Keulen. On process-step parallel computability and linear superposition of mechanical responses in additive manufacturing process simulation. *Additive Manufacturing*, 28 :738–749, 2019.
- [118] F. Murat and J. Simon. *Etude de problemes d’optimal design*, pages 54–62. 2006.
- [119] L. E. Murr, S. M. Gaytan, D. A. Ramirez, E. Martinez, J. Hernandez, K. N. Amato, P. W. Shindo, F. R. Medina, and R. B. Wicker. Metal fabrication by additive manufacturing using laser and electron beam melting technologies. *Journal of Materials Science & Technology*, 28(1) :1–14, 2012.
- [120] J. Nocedal and S. J. Wright. *Numerical Optimization*. Springer, 2006.
- [121] A. Olleak and Z. Xi. Simulation of layer-by-layer selective laser melting process with an efficient remeshing technique. *Procedia Manufacturing*, 34 :613–618, 2019. 47th SME North American Manufacturing Research Conference, NAMRC 47, Pennsylvania, USA.
- [122] S. Osher and R. Fedkiw. *The Level Set Methods and Dynamic Implicit Surfaces*, volume 57. 2004.
- [123] U. Paggi, R. Ranjan, L. Thijs, C. Ayas, M. Langelaar, F. van Keulen, and B. van Hooreweder. New support structures for reduced overheating on downfacing regions of direct metal printed parts. pages 1626–1640, 2019. 30th Annual International Solid Freeform Fabrication Symposium : An Additive Manufacturing Conference ; Conference date : 12-08-2019 Through 14-08-2019.
- [124] P. Patel and P. Gohil. Role of additive manufacturing in medical application covid-19 scenario : India case study. *Journal of Manufacturing Systems*, pages 811–822, 2020.
- [125] A. E. Patterson, S. L. Messimer, and P. A. Farrington. Overhanging features and the slm/dmls residual stresses problem : Review and future research need. *Technologies*, 5(2), 2017.
- [126] J. Pellens, G. Lombaert, M. Michiels, T. Craeghs, and M. Schevenels. Topology optimization of support structure layout in metal-based additive manufacturing accounting for thermal deformations. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 61 :2291–2303, 2020.
- [127] T. Pereira, J. V. Kennedy, and J. Potgieter. A comparison of traditional manufacturing vs additive manufacturing, the best method for the job. *Procedia Manufacturing*, 30 :11–18, 2019. Digital Manufacturing Transforming Industry Towards Sustainable Growth.
- [128] D. Pitassi, E. Savoia, V. Fontanari, A. Molinari, V. Luchin, G. Zappini, and M. Benedetti. *Finite Element Thermal Analysis of Metal Parts Additively Manufactured via Selective Laser Melting*. 2018. Available from : <https://www.intechopen.com/chapters/57728>.
- [129] T. Poulsen. A new scheme for imposing minimum length scale in topology optimization. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 57 :741–760, 2003.
- [130] C. Qiu, C. Panwisawas, M. Ward, H. C. Basoalto, J. W. Brooks, and M. M. Attallah. On the role of melt flow into the surface structure and porosity development during selective laser melting. *Acta Materialia*, 96 :72–79, 2015.
- [131] A. Queva, G. Guillemot, C. Moriconi, C. Metton, and M. Bellet. Numerical study of the impact of vaporisation on melt pool dynamics in laser powder bed fusion - application to in718 and ti-6al-4v. *Additive Manufacturing*, 35 :101249, 2020.

