



HAL
open science

Modélisation et résolution de problèmes de synthèse dimensionnelle de mécanismes

Pierre-Edouard Cailliau

► **To cite this version:**

Pierre-Edouard Cailliau. Modélisation et résolution de problèmes de synthèse dimensionnelle de mécanismes. Automatique / Robotique. Ecole Centrale Paris, 2010. Français. NNT : 2010ECAP0025 . tel-03638173

HAL Id: tel-03638173

<https://theses.hal.science/tel-03638173v1>

Submitted on 12 Apr 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Thèse de doctorat

Spécialité : **Production Automatisée**

présentée par

Pierre-Édouard Cailliau

le 15 septembre 2010

pour l'obtention du grade de
Docteur de l'École Centrale de Paris

Modélisation et résolution de problèmes
de synthèse dimensionnelle de mécanismes

Constitution du jury :

Président	André CLÉMENT	Professeur, Supméca Paris
Rapporteur	Dominique MICHELUCCI	Professeur, Université de Bourgogne
Rapporteur	Jean-Marc LINARES	Professeur, Université de la Méditerranée
Examineur	Philippe SERRÉ	Maître de Conférence, Supméca Paris
Examineur	Pascal SÉBAH	Ingénieur de Recherche, Dassault Systèmes
Directeur de thèse	Alain RIVIÈRE	Professeur, Supméca Paris
Encadrant	Auxkin ORTUZAR	Ingénieur de Recherche, Dassault Systèmes

Laboratoire d'accueil :

**Laboratoire d'Ingénierie des Systèmes Mécaniques et des Matériaux
(LISMMA)**

*À mes instituteurs,
M. & Mme Fouchard.*

À la mémoire de François.

Remerciements

Ma thèse fut rendue possible grâce au concours de plusieurs personnes. Je souhaite sincèrement les remercier ici.

En premier lieu, je remercie les rapporteurs, les professeurs Jean-Marc Linares et Dominique Michelucci, pour l'attention particulière qu'ils ont portée à mon mémoire. Je remercie également l'ensemble des membres du jury pour l'intérêt qu'ils ont manifesté pour mes travaux, notamment le professeur Alain Rivière pour m'avoir proposé cette thèse, le professeur André Clément pour m'avoir initié au monde de la recherche industrielle et le docteur Philippe Serré pour la première relecture de mon mémoire.

Cette thèse a aussi été rendue possible grâce au concours de Dassault Systèmes, l'entreprise qui m'a accueilli durant son élaboration. À ce titre, je tiens à remercier monsieur Patrick Johnson, directeur du service de recherche, pour m'avoir fait confiance et m'avoir permis de soutenir cette thèse. Je remercie aussi les personnes qui m'ont encadré au fil du temps, messieurs Pascal Sébah et Auxkin Ortuzar.

Enfin, je tiens à remercier particulièrement Auxkin Ortuzar qui fut présent tout au long de mes travaux depuis le lancement du projet de thèse jusqu'à la soutenance. La réussite de cette thèse n'est pas étrangère à son implication et à l'énergie qu'il a su insuffler tout au long du parcours. Cette réussite lui doit beaucoup. Je lui dois beaucoup plus encore.

Table des matières

Remerciements	iii
Table des matières	v
Table des figures	ix
Liste des tableaux	xiii
Introduction	xv
État de l'art	1
1 Synthèse de mécanismes	3
1.1 Introduction	3
1.2 Analyse et synthèse cinématiques	3
1.3 Mécanismes	4
1.3.1 Topologie d'un mécanisme	6
1.3.2 Dimensions d'un mécanisme	8
1.3.3 Position d'un mécanisme	10
1.3.4 Configurations d'un mécanisme	10
1.4 Classification des problèmes de synthèse de mécanismes	10
1.4.1 Synthèses de type, topologique et dimensionnelle	11
1.4.2 Les tâches dans le cas de la synthèse dimensionnelle	17
1.5 Méthodes de résolution pour la synthèse dimensionnelle	21
1.5.1 Choix du système de coordonnées	21
1.5.2 Méthodes de résolution	26
1.6 Logiciels pour la synthèse dimensionnelle	35
1.7 Conclusion	36
Synthèse dimensionnelle de mécanismes	39
2 Spécifications du problème	41
2.1 Introduction	41
2.2 Déclaration d'un problème de synthèse dimensionnelle	41
2.2.1 Déclaration du mécanisme	42
2.2.2 Déclaration des tâches	45
2.2.3 Déclaration des contraintes	46

2.3	Classes de problèmes traités	48
2.4	Conclusion	49
3	Modélisation	51
3.1	Introduction	51
3.2	Modélisation interne	51
3.3	Les éléments du modèle	53
3.3.1	Les pièces	53
3.3.2	Les positions	54
3.3.3	Les liaisons cinématiques	54
3.4	Représentation des problèmes de synthèse dimensionnelle	57
3.4.1	Les contraintes	57
3.4.2	Les boucles de fermeture de chaîne cinématique	60
3.5	Exemples	61
3.6	Construction de la géométrie des mécanismes	64
3.6.1	Traitements préalables	64
3.6.2	Construction des squelettes des mécanismes	64
3.7	Conclusion	66
4	Obtention des systèmes d'équations	67
4.1	Introduction	67
4.2	Association des variables	68
4.2.1	Domaine de définition des variables	69
4.2.2	Dépendance temporelle des variables	70
4.2.3	Quatre catégories de variables	72
4.3	Construction des équations	73
4.3.1	Les équations de boucles	75
4.3.2	Les autres équations	79
4.3.3	Nombre d'équations à générer	79
4.4	Caractéristiques du système d'équations	80
4.4.1	Dimension du système d'équations	80
4.4.2	Paramétrage du systèmes d'équations	81
4.4.3	Nature des équations	82
4.5	Conclusion	82
5	Résolution	83
5.1	Introduction	83
5.2	Stratégie de résolution	84
5.3	Décomposition du système d'équations	85
5.4	Réduction de l'espace de recherche	86
5.5	Traitements formels	88
5.6	Méthodes d'optimisation	89
5.6.1	Optimisation par essaims de particules	90
5.6.2	Méthode de Nelder-Mead	94
5.6.3	Hybridation des méthodes	96
5.6.4	Tests et résultats	98
5.7	Conclusion	102

Réalisations et résultats	103
6 Application réalisée	105
6.1 Introduction	105
6.2 Bras robotisé à deux liaisons pivot (2R)	105
6.2.1 Intégration dans CATIA V6	105
6.2.2 Spécification du problème	107
6.2.3 Résolution	111
6.2.4 Construction des éléments de CAO	112
6.2.5 Simulation	114
6.3 Bras robotisé à trois liaisons pivot (3R)	116
6.4 Mécanisme plan à quatre barres	120
6.5 Conclusion	124
Conclusion générale	125
7 Conclusion	127
Annexes	131
A Le critère de Grashof	133
B Éléments de comparaison de différentes mises en équations	137
B.1 Introduction	137
B.2 Mécanismes plans	138
B.3 Mécanismes spatiaux	140
C Approximations polynômiales des fonctions sinus et cosinus	143
Bibliographie	145
Index	157

Table des figures

1.1	Analyse cinématique et synthèse cinématique utilisées pour la conception de mécanismes.	5
1.2	Illustration de mécanismes à chaîne cinématique ouverte et fermée.	6
1.3	Trois mécanismes extraits des recueils d'Artobolevski [7, 8, 9, 10, 11], ayant des topologies différentes mais proposant la même fonctionnalité.	9
1.4	Influence des dimensions d'un mécanisme sur la nature de son mouvement.	9
1.5	Deux configurations et les trajectoires associées d'un mécanisme à quatre barres plan (longueurs des barres : 185, 170, 210 et 140).	11
1.6	Mécanismes extraits des recueils d'Artobolevski.	13
1.7	Les trois graphes cinématiques pour un mécanisme parallèle à quatre pièces	14
1.8	Exemples : Mécanismes plans à n barres.	15
1.9	Suivi de trajectoire, mécanisme à quatre barres.	18
1.10	Spécification continue ou discrète de la trajectoire à suivre.	19
1.11	Tolérance sur le suivi de la trajectoire.	19
1.12	Trajectoire à suivre comme série temporelle.	20
1.13	Génération de mouvement, mécanisme à quatre barres.	20
1.14	Génération de fonction, mécanisme à quatre barres.	21
1.15	Coordonnées absolues : exemple d'un quatre barres plan.	23
1.16	Coordonnées relatives : exemple d'un quatre barres plan.	24
1.17	Coordonnées naturelles : exemple d'un quatre barres plan.	26
1.18	Méthode de Burmester illustrée par Mallik <i>et al.</i> dans [88].	27
1.19	Les huit solutions obtenues à un problème 3R par continuation.	30
1.20	Front de Pareto pour un problème de minimisation de deux objectifs (f_1 et f_2).	32
1.21	Illustration des méthodes métaheuristiques.	34
1.22	Synthèse d'un mécanisme à 10 barres [31] avec le logiciel SYMECH.	36
1.23	Synthèse d'un mécanisme RRTS avec le logiciel SYNTHETICA.	37
2.1	Deux exemples de déclaration de la topologie d'un mécanisme	42
2.2	Grphe cinématique pour un problème quatre barres	43
2.3	Schéma cinématique pour un problème quatre barres	44
2.4	Modèles volumiques pour des mécanismes quatre barres 2.4a et lève-barrière Sinusmatic 2.4b	44
2.5	Exemple d'utilisation des contraintes géométriques pour le dimensionnement et le positionnement d'objets 2D et 3D	47

2.6	Liens entre modélisation géométrique par contraintes et analyse cinématique	48
2.7	Deux exemples de déclaration d'un problème de synthèse dimensionnelle de mécanismes	49
3.1	Graphe cinématique des liaisons et graphe cinématique adjoint pour un mécanisme quatre barres	52
3.2	Graphe cinématique des liaisons et graphe cinématique adjoint pour un bras robotisé à deux liaisons pivots	52
3.3	Convention retenue pour paramétrer les pièces	54
3.4	Paramétrage des liaisons	55
3.5	Modélisation d'une pièce fixe dans un repère global	58
3.6	Spécification d'une tâche à effectuer	59
3.7	Liens entre la pièce fixe et les positions des tâches	59
3.8	Problème traitant du mécanisme de Bennett représenté avec les éléments du modèle	62
3.9	Problème traitant du bras robotisé à deux liaisons pivots représenté avec les éléments du modèle	63
3.10	Solution non assemblable pour un mécanisme plan à quatre barres	65
3.11	Illustration des quatre mécanismes proposés	66
4.1	Extrait du graphe d'un mécanisme et des couples de valeurs associés	68
4.2	Extrait de la représentation géométrique filaire d'un mécanisme et des variables associées.	68
4.3	Les deux couples de coordonnées polaires (r, θ) pour le point M de coordonnées cartésiennes $(x, y) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ suivant les conventions adoptées : $\left(1, -\frac{5\pi}{6}\right)$ pour 4.3a et $\left(-1, \frac{\pi}{6}\right)$ pour 4.3b.	70
4.4	Génération du système d'équations.	75
4.5	Génération des équations pour une boucle.	77
4.6	Mécanisme de Bennett : première boucle.	78
4.7	Mécanisme de Bennett : deuxième boucle.	78
4.8	Génération des équations pour une contrainte.	80
5.1	Stratégie générale d'optimisation numérique	85
5.2	Régression linéaire de trois points non alignés.	86
5.3	Écarts sur les objectifs ($e = 0, 5$).	87
5.4	Écarts sur les paramètres ($e = 0, 4$).	87
5.5	Classification de quelques méthodes d'optimisation métaheuristiques.	90
5.6	Composition des vitesses d'une particule. A_i et B_i sont des matrices diagonales aléatoires sur $[0 ; 1]$. Ici $\beta = 0, 7$ et $\gamma = 1, 47$	92
5.7	Illustration de OEP avec $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$	94
5.8	Illustration de OEP avec $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$	95
5.9	Représentations géométriques des différentes transformations utilisées par la méthode de Nelder-Mead	96
5.10	Principe général de la méthode de Nelder-Mead.	97
5.11	Évolution de l'essai pour le test n° 2 (les trois axes correspondent aux valeurs de trois variables d'angles).	100
5.12	Comparaison de l'évolution de la valeur de la fonction objectif pour les méthodes OEP, NM et hybride.	101

5.13	Influence du point initial pour la méthode NM : utilisation de 8 points obtenus par segmentation à partir de la méthode OEP.	102
6.1	Organisation de l'établi de synthèse de mécanismes	106
6.2	L'établi de synthèse de mécanismes	106
6.3	Les cinq commandes associées à la résolution d'un problème de synthèse	107
6.4	Barre d'outils pour la spécification	107
6.5	Spécification d'un nouveau problème de synthèse dimensionnelle	108
6.6	Spécification d'une pièce	108
6.7	Spécification d'une liaison	108
6.8	Spécification d'un objectif	109
6.9	L'ensemble des problèmes classiques prédéfinis dans l'établi	109
6.10	Aperçu graphique du mouvement attendu de l'effecteur	110
6.11	L'arbre de spécification	111
6.12	Arbre de spécifications augmenté des solutions	112
6.13	Squelette du premier mécanisme proposé	113
6.14	Liaisons cinématiques du mécanisme construit	114
6.15	Description finale du mécanisme CATIA à simuler	114
6.16	Vue volumique proposée par défaut pour les mécanismes	115
6.17	Positions du mécanisme pour chaque spécification	116
6.18	Positions du meilleur mécanisme pour chaque spécification	118
6.19	Différentes lois de commande associées à la meilleure solution (6 lois sur 120 possibles)	119
6.20	Mécanismes pour les neuf meilleures solutions (première position)	120
6.21	Vue avec l'habillage par défaut du mécanisme et de la trajectoire du point effecteur	123
6.22	Vue avec un habillage personnalisé du mécanisme et de la trajectoire du point effecteur	123
6.23	Autres solutions acceptables	124
A.1	Les quatre mécanismes obtenus par inversion cinématique d'un mécanisme respectant le critère de Grashof.	135
A.2	Les quatre mécanismes obtenus par inversion cinématique d'un mécanisme ne respectant pas le critère de Grashof.	136

Liste des tableaux

1.1	Représentations des différentes liaisons cinématiques et leurs degrés de liberté.	7
1.2	Exemples de <i>dll</i> suivant le critère de Grübler	14
3.1	Caractéristiques de l'ensemble des liaisons	56
3.2	Les degrés de liberté des liaisons et leurs éléments issus du modèle	56
3.3	Définition des liaisons à l'aide des éléments de base	57
3.4	Informations associées aux liaisons de la figure 3.8	62
3.5	Détails sur les pièces de l'exemple de la figure 3.8	62
3.6	Bras robotisé à deux liaisons pivots : description des liaisons	64
3.7	Solutions cohérentes après libération d'une longueur	66
4.1	Nature des variables.	70
4.2	Domaine de définition des variables associées aux nœuds dans le cas du mécanisme de Bennett. <i>Les indices se rapportent à la figure 3.8.</i>	71
4.3	Domaine de définition des variables associées aux arcs dans le cas du mécanisme de Bennett. <i>Les indices se rapportent à la figure 3.8.</i>	71
4.4	Nature des variables.	72
4.5	Dépendance temporelle des variables issues du mécanisme de Bennett	73
4.6	Toutes les transformations associées à l'extrait de graphe de la figure 4.1.	75
5.1	Nombre de variables et nature des neuf tests.	98
5.2	Résultats des différentes stratégies sur les neuf cas étudiés.	100
6.1	Spécifications du cas 2R	110
6.2	Ensemble de solutions pour le problème 2R	112
6.3	Valeurs des commandes pour la simulation du cas 2R	115
6.4	Spécifications du cas 3R	117
6.5	Solutions du cas 3R : minima	117
6.6	Valeurs des commandes des liaisons cinématiques pour la meilleure solution du cas 3R considéré.	119
6.7	Solutions du cas 3R : points	121
6.8	Spécifications du cas quatre barres	122
6.9	Ensemble de solutions pour le mécanisme à quatre barres considéré	122
6.10	Valeurs de la commande pour la liaison motrice du cas quatre barres considéré	122
B.1	Quatre barres plan	138

B.2	Quatre barres : systèmes d'équations suivant les méthodes. (La GA n'est pas pertinente pour des problèmes plans : les directions des liaisons pivots sont connues a priori, il n'est pas utile de les modéliser, seul le scalaire serait utilisé.)	139
B.3	Bras robotisé à n liaisons pivots : nombre de spécifications correspondant à des cas iso-contraints	140
B.4	Bras robotisé : dimension des systèmes d'équations en fonction des méthodes pour n points de passage.	141
B.5	Bras robotisé : systèmes d'équations en fonction des méthodes. . .	142

Introduction

Problématique

L'industrie manufacturière a sans cesse besoin d'innover et de concevoir de nouveaux mécanismes toujours plus performants et avec des cycles de développement toujours plus courts. Pour produire rapidement des mécanismes répondant à de nouveaux besoins, surtout durant l'étape de préconception, il est nécessaire de disposer d'outils fournissant directement des mécanismes fonctionnels, sans phase de mise au point longue et coûteuse. Or, même si les progrès réalisés ces dernières années en théorie des mécanismes et en calcul numérique, ont permis aux logiciels actuels de CAO (Conception Assistée par Ordinateur) d'offrir des outils performants de simulation et d'analyse des mécanismes, les outils de synthèse cinématique capables de dimensionner automatiquement des mécanismes répondant à certaines tâches sont rares. Les utilisateurs des logiciels de CAO se voient alors contraints de procéder par essais-erreurs : modifier les dimensions du mécanisme étudié, déterminer son nouveau mouvement en fonction des lois de commande appliquées et juger de sa performance. Mais, cette approche peut très vite devenir fastidieuse car le comportement cinématique et dynamique d'un mécanisme est extrêmement sensible aux variations des paramètres.

D'un autre côté, l'absence de méthode générique pour la synthèse dimensionnelle de mécanismes rend difficile l'apparition de ce type d'outils. En effet, force est de constater, que malgré les nombreux travaux de recherche dans ce domaine, des solutions satisfaisantes ont été proposées uniquement pour certaines classes de problèmes. Par exemple, un nombre important d'approches existent pour certains mécanismes plans devant assurer des tâches très concrètes comme le suivi d'une trajectoire ou la génération d'un mouvement particulier. Mais, même pour ces catégories de problèmes, les utilisateurs sont très limités au moment de définir la fonction à accomplir. Par exemple, le plus souvent, les trajectoires sont approchées par un nombre réduit de points de passage. Parmi les mécanismes spatiaux, seulement quelques types de manipulateurs ont été considérés ; ce qui est sans doute dû à l'explosion combinatoire du nombre de solutions potentielles à considérer pour les problèmes les plus difficiles.

Objectifs

Le principal objectif de cette thèse est de proposer un cadre de travail ouvert pour la résolution générique de problèmes de synthèse dimensionnelle de mécanismes. L'approche présentée dans ce mémoire doit notamment permettre

d'envisager le dimensionnement de tout type de mécanismes (plans/spatiaux, sériels/parallèles), proposer plusieurs solutions acceptables et s'intégrer parfaitement dans un environnement de CAO.

Ce travail de thèse s'inscrit naturellement dans la suite des travaux du Laboratoire d'Ingénierie des Systèmes Mécaniques et des Matériaux (LISMMA) sur la résolution de problèmes géométriques modélisés par contraintes [134, 79, 37, 99] et sur la cinématique [135, 136]. De nombreuses différences peuvent être néanmoins signalées par rapport à ces précédents travaux. Par exemple, au contraire des problèmes spécifiés par des contraintes géométriques, très souvent sous-contraints, et des problèmes de cinématique, généralement iso-contraints, les problèmes de synthèse dimensionnelle de mécanismes comportent généralement plus d'équations que de variables et admettent rarement des solutions exactes. De même, une autre particularité des problèmes de synthèse dimensionnelle réside dans l'absence d'esquisse initiale. La démarche de synthèse intervenant lors des phases de préconception, les utilisateurs sont seulement capables de proposer des *schémas cinématiques* des mécanismes envisagés et souhaitent que l'outil de synthèse les aide à dégrossir le problème en dimensionnant approximativement les mécanismes. La présentation de plusieurs mécanismes avec des dimensions différentes peut alors s'avérer nécessaire et représente aussi une différence importante par rapport aux autres types de problèmes traités jusqu'à maintenant par le LISMMA.

Organisation du mémoire

Ce document s'articule autour de trois parties : un état de l'art sur la synthèse dimensionnelle de mécanismes, la description détaillée de la méthode que nous proposons pour traiter les problèmes de synthèse dimensionnelle de mécanismes et enfin la présentation de l'application réalisée pour illustrer notre approche.

Le [premier chapitre](#) est consacré à un rappel des éléments nécessaires à la définition de problèmes de synthèse de mécanismes et à l'étude bibliographique de la synthèse de mécanismes. Les différents types de synthèses sont présentées avant de nous focaliser sur les méthodes de résolution utilisées en synthèse dimensionnelle.

A la lumière de cette étude préliminaire, les difficultés de formulation, modélisation et résolution sont évoquées. Une nouvelle approche pour la résolution de problèmes de synthèse dimensionnelle de mécanismes pouvant être facilement intégrée dans les environnements de CAO actuels est alors présentée. Cette intégration est d'autant plus facile que nous proposons de spécifier les problèmes de synthèse dimensionnelle par des contraintes géométriques. Le [deuxième chapitre](#) montre qu'il devient alors possible de spécifier aussi simplement un problème de synthèse que les problèmes de dimensionnement et de positionnement 2D et 3D ou les problèmes d'analyse cinématique. Les choix réalisés concernant les contraintes géométriques employées pour déclarer les problèmes nous permettront aussi de détailler plus précisément les classes de problèmes de synthèse qui seront traitées dans ce document.

Le [troisième chapitre](#) porte ensuite sur la modélisation des problèmes de synthèse spécifiés par contraintes. Nous montrons qu'il est possible, à partir

de la modélisation proposée, de récupérer toutes les informations nécessaires pour générer des systèmes d'équations reflétant correctement les problèmes spécifiés par les utilisateurs et surtout de construire les mécanismes satisfaisant les contraintes, ou à défaut, des mécanismes les approchant.

La formulation des problèmes est abordée au [quatrième chapitre](#). Nous détaillons la méthode mise en œuvre pour automatiser la génération des équations et nous justifions les choix des variables et de la forme des équations.

Le [cinquième chapitre](#) présente la stratégie de résolution numérique retenue pour traiter ces équations. Dans un premier temps, les différentes étapes de la stratégie sont expliquées et les différentes méthodes numériques employées sont décrites. Enfin, l'intérêt de la méthode hybride d'optimisation choisie est montré en traitant un ensemble d'exemples de synthèse dimensionnelle plans et spatiaux.

Afin de valider les propos et concepts présentés dans les précédents chapitres, nous avons développé une maquette d'application de synthèse dimensionnelle de mécanismes. Cette application, complètement intégrée au logiciel CATIA V6 de Dassault Systèmes [33] est présentée au [sixième chapitre](#). Trois études de cas différents nous permettent d'illustrer son fonctionnement et de mettre en évidence les points forts de l'approche proposée.

La dernière partie de ce document présente les conclusions de ce travail et les perspectives pour les recherches futures.

Première partie

État de l'art

Chapitre 1

Synthèse de mécanismes

1.1 Introduction

Avant de détailler nos travaux sur la synthèse dimensionnelle de mécanismes, il est important de présenter un état de l'art sur la synthèse de mécanismes. Nous commençons cette étude en examinant les caractéristiques de deux disciplines proches qui sont l'analyse cinématique et la synthèse de mécanismes. L'intérêt de la synthèse de mécanismes est ainsi clairement mis en évidence.

Les différents types de synthèse que nous pouvons rencontrer, et notamment la synthèse dimensionnelle, sont ensuite détaillées. Nous montrons, en particulier, que la variété de tâches à effectuer par les mécanismes rend difficile la formulation et la modélisation des problèmes de synthèse dimensionnelle. Pour finir, les principales méthodes employées pour résoudre ces problèmes ainsi que les choix généralement effectués pour les modéliser sont analysés. Une sélection de logiciels et d'outils académiques traitant de ce domaine de la conception de mécanismes vient clore ce chapitre.

1.2 Analyse et synthèse cinématiques

L'étude du mouvement des mécanismes met en évidence deux approches complémentaires : l'*analyse cinématique* et la *synthèse cinématique*.

L'analyse cinématique [124, 123, 88, 41] permet d'évaluer le mouvement obtenu par l'utilisation d'un mécanisme complètement défini. Dans un premier temps, seulement le déplacement des pièces était étudié. Cependant, très vite, la détermination des vitesses et des accélérations a complété la connaissance du mouvement des mécanismes. En effet, la vitesse des éléments d'un mécanisme est une donnée importante de sa conception. Elle est même souvent une caractéristique imposée aux mécanismes, voire leur raison d'être. De même, la connaissance des accélérations des éléments d'un mécanisme est fondamentale car elles sont directement liées aux forces d'inertie s'appliquant sur les pièces et peuvent être très supérieures aux forces statiques. Ainsi, la détermination des forces d'inertie grâce aux accélérations permet de dimensionner les pièces d'un mécanisme en s'adaptant aux intensités et aux directions des forces. Bien que l'analyse cinématique soit impliquée dans la démarche de conception des mé-

canismes, elle ne peut pas être considérée comme une méthode de conception mais plutôt comme une méthode d'étude, de vérification et de validation.

La synthèse cinématique est la problématique inverse : il s'agit de déterminer des mécanismes qui satisfassent un ensemble de spécifications d'ordre cinématique (spécifications de déplacements, de vitesses ou d'accélération, séparément ou de manière combinée) ou de mouvement au sens large. La synthèse cinématique est un aspect essentiel de la conception de mécanismes, apparue dans le courant des années 1940 [51]. Les premiers travaux dans ce domaine et jusqu'à la fin du XX^{ième} siècle, portaient surtout sur les mécanismes à cames et quelques mécanismes plans simples et bien connus [56]. Ensuite, au XXI^{ième} siècle, les efforts ont porté sur la généralisation des études menées et des problèmes traités.

L'analyse et la synthèse de mécanismes sont donc deux approches distinctes l'une de l'autre et abordant le problème de l'étude des mécanismes de deux manières diamétralement opposées : l'étude ou la conception. Ceci vaut cette autre désignation de la synthèse de mécanismes, à savoir *problème inverse*, en rapport à l'analyse de mécanismes. Cependant un autre lien existe entre ces deux approches. En effet, la conception de mécanismes est très souvent réalisée par *essais-erreurs* en s'appuyant sur l'analyse de mécanismes (voir figure 1.1). Toutefois, cette démarche est généralement fastidieuse et ne conduit pas nécessairement aux *meilleurs mécanismes*. D'ailleurs, elle ne permet qu'une *mise au point* de mécanismes existants alors, qu'au contraire, la synthèse de mécanismes doit tendre vers la création de nouveaux mécanismes et permettre la maîtrise de leur processus d'élaboration.

1.3 Mécanismes

La synthèse de mécanismes étant une méthode de conception de mécanismes, la notion de mécanisme doit, tout d'abord, être précisée. Un *mécanisme* est un ensemble de pièces reliées entre elles par des liaisons mécaniques. Une *pièce* est un ensemble de points. Tout au long de ce mémoire, les pièces considérées sont rigides, *i.e.* indéformables : les distances relatives entre tous les points d'une même pièce n'évoluent pas au cours du temps. Une *liaison mécanique* permet de mettre en relation deux pièces en bloquant certains mouvements relatifs entre elles. Elles peuvent aussi être appréhendées comme une relation qui n'autorise qu'un mouvement relatif partiel. Les liaisons mécaniques sont définies par la nature du mouvement relatif entre les pièces qu'elles permettent : les *degrés de liberté* d'une liaison mécanique.

Dans ce mémoire, les liaisons mécaniques sont restreintes aux liaisons n'autorisant qu'un mouvement relatif clairement défini : les *liaisons cinématiques parfaites*. Le nombre de types de liaisons cinématiques différentes est déterminé, si bien qu'une liste exhaustive peut en être dressée (le tableau 1.1 donne la représentation des principales liaisons cinématiques ; pour un inventaire exhaustif, se reporter au tableau 3.1). Il est aussi possible de ramener tous les types de liaisons cinématiques à une combinaison particulière de liaisons cinématiques de type pivot et glissière [28] ou seulement pivot-glissant avec certaines restrictions. Une liaison cinématique est nécessairement connectée à exactement deux pièces.

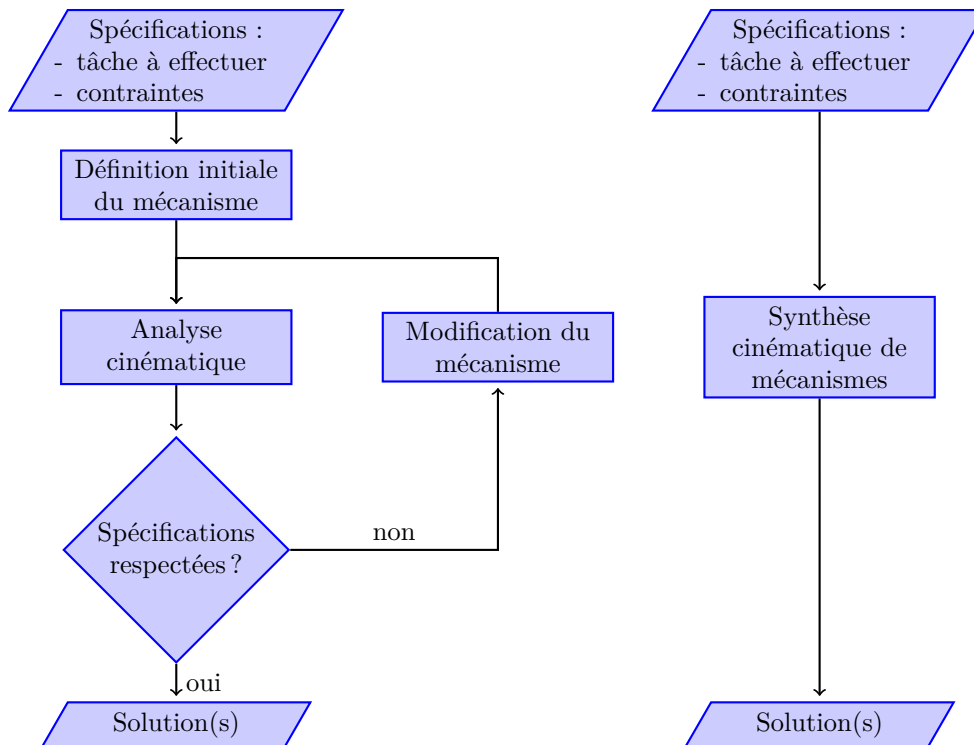


FIG. 1.1 : Analyse cinématique (dans une démarche d'essais-erreurs) à gauche et synthèse cinématique à droite utilisées pour la conception de mécanismes.

Dans le cas général, les pièces sont, elles, connectées à au moins deux liaisons cinématiques. Cependant, deux cas particuliers peuvent se présenter. Le premier cas peut être vite écarté : une pièce reliée à aucune liaison cinématique est un mécanisme (dégénéré) à elle seule et ne présente pas d'intérêt particulier. Le deuxième cas est plus intéressant : une pièce connectée à une seule liaison cinématique est une pièce terminale d'un mécanisme arborescent n'ayant pas de fonction cinématique particulière. Elle ne présente donc pas d'intérêt sur un plan purement cinématique, à moins de supporter une spécification particulière. Elle peut, en revanche, en avoir un sur un plan dynamique (intervenant dans la définition de l'inertie du mécanisme) ou fonctionnel (intervenant dans la tâche à effectuer par le mécanisme, cf. 1.4.2).

Deux classes de mécanismes sont généralement distinguées : les mécanismes dits ouverts (ou sériels) et les mécanismes dits fermés (ou parallèles). L'élément ainsi caractérisé est la chaîne cinématique, composée de l'ensemble des pièces mécaniques et des liaisons cinématiques. Elle forme un mécanisme si elle comporte plus d'un couple de pièce et de liaison. Dans un mécanisme à chaîne cinématique ouverte (figure 1.2a), il y a autant de liaisons que de pièces. Au contraire dans un mécanisme à chaîne cinématique fermée (figure 1.2b), il y a plus de liaisons que de pièces. Il est alors possible d'identifier des *boucles topologiques* (ou *boucles cinématiques*).

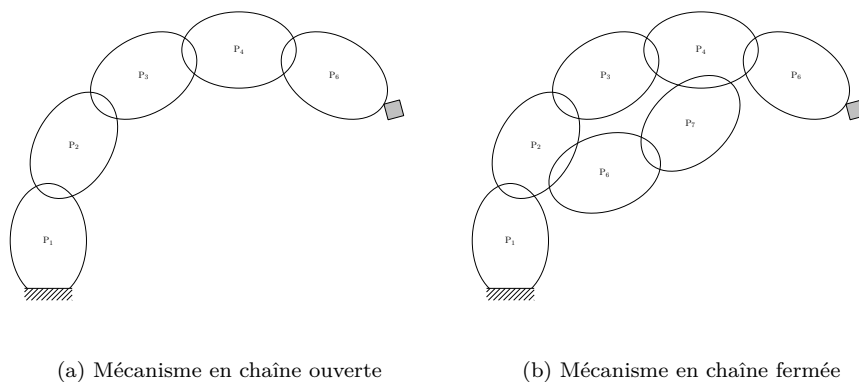


FIG. 1.2 : Illustration de mécanismes à chaîne cinématique ouverte et fermée.










Trois principaux ensembles d'éléments sont nécessaires à la définition et la connaissance d'un mécanisme [118]. Il est nécessaire de connaître la *topologie* (ou *structure*) du mécanisme, les *dimensions* des pièces le constituant et sa *position* par rapport à un repère de référence. Ces trois ensembles d'informations sont aussi parfois désignés par l'acronyme TPD (Topologie, Position et Dimensions). Dans le cas des mécanismes parallèles, lorsque le problème d'assemblage des pièces du mécanisme a plusieurs solutions, un quatrième ensemble d'éléments est nécessaire : il s'agit de la configuration du mécanisme. Cette information de configuration permet de différencier deux mécanismes identiques mais assemblés dans deux états incompatibles (nécessité de démonter puis remonter le mécanisme pour passer d'un état à un autre).

D'autres informations sont parfois nécessaires pour définir un modèle réaliste et complet d'un mécanisme. Il peut être, par exemple, nécessaire de disposer d'un modèle numérique volumique précis de chaque pièce afin de traiter des contraintes de non collision entre celles-ci ou encore de disposer des caractéristiques des liaisons cinématiques (plage de travail pour leurs paramètres cinématiques) pour réaliser une simulation correcte. La prise en compte des jeux au sein des liaisons et de tolérances portant sur les dimensions de pièces peut aussi être indispensable à une simulation réaliste. Ces types d'information ne sont pas couramment intégrés dans les problèmes de synthèse de mécanismes car ils interviennent très en aval de la conception d'un mécanisme et n'apparaissent donc que très rarement dans les entrées d'un problème donné. Cependant ils peuvent être primordiaux pour l'expression de certaines contraintes.

1.3.1 Topologie d'un mécanisme

Le premier ensemble d'informations est constitué de la topologie du mécanisme. Ces informations donnent le nombre de pièces constituant le mécanisme ainsi que le type des liaisons cinématiques (voir tableau 1.1) les connectant. Ces informations correspondent à la connaissance d'un graphe où les nœuds sont les pièces du mécanisme et les arcs les liaisons cinématiques. Seuls les arcs portent des informations : ils portent la nature de la liaison cinématique. Ce graphe est désigné par *graphe cinématique*. La connaissance de la topologie

d'un mécanisme renseigne sur la nature des mouvements qui sont permis par celui-ci.

		
1 R — 0 T pivot	0 R — 1 T glissière	1 R — 1 T pivot-glissant
		
2 R — 1 T annulaire	2 R — 0 T rotule à doigt	1 R — 2 T appui plan
		
3 R — 2 T ponctuelle	2 R — 2 T rectiligne	3 R — 0 T rotule

TAB. 1.1 : Représentations des différentes liaisons cinématiques et leurs degrés de liberté (R en rotation et T en translation).

Il est aussi possible d'ajouter des méta-informations¹ qui précisent quelques relations entre les différentes liaisons. Ces méta-informations peuvent influencer significativement la topologie du mécanisme et donc la nature des mouvements pouvant être effectués. Par exemple, il peut être nécessaire de préciser l'orientation relative de deux liaisons pivot-glissant. En effet, deux liaisons pivot-glissant de même axe réalisent une liaison équivalente de type liaison pivot-glissant, alors que deux liaisons pivot-glissant d'axes parallèles réalisent une liaison équivalente de type liaison glissière et que toutes autres orientations relatives des axes de deux liaisons pivot-glissant réalisent une liaison équivalente de type encastrement. Toutes les classes d'équivalence des liaisons ont été étudiées. Pour plus de détails à ce sujet, nous recommandons l'ouvrage [28].

Il est possible de se passer de ces méta-informations en prenant soin de toujours remplacer les parties du graphe influencées par celles-ci par des sous-graphes ne nécessitant pas de méta-informations. En d'autres termes, il existe généralement un ensemble d'informations d'ordre strictement topologique qui permet de définir un mécanisme sans avoir recours à des contraintes particu-

¹Des *méta-informations* sont des informations supplémentaires adjointes aux informations de topologie sans être elles-mêmes de nature topologique. Elles pourraient aussi être désignée par *contraintes*.

lières sur celles-ci.

Un ensemble de pièces reliées par des liaisons mécaniques doit respecter un certain nombre de contraintes pour être qualifié de mécanisme. Notamment, si les pièces sont connectées de telle sorte qu'il n'y ait plus de mouvement relatif possible entre elles, l'ensemble de ces pièces constitue une *structure rigide* et non un mécanisme. Par exemple, trois bielles reliées deux à deux (cf. figure 1.8b) forment une structure élémentaire, rigide et utilisée couramment pour des treillis. Par contre, quatre bielles assemblées bout à bout en une chaîne fermée (cf. figure 1.8c) forment une classe de mécanismes largement étudiée qui permet des mouvements relatifs entre les pièces. En fixant une des bielles et en désignant par bielle motrice et bielle menée les deux bielles connectées à la bielle fixée, le mouvement admissible par ce mécanisme ne dépend plus que des longueurs relatives des bielles et de la position de la bielle motrice.

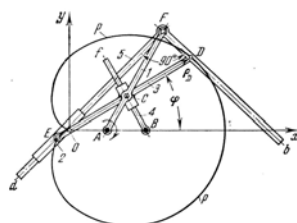
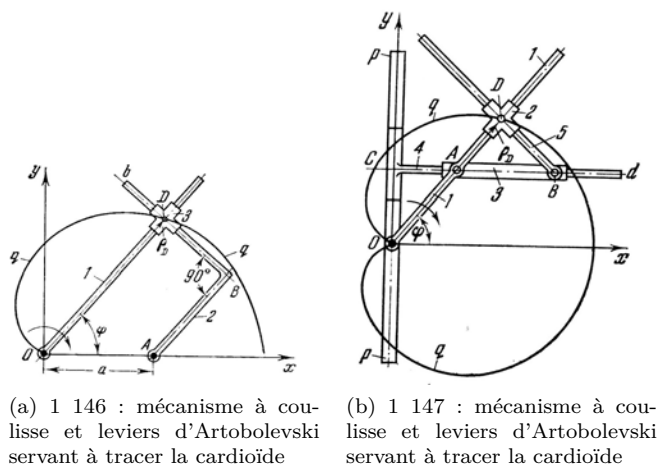
Ainsi, la classe de mouvement que pourra décrire un mécanisme dépend de la topologie de celui-ci, alors que la définition complète du mouvement dépend de la topologie et des dimensions géométriques. Deux mécanismes présentant des topologies tout à fait différentes peuvent cependant offrir la même fonctionnalité macroscopique. Par exemple, les trois mécanismes de la figure 1.3 permettent de décrire une cardioïde malgré des topologies très différentes.

Un mécanisme se caractérise par le fait que non seulement un mouvement est possible mais aussi que ce mouvement se répète à l'identique à chaque fois que le mécanisme se retrouve dans des positions similaires. Un mécanisme plan à bielles formant une chaîne fermée à plus de quatre bielles ne propose un mouvement parfaitement défini que sous certaines conditions, obtenues qu'après une analyse complète de ce mécanisme.

1.3.2 Dimensions d'un mécanisme

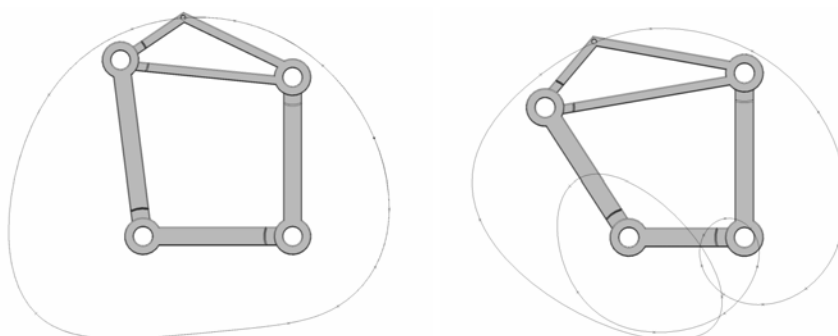
Un même graphe cinématique peut représenter tout un ensemble de mécanismes. Ils ne seront différenciés que par les dimensions relatives respectives de leurs pièces. Le mouvement permis par un mécanisme dépend de la nature des liaisons cinématiques qui le composent mais aussi des positionnements relatifs de celles-ci. Or, ce sont les pièces qui permettent via un certain nombre de *dimensions fonctionnelles* de positionner, *i.e.* localiser et orienter, les liaisons cinématiques les unes par rapport aux autres. Ces informations peuvent être contenues dans un *schéma cinématique*. Ce type de schéma permet de représenter les liaisons en respectant leurs positions relatives. Un modèle filaire (*filaire* car essentiellement basé sur des lignes) permet de figurer les dimensions fonctionnelles des pièces. Le graphe cinématique permet de représenter la classe d'un mécanisme et le schéma cinématique permet, lui, de représenter l'instance d'un mécanisme.

Des instances d'une même classe de mécanismes avec des dimensions géométriques distinctes autorisent généralement des mouvements très différents. La figure 1.4 illustre ce phénomène en montrant les deux trajectoires d'un point effecteur de deux mécanismes à quatre barres plans différenciés seulement par une faible variation des longueurs des barres.



(c) 1 149 : mécanisme à coulisse et leviers d'Artobolevski servant à tracer et à suivre le contour de la cardioïde

FIG. 1.3 : Trois mécanismes extraits des recueils d'Artobolevski [7, 8, 9, 10, 11], ayant des topologies différentes mais proposant la même fonctionnalité.



(a) Longueurs des barres : 160, 170, 185 et 190. (b) Longueurs des barres : 120, 170, 210 et 160.

FIG. 1.4 : Influence des dimensions d'un mécanisme sur la nature de son mouvement.

Dans le cas où des problèmes incluant des notions de dynamique sont traités, des informations de poids (valeur de la masse et position du centre de gravité) et d'inertie (valeurs des moments d'inertie et orientation des axes d'inertie) sont ajoutées au modèle filaire permettant de représenter les pièces réalisant le schéma cinématique. Ces informations peuvent être ajoutées sous forme d'étiquettes adjointes aux pièces ou en remplaçant les droites représentant les pièces par des volumes simples (cylindres) avec une masse volumique déterminée dont la masse et le moment d'inertie sont équivalents à la pièce réelle.

1.3.3 Position d'un mécanisme

Avec les deux ensembles d'informations précédents, il est possible de définir précisément un mécanisme. Toutefois, pour être capable de déterminer son mouvement dans un environnement donné, le mécanisme doit être localisé dans cet environnement. Il faut en particulier le positionner et le localiser par rapport à un référentiel.

Toutefois, puisque le mécanisme est déjà complètement défini, il n'est nécessaire que de localiser une pièce de ce mécanisme par rapport au référentiel de base. Une pièce, généralement fixe dans le référentiel considéré, doit donc être distinguée. Cette pièce ou cet ensemble de pièces est désigné par *bâti*. Cette information sémantique est ajoutée au modèle comme le sont celles ajoutées à la section précédente.

Le positionnement du mécanisme est donc ramené à la désignation d'une ou de plusieurs pièces fixes et à la localisation et à l'orientation de celles-ci.

1.3.4 Configurations d'un mécanisme

L'assemblage des mécanismes ouverts ne présente pas de problème particulier. En revanche, l'assemblage de mécanismes fermés peut se révéler plus délicat. Lorsqu'il y a plusieurs solutions au problème d'assemblage, chacune de celles-ci correspond à une configuration différente d'un même mécanisme qu'il est important de distinguer. Nous trouverons une définition des différents sens possibles pour configuration et posture dans [20]. Pour illustrer ce point, la figure 1.5 présente deux configurations d'un même mécanisme à quatre barres (même dimensions des barres et même position de la barre fixe) et les deux trajectoires du point effecteur.

1.4 Classification des problèmes de synthèse de mécanismes

Dans un contexte omniprésent de performance et de productivité, l'utilisation d'outils parfaitement adaptés aux tâches à effectuer est un sujet prépondérant et essentiel. Plus particulièrement, les méthodes relatives à la conception et à la mise au point de mécanismes font l'objet de très nombreux travaux.

La synthèse de mécanismes est une activité qui permet de générer de nouveaux produits en fonction de tâches à réaliser. La synthèse de mécanismes doit permettre de générer des produits candidats à la réalisation d'une tâche mais aussi de sélectionner et d'ordonner un sous-ensemble de produits répondant de manière optimale à la tâche envisagée parmi un ensemble plus vaste de produits

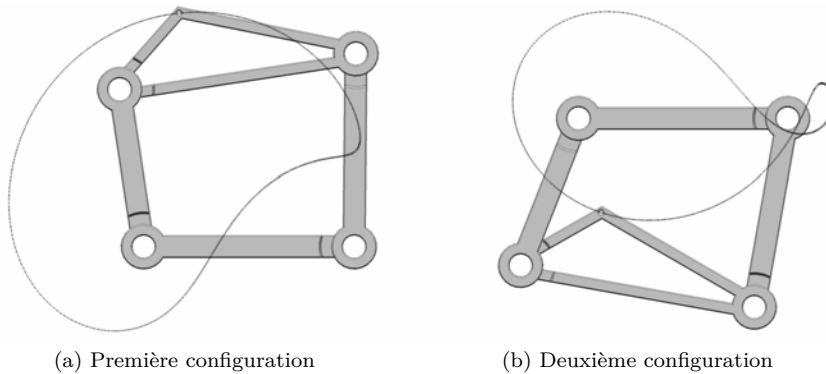


FIG. 1.5 : Deux configurations et les trajectoires associées d'un mécanisme à quatre barres plan (longueurs des barres : 185, 170, 210 et 140).

potentiellement aptes à réaliser cette tâche. De plus, au vu des contraintes généralement ajoutées à la définition d'un problème qui forment la plupart du temps un ensemble insoluble, il est d'autant plus important de pouvoir classer des solutions potentielles sachant qu'il n'en existe pas de rigoureuse.

Trois opérations sont nécessaires à la conception d'un mécanisme devant effectuer une tâche donnée [51]. Il faut d'abord identifier le type de mécanisme à utiliser : mécanismes à cames ou à liaisons cinématiques, mécanismes plans ou mécanismes spatiaux, *etc.* Il est ensuite nécessaire de déterminer le nombre de liaisons et les liens entre elles. Cette opération permet d'obtenir un mécanisme présentant le nombre de degrés de libertés nécessaires à la réalisation de la tâche à effectuer. La troisième opération consiste à déterminer les dimensions des éléments constituant le mécanisme pour obtenir le mouvement souhaité.

La synthèse de mécanisme est la réunion de ces trois opérations. On parle alors de synthèse de type, de synthèse de topologie (ou de nombre) et de synthèse de dimensions. Ces trois types de synthèse sont mêlés. Ils ne sont pas trois opérations séquentielles mais, au contraire, ils présentent des interactions fortes.

1.4.1 Synthèses de type, topologique et dimensionnelle

Le problème global de synthèse de mécanisme est l'agencement et l'interaction des trois niveaux de synthèses de mécanismes. Pour pouvoir créer et complètement définir un mécanisme, il est nécessaire de prendre des décisions concernant :

1. la forme ou le type de mécanisme ;
2. la topologie du mécanisme qui permet de réaliser les mouvements spécifiés, c'est-à-dire le nombre de pièces et les types de liaisons cinématiques entre celles-ci ;
3. les dimensions, longueurs et angles, des pièces positionnant les liaisons les unes par rapport aux autres.

Le premier niveau de synthèse est désigné par *synthèse de type*. À cette étape est effectué le choix du type de mécanisme : mécanismes à barres, à engrenages, à cames, à courroies, *etc.* Le deuxième niveau est désigné par *synthèse topologique*. À cette étape, est choisi le nombre de pièces ainsi que le nombre et le type de liaisons entre celles-ci afin d'obtenir le nombre de degrés de liberté souhaité. Il est à noter que le nombre de degrés de liberté d'un mécanisme correspond à son nombre d'entrées, *i.e.* le nombre de lois de commande à définir pour totalement décrire le mécanisme. Le troisième niveau est désigné par *synthèse dimensionnelle*. À cette étape, les dimensions des pièces sont déterminées. La notion de dimension regroupe les longueurs et les angles fonctionnels caractéristiques de chaque pièce. Ce sont d'ailleurs les pièces qui permettent de mettre en position relativement chaque liaison cinématique. Ce sont elles qui définissent les positions des liaisons cinématiques et au final le mouvement réalisable par le mécanisme. Dans le cas de mécanismes à cames ou à engrenages, les travaux existants permettent de répondre à la quasi totalité des problèmes. Dans le cas des mécanismes à barres utilisant les liaisons cinématiques de base, le problème n'est encore que très partiellement traité.

Synthèse de type

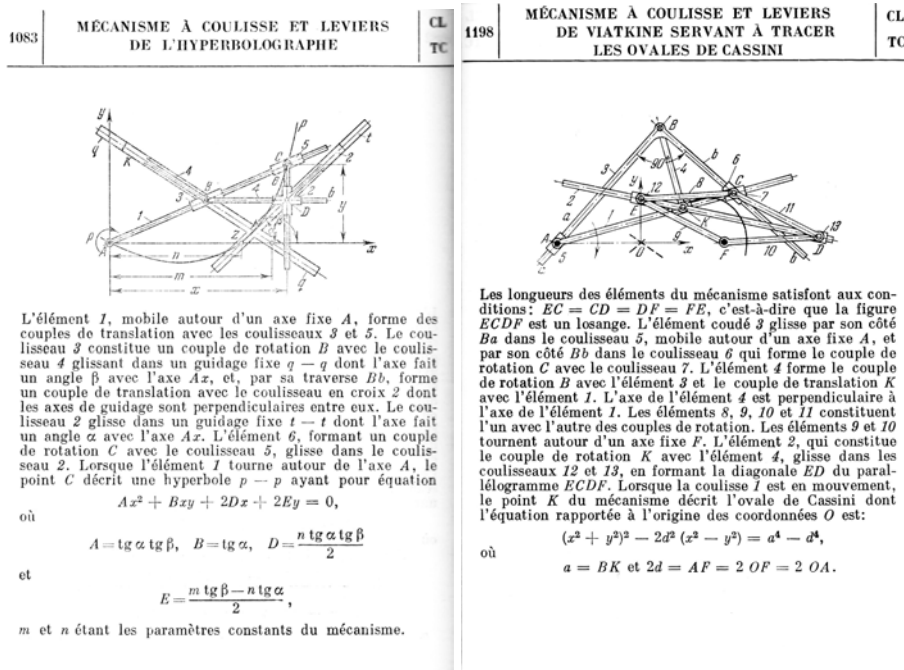
La sélection du type de mécanisme pour la réalisation d'une tâche spécifiée dépend de nombreux paramètres extérieurs au champ strict de la cinématique, comme l'environnement de travail du mécanisme, les matériaux et les machines disponibles, les modes de réalisation, *etc.* À cause de la grande diversité de ces types de paramètres, il est difficile de donner une méthode générale pour effectuer un choix pertinent du type de mécanisme à utiliser. Ce choix s'effectue en utilisant des ensembles de règles généralement propres à un domaine particulier souvent qualifiées de *règles métier*.

Comme différents types de mécanismes peuvent convenir pour réaliser la même tâche, il peut être intéressant de disposer de méthodes listant l'ensemble des mécanismes pouvant réaliser une tâche donnée. Il est aussi utile d'ordonner cet ensemble de mécanismes suivant certains critères afin de sélectionner le plus pertinent d'entre eux. Les critères de sélection peuvent être éloignés de considérations cinématiques et peuvent être de différentes natures, comme par exemple :

- encombrement du mécanisme ;
- positionnement des entrées et des sorties du mécanisme ;
- contrainte d'assemblage, de réalisation ou de maintenance du mécanisme ;
- utilisation de sous-parties du mécanisme déjà définies ou de composants standardisés.

