

THÈSE DE DOCTORAT DE

L'UNIVERSITÉ DE BRETAGNE OCCIDENTALE

ÉCOLE DOCTORALE N° 603
Éducation, Langages, Interactions, Cognition, Clinique
Spécialité : *Didactique des mathématiques*

Par

Camille DOUKHAN

**Modèles praxéologiques dans la transition secondaire-supérieur :
le cas des probabilités en filière biologie**

TOME 2 : ANNEXES

Thèse présentée et soutenue à Rennes, le 9 décembre 2021

Unité de recherche : Centre de recherche sur l'éducation, les apprentissages et la didactique

Rapporteurs avant soutenance :

Alejandro GONZALEZ-MARTIN Professeur, Université de Montréal
Corinne HAHN Professeure (HDR), ESCP Europe

Composition du Jury :

Présidente :	Patricia MARZIN-JANVIER	Professeure (HDR), Université de Bretagne Occidentale
Examineurs :	Alejandro GONZALEZ-MARTIN	Professeur, Université de Montréal
	Corinne HAHN	Professeure (HDR), ESCP Europe
	Laurent VIVIER	Maître de conférences (HDR), Université de Paris

Dir. de thèse :	Ghislaine GUEUDET	Professeure (HDR), Université de Bretagne Occidentale
Co-dir. de thèse :	Fabrice VANDEBROUCK	Professeur (HDR), Université de Paris

Ce projet a bénéficié du soutien financier de la Région Bretagne

Table des Annexes

		329
A	Documents de cours – Terminale – Probabilités conditionnelles . . .	331
A.1	Polycopié de cours distribué en classe de terminale – Probabilités conditionnelles	331
B	Documents de cours – Terminale – Lois continues	337
B.1	Polycopié de cours distribué en classe de terminale – Lois continues	337
B.2	Polycopié des corrections des exercices 95, 100, 109 et 134 distribué en classe de terminale – Lois continues	348
B.3	Extraits du tableau lors de la séance n°1 "I.1. Rappels" – Exemples de variables aléatoires discrètes	353
C	Plan du cours du module de probabilités à l'Université	355
D	Documents de cours – Université – Probabilités conditionnelles . . .	358
D.1	Diapositives de cours – Probabilités conditionnelles	358
D.2	Feuille de TD – Probabilités conditionnelles	361
E	Documents de cours – Université – Lois continues	363
E.1	Diapositives de cours – Lois continues	363
E.2	Feuille de TD – Lois continues	367
F	Grille d'analyse du test	369
G	Grille d'entretien étudiants	371
H	Feuille d'entraînement	373
I	Transcription des entretiens	375
I.1	Entretien avec Maud	375
I.2	Entretien avec Cloe	380
I.3	Entretien avec Adam	388
I.4	Entretien avec Ben	395
J	Copies d'examen d'étudiants	409

Table des Annexes

J.1	Copie de Maud	409
J.2	Copie de Adam	418

Annexes

A Documents de cours – Terminale – Probabilités conditionnelles

A.1 Polycopié de cours distribué en classe de terminale – Probabilités conditionnelles

A compléter

PROBABILITES CONDITIONNELLES

Dans tout le chapitre, E désigne l'ensemble des issues d'une expérience aléatoire, appelé univers, et P désigne une loi de probabilité sur E .

I. Probabilité conditionnelle

Définition : Soit A et B deux événements avec ...

On appelle probabilité conditionnelle de B sachant A , la probabilité que l'événement B se réalise sachant que l'événement A est réalisé. Elle est notée $P_A(B)$ et est définie par : ...

...

Exemples :  Vidéo https://youtu.be/SWmkdKxXf_I

1) Je tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes.

Soit A l'événement "Le résultat est un pique". Soit B l'événement "Le résultat est un roi".

Donc $A \cap B$ est l'événement "Le résultat est le roi de pique".

Alors : ...

Donc la probabilité que le résultat soit un roi sachant qu'on a tiré un pique est :

...

2) Un sac contient 50 boules, dont 20 boules rouges et 30 boules noires, marquées soit "Gagné", soit "Perdu". Sur 15 boules rouges, il est marqué Gagné. Sur 9 boules noires, il est marqué Gagné. Je tire au hasard une boule dans le sac. Soit R l'événement "On tire une boule rouge". Soit G l'événement "On tire une boule marquée Gagné".

Donc $R \cap G$ est l'événement "Je tire une boule rouge marquée Gagné".

Alors : ...

Donc la probabilité de tirer une boule marquée Gagné sachant qu'elle est rouge est :

$$P_R(G)$$

Remarques

Je peux représenter une telle expérience aléatoire par un tableau à double entrée :

Exemple précédent :

	Noir	Rouge	Total
Gagné	...		
Perdu			
Total			

Cas général :

	A	\bar{A}	Total
B	...		
\bar{B}			
total			

De plus, en situation d'équiprobabilité : ...

Propriétés (conséquences de la définition): Soit A et B deux événements avec $P(A) \neq 0$.

- ...

- ...

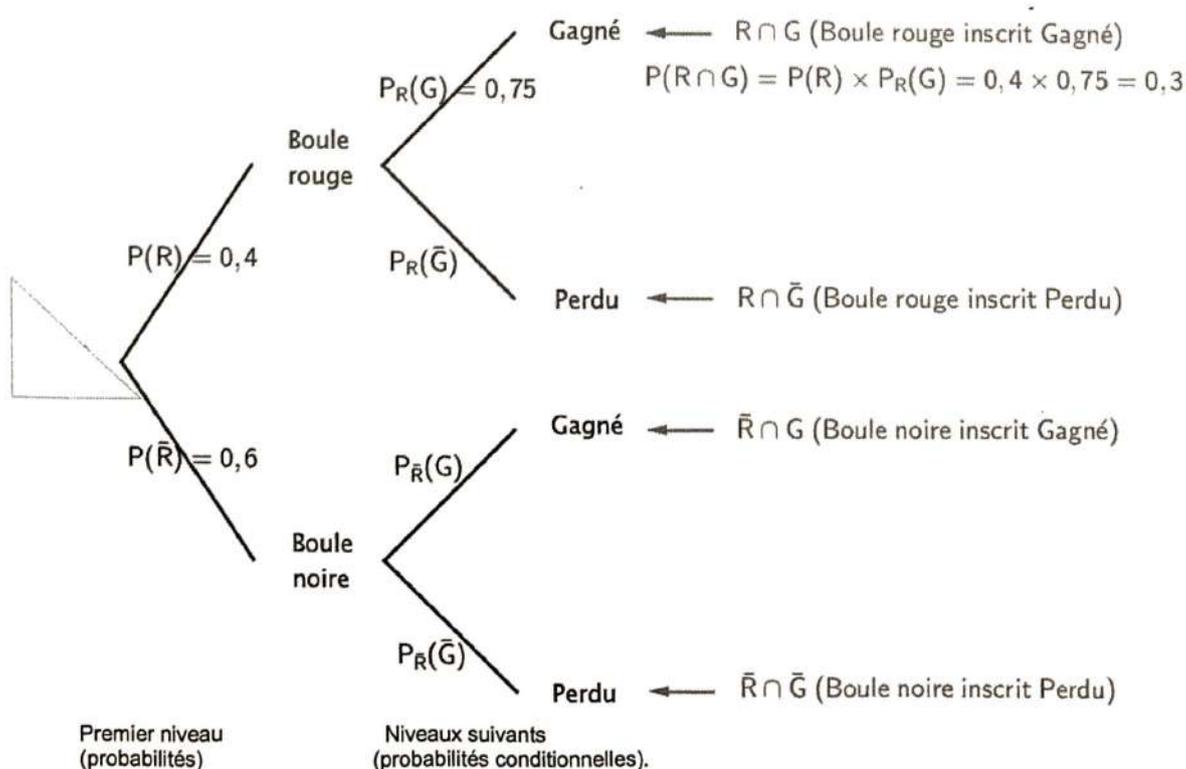
- $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) \dots$

II. Arbre pondéré

1) Exemple  Vidéo <https://youtu.be/Pc5kJBkPDbo>

Reprenons le 2^e exemple étudié au paragraphe I.

L'expérience aléatoire peut être schématisée par un arbre pondéré (ou arbre de probabilité).



2) Règles

Règle 1 : La somme des probabilités des branches issues d'un même nœud est égale à 1.

Exemples :

- A partir du premier nœud : $P(R) + P(\bar{R}) = 1$

- A partir du nœud "Boule rouge": $P_R(G) + P_R(\bar{G}) = 1$

(formule donnée au paragraphe I).

Règle 2 : Le produit des probabilités indiquées sur les branches d'un chemin est égal à la probabilité de l'intersection des événements rencontrés (le long de ce chemin).

Exemple : $P(R \cap G) = P(R) \times P_R(G)$

Règle 3 (Formule des probabilités totales) : La probabilité d'un événement est égale à la somme des probabilités de chacun des chemins qui y conduisent.

Exemples

1) Deux chemins conduisent à l'événement G ($R \cap G$ et $\bar{R} \cap G$).

... $P(G) = P(R \cap G) + P(\bar{R} \cap G)$

2)  Vidéo <https://youtu.be/qTpTBoZA7zY>

Lors d'une épidémie chez des bovins, on s'est aperçu que si la maladie est diagnostiquée suffisamment tôt chez un animal, on peut le guérir ; sinon la maladie est mortelle.

Un test est mis au point et essayé sur un échantillon d'animaux dont 2 % est porteur de la maladie.

On obtient les résultats suivants :

- si un animal est porteur de la maladie, le test est positif dans 85 % des cas ;
- si un animal est sain, le test est négatif dans 95 % des cas.

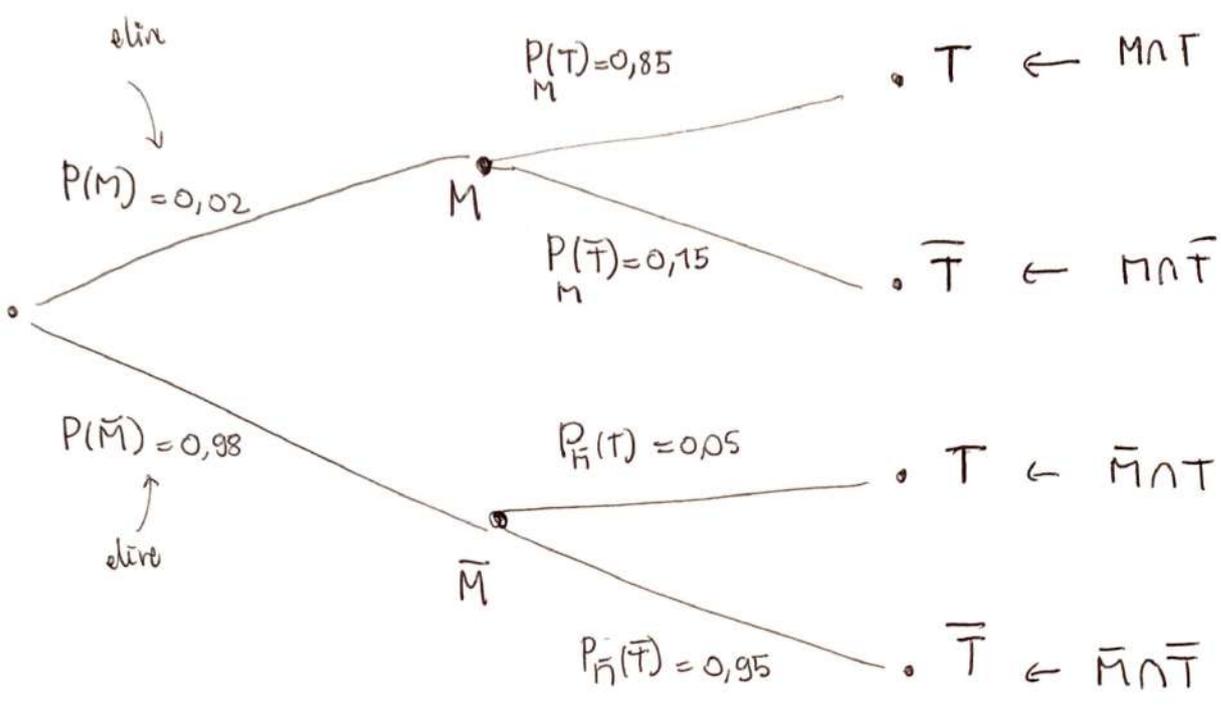
On choisit de prendre ces fréquences observées comme probabilités pour toute la population et d'utiliser le test pour un dépistage préventif de la maladie.

Soient respectivement M et T les événements « Être porteur de la maladie » et « Avoir un test positif ».

1) Un animal est choisi au hasard. Quelle est la probabilité que son test soit positif ?

D'après BAC S, Antilles-Guyanne 2010

2) Si le test du bovin est positif, quelle est la probabilité qu'il soit malade ?



1) $P(T) = P(M \cap T) + P(\bar{M} \cap T)$ "élève" d'après la formule des probabilités totale.
 $= P(M) \times P_n(T) + P(\bar{M}) \times P_{\bar{n}}(T)$ "élève"
 $= 0,066$ "e"

la probabilité que le test soit positif est 0,066 "e"
 soit 6,6%

2) $P_T(M)$ "e1", $P(M \cap T)$ "e2"
 $P_{\bar{n}}(T)$ "e3" $\left(P_T(\bar{M}) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)} = \frac{17}{66} \right)$ "e"

III. Indépendance de deux événements

"si le test est ⊕ la proba qu'il soit malade est de 26% environ"

Définition : Deux événements A et B de probabilité non nulle sont indépendants si et seulement si $P_A(B) = P(B)$ (ce qui équivaut à $P_B(A) = P(A)$).

Propriété : A et B sont indépendants, si et seulement si ...

Exemples :

1) Vidéo https://youtu.be/wdiMq_ITk1w

Je tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes.
 Soit R l'événement "Je tire un roi". Soit T l'événement "Je tire un trèfle".
 Alors $R \cap T$ est l'événement "On tire le roi de trèfle".

$P(R) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$, $P(T) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$ et $P(R \cap T) = \frac{1}{32}$. Donc $P(R) \times P(T) = \frac{1}{8} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{32} = P(R \cap T)$.

Les événements R et T sont donc indépendants.

Ainsi, par exemple, $P_T(R) = P(R)$. Ce qui se traduit par la probabilité de tirer un roi parmi les trèfles et égale à la probabilité de tirer un roi parmi toutes les cartes.

Contre-exemple : Je reconduis l'expérience précédente en ajoutant deux jokers au jeu de cartes.
Ainsi :

$$P(R) = \frac{4}{34} = \frac{2}{17}, \quad P(T) = \frac{8}{34} = \frac{4}{17} \quad \text{et} \quad P(R \cap T) = \frac{1}{34}. \quad \text{Donc} \quad P(R) \times P(T) = \frac{2}{17} \times \frac{4}{17} = \frac{8}{289} \neq P(R \cap T).$$

Les événements R et T ne sont donc pas indépendants.

2) Utiliser l'indépendance de deux événements  Vidéo <https://youtu.be/SD9H5OYYLz0>

Dans une population, un individu est atteint par la maladie m avec une probabilité égale à 0,005 et par la maladie n avec une probabilité égale à 0,01.

On choisit au hasard un individu de cette population.

Soit M l'événement "L'individu a la maladie m ". Soit N l'événement "L'individu a la maladie n ".

Les événements M et N sont supposés indépendants.

Calculer la probabilité de l'événement E "L'individu a au moins une des deux maladies".

La probabilité qu'un individu choisi au hasard ait au moins une des deux maladies est égale à 0,01495.

Propriété : Si A et B sont indépendants alors \bar{A} et B sont indépendants. De plus, les événements \bar{A} et \bar{B} sont également indépendants.

Démonstration (exigible BAC)

Exemple :  Vidéo <https://youtu.be/yIvN6Dh-bDg>

Lors d'un week-end prolongé, *Bison futé* annonce qu'il y a 42% de risque de tomber dans un bouchon sur l'autoroute A6 et 63% sur l'autoroute A7.

Soit A l'événement "On tombe dans un bouchon sur l'autoroute A6."

Soit B l'événement "On tombe dans un bouchon sur l'autoroute A7."

Les événements A et B sont supposés indépendants.

Alors les événements \bar{A} et B sont également indépendants et :

...

Interprétons ce résultat : ...

B Documents de cours – Terminale – Lois continues

B.1 Polycopié de cours distribué en classe de terminale – Lois continues

LOIS À DENSITÉ (Partie 1)

III. Loi normale centrée réduite

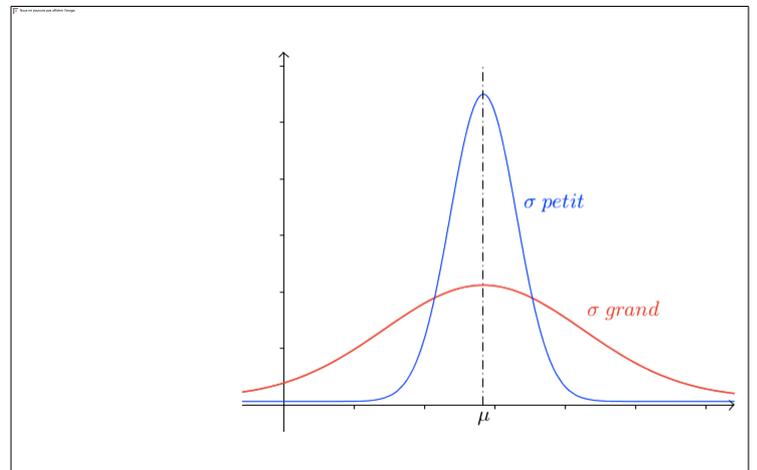
1) Définition et propriétés

Propriété : La fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ est une fonction de densité.

(elle est définie, positive et continue sur \mathbb{R} et son intégrale sur \mathbb{R} est égale à 1).

Définition : La loi normale centrée réduite, notée $N(0; 1)$, est par définition la loi continue ayant pour densité de probabilité la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

La représentation graphique de la fonction densité de la loi $N(0; 1)$ est appelée *courbe en cloche* ou *courbe de Gauss* (1777-1855, lire « les arpenteurs du monde » roman).



Remarque fondamentale : dans un repère orthogonal, cette courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées (la fonction f étant une fonction paire sur \mathbb{R} puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f(x) = f(-x)$).

Conséquence : Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite $N(0; 1)$: $P(X \leq 0) = P(X \geq 0) = 0,5$ (par symétrie).

Contextes d'utilisation : Taille d'un individu, fréquence cardiaque, quotient intellectuel, ... les exemples de distribution suivant une loi normale sont nombreux (d'où son nom).

Remarque :

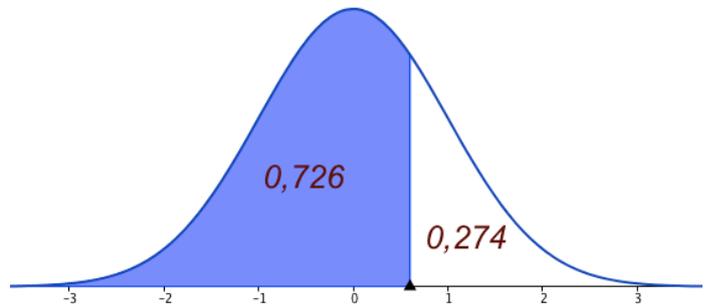
Il n'est pas possible de déterminer une forme explicite de primitives de la fonction densité de la loi normale centrée réduite (et cette impossibilité est mathématiquement démontrée!).

Exemples de calculs de probabilités avec une calculatrice :

a) Calculer $P(-5 \leq X \leq 5)$

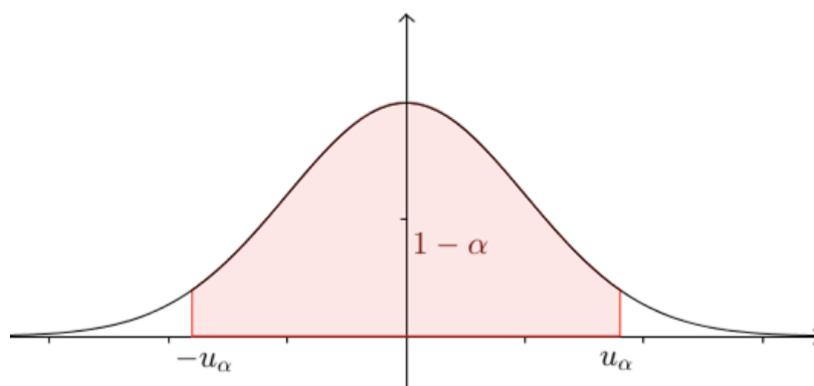
b) $P(X \leq 0,6)$

c) En déduire $P(X \geq 0,6)$ et $P(X \leq -0,6)$.



d) Déterminer $u \in \mathbb{R}$ tel que $P(X \leq u) = 0,75$

Propriété : Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite $N(0; 1)$.
 Pour tout $\alpha \in]0; 1[$, il existe un unique réel positif u_α tel que $P(-u_\alpha \leq X \leq u_\alpha) = 1 - \alpha$.



Démonstration (exigible BAC)

Par symétrie de la courbe de la fonction densité f , pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a :

$$P(-t \leq X \leq t) = 2P(0 \leq X \leq t) = 2 \int_0^t f(x) dx = 2F(t) \quad \text{où } F \text{ est la fonction définie sur }]0; +\infty[$$

par $F(t) = \int_0^t f(x) dx$

La fonction F est dérivable sur \mathbb{R} : elle est donc continue.

De plus sa dérivée est f qui est une fonction strictement positive sur \mathbb{R} : F est donc strictement croissante sur $[0; +\infty[$, il en est de même pour la fonction $2F$.

L'aire totale sous la courbe est égale à 1, donc par symétrie l'aire sous la courbe sur $[0; +\infty[$ vaut 0,5. On a donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} F(t) = 0,5$. Et donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} 2F(t) = 1$.

Dressons le tableau de variations :

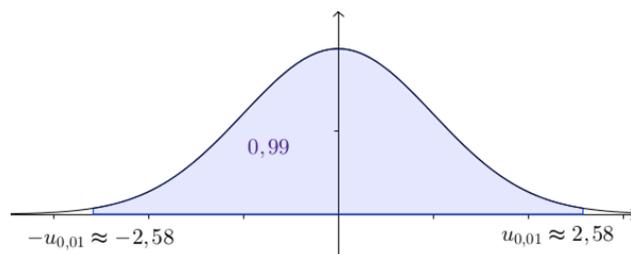
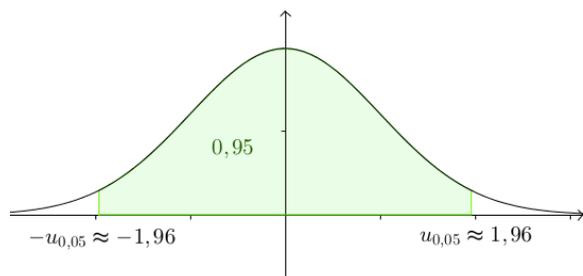
t	0	$+\infty$
$2F(t)$	0	1

↗

Si $\alpha \in]0; 1[$ alors $1 - \alpha \in]0; 1[$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires et le tableau de variation, il existe un unique réel u_α de $[0; +\infty[$ tel que $2F(t) = 1 - \alpha$.

Cas particuliers: $u_{0,05} \approx 1,96$ et $P(-1,96 \leq X \leq 1,96) \approx 0,95$ et $u_{0,01} \approx 2,58$ et $P(-2,58 \leq X \leq 2,58) \approx 0,99$



Exemple : Déterminons avec une calculatrice, une valeur approchée du réel $u_{0,08}$ tel que $P(-u_{0,08} \leq X \leq u_{0,08}) = 1 - 0,08 = 0,92$.

2) Espérance mathématique

Propriété : Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite $N(0; 1)$. Alors $E(X) = 0$. De plus la variance $V(X)$ est égale à 1 et donc l'écart-type $\sigma(X)$ est égal à 1.

Admis. Cette propriété explique le nom de loi normale centrée réduite.

IV. Lois normales

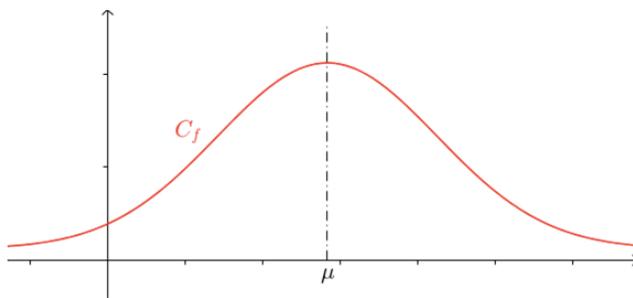
1) Définition

Définition : Soit un nombre réel m et un nombre réel strictement positif σ .
Dire qu'une variable aléatoire continue X suit la loi normale d'espérance μ et d'écart-type σ , notée $N(\mu; \sigma^2)$, signifie par définition que la variable aléatoire $\frac{X - \mu}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite $N(0;1)$ (et alors $\frac{X - \mu}{\sigma}$ est appelée la variable centrée réduite associée à X).

Propriété (admise) : Dans ce cas, l'espérance de X est égale à μ , sa variance est égale à σ^2 et son écart-type à σ .

Remarques

- La courbe représentative (ci-contre) de la fonction densité de la loi $N(\mu; \sigma^2)$ est une *courbe en cloche* symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \mu$.



- La courbe est d'autant plus "resserrée" autour de son axe de symétrie que l'écart-type σ est petit.

- L'écart-type est un caractère de dispersion autour de l'espérance qui est un caractère de position.

Exemple d'utilisation d'une calculatrice pour calculer une probabilité.

Une compagnie de transport possède un parc de 200 cars. On appelle X , la variable aléatoire qui, à un car choisi au hasard, associe la distance journalière parcourue en km.

On suppose que X suit la loi normale $N(80; 14^2)$ (d'espérance 80 et d'écart-type 14).

a) Quelle est la probabilité, à 10^{-3} près, qu'un car parcourt entre 70 et 100 km par jour ?

b) Déterminer le réel t tel que $P(X \leq t) = 0,9$. Interpréter.

a) Avec une calculatrice TI : comme pour la loi $N(0; 1)$,

dans le menu « distrib » (touches 2nde puis var) avec le choix n° 2

« normalFRép(70 ;100 ;80 ;14) » j'obtiens : $P(70 \leq X \leq 100) \approx 0,686$.

La probabilité qu'un car parcourt entre 70 et 100 km par jour est d'environ 68,6%.

b) Avec une TI : comme pour la loi $N(0; 1)$,

dans le menu « distrib » (touches 2nde puis var) avec le choix n° 3

« FracNormale(0,9 ;80 ;14) » j'obtiens : $t \approx 98$.

90% des cars parcourent moins de 98 km par jour.

2) Déterminer l'espérance ou l'écart-type d'une loi normale, exemples

n°1 : Soit X une variable aléatoire qui suit une loi normale $N(3; \sigma^2)$ où σ est un réel strictement positif à déterminer sachant que $P(X < 2) = 0,4$.

n°2 : Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale $N(\mu; 10^2)$ où μ est un réel à déterminer sachant que $P(X < 30) = 0,7$.

Méthode : Ces problèmes peuvent être résolus grâce à la calculatrice, en se ramenant au cas d'une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite $N(0; 1)$.

n°1 : Par définition, comme X suit la loi $N(3; \sigma^2)$, la variable aléatoire $Z = \frac{X-3}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite.

$$\text{De plus : } (X < 2) \Leftrightarrow \left(\frac{X-3}{\sigma} < \frac{2-3}{\sigma}\right)$$

(soustraire 3 ne change pas l'ordre et, diviser par σ non plus car $\sigma > 0$)

Ces deux événements ont donc la même probabilité :

$$P(X < 2) = P\left(\frac{X-3}{\sigma} < \frac{2-3}{\sigma}\right) = P\left(Z < \frac{-1}{\sigma}\right)$$

Je peux ainsi utiliser la calculatrice pour déterminer $\frac{-1}{\sigma}$ tel que $P\left(Z < \frac{-1}{\sigma}\right) = 0,4$.

