



HAL
open science

Modélisation et simulation d'écoulement diphasique fluide-gaz dans un centre de stockage des déchets ménagers

Salih Ouchtout

► **To cite this version:**

Salih Ouchtout. Modélisation et simulation d'écoulement diphasique fluide-gaz dans un centre de stockage des déchets ménagers. Dynamique des Fluides [physics.flu-dyn]. Université de Haute Alsace - Mulhouse; Université Ibn Tofail. Faculté des sciences de Kénitra, 2021. Français. NNT : 2021MULH3462 . tel-03635181v1

HAL Id: tel-03635181

<https://theses.hal.science/tel-03635181v1>

Submitted on 8 Apr 2022 (v1), last revised 21 Apr 2022 (v2)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Université de Haute-Alsace de Mulhouse*
Université de Strasbourg
et
Université Ibn Tofaïl de Kénitra**

THÈSE EN COTUTELLE INTERNATIONALE

Pour l'obtention du grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE HAUTE-ALSACE ET DE L'UNIVERSITÉ IBN TOFAÏL

Spécialité : **Mathématiques Appliquées**

Présentée par

Salih OUCHTOUT

Sous le titre

**Modélisation et simulation d'écoulement diphasique fluide-gaz dans
un centre de stockage des déchets ménagers**

Soutenue le 11 Février 2021

devant le jury

Président	Abdellatif MASLOUHI	Université UIT de Kénitra, Maroc
Rapporteur	Brahim AMAZIANE	Université UPPA de Pau, France
Rapporteur	Mejdi AZAIEZ	Université de Bordeaux, France
Rapporteuse	Noha EL KHATTABI	Université Med V de Rabat, Maroc
Examineur	Jérôme HARMAND	Institut INRAE, LBE Narbonne, France
Examineur	Alain RAPAPORT	Université de Montpellier, France
Directeur de thèse	Zakaria BELHACHMI	Université UHA de Mulhouse, France
Co-directeur de thèse	Zoubida MGHAZLI	Université UIT de Kénitra, Maroc

* Institut de Recherche en Informatique, Mathématiques, Automatique et Signal (IRIMAS),
École Doctorale 269, B.P.68093-Mulhouse-France.

** Laboratoire EDP, Algèbre et Géométrie Spectrale, Equipe d'Ingénierie Mathématique (EIMA),
Centre des Etudes Doctorales, Faculté des Sciences, B.P.133-Kénitra-Maroc.

Table des matières

Résumé	2
Abstract	3
1 Introduction et état de l'art	7
2 Modélisation de la dynamique bactérienne dans les déchets ménagers	13
2.1 Introduction	14
2.2 Biodégradation des déchets	14
2.2.1 Généralités	14
2.2.2 La dynamique bactérienne	18
2.3 Ecoulement monophasique et biphasique dans un casier de déchets	24
2.3.1 Equations de l'écoulement monophasique du lixiviat	25
2.3.2 Equations de l'écoulement biphasique lixiviat-biogaz	29
3 Analyse du modèle EDO	38
3.1 Préliminaires	39
3.2 Position du problème et hypothèses	44
3.3 Étude du comportement asymptotique	46
3.4 Résultats numériques	59
3.4.1 Schéma de résolution du système (3.16)	59
3.4.2 Tests numériques	61
3.4.3 Processus heuristique pour l'amélioration de production de biogaz	71
3.5 Conclusion	76
4 Etude d'un modèle d'écoulement monophasique	77
4.1 Préliminaires	79
4.2 Résultat d'existence et d'unicité de la solution	84
4.3 Semi-discrétisation en temps	86
4.3.1 Semi-discrétisation du système (S1)	86
4.3.2 Semi-discrétisation du système (S2)	88
4.4 Discrétisation complète et analyse	91
4.4.1 Préliminaires	91
4.4.2 Discrétisation complète du système (S1)	93
4.4.3 Discrétisation complète du système (S2)	94
4.5 Résultats numériques	97
4.5.1 Le cas 2D	98

4.5.2	Le cas 3D	102
4.6	Conclusion	109
5	Etude d'un model d'écoulement biphasique compressible	110
5.1	Introduction	111
5.2	Formulation variationnelle et semi-discrétisation	113
5.2.1	Semi-discrétisation en temps et formulation variationnelle du système de biodégradation (M1)	113
5.2.2	Semi-discrétisation en temps et formulation variationnelle du système de l'écoulement (M2)	114
5.3	Discrétisation complète du problème	115
5.3.1	Discrétisation complète du système de biodégradation (M1)	116
5.3.2	Discrétisation complète du système de l'écoulement (M2)	116
5.4	Résultats numériques	117
5.5	Conclusion	127
	Conclusions et perspectives	128
	Annexe	131
	Nomenclature	134
	Liste des figures	135
	Bibliographie	138

Résumé

La modélisation et la simulation numérique d'écoulements des fluides en milieux poreux réactifs interviennent dans de nombreuses applications énergétiques et environnementales. Nous nous sommes focalisés dans ce travail sur le stockage des déchets ménagers pour la production de biogaz. Dans cette thèse nous présentons et étudions, théoriquement et numériquement, des modèles mathématiques pour décrire le fonctionnement d'une décharge dans laquelle des déchets biodégradables sont utilisés pour générer du méthane. D'une part, nous traitons un nouveau modèle de processus anaérobie en deux étapes qui tient compte des phénomènes d'inhibition, pour lequel nous présentons des résultats sur le comportement asymptotique des solutions et des prévisions plus approfondies sur la production du biogaz. D'autre part, nous traitons de nouveaux modèles couplés (l'écoulement monophasique du lixiviat et l'écoulement biphasique de lixiviat-biogaz) combinant à la fois l'aspect biologique et l'aspect mécanique des fluides dans une description unifiée des Equations aux Dérivée Partielles (EDP). Par la suite, nous analysons les formulations faibles des modèles et nous présentons des simulations numériques. L'objectif principal est de construire un outil performant de modélisation qui débouche sur un algorithme de simulation en deux et trois dimensions, prêt à l'emploi dans la gestion des déchets. Nous pensons qu'un tel outil est important pour une utilisation pratique dans les prévisions et pour les études avancées pour l'optimisation et le contrôle de la production du biogaz. Le CHAPITRE 1 est consacré à une introduction générale des phénomènes de biodégradation et d'écoulement dans un casier de déchets ménagers ainsi qu'à l'état de l'art des différents modèles et analyses développés sur cette thématique. Le CHAPITRE 2 est consacré à la modélisation des écoulements monophasique et biphasique décrivant les phénomènes physiques et biologiques de la biodégradation des déchets pendant le processus anaérobie en deux étapes Hydrolyse/Méthanogénèse pour la production du biogaz. Ce sont deux problèmes couplés non linéaires qui décrivent l'aspect physique donné par des EDP et l'aspect biologique donné, premièrement, par des Equations Différentielles Ordinaires (EDO) puis deuxièmement par un système de réaction-diffusion. Ce dernier nous permet la possibilité de traiter la non-homogénéité en tenant compte des phénomènes de diffusion. Le CHAPITRE 3 est consacré à l'analyse de comportement asymptotique du système d'EDO ainsi que les simulations numériques associées. Le CHAPITRE 4 porte sur l'analyse et l'approximation numérique du modèle d'écoulement monophasique du lixiviat. Le CHAPITRE 5 est consacré à l'approximation numérique du modèle d'écoulement biphasique compressible lixiviat-biogaz en présentant différents résultats numériques en 2D et 3D.

Abstract

The modeling and numerical simulations of fluid flow in reactive porous media are involved in many energy and environmental applications. In this work, we focused on the storage of household waste for the biogas production. In this thesis we present and study, theoretically and numerically, mathematical models to describe the functioning of a landfill in which biodegradable waste is used to generate methane. First, we tackle a new two-step anaerobic process model that takes into account the inhibition phenomenon, for which we present results on the asymptotic behavior of solutions and we give more in-depth information and predictions on biogas production. Secondly, we tackle the new coupled models (one phase flow of leachate and two phase flow of leachate-biogas) combining both biological and mechanical aspects in a unified description of Partial Differential Equations (PDEs). We then analyze the models and present numerical simulations. The main goal is to build an efficient modeling tool that leads to a simulation algorithm in two and three dimensions ready for use in waste management. We believe that such a tool is important both for practical use in predictions and in advanced studies for the optimization and the control of the biogas production. The thesis is organized into four chapters. The CHAPTER 1 is devoted to an introduction to the phenomena of biodegradation and flow in a household waste as well as the state of the art of the various models developed in this context. The CHAPTER 2 is devoted to the modeling of one and two phase flows describing the physical and biological phenomena of waste biodegradation during the anaerobic digestion process in two-step hydrolysis and methanogenesis for the biogas production. These are two nonlinear coupled problems describing the mechanical aspect given by PDEs, and the biological aspect given initially by the Ordinary Differential Equations (ODEs) and then by a diffusion-reaction system which allows us the possibility of treating the non-homogeneity taking into account the diffusion phenomena. CHAPTER 3 is devoted to the analysis of asymptotic behavior and the numerical simulation of the ODEs system. CHAPTER 4 is devoted to the analysis and the numerical approximation of the leachate flow coupled model. CHAPTER 5 is devoted to the numerical approximation of the coupled model of two-phase flow leachate-biogas by presenting the numerical results in 2D and 3D.

Remerciements

Le travail présenté dans ce mémoire de thèse en cotutelle internationale a été réalisé dans le cadre du projet PHC Toubkal N°17/47 au sein du laboratoire LIRNE " Équipe d'Ingénierie Mathématique" de l'université Ibn Tofail de Kénitra et de l'Institut de Recherche en Informatique, Mathématiques, Automatique et Signal de l'université de Haute-Alsace de Mulhouse.

En premier lieu, un grand merci à mes directeurs de thèse, Mme Zoubida MGHAZLI et Mr Zakaria BELHACHMI, qui m'ont accompagné tout au long de ce périple et m'ont permis de faire aboutir ce travail, pour leur soutien, leur patience, leur disponibilité, leurs qualités scientifiques et humaines et leurs conseils ainsi que leur aide précieuse. Qu'ils puissent trouver ici le gage de mon respect et de ma profonde reconnaissance.

Je remercie sincèrement les membres du jury : Mr Brahim AMAZIANE, Mr Mejd AAZAIEZ et Mme Noha EL KHATTABI d'avoir accepté de rapporter sur ma thèse, et je suis très reconnaissant qu'ils s'associent à ce travail. Je les remercie pour leurs remarques pertinentes qui m'ont permis d'améliorer ce document.

Mes sincères remerciements s'adressent également à Mr Jérôme HARMAND et Mr Alain RAPAPORT, qui ont accepté de faire partie de ce jury et d'examiner mon travail. Je les remercie également pour les échanges intéressants et leur précieuse collaboration au cours de la thèse.

Je remercie également Mr Abdellatif MASLOUHI qui m'a également fait le grand honneur de présider mon jury de thèse. Je le remercie aussi pour ses remarques et commentaires intéressants et qui m'ont permis de porter mon attention sur des aspects physiques importants.

J'aimerais exprimer ma gratitude à Mr Frédéric HECHT, qui m'a reçu en stage à l'Université Pierre et Marie Curie, stage qui m'a été très utile pour l'utilisation de logiciel FreeFem++ avec lequel j'ai réalisé un certain nombre des tests numériques. Les discussions avec lui m'ont été d'un grand intérêt.

Je tiens également à exprimer ma gratitude envers toutes les personnes qui font ou ont fait partie de mon quotidien, en commençant par l'ensemble des doctorants et Ex-doctorants de l'équipe EIMA de UIT de Kénitra : Naji I., Hanaki M., Abaali M., Allam B., El Hassouni S., Elouafi D., M., Alla A., El Amerany K., Errafay A., Hardoul A., Latifi M, et

tous ceux que je n'ai pas cité. Je les remercie pour tous les encouragements, l'ambiance et les discussions scientifiques.

Une pensée également à toutes les personnes avec qui j'ai partagé le bureau de LMIA de l'UHA de Mulhouse : Araujo H., Jacumin T., Perez O., Bouazza L., Bouyghf F., Tiche-rahine A., Ahmed Zahari A. D., Hurle B., Philippe, Yakhlef O. et Chichaoui O. Merci pour toutes les discussions enrichissantes qui ont rendues le parcours plus agréable.

Merci aux professeurs du LMIA-UHA avec qui j'ai été en contact au cours de la thèse, pour l'ambiance et pour tout ce que vous m'avez apporté par vos séminaires. J'en profite pour adresser ma sincère gratitude à : Mr Abdenacer MaKhlouf, Mr Cornel Murea et Mme Viviane Kuhn, pour l'accueil chaleureux, pour les échanges intéressants, et de m'avoir accompagnée dans chacune des démarches administratives ainsi que dans l'organisation des différents déplacements.

Enfin, mes plus sincères remerciements vont à mes parents ainsi qu'à mes frères et sœurs, pour leur aide, leur compréhension et leur soutien inconditionnel, qui m'ont toujours encouragés dans la poursuite de mes études.

Chapitre 1

Introduction et état de l'art

Dans cette thèse, nous nous intéressons à la modélisation mathématique, l'analyse et la simulation numérique, d'écoulements monophasiques et biphasiques en milieu poreux réactif. Le principe des écoulements en milieux poreux réactifs consiste à intégrer des phénomènes chimiques ou biologiques à des écoulements standards à une ou plusieurs phases. La modélisation de ce type de problème intervient comme un outil essentiel dans des thématiques énergétiques ou environnementales importantes, comme le problème de la pollution des eaux souterraines, le stockage des déchets, la gestion des eaux usées ou encore l'ingénierie pétrolière, etc.

La gestion des déchets et la production d'énergie renouvelable sont deux problèmes clés dans les sociétés d'aujourd'hui. Un domaine de recherche majeur est apparu au cours des dernières décennies et consiste en une combinaison des thématiques susmentionnées pour développer de nouvelles techniques en vue de la gestion des déchets et leur utilisation dans la production d'énergie.

Dans ce travail, nous nous sommes intéressés plus particulièrement à la problématique du stockage des déchets ménagers. L'analyse mathématique et la simulation numérique des modèles décrivant les processus de la dégradation des déchets, permettent de construire des prévisions de l'évolution des variables physiques et biologiques impliquées.

La décharge est un milieu polyphasique constitué de phases solide, liquide et gazeuse et est considérée comme un milieu poreux. Le processus de biodégradation produit du biogaz et des lixiviats qui sont ainsi deux phases de l'écoulement dans la décharge, couplées à l'activité biologique. Dans la référence [2], on trouve une revue et une synthèse des principales caractéristiques et propriétés physiques des milieux poreux et de la dynamique des fluides dans le cadre de la gestion des déchets biodégradables.

Dans un casier de déchets ménagers, nous distinguons successivement des métabolismes aérobies et anaérobies. En effet, pendant la mise en place des déchets, une certaine quantité d'oxygène piégé initialement dans l'espace des pores et celui qui diffuse ensuite dans les couches supérieures, autorise l'activité de micro-organismes aérobies. Lorsque cet oxygène est épuisé (consommation par les micro-organismes aérobies ou

recouvrement des sites empêchant la diffusion de l'oxygène), le processus de dégradation des déchets devient anaérobie [78], [11], [42], [101]. Le processus de digestion anaérobie est ainsi un processus biologique naturel de décomposition de la matière organique par des micro-organismes (bactéries) qui sont activés dans des conditions anaérobies, c'est-à-dire sans oxygène. Il se caractérise par une succession de réactions complexes à la fois en parallèle et en série. A long terme, la matière organique est transformée en biogaz, un mélange principalement composé de méthane et de dioxyde de carbone. Les principales étapes de ce processus sont l'hydrolyse, l'acidogénèse, l'acétogénèse et la méthanogénèse.

La digestion anaérobie dans un chemostat a fait l'objet d'une littérature abondante. Ce dernier fonctionne généralement avec un agitateur, ce qui conduit à des densités spatialement homogènes en nutriments et micro-organismes. Ces modèles sont décrits par des Equations Différentielles Ordinaires (EDO). Des modèles tels que le modèle "ADM1" permettent une description détaillée de ce processus (Cf. [65]). Cependant, l'analyse mathématique de ces modèles est très complexe. Un grand nombre de modèles plus simples ont été étudiés dans la littérature au cours de ces dernières années [42, 44, 47, 90, 91, 94]. Concernant la digestion des eaux usées, il est reconnu que l'étape limite est la méthanogénèse. Dans un tel cas, la modélisation comprend des modèles en une, deux ou trois étapes. Le modèle de [26] présente un intérêt particulier et propose de modéliser le processus de digestion anaérobie comme un processus en deux étapes impliquant à la fois l'acidogénèse avec une cinétique de Monod et les processus de méthanogénèse avec une cinétique de Haldane. Dans la cadre de la dégradation de la matière organique au sein des centres de stockage des déchets, M. Rouez [94] a proposé un modèle qui décrit la dynamique bactérienne pour la production du biogaz. Ce modèle envisage le processus anaérobie en deux étapes, l'hydrolyse et la méthanogénèse. Une telle description est bien appropriée tant que l'acidogénèse n'est pas l'étape limitante.

Lorsqu'un processus biologique fonctionne en mode continu, c'est la règle plutôt que l'exception de ne pas considérer les termes de mortalité (Cf. [63], [71], [80]). Cependant, lorsque l'on travaille dans un environnement fermé - comme c'est le cas dans les décharges - la mortalité ne peut plus être négligée : une partie de la mortalité des micro-organismes revient ensuite au matériau lentement biodégradable. Le modèle de [94] prend en considération la mortalité des bactéries méthanogènes qui constitue un nouveau substrat à l'étape de l'hydrolyse. Le rôle du terme de mortalité et de la fonction de croissance sur les performances de l'ensemble du processus, notamment en termes de production du biogaz, est d'une importance primordiale dans les applications d'enfouissement.

La plupart des modèles décrivant le déroulement de l'aspect biochimique dans la digestion anaérobie pour la production de biogaz, sont décrits par des (EDO) qui ne peuvent tenir compte des éventuelles hétérogénéités de la distribution initiale des concentrations des micro-organismes ainsi que de leur évolution spatiale au cours du temps. Cela suggère l'incorporation des termes de diffusion, d'advection et/ou d'hétérogé-

néité spatiale dans les modèles. L'introduction de l'hétérogénéité spatiale dans le modèle, en termes d'Equations aux Dérivées Partielles (EDP), de type réaction-diffusion-advection, au lieu des EDO, est une extension raisonnable, compte tenu du fait qu'elle est généralement observée dans les situations réelles. Dans [97] on trouve un modèle de réaction diffusion 1D de trois variables décrivant la compétition entre des espèces dans une cinétique de Monod. Dans [43] les auteurs ont proposé un modèle dans un chemostat, décrivant l'écoulement du lixiviat en 1D régie par les équations de Navier-Stokes stationnaires et un système de réaction-diffusion-advection pour deux concentrations avec une vitesse dans la direction verticale, approché par une méthode d'éléments finis.

Les réactions de dégradation des déchets sont conditionnées par de nombreux paramètres environnementaux. Ainsi, selon la littérature, les principaux facteurs contrôlant l'activité microbienne et la production du biogaz sont le pH du milieu, la température et l'humidité des déchets. D'autres facteurs peuvent aussi influencer comme la composition des déchets et leurs caractéristiques "mécaniques" (densité, porosité, etc.) (Cf. [99], [94]). La première étape correspondant à la phase aérobie ou la phase de remplissage constitue l'étape la plus courte en terme de temps de dégradation, contrairement à l'étape anaérobie qui se caractérise par une succession d'étapes pour la production du biogaz prenant beaucoup plus de temps. Lanini [78] a présenté un modèle basé sur l'équation de conservation de la masse avec l'équation de l'énergie pour décrire la diffusion de l'oxygène de l'air dans les couches supérieures de la décharge. Dans [4] et [5] on trouve des modèles de production de chaleur et de consommation d'oxygène.

À l'étape de la digestion anaérobie qui mène à la production de l'énergie (méthane), des études expérimentales montrent que les vitesses de dégradation, et par conséquent de production de gaz, augmentent lorsque la teneur en eau des déchets croît ([46], [48], [92]). Ceci s'explique par le fait que les niveaux élevés d'humidité facilitent la distribution et la mise en contact des nutriments et des bactéries. Cependant, une teneur en eau trop importante peut entraîner un «lessivage» des déchets et une forte diminution des cinétiques de dégradation ([92]). L'évolution de l'humidité du centre de stockage, qui joue un rôle primordial dans le processus de biodégradation, peut être décrite par l'équations de Richards qui modélise l'écoulement monophasique ("phase liquide") dans un milieu poreux non saturé. Dans [88], les auteurs ont développés un modèle permettant d'évaluer la quantité et la qualité des lixiviats produits par une décharge. Pour cela, une résolution simultanée de l'équation de Richards en 1D et la cinétique de Monod pour la dégradation des déchets a été considérée. Dans [68] les auteurs ont développé un modèle d'écoulement de lixiviat, donné par l'équation de Richards (forme standard) en 2D, couplée avec une EDO du premier ordre, représentant la cinétique de la biodégradation des déchets. Nous trouvons également des études expérimentales pour l'identification des paramètres hydrauliques de l'écoulement de lixiviat dans les références [31], [45]. Dans [11] l'auteur a présenté un modèle mathématique pour décrire les phénomènes physiques, élaboré à partir des équations de conservation de la masse de chaque constituant (Biogaz et Lixiviat) ainsi que les équations de conservation de l'énergie. Les termes sources traduisant la production du biogaz gé-

née par la biodégradation et des termes puits ont été considérés comme des fonctions qui dépendent de l'humidité et de la température. Parmi les résultats obtenus, l'auteur a montré que la réinjection ponctuelle du lixiviat est un scénario "optimum" pour une bonne gestion de la décharge. Dans [42] l'auteur a considéré des cinétiques biologiques de premier ordre par rapport au temps, qui a permis une intégration des équations et a présenté une description plus fine des écoulements en considérant un couplage explicite liquide/gaz, le transport des espèces principales en phase gaz et un couplage explicite avec un modèle de réaction biologique aérobie/anaérobie. D'autres travaux de modélisation analogique décrivant expérimentalement les écoulements des fluides dans les centres de stockage des déchets ménagers se trouvent entre autres dans les références [24, 44, 69, 99]. Cependant, ces modèles se confrontent à des limites notamment dans la description de l'aspect biologique. Plus précisément, ils ne tiennent pas compte simultanément de l'anisotropie de la diffusion ou de la distribution spatiale non homogène, et des différentes étapes du processus biologique pour la production du biogaz dans la dynamique biologique. Dans cette thèse nous proposons de contribuer à dépasser cette limitation en introduisant un modèle décrivant le processus anaérobie en deux étapes tenant compte des phénomènes d'inhibition et de la mortalité ainsi que de la diffusion et de l'hétérogénéité spatiale.

La littérature sur l'analyse des EDO décrivant la dynamique de la digestion anaérobie est abondante, on peut citer par exemple [63], [98], [35], [62], etc. Ces travaux traitent, entre autres, l'existence et la stabilité des points d'équilibre. Dans le cadre de la théorie des systèmes dynamiques, les théorèmes généraux les plus connus sont le théorème de critère spectral [107], le théorème de stabilité de Lyapunov [107] et le théorème de la variété centrale [36, 86]. Dans la majorité des études effectuées sur les modèles de la digestion anaérobie pour la production du biogaz, le théorème du critère spectral est très utile et applicable directement. Cependant, pour certains modèles, les hypothèses de ce théorème ne sont pas vérifiées. On peut alors dans ce cas considérer le théorème de Liapunov, mais ce dernier est difficilement applicable, notamment pour les systèmes non linéaires complexes et de grandes dimensions. Cette situation est celle de notre modèle d'EDO, et nous proposons une alternative dans cette thèse. Un autre aspect de cette problématique concerne des questions relatives au contrôle et à l'optimisation dans le but de maximiser la production du biogaz. Des travaux dans ce sens ont été réalisés par exemple dans [64], [60], [59].

Les modèles monophasiques et plus généralement polyphasiques des écoulements en milieux poreux ont fait l'objet d'une littérature abondante, notamment dans l'ingénierie pétrolière. Concernant les questions d'existence et d'unicité de la solution, on trouve dans [7] un théorème général d'existence de solution faible pour un système de type paraboliques-elliptiques. Dans [75], les auteurs ont montré l'existence d'une solution faible pour un modèle issu de l'ingénierie pétrolière décrivant l'écoulement biphasique incompressible huile-eau. Cependant, ils ont exclu toute dégénérescence ou singularité dans les équations. Dans [50], les auteurs ont donné le théorème d'existence de solution faible des équations, type parabolique-elliptique non linéaire, doublement dégénéré et fortement couplé, modélisant l'écoulement diphasique incom-

pressible eau-air dans un milieu poreux non saturé. Dans [74], [12], [9], on trouve l'analyse mathématique d'autres modèles issus de l'ingénierie pétrolière.

Dans les travaux [108], [8] et [39] les auteurs ont étudié un modèle d'écoulement biphasique reformulé en terme de la saturation et de la pression globale et ont analysé l'erreur pour une méthode d'éléments finis mixtes. En outre, dans [51] les auteurs ont présenté un simulateur basé sur la méthode des éléments finis mixtes et ont effectué des simulations en 1D. Puis, dans [38] les auteurs ont utilisé un simulateur biphasique basé sur la méthode des différences finis et ont réalisé des simulations en 2D. Dans [1] les auteurs ont considéré un modèle d'écoulement biphasique eau huile en terme de pression globale et de la vitesse globale et ont utilisé la méthode des volumes finis 2D.

Concernant les milieux poreux réactifs, les auteurs de [52] ont proposé un modèle d'écoulements biphasique 1D, couplé avec une EDO régie par la cinétique de Monod dans un domaine considéré homogène, dans l'objectif d'une bioremédiation des eaux souterraines. Dans [6] les auteurs ont présenté un modèle d'écoulement multiphasique couplé avec des équations différentielles ordinaires et algébriques non linéaires décrivant à la fois l'aspect mécanique et l'aspect géochimiques approché par une méthode des volumes finis avec des simulations en 1D. Dans le cadre du chemostat on trouve dans [43] un modèle décrivant l'écoulement du lixiviat en 1D régie par les équations de Navier-Stokes stationnaires et un système de réaction-diffusion-advection pour deux concentrations, approché par une méthode d'éléments finis.

Les modèles d'écoulements que nous allons présenter dans cette thèse décrivent à la fois l'aspect mécanique et biologique pendant le processus de la digestion anaérobie pour la production du biogaz. Le casier de déchets ménagers sera considéré comme un milieu poreux dans lequel nous allons considérer un modèle d'écoulements monophasique (lixiviat) et un modèle d'écoulement biphasique compressible (lixiviat-biogaz), couplés avec le système de réaction-diffusion modélisant le processus de production du biogaz, dans l'objectif de se doter d'un outil performant de modélisation et de simulation en deux et trois dimensions pour la gestion des déchets. De plus, cet outil pourrait être utilisé pour les prévisions, l'optimisation et le contrôle de la production du biogaz.

La suite de la thèse est organisée comme suit : Le CHAPITRE 2 est consacré à la modélisation des écoulements monophasique et biphasique dans un casier de déchets ménagers considéré comme un milieu poreux réactif dont la matrice poreuse est constituée principalement des déchets. Cette modélisation a pour but de décrire les phénomènes physico-chimiques de la biodégradation des déchets pendant le processus anaérobie pour la production de biogaz. Nous commençons par présenter un système d'EDO qui décrit la dégradation de la matière organique en se basant sur le principe de la conservation de la masse et des taux de croissance spécifiques associés à chaque étape. Ce système répond au cas du domaine de la bio-mécanique négligeant les effets de spatialisation. Nous proposons alors une nouvelle approche qui tient compte de la diffusion des différentes composantes afin d'introduire la spatialisation des densités et également pour avoir la possibilité de traiter le cas des domaines non-homogènes. Le système obtenu sera alors donné sous forme d'équations de type réaction-diffusion.

En outre, si nous supposons que le phénomène d'advection des composantes biochimiques intervient pendant le processus de dégradation de la matière organique, le terme d'advection sera alors ajouté au système de la dynamique bactérienne ce qui le rend fortement couplé avec les système d'écoulement monophasique du lixiviat et du système d'écoulement biphasique lixiviat-biogaz.

Le CHAPITRE 3 est consacré à l'analyse du comportement asymptotique et la simulation numérique du système d'EDO en utilisant et comparant les deux lois de croissance bactérienne (Monod et Haldane). L'objectif principal de cet analyse est de donner des informations et des prévisions plus approfondies sur le comportement des solutions à l'infini. A l'aide du lemme de Barbalat et du théorème de la variété stable et instable, nous montrons que chaque trajectoire du système est bornée et converge vers l'un des équilibres non hyperboliques. En outre, nous montrons que pour le cas de la fonction de croissance de Haldane qui est plus réaliste, l'attracteur global n'est pas connexe et que les performances en termes de production du biogaz sont discontinues dépendamment des valeurs des conditions initiales.

Le CHAPITRE 4 est consacré à l'étude du modèle d'EDP faiblement couplé décrivant l'activité bactérienne dans une décharge des déchets ménagers, considérée comme un milieu poreux non-saturé, représenté par un système d'EDP de type réaction-diffusion, couplé au système d'écoulement du lixiviat de type Darcy. Nous établissons les résultats d'existence et d'unicité de la solution pour le système de biodégradation ainsi que pour le système d'écoulement. Nous effectuons l'approximation et l'analyse numérique du problème en utilisant des schémas en temps d'ordre élevé et la méthode des éléments finis mixtes et nous présentons des résultats numériques 2D et 3D.

Dans le CHAPITRE 5, nous nous intéressons au nouveau modèle d'écoulement biphasique compressible lixiviat-biogaz couplé au système de réaction diffusion décrivant l'activité bactérienne dans une décharge des déchets ménagers, en tenant compte aussi bien de l'écoulement du lixiviat que de l'écoulement du biogaz qui est une phase compressible. Nous effectuons l'approximation du problème par la méthode des éléments finis en utilisant un schéma en temps d'ordre élevé et la méthode de linéarisation de Newton pour le sous-système de réaction-diffusion afin de mieux approcher à la fois le système de biodégradation et le terme source du sous-système de l'écoulement. Enfin, nous présentons des simulations numériques 2D et 3D.

Chapitre 2

Modélisation de la dynamique bactérienne dans les déchets ménagers

Sommaire

2.1 Introduction	14
2.2 Biodégradation des déchets	14
2.2.1 Généralités	14
2.2.2 La dynamique bactérienne	18
2.3 Ecoulement monophasique et biphasique dans un casier de déchets	24
2.3.1 Equations de l'écoulement monophasique du lixiviat	25
2.3.2 Equations de l'écoulement biphasique lixiviat-biogaz	29

2.1 Introduction

Ce chapitre a pour but de présenter les formulations mathématiques des écoulements monophasiques et diphasiques dans un casier de déchets ménagers. De tels écoulements sont modélisés par des systèmes d'équations aux dérivées partielles (EDP) issues des modèles d'écoulements standards à une ou plusieurs phases couplées à un système d'équations non linéaires modélisant les interactions entre les espèces à travers les réactions biologique. Nous nous intéressons dans cette modélisation aux phénomènes physiques et biologiques de la dégradation des déchets dans le cadre du processus anaérobie pour la production du biogaz.

Dans la première partie de ce chapitre, nous présenterons les différents types de systèmes de la digestion anaérobie des déchets selon différentes situations. Nous donnerons quelques généralités et les notions de base de la biodégradation des déchets. Puis, nous considérerons le processus de la digestion anaérobie, pour la production du biogaz, en deux étapes. Les équations qui décrivent les principales réactions de la dégradation de la matière organique seront présentées sous forme d'un système d'équations différentielles ordinaires (EDO) en se basant sur le principe de la conservation de la masse et des taux de croissance spécifiques associés à chaque étape. Ce système répond au cas du domaine de la bio-mécanique négligeant les effets de la spatialisation. Nous allons prendre en compte la diffusion des différentes composantes afin d'introduire la spatialisation des densités et également pour avoir la possibilité de traiter le cas des domaines non-homogènes. Le système obtenu sera alors donné sous forme d'équations de type réaction-diffusion.

Un casier de déchets est considéré comme un milieu poreux réactif dont la matrice poreuse est constituée principalement des déchets. Parallèlement au système qui décrit la dynamique bactérienne, nous assistons à la présence des écoulements de fluides constitués de mélange des deux phases liquide (lixiviat) et gaz (biogaz). Dans la 2ème partie de ce chapitre, nous présenterons un système d'écoulement monophasique de la phase lixiviat couplé faiblement avec la dynamique bactérienne, puis un système d'écoulement biphasique compressible et incompressible biogaz-lixiviat également couplé avec la dynamique bactérienne.

2.2 Biodégradation des déchets

2.2.1 Généralités

Les grandes étapes de la biodégradation

Dans une décharge des déchets ménagers, nous distinguons successivement des métabolismes aérobie et anaérobies. En effet, pendant la mise en place des déchets, une certaine quantité d'oxygène piégé initialement dans l'espace des pores et celui qui diffuse ensuite dans les couches supérieures, autorise l'activité de micro-organismes aérobie. Alors qu'une fois cet oxygène est consommé par les micro-organismes aérobie,

le processus de dégradation des déchets devient anaérobie [78], [11], [42], [101].

La phase aérobie

La phase aérobie est alors la première étape de processus de la dégradation de la matière organique. Les réactions de cette phase sont fortement exothermiques. En effet, c'est durant cette étape que de fortes montées en température ont été remarquées dans un massif de déchets.

La phase anaérobie

La phase anaérobie est la phase la plus longue de la dégradation de la matière organique qui se déroule dans des conditions anaérobies, c'est-à-dire sans oxygène. Elle se caractérise par une succession de réactions complexes à la fois en parallèle et en série. A long terme, la matière organique est transformée en biogaz, un mélange principalement composé de méthane et de dioxyde de carbone. Les principales étapes de ce processus sont l'hydrolyse, l'acidogénèse, l'acétogénèse et la méthanogénèse.

Aspects fondamentaux de la cinétique bactérienne

Les cinétiques microbiologiques sont basées sur deux relations fondamentales : le taux de croissance bactérienne et le taux d'utilisation du substrat [81]

TAUX DE CROISSANCE

Le taux de croissance microbien est défini par :

$$\frac{dB}{dt} = \mu B, \quad (2.1)$$

avec

- B est la concentration en micro-organismes à l'instant t.
- μ est le taux de croissance spécifique.

Afin de prendre en compte la mort des micro-organismes sur ce taux " net " de croissance, un taux de décroissance (de mortalité) est utilisé, soit :

$$\frac{dB}{dt} = (\mu - k_d)B, \quad (2.2)$$

où k_d est le taux de mortalité.

TAUX DE CROISSANCE ET TAUX D'UTILISATION DU SUBSTRAT

Ces deux taux sont reliés à la consommation du (des) substrat(s) X_2 par la relation de proportionnalité suivante :

$$\frac{dS}{dt} = -\frac{1}{Y} \frac{dB}{dt} \quad (2.3)$$

avec :

- Y est le taux d'utilisation du substrat.
- S est la concentration en substrat.

EFFET DE LA CONCENTRATION DU SUBSTRAT SUR LA CROISSANCE BACTÉRIENNE

L'effet de la concentration du substrat sur la croissance bactérienne a été décrit par de nombreux modèles mathématiques. Nous citons l'exemple d'un taux de croissance linéaire [54]

$$\mu(S) = \eta S \quad (2.4)$$

avec η est un réel strictement positif.

Cependant, les cinétiques les plus utilisées dans la littérature considèrent que la biomasse admet un taux de croissance maximal. Les lois les plus populaires sont

- La loi de Monod [81]

$$\mu(S) = \frac{\mu_m S}{K_S + S} \quad (2.5)$$

- La loi de Haldane [61], [10]

$$\mu(S) = \frac{\mu_m S}{K_S + S + \frac{S^2}{K_I}} \quad (2.6)$$

où μ_m est le taux de croissance maximum, K_S est la constante de demi-saturation et K_I est la constante d'inhibition. La représentation graphique de façon générale de ces deux lois est donnée dans la figure (2.1). La loi de Monod est liée aux phénomènes de saturation et de limitation et la loi de Haldane est liée aux phénomènes de saturation et d'inhibition.

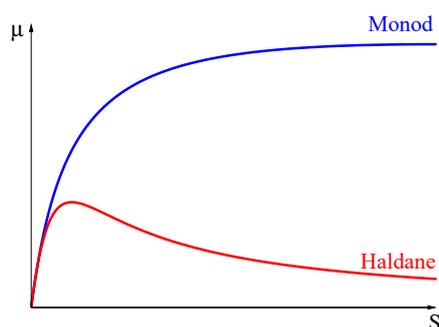


FIGURE 2.1 – Taux de croissance de type Monod et de type Haldane.

Ces différentes expressions du taux de croissance microbien et du taux d'utilisation de substrat, combinées avec le principe de conservation de la masse, vont permettre de décrire une transformation biologique simple des déchets en biogaz.

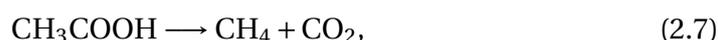
2.2 Biodégradation des déchets

PRODUCTION DE BIOGAZ DANS LES DÉCHETS

La production de méthane (CH_4) est le résultat direct de l'activité des bactéries méthanogènes dégradant la matière organique des déchets ménagers et assimilés. Cette activité est dépendante d'un grand nombre de facteurs d'influence, mais le pH et la teneur en eau sont vraisemblablement les variables les plus influentes en condition d'enfouissement [94], [15].

Les microorganismes qui réalisent cette étape de méthanogénèse sont des archaebactéries, des microorganismes proches des bactéries, on les appelle des bactéries méthanogènes par abus de langage. Il existe deux groupes de bactéries méthanogènes, les hydrogénotrophes (qui utilisent H_2 et CO_2) et les acétoclastes (qui utilisent l'acide acétique). Dans les deux cas, elles vont réduire leur substrat en méthane (CH_4) (voir la figure 2.2 et pour plus de détails voir [85] page 239 ou [94] page 47). Ainsi, deux voies de production du méthane sont prédominantes :

- l'acétoclastie, à partir de l'acétate CH_3COOH selon la réaction



- la réduction du dioxyde de carbone CO_2 par l'hydrogène H_2 selon la réaction

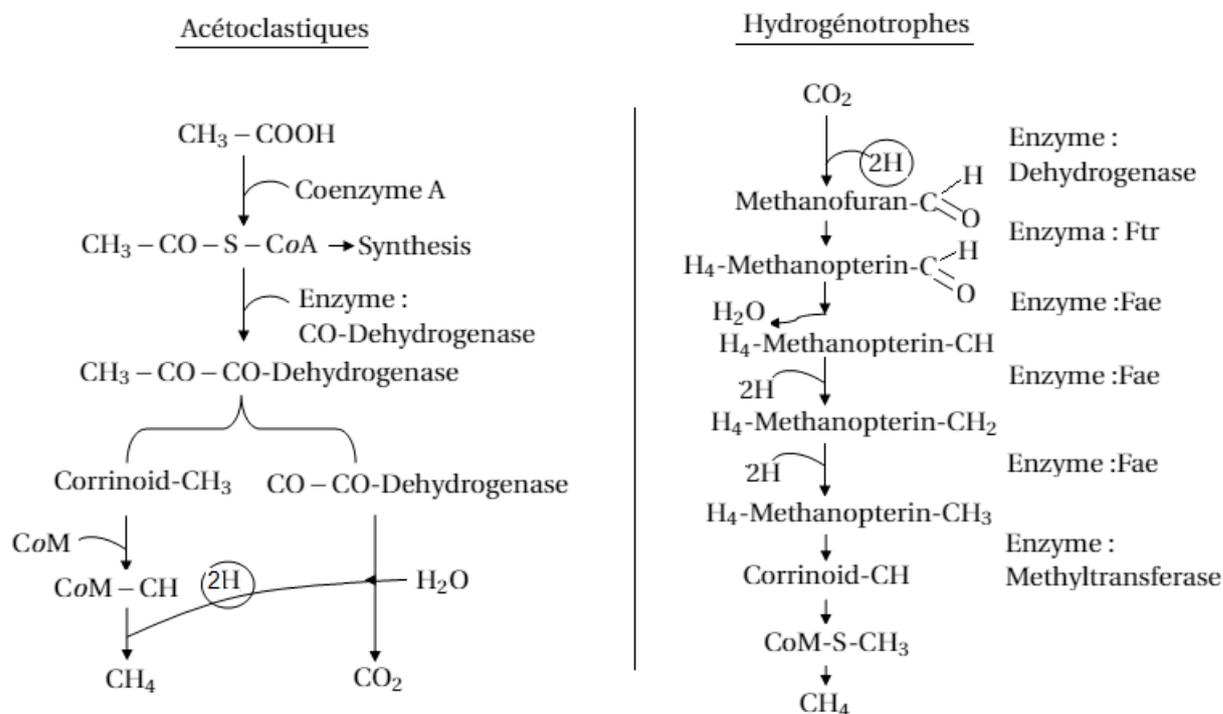


FIGURE 2.2 – Méthanogénèse : formation de méthane à partir de l'acétate (à gauche) / à partir de dioxyde de carbone (à droite).

Après avoir donné ces notions de bases dans la biodégradation des déchets, la section suivante sera consacrée à la modélisation de la dynamique bactérienne dans un processus de production de biogaz en deux étapes.

2.2.2 La dynamique bactérienne

Le système de digestion anaérobie en deux étapes

Le processus biologique de la digestion anaérobie des déchets ménagers minéralise les substrats organiques en l'absence d'oxygène. La matière organique est ensuite transformée par des micro-organismes en un mélange (biogaz), de méthane (CH_4) et de dioxyde de carbone (CO_2) à travers des réactions complexes en parallèle et/ou en série [2] [94].

Le système de la digestion anaérobie que nous allons considérer dans cette partie concerne le processus en deux étapes : l'hydrolyse et la méthanogenèse. Nous commençons dans un premier temps par modéliser la dernière étape de ce processus. Comme cela a été décrit dans le paragraphe précédent, en utilisant le taux de croissance des bactéries et le taux d'utilisation du substrat, nous avons

$$\frac{dB}{dt} = \mu(S)B, \quad (2.9)$$

$$\frac{dS}{dt} = -\frac{\mu(S)}{Y}B. \quad (2.10)$$

où B et S représentent respectivement les concentrations de la biomasse méthanogène et de la matière organique soluble, Y le taux d'utilisation du substrat et $\mu(\cdot)$ le taux de croissance spécifique.

La transformation de la matière organique donne un certain nombre de produits P_i , $i = 1, \dots, N$. Par le principe de conservation de la masse, nous avons

$$\frac{dP_i}{dt} = f_i \left(\frac{1-Y}{Y} \right) \mu(S)B, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

où les f_i sont des les coefficients stœchiométriques vérifiant $\sum_{i=1}^N f_i = 1$.

Dans le cas de la méthanogenèse, la transformation de la matière organique (MO) donne au moins deux produits : le méthane et le dioxyde de carbone. Par le principe de conservation de la masse, ce processus est modélisé par le système suivant

$$\frac{d[\text{CO}_2]}{dt} = \bar{f}_2 \frac{1-Y}{Y} \mu(S)B \quad (2.11)$$

$$\frac{d[\text{CH}_4]}{dt} = f_2 \frac{1-Y}{Y} \mu(S)B \quad (2.12)$$

où la notation $[\cdot]$ signifie la concentration et $f_2 + \bar{f}_2 = 1$. Les paramètres f_2 et \bar{f}_2 sont les coefficients stœchiométriques qui représentent les parties de la matière organique simple transformées en méthane et dioxyde de carbone pendant la phase de méthanogenèse.

Dans la situation réelle, les bactéries mortes peuvent en quelque sorte changer leur évolution. Nous introduisons le taux de mortalité noté K_d et l'équation (2.9) devient

$$\frac{dB}{dt} = (\mu(S) - K_d) B. \quad (2.13)$$

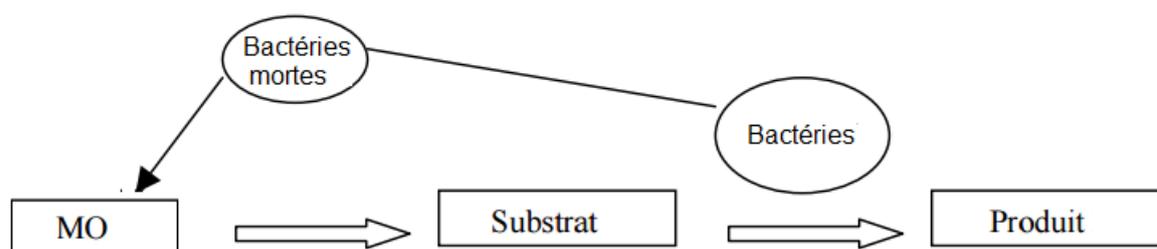


FIGURE 2.3 – Exemple d'un schéma simple de recyclage des bactéries mortes.

L'étape d'hydrolyse est en fait une phase importante dans le processus de biodégradation puisqu'il s'agit d'une étape de préparation du substrat. Elle est généralement modélisée par une équation du premier ordre

$$\frac{dX}{dt} = -K_h X, \quad (2.14)$$

où K_h est la constante d'hydrolyse.

Pendant l'étape de l'hydrolyse et selon certains auteurs ([57], [16]), les bactéries mortes peuvent constituer un nouveau substrat et sont alors recyclées en tant que matière à hydrolyser. Ce processus est schématisé dans la figure (2.3).

Nous retournons à notre situation et nous suivons la même démarche en supposant que la mortalité des bactéries méthanogènes constituent un substrat pour l'étape d'hydrolyse, qu'on note $\alpha K_d B$, avec α une constante comprise entre 0 et 1. Ceci sera alors un terme source dans la dernière équation d'évolution de X et contribuera, indirectement, à la production de CH_4 et CO_2 de l'étape de méthanogenèse (voir Figure 2.4).

Le modèle décrivant la production de biogaz en deux étapes, l'hydrolyse et la méthanogenèse, est obtenu à partir des équations (2.13)-(2.10)-(2.14)-(2.11)-(2.12) et il est

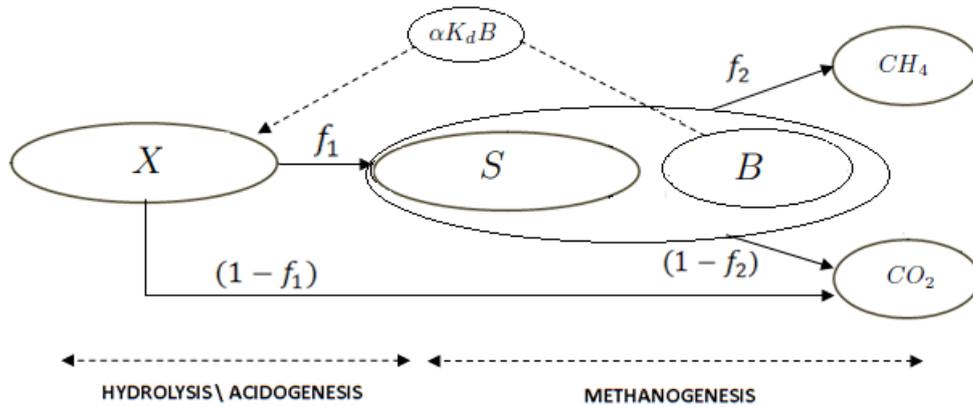


FIGURE 2.4 – Schéma utilisé pour modéliser la dégradation anaérobie de la matière organique.

donné par le système suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dX}{dt} = -K_h X + \alpha K_d B \\ \frac{dB}{dt} = (\mu(S) - K_d) B \\ \frac{dS}{dt} = f_1 K_h X - \frac{1}{Y} \mu(S) B \\ \frac{d[\text{CO}_2]}{dt} = (1 - f_1) K_h X + (1 - f_2) \frac{1-Y}{Y} \mu(S) B \quad (a) \\ \frac{d[\text{CH}_4]}{dt} = f_2 \frac{1-Y}{Y} \mu(S) B \quad (b) \end{array} \right. \quad (2.15)$$

Le paramètre f_1 est le coefficient stœchiométrique qui représente la partie de l'MO transformée en MO simple pendant la phase "hydrolyse / acidogénèse" et $1 - f_1$ représente la partie de l'MO transformée en CO_2 pendant la phase de méthanogénèse. Ce modèle a été proposé par Rouez dans [94] avec la loi de Monod et $\alpha = 1$. Nous rappelons que la loi de Monod est liée aux phénomènes de saturation et limitation, et la loi de Haldane est liée au phénomène d'inhibition pour les grandes valeurs de la concentration du substrat [81], [10]. Le modèle de Haldane est souvent considéré comme le plus approprié au processus anaérobie [26, 63]. Nous indiquons également que la fonction de Haldane peut être vue comme une généralisation de la loi de Monod sur un intervalle fixe pour les grandes valeurs de K_I . Dans la suite, nous allons utiliser et comparer ces deux lois.

Les variables dynamiques du système (2.15) sont la matière complexe dégradabile X, la biomasse méthanogène B, la matière organique soluble S, le dioxyde de carbone $[\text{CO}_2]$ et le méthane $[\text{CH}_4]$. Ce système nous permet de calculer le taux de production global du biogaz et constitue la partie principale du terme source/puits dans le modèle

d'(EDP) de l'écoulement dans les déchets que nous allons voir dans la section 2.3.

Une littérature abondante a traité la digestion anaérobie dans un chemostat. Ce dernier fonctionne généralement avec un agitateur, ce qui conduit à des densités spatialement homogènes en nutriments et micro-organismes. Ces modèles sont décrits par des Equations Différentielles Ordinaires (EDO) qui ne peuvent décrire correctement un casier de déchets incluant possiblement différentes hétérogénéités comme la distribution initiale des concentrations des micro-organismes etc.... Cela suggère l'incorporation des paramètres de diffusion et/ou l'hétérogénéité spatiale dans les modèles. L'introduction de l'hétérogénéité spatiale dans le modèle, en termes d'Equations aux Dérivées Partielles (EDP), de type réaction-diffusion, au lieu des EDO, est une extension raisonnable, compte tenu du fait que l'hétérogénéité spatiale est généralement observée dans les décharges réelles. Dans la suite, nous allons considérer le cas réaliste d'une décharge non homogène où nous devons prendre en compte la dépendance spatiale de la dynamique bactérienne [43, 58, 82, 97, 104].

Système d'EDP de type réaction-diffusion

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^d , $d \geq 2$, représentant la décharge. Nous supposons que sa frontière $\Gamma := \partial\Omega$ est continue-Lipschitz et qu'elle est l'union de deux parties Γ_D et Γ_N , avec $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$ (voir FIGURE 2.5 dans le cas 2D). La partie Γ_N sera constituée, selon les scénarios considérés (voir la page 36) d'une partie imperméable et d'une partie où le biogaz sera éventuellement récupéré, et une partie où le lixiviat pourrait être réinjecté. En général le fond et une grande partie de la paroi latérale du casier des déchets, sont totalement étanches grâce à une géomembrane imposée. La partie Γ_D va être constituée de la surface du casier des déchets (ou seulement une partie) sur laquelle la pression atmosphérique est imposée. Le vecteur normal extérieur sur Γ sera noté \mathbf{n} et l'intervalle de temps par $[0, T]$, pour $T > 0$. Dans les premiers tests, T sera le moment où le lixiviat commence à stagner en bas du domaine ou le moment où il faut récupérer le biogaz et qui peut être observé à partir des tests numériques.

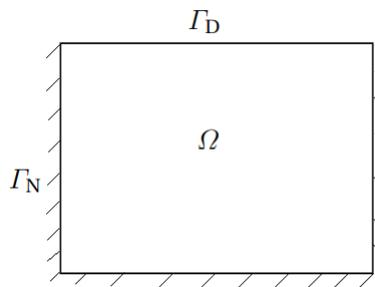


FIGURE 2.5 – Domaine

Nous adoptons la notation $Q_T = \Omega \times]0, T[$ et $\Gamma_T = \Gamma \times]0, T[$. Le système suivant est obtenu en ajoutant les termes de diffusion dans le système (2.15) qui décrivent l'agitation moléculaire des variables dynamiques [43, 82, 97, 104].

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial X}{\partial t} = -K_h X + \alpha K_d B + \operatorname{div}(D_1 \nabla X) \quad \text{dans } \Omega \times]0, T[\\ \frac{\partial B}{\partial t} = (\mu(S) - K_d) B + \operatorname{div}(D_2 \nabla B) \quad \text{dans } \Omega \times]0, T[\\ \frac{\partial S}{\partial t} = f_1 K_h X - \frac{1}{Y} \mu(S) B + \operatorname{div}(D_3 \nabla S) \quad \text{dans } \Omega \times]0, T[\end{array} \right. \quad (2.16)$$

où D_1 , D_2 et D_3 sont, respectivement, les coefficients de diffusion de X , B et S et $\operatorname{div}(\cdot)$, $\nabla(\cdot)$ sont les opérateurs divergence et gradient respectivement définis pour tout vecteur $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$ par $\operatorname{div} \mathbf{v} := \sum_{i=1}^n \frac{\partial v_i}{\partial x_i}$ et pour tout scalaire p par $\nabla p := \left(\frac{\partial p}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial p}{\partial x_n} \right)$.