-
- [132] H. Rafi, N. Karthik, H. Gong, T. L. Starr, and B. E. Stucker. Microstructures and mechanical properties of ti6al4v parts fabricated by selective laser melting and electron beam melting. *Journal of materials engineering and performance*, 22(12) :3872–3883, 2013.
- [133] T. Raza, J. Andersson, and L.-E. Svensson. Microstructure of selective laser melted alloy 718 in as-manufactured and post heat treated condition. *Procedia Manufacturing*, 25 :450–458, 2018. Proceedings of the 8th Swedish Production Symposium (SPS 2018).
- [134] D. Riedlbauer, M. Drexler, D. Drummer, P. Steinmann, and J. Mergheim. Modelling, simulation and experimental validation of heat transfer in selective laser melting of the polymeric material pa12. *Computational Materials Science*, 93 :239–248, 2014.
- [135] L. Rudin and S. Osher. Total variation based image restoration with free local constraints. *Proceedings of the First IEEE International Conference on Image Processing*, 1 :31 – 35 vol.1, 1994.
- [136] A. Saboori, A. Aversa, G. Marchese, S. Biamino, M. Lombardi, and P. Fino. Application of directed energy deposition-based additive manufacturing in repair. *Applied Sciences*, 9(16) :3316, 2019.
- [137] A. Salmi, E. Atzeni, L. Iuliano, and M. Galati. Experimental analysis of residual stresses on als10mg parts produced by means of selective laser melting (slm). *Procedia CIRP*, 62 :458–463, 12 2017.
- [138] S. G. Sarvankar and S. N. Yewale. Additive manufacturing in automobile industry. *Int. J. Res. Aeronaut. Mech. Eng*, 7(4) :1–10, 2019.
- [139] U. Scipioni Bertoli, G. Guss, S. Wu, M. J. Matthews, and J. M. Schoenung. In-situ characterization of laser-powder interaction and cooling rates through high-speed imaging of powder bed fusion additive manufacturing. *Materials & Design*, 135 :385–396, 2017.
- [140] I. Setien, M. Chiumenti, S. van der Veen, M. San Sebastian, F. Garcíandía, and A. Echeverría. Empirical methodology to determine inherent strains in additive manufacturing. *Computers & Mathematics with Applications*, 78(7) :2282–2295, 2019. Simulation for Additive Manufacturing.
- [141] G. Shi, C. Guan, D. Quan, D. Wu, L. Tang, and T. Gao. An aerospace bracket designed by thermo-elastic topology optimization and manufactured by additive manufacturing. *Chinese Journal of Aeronautics*, 33 :1252–1259, 10 2019.
- [142] O. Sigmund, N. Aage, and E. Andreassen. On the (non-)optimality of michell structures. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 54 :361–373, 2016.
- [143] O. Sigmund and K. Maute. Topology optimization approaches : A comparative review. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 48(6) :1031–1055, 2013.
- [144] J. Simon. Sur le contrôle par un domaine géométrique. *Laboratoire d’Analyse Numérique de l’Université de Paris VI*, 1976.
- [145] S. L. Sing and W. Y. Yeong. Laser powder bed fusion for metal additive manufacturing : perspectives on recent developments. *Virtual and Physical Prototyping*, 15(3) :359–370, 2020.
- [146] R. Singh, A. Gupta, and e. a. Tripathi. Powder bed fusion process in additive manufacturing : An overview. *Materials Today : Proceedings*, 26 :3058–3070, 2020.
- [147] B. Song, S. Dong, B. Zhang, H. Liao, and C. Coddet. Effects of processing parameters on microstructure and mechanical property of selective laser melted ti6al4v. *Materials & Design*, 35 :120–125, 2012. New Rubber Materials, Test Methods and Processes.
- [148] M. Sow, T. De Terris, O. Castelnau, Z. Hamouche, F. Coste, R. Fabbro, and P. Peyre. Influence of beam diameter on laser powder bed fusion (l-pbf) process. *Additive Manufacturing*, 36 :101532, 2020.
- [149] S. Sunpreet and R. Seeram. Biomedical applications of additive manufacturing : Present and future. *Current Opinion in Biomedical Engineering*, 2 :105–115, 2017. Additive Manufacturing.
- [150] K. Svanberg. The method of moving asymptotes—a new method for structural optimization. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 24 :359–373, 1987.
- [151] A. Takezawa, A. C. To, Q. Chen, X. Liang, F. Dugast, X. Zhang, and M. Kitamura. Sensitivity analysis and lattice density optimization for sequential inherent strain method used in additive manufacturing process. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 370 :113231, 2020.