Et j'obtiens (avec « FracNormale(0,4;0 ;1) ») : $\frac{-1}{\sigma} \approx -0,253$ soit $\sigma \approx 3,95$.

b) Ici, comme X suit la loi $N(\mu; 10^2)$, par définition la variable aléatoire $Z = \frac{X-\mu}{10}$ suit la loi normale centrée réduite.

$$\text{De plus : } (X < 30) \Leftrightarrow \left(\frac{X-\mu}{10} < \frac{30-\mu}{10}\right)$$

(soustraire un réel quelconque μ ne change pas l'ordre et, diviser par 10 non plus car $10 > 0$)

Ces deux événements ont donc la même probabilité :

$$P(X < 30) = P\left(\frac{X-\mu}{10} < \frac{30-\mu}{10}\right) = P\left(Z < \frac{30-\mu}{10}\right)$$

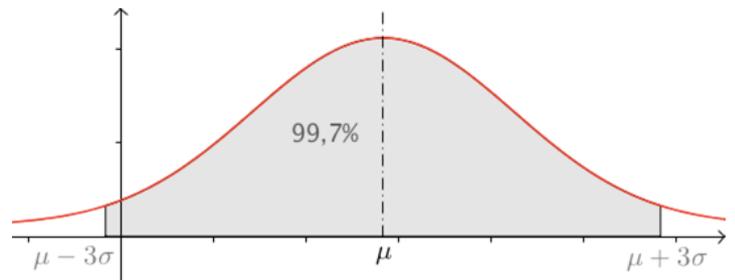
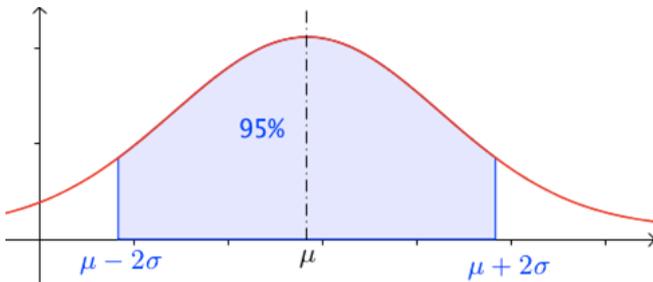
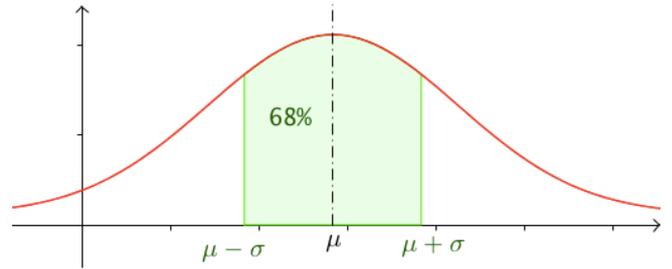
Je peux ainsi utiliser la calculatrice pour déterminer $\frac{30-\mu}{10}$ tel que $P\left(Z < \frac{30-\mu}{10}\right) = 0,7$.

Et j'obtiens (avec « FracNormale(0,7 ;0 ;1) ») : $\frac{30-\mu}{10} \approx 0,524$ soit $\mu \approx 30 - 0,524 \times 10$ ie $\mu \approx 24,8$.

3) Intervalles à "1, 2 ou 3 sigmas"

Propriétés :

- a) $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 0,683$
- b) $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0,954$
- c) $P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \approx 0,997$



III. Théorème de Moivre-Laplace (18^{ème} siècle)

Rappel : Soit une variable aléatoire X égale au nombre de succès lors de n répétitions d'une épreuve de Bernoulli de paramètre p . Une telle variable X suit alors la loi binomiale $B(n; p)$. Dans ce cas : $E(X) = np$ et $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$.

Théorème : Soit n un entier naturel non nul et $p \in]0;1[$.

Soit X_n une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $B(n; p)$.

Soit $Z_n = \frac{X_n - E(X_n)}{\sigma(X_n)}$ la variable centrée réduite associée à X_n .

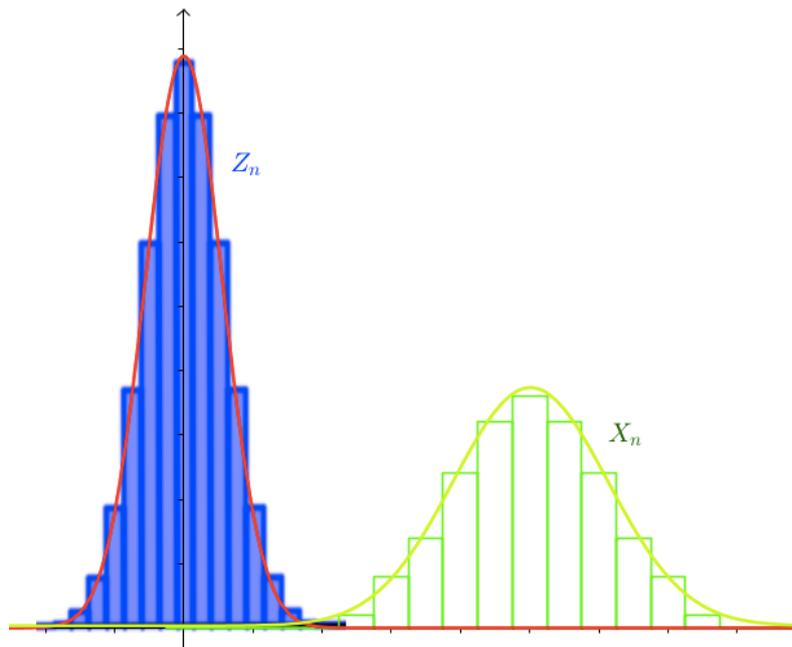
Alors pour tous réels a et b tels que $a < b$, on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(a \leq Z_n \leq b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.

- Admis -

Remarques

- Ce théorème traduit le fait que la probabilité d'un événement associé à une loi binomiale peut être approchée par une probabilité d'un événement associé à la loi normale centrée réduite puisque $\int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = P(a \leq Z \leq b)$ où Z suit la loi $N(0; 1)$.

-En réalité, c'est un cas particulier du « théorème central limite » qui établit sous certaines conditions la convergence [en loi de la somme] d'une suite de variables aléatoires indépendantes qui suivent la même loi (pas forcément la loi binomiale) vers la loi normale $N(0; 1)$!



Exemple d'application du théorème de Moivre-Laplace

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètre $n=1000$ et $p=0,3$.

Calculons $P(X \leq 320)$.

$$E(X) = n \times p = 1000 \times 0,3 = 300$$

$$\sigma(X) = \sqrt{n \times p \times (1-p)} = \sqrt{1000 \times 0,3 \times 0,7} \approx 14,5$$

D'après le théorème de Moivre-Laplace, la loi de $Z = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)} \approx \frac{X - 300}{14,5}$ peut être approchée par la loi normale centrée réduite.

Ainsi, à l'aide de la calculatrice, on :

$$P(X \leq 320) = P\left(\frac{X - 300}{14,5} \leq \frac{320 - 300}{14,5}\right) \approx P(Z \leq 1,38) \approx 0,916$$

Remarque :

De nos jours, un tel exemple est un peu idiot puisqu'avec la calculatrice, je peux directement obtenir une valeur approchée de $P(X \leq 320) \approx 0,921$ avec « binomFRép(1000;0,3;320) » (ou même la valeur exacte avec un ordinateur).

Cependant, jusqu'à une époque pas si ancienne (avant l'ère du numérique) il était très pratique de pouvoir se ramener à une seule loi et de n'avoir à connaître que la table des résultats pour la loi $N(0; 1)$.

LOIS À DENSITÉ (partie 1)

IV Loi exponentielle

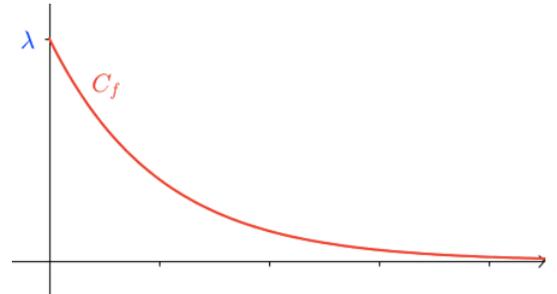
1) Définition et propriétés

Propriété : Soit $\lambda \in]0; +\infty[$ un réel strictement positif.

La fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par : $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ est une fonction de densité (elle est définie, positive et continue sur $[0; +\infty[$ et son intégrale sur $[0; +\infty[$ est égale à 1).

Définition : La loi de probabilité continue ayant pour densité la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par : $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ est appelée la loi exponentielle de paramètre λ .

Contextes d'utilisation : Durée de vie de composants électroniques, tremblement de terre, désintégration d'un noyau radioactif, ...



Propriété : Soit X une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda \in]0; +\infty[$.

Alors, pour tous $a \in [0; +\infty[$ et $b \in [0; +\infty[$:

$$P(a \leq X \leq b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$$

(et en particulier $P(X \leq b) = 1 - e^{-\lambda b}$ et $P(X \geq b) = e^{-\lambda b}$)

Démonstration : Soient $a \in [0; +\infty[$ et $b \in [0; +\infty[$.

$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b \lambda e^{-\lambda t} dt$ (par définition). Donc $P(a \leq X \leq b) = [-e^{-\lambda t}]_a^b = -e^{-\lambda b} + e^{-\lambda a}$ d'où le résultat attendu.

En particulier pour $a = 0$: $P(0 \leq X \leq b) = 1 - e^{-\lambda b}$ ou encore $P(X \leq b) = 1 - e^{-\lambda b}$.

Puis en passant à l'événement contraire : $P(X > b) = 1 - (1 - e^{-\lambda b}) = e^{-\lambda b}$.

Exemple

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre 0,1.

$$P(1 \leq X \leq 3) = e^{-0,1} - e^{-3 \times 0,1} = e^{-0,1} - e^{-0,3} \approx 0,164$$

2) Espérance mathématique

Définition : Soit X une variable aléatoire continue suivant une loi de probabilité de densité une fonction f définie sur un intervalle de la forme $[a; +\infty[$ où $a \in \mathbb{R}$.

Dans ce cas, l'espérance mathématique de X est définie par :

$$E(X) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b t \times f(t) dt \text{ quand cette limite existe et que c'est un nombre réel !}$$

Remarques

- C'est le cas pour les lois normales et pour les lois exponentielles.

- Cette définition prolonge au cas des intervalles de la forme $[a; +\infty[$, la définition de l'espérance d'une variable aléatoire continue sur un intervalle de la forme $[a; b]$.

Propriété : Soit X une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda \in]0; +\infty[$.

$$\text{Alors : } E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

Démonstration (exigible BAC)

Soit f la fonction de densité de la loi de probabilité de X , une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda \in]0; +\infty[$.

$$\text{Soit } b \in [0; +\infty[. \text{ Alors : } \int_0^b t \times f(t) dt = \int_0^b t \times \lambda e^{-\lambda t} dt.$$

Pour calculer cette intégrale, remarquons que, pour tout réel t positif : $(te^{-\lambda t})' = e^{-\lambda t} - \lambda te^{-\lambda t}$

$$\text{Donc : } t\lambda e^{-\lambda t} = e^{-\lambda t} - (te^{-\lambda t})' = \left(-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t}\right)' - (te^{-\lambda t})'$$

Une primitive sur $[0; +\infty[$ de $\lambda te^{-\lambda t}$ est donc $-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} - te^{-\lambda t}$.

$$\text{Par conséquent : } \int_0^b t \times f(t) dt = \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} - te^{-\lambda t}\right]_0^b = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda b} - be^{-\lambda b} + \frac{1}{\lambda}$$

Cherchons la limite de cette expression quand b tend vers $+\infty$:

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} (-\lambda b) = -\infty \text{ car } \lambda > 0 \text{ et } \lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0 \text{ donc par composition : } \lim_{b \rightarrow +\infty} e^{-\lambda b} = 0$$

$$\text{De plus } \lim_{b \rightarrow +\infty} (-be^{-\lambda b}) = \lim_{b \rightarrow +\infty} (-\lambda be^{-\lambda b}) = 0 \text{ par croissance comparée.}$$

$$\text{Donc par somme : } \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b t \times f(t) dt = \frac{1}{\lambda}. \text{ Soit } E(X) = \frac{1}{\lambda}.$$

Exemple : Soit variable aléatoire X suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,04$. Alors

$$E(X) = \frac{1}{0,04} = 25$$

Cela représente la valeur moyenne probable de X qui sera obtenue en répétant l'expérience considérée un suffisamment grand nombre de fois.

3) Durée de vie sans vieillissement

Propriété : Soit X une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre λ .

Alors, pour tous réels t et h positifs, on a : $P_{X \geq t}(X \geq t+h) = P(X \geq h)$.

Remarque

Cette propriété traduit le fait que la loi exponentielle est une loi dite « sans mémoire » : la durée de vie sur une période dépend de la longueur (h) de cette période, et non de l'âge (t) à partir duquel on considère cet événement.

Démonstration :

$$P_{X \geq t}(X \geq t+h) = \frac{P(\{X \geq t+h\} \cap \{X \geq t\})}{P(X \geq t)} = \frac{P(X \geq t+h)}{P(X \geq t)} = \frac{1 - P(X < t+h)}{1 - P(X < t)}$$

$$\text{or } P(X \geq t) = e^{-\lambda t} \text{ et } P(X \geq t+h) = e^{-\lambda(t+h)} = e^{-\lambda t} \times e^{-\lambda h}$$

$$\text{Donc en effectuant le quotient : } P_{X \geq t}(X \geq t+h) = e^{-\lambda h} = P(X \geq h)$$

Exemple : Utiliser la durée de vie sans vieillissement

Soit X la variable aléatoire égale à la durée de vie, exprimée en heures, d'un petit composant électronique d'une carte d'anniversaire musicale. On suppose que X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,0035$. Sachant qu'un composant testé a fonctionné plus de 200 heures, calculer la probabilité qu'il tombe en panne avant 300 heures.

$$\begin{aligned} P_{X \geq 200}(X \leq 300) &= 1 - P_{X \geq 200}(X > 300) \\ &= 1 - P_{X \geq 200}(X > 200 + 100) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc d'après la loi de durée de vie sans vieillissement, on a : } P_{X \geq 200}(X \leq 300) &= 1 - P(X > 100) \\ &= P(X \leq 100) \\ &= 1 - e^{-0,0035 \times 100} \\ &\approx 0,3 \end{aligned}$$

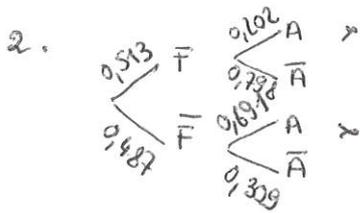
B.2 Polycopié des corrections des exercices 95, 100, 109 et 134 distribué en classe de terminale – Lois continues

Parcours "Lois normales"

p341 et suivantes: exo 95, 100, 109, 134

95 p 341 (arrondi au millième)

$$\begin{aligned} 1. P_{\bar{F}}(A) &= P(X \geq 170) = 0,5 - P(165 \leq X \leq 170) \approx \boxed{0,202} \\ P_{\bar{F}}(A) &= P(Y \geq 170) = 0,5 + P(170 \leq Y \leq 174) \approx \boxed{0,691} \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} P_{\bar{F}}(A) &= P(X \geq 170) \\ P_{\bar{F}}(A) &= P(Y \geq 170) \end{aligned}} \right\} \begin{array}{l} \text{d'après} \\ \text{l'énoncé} \end{array}$$



Probabilités totales

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap F) + P(A \cap \bar{F}) \\ &= P(F) \times P(A) + P(\bar{F}) \times P_{\bar{F}}(A) \dots \\ &\approx \boxed{0,440} \end{aligned}$$

$$3. P_A(F) = \frac{P(A \cap F)}{P(A)} \dots \approx \boxed{0,236}$$

Parcours "lois normales"

100 p342 • Soit Z la variable aléatoire centrée réduite telle que $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$.
 Z suit donc la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$.

- D'une part $p(X \geq 1100) = 0,9332 \Leftrightarrow p\left(Z \geq \frac{1100 - \mu}{\sigma}\right) = 0,9332$
 $\Leftrightarrow p\left(Z \leq \frac{1100 - \mu}{\sigma}\right) = 1 - 0,9332$
 $\Leftrightarrow p\left(Z \leq \frac{1100 - \mu}{\sigma}\right) = 0,0668$

Avec la calculatrice, Frac Normale $(0,0668; 0; 1)$

j'obtiens $\boxed{\frac{1100 - \mu}{\sigma} \approx -1,5001}$

- D'autre part $p(X \leq 1600) = 0,8413 \Leftrightarrow p\left(Z \leq \frac{1600 - \mu}{\sigma}\right) = 0,8413$

Avec la calculatrice, Frac Normale $(0,8413; 0; 1)$.

j'obtiens $\boxed{\frac{1600 - \mu}{\sigma} \approx 0,9998}$

- Résolvons donc le système (s) $\begin{cases} \frac{1100 - \mu}{\sigma} = -1,5001 \\ \frac{1600 - \mu}{\sigma} = 0,9998 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1100 - \mu = -1,5001\sigma \\ 1600 - \mu = 0,9998\sigma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1100 - \mu = -1,5001\sigma \\ 500 = (0,9998 + 1,5001)\sigma \end{cases}$$

(j'ai remplacé L_2 par $L_2 - L_1$)

Donc $\sigma = \frac{500}{2,4999} \approx 200$ et $\mu \approx 1100 + 1,5001 \times 200 \approx 1400$

Les valeurs arrondies à l'unité sont $\boxed{\mu \approx 1400 \text{ et } \sigma \approx 200}$

108 1. $P(68 \leq Z \leq 72) \approx \boxed{0,954}$

- car $[68, 72]$ est l'intervalle $[\mu - 2\sigma; \mu + 2\sigma]$ puisque $\begin{cases} \mu = 70 \\ \sigma = 1 \end{cases}$

2. Par symétrie: $p(70 - h \leq Z \leq 70 + h) = 0,99$

$$\Leftrightarrow p(70 \leq Z \leq 70 + h) = 0,495$$

$$\Leftrightarrow p(Z \leq 70 + h) = 0,5 + 0,495$$

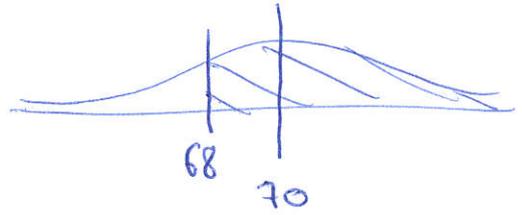
J'obtiens $70 + h \approx 72,576$ avec Frac Normale $(0,995; 70; 1)$

Donc $\boxed{h \approx 2,576}$

(suite 109 p 342)

$$3. P_{(Z \geq 68)}(Z \leq 72) = \frac{P(68 \leq Z \leq 72)}{P(Z \geq 68)}$$

$$\begin{aligned} \text{or } P(Z \geq 68) &= P(68 \leq Z \leq 70) \\ &\quad + P(Z \geq 70) \\ &= P(68 \leq Z \leq 70) + 0,5 \\ &\approx \underline{0,977} \end{aligned}$$



(avec le calc. $0,5 + \text{NormalFRép}(68; 70; 70; 1)$)

et d'après 1. $P(68 \leq Z \leq 72) \approx \underline{0,954}$

Donc en quotientant : $P_{(Z \geq 68)}(Z \leq 72) \approx \boxed{0,976}$

Lois à densité ou calcul intégral -

134 p 351

1. $f(x) = e^{-|x|}$ densité sur $[a, a]$ si def, cont, pos de

et de plus $\int_{-a}^a f(t) dt = 1$ ①

si $\int_{-a}^a f(t) dt = \int_{-a}^0 e^{+x} dx + \int_0^a e^{-x} dx$ (Chades)

dissocier $[a, 0]$ et $[0, a]$ pr éviter val absolue.

Rappel : $\begin{cases} x \geq 0 \Rightarrow |x| = x \\ x < 0 \Rightarrow |x| = -x \end{cases}$

donc $\int_{-a}^a f(t) dt = [e^x]_{-a}^0 + [-e^{-x}]_0^a$
 $= 1 - e^{-a} - e^{-a} + 1$
 $= 2 - 2e^{-a}$

① $\Leftrightarrow 2 - 2e^{-a} = 1$

$\Leftrightarrow e^{-a} = 0,5$

$\Leftrightarrow a = -\ln 0,5$

$\Leftrightarrow a = \ln 2$

$\rightarrow \frac{1}{2}$ (car $\ln \frac{1}{2} = -\ln 2$)

Vérif

$\int_{-\ln 2}^{\ln 2} e^{-|x|} dx = 1.$

B.3 Extraits du tableau lors de la séance n°1 "I.1. Rappels" – Exemples de variables aléatoires discrètes

La loi de probabilité à l'unité

Rappel

Ex n°1 : Soit l'expérience aléatoire "lancer d'un dé équilibré à 6 faces". L'univers est l'ensemble des issues possibles $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Soit A l'événement "le résultat est pair".

$A = \{2, 4, 6\}$

Soit E l'événement élémentaire "obtenir 5".

Soit le jeu suivant :

- * gagne 1 € si le résultat est pair.
- * - 5 € " " " 1.
- * perd 2 € " " " 3 ou 5.

Soit la variable aléatoire X égale au gain réalisé en euros. (c'est une variable "discrète")

La loi de probabilité de X peut être donnée dans un tableau :

x_i	-2	1	5
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

On peut calculer l'espérance de X : $E(X) = \sum_{i=1}^3 x_i p(X=x_i)$

$$= -\frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{5}{6}$$

$$= \frac{2}{3}$$

Interprétation : E(X) est le gain moyen probable, i.e. le

gain moyen que je peux espérer obtenir en répétant l'expérience un grand nombre de fois (ici $\frac{2}{3} € \approx 67c$).

exemple n°2

Je considère la répétition de parties de "pile ou face" avec une pièce équilibrée. Soit Y la variable aléatoire égale au rang d'apparition du 1^{er} succès. Y prend pour valeurs les entiers positifs non nuls (\mathbb{N}^*), donc un ensemble infini de valeurs (mais les valeurs sont "espacées").

Y est une variable aléatoire discrète.

La loi de probabilité de Y peut être donnée par une formule. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $p(Y=k) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2^k}$

② Variable aléatoire continue

C Plan du cours du module de probabilités à l'Université

1. Le modèle probabiliste

- (a) L'expérience aléatoire
Espace de probabilité, événements élémentaires, événements.
Exemples.
- (b) Opérations sur les ensembles
Intersection, union, complémentaire, événements contraires, Cardinal.
Exemple.
- (c) Combinatoire
Permutation, combinaison, propriété des coefficients binomiaux, triangle de Pascal, exemple, arrangement.
- (d) Espace probabilisés
Ensemble des parties de ω , définition et exemples. Propriétés de P une probabilité sur ω . Cas d'un univers fini, équiprobabilité. Cas d'un univers dénombrable, exemple.

2. Probabilités conditionnelles. Indépendance

- (a) Probabilités conditionnelles
Exemple. Définition. Exemples.
Définition d'une partition d' ω puis formule des probabilités totales.
Démonstration de la formule des probabilités totales. Formule des probabilités totales dans le cas de deux ensembles. Exemple.
Formule de Bayes. Exemples.
- (b) Évènements indépendants
Définition. Exemples. Proposition : indépendance et complémentaire, démonstration.
Indépendance de n événements. Exemple.

3. Variables aléatoires discrètes

- (a) Définitions et exemples
- (b) Loi d'une variable aléatoire discrète
- (c) Exemple de loi
- (d) Lois discrètes classiques
- (e) Espérance et variance
- (f) Les paires de variables aléatoires discrètes

4. Variable aléatoire continue

- (a) Densité
- (b) Médiane
- (c) Espérance variance

-
- (d) Lois continues classiques
 - (e) Fonction de répartition
 - (f) Densité d'une paire de variables
 - (g) Indépendance de deux variables aléatoires

5. Indépendance de VA. Loi des grands nombres. TLC

- (a) Indépendance de deux variables aléatoires
- (b) Covariance
- (c) Corrélacion
- (d) Corrélacion partielle
- (e) Indépendance de plus de deux variables aléatoires
- (f) Loi des grands nombres
- (g) Théorèmes limitent centrale
- (h) Approximation de la loi binomiale

6. Application des théorèmes limite

- (a) Distribution et distribution empirique
- (b) Fluctuation de la moyenne
- (c) Fluctuations d'estimateurs
- (d) Histogramme et densité
- (e) Estimer une distribution discrète
- (f) Approximation de la loi binomiale

7. Approfondissement : Approximation de la loi binomiale

D Documents de cours – Université – Probabilités conditionnelles

D.1 Diapositives de cours – Probabilités conditionnelles

2.0.

2

Probabilité conditionnelle. Indépendance

24 / 151

2.1. PROBABILITÉ CONDITIONNELLE

Exemple : Quelle est la probabilité d'avoir un diabète ? Que devient cette probabilité si vous buvez 12 cannettes de coca par jour ?

Définition

Étant donnés deux événements A et B , avec $P(B) > 0$, on définit la probabilité de A sachant B par :

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Remarque : Si B est fixé l'application $A \mapsto P(A|B)$ est une probabilité. En partic. $P(\Omega|B) = 1$.

25 / 151

2.1. PROBABILITÉ CONDITIONNELLE
EXEMPLE

On lance un dé. $A = \text{« Obtenir 6 »}$, $B = \text{« Obtenir un chiffre pair »}$.

$$P(B) = \frac{1}{2}, \quad P(A \cap B) = P(A) = \frac{1}{6}, \quad P(A|B) = \frac{1}{3}.$$

Que vaut $P(B|A)$?

26 / 151

2.1. PROBABILITÉ CONDITIONNELLE
EXEMPLE

Un lac contient 90 brochets, 9 truites, et 1 esturgeon. On pêche un poisson au hasard (l'équiprobabilité est supposée). Soient les événements

$T = \text{« Attraper une truite »}$,
 $A = \text{« Ne pas attraper un brochet »}$.

Alors

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{10}{100} \\ P(A \cap T) &= P(T) = \frac{9}{100} \\ P(T|A) &= \frac{9}{10}. \end{aligned}$$

$P(A|T) = 1$ car $T \subset A$.

Rq.1 : On a considéré que $\Omega = \{B, T, E\}$, $B = \text{« On pêche un brochet »}$ etc., avec $P(B) = 90\%$, $P(T) = 9\%$, et $P(E) = 1\%$.

Rq.2 : Le nombre exact de poisson est inutile, on aurait fait pareil Sous l'hypothèse « Un lac contient 90% de brochets, 9% de truites, et 1% d'esturgeons ».

27 / 151

2.1. PROBABILITÉ CONDITIONNELLE

► Formule des probabilités totales

Définition

Une partition de Ω est une famille de parties de Ω disjointes dont la réunion fait Ω :

- $B_i \cap B_j = \emptyset$ si $i \neq j$
- $B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_k \cup \dots = \Omega$.

Concrètement, c'est une famille d'événements incompatibles dont forcément l'un se réalise.

Proposition (Formule des probabilités totales)

Soit B_1, \dots, B_n une partition telle que pour tout i , $P(B_i) > 0$. Alors pour tout ensemble A :

$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \dots$$

28 / 151

2.1. PROBABILITÉ CONDITIONNELLE

Démonstration de la formule des probabilités totales.

L'ensemble A peut se décomposer en

$$A = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \dots$$

Ces événements étant disjoints on a

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \dots$$

et comme $P(A \cap B_i) = P(A|B_i)P(B_i)$, on a démontré le résultat.