Afin de pouvoir lister des mécanismes, il est nécessaire de proposer une classification de ceux-ci. Plusieurs classifications sont possibles suivant le point de vue adopté et les critères retenus. Parmi les principaux ouvrages classant les mécanismes, on trouve ceux de Reuleaux [124, 123] et d'Artobolevski [12]. Ces classifications ont donné lieu à de nombreux catalogues de mécanismes. Le catalogue le plus complet est sans doute celui proposé par Artobolevski [7, 8, 9, 10, 11]. La figure 1.6 montre deux extraits de ces catalogues.

Les catalogues de mécanismes constituent une source dans laquelle il est possible de puiser des solutions servant à initialiser un processus de conception. L'utilisation de catalogues est naturellement adaptée à la conception utilisant



(a) Mécanisme 1 083

(b) Mécanisme 1 198

FIG. 1.6 : Mécanismes extraits des recueils d'Artobolevski.

des pièces standard ou normalisées.

L'élaboration de catalogues et le parcours de ceux-ci amène naturellement à l'utilisation de méthodes issues des travaux en intelligence artificielle tels que les systèmes experts et les moteurs d'inférence. En effet, ces méthodes sont parmi celles qui peuvent prétendre suppléer l'expérience et l'expertise d'un concepteur spécialisé.

Synthèse topologique

La détermination du nombre, de la nature et de la disposition des liaisons entre les solides est désignée par synthèse topologique (ou synthèse structurale). Mises à part les approches se basant sur des catalogues ou des systèmes experts [94, 147, 54], de nombreuses méthodes de synthèse topologique se basent sur la théorie des graphes [45, 46, 121, 150]. Ces méthodes génèrent habituellement des graphes de mécanismes par énumération puis les trient afin d'extraire du lot ceux qui possèdent les propriétés de la classe de mécanismes souhaitée au départ. En général, les différents travaux considèrent des mécanismes comportant un nombre maximum de solides et de degrés de libertés car on assiste rapidement à une explosion combinatoire du nombre de solutions. Pour un mécanisme parallèle simple à quatre barres, par exemple, on compte déjà trois graphes (voir figure 1.7) et la croissance du nombre de topologies distinctes avec le nombre de solides composant le mécanisme est exponentielle

(cf. [57]).

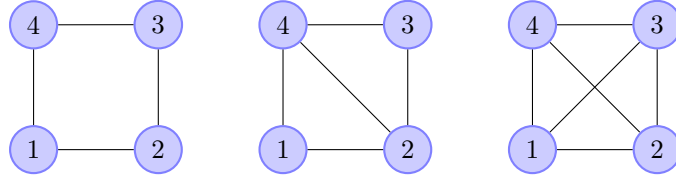


FIG. 1.7 : Les trois graphes cinématiques pour un mécanisme parallèle à quatre pièces

Un apport à la synthèse topologique vient des travaux sur les méthodes d'analyse de la mobilité structurelle. En effet, la notion de degré de liberté est intimement liée à la notion de mobilité. Le nombre de degrés de liberté d'un mécanisme correspond au nombre de variables à spécifier pour définir complètement une configuration. La mobilité de certains mécanismes peut être ainsi déduite à partir du graphe le représentant. Dans le cas de mécanismes plans à plus de quatre bielles formant une chaîne cinématique fermée, le critère de mobilité est donné par une équation du critère de Grübler. Cette équation fait intervenir le nombre de pièces p et le nombre de liaisons cinématiques ℓ dans le cas où le mécanisme est complètement défini et présentant une variable de contrôle ($ddl = 1$). Elle s'exprime, pour les mécanismes plans, par

$$2\ell - 3p + 4 = 0.$$

Cette équation a été confirmée en 1928 [157] et a été généralisée en 1917 aux mécanismes à bielles spatiaux. Dans une portée plus générale, faisant intervenir le nombre de degrés de liberté, cette équation devient

$$ddl = 3(p - 1) - 2\ell. \quad (1.1)$$

Cette équation permet bien de retrouver la précédente lorsque $ddl = 1$. L'équation (1.1) est plus générale que la précédente mais elle ne prend en compte que les mécanismes plans à chaîne fermée et dont une pièce est fixée. Et surtout, elle ne prend en compte aucun paramètre supplémentaire de type dimension ou autre. Le tableau 1.2 propose quelques exemples du calcul du degré de liberté pour les mécanismes de la figure 1.8.

figure	p	ℓ	critère de Grübler	ddl	remarque
1.8a	2	2	$3(2 - 1) - 2 \cdot 2$	-1	sur-contraint
1.8b	3	3	$3(3 - 1) - 2 \cdot 3$	0	rigide, iso-contraint
1.8c	4	4	$3(4 - 1) - 2 \cdot 4$	1	mobile suivant le critère de Grashof
1.8d	5	5	$3(5 - 1) - 2 \cdot 5$	2	-
1.8e	5	6	$3(5 - 1) - 2 \cdot 6$	0	-
1.8f	6	8	$3(6 - 1) - 2 \cdot 8$	-1	-

TAB. 1.2 : Exemples de ddl suivant le critère de Grübler

Le calcul du critère de Grübler avec l'équation (1.1) est extensible aux mécanismes utilisant des liaisons glissières en complément des liaison pivots, à

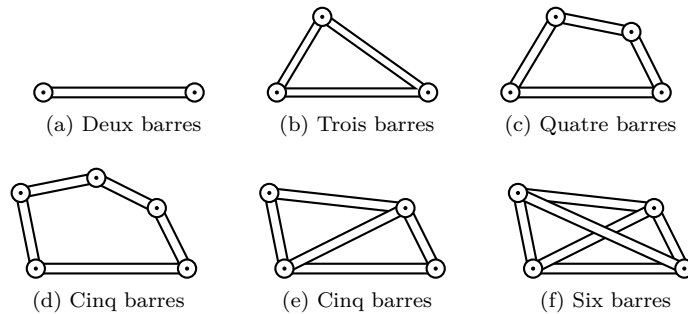


FIG. 1.8 : Exemples : Mécanismes plans à n barres.

condition de rester dans le domaine des mécanismes plans. En effet, les liaisons glissières présentent le même nombre de contraintes et de degrés de liberté que les liaisons pivots. Il peut aussi être étendu aux liaisons composées mais, dans ce cas, il est nécessaire de modifier la formule (1.1) en tenant compte du nombre de contraintes effectivement apporté par chaque liaison.

Il faut néanmoins remarquer que de nombreux cas particuliers, ou cas aux limites, entraînent ou bloquent la mobilité d'un mécanisme. Ces cas particuliers peuvent découler, par exemple :

- des dimensions des pièces,
- de la position ou de l'orientation relative des axes des liaisons — donc de la géométrie des pièces,
- des positions des centres instantanés de rotation des mouvements.

Dans le cas particulier du mécanisme à quatre bielles plan et présentant une boucle cinématique fermée (voir figure 1.8c), Grashof [23] a mis en évidence les critères qui permettent de savoir si le mécanisme est mobile. Il a identifié les deux paramètres d'entrée qui sont les proportions relatives des bielles et l'identification de la bielle fixe. Grâce à ces deux paramètres, il est possible de déterminer le type de mécanisme², c'est-à-dire un mécanisme manivelle – manivelle, manivelle – bras oscillant ou bras oscillant – bras oscillant. Il est important de constater l'influence de ces paramètres d'entrée sur la nature même du mécanisme.

Au-delà des problèmes posés par l'étude de la mobilité des mécanismes à partir d'un graphe, le passage de la représentation sous forme de graphe à un schéma cinématique de mécanisme peut se révéler difficile. En effet, à un graphe peuvent correspondre plusieurs mécanismes distincts. Comme le souligne Fauroux [42], « le graphe ne constitue en aucune manière une signature unique de chaque mécanisme ». La génération automatique et exhaustive de tous les graphes d'une certaine classe de mécanismes ne signifie donc pas que les mécanismes eux-mêmes soient connus.

²Un mécanisme plan à quatre bielles présente une bielle fixe liée à une bielle motrice et une bielle menée et une bielle couplant les deux précédentes. Les deux bielles liées à la bielle fixe peuvent présenter un mouvement de rotation continu (manivelle) ou alternatif et partiel (bras oscillant).

D'autres méthodes pour la synthèse topologique, basées sur l'exploration combinatoire d'une base de mécanismes et sur des règles de conception permettant d'éliminer les combinaisons inadaptées, méritent aussi d'être citées. Chew *et al.* [24] proposent notamment un système à base de connaissances utilisant la modélisation par graphes de la structure des mécanismes. Les 85 règles de la base de connaissance permettent de filtrer les solutions potentielles générées à partir des spécifications.

La synthèse de structures par composition de briques fonctionnelles a fait aussi l'objet de nombreux travaux [66, 143, 21, 22]. La composition de briques fonctionnelles consiste en la connexion de sous-ensembles de composants par des liaisons en mécanique, des tuyaux en hydraulique, des fils électriques en électronique, etc [159]. D'un assemblage de briques structurales doit pouvoir émerger une fonction résultante. Il faut donc pouvoir déterminer cette fonction résultante directement à partir des fonctions des briques élémentaires et de la topologie de la connexion. Procédant par mise en série de modules mécaniques élémentaires, Fauroux [42], Fauroux et Sartor [43] proposent ainsi une méthode de synthèse topologique à la classe des mécanismes de transmission de mouvement rotatif à un degré de mobilité tels que les réducteurs à engrenages.

Enfin, Sardain [132] détaille une approche de synthèse topologique et dimensionnelle impliquant des mécanismes articulés plans en chaîne fermée à un degré de mobilité comportant jusqu'à huit solides et des liaisons pivots et glissières.

Synthèse dimensionnelle

La *synthèse dimensionnelle* est la détermination des dimensions, *i.e.* les longueurs et les angles, fonctionnelles des pièces d'un mécanisme pour réaliser une tâche déterminée. Le dessin d'une came devant permettre un certain mouvement est un exemple de synthèse dimensionnelle. La came représente une fonction de transfert entre sa position angulaire et la position, la vitesse ou l'accélération de la pièce qui y est accouplée. Les mécanismes à bielles sont une autre famille de mécanismes représentant une fonction de transfert, cependant les méthodes pour permettre leur conception sont tout à fait différentes de celles employées pour la conception des cames.

Deux branches dans la synthèse dimensionnelle sont couramment distinguées : la *synthèse dimensionnelle approchée* et la *synthèse dimensionnelle exacte*. Lors d'une étape de synthèse dimensionnelle approchée d'un mécanisme, la courbe obtenue devant représenter la fonction attendue ne correspond que par certains points avec la fonction spécifiée. Ces points où coïncident résultats et spécifications sont désignés par *points de passage*. L'objectif est donc ramené à obtenir une courbe résultat présentant le plus possible de points de concordance avec la courbe spécifiée et un écart entre ces deux courbes le plus petit possible. La synthèse dimensionnelle exacte est elle limitée à une famille très restreinte de courbes spécifiées associées à un nombre limité de mécanismes précis pour lesquels il existe une bijection entre classe de mécanismes et classe de courbes.

Le reste des travaux présentés dans ce mémoire se focalise sur la synthèse dimensionnelle et approchée de mécanismes.

1.4.2 Les tâches dans le cas de la synthèse dimensionnelle

La raison d'être de la synthèse de mécanismes est de proposer des mécanismes répondant à une tâche ou une fonctionnalité précises. La définition d'une tâche est donc nécessaire à l'obtention d'un problème de synthèse. Ces objectifs ou tâches peuvent être de différentes natures. Un problème qui ne spécifierait pas d'objectif mais que des contraintes, ne serait plus un problème de synthèse mais un problème d'assemblage de mécanismes (catégorie de problème largement traitée par les outils de CAO [134, 37, 33]).

Parmi les tâches à effectuer rencontrées dans les problèmes de synthèse dimensionnelle de mécanismes, nous pouvons en citer quelques unes tirées de [51].

Guidage d'un point. Guidage d'un point le long d'une courbe donnée. Un point effecteur est guidé sur une courbe spécifiée. Des points de passage peuvent être imposés le long de cette courbe : le point effecteur doit coïncider avec chacun des points de passage avec une précision définie et dans l'ordre donné par le parcours de la courbe.

Corrélation de positions angulaires. Corrélation de la position angulaire de deux bielles. Les positions angulaires de deux bielles, l'une menant et l'autre menée, sont liées par une relation spécifiée. Cette relation peut être donnée formellement par une équation mathématique ou numériquement par un ensemble ordonné ou non de couples de valeurs associées aux deux positions angulaires des bielles.

Corrélation de positions. Corrélation de la position angulaire d'une bielle avec la position d'un point le long d'une courbe. Un point effecteur est guidé sur une courbe spécifiée en fonction de la position angulaire d'une bielle. Dans ce cas, les variations de la position angulaire de la bielle sont associées aux variations de la position du point effecteur le long de la courbe. Des points de passage peuvent être imposés le long de la courbe. Le cas échéant, ils sont associés à une position angulaire donnée de la bielle : chaque point de passage est associé à une position angulaire de la bielle. Dans ce cas, une position angulaire absolue de la bielle est associée à une position absolue du point effecteur le long de la courbe.

Corrélation de positions angulaires. Corrélation de la position angulaire de trois bielles. Les positions angulaires de deux bielles menées sont liées par une relation spécifiée à la position angulaire d'une troisième bielle, la bielle motrice. Cette relation peut être donnée formellement par une équation mathématique ou numériquement par un ensemble ordonné ou non de triplets de valeurs associées aux trois positions angulaires des bielles.

Ces différentes tâches sont souvent regroupées en trois grandes familles dans le cadre de la synthèse dimensionnelle de mécanismes. On trouve les problèmes de suivi de trajectoire, génération de mouvement et génération de fonction. Nous retiendrons cette classification pour la suite. Toutefois il faut remarquer

que l'ajout de contraintes (par exemple respect du critère de Grashoff, absence de blocage, angle de transmission minimum, évitement de collisions, ...) peut complètement changer la nature de celui-ci et rendre certaines méthodes inadaptées.

Suivi de trajectoire

La tâche désignée par *suivi de trajectoire* correspond à la volonté de faire parcourir un point lié à la pièce qualifiée d'effecteur le long d'une courbe (figure 1.9). Cette courbe peut présenter certaines particularités qui orienteront le choix des topologies des mécanismes pouvant répondre à ce type d'objectif.

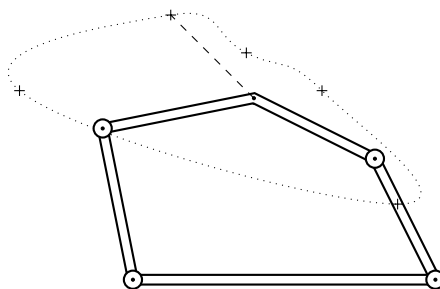


FIG. 1.9 : Suivi de trajectoire, mécanisme à quatre barres.

Le premier élément pouvant caractériser la courbe support de la trajectoire est de nature géométrique. Parmi les caractéristiques géométriques les plus importantes, il y a la nature de la surface contenant cette courbe. Les deux cas particuliers qui ressortent sont les cas où cette surface est plane ou sphérique. Ces deux cas amènent à considérer des mécanismes plans pour le premier et des mécanismes sphériques pour le deuxième. D'autres caractéristiques influencent le choix de la morphologie du mécanisme comme, par exemple, le fait que la courbe soit dérivable, ouverte ou fermée, *etc.*

L'autre paramètre important de la spécification d'une trajectoire est la manière dont elle doit être parcourue. Le premier élément à prendre en compte est de savoir si cette courbe doit être considérée comme un objet mathématique continu (figure 1.10a)

$$c = \{X \in \mathbb{R}^3 \mid f(X) = g(X) = 0\} \quad \text{avec} \quad (f, g) \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})^2$$

ou comme un ensemble discret de points (figure 1.10b)

$$c = \{X_1, X_2, \dots, X_n\} \quad \text{avec} \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, X_i \in \mathbb{R}^3.$$

Cet ensemble discret de points peut être obtenu d'après l'expression de la courbe ou directement être la spécification proprement dite. Dans les deux cas, il peut être pertinent d'associer à ces points un poids qui déterminera l'importance d'un point par rapport à l'ensemble. Dans le cas d'une courbe continue (figure 1.11a), cela pourra s'interpréter

$$c = \{(X, p(X)) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \mid f(X) = g(X) = 0\} \quad \text{avec} \quad p \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$$

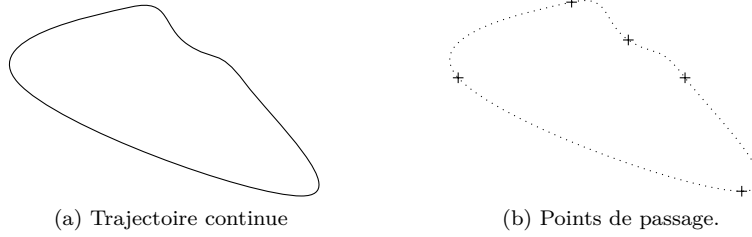


FIG. 1.10 : Spécification continue ou discrète de la trajectoire à suivre.

et dans le cas d'un ensemble discret de points (figure 1.11b), voir [67],

$$c = \{(X_1, p_1), (X_2, p_2), \dots, (X_n, p_n)\} \quad \text{avec} \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, p_i \in \mathbb{R}^+.$$

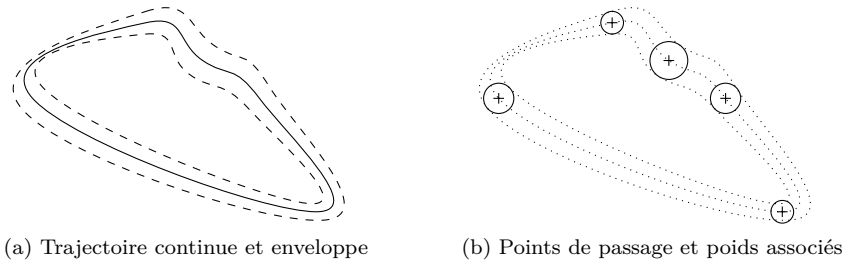


FIG. 1.11 : Tolérance sur le suivi de la trajectoire.

Ce poids p pourrait être interprété comme l'inverse $r = \frac{1}{p}$ du rayon d'une boule (ou d'un disque) centrée sur le point en question et qui donnerait le volume (ou la surface) dans lequel le point effecteur devrait passer pour que la solution soit acceptable. Le deuxième élément à prendre en compte est l'ordonnement des abscisses curvilignes du point effecteur sur la courbe. Ceci se traduirait par une dépendance à une variable temporelle des abscisses curvilignes du point effecteur dans le cas d'un ensemble continu de points (figure 1.12a)

$$c = \{(x(t), y(t), z(t)) \mid \forall t \in \mathbb{R}^+\} \quad \text{avec} \quad (x, y, z) \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})^3$$

ou de l'indexation des points dans le cas du remplacement par un ensemble discret de points de celle-ci (figure 1.12b)

$$c = (X_1, X_2, \dots, X_n).$$

Génération de mouvement

La tâche désignée par *génération de mouvement* enrichit celle désignée par suivi de trajectoire. Elle substitue à la notion de point effecteur celle de trièdre

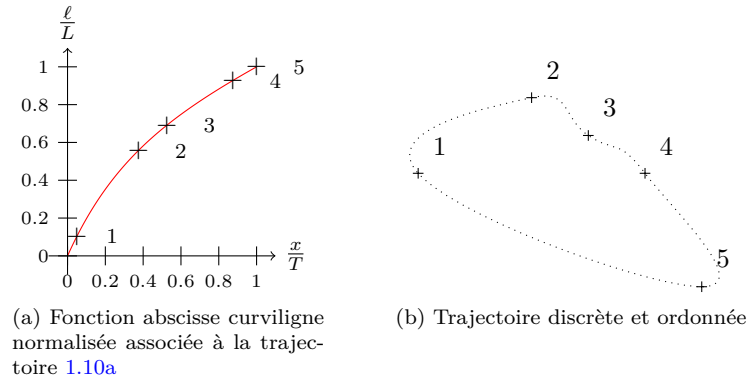


FIG. 1.12 : Trajectoire à suivre comme série temporelle.

effecteur et elle ajoute la notion d'orientation. L'origine du trièdre effecteur ne devra pas se contenter de suivre une trajectoire mais devra aussi respecter une orientation à chaque point de celle-ci.

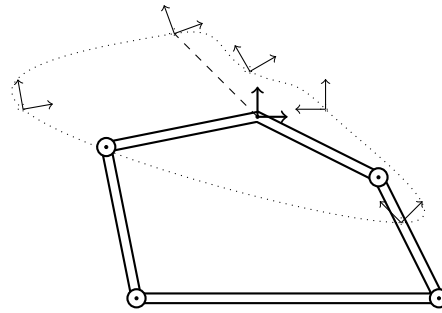


FIG. 1.13 : Génération de mouvement, mécanisme à quatre barres.

Les deux remarques mentionnées pour la tâche de type suivi de trajectoire, à savoir la discrétisation des données (trajectoire et orientations) et leur ordonnancement, se retrouvent pour ce type de tâche.

Génération de fonction

La tâche désignée par *génération de fonction* identifie deux paramètres cinématiques d'un mécanisme et les lie par une relation. Ces deux paramètres peuvent être des positions angulaires ou longitudinales absolues ou relatives. Par exemple, les deux angles α et β identifiés sur la figure 1.14a comme deux mesures des positions des bielles motrice et menée d'un mécanisme plan à quatre barres, relativement à la barre fixe, sont liés par la relation représentée par le graphique de la figure 1.14b. Toutes les considérations évoquées précédemment pour la description des trajectoires sont valables pour la description des relations entre les paramètres cinétiques des objectifs de type fonction.

L'exemple typique d'un mécanisme devant générer une fonction est le mécanisme à cinq barres de direction d'un véhicule devant satisfaire la relation

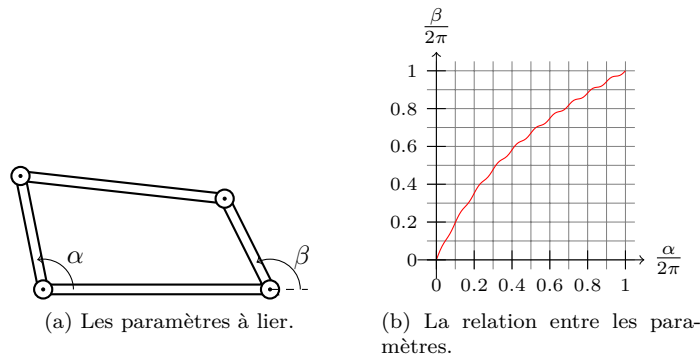


FIG. 1.14 : Génération de fonction, mécanisme à quatre barres.

d'Ackermann (exemple traité par Collard [29]). Cette relation entre l'orientation des roues directrices latérales d'un véhicule permet d'éviter le dérapage des roues en virage.

1.5 Méthodes de résolution pour la synthèse dimensionnelle

Un grand nombre d'approches ont été proposées pour traiter les problèmes de synthèse dimensionnelle de mécanismes. Et, très souvent, la méthode de résolution dépend du choix des variables de modélisation mises en jeu. Nous nous proposons donc, dans un premier temps, de présenter les trois systèmes de coordonnées les plus répandus.

1.5.1 Choix du système de coordonnées

Pour concevoir un mécanisme répondant à une ou plusieurs tâches, il est nécessaire de définir un modèle capable de décrire les dimensions géométriques de celui-ci, *i.e.* les longueurs et les angles. Le choix d'un modèle correspond au choix des paramètres et des systèmes de coordonnées (pour une étude comparée et détaillée de différents systèmes de coordonnées, nous conseillons [29]). Ils doivent permettre de décrire sans équivoque et à chaque instant les dimensions, la position, la vitesse et l'accélération d'un mécanisme.

Plusieurs modèles permettent de décrire ces caractéristiques. Cependant, ils ne sont pas tous équivalents et la sélection et l'application d'un en particulier par rapport aux autres n'est pas triviale. Les différences entre ces modèles résident dans leur facilité à être utilisés, dans la simplicité de la formulation obtenue ou dans leur efficacité.

Trois grandes catégories de systèmes de coordonnées sont identifiées : les coordonnées absolues, les coordonnées relatives et les coordonnées naturelles. Ces systèmes permettent de décrire les pièces et toutes les relations entre celles-ci. Souvent, ils nécessitent l'adjonction de relations supplémentaires entre les coordonnées. Le nombre de relations correspond généralement à la différence

entre le nombre de coordonnées et le nombre de degrés de liberté du mécanisme.

Chacune de ces catégories de coordonnées sera illustrée en décrivant un même mécanisme plan à quatre barres.

Coordonnées absolues

Les coordonnées absolues définissent la position de chaque point significatif d'un mécanisme par rapport à un unique référentiel. Elles *consomment* donc trois paramètres pour chaque point ou six si les points sont associés à un trièdre.

Les contraintes nécessaires à la complétude de ce système de coordonnées correspondent à la rigidité des pièces et aux degrés de liberté bloqués par les liaisons cinématiques.

Les coordonnées d'une pièce permettent de décrire complètement sa position et son orientation. Il n'est ainsi pas nécessaire de connaître le mouvement des autres pièces pour connaître le mouvement d'une pièce particulière. L'expression des contraintes est locale et ne fait intervenir que peu de paramètres. Ceux-ci appartiennent tous à la même pièce pour une contrainte portant sur une pièce ou à deux pièces consécutives pour une contrainte portant sur une liaison cinématique.

Les équations résultantes peuvent prendre de nombreuses formes, surtout pour des liaisons cinématiques intervenant dans un espace tridimensionnel. Plus le nombre de points nécessaires à la description d'une pièce est important, plus il faudra ajouter des contraintes entre ceux-ci. De même, plus les liaisons cinématiques bloqueront de degrés de liberté, plus le nombre d'équations associées aux contraintes sera important.

Dans le cas d'un mécanisme plan à quatre barres, chaque bielle est représentée par un centre (deux coordonnées), une orientation (un angle) et une longueur (un paramètre). Pour les pièces ayant plus de deux interactions (les pièces autre que les dyades³), il n'est pas évident de définir un centre sans définir plus de paramètres. La figure 1.15 représente ce type de mécanisme avec ses quatre pièces et leurs quatre variables associées.

Nous remarquons qu'il est nécessaire, afin de décrire le mécanisme, de traduire chacune des quatre liaisons pivot par la coïncidence deux à deux des extrémités des bielles. Ces quatre coïncidences sont imposées par quatre couples

³Les *dyades* sont des pièces qui présentent deux interactions avec d'autres pièces via des liaisons cinématiques. Dans le cas où ces liaisons cinématiques sont deux liaisons pivot ou pivot-glissant d'axes parallèles, ces dyades sont désignées par *bielles*.

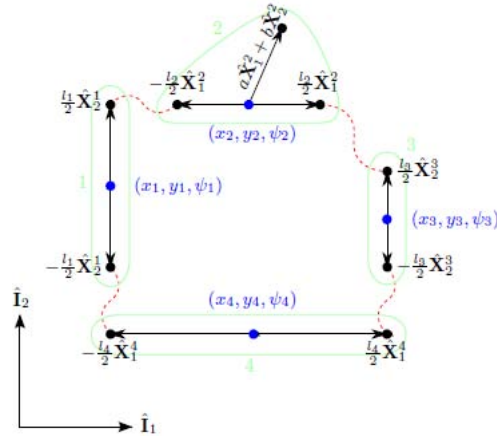


FIG. 1.15 : Coordonnées absolues : exemple d'un quatre barres plan.

d'équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x_1 + \ell_1/2 \cos \alpha_1 = x_2 - \ell_2/2 \cos \alpha_2 \\ y_1 + \ell_1/2 \sin \alpha_1 = y_2 - \ell_2/2 \sin \alpha_2 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} x_2 + \ell_2/2 \cos \alpha_2 = x_3 - \ell_3/2 \cos \alpha_3 \\ y_2 + \ell_2/2 \sin \alpha_2 = y_3 - \ell_3/2 \sin \alpha_3 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} x_3 + \ell_3/2 \cos \alpha_3 = x_4 - \ell_4/2 \cos \alpha_4 \\ y_3 + \ell_3/2 \sin \alpha_3 = y_4 - \ell_4/2 \sin \alpha_4 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} x_4 + \ell_4/2 \cos \alpha_4 = x_1 - \ell_1/2 \cos \alpha_1 \\ y_4 + \ell_4/2 \sin \alpha_4 = y_1 - \ell_1/2 \sin \alpha_1 \end{array} \right. \end{array} \right. .$$

Ainsi pour décrire ce mécanisme avec ce système de coordonnées, sans prendre en compte la description de la tâche à effectuer, nous devons utiliser seize variables et huit équations.

Coordonnées relatives

Les coordonnées relatives définissent la position d'une pièce par rapport à la pièce la précédant dans la chaîne cinématique. Elles représentent les degrés de liberté de la liaison cinématique entre les deux pièces. Dans le cas particulier des chaînes cinématiques ouvertes, les coordonnées relatives fournissent un ensemble de coordonnées indépendantes dont le cardinal correspond aux degrés de liberté du mécanisme et ne nécessitent pas l'adjonction de contraintes.

Les contraintes nécessaires à la complétude de ce système de coordonnées correspondent aux contraintes de fermeture des boucles cinématiques présentes dans le mécanisme. L'expression de ces contraintes dépend donc de la sélection des boucles. Pour obtenir le moins possible de contraintes tout en s'assurant qu'elles soient suffisantes, il faut sélectionner un ensemble minimum de boucles indépendantes. De la même manière, pour obtenir les systèmes d'équations les plus simples possibles (peu corrélés), il peut être intéressant de choisir les plus petites boucles se recouvrant le moins possible.

Les coordonnées relatives présentent principalement trois avantages :

1. l'utilisation d'un nombre relativement réduit de coordonnées ce qui constitue un facteur important pour l'efficacité des méthodes numériques,
2. le système de coordonnées relatives est particulièrement bien adapté aux mécanismes en chaînes ouvertes,
3. la signification de ces coordonnées correspond aux degrés de liberté des mécanismes. Ceci permet de contrôler les mécanismes de manière aisée car des commandes correspondent directement aux coordonnées.

Nous pouvons, néanmoins, souligner quelques inconvénients :

1. l'expression des équations peut faire intervenir un grand nombre de paramètres,
2. l'expression de la position et de l'orientation des pièces et des liaisons peut être complexe car elle dépend de l'ensemble des éléments précédents dans la chaîne cinématique,
3. elles requièrent un pré-traitement pour déterminer les boucles cinématiques et un post-traitement pour déterminer les coordonnées absolues des éléments caractéristiques.

Dans le cas d'un mécanisme plan à quatre barres, chaque liaison est représentée par un point (deux coordonnées), son centre de rotation, et l'angle entre les deux bielles mises en relation. Les bielles sont simplement représentées par leur longueur. Il est aussi nécessaire de positionner (deux coordonnées) une des liaisons et de lui fournir une référence pour l'orientation angulaire (un angle). Comme nous l'avons indiqué précédemment, une des liaisons n'est pas considérée afin d'obtenir une description arborescente du mécanisme. La figure 1.16 représentant ce mécanisme met en évidence les paramètres intervenant dans les équations. Pour assurer la fermeture de la chaîne cinématique, il est nécessaire

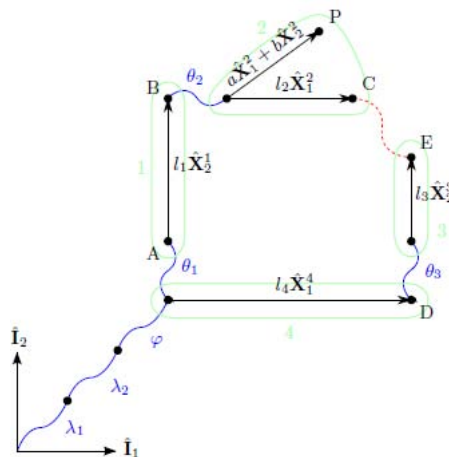


FIG. 1.16 : Coordonnées relatives : exemple d'un quatre barres plan.

d'imposer un couple d'équations :

$$\begin{cases} \ell_1 + \ell_2 \cos \alpha_2 + \ell_3 \cos (\alpha_2 + \alpha_3) + \ell_4 \cos (\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) = 0 \\ \ell_1 + \ell_2 \sin \alpha_2 + \ell_3 \sin (\alpha_2 + \alpha_3) + \ell_4 \sin (\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) = 0 \end{cases} .$$

Ainsi pour décrire ce mécanisme avec ce système de coordonnées, sans prendre en compte la description de la tâche à effectuer, nous devons utiliser seize variables et deux équations.

Coordonnées naturelles

Les coordonnées naturelles sont une évolution des coordonnées absolues. Elles imposent d'avoir au minimum deux points par pièce ce qui permet de connaître l'orientation de celle-ci sans avoir recours à des coordonnées angulaires. Elles ne font intervenir que des points fonctionnels des pièces ou des points impliqués dans la définition des liaisons cinématiques et appartenant donc à deux pièces.

Ce système de coordonnées nécessite moins de paramètres que le système de coordonnées absolues car généralement, un certain nombre de points sont partagés par deux pièces et il n'y a pas de paramètre angulaire.

Comme pour les coordonnées absolues, les contraintes sont issues de la condition de rigidité des pièces et des degrés de liberté restreints par les liaisons cinématiques. Seulement, cette fois, les contraintes issues des liaisons cinématiques sont plus simples et, surtout, ont une forme plus générique même dans un espace tridimensionnel.

Un des principaux avantages de ce système de coordonnées est que toutes les contraintes sont ramenées à des équations du second degré au maximum. De plus, elles ne font intervenir qu'au plus neuf paramètres : les trois coordonnées de trois points. En effet, les équations peuvent représenter des longueurs entre deux points (comportant six paramètres et du second degré), des produits scalaires entre deux points (comportant six paramètres et du second degré) ou entre trois points (comportant neuf paramètres et du second degré), des produits vectoriels entre deux points (comportant six paramètres et du second degré) ou entre trois points (comportant neuf paramètres et du second degré) ou, enfin, le caractère colinéaire de trois points (comportant dix paramètres, trois équations linéaires).

Dans le cas d'un mécanisme plan à quatre barres, les éléments importants sont les extrémités de chaque bielle qui correspondent aussi aux centres des quatre liaisons. De plus, chaque bielle utilise une longueur pour traduire l'aspect rigide des pièces. La figure 1.17 représente ce mécanisme.

Pour lier les différents points aux pièces et ainsi traduire la rigidité de celles-ci, il est nécessaire d'imposer les distances entre les points :

$$\begin{cases} (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = \ell_1^2 \\ (x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 = \ell_2^2 \\ (x_3 - x_4)^2 + (y_3 - y_4)^2 = \ell_3^2 \\ (x_4 - x_1)^2 + (y_4 - y_1)^2 = \ell_4^2 \end{cases} .$$

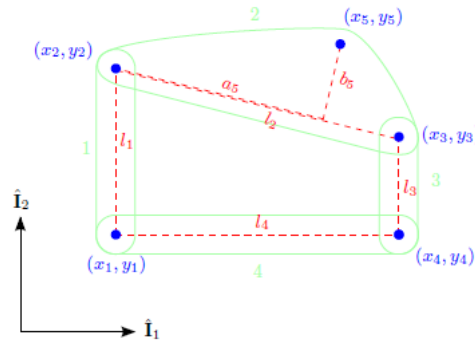


FIG. 1.17 : Coordonnées naturelles : exemple d'un quatre barres plan.

Ainsi, pour décrire ce mécanisme avec ce système de coordonnées, sans prendre en compte la description de la tâche à effectuer, nous utilisons quatre fois deux variables pour les quatre points et quatre variables pour les quatre longueurs et quatre équations.

Des exemples d'utilisation des coordonnées naturelles pour la synthèse dimensionnelle de mécanismes sont disponibles dans [62, 81].

1.5.2 Méthodes de résolution

Très souvent, les techniques employées pour résoudre les problèmes de synthèse dimensionnelle sont regroupées en quatre catégories [126, 40, 39] :

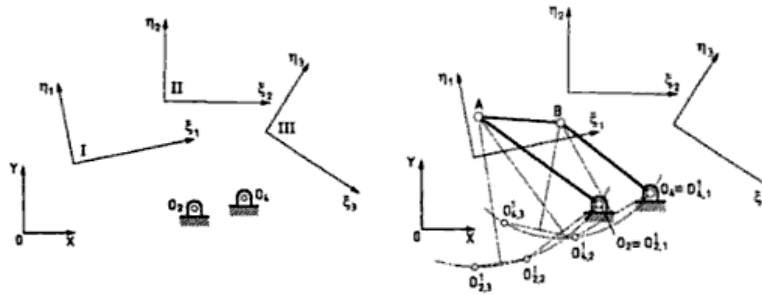
- les méthodes graphiques,
- les méthodes algébriques,
- les méthodes de résolution numériques et
- les méthodes d'optimisation.

Nous nous proposons de présenter les avantages et les inconvénients de ces méthodes pour la résolution de problèmes de suivi de trajectoire, de génération de mouvement et de génération de fonction.

Méthodes graphiques

Les méthodes graphiques ont occupé seules la première moitié du XX^{ème} siècle. Elles permettent de déterminer les dimensions des mécanismes par des constructions géométriques. Ces dernières font intervenir des médiatrices, des intersections de droites, *etc.*, et appliquent des translations et des rotations à certains éléments géométriques importants tels que les *centres instantanés de rotation* pour les pièces ou les *centres instantanés de courbure* pour les trajectoires [38]. Les figures 1.18a et 1.18b reprennent deux images de [88] illustrant la méthode graphique de Burmester pour la synthèse dimensionnelle d'un mécanisme à quatre barres dont les points d'ancrage sont connus et devant décrire un mouvement défini par un ensemble de trois couples de positions et d'orientations.

Différentes méthodes graphiques classiques sont aussi détaillées dans le livre de Norton [107]. En particulier, il montre comment dimensionner des mécanismes plans à quatre ou six barres dont le point effecteur passe par deux ou trois points.



(a) Spécifications : 2 points d'ancrage et 3 positions-orientations (b) Solution : mécanisme à quatre barres vérifiant les spécifications

FIG. 1.18 : Méthode de Burmester illustrée par Mallik *et al.* dans [88].

D'autres approches, plus complexes, ont été mises au point pour des problèmes plus spécifiques. Par exemple, dans [60], Jensen décrit précisément une méthode de conception d'un mécanisme quatre barres pouvant suivre une trajectoire symétrique définie par douze points. En utilisant des méthodes graphiques, Hrones et Nelson [56] et, plus récemment, Zhang *et al.* [160] ont également développé des catalogues de mécanismes plans à quatre barres et des mécanismes à cinq barres avec des engrenages correspondant à de nombreuses trajectoires et mouvements.

Un inconvénient majeur de ces méthodes est que l'ensemble des constructions géométriques doivent être refaites à chaque modification des spécifications. Elles sont donc très peu adaptées à une démarche itérative de conception. De plus, leur complexité et leur imprécision, due aux constructions graphiques, les limitent au traitement de problèmes plans dont les spécifications sont relativement simples.

Malgré ces défauts, les méthodes graphiques ont été aussi parfois utilisées pour fournir une configuration initiale proche de la solution à d'autres types de méthodes, souvent numériques. Signalons aussi que, dans certains cas, des constructions graphiques ont été employées pour déterminer les valeurs de coefficients intervenant ensuite dans un système d'équations. Par exemple, la *méthode des pôles*, utilisée par Tong et Chiang [149] pour des problèmes de suivi de trajectoire, adopte cette approche.

Toutes les méthodes graphiques peuvent être décrites, plus ou moins facilement, de manière algébrique et ainsi permettre de mettre au point des méthodes algébriques ou numériques de résolution de problèmes de synthèse dimensionnelle de mécanismes. Cette transition, qui a débuté dès le milieu du XX^{ème} siècle (méthodes graphiques de Burmester adaptées par Luck et Modler [85, 84]) a été rendue possible grâce à deux facteurs : l'émergence de nouveaux formalismes mathématiques et la croissance des capacités de calcul des outils informatiques.

Méthodes algébriques

Les méthodes algébriques se basent sur la formulation des problèmes de synthèse sous la forme de systèmes d'équations algébriques et sur leur résolution par des techniques formelles. Pour établir les équations algébriques non-linéaires traduisant les problèmes de synthèse, diverses mises en équations ont été investiguées. On peut citer, par exemple, les approches basées sur des matrices de déplacement [144] ou celles utilisant les nombres complexes [130, 131, 129]. De nombreux ouvrages de référence sur l'analyse et la synthèse cinématique détaillent différentes approches algébriques classiques utilisées pour traiter des problèmes plans et spatiaux simples [51, 88, 95, 41, 130, 131, 107].

La résolution des systèmes d'équations obtenus est généralement confiée à des méthodes formelles de résolution assez sophistiquées qui procèdent par manipulation symbolique du système à résoudre. Leur principal avantage est qu'elles sont capables de fournir toutes les solutions sous forme symbolique, sans erreur d'arrondi numérique. En revanche, la complexité des algorithmes mis en jeu est souvent exponentielle. Ces méthodes sont donc inadaptées pour traiter des systèmes d'équations comportant un nombre important d'équations et de variables. Les problèmes spatiaux pouvant être traités sont ainsi limités.

De plus, il faut préciser que ces méthodes ne peuvent s'appliquer qu'à des systèmes d'équations bien déterminés, comportant le même nombre d'équations que de variables. Cela aussi restreint considérablement les cas pouvant être traités. En particulier, pour les cas de génération de mouvement ou de suivi de trajectoire, le nombre de points de passage imposés sera alors très faible. Par exemple, pour le dimensionnement et le placement de manipulateurs RR (à deux liaisons pivot) spatiaux, les nombreux travaux basés sur des méthodes algébriques ne considèrent que les cas spécifiés par trois positions et trois orientations. Ces approches sont particulièrement utiles lorsqu'on cherche à déterminer toutes les solutions d'un problème. Ainsi Tsai et Roth [151], et Mavroidis *et al.* [93] plus tard, ont montré que ce problème admet au maximum six solutions mais que seulement deux d'entre elles sont réelles (les quatre autres étant complexes).

Parmi les méthodes formelles classiques, la méthode du résultant, basée sur la théorie des déterminants est très souvent utilisée. Dans le cadre du développement de Synthetica [141], Perez [113] et Su [140] ont traité de nombreux problèmes spatiaux de robots (manipulateurs de type RRP, TP, RPC par Perez et robots de type CS, RPS et 3RRS par Su) devant passer par un nombre réduit de points avec cette méthode. Nielsen et Roth [102, 103] ont également employé la méthode des résultants pour traiter d'autres problèmes simples de manipulateurs spatiaux. Raghavan et Roth [117] ont, de leur côté, montré que la méthode des bases de Gröbner, issue de la théorie des idéaux polynomiaux, permet de trouver toutes les solutions pour des cas simples de synthèse dimensionnelle.

Méthodes numériques de résolution

Les systèmes d'équations obtenus peuvent aussi être résolus par des méthodes numériques. Ces méthodes sont souvent capables de traiter tout système d'équations, mais, en procédant par approximation successives de solutions,

elles ne fournissent, en général, qu'une solution approchée. De plus, la grande majorité des méthodes numériques ne fournissent qu'une seule solution.

Parmi les méthodes numériques itératives classiques, la plus connue est sans doute la méthode de Newton-Raphson. Elle utilise la matrice jacobienne $J(X)$ du système $F(X)$ à résoudre pour définir la suite récursive

$$X_{n+1} = X_n - J^{-1}(X_n) F(X_n).$$

Cette méthode a l'avantage de converger très rapidement vers une solution si la valeur initiale X_0 fournie est adéquate. Si la valeur initiale n'est pas proche de la solution recherchée alors cette méthode, qualifiée de locale, peut converger vers une solution plus lointaine ou ne pas converger. Il est aussi important de remarquer que, par définition, cette méthode nécessite que la matrice jacobienne du système soit toujours inversible. Il existe aussi de nombreuses méthodes dérivées de celle-ci, souvent désignées comme méthode de type quasi-Newton, qui proposent différentes approximations de l'inverse de la matrice jacobienne du système.

Bawab et Kinzel [14] proposent de résoudre des problèmes plans de synthèse dimensionnelle avec une approche hybride utilisant la méthode de Newton-Raphson. L'approche présentée tente d'identifier des sous-systèmes de deux équations à deux variables pouvant être traités indépendamment et résout les équations restantes avec la méthode de Newton-Raphson.

La méthode par homotopie, aussi appelée méthode par continuation homotopique, a été souvent utilisée pour la conception de mécanismes ou de systèmes robotiques. Le principe de base de cette méthode consiste à déformer les solutions d'un système simple en solutions du système à résoudre en suivant les chemins de ces solutions, généralement dans l'espace complexe.

La fonction homotopique $H \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n \times [0, 1], \mathbb{C})$ est définie par

$$H(x, t) = (1 - t^k) F_0(x) + t^k F(x),$$

où $k \in \mathbb{N}^+$. Nous pouvons remarquer que $H(x, 0) = F_0(x)$ et que $H(x, 1) = F(x)$.

On distingue deux étapes principales dans cette approche : définir le système initial F_0 et suivre les chemins homotopiques partant de chaque solution de F_0 . Il est alors important que F_0 ait au moins autant de solutions que F et que toutes ces solutions soient connues pour servir de points de départ aux chemins homotopiques. La méthode procède ensuite de façon itérative par prédiction-corrrection pour suivre ces chemins.

Cette méthode est plus robuste que les méthodes numériques de type Newton-Raphson car ses bassins d'attraction sont plus réguliers et permet d'obtenir toutes les solutions pour les systèmes d'équations polynomiaux.

Roth et Freudenstein [127] ont été les premiers à utiliser les méthodes par homotopie pour la résolution de problèmes de synthèse dimensionnelle. Depuis, Morgan et Wampler [100] ou Wampler *et al.* [158] ont résolu des problèmes de suivi de trajectoire pour des mécanismes plans avec cette approche. Dhingra *et al.* [35] ont aussi traité des problèmes plans de mécanismes à quatre et six

barres avec cette technique. Starns et Flugrad [139] et Subbian et Flugrad [142] ont résolu d'autres mécanismes plans avec cette même approche.

Utilisant cette méthode, Lee et Mavroidis [75] ont démontré que la synthèse d'un bras robotisé à trois liaisons pivot devant passer par trois points admet au maximum huit solutions réelles distinctes. La figure 1.19 montre les huit solutions obtenues pour un des exemples traités. Par ailleurs, Perez [113] et Su [140] ont également déterminé les dimensions de nombreux mécanismes spatiaux avec des méthodes par homotopie.

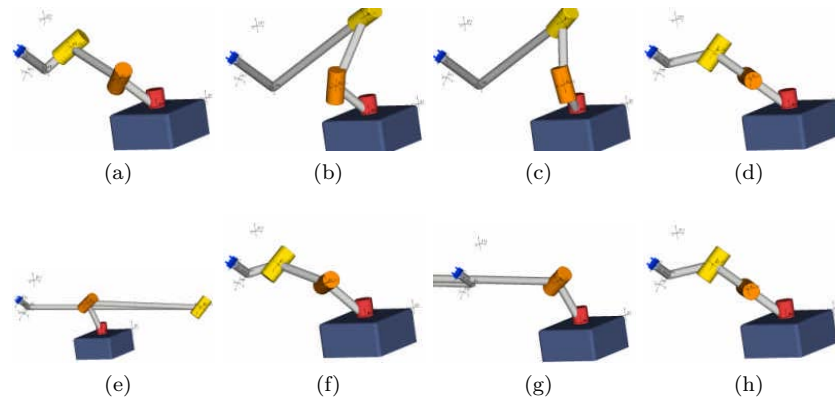


FIG. 1.19 : Les huit solutions obtenues à un problème 3R par continuation.

Les méthodes par intervalles ont, quant à elles, rarement été utilisées pour résoudre les problèmes de synthèse dimensionnelle. Pourtant, la résolution par intervalles présente de nombreux avantages par rapport aux méthodes numériques classiques. Elle permet notamment un calcul numérique exact et l'obtention de toutes les solutions même en présence d'équations transcendantes (comportant des fonctions trigonométriques par exemple). Dans [77, 78], Lee *et al.* s'appuient sur une méthode par intervalles pour déterminer les dimensions d'un manipulateur spatial comportant trois liaisons pivots devant passer par cinq points. Ils précisent que la forme des équations ainsi que le choix des domaines de définition des variables peuvent influencer considérablement les temps de calcul. Dans ce cas précis, après cinq jours de calcul, six solutions avaient été obtenues mais les calculs n'étaient pas finis.

Méthodes d'optimisation

Les méthodes de résolution que nous avons présentées jusqu'ici ne permettent de traiter que des problèmes comportant un nombre réduit de spécifications (points de passage et orientations). Les méthodes d'optimisation vont dans le sens d'une plus grande généralité et complexité des spécifications prises en compte. Elles ne sont plus limitées par le nombre de points de passage. Elles cherchent à déterminer des valeurs de dimensions minimisant une certaine erreur entre la trajectoire (ou le mouvement) générée et celle souhaitée. Les principaux désavantages des méthodes d'optimisation sont la convergence relativement lente, l'absence de garantie d'obtention d'une solution et la diffi-

culté du choix des valeurs initiales pour les méthodes dites *locales*.

En général, les méthodes d'optimisation distinguent deux catégories d'équations : les objectifs associées aux tâches à accomplir et les contraintes (correspondant, par exemple, au critère d'assemblage du mécanisme considéré). Ces techniques cherchent alors un ou plusieurs points qui minimisent les valeurs des objectifs tout en respectant les contraintes.

Comme le souligne Krishnamurty [68], les problèmes de synthèse dimensionnelle de mécanismes sont, par nature, des problèmes multi-critères (ou multi-objectifs). L'utilisateur peut, par exemple, souhaiter qu'un point effecteur passe par un ensemble de positions (chacune considérée comme un objectif) mais il peut aussi vouloir attribuer des priorités à ces points de passage pour indiquer ces préférences. Deux approches peuvent être envisagées pour traiter ce genre de problèmes : soit les différents objectifs sont tous intégrés dans un seul nouvel objectif, soit la recherche portera sur un ensemble de solutions non dominées⁴. Les résultats obtenus en employant chacune de ces approches pourront être très différents.

La première approche est généralement basée sur l'utilisation d'une formulation du type *moindres carrés*⁵ ou *mini-max*⁶ considérant l'ensemble des objectifs et en leur associant éventuellement des pondérations. Cette approche est privilégiée dans le cas d'une seule tâche déclarée lors de la définition du problème de synthèse dimensionnelle de mécanismes ayant abouti à plusieurs objectifs après la mise en équations. C'est notamment le cas des problèmes de type suivi de trajectoire spécifiés par un ensemble discret de points de passage. Cette approche nécessite aussi de choisir une norme (norme 2 ou norme infinie) pour l'expression des objectifs vectoriels.

La deuxième approche est basée sur l'étude du *front de Pareto* (ensemble de solutions non dominées) qui représente un ensemble de solutions parmi lesquelles il n'est pas possible de décider si une solution est meilleure qu'une autre. L'illustration donnée par la figure 1.20 représente le front de Pareto (ligne rouge) d'un ensemble de solutions potentielles (croix) cherchant à minimiser les valeurs de deux fonctions f_1 et f_2 . Les points A et B sont *non dominés* (ils appartiennent au front de Pareto) car $f_1(A) < f_1(B)$ mais $f_2(B) < f_2(A)$. Au contraire, le point C n'appartient pas au front de Pareto car il est dominé par au moins un point : il est dominé par les points A ($f_1(A) < f_1(C)$ et $f_2(A) < f_2(C)$) et B ($f_1(B) < f_1(C)$ et $f_2(B) < f_2(C)$). Cette approche est privilégiée dans le cas de plusieurs objectifs distincts déclarés par l'utilisateur lors de la définition du problème de synthèse dimensionnelle de mécanismes. Les méthodes d'optimisation multi-critères n'ont pas été souvent utilisées pour résoudre des problèmes de dimensionnement de mécanismes. On peut néanmoins mentionner les travaux de Rao et Hati [119] basés sur une approche issue de la théorie des jeux ou de Krishnamurty et Turcic [68] qui proposent une ap-

⁴Ensemble de solutions non dominées : ensemble de solutions où aucune n'est systématiquement inférieure aux autres pour tous les objectifs.