- [152] O. Teixeira, F. Silva, L. Ferreira, and E. Atzeni. A review of heat treatments on improving the quality and residual stresses of the ti-6al-4v parts produced by additive manufacturing. *Metals*, 10(8), 2020.
- [153] E. Toro. *Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics*. Springer, 1999.
- [154] Y. Ueda, K. Fukuda, K. Nakacho, and S. Endo. A new measuring method of residual stresses with the aid of finite element method and reliability of estimated values. *Journal of the Society of Naval Architects of Japan*, 1975(138) :499–507, 1975.
- [155] L. van Belle. *Analyse, modélisation et simulation de l'apparition de contraintes en fusion laser métallique*. PhD thesis, INSA de Lyon, 2013.
- [156] E. van de Ven, C. Ayas, M. Langelaar, R. Maas, and F. Keulen. Accessibility of support structures in topology optimization for additive manufacturing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 122 :2038–2056, 2020.
- [157] E. van de Ven, R. Maas, C. Ayas, M. Langelaar, and F. van Keulen. Overhang control based on front propagation in 3d topology optimization for additive manufacturing. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 369 :113–169, 2020.
- [158] B. Vayssette, N. Saintier, C. Brugger, M. Elmay, and E. Pessard. Surface roughness of ti-6al-4v parts obtained by slm and ebm : Effect on the high cycle fatigue life. *Procedia Engineering*, 213 :89–97, 2018. 7th International Conference on Fatigue Design, Fatigue Design 2017, 29-30 November 2017, Senlis, France.
- [159] L. Vese and T. Chan. A multiphase level set framework for image segmentation using the mumford and shah model. *International Journal of Computer Vision*, 50, 07 2004.
- [160] L. Vese and T. Chan. A multiphase level set framework for image segmentation using the mumford and shah model. *International Journal of Computer Vision*, 50 :271–293, 07 2004.
- [161] B. Vrancken. *Study of Residual Stresses in Selective Laser Melting*. PhD thesis, ARENBERG DOCTORAL SCHOOL, 2016.
- [162] D. Wang. Surface quality of the curved overhanging structure manufactured from 316-l stainless steel by slm. *Int J Adv Manuf Technol*, 86 :781–792, 2016.
- [163] D. Wang, Y. Yang, R. Liu, D. Xiao, and J. Sun. Study on the designing rules and processability of porous structure based on selective laser melting (slm). *Journal of Materials Processing Technology*, 213(10) :1734–1742, 2013.
- [164] D. Wang, Y. Yang, Z. Yi, and X. Su. Research on the fabricating quality optimization of the overhanging surface in slm process. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 65 :1471–1484, 2013.
- [165] M. Y. Wang and X. Wang. “color” level sets : a multi-phase method for structural topology optimization with multiple materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193(6) :469–496, 2004.
- [166] M. Y. Wang, X. Wang, and D. Guo. A level set method for structural topology optimization. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192(1) :227–246, 2003.
- [167] X. Wang and K. Chou. Microstructure simulations of inconel 718 during selective laser melting using a phase field model. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 100 :2147–2162, 02 2019.
- [168] Y. Wang, J. Gao, and Z. Kang. Level set-based topology optimization with overhang constraint : Towards support-free additive manufacturing. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 339, 05 2018.
- [169] H. Weiwei, J. Wenpeng, L. Haiyan, T. Huiping, K. Xinting, and H. Yu. Research on preheating of titanium alloy powder in electron beam melting technology. *Rare Metal Materials and Engineering*, 40 :2072–2075, 12 2011.
- [170] M. Wiese, A. Leiden, C. Rogall, S. Thiede, and C. Herrmann. Modeling energy and resource use in additive manufacturing of automotive series parts with multi-jet fusion and selective laser sintering. *Procedia CIRP*, 98 :358–363, 2021. The 28th CIRP Conference on Life Cycle Engineering, March 10 – 12, 2021, Jaipur, India.

-
- [171] T. Wohlers and T. Gornet. History of additive manufacturing. *Wohlers Report*, 2014.
- [172] J. Wu, W. Wang, and X. Gao. Design and optimization of conforming lattice structures. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 27(1) :43–56, 2021.
- [173] Z. Xiao, C. Chen, H. Zhu, Z. Hu, B. Nagarajan, L. Guo, and X. Zeng. Study of residual stress in selective laser melting of ti6al4v. *Materials & Design*, 193 :108846, 2020.
- [174] Y. Xiong, S. Yao, Z.-L. Zhao, and Y. M. Xie. A new approach to eliminating enclosed voids in topology optimization for additive manufacturing. *Additive Manufacturing*, 32 :101006, 2020.
- [175] K. Zhang, G. Cheng, and L. Xu. Topology optimization considering overhang constraint in additive manufacturing. *Computers & Structures*, 212 :86–100, 2019.
- [176] X. Zhang, J.-w. Kang, Y. Rong, P. Wu, and T. Feng. Effect of scanning routes on the stress and deformation of overhang structures fabricated by slm. *Materials*, 12 :47, 12 2018.
- [177] Y. Zhang, Q. Chen, G. Guillemot, C.-A. Gandin, and M. Bellet. Numerical modelling of fluid and solid thermomechanics in additive manufacturing by powder-bed fusion : Continuum and level set formulation applied to track- and part-scale simulations. *Comptes Rendus Mécanique*, 11 :1055–1071, 2018.
- [178] Z. Zhang, O. Ibhádode, U. Ali, C. Dibia, P. Rahnama, A. Bonakdar, and E. Toyserkani. Topology optimization parallel-computing framework based on the inherent strain method for support structure design in laser powder-bed fusion additive manufacturing. *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, page 897–923, 12 2020.
- [179] L. Zhou and W. Zhang. Topology optimization method with elimination of enclosed voids. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 60, 07 2019.
- [180] M. Zhou, Y. Liu, and Z. Lin. Topology optimization of thermal conductive support structures for laser additive manufacturing. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 353 :24–43, 2019.
- [181] M. Zhou, Y. K. Shyy, and H. L. Thomas. Checkerboard and minimum member size control in topology optimization. *Struct. Multidiscip. Optim.*, 21(2) :152–158, Apr. 2001.
- [182] M. Ziaee and N. B. Crane. Binder jetting : A review of process, materials, and methods. *Additive Manufacturing*, 28 :781–801, 2019.