29 / 151

2.1. PROBABILITÉ CONDITIONNELLE

Formule des probabilités totales : Cas de deux ensembles.

Si la partition ne comprend que deux ensembles, $B_1 = B$ et $B_2 = B^c$, la formule devient

$$P(A) = P(A|B)P(B) + P(A|B^c)P(B^c).$$



30 / 151

2.1. PROBABILITÉ CONDITIONNELLE

FORMULE DE BAYES

Soient A et B tels que $P(A) > 0$ et $P(B) > 0$, alors

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$



La démonstration est triviale. La formule de Bayes est souvent combinée avec a formule des probabilités totales pour exprimer le dénominateur : Si A_1, A_2, \dots forme une partition de Ω , pour tout i

$$\text{Bayes + Prob.totales : } P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_k P(B|A_k)P(A_k)}.$$



32 / 151

2.1. PROBABILITÉ CONDITIONNELLE

EXEMPLE

Une maladie touche une personne sur 10 000. Un test de dépistage détecte 99% des personnes infectées avec seulement 0,5% de faux positifs. Quelle est la probabilité qu'une personne dont le test est positif soit effectivement infectée ?

Soient les événements M être infecté par la maladie et T avoir un test positif. Ces deux événements sont deux parties de la population totale Ω . On sait

$$P(M) = \frac{1}{10000}, \quad P(T|M) = \frac{99}{100}, \quad P(T|M^c) = \frac{5}{1000}.$$

Alors

$$P(M|T) = \frac{P(T|M)P(M)}{P(T)} = \frac{P(T|M)P(M)}{P(T|M)P(M) + P(T|M^c)P(M^c)} = \frac{\frac{99}{100} \times 10^{-4}}{\frac{99}{100} \times 10^{-4} + \frac{5}{1000} \times (1 - 10^{-4})} \approx 1,94\%.$$



34 / 151

2.1. PROBABILITÉ CONDITIONNELLE

EXEMPLE

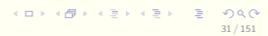
Un lac contient des gardons et des truites. Parmi les gardons, il y en a 30% en âge de se reproduire, et parmi les truites il y en a 60% en âge de se reproduire. On sait qu'il y a 80% de gardons dans le lac. On pêche un poisson (avec équiprobabilité). Quelle est la probabilité d'attraper un poisson en âge de se reproduire ?

Ω est l'ensemble des poissons du lac. Ils ont chacun la même probabilité d'être pêché. On pose

- R = « Pêcher un poisson en âge de se reproduire »
- G = « Pêcher un gardon »
- T = « Pêcher une truite ».

Alors

$$P(R) = P(R|G)P(G) + P(R|T)P(T) = \frac{30}{100} \frac{80}{100} + \frac{60}{100} \frac{20}{100} = \frac{36}{100}$$



31 / 151

2.1. PROBABILITÉ CONDITIONNELLE

EXEMPLE

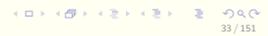
Deux machines M_1 et M_2 produisent respectivement 100 et 200 pièces. M_1 produit 5% de pièces défectueuses et M_2 en produit 6%. Quelle est la probabilité qu'une pièce défectueuse soit produite par M_1 .

Soit D l'événement « la pièce est défectueuse ». Que dit l'énoncé ?

$$P(M_1) = \frac{1}{3}, \quad P(M_2) = \frac{2}{3}, \quad P(D|M_1) = \frac{5}{100}, \quad P(D|M_2) = \frac{6}{100}$$

Alors

$$P(M_1|D) = \frac{P(D|M_1)P(M_1)}{P(D)} = \frac{P(D|M_1)P(M_1)}{P(D|M_1)P(M_1) + P(D|M_2)P(M_2)} = \frac{5}{17} \approx 29\%.$$



33 / 151

2.2. EVÉNEMENTS INDÉPENDANTS

Définition

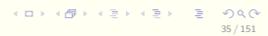
Deux événements $A, B \subset \Omega$ sont indépendants si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. On le note $A \perp B$.

Exemple. On jette deux fois une pièce. $A =$ « Face la première fois », $B =$ « Face la deuxième fois ».

$$P(A) = \frac{1}{2}, \quad P(B) = \frac{1}{2}, \quad P(A \cap B) = \frac{1}{4} = P(A)P(B).$$

On dit que A et B sont positivement corrélés si leur probabilité d'occurrence simultanée est supérieure à ce que l'hypothèse d'indépendance fournirait : $P(A \cap B) > P(A)P(B)$.

Et négativement corrélés si : $P(A \cap B) < P(A)P(B)$.



35 / 151

2.2. ÉVÉNEMENTS INDÉPENDANTS

EXEMPLE

On jette deux fois un dé. $\Omega = \{1, \dots, 6\}^2$. Soient les événements

$$A = \text{« La somme des résultats vaut 4 »} = \{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\}$$

$$B = \text{« Le premier lancé donne 1 »} = \{(1, 1), \dots, (1, 6)\}$$

A et B sont-ils indépendants ?

$$P(A)P(B) = \frac{3}{36} \cdot \frac{6}{36} = \frac{1}{72}.$$

$$P(A \cap B) = P(\{(1, 3)\}) = \frac{1}{36}.$$

Les événements sont positivement corrélés.



2.2. ÉVÉNEMENTS INDÉPENDANTS

EXEMPLE

Famille de trois enfants. $\Omega = \{g, f\}^3$, $|\Omega| = 8$

$$A = \text{« Au plus une fille »} = \{(g, g, f), (g, f, g), (f, g, g), (g, g, g)\}$$

$$B = \text{« Un garçon et une fille au moins »} = \Omega \setminus \{(g, g, g), (f, f, f)\}$$

Alors

$$A \cap B = \{(g, g, f), (g, f, g), (f, g, g)\}$$

Donc

$$P(A \cap B) = \frac{3}{8}, \quad P(A)P(B) = \frac{4}{8} \cdot \frac{6}{8} = \frac{3}{8}.$$

A et B sont indépendants.



2.2. ÉVÉNEMENTS INDÉPENDANTS

INDÉPENDANCE DE n ÉVÉNEMENTS

Définition

Soit $(A_n)_{n \geq 1}$ une suite d'événements, ils sont indépendants si pour tout ensemble fini d'indices (i_1, \dots, i_k) distincts, on a

$$P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \dots P(A_{i_k}).$$

Attention, cette propriété est plus forte que l'indépendance deux à deux qui demande simplement $A_i \perp A_j$ pour tous $i \neq j$.



2.2. ÉVÉNEMENTS INDÉPENDANTS

EXEMPLE

Une famille avec deux enfants, l'aîné et le cadet. $\Omega = \{(g, g), (g, f), (f, g), (f, f)\}$

$$A = \text{« Au plus une fille »} = \{(g, g), (g, f), (f, g)\}$$

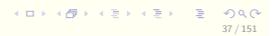
$$B = \text{« Un garçon et une fille »} = \{(g, f), (f, g)\}$$

Alors

$$P(A)P(B) = \frac{3}{4} \times \frac{2}{4} = \frac{3}{8}.$$

$$P(A \cap B) = P(\{(g, f), (f, g)\}) = \frac{1}{2}.$$

Il y a corrélation positive.



2.2. ÉVÉNEMENTS INDÉPENDANTS

Proposition (Indépendance et complémentaire)

Si A et B sont indépendants, il en est de même pour les trois paires d'événements A^c et B , A et B^c , A^c et B^c .

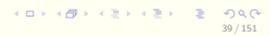
DÉMONSTRATION. Commençons par la paire (A^c, B) . Comme $B = (A^c \cap B) \cup (A \cap B)$ (réunion disjointe), on a

$$P(A^c \cap B) + P(A \cap B) = P(B)$$

d'où

$$P(A^c \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = P(B) - P(A)P(B) = P(A^c)P(B).$$

Pour la seconde paire, remarquer que $A \perp B$ équivaut à $B \perp A$. Pour la troisième $A \perp B \Rightarrow A^c \perp B \Rightarrow A^c \perp B^c$.



2.2. ÉVÉNEMENTS INDÉPENDANTS

EXEMPLE

On lance un dé deux fois de suite.

$$A = \text{« Première fois pair »}$$

$$B = \text{« Deuxième fois pair »}$$

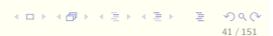
$$C = \text{« La somme est paire »}$$

Alors $A \perp B$, $A \perp C$ et $B \perp C$ mais les événements ne sont pas indépendants car

$$P(A \cap B \cap C) = P(A \cap B) = \frac{1}{4}$$

mais

$$P(A)P(B)P(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}.$$



D.2 Feuille de TD – Probabilités conditionnelles

MAT 2

PROBABILITÉS

Université de Rennes I

Feuille d'exercices 2

Exercice 1 Une urne contient 12 boules numérotées de 1 à 12. On en tire une au hasard, et on considère les événements : A = « tirage d'un nombre pair », B = « tirage d'un multiple de 3 » :

- Les événements A et B sont-ils indépendants ?
- Reprendre la question avec une urne contenant 13 boules.

Exercice 2. Une urne contient des jetons, dont chacun est rouge ou noir, et marqué A ou B. Lors du tirage d'un jeton, la probabilité d'en tirer un rouge est $\frac{3}{5}$, et d'en tirer un qui est rouge et A est p .

- Que vaut la probabilité d'en tirer un qui est noir et marqué B ?
- Pour quelles valeurs de p les événements «noir» et «B» sont-ils indépendants ?

Exercice 3 Xavier et Yvette ont deux durées de vie indépendantes, telles que $P(\text{Xavier vit encore 9 ans}) = \frac{4}{5}$, $P(\text{Yvette vit encore 9 ans}) = \frac{3}{5}$. Calculer les probabilités que :

- Xavier et Yvette vivent encore 9 ans
- L'un des 2 au moins vit encore 9 ans
- Xavier seulement vit encore 9 ans
- Xavier vit encore 9 ans sachant que l'un des 2 au moins vivra encore 9 ans.

Exercice 4. Une urne contient 3 boules blanches et 7 boules noires. Quand une boule est tirée, on la remet dans l'urne, avec 5 boules de la même couleur. On effectue ainsi deux tirages au hasard. Quelle est la probabilité que la première boule tirée soit noire sachant que la seconde est blanche ?

Exercice 5 Le gérant d'un magasin d'informatique a reçu un lot de boîtes de CD-ROM. 5% des boîtes sont abîmées. Le gérant estime que 60% des boîtes abîmées contiennent au moins un CD-ROM défectueux et que 98% des boîtes non abîmées ne contiennent aucun CD-ROM défectueux. Un client achète une boîte du lot. On désigne par A l'évènement : «la boîte est abîmée» et par D l'évènement «la boîte achetée contient au moins un disque défectueux».

- Calculer les probabilités $P(A)$, $P(A^c)$, $P(D|A)$, $P(D|A^c)$, $P(D^c|A)$ et $P(D^c|A^c)$.
- Le client constate qu'un des CD-ROM acheté est défectueux. Quelle est la probabilité pour qu'il ait acheté une boîte abîmée ?

Exercice 6. Un livre a une probabilité de $\frac{1}{3}$ de se trouver dans une commode comportant 5 tiroirs, et des chances égales de se trouver dans chacun des tiroirs.

- On ouvre les 4 premiers tiroirs, sans le trouver ; quelle est la probabilité de le trouver dans le dernier tiroir ?
- On ouvre les 2 premiers tiroirs, sans le trouver ; quelle est la probabilité de le trouver dans le dernier tiroir ? dans l'un des 3 derniers tiroirs ?

Indication : On notera T_i l'évènement «Le livre est dans le tiroir i », ceci pour i allant de 1 à 5, et T_0 «Le livre n'est pas dans la commode». Noter que ces six évènements forment une partition de Ω .

Exercice 7. Le quart d'une population est vacciné contre le choléra. Au cours d'une épidémie, on constate qu'il y a parmi les malades un vacciné pour 4 non-vaccinés. En plus, parmi les vaccinés il y a une personne sur 12 qui tombe malade. Quelle est la probabilité qu'un non-vacciné tombe malade ?

Exercice 8. Dans une population on trouve une proportion de 1 pour 10000 individus qui portent un certain virus. Il y a un test pour la présence de ce virus. Ce test n'est pas parfait : si un individu porte le virus, alors le test le détecte avec une probabilité de 0.99. Si un individu ne porte pas le virus, le test donne un résultat positif (erroné) avec probabilité de 0,001.

On tire un individu au hasard de la population, on lui fait passer le test, et le résultat est positif ; quelle est la probabilité qu'il porte vraiment le virus ?

E Documents de cours – Université – Loïs continues

E.1 Diapositives de cours – Loïs continues

4.1. DENSITÉ

Définition

Une variable aléatoire (v.a.) $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ admet une densité s'il existe une fonction f telle que pour tout intervalle $[a, b]$:

$$P(X \in [a, b]) = \int_a^b f(x) dx.$$

On dit que X est une v.a. continue.

Remarques. Nécessairement,

$$f \geq 0$$

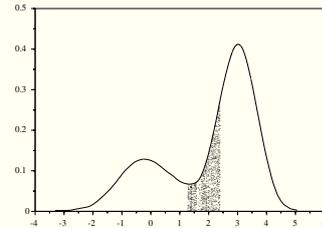
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1.$$

Noter que sous ces deux conditions, on a bien que l'application $A \mapsto \int_A f(x) dx$ est une mesure de probabilité. On dit qu'une fonction qui satisfait ces deux conditions est une densité de probabilité.

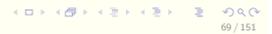


4.1. DENSITÉ

Exemple 1. Soit la densité

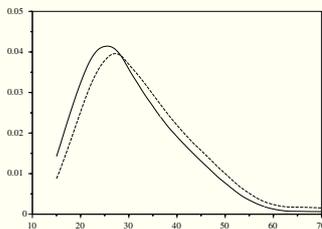


La probabilité de l'intervalle $[1, 3 ; 2, 4]$ est la surface de la zone noircie ; la surface totale (intégrale) fait 1.



4.1. DENSITÉ

Exemple 2.



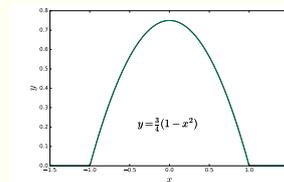
Densités des variables « âge du (de la) marié(e) le jour du mariage » en Alaska en 1995 (estimation à partir des données de l'Alaska Bureau of Vital Statistics). Les femmes sont en trait plein et les hommes en pointillés. On voit un décalage de 2 ans en gros entre les deux courbes, ce qui signifie un décalage de deux ans entre âge du marié et l'âge de la mariée.



4.1. DENSITÉ

Exemple 3. Soit la fonction

$$f(x) = 1_{|x| \leq 1} \frac{3}{4}(1 - x^2) = \begin{cases} \frac{3}{4}(1 - x^2) & \text{si } x \in [-1, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



On a bien $f \geq 0$ et

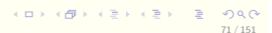
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-1}^1 \frac{3}{4}(1 - x^2) dx = 1$$

Deux calculs de probabilité : Soit X de densité f

$$P(0 \leq X \leq 1) = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{3}{4}(1 - x^2) dx = \frac{1}{2} \quad (\text{évident par symétrie})$$

$$P(|X| < 1/2) = \int_{-1/2}^{1/2} f(x) dx = 2 \int_0^{1/2} \frac{3}{4}(1 - x^2) dx = \frac{13}{16}.$$

NB : $P(X = a) = \int_a^a f(t) dt = 0.$



4.1. DENSITÉ

Exemple 4. La durée de vie d'une particule radioactive peut être modélisée par une v.a. X de densité

$$f(x) = 1_{x \geq 0} \frac{1}{100} e^{-x/100}.$$

Quelle est la probabilité que cette durée soit comprise entre 50 et 150 minutes ?

$$P(50 \leq X \leq 150) = \int_{50}^{150} \frac{1}{100} e^{-x/100} dx = \left[-e^{-x/100} \right]_{50}^{150} \simeq 0,384.$$



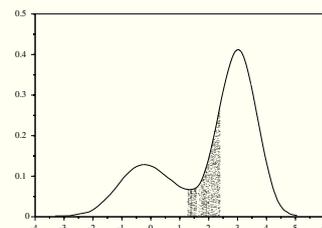
4.1. DENSITÉ

MODES

Définition

Un mode est un maximum local de la densité

Deux modes :



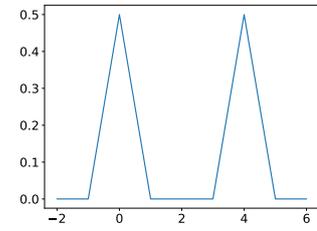
4.2. MÉDIANE MÉDIANE

Définition

La médiane est une valeur m telle que

$$P(X \leq m) = \frac{1}{2}.$$

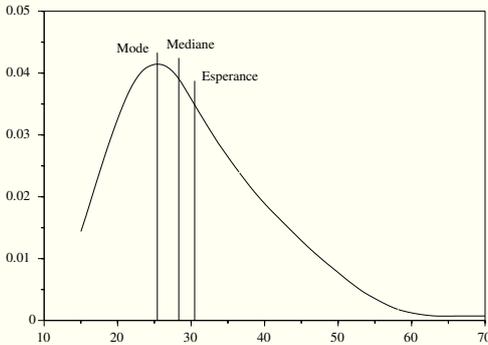
La v.a. X a donc une chance sur deux d'être inférieure à sa médiane. La médiane est généralement unique mais on peut fabriquer des exemples où ce n'est pas le cas :



74 / 151

4.3. ESPÉRANCE. VARIANCE ESPÉRANCE, MÉDIANE ET MODES

L'âge de la mariée



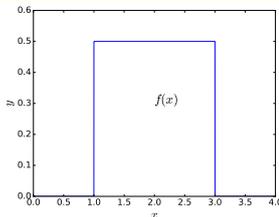
76 / 151

4.4. LOI CONTINUES CLASSIQUES LOI UNIFORME

La loi uniforme sur l'intervalle $[a, b]$, $\mathcal{U}([a, b])$ est la loi de densité

$$f(x) = \frac{1}{b-a} 1_{[a,b]}(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a, b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exemple $a = 1, b = 3$:



Infinité de modes. Médiane à $(b-a)/2$.

78 / 151

4.3. ESPÉRANCE. VARIANCE

Définition

Soit X une v.a. de densité f , on définit, espérance, variance et écart-type par

- $E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$
- $Var(X) = E[(X-m)^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-m)^2 f(x)dx, \quad m = E[X].$
- $\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}.$

RAPPEL : Pour les v.a. discrètes, on avait la formule analogue

$$E[X] = \sum_i x_i P(X = x_i).$$

Comme pour les v.a. discrètes on a

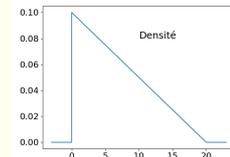
$$\begin{aligned} E[h(X)] &= \int h(x)f(x)dx \\ E[aX + b] &= aE[X] + b, \quad a, b \in \mathbb{R} \\ Var(X) &= E[X^2] - E[X]^2 \\ Var(X+a) &= Var(X) \\ Var(aX) &= a^2 Var(X) \end{aligned}$$

75 / 151

4.3. ESPÉRANCE. VARIANCE EXEMPLE DE CALCULS

Un jeu à gratter remporte pour 10€ misés une quantité aléatoire X de densité

$$f(x) = 1_{0 \leq x \leq 20} (20-x) \frac{x}{200}$$



- $P(\text{gagner de l'argent}) = P(X > 10) = \int_{10}^{20} (20-x) \frac{dx}{200} = \frac{1}{200} \int_0^{10} y dy = \frac{1}{4}.$
- Gain moyen : $E[X] = \int_0^{20} x(20-x) \frac{dx}{200} = \dots = 7,7$
- Ecart-type : $\sqrt{E[X^2] - E[X]^2} = \sqrt{\int_0^{20} x^2(20-x) \frac{dx}{200} - E[X]^2} = \dots = 4,7$

77 / 151

4.4. LOI CONTINUES CLASSIQUES

LOI UNIFORME

$$E[X] = \int xf(x)dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b x dx = \frac{1}{b-a} \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_a^b = \frac{1}{2} \frac{b^2 - a^2}{b-a} = \frac{a+b}{2}$$

$$E[X^2] = \frac{1}{b-a} \int_a^b x^2 dx = \frac{1}{b-a} \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_a^b = \frac{1}{3} \frac{b^3 - a^3}{b-a} = \frac{1}{3} (b^2 + ab + a^2)$$

$$Var(X) = E[X^2] - E[X]^2 = \dots = \frac{1}{12} (b-a)^2$$

$$\sigma(X) \simeq 0,3 (b-a).$$

79 / 151

4.4. LOI CONTINUES CLASSIQUES

LOI EXPONENTIELLE

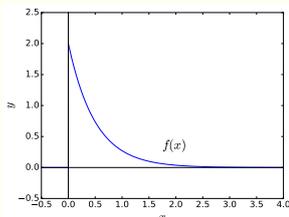
La loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ est la loi sur \mathbb{R}_+ de densité

$$f(x) = 1_{x \geq 0} \lambda e^{-\lambda x} = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On a bien $f \geq 0$ et

$$\int f(x) dx = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} \lambda dx = [-e^{-\lambda x}]_0^{+\infty} = 1$$

Exemple $\lambda = 2$:



Mode à 0.



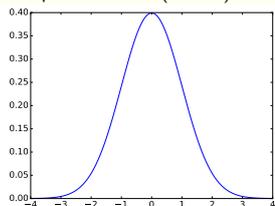
4.4. LOI CONTINUES CLASSIQUES

LOI NORMALE (OU GAUSSIENNE)

La loi normale centrée réduite est la loi notée $\mathcal{N}(0, 1)$ de densité

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

Son espérance vaut 0 (centrée) et sa variance 1 (réduite). Densité



Sa fonction de répartition, souvent notée Φ n'a pas d'expression simple,

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{1}{2}x^2} dx.$$



4.4. LOI CONTINUES CLASSIQUES

LOI NORMALE : ORDRE DE GRANDEUR

Si $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$, $Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, alors

$$\begin{aligned} P(|Y - \mu| \leq \sigma) &= P(|X| \leq 1) \simeq 0,68 \\ P(|Y - \mu| \leq 2\sigma) &= P(|X| \leq 2) \simeq 0,954 \\ P(|Y - \mu| \leq 3\sigma) &= P(|X| \leq 3) \simeq 0,997. \end{aligned}$$

La probabilité que la variable sorte de l'intervalle $\mu \pm 3\sigma$ est donc extrêmement faible.

La variable tombe en gros deux fois sur trois dans l'intervalle $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$.



4.4. LOI CONTINUES CLASSIQUES

LOI EXPONENTIELLE

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(y) dy = [-e^{-\lambda y}]_0^x = 1 - e^{-\lambda x}$$

$$E[X] = \int_0^{+\infty} ye^{-\lambda y} \lambda dy = \dots = \frac{1}{\lambda} \quad (\text{faire une I.P.P.})$$

$$\text{Var}(X) = \dots = \frac{1}{\lambda^2}.$$



4.4. LOI CONTINUES CLASSIQUES

LOI NORMALE

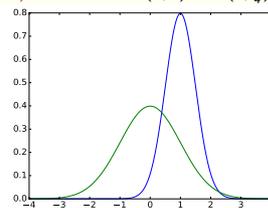
Si $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ alors la v.a. $Y = \sigma X + \mu$ satisfait

$$E[Y] = \mu, \quad \text{Var}(Y) = \sigma^2.$$

On vérifie, en calculant $P(a \leq Y \leq b) = P(\frac{a-\mu}{\sigma} \leq X \leq \frac{b-\mu}{\sigma})$, que la densité de Y vaut

$$f(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}.$$

Cette loi est notée $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Densités de $\mathcal{N}(0, 1)$ et $\mathcal{N}(1, \frac{1}{4})$



Réciproquement, si $Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, alors $\frac{Y-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$.



4.4. LOI CONTINUES CLASSIQUES

LOI NORMALE

Soit $Y \sim \mathcal{N}(175, 36)$, que vaut $P(Y > 185)$?

Posons $X = \frac{Y-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$, alors

$$P(Y > 185) = P\left(\frac{Y-\mu}{\sigma} > \frac{185-175}{6}\right) = P\left(X > \frac{5}{3}\right) \simeq 4,75\%.$$

Le dernière égalité étant obtenue en utilisant un ordinateur (ou une table pour les nostalgiques).



4.5. FONCTION DE RÉPARTITION

Définition

La fonction de répartition d'une variable continue X de densité f est

$$F_X(t) = P(X \leq t) = \int_{-\infty}^t f(x) dx.$$

La fonction de répartition croît de 0 à 1 (limites en $-\infty$ et $+\infty$).

Comme $F'_X = f$, F_X est une primitive de f .

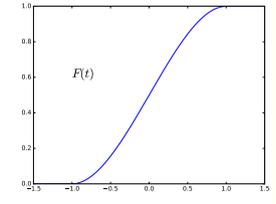
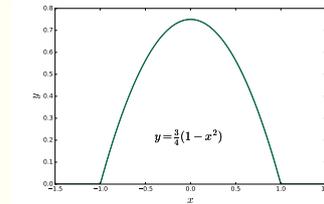
4.5. FONCTION DE RÉPARTITION

Exemple . Soit la fonction

$$f(x) = 1_{|x| \leq 1} \frac{3}{4}(1 - x^2).$$

Alors $F(t)$ vaut 0 si $t < -1$, 1 si $t > 1$, et pour $-1 < t < 1$:

$$\begin{aligned} F(t) &= \int_{-1}^t \frac{3}{4}(1 - x^2) dx = \frac{3}{4} \int_{-1}^t dx - \frac{1}{4} \int_{-1}^t 3x^2 dx = \frac{3}{4}(t + 1) - \frac{1}{4}[x^3]_{-1}^t \\ &= -\frac{1}{4}t^3 + \frac{3}{4}t + \frac{1}{2} \end{aligned}$$



E.2 Feuille de TD – Lois continues

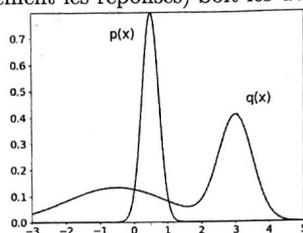
MAT 2

PROBABILITÉS

Université de Rennes I

Feuille d'exercices 4

Exercice 1 (On justifiera brièvement les réponses) Soit les deux densités suivantes.



- Les deux ensembles de données suivants : $A = \{0, 0.3, 0.7, 1\}$ et $B = \{-1, 2, 2.5, 3\}$ représentent chacun des v.a. tirées selon p ou q , mais on ne sait plus lequel a été tiré selon quelle loi. Doit-on attribuer (selon toute vraisemblance) A à p et B à q ou l'inverse ?
- L'une des deux lois est gaussienne. Laquelle ?
- Laquelle a la plus grande variance ? Laquelle a la plus grande moyenne (espérance) ?

Exercice 2 Pour cet exercice, on utilisera la table au dos. Soit $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$, $Y \sim \mathcal{N}(5, 9)$.

- Trouver $P(-1 \leq X \leq 1)$, $P(-2 \leq X \leq 2)$, $P(0 \leq X \leq 1)$.
- Trouver $P(2 \leq Y \leq 8)$, $P(Y \geq 2)$, $P(Y \leq 8)$.

Exercice 3 La durée de vie en années d'une machine à laver suit une distribution $\mathcal{E}(\frac{1}{10})$.

- Quelle est son espérance de vie ?
- Quelle est la probabilité qu'elle tienne au moins une année ?
- Quelle est la probabilité qu'elle tienne au moins 10 ans ?

Exercice 4 Soit X une variable aléatoire de densité $f(x) = cx^2 1_{0 \leq x \leq 1} + \frac{1}{2} 1_{2 \leq x \leq 3}$.

