



HAL
open science

Études numérique et analytique des instabilités dues à la convection mixte d'un fluide viscoélastique saturant une couche poreuse chauffée par le bas

Pooya Naderi

► **To cite this version:**

Pooya Naderi. Études numérique et analytique des instabilités dues à la convection mixte d'un fluide viscoélastique saturant une couche poreuse chauffée par le bas. Autre. Université de Picardie Jules Verne, 2019. Français. NNT : 2019AMIE0063 . tel-03637244

HAL Id: tel-03637244

<https://theses.hal.science/tel-03637244>

Submitted on 11 Apr 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Thèse de Doctorat

*Mention sciences de l'ingénieur
Spécialité Génie Mécanique*

présentée à l'*Ecole Doctorale en Sciences Technologie et Santé (ED 585)*

de l'Université de Picardie Jules Verne

par

Pooya NADERI

pour obtenir le grade de Docteur de l'Université de Picardie Jules Verne

Etudes numérique et analytique des instabilités dues à la convection mixte d'un fluide viscoélastique saturant une couche poreuse chauffée par le bas

Soutenue le 6 décembre 2019, après avis des rapporteurs, devant le jury d'examen :

M. BENNACER Rachid, Professeur, ENS Cachan
M. ABSI Rafik, Professeur, ECAM-EPMI
M. OUARZAZI Mohamad-Najib, Professeur, Université de Lille
M. CLIN Martial, Professeur, UPJV
M. BEJI Hassen, Professeur, UPJV
M. BEN HAMED Haïkel, Maître de Conférences, UPJV

Rapporteur
Rapporteur
Examineur
Examineur
Directeur de thèse
Co-encadrant



Remerciements

Tout d'abord je dois dire que mes brefs propos de remerciement ne peuvent pas représenter l'immensité de la part de chacune des personnes que je cite ici. C'est donc une petite action pour leur montrer que je ne les ai pas oubliés et je suis conscient de leurs efforts pour moi.

Premièrement, je tiens à remercier les trois piliers sans lesquels ce travail n'aurait pas été achevé : Professeur *Hassen Beji*, professeur *Haykel Ben Hamed* et professeur *Mohammad-Najib Ouarzazi*. Professeurs Beji et Ben Hamed, respectivement en tant que directeur et co-directeur de la thèse, m'ont accueilli dès le premier jour au sein de Laboratoire des Technologies Innovantes (LTI) à l'université de Picardie Jules Verne. Ils m'ont accompagné et m'ont soutenu moralement et scientifiquement pendant toutes les étapes de la thèse et j'ai acquis plusieurs qualités en science et dans la vie avec eux. Professeur Ben Hamed m'a très bien orienté et aidé surtout sur l'aspect numérique de la thèse. Le troisième pilier est donc Professeur Najib Ouarzazi qui m'a gentiment accueilli à l'Université de Lille au Laboratoire de Mécanique de Lille et qui m'a accompagné tout le long de la thèse avec un grand sens de précision et avec sa méthode de travail pédagogique par laquelle j'ai appris beaucoup sur les méthodes analytiques. J'apprécie tous mes trois professeurs qui sont chacun exemplaire dans ce qu'ils font.

Je tiens à remercier infiniment les membres du jury. Professeur *Bennacer* et professeur *Absi* et professeur *Clin* qui ont gentiment accepté d'être les rapporteurs et l'examineur de mon mémoire de thèse malgré leurs occupations.

Je remercie aussi professeur *Silvia Hirata* qui m'a surtout aidé et donné de bons conseils au début de la thèse.

Mes remerciements ne sont pas suffisants envers ma super famille, mes gentils parents, mon très cher frère *Majid* qui a été toujours la source d'inspiration pour moi, mon très cher frère *Omid* et sa belle femme et sa petite fille qui me manquent beaucoup. Je remercie le bon Dieu pour avoir la chance d'avoir une famille unie comme la nôtre.

Je remercie aussi mes magnifiques gentils collègues au laboratoire pendant les années du doctorat que cite par ordre alphabétique : *Abdoulaye, Amel, Cyrine, Fathia, Hamadou, Israr, Lorena, Maya, Pei, Redouane, Sabrine, Suzan, Souhail, Wirich, Wafa, Zakarya* et les autres gentils collègues.

Je remercie mon très cher ami et mentor Monsieur *J-F Poirier* pour ses précieux conseils et ses aides pendant toutes les étapes de la thèse.

Je remercie aussi mes inséparables amis sans lesquels je ne pouvais pas tenir moralement pendant la thèse. Je les cite par ordre alphabétique : *Ali, Aida, Amin, Amir, Beni, Behrang, Fakhi, Fraveh, Ghasem, Hamed, Mammad, Mohammad, Mohsen, Milad, Navid, Raha, Negar, Mehdi, Payam, Reza, Seif* et beaucoup d'autres bons amis.

Table des matières

Nomenclature	6
Symboles latins.....	6
Symboles grecs.....	6
Indice et exposants	7
Abréviations	7
Introduction générale et état de l'art	8
Chapitre 1	17
1 Généralités et formulation de base.....	17
1.1 Convection naturelle et mixte	17
1.2 Fluides Newtoniens et non Newtoniens	18
1.2.1 Fluides Newtoniens	18
1.2.2 Fluides non Newtoniens	19
1.3 Milieux Poreux et ses caractéristiques.....	28
1.3.1 Porosité.....	29
1.3.2 Volume Elémentaire Représentatif (V.E.R).....	31
1.3.3 Perméabilité.....	32
1.4 Le système et la formulation mathématique du problème.....	32
1.4.1 Equation de continuité	33
1.4.2 Équation de conservation de la quantité de mouvement.....	34
1.4.3 Equation de conservation de l'énergie	35
1.4.4 Conditions aux limites.....	37
1.4.5 Adimensionnement et conditions aux limites	37
1.4.6 Solution de conduction	40
1.5 Transfert de chaleur	40
1.6 Conclusions	41
Chapitre 2	42
2 Analyse de stabilité linéaire temporelle et spatiotemporelle.....	42
2.1 Formulation du problème de stabilité et équation de dispersion.....	42
2.2 Approche temporelle de stabilité	45
2.2.1 Cas de la convection en l'absence de l'écoulement principal ($Pe = 0$) :.....	45
2.2.2 Transformation de Squire avec $Pe \neq 0$	47

2.2.3	Naissance de la convection mixte dans le régime faiblement viscoélastique.	48
2.2.4	Naissance de la convection mixte dans le régime fortement viscoélastique.	53
2.2.5	Structures tridimensionnelles : application de la transformation de Squire.	60
2.3	Approche spatiotemporelle de stabilité	61
2.3.1	Différence de comportement physique entre instabilités convectives et instabilités absolues	61
2.3.2	Conditions mathématiques de déclenchement des instabilités convectives et des instabilités absolues	63
2.4	Transition d'une instabilité convective à une instabilité absolue	65
2.4.1	Transition d'instabilité convective/absolue dans le régime faiblement viscoélastique	65
2.4.2	Transition d'instabilité convective/absolue dans le régime fortement viscoélastique	68
2.5	Vérification du processus de pincement dans le plan (k_r, k_i)	71
2.6	Comparaison des seuils d'instabilités convectives et absolues	72
2.7	Conclusions	74
Chapitre 3		76
3	Instabilités au-delà du seuil absolu	76
3.1	La formulation mathématique au-delà du seuil absolu	76
3.2	Loin du seuil absolu – Cas général (ω_i non nul) – Newtonien et viscoélastique	77
3.2.1	Les résultats loin du seuil pour un fluide Newtonien	77
3.2.2	Fluide faiblement viscoélastique	81
3.3	Fluide fortement viscoélastique	84
3.4	Conclusions	86
Chapitre 4		87
4	Etude numérique du problème	87
4.1	Le modèle mathématique pour l'étude numérique	87
4.1.1	Résolution numérique	88
4.1.1	Validation du code numérique	89
4.2	Trouver le seuil d'instabilité absolue par la simulation numérique	92
4.2.1	Avant le seuil	92
4.2.2	Le seuil	93
4.2.3	Après le seuil	94
4.3	Suivi temporel de température	96

4.4	Les résultats numériques pour les fluides Newtoniens	97
4.4.1	Fréquence des structures pleinement établies pour un fluide Newtonien ...	97
4.4.2	Vitesse de phase numérique pour un fluide Newtonien.....	100
4.5	Comparaison des résultats numériques et théoriques dans la zone faiblement viscoélastique	102
4.6	Comparaison des résultats numériques et théoriques dans la zone fortement viscoélastique	105
4.7	Longueurs d'établissement des structures thermo-convectives	108
4.7.1	Effet de Pe et Ra sur la longueur d'établissement.....	111
4.7.2	Effet du temps de relaxation λ_1 sur la longueur d'établissement	114
4.7.3	Loi d'échelle pour les fluides Newtoniens	115
4.7.4	Longueur d'établissement pour un cas situé dans la zone faiblement viscoélastique	118
4.7.5	Longueur d'établissement dans la zone fortement viscoélastique	120
4.8	Conclusions	122
	Conclusions générales et perspectives	123
5	Annexes	126
	Annexe 1	126
	Annexe 2	127
	Les fréquences théoriques et numériques pour différents Pe pour un fluide Newtonien	127
	Annexe 3	129
	Fréquence des structures pleinement établies pour un fluide Newtonien (numérique et théorique).....	129
	Annexe 4	130
	Vitesse de phase numérique pour un fluide Newtonien (numérique et théorique)..	130
	Annexe 5	132
	Comparaison des résultats numériques et théoriques dans la zone faiblement viscoélastique	132
	Annexe 6	134
	Comparaison des résultats numériques et théoriques dans la zone fortement viscoélastique	134
	Annexe 7	136
	Bilan énergétique	136
	Table des figures	140

Nomenclature

Symboles latins

Nu : nombre de Nusselt.

Ra : nombre de Rayleigh.

Da : nombre de Darcy.

Pe : nombre de Péclet.

Re_p : nombre de Reynolds dans le milieu poreux.

Pr : nombre de Prandtl.

K : perméabilité, [m^2]

\hat{K} : conductivité hydraulique, [$m \cdot s^{-1}$]

\vec{V}, V_f, V_i : Vitesse, vitesse de filtration et vitesse interstitielle du milieu poreux.

V_ϕ : vitesse de phase, [$m \cdot s^{-1}$]

T : température, [K]

P : pression, [Pa]

\vec{g} : accélération de la pesanteur, [$m \cdot s^{-2}$]

H : hauteur entre les deux plaques, [m]

k : nombre d'onde.

u : composante horizontale de la vitesse, [$m \cdot s^{-1}$]

v : composante de la vitesse suivant y , [$m \cdot s^{-1}$]

w : composante verticale de la vitesse, [$m \cdot s^{-1}$]

Q : débit, [$m^3 \cdot s^{-1}$]

D_{th} : diffusivité thermique, [$m^2 \cdot s^{-1}$]

V_ϕ : vitesse de phase adimensionnée.

h : coefficient de transfert de chaleur, [$W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}$]

V : Volume, [m^3]

d : taille des pores, [m]

C_0 : constante dépendante des formes des grains

L_c : longueur caractéristique, [m]

E_{TV} : énergie visco-thermique normalisée.

E_T : énergie thermique normalisée.

E_D : énergie dissipative normalisée.

Symboles grecs

$\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2$: temps de relaxation et de retardation dimensionnés.

λ_1, λ_2 : temps de relaxation et de retardation adimensionnés.

Γ : Rapport des temps de retardation et de relaxation.

τ : contrainte de cisaillement, [Pa]

γ' : vitesse de cisaillement, [s^{-1}]

μ : viscosité dynamique, [Pa. s]
 ν : viscosité cinématique, [$m^2 \cdot s^{-1}$]
 ρ : masse volumique, [$kg \cdot m^{-3}$]
 $\lambda_s, \lambda_f, \lambda^*$: coefficient de conductivité thermique du solide et du fluide, et coefficient de conductivité thermique équivalent du milieu poreux.
 λ : longueur d'onde.
 α : coefficient d'expansion thermique, [K^{-1}]
 (ρc) : capacité thermique, [$J \cdot K^{-1} \cdot m^{-3}$]
 ϕ : Porosité.
 Δ : longueur d'établissement.
 φ : fonction de courant.

Indice et exposants

c : critique.
 r : partie réelle.
 i : partie imaginaire.
 s : stationnaire.
 o : oscillatoire.
 s, f : relatif au solide ou au fluide.
 p : perturbation.
 x : suivant x .
 y : suivant y .
 A : relatif à l'instabilité absolue.
 $Cond$: relatif à la conduction.
 b : solution de base.
max : maximum.
min : minimum.

Abréviations

V.E.R : Volume Élémentaire Représentatif
 FFT : Fast Fourier Transform (transformée de Fourier rapide)

Introduction générale et état de l'art

Convection naturelle des fluides Newtoniens

La convection des fluides et les instabilités dues à celle-ci ont été étudiées essentiellement après les travaux de Bénard et Rayleigh. Depuis, plusieurs chercheurs ont consacré leur vie pour faire des découvertes dans ce domaine. Le problème de Rayleigh-Bénard [1] est un des problèmes les plus connus dans les instabilités dues à la convection dans un fluide Newtonien. Il consiste à chauffer un fluide entre deux plaques planes horizontales où la paroi inférieure est maintenue à une température plus élevée que celle du haut. Pour de faibles écarts de température, le système est dans l'état de conduction thermique car cette différence de température entre les deux plaques planes n'est pas suffisante pour vaincre le freinage visqueux et la diffusion de chaleur qui sont des effets stabilisants. Il en résulte l'établissement d'un gradient de température qui est donc le moteur de l'instabilité. Au-delà d'une certaine valeur de ce gradient vertical de température, la convection naturelle est déclenchée comme schématisé sur les figures 0-1 et 0-2.

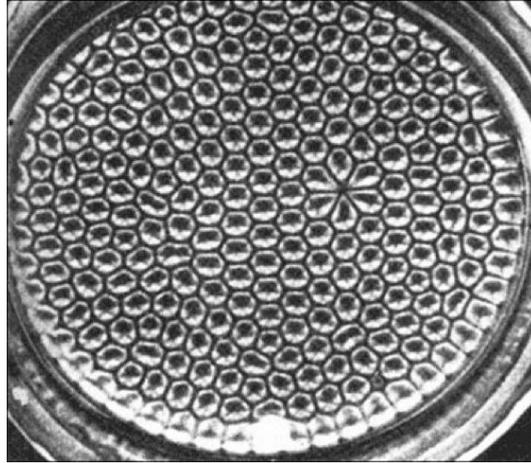


Figure 0-1 Cellules de convection dans l'instabilité de Rayleigh Bénard [2]

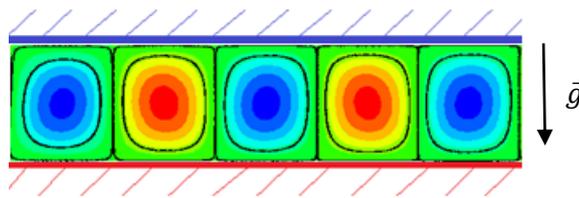


Figure 0-2 Représentation schématique de l'instabilité Rayleigh-Bénard

Le problème de Horton-Rogers-Lapwood [3]- [4] traite le même problème mais dans un milieu poreux. La convection naturelle dans des milieux fluides et poreux est bien documentée dans les livres de Nield et Bejan [5] et Platten et Legros [6].

Convection naturelle des fluides viscoélastiques saturant un milieu poreux

Pour la convection en milieu poreux de fluides viscoélastiques, ce n'est que récemment que des investigations ont été menées. Rudraiah et al. [7] ont conduit une étude analytique de stabilité linéaire d'un fluide viscoélastique saturant une couche poreuse peu dense (*sparsely packed*) chauffée par le bas. Ceux-ci ont utilisé le modèle de Darcy-Brinkman-Jeffreys sous différentes conditions aux limites [7].

Kim et al. [8] ont travaillé sur la convection thermoconvective de fluides viscoélastiques saturant une couche poreuse horizontale et ont procédé à une étude linéaire et faiblement non linéaire avec le modèle de Darcy-Oldroyd. Par la suite, Zhang et al. [9] ont élargi cette étude et ont utilisé le modèle de Darcy-Brinkman-Oldroyd comme équation du mouvement. Ces deux dernières études ont démontré que la nature des structures (stationnaire ou oscillatoire) dépend des valeurs de temps de relaxation et de retardation qui sont les paramètres relatifs à l'élasticité du fluide. Hirata et al. [10] ont mené une analyse faiblement non linéaire qui a permis d'identifier la région des paramètres viscoélastiques qui sélectionnent soit les ondes progressives

ou les ondes fixes. Le transfert de chaleur associé à ces deux types de structures convectives périodiques dans le temps a été déterminé.

Fu et al. [11] ont étudié numériquement la convection thermique dans une cavité carrée poreuse chauffée par le bas à l'aide de l'équation de Darcy modifiée où les deux temps caractéristiques de viscoélasticité (λ_1 et λ_2) ont été utilisés pour décrire le comportement viscoélastique du fluide. Trois couples du temps de relaxation λ_1 et du temps de retardation λ_2 ont été traités : a) $\lambda_1=0.3$; $\lambda_2=0.2$, b) $\lambda_1=0.2$; $\lambda_2=0.1$ et c) $\lambda_1=0.3$; $\lambda_2=0.1$. Ils ont comparé ces résultats avec ceux du fluide Newtonien jusqu'à un nombre de Darcy-Rayleigh de 400. Une déstabilisation du système de l'état de conduction dans un fluide Newtonien est en faveur de l'établissement de structures stationnaires, tandis que pour les trois cas de fluides viscoélastiques considérés, les simulations numériques ont montré que des structures oscillantes vont émerger dans le système. Ils ont remarqué aussi que pour les cas (a) et (b) une deuxième transition de la convection oscillatoire monocellulaire vers la convection stationnaire monocellulaire se produit. Au contraire pour le cas (c) les structures oscillatoires persistent au cours du temps, y compris pour des grandes valeurs de Ra. Pour résumé, trois scénarios ont été observé pour la déstabilisation de l'état de conduction vers la convection : Convection stationnaire (fluide Newtonien), convection oscillatoire et transition de l'état oscillatoire vers l'état stationnaire, suivie d'une deuxième transition vers l'état oscillatoire. Leurs résultats sont représentés sur la figure 0-3.

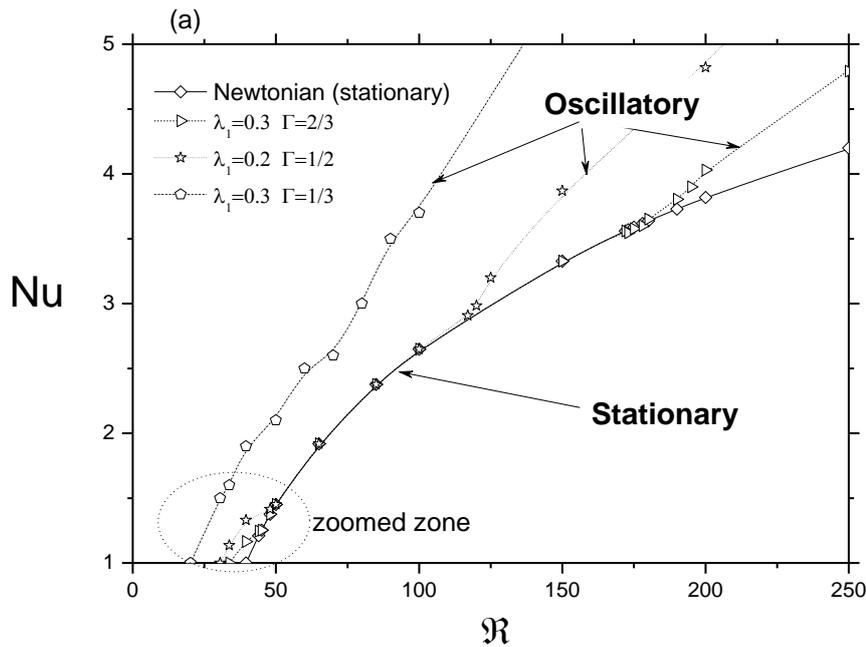
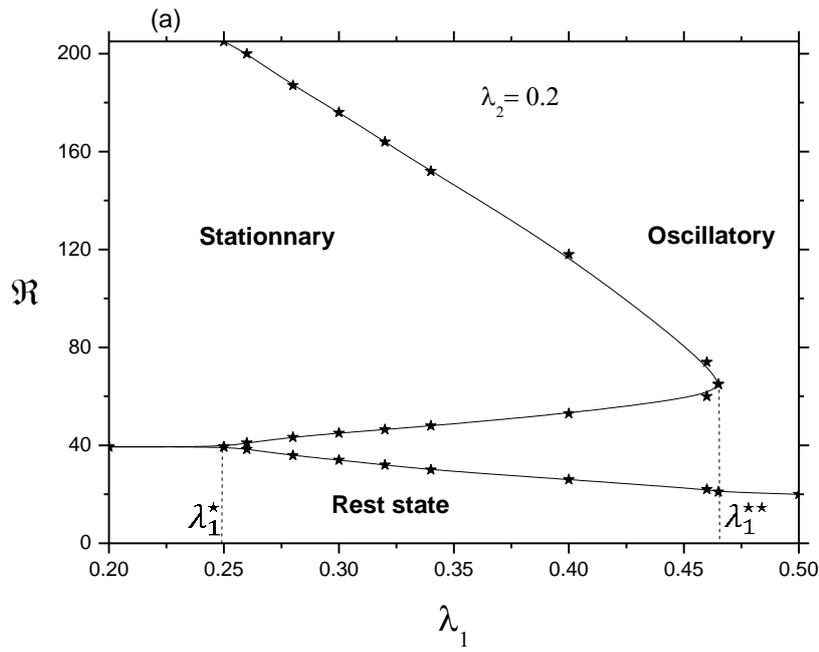
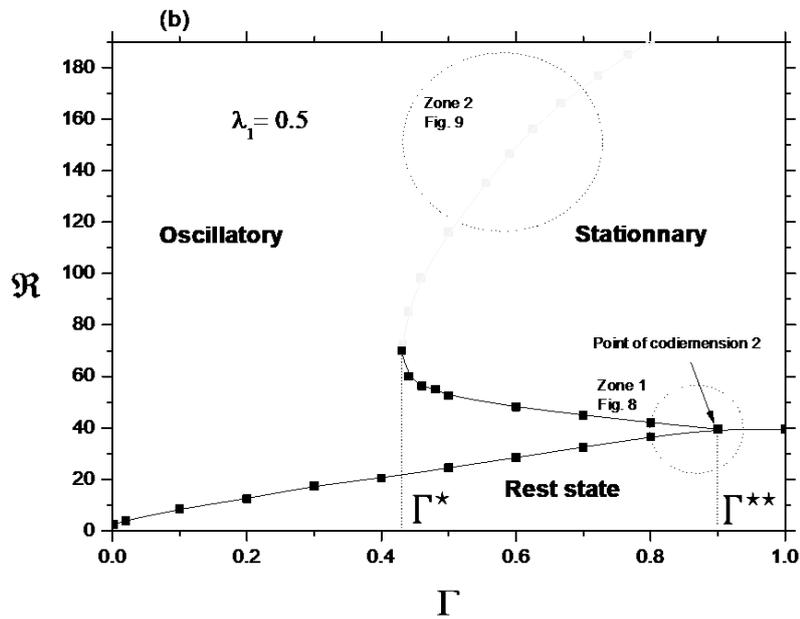


Figure 0-3 Les résultats de Fu et al. (2007) [11]

Taleb et al. [12] ont généralisé le travail de Fu et al. [11] en combinant la théorie des systèmes dynamiques et la simulation numérique des instabilités thermiques dans un fluide viscoélastique saturant une cavité carrée poreuse chauffée par le bas. Ils ont varié en continu le rapport Γ de la viscosité du solvant à la viscosité totale, de 0 à 1 et le temps de relaxation λ_1 de 0 à 0.5. Les différentes bifurcations observées et la dynamique non linéaire ont permis de classer les fluides viscoélastiques en trois régimes : faiblement viscoélastique, fortement viscoélastique et Newtonien. Leurs résultats sont reportés sur la figure 0-4.



(a)



(b)

Figure 0-4 Diagramme générale de stabilité pour a) $\lambda_2 = 0.2$ dans le plan (λ_1, R) et pour b) $\lambda_1 = 0.5$ dans le plan (Γ, R) [12]

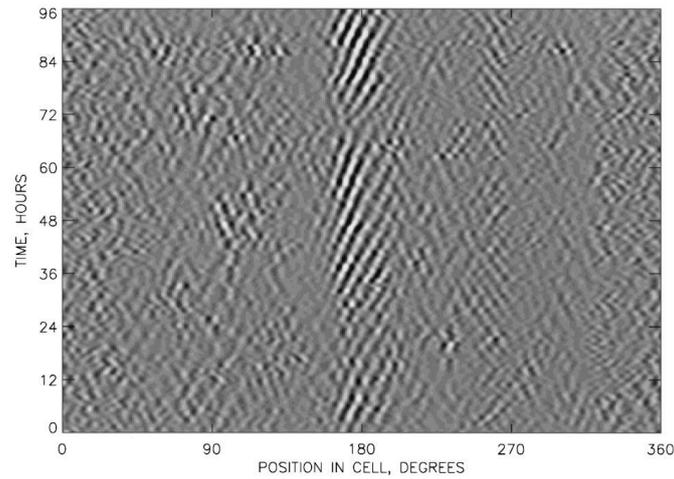
Malashetty et al. (2009) [13] ont étudié le déclenchement de la convection dans un fluide viscoélastique binaire saturant une couche poreuse en faisant une analyse de stabilité linéaire et faiblement non linéaire. Dans cette étude le modèle de Darcy-

Oldroyd modifié a été utilisé comme équation de quantité de mouvement. Wang et al. [14] ont analysé la stabilité de la convection thermodiffusive d'un fluide viscoélastique dans un milieu poreux en utilisant un modèle Maxwell-Darcy modifié.

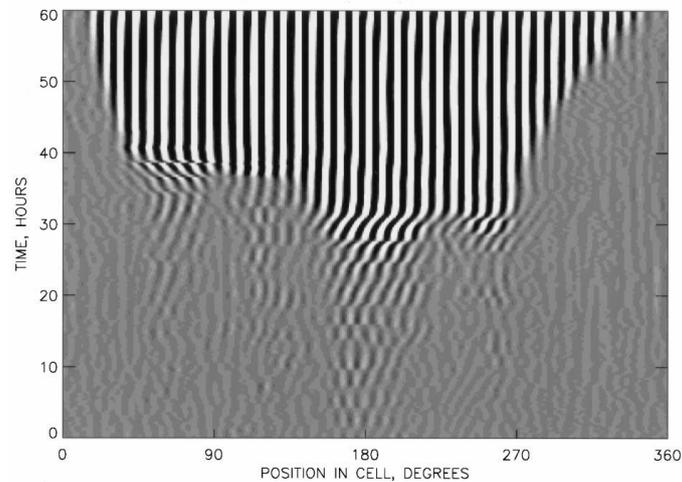
Ella Eny (2011) [15] dans le cadre de sa thèse a travaillé sur la convection naturelle et les instabilités thermiques et thermodiffusives des fluides viscoélastiques dans une couche poreuse chauffée par le bas. Il a obtenu des résultats intéressants sur les effets combinés de l'élasticité du fluide et l'effet Soret.

NIU. J et al. [16] ont étudié la convection naturelle d'un fluide viscoélastique confiné dans une cavité carrée avec la face supérieure ouverte par l'intermédiaire de l'équation de Darcy modifiée. Ils ont obtenu les nombres de Rayleigh critiques pour le commencement de la convection avec la théorie de stabilité linéaire et ensuite les effets de temps de relaxation sur le transfert de chaleur et l'écoulement ont été vérifiés numériquement. Ils ont remarqué que le temps de relaxation déstabilise le fluide alors que le temps de retardation stabilise le mouvement du fluide dans le milieu poreux. D'après leurs résultats le taux de transfert de chaleur augmente avec le temps de relaxation et diminue avec le temps de retardation. NIU. J et al. [16] [17] ont travaillé sur le même problème avec une condition de flux de chaleur constante et ont effectué une étude numérique.

En ce qui concerne les travaux expérimentaux, à notre connaissance il y a peu de recherches effectuées sur la convection des fluides viscoélastiques. Cependant, on peut citer les travaux de Kolodner [18] sur la convection naturelle des suspensions de molécules d'ADN mélangé avec de l'eau salée dans une cavité annulaire en milieu clair (non poreux) chauffée par le bas. Ses expériences ont montré que sans les molécules d'ADN la convection s'établit sans aucune oscillation temporelle alors qu'avec les molécules d'ADN les structures convectives oscillatoires ont été observées en première. Il a aussi montré que les seuils critiques du nombre de Rayleigh pour le début de la convection oscillatoire sont inférieurs aux valeurs critiques pour la convection stationnaire pour le fluide Newtonien. De plus, il a observé une transition de l'instabilité oscillatoire vers une instabilité stationnaire (figure 0-6) lorsqu'il augmentait la différence de température entre les deux plaques inférieure et supérieure.



(a)



(b)

Figure 0-5 Les résultats de Kolodner concernant la transition de l'instabilité oscillatoire (a) vers une instabilité stationnaire (b) [18]

Convection mixte des fluides Newtoniens

Les études concernant la convection mixte des fluides Newtoniens saturant un milieu poreux sont abondantes. Nous renvoyons le lecteur aux thèses [19], [20] qui présentent une revue bibliographique exhaustive. Nous nous limitons ici à deux travaux qui nous semblent proches des préoccupations de cette thèse.

F. Dufour et al. (1998) [21] ont étudié la convection dans une couche poreuse horizontale chauffée par le bas et saturée par un fluide Newtonien. Dans cette étude, un écoulement horizontal a été imposé au système. Ils ont tracé les variations de fréquences obtenues numériquement en fonction du débit et du nombre de Rayleigh

et ils ont constaté une croissance des fréquences avec le débit et le Rayleigh pour une large étendue de Ra ($0 < Ra < 160$). Les figures ci-dessous montrent les résultats de F. Dufour et al. (1998) [21].

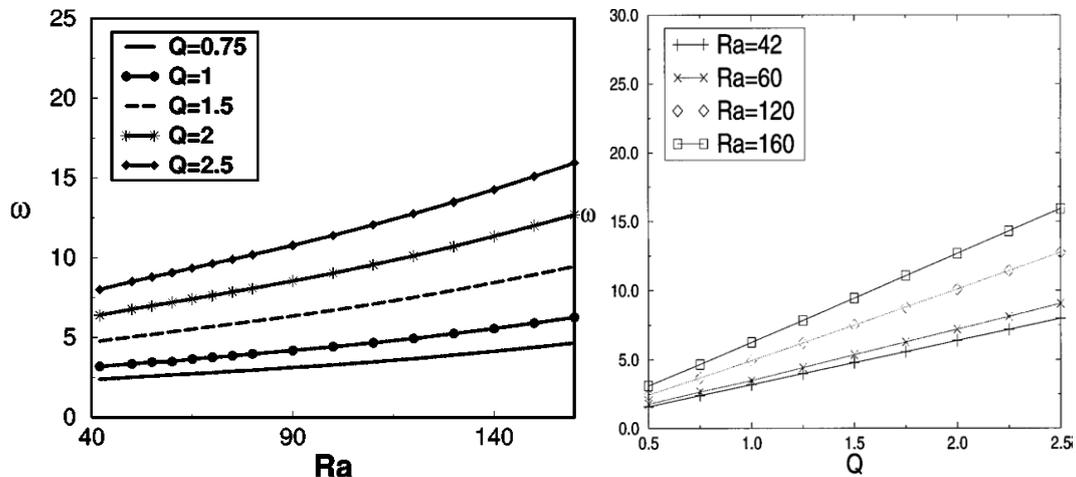


Figure 0-6 Les courbes de fréquences numériques en fonction du débit et du nombre de Rayleigh tirées du travail de F. Dufour et al. (1998) [21]

Alexandre Delache [20] [22] a réalisé à la fois une étude analytique et numérique sur les instabilités spatio-temporelles dans un fluide Newtonien saturant une couche poreuse avec un écoulement horizontal imposé. Le résultats le plus significatif qui se dégage de son travail est que l'apparition des rouleaux transversaux observés dans les expériences de Michel Combarous [23], correspondent aux seuil de la transition d'une instabilité convective à une instabilité absolue.

L'objectif de ce travail est d'étudier la convection de fluides viscoélastiques saturant un milieu poreux confiné entre deux plaques planes en présence d'un gradient vertical de température et d'un écoulement imposé de débit non nul. Ce problème appartient à une classe plus générale de systèmes fluides ouverts. Ces derniers se distinguent d'une part par le fait que les particules fluides entrent continuellement puis quittent le domaine d'observation et d'autre part, ces écoulements sont généralement inhomogènes dans la direction de l'écoulement. La modélisation de ce problème repose sur un équilibre entre deux effets physiques : l'instabilité de l'écoulement qui peut être convective ou absolue en présence d'une advection moyenne et les non linéarités. On distinguera les deux catégories de solutions de ce type d'écoulement ouvert : 1) les amplificateurs de bruit lorsque les structures convectives résultent de l'amplification spatiale des perturbations à l'entrée du milieu, 2) Les oscillateurs auto-entretenus pour lesquels les structures convectives sont très bien ordonnées avec une dynamique très peu sensible au bruit extérieur et une fréquence d'oscillation imposée en tout point de l'écoulement. Pour ce type de solutions, on parle de la formation de modes globaux. L'objet majeur de cette étude est d'identifier la forme de ces modes

globaux et de déterminer l'influence de l'élasticité du fluide sur leur établissement. Les résultats issus de la théorie de l'instabilité absolue seront comparés à ceux issus de la simulation numérique directe de ce problème.

Cette thèse est organisée en quatre chapitres.

Dans le premier chapitre, ont été abordées les généralités et les bases du problème comme les notions de convection naturelle et mixte, de milieux poreux, de rhéologie et de caractéristiques des fluides viscoélastiques. Dans la deuxième partie de ce chapitre nous traitons la modélisation mathématique du problème et nous y présentons les paramètres influençant le problème ainsi que l'état de base.

Dans le deuxième chapitre, l'étude linéaire dans une couche mince infinie dans l'espace est abordée. Des perturbations infinitésimales sont injectées dans le système et la stabilité de la solution de conduction par rapport à ces perturbations est étudiée. L'équation de dispersion a été établie et deux approches ont été utilisées pour nous permettre de trouver le seuil des deux types d'instabilités convective et absolue. Nous avons cherché à découvrir l'effet de la viscoélasticité ainsi que l'effet du débit horizontal sur les seuils trouvés analytiquement.

Au cours du troisième chapitre, nous avons procédé à une approche analytique pour étudier l'équation de dispersion dans des conditions qui prévoient l'état du système au-delà de l'instabilité absolue. Nous avons étudié le comportement du système, dans cet état hypercritique, en considérant des paramètres comme le nombre de Rayleigh, la pulsation et le nombre d'onde.

Le quatrième chapitre propose une étude numérique du système qui recourt la méthode des différences finies. Nous allons y comparer les résultats numériques avec ceux qui ont été obtenus analytiquement dans les chapitres 2 et 3. L'influence des paramètres de contrôle sur l'écoulement et le transfert de chaleur vont être précisés. De plus, nous allons expliquer la notion de la longueur d'établissement et nous essayerons de vérifier une loi d'échelle établie par Ginzburg-Landau.

Chapitre 1

1 Généralités et formulation de base

Dans ce premier chapitre nous allons nous concentrer sur les notions fondamentales concernant la convection en milieux poreux, les fluides complexes (surtout les fluides viscoélastiques), les milieux poreux. Par la suite, nous allons établir la formulation de base du problème et nous trouvons la solution de base que nous allons utiliser dans le prochain chapitre.

1.1 Convection naturelle et mixte

Le transfert de chaleur par convection se produit quand la chaleur est transmise par un fluide en écoulement. Dans la convection naturelle ou libre le mouvement du fluide en présence de la gravité est créé par des variations de masse volumique qui sont dues à une distribution non uniforme de la température ou de la concentration de matières dans un mélange. On peut citer comme exemples de convection naturelle dans la vie quotidienne le chauffage électrique, l'ascension de la fumée, les lampes à lave, etc. En revanche, dans la convection mixte ou forcée l'écoulement est créé par une force extérieure. Les études expérimentales de Bénard (1905) et l'analyse théorique de Rayleigh (1916) sont considérés comme les travaux pionniers dans ce domaine. On peut citer le travail de Nield et Bejan [24] comme une référence essentielle dans ce contexte et pour un fluide viscoélastique le travail de Do-Young et al. [25] mérite d'être médité. Par exemple, ils ont montré que, lorsque la convection est stationnaire, le

transfert de chaleur reste insensible à ces paramètres d'élasticité du fluide et il se comporte comme un fluide Newtonien.

1.2 Fluides Newtoniens et non Newtoniens

La plupart des substances de faible poids moléculaire telles que les liquides organiques et inorganiques, les solutions de sels minéraux, métaux et sels fondus ainsi que gaz présentent des caractéristiques d'écoulement Newtonien, c'est-à-dire à température et pression constantes, en cisaillement simple, la contrainte de cisaillement (τ) est proportionnelle à la vitesse de cisaillement ($\dot{\gamma}$) et la constante de proportionnalité est la viscosité dynamique (μ). Ces fluides sont classiquement connus comme les fluides Newtoniens, bien que les notions d'écoulement et de viscosité sont antérieures aux travaux de Newton.

Au cours des cinquante à soixante dernières années, on a pris de plus en plus conscience du fait que de nombreuses substances importantes pour l'industrie, notamment de nature multiphasique (mousses, émulsions, suspensions...) et les polymères fondus de même que les solutions de polymères (à la fois naturelles et artificielles) ne sont pas conformes au comportement Newtonien de la relation linéaire entre la contrainte de cisaillement (τ) et la vitesse de cisaillement ($\dot{\gamma}$) en cisaillement simple, par exemple. Par conséquent, ces fluides sont diversement connus comme non-Newtoniens, non linéaires, complexes, ou fluides rhéologiquement complexes [26].

1.2.1 Fluides Newtoniens

On appelle un fluide « Newtonien » quand la relation entre la contrainte de cisaillement (τ) et la vitesse de cisaillement ($\dot{\gamma}$) est linéaire comme dans l'équation 1. Si on trace τ en fonction de $\dot{\gamma}$ on obtient une droite avec une pente égale à la viscosité dynamique μ du fluide. Donc la viscosité dynamique d'un fluide Newtonien reste constante sous différentes contraintes de cisaillement et sous différents taux de cisaillement. De plus, pour ce type de fluide la viscosité est indépendante du temps pendant lequel le fluide est cisailé.

$$\tau = \mu \dot{\gamma} \quad (1-1)$$

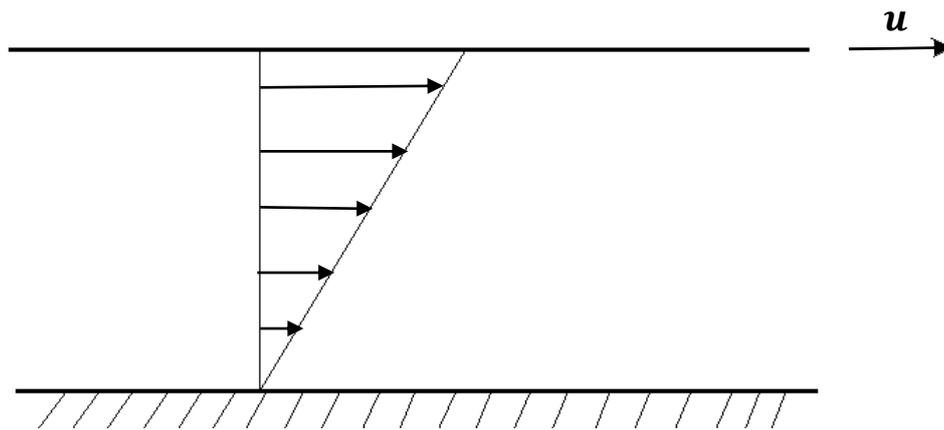


Figure 1-1-1 Profil de la vitesse pour un fluide Newtonien sous une contrainte de cisaillement

1.2.2 Fluides non Newtoniens

Toute déviation de la définition des fluides Newtoniens nous amène vers une vaste gamme des fluides que l'on appelle des fluides « non Newtoniens ». Il existe plusieurs types de fluides non Newtoniens avec différentes réactions sous contraintes de cisaillement et durées d'application de contrainte. Ainsi peut-on classer ces types de fluides en trois types généraux : les fluides visqueux dépendants du temps, les fluides visqueux indépendants du temps et les fluides viscoélastiques.

1.2.2.1 Les fluides visqueux dépendants du temps

1.2.2.1.1 Comportement thixotrope

Un matériau est dit thixotrope lorsque sa viscosité diminue au cours du temps à cause du cisaillement. Ce phénomène peut être réversible et le matériau regagne sa viscosité lorsque le cisaillement cesse.

1.2.2.1.2 Comportement rhéopexe

Ce comportement, aussi appelé anti-thixotrope, consiste en augmentation de la viscosité du fluide au cours du temps pour une vitesse de cisaillement donnée.

1.2.2.2 Les fluides visqueux indépendants du temps

1.2.2.2.1 Comportement viscoplastique

Aussi appelés les fluides à seuil, il faut leur appliquer une contrainte plus élevée que la valeur critique du seuil pour obtenir l'écoulement. Le modèle rhéologique utilisé pour modéliser ce type de fluides est celui d'Herschel-Bulkley.

1.2.2.2 Comportement rhéofluidifiant (Shear thinning)

Aussi appelés les matériaux pseudo-plastiques, la viscosité de ces types de matériaux diminue quand le taux de cisaillement augmente. La plupart des matériaux ont ce type de comportement.

1.2.2.3 Comportement rhéoépaississant (Shear thickening)

Aussi appelés les fluides dilatants, leur viscosité augmente quand le taux de cisaillement ou la contrainte de cisaillement augmente. Il faut noter que ce type de comportement est moins fréquent que le comportement rhéofluidifiant.

1.2.2.3 Les fluides viscoélastiques

Les fluides viscoélastiques sont une forme courante de fluide non Newtonien. Ils peuvent présenter une réponse qui ressemble à celle d'un solide élastique dans certaines circonstances ou la réponse d'un liquide visqueux dans d'autres circonstances. Cela veut dire que leur comportement est intermédiaire entre ces deux types de matériaux (fluide visqueux et solide élastique). En général, les fluides présentant ce comportement sont de nature macromoléculaire (c'est-à-dire qu'ils ont un poids moléculaire élevé), tels que les fluides polymériques (polymère fondu et solutions de polymère) utilisés pour fabriquer des produits en plastique, les produits alimentaires tels que la pâte utilisée pour la fabrication du pain et les liquides biologiques tels que les liquides synoviaux présents dans les articulations. La nature macromoléculaire des molécules de polymères ainsi que des interactions physiques appelées enchevêtrements conduisent à un comportement élastique (les fluides ressemblent à une masse de vers vivants). Les molécules déformées sont entraînées par des mouvements thermiques pour revenir à leurs états non déformés, ce qui permet une récupération élastique de fluide dans la masse [27].

La réponse d'un fluide viscoélastique à une contrainte dépend du rapport entre le temps de la sollicitation et le temps caractéristique (ou le temps de relaxation) de ce type de fluide [15]. Le comportement élastique se passe lorsque le temps de sollicitation du matériau est petit par rapport à son temps caractéristique et donc le matériau n'a pas le temps de se déformer. Dans le cas d'un fluide visqueux le temps caractéristique est plus petit par rapport au temps de sollicitation. Grâce à leur structure chimique, les fluides viscoélastiques manifestent certains phénomènes que l'on ne peut pas observer chez les fluides Newtoniens.

1.2.2.3.1 Effets et phénomènes intéressants dans les fluides viscoélastiques

1.2.2.3.1.1 Effet de Barus (Die swell)

Cet effet est produit lors de l'extrusion des polymères pendant laquelle le matériau est forcé à travers une matrice (*Die* en anglais). Dans ce process le polymère est comprimé en entrant la matrice mais en sortant il gonfle pour retrouver partiellement la forme qu'il avait avant d'entrer la matrice d'où l'intérêt du mot *swell* en anglais. Les polymères dans le jet de polymère occupent, avant d'entrer dans la matrice, l'espace à peu près avec une forme sphérique. L'extrusion cause une augmentation du débit de jet de polymère ce qui fait que les polymères vont perdre de plus en plus leur forme sphérique et ils deviennent plus longs mais à la sortie de la matrice une partie des polymères retrouve leur forme sphérique qui provoque l'expansion du jet [28].

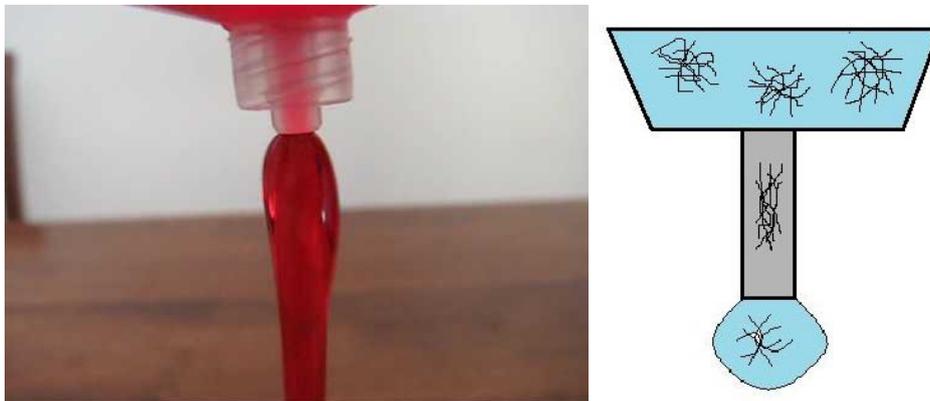


Figure 1-2 Représentation de l'effet de Barus

1.2.2.3.1.2 Effet de Kaye

L'effet de Kaye est décrit pour la première fois par Alan Kaye en 1963 [29] et c'est une propriété des fluides complexes comme du shampoing. Lors du versement d'un fluide complexe sur une surface, le fluide versé forme un tas et soudainement des jaillissements et des éclabousses verticaux à contre sens de l'écoulement du jet viscoélastique se produisent. Cet effet est appelé l'effet Kaye et il est courant chez les fluides rhéofluidifiants. Les exemples simples peuvent être les savons liquides, les shampoings et certaines peintures. Ce phénomène passe souvent inaperçu à l'observation visuelle car il dure seulement quelques centaines de millisecondes. L'étude des jets viscoélastiques est complexe mais pour plus de détails sur ce sujet le travail de T. S. Majmudar et al. [30] semble trouver une dynamique générale pour la

stabilité de ces jets viscoélastiques. La figure ci-dessous montre un cycle de l'effet Kaye.

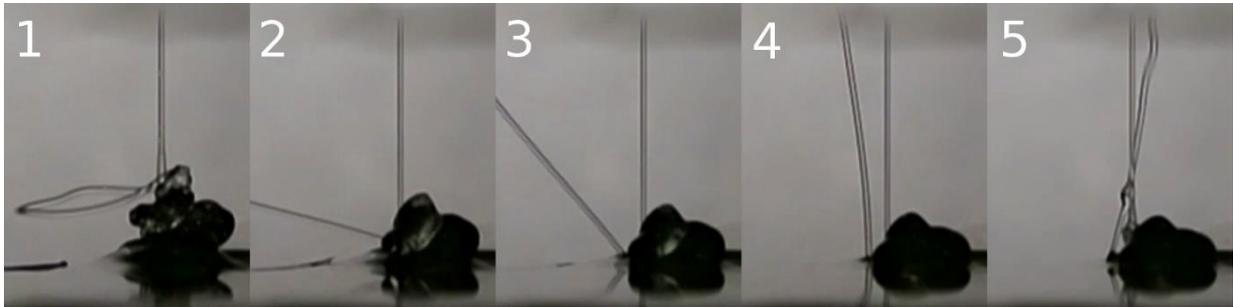


Figure 1-3 Un cycle de l'effet de Kaye

1.2.2.3.1.3 Effet Weissenberg

Lors de la rotation d'une tige dans un fluide viscoélastique par exemple dans certaines solutions de polymère, le fluide monte le long de l'axe de rotation au lieu de créer un vortex vers le bas. Ce phénomène qui est appelé l'effet Weissenberg est dû à une différence entre les contraintes normales non nulles tandis que pour un fluide Newtonien cette différence est nulle et même les contraintes normales sont nulles. Dans la figure on peut observer cet effet dans un fluide viscoélastique. Pour comprendre ce comportement il faut savoir que les polymères s'alignent avec les lignes de courant alors que les forces entropiques ont tendance à faire retrouver la forme stable des molécules de polymères. Dans le cas de la rotation d'une tige dans une solution de polymère, les lignes de courant sont circulaires et chaînes de polymères vont s'aligner et s'étendre avec les lignes de courant comme elles sont représentées sur la figure 1-4 [31].

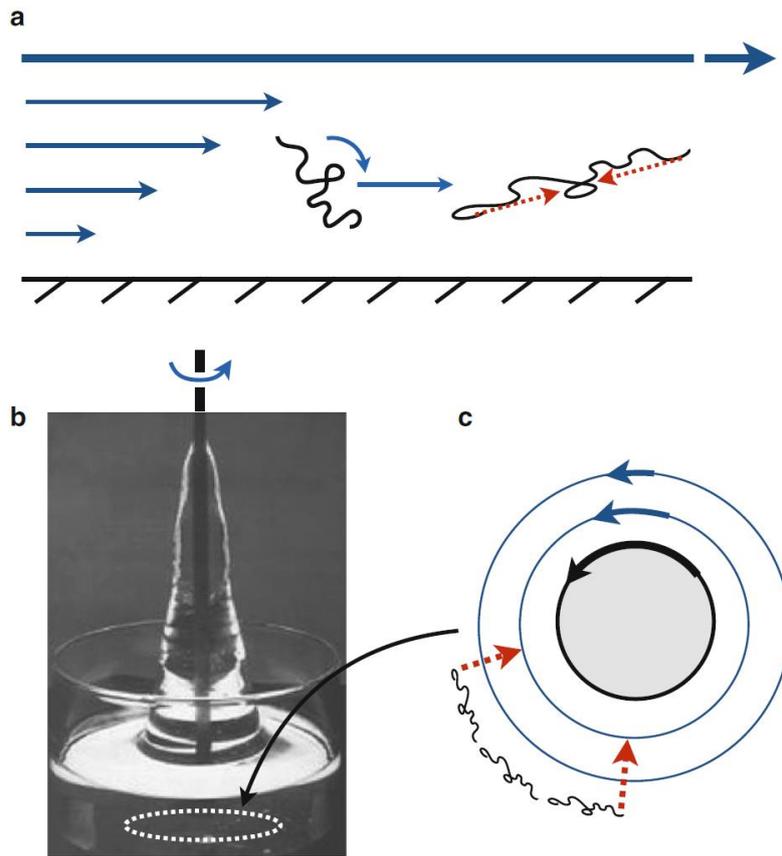


Figure 1-1-4 Représentation de l'effet Weissenberg [31]

1.2.2.3.2 Modèles de comportement des matériaux viscoélastiques

Il existe plusieurs modèles pour représenter les caractéristiques visqueuse et élastique de ces matériaux. En général, on utilise des combinaisons de ressorts et d'amortisseurs pour modéliser ce comportement. On distingue les matériaux élastiques des matériaux visqueux selon leur réponse à une déformation brusque par exemple les tensions dans un matériau élastique restent constantes dans le temps tant que la déformation existe alors que dans un fluide visqueux les tensions se dissipent dans une échelle de temps dépendante de sa viscosité. Un ressort peut symboliser le comportement élastique linéaire et un amortisseur symbolise le comportement visqueux linéaire. La combinaison de ces deux éléments en série représente un fluide viscoélastique (modèle de Maxwell) et la combinaison en parallèle (modèle de Voigt) représente un solide viscoélastique. Par contre, ces modèles semblent être incomplets car le modèle de Maxwell est incapable de montrer le fluage et l'hystérésis et le modèle de Voigt ne décrit pas la relaxation. Donc d'autres modèles plus complexes ont été proposés pour modéliser plus complètement les matériaux viscoélastiques. Ainsi on peut citer les modèles de Maxwell généralisé, Zener (en deux représentations) et Burgers qui sont

plus complexes. La configuration de quelques modèles est présentée dans les figures 1-5 à 1-9. Pour obtenir la contrainte et la déformation il faut savoir que dans la configuration en série la contrainte totale est égale à la contrainte dans chaque composant que ce soit le ressort ou l'amortisseur et la déformation totale est la somme des déformations de tous les composants. En outre dans la configuration en parallèle la déformation totale est égale à la déformation de chaque composant et la contrainte totale est égale à la somme des contraintes de tous les composants.