La structure des équations des concentrations CO_2 et CH_4 est simple et montre que ces concentrations varient dans l'espace avec les autres variables. Par conséquent, pour ne pas augmenter le coût de calcul, nous n'ajoutons aucune diffusion à ces équations a priori. Ainsi, les deux dernières équations (a) et (b) du système (2.15), restent inchangées. Cependant, dans la section numérique, nous simulerons et comparerons les deux cas, selon que nous ajoutons des termes de diffusion à (CO_2) et (CH_4) ou pas.

Conditions aux limites et initiales

Pour que les systèmes (2.16) et (2.15) soient bien posés il faut les compléter par des conditions initiales et aux limites. Nous supposons qu'à l'instant $t = 0$, les concentrations initiales des quantités X , B , S , $[\text{CO}_2]$ et $[\text{CH}_4]$ sont données dans Ω par

$$X(0, x) = X_0(x), \quad B(0, x) = B_0(x), \quad S(0, x) = S_0(x), \quad (2.17)$$

$$[\text{CO}_2](0, x) = [\text{CO}_2]_0(x), \quad [\text{CH}_4](0, x) = [\text{CH}_4]_0(x). \quad (2.18)$$

Le cas où on suppose qu'à partir de $t = 0$, il n'y a plus de dépôt de déchets dans le casier ni d'ajout de biomasse ou de substrat, se traduit par des flux nuls de ces quantités

$$D_1 \frac{\partial X}{\partial n} = D_2 \frac{\partial B}{\partial n} = D_3 \frac{\partial S}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma \times]0, T[. \quad (2.19)$$

où $\frac{\partial \cdot}{\partial n}$ dénote la dérivée normale i.e. le produit scalaire du gradient de la fonction par la normale extérieure.

Remarque 2.1

En arrivant à l'instant T , le bon processus de la production de biogaz dans le casier des déchets consiste à mettre les facteurs contrôlant l'activité microbienne dans des valeurs optimales et productives, notamment celle de l'humidité, à laquelle nous nous intéressons dans la suite. Cette phase impose des interventions telles que la libération et/ou la réinjection du lixiviat et/ou la récupération de biogaz. Ceci implique un changement au niveau des conditions aux limites. Nous discuterons les scénarios possibles à la fin de ce chapitre.

Pour simplifier l'écriture du système obtenu, on pose

$$\mathbf{U} = (u_1, u_2, u_3)^t = (X, B, S)^t, \quad \mathbf{G} = (u_4, u_5)^t = ([\text{CO}_2], [\text{CH}_4])^t \quad (2.20)$$

et la matrice des coefficients de diffusion $\overline{\overline{\mathbf{D}}}$ est définie comme suit

$$\overline{\overline{\mathbf{D}}} = \begin{pmatrix} D_1 & 0 & 0 \\ 0 & D_2 & 0 \\ 0 & 0 & D_3 \end{pmatrix}.$$

Les membres de droite des équations du système (2.15) seront désignés par les fonctions $F_i, i = 1, 2, \dots, 5$ définies comme suit

$$\begin{aligned} F_1(\mathbf{U}) &= -K_h u_1 + \alpha K_d u_2, & F_2(\mathbf{U}) &= (\mu(u_3) - K_d) u_2, \\ F_3(\mathbf{U}) &= f_1 K_h u_1 - \frac{1}{Y} \mu(u_3) u_2, & F_4(\mathbf{U}) &= (1 - f_1) K_h u_1 \\ F_5(\mathbf{U}) &= f_2 \frac{1-Y}{Y} \mu(u_3) u_2 + (1 - f_2) \frac{1-Y}{Y} \mu(u_3) u_2, \end{aligned} \quad (2.21)$$

et nous considérons les fonctions vectorielles \mathbf{F}^1 et \mathbf{F}^2 définies par

$$\mathbf{F}^1(\mathbf{U}) = (F_1(\mathbf{U}), F_2(\mathbf{U}), F_3(\mathbf{U}))^T, \quad \mathbf{F}^2(\mathbf{U}) = (F_4(\mathbf{U}), F_5(\mathbf{U}))^T. \quad (2.22)$$

Le système de réaction-diffusion obtenu peut alors être écrit sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} - \text{div}(\overline{\overline{\mathbf{D}}} \nabla \mathbf{U}) = \mathbf{F}^1(\mathbf{U}) & \text{dans } \Omega \times]0, T[\\ \frac{d\mathbf{G}}{dt} = \mathbf{F}^2(\mathbf{U}) & \text{dans } \Omega \times]0, T[\\ \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times]0, T[\\ \mathbf{U}(0, \cdot) = \mathbf{U}^0(\cdot) \text{ et } \mathbf{G}(0, \cdot) = \mathbf{G}^0(\cdot) & \text{dans } \Omega. \end{array} \right. \quad (2.23)$$

Remarque 2.2 A partir de la 2ème, la 4ème et la 5ème équation du système (2.15), nous remarquons que

$$\frac{d\mathbf{G}}{dt} = \mathbf{F}^2(\mathbf{U}) = \begin{bmatrix} (1 - f_1) K_h u_1 + (1 - f_2) \frac{1-Y}{Y} \left(\frac{du_2}{dt} + K_d u_2 \right) \\ f_2 \frac{1-Y}{Y} \left(\frac{du_2}{dt} + K_d u_2 \right) \end{bmatrix}. \quad (2.24)$$

Ainsi il suffit de linéariser la première équation du système (2.23) pour linéariser tout le système.

2.3 Ecoulement monophasique et biphasique dans un casier de déchets

Le casier des déchets ménagers est un milieu polyphasique composé de solides, liquides et gaz. Il est assimilé à un milieu poreux et sa spécificité par rapport aux études de milieux poreux en mécanique ou en hydrologie des sols est due à des phénomènes de biodégradation. Parallèlement au processus de biodégradation des déchets, le phénomène d'écoulement des fluides, en particulier le biogaz et le lixiviat, se produisent dans le casier. Avant de donner les systèmes des écoulements, nous rappelons quelques notions de base sur ce type de milieu poreux réactif. Nous notons que le terme de "phase" sera utilisé dans la suite pour différencier les fluides.

POROSITÉ

Dans un volume élémentaire représentatif (VER), notons par V_{tot} le volume total, par V_G le volume de la matrice solide et par V_p le volume poreux. On définit la porosité comme étant le taux du vide dans le VER :

$$\phi = \frac{V_p}{V_{tot}} \quad (2.25)$$

LA TENEUR VOLUMIQUE

La teneur volumique θ_i en fluide i est le rapport du volume du fluide i contenu dans les pores au volume total V_{tot} du milieu considéré :

$$\theta_i = \frac{V_i}{V_{tot}}. \quad (2.26)$$

Dans les déchets, la teneur volumique en eau θ_l , dite aussi la teneur en eau, peut être exprimée en terme de teneur en eau massique ω_l (par rapport à la masse sèche du matériau considéré) [78] :

$$\theta_l = \frac{\rho_0}{\rho_l} \omega_l \quad \text{avec} \quad \omega_l = \frac{M_l}{M_s}, \quad (2.27)$$

où M_l est la masse de l'eau dans le milieu, M_s est la masse de milieu sec, ρ_l est la masse volumique de l'eau et ρ_0 est la masse volumique du milieu sec.

On définit aussi la teneur en eau massique ω' (i.e. par rapport à la masse humide du milieu $M_s + M_l$) par :

$$\omega' = \frac{M_l}{M_s + M_l} = \frac{\omega_l}{1 + \omega_l}. \quad (2.28)$$

SATURATION

La saturation S_α de la phase α est le rapport du volume de la phase V_α au volume des pores donnée par

$$S_\alpha = \frac{V_\alpha}{V_p} \quad \text{ou bien} \quad \theta_\alpha = \phi S_\alpha.$$

Dans la suite, nous supposons que le casier est constitué de déchets ménagers moyennement biodégradables, et c'est un milieu poreux indéformable et composé d'une matrice solide, d'une phase liquide monoconstituée (lixiviat) et d'une phase gazeuse formée par un mélange binaire de méthane et de dioxyde de carbone (biogaz) résultant du processus anaérobie en deux étapes.

2.3.1 Equations de l'écoulement monophasique du lixiviat

L'évolution de la teneur en eau dans le casier de déchets est un facteur important dans le processus de production de biogaz. Cette teneur est obtenue par la résolution de l'équation régissant l'écoulement du lixiviat. Dans un premier temps, nous allons négliger l'écoulement du biogaz et considérer que nous avons un écoulement monophasique en l'occurrence, celui de lixiviat. Ce dernier est régi par la loi de Darcy généralisée (nombre de Reynolds faible) et l'équation de conservation de la masse [25] [37] [11] [87]. La première équation est donnée par

$$\mathbf{u} = -K \frac{k_r}{\mu} (\nabla P - \rho g \nabla z) \quad (2.29)$$

où K est la perméabilité intrinsèque du milieu poreux, \mathbf{u} est la vitesse du lixiviat, k_r sa perméabilité relative, P sa pression, μ sa viscosité dynamique, ρ sa densité, g le module de l'accélération gravitationnelle et z l'axe vertical dirigé vers le bas.

L'équation de conservation de la masse du lixiviat est donnée par

$$\frac{\partial(\rho\theta)}{\partial t} + \text{div}(\rho\mathbf{u}) = \alpha_l, \quad (2.30)$$

où θ est la teneur en eau du lixiviat et α_l est le terme source/puits du lixiviat lié au taux de génération de biogaz noté α_b qui sera décrit plus tard. Avant de donner le modèle empirique de θ et k_r que nous utilisons, nous introduisons le potentiel de pression défini par le changement de variable classique suivant $p = \frac{P}{\rho g}$. Les équations d'écoulement monophasique du lixiviat sont alors écrites comme suit

$$\frac{\partial(\rho\theta(p))}{\partial t} + \text{div}(\rho\mathbf{u}) = \alpha_l \quad \text{dans } \Omega \times]0, T[, \quad (2.31)$$

$$\mathbf{u} = -K \frac{k_r(p)}{\mu} \rho g (\nabla p - \mathbf{e}_z) \quad \text{dans } \Omega \times]0, T[, \quad (2.32)$$

où \mathbf{e}_z est le vecteur unitaire de l'axe vertical dirigé vers le bas.

Il existe plusieurs modèles empiriques pour décrire la variation de la teneur en eau θ en fonction de la pression p (nommée aussi la courbe de rétention) et la perméabilité relative k_r . Ces modèles dépendent généralement des paramètres suivants : θ_s , la teneur en eau volumique à saturation; θ_r , la teneur en eau résiduelle; θ_e , la teneur en eau effective qui correspond à la part de l'eau qui circule réellement dans le milieu; et S_e , la saturation effective du milieu poreux. Les trois modèles empiriques les plus populaires, pour décrire $\theta(p)$ et $k_r(p)$, sont le modèle de Brooks-Corey, le modèle de Campbel et le modèle de Van Genuchten donnés par

- Brooks et Corey (1964) [33] :

$$\theta(p) := \theta_r + (\theta_s - \theta_r) \left(\frac{p_a}{p} \right)^{1/b}, \quad k_r(p) := \left(\frac{p_a}{p} \right)^{2+3/b}, \quad p < p_a \quad (2.33)$$

- Campbell(1974) [34] :

$$\theta(p) := \theta_s \left(\frac{p_a}{p} \right)^{1/b}, \quad k_r(p) := \left(\frac{p_a}{p} \right)^{2+3/b}, \quad p < p_a \quad (2.34)$$

- Van Genuchten (1980) [103] :

$$\theta(p) := \theta_r + (\theta_s - \theta_r) \left[\frac{1}{1 + (\bar{\alpha}p)^n} \right]^m, \quad p < p_a \quad (2.35)$$

$$k_r(p) := S_e^{1/2} [1 - (1 - S_e^{1/m})^m]^2 \quad (2.36)$$

où $S_e = (\theta(p) - \theta_r) / (\theta_s - \theta_r)$ et $\theta(p)$ est donné par (2.35), p_a est un facteur d'échelle lié au potentiel de pression d'entrée d'air et b est un paramètre décrivant l'uniformité de la taille des grains, n , m et $\bar{\alpha}$ sont des paramètres de calage.

Cependant, signalons que dans tous ces modèles empiriques, pour $p \geq p_a$, la teneur en eau est égale à la teneur en eau à saturation θ_s et la perméabilité vaut la perméabilité à saturation K_s .

Nous citons à titre d'exemple que les mesures réalisées dans [73], sur une décharge de déchets, indiquent que les résultats obtenus correspondent parfaitement à la loi de Campbell [34, 78]. Cependant, nous pouvons trouver les valeurs des paramètres de ces modèles empiriques dans les références [11, 23, 78, 101].

TERME SOURCE/PUIT

La génération de biogaz a besoin de l'humidité et consomme donc de l'eau. Autrement dit, le terme α_b est un terme puit dans l'équation (2.31). Nous utilisons l'approche d'Aran donnée dans [11] et utilisée aussi dans [26], [2], [78] et [72] :

$$\alpha_l = -\gamma\alpha_b = -\gamma\tilde{g}(\omega)C_{Tb}\lambda_{cin}, \quad (2.37)$$

où $\gamma = M_{H_2O} / (3.4 \times M_b)$ avec M_{H_2O} et M_b sont respectivement la masse molaire de H_2O et du biogaz, C_{Tb} est la constante de génération de biogaz, λ_{cin} est le taux de génération de biogaz (voir [52] et la page 63 dans [55]) :

$$\lambda_{cin} = \frac{dC_{biogaz}}{dt} = \frac{d([CH_4] + [CO_2])}{dt}, \quad (2.38)$$

et $\tilde{g}(\omega)$ est une fonction empirique donnée dans [11] en termes d'humidité ω (voir FIGURE 2.6). Des études expérimentales (Cf. Aran [11]) montrent qu'en dessous d'une valeur minimale ω_{min} et au-dessus d'une valeur maximale ω_{max} il n'y a pas de production de biogaz. De ω_{min} à une autre valeur ω_1 la dépendance à l'humidité augmente linéairement. Entre ω_1 et ω_2 , qui est proche de la saturation, $\tilde{g}(\omega) = 1$, la production

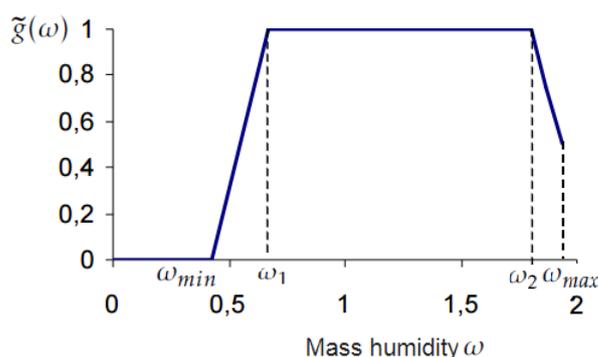


FIGURE 2.6 – La fonction empirique $\tilde{g}(\omega)$ (voir [11])

de biogaz est maximale et alors la teneur en eau n'est pas un facteur limitant pour la production de biogaz.

Notons que le terme α_l est négatif, comme indiqué dans [11], ce qui signifie que c'est une consommation d'eau par l'activité bactérienne pour la production de biogaz.

Dans la référence [55], nous trouvons une autre fonction empirique décrivant la relation entre la production de biogaz et l'humidité (voir FIGURE 2.7). Cette fonction se présente de la manière suivante : en dessous de la valeur minimale de la teneur en eau $\theta = 20\%$ il n'y a pas de production de biogaz. De $\theta = 20\%$ à la valeur $\theta = 35\%$, la dépendance à la teneur en eau augmente suivant la fonction $g(\theta) = (\theta - 20)/15$, puis entre $\theta = 35\%$ et $\theta = 75\%$ suivant la fonction $g(\theta) = [0.1 + 0.9(\theta - 35)]/40$. A partir de $\theta = 75\%$, nous avons $g(\theta) = 1$ et alors la production de biogaz est maximale.

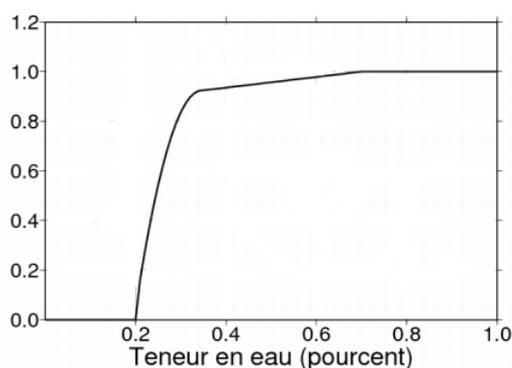


FIGURE 2.7 – La fonction empirique $g(\theta)$ (voir [55]).

CONDITIONS AUX LIMITES ET INITIALES

Pour compléter les équations (2.31)-(2.32), on doit définir des conditions aux limites et initiales. Les possibilités qui seront considérées par la suite sont :

- une condition de Dirichlet pour la pression sur la surface du casier Γ_D qui est en

contact avec l'atmosphère

$$p = p_D \quad \text{sur} \quad \Gamma_D \times]0, T[, \quad (2.39)$$

— une condition de Neuman pour les flux sur la partie imperméable du casier Γ_N

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_N \times]0, T[, \quad (2.40)$$

— à l'instant $t = 0$, la pression de lixiviat initiale est donnée par

$$p(x, 0) = p_0(x) \quad \text{dans} \quad \Omega. \quad (2.41)$$

Nous introduisons la capacité capillaire $c(p)$ en réécrivant la dérivée temporelle de la teneur en eau comme suit

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial \theta}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t} = c(p) \frac{\partial p}{\partial t}.$$

En inversant la perméabilité relative k_r et la densité ρ , nous posons

$$k(p) = \frac{\mu l}{K \rho g} (k_r(p))^{-1} \quad \text{et} \quad f = \rho^{-1} \alpha_l.$$

Nous posons l'hypothèse suivante qui est cohérente avec la physique du problème.

Hypothèse 1 Les fonctions $p \rightarrow \theta(p)$, $p \rightarrow c(p) = \frac{\partial \theta}{\partial p}$ et $p \rightarrow k(p)$ sont uniformément bornées de telle sorte qu'il existe des constantes positives $c_\theta, C_\theta, c'_\theta, C'_\theta, c_k$ et C_k telles que

$$0 < c_\theta \leq \theta(p) \leq C_\theta, \quad 0 < c_p \leq c(p) \leq C_p, \quad 0 < c_k \leq k(p) \leq C_k. \quad (2.42)$$

Le problème de l'écoulement du lixiviat peut s'écrire enfin comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{ll} c(p) \frac{\partial p}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{u} = f, & \text{dans} \quad \Omega \times]0, T[, \\ k(p) \mathbf{u} = -\nabla p + e_z, & \text{dans} \quad \Omega \times]0, T[, \\ p = p_D, & \text{sur} \quad \Gamma_D \times]0, T[, \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0, & \text{sur} \quad \Gamma_N \times]0, T[, \\ p(x, 0) = p_0(x), & \text{dans} \quad \Omega. \end{array} \right. \quad (2.43)$$

La forme condensée du système (2.43) est l'équation de Richards donnée par

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial \theta(p)}{\partial t} + \operatorname{div} [(k(p))^{-1} (-\nabla p + e_z)] = f, & \text{dans} \quad \Omega \times]0, T[, \\ p = p_D, & \text{sur} \quad \Gamma_D \times]0, T[, \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{sur} \quad \Gamma_N \times]0, T[, \\ p(x, 0) = p_0(x), & \text{dans} \quad \Omega. \end{array} \right. \quad (2.44)$$

L'étude du problème d'écoulement sous la forme mixte (2.43) est plus intéressante que sous la forme condensée (2.44), dans le sens qu'elle nous permet de suivre en même temps la variation de la teneur en eau et celle de la vitesse d'écoulement du lixiviat, lors de la production de biogaz, et de les calculer numériquement avec la même précision. Les inconnues de ce problème non linéaire sont la vitesse \mathbf{u} et le potentiel de pression p .

MODÈLE D'ÉCOULEMENT MONOPHASIQUE FAIBLEMENT COUPLÉ

Le modèle mathématique final décrivant la dégradation de la matière organique et l'écoulement de lixiviat pendant le processus de la digestion anaérobie pour la production de biogaz est maintenant obtenu par le problème couplé formé par le système de réaction-diffusion (2.23) et le système d'écoulement (2.43) :

$$(S1) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} - \operatorname{div}(\overline{\mathbf{D}} \cdot \nabla \mathbf{U}) = \mathbf{F}^1(\mathbf{U}), \quad \text{dans } \Omega \times]0, T[, \\ \frac{d\mathbf{G}}{dt} = \mathbf{F}^2(\mathbf{U}), \quad \text{dans } \Omega \times]0, T[, \\ \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \times]0, T[, \\ \mathbf{U}(0, \cdot) = \mathbf{U}^0(\cdot), \quad \text{dans } \Omega \\ \mathbf{G}(0, \cdot) = \mathbf{G}^0(\cdot), \quad \text{dans } \Omega, \end{array} \right. \quad (2.45)$$

et

$$(S2) \left\{ \begin{array}{l} c(p) \frac{\partial p}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{u} = f, \quad \text{dans } \Omega \times]0, T[, \\ k(p) \mathbf{u} = -\nabla p + e_z, \quad \text{dans } \Omega \times]0, T[, \\ p = p_D, \quad \text{sur } \Gamma_D \times]0, T[, \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \text{sur } \Gamma_N \times]0, T[, \\ p(x, 0) = p_0(x), \quad \text{dans } \Omega. \end{array} \right. \quad (2.46)$$

2.3.2 Equations de l'écoulement biphasique lixiviat-biogaz

La modélisation d'un écoulement biphasique est basée sur un système d'équations couplées (la loi de Darcy et l'équation de conservation de la masse) qui décrivent l'écoulement des deux phases. Nous citons dans ce cadre les références [13, 41, 50, 67, 72, 79] pour une description détaillée de ces équations. En se basant sur ces références, nous nous intéressons par la suite sur l'écoulement biphasique Lixiviat-biogaz.

EQUATIONS DE CONSERVATION DE LA MASSE

En écrivant l'équation de conservation de la masse pour chacune des phases, biogaz et lixiviat, nous obtenons sur tout le domaine les équations suivantes :

$$\frac{\partial(\rho_b\theta_b)}{\partial t} + \text{div}(\rho_b\mathbf{u}_b) = \alpha_b \quad (2.47)$$

$$\frac{\partial(\rho_l\theta_l)}{\partial t} + \text{div}(\rho_l\mathbf{u}_l) = \alpha_l \quad (2.48)$$

avec \mathbf{u}_i , ρ_i , θ_i sont respectivement la vitesse, la masse volumique et la teneur volumique du fluide i . Les indices b et l représentent les phases biogaz et lixiviat respectivement. α_b est le terme source de production de biogaz et α_l est le terme puits d'humidité, et ces termes sont donnés par (2.37)-(2.38).

EQUATIONS DU MOUVEMENT

L'équation de conservation de la quantité de mouvement s'appuie sur l'équation de Darcy généralisée pour chacune des phases lixiviat et biogaz (faible nombre de Reynolds $Re < 1$) :

$$\mathbf{u}_j = -K \frac{k_{rj}}{\mu_j} (\nabla p_j - \rho_j g e_z) \quad j = l, b \quad (2.49)$$

où k_{rj} , p_j et μ_j sont respectivement la perméabilité relative, la pression et la viscosité dynamique de la phase j , pour $j = l, b$.

PRESSION CAPILLAIRE

Lorsque deux fluides immiscibles s'écoulent simultanément dans un milieu poreux, on caractérise l'interface de séparation des deux fluides par une tension interfaciale due aux effets de collision et adhésion entre les deux phases. Cette tension induit une différence de pression dite pression capillaire :

$$P_c := P_b - P_l. \quad (2.50)$$

Il existe différents modèles empiriques dans la littérature pour décrire la variation de la pression capillaire et la perméabilité en termes de la teneur en eau (voir les modèles de Van Genuchten [103], Campbell [34] et Brooks Corey [33]). Nous pouvons trouver les valeurs des paramètres de ces modèles dans les références [11, 23, 78]. Nous présentons à titre d'exemple le modèle de Campbell [34] :

— la pression capillaire :

$$p_c(\theta_l) = p_{ce} \left(\frac{\theta_l}{\theta_s} \right)^{-b}, \quad (2.51)$$

— la perméabilité relative à la phase lixiviat :

$$k_{rl}(\theta_l) = \left(\frac{\theta_l}{\theta_s} \right)^B, \quad \text{avec } B = 2b + 3, \quad (2.52)$$

— la perméabilité relative à la phase biogaz :

$$k_{rb}(\theta_l) = \frac{\theta_l}{\theta_s} \left(1 - \frac{\theta_l}{\theta_s} \right)^2, \quad (2.53)$$

avec p_{ce} , b , B sont des paramètres de modèle.

L'équation (2.49) de la loi de Darcy généralisée appliquée à chacune des phases biogaz et lixiviat donne :

$$\mathbf{u}_l = -K \frac{k_{rl}(\theta_l)}{\mu_l} (\nabla p_l - \rho_l g e_z), \quad (2.54)$$

$$\mathbf{u}_b = -K \frac{k_{rb}(\theta_l)}{\mu_b} (\nabla p_b - \rho_b g e_z). \quad (2.55)$$

Dans la suite nous allons introduire, au lieu des pressions, les hauteurs en colonne. Ces grandeurs sont définies par :

$$h_l : = \frac{p_l - p_0}{\rho_l g}, \quad (2.56)$$

$$h_b : = \frac{p_b - p_0}{\rho_l g}, \quad (2.57)$$

$$h_c : = h_b - h_l = \frac{p_c}{\rho_l g}, \quad (2.58)$$

où p_0 est la pression de référence, h_l (resp. h_b) représente la hauteur en colonne de lixiviat (resp. de biogaz), et h_c la hauteur capillaire.

En tenant compte de ces nouvelles variables, les équations (2.54) et (2.55) deviennent :

$$\mathbf{u}_l = -K \frac{k_{rl}(\theta_l)}{\mu_l} \rho_l g (\nabla h_l - e_z), \quad (2.59)$$

$$\mathbf{u}_b = -K \frac{k_{rb}(\theta_l)}{\mu_b} \rho_l g (\nabla h_b - \frac{\rho_b}{\rho_l} e_z). \quad (2.60)$$

Posons

$$k_l(\theta_l) : = K \frac{k_{rl}(\theta_l)}{\mu_l} \rho_l g, \quad (2.61)$$

$$k_b(\theta_l) : = K \frac{k_{rb}(\theta_l)}{\mu_b} \rho_l g, \quad (2.62)$$

ici k_l et k_b représente la conductivité hydraulique du lixiviat et du biogaz respectivement. Comme on suppose que ρ_l est constante, l'équation (2.47) devient :

$$\frac{\partial \theta_l}{\partial t} + \text{div} \mathbf{u}_l = \alpha_l \rho_l^{-1}. \quad (2.63)$$

En substituant \mathbf{u}_l par l'expression (2.59), et en tenant compte de (2.61), on trouve :

$$\frac{\partial \theta_l}{\partial t} - \text{div}(k_l(\theta_l)(\nabla h_l - e_z)) = \alpha_l \rho_l^{-1} \quad (2.64)$$

et nous avons

$$\frac{\partial \theta_l}{\partial t} = \frac{d\theta_l}{dh_c} \frac{\partial h_c}{\partial t} = C_l(h_c) \frac{\partial h_c}{\partial t} \quad (2.65)$$

où

$$C_l(h_c) = \frac{d\theta_l}{dh_c} \quad (2.66)$$

représente la capacité capillaire. En utilisant (2.58) et (2.61), le flux de Darcy du lixiviat s'écrit sous la forme :

$$\mathbf{u}_l = k_l(\theta_l)(\nabla h_c - \nabla h_b + e_z), \quad (2.67)$$

on obtient alors l'équation

$$C_l(h_c) \frac{\partial h_c}{\partial t} + \operatorname{div} \left(k_l(\theta_l)(\nabla h_c - \nabla h_b + e_z) \right) = \alpha_l \rho_l^{-1}. \quad (2.68)$$

Écoulement biphasique incompressible

Si on considère maintenant que le biogaz est incompressible, i.e ρ_b est constante, l'équation de conservation de la masse pour la phase biogaz devient

$$\frac{\partial \theta_b}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{u}_b = \alpha_b \rho_b^{-1}, \quad (2.69)$$

et faisant la somme des relations (2.63) et (2.69), on obtient

$$\frac{\partial(\theta_l + \theta_b)}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{u}_l + \mathbf{u}_b) = \alpha_l \rho_l^{-1} + \alpha_b \rho_b^{-1}. \quad (2.70)$$

Posons

$$\mathbf{u}_t = \mathbf{u}_l + \mathbf{u}_b,$$

qui représente le flux total des deux phases. Nous obtenons alors l'équation elliptique suivante :

$$\operatorname{div} \mathbf{u}_t = \alpha_l \rho_l^{-1} + \alpha_b \rho_b^{-1}. \quad (2.71)$$

Nous exprimons maintenant le flux total en fonction des variables h_c et h_b

$$\mathbf{u}_t = k_l(\theta_l(h_c))(\nabla h_c - \nabla h_b + e_z) - k_b(\theta_l(h_c))(\nabla h_b - \frac{\rho_b}{\rho_l} e_z) \quad (2.72)$$

et nous obtenons l'expression suivante

$$\mathbf{u}_t = k_l(\theta_l(h_c))\nabla h_c - k(\theta_l(h_c))\nabla h_b + (k_l(\theta_l(h_c)) + \frac{\rho_b}{\rho_l} k_b(\theta_l(h_c)))e_z \quad (2.73)$$

où

$$k(\theta_l(h_c)) := k_l(\theta_l(h_c)) + k_b(\theta_l(h_c)) \quad (2.74)$$

En résumé, le système qui décrit l'écoulement biphasique incompressible lixiviat-biogaz en milieu poreux non saturé est donné par :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial \theta_l(h_c)}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{u}_l = \alpha_l \rho_l^{-1} & \text{dans } \Omega \times]0, T[\\ \mathbf{u}_l = k_l(\theta_l(h_c))(\nabla h_c - \nabla h_b + e_z) & \text{dans } \Omega \times]0, T[\\ \operatorname{div} \mathbf{u}_t = \alpha_l \rho_l^{-1} + \alpha_b \rho_b^{-1} & \text{dans } \Omega \times]0, T[\\ \mathbf{u}_t = k_l(\theta_l(h_c))\nabla h_c - k(\theta_l(h_c))\nabla h_b + (k_l(\theta_l(h_c)) + \frac{\rho_b}{\rho_l} k_b(\theta_l(h_c)))e_z & \text{dans } \Omega \times]0, T[\end{array} \right. \quad (2.75)$$

qui peut s'écrire encore sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \theta_l(h_c)}{\partial t} + \text{div} (k_l(\theta_l(h_c))(\nabla h_c - \nabla h_b + e_z)) = \alpha_l \rho_l^{-1} \quad \text{dans } \Omega \times]0, T[\\ \text{div} (k_l(\theta_l(h_c))\nabla h_c - k(\theta_l(h_c))\nabla h_b + (k_l(\theta_l(h_c)) \\ + \frac{\rho_b}{\rho_l} k_b(\theta_l(h_c)))e_z) = \alpha_l \rho_l^{-1} + \alpha_b \rho_b^{-1} \quad \text{dans } \Omega \times]0, T[\end{array} \right. \quad (2.76)$$

Ecoulement biphasique compressible

Dans la réalité, le biogaz est compressible. Nous supposons ici, qu'il obéit à l'équation d'état des gaz parfaits :

$$\rho_b(h_b) = \rho_{0b} \left(\frac{p_b}{p_0} \right) \quad (2.77)$$

où p_0 et ρ_{0b} sont respectivement la pression et la densité de référence.

En tenant compte de la relation (2.57), l'équation d'état (2.77) s'écrit alors sous la forme :

$$\rho_b = \rho_{0b} \left(1 + \frac{h_b}{h_0} \right) \quad (2.78)$$

où $h_0 = \frac{p_0}{\rho_l g}$.

L'équation de continuité de la phase biogaz s'écrit :

$$\frac{\partial(\rho_b \theta_b)}{\partial t} - \text{div} \left(\rho_b k_b(\theta_l) (\nabla h_b - \frac{\rho_b}{\rho_l} e_z) \right) = \alpha_b \quad (2.79)$$

ce qui implique

$$(\phi - \theta_l) \frac{\partial \rho_b(h_b)}{\partial t} + \rho_b(h_b) \frac{\partial(\phi - \theta_l)}{\partial t} - \text{div} \left(\rho_b(h_b) k_b(\theta_l) (\nabla h_b - \frac{\rho_b}{\rho_l} e_z) \right) = \alpha_b, \quad (2.80)$$

ce qui donne

$$(\phi - \theta_l) \frac{\rho_{0b}}{h_0} \frac{\partial h_b}{\partial t} - \rho_b(h_b) \frac{\partial \theta_l}{\partial t} - \text{div} \left(\rho_b(h_b) k_b(\theta_l) (\nabla h_b - \frac{\rho_b}{\rho_l} e_z) \right) = \alpha_b, \quad (2.81)$$

ou encore

$$(\phi - \theta_l) \frac{\rho_{0b}}{h_0} \frac{\partial h_b}{\partial t} - \rho_b(h_b) C_l(h_c) \frac{\partial h_c}{\partial t} - \text{div} \left(\rho_b(h_b) k_b(\theta_l) (\nabla h_b - \frac{\rho_b}{\rho_l} e_z) \right) = \alpha_b. \quad (2.82)$$

Nous obtenons finalement le système suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_l C_l(h_c) \frac{\partial h_c}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_l \mathbf{u}_l) = \alpha_l, \\ \mathbf{u}_l = -k_l(\theta_l(h_c))(\nabla h_b - \nabla h_c - e_z), \\ \left(\frac{(\phi - \theta_l(h_c))\rho_{0b}}{h_0} \right) \frac{\partial h_b}{\partial t} - \rho_b(h_b) C_l(h_c) \frac{\partial h_c}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_b \mathbf{u}_b) = \alpha_b, \\ \mathbf{u}_b = -k_b(\theta_l(h_c))(\nabla h_b - \frac{\rho_b}{\rho_l} e_z). \end{array} \right. \quad (2.83)$$

Si on pose

$$\begin{aligned} A_1(h_c) &= \frac{(\phi - \theta_l(h_c))\rho_{0b}}{h_0}, \\ A_2(h_c, h_b) &= \rho_b(h_b) C_l(h_c), \\ \overline{k}_l(h_c) &= k_l(\theta_l(h_c))^{-1} \\ \overline{k}_b(h_c) &= k_b(\theta_l(h_c))^{-1} \\ c_1 &= \frac{\rho_{0b}}{\rho_l h_0}, \quad c_2 = \frac{\rho_{0b}}{\rho_l}, \end{aligned}$$

le système devient

$$\left\{ \begin{array}{l} C_l(h_c) \frac{\partial h_c}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{u}_l) = \rho_l^{-1} \alpha_l, \\ \overline{k}_l(h_c) \mathbf{u}_l = \nabla h_c - \nabla h_b + e_z, \\ A_1(h_c) \frac{\partial h_b}{\partial t} - A_2(h_c, h_b) \frac{\partial h_c}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_b(h_b) \mathbf{u}_b) = \alpha_b, \\ \overline{k}_b(h_c) \mathbf{u}_b = -\nabla h_b + c_1 h_b e_z + c_2 e_z, \end{array} \right. \quad (2.84)$$

qui peut s'écrire aussi sous la forme suivante

$$\left\{ \begin{array}{l} C_l(h_c) \frac{\partial h_c}{\partial t} - \operatorname{div}(k_l(\theta_l(h_c))(\nabla h_b - \nabla h_c - e_z)) = \alpha_l \rho_l^{-1}, \\ A_1(h_c) \frac{\partial h_b}{\partial t} - A_2(h_c, h_b) \frac{\partial h_c}{\partial t} - \operatorname{div}(\rho_b(h_b) k_b(\theta_l)(\nabla h_b - \frac{\rho_b(h_b)}{\rho_l} e_z)) = \alpha_b. \end{array} \right. \quad (2.85)$$

Conditions aux limites et initiales

Pour compléter les équations du système d'écoulement biphasique compressible (2.84), on doit ajouter les conditions aux limites et initiales comme pour le cas monophasique.

A $t = 0$, les conditions initiales sur les hauteurs en colonne en h_b et h_c sont données par

$$h_c(0, x) = h_{c,0}(x) \quad \text{dans } \Omega, \quad (2.86)$$

$$h_b(0, x) = h_{b,0}(x) \quad \text{dans } \Omega. \quad (2.87)$$

Nous supposons qu'à la surface du casier des déchets Γ_D , le contact avec l'atmosphère impose des conditions de type Dirichlet sur les hauteurs en colonne de h_b et h_c . Les conditions limite sur Γ_D sont donc données par

$$h_c = h_{c,D} \quad \text{sur } \Gamma_D \times]0, T[, \quad (2.88)$$

$$h_b = h_{b,D} \quad \text{sur } \Gamma_D \times]0, T[. \quad (2.89)$$

De la même manière que pour (2.40), nous supposons que les parois et le fond du casier des déchets sont imperméables, ce qui se traduit par des conditions de flux nuls pour les deux phases, lixiviat et biogaz. Elles sont données par les conditions de Neumann homogènes suivantes

$$k_l(\theta_l(h_c))(\nabla h_b - \nabla h_c - e_z) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{v}_l = 0 \quad \text{sur } \Gamma_N \times]0, T[, \quad (2.90)$$

$$k_b(\theta_l(h_c))(\nabla h_b - \frac{\rho_b}{\rho_l} e_z) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{v}_b = 0 \quad \text{sur } \Gamma_N \times]0, T[. \quad (2.91)$$

LE MODÈLE FINAL D'ÉCOULEMENT BIPHASIQUE COMPRESSIBLE

Le modèle final qui décrit la dégradation de la matière organique et l'écoulement biphasique compressible lixiviat-biogaz pendant le processus de la digestion anaérobie pour la production de biogaz est

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} - \text{div}(\overline{\overline{\mathbf{D}}} \cdot \nabla \mathbf{U}) = \mathbf{F}^1(\mathbf{U}) & \text{dans } \Omega \times]0, T[, \\ \frac{d\mathbf{G}}{dt} = \mathbf{F}^2(\mathbf{U}) & \text{dans } \Omega \times]0, T[, \\ \overline{\overline{\mathbf{D}}} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{n}} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times]0, T[, \\ \mathbf{U}(0, \cdot) = \mathbf{U}^0(\cdot) \text{ et } \mathbf{G}(0, \cdot) = \mathbf{G}^0(\cdot) & \text{dans } \Omega, \end{array} \right. \quad (2.92)$$

et

$$\left\{ \begin{array}{ll}
 C_l(h_c) \frac{\partial h_c}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{u}_l) = \rho_l^{-1} \alpha_l & \text{dans } \Omega \times]0, T[\\
 \bar{k}_l(h_c) \mathbf{u}_l = \nabla h_c - \nabla h_b + e_z & \text{dans } \Omega \times]0, T[\\
 A_1(h_c) \frac{\partial h_b}{\partial t} - A_2(h_c, h_b) \frac{\partial h_c}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_b \mathbf{u}_b) = \alpha_b & \text{dans } \Omega \times]0, T[\\
 \bar{k}_b(h_c) \mathbf{u}_b = -\nabla h_b + c_1 h_b e_z + c_2 e_z & \text{dans } \Omega \times]0, T[\\
 h_c = h_{c,D} h_{c,D} \text{ et } h_b = h_{b,D} & \text{sur } \Gamma_D \times]0, T[\\
 \mathbf{u}_l \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ et } \mathbf{u}_b \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \Gamma_N \times]0, T[\\
 h_c(0, x) = h_{c,0}(x) \text{ et } h_b(0, x) = h_{b,0}(x) & \text{dans } \Omega
 \end{array} \right. \quad (2.93)$$

Si nous éliminons les vitesses \mathbf{u}_l et \mathbf{u}_b , le problème s'obtient en couplant le système de réaction-diffusion (2.92) avec le système (2.94) suivant

$$\left\{ \begin{array}{ll}
 C_l(h_c) \frac{\partial h_c}{\partial t} - \operatorname{div}(k_l(\theta_l(h_c))(\nabla h_b - \nabla h_c - e_z)) = \alpha_l \rho_l^{-1} & \text{dans } \Omega \times]0, T[, \\
 A_1(h_c) \frac{\partial h_b}{\partial t} - A_2(h_c, h_b) \frac{\partial h_c}{\partial t} - \operatorname{div}(\rho_b(h_b) k_b(\theta_l) (\nabla h_b - \frac{\rho_b(h_b)}{\rho_l} e_z)) = \alpha_b & \text{dans } \Omega \times]0, T[, \\
 h_l = h_{l,D} \text{ et } h_b = h_{b,D} & \text{sur } \Gamma_D \times]0, T[\\
 k_l(\theta_l(h_c))(\nabla h_b - \nabla h_c - e_z) \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ et } k_b(\theta_l(h_c))(\nabla h_b - \frac{\rho_b}{\rho_l} e_z) \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \Gamma_N \times]0, T[\\
 h_c(0, x) = h_{c,0}(x) \text{ et } h_b(0, x) = h_{b,0}(x) & \text{dans } \Omega
 \end{array} \right. \quad (2.94)$$

DISCUSSION DES SCÉNARIOS POSSIBLES EN DEHORS DE $]0, T[$:

Dans les deux modèles que nous avons donné ci-dessus, le modèle d'écoulement monophasique faiblement couplé (2.45)-(2.46) et le modèle d'écoulement biphasique compressible de lixiviat-biogaz (2.92)-(2.93), nous avons considéré l'intervalle de temps $[0, T]$ où T est le moment où le lixiviat commence à stagner en bas du domaine, ou bien le moment où nous devons recueillir le biogaz pour éviter l'explosion (grâce à une valeur critique de la concentration en biogaz et/ou d'une pression critique). Pendant cet intervalle de temps, l'humidité est prise entre ω_1 et ω_2 comme indiqué dans la figure (2.6).

Différents scénarios sont possibles et peuvent être considérés comme des perspectives pour améliorer le modèle lorsqu'on commence à dépasser le temps T signalé dans la sous-section 2.2.2.

- L'apparition d'une zone Zn_1 de stagnation de l'eau en bas du casier implique la non-satisfaction de la condition pour la production de biogaz dans cette zone; en effet la valeur de la teneur en eau en tout point de cette zone vaut presque 1 :

$$\theta(x, t_{Zn_1} > T) \simeq 1 \quad \forall x \in Zn_1$$

c'est-à-dire

$$\omega(x, t_{Zn_1} > T) > \omega_{max} \quad \forall x \in Zn_1.$$

Alors la bonne décision pour améliorer la situation de production du biogaz, dans ce cas, est de faire sortir le lixiviat stagné dans le casier pour permettre à la zone Zn_1 d'avoir une humidité productive, comprise entre ω_1 et ω_2 . Cette libération du lixiviat, en tant que flux, se traduit en terme de condition de Neumann non nulle sur une partie de la frontière $\Gamma_s \subset \Gamma_N$. La condition (2.40) deviendra alors à partir de cet instant $t_{Zn_1} > T$:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_N - \Gamma_s, \quad (2.95)$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{u}_n \quad \text{sur } \Gamma_s. \quad (2.96)$$

\mathbf{u}_n est une valeur non nulle qui simule le flux du lixiviat sur la frontière perméable Γ_s .

- Lorsque on s'approche du moment T où nous devons recueillir le biogaz, l'importation de ce dernier peut s'effectuer de plusieurs manières, comme par exemple l'introduction de tuyaux de récupération du biogaz [44]. Dans ce cas, cette opération exigera de modifier la condition (2.18) et de mettre des conditions aux limites convenables sur le biogaz.
- Lorsqu'il commence à apparaître une zone Zn_2 en haut de casier où l'humidité est insuffisante pour la production de biogaz, c'est-à-dire

$$\omega(x) < \omega_{min} \quad \forall x \in Zn_2, \quad (2.97)$$

la bonne décision à prendre pour améliorer la situation de production de biogaz est de fournir cette zone d'une humidité importante comprise entre ω_1 et ω_2 . L'opération de réinjection distribuée du lixiviat en haut de casier, est une solution possible, et donne des bons résultats [11]. Ces flux de réinjection de lixiviat se traduisent en termes des conditions de Neumann non nulle $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \neq 0$ sur la frontière où le flux de réinjection s'effectue.

Chapitre 3

Analyse du modèle EDO

Sommaire

3.1 Préliminaires	39
3.2 Position du problème et hypothèses	44
3.3 Étude du comportement asymptotique	46
3.4 Résultats numériques	59
3.4.1 Schéma de résolution du système (3.16)	59
3.4.2 Tests numériques	61
3.4.3 Processus heuristique pour l'amélioration de production de bio- gaz	71
3.5 Conclusion	76

Introduction

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'analyse et la simulation du système d'EDO (2.15) qui modélise le processus de digestion anaérobie en deux étapes : l'hydrolyse et la méthanogénèse pour la production de biogaz. Ce système, que nous avons décrit au CHAPITRE 2, est une généralisation du modèle donné dans [94], qui a utilisé la fonction de Monod comme loi de taux de croissance spécifique. En effet, dans ce travail nous considérons la loi de Haldane qui peut être considérée comme une généralisation de la loi de Monod, plus appropriée à l'étape de la méthanogénèse à cause des phénomènes d'inhibition qui s'imposent souvent dans la réalité. En outre, nous avons modifié l'équation d'évolution du substrat X en considérant que seule une fraction de la mortalité de la biomasse est à nouveau utilisée comme substrat en multipliant $K_d B$ par un paramètre constant α compris entre 0 et 1.

Nous nous intéressons ici à l'analyse du comportement asymptotique du système (2.15), ainsi qu'aux simulations numériques, en utilisant et comparant les deux lois de croissance bactérienne (Monod et Haldane). L'objectif principal de cette analyse est de donner des informations et des prévisions plus approfondies sur la convergence des solutions.

Ce chapitre est organisé de la manière suivante. Après quelques préliminaires concernant les équations différentielles ordinaires du premier ordre, nous présenterons des hypothèses sur les paramètres du système (2.15). Ensuite, la dynamique est analysée mathématiquement dans la section suivante. En particulier, nous montrons qu'il existe une infinité de points d'équilibre vers lesquels les solutions convergent, selon les conditions initiales. Enfin, des simulations numériques avec différentes valeurs du taux de mortalité et différentes conditions initiales seront présentées dans une section qui leur est dédiée, avant que des discussions et des conclusions ne soient tirées. Ce travail a fait l'objet de la publication [83].

3.1 Préliminaires

Le but de cette section est de donner quelques rappels sur des résultats d'analyse des équations différentielles ordinaires du premier ordre de la forme :

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x)$$

où x est une fonction inconnue de la variable réelle t et l'application f est une donnée du problème. A chaque instant t , la valeur de $x(t)$ est appelée l'état du système à l'instant t et l'espace dans lequel la fonction inconnue x prend ses valeurs est appelé espace d'états. Comme c'est principalement la mécanique qui était à l'origine de l'étude de ces équations, on parlera souvent de variable de temps pour la variable t et de trajectoire du système pour une solution $t \rightarrow x(t)$. On rappelle que le problème de

Cauchy s'écrit sous la forme suivante

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}(t) = f(t, x(t)), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (3.1)$$

pour des données initiales $(t_0, x(t_0))$ fixées.

Soient I un intervalle non vide de \mathbb{R} , Ω un ouvert de \mathbb{R}^n ($n \in \mathbb{N}^*$) et $f : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ un champ de vecteurs continu. On se donne un instant initial $t_0 \in I$ et un état initial $x_0 \in \Omega$.

Dans la dynamique des population, les variables d'état $x_i(t)$ des systèmes différentiels ont un sens physique, comme par exemples des concentrations ou densités. Par conséquent, l'espace d'état est l'orthant positif défini par :

$$\mathbb{R}_+^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n\} \quad (3.2)$$

ou bien une partie de cet ensemble si, par exemple, certains variables d'état ne peuvent prendre toutes les valeurs positives.

Existence et unicité des solutions

Définition 3.1

Une solution de problème de Cauchy (3.1) est un couple (J, x) , où $J \subset I$ est un intervalle contenant x_0 , et $x : J \rightarrow \Omega$ une application de classe C^1 vérifiant (3.1). Cette solution est dite :

- *maximale* : s'il n'existe pas de solution (\bar{J}, \bar{x}) qui prolonge strictement (J, x) .
- *globale* : si $J = I$.

Nous avons les résultats de Cauchy-Lipschitz pour l'existence et l'unicité de la solution du problème (3.1).

Théorème 3.2 (Cauchy-Lipschitz [107])

1. CAUCHY-LIPSCHITZ GLOBAL

On suppose que le champ de vecteurs $f : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ est continu et globalement lipschitzien par rapport à la variable d'état. Alors pour toute donnée de Cauchy (t_0, x_0) , il existe une unique solution globale (I, x) de problème de Cauchy (3.1). De plus, toute autre solution (J, x) du problème de Cauchy est la restriction à J de x .

2. CAUCHY-LIPSCHITZ LOCAL

Soit $Li p_x(I, \Omega)$ l'ensemble des fonctions localement lipschitziennes en la deuxième variable. Soit $f : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ continue, $f \in Li p_x(I, \Omega)$. Alors pour toute donnée (t_0, x_0) , il existe une unique solution maximale $x(t, t_0, x_0)$ du problème (3.1) définie sur $J \subset I$.

Nous rappelons aussi le résultats suivant que nous allons utiliser dans l'étude du signe de certaines solutions.

Théorème 3.3 [Voir [105], page : 42]

Soit $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction qui est telle que f soit lipschitzienne par rapport à la deuxième variable et $f(t, x(0))$ soit bornée.

Alors pour tout $z \in \mathbb{R}^n$ et tout $T \in [0, \infty)$, il existe un et un seul élément $z_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que l'unique solution sur $[0, T)$ du problème

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x(t)); \quad t \geq 0 \quad (3.3)$$

$$x(0) = z_0, \quad (3.4)$$

satisfait

$$x(T) = z. \quad (3.5)$$

Lemme de Barbalat

Le lemme de Barbalat est un lemme assez simple mais qui a beaucoup d'applications. Nous allons l'utiliser pour étudier la stabilité des états d'équilibre dans la section suivante.

Lemme 3.4 (Barbalat [14])

Supposons que $f \in C^1(a, +\infty)$, $a \in \mathbb{R}$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \alpha$ avec $\alpha < \infty$.

Si f' est uniformément continue, alors $\lim_{t \rightarrow +\infty} f'(t) = 0$.

Points d'équilibre et stabilité

Dans la suite, nous allons nous limiter au cas des systèmes autonomes. Autrement dit, le champ de vecteurs f ne dépend pas explicitement du temps. Le problème de Cauchy s'écrit dans ce cas

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}(t) = f(x(t)), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (3.6)$$

Supposons que $f \in C^1(\Omega)$, où Ω est un ouvert de \mathbb{R}^n . Notons $\phi(t, x_0)$ la solution du problème (3.6) définie sur son intervalle d'existence maximal $I(x_0)$. Pour $t \in I(x_0)$, l'ensemble des applications ϕ_t définies par

$$\phi_t(x_0) := \phi(t, x_0)$$

est appelé le flot de l'équation de (3.6), ou le flot défini par l'équation différentielle de (3.6) et ϕ_t est également appelé flot du champ vectoriel $f(x)$.

Définition 3.5

Supposons que f est de classe C^1 . On appelle équilibre du système (3.6) (on dit aussi point critique du champ de vecteur f) tout point $x^* \in \Omega$ tel que :

$$f(x^*) = 0 \quad (3.7)$$

Définition 3.6 (Stabilité)

Soit x^* un équilibre du système différentiel (3.6)

- On dit que x^* est un équilibre localement stable si : pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour toute donnée initiale x_0 proche de x^* à δ près, la solution du système partant de x_0 est, d'une part définie sur tout $[0, +\infty[$ et d'autre part, reste proche de x^* à ϵ près au cours du temps. En utilisant la notion de flot, cette propriété s'écrit

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \phi_t(B(x^*, \delta)) \subset B(x^*, \epsilon), \forall t \geq 0. \quad (3.8)$$

où $B(s, r) := \{y \in \mathbb{R}^d; \|y - s\| < r\}$ est la boule de centre s et de rayon r .

- On dit que x^* est un équilibre localement asymptotiquement stable s'il est stable et si de plus, pour toute donnée initiale x_0 suffisamment proche de x^* , la solution associée converge vers x^* quand t tend vers l'infini. En utilisant la notion de flot, ceci s'exprime de la façon suivante : il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall x_0 \in B(x^*, \delta), \phi_t(x_0) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} x^*. \quad (3.9)$$

Nous rappelons aussi la définition d'un ensemble invariant et positivement invariant. [86].