- Que vaut c ?
- Calculer $P(\frac{1}{4} \leq X \leq \frac{3}{4})$?
- Calculer l'espérance et la variance de X .

Exercice 5. Soit $a < 0 < b$, et X une variable aléatoire de loi $\mathcal{U}([a, b])$, quelle est la loi du signe de X ? Soit $t > 0$, quelle est la loi de $1_{X \leq t}$? *Indication.* Considérer les cas $t < a$, $a \leq t \leq b$, et $t > b$.

Exercice 6.

- On tire 1000 nombres aléatoires qui sont distribués selon une loi exponentielle $\mathcal{E}(2)$. Combien des nombres tirés, à peu près, sont plus petits que 1 ?
- On tire 1000 nombres aléatoires qui sont distribués selon une loi normale $\mathcal{N}(2, 9)$. Combien des nombres tirés, à peu près, sont entre 2 et 3 ? (Il faudra utiliser la table des valeurs de Φ .)

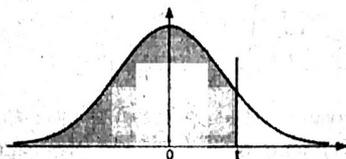
Exercice 7. Une pièce de monnaie porte sur une face l'inscription 17 et sur l'autre face 20. On modélise l'expérience par une variable aléatoire X de loi $P(X = 17) = 0,5$ et $P(X = 20) = 0,5$.

- Résoudre le système $a \times 0 + b = 17$, $a \times 1 + b = 20$. (Élémentaire)
- Quelle est la loi de la v.a. Y telle que $aY + b = X$?
- En déduire l'espérance et la variance de X .

Exercice 8. À un péage autoroutier, n voitures empruntent au hasard et indépendamment les unes des autres, l'un des trois passages mis à leur disposition. Soient X , Y et Z les v.a. dénombrant les voitures ayant franchi ces passages.

- (a) Déterminer la loi de X , celle de $X + Y$.
 (b) Calculer les variances de X , Y et de $X + Y$. En déduire la covariance de X et Y .
 Trouvez-vous l'énoncé réaliste ?

Table donnant $P(Z < t)$ pour une variable aléatoire suivant $N(0, 1)$



	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6025	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8105	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986

Table pour les grandes valeurs

t	3	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,8	4	4,5
$\Phi(t)$	0,9987	0,9990	0,9993	0,9995	0,9997	0,9998	0,9998	0,999926	0,999968	0,999997

F Grille d'analyse du test

Exercice 1

la situation est représentée par un arbre

Question 1 : T-CalcInter

la réponse est **correcte**

justification par l'indépendance des événements

compréhension : la probabilité demandée est une intersection d'événements

erreur : l'énoncé n'est pas interprété comme une intersection d'événements

notations inhabituelles

Question 2 : T-CalcUnion

la réponse est **correcte**

la réponse est incomplète

compréhension : la probabilité demandée est celle d'une union de 2 événements

autre technique : somme des probas de toutes les issues possibles

technique : utilisation correcte de la formule de Poincaré

e1 : erreur sur la formule de Poincaré

e2 : l'énoncé n'est pas interprété comme une union d'événements

e3 : addition de $P(A)$ et $P(B)$

e4 : erreur de calcul

notations inhabituelles

Question 3 : T-CalcInter

la réponse est **correcte**

compréhension : la probabilité demandée fait intervenir l'événement B

compréhension : la probabilité demandée est une intersection d'événements

justification par l'indépendance des événements

T-CalcBar : utilisation correcte de la proba du complémentaire

autre technique : somme des probabilités de toutes les issues possibles

e1 : l'énoncé n'est pas interprété comme une intersection d'événements

e1bis : répondre $P(A)$

e2 : erreur de calcul

notations inhabituelles

Question 4 : T-CalcProbaCond

la réponse est **correcte**

la réponse est incomplète

compréhension : la probabilité demandée est une proba conditionnelle

compréhension : la probabilité demandée est $P(A \text{ sachant } A \cup B)$

utilisation correcte de la définition d'une probabilité conditionnelle

e1 : erreur sur la définition d'une probabilité conditionnelle

e2 : l'énoncé n'est pas interprété comme une probabilité conditionnelle

e3 : les événements ne sont pas (ou sont mal) identifiés

e4 : utilisation à tort de l'indépendance entre A et $A \cup B$

notations inhabituelles

Exercice 2

identifier les événements en jeu

T-Assoc : associer à ces événements leurs probabilités

représenter la situation par un arbre de probabilités

calculer les probabilités des événements contraires

calculer $P_{\bar{T}}(M)$ (la bonne réponse)

e1 : calculer $P_M(T_{\text{barre}})$

e2 : calculer $P_M(T_{\text{barre}}) + P_{M_{\text{barre}}}(T)$

e3 : calculer $P(T)$

e4 : calculer $P(M \text{ et } T)$

e5 : donner $P_M(T)$

e6 : calculer $P(M \text{ et } T_{\text{barre}})$

e7 : calculer $P(M_{\text{barre}} \text{ et } T) + P(M \text{ et } T_{\text{barre}})$

e8 : calculer $P(M_{\text{barre}} \text{ et } T)$

e9 : calculer $P(M_{\text{barre}} \text{ et } T_{\text{barre}})$

e10 : calculer $P_{M_{\text{barre}}}(T)$

e11 : donner $P_{M_{\text{barre}}}(T_{\text{barre}})$ (qui est déjà donné dans l'énoncé)

e12 : donner $P(M)$ (qui est déjà donné dans l'énoncé)

interpréter le résultat numérique obtenu après calculs

interprétation/argumentation sans arbre ni calcul

interprétation/argumentation sans calcul mais avec arbre

Exercice 3

Question 1 : T-ModéArb

la question est traitée

l'arbre est complet et correct (T-Assoc et T-CalcBar ok)

e1 : T-CalcBar (la proba du complémentaire est mal calculée)

e2 : T-Assoc (confusion entre R et Rbarre)

notations inhabituelles

Question 2 : T-CalcInter

la réponse est **correcte**

compréhension : la probabilité demandée est une intersection d'événements

compréhension : la probabilité demandée est $P(RnF)$

justification avec la formule " $P(FnR) = P(F) * P_{\bar{F}}(R)$ "

e1 : utilisation à tort d'une indépendance : " $P(FnR) = P(F) * P(R)$ "

e2 : l'énoncé n'est pas interprété comme une intersection d'événements

e2bis : l'énoncé est interprété (à tort) comme la probabilité de R sachant F

e3 : mauvais recopiage des données de l'arbre

e4 : les probabilités sont additionnées au lieu d'être multipliées

e5 : les événements en jeu sont mal identifiés

Question 3 : T-CalcSimple

la réponse est **correcte**

réponse juste et justification par la FPT ou par $P(R) = P(RnF) + P(RnF_{\text{barre}})$

justification par la FPT ou par " $P(R) = P(RnF) + P(RnF_{\text{barre}})$ "

e0 : confusion à la Q1 implique résultat faux ici

e1 : erreur concernant la FPT

e2 : utilisation à tort d'une indépendance : " $P(FnR_{\text{barre}}) = P(F) * P(R_{\text{barre}})$ "

e3 : erreur de calcul ou mauvais recopiage des données de l'arbre

e4 : erreur à la Q2 implique résultat faux ici

Question 4 : T-EtudInd

la réponse est **correcte**

la réponse est correctement justifiée

G Grille d'entretien étudiants

Grille pour entretien étudiants de L1 biologie

Mars-avril 2019

NB : « MATH1 » module d'analyse du 1er semestre et « MATH2 » module de probabilités du 2nd semestre

1. Profil de l'étudiant

Année 2017-2018 (filière, spécialité)

Note en maths au bac, note à l'examen de MATH1, note au CC de MATH2 (01/03)

Q1 : Cette année, pourrais-tu me donner à peu près le nombre d'heures que tu consacres aux maths (hors CM et TD) ? (par semaine, par jour, la veille du CM, la veille du TD, pour préparer le CC, etc)

Q2 : Est-ce que tu as l'impression de beaucoup travailler pour les maths (hors CM et TD) ? Même question pour réviser le CC ou l'examen de MATH1 ou MATH2 ? Si non pourquoi ?

2. Ressources utilisées pour le module de MATH2

Q3 : Concernant le module de probabilités MATH2, Quelles ressources utilises-tu pour :

- Préparer les exercices de TD d'une semaine à l'autre
- Apprendre le cours
- Préparer/réviser le contrôle continu du 01/03

A suggérer : Vos notes de cours, des exemples traités en cours, des exercices faits précédemment en TD, votre cours de Terminale, discussion avec d'autres étudiants, des manuels, lesquels ? Ressources internet, lesquelles ?

Q4 : Durant le TD notes-tu des éléments qui ne sont pas écrit au tableau ? Ecris-tu tout ce qui est au tableau ?

Q5 : Comment est-ce que tu retravailles les notes prises en TD ?

Q6 : Les exos des feuilles de TD non traités : ont-ils été fait ? Regardés ? Commencés ? Réussis ou non ?

3. Ressources utilisées de façon générale pour les mathématiques (MATH1) (même questions si le temps)

4. Ressenti de l'étudiant sur les maths et probabilités

Q7 : Au Lycée, étais-tu à l'aise en probabilités ? Est-ce que tu trouvais ça plutôt facile, difficile, + ou - que les autres contenus de maths et saurais-tu me dire pourquoi ?

Q8 : Les contenus de probabilités de MATH2 te semblent-ils être en continuité avec ce que tu faisais en Terminale et pourquoi ?

Q9 : Penses-tu que les maths sont plus difficiles à la fac qu'au lycée et pourquoi ?

Q10 : Penses-tu que tes cours de maths te sont utiles pour ta formation ? Et en général ?

5. Compréhension, explication, techniques concernant TD2 et TD4

Probabilités conditionnelles : exercice 5 du TD2 et lois continues : exercice 4 du TD4

- Est-ce que tu as compris cet exercice ?
- Est-ce que tu peux m'expliquer ce que tu as fait dans cet exercice ?
- Puis questions par questions, peux-tu m'expliquer ce que tu as fait ?

Probabilités conditionnelles « Exercice1 » type bac et lois continues « Exercice 2 » issu du manuel Indice, envoyé à l'avance par mail.

- Est-ce que tu as eu le temps d'y réfléchir ? sans forcément le résoudre entièrement
- Si pas eu le temps de chercher : expliquer ce que tu ferais ?
- Si pas réussi : tu pourrais expliquer ce qui te bloque ?
- Si commencé : tu pourrais expliquer ce que tu as déjà fait ? et comment ?

H Feuille d'entraînement

MAT 1

PROBABILITÉS

Université de Rennes I

Feuille d'exercices de révision (TD1 → TD4)

Exercice 1 Soient A et B deux événements tels que $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(B) = \frac{45}{100}$, et $P(A \cap B) = \frac{1}{10}$.

- (a) A et B sont-ils indépendants ?
- (b) Calculer $P(A \cap B)$
- (b) Calculer $P(\bar{A} \cap \bar{B})$
- (b) Calculer $P(\bar{A} \cap B)$

Exercice 2 On tire 5 cartes au hasard d'un jeu de 52 cartes.

- (a) Quelle est la probabilité d'avoir exactement une dame ?
- (b) Quelle est la probabilité d'avoir au moins une dame ?

Exercice 3 On a trois pièces dont deux sont normales et une a deux côtés pile. En choisit une au hasard et on la lance.

- (a) Quelle est la probabilité d'obtenir pile ?
- (b) Elle tombe sur pile. Quelle est la probabilité que ce soit la pièce truquée ?

Exercice 4 Deux machines M_1 et M_2 produisent respectivement 200 et 300 pièces. M_1 produit 3% de pièces défectueuses et M_2 en produit 5%. On désigne par A_i l'évènement «la pièce est produite par M_i », et par D l'évènement «la pièce est défectueuse».

- (a) Donner $P(A_i)$, $i = 1, 2$, et $P(D|A_i)$, $i = 1, 2$.
- (b) Calculer $P(A_1|D)$.

Exercice 5 Soit une pièce dont le côté pile est marqué 0 et le côté face est marqué 1. On jette la pièce deux fois.

- (a) Donner l'espace Ω à 4 éléments représentant cette expérience.
- (b) On désigne par I et J les deux résultats obtenus. On pose $X = \min(I, J)$ et $Y = |I - J|$. Calculer $E[X]$, $E[Y]$, $\text{Var}(X)$ et $\text{Var}(Y)$.

Exercice 6 Soit X une variable aléatoire de densité $f(x) = 2x_{0 \leq x \leq 1}$.

- (a) Calculer $P(0 \leq X \leq \frac{1}{2})$.
- (b) On tire 10 nombres selon la loi de X . Quelle est la probabilité qu'ils soient tous compris entre 0 et $\frac{1}{2}$?
- (d) Calculer l'espérance et la variance de X .

Exercice 7 Soit $X \sim \mathcal{N}(5, 4)$, et F la fonction de répartition de la gaussienne centrée réduite. Exprimer $P(6 \leq X \leq 7)$ en fonction de F .

I Transcription des entretiens

I.1 Entretien avec Maud

Entretien Maud : 02/04/2019

Première partie de l'entretien :

c: tu étais en terminale S l'année dernière et tu as eu 18 en maths au bac, c'est bien ça ?

m: Oui. C'était un peu un coup de chance. J'avais beaucoup travaillé mais mes notes dans l'année ce n'était pas ça, je n'avais pas 18 de moyenne.

c: à l'examen de maths1 tu as donc eu 12,5 ?

m: oui, et au premier contrôle j'avais eu 20. Mais là (à l'examen) j'étais malade, donc ce n'est pas trop représentatif.

c: au CC de MATH2 ?

m: j'ai eu 15,5.

c: est-ce que tu pourrais me donner le nombre d'heures que tu consacres aux mathématiques cette année, par semaine ? Sans compter les heures de TD et de cours.

m: 0.

c: donc par jour 0. La veille du CM, est-ce que tu ?

m: non.

c: et la veille du TD est-ce que tu prépares des TDs en avance ?

m: non

c: et pour préparer le contrôle ?

m: alors là je passe plus d'heures, une dizaine d'heures peut-être.

c: est-ce que tu as l'impression de beaucoup travailler cette année pour les maths ?

m: non, pas en maths.

c: quand tu travailles pour préparer le CC du coup, vu que c'est surtout là que tu me dis que tu passes tes heures de travail de maths, comment est-ce que tu travailles ?

m: les CM je les passe complètement et je refais les exercices et je fais juste ça. Et les annales quand il y en a.

c: les annales, les feuilles de TD, et les feuilles de préparation qu'on vous donne aussi peut-être ?

m: oui voilà, juste les exercices et pas les cours théoriques.

c: est-ce que tu travailles avec tes cours de l'an dernier ?

m: non, je ne travaillais déjà pas avec mes cours l'année dernière, c'est vraiment juste la pratique.

c: et des manuels ou des ressources sur internet ?

m: non, juste quand je me pose une question, ou si je me dis « ah c'était quoi ça ? », je vais regarder sur internet mais si j'ai tout dans la tête ça va.

c: pendant ton TD, qu'est-ce que tu notes ?

m: ce qui est écrit au tableau et ce que moi j'ai entendu, si je me dis « oh faudrait pas que je l'oublie », le fait de le marquer ça va...

c: donc minimum ce qui est au tableau et parfois des commentaires ?

m: après en général on nous fait faire des exercices du coup on les fait en cours et après on les corrige du coup il y a ma partie et la partie du prof.

c: comment est-ce que tu retravailles tes notes de TD ?

m: je reprends les énoncés, je fais les exos et je vérifie si j'ai bon par rapport à la correction.

c: est-ce que tous les exos des feuilles de TD sont faits durant la séance ?

m: comme on a des amis qui sont dans d'autres classes on prend les corrections des autres et en général on a la correction de tous.

c: est-ce que tu les retravailles ensuite du coup (les exos pas fait en TD) ?

m: avant les contrôles du coup.

c: est-ce que vous travaillez ensemble quand un copain te passe ses notes ?

m: oui, enfin on fait chacun tout seul et ensuite on se dit alors t'as mis quoi, « ah oui moi j'ai mis ça », « pourquoi t'as mis ça ? ».

c: et ça ça fait partie des 10h quand tu prépares l'examen ?

m: oui, après je dis 10h mais j'en ai aucune idée.

c: deux bonnes après-midis ?

m; oui voilà.

c: en général, est-ce qu'au lycée tu étais à l'aise en probas ? Et est-ce que tu trouvais ça plus ou moins facile ou difficile que les autres contenus de mathématiques ?

m: alors j'aime pas du tout les probas, je préfère beaucoup plus les fonctions, parce que les probas il y a bcp de choses théoriques qu'on ne comprend pas forcément et du coup c'est juste de l'application et je trouve que ce n'est pas forcément ce qu'il y a de plus intéressant. Donc non je... pas trop.

c: et au lycée ?

m: pareil, peut-être un peu plus parce que ce qu'on nous fait faire en CM, y a beaucoup de contenus dont on ne se sert pas après dans les exercices et ça mélange, et je trouve que pour ça ce n'est pas très bien fait. Alors qu'au lycée c'était vraiment le même prof qui faisait cours et exercices donc ça correspondait bien mais pas là.

c: au lycée tu saurais me dire pourquoi tu trouvais ça plus facile que maintenant ?

m: je ne trouvais pas ça facile mais comme on faisait les exercices en parallèle des leçons c'était du coup le même prof qui expliquait et donc on avait vraiment qu'une seule méthode de mise alors que là en TD j'ai eu 3 profs de TD différents dans tout le semestre et c'est toujours des méthodes différentes, des mots différents, des notations différentes, c'est plus difficile.

c: les contenus de probas te semblent-ils être en continuité avec ce que tu as fait au lycée ?

m: oui, après ce qu'on a fait à la fin c'était + nouveau. Je pense que c'est ce que j'ai le moins compris parce que je ne l'ai pas encore travaillé du coup, mais si c'était plutôt en continuité.

c: trouves-tu que les maths sont faciles/difficiles qu'au lycée ?

m: en comptant le premier semestre ?

c: oui voilà

m: le premier semestre était plus facile, le second plus difficile que le lycée. Au premier semestre on a vraiment repris ce qu'on avait fait au lycée et même de manière générale peut-être plus simplement parce que les limites par exemple on ne nous demandait pas de les calculer cette année, on nous demandait juste de les deviner alors que l'année dernière on devait faire une belle démonstration et tout ça. En maths on a vu les probas l'année dernière mais pas autant que les fonctions et du coup comme on se concentre que sur ça s'est plus compliqué forcément (cette-année).

c: penses-tu que tes cours de maths te sont utiles dans ta formation de biologiste ?

m: pour l'instant on ne les a pas mis en pratique donc pas trop, mais forcément ça viendra un jour.

Deuxième partie de l'entretien : TD2 (09:16)

c: on peut passer aux TD que je t'avais demandé de ramener, donc le TD2 sur indépendance et conditionnement, vous avez fait quels exos en TD ?

m: 1,3,5,6,4,7,9

c: est-ce qu'on pourrait regarder l'exercice 5 ? Avec les notes que tu as, mais je te laisse te replonger dedans avant, me dire si tu avais compris cet exercice ?

m: oui bah ils ont vachement insisté sur ceux qui étaient de ce style-là parce que « ce sont les exercices types qu'on vous donnera, faut que vous les compreniez bien », donc si ça allait.

m: juste le « A^c » je ne sais jamais ce que c'est

c: vous êtes habitués à travailler avec « Abarre » plutôt, comme le « $P(D \setminus A)$ »

m: oui on mettait un petit A. Oui c'était surtout ça qui était compliqué, mais sinon le reste ça allait.

c: donc cet exercice (elle me montre ses notes) ce sont les notes du tableau ?

m: oui je n'aurais pas mis ça comme ça sinon.

c: comment est-ce que vous avez fait cet exo ?

m: on a commencé par mettre toutes les données, en général les profs de maths ils font tous ça, ils mettent toutes les données et ce qu'on sait grâce à l'énoncé et après on a mis la probabilité de A machin machin...

c: donc ce sont des choses de l'énoncé ce que tu me dis c'est ça ? $P(A)$, $P(D/A)$ et $P(\text{Dbarre}/\text{Abarre})$?

m: oui

c: et après qu'est-ce que tu as fait ? comment on fait pour répondre à ces questions ?

m: on a répondu aux questions, ça me semble plutôt simple du coup. Pour calculer la proba de A, bah ça c'était un peu une question bête parce qu'on nous la donnait dans la consigne, après Abarre c'est 1 - la proba de A, du coup c'était facile aussi. Après D sachant A on nous la donnait dans la consigne aussi et du coup bah après D sachant Abarre c'était facile aussi, c'était juste de la logique.

c: pour la question (b) alors du coup ?

m: il fallait qu'on traduise d'abord qu'elle est la proba qu'on cherchait mathématiquement et après c'était juste de l'application de formules. Donc ça allait aussi. Je crois qu'on a démontré la formule de Bayes du coup.

c (je lis ses notes): tu as écrit au début la définition $P(A \text{ sachant } D)$ c'est $P(A \cap D)$ sur $P(D)$.

m: voilà et après comme on n'avait pas toutes les infos on a retravaillé la formule et après on a dit « oh bah tiens on tombe sur la formule de Bayes c'est parfait », puis on a remplacé par les valeurs et ça marche bien.

c: est-ce que tu te souviens si tu as eu le temps de regarder cet exo pendant le TD avant qu'il ne soit corrigé ?

m: c'était le TD2, donc c'était la prof qui écrivait tout au tableau, du coup on suivait juste, mais ça ne me semble pas trop compliqué. C'est un peu ça qu'on faisait dans l'exo que tu m'as envoyé.

c: on peut le regarder

m: j'ai fait un arbre de proba pour répondre, c'était juste calculer les branches et faire des multiplications donc ce n'était pas trop compliqué.

c: est-ce que tu fais des arbres quand tu cherches les exos du TD ? Ou dans l'exo 5 du TD2 est-ce que tu en aurais fait un si tu avais eu le temps ?

m: je pense que j'en aurais fait un oui.

c: $P(BnS)$ tu as fait avec l'arbre c'est ce que tu me dis ?

m: oui j'ai fait ça fois ça et du coup ça va.

c: $P(\text{Sbarre})$

m: oui j'ai additionné ça plus ça donc c'est ça fois ça plus ça fois ça,

c: $P(B \text{ sachant } S)$

m: pour faire ça, je me dis comment on fait, du coup je réfléchis à ce que j'ai fait avant parce que je l'ai fait mécaniquement et du coup j'ai réécrit la formule et j'ai tourné la formule pour que ça me donne ça divisé par ça et puis j'ai remplacé par les bonnes valeurs.

$$1) P(B \cap S) = 0,2 \times 0,2 = 1/25$$

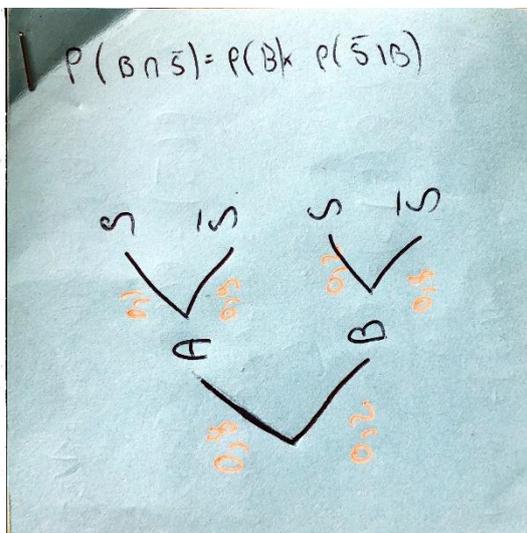
$$2) P(\bar{S}) = P(B \cap \bar{S}) + P(A \cap \bar{S})$$

$$= 0,2 \times 0,8 + 0,8 \times 0,5$$

$$= 0,88$$

$$3) P(B|S) = \frac{P(B \cap S)}{P(S)}$$

$$= (1/25) \div (1 - 0,88)$$



Troisième partie : TD4 15:36

c: est-ce que vous avez eu le temps de faire tous les exos en TD ?

m: 1,2,3,4,7,5,6

c: regardons l'exercice 4, vous avez travaillé avec quelle fonction car en fonction des groupes « f » n'était pas toujours la même (NB ; ici f avec un seul morceau).

m: je pense que je n'ai pas réussi directement cet exercice car à chaque fois le « c » je ne savais pas comment le faire mais le prof avait dû donner une indication au tableau donc après ça s'enfilait bien, c'est juste des intégrales à faire donc ça va.

c: comment tu fais par exemple pour la première question ?

m: on sait que quand on fait l'intégrale ça fait 1 donc on a calculé son intégrale et on a dit que c'était égal à 1 et du coup l'intégrale on tombait sur c/3 donc on avait c=3

c: et la question suivante ?

m: pour les profs, quand on ne comprenait pas ils nous faisaient le schéma de la courbe qui fait comme ça (elle parle de la courbe en cloche) dans ma tête c'est toujours une courbe comme ça. Et on décalait par rapport à la droite qu'on avait et on se disait « oh bah le calcul c'est simple c'est juste l'intégrale entre ça et ça ». Là je viens de me rendre compte que j'ai écrit autre chose mais c'est du coup l'intégrale entre 1/4 et 3/4 donc c'est pareil, comme on a « c » le calcul il est faisable.

c: ensuite on te demandait l'espérance et la variance

m: oui bah du coup l'espérance c'est l'intégrale de la fonction fois x donc après c'est pareil c'est juste du calcul et la variance c'est la même formule que d'habitude avec des carrés donc ça va aussi.

c: la fait qu'on travaillait avec une indicatrice ?

m: au début c'était bizarre puis après je me suis rendu compte que c'était pratique puisque ça nous permettait de mettre des valeurs sur notre intégrale pour nous dire de calculer de tant à tant donc ça allait. Au début je ne comprenais pas trop c'était quoi parce que sur les diaporamas en CM c'était juste un 1 normal et nous on était là « mais pourquoi y a un 1 ? » mais en fait ça va.

c: et pour la variance ça allait ?

m: oui, bah ça va c'est une formule faut juste la connaître, elle est plutôt simple à retenir, juste on ne comprend pas pourquoi c'est ça mais on l'applique, c'est un peu dommage.

c: est-ce que dans cette feuille tu trouves certains exos difficiles ?

m: non dans cette feuille ça va, c'était plutôt simple, ça allait. Juste au début l'indicatrice. Là où j'ai eu le plus de mal mais que du coup je ne sais toujours pas comment faire c'est dans les dernières feuilles de TD, c'est vraiment là où on a fait des choses nouvelles. Faudra que je retravaille. Même quand on ne comprend pas il suffit de faire plein d'exos et puis ça rentre, c'est mécanique en fait.

c: l'année dernière pareil ?

m: c'était pour la loi normale, quand on a une valeur comprise entre tant et tant et que du coup la loi normale elle n'est pas centrée, il faut la centrer et la réduire et ça au début ce n'était pas facile.

c: on peut regarder la question b de l'exercice 2 (TD4) du coup

m: on mettait Z et tac tac, après c'est pareil il faut comprendre quels chiffres il faut mettre avec lesquels et après c'est juste du calcul. C'est juste du calcul.