Titre : Optimisation topologique du couple pièce/support pour la fabrication additive sur lit de poudre

Mots clés : Optimisation Topologique / Fabrication Additive / Selective Laser Melting / Level-set

Résumé : Cette thèse est consacrée à l'optimisation de la forme et de la topologie de pièces construites en fabrication additive. Les nouveaux procédés de fabrication suscitent beaucoup d'intérêts ces dernières années pour leur capacité à construire des pièces complexes. En particulier la fabrication additive (FA) métallique sur lit de poudre permet aux industries de ne plus être limitées par les contraintes de fabrication conventionnelles (fraisage, moulage,...). Plus spécifiquement, le procédé le plus utilisé est le SLM (Selective Laser Melting), où un laser fond le lit de poudre très localement avant qu'un racleur étale une nouvelle couche de poudre après la solidification. Néanmoins, même si ce procédé offre une grande liberté dans le design de la pièce, il possède ses propres contraintes de fabrication. Les forts gradients de température apportés par la chaleur du laser de manière successive à chaque couche contraignent fortement la pièce et peuvent même la déformer lors de la fabrication, ne la rendant plus conforme au design voulu. Une solution est alors de rajouter de la

matière autour la pièce, des supports de fabrication, pour maintenir les parties sujettes aux déformations. Ils peuvent être optimisés pour minimiser la matière utilisée, leur temps de fabrication ou de leur retrait. Cependant, il peut être préférable de modifier la géométrie de la pièce plutôt que de rajouter cette matière supplémentaire onéreuse. L'objectif est alors de concevoir une pièce différente qui n'amène pas de défaut de fabrication tout dégradant le moins possible sa performance dans son utilisation finale. L'optimisation de forme est alors une bonne solution pour obtenir des formes fabricables par ce procédé en limitant ces différentes contraintes de fabrication. Pour finir, l'optimisation topologique du couple pièce/support consiste à trouver la forme optimale d'une pièce ainsi que de ses supports, souvent nécessaires à sa fabrication. La structure finale obtenue sera optimisée en termes de coût de fabrication et d'utilisation dans un problème final donné. Pour cela, plusieurs contraintes de fabrication liées à la technologie SLM devront être prises en compte.

Title : Coupled topology optimization of part/support for metal powder bed additive manufacturing

Keywords : Topology Optimization / Additive Manufacturing / Selective Laser Melting / Level-set

Abstract : This PhD thesis is dedicated to the shape and topology of parts built in additive manufacturing. New manufacturing processes have aroused a lot of interest in recent years for their ability to build complex parts. In particular, metal powder bed additive manufacturing (AM) allows industries to no longer be limited by conventional manufacturing constraints (milling, molding, etc.). More specifically, the most widely used is the SLM (Selective Laser Melting) process. A laser melts the bed of powder very locally before a recoater spreads a new layer of powder after solidification. However, even if this process offers a great design freedom, it has its own manufacturing constraints. The strong temperature gradients brought by the heat of the laser successively to each layer strongly constrain the part and can even deform it during manufacture. One solution is then to add material around the part, called manufacturing supports, to

ensure its conformity. They can be optimized to minimize the material used, their manufacturing time or their removal. However, it may be better to change the geometry of the part rather than adding this expensive additional material. The objective is then to design a different part that does not lead to manufacturing defects while preserving its performance in its final use. Shape optimization is then a good solution for obtaining part designs that can be manufactured by this process while limiting these various manufacturing constraints. Finally, the topological optimization of the part/support couple consists in finding the optimal shape of a part as well as of its supports, often necessary for its manufacture. The final structure obtained will be optimized in terms of manufacturing cost and performance in a given final problem. For this, several manufacturing constraints related to SLM technology must be taken into account.