⁵L'approche basée sur les moindres carrés transforme un problème du type $\min_X F(X)$ où $X \in \mathbb{R}^n$ et $F \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ en un problème du type $\min_X \sum_i f_i(X)^2$ où $\forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket$, $f_i \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

⁶L'approche basée sur la minimisation du maximum transforme un problème du type $\min_X F(X)$ où $X \in \mathbb{R}^n$ et $F \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ en un problème du type $\min_X \max_i f_i(X)$ où $\forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket$, $f_i \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

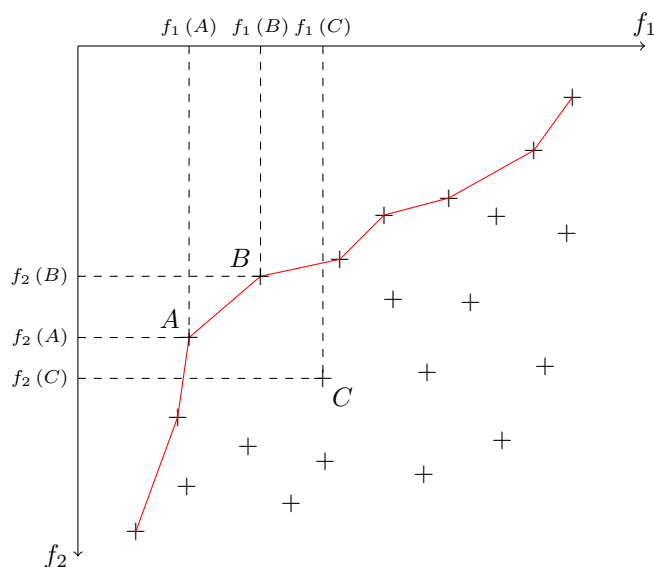


FIG. 1.20 : Front de Pareto pour un problème de minimisation de deux objectifs (f_1 et f_2).

proche basée sur les méthodes de programmation non linéaire pour déterminer les solutions optimales à des problèmes génériques de synthèse dimensionnelle de mécanismes plans.

Optimisation locale. Les méthodes d'optimisation locales sont couramment employées pour résoudre des problèmes de synthèse dimensionnelle de mécanismes. Elles dérivent pour la plupart de la méthode de Newton-Raphson mais, au lieu de chercher les racines d'une fonction, elles cherchent les racines du gradient de cette fonction.

La principale méthode parmi celles nécessitant d'évaluer le gradient⁷ de la fonction à minimiser est désignée par *méthode de Gauss-Newton* [17]. Elle est une modification de la méthode de Newton dans le cas d'une fonction multidimensionnelle et exploite spécifiquement le fait de minimiser une somme de fonctions au carré⁸ pour ne pas avoir à calculer la matrice hessienne. La vitesse de convergence de cette méthode est au plus quadratique et, comme pour la méthode de Newton, il est nécessaire de disposer d'un point initial proche de la solution. Cette méthode a été fréquemment utilisée [5, 3, 120] dans le cadre de la synthèse dimensionnelle de mécanismes. Paradis et Willmert [108] ont même employé cette méthode pour traiter des problèmes contraints intégrant des inéquations traduisant le critère de Grashof (voir annexe A).

Une des principales méthode dérivées de la méthode de Gauss-Newton est l'algorithme de Levenberg-Marquardt [80, 90]. La méthode de Gauss-Newton et

⁷Il est bien question de la fonction à minimiser dont on cherche les points qui annulent sa dérivée.

⁸La méthode de Gauss-Newton est quelque fois, à tort, désignée par méthode des moindres carrés.

la méthode de descente de gradient y sont interpolées. Il est ainsi plus stable que la méthode Gauss-Newton au prix d'une légère diminution des performances. Cette approche a été choisie par Perez *et al.* [114] pour traiter les problèmes spatiaux non encore répertoriés dans le logiciel Synthetica.

D'autres approches de type moindres carrés ont été employées par Han [25], Tomas [148] et Nolle et Hunt [106].

Certaines méthodes d'optimisation, basées sur la *méthode de Newton-Raphson* [17], doivent non seulement évaluer le gradient mais aussi la matrice hessienne de la fonction à minimiser⁹. Elles ne peuvent donc s'appliquer qu'aux fonctions dérivables deux fois. Elles convergent rapidement mais peuvent s'avérer coûteuses dans leur mise en œuvre à cause des évaluations des matrices hessiennes. Ce type de méthode a été utilisé, par exemple, par Angeles et Callejas [4] pour obtenir des mécanismes quatre barres respectant le critère de Grashof.

Des variantes de ces méthodes, comme par exemple Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS) [17], permettent de s'affranchir du calcul explicite de la matrice hessienne et de son inverse. Ces variantes sont souvent qualifiées de méthodes de type *quasi-Newton*. Nokleby et Podhorodeski [104, 105] appliquent précisément cette méthode dans une approche où ils transforment un problème sans contraintes en un problème avec contraintes. Cossalter *et al.* [32] développent aussi une approche hybride couplant une méthode ne nécessitant pas de calcul de dérivées et une méthode de type quasi-Newton. Larochelle [74] propose de résoudre les problèmes de synthèse dimensionnelle formulés comme des problèmes d'optimisation par une approche de type DFP (Davidon-Fletcher-Powell).

Dans [89], Mariappan et Krishnamurty précisent que les difficultés liées au calcul du gradient peuvent limiter l'utilisation des méthodes d'optimisation pour des cas génériques de synthèse dimensionnelle. En effet, il est rare de pouvoir calculer explicitement les dérivées partielles de la fonction objectif par rapport aux variables. Très souvent, les dérivées sont approchées par différences finies, ce qui rend les algorithmes moins efficaces. Mariappan et Krishnamurty montrent sur deux exemples de synthèse dimensionnelle résolus avec la méthode du gradient généralisé (GRG pour *Generalized Reduced Gradient*) que le calcul exact du gradient permet d'obtenir des résultats plus précis et en moins d'itérations qu'une approche faisant les calculs par différences finies.

L'optimisation par bouclage sur des valeurs dimensionnelles différentes et des simulations cinématiques a aussi été envisagée pour des mécanismes plans. La trajectoire générée est alors représentée sous la forme d'une liste de points et un calcul de distance avec la trajectoire désirée est effectué pour déterminer un nouveau vecteur dimensionnel candidat. Dans le cas de Cossalter *et al.* [32], l'analyse cinématique se base sur l'approche modulaire par groupes d'Assur et l'optimisation prend en compte les conditions d'assemblage pour un groupe d'Assur. La méthode proposée par Vasiliu [155] utilise une méthode

⁹La méthode de résolution de Newton-Raphson utilise la dérivée d'une fonction pour trouver ses racines. Lorsqu'elle est employée dans le cadre d'un problème d'optimisation, où l'on cherche à annuler la dérivée d'une fonction, elle fait donc appel à la dérivée seconde de cette fonction.

systémique multipolaire pour l'analyse cinématique et un algorithme d'optimisation basé sur le gradient conjugué. La même technique d'analyse cinématique a été ensuite utilisée par Vasiliu pour développer une méthode de capitalisation et d'interpolation des cas par un réseau neuronal artificiel [154, 155].

Optimisation globale. Parmi les méthodes d'optimisation globale, les principales méthodes utilisées sont des méthodes stochastiques. Plus précisément, il s'agit souvent de méthodes *métaheuristiques*, *stochastiques* et *itératives*. Elles sont métaheuristiques¹⁰ car elles peuvent être employées sans changement majeur pour toute une catégorie de problèmes. Elles sont stochastiques¹¹ car elles laissent une place à l'aléatoire et elles sont itératives car elles répètent un même processus jusqu'à atteindre une condition d'arrêt. La figure 1.21 illustre le comportement de ces approches : les méthodes métaheuristiques (M) utilisent souvent un échantillonnage stochastique ou probabiliste pour tenter de trouver l'optimum global (G) d'un problème d'optimisation difficile avec, par exemple, des discontinuités (D), sans être piégé par les optima locaux (L).

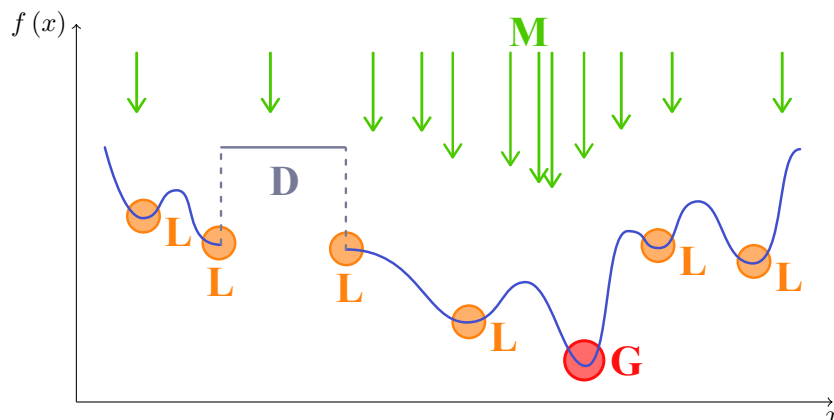


FIG. 1.21 : Illustration des méthodes métaheuristiques.

Les algorithmes génétiques [55, 49] font partie des méthodes stochastiques les plus étudiées en synthèse dimensionnelle. Ils appartiennent à la famille des algorithmes évolutionnistes et s'appuient sur la notion de sélection naturelle qu'ils appliquent à une population de solutions potentielles au problème donné. Ne nécessitant que l'évaluation de la fonction objective, les algorithmes génétiques sont souvent utilisés lorsque le calcul du gradient devient difficile.

Dans [118], Ramstein propose d'utiliser les algorithmes génétiques pour la recherche simultanée de la topologie, des dimensions et du placement de la base pour des mécanismes sériels et à chaînes fermées. Pour évaluer l'efficacité de ces algorithmes, il compare cette approche à des méthodes de type recuit simulé sur différentes classes de problèmes plans. Selon l'auteur, après une phase de réglage des paramètres, les algorithmes génétiques présentent un taux de réussite plus élevé que les autres méthodes et, surtout, convergent plus rapidement. Malgré les nombreux tests réalisés, Ramstein admet qu'il est difficile de déterminer

¹⁰Du grec μετά « au-delà » et εὑρίσκειν « trouver ».

¹¹Du grec στοχαστικός « aléatoire ».

de façon systématique les meilleures valeurs des principaux paramètres utilisés par ces algorithmes par rapport à un problème donné.

Cette technique a aussi été choisie par [116] pour déterminer les dimensions caractéristiques approchées de mécanismes plans. Pour Kunjur et Krishnamurty [69], les algorithmes génétiques représentent un choix judicieux pour la résolution efficace de problèmes plans de suivi de trajectoire comportant un nombre important de points de passage.

Collard [29] estime que différentes méthodes d'optimisation doivent être utilisées, voire combinées, pour traiter des problèmes de synthèse topologique et dimensionnelle. Il s'intéresse notamment à différentes méthodes stochastiques telles que les algorithmes génétiques ou l'optimisation par essais particulaires [64, 27, 1] qui peuvent être combinées afin d'obtenir de meilleurs résultats. Il hybride aussi ces méthodes avec des techniques de type moindre carrés comme, par exemple, la méthode de Powell¹² ou des méthodes directes telles que Nelder-Mead [101] pour fournir des valeurs plus proches de celles des solutions globales.

La méthode *selective precision synthesis*, développée par Kramer et Sandor [67] est une approche mixte combinant les avantages des méthodes algébriques et des méthodes d'optimisation. Les chaînes cinématiques sont considérées comme étant formées de dyades et la mise en équation se base sur l'utilisation des nombres complexes. Au lieu d'imposer le passage par des points spécifiés, cette méthode permet la définition de voisinages acceptables dits de précision. L'optimisation vise à trouver un mécanisme dont la trajectoire traverse tous les voisinages. Cette méthode présentait quelques défauts dont le plus important était l'erreur d'assemblage des dyades. En effet, les dyades obtenues ne pouvaient dans certains cas pas être assemblées pour former, par exemple, un mécanisme à quatre barres. Bajpai et Kramer [13] ont, par la suite, présenté une méthode de détection et d'élimination de tous ces défauts.

1.6 Logiciels pour la synthèse dimensionnelle

Malgré le nombre important de publications et de travaux dans le domaine de la synthèse dimensionnelle de mécanismes, relativement peu de logiciels ont, à notre connaissance, été développés. Parmi les pionniers [40], nous pouvons citer KINSYN, développé par Kaufman [63, 128] au MIT à la fin des années 70, qui est souvent considéré comme le premier logiciel graphique interactif pour la synthèse de mécanismes plans. Basé sur la théorie de Burmester, il permettait de traiter des problèmes de synthèse dimensionnelle de mécanismes plans à quatre barres en vue de suivre une trajectoire spécifiée par quatre points de passage. Le logiciel LINCAGES [97], introduit plus tard par Erdman et Gustafson, s'intéressait aussi à ce type de mécanismes plans mais proposait, en sus, des outils graphiques montrant certaines caractéristiques des mécanismes obtenus afin d'aider le concepteur à faire un choix.

Waldron et Song [156] ont ensuite mis au point RECSYN pour dimensionner des mécanismes plans à quatre barres passant par trois ou quatre positions. Là aussi la communication visuelle de détails concernant les mécanismes répondant aux critères spécifiés se révélait particulièrement importante. Mais, la

¹²*Powell's dog leg method*

principale différence concernait la formulation retenue pour exprimer les problèmes, formulation qui permettait d'éliminer les mécanismes présentant des configurations singulières.

Plus récemment, d'autres logiciels pour la synthèse dimensionnelle de mécanismes plans, pour la plupart commerciaux, ont vu le jour. On trouve, par exemple, BRAVOMOST [152], LINCAGES 2000 [98], SAM [6], WATT [53] ou SYMECH [145, 146] (voir figure 1.22).

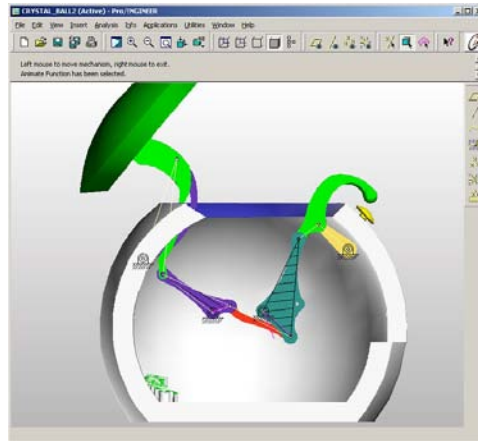


FIG. 1.22 : Synthèse d'un mécanisme à 10 barres [31] avec le logiciel SYMECH.

Pour la synthèse de mécanismes spatiaux, très peu de logiciels existent et ne traitent souvent que des mécanismes particuliers. Ainsi, Laroche *et al.* [72] se sont intéressés à la conception de mécanismes à quatre barres sphériques avec le logiciel SPHINX. Les systèmes articulés de type 4C (quatre liaisons cylindriques) peuvent aussi être gérés par le logiciel SPADES [73]. Des mécanismes à cames peuvent être conçus de manière interactive en utilisant le logiciel USyCaMs [50].

Le logiciel SYNTHETICA [141], relativement récent, permet de dimensionner un certain nombre de manipulateurs spatiaux prédéfinis grâce au développement de méthodes spécifiques s'appuyant sur des techniques de résolution de type élimination ou homotopie. Dans la deuxième version de ce logiciel, les utilisateurs peuvent aussi déclarer des mécanismes ouverts quelconques devant suivre une trajectoire spécifiée. Le système d'équations généré est alors résolu par une méthode d'optimisation (méthode de type Levenberg-Marquardt disponible dans Minpack [153]).

Il est important de remarquer, qu'à ce jour, les principaux logiciels commerciaux de CAO ne disposent pas de modules de synthèse dimensionnelle de mécanismes. Et d'ailleurs, seulement le logiciel SyMech cité précédemment a été proposé comme un additif au logiciel Pro/ENGINEER de PTC [115].

1.7 Conclusion

Cette étude bibliographique montre que de nombreux travaux ont été menés sur la synthèse dimensionnelle de mécanismes (essentiellement plans) ces cinquante dernières années mais qu'il n'existe pas encore de méthode générique

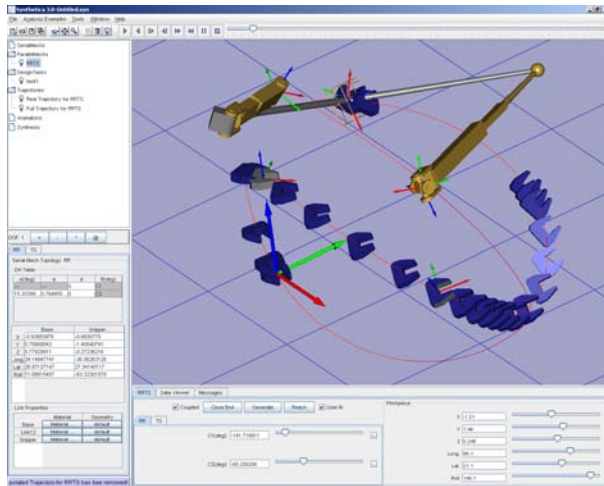


FIG. 1.23 : Synthèse d'un mécanisme RRTS avec le logiciel SYNTHETICA.

pour modéliser ni pour résoudre ce type de problèmes. En effet, une des difficultés réside dans la spécification même des problèmes de synthèse dimensionnelle cinématique. Même si trois classes principales de problèmes ont été identifiées (suivi de trajectoire, génération de mouvement ou de fonction), il semble difficile d'énumérer tous les critères et toutes les contraintes que les utilisateurs souhaiteraient pouvoir imposer au mécanisme recherché.

L'analyse des principales méthodes de résolution de problèmes de dimensionnement et de placement de mécanismes a mis en évidence que ces approches ont évolué considérablement avec les progrès réalisés ces dernières années en informatique et en calcul numérique. On constate ainsi que les méthodes graphiques et algébriques sont uniquement adaptées à certains problèmes de conception. Les méthodes numériques, plus récentes, permettent actuellement de résoudre des mécanismes plus variés pouvant effectuer des tâches compliquées. La formulation des problèmes de synthèse comme des problèmes d'optimisation a en effet permis d'envisager des cas plus complexes. Cependant, des efforts sont encore nécessaires pour mettre en place des techniques d'optimisation robustes et performantes fournissant plusieurs solutions aux problèmes considérés.

Dans la suite de ce document, nous allons présenter une approche qui permet d'envisager la synthèse dimensionnelle de tout type de mécanismes. Pour cela, nous définirons le problème de dimensionnement et de placement comme un problème d'optimisation. Les critères et les contraintes pris en compte sont détaillés dans les chapitres suivants.

Deuxième partie

Synthèse dimensionnelle de
mécanismes

Chapitre 2

Spécifications du problème

2.1 Introduction

La littérature abonde de méthodes *ad-hoc* pour résoudre différents types de problèmes de synthèse dimensionnelle particuliers. Toutefois, la majorité des approches proposées ne permet pas d'intégrer de nouvelles contraintes ou est dédiée à des topologies précises. Dans le cadre du développement d'une méthode susceptible de traiter le maximum de problèmes de synthèse dimensionnelle, il nous semble important de proposer aussi des moyens permettant de spécifier simplement la structure des mécanismes considérés, les tâches à accomplir et les éventuelles conditions supplémentaires à respecter.

Le choix d'une modélisation déclarative par contraintes devient alors naturel. En effet, cette approche apporte la souplesse nécessaire à la spécification de tout type de problèmes et permet, si cela s'avère nécessaire, une modification aisée. L'intégration de nouvelles contraintes et donc de nouvelles classes de problèmes est aussi simplifiée.

2.2 Déclaration d'un problème de synthèse dimensionnelle

La modélisation déclarative [83, 82, 134, 79, 37, 87] est basée sur le principe de la construction d'une scène à partir de sa description par l'utilisateur. Le système est ensuite responsable de l'exploration de l'univers des solutions possibles et de la présentation des scènes qui vérifient la description.

Lors de la synthèse dimensionnelle de mécanismes, l'utilisateur doit être capable de déclarer :

- les éléments constituant le mécanisme (pièces mécaniques et liaisons cinématiques),
- les tâches à effectuer par le mécanisme et
- les contraintes (géométriques, cinématiques, dynamiques, ...) qui doivent être respectées par le mécanisme recherché.

Du point de vue de l'utilisateur, ces déclarations doivent être intrinsèquement non ordonnées. Autrement dit, l'ordre dans lequel sont déclarés les éléments de topologie, les tâches ou les contraintes ne doit pas avoir d'impact

sur l'ensemble des mécanismes solutions. Pour qu'une déclaration soit valide, il suffit uniquement que les éléments référencés à un instant donné aient été spécifiés au préalable.

2.2.1 Déclaration du mécanisme

Comme nous l'avons signalé au [chapitre précédent](#), à ce stade de la conception, la structure du mécanisme recherché est supposée connue. L'utilisateur peut alors préciser le nombre de solides constituant le mécanisme ainsi que la nature des liaisons cinématiques les reliant. Les liaisons généralement employées pour définir un mécanisme sont les liaisons glissière, pivot, pivot-glissant, appui-plan, rotule à doigt, linéaire rectiligne, rotule, linéaire annulaire, ponctuelle. Malgré ce choix important, il faut noter que les problèmes de synthèse dimensionnelle couramment étudiés ne font intervenir que les liaisons pivot et glissière. Cela s'explique probablement par le fait que les autres liaisons peuvent être obtenues en combinant ces deux liaisons de base [113].

Les moyens de description du mécanisme mis à disposition de l'utilisateur peuvent être multiples et se compléter. Mais, dans tous les cas, toute description doit être ensuite traduite en un modèle interne utilisé pour engendrer les différentes solutions.

Comme le soulignent [87], beaucoup de langages de description sont plus ou moins proches du langage naturel. Les deux exemples de déclaration de la topologie d'un mécanisme de la figure 2.1 montrent, par exemple, qu'il est possible de décrire un mécanisme avec un langage proche d'un langage de script. Dans ce cas, le mécanisme (`mec`) décrit comporte deux pièces (`p1` et `p2`) et une liaison pivot (`r1`). Nous pouvons remarquer que, malgré un ordre de déclaration différent des éléments les constituant, les deux mécanismes déclarés dans les exemples 2.1 sont identiques.

<pre>NEW Mechanism mec NEW Part p1 mec.addpart(p1) NEW Part p2 mec.addpart(p2) NEW Joint r1 (Revolute) mec.addjoint(r1) r1.addpart(p1) r1.addpart(p2)</pre>	<pre>NEW Mechanism mec NEW Part p1 NEW Part p2 NEW Joint r1 (Revolute) mec.addpart(p1) mec.addpart(p2) mec.addjoint(r1) r1.addpart(p1) r1.addpart(p2)</pre>
(a)	(b)

FIG. 2.1 : Deux exemples de déclaration de la topologie d'un mécanisme

Dans le cas particulier des mécanismes, la topologie peut aussi être renseignée grâce à un graphe des liaisons cinématiques (ou graphe de structure). Lorsqu'on représente un mécanisme par un graphe de structure, les sommets du graphe représentent les solides et les arcs, les liaisons. Sur chaque arc, il y a

le nom de la liaison qu'il représente ainsi que ses caractéristiques géométriques (plus précisément, la nature de la liaison, sa position et son orientation). Aux sommets sont placés les symboles alphanumériques désignant les solides. La figure 2.2 montre un graphe structurel correspondant à un mécanisme quatre barres.

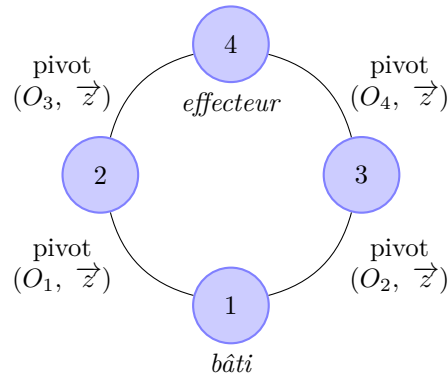


FIG. 2.2 : Graphe cinématique pour un problème quatre barres

Pour un problème de synthèse, la spécification de la position et de l'orientation des liaisons est inutile. Néanmoins, certains concepteurs ont tendance à compléter la description des mécanismes par ce moyen. Nous pouvons, par exemple, remarquer que le mécanisme de la figure 2.2 a été implicitement déclaré comme étant plan en choisissant une même orientation pour les quatre liaisons pivot. La trajectoire de tous les points sera donc comprise dans des plans parallèles.

Dans le cadre qui nous occupe, il serait plus pertinent de déclarer explicitement que le mécanisme souhaité doit être plan. Un graphe, rappelant uniquement la nature et le nombre de liaisons ainsi que le nombre de pièces constituant le mécanisme, comme celui utilisé pour l'étude de la mobilité des mécanismes (voir figure 1.7 dans la section 1.4.1), complété avec une étiquette pour préciser que le mécanisme est plan conviendrait mieux pour la spécification de problèmes de synthèse.

Pour spécifier la topologie des mécanismes, l'utilisation de schémas cinématiques peut également sembler envisageable car ils renferment toutes les informations dont on pourrait avoir besoin. Une des principales fonctions du schéma cinématique est d'ailleurs d'aider à comprendre le fonctionnement du mécanisme représenté. Néanmoins, pour cela, il nécessite, comme le montre le schéma cinématique de la figure 2.3, de réfléchir au paramétrage du mécanisme et d'être capable d'en fournir une esquisse initiale tridimensionnelle. À ce niveau, cela semble beaucoup trop contraignant pour l'utilisateur et pour l'outil de synthèse qui serait obligé de se baser sur ce paramétrage pour modéliser le problème.

Enfin, dans l'optique d'une réutilisation de données existantes, il serait tentant de se baser sur des modèles volumiques existants pour déclarer la structure

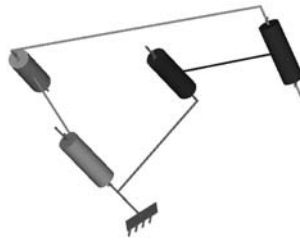


FIG. 2.3 : Schéma cinématique pour un problème quatre barres

des mécanismes. Malheureusement, dans ce cas, il peut se révéler difficile d'extraire, à partir de ces données, les informations pertinentes (dont le nombre et la nature des liaisons à considérer). De plus, d'une manière générale, le redimensionnement des seuls modèles volumiques suite à la résolution du problème constitue aussi un vrai défi. Dans le cas du problème illustré par la figure 2.4a, il serait peut-être possible d'identifier les quatre liaisons pivot mais la mise à jour des pièces constituant le mécanisme peut demander d'importants efforts. Même en connaissant les positions et les orientations des liaisons cinématiques et de la procédure de construction de chaque pièce de la figure 2.4b, la mise à jour de ce modèle exigerait à l'outil de synthèse de déterminer les valeurs des paramètres associées aux différentes opérations (opérations booléennes, extrusion, perçage, bossages, nervures, lamages, *etc.*). Bien entendu, ce travail supplémentaire n'est pas dans le cadre de ce mémoire et n'est de toute façon, pas raisonnable.

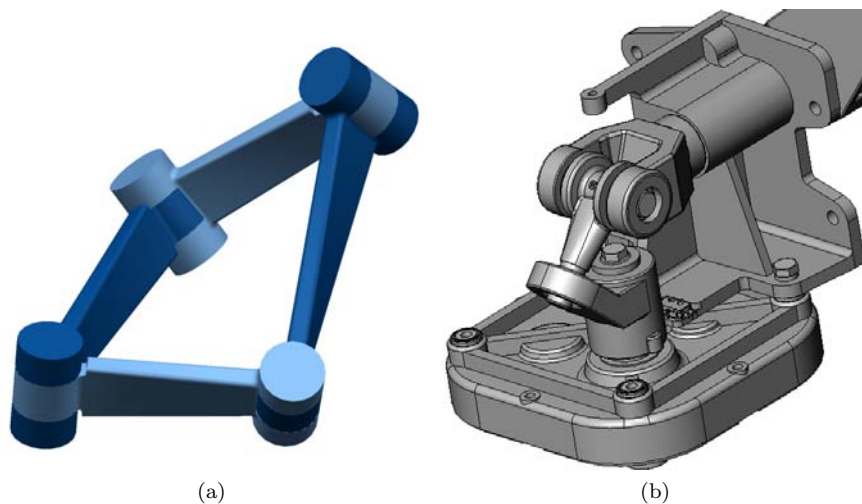


FIG. 2.4 : Modèles volumiques pour des mécanismes quatre barres 2.4a et lève-barrière Sinusmatic 2.4b

A la lumière de ces observations, il apparaît donc naturel d'envisager une déclaration de la topologie des mécanismes à partir d'une structure proche des graphes de liaisons cinématiques.

2.2.2 Déclaration des tâches

Les mécanismes dont on cherche à déterminer les dimensions doivent réaliser des tâches données. Parmi celles-ci, trois grandes familles (cf. 1.4.2) sont souvent mentionnées :

- le suivi de trajectoire,
- la génération de mouvement et
- la génération de fonction.

Un problème de suivi de trajectoire consiste à mettre en coïncidence la trajectoire décrite par un point particulier du mécanisme, dit point effecteur, avec une trajectoire visée. Les problèmes de génération de mouvement, quant à eux, mettent en coïncidence un repère de l'effecteur du mécanisme avec une trajectoire donnée tout en respectant également une certaine orientation. Enfin, les problèmes de génération de fonction lient deux paramètres cinématiques des mécanismes par une relation.

Pour chacune de ces trois classes, la spécification peut porter sur un ensemble discret de valeurs ou être obtenue à partir d'expressions mathématiques. De plus, il est parfois nécessaire d'associer aux différentes spécifications une dépendance par rapport au temps pour indiquer, par exemple, l'ordre de passage. Dans certains cas, l'ajout d'un poids relatif permettant de définir des voisinages acceptables autour des points de passage (ou un niveau de précision sur l'atteinte des objectifs) peut aussi se révéler intéressant.

Les lignes de l'exemple 2.1 montre la déclaration d'une tâche particulière de suivi de trajectoire avec le même langage de script que celui utilisé dans l'exemple de la figure 2.1. Dans ce cas présent, un point effecteur (un point de la pièce **p3**) doit suivre une trajectoire (**path**) définie par cinq points de passage ordonnés. L'ordre de passage par les points est indiqué par la première valeur renseignée (ordre croissant de passage). Puis, les coordonnées des points de passage sont précisées, suivies de leur poids relatif. Cette dernière valeur est comprise entre 0 et 1. Une valeur de 1 signifiant que l'effecteur doit passer exactement par les coordonnées spécifiées. Une valeur de 0 signifie que le point spécifié n'est utilisé que pour choisir entre deux solutions équivalentes.

```

NEW Specification path (Path)
mec.addtask(path)
path.addpoint(0,0 ; [ ; ; ] ; 1,0)
path.addpoint(0,3 ; [ ; ; ] ; 0,8)
path.addpoint(0,5 ; [ ; ; ] ; 0,7)
path.addpoint(0,8 ; [ ; ; ] ; 0,8)
path.addpoint(1,0 ; [ ; ; ] ; 1,0)
p3.addtask(path)
    
```

Listing 2.1 : Exemple de déclaration de suivi de trajectoire

Les lignes de l'exemple 2.2 montrent la déclaration d'une tâche particulière de génération de fonction. Plus particulièrement, dans ce problème, l'utilisateur établit une relation entre les angles de deux liaisons pivot (**r1** et **r2**) du mécanisme considéré. Comme pour l'exemple précédent, les premières et dernières

valeurs des spécifications correspondent respectivement aux pas de temps associés et aux poids relatifs. Un couple de valeurs correspondant aux valeurs des angles des liaisons considérées est aussi associé à chaque spécification.

```

NEW Specification f (Function)
mec.addtask(f)
f.addpoint(0,0 ; [ ; ] ; 1,0)
f.addpoint(0,3 ; [ ; ] ; 0,8)
f.addpoint(0,5 ; [ ; ] ; 0,7)
f.addpoint(0,8 ; [ ; ] ; 0,8)
f.addpoint(1,0 ; [ ; ] ; 1,0)
f.addjoint(r1, angle)
f.addjoint(r2, angle)

```

Listing 2.2 : Exemple de déclaration de génération de fonction

L'analyse de la déclaration des tâches nous a rapidement conduit à envisager leur déclaration comme des nouvelles contraintes. En effet, on peut, par exemple, constater que les problèmes de suivi de trajectoire ou de génération de mouvement comptant un seul point de passage ressemblent beaucoup à des problèmes classiques de résolution de contraintes géométriques.

2.2.3 Déclaration des contraintes

De nombreux outils de CAO [33, 34, 115, 137] utilisent une approche par spécification de contraintes géométriques pour décrire les pièces et les assembler. L'intérêt de cette approche est qu'elle libère le concepteur de la prise en compte du processus de génération du résultat qu'il souhaite obtenir. Il se consacre uniquement à la description de l'objet ou de la scène qu'il souhaite, même si cette description est pendant un temps incomplète. Des solutions intermédiaires sont générées par l'outil et le concepteur agit sur celles-ci en ajoutant d'autres spécifications afin d'atteindre le résultat escompté. Avec la démarche que nous proposons, les problèmes de synthèse dimensionnelle de mécanismes s'inscrivent dans la continuité de cette approche en ajoutant simplement de nouveaux types de contraintes.

Les contraintes géométriques sont utilisées couramment dans les ateliers de réalisation d'esquisses 2D et d'assemblage de pièces. L'atelier de réalisation d'esquisses 2D permet au concepteur de décrire des objets géométriques plans à partir d'un ensemble de contraintes dimensionnelles telles que des distances entre points, des angles entre droites, des coïncidences, etc (voir figure 2.5a). L'atelier d'assemblage permet au concepteur de définir des contraintes d'assemblage entre pièces telles que des contraintes de contact entre deux plans, des contraintes de coaxialité entre deux cylindres, etc (voir figure 2.5b).

Il est important de remarquer que, dans ces ateliers, l'utilisateur fournit toujours une esquisse initiale de l'objet qu'il souhaite et déclare ensuite les contraintes géométriques. Il faut aussi noter que, dans ces ateliers, le système de CAO ne fournit qu'une seule solution respectant les contraintes géométriques spécifiées. Au contraire, les outils de synthèse dimensionnelle doivent proposer plusieurs solutions aux utilisateurs afin de choisir la plus adaptée.

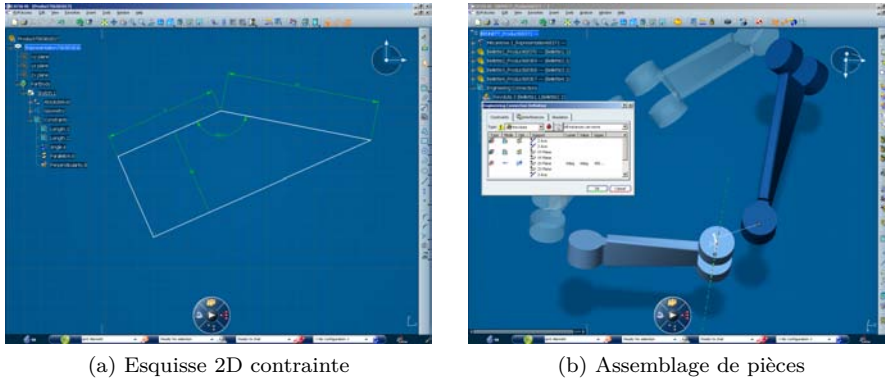


FIG. 2.5 : Exemple d'utilisation des contraintes géométriques pour le dimensionnement et le positionnement d'objets 2D et 3D

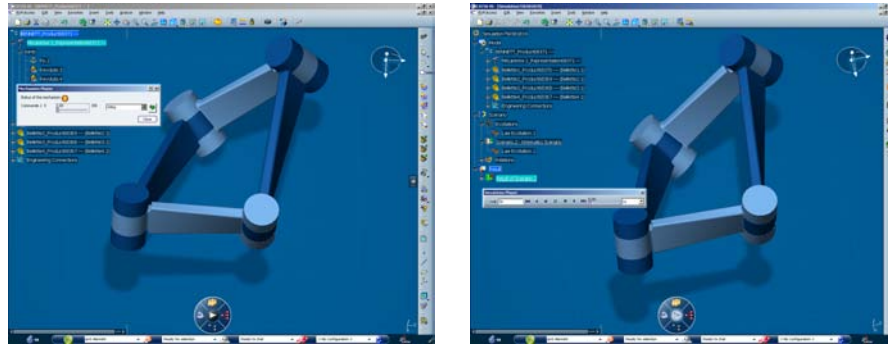
Les contraintes géométriques permettent aussi d'établir un lien entre ces approches de conception et l'analyse cinématique. En effet, toutes les liaisons cinématiques peuvent être généralement modélisées à partir d'un ensemble de contraintes géométriques. Une liaison pivot peut ainsi être représentée par une contrainte de coïncidence entre deux axes, une contrainte de distance entre deux points de ces axes et une contrainte d'angle entre deux plans contenant ces axes. Cette dernière contrainte permet de contrôler l'angle entre les deux pièces reliées par la liaison pivot. De la même façon, une liaison glissière peut être modélisée par une contrainte de coïncidence entre deux axes, une contrainte de coïncidence entre deux plans contenant les axes et une contrainte de distance entre deux points des axes.

Cette correspondance permet d'ailleurs d'obtenir des résultats similaires en manipulant sous contraintes les pièces d'un assemblage (figure 2.6a) et en effectuant une analyse cinématique du mécanisme correspondant (figure 2.6b). La principale différence entre ces deux modes réside néanmoins dans le fait que la simulation cinématique d'un mécanisme nécessite généralement de s'assurer que la déclaration est iso-contrainte (pas de degrés de libertés) afin d'obtenir toujours un même comportement.

Les utilisateurs de logiciels de CAO sont donc maintenant habitués à spécifier leurs problèmes de conception par des contraintes géométriques. Il nous semble donc raisonnable de proposer une modélisation par contraintes pour les problèmes de synthèse dimensionnelle. Normalement, toutes les contraintes géométriques disponibles (coïncidences, distances, angles, ensembles rigides, pièces fixes) dans les ateliers présentés pourraient être utilisées pour spécifier les problèmes de synthèse dimensionnelle. En réalité, il faut ajouter quelques contraintes supplémentaires pour prendre en compte les particularités de ces problèmes. On doit, notamment, considérer :

- des contraintes de plongement pour spécifier les mécanismes plans [134],
- des contraintes représentant les tâches à accomplir (contraintes de suivi de trajectoire, génération de mouvement et de fonction).

Parmi les autres contraintes, les plus utiles seront sans doute les contraintes de parallélisme, angle et distance entre les axes des deux liaisons cinématiques.



(a) Mouvement sous contraintes des pièces d'un mécanisme (b) Analyse cinématique d'un mécanisme

FIG. 2.6 : Liens entre modélisation géométrique par contraintes et analyse cinématique

2.3 Classes de problèmes traités

La méthodologie de description de problèmes de synthèse dimensionnelle présentée repose sur la spécification des propriétés des mécanismes considérés et des tâches à accomplir par des contraintes. La modélisation par contraintes permet d'étendre facilement les classes de problèmes pouvant être envisagées. Avant de présenter notre approche de dimensionnement de mécanismes, il est donc important de bien préciser les familles de problèmes que nous comptons traiter.

Dans la suite de ce document, nous considérons des mécanismes sériels ou parallèles comportant un nombre quelconque de pièces et de liaisons. Dans un premier temps, seules les liaisons glissière, pivot, pivot-glissant, appui-plan, rotule à doigt, linéaire rectiligne, rotule, linéaire annulaire, ponctuelle seront prises en compte. La déclaration des pièces peut être complétée avec des informations indiquant si celle-ci sont fixes ou, à l'opposé, si elles portent l'effecteur. De même, il est possible de préciser si les liaisons peuvent être commandées ou pas. En effet, la notion de liaison motrice ou menée peut ensuite s'avérer utile pour effectuer une analyse cinématique des mécanismes engendrés.

Pour valider l'approche, seuls les problèmes de suivi de trajectoire et de génération de mouvement décrits par des ensembles discrets de valeurs (positions et orientations) sont traités.

Aussi, deux types de contraintes peuvent être prises en compte. Le premier type permet d'indiquer que les mécanismes présentés par l'outil de synthèse doivent être des mécanismes plans. Le deuxième type de contraintes considérées sont les contraintes dimensionnelles qui s'appliquent sur les éléments géométriques caractéristiques des liaisons cinématiques. Il s'agit, par exemple, de contraintes de distance ou d'angle entre les axes de deux liaisons pivot.

La figure 2.7a montre deux exemples complets de déclaration d'un problème de synthèse dimensionnelle de mécanismes. Le premier exemple (figure 2.7a), sous forme de langage de script, reprend les spécifications décrites aux para-

graphes précédents afin de déclarer un mécanisme quatre barres plan avec une pièce fixe et une liaison pivot commandée devant suivre une trajectoire définie par cinq points. Le second exemple (figure 2.7b) montre le même problème spécifié à base de caractéristiques (*feature-based modeling*), comme on pourrait le visualiser dans un logiciel de CAO. Ces deux déclarations sont équivalentes et seront prises en compte par notre outil de synthèse dimensionnelle de mécanismes.

```

#!MECHANISMS 1
mec

#!PARTS 4
p1 (mec) = fixed,
p2 (mec),
p3 (mec),
p4 (mec)

#!JOINTS 4
Revolute : r1 (p1, p2),
Revolute : r2 (p2, p3),
Revolute : r3 (p3, p4),
Revolute : r4 (p4, p1)

#!SPECIFICATIONS 1
Path : path 5 ([, , ], ...)

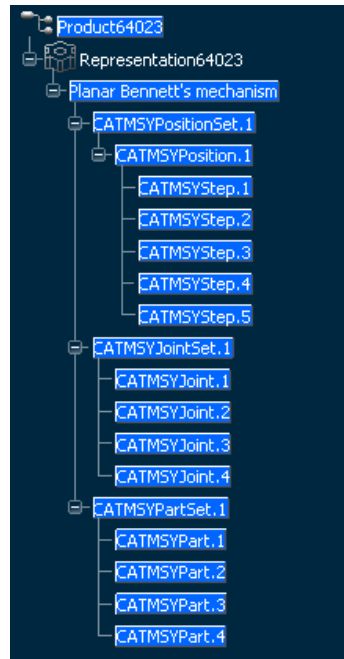
#!TASKS 1
task (p3, path)

#!CONSTRAINTS 1
Planar : mec

#!OPTIONS 1
Engine : r1

```

(a)



(b)

FIG. 2.7 : Deux exemples de déclaration d'un problème de synthèse dimensionnelle de mécanismes

2.4 Conclusion

Tout en ayant listé les éléments nécessaires à la déclaration de problèmes de synthèse dimensionnelle de mécanismes, nous avons montré que les moyens de description mis à disposition de l'utilisateur peuvent être nombreux. Cependant, certains parmi eux requièrent des efforts inutiles de la part des concepteurs (par exemple, choix de conditions initiales ou de représentation pour le schéma cinématique) ou rendent difficile la modification de la géométrie. Une modélisation par contraintes géométriques s'appuyant sur un nombre réduit de concepts (pièce, liaison, ensemble de points ou de référentiels) peut permettre, en revanche, de déclarer simplement des problèmes de suivi de trajectoire ou de génération de mouvement. Pour ces familles de problèmes, les contraintes géométriques à prendre en compte ont été énumérées.

Un des principaux avantages de cette approche est que la description peut être facilement modifiée ou complétée par l'utilisateur. Elle laisse aussi suffisamment de liberté à l'outil de synthèse dans le traitement de ces données afin d'engendrer des solutions aux problèmes posés. La modélisation interne des problèmes ainsi spécifiés fait l'objet du chapitre suivant.

Chapitre 3

Modélisation

3.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est de montrer comment peuvent être modélisés les problèmes de synthèse dimensionnelle spécifiés par contraintes. Le modèle proposé, que nous qualifions d'interne car il n'est pas vu par les utilisateurs, doit permettre d'enregistrer toutes les informations issues de la spécification, rendre possible une mise en équations du problème et, surtout, être capable de représenter graphiquement les solutions obtenues pour les montrer à l'utilisateur.

Nous détaillons les éléments constituant ce modèle et présentons un paramétrage permettant de construire les mécanismes que l'utilisateur cherche à dimensionner et à positionner.

3.2 Modélisation interne

Le modèle interne proposé est basé sur un graphe, proche du graphe des liaisons cinématiques. En effet, nous avons vu au chapitre précédent que le graphe cinématique des liaisons permettait d'enregistrer la majorité des informations nécessaires à la déclaration des mécanismes à dimensionner. Mais, alors que le graphe cinématique des liaisons met particulièrement en valeur les pièces (correspondant aux noeuds du graphe), il semble plus raisonnable, dans le cadre de la synthèse dimensionnelle de mécanismes, de souligner l'importance des liaisons cinématiques. En effet, ce qui nous intéresse réellement est de déterminer les positions relatives des liaisons cinématiques par rapport aux positions représentant les tâches à effectuer. Nous avons donc préféré considérer le graphe adjoint du graphe cinématique des liaisons pour représenter les problèmes de synthèse dimensionnelle. Dans ce graphe, les noeuds correspondent aux liaisons cinématiques et les arcs aux pièces.

L'utilisation du graphe adjoint présente de nombreux avantages. Par exemple, en se concentrant sur les liaisons cinématiques, il devient plus facile de déclarer des contraintes portant sur des éléments permettant de les définir tels que les axes des liaisons. De plus, on n'a plus réellement besoin de s'intéresser à la forme des pièces géométriques.

Il convient néanmoins de signaler que, dans ce graphe, les liaisons cinématiques deviennent multi-polaires (*i.e.* mettent en relation plusieurs arcs) même si un seul bi-pôle par liaison supporte la cinématique (*i.e.* information de cinématique entre une seule paire d'arcs) et les pièces bi-polaires (*i.e.* mettent en relation exactement deux liaisons) mais potentiellement *éclatées* sur plusieurs arcs.

Les figures 3.1 et 3.2 présentent les graphes cinématiques adjoints pour deux mécanismes simples. Alors que le graphe adjoint (3.1b) correspondant au mécanisme quatre barres est comparable à son graphe cinématique des liaisons (3.1a), les graphes cinématique (3.2a) et adjoint (3.2b) du bras robotisé à deux liaisons pivots sont très différents. Seules les pièces significatives sont représentées dans le graphe cinématique adjoint. Ainsi, les pièces terminales du bras robotisées ne sont pas représentées dans l'illustration 3.2b.

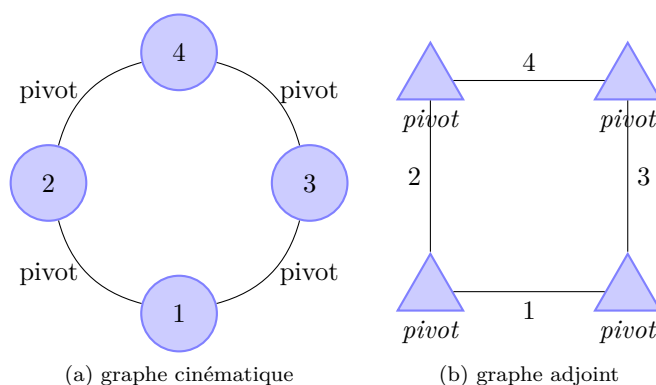


FIG. 3.1 : Graphe cinématique des liaisons et graphe cinématique adjoint pour un mécanisme quatre barres

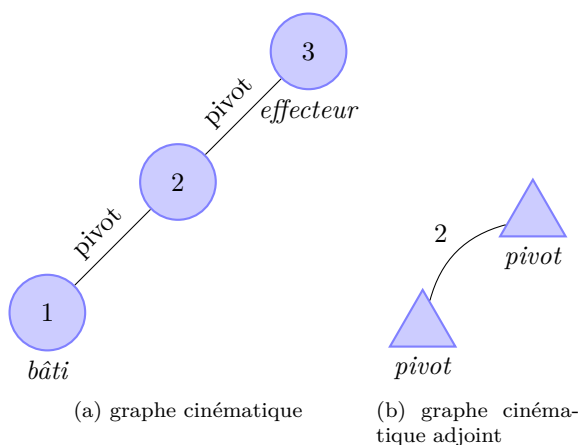


FIG. 3.2 : Graphe cinématique des liaisons et graphe cinématique adjoint pour un bras robotisé à deux liaisons pivots

Une autre particularité de notre modèle interne, et donc du graphe adjoint, réside dans le fait que seulement des liaisons pivot-glissant sont utilisées pour modéliser les problèmes de synthèse. Nous montrons dans la suite de ce document comment traduire toutes les autres liaisons cinématiques en un ensemble de liaisons pivot-glissant reliées entre elles par des pièces virtuelles. L'intérêt de cette approche est d'obtenir un modèle n'utilisant que peu d'éléments et de pouvoir utiliser un paramétrage, proche de celui de Denavit-Hartenberg pour paramétrer le mécanisme. En effet, le modèle retenu ne fait apparaître finalement que trois éléments : les *pièces*, les *liaisons de base* et les *positions* correspondant aux tâches de suivi de trajectoire et de génération de mouvement.

L'utilité de chacun de ces trois éléments deviendra plus claire dans les sections suivantes.

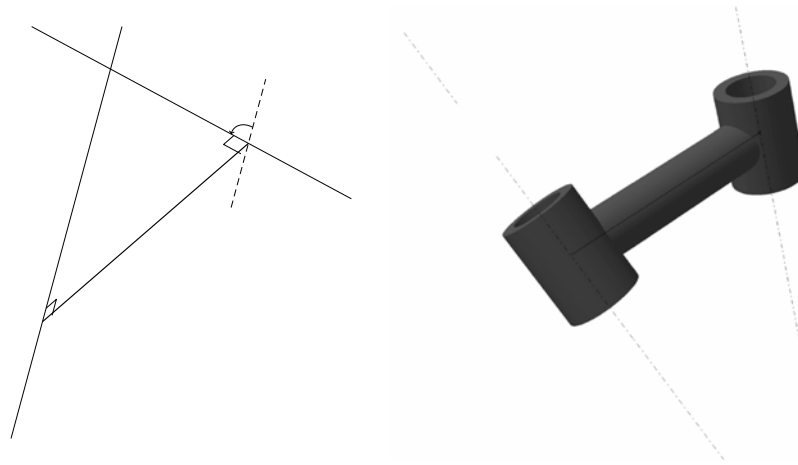
3.3 Les éléments du modèle

Quelques transformations des problèmes fournis par l'utilisateur sont nécessaires pour obtenir un graphe cinématique adjoint ne faisant référence qu'à trois entités. Nous détaillons ces transformations et montrons comment les pièces et les liaisons peuvent être paramétrées afin de créer des squelettes de mécanismes. Ces squelettes représentent par des structures filaires les caractéristiques principales du mécanisme et permettent de visualiser des configurations spatiales compatibles avec les spécifications géométriques.

3.3.1 Les pièces

Les pièces, au même titre que les liaisons cinématiques, sont des éléments indispensables du modèle. Mais, comme nous l'avons mentionné, leur rôle a été inversé par rapport à une utilisation classique. Dans notre modèle, ce sont les pièces qui établissent des relations entre les liaisons. Plus précisément, nous nous intéressons aux pièces qui mettent en relation deux liaisons cinématiques. Ces pièces peuvent être vues comme un ensemble de segments de droites reliant deux axes de deux liaisons cinématiques. En dehors de ces segments de droites, la géométrie d'une pièce n'influence pas la cinématique d'un mécanisme. Pour pouvoir déterminer complètement ces segments de droites, il suffit de les faire correspondre chacun à la perpendiculaire commune aux deux axes de deux liaisons. Et, c'est en cela que ce modèle est inspiré des conventions de Denavit et Hartenberg. En effet, Denavit et Hartenberg ont élaboré un jeu de paramètres qui permet de positionner une droite dans l'espace par rapport à une autre avec le minimum de paramètres [51]. Ils utilisent pour cela uniquement deux paramètres : une longueur et un angle mesurés sur la perpendiculaire commune aux deux axes (distance x et azimut α) (voir figure 3.3a) et deux contraintes. Ces deux contraintes reflètent l'utilisation de la perpendiculaire commune aux deux droites pour exprimer les paramètres.

Dans notre modèle, nous avons choisi aussi d'associer aux pièces (ou les parties des pièces) ces deux paramètres relatifs (une longueur x et un angle α). Ce sont, à nos yeux, des paramètres intrinsèques et fonctionnels de la pièce (voir figure 3.3b).



(a) Illustration de la convention de Denavit-Hartenberg (b) Paramétrage d'une pièce dans notre modèle

FIG. 3.3 : Convention retenue pour paramétrer les pièces

Pour définir les liaisons complexes, la notion de pièce virtuelle a dû être introduite. Ces pièces participent à la définition des liaisons complexes et des tâches mais elles ne correspondent pas à une pièce définissant la topologie d'un mécanisme. L'utilisation de ces pièces sera détaillée dans la section suivante.

3.3.2 Les positions

Dans notre modèle, les positions représentent géométriquement un repère complet (point et trièdre orthonormé de vecteurs). On leur associe six valeurs pour les positionner et les orienter dans l'espace tridimensionnel euclidien.