Quatrième partie : exercice2 (15:36)

c: on peut le regarder et je te laisse écrire dessus si tu as besoin

m: pour faire la question 1 il faut vérifier que l'intégrale est égale à 1 entre 0 et 10

c: une densité elle doit vérifier une autre condition en plus, laquelle ?

m:

c: une condition de signe

m: elle doit être toujours positive c'est ça ?

c: oui, comme c'est un polynôme ici faut faire une étude signe

m: après pour X supérieur à 7 (elle cherche au brouillon). On calcul l'intégrale de 7 à plus l'infini mais du coup ici ça sera 10.

c: ici c'est inférieur

m: ah pardon donc, entre 0 et 7. Après la production dépasse 6 tonnes, c'est $P(X \text{ supérieur à } 6)$, c'est la même chose : on fait entre 6 et 10. Ensuite pour l'espérance on fait l'intégrale de $xf(x)$ entre 0 et 10.

c: ok très bien et merci !

m: après ce que je peux rajouter pour la didactique des maths c'est que les CM ils ne sont pas très utiles, enfin ils le sont mais ils embrouillent plus qu'autre chose, si on faisait les CM après avoir fait les TD on ne comprendrait pas les CM alors qu'on aurait compris les TD donc c'est un peu... Ils ne sont pas adaptés.

c: les CM t'ont posé plus de difficultés que les TD ?

m: déjà le prof parlait super vite donc ce qu'on faisait c'était juste noter sans même l'écouter et du coup ce n'était pas très utile et ça s'est vu il y avait de moins en moins de monde au CM de maths. Juste les TD suffiraient, peut-être que plus d'heures de TD avec des profs qui font cours à chaque classe ça aurait été mieux je pense.

c: à l'université ça se fait moins

m: en biocel on le fait pas mal et je sais qu'en physique ils le font bcp alors je me dis que ça doit être possible. Parce que les CM c'est, enfin nous on a toujours appris à faire des maths en faisant des exercices et là c'est que du théorique donc... Ce n'est pas toujours clair en CM : trop rapide, trop dense et bcp d'informations qui ne sont pas toujours utiles, parfois on ne sait pas si on nous démontre quelque chose ou si on nous demande de connaître la formule.

c: est-ce que tu te fais des fiches quand tu révises ?

m: non, enfin sauf si y a des formules que je connais pas du tout, je les écris et je les affiche.

----- FIN de l'entretien -----

I.2 Entretien avec Cloe

Entretien Cloé :

11/04/2019

Première partie de l'entretien :

c : tu as eu ton bac S l'année dernière c'est ça, avec mention ?

e : assez bien.

c : tu étais en quelle spécialité ?

e : ISN, informatique

c : quelle note tu as eue en maths au bac ?

e : j'ai eu 11

c : au module de MATH1 ?

e : 14,5 au CC, examen 10, donc au module 11,5 quelque chose comme ça

c : au CC de proba de MATH2 ?

e : j'ai eu 11.

c : est-ce que tu pourrais me donner à peu près le nombre d'heures que tu consacres au maths cette année, hors cours et TD ? On peut commencer par semaine,

e : moins d'1h, pour le CC je me suis basée sur mes acquis car j'avais déjà vu ça en terminale. Donc je me suis dit ça ne doit pas être si différent que ça, donc franchement je n'ai pas beaucoup révisé.

c : avant d'aller en CM, est-ce que tu relis le cours par exemple ?

e : je l'ai fait pour les premiers, parce que le prof l'avait dit et que je n'avais pas encore beaucoup de travail. Mais les derniers CM j'y allais et je découvrais.

c : avant les TD est-ce que tu passes en peu de temps à les préparer ?

e : oui, j'essayais au moins de regarder les feuilles de TD ce que les profs nous donnaient, donc je regardais les exos, j'essayais de les faire. Ce que j'arrivais, ce que je n'arrivais pas, et puis au moins poser des questions en TD si jamais j'avais eu du mal. Sur les derniers TD je le faisais moins parce que j'avais un peu de mal déjà de base un peu avant, donc du coup sur les derniers TD je le faisais un peu moins.

c : tu y passais combien de temps à peu près à préparer ces TD ?

e : une bonne heure

c : est-ce que tu saurais me dire à quel TD tu t'es arrêtée ?

e : le 4 à peu près

c : pour préparer le CC, combien de temps tu as consacré à cette préparation ?

e : j'ai refait les TD, on a aussi des exercices complémentaires que j'ai refaits, j'ai donc dû y passer 3h ou 4h.

c : est-ce que du coup tu as l'impression de beaucoup travailler pour les maths ?

e : non, peut-être qu'il faudrait plus, j'en suis complètement consciente, mais non je ne bosse pas assez.

c : quand tu travailles tes maths, quelles ressources tu utilises ? Les ressources ça peut être : tes notes de cours, les exemples du cours, les exercices du TD, ton cours de terminale, des ressources sur Internet ?

e : déjà je refais les exercices de TD et ceux que je n'ai pas compris j'essaie de les refaire. Je refais aussi les exercices complémentaires qu'on nous a donnés, je revois aussi mon cours de terminale parce qu'il y a des exercices qui étaient quand même similaires donc j'essaie de les revoir. Sinon sur Internet si j'arrive à choper des exercices qui sont en liens avec ce qu'on fait, bah du coup je l'ai fait aussi.

c : sur Internet tu vas sur un site en particulier ?

e : non je tape vraiment « probabilités pour les terminales », parce que probabilités en biologie au deuxième semestre ils ne connaissent pas beaucoup, donc je mets « terminale de base » et j'essaie de trouver des exercices sur les variables aléatoires, des exercices corrigés aussi pour que je puisse avoir la correction.

c : tu me parles d'exercices similaires avec la terminale, est-ce que tu aurais des exemples à me montrer ?

e : sur les premiers TD, TD2 (elle cherche dans ses notes), tout ce qui est avec des boules qu'on tire au hasard, des arbres, tout ce qui est avec les boîtes, les « sachant que », tout ça j'essaie de les refaire aussi. Mais oui c'est surtout sur les premières fiches de TD.

c : durant les TD est-ce que tu notes tout ce qu'il y a au tableau ? Tu notes en plus ce que le prof peut dire ? Ou ce sont tes notes personnelles quand toi tu as cherché les exercices ?

e : sur les premiers TD c'est moi qui faisais les exercices. Donc tout ce qui est en bleu c'est moi qui faisais et si jamais ce n'était pas bon je barrais et je mettais en vert, puis après je reprenais la correction que le prof faisait au tableau. Après, notamment TD4, je mettais tout en verre parce que j'arrivais pas du tout à les faire, donc je mettais ce que le prof écrivait au tableau et des fois ce que le prof expliquait, donc je notais aussi ce qu'il nous racontait. Après j'écrivais, mais je me suis dit « voilà j'écris et je verrai ce que ça donne » parce que je ne comprenais pas forcément ce que j'écrivais mais je me disais que peut-être qu'après je vais revoir et je vais mieux comprendre.

c : quand tu retravailles tes notes de TD, tu m'as dit que tu reprenais toutes les feuilles de TD pour bosser le CC, tu refais tous les exercices ?

e : oui et après j'essaie de voir avec la correction si c'était complémentaire de ce que moi j'avais fait et puis voir s'il n'y avait pas une notation différente que j'aurais pu faire, que le prof voilà a fait.

c : est-ce que les exercices qui n'ont pas été faits en TD tu les as repris toi-même, ou avec des copains ?

e : oui je voulais le faire, au début je voulais vraiment regarder les derniers exercices parce que je savais que ça allait être ceux qu'on allait faire le moins en TD, dont j'ai essayé de les regarder. Mais au final je ne les ai pas refaits parce que je voyais pas du tout comment m'y prendre.

J'essayais de poser des questions au prof, mais je n'ai pas réussi, je voyais pas du tout comment faire (elle me montre l'ex7 du TD4) : j'ai dû faire

la question 1 mais la suite je ne voyais pas comment faire, je voyais pas du tout ce qu'on attendait. Et puis comme je n'ai pas vraiment bien retravaillé les CM je ne voyais pas ce qu'on attendait non plus.

c : est-ce que tu travaillais différemment pour le module d'analyse du premier semestre ?

e : je relisais + le cours parce qu'il était + compréhensible, c'était ce qu'on avait vu en terminale c'était plus clair pour moi et le prof écrivait au tableau aussi donc ça me permettait de mémoriser quand j'écrivais du coup. Le deuxième semestre c'est vraiment que des diapos donc on copie, on copie, ce n'est pas interactif du coup, ça me donne moins envie de les relire. Au premier semestre je bossais quand même + les maths qu'au second.

c : est-ce que tu étais à l'aise en probabilités au lycée ? Est-ce que tu étais + ou - à l'aise en probabilités que dans les autres contenus de maths ?

e : on voyait ça depuis la seconde, donc c'était du revu un peu, on voyait ça régulièrement donc j'étais plus à l'aise. Par rapport aux intégrales, ce qu'on voyait pour les intégrales c'était des choses nouvelles. Mais cette année je trouve que c'est plus compliqué que ce qu'on voyait en terminale. On a des notations différentes, on voit des nouveaux termes, on voit des nouveaux signes et du coup dans les exercices je l'impression que c'est les mêmes exercices qu'en terminale mais qu'on attend plus de choses de nous qu'en terminale.

c : est-ce que tu trouves quand même que le contenu du module est en continuité avec les probabilités que tu avais en terminale ?

e : oui quand même. Mais beaucoup plus poussé.

c : tu y as déjà un peu répondu, est-ce que tu peux me dire pourquoi tu trouves les mathématiques plus difficiles cette année qu'au lycée ?

e : c'est plus difficile cette année. Là c'est vrai qu'en probabilités j'ai vraiment l'impression, même si je pense que ce n'est pas le même niveau, d'être en fac de maths. Quand on voit tous les symboles, tous les machins, je suis un peu perdue. On attend beaucoup de choses de nous, beaucoup de rédaction qu'au final on n'est pas forcément capable de faire et qu'en terminale on ne faisait pas forcément. Et on est obligé de le faire parce que sinon on nous enlève des points parce qu'on a mal rédigé. C'est aussi de la rigueur, on nous apprend aussi la rigueur mathématique.

c : est-ce que tu trouves que les modules de maths te sont utiles dans ta formation de biologiste ?

e : pas du tout. De temps en temps on voit des exercices qui se rapportent un peu à la biologie, pour calculer par exemple le pourcentage d'une population mais dans la plupart du temps non.

c : et dans les autres cours de biologie vous n'utilisez pas de maths ?

e : non, mais les profs nous disent que ça sert les maths. Mais je n'arrive pas à me dire que ça va me servir.

c : est-ce que durant le TD vous aviez du temps pour préparer les exercices ?

e : on nous demandait de préparer, enfin de regarder un peu les exercices et après pendant le TD le prof passait nous voir chacun et redisait la même chose à chaque personne et après il allait au tableau et redisait la même chose qu'il a déjà dit à tout le monde donc je ne trouvais pas forcément ça utile. Il nous disait « vous faites toute la fiche », et on corrigeait à la fin du coup on n'avait pas le temps pour corriger tous les exercices.

exercice 1.

a) $P(A) = 0,05$
b) $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = P(\bar{A}) = 0,95$
c) $P(D|A) = 0,6$
d) $P(\bar{D}|\bar{A}) = P(\bar{D}|A) = 1 - P(D|A) = 1 - 0,98 = 0,02$
e) $P(\bar{D}|A) = P(\bar{D}|A) = 1 - P(D|A) = 1 - 0,6 = 0,4$
f) $P(\bar{D}|\bar{A}) = P(\bar{D}|A) = 0,98$

Deuxième partie de l'entretien (ex5 du TD2) (15 :00) :

e : ça c'est moi qui l'avais fait chez moi et puis après j'ai attendu d'avoir la correction.

c : est-ce que tu peux m'expliquer du coup un peu ce que tu as fait ?

e : la question 1 du coup j'avais fait un arbre, les profs nous disent de pas faire un arbre enfin je ne sais pas mais moi j'ai toujours fait ça en terminale et cette année ils nous disent « bah non ça ne sert à rien ».

c : en CM en TD ?

e : en TD. En CM il ne le dit pas mais il n'en fait pas non plus. J'ai toujours eu l'habitude de faire des arbres pour visualiser un petit peu toutes les probabilités et après ça me permet de repérer ce que je dois vraiment noter et calculer.

(retour à la Q1 de l'ex5 TD2) 5 % des boîtes sont abîmées donc j'avais mis 0,05, ensuite, ce... c'est quoi

ça ? Ah oui c'est $P(\bar{A})$! Ce signe moi je le mettais comme ça. Donc ici moi j'avais fait 1 - la probabilité de A donc 0,95. Ensuite $P(D$ sachant A) donc j'avais fait avec l'arbre et j'avais mis 0,6 que j'ai trouvé dans l'arbre aussi, après $P(D$ sachant Abar) 1 - ce que j'avais trouvé au final, 0,98 donc 1 - cette proba là : 0,02. Et c'est pareil pour la suite, avec l'énoncé j'ai du mal mais du coup avec l'arbre voilà.

c : et la question 2 ?

e : je crois qu'on ne l'avait pas faite (sur ses notes : il n'y a rien)

c : est-ce que tu veux regarder la question 2 maintenant ?

e : $P(\bar{D}$ sachant A), ah non ce n'est pas ça. La probabilité qu'il a acheté une boîte abîmée sachant qu'elle était défectueuse, ah oui parce que du coup c'est l'inverse de mon arbre donc je ne sais pas... Vu qu'il n'y avait plus besoin d'arbre j'étais perdue donc je ne sais pas, je ne voyais pas comment le calculer.

c : déjà, quelle est la probabilité que l'on souhaite calculer à la question 2 ?

e : ouais je vois ce que c'était mais je ne vois pas comment la calculer, $P(A$ sachant D). Je me suis dit peut-être qu'on peut mettre l'arbre dans l'autre sens, mettre les D et Dbar là et puis après... Mais enfin je ne sais pas comment faire.

[pause dans l'entretien pour lui expliquer comment faire la Q2]

c : peut-être qu'on peut maintenant regarder l'exercice que je t'avais envoyé ? Je te laisse m'expliquer ce que tu as fait :

e : du coup j'avais noté les données que j'avais et pareil j'ai refait un arbre. Ensuite la première question BnS, c'est pareil j'ai multiplié les deux valeurs du coup, ça me donnait 0,04. Ensuite pour P(Sbarre) j'ai fait P(AnSbarre) et P(Bn Sbarre) du coup, je les ai additionnés ensemble et du coup j'ai eu 0,95. Enfin c'est pareil je mets « Sbarre » mais normalement c'est avec le petit « c » au-dessus, je ne sais pas si au contrôle on nous enlèvera des points là-dessus mais je le fais instinctivement en fait. Après P(B sachant S), j'ai utilisé cette formule aussi, ça me faisait ce que j'ai obtenu là, j'avais P(Sbarre) et on veut S, donc j'ai fait 1 - P(Sbarre), donc ça faisait 0,12.

c : est-ce que sur cette feuille 2 tu trouves qu'il y a des exercices qui ressemblent au lycée ?

e : oui le 1, le 2, le 3 un peu aussi. Mais l'exercice 7 j'ai eu beaucoup de mal, j'ai voulu faire un arbre mais ce n'était plus possible, il y avait 5 tiroirs, j'avais même essayé de faire une armoire pour représenter mais j'ai vraiment du mal et au final on ne l'a même pas corrigé.

exercice 4: loi d'une variable aléatoire $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ nombre
 loi $(X) = \{ \text{collection de } P(X=i); i \in \mathbb{N} \}$
 $P(X=x_i)$

Si X est à valeur dans les nombres réels:
 et si la loi de X a une densité, la loi de X est déterminée par les quantités
 $P(a < X < b) = \int_a^b f(t) dt$
 probabilité calcul

Dans cet exercice, on a la densité $f(x)$ de X .
 a) la constante c n'a pas été précisée: on a toujours 1 = $P(-\infty < X < +\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1$

Troisième partie (ex4 TD4) (29 :00) :

c : on peut peut-être regarder l'ex4 du TD4.

e : du coup-là c'est un exercice que je n'avais pas fait parce que je n'avais pas du tout réussi, et donc le prof a complètement corrigé l'exercice au tableau, dont j'ai recopié et je me suis dit que je regarderai ça plus tard à tête reposée. Mais c'est vrai que je n'ai pas encore eu le temps de le faire. En fait c'est avec les notations...

c : la notation indicatrice ?

e : oui en fait je ne voyais même pas ce qu'on attendait de moi, qu'est-ce que c'était que ça, pour la première question. Et quand on l'a faite j'ai compris, mais de là à la refaire, je pense je serais incapable.

c : je te laisse reprendre tes notes si tu veux, on regarde ensuite.

e : fallait utiliser les intégrales, mélanger les intégrales et les probabilités, c'est un peu compliqué. En revenant dessus ça va. Fallait utiliser du coup, trouver la primitive, la primitive de x^2 et après utiliser la fonction, il y avait les indicatrices qui étaient comprises entre 0 et 1 et 2 et 3, avec les intégrales on mettait l'intégrale comprise entre 0 et 1 et 2 et 3, je voyais même pas, enfin je comprenais pas à quoi ça correspondait en fait. Je vois concrètement l'idée, mais l'indicatrice... Je ne sais même pas comment lire cette phrase.

c : vous n'avez pas rappelé ce qu'était une indicatrice ?

e : non pas du tout. On nous a juste dit du coup que l'intégrale était comprise de 0 et 1 et de 2 et 3 et on nous a dit d'appliquer la formule et après de déterminer les primitives du coup, et après on obtenait « c ».

De voir ça et de me dire quand on me dit « que vaut c ? » faut que je mette ça en intégrale, je ne sais pas, en relisant, en refaisant plein d'exercices je pense que j'aurais la jugeote mais pour l'instant ça ne me viendrait pas à l'esprit. Même pour la deuxième question, pareil c'est des intégrales, je ne sais pas si j'aurais eu l'idée.

c : et pour la question 2 est-ce que tu peux m'expliquer ce que tu as fait ?

e : donc là pareil, on mettait les intégrales, on mettait que c'était compris entre 1/4 et 3/4, vu qu'on connaissait « c » du coup on savait que « c » c'était égal à 3/2, comme c'est une constante du coup on peut la mettre avant l'intégrale, et après on résout comme une intégrale classique. Mais c'est pareil, ce symbole-là je ne le mettais pas comme ça....

c : tu n'écrivais pas $t^{3/3}$ entre crochets ?

e : en terminale la prof le faisait pas souvent dont j'ai toujours pris l'habitude de faire ça comme ça (elle parle de la remarque qu'elle a écrite concernant la primitive de g), donc là j'avais recopié la correction, mais je sais que si je refaisais l'exercice j'écrirais g c'est cette fonction, G c'est cette fonction.

c : et la question sur l'espérance ?

e : c'est pareil comme je ne me souvenais plus de la formule, je me rappelais vaguement ce que c'était, faut pas se tromper avec le carré qui est à l'intérieur ou à l'extérieur des crochets.

c : donc cet exercice tu l'as trouvé ?

e : compliqué ! Quand il l'a fait sur le coup j'ai essayé de comprendre, je comprenais, mais là me replonger dedans... Dans une des premières fiches on a vu une formule de l'espérance, sans les intégrales, et là le fait de mettre des intégrales là-dedans...

c : tu parles de la formule avec la somme ?

e : oui la somme avec les p_i . Si je vois l'exercice comme ça et qu'on me demande de calculer l'espérance je ne sais pas laquelle des formules je dois utiliser.

ici: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = \int_0^1 ct^2 dt + \int_1^2 \frac{1}{2} dt = c \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times 1 = \frac{c}{3} + \frac{1}{2} (=1)$

Donc $c = \frac{3}{2}$.

Remarque: $\int_0^1 g(t) dt = G(1) - G(0)$ Si $G' = g$: on dit "G primitive de g".

b) $P(\frac{1}{4} < X < \frac{3}{4}) = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} f(t) dt = \frac{3}{2} \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} t^2 dt = \frac{3}{2} [\frac{t^3}{3}]_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2} [(\frac{3}{4})^3 - (\frac{1}{4})^3]$

c) $E[X] = \int_0^4 t f(t) dt = \frac{3}{2} \int_0^1 t \times t^2 dt + \int_1^2 t \times \frac{1}{2} dt = \frac{3}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times [\frac{t^2}{2}]_1^2$
 $= \frac{3}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times (\frac{3^2}{2} - \frac{2^2}{2})$

$E[X^2] = \int_0^4 t^2 f(t) dt = \frac{3}{2} \int_0^1 t^2 \times t^2 dt + \int_1^2 t^2 \times \frac{1}{2} dt =$

$Var(X) = E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - E[X]^2$

c : dans un exercice comme ça tu saurais me dire si on est avec des variables aléatoires discrètes ou continues ?

e : ah non

Exercice 2

La production quotidienne X d'un produit en tonnes est une variable aléatoire continue qui prend ses valeurs dans l'intervalle $[0; 10]$ avec la densité de probabilité f définie par :

$$f(x) = 0,006(10x - x^2).$$

1. Vérifier que f est bien une densité de probabilité sur $[0; 10]$.

2. Calculer la probabilité des événements suivants :

A : « $X \leq 7$ » ; B : « la production quotidienne dépasse 6 tonnes ».

3. Calculer l'espérance mathématique $E(X)$.

$$P(0 \leq X \leq 7) = \int_0^7 f(x) dx \quad P(X \geq 6) = P(6 \leq X \leq 10)$$

$$E[X] = \int_0^{10} x f(x) dx$$

vérifies ici sur l'intervalle $[0; 10]$. Et puis il faut aussi que « f » soit positive.

c : la deuxième question du coup, je te laisse regarder. Tu peux t'aider de l'ex4 si tu veux.

e : ce n'est pas compris entre 0 et 7 ? Je ne sais pas si on peut dire que si X est inférieure ou égale à 7 alors il est compris entre 0 et 7.... Donc c'est pareil c'est avec l'intégral (elle écrit), et après je remplace, ah non il faut d'abord que je détermine la primitive.

c : oui voilà et ensuite on calcul l'intégral. Après le deuxième événement : la production dépasse 6 tonnes, ça ressemblerait à quoi ça ?

e : (elle écrit) c'est $P(X \text{ supérieur ou égal à } 6)$, il est quand même compris entre 6 et 10, et ensuite pareil, intégrale de 6 à 10, en remplaçant avec la primitive.

c : et pour l'espérance comment tu ferais ?

e : (regarde l'exercice 4 mais elle écrit quand même intégrale de $f(x)dx$)

c : dans cette feuille 4 est-ce que tu pourrais me dire quels exercices tu as trouvé difficiles et pourquoi ?

e : en fait, tous. C'est à partir de ces CM là que j'ai eu du mal à comprendre, donc les TD c'était aussi compliqué, même le premier exercice je l'ai regardé chez moi, j'essayais de le faire et je l'ai fait en cours avec le prof, enfin en TD.

c : le deuxième exercice par exemple ?

e : en terminale je faisais avec la calculatrice du coup-là de faire à mains nues, non...

c : et l'exercice 3 ? tu m'as parlé de lambda tout à l'heure ?

e : je savais qu'il y avait une formule entre lambda et l'espérance de vie, enfin il y a une relation entre les deux. c'est la loi uniforme non ?

----- FIN de l'entretien -----

Quatrième partie de l'entretien (ex2) (40 :00)

c : est-ce qu'on pourrait regarder rapidement cet exercice-là ?

e : déjà la première question... J'aurais voulu remplacer « x » par zéro puis remplacer « x » par 10 mais je n'aurais pas les valeurs intermédiaires. Mais c'est pareil, c'est avec l'intégral aussi non ?

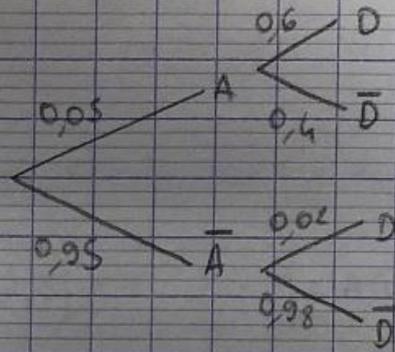
(elle prend un peu de temps pour chercher mais rien)

c : une fonction de densité « f », est-ce que tu te souviens quelles sont ses propriétés ?

e : une densité, ce n'était pas avec lambda ?

c : pour la question 1 de l'exercice 4 que l'on vient de regarder quand on a cherché ce que valait « c », on a utilisé une propriété d'une fonction de densité qui est que son intégrale vaut 1. C'est cette propriété qu'il faut que tu

exercice 1.



a) $P(A) = 0,05$

b) $P(A^c) = 1 - P(A) = P(\bar{A}) = 0,95$

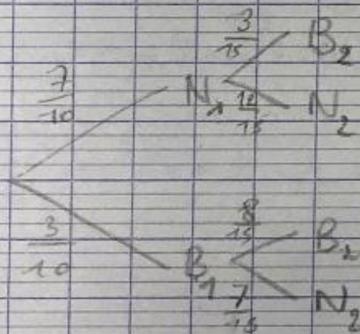
c) $P(D|A) = 0,6$

d) $P(D|A^c) = P(D|\bar{A}) = 1 - P(\bar{D}|\bar{A}) = 1 - 0,98 = 0,02$

e) $P(D^c|A) = P(\bar{D}|A) = 1 - P(D|A) = 1 - 0,6 = 0,4$

f) $P(D^c|A^c) = P(\bar{D}|\bar{A}) = 0,98$

2.



$P(B|N) = \frac{P(B \cap N)}{P(N)}$

$P = \frac{\frac{3}{15} + \frac{7}{10}}{P(B \cup N)}$

$P(N) = \frac{7}{10}$ $P(B) = \frac{3}{10}$ $P($

$N_1 =$ noire au 1^{er} tirage ; $N_2 =$ noire au 2^{ème} tirage $P(N_1) = \frac{7}{10}$ $P(B_1) = \frac{3}{10}$

$B_1 =$ blanche au 1^{er} tirage ; $B_2 =$ blanche au 2^{ème} tirage $P(B_2|B_1) = \frac{8}{15}$

$P(N_2|B_1) = \frac{7}{15}$ $P(B_2|N_1) = \frac{3}{15}$ $P(N_2|N_1) = \frac{12}{15}$

$P(N_1 \cap B_2) = \frac{P(N_1 \cap B_2)}{P(B_2)}$ $P(N_1 \cap B_2) = P(B_2|N_1) \times P(N_1) = \frac{3}{15} \times \frac{7}{10}$

$P(B_2) = P(B_1 \cap B_2) + P(N_1 \cap B_2) =$
 $= P(B_2|B_1) \times P(B_1) + P(B_2|N_1) \times P(N_1)$

Figure 1: ex5 puis ex4 du TD2

Exercice 2: $Y \sim \mathcal{N}(m; \sigma^2)$ peut s'écrire $Y = m + \sigma X$ $X \sim \mathcal{N}(0; 1)$

$$P(Y \geq 2) = P\left(X \geq \frac{2-m}{\sigma}\right) \quad P(-3 \leq Y \leq 3) = P(-8 \leq 3X \leq -2) =$$

$$P\left(-\frac{8}{3} \leq X \leq -\frac{2}{3}\right) \quad Y = 5 + 3X.$$

Exercice

Exercice 3: $E\left(\frac{1}{10}\right)$: densité: $p(t) = \frac{1}{10} \exp\left(-\frac{t}{10}\right), t \geq 0$ 0 si $t < 0$

$$E(X) = \lambda e^{-\lambda t}, t > 0 \quad E[X] = \int_0^{\infty} t X p(t) dt =$$

$$E[E(X)] = \frac{1}{\lambda}$$

$$b) P(X \geq 1) = \int_1^{\infty} p(t) dt = \int_1^{\infty} \frac{1}{10} e^{-\frac{t}{10}} dt = \frac{1}{10} \left[10 e^{-\frac{t}{10}} \right]_1^{\infty} = e^{-\frac{1}{10}}$$

Exercice 4: Loi d'une variable aléatoire: $X: \Omega \rightarrow$ nombre

Loi $(X) = \{ \text{collection de } P(X=i); i \in \mathbb{N} \}$

$$P(X=x_1)$$

$$\vdots$$

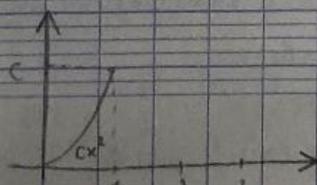
$$P(X=x_k)$$

Si X est à valeur dans les nombres réels:

et si la loi de X a une densité, la loi de X est déterminée par les quantités

$$\underbrace{P(a \leq X \leq b)}_{\text{probabilité}} = \underbrace{\int_a^b f(t) dt}_{\text{calcul}}$$

Dans cet exercice, on a la densité $f(x)$ de X .



a) La constante c n'a pas été précisée: on a tou-

$$\text{jours } 1 = P(-\infty < X < +\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1$$

Figure 2: ex2, ex3 et ex4 du TD4

Donc: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = \int_0^1 ct^2 dt + \int_2^3 \frac{1}{2} dt = c \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times 1 = \frac{c}{3} + \frac{1}{2} (=1)$

Donc $c = \frac{3}{2}$.

