Étude théorique et numérique de l'EDP de Black-Scholes non linéaire en présence des coûts de transaction

Aicha Driouch

▶ **To cite this version:**

Aicha Driouch. Étude théorique et numérique de l'EDP de Black-Scholes non linéaire en présence des coûts de transaction. Mathématiques générales [math.GM]. Université de Picardie Jules Verne; Université Cadi Ayyad (Marrakech, Maroc), 2019. Français. NNT : 2019AMIE0050 . tel-03638220

HAL Id: tel-03638220

https://theses.hal.science/tel-03638220

Submitted on 12 Apr 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Thèse de Doctorat en cotutelle

Mention Mathématiques

présentée à ***l'Ecole Doctorale en Sciences Technologie et Santé (ED 585)*** **de l'Université de Picardie Jules Verne**

et

de l'Ecole doctorale **de l'Université Cadi Ayyad – Faculté des Sciences et Techniques**

par

Aicha DRIOUCH

pour obtenir le grade de Docteur de l'Université de Picardie Jules Verne et de l'Université de l'Université Cadi Ayyad – Faculté des Sciences et Techniques

Étude théorique et numérique de l'EDP de Black-Scholes non linéaire en présence des coûts de transaction.

Soutenue le 05 Juillet 2019, après avis des rapporteurs, devant le jury d'examen :

M. SOUISSI Ali, Professeur	**Président**
M. DUMONT Serge, Professeur	**Rapporteur**
M^{me} ABOULAICH Rajae, Professeur	**Rapporteur**
M. PIERRE Morgan, Maître de Conférences HDR	**Examinateur**
M. GOUBET Olivier, Professeur	**Directeur de thèse**
M. AL MOATASSIME Hassan, Professeur	**Co-Directeur de thèse**
M. ABOUNOUH Mostafa, Professeur	**Co- Directeur de thèse**

Remerciements

Je voudrais dans un premier temps remercier mes directeurs de thèse Monsieur Olivier Goubet, Professeur à l'Université de Picardie Jules Verne, et Monsieur Hassan Al Moatassime, Professeur à l'Université Cadi Ayyad à Marrakech, pour leur patience, leur disponibilité et surtout leurs judicieux conseils, qui ont contribué à alimenter ma réflexion. Je remercie également mon co-directeur de thèse Monsieur Mostafa Abounouh, Professeur à l'Université Cadi Ayyad, pour sa gentillesse et pour les nombreux encouragements qu'il m'a prodigués.

Je tiens à remercier tous les membres du laboratoire Amienois de mathématique fondamentale et appliquée à l'Université de Picardie Jules Vernes pour leur chaleureux acceuil, ainsi que les intervenants professionnels responsables de ma formation.

J'adresse tous mes remerciements à Monsieur Serge Dumont, Professeur à l'Université de Nîmes, ainsi qu'à Madame Rajae Aboulaich, Professeur à l'Université Mohammed V, pour l'intérêt qu'ils ont porté à ma recherche en acceptant de rapporter et d