Les positions sont des données connues du modèle et permettent d'introduire les positions/orientations intervenant dans les tâches de suivi de trajectoire ou de génération de mouvement ou de fixer une pièce. Dans le cas où une position est associée à une tâche, trois ou six valeurs seront utilisées pour chaque spécification (position et ou orientation).

3.3.3 Les liaisons cinématiques

Comme nous l'avons mentionné précédemment, nous avons choisi de modéliser tous les problèmes de synthèse dimensionnelle en utilisant uniquement des liaisons pivot-glissant. Avant de détailler comment nous pouvons combiner plusieurs liaisons pivot-glissant pour obtenir des liaisons plus complexes, il est important de préciser comment ces liaisons de base peuvent être paramétrées.

Une liaison pivot-glissant est caractérisée géométriquement par son axe. Or, dans un espace euclidien tri-dimensionnel, il faut quatre paramètres pour positionner une droite (ceci est, par exemple, développé dans l'étude de la classe d'équivalence des droites dans l'ensemble des SATT¹ [28]). Dans le cas qui

¹Surface Associées Topologiquement et Techniquement.

nous occupe, il s'agit, plus précisément, de positionner récursivement plusieurs droites. En effet, nous souhaitons établir un paramétrage relatif entre deux pièces. Pour cela, il suffit de positionner les deux perpendiculaires communes successives. Deux paramètres supplémentaires correspondant à une longueur (hauteur z) et à un angle (torsion γ) doivent alors être introduits (voir figure 3.4).

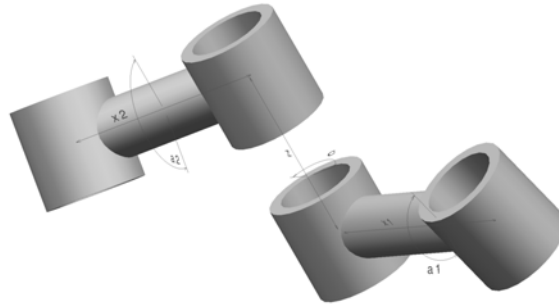


FIG. 3.4 : Paramétrage des liaisons

Cette modélisation présente l'intérêt d'utiliser les paramètres cinématiques de la liaison. Ceci facilite la description d'autres liaisons complexes. En effet, il suffit avec cette approche d'imposer une valeur à l'angle et à la longueur pour définir une liaison rigide. Si nous avions choisi de paramétrer les axes des liaisons avec une approche cartésienne classique, les quatre paramètres absolus de positionnement et d'orientation de la liaison auraient pu varier au cours du temps. L'inconvénient de notre approche est que pour déterminer la position et l'orientation de la liaison dans un repère absolu, il faut connaître les deux paramètres relatifs de la liaison mais aussi, de manière récursive, ceux de toutes les liaisons associées à celle-ci jusqu'à une référence (le bâti généralement). Nous devons signaler que la convention de Denavit-Hartenberg ne peut pas s'appliquer dans notre cas car nous souhaitons aussi traiter les mécanismes fermés et que certaines pièces peuvent intervenir dans trois liaisons ou plus.

Les liaisons sont caractérisées par les degrés de liberté qu'elles autorisent entre deux pièces. Il y a, au maximum, six degrés de liberté : trois translations selon trois axes non coplanaires et trois rotations selon trois axes également non coplanaires. La combinaison de tous ces degrés de liberté aboutit, en théorie, à 64 liaisons (cf. tableau 3.1). Cependant, certaines liaisons sont équivalentes sur le plan des mouvements qu'elles permettent. Il existe, en effet, au maximum vingt liaisons différentes (toutes les combinaisons des six degrés de liberté possibles, cf. les vingt lignes en gras du tableau 3.1), mais seules onze sont réellement utilisées car ayant une réalité mécanique.

La liaison pivot-glissant offre, quant à elle, deux degrés de liberté, une translation et une rotation, suivant le même axe. Le tableau 3.2 présente l'ensemble des liaisons utilisées classiquement pour déclarer des mécanismes. Il donne aussi

Nom	Rotations			Translation		
	γ	β	α	z	y	x
Encastrement	00	0	0	0	0	0
	01	0	0	0	0	1
Glissière	02	0	0	0	1	0
	04	0	0	0	1	0
-	03	0	0	0	1	1
	05	0	0	0	1	1
	06	0	0	0	1	1
-	07	0	0	0	1	1
	08	0	0	1	0	0
Pivot	16	0	1	0	0	0
	32	1	0	0	0	0
	09	0	0	1	0	1
Pivot glissant	18	0	1	0	0	1
	36	1	0	0	1	0
	10	0	0	1	0	1
	12	0	0	1	1	0
	17	0	1	0	0	1
	20	0	1	0	1	0
	33	1	0	0	0	1
	34	1	0	0	0	1
	11	0	0	1	0	1
	13	0	0	1	1	0
	19	0	1	0	0	1
	22	0	1	0	1	1
	37	1	0	0	1	0
	38	1	0	0	1	1
	14	0	0	1	1	1
Appui plan	21	0	1	0	1	0
	35	1	0	0	0	1
	15	0	0	1	1	1
	23	0	1	0	1	1
	39	1	0	0	1	1

Nom	Rotations			Translation		
	γ	β	α	z	y	x
Rotule	24	0	1	1	0	0
à doigt	40	1	0	1	0	0
	48	1	1	0	0	0
	25	0	1	1	0	1
	26	0	1	1	0	1
	41	1	0	1	0	1
	44	1	0	1	1	0
	50	1	1	0	0	1
	52	1	1	0	1	0
	27	0	1	1	0	1
	45	1	0	1	1	0
	54	1	1	0	1	1
	28	0	1	1	1	0
	42	1	0	1	0	1
	49	1	1	0	0	1
	29	0	1	1	1	0
	30	0	1	1	1	0
Linéaire rectiligne	43	1	0	1	0	1
	46	1	0	1	1	0
	51	1	1	0	0	1
	53	1	1	0	1	0
	31	0	1	1	1	1
	47	1	0	1	1	1
	55	1	1	0	1	1
Rotule	56	1	1	1	0	0
Linéaire-annulaire	57	1	1	1	0	0
	58	1	1	1	0	1
	60	1	1	1	1	0
	59	1	1	1	0	1
Ponctuelle	61	1	1	1	1	0
	62	1	1	1	1	0
Libre	63	1	1	1	1	1

TAB. 3.1 : Caractéristiques de l'ensemble des liaisons. **En gras**, les conventions associées à chaque liaison. x , y et z représentent respectivement les premier, deuxième et troisième axes de translation, α , β et γ représentent respectivement les premier, deuxième et troisième axes de rotation.

le nombre de liaisons pivot-glissant et le nombre de pièces virtuelles nécessaires pour pouvoir les réaliser.

Liaison	Degrés de liberté	Dans le modèle	
		Nombre de liaisons	Nombre de pièces
Encastrement	0	3	2
Glissière	1	1	0
Pivot	1	1	0
Pivot-glissant	2	1	0
Rotule à doigt	2	2	1
Rotule	3	3	2
Appui-plan	3	3	2
Linéaire-annulaire	4	3	2
Linéaire rectiligne	4	3	2
Ponctuelle	5	3	2
Libre	6	3	2

TAB. 3.2 : Les degrés de liberté des liaisons et leurs éléments issus du modèle

Pour réaliser ces liaisons complexes, il est nécessaire de fixer certains paramètres. Le tableau 3.3 liste les variables à figer et indique aussi celles qui varient en fonction de la configuration du mécanisme.

Liaison	L1		P1		L2		P2		L3	
	z	γ	x	α	z	γ	x	α	z	γ
Glissière	$z_1(t)$	γ_1	—	—	—	—	—	—	—	—
Pivot	z_1	$\gamma_1(t)$	—	—	—	—	—	—	—	—
Pivot-glissant	$z_1(t)$	$\gamma_1(t)$	—	—	—	—	—	—	—	—
Rotule à doigt	z_1	$\gamma_1(t)$	0	$\frac{\pi}{2}$	z_2	$\gamma_2(t)$	—	—	—	—
Rotule	z_1	$\gamma_1(t)$	0	$\frac{\pi}{2}$	z_2	$\gamma_2(t)$	0	$-\frac{\pi}{2}$	z_3	$\gamma_3(t)$
Appui-plan	z_1	$\gamma_1(t)$	0	$\frac{\pi}{2}$	$z_2(t)$	γ_2	0	$-\frac{\pi}{2}$	$z_3(t)$	γ_3
Linéaire-annulaire	$z_1(t)$	$\gamma_1(t)$	0	$\frac{\pi}{2}$	z_2	$\gamma_2(t)$	0	$-\frac{\pi}{2}$	z_3	$\gamma_3(t)$
Linéaire rectiligne	$z_1(t)$	$\gamma_1(t)$	0	$\frac{\pi}{2}$	$z_2(t)$	γ_2	0	$-\frac{\pi}{2}$	z_3	$\gamma_3(t)$
Ponctuelle	$z_1(t)$	$\gamma_1(t)$	0	$\frac{\pi}{2}$	$z_2(t)$	$\gamma_2(t)$	0	$-\frac{\pi}{2}$	z_3	$\gamma_3(t)$
Libre	$z_1(t)$	$\gamma_1(t)$	0	$\frac{\pi}{2}$	$z_2(t)$	$\gamma_2(t)$	0	$-\frac{\pi}{2}$	$z_3(t)$	$\gamma_3(t)$

TAB. 3.3 : Définition des liaisons à l'aide des éléments de base. x et α sont les paramètres des axes. z et γ sont les paramètres des nœuds pouvant dépendre du temps t .

3.4 Représentation des problèmes de synthèse dimensionnelle

Le temps est venu de montrer comment les problèmes de synthèse dimensionnelle peuvent être représentés grâce aux différents éléments étudiés. En particulier, nous devons montrer comment prendre en compte les contraintes de plongement pour spécifier les mécanismes plans et les contraintes respectant les tâches à accomplir (contraintes de suivi de trajectoire, génération de mouvement et de fonction).

Il est aussi très important d'introduire à ce stade les boucles de fermeture de chaînes cinématiques qui vont nous permettre d'écrire les équations associées aux problèmes modélisés.

3.4.1 Les contraintes

Pour modéliser les problèmes de synthèse dimensionnelle, il nous semble nécessaire de traiter, au moins, les contraintes concernant :

- les ensembles rigides,
- les pièces fixes dans un repère global,
- les tâches,
- les mécanismes plans.

Ensembles rigides

Comme évoqué au début de ce chapitre, les pièces sont des éléments bipolaires dans notre graphe cinématique adjoint mais elles peuvent aussi être éclatées sur plusieurs arcs. Cela est le cas, par exemple, lorsqu'une pièce participe à plus de deux liaisons cinématiques. Plusieurs entre-axes doivent alors cohabiter au sein d'une même pièce. Pour s'assurer que les pièces ne se déforment pas, il faut alors préciser que l'ensemble est rigide et ajouter des liaisons rigides entre les différents éléments de la même pièce.

Pièce fixe dans le repère global

Pour définir un problème de synthèse dimensionnelle, il faut que l'utilisateur déclare au moins une pièce comme étant fixe. Cette pièce constituera alors le bâti du mécanisme (ou elle en fera partie). Du point de vue du modèle interne, cela se traduit par l'ajout d'une position, d'une liaison (rigide), de deux pièces virtuelles et d'une relation d'ensemble rigide. La position correspond à un repère particulier, nommé A dans le graphe cinématique adjoint. On peut associer à cette position A des valeurs nulles (mettant alors en coïncidence cette position avec le repère global) ou lui attribuer les valeurs d'une position/orientation à atteindre spécifiée par l'utilisateur. Pour des raisons que nous verrons un peu plus loin, nous privilégions cette deuxième solution.

Les pièces virtuelles créées permettent d'établir un lien entre la position A et la pièce fixe. Enfin, la relation d'ensemble rigide permet de spécifier qu'une des pièces virtuelles est fixe par rapport à la pièce à fixer dans le repère global.

La figure 3.5 illustre cette contrainte pour un mécanisme quatre barres. Les six paramètres nécessaires au positionnement et à l'orientation du bâti sont répartis sur les deux liaisons 5 et 1 (rigides car le bâti reste fixe) et la pièce 5. Les valeurs associées à la pièce 7 sont, quant à elles, prédéterminées et fixées par convention à zéro aussi bien pour la longueur que pour l'angle.

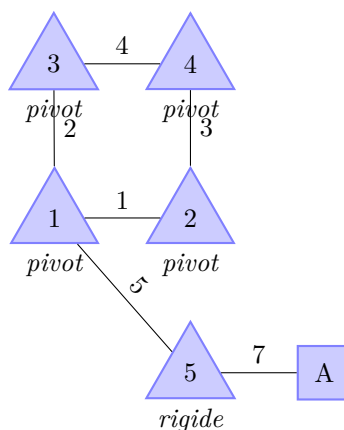


FIG. 3.5 : Modélisation d'une pièce fixe dans un repère global

Contraintes correspondant aux tâches à accomplir

Comme pour la contrainte de pièce fixe dans le repère global, pour spécifier des tâches de suivi de trajectoire ou de génération de mouvement, il suffit d'ajouter une position, une liaison (rigide), deux pièces virtuelles et une relation d'ensemble rigide. La position va permettre de préciser les positions (et éventuellement les orientations) à atteindre par le point effecteur (représenté par une pièce virtuelle).

La figure 3.6 montre la modélisation de cette contrainte pour un mécanisme quatre barres. Les six paramètres nécessaires au positionnement et à l'orientation de l'effecteur sont répartis sur les deux liaisons 6 et 3 et la pièce 6. Les

valeurs associées à la pièce 8 sont, quant à elles, prédéterminées et fixées par convention à zéro aussi bien pour la longueur que pour l'angle.

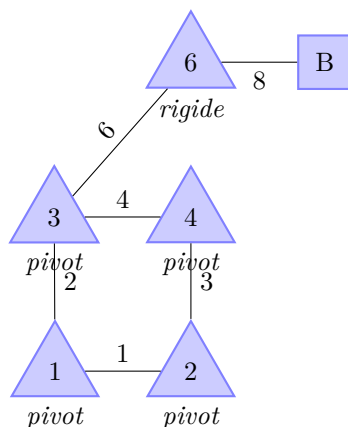


FIG. 3.6 : Spécification d'une tâche à effectuer

Lorsqu'une pièce est fixée dans le repère global et qu'une tâche est déclarée, il est aussi nécessaire d'établir un lien entre les deux positions les représentant. Cela permet de déterminer les positions relatives du bâti (fixe) par rapport aux différentes positions spécifiées par l'utilisateur. Dans l'exemple de la figure 3.7, les six paramètres nécessaires à la désignation complète d'une position sont portés par les trois liaisons libres (pivot-glissant) 5, 7 et 6. Les quatre paramètres portés par les deux pièces 9 et 10 sont eux prédéterminés. Les pièces 7 et 8 sont elles prédéterminées et fixées par convention à zéro pour les longueurs et les angles qu'elles portent.

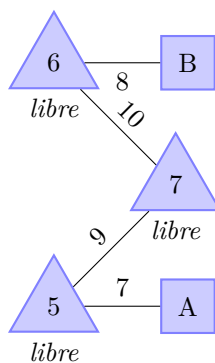


FIG. 3.7 : Liens entre la pièce fixe et les positions des tâches

Nous pouvons remarquer que des tâches de génération de fonction pourraient se définir d'une façon similaire en prenant garde à faire évoluer des couples de valeurs en fonction du temps.

Les mécanismes plans

Comme nous l'avons mentionné au chapitre précédent, toute la géométrie d'un mécanisme plan n'est pas comprise dans un même plan. Cependant, les axes de toutes les liaisons pivot doivent être perpendiculaires à un même plan et les axes de toutes les liaisons glissières doivent être aussi parallèles à ce même plan. Cela revient à spécifier les angles entre chacun des axes des liaisons : parallélisme entre les liaisons de même nature et orthogonalité entre les liaisons de nature différente. Cependant, seules les liaisons ayant trait à la définition de la cinématique du mécanisme sont concernées.

Notons, par la même occasion, que si la tâche à accomplir par ce mécanisme plan est de type suivi de trajectoire ou génération mouvement, alors, il faut que les positions spécifiées par l'utilisateur soient dans un même plan.

Les contraintes géométriques dimensionnelles

Les contraintes géométriques dimensionnelles peuvent être de deux types : elles peuvent porter directement sur des paramètres géométriques ou cinématiques clairement identifiés (valeurs comprises entre min et max, par exemple) ou donner une relation entre deux éléments du modèle. Dans ce cas, pour chaque contrainte, il faut identifier les deux éléments sur lesquels porte la contrainte (nœuds ou arcs) et établir un chemin permettant de passer de l'un à l'autre. La nature de la contrainte déterminera le type de relations à déclarer entre ces deux éléments.

3.4.2 Les boucles de fermeture de chaîne cinématique

Un des rôles du modèle interne est de permettre de générer les équations traduisant le problème. Dans notre cas, le modèle doit notamment permettre d'identifier les boucles de fermeture de chaîne cinématique.

Comme le graphe cinématique des liaisons, le graphe adjoint proposé permet facilement de détecter ces boucles. Il n'est cependant pas nécessaire de les lister toutes. En effet, il suffit de sélectionner une famille libre et génératrice de boucles (une base de l'ensemble des boucles). Pour effectuer ce choix, nous avons établi quelques heuristiques. Dans un premier temps, nous distinguons les boucles ne faisant intervenir que des éléments propres au mécanisme représenté et les boucles faisant intervenir l'*outil* qui réalise la tâche (ces dernières font donc intervenir les différentes positions de l'objectif). La première catégorie de boucles correspond à des contraintes régissant la structure du mécanisme. Elles doivent être rigoureusement fermées pour assurer l'existence du mécanisme. Au contraire, la deuxième catégorie de boucles correspond à l'objectif assigné au mécanisme. Elles feront l'objet d'une optimisation numérique afin de limiter leur non fermeture qui correspond à un non respect de l'objectif.

Ensuite, la longueur des boucles est prise en compte. En effet, plus le nombre d'éléments participant aux boucles est grand, plus compliquées sont les équations associées (degré élevé et nombre de monômes important). Dans le même ordre d'idée, les boucles faisant intervenir le maximum d'éléments déterminés ou, à défaut, d'éléments indépendants du temps ou de la position seront privilégiées. Elles limiteront d'autant le nombre de variables dans les équations associées.

3.5 Exemples

Le modèle exposé permet de représenter facilement des problèmes de synthèse dimensionnelle. La modélisation retenue est illustrée sur deux exemples.

Le premier exemple considéré concerne un mécanisme quatre barres spatial devant suivre une trajectoire donnée (voir le listing 3.1 correspondant à la spécification du problème). Cet exemple nous a permis d'introduire certains éléments du modèle. Nous présentons ici une modélisation complète faisant notamment apparaître le mécanisme, la pièce fixe et la tâche à accomplir.

```
#!MECHANISMS 1
mec

#!PARTS 4
p1 (mec) = fixed,
p2 (mec),
p3 (mec),
p4 (mec)

#!JOINTS 4
Revolute : r1 (p1, p2),
Revolute : r2 (p2, p3),
Revolute : r3 (p3, p4),
Revolute : r4 (p4, p1)

#!SPECIFICATIONS 1
Path : path 5 ([ , ], ...)

#!TASKS 1
task (p3, path)

#!OPTIONS 1
Engine : r1
```

Listing 3.1 : Spécification d'un mécanisme quatre barres devant suivre une trajectoire

Le graphe cinématique adjoint correspondant à ce problème est représenté à la figure 3.8. Dans ce graphe, nous reconnaissons facilement le mécanisme composé de quatre liaisons pivot (noeuds 1, 2, 3, 4) et quatre pièces (arcs 1, 2, 3, 4).

Le tableau 3.4 complète les informations topologiques de ce graphe. En effet, ce tableau précise que les arcs 1 et 5 constituent un ensemble rigide et on peut noter que la pièce 1 est liée à la position A. Cette pièce est aussi positionnée relativement aux positions de la trajectoire à suivre, représentées par le noeud B du graphe. En choisissant la première position de la trajectoire, comme étant la position A, la chaîne formée par les liaisons 5, 6 et 7 permet d'établir un paramétrage relatif des positions de la trajectoire.

Enfin, en notant que les arcs 4 et 6 font partie d'un même ensemble rigide, nous déduisons que le point effecteur se trouve dans la pièce 4.

Le tableau 3.5 précise les informations d'appartenance à une pièce.

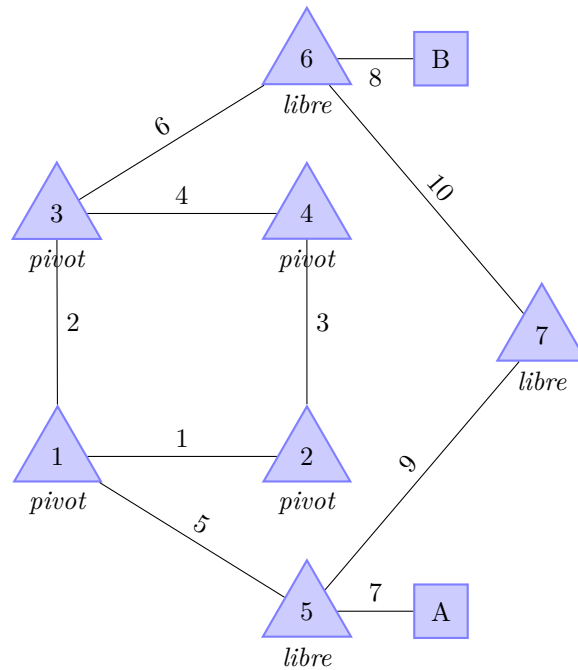


FIG. 3.8 : Problème traitant du mécanisme de Bennett représenté avec les éléments du modèle

nœud	type	couple d'arcs cinétique	couples d'arcs rigides
1	pivot	(1, 2)	(1, 5)
2	pivot	(1, 3)	
3	pivot	(2, 4)	(4, 6)
4	pivot	(3, 4)	
5	pivot-glissant	(7, 9)	(5, 7)
6	pivot-glissant	(8, 10)	(6, 8)
7	pivot-glissant	(9, 10)	

TAB. 3.4 : Informations associées aux liaisons (nœuds) de la figure 3.8.

arc	pièce	premier nœud	deuxième nœud
1	1	1	2
2	2	1	3
3	3	2	4
4	4	3	4
5	1	1	5
6	4	3	6
7	1	5	A
8	4	6	B
9	-	5	7
10	-	6	7

TAB. 3.5 : Détails sur les pièces (réelles et virtuelles) de l'exemple de la figure 3.8.

Le second exemple correspond à un problème décrivant un bras robotisé à deux liaisons pivot devant générer un mouvement (voir listing 3.2). Le graphe cinématique adjoint correspondant à ce problème est représenté à la figure 3.9. Il faut noter que, contrairement à l'exemple précédent, les trois pièces du robot (arcs 1, 2, 3) n'apparaissent qu'après la spécification de la tâche à effectuer et de la pièce fixe. On peut aussi remarquer que l'ajout des positions à atteindre introduit une boucle dans le graphe.

```

#!MECHANISMS 1
mec

#!PARTS 3
p1 (mec) = fixed,
p2 (mec),
p3 (mec)

#!JOINTS 2
Revolute : r1 (p1, p2),
Revolute : r2 (p2, p3),

#!SPECIFICATIONS 1
Motion : motion 5 ([, , , , ], ...)

#!TASKS 1
task (p3, motion)

#!OPTIONS 2
Engine : r1
Engine : r2

```

Listing 3.2 : Spécification d'un mécanisme quatre barres devant suivre une trajectoire

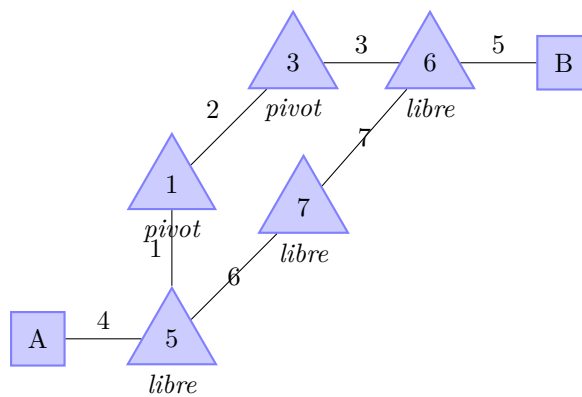


FIG. 3.9 : Problème traitant du bras robotisé à deux liaisons pivots représenté avec les éléments du modèle

Le tableau 3.6 complète les informations topologiques de ce graphe en indiquant que les arcs 3 et 5 correspondent à une même pièce ainsi que les arcs 1 et 4.

nœud	type	couple d'arcs cinétique	couples d'arcs rigides
1	pivot	(1, 2)	
2	pivot	(2, 3)	
3	pivot-glissant	(4, 6)	(1, 4)
4	pivot-glissant	(5, 7)	(3, 5)
5	pivot-glissant	(6, 7)	

TAB. 3.6 : Bras robotisé à deux liaisons pivots : description des liaisons (nœuds). Les indices se rapportent à la figure 3.8.

3.6 Construction de la géométrie des mécanismes

Comme nous l'avons déjà évoqué, le modèle interne doit permettre d'engendrer des mécanismes satisfaisant au mieux aux exigences de l'utilisateur. Nous montrons dans cette section que le modèle retenu permet de proposer systématiquement au moins un mécanisme à l'utilisateur. Nous détaillons aussi comment sont construits ces mécanismes.

3.6.1 Traitements préalables

Au moment de la construction des squelettes des mécanismes, nous supposons que notre outil de synthèse a été capable d'associer des valeurs à tous les paramètres du modèle. Une fois ces valeurs précisées, la construction des squelettes est basée en grande partie sur le parcours d'un arbre obtenu à partir du graphe cinématique adjoint. Pour transformer ce graphe en arbre, il faut identifier la (ou les) racine de l'arbre et *couper* les boucles du graphe. Pour des raisons de simplicité, nous avons choisi de désigner le nœud correspondant à la pièce fixe (ou les pièces fixes) comme la racine de l'arbre de construction et des heuristiques ont été mises en place pour couper les boucles. Ainsi, les arcs entre les pièces *outils* et les positions des objectifs sont systématiquement coupés. En effet, ils ne sont pas nécessaires à la construction proprement dite du mécanisme. Ils ne permettent que de spécifier les tâches. De plus, les boucles comportant une liaison motrice sont systématiquement coupées au niveau d'une de ces liaisons. Si des boucles demeurent après ces coupes, des choix arbitraires sont effectués pour les supprimer.

3.6.2 Construction des squelettes des mécanismes

Deux cas peuvent être distingués suivant que nous avons affaire à un mécanisme sériel ou à un mécanisme parallèle.

Mécanismes sériels

Les squelettes des mécanismes sériels (ou ouverts) peuvent être construits facilement. En effet, les graphes cinématiques adjoints de ces mécanismes, une fois les objectifs mis de côté, sont directement des arbres. En partant des pièces fixes, nous construisons des trièdres orthonormés directs en appliquant systématiquement une translation et une rotation dont les valeurs sont données par les éléments du graphe parcouru et dont l'axe est donnée par la nature de l'élément parcouru (premier axe pour les arcs et troisième axe pour les nœuds).

Ainsi, dans le cas des mécanismes sériels, il est toujours possible de construire la représentation géométrique d'un mécanisme, quelles que soient les valeurs des variables associées.

Mécanismes parallèles

Si le mécanisme à dimensionner est parallèle (comportant une ou plusieurs boucles cinématiques), deux cas sont à distinguer suivant que des solutions au problème ont été trouvées par le programme ou pas. Si une ou plusieurs solutions satisfaisantes (notamment respectant les contraintes de fermeture topologique) au problème sont trouvées, alors il est possible de procéder de la même manière que pour les mécanismes sériels. Ceci est, bien entendu, possible après avoir coupé les boucles topologiques suivant les liaisons motrices afin de savoir parcourir sans ambiguïté le graphe.

Si aucune solution satisfaisante n'a été trouvée par la méthode de résolution mise en oeuvre, alors ceci signifie que des contraintes ne sont pas respectées par les solutions proposées. Si celles-ci correspondent aux équations de fermeture de boucles topologiques, alors le mécanisme ne peut pas être assemblé dans l'état. On peut cependant construire le squelette d'un mécanisme de la même manière que précédemment, mais certaines liaisons cinématiques ne pourront pas être construites entre deux pièces qui ne coïncident pas. Pour assurer que ces liaisons pourront être correctement positionnées, il faut libérer les valeurs géométriques d'une des pièces intervenant dans la boucle (donc, une longueur et un angle associés à un arc du graphe) et leur affecter les valeurs appropriées. Nous pouvons ainsi obtenir autant de mécanismes pouvant s'assembler que de pièces intervenant dans la description de la boucle topologique en libérant successivement les couples de valeurs associés aux pièces.

Si les contraintes qui ne sont pas respectées ne correspondent pas aux contraintes de fermeture des boucles topologiques, alors nous pouvons quand même proposer le squelette d'un mécanisme, mais il faudra informer l'utilisateur que celui-ci ne satisfait pas toutes ses exigences.

Cette approche est illustrée par l'exemple suivant concernant un mécanisme plan à quatre barres (voir figure 3.10). Supposons que la méthode de résolution développée échoue et qu'elle rende les valeurs suivantes pour les longueurs des pièces : $l_1 = 35,0$, $l_2 = 11,7$, $l_3 = 8,9$ et $l_4 = 10,2$. Ces valeurs correspondent à une configuration non assemblable car $l_1 > l_2 + l_3 + l_4$.

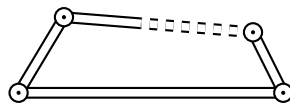


FIG. 3.10 : Solution non assemblable pour un mécanisme plan à quatre barres

Nous pouvons aussi proposer quatre mécanismes en appliquant la méthodologie exposée. Le tableau 3.7 fournit les valeurs des barres pour quatre configurations. Les squelettes des mécanismes obtenus sont illustrées à la figure 3.11.

	ℓ_1	ℓ_2	ℓ_3	ℓ_4
3.11a	35,0	11,7	8,9	10,2
3.11b	35,0	32,6	8,9	25,1
3.11c	35,0	11,7	20,6	10,2
3.11d	20,0	11,7	8,9	10,2

TAB. 3.7 : Solutions cohérentes après libération d'une longueur

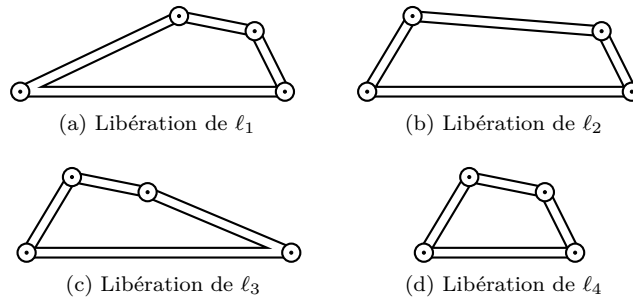


FIG. 3.11 : Illustration des quatre mécanismes proposés

Même si ces mécanismes ne répondent pas au problème posé, nous estimons qu'il est préférable de toujours proposer à l'utilisateur une série de mécanismes viables (au moins, pouvant être assemblés) plutôt que ne rien proposer. Les utilisateurs peuvent ensuite, soit demander au système d'utiliser un ou plusieurs de ces mécanismes comme point initial pour une seconde phase de résolution (comme le fait le logiciel d'optimisation de conception SAM [6]), soit compléter ou modifier la spécification du problème.

3.7 Conclusion

Le modèle interne exposé repose sur un graphe, que nous nommons graphe cinématique adjoint, dont les nœuds représentent des liaisons pivot-glissant et les arcs des parties de pièces (réelles ou virtuelles). Un paramétrage proche de celui de Denavit-Hartenberg est employé pour associer des paramètres géométriques (longueurs et angles) aux éléments du modèle et ainsi être capables de créer un squelette du mécanisme. Ce squelette prend uniquement en compte les éléments géométriques qui jouent un rôle dans la position et l'orientation des liaisons cinématiques et peut être représenté par une structure filaire.

Le chapitre suivant utilise les paramètres géométriques sélectionnés ainsi que les boucles extraites à partir du graphe cinématique adjoint pour formuler les problèmes de synthèse sous la forme d'un problème de fermeture de chaînes cinématiques.

Chapitre 4

Obtention des systèmes d'équations

4.1 Introduction

Au chapitre [précédent](#), nous avons présenté un modèle contenant les informations nécessaires au traitement d'un problème de synthèse dimensionnelle de mécanismes. Nous allons maintenant montrer comment ce modèle permet de définir un système d'équations traduisant fidèlement le problème décrit par l'utilisateur.

La traduction de l'exposition d'un problème via un modèle vers un système d'équations ou d'inéquations mathématiques, généralement désignée par *mise en équations* ou *génération des équations*, se fait en deux étapes principales. La première consiste à associer des variables ou, plus généralement, des expressions à certains éléments du modèle. Pour chaque variable, il faut préciser sa nature numérique (nombres entiers naturels, relatifs, nombres réels, *etc.*), son domaine de définition, sa dépendance aux autres variables ou expressions (dépendance au temps, à des index, *etc.*). Il est aussi important d'indiquer son unité (dimensions physiques, repère de projection, *etc.*) afin de pouvoir vérifier l'homogénéité des relations. La deuxième étape consiste à exprimer toutes les relations entre ces variables. Ces relations peuvent alors prendre la forme d'équations ou d'inéquations.

Comme nous l'avons indiqué lors de notre étude sur les approches utilisées dans la synthèse dimensionnelle de mécanismes, différentes mises en équations peuvent s'appuyer sur un même modèle et les choix effectués au niveau de la formulation du problème sous forme d'équations (choix des variables, de la forme des équations : algébriques, transcendantes, *etc.*) facilitent, dans certains cas, la résolution des systèmes d'équations générés. Dans le cadre de nos travaux, nous avons investigué plusieurs formulations mais nous ne présenterons dans ce chapitre que la méthode finalement retenue. Néanmoins, nous essaierons, autant que possible, de comparer celle-ci à d'autres méthodes mentionnées dans l'état de l'art afin de justifier nos choix. Nous nous reporterons à l'annexe [B](#) pour une présentation des différentes méthodes de mise en équations étudiées.

Tout le long de ce chapitre, nous nous appuyerons sur un exemple spa-

tial simple pour expliquer notre démarche. Le mécanisme dit de *Bennett* (figure 3.8), présenté au chapitre précédent, nous semble le plus approprié pour montrer les différentes étapes de la mise en équation.

4.2 Association des variables

Le modèle servant à la description d'un problème de synthèse de mécanismes est basé sur un graphe. Chacun des éléments de ce graphe, les nœuds et les arcs, portent des informations numériques en plus des informations topologiques qu'ils portent par nature. Ces informations numériques sont constituées de couples de valeurs, l'une représentant un angle, l'autre une longueur. Ces deux valeurs correspondent à une rotation et à une translation suivant un même axe. Les arcs, parties des pièces du mécanisme, supportent un seul et unique couple de valeurs alors que les nœuds, liaisons cinématiques du mécanisme, supportent un ensemble de couples de valeurs se référant tous au même axe.

La figure 4.1 représente un extrait du graphe d'un mécanisme et les couples de valeurs associés. Une représentation géométrique de ces mêmes valeurs est donnée par la figure 4.2. Le schéma 4.2a met en évidence la signification géométrique de ces valeurs : ils sont les paramètres géométriques d'un schéma tridimensionnel. Ce schéma est construit en utilisant les valeurs des couples précédents et une série de règles précises (cf. section 3.3) qui permettent de définir sans ambiguïté la géométrie. Le schéma 4.2b illustre les transformations successives que subissent les repères en mettant en avant les axes invariants d'une étape à une autre.

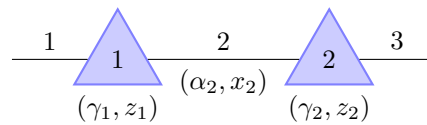


FIG. 4.1 : Extrait du graphe d'un mécanisme et des couples de valeurs associés

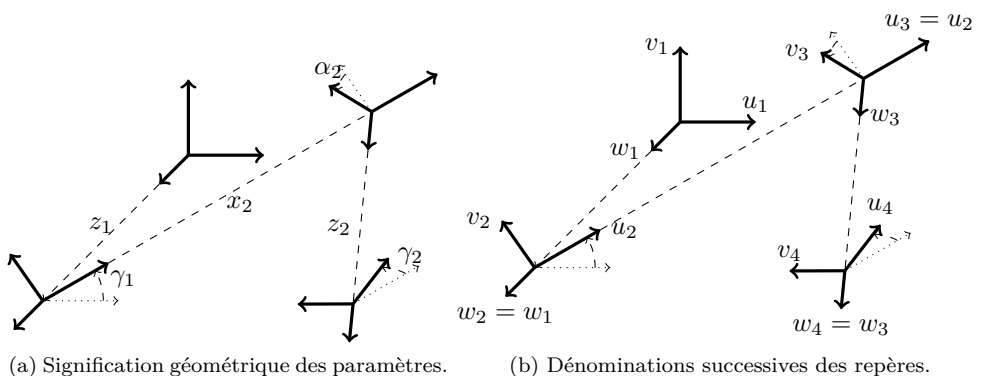


FIG. 4.2 : Extrait de la représentation géométrique filaire d'un mécanisme et des variables associées.

À chacun de ces couples de valeurs sont associées deux variables qui servent à exprimer les différentes équations ou inéquations. Cependant les propriétés de ces variables sont différentes suivant l'origine et la nature des valeurs qu'elles représentent.

4.2.1 Domaine de définition des variables

Les valeurs associées aux liaisons peuvent être commandées en fonction d'une variable temporelle. Elles peuvent ainsi prendre n'importe quelle valeur. Elles peuvent notamment être continues sur un intervalle de longueur 2π pour les angles et être positives ou négatives pour les longueurs. Les variables associées aux angles des liaisons cinématiques seront ainsi définies sur l'intervalle $[0 ; 2\pi[$ ou $]-\pi ; +\pi]$. Le deuxième intervalle sera privilégié de par sa symétrie et la place centrale accordée à la valeur zéro. Les variables associées aux longueurs des liaisons cinématiques seront définies sur l'ensemble des nombres réels (\mathbb{R}).

Le modèle proposé assure l'alternance¹ entre les pièces et les liaisons cinématiques. Il est donc possible de regrouper les éléments du modèle par couples mixtes et d'exploiter cette propriété du modèle comme suit. L'union d'un angle associé à une liaison cinématique et d'une distance associée à une pièce est assimilable à des coordonnées polaires². Il en est de même pour l'union d'une longueur associée à une liaison cinématique et d'un angle associé à une pièce. Les liaisons cinématiques et les pièces associées pour former des coordonnées polaires doivent être elles-mêmes associées par une relation topologique pour que ces coordonnées aient un sens. Par exemple, pour l'extrait de graphe donné par les figures 4.1 et 4.2, les deux couples de variables correspondant à ces critères sont (γ_1, x_2) et (α_2, z_2) .

Pour garantir l'unicité des expressions des coordonnées polaires, les propriétés appliquées à l'une des coordonnées en imposent d'autres à l'autre coordonnée. La figure 4.3 met en évidence l'aspect non univoque des coordonnées polaires si des conventions ne sont pas explicitées.

Ainsi, si les angles associés aux liaisons cinématiques peuvent prendre n'importe quelle valeur sur un intervalle de longueur 2π , alors les longueurs associées aux pièces devront, elles, se limiter à une moitié des nombres réels, positive ou négative. Les variables associées aux longueurs des pièces seront définies sur \mathbb{R}^+ pour des raisons pratiques. De la même manière, si les longueurs associées aux liaisons cinématiques peuvent prendre n'importe quelle valeur sur \mathbb{R} , alors les angles associés aux pièces peuvent, eux, ne prendre leurs valeurs que sur un intervalle de longueur π . Pour les mêmes raisons que précédemment (symétrie autour de la valeur zéro), l'intervalle retenu sera $]-\frac{\pi}{2} ; +\frac{\pi}{2}]$.

Il est intéressant de noter que, dans la plupart des cas, les variables correspondantes aux longueurs associées aux arcs seront soit imposées par contraintes égales à zéro (intersection de deux axes au sein d'une liaison rotule, par exemple)

¹Il peut cependant arriver que le modèle fasse apparaître deux liaisons cinématiques consécutivement. Ce sont alors deux vues de la même liaison cinématique (même axe) mais faisant référence à des arcs (des pièces) différents. Dans ce cas, cet ensemble est bien équivalent à une seule liaison cinématique avec un décalage des valeurs des variables cinématiques si elles sont présentes.

²Ce sont en réalité des coordonnées cylindriques, mais la troisième dimension donnée par la hauteur ne nous intéresse pas ici.

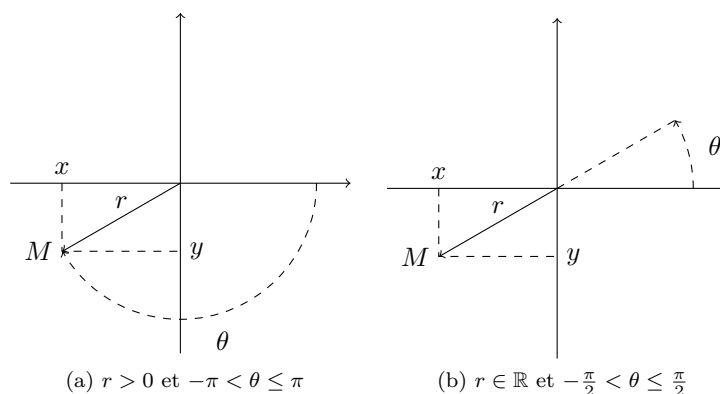


FIG. 4.3 : Les deux couples de coordonnées polaires (r, θ) pour le point M de coordonnées cartésiennes $(x, y) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ suivant les conventions adoptées : $(1, -\frac{5\pi}{6})$ pour 4.3a et $(-1, \frac{\pi}{6})$ pour 4.3b.

soit imposées plus grandes qu'une certaine valeur (entre axe minimum acceptable mécaniquement) et inférieure à une autre (dimensions maximales des pièces). Finalement, dans la plupart des cas, ces variables seront définies sur un domaine du type $[a, b]$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ tels que $a < b$.

Le tableau 4.1 résume les différents domaines de définition des différents types de variables.

Variables		Domaine de définition	Dépendance au temps
arc	angle longueur	$]-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}[$ \mathbb{R}^+	indépendantes du temps
nœud entre deux arcs d'une même pièce	angle longueur	$]-\pi; +\pi[$ \mathbb{R}	indépendantes du temps
nœud entre deux arcs de deux pièces	angle longueur	$]-\pi; +\pi[$ \mathbb{R}	peuvent dépendre du temps

TAB. 4.1 : Nature des variables.

Les tableaux 4.2 et 4.3 donnent les domaines de définition des différentes variables et leurs dépendances au temps des nœuds et, respectivement, des arcs du mécanisme de Bennett et, éventuellement, le mécanisme à quatre barres plan. Pour les nœuds, tableau 4.2, la justification des choix est donnée par la deuxième colonne indiquant le type de liaison cinématique. Pour les arcs, tableau 4.3, la justification est également donnée par la deuxième colonne indiquant le type de pièce (sa nature et sa fonction).

4.2.2 Dépendance temporelle des variables

Dans notre modèle, un arc représente une partie d'une pièce identifiée. Pour pouvoir associer un couple de variables à un arc du graphe cinématique, il suffit

index	type de liaison	angle (γ)		longueur (z)	
1	pivot (1, 2)	$\gamma \in]-\pi ; \pi]$	$\partial\gamma/\partial t \neq 0$	$z \in \mathbb{R}$	$\partial z/\partial t = 0$
1	rigide (1, 5)	$\gamma \in]-\pi ; \pi]$	$\partial\gamma/\partial t = 0$	$z \in \mathbb{R}$	$\partial z/\partial t = 0$
2	pivot (1, 3)	$\gamma \in]-\pi ; \pi]$	$\partial\gamma/\partial t \neq 0$	$z \in \mathbb{R}$	$\partial z/\partial t = 0$
3	pivot (2, 4)	$\gamma \in]-\pi ; \pi]$	$\partial\gamma/\partial t \neq 0$	$z \in \mathbb{R}$	$\partial z/\partial t = 0$
3	rigide (4, 6)	$\gamma \in]-\pi ; \pi]$	$\partial\gamma/\partial t = 0$	$z \in \mathbb{R}$	$\partial z/\partial t = 0$
4	pivot (3, 4)	$\gamma \in]-\pi ; \pi]$	$\partial\gamma/\partial t \neq 0$	$z \in \mathbb{R}$	$\partial z/\partial t = 0$
5	pivot-glissant (7, 9) associée à un objectif	$\gamma = \gamma_5$	$\partial\gamma/\partial t \neq 0$	$z = z_5$	$\partial z/\partial t \neq 0$
5	rigide (5, 7)	$\gamma \in]-\pi ; \pi]$	$\partial\gamma/\partial t = 0$	$z \in \mathbb{R}$	$\partial z/\partial t = 0$
6	pivot-glissant (8, 10) associée à un objectif	$\gamma = \gamma_6$	$\partial\gamma/\partial t \neq 0$	$z = z_6$	$\partial z/\partial t \neq 0$
6	rigide (6, 8)	$\gamma \in]-\pi ; \pi]$	$\partial\gamma/\partial t = 0$	$z \in \mathbb{R}$	$\partial z/\partial t = 0$
7	pivot-glissant (9, 10) associée à un objectif	$\gamma = \gamma_7$	$\partial\gamma/\partial t \neq 0$	$z = z_7$	$\partial z/\partial t \neq 0$
A	associée à une position	$\gamma = 0$	$\partial\gamma/\partial t = 0$	$z = 0$	$\partial z/\partial t = 0$
B	associée à une position	$\gamma = 0$	$\partial\gamma/\partial t = 0$	$z = 0$	$\partial z/\partial t = 0$

TAB. 4.2 : Domaine de définition des variables associées aux nœuds dans le cas du mécanisme de Bennett. *Les indices se rapportent à la figure 3.8.*

index	type de pièce	angle (α)	longueur (x)
1	entre-axe	$\alpha = 0$ si mécanisme plan $\alpha \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sinon	$x \geq x_{min}$
2	entre-axe	$\alpha = 0$ si mécanisme plan $\alpha \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sinon	$x \geq x_{min}$
3	entre-axe	$\alpha = 0$ si mécanisme plan $\alpha \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sinon	$x \geq x_{min}$
4	entre-axe	$\alpha = 0$ si mécanisme plan $\alpha \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sinon	$x \geq x_{min}$
5	mise en position	$\alpha \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$	$x \geq 0$
6	mise en position	$\alpha \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$	$x \geq 0$
7	pièce associée à une position	$\alpha = 0$	$x = 0$
8	pièce associée à une position	$\alpha = 0$	$x = 0$
9	pièce virtuelle	$\alpha = \frac{\pi}{2}$	$x = 0$
10	pièce virtuelle	$\alpha = \frac{\pi}{2}$	$x = 0$

TAB. 4.3 : Domaine de définition des variables associées aux arcs dans le cas du mécanisme de Bennett. *Les indices se rapportent à la figure 3.8.*

de connaître l'index de cet arc et son orientation. Ces variables sont constantes et ne dépendent donc ni de l'instant ni de la position.

Un nœud représente une liaison cinématique. Un nœud associe un couple de valeurs à chacune des paires d'arcs qui lui est rattachée. Parmi ces paires d'arcs, une seule doit mettre en relation deux arcs de deux pièces différentes. C'est elle qui porte l'information relative à la cinématique de la liaison. Pour identifier ce couple, il faut l'index du nœud (de la liaison cinématique) et les deux index des arcs concernés (ce qui est équivalent à donner l'index des deux autres nœuds complétant cet ensemble arc, nœud, arc). Suivant la nature de ce nœud (quatre possibilités : liaison rigide, liaison pivot, liaison glissière ou liaison pivot-glissante), parmi les deux variables associées à ce nœud et à cette paire d'arcs, certaines peuvent être dépendantes du temps. Les autres restent constantes dans le temps. Il faut aussi identifier un sens : d'un arc vers l'autre. Toutes les autres paires d'arcs rattachées à ce nœud ne font chacune intervenir qu'une pièce. Ces paires sont identifiées par l'index du nœud et les index des deux arcs considérés. Toutes les variables s'y rapportant sont indépendantes du temps.

Le tableau 4.4 indique les différentes dépendances au temps des différents types de variables dans le cas général. Les colonnes 4 et 6 du tableau 4.2 et le tableau 4.5 montrent ces dépendances dans le cas particulier du mécanisme de Bennett.

Variables		Domaine de définition	Dépendance au temps
arc	angle	$] -\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$	indépendance
	longueur	\mathbb{R}	
nœud entre deux arcs d'une même pièce	angle	$] -\pi, +\pi]$	indépendance
	longueur	\mathbb{R}	
nœud rigide	angle	$] -\pi, +\pi]$	indépendance
	longueur	\mathbb{R}	
nœud pivot	angle	$] -\pi, +\pi]$	dépendance
	longueur	\mathbb{R}	indépendance
nœud glissière	angle	$] -\pi, +\pi]$	indépendance
	longueur	\mathbb{R}	dépendance
nœud pivot-glissant	angle	$] -\pi, +\pi]$	dépendance
	longueur	\mathbb{R}	dépendance

TAB. 4.4 : Nature des variables.

4.2.3 Quatre catégories de variables

L'analyse que nous avons menée lors des paragraphes précédents a permis de mettre en évidence quatre catégories de variables suivant que leurs valeurs soient connues, inconnues, qu'elles soient dépendantes du temps ou non. Il s'agit des constantes, des paramètres, des variables géométriques et des variables cinétiques.

Les constantes ont des valeurs connues et fixées pour satisfaire des contraintes intrinsèques au modèle (les variables associées aux pièces virtuelles, par

index	type de liaison	γ (angle)	z (longueur)
1	pivot (1, 2)	dépendant	indépendante
1	rigide (1, 5)	indépendante	indépendante
2	pivot (1, 3)	dépendante	indépendante
3	pivot (2, 4)	dépendante	indépendante
3	rigide (4, 6)	indépendante	indépendante
4	pivot (3, 4)	dépendante	indépendante
5	pivot-glissant (7, 9)	dépendante	dépendante
5	rigide (5, 7)	indépendante	indépendante
6	pivot-glissant (8, 10)	dépendante	dépendante
6	rigide (6, 8)	indépendante	indépendante
7	pivot-glissant (9, 10)	dépendante	dépendante
A	associée à une position	indépendante	indépendante
B	associée à une position	indépendante	indépendante

TAB. 4.5 : Dépendance temporelle des variables issues du mécanisme de Bennett

exemple). Ces variables particulières peuvent ne pas apparaître en tant que telles dans les systèmes d'équations ; elles peuvent n'y figurer que par leurs valeurs numériques.

Les paramètres sont des variables dont les valeurs sont connues et qui permettent de décrire un problème particulier (variables associées aux liaisons virtuelles, par exemple). Ils dépendent généralement du temps, notamment lorsqu'ils sont associés à un objectif.

Les variables géométriques sont des inconnues qui ne dépendent pas du temps. Elles sont associées aux arcs et à certaines parties des nœuds.

Les variables cinétiques sont des inconnues qui dépendent du temps. Elles sont associées aux autres parties des nœuds.

Il est intéressant de noter que les variables cinétiques peuvent être appréhendées de deux façons :

- soit leurs valeurs représentent des valeurs absolues et elles donnent ainsi une position dans un repère local mais indépendant du temps ;
- soit elles représentent des variations au cours du temps par rapport à une position à un instant pris comme origine.

Cette deuxième approche, même si elle crée deux natures pour les variables cinétiques (absolue pour l'origine qui sert de référence relative pour les suivantes), permet de centrer les valeurs autour de zéro et, potentiellement, de limiter l'intervalle dans lequel chercher leurs valeurs. Ces deux considérations peuvent être intéressantes du point de vue des méthodes de résolution numériques (cf. 5 et 6).

4.3 Construction des équations

Le graphe composant le modèle permet, par les informations topologiques qu'il porte, de définir les relations entre les variables précédemment identifiées.

À chaque élément du graphe sera associé une ou plusieurs matrices de transformations homogènes mettant en œuvre les variables précédemment définies. Suivant la nature de l'élément en jeu, arc ou respectivement nœud, la matrice de transformation homogène représentera la combinaison d'une rotation et d'une translation suivant la première direction de l'espace local à la transformation, respectivement la dernière.