Définition 3.7

Soient Ω un ouvert de \mathbb{R}^n , $f \in C^1(\Omega)$, et soit $\phi_t : \Omega \rightarrow \Omega$ le flot de (3.6) défini pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Un ensemble $E \subset \Omega$ est dit invariant par rapport au flot ϕ_t si $\phi_t(E) \subset E$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et E est dit positivement (ou négativement) invariant par rapport au flot ϕ_t si $\phi_t(E) \subset E$ pour tout $t \geq 0$ (ou $t \leq 0$).

Linéarisation - Critère spectral de stabilité

Remarquons tout d'abord qu'on peut supposer parfois que le point critique du système considéré est égal à 0. Cette hypothèse n'est pas restrictive puisqu'il est toujours possible de ramener un point d'équilibre quelconque x^* l'origine par le changement de variable $y := x - x^*$.

Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un voisinage de 0 et f un champs de classe $C^1(U)$. Considérons le système autonome (3.6) et supposons que 0 est un point critique de f , i.e., $f(0) = 0$. Notons par A la jacobienne de f en 0. L'équation

$$\frac{dx}{dt} = Ax \quad (3.10)$$

est appelée l'équation linéarisée au point 0 de l'équation $\frac{dx}{dt} = f(x)$.

Nous avons le critère spectral de stabilité suivant.

Proposition 3.8 ([107], page 314)

Considérons le système autonome (3.6) et supposons que f est de classe C^1 et que 0 est point critique de f . Notons par A la jacobienne de f en 0 . Nous avons les critères suivants.

- Si toutes les valeurs propres de A sont de partie réelle strictement négative, alors 0 est un équilibre asymptotiquement stable de l'équation (3.6).
- Si toutes les valeurs propres de A sont de partie réelle strictement positive, alors 0 est un équilibre instable de l'équation (3.6).
- Si A a toutes ses valeurs propres de partie réelle négative ou nulle et qu'au moins l'une d'entre elles est de partie réelle nulle, alors on ne peut pas conclure.

Nous rappelons de la définition d'un point d'équilibre hyperbolique.

Définition 3.9

Un équilibre x^* de (3.6) est dit hyperbolique si toutes les valeurs propres de la jacobienne $Df(x^*)$ ont une partie réelle non nulle. Il est donc soit asymptotiquement stable soit non stable.

Théorème de la variété centrale

Le théorème de la variété stable est l'un des résultats les plus importants de la théorie qualitative locale des équations différentielles ordinaires. Le théorème montre que près d'un point d'équilibre hyperbolique x_0 , le système non linéaire (3.6), a des variétés stables et instables \mathcal{S} et \mathcal{U} tangente en x_0 aux sous-espaces stables et instables E^s et E^u du système linéarisé (3.10) où $A = Df(x_0)$ est la matrice jacobienne au point x_0 . De plus, \mathcal{S} et \mathcal{U} ont les mêmes dimensions que E^s et E^u , et si ϕ_t est le flot du système non linéaire (3.6), alors \mathcal{S} et \mathcal{U} sont respectivement invariants positifs et négatifs sous ϕ_t et satisfont

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_t(z) = x_0 \quad \text{pour tout } z \in \mathcal{S} \tag{3.11}$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \phi_t(z) = x_0 \quad \text{pour tout } z \in \mathcal{U}. \tag{3.12}$$

Théorème 3.10 (Théorème de Variétés stables [86])

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n contenant l'origine 0 , soit $f \in C^1(\Omega)$, et soit ϕ le flot du système non linéaire (3.6). Supposons que $f(0) = 0$ et que $Df(0)$ a k valeurs propres avec partie réelle négative et $n - k$ valeurs propres avec partie réelle positive. Il existe alors une variété différentiable de dimension k , \mathcal{S} , tangente au sous-espace stable E^s du système linéarisé en 0 (3.10), telle que pour tout $t \geq 0$, $\phi_t(\mathcal{S}) \subset \mathcal{S}$ et pour tous $x_0 \in \mathcal{S}$.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_t(x_0) = 0,$$

et il existe une variété différentiable de dimension $n - k$, \mathcal{U} , tangente au sous-espace instable E^u du système linéarisé en 0 (3.10) telle que pour tout $t \leq 0$, $\phi_t(\mathcal{U}) \subset \mathcal{U}$ et pour tous $x_0 \in \mathcal{U}$,

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \phi_t(x_0) = 0.$$

Théorème de comparaison

Théorème 3.11 [Théorème de comparaison, (voir [76] page : 15)]

Soit E un ouvert de \mathbb{R}^2 et $f \in C(E; \mathbb{R})$ une fonction continue de E dans \mathbb{R} . Considérons l'équation différentielle scalaire avec une condition initiale :

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x); \quad x(t_0) = x_0. \quad (3.13)$$

Supposons que $[t_0, t_0 + a)$ est le plus grand intervalle dans lequel la solution maximale $v(t)$ de (3.13) existe. Soit $w \in C((t_0, t_0 + a), \mathbb{R})$ avec $(t, w(t)) \in E$ pour tout $t \in [t_0, t_0 + a]$, $w(t_0) \leq x_0$, et

$$\frac{dw}{dt} \leq f(t, v(t)), \quad t \in [t_0, t_0 + a) \setminus S, \quad (3.14)$$

où S est un sous-ensemble au plus dénombrable de $[t_0, t_0 + a)$. Alors

$$w(t) \leq v(t), \quad t \in [t_0, t_0 + a). \quad (3.15)$$

Remarque 3.12 [(voir [76] page : 16)]

Si l'inégalité (3.14) est inversée et $w(t_0) \geq v_0$, alors nous devons remplacer la conclusion (3.15) par $w(t) \geq \underline{v}(t)$, avec $\underline{v}(t)$ est la solution minimal de (3.13).

3.2 Position du problème et hypothèses

Nous considérons le système des équations différentielles ordinaires, donné par (2.15), qui modélise le processus de la digestion en deux étapes pour la production du biogaz, et que nous choisissons d'écrire sous la forme suivante (3.16a)-(3.16b)

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = -K_h X + \alpha K_d B \\ \frac{dS}{dt} = f_1 K_h X - \frac{1}{Y} \mu(S) B \\ \frac{dB}{dt} = (\mu(S) - K_d) B \end{cases} \quad (3.16a)$$

$$\begin{cases} \frac{d[\text{CO}_2]}{dt} = (1 - f_1) K_h X + (1 - f_2) \frac{1 - Y}{Y} \mu(S) B \\ \frac{d[\text{CH}_4]}{dt} = f_2 \frac{1 - Y}{Y} \mu(S) B \end{cases} \quad (3.16b)$$

3.2 Position du problème et hypothèses

Ce système est muni des conditions initiales suivantes :

$$X(0) = X_0, \quad S(0) = S_0, \quad B(0) = B_0, \quad [\text{CO}_2](0) = [\text{CO}_2]_0, \quad [\text{CH}_4](0) = [\text{CH}_4]_0. \quad (3.17)$$

Nous rappelons que les variables dynamiques du système (3.16a)-(3.16b) sont les concentrations de la matière organique X , la biomasse méthanogène B , la matière organique soluble S , le dioxyde de carbone $[\text{CO}_2]$ et le méthane $[\text{CH}_4]$. Le biogaz total de concentration $[G](t)$ produit par ce procédé, à un instant t donné, est la somme du dioxyde de carbone $[\text{CO}_2](t)$ et du méthane $[\text{CH}_4](t)$.

$$\frac{d[G]}{dt} = (1 - f_1)K_h X + \frac{1 - Y}{Y} \mu(S)B. \quad (3.18)$$

Nous remarquons que le sous-système (3.16a) qui décrit l'évolution des variables X , B et S peut être traité indépendamment, car les trois équations ne dépendent pas du $[\text{CH}_4]$ ni du $[\text{CO}_2]$. Par ailleurs nous indiquons que le taux de mortalité K_d joue un rôle important dans la vitesse de production du biogaz. Pour cela nous allons prendre en compte K_d comme paramètre qui peut prendre différentes valeurs possibles selon les hypothèses que nous considérons ci-dessous.

La fonction de taux de croissance spécifique satisfait les propriétés suivantes.

Hypothèse 2 La fonction $\mu(\cdot)$ est bornée et de classe C^1 avec $\mu(0) = 0$ et $\mu(S) > 0$ pour tout $S > 0$.

On trouve dans la littérature de nombreuses fonctions qui satisfont cette hypothèse. Parmi elles, la loi de Monod et la loi de Haldane et ce sont les deux fonctions qui nous intéressent dans ce travail (voir Figure 2.1) :

1. la loi de Monod [81] :

$$\mu(S) = \frac{\mu_m S}{K_S + S} \quad (3.19)$$

2. la loi de Haldane [61] [10] :

$$\mu(S) = \frac{\mu_m S}{K_S + S + \frac{S^2}{K_I}} \quad (3.20)$$

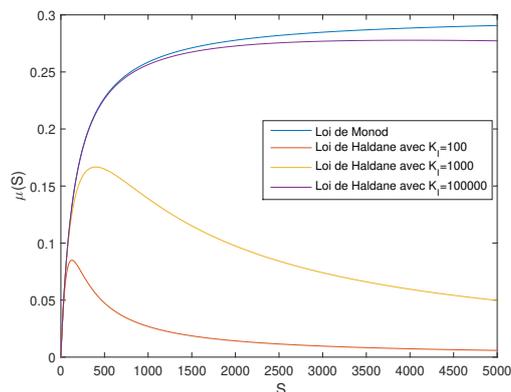
où K_I est la constante d'inhibition.

Nous indiquons également que la fonction Haldane peut être vue comme une généralisation de la fonction de Monod sur un intervalle fixe pour les grandes valeurs de K_I (voir la FIGURE 3.1).

Hypothèse 3 Les coefficients α , K_d , Y , f_1 et f_2 vérifient les conditions suivantes.

1. La proportion du recyclage des nutriments α ne peut pas dépasser 1

$$0 < \alpha \leq 1 \quad (3.21)$$


 FIGURE 3.1 – La loi de Monod et la loi de Haldane ($\mu_m = 0.3$ et $K_S = 160$).

2. Le taux de mortalité K_d est un paramètre positif qui est inférieur au taux de croissance maximal

$$0 < K_d < \max_s \mu(s) \quad (3.22)$$

3. Le taux d'utilisation du substrat est un paramètre strictement positif tel que

$$0 < Y < 1 \quad (3.23)$$

4. Les coefficients stœchiométriques f_1 et f_2 sont des paramètres strictement positifs et satisfont

$$0 < f_1 < 1 \quad \text{et} \quad 0 < f_2 < 1 \quad (3.24)$$

3.3 Étude du comportement asymptotique

Le système (3.16a) est un système d'EDO non linéaire. Pour étudier la stabilité de ce système, nous commençons par déterminer ses points d'équilibre. Soit $E = (X^*, B^*, S^*)$ un point équilibre du système (3.16a). Nous avons

$$\begin{cases} \dot{X} = 0 \\ \dot{B} = 0 \\ \dot{S} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -K_H \cdot X + \alpha \cdot K_d \cdot B = 0 \\ (\mu(S) - K_d) \cdot B = 0 \\ f_1 \cdot K_H \cdot X - \frac{1}{Y} \cdot \mu(S) \cdot B = 0. \end{cases} \quad (3.25)$$

La deuxième équation est satisfaite si et seulement si $B = 0$ ou $\mu(S) = K_d$.

- Si $B = 0$ alors dans ce cas $X = 0$ et S est une constante. Par conséquent, pour les deux lois de croissances, Monod ou Haldane, nous avons

3.3 Étude du comportement asymptotique

$$E^* = (0, 0, C), \quad C \in \mathbb{R}_+ \quad (3.26)$$

est un équilibre.

— Si $B \neq 0$ alors $\mu(S) = K_d$ et les points d'équilibre dépendront de la loi.

Si nous multiplions la première équation de (3.25) par f_1 et que nous additionnons cette équation avec la troisième équation, nous obtenons

$$(\alpha f_1 - \frac{1}{Y})K_d B = 0 \quad (3.27)$$

ce qui implique que

$$\alpha f_1 = \frac{1}{Y}, \quad (3.28)$$

et selon **Hypothèse 3**, la relation (3.28) ne peut pas être satisfaite. Par conséquent, nous avons un seul équilibre donné par (3.26) aussi bien pour la loi de croissance de Monod que pour celle de Haldane, .

Pour étudier la stabilité du point d'équilibre, la démarche la plus classique est d'utiliser une linéarisation autour du point d'équilibre puis d'utiliser le critère spectral. Nous allons voir que pour la loi de Haldane cette démarche ne va pas nous permettre de conclure.

- Cas de la loi de Monod.

Les valeurs propres de la matrice jacobienne J associées au point d'équilibre $E^* = (X^*, B^*, S^*) = (0, 0, C)$ sont données par :

$$\lambda_1 = -K_H, \quad \lambda_2 = 0 \quad \text{et} \quad \lambda_3 = \mu(S^*) - K_d = \frac{(\mu_m - K_d)S^* - K_d K_S}{K_S + S^*}. \quad (3.29)$$

Par conséquent $\lambda_3 > 0$ si et seulement si $(\mu_m - K_d)S^* > K_S K_d$, et puisque $\mu_m > K_d$ d'après **Hypothèse 3**, la valeur $\lambda_3 > 0$ si et seulement si

$$S^* > \frac{K_S K_d}{\mu_m - K_d}.$$

Par conséquent, si la constante S^* est telle que $S^* > \frac{K_S K_d}{\mu_m - K_d}$ alors l'équilibre E^* est instable.

- Cas de la loi de Haldane.

Les valeurs propres de la matrice jacobienne J associées au point d'équilibre E^* sont données par :

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -K_H \quad (3.30)$$

et

$$\lambda_3 = \mu(S^*) - K_d = \frac{-\frac{K_d}{K_I} S^{*2} + (K_d - \mu_m) S^* + K_d K_S}{K_S + S^* + S^{*2}/K_I}. \quad (3.31)$$

Comme pour le cas de la loi de Monod, nous étudions le signe de la valeur propre λ_3 pour savoir si on peut en déduire la stabilité ou l'instabilité de E^* . Nous obtenons le tableau qui suit. Nous adoptons les notations suivantes

$$J_{0,S} = [0, +\infty[, \quad J_{1,S} = [\bar{S}^*, +\infty[\cap [0, +\infty[, \quad J_{2,S} =]-\infty, S_1] \cup [S_2, +\infty[\cap [0, +\infty[,$$

$$S_1 = \frac{-(K_d - \mu_m) - \sqrt{\delta_1}}{2K_d/K_I}, \quad S_2 = \frac{-(K_d - \mu_m) + \sqrt{\delta_1}}{2K_d/K_I}, \quad \bar{S}^* = \frac{-K_I(K_d - \mu_m)}{2K_d},$$

$$K_{d_1} = \frac{\mu_m}{1 + 2\sqrt{\frac{K_S}{K_I}}}, \quad K_{d_2} = \frac{\mu_m}{1 - 2\sqrt{\frac{K_S}{K_I}}}, \quad \delta_1 = (1 - 4\frac{K_S}{K_I}) \cdot K_d^2 - 2\mu_m \cdot K_d + \mu_m^2,$$

et $J_{k,I}$ pour $k = 0, 1, 2$ est le complémentaire de $J_{k,S}$ dans \mathbb{R}^+ , c'est-à-dire

$$J_{k,I} = \{S \in \mathbb{R}^+, S \notin J_{k,S}\}.$$

Conditions	Interv. S^*	sign(λ_3)	Stabilité
$\frac{K_S}{K_I} = \frac{1}{4}$ et $K_d \in]\mu_m/2, \mu_m[$	$J_{0,S}$	$\lambda_3 \leq 0$?
$\frac{K_S}{K_I} < \frac{1}{4}$, $K_d \in]K_{d_1}, K_{d_2}[$ et $K_d < \mu_m$			
$\frac{K_S}{K_I} > \frac{1}{4}$ et $K_d \in]K_{d_1}, \mu_m[$			
$\frac{K_S}{K_I} = \frac{1}{4}$ et $K_d = \mu_m/2$	$J_{1,S}$	$\lambda_3 \leq 0$?
$\frac{K_S}{K_I} < \frac{1}{4}$, $K_d \in \{K_{d_1}, K_{d_2}\}$ et $K_d < \mu_m$	$J_{1,I}$	$\lambda_3 > 0$	Instable
	$J_{1,S}$	$\lambda_3 \leq 0$?
$\frac{K_S}{K_I} > \frac{1}{4}$ et $K_d = K_{d_1} < \mu_m$	$J_{1,I}$	$\lambda_3 > 0$	Instable
	$J_{1,S}$	$\lambda_3 \leq 0$?
$\frac{K_S}{K_I} = \frac{1}{4}$ et $K_d \in]0, \mu_m/2[$	$J_{2,S}$	$\lambda_3 \leq 0$?
	$J_{2,I}$	$\lambda_3 > 0$	Instable
$\frac{K_S}{K_I} < \frac{1}{4}$, $K_d \in]0, K_{d_1}[\cup]K_{d_2}, +\infty[$ et $K_d < \mu_m$	$J_{2,S}$	$\lambda_3 \leq 0$?
	$J_{2,I}$	$\lambda_3 > 0$	Instable
$\frac{K_S}{K_I} > \frac{1}{4}$, $K_d \in]0, K_{d_1}[$ et $K_d < \mu_m$	$J_{2,S}$	$\lambda_3 \leq 0$?
	$J_{2,I}$	$\lambda_3 > 0$	Instable

Ces calculs ne nous ont pas permis de conclure sur la stabilité ou l'instabilité de l'équilibre E^* partout. En effet quand la valeurs propre λ_3 s'annule on ne peut rien dire. Dans de telles situations on pourrait utiliser la fonction de Lyapunov (voir [107], page 319),

3.3 Étude du comportement asymptotique

mais elle est généralement difficile à trouver, surtout pour un tel système non linéaire complexe en 3D.

Nous proposons dans ce qui suit une autre analyse structurée en cascade, utilisant principalement le Lemme 3.4 (lemme de Brabat) et le Théorème 3.10 (théorème de la variété centrale).

Considérons \mathcal{E} l'ensemble des valeurs de S telles que leurs images par la fonction de croissance spécifique ne dépassent pas la valeur du taux de mortalité K_d , défini par

$$\mathcal{E} := \{s \in \mathbb{R}_+ ; \mu(s) \leq K_d\}. \quad (3.32)$$

D'après **Hypothèse 2** et **Hypothèse 3**, cet ensemble est non vide, pour $\mu(\cdot)$ l'une des deux fonctions données par (3.19) et (3.20).

Dans le cas de la loi de Monod, \mathcal{E} est un intervalle :

$$\mathcal{E} = [0, \lambda] \quad \text{avec} \quad \lambda = \frac{K_d K_S}{\mu_{max} - K_d}. \quad (3.33)$$

Dans le cas de la loi de Haldane, \mathcal{E} est l'union de deux intervalles :

$$\mathcal{E} = [0, \lambda^-] \cup [\lambda^+, +\infty) \quad \text{avec} \quad \lambda^\pm = \frac{\mu_m - K_d \pm \sqrt{\Delta}}{2K_d/K_I} \quad (3.34)$$

avec

$$\Delta = \mu_m^2 - 2\mu_m K_d + \left(1 - 4\frac{K_S}{K_I}\right) K_d^2.$$

qui est toujours strictement positive par **Hypothèse 3** (la droite qui représente le taux de mortalité coupe la courbe de la loi de Haldane en deux points).

Nous avons la proposition suivante :

Proposition 3.13

*Sous **Hypothèse 2** et **Hypothèse 3**, pour tout vecteur (X_0, S_0, B_0) , de composantes non négatives, les solutions du système (3.16a) avec la condition initiale $(X(0), S(0), B(0)) = (X_0, S_0, B_0)$, sont non négatives, bornées et vérifient*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} X(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} B(t) = 0 \quad (3.35)$$

et

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} S(t) = S^* \leq S_0 + \frac{X_0 + \alpha B_0}{\alpha Y} \quad (3.36)$$

De plus, lorsque X_0 ou S_0 est non nul, on a $S^ > 0$.*

Démonstration : La preuve de cette proposition est faite en trois étapes. La première consiste à montrer que, pour la solution $(X(t), S(t), B(t))$ du système (3.16a), si $B_0 \geq 0$ alors $B(t) \geq 0$. Dans la deuxième étape, nous déduisons de la première que $X(t) \geq 0$ pour tout $t \geq 0$ et en utilisant le théorème de comparaison nous montrons que $S(t)$ ne peut pas traverser le plan $S = 0$. A la dernière étape, enfin, nous montrons que le

système est dissipatif pour en déduire, en utilisant le lemme de Brabat, (3.35) et l'inégalité (3.36).

1. Pour toute condition initiale (X_0, S_0, B_0) dans \mathbb{R}_+^3 , la solution $(X(t), S(t), B(t))$ du système (3.16a) reste dans l'orthant non-négatif \mathbb{R}_+^3 . En effet, Si $B_0 = 0$, alors quels que soient les valeurs de X_0 et de S_0 dans \mathbb{R}_+^3 , la troisième équation du système (3.16a) donne

$$B(t) = 0 \quad \forall t > 0 \quad (3.37)$$

Si maintenant $B_0 > 0$ et X_0 et S_0 dans \mathbb{R}_+ , alors en utilisant le Théorème 3.3, on montre par l'absurde que $B(\cdot)$ ne peut prendre des valeurs négatives. En effet dans le cas contraire il existerait $\bar{t} > 0$ tel que

$$B(\bar{t}) = 0 \quad (3.38)$$

D'après le théorème 3.3, il existe une et une seule condition initiale B_0 dont la solution vérifie l'expression (3.38). Or nous avons déjà montré que pour la condition initiale $B_0 = 0$, l'expression (3.38) est vérifiée, et la solution étant unique on tombe sur la contradiction avec $B_0 > 0$. Par conséquent, pour tout vecteur (X_0, S_0, B_0) , de composantes non négatives, nous avons

$$B(t) \geq 0, \quad \forall t > 0. \quad (3.39)$$

2. A partir des équations (3.16a), et grâce à la positivité de $B(\cdot)$, toute solution avec (X_0, S_0, B_0) dans \mathbb{R}_+^3 vérifie

$$\frac{dX(t)}{dt} \geq -K_h X(t) \quad \forall t \geq 0,$$

dont on déduit l'inégalité

$$X(t) \geq X_0 e^{-K_h t} \quad \forall t \geq 0. \quad (3.40)$$

Cela prouve que la solution $X(t)$, pour tout t positif, n'est pas négative quel que soit (X_0, S_0, B_0) dans \mathbb{R}_+^3 .

Considérons maintenant \underline{S} la solution de l'équation différentielle

$$\begin{cases} \frac{d\underline{S}}{dt} = -\frac{1}{Y} \mu(\underline{S}) B(t) \\ \underline{S}(0) = S_0. \end{cases} \quad (3.41)$$

Par ailleurs, toute solution de (3.16a) avec (X_0, S_0, B_0) dans \mathbb{R}_+^3 vérifie, grâce à (3.39) et (3.22),

$$\frac{dS(t)}{dt} \geq -\frac{1}{Y} \mu(S(t)) B(t) \quad \forall t \geq 0.$$

Par le théorème de comparaison (voir le Théorème 3.11 et la Remarque 3.12), nous obtenons

$$S(t) \geq \underline{S}(t) \quad \forall t > 0. \quad (3.42)$$

3.3 Étude du comportement asymptotique

Avec un raisonnement analogue à celui que nous avons fait pour $B(\cdot)$, sachant que par l'**Hypothèse 2**, $\mu(0) = 0$, et $\mu(\cdot)$ étant Lipschitz-continue, la solution $\underline{S}(\cdot)$ de (3.41) ne peut pas traverser le plan $\underline{S} = 0$, ni atteindre 0 en temps fini. Par conséquent d'après (3.42), $S(t)$ est également non négatif pour tout $t > 0$, et ne peut pas atteindre 0 en temps fini, quel que soit (X_0, S_0, B_0) dans \mathbb{R}_+^3 .

3. Nous allons montrer maintenant que le système (3.16a) est dissipatif, c'est-à-dire qu'il a tendance à se dissiper (s'atténuer) avec le temps. Pour cela nous introduisons la fonction de "storage" suivante

$$V(t) = X(t) + \alpha B(t) + \alpha Y S(t). \quad (3.43)$$

A partir des équations (3.16a), nous avons

$$\frac{dV}{dt} = K_h(\alpha Y f_1 - 1)X. \quad (3.44)$$

D'après **Hypothèse 3**, on a $\alpha Y f_1 < 1$ et comme $X(\cdot)$ n'est pas négatif, on en déduit que la fonction V est décroissante. Puisque V est minorée par zéro, $V(t)$ converge vers une limite $V_\infty \geq 0$ lorsque t tend vers $+\infty$ i.e.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} V(t) := V_\infty \geq 0. \quad (3.45)$$

Cela implique que les variables $X(t)$, $S(t)$ et $B(t)$ sont bornées (puisque elles sont non-négatives). De plus, nous avons

$$\frac{d^2V}{dt^2} = K_h(\alpha Y f_1 - 1)(-K_h X + \alpha K_d B).$$

Les variables $X(t)$ et $B(t)$ étant bornées, on déduit de la dernière égalité que la dérivée seconde d^2V/dt^2 est bornée, par conséquent dV/dt est uniformément continu sur \mathbb{R}_+ . Nous utilisons maintenant le Lemme 3.4 (Lemme de Barbalat [14]) pour affirmer que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{dV(t)}{dt} = 0.$$

Par conséquent, avec (3.44), nous obtenons

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} X(t) = 0.$$

De même, d^2X/dt^2 est borné, donc dX/dt uniformément continu et par le lemme de Barbalat, nous avons

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{dX(t)}{dt} = 0,$$

ce qui donne

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} B(t) = 0.$$

Finalement, comme $V(t)$ converge vers une limite finie, lorsque t tend vers $+\infty$, avec (3.43), nous obtenons qu'il existe une valeur S^* finie telle que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} S(t) = S^* = \frac{V_\infty}{\alpha Y}.$$

Montrons maintenant que S^* ne peut pas être égal à 0 lorsque X_0 ou S_0 ne sont pas nuls. Supposons que $X_0 \neq 0$ ou $S_0 \neq 0$ et que $S(t)$ tend vers 0 quand t tend vers l'infini. Alors par continuité, $\mu(S(t))$ va tendre vers zéro aussi, et il existerait $\tilde{T} > 0$ tel que l'on ait pour tout $t \geq \tilde{T}$

$$\mu(S(t)) \leq f_1 Y \alpha K_d \quad \forall t > \tilde{T}. \quad (3.46)$$

La somme des deux premières équations du système (3.16a) nous permet d'écrire

$$\frac{d}{dt} (f_1 X(t) + S(t)) = \frac{1}{Y} (Y \alpha f_1 K_d - \mu(S)) B,$$

et par (3.46) on en déduit que

$$\frac{d}{dt} (f_1 X(t) + S(t)) \geq 0, \quad t > \tilde{T}.$$

Avec le même raisonnement qu'auparavant, lorsque $f_1 X(0) + S(0) > 0$, la variable $X(\cdot)$ ou $S(\cdot)$ ne peut pas atteindre 0 en temps fini, et nous avons alors

$$f_1 X(t) + S(t) \geq f_1 X(\tilde{T}) + S(\tilde{T}) > 0 \quad \forall t > \tilde{T},$$

ce qui est en contradiction avec le fait que $f_1 X(t) + S(t)$ tend vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$.

Finalement, du fait que la fonction V est décroissante, nous avons $V_\infty \leq V(0)$, et comme $V(0) = X_0 + \alpha B_0 + \alpha Y S_0$, et $\lim_{t \rightarrow \infty} S(t) = S^*$ on obtient

$$S^* \leq S_0 + \frac{X_0 + \alpha B_0}{\alpha Y}.$$

Ce qui termine la démonstration de la proposition. \square

Nous allons, maintenant, donner les caractéristiques de l'ensemble des équilibres qui peuvent être atteints par des solutions positives. Nous avons la proposition suivante :

Proposition 3.14

*Pour une condition initiale (X_0, S_0, B_0) dans \mathbb{R}_+^3 avec $X_0 > 0$ et $B_0 > 0$, et sous **Hypothèse 2** et **Hypothèse 3**, la solution de (3.16a) converge asymptotiquement vers un équilibre $(0, S^*, 0)$ où $S^* > 0$ appartient à \mathcal{E} .*

Démonstration : Supposons qu'il existe une solution de (3.16a), associée à une condition initiale quelconque (X_0, S_0, B_0) de \mathbb{R}_+^3 avec $X_0 > 0$ et $B_0 > 0$, telle que $S(\cdot)$ converge asymptotiquement vers $S^* > 0$ et que S^* n'appartient pas à \mathcal{E} , alors il existerait $\tilde{T} > 0$ tel que l'on a

$$\mu(S(t)) - K_d > \eta := \frac{\mu(S^*) - K_d}{2}, \quad t > \tilde{T}, \quad (3.47)$$

mais d'après (3.16a) et (3.47), la solution $B(\cdot) > 0$ vérifie

$$\frac{dB(t)}{dt} > \eta B(t), \quad t > \tilde{T}.$$

3.3 Étude du comportement asymptotique

Ainsi, nous avons

$$B(t) > B(s) e^{\eta(t-s)}, \forall t, s > \tilde{T}, \text{ tel que } t \geq s, \quad (3.48)$$

et alors $B(\cdot)$ ne peut pas converger asymptotiquement vers 0, ce qui est contradictoire avec les résultats de la Proposition 3.13 \square

Le système (3.16a) admet un continuum d'équilibres qui ne sont pas hyperboliques. On ne peut conclure sur leur stabilité en étudiant uniquement la linéarisation de la dynamique pour appliquer le théorème de la variété centrale (Théorème 3.10). Cependant, nous avons le résultat suivant.

Proposition 3.15

Supposons que Hypothèse 2 et Hypothèse 3 sont satisfaites. Pour chaque état stationnaire $E = (0, S^, 0)$ avec $S^* \in \text{int } \mathcal{E}$, il existe une variété invariante à deux dimensions \mathcal{M} dans \mathbb{R}_+^3 telle que toute solution de (3.16a) avec une condition initiale dans \mathcal{M} converge asymptotiquement vers E .*

Démonstration : Pour donner une preuve de cette proposition, nous allons introduire un changement de variable pour S , ce qui donnera un nouveau système associé au système (3.16a) et dans lequel les équilibres sont hyperboliques nous permettant ainsi d'utiliser le théorème de la variété centrale.

Fixons $S^* > 0$ de telle sorte que $\mu(S^*) < K_d$. Pour les solutions de (3.16a) avec $B(t) > 0$, $t \in [0 + \infty)$, considérons la variable

$$Z(t) = \frac{f_1 X(t) + (S(t) - S^*)}{B(t)} + \beta \quad (3.49)$$

avec

$$\beta := \frac{\mu(S^*)/Y - f_1 \alpha K_d}{\mu(S^*) - K_d}.$$

Nous introduisons aussi la variable L définie par

$$L(t) := B(t)Z(t). \quad (3.50)$$

Alors en utilisant les expressions de dX/dt , dB/dt et dS/dt de (3.16a), nous avons

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= -f_1 K_h X(t) + f_1 \alpha K_d B(t) + f_1 K_h X(t) - \frac{1}{Y} \mu(S) B(t) + \beta \mu(S) B(t) - \beta K_d B(t) \\ &= f_1 \alpha K_d B(t) - \frac{1}{Y} \mu(S) B(t) + \beta \mu(S) B(t) - \beta K_d B(t) \\ &= f_1 \alpha K_d B(t) - \frac{1}{Y} \mu(S) B(t) + \frac{\mu(S^*)/Y - f_1 \alpha K_d}{\mu(S^*) - K_d} \mu(S) B(t) - \frac{\mu(S^*)/Y - f_1 \alpha K_d}{\mu(S^*) - K_d} K_d B(t) \end{aligned}$$

Cette dernière expression est la somme de deux termes qui peuvent s'écrire de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\eta_1 &:= -\frac{1}{Y}\mu(S)B(t) + \frac{\mu(S^*)/Y - f_1\alpha K_d}{\mu(S^*) - K_d}\mu(S)B(t) = \left[\frac{-1}{Y} + \frac{\mu(S^*)/Y - f_1\alpha K_d}{\mu(S^*) - K_d} \right] \mu(S)B(t) \\ &= \frac{-\mu(S^*) + K_d + \mu(S^*) - Yf_1\alpha K_d}{Y(\mu(S^*) - K_d)}\mu(S)B(t) = \frac{-K_d + Yf_1\alpha K_d}{Y(K_d - \mu(S^*))}\mu(S)B(t) \\ &= -\frac{K_d(1 - Yf_1\alpha)}{Y(K_d - \mu(S^*))}\mu(S)B(t)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\eta_2 &= f_1\alpha K_d B(t) - \frac{\mu(S^*)/Y - f_1\alpha K_d}{\mu(S^*) - K_d}K_d B(t) \\ &= \frac{(\mu(S^*) - K_d)f_1\alpha K_d B(t) - (\mu(S^*)/Y - f_1\alpha K_d)K_d B(t)}{\mu(S^*) - K_d} \\ &= \mu(S^*)B(t)\frac{f_1\alpha Y K_d - K_d}{Y(\mu(S^*) - K_d)}\end{aligned}$$

alors

$$\frac{dL}{dt} = \eta_1 + \eta_2 = -\gamma(\mu(S) - \mu(S^*))B(t) \quad (3.51)$$

avec

$$\gamma := \frac{K_d(1 - Yf_1\alpha)}{Y(K_d - \mu(S^*))} > 0.$$

D'après (3.50), nous avons

$$\frac{dB}{dt}Z + B\frac{dZ}{dt} = -\gamma(\mu(S) - \mu(S^*))B(t).$$

En utilisant la troisième équation de (3.16a), on obtient

$$\frac{dZ}{dt} = -\gamma(\mu(S) - \mu(S^*)) - (\mu(S) - K_d)Z. \quad (3.52)$$

Nous allons procéder maintenant à un changement de variable et utiliser $Z(t)$ au lieu de $S(t)$. Rappelons que par (3.49) $S(t)$ s'écrit de la manière suivante

$$S(t) = S^* - f_1X(t) + (Z(t) - \beta)B(t) \quad \forall t \geq 0. \quad (3.53)$$

En partant de $B_0 > 0$, et X_0 et S_0 dans \mathbb{R}_+ le système (3.16a) défini dans $\mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}_+^*$ peut être posé dans le domaine défini par

$$\mathcal{D} := \{(Z, X, B) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*; S^* - f_1X + (Z - \beta)B \geq 0\}$$

La fonction $S(t)$ est donc une fonction de X , B et Z . Nous allons adopter la notation suivante pour $\mu(S(t))$

$$g(Z, X, B) := \mu(S^* - f_1X + (Z - \beta)B). \quad (3.54)$$

3.3 Étude du comportement asymptotique

En tenant compte de (3.52) et de (3.54), on peut écrire le système (3.16a) de manière équivalente sur le domaine \mathcal{D} , comme suit

$$\begin{cases} \frac{dZ}{dt} = -\gamma(g(Z, X, B) - \mu(S^*)) - (g(Z, X, B) - K_d)Z \\ \frac{dX}{dt} = -K_h X + \alpha K_d B \\ \frac{dB}{dt} = (g(Z, X, B) - K_d)B \end{cases} \quad (3.55)$$

Le domaine \mathcal{D} est (positivement) invariant par la dynamique (3.55) par équivalence avec le système (3.16a). En effet, nous avons montré dans la Proposition 3.13 que pour toute condition initiale (X_0, S_0, B_0) dans \mathbb{R}_+^3 , la solution $(X(t), S(t), B(t))$ du système (3.16a) reste dans \mathbb{R}_+^3 , i.e. l'orthant \mathbb{R}_+^3 est positivement invariant pour le système (3.16a).

De plus, la dynamique (3.55) est bien définie pour $B = 0$.

D'après (3.49), toute trajectoire $(Z(\cdot), X(\cdot), B(\cdot))$ dans \mathcal{D} correspond à une trajectoire $(X(\cdot), S(\cdot), B(\cdot))$ de (3.16a) où $S(\cdot)$ vérifie (3.53). Cependant, les trajectoires de (3.55) avec $B(\cdot) = 0$ ne correspondent pas nécessairement à une trajectoire de (3.16a). Comme $\mu(S^*) \neq K_d$, on peut vérifier que 0 est le seul équilibre de (3.55) dans $\overline{\mathcal{D}}$. La matrice jacobienne à 0 est donnée par

$$J(0) = \begin{bmatrix} -(\mu(S^*) - K_d) & \gamma f_1 \mu'(S^*) & \gamma \beta \mu'(S^*) \\ 0 & -K_h & \alpha K_d \\ 0 & 0 & \mu(S^*) - K_d \end{bmatrix}.$$

Ses valeurs propres sont

$$r_1 = -(\mu(S^*) - K_d), \quad r_2 = -K_h, \quad r_3 = \mu(S^*) - K_d.$$

Sous la condition $\mu(S^*) < K_d$, 0 est donc un équilibre hyperbolique avec une variété stable à deux dimensions \mathcal{S} et une variété instable à une dimension \mathcal{U} (voir le Théorème 3.10)

Nous avons clairement que $\mathcal{U} = \mathbb{R} \times \{0\} \times \{0\}$. De plus, toute solution de (3.55) avec $B(0) = 0$ vérifie $B(t) = 0$ pour tout $t > 0$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} X(t) = 0$, ce qui implique que la fonction

$$h(t) := g(Z(t), X(t), B(t)) = \mu(S^* - f_1 X(t))$$

converge vers $\mu(S^*)$ lorsque $t \rightarrow +\infty$, quel que soit $Z(0)$. Par conséquent, pour tout $Z(0), X(0)$, il existe $T > 0$ tel que

$$K_d - h(t) > \eta := \frac{1}{2}(K_d - \mu(S^*)) > 0, \quad t > T.$$

Nous obtenons alors de (3.55) que $Z(t)$ tend vers l'infini quand $t \rightarrow +\infty$. On en déduit que tout point $(Z, X, B) \in \mathcal{S} \setminus \{0\}$ doit être tel que $B \neq 0$. Enfin, nous concluons que toute trajectoire de (3.55) dans la variété invariante bidimensionnelle $\mathcal{M} := \mathcal{S} \cap \mathcal{D}$ correspond à une trajectoire de (3.16a) et converge asymptotiquement vers 0, c'est-à-dire $(X(t), S(t), B(t))$ converge asymptotiquement vers $(0, S^*, 0)$. \square

Les Propositions 3.14 et 3.15 regroupées donnent le corollaire suivant.

Corollaire 3.16

Sous **Hypothèse 2** et **Hypothèse 3**, l'ensemble $\{0\} \times \text{int}\mathcal{E} \times \{0\}$ est un attracteur.

Une fois ces résultats obtenus pour le sous-système (3.16a), nous nous intéressons maintenant à ce qui se passe pour le sous-système (3.16b), relatif à la production du biogaz. Le comportement asymptotique des concentrations en biogaz est donné dans le théorème suivant.

Théorème 3.17

Sous **Hypothèse 2** et **Hypothèse 3**, pour tout vecteur non négatif (X_0, S_0, B_0) , les solutions de (3.16) vérifient

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} [\text{CO}_2](t) - [\text{CO}_2](0) = a(X_0 + \alpha B_0) + b(S_0 - S^*) \quad (3.56)$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} [\text{CH}_4](t) - [\text{CH}_4](0) = c(X_0 + \alpha B_0) + d(S_0 - S^*) \quad (3.57)$$

où S^* est la valeur asymptotique de $S(\cdot)$ et les coefficients a, b, c, d sont des nombres positifs donnés par les expressions suivantes.

$$a = \frac{1 - f_1 + f_1(1 - f_2)(1 - Y)}{1 - \alpha Y f_1}, \quad b = \frac{(1 - f_1)\alpha Y + (1 - f_2)(1 - Y)}{1 - \alpha Y f_1},$$

$$c = \frac{f_1 f_2 (1 - Y)}{1 - \alpha Y f_1}, \quad d = \frac{f_2 (1 - Y)}{1 - \alpha Y f_1}.$$

Démonstration : Considérons à nouveau la fonction V définie dans (3.43). L'équation (3.44) donne

$$V(t) = V(0) + K_h(\alpha Y f_1 - 1) \int_0^t X(\tau) d\tau.$$

Comme $V(\cdot)$ est borné, on obtient

$$\int_0^t X(\tau) d\tau < +\infty. \quad (3.58)$$

A partir de la première équation de (3.16a), on obtient également

$$X(t) = X(0) - K_h \int_0^t X(\tau) d\tau + \alpha K_d \int_0^t B(\tau) d\tau$$

et avec (3.58), on obtient

$$\int_0^t B(\tau) d\tau < +\infty. \quad (3.59)$$

Ensuite, à partir de la dernière équation de (3.16a), on a

$$B(t) = B(0) + \int_0^t \mu(S(\tau))B(\tau) d\tau - K_d \int_0^t B(\tau) d\tau,$$

3.3 Étude du comportement asymptotique

dont on obtient avec (3.59)

$$\int_0^t \mu(S(\tau))B(\tau) d\tau < +\infty. \quad (3.60)$$

Nous concluons, à partir des équations (3.16b), que $[\text{CO}_2](t)$ et $[\text{CH}_4](t)$ convergent asymptotiquement vers des valeurs finies.

L'intégration des équations (3.16a) entre 0 et t , puis en faisant tendre t vers $+\infty$ sachant que nous avons (3.35) et (3.36), donnent

$$K_h \int_0^{+\infty} X(\tau) d\tau - \alpha K_d \int_0^{+\infty} B(\tau) d\tau = X_0 \quad (3.61)$$

$$\int_0^{+\infty} \mu(S(\tau))B(\tau) d\tau - K_d \int_0^{+\infty} B(\tau) d\tau = -B_0 \quad (3.62)$$

$$Y f_1 K_h \int_0^{+\infty} X(\tau) d\tau - \int_0^{+\infty} \mu(S(\tau))B(\tau) d\tau = Y(S^* - S_0) \quad (3.63)$$

En éliminant $\int_0^{+\infty} B(\tau) d\tau$ de la première équation nous obtenons le système d'équations suivant

$$\begin{cases} K_h \int_0^{+\infty} X(\tau) d\tau - \alpha \int_0^{+\infty} \mu(S(\tau))B(\tau) d\tau = X_0 + \alpha B_0 \\ Y f_1 K_h \int_0^{+\infty} X(\tau) d\tau - \int_0^{+\infty} \mu(S(\tau))B(\tau) d\tau = Y(S^* - S_0) \end{cases} \quad (3.64)$$

dont les inconnues sont $\int_0^{+\infty} X(\tau) d\tau$ et $\int_0^{+\infty} \mu(S(\tau))B(\tau) d\tau$, et dont le déterminant est $K_h - Y f_1 K_h \alpha$. Sous **Hypothèse 3** ce déterminant est non nul et l'unique solution est donnée par les expressions

$$\int_0^{+\infty} X(\tau) d\tau = \frac{X_0 + \alpha Y(S_0 - S^*) + \alpha B_0}{K_h(1 - \alpha Y f_1)}, \quad (3.65)$$

$$\int_0^{+\infty} \mu(S(\tau))B(\tau) d\tau = Y \frac{f_1 X_0 + (S_0 - S^*) + \alpha f_1 B_0}{1 - \alpha Y f_1}. \quad (3.66)$$

Finalement, en faisant l'intégration des équations de (3.16b), on obtient

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} [\text{CO}_2](t) - [\text{CO}_2](0) = (1 - f_1) K_h \int_0^{+\infty} X(\tau) d\tau + (1 - f_2) \frac{1 - Y}{Y} \int_0^{+\infty} \mu(S(\tau))B(\tau) d\tau \quad (3.67)$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} [\text{CH}_4](t) - [\text{CH}_4](0) = f_2 \frac{1 - Y}{Y} \int_0^{+\infty} \mu(S(\tau))B(\tau) d\tau \quad (3.68)$$

En remplaçant les expressions (3.65)-(3.66) dans (3.67)-(3.68), nous obtenons les formules (3.56)-(3.57). \square

Remarque 3.18 Nous pouvons vérifier, comme on pouvait s'y attendre, que lorsque la condition initiale sur la biomasse B est nulle nous n'avons pas de production de biogaz. En effet, par (3.57), nous avons quand $B_0 = 0$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} [\text{CH}_4](t) - [\text{CH}_4](0) = cX_0 + d(S_0 - S^*).$$

Or nous avons montré que si $B_0 = 0$ alors $B(t) = 0$ pour tout $t > 0$ et alors le système (3.64) devient

$$\begin{cases} K_h \int_0^{+\infty} X(\tau) d\tau = X_0 \\ Y f_1 K_h \int_0^{+\infty} X(\tau) d\tau = Y(S^* - S_0), \end{cases}$$

ou encore

$$f_1 X_0 = S^* - S_0,$$

ce qui donne avec les expressions de c et d données dans le Théorème 3.17

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} [\text{CH}_4](t) - [\text{CH}_4](0) = (S_0 - S^*) \left(d - \frac{c}{f_1} \right) = 0.$$

Quant à la production du CO_2 , elle devient par (3.56)

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} [\text{CO}_2](t) - [\text{CO}_2](0) = aX_0 + b(S_0 - S^*) = (a + b f_1) X_0$$

pour toute valeur initiale S_0 .

Par ailleurs, l'intégration du système (3.16a) donne, quand $B_0 = 0$

$$\begin{cases} K_h \int_0^t X(\tau) d\tau = -X(t) + X_0 \\ Y f_1 K_h \int_0^t X(\tau) d\tau = Y(S(t) - S_0), \end{cases} \quad (3.69)$$

soit

$$f_1 X(t) + S(t) = f_1 X_0 + S_0.$$

et alors la trajectoire du système (3.16a) reste sur la demi-ligne

$$\{(X, S, B); f_1 X + S = f_1 X_0 + S_0, B = 0\}.$$

Remarque 3.19 Lorsque l'ensemble \mathcal{E} n'est pas connexe, mais se présente comme une union d'intervalles disjoints $\mathcal{E} = I_1 \cup I_2 \cup \dots$, l'espace d'état peut être divisé en une famille $\{\mathcal{B}_i\}$ de bassins d'attraction des sous-ensembles $\{0\} \times I_i \times \{0\}$. Ces bassins conduisent le système à différents niveaux de performance. Dans le cas de la loi de Monod, il n'y a qu'un seul bassin $\bar{\mathcal{B}}$ conduisant à des équilibres avec S^* dans $[0, \lambda]$ donné par (3.33). Avec la loi de Haldane, il y a deux bassins \mathcal{B}^- , \mathcal{B}^+ conduisant à des équilibres avec S^* dans $[0, \lambda^-]$ ou dans $[\lambda^+, +\infty)$. La surface de séparation entre \mathcal{B}^- et \mathcal{B}^+ est étudiée numériquement dans la section suivante.

3.4 Résultats numériques

Dans cette section, dédiée aux différents tests numériques, nous présentons d'abord le schéma numérique utilisé pour résoudre le système (3.16), puis nous comparons, dans un deuxième temps, les résultats obtenus avec la loi de Monod à ceux obtenus dans les travaux de Rouez [94] comme validation du modèle étudié. La principale partie concernera la présentation des tests numériques qui confirment les résultats théoriques obtenus dans les sections précédentes. Nous terminons la section avec la proposition d'un algorithme heuristique pour améliorer la production du biogaz.

3.4.1 Schéma de résolution du système (3.16)

Avant de présenter l'algorithme de résolution, nous commençons par écrire le système sous forme vectorielle. Définissons les vecteurs de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\mathbb{U} &= (u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)^t = (X, B, S, [\text{CO}_2], [\text{CH}_4])^t \\ \mathbb{U}^0 &= (X_0, B_0, S_0, [\text{CO}_2]_0, [\text{CH}_4]_0)^t.\end{aligned}\quad (3.70)$$

Les membres de droite des équations de (3.16) sont représentés par les fonctions F_i pour $i = 1, 2, \dots, 5$ définies comme suit

$$\begin{aligned}F_1(\mathbb{U}) &= -k_H u_1 + \alpha K_d u_2 \\ F_2(\mathbb{U}) &= (\mu(u_3) - k_d) u_2 \\ F_3(\mathbb{U}) &= f_1 k_H u_1 - \frac{1}{Y} \mu(u_3) u_2 \\ F_4(\mathbb{U}) &= (1 - f_1) k_H u_1 + (1 - f_2) \frac{1 - Y}{Y} \mu(u_3) u_2 \\ F_5(\mathbb{U}) &= f_2 \frac{1 - Y}{Y} \mu(u_3) u_2.\end{aligned}$$

Définissons la fonction vectorielle \mathbb{F} par

$$\mathbb{F}(\mathbb{U}) = (F_1(\mathbb{U}), F_2(\mathbb{U}), F_3(\mathbb{U}), F_4(\mathbb{U}), F_5(\mathbb{U}))^T.$$

Le système (3.16) peut être écrit sous la forme vectorielle suivante :

$$\begin{cases} \frac{d\mathbb{U}}{dt} = \mathbb{F}(\mathbb{U}), \\ \mathbb{U}(0) = \mathbb{U}^0. \end{cases}\quad (3.71)$$

Le système (3.71) est un système autonome. Afin d'atteindre une bonne précision, nous choisissons la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 (RK4) pour le résoudre. Ce schéma utilise quatre points de l'intervalle de la manière suivante. \mathbb{U}_0 étant donné, \mathbb{U}_{n+1} , pour $n \geq 0$, est donné par

$$\mathbb{U}_{n+1} = \mathbb{U}_n + \frac{\Delta t}{6} (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4), \quad (3.72)$$

où, si Δt est le pas de temps choisi, les K_i pour $i = 1, 2, 3, 4$ sont donnés par

$$\begin{aligned}K_1 &= F(U_n), \\K_2 &= F\left(U_n + \frac{\Delta t}{2} K_1\right), \\K_3 &= F\left(U_n + \frac{\Delta t}{2} K_2\right), \\K_4 &= F(U_n + \Delta t K_3).\end{aligned}$$

Son principe est : une fois nous avons la valeur U_n , la valeur suivante U_{n+1} est approchée par la somme de la valeur actuelle U_n et du produit de la taille de du pas du temps Δt par une moyenne pondérée des pentes estimées. Il y a donc quatre coefficients à calculer qui correspondent à l'évaluation de 4 pentes à des instants différents entre t et $t + \Delta t$ (une évaluation en t , deux évaluations en $t + \frac{\Delta t}{2}$, une évaluation en $t + \Delta t$). La méthode RK4 est une méthode d'ordre 4, ce qui signifie que l'erreur commise à chaque étape est de l'ordre de h^5 , et l'erreur totale accumulée est de l'ordre de h^4 . C'est une méthode stable pour la résolution des équations différentielles [77]. Nous donnons dans **Algorithme 3.20** les étapes de la résolution de système (3.71).

Algorithme 3.20 (Algorithme RK4 pour la résolution du système (3.71))

Initialisation

$$\begin{aligned}t_0 & \text{ (instant initial),} \\t_f & \text{ (instant final),} \\ \Delta t & \text{ (pas de temps),} \\ U & \leftarrow U(t_0) \text{ (conditions initiale).}\end{aligned}$$

Définition de la fonction : $F(t, U)$

$$N \leftarrow \frac{t_f - t_0}{\Delta t} + 1$$

$$t \leftarrow t_0$$

For $j \leftarrow 1$ **To** N

$$K1 \leftarrow \Delta t F(U(t))$$

$$K2 \leftarrow \Delta t F\left(U(t) + \frac{\Delta t}{2} K1\right)$$

$$K3 \leftarrow \Delta t F\left(U(t) + \frac{\Delta t}{2} K2\right)$$

$$K4 \leftarrow \Delta t F(U(t) + \Delta t K3)$$

$$U(t) \leftarrow U(t) + \frac{1}{6}(K1 + 2 K2 + 2 K3 + K4)$$

Registration.

$$t \leftarrow t + \Delta t$$

EndFor

3.4.2 Tests numériques

Pour mettre en œuvres nos tests numériques, nous avons utilisé une partie des données de Rouez présentées dans [94]. Dans cette référence l'auteur a mis en évidence, expérimentalement, la difficulté de la réalisation d'un test de Potentiel Bio Méthano-gène (PBM) optimisé du point de vue cinétique. La difficulté vient principalement du fait que la quantité de matière organique dégradable et disponible est un facteur important dans l'activité bactérienne mais délicat à maîtriser. Dans [94] l'auteur a considéré uniquement la loi de Monod (voir FIGURE 3.2) et le paramètre α égale 1 et où les valeurs des autres paramètres sont données dans le TABLEAU 3.1.