Remarque: $\int_0^1 g(t) dt = G(1) - G(0)$ Si $G' = g$: on dit "G primitive de g".
 $(\frac{t^3}{3})' = t^2$

b) $P(\frac{1}{4} \leq X \leq \frac{3}{4}) = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} f(t) dt = \frac{3}{2} \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} t^2 dt = \frac{3}{2} [\frac{t^3}{3}]_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2} [(\frac{3}{4})^3 - (\frac{1}{4})^3] =$

c) $E[X] = \int_0^1 t f(t) dt = \frac{3}{2} \int_0^1 t \times t^2 dt + \int_2^3 t \times \frac{1}{2} dt = \frac{3}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times [\frac{t^2}{2}]_2^3$

$= \frac{3}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times (\frac{3^2}{2} - \frac{2^2}{2})$
 $E[X^2 - 2E[X]X + E[X]^2] = E[X^2] - 2E[X]E[X] + E[X]^2$

$Var(X) = E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - E[X]^2$

$E[X^2] = \int t^2 f(t) dt = \frac{3}{2} \int_0^1 t^2 \times t^2 dt + \int_2^3 t^2 \times \frac{1}{2} dt =$

exercice 5: X de loi uniforme sur $[-1; 1]$. $f(t) = \frac{1}{2}$ sur $[-1; 1]$; 0 ailleurs

Quelle est la loi de signe de X? de X^2 ?

X peut prendre les valeurs entre -1 et 1

Signe de X:

$P(X \leq -1)$ $P(X = -1)$

$P(-1 \leq X \leq 1) = \int_{-1}^1 f(t) dt$

Pour un nombre réel donné "a": signe de a = $\begin{cases} 1, & \text{si } a \geq 0 \\ -1, & \text{si } a < 0 \end{cases}$

Signe de X ne peut prendre que les valeurs ± 1 .

Calculer la loi de signe X signifie:

Calculer $P(\text{signe } X = 1)$

$P(\text{signe } X = -1)$

$-1 \leq X \leq 1$ $-1 \leq a \leq b \leq 1$ donc $0 \leq X^2 \leq 1$ $(P(a \leq X \leq b) = \int_a^b \frac{1}{2} dt = \frac{b-a}{2} > 0)$

Figure 3: suite de l'ex4 et ex5 du TD4

I.3 Entretien avec Adam

Entretien Adam : 02/04/2019

Première partie de l'entretien :

a : ce sont les notes d'un copain car j'ai oublié les miennes, mais ce sont les mêmes que moi, car on note juste la correction au tableau.

c : tu étais en terminale S l'année dernière c'est bien ça ? Et avec une mention bien au bac ?

a : non assez bien.

c : tu étais en quelle spécialité ?

a : svt.

c : et au bac tu as eu 15, c'est ce que tu avais mis dans le questionnaire.

a : oui.

c : au module d'analyse du premier semestre ?

a : 11 au partiel, 13 au module, 15,5 au CC, 20 en python.

c : est-ce que tu sais qu'elle note tu as eu au CC de MATH2 ?

a : 2,5, ça a beaucoup baissé.

c : est-ce que tu pourrais me donner cette année le nombre d'heures que tu consacres aux mathématiques, hors cours, par semaine ?

a : en général je révise avant les contrôles donc je passe 4h avant le contrôle.

c : donc s'il n'y a pas de contrôle, 0 ?

a : oui.

c : la veille du cours magistral ou la veille du TD ?

a : non je ne fais rien.

c : est-ce que tu as l'impression de beaucoup travailler, beaucoup t'investir pour les mathématiques cette année ?

a : non.

c : et quand tu prépares l'examen est-ce que tu as l'impression de beaucoup travailler ?

a : bah du coup je compense le travail que je n'ai pas fourni avant. L'année dernière je travaillais un peu de la même façon, sauf qu'on nous demandait de préparer des exercices avant les TD donc du coup je travaillais toujours avant les cours. Comme on n'a plus ça cette année bah on peut le faire avant mais en fait non, on ne le fait pas parce qu'on ne nous le demande pas et que ce n'est pas vérifié. Je travaillais aussi 4h avant les contrôles. J'ai eu des difficultés en mathématiques en seconde et en première et du coup j'ai pris des cours particuliers et en terminale ça s'est beaucoup amélioré, ça m'a fait travailler autrement, en seconde et en première je relisais juste le cours, puis en terminale j'ai commencé à refaire les exercices, c'est ce qui m'a permis de progresser.

C : est-ce que tu pourrais me dire pourquoi tu ne fais pas ça cette année ?

a : j'ai besoin qu'on soit derrière moi, je sais que ce n'est pas comme ça à la fac, j'essaie mais voilà.

C : le professeur ne vous demande pas de préparer les exercices ?

a : non le professeur il arrive, il corrige les exercices en parlant au tableau et puis voilà.

c : quand tu révises pour les probabilités, quelles ressources tu utilises pour travailler ? Ça peut être tes notes de cours, les exercices du cours, les exercices du TS, ton cours de terminale, les discussions avec d'autres étudiants, des manuels, des ressources sur Internet...

a : j'utilise le cours du prof forcément, je le relis, je révise. J'essaie de comprendre les points qui sont difficiles, je relis beaucoup les exercices et je fais aussi les fiches d'entraînement qu'ils nous fournissent. En général avant chaque contrôle on a une fiche avec des exercices types qu'on pourrait avoir au contrôle. Et donc du coup on met ça en commun avec d'autres élèves.

C : tu les prépares chez toi ?

a : oui.

C : les copains les préparent aussi ? Et vous mettez en commun ?

a : oui, on s'envoie les photos et puis on discute s'il y a des points que l'on ne comprend pas.

C : et les exercices qui ont été faits en TD est-ce que tu les reprends ?

a : oui je les relis mais je ne les refais pas parce que je ne comprends pas, pas en probabilités en tout cas.

C : tu trouves qu'il y a des différences entre les exercices du TD et ceux de la feuille de révision ?

a : non ça va, ils sont assez similaires, mais les exercices de TD je les trouve très compliqués parce qu'en fait cette année il y a de nouvelles écritures pour les probabilités, en plus dans les TD la difficulté augmente, je trouve ça exponentielle.

C : durant les TD est-ce que tu notes tout ce qu'il y a au tableau ?

a : oui.

C : est-ce que tu notes autre chose ? Des remarques, des commentaires ? Des choses que le prof pourrait dire ?

a : elle note tout au tableau, des fois des compléments de cours avant de commencer les exercices, je les écris aussi.

c : comment est-ce que tu retravailles les notes prises en TD ?

a : je les relis

c : tu ne refais pas les exercices ?

a : non, j'ai déjà du mal à les relire

c : est-ce que vous faites tous les exercices de la feuille durant la séance de TD ?

a : on les fait tous, la prof elle trace.

c : est-ce que tu étais à l'aise en probabilités au lycée, plus ou moins que dans les autres contenus de maths ?

a : au lycée, en seconde et en première, j'avais du mal avec les fonctions, je ne comprenais rien, donc les probabilités je comprenais beaucoup mieux. Et en terminale, ça s'est inversé.

c : en terminale, tu trouvais plus difficiles les probabilités que le reste ?

a : oui.

c : est-ce que tu saurais me dire pourquoi tu trouvais les probabilités plus faciles au lycée et plus difficiles maintenant ?

a : au lycée on avait des arbres, on faisait des petits calculs types, mais il n'y avait pas de grandes recherches comme on a maintenant. Là il y a beaucoup de réflexion je trouve, beaucoup plus et les écritures aussi... (cherche dans ses notes). Les espérances sont beaucoup plus dures, et les lois aussi, il y a la loi de poisson au lycée on avait qu'une loi : on avait la loi binomiale et ce qu'il y avait autour, on avait moins de loi. (Regarde le TD 1) oui voilà c'est les combinaisons, je ne comprends rien aux combinaisons.

c : chapitre 1 donc, tu as trouvé difficile ce chapitre ?

a : oui c'est ça, cardinal (cherche dans ses notes), je croyais que c'était le « ! » le cardinal. En fait le profil il lit les diapos, il fait que ça, et nous on en est là et voilà... Parce qu'en fait au premier semestre la prof elle faisait des exemples au tableau, elle avait l'air de bien connaître son cours.

c : il n'y a pas d'exemples dans le cours ?

a : si par exemple comme là (il me montre son cours), mais il les lit juste et puis voilà

c : est-ce que tu as déjà essayé d'aller poser des questions ?

a : non

c : tu préfères demander aux copains, voir s'ils ont compris ?

a : oui, puis on n'a pas le droit d'utiliser notre ordinateur en CM et c'est un peu embêtant car moi je fais tout sur l'ordinateur. Donc ça n'aide pas.

c : tu m'as dit que tu trouvais le premier chapitre difficile. Si on fait abstraction de celui-ci, comment est-ce que tu as trouvé les chapitres suivants : variables aléatoires discrètes, variables aléatoires continus, indépendance & conditionnement ?

a : quand ça se rapproche un peu du programme de terminale ça va, je comprends ce que l'on fait en TD, au début en tout cas, c'est plus quand on arrive à la fin de la feuille que je trouve ça difficile (montre l'exo6 du TD2) : il y a pleins de T et ça me perds. Puis comme la prof va très vite, en fait j'aimerais bien prendre le temps de comprendre, pour comprendre son cheminement, mais en fait j'ai du mal à suivre donc souvent du coup elle écrit et moi je copie donc finalement...

c : est-ce que durant les TD elle vous laisse du temps entre chaque exercice pour chercher ?

a : non. Elle arrive puis elle écrit au tableau.

c : elle considère que vous les avez déjà cherchés chez vous ?

a : oui sans doute, mais en tout cas on ne le fait pas, nous notre groupe d'amis

c : hormis le premier chapitre, est-ce que ce que tu fais cette année en probabilités te semble en continuité avec ce que tu faisais au lycée ?

a : en soi oui, il y a les nouvelles lois mais c'est forcé. J'ai du mal à les comprendre parce qu'elles sont nouvelles et qu'au final je ne m'entraîne pas trop. C'est surtout l'écriture qui me dérange parce qu'il y a beaucoup de choses qui changent.

c : est-ce que tu pourrais me montrer des exemples ?

Adam me montre la diapo 4 (ce sont des ensembles : $A \setminus B$, Abarre) ainsi que l'écriture $P(S \text{ sachant } A)$ avec la barre verticale : « cette année ils mettent une barre, donc il y a déjà les barres de travers et en plus il faut se souvenir quelle barre est quoi ».

c : tu étais habitué à l'écriture du lycée $P(S \text{ sachant } A)$ avec le A en indice ?

a : ça fait 3 ans qu'on voit ça et puis on nous fait « ah bah non ».

c : donc ça ce sont des notations qui te dérangent dans le cours et dans les corrections ?

a : oui du coup je dois réfléchir « ah ! ça ça veut dire ça », c'est bien la deuxième lettre qu'il y a en dessous d'habitude.

c : est-ce qu'il y a d'autres choses en particulier que tu trouves difficile ?

a : non ce sont surtout les nouvelles lois. L'année dernière j'ai l'impression que c'était beaucoup moins abstrait que cette année même si on voit quand même des exemples avec des boules, des dames, des cartes, bah on nous fait faire des tableaux (ex3 du TD1), on nous fait multiplier des univers, les exercices comme ça je n'ai pas trop compris. Il y a les « w » aussi, je n'avais pas trop compris à quoi ça sert dans le cours, c'est une nouvelle écriture : on n'a jamais eu de W avant, c'est l'univers je crois aussi ? Il y a ça dans toutes les diapos.

c : le grand oméga tu me dis que c'est l'univers ? Et le petit oméga est-ce que tu sais ce que c'est ?

a : non

c : et vous les utilisez souvent ?

a : tout le temps.

c : trouves-tu que les mathématiques sont plus difficiles à l'université qu'au lycée et pourquoi ?

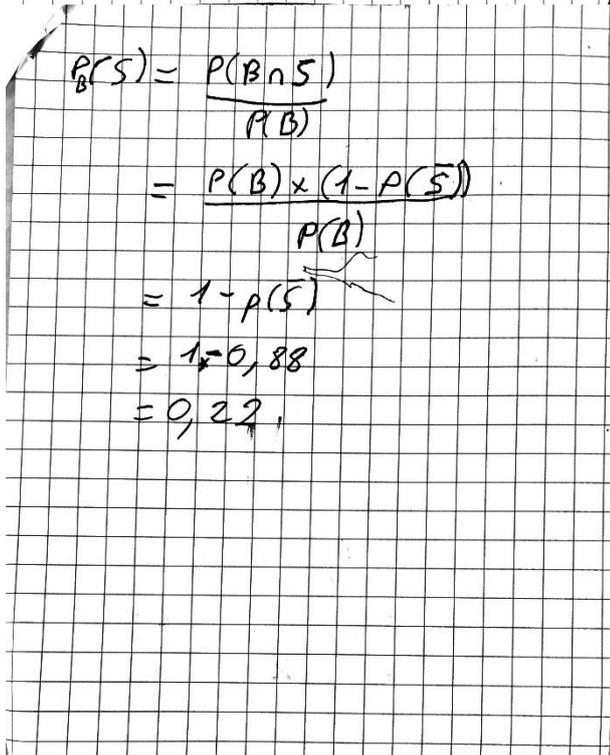
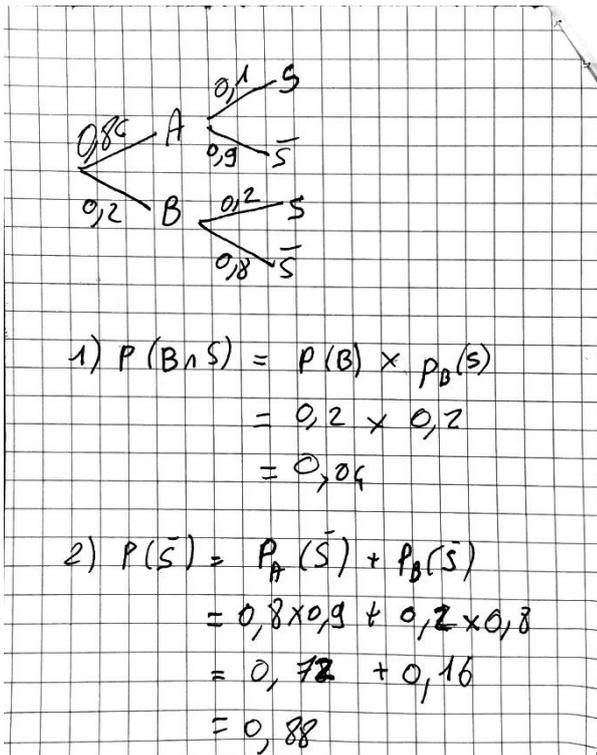
a : le semestre 1 il est similaire, on rajoute les équations différentielles mais c'est relativement simple. Les probabilités c'est plus difficile, il faut plus s'accrocher, parce qu'il y a l'écriture qui change, ils rajoutent des choses et puis ce n'est pas le même type d'exercice en fait. Au premier semestre c'était vraiment les mêmes types d'exercices qu'au lycée mais là c'est beaucoup plus abstrait je trouve.

c : trouves-tu que les cours de maths te sont utiles dans ta formation de biologiste ?

a : le premier semestre peut-être pas, mais les probabilités je sais, tout ce qui est statistique, que c'est important pour avoir une analyse correcte des expériences. Donc oui.

Deuxième partie de l'entretien : exercice 1 (23 :56)

a : je l'ai oublié chez moi, mais je l'ai refait dans le bus rapidement. Je l'ai trouvé facile, on a fait ça au lycée ?



c : oui c'est ça. Est-ce que tu peux m'expliquer ce que tu as fait ?

a : au début j'ai commencé par faire un arbre qui résumait l'énoncé ensuite j'ai répondu aux questions.

c : donc pour la première question ?

a : j'ai mis le calcul qu'il fallait faire $P(B)$ fois $P(S$ sachant $B)$, je crois que c'est ça qu'il faut faire ? Et après j'ai remplacé par les valeurs dans l'arbre. Et puis j'ai trouvé un résultat du coup.

c : cette formule tu me la montres avec ton doigt (sur l'arbre), mais c'est en la lisant sur l'arbre que tu l'as écrite ?

a : oui je la connais un peu mais l'arbre m'aide beaucoup. Si je veux retrouver une formule je prends l'arbre.

c : et pour la deuxième question alors ?

a : là je me suis dit je veux la somme des probabilités quand il y a aucune trace de pesticides donc $P(\bar{S}|A)$, ensuite j'ai regardé dans l'arbre où ça se trouvait et j'ai fait pareil : $P(\bar{S}|A)$ et $P(\bar{S}|B)$, et ensuite j'ai remplacé les valeurs.

c : donc $P(\bar{S}|A)$ tu as écrit avec 0,8 fois 0,9 ?

a : ça vient de l'arbre

c : et la dernière question ?

a : j'ai fait $P(S$ sachant $B)$, puis j'ai fait avec une formule, je crois que c'est ça qu'il fallait utiliser ?

c : tu pourrais m'expliquer pourquoi tu as dit que c'était l'événement S sachant B ?

a : on a une boîte qui a des pesticides donc du coup cette boîte vient de B donc du coup $P(S$ sachant $B)$, je pense.

c : (je lui explique que c'était l'inverse et comment faire etc.) je te laisse quand même m'expliquer la suite de tes calculs ?

a : du coup c'est la même formule que la première. Donc je l'ai refaite. La probabilité de S c'est 1 moins la probabilité de \bar{S} , la probabilité qu'il n'y ait pas de pesticides.

c : tu m'as dit que tu fais la même chose qu'à la première question mais ici ce n'est pas vraiment la même chose, ici (question 1) tu avais mis la conditionnelle ?

a : ici c'est indépendant.

c : si c'est indépendant tu as le droit de le faire ?

a : oui

c : en fait ici ce n'est pas indépendant (je lui explique).

a : je me suis dit que comme il n'y avait pas de pesticides enfin s'il y avait des pesticides on enlevait toutes les boîtes qui avaient des pesticides et donc ils étaient indépendants.

Troisième partie de l'entretien : ex5 du TD2 :

c : est-ce qu'on pourrait regarder l'exercice 5 du TD2 ? Est-ce que cet exercice tu le trouvais difficile ou pas ? Et est-ce que tu as compris ce que vous avez fait ?

a : celui-là ça va parce qu'on applique juste des formules j'ai l'impression. Mais on n'aura pas ça au contrôle.

c : est-ce que question par question tu pourrais m'expliquer ce que tu as fait ?

a : on a 5 % de boîtes qui sont abîmées donc ça c'est la probabilité de A . La probabilité de A^c c'est, ah oui ça c'est \bar{A} , c'est 1 moins la probabilité qu'elle soit abîmée. $P(D$ sachant $A)$ c'est 60, en fait on fait tout par l'énoncé. On peut fonctionner avec un arbre aussi, on retrouve plus facilement les données qu'il faut mettre.

c : tu aurais trouvé ça plus facile de travailler avec un arbre ?

a : ah oui !

c : la deuxième question ?

a : c'est la probabilité qu'il a acheté une boîte abîmée, $P(A)$, il a acheté une boîte abîmée, sachant que le CD est défectueux. C'est le même que là-bas et donc on reprend les valeurs qui sont dans l'énoncé et avec un arbre c'est plus facile

c : $P(A \cap B)$, il n'était pas dans la question 1, tu fais comment pour le recalculer ?

a : on va faire un arbre, du coup on dit $P(A)$ fois $P(D$ sachant $A)$ voilà.

c : comment tu ferais ici pour calculer $P(S)$?

a : $P(A)$ fois $P(S \text{ sachant } A)$ + $P(B)$ fois $P(S \text{ sachant } B)$

c : c'est ça, tu connais le nom de cette formule ?

a : non

c : la formule des probabilités totales

a : non ça ne me dit rien, j'essaie toujours d'en apprendre le moins possible

c : au lycée tu n'étais pas habitué à l'écrire ?

a : non ça ne me dit rien, je me souviens que là où il y avait une écriture particulière c'était pour la loi binomiale

Quatrième partie de l'entretien : TD4

c : sur la feuille d'exercice 4 est-ce qu'on pourrait regarder l'exercice 4 ? Est-ce que tu as compris cet exercice et est-ce que tu pourrais me montrer ce que tu as noté ?

Exercice 4 :

$$f(x) = (x^2) \cdot 1 \leq x \leq 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 \leq x \leq 3$$

a) On doit avoir $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = c \int_0^1 x^2 dx + \frac{1}{2} \int_2^3 dx$$

$$= c \times \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 + \frac{1}{2} (3-2)$$

$$= \frac{c}{3} + \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{c}{3} + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{c}{3} + \frac{1}{2} = 1 \Leftrightarrow \frac{c}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow c = \frac{3}{2}$$

b) $P\left(\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{3}{4}\right) = \int_{1/4}^{3/4} f(x) dx$

$$0 < \frac{1}{4} < \frac{3}{4} < 1$$

$$\Rightarrow P\left(\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{3}{4}\right) = \int_{1/4}^{3/4} c x^2 dx$$

$$= \frac{3}{2} \int_{1/4}^{3/4} x^2 dx = \frac{3}{2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_{1/4}^{3/4}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{3^3}{4^3} - \frac{1}{4^3} \right) = \frac{3^3 - 1}{2 \times 4^3} = \frac{26}{2 \times 64}$$

$$= \frac{13}{64}$$

a : déjà la première question je ne la comprends pas, (il regarde ses notes) ah oui on fait une intégrale, ok on nous demande la valeur de c en fait. On nous demande de trouver c donc du coup il faut intégrer, ensuite on exclut c de l'intégrale, parce que, parce que c'est la règle, et ensuite on a fait une intégration, on a calculé.

c : la deuxième question ensuite ?

a : il suffit de changer les valeurs de l'intégrale

c : ensuite l'espérance et la variance ?

a : ça je sais que c'est la formule de l'espérance, la variance, mais je ne les connais pas. Ah oui donc on prend la valeur de c. La formule de l'espérance elle est dans mes fiches, je fais des fiches de révisions, au lycée je faisais des fiches de révisions plus succinctes avec juste les formules très importantes mais cette année je mets quasiment tout.

c : ça fait partie des 4h de travail ?

a : non je fais ça en amont, avant le contrôle mais en plus des 4h.

a : alors la formule de l'espérance, où est-ce qu'elle est ? Ah ! Cette formule j'essaie de la comprendre chaque fois... (Adam me montre la diapo 16 du chapitre 3 sur les variables aléatoires **discrètes**), au CC j'essayais de ré appliquer cette formule mais en fait je ne trouvais pas où mettre les trucs donc du coup ça a péché ça aussi.

c : mais cette formule tu voulais l'utiliser dans l'exercice (TD4) ?

a : non non, mais le principe est le même entre les deux espérances, en général quand je ne comprends pas l'une je ne comprends pas l'autre. En fait je fais un blocage, dès que je ne comprends pas un truc je me bloque. J'ai regardé longtemps cette formule avant le contrôle j'ai abandonné.

$$\begin{aligned} c) E(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \\ &= \frac{3}{2} \int_0^1 x \cdot x^2 dx + \frac{1}{2} \int_2^3 x dx \\ &= \frac{3}{2} \int_0^1 x^3 dx + \frac{1}{2} \int_2^3 dx \\ &= \frac{3}{2} \times \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^1 + \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} \right]_2^3 \\ &= \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{8} + \frac{1}{4} (9-4) = \frac{3}{8} + \frac{5}{4} \\ &= \frac{3+10}{8} = \frac{13}{8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(x) &= E(|x - E(x)|^2) \\ &= E(x^2) - E(x)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(x^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx \\ &= \frac{3}{2} \int_0^1 x^2 \cdot x^2 dx + \frac{1}{2} \int_2^3 x^2 dx \text{ donc} \\ &= \frac{3}{2} \times \left[\frac{x^5}{5} \right]_0^1 + \frac{1}{2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_2^3 \\ &= \frac{3}{10} + \frac{1}{6} (3^3 - 2^3) \\ &= \frac{3}{10} + \frac{1}{6} (27 - 8) \\ &= \frac{3}{10} + \frac{19}{6} = \frac{9 + 85}{30} \\ &= \frac{94}{30} = \frac{52}{15} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(x) &= \frac{52}{15} - \left(\frac{13}{8} \right)^2 \\ &= \frac{52}{15} - \frac{169}{64} \end{aligned}$$

c : je t'ai posé toutes les questions que j'avais ça c'est sûr, est-ce qu'il y a d'autres choses que tu voudrais ajouter ? Des choses que tu trouves difficiles que tu voudrais me montrer par exemple ?

a : (ex7 td4) je l'ai trouvé difficile, il y a des Y qui apparaissent comme ça, je ne comprends pas à quoi ça correspond, je ne vois pas comment appliquer ça dans un calcul... Je comprends ce qu'on fait mais je ne sais pas pourquoi on le fait, quand je lis (question (b)) je comprends mais je ne vois pas la finalité en fait.

Exercice 4 :

$$P(X=17) - P(X=20) = \frac{1}{2}$$

2) $b = 17$, $a = 20 - b = 3$

b) $3Y + 17 = X \Leftrightarrow Y =$

$$X = 17 \Leftrightarrow Y = 0$$
$$X = 20 \Leftrightarrow Y = 1$$
$$Y(\Omega) = \{0, 1\}$$
$$P(Y=0) = P(X=17) = \frac{1}{2}$$
$$P(Y=1) = P(X=20) = \frac{1}{2}$$
$$Y \sim B(1, \frac{1}{2})$$

c) $E(Y) = \frac{1}{2}$

$$V(Y) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$
$$E(X) = E(3Y + 17)$$
$$= 3E(Y) + 17 = 3 \times \frac{1}{2} + 17 = \frac{3+34}{2} = \frac{37}{2}$$

c : les exercices 2 et 3 de cette feuille tu les avais trouvés comment ?

a : c'est des formules qu'on avait déjà vues au lycée donc ça va bien, l'exercice 2 est très visuel, graphiquement c'est ça puis ça, donc j'arrive bien. Il suffit d'appliquer les formules, de regarder graphiquement qu'est-ce qu'il se passe. Je pense qu'il faut utiliser ce tableau. Je ne sais pas comment on l'utilise, on ne nous a pas expliqué comment le lire (je lui montre l'explication qu'il a écrit sur ses notes en préambule de l'exercice).

a : Ça paraît logique en fait. Ce qui est chiant c'est que ça paraît logique tout ça, bah c'est logique en soi la quand tu m'expliques je comprends et ça fait chier un peu de pas avoir compris avant.

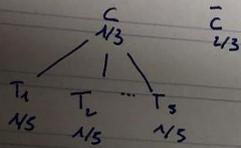
c : tu n'avais pas demandé à la prof de te l'expliquer ?

a : j'ai demandé à mon amie à quoi ça correspondait et elle ne comprenait pas non plus. Le problème dans les maths en fait, il y a vraiment des paliers, le premier palier c'est quand il y a les lettres qui arrivent et puis ensuite les fonctions, moi j'ai loupé le palier des fonctions, et puis après les fonctions avec des lettres, des probas avec des lettres et puis faut pas loucher quoi. L'année dernière il n'y avait pas les probabilités avec les lettres je pense. Il a de nouvelles écritures (il me montre $\phi(t)$ pour $P(Z < t)$). On met du temps à comprendre ce que c'est, on a du mal, on est encore plus perdu.