La transformation ainsi définie sera orientée de la même manière que lors de la définition des variables. Il faudra donc veiller à ce que les deux variables d'un même élément soient orientées de la même façon. La matrice homogène de transformation d'un arc dont les variables associées sont l'angle α et la longueur x sera

$$Q_1(x, \alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.1)$$

et celle pour un nœud entre deux arcs donnés dont les variables associées sont l'angle γ et la longueur z sera

$$Q_3(z, \gamma) = \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.2)$$

Il est intéressant de noter que les transformations inverses sont obtenues facilement : ce sont celles définies à l'aide de l'opposé des variables. Elles sont données par les relations :

$$\begin{cases} Q_1^{-1}(x, \alpha) = Q_1(-x, -\alpha) \\ Q_3^{-1}(z, \gamma) = Q_3(-z, -\gamma) \end{cases}. \quad (4.3)$$

On peut aussi remarquer que

$$Q_1(0, 0) = Q_3(0, 0) = I, \quad (4.4)$$

et que ces transformations transforment les produits en sommes³

$$\begin{cases} Q_1(x_1, \alpha_1) \times Q_1(x_2, \alpha_2) = Q_1(x_1 + x_2, \alpha_1 + \alpha_2) \\ Q_3(z_1, \gamma_1) \times Q_3(z_2, \gamma_2) = Q_3(z_1 + z_2, \gamma_1 + \gamma_2) \end{cases}. \quad (4.5)$$

Dans la suite, les matrices Q_1 et Q_3 seront respectivement désignées par X et Z . Les matrices de transformation X associées aux arcs seront indicées avec l'index de l'arc correspondant. Les matrices de transformation Z associées aux liaisons seront indicées avec l'index du nœud, l'index du couple d'arcs considéré au sein de cette liaison et l'index de la progression dans l'objectif le cas échéant.

En s'appuyant sur le graphe partiel de la figure 4.1 et de la représentation des trièdres associés présentés à la figure 4.2b, il est possible d'exprimer toutes les transformations pour passer de n'importe quel trièdre à n'importe quel autre. Le tableau 4.6 donne l'expression de ces matrices qui permettent de passer du trièdre identifié dans la première colonne au trièdre identifié dans la première ligne.

³Ces transformations sont bijectives, elles sont donc des isomorphismes de groupes.

	1	2	3	4
1	I	Z_1	$Z_1 X_2$	$Z_1 X_2 Z_3$
2	Z_1^{-1}	I	X_2	$X_2 Z_3$
3	$X_2^{-1} Z_1^{-1}$	X_2^{-1}	I	Z_3
4	$Z_3^{-1} X_2^{-1} Z_1^{-1}$	$Z_3^{-1} X_2^{-1}$	Z_3^{-1}	I

TAB. 4.6 : Toutes les transformations associées à l'extrait de graphe de la figure 4.1.

La génération du système d'équations consiste à assembler en un seul système S des sous-ensembles de systèmes d'équations S_i et respectivement S_j générés pour chaque boucle i et respectivement chaque contrainte j . La figure 4.4 illustre cette démarche et met en évidence l'indépendance de la génération des sous-ensembles de systèmes d'équations.

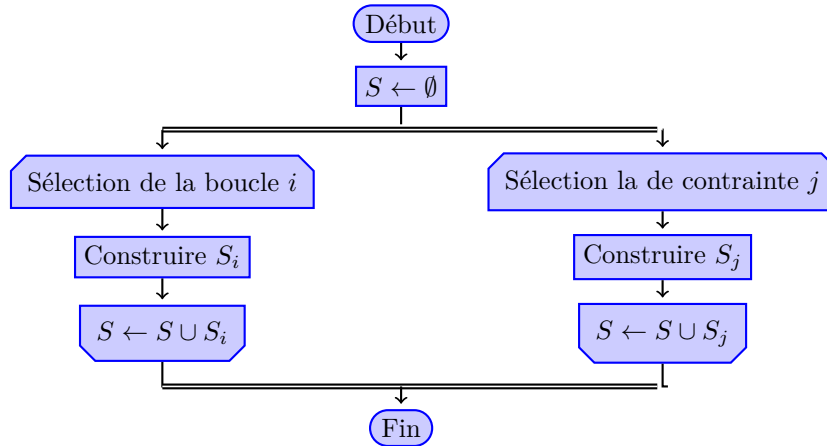


FIG. 4.4 : Génération du système d'équations.

4.3.1 Les équations de boucles

Les équations générées d'après ce modèle sont principalement issues de l'expression des boucles topologiques présentes dans la description du mécanisme. S'il y a un objectif (donc au moins deux positions), il y a au moins une boucle. En effet, ces deux positions sont reliées par deux branches : l'une virtuelle définissant leur position relative et l'autre empruntant les éléments du mécanisme.

Pour écrire les équations issues de ces boucles, il faut sélectionner autant de chemins indépendants (manière de passer d'éléments en éléments pour revenir à celui de départ) qu'il y a de boucles indépendantes dans le graphe. Le chapitre précédent détaille la sélection des boucles. Il faut ensuite composer, dans l'ordre obtenu par les chemins et en respectant les orientations, les transformations définies par les pièces ou les liaisons. La composition de ces transformations correspond au produit matriciel des matrices associées.

La transformation équivalente à une boucle est l'identité ; il faut donc évaluer la transformation équivalente Q obtenue avec la matrice identité 4×4 :

$$Q = I. \quad (4.6)$$

Cette procédure est résumée dans l'algorithme⁴ 4.5. L'équation 4.6 représente 16 équations, cependant toutes ne sont pas utiles ou indépendantes.

Par construction, la dernière ligne de la matrice de transformation équivalente à une boucle est toujours $[0 \ 0 \ 0 \ 1]$. Elle coïncide donc toujours avec la dernière ligne d'une matrice identité 4×4 . La dernière colonne représente, elle, la translation nulle de l'espace. Ce sont donc trois équations indépendantes et nécessaires dans le cas d'un espace tridimensionnel. Dans un espace bidimensionnel, les mécanismes plans ne nécessitent que la première valeur. La dernière partie, la sous-matrice 3×3 , représente la rotation nulle de l'espace (matrice identité 3×3). Elle comporte 9 équations, mais elle peut être réduite à seulement trois équations indépendantes. En effet, tous les trièdres considérés étant orthonormés et directs, pour faire coïncider l'orientation de deux trièdres, il suffit de faire coïncider deux directions de ces trièdres. Dans un espace bidimensionnel, seulement deux équations sont nécessaires.

À titre d'exemple, le mécanisme de Bennett présente deux boucles indépendantes (figure 3.8). La première boucle retenue est présentée à la figure 4.6. Cette boucle correspond à la fermeture topologique du mécanisme. Les indices utilisés par les matrices font référence aux tableaux 3.4 et 3.5. Elle est traduite en appliquant l'algorithme donné à la figure 4.5 par l'équation :

$$Z_{1,1,i}^{-1} X_1 Z_{2,1,i} X_3 Z_{4,1,i} X_4^{-1} Z_{3,1,i}^{-1} X_2^{-1} = I. \quad (4.7)$$

La deuxième boucle retenue est présentée à la figure 4.7. Cette boucle correspond à la description de la tâche à accomplir. La présence de la position A et respectivement B se justifie par l'absence de lien direct entre les arcs 5 et 7 sur le nœud 5 et respectivement entre les arcs 6 et 10 sur le nœud 6 (voir tableaux 3.4 et 3.5). Il faut nécessairement passer par les nœuds A et B . Elle est traduite par l'équation :

$$Z_{1,2} X_5 Z_{5,1} X_7 X_7^{-1} Z_{5,2} X_9 Z_{7,1,i} X_{10}^{-1} Z_{6,2,i}^{-1} X_8^{-1} X_8 Z_{6,1}^{-1} X_6^{-1} Z_{3,2}^{-1} Z_{3,1}^{-1} X_2^{-1} Z_{1,1,i}^{-1} = I.$$

Les transformations nulles, correspondant à des matrices identités, sont simplifiées tout comme les successions de terme et de son inverse $Q Q^{-1}$

$$Z_{1,2} X_5 Z_{5,1} Z_{5,2} X_9 Z_{7,1,i} X_{10}^{-1} Z_{6,2,i}^{-1} Z_{6,1}^{-1} X_6^{-1} Z_{3,2}^{-1} Z_{3,1}^{-1} X_2^{-1} Z_{1,1,i}^{-1} = I,$$

de même, les termes connus consécutifs sont simplifiés et remplacés par P_i

$$Z_{1,2} X_5 Z_{5,1} P_i Z_{6,1}^{-1} X_6^{-1} Z_{3,2}^{-1} Z_{3,1}^{-1} X_2^{-1} Z_{1,1,i}^{-1} = I. \quad (4.8)$$

⁴ *Algorithme* ou *organigramme de programmation* est un néologisme qui désigne un schéma normalisé (norme ISO 5807) représentant un algorithme présenté en 1969 par IBM [58]. Dans la mesure du possible, les algorithmes présentés se conformeront à ces spécifications.

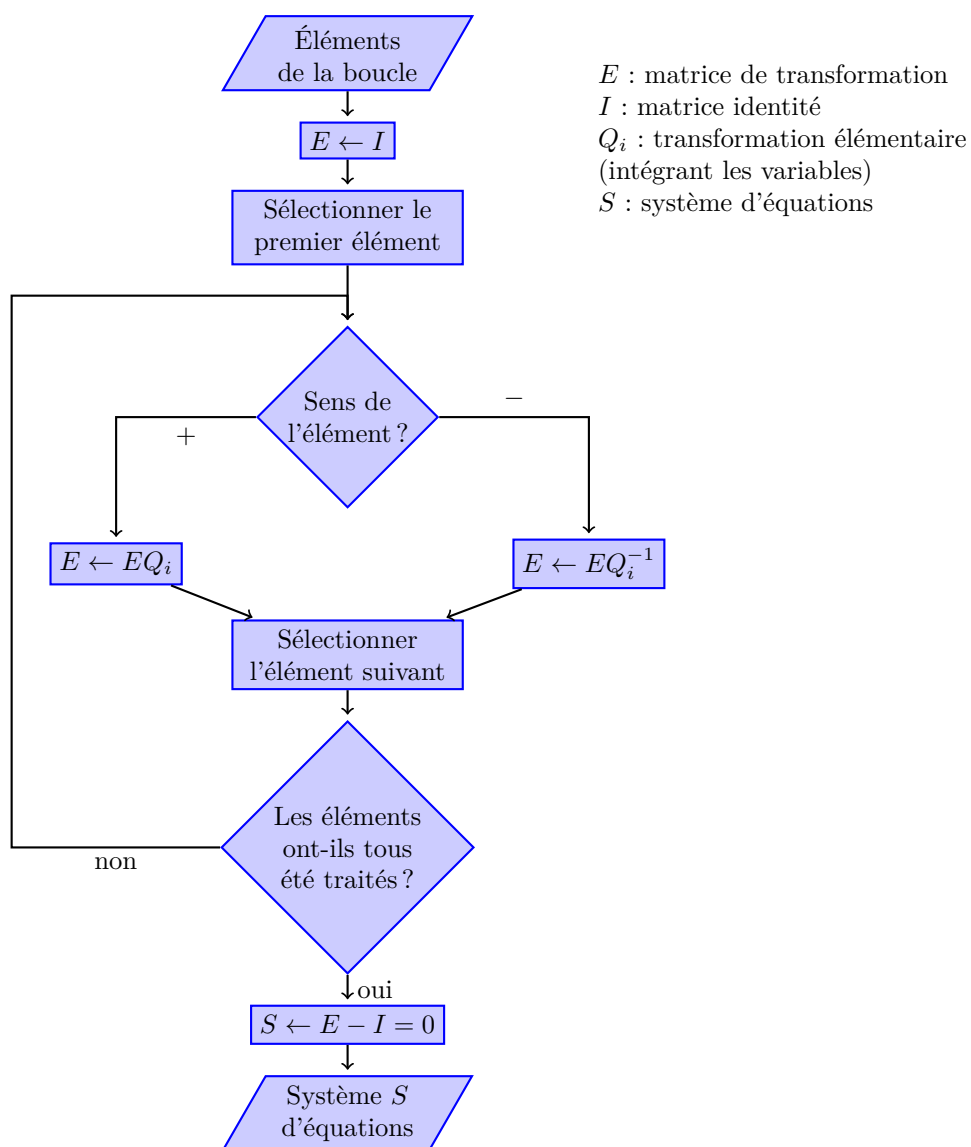


FIG. 4.5 : Génération des équations pour une boucle.

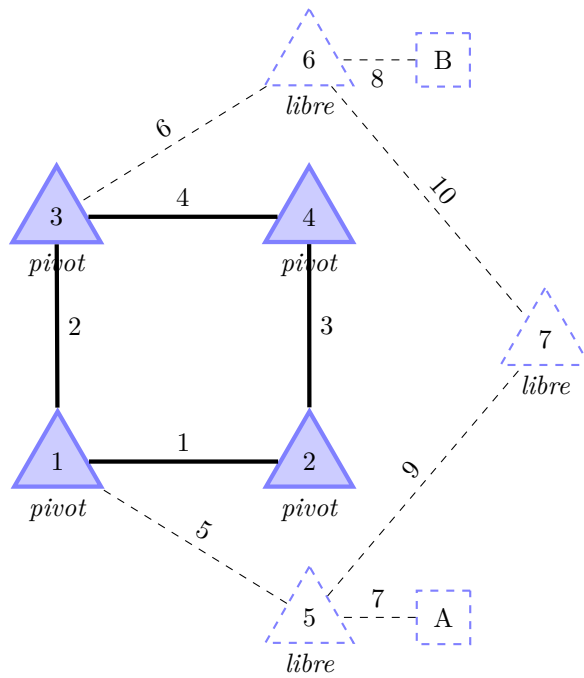


FIG. 4.6 : Mécanisme de Bennett : première boucle.

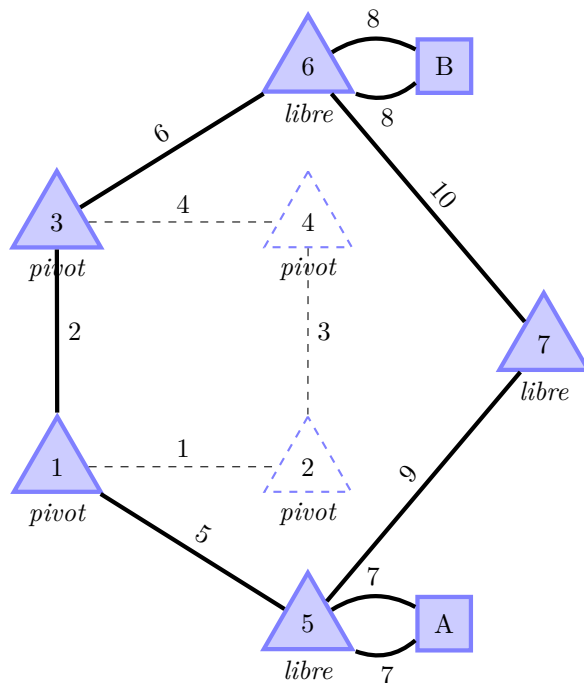


FIG. 4.7 : Mécanisme de Bennett : deuxième boucle.

Les équations 4.7 et 4.8 des deux boucles font donc intervenir des paramètres, des variables géométriques et des variables cinématiques. Dans l'écriture ci-dessous, les couleurs représentent les différents types de variables identifiés :

$$\begin{cases} Z_{1,1,i}^{-1} X_1 Z_{2,1,i} X_3 Z_{4,1,i} X_4^{-1} Z_{3,1,i}^{-1} X_2^{-1} = I \\ Z_{1,2} X_5 Z_{5,1} P_i Z_{6,1}^{-1} X_6^{-1} Z_{3,2}^{-1} Z_{3,1,i}^{-1} X_2^{-1} Z_{1,1,i}^{-1} = I \end{cases} \cdot$$

4.3.2 Les autres équations

Les autres types de contraintes sont traités de deux manières différentes suivant les cas. La contrainte peut n'influencer qu'une seule variable en lui imposant un domaine restreint ou en liant sa valeur à une variable externe à l'ensemble des variables présentées précédemment. Elle peut aussi relier deux variables de cet ensemble. Dans ce cas, un chemin entre les deux éléments, nœud ou arc, associés aux variables en question est identifié afin d'écrire la transformation équivalente qui permet de passer d'un de ces deux éléments à l'autre. Le chemin retenu est actuellement le plus court chemin entre les deux éléments. Des heuristiques plus complexes pourraient aussi être envisagées.

Une fois cette matrice de transformation équivalente obtenue, suivant la nature de la contrainte, certains de ses éléments sont imposés. Par exemple, la dernière colonne de cette matrice permet d'imposer une distance entre deux points, les trois premières colonnes peuvent individuellement imposer un parallélisme.

La méthode de génération des équations associées aux contraintes est résumée dans l'algorithme représenté à la figure 4.8.

Cas des mécanismes plans

Dans le cas du mécanisme à quatre barres plan, la planéité du mécanisme impose que toutes les liaisons pivots soient orthogonales à un même plan. Ce qui se traduit par les relations suivantes :

$$\forall i \in \{1, 2, 3, 4\}, \forall k \in \{1, 2, 3\}, X_{i|k,3} = (0, 0, 1)_{|k} \quad (4.9)$$

Sachant que

$$\forall i \in \{1, 2, 3, 4\}, \forall k \in \{1, 2, 3\}, X_{i|k,3} = (0, -\sin \alpha_i, \cos \alpha_i)_{|k},$$

les relations 4.9 peuvent très facilement se simplifier en

$$\forall i \in \{1, 2, 3, 4\}, \alpha_i = 0. \quad (4.10)$$

4.3.3 Nombre d'équations à générer

Pour tous les chemins intervenant dans la génération d'une équation (pour une boucle ou une contrainte), il faut vérifier si une des variables intervenant est dépendante du temps. Si c'est le cas, il faut générer les équations pour chaque pas de temps $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ (où n est le nombre de positions spécifiées différentes) où les variables cinétiques seront indicées avec i .

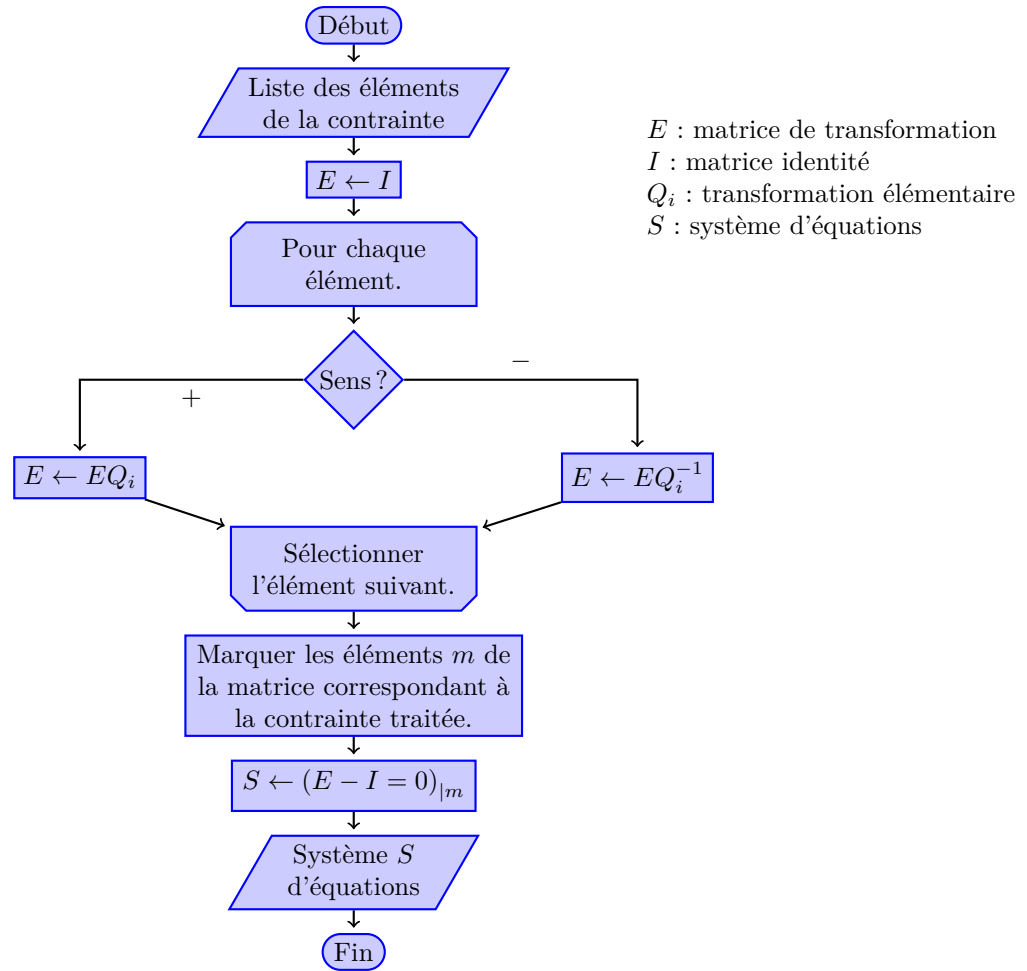


FIG. 4.8 : Génération des équations pour une contrainte.

4.4 Caractéristiques du système d'équations

Après avoir décrit la manière d'obtenir individuellement les équations, nous nous intéressons maintenant au système d'équations ainsi obtenu. Nous nous concentrons plus particulièrement sur ses dimensions, sa structure et les motifs qui peuvent y apparaître.

4.4.1 Dimension du système d'équations

En se limitant aux équations issues des boucles topologiques définies par le modèle, le nombre d'équations dépendra du nombre de boucles indépendantes et du nombre d'instantes qui découpe le temps. Dans ces conditions optimales, le nombre d'équations est donné par

$$n_b \times n_p \times (3 + 3), \quad (4.11)$$

où n_b représente le nombre de boucles et n_p le nombre d'instants (positions du mécanisme). Pour chacun de ces cas, nous obtenons six équations : trois pour la position et trois pour l'orientation.

Pour les contraintes, le nombre d'équations dépend de deux éléments : l'intervention d'éléments dépendants du temps ou pas dans la contrainte et le nombre d'éléments de la matrice de transformation homogène impactés par la contrainte. Le nombre d'équations découlant des autres contraintes est donné par

$$\sum_k^i n_{e,k} + \sum_k^j n_p \times n_{e,k}, \quad (4.12)$$

où $n_{e,k}$ représente le nombre d'éléments de la matrice de transformation homogène impactés par la contrainte k et les indices i et j respectivement les nombres de contraintes indépendantes de la position et respectivement dépendantes de la position.

4.4.2 Paramétrage du systèmes d'équations

Nous avons identifié quatre types de variables (paragraphe 4.2.3) et nous avons vu comment générer les équations pour une position particulière. Nous avons aussi vu que pour les autres positions les équations étaient les mêmes, seules les valeurs de certains paramètres et les indices des variables cinématiques changeaient. Au final, le système d'équations peut prendre la forme

$$\forall i \in \llbracket 1, n_p \rrbracket, F(P_i, X, Y_i) = 0, \quad (4.13)$$

où P_i représente les valeurs des paramètres pour la position i , X les variables géométriques et Y_i les variables cinématiques pour la position i .

En suivant la remarque faite au 4.2.3 sur la *variation* des variables cinématiques, le système d'équations peut alors être appréhendé sous la forme

$$\begin{cases} F(P_1, X, Y_1) = 0 \\ \forall i \in \llbracket 2, n_p \rrbracket, F(P_i, X, Y_1 + dY_i) = 0 \end{cases}, \quad (4.14)$$

où dY_i représente la variation des valeurs des variables cinématiques entre la première position et la position i .

D'autre part, il est aussi possible de différencier deux genres d'équations : celles qui correspondent à des contraintes devant être rigoureusement respectées G (H pour des inéquations) et celles correspondant à l'objectif du mécanisme F (nous gardons la même désignation que ci-dessus mais pour représenter seulement les objectifs). Le système 4.13 se découpe donc en trois sous-systèmes

$$\forall i \in \llbracket 1, n_p \rrbracket, \begin{cases} F(P_i, X, Y_i) = 0 \\ G(P_i, X, Y_i) = 0 \\ H(P_i, X, Y_i) \geq 0 \end{cases}. \quad (4.15)$$

Cette forme permettra de traiter les contraintes indépendamment de l'objectif du mécanisme. Lors de la résolution (chapitre 5), les systèmes d'équations $F(P_i, X, Y_i) = 0$ sont remplacés par l'expression $\min \|F(P_i, X, Y_i)\|$.

4.4.3 Nature des équations

Pour l'écriture des équations, nous nous sommes contentés jusqu'ici de leur forme matricielle. Mais celles-ci seront ensuite décomposées suivant les composantes des matrices pour être traitées. C'est sous cette dernière forme que peuvent être étudiées les caractéristiques des équations.

Avec cette mise en équations, les systèmes d'équations font intervenir des expressions de type polynomial dont le degré maximum est de l'ordre du nombre de transformations intervenant dans le chemin considéré. Les termes de ces polynômes sont composés des variables représentant les longueurs et les sinus ou cosinus des variables représentant les angles. Dans chaque terme, une variable n'intervient qu'une seule fois au maximum, *i.e.* les polynômes sont toujours, au plus, linéaires par rapport aux variables représentant des longueurs et par rapport aux sinus ou cosinus des variables représentant des angles.

Il est, de plus, intéressant de constater que les formes développées des équations matricielles obtenues avec cette méthode sont très proches de celles obtenues par Perez dans sa thèse [113] en utilisant, non pas des matrices de transformations homogènes, mais des quaternions duaux.

4.5 Conclusion

La méthode proposée pour générer les équations associe dans un premier temps des variables au modèle représentant le problème de synthèse dimensionnelle à traiter. Nous pouvons remarquer que les variables choisies sont intrinsèques au mécanisme : elles représentent soit les dimensions géométriques fonctionnelles des pièces soit les paramètres cinématiques des liaisons. Elles sont donc indépendantes de tout repère, contrairement aux coordonnées cartésiennes souvent utilisées pour générer les équations. Par ailleurs, on peut aussi noter que les variables choisies sont susceptibles d'être directement liées aux contraintes spécifiées par l'utilisateur rendant la mise en équation plus simple. Nous avons montré qu'il était possible de générer automatiquement un système d'équations traduisant le problème de synthèse dimensionnelle en s'appuyant essentiellement sur les boucles apparaissant lors de la déclaration topologique du mécanisme et des spécifications des positions et des orientations à atteindre.

Un dernier point important à souligner est que les systèmes d'équations obtenus pour des problèmes de synthèse dimensionnelle dont les spécifications topologiques sont identiques et dont les objectifs n'ont subi qu'une similitude⁵ seront identiques. Cela signifie que pour une classe de problèmes donnée nous aurons toujours les mêmes solutions en employant le même algorithme de résolution et les mêmes conditions initiales. Le chapitre suivant présentera la stratégie de résolution retenue pour résoudre, le plus efficacement possible, les systèmes d'équations ainsi générés.

⁵Une similitude est une transformation qui, à toute figure, fait correspondre une figure semblable, c'est-à-dire de même forme.

Chapitre 5

Résolution

5.1 Introduction

Au chapitre [précédent](#), nous avons proposé une formulation des problèmes de synthèse dimensionnelle de mécanismes sous la forme d'un système d'équations (ou d'inéquations) à partir de la connaissance des données du modèle. La forme générale du système d'équations et d'inéquations obtenu est

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \left\{ \begin{array}{l} \min \|F(P_i, X, Y_i)\| \\ G(P_i, X, Y_i) = 0 \\ H(P_i, X, Y_i) \geq 0 \end{array} \right. , \quad (5.1)$$

où $(P_i, X, Y_i) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^m$ et $(F, G, H) \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^{p+r+m}, \mathbb{R}^q)$. Au sein de ce système d'équations et d'inéquations, le sous-système F représente la tâche à effectuer par le mécanisme (ou l'objectif de celui-ci) et les sous-systèmes G et H représentent les contraintes appliquées à ce mécanisme. Il est important de remarquer que ces derniers doivent être rigoureusement suivis alors que le premier n'est qu'une consigne à suivre. Pour bien comprendre le problème à résoudre, il faut préciser la signification des différentes constantes dimensionnant le problème :

- n : nombre de points définissant l'objectif (*precision points* en anglais) ;
- p : nombre de paramètres décrivant la configuration du mécanisme ;
- r : nombre de variables géométriques associées au mécanisme ;
- m : nombre de variables cinématiques associées au mécanisme ;
- q : *dimension* de l'espace de travail intégrant la dimension de l'espace géométrique, le formalisme de représentation de celui-ci et le nombre d'équations nécessaires à l'expression des objectifs et des contraintes.

Nous cherchons donc X et $Y = \{Y_i, i \in \llbracket 1, n \rrbracket\}$ annulant la fonction F^1 ou, au moins, minimisant sa valeur (X et Y tels que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \|F_i(P_i, X, Y_i)\|$ soit minimum).

Rappelons que les expressions mises en œuvre dans le cas particulier qui nous intéresse de synthèse dimensionnelle de mécanismes sont des polynômes

¹En informatique les nombres réels sont représentés par des nombres à virgule flottante et avec une précision définie. L'égalité de deux nombres x et y de ce type ne présente généralement pas de sens ; elle sera systématiquement remplacée par l'inégalité $|x - y| \leq \epsilon$ avec $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ aussi petit que nécessaire ou que possible.

linéaires par rapport à chacune de leurs variables en considérant les sinus et les cosinus des angles comme des variables. Cependant, malgré l'apparente simplicité de ces expressions, les dimensions du système et les méthodes de résolution actuellement connues (voir 1.5.2) ne permettent pas de résoudre facilement ce problème. La mise en place d'une résolution faisant appel à plusieurs méthodes semble donc nécessaire.

5.2 Stratégie de résolution

Comme nous l'avons mentionné dans le chapitre 1 consacré à l'état de l'art, il n'existe pas de méthode de résolution générale permettant de résoudre efficacement tout système d'équations. La stratégie de résolution que nous proposons combine une série de méthodes permettant de décomposer et de simplifier formellement le problème et des méthodes d'optimisation globale puis locale. Les premières étapes vont nous permettre de réduire les dimensions des systèmes à résoudre et de gérer les inégalités. L'utilisation de méthodes d'optimisation globale vont ensuite permettre d'approcher des solutions du système qui seront, à leur tour, utilisées par des méthodes d'optimisation locale. L'agencement de ces différentes méthodes a pour but, d'une part, de rendre l'approche robuste et performante et, d'autre part, d'obtenir une ou plusieurs solutions à ce système d'équations et d'inéquations dans un temps raisonnable.

Le schéma général de notre stratégie de résolution peut être résumé de la façon suivante :

1. décomposition du système d'équations,
2. réduction de l'espace de recherche des solutions,
3. simplification du système d'équations,
4. découpage de l'espace de recherche des solutions,
5. optimisation globale,
6. optimisation locale.

La figure 5.1 présente une vue simplifiée de la stratégie mise en œuvre lors de la minimisation d'un système d'équation. Elle met en évidence les étapes qui modifient le système d'équations à considérer. Par exemple, on peut constater que la réduction et le découpage du domaine de définition des variables peuvent donner lieu à plusieurs processus de simplifications et de résolutions formelles. On remarque également que ces étapes peuvent aussi ouvrir la voie à plusieurs processus d'optimisation. En effet, la résolution de l'équation $x^2 = 1$ entraînera les deux valeurs -1 et $+1$ pour la variable x . On pourra alors considérer deux systèmes d'équations distincts.

Il est important de noter que le processus d'optimisation proprement dit (optimisation globale et locale), détaillé au paragraphe 5.6.3, participe également, au même titre que les étapes précédentes, à l'obtention de plusieurs solutions à un système d'équations.

Remarquons enfin que les systèmes d'équations générés lors de la phase de mise en équations sont dans un premier temps traités pour ne plus être sécables. Ceci est réalisé par une phase de décomposition du système d'équations.

Pour faciliter la lecture de la figure 5.1, nous avons volontairement omis la récursivité de la stratégie retenue. Cependant, il est clair que, à chaque fois que la structure d'un système d'équations est modifiée, il est nécessaire de relancer l'ensemble des étapes ci-dessus. Le processus sera donc terminé lorsque le système n'est plus impacté par aucune étape ou lorsque chaque variable est évaluée.

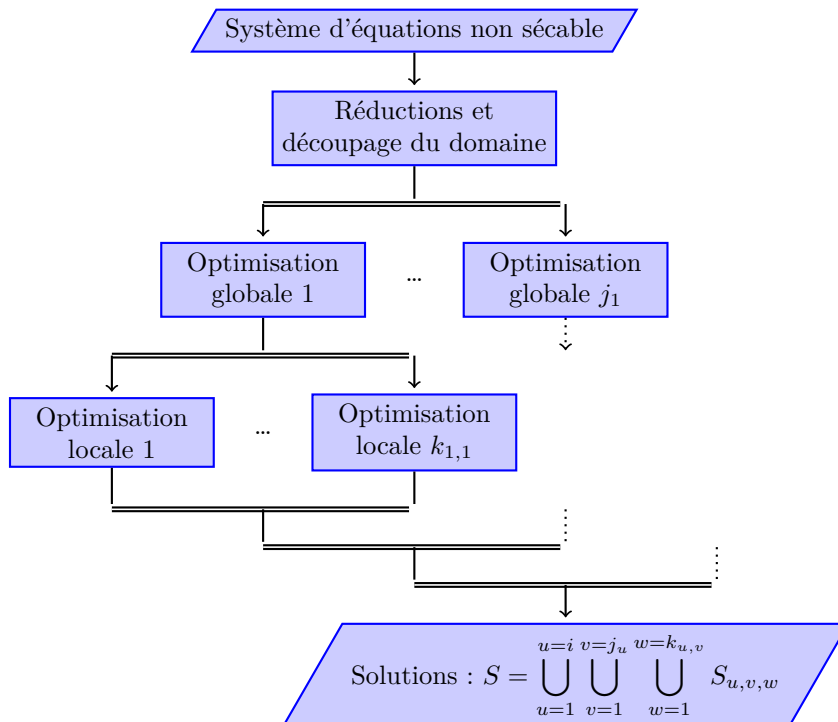


FIG. 5.1 : Stratégie générale d'optimisation numérique

5.3 Décomposition du système d'équations

La complexité de la résolution d'un problème dépend généralement de manière exponentielle de sa taille (nombre d'équations et de variables). La conséquence de ceci est qu'il est souvent plus facile de résoudre plusieurs problèmes de tailles inférieures que de résoudre un seul problème de grande taille. Il est donc intéressant de chercher des sous-systèmes d'équations indépendants dans un ensemble plus vaste afin de les résoudre de manière indépendante. Dans un premier temps, ceci passe généralement par la détermination de parties connexes dans le graphe liant les variables et les équations.

Les méthodes de décomposition peuvent être purement formelles et se baser exclusivement sur la structure du système d'équations [36, 70]. Des algorithmes

basés sur la structure des classes permettent alors d'identifier les systèmes sous-contraints, iso-contraints et sur-contraints structurellement. Cette technique est couramment utilisée, par exemple, pour la résolution de problèmes géométriques et d'ingénierie modélisés par contraintes [133, 2, 71, 79, 61]. La décomposition peut aussi se baser sur une analyse du système mécanique pour identifier des parties indépendantes ou localement iso-contraintes qui pourront être résolues à part.

Cependant l'utilisation de ces méthodes est limitée dans le cadre des problèmes de synthèse dimensionnelle de mécanismes car ceux-ci sont généralement sur-contraints et les systèmes d'équations les représentant ne sont donc pas décomposables.

5.4 Réduction de l'espace de recherche

Dans le cas d'une résolution numérique et non d'une optimisation, les méthodes basées sur la réduction d'intervalles utilisées pour réduire le domaine de recherche ne peuvent pas convenir, du moins en l'état. En effet, elles ne peuvent appréhender les systèmes non cohérents qu'en réduisant finalement tous les intervalles de définition des variables à des intervalles vides.

Il est important de noter que si les problèmes issus de la synthèse dimensionnelle de mécanismes sont très souvent sur-contraints, ils sont surtout souvent incohérents au sens des spécifications. Par analogie, cela revient à chercher la droite (d) qui passe par trois points P_1 , P_2 et P_3 non alignés (imprécision numérique ou réellement non alignés). On cherche alors la *meilleure* droite qui réponde à ce problème (au sens des moindres carrés à la figure 5.2) car il n'existe pas de droite satisfaisant ces contraintes.

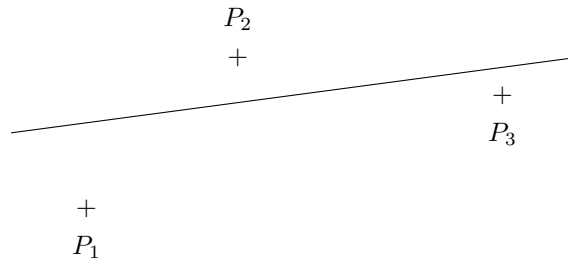


FIG. 5.2 : Régression linéaire de trois points non alignés.

Deux approches peuvent cependant nous permettre d'utiliser les méthodes basées sur la réduction d'intervalles dans le cadre de la synthèse dimensionnelle de mécanismes. Nous avons vu que le système d'équations et d'inéquations se décomposait logiquement en deux sous-systèmes : le premier correspondant à la tâche à effectuer F et le second aux contraintes G et H . La tâche peut être exprimée soit par $F = 0$ soit par $\min \|F\|$. Pour pouvoir appliquer une méthode de réduction d'intervalles sur les équations décrivant la tâche, la première approche nécessite d'exprimer cette tâche sous la forme $F \in [-e ; +e]^q$ où $e \in \mathbb{R}^+$

(figure 5.3 où $F = [d(P_1, (d)), d(P_2, (d)), d(P_3, (d))]$). La valeur retenue pour l'écart e doit permettre de réduire le domaine de recherche des solutions sans pour autant compromettre leur existence.

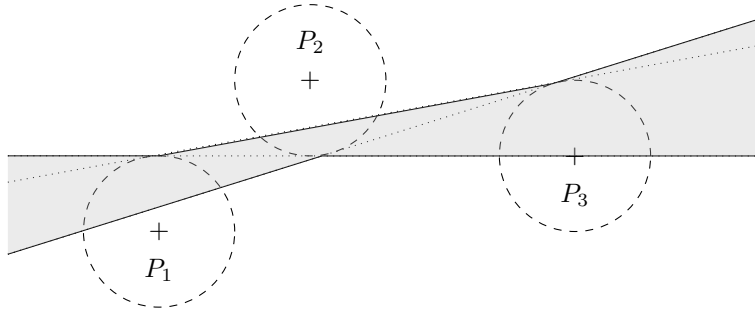


FIG. 5.3 : Écarts sur les objectifs ($e = 0, 5$).

La seconde approche consiste à substituer la valeur des paramètres par un intervalle centré sur leur valeur. Autrement dit, cela revient à remplacer $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket, P_{i,j} = v_{i,j}$ par $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket, P_{i,j} \in [v_{i,j} - e ; v_{i,j} + e]$ avec toujours $e \in \mathbb{R}^+$ (figure 5.4). Là encore, la valeur retenue pour l'écart e doit permettre de réduire le domaine de recherche des solutions sans pour autant compromettre leur existence.

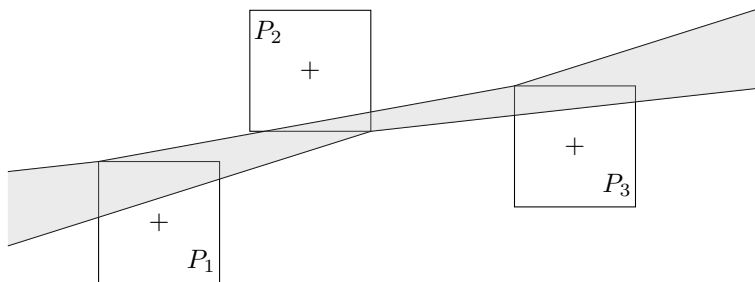


FIG. 5.4 : Écarts sur les paramètres ($e = 0, 4$).

D'un point de vue pratique, la déclaration des points de passage lors de la déclaration de la tâche dans un problème de synthèse dimensionnelle de mécanismes, peut s'effectuer grâce à un couple constitué d'un point et d'une tolérance. Les deux informations présentes dans ces couples sont facilement transposables dans la première approche présentée pour pouvoir appliquer les méthodes de réduction d'intervalles. En effet, le point spécifié est directement utilisé dans l'expression qui décrit l'objectif et la tolérance est directement celle retenue pour cette expression. Avec la deuxième approche, au contraire, la spécification de l'utilisateur doit être transformée : passage d'un point et d'une tolérance à un domaine de l'espace aligné avec des axes particuliers de l'espace ce qui représente une contrainte supplémentaire artificielle. Afin de pouvoir utiliser les méthodes de réduction d'intervalles, nous avons donc retenu la première approche.

En tenant compte des relations qui lient les variables entre elles, il est également possible de réduire le domaine de définition des variables (grâce à l'arithmétique des intervalles). Par exemple, pour deux variables réelles x et y (domaine de recherche \mathbb{R}^2), si une contrainte impose $x^2 + y^2 = 1$, le domaine de recherche pourra être réduit à $[-1 ; +1]^2 \subset \mathbb{R}^2$. Même si ce genre de traitement ne nous permet pas de déterminer les valeurs des variables impliquées, la réduction du domaine de définition facilite la tâche des méthodes numériques de résolution et d'optimisation.

5.5 Traitements formels

Étant donné la forme des équations générées, nous avons aussi décidé d'effectuer quelques traitements formels simples permettant de réduire le nombre d'équations et de variables, mais aussi d'en simplifier les expressions. Par exemple, il est important de détecter tous les termes nuls dans les sommes et les produits ainsi que les termes unitaires dans les produits afin de réduire la taille des expressions. Ce traitement peut souvent conduire, notamment dans le cas de problèmes plans, à la disparition pure et simple d'équations.

De même, une analyse détaillée des systèmes d'équations générés nous a incité à effectuer des substitutions particulières et des factorisations. Parmi les expressions souvent rencontrées, nous pouvons en citer trois qui reviennent très souvent de par la méthode de construction des systèmes d'équations retenue. La première expression est de la forme $a \cos \alpha + b \sin \alpha$ qui peut être remplacée par une fonction $u(\alpha)$. Les deux autres expressions sont celles du type $\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$ et $\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$ (succession de transformations autour d'un même axe) qui sont remplacées efficacement par respectivement $\cos(\alpha + \beta)$ et $\sin(\alpha + \beta)$. Ces transformations peuvent se révéler particulièrement intéressantes pour améliorer les performances et augmenter la robustesse. En effet, elles ne modifient pas la nature du problème à traiter mais réduisent significativement le coût de l'évaluation du système d'équations.

Notons également que la résolution d'équations linéaires ou quadratiques à une variable a aussi été envisagée même si les cas où ce type de traitement peut s'appliquer restent rare. Si les équations quadratiques admettent deux solutions alors il est nécessaire de considérer les deux sous-systèmes résultants. On peut alors considérer que cela augmente la complexité de la résolution ou au contraire, voir cette approche comme un mécanisme supplémentaire pour trouver plusieurs solutions à un problème donné.

En étudiant l'ensemble des équations, il peut être aussi possible de réduire leur nombre ou de simplifier leur expression. Par exemple, pour les deux variables réelles positives x et y auxquelles sont associées les deux contraintes $x^2 + y^2 = 1$ et $y > x$, il est possible de simplement définir les deux variables x et y sur $\left[0 ; \frac{\sqrt{2}}{2} \left[\times \right] \frac{\sqrt{2}}{2} ; 1 \right]$ associées à l'unique contrainte $x^2 + y^2 = 1$. Il est alors possible de n'utiliser qu'une seule variable $\alpha \in \left] \frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{2} \right]$ et de définir x et y tels que $x = \cos \alpha$ et $y = \sin \alpha$. La suppression de ces contraintes et inégalités se révèle même parfois nécessaire car de nombreuses méthodes de minimisation ne sont pas capables de traiter des inégalités.

5.6 Méthodes d'optimisation

Les phases précédentes peuvent être considérées comme des étapes de préparation du système d'équations. Leur but est de rendre la résolution par des méthodes d'optimisation globale et locale plus robuste et performante.

Bien que l'objectif soit de trouver des minima globaux, notre approche repose sur l'utilisation de méthodes d'optimisation globales mais aussi locales. En effet, les méthodes globales sont généralement bien adaptées pour trouver une approximation des minima sur un large domaine mais elles convergent relativement lentement vers les valeurs précises des minima. Au contraire, les méthodes locales convergent relativement vite lorsque l'espace de recherche est restreint. De plus, les méthodes globales peuvent, sous certaines conditions, amener à proposer plusieurs minima, alors que les méthodes locales sont souvent restreintes à un seul minimum.

Dans le cas de la synthèse dimensionnelle de mécanismes, la démarche est explicitement de trouver un ensemble d'optima *satisfaisants*. La méthode d'optimisation doit donc trouver l'ensemble de solutions de bonne qualité, sous réserve de la définition d'un critère de cette *bonne qualité*. Les méthodes qui ne se limitent pas nécessairement au seul optimum, mais cherchent un ensemble d'optima, sont qualifiées de *méthodes multimodales*. Ce sont particulièrement ces méthodes qui nous intéressent.

En prenant en considération les différents éléments précédents, il est possible d'établir une liste de méthodes d'optimisation susceptibles de traiter les problèmes de synthèse dimensionnelle de mécanismes. Parmi celles-ci (figure 5.5), certaines sont couramment utilisées dans ce domaine (recherches locales, algorithmes génétiques [118, 122, 29, 44]), d'autres de façon plus sporadique (recuit simulé [92], recherche tabous [138]). D'autres n'ont pas encore fait l'objet de publication sur leur utilisation dans ce domaine précis (cf. 1.5.2).

Dans notre cas, nous avons retenu la méthode d'optimisation par essaims de particules² (OEP [64, 27, 1]) comme méthode d'optimisation globale. La méthode OEP est une méthode d'optimisation globale qui n'est pas dépendante des conditions initiales³ et qui explore efficacement le domaine considéré. De plus, elle ne nécessite pas le calcul de la matrice jacobienne du système ce qui rend sa mise en œuvre très facile. Enfin, cette méthode peut, grâce à quelques adaptations, fournir un nombre déterminé de minima. Ce sont ces caractéristiques et la possibilité d'exploiter la programmation parallèle qui nous ont poussés à la retenir comme méthode d'optimisation globale du processus de résolution.

La méthode OEP est utilisée, dans un premier temps, pour obtenir une première approximation, éventuellement grossière, des valeurs d'un nombre déterminé de minima. Les valeurs ainsi obtenues permettent ensuite de définir des voisinages centrés autour de ces valeurs qui servent d'espaces de recherche à des méthodes locales. Deux familles de méthodes d'optimisation locales sont alors

²En anglais *Particle Swarm Optimisation*, PSO

³toutefois celles-ci peuvent être utilisées pour orienter la recherche dans des variantes de la méthode.

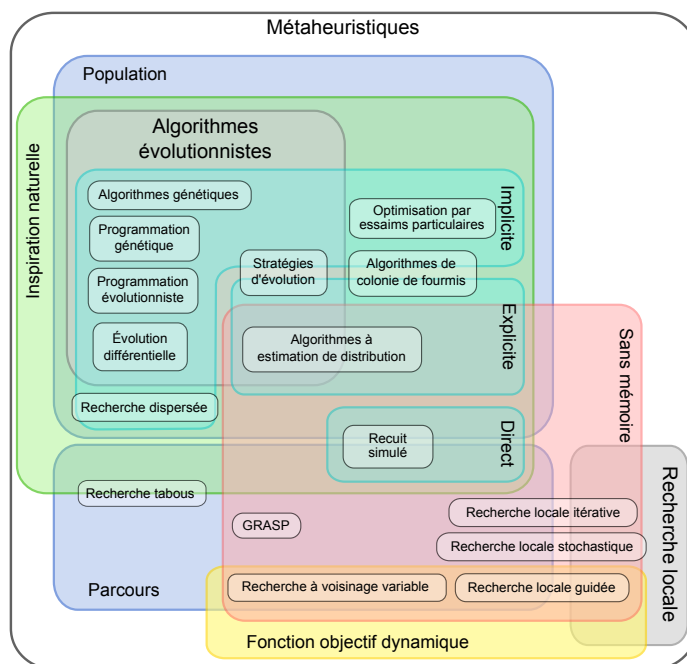


FIG. 5.5 : Classification de quelques méthodes d'optimisation métaheuristiques.

successivement employées. La première est basée sur la méthode de Nelder-Mead (NM [101]). Cette méthode, tout comme celle basée sur l'OEP, ne nécessite pas de calculer la matrice jacobienne du système d'équations et elle est peu sensible aux conditions initiales. Ensuite, sont utilisées des méthodes basées sur l'approche de Newton. Ces méthodes convergent relativement vite lorsque les conditions initiales sont satisfaisantes.

5.6.1 Optimisation par essaims de particules

Le modèle de base de l'OEP [64] s'inspire très librement des échanges d'informations entre les abeilles d'une ruche. L'idée principale est de suivre l'évolution au cours du temps d'une population (essaim de particules dans le cas de l'OEP). Les particules sont choisies de manière aléatoire dans le domaine de recherche et une vitesse de déplacement leur est associée. Chaque particule combine alors linéairement trois éléments pour décider de son prochain mouvement : la meilleure position qu'elle a trouvée jusqu'ici, la meilleure position trouvée par ses informatrices et sa vitesse actuelle.

Les n particules de cette méthode sont autant de points X_i de l'espace de recherche à d dimensions.

Dans la suite, la fonction $a : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sera la fonction aléatoire⁴ uniforme

⁴La réalisation concrète de fonctions approchant correctement une fonction aléatoire n'est pas triviale. Deux mises en œuvre sont à signaler, celle de Park Miller [109] et celle de George

sur l'intervalle réel donné en argument. Au démarrage, les particules sont uniformément⁵ réparties dans l'espace de recherche, tel que

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall j \in \llbracket 1, d \rrbracket, X_{i,j} = a([x_{j,min}, x_{j,max}]).$$

La répartition de ces particules dans l'espace de recherche est un des éléments clefs de cette méthode : une répartition aléatoire ne prenant pas en compte les particules déjà réparties n'assure pas une couverture idéale de l'espace de recherche. Pour l'initialisation de la position des particules, nous avons retenu la méthode *Latin Hypercube Sampling* (LHS [96, 59]).

En plus de la position actuelle, chaque particule conserve sa meilleure position P_i . À l'initialisation, ces meilleures positions correspondent à leur position courante, donc initiale,

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall j \in \llbracket 1, d \rrbracket, P_{i,j} = X_{i,j}.$$

Chaque particule sera informée de l'état d'un ensemble d'autres particules de l'essaim. Ce sous-ensemble de particules en informant une particulière peut être déterminé à l'initialisation ou revu à chaque itération, aussi bien vis-à-vis de son cardinal que de ses éléments. De façon générale, chaque particule i est associée à un ensemble $\Omega_i \subseteq \{1, \dots, n\}$ désignant un sous-essaim d'autres particules informant la particule i . La meilleure position atteinte G_i par une particule parmi celles désignées par Ω_i est, elle aussi, conservée

$$G_i = X_k \setminus k \in \Omega_i, f(X_k) = \min_{j \in \Omega_i} (f(X_j)).$$

Une vitesse V_i est associée à chacune de ces particules. Cette vitesse donne le déplacement de la particule suivant chaque direction de l'espace de recherche au pas suivant. Elles sont, comme les positions initiales, distribuées aléatoirement au démarrage

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall j \in \llbracket 1, d \rrbracket, V_{i,j} = a\left(\left[\frac{x_{j,min} - x_{j,max}}{2}, \frac{x_{j,max} - x_{j,min}}{2}\right]\right).$$

Nos différents tests nous ont permis de constater qu'il est aussi possible d'initialiser toutes ces vitesses à la vitesse nulle sans changement significatif sur les résultats

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, V_i = 0.$$

Pour chacune des particules de l'essaim, $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, et pour chaque dimension de l'espace de recherche, $\forall j \in \llbracket 1, d \rrbracket$, les lois régissant l'évolution de l'essaim sont données, dans l'ordre, par

$$\begin{cases} V_{i,j} \leftarrow a([0, \beta]) (P_{i,j} - X_{i,j}) + a([0, \gamma]) (G_{i,j} - X_{i,j}) + \alpha V_{i,j} \\ X_i \leftarrow X_i + V_i \\ f(X_i) < f(P_i) \Rightarrow P_i \leftarrow X_i \\ G_i \leftarrow P_k \setminus k \in \Omega_i, f(P_k) = \min_{j \in \Omega_i} (f(P_j)) \end{cases}, \quad (5.2)$$

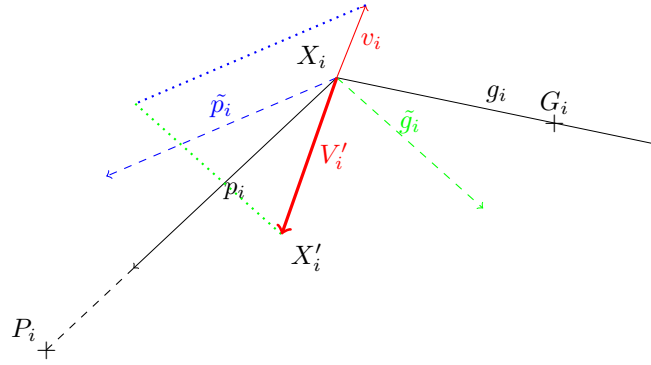
Marsaglia, KISS [91]. Elles proposent respectivement une périodicité de l'ordre de 10^9 et de 10^{27} .