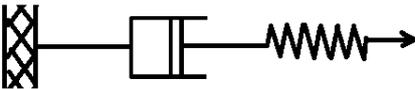


Figure 1-1-5 Modèle de Maxwell

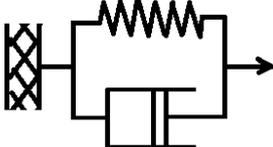


Figure 1-1-6 Modèle de Voigt

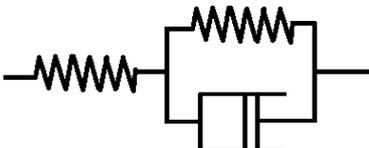


Figure 1-1-7 Modèle de Zener (représentation de Kelvin)

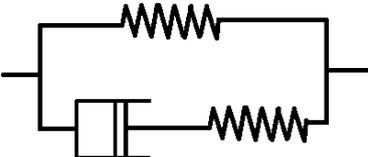


Figure 1-8 Modèle de Zener (représentation de Maxwell) ou le modèle du solide linéaire standard

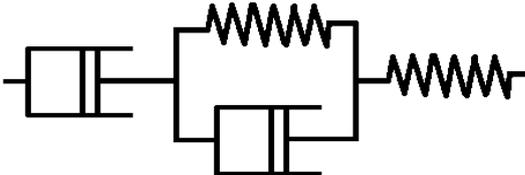


Figure 1-9 Modèle de Burgers

D'autres modèles bien plus complexes peuvent être utilisés comme le modèle de Wagner et le modèle d'Oldroyd B. Pour avoir plus d'information sur la viscoélasticité non linéaire, le travail de Y. Beraux [32] mérite d'être médité.

1.2.2.3.2.1 Modèle d'Oldroyd B

Ce modèle est un des modèles très présents dans la littérature qui est développé par James Gardner Oldroyd (1950) [33]. Du point de vue microscopique on peut modéliser une chaîne de polymère avec deux boules de masses liées avec un ressort et, pour modéliser un fluide viscoélastique, on peut dire que ces chaînes sont dispersées dans un solvant. Par conséquent, il y a trois effets qui s'exercent sur chaque boule [34]:

- La force du ressort
- La traînée de son mouvement dans le fluide
- Le mouvement brownien

Le tenseur des tensions viscoélastiques pour le modèle d'Oldroyd-B obéit à l'équation suivante :

$$\tau + \bar{\lambda}_1 \frac{D}{Dt} \tau = 2\mu_0 \left(D + \bar{\lambda}_2 \frac{D}{Dt} D \right) \quad (1-2)$$

Le tenseur des déformations est représenté par $D = d_{ij}$ qui est défini par $d_{ij} = \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$. La viscosité statique est représentée par μ_0 . $\bar{\lambda}_1$ est le temps nécessaire au tenseur des contraintes pour réagir au changement de déformation dans le système. On appelle ce temps le temps de relaxation. Autrement dit, c'est le temps que le fluide met pour retrouver son état d'équilibre après avoir subi une déformation ou le temps nécessaire pour que le fluide cesse de s'écouler. En outre, le matériau oublie sa forme initiale après déchargement et restitue une partie de son énergie élastique en énergie cinétique au terme d'un deuxième temps caractéristique appelé temps de retardation $\bar{\lambda}_2$; avec $0 < \bar{\lambda}_2 \leq \bar{\lambda}_1$. Le temps de retardation $\bar{\lambda}_2$ évoque le temps nécessaire à la déformation pour se propager [15]. Le temps de retardation nous aide à distinguer la partie élastique de la partie visqueuse du fluide. Si la valeur de $\bar{\lambda}_2$ est très proche de 0 le fluide a un comportement très élastique et si $\bar{\lambda}_1$ est très proche de $\bar{\lambda}_2$ et en même temps les deux sont très proches de zéro le fluide a un comportement Newtonien. Par exemple, pour un fluide purement visqueux on a $\bar{\lambda}_1 = \bar{\lambda}_2 = 0$ et pour un fluide purement élastique comme le représente le modèle de Maxwell on a $\bar{\lambda}_2 = 0$, $\bar{\lambda}_1 > 0$. Les figures nous aident à mieux comprendre les définitions des temps de relaxation et retardation. Sur la figure 1-10 nous remarquons que lorsqu'on coupe le fluide, la partie

coupée du bas ne revient pas tout de suite à l'état d'équilibre et la partie coupée du haut revient vers le récipient, ce qui atteste de la détente élastique ou de l'existence d'un temps de relaxation. Sur la figure 1-11 au cas (A) le fluide est à l'état de repos, mais au cas (B) on incline le fluide et on suppose que le temps passé est inférieur au temps de retardation (juste après l'inclinaison) par contre à un temps supérieur que le temps de retardation (le cas (C)) le fluide est déjà incliné et la déformation s'est déjà propagée dans le système.

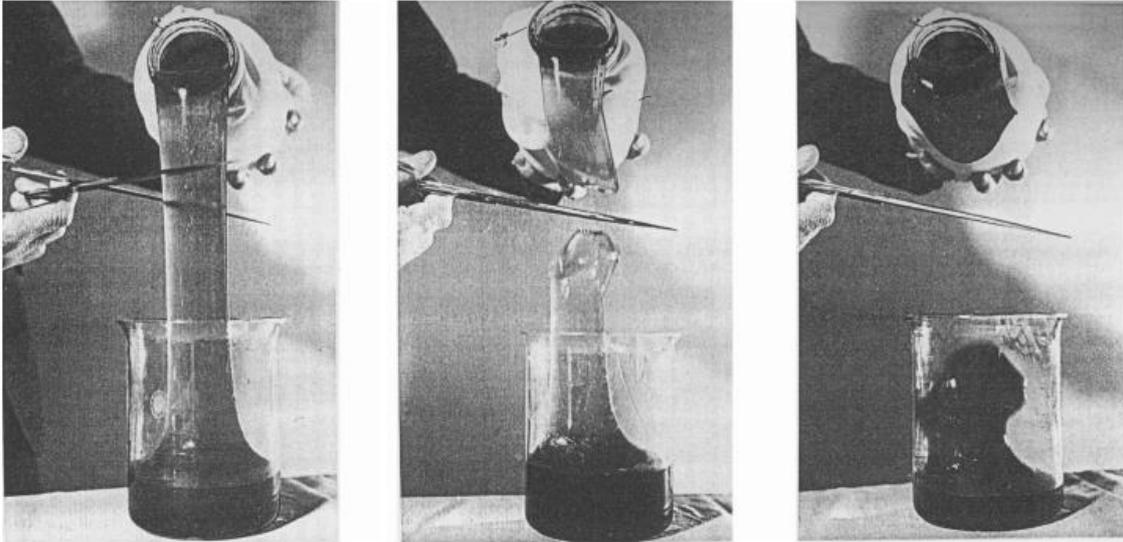


Figure 1-10 Représentation du temps de relaxation

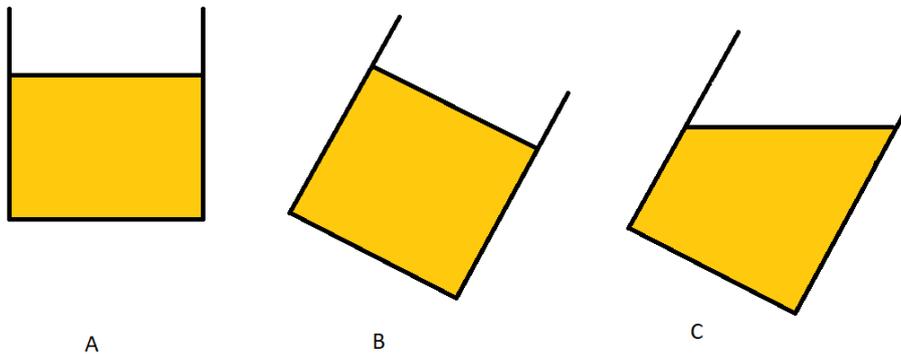


Figure 1-11 Représentation du temps de retardation

La dérivée invariante $\frac{D}{Dt}$ s'écrivant :

$$\frac{D}{Dt} \tau = \frac{\partial}{\partial t} \tau + (\vec{v} \cdot \nabla) \tau - (\nabla \vec{v}) \cdot \tau - \tau \cdot (\nabla \cdot \vec{v})^T. \quad (1-3)$$

Malgré le fait que le comportement des fluides viscoélastiques est plus ou moins compliqué, le tenseur des contraintes peut être décomposé en deux parties dans tous les fluides de ce type :

$$\tau = \tau_s + \tau_p. \quad (1-4)$$

A la base, un fluide viscoélastique est une solution de polymère dans un solvant. τ_s est le tenseur des contraintes qui montre la contribution du solvant ($\tau_s = 2\mu_s D$) alors que la part de contribution du polymère est transmise respectivement par la viscosité des solvants et des polymères μ_s et μ_p . La relation qui lie le temps de relaxation au temps de retardation est :

$$\bar{\lambda}_2 = \frac{\mu_s}{\mu_s + \mu_p} \bar{\lambda}_1, \quad (1-5)$$

$$\Gamma = \frac{\mu_s}{\mu_s + \mu_p} \quad (1-6)$$

Γ est le rapport entre la viscosité du solvant et la viscosité totale de la solution qui est la somme des deux viscosités. Ce paramètre Γ est un rapport qui montre la part de l'élasticité dans le comportement du fluide par exemple si nous prenons le cas d'un fluide Maxwell qui est un fluide élastique nous avons $\Gamma = 0$ et pour une solution très diluée en polymère nous avons $\Gamma = 1$. Un fluide Newtonien est le cas spécifique où $\Gamma = 1$ et les deux temps caractéristique sont très proche de zéro ($\bar{\lambda}_1 \sim 0$ et $\bar{\lambda}_2 \sim 0$). Pour un fluide élastique le temps de relaxation est très grand devant le temps de retardation. Par conséquent, plus Γ diminue plus l'élasticité du fluide augmente et plus Γ augmente le fluide devient plus visqueux. Nous travaillons surtout avec les deux paramètres de $\bar{\lambda}_1$ et Γ dans cette recherche.

Pour des faibles variations de la vitesse, la relation devient :

$$\left(1 + \bar{\lambda}_1 \frac{\partial}{\partial t}\right) \tau = 2\mu_0 \left(1 + \Gamma \bar{\lambda}_1 \frac{\partial}{\partial t}\right) D. \quad (1-7)$$

1.2.2.3.2 Fluides de Boger

Un fluide de Boger est un liquide élastique avec une viscosité constante. Ces fluides sont des solutions diluées de polymère qui sont généralement effectuées avec un solvant assez visqueux qui permet de mesurer les tensions dues à l'élasticité. Un des avantages de l'introduction des fluides de Boger est l'identification de l'instabilité due à l'élasticité seule [35]. Ce type de fluide peut s'écouler comme un liquide et cependant se comporter comme un solide élastique sous l'étirement. La plupart des fluides élastiques manifestent un comportement rhéofluidifiant car ils contiennent des polymères. En revanche, dans le cas des fluides de Boger comme ils sont des solutions hyper diluées la rhéofluidification causée par les polymères est négligé. Un exemple de ce type de fluide peut être la solution de polyacrylamide dans le sirop de maïs (fluide Newtonien avec une viscosité élevée comme solvant). Pour une composition de 1.6% d'eau, 98.3% de sirop et 0.1% de polyacrylamide, le temps de relaxation et de

retardation sont respectivement $\bar{\lambda}_1 = 2.54s$ et $\bar{\lambda}_2 = 1.94s$. Il faut savoir que pour un fluide de Boger on a toujours à peu près un Γ de 0.75. Le fait de savoir que la viscosité d'un fluide de Boger est constante nous permet de faire une expérience pour comparer les taux de cisaillement d'un fluide de Boger et un fluide Newtonien avec les mêmes viscosités et la différence entre les taux de cisaillement nous donne le changement causé par l'élasticité du fluide de Boger [35].

1.3 Milieux Poreux et ses caractéristiques

Un milieu poreux est une matrice solide qui contient des espaces vides ou des pores, connectés ou non. Ces pores peuvent être dispersés de manière régulière ou de manière aléatoire et ils peuvent contenir des fluides comme de l'air, de l'eau, du pétrole, etc. On considère ces milieux qui sont perméables à un écoulement de fluide des milieux poreux. On peut citer plusieurs exemples où les milieux poreux jouent un rôle important comme dans :

- La science du sol : Le sol contient et transporte de l'eau et les nutriments pour les plantes
- Le génie chimique : le milieu poreux intervient comme filtre ou lit pour les catalyseurs
- L'industrie pétrolière : Les roches réservoirs conservent le pétrole brut et le gaz naturel

Dans la figure ci-dessous quelques exemples de milieux poreux sont représentés [36].

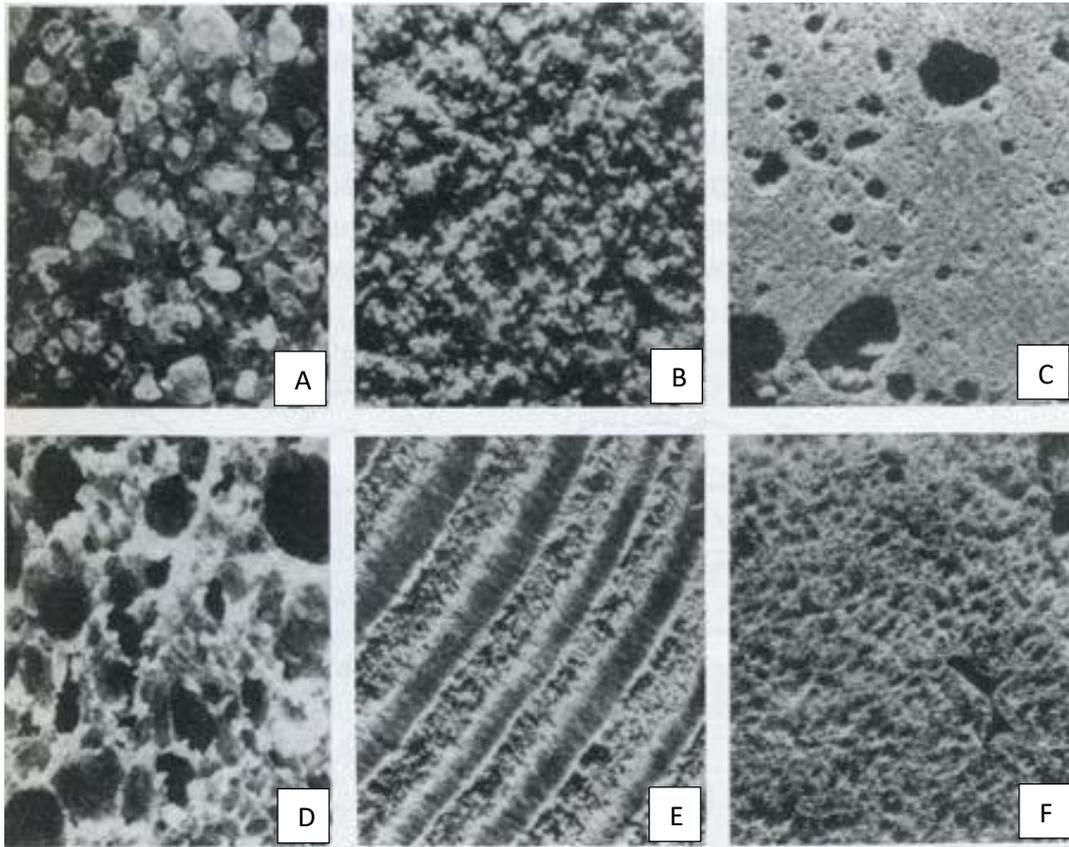


Figure 1-12 Exemples de milieux poreux (10 x magnifié) : (A) Sable de plage, (B) Grès ; (C) Calcaire ; (D) Pain de seigle ; (E) Bois ; (F) Poumon humain, [37].

La matrice solide d'un milieu poreux peut être non consolidée ou consolidée. Les matrices non consolidées sont formées de grains comme par exemple le sable, le gravier, les lits de particules non fluidisées, etc. Cependant, dans les matrices consolidées les grains sont connectés les uns aux autres par un matériau de cimentation, comme par exemple les roches calcaires, le grès, l'argile, le bois, le tissu biologique etc [15].

1.3.1 Porosité

La porosité (ϕ) est définie comme la fraction des volumes des pores rapportée au volume total du milieu comprenant le volume d'espace vide et le volume de la matrice :

$$V_T = V_P + V_S \quad (1-8)$$

$$\phi = \frac{V_P}{V_T} = \frac{V_T - V_S}{V_T} \quad (1-9)$$

Où V_P est le volume des pores et V_S est le volume de la matrice solide. Cette porosité est appelée la porosité totale car elle prend en compte tous les pores même les pores isolés. La porosité effective ϕ_{eff} , a contrario, est la définition qui prend en compte les

pores dans lesquels le fluide peut être transporté. Il faut noter que la porosité ne donne aucune information relative à la taille des pores, leur distribution et le degré de leur connectivité. Par conséquent, les matériaux avec les mêmes porosités peuvent avoir des propriétés physiques différentes. La porosité peut être influencée par la taille des grains, l'empilement des grains (comment les grains s'assemblent), la forme des particules et la distribution de la taille des grains. Si on a des grains sphériques parfaits et qu'on les met ensemble de manière cubique, la porosité théorique maximale qu'on peut avoir est 47.64% et cela est indépendamment de la taille des grains. La porosité maximale d'autres formes d'empilement est représentée sur la figure 1-13.

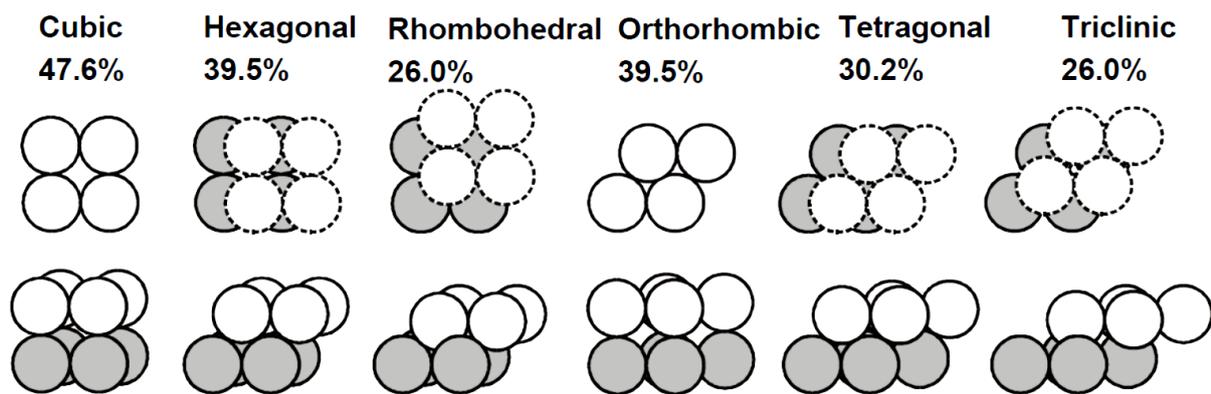


Figure 1-13 Les empilements différents des grains sphériques et leur porosité maximale [38]

Le tableau ci-dessous nous donne des gammes de porosité de quelques lithologies courantes [38].

Tableau 1-1 Porosité de quelques lithologies courantes

Lithologie	Gamme de porosité (%)
Les sables non consolidés	35-45
Réservoir de grès	15-35
Grès compact	5-15
Schiste argileux	0-45
Argile	0-45
Calcaires massifs	5-10
Calcaires caverneux (Vuggy)	10-40
Dolomite ¹	10-30
Craie	5-40
Granite	<1

¹ Carbonate double de calcium et de magnésium, de composition chimique $\text{CaMg}(\text{CO}_3)_2$, qui cristallise en prismes losangiques (rhomboèdres)

Basalte ²	<0.5
Gneiss ³	<2
Conglomérat ⁴	1-15

1.3.2 Volume Élémentaire Représentatif (V.E.R)

Comme la taille et la distribution des pores peuvent varier dans un même milieu poreux de l'échelle microscopique au macroscopique, pour trouver des grandeurs physiques comme la vitesse, la pression ce n'est pas commode d'utiliser plusieurs échelles. Donc la solution la plus aisée consiste à moyenniser des grandeurs dans des volumes qui regroupent de nombreux pores. C'est pourquoi un Volume Élémentaire Représentatif (V.E.R) est introduit pour faciliter les calculs et moyenniser les grandeurs microscopiques sur ce V.E.R. Il faut choisir la taille du V.E.R. de telle sorte que celle-ci ne soit ni trop petite ni trop grande :

$$d \text{ (taille des pores)} \ll l \ll L \text{ (taille caractéristique du milieu)}$$

La courbe donne l'évolution de la mesure de la porosité (%) en fonction du diamètre du cercle de mesure et montre comment on choisit le V.E.R.

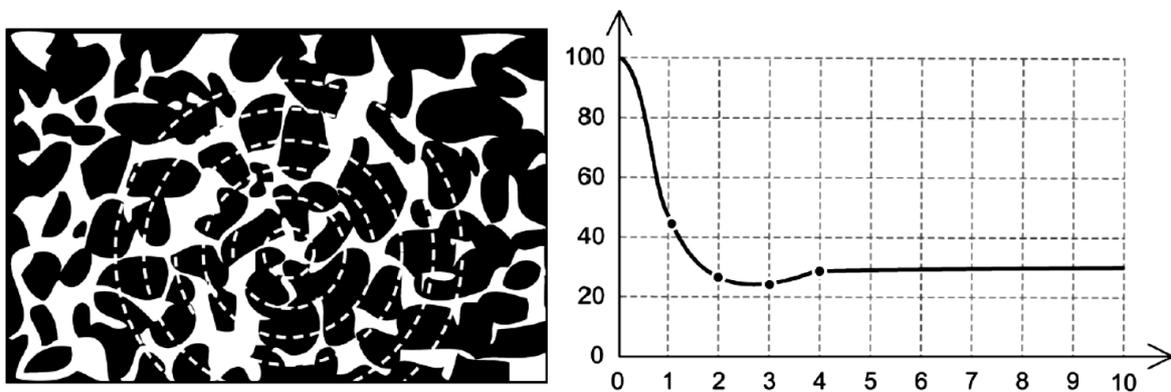


Figure 1-14 Définition du VER, ou encore volume minimum d'homogénéisation, sur un exemple d'espace poreux [39]

² Le basalte est une roche magmatique volcanique issue d'un magma refroidi rapidement et caractérisée par sa composition minéralogique : plagioclases (50 %), de pyroxènes (25 à 40 %), d'olivine (10 à 25 %), et de 2 à 3 % de magnétite. Sur Terre, elle a une origine volcanique et est un des constituants principaux de la croûte océanique. Sur la Lune, elle constitue la surface des mers lunaires. Ce serait un constituant important des croûtes de Mars, Vénus et Mercure [55].

³ Le gneiss ([gnes]) est une roche métamorphique contenant du quartz, du mica, des feldspaths plagioclases et parfois du feldspath alcalin, tous suffisamment gros pour être identifiés à l'œil nu.

⁴ Un conglomérat est une roche issue de la dégradation mécanique d'autres roches et composée de morceaux discernables liés par un ciment naturel

1.3.3 Perméabilité

La perméabilité K est définie comme la capacité d'un milieu poreux pour permettre à un fluide de passer à travers des pores. Ce paramètre dépend de la géométrie de la matrice solide du milieu et donc cela dépend de la porosité et de la tortuosité. Lorsque les pores sont connectés la perméabilité du milieu poreux est plus élevée. La perméabilité est en général obtenue par les mesures expérimentales et son unité est le Darcy qui est la perméabilité d'un milieu poreux d'une section de 1 cm^2 avec une longueur de 1 cm^2 qui est soumis à une différence de pression de 1 bar et un fluide qui le traverse avec une vitesse de 1 cm/s . De cette façon, on a $1 \text{ Darcy} = 9.87 \times 10^{-9}$. Ainsi de nombreux modèles empiriques ont été introduits dans la littérature et parmi eux :

- La relation de Kozeny-Carman qui fournit une estimation de la perméabilité avec un haut degré de certitude est utilisée pour un milieu poreux consolidé, constitué d'éléments identiques de géométrie simple :

$$K = \frac{d^2 \phi^3}{36 C_0 (1-\phi)^2} \quad (1-10)$$

Où d représente une dimension caractéristique des éléments constituant la matrice solide et $3.6 < C_0 < 5$ est une constante dépendante des formes des grains.

- La relation d'Ergun qui est comme la relation de Kozeny-Carman avec une constante $C_0 = 4.16$ et est utilisée pour un écoulement unidirectionnel d'un fluide incompressible dans une colonne poreuse constituée de particules sphériques sous un gradient de pression d'un diamètre de d :

$$K = \frac{d^2 \phi^3}{150(1-\phi)^2} \quad (1-11)$$

Pour une matrice poreuse modélisée par un faisceau de tubes capillaires disposés parallèlement, la perméabilité est décrite ainsi :

$$K = \frac{d^2 \phi^2}{32} \quad (1-12)$$

Où $\phi = n\pi d^2/4$ et n le nombre de capillaires par unité de surface perpendiculaire au sens d'écoulement et d le diamètre des capillaires.

1.4 Le système et la formulation mathématique du problème

Le problème consiste à étudier la convection mixte dans une couche poreuse d'épaisseur H saturée par un fluide viscoélastique. La paroi inférieure est maintenue à une température constante (T_0) plus élevée que celle de la paroi supérieure (T_1) ce

qui produit un gradient linéaire de température. La configuration physique du problème est représentée sur la figure 1-15. Le système est sous l'effet de l'accélération terrestre \vec{g} . La viscosité cinématique du fluide est ν_f , sa viscosité dynamique est μ_f , sa masse volumique est ρ_f et sa conductivité thermique est λ_f .

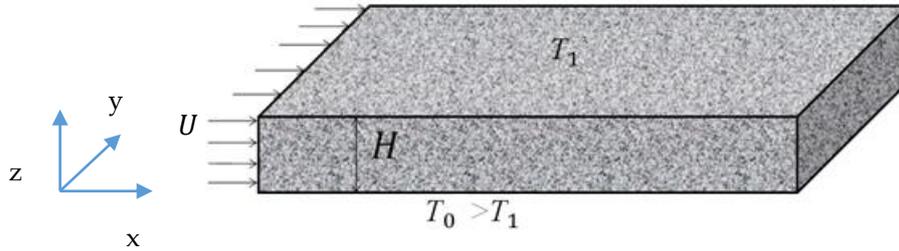


Figure 1-15 Configuration schématique du problème

Les grandeurs sont moyennées sur un V.E.R et les moyennes volumiques sont introduites dans [40]- [41]. La relation de Dupuit-Forchheimer relie les vitesses de filtration et interstitielle. La vitesse de filtration V_f est la vitesse moyenne du fluide sur l'ensemble des pores et des parties solides du V.E.R et la vitesse interstitielle V_i est la vitesse moyenne du fluide à l'intérieur des pores.

$$V_f = \phi V_i \quad (1-13)$$

Le nombre de Reynolds Re_p dans le milieu poreux est défini avec la taille moyenne des pores d et la vitesse interstitielle V_i :

$$Re_p = V_i \frac{d}{\nu_f} \quad (1-14)$$

1.4.1 Equation de continuité

La forme générale de l'équation de continuité (ou l'équation de conservation de masse) s'écrit comme suit :

$$\phi \frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \text{div}(\rho_f \vec{V}_f) = 0. \quad (1-15)$$

La densité peut être écrite en fonction de la différence de température :

$$\rho_f = \rho_0 \left(1 - \alpha_f (T - T_1) \right). \quad (1-16)$$

Où ρ_0 et T_1 sont la densité et la température de référence, dans notre cas la référence peut être la paroi supérieure, T est la température en un point donné et α_f est le coefficient d'expansion thermique. Ce coefficient est très petit pour les liquides et les

gaz ($10^{-4} < \alpha < 10^{-3} \text{C}^{-1}$). Par conséquent, concernant la densité du fluide on utilise l'hypothèse d'Oberbeck-Boussinesq⁵ [42] qui évoque que, sauf dans le terme gravitationnel $\rho_f \vec{g}$ (relatif à la poussée d'Archimède qui est la cause de la convection thermique), les variations de densité sont négligeables. Compte tenu de l'approximation et l'hypothèse ci-dessus on peut écrire l'équation de continuité comme suit :

$$\text{div}(\vec{V}_f) = 0 \quad (1-17)$$

1.4.2 Équation de conservation de la quantité de mouvement

Pour modéliser l'écoulement de l'eau dans une colonne poreuse de hauteur H , la loi de Darcy⁶ a été utilisée depuis le 19^e siècle :

$$Q = \frac{K}{\mu} A \frac{\Delta P_m}{L}. \quad (1-18)$$

Avec cette relation on peut déduire le débit de l'eau (Q) passant à travers une colonne poreuse de perméabilité K . La différence de pression motrice entre le haut et le bas de la colonne est représentée par ΔP_m et par μ la viscosité dynamique du fluide. Par ailleurs, on appelle $\hat{K} = \frac{K}{\mu}$ la conductivité hydraulique qui dépend du milieu et du fluide alors que la perméabilité dépend seulement du milieu. On appelle un milieu imperméable si \hat{K} est inférieur à $10^{-9} (\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$ et l'imperméabilisation des containers utilisés pour l'enfouissement des déchets radioactifs doit se conformer à $\hat{K} < 10^{-14} (\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$. Pour utiliser la loi de Darcy, il existe quelques conditions :

$$\phi \leq 0.8 ; Da = \frac{K}{L^2} \leq 10^{-6} ; Re < 1$$

En ce qui concerne l'écoulement des fluides viscoélastiques dans un milieu poreux le modèle suivant a été proposé par analogie avec le modèle de Maxwell en introduisant λ_p qui est le temps de relaxation pour la pression (ainsi nommé dans la littérature) ou tout simplement le temps de relaxation [43] :

$$\vec{V} = -\frac{K}{\mu} \left(1 + \lambda_p \frac{\partial}{\partial t}\right) \vec{\nabla} p. \quad (1-19)$$

⁵ Approximation utilisée dans le cas d'existence d'un gradient de masse volumique vertical entraînant l'absence d'équilibre hydrostatique. Ce type de méthode a été introduite en 1877 par Joseph Boussinesq, professeur de mécanique à l'Université de Lille et à l'Institut industriel du Nord (École centrale de Lille) [56]

⁶ La plus importante publication de Henry Darcy est celle de l'année 1856 sous le titre de « Les fontaines publiques de la ville de Dijon ». Pour trouver la loi de Darcy il faut regarder dans la note D de l'appendice dans cette publication qui est maintenant disponible gratuitement en ligne [57].

En considérant le modèle d'Oldroyd et grâce à la théorie d'homogénéisation expliquée dans [44] [45], on peut écrire l'équation du mouvement d'un fluide viscoélastique saturant un milieu poreux sous la forme d'une loi de Darcy généralisée :

$$(1 + \bar{\lambda}_2 \frac{\partial}{\partial t}) \vec{V}_f = -\frac{\kappa}{\mu} (1 + \bar{\lambda}_1 \frac{\partial}{\partial t}) (\nabla \vec{p} + \rho_f g \vec{e}_z) \quad (1-20)$$

Cette équation ne prend pas en compte les effets d'inertie du fluide. Pourtant les travaux de P.Vadasz [46] ont montré que, dans l'étude du phénomène de propagation d'onde en milieu poreux, ces effets sont d'une importance non négligeable. Dans ses travaux sur les instabilités dues à la convection naturelle dans un milieu poreux en rotation uniforme autour d'un axe vertical, il a constaté que le terme instationnaire d'inertie peut induire une convection oscillatoire. Par conséquent, dans le cas d'un fluide viscoélastique on ajoute un terme instationnaire pour tenir compte de cet effet.

$$\frac{\rho_0 \kappa}{\phi \mu_f} \left(1 + \bar{\lambda}_1 \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial \vec{V}_f}{\partial t} + \left(1 + \bar{\lambda}_2 \frac{\partial}{\partial t}\right) \vec{V}_f = -\frac{\kappa}{\mu} \left(1 + \bar{\lambda}_1 \frac{\partial}{\partial t}\right) (\nabla \vec{p} + \rho_f g \vec{e}_z). \quad (1-21)$$

1.4.3 Equation de conservation de l'énergie

Le transfert de chaleur dans une couche poreuse entre les deux parois (chaude et froide) est renforcé par la convection et d'ailleurs ce transfert s'effectue en même temps au moyen de la phase fluide et solide. Il est évident que les propriétés thermiques (comme les capacités thermiques $(\rho c)_f$ et $(\rho c)_s$ et les conductivités thermiques) ne sont pas les mêmes dans ces deux phases. Donc le transfert de chaleur dans chacune des phases est différent et il doit être pris en compte. Combarous et Bories (1974) [47] ont utilisé un modèle composé de deux équations d'énergie pour montrer l'évolution de la température dans les deux phases :

$$\phi(\rho c)_f \frac{\partial T_f}{\partial t} + \phi(\rho c)_f \vec{V}_f \cdot \nabla T_f = \text{div}[\lambda_f^* \nabla T_f] - h(T_f - T_s), \quad (1-22)$$

$$(1 - \phi)(\rho c)_s \frac{\partial T_s}{\partial t} = \text{div}[\lambda_s^* \nabla T_s] - h(T_s - T_f). \quad (1-23)$$

Où $T_{f,s}$ représente la température moyennée sur un V.E.R respectivement pour la phase fluide et la phase solide. On remarque que, si la température de la phase solide est plus élevée que celle de la phase fluide, le transfert de chaleur se fait de la phase solide vers la phase fluide. Les coefficients λ_f^* et λ_s^* sont des valeurs équivalentes de conductivité thermique et ils dépendent des conductivités thermiques λ_f et λ_s et de la porosité ϕ . Par ailleurs, λ_f^* dépend de la dispersion hydrodynamique causée par la matrice solide et λ_s^* dépend de l'état de division de la phase solide. h , le coefficient de transfert de chaleur, dépend des caractéristiques thermiques des deux phases

(conductivité et chaleur volumique), de la porosité ϕ et d'une dimension caractéristique du milieu poreux par exemple \sqrt{K} ou la taille d'une pore ou d'un grain.

A l'état d'équilibre thermique entre les deux phases, les deux températures sont égales ($T_f = T_s$) et le coefficient h tend vers l'infini.

L'équation de transport-diffusion est obtenue par la sommation terme à terme des deux équations précédentes et elle est utilisée pour décrire le transfert de chaleur dans un milieu poreux :

$$(\rho c)^* \frac{\partial T}{\partial t} + (\rho c)_f \vec{V}_f \cdot \nabla T = \text{div}[\lambda^* \nabla T]. \quad (1-24)$$

Où \vec{V}_f est la vitesse de filtration définie par (1-13), T c'est la température équivalente du milieu poreux, $(\rho c)^* = \phi(\rho c)_f + (1 - \phi)(\rho c)_s$ représentent la chaleur spécifique volumique équivalente. On peut déduire l'additivité des chaleurs spécifiques volumiques par l'additivité des enthalpies. $\lambda^* = \lambda_f^* + \lambda_s^*$ représente la conductivité équivalente du milieu poreux saturé qui dépend de la température et, normalement, la nature du matériau est mesurée expérimentalement. Dans cette étude, on suppose que cette valeur est constante. Cependant, on peut établir une approximation en prenant deux cas parmi les modèles présentés dans [24] et [48]. On considère un modèle de strates de solide et de fluide superposés en série à travers lesquelles le transfert de chaleur se fait perpendiculairement par rapport à ces deux couches (modèle série) et dans ce cas la conductivité équivalente s'écrit comme suit :

$$\lambda^\perp = \phi \lambda_f + (1 - \phi) \lambda_s \quad (1-25)$$

Et si le milieu est constitué de strates solide et de fluide parallèles au transfert de chaleur (modèle parallèle) la conductivité équivalente s'écrit comme suit :

$$\lambda^\parallel = \frac{\phi}{\lambda_f} + \frac{(1-\phi)}{\lambda_s} \quad (1-26)$$

Avec ces deux approximations on peut déduire des limites à la valeur de λ^* :

$$\lambda^\perp < \lambda^* < \lambda^\parallel.$$

Si λ^* ne varie pas spatialement, on peut diviser les deux côtés de l'équation par $(\rho c)_f$ et écrire :

$$\frac{(\rho c)^*}{(\rho c)_f} \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{V}_f \cdot \nabla T = D_{th} \Delta T. \quad (1-27)$$

D_{th} , étant le coefficient de diffusivité thermique équivalente, s'écrit comme suit :

$$D_{th} = \frac{\lambda^*}{(\rho c)_f}. \quad (1-28)$$

1.4.4 Conditions aux limites

En ce qui concerne la vitesse, on suppose que les deux parois sont imperméables et on a seulement un écoulement horizontal :

$$\vec{V} \cdot \vec{e}_z = 0 \text{ at } z = 0, H$$

$$\vec{V} \cdot \vec{e}_x = U \text{ (à l'entrée)}$$

Concernant la température, on utilise l'équation de l'énergie avec ces conditions :

$$T(x, y, z = 0) = T_0,$$

$$T(x, y, z = H) = T_1.$$

1.4.5 Adimensionnement et conditions aux limites

1.4.5.1 Equations adimensionnées

On adimensionne toutes les grandeurs de notre système par les échelles de référence suivantes :

Pour la longueur $L_0 = H$

Pour le temps : $t_0 = H^2 \frac{(\rho c)^*}{\lambda^*}$

Pour la température : $T_0 - T_1$

Pour la vitesse de filtration : $v_0 = \frac{\lambda^*}{H(\rho c)_f}$

Pour la pression : $p_0 = \frac{\lambda^* \mu_f}{K(\rho c)_f}$

On introduit les grandeurs adimensionnées suivantes :

- Longueur :

$$x^* = \frac{x}{L_0}; y^* = \frac{y}{L_0}; z^* = \frac{z}{L_0}$$

La longueur de référence c'est la hauteur H sur laquelle se développe le phénomène de la convection.

- Temps :

$$t^* = \frac{t}{H^2 \frac{(\rho c)^*}{\lambda^*}} = \frac{t}{t_0}$$

$$\lambda_1^* = \frac{\lambda_1}{t_0} \text{ et } \lambda_2^* = \frac{\lambda_2}{t_0}$$

Le temps de référence c'est le temps de diffusion thermique équivalent sur une surface H^2 .

- Température :

$$T^* = \frac{T - T_1}{T_0 - T_1}$$

Avec $T_0 - T_1$ la différence de température entre les deux parois.

La différence de température entre la température de la paroi supérieure et celle de l'inférieure est prise comme référence car la température dans le milieu varie entre ces deux températures.

- Vitesse de filtration :

$$\vec{V}^* = \frac{\vec{V}_f}{v_0}$$

Pour la vitesse de filtration de référence en milieu poreux on se base sur le temps de caractéristique de diffusion thermique D_{th} et la longueur caractéristique H et on prend en compte seulement la partie en mouvement qui est le fluide il faut donc utiliser $(\rho c)_f$ au lieu de $(\rho c)^*$.

- Pression motrice :

$$P^* = \frac{P + \rho_0 g z}{p_0}$$

La pression de référence s'est construite en considérant la loi de Darcy pour les fluides viscoélastiques.

Pour simplifier les notations, on ôte les étoiles aux grandeurs adimensionnées et les équations adimensionnées s'écrivent alors comme suit :

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad (1-29)$$

$$(1 + \Gamma \lambda_1 \partial_t) \vec{V} + (1 + \lambda_1 \partial_t) (\nabla P - Ra T \mathbf{e}_z) = 0 \quad (1-30)$$

$$\partial_t T + V \cdot \nabla T - \nabla^2 T = 0. \quad (1-31)$$

Les conditions aux limites deviennent :

Pour la vitesse :

$$\vec{V} \cdot \vec{e}_z = 0 \text{ en } z = 0, 1.$$

Il existe un écoulement horizontal non nul représenté comme suit :

$$\vec{V} \cdot \vec{e}_x = Pe.$$

Pour la température :

$$T(x, y, z = 0) = 1,$$

$$T(x, y, z = 1) = 0$$

Les nombres adimensionnels suivants sont utilisés dans notre étude :

1.4.5.1.1 Nombre de Rayleigh de filtration

Le nombre de Rayleigh de filtration représente les effets convectifs au sein d'un fluide et dépend essentiellement à la différence de température entre les plaques et on le définit comme suit :

$$Ra = \frac{Kg\alpha_f H(T_0 - T_1)(\rho c)_f}{\lambda^* \nu_f}$$

1.4.5.1.2 Nombre de Péclet

Le nombre de Péclet thermique représente le rapport du transfert par convection sur le transfert par conduction. Il représente l'intensité de l'écoulement forcée dans notre étude et s'écrit comme suit :

$$Pe = \frac{(U(\rho c)_f)H}{\lambda^*}$$

1.4.5.1.3 Coefficient de relaxation λ_1

Ce coefficient qui représente un des effets élastiques du fluide est adimensionné avec le temps de diffusion verticale et il est défini comme suit :

$$\lambda_1 = \frac{\bar{\lambda}_1 \lambda^*}{(\rho C_p)^* H^2}$$

1.4.5.1.4 Coefficient de retardation λ_2

Il représente aussi l'effet élastique du fluide et s'écrit comme suit :

$$\lambda_2 = \frac{\bar{\lambda}_2 \lambda^*}{(\rho C_p)^* H^2}$$

Quant à un fluide viscoélastique d'Oldroyd B, la valeur de λ_2 varie entre zéro et λ_1 et on peut définir Γ comme suit :

$$\Gamma = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \text{ et } 0 \leq \Gamma \leq 1$$

1.4.6 Solution de conduction

La solution stationnaire simple du système avec les conditions aux limites nous sert comme solution de conduction (état de base) et quels que soient Ra , λ_1 et λ_2 on a :

$$V_b = Pe \cdot \vec{e}_x, \quad (1-32)$$

$$T_b = 1 - z, \quad (1-33)$$

$$P_b = Ra \left(z - \frac{z^2}{2} \right) - Pe \cdot \vec{e}_x. \quad (1-34)$$

Cette solution est caractérisée par un profil linéaire de la température.

1.5 Transfert de chaleur

Pour étudier le transfert de chaleur dans notre système, nous utilisons, comme dans les autres études comparables, le nombre adimensionnel de Nusselt. Ce nombre est défini comme le rapport entre le transfert thermique total et le transfert par conduction pure à travers une surface de dS . Dans le cas de la conduction pure la valeur du nombre de Nusselt est égal à l'unité et dans le cas de la convection la valeur de ce nombre sera supérieure à l'unité. Le flux de chaleur total traversant dS est écrit en grandeur adimensionnée :

$$dQ = \left(w \cdot T - \frac{\partial T}{\partial z} \right) dS. \quad (1-35)$$

Dans notre cas, le système est confiné entre deux plaques planes horizontales. Si nous prenons la surface dS sur une des deux parois horizontales ($z = 0$ ou $z = 1$) et compte tenu l'imperméabilité de ces parois, le flux de chaleur s'écrit comme suit :

$$dQ = -\frac{\partial T}{\partial z} (z = 0 \text{ ou } 1) dS. \quad (1-36)$$

Nous pouvons exprimer le nombre de Nusselt moyen sur les parois actives comme suit :

$$\bar{Nu} = -\frac{1}{2L} \int_{-L}^L Nu(x) \cdot dx \quad (1-37)$$

Avec :

$$Nu = \frac{\partial T}{\partial z} (z = 0 \text{ ou } 1). \quad (1-38)$$

1.6 Conclusions

Dans ce chapitre, les bases et les généralités nécessaires pour comprendre le problème ont été traitées. Après cette présentation des notions de bases, nous avons surtout abordé les caractéristiques rhéologiques des milieux poreux et par la suite nous avons énoncé la formulation mathématique du problème. L'équation de Darcy généralisée aux fluides viscoélastiques avec le modèle d'Oldroyd B ont été utilisés pour écrire l'équation de quantité de mouvement ainsi que pour modéliser mathématiquement l'écoulement du fluide viscoélastique dans un milieu poreux. Les paramètres de références pour adimensionner les équations ont été présentés. Nous avons supposé que l'hypothèse de Boussinesq est vérifiée et nous avons obtenu les équations adimensionnées. A la fin du chapitre, avec les conditions aux limites, une solution de base, dite solution de conduction, a été trouvée qui va nous servir dans le chapitre suivant. Nous allons étudier la stabilité de la solution de conduction vis-à-vis des perturbations infinitésimales de la vitesse, de la température et de la pression.

Chapitre 2

2 Analyse de stabilité linéaire temporelle et spatio-temporelle

Dans ce chapitre, nous nous concentrons sur l'analyse de stabilité linéaire des instabilités qui peuvent apparaître après la déstabilisation de l'état de conduction. Nous allons étudier, à l'aide de l'évolution d'une perturbation infinitésimale au cours du temps, les différentes instabilités dans le système et nous menons donc les deux approches temporelle et spatio-temporelle dans l'analyse de stabilité linéaire. Nous nous intéressons aux seuils d'instabilités convective et absolues dans cette partie du travail.

2.1 Formulation du problème de stabilité et équation de dispersion

L'analyse de stabilité linéaire consiste à étudier l'évolution d'une perturbation infinitésimale dans le système, pouvant donner une condition suffisante d'instabilité qui indique que le système est linéairement stable ou instable. En revanche, un état

stable sous l'effet d'une perturbation infinitésimale n'implique pas forcément que le système est également stable sous l'effet d'une perturbation finie, d'où l'intérêt de faire une analyse non linéaire. Cependant, l'analyse linéaire nous permet d'obtenir les seuils d'instabilité primaires, les fréquences et les nombres d'onde des structures bifurquées.

Prenons le système d'équation obtenu dans le chapitre précédent avec les conditions aux limites mentionnées et nous injectons dans ce système des perturbations infinitésimales de la vitesse, de la température et de la pression. Notons que les perturbations de la vitesse sont superposées $\vec{V}_p = (u_p, v_p, w_p)^T$. On écrit alors :

$$\begin{cases} \vec{V} = Pe \cdot \vec{e}_x + \vec{V}_p(x, y, z, t), \\ T = T_b(z) + T_p(x, y, z, t), \\ P = P_b(z) + P_p(x, y, z, t), \end{cases} \quad (2-1)$$

Le système d'équation (1-29) à (1-31) s'écrit après linéarisation :

$$\partial_x u_p + \partial_y v_p + \partial_z w_p = 0, \quad (2-2)$$

$$\begin{cases} (1 + \Gamma \lambda_1 \partial_t) u_p + (1 + \lambda_1 \partial_t) (\partial_x P_p) = 0, \\ (1 + \Gamma \lambda_1 \partial_t) v_p + (1 + \lambda_1 \partial_t) (\partial_y P_p) = 0, \\ (1 + \Gamma \lambda_1 \partial_t) w_p + (1 + \lambda_1 \partial_t) (\partial_z P_p - Ra T_p) = 0, \end{cases} \quad (2-3)$$

$$(\partial_t + Pe \partial_x - \partial_z^2 - \partial_y^2 - \partial_x^2) T_p + w_p \partial_z T_b = 0, \quad (2-4)$$

Avec les conditions aux limites :

$$w_p = T_p = 0 \text{ en } z = 0 \text{ et en } z = 1 \quad (2-5)$$

Nous chercherons des solutions écrites en modes de Fourier qu'on appelle les modes normaux :

$$(\vec{V}_p, T_p, P_p)(x, y, z, t) = (\vec{\widetilde{V}}_p, \widetilde{T}_p, \widetilde{P}_p)(z) e^{i(k_x x + k_y y - \omega t)} + C.C \quad (2-6)$$

Où le C.C c'est le complexe conjugué, k_x et k_y sont respectivement le nombre d'onde suivant les directions x et y et ω est un nombre complexe avec $\omega = \omega_r + i\omega_i$. Physiquement, ces solutions représentent des ondes qui se déplacent à une vitesse de phase de $V_\phi = (\frac{\omega_r}{k_x}, \frac{\omega_r}{k_y})$ et qui s'accroissent ou s'amortissent avec un taux de croissance temporelle ω_i .

Après avoir introduit les modes normaux (2-6) dans le système (2-2) - (2-4), on obtient le problème aux valeurs propres suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} ik_x \widetilde{u}_p + ik_y \widetilde{v}_p + D \widetilde{w}_p = 0, \\ (1 - i \omega \Gamma \lambda_1) \widetilde{u}_p + ik_x (1 - i \omega \lambda_1) \widetilde{P}_p = 0, \\ (1 - i \omega \Gamma \lambda_1) \widetilde{v}_p + ik_y (1 - i \omega \lambda_1) \widetilde{P}_p = 0, \\ (1 - i \omega \Gamma \lambda_1) \widetilde{w}_p + (1 - i \omega \lambda_1) (D \widetilde{P}_p - Ra \widetilde{T}_p) = 0 \\ (-i \omega + ik_x Pe - D^2 + k^2) \widetilde{T}_p - \widetilde{w}_p = 0, \end{array} \right. \quad (2-7)$$

Où $D = \frac{d}{dz}$.