TABLEAU 3.1 – Paramètres de Rouez

K_h	Y	f_1	f_2	α	μ_m	K_S	K_d
0.176	0.05	0.7	0.76	1	0.3	160	0.02

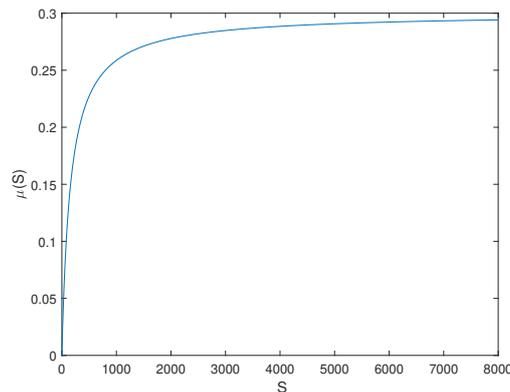


FIGURE 3.2 – Le graphe de la fonction de Monod avec les données de tableau 3.1

Dans un premier test, nous considérons les données du TABLEAU 3.1 avec les conditions initiales de Rouez pour tester la validité de notre algorithme. Les résultats obtenus sont donnés dans la FIGURE 3.3 et correspondent bien à ceux de Rouez [94] (page 190, Figure 49).

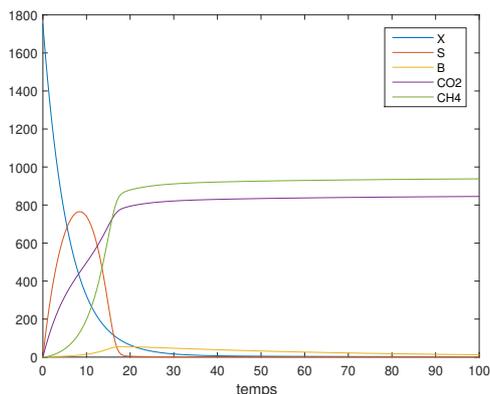


FIGURE 3.3 – Evolution de X, B, S, $[CO_2]$ et $[CH_4]$, utilisant les paramètres de Rouez du TABLEAU 3.1 (loi de Monod), avec les données initiales $B_0 = 2$, $X_0 = 1751$, $S_0 = 0$, $[CO_2]_0 = [CH_4]_0 = 0$.

Après ce premier test de validation, nous considérons maintenant notre modèle avec la loi de Haldane tout en utilisant les mêmes données et les mêmes paramètres que le premier test, sauf pour l'inhibition, et qui sont regroupés dans le TABLEAU 3.2. La loi d'Haldane pour ces paramètres est donnée dans la FIGURE 3.4 et les résultats obtenus sont donnés dans la FIGURE 3.5 .

TABLEAU 3.2 – Paramètres avec Haldane

K_h	Y	f_1	f_2	α	μ_m	K_S	K_d	K_I
0.176	0.05	0.7	0.76	0.9	0.3	160	0.02	100

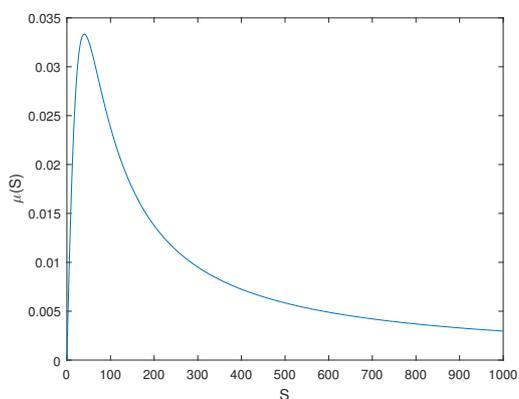


FIGURE 3.4 – Le graphes de la fonction de Haldane avec les données de tableau 3.5

3.4 Résultats numériques

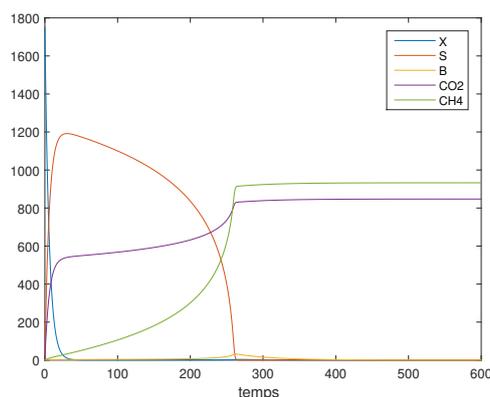


FIGURE 3.5 – Cas de la loi de Haldane : Evolution de X , B , S , $[\text{CO}_2]$ et $[\text{CH}_4]$ en utilisant les paramètres de TABLEAU 3.2 avec $B_0 = 2$, $X_0 = 1751$, $S_0 = 0$, $[\text{CO}_2]_0 = [\text{CH}_4]_0 = 0$.

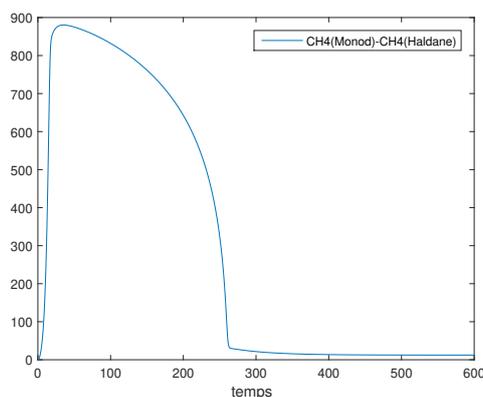


FIGURE 3.6 – La différence entre le méthane produit avec Monod donné dans 3.3 et celui produit avec Haldane donné dans 3.5 .

La première remarque dans la comparaison de ces deux tests est que la production du biogaz se stabilise beaucoup plus rapidement avec la loi de Monod (pour t proche de 20 dans la FIGURE 3.3) qu'avec la loi de Haldane (pour t proche de 300 dans la FIGURE 3.5). Ceci s'explique par la prise en compte du phénomène d'inhibition modélisé dans cette dernière loi. En comparant la concentration du méthane produit avec ces deux lois, en traçant la différence dans la FIGURE 3.6, nous remarquons que cette production est accélérée et est plus grande dans le cas de Monod.

Dans la partie théorique de ce chapitre nous avons étudié le comportement asymptotique et les points d'équilibre du système (3.71), quand on considère la loi d'Haldane qui est plus réaliste que celle de Monod, car elle tient compte du phénomène inévitable de l'inhibition. Nous avons mis en évidence, théoriquement, l'importance de la condition initiale de la matière organique dans la production du biogaz. Dans les prochains tests nous allons voir que ces considérations théoriques se confirment numéri-

quement.

Cas : K_d fixé et différentes valeurs de X_0

Dans ce test, nous fixons la valeur du taux de mortalité K_d et nous faisons varier la condition initiale de la matière organique X_0 pour voir l'effet de la valeur de la condition initiale sur la solution du problème. La résolution du système (3.16a)-(3.16b) est effectuée avec les données suivantes (comme dans [94])

$$S_0 = 0, \quad B_0 = 2, \quad [CO_2]_0 = [CH_4]_0 = 0 \quad \text{et} \quad K_d = 0.02, \quad (3.73)$$

pour des conditions initiales variant de $X_0 = 340$ à $X_0 = 360$ avec un pas de 5 :

$$X_0^{(1)} = 340, \quad X_0^{(2)} = 345, \quad X_0^{(3)} = 350, \quad X_0^{(4)} = 355, \quad X_0^{(5)} = 360. \quad (3.74)$$

Les simulations de la FIGURE 3.7 sont réalisées dans le cas de la loi de Haldane (voir la FIGURE 3.4), et représentent l'évolution, au cours du temps, de la variable X_i , en (a) et de la variable B_i en (b), associées aux conditions initiales $X_0^{(i)}$ pour $i = 1, \dots, 5$. Les courbes respectives de X et de B sont présentées dans un même intervalle du temps afin de visualiser leurs comportements relatifs et de constater qu'elles coïncident avec l'axe des abscisses à partir d'un certain temps \tilde{t} . C'est-à-dire que les solutions $X_i(t)$ et $B_i(t)$ tendent vers 0, pour tout $t \gg \tilde{t}$ (voir la sous figure (Z_I) , pour $I = X, B$) de 3.7), ce qui est cohérent avec le résultat de la Proposition 3.13. Néanmoins les courbes de B_1 et B_2 présentent chacune un pic à des instants différents. Nous allons donner une explication à ces pics, quand nous observerons les courbes de production du biogaz.

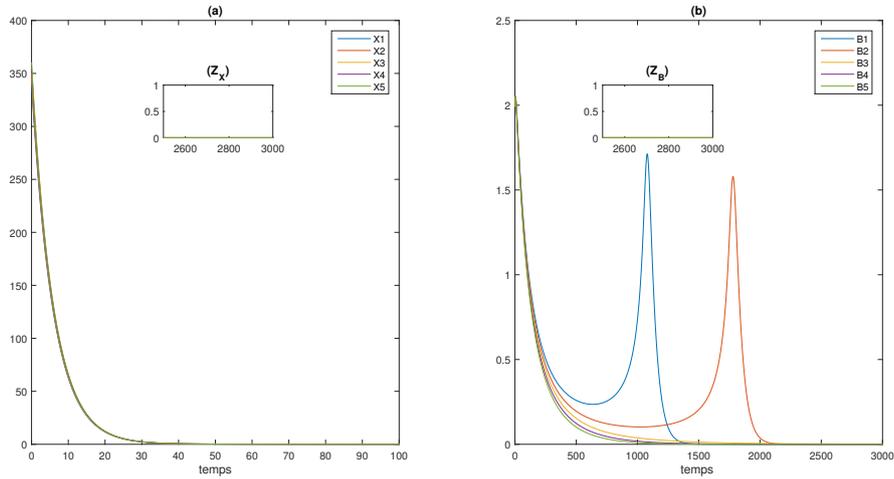


FIGURE 3.7 – Evolution de $X(\cdot)$ dans (a) et de $B(\cdot)$ dans (b) pour les conditions initiales $X_0^{(i)}$ pour $i = 1, \dots, 5$, avec la loi de Haldane, $K_d = 0.02$ - La sous figure (Z_I) , $I = X, B$, est le zoom des simulations I_i , $i = 1, \dots, 5$, proche de l'axe des abscisses pour des temps grands.

Quant à la variable $S(t)$, son évolution, avec les mêmes conditions, est donnée dans la FIGURE 3.8. Comme on pouvait s'y attendre (voir Proposition 3.13), ces courbes ne

3.4 Résultats numériques

tendent pas vers 0 quand t devient très grand. Mais l'ordre de grandeur de la valeur limite, qu'on peut noter par S_i^* , dépend de la valeur de la condition initiale $X_0^{(i)}$. Comme on peut l'observer sur la figure, les valeurs limites S_i^* correspondantes à $i = 1$ et $i = 2$ sont proches et assez grandes, par contre celles correspondantes à $i = 3$, $i = 4$ et $i = 5$ sont aussi proches mais petites.

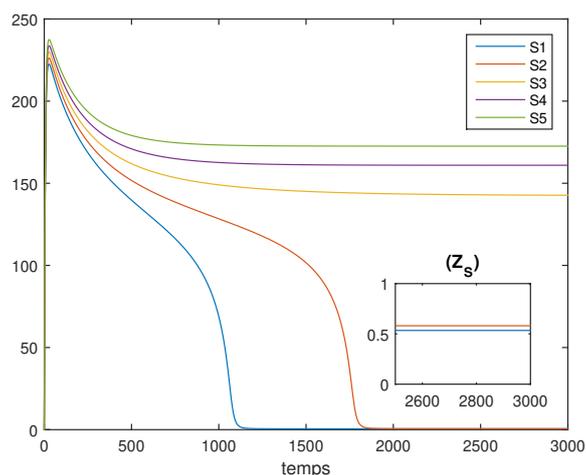


FIGURE 3.8 – Evolution de $S(\cdot)$ pour les conditions initiales $X_0^{(i)}$ pour $i = 1, \dots, 5$, avec la loi de Haldane, $K_d = 0.02$ - La sous figure (Z_S) est le zoom des simulations proche de l'axe des abscisses pour des temps grands.

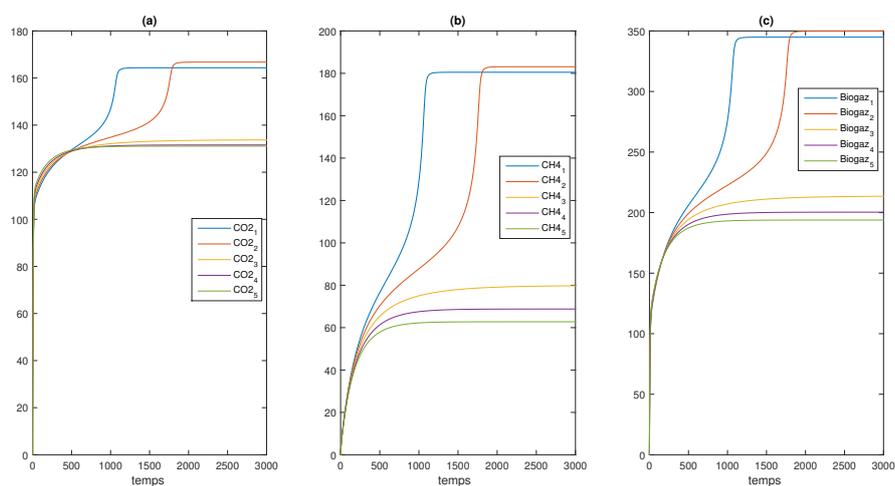


FIGURE 3.9 – Evolution de $[CO_2(\cdot)]$ dans (a), $[CH_4(\cdot)]$ dans (b) et la concentration total du biogaz $[CO_2(\cdot) + CH_4(\cdot)]$ dans (c) pour les conditions initiales de $X_0^{(i)}$ pour $i = 1, \dots, 5$, $K_d = 0.02$ et la loi de Haldane.

La FIGURES 3.9 montre l'évolution des concentrations en dioxyde de carbone, en mé-

thane et en biogaz total en fonction du temps avec les mêmes conditions. Nous remarquons, qu'à partir d'un certain instant les courbes changent de comportement mais pas de manière analogue dépendamment toujours de la condition initiale $X_0^{(i)}$. Pour $i = 1$ et $i = 2$ la production semble bien meilleure que celle de $i = 3, 4, 5$. Ce changement s'opère donc pour une certaine valeur de X_0 entre $X_0^{(2)} = 345$ et $X_0^{(3)} = 350$.

Nous constatons donc que, pour les deux premières conditions initiales, $S(t)$ et $B(t)$ ainsi que les concentrations des composantes du biogaz ont un comportement différent de celui correspondant aux trois autres valeurs de la condition initiale. En effet $S(t)$ tend vers une valeur plus petite, $B(t)$ présente un pic correspondant à une forte croissance des bactéries méthanogènes et nous avons une forte augmentation des concentrations en biogaz. Toutes ces constatations concordent avec la partie théorique. En effet nous avons montré que l'ensemble $\mathcal{E} = \{s \in \mathbb{R}^+ : \mu(s) \leq Kd\}$ défini par (3.32) était composé de deux intervalles $[0, \lambda^-]$ et $[\lambda^+, +\infty[$ où λ^- et λ^+ sont donnés par (3.34). Pour $K_d = 0,02$ par exemple, nous avons $\lambda^- = 12,5$ et $\lambda^+ = 127,4$. Selon la condition initiale X_0 , la variable S va converger soit vers une valeur inférieure à λ^- soit vers une valeur supérieure à λ^+ . Ainsi d'après l'expérience numérique des cinq valeurs initiales que nous avons considérées, les valeurs $X_0^{(1)} = 340$ et $X_0^{(2)} = 345$ sont telles que S_1 et S_2 vont converger dans le premier intervalle $[0, \lambda^-]$ et vont correspondre à la situation où la production du biogaz est maximale; tandis que pour les autres valeurs de la conditions initiales les S_i correspondantes vont converger dans le deuxième intervalle et la production du biogaz ne sera pas à son maximum. Il existe donc une valeur critique de X_0 au delà de laquelle la production du biogaz n'est pas à son maximum.

Si maintenant on trace la valeur maximale de la concentration de CH_4 en fonction de la conditions initiales $X_0^{(i)}$ pour $i = 1, \dots, 5$ l'allure de la courbe est donnée dans la FIGURE 3.10. Nous observons une discontinuité dans la production du biogaz quand on dépasse cette valeur critique de X_0 qui se trouve entre $X_0^{(2)} = 345$ et $X_0^{(3)} = 350$.

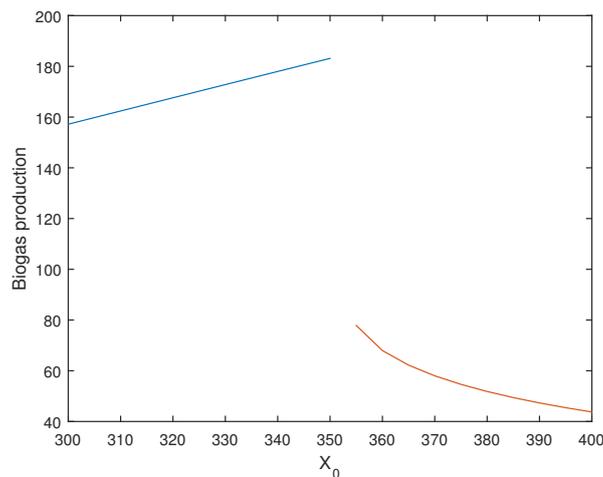


FIGURE 3.10 – Valeur maximale de $[\text{CH}_4]$ en fonction de X_0 pour $K_d = 0,02$ et la loi de Haldane.

Effet de K_d sur la production de biogaz

Nous avons montré dans le test précédent que la condition initiale X_0 joue un rôle important dans l'évolution de la concentration en biogaz. En particulier, après une certaine valeur critique de X_0 , qu'on notera par $X_{0,c}$, la production de biogaz devient très faible. Nous considérons maintenant un autre test nous permettant d'observer l'effet de la variation de K_d sur l'évolution de la valeur seuil $X_{0,c}$. Dans ce test nous fixons les autres conditions initiales aux valeurs suivantes

$$S_0 = 0, \quad B_0 = 2, \quad [\text{CO}_2]_0 = [\text{CH}_4]_0 = 0,$$

et nous faisons varier le paramètre K_d et considérons la résolution du système (3.16a)-(3.16b) avec les données du TABLEAU 3.2 sauf pour K_d qui va prendre successivement les valeurs suivantes

$$K_d^{(1)} = 0.005, \quad K_d^{(2)} = 0.01, \quad K_d^{(3)} = 0.015, \quad K_d^{(4)} = 0.02, \quad K_d^{(5)} = 0.025, \quad K_d^{(6)} = 0.03.$$

Nous rappelons que la valeur seuil $X_{0,c}$ est la valeur critique de X_0 pour laquelle, un petit changement sur X_0 , peut faire passer la valeur asymptotique S^* de $S(\cdot)$ d'une valeur inférieur à λ^- à une valeur supérieur à λ^+ .

Pour un $K_d^{(i)}$ fixé, trouver le $X_{0,c}^{(i)}$ critique conduit à un problème de contrôle pour la déterminer d'une manière optimale. Ceci fera l'objet d'un travail futur. Pour le moment nous choisissons une méthode de type "essai-erreur" pour ce test. Pour chaque $K_d^{(i)}$ fixé, nous effectuons une série de calculs "essai-erreur" pour localiser la valeur seuil $X_{0,c}^{(i)}$. La résolution du système est alors effectuée successivement avec une petite valeur de la condition initiale X_0^P , puis une grande valeur X_0^G et on note à chaque fois les valeurs de S^* correspondantes. L'étape suivante consiste à la résolution du système avec une valeur plus grande que X_0^P et avec une valeur plus petite que X_0^G et on note les valeurs de S^* correspondantes, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on remarque le passage de S^* d'une valeur inférieure λ^- et à une valeur supérieure à λ^+ .

Avec cette procédure nous trouvons les résultats suivants correspondants aux différents $K_d^{(i)}$ pour $i = 1, \dots, 6$

$$X_{0,c}^{(1)} = 1150, \quad X_{0,c}^{(2)} = 630, \quad X_{0,c}^{(3)} = 455, \quad X_{0,c}^{(4)} = 357, \quad X_{0,c}^{(5)} = 285, \quad X_{0,c}^{(6)} = 250.$$

Dans la FIGURE 3.11 nous traçons la variation de la valeur seuil de la condition initiale en fonction du taux de mortalité. Nous constatons que $X_{0,c}$ est une fonction décroissante de K_d .

En haut de la FIGURE 3.12, nous avons tracé les valeurs λ^- (en bleu) et λ^+ (en rouge) en fonction de K_d (voir (3.34)). Nous rappelons que la production est maximal lorsque S^* converge vers une valeurs inférieur à λ^- . Nous constatons que la distance entre les deux attracteurs de S^* s'agrandit pour les petites valeurs de K_d . Notons par Biogaz^- et Biogaz^+ les productions du biogaz dans $[0, \lambda^-]$ et $[\lambda^+, +\infty[$ respectivement.

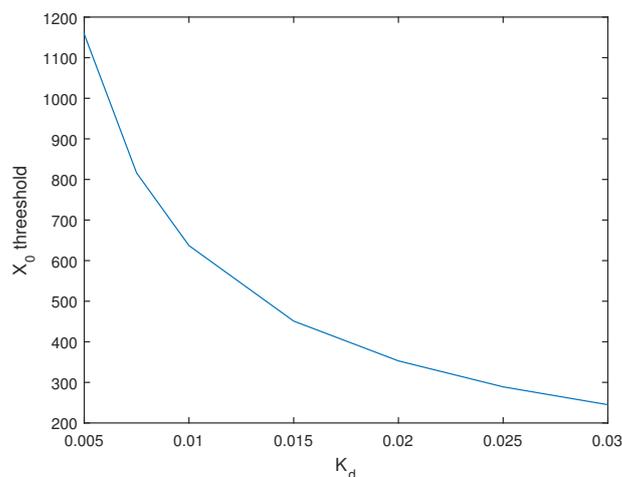


FIGURE 3.11 – Le seuil de X_0 en fonction de K_d pour les paramètres du TABLEAU 3.2 et la loi de Haldane.

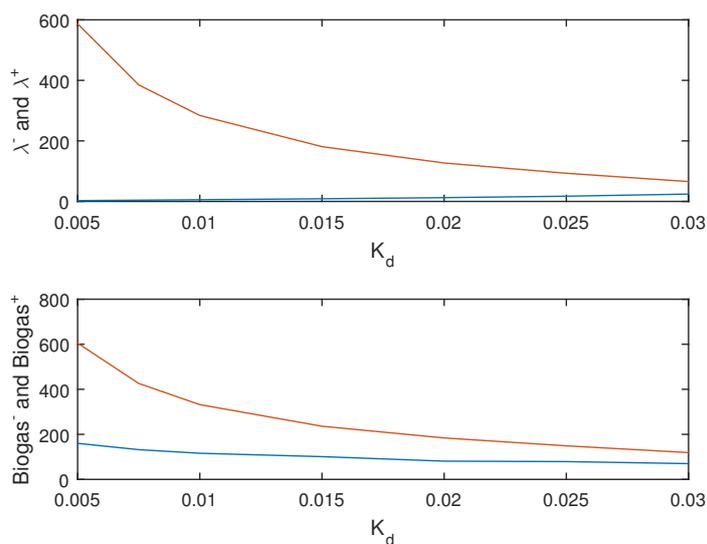


FIGURE 3.12 – λ^- , λ^+ (en haut) Biogas^- et Biogas^+ (en bas) en fonction de K_d (en utilisant la loi de Haldane)

En bas de la FIGURE 3.12, la courbe en bleu (respectivement la courbe en rouge), correspond à l'évolution de la valeur maximale de la concentration en biogaz⁻ (CH_4) (respectivement en biogaz⁺ (CH_4)), en fonction de la variation de taux de mortalité K_d . Notons que pour chaque valeur de $K_d^{(i)}$, il y a une valeur de la condition initiale critique $X_0^{(i)}$. Ainsi, chaque valeur de biogaz tracée dans cette courbe est associée à une valeur initiale critique.

Comme prévu, nous constatons que pour les petites valeurs de K_d , la différence entre

les deux valeurs extrêmes des productions de biogaz est élevée.

Comparaison des deux lois : Monod et Haldane

Nous considérons dans cette partie l'analogie de certains tests réalisés avec la loi d'Haldane avec cette fois-ci la loi de Monod. Nous résolvons donc le système (3.71) avec les mêmes données du TABLEAU 3.1, les conditions (3.73) et les des différentes conditions initiales de X_0 données dans (3.74). La FIGURE 3.13 représente l'évolution des variables $X(\cdot)$, $B(\cdot)$ et $S(\cdot)$ du système avec ces données. Nous remarquons que ces variables ont le même comportement quelque soit la condition initiale X_0 . les solution $X_i(t)$ et $B_i(t)$, correspondant aux conditions initiales $X_{0,i}$, convergent vers 0. Cependant, les solutions $S_i(t)$ convergent vers une valeur non nulle. L'évolution des concentrations en biogaz est donnée dans la FIGURES 3.14. Ces concentrations ont, de même, un comportement analogue quelque soit la condition initiale de la matière organique. l'augmentation de la production de biogaz est proportionnelle à l'augmentation de la valeur de la condition initiale X_0 . Ceci est conforme avec la théorie puisque dans le cas de Monod nous avons vu que nous avons un seul intervalle de convergence de la variable $S(\cdot)$, donné par $[0, \lambda]$, où pour $K_d = 0,02$, $\lambda = 11,4$ (voir 3.33).

Cette comparaison a mis en évidence l'importante de tenir compte des effets de l'inhibition dans la modélisation des processus de méthanisation. En effet négliger ces phénomènes ne permettra pas de considérer la valeur critique de la condition initiale X_0 , et passer à coté d'une maximisation de la production du biogaz.

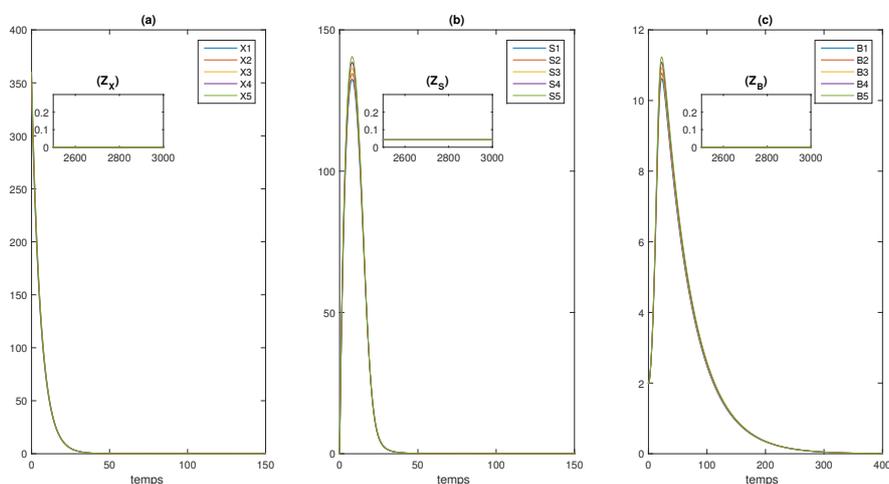


FIGURE 3.13 – Evolution de $X(\cdot)$ dans (a), $S(\cdot)$ dans (b) et de $B(\cdot)$ dans (c) pour les conditions initiales $X_0^{(i)}$, pour $i = 1, \dots, 5$ - Loi de Monod - La sous figure (Z_I) , $I = X, S, B$, est le zoom des simulations I_i , $i = 1, 2, 3, 4, 5$, proche de l'axe des abscisses pour des temps grands.

Nous traçons enfin, dans la FIGURE 3.15, l'évolution des valeurs de la constante λ en fonction du coefficient de mortalité K_d (voir (3.33)), ainsi que l'évolution de la concentration totale du biogaz en fonction de K_d . Nous remarquons que la longueur de l'in-

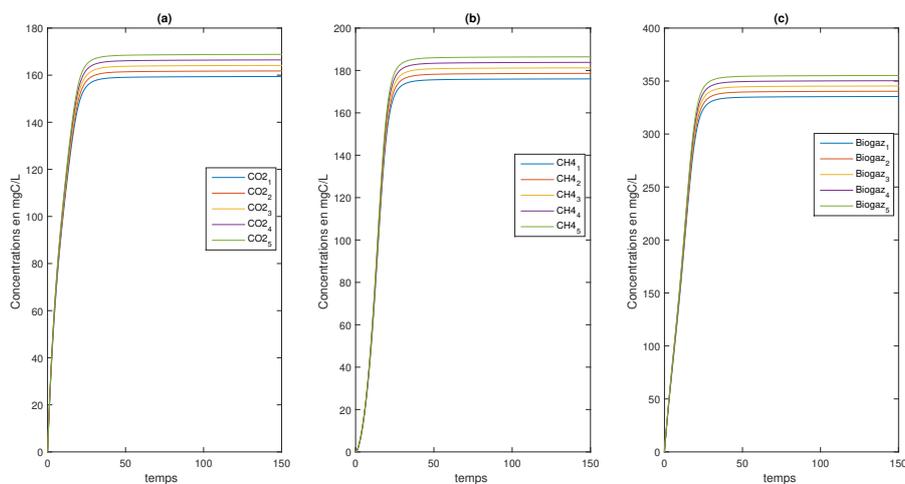


FIGURE 3.14 – Evolution de $[\text{CO}_2(\cdot)]$ dans (a), $[\text{CH}_4(\cdot)]$ dans (b) et biogaz dans (c) pour les conditions initiales de $X_0^{(i)}$ pour $i = 1, \dots, 5$ - Loi de Monod avec $K_d = 0.02$.

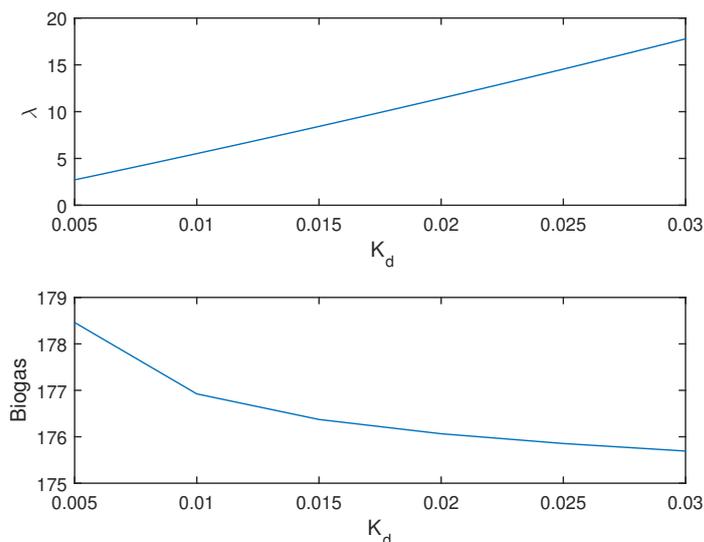


FIGURE 3.15 – λ , (en haut) Biogaz (en bas) en fonction de K_d (en utilisant la loi de Monod)

tervalle $[0, \lambda]$ est une fonction croissante du taux de mortalité K_d alors que la concentration totale du biogaz est une fonction décroissante de K_d . Ce résultat est attendu puisqu'une plus grande mortalité dans les bactérie méthanogènes entraine moins de production de biogaz.

Discussions et perspectives

Comme nous l'avons montré dans le Théorème 3.17, la production du biogaz total G est impactée par la valeur finale S^* de la matière soluble restante, elle-même liée au

taux de mortalité K_d comme élément de l'ensemble \mathcal{E} défini par (3.32). Le processus associé à la fonction de croissance de Haldane conduit soit à une production relativement importante de biogaz (lorsque $S^* < \lambda^-$) soit à une production relativement faible de celui-ci (lorsque $S^* > \lambda^+$), selon l'état initial. La différence entre ces deux situations s'agrandit lorsque le taux de mortalité K_d est petit. Pour le cas de Monod, qui ignore les phénomènes d'inhibition, la production de biogaz n'est pas impactée par la valeur finale S^* , et semble donc plus robuste. Tous les résultats numériques que nous avons présenté ci-dessous sont totalement en concordance avec l'analyse théorique du système (3.16a)-(3.16b).

Nous rappelons que la fonction de Haldane est souvent plus réaliste (et la fonction de Monod peut être considérée comme un cas particulier pour les grandes valeurs du paramètre K_I). De ce fait, nous avons largement étudié et discuté la situation où la loi de croissance est régie par la loi de Haldane. Nous suggérons les perspectives suivantes qui pourraient être intéressantes pour les praticiens :

1. Lorsque S_0 est petit (ou nul), considérer qu'une inhibition ne peut pas se produire car elle ne concerne que les valeurs élevées de S^* , et adopter une fonction de Monod au lieu de la fonction de Haldane (ou une grande valeur de K_I), pourrait conduire à de fausses prédictions. La production de biogaz pourrait être médiocre sous une concentration initiale élevée de la matière organique X_0 , car elle conduit le système à de grandes valeurs asymptotiques de S^* (voir FIGURE 3.8 et FIGURE 3.10).
2. Lorsque le taux de mortalité K_d est élevé (mais pas trop pour remplir la condition (3.22)), les performances sur la production de biogaz sont assez sensibles à la charge initiale de la matière organique X_0 , car le seuil sur X_0 est faible (voir FIGURE 3.11).
3. Lorsque le taux de mortalité K_d est faible, le système présente de bonnes performances à condition que la charge initiale X_0 dépasse le seuil, qui est relativement important. Cependant, s'il est dépassé, les performances s'effondrent dramatiquement (voir FIGURE 3.12).

3.4.3 Processus heuristique pour l'amélioration de production de biogaz

Dans cette partie, nous proposons une approche heuristique pour l'amélioration de la production du biogaz dans le cas où la loi de croissance est régie par la loi de Haldane. L'objectif est de bien gérer la quantité de la matière organique initiale donnée afin de produire le maximum possible de biogaz. En se basant sur les résultats précédents, le problème consiste à chercher un petit voisinage de $X_{0,c}$ (la valeur seuil) qui permet de passer du bassin β^+ , i.e le bassin de convergence de S qui donne une bonne production de biogaz, vers le bassin β^- , i.e le bassin de convergence de S qui ne donne pas une bonne production de biogaz.

Nous rappelons que pour les valeurs initiales X_0 et qui sont inférieures à $X_{0,c}$ et qui

construisent le bassin β^+ , la quantité de biogaz produit en fonction de X_0 est croissante. Dans ce cas on a :

$$S^* \in [0, \lambda^-]; \quad \forall X_0 < X_{0,c}$$

Cependant, pour les valeurs initiales X_0 qui sont supérieures à $X_{0,c}$ et qui construisent le bassin β^- , la quantité de biogaz produite en fonction de X_0 est décroissante. Dans ce cas on a :

$$S^* \in [\lambda^+, \infty[; \quad \forall X_0 > X_{0,c}$$

avec λ^- et λ^+ solutions de l'équation $\mu(S) = K_d$.

En procédant comme dans le dernier test, la valeur critique $X_{0,c}$ est la valeur de la condition initiale X_0 qui mène à obtenir pour la première fois S^* dans $[\lambda^+, \infty[$, ce qui veut dire la valeur qui donne le premier passage de β^+ à β^- . Grâce à la continuité de S , nous avons

$$\exists t_1 > 0 \quad \text{tel que} \quad S(t_1) = \lambda^- \quad (3.75)$$

et

$$\exists t_2 > t_1 > 0 \quad \text{tel que} \quad S(t_2) = \lambda^+. \quad (3.76)$$

Par ailleurs

$$\frac{dB}{dt} = (\mu(S) - K_d)B \quad (3.77)$$

D'après (3.75)-(3.76)-(3.77) et avec la positivité de $B(\cdot)$, on déduit que B est décroissante sur $[0, t_1]$, puis croissante sur $[t_1, t_2]$ puis décroissante après t_2 , (ce qui permet au passage d'expliquer les pics trouvés dans la FIGURE 3.7)

Grace à l'évolution de S^* en fonction de la variation de X_0 , la valeur critique $X_{0,c}$ qui donne le premier passage de β^+ à β^- (i.e. X_0 qui mène à obtenir $S^* \in [\lambda^+, \infty[$) implique qu'il existe t_1 et t_2 vérifiant (3.75)-(3.76).

En outre, à partir de l'instant t_2 et lorsque $S \in [\lambda^+, \infty[$, nous avons $\mu(S)$ est décroissante et aussi B est décroissante, alors la production de biogaz commence à diminuer. Pour améliorer la production de biogaz, nous allons faire une prise de décision à partir de cet instant t_2 qu'on notera par t_c , et pour lequel X est au seuil critique. Ayant déterminé les valeurs de toutes les autres variables à cet instant, nous résolvons de nouveau le système en prenant ces valeurs comme nouvelles conditions initiales, et on refait ce processus jusqu'à épuisement de la matière organique (voir **Algorithme 3.21**).

Algorithme 3.21 (Algorithme d'amélioration de production de biogaz)

ETAPE 1 LES DONNÉES

Les paramètres de la loi de Haldane : μ_m, K_I, K_S

Le paramètre de mortalité : K_d

Les conditions initiales :

à $t_0 = 0$ $B_0 > 0, S_0 = 0, [CO_2]_0 = 0, [CH_4]_0 = 0$

la matière organique totale disponible : $X_{0,total}$

ETAPE 2 Calcul de λ^- et λ^+ par (3.34)

// solutions de l'équation $\mu(S) = K_d$ avec μ est la loi d Haldane

ETAPE 3 Détermination de $X_{0,c}^0$: // la valeur initiale critique

Résolution du système (3.16a)-(3.16b) pour $X_0 = 5, 10, 15, \dots$ jusqu'à ce que $S^* > \lambda^+$,
et on note $X_{0,c}^{(0)}$ la valeur de la dernière résolution (dans laquelle $S^* < \lambda^-$)

ETAPE 4 Détermination de $t_c^{(0)}$: // le temps de la prise de décision de l'introduction d'une fraction de $X_{0,total}$

Résolution du système (3.16a)-(3.16b) pour $X_0 = X_{0,c}^{(0)}$,

t_c^0 = le temps correspondant au pic de B

On note les solutions par $X_c^{(0)}, B_c^{(0)}, S_c^{(0)}, [CO_2]_c^{(0)}, [CH_4]_c^{(0)}$,

$G = 0$ // production de biogaz $k = 0$

ETAPE 5 Nouvelles conditions initiales :

$$G \leftarrow G + \int_{t_0}^{t_c^{(k)}} \left([CO_2]_c^{((k))} + [CH_4]_c^{((k))} \right)$$

$$t_0 = t_c^{(k)}$$

$$X_{Res} = X_{tot} - X_{0,c}^{((k))} \quad // \text{ la MO restante}$$

$$B_0 \leftarrow B_c^{(k)}(t_c^{(k)})$$

$$S_0 \leftarrow S_c^{(k)}(t_c^0)$$

$$[CO_2]_0 \leftarrow [CO_2]_c^{(k)}(t_c^{(k)})$$

$$[CH_4]_0 \leftarrow [CH_4]_c^{(k)}(t_c^{(k)})$$

ETAPE 6 Tant que $X_{Res} > 0$ faire :

$$k \leftarrow k + 1$$

Détermination de $X_{0,c}^{(k)}$:

Résolution du système (3.16a)-(3.16b) pour $X_0 = X_c^{(k-1)}(t_c^{(k-1)}) + 5, X_c^{(k-1)}(t_c^{(k-1)}) + 10, \dots$ jusqu'à ce que $S^* > \lambda^+$, et on note $X_{0,c}^{(k)}$ la valeur de la dernière résolution (dans laquelle $S^* < \lambda^-$)

Détermination de $t_c^{(k)}$ temps correspondant aux pic de la variable B

Aller à l'ETAPE 5.

FIN.

Nous allons, maintenant, donner des simulations de production de biogaz en comparant les deux processus : sans et avec le processus d'amélioration de biogaz. Nous

considérons par exemple que la valeur de la quantité de la matière organique disponible à l'état initial est $X_0 = 965$ et que les autres conditions initiales sont $B_0 = 2$, $S_0 = 0$, $CO_{20} = 0$, $CH_{40} = 0$ avec les mêmes valeurs de TABLEAU 3.2.

Dans un premier test, nous mettons toute la quantité disponible $X_0 = 965$ dans le processus de production de biogaz, sans faire aucune intervention dans la dynamique des variables. Dans la FIGURE 3.16 nous remarquons que la quantité maximale produite de la concentration en méthane est aux environs de la valeur 10.

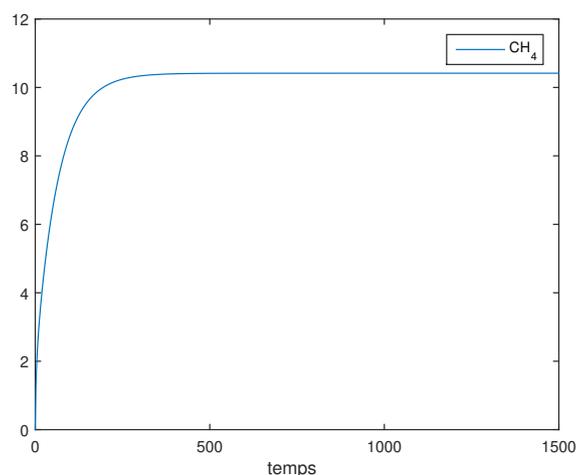


FIGURE 3.16 – Evolution de la concentration de méthane produit par la quantité de la matière organique disponible $X_0 = 965$ sans amélioration de processus de production.

En suivant l'approche détaillée ci-dessous pour l'amélioration du processus de production de biogaz, nous dressons le TABLEAU 3.3 qui donne les valeurs déterminées à chaque étape où

TABLEAU 3.3 – Les étapes d'amélioration de processus de production de biogaz.

	Etape 1	Etape 2	Etape 3
IRS	$[0, t_c]$	$[t_c, t_{c2}]$	$[t_{c2}, t_{c3}]$
CIB	$B_{01} = 2$	$B_{02} = B(t_c) = 1.5764$	$B_{03} = B(t_{c2}) = 1.5652$
CIS	$S_{01} = 0$	$S_{02} = S(t_c) = 11.1872$	$S_{03} = S(t_{c2}) = 10.9534$
CID	$CO_{201} = 0$	$CO_{202} = CO_2(t_c) = 163.3557$	$CO_{203} = CO_2(t_{c2}) = 312.6297$
CIM	$CH_{401} = 0$	$CH_{402} = CH_4(t_c) = 174.3545$	$CH_{403} = CH_4(t_{c2}) = 338.6298$
CIX0C	$X_{0,c1} = 345$	$X_{0,c2} = 310$	$X_{0,c3} = 310$
VTC	$t_c = 1782$	$t_{c2} = 3643$	$t_{c3} = 5568$
RXTC	$X(t_c) = 0.1647$	$X(t_{c2}) = 0.1638$	$X(t_{c3}) = 0$

— IRS représente l'intervalle de résolution du système dans chaque étape.

3.4 Résultats numériques

- CIB est la condition initiale de B dans chaque étape de résolution du système.
- CIS est la condition initiale de S dans chaque étape de résolution du système.
- CID est la condition initiale de CO_2 dans chaque étape de résolution du système.
- CIM : La condition initiale de CH_4 dans chaque étape de résolution du système.
- CIX0C est la condition initiale de X dans chaque étape de résolution du système et qui donne une bonne production de biogaz i.e. la valeur seuil ou la valeur critique X_{0c} . Pour la deuxième et la troisième étape, la valeur critique CIX0C représente la valeur de la matière organique ajoutée plus le reste de la matière organique à t_c l'instant trouvé dans la résolution de l'étape précédente (c'est-à-dire RXTC).
- VTC est la valeur de l'instant t_c auquel on ajoute de la matière organique et qui devient comme instant initial de la prochaine étape.
- RXTC représente le reste de la matière organique à l'instant t_c i.e. la valeur de $X(t_c)$ à l'étape courante.

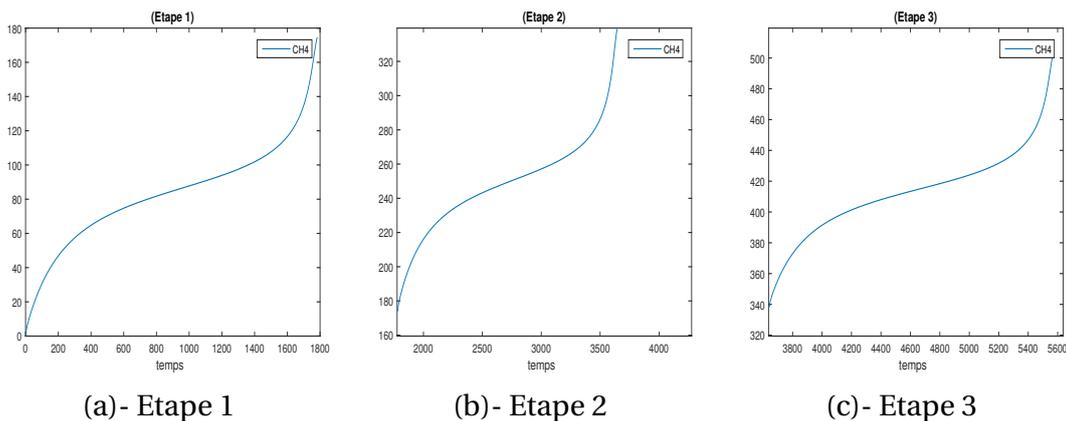


FIGURE 3.17 – Evolution de CH_4 produit par la quantité de la matière organique $X_0 = 956$ avec l'amélioration du processus de production.

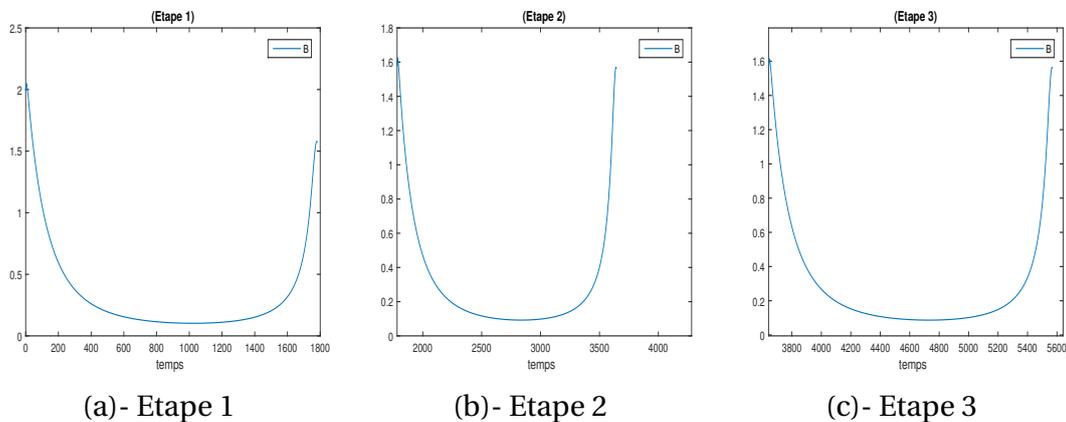


FIGURE 3.18 – Evolution de B avec l'amélioration de processus de production.

La FIGURE 3.17 montre l'évolution de la concentration du méthane en trois étapes en utilisant les valeurs de ce tableau. Nous remarquons que la quantité totale de la concentration de méthane produit en suivant cette méthode peut atteindre 500, contrairement au premier test où la valeur limite était autour de 10.

La FIGURE 3.18 montre l'évolution de la concentration de B à chaque étape. Comme nous l'avons montré, sur l'intervalle $[t_0, t_2]$ la variable B est décroissante puis croissante (dans la première étape $[t_0, t_2] = [0, 1782]$, dans la deuxième étape $[t_0, t_2] = [1782, 3643]$ et dans la troisième étape $[t_0, t_2] = [3643, 5568]$). Juste après l'instant t_2 , dans chaque étape, B est décroissante et alors la prise de décision pour l'amélioration de processus a eu lieu.

3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, à l'aide du théorème de la variété stable et instable et du lemme de Barbalat, nous avons montré que chaque trajectoire du système est bornée et converge vers l'un des équilibres non hyperboliques. Pour les fonctions de croissance non monotones, telles que la fonction de Haldane, l'attracteur global n'est pas connexe. Dans ce cas, nous avons montré que les performances en termes de production de biogaz sont discontinues par rapport à la condition initiale.

Pour la loi Haldane, une charge initiale trop élevée de la matière organique pourrait être pénalisante car il pourrait y avoir une quantité importante de matière soluble résiduelle, surtout lorsque le taux de mortalité est faible. Une stratégie pourrait alors être de fractionner la charge de la matière organique dans le temps, c'est-à-dire d'avoir une charge initiale plus petite et de réintroduire la quantité restante de matière à traiter plus tard (en une ou plusieurs fois). Ceci conduit à un problème de contrôle pour choisir de manière optimale la proportion des fractionnements et le ou les temps de réintroduction correspondants pour obtenir les meilleures performances. Cela pourrait faire l'objet d'un futur travail. Une autre possibilité est de jouer avec le taux de recirculation (dans un système complètement mixte), comme dans [89] où les auteurs ont proposé une stratégie optimale pour contrôler le temps minimal de recirculation de lixiviat dans une décharge des déchets.

Chapitre 4

Etude d'un modèle d'écoulement monophasique

Sommaire

4.1 Préliminaires	79
4.2 Résultat d'existence et d'unicité de la solution	84
4.3 Semi-discrétisation en temps	86
4.3.1 Semi-discrétisation du système (S1)	86
4.3.2 Semi-discrétisation du système (S2)	88
4.4 Discrétisation complète et analyse	91
4.4.1 Préliminaires	91
4.4.2 Discrétisation complète du système (S1)	93
4.4.3 Discrétisation complète du système (S2)	94
4.5 Résultats numériques	97
4.5.1 Le cas 2D	98
4.5.2 Le cas 3D	102
4.6 Conclusion	109

Introduction

Le modèle (2.45)-(2.46) introduit au CHAPITRE 2 est un système d'EDP faiblement couplé. Il est formé de deux sous-systèmes : (2.45) qui est un système de réaction-diffusion décrivant la dynamique bactérienne et (2.46) constitué des équations de l'écoulement du lixiviat. Les inconnues du premier système sont les concentrations de la matière organique X , des bactéries méthanogènes B , de la matière organique soluble S , du dioxyde de carbone $[\text{CO}_2]$ et du méthane $[\text{CH}_4]$. Les inconnues du deuxième système sont la vitesse et la pression du lixiviat.

Ce chapitre est organisé de la manière suivante. Après quelques préliminaires pour introduire les espaces fonctionnels continus et d'approximation ainsi que certains opérateurs d'interpolation et de projection, nous établirons les résultats d'existence et d'unicité de la solution du problème complet. L'étape suivante sera dédiée à la semi-discrétisation en temps, qui sera basée sur les schémas BDF2 du second ordre, ainsi qu'à l'établissement de la formulation variationnelle du problème complet. La section suivante sera consacrée à l'approximation du problème en utilisant des éléments finis conformes P_1 pour le sous-système de réaction-diffusion et des éléments finis mixtes de type Raviart-Thomas (RT_0) pour la vitesse et P_0 pour la pression, pour le sous-système d'écoulement. Nous présenterons l'analyse numérique de cette approximation, en développant les estimations d'erreur *a priori*, s'inspirant des travaux [18, 28, 49, 96]. Enfin, nous détaillerons le schéma de résolution du modèle proposé et nous présenterons des simulations numériques en 2D et 3D. L'implémentation est réalisée avec le logiciel open source FreeFem ++ [66]. Les résultats de cette partie ont fait l'objet des communications [19, 22] et de la publication [20].

Nous rappelons que le modèle mathématique (2.45)-(2.46) décrivant la dégradation de la matière organique et l'écoulement de lixiviat pendant le processus de la digestion anaérobie pour la production de biogaz est obtenu par le problème faiblement couplé des deux systèmes suivants :

$$(S1) \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} - \text{div}(\overline{\overline{\mathbf{D}}} \cdot \nabla \mathbf{U}) = \mathbf{F}^1(\mathbf{U}) & \text{dans } \Omega \times]0, T[, \\ \frac{d\mathbf{G}}{dt} = \mathbf{F}^2(\mathbf{U}) & \text{dans } \Omega \times]0, T[, \\ \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{n}} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times]0, T[, \\ \mathbf{U}(0, \cdot) = \mathbf{U}^0(\cdot), \quad \mathbf{G}(0, \cdot) = \mathbf{G}^0(\cdot) & \text{dans } \Omega, \end{array} \right. \quad (4.1)$$

et

$$(S2) \left\{ \begin{array}{ll} c(p) \frac{\partial p}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{u} = f, & \text{dans } \Omega \times]0, T[, \\ k(p) \mathbf{u} = -\nabla p + e_z, & \text{dans } \Omega \times]0, T[, \\ p = p_D, & \text{sur } \Gamma_D \times]0, T[, \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0, & \text{sur } \Gamma_N \times]0, T[, \\ p(x, 0) = p_0(x) & \text{dans } \Omega. \end{array} \right. \quad (4.2)$$

4.1 Préliminaires

Nous commençons dans cette section par quelques rappels sur les espaces fonctionnels que nous allons utiliser et quelques théorèmes de base. Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n , $n \geq 2$, polygonal dont la frontière $\Gamma := \partial\Omega$ est l'union de deux parties Γ_D et Γ_N , avec $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$. Le vecteur normal extérieur sur Γ sera noté \mathbf{n} . Pour $T > 0$, l'intervalle de temps est $]0, T[$. Nous adoptons la notation

$$Q_T := \Omega \times]0, T[, \quad \text{et} \quad \Gamma_T := \Gamma \times]0, T[.$$

Soit p un réel tel que $1 \leq p < +\infty$. L'espace $L^p(\Omega)$ est défini par

$$L^p(\Omega) := \left\{ v \text{ mesurable dans } \Omega, \text{ tel que } \int_{\Omega} |v|^p < \infty \right\},$$

muni de la norme $\|v\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |v|^p \right)^{1/p}$.