Je lui montre où se trouve la partie sur la fonction de répartition dans son cours, il ne le savait pas.

Ensuite il me montre l'exercice 6 du TD2 (photo) mais c'était plutôt pour que je lui explique car il n'a rien dit dessus.

Exercice 6:



ω	T_0	T_1	T_2	\dots	T_5
$P(\omega)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	\dots	$\frac{1}{15}$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{1/3}$

$$\Omega = \underbrace{T_0 \cup T_1 \cup T_2 \cup T_3 \cup T_4 \cup T_5}_C$$

$$a) P(T_5 | \bar{T}_1 \bar{T}_2 \bar{T}_3 \bar{T}_4) = \frac{P(T_5 \cap \bar{T}_1 \bar{T}_2 \bar{T}_3 \bar{T}_4)}{P(\bar{T}_1 \bar{T}_2 \bar{T}_3 \bar{T}_4)}$$

$$\bar{T}_1 \cap \dots \cap \bar{T}_4 = (\bar{T}_1 \cap \bar{T}_2 \cap \bar{T}_3 \cap \bar{T}_4)$$

$$P(\bar{T}_1 \cap \dots \cap \bar{T}_4) = 1 - P(T_1 \cup T_2 \cup \dots \cup T_4) = 1 - (P(T_1) + P(T_2) + \dots + P(T_4)) = 1 - 4 \times \frac{1}{15} = \frac{11}{15}$$

$$T_5 \subset (\bar{T}_1 \cap \bar{T}_2 \cap \dots \cap \bar{T}_4)$$

$$\text{donc } P(T_5 \cap \bar{T}_1 \cap \dots \cap \bar{T}_4) = P(T_5) = \frac{1}{15}$$

$$P(T_5 | \bar{T}_1 \cap \dots \cap \bar{T}_4) = \frac{1}{15} \times \frac{15}{11} = \frac{1}{11}$$

$$b) P(T_5 | \bar{T}_1 \cap \bar{T}_2) = \frac{P(T_5 \cap \bar{T}_1 \cap \bar{T}_2)}{P(\bar{T}_1 \cap \bar{T}_2)}$$

$$P(\bar{T}_1 \cap \bar{T}_2) = P(\bar{T}_1 \cup \bar{T}_2) = 1 - P(T_1 \cup T_2) = 1 - P(T_1) - P(T_2) = 1 - \frac{2}{15} = \frac{13}{15}$$

$$T_5 \subset \bar{T}_1 \cap \bar{T}_2 \text{ donc } T_5 \cap \bar{T}_1 \cap \bar{T}_2 = T_5$$

$$P(T_5 \cap \bar{T}_1 \cap \bar{T}_2) = P(T_5) = \frac{1}{15}$$

$$P(T_5 | \bar{T}_1 \cap \bar{T}_2) = \frac{1}{15} \times \frac{15}{13} = \frac{1}{13}$$

$$P(T_3 \cup T_4 \cup T_5 | \bar{T}_1 \cap \bar{T}_2) = \frac{P(T_3 \cup T_4 \cup T_5 \cap \bar{T}_1 \cap \bar{T}_2)}{P(\bar{T}_1 \cap \bar{T}_2)} = \frac{P(T_3 \cup T_4 \cup T_5)}{P(\bar{T}_1 \cap \bar{T}_2)}$$

$$\bar{T}_3 \subset \bar{T}_1 \cap \bar{T}_2, T_4 \subset \bar{T}_1 \cap \bar{T}_2$$

$$T_5 \subset \bar{T}_1 \cap \bar{T}_2 \text{ donc } T_3 \cup T_4 \cup T_5 \subset \bar{T}_1 \cap \bar{T}_2$$

$$P(T_3 \cup T_4 \cup T_5 \cap \bar{T}_1 \cap \bar{T}_2)$$

$$= P(T_3 \cup T_4 \cup T_5)$$

$$= P(T_3) + P(T_4) + P(T_5)$$

$$= 3 \times \frac{1}{15} = \frac{1}{5}$$

$$P(T_3 \cup T_4 \cup T_5 | \bar{T}_1 \cap \bar{T}_2) = \frac{1}{5} \times \frac{15}{13} = \frac{3}{13}$$

----- FIN de l'entretien -----

I.4 Entretien avec Ben

Entretien Ben : 24/04/2019

Première partie :

c : tu étais en T^{ale} S l'année dernière ? Quelle spécialité ?

b : oui c'est ça, spécialité maths.

c : tu as eu quelle mention au bac ?

b : mention bien.

c : et ta note en mathématiques ?

b : j'ai eu 15.

c : au premier semestre au module d'analyse est-ce que tu te souviens la note que tu as eue ?

b : au CC j'ai eu 17,5, mais au partiel j'ai eu 10.

c : vous avez eu un CC en proba au mois de mars est-ce que tu connais ta note ?

b : j'ai eu 14,5 je crois.

C : est-ce que tu pourrais me donner le nombre d'heures que tu consacres cette année aux maths par semaine, hors CM et TD ?

b : pour l'instant rien.

C : donc avant d'aller en CM ou en TD tu ne fais rien ?

b : en fait au CM j'ai été aux quatre premiers et à partir du quatrième je me suis rendu compte que je n'apprenais pas grand-chose et le prof a une mauvaise pédagogie je trouve du coup j'ai préféré arrêter d'aller en CM. Et puis normalement les cours étaient censés être donnés sur Moodle, on a la première partie du cours qui est déjà donnée mais on n'a pas la deuxième partie, c'est pour ça que c'est un peu compliqué en ce moment (*révision de l'examen* ?). Donc je révise avec les TD quoi, en ce moment.

c : et avant d'aller en TD, est-ce que tu allais à tous les TD ? Est-ce que tu préparais des choses ? Est-ce que tu travaillais chez toi avant ?

b : oui j'y allais. Ça m'arrivait de regarder les feuilles, de savoir de quoi ça allait parler et si jamais ça allait être du nouveau ou pas, donc oui je les ai lus un peu, mais après non je ne les ai pas travaillés, je n'ai pas fait les exercices en avance.

c : quand tu regardais les TD avant d'y aller tu y passais combien de temps ? 1h ?

b : non, moins d'une demi-heure.

c : la veille du CC, ou de l'examen qui approche, combien de temps tu passes à travailler ?

b : je dirais 3h maximum, je ne sais pas ce que ça représente vis-à-vis des autres, j'ai rarement besoin de beaucoup de temps en mathématiques pour réviser.

c : est-ce que du coup tu as l'impression de beaucoup travailler pour les maths ?

b : honnêtement pas vraiment.

c : et pour l'examen à venir ?

b : je pense que oui, enfin il va falloir ! Je n'ai pas encore commencé, parce que c'est un petit coef mais il va falloir revoir, il va falloir bosser un peu.

c : quand tu travailles pour le module de probabilités, qu'est-ce que tu utilises quand tu révises ?

b : par exemple je vais prendre les exercices de TD, quand je ne sais pas comment résoudre le truc j'essaie d'aller dans mon cours, le cours du CM, et sinon je le fais avec d'autres gens si je n'y arrive pas.

c : donc tu travailles d'abord les exercices faits en TD et si tu n'y arrives pas tu travailles avec des copains ?

b : oui.

c : tu utilises le cours ?

b : oui, je m'en sers si j'ai des problèmes de mémorisation de formule ou ce genre de choses.

c : les exemples du cours est-ce que tu les refais ou est-ce que tu les regardes ?

b : non.

c : ton cours de T^{ale} est-ce que tu t'en sers ?

b : non, mais de mes connaissances de T^{ale} oui, mais le cours je ne l'ai pas ressorti.

c : est-ce que tu utilises des ressources sur Internet ?

b : non pas du tout.

c : comment est-ce que tu travaillais en TD ?

b : le professeur nous laissait 25/30 minutes, parfois beaucoup plus longtemps, ça allait quasiment jusqu'à la moitié du temps des fois, à travailler les exercices. Il nous mettait les exercices, ils sont encadrés ceux qui sont importants, du coup il nous mettait les exos encadrés à travailler et ensuite il corrige tout. Moi souvent je finissais vite les exercices et ensuite pendant la correction je m'ennuyais un peu mais en fait j'ai l'impression que le niveau n'est pas très élevé en fait, ça ne demande pas grand-chose par rapport à la T^{ale} S.

c : donc pendant les TD tu fais les exercices ?

b : oui je fais ceux qu'on nous demande et après quand il fait la correction je réponds aux questions.

c : pendant la correction tu notes des choses qui sont au tableau ?

b : oui ! Si jamais ma rédaction n'est pas bonne, je complète. Parfois j'estime que certaines choses ne sont pas très intéressantes, enfin importantes, mais si ça se trouve c'est important.

c : les exercices que vous ne faites pas en TD est-ce que tu les refais ou tu essaies de les chercher chez toi ?

b : non pas encore, mais parfois pendant le TD je fais des exercices qui ne sont pas encadrés.

c : comment est-ce que tu retravailles tes notes de TD ? Par exemple pour travailler le CC comment est-ce que tu as retravaillé cette feuille ?

b : (il me montre ses notes) , j'avais l'exercice devant moi, je me faisais les réponses dans ma tête et je comparais avec ce que j'avais.

c : quand tu révises tu ne rédiges pas tous les exercices ?

b : non je ne rédigeais pas, je faisais ça dans d'autres matières mais pas en maths.

c : est-ce qu'on peut regarder la feuille de TD2 que tu as sortie ?

b : je crois que j'ai quasiment tout fait avant la correction et ensuite je n'ai pas trop pris la correction parce qu'il me semblait que mes trucs étaient bons.

NB : j'ai ses notes en photo (ce qui est écrit en rouge provient du tableau)

c : exo5 par exemple de cette feuille, quand tu le refais chez toi est-ce que tu fais les calculs dans ta tête ?

b : non je n'ai pas refait les calculs, je me suis servie un peu du cours pour me rappeler les formules.

c : les exercices qui n'ont pas été faits sur cette feuille ?

b : je ne les ai pas regardés du tout.

c : est-ce que tu travaillais de la même façon semestre précédent ?

b : au premier semestre je faisais plus de choses mais après c'est parce qu'en décembre j'ai eu un accident et je suis resté à l'hôpital une semaine du coup j'ai raté toute la partie équations différentielles que je ne connaissais pas du tout et qu'on avait pas fait en T^{ale} d'où mon 10 à l'examen, du coup j'ai tout appris à l'hôpital puis chez moi ensuite, donc j'ai essayé de rattraper et j'ai dû cravacher trois fois plus que normalement.

c : ok, et avant ça est-ce que tu te souviens ?

b : ce n'était pas grand-chose non plus, je reprenais les exercices du TD.

c : vous avez eu en plus des feuilles, des listes d'exercices types à revoir pour les examens, est-ce que tu prépares ces exercices ?

b : oui il me semble que je l'avais faite (il cherche dans ses notes et trouve effectivement les exos qu'il avait préparés) donc oui ça par exemple pour le CC je l'ai fait en intégralité.

(NB : j'ai pris l'énoncé en photo)

c : au lycée l'année dernière comment est-ce que tu te sentais en maths ? Est-ce que tu trouvais ça facile ou difficile les maths au lycée, et les probabilités en particulier ?

b : on va dire les maths depuis le lycée je n'ai pas de problème, c'est mon point fort, l'année de T^{ale} c'était celle où j'étais le meilleur en plus. J'ai un peu plus travaillé en probas, je trouvais ça moins intuitif que les dérivés par exemple, que tous les autres chapitres, donc je bossais un peu plus ça. Après une fois que c'était rentré c'était bon, et oui sinon en terme de niveau ça allait.

c : donc les probabilités tu dirais que tu étais moins à l'aise que le reste ?

b : oui ! Il y avait aussi la géométrie dans l'espace, mais sinon oui. Mais du coup cette année quand on arrive en biologie j'ai un peu l'impression que l'on fait du surplace. Tout le premier semestre, au premier semestre ont fait que du programme de T^{ale}, même 1S quasiment, il y a les dérivés, les intégrales, les équations dif, ça par contre quand on avait pas vu. Au second semestre, toutes les probas on a déjà vu tout ça, et par contre à la fin avec les lois, on avait fait les lois mais on n'a pas appréhendé les méthodes de la même manière. Du coup c'est une autre manière et il faut revoir le cours, c'est un peu de l'acquis mais qu'il faut quand même reconsulter.

c : est-ce que les contenus de probabilités te semblent en continuité avec ce que tu faisais au lycée ?

b : clairement oui, toute la première partie du semestre c'était du rabâchage, quand je suis venu au premier TD de maths je me suis dit « pourquoi je viens », on faisait des trucs... « comment écrire A ou B se réalisent, A ne se réalise pas », ce genre de choses. Après j'ai des amis qui galèrent un peu plus en mathématiques et qui me dirait qu'on n'est pas tous égaux. Donc je me suis dit... ça va aller... mais après ça s'est corsé un peu quand même.

c : est-ce que tu trouves que c'est plus facile au plus difficile que l'année dernière ?

b : le contenu est plus facile, pour quelqu'un qui a vécu la T^{ale} et qui est censé monter en niveau je pense que c'est plus facile, par contre au niveau de la notation c'est pas pareil je trouve, ils attendent vraiment des choses précises en correction. Je les trouve plus exigeants (*cette année*).

c : est-ce que les maths que tu fais cette année te sont utiles dans ta formation de biologiste ?

b : pour moi non, après je sais que ceux qui font le complément chimie ils ont des calculs d'intégrales hyper complexes à faire, mais pour moi non...

c : dans le module de probabilités est-ce qu'il y a des choses que tu trouves particulièrement difficile ? Notations, théorèmes, exercices...

b : surtout sur les dernières feuilles quand on arrive sur les lois, quand on nous demande de déterminer sur quelle loi on est, de calculer l'espérance puis la variance, je sais que c'est différent en fonction des lois, et c'est du par cœur... Il faut savoir quelle loi quelle formule, et ça j'ai pas encore conçu ça vraiment dans ma tête. J'ai l'impression qu'au premier semestre on a eu plus de TD de révision à la fin, alors que là on a vraiment eu que des feuilles d'exos, des feuilles d'exos, des feuilles d'exos et puis ça s'est terminé (*la feuille de révision avec les exos types était à faire chez-soi*).

Deuxième partie de l'entretien (exo5 feuille de TD2) :

c : est-ce qu'on peut regarder l'exo5 de la feuille deux ? Je te laisse te remettre dans tes notes si tu veux.

b : ça me rappelle l'exercice que tu m'as donné à faire en exo.

c : est-ce que tu avais compris cet exercice ?

b : dans l'ensemble oui.

c : est-ce que tu saurais m'expliquer ce que tu avais fait du coup ?

b : moi souvent quand j'ai des exercices comme ça à faire j'imagine l'arbre pondéré, mais je ne le fais pas toujours (à l'écrit), mais du coup oui... Là j'imagine 2 cas... boîtes abîmées/boîte non abîmées, ensuite CD défectueux ou pas, et du coup je mets toutes les probabilités que je connais. Ça c'est à chaque fois : dès que j'ai des valeurs ou des choses je mets toutes les probas que je connais. Souvent ça me joue des tours, souvent dans les questions on nous demande ce genre de choses mais parfois on les demande dans les questions qui suivent et je réponds tout à la

première question. P(A) la boîte est abimée bah c'est la proba de 5% donc 5%, « a petit c », je vais être bête mais c'est ? C'est Abarre ? Mais ça sera s'écrit comme ça en examen ? Je ne sais pas si tu sais ? Parce que nous je sais qu'on écrivait P(D sachant A) avec le A en bas, mais ça ils ne veulent pas.

c : ces nouvelles notations tu trouves ça gênant ?

b : c'est nouveau quoi, faut assimiler. Mais surtout j'ai l'impression qu'on n'a pas beaucoup de cours du coup on ne voit pas souvent ce genre de choses, enfin on le voit en cours mais comme on a peu de cours on le voit pas souvent. C'est juste que si je bossais plus j'y serais habitué, c'est un peu ma faute. Donc... P(Abarre) c'est 1-P(A), ensuite on reprend l'énoncé, P(A sachant le contraire), 98 donc 2%, et la deuxième question (il lit la deuxième question). Donc la si on prend le problème à l'envers, ça j'avais des problèmes au début, quelle est la probabilité pour qu'il ait acheté une boîte abimée, sachant que la boîte est abimée, il faut... Il faut utiliser la formule de Bayes ?

c : oui on peut, donc ici tu me dis que c'est la probabilité de Sachant que la boîte est abimée ?

b : Heu... attends... sachant qu'un CD est défectueux, la probabilité que la boîte soit abimée, donc ça fait P(A sachant B), c'est ça ? P(B) on ne l'a pas donc on fait avec la formule des probas totales, avec un arbre ça aurait été plus explicite... Après je sais pas si en rédaction je peux mettre ça = à ça ?

MATR : Exercice

80% de A → 10% de pesticides
 20% de B → 20% "

A → la boîte provenant de A
 B → " " " B
 S → la boîte présente des traces de pesticides

1. $P(B) = 0,2$
 $P_B(S) = P(S|B) = 0,2$

2. $P(S) = P_A(S) \times P(A) + P_B(S) \times P(B)$
 $= 0,1 \times 0,8 + 0,2 \times 0,2$
 $= 0,08 + 0,04$
 $P(S) = 0,12$

$P(\bar{S}) = 1 - P(S)$
 $= 1 - 0,12$
 $= 0,88$

3. $P(S) = P_A(S) \times P(A) + P_B(S) \times P(B)$
 $P(S) = \underbrace{0,08}_{\text{venant de A}} + \underbrace{0,04}_{\text{venant de B}}$

$P(S) = 0,12 = 3 \times P_B(S) \times P(B)$
 la probabilité que les traces de pesticides viennent de B est de $\frac{1}{3}$

$$P_B(A) = \frac{P(A) \times P(A|B)}{P(B)}$$

Troisième partie (exo1) :

c : oui c'est bien, on peut regarder l'exercice que je t'avais envoyé ?

b : la première question je crois que j'ai bugué, « ... B inter S... » à oui, je ne savais pas comment l'écrire. En fait c'est la probabilité que, c'est la même chose que ça ? C'est la probabilité qu'elle provienne de B et qu'elle présente des pesticides. Mais du coup ce que j'ai écrit ce n'est pas bon, c'est proba qu'elle présente des traces de pesticides sachant qu'elle vient de B.

c : du coup dans ce que tu as écrit c'est quoi qui était P(BnS) pour toi ?

b : logiquement c'était le deuxième. (il parle de P(S sachant B))

c : mais du coup d'après ce que tu viens de dire ?

b : en fait je trouve ça bizarre, ... (silence)... en fait j'imagine un rond (il fait un diagramme de Venn (au brouillon) pour m'expliquer), 80% donc là on aurait 0,8 qui serait A, le reste qui serait B, 0,2. Il y aurait 10% qui présente des traces, donc il y aurait une zone AnS ... et là on demande P(BnS)... Donc j'aurais dit 20% des 20%. Donc là c'est mauvais il faudrait mettre P(B) fois P(S sachant B).

c : donc finalement tu multiplierais les deux ?

b : alors... (fait le diagramme sur sa feuille cette fois) ça va pas être à l'échelle, donc on a A, on a B, on a 0,8 et on a 0,2, on a 10% de A donc 0,08 je vais le mettre là c'est pas forcément collé, donc c'est AnS, c'est 10% c'est ça je crois ? Ha non c'est pas ça, ah si c'est ça.

c : 10% c'est AnS ? Tout à l'heure tu m'as dit que c'était plutôt...

b : A sachant S. Pourquoi j'ai mis ça ... C'est parce que c'est S sachant A, c'est 10%, donc P(AnS) c'est P(A) fois P(S sachant A).

c : oui voilà. En fait de représenter ça marche bien avec des intersections et des unions mais ici avec des conditionnements finalement ça te fait confondre à chaque fois l'intersection et le sachant que. Mais ce que tu m'as dit à la fin tu as raison, c'est la définition, c'est ce que tu as écrit ici (je lui parle de la formule qu'il a écrite en haut à droite de sa feuille) mais tu t'es

trompé dans ce que tu as écrit il n'y a pas le P(A) (donc il le barre).

b : j'ai fait ça de tête du coup...

c : alors la deuxième question ?

b : c'est P(Sbarre), j'ai fait P(S), j'avais 0,12 et ensuite j'ai fait yes ça fait 0,88.

c : ok, et la dernière question ?

b : donc c'est P(B sachant S) qu'on demande... alors ici j'ai imaginé un truc, on a P(S), on a les valeurs, et là j'ai dit que ça (il parle de P(S) j'imagine) en gros c'était P(AnS), P(BnS), et nous heu.... la du coup j'ai confondu les deux ! Parce que on cherche P(BnS) ! Ha non..

c : alors inter ou sachant ?

b : la du coup c'est sachant, mais sauf que « ça » (il parle de P(S sachant B) fois P(S)) c'est inter, enfin la somme.. le produit de tout ça... (il relit la question) : donc P(B sachant S). c : oui c'est ça, tu peux essayer de faire si tu veux (il écrit sur une nouvelle feuille).

b : BnS c'est 2 fois 0,2, heu... là c'est pareil faut reprendre la définition, on cherche B sachant S, donc c'est P(S sachant B) fois P(B) sur P(S) et ici P(S sachant B) on l'a ici, donc application numérique.

c : ok, comme on te demandait l'intersection à la question 1 tu pouvais t'en servir directement etc...

$$P(B) = 0,2$$

$$P(S) = 0,12$$

$$P(BnS) = 0,04$$

$$P(B|S) = \frac{P(S|B) \times P(B)}{P(S)} \quad \text{BAYES}$$

$$\text{AN: } P(B|S) = \frac{0,2 \times 0,2}{0,12} = \frac{0,04}{0,12} = \frac{0,01}{0,3} = \frac{1}{30}$$

Exercice 4: X la v.a à densité $f(x) = cx^2 \mathbb{1}_{0 \leq x \leq 1}$

a) $f(x) = cx^2 \mathbb{1}_{[0,1]} + \frac{1}{2} \mathbb{1}_{[2,3]}$

$$f(x) = \begin{cases} cx^2 & \text{si } x \in [0,1] \\ 1/2 & \text{si } x \in [2,3] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$1 = P(X \in \mathbb{R}) = \int_0^{\infty} f(x) dx = \int_0^1 cx^2 dx + \int_2^3 \frac{1}{2} dx = \left[\frac{cx^3}{3} \right]_0^1 + \frac{1}{2}$$

$$1 - \frac{1}{2} = \frac{c}{3}$$

$$c = \frac{3}{2}$$

b) $P(\frac{1}{4} \leq X \leq \frac{3}{4}) = P(X \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}])$

$$= \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} \frac{3}{2} x^2 dx$$

$$= \left[\frac{3x^3}{6} \right]_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} = \left[\frac{1}{2} x^3 \right]_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}}$$

$$= \frac{3 \cdot 27}{64} - \frac{3 \cdot 1}{64} = \frac{27}{128} - \frac{1}{128}$$

$$= \frac{81}{6 \times 64} - \frac{31}{28 \times 64} = \frac{26}{128} = \frac{2 \times 13}{2 \times 64}$$

$$P(X \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]) = \frac{78}{384} = \frac{39}{192} = \frac{13}{64}$$

1-

$$2-A- P(X \leq 7) = \int_0^7 0,006 (10x - x^2) dx$$

$$B- P(X \geq 6) = \int_6^{10} 0,006 (10x - x^2) dx$$

$$3- E[X] = \int_0^{10} x f(x) dx$$

$$\text{ici, } E[X] = \int_0^{10} x \times 0,006 (10x - x^2)$$

$$= \int_0^{10} 0,006 (10x^2 - x^3)$$

$$= \left[0,006 x \left[\frac{10x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right] \right]_0^{10}$$

Quatrième partie (TD4) :

c : est-ce qu'on peut regarder rapidement le TD4 ? Vous aviez fait quels exercices ?

b : 2, 3 et 4.

c : c'est toi qui les as faits ici tu penses ? (En parlant de ses notes)

b : non je pense que ça a été fait au crayon à papier et que j'ai réécrit par-dessus la correction.

(NB : photos de ses notes en bas)

c : est-ce qu'on peut regarder l'exercice 4 ? Est-ce que tu peux m'expliquer ce que tu as compris ?

b : (reli ses notes puis m'explique ses notes) on explique juste ce que va valoir F en fonction de X, ensuite c'est directement le calcul d'intégrale, c'est juste heu... On a une expression, on sait que entre moins l'infini et plus l'infini l'intégrale de F vaudra 1. Du coup on met 1 = ce que je viens de dire, puis on transforme avec ce que l'on sait. Ensuite on fait les intégrales, X au carré ça fait X cube sur trois, et voilà...

c : et la question d'après ? c'est un calcul de probabilités ?

b : donc c'est juste une application numérique, on se met bien dans le cas où on est entre 0 et 1, entre 1/4 et 3/4, du coup on change c et on met sa valeur. Voilà je ne sais pas quoi dire de plus.

c : et ensuite la variance, l'espérance ?

b : alors sans avoir le corrigé... Ah ! attends, c'est quoi comme loi...

il y a un truc comme ça non ? En fonction de la loi, l'espérance est la moyenne, la loi normale centrée réduite par exemple c'est zéro, et ensuite on se met sur la loi centrée réduite et on applique en fonction des coefficients... non je sais plus...

c : ce que tu me dis tu as raison, quand on travaille avec des lois normales c'est ce que l'on fait, dans cet exercice c'est quoi comme loi ? Est-ce que c'est une densité que tu connais ? Est-ce que c'est la densité d'une loi normale ?

b : euh non... C'est une loi quelconque.

c : il n'y a pas de formule (je lui explique comment faire du coup)

b : en gros c'est la valeur de X pour laquelle on a la moyenne de toutes les valeurs de la loi ?

Cinquième partie (exo2) :

c : est-ce qu'on peut regarder ce dernier exercice, qu'est-ce que tu comprends de cet exercice et comment tu ferais pour le réaliser ?

b : pour la question 1 il faut prouver que l'intégrale entre 0 et 10 = 1. Par contre pour le rédiger, je ne sais pas trop... Je le mets directement entre 0 et 10 et je fais l'intégrale ?

c : c'est tout pour cette question ?

b :

c : faut que tu t'assures que f soit positive (n'a pas l'air de connaître cette propriété). Pour la question suivante ?

b : donc c'est une aléatoire donc y'a pas de loi qui va... On va calculer entre 0 et 7, 7 non compris, non 7 compris (il écrit). Et ensuite application numérique. Si ça avait été une loi normale on aurait pu faire 1 moins... Je sais pas s'il y a 6, on le comprend quand même ? (il écrit) Faut juste que je mette mes primitives et puis voilà.

b : pour la question 3, est-ce qu'il faut d'abord mettre la formule générale ?

c : je te laisse écrire d'abord tout seul.

b : (il écrit la formule de E[X])

c : et comment tu fais ensuite ?

b : faut connaître la primitive, donc ça fait... mais entre crochets... je vais l'écrire. Est-ce que 0,06 est valable pour les deux ? (Il parle de développer le facteur entre crochets)

c : t'en penses quoi ?

b : je pense que oui.

c : merci beaucoup, c'est tout pour les questions que j'avais à te poser, mais si tu veux rajouter quelque chose ?

b : oui bah c'est juste que... Je l'impression qu'en maths, pour les gens qui, c'est un peu prétentieux de dire ça, qu'on réussit en S et qui sont bons en maths, qui ont des bonnes bases, j'ai l'impression que c'est un peu... On fait pas grand-chose... Mais après je sais qu'il y a beaucoup de gens qui viennent d'autres filières, il y a peut-être aussi des redoublants, mais oui... enfin... Ou alors il faudrait plus de cas concrets, plus d'applications dans d'autres cours... On peut pas inventer d'autres choses pour nous intéresser, mais peut-être aller plus loin, ou que ça soit plus facultatif, ou alors une option pour ceux qui ont besoin d'une remise à niveau en mathématiques.