Avec les conditions aux limites :

$$\widetilde{w}_p = \widetilde{T}_p = 0 \text{ en } z = 0 \text{ et en } z = 1 \quad (2-8)$$

Les fonctions propres $\widetilde{u}_p, \widetilde{v}_p, \widetilde{w}_p, \widetilde{T}_p$ et \widetilde{P}_p vérifiant les conditions aux limites (2-8) peuvent être écrites comme suit :

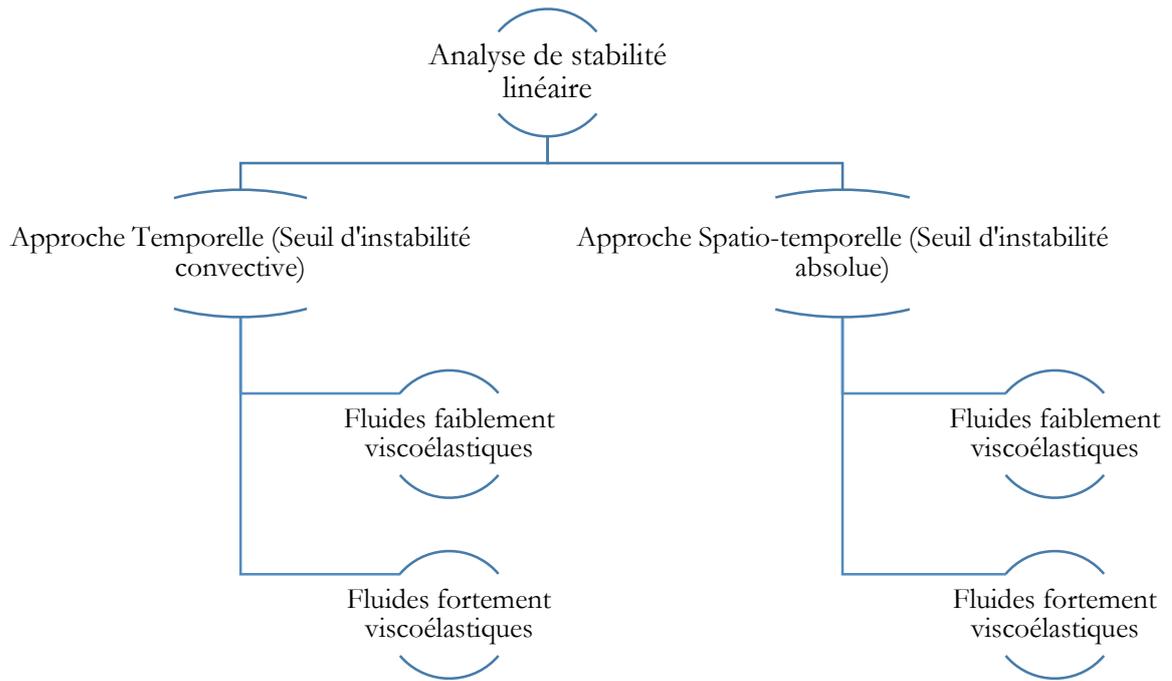
$$\left\{ \begin{array}{l} \widetilde{u}_p = A \cos(\pi z) \\ \widetilde{v}_p = B \cos(\pi z) \\ \widetilde{w}_p = C \sin(\pi z) \\ \widetilde{P}_p = D \cos(\pi z) \\ \widetilde{T}_p = E \sin(\pi z) \end{array} \right. \quad (2-9)$$

En tenant compte de (2-8), le système (2-7) devient un système algébrique vérifié par les amplitudes A, B, C, D et E . Ce système admet une solution non triviale si et seulement si le déterminant associé à ce système est nul. Cette condition mène à l'équation de dispersion analytique suivante :

$$D(\omega, k^2, \lambda_1, \Gamma, Ra, k_x Pe) = \omega^2 \lambda_2 (k^2 + \pi^2) + (k^2 + \pi^2) (-ik_x Pe - k^2 - \pi^2) + k^2 Ra + i\omega (k^2 + \pi^2 + \Gamma \lambda_1 (k^2 + \pi^2)) (ik_x Pe) + \Gamma \lambda_1 (k^2 + \pi^2)^2 - Rak^2 \lambda_1 = 0 \quad (2-10)$$

Cette équation relie le nombre d'onde k à la pulsation ω .

Deux méthodes d'analyse de stabilité linéaire sont utilisées et nous avons abordé les deux méthodes dans ce chapitre comme présenté dans le plan ci-dessous :



2.2 Approche temporelle de stabilité

Tout d'abord on s'intéresse à la naissance des premières instabilités qui déstabilisent la solution de conduction et pour ce faire il faut réaliser une étude d'instabilité temporelle. Pour effectuer cette analyse on suppose que $k \in \mathbb{R}$ et $\omega \in \mathbb{C}$. Dans le cas où la perturbation n'est ni amplifiée ni atténuée, la stabilité marginale s'impose et on a :

$$\omega_i = 0$$

Ce qui fait que deux cas peuvent se présenter selon la valeur de ω_r :

- L'instabilité stationnaire s'installe dans le système si $\omega_r = 0$.
- Des structures oscillatoires apparaissent si $\omega_r \neq 0$.

2.2.1 Cas de la convection en l'absence de l'écoulement principal ($Pe = 0$) :

Nous posons $Pe = 0$ et $\omega = 0$ dans l'équation de dispersion pour obtenir Ra de l'instabilité stationnaire :

$$-(k^2 + \pi^2)(k^2 + \pi^2) + k^2 Ra = 0 \quad (2-11)$$

$$Ra^{(s)} = \frac{(k^2 + \pi^2)^2}{k^2} \quad (2-12)$$

On minimise $Ra^{(s)}$ par rapport à k pour trouver la valeur critique du nombre d'onde et de Rayleigh de l'instabilité stationnaire:

$$\frac{\partial Ra^{(s)}}{\partial k} = 0 \rightarrow k_c^s = \pi \quad (2-13)$$

Et donc avec k_c^s dans l'équation (2-12) on trouve :

$$Ra_c^s = 4\pi^2 \quad (2-14)$$

Nous retrouvons en (2-13) et (2-14) les mêmes résultats connus pour la convection naturelle d'un fluide Newtonien dans un milieu poreux.

Pour l'instabilité oscillatoire, nous posons $\omega \neq 0$. On sépare la partie réelle et la partie imaginaire de l'équation de dispersion et on trouve :

$$\omega^{\pm OSC} = \pm \sqrt{\frac{(k^2 + \pi^2)^2 - k^2 Ra}{\Gamma \lambda_1 (k^2 + \pi^2)}} \quad \text{et} \quad Ra^{OSC} = \frac{(k^2 + \pi^2)(1 + \Gamma \lambda_1 (k^2 + \pi^2))}{k^2 \lambda_1} \quad (2-15)$$

Avec les valeurs critiques :

$$Ra_c^{OSC} = \frac{1}{\lambda_1} \left(1 + 2\lambda_1 \Gamma \pi \left(\pi + \sqrt{\pi^2 + \frac{1}{\lambda_1 \Gamma}} \right) \right) \quad \text{et} \quad k_c^{OSC} = \pi^{\frac{1}{2}} \left(\pi^2 + \frac{1}{\lambda_1 \Gamma} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (2-16)$$

Les fréquences ω^+ et ω^- correspondent respectivement à une onde progressive descendante et montante. La condition nécessaire pour qu'une bifurcation de Hopf se produise dans le milieu, donnant naissance à des structures oscillatoires, est $Ra_c^{OSC} < Ra_c^s$. En tenant compte les expressions de Ra_c^s et Ra_c^{OSC} , cette condition s'écrit :

$$\frac{1}{\lambda_1} \left(1 + 2\lambda_1 \Gamma \pi \left(\pi + \sqrt{\pi^2 + \frac{1}{\lambda_1 \Gamma}} \right) \right) < 4\pi^2 \quad (2-17)$$

La figure 2-1 montre dans le plan (Γ, λ_1) la frontière qui sépare la zone d'apparition des instabilités stationnaires (en dessous de la courbe), de la zone où apparaissent des instabilités oscillatoires (au-dessus de la courbe). Au régime faiblement viscoélastique, qui est situé dans la zone au-dessous de cette courbe, nous avons une solution diluée de polymère et le comportement du fluide est plus proche de celui d'un fluide Newtonien. Dans le régime fortement viscoélastique, nous avons une solution plus concentrée avec un comportement plus complexe qui est moins étudié à notre connaissance. Dans ce travail, nous nous concentrons sur l'étude des deux régimes faiblement et fortement viscoélastique loin de la zone de transition entre ces deux régimes.

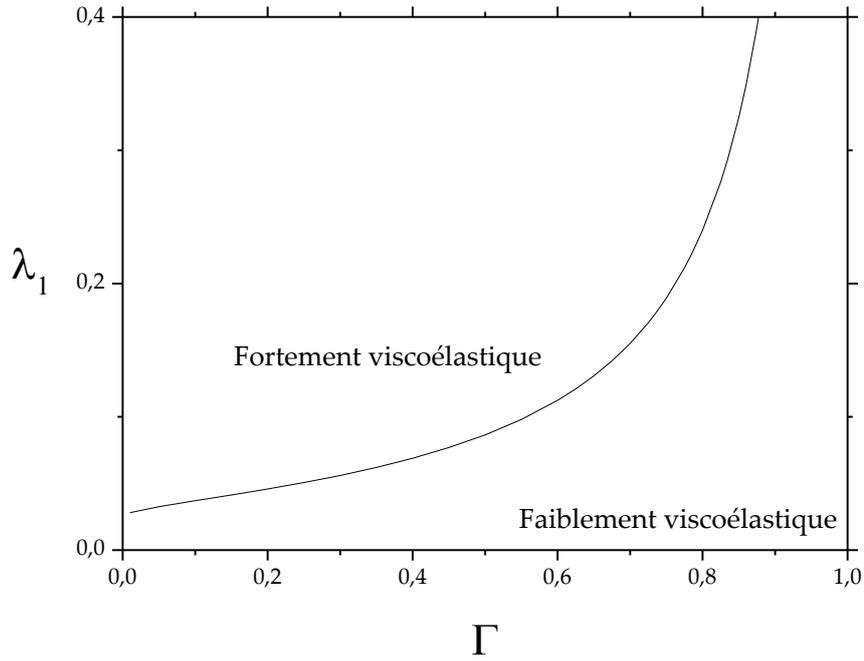


Figure 2-1 Courbe de distinction des régimes faiblement viscoélastique où l'instabilité est stationnaire et fortement viscoélastique où elle devient oscillatoire à $Pe=0$

2.2.2 Transformation de Squire avec $Pe \neq 0$

Puisque dans l'équation de dispersion (2-10), le nombre d'onde et le nombre de Péclet existent seulement sous formes de k^2 et $k_x Pe$, on peut écrire la dépendance de $\omega = \omega_r + i\omega_i$ par rapport à k et Pe comme suit :

$$\omega = f(k^2, k_x Pe_{3D}, Ra)$$

Cela nous permet d'opérer la transformation de Squire suivante :

$$\omega_{3D}(k_x^2 + k_y^2, k_x Pe_{3D}, Ra) = \omega_{2D}(k^2, k Pe_{2D}, Ra) \quad (2-18)$$

$$k_x^2 + k_y^2 = k^2 \text{ et } Pe_{2D} = (k_x/k) * Pe_{3D} \quad (2-19)$$

Puisque $\frac{k_x}{k} = \frac{k_x}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}} < 1$, on déduit de (2-18) que $Pe_{2D} < Pe_{3D}$.

La stratégie consiste alors à résoudre le problème 2D, c'est-à-dire la détermination de Ra_C , ω_{2DC} et k_{2DC} pour un vecteur d'onde orienté dans la direction de l'écoulement $\vec{k} = k\vec{e}_x$ et un nombre de Péclet Pe_{2D} . Grâce alors à la transformation de Squire (2-18) et (2-19), on en déduit, pour la même valeur de Ra_C , les solutions du problème 3D, notamment $\omega_{3DC} = \omega_{2DC}$.

Par la suite on s'intéressera alors à la résolution du problème 2D.

2.2.3 Naissance de la convection mixte dans le régime faiblement viscoélastique.

Pour un nombre de Péclet non nul, la méthode repose sur la séparation des parties réelle et imaginaire de l'équation de dispersion, et de déterminer numériquement les valeurs critiques du nombre de Rayleigh, de la fréquence ω et du nombre d'onde k .

2.2.3.1 Influence du temps de relaxation λ_1 au seuil de l'instabilité

Les paramètres viscoélastiques sont choisis dans la région où le fluide est faiblement viscoélastique, c'est à dire la région des paramètres en dessous de la courbe de la figure 2-1. Nous fixons le rapport des viscosités à $\Gamma = 0.75$, rapport caractéristique des fluides de Boger. L'influence du temps de relaxation λ_1 est appréciée pour ses trois valeurs fixées, $\lambda_1 = 0.01, 0.03$ et 0.05 . Avec ce jeu de paramètres, nous avons déterminé les valeurs critiques, du nombre de Rayleigh au-delà duquel l'instabilité se manifeste, de la fréquence et du nombre d'onde associés, en fonction du nombre de Péclet, Pe variant de $Pe = 0$ à $Pe = 10$. Les résultats pour Ra_c , ω_c et k_c sont représentés respectivement sur les figures 2-2, 2-3 et 2-4. On constate que pour de faibles valeurs du nombre de Péclet, les valeurs de Ra_c , ω_c et k_c sont respectivement $4\pi^2$, 0 et π . Ce comportement signifie que les fluides viscoélastiques se comportent comme un fluide Newtonien en présence d'un écoulement horizontal de débit faible. En revanche, pour Pe suffisamment élevé, la figure 2-2 montre une diminution du nombre de Rayleigh critique à la fois lorsque Pe augmente, et également lorsque λ_1 augmente. Nous concluons que l'effet de l'écoulement horizontal combiné avec l'augmentation de l'élasticité du fluide, précipite l'apparition de l'instabilité. Pe et λ_1 jouent alors un rôle déstabilisant.

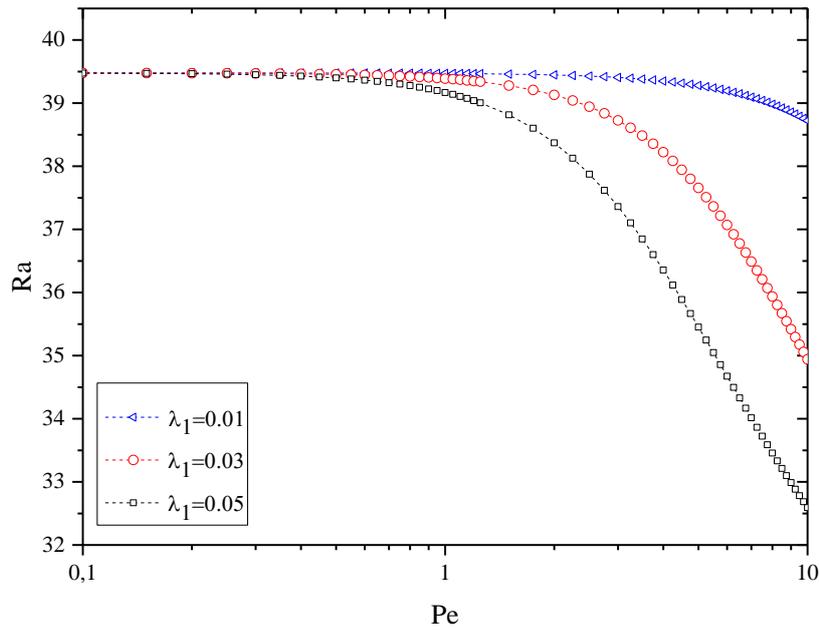


Figure 2-2 Rayleigh critique en fonction de Péclet pour $\Gamma=0.75$ et $\lambda_1=0.01$, $\lambda_1=0.03$ et $\lambda_1=0.05$
(fluides faiblement viscoélastiques)

En ce qui concerne les fréquences au seuil de l'instabilité, la figure 2-3, atteste de leur faible dépendance vis-à-vis de l'élasticité du fluide. Cette figure montre aussi que les fréquences critiques augmentent considérablement avec l'augmentation de Pe .

La figure 2-4 montre qu'au fur et à mesure que le débit filtrant devient important, la valeur du nombre d'onde s'écarte de sa valeur $k_c = \pi$, propre aux fluides Newtoniens, et augmente pour atteindre une valeur maximale qui dépend de l'élasticité du fluide. Cette augmentation du nombre d'onde critique signifie physiquement que les effets combinés du débit filtrant et de l'élasticité est le resserrement des cellules convectives naissantes.

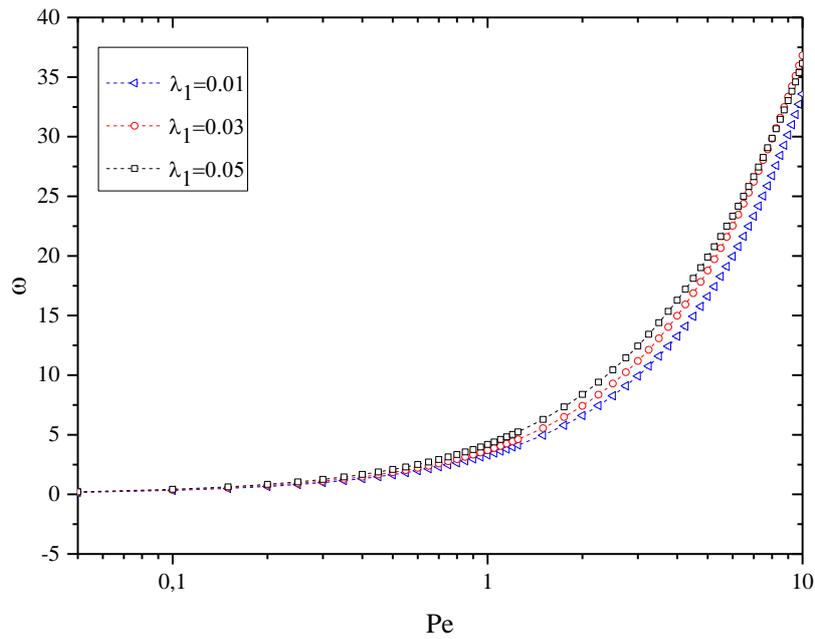


Figure 2-3 Fréquence critique en fonction de Péclet pour $\Gamma=0.75$ et $\lambda_1=0.01$, $\lambda_1=0.03$ et $\lambda_1=0.05$ (fluides faiblement viscoélastiques)

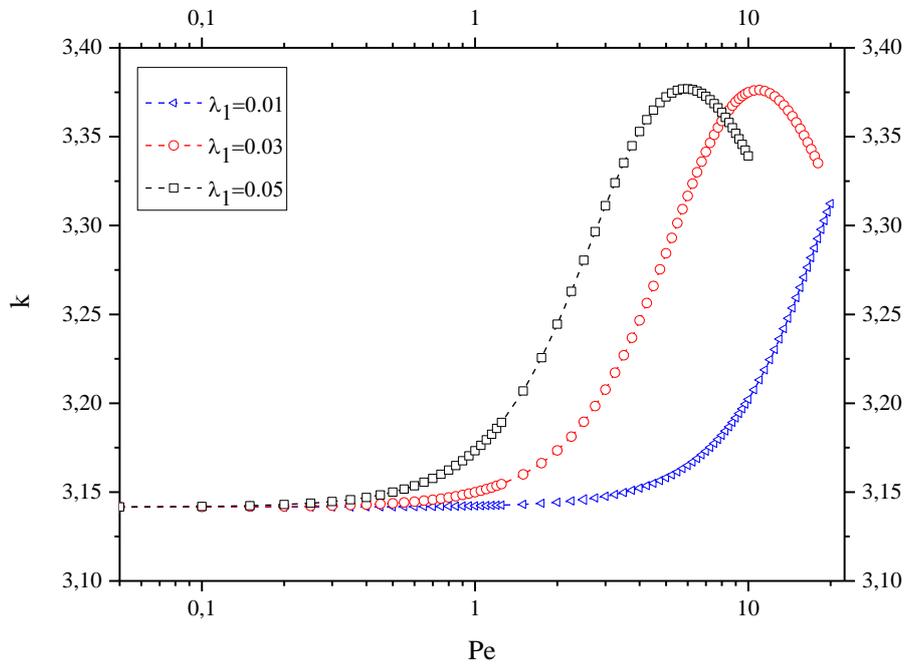


Figure 2-4 Nombre d'onde critique en fonction de Péclet pour $\Gamma=0.75$ et $\lambda_1=0.01$, $\lambda_1=0.03$ et $\lambda_1=0.05$ (fluides faiblement viscoélastiques)

2.2.3.2 Influence du rapport des viscosités Γ au seuil de l'instabilité

Cette fois, pour déterminer l'influence du rapport des viscosités Γ sur les caractéristiques de l'instabilité au seuil de la convection mixte, on fixe λ_1 et on fait varier Γ . Les courbes de Rayleigh critique en fonction de Péclet sont présentées sur la figure 2-5. L'effet stabilisant de Γ est donc remarqué sur cette figure, qui montre que les valeurs critiques du nombre de Rayleigh augmentent avec Γ .

Rappelons que le cas avec $\Gamma=0$ représente une valeur limite d'un fluide purement élastique, dit fluide de Maxwell et $\Gamma=1$ peut être considérée comme une limite d'une solution de polymères extrêmement diluée où le fluide se comporte comme un fluide Newtonien. Dans le cas Newtonien, l'énergie est dissipée par la viscosité tandis que dans le cas d'un fluide viscoélastique l'énergie est dissipée à la fois par l'élasticité et la viscosité. Par conséquent, plus le rapport Γ diminue, plus la part de dissipation d'énergie par l'élasticité augmente. Comme Γ est également le rapport des temps de retardation et de relaxation, nous pouvons en déduire que l'effet du temps de retardation est lui aussi stabilisant.

Les figures 2-6 et 2-7 montrent respectivement la fréquence critique et le nombre d'onde critique en fonction de Pe . Nous remarquons, contrairement à l'effet de λ_1 , la fréquence critique et le nombre d'onde critique sont très sensibles aux variations de Γ pour les faibles valeurs du débit filtrant. En particulier, le nombre d'onde atteint son maximum pour des valeurs de Pe relativement faibles.

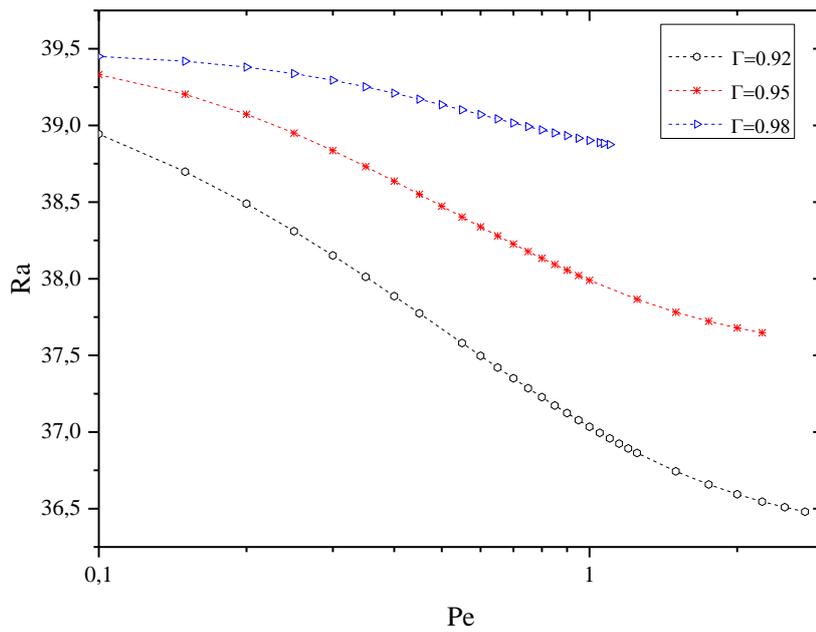


Figure 2-5 Rayleigh critique en fonction de Péclet pour $\lambda_1=0.5$ et $\Gamma=0.92$, $\Gamma=0.95$ et $\Gamma=0.98$ (fluides faiblement viscoélastiques)

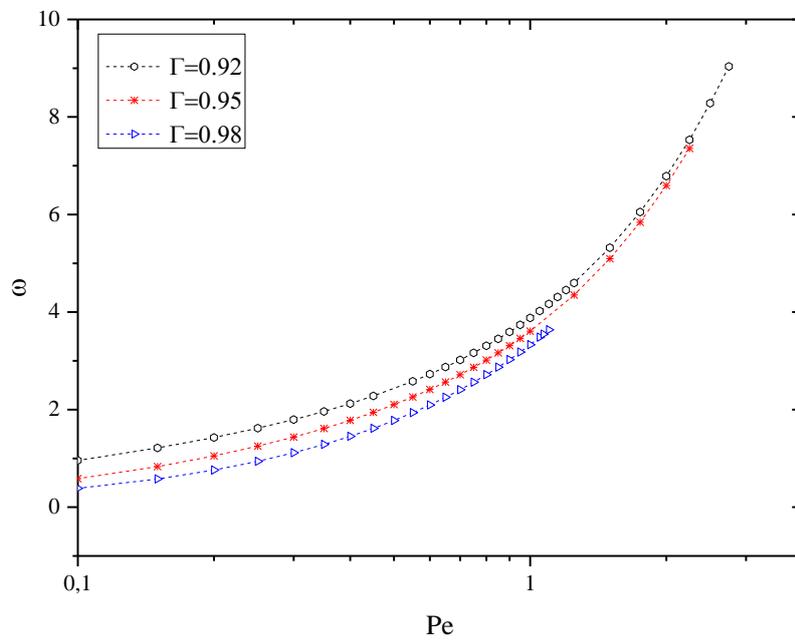


Figure 2-6 Fréquence critique en fonction de Péclet pour $\lambda_1=0.5$ et $\Gamma=0.92$, $\Gamma=0.95$ et $\Gamma=0.98$ (fluides faiblement viscoélastiques)

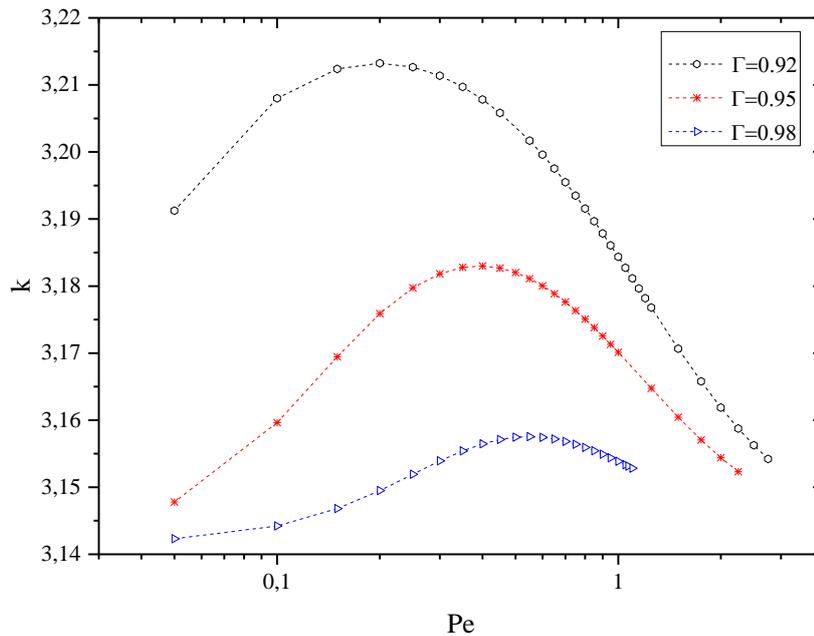


Figure 2-7 Nombre d'onde critique en fonction de Péclet pour $\lambda_1=0.5$ et $\Gamma=0.92$, $\Gamma=0.95$ et $\Gamma=0.98$ (fluides faiblement viscoélastiques)

2.2.4 Naissance de la convection mixte dans le régime fortement viscoélastique

2.2.4.1 Caractéristiques des trois modes instables

A titre d'illustration du comportement linéaire de l'instabilité dans la zone fortement viscoélastique (i.e. la région des paramètres au-dessus de la courbe de la figure 2-1), nous considérons le jeu des paramètres suivants, $\Gamma=0.50$ et $\lambda_1=0.5$. La résolution du problème aux valeurs propres montre que le nombre de modes instables dépend fortement de la valeur prise par le débit filtrant. Trois modes instables existent pour des débits faibles, alors qu'un seul mode devient instable pour des valeurs élevées de Pe . Nous distinguons ces modes instables par l'appellation, mode 1 à mode 3. L'objectif est de comparer les seuils d'apparition de ces trois modes afin d'en déterminer le plus instable. Les variations du nombre de Rayleigh critique, de la fréquence critique et du nombre d'onde critique, associés aux trois modes sont respectivement présentées sur les figures 2-8 à 2-10 en fonction de Péclet. Le mode 1 représente l'instabilité stationnaire à défaut de l'écoulement principal (i.e. $Pe=0$). En présence de l'écoulement, ce mode devient oscillatoire avec une fréquence négative qui croît avec le débit. Il s'agit d'une instabilité qui se propage avec une vitesse de phase négative, et donc à contre courant de l'écoulement principal imposé. Les deux

autres modes représentent des rouleaux transversaux, qui peuvent apparaître simultanément pour $Pe = 0$, puisque dans ce cas $Ra_c^{osc}(mode\ 2) = Ra_c^{osc}(mode\ 3)$. Leur nombre d'onde est identique et leur fréquences sont opposées lorsque $Pe = 0$. Dans ce cas, et en l'absence de l'écoulement principal, ces deux modes d'instabilité se propagent le long du massif poreux d'une façon symétrique. La présence d'un débit filtrant brise cette symétrie d'invariance $x \rightarrow (-x)$, et sélectionne le mode 2 au détriment du mode 3. En effet, une simple inspection de la figure 2-8, montre que pour $Pe \neq 0$, la valeur critique du nombre de Rayleigh associée au mode 2 (présenté en bleu sur cette figure) est inférieure à celle qui correspond à la naissance du mode 3. Il est à noter que ce mode 2, sélectionné par la présence d'un écoulement principal avec un débit non nul, oscille avec une fréquence positive, attestant que ce mode sélectionné représente des ondes progressives se propageant dans le sens de l'écoulement. Leurs fréquences d'oscillations varient en fonction de Pe presque linéairement comme cela est illustré par la figure 2-9.

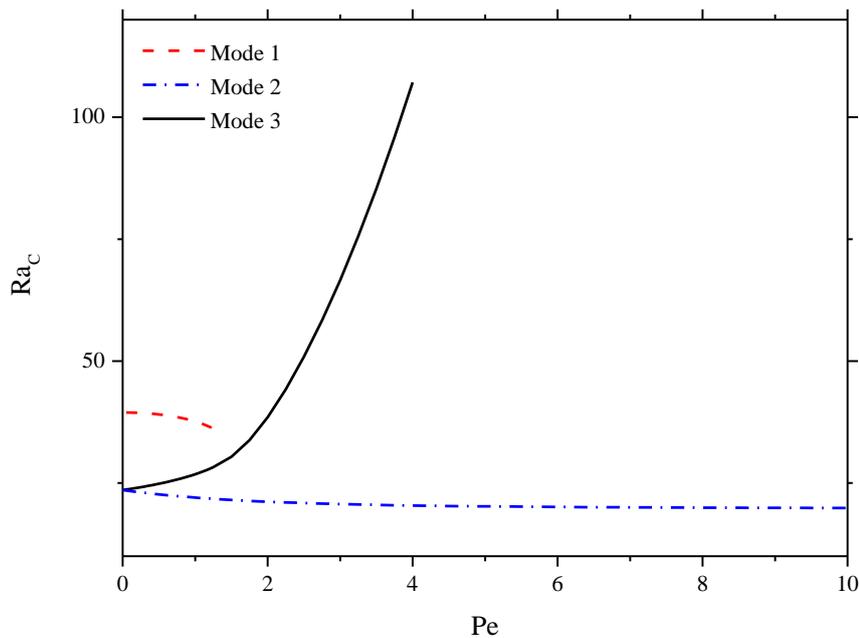


Figure 2-8 Comparaison des trois modes à l'aide de courbes de Rayleigh critique en fonction de Péclet pour le cas de $\Gamma=0.50$ avec $\lambda_1=0.50$ (fluide fortement viscoélastique)

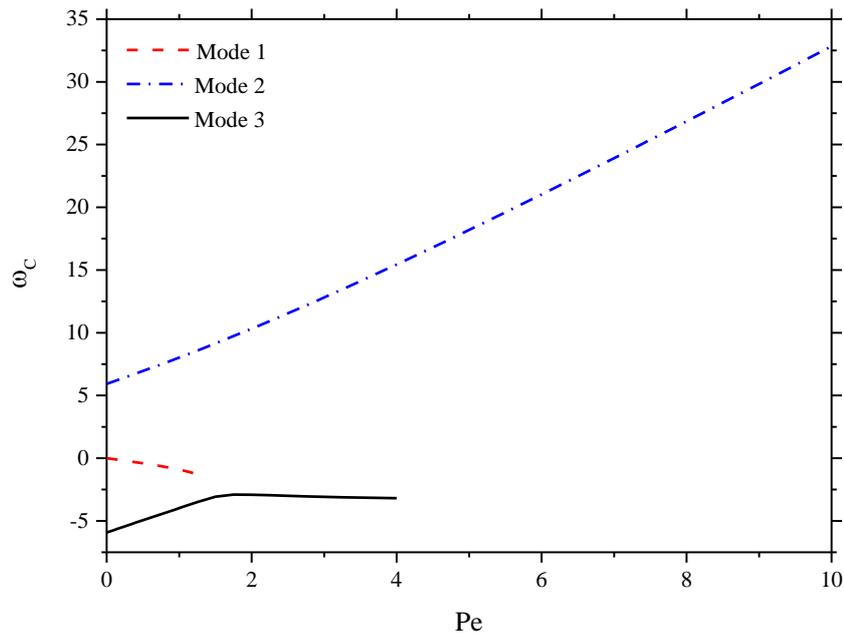


Figure 2-9 Comparaison des trois modes à l'aide de courbes de fréquences critiques en fonction de Péclet pour le cas de $\Gamma=0.50$ avec $\lambda_1=0.50$ (fluide fortement viscoélastique)

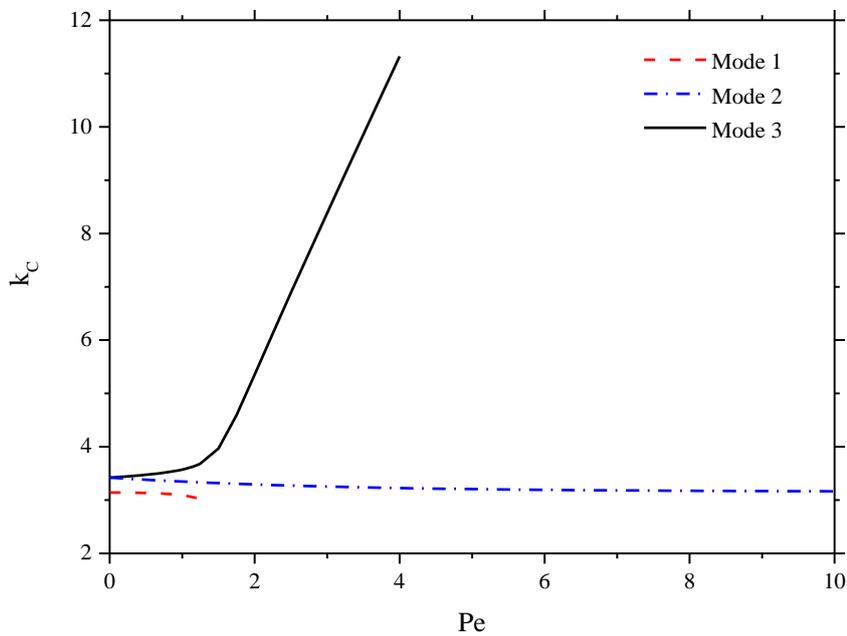


Figure 2-10 Comparaison des trois modes à l'aide de courbes de nombres d'onde critiques en fonction de Péclet pour le cas de $\Gamma=0.50$ avec $\lambda_1=0.5$ (fluide fortement viscoélastique)

2.2.4.2 Influence du temps de relaxation λ_1 sur le mode le plus instable

Les effets du temps de relaxation sur le mode d'instabilité le plus amplifié dans le régime fortement viscoélastique sont étudiés ici en fixant les paramètres viscoélastiques à $\Gamma = 0.75$, et $\lambda_1 = 0.6, 0.7$ et 0.9 . Les propriétés linéaires de l'instabilité au seuil de leur apparition sont illustrées sur les figures 2-11 à 2-13.

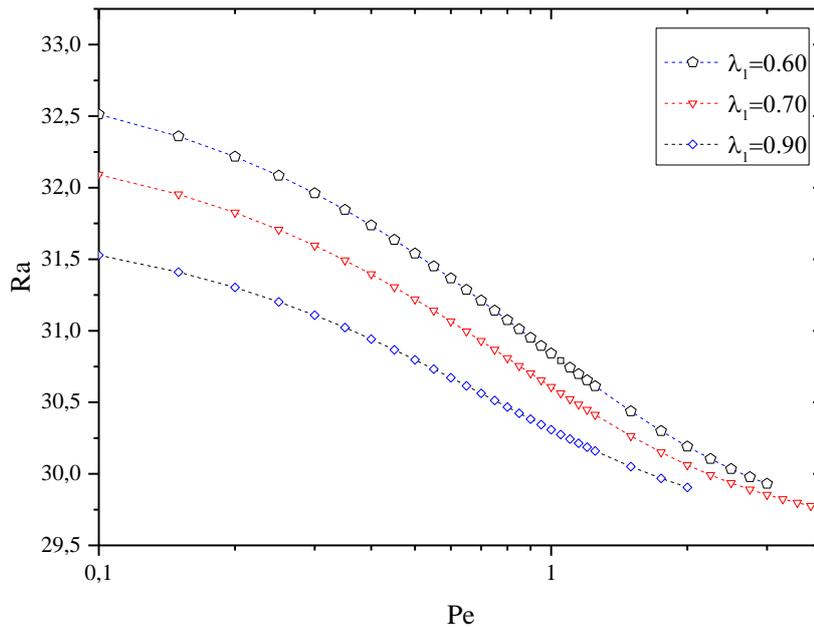


Figure 2-11 Rayleigh critique en fonction du nombre de Péclet pour les couples $\Gamma=0.75$ et $\lambda_1 = 0.60, \lambda_1 = 0.70$ et 0.90 (fluides fortement viscoélastiques)

La figure 2-11 montre une décroissance rapide de la valeur critique du nombre de Rayleigh vis-à-vis du nombre de Péclet pour tendre vers une constante lorsque Pe prend des valeurs modérées. L'effet déstabilisant du temps de relaxation est alors essentiellement ressenti pour de faibles valeurs de Pe . Ce comportement tranche avec celui observé précédemment en régime faiblement viscoélastique où l'élasticité n'a pas d'effet significatif pour des faibles valeurs du débit filtrant.

Les figures 2-12 et 2-13 présentent les dépendances de la fréquence et du nombre d'onde critiques vis-à-vis de Pe pour des valeurs différentes de l'élasticité du fluide. Ces dépendances sont très légères pour valeurs faibles de Pe et deviennent insignifiantes pour des valeurs modérées de Pe .

Nous concluons que les effets du débit filtrant pour les fluides fortement viscoélastiques sur les propriétés linéaires des instabilités sont ressenties pour les

faibles débits filtrants, alors qu'ils peuvent être considérés comme négligeables en présence de débits modérés.

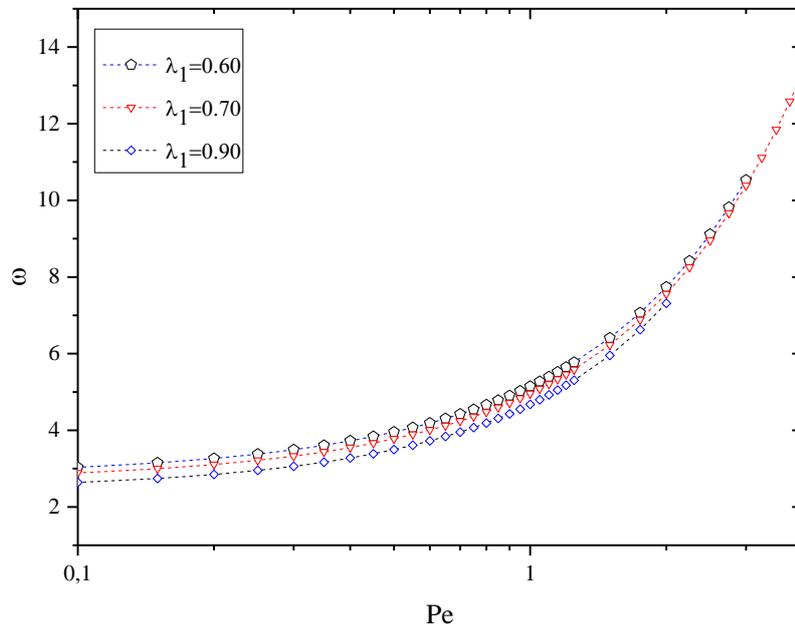


Figure 2-12 Fréquence critique en fonction du nombre de Péclet pour $\Gamma=0.75$ et $\lambda_1 =0.60$, $\lambda_1 =0.70$ et 0.90 (fluides fortement viscoélastiques)

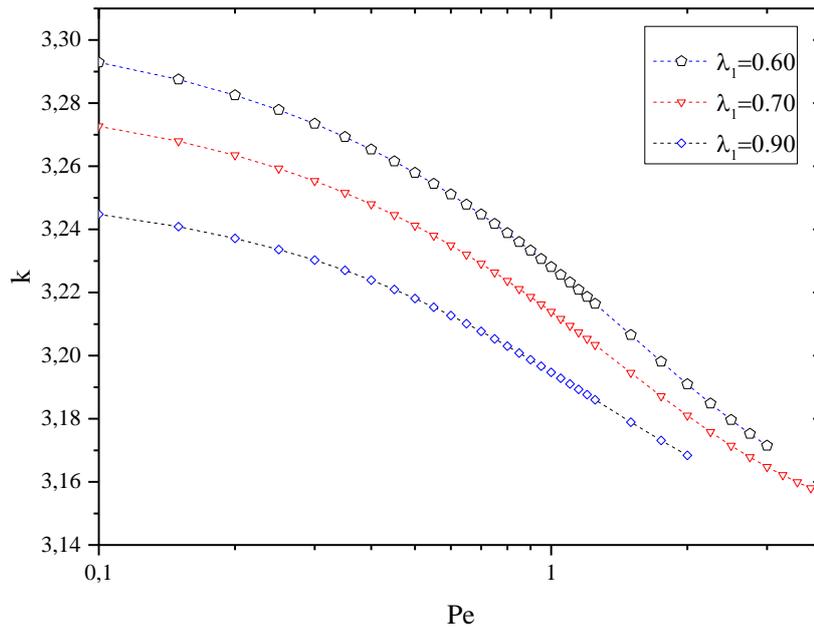


Figure 2-2-13 La comparaison entre les courbes de fréquence critique en fonction du nombre de Péclet pour $\Gamma=0.75$ et $\lambda_1=0.6$, $\lambda_1=0.7$ et 0.9 (fluides fortement viscoélastiques)

2.2.4.3 Influence du rapport des viscosités Γ sur le mode le plus instable

L'influence du rapport des viscosités Γ sur le mode le plus instable est étudiée pour un temps de relaxation fixé à $\lambda_1=0.50$, alors que Γ prend trois valeurs 0.3, 0.5 et 0.7, se positionnant ainsi dans la zone fortement viscoélastique. Le comportement des courbes illustrant l'évolution, en fonction de Péclet, du nombre de Rayleigh critique pour les rouleaux transversaux les plus instables est présenté sur la figure 2-14. Ces courbes attestent du rôle très stabilisant de Γ . Elles témoignent également des effets déstabilisants pour des valeurs faibles à modérées de Pe . On note aussi que pour des valeurs grandes de Péclet, le nombre de Rayleigh critique cesse d'être dépendant de Pe et cependant demeure très sensible à la valeur prise par le rapport des viscosités. Ce comportement est également observé pour le nombre d'onde critique comme le montre la figure 2-16.

Les fréquences critiques, représentées sur la figure 2-15, montrent une dépendance quasi-linéaire en fonction de Pe et une diminution de leur valeur lorsque Γ augmente.

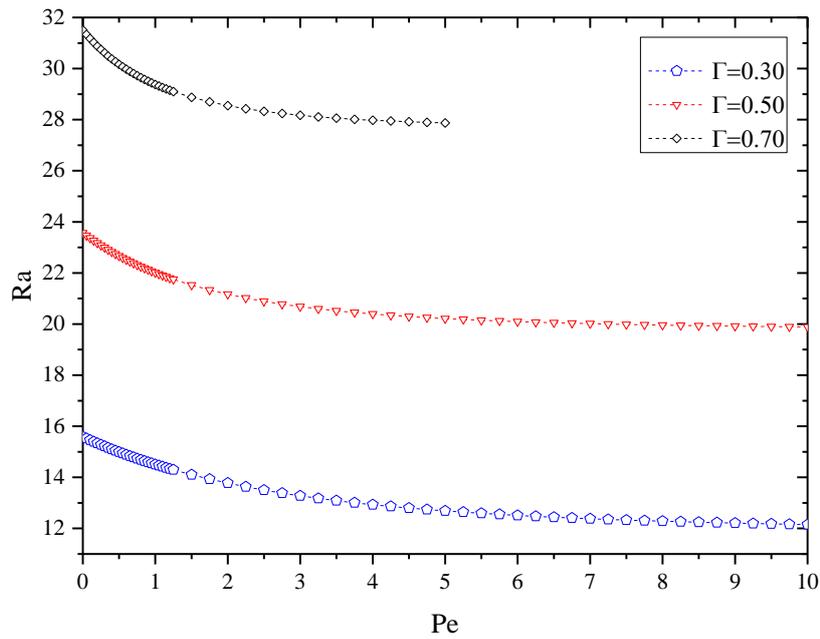


Figure 2-14 Comparaison de courbes de Ra critique en fonction de Péclet pour $\lambda_1=0.50$ et Γ variant $\Gamma=0.3, \Gamma=0.5$ et $\Gamma=0.7$ (fluides fortement viscoélastiques).

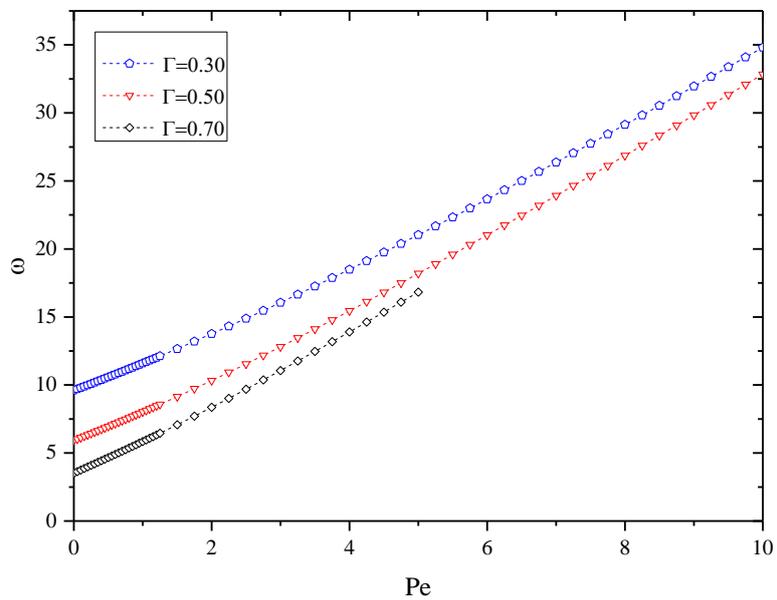


Figure 2-15 Comparaison de courbes de fréquence critique en fonction de Péclet (mode 2) pour $\lambda_1=0.5$ et Γ variant $\Gamma=0.30, \Gamma=0.50$ et $\Gamma=0.70$ (fluides fortement viscoélastiques).

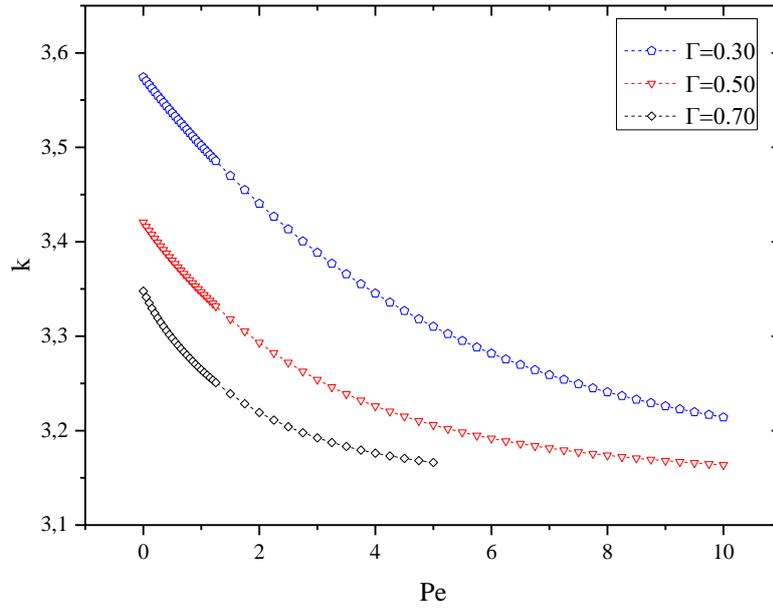


Figure 2-16 Comparaison de courbes de nombre d'onde critique en fonction de Péclet (mode 2) pour $\lambda_1=0.50$ et Γ variant, $\Gamma=0.30$, $\Gamma=0.50$ et $\Gamma=0.70$ (fluides fortement viscoélastiques).

2.2.5 Structures tridimensionnelles : application de la transformation de Squire

A partir des résultats établis pour une instabilité bidimensionnelle, nous allons déterminer, dans un second temps, les seuils Ra_C^{3D} d'apparition de structures convectives tridimensionnelles. En annulant le taux de croissance temporelle ω_i , la transformation de Squire (2-18) - (2-19) indique que la valeur critique Ra_C vérifie la propriété :

$$Ra_C^{3D}(k_x^2 + k_y^2, k_x Pe_{3D}) = Ra_C^{2D}(k^2, k Pe_{2D}) \quad (2-20)$$

$$Pe_{3D} = (k/k_x) * Pe_{2D} > Pe_{2D} \text{ vu que } k_x^2 + k_y^2 = k^2 \quad (2-21)$$

Pour que le seuil d'apparition des structures tridimensionnelles soit identique à celui des structures bidimensionnelles, ces propriétés exigent une valeur de Pe plus élevée que celle trouvée dans le cas bidimensionnel. Or comme l'ont montré les résultats établis pour le cas des rouleaux transversaux bidimensionnels, la valeur Ra_C^{2D} est une fonction décroissante vis-à-vis de Pe_{2D} . Par conséquent, la courbe de dépendance de Ra_C^{3D} vis-à-vis de Pe_{3D} , se situera au-dessus de la courbe correspondant au cas 2D. La figure (2-17) illustre ce comportement pour des structures obliques faisant un angle $\alpha = \frac{\pi}{4}$ avec la direction de l'écoulement principal.