Pour $p = 2$ nous adoptons la notation $\|v\|_{0,\Omega} := \|v\|_{L^2(\Omega)}$. Pour $p = +\infty$, l'espace $L^\infty(\Omega)$ est défini par

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f \text{ mesurable et } |f(x)| < C \text{ p.p. dans } \Omega\},$$

muni de la norme $\|\cdot\|_{L^\infty(\Omega)}$ définie par

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf\{C, \quad |f(x)| < C \text{ p.p. dans } \Omega\}.$$

Nous notons par $(L^p(\Omega))^n$ l'espace des fonctions à valeurs vectorielles dont toutes les composantes sont dans $L^p(\Omega)$.

Pour un espace de Banach Z , muni de la norme $\|\cdot\|_Z$, nous désignons par $L^p(0, T; Z)$, l'espace défini par

$$L^p(0, T; Z) := \left\{ f :]0, T[\longrightarrow Z, \quad f \text{ mesurable et } \left(\int_0^T \|f(t)\|_Z^p dt \right)^{1/p} < +\infty \right\}. \quad (4.3)$$

Cet espace est muni de la norme

$$\|f\|_{L^p(0,T;Z)} := \left[\int_0^T \|f(t)\|_Z^p dt \right]^{1/p}.$$

Si $p = +\infty$, l'espace $L^p(0, T; Z)$ désigne l'espace des fonctions $t \rightarrow f(t)$ de $]0, T[\rightarrow Z$ qui sont mesurables à valeurs dans Z et telles que :

$$\sup_{t \in]0, T[} \text{ess}\|f(t)\|_Z < +\infty, \tag{4.4}$$

et il est muni de la norme $\|f\|_{L^\infty(0,T;Z)} := \sup_{t \in]0, T[} \text{ess}\|f(t)\|_Z$.

Soient $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$ un multi-indice, et $|\alpha| = \sum_{i=1}^d \alpha_i$ et m un entier.

On introduit $H^m(\Omega)$ l'espace de Sobolev d'ordre m défini par

$$H^m(\Omega) := \{v \in L^2(\Omega) \mid \forall 0 \leq |\alpha| \leq m, D^\alpha v \in L^2(\Omega)\},$$

muni de la norme

$$\|v\|_{m,\Omega} := \left\{ \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha v\|_{0,\Omega}^2 \right\}^{1/2},$$

où la dérivation $D^\alpha v := \frac{\partial^{|\alpha|} v}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}}$ est prise au sens des distributions.

On définit aussi la semi-norme :

$$|v|_{m,\Omega} := \left\{ \sum_{|k|=m} \|D^k v\|_{0,\Omega}^2 \right\}^{1/2}.$$

L'opérateur de trace défini par

$$\begin{aligned} \gamma \quad H^1(\Omega) &\longrightarrow L^2(\Omega) \\ v &\longrightarrow \gamma(v) := v|_\Gamma \end{aligned}$$

est un opérateur linéaire continu et on note $H^{1/2}(\Gamma) = \gamma(H^1(\Omega))$. On munit $H^{1/2}(\Gamma)$ de la norme suivante

$$\|\varphi\|_{1/2,\Gamma} = \inf_{v \in H^1(\Omega), \gamma(v) = \varphi} \|v\|_{1,\Omega}.$$

Nous avons l'inégalité suivante :

$$\exists C > 0, \quad \text{tel que} \quad \|\varphi\|_{1/2,\Gamma} \leq C \|v\|_{1,\Omega}, \quad \forall v \in H^1(\Omega) \quad \text{avec} \quad \varphi = \gamma(v).$$

De plus γ admet un relèvement continu de $H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow H^1(\Omega)$:

$$\forall \varphi \in H^{1/2}(\Gamma), \quad \exists v \in H^1(\Omega) \mid v|_\Gamma = \varphi, \quad \text{avec} \quad \|v\|_{1,\Omega} \leq \|\varphi\|_{1/2,\Gamma}.$$

L'espace $H_0^1(\Omega)$ est défini par

$$H_0^1(\Omega) = \ker \gamma = \{v \in H^1(\Omega) / \gamma(v) = 0\}, \quad (4.5)$$

et son dual est noté $H^{-1}(\Omega)$.

Pour $\Gamma_i \subseteq \Gamma$ une partie de la frontière on introduit aussi l'espace

$$H_{0,\Gamma_i}^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) / v|_{\Gamma_i} = 0\}. \quad (4.6)$$

Une des propriétés importantes de l'espace $H_0^1(\Omega)$ et de l'espace $H_{0,\Gamma_i}^1(\Omega)$ pour $\text{mes}(\Gamma_i) \neq 0$, si Ω est un ouvert borné, est l'inégalité de Poincaré (cf. [17, 84]) :

$$\exists C_\Omega > 0 \text{ telle que } \forall v \in H_{0,\Gamma_i}^1(\Omega), \quad \|v\|_{0,\Omega} \leq C_\Omega \|v\|_{1,\Omega}. \quad (4.7)$$

Pour plus de détails sur les espaces de Sobolev, nous citons à titre d'exemple les références [3, 100].

Si Ω est ouvert simplement connexe, et si Γ_N est une partie non vide de $\partial\Omega$, on note $H_{00}^{1/2}(\Gamma_N)$ le sous espace de $H^{1/2}(\Gamma_N)$ formé par de fonctions définies sur Γ_N dont l'extension par zéro à Γ appartient à $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ et nous avons (cf. [53])

$$H_{00}^{1/2}(\Gamma_N) := \left\{ v|_{\Gamma_N} : v \in H^1(\Omega), v = 0 \text{ sur } \Gamma_D \right\}.$$

Si $E_{N,0} : H^{1/2}(\Gamma_N) \longrightarrow L^2(\Omega)$ est l'opérateur d'extension :

$$E_{N,0}(\xi) := \begin{cases} \xi & \text{sur } \Gamma_N \\ 0 & \text{sur } \Gamma_D \end{cases} \quad \forall \xi \in H^{1/2}(\Gamma_N),$$

alors on peut écrire cet espace sous la forme

$$H_{00}^{1/2}(\Gamma_N) := \{ \xi \in H^{1/2}(\Gamma_N) : E_{N,0}(\xi) \in H^{1/2}(\Gamma) \},$$

et on le munit de la norme

$$\|\xi\|_{00,1/2,\Gamma_N} := \|E_{N,0}(\xi)\|_{1/2,\Gamma} \quad \forall \xi \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_N).$$

On introduit aussi l'espace $H_{00}^{-1/2}(\Gamma_N)$, comme étant le dual de $H_{00}^{1/2}(\Gamma_N)$, muni de la norme

$$\|\varphi|_{\Gamma_N}\|_{00,-1/2,\Gamma_N} := \sup_{\xi \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_N), \xi \neq 0} \frac{\langle \varphi|_{\Gamma_N}, \xi \rangle_{\Gamma_N}}{\|\xi\|_{00,1/2,\Gamma_N}} = \sup_{\xi \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_N), \xi \neq 0} \frac{\langle \varphi, E_{N,0}(\xi) \rangle}{\|E_{N,0}(\xi)\|_{1/2,\Gamma}},$$

où pour $\varphi \in H^{-1/2}(\Gamma)$, on note $\varphi|_{\Gamma_N}$ sa restriction à Γ_N et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ indique la dualité entre $H^{-1/2}(\Gamma)$ et $H^{1/2}(\Gamma)$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Gamma_N}$ la dualité entre $H_{00}^{-1/2}(\Gamma_N)$ et $H_{00}^{1/2}(\Gamma_N)$.

Nous rappelons aussi que $C([0, T], L^2(\Omega))$ est l'espace des fonctions continues de $[0, T]$ à valeurs dans $L^2(\Omega)$.

Nous désignons aussi par $L^\infty(\Omega, \mathbb{R}_+^3)$ l'espace des fonctions mesurables positives $u : x \in \Omega \longrightarrow u(x) \in \mathbb{R}_+^3$ telle que $u_i(x)$ soit borné p.p. dans Ω .

Nous introduisons aussi l'espace lié aux formulations mixtes des problèmes du second ordre et qui est l'espace $H(\text{div}; \Omega)$ défini par (cf. [29]) :

$$H(\text{div}; \Omega) := \{\mathbf{v} \in (L^2(\Omega))^n \mid \text{div } \mathbf{v} \in L^2(\Omega)\},$$

où $\text{div } \mathbf{v} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial v_i}{\partial x_i}$. C'est un espace de Hilbert pour la norme

$$\|\mathbf{v}\|_{\text{div}, \Omega}^2 = \|\mathbf{v}\|_{0, \Omega}^2 + \|\text{div } \mathbf{v}\|_{0, \Omega}^2$$

et on peut définir la trace normale $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|_\Gamma$ de \mathbf{v} sur Γ .

Lemme 4.1

L'opérateur trace normale

$$\mathbf{v} \in H(\text{div}; \Omega) \longrightarrow \gamma_n(\mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|_\Gamma \in H^{-1/2}(\Gamma)$$

est linéaire continue surjectif et nous avons la formule de Green (cf. [29]) :

$$\int_{\Omega} \text{div } \mathbf{v} q dx + \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \nabla q dx = \langle \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}, q \rangle_{-1/2, 1/2, \Gamma} \quad \forall q \in H^1(\Omega),$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle_{-1/2, 1/2, \Gamma}$ est le crochet de dualité entre $H^{-1/2}(\Gamma)$ et $H^{1/2}(\Gamma)$.

Démonstration : La preuve est classique et se résume ainsi : soit $g \in H^{1/2}(\Gamma)$. On sait qu'il existe $\varphi \in H^1(\Omega)$, tel que :

$$\begin{cases} -\Delta \varphi + \varphi = 0 & \text{dans } \Omega; \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} = g & \text{sur } \Gamma, \end{cases}$$

avec comme formulation variationnelle

$$\int_{\Omega} \nabla \varphi \cdot \nabla q dx + \int_{\Omega} \varphi q dx = \langle g, q \rangle_{\Gamma} \quad \forall q \in H^1(\Omega).$$

On pose $\mathbf{v} = \nabla \varphi$ alors $\mathbf{v} \in L^2(\Omega)$, $\text{div } \mathbf{v} = \Delta \varphi = -\varphi$ et donc $\text{div } \mathbf{v} \in L^2(\Omega)$ et de plus $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|_\Gamma = g$. Par conséquent pour tout g de $H^{1/2}(\Gamma)$, il existe \mathbf{v} dans $H(\text{div}; \Omega)$ tel que $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|_\Gamma = g$. \square

Nous définissons aussi le sous espace de $H(\text{div}; \Omega)$ pour lequel la trace normale s'annule sur la frontière par :

$$H_0(\text{div}; \Omega) = \{\mathbf{v} \in H(\text{div}; \Omega) \mid \langle \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}, q \rangle_{\Gamma} = 0 \quad \forall q \in H^1(\Omega)\}$$

Nous rappelons également dans cette section un théorème très utile. C'est un théorème d'existence et d'unicité de la solution globale du problème du Réaction-Diffusion-advection (RDA) défini par

$$\frac{\partial c_i}{\partial t} + \operatorname{div}(-D_i(t, x)\nabla c_i + c_i u_i(t, x)) = f_i(t, x, c) \quad \text{dans } (0, +\infty) \times \Omega, \quad (4.8)$$

$$(-D_i(t, x)\nabla c_i + c_i u_i(t, x)) \cdot \nu = 0 \quad \text{dans } (0, +\infty) \times \Omega, \quad (4.9)$$

$$c_i(0, \cdot) = c_i^0 \quad \text{dans } \Omega, \quad (4.10)$$

avec $i \in \{1, \dots, \ell\}$, $c = \{c_1, \dots, c_\ell\}$ et le tenseur de diffusion $D_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, vérifiant les hypothèses suivantes,

(H1) $c^0 = \{c_1^0, \dots, c_\ell^0\} \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}_+^\ell)$

(H2) $D_i = [d_{kp}^i]_{1 \leq k, p \leq n}$ est symétrique et définie positive avec $d_{kp} \in C(\mathbb{R}_+ \times \bar{\Omega}; \mathbb{R})$ et $\nabla d_{kp}^i \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R}_+; L^r(\Omega)^n)$ pour $r > \max\{2, n\}$.

(H3) $u_i \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R}_+; L^r(\Omega)^n)$, $r > \max\{2, n\}$.

(H4) $f \in C^1(\mathbb{R}_+ \times \Omega \times \mathbb{R}^\ell, \mathbb{R}^\ell)$ est quasi-positive, i.e

$$f_i(t, x, y) \geq 0 \quad \text{pour tout } (t, x, y) \in (0, +\infty) \times \Omega \times \mathbb{R}_+^\ell \text{ tel que } y_i = 0.$$

(H5) Il existe une matrice triangulaire inférieure inversible $Q = [q_{ij}]_{1 \leq i, j \leq \ell}$ avec des composantes diagonales strictement positives et $b \in \mathbb{R}_+^\ell$ tel que

$$\forall (t, x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega \times \mathbb{R}_+^\ell, \quad Qf(t, x, y) \leq (1 + \sum_{j=1}^{\ell} y_j)b.$$

(H6) f a une croissance polynomiale par rapport à la dernière variable, i.e

$$\forall T > 0, \quad \exists C, \gamma > 0: \forall (t, x, y) \in Q_T \times \mathbb{R}_+^\ell, \quad |f_i(t, x, y)| \leq C(1 + |y|^\gamma).$$

Alors nous avons le résultat suivant (voir le Théorème 1 dans [30]) :

Théorème 4.2

Sous les hypothèses (H1) – (H6), le système (4.8)-(4.9)-(4.10) a une unique solution faible globale et non négative $c = (c_1, \dots, c_\ell)$ dans le sens suivant :

$$\forall T > 0, \quad \forall c_i \in C([0, T]; L^2(\Omega)) \cap L^\infty(Q_T) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega));$$

$$\forall \varphi \in C^\infty(\bar{Q}_T) \text{ tel que } \varphi(T) = 0,$$

$$-\int_{\Omega} c_i^0 \varphi(0) + \int_{Q_T} (-c_i \partial_t \varphi + (D_i \nabla c_i - c_i u_i) \cdot \nabla \varphi) = \int_{Q_T} f_i(\cdot, \cdot, c) \varphi.$$

De plus, pour tout $T > 0$, il existe $C > 0$ (avec $r > \max\{2, n\}$ pour (H2), (H3)) tel que :

$$\|c\|_{L^\infty(Q_T)^l} + \|c\|_{L^2(0, T; H^1(\Omega)^l)} + \|\partial_t c\|_{L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)^l)} \leq C.$$

4.2 Résultat d'existence et d'unicité de la solution

Avant de donner le théorème d'existence et d'unicité de la solution du problème (4.1)-(4.2), nous supposons que les paramètres α , K_d , Y , f_1 and f_2 vérifient, l'**Hypothèse 3**, et l'hypothèse suivante :

Hypothèse 4 Les fonctions $p \rightarrow \theta(p)$, $p \rightarrow c(p) = \frac{\partial \theta}{\partial p}$ et $p \rightarrow k(p)$ sont uniformément bornées supérieurement et inférieurement, i.e. il existe des constantes positives c_θ , C_θ , c_p , C_p , c_k et C_k telles que

$$0 < c_\theta \leq \theta(p) \leq C_\theta, \quad 0 < c_p \leq c(p) \leq C_p, \quad 0 < c_k \leq k(p) \leq C_k. \quad (4.11)$$

Comme nous l'avons déjà signalé, le problème (4.1)-(4.2) est faiblement couplé, par conséquent, nous pouvons séparer l'analyse du système (4.1) et (4.2).

Du fait que le taux de croissance spécifique $\mu(\cdot)$ est une fonction non négative et bornée dans les deux cas de la loi Monod (2.6) et celle de Haldane (2.5), et sous **Hypothèse 3** et **Hypothèse 4**, nous avons le résultat suivant.

Proposition 4.3

Pour tout $\mathbf{U}^0 \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}_+^3)$, le système (4.1) a une solution faible globale unique, et non négative, $\mathbf{U} = (u_1, u_2, u_3)^T$ dans le sens suivant : $\forall T > 0$

$$\left. \begin{aligned} & \forall i \in \{1, 2, 3\}, \quad u_i \in C([0, T]; L^2(\Omega)) \cap L^\infty(Q_T) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega)); \\ & \forall \psi \in C^\infty(Q_T) \text{ tel que } \psi(T) = 0 \\ & - \int_{\Omega} u_i^0 \psi(0) dx - \int_{Q_T} u_i \frac{\partial \psi}{\partial t} dx dt + \int_{Q_T} D_i \nabla u_i \cdot \nabla \psi dx dt = \\ & \int_{Q_T} F_i(\mathbf{U}(t, x)) \cdot \psi dx dt. \end{aligned} \right\} \quad (4.12)$$

De plus, pour tout $T > 0$, il existe $C > 0$ tel que

$$\|\mathbf{U}\|_{L^\infty(Q_T)^3} + \|\mathbf{U}\|_{L^2(0, T; H^1(\Omega)^3)} + \left\| \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} \right\|_{L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)^3)} \leq C. \quad (4.13)$$

Démonstration : Remarquons tout d'abord que la variable vectorielle $\mathbf{U} = (u_1, u_2, u_3)^T$ vérifie la première équation de système (4.1), qui est une EDP de type réaction-diffusion, alors que la deuxième variable vectorielle $\mathbf{G} = (u_4, u_5)$ vérifie la deuxième équation de système (4.1) qui est une EDO.

Nous montrons dans un premier temps l'existence et l'unicité de la solution globale de \mathbf{U} . Comme la fonction $\mu(\cdot)$ de Monod ou celle de Haldane est de classe C^1 et est bornée et positive, la fonction vectorielle \mathbf{F}^1 définie par (2.22) est de classe $C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ et elle est quasi-positive, i.e.

$$\forall i = 1, 2, 3 \quad F_i(\mathbf{U}) \geq 0 \quad \text{à chaque fois} \quad \mathbf{U} \in \mathbb{R}_+^3 \quad \text{tel que} \quad u_i = 0,$$

4.2 Résultat d'existence et d'unicité de la solution

en effet,

$$u_1 = 0 \Rightarrow F_1(U) = K_d u_2 \geq 0, \quad u_2 = 0 \Rightarrow F_2(U) = 0 \geq 0, \quad u_3 = 0 \Rightarrow F_3(U) = f_1 K_h u_1 \geq 0.$$

En outre, Il existe une matrice inversible triangulaire inférieure $Q = [q_{ij}]_{1 \leq i, j \leq 3}$ avec des composantes diagonales positives et $b \in \mathbb{R}_+^3$ telle que

$$\forall U \in \mathbb{R}_+^3 \quad Q \cdot F \leq \left(1 + \sum_{i=1}^3 u_i\right) b. \quad (4.14)$$

En effet

$$F_1(U) = -K_h u_1 + K_d u_2 \leq K_d u_2 \leq \left(1 + \sum_{j=1}^3 u_j\right) K_d,$$

soit $b_1 = K_d$ la première valeur du vecteur b . Aussi

$$F_2(U) = \mu(u_3) u_2 - K_d u_2 \leq \mu_m u_2 \leq \left(1 + \sum_{j=1}^3 u_j\right) \mu_m,$$

soit $b_2 = \mu_m$ la deuxième valeur du vecteur b . Aussi

$$F_3(U) = f_1 K_h u_1 - \frac{1}{Y} \mu(u_3) u_2 \leq f_1 K_h u_1 \leq \left(1 + \sum_{j=1}^3 u_j\right) f_1 K_h,$$

soit $b_3 = f_1 K_h$ la troisième valeur du vecteur b .

Enfin en prenant $b = (b_1, b_2, b_3)^T$ avec $Q = I_3$, l'inégalité (4.14) est satisfaite.

Par ailleurs, F^1 a une croissance polynomiale, i.e

$$\forall T > 0, \quad \exists C, c > 0; \quad \forall i \in \{1, 2, 3\}; \quad \forall U(t, x) \in \mathbb{R}_+^3, \quad |F_i(U(t, x))| \leq C(1 + |U(t, x)|^c).$$

En effet selon l'inégalité (4.14), nous avons

$$F^1(U(t, x)) = Q \cdot F(U(t, x)) \leq \left(1 + \sum_{j=1}^3 u_j\right) b$$

qui est équivalent à

$$F_i(U) \leq \left(1 + \sum_{j=1}^3 u_j\right) b_i \quad ; \quad \forall i \in \{1, 2, 3\},$$

et puisque $U \in \mathbb{R}_+^3$ alors $|U| = \sum_{j=1}^3 |u_j| = \sum_{j=1}^3 u_j$. En prenant $c = 1$ nous avons

$$|F_i(U)| \leq (1 + |U|) b_i \quad \forall i \in \{1, 2, 3\}$$

et en choisissant $C = \max\{b_i; i \in \{1, 2, 3\}\}$, on obtient

$$F_i(U) \leq C(1 + |U|).$$

Par conséquent, les hypothèses du Théorème 4.2 sont vérifiées et on obtient l'existence et l'unicité de la variable \mathbf{U} , solution globale non négative du système (4.1).

Par ailleurs, sous **Hypothèse 2** et **Hypothèse 3** la fonction \mathbf{F}^2 est positive et lipschitzienne. Ainsi, pour toute condition initiale non négative $\mathbf{G}^0(\cdot)$ on obtient, par le Théorème 3.2 (Cauchy-Lipschitz), l'existence et l'unicité de la variable \mathbf{G} , solution non négative du système (4.1) \square

Nous avons aussi un résultat d'existence et d'unicité de la solution du système parabolique qui modélise l'écoulement du lixiviat sous la forme de l'équation de Richards (2.44) associée au système (4.2) (voir [7]). Plus précisément, nous avons

Proposition 4.4

Pour tout $p^0 \in L^2(\Omega)$ et $p_D \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_D)$, il existe une unique solution faible $p \in p_D + L^2(0, T; H^1_{\Gamma_D}(\Omega))$ du problème (2.44), dans le sens suivant :

$p(x, 0) = p^0$ et pour tout $\varphi \in L^2(0, T; H^1_{\Gamma_D}(\Omega))$

$$\int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial \theta(p)}{\partial t} \varphi dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} \frac{k_i k_r(p)}{\mu \ell} \rho g (\nabla p - e_z) \cdot \nabla \varphi dx dt = \int_0^T \int_{\Omega} \varphi dx dt.$$

Cette formulation faible est équivalente au sens des distributions, au système d'EDP donné par (2.44), lui-même équivalent à sa forme mixte donnée par (4.2). On déduit de ces équivalences que la forme faible de (4.2) admet aussi une unique solution. Cette forme faible est donnée, à chaque instant $t \in]0, T]$, par

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } \mathbf{u} \in H_{0,N}(\text{div}; \Omega) \text{ and } p \in L^2(\Omega) \text{ tel que} \\ \int_{\Omega} k(p(t)) \mathbf{u}(t) \cdot \boldsymbol{\psi} dx - \int_{\Omega} \text{div } \boldsymbol{\psi} p(t) = - \int_{\Gamma_D} p_D \boldsymbol{\psi} \cdot \mathbf{n} ds + \int_{\Omega} e_z \cdot \boldsymbol{\psi} dx, \quad \forall \boldsymbol{\psi} \in H_{0,N}(\Omega), \\ \int_{\Omega} c(p(t)) \frac{\partial p}{\partial t}(t) \varphi dx + \int_{\Omega} \text{div } \mathbf{u}(t) \varphi dx = \int_{\Omega} f \varphi dx, \quad \forall \varphi \in L^2(\Omega), \end{array} \right. \quad (4.15)$$

avec $H_{0,N}(\text{div}; \Omega) = \{\mathbf{v} \in H(\text{div}, \Omega), \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma_N\}$.

4.3 Semi-discrétisation en temps

Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et $0 = t^0 < t^1 < \dots < t^N = T$ une partition de $[0, T]$. Posons $\tau_n = t^{n+1} - t^n$, $n = 0, \dots, N$. Dans ce qui suit, nous notons g^n la valeur d'une fonction g à l'instant t_n .

4.3.1 Semi-discrétisation du système (S1)

Le schéma de semi-discrétisation du système (4.1) considéré ici est le schéma BDF2 "the second order backward differentiation formula" pour les variables (X, S, B) et le

4.3 Semi-discrétisation en temps

schéma d'Euler implicite pour les ODEs en $([\text{CO}_2], [\text{CH}_4])$. Le problème se lit comme suit : trouver $\mathbf{U}^{n+1} \in Z = (\text{H}^1(\Omega))^3$ tel que

$$\int_{\Omega} \frac{3\mathbf{U}^{n+1} - 4\mathbf{U}^n + \mathbf{U}^{n-1}}{2\tau_n} \cdot \mathbf{v} dx + \int_{\Omega} \overline{\overline{\mathbf{D}}} \nabla \mathbf{U}^{n+1} \cdot \nabla \mathbf{v} dx = \int_{\Omega} \mathbf{F}^1(\mathbf{U}^{n+1}) \cdot \mathbf{v} dx \quad \forall \mathbf{v} \in Z. \quad (4.16)$$

où les valeurs initiales sont calculées comme suit : trouver $\mathbf{U}^1 \in Z$ tel que

$$\int_{\Omega} \frac{\mathbf{U}^1 - \mathbf{U}^0}{\tau_0} \cdot \mathbf{v} dx + \int_{\Omega} \overline{\overline{\mathbf{D}}} \cdot \nabla \mathbf{U}^1 \cdot \nabla \mathbf{v} dx = \int_{\Omega} \mathbf{F}^1(\mathbf{U}^1) \cdot \mathbf{v} dx \quad \forall \mathbf{v} \in Z, \quad (4.17)$$

où la notation $\nabla \mathbf{U} \cdot \mathbf{v}$ désigne le vecteur de composantes $\nabla U_i \cdot \mathbf{v}_i$, pour $i = 1, 2, 3$.

Nous linéarisons le schéma en utilisant la formule de Taylor

$$\mathbf{F}^1(\mathbf{U}^{n+1}) \simeq \mathbf{F}^1(\mathbf{U}^n) + \mathbf{J}_{\mathbf{F}^1}(\mathbf{U}^n) \cdot (\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n) \quad (4.18)$$

où $\mathbf{J}_{\mathbf{F}^1}$ est la matrice jacobienne de la fonction vectorielle \mathbf{F}^1 . Par conséquent, le schéma BDF2 final se lit comme suit : trouver $\mathbf{U}^1 \in Z = (\text{H}^1(\Omega))^3$ tel que

$$\int_{\Omega} [\tau_0^{-1} \mathbf{I}_3 - \mathbf{J}_{\mathbf{F}^1}(\mathbf{U}^0)] \cdot \mathbf{U}^1 \cdot \mathbf{v} dx + \int_{\Omega} \overline{\overline{\mathbf{D}}} \cdot \nabla \mathbf{U}^1 \cdot \nabla \mathbf{v} dx = \int_{\Omega} [\tau_0^{-1} \mathbf{U}^0 + \mathbf{F}^1(\mathbf{U}^0) - \mathbf{J}_{\mathbf{F}^1}(\mathbf{U}^0) \cdot \mathbf{U}^0] \cdot \mathbf{v} dx \quad \forall \mathbf{v} \in Z, \quad (4.19)$$

et pour tout $n \geq 1$, trouvez $\mathbf{U}^{n+1} \in Z$ tel que

$$\int_{\Omega} \left[\frac{3}{2\tau_n} \mathbf{I}_3 - \mathbf{J}_{\mathbf{F}^1}(\mathbf{U}^n) \right] \cdot \mathbf{U}^{n+1} \cdot \mathbf{v} dx + \int_{\Omega} \overline{\overline{\mathbf{D}}} \cdot \nabla \mathbf{U}^{n+1} \cdot \nabla \mathbf{v} dx = \int_{\Omega} \left[\frac{4\mathbf{U}^n - \mathbf{U}^{n-1}}{2\tau_n} + \mathbf{F}^1(\mathbf{U}^n) - \mathbf{J}_{\mathbf{F}^1}(\mathbf{U}^n) \cdot \mathbf{U}^n \right] \cdot \mathbf{v} dx \quad \forall \mathbf{v} \in Z. \quad (4.20)$$

D'autre part, en utilisant la Remarque 2.2, une fois \mathbf{U}^{m+1} déterminé, l'approximation de \mathbf{G} au point $t = t_{m+1}$, noté $\mathbf{G}^{m+1} = (u_4^{m+1}, u_5^{m+1})^T$, pour $0 \leq m \leq n$, est donnée par

$$\frac{u_4^{m+1} - u_4^m}{\tau_m} = (1 - f_1) K_h u_1^{m+1} + (1 - f_2) \frac{1 - Y}{Y} \left(\frac{u_2^{m+1} - u_2^m}{\tau_m} + K_d u_2^{m+1} \right), \quad (4.21)$$

$$\frac{u_5^{m+1} - u_5^m}{\tau_m} = f_2 \frac{1 - Y}{Y} \left(\frac{u_2^{m+1} - u_2^m}{\tau_m} + K_d u_2^{m+1} \right). \quad (4.22)$$

4.3.2 Semi-discrétisation du système (S2)

Nous utilisons le schéma semi-implicite pour (4.2) :

$$k(p^n)\mathbf{u}^{n+1} = -\nabla p^{n+1} + e_z \quad \text{dans } \Omega, \quad (4.23)$$

$$c(p^n)\frac{p^{n+1} - p^n}{\tau_n} + \operatorname{div} \mathbf{u}^{n+1} = f^{n+1} \quad \text{dans } \Omega, \quad (4.24)$$

où les inconnues \mathbf{u}^{n+1} et p^{n+1} sont respectivement l'approximation de $\mathbf{u}(t_{n+1})$ et $p(t_{n+1})$ avec

$$\mathbf{u}^{n+1} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma_N \quad \text{and} \quad p^{n+1} = p_D \text{ sur } \Gamma_D. \quad (4.25)$$

La formulation faible est donnée dans les espaces $\mathbf{V} = H_{0,N}(\operatorname{div}; \Omega)$ et $W = L^2(\Omega)$ par

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } \mathbf{u}^{n+1} \in \mathbf{V} \text{ et } p^{n+1} \in W \text{ tel que} \\ \int_{\Omega} k(p^n)\mathbf{u}^{n+1} \cdot \boldsymbol{\psi} dx - \int_{\Omega} \operatorname{div} \boldsymbol{\psi} p^{n+1} = - \int_{\Gamma_D} p_D \boldsymbol{\psi} \cdot \mathbf{n} ds + \int_{\Omega} e_z \cdot \boldsymbol{\psi} dx, \quad \forall \boldsymbol{\psi} \in \mathbf{V}, \\ \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u}^{n+1} \varphi dx + \int_{\Omega} \frac{c(p^n)}{\tau_n} p^{n+1} \varphi dx = \int_{\Omega} \frac{c(p^n)}{\tau_n} p^n \varphi dx + \int_{\Omega} f^{n+1} \varphi dx, \quad \forall \varphi \in W, \end{array} \right.$$

qui peut être écrite sous la forme suivante

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } (\mathbf{u}^{n+1}, p^{n+1}) \in \mathbf{V} \times W \text{ tel que} \\ a(\mathbf{u}^{n+1}, \boldsymbol{\psi}) + b(\boldsymbol{\psi}, p^{n+1}) = g_1(\boldsymbol{\psi}), \quad \forall \boldsymbol{\psi} \in \mathbf{V}, \\ b(\mathbf{u}^{n+1}, \varphi) - d(p^{n+1}, \varphi) = g_2(\varphi), \quad \forall \varphi \in W, \end{array} \right. \quad (4.26)$$

où $a : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}$, $b : \mathbf{V} \times W \rightarrow \mathbb{R}$ et $d : W \times W \rightarrow \mathbb{R}$ sont les formes bilinéaires définies par

$$a(\mathbf{u}, \boldsymbol{\psi}) = \int_{\Omega} k(p^n)\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\psi} dx \quad ; \quad (\mathbf{u}, \boldsymbol{\psi}) \in \mathbf{V} \times \mathbf{V} \quad (4.27)$$

$$b(\mathbf{u}, \varphi) = - \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u} \varphi \quad ; \quad (\mathbf{u}, \varphi) \in \mathbf{V} \times W \quad (4.28)$$

$$d(p, \varphi) = \int_{\Omega} \frac{c(p^n)}{\tau_n} p \varphi dx \quad ; \quad (p, \varphi) \in W \times W \quad (4.29)$$

et les deuxièmes membres $g_1 : \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g_2 : W \rightarrow \mathbb{R}$ sont les formes linéaires définies par

$$g_1(\psi) = - \int_{\Gamma_D} p_D \psi \cdot \mathbf{n} ds + \int_{\Omega} e_z \cdot \psi dx \quad ; \quad \psi \in \mathbf{V} \quad (4.30)$$

$$g_2^n(\varphi) = - \int_{\Omega} \frac{c(p^n)}{\tau_n} p^n \varphi dx - \int_{\Omega} f^{n+1} \varphi dx \quad ; \quad \varphi \in W. \quad (4.31)$$

Nous définissons l'opérateur continu $B : \mathbf{u} \in \mathbf{V} \longrightarrow \operatorname{div} \mathbf{u} \in W'$ et son transposé $B^t : W \longrightarrow \mathbf{V}'$ tel que

$$\langle B\mathbf{v}, \varphi \rangle_{W' \times W} = \langle \mathbf{v}, B^t \varphi \rangle_{\mathbf{V}' \times \mathbf{V}} = b(\mathbf{v}, \varphi) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \forall \varphi \in W,$$

puis nous introduisons le sous-espace de \mathbf{V} , noyau de B :

$$\operatorname{Ker} B = \{ \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \quad \forall \varphi \in W, \quad b(\mathbf{v}, \varphi) = 0 \}.$$

Proposition 4.5

Pour tout $p_D \in H^{1/2}(\Gamma_D)$ et $f \in L^2(\Omega)$, le système (4.26) admet une solution unique et on a les estimations

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}^n\|_{\mathbf{V}} &\leq C_1 \|g_1\|_{\mathbf{V}'} + C_2 \|g_2^n\|_{W'}, \\ \|p^n\|_W &\leq C_2 \|g_1\|_{\mathbf{V}'} + C_3 \|g_2^n\|_{W'}, \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{(1 + C_{\Omega}^2)^{-1} + 4\tau_{n-1}^{-1} C(p^{n-1}) C_k}{c_k (1 + C_{\Omega}^2)^{-1}}, \quad C_2 = \frac{2C_k^{1/2}}{c_k^{1/2} (1 + C_{\Omega}^2)^{-1/2}}, \\ C_3 &= \frac{4C_k}{\tau_{n-1}^{-1} C(p^{n-1}) + 2(1 + C_{\Omega}^2)^{-1}}, \end{aligned}$$

où C_{Ω} est la constante de Poincaré.

Démonstration : La forme bilinéaire $a(.,.)$ est symétrique et continue sur $\mathbf{V} \times \mathbf{V}$

$$|a(\mathbf{u}, \psi)| = \left| \int_{\Omega} k(p^n) \mathbf{u} \cdot \psi dx \right| \leq C_k \|\mathbf{u}\|_{0,\Omega} \|\psi\|_{0,\Omega} \leq C_k \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{V}} \|\psi\|_{\mathbf{V}} \quad \forall (\mathbf{u}, \psi) \in \mathbf{V} \times \mathbf{V},$$

et elle est ker B-elliptique

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \int_{\Omega} k(p^n) \mathbf{u}^2 dx \geq c_k \int_{\Omega} \mathbf{u}^2 dx \geq c_k \|\mathbf{u}\|_{0,\Omega}^2 = c_k \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{V}}^2 \quad \forall \mathbf{u} \in \operatorname{ker} B. \quad (4.32)$$

La forme bilinéaire $d(.,.)$ est symétrique et continue sur $W \times W$

$$|d(p, \varphi)| = \left| \int_{\Omega} \frac{c(p^n)}{\tau_n} p \varphi dx \right| \leq \gamma_1 \|p\|_W \|\varphi\|_W \quad \forall (p, \varphi) \in W \times W,$$

avec $\gamma_1 = \frac{c_p}{\tau_n}$, et selon (4.11) elle est W -elliptique

$$d(\varphi, \varphi) = \int_{\Omega} \frac{c(p^n)}{\tau_n} \varphi^2 dx \geq \gamma_2 \|\varphi\|_W^2 \quad \forall \varphi \in W,$$

avec $\gamma_2 = \frac{c_p}{\tau_n}$.

La forme bilinéaire $b(.,.)$ est continue sur $\mathbf{V} \times W$

$$|b(\mathbf{u}, \varphi)| = \left| \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u} \varphi dx \right| \leq \left(\int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{u})^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} \varphi^2 dx \right)^{1/2} \leq \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{V}} \|\varphi\|_W \quad \forall (\mathbf{u}, \varphi) \in \mathbf{V} \times W.$$

De plus $b(.,.)$ satisfait la condition *inf-sup*

$$\exists \beta > 0; \quad \forall \varphi \in W, \quad \sup_{\mathbf{u} \in \mathbf{V}} \frac{b(\mathbf{u}, \varphi)}{\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{V}}} \geq \beta \|\varphi\|_W,$$

qui se démontre classiquement en utilisant le problème auxiliaire

$$\begin{cases} -\Delta \mathbf{v} = \varphi \text{ dans } \Omega, \\ \mathbf{v} = 0 \text{ sur } \Gamma_D, \\ \nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma_N \end{cases}$$

qui a une solution unique dans $v \in H^1(\Omega)$ par le Théorème de Lax-Milgram. On pose $\mathbf{u} = \nabla v$ alors $\operatorname{div} \mathbf{u} = \Delta v = -\varphi \in L^2(\Omega)$. Donc

$$\|\operatorname{div} \mathbf{u}\|_{0,\Omega} = \|\varphi\|_{0,\Omega}. \quad (4.33)$$

par ailleurs

$$\|\mathbf{u}\|_{0,\Omega}^2 = \|\nabla v\|_{0,\Omega}^2 \leq \|v\|_{0,\Omega} \|\varphi\|_{0,\Omega} \quad (4.34)$$

selon l'inégalité de Poincaré, $\exists C_{\Omega} > 0$ tel que

$$\|v\|_{0,\Omega} \leq C_{\Omega} \|\nabla v\|_{0,\Omega}.$$

Par conséquent (4.34) implique que

$$\|\nabla v\|_{0,\Omega} \leq C_{\Omega} \|\varphi\|_{0,\Omega}. \quad (4.35)$$

D'après (4.33)-(4.34)-(4.35), on déduit :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{V}}^2 &= \|\mathbf{u}\|_{0,\Omega}^2 + \|\operatorname{div} \mathbf{u}\|_{0,\Omega}^2 \\ &= \|\nabla v\|_{0,\Omega}^2 + \|\varphi\|_{0,\Omega}^2 \\ &\leq C_{\Omega}^2 \|\varphi\|_{0,\Omega}^2 + \|\varphi\|_{0,\Omega}^2 \\ &\leq (1 + C_{\Omega}^2) \|\varphi\|_W^2 \end{aligned}$$

cela signifie

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{V}} \leq C' \|\varphi\|_{\mathbf{W}} \quad \text{avec} \quad C' = \sqrt{1 + C_{\Omega}^2}$$

alors

$$\frac{b(\mathbf{u}, \varphi)}{\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{V}} \|\varphi\|_{\mathbf{W}}} = \frac{-\int_{\Omega} \varphi \operatorname{div} \mathbf{u} dx}{\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{V}} \|\varphi\|_{\mathbf{W}}} = \frac{\int_{\Omega} \varphi^2 dx}{\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{V}} \|\varphi\|_{\mathbf{W}}} = \frac{\|\varphi\|_{\mathbf{W}}^2}{\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{V}} \|\varphi\|_{\mathbf{W}}} = \frac{\|\varphi\|_{\mathbf{W}}}{\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{V}}} \geq \frac{1}{C'} = \beta$$

Donc $\exists \beta = \frac{1}{C'} > 0$ tel que

$$\forall \varphi \in \mathbf{W} \quad \sup_{\mathbf{u} \in \mathbf{V}} \frac{b(\mathbf{u}, \varphi)}{\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{V}}} \geq \beta \|\varphi\|_{\mathbf{W}}$$

la condition *inf* – *sup* est donc vérifiée.

Par conséquent, les hypothèses du théorème 4.3.2 données dans [29] sont vérifiées ce qui nous donne l'existence et l'unicité de la solution. \square

4.4 Discrétisation complète et analyse

4.4.1 Préliminaires

La méthode des éléments finis est considérée comme l'une des méthodes les plus efficaces pour la résolution numérique de nombreux problèmes pratiques et complexes, en particulier dans les domaines de la mécanique des fluides et la mécanique des solides. Cette méthode a connu sa première apparition pendant les années cinquante dans le domaine de la mécanique des structures avec une équipe de chercheurs de la compagnie aérienne [102].

Soit h un réel positif destiné à tendre vers 0, et $(\mathcal{T}_h)_h$ une famille de partition de Ω , formées par des triangles (en \mathbb{R}^2) ou bien des tétraèdres (en \mathbb{R}^3), telle que

- pour tout h , $\bar{\Omega}$ est l'union des éléments de \mathcal{T}_h

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} \bar{K}, \quad (4.36)$$

- pour tout K_i et K_j , deux éléments distincts de \mathcal{T}_h , l'intersection $K_i \cap K_j$ est soit l'ensemble vide ou un sommet, ou arête ou une face commune des ces deux éléments.

On note par $\{a_i\}$ les sommets des éléments de \mathcal{T}_h . La taille de maillage est caractérisée par

$$h = \max_{K \in \mathcal{T}_h} h_K$$

avec h_K est le diamètre de l'élément K défini par

$$h_k := \max_{a_i, a_j \in K} |a_i - a_j|$$

Définition 4.6 : Une triangulation \mathcal{T}_h de $\bar{\Omega}$ est dite régulière s'il existe $\sigma > 0$ indépendant de h et de K tel que

$$\sigma_K := \frac{h_K}{\rho_K} \leq \sigma \quad \forall K \in \mathcal{T}_h$$

où ρ_K est la rondeur de l'élément K , définie comme le supremum de l'ensemble formé par les diamètres de toutes les boules contenues dans l'élément K . Le rapport σ_K mesure l'aplatissement de l'élément K .

Définition 4.7 : La triangulation \mathcal{T}_h est dite uniformément régulière (ou quasi-uniforme) s'il existe deux constantes $\sigma > 0$ et $\sigma' > 0$ indépendantes de h et de K telles que

$$\sigma' h \leq h_K \leq \sigma \rho_K \quad \forall K \in \mathcal{T}_h.$$

Nous désignons par \mathcal{E}_h l'ensemble de toutes les arêtes de \mathcal{T}_h , et par \mathcal{E}_h^0 l'ensemble des arêtes qui sont à l'intérieur de Ω et par \mathcal{E}_h^Γ les arêtes sur le bord Γ . Pour tout $e \in \mathcal{E}_h$, m_e désigne le milieu de e , h_e sa longueur et \mathbf{n}_e la normale unitaire extérieure sur e . Nous notons respectivement par ν_s , ν_e et ν_K le nombre des sommets, le nombre des arêtes et le nombre des éléments de \mathcal{T}_h .

La méthode des éléments finis repose principalement sur la méthode de Galerkin qui consiste à remplacer les espaces de dimensions infinies W_i , où on cherche la solution exacte u_i , et V_i l'espace des fonctions tests, par des espaces de dimensions finies W_{ih} et V_{ih} , l'espace des solutions et l'espace des fonctions-tests respectivement.

Il existe deux grandes classes de type d'espace d'approximation pour approcher les espaces fonctionnels afin de passer d'une formulation variationnelle continu à une formulation discrète : les espaces d'approximation conformes et les espaces d'approximation non-conformes. Ce sont les premiers qui nous intéressent ici.

Soit $P_k(K)$ l'espace des polynômes à d variables de degrés $\leq k$ définis dans $K \subset \mathbb{R}^d$. Les espaces d'approximation conforme V_h pour approcher un espace fonctionnel V sont tels que $V_h \subset V$.

Pour approcher l'espace $H^1(\Omega)$, on utilise généralement les espaces basés sur les fonctions polynomiales par morceaux $P_k(K)$ pour $k \geq 1$ et $K \in \mathcal{T}_h$:

$$V_h^k := \{v_h \in C^0(\bar{\Omega}) \quad \text{tel que} \quad v_h|_K \in P_k(K), \quad \forall K \in \mathcal{T}_h\} \quad (4.37)$$

Les espaces d'approximation conformes les plus utilisés pour approcher $H(\text{div}, \Omega)$ sont les espaces de Raviart-Thomas (voir [32]), définis pour tout entier $k \geq 0$ par

$$\text{RT}_k(K) := (P_k(K))^d \oplus \mathbf{x}P_k(K), \quad \mathbf{x} \in K, \quad K \in \mathcal{T}_h \quad (4.38)$$

$$\text{RT}_k(\mathcal{T}_h) := \{\mathbf{v}_h \in H(\text{div}, \Omega) : \mathbf{v}_h|_K \in \text{RT}_k(K), \quad \forall K \in \mathcal{T}_h\} \quad (4.39)$$

Nous avons : $\dim(\text{RT}_k(K)) = (k+1)(k+3)$.

On pose aussi $P_h^0(\mathcal{T}_h) \subset L^2(\Omega)$ l'espace des fonctions scalaires, constantes par morceaux (sur chaque éléments de \mathcal{T}_h) :

$$P_h^0(\mathcal{T}_h) := \{v_h \in L^2(\Omega) : v_h|_K \in P_0(K), \forall K \in \mathcal{T}_h\}. \quad (4.40)$$

Nous rappelons aussi les opérateurs d'interpolation et de projection suivants.

— L'opérateur de projection $P_h : L^2(\Omega) \rightarrow P_h^0(\mathcal{T}_h)$ est défini par

$$\int_{\Omega} (P_h(q) - q)p = 0 \quad \forall p \in P_h^0(\mathcal{T}_h) \quad (4.41)$$

Nous avons les estimations suivantes [27] :

$$\|q - P_h q\|_{0,K} \leq \|q\|_{0,K}, \quad K \in \mathcal{T}_h, \quad \forall q \in L^2(K) \quad (4.42)$$

$$\|q - P_h q\|_{0,K} \leq C_{proj} h_K |q|_{1,K}, \quad K \in \mathcal{T}_h, \quad \forall q \in H^1(K) \quad (4.43)$$

— L'opérateur d'interpolation dans $H(\text{div})$ est défini dans un espace plus régulier $Z^s := H(\text{div}, \Omega) \cap L^s(\Omega)$, $s > 2$. $\Pi_h : Z^s \rightarrow \text{RT}_0(\mathcal{T}_h)$ est défini par

$$\int_{\partial T} (\mathbf{v} - \Pi_h \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} \varphi_0 ds = 0 \quad \forall \varphi_0 \in \mathbb{R}_0(\partial K) \quad (4.44)$$

où $\mathbb{R}_0(\partial K) := \{p \in L^2(\partial K) \text{ tel que } p|_{e_i} \in P_0(e_i) \quad \forall e_i \in \partial K\}$.

Nous avons le résultat suivant [29] :

Proposition 4.8

Soit $K \in \mathcal{T}_h$. Il existe une constante $c > 0$ qui dépend uniquement de la forme de K , telle que pour $s = 0$ ou $s = 1$ et pour tout \mathbf{v} dans $H^1(K)^d$, l'opérateur d'interpolation Π_h défini par (4.44) vérifie l'estimation

$$\|\mathbf{v} - \Pi_h \mathbf{v}\|_{s,K} \leq c h_K^{1-s} \|\mathbf{v}\|_{1,K}.$$

Les opérateurs P_h et Π_h vérifient les propriétés suivantes

$$\text{div}(\Pi_h \mathbf{v}) = P_h(\text{div} \mathbf{v}). \quad (4.45)$$

et le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} Z^s & \xrightarrow{\text{div}} & L^2(\Omega) \\ \downarrow \Pi_h & & \downarrow P_h \\ \text{RT}_0(\mathcal{T}_h) & \xrightarrow{\text{div}} & P_0(\mathcal{T}_h). \end{array}$$

4.4.2 Discrétisation complète du système (S1)

Pour donner une approximation spatiale du problème (4.19) - (4.22) nous choisissons

$$Z_h = V_h^1$$

où V_h^1 est défini par (4.37). Le problème discret associé se lit comme : trouver $\mathbf{U}_h^1 \in Z_h$ tel que

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} [\tau_0^{-1} \mathbf{I}_3 - \mathbf{J}_{\mathbf{F}^1}(\mathbf{U}^0)] \cdot \mathbf{U}_h^1 \cdot \mathbf{v} dx + \int_{\Omega} \overline{\overline{\mathbf{D}}} \cdot \nabla \mathbf{U}_h^1 \cdot \nabla \mathbf{v} dx = \\ & \int_{\Omega} [\tau_0^{-1} \mathbf{U}^0 + \mathbf{F}^1(\mathbf{U}^0) - \mathbf{J}_{\mathbf{F}^1}(\mathbf{U}^0) \cdot \mathbf{U}^0] \cdot \mathbf{v} dx \quad \forall \mathbf{v} \in Z_h, \end{aligned} \quad (4.46)$$

et pour tout $n \geq 1$, trouvez $\mathbf{U}_h^{n+1} \in Z_h$ telle que

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left[\frac{3}{2\tau_n} \mathbf{I}_3 - \mathbf{J}_{\mathbf{F}^1}(\mathbf{U}_h^n) \right] \cdot \mathbf{U}_h^{n+1} \cdot \mathbf{v} dx + \int_{\Omega} \overline{\overline{\mathbf{D}}} \cdot \nabla \mathbf{U}_h^{n+1} \cdot \nabla \mathbf{v} dx = \\ & \int_{\Omega} \left[\frac{4\mathbf{U}^n - \mathbf{U}^{n-1}}{2\tau_n} + \mathbf{F}^1(\mathbf{U}^n) - \mathbf{J}_{\mathbf{F}^1}(\mathbf{U}^n) \cdot \mathbf{U}^n \right] \cdot \mathbf{v} dx \quad \forall \mathbf{v} \in Z_h. \end{aligned} \quad (4.47)$$

D'autre part, nous recherchons $\mathbf{G}_h^{m+1} = (u_{4h}^{m+1}, u_{5h}^{m+1})^T$, $\forall m, 0 \leq m \leq n$, tel que

$$\frac{u_{4h}^{m+1} - u_{4h}^m}{\tau_m} = (1 - f_1) K_h u_{1h}^{n+1} + (1 - f_2) \frac{1 - Y}{Y} \left(\frac{u_{2h}^{m+1} - u_{2h}^m}{\tau_m} + K_d u_{2h}^{m+1} \right), \quad (4.48)$$

$$\frac{u_{5h}^{m+1} - u_{5h}^m}{\tau_m} = f_2 \frac{1 - Y}{Y} \left(\frac{u_{2h}^{m+1} - u_{2h}^m}{\tau_m} + K_d u_{2h}^{m+1} \right). \quad (4.49)$$

Remarque 4.9 En pratique, nous choisissons $m = n$ dans notre simulation numérique pour résoudre en une seule étape le problème discret. Néanmoins, nous écrivons sous cette forme générale car elle peut convenir à certaines applications pour avoir deux grilles temporelles pour la partie ODEs et le terme de réaction-diffusion.

4.4.3 Discrétisation complète du système (S2)

Considérons les espace discrets définis par

$$\mathbf{V}_h = \left\{ \mathbf{v}_h \in \text{RT}_0(\mathcal{T}_h) \quad \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_N} = 0 \right\}, \quad (4.50)$$

$$W_h := P_h^0(\mathcal{T}_h), \quad (4.51)$$

où $\text{RT}_0(\mathcal{T}_h)$ est défini dans (4.39), et $P_h^0(\mathcal{T}_h)$ dans (4.40).

L'approximation par la méthode des éléments finis mixtes de (4.26) est la suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } (\mathbf{u}_h^{n+1}, p_h^{n+1}) \in \mathbf{V}_h \times W_h \text{ tel que} \\ a(\mathbf{u}_h^{n+1}, \psi_h) + b(\psi_h, p_h^{n+1}) = g_1(\psi_h) \quad \forall \psi_h \in \mathbf{V}_h \\ b(\mathbf{u}_h^{n+1}, \varphi_h) - d(p_h^{n+1}, \varphi_h) = g_2(\varphi_h) \quad \forall \varphi_h \in W_h \end{array} \right. \quad (4.52)$$

avec les formes linéaires et bilinéaires a, b, d, g_1 et g_2 sont données respectivement par (4.27)-(4.28)-(4.29)-(4.30)-(4.31).