----- FIN de l'entretien -----

TD-2. MAT2 :

Exercice 1:

a) Les événements A et B sont indépendants.

A et B sont indépendants si $P(A|B) = P(A)$

$$P(A) = \frac{1}{2} \text{ (nb pair) et } P(B) = \frac{1}{3}$$

$\frac{1}{2} = P(A)$ et si $P(A|B) = \frac{1}{2}$ alors A et B indépendants.

$$\frac{1}{2} = P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{6} \times \frac{3}{1} = \frac{1}{2}$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{6}$$

b) ~~Changer le nombre d'événements possibles changera les probabilités mais ne changera pas le fait que les événements A et B soient liés.~~

$$P(A) = \frac{6}{13} \text{ et } P(B) = \frac{4}{13} \rightarrow P(A \cap B) = \frac{2}{13}$$

donc :

$$P(A) = \frac{6}{13} \text{ et } \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{13}}{\frac{4}{13}} = \frac{1}{2} \neq P(A)$$

Les événements A et B sont donc dépendants pour 13 boules ds l'urne

Rappels : deux événements A et B indépendants ssi :

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

$$\hookrightarrow P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Exercise 3:

$$P(X \geq 9) = \frac{4}{5}$$

$$P(Y \geq 9) = \frac{3}{5}$$

$$\begin{aligned} \text{a) } P(X \cap Y) &= P(X) \times P(Y) \\ P(X \cap Y) &= \frac{12}{25} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } P(X \cup Y) &= P(X) + P(Y) - P(X \cap Y) \\ &= \frac{4}{5} + \frac{3}{5} - \frac{12}{25} \\ &= \frac{23}{25} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } P(X \cap \bar{Y}) &= P(X) \times P(\bar{Y}) \\ &= P(X) \times (1 - P(Y)) \\ &= \frac{4}{5} \times \frac{2}{5} \\ P(X \cap \bar{Y}) &= \frac{8}{25} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } P(X | X \cup Y) &= \frac{P(X \cap (X \cup Y))}{P(X \cup Y)} = \frac{P(X)}{P(X \cup Y)} \\ &= \frac{\frac{4}{5}}{\frac{23}{25}} = \frac{4}{5} \times \frac{25}{23} \\ &= \frac{4 \times 5}{23} = \frac{20}{23} \end{aligned}$$

Exercice 5:

A: "la boîte est abîmée"

D: "la boîte achetée contient au moins un disque défectueux"

$$a) P(A) = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}, \quad P(\bar{A}) = 1 - \frac{5}{100} = \frac{95}{100} = \frac{19}{20}$$

$$P(D|A) = \frac{60}{100} = \frac{3}{5}, \quad P(D|\bar{A}) = \frac{2}{100} = \frac{1}{50}, \quad P(\bar{D}|A) = \frac{40}{100} = \frac{2}{5}, \quad P(\bar{D}|\bar{A}) = \frac{98}{100}$$

$$b) P(A|D)$$

$$\hookrightarrow \text{cours: } P(A|B) = \frac{P(B|A) \times P(A)}{P(B)}$$

$$\hookrightarrow \text{application: } P(A|D) = \frac{P(D|A) \times P(A)}{P(D)}$$

$$= \frac{\frac{3}{5} \times \frac{1}{20}}{P(D)}$$

$$P(A \cap D) + P(\bar{A} \cap D)$$

\hookrightarrow formule des probas totales

$$= \frac{\frac{3}{100}}{P(D)}$$

$$P(A) \times P_A(D) + P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(D)$$

$$= \frac{0,03}{\frac{1}{20} \times \frac{3}{5} + \frac{19}{20} \times \frac{1}{50}} = \frac{0,03}{0,03 + \frac{19}{1000}} = \frac{0,03}{0,049}$$

$$P(A|D) = 0,61 \text{ ou } \frac{61}{100}$$

Exercice 7: $\frac{1}{4}$ de la pop. vaccinée

parmi les malades, 1 vacciné pour 4 non-vaccinés

parmi les vaccinés, $\frac{1}{12}$ tombe malade.

$$P(V) = \frac{1}{4} \quad P(M) =$$
$$P(\bar{V}) = \frac{3}{4}$$

$$P(M|V) = \frac{1}{12} \quad P(\bar{M}|V) = \frac{11}{12}$$

$$P(\bar{V}|M) = \frac{4}{5} \quad \text{et} \quad P(V|M) = \frac{1}{5}$$

on cherche $P(M|\bar{V})$:

$$P(M|\bar{V}) = \frac{P(\bar{V}|M) \times P(M)}{P(\bar{V})}$$

$$\text{et } P(\bar{M}) = P(\bar{V}|\bar{M}) + P(V|\bar{M})$$
$$= P(\bar{V}) \times P(\bar{M}|\bar{V}) + P(V) \times P(\bar{M}|V)$$

$$P(M) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{12} + \frac{3}{4} \times P(M|\bar{V})$$

$$p = P(M|\bar{V})$$

$$p = \frac{\frac{1}{4} \left[\frac{1}{12} \times \frac{1}{4} + p \frac{3}{4} \right]}{\frac{3}{4}}$$

$$\frac{1}{4} \left[\frac{1}{12} \times \frac{1}{4} + p \frac{3}{4} \right] = \frac{3}{4} p$$
$$p = \frac{1}{45} + \frac{4}{5} p \quad p = \frac{1}{9}$$

TD-4 - MAT2 :

exercice 2:

Loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0; 1) = X$

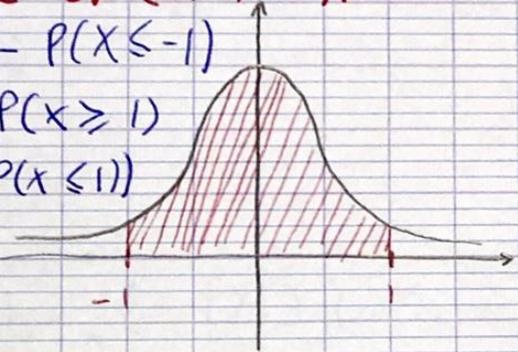
$$a) P(-1 \leq X \leq 1) = P(X \leq 1) - P(X \leq -1)$$

$$= P(X \leq 1) - P(X \geq 1)$$

$$= P(X \leq 1) - (1 - P(X \leq 1))$$

$$= 2P(X \leq 1) - 1$$

$$\underbrace{\quad}_{0,8413}$$



$$P(X \in [-1; 1]) = 0,6826$$

$$P(-2 \leq X \leq 2) = 2P(X \leq 2) - 1$$

$$= 2 \times 0,9772 - 1$$

$$= 1,9544 - 1$$

$$P(X \in [-2; 2]) = 0,9544$$

$$P(0 \leq X \leq 1) = P(X \in [-1; 1]) / 2$$

$$= 0,6826 / 2$$

$$= 0,3413$$

$$b) Y = \mathcal{N}(5; 9) \rightarrow Y = 3X + 5$$

$$P(2 \leq Y \leq 8) = P(2 \leq 3X + 5 \leq 8) = P(-1 \leq X \leq 1) = 0,6$$

$$P(Y \geq 2) = P(3X + 5 \geq 2) = P(X \geq -1) = P(X \leq 1) = 0,8413$$

$$P(Y \leq 8) = P(3X + 5 \leq 8) = P(X \leq 1) = 0,8413$$

$$\begin{aligned}
 c) E[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \\
 &= \int_0^1 c x^3 dx + \int_2^3 x_{/2} = c \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^1 + \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} \right]_2^3 \\
 &= \frac{c}{4} + \frac{1}{2} \left[\frac{3^2 - 2^2}{4} \right] = \frac{3}{8} + \frac{5}{4} = \frac{13}{8}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Var}(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E[X])^2 f(x) dx \\
 &= \int_0^1 c (x - E[X])^2 x^3 dx + \frac{1}{2} \int_2^3 (x - E[X])^2 dx
 \end{aligned}$$

Or

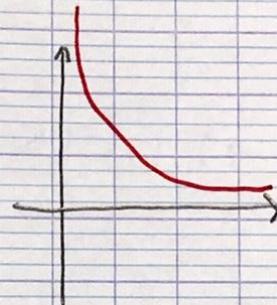
$$\begin{aligned}
 \int_2^3 (x - E[X])^2 dx &= \left[\frac{(x - E[X])^3}{3} \right]_2^3 = \frac{(3 - E[X])^3}{3} - \frac{(2 - E[X])^3}{3} \\
 &= \frac{(3 - 13/8)^3}{3} - \frac{(2 - 13/8)^3}{3} \\
 &= \frac{(11/8)^3}{3} - \frac{(3/8)^3}{3} = \frac{1304}{1536}
 \end{aligned}$$

$$\text{Var}(X) = \frac{1613}{2560}$$

Exercice 3: X la v.a. suivant la loi exponentielle $E(\lambda)$

paramètre $\lambda = \frac{1}{10}$

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$



$$a) E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_0^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx = \int_0^{\infty} u(x) v'(x) dx$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\int_0^{\infty} E[X] = [u(x)v(x)]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} u'(x)v(x) dx$$

$$= \left[-x e^{-\lambda x} \right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dx = \left[\frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda}$$

$$\text{donc } E[X] = \frac{1}{\frac{1}{10}} = 10$$

b) On a :

$$P(X \geq 1) = \int_1^{\infty} f(x) dx = \int_1^{\infty} \lambda e^{-\lambda x}$$

$$= \left[-e^{-\lambda x} \right]_1^{\infty} = e^{-\lambda} = e^{-\frac{1}{10}} \approx 0,905$$

$$c) P(X \geq 10) = \int_{10}^{\infty} f(x) dx = \left[-e^{-\lambda x} \right]_{10}^{\infty} = e^{-\lambda \times 10} = e^{-1} = \frac{1}{e} \approx 0,36$$

Exercice 4: X la v.a à densité $f(x) = cx^2 \mathbb{1}_{0 \leq x \leq 1}$

$$a) f(x) = cx^2 \mathbb{1}_{[0,1]} + \frac{1}{2} \mathbb{1}_{[2,3]}$$

$$f(x) = \begin{cases} cx^2 & \text{si } x \in [0,1] \\ 1/2 & \text{si } x \in [2,3] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 1 = P(X \in \mathbb{R}) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \\ &= \int_0^1 cx^2 dx + \int_2^3 \frac{1}{2} dx \\ &= \left[\frac{cx^3}{3} \right]_0^1 + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$1 - \frac{1}{2} = \frac{c}{3}$$

$$c = \frac{3}{2}$$

$$b) P\left(\frac{1}{4} \leq X \leq \frac{3}{4}\right) = P(X \in \left[\frac{1}{4}; \frac{3}{4}\right])$$

$$= \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} \frac{3}{2} x^2 dx$$

$$= \left[\frac{3x^3}{6} \right]_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} = \left[\frac{1}{2} x^3 \right]_{\frac{1}{4}}$$

$$= \frac{3 \times 27}{64} - \frac{3 \times 1^3}{64} = \frac{27}{128} - \frac{1}{128}$$

$$= \frac{81}{6 \times 64} - \frac{31}{28 \times 64} = \frac{26}{128} = \frac{2 \times 13}{2 \times 64}$$

$$P(X \in \left[\frac{1}{4}; \frac{3}{4}\right]) = \frac{78}{384} = \frac{39}{192} = \frac{13}{64}$$

J Copies d'examen d'étudiants

J.1 Copie de Maud

0

Question de cours.

A, B et C sont indépendants si:

$$P(A; B) = P(A) \times P(B)$$

$$P(A; C) = P(A) \times P(C)$$

$$P(B; C) = P(B) \times P(C).$$

Exercice 1:

a) On sait que: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1.$

$$\text{Donc } \int_{-1}^0 c dx + \int_0^1 x dx = 1.$$

$$[cx]_{-1}^0 + \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = 1.$$

$$c \times 0 - c \times (-1) + \frac{1}{2} \times 1^2 - \frac{1}{2} \times 0^2 = 1.$$

$$c + \frac{1}{2} = 1$$

$$c = 1 - \frac{1}{2}$$

$$c = \frac{1}{2}.$$

b)

$$\begin{aligned}
 \textcircled{c} E(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \\
 &= \int_{-1}^0 x \frac{1}{2} dx + \int_0^1 x \times x dx \\
 &= \left[\frac{1}{4} x^2 \right]_{-1}^0 + \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 \\
 &= \frac{1}{4} \times 0^2 - \frac{1}{4} \times (-1)^2 + \frac{1}{3} \times 1^3 - \frac{1}{3} \times 0^3 \\
 &= -\frac{1}{4} + \frac{1}{3} \\
 &= \frac{4}{12} - \frac{3}{12} \\
 &= 1/12. \text{ ok}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{d} \text{Var}(x) &= E(x^2) - E(x)^2 \text{ ok} \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - \left(\frac{1}{12}\right)^2 \\
 &= \int_{-1}^0 x^2 \frac{1}{2} dx + \int_0^1 x^2 \times x dx - \frac{1}{144} \\
 &= \left[\frac{1}{6} x^3 \right]_{-1}^0 + \left[\frac{1}{4} x^4 \right]_0^1 - \frac{1}{144} \\
 &= \frac{1}{6} \times 0^3 - \frac{1}{6} \times (-1)^3 + \frac{1}{4} \times 1^4 - \frac{1}{4} \times 0^4 - \frac{1}{144} \\
 &= \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{144} \\
 &= \frac{1}{12} - \frac{1}{144} \\
 &= \frac{12}{144} - \frac{1}{144} \\
 &= 11/144. \text{ ok}
 \end{aligned}$$

0 Exercice 2:

0 (a) $Y = 9X + 1.$

Donc ~~$\sigma(Y) = 9 \times \sigma(X) + 1.$~~
or $\sigma(X) = \sqrt{\text{Var}(X)} = \sqrt{1} = 1.$

D'où $\sigma(Y) = 9 \times 1 + 1 = 10.$

0 (b) On a $\text{Var}(X+Y) = 7$

Or $\text{Cov}(X; Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$

et $\text{Var}(X+Y) = E((X+Y)^2) - E(X+Y)^2$
 $= E(X^2 + 2XY + Y^2) - E(X+Y)^2$
 $= 7.$

Exercice 3:

- 1
- Si $X \sim B(2; 0,4)$, alors on répète deux fois de manière indépendante et aléatoire la même expérience X dont la probabilité de succès est de $0,4$.

(On répète deux fois la même expérience de Bernoulli).

- Pour $X=0$ $|X-1| = |0-1| = 1$ On pose
Pour $X=1$ $|X-1| = |1-1| = 0$ $|X-1| = Y$
Pour $X=2$ $|X-1| = |2-1| = 1$

$$\begin{aligned} \text{OR } P(X=0) &= \binom{2}{0} \times 0,4^0 \times 0,6^2 \\ &= 1 \times 1 \times 9/25 \\ &= 9/25. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X=1) &= \binom{2}{1} \times 0,4^1 \times 0,6^1 \\ &= 2 \times 2/5 \times 3/5 \\ &= 12/25 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X=2) &= \binom{2}{2} \times 0,4^2 \times 0,6^0 \\ &= 1 \times \frac{4}{25} \times 1 \\ &= 4/25 \end{aligned}$$

- 1
- Donc $P(Y=0) = P(X=1) = 12/25$.
et $P(Y=1) = P(X=0) + P(X=2) = 9/25 + 4/25 = 13/25$.

k	0	1
$P(Y=k)$	$12/25$	$13/25$

5

Exercice 4:

1 a) On répète 600 fois, de manière indépendante la même expérience:

"un client choisit son repas".

La probabilité d'un succès S : "le client choisit des épimacros" est de 0,4.

Donc $S \sim B(600; 0,4)$. $S \sim B(m; p)$

1 b) On a $\sigma(S) = \sqrt{\text{Var}(S)}$

$$\text{or } \text{Var}(S) = mp(1-p)$$

$$= 600 \times 0,4 \times 0,6$$

$$= 600 \times \frac{6}{25}$$

$$= 3600/25$$

$$= 144.$$

$$\text{donc } \sigma(S) = \sqrt{144} = 12.$$

L'écart-type de S est de 12.

7 c) On cherche N tel que $P(S > N) = 1/20$

On approxime la loi de S par une loi normale Y tel que $Y \sim (E(S); \text{Var}(S))$

$$\text{avec } E(S) = mp = 600 \times 0,4 = 240$$

$$\text{et } \text{Var}(S) = 144.$$

$$\text{D'où } Y \sim (240; 144)$$

Donc $P(Y > N) = 1/20$ on centre et réduit Y .

$$P\left(\frac{Y-240}{12} > \frac{N-240}{12}\right) = 1/20$$

$$P\left(Z > \frac{N-240}{12}\right) = 1/20$$

$$P\left(Z < \frac{N-240}{12}\right) = 19/20 = 0,95.$$

Grâce à la table de la loi normale on trouve que:

$$\frac{N - 240}{12} \approx 1,65.$$

$$N \approx 1,65 \times 12 + 240$$

$$N \approx 19,8 + 240$$

$$N \approx 259,8.$$

Donc pour que $P(S > N) \approx 1/20$, N doit valoir 260.

d) Grâce aux résultats de la question c, on sait que l'on doit prévoir 260 plats d'épinards.

Exercice 5:

$$\begin{aligned} \text{a. } P(Y=1) &= P(X=0 \cap Y=1) + P(X=1 \cap Y=1) + P(X=2 \cap Y=1) \\ &\quad + P(X=3 \cap Y=1) \\ &= \frac{1}{36} + \frac{5}{72} + \frac{7}{72} + \frac{1}{36} \\ &= \frac{16}{72} \end{aligned}$$

On fait la même chose pour $Y=2$ et $Y=3$.

La loi de Y est tel que:

k	1	2	3
$P(Y=k)$	$16/72$	$24/72$	$32/72$
	$= 2/9$	$= 1/3$	$= 4/9$

$$\begin{aligned}
 \bullet P(X=1) &= P(Y=1 \cap X=1) + P(Y=2 \cap X=1) + P(Y=3 \cap X=1) \\
 &= \frac{5}{72} + \frac{5}{36} + \frac{1}{6} \\
 &= \frac{5}{72} + \frac{10}{72} + \frac{12}{72} \\
 &= \frac{27}{72}
 \end{aligned}$$

✓
 (b) X et Y sont indépendantes si pour tout X et Y on a:

$$P(X; Y) = P(X) \times P(Y).$$

ou pour $X=1$ et $Y=3$

$$P(X=1 \cap Y=3) \neq P(X=1) \times P(Y=3)$$

non!!

Donc X et Y ne sont pas indépendantes

(c) On cherche: $P(X=k | Y=3)$

$$P(X=0 | Y=3) = 4/32$$

$$P(X=1 | Y=3) = 12/32$$

$$P(X=2 | Y=3) = 12/32$$

$$P(X=3 | Y=3) = 4/32.$$

car

$$\begin{aligned}
 P(X=k | Y=3) \\
 &= \frac{P(X=k \cap Y=3)}{P(Y=3)}
 \end{aligned}$$

Donc la loi de X sachant $Y=3$ est tel que:

✓

k	0	1	2	3
$P(X=k Y=3)$	$4/32$	$12/32$	$12/32$	$4/32$
	$= 1/8$	$= 3/8$	$= 3/8$	$= 1/8$

$$\begin{aligned} \textcircled{d} E(X|Y=3) &= 0 \times P(X=0|Y=3) + 1 \times P(X=1|Y=3) \\ &+ 2 \times P(X=2|Y=3) + 3 \times P(X=3|Y=3) \\ &= 0 \times \frac{1}{8} + 1 \times \frac{3}{8} + 2 \times \frac{3}{8} + 3 \times \frac{1}{8} \end{aligned}$$

$$= \frac{3}{8} + \frac{6}{8} + \frac{3}{8}$$

$$= \frac{12}{8}$$

$$= \frac{3}{2}$$

J.2 Copie de Adam

0

Question de cours:

Les événements sont indépendants dans mesure ou ces événements peuvent être pris séparément c'est à dire que

$$P(A) \times P(B) = P(A|B)$$

$$P(A) \times P(C) = P(A|C)$$

$$P(B) \times P(C) = P(B|C)$$

Exercice 1:

$$a) \int p(x) = \int_{-1}^0 c + \int_0^1 x$$

$$\int p(x) = c \int_{-1}^0 1 + \int_0^1 x$$

$$= c [x]_{-1}^0 + \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1$$

$$\int p(x) = c \times 1 + \frac{1}{2}$$

$$1 = c \times 1 + \frac{1}{2}$$

$$1,5 = c.$$

c vaut 1,5. non

b) La médiane a pour valeur 0. *parce?*

$$c) E = 1,5 \int_{-1}^0 1 + \int_0^1 x$$

$$E = 1,5 [x]_{-1}^0 + \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1$$

$$E = 1,5 + \frac{1}{2} = 2 \quad \text{non}$$

$$d) \text{var}(x) = E(x)^2 - E(x^2)$$

$$= 2^2 - 1,5 \int_{-1}^0 1 + \int_0^1 x^2$$

$$= 4 - 1,5 + \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1$$

$$= 4 - 1,5 + \frac{1}{3}$$

$$= 4 - \frac{3}{2} + \frac{1}{3}$$

$$= 4 - \frac{11}{6} = \frac{24}{6} - \frac{11}{6} = \frac{13}{6}$$

Exercice 2:

1 a) L'écart type est de 9.

b)

c)

Exercice 3:

La loi de X est la loi qui pour un effectif de 2 associe une probabilité de 0,4, on a $B(2; p)$: loi binomiale :

X est une variable aléatoire qui à associe un "succès"

La loi de $|X-1|$ est équivalente à la loi de X

Exercice 4:

a) La loi de S suit la probabilité 0,4

La loi compte pour 600 personnes le "succès" de choisir des épignards. Ces 600 personnes choisissent de manière indépendante le plat

La probabilité de est de $0,4 = p(5)$

On a donc une loi $B(600; 0,4)$

X est la variable aléatoire qui associe un nombre de personnes.

b) L'écart type est de $\sqrt{\text{var}(X)} = \sigma$

$$\begin{aligned}\sigma &= \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{600 \times 0,6 \times 0,4} \\ &= \sqrt{144} \\ &= 12\end{aligned}$$

c) On utilise la formule.

$$\frac{X - nP}{\sqrt{nP(1-P)}} = \frac{X - 240}{12}$$

Avec le tableau on estime que on a entre 1 et 1,28

d) On a 600 clients. 0,4 veulent des épinards soit 240 clients. Au moins $\frac{1}{20}$ de ces 240 doivent ne pas avoir donc 12.

Il faut donc préparer au moins
 $240 - 12 = 228$

Exercice 3:

X \ Y	1	2	3	
0	1/36	1/24	1/18	$\frac{1}{24} = \frac{1}{8}$
1	5/42	5/36	1/6	$\frac{27}{42} = \frac{3}{8}$
2	7/42	1/9	1/6	$\frac{27}{42} = \frac{3}{8}$
3	1/36	1/24	1/18	$\frac{4}{24} = \frac{1}{6}$
	$\frac{16}{42}$	$\frac{12}{36}$	$\frac{8}{18}$	$\frac{2}{9} = \frac{1}{3}$

a) on a la loi de Y:

Y	1	2	3
$P(X=1)$	$\frac{16}{42}$	$\frac{12}{36}$	$\frac{8}{18}$

$$P(X=1) = \frac{27}{72} = \frac{3}{8}$$

b) Si ils sont indépendants on a :

$$P(Y=1) \times P(X=0) = \frac{2}{9} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{36} \quad P(X,Y) = \frac{1}{36}$$

$$P(Y=2) \times P(X=0) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{24} \quad P(X,Y) = \frac{1}{24}$$

$$P(Y=3) \times P(X=0) = \frac{8}{18} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{18} \quad P(X,Y) = \frac{1}{18}$$

$$P(Y=1) \times P(X=1) = \frac{2}{9} \times \frac{3}{8} = \frac{6}{72} \quad P(X,Y) = \frac{5}{72}$$

Les résultats sont différents les variables ne sont pas indépendantes.

c)

La loi de X quand $Y=3$ est :

0,25

X	0	1	2	3
$P(X=x)$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$

d) $E[X|Y=3]$

0,75

$$\text{on a } E[X|Y=3] = 0 \times \frac{1}{18} + 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{18}$$

$$= 0 + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$$

$$= \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \quad \text{VU}$$

on a donc $\frac{2}{3}$ comme espérance.

Titre : Modèles praxéologiques dans la transition secondaire-supérieur : le cas des probabilités en filière biologie

Mot clés : Activité, Didactique pour l'enseignement supérieur, Mathématiques pour les non-spécialistes, Modèle praxéologique, Modélisation, Probabilités

Résumé : Le premier objectif de cette thèse est d'analyser les attendus institutionnels et les déroulements de classe en probabilités pour la première année de biologie à l'Université et de les comparer à ceux du secondaire en classe de terminale scientifique. Nous mettons en lumière les spécificités des étudiants non-spécialistes dans l'apprentissage des probabilités afin d'atteindre le second objectif de cette thèse qui est de faire l'état des lieux des difficultés rencontrées par les étudiants de biologie, pour ces enseignements de probabilités, dans le but d'y remédier.

Nous nous référons principalement à la Théorie Anthropologique du Didactique, que nous articulons avec des éléments de la Théorie de l'Activité adaptés à la didactique des mathématiques. De cette façon nous construisons un outil théorique appelé Modèle Praxéologique de Référence

Étendu par la théorie de l'activité et adapté pour la Transition secondaire-supérieur, noté MPR-ET, dans le cas ici des probabilités pour les non-spécialistes.

Cet outil est adapté aux besoins des étudiants biologistes débutants à l'Université et permet à la fois d'explicitier les attentes institutionnelles envers les étudiants à l'Université en tenant compte de ce qui est fait au secondaire mais également de mieux appréhender la transition. En effet, ce MPR-ET fait figurer des propositions en vue de construire un enseignement innovant qui réduirait les difficultés des étudiants à la transition, notamment de repenser les mathématiques enseignées à ces étudiants en tant qu'outils de modélisation pour l'étude de problèmes issus de la biologie et d'imaginer un enseignement commun mathématiques/biologie.

Title: Praxeological models in the secondary-tertiary transition: the case of probability in biology

Keywords: Activity, Didactics for higher education, Mathematics for non-specialists, Praxeological model, Modeling, Probabilities

Abstract: The first objective of this thesis is to analyze the institutional expectations and the class routines in probability for the first year of biology at the University and to compare them to those of Grade 12 in the science section of the secondary school. We highlight the specificities of non-specialist students in the learning of probability in order to reach the second objective of this thesis which is to take stock of the difficulties encountered by biology students in the teaching of probability, in order to remedy them.

We refer mainly to the Anthropological Theory of Didactics, which we articulate with elements of the Activity Theory adapted to the didactics of mathematics. In this way we build a theoretical tool called Praxeological Reference Model Extended by Activ-

ity Theory and adapted for the secondary-tertiary Transition, noted MPR-ET, in the case of probability for non-specialists.

This tool is adapted to the needs of beginner biology students at the University and allows both to make explicit the institutional expectations towards students at the University by considering what is done in high school but also to better understand the transition. Indeed, this MPR-ET includes proposals to build an innovative teaching that would reduce the difficulties of students at the transition, notably to rethink the mathematics taught to these students as modeling tools for the study of problems arising from biology and to imagine a joint mathematics/biology teaching.