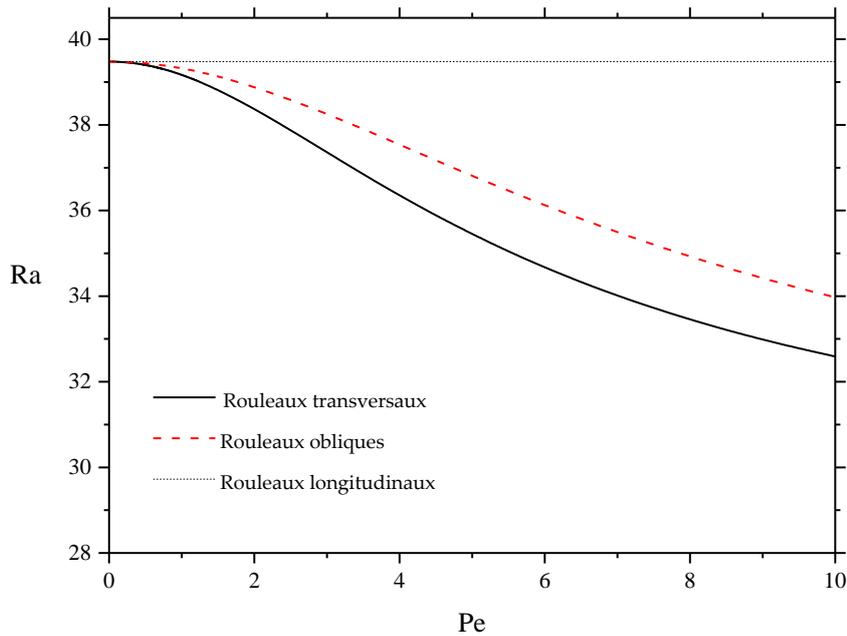


Figure 2-17 Seuils d'apparition de rouleaux longitudinaux, transversaux et obliques (inclinés d'un angle $\alpha=\pi/4$ par rapport à la direction de l'écoulement principal), obtenus pour $\lambda_1=0.05$ et $\Gamma=0.75$.

2.3 Approche spatiotemporelle de stabilité

2.3.1 Différence de comportement physique entre instabilités convectives et instabilités absolues

Selon les conditions, une perturbation dans le système peut suivre trois scénarios différents. Le système est stable quand la perturbation est amortie ou atténuée à la fois dans l'espace (x) et dans le temps (t). Le régime est convectivement instable quand la perturbation s'amplifie et advectée dans un repère mobile, tout en s'atténuant en chaque point du domaine pour des temps asymptotiquement grands. Cela signifie que la perturbation est transportée par l'écoulement et on revient à l'état de base non perturbé en absence de source extérieure (bruit). Cette instabilité a donc un effet transitoire. Le régime est dit absolument instable dans le cas où la perturbation est amplifiée à la fois en aval et en amont. Dans ce cas, nous avons une instabilité globale qui envahit entièrement le domaine et s'installe dans le système physique considéré. Ainsi le paquet d'ondes se répand aussi bien dans la direction de l'écoulement, que dans la direction opposée. Ces trois dynamiques sont représentées schématiquement sur les figures 2-18 et 2-19. L'analyse de stabilité temporelle sert à identifier les seuils d'apparition des premières instabilités de nature convective. Pour détecter la naissance

et le développement de l'instabilité absolue, l'analyse de stabilité spatio-temporelle est nécessaire.

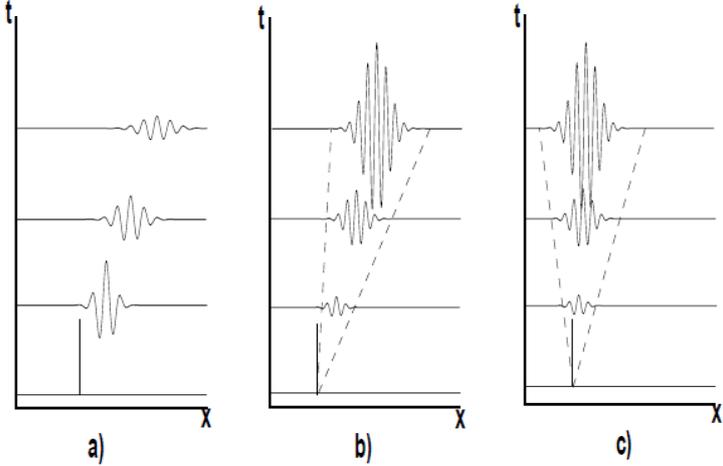
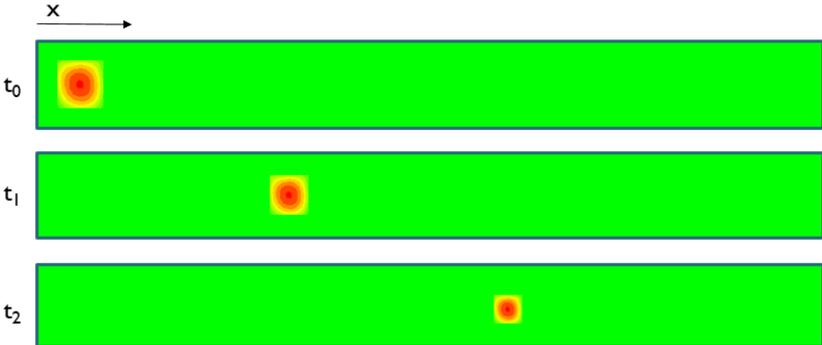
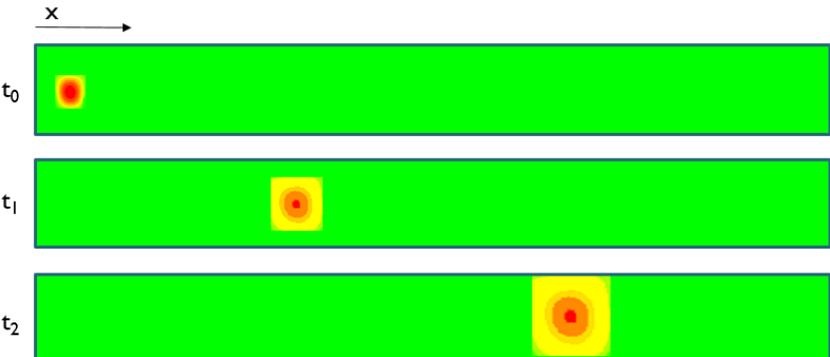


Figure 2-18 L'évolution d'une perturbation localisée en $x=0, t=0$ dans le plan (x,t) , a) stable, b) convectivement instable, c) absolument instable [15].



(a)



(b)

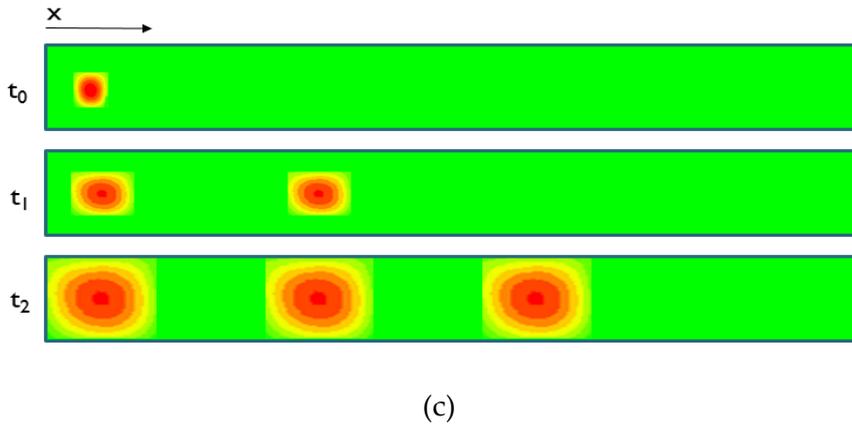


Figure 2-19 a) Régime stable, b) Régime convectivement instable et c) Régime absolument instable

2.3.2 Conditions mathématiques de déclenchement des instabilités convectives et des instabilités absolues

Contrairement à l'analyse de stabilité temporelle précédente, considérons maintenant le cas général où $k_x \in \mathbb{C}$, $k_y \in \mathbb{C}$ et $\omega \in \mathbb{C}$. Si on pose $\omega = \omega_r + i\omega_i$ et $k = k_r + ik_i$, on peut interpréter ω_r comme la fréquence de l'onde, k_r comme le nombre d'onde, ω_i comme le taux de croissance temporelle et $-k_i$ comme le taux de croissance spatiale. Par exemple à une position fixée quand $\omega_i > 0$ l'instabilité s'amplifie, sinon elle s'amortit. De même, si à un temps fixé, quand $k_i < 0$, l'instabilité s'amplifie dans le sens de l'écoulement ($x > 0$) sinon elle s'amortit.

Evaluons la réponse du système à une perturbation initiale localisée spatialement. Par souci de brièveté, nous énonçons les résultats ici et le lecteur pourrait consulter les références [49] [50] pour une analyse détaillée dans le cas bidimensionnel et la référence [51] pour le cas tridimensionnel. Selon le formalisme mathématique des instabilités absolues et convectives tridimensionnelles, la condition nécessaire mais non suffisante de l'instabilité absolue est l'existence d'un point selle (k_x^s, k_y^s) dans les deux plans complexes k_x et k_y définis par:

$$\begin{cases} D(\omega_0, k_x^s, k_y^s, \lambda_1, \Gamma, Ra, Pe) = 0 \\ \frac{\partial \omega_0(k_x^s, k_y^s)}{\partial k_x} = \frac{\partial \omega_0(k_x^s, k_y^s)}{\partial k_y} = 0 \end{cases} \quad (2-22)$$

Cependant, il est nécessaire que le point selle émerge du processus de pincement des branches spatiales provenant des parties supérieure et inférieure des plans complexes k_x et k_y . Dans le régime instable ($Ra > Ra_c$), si $\omega_{0i}(k_x^s, k_y^s)$ est négatif, le système est dit convectivement instable, ce qui signifie que toute impulsion localisée est convectée vers la sortie du milieu ouvert de sorte que les instabilités ne puissent pas se développer globalement. D'autre part, si $\omega_{0i}(k_x^s, k_y^s)$ est positif, le système est dit

absolument instable et des perturbations localisées se développent sur place et également dans tout l'espace considéré. Afin de rechercher la structure convective correspondant au taux de croissance absolu le plus élevé, nous résolvons le système (2-22).

Comme $\frac{\partial \omega_0}{\partial k_x} = \frac{\left(\frac{\partial D}{\partial k_x}\right)}{\left(\frac{\partial D}{\partial \omega_0}\right)} = 0$ avec $\frac{\partial D}{\partial \omega_0} \neq 0$, cette condition se réduit à $\frac{\partial D}{\partial k_x} = 0$. En utilisant à la fois $\frac{\partial D}{\partial k_x} = 0$ et $\frac{\partial \omega_0}{\partial k_x} = 0$, nous obtenons:

$$2k_x F(k^2, \omega_0, k_x Pe) - iPe(k^2 + \pi^2)(1 - i\Gamma\lambda_1\omega_0) = 0 \quad (2-23)$$

où $F(k^2, \omega_0^2, k_x Pe) = \omega_0^2\Gamma\lambda_1 + i\omega_0[1 + 2\Gamma\lambda_1(k^2 + \pi^2) - Ra\lambda_1] - 2(k^2 + \pi^2) + Ra - i k_x Pe(1 - i\Gamma\lambda_1\omega_0)$.

De la même façon, $\frac{\partial \omega_0}{\partial k_y} = 0$ nous donne:

$$2k_y F(k^2, \omega_0, k_x Pe) = 0 \quad (2-24)$$

A partir de l'équation (2-24), nous avons soit $k_y = 0$ ou $F(k^2, \omega_0, k_x Pe) = 0$.

Si $k_y \neq 0$, alors les conditions (2-22) et (2-23) sont remplies lorsque $F(k^2, \omega_0, k_x Pe) = 0$ et $\omega_0 = \frac{-i}{\Gamma\lambda_1}$ ou $k^2 + \pi^2 = 0$. Cette dernière condition conduit selon l'équation de dispersion à $\omega_0 = \frac{-i}{\lambda_1}$. En résumé, si $k_y \neq 0$, le taux de croissance absolu est soit $\omega_{0i} = \frac{-1}{\lambda_1} < 0$, ou $\omega_{0i} = \frac{-1}{\Gamma\lambda_1} < 0$, ce qui signifie que les structures instables 3D et les rouleaux longitudinaux restent convectivement instables quel que soit $Pe \neq 0$ et n'observent pas de transition vers un régime absolument instable.

On conclue donc que seules les structures de convection organisées sous la forme de rouleaux transversaux avec $k_y = 0$ peuvent observer une transition vers une instabilité absolue, alors que les rouleaux obliques et les rouleaux longitudinaux demeurent convectivement instables. **C'est pour cette raison, que le long de cette thèse, l'étude théorique concerné par l'instabilité absolue et les simulations numériques se sont focalisées sur le cas bidimensionnel avec $k_x \neq 0$ et $k_y = 0$.**

Pour que l'instabilité absolue apparaisse dans le système sous forme de rouleaux transversaux ($k_x = k \neq 0$ et $k_y = 0$), il faut résoudre numériquement le système 2D suivant :

$$\begin{cases} D(\omega, k, \lambda_1, \Gamma, Ra, Pe) = 0 \\ \frac{\partial \omega_0(k)}{\partial k} = 0 \end{cases} \quad (2-25)$$

Le seuil de l'instabilité absolue est donné par $\omega_{0i} = 0$.

2.4 Transition d'une instabilité convective à une instabilité absolue

Dans cette étude, nous nous intéressons comme dans la partie précédente aux deux régimes faiblement viscoélastique et fortement.

2.4.1 Transition d'instabilité convective/absolue dans le régime faiblement viscoélastique

2.4.1.1 Influence du temps de relaxation λ_1

Nous respectons toujours la distinction entre les deux régimes qui sont le régime faiblement viscoélastique et le régime fortement viscoélastique et on traite d'abord le régime faiblement viscoélastique. Les calculs ont été faits pour des points différents avec $\Gamma=0.75$ et pour les temps de relaxation $\lambda_1=0.01$, $\lambda_1=0.03$ et $\lambda_1=0.05$. Les résultats sont présentés sur les figures 2-20 à 2-22. Sur la figure 2-20, nous constatons une diminution du seuil de l'instabilité absolue, Rayleigh absolue Ra^A , en augmentant le temps de relaxation. Ce comportement montre encore l'effet déstabilisant du temps de relaxation sur la naissance de l'instabilité absolue. Nous constatons aussi que le nombre de Rayleigh Ra^A , augmente en fonction de Péclet. De surcroît, pour des valeurs très petites de Péclet, on voit un rapprochement des courbes et toutes les courbes commencent de $4\pi^2$ qui est la valeur critique de Rayleigh dans la convection naturelle. La partie imaginaire du nombre d'onde traduit la variation de l'amplitude de l'onde au cours de sa propagation. Lorsque $k_i < 0$ la propagation s'accompagne d'une amplification spatiale de l'onde et quand $k_i > 0$ la propagation s'accompagne d'un amortissement de l'onde. La figure 2-22 montre qu'au seuil absolue, se produit une amplification spatiale plus importante de l'onde progressive pour des débits plus élevés.

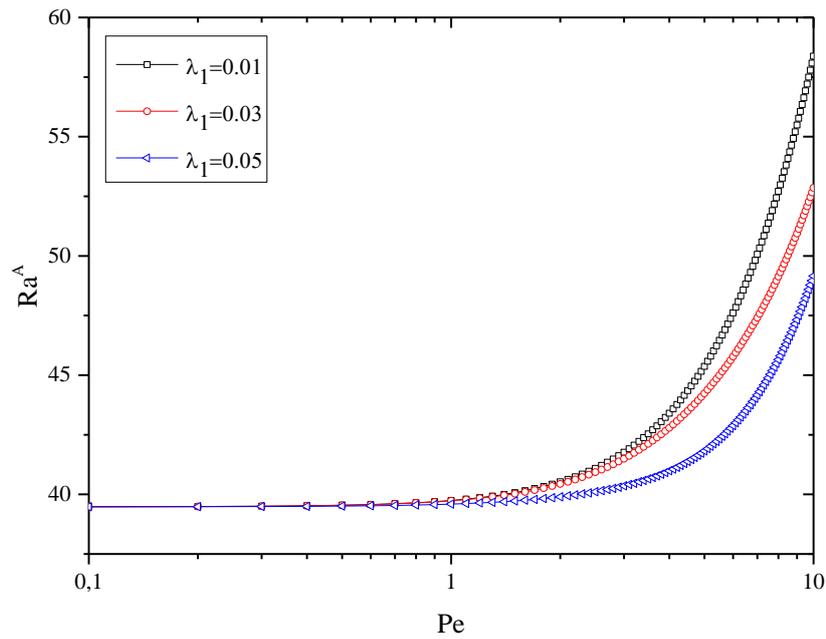


Figure 2-20 La comparaison de courbes de Rayleigh au seuil d'instabilité absolue en fonction de Péclet avec $\Gamma=0.75$ pour les valeurs de $\lambda_1=0.01$, $\lambda_1=0.03$ et $\lambda_1=0.05$ (fluides faiblement viscoélastiques).

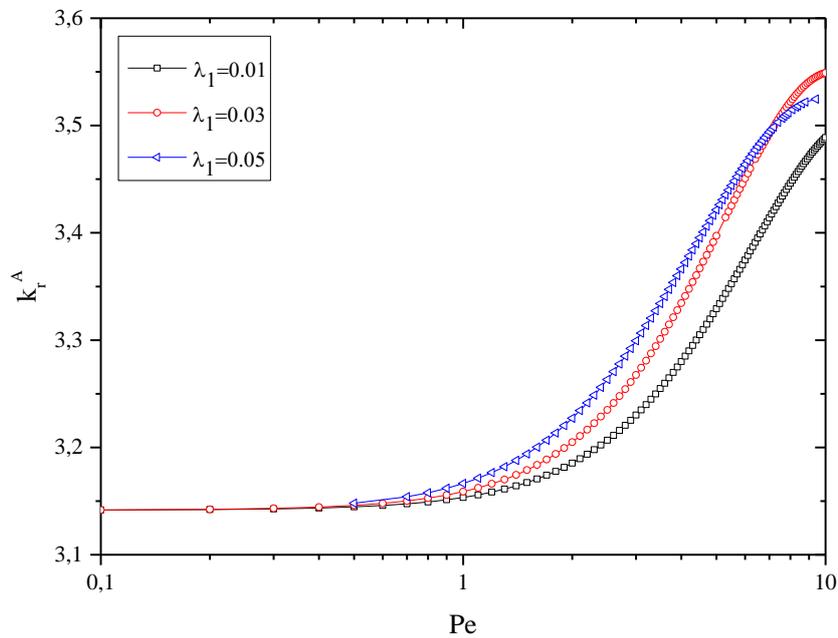


Figure 2-21 La comparaison de courbes de nombre d'onde réel au seuil d'instabilité absolue en fonction de Péclet avec $\Gamma=0.75$ pour les valeurs de $\lambda_1=0.01$, $\lambda_1=0.03$ et $\lambda_1=0.05$ (fluides faiblement viscoélastiques).

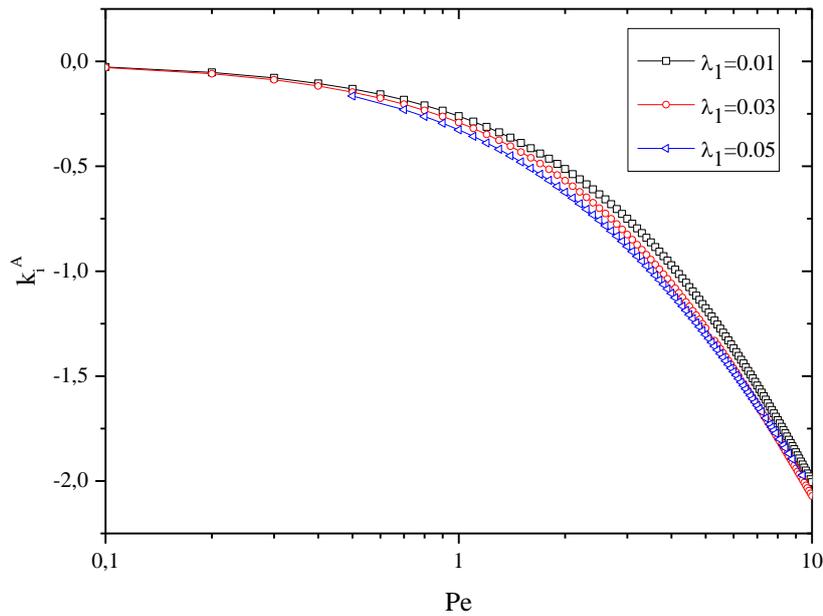


Figure 2-22 La comparaison de courbes de nombre d'onde imaginaire au seuil d'instabilité absolue en fonction de Péclet avec $\Gamma=0.75$ pour les valeurs de $\lambda_1=0.01$, $\lambda_1=0.03$ et $\lambda_1=0.05$ (fluides faiblement viscoélastiques).

2.4.1.2 Influence du rapport des viscosités Γ

Pareillement à ce que l'on a montré dans le cadre de l'analyse temporelle, on fixe λ_1 à 0.5 et on varie Γ de sorte que le jeu des paramètres choisi soit dans la zone faiblement viscoélastique.. Il est intéressant de remarquer que le nombre de Rayleigh au seuil de l'instabilité absolue expérimente une décroissance pour des faibles Péclet, atteint un minimum, avant de croître avec Pe . Le minimum de ces courbes décroît lorsque le rapport des viscosités croît. L'effet stabilisant de Γ sur le seuil de l'instabilité absolue est visible sur la figure 2-23. Les fréquences et les nombres d'onde au seuil de l'instabilité absolue, non représentés ici, s'avèrent insensibles au changement de Γ .

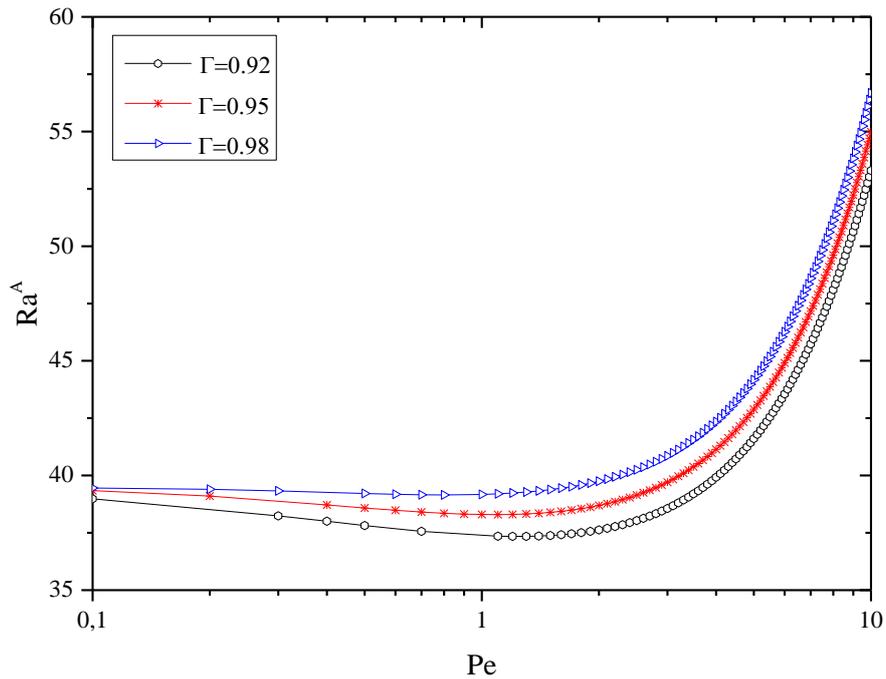


Figure 2-23 Comparaison de courbes de Rayleigh au seuil d'instabilité absolue en fonction de Péclet pour $\lambda_1=0.5$ avec $\Gamma=0.92$, $\Gamma=0.95$ et $\Gamma=0.98$ (fluides faiblement viscoélastiques).

2.4.2 Transition d'instabilité convective/absolue dans le régime fortement viscoélastique

2.4.2.1 Caractéristiques des trois modes absolument instables

L'analyse temporelle de stabilité a montré que parmi les trois modes instables, le système sélectionne le mode 2 qui représente des ondes progressives se propageant dans le sens de l'écoulement forcé. Qu'en est-t-il au seuil de l'instabilité absolue ?

Pour répondre à cette question, nous avons déterminé les seuils de l'instabilité absolue correspondant aux trois modes instables. Les seuils de l'instabilité absolue Ra^A pour ces trois modes sont représentés en fonction de Pe sur la figure 2-24. On peut conclure de cette figure que le mode 2, comme dans l'analyse temporelle de stabilité, est le mode le plus amplifié, autrement dit c'est le mode dont la valeur de Ra^A est la plus petite, et ce indépendamment de la valeur de Pe . Nous avons vérifié que cette sélection linéaire du mode 2 au seuil de l'instabilité absolue est pertinente quel que soit le couple des paramètres viscoélastiques.

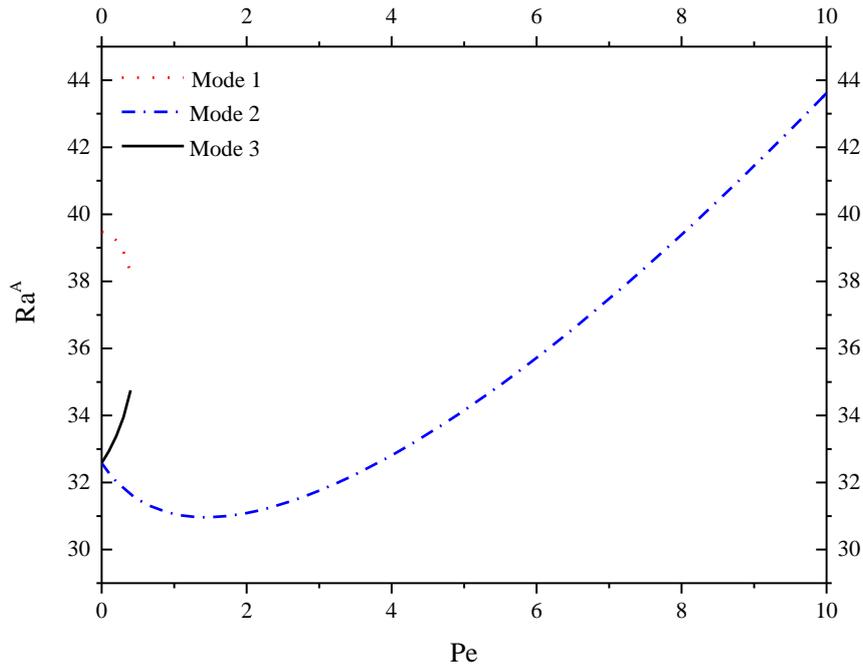


Figure 2-24 La variation de Rayleigh au seuil absolue en fonction de Péclet pour les trois modes pour un fluide fortement viscoélastique ($\Gamma=0.75$ et $\lambda_1=0.7$).

2.4.2.2 Influence du temps de relaxation λ_1 et du rapport des viscosités Γ sur le seuil d'instabilité absolue

Dans le régime fortement viscoélastique, les seuils de la naissance d'une instabilité absolue pour le mode dominant ont été déterminés pour $\Gamma=0.75$ et pour différentes valeurs du temps de relaxation, $\lambda_1=0.6$, $\lambda_1=0.7$ et $\lambda_1=0.9$. Les courbes de la figure 2-25 décrivent l'influence de Pe et de l'élasticité du fluide sur le nombre de Rayleigh au seuil de l'instabilité absolue. Encore une fois, en inspectant la figure 2-25 on peut observer l'effet du temps de relaxation pour précipiter l'émergence d'une instabilité absolue. Pour de faibles valeurs de Péclet. Lorsque la valeur de ce dernier augmente, cet effet déstabilisant s'amenuise et l'effet stabilisant de l'écoulement principal domine l'effet du caractère viscoélastique du fluide. En termes physiques, ce phénomène de stabilisation suivi de déstabilisation peut être expliqué grâce à une analyse basée sur un bilan énergétique. Néanmoins, on peut comprendre que l'effet déstabilisant de l'élasticité du fluide est le résultat d'un apport d'énergie thermique supplémentaire au milieu, et qui pour les faibles débits a pour conséquence de minimiser l'apport d'énergie thermique par l'échauffement imposé par le gradient de température. Il en découle une réduction du nombre de Rayleigh, nécessaire pour contrecarrer

l'advection faible provoquée par l'écoulement imposé. Cette apport d'énergie par l'élasticité s'avère insuffisante pour s'opposer à l'advection imposé par l'écoulement principal lorsque son intensité devient importante. Dans ce cas, le système doit déployer un gradient de température conséquent, d'où l'augmentation de la valeur du nombre de Rayleigh au seuil de l'instabilité absolue.

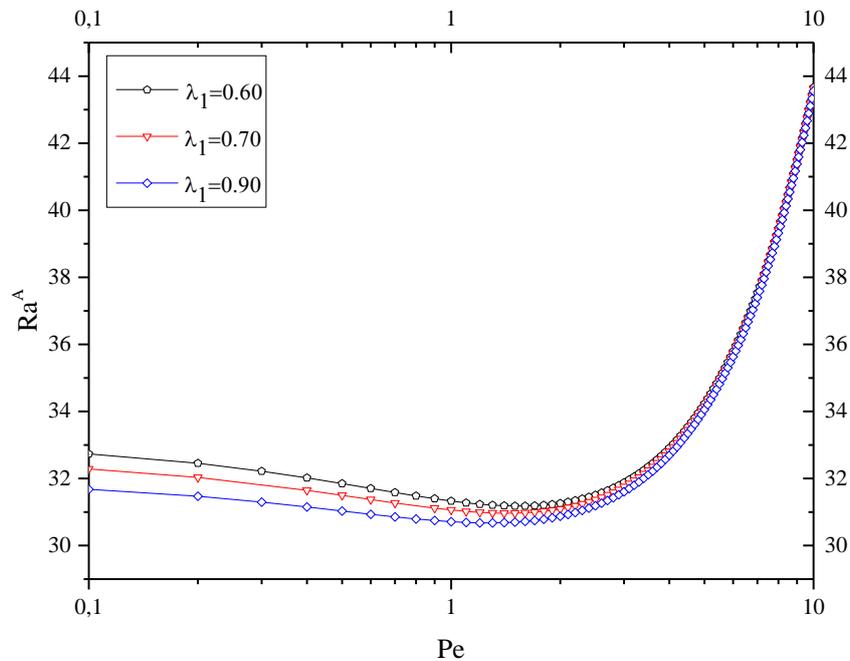


Figure 2-25 La comparaison de courbes de Rayleigh au seuil d'instabilité absolue en fonction de Péclet avec $\Gamma=0.75$ pour les valeurs de temps de relaxation de $\lambda_1=0.60$, $\lambda_1=0.70$ et $\lambda_1=0.90$ (fluides fortement viscoélastiques)

On s'intéresse maintenant à l'effet du rapport des viscosités Γ . La détermination de cet effet sur le seuil d'apparition de l'instabilité absolue est réalisée ici pour un temps de relaxation fixé à $\lambda_1=0.5$ avec $\Gamma=0.3$, $\Gamma=0.5$ et $\Gamma=0.7$. Les courbes du nombre Rayleigh absolu, en fonction de Péclet sont représentées sur la figure 2-26. Comme le montre cette figure, la valeur de Rayleigh absolu est une fonction croissante de Γ , attestant que le rapport des viscosités retarde fortement l'apparition d'une instabilité absolue. L'effet du nombre de Péclet est plus subtil avec une déstabilisation pour les faibles débits et une stabilisation pour des débits plus élevés.

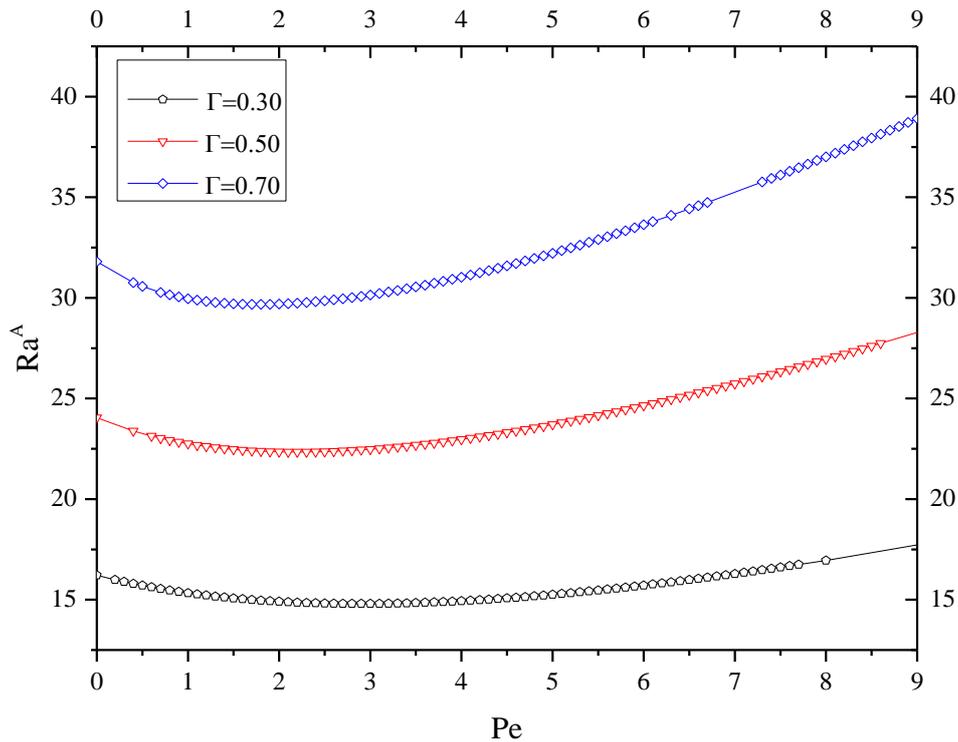


Figure 2-26 Comparaison des courbes de Rayleigh au seuil d'instabilité absolu en fonction de Péclet pour $\lambda_1=0.50$ avec $\Gamma=0.30$, $\Gamma=0.50$ et $\Gamma=0.90$ (fluides fortement viscoélastiques)

2.5 Vérification du processus de pincement dans le plan (k_r , k_i)

Nous avons énoncé que les conditions (2-24) étaient nécessaires mais pas suffisantes pour l'émergence d'une instabilité absolue. La condition de pincement des branches spatiales demeure une condition nécessaire. Ici, nous vérifions cette condition pour un couple de paramètres viscoélastiques $\Gamma=0.75$ et $\lambda_1=0.3$ et un débit d'intensité $Pe=5$. Les branches spatiales k_i en fonction de k_r sont représentées sur la figure 2-27 pour différentes valeurs de Ra . A partir de ces courbes, on peut faire le commentaire suivant :

*Si $Ra < Ra^c = 30.6$, le système est stable et les branches spatiales ne traversent pas l'axe k_r indiquant qu'il y a décroissance spatiale du paquet d'onde dans les deux direction de l'espace ($k_i > 0$ pour $x > 0$ et $k_i < 0$ pour $x < 0$).

* Pour $Ra = Ra^c$, on atteint le seuil de l'instabilité convective et une branche spatiale émanant du cadre supérieur touche l'axe k_r au point ($k_r = k_c$, $k_i = 0$)

* Pour $Ra = Ra^A = 34.9$, les branches spatiales se croisent au point de pincement (*pinching point*).

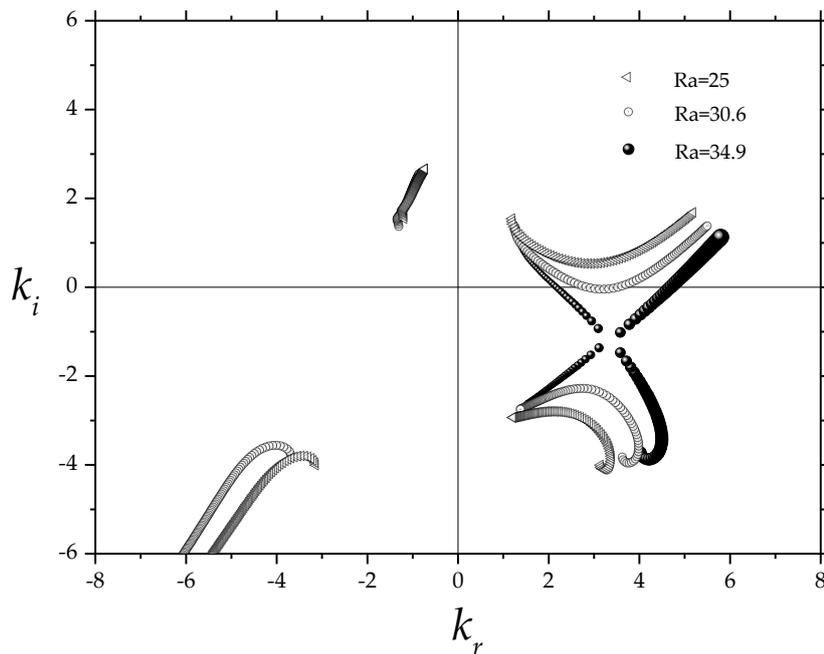


Figure 2-27 Les branches spatiales sur le plan k_r, k_i pour un système stable ($Ra=25$), un système convectivement instable ($Ra=30.6$) et un système absolument instable ($Ra=34.9$) pour un fluide dans la zone fortement viscoélastique ($\Gamma=0.75$, $\lambda_1=0.30$) et $Pe=5$.

2.6 Comparaison des seuils d'instabilités convectives et absolues

Pour récapituler et comparer les résultats obtenus à partir de l'analyse temporelle et l'analyse spatio-temporelle, nous avons tracé les courbes de Rayleigh correspondant aux deux types d'instabilités en fonction de Péclet avec les paramètres $\Gamma=0.75$ et $\lambda_1=0.01, 0.03$ et 0.05 dans la zone faiblement viscoélastique (figure 2-28) et $\Gamma=0.75$ et $\lambda_1=0.60, 0.70$ et 0.90 dans la zone fortement viscoélastique (figure 2-29). La figure 2-42 représente une comparaison générale entre les instabilités convectives et absolues. Dans les deux figures on constate que l'apparition des instabilités convectives précède évidemment l'apparition des instabilités absolues. Pour un fluide viscoélastique avec λ_1 fixé et un débit filtrant avec Pe fixé, il existe une zone d'instabilité convective, comprise entre deux valeurs du nombre de Rayleigh, à savoir $Ra=Ra_c$ et $Ra=Ra^A$. Dans cette région, les perturbations localisées initialement sont transportées par l'écoulement principal et finissent par quitter le massif poreux. Ce n'est que lorsque le nombre de Rayleigh dépasse sa valeur Ra^A au seuil de l'instabilité absolu, que la paquet d'ondes peut se propager à la fois en amont et en aval de la localisation spatiale de la perturbation. D'où l'intérêt de déterminer les caractéristiques dans la région des paramètres où l'instabilité absolue est pleinement établie. Ce sera l'objet du chapitre suivant.

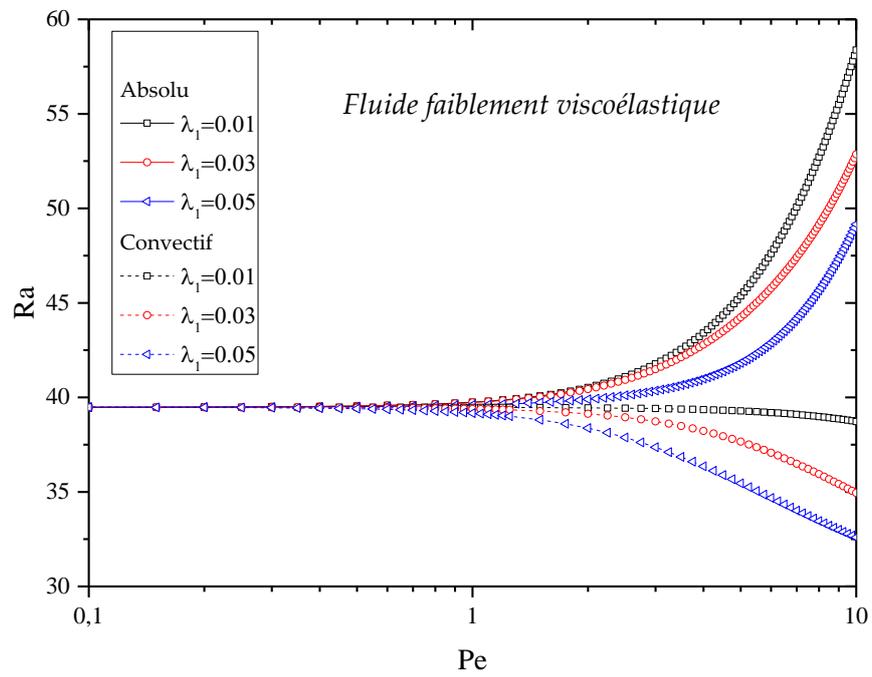


Figure 2-28 Comparaison des instabilités convectives et absolues avec les courbes de Rayleigh critique en fonction de Péclet pour des paramètres de $\Gamma=0.75$ et $\lambda_1= 0.01, 0.03$ et 0.05 (fluides faiblement viscoélastiques)

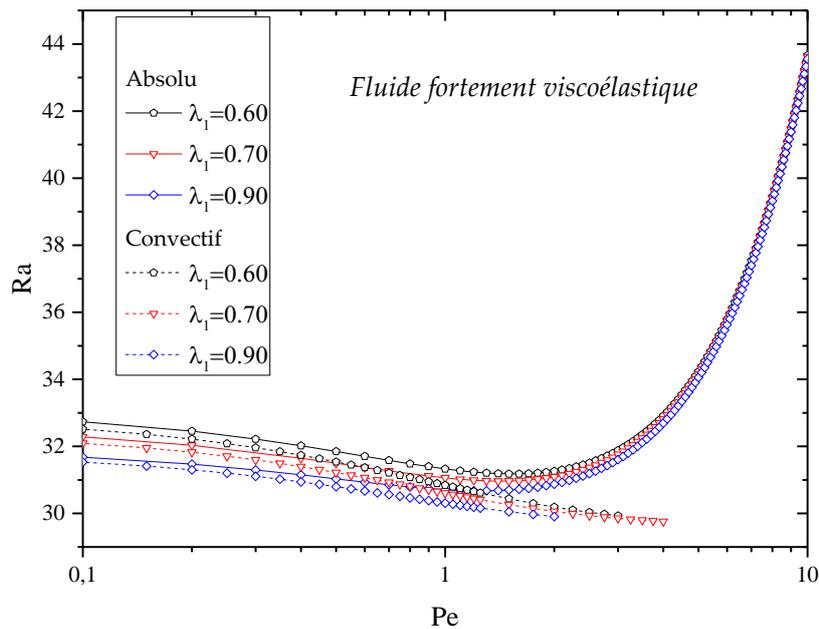


Figure 2-29 Comparaison des instabilités convectives et absolues avec les courbes de Rayleigh critique en fonction de Péclet pour des paramètres de $\Gamma=0.75$ et $\lambda_1=0.60, 0.70$ et 0.90 (fluides fortement viscoélastiques)

2.7 Conclusions

Une étude de stabilité linéaire a été effectuée pour la convection mixte d'un fluide viscoélastique saturant un milieu poreux et soumis à la fois à un gradient vertical de température et à un débit filtrant non nul. Comme le massif poreux est ouvert, on distingue deux types d'instabilités qui diffèrent par leur comportement : les instabilités convectives qui, à des temps grands finissent par quitter le milieu, et les instabilités absolues qui sont capables de remonter vers l'entrée du massif poreux, contrecarrant ainsi l'écoulement principal imposé. Deux approches temporelle et spatio-temporelle de stabilité ont été utilisées afin d'obtenir respectivement les seuils d'apparition des instabilités convectives et des instabilités absolues. Ces deux approches concluent d'une façon rigoureuse, que le mode le plus instable correspond à des ondes progressives qui se propagent dans le sens de l'écoulement imposé. Les caractéristiques linéaires de ce mode le plus instable ont été déterminées pour les deux types d'instabilités en fonction de l'intensité de l'écoulement et des paramètres viscoélastiques. Ces caractéristiques ont été identifiées aussi bien en régime fortement viscoélastique (solutions fortement concentrées en polymères) qu'en régime

faiblement viscoélastiques (solutions très diluées en polymères). Nous avons montré que le débit filtrant a un effet déstabilisant sur l'instabilité convective dans les deux zones faiblement et fortement viscoélastiques. A contrario, pour le régime absolument instable, le débit filtrant a un effet stabilisant dans la zone faiblement viscoélastique.

Dans la zone fortement viscoélastique les effets déstabilisants et stabilisants sont observés suivant l'intensité de l'écoulement imposé. Pour les faibles débits, nous observons un effet déstabilisant qui devient stabilisant pour des nombres de Péclet plus élevés.

En conformité avec les études antérieures concernées par la convection naturelle avec un débit nul, nous avons confirmé l'effet déstabilisant du temps de relaxation et l'effet stabilisant du rapport entre la viscosité du solvant et la viscosité totale en présence d'un écoulement forcé à débit non nul, aussi bien dans la zone faiblement viscoélastique ou dans la zone fortement viscoélastique. Nous avons obtenu ce même résultat pour les deux types d'instabilités convective et absolue. A la fin du chapitre, nous avons comparé les diagrammes de stabilité convective et absolue pour les deux zones faiblement et fortement viscoélastique.

Chapitre 3

3 Instabilités au-delà du seuil absolu

Après avoir trouvé les paramètres au seuil d'instabilités convective et absolue, nous allons vérifier analytiquement l'état du système au-dessus du seuil absolu.

3.1 La formulation mathématique au-delà du seuil absolu

Dans le chapitre 2, nous avons trouvé le seuil d'instabilité absolue corrélé à la condition d'instabilité marginale ($\omega_i = 0$) et donc nous avons $\omega = \omega_r$. Cependant, nous savons que, dans le cas général, pour l'instabilité absolue on a :

$$\omega = \omega_r + i\omega_i \text{ avec } \omega_i > 0$$

Rappelons les deux conditions nécessaires à l'obtention d'une instabilité absolue :

$$\begin{cases} D(\omega, k, \lambda_1, \Gamma, Ra, Pe) = 0 \\ \frac{\partial \omega(k)}{\partial k} = 0. \end{cases} \quad (3-1)$$

Donc en injectant $\omega = \omega_r + i\omega_i$ et $k = k_r + ik_i$ dans la partie réelle et imaginaire de l'équation de dispersion nous trouvons deux équations pour satisfaire à la première condition (détaille dans l'Annexe 2).

En appliquant la deuxième condition on a :

$$-4k^3 - 3ik^2Pe - 4k\pi^2 - iPe\pi^2 + 2kRa + 2ik\omega - 2ikRa\omega\lambda_1 + 4ik^3\omega\Gamma\lambda_1 - 3k^2Pe\omega\Gamma\lambda_1 + 4ik\pi^2\omega\Gamma\lambda_1 - Pe\pi^2\omega\Gamma\lambda_1 + 2k\omega^2\Gamma\lambda_1 = 0 \quad (3-2)$$

Cette condition doit s'appliquer à toutes les deux parties (réelle et imaginaire) de l'équation (3-2) et par conséquent nous trouvons deux autres équations (détaille dans l'Annexe 2).

Nous pouvons choisir des valeurs propre pour Ra, Pe, Γ et λ_1 et résoudre le système à quatre équations quatre inconnues $k_r, k_i, \omega_r, \omega_i$.

3.2 Loin du seuil absolu – Cas général (ω_i non nul) – Newtonien et viscoélastique

Précédemment, nous avons calculé les seuils d'instabilité absolue (k_r^A, k_i^A, ω_r^A et Ra^A) en imposant $\omega_i = 0$ pour des Pe, Γ et λ_1 fixés. Or si nous voulons découvrir ce qui se passe loin du seuil, nous devons laisser la fréquence et le nombre d'onde en nombres complexes. Dans ce cas, nous aurons aussi quatre inconnus (k_r^0, k_i^0, ω_r^0 et ω_i^0). Les calculs pour les cas loin du seuil absolu ont été effectués pour un fluide Newtonien, un fluide faiblement viscoélastique et un autre fluide dans la zone fortement viscoélastique.

3.2.1 Les résultats loin du seuil pour un fluide Newtonien

Sur les figures 3-1 à 3-3 on a présenté le seuil d'instabilité absolu pour un fluide Newtonien. Les valeurs au seuil pour $Pe=0$ ($Ra^A = 4\pi^2, k_r^A = \pi$ et $\omega_r^A = 0$) sont les mêmes pour le cas de la convection naturelle car il n'existe pas de débit forcé. Sur la figure 3-1 nous voyons l'influence stabilisant de Pe sur le système. Par la suite, nous avons fait des calculs au-dessus de ce seuil d'instabilité avec des nombres de Ra supérieurs à Ra^A et les résultats sont présentés sur les figures 3-4 à 3-7. Sur la figure 3-4 on constate que l'effet de la différence de température entre les plaques planes (Ra) sur la fréquence d'oscillation augmente quand on augmente le débit filtrant (Pe). D'un côté, la figure 3-5 montre que plus Ra augmente le nombre d'onde augmente aussi. De l'autre côté, plus l'écoulement est important moins sera le nombre d'onde. On voit

donc un effet concurrentiel entre Ra et Pe sur le nombre d'onde réel. Sur la figure 3-6, on a tracé la fréquence en fonction du nombre d'onde pour différents Ra au-dessus du seuil absolu. La pente de cette courbe nous donne la vitesse de phase du paquet d'onde. La figure 3-7 montre que la fréquence réelle augmente avec Ra et Pe. Nous pouvons constater que l'influence de Ra sur le nombre d'onde est plus importante que Pe et l'inverse est vrai pour la fréquence, c'est-à-dire que le nombre de Pe a plus d'influence que le nombre de Ra sur la fréquence.