Proposition 4.10

Le problème (4.52) admet une solution unique.

Démonstration : D'une manière similaire au cas continu, nous considérons l'opérateur $B_h : \mathbf{V}_h \rightarrow W'_h$ défini par :

$$b(\mathbf{v}_h, \varphi_h) = \langle B_h \mathbf{v}_h, \varphi_h \rangle_{W'_h \times W_h} \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h, \forall \varphi_h \in W_h$$

et nous introduisons le noyau de $\text{Ker} B_h$:

$$\text{Ker} B_h = \{ \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h, \forall \varphi_h \in W_h, b(\mathbf{v}_h, \varphi_h) = 0 \}.$$

Soit P_h l'opérateur de projection de W dans W_h , pour tout $\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h$ et $q \in W$ il existe $q_h = P_h q \in W_h$ et

$$b(\mathbf{v}_h, q_h - P_h q) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \text{div } \mathbf{v}_h (q_h - P_h q) dx = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \text{div } \mathbf{v}_h \int_T (q_h - P_h q) dx = 0.$$

En utilisant la proposition 2.3 donnée dans [32], nous avons dans ce cas $\text{Ker} B_h \subset \text{Ker} B$, alors $a(\cdot, \cdot)$ est uniformément $(\text{Ker} B_h)$ -elliptique : il existe une constante α_0 indépendante de h tel que

$$a(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h) \geq \alpha_0 \|\mathbf{u}_h\|_{\mathbf{V}}^2 \quad \forall \mathbf{u}_h \in \text{Ker} B_h. \quad (4.53)$$

Nous introduisons aussi l'opérateur de Raviart-Thomas $\Pi_h : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}_h$ qui satisfait la condition de bornitude (voir [32], [53])

$$\exists C_1 > 0, \quad \|\Pi_h(\mathbf{v})\|_{\text{H}(\text{div}, \Omega)} \leq C_1 \|\mathbf{v}\|_{\text{H}(\text{div}, \Omega)} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}. \quad (4.54)$$

En outre, pour tout $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ et $q_h \in W_h$

$$\begin{aligned} b(\mathbf{v} - \Pi_h \mathbf{v}, q_h) &= - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T q_h \text{div}(\mathbf{v} - \Pi_h \mathbf{v}) dx \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left(\int_T \nabla q_h (\mathbf{v} - \Pi_h \mathbf{v}) - \int_{\partial T} q_h (\mathbf{v} - \Pi_h \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} d\sigma \right) \\ &= - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial T} q_h (\mathbf{v} - \Pi_h \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} d\sigma = 0. \end{aligned} \quad (4.55)$$

Par application de lemme de Fortin (voir [32]) et d'après (4.54) et (4.55), la forme bilinéaire $b(\cdot, \cdot)$ satisfait la condition inf-sup discrète : il existe une constante $\beta > 0$ indépendante de h tel que

$$\inf_{v_h \in \mathbf{V}_h} \sup_{w_h \in W_h} \frac{b(v_h, w_h)}{\|v_h\|_V \|w_h\|_W} \geq \beta$$

Nous déduisons l'existence et l'unicité de la solution de problème (4.26) grâce au théorème donné dans [29] (voir aussi page 572 dans [93]) □

Nous allons donner maintenant une estimation de l'erreur *a priori*. Pour alléger les notations, nous allons omettre l'indice n dans (4.26) et (4.52).

Proposition 4.11

Soient (\mathbf{u}, p) et (\mathbf{u}_h, p_h) dénotent les solutions des problèmes (4.26) et (4.52) respectivement. Nous supposons que $\mathbf{u} \in (H^2(\Omega))^2$ et $p \in H^1(\Omega)$, alors il existe une constante $\mathbf{C} > 0$ indépendante de h qui satisfait l'estimation suivante

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_V + \|p - p_h\|_W \leq \mathbf{C}h \left(\|\mathbf{u}\|_{1,\Omega} + |\operatorname{div} \mathbf{u}|_{1,\Omega} + |p|_{1,\Omega} \right) \quad (4.56)$$

Démonstration : Pour tout $\tilde{\mathbf{u}}_h \in \mathbf{V}_h$ et $\tilde{p}_h \in W_h$, et d'après le théorème 5.5.1 dans [29], nous avons

$$\|\mathbf{u}_h - \tilde{\mathbf{u}}_h\|_V + \|p_h - \tilde{p}_h\|_W \leq C_1 \sup \{C_2, C_3, C_4, C_5\} (\|\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}_h\|_V + \|p - \tilde{p}_h\|_W) \quad (4.57)$$

avec

$$\begin{aligned} C_1 &:= (2C_k + 4 + 4\gamma_1), & \mu^2 &:= C_k\gamma_1 + \beta^2, \\ C_2 &:= \frac{\gamma_1}{\beta^2} + \frac{\gamma_1 C_k^{1/2}}{(\alpha_0)^{1/2}\beta^2} + \frac{2\mu}{\beta^2} + \frac{2\mu\gamma_1^{1/2}}{\gamma_2^{1/2}\beta^2}, \\ C_3 &:= \frac{2\mu\gamma_1^{1/2}}{(\alpha_0)^{1/2}\beta^2} + \frac{2\mu^2}{\alpha_0\beta^2} + \frac{3\mu^2}{\gamma_2^{1/2}(\alpha_0)^{1/2}\beta^2} + \frac{3\mu^2\|a\|^{1/2}}{(\alpha_0)^{1/2}\beta^2}, \\ C_4 &:= \frac{2\mu}{\beta^2} + \frac{2\mu C_k^{1/2}}{(\alpha_0)^{1/2}\beta^2} + \frac{C_k}{\beta^2} + \frac{C_k\gamma_1^{1/2}}{\gamma_2^{1/2}\beta^2}, \\ C_5 &:= \frac{3\mu^2\gamma_1^{1/2}}{\gamma_2^{1/2}\beta^2} + \frac{3\mu^2}{\gamma_2^{1/2}(\alpha_0)^{1/2}\beta^2} + \frac{2\mu C_k^{1/2}}{\gamma_2^{1/2}\beta^2} + \frac{2\mu^2}{\gamma_2\beta^2}, \end{aligned}$$

et en utilisant l'inégalité triangulaire, on a

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_V + \|p - p_h\|_W \leq \|\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}_h\|_V + \|\mathbf{u}_h - \tilde{\mathbf{u}}_h\|_V + \|p - \tilde{p}_h\|_W + \|p_h - \tilde{p}_h\|_W. \quad (4.58)$$

A partir de (4.57) et (4.58), on obtient

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_V + \|p - p_h\|_W \leq \mathbf{C} \left(\inf_{v_h \in \mathbf{V}_h} \|\mathbf{u} - v_h\|_V + \inf_{q_h \in W_h} \|p - q_h\|_W \right).$$

avec $\mathbf{C} = (1 + C_1 \sup \{C_2, C_3, C_4, C_5\})$.

En utilisant les interpolations des opérateurs de Raviart-Thomas Π_h et d'opérateur P_h de projection orthogonal L^2 ([56], [32]), il existe une constante $\xi > 0$ indépendante de h tel que

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{\mathbf{V}} + \|p - p_h\|_{\mathbf{W}} \leq \mathbf{C}\xi h \left(\|\mathbf{u}\|_{1,\Omega} + |\operatorname{div} \mathbf{u}|_{1,\Omega} + |p|_{1,\Omega} \right).$$

Nous posons $\tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\xi$ et on obtient l'estimation (4.56). \square

SYSTÈME LINÉAIRE

Soient N_t et N_E le nombre des triangles et des arêtes de \mathcal{T}_h , respectivement. Notons par N_ν le nombre des arêtes de T_h liés à Γ_N et posons $N_e := N_E - N_\nu$. Soient $\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{N_e}\}$ et $\{\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_{N_t}\}$ les bases canoniques correspondantes des espaces discrets \mathbf{V}_h et $W_{1,h}$, respectivement.

Le problème d'approximation (4.52) est donc réécrit sous la forme suivante

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } \mathbf{U}^{n+1} = (\mathbf{u}_j^{n+1})_{1 \leq j \leq N_e} \in \mathbb{R}^{N_e} \text{ et } \mathbf{P}^{n+1} := (p_j^{n+1})_{1 \leq j \leq N_t} \in \mathbb{R}^{N_t} \text{ tel que,} \\ \sum_{j=1}^{N_e} a(\sigma_j, \sigma_I) \mathbf{u}_j^{n+1} + \sum_{j=1}^{N_t} b(\sigma_I, \zeta_j) p_j^{n+1} = g_1(\sigma_I) \quad \forall I \in \{1, \dots, N_e\} \\ \sum_{j=1}^{N_e} b(\sigma_j, \zeta_L) \mathbf{u}_j^{n+1} - \sum_{j=1}^{N_t} d(\zeta_j, \zeta_L) p_j^{n+1} = g_2(\zeta_L) \quad \forall L \in \{1, \dots, N_t\}, \end{array} \right.$$

ou sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}^t \\ \mathbf{B} & -\mathbf{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U}^{n+1} \\ \mathbf{P}^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{G}_1 \\ \mathbf{G}_2 \end{pmatrix}$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{LI} &= b(\sigma_I, \zeta_L) \quad \forall I \in \{1, \dots, N_e\}, \quad \forall L \in \{1, \dots, N_t\}, \\ \mathbf{A}_{IJ} &= a(\sigma_J, \sigma_I) \quad \forall I, J \in \{1, \dots, N_e\}, \\ \mathbf{D}_{LJ} &= d(\zeta_J, \zeta_L) \quad \forall J, L \in \{1, \dots, N_t\}, \\ \mathbf{G}_{1I} &= g_1(\sigma_I) \quad \forall I \in \{1, \dots, N_e\}, \\ \mathbf{G}_{2L} &= g_2(\zeta_L) \quad \forall L \in \{1, \dots, N_t\}. \end{aligned}$$

4.5 Résultats numériques

Dans cette section, nous présentons différents résultats numériques en 2D et 3D. Nous rappelons qu'à chaque pas de temps, le système (S₁) est approché par (4.46) - (4.49), et sa solution donne le terme source dans le système d'écoulement (S₂), approché par (4.52). (voir ci-dessous l'organigramme de résolution 4.15 avec "(S1)=(4.1)" et "(S2)=(4.2)").

4.5.1 Le cas 2D

Dans ce cas, nous nous concentrons sur le système (S₁) pour effectuer différents tests de comparaison avec la littérature. Dans les expériences suivantes, nous prenons $\Omega =]0, L[\times]0, L[, L > 0$, avec $L = 10m$, $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$. $\Gamma_D = \{(x, z), z = 0\}$ (on rappelle que z est l'axe vertical dirigé vers le bas).

Toutes les valeurs des différentes constantes utilisées dans les simulations sont prises de la littérature de la spécialité concernée et correspondent à une collecte de données réelles.

Les paramètres utilisés pour la biodégradation sont donnés dans le TABLEAU 4.1 comme dans [94] et [11] et les paramètres du milieu poreux sont donnés dans le TABLEAU 4.2 comme dans [78] et [11]. De plus, nous fixons $\alpha = 0.9$.

Dans notre modèle, nous utilisons également la loi de Haldane et nous définissons $K_I = 10$ comme dans [83]. A partir des mêmes références, nous prenons les conditions initiales données dans TABLEAU 4.3. Les conditions aux limites du système de biodégradation sont toutes des conditions de Neumann homogènes (voir (2.19)). Les conditions aux limites et initiales du système de flux sont données dans le TABLEAU 4.4.

On peut trouver, dans la littérature (voir par exemple les références [42, 43, 58, 82]), différentes valeurs des coefficients de diffusion, mais il faut signaler que la diffusion des bactéries méthanogènes est généralement supérieure à celle du substrat.

On rappelle qu'à chaque pas de temps, le système (S₁) est approché par (4.46)-(4.49), et sa solution donne le terme source dans le système de l'écoulement (S₂), approché par (4.52).

TABLEAU 4.1 – Paramètres de la biodégradation

$K_H(d^{-1})$	$\mu_m(d^{-1})$	f_1	f_2	$K_S(mgC/L)$	$K_d(d^{-1})$	Y
0.176	0.3	0.7	0.76	160	0.04	0.05
$M_b(g/mol)$	$M_{H_2O}(g/mol)$	A_m	$C_{Tb}(m^3/Kg)$	$K_I(mgC/L)$	α	
30	18.01	0.8	0.178	10	0.9	

TABLEAU 4.2 – Paramètres du milieu poreux

θ_r	θ_s	$k_i(m.s^{-1})$	$\rho(Kg.m^{-3})$	$p_a(m)$	b	$\mu_l(Kg.m^{-1}.s^{-1})$
0.27	0.9715	10^{-4}	991.5	-0.0323	2.5	$4.61027 \cdot 10^{-4}$

Nous comparons d'abord les résultats numériques obtenus avec le système réaction-diffusion (S₁) et ceux obtenus dans [94] et dans [83]. Par la suite, nous utilisons différentes valeurs des coefficients de diffusion afin de montrer l'effet sur la solution finale.

4.5 Résultats numériques

TABLEAU 4.3 – Conditions initiales du système de biodégradation

X_0 (mgC/L)	S_0 (mgC/L)	$[\text{CO}_2]_0$ (mgC/L)	$[\text{CH}_4]_0$ (mgC/L)
1751	0	0	0

TABLEAU 4.4 – Conditions initiales et aux limites du système d'écoulement

$p_0(m)$ in Ω	$p_D(m)$ on Γ_D	$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$ on Γ_N
-0.7	-0.1020	0

Le maillage utilisé dans les simulations en 2D est quasi-uniforme avec 952 triangles et 517 sommets (voir la FIGURE 4.1)

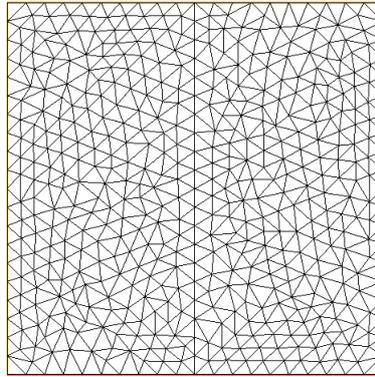


FIGURE 4.1 – Le maillage de domaine dans la cas 2D.

Vérification du modèle

Nous notons la matrice de diffusion par la matrice diagonale

$$\bar{\bar{D}}_{val} = \text{diag}(D_X, D_S, D_B),$$

avec

$$D_X = 10^{-9} m^2/d,$$

$$D_S = 10^{-6} m^2/d$$

$$D_B = 10^{-4} m^2/d.$$

Avec $B_0 = 2$ et la loi de Monod, les résultats de la résolution du système (4.1) sont donnés dans la FIGURE 4.2 qui représente l'évolution dans le temps des valeurs moyennes des variables du système. Nous remarquons que les résultats sont similaires à ceux obtenus expérimentalement dans la littérature pour (S1) sans diffusion (voir [94] (page 190, FIGURE 49).

Après ce test de validation, nous considérons une suite de résolutions du système (4.1) avec différentes valeurs de la condition initiale X_0 (proche d'une valeur seuil $X_{0,c} \approx 470$)

réalisées avec la loi de Haldane et $B_0 = 2$. La FIGURE 4.3 montre l'évolution des concentrations moyennes du biogaz en fonction du temps pour ces différentes valeurs de X_0 . Nous remarquons une bonne production de biogaz pour les valeurs des conditions initiales de X_0 qui sont inférieures à $X_{0,c}$. Nous retrouvons ainsi numériquement, les phénomènes que nous avons observé dans le chapitre précédent (voir 3.4.2) et qui concernaient le système EDO (sans diffusion), à savoir l'existence d'une condition initiale X_0 critique. En outre, la FIGURE 4.4 montre la variation de la valeur maximale de la concentration en biogaz en fonction de X_0 . Nous observons, de même que dans le CHAPITRE 3 (voir [83]) que la courbe est croissante pour les valeurs des conditions initiales inférieures à la valeur seuil $X_{0,c}$, puis décroissante pour les valeurs des conditions initiales supérieures à $X_{0,c}$, avec une discontinuité au niveau de la valeur seuil. La diffusion ajoutée au système EDO n'a pas changé qualitativement la dynamique attendue. Nous remarquons également que dans le cas des EDPs (voir FIGURE 4.4), avec la valeur du taux de mortalité $K_d = 0.02$, la valeur de la condition initiale critique $X_{0,c}$ obtenue est environ 475. Cependant que dans le cas de l'EDO (voir FIGURE 3.11), avec le même valeur du taux de mortalité $K_d = 0.02$, nous avons obtenu une valeur de la condition initiale critique $X_{0,c}$ environ 345. Nous notons que la loi de Haldane est généralement considérée comme plus réaliste et donne des prédictions plus précises sur le production de biogaz. (la fonction Monod peut être vue comme un cas particulier pour les grandes valeurs du paramètre K_I , voir la FIGURE 3.1).

En s'inspirant également des résultats obtenus dans le cas d'analyse du système des EDO dans CHAPITRE 3, la FIGURE 4.5 montre l'effet du taux de mortalité K_d sur la valeur seuil $X_{0,c}$ du système d'EDPs (S1). Nous remarquons que plus que K_d est petit, plus que la valeur critique de la condition initiale $X_{0,c}$ est grande.

Dans le but de voir l'effet de la variation des coefficients de diffusion sur la valeur seuil $X_{0,c}$, nous considérons les coefficients suivants $\{ D_X = 10^{-10} + \varepsilon, D_S = 10^{-6} + \varepsilon, D_B = 10^{-4} + \varepsilon \}$ avec $\varepsilon \in [0, 10]$. Nous procédons d'une manière analogue à l'Algorithme 3.21. Pour cela nous résolvons le système (S1) et nous considérons S^* comme étant la valeur moyenne de S dans tout le domaine pour des grandes valeurs du temps. La valeur seuil $X_{0,c}$ obtenue reste inchangée et elle est environ 474. Cependant, nous allons montrer dans la suite que la variation des coefficients de diffusion joue un rôle important sur l'évolution des concentrations des quantités dans le domaine.

Effet des paramètres de diffusion sur la production de biogaz

Dans les prochains tests, nous utilisons et comparons différentes valeurs de la matrice de diffusion ($\bar{D}_i, i = 2, 3, 4$) et leur impact sur la solution du système réaction-diffusion. Nous considérons les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} \bar{D}_2 &= \text{diag}(D_X, D_S, D_B), \quad \text{avec} \quad D_X = 10^{-9}, \quad D_S = 10^{-5}, \quad D_B = 10^{-4} \\ \bar{D}_3 &= \text{diag}(D_X, D_S, D_B), \quad \text{avec} \quad D_X = 10^{-8}, \quad D_S = 10^{-3}, \quad D_B = 10^{-2} \\ \bar{D}_4 &= \text{diag}(D_X, D_S, D_B), \quad \text{avec} \quad D_X = 10^{-7}, \quad D_S = 0.01, \quad D_B = 0.1 \end{aligned}$$

4.5 Résultats numériques

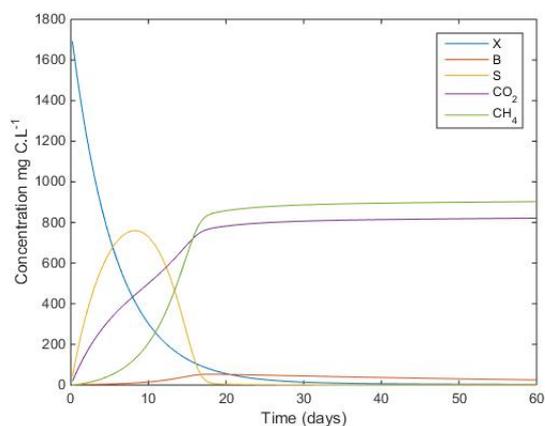


FIGURE 4.2 – Evolution des concentrations moyennes des variables de (S1) en utilisant la loi de Monod et la diffusion \bar{D}_{val} et $B_0 = 2$, $X_0 = 1751$, $\alpha = 1$

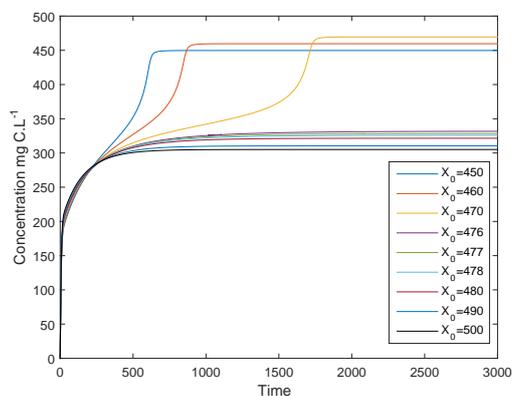


FIGURE 4.3 – Evolution de la concentration moyenne du biogaz en fonction du temps (en jour) en utilisant la loi de Haldane avec $B_0 = 2$, $K_I = 10$ et la diffusion \bar{D}_{val} pour différentes valeurs de X_0

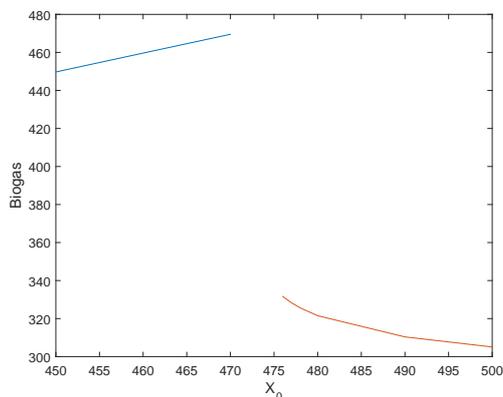


FIGURE 4.4 – Production de biogaz (en mgC / L) en fonction de X_0 (en mgC / L) en utilisant la loi de Haldane avec $K_I = 100$, $B_0 = 2$, $K_d = 0.02$ et la diffusion \bar{D}_{val}

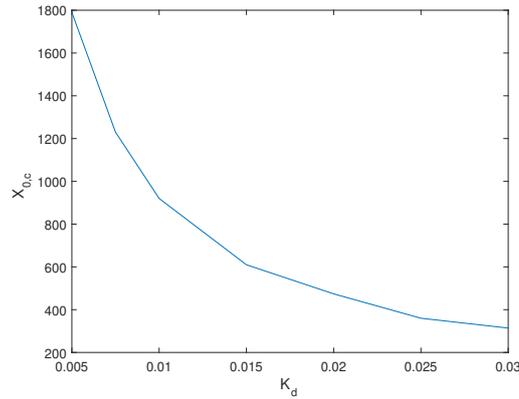


FIGURE 4.5 – Le seuil de $X_{0,c}$ en fonction de K_d en utilisant la loi de Haldane et la diffusion \bar{D}_{val}

$$\bar{D}_2 = \text{diag}(D_X, D_S, D_B),$$

et nous considérons la condition initiale sur B comme suit :

$$B_0(x, z) = \begin{cases} 0 & \text{in } \Sigma_1 := \{0 \leq x \leq L/2 \text{ and } 0 \leq z \leq L/2\}, \\ 2 & \text{in } \Sigma_2 := \{L/2 \leq x \leq L \text{ and } 0 \leq z \leq L/2\}, \\ 5 & \text{in } \Sigma_3 := \{0 \leq x \leq L \text{ and } L/2 < z < L\}. \end{cases}$$

Dans le TABLEAU 4.5, on observe que les valeurs des coefficients de diffusion ont un effet négligeable sur les valeurs moyennes de la production de biogaz.

La FIGURE 4.6 et la FIGURE 4.7 montrent que le manque de bactéries méthanogènes dans une zone donnée (i.e. $B_0 = 0$ dans Σ_1), n’induit aucune production de biogaz en Σ_1 et donne une transition nette entre les Σ_i pour $i = 1, 2, 3$ dans le cas de non diffusion, alors qu’avec la diffusion supplémentaire, la transition devient plus grande et la production de biogaz s’étend au domaine entier.

TABLEAU 4.5 – Evolution de la quantité moyenne de méthane (en mgC/L) en utilisant différentes valeurs de diffusion avec la loi de Haldane.

Diffusion \bar{D}_i	0.5 jour	1 jour	1.5 jour	2 jours
\bar{D}_0 (sans terme de diffusion)	1.6065	4.48873	7.8938	11.5530
\bar{D}_2	1.6065	4.48873	7.8938	11.5530
\bar{D}_3	1.6066	4.4890	7.8943	11.5533
\bar{D}_4	1.6068	4.4900	7.8957	11.5547

4.5.2 Le cas 3D

Dans les tests suivants, nous considérons le système entier (S_1) – (S_2) dans un cadre 3D. Le domaine s’écrit alors comme suit : $\Omega =]0, L[\times]0, L[\times]0, L[$, $L = 10$. $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$ et

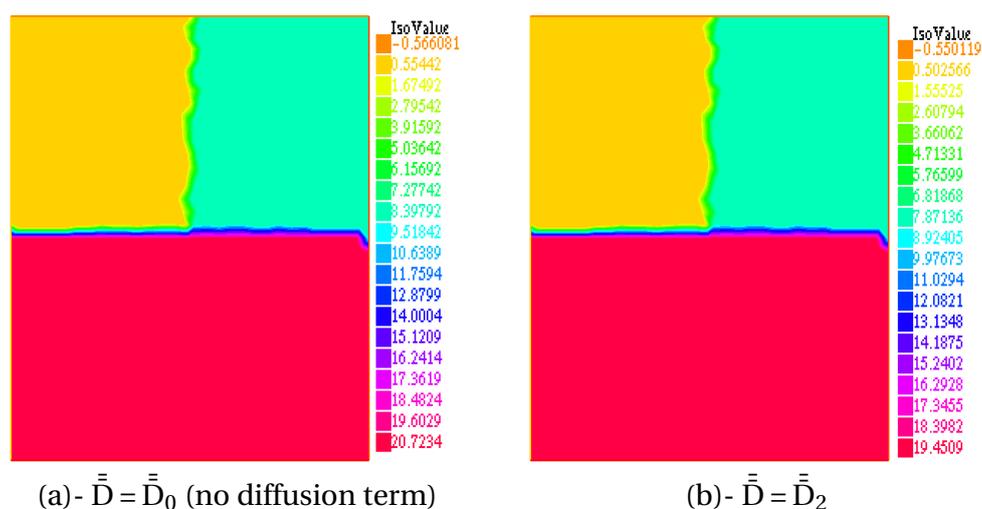


FIGURE 4.6 – La production de méthane (en mgC / L) après 2 jours en utilisant la loi de Haldane sans diffusion dans (a) et avec diffusion \bar{D}_2 dans (b).

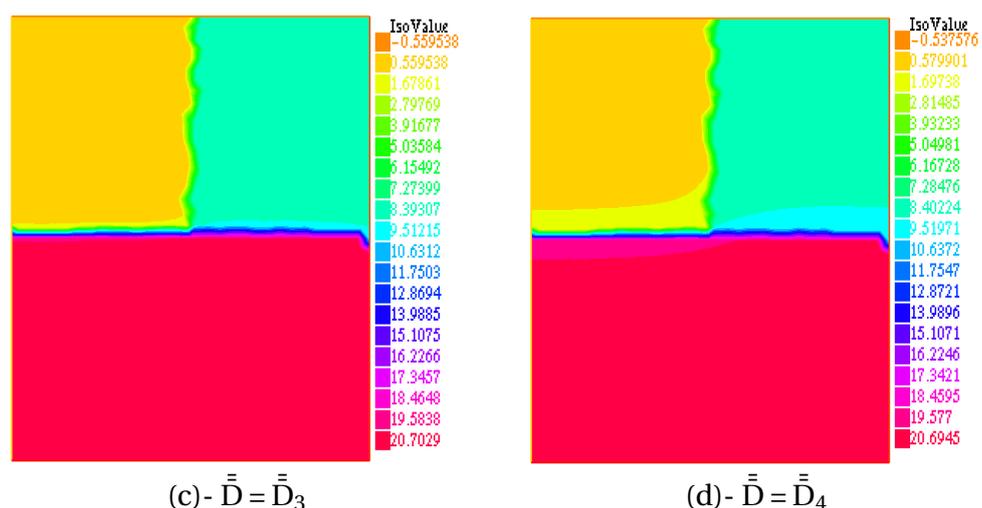


FIGURE 4.7 – La production de méthane (en mgC / L) après 2 jours en utilisant la loi de Haldane avec diffusion \bar{D}_3 dans (c) et \bar{D}_4 dans (d).

$\Gamma_D = \{(x, y) \in]0, L[\times]0, L[\text{ et } z = 0\}$. Tous les paramètres du modèle sont les mêmes que dans les exemples 2D précédents et sont donnés dans TABLEAU 4.1, TABLEAU 4.2, TABLEAU 4.3 et TABLEAU 4.4.

Le maillage utilisé dans les simulations en 3D est donné dans la FIGURE 4.8 et contient 600 tétraèdres, 1331 sommets et 1200 arêtes (faces).

Nous commençons par vérifier que l'introduction de la diffusion améliore à la fois la modélisation et la précision numérique. En particulier, elle a la capacité d'inclure la nature non homogène du milieu poreux et de gérer des conditions initiales discontinues.

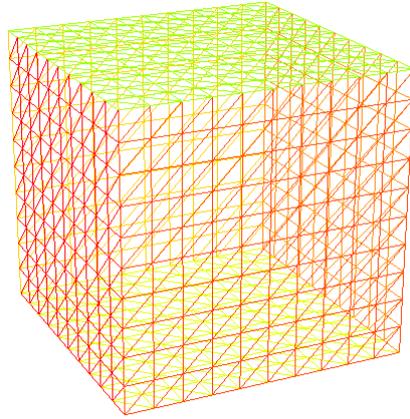


FIGURE 4.8 – Le maillage de domaine dans la cas 3D (600 tétraèdres, 1331 sommets et 1200 arêtes (faces)).

Comparaison entre la diffusion partielle $\bar{\bar{D}}$ et la diffusion complète $\bar{\bar{D}}^c$.

Dans ce test, nous comparons le cas de la diffusion partielle avec le cas de la diffusion complète. Nous rappelons que la diffusion partielle désigne le cas où les termes de diffusion sont introduits uniquement pour les variables X, B et S, et la diffusion complète quand ils sont introduits aussi pour $[\text{CO}_2]$ et $[\text{CH}_4]$. Nous notons

$$\bar{\bar{D}}_5 = \text{diag}(D_X, D_S, D_B),$$

et prenons

$$D_X = 10^{-9} m^2 / d,$$

$$D_S = 10^{-5} m^2 / d$$

$$D_B = 10^{-4} m^2 / d.$$

et

$$\bar{\bar{D}}_5^c = \text{diag}(D_X, D_S, D_B, D_{\text{CO}_2}, D_{\text{CH}_4}),$$

avec

$$D_X = 10^{-9} m^2 / d,$$

$$D_S = 10^{-5} m^2 / d$$

$$D_B = 10^{-4} m^2 / d.$$

$$D_{\text{CO}_2} = 10^{-3} m^2 / d$$

$$D_{\text{CH}_4} = 10^{-3} m^2 / d.$$

Dans la FIGURE 4.9 (cas 2D) et la FIGURE 4.10 (cas 3D), nous remarquons que la concentration de CH_4 est plus régulière (effet régularisant), mais sa valeur moyenne n'augmente pas. De plus, comme prévu, le temps CPU est plus petit avec la diffusion partielle, (7,605 s en 2D et 71 s en 3D), qu'avec la diffusion complète (8,7 s en 2D, et 103 s en 3D). Par conséquent, la diffusion partielle semble un choix plus approprié (au moins dans les calculs 3D).

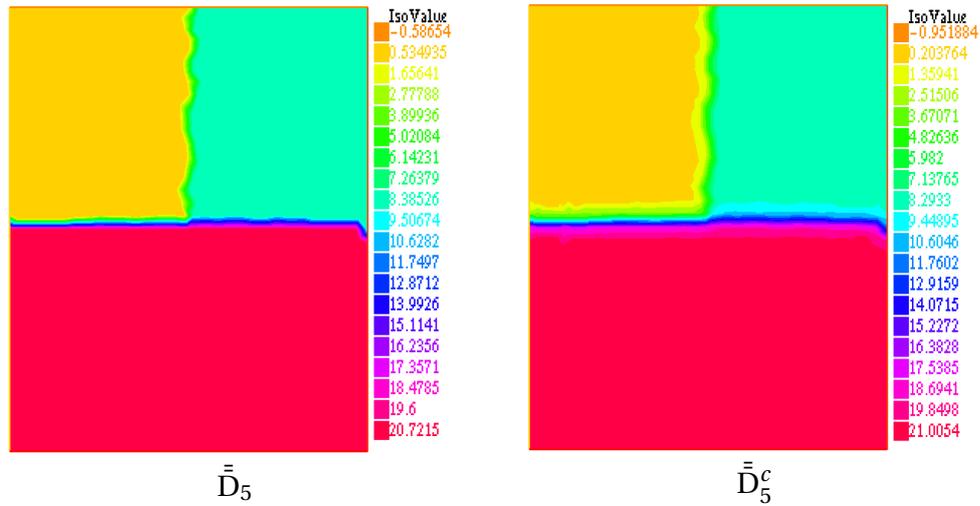


FIGURE 4.9 – La production de méthane (en mgC/L) après 2 jours en utilisant la loi de Haldane avec \bar{D}_5 et \bar{D}_5^c en 2D.

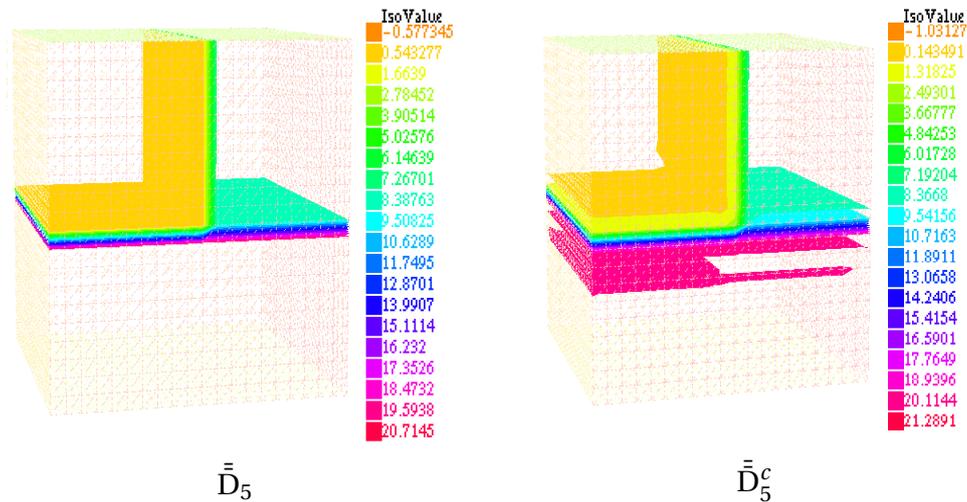


FIGURE 4.10 – La production de méthane (en mgC/L) après 2 jours en utilisant la loi de Haldane avec \bar{D}_5 et \bar{D}_5^c en 3D.

Solution du problème complet (S1)-(S2)

Nous passons maintenant à la présentation de la solution du système complet (S1)-(S2). Nous considérons la loi de Haldane et \bar{D}_3 comme composantes de la matrice de diffusion et nous posons la condition initiale B_0 comme suit :

$$B_0(x, y, z) = \begin{cases} 1 & \text{dans } \{0 \leq x \leq L/2, 0 \leq y \leq L \text{ et } 0 \leq z \leq L/2\}, \\ 2 & \text{dans } \{L/2 \leq x \leq L, 0 \leq y \leq L \text{ et } 0 \leq z \leq L/2\}, \\ 3 & \text{dans } \{0 \leq x \leq L, 0 < y < L \text{ et } L/2 \leq z < L\}. \end{cases}$$

Les simulations de cette sous-section sont tracées dans le logiciel gratuit de visualisation de Kitware (Paraview).

Les figures FIGURE 4.11, FIGURE 4.12, FIGURE 4.13 et FIGURE 4.14 montrent respectivement la production de biogaz, le champ de vitesse du flux de Darcy, le potentiel de pression et la teneur en eau (via la fonction $\theta(p)$). Nous remarquons qu'après 2 jours il y a une zone de stagnation du lixiviat (la phase liquide) au fond de Ω , indiquant que le milieu est saturé et donc il n'y aura plus de production de biogaz en ces parties de Ω (on rappelle que le taux d'humidité ω se situe entre ω_1 et ω_2).

Il s'ensuit que la libération du lixiviat stagné de la décharge pourrait améliorer la production de biogaz qui pourra être traitée de manière plus précise avec une approche de contrôle optimale. Cela suggère également d'étudier plus en profondeur le rôle du taux d'humidité ω (voir Figure (2.6)) dans la modélisation.

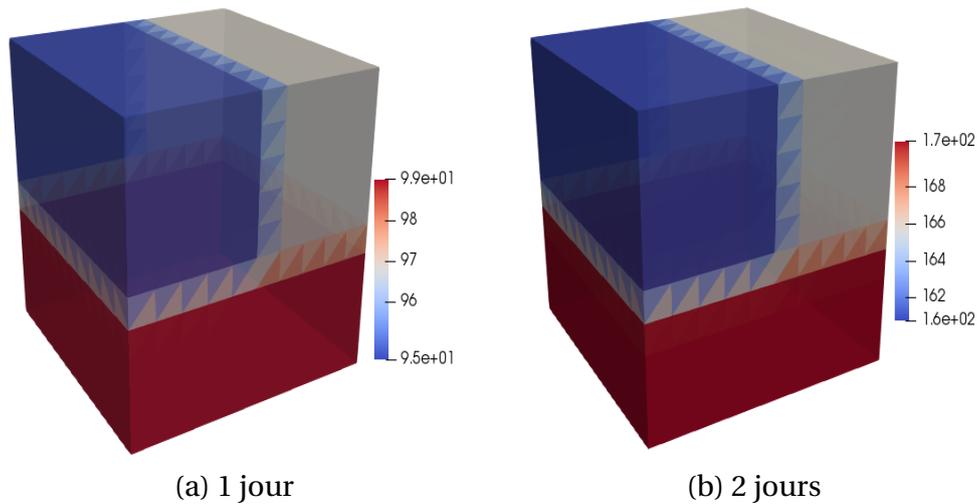


FIGURE 4.11 – Evolution de la production de biogaz (mgC/L) avec \bar{D}_3 et la loi de Haldane

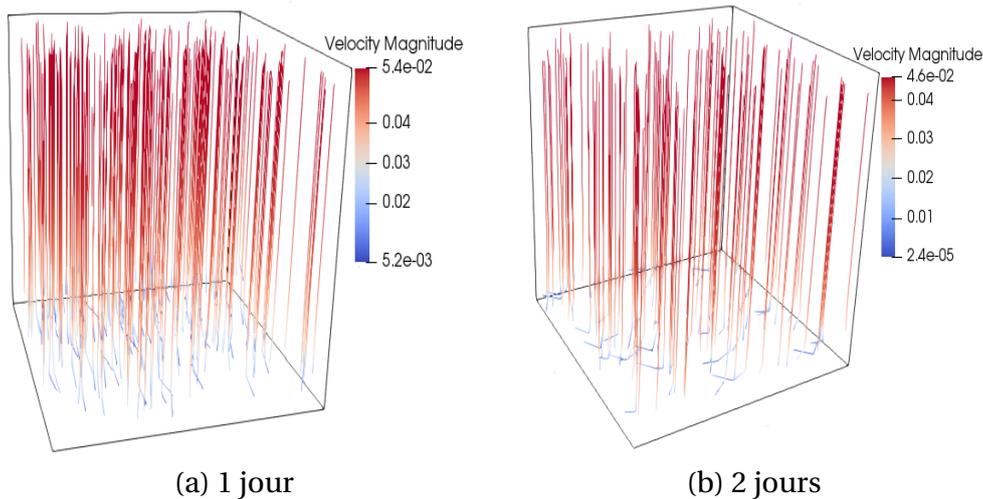


FIGURE 4.12 – La vitesse du lixiviat (m/d) avec \bar{D}_3 et la loi de Haldane

Ces simulations suggèrent que la libération du lixiviat qui stagne au fond du domaine et l'injection d'eau dans la décharge amélioreraient la production de biogaz. Cette question doit motiver deux perspectives :

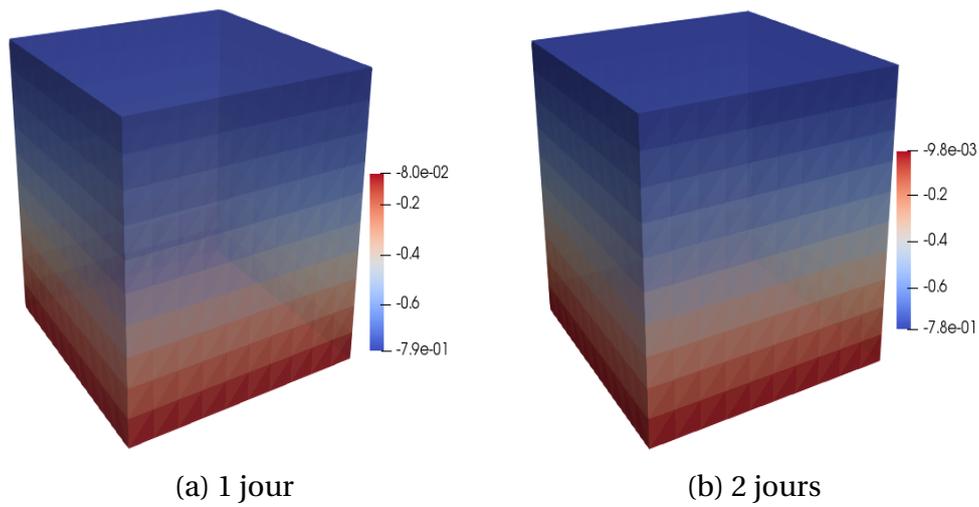


FIGURE 4.13 – Evolution du potentiel de pression p (m) avec \bar{D}_3 et la loi de Haldane

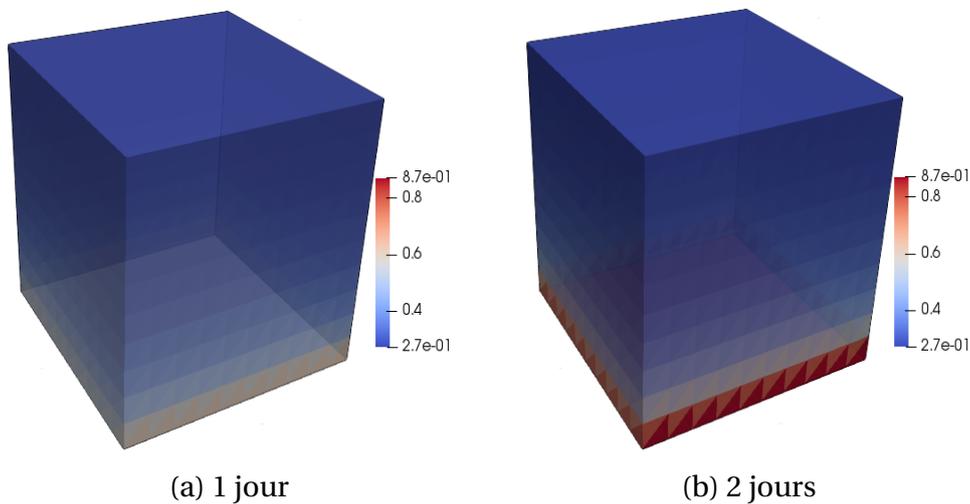


FIGURE 4.14 – La teneur en eau θ en utilisant la loi de Haldane avec \bar{D}_3 .

- Premièrement, étudier d'une manière plus précise le rôle de l'humidité, en tant qu'approche de contrôle optimale, pour optimiser la production de biogaz. Notons que ω n'est défini que par des considérations empiriques dans les modèles standards et aucune considération théorique ne fait valoir son influence, sa forme, etc (Voir [11], [55]).
- Deuxièmement, considérer d'autres conditions aux limites pour modéliser les flux entrants/sortants des fluides lixiviats et biogaz.

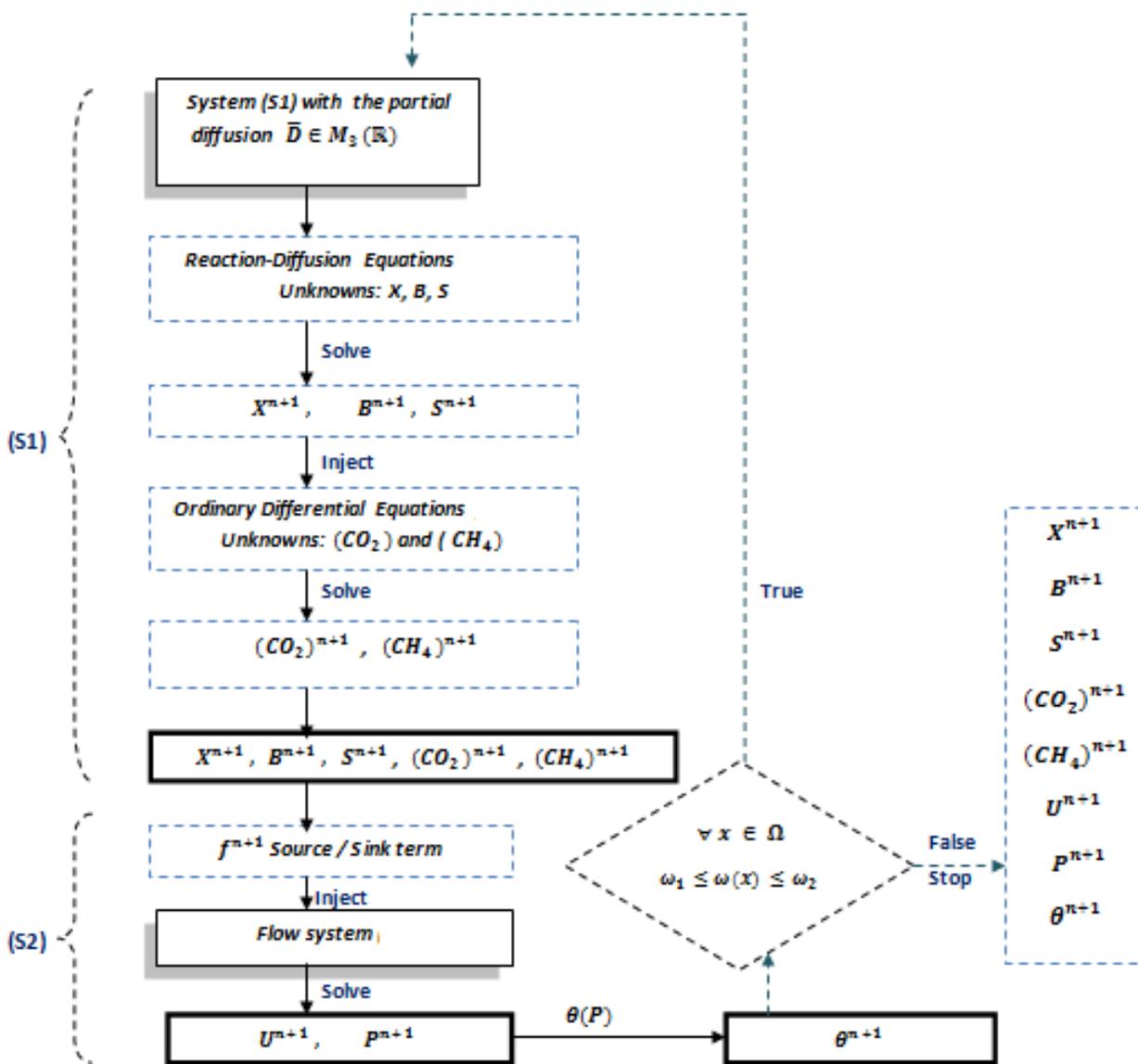


FIGURE 4.15 – Organigramme de résolution du système complet (S1)-(S2)

DESCRIPTION DE SCHÉMA DE RÉOLUTION DU SYSTÈME COMPLET :

Avant de présenter le schéma de résolution de système complet, nous rappelons que notre modèle est noté par "(S1)=(4.1)" couplé avec "(S2)=(4.2)", dont (S1) est le sous système qui décrit l'aspect biologique donné par des équations de réaction-diffusion de variables X, B et S et des équations différentielles ordinaire de variables $([CO_2]$ et $[CH_4]$). En outre (S2) est les sous-système d'écoulement du lixiviat de type Darcy dont les inconnus sont la vitesse et le potentiel de pression du lixiviat.

La description du schéma de résolution du système complet est le suivant (voir l'organigramme 4.15). Nous commençons par résoudre les équations de réactions-diffusion

afin de calculer les variables X , B et S à l'instant t^{n+1} puis nous les injectons dans les équations différentielles pour calculer $[\text{CO}_2]$ et $[\text{CH}_4]$ à t^{n+1} (à l'état initiale : $t^n = t^0$ et $t^{n+1} = t^1$). Ainsi une fois les variables de (S1) calculées, nous déterminons la valeur du terme source f^{n+1} . L'étape suivante consiste à résoudre les équations de l'écoulement pour déterminer la vitesse \mathbf{u}^{n+1} et le potentiel de pression du lixiviat p^{n+1} . Par ailleurs, pour résoudre le système à l'instant suivant, i.e. à t^{n+2} , nous devons faire un test sur la condition de l'humidité pour savoir si elle satisfait la condition de production du biogaz ou non (voir la FIGURE 2.6). Pour cela et grâce à la relation entre la teneur en eau et le potentiel de pression (voir (2.34)), nous déterminons la valeur de θ^{n+1} . On réitère ce processus jusqu'à arriver à une valeur de la teneur en eau qui ne satisfait pas la condition de production du biogaz. A cet instant là, et comme nous l'avons présenté à la fin de CHAPITRE 2, il y a différents scénarios possibles pour améliorer la situation de production du biogaz, comme par exemple le changement des conditions aux limites pour les flux entrants et sortants ou bien le changement de domaine d'étude en s'intéressant au sous domaine où la condition de l'humidité est productive.

4.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons considéré un nouveau modèle décrivant l'activité bactérienne dans une décharge des déchets ménagers, considérée comme un milieu poreux insaturé et non homogène, représenté par un système d'équations (EDP) de type réaction-diffusion, couplées avec le système d'écoulement de Darcy. Nous avons montré l'existence et l'unicité de la solution du problème complet. Ensuite, nous avons effectué l'analyse des systèmes discrets avec la méthode des éléments finis et les schémas en temps d'ordre élevé. Nous avons obtenu l'existence et l'unicité de la solution ainsi que l'estimation d'erreur *a priori* pour le problème discret. Enfin, nous avons réalisé plusieurs simulations numériques en 2D et 3D qui sont en accord avec la théorie et la littérature existante. Ces résultats numériques nous ont permis, en particulier, de constater que l'introduction de la diffusion supplémentaire dans la dynamique bactérienne améliore le modèle et renforce la précision du couplage avec l'écoulement du milieu poreux. Les schémas BDF2 pour l'approximation en temps et la méthode éléments finis mixtes pour l'approximation en espace utilisés dans ces calculs, constituent une méthode numérique très efficace pour résoudre un tel problème complexe. Les résultats numériques montrent le rôle de l'humidité dans la production de biogaz et suggèrent comme perspective d'étudier son impact dans une démarche de contrôle et d'optimisation pour laquelle notre modèle est particulièrement bien adapté. Dans le prochain chapitre, nous allons étendre cette approche à un écoulement biphasique où la phase gazeuse est incluse dans le modèle.

Chapitre 5

Etude d'un model d'écoulement biphasique compressible

Sommaire

5.1 Introduction	111
5.2 Formulation variationnelle et semi-discrétisation	113
5.2.1 Semi-discrétisation en temps et formulation variationnelle du système de biodégradation (M1)	113
5.2.2 Semi-discrétisation en temps et formulation variationnelle du système de l'écoulement (M2)	114
5.3 Discrétisation complète du problème	115
5.3.1 Discrétisation complète du système de biodégradation (M1) . .	116
5.3.2 Discrétisation complète du système de l'écoulement (M2) . . .	116
5.4 Résultats numériques	117
5.5 Conclusion	127

5.1 Introduction

Le modèle (2.92)-(2.94) introduit au CHAPITRE 2 est un modèle d'écoulement biphasique compressible lixiviat-biogaz décrivant les phénomènes physiques et biologiques de la dégradation des déchets pendant le processus anaérobie pour la production de biogaz. Il est formé de deux sous-système : (2.92) qui est un système de réaction-diffusion décrivant la dynamique bactérienne et (2.94) constitué des équations d'écoulement biphasique compressible lixiviat-biogaz. Comme pour le cas mono-phasique, les inconnues du premier système sont les concentrations de la matière organique X, des bactéries méthanogènes B, de la matière organique soluble S, du dioxyde de carbone [CO₂] et du méthane [CH₄]. Les inconnues du deuxième système sont la hauteur capillaire h_c et la hauteur en colonne de biogaz h_b .

Dans ce chapitre, nous utilisons le schéma en temps d'ordre élevé BDF2 et la linéarisation par la méthode de Newton pour le système de réaction diffusion afin d'obtenir plus de précision aussi bien pour la solution du système que pour le terme source du système d'écoulement biphasique. Nous donnons une formulation variationnelle du problème complet semi-discrétisé en temps, qui est approchée par une méthode d'éléments finis. Nous présentons des simulations numériques 2D et 3D. L'implémentation est basée sur le logiciel open source FreeFem ++ et Paraview pour la visualisation des figures 3D.

Nous rappelons que le modèle mathématique décrivant la dégradation anaérobie de la matière organique et l'écoulement biphasique lixiviat-biogaz pour la production de biogaz est formé de deux systèmes faiblement couplés qui peuvent se présenter de deux manières différentes.

(i) **Cas où les vitesses u_l et u_b sont éliminées :**

$$(M1) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} - \operatorname{div}(\overline{\overline{\mathbf{D}}} \cdot \nabla \mathbf{U}) = \mathbf{F}^1(\mathbf{U}) & \text{dans } \Omega \times]0, T[, \\ \frac{d\mathbf{G}}{dt} = \mathbf{F}^2(\mathbf{U}) & \text{dans } \Omega \times]0, T[, \\ \overline{\overline{\mathbf{D}}} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{n}} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times]0, T[, \\ \mathbf{U}(0, \cdot) = \mathbf{U}^0(\cdot), \quad \mathbf{G}(0, \cdot) = \mathbf{G}^0(\cdot) & \text{dans } \Omega, \end{array} \right. \quad (5.1)$$

et

$$(M2) \left\{ \begin{array}{ll} C_l(h_c) \frac{\partial h_c}{\partial t} - \operatorname{div}(k_l(\theta_l(h_c))(\nabla h_b - \nabla h_c - e_z)) = \alpha_l \rho_l^{-1} & \text{dans } \Omega \times]0, T[, \\ A_1(h_c) \frac{\partial h_b}{\partial t} - A_2(h_c, h_b) \frac{\partial h_c}{\partial t} - \operatorname{div}(\rho_b(h_b) k_b(\theta_l)(\nabla h_b - \frac{\rho_b(h_b)}{\rho_l} e_z)) = \alpha_b & \text{dans } \Omega \times]0, T[, \\ h_l = h_{l,D} \quad \text{et} \quad h_b = h_{b,D} & \text{sur } \Gamma_D \times]0, T[, \\ k_l(\theta_l(h_c))(\nabla h_b - \nabla h_c - e_z) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{et} \quad k_b(\theta_l(h_c))(\nabla h_b - \frac{\rho_b}{\rho_l} e_z) \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \Gamma_N \times]0, T[, \\ h_c(0, x) = h_{c,0}(x) \quad \text{et} \quad h_b(0, x) = h_{b,0}(x) & \text{dans } \Omega \end{array} \right. \quad (5.2)$$

(ii) **Cas où les vitesses \mathbf{u}_l et \mathbf{u}_b sont gardées comme inconnues :**

Le modèle s'obtient en couplant le système de réaction-diffusion (5.1) avec le système d'écoulement compressible (5.3) qu'on réécrit ici par commodité :

$$(M3) \left\{ \begin{array}{ll} C_l(h_c) \frac{\partial h_c}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{u}_l) = \rho_l^{-1} \alpha_l & \text{dans } \Omega \times]0, T[, \\ \bar{k}_l(h_c) \mathbf{u}_l = \nabla h_c - \nabla h_b + e_z & \text{dans } \Omega \times]0, T[, \\ A_1(h_c) \frac{\partial h_b}{\partial t} - A_2(h_c, h_b) \frac{\partial h_c}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_b \mathbf{u}_b) = \alpha_b & \text{dans } \Omega \times]0, T[, \\ \bar{k}_b(h_c) \mathbf{u}_b = -\nabla h_b + c_1 h_b e_z + c_2 e_z & \text{dans } \Omega \times]0, T[, \\ h_c = h_{c,D} \quad \text{et} \quad h_b = h_{b,D} & \text{sur } \Gamma_D \times]0, T[, \\ \mathbf{u}_l \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{u}_b \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \Gamma_N \times]0, T[, \\ h_c(0, x) = h_{c,0}(x) \quad \text{et} \quad h_b(0, x) = h_{b,0}(x) & \text{dans } \Omega \end{array} \right. \quad (5.3)$$

Dans les deux cas, comme nous l'avons signalé, le système d'écoulement biphasique compressible et le système de la biologie sont faiblement couplés. Alors, puisque nous nous intéressons en particulier à l'évolution de la teneur en eau et son impact sur la production du biogaz, nous allons considérer le modèle (5.1)-(5.2). Cependant, nous donnerons dans l'Annexe la discrétisation complète du sous-système d'écoulement biphasique (5.3).

5.2 Formulation variationnelle et semi-discrétisation

5.2.1 Semi-discrétisation en temps et formulation variationnelle du système de biodégradation (M1)

Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et $0 = t^0 < t^1 < \dots < t^N = T$ une partition de $[0, T]$. Posons $\tau_n = t^{n+1} - t^n$, $n = 0, \dots, N$. Dans ce qui suit, nous notons g^n la valeur d'une fonction g à l'instant t_n .

SEMI-DISCRÉTISATION EN TEMPS

Le schéma de semi-discrétisation du système (5.1) considéré ici est le schéma BDF2 pour les variables (X, S, B) et le schéma d'Euler implicite pour les EDOs en $([CO_2], [CH_4])$. Le problème se lit comme suit : trouver \mathbf{U}^{n+1} pour tout $n \geq 1$ tel que

$$\frac{3\mathbf{U}^{n+1} - 4\mathbf{U}^n + \mathbf{U}^{n-1}}{2\tau_n} - \operatorname{div}(\bar{\bar{D}} \cdot \nabla \mathbf{U}^{n+1}) = \mathbf{F}^1(\mathbf{U}^{n+1}), \quad (5.4)$$

où les valeurs initiales sont calculées comme suit : trouver $\mathbf{U}(t^1)$ tel que

$$\frac{\mathbf{U}^1 - \mathbf{U}^0}{\tau_0} - \operatorname{div}(\bar{\bar{D}} \cdot \nabla \mathbf{U}^1) = \mathbf{F}^1(\mathbf{U}^1). \quad (5.5)$$

LINÉARISATION

Les équations non linéaires (5.5) et (5.4) prennent respectivement la forme

$$\mathbf{N}_a(\mathbf{U}^1) = 0, \quad (5.6)$$

$$\mathbf{N}_b(\mathbf{U}^{n+1}) = 0, \quad \forall n \geq 1, \quad (5.7)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_a(\mathbf{U}^1) &= \frac{\mathbf{U}^1 - \mathbf{U}^0}{\tau_0} - \operatorname{div}(\bar{\bar{D}} \cdot \nabla \mathbf{U}^1) - \mathbf{F}^1(\mathbf{U}^1), \\ \mathbf{N}_b(\mathbf{U}^{n+1}) &= \frac{3\mathbf{U}^{n+1} - 4\mathbf{U}^n + \mathbf{U}^{n-1}}{2\tau_n} - \operatorname{div}(\bar{\bar{D}} \cdot \nabla \mathbf{U}^{n+1}) - \mathbf{F}^1(\mathbf{U}^{n+1}). \end{aligned}$$

Nous linéarisons (5.6)-(5.7) en utilisant la méthode de Newton [40]. Soit J_a et J_b respectivement les matrices jacobienes de \mathbf{N}_a et \mathbf{N}_b , donc pour la première équation (5.6)

$$\text{Posons : } \mathbf{Y}_a^0 = \mathbf{U}^0 \quad \text{Itération : } \mathbf{Y}_a^k = \mathbf{Y}_a^{k-1} + \mathbf{W}_a^k, \quad k = 1, 2, \dots,$$

où \mathbf{W}_a^k est la solution du système

$$J_a(\mathbf{Y}_a^{k-1})\mathbf{W}_a^k = -\mathbf{N}_a(\mathbf{Y}_a^{k-1}). \quad (5.8)$$

Une linéarisation analogue est considérée pour la deuxième équation (5.7) :

$$\text{Posons : } \mathbf{Y}_b^0 = \mathbf{U}^n \quad \text{Itération : } \mathbf{Y}_b^k = \mathbf{Y}_b^{k-1} + \mathbf{W}_b^k, \quad k = 1, 2, \dots,$$

où \mathbf{W}_b^k est la solution du le système

$$J_b(\mathbf{Y}_b^{k-1})\mathbf{W}_b^k = -\mathbf{N}_b(\mathbf{Y}_b^{k-1}). \quad (5.9)$$

FORMULATION VARIATIONNELLE

En utilisant la formule de Green, la formulation faible de (5.8) consiste à chercher $\mathbf{W}_a^k \in Z := (\mathbf{H}^1(\Omega))^3$ tel que

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{W}_a^k, \mathbf{v} \rangle + \tau_0^{-1} \langle \overline{\overline{\mathbf{D}}} \cdot \nabla \mathbf{W}_a^k, \nabla \mathbf{v} \rangle - \tau_0^{-1} \langle J_{F^1}(\mathbf{Y}_a^{k-1}) \cdot \mathbf{W}_a^k, \mathbf{v} \rangle &= -\langle \mathbf{Y}_a^{k-1}, \mathbf{v} \rangle, \\ -\tau_0^{-1} \langle \overline{\overline{\mathbf{D}}} \cdot \nabla \mathbf{Y}_a^{k-1}, \nabla \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{F}^1(\mathbf{Y}_a^{k-1}), \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{U}^0, \mathbf{v} \rangle &\quad \forall \mathbf{v} \in Z. \end{aligned} \quad (5.10)$$

où J_{F^1} est la matrice jacobienne de \mathbf{F}^1 .

L'équation (5.10) nous permet de trouver $\mathbf{U}^1 \in Z$, en trouvant \mathbf{Y}_a^k à la fin des itérations.

Dans le même processus, pour rechercher $\mathbf{U}^{n+1} \in Z$ pour tout $n \geq 1$, on cherche \mathbf{Y}_b^k à la fin des itérations. Ce qui consiste à trouver $\mathbf{W}_b^k \in Z$ dans la formulation faible suivante de (5.9)

$$\begin{aligned} \langle \frac{3}{2\tau_n} \mathbf{W}_b^k, \mathbf{v} \rangle + \langle \overline{\overline{\mathbf{D}}} \cdot \nabla \mathbf{W}_b^k, \nabla \mathbf{v} \rangle - \langle J_{F^1}(\mathbf{Y}_b^{k-1}) \cdot \mathbf{W}_b^k, \mathbf{v} \rangle &= -\langle \mathbf{Y}_b^{k-1}, \mathbf{v} \rangle, \\ -\langle \overline{\overline{\mathbf{D}}} \cdot \nabla \mathbf{Y}_b^{k-1}, \nabla \mathbf{v} \rangle + \langle \frac{4\mathbf{U}^n - \mathbf{U}^{n-1}}{2\tau_n}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{F}^1(\mathbf{Y}_b^{k-1}), \mathbf{v} \rangle &\quad \forall \mathbf{v} \in Z. \end{aligned} \quad (5.11)$$

D'autre part, en utilisant la Remarque 2.2, l'approximation de \mathbf{G} à l'instant $t = t_{m+1}$: $\mathbf{G}^{m+1} = (u_4^{m+1}, u_5^{m+1})^T$, pour $0 \leq m \leq n$, est donnée par

$$\frac{u_4^{m+1} - u_4^m}{\tau_m} = (1 - f_1)K_h u_1^{n+1} + (1 - f_2) \frac{1 - Y}{Y} \left(\frac{u_2^{m+1} - u_2^m}{\tau_m} + K_d u_2^{m+1} \right), \quad (5.12)$$

$$\frac{u_5^{m+1} - u_5^m}{\tau_m} = f_2 \frac{1 - Y}{Y} \left(\frac{u_2^{m+1} - u_2^m}{\tau_m} + K_d u_2^{m+1} \right). \quad (5.13)$$

5.2.2 Semi-discrétisation en temps et formulation variationnelle du système de l'écoulement (M2)

La semi discrétisation en temps et linéarisation du système d'écoulement (5.2) est réalisée dans le schéma implicite et s'écrit comme suit

$$C_l(h_c^n) \frac{h_c^{n+1} - h_c^n}{\tau_n} - \operatorname{div} (k_l(h_c^n) (\nabla h_b^{n+1} - \nabla h_c^{n+1} - e_z)) = \rho_l^{-1} \alpha_l^{n+1} \quad \text{dans } \Omega \quad (5.14)$$

$$A_1(h_c^n) \frac{h_b^{n+1} - h_b^n}{\tau_n} - A_2(h_c^n, h_b^n) \frac{h_c^{n+1} - h_c^n}{\tau_n} - \operatorname{div} \left(\rho_b(h_b^n) k_b(h_c^n) (\nabla h_b^{n+1} - \frac{\rho_b(h_b^n)}{\rho_l} e_z) \right) = \alpha_b^{n+1} \quad \text{dans } \Omega \quad (5.15)$$

5.3 Discrétisation complète du problème

où les inconnues h_c^{n+1} et h_b^{n+1} sont les approximations de $h_c(t_{n+1})$ et $h_b(t_{n+1})$ telles que les conditions initiales sont $h_c(0, x) = h_{c,0}(x)$ et $h_b(0, x) = h_{b,0}(x)$ dans Ω et les conditions aux limites sont

$$h_c^{n+1} = h_{c,D} \quad \text{et} \quad h_b^{n+1} = h_{b,D} \quad \text{sur } \Gamma_D, \quad (5.16)$$

$$k_l(h_c^n)(\nabla h_b^{n+1} - \nabla h_c^{n+1} - e_z) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_N, \quad (5.17)$$

$$k_b(h_c^n)(\nabla h_b^{n+1} - \frac{\rho_b(h_b^n)}{\rho_l} e_z) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_N. \quad (5.18)$$

Nous introduisons l'espace fonctionnel suivant

$$H_1 = \{ \mathbf{v} \in H^1(\Omega), \quad \mathbf{v} = 0 \text{ sur } \Gamma_D \}, \quad (5.19)$$

La formulation faible de (5.14)-(5.15) avec les conditions (5.16)-(5.17)-(5.18) s'écrit comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } h_c^{n+1} \in h_{c,D} + H_1 \text{ et } h_b^{n+1} \in h_{b,D} + H_1 \text{ tel que} \\ \int_{\Omega} C_l(h_c^n) \frac{h_c^{n+1}}{\tau_n} \psi dx + \int_{\Omega} k_l(h_c^n) (\nabla h_b^{n+1} - \nabla h_c^{n+1} - e_z) \cdot \nabla \psi dx \\ = \int_{\Omega} \rho^{-1} \alpha_l^{n+1} \psi dx + \int_{\Omega} C_l(h_c^n) \frac{h_c^n}{\tau_n} \psi dx, \quad \forall \psi \in H^1(\Omega) \\ \int_{\Omega} A_1(h_c^n) \frac{h_b^{n+1}}{\tau_n} \varphi dx - \int_{\Omega} A_2(h_c^n, h_b^n) \frac{h_c^{n+1}}{\tau_n} \varphi dx + \int_{\Omega} \rho_b(h_b^n) k_b(h_c^n) (\nabla h_b^{n+1} - \frac{\rho_b(h_b^n)}{\rho_l} e_z) \cdot \nabla \varphi dx \\ = \int_{\Omega} \alpha_b^{n+1} \varphi dx + \int_{\Omega} A_1(h_c^n) \frac{h_b^n}{\tau_n} \varphi dx + \int_{\Omega} A_2(h_c^n, h_b^n) \frac{h_c^n}{\tau_n} \varphi dx \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega) \end{array} \right. \quad (5.20)$$

5.3 Discrétisation complète du problème

Nous supposons que Ω est un domaine polygonal de \mathbb{R}^d . Soit \mathcal{T}_h une partition de $\bar{\Omega}$ en triangles T (en \mathbb{R}^2) ou en tétraèdres (en \mathbb{R}^3) et nous désignons par $P_k(O)$ l'espace des fonctions polynomiales définies dans un sous-ensemble O de \mathbb{R}^d de degré total au plus k. Afin de définir la discrétisation complète du problème (5.1) - (5.2), nous introduisons les espaces de dimension finie suivants :

$$Z_h = \{ \mathbf{v}_h \in (C(\bar{\Omega}))^3 ; \forall T \in \mathcal{T}_h \quad \mathbf{v}_h|_T \in (P_1(T))^3 \}, \quad (5.21)$$

$$H_{0,h} = \{ \mathbf{v}_h \in C(\bar{\Omega}); \forall T \in \mathcal{T}_h \quad \mathbf{v}_h|_T \in P_1(T) \}, \quad (5.22)$$

et

$$H_{1,h} = \{ \mathbf{v}_h \in C(\bar{\Omega}); \forall T \in \mathcal{T}_h \quad \mathbf{v}_h|_T \in P_1(T), \quad \mathbf{v}_h|_{\Gamma_D} = 0 \}. \quad (5.23)$$

5.3.1 Discrétisation complète du système de biodégradation (M1)

Nous discrétisons les équations (5.10)-(5.11) via la méthode des éléments finis dans l'espace de dimension finie Z_h . Le problème consiste dans un premier temps à trouver $\mathbf{W}_{ah}^k \in Z_h$ tel que

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{W}_{ah}^k, \mathbf{v}_h \rangle + \tau_0^{-1} \langle \overline{\overline{\mathbf{D}}} \cdot \nabla \mathbf{W}_{ah}^k, \nabla \mathbf{v}_h \rangle - \tau_0^{-1} \langle \mathbf{J}_{\mathbf{F}^1}(\mathbf{Y}_{ah}^{k-1}) \cdot \mathbf{W}_{ah}^k, \mathbf{v}_h \rangle = - \langle \mathbf{Y}_{ah}^{k-1}, \mathbf{v}_h \rangle \\ - \tau_0^{-1} \langle \overline{\overline{\mathbf{D}}} \cdot \nabla \mathbf{Y}_{ah}^{k-1}, \nabla \mathbf{v}_h \rangle + \langle \mathbf{F}^1(\mathbf{Y}_{ah}^{k-1}), \mathbf{v}_h \rangle + \langle \mathbf{U}^0, \mathbf{v}_h \rangle \quad \forall \mathbf{v}_h \in Z_h \end{aligned} \quad (5.24)$$

et pour tout $n \geq 1$, nous cherchons $\mathbf{W}_{bh}^k \in Z_h$ tels que

$$\begin{aligned} \langle \frac{3}{2\tau_n} \mathbf{W}_{bh}^k, \mathbf{v}_h \rangle + \langle \overline{\overline{\mathbf{D}}} \cdot \nabla \mathbf{W}_{bh}^k, \nabla \mathbf{v}_h \rangle - \langle \mathbf{J}_{\mathbf{F}^1}(\mathbf{Y}_{bh}^{k-1}) \cdot \mathbf{W}_{bh}^k, \mathbf{v}_h \rangle = - \langle \mathbf{Y}_{bh}^{k-1}, \mathbf{v}_h \rangle \\ - \langle \overline{\overline{\mathbf{D}}} \cdot \nabla \mathbf{Y}_{bh}^{k-1}, \nabla \mathbf{v}_h \rangle + \langle \frac{4\mathbf{U}^n - \mathbf{U}^{n-1}}{2\tau_n}, \mathbf{v}_h \rangle + \langle \mathbf{F}^1(\mathbf{Y}_{bh}^{k-1}), \mathbf{v}_h \rangle \quad \forall \mathbf{v}_h \in Z_h \end{aligned} \quad (5.25)$$

Le schéma numérique consiste à définir un très petit réel positif ϵ_a et ϵ_b et nous arrêtons la boucle lorsque la norme de \mathbf{W}_{ah}^k et \mathbf{W}_{bh}^k sont respectivement plus petits que ϵ_a et ϵ_b .

D'autre part, concernant la deuxième équation de système (5.1) qui représente la partie des EDOs, nous cherchons $\mathbf{G}_h^{m+1} = (u_{4h}^{m+1}, u_{5h}^{m+1})^T$, $\forall m, 0 \leq m \leq n$, tels que

$$\frac{u_{4h}^{m+1} - u_{4h}^m}{\tau_m} = (1 - f_1)K_h u_{1h}^{n+1} + (1 - f_2) \frac{1 - Y}{Y} \left(\frac{u_{2h}^{m+1} - u_{2h}^m}{\tau_m} + K_d u_{2h}^{m+1} \right), \quad (5.26)$$

$$\frac{u_{5h}^{m+1} - u_{5h}^m}{\tau_m} = f_2 \frac{1 - Y}{Y} \left(\frac{u_{2h}^{m+1} - u_{2h}^m}{\tau_m} + K_d u_{2h}^{m+1} \right). \quad (5.27)$$

5.3.2 Discrétisation complète du système de l'écoulement (M2)

Nous discrétisons le système (5.20) via la méthode des éléments finis. Le schéma consiste à

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } h_{ch}^{n+1} \in h_{c,D} + H_{1,h} \text{ et } h_{bh}^{n+1} \in h_{b,D} + H_{1,h} \text{ tel que} \\ \int_{\Omega} C_l(h_{ch}^n) \frac{h_{ch}^{n+1}}{\tau_n} \psi dx + \int_{\Omega} k_l(h_{ch}^n) (\nabla h_{bh}^{n+1} - \nabla h_{ch}^{n+1} - e_z) \cdot \nabla \psi dx \\ = \int_{\Omega} \rho^{-1} \alpha_{lh}^{n+1} \psi dx + \int_{\Omega} C_l(h_{ch}^n) \frac{h_{ch}^n}{\tau_n} \psi dx, \quad \forall \psi \in H_{0,h} \\ \int_{\Omega} A_1(h_{ch}^n) \frac{h_{bh}^{n+1}}{\tau_n} \varphi dx - \int_{\Omega} A_2(h_{ch}^n, h_{bh}^n) \frac{h_{ch}^{n+1}}{\tau_n} \varphi dx + \int_{\Omega} \rho_b(h_{bh}^n) k_b(h_{ch}^n) (\nabla h_{bh}^{n+1} - \frac{\rho_b(h_{bh}^n)}{\rho_l} e_z) \cdot \nabla \varphi dx \\ = \int_{\Omega} \alpha_{bh}^{n+1} \varphi dx + \int_{\Omega} A_1(h_{ch}^n) \frac{h_{bh}^n}{\tau_n} \varphi dx + \int_{\Omega} A_2(h_{ch}^n, h_{bh}^n) \frac{h_{ch}^n}{\tau_n} \varphi dx \quad \forall \varphi \in H_{0,h} \end{array} \right. \quad (5.28)$$

5.4 Résultats numériques

Dans cette section, nous présentons quelques résultats préliminaires pour le problème (5.1)-(5.3). Dans toutes les simulations, comme dans le cas d'écoulement monophasique, nous considérons le domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ pour $n = 2$ et $n = 3$ de frontière $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$ avec (on rappelle que z est l'axe vertical dirigé vers le bas)

$$L = 10,$$

$$\Omega =]0, L[\times]0, L[\times]0, L[\text{ et } \Gamma_D = \{(x, y) \in]0, L[\times]0, L[\text{ et } z = 0\}, \text{ pour le cas } n = 3 \text{ (3D),}$$

$$\Omega =]0, L[\times]0, L[\text{ et } \Gamma_D = \{(x, z), z = 0\} \text{ pour le cas } n = 2 \text{ (2D).}$$

Les différents paramètres utilisés sont donnés dans TABLE (5.1) et sont issus de [94] et [11]. À partir des mêmes références, nous prenons les conditions initiales du système de biodégradation (en mgC/L) comme indiqué dans TABLE (5.2).

Les conditions aux limites du système de biodégradation sont toutes des conditions de Neumann homogènes (voir (2.19)). Les conditions limites et initiales pour le système d'écoulement sont données dans TABLE (5.3).

Nous rappelons qu'à chaque pas de temps, le système (5.1) est approché par (5.24)-(5.25)-(5.26)-(5.27), et sa solution donne les termes sources du système d'écoulement biphasique (5.2), approché par (5.28).

TABLEAU 5.1 – Paramètres.

K_H	μ_m	f_1	f_2	K_S	K_d	Y	α	K_I	μ_l
0.176	0.3	0.7	0.76	160	0.04	0.05	0.9	500	4.61027×10^{-4}
θ_r	θ_s	K	p_{ce}	b	M_b	M_{H_2O}	A_m	C_{Tb}	
0.27	0.9715	10^{-4}	-0.0323	2.5	30	18.01	0.8	0.178	

TABLEAU 5.2 – Conditions initiales du système de biodégradation.

$X_0(x, y)$	$S_0(x, y)$	$[\text{CO}_2]_0(x, y)$	$[\text{CH}_4]_0(x, y)$
1751	0	0	0

TABLEAU 5.3 – Conditions initiales et limites pour l'écoulement biphasique compressible.

$h_{c,0}$ dans Ω	$h_{b,0}$ dans Ω	$h_{c,D}$ sur Γ_D	$h_{b,D}$ sur Γ_D	$\mathbf{u}_l \cdot \mathbf{n}$ sur Γ_N	$\mathbf{u}_b \cdot \mathbf{n}$ sur Γ_N
$-1.3 \cdot 10^{-4}$	0	-0.0002	0	0	0

Les résultats numériques que nous allons présenter dans cette section concernent la résolution de système complet. Nous notons que les résultats numériques obtenus dans la partie 4.5.1 de CHAPITRE 4 de l'étude de l'écoulement monophasique reste également valable dans ce contexte, en raison du faible couplage entre les systèmes (2.92) et (2.93).

Nous rappelons que la décharge est considérée comme un milieu poreux insaturé et inhomogène en raison d'une distribution non homogène des bactéries méthanogènes initiales B_0 comme suit

— En 2D :

$$B_0(x, z) = \begin{cases} 1 & \text{dans } \Sigma_1 := \{0 \leq x \leq L/2 \text{ et } 0 \leq z \leq L/2\}, \\ 2 & \text{dans } \Sigma_2 := \{L/2 \leq x \leq L \text{ et } 0 \leq z \leq L/2\}, \\ 3 & \text{dans } \Sigma_3 := \{0 \leq x \leq L \text{ et } L/2 < z < L\}. \end{cases}$$

— En 3D :

$$B_0(x, y, z) = \begin{cases} 1 & \text{dans } \{0 \leq x \leq L/2, 0 \leq y \leq L \text{ et } 0 \leq z \leq L/2\}, \\ 2 & \text{dans } \{L/2 \leq x \leq L, 0 \leq y \leq L \text{ et } 0 \leq z \leq L/2\}, \\ 3 & \text{dans } \{0 \leq x \leq L, 0 < y < L \text{ et } L/2 \leq z < L\}. \end{cases}$$

Nous considérons un maillage quasi uniforme du domaine Ω avec (952 triangles et 517 sommets) en 2D et (48000 tétraèdres et 9261 sommets) en 3D (voir FIGURE 5.1). Nous considérons aussi les points de l'espace définis par $M_1(0.25, 0.75)$ le milieu de la zone Z_1 , $M_2(0.25, 0.75)$ le milieu de la zone Z_2 et $M_3(0.75, 0.001)$ un point en bas de la zone Z_3 , en lesquels nous allons observer l'évolution des différentes variables du système.

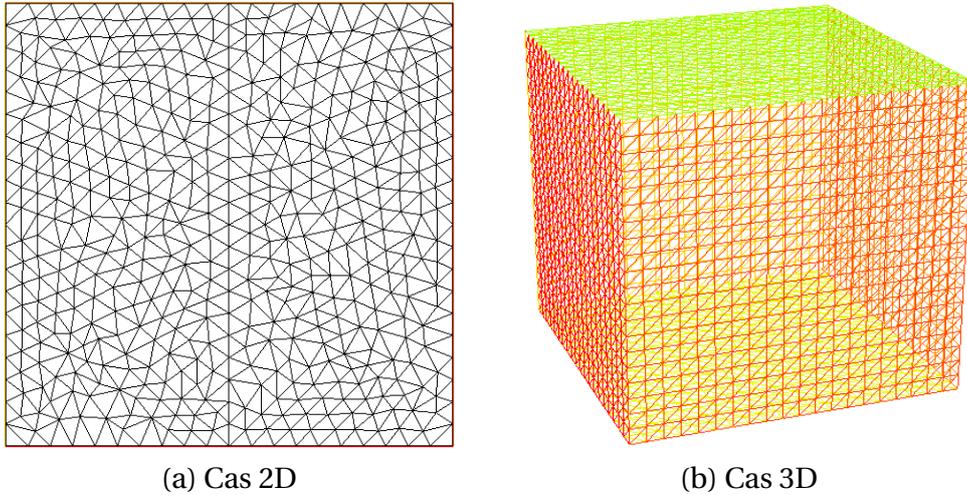


FIGURE 5.1 – Le maillage.

Tenant compte des résultats obtenus dans la sous section 4.5.2 en terme du temps de calcul CPU, nous utilisons la diffusion partielle (et non pas complète). Nous considérons alors la diffusion $\bar{D} = \{D_X = 0.01, D_S = 0.03, D_B = 0.05\}$. En utilisant la loi de Haldane, nous obtenons les simulations suivantes.

Les FIGURES 5.2 et 5.3 montrent, respectivement, l'évolution de la production du méthane en 2D et 3D à différents instants : $t_1 = 0.1$ jour dans (a), $t_2 = 0.5$ jour dans (b), $t_3 = 1$ jour dans (c) et $t_4 = 1.8$ jour dans (d).

Nous remarquons dans la FIGURE 5.2 qu'il y a une augmentation de la production de biogaz au cours du temps dans chaque zone. Dans la zone 1 de LA FIGURE 5.2 : les iso-valeurs augmentent de la couleur jaune de ≈ 0.06 à l'instant t_1 à ≈ 0.52 à l'instant t_4 .

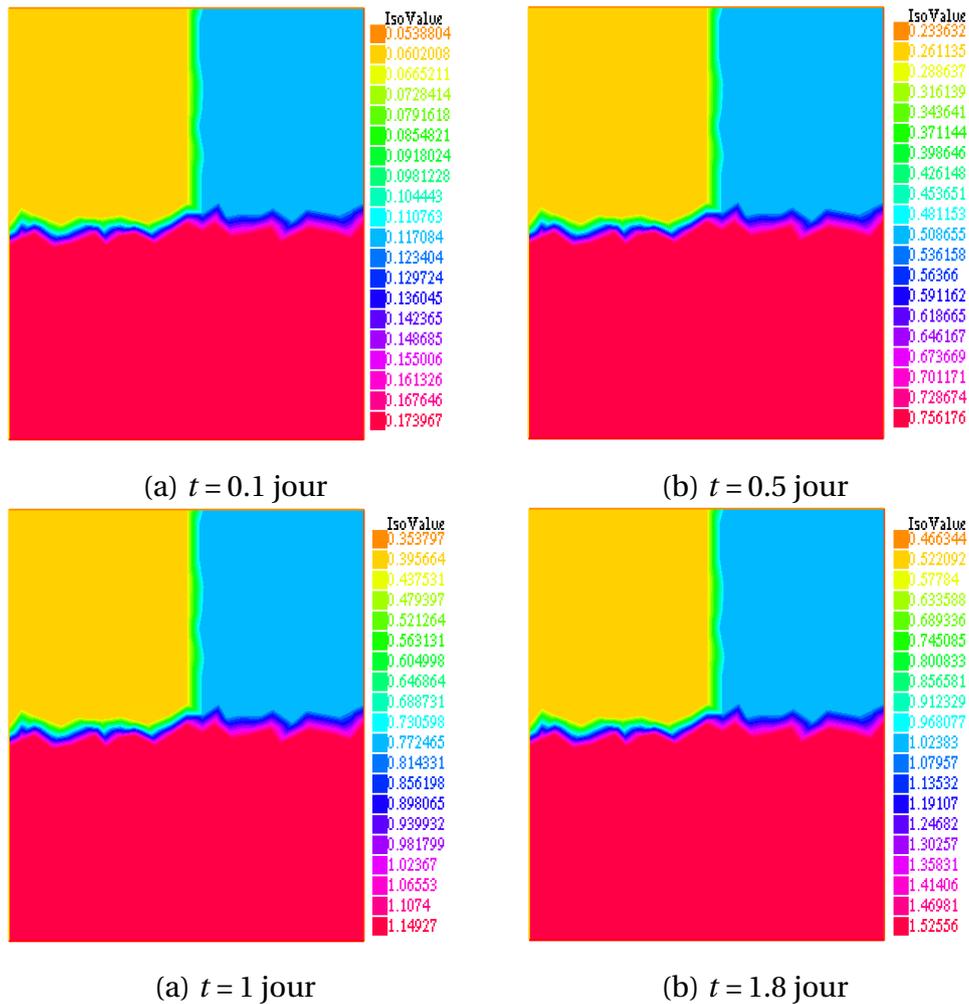


FIGURE 5.2 – Evolution de la production du méthane en 2D.

Dans la zone 2 : les isovaleurs augmentent de la couleur bleu de ≈ 0.12 à l'instant t_1 à ≈ 1.02 à l'instant t_4 . Dans la zone 3 : les isovaleurs augmentent de la couleur rouge de ≈ 0.17 à l'instant t_1 à ≈ 1.5 à l'instant t_4 . Le TABLEAU 5.4 donne un peu plus de précision sur le niveau des d'échelles des valeurs.

Le traçage de l'évolution de la valeur moyenne de la concentration du méthane produit dans chaque zone, donné dans la FIGURES 5.4, confirme les résultats attendus, à savoir que le taux d'augmentation de la production du biogaz est corrélé avec la condition initiale. En effet le plus grand taux est donné pour la plus grand valeur de la condition initiale qui correspond à la zone 3 associé à $B_0 = 3$.

En utilisant la relation entre la teneur en eau θ_l et la hauteur capillaire h_c (voir (2.51) avec (2.58)), les FIGURES 5.7 et 5.8 montrent respectivement l'évolution de la teneur en eau en 2D et 3D. Ainsi, nous remarquons que le lixiviat commence à stagner en bas de domaine à l'instant t_4 . Plus précisément, dans la FIGURE 5.9, où est représenté l'évolution de la teneur en eau dans les trois points M_1 , M_2 et M_3 , on remarque que la courbe

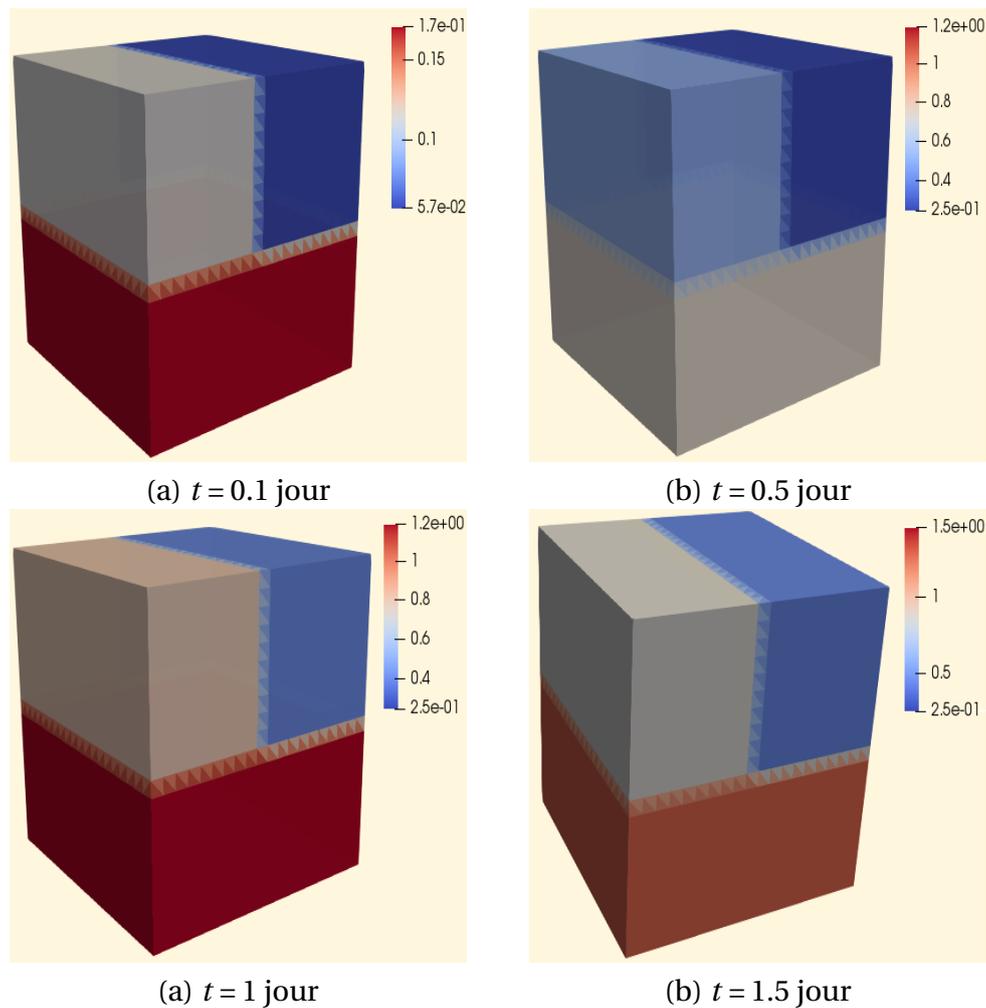


FIGURE 5.3 – Evolution de la production de méthane en 3D.

(jaune) du point M_3 situé en bas de la zone Z_3 , indique une forte augmentation de la teneur en eau au cours du temps, de la valeur initiale $\theta_0 = 0.37$, jusqu'à la valeur $\theta \approx 0.8$ (valeur proche de la saturation), à l'instant t_4 .

Les FIGURES 5.5 et 5.6 montrent respectivement l'évolution de la hauteur en colonne du biogaz h_b en 2D et 3D. Nous constatons dans la figure (a) de 5.5, qui correspond à l'instant t_1 , l'apparition d'une zone coloré en bleu ciel avec des valeurs très faibles et qui coïncide presque avec la zone 1. Ceci peut être justifié en raison du choix de la petite valeur de la condition initiale des bactéries méthanogènes dans la zone 1 (i.e la zone où $B_0 = 1$).

Cependant, cette disparité tend à disparaître avec le temps et on assiste à une homogénéisation "partiellement" dans chaque horizon, comme le montre les figures (b), (c) et (d) dans 5.5.

L'instant t_4 correspond approximativement au moment où une zone de stagnation du lixiviat va apparaître en bas de la décharge. La condition d'humidité nécessaire pour

5.4 Résultats numériques

Zones	t_1	t_2	t_3	t_4
Z ₁	Max=0.09 Min= 0.05	Max=0.39 Min= 0.23	Max=0.60 Min=0.35	Max=0.80 Min= 0.46
Z ₂	Max= 0.13 Min= 0.10	Max= 0.56 Min= 0.42	Max=0.85 Min=0.64	Max= 1.13 Min= 0.85
Z ₃	Max= 0.17 Min=0.14	Max= 0.75 Min=0.59	Max=1.15 Min=0.89	Max= 1.52 Min= 1.19

TABLEAU 5.4 – Table des valeurs Max et Min des isovaleurs de production méthane dans les trois zones au cours de temps suivant les solutions obtenus dans la Figure 5.2.

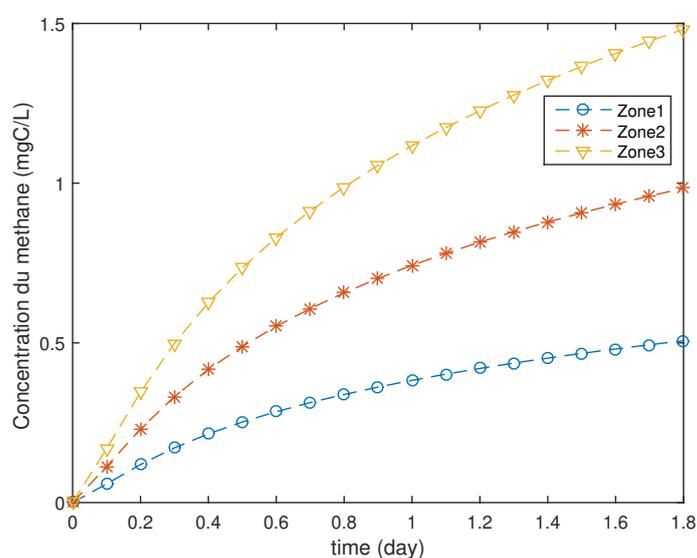


FIGURE 5.4 – Evolution de la moyenne de la production du méthane dans chaque zone (la zone 1 correspond à $B_0 = 1$, la zone 2 correspond à $B_0 = 2$ et la zone 3 correspond à $B_0 = 3$).

la production de biogaz ne sera plus satisfaite dans tout le domaine après cet instant, ce qui explique pourquoi nous nous sommes arrêtés dans les calculs à t_4 . Après cela, il va falloir prendre une décision pour améliorer la production de biogaz comme nous l'avons signalé dans 2.3.2 (scénarios).

Les résultats de cette partie feront l'objet de la publication [21].

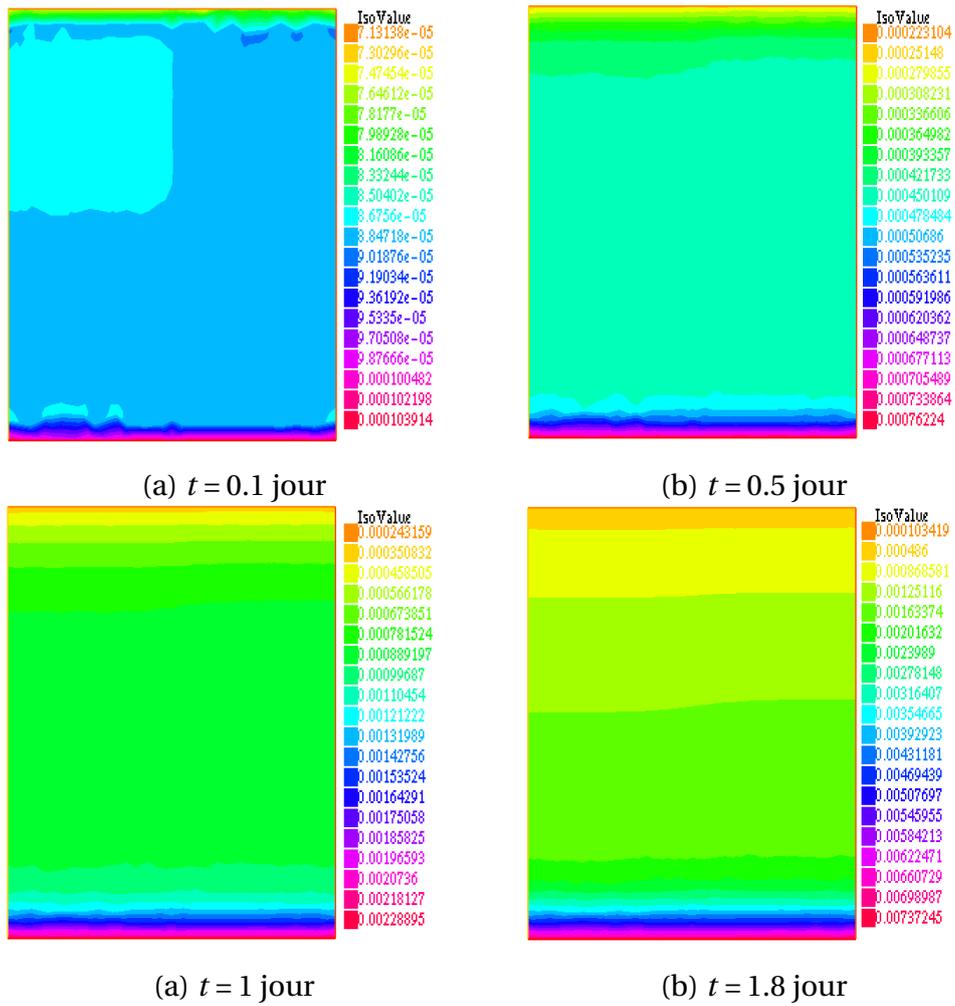


FIGURE 5.5 – Evolution de la hauteur en colonne de biogaz h_b en 2D.

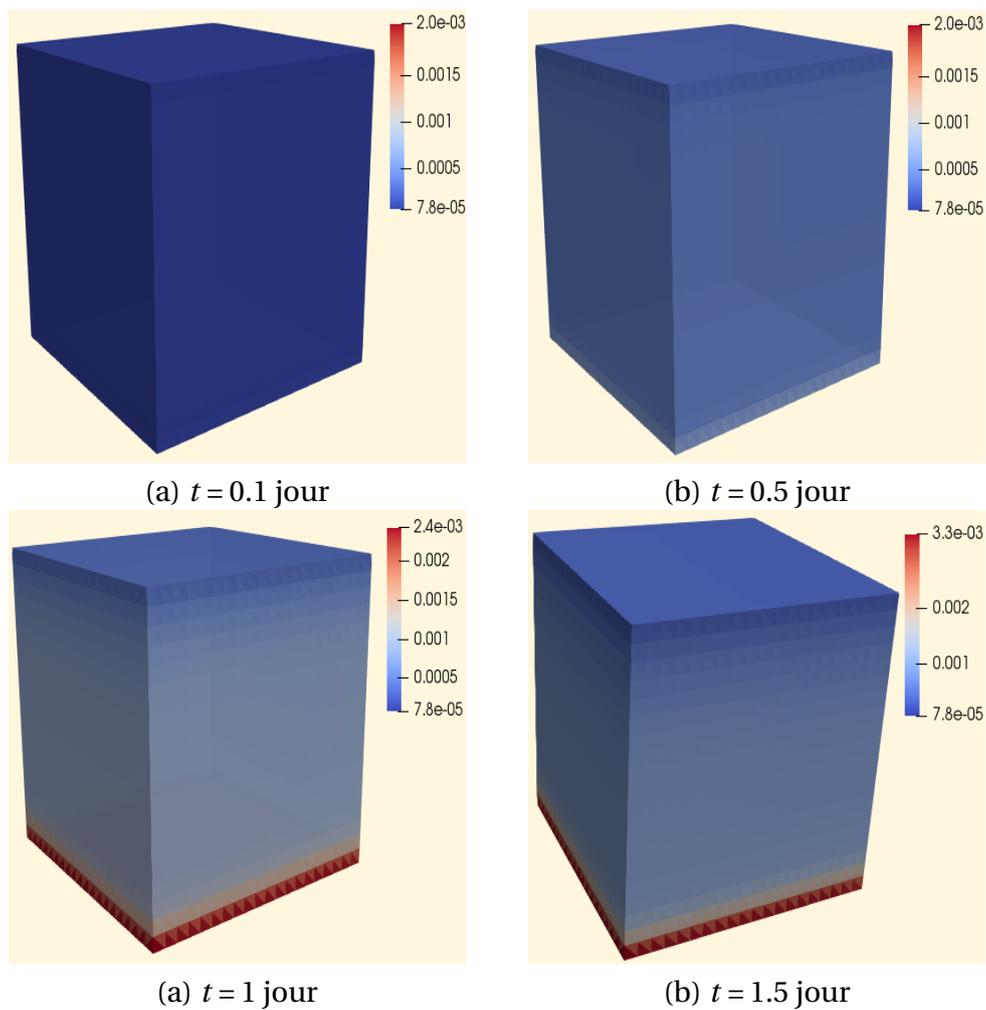


FIGURE 5.6 – Evolution de la hauteur en colonne de biogaz h_b en 3D.

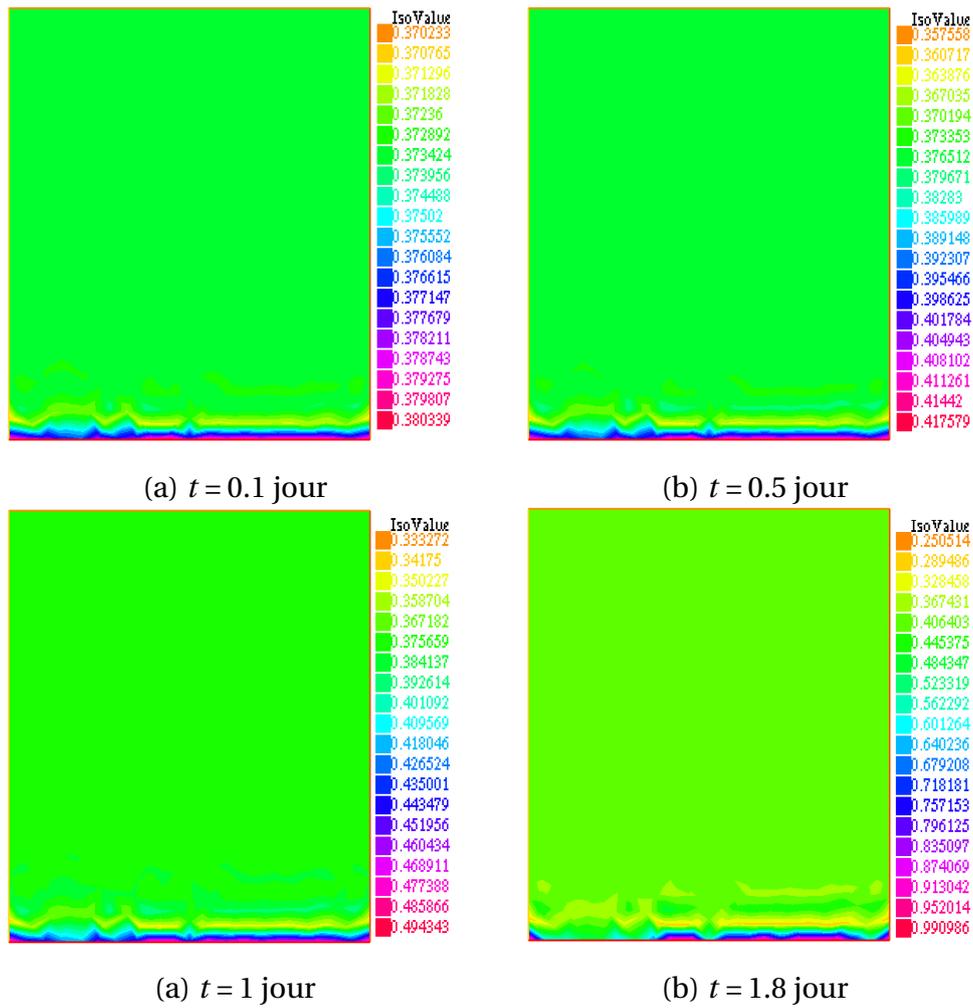


FIGURE 5.7 – Evolution de la teneur en eau $\theta(h_c)$ en 2D.

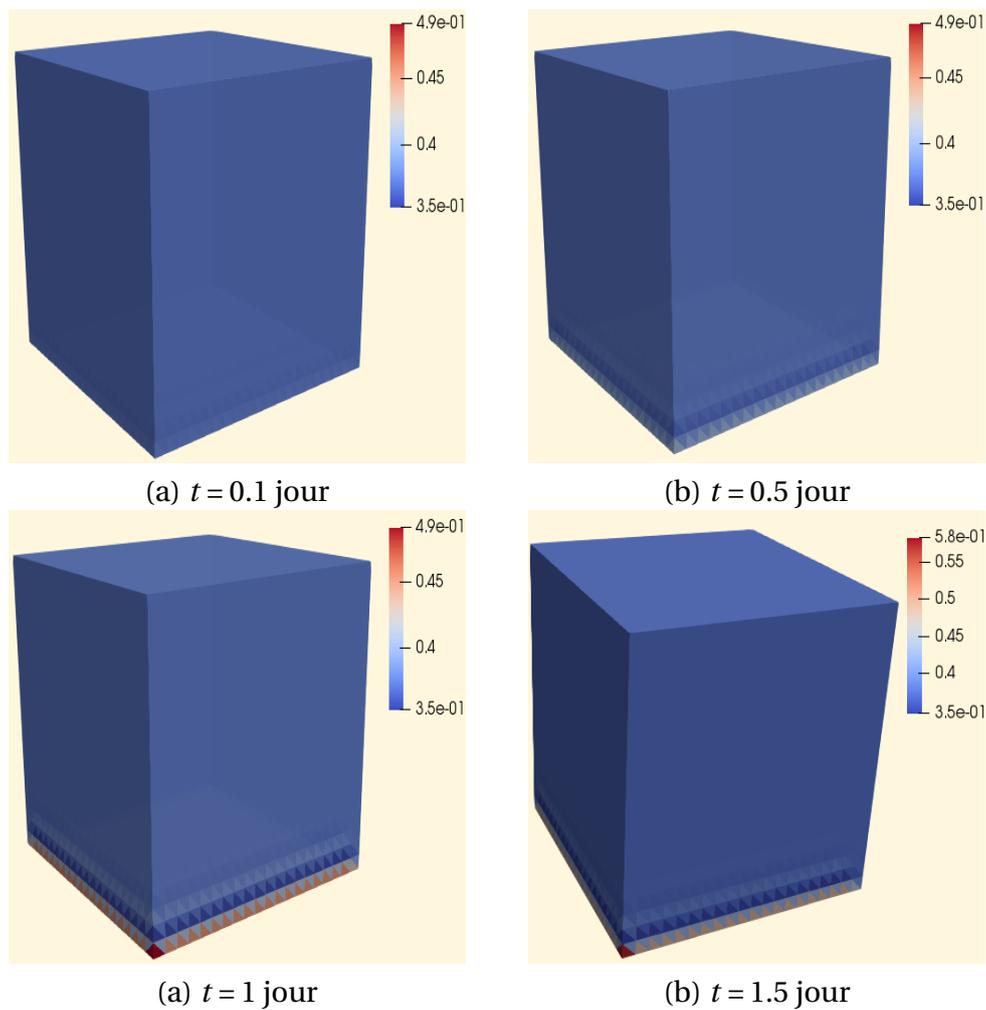
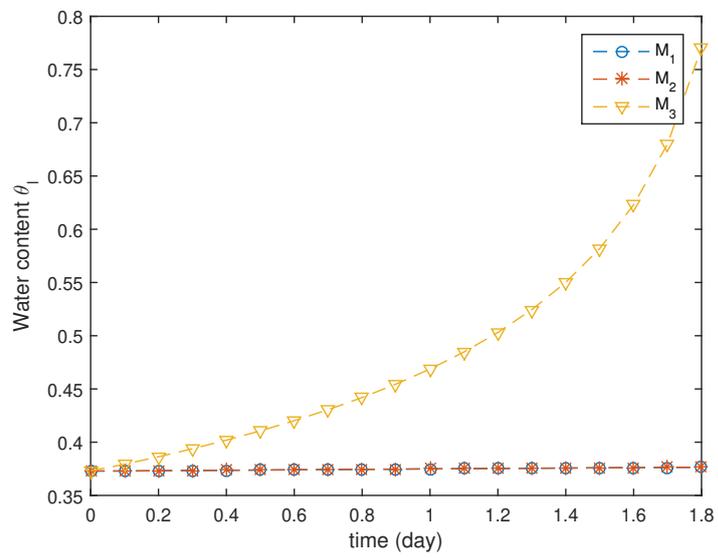


FIGURE 5.8 – Evolution de la teneur en eau $\theta(h_c)$ en 3D.

FIGURE 5.9 – Evolution de la teneur en eau θ aux points M_1 , M_2 et M_3 .

5.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons considéré un nouveau modèle décrivant l'activité bactérienne dans une décharge des déchets ménagers, considérée comme un milieu poreux réactif et non saturé. Dans ce modèle, nous avons tenu compte de la présence de la phase gazeuse dans l'écoulement des fluides dans la décharge et avons considéré un écoulement diphasique lixiviat-biogaz. Cela a permis de suivre l'écoulement des deux phases, lixiviat et biogaz, et d'avoir simultanément, à chaque instant et en chaque point de l'espace physique, la pression du lixiviat, la pression de biogaz et ces informations pouvant être utiles pour la récupération du biogaz et la libération du lixiviat. Le système obtenu est un système de type réaction-diffusion, couplé avec le système d'écoulement biphasique lixiviat-biogaz. Nous avons utilisé le schéma en temps d'ordre élevé BDF2 et la linéarisation par la méthode de Newton pour le système de réaction diffusion afin d'obtenir plus de précision à la fois pour la solution du système et pour le terme source de système d'écoulement biphasique. L'approximation spatiale du problème complet a été réalisée par la méthode des éléments finis et des simulations numériques en 2D et 3D ont été obtenues.

Les résultats numériques montrent le rôle de l'humidité sur l'évolution de la production du biogaz. Cela suggère comme perspective d'étudier l'impact de l'humidité sur cette production dans une démarche de contrôle et d'optimisation afin de maximiser la production.

Conclusion générale et perspectives

Conclusion

L'essentiel de notre travail a consisté à développer et analyser, théoriquement et numériquement, des modèles intervenant dans une décharge des déchets ménagers. Nous nous sommes intéressés au processus de la digestion anaérobie pour la production de biogaz dans un casier de stockage de déchets. Ce dernier a été considéré comme un milieu poreux réactif et comprenant des phénomènes biologiques (dynamique bactérienne) et physiques (écoulement des fluides). La modélisation de ce type de problème s'avère un outil essentiel pour prédire la production de biogaz.

Dans un premier temps, nous avons développé un modèle formé d'équations différentielles ordinaires décrivant la dite dynamique bactérienne. Ce modèle envisage le processus de la digestion anaérobie en deux étapes : l'hydrolyse et la méthanogénèse qui prend en compte la recirculation d'une fraction de la mortalité de la biomasse comme substrat ainsi que l'introduction des phénomènes d'inhibition qui s'imposent souvent dans la réalité. Nous avons analysé mathématiquement la dynamique du système et nous avons montré qu'il existe une infinité d'équilibres vers lesquels convergent les solutions en fonction des conditions initiales. En particulier, nous avons mis en évidence l'impact du terme de mortalité et de la fonction de croissance sur les performances du processus global, notamment en termes de production de biogaz. Nous avons montré dépendamment du taux de mortalité, qu'une charge trop élevée de la matière organique initiale peut-être pénalisante.

Ensuite, nous avons proposé un modèle dans lequel nous avons introduit la diffusion dans la dynamique bactérienne pour obtenir un système de réaction-diffusion. Ce système a été couplé au système d'écoulement du lixiviat dans la décharge, régi par l'équation de Richards modélisant l'écoulement non saturé. Ce couplage est essentiel pour suivre l'évolution du lixiviat durant la biodégradation. Nous avons montré que le problème est bien posé et nous avons effectué l'analyse des systèmes discrets avec la méthode des éléments finis mixtes et des schémas en temps d'ordre élevé. Les tests numériques réalisés en 2D et 3D sont en accord avec la théorie et la littérature. En particulier, nous avons mis en évidence l'effet de l'humidité sur la production du biogaz en localisant les zones dont l'humidité se trouvent en dehors de l'intervalle de production.

Finalement, pour tenir compte de la présence de la phase gazeuse dans l'écoulement,

nous avons proposé un modèle d'écoulement biphasique compressible lixiviat-biogaz couplé avec le système de réaction-diffusion. Ce système permet de suivre l'évolution spatio-temporelle aussi bien du lixiviat que du biogaz. Ensuite, nous avons effectué l'approximation du problème par la méthode des éléments finis mixtes et nous avons présenté des simulations numériques 2D et 3D.

Perspectives

L'objectif principal dans notre travail a été le développement d'un modèle performant qui débouche sur un outil de simulation en deux et trois dimensions prêt à l'emploi dans la gestion des déchets. Un tel outil est important à la fois pour une utilisation pratique dans les prévisions et pour les études avancées pour l'optimisation et le contrôle de la production de biogaz. Par conséquent, plusieurs orientations futures, concernant le travail de cette thèse, peuvent être envisagées comme perspectives :

- ✓ L'introduction d'un terme de transport dans le système qui décrit l'aspect biologique est une démarche raisonnable et complémentaire du modèle d'écoulement biphasique compressible du biogaz-lixiviat.
- ✓ Dans le cas de la loi Haldane, nous avons montré dans le CHAPITRE 3 qu'une charge initiale trop élevée de matière organique pourrait être pénalisante. Une stratégie pourrait alors être de fractionner la charge de matière organique dans le temps, c'est-à-dire d'avoir une charge initiale plus petite et de réintroduire la quantité restante de matière à traiter plus tard (en une ou plusieurs fois). Ceci conduit à un problème de contrôle pour choisir de manière optimale la proportion de fractionnement et le(s) temps(s) de réintroduction correspondant(s) pour obtenir les meilleures performances.
- ✓ Les résultats numériques montrent le rôle de l'humidité sur l'évolution de la production du biogaz et suggèrent d'étudier son impact dans une démarche de contrôle et d'optimisation. Nous avons vu en particulier qu'une fois arrivé à une valeur de la teneur en eau critique, la production du biogaz est ralentie voir arrêtée, et nous avons discuté sommairement à la fin du CHAPITRE 2 quelques scénarios possibles pour améliorer la situation. Une perspective possible est d'étudier ces scénarios d'une manière optimale aussi bien du côté timing que de la disposition et la nature des nouvelles conditions limites, et plus généralement voir l'effet de la variation du taux de recirculation sur la production du méthane.
- ✓ L'hétérogénéité spatiale est généralement observée dans les décharges réelles. Comparativement à l'étude effectuée dans le cas des EDO, l'extension à la dynamique du système EDP de réaction-diffusion est envisageable, en particulier pour le cas de la fonction de croissance Haldane.

- ✓ Une autre perspective est de considérer la décharge comme un milieu poreux réactif et déformable à cause des tassements des déchets, en parallèle de la dégradation, qui se trouvent souvent dans les décharges. Ainsi prendre en compte les phénomènes d'interactions fluide-solide.
- ✓ ...

Annexe

Formulation variationnelle et discrétisation complète de système de l'écoulement (5.3)

- Semi-discrétisation en temps et formulation variationnelle

La semi discrétisation en temps et la linéarisation du système d'écoulement (5.3) est réalisée dans le schéma implicite et s'écrit comme suit :

$$C_l(h_c^n) \frac{h_c^{n+1} - h_c^n}{\tau} + \operatorname{div}(\mathbf{u}_l^{n+1}) = \rho_l^{-1} \alpha_l^{n+1} \quad \text{dans } \Omega, \quad (5.29)$$

$$\bar{k}_l(h_c^n) \mathbf{u}_l^{n+1} = \nabla h_c^{n+1} - \nabla h_b^{n+1} + e_z \quad \text{dans } \Omega, \quad (5.30)$$

$$A_1(h_c^n) \frac{h_b^{n+1} - h_b^n}{\tau} - A_2(h_c^n, h_b^n) \frac{h_c^{n+1} - h_c^n}{\tau} + \operatorname{div}(\rho_b(h_b^n) \mathbf{u}_b^{n+1}) = \alpha_b^{n+1} \quad \text{dans } \Omega, \quad (5.31)$$

$$\bar{k}_b(h_c^n) \mathbf{u}_b^{n+1} = \nabla - h_b^{n+1} + c_1 h_b^{n+1} e_z + c_2 e_z \quad \text{dans } \Omega, \quad (5.32)$$

où les inconnues \mathbf{u}_l^{n+1} , \mathbf{u}_b^{n+1} , h_c^{n+1} et h_b^{n+1} sont respectivement les approximations de $\mathbf{u}_l(t_{n+1})$, $\mathbf{u}_b(t_{n+1})$, $h_c(t_{n+1})$ et $h_b(t_{n+1})$ tels que les conditions initiales sont $h_c(0, x) = h_{c,0}(x)$ et $h_b(0, x) = h_{b,0}(x)$ dans Ω et les conditions aux limites sont

$$\left. \begin{array}{l} h_c^{n+1} = h_{c,D} \quad \text{sur } \Gamma_D \\ h_b^{n+1} = h_{b,D} \quad \text{sur } \Gamma_D, \\ \mathbf{u}_l^{n+1} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_N, \\ \mathbf{u}_b^{n+1} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_N. \end{array} \right\} \quad (5.33)$$

FORMULATION VARIATIONNELLE MIXTE

Nous introduisons les espaces fonctionnels suivants

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_1 &= H_{0,N}(\operatorname{div}; \Omega) = \{\mathbf{v} \in H(\operatorname{div}, \Omega), \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma_N\}, & \mathbf{V}_2 &= H_{0,N}(\operatorname{div}; \Omega), \\ W_1 &= L^2(\Omega), & W_2 &= L^2(\Omega). \end{aligned}$$

La formulation faible de (5.29)-(5.30)-(5.31)-(5.32) avec les conditions (5.33) s'écrit comme suit : Trouver $(\mathbf{u}_l^{n+1}, h_c^{n+1}) \in \mathbf{V}_1 \times W_1$ et $(\mathbf{u}_b^{n+1}, h_b^{n+1}) \in \mathbf{V}_2 \times W_2$ tels que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} C_l(h_c^n) \frac{h_c^{n+1}}{\tau} \varphi dx + \int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{u}_l^{n+1}) \varphi dx &= \int_{\Omega} C_l(h_c^n) \frac{h_c^n}{\tau} \varphi dx \\ &+ \int_{\Omega} \rho_l^{-1} \alpha_l^{n+1} \varphi dx \quad \forall \varphi \in W_1, \end{aligned} \quad (5.34)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \bar{k}_l(h_c^n) \mathbf{u}_l^{n+1} \cdot \mathbf{v} dx + \int_{\Omega} h_c^{n+1} \operatorname{div} \mathbf{v} dx - \int_{\Omega} h_b^{n+1} \operatorname{div} \mathbf{v} dx &= \int_{\Gamma_D} h_{c,D} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds \\ &- \int_{\Gamma_D} h_{b,D} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds + \int_{\Omega} \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{v} dx \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_1, \end{aligned} \quad (5.35)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} A_1(h_c^n) \frac{h_b^{n+1}}{\tau} \bar{\varphi} dx - \int_{\Omega} A_2(h_c^n, h_b^n) \frac{h_c^{n+1}}{\tau} \bar{\varphi} dx + \int_{\Omega} \operatorname{div}(\rho_b(h_b^n) \mathbf{u}_b^{n+1}) \bar{\varphi} dx \\ = \int_{\Omega} A_1(h_c^n) \frac{h_b^n}{\tau} \bar{\varphi} dx - \int_{\Omega} A_2(h_c^n, h_b^n) \frac{h_c^n}{\tau} \bar{\varphi} dx + \int_{\Omega} \alpha_b^{n+1} \bar{\varphi} dx \quad \forall \bar{\varphi} \in W_2, \end{aligned} \quad (5.36)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \bar{k}_b(h_c^n) \mathbf{u}_b^{n+1} \cdot \bar{\mathbf{v}} dx - \int_{\Omega} h_b^{n+1} \operatorname{div} \bar{\mathbf{v}} dx &= - \int_{\Gamma_D} h_{b,D} \bar{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{n} ds + \int_{\Omega} c_1 h_b^{n+1} \mathbf{e}_z \cdot \bar{\mathbf{v}} dx \\ &+ \int_{\Omega} c_2 \mathbf{e}_z \cdot \bar{\mathbf{v}} dx \quad \forall \bar{\mathbf{v}} \in \mathbf{V}_2, \end{aligned} \quad (5.37)$$

- Discrétisation complète

Nous introduisons les espaces discrets suivants \mathbf{V}_{1h} et \mathbf{V}_{2h} pour l'approximation de \mathbf{V}_1 et \mathbf{V}_2 respectivement

$$\mathbf{V}_{1h} = \left\{ \mathbf{v}_h \in \operatorname{RT}_0(\mathcal{T}_h) \quad \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_N} = 0 \right\} \quad (5.38)$$

et

$$\mathbf{V}_{2h} = \left\{ \mathbf{v}_h \in \operatorname{RT}_0(\mathcal{T}_h) \quad \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_N} = 0 \right\} \quad (5.39)$$

avec $\operatorname{RT}_0(\mathcal{T}_h)$ est l'espace global Raviart-Thomas le plus bas degré défini dans (4.38).

En outre, nous introduisons les sous-espaces des éléments finis $W_{1,h}$ et $W_{2,h}$ pour l'approximation de W_1 et W_2 respectivement par l'espace global de polynômes par morceaux de degré 0

$$W_{1,h} := \{ q_h \in L^2(\Omega) : q_h|_T \in P_0(T), \forall T \in \mathcal{T}_h \} \quad (5.40)$$

et

$$W_{2,h} := \{ q_h \in L^2(\Omega) : q_h|_T \in P_0(T), \forall T \in \mathcal{T}_h \}. \quad (5.41)$$

La discrétisation du problème (5.34)-(5.35)-(5.36)-(5.37) par la méthode des éléments finis mixtes est donnée comme suit : Trouver $(\mathbf{u}_{lh}^{n+1}, h_{ch}^{n+1}) \in \mathbf{V}_{1h} \times W_{1h}$ et $(\mathbf{u}_{bh}^{n+1}, h_{bh}^{n+1}) \in \mathbf{V}_{2h} \times W_{2h}$ tels que

$$\left\{ \begin{array}{l}
\int_{\Omega} C_l(h_{ch}^n) \frac{h_{ch}^{n+1}}{\tau} \varphi dx + \int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{u}_{lh}^{n+1}) \varphi dx = \int_{\Omega} C_l(h_{ch}^n) \frac{h_{ch}^n}{\tau} \varphi dx \\
\quad + \int_{\Omega} \rho_l^{-1} \alpha_{lh}^{n+1} \varphi dx \quad \forall \varphi \in W_{1h}, \\
\int_{\Omega} \bar{k}_l(h_{ch}^n) \mathbf{u}_{lh}^{n+1} \cdot \mathbf{v} dx + \int_{\Omega} h_{ch}^{n+1} \operatorname{div} \mathbf{v} dx - \int_{\Omega} h_{bh}^{n+1} \operatorname{div} \mathbf{v} dx = \int_{\Gamma_D} h_{c,D} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds \\
\quad - \int_{\Gamma_D} h_{b,D} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds + \int_{\Omega} e_z \cdot \mathbf{v} dx \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_{1h}, \\
\int_{\Omega} A_1(h_{ch}^n) \frac{h_{bh}^{n+1}}{\tau} \bar{\varphi} dx - \int_{\Omega} A_2(h_{ch}^n, h_{bh}^n) \frac{h_{ch}^{n+1}}{\tau} \bar{\varphi} dx + \int_{\Omega} \operatorname{div}(\rho_b(h_{bh}^n) \mathbf{u}_{bh}^{n+1}) \bar{\varphi} dx \\
= \int_{\Omega} A_1(h_{ch}^n) \frac{h_{bh}^n}{\tau} \bar{\varphi} dx - \int_{\Omega} A_2(h_{ch}^n, h_{bh}^n) \frac{h_{ch}^n}{\tau} \bar{\varphi} dx + \int_{\Omega} \alpha_{bh}^{n+1} \bar{\varphi} dx \quad \forall \bar{\varphi} \in W_{2h}, \\
\int_{\Omega} \bar{k}_b(h_{ch}^n) \mathbf{u}_{bh}^{n+1} \cdot \bar{\mathbf{v}} dx - \int_{\Omega} h_{bh}^{n+1} \operatorname{div} \bar{\mathbf{v}} dx = - \int_{\Gamma_D} h_{b,D} \bar{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{n} ds + \int_{\Omega} c_1 h_{bh}^{n+1} e_z \cdot \bar{\mathbf{v}} dx \\
\quad + \int_{\Omega} c_2 e_z \cdot \bar{\mathbf{v}} dx \quad \forall \bar{\mathbf{v}} \in \mathbf{V}_{2h},
\end{array} \right.$$

Nomenclature

Soit $x = (x_1, \dots, x_d)$ un vecteur de \mathbb{R}^d , avec $d \geq 2$.

Propriété de la roche / du milieu de déchets

- ϕ = la porosité de la roche/ du milieu de déchets.
- K = la perméabilité intrinsèque.
- M = la masse d'eau dans le milieu.
- M_s = la masse de milieu sec.
- ρ_0 = la densité du milieu sec.

Variables dynamiques : chimiques et physiques

- X = concentration de la matière organique initiale.
- S = concentration de la matière organique soluble simple (i.e. après l'étape de l'hydrolyse).
- B = concentration des bactéries méthanogènes.
- $[\text{CO}_2]$ = Concentration de dioxyde de carbone
- $[\text{CH}_4]$ = Concentration de méthane.
- \mathbf{u} = Vitesse d'écoulement du lixiviat dans le cas monophasique.
- P = pression de lixiviat dans le cas monophasique.
- p = potentiel de pression de lixiviat dans le cas monophasique.
- θ teneur en eau de lixiviat dans le cas monophasique.
- \mathbf{u}_l et \mathbf{u}_b sont respectivement la vitesse d'écoulement du lixiviat et de biogaz dans le cas biphasique.
- p_l et p_b sont respectivement la pression du lixiviat et de biogaz dans le cas biphasique.
- θ_l et θ_b sont respectivement la teneur en eau du lixiviat et de biogaz dans le cas biphasique.
- ω = Teneur en eau massique (/masse sèche de déchets).
- ω' = Teneur en eau massique(/masse humide de déchets).

- X_1 = Concentration en micro-organismes.
- X_2 = Concentration en substrat.
- b et p_a sont des paramètres de calage.

Paramètres liés aux variables dynamiques

- $\mu(\cdot)$ = Taux de croissance spécifique.
- K_S = la constante de demi-saturation.
- K_I = la constante d'inhibition.
- K_d = le taux de mortalité.
- Y = le taux d'utilisation du substrat.
- f_1 , f_2 et \bar{f}_2 sont des coefficients stœchiométriques.
- K_h = la constante d'hydrolyse.
- μ_m = le taux de croissance maximum.
- \bar{D} = la matrice des coefficients de diffusion.
- P_c la pression capillaire.
- θ_e et S_e sont respectivement la teneur en eau effective et la saturation effective.
- θ_s la teneur en eau à saturation.
- θ_r la teneur en eau résiduelle
- g = le module de l'accélération de la pesanteur.
- k_r = la perméabilité relative du lixiviat dans le cas d'écoulement monophasique.
- k_{ri} = la perméabilité relative de la phase i dans le cas d'écoulement biphasique (l'indice "l" désigne la phase du lixiviat et l'indice "b" désigne la phase de biogaz).
- μ_b et μ_l (ou bien juste μ) désignent respectivement la viscosité dynamique du lixiviat et de biogaz.
- ρ_b et ρ_l (ou bien juste ρ) désignent respectivement la densité du lixiviat et de biogaz.
- α_l = le terme source/ puit dans l'équation de conservation de la masse de lixiviat.
- α_b = le terme source/ puit dans l'équation de conservation de la masse de biogaz.
- λ_{cin} = le taux de génération de biogaz.
- C_{Tb} = la constante de génération de biogaz.
- M_{H_2O} et M_b sont respectivement la masse molaire de H_2O et de biogaz.
- \bar{g} = fonction empirique d'humidité.

Liste des figures

2.1	Taux de croissance de type Monod et de type Haldane.	16
2.2	Méthanogénèse : formation de méthane à partir de l'acétate (à gauche)/ à partir de dioxyde de carbone (à droite).	17
2.3	Exemple d'un schéma simple de recyclage des bactéries mortes.	19
2.4	Schéma utilisé pour modéliser la dégradation anaérobie de la matière or- ganique.	20
2.5	Domaine	21
2.6	La fonction empirique $\tilde{g}(\omega)$ (voir [11])	27
2.7	La fonction empirique $g(\theta)$ (voir [55]).	27
3.1	La loi de Monod et la loi de Haldane ($\mu_m = 0.3$ et $K_S = 160$).	46
3.2	Le graphe de la fonction de Monod avec les données de tableau 3.1	61
3.3	Evolution de X, B, S, $[\text{CO}_2]$ et $[\text{CH}_4]$, utilisant les paramètres de Rouez du TABLEAU 3.1 (loi de Monod), avec les données initiales $B_0 = 2$, $X_0 = 1751$, $S_0 = 0$, $[\text{CO}_2]_0 = [\text{CH}_4]_0 = 0$	62
3.4	Le graphes de la fonction de Haldane avec les données de tableau 3.5	62
3.5	Cas de la loi de Haldane : Evolution de X, B, S, $[\text{CO}_2]$ et $[\text{CH}_4]$ en utili- sant les paramètres de TABLEAU 3.2 avec $B_0 = 2$, $X_0 = 1751$ $S_0 = 0$, $[\text{CO}_2]_0 =$ $[\text{CH}_4]_0 = 0$	63
3.6	La différence entre le méthane produit avec Monod donné dans 3.3 et celui produit avec Haldane donné dans 3.5	63
3.7	Evolution de $X(\cdot)$ dans (a) et de $B(\cdot)$ dans (b) pour les conditions initiales $X_0^{(i)}$ pour $i = 1, \dots, 5$, avec la loi de Haldane, $K_d = 0.02$ - La sous figure (Z_I), $I = X, B$, est le zoom des simulations I_i , $i = 1, \dots, 5$, proche de l'axe des abscisses pour des temps grands.	64
3.8	Evolution de $S(\cdot)$ pour les conditions initiales $X_0^{(i)}$ pour $i = 1, \dots, 5$, avec la loi de Haldane, $K_d = 0.02$ - La sous figure (Z_S) est le zoom des simulations proche de l'axe des abscisses pour des temps grands.	65
3.9	Evolution de $[\text{CO}_2(\cdot)]$ dans (a), $[\text{CH}_4(\cdot)]$ dans (b) et la concentration total du biogaz $[\text{CO}_2(\cdot) + \text{CH}_4(\cdot)]$ dans (c) pour les conditions initiales de $X_0^{(i)}$ pour $i = 1, \dots, 5$, $K_d = 0.02$ et la loi de Haldane.	65
3.10	Valeur maximale de $[\text{CH}_4]$ en fonction de X_0 pour $K_d = 0,02$ et la loi de Haldane.	66
3.11	Le seuil de X_0 en fonction de K_d pour les paramètres du TABLEAU 3.2 et la loi de Haldane.	68

3.12 λ^- , λ^+ (en haut) Biogas ⁻ et Biogas ⁺ (en bas) en fonction de K_d (en utilisant la loi de Haldane)	68
3.13 Evolution de $X(\cdot)$ dans (a), $S(\cdot)$ dans (b) et de $B(\cdot)$ dans (c) pour les conditions initiales $X_0^{(i)}$, pour $i = 1, \dots, 5$ - Loi de Monod - La sous figure (Z_I), $I = X, S, B$, est le zoom des simulations I_i , $i = 1, 2, 3, 4, 5$, proche de l'axe des abscisses pour des temps grands.	69
3.14 Evolution de $[CO_2(\cdot)]$ dans (a), $[CH_4(\cdot)]$ dans (b) et biogaz dans (c) pour les conditions initiales de $X_0^{(i)}$ pour $i = 1, \dots, 5$ - Loi de Monod avec $K_d = 0.02$.	70
3.15 λ , (en haut) Biogas (en bas) en fonction de K_d (en utilisant la loi de Monod)	70
3.16 Evolution de la concentration de méthane produit par la quantité de la matière organique disponible $X_0 = 965$ sans amélioration de processus de production.	74
3.17 Evolution de CH_4 produit par la quantité de la matière organique $X_0 = 956$ avec l'amélioration du processus de production.	75
3.18 Evolution de B avec l'amélioration de processus de production.	75
4.1 Le maillage de domaine dans la cas 2D.	99
4.2 Evolution des concentrations moyennes des variables de (S1) en utilisant la loi de Monod et la diffusion \bar{D}_{val} et $B_0 = 2$, $X_0 = 1751$, $\alpha = 1$	101
4.3 Evolution de la concentration moyenne du biogaz en fonction du temps (en jour) en utilisant la loi de Haldane avec $B_0 = 2$, $K_I = 10$ et la diffusion \bar{D}_{val} pour différentes valeurs de X_0	101
4.4 Production de biogaz (en mgC / L) en fonction de X_0 (en mgC / L) en utilisant la loi de Haldane avec $K_I = 100$, $B_0 = 2$, $K_d = 0.02$ et la diffusion \bar{D}_{val}	101
4.5 Le seuil de $X_{0,c}$ en fonction de K_d en utilisant la loi de Haldane et la diffusion \bar{D}_{val}	102
4.6 La production de méthane (en mgC / L) après 2 jours en utilisant la loi de Haldane sans diffusion dans (a) et avec diffusion \bar{D}_2 dans (b).	103
4.7 La production de méthane (en mgC / L) après 2 jours en utilisant la loi de Haldane avec diffusion \bar{D}_3 dans (c) et \bar{D}_4 dans (d).	103
4.8 Le maillage de domaine dans la cas 3D (600 tétraèdres, 1331 sommets et 1200 arêtes (faces)).	104
4.9 La production de méthane (en mgC/L) après 2 jours en utilisant la loi de Haldane avec \bar{D}_5 et \bar{D}_5^c en 2D.	105
4.10 La production de méthane (en mgC/L) après 2 jours en utilisant la loi de Haldane avec \bar{D}_5 et \bar{D}_5^c en 3D.	105
4.11 Evolution de la production de biogaz (mgC/L) avec \bar{D}_3 et la loi de Haldane	106
4.12 La vitesse du lixiviat (m/d) avec \bar{D}_3 et la loi de Haldane	106
4.13 Evolution du potentiel de pression p (m) avec \bar{D}_3 et la loi de Haldane	107
4.14 La teneur en eau θ en utilisant la loi de Haldane avec \bar{D}_3 .	107
4.15 Organigramme de résolution du système complet (S1)-(S2)	108

5.1 Le maillage.	118
5.2 Evolution de la production du méthane en 2D.	119
5.3 Evolution de la production de méthane en 3D.	120
5.4 Evolution de la moyenne de la production du méthane dans chaque zone (la zone 1 correspond à $B_0 = 1$, la zone 2 correspond à $B_0 = 2$ et la zone 3 correspond à $B_0 = 3$).	121
5.5 Evolution de la hauteur en colonne de biogaz h_b en 2D.	122
5.6 Evolution de la hauteur en colonne de biogaz h_b en 3D.	123
5.7 Evolution de la teneur en eau $\theta(h_c)$ en 2D.	124
5.8 Evolution de la teneur en eau $\theta(h_c)$ en 3D.	125
5.9 Evolution de la teneur en eau θ aux points M_1 , M_2 et M_3	126

Bibliographie

- [1] AFIF, M., AMAZIANE, B. (2002), *Convergence of finite volume schemes for a degenerate convection–diffusion equation arising in flow in porous media*. Computer methods in applied mechanics and engineering, 191(46), 5265-5286. [11](#)
- [2] AGOSTINI, F., SUNDBERG, C., NAVIA, R. (2012), *Is biodegradable waste a porous environment? A review*. Waste management and research, 30(10), 1001-1015. [7](#), [18](#), [26](#)
- [3] AGRANOVICH, M. S. (2015), *Sobolev spaces, their generalizations and elliptic problems in smooth and Lipschitz domains*. Cham : Springer. [81](#)
- [4] AGUILAR JUAREZ, O. (2000), *Analyse et modélisation des réactions biologiques aérobies au cours de la phase d'exploitation d'un casier de décharge d'ordures ménagères*. (Doctoral dissertation, Toulouse, INSA). [9](#)
- [5] AGUILAR-JUAREZ O., ARAN C., HOUI D. (1999), *Effects of landfill operations on temperature rise*. Proceedings Sardinia 99, Seventh International Waste Management and Landfill Symposium, vol II, pp 559-566. [9](#)
- [6] AHUSBORDE, E., AMAZIANE, B., EL OSSMANI, M., MOULAY, M. I. (2019), *Numerical Modeling and Simulation of Fully Coupled Processes of Reactive Multiphase Flow in Porous Media*. J. Math. Study, 52(4), 359-377. [11](#)
- [7] ALT, H. W., LUCKHAUS, S. (1983)., *Quasilinear elliptic-parabolic differential equations*. Mathematische Zeitschrift, 183(3), 311-341. [10](#), [86](#)
- [8] AMAZIANE, B., JURAK, M., KEKO, A. Ž. (2014), *Modeling compositional compressible two-phase flow in porous media by the concept of the global pressure*. Computational geosciences, 18(3-4), 297-309. [11](#)
- [9] AMZIANE, B., BOURGEAT, A., EL AMRI, H. (1990), *Un résultat d'existence pour un modèle d'écoulement diphasique dans un milieu poreux à plusieurs types de roches*. Publication du Laboratoire d'Analyse Numérique, (90-17). [11](#)
- [10] ANDREWS, J. F. (1968), *A mathematical model for the continuous culture of microorganisms utilizing inhibitory substrates*. Biotechnology and bioengineering, 10(6), 707-723. [16](#), [20](#), [45](#)
- [11] ARAN, C. (2001), *Modélisation des Ecoulements de Fluides et des Transferts de Chaleur au Sein des Déchets Ménagers. Application à la Réinjection de Lixiviats dans un Centre de Stockage*. (Doctoral dissertation) [8](#), [9](#), [15](#), [25](#), [26](#), [27](#), [30](#), [37](#), [98](#), [107](#), [117](#), [136](#)
- [12] ARBOGAST, T. (1992), *The existence of weak solutions to single porosity and simple dual-porosity models of two-phase incompressible flow*. [11](#)

- [13] AZAÏEZ, M., DEVILLE, M., MUND, E. H. (2011), *Éléments finis pour les fluides incompressibles*. PPUR Presses polytechniques. 29
- [14] BARBALAT, I. (1959), *Systemes d'équations différentielles d'oscillations non linéaires*. Rev. Math. Pures Appl, 4(2), 267-270. 41, 51
- [15] BARLAZ M. A. (1996), *Microbiology of solid waste landfills*, chap. 2 In Microbiology of solid waste, Edited by Palmisano and Barlaz, 223 p. 17
- [16] BASTONE, D. J., KELLER, J., ANGELIDAKI, I., KALYUZHNYI, S. V., PAVLOSTATHIS, S. G., ROZZI, A., ... AND VAVILIN, V. A. (2002), *Anaerobic Digestion Model No. 1 (ADM1)*, International Water Association Scientific and Technical Report No. 13. 19
- [17] BEBENDORF, M. (2003), *A note on the Poincaré inequality for convex domains*. Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen, 22(4), 751-756. 81
- [18] BELHACHMI, Z., BUCUR, D., SAC-EPEE, J. M. (2006) , *Finite element approximation of the Neumann eigenvalue problem in domains with multiple cracks*. IMA journal of numerical analysis, 26(4), 790-810. 78
- [19] BELHACHMI, Z. MGHAZLI, Z., OUCHTOUT, S. (2019), *Modeling and simulation of leachate flow in the anaerobic biodegradation of household waste*. Proceeding, In 9 ème édition du colloque Tendances dans les Applications Mathématiques en Tunisie Algérie et Maroc (p. 245). 78
- [20] BELHACHMI, Z., MGHAZLI, Z., OUCHTOUT, S. (2021), *Mathematical modelling and numerical approximation of a leachate flow in the anaerobic biodegradation of waste in a landfill*. Journal of Mathematics and Computers in Simulation, 2021, vol. 185, p. 174-193. 78
- [21] BELHACHMI, Z., MGHAZLI, Z., OUCHTOUT, S. (2021), *A coupled compressible two-phase flow with the biological dynamic modelling the anaerobic biodegradation process of waste in a landfill*, hal-03409786. 121
- [22] BELHACHMI, Z. MGHAZLI, Z., OUCHTOUT, S. , *Modeling and simulation of leachate flow in the anaerobic biodegradation of household waste*. (Communication) The 9th International Congress on Industrial and Applied Mathematics, July 15-19 (2019) in Valencia, Spain. 78
- [23] BELLENFANT, G. (2001), *Modélisation de la production de lixiviat en centre de stockage de déchets ménagers*. (Doctoral dissertation, Institut National Polytechnique de Lorraine-INPL). 26, 30
- [24] BENIOUG, M. (2015) , *Étude numérique de la croissance microbienne en milieu poreux*. (Doctoral dissertation, Université de Lorraine). 10
- [25] BERGAMASCHI, L., PUTTI, M. (2001), *Mixed Finite Elements for the Nonlinear Richards Equation*. In 15th IMACS World Congress on Scientific Computation, Modelling and Applied Mathematics (pp. 69-74). 25
- [26] O. BERNARD, Z. HADJ-SADOK, D. DOCHAIN, A. GENOVESI AND J. P. STEYER (2001), *Dynamical model development and parameter identification for an anaerobic wastewater treatment process*. Biotechnology and Bioengineering, 75, 424-438. 8, 20, 26

- [27] BERNARDI, C., MADAY, Y., AND RAPETTI, F. (2004), *Discrétisations variationnelles de problèmes aux limites elliptiques*. vol. 45. Springer Science and Business Media. [93](#)
- [28] BERNARDI, C., REBOLLO, T. C., HECHT, F., MGHAZLI, Z. (2008), *Mortar finite element discretization of a model coupling Darcy and Stokes equations*. ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis, 42(3), 375-410. [78](#)
- [29] BOFFI, D., BREZZI, F., FORTIN, M. (2013), *Mixed finite element methods and applications*. (Vol. 44, pp. xiv-685). Heidelberg : Springer. [82](#), [91](#), [93](#), [96](#)
- [30] BOTHE, D., FISCHER, A., PIERRE, M., ROLLAND, G. (2017), *Global wellposedness for a class of reaction-advection-anisotropic-diffusion systems*. Journal of Evolution Equations, 17(1), 101-130. [83](#)
- [31] BORGÉS DE CASTILHOS JR. (1988) , *Simulation au laboratoire du comportement hydraulique et de l'évolution bio-physico-chimique d'un déchet type composite mis en décharge*. Thèse de l'INSA Lyon. [9](#)
- [32] BREZZI, F., AND FORTIN, M. (2012), *Mixed and hybrid finite element methods*. (Vol. 15). Springer Science and Business Media. [92](#), [95](#), [97](#)
- [33] BROOKS, R.H., COREY, A.T. (1964), *Hydraulic Properties of Porous Media*, Colorado State Univ. Hydrology Paper No. 3., 27 pp. [26](#), [30](#)
- [34] CAMPBELL, G. S. (1974), *A simple method for determining unsaturated conductivity from moisture retention data*. Soil science, 117(6), 311-314. [26](#), [30](#)
- [35] CARABALLO, T., COLUCCI, R., DE LA CRUZ, J. L., RAPAPORT, A. (2020) , *Study of the chemostat model with non-monotonic growth under random disturbances on the removal rate*. Mathematical Biosciences and Engineering. [10](#)
- [36] J. CARR (1981), *Applications of Centre Manifold Theory*, Springer-Verlag. [10](#)
- [37] CELIA, M. A., BOULOUTAS, E. T., ZARBA, R. L. (1990), *A general mass-conservative numerical solution for the unsaturated flow equation*. Water resources research, 26(7), 1483-1496. [25](#)
- [38] CELIA, M. A., BINNING, P. (1992), *A mass conservative numerical solution for two-phase flow in porous media with application to unsaturated flow*. Water Resources Research, 28(10), 2819-2828. [11](#)
- [39] CHEN, Z., ESPEDAL, M., EWING, R. E. (1994), *Finite element analysis of multiphase flow in groundwater hydrology*. [11](#)
- [40] CHEN, Z. (2005), *Finite element methods and their applications*. Springer Science, Business Media [113](#)
- [41] CHEN, Z., HUAN, G., MA, Y. (2006) , *Computational methods for multiphase flows in porous media (Vol. 2)*. Siam. [29](#)
- [42] CHENU, D. (2007), *Modélisation des transferts réactifs de masse et de chaleur dans les installations de stockage de déchets ménagers : application aux installations de type bioréacteur*. (Doctoral dissertation, Institut National Polytechnique de Toulouse). [8](#), [10](#), [15](#), [98](#)

- [43] CRESPO, M., IVORRA, B., RAMOS, A. M., RAPAPORT, A. (2019) , *Shape optimization of spatial chemostat models*. Electronic Journal of Differential Equations, 2019, 84, pp.1-26. hal-02176945. [9](#), [11](#), [21](#), [98](#)
- [44] DOLLÉ, G., DURAN, O., FEYEU, N., FRÉNOT, E., GIACOMINI, M., AND PRUD'HOMME, C. (2016) , *Mathematical modeling and numerical simulation of a bioreactor landfill using Feel++*. ESAIM : Proceedings and Surveys, 55, 83-110. [8](#), [10](#), [37](#)
- [45] EL-FADEL, M., FINDIKAKIS, A. N., LECKIE, J. O. (1997), *Modeling leachate generation and transport in solid waste landfills*. Environmental technology, 18(7), 669-686. [9](#)
- [46] FARQUHAR, G.J. ROVERS, F.A. (1973), *Gaz Production During Refuse Decomposition*. Water, air, soil pollution, Vol. 2, pp. 483-495. [9](#)
- [47] R. FEKIH-SALEM, J. HARMAND, C. LOBRY, A. RAPAPORT AND T. SARI (2013), *Extensions of the chemostat model with flocculation*. Journal of Mathematical Analysis and Applications, **397**, 292–306. [8](#)
- [48] FINDIKAKIS, A. N. LECKIE, J. O (1979), *Numerical Simulation of Gas Flow in Sanitary Landfills*. J. of the Environmental Engineering Division, ASCE, Vol. 105, No. EE5, pp. 927- 945 [9](#)
- [49] FORTIN, M., MGHAZLI, Z. (1992) , *Analyse d'un élément mixte pour le problème de Stokes*. Numerische Mathematik, 62(1), 161-188. [78](#)
- [50] GABBOUHY, M., MGHAZLI, Z. (2001), *Un résultat d'existence de solution faible d'un système parabolique-elliptique non linéaire doublement dégénéré*. In Annales de la Faculté des sciences de Toulouse : Mathématiques (Vol. 10, No. 3, pp. 533-546). [10](#), [29](#)
- [51] GABBOUHY M., MGHAZLI Z (1998), *Quelques méthodes numériques pour la résolution du problème d'écoulement diphasique et de transport dans un milieu non saturé*. Workshop "Techniques de modélisation utilisées dans la pollution des eaux souterraines et superficielles", 1-2 Décembre 1998, Kénitra, Maroc [11](#)
- [52] GALLO, C. AND MANZINI, G. (2001), *A fully coupled numerical model for two-phase flow with contaminant transport and biodegradation kinetics*. Communications in Numerical Methods in Engineering, 17(5), 325-336. [11](#), [26](#)
- [53] GATICA, G. N. (2014), *A simple introduction to the mixed finite element method. Theory and Applications*. Springer Briefs in Mathematics. Springer, London. [81](#), [95](#)
- [54] GAVALA, H. N., AHRING, B. K. (2002), *Inhibition of the anaerobic digestion process by linear alkylbenzene sulfonates*. Biodegradation, 2002, vol. 13, no **3**, p. 201-209. [16](#)
- [55] GHOLAMIFARD, S. (2009) , *Modélisation des écoulements diphasiques bioactifs dans les installations de stockage de déchets*.(Doctoral dissertation, Université Paris-Est). [26](#), [27](#), [107](#), [136](#)
- [56] GIRAULT, V., RAVIART, P. A. (2012), *Finite element methods for Navier-Stokes equations : theory and algorithms (Vol. 5)*. Springer Science, Business Media. [97](#)

- [57] HAARSTRICK, A., HEMPEL, D. C. (2001), *Anaerobic digestion in municipal landfills—conceptual considerations and development of structured biodegradation models*. In 8th Waste Management and Landfill Symp. CISA, Cagliari, Italy (pp. 89-98). [19](#)
- [58] HADDON, A., ALCARAZ-GONZALEZ, V., HMISSI, M., HARMAND, J., ROUSSEAU, A. (2020), *Simulation of spatially distributed intensive biological systems*. In 2020 European Control Conference. [21](#), [98](#)
- [59] HADDON, A., HARMAND, J., RAMÍREZ, H., RAPAPORT, A. (2017), *Guaranteed value strategy for the optimal control of biogas production in continuous bio-reactors*. IFAC-PapersOnLine, 50(1), 8728-8733. [10](#)
- [60] HADDON, A., RAMÍREZ, H., RAPAPORT, A. (2018) , *First results of optimal control of average biogas production for the chemostat over an infinite horizon*. IFAC-PapersOnLine, 51(2), 725-729. [10](#)
- [61] HALDANE J. S. H. (1930), *Enzymes*, Longmans Green and Co, Londres.. [16](#), [45](#)
- [62] HANAKI, M., HARMAND, J., MGHAZLI, Z., SARI, T., RAPAPORT, A., UGALDE, P. (2020), *Mathematical study of a two-stage anaerobic model when the hydrolysis is the limiting step*. [10](#)
- [63] J. HARMAND, C. LOBRY, A. RAPAPORT AND T. SARI (2017), *The Chemostat : Mathematical Theory of Microorganisms Cultures*, ISTE Wiley. [8](#), [10](#), [20](#)
- [64] HARMAND, J., LOBRY, C., RAPAPORT, A., SARI, T. (2019), *Optimisation des bioprocédés : pratique du principe du maximum de Pontryagin*. (Vol. 3). ISTE Group. [10](#)
- [65] S. Hassam, E. Ficara, A. Leva and J. Harmand (2015), A generic and systematic procedure to derive a simplified model from the anaerobic digestion model, No. 1 (ADM1), Biochemical Engineering Journal, **99**, 193–203. [8](#)
- [66] F. HECHT, O. PIRONNEAU, J. MORICE (2013), *FreeFEM++*, v3.20, third edition, www.freefem.org. [78](#)
- [67] HELMIG, R. (1997) , *Multiphase flow and transport processes in the subsurface : a contribution to the modeling of hydrosystems*. Springer-Verlag. [29](#)
- [68] HÉNON, F., DEBENEST, G., LEFEVRE, X., POMMIER, S., CHENU, D., QUINTARD, M. (2011) , *Simulation of Transport and Impact of Moisture Content on the Biodegradation*. [9](#)
- [69] HESS, J. (2007) , *Modélisation de la qualité du biogaz produit par un fermenteur méthanogène et stratégie de régulation en vue de sa valorisation*. (Doctoral dissertation). [10](#)
- [70] HSU, S. B., JIANG, J., WANG, F. B. (2010) , *On a system of reaction–diffusion equations arising from competition with internal storage in an unstirred chemostat*. Journal of Differential Equations, 248(10), 2470-2496.
- [71] S. J. JANG AND J. BAGLAMA (2005), *Nutrient-plankton models with nutrient recycling*, Computers and Mathematics with Applications, **49**, 375-387. [8](#)
- [72] KINDLEIN, J., DINKLER, D., AHRENS, H. (2006) , *Numerical modelling of multiphase flow and transport processes in landfills*. Waste Management and Research, 24(4), 376-387. [26](#), [29](#)

- [73] KORFIATIS, G. P. DEMETRACOPOULOS, A. C. (1984) , *Moisture Transport in a Solid Waste Column*. J. of Environmental Engineering, ASCE, Vol. 110, No. 4, pp. 780-796 [26](#)
- [74] KAZHIKHOV, A. V., MONAKHOV, V. N., MONAKHOV, V. N. (1990), *Boundary value problems in mechanics of nonhomogeneous fluids*. (Vol. 22). Elsevier. [11](#)
- [75] KROENER, D., LUCKHAUS, S. (1984), *Flow of oil and water in a porous medium*. Journal of differential equations, 55(2), 276-288. [10](#)
- [76] LAKSHMIKANTHAM, V., Leela, S. (Eds.). (1969). *Differential and Integral Inequalities : Theory and Applications : Volume I : Ordinary Differential Equations*. Academic press. [44](#)
- [77] LAMBERT, J. D. (1991), *Numerical methods for ordinary differential systems : the initial value problem*. John Wiley, Sons, Inc. [60](#)
- [78] LANINI, S. (1998) , *Analyse et modélisation des transferts de masse et de chaleur au sein des décharges d'ordures ménagères*. (Doctoral dissertation, Institut National Polytechnique de Toulouse). [8](#), [9](#), [15](#), [24](#), [26](#), [30](#), [98](#)
- [79] LICHTNER, P. C. (1996) , *Continuum formulation of multicomponent-multiphase reactive transport*. Reviews in mineralogy, 34, 1-82. [29](#)
- [80] M. LOREAU (1994), *Material cycling and the stability of ecosystems*. The American Naturalist, 143 (1994), 508–513. [8](#)
- [81] J. MONOD, *La technique de la culture continue : Théorie et applications*, Ann. Inst. Pasteur, Lille, **79** (1950), 390–410. [15](#), [16](#), [20](#), [45](#)
- [82] NGUYEN-NGOC, D., LEYE, B., MONGA, O., GARNIER, P., AND NUNAN, N. (2013), *Modeling microbial decomposition in real 3D soil structures using partial differential equations*. International Journal of geosciences, 4(10), 15. [21](#), [98](#)
- [83] OUCHTOUT S., MGHAZLI, Z., HARMAND, J., RAPAPORT, A., BELHACHMI, Z., *Analysis of an anaerobic digestion model in landfill with mortality term*, Communications on Pure and Applied Mathematics, Volume 19, Number4, pp 2333-2346, April 2020. [39](#), [98](#), [100](#)
- [84] PAYNE, L. E., AND WEINBERGER, H. F. (1960), *An optimal Poincaré inequality for convex domains*. Archive for Rational Mechanics and Analysis, 5(1), 286-292. [81](#)
- [85] PERCIVAL A. MILLER ,NICHOLAS L.CLESCERI,(2003), *waste sites as biological reactors. characterization and modeling* . [17](#)
- [86] L. PERKO (2011), *Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer, 3rd ed. [10](#), [42](#), [43](#)
- [87] PHILIP, J. R. (1969), *Theory of infiltration*. In Advances in hydroscience (Vol. 5, pp. 215-296). Elsevier. [25](#)
- [88] POHLAND, F.G. AL-YOUSFI, B. (1994) , *Design and Operation of Landfills for optimum stabilization and biogaz production*. Wat. Sci. Tech., Vol.30, n°12, pp.117-124 [9](#)
- [89] A. RAPAPORT, T. BAYEN, M. SEBBAH, A. DONOSO-BRAVO AND A. TORRICO, *Dynamical modelling and optimal control of landfills*, Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, **26** (2016), 901–929. [76](#)

- [90] A. Rapaport, T. Nidelet, S. El Aida and J. Harmand (2019), ABOUT BIOMASS OVERYIELDING OF MIXED CULTURES IN BATCH PROCESSES, Preprint hal. [8](#)
- [91] A. RAPAPORT, T. NIDELET AND J. HARMAND (2019), *About biomass overyielding of mixed cultures in batch processes*, in 8th IFAC Conference on Foundations of Systems Biology in Engineering (FOSBE), Valencia, Spain, 15-18 Oct., (2019). [8](#)
- [92] REES, J.F. (1980), *The Fate of Carbon Compounds in the Landfill Disposal of Organic Matter*. J. Chem. Tech. Biotechnol., Vol.30, pp. 161-175 [9](#)
- [93] ROBERTS, J. E., AND THOMAS, J. M. (1991), *Mixed and hybrid methods*. [96](#)
- [94] ROUEZ, M. (2008), *Dégradation anaérobie de déchets solides : Caractérisation, facteurs d'influence et modélisations*. Laboratoire de Génie Civil et d'Ingénierie Environnementale. Lyon, Institut National des Sciences Appliquées Docteur, 259. [8](#), [9](#), [17](#), [18](#), [20](#), [39](#), [59](#), [61](#), [64](#), [98](#), [99](#), [117](#)
- [95] SCHNEIDER, D. (2000), *Eléments finis mixtes d'aux pour la résolution numérique de l'équation de la diffusion neutronique en géométrie hexagonale*. (Doctoral dissertation, Paris 6).
- [96] SCHNEID, E., KNABNER, P., RADU, F. (2004) , *A priori error estimates for a mixed finite element discretization of the Richards' equation*. Numerische Mathematik, 98(2), 353-370. [78](#)
- [97] SHI, J., WU, Y., ZOU, X. (2019), *Coexistence of Competing Species for Intermediate Dispersal Rates in a Reaction Diffusion Chemostat Model*. Journal of Dynamics and Differential Equations, 1-28. [9](#), [21](#)
- [98] SMITH, H. L., WALTMAN, P. (1995), *The theory of the chemostat : dynamics of microbial competition (Vol. 13)*. Cambridge university press. [10](#)
- [99] STOLTZ, G. (2009), *Transferts en milieu poreux biodégradable, non saturé, déformable et à double porosité : application aux ISDND*. (Doctoral dissertation, Université Joseph-Fourier-Grenoble I). [9](#), [10](#)
- [100] TARTAR, L. (2007), *An introduction to Sobolev spaces and interpolation spaces*. (Vol. 3). Springer Science and Business Media. [81](#)
- [101] TINET, A. J. (2011), *Contribution à l'étude des transferts de fluides dans les installations de stockage des déchets non dangereux*. (Doctoral dissertation, Université Grenoble Alpes). [8](#), [15](#), [26](#)
- [102] TURNER, M. J., CLOUGH, R. W., MARTIN, H. C., TOPP, L. J. (1956), *Stiffness and deflection analysis of complex structures*. journal of the Aeronautical Sciences, 23(9), 805-823. [91](#)
- [103] VAN GENUCHTEN, M. T. (1980), *A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils 1*. Soil science society of America journal, 44(5), 892-898. [26](#), [30](#)
- [104] VANROLLEGHEM, P. A., DOCHAIN, D. (2001), *Dynamical Modelling and Estimation in Wastewater Treatment Processes*. IWA Publishing. [21](#)
- [105] VIDYASAGAR, M. (2002), *Nonlinear Systems Analysis*. Society for Industrial and Applied Mathematics. [41](#)

- [106] VINCENT, F. (1991) , *Contribution à l'étude du fonctionnement d'une décharge. Modélisation du comportement hydrodynamique et biologique d'un déchet type.* Thèse de l'Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris.
- [107] W. WALTER (1998), *Ordinary Differential Equations* . Springer. [10](#), [40](#), [43](#), [48](#)
- [108] YOTOV, I. P. (1996), *Mixed finite element methods for flow in porous media.* (Doctoral dissertation). [11](#)