⁵La qualité de la répartition uniforme dépend essentiellement de la qualité de la fonction aléatoire uniforme a et influence grandement les performances de la méthode OEP.

où $\alpha \in [0, 1]$ et $(\beta, \gamma) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ sont trois paramètres intrinsèques contrôlant la méthode OEP. La première de ces quatre lois est celle qui permet de mettre à jour la vitesse de chaque particule. La nouvelle vitesse V_i d'une particule i est la combinaison linéaire de trois termes considérés indépendamment sur chacune des dimensions :

- son ancienne vitesse V_i ,
- l'écart entre sa meilleure position passée P_i et sa position actuelle X_i ,
- l'écart entre la meilleure position passée G_i parmi les meilleures positions passées P_j des particules $j \in \Omega_i$ l'informant et sa position actuelle X_i .

La figure 5.6 donne une représentation de cette composition des vitesses.



$$\begin{aligned} v_i &= \alpha V_i & \tilde{p}_i &= A_i p_i & V'_i &= v_i + \tilde{p}_i + \tilde{g}_i \\ p_i &= \beta (P_i - X_i) & \tilde{g}_i &= B_i g_i & X'_i &= X_i + V'_i \\ g_i &= \gamma (G_i - X_i) \end{aligned}$$

FIG. 5.6 : Composition des vitesses d'une particule. A_i et B_i sont des matrices diagonales aléatoires sur $[0 ; 1]$. Ici $\beta = 0,7$ et $\gamma = 1,47$.

Comme nous l'avons déjà signalé, un des avantages de la méthode OEP est sa capacité à fournir plusieurs points *solutions* [110, 111, 18]. Pour cela, différentes approches sont envisageables. La plus répandue consiste à utiliser différents essaims qui se repousseront mutuellement [16, 48]. Le nombre de solutions obtenues sera donc le même que le nombre d'essaims utilisés. Ce nombre est donc décidé *a priori* et indépendamment du système d'équations. Il est aussi possible de découper l'espace de recherche et d'utiliser un essaim par secteur. Là encore, le nombre de solutions est décidé *a priori* et indépendamment du système d'équations. Dans ces deux cas, il faut classer les solutions obtenues pour chaque essaim et en conserver toutes ou une partie des meilleures. Ainsi le nombre de solutions retenues est au plus égal au nombre d'essaims et seules celles considérées comme acceptables sont conservées.

Une troisième voie consiste à utiliser des méthodes de classification non supervisée dont le but est d'identifier des amas dans une population. Notre choix s'est porté sur cette dernière approche et nous avons retenu particulièrement pour sa mise en œuvre la méthode de *segmentation par nuées dynamiques* [15, 86, 52, 26] qui permet de partitionner les particules en k classes de solutions, k étant déterminé *a priori*, en minimisant la variance et en maximisant

sant l'écart entre les classes.

Les paramètres nécessaires à l'utilisation de la méthode OEP, essentiellement le nombre de particules, le nombre d'itérations et la définition des particules informant une particule donnée, sont plus aisés à régler que pour d'autres méthodes et, surtout, un même réglage permet de résoudre une large catégorie de problèmes. Pour nos tests, les valeurs retenues étaient de l'ordre d'une trentaine de particules ayant chacune trois informatrices statiques et définies aléatoirement. Étant donné la rapidité de l'évaluation du système d'équations, nous nous sommes fixés au maximum un millier d'itérations.

D'autre part, même si la méthode OEP ne nécessite pas de connaître les conditions initiales, elle peut tirer parti de la connaissance de celles-ci en ajustant la répartition initiale des particules. On peut alors artificiellement définir un certain nombre de particules au(x) point(s) initial (initiaux).

À titre d'exemple, nous pouvons illustrer cette méthode avec une fonction à deux variables. La fonction f dont nous cherchons le point (x, y) minimisant sa valeur est définie par

$$\begin{aligned} f : [-10, +10] \times [-10, +10] &\mapsto \mathbb{R}^+ \\ (x, y) &\rightarrow |x \sin x + 0.1x| + |y \sin y + 0.1y|. \end{aligned}$$

Le minimum absolu de cette fonction est obtenu en $(0, 0)$ et vaut $f(0, 0) = 0$.

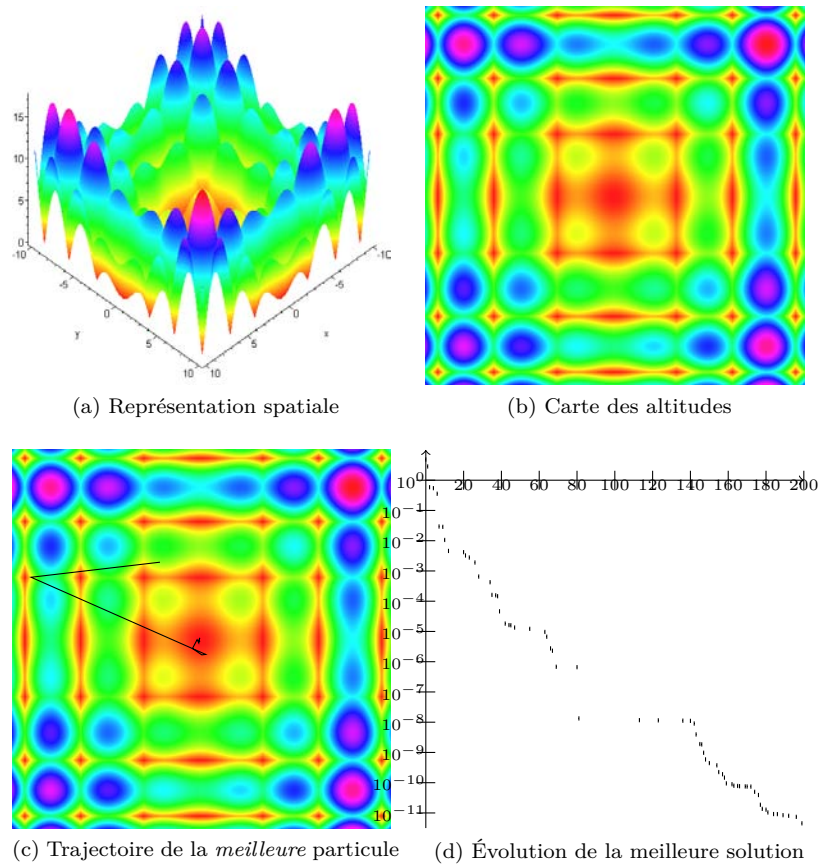
La figure 5.7a propose une représentation tridimensionnelle de cette fonction et la figure 5.7b donne une représentation à l'aide d'une carte colorée des altitudes de celle-ci. La figure 5.7c trace les positions successives de la *meilleure* particule au cours de l'optimisation. Nous y constatons que cette *meilleure* particule a été capable de *sauter* d'un minimum local (sur la gauche) au minimum global (au centre). Nous y constatons également que si les premières évolutions sont rapides, la convergence finale est plus lente. Enfin, la figure 5.7d donne l'évolution de la valeur de la fonction f évaluée à la *meilleure* position au cours de l'optimisation. Elle met notamment en évidence des paliers (vers 10^{-5} entre les itérations 40 et 60 et vers 10^{-8} entre les itérations 80 et 140).

La figure 5.8 donne les mêmes représentations que précédemment pour la fonction f définie par

$$\begin{aligned} f : [-2.5, +2.5] \times [-2.5, +2.5] &\mapsto \mathbb{R}^+ \\ (x, y) &\rightarrow x^2 + 2y^2 - 1.3 \cos(3\alpha(y + 3x)) - 0.8 \cos(3\alpha(x - 2y)) + 22xy + 2.1, \end{aligned}$$

avec $\alpha = 1.95$, qui admet, elle aussi, un minimum absolu au point $(0, 0)$ tel que $f(0, 0) = 0$. Nous pouvons aussi y constater (figure 5.8c) la capacité de la méthode OEP à *sauter* d'un minimum local à un autre : au moins six sauts dans ce cas.

Même si cette méthode donne très souvent de bons résultats, les tests effectués montrent qu'il est parfois utile de la combiner avec une seconde méthode de résolution afin d'obtenir de meilleurs résultats [65]. Nous avons opté pour la méthode d'optimisation locale NM.

FIG. 5.7 : Illustration de OEP avec $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

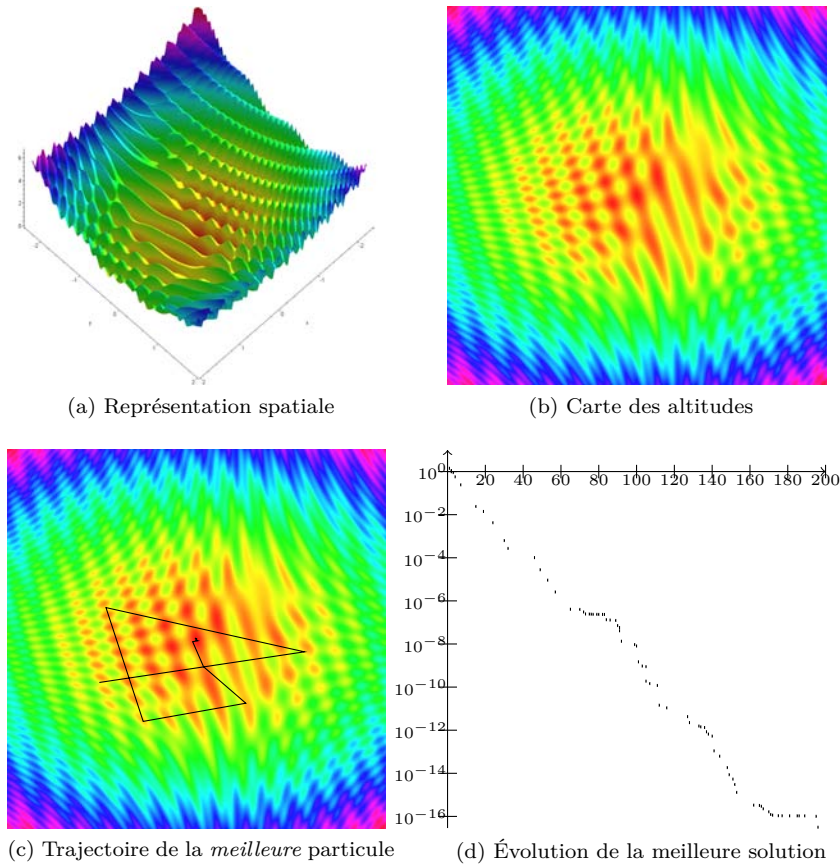
5.6.2 Méthode de Nelder-Mead

La méthode de Nelder-Mead est une méthode d'optimisation locale qui, tout comme la méthode OEP, ne nécessite pas le calcul de la matrice jacobienne du système d'équations à minimiser. Cependant, elle doit être initialisée avec un simplexe⁶ de l'espace de recherche des solutions.

Chaque itération de cette méthode nécessite soit une, deux, trois ou d évaluations du système, d étant la dimension de l'espace de recherche. Le principe de base consiste à évaluer la fonction à minimiser à chaque sommet du simplexe puis à remplacer le *moins bon* sommet par un autre au moins *meilleur* que ce dernier. S'il n'est pas possible de remplacer le *moins bon* sommet par un *meilleur*, alors seul le *meilleur* est conservé et un nouveau simplexe est construit sur la base de ce sommet tout en tenant compte des autres.

Pour remplacer le *plus mauvais* sommet x_{d+1} , plusieurs transformations

⁶Un simplexe est l'enveloppe convexe d'un ensemble de $d + 1$ points formant un repère affine dans un espace euclidien de dimension d . Le simplexe est l'objet géométrique clos le plus *simple* à d dimensions dans un espace de même dimension.

FIG. 5.8 : Illustration de OEP avec $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

sont envisagées. Elles sont toutes des homothéties dont le centre est l'isobarycentre x_0 des d autres sommets (sauf pour la dernière), seuls leurs rapports sont différents :

1. Réflexion : homothétie de rapport -1 , c'est-à-dire une symétrie centrale autour de x_0 .
2. Étirement : homothétie de rapport -2 .
3. Contraction : homothétie de rapport $-\frac{1}{2}$.
4. Rétrécissement : homothétie autour de x_1 de rapport $\frac{1}{2}$ de tous les autres sommets, c'est-à-dire une réduction de rapport 2 de l'ensemble du simplexe laissant invariant le *meilleur* sommet.

La figure 5.9 propose une représentation géométrique de ces transformations dans le cas d'un espace de recherche à deux dimensions. Dans ce cas, le simplexe est un triangle. Les différents rapports de ces homothéties peuvent varier autour des valeurs proposées pour adapter la méthode à des cas ou configurations particulières. Les coefficients présentés dans la liste ci-dessus et aux

figures 5.9 et 5.10 sont ceux couramment utilisés. L'agencement des différentes transformations utilisées est détaillé à la figure 5.10.

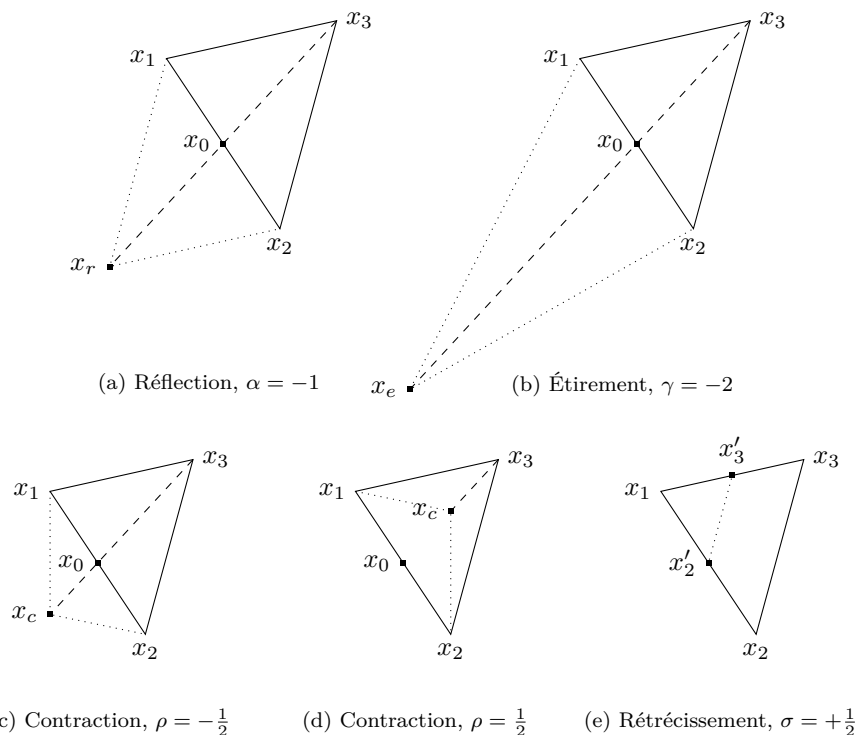


FIG. 5.9 : Représentation géométrique des différentes transformations utilisées par la méthode de Nelder-Mead lorsque $f(x_1) < f(x_2) < f(x_3)$.

5.6.3 Hybridation des méthodes

Les méthodes OEP et NM précédemment mentionnées sont complémentaires : la méthode OEP est capable d'explorer l'ensemble du domaine de recherche des solutions alors que la méthode NM a tendance à explorer le voisinage du point initial. En revanche, la méthode OEP converge lentement même si elle possède des particules proches de la solution optimale, alors que la méthode NM converge plus rapidement à condition d'être dans la *bassin d'attraction* d'un minimum. Cette méthode est surtout moins sensible aux conditions initiales que les méthodes couramment employées pour l'optimisation locale.

Dans l'optique d'hybrider ces deux méthodes (figure 5.1), nous avons cherché à équilibrer leur poids respectif afin d'obtenir le meilleur compromis entre *coût* et *précision*. Or, les coûts respectifs de ces deux méthodes sont fortement liés au nombre d'évaluations de la fonction à minimiser qu'ils nécessitent. Ainsi, pour la méthode OEP, le nombre d'évaluations de la fonction à optimiser est de l'ordre de $O(qn)$ où q est le nombre d'itérations employées et n le nombre de particules utilisées. Pour la méthode NM, le nombre d'évaluations de cette

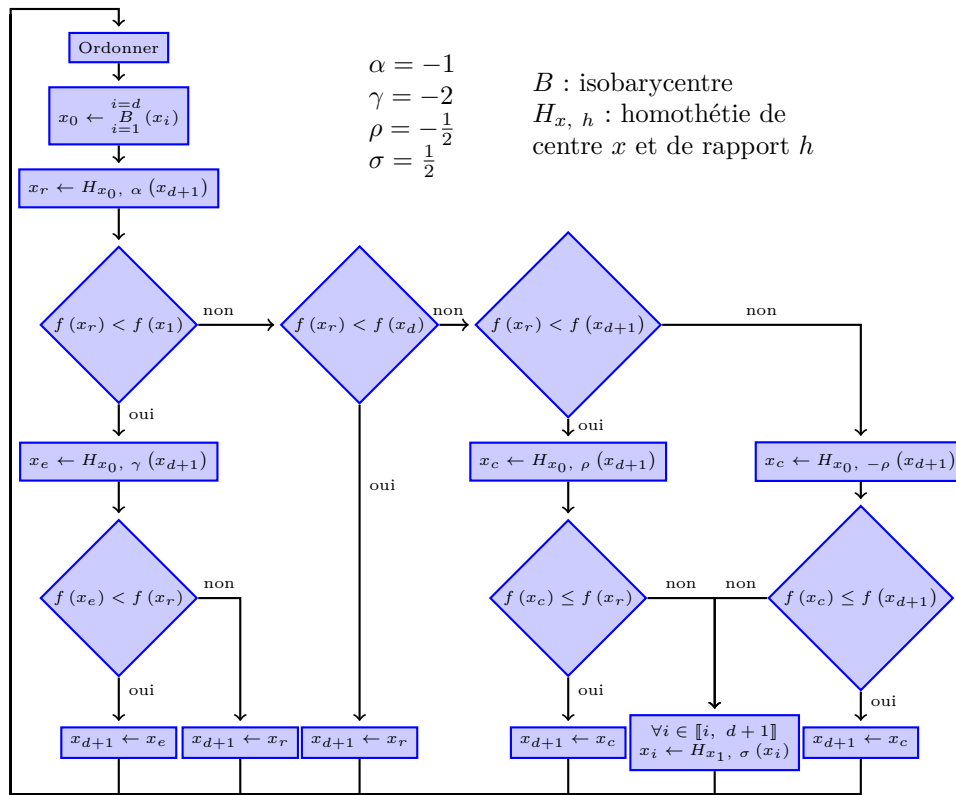


FIG. 5.10 : Principe général de la méthode de Nelder-Mead.

fonction est de l'ordre de $O(q)$, plus précisément égale à $\sum_{i=1}^{i=q} k_i \simeq 3q$ avec $k_i \in \{1, 2, d+3\}$ où d est la dimension de l'espace et q le nombre d'itérations employées (voir les différentes branches de la figure 5.10).

L'approche finalement retenue consiste à utiliser préalablement la méthode OEP avec, comme critère d'arrêt, une précision somme toute raisonnable à concurrence d'un coût maximum préalablement fixé. Les k meilleures solutions ainsi obtenues sont ensuite utilisées pour initialiser k utilisations de la méthode NM. Ces dernières utilisations sont faites de manière concurrente et k est choisi aussi grand que possible mais de sorte à ne pas pénaliser les utilisations indépendantes de la méthode NM. Le coût global des k utilisations de la méthode NM est donc comparable au coût d'une utilisation de celle-ci, dans le cas où leur mise en œuvre est prévue pour être parallèle.

Nos expérimentations montrent que le fait d'utiliser plusieurs fois la méthode NM initialisée avec différents points permet d'améliorer significativement la convergence de l'ensemble composé des deux méthodes OEP et NM et donc d'améliorer la robustesse de l'ensemble.

5.6.4 Tests et résultats

Afin d'illustrer l'intérêt de l'hybridation des méthodes d'optimisation, nous présentons neuf problèmes de synthèse dimensionnelle de mécanismes résolus en appliquant différentes stratégies. Les neuf problèmes, détaillés dans l'annexe B, correspondent à trois mécanismes souvent étudiés dans la littérature :

- un bras robotisé à deux liaisons pivots (2R),
- un bras robotisé à cinq liaisons (5R),
- un mécanisme spatial fermé à quatre barres et quatre liaisons pivots (Bennett).

Des configurations sous-contraintes, iso-contraintes et sur-contraintes (cohérentes et incohérentes) ont été choisies pour ces trois mécanismes. Les problèmes à résoudre sont alors suffisamment variés pour mettre en évidence les principales caractéristiques de la stratégie retenue. Le tableau 5.1 précise le nombre de variables et la nature de chacun des problèmes considérés.

	Tests	variables	nature
2R	n° 0	18	iso-contraint
	n° 1	22	sur-contraint
5R	n° 6	46	sous-contraint
	n° 7	96	iso-contraint
	n° 8	121	sur-contraint
Bennett	n° 4	40	iso-contraint
	n° 2	60	sur-contraint
	n° 3	32	iso-contraint
	n° 5	44	sur-contraint

TAB. 5.1 : Nombre de variables et nature des neuf tests.

Il est important de signaler que nous avons aussi essayé de résoudre les systèmes d'équations correspondants avec des méthodes d'optimisation locales basées sur le gradient (quasi-Newton utilisant la méthode SVD pour l'inversion du système linéaire, BFGS, Levenberg-Marquardt) mais les résultats ne sont pas exploitables. En effet, ne disposant pas de point initial, nous avons réalisé quelques tests avec des points initiaux générés aléatoirement et d'autres avec des points obtenus grâce à OEP. Dans les deux cas, les points solutions ne sont pas significativement meilleurs que les points initiaux. Ces résultats confirment que ces méthodes sont trop dépendantes du choix du point initial et qu'elles ne sont pas particulièrement adaptées à des problèmes de synthèse dimensionnelle sans esquisse initiale.

Nous nous sommes ensuite concentrés sur les méthodes OEP et NM. En faisant de nombreux tests sur des problèmes d'optimisation, nous avons constaté que les réglages suivants pour les trois principaux paramètres de la méthode d'OEP constituent un bon compromis entre robustesse et performance : les essais utilisés dans nos tests sont constitués de 30 particules ayant chacune 3

informatrices désignées pour tout le processus et un maximum de 2 500 générations est autorisé. Cela signifie que la fonction objectif sera évaluée au plus 75 000 fois. Par ailleurs, précisons qu'aucun point particulier n'est fourni à la méthode lors de son initialisation. Pour la méthode NM, nous avons seulement limité le nombre d'évaluations de la fonction objectif à 50 000.

Un nombre important d'évaluations est autorisé car ces méthodes ne nécessitent pas l'évaluation de l'ensemble des dérivées partielles mais simplement l'évaluation des équations. De plus, nos équations étant des polynômes leur évaluation est relativement rapide. Nous avons même développé une méthode d'évaluation approchée, rapide et simultanée des valeurs du sinus et du cosinus d'un angle (voir détails dans l'annexe C) pour accélérer l'évaluation des fonctions trigonométriques. Les résultats présentés ci-dessous bénéficient d'ailleurs de cette approximation.

Afin de montrer l'intérêt de l'hybridation des deux méthodes, les neuf cas d'étude ont été testés avec trois stratégies de résolution différentes :

1. OEP : utilisation de OEP uniquement,
2. OEP + NM : utilisation de OEP puis de NM appliquée au point fourni par OEP,
3. OEP + 8 NM : utilisation de OEP avec regroupement des particules en huit essais puis utilisation de NM sur chacun des points fournis par ces huit essais. Les huit instances de NM peuvent être ensuite exécutées soit simultanément sur une machine pouvant fournir au moins huit cœurs d'exécution soit de manière séquentielle sur une machine ne disposant pas des ressources nécessaires.

Avant de commenter plus amplement les résultats obtenus, il est intéressant d'illustrer la bonne capacité d'exploration de la méthode OEP. Comme nous l'avons déjà indiqué, à partir d'une répartition aléatoire des particules de l'essai, les régions les plus prometteuses dans l'espace de recherche sont rapidement détectées (phase d'exploration) puis les particules convergent vers la (les) meilleure(s) solution(s) détectée(s) (phase d'exploitation). Ces phases d'exploration et d'exploitation sont clairement mises en évidence dans les quatre photographies de la figure 5.11 correspondant à quatre étapes (générations 1, 625, 1250 et 2500) de l'optimisation pour le test n° 2.

Le tableau 5.2, qui présente succinctement les résultats obtenus, montre aussi clairement que la méthode OEP est capable de fournir, sans nécessité de lui donner un point initial, des points solutions relativement satisfaisants. Il révèle aussi que le couplage des méthodes OEP et NM améliore nettement la convergence sans pour autant pénaliser les performances. Une amélioration significative dans l'évaluation de la fonction objectif est ainsi constatée pour tous les cas étudiés pour des temps de calcul raisonnables (inférieurs à 3 s). Tous ces calculs ont été effectués avec une machine disposant d'un processeur Intel® Xeon® (Gainestown) E5530 annoncé à 2.40 GHz.

Pour mieux comprendre ces résultats, il convient néanmoins d'analyser plus précisément l'évolution de la valeur de la fonction objectif en fonction

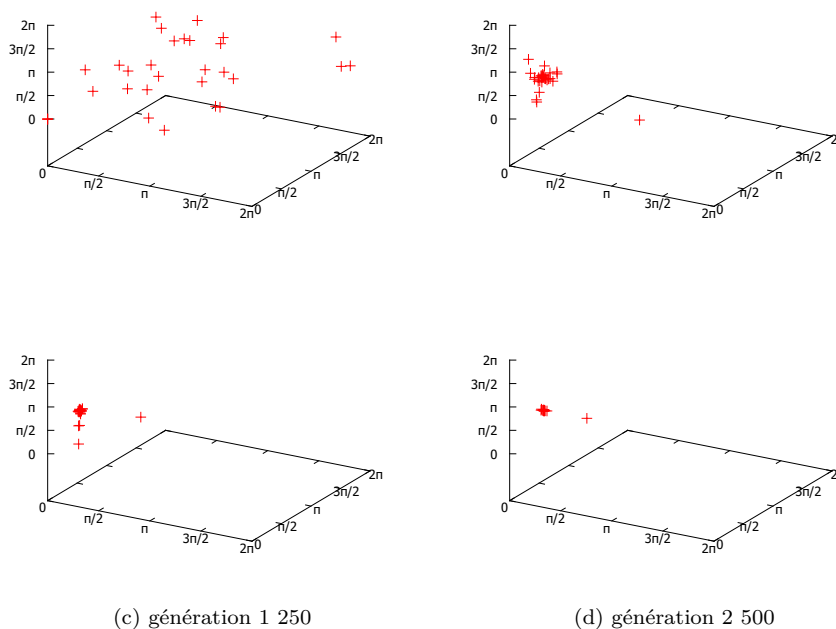


FIG. 5.11 : Évolution de l'essaim pour le test n° 2 (les trois axes correspondent aux valeurs de trois variables d'angles).

Tests		OEP ≈ 75 000 éval.		OEP + NM ≈ 125 000 éval.		OEP + 8 NM ≈ 475 000 éval.		
		$\ F\ $	Durée	$\ F\ $	Durée	$\ F\ $	Durée (s) séq. par.	
2R	n° 0	$5,52 \cdot 10^{-2}$	0,078 s	$7,58 \cdot 10^{-6}$	0,109 s	$7,58 \cdot 10^{-6}$	0,375	0,125
	n° 1	4,99	0,094 s	$1,18 \cdot 10^{-1}$	0,140 s	$1,18 \cdot 10^{-1}$	0,453	0,172
5R	n° 6	49,4	0,234 s	$8,43 \cdot 10^{-1}$	0,765 s	$8,43 \cdot 10^{-1}$	4,54	0,81
	n° 7	31,9	0,578 s	2,71	2,838 s	1,87	18,8	3,01
	n° 8	27,4	0,733 s	5,03	4,323 s	1,62	29,6	4,59
Bennett	n° 4	44,5	0,203 s	$2,39 \cdot 10^{-1}$	0,500 s	$2,39 \cdot 10^{-1}$	3,43	0,640
	n° 2	44,0	0,359 s	$8,74 \cdot 10^{-1}$	1,295 s	$8,62 \cdot 10^{-1}$	7,69	1,330
	n° 3	$3,13 \cdot 10^{-1}$	0,140 s	$1,99 \cdot 10^{-1}$	0,311 s	$8,11 \cdot 10^{-6}$	1,73	0,422
	n° 5	35,6	0,234 s	$2,06 \cdot 10^{-1}$	0,733 s	$2,22 \cdot 10^{-5}$	4,13	0,780

TAB. 5.2 : Résultats des différentes stratégies sur les neuf cas étudiés.

du nombre d'évaluations pour les différentes méthodes. Pour les trois tests considérés dans la figure 5.12 (tests n° 0, n° 4 et n° 5), nous remarquons que la méthode OEP (courbes rouges) converge généralement plus lentement que la méthode NM (courbes bleues) et qu'il n'est pas utile d'autoriser un nombre très important d'évaluations de la fonction objectif car sa valeur a tendance à évoluer beaucoup moins vite pendant la phase d'exploitation. En revanche, on constate que la meilleure solution est toujours obtenue avec la méthode hybride (OEP + NM). Ceci s'explique probablement par le fait que le point initial fourni par la méthode OEP à la méthode NM est *proche* d'un minimum.

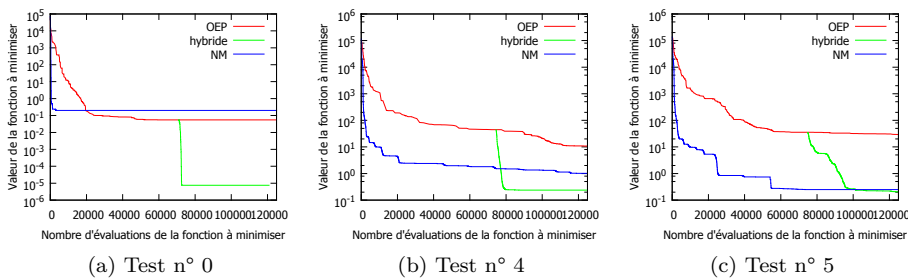


FIG. 5.12 : Comparaison de l'évolution de la valeur de la fonction objectif pour les méthodes OEP, NM et hybride.

Enfin, le tableau 5.2 montre aussi que l'utilisation de la méthode NM avec plusieurs points initiaux (huit points lors de nos expérimentations) permet d'améliorer considérablement la robustesse de l'approche hybride alors que le surcoût engendré par l'utilisation de plusieurs instances de la méthode de NM, sur une architecture pouvant exécuter plusieurs processus indépendamment et en parallèle, est négligeable (de l'ordre de 30% pour les cas très rapides et de l'ordre de 6% pour les tests les plus lents, comme les n° 7 et n° 8).

Un autre aspect intéressant qu'il faut mentionner est que cette méthode permet d'obtenir facilement plusieurs solutions pour un même système d'équations. On peut ainsi voir dans les figures 5.13a et 5.13b que cinq solutions candidates différentes ont été obtenues pour les tests n° 0 et n° 4. Les figures 5.13b et 5.13c montrent aussi clairement que que le meilleur point fourni par la méthode d'OEP n'est pas nécessairement celui qui permettra d'atteindre la meilleure solution par la méthode de NM. Pour le test n°4, par exemple, le point 1 permet d'obtenir une solution très satisfaisante.

Pour obtenir des détails supplémentaires sur les tests effectués, le lecteur intéressé pourra consulter l'annexe B.

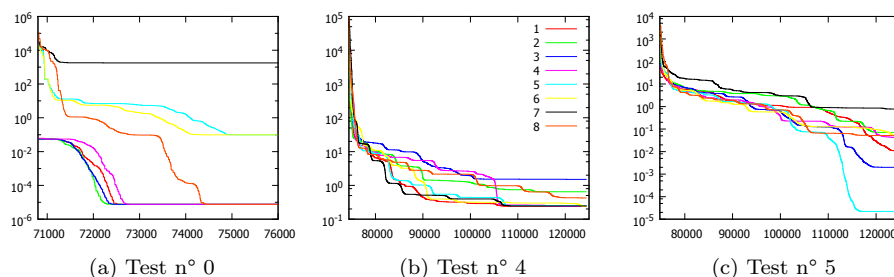


FIG. 5.13 : Influence du point initial pour la méthode NM : utilisation de 8 points obtenus par segmentation à partir de la méthode OEP.

5.7 Conclusion

Pour résoudre les systèmes d'équations issus de problème de synthèse dimensionnelle de mécanismes, nous avons choisi d'appliquer une stratégie combinant, d'une part, un ensemble de méthodes de simplification et de décomposition et, d'autre part, une méthode d'optimisation hybride basée sur la méthode d'optimisation par essais particuliers et l'algorithme de Nelder-Mead. Nous avons ainsi présenté un ensemble de méthodes qui, appliquées au système d'équations que nous générons, permettent de les simplifier considérablement. Nous avons aussi montré que ces méthodes contribuent à l'obtention de plusieurs solutions. La méthode hybride d'optimisation mise au point exploite ensuite au mieux les caractéristiques de chacune des deux méthodes : la méthode d'OEP explore efficacement l'espace de recherche et fournit plusieurs points initiaux pour la méthode de NM. Nos expérimentations ont montré que cette approche permet d'obtenir des résultats beaucoup plus satisfaisants qu'en utilisant chacune des méthodes indépendamment.

La stratégie retenue permet aussi de tirer au maximum partie des possibilités actuelles des calculateurs pouvant gérer simultanément plusieurs cœurs d'exécution. Ceci se traduit par le parcours en parallèle des branches de la stratégie et par l'utilisation de méthodes pouvant tirer intrinsèquement partie de ce parallélisme.

Malgré les bonnes performances et surtout la généralité de l'approche décrite, il serait peut-être aussi intéressant d'envisager, dans un cadre industriel, l'utilisation de méthodes de résolution dédiées à des catégories précises de problèmes (problèmes classiques ou répandus dans l'industrie) afin de traiter ceux-ci avec le maximum d'efficacité.

Troisième partie

Réalisations et résultats

Chapitre 6

Application réalisée

6.1 Introduction

Parallèlement au développement de notre approche de résolution de problèmes de synthèse dimensionnelle, un démonstrateur a été mis en place dans l'environnement CATIA V6 [33]. Le but principal de cette application est de tester la méthode présentée sur un ensemble de problèmes réels et d'évaluer le degré d'intégration de cet outil de pré-conception avec les autres composants de conception de pièces mécaniques et d'analyse cinématique.

Pour montrer la généralité et les capacités de l'approche proposée, nous détaillons la résolution de trois problèmes différents de positionnement et de dimensionnement de mécanismes. Le premier exemple étudié permet en outre d'exposer les étapes de spécification et de présentation des solutions à l'utilisateur.

6.2 Bras robotisé à deux liaisons pivot (2R)

Nous présentons l'application mise en œuvre à travers la résolution d'un cas simple, mais largement étudié, de synthèse de mécanismes [151, 112, 30]. En effet, le dimensionnement d'un robot spatial de type 2R (deux liaisons pivot), permet de mettre clairement en évidence les principales étapes du processus de synthèse du point de vue de l'utilisateur :

- spécification du problème et visualisation des tâches,
- résolution,
- construction des mécanismes proposés,
- simulation.

Il permet, par la même occasion, de montrer que les étapes de construction des mécanismes et de simulation bénéficient de l'intégration de notre application dans l'environnement logiciel CATIA V6.

6.2.1 Intégration dans CATIA V6

L'environnement proposé par la suite logicielle CATIA V6 est découpé en *ateliers*, eux-mêmes organisés en *établissements*. Cette section présente particulièrement l'établissement de synthèse de mécanismes (*Mechanism Synthesis Workbench*)

que nous avons développé (figures 6.1 et 6.2) pour déclarer et résoudre des problèmes de synthèse dimensionnelle de mécanismes. Cet établi a été intégré à l'atelier mécanique (*Mechanical Workshop*, figure 6.1) qui permet de concevoir des pièces ou des assemblages mécaniques.



FIG. 6.1 : Organisation de l'établi de synthèse de mécanismes

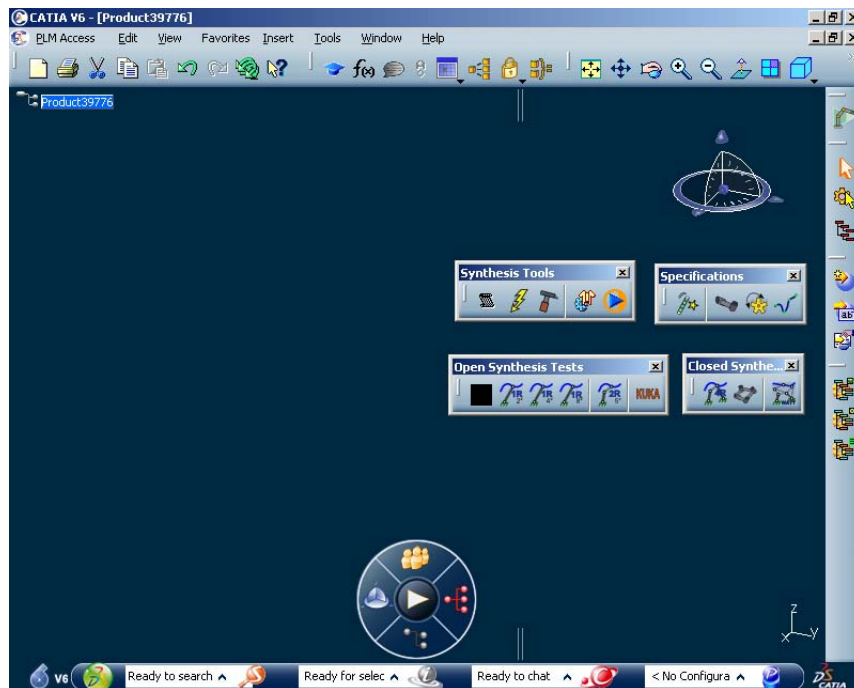


FIG. 6.2 : L'établi de synthèse de mécanismes

Dans cet établi, mise à part la spécification du problème, les cinq boutons de la barre d'outils de la figure 6.3 font apparaître les principales étapes du processus de résolution et de validation :






- la visualisation des tâches ,
- la mise en équations et la résolution du problème ,
- la construction du squelette du mécanisme proposé  et l'habillage des mécanismes avec des volumes géométriques génériques ,
- la simulation des mécanismes .



FIG. 6.3 : Les cinq commandes associées à la résolution d'un problème de synthèse

Nous détaillons l'action de ces commandes dans les sections suivantes.

6.2.2 Spécification du problème

Comme nous l'avons signalé au chapitre 2, la spécification d'un problème de synthèse dimensionnelle de mécanismes nécessite la déclaration de pièces, de liaisons cinématiques, des tâches à accomplir et des contraintes à respecter. Dans un environnement de CAO, il est aussi utile de pouvoir définir un problème de synthèse afin de regrouper les spécifications qui seront ensuite utilisées par l'application. Quatre commandes, regroupées pour des raisons d'ergonomie dans une seule barre d'outils (voir figure 6.4), permettent à l'utilisateur de réaliser ces actions. Nous trouvons donc :





-  la création d'un problème de synthèse dimensionnelle de mécanismes,
-  l'ajout d'une pièce mécanique au problème,
-  l'ajout d'une liaison cinématique au problème,
-  l'ajout de la tâche à effectuer par le mécanisme.



FIG. 6.4 : Barre d'outils pour la spécification

Ainsi, la création d'un problème de synthèse dimensionnelle de mécanismes offre un conteneur pour l'ensemble des éléments nécessaires à sa définition :

chacune des commandes suivantes intégrera directement les éléments et les informations dans ce problème. C'est aussi à ce moment qu'un mécanisme peut être spécifié plan (voir boîte de dialogue de la figure 6.5).

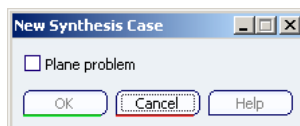


FIG. 6.5 : Spécification d'un nouveau problème de synthèse dimensionnelle

La deuxième commande (ajout d'une pièce mécanique au problème) permet de préciser le nombre de pièces du mécanisme. Cette commande permet aussi de définir si la pièce est une pièce fixe en cochant une case de la boîte de dialogue (figure 6.6). Toutes les pièces seront considérées comme faisant partie du bâti du mécanisme.

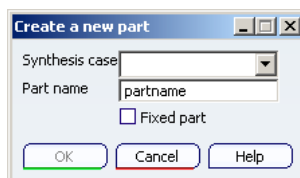


FIG. 6.6 : Spécification d'une pièce

Grâce à la commande d'ajout de liaisons cinématiques, l'utilisateur déclare les liaisons cinématiques entre les couples de pièces du mécanisme. Cette commande permet d'associer deux pièces et de définir la nature des degrés de liberté entre celles-ci. Elle permet aussi de préciser si cette liaison est motrice c'est-à-dire si elle peut être contrôlée. La boîte de dialogue de la figure 6.7 permet aussi de spécifier une position et une orientation initiale pour cette liaison. Cependant, cette information n'est, pour l'instant, pas prise en compte.

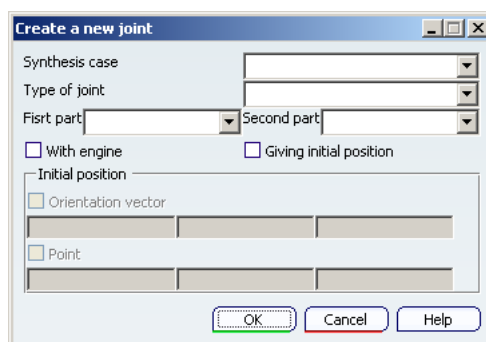


FIG. 6.7 : Spécification d'une liaison

Enfin, il est aussi possible de définir un ensemble de points de passage et, le cas échéant, un ensemble de trièdres associés à ces derniers (voir la boîte de dialogue de la figure 6.8). Cette commande, lancée suite à la sélection d'une

pièce dans l'arbre de spécification, permet de définir la pièce du mécanisme associée avec la tâche à effectuer.

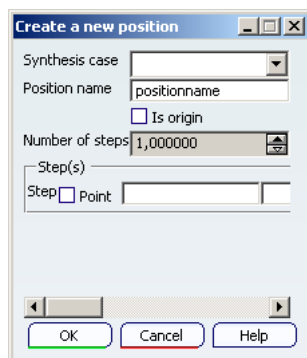








FIG. 6.8 : Spécification d'un objectif

Un certain nombre de problèmes courants de synthèse dimensionnelle de mécanismes peuvent être déclarés simplement à partir d'une commande. Ainsi, dans la barre d'outils de la figure 6.9a, cinq problèmes ouverts (sans boucle topologique) sont considérés. Il s'agit de :

-  trois cas de bras articulés à une liaison pivot différents par le nombre de points de passage spécifiés (ces cas sont utilisés pour des validations élémentaires),
-  un bras articulé à deux liaisons pivots,
-  un bras articulé à cinq liaisons pivots, des contraintes restreignant les positions relatives des liaisons cinématiques pour correspondre au cas réel du bras articulé KUKA KR-500-1.

La barre d'outils de la figure 6.9b fait apparaître trois problèmes fermés (avec boucle topologique). Plus précisément, nous trouvons :

-  un mécanisme plan fermé à quatre barres et quatre liaisons pivots,
-  un mécanisme spatial fermé à quatre barres et quatre liaisons pivots (mécanisme de Bennett),
-  un mécanisme plan à six barres et neuf liaisons pivots dans la configuration dite de Watt.



(a) Problèmes ouverts

(b) Problèmes fermés

FIG. 6.9 : L'ensemble des problèmes classiques prédéfinis dans l'établi

Dans l'exemple qui nous occupe, le bras articulé à deux liaisons pivots, la tâche est définie par cinq points de passage et cinq orientations (toujours la

même dans ce cas). Les valeurs des coordonnées des points et les orientations sont indiquées dans le tableau 6.1.

	Positions			Orientations		
	x	y	z	α	β	γ
1	100,62177830	125,0000000	0	2,094395102	0	0
2	75,00000000	150,6217783	0	2,094395102	0	0
3	40,00000000	160,0000000	0	2,094395102	0	0
4	5,00000000	150,6217783	0	2,094395102	0	0
5	-20,62177826	125,0000000	0	2,094395102	0	0

TAB. 6.1 : Spécifications des cinq points de passage et des orientations associées pour le cas 2R

Une fois ces valeurs renseignées, il est possible de visualiser la spécification de l'objectif graphiquement par un ensemble de trièdres construits dans l'environnement CAO (figure 6.10).

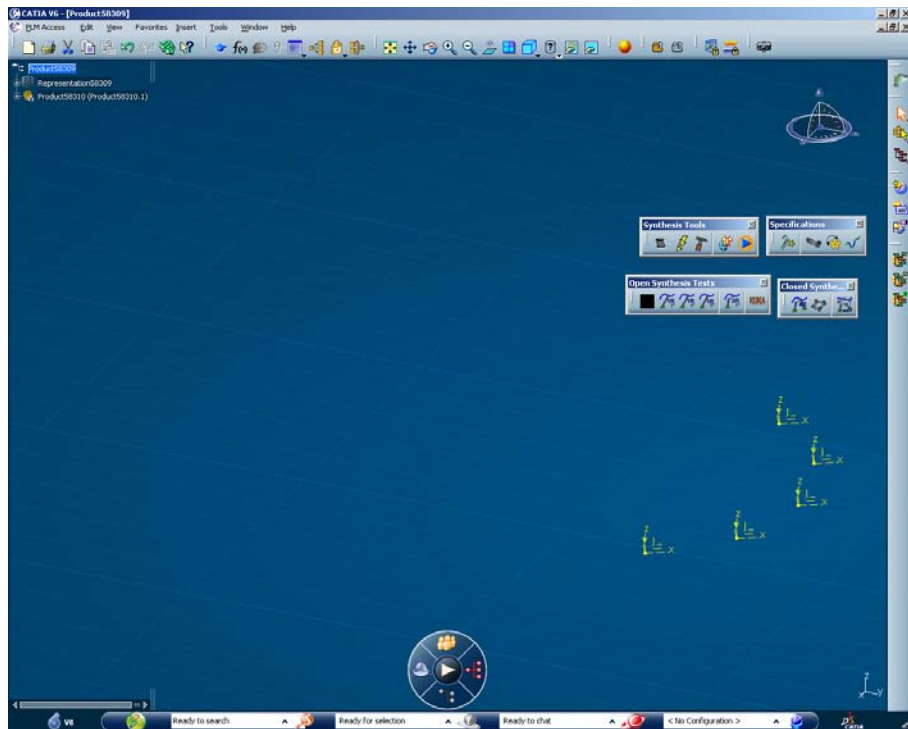


FIG. 6.10 : Aperçu graphique du mouvement attendu de l'effecteur

La spécification du problème apparaît alors dans l'arbre de spécification de CATIA (figure 6.11). Ici, le problème de synthèse considéré est le cas $2R$, 5 points + 5 orientations, cohérents. Il comprend cinq positions, deux liaisons et trois pièces. À chaque instant, les valeurs des positions peuvent être modifiées.

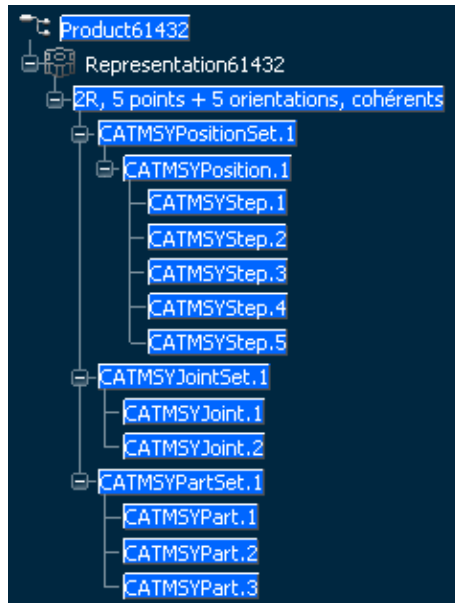


FIG. 6.11 : L'arbre de spécification

À ce stade, il est important de signaler qu'aucune configuration initiale pour la position ou la dimension du mécanisme n'est donnée. Seules les informations topologiques et l'objectif font partie des spécifications nécessaires du problème de synthèse dimensionnelle de mécanismes.

6.2.3 Résolution

Lorsque l'utilisateur demande la résolution du problème spécifié, le modèle interne est créé automatiquement puis les équations traduisant le problème considéré sont générées. L'exemple 2R ici traité donne lieu, par exemple, à un système d'équations comptant vingt-deux variables. Parmi ces variables, douze sont des variables géométriques (cinq représentent des angles et sept des longueurs). Les dix autres sont des variables cinétiques (cinq points de passage et deux angles pour les liaisons).

Ce système d'équations est *résolu*, comme indiqué au chapitre 5, par une méthode d'optimisation par essais particuliers (OEP). Nous obtenons alors les huit points initiaux (tableau 6.2, colonnes deux à quatre) qui sont utilisés par la méthode de Nelder-Mead (NM). Dans ce cas précis, cette stratégie nous permet effectivement de trouver huit solutions distinctes au problème spécifié. Le tableau 6.2 montre les valeurs des longueurs x_1 et x_2 des bras du robot et la valeur de la fonction objectif pour chaque solution.

Les valeurs de toutes les variables *pertinentes* sont reportées dans l'arbre de spécifications (voir figure 6.12) et permettent de créer automatiquement une représentation du mécanisme associé.

	Étape 1 : OEP			Étape 2 : NM		
	x_1	x_2	f	x_1	x_2	f
1	500,00	-109,45	$5,523 \cdot 10^{-2}$	500,00	-120,00	$7,577 \cdot 10^{-6}$
2	361,61	-109,44	$5,526 \cdot 10^{-2}$	-167,12	-120,00	$7,577 \cdot 10^{-6}$
3	21,68	-109,44	$5,529 \cdot 10^{-2}$	-431,34	-120,00	$7,577 \cdot 10^{-6}$
4	216,91	-109,43	$6,109 \cdot 10^{-2}$	-262,54	-120,00	$7,577 \cdot 10^{-6}$
5	201,17	32,44	$1,870 \cdot 10^{+4}$	315,65	106,54	$9,850 \cdot 10^{-2}$
6	-242,59	-16,21	$1,971 \cdot 10^{+4}$	-55,05	106,50	$9,850 \cdot 10^{-2}$
7	344,73	-109,45	$3,069 \cdot 10^{+4}$	463,79	-370,19	$1,785 \cdot 10^{+3}$
8	-74,19	-123,12	$1,143 \cdot 10^{+5}$	-158,70	-120,00	$7,577 \cdot 10^{-6}$

TAB. 6.2 : Ensemble de solutions pour le problème 2R considéré

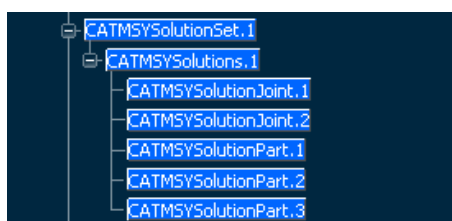


FIG. 6.12 : Arbre de spécifications augmenté des solutions

6.2.4 Construction des éléments de CAO

Afin d'aider l'utilisateur à visualiser les solutions obtenues, nous mettons à sa disposition deux types de représentations :

- une vue schématique qui ne fait apparaître que le squelette du mécanisme
- et une vue habillée très simple et générique qui permet de mieux appréhender les mouvements du mécanisme lors d'une simulation cinématique.

Construction automatique du squelette

L'étape de construction du squelette d'un des mécanismes solutions constitue une première approche pour montrer graphiquement à l'utilisateur l'allure des solutions. Le squelette est constitué essentiellement de segments de droites et de trièdres (voir figure 6.13).

La construction du squelette d'une pièce se décompose en trois étapes. Après avoir créé une pièce au sens de CATIA (*3DPart*) dans l'arbre de spécifications et l'avoir associée au problème de synthèse dimensionnelle de mécanismes, la première étape consiste à ajouter un trièdre à cette *3DPart*, superposé à son repère local de référence. Ce trièdre, noté origine, participera ensuite à la définition d'une liaison cinématique entre cette pièce et une autre.

Ensuite, pour chaque nouvelle liaison impliquant cette pièce, un nouveau trièdre est ajouté à la *3DPart*. Comme mentionné au chapitre 3, ce nouveau trièdre est positionné et orienté par rapport à un de ceux déjà ajoutés à la *3DPart* grâce à quatre valeurs géométriques : deux longueurs et deux angles.