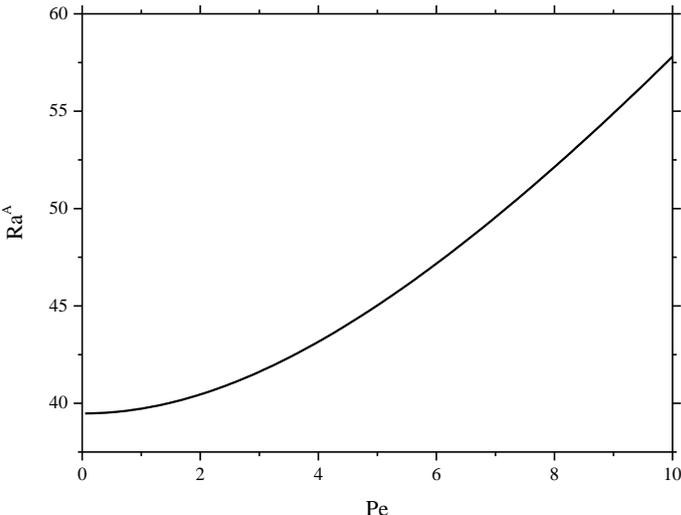


Figure 3-1 Ra^A en fonction de Pe pour un fluide Newtonien

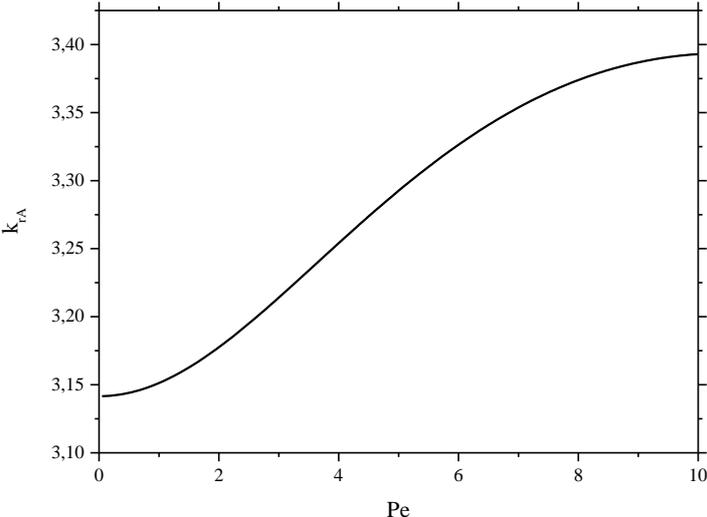


Figure 3-2 k_{rA} en fonction de Pe pour un fluide Newtonien

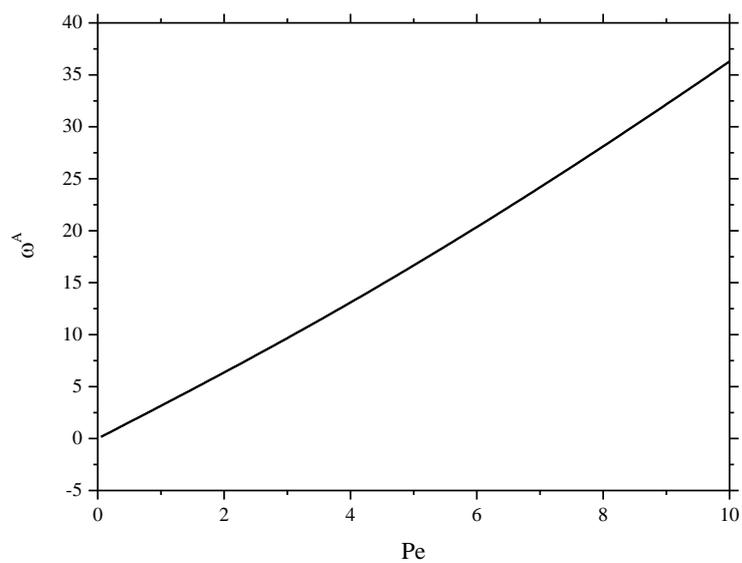


Figure 3-3 ωr^A en fonction de Pe pour un fluide Newtonien

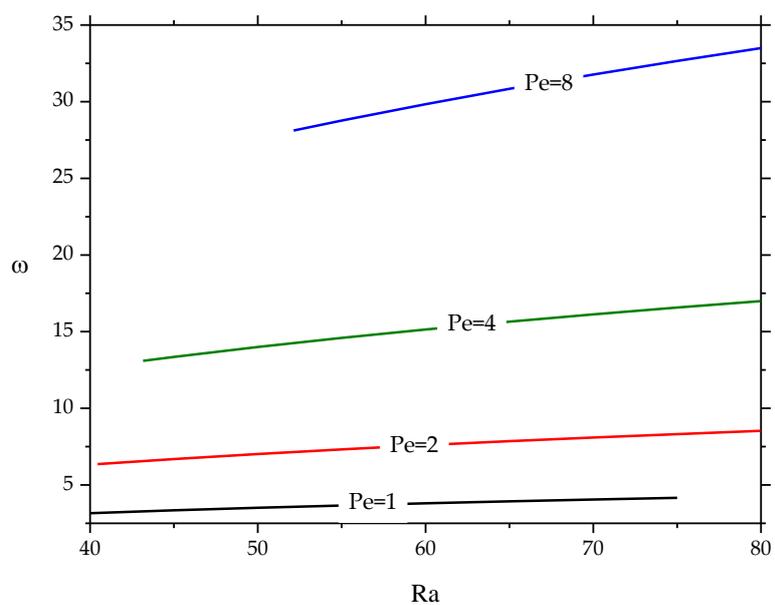


Figure 3-4 La fréquence réelle en fonction de Pe loin du seuil pour un fluide Newtonien pour des Ra différents

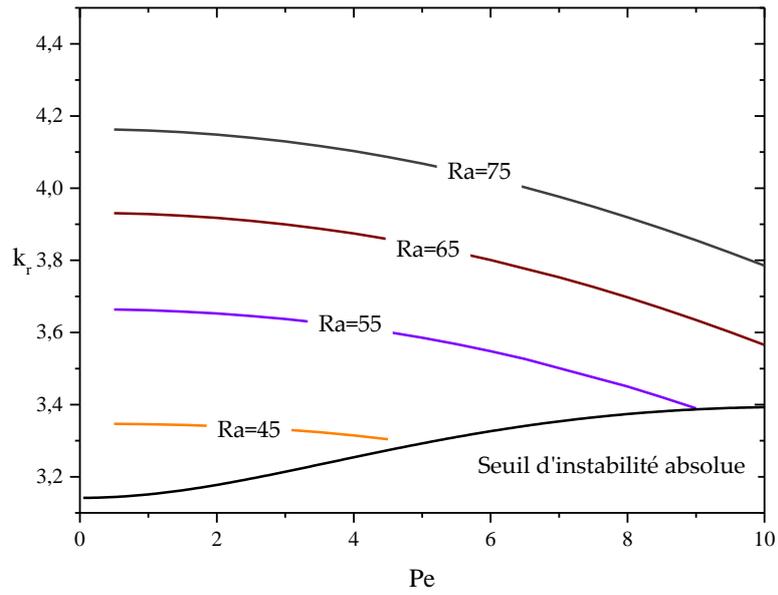


Figure 3-5 Le nombre d'onde réel en fonction de Pe loin du seuil pour un fluide Newtonien pour des Ra différents

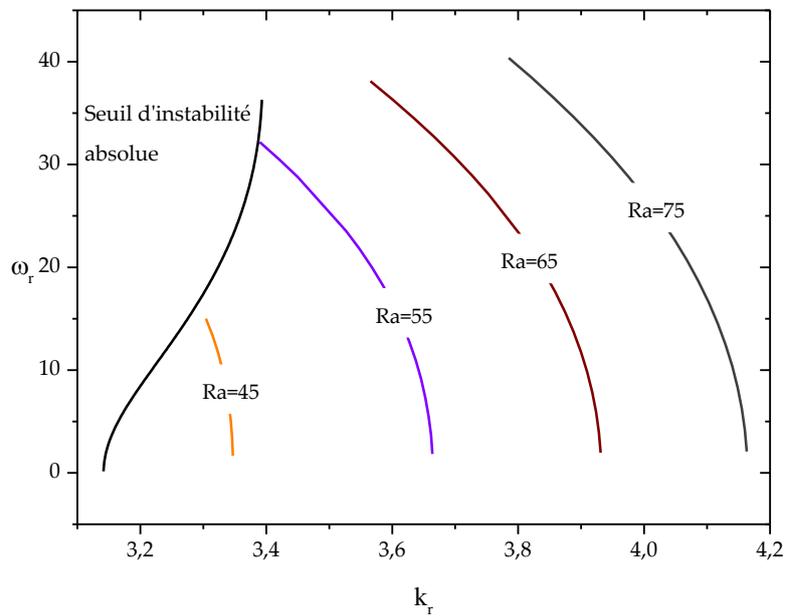


Figure 3-6 La fréquence réelle en fonction du nombre d'onde loin du seuil pour un fluide Newtonien pour des Ra différents

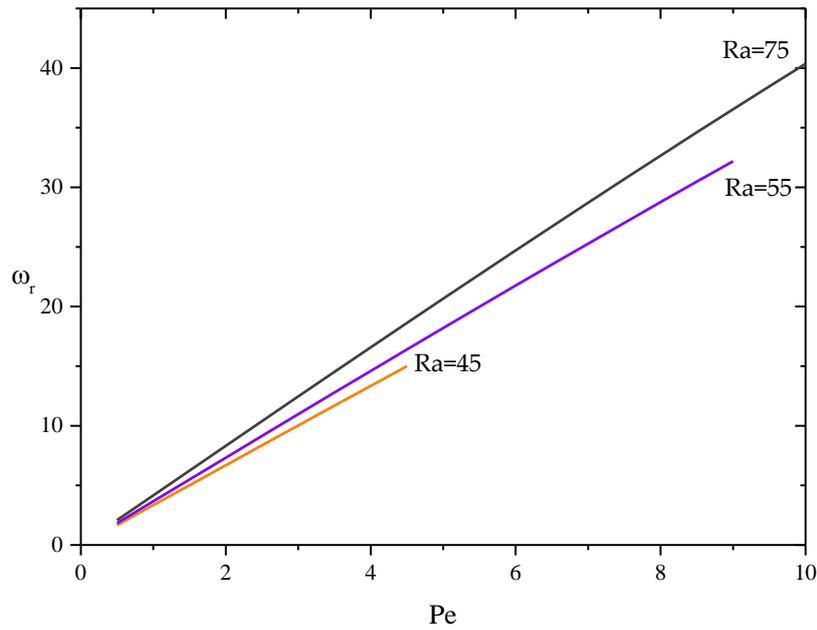


Figure 3-7 La fréquence réelle en fonction de Pe loin du seuil à des Ra différents pour un fluide Newtonien

3.2.2 Fluide faiblement viscoélastique

Nous avons choisi le cas d'un fluide viscoélastique avec $\lambda_1=0.03$ et $\Gamma=0.75$ et nous avons fait les calculs au-dessus du seuil absolu. Les résultats loin du seuil absolu sont présentés sur les figures 3-8 à 3-11. Sur la figure 3-8, tout comme pour le cas Newtonien, nous constatons que la fréquence augmente plus avec Ra quand le débit augmente. La figure 3-9 montre comment Ra et Pe influence le nombre d'onde loin du seuil absolu. Sur la figure 3-10 on a tracé la fréquence réelle en fonction du nombre d'onde réelle et la pente de cette courbe nous donne la vitesse de phase du paqué d'onde. La figure 3-11 nous montre que la fréquence réelle augmente avec Ra et Pe .

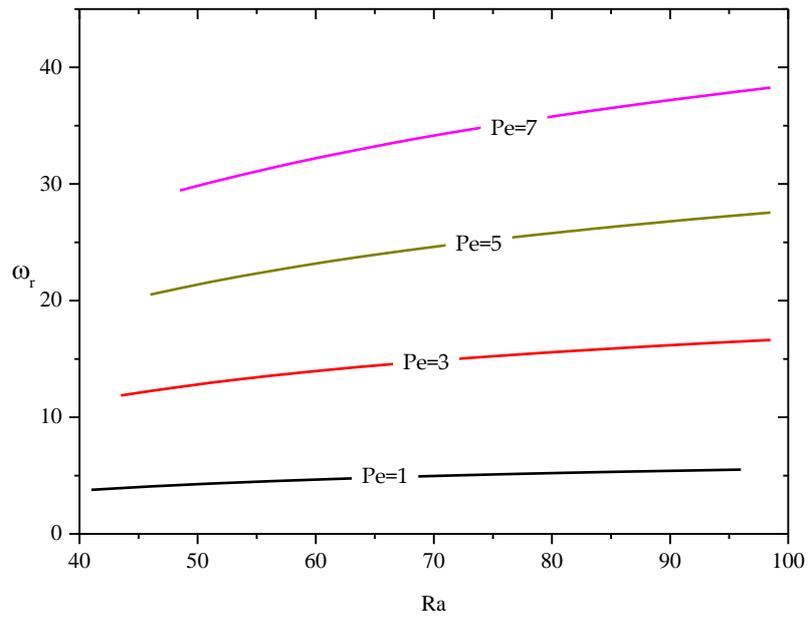


Figure 3-8 La fréquence réelle en fonction de Pe loin du seuil pour un fluide faiblement viscoélastique ($\lambda_1=0.03$ et $\Gamma=0.75$) pour des Ra différents

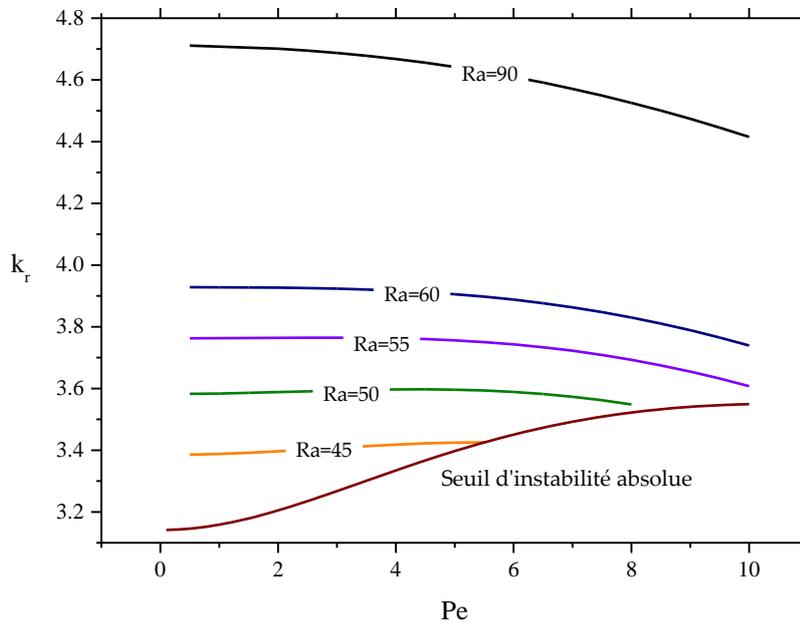


Figure 3-9 Le nombre d'onde réel en fonction de Pe loin du seuil pour un fluide faiblement viscoélastique ($\lambda_1=0.03$ et $\Gamma=0.75$) à des Ra différents

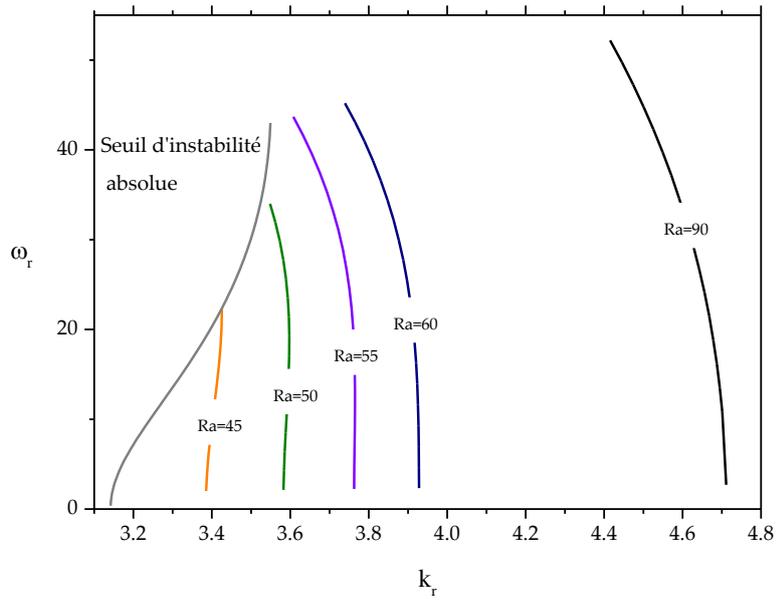


Figure 3-10 La fréquence réelle en fonction du nombre d'onde loin du seuil absolu pour un fluide viscoélastique ($\lambda_1=0.03$ et $\Gamma=0.75$) à des Ra différents

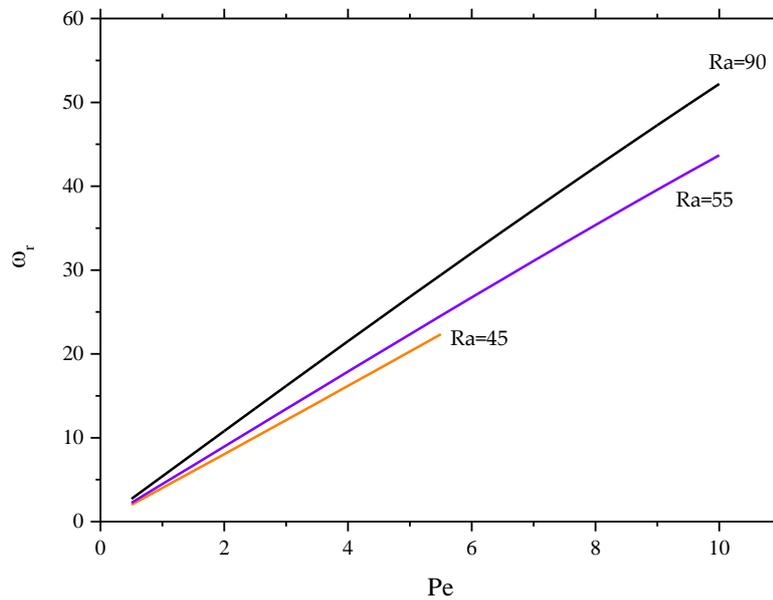


Figure 3-3-11 La fréquence réelle en fonction de Pe loin du seuil absolu pour un fluide viscoélastique ($\lambda_1=0.03$ et $\Gamma=0.75$) à des Ra différents

3.3 Fluide fortement viscoélastique

Les mêmes calculs sont effectués pour un fluide viscoélastique dans la zone fortement viscoélastique ($\lambda_1=0.60$ et $\Gamma=0.75$) et les résultats sont présentés sur les figures 3-12 à 3-14.

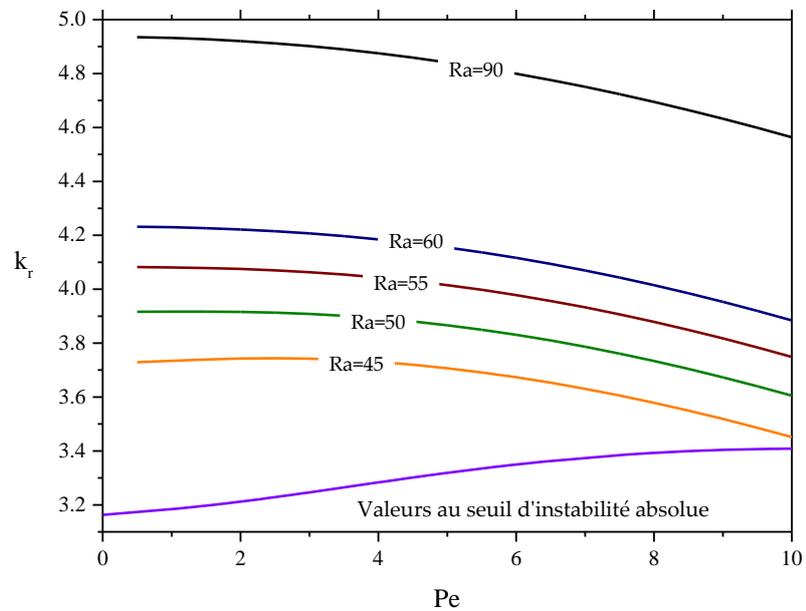


Figure 3-12 Le nombre d'onde réel en fonction de Pe loin du seuil pour un fluide viscoélastique ($\lambda_1=0.60$ et $\Gamma=0.75$) à des Ra différents

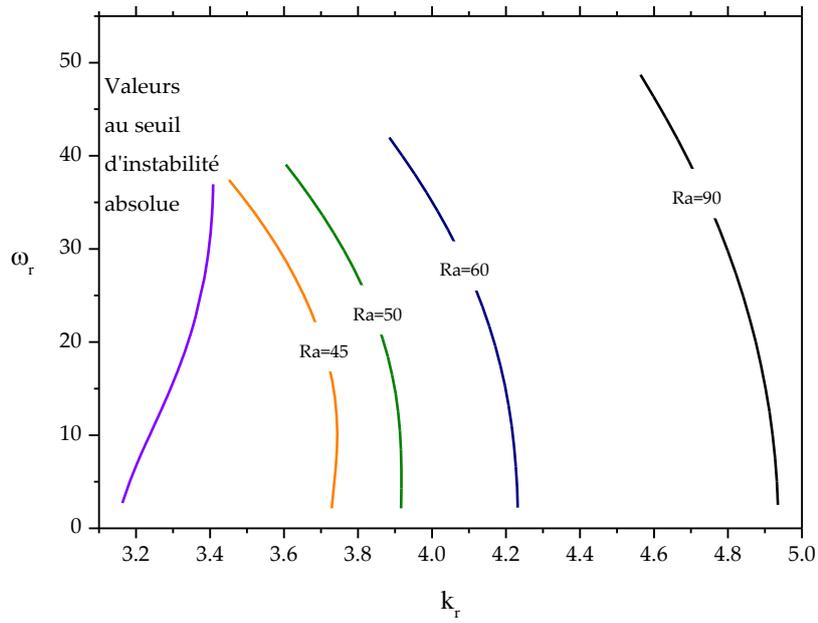


Figure 3-13 La fréquence réelle en fonction du nombre d'onde loin du seuil absolu pour un fluide viscoélastique ($\lambda_1=0.60$ et $\Gamma=0.75$) à des Ra différents

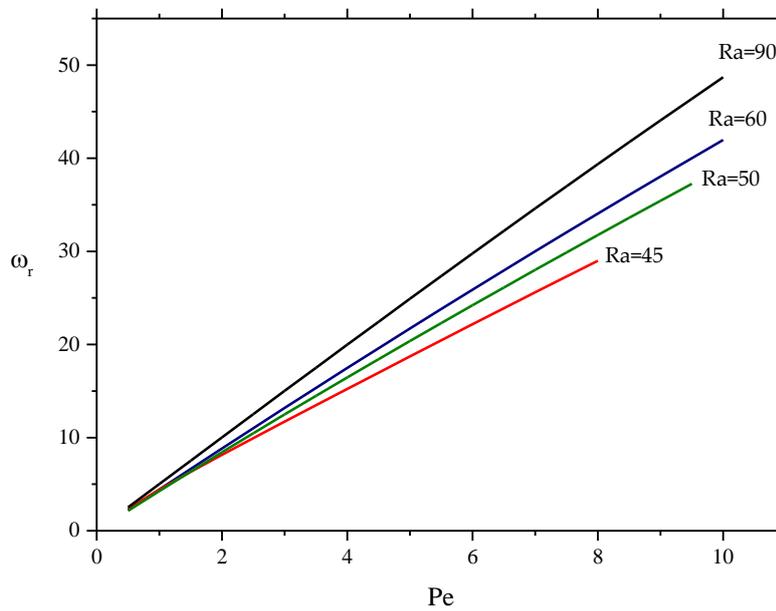


Figure 3-3-14 La fréquence réelle en fonction de Pe loin du seuil absolu pour un fluide viscoélastique ($\lambda_1=0.60$ et $\Gamma=0.75$) à des Ra différents

3.4 Conclusions

Ce chapitre a été consacré à l'étude analytique du comportement de système au-delà du seuil d'instabilité absolue. L'effet de Ra et Pe ont été étudiés pour les trois cas de fluide Newtonien, faiblement viscoélastique et fortement viscoélastique. Pour les trois cas étudiés, nous avons constaté que le nombre d'onde et la fréquence d'oscillation des structures absolument instables au-dessus du seuil augmente avec Ra . En revanche, le nombre d'onde diminue légèrement avec le débit filtrant pour les Pe plus élevés tandis que la fréquence augmente avec le débit. Par la suite nous allons mener une étude numérique et nous allons comparer ces résultats avec les résultats analytiques.

Chapitre 4

4 Etude numérique du problème

4.1 Le modèle mathématique pour l'étude numérique

On considère une géométrie cartésienne remplie par un liquide viscoélastique de Boussinesq saturant un milieu poreux. Les parois horizontales sont supposées parfaitement conductrice de la chaleur, et chauffées par le bas et refroidies par le haut avec des températures constantes. Les parois verticales sont supposées adiabatiques et imperméables.

Plusieurs approches existent pour modéliser le comportement rhéologique des fluides viscoélastiques. Le modèle Oldroyd-B est l'un des plus fréquents dans la littérature. Le tenseur de contrainte viscoélastique τ dans ce modèle obéit au système suivant :

$$\begin{cases} (1 + \lambda_1^d D_t)\tau = \mu(1 + \lambda_2^d D_t)\gamma & (4 - 1) \\ D_t\tau = \partial_t\tau + (\vec{U}^d \cdot \vec{\nabla})\tau - (\vec{\nabla}\vec{U}^d)^T \tau - \tau(\vec{\nabla}\vec{U}^d) & (4 - 2) \end{cases}$$

où τ et γ sont les tenseur de cisaillement et de déformation, \vec{U}^d est la vitesse du fluide et D_t est la dérivée l'Oldroyd. Par analogie avec le modèle Oldroyd-B. Alishayev et Mirzadjanzade ont présenté une loi phénoménologique de Darcy modifiée.

$$(1 + \lambda_1^d \partial_t)\vec{V}_f^d = -K\mu^{-1}(1 + \lambda_2^d \partial_t)\{\vec{\nabla}P^d + \rho\vec{g} \cdot \vec{e}_z\} \quad (4 - 3)$$

\vec{V}_f^d est la vitesse de filtration définie par l'équation de Dupuit : $\vec{V}_f^d = \varepsilon \vec{U}^d$ avec ε est la porosité, μ est la viscosité dynamique, K est la perméabilité, ρ est la densité, et \vec{g} est l'accélération de pesanteur, alors que ∂_t est la dérivée partielle temporelle. Les équations de la masse, de la quantité de mouvement et de la chaleur sont normalisées par rapport à la Hauteur, la diffusivité thermique et l'écart de température. En utilisant le rotationnel pour supprimer la pression, et introduisant la fonction de courant $\psi = \int u dz = - \int w dx$ pour exprimer l'incompressibilité. avec $Ra = g\beta\Delta TKH/(v\kappa)$ le nombre de Darcy-Rayleigh, et \mathcal{H} la fonction harmonique ψ . Le système final s'écrit :

$$\begin{cases} \partial_t T = (\partial_x^2 + \partial_z^2 - u\partial_x - w\partial_z)T & (4-4) \\ (1 + \lambda_2 \partial_t)\mathcal{H} = Ra(1 + \lambda_1 \partial_t)\partial_x T & (4-5) \\ (\partial_x^2 + \partial_z^2)\psi = \mathcal{H} & (4-6) \end{cases}$$

Avec les conditions aux limites suivantes :

$$\vec{V} \cdot \vec{e}_z = 0 \text{ en } z = 0, 1.$$

Il existe un écoulement horizontal non nul représenté comme suit :

$$\vec{V} \cdot \vec{e}_x = Pe \text{ en } z = 0, 1 \text{ et à l'entrée.}$$

A l'entrée on a :

$$\psi(x = 0, z) = Pe \cdot z$$

Pour la température :

$$T(x, y, z = 0) = 1,$$

$$T(x, y, z = 1) = 0$$

$$\partial_x T(x = 0, z) = \partial_x T(x = \text{sortie}, z) = 0$$

4.1.1 Résolution numérique

Le système (4-4) – (4-6) soumis aux conditions aux limites spécifiques à chaque cas d'étude est résolu numériquement en utilisant une discrétisation par différences finies avec un maillage régulier.

L'équation (4-4) est résolue par balayage en directions alternées ADI. Pour résoudre l'équation (4-5); la dérivée spatiale de la température est approximée par un schéma centré standard du second ordre, et sa dérivée temporelle est obtenue au moyen de (4-4). En utilisant les champs de température T^n et T^{n+1} déjà obtenus, l'équation (4-5) devient une équation différentielle temporelle ordinaire. Nous la résolvons avec une

méthode Runge-Kutta de second ordre. Pour trouver la fonction de courant ; nous discrétisons l'équation de Poisson (4-6) par un schéma standard du second ordre centré et la résolvons par la méthode de sur-relaxation successive (SOR). Nous utilisons l'accélération de Tchebychev afin de réduire le nombre total requis d'itérations. Pour clarifier, un résumé des principales étapes est donné ci-dessous :

1. Résoudre (4 – 4) avec les valeurs mises à jour de ψ (i.e. u, w) et T ou avec les valeurs initiales $\psi^0 = 0; T^0 = 1 - z \forall (x, z)$.
2. Approximer $\partial_x T$ par un schéma standard centré sur le second ordre
3. Approximer $\partial_t(\partial_x T) = \partial_x(\partial_t T)$ en utilisant un schéma standard centré du second ordre; $\partial_t T$ est obtenu à partir de (4 – 4).
4. Calculer $Ra(1 + \lambda_2 \partial_t) \partial_x T$ à partir de 2 et 3
5. Résoudre (4-5) qui deviennent un ODE, en utilisant une méthode de second ordre Runge-Kutta
6. Résoudre l'équation de Poisson (4-6) avec la méthode SOR, en utilisant l'accélération de Tchebychev
7. Vérifier le critère de convergence (norme quadratique de la somme des résidus $< 10^{-12}$)
8. Si le critère 7 n'est pas satisfait, retournez à l'étape 1
9. Si le critère 7 est satisfait, incrémentez l'heure et revenez à l'étape 1

4.1.1 Validation du code numérique

Pour valider le code numérique nous utilisons, comme base, les travaux antérieurs et les résultats analytiques. Pour le cas Newtonien nous avons comparé nos résultats avec les travaux de Dufour et al. (1998), représentés sur le tableau suivant. Le code numérique prévoit avec une bonne concordance la fréquence d'oscillation par rapport à la théorie et les résultats de Dufour et al (tableau 4-1).

Tableau 4-1 Comparaison et validation des fréquences numériques avec les résultats analytiques et ceux du Dufour et al. pour un fluide Newtonien

Ra	$Pe=0,75$			$Pe=1,5$		
	ω_{th}	ω_{num}	ω_{Dufour}	ω_{th}	ω_{num}	ω_{Dufour}
50,00	2,63	2,70	2,5	5,27	5,03	5,138
55,00	2,75	2,80	2,639	5,49	5,23	5,275
60,00	2,85	2,83	2,731	5,70	5,32	5,458
80,00	3,20	2,86	2,962	6,40	5,96	6,101
140,00	3,92	3,77	4,12	7,83	8,16	8,532

Ra	$Pe=2$			$Pe=2,5$		
	ω_{th}	ω_{num}	ω_{Dufour}	ω_{th}	ω_{num}	ω_{Dufour}

50,00	7,02	6,65	6,835	8,77	8,51	8,578
55,00	7,32	6,92	7,064	9,15	8,77	8,853
60,00	7,60	7,24	7,293	9,49	8,79	9,174
80,00	8,53	7,83	8,165	10,65	10,05	10,272
140,00	10,44	10,98	11,454	13,04	13,82	14,318

Nous avons aussi comparé nos résultats avec ceux de Delache (figures 4-1 et 4-2) concernant le Nu moyen variant en fonction de Ra pour deux nombres de Pe (Pe=1 et Pe=8) et les erreurs entre ces deux résultats sont présentées sur les tableaux 4-2 et 4-3. Les deux études montrent la croissance de Nu avec Ra et l'erreur entre les deux résultats est acceptable.

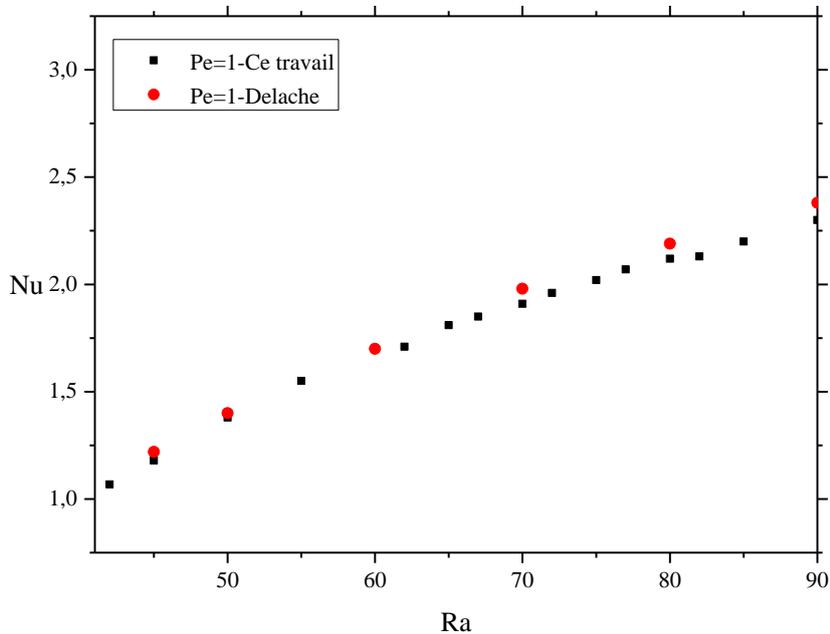


Figure 4-1 Nombre de Nusselt moyen en fonction de Ra obtenu par les résultats numériques pour Pe=1 pour un fluide Newtonien (comparaison avec les résultats de Delache)

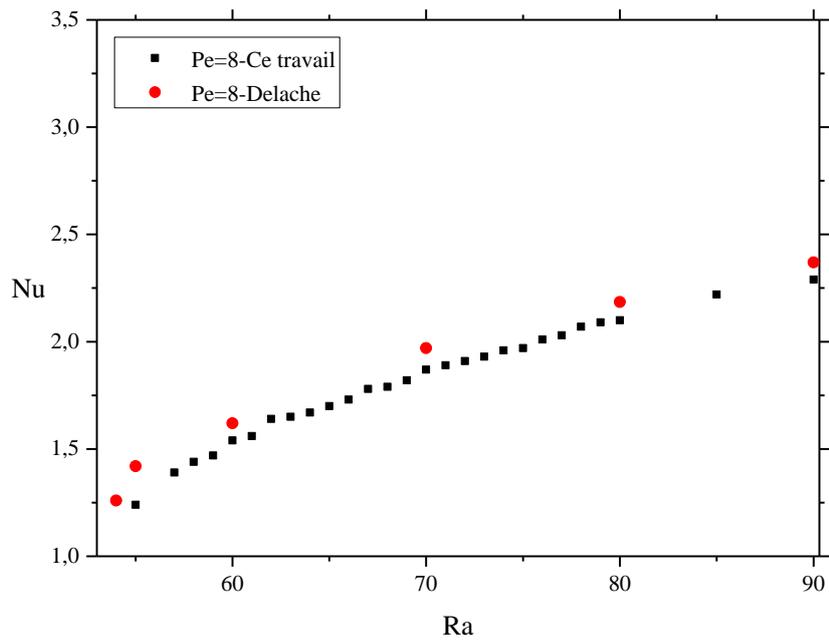


Figure 4-2 Nombre de Nusselt moyen en fonction de Ra obtenu par les résultats numériques pour $Pe=8$ pour un fluide Newtonien (comparaison avec les résultats de Delache)

Tableau 4-2 Erreur de Nu par rapport aux résultats de Delache pour $Pe=1$

<i>Ra</i>	<i>Erreur de Nu par rapport aux résultats de Delache</i>
45	0.032
50	0.014
60	0.007
70	0.010
80	0.031
90	0.08

Tableau 4-3 Erreur de Nu par rapport aux résultats de Delache pour $Pe=8$

<i>Ra</i>	<i>Erreur de Nu par rapport aux résultats de Delache</i>
55	0.126
60	0.049
70	0.050
80	0.038
90	0.033

4.2 Trouver le seuil d'instabilité absolue par la simulation numérique

Afin de trouver le seuil d'instabilité absolue par la simulation numérique il faut d'abord trouver les critères convenables pour choisir le point où la transition se fait entre le régime convectif et le régime absolu. Donc, nous traitons trois types de comportement pour identifier ces critères. D'abord nous vérifions un cas situé à proximité du seuil absolu analytique mais toujours dans la zone convective. Ensuite nous traitons un cas situé à proximité du seuil absolu analytique mais au-dessus de ce seuil. À la fin nous traitons un cas situé bien au-delà du seuil pour avoir vraiment de l'instabilité absolue.

4.2.1 Avant le seuil

La courbe qui nous aide à trouver le seuil c'est la courbe du nombre de Nusselt moyen en fonction du temps. Le cas choisi comme exemple est le cas d'un fluide viscoélastique avec des propriétés viscoélastiques de $\lambda_1=0.60$ et $\Gamma=0.75$ sous un écoulement horizontal de $Pe=1$ et un gradient de température caractérisé par $Ra=31.25$, sachant que le Rayleigh absolue pour cet écoulement est d'une valeur de 31.33. Donc en observant la variation de Nu moyen au cours du temps sur la figure 4-3, on peut constater le caractère convectif avec les oscillations de nombre de Nusselt qui s'atténuent au fur et à mesure jusqu'à ce qu'elles disparaissent. On peut aussi observer les profils de fonction de courant et de température où on ne voit pas des perturbations. Par conséquent, nous sommes toujours dans le régime convectif.

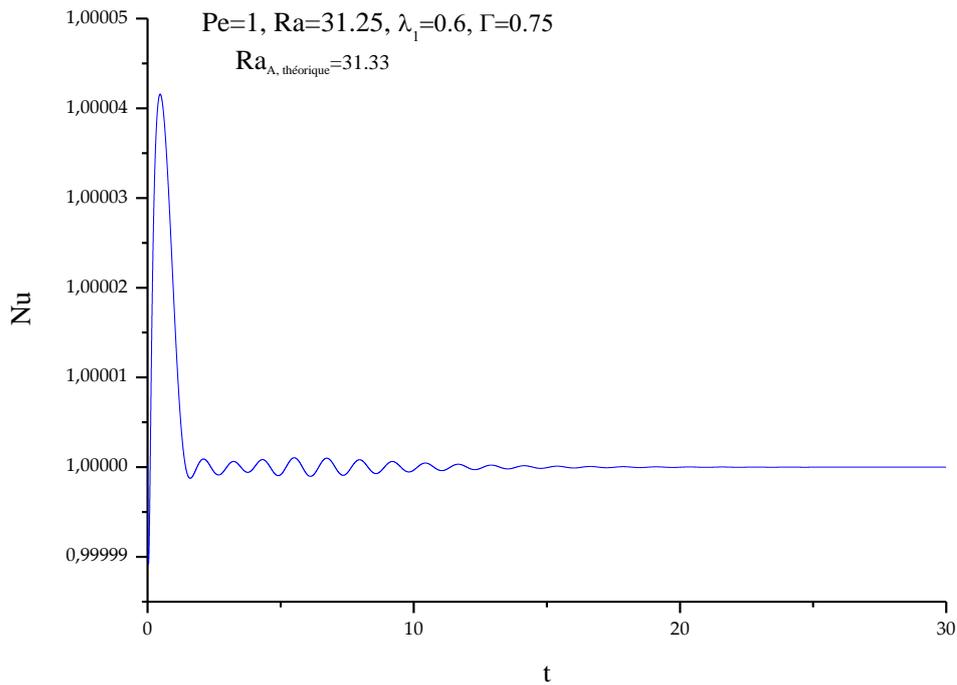


Figure 4-3 La variation de Nu moyen en fonction du temps pour Ra=31.25



Figure 4-4 Profil de fonction de courant pour Ra= 31.25

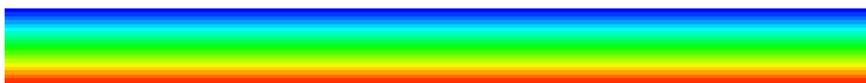


Figure 4-5 Profil de température pour Ra= 31.25

4.2.2 Le seuil

Plus on augmente le Rayleigh, plus on voit des structures qui s'installent dans le système car comme on peut observer dans la figure 4-6 le Nu moyen n'est pas atténué même pour les temps très élevés et il existe toujours des oscillations sinusoïdales quand on fait un zoom pour les temps très grands (zoom dans les intervalles de 25 à 35 secondes et de 35 à 50 secondes). Le phénomène qu'on observe semble être l'instabilité absolue mais la question qui se pose est de savoir si l'on peut se baser sur ce phénomène pour dire qu'on est au seuil d'instabilité, alors qu'on n'enregistre pas

de perturbation dans les profils de fonction de courant et de température. Il faut avoir à l'esprit que ces oscillations sont d'un ordre de grandeur très faible (10^{-7}).

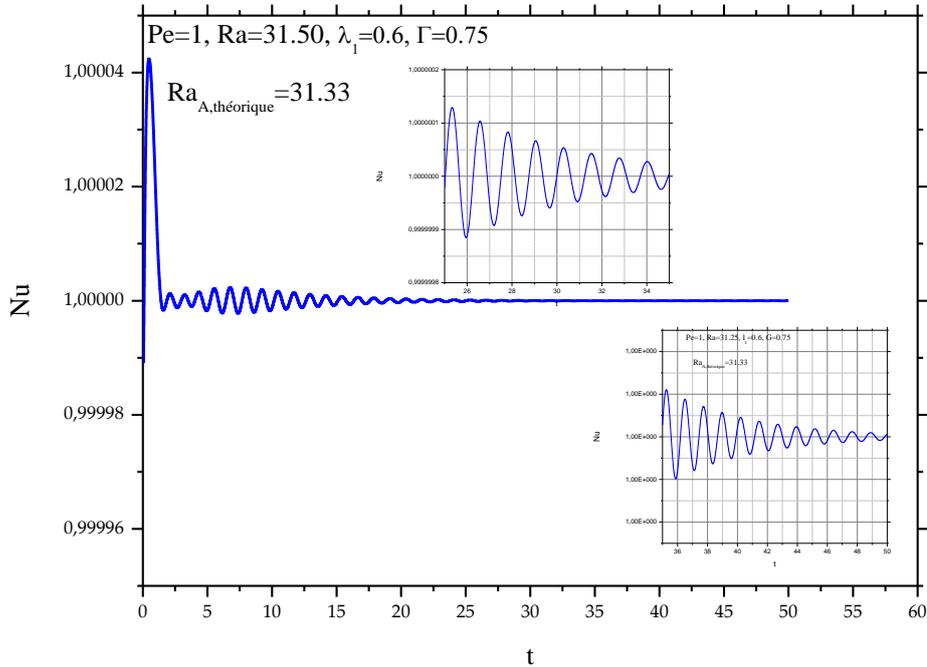


Figure 4-6 La variation de Nu moyen en fonction du temps pour $Ra=31.50$



Figure 4-7 Profil de fonction de courant pour $Ra=31.50$

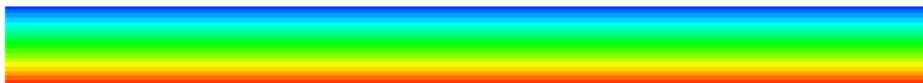


Figure 4-8 Profil de température pour $Ra=31.50$

4.2.3 Après le seuil

On augmente encore le Rayleigh pour dépasser le seuil absolu et, cette fois, on voit que Nu moyen va osciller autour d'un Nu fixe à des temps plus élevés et donc nous avons certainement de l'instabilité absolue (figure 4-9). Les profils de fonction de courant et de température confirment aussi l'apparition des instabilités absolues (figures 4-10 et 4-11).

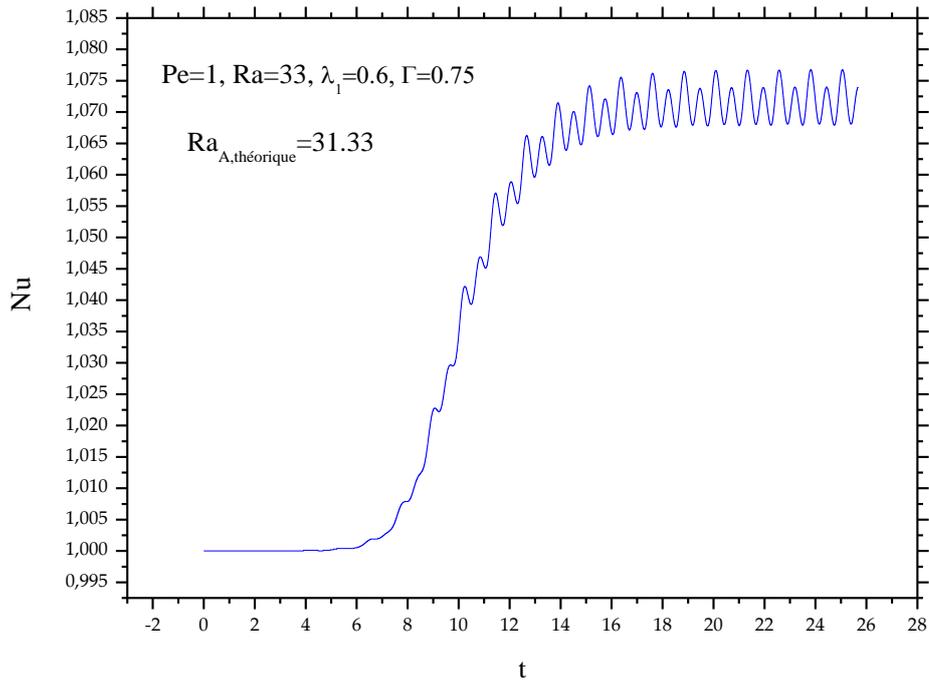


Figure 4-9 La variation de Nu moyen en fonction du temps pour Ra=33

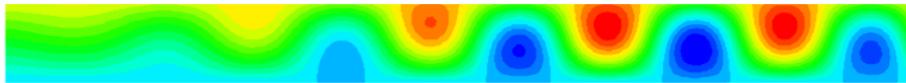


Figure 4-10 Profil de fonction de courant pour Ra= 33

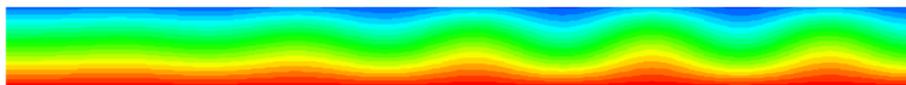


Figure 4-11 Profil de température pour Ra= 33

Pour caractériser le transfert de chaleur convectif, le nombre de Nusselt est défini comme le rapport du flux de chaleur total au flux de chaleur de l'état de conduction pure qui traverse un élément de surface. Dans notre étude le transfert de chaleur se fait verticalement. Le nombre de Nusselt est égal à l'unité quand on est à l'état de conduction et dès qu'on passe à l'état de convection sa valeur devient supérieure à 1. Nous calculons le Nu moyen le long du canal et on constate que le Nu oscille autour d'une valeur moyenne que nous utilisons par la suite. À titre d'exemple, sur la figure 4-12 on a représenté l'évolution temporelle de Nu moyen pour un cas dans le régime absolument instable. Sur les figures 4-13 et 4-14 nous avons montré les profils de la fonction de courant et de la température.

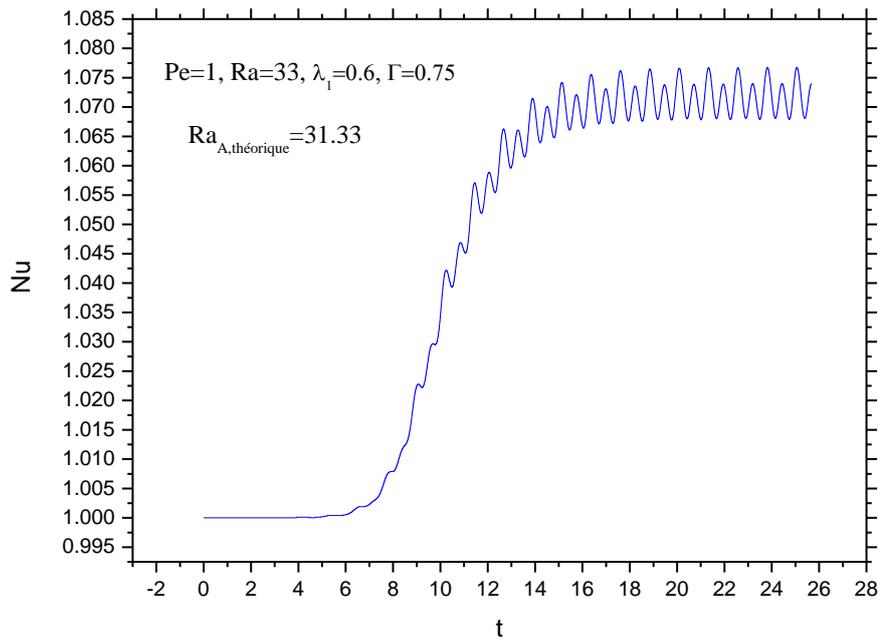


Figure 4-12 La variation de Nu moyen en fonction du temps pour Ra=33

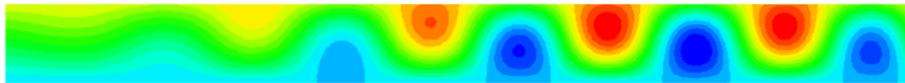


Figure 4-13 Profil de fonction de courant pour Ra= 33

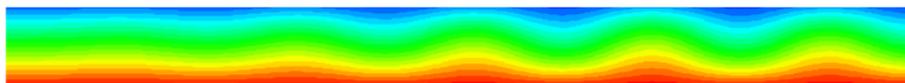


Figure 4-14 Profil de température pour Ra= 33

4.3 Suivi temporel de température

Pour un fluide situé dans la zone fortement viscoélastique ($\Gamma = 0.75$ et $\lambda_1 = 0.6$) avec $Ra=50$ et $Pe=8$, pour un rapport de forme de 20, le profil de température est représenté sur la figure 4-15.

Les figures 4-15 à 4-19 montrent le suivi temporel de la température sur différents points entre les deux parois horizontales. Nous constatons que les oscillations de température sont conformes au gradient linéaire de température entre les plaques.

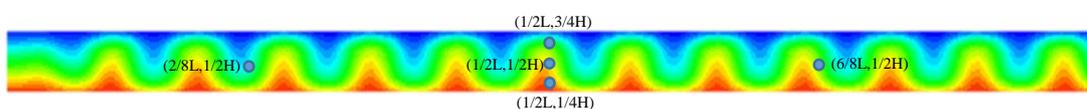


Figure 4-15 Profil de la température pour un cas situé dans la zone fortement viscoélastique ($\Gamma = 0.75$ et $\lambda_1 = 0.6$) avec $Ra = 50$ et $Pe = 8$ (rapport de forme = 20)

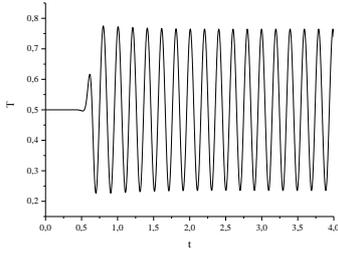


Figure 4-16 Suivi temporel au point $x = \frac{1}{2}L, z = \frac{1}{2}H$

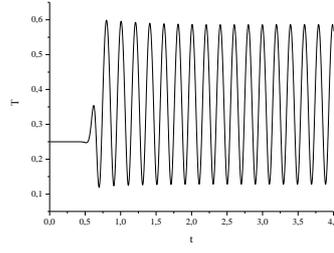


Figure 4-18 Suivi temporel au point $x = \frac{1}{2}L, z = \frac{3}{4}H$

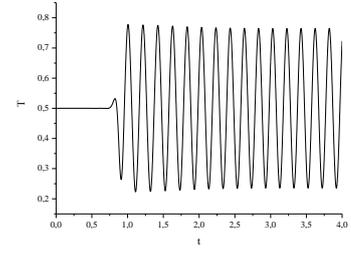


Figure 4-20 Suivi temporel au point $x = \frac{6}{8}L, z = \frac{1}{2}H$

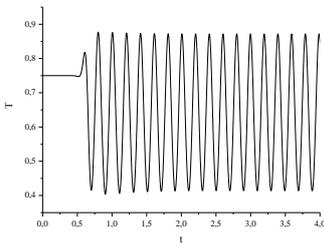


Figure 4-17 Suivi temporel au point $x = \frac{1}{2}L, z = \frac{1}{4}H$

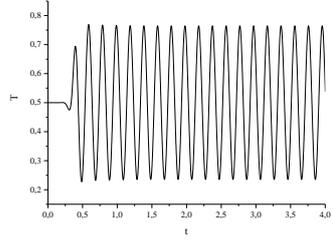


Figure 4-19 Suivi temporel au point $x = \frac{2}{8}L, z = \frac{1}{2}H$

4.4 Les résultats numériques pour les fluides Newtoniens

4.4.1 Fréquence des structures pleinement établies pour un fluide Newtonien

Par la méthode analytique, nous avons antérieurement calculé les fréquences d'oscillation qui correspondent à plusieurs Ra supérieurs au seuil d'instabilité absolue Ra_A pour chaque Pe . Pour obtenir la fréquence on réalise une transformée de Fourier rapide (*FFT*) sur le spectre temporel de la température numérique au point $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Sur la figure 4-21, nous avons tracé la fréquence réelle en fonction de Ra pour quatre Pe fixés. Les résultats sont aussi présentés dans l'annexe 2 pour permettre une comparaison point par point. Nous avons aussi comparé les fréquences obtenues analytiquement avec celles trouvées numériquement pour chacun des quatre Pe . On peut remarquer que les résultats numériques divergent au fur et à mesure qu'on s'éloigne du seuil absolu qui est le premier point sur les courbes théoriques. Cela veut dire que nos résultats sont plus fiables à proximité du seuil absolu et nous avons décidé de retracer cette figure plus près du seuil jusqu'à un Ra qui ne dépasse pas plus que de 10% du Ra_A et les résultats portés sur la figure 4-23 en témoignent. De plus sur la

figure 4-23, nous avons décidé de diminuer les Pe pour pouvoir comparer nos résultats avec ceux de F. Dufour et al. (1998) sur la figure 4-22. Les mêmes résultats sont portés sur les tableaux dans l'annexe 3. Dufour et al. [21] ont trouvé des résultats avec une tendance ascendante comme pour le cas théorique. Dans notre cas nous avons trouvé que des résultats ont une tendance ascendante aussi.

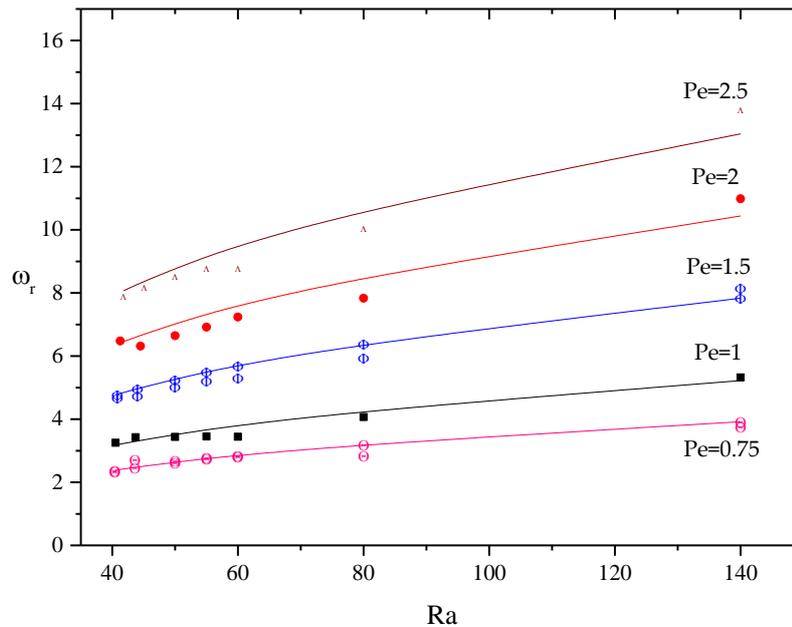


Figure 4-21 La fréquence réelle en fonction de Ra et Pe (une comparaison entre les résultats théoriques et numériques) pour un fluide Newtonien

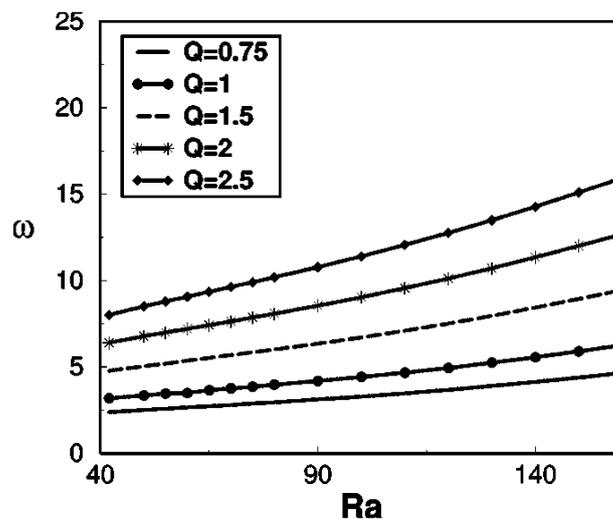


Figure 4-22 La fréquence réelle en fonction de Ra pour cinq Péclet obtenue par Dufour et al. ($Q=Pe$ dans leur travail) pour un fluide Newtonien [21]

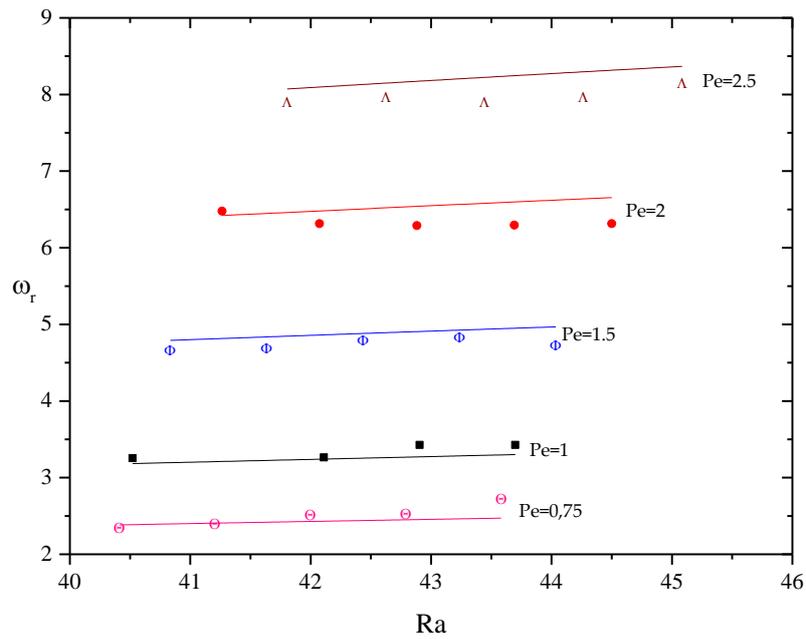


Figure 4-23 La fréquence réelle en fonction de Ra pour cinq Péclet près du seuil absolu (une comparaison entre les résultats théoriques et numériques)

Sur la figure 4-24, on peut voir l'influence de Pe sur la fréquence réelle pour un Ra fixé. Cette figure nous montre la dépendance directe de la fréquence réelle au Pe ou autrement dit au débit. Les résultats concernant cette figure sont présentés sur le tableau 4-4.

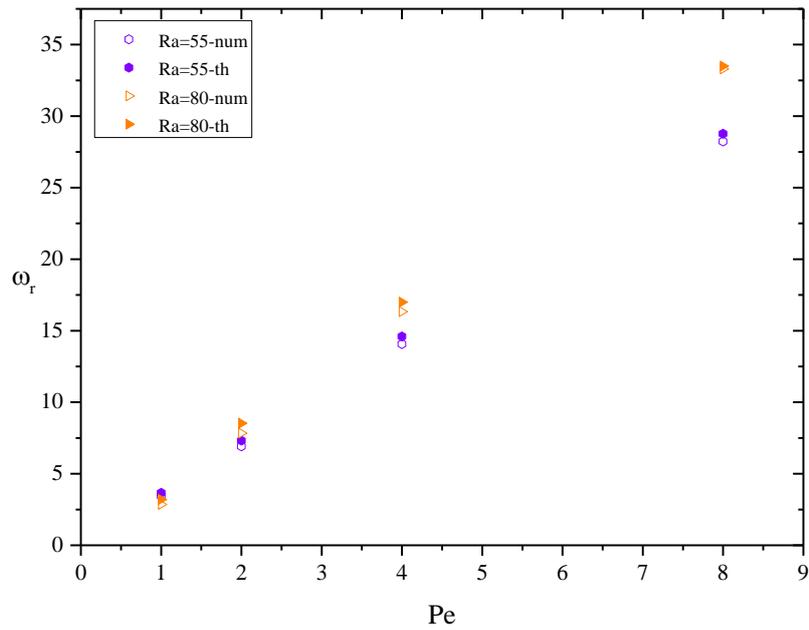


Figure 4-24 La fréquence réelle en fonction de Péclet pour différents Ra supérieurs à RaA (une comparaison entre les résultats théoriques et numériques)

Tableau 4-4 Le seuil absolu pour différents Pe et la fréquence réelle numérique et théorique pour deux Ra différents

Pe	ω _r ^A	Ra ^A	ω _{num-Ra=55}	ω _{th-Ra=55}	ω _{num-Ra=80}	ω _{th-Ra=80}
1	3.1514	39.7269	3.449367	3.66359	2.858765	3.20167
2	6.3586	40.4548	6.917583	7.32123	7.834901	8.52889
4	13.0944	43.1604	14.07392	14.5935	16.3358	16.9956
8	28.1168	52.135	28.229519	28.7657	33.2999	33.4953

Les figures 4-22, 4-23 et 4-24 montrent que pour des Pe petits les fréquences théoriques et numériques sont plus proches des uns des autres que pour des Pe plus élevés.

4.4.2 Vitesse de phase numérique pour un fluide Newtonien

Rappelons que la vitesse de phase de l'onde progressive s'écrit comme suit :

$$V_{\phi} = \frac{\omega_r}{k}$$

La pulsation numérique étant connue, il nous reste à trouver le nombre d'onde numérique pour obtenir la vitesse de phase numérique. Pour trouver le nombre d'onde, nous procédons de la même façon que pour trouver la pulsation numérique, sauf que cette fois au lieu d'utiliser une étendue de paramètre en fonction du temps, nous effectuons la transformée de Fourier rapide sur la courbe d'un paramètre (T par exemple) en fonction de l'espace. Ce faisant, nous parvenons à trouver la longueur d'onde et à partir de la longueur d'onde λ , nous trouvons le nombre d'onde k :

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Nous avons donc comparé les vitesses de phases numériques et théoriques pour différents nombres de Péclet fixes et les résultats sont représentés sur la figure 4-25 et les tableaux dans l'annexe 4. Les valeurs de paramètres au seuil absolu sont représentées sur le tableau 4-5 pour avoir un repère. D'après les résultats, il s'avère que la vitesse de phase, pour un fluide Newtonien, est égale à la valeur du nombre de Péclet. Avec une petite erreur, les résultats numériques sont en concordance avec ceux trouvés théoriquement.

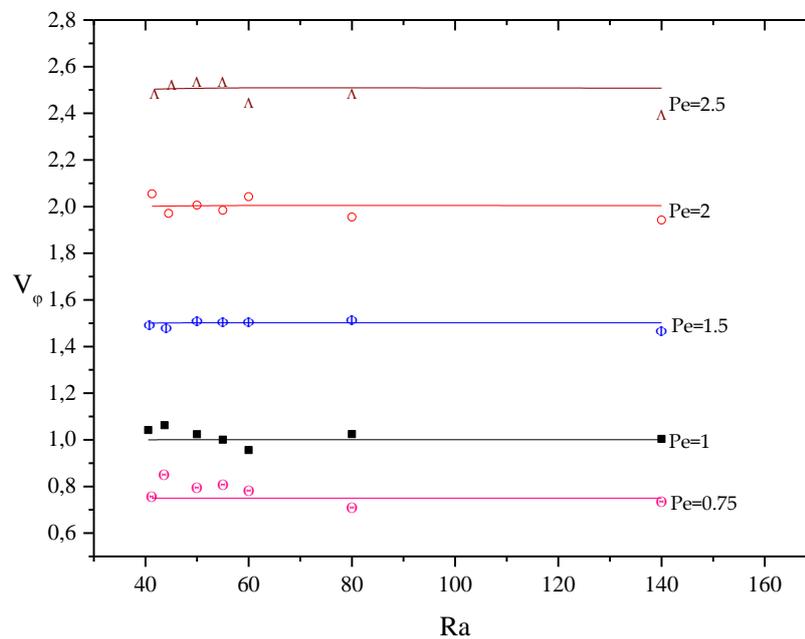


Figure 4-25 Vitesse de phase théorique et numérique en fonction de Ra pour différents Pe

Tableau 4-5 Les valeurs au seuil absolu pour des différents Pe

Pe	0.75	1	1.5	2	2.5
Ra^A	39.6185	39.7269	40.0332	40.4548	40.9854
k_r^A	3.1471	3.15128	3.16271	3.17757	3.19497
ω_r^A	2.36036	3.1514	4.74494	6.3586	7.99724

4.5 Comparaison des résultats numériques et théoriques dans la zone faiblement viscoélastique

Dans la zone faiblement viscoélastique, nous avons pris le cas d'un fluide avec les caractéristiques viscoélastiques de $\lambda_1=0.03$ et $\Gamma=0.75$ et nous avons tracé, sur la figure 4-26, les pulsations réelles numériques et théoriques en fonction de Ra pour des Pe fixes. Nous remarquons qu'il y a, comme pour les fluides Newtoniens, une tendance croissante de la fréquence réelle en fonction de Ra . Nous avons trouvé également les vitesses de phase obtenues numériquement et théoriquement et nous les avons représentées en fonction de Ra sur la figure 4-27. On constate que les vitesses de phase dans cette zone sont un peu plus élevées que la valeur de nombre de Pe contrairement à ce qu'on a vu dans les fluides Newtoniens pour lesquels la vitesse de phase est égale au nombre de Pe .

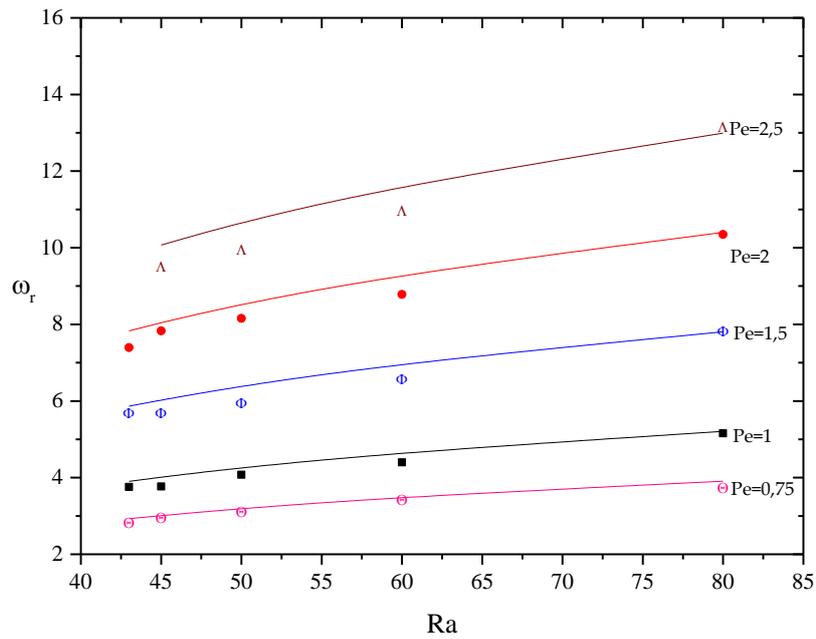


Figure 4-26 La pulsation numérique et théorique pour différents Pe

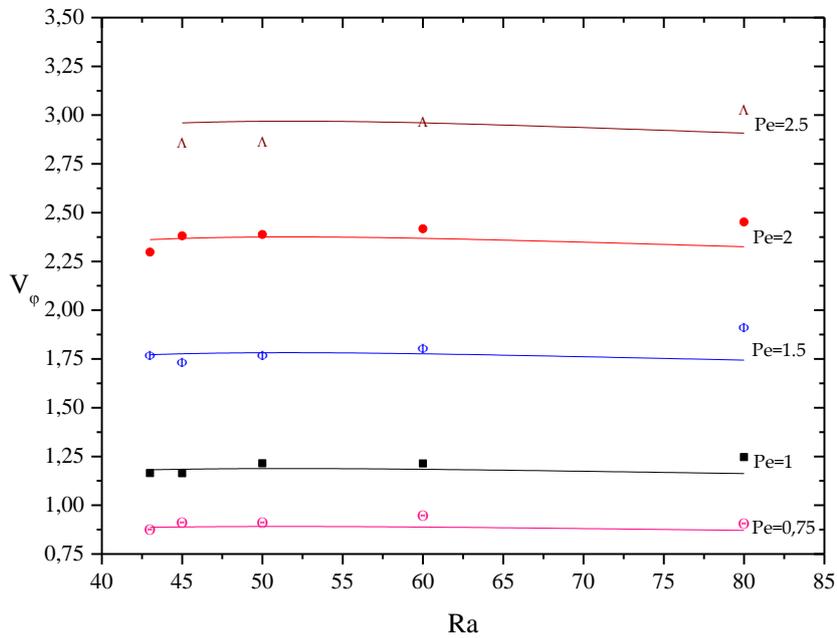


Figure 4-27 La vitesse de phase numérique et théorique pour différents Pe

En ce qui concerne le transfert de chaleur, le nombre de Nusselt augmente bien sûr avec le nombre de Rayleigh. A contrario, le nombre de Péclet n'a pas une influence sensible sur Nu , ce qui ressort de la figure 4-28. Les valeurs des paramètres au seuil

absolu sont mentionnées sur le tableau 4-6. Les tableaux dans l'annexe 5 représentent les valeurs trouvées pour la fréquence, le nombre d'onde, la vitesse de phase et le Nusselt.

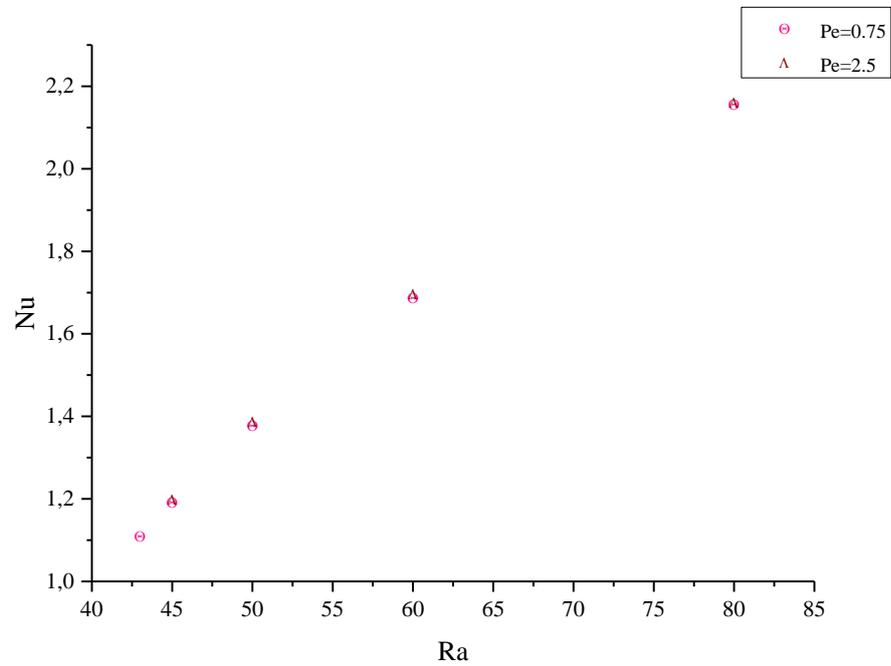


Figure 4-28 Nu moyen obtenu numériquement en fonction de Ra pour deux Pe différents

Tableau 4-6 Les valeurs au seuil absolu

Pe	Ra	wr	kr
0.75	39.62	2.77454	3.15141
1	39.7284	3.70841	3.15882
1.5	40.0304	5.59985	3.17897
2	40.4354	7.53154	3.20492
2.5	40.9288	9.51044	3.23498

4.6 Comparaison des résultats numériques et théoriques dans la zone fortement viscoélastique

Dans la zone fortement viscoélastique, le fluide que nous avons traité a des spécificités viscoélastiques de $\lambda_1=0.60$ et $\Gamma=0.75$. La fréquence réelle dans la zone fortement viscoélastique varie différemment pour les Pe très petits, figure 4-29. Selon la courbe théorique de la fréquence réelle en fonction de Ra pour des $Pe < 1,5$, ω_r descend avec Ra jusqu'à un Ra minimum autour de 40 et puis remonte très légèrement. Cependant, après cette valeur de Pe quand nous l'augmentons nous retrouvons une tendance croissante pour ω_r en fonction de Ra . Nous avons donc comparé les fréquences numériques avec celles de la théorie sur la figure 4-29. Nous remarquons que, malgré la concordance des résultats pour les Pe plus élevés, les simulations numériques ne prévoient pas la tendance décroissante vue par la théorie pour les Pe bas. La figure 4-30 montre l'influence de Pe sur ω_r pour deux Ra fixes ($Ra=40$ et 70). Cette figure montre aussi que ω_r croît avec Pe et les simulations numériques prévoient cette croissance en concordance avec la théorie. La valeur des paramètres au seuil absolu pour différents Pe est présentée sur le tableau 4-7.

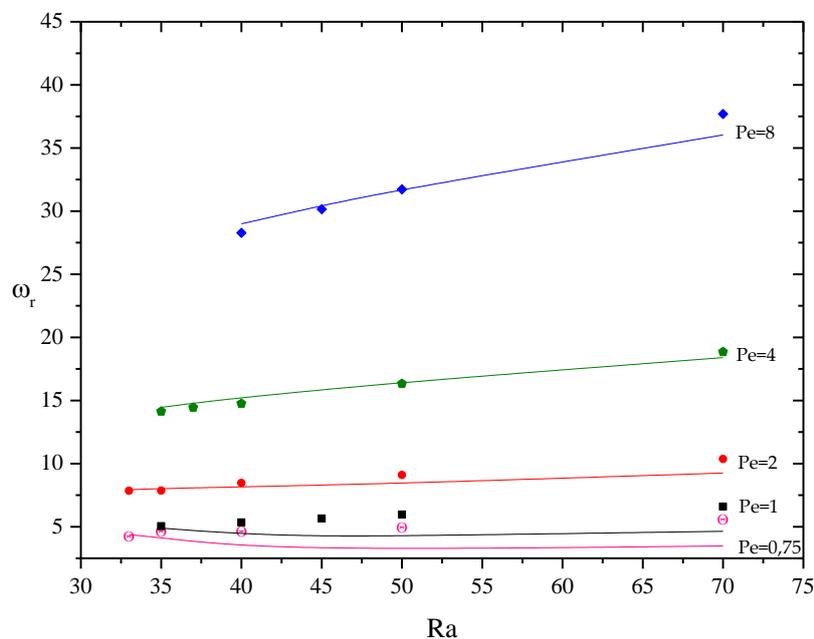


Figure 4-29 Pulsations numériques et théoriques en fonction de Ra pour différents Pe

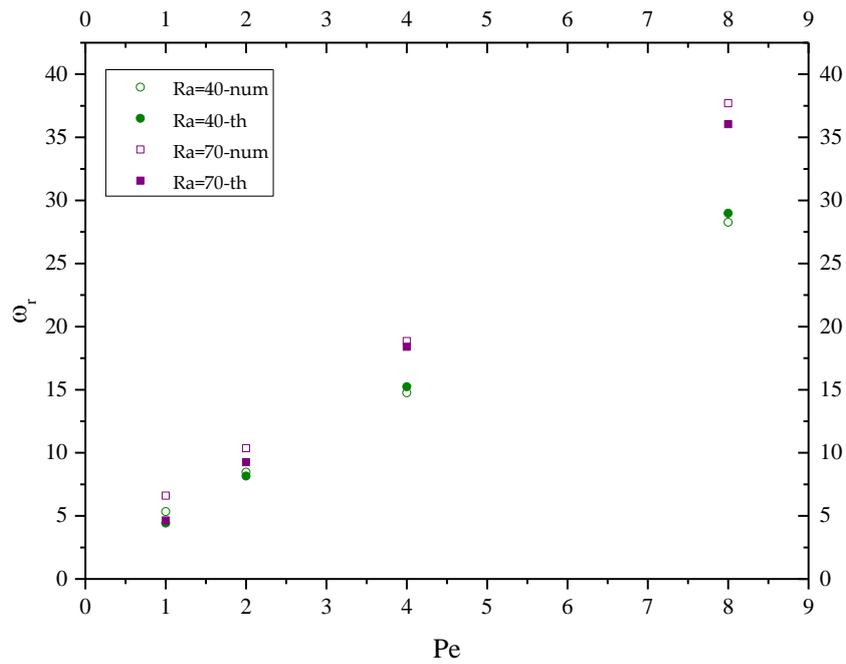


Figure 4-30 Pulsations numériques et théoriques en fonction de Pe

Concernant le transfert thermique, nous avons tracé, sur la figure 4-31, le nombre de Nusselt en fonction de Ra pour comparer les résultats numériques et théoriques, comme précédemment pour le cas Newtonien et faiblement viscoélastique. Nous constatons que au-dessus d'un certain Ra, la variation de Pe n'a pratiquement aucune incidence sur la valeur de Nusselt.

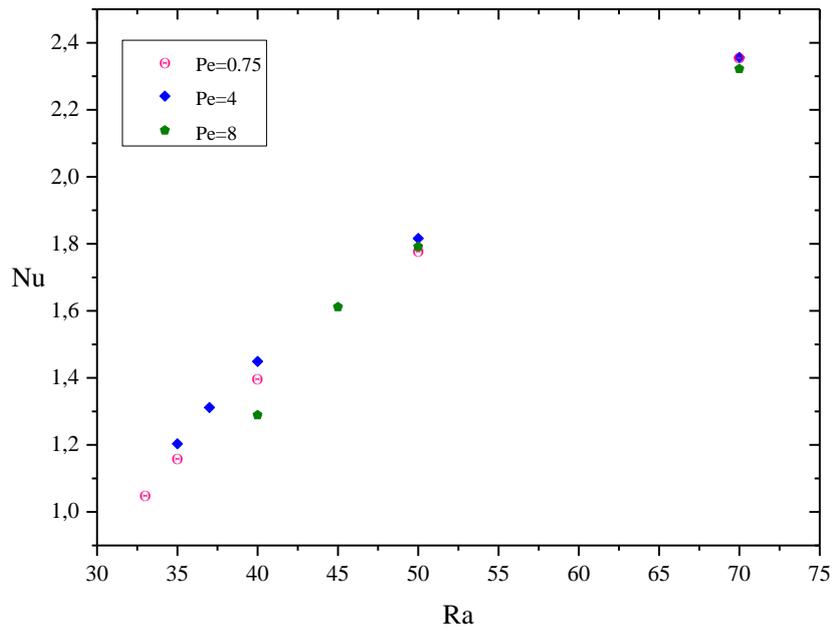


Figure 4-31 Nu moyen obtenu numériquement en fonction de Ra pour trois Pe

Tableau 4-7 Seuils absolus

Pe	Ra ^A	ω_r^A	k _r ^A
1	31.32927	5.10672	3.18424
1.5	31.17897	6.4153	3.19713
2	31.26186	7.81085	3.21204
2.5	31.50846	9.28361	3.22865
4	32.90726	14.07746	3.28334
8	39.44798	28.81921	3.3927

Les tableaux dans l'annexe 6 récapitulent les résultats obtenus pour les fréquences réelles, les nombres d'onde, les vitesses de phase et les Nu moyens pour quelques Pe fixes.

4.7 Longueurs d'établissement des structures thermo-convectives

Selon les conditions et les paramètres du problème, au-dessus du seuil absolu, les rouleaux transversaux pleinement établis sont formés à une distance quelconque de l'entrée. Cet état thermo-convectif pleinement développé est relié à l'état de conduction par le biais d'un front. Si nous relient les points maximums de l'oscillation, nous arrivons à obtenir ce front qui se forme à une distance de l'entrée qui est appelé la longueur d'établissement (Δ). Pour visualiser cette longueur, sur la figure 4-32 nous avons tracé la température au point $y = \frac{1}{2}$ pour tout x le long des parois. Sur cette même figure nous observons les profils de fonction de courant φ et de température T . Afin d'éviter les erreurs dans la recherche du premier maximum du front, on définit une autre distance qui correspond à la moitié de l'amplitude saturée.

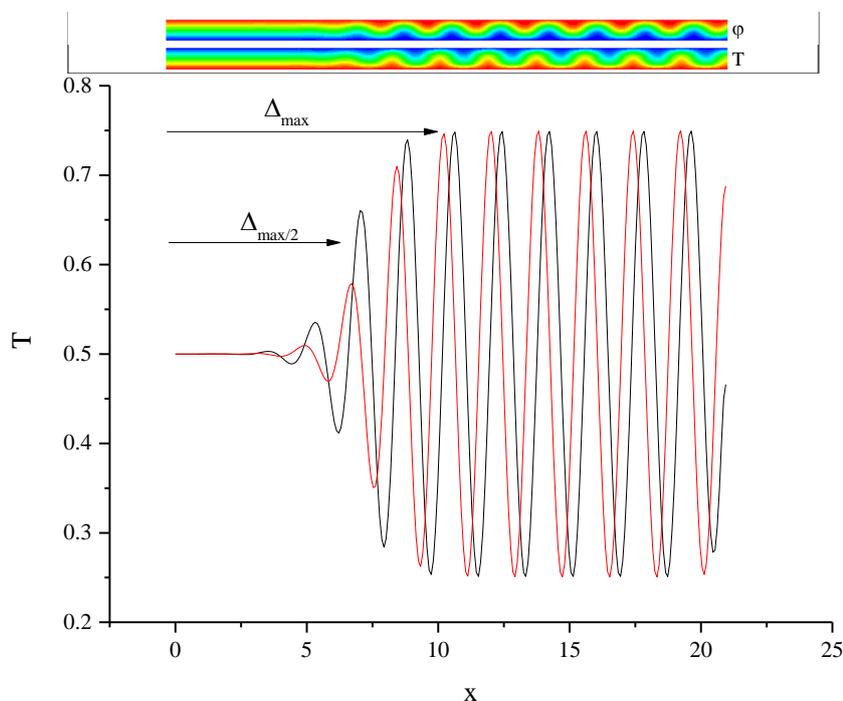


Figure 4-32 La température au milieu ($y=1/2$) suivant x pour cinq temps différents à $Pe=8$ et $Ra=53$ ($Ra_A=52.135$) avec les profils de la fonction de courant φ et de la température T

Pour obtenir $\Delta_{(max/2)}$, on note la température maximale (T_{max}) ainsi que la température de conduction (T_{cond}) et la différence entre les deux nous donne θ_{max} . Donc pour trouver $T_{max/2}$, on a :

$$T_{(max/2)} = \frac{T_{max} - T_{cond}}{2} + T_{cond}$$

$$= \frac{T_{\max} + T_{\text{cond}}}{2}$$

$$T_{(max/2)} = \theta_{max/2} + T_{\text{cond}}$$

On parvient alors à trouver la valeur de x tel que $T(x) = T_{(max/2)}$, ce qui nous donne $\Delta_{(max/2)}$. La longueur d'établissement dépend de nombre de Pe et de Ra et donc nous avons vérifié l'effet de chacun des deux sur Δ dans les sections suivantes.

Si on normalise les valeurs dans une courbe comme dans la figure 4-32 et on relie les points maximums on peut distinguer le front qui sépare la zone où il y a de la conduction de la zone où la convection apparaît. La figure suivante montre ce front.

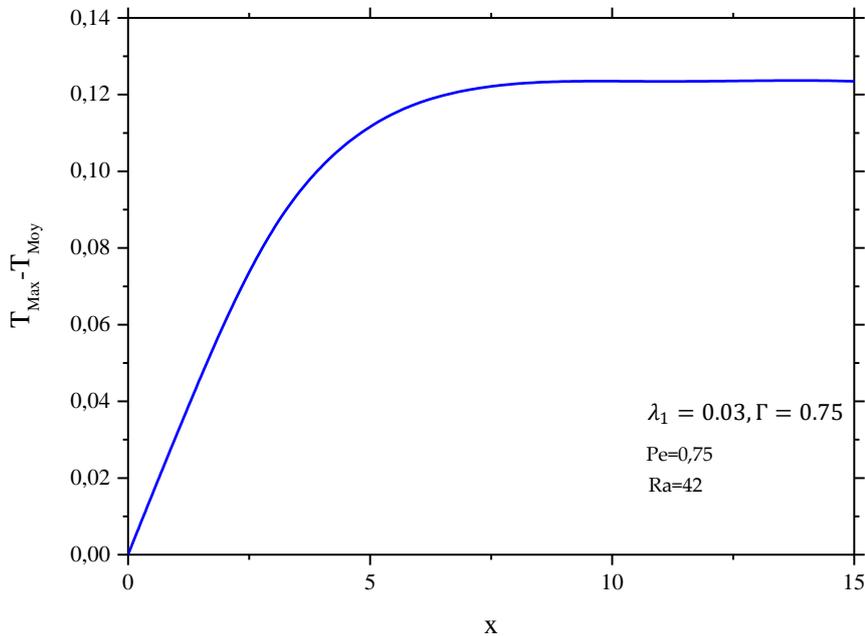


Figure 4-33 Le front montrant la partie du canal où la convection s'installe pour le fluide faiblement viscoélastique de $\lambda_1=0,03$ et $\Gamma=0,75$ avec $Pe=0,75$ et $Ra=42$

Ce front peut être tracé avec la fonction de courant aussi. Nous étudions alors la valeurs de la fonction de courant maximums pour différents nombres de Rayleigh pour voir s'il existe une relation entre la fonction de courant perturbée (la fonction de courant normalisée $\psi(Max) - \psi(Moyen)$) et la distance avec le seuil absolu ($Ra - Ra^A$). Sur la figure 4-34 nous avons tracé la fonction de courant perturbée en fonction de ($Ra - Ra^A$) pour un fluide Newtonien à $Pe=1$.

Nous constatons que la variation de $\tilde{\psi}$ en fonction de $Ra - Ra^A$ est parabolique. Par conséquent, la courbe de $\tilde{\psi}^2$ en fonction de $Ra - Ra^A$ doit être une droite. La figure 4-35 présente la courbe numérique de $\tilde{\psi}^2 - (Ra - Ra^A)$ pour un fluide Newtonien et

deux fluides faiblement viscoélastiques. Nous remarquons donc une loi d'échelle qui dépende de la distance avec le seuil absolu ($Ra - Ra^A$).

$$\tilde{\psi} = \psi(Max) - \psi(Moyen) = C\sqrt{Ra - Ra^A} \tag{4-7}$$

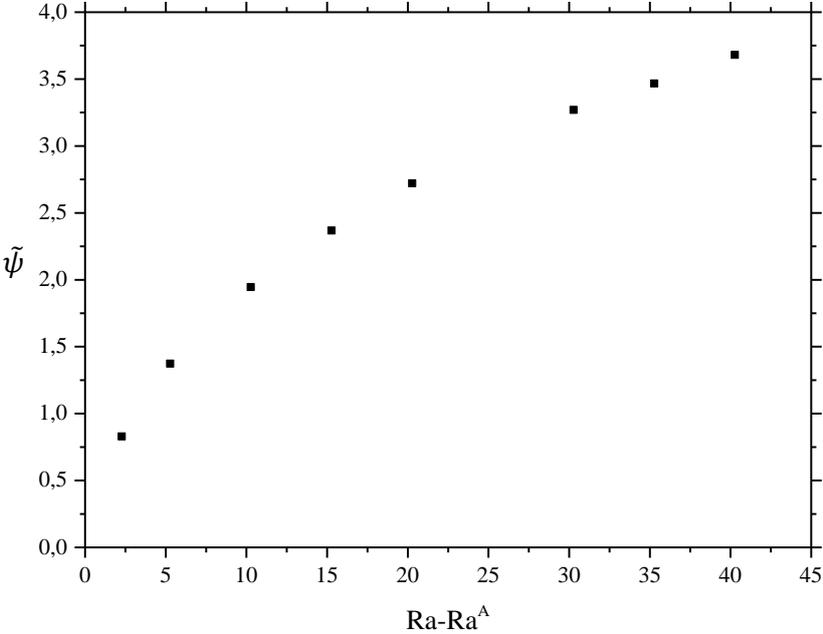


Figure 4-34 La fonction de courant perturbée en fonction de $(Ra - Ra^A)$ pour un fluide Newtonien à $Pe=1$

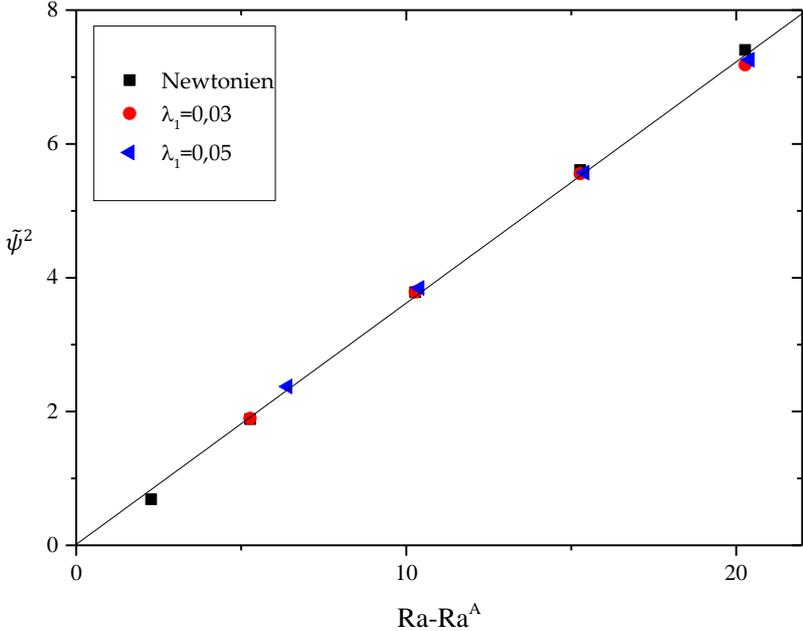


Figure 4-35 La courbe numérique de $\psi^2 - (Ra - Ra^A)$ pour un fluide Newtonien à $Pe=1$

4.7.1 Effet de Pe et Ra sur la longueur d'établissement

4.7.1.1 Effet de Pe sur la longueur d'établissement

Nous prenons un fluide fortement viscoélastique avec $\lambda_1=0.60$ et $\Gamma=0.75$. Lorsque l'on fixe le Ra (ici à Ra=50) et que l'on varie le Pe, on peut voir l'influence du nombre de Pe sur l'évolution du front. Donc plus le Pe est important plus le front avance vers la sortie et en même temps le seuil absolu augmente. Les figures 4-37 à 4-40 représentent l'évolution du front quand on augmente le Pe. Sur chaque figure il y a trois graphiques qui comprennent le profil de fonction de courant, le profil de température et la température à $y=1/2$ le long du canal pour cinq temps différents afin que l'on puisse visualiser au mieux l'enveloppe stationnaire. Si on regarde bien les profils de température et de fonction de courant, on constate qu'il y a une différence de phase de $\frac{\pi}{2}$ entre la température et la fonction de courant. En variant le Pe, l'amplitude des oscillations ne change pas beaucoup après la longueur d'établissement et donc on peut en déduire que le nombre de Péclet n'influence pas vraiment l'amplitude de la température.

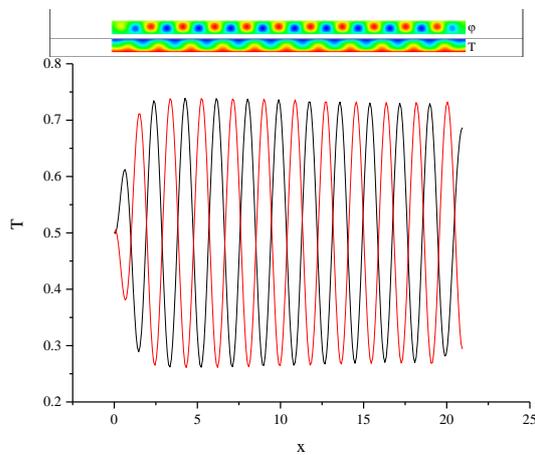


Figure 4-36 Température à $y=1/2$ le long du canal pour $Pe=1$, $Ra=50$ ($Ra_A = 39.726$)

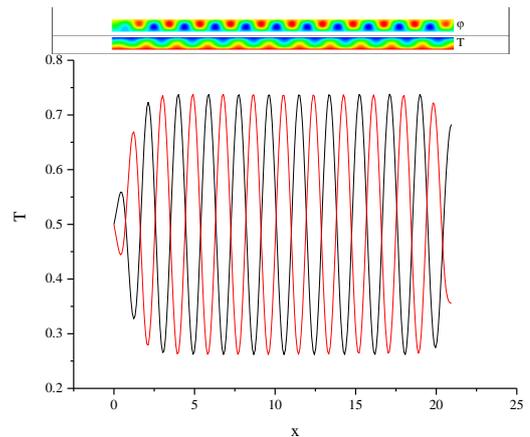


Figure 4-37 Température à $y=1/2$ le long du canal pour $Pe=2$, $Ra=50$ ($Ra_A = 40.454$)

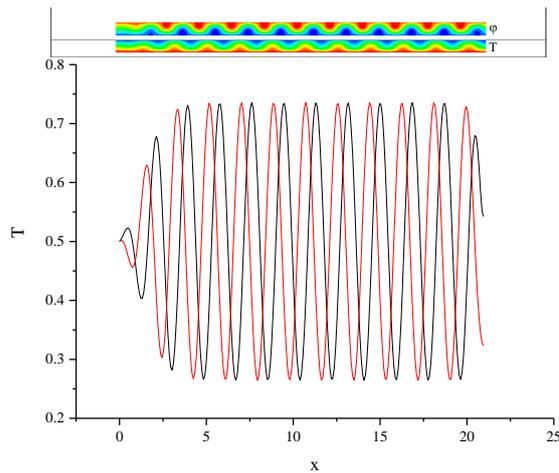


Figure 4-38 Température à $y=1/2$ le long du canal pour $Pe=4$, $Ra=50$ ($Ra_A = 43.160$)

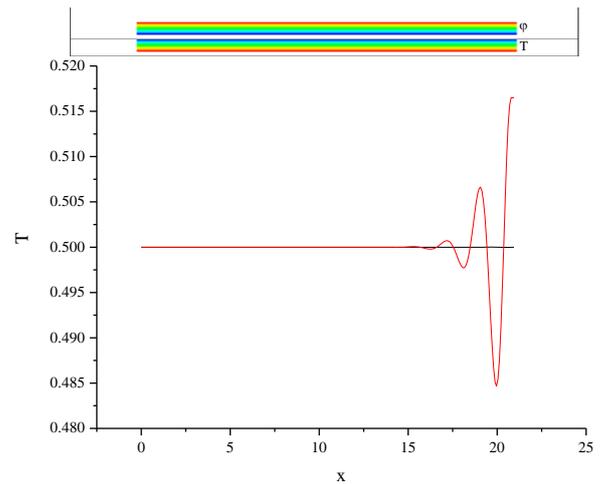


Figure 4-39 Température à $y=1/2$ le long du canal pour $Pe=8$, $Ra=50$ ($Ra_A = 52.135$)

4.7.1.2 Effet de Ra sur la longueur d'établissement

Pour vérifier l'importance du nombre de Ra , on fixe le Pe (ici à $Pe=8$) et on varie le Ra , de faible Ra dans le régime convectivement instable à des Ra élevés dans le régime absolument instable. Sachant que le seuil d'instabilité absolue est à $Ra_A= 52.135$, on a commencé à partir d'un Ra légèrement inférieur et on passe aux Ra supérieurs à cette valeur. Sur les figures 4-41 à 4-45, l'évolution du front vers l'entrée est visible avec l'augmentation de Ra et donc on peut considérer le nombre de Ra comme un paramètre ayant un effet concurrentiel avec le nombre de Pe sur la longueur d'établissement. L'autre fait saillant en observant ces figures est l'augmentation de l'amplitude de la température avec le nombre de Ra qui montre que cette amplitude ne dépende que de Ra .

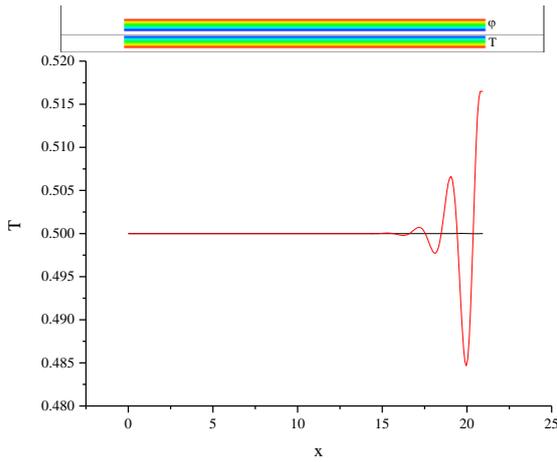


Figure 4-40 La température au milieu ($y=1/2$) suivant x pour cinq temps différents à $Pe=8$ et $Ra=50$ ($Ra_A=52.135$) avec les profils de la fonction de courant φ et de la température T

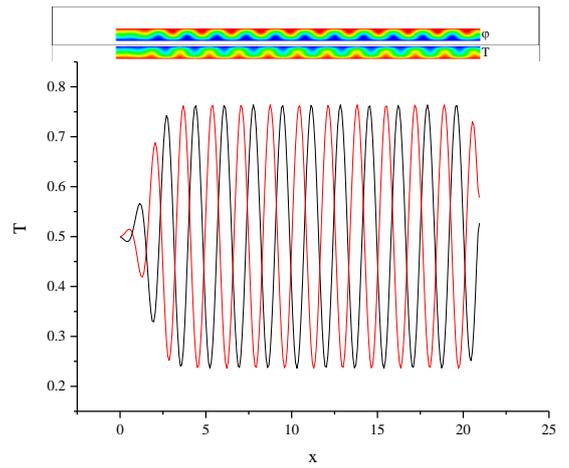


Figure 4-42 La température au milieu ($y=1/2$) suivant x pour cinq temps différents à $Pe=8$ et $Ra=60$ ($Ra_A=52.135$) avec les profils de la fonction de courant φ et de la température T

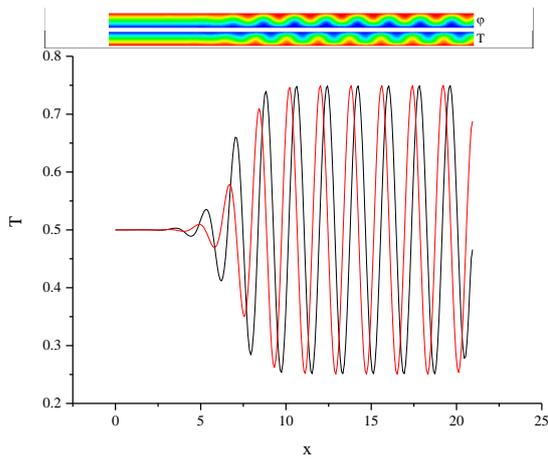


Figure 4-41 La température au milieu ($y=1/2$) suivant x pour cinq temps différents à $Pe=8$ et $Ra=53$ ($Ra_A=52.135$) avec les profils de la fonction de courant φ et de la température T

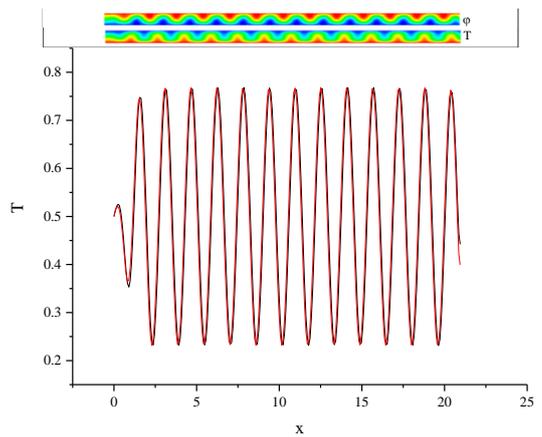


Figure 4-43 La température au milieu ($y=1/2$) suivant x pour cinq temps différents à $Pe=8$ et $Ra=70$ ($Ra_A=52.135$) avec les profils de la fonction de courant φ et de la température T

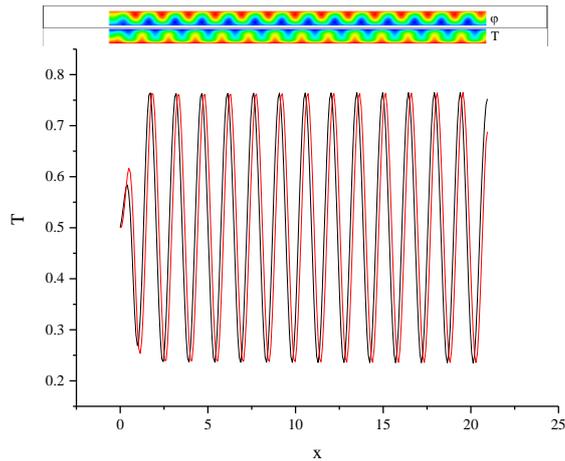


Figure 4-44 La température au milieu ($y=1/2$) suivant x pour cinq temps différents à $Pe=8$ et $Ra=80$ ($Ra_A=52.135$) avec les profils de la fonction de courant φ et de la température T

4.7.2 Effet du temps de relaxation λ_1 sur la longueur d'établissement

Nous vérifions aussi l'effet de l'élasticité sur la longueur d'établissement. A $Pe = 8$ et $Ra = 50$ nous comparons un fluide Newtonien avec deux fluides viscoélastiques. Sur la figure ci-dessous, nous présentons les profils de fonction de courant pour ces fluides. Encore une fois, l'effet déstabilisant de λ_1 est remarquable quand on augmente λ_1 .

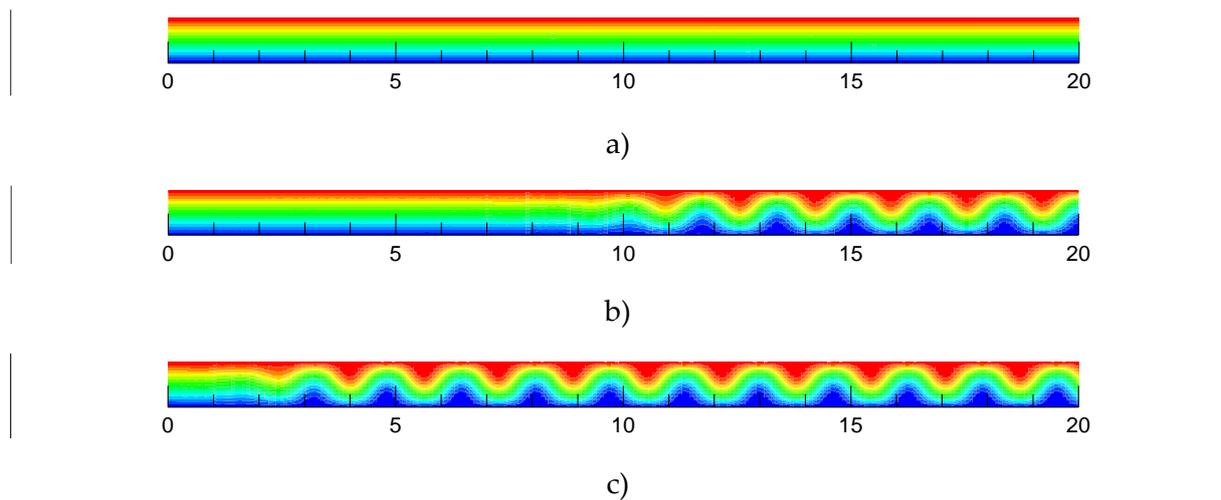


Figure 4-45 Le profil de fonction de courant pour a) un fluide Newtonien avec $Ra^A = 52.1350$, $Ra_C = 39.4784$, b) un fluide faiblement viscoélastique de $\lambda_1 = 0.03$ et $\Gamma = 0.75$ avec $Ra^A = 49.1295$, $Ra_C = 35.93552$, c) un fluide faiblement viscoélastique de $\lambda_1 = 0.05$, $\Gamma = 0.75$, $Ra^A = 45.6497$, $Ra_C = 33.4571$

4.7.3 Loi d'échelle pour les fluides Newtoniens

A. Couairon et J.M. Chomaz [52] ont établi une loi d'échelle provenant de l'équation de Ginzburg-Landau qui relie la longueur d'établissement Δ à l'écart du seuil d'instabilité absolue Ra_A .

$$\Delta \sim \frac{1}{\sqrt{Ra - Ra_A}}$$

$$\ln \Delta = -\frac{1}{2} \ln(Ra - Ra_A) \quad (4-8)$$

Sur la figure 4-47, nous représentons $\Delta_{(max/2)}$ obtenu numériquement en fonction de Ra pour quatre nombres de Pe différents. Bien évidemment, les Ra doivent être supérieurs à Ra_A pour que cette loi soit valable. D'ailleurs, on remarque que si on se rapproche de Ra_A , les résultats de Δ divergent.

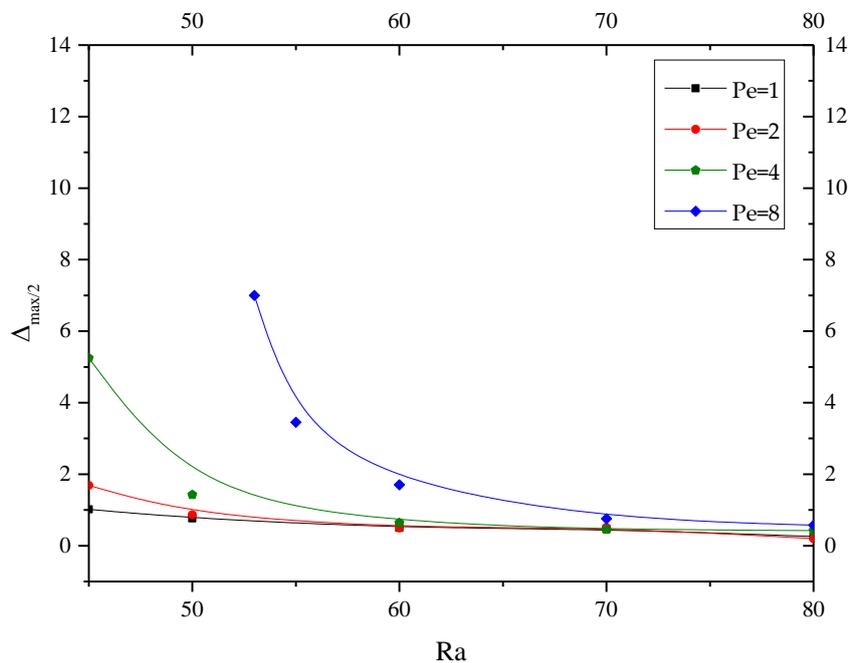


Figure 4-46 $\Delta_{(max/2)}$ numérique en fonction de Ra pour quatre nombres de Pe différents (fluide Newtonien)

Sur la figure 4-48, les résultats de $\ln(\Delta_{(max/2)})$ en fonction de $\ln(Ra - Ra_A)$ sont tracés et ils montrent une linéarité pour chaque Pe . Par conséquent, on peut trouver la pente de la droite par régression linéaire. Les pentes sont présentées et comparées avec celles

trouvées par Alexandre Delache [20] sur le tableau 4-8. Sachant que A. Delache a mise au point une méthode numérique spectrale pour trouver ses résultats.

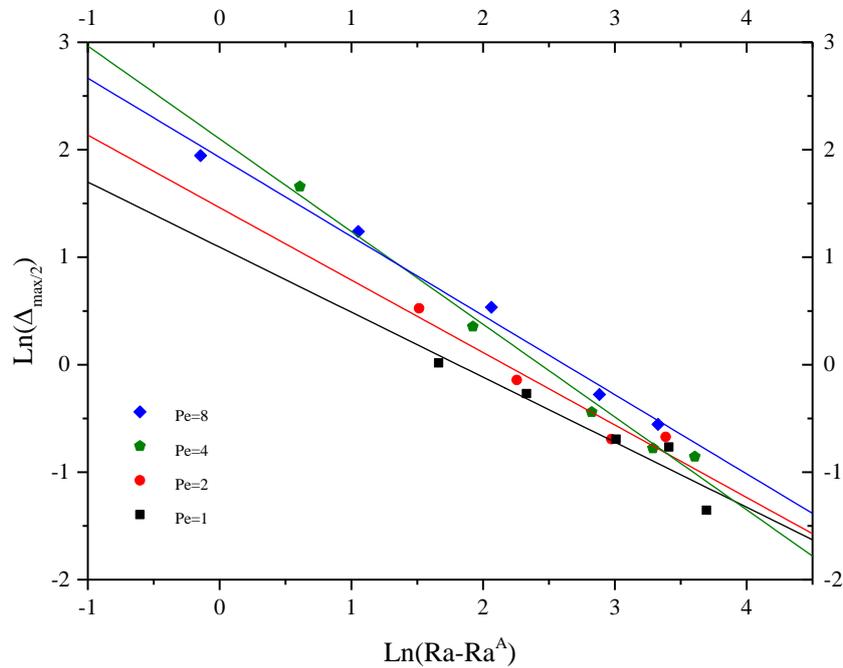


Figure 4-47 $\text{Ln}(\Delta_{(\text{max}/2)})$ numérique en fonction de $\text{Ln}(\text{Ra} - \text{Ra}^A)$ pour quatre nombre de Pe différents (fluide Newtonien)

Tableau 4-8 Les pentes correspondantes à des nombres de Pe différents (fluide Newtonien)

Pe	1	2	4	8
Pente numérique déterminée par notre travail	-0.605	-0.674	-0.862	-0.736
Pente numérique déterminée par Alexandre Delache	-0.540	-0.611	-0.722	-0.695

4.7.3.1 Longueur d'établissement pour des $Pe < 1$ pour un fluide Newtonien

Nous avons décidé de vérifier cette loi d'échelle pour des Pe inférieurs à 1 pour savoir si, en diminuant (abaissant) le nombre de Péclet, nous aurons confirmation de la loi d'échelle. La figure ci-dessous représente la longueur d'établissement obtenue numériquement en fonction de Ra .

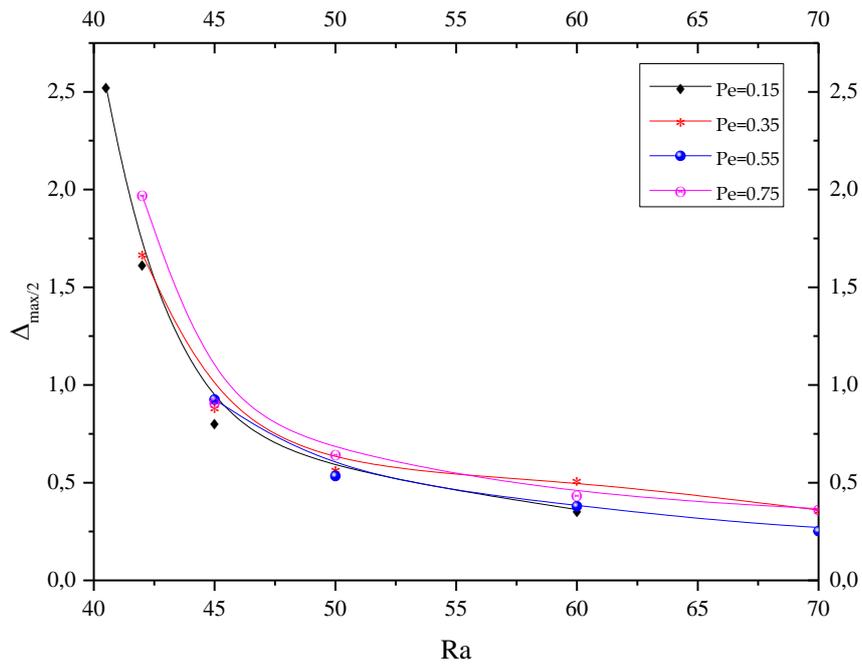


Figure 4-48 La longueur d'établissement numérique en fonction de Ra pour des Pe fixés (fluide Newtonien)

Comme nous avons fait précédemment, à l'échelle logarithmique nous parvenons à trouver la pente des droites obtenues par régression linéaire et cette fois nous remarquons qu'il y a une amélioration au niveau des pentes numériques. Ce qui veut dire que la valeur des pentes se rapproche à la pente théorique de Ginzburg-Landau (-0.5). Les résultats obtenus sont représentés dans la figure et le tableau suivants.

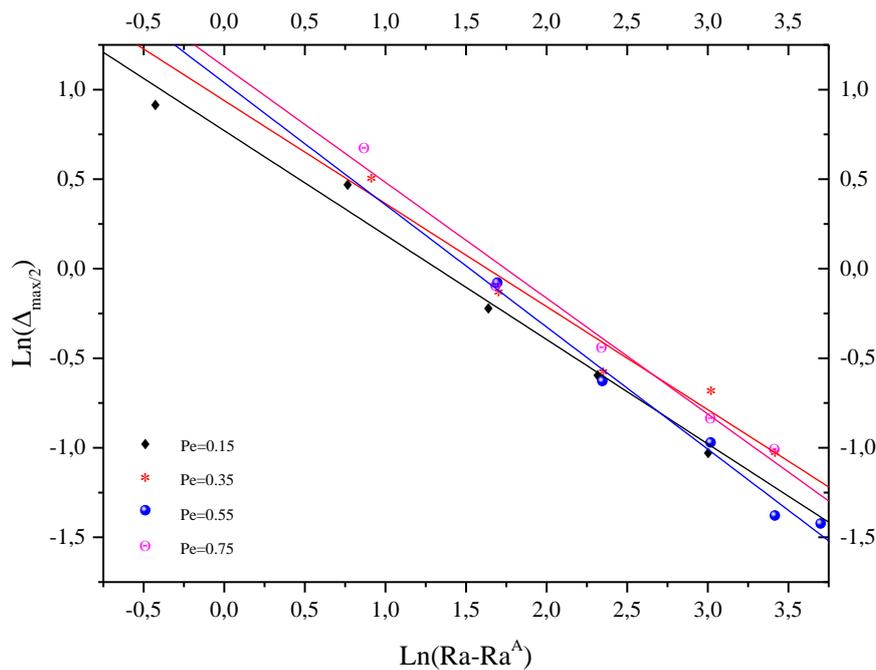


Figure 4-49 $\text{Ln}(\Delta_{\text{max}/2})$ en fonction de $\text{Ln}(Ra - Ra^A)$ avec les résultats numériques

Tableau 4-9 Les pentes correspondantes à des nombres de Pe différents (fluide Newtonien avec $Pe < 1$)

Pe	0.15	0.35	0.55	0.75
Pente	-0.583	-0.575	-0.682	-0.647

4.7.4 Longueur d'établissement pour un cas situé dans la zone faiblement viscoélastique

La loi d'échelle a été vérifiée dans la zone faiblement viscoélastique pour un fluide avec des paramètres de viscoélasticité de $\lambda_1 = 0.03$ et $\Gamma=0.75$. De manière similaire à ce qui a été présenté pour un fluide Newtonien, la longueur d'établissement est tracée en fonction de Ra en échelle normale (figure 4-51) ainsi qu'en échelle logarithmique (figure 4-52). La valeur de Ra au seuil absolu correspondant aux nombres de Pe est également mentionnée au tableau 4-10 pour pouvoir permettre de la situer sur les graphiques. Les pentes obtenues pour ce cas sont représentées dans le tableau 4-11. Toujours pour les Pe inférieurs à 1, nous parvenons à avoir des résultats qui sont plus proches de la théorie de Ginzburg-Landau.

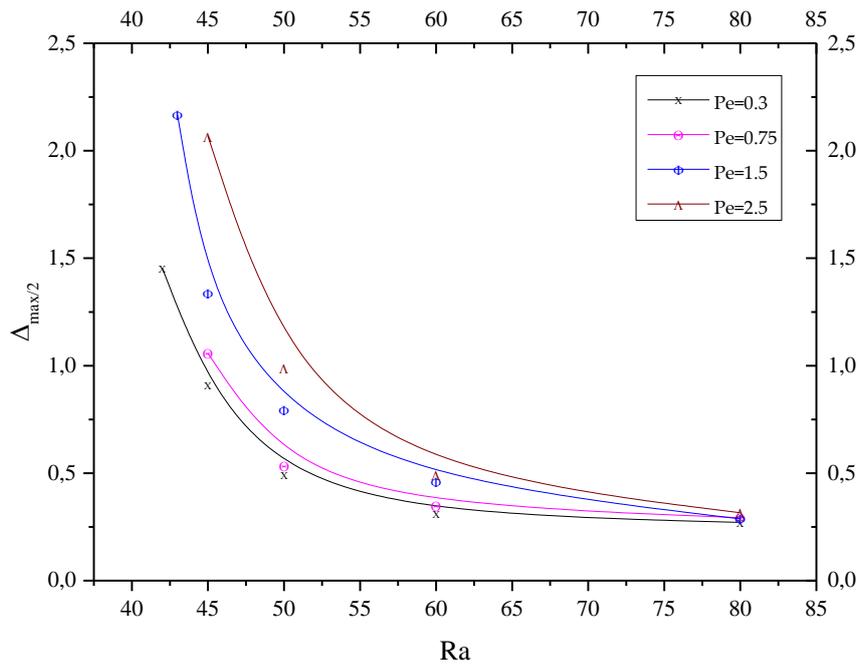


Figure 4-50 La longueur d'établissement en fonction de Ra pour un fluide faiblement viscoélastique ($\lambda_1 = 0.03$ et $\Gamma=0.75$)

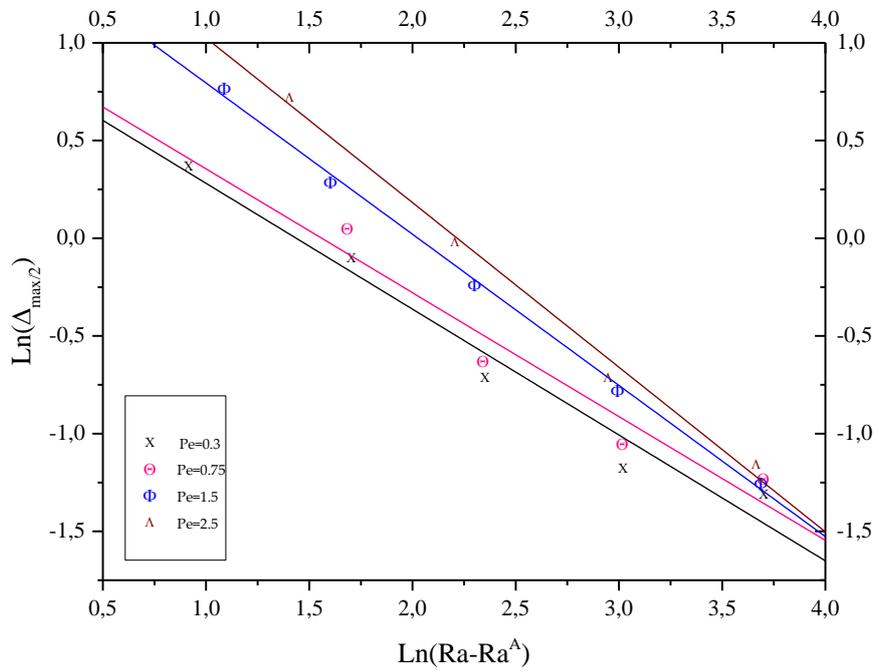


Figure 4-51 $\text{Ln}(\Delta_{\text{max}}/2)$ en fonction de $\text{Ln}(Ra - Ra_A)$ pour un fluide faiblement viscoélastique ($\lambda_1 = 0.03$ et $\Gamma=0.75$)

Tableau 4-10 Les seuils absolus pour le cas $\lambda_1 = 0.03$ et $\Gamma=0.75$

Pe	0.3	0.75	1.5	2.5
Ra^A	39.5012	39.62	40.0304	40.9288

Tableau 4-11 Les pentes obtenues numériquement pour chaque Pe ($\lambda_1 = 0.03$ et $\Gamma=0.75$)

Pe	0.3	0.75	1.5	2.5
Pente	-0.644	-0.6338	-0.7737	-0.8423

4.7.5 Longueur d'établissement dans la zone fortement viscoélastique

Nous effectuons les mêmes démarches pour un fluide dans la zone fortement viscoélastique de $\lambda_1 = 0.60$ et $\Gamma=0.75$ et les résultats sont présentés sur les figures suivantes. Le tableau 4-12 montre les pentes obtenues pour différents nombres de Péclet.

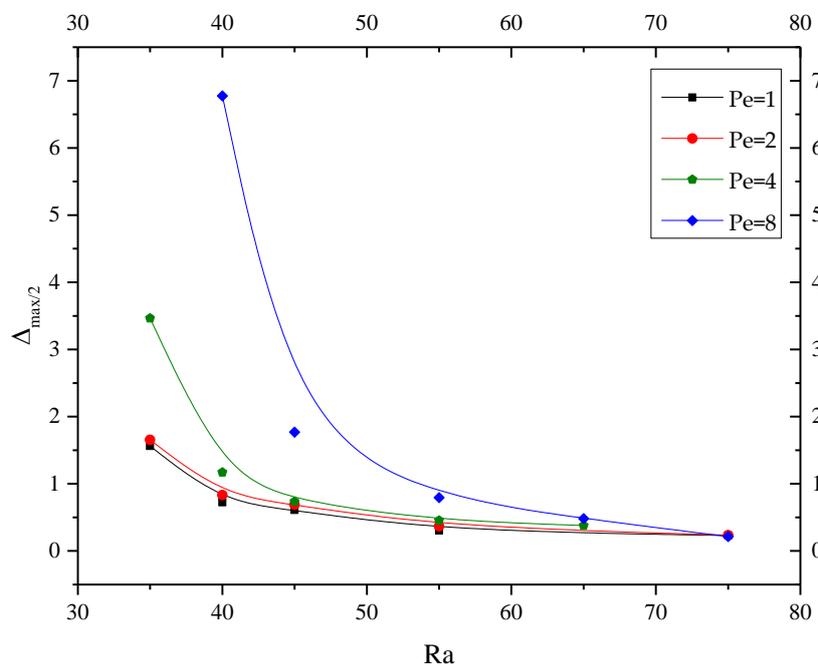


Figure 4-52 La longueur d'établissement en fonction de Ra pour un fluide dans la zone fortement viscoélastique de $\lambda_1 = 0.60$ et $\Gamma=0.75$

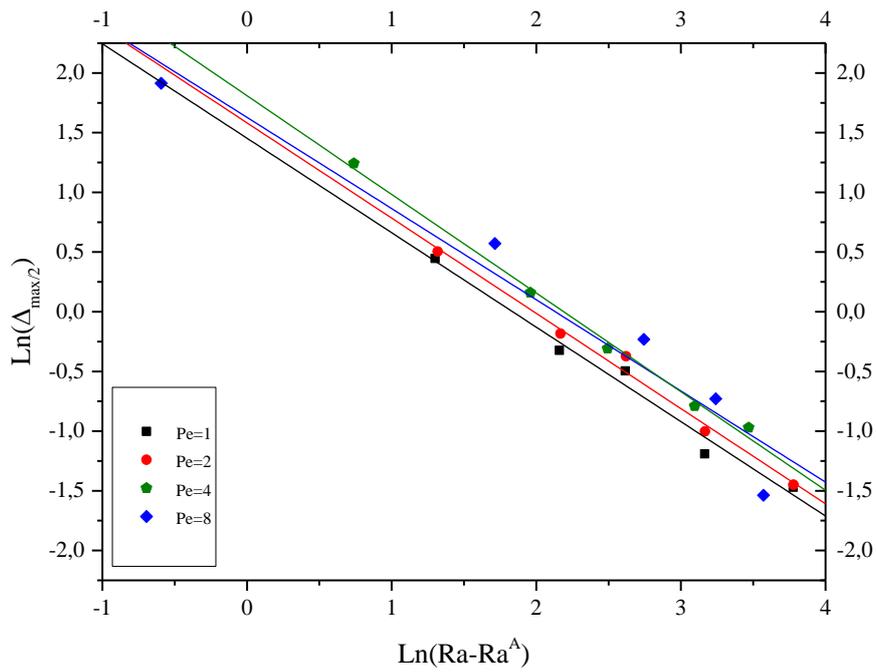


Figure 4-53 $\text{Ln}(\Delta_{\max/2})$ en fonction de $\text{Ln}(Ra - Ra_A)$ avec les résultats numériques pour un fluide dans la zone fortement viscoélastique de $\lambda_1 = 0.60$ et $\Gamma=0.75$

Tableau 4-12 Les pentes correspondantes à des nombres de Pe différents $\lambda_1 = 0.60$ et $\Gamma=0.75$

Pe	1	2	4	8
Pente	-0.7912	-0.7978	-0.8263	-0.7639

4.8 Conclusions

Une étude numérique du système a été réalisée dans ce chapitre à l'aide de la méthode des différences finies. Nous avons introduit la notion de longueur d'établissement et nous avons constaté que la longueur d'établissement diminue avec le nombre de Ra et augmente avec Pe, ce qui montre leurs effets concurrentiels sur la longueur d'établissement. Nous avons tenté de vérifier la loi d'échelle provenant de l'équation de Ginzburg Landau pour un fluide Newtonien, un fluide faiblement viscoélastique et un fluide fortement viscoélastique. Les résultats obtenus pour le cas Newtonien avec des débits filtrants très bas sont proches des résultats obtenus par la loi d'échelle.

Les pulsations théoriques et numériques augmentent toutes les deux avec Pe pour les trois types de fluide étudiés. L'influence de Ra sur les pulsations varie en fonction de Pe. Pour les Pe plus élevés, la pulsation augmente avec Ra tandis que pour les Pe très bas pour les fluides Newtoniens et faiblement viscoélastiques la pulsation augmente légèrement avec Ra. Or, pour les fluides fortement viscoélastiques à Pe bas la pulsation diminue pour les Ra bas et stagne pour les Ra plus élevés. La vitesse de phase des structures absolument instables pour un fluide Newtonien est à peu près égale à la valeur de Pe et reste constante pour chaque débit filtrant. En ce qui concerne le transfert de chaleur, le nombre de Nusselt augmente évidemment avec Ra mais cela ne change pratiquement pas avec Pe. Les résultats numériques sont validés avec les résultats des travaux antérieurs et les résultats théoriques. A la fin du chapitre, nous avons essayé au fil des étapes de trouver le seuil d'instabilité absolue au moyen de la simulation numérique (en suivant le Nusselt moyen en fonction de temps).

Conclusions générales et perspectives

Le présent travail a été consacré à l'étude analytique et numérique des instabilités convectives et absolues dues à la convection mixte d'un fluide viscoélastique saturant une couche poreuse chauffée par le bas. L'équation de quantité de mouvement a été écrite en utilisant l'équation de Darcy et le modèle d'Oldroyd B pour modéliser l'écoulement d'un fluide viscoélastique dans un milieu poreux. L'approche temporelle a été appliquée à l'équation de dispersion pour obtenir les seuils d'instabilités convectives et l'approche spatio-temporelle a été utilisée pour obtenir le seuil d'instabilité absolue ainsi que pour trouver l'état du système au-delà du seuil absolu.

La viscoélasticité est importante pour prévoir le comportement du système et nous avons donc proposé une dynamique générale reliée au temps de relaxation et le rapport entre le temps de retardation et de relaxation et nous avons constaté qu'il existe deux zones. Dans la zone faiblement viscoélastique, le comportement du fluide est plus proche de celui d'un fluide Newtonien. Si on prend un fluide qui se situe dans cette zone il existe un seul mode pour lequel on retrouve exactement le même seuil d'instabilité que pour un fluide Newtonien dans le cas où il n'y a pas d'écoulement horizontal forcé (convection naturelle). En revanche, dès que nous introduisons un débit filtrant le comportement dévie du résultat du cas Newtonien. Cependant, dans la zone fortement viscoélastique, nous observons des structures plus complexes et il existe trois modes de propagation des ondes progressives. Nous retenons seulement le mode le plus instable car c'est le mode qui apparaît en premier. Ces structures qui se propagent dans la même direction que l'écoulement horizontal sont reconnues comme des rouleaux transversaux. Nous avons remarqué que les rouleaux transversaux sont plus instables que les rouleaux longitudinaux.

L'analyse temporelle et spatiotemporelle aux seuils des instabilités convective et absolue nous ont permis de tirer les conclusions suivantes :

- Le temps de relaxation a un effet déstabilisant sur le système car cela diminue le Rayleigh critique convectif et absolu.
- Le rapport de temps de retardation au temps de relaxation (Γ) a un effet stabilisant sur le système car cela augmente le Rayleigh critique convectif et absolu.
- Le débit filtrant diminue le Ra_c et a un effet déstabilisant sur les instabilités convectives dans les zones faiblement et fortement viscoélastiques.

- Le débit filtrant augmente le Ra^A et a un effet stabilisant sur les instabilités absolues dans la zone faiblement viscoélastique.
- Dans la zone fortement viscoélastique, pour les débits filtrants bas (Pe bas) Ra^A diminue et le nombre de Pe déstabilise les instabilités absolues. En revanche, pour les débits plus élevés Ra^A augmente et le nombre de Pe a donc un effet stabilisant sur les instabilités absolues.
- Dans la zone faiblement viscoélastique, la fréquence d'oscillation et le nombre d'onde des structures convectives et absolues augmentent avec Pe et avec le temps de relaxation. Pourtant, le nombre d'onde en instabilité absolue se stabilise légèrement pour des Pe plus élevés.
- Dans la zone fortement viscoélastique, pour les instabilités convectives la fréquence d'oscillation augmente et le nombre d'onde des structures convectives diminue avec le débit filtrant. En revanche, dans cette même zone et pour les mêmes instabilités, la fréquence et le nombre d'onde diminuent avec le temps de relaxation.
- Dans la zone fortement viscoélastique, pour les instabilités absolues la fréquence d'oscillation et le nombre d'onde augmentent mais le nombre d'onde se stabilise pour les Pe plus élevés. En revanche, dans cette même zone et pour les mêmes instabilités, la fréquence et le nombre d'onde diminuent légèrement avec le temps de relaxation.

L'analyse spatiotemporelle au-delà du seuil absolu ainsi que les simulations numériques nous ont permis de tirer des conclusions suivantes :

- Pour les trois cas étudiés de fluide Newtonien, faiblement viscoélastique et fortement viscoélastique, nous avons remarqué que le nombre d'onde et la fréquence d'oscillation des structures absolument instables augmente avec Ra au-dessus du seuil absolu.
- Pour les trois cas étudiés, le nombre d'onde diminue légèrement avec le débit filtrant pour les Pe plus élevés tandis que la fréquence augmente avec le débit.
- A l'aide de l'étude numérique, nous avons constaté que la longueur d'établissement diminue avec le nombre de Ra (le front avance vers l'entrée) et augmente avec Pe (le front avance vers la sortie).
- L'étude numérique ne vérifie la loi d'échelle, pour approximer la longueur d'établissement établie par A. Couairon et J.M. Chomaz, que pour le cas Newtonien avec des débits filtrants très bas.

- Les résultats de Dufour et al. pour le cas Newtonien, concernant l'influence du débit filtrant et le Rayleigh sur la fréquence d'oscillation, ont été vérifiés à la fois numériquement et théoriquement.
- L'étude numérique prévoit, avec une bonne incertitude, les fréquences d'oscillation et les vitesses de phase pour les cas au-dessus du seuil absolu en ce qui concerne les fluides Newtoniens, faiblement viscoélastiques et fortement viscoélastiques.
- La vitesse de phase pour le cas Newtonien est égale à la valeur du nombre de Péclet.
- Pour les Ra plus élevés, le nombre de Pe (le débit filtrant) n'a pratiquement pas d'effet sur le nombre de Nu .

5 Annexes

Annexe 1

Dans le chapitre 2, nous avons trouvé le seuil d'instabilité absolue corrélé à la condition d'instabilité marginale ($\omega_i = 0$) et donc nous avons $\omega = \omega_r$. Cependant, nous savons que, dans le cas général, pour l'instabilité absolue on a :

$$\omega = \omega_r + i\omega_i \text{ avec } \omega_i > 0$$

Rappelons les deux conditions nécessaires à l'obtention d'une instabilité absolue :

$$\begin{cases} D(\omega, k, \lambda_1, \lambda_2, Ra, Pe) = 0 \\ \frac{\partial \omega(k)}{\partial k} = 0. \end{cases} \quad (A1-1)$$

Donc en injectant $\omega = \omega_r + i\omega_i$ et $k = k_r + ik_i$ dans la partie réelle et imaginaire de l'équation de dispersion nous trouvons les équations (A1-2) et (A1-3) respectivement pour satisfaire à la première condition:

$$\begin{aligned} & -k_i^4 + 6k_i^2k_r^2 - k_r^4 - k_i^3Pe + 3k_ik_r^2Pe + 2k_i^2\pi^2 - 2k_r^2\pi^2 + k_iPe\pi^2 - \pi^4 - k_i^2Ra + \\ & k_r^2Ra + k_i^2\omega_i - k_r^2\omega_i - \pi^2\omega_i - 2k_ik_r\omega_r - k_i^2Ra\omega_i\lambda_1 + k_r^2Ra\omega_i\lambda_1 + 2k_ik_rRa\omega_r\lambda_1 - \\ & k_i^4\omega_i\Gamma\lambda_1 + 6k_i^2k_r^2\omega_i\Gamma\lambda_1 - k_r^4\omega_i\Gamma\lambda_1 - k_i^3Pe\omega_i\Gamma\lambda_1 + 3k_ik_r^2Pe\omega_i\Gamma\lambda_1 + \\ & 2k_i^2\pi^2\omega_i\Gamma\lambda_1 - 2k_r^2\pi^2\omega_i\Gamma\lambda_1 + k_iPe\pi^2\omega_i\Gamma\lambda_1 - \pi^4\omega_i\Gamma\lambda_1 + k_i^2\omega_i^2\Gamma\lambda_1 - k_r^2\omega_i^2\Gamma\lambda_1 - \\ & \pi^2\omega_i^2\Gamma\lambda_1 + 4k_i^3k_r\omega_r\Gamma\lambda_1 - 4k_ik_r^3\omega_r\Gamma\lambda_1 + 3k_i^2k_rPe\omega_r\Gamma\lambda_1 - k_r^3Pe\omega_r\Gamma\lambda_1 - \\ & 4k_ik_r\pi^2\omega_r\Gamma\lambda_1 - k_rPe\pi^2\omega_r\Gamma\lambda_1 - 4k_ik_r\omega_i\omega_r\Gamma\lambda_1 - k_i^2\omega_r^2\Gamma\lambda_1 + k_r^2\omega_r^2\Gamma\lambda_1 + \\ & \pi^2\omega_r^2\Gamma\lambda_1 = 0 \end{aligned} \quad (A1-2)$$

$$\begin{aligned} & 4k_i^3k_r - 4k_ik_r^3 + 3k_i^2k_rPe - k_r^3Pe - 4k_ik_r\pi^2 - k_rPe\pi^2 + 2k_ik_rRa - 2k_ik_r\omega_i - \\ & k_i^2\omega_r + k_r^2\omega_r + \pi^2\omega_r + 2k_ik_rRa\omega_i\lambda_1 + k_i^2Ra\omega_r\lambda_1 - k_r^2Ra\omega_r\lambda_1 + 4k_i^3k_r\omega_i\Gamma\lambda_1 - \\ & 4k_ik_r^3\omega_i\Gamma\lambda_1 + 3k_i^2k_rPe\omega_i\Gamma\lambda_1 - k_r^3Pe\omega_i\Gamma\lambda_1 - 4k_ik_r\pi^2\omega_i\Gamma\lambda_1 - k_rPe\pi^2\omega_i\Gamma\lambda_1 - \\ & 2k_ik_r\omega_i^2\Gamma\lambda_1 + k_i^4\omega_r\Gamma\lambda_1 - 6k_i^2k_r^2\omega_r\Gamma\lambda_1 + k_r^4\omega_r\Gamma\lambda_1 + k_i^3Pe\omega_r\Gamma\lambda_1 - \\ & 3k_ik_r^2Pe\omega_r\Gamma\lambda_1 - 2k_i^2\pi^2\omega_r\Gamma\lambda_1 + 2k_r^2\pi^2\omega_r\Gamma\lambda_1 - k_iPe\pi^2\omega_r\Gamma\lambda_1 + \pi^4\omega_r\Gamma\lambda_1 - \\ & 2k_i^2\omega_i\omega_r\Gamma\lambda_1 + 2k_r^2\omega_i\omega_r\Gamma\lambda_1 + 2\pi^2\omega_i\omega_r\Gamma\lambda_1 + 2k_ik_r\omega_r^2\Gamma\lambda_1 = 0 \end{aligned} \quad (A1-3)$$

En appliquant la deuxième condition on a :

$$\begin{aligned} & -4k^3 - 3ik^2Pe - 4k\pi^2 - iPe\pi^2 + 2kRa + 2ik\omega - 2ikRa\omega\lambda_1 + 4ik^3\omega\Gamma\lambda_1 - \\ & 3k^2Pe\omega\Gamma\lambda_1 + 4ik\pi^2\omega\Gamma\lambda_1 - Pe\pi^2\omega\Gamma\lambda_1 + 2k\omega^2\Gamma\lambda_1 = 0 \end{aligned} \quad (A1-4)$$

Cette condition doit s'appliquer à toutes les deux parties (réelle et imaginaire) de l'équation (A1-4) :

$$12k_i^2 k_r - 4k_r^3 + 6k_i k_r Pe - 4k_r \pi^2 + 2k_r Ra - 2k_r \omega_i - 2k_i \omega_r + 2k_r Ra \omega_i \lambda_1 + 2k_i Ra \omega_r \lambda_1 + 12k_i^2 k_r \omega_i \Gamma \lambda_1 - 4k_r^3 \omega_i \Gamma \lambda_1 + 6k_i k_r Pe \omega_i \Gamma \lambda_1 - 4k_r \pi^2 \omega_i \Gamma \lambda_1 - 2k_r \omega_i^2 \Gamma \lambda_1 + 4k_i^3 \omega_r \Gamma \lambda_1 - 12k_i k_r^2 \omega_r \Gamma \lambda_1 + 3k_i^2 Pe \omega_r \Gamma \lambda_1 - 3k_r^2 Pe \omega_r \Gamma \lambda_1 - 4k_i \pi^2 \omega_r \Gamma \lambda_1 - Pe \pi^2 \omega_r \Gamma \lambda_1 - 4k_i \omega_i \omega_r \Gamma \lambda_1 + 2k_r \omega_r^2 \Gamma \lambda_1 = 0 \quad (A1-5)$$

$$4k_i^3 - 12k_i k_r^2 + 3k_i^2 Pe - 3k_r^2 Pe - 4k_i \pi^2 - Pe \pi^2 + 2k_i Ra - 2k_i \omega_i + 2k_r \omega_r + 2k_i Ra \omega_i \lambda_1 - 2k_r Ra \omega_r \lambda_1 + 4k_i^3 \omega_i \Gamma \lambda_1 - 12k_i k_r^2 \omega_i \Gamma \lambda_1 + 3k_i^2 Pe \omega_i \Gamma \lambda_1 - 3k_r^2 Pe \omega_i \Gamma \lambda_1 - 4k_i \pi^2 \omega_i \Gamma \lambda_1 - Pe \pi^2 \omega_i \Gamma \lambda_1 - 2k_i \omega_i^2 \Gamma \lambda_1 - 12k_i^2 k_r \omega_r \Gamma \lambda_1 + 4k_r^3 \omega_r \Gamma \lambda_1 - 6k_i k_r Pe \omega_r \Gamma \lambda_1 + 4k_r \pi^2 \omega_r \Gamma \lambda_1 + 4k_r \omega_i \omega_r \Gamma \lambda_1 + 2k_i \omega_r^2 \Gamma \lambda_1 = 0 \quad (A1-6)$$

Nous pouvons choisir des valeurs propre pour Ra, Pe, Γ et λ_1 et résoudre le système à quatre équations ((A1-2), (A1-3), (A1-5) et (A1-6)) quatre inconnues $k_r, k_i, \omega_r, \omega_i$.

Annexe 2

Les fréquences théoriques et numériques pour différents Pe pour un fluide Newtonien

Tableau 0-1 Les fréquences théoriques et numériques pour Pe=0.75

Ra	ω_{th}	ω_{num}
$Ra_A=39.6185$	$\omega_A=2.36036$	
50	2.6348	2.695407
55	2.74801	2.802218
60	2.85201	2.833633
80	3.20167	2.858765
140	3.91832	3.7698

Tableau 0-2 Les fréquences théoriques et numériques pour Pe=1

Ra	ω_{th}	ω_{num}
$Ra_A=39.7269$	$\omega_A=3.1514$	
50	3.51271	3.436801

55	3.66359	3.449367
60	3.8022	3.443084
80	4.26833	4.065101
140	5.22385	5.321701

Tableau 0-3 Les fréquences théoriques et numériques pour $Pe=1.5$

Ra	ω_{th}	ω_{num}
$Ra_A=40.0332$	$\omega_A=4.74494$	
50	5.26754	5.0264
55	5.49353	5.233739
60	5.70123	5.321701
80	6.40006	5.962567
140	7.83334	8.161617

Tableau 0-4 Les fréquences théoriques et numériques pour $Pe=2$

Ra	ω_{th}	ω_{num}
$Ra_A=40.4548$	$\omega_A=6.3586$	
50	7.0205	6.647414
55	7.32123	6.917583
60	7.59777	7.238016
80	8.52889	7.834901
140	10.4399	10.98268

Tableau 0-5 Les fréquences théoriques et numériques pour $Pe=2.5$

Ra	ω_{th}	ω_{num}
$Ra_A=40.9854$	$\omega_A=7.99724$	
50	8.7709	8.513465
55	9.1459	8.771068
60	9.49097	8.789917
80	10.6538	10.0528
140	13.0426	13.81632

Annexe 3

Fréquence des structures pleinement établies pour un fluide Newtonien (numérique et théorique)

Tableau 0-1 Les pulsations théoriques et numériques pour $Pe=0.75$ près du seuil absolu

$Pe=0.75$	Ra	ω_{th}	ω_{num}
	$Ra_A=39.6185$	$\omega_A=2.36036$	
$Ra+0.2Ra_A$	40.41087	2.38365	2.363665
$Ra+0.4Ra_A$	41.20324	2.40648	2.412672
$Ra+0.6Ra_A$	41.99561	2.42892	2.532049
$Ra+0.8Ra_A$	42.78798	2.45091	2.543987
$Ra+1Ra_A$	43.58035	2.47251	2.733733

Tableau A3-2 Les pulsations théoriques et numériques pour $Pe=1$ près du seuil absolu

$Pe=1$	Ra	ω_{th}	ω_{num}
	$Ra_A=39.7269$	$\omega_A=3.1514$	
$Ra+0.2Ra_A$	40.521	3.1824	3.253337
$Ra+0.4Ra_A$	41.315	3.2128	2.506917
$Ra+0.6Ra_A$	42.11	3.24268	3.26339
$Ra+0.8Ra_A$	42.905	3.272	3.428005
$Ra+1Ra_A$	43.699	3.30077	3.426748

Tableau 0-3 Les pulsations théoriques et numériques pour $Pe=1.5$ près du seuil absolu

$Pe=1.5$	Ra	ω_{th}	ω_{num}
	$Ra_A=40.0332$	$\omega_A=4.74494$	
$Ra+0.2Ra_A$	40.83386	4.791	4.674552
$Ra+0.4Ra_A$	41.63453	4.83677	4.704082
$Ra+0.6Ra_A$	42.43519	4.88144	4.80461
$Ra+0.8Ra_A$	43.23586	4.92525	4.839167
$Ra+1Ra_A$	44.03652	4.96835	4.742408

Tableau 0-4 Les pulsations théoriques et numériques pour $Pe=2$ près du seuil absolu

$Pe=2$	Ra	ω_{th}	ω_{num}
	$Ra_A=40.4548$	$\omega_A=6.3586$	
$Ra+0.2Ra_A$	41.2639	6.4201	6.477773
$Ra+0.4Ra_A$	42.07299	6.48059	6.314415
$Ra+0.6Ra_A$	42.88209	6.53991	6.289283
$Ra+0.8Ra_A$	43.69118	6.59817	6.295566
$Ra+1Ra_A$	44.50028	6.65542	6.314415

Tableau 0-5 Les pulsations théoriques et numériques pour $Pe=2.5$ près du seuil absolu

$Pe=2.5$	Ra	ω_{th}	ω_{num}
	$Ra_A=40.9854$	$\omega_A=7.99724$	
$Ra+0.2Ra_A$	41.80511	8.073	7.910297
$Ra+0.4Ra_A$	42.62482	8.14898	7.973127
$Ra+0.6Ra_A$	43.44452	8.22287	7.910297
$Ra+0.8Ra_A$	44.26423	8.29547	7.973127
$Ra+1Ra_A$	45.08394	8.36674	8.1679

Annexe 4

Vitesse de phase numérique pour un fluide Newtonien (numérique et théorique)

Tableau 0-1 Les paramètres trouvés numériquement et théoriquement pour un fluide Newtonien avec $Pe=0.75$ fixe

Ra	k_{-num}	k_{-th}	V_{num}	V_{th}	ω_{num}	ω_{th}
41.20324	3.179656	3.20841	0.758784	0.750054	2.412672	2.40648
41.996	3.186105	3.23823	0.794716	0.750076	2.532049	2.42892
42.788	3.203978	3.26748	0.794009	0.750092	2.543987	2.45091
43.58	3.197455	3.2962	0.854972	0.750109	2.733733	2.47251
50	3.379774	3.51216	0.797511	0.750194	2.695407	2.6348
55	3.446517	3.66291	0.813058	0.750226	2.802218	2.74801
60	3.61092	3.80144	0.78474	0.750245	2.833633	2.85201
80	4.017263	4.26744	0.71162	0.750255	2.858765	3.20167
140	5.112286	5.22296	0.7374	0.750211	3.7698	3.91832

Tableau 0-2 Les paramètres trouvés numériquement et théoriquement pour un fluide Newtonien avec $Pe=1$ fixe

Ra	$k\text{-num}$	$k\text{-th}$	$V\text{num}$	$V\text{th}$	ω_{num}	ω_{th}
40.521	3.122763	3.1821	1.041814	1.000094	3.253337	3.1824
42.11	3.184491	3.24206	1.024776	1.000191	3.26339	3.24268
42.905	3.19096	3.27125	1.074286	1.000229	3.428005	3.272
43.699	3.225359	3.29989	1.062439	1.000267	3.426748	3.30077
50	3.356303	3.51109	1.023984	1.000461	3.436801	3.51271
55	3.446517	3.66162	1.000827	1.000538	3.449367	3.66359
60	3.600573	3.8	0.95626	1.000579	3.443084	3.8022
80	3.969046	4.26574	1.024201	1.000607	4.065101	4.26833
140	5.30211	5.22125	1.003695	1.000498	5.321701	5.22385

Tableau A4-3 Les paramètres trouvés numériquement et théoriquement pour un fluide Newtonien avec $Pe=1.5$ fixe

Ra	$k\text{num}$	$k\text{th}$	$V\text{num}$	$V\text{th}$	ω_{num}	ω_{th}
41.263	3.152534	3.2077	2.054783	2.001465	6.477773	6.4201
42.073	3.166835	3.23738	1.99392	2.001801	6.314415	6.48059
42.882	3.19096	3.26652	1.970969	2.002103	6.289283	6.53991
43.691	3.207249	3.29517	1.962918	2.002376	6.295566	6.59817
44.5	3.203978	3.32335	1.970805	2.002624	6.314415	6.65542
50	3.313819	3.50359	2.005968	2.003802	6.647414	7.0205
55	3.486681	3.65263	1.984002	2.004372	6.917583	7.32123
60	3.543711	3.79002	2.042496	2.004678	7.238016	7.59777
80	4.007015	4.25409	1.955296	2.004868	7.834901	8.52889
140	5.655266	5.20957	1.942028	2.003985	10.98268	10.4399

Tableau 0-4 Les paramètres trouvés numériquement et théoriquement pour un fluide Newtonien avec $Pe=2$ fixe

Ra	$k\text{num}$	$k\text{th}$	$V\text{num}$	$V\text{th}$	ω_{num}	ω_{th}
41.263	3.152534	3.2077	2.054783	2.001465	6.477773	6.4201
42.073	3.166835	3.23738	1.99392	2.001801	6.314415	6.48059
42.882	3.19096	3.26652	1.970969	2.002103	6.289283	6.53991
43.691	3.207249	3.29517	1.962918	2.002376	6.295566	6.59817
44.5	3.203978	3.32335	1.970805	2.002624	6.314415	6.65542
50	3.313819	3.50359	2.005968	2.003802	6.647414	7.0205

55	3.486681	3.65263	1.984002	2.004372	6.917583	7.32123
60	3.543711	3.79002	2.042496	2.004678	7.238016	7.59777
80	4.007015	4.25409	1.955296	2.004868	7.834901	8.52889
140	5.655266	5.20957	1.942028	2.003985	10.98268	10.4399

Tableau A4-5 Les paramètres trouvés numériquement et théoriquement pour un fluide Newtonien avec $Pe=2.5$ fixe

Ra	k_{num}	k_{th}	V_{num}	V_{th}	ω_{num}	ω_{th}
41.805	3.179656	3.22475	2.487784	2.503707	7.910297	8.07383
42.624	3.182877	3.25401	2.505006	2.504289	7.973127	8.14898
43.444	3.213811	3.28283	2.461345	2.504811	7.910297	8.22287
44.264	3.228674	3.31119	2.469474	2.505284	7.973127	8.29547
45.083	3.231996	3.33907	2.5272	2.50571	8.1679	8.36674
50	3.350933	3.49776	2.540625	2.507576	8.513465	8.7709
55	3.452198	3.64578	2.54072	2.508626	8.771068	9.1459
60	3.586187	3.78247	2.451048	2.509199	8.789917	9.49097
80	4.037918	4.24536	2.4896	2.509516	10.0528	10.6538
140	5.76422	5.20083	2.39691	2.507792	13.81632	13.0426

Annexe 5

Comparaison des résultats numériques et théoriques dans la zone faiblement viscoélastique

Tableau A5-1 Les paramètres trouvés numériquement et théoriquement pour le couple $\lambda_1=0.03$ et $\Gamma=0.75$ avec $Pe=0.75$ fixe

Ra	ω_{r-num}	ω_{r-th}	k_{r-num}	k_{r-th}	$V_{\varphi-num}$	$V_{\varphi-th}$	Nu
43	2.852482	2.92678	3.24033	3.30206	0.880306	0.88635	1.11015
45	2.971859	3.0098	3.25207	3.38631	0.913836	0.888814	1.19345
50	3.128934	3.19649	3.407267	3.58309	0.918312	0.892104	1.37975
60	3.45565	3.49593	3.635995	3.92806	0.9504	0.889989	1.689
80	3.7698	3.90606	4.141727	4.48133	0.9102	0.87163	2.1581

Tableau 0-2 Les paramètres trouvés numériquement et théoriquement pour le couple $\lambda_1=0.03$ et $\Gamma=0.75$ avec $Pe=1$ fixe

Ra	ω_{r-num}	ω_{r-th}	k_{r-num}	k_{r-th}	$V_{\varphi-num}$	$V_{\varphi-th}$	Nu
43	3.757234	3.90399	3.225359	3.30379	1.164904	1.18167	1.11
45	3.7698	4.01436	3.23866	3.3877	1.164	1.184981	1.194
50	4.077667	4.26257	3.356303	3.58382	1.214928	1.189393	1.381
60	4.3981	4.66092	3.621326	3.92792	1.2145	1.186613	1.691
80	5.158343	5.20719	4.138999	4.48035	1.246278	1.162228	2.157

Tableau A5-3 Les paramètres trouvés numériquement et théoriquement pour le couple $\lambda_1=0.03$ et $\Gamma=0.75$ avec $Pe=1.5$ fixe

Ra	ω_{r-num}	ω_{r-th}	k_{r-num}	k_{r-th}	$V_{\varphi-num}$	$V_{\varphi-th}$	Nu
43	5.704964	5.86272	3.215455	3.30848	1.774232	1.772028	1.1115
45	5.711247	6.02691	3.289529	3.39148	1.73619	1.777074	1.1955
50	5.96885	6.39628	3.365292	3.58577	1.77365	1.783795	1.383
60	6.59715	6.98993	3.646547	3.92746	1.80915	1.779758	1.6925
80	7.847467	7.80695	4.0985	4.47753	1.914717	1.743584	2.158

Tableau 0-4 Les paramètres trouvés numériquement et théoriquement pour le couple $\lambda_1=0.03$ et $\Gamma=0.75$ avec $Pe=2$ fixe

Ra	ω_{r-num}	ω_{r-th}	k_{r-num}	k_{r-th}	$V_{\varphi-num}$	$V_{\varphi-th}$	Nu
43	7.395091	7.82892	3.21875	3.31451	2.297504	2.362014	1.1115
45	7.828618	8.04534	3.287807	3.39632	2.381106	2.36884	1.1975
50	8.155334	8.53247	3.414674	3.58821	2.38832	2.377918	1.3865
60	8.783634	9.31703	3.633892	3.92667	2.417142	2.372756	1.6945
80	10.3481	10.4021	4.21961	4.47353	2.452383	2.325255	2.1605

Tableau 0-5 Les paramètres trouvés numériquement et théoriquement pour le couple $\lambda_1=0.03$ et $\Gamma=0.75$ avec $Pe=2.5$ fixe

Ra	ω_{r-num}	ω_{r-th}	k_{r-num}	k_{r-th}	$V_{\varphi-num}$	$V_{\varphi-th}$	Nu
45	9.537594	10.0707	3.329624	3.40184	2.864466	2.960369	1.2
50	9.964838	10.6713	3.471271	3.59086	2.87066	2.971795	1.39
60	10.98897	11.6413	3.698058	3.9254	2.971551	2.965634	1.6985
80	13.18173	12.9912	4.34509	4.46831	3.033708	2.907408	2.1635

Annexe 6

Comparaison des résultats numériques et théoriques dans la zone fortement viscoélastique

Les tableaux ci-dessous récapitulent les résultats obtenus pour les fréquences réelles, les nombres d'onde, les vitesses de phase et les Nu moyens pour quelques Pe fixes.

Tableau 0-1 Les paramètres trouvés numériquement et théoriquement pour le couple $\lambda I=0.60$ et $\Gamma=0.75$ avec $Pe=0.75$ fixe

Ra	ω_{r-num}	ω_{r-th}	k_{r-num}	k_{r-th}	Nu	$V_{\varphi-th}$	$V_{\varphi-num}$
33	4.316421	4.37644	3.158874	3.23029	1.0505	1.354813	1.366443
35	4.680835	4.12684	3.287807	3.30397	1.161	1.249055	1.423695
40	4.71225	3.42178	3.438971	3.51901	1.3995	0.97237	1.37025
50	5.020117	3.20424	3.800968	3.91679	1.78	0.818078	1.320747
70	5.6547	3.47819	4.318213	4.49594	2.3575	0.773629	1.3095

Tableau A6-2 Les paramètres trouvés numériquement et théoriquement pour le couple $\lambda I=0.60$ et $\Gamma=0.75$ avec $Pe=1$ fixe

Ra	ω_{r-num}	ω_{r-th}	k_{r-num}	k_{r-th}	Nu	$V_{\varphi-th}$	$V_{\varphi-num}$
35	5.038966	4.89022	3.296432	3.32238	1.1775	1.471903	1.528612
40	5.34055	4.4233	3.455996	3.52954	1.4145	1.253223	1.5453
45	5.648417	4.25094	3.627598	3.73421	1.616	1.138377	1.557068
50	5.962567	4.26339	3.748807	3.91703	1.792	1.088424	1.590524
70	6.59715	4.63635	4.318213	4.49445	2.3645	1.031572	1.52775

Tableau A6-3 Les paramètres trouvés numériquement et théoriquement pour le couple $\lambda I=0.60$ et $\Gamma=0.75$ avec $Pe=1.5$ fixe

Ra	ω_{r-num}	ω_{r-th}	k_{r-num}	k_{r-th}	Nu	$V_{\varphi-th}$	$V_{\varphi-num}$
33	6.245302	6.45653	3.187722	3.26895	1.088	1.975108	1.959174
35	6.691395	6.44721	3.326098	3.34752	1.1985	1.925966	2.011785
40	6.905017	6.32491	3.469354	3.54618	1.4335	1.783584	1.990289
50	7.533317	6.36138	3.728783	3.9171	1.8085	1.624002	2.020315

70	8.475767	6.94927	4.384508	4.49016	2.3725	1.547666	1.933117
----	----------	---------	----------	---------	--------	----------	----------

Tableau 0-4 Les paramètres trouvés numériquement et théoriquement pour le couple $\lambda_1=0.60$ et $\Gamma=0.75$ avec $Pe=2$ fixe

Ra	ω_{r-num}	ω_{r-th}	k_{r-num}	k_{r-th}	Nu	$V_{\varphi-th}$	$V_{\varphi-num}$
33	7.847467	7.93016	3.231996	3.28274	1.098	2.415714	2.428056
35	7.85375	8.02527	3.340245	3.36242	1.2095	2.386754	2.35125
40	8.15363	8.15363	3.471271	3.55695	1.4445	2.292309	2.348889
50	9.104067	8.43026	3.854601	3.91606	1.816	2.15274	2.36187
70	10.36695	9.25614	4.437147	4.48412	2.3725	2.064204	2.3364

Tableau A6-5 Les paramètres trouvés numériquement et théoriquement pour le couple $\lambda_1=0.60$ et $\Gamma=0.75$ avec $Pe=2.5$ fixe

Ra	ω_{r-num}	ω_{r-th}	k_{r-num}	k_{r-th}	Nu	$V_{\varphi-th}$	$V_{\varphi-num}$
33	9.185746	9.4408	3.245351	3.29019	1.0985	2.869378	2.830432
35	9.4245	9.61769	3.33847	3.37043	1.1985	2.85355	2.823
40	10.04023	9.94564	3.486681	3.56265	1.449	2.791641	2.879596
50	10.6811	10.4713	3.838119	3.91335	1.819	2.675789	2.7829
70	12.25185	11.5553	4.434016	4.47628	2.3725	2.581452	2.76315

Tableau 0-6 Les paramètres trouvés numériquement et théoriquement pour le couple $\lambda_1=0.60$ et $\Gamma=0.75$ avec $Pe=4$ fixe

Ra	ω_{r-num}	ω_{r-th}	k_{r-num}	k_{r-th}	Nu	$V_{\varphi-th}$	$V_{\varphi-num}$
35	14.13675	14.4528	3.31907	3.36739	1.2035	4.291989	4.25925
37	14.4509	14.7818	3.403575	3.44468	1.3115	4.291197	4.2458
40	14.75877	15.2294	3.543711	3.55582	1.449	4.28295	4.164777
50	16.32952	16.4598	3.861709	3.89224	1.816	4.228876	4.228573
70	18.849	18.393	4.57278	4.4417	2.356	4.140982	4.122

Tableau 0-7 Les paramètres trouvés numériquement et théoriquement pour le couple $\lambda_1=0.60$ et $\Gamma=0.75$ avec $Pe=8$ fixe

Ra	ω_{r-num}	ω_{r-th}	k_{r-num}	k_{r-th}	Nu	$V_{\varphi-th}$	$V_{\varphi-num}$
40	28.2735	28.9895	3.50223	3.41192	1.289	8.496536	8.073

45	30.15212	30.4428	3.737656	3.57874	1.6115	8.506569	8.067119
50	31.72287	31.7566	3.907338	3.73387	1.7915	8.50501	8.118792
70	37.698	36.0409	4.650629	4.26535	2.322	8.449693	8.106

Annexe 7

Bilan énergétique

En termes d'énergie, trois sources entrent en jeu dans ce problème : l'énergie de dissipation, l'énergie thermique et l'énergie visco-thermique. L'énergie dissipative qui est une source stabilisante est opposée aux deux autres sources d'énergie. Nous essayons ici de séparer ces trois sources en utilisant les trois équations de continuité (A7-1), de Darcy généralisée (A7-2) et de conservation de l'énergie (A7-3). Cependant, ces équations sont écrites en remplaçant les perturbations qui se distinguent par le signe prime.

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0 \quad (\text{A7-1})$$

$$(1 + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial t})V' + (1 + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial t})(\vec{\nabla}p' - Ra\theta'\vec{e}_z) = 0 \quad (\text{A7-2})$$

En utilisant la partie linéaire de $\vec{V} \cdot \vec{\nabla}T = (Pe \vec{e}_x + \vec{V}') \cdot (\frac{\partial T_B}{\partial t} \vec{e}_z + \vec{\nabla}\theta')$ = $-w' + Pe \frac{\partial \theta'}{\partial x} + \dots$ nous pouvons écrire l'équation de l'énergie comme suit :

$$\frac{\partial \theta'}{\partial t} - w' + Pe \frac{\partial \theta'}{\partial x} - \vec{\nabla}^2 \theta' = 0 \quad (\text{A7-3})$$

Comme les solutions souhaitées se présentent sous la forme de rouleaux transversaux progressifs ($k_y = 0$), les perturbations sont écrites sous la forme suivante en mode de Fourier :

$$[u', w', \theta', p'] = [u_1(z) = u_1 \cos(\pi z), w_1(z) = w_1 \sin(\pi z), \theta_1(z) = \theta_1 \sin(\pi z), p_1(z) = p_1 \cos(\pi z)] e^{i k_x - i \omega t}$$

En remplaçant ces perturbations dans les équations (A7-1) à (A7-3), nous obtenons les équations suivantes (équations (A7-4) à (A7-7)) :

$$(A7 - 1) \rightarrow i k u_1 + D w_1 = 0 \quad (\text{A7-4})$$

$$\text{Suivant X: } (A7 - 2) \rightarrow (1 - i \omega \lambda_2) u_1 + (1 - i \omega \lambda_1) (i k p_1) = 0 \quad (\text{A7-5})$$

$$\text{Suivant } Z: (A7-2) \rightarrow (1 - i\omega\lambda_2)w_1 + (1 - i\omega\lambda_1)(Dp_1 - Ra\theta_1) = 0 \quad (A7-6)$$

$$(A7-2) \rightarrow -i\omega\theta_1 - w_1 + ikPe\theta_1 + (k^2 + \pi^2)\theta_1 = 0 \quad (A7-7)$$

$$(A7-4) \rightarrow u_1 = \frac{-\pi w_1 \cos(\pi z)}{ik} \quad (A7-8)$$

$$(A7-7) \rightarrow w_1 = -i\omega\theta_1 + ikPe\theta_1 + (k^2 + \pi^2)\theta_1 \quad (A7-9)$$

$$\theta_1 = \frac{w_1 \sin(\pi z)}{-i\omega + ikPe + (k^2 + \pi^2)} \quad (A7-10)$$

En multipliant l'équation (A7-5) par u_1^* et l'équation (A7-6) par w_1^* nous obtenons:

$$(A7-5) \rightarrow (1 - i\omega\lambda_2)|u_1|^2 + (1 - i\omega\lambda_1)(ik p_1 u_1^*) = 0 \quad (A7-11)$$

$$(A7-6) \rightarrow (1 - i\omega\lambda_2)|w_1|^2 + (1 - i\omega\lambda_1)(w_1^* D p_1 - Ra\theta_1 w_1^*) = 0 \quad (A7-12)$$

En additionnant l'équation (A7-11) et (A7-12):

$$(1 - i\omega\lambda_2)(|u_1|^2 + |w_1|^2) + (1 - i\omega\lambda_1)(ik p_1 u_1^* + w_1^* D p_1 - Ra\theta_1 w_1^*) = 0 \quad (A7-13)$$

En utilisant le complexe conjugué de l'équation (A7-13) nous obtenons :

$$-iku_1^* + Dw_1^* = 0 \quad (A7-14)$$

$$p_1 Dw_1^* + w_1^* D p_1 = D(p_1 w_1^*) \quad (A7-15)$$

$$\int_0^1 D(p_1 w_1^*) dz = [p_1 w_1^*]_0^1 = 0 \quad (A7-16)$$

$$w_1^* = w_1 = 0 \text{ à } z = 0 \text{ et } 1$$

En remplaçant (A7-16) dans (A7-13) nous obtenons :

$$(1 - i\omega\lambda_2) \int_0^1 (|u_1|^2 + |w_1|^2) dz - (1 - i\omega\lambda_1) Ra \int_0^1 \theta_1 w_1^* dz = 0 \quad (A7-17)$$

En considérant la partie réelle de (A7-17), nous avons :

$$(1 + i\omega\lambda_2) \int_0^1 (|u_1|^2 + |w_1|^2) dz - (1 + i\omega\lambda_1) Ra \int_0^1 Re[\theta_1 w_1^*] dz + i\omega_r \lambda_1 Ra \int_0^1 Im[\theta_1 w_1^*] dz = 0 \quad (A7-18)$$

Comme nous nous intéressons au seuil d'instabilité, nous pouvons supposer :

$$\omega_i = 0$$

$$- \int_0^1 (|u_1|^2 + |w_1|^2) dz + Ra_c \int_0^1 Re[\theta_1 w_1^*] dz + \omega_c \lambda_1 Ra_c \int_0^1 Im[\theta_1 w_1^*] dz = 0 \quad (A7-19)$$

En séparant les termes existants dans l'équation (A7-19), nous pouvons distinguer trois termes d'énergie, à savoir l'énergie de dissipation, l'énergie visco-thermique et l'énergie thermique. Comme la dissipation est une énergie stabilisante, les énergies sont normalisées en fonction de celle-ci ; nous obtenons par conséquent l'équation (A7-

21). Cependant, compte tenu de l'influence de la vitesse du fluide cachée dans θ_1 , nous ne pouvons donc pas affirmer que (E_{TV}) et (E_T) sont purement représentatifs des énergies visco-thermiques et thermiques normalisées.

$$E_{TV} + E_T + E_D = 0 \quad (A7-20)$$

$$\frac{E_{TV}}{E_D} + \frac{E_T}{E_D} = -1$$

$$\widetilde{E}_{TV} + \widetilde{E}_T = -1 \quad (A7-21)$$

La figure A7-1 illustre la variation des énergies normalisées en tenant compte du débit de fluide pour les différents temps de relaxation dans la zone faiblement viscoélastique. Nous pouvons d'emblée constater que, dans un premier temps, en absence de tout débit de fluide ($Pe = 0$), l'énergie thermique est maximale et que la valeur absolue de l'énergie visco-thermale commence à augmenter à partir de 0 avec la diminution simultanée de la valeur absolue de l'énergie thermique de -1. De plus, l'effet de l'écoulement est prépondérant pour des temps de relaxation plus élevés.

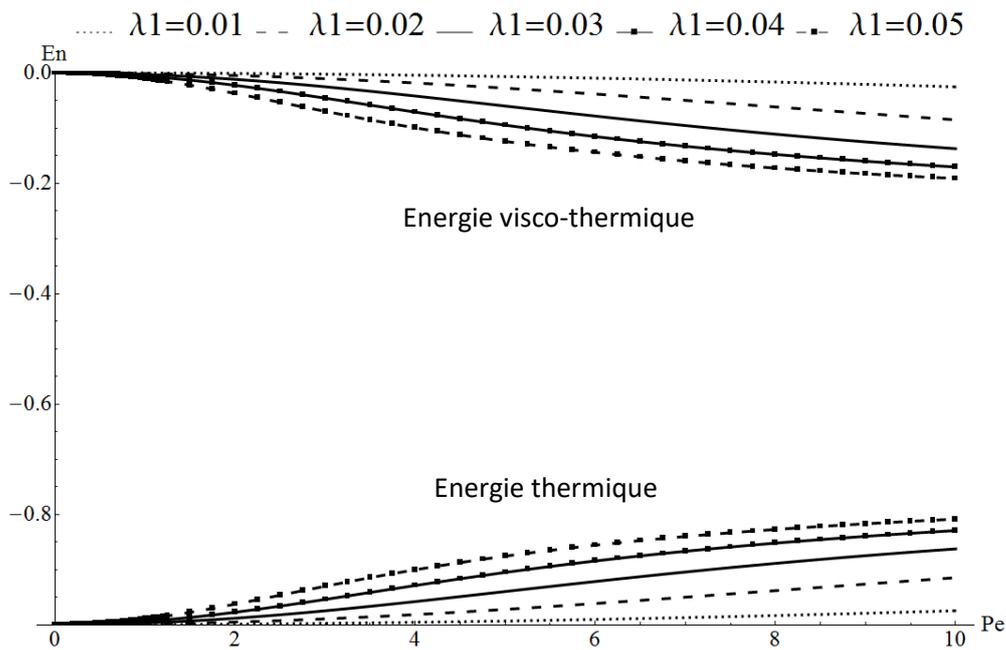


Figure A7-1 Comparaison des énergies normalisées en fonction du débit du fluide pour $\Gamma = 0,75$ et différents temps de relaxation dans la zone faiblement viscoélastique

Dans la zone fortement viscoélastique (figure A7-2), l'effet de viscoélasticité (temps de relaxation) est important même en absence de l'écoulement ($Pe = 0$). Cependant, dans la zone fortement viscoélastique, le débit du fluide perd de son influence lorsque le nombre de Péclet devient plus élevé. Comme sur la figure A7-2, à partir de $Pe=2$, les

énergies sont stabilisées et il n'y a pratiquement aucune variation de niveau des deux énergies.

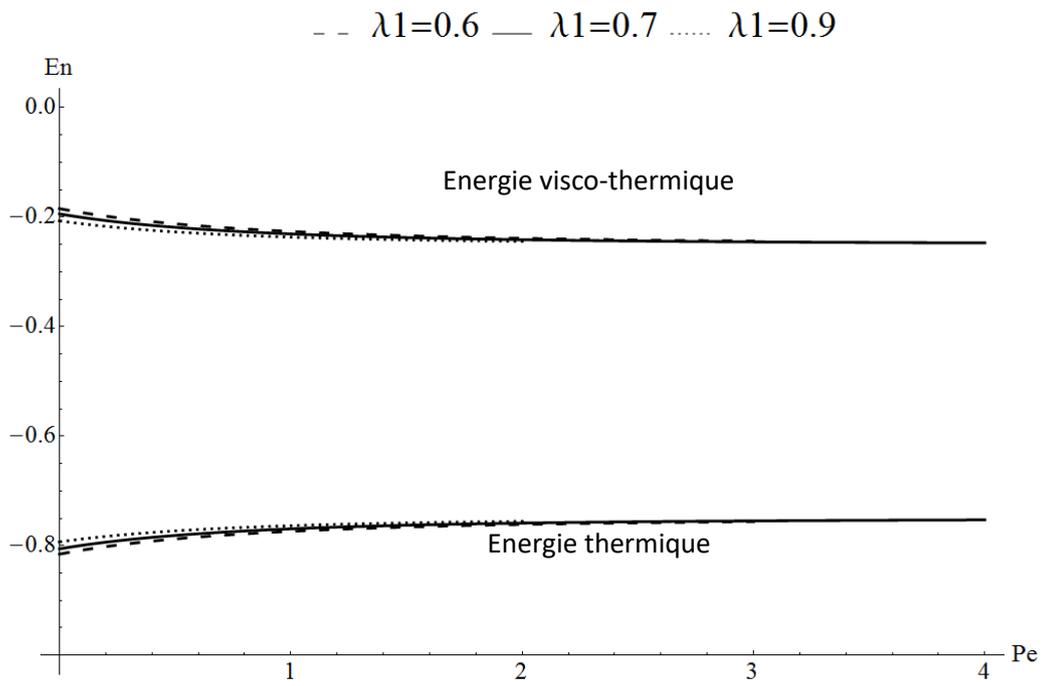


Figure 0-2 Comparaison des énergies normalisées en fonction du débit du fluide pour $\Gamma = 0,75$ et différents temps de relaxation dans la zone fortement viscoélastique

Table des figures

Figure 0-1 Cellules de convection dans l'instabilité de Rayleigh Bénard [2]	9
Figure 0-2 Représentation schématique de l'instabilité Rayleigh-Bénard.....	9
Figure 0-3 Les résultats de Fu et al. (2007) [11]	11
Figure 0-4 Diagramme générale de stabilité pour a) $\lambda_2 = 0.2$ dans le plan (λ_1, R) et pour b) $\lambda_1 = 0.5$ dans le plan (λ_2, R) [12]	12
Figure 0-5 Les résultats de Kolodner concernant la transition de l'instabilité oscillatoire (a) vers une instabilité stationnaire (b) [18]	14
Figure 0-6 Les courbes de fréquences numériques en fonction du débit et du nombre de Rayleigh tirées du travail de F. Dufour et al. (1998) [21]	15
Figure 1-1-1 Profil de la vitesse pour un fluide Newtonien sous une contrainte de cisaillement.....	19
Figure 1-2 Représentation de l'effet de Barus.....	21
Figure 1-1-3 Un cycle de l'effet de Kaye.....	22
Figure 1-1-4 Représentation de l'effet Weissenberg [30].....	23
Figure 1-1-5 Modèle de Maxwell.....	24
Figure 1-1-6 Modèle de Voigt	24
Figure 1-1-7 Modèle de Zener (représentation de Kelvin)	24
Figure 1-8 Modèle de Zener (représentation de Maxwell) ou le modèle du solide linéaire standard	24
Figure 1-9 Modèle de Burgers.....	24
Figure 1-10 Représentation du temps de relaxation	26
Figure 1-11 Représentation du temps de retardation.....	26
Figure 1-12 Exemples de milieux poreux (10 x magnifié) : (A) Sable de plage, (B) Grès ; (C) Calcaire ; (D) Pain de seigle ; (E) Bois ; (F) Poumon humain, [35].....	29
Figure 1-13 Les empilements différents des grains sphériques et leur porosité maximale [36]	30
Figure 1-14 Définition du VER, ou encore volume minimum d'homogénéisation, sur un exemple d'espace poreux [37].....	31
Figure 1-15 Configuration schématique du problème	33
Figure 2-1 Courbe de distinction des régimes faiblement viscoélastique où l'instabilité est stationnaire et fortement viscoélastique où elle devient oscillatoire à $Pe=0$	47
Figure 2-2 Rayleigh critique en fonction de Péclet pour $\Gamma=0.75$ et $\lambda_1=0.01$, $\lambda_1=0.03$ et $\lambda_1=0.05$ (fluides faiblement viscoélastiques).....	49
Figure 2-3 Fréquence critique en fonction de Péclet pour $\Gamma=0.75$ et $\lambda_1=0.01$, $\lambda_1=0.03$ et $\lambda_1=0.05$ (fluides faiblement viscoélastiques).....	50
Figure 2-4 Nombre d'onde critique en fonction de Péclet pour $\Gamma=0.75$ et $\lambda_1=0.01$, $\lambda_1=0.03$ et $\lambda_1=0.05$ (fluides faiblement viscoélastiques).....	50
Figure 2-5 Rayleigh critique en fonction de Péclet pour $\lambda_1=0.5$ et $\Gamma =0.92$, $\Gamma =0.95$ et $\Gamma =0.98$ (fluides faiblement viscoélastiques).....	52

Figure 2-6 Fréquence critique en fonction de Péclet pour $\lambda_1=0.5$ et $\Gamma =0.92, \Gamma =0.95$ et $\Gamma =0.98$ (fluides faiblement viscoélastiques).....	52
Figure 2-7 Nombre d'onde critique en fonction de Péclet pour $\lambda_1=0.5$ et $\Gamma =0.92, \Gamma =0.95$ et $\Gamma =0.98$ (fluides faiblement viscoélastiques).....	53
Figure 2-8 Comparaison des trois modes à l'aide de courbes de Rayleigh critique en fonction de Péclet pour le cas de $\Gamma=0.50$ avec $\lambda_1 =0.50$ (fluide fortement viscoélastique).....	54
Figure 2-9 Comparaison des trois modes à l'aide de courbes de fréquences critiques en fonction de Péclet pour le cas de $\Gamma=0.50$ avec $\lambda_1 =0.50$ (fluide fortement viscoélastique).....	55
Figure 2-10 Comparaison des trois modes à l'aide de courbes de nombres d'onde critiques en fonction de Péclet pour le cas de $\Gamma=0.50$ avec $\lambda_1 =0.5$ (fluide fortement viscoélastique).....	55
Figure 2-11 Rayleigh critique en fonction du nombre de Péclet pour les couples $\Gamma=0.75$ et $\lambda_1 =0.60, \lambda_1 =0.70$ et 0.90 (fluides fortement viscoélastiques).....	56
Figure 2-12 Fréquence critique en fonction du nombre de Péclet pour $\Gamma=0.75$ et $\lambda_1 =0.60, \lambda_1 =0.70$ et 0.90 (fluides fortement viscoélastiques).....	57
Figure 2-2-13 La comparaison entre les courbes de fréquence critique en fonction du nombre de Péclet pour $\Gamma=0.75$ et $\lambda_1 =0.6, \lambda_1 =0.7$ et 0.9 (fluides fortement viscoélastiques).....	58
Figure 2-14 Comparaison de courbes de Ra critique en fonction de Péclet pour $\lambda_1=0.50$ et Γ variant $\Gamma=0.3, \Gamma=0.5$ et $\Gamma=0.7$ (fluides fortement viscoélastiques).....	59
Figure 2-15 Comparaison de courbes de fréquence critique en fonction de Péclet (mode 2) pour $\lambda_1=0.5$ et Γ variant $\Gamma=0.30, \Gamma=0.50$ et $\Gamma=0.70$ (fluides fortement viscoélastiques).....	59
Figure 2-16 Comparaison de courbes de nombre d'onde critique en fonction de Péclet (mode 2) pour $\lambda_1=0.50$ et Γ variant, $\Gamma=0.30, \Gamma=0.50$ et $\Gamma=0.70$ (fluides fortement viscoélastiques).	60
Figure 2-17 Seuils d'apparition de rouleaux longitudinaux, transversaux et obliques (inclinés d'un angle $\alpha=\pi/4$ par rapport à la direction de l'écoulement principal), obtenus pour $\lambda_1=0.05$ et $\Gamma=0.75$	61
Figure 2-18 L'évolution d'une perturbation localisée en $x=0, t=0$ dans le plan (x,t) , a) stable, b) convectivement instable, c) absolument instable [15].	62
Figure 2-19 a) Régime stable, b) Régime convectivement instable et c) Régime absolument instable.....	63
Figure 2-20 La comparaison de courbes de Rayleigh au seuil d'instabilité absolue en fonction de Péclet avec $\Gamma=0.75$ pour les valeurs de $\lambda_1=0.01, \lambda_1=0.03$ et $\lambda_1=0.05$ (fluides faiblement viscoélastiques).	66
Figure 2-21 La comparaison de courbes de nombre d'onde réel au seuil d'instabilité absolue en fonction de Péclet avec $\Gamma=0.75$ pour les valeurs de $\lambda_1=0.01, \lambda_1=0.03$ et $\lambda_1=0.05$ (fluides faiblement viscoélastiques).	66
Figure 2-22 La comparaison de courbes de nombre d'onde imaginaire au seuil d'instabilité absolue en fonction de Péclet avec $\Gamma=0.75$ pour les valeurs de $\lambda_1=0.01, \lambda_1=0.03$ et $\lambda_1=0.05$ (fluides faiblement viscoélastiques).	67
Figure 2-23 Comparaison de courbes de Rayleigh au seuil d'instabilité absolu en fonction de Péclet pour $\lambda_1=0.5$ avec $\Gamma=0.92, \Gamma=0.95$ et $\Gamma=0.98$ (fluides faiblement viscoélastiques).....	68
Figure 2-24 La variation de Rayleigh au seuil absolue en fonction de Péclet pour les trois modes pour un fluide fortement viscoélastique ($\Gamma=0.75$ et $\lambda_1=0.7$).	69

Figure 2-25 La comparaison de courbes de Rayleigh au seuil d'instabilité absolue en fonction de Péclet avec $\Gamma=0.75$ pour les valeurs de temps de relaxation de $\lambda_1=0.60$, $\lambda_1=0.70$ et $\lambda_1=0.90$ (fluides fortement viscoélastiques)	70
Figure 2-26 Comparaison des courbes de Rayleigh au seuil d'instabilité absolu en fonction de Péclet pour $\lambda_1=0.50$ avec $\Gamma=0.30$, $\Gamma=0.50$ et $\Gamma=0.90$ (fluides fortement viscoélastiques)	71
Figure 2-27 Les branches spatiales sur le plan kr , ki pour un système stable ($Ra=25$), un système convectivement instable ($Ra=30.6$) et un système absolument instable ($Ra=34.9$) pour un fluide dans la zone fortement viscoélastique ($\Gamma=0.75$, $\lambda_1=0.30$) et $Pe=5$	72
Figure 2-28 Comparaison des instabilités convectives et absolues avec les courbes de Rayleigh critique en fonction de Péclet pour des paramètres de $\Gamma=0.75$ et $\lambda_1=0.01$, 0.03 et 0.05 (fluides faiblement viscoélastiques).....	73
Figure 2-29 Comparaison des instabilités convectives et absolues avec les courbes de Rayleigh critique en fonction de Péclet pour des paramètres de $\Gamma=0.75$ et $\lambda_1=0.60$, 0.70 et 0.90 (fluides fortement viscoélastiques)	74
Figure 3-1 Ra^A en fonction de Pe pour un fluide Newtonien.....	78
Figure 3-2 kr^A en fonction de Pe pour un fluide Newtonien.....	78
Figure 3-3 ωr^A en fonction de Pe pour un fluide Newtonien.....	79
Figure 3-4 La fréquence réelle en fonction de Pe loin du seuil pour un fluide Newtonien pour des Ra différents	79
Figure 3-5 Le nombre d'onde réel en fonction de Pe loin du seuil pour un fluide Newtonien pour des Ra différents.....	80
Figure 3-6 La fréquence réelle en fonction du nombre d'onde loin du seuil pour un fluide Newtonien pour des Ra différents	80
Figure 3-7 La fréquence réelle en fonction de Pe loin du seuil pour des Ra différents	81
Figure 3-8 La fréquence réelle en fonction de Pe loin du seuil pour un fluide faiblement viscoélastique ($\lambda_1=0.03$ et $\Gamma=0.75$) pour des Ra différents.....	82
Figure 3-9 Le nombre d'onde réel en fonction de Pe loin du seuil pour un fluide faiblement viscoélastique ($\lambda_1=0.03$ et $\Gamma=0.75$) à des Ra différents	82
Figure 3-10 La fréquence réelle en fonction du nombre d'onde loin du seuil absolu pour un fluide viscoélastique ($\lambda_1=0.03$ et $\Gamma=0.75$) à des Ra différents.....	83
Figure 3-3-11 La fréquence réelle en fonction de Pe loin du seuil absolu pour un fluide viscoélastique ($\lambda_1=0.03$ et $\Gamma=0.75$) à des Ra différents	83
Figure 3-12 Le nombre d'onde réel en fonction de Pe loin du seuil pour un fluide viscoélastique ($\lambda_1=0.60$ et $\Gamma=0.75$) à des Ra différents	84
Figure 3-13 La fréquence réelle en fonction du nombre d'onde loin du seuil absolu pour un fluide viscoélastique ($\lambda_1=0.60$ et $\Gamma=0.75$) à des Ra différents.....	85
Figure 3-3-14 La fréquence réelle en fonction de Pe loin du seuil absolu pour un fluide viscoélastique ($\lambda_1=0.60$ et $\Gamma=0.75$) à des Ra différents	85
Figure 4-1 Nombre de Nusselt moyen en fonction de Ra obtenu par les résultats numériques pour $Pe=1$ pour un fluide Newtonien (comparaison avec les résultats de Delache)	90
Figure 4-2 Nombre de Nusselt moyen en fonction de Ra obtenu par les résultats numériques pour $Pe=8$ pour un fluide Newtonien (comparaison avec les résultats de Delache)	91
Figure 4-3 La variation de Nu moyen en fonction du temps pour $Ra=31.25$	93

Figure 4-4 Profil de fonction de courant pour Ra= 31.25	93
Figure 4-5 Profil de température pour Ra= 31.25	93
Figure 4-6 La variation de Nu moyen en fonction du temps pour Ra=31.50	94
Figure 4-7 Profil de fonction de courant pour Ra= 31.50	94
Figure 4-8 Profil de température pour Ra= 31.50	94
Figure 4-9 La variation de Nu moyen en fonction du temps pour Ra=33	95
Figure 4-10 Profil de fonction de courant pour Ra= 33	95
Figure 4-11 Profil de température pour Ra= 33	95
Figure 4-12 La variation de Nu moyen en fonction du temps pour Ra=33	96
Figure 4-13 Profil de fonction de courant pour Ra= 33	96
Figure 4-14 Profil de température pour Ra= 33	96
Figure 4-15 Profil de la température pour un cas situé dans la zone fortement viscoélastique ($\Gamma=0.75$ et $\lambda_1=0.6$) avec Ra=50 et Pe=8 (rapport de forme=20)	97
Figure 4-16 Suivi temporel au point $x = 12L, z = 12H$	97
Figure 4-17 Suivi temporel au point $x = 12L, z = 14H$	97
Figure 4-18 Suivi temporel au point $x = 12L, z = 34H$	97
Figure 4-19 Suivi temporel au point $x = 28L, z = 12H$	97
Figure 4-20 Suivi temporel au point $x = 68L, z = 12H$	97
Figure 4-21 La fréquence réelle en fonction de Ra et Pe (une comparaison entre les résultats théoriques et numériques).....	98
Figure 4-22 La fréquence réelle en fonction de Ra pour cinq Péclet obtenue par Dufour et al. (Q=Pe dans leur travail) [21]	98
Figure 4-23 La fréquence réelle en fonction de Ra pour cinq Péclet près du seuil absolu (une comparaison entre les résultats théoriques et numériques)	99
Figure 4-24 La fréquence réelle en fonction de Péclet pour différents Ra supérieurs à RaA(une comparaison entre les résultats théoriques et numériques)	100
Figure 4-25 Vitesse de phase théorique et numérique en fonction de Ra pour différents Pe	101
Figure 4-26 La pulsation numérique et théorique pour différents Pe.....	103
Figure 4-27 La vitesse de phase numérique et théorique pour différents Pe.....	103
Figure 4-28 Nu moyen obtenu numériquement en fonction de Ra pour deux Pe différents	104
Figure 4-29 Pulsations numériques et théoriques en fonction de Ra pour différents Pe	105
Figure 4-30 Pulsations numériques et théoriques en fonction de Pe	106
Figure 4-31 Nu moyen obtenu numériquement en fonction de Ra pour trois Pe.....	107
Figure 4-32 La température au milieu ($y=1/2$) suivant x pour cinq temps différents à Pe=8 et Ra=53 ($Ra_A=52.135$) avec les profils de la fonction de courant φ et de la température T	108
Figure 4-33 Le front montrant la partie du canal où la convection s'installe pour le fluide faiblement viscoélastique de $\lambda_1=0.03$ et $\Gamma=0.75$ avec Pe=0.75 et Ra=42	109
Figure 4-34 La fonction de courant perturbée en fonction de $(Ra-Ra^A)$ pour un fluide Newtonien à Pe=1	110
Figure 4-35 La courbe numérique de $\psi^2 -(Ra-Ra^A)$ pour un fluide Newtonien à Pe=1.....	110
Figure 4-37 Température à $y=1/2$ le long du canal pour Pe=1, Ra=50 ($Ra_A = 39.726$)	111
Figure 4-38 Température à $y=1/2$ le long du canal pour Pe=2, Ra=50 ($Ra_A = 40.454$)	111
Figure 4-39 Température à $y=1/2$ le long du canal pour Pe=4, Ra=50 ($Ra_A = 43.160$)	112

Figure 4-40 Température à $y=1/2$ le long du canal pour $Pe=8$, $Ra=50$ ($Ra_A = 52.135$)	112
Figure 4-41 La température au milieu ($y=1/2$) suivant x pour cinq temps différents à $Pe=8$ et $Ra=50$ ($Ra_A =52.135$) avec les profils de la fonction de courant φ et de la température T	113
Figure 4-42 La température au milieu ($y=1/2$) suivant x pour cinq temps différents à $Pe=8$ et $Ra=53$ ($Ra_A =52.135$) avec les profils de la fonction de courant φ et de la température T	113
Figure 4-43 La température au milieu ($y=1/2$) suivant x pour cinq temps différents à $Pe=8$ et $Ra=60$ ($Ra_A =52.135$) avec les profils de la fonction de courant φ et de la température T	113
Figure 4-44 La température au milieu ($y=1/2$) suivant x pour cinq temps différents à $Pe=8$ et $Ra=70$ ($Ra_A =52.135$) avec les profils de la fonction de courant φ et de la température T	113
Figure 4-45 La température au milieu ($y=1/2$) suivant x pour cinq temps différents à $Pe=8$ et $Ra=80$ ($Ra_A =52.135$) avec les profils de la fonction de courant φ et de la température T	114
Figure 4-46 Le profil de fonction de courant pour a) un fluide Newtonien avec $RaA = 52.1350$, $RaC = 39.4784$, b) un fluide faiblement viscoélastique de $\lambda_1 = 0.03$ et $\Gamma = 0.75$ avec $RaA = 49.1295$, $RaC = 35.93552$, c) un fluide faiblement viscoélastique de $\lambda_1 = 0.05$, $\Gamma = 0.75$, $RaA = 45.6497$, $RaC = 33.4571$	114
Figure 4-47 $\Delta_{(\max/2)}$ numérique en fonction de Ra pour quatre nombres de Pe différents (fluide Newtonien).....	115
Figure 4-48 $\ln(\Delta_{(\max/2)})$ numérique en fonction de $\ln(Ra- Ra_A)$ pour quatre nombre de Pe différents (fluide Newtonien)	116
Figure 4-49 La longueur d'établissement numérique en fonction de Ra pour des Pe fixés (fluide Newtonien)	117
Figure 4-50 $\ln(\Delta_{\max/2})$ en fonction de $\ln(Ra- Ra_A)$ avec les résultats numériques.....	118
Figure 4-51 La longueur d'établissement en fonction de Ra pour un fluide faiblement viscoélastique ($\lambda_1 = 0.03$ et $\Gamma=0.75$)	119
Figure 4-52 $\ln(\Delta_{\max/2})$ en fonction de $\ln(Ra- Ra_A)$ pour un fluide faiblement viscoélastique ($\lambda_1 = 0.03$ et $\Gamma=0.75$).....	119
Figure 4-53 La longueur d'établissement en fonction de Ra pour un fluide dans la zone fortement viscoélastique de $\lambda_1 = 0.60$ et $\Gamma=0.75$	120
Figure 4-54 $\ln(\Delta_{\max/2})$ en fonction de $\ln(Ra- Ra_A)$ avec les résultats numériques pour un fluide dans la zone fortement viscoélastique de $\lambda_1 = 0.60$ et $\Gamma=0.75$	121
Figure A7-0-1 Comparaison des énergies normalisées en fonction du débit du fluide pour $\Gamma = 0,75$ et différents temps de relaxation dans la zone faiblement viscoélastique	138
Figure 0-2 Comparaison des énergies normalisées en fonction du débit du fluide pour $\Gamma = 0,75$ et différents temps de relaxation dans la zone fortement viscoélastique	139

Références

- [1] A. Getling, «Rayleigh-Bénard convection, structure and dynamics,» *advanced series in nonlinear dynamics*, vol. 11, n° 1ed Word Scientific, 1998.
- [2] « (<https://www.spektrum.de/lexikon/physik/rayleigh-benard-konvektion/12147>, s.d.),» [En ligne].
- [3] C. Horton et F. Rogers, «Convection currents in a porous medium,» *J.Appl. Phys.*,16, pp. 367-370, 1945.
- [4] E. Lapwood, «Convection of a fluid in a porous medium,» *Proc. Cambridge, Phil. Soc.*, 44, pp. 508-525, 1948.
- [5] D. A. Nield et A. Bejan, *Convection in Porous Media*, Springer, 2010.
- [6] J. K. Platten et J. C. Legros, *Convection in Liquids*, Springer-Verlag Berlin and Heidelberg GmbH & Co. K, 1984.
- [7] N. Rudraiah, P. Radhadevi et P. Kaloni, «Convection in a viscoelastic fluid-saturated sparsely packed porous layer,» *Canadian Journal of Physics* 68(12), pp. 1446-1453, 1990.
- [8] M. C. Kim, S. Baek, S. Kim et B. J. Chung, «Thermal instability of viscoelastic fluids in porous media,» *Int. J. Heat Mass transfer*, 46,, vol. 46, n° 126, pp. 5065-5072, 2003.
- [9] Z. Zhang, C. Fu et W. Tan, «Linear and nonlinear stability analyses of thermal convection for Oldroyd-B fluids in porous media heated from below,» *Physics of fluids*, vol. 20, n° 18, pp. 084103-1, 2008.
- [10] S. Hirata, G. Ella et M. N. Ouarzazi, «Nonlinear pattern selection and heat transfer in thermal convection of a viscoelastic fluid saturating a porous medium,» *Int. J. Thermal Sciences*, vol. 95, pp. 136-146, 2015.
- [11] C. Fu, Z. Zhang et W. Tan, «Numerical simulation of thermal convection of a viscoelastic fluid in a porous square box heated from below,» *Phys. Fluids*, vol. 19, n° 1104107, 2007.
- [12] A. Taleb, H. BenHamed, M. N. Ouarzazi et H. Beji, «Analytical and numerical analysis of bifurcations in thermal convection of viscoelastic fluids saturating a porous square box,» *Physics of Fluids*, vol. 28, n° 15, 2016.
- [13] M. Malashetty, M. Swamy et R. Heera, «The onset of convection in a binary viscoelastic fluid saturated porous layer,» *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, vol. 89, n° 15, 2009.
- [14] W. T. Shaowei Wang, «Stability analysis of sores-driven double-diffusive convection of Maxwell fluid in a porous medium,» *International Journal of Heat and Fluid Flow* 32(1):88-94, vol. 32, n° 11, pp. 88-94, 2011.
- [15] G. E. Eny, *Instabilités thermiques et thermodiffusives de fluides viscoélastiques saturant un milieu poreux*, Thèse de doctorat: Université des Sciences et Technologies de Lille, 2011.

- [16] J. Niu, C. Fu et W. Tan, «Thermal convection of a viscoelastic fluid in an open-top porous layer heated from below,» *J. Non-Newtonian Fluid Mech*, vol. 165, pp. 203-211, 2010.
- [17] J. Niu, Z. Shi et W. C. Tan, «Numerical simulation of thermal convection of viscoelastic fluids in an open-top porous medium with constant heat flux,» *Journal of Hydrodynamics*, vol. 27, n° 11, pp. 52-61, 2015.
- [18] P. Kolodner, «Oscillatory convection in viscoelastic DNA suspensions,» *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, vol. 75, n° 12-3, pp. 167-192, March 1998.
- [19] H. B. Ahmed, «Etude de la convection mixte d'origine thermosolutale sous l'influence de l'effet Soret dans un milieu poreux : Analyse de stabilité linéaire et simulations 3D,» Université de Cergy Pontoise; Faculté des Sciences de Tunis, 2008.
- [20] A. Delache, Etude analytique et numérique des instabilités spatio-temporelles des écoulements de convection mixte en milieu poreux: comparaison avec l'expérience, Thèse de doctorat: Université de Science et Technologie de Lille, 2005.
- [21] F. Dufour et M.-C. Neel, «Numerical study of instability in a horizontal porous channel with bottom heating and forced horizontal flow,» *Physics of Fluids*, vol. 10, n° 12, pp. 198, 1998.
- [22] A. Delache, M. Ouarzazi et M. Combarous, «Spatio-temporal stability analysis of mixed convection flows in porous media heated from below: comparison with experiments,» *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol. 50, pp. 1485-1499, 2007.
- [23] M. Combarous, «Convection naturelle et convection mixte en milieux poreux,» Thèse d'état, Faculté des Sciences de l'Université de Paris, 1970.
- [24] D. A. Nield et A. Bejan, *Convection porous media*, Springer, Second edition 1999.
- [25] D.-Y. You et al., «The onset of oscillatory convection in a horizontal porous layer saturated with viscoelastic liquid,» *Kluwer Academic Publishers*, pp. 275-284, 2004.
- [26] R. Chhabra, «Non-Newtonian Fluids: An Introduction,» <http://www.physics.iitm.ac.in/~compflu/Lect-notes/chhabra.pdf>.
- [27] D. G. Baird, «Flow behavior of viscoelastic fluids,» Department of Chemical Engineering, Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, Virginia., 2011.
- [28] P. C. Hiemenz. et T. Lodge., *Polymer Chemistry*. 2nd ed., New York: CRC, 2007.
- [29] A. Kaye, « "A Bouncing Liquid Stream". *Nature*. 197 (4871): 1001,» *Nature*, vol. 197, pp. 1001-1002, 1963.
- [30] T. S. Majmudar, M. Varagnat, W. Hartt et G. H. McKinley, *Nonlinear Dynamics of Coiling in Viscoelastic Jets*.
- [31] A. Morozov et S. E. Spagnolie, *Complex Fluids in Biological Systems*, New York: Springer, 2015.
- [32] Y. Breaux, *Viscoélasticité Non-Linéaire*, Bellignat, France: École d'ingénieur , Site de Plasturgie de l'INSA-Lyon, 2004.

- [33] O. James, «On the formulation of rheological equations of state,» *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, vol. 200, n° 11063, pp. 523-541, 1950.
- [34] H. J. Wilson, «<http://www.ucl.ac.uk/~ucahhwi/GM05/lecture4-5.pdf>,» [En ligne].
- [35] D. F. James, «Boger Fluids,» *Annual Review of Fluid Mechanics*, vol. 41, pp. 129-142, 2009.
- [36] Z. E. HEINEMANN, FLUID FLOW IN POROUS MEDIA, Leoben: PHDG, 2005.
- [37] F. Dullien, Porous media: Fluid transport and pore structure, New York, USA: Academic Press Inc., 1992.
- [38] P. W. Glover, «Leeds University,» [En ligne]. Available: http://homepages.see.leeds.ac.uk/~earpwjg/PG_EN/CD%20Contents/GGL-66565%20Petrophysics%20English/Chapter%202.PDF.
- [39] O. Fouché, C. Plumelle et Y. J. Cui, «Chapitre 13: Hydraulique des sols,» chez *Théorie et pratique de la géotechnique*, Groupe Moniteur, April 2013.
- [40] C. M. Marle, «Ecoulement monophasique en milieux poreux,» *Revue Institut Français du pétrole*, Vols. 1 sur 222, 10, pp. 1471-1509, 1967.
- [41] S. Whitaker, «Advances in theory of fluid motion in porous media,» *Industrial and Engineering Chemistry*, vol. 12, n° 161, pp. 15-26, 1969.
- [42] P. A. Bois, Introduction à la mécanique théorique des fluides, Ellipses, 2000.
- [43] B. Khuzhayorov, J.-L. Auriault et P. Royer, «Derivation of Macroscopic Filtration Law for Transient Linear Viscoelastic Fluid Flow,» *International Journal of Engineering Science*, Elsevier, vol. 38, pp. 487-504, 2000.
- [44] D. A. S. Rees et V. Stetsyuk, «Translation of “For the calculation of delay phenomena in filtration theory”,» March 2018.
- [45] M. Alishaev et A. H. Mirzadzhanzadeh, «For the calculation of delay phenomena in filtration theory,» chez *Proceedings of the Higher Educational Institutions. Oil and Gas.*, Izvestiya Vuzov. Neft' i Gaz, 6 pp71-75, 1975.
- [46] P. Vadasz, «Coriolis effect on gravity-driven convection in a rotating porous layer heated from below,» *J. Fluid Mech.*, vol. 376, pp. 351-375, 1998.
- [47] M. Combarous et S. A. Bories, «Modélisation de la convection d'une couche poreuse horizontale à l'aide d'un coefficient de transfert solide-fluide,» *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol. 17, pp. 505-514, 1974.
- [48] M. FILALI, Conductivité thermique apparente des milieux granulaires soumis à des contraintes mécaniques : modélisation et mesures, L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE TOULOUSE : Thèse de doctorat, Février 2006.
- [49] R. Briggs, Electron-Stream Interaction with Plasmas, MIT Press, MIT Press, 1964.

- [50] P. M. P.A. Huerre, «Local and Global Instabilities in Spatially Developing Flows,» *Ann. Rev. Fluid Mech.*, vol. 22, pp. 473-537, 1990.
- [51] Z. A. L. Brevdo, *Math. Phys.*, vol. 42, p. 911, 1991.
- [52] A. Couairon et J. Chomaz, «Primary and secondary nonlinear global instability,» *Physica D*, vol. 132, pp. 428-456, 1999.
- [53] M. Combarous, «Convection naturelle et convection mixte en milieux poreux,» *Thèse d'état, Faculté des Sciences de l'Université de Paris*, 1970.
- [54] M. Combarous et S. Bories, «Hydrothermal convection in saturated porous media,» *Advances in Hydroscience*, vol. 10, pp. 231-307, 1975.
- [55] [En ligne]. Available: <https://fr.wikipedia.org/wiki/Basalte>.
- [56] [En ligne]. Available: https://fr.wikipedia.org/wiki/Approximation_de_Boussinesq.
- [57] C. T. Simmons, «Henry Darcy (1803–1858): Immortalised by his scientific legacy,» *Hydrogeology Journal*, vol. 16, pp. 1023-1038, 2008.

RESUMÉ

L'objet de cette thèse est d'étudier théoriquement et numériquement les instabilités susceptibles de se développer dans un massif poreux ouvert horizontalement, soumis simultanément à un gradient vertical de température et à un écoulement horizontal de débit non nul. Comme c'est un milieu ouvert, la théorie linéaire de stabilité doit distinguer le régime des paramètres où l'instabilité est de nature, soit convective ou absolue. Lorsque l'instabilité est convective, celle-ci peut se développer et s'amplifier spatialement, mais finit par quitter le massif poreux et l'état de conduction est retrouvé. En revanche, lorsque le système est dans un régime d'instabilité absolue, le paquet d'onde, généré suite à une impulsion localisée spatialement, se propage aussi bien dans le sens de l'écoulement que dans le sens contraire. Il s'en suit une instabilité globale dont il convient d'en définir les caractéristiques en fonction des paramètres du problème. Ces derniers sont, en plus du nombre de Rayleigh de filtration, le nombre de Péclet (Pe) qui mesure l'intensité de l'écoulement imposé, le temps de relaxation (λ_1) qui mesure le degré de l'élasticité du fluide et le rapport Γ entre la viscosité du solvant à la viscosité totale de la solution qui intègre la présence de polymères. Deux approches de stabilité linéaires, l'une temporelle et l'autre spatio-temporelle ont permis de montrer rigoureusement, que parmi les modes instables, le mode le plus amplifié correspond à des ondes progressives se propageant dans la direction de l'écoulement. Pour ce mode, nous avons déterminé et discuté l'influence des paramètres Pe , λ_1 et Γ sur la naissance des deux types d'instabilités. La dépendance de la fréquence d'oscillation de ce mode ainsi que son nombre d'onde vis-à-vis des paramètres du problème a été déterminée dans la région où l'instabilité absolue est pleinement développée aussi bien pour les solutions diluées que celles concentrées en polymères. Ensuite des simulations numériques directes bidimensionnelles de ce problème, basées sur la méthode des différences finies, ont été conduites. Les résultats numériques montrent que, bien que le système soit instable, la solution observée dans le régime convectivement instable, est celle de la conduction. En revanche, lorsque le système devient absolument instable, un mode global s'établit, formé par des structures convectives pleinement développées et oscillantes avec une fréquence bien définie, dans la partie du massif poreux proche de la sortie. Ces structures convectives sont reliées par un front à l'état de conduction dans la partie du massif poreux proche de l'entrée. La comparaison entre la théorie de l'instabilité absolue et les résultats numériques montre une très bonne capacité de cette théorie à prédire la fréquence d'oscillation de ce mode global et le nombre de Rayleigh nécessaire à son apparition. Des lois d'échelle sont trouvées pour l'intensité de ces mouvements convectifs et de la position du front observé. Les transferts de chaleur ont été déterminés et discutés en fonction des paramètres du problème.

Mots clés : Convection mixte, instabilité convective, instabilité absolue, milieux poreux, fluides viscoélastiques

ABSTRACT

The goal of this thesis is to study theoretically and numerically the instabilities likely to develop in a horizontally open porous mass, subjected simultaneously to a vertical temperature gradient and to a horizontal filtration flow. As it is an open environment, the linear stability theory must distinguish between the regime of parameters where the instability is of either convective or absolute nature. When the instability is convective, it can develop and amplify spatially, but ends up leaving the porous mass and the state of conduction is found. On the other hand, when the system is in a regime of absolute instability, the wave packet, generated following a spatially localized pulse, propagates both in the direction of flow and in the opposite direction. It follows a global instability whose characteristics should be defined according to the parameters of the problem. The latter are, in addition to the Rayleigh number, the Péclet number (Pe) which measures the intensity of the imposed flow, the relaxation time (λ_1) which measures the degree of elasticity of the fluid and the ratio Γ between the viscosity of the solvent and the total viscosity of the solution which integrates the presence of polymers. Two linear stability approaches, one temporal and the other spatio-temporal, made it possible to show rigorously that among the unstable modes, the most amplified mode corresponds to progressive waves propagating in the direction of flow. For this mode, we have determined and discussed the influence of the parameters Pe , λ_1 and Γ on the birth of the two types of instabilities. The dependence of the oscillation frequency of this mode as well as its wave number with respect to the parameters of the problem has been determined in the region where the absolute instability is fully developed for both dilute and concentrated solutions in polymers. Then two-dimensional direct numerical simulations of this problem based on the finite difference method were conducted. The numerical results show that, although the system is unstable, the solution observed in the convectively unstable regime is that of conduction. On the other hand, when the system becomes absolutely unstable, a global mode is established, formed by convective structures fully developed and oscillating with a well-defined frequency, in the part of the porous mass close to the exit. These convective structures are connected by a front to the conduction state in the portion of the porous mass near the inlet. The comparison between the theory of absolute instability and the numerical results shows a very good capacity of this theory to predict the oscillation frequency of this global mode and the Rayleigh number necessary for its appearance. Scale laws are found for the intensity of these convective motions and the position of the observed front line between conduction and convection. Heat transfers were determined and discussed according to the parameters of the problem.

Key words: Forced convection, convective instability, absolute instability, porous media, viscoelastic fluids