Enfin, un segment de droite est ajouté reliant l'origine de chaque nouveau trièdre à celui qui a servi de référence à sa construction. Le corps des pièces

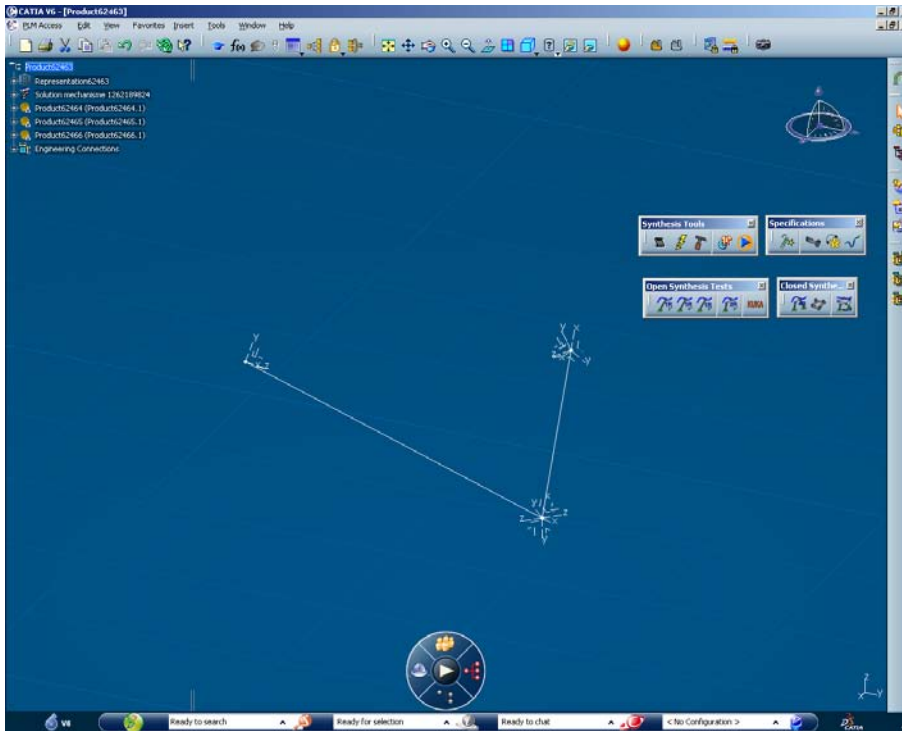


FIG. 6.13 : Squelette du premier mécanisme proposé

est ainsi matérialisé par un ensemble de segments de droites connectés par au moins une de leurs extrémités.

Une fois que chaque $3DPart$ est créée avec les éléments géométriques nécessaires à sa représentation (les trièdres et les segments de droites), chacune des liaisons cinématiques déclarées dans le problème de synthèse dimensionnelle de mécanismes est exprimée sous forme de contraintes géométriques mettant en relation deux trièdres appartenant à deux $3DPart$. Dans le cas des liaisons élémentaires (complète, conique, prismatique ou cylindrique), un ensemble de trois contraintes est déclaré :

1. alignement (même direction et même sens) entre les deux troisièmes vecteurs des deux trièdres concernés,
2. distance entre les deux origines des deux trièdres concernés orientée selon le sens du troisième vecteur de ces trièdres,
3. angle entre les deux premiers vecteurs des deux trièdres concernés orienté par le sens du troisième vecteur de ces trièdres.

Comme pour la construction du squelette des pièces, la déclaration de ces contraintes nécessite la connaissance d'une longueur et d'un angle.

Il faut noter que, suivant le type de liaison cinématique, les valeurs associées aux contraintes géométriques peuvent varier, notamment en fonction de la

position à atteindre par l'effecteur. Par exemple, pour une liaison prismatique (liaison glissière), la distance dépend de la position considérée alors que l'angle reste toujours constant. Les angles et les distances sont alors soit contrôlés, soit le résultat de l'analyse géométrique.

Construction automatique du mécanisme

La construction automatique du squelette s'accompagne aussi de la déclaration d'un mécanisme au sens de l'atelier mécanique (*Mechanical Workshop*). La création des liaisons cinématiques (figure 6.14) correspondant au problème spécifié par l'utilisateur s'appuie sur les éléments géométriques et les contraintes récemment créés. Le nouveau mécanisme apparaît alors dans l'arbre de spécification (voir figure 6.15) et permet à l'utilisateur d'analyser la trajectoire du mécanisme proposé.

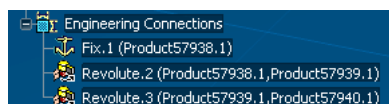


FIG. 6.14 : Liaisons cinématiques du mécanisme construit

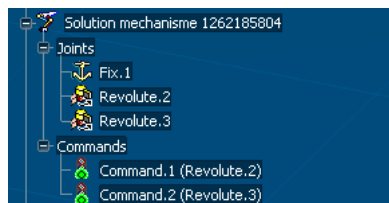


FIG. 6.15 : Description finale du mécanisme CATIA à simuler

Habillage des pièces

L'application propose aussi un habillage volumique par défaut pour chacune des pièces du mécanisme. Il est ainsi possible de visualiser les mécanismes créés (cf. figure 6.16) et de mieux se rendre compte de leur mouvement.

Cette étape est néanmoins facultative. En effet, l'utilisateur peut s'appuyer sur le modèle filaire pour définir un modèle volumique personnalisé. Il est aussi possible d'envisager que l'utilisateur définisse ses propres patrons par défaut pour l'habillage des pièces.

6.2.5 Simulation

Afin de pouvoir réaliser une simulation cinématique dans CATIA V6, il est nécessaire de connaître le mécanisme mais aussi les lois de commande des différentes liaisons motrices. Ces lois permettent de relier les valeurs des variables cinématiques des liaisons aux positions. Il est donc nécessaire de définir les liaisons motrices et les liaisons menées. Ceci a été fait pour chaque liaison au

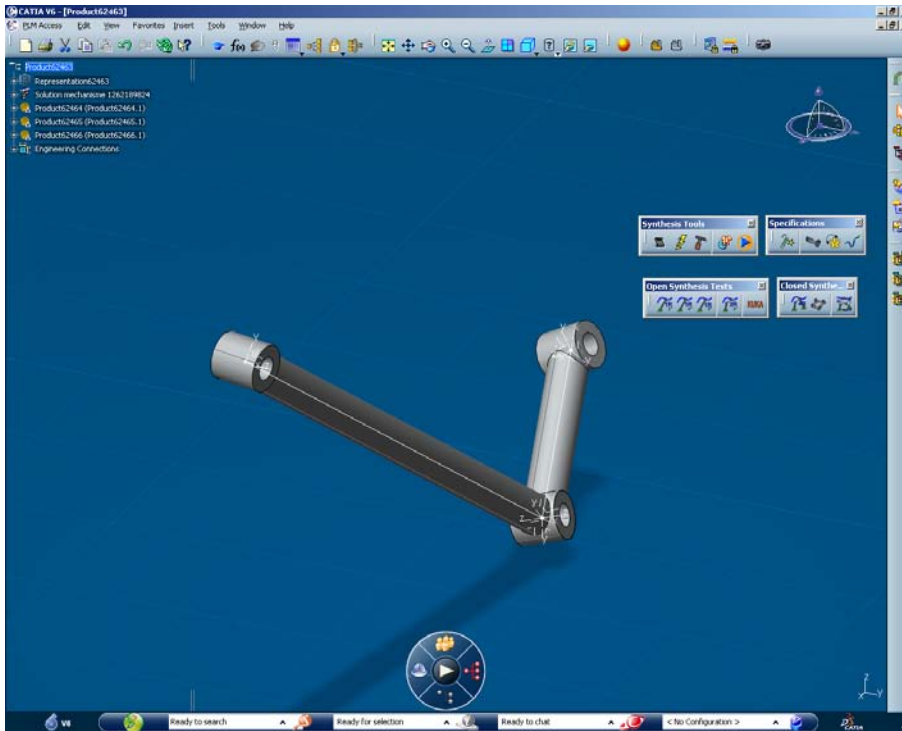


FIG. 6.16 : Vue volumique proposée par défaut pour les mécanismes

moment de sa spécification et cette information a été utilisée lors de la création des liaisons cinématiques du mécanisme.

Rappelons également que la phase de résolution a permis d'obtenir, en plus des valeurs des variables géométriques, la valeur des variables cinématiques pour chaque position. Elles sont données dans le tableau 6.3 qui liste les valeurs des commandes des deux liaisons pivots pour chacune des cinq positions.

	Position				
	1	2	3	4	5
γ_1 (rad)	5,017	5,541	6,064	6,588	7,111
γ_2 (rad)	3,491	4,015	4,539	5,062	5,586

TAB. 6.3 : Valeurs des commandes des liaisons cinématiques du cas 2R considéré

Nous disposons ainsi d'autant de valeurs discrètes pour les commandes des liaisons cinématiques que de positions dans la spécification du problème de synthèse dimensionnelle de mécanismes (voir les illustrations de la figure 6.17). Cependant, pour obtenir une simulation continue, il est nécessaire d'interpoler ces valeurs entre les différentes positions. A défaut de méthode d'analyse cinématique, la simulation permet de valider le fait que le mécanisme puisse atteindre l'ensemble des solutions par un seul mouvement continu.

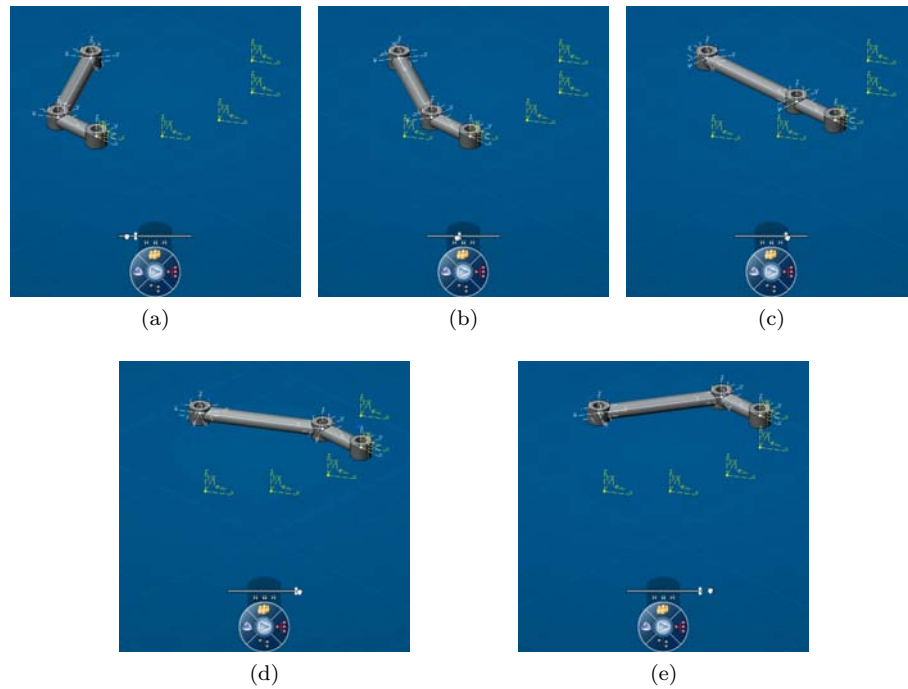


FIG. 6.17 : Positions du mécanisme pour chaque spécification

La solution retenue pour interpoler ces valeurs consiste à chercher un polynôme de degré égal au nombre de points à interpoler qui passe par l'ensemble des points. Dans ce cas précis, l'application génère les deux lois de commande suivantes

$$\begin{aligned} \gamma_1 : [0, 1] &\mapsto \mathbb{R} \\ t &\rightarrow -0,04267t^4 + 0,08533t^3 - 0,05333t^2 + 2,105t + 5,017 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \gamma_2 : [0, 1] &\mapsto \mathbb{R} \\ t &\rightarrow 0,0320t^4 - 0,05867t^3 + 0,03000t^2 + 2,092t + 3,491, \end{aligned}$$

qui permettent d'obtenir les valeurs du tableau 6.3 pour $t \in \{0, 0,25, 0,5, 0,75, 1\}$.

6.3 Bras robotisé à trois liaisons pivot (3R)

Pour notre deuxième exemple, nous considérons un manipulateur spatial de type 3R, c'est-à-dire comportant quatre pièces dont le bâti et trois liaisons pivot. Ce type de bras robotisé est plus intéressant d'un point de vue fonctionnel que le précédent car il dispose d'un espace de travail plus étendu. De plus, cet exemple a été largement étudié [75, 76, 77, 78]. D'ailleurs, pour ce cas, nous avons repris les données utilisées par Lee *et al.* [76] pour définir une tâche de génération de mouvement. Ces spécifications sont rappelées dans le tableau 6.4.

	Position			Orientation		
	x	y	z	α	β	γ
1	8,311	-1,994	4,526	1,784	-2,668	0,883
2	8,462	3,909	3,781	1,547	0,582	1,019
3	8,213	4,721	1,906	1,625	2,109	1,897
4	6,610	-0,979	7,933	1,123	-2,682	1,066
5	7,499	-2,362	-0,580	1,398	2,213	0,706

TAB. 6.4 : Spécifications des cinq points de passage et des orientations associées pour le cas 3R

Nous pouvons remarquer que, contrairement à la tâche définie dans l'exemple précédent, les points de passage spécifiés définissent un mouvement dans l'espace et permettent donc d'étudier un cas tridimensionnel aussi bien pour le mécanisme que pour la tâche.

Par ailleurs, il est important de signaler que, dans ce cas précis (cas 3R avec base non fixée), la spécification d'une tâche de type génération de mouvement à cinq positions permet de définir un problème admettant un nombre fini de solutions.

À partir du problème ainsi déclaré, un système d'équations faisant apparaître trente variables est généré. Parmi ces variables, quinze sont des variables géométriques (six représentent des angles et neuf des longueurs) et quinze sont des variables cinétiques (cinq positions pour la tâche à effectuer et trois angles pour les liaisons pivots).

Nous avons cherché vingt-quatre points minimisant la fonction objectif issue de ce système d'équations avec la stratégie proposée mais nous n'avons retenu que les neuf meilleures solutions. Le tableau 6.5 récapitule les valeurs de la fonction objectif pour ces neuf solutions et précise la distance maximum entre le point effecteur de l'outil et les cinq points de passage.

	Figure	f	d
1	6.20a	$1,4277767864 \cdot 10^{-8}$	$6,750157772 \cdot 10^{-7}$
2	6.20b	$6,8688526209 \cdot 10^{-2}$	$7,080840846 \cdot 10^{-5}$
3	6.20c	$9,7919601202 \cdot 10^{-2}$	$7,979750827 \cdot 10^{-5}$
4	6.20d	$1,6755226273 \cdot 10^{-1}$	$1,271579277 \cdot 10^{-4}$
5	6.20e	$2,2647343217 \cdot 10^{-1}$	$1,027116946 \cdot 10^{-4}$
6	6.20f	$3,7094249825 \cdot 10^{-1}$	$8,267449843 \cdot 10^{-5}$
7	6.20g	$3,8235265062 \cdot 10^{-1}$	$8,442317120 \cdot 10^{-5}$
8	6.20h	$3,9531662360 \cdot 10^{-1}$	$9,470790271 \cdot 10^{-5}$
9	6.20i	$4,1405548610 \cdot 10^{-1}$	$9,908287444 \cdot 10^{-5}$

TAB. 6.5 : Valeur finale de la fonction objectif à minimiser et maximum des minima des distances du point effecteur aux points de la spécification pour les neuf meilleures solutions obtenues

Parmi les neuf mécanismes proposés, le point effecteur du premier passe particulièrement proche des points spécifiés. Il est intéressant de noter que cette

solution est également très proche d'une des six solutions obtenues par Lee *et al.* [76, solution #4] avec une méthode par intervalles après cinq jours de calculs. A titre de comparaison, notre stratégie de résolution rend :

- une solution à 10^{-6} en 83,8 secondes lorsque l'on demande six résultats
- et une solution à 10^{-8} en 179 secondes lorsque l'on demande vingt-quatre résultats.

Dans notre cas, les temps indiqués sont obtenus sur une machine disposant d'un processeur Intel® Xeon® (Gainestown) E5530 annoncé à 2.40 GHz.

Ce mécanisme, correspondant à la meilleure solution, est illustré par la figure 6.18 qui le représente à chaque point de passage de la spécification.

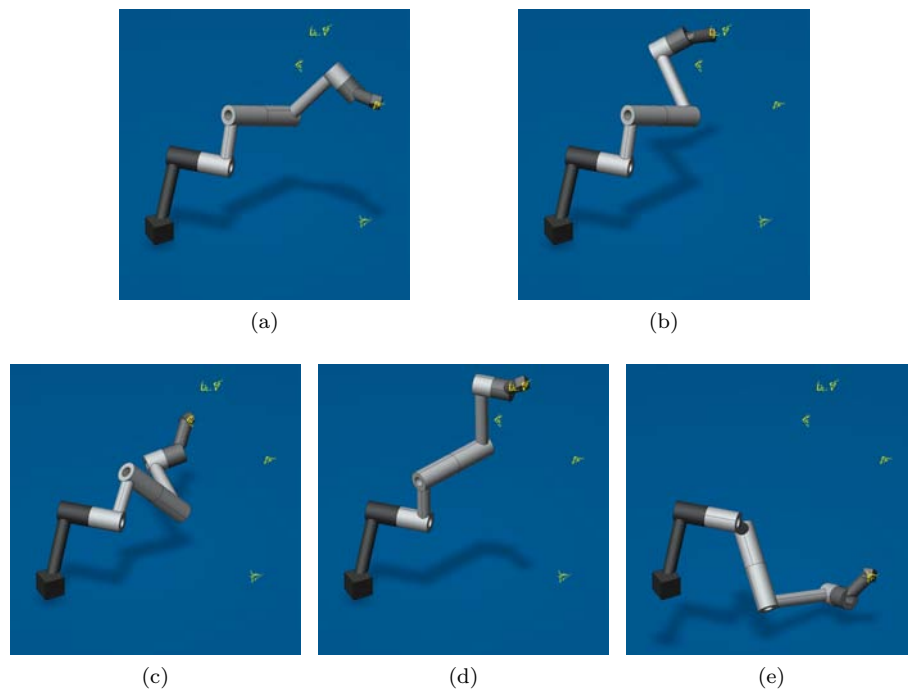


FIG. 6.18 : Positions du meilleur mécanisme pour chaque spécification

Pour visualiser le mouvement de ce mécanisme, il est nécessaire d'établir la loi de commande pour chacune des liaisons pivot. Comme pour l'exemple précédent, nous utilisons une interpolation polynomiale entre les différents instants et les différentes valeurs de la commande (cf. tableau 6.6).

Il est intéressant de noter que les trajectoires de l'effecteur, en dehors des points spécifiés, sont grandement influencées par l'ordre des positions considérées pour interpoler les commandes. Avec cinq positions, il est possible de définir 120 commandes. Six trajectoires obtenues avec six commandes parmi les 120 possibles sont illustrées à la figure 6.19 pour le mécanisme associé à la meilleure solution.

	Position				
	1	2	3	4	5
γ_1 (rad)	1,048	1,047	0,523	1,571	-0,784
γ_2 (rad)	0,785	-0,785	-0,784	0,001	0,785
γ_3 (rad)	1,048	-1,048	1,047	1,047	1,572

TAB. 6.6 : Valeurs des commandes des liaisons cinématiques pour la meilleure solution du cas 3R considéré

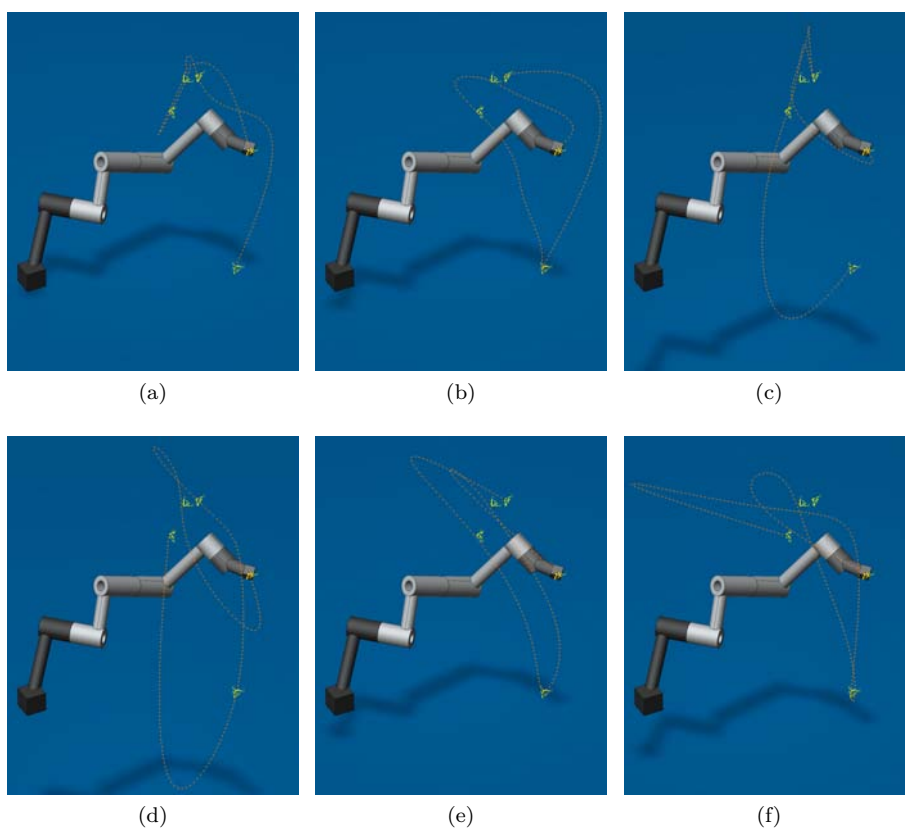


FIG. 6.19 : Différentes lois de commande associées à la meilleure solution (6 lois sur 120 possibles)

Les dimensions caractéristiques des autres mécanismes solutions sont données dans le tableau 6.6. Les illustrations de la figure 6.20 montrent ces neuf mécanismes dans la configuration correspondant à la première position de la spécification.

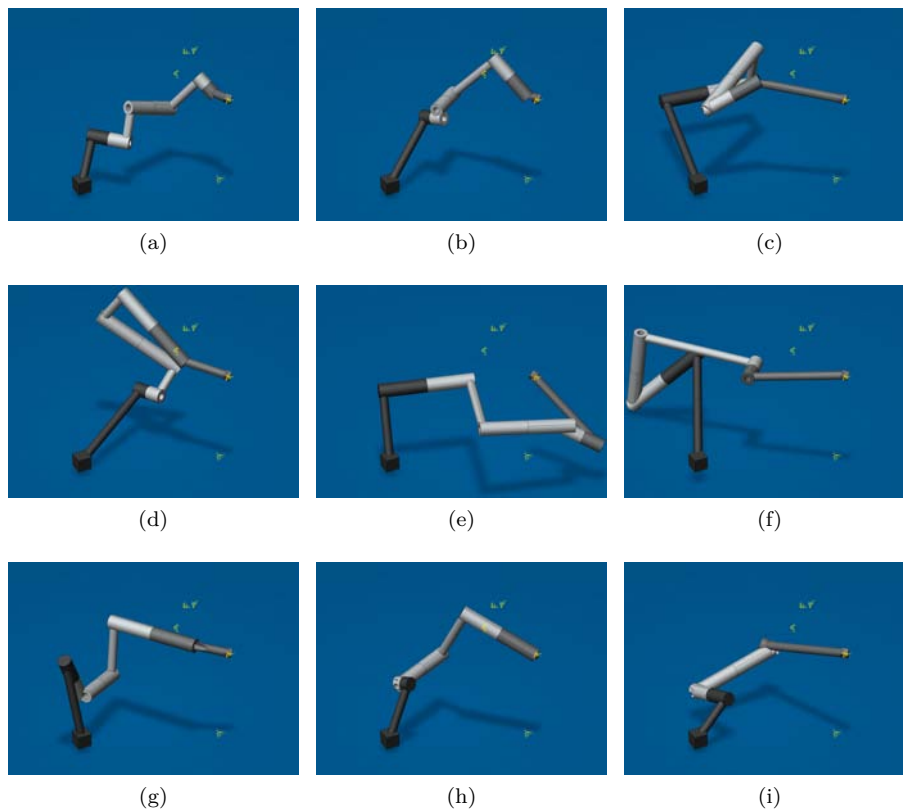


FIG. 6.20 : Mécanismes pour les neuf meilleures solutions (première position)

6.4 Mécanisme plan à quatre barres

Le troisième et dernier exemple correspond à un mécanisme quatre barres plan. Il est constitué de quatre bielles reliées deux à deux par des liaisons pivot. Les axes des quatre liaisons sont tous parallèles. Cet exemple montre simultanément la spécification d'un mécanisme comportant une boucle topologique et l'ajout d'une contrainte géométrique sur le mécanisme. La présence d'une boucle topologique implique que seule une des quatre liaisons cinématiques constituant cette boucle doit être commandée. L'utilisateur peut, comme pour les exemples précédents, choisir la liaison motrice.

Nous considérons une tâche de type génération de mouvement, spécifiée par quatre repères (avec toujours la même orientation pour ce cas particulier). Les valeurs numériques associées à la tâche sont spécifiées dans le tableau 6.8.

	Bâti			Pivot 1		Pièce A		Pivot 2		Pièce B		Pivot 3		Outil			
	z	γ	x	α	z	x	α	z	x	α	z	x	α	z	γ	x	α
1	1,999	0,785	1,999	1,571	2,002	2,000	1,049	2,999	2,999	-1,048	1,000	1,002	1,047	1,002	1,047	1,002	0,524
2	2,631	0,469	3,525	1,247	1,093	0,624	-1,367	-1,778	3,999	1,571	2,602	0,666	-2,161	0,050	-2,161	0,050	-0,512
3	1,574	1,415	6,103	1,571	5,000	3,599	0,703	-4,932	0,050	0,747	3,099	5,000	-2,135	0,050	-2,135	0,050	0,692
4	1,646	0,473	5,629	1,468	1,249	2,018	0,770	-5,000	2,434	-0,347	5,000	2,717	1,169	0,757	1,169	0,757	0,497
5	3,444	1,274	2,103	1,556	4,998	4,726	-0,100	5,000	1,288	0,488	1,996	-5,000	2,510	1,813	2,510	1,813	-0,162
6	2,891	1,114	6,329	0,808	-4,975	0,052	-0,723	4,827	6,777	-1,571	-1,261	5,000	2,071	2,610	2,071	2,610	-1,495
7	4,656	1,904	1,239	-0,389	-2,909	0,516	1,023	-2,856	3,378	1,571	5,000	2,113	2,595	0,050	2,595	0,050	0,481
8	2,864	0,426	1,663	1,222	-0,554	0,050	-1,571	3,551	4,187	-1,240	4,395	0,137	0,900	0,050	0,900	0,050	0,396
9	1,691	0,276	2,164	1,262	-2,586	0,050	-1,269	5,000	0,050	-1,021	-0,464	5,000	1,114	3,858	1,114	3,858	0,341

TAB. 6.7 : Dimensions caractéristiques du mécanisme pour les neuf meilleures solutions obtenues

	Positions			Orientations		
	x	y	z	α	β	γ
1	100,6217783	125,0000000	0	2,094395102	0	0
2	75,0000000	150,6217783	0	2,094395102	0	0
3	40,0000000	160,0000000	0	2,094395102	0	0
4	5,0000000	150,6217783	0	2,094395102	0	0

TAB. 6.8 : Spécifications des quatre points de passage et des orientations associées pour le cas quatre barres

Le système d'équations correspondant à cet exemple comporte 36 variables. Parmi ces variables, 20 sont des variables géométriques (8 représentent des angles et 12 des longueurs) et 16 sont des variables cinétiques (quatre positions pour la tâche à effectuer et quatre angles pour les liaisons pivots).

La résolution de ce problème avec la stratégie proposée est immédiate. Le mécanisme présenté aux figures 6.21 (habillage par défaut) et 6.22 (autre habillage) correspond à la première solution du tableau 6.9. Bien entendu, d'autres solutions peuvent être proposées par le système. Quatre d'entre elles sont d'ailleurs données dans le tableau 6.9. Nous pouvons aussi remarquer que les quatre points rendus sont relativement proches les uns des autres dans l'espace de recherche et sont moins satisfaisants que le premier.

	Figure	f	x_1	x_2	x_3	x_4
1	6.21 et 6.22	$2,385 \cdot 10^{-1}$	59,28	20,99	185,0	-152,13
2	6.23a	$7 \cdot 10^{-1}$	170	185	210	140
3	6.23b	$2 \cdot 10^{+1}$	180	185	200	130
4	6.23c	$9 \cdot 10^{-1}$	175	185	190	145
5	6.23d	$1 \cdot 10^0$	165	185	215	135

TAB. 6.9 : Ensemble de solutions pour le mécanisme à quatre barres considéré

Les mécanismes correspondant à ces quatre solutions sont représentés à la figure 6.23. Il sont tous présentés dans la configuration correspondant à la première position spécifiée par la tâche.

Le tableau 6.10 fournit les valeurs de l'angle pour la liaison pivot contrôlée.

	Position			
	1	2	3	4
γ_1 (rad)	0,532	0,680	1,334	0,000

TAB. 6.10 : Valeurs de la commande pour la liaison motrice du cas quatre barres considéré

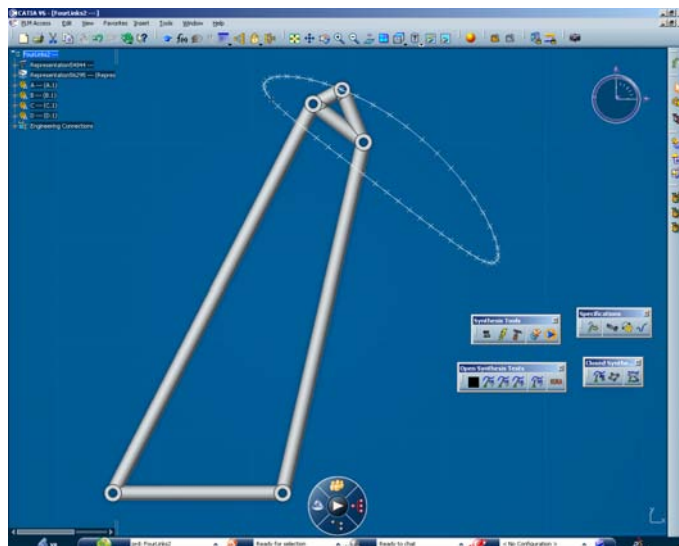


FIG. 6.21 : Vue avec l'habillage par défaut du mécanisme et de la trajectoire du point effecteur

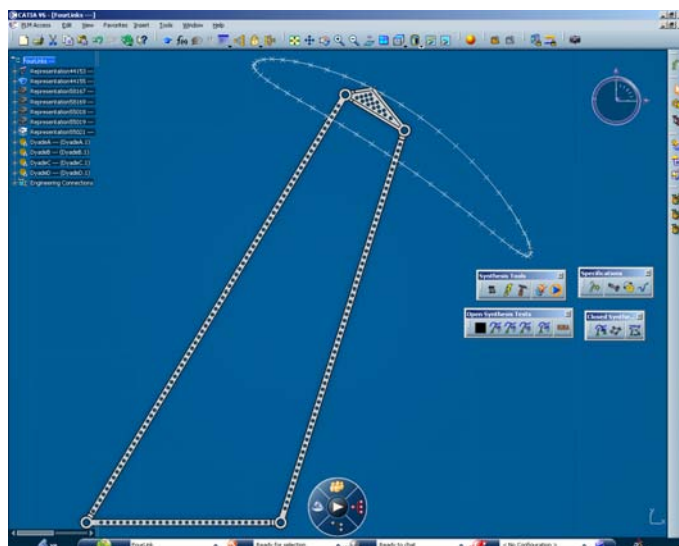


FIG. 6.22 : Vue avec un habillage personnalisé du mécanisme et de la trajectoire du point effecteur

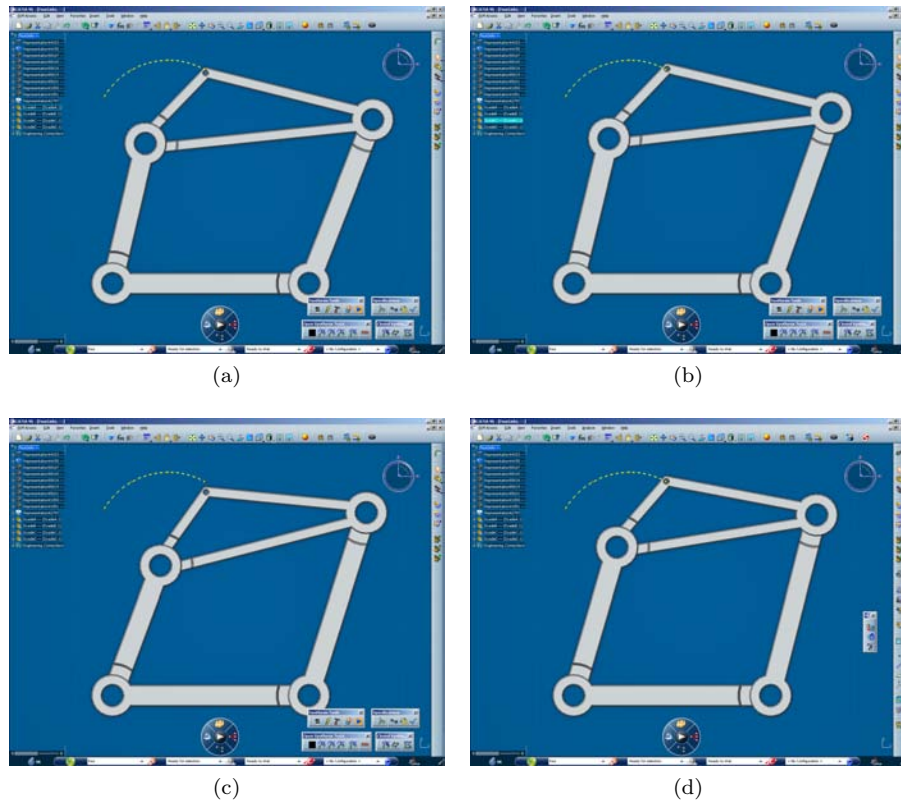


FIG. 6.23 : Autres solutions acceptables

6.5 Conclusion

L'application de synthèse dimensionnelle de mécanismes mise en œuvre permet actuellement de spécifier des problèmes quelconques (mécanismes sériels ou parallèles, plans ou spatiaux) et de les traiter efficacement grâce à une stratégie hybride d'optimisation. Il est aussi possible de visualiser dans l'atelier proposé un mécanisme solution et de vérifier son adéquation à la tâche spécifiée en procédant à une analyse cinématique. Trois exemples simples (un 2R et un 3R spatiaux et sériels, un 4R plan et parallèle) ont permis d'illustrer l'état d'avancement du prototype actuel, complètement intégré à CATIA V6, et de détailler l'approche retenue sur des exemples concrets.

Les limites actuelles du démonstrateur ont aussi été mentionnées. Ainsi, malgré l'obtention de plusieurs solutions acceptables, un seul mécanisme est pour l'instant affiché. De plus, le prototype d'application développé ne prend pas encore en compte toutes les contraintes géométriques que nous souhaiterions utiliser afin de déclarer des problèmes plus complexes.

Quatrième partie
Conclusion générale

Chapitre 7

Conclusion

Dans ce travail, nous nous sommes intéressés à la synthèse dimensionnelle de mécanismes dans le but de proposer un cadre de travail ouvert capable de traiter des problèmes faisant intervenir des mécanismes plans ou spatiaux, sériels ou parallèles et comportant un nombre quelconque de pièces et de liaisons cinématiques. L'approche envisagée a également pour objectifs de proposer plusieurs solutions acceptables aux problèmes considérés et de s'intégrer facilement dans un environnement de CAO.

Bilan

Après avoir présenté la synthèse de mécanismes et plus particulièrement les caractéristiques des problèmes de synthèse dimensionnelle, nous avons dressé un état de l'art des méthodes de résolution qui ont été développées. Ce premier chapitre a ainsi permis de mettre en évidence, d'une part, la variété des problèmes à envisager et les difficultés liés à leur spécification et, d'autre part, le nombre important de techniques de résolution adaptées, en général, seulement à des classes de problèmes de conception particuliers.

Dans le deuxième chapitre, nous avons proposé une spécification déclarative des problèmes de synthèse de mécanismes pour le suivi de trajectoire et la génération de mouvements. Les différents éléments nécessaires à la description du mécanisme à dimensionner et des tâches à accomplir ont été précisés et listés.

Enfin, nous avons montré qu'une spécification déclarative par contraintes de ces classes de problèmes facilite la description des mécanismes et permet de compléter et de modifier simplement les cas considérés. Les points communs ainsi que les différences de cette modélisation par rapport à celles disponibles dans les outils de positionnement et de dimensionnement d'objets et de simulation cinématique ont aussi été évoqués.

A partir des spécifications fournies par l'utilisateur, l'outil de synthèse modélise (chapitre 3) les problèmes de synthèse dimensionnelle par un graphe cinématique adjoint dont les nœuds correspondent à des liaisons pivot-glissant et les arcs aux différents corps des pièces. Nous avons montré que ce modèle permet de représenter des mécanismes quelconques et d'intégrer les tâches et les

contraintes géométriques considérées précédemment. Ce graphe cinématique adjoint permet ensuite de créer un squelette géométrique paramétrique. Ce squelette représente les différents éléments géométriques caractéristiques des pièces et des liaisons par des structures filaires.

Une convention, proche de celle de Denavit-Hartenberg, permet d'identifier les paramètres à associer à ce squelette afin de positionner les éléments les uns relativement aux autres. Une fois les valeurs des paramètres déterminées, il devient possible de créer automatiquement le squelette d'un mécanisme répondant au mieux à la tâche spécifiée.

Fort de ce modèle interne, nous avons ensuite proposé une méthode automatique de mise en équations (chapitre 4) basée sur l'expression des boucles structurelles et cinématiques. La complexité des équations polynomiales générées est contrôlée et peut être déterminée à l'avance en étudiant la représentation du problème par le modèle interne proposé. Le choix réalisé au niveau du paramétrage du squelette contribue aussi à obtenir une même formulation pour deux problèmes isométriques, contrairement à des approches basées sur des coordonnées cartésiennes.

De plus, la mise en équation proposée permet de distinguer les équations relatives aux contraintes structurelles du mécanisme de celles décrivant la tâche à effectuer. Il est alors possible d'exprimer le problème de synthèse dimensionnelle comme un problème d'optimisation sous contraintes. L'intérêt de cette formulation est qu'elle permet, dans le cas où il n'existe pas de solution au problème posé, de trouver des mécanismes qui approchent, dans un certain sens, la tâche à effectuer.

Pour traiter les systèmes d'équations non-linéaires obtenus, nous avons développé une stratégie qui combine des techniques de simplification formelle et une méthode hybride d'optimisation. Les méthodes de simplification employées ont pour objectifs de réduire le nombre de variables et d'équations à considérer et de rendre le traitement des systèmes plus facile, en diminuant, si possible, les domaines de recherche. La méthode hybride d'optimisation mise en place se concentre sur la recherche de plusieurs minima locaux au problème de synthèse et non sur la recherche du minimum global. De cette façon, il sera souvent possible de rendre plusieurs solutions.

L'absence de point initial (pas d'esquisse du mécanisme) nous a conduit à développer une méthode d'optimisation globale à population basée sur la méthode globale par essais particuliers. L'algorithme d'optimisation par essais particuliers est alors chargé d'explorer l'espace de recherche et de fournir plusieurs points initiaux à l'algorithme d'optimisation locale de Nelder-Mead. Ces points sont obtenus à partir d'une segmentation par nuées dynamiques des particules après un nombre d'itérations donné. Plusieurs processus d'optimisation locale, basés sur la méthode de Nelder-Mead, exploitent ensuite ces points de manière concurrente. Cette stratégie permet d'améliorer considérablement la robustesse de chacune des méthodes prises indépendamment et d'améliorer les temps de calculs lorsque les architectures utilisées peuvent exécuter plusieurs processus en parallèle. A l'issue de la résolution numérique des systèmes d'équations, plusieurs configurations peuvent être proposées à l'utilisateur qui pourra sélectionner la meilleure solution d'après ses critères.

Les différents travaux effectués dans cette thèse en CIFRE ont permis de mettre en place un prototype d'application de synthèse dimensionnelle de mécanismes dans l'environnement CATIA V6. Ce démonstrateur avait pour objectif de valider la démarche de conception proposée et de permettre l'interaction entre le concepteur et les solutions mises en avant. Nous avons montré qu'il était possible de spécifier des problèmes classiques de suivi de trajectoire et de génération de mouvement et de les traiter efficacement avec l'approche proposée. L'intégration dans un logiciel de CAO industriel nous a aussi permis de bénéficier d'outils de construction paramétrique de géométries et d'analyse cinématique performants qui nous ont aidé à visualiser les solutions obtenues.

Perspectives

Au terme de ce travail, les perspectives envisagées sont nombreuses. Certains aspects abordés méritent d'être complétés, d'autres ouvrent la voie à plusieurs axes de recherche.

A court terme, il nous semble important de continuer à améliorer la mise en équation des problèmes de synthèse considérés afin de rendre leur résolution encore plus robuste et performante. Deux pistes en particulier doivent, à notre avis, être explorées. Pour diminuer les dimensions des systèmes d'équations, il faudrait sans doute essayer de dissocier autant que possible la détermination des dimensions des pièces de la recherche des lois de commande des liaisons. Les systèmes d'équations pourraient aussi être simplifiés considérablement en développant des méthodes ombrales [125] adaptées aux types d'équations générées.

Par ailleurs, l'utilisation d'autres méthodes de résolution numériques capables de fournir plusieurs solutions et exploitant la programmation massivement parallèle peut se révéler intéressante. Par exemple, la méthode de résolution par intervalles proposée par Fünfzig *et al.* [47] semble pouvoir profiter avantageusement de la programmation de type *General-Purpose Computing on Graphics Processing Units* (GPGPU) et peut probablement être modifiée pour traiter des problèmes d'optimisation.

Enfin, il faudrait mener des réflexions sur la manière de présenter les différentes solutions potentielles à un problème de synthèse dimensionnelle de mécanismes à l'utilisateur pour lui permettre d'effectuer un choix pertinent et de continuer la conception du mécanisme. Il semble surtout nécessaire d'associer à ces solutions des indicateurs qualitatifs qui pourraient aider l'utilisateur à naviguer parmi les mécanismes proposés.

Il est aussi possible d'élargir le champ des problèmes traités en investiguant différentes directions. Une première consiste à compléter l'ensemble des contraintes que le système peut traiter, notamment en proposant des contraintes paramétriques qui permettraient de traiter simultanément la réunion de plusieurs problèmes de synthèse dimensionnelle de mécanismes corrélés entre eux (problème récurrent pour des cellules robotiques où un robot doit poser un objet dans une position atteignable par un autre robot). Il est aussi possible

d'envisager d'autres types de tâches comme la corrélation de paramètres cinématiques d'un mécanisme suivant une loi déterminée ou les problèmes de suivi de trajectoire ou de génération de mouvement dépendants du temps. Enfin, il serait intéressant de traiter des problèmes prenant en compte l'environnement (par exemple pour éviter les collisions) ou la dynamique et qui nécessitent la connaissance des modèles volumiques des pièces du mécanisme.

Cinquième partie

Annexes

Annexe A

Le critère de Grashof

Nous avons mentionné à plusieurs reprises que les dimensions géométriques d'un mécanisme pouvaient influencer la nature des mouvements réalisables par celui-ci. Plus précisément, ce sont les rapports entre les différentes dimensions qui déterminent la nature des mouvements obtenus. Il n'existe malheureusement pas d'étude générique permettant de définir directement la relation entre les mouvements et les rapports des dimensions géométriques des mécanismes. Cependant, certains mécanismes ont été complètement analysés car ils sont très largement utilisés. Particulièrement, dans le cadre restreint des mécanismes plans à quatre bielles et quatre liaisons pivot, il existe un critère permettant de définir des classes de mécanismes. Ce type de mécanisme présente un degré de liberté et ces classes distinguent les mécanismes pouvant être commandés par un mouvement circulaire continu. Ce critère est attribué à Grashof [23] et nous allons le détailler.

Il convient, dans un premier temps, de donner quelques définitions. Une liaison pivot qui permet un mouvement complet et continu entre deux bielles est désignée par *manivelle*. Ce type de liaison convient particulièrement à des commandes de type moteur. Par contre, une liaison pivot qui ne permet qu'un mouvement partiel et oscillant entre deux bielles est désignée par *balancier* (ou *levier*).

Dans un mécanisme plan à quatre bielles et quatre liaisons pivot, une des bielles est nécessairement fixée à un référentiel. Cette bielle est qualifiée de *bâti* et deux des liaisons pivot définissent donc un mouvement par rapport à ce référentiel. La bielle qui n'est pas connectée à ces deux liaisons est qualifiée de *coupleur*.

Les quatre longueurs des bielles sont nommées ℓ_1 , ℓ_2 , ℓ_3 et ℓ_4 de telle sorte que

$$\ell_1 \leq \ell_2 \leq \ell_3 \leq \ell_4$$

et que le mécanisme puisse être assemblé, c'est-à-dire

$$\ell_1 + \ell_2 + \ell_3 \geq \ell_4.$$

Le critère de Grashof compare la somme des longueurs des bielles la plus petite et la plus grande ($\ell_1 + \ell_4$) à la somme des longueurs des deux bielles inter-

médiaires ($\ell_2 + \ell_3$). Il permet ainsi de reconnaître trois classes de mécanismes mais ne préjuge rien sur l'agencement des bielles et l'assemblage de celles-ci.

- La première classe de mécanismes correspond au cas où

$$\ell_1 + \ell_4 < \ell_2 + \ell_3.$$

Dans ce cas, les deux liaisons pivot associées à la bielle la plus courte sont de type manivelle. Les deux autres liaisons sont de type balancier. La nature définitive du mécanisme dépendra de l'inversion cinématique retenue, c'est-à-dire du choix de la bielle liée au référentiel (le choix du bâti). Si la plus petite des bielles est fixe, le mécanisme sera de type *mécanisme à double manivelle* (figure A.1b). Si le coupleur est fixe, le mécanisme sera de type *mécanisme à double balancier* (figure A.1d). Dans les deux autres cas, le mécanisme sera de type *mécanisme à manivelle et à balancier* (figures A.1c et A.1a).

- La deuxième classe de mécanismes correspond au cas où

$$\ell_1 + \ell_4 > \ell_2 + \ell_3.$$

Dans ce cas, les quatre liaisons pivot sont de type balancier. Quelque soit l'inversion cinématique, le mécanisme sera de type *mécanisme à double balancier*. (figures A.2).

- La dernière classe de mécanismes correspond au cas où

$$\ell_1 + \ell_4 = \ell_2 + \ell_3.$$

Dans ce cas, il n'est pas possible de prédire correctement le comportement du mécanisme. En effet, il existe des *points morts* qui aboutissent à une alternative dans le mouvement ou qui peuvent changer le type de mécanisme (d'un quatre barres fermé à un deux barres ouvert).

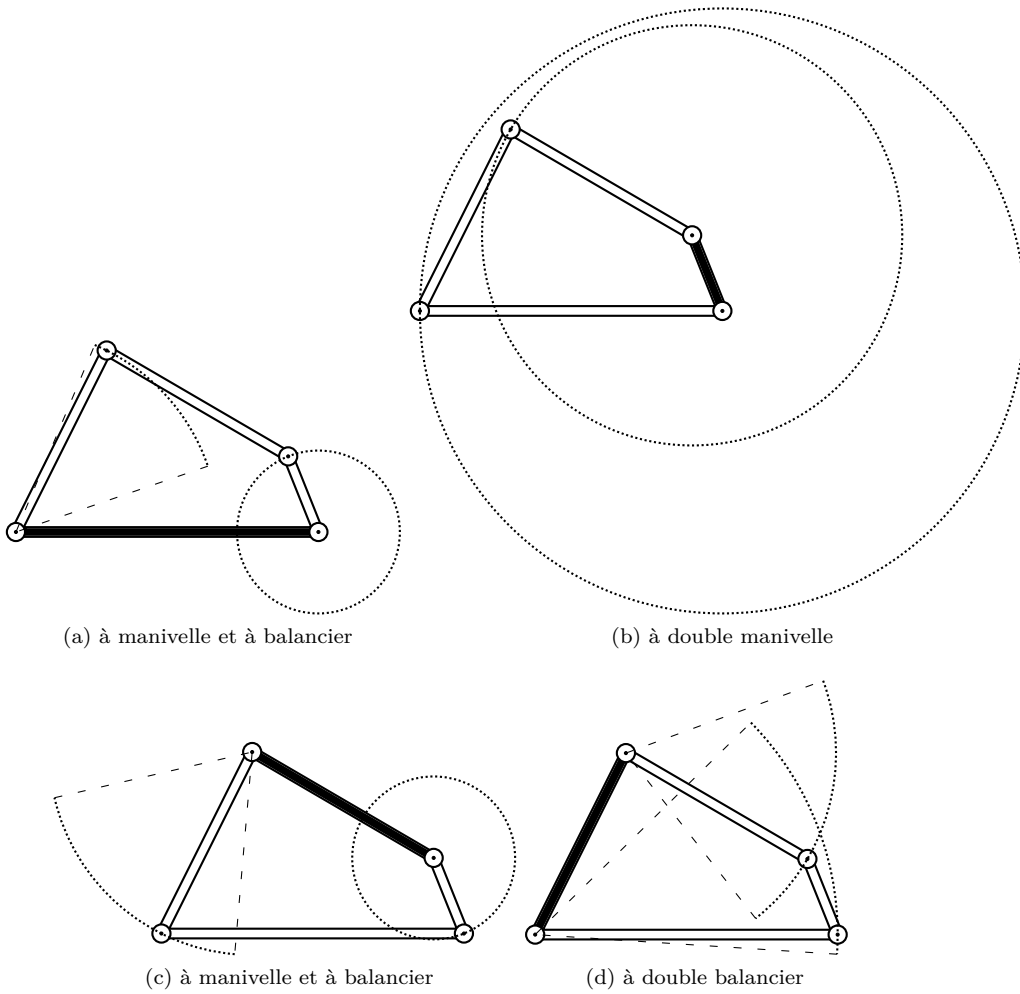


FIG. A.1 : Les quatre mécanismes obtenus par inversion cinématique d'un mécanisme respectant le critère de Grashof.

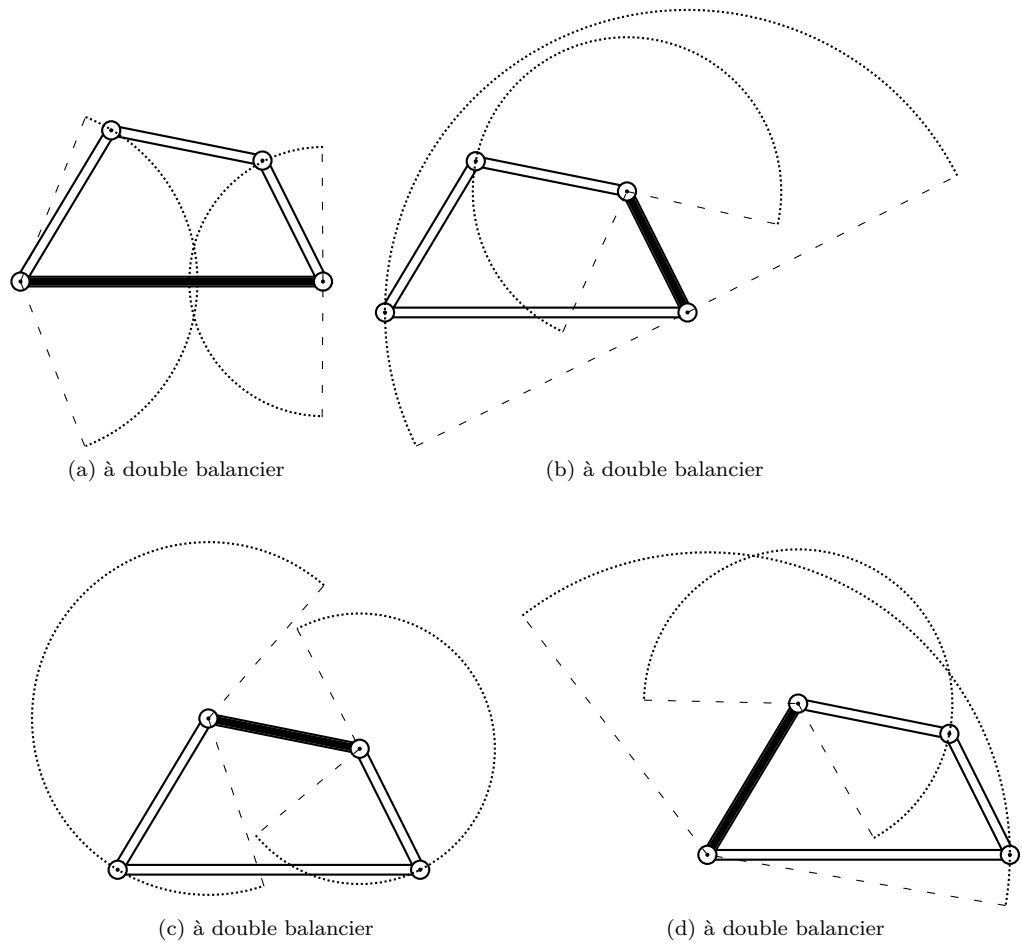


FIG. A.2 : Les quatre mécanismes obtenus par inversion cinématique d'un mécanisme ne respectant pas le critère de Grashof.

Annexe B

Éléments de comparaison de différentes mises en équations

B.1 Introduction

Ce chapitre présente le résumé des travaux menés pour comparer les mises en équations proposées par différentes méthodes utilisées pour la synthèse dimensionnelle de mécanismes. L'objectif est de comparer quantitativement et qualitativement les systèmes d'équations obtenus par ces méthodes.

Les méthodes abordées dans cette comparaison sont :

- une méthode basée sur les coordonnées naturelles (cf. 1.5.1) issue des travaux de Jimenez *et al.* [62],
- une méthode issue des travaux de Perez [113] utilisant une représentation basée sur les quaternions duaux,
- une méthode issue des travaux du LISMMA,
- une méthode dédiée au traitement du problème de synthèse abordé qui permet de fixer une borne inférieure aux dimensions des systèmes d'équations.

Plusieurs voies ont été envisagées suivant les méthodes étudiées.

Pour la méthode de Jiménez, il est possible de ne pas considérer les *variables muettes*. Par exemple, pour imposer une distance constante entre deux points (x_1, y_1) et (x_2, y_2) à deux instants différents, Jiménez introduit deux longueurs $\ell_1^2 = (x_{2,1} - x_{1,1})^2 + (y_{2,1} - y_{1,1})^2$ et $\ell_2^2 = (x_{2,2} - x_{1,2})^2 + (y_{2,2} - y_{1,2})^2$ puis l'égalité $\ell_2 = \ell_1$. Mais il est aussi possible d'imposer directement les deux égalités $\ell^2 = (x_{2,1} - x_{1,1})^2 + (y_{2,1} - y_{1,1})^2$ et $\ell^2 = (x_{2,2} - x_{1,2})^2 + (y_{2,2} - y_{1,2})^2$ ou encore la seule égalité $(x_{2,1} - x_{1,1})^2 + (y_{2,1} - y_{1,1})^2 = (x_{2,2} - x_{1,2})^2 + (y_{2,2} - y_{1,2})^2$. Les variables muettes (qui n'interviennent plus explicitement) peuvent ainsi être supprimées.

Pour le mécanisme à quatre barres plan, il est possible, après une étude de celui-ci, de définir les angles de trois des quatre liaisons pivot en fonction de l'angle de la quatrième et des longueurs des barres. Il est donc ainsi possible

de supprimer les trois variables cinématiques parmi quatre en les remplaçant par des expressions. Ce changement a des répercussion notamment sur les méthodes spécialisées dans le traitement des mécanismes plans.

Les comparaisons déductives sont basées sur deux tests : un mécanisme plan à quatre barres et quatre liaisons pivot et un bras robotisé à deux ou cinq liaisons pivot. Nous avons cherché à généraliser les résultats issus de ces cas à l'ensemble des mécanismes plans et spatiaux.

B.2 Mécanismes plans

Le mécanisme plan fermé à quatre barres est utilisé comme support. Quatre cas sont distingués suivant que la barre fixe du mécanisme est positionnée *a priori* ou pas et suivant la nature de l'objectif (trajectoire ou mouvement). Le tableau B.1 permet de nommer ces cas et de préciser pour chacun d'entre eux le nombre de spécifications nécessaire pour définir un problème iso-contraint.

		Mécanisme avec base fixée	Mécanisme avec base non fixée
Objectif	Trajectoire	Cas A iso : 5 points	Cas B iso : 9 points
	Mouvement	Cas C iso : 3 points	Cas D iso : 5 points

TAB. B.1 : Quatre barres plan

Le cas D est un problème bien connu et largement étudié. Il est désigné par *problème de Burmester à cinq positions* [19].

Le tableau B.2 donne des éléments de comparaisons des systèmes d'équations obtenues suivant les méthodes employées.

		Méthode Jimenez <i>et al.</i>		Méthode spécialisée générale (prise en compte du mécanisme)		D-H	Méthode dédiée
		avec variables muettes	sans variables muettes	sans analyse préalable	avec analyse préalable		
Taille du système d'équations (variables, équations)	A	$(5 + 4n, 5n)$	$(4n, 5(n - 1))$	$(9 + 4n, 4 + 5n)$	$(5 + n, 2n)$	$(5 + 8n, 9n)$	-
	B	$(10 + 4n, 5n + 1)$	$(4 + 4n, 5(n - 1))$	$(9 + 4n, 5n)$	$(9 + n, 2n)$	$(11 + 8n, 2 + 9n)$	-
	C	$(6 + 4n, 6n)$	$(4n, 6(n - 1))$	$(10 + 4n, 4 + 6n)$	$(6 + n, 3n)$	$(6 + 8n, 10n)$	(8, 8)
	D	$(11 + 4n, 6n + 1)$	$(4 + 4n, 6(n - 1))$	$(10 + 4n, 6n)$	$(9 + n, 3n)$	$(12 + 8n, 2 + 10n)$	-
Type d'équations	polynômes multi-variables d'ordre 2, couplage relativement faible entre les variables		polynômes multi-variables d'ordre 2, fonctions complexes à évaluer		polynômes multi-variables d'ordre 2		polynômes bi-variables d'ordre 2
Variables géométriques et cinétiques	pas de séparation des deux types de variables		bonne séparation des deux types de variables				
Caractéristiques du système	-	système creux diagonal par bande	-	-	séparation ambiguë		-
Couplage du problème dimensionnel et cinématique	pas de découplage		découplage possible		forme du système proche de celle actuelle		forme du système connue a priori
Optimisation numérique	pas d'objectif identifié dans les équations		objectif facilement identifiable dans les équations		pas de découplage		-
Remarques	les fermetures de boucles n'ont pas besoin d'être spécifiées		possibilité d'identifier des structures récurrentes, objets proches des objets utilisateur		cas limites difficilement pris en compte		toujours iso (n = 3)
	cas limites difficilement pris en compte		possibilité d'analyse formelle du mécanisme		nécessité d'ajouter (spécifications formelles) et de modifier (vecteurs mobiles) des éléments		nécessite un post traitement important
Généralisable à tous les mécanismes	généralisable		facilement généralisable		relativement généralisable		non généralisable

TAB. B.2 : Quatre barres : systèmes d'équations suivant les méthodes. (La GA n'est pas pertinente pour des problèmes plans : les directions des liaisons pivots sont connues a priori, il n'est pas utile de les modéliser, seul le scalaire serait utilisé.)

B.3 Mécanismes spatiaux

De la même façon que précédemment, le tableau B.3 précise le nombre de spécifications nécessaire pour obtenir un problème iso-contraint dans le cas des bras robotisés à deux (2R) ou cinq (5R) liaisons pivot. Il faut remarquer que tous les cas ne peuvent pas donner lieu à des problèmes iso-contraints car certains degrés de mobilités internes ne peuvent pas toujours être déterminés.

Mécanismes	Base	Objectif	
		Trajectoire	Mouvement
2R	Fixée	6	$1 < 7/4 < 2$
	Non fixée	11	3
5R	Fixée	*	16
	Non fixée	*	21

TAB. B.3 : Bras robotisé à n liaisons pivots : nombre de spécifications correspondant à des cas iso-contraints

Le tableaux B.4 donne les dimensions des systèmes d'équations dans le cas général et dans le cas iso-contraint. Le tableau B.5 précise certaines considérations sur ces systèmes d'équations.

		Méthode Jimenez <i>et al.</i>		Méthode prenant en compte le mécanisme		Méthode dédiée								
		sans variables muettes		Méthode Alba (variations)		LISMMA								
avec variables muettes														
2R	TF	T	$6 + 9n$	$10n$	$9n$	$6(n-1) + 4n$	$6 + 2(n-1)$	$2 + 3(n-1)$	$20n$	$23(n-1) + 10n$	$6 + 2n$	$3n$		
		M	$7 + 10n$	$14n$	$10n$	$7(n-1) + 7n$	54×60	16×17	$2 + 6(n-1)$	$20n$	120×175	18×18	$6n$	
	BF	T	$12 + 9n$	$1 + 10n$	$6 + 9n$	$1 + 6(n-1) + 4n$	degrés de mobilités internes non déterminables		$12 + 2(n-1)$	$4 + 3(n-1)$	$25n$	$23(n-1) + 5n$	$11 + 2n$	$3n$
		M	$13 + 10n$	$1 + 14n$	$6 + 10n$	$-6 + 7(n-1) + 7n$	111×111	105×105	32×34	$4 + 6(n-1)$	$25n$	275×285	33×33	$6n$
	3R	BF	T	$15 + 27n$	$25n$	$27n$	$15(n-1) + 10n$	$24 + 5(n-1)$	$8 + 3(n-1)$	$44n$	$55(n-1) + 5n$	$21 + 5n$	$3n$	
			M	$16 + 28n$	$29n$	$28n$	$16(n-1) + 13n$	degrés de mobilités internes non déterminables		$24 + 5(n-1)$	$8 + 6(n-1)$	$44n$	$55(n-1) + 10n$	$16 + 5n$
TF		T	$21 + 27n$	$1 + 25n$	$6 + 27n$	$1 + 15(n-1) + 10n$	464×464	448×448	98×98	$30 + 5(n-1)$	$55n$	704×985	96×96	$3n$
		M	$22 + 28n$	$1 + 29n$	$6 + 28n$	$1 + 16(n-1) + 13n$	degrés de mobilités internes non déterminables		$30 + 5(n-1)$	$10 + 3(n-1)$	$55n$	$55(n-1) + 5n$	$20 + 5n$	$3n$
			43×43		36×36		16×16		130×130		1155×1310		126×126	

TAB. B.4 : Bras robotisé : dimension des systèmes d'équations en fonction des méthodes pour n points de passage.

Type d'équations	Méthode Jimenez <i>et al.</i>		méthode prenant en compte le mécanisme			méthode dédiée
	avec variables muettes	sans variables muettes	quaternions duaux		LISMMA	
			absolue	relatif		
	polynômes multi-variables d'ordre deux		degré maîtrisé	polynômes de degré élevé	polynômes de degré très élevé	polynômes multi-variables
Caractéristiques du système	taille des équations (nombre de monômes) parfaitement maîtrisée		taille des équations (nombre de monômes) non limitée			toutes les équations ont une forme déterminée
Optimisation numérique	pas d'objectif identifié dans les équations		objectif relativement bien identifié			-
Variables géométriques et cinétiques	pas de séparation des deux types de variables		séparation claire		séparation possible	séparation claire
Couplage du problème dimensionnel et cinématique	pas de découplage		-	découplage envisageable	-	-
Remarques	gestion de la chiralité délicate		chiralité prise en compte			gestion de la chiralité délicate
Généralisable à tous les mécanismes		généralisable	facilement généralisable			non généralisables

TAB. B.5 : Bras robotisé : systèmes d'équations en fonction des méthodes.

Annexe C

Approximations polynômiales des fonctions sinus et cosinus

Cette annexe a été supprimée pour des raisons de confidentialité relatives à Dassault Systèmes.

Bibliographie

- [1] Particle Swarm Central. URL <http://www.particleswarm.info>. 35, 89
- [2] S. AIT-AOUDIA, R. JEGOU et D. MICHELUCCI : Reduction of constraint systems. In *Proceedings of the Compugraphics Conference*, pages 83–92, Alvor, Portugal, 1993. 86
- [3] R. AKHRAS et J. ANGELES : Unconstrained nonlinear least-square optimization of planar linkages for rigid-body guidance. *Mechanism and Machine Theory*, 25(1) :97–118, 1990. 32
- [4] J. ANGELES et M. CALLEJAS : An algebraic formulation of Grashof’s mobility criteria with application to linkage optimization using gradient-dependent methods. *Journal of Mechanisms Transmissions and Automation in Design*, 106(3) :327–332, 1984. 33
- [5] J. ANGELES, A. ALIVIZATOSS et R. AKHRAS : An unconstrained nonlinear least-square method of optimization of RRRR planar path generators. *Mechanism and Machine Theory*, 23(5) :343–353, 1988. 32
- [6] ARTAS : SAM – Synthesis and Analysis of Mechanisms. URL <http://www.artas.nl/>. 36, 66
- [7] I. ARTOBOLVSKI : *Les mécanismes dans la technique moderne*, volume 1. Édition MIR Moscou, Moscou, 1975. ix, 9, 12
- [8] I. ARTOBOLVSKI : *Les mécanismes dans la technique moderne*, volume 2-1. Édition MIR Moscou, Moscou, 1975. ix, 9, 12
- [9] I. ARTOBOLVSKI : *Les mécanismes dans la technique moderne*, volume 2-2. Édition MIR Moscou, Moscou, 1975. ix, 9, 12
- [10] I. ARTOBOLVSKI : *Les mécanismes dans la technique moderne*, volume 3. Édition MIR Moscou, Moscou, 1975. ix, 9, 12
- [11] I. ARTOBOLVSKI : *Les mécanismes dans la technique moderne*, volume 4. Édition MIR Moscou, Moscou, 1975. ix, 9, 12
- [12] I. ARTOBOLVSKI : *Théorie des mécanismes et des machines*. Édition MIR Moscou, Moscou, 1975. 12
- [13] A. BAJPAI et S. KRAMER : Detection and elimination of mechanism defects in the selective precision synthesis of planar mechanisms. *Mechanism and Machine Theory*, 20(6) :521–534, 1985. 35

- [14] S. BAWAB et G. L. KINZEL : A hybrid approach to solving the position equations for planar mechanisms. *Journal of Mechanical Design*, 117(4) :627–632, 1995. 29
- [15] N. BECK : Application de méthodes traditionnelles de clustering et extension au cadre multicritère. Mémoire d'ingénieur civil en électromécanique, Université Libre de Bruxelles, Brussels, Belgium, 2006. 92
- [16] T. M. BLACKWELL et P. J. BENTLEY : Dynamic search with charged swarms. In *GECCO '02 : Proceedings of the Genetic and Evolutionary Computation Conference*, pages 19–26, San Francisco, CA, USA, 2002. Morgan Kaufmann Publishers Inc. 92
- [17] J. F. BONNANS, J. C. GILBERT, C. LEMARÉCHAL et C. A. SAGASTIZÁBAL : *Numerical Optimization*. Springer, 2 édition, 2006. 32, 33
- [18] R. BRITS, A. ENGELBRECHT et F. van den BERGH : Scalability of niche PSO. In *IEEE Swarm Intelligence Symposium*, pages 228–234, Indianapolis, USA, 2003. 92
- [19] L. E. H. BURMESTER : *Lehrbuch der Kinematik, Erster Band, Die ebene Bewegung*. Leipzig, 1888. 138
- [20] D. CHABLAT : *Domaines d'unicité et parcourabilité pour les manipulateurs pleinement parallèles*. Thèse de doctorat, École Centrale de Nantes, 1998. 10
- [21] A. CHAKRABARTI et T. P. BLYTH : An approach to functional synthesis of solutions in mechanical conceptual design. Part I : Introduction and knowledge representation. *Research in Engineering Design*, 6(3) :127–141, 1994. 16
- [22] A. CHAKRABARTI et T. P. BLYTH : An approach to functional synthesis of solutions in mechanical conceptual design. Part II : Kind synthesis. *Research in Engineering Design*, 8(1) :52–62, 1996. 16
- [23] W.-T. CHANG, C.-C. LIN et L.-I. WU : A note on Grashof's theorem. *Journal of Marine Science and Technology*, 13(4) :239–248, 2005. 15, 133
- [24] M. CHEW, S. N. T. SHEN et G. F. ISSA : Kinematic structural synthesis of mechanisms using knowledge-based systems. *Journal of Mechanical Design*, 117(1) :96–103, 1995. 16
- [25] H. CHI-YEH : A general method for the optimum design of mechanisms. *Journal of Mechanisms*, 1(3-4) :301–313, 1966. 33
- [26] K. J. CIOS, W. PEDRYCZ et R. W. SWINIARSKI : *Data Mining Methods for Knowledge Discover*, volume 458 de *The Springer International Series in Engineering and Computer Science*. 1998. 92
- [27] M. CLERC : *L'optimisation par essais particuliers*. Hermès Science, 2005. 35, 89

- [28] A. CLÉMENT, A. RIVIÈRE et M. TEMMERMAN : *Cotation tridimensionnelle des systèmes mécaniques - théorie et pratique*. PYC édition, 1984. 4, 7, 54
- [29] J.-F. COLLARD : *Geometrical and Kinematic Optimization of Closed-Loop Multibody Systems*. Thèse de doctorat, Université Catholique de Louvain, 2007. 21, 35, 89
- [30] C. L. COLLINS, J. M. MCCARTHY, A. PEREZ et H. SU : The structure of an extensible java applet for spatial linkage synthesis. *Journal of Computing and Information Science in Engineering*, 2(1) :45–49, 2002. 105
- [31] J. B. COOK et D. G. OLSON : The design of a 10-bar linkage for four functions using SyMech. In *Design Engineering Technical Conferences (DETC'02)*, volume 5 : 27th Biennial Mechanisms and Robotics Conference, Montréal, Québec, Canada, 2002. ASME. ix, 36
- [32] V. COSSALTER, A. DORIA, M. PASINI et C. SCATTOLO : A simple numerical approach for optimum synthesis of a class of planar mechanisms. *Mechanism and Machine Theory*, 27(3) :357–366, 1992. 33
- [33] DASSAULT SYSTÈMES : CATIA V6. URL <http://www.3ds.com/products/catia/>. xvii, 17, 46, 105
- [34] DASSAULT SYSTÈMES : SolidWorks. URL <http://www.solidworks.com/>. 46
- [35] A. K. DHINGRA, A. N. ALMADI et D. KOHLI : A Gröbner-Sylvester hybrid method for closed-form displacement analysis of mechanisms. *Journal of Mechanical Design*, 122(4) :431–438, 2000. 29
- [36] A. L. DULMAGE et N. S. MENDELSON : Coverings of bipartite graphs. *Canadian Journal of Mathematics*, 10 :517–534, 1958. 85
- [37] A.-N. DUONG : *Spécification, analyse et résolution des problèmes géométriques 2D et 3D définis par contraintes*. Thèse de doctorat, École Centrale de Paris, 2003. xvi, 17, 41
- [38] N. F. ERASLAN : On the synthesis of certain straight-line mechanisms. *Mechanism and Machine Theory*, 14(5) :299–307, 1979. 26
- [39] A. G. ERDMAN : Computer-Aided Mechanism Design: Now and the Future. *Journal of Mechanical Design*, 117(B) :93–100, 1995. 26
- [40] A. G. ERDMAN : Computer-aided design of mechanisms: 1984 and beyond. *Mechanism and Machine Theory*, 20(4) :245–249, 1985. 26, 35
- [41] A. G. ERDMAN, G. N. SANDOR et S. KOTA : *Mechanism design : analysis and synthesis*. Prentice Hall, 4^{ème} édition, 2001. 3, 28
- [42] J.-C. FAUROUX : *Conception optimale de structures cinématiques tridimensionnelles. Application aux mécanismes de transmission en rotation*. Thèse de doctorat, INSA de Toulouse, Laboratoire de Génie Mécanique de Toulouse, 1999. 15, 16

- [43] J.-C. FAUROUX et M. SARTOR : Conception qualitative de mécanismes. application aux réducteurs à engrenages. *In Actes du 13ème Congrès Français de Mécanique*, volume 2, pages 319–322, Poitiers - Futuroscope, 1997. Association Universitaire de Mécanique. [16](#)
- [44] I. FERNÁNDEZ-BUSTOS, J. AGUIRREBEITIA, R. AVILÉS et C. ANGULO : Kinematical synthesis of 1-dof mechanisms using finite elements and genetic algorithms. *Finite Elements in Analysis and Design*, 41(15) :1441–1463, 2005. [89](#)
- [45] F. FREUDENSTEIN et E. R. MAKI : The creation of mechanisms according to kinematic structure and function. *Environment and Planning B*, 6(4) :375–391, 1979. [13](#)
- [46] F. FREUDENSTEIN et E. R. MAKI : Development of an optimum variable-stroke internal-combustion engine mechanism from the viewpoint of kinematic structure. *Journal of Mechanisms Transmissions and Automation in Design*, 105(2) :259–266, 1983. [13](#)
- [47] C. FÜNFZIG, D. MICHELUCCI et S. FOUFOU : Nonlinear systems solver in floating-point arithmetic using lp reduction. *In W. BRONSVOORT, éditeur : Joint Conference on Geometric and Physical Modeling (SPM'09)*, pages 123–134, New York, NY, USA, 2009. SIAM/ACM, ACM. [129](#)
- [48] V. GAZI et K. PASSINO : Stability analysis of swarms. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 48(4) :692–697, 2003. [92](#)
- [49] D. E. GOLDBERG : *Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning*. Addison-Wesley Longman Publishing Co., Inc., Boston, MA, USA, 1989. [34](#)
- [50] M. A. GONZÁLEZ-PALACIOS et J. ANGELES : USyCaMs : a software package for the interactive synthesis of cam mechanisms. *First International Conference on Integrated Design and Manufacturing in Mechanical Engineering*, 1 :485–494, 1996. [36](#)
- [51] R. S. HARTENBERG et J. DENAVIT : *Kinematic Synthesis of Linkages*. McGraw-Hill Book Company, New-York, 1964. [4](#), [11](#), [17](#), [28](#), [53](#)
- [52] J. HARTIGAN : *A. Clustering algorithms*. John Wiley & Sons, New York-London-Sydney, 1975. [92](#)
- [53] HERON TECHNOLOGIES : WATT Mechanism Suite Software. URL <http://www.heron-technologies.com/watt/>. [36](#)
- [54] D. A. HOELTZELA, W.-H. CHIENGA et J. ZISSIMIDES : Knowledge representation and planning control in an expert system for the creative design of mechanisms. *Artificial Intelligence for Engineering, Design, Analysis and Manufacturing*, 1(02) :119–137, 1987. [13](#)
- [55] J. H. HOLLAND : *Adaptation in natural and artificial systems*. The MIT Press, Cambridge, MA, USA, 1992. [34](#)
- [56] J. A. HRONES et G. L. NELSON : *Analysis of the Four-Bar Linkage : Its Application to the Synthesis of Mechanisms*. The MIT Press, 1951. [4](#), [27](#)

- [57] W.-M. HWANG et Y.-W. HWANG : Computer-aided structural synthesis of planar kinematic chains with simple joints. *Mechanism and Machine Theory*, 27(2) :189–199, 1992. 14
- [58] *Flowcharting Techniques*. IBM, 1969. 76
- [59] R. L. INMAN, J. C. HELSON et J. E. CAMPBELL : An approach to sensitivity analysis of computer models : Part I - introduction, input variable selection and preliminary variable assessment. *Journal of Quality Technology*, 13(3) :174–183, 1981. 91
- [60] P. W. JENSEN : Synthesis of four-bar linkages with a coupler point passing through 12 points. *Mechanism and Machine Theory*, 19(1) :149–156, 1984. 27
- [61] C. JERMANN : *Résolution de contraintes géométriques par rigidification récursive et propagation d'intervalles*. Thèse de doctorat, Université de Nice – Sophia-Antipolis, 2002. 86
- [62] J. M. JIMÉNEZ, G. ÁLVAREZ, J. CARDENAL et J. CUADRADO : A simple and general method for kinematic synthesis of spatial mechanisms. *Mechanism and Machine Theory*, 32(3) :323–341, 1997. 26, 137
- [63] R. KAUFMAN : KINSYN – an interactive system for the kinematic synthesis of mechanisms. In *Third World Congress on Theory of Machines and Mechanisms*, pages 13–20, 1971. 35
- [64] J. KENNEDY et R. EBERHART : Particle swarm optimization. In *Proceedings of the IEEE International Conference on Neural Networks*, pages 1942–1948, Piscataway, NJ, 1995. 35, 89, 90
- [65] P. KODURU, S. DAS et S. WELCH : A particle swarm optimization-mead hybrid algorithm for balanced exploration and exploitation in multidimensional search space. In H. R. ARABNIA, éditeur : *International Conference on Artificial Intelligence (ICAI2006)*, volume 2, pages 457–464, Las Vegas, Nevada, USA, 2006. CSREA Press. 93
- [66] S. KOTA et S.-J. CHIOU : Conceptual design of mechanisms based on computational synthesis and simulation of kinematic building blocks. *Research in Engineering Design*, 4(2) :75–87, 1992. 16
- [67] S. N. KRAMER et G. N. SANDOR : Selective precision synthesis — a general method of optimization for planar mechanisms. *Journal of Engineering for Industry*, 97(2) :689–701, 1975. 19, 35
- [68] S. KRISHNAMURTY et D. A. TURCIC : Optimal synthesis of mechanisms using nonlinear goal programming techniques. *Mechanism and Machine Theory*, 27(5) :599–612, 1992. 31
- [69] A. KUNJUR et S. KRISHNAMURTY : Genetic algorithms in mechanism synthesis. In *Fourth Applied Mechanisms and Robotics Conference*, Cincinnati, Ohio, 1995. 35
- [70] D. KÖNIG : Über graphen und ihre anwendung auf determinantentheorie und mengenlehre. *Mathematische Annalen*, 77 :453–465, 1916. 85

- [71] H. LAMURE et D. MICHELUCCI : *Geometric Constraint Solving and Applications*, chapitre Qualitative Study of Geometric Constraints, pages 234–258. Springer-Verlag, 1998. [86](#)
- [72] P. LAROCHELLE, J. DOOLEY, A. MURRAY et J. MCCARTHY : Sphinx-software for synthesizing spherical mechanisms. *In NSF Design and Manufacturing Systems Conference*, volume 1, pages 607–612, Charlotte, North Carolina, 1993. SME Press. [36](#)
- [73] P. M. LAROCHELLE : Spades : Software for synthesizing spatial 4c mechanisms. Atlanta, Georgia, USA, 1998. ASME. [36](#)
- [74] P. M. LAROCHELLE : Approximate motion synthesis of open and closed chains via parametric constraint manifold fitting : Preliminary results. *In International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference (IDETC/CIE2003)*, volume 2 : 29th Design Automation Conference, Parts A and B, pages 1049–1057, Chicago, Illinois, USA, 2003. ASME. [33](#)
- [75] E. LEE et C. MAVROIDIS : Solving the geometric design problem of spatial 3r robot manipulators using polynomial homotopy continuation. *Journal of Mechanical Design*, 124(4) :652–661, 2002. [30](#), [116](#)
- [76] E. LEE, C. MAVROIDIS et J. P. MERLET : Geometric design of spatial RRR manipulators using interval analysis. [116](#), [118](#)
- [77] E. LEE, C. MAVROIDIS et J. P. MERLET : Five precision points synthesis of spatial RRR manipulators using interval analysis. volume 2002, pages 635–644, Montréal, Québec, Canada, 2002. ASME. [30](#), [116](#)
- [78] E. LEE, C. MAVROIDIS et J. P. MERLET : Five precision point synthesis of spatial RRR manipulators using interval analysis. *Journal of Mechanical Design*, 126(5) :842–849, 2004. [30](#), [116](#)
- [79] D. LESAGE : *Un modèle dynamique de spécifications d'ingénierie basé sur une approche de géométrie variationnelle*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble, Laboratoire Sols, Solides, Structures de Grenoble – France, 2002. [xvi](#), [41](#), [86](#)
- [80] K. LEVENBERG : A method for the solution of certain non-linear problems in least-squares. *Quarterly Journal of Applied Mathematics*, 2(2) :164–168, 1944. [32](#)
- [81] M. D. LIO, V. COSSALTER et R. LOT : On the use of natural coordinates in optimal synthesis of mechanisms. *Mechanism and Machine Theory*, 35 (10) :1367–1389, 2000. [26](#)
- [82] M. LUCAS et E. DESMONTILS : Les modeleurs déclaratifs. *Revue Internationale de CFAO et d'informatique graphique*, 10(6) :559–585, 1995. [41](#)
- [83] M. LUCAS, D. MARTIN, P. MARTIN et D. PLEMENOS : Le projet Explo-Formes : Quelques pas vers la modélisation déclarative de formes. *Bigre*, 67 :35–49, 1990. [41](#)

- [84] K. LUCK et K.-H. MODLER : Burmester theory for four-bar-band mechanisms. *Journal of Mechanical Design*, 117(1) :129–133, 1995. 27
- [85] K. LUCK et K.-H. MODLER : Synthesis of guidance mechanisms. *Mechanism and Machine Theory*, 29(4) :525–533, 1994. 27
- [86] D. J. C. MACKAY : *Information theory, inference and learning algorithms*. Cambridge University Press, New York, 2003. 92
- [87] R. MACULET et M. DANIEL : Conception, modélisation géométrique et contraintes en CAO : une synthèse. *Revue d'Intelligence Artificielle*, 18 (5–6) :619–645, 2004. 41, 42
- [88] A. K. MALLIK, A. GHOSH et G. DITTRICH : *Kinematic analysis and synthesis of mechanisms*. CRC Press, 1994. ix, 3, 26, 27, 28
- [89] J. MARIAPPAN et S. KRISHNAMURTY : A generalized exact gradient method for mechanism synthesis. *Mechanism and Machine Theory*, 31 (4) :413–421, 1996. 33
- [90] D. W. MARQUARDT : An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 11(2) :431–441, 1963. 32
- [91] G. MARSAGLIA et W. W. TSANG : The monty python method for generating random variables. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 24(3) :341–350, 1998. 91
- [92] H. MARTINEZ-ALFARO, H. VALDEZ et J. ORTEGA : Linkage synthesis of a four-bar mechanism for N precision points using simulated annealing. In *Design Engineering Technical Conferences (DETC'98)*, page 10, Atlanta, Georgia, USA, 1998. ASME. 89
- [93] C. MAVROIDIS, M. ALAM et E. LEE : Analytic geometric design of spatial R-R robot manipulators. In *Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference (DETC'00)*, volume 26th Biennial Mechanisms and Robotics Conference, Atlanta, Georgia, USA, 2000. ASME. 28
- [94] M. MAYOURIAN et F. FREUDENSTEIN : The development of an atlas of the kinematic structures of mechanisms. *Journal of Mechanisms Transmissions and Automation in Design*, 106(4) :458–461, 1984. 13
- [95] J. M. MCCARTHY : *Geometric Design of Linkages*. Springer-Verlag, New York, 2000. 28
- [96] M. D. MCKAY, R. J. BECKMAN et W. J. CONOVER : A comparison of three methods for selecting values of input variables in the analysis of output from a computer code. *Technometrics*, 21(2) :239–245, 1979. 91
- [97] MINNESOTA TECHNOLOGY TRANSFER : Linkage INteractive Computer Assisted Geometrically Enhanced Synthesis, LINCAGES. URL <http://www.me.umn.edu/labs/lincages/>. 35

- [98] MINNESOTA TECHNOLOGY TRANSFER : Linkage INteractive Computer Assisted Geometrically Enhanced Synthesis, LINCAGES 2000. URL <http://www.me.umn.edu/labs/lincages/new.html>. 36
- [99] M. MOINET : *Spécification géométrique et topologique des ensembles mécaniques*. Thèse de doctorat, École Centrale Paris, 2008. xvi
- [100] A. P. MORGAN et C. W. WAMPLER, II : Solving a planar four-bar design problem using continuation. *Journal of Mechanical Design*, 112(4) :544–550, 1990. 29
- [101] J. A. NELDER et R. MEAD : A simplex method for function minimization. *The Computer Journal*, 7(4) :308–313, 1965. 35, 90
- [102] J. NIELSEN et B. ROTH : Elimination methods for spatial synthesis. In J.-P. MERLET et B. RAVANI, éditeurs : *Computational Kinematics '95*, volume 40 de *Solid Mechanics and Its Applications*, pages 51–62, Sophia Antipolis, France, 1995. Kluwer Academic Publishers. 28
- [103] J. NIELSEN et B. ROTH : On the kinematic analysis of robotic mechanisms. *The International Journal of Robotics Research*, 18(12) : 1147–1160, 1999. 28
- [104] S. B. NOKLEBY et R. P. PODHORODESKI : Optimization-based synthesis of grashof geared five-bar mechanisms. In *Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference (DETC'00)*, volume 26th Biennial Mechanisms and Robotics Conference, Atlanta, Georgia, USA, 2000. ASME. 33
- [105] S. B. NOKLEBY et R. P. PODHORODESKI : Optimization-based synthesis of Grashof geared five-bar mechanisms. *Journal of Mechanical Design*, 123(4) :529–534, 2001. 33
- [106] H. NOLLE et K. HUNT : Optimum synthesis of planar linkages to generate coupler curves. *Journal of Mechanisms*, 6(3) :267–287, 1971. 33
- [107] R. L. NORTON : *Design of Machinery : An Introduction to the Synthesis and Analysis of Mechanisms and Machines*. McGraw-Hill Professional, 3 édition, 2003. 26, 28
- [108] M. J. PARADIS et K. D. WILLMERT : Optimal mechanism design using the gauss constrained method. *Journal of Mechanisms Transmissions and Automation in Design*, 105(2) :187–196, 1983. 32
- [109] S. K. PARK et K. W. MILLER : Random number generators : good ones are hard to find. *Communications of the ACM*, 31(10) :1192–1201, 1988. 90
- [110] K. E. PARSOPOULOS et M. N. VRAHATIS : Modification of the particle swarm optimizer for locating all the global minima. In KARNY, éditeur : *Artificial Neural Networks and Genetic Algorithms*, pages 324–327. Springer, 2001. 92

- [111] A. PASSARO et A. STARITA : Particle swarm optimization for multimodal functions : A clustering approach. *Journal of Artificial Evolution and Applications*, 2008(482032) :15, 2008. 92
- [112] A. PEREZ et J. M. MCCARTHY : *Advances in Robot Kinematics*, chapitre Dimensional Synthesis of Spatial RR Robots, pages 93–102. Kluwer Academic Publishers, 2000. 105
- [113] A. PEREZ : *Dual Quaternion Synthesis of Constrained Robotic Systems*. Thèse de doctorat, University of California, 2003. 28, 30, 42, 82, 137
- [114] A. PEREZ, H.-J. SU et J. M. MCCARTHY : Synthetica 2.0 : Software for the synthesis of constrained serial chains. In *International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference (IDETC/CIE2004)*, volume 2004, pages 1363–1369, Salt Lake City, Utah, USA, 2004. ASME. 33
- [115] PTC : Pro/ENGINEER. URL <http://www.ptc.com/products/proengineer/>. 36, 46
- [116] M. A. PUCHETA : *Computational Methods for Design and Synthesis of Planar Mechanisms*. Thèse de doctorat, Universidad Nacional del Litoral, 2008. 35
- [117] M. RAGHAVAN et B. ROTH : Solving polynomial systems for the kinematic analysis and synthesis of mechanisms and robot manipulators. *Journal of Mechanical Design*, 117(B) :71–79, 1995. 28
- [118] E. RAMSTEIN : *Contribution à la formulation générale d'un problème de synthèse de mécanismes et résolution*. Thèse de doctorat, École Centrale de Nantes, 1999. 6, 34, 89
- [119] S. S. RAO et S. K. HATI : Game theory approach in multicriteria optimization of function generating mechanisms. *Journal of Mechanical Design*, 101 :398–406, 1979. 31
- [120] B. RAVANI et B. ROTH : Motion synthesis using kinematic mappings. *Journal of Mechanisms Transmissions and Automation in Design*, 105 (3) :460–467, 1983. 32
- [121] R. RAVISANKAR et T. S. MRUTHYUNJAYA : Computerized synthesis of the structure of geared kinematic chains. *Mechanism and Machine Theory*, 20(5) :367–387, 1985. 13
- [122] G. RENNER et A. EKÁRT : Genetic algorithms in computer aided design. *Computer-Aided Design*, 35(8) :709–726, 2003. 89
- [123] F. REULEAUX : *Cinématique*. Librairie F. Savy, 1877. 3, 12
- [124] F. REULEAUX : *Le constructeur*. Librairie F. Savy, 1881. 3, 12
- [125] S. M. ROMAN : *The Umbral Calculus*. Academic Press, New York, 1984. 129

- [126] R. R. ROOT et K. M. RAGSDALL : A survey of optimization methods applied to the design of mechanisms. *Journal of Engineering for Industry*, 98(3) :1036–1041, 1976. 26
- [127] B. ROTH et F. FREUDENSTEIN : Synthesis of path generating mechanisms by numerical methods. *Journal of Engineering for Industry*, 85B :298–306, 1963. 29
- [128] A. J. RUBEL et R. E. KAUFMAN : KINSYN : a minicomputer-based interactive mechanism design system. In D. J. HUMCKE, J. M. GALEY, S. A. SZYGENDA, P. O. PISTILLI, N. P. DOONER, J. G. BRINSFIELD et J. S. OLILA, éditeurs : *13th Design Automation Conference (DAT'76)*, DAC'76, pages 7–16, New York, NY, USA, 1976. ACM. 35
- [129] G. N. SANDOR : *A general complex-number method of plane kinematic synthesis with applications*. Thèse de doctorat, Columbia University, 1959. 28
- [130] G. N. SANDOR et A. G. ERDMAN : *Advanced mechanism design : analysis and synthesis*, volume 1. Prentice-Hall, 1984. 28
- [131] G. N. SANDOR et A. G. ERDMAN : *Advanced mechanism design : analysis and synthesis*, volume 2. Prentice-Hall, 1984. 28
- [132] P. SARDAIN : *Contribution à la synthèse des mécanismes. Un environnement CAO pour la synthèse topologique et dimensionnelle de générateurs de mouvement*. Thèse de doctorat, Université de Poitiers, 1993. 16
- [133] D. SERRANO : *Constraint Management in Conceptual Design*. Thèse de doctorat, Massachusetts Institute of Technology, 1987. 86
- [134] P. SERRÉ : *Cohérence de la spécification d'un objet de l'espace euclidien à n dimensions*. Thèse de doctorat, École Centrale Paris, LISMMA - ISMCM Paris, 2000. xvi, 17, 41, 47
- [135] P. SERRÉ, A. RIVIÈRE et A. CLÉMENT : The clearance effect for assemblability of over-constrained mechanisms. In *8th CIRP International Seminar on Computer-Aided Tolerancing*, page 12, Charlotte USA, 2003. College International pour la Recherche en Productique. xvi
- [136] P. SERRÉ, A. RIVIÈRE et A. CLÉMENT : Analysis of functional geometrical specification. In P. BOURDET et L. MATHIEU, éditeurs : *Geometric Product Specification and Verification : Integration of Functionality*, pages 115–125. Kluwer Academic Publishers, 2008. xvi
- [137] SIEMENS PLM SOFTWARE : NX. URL http://www.plm.automation.siemens.com/en_us/products/nx/. 46
- [138] A. A. SMAILI, N. A. DIAB et N. A. ATALLAH : Optimum synthesis of mechanisms using tabu-gradient search algorithm. *Journal of Mechanical Design*, 127(5) :917–923, 2005. 89
- [139] G. STARNS et D. R. FLUGRAD, Jr. : Five-bar path generation synthesis by continuation methods. *Journal of Mechanical Design*, 115(4) :988–994, 1993. 30

- [140] H.-J. SU : *Computer-Aided Constrained Robot Design Using Mechanism — Synthesis Theory*. Thèse de doctorat, University of California, 2004. 28, 30
- [141] H.-J. SU, A. PEREZ, C. COLLINS et J. M. MCCARTHY : Synthetica. URL <http://www.umbc.edu/engineering/me/vrml/research/software/synthetica/>. 28, 36
- [142] T. SUBBIAN et D. R. FLUGRAD, Jr. : Six and seven position triad synthesis using continuation methods. *Journal of Mechanical Design*, 116(2) :660–665, 1994. 30
- [143] D. SUBRAMANIAN et C.-S. E. WANG : Kinematic synthesis with configuration spaces. *Research in Engineering Design*, 7(3) :193–213, 1995. 16
- [144] C. H. SUH et C. W. RATCLIFFE : *Kinematics and Mechanism Design*. New York, 1978. 28
- [145] SYMECH : SyMech-4. URL <http://www.symech.com/sc4/sym4.htm>. 36
- [146] SYMECH : SyMech-N. URL <http://www.symech.com/scn/symn.htm>. 36
- [147] T. THOMPSON, D. RILEY et A. ERDMAN : An expert system approach to type synthesis of mechanisms. *In Proceedings of the Computers in Engineering Conference*, pages 71–76, Boston, MA, 1985. ASME. 13
- [148] J. TOMÁS : The synthesis of mechanisms as a nonlinear programming problem. *Journal of Mechanisms*, 3(3) :119–130, 1968. 33
- [149] S.-H. TONG et C. CHIANG : Syntheses of planar and spherical four-bar path generators by the pole method. *Mechanism and Machine Theory*, 27(2) :143–155, 1992. 27
- [150] L.-W. TSAI : An application of the linkage characteristic polynomial to the topological synthesis of epicyclic gear trains. *Journal of Mechanisms Transmissions and Automation in Design*, 109(3) :329–336, 1987. 13
- [151] L.-W. TSAI et B. ROTH : A note on the design of revolute-revolute cranks. *Mechanism and Machine Theory*, 8(1) :23–31, 1973. 28, 105
- [152] P. TURNER et M. BODNER : Optimization and synthesis for mechanism. *In AUTOFACT '88 Conference and Exposition*, Chicago, Illinois, 1988. Society of Manufacturing Engineers. 36
- [153] UNIVERSITY OF CHICAGO : MINPACK. URL <http://www.netlib.org/minpack/>. 36
- [154] A. VASILIU et B. YANNOU : Dimensional synthesis of planar mechanisms using neural networks : application to path generator linkages. *Mechanism and Machine Theory*, 36(2) :299–310, 2001. 34
- [155] A. A. VASILIU : *Une approche CAO pour la préconception des mécanismes plans générateurs de trajectoire : RealisMe*. Thèse de doctorat, École Centrale Paris, 1997. 33, 34

- [156] K. J. WALDRON et S. M. SONG : Theoretical and numerical improvements to an interactive linkage design program, RECSYN. *In Seventh Applied Mechanisms Conference*, pages 8.1–8.8.7, Oklahoma State University, Stillwater, OK, 1981. 35
- [157] W. J. WALKER : The relation between kinematic pairs and links in mechanism. *Philosophical Magazine Series 7*, 6(37) :631–632, 1928. 14
- [158] C. W. WAMPLER, A. P. MORGAN et A. J. SOMMESE : Complete solution of the nine-point path synthesis problem for four-bar linkages. *Journal of Mechanical Design*, 114(1) :153–159, 1992. 29
- [159] B. YANNOU et A. A. VASILIU : *Conception de produits mécaniques : méthodes, modèles et outils*, chapitre Typologie des approches de synthèse dimensionnelle de systèmes mécaniques. Application aux générateurs de trajectoire, pages 348–364. Hermès Science, 1998. 16
- [160] C. ZHANG, P. E. R. L. NORTON et T. HAMMONDS : Optimization of parameters for specified path generation using an atlas of coupler curves of geared five-bar linkages. *Mechanism and Machine Theory*, 19(6) : 459–466, 1984. 27

Index

- accélération, 3, 4
- algorithme
 - de Levenberg-Marquardt, 32
 - évolutionniste, 34
 - génétique, 34, 35
- analyse cinématique, 47
- analyse cinématique, 3
- approximation, 29
- arc, 42, 68
- assemblage, 10, 12, 17, 31, 33, 46

- base de mécanismes, 16
- bâti, 10, 48
- boucle cinématique, 5, 23
- boucle indépendante, 23
- boucle topologique, 5

- CAO, 36, 46
- catalogue de mécanismes, 12
- centre de gravité, 10
- chaîne cinématique, 5, 23
- classe de mécanisme, 8
- classement, 11
- classes d'équivalence, 7
- classification, 12
- coïncidence, 17, 45
- collision, 6
- conception de mécanismes, 4, 47
- configuration, 6, 10
- continu, 18
- contrainte, 11, 21, 23, 25, 31, 41
- contrainte de plongement, 47
- convergence, 29, 30
- création de mécanismes, 4, 10
- critère de Grashof, 15, 32, 33
- critère de Grübler, 14

- degré de liberté, 4, 11, 12, 14, 22, 24
- déplacement, 3, 4

- dérivable, 18
- descente de gradient, 33
- déterminant, 28
- dimension, 6, 11
- dimension fonctionnelle, 8, 16
- domaine de définition, 69

- encombrement, 12
- ensemble discret de points, 18
- esquisse, 46
- essais-erreurs, 4

- force d'inertie, 3
- force statique, 3
- front de Pareto, 31

- gradient, 33
- graphe, 6, 68
- graphe cinématique, 6, 8, 42
- groupe d'Assur, 33

- idéaux polynomiaux, 28
- inertie, 5
- instance de mécanisme, 8
- intelligence artificielle, 13
- interactif, 35
- interpolation, 33

- jeu, 6

- liaison cinématique, 42, 47, 69
 - encastrement, 7
 - glissière, 4, 7, 14
 - pivot, 4, 14
 - pivot-glissant, 4, 7
- liaison mécanique, 4
- liaison motrice, 48
- liaison cinématique, 22
- logiciel, 35
- loi de commande, 12, 24

- matrice de déplacement, 28
- matrice hessienne, 33
- matrice jacobienne, 29
- matrice de transformation homogène, 74
- mécanisme, 3, 4
- mécanisme à cames, 4
- mécanisme de Bennett, 68
- mécanisme fermé, 5, 48
- mécanisme optimal, 4
- mécanisme ouvert, 5, 48
- mécanisme plan, 8, 43
- méthode
 - de Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno, 33
 - de Burmester, 27
 - de Davidon-Fletcher-Powell, 33
 - de Gauss-Newton, 32
 - de Levenberg-Marquardt, 36
 - de Nelder-Mead, 35
 - de Newton-Raphson, 29, 33
 - de Powell, 35
 - de programmation non linéaire, 32
 - des bases de Gröbner, 28
 - du gradient conjugué, 34
 - du gradient généralisé, 33
 - du recuit simulé, 34
 - du résultant, 28
 - par élimination, 36
 - par homotopie, 29, 36
 - par intervalles, 30
 - quasi-Newton, 29
- méthode algébrique, 27, 28
- méthode d'optimisation locale, 32
- méthode formelle, 28
- méthode générique, 36
- méthode graphique, 26
- méthode itérative, 34
- méthode locale, 29
- méthode métaheuristique, 34
- méthode numérique, 27, 28
- méthode d'optimisation, 30, 36
- méthode stochastique, 34, 35
- mini-max, 31
- mise au point, 4
- mise en équations, 67
- mobilité structurelle, 14
- modèle filaire, 8
- modèle interne, 42
- modèle volumique, 6, 43
- modélisation déclarative, 41
- modélisation par contraintes, 41
- moindres carrés, 31, 33
- montage, 6
- moteur d'inférence, 13
- mouvement, 3, 4
- mouvement relatif, 4
- multiple solutions, 46
- multiples solutions, 37
- nœud, 42, 68
- nombre complexe, 28
- nombre réel, 67
- norme, 31
- objectif, 31
- optimisation
 - par essais particulières, 35
- optimisation globale, 34
- optimisation multi-critères, 31
- optimum, 10
- ordonnancement, 17, 19, 45
- performance, 37
- pièce, 4, 69
- pièce fixe, 10
- plage de travail, 6
- point de passage, 16, 17, 30
- point effecteur, 17, 45
- pondération, 18, 31, 45
- population, 34
- précision, 17
- problème inverse, 4
- problème multi-critères, 31
- référentiel, 10
- règle de conception, 16
- règle métier, 12
- relation d'Ackermann, 21
- repère effecteur, 45
- réseau neuronal artificiel, 34
- rigidité, 22, 25
- robustesse, 37
- schéma cinématique, 8
- selective precision synthesis*, 35
- simulation, 6
- solutions non dominées, 31
- spécification, 41
- spécification cinématique, 4

structure, 6
structure de mécanisme, 42
structure rigide, 8
synthèse cinématique, 4
synthèse de type, 12
synthèse dimensionnelle, 12, 16
synthèse dimensionnelle approchée,
16
synthèse dimensionnelle exacte, 16
synthèse topologique, 12
système de coordonnées, 21
 coordonnées absolues, 22
 coordonnées naturelles, 25
 coordonnées polaires, 69
 coordonnées relatives, 23
système d'équations, 67
système expert, 13

tâche, 5, 10, 17, 45
 génération de fonction, 20
 génération de mouvement, 19,
48
 suivi de trajectoire, 18, 45, 48
théorie
 de Burmester, 35
théorie des graphes, 13
théorie des jeux, 31
tolérance, 6
topologie, 6
trajectoire, 8
trièdre effecteur, 20
type de mécanisme, 11

utilisateur, 41, 43

valeur initiale, 29, 46
variable, 21, 67
vitesse, 3, 4

Résumé

La synthèse dimensionnelle se focalise sur la détermination des dimensions des pièces constituant le mécanisme et de leur placement. Cependant, malgré les nombreux travaux dans ce domaine, les techniques actuelles de dimensionnement n'offrent des solutions satisfaisantes que pour des classes de mécanismes particulières.

Dans nos travaux, nous décrivons une approche de résolution générique de problèmes de synthèse dimensionnelle de mécanismes. Une spécification déclarative par contraintes facilite la prise en compte de tout type de mécanismes (plans ou spatiaux, à topologie ouverte ou fermée et comportant un nombre quelconque de pièces et de liaisons cinématiques). La modélisation des problèmes proposée rend possible la génération automatique d'équations traduisant simultanément l'objectif à atteindre et les contraintes à respecter ainsi que la construction des différents mécanismes solution.

Les équations résultantes étant non linéaires, fortement couplées et n'admettant pas nécessairement de solution exacte, nous proposons de les traiter par des méthodes d'optimisation. De plus, la stratégie développée se concentre sur la recherche de plusieurs minima locaux du problème de synthèse et non sur la recherche d'un minimum global. En premier lieu, une méthode d'optimisation globale par essais particuliers explore le domaine de recherche et fournit plusieurs points approchant des minima. Plusieurs processus d'optimisation locale, basés sur la méthode de Nelder-Mead, exploitent ensuite de manière concurrente ces points. Cette stratégie permet d'améliorer considérablement la robustesse de chacune des méthodes prises indépendamment et surtout de proposer plusieurs configurations à l'utilisateur qui pourra finalement sélectionner la meilleure solution d'après ses critères.

Nous avons développé une maquette d'application de synthèse dimensionnelle de mécanismes, complètement intégrée dans un environnement de conception assistée par ordinateur industriel qui nous permet de valider la démarche de conception que nous proposons sur un ensemble de problèmes classiques.

Mots-clefs : Synthèse dimensionnelle de mécanismes, conception assistée par ordinateur, mécanisme, liaison cinématique, cinématique, graphe et schéma cinématiques, système de coordonnées, paramétrage géométrique, optimisation numérique globale et locale, optimisation par essais particuliers, méthode de Nelder-Mead.

Abstract

Mechanism synthesis deals with design of mechanical devices capable of performing a desired task. Dimensional synthesis focuses on the determination of the parts' dimensions and locations in order to fulfill the requirements. Despite many works in this research field, current design techniques are lacking in generality and are only suitable for specific classes of mechanisms.

This work proposes a generic approach to solve mechanism dimensional synthesis. A declarative specification based on constraints facilitates the design of almost any system topology such as planar and three-dimensional mechanisms with open and closed loop kinematic chains containing any number and type of joints. The modeling approach presented allows automatic generation of systems of equations representing both the constraints to satisfy and the target objectives to minimize, while enabling geometric construction of the obtained solutions.

The resulting polynomial equations are nonlinear, highly coupled and do not necessarily admit an exact solution. Therefore, we propose to solve them by optimization methods. The developed strategy focuses on finding several local minima of synthesis problems instead of finding a global minimum. First, a particle swarm global optimization explores the search domain and provides points approximating these minima. Then, various Nelder-Mead based local optimization processes handle these points concurrently. This strategy significantly improves the robustness of each optimization method taken independently. It also makes it possible for the designer to choose the best solution among several configurations according to his criteria.

A dimensional mechanism synthesis prototype, fully integrated with a commercial computer aided design software, has also been developed. It allows validating our design approach on a set of classical problems.

Keywords: Dimensional mechanism synthesis, computed aided design, mechanism, kinematic joints, kinematics, kinematic graph and scheme, coordinate systems, global and local numerical optimization, particle swarm optimization, Nelder-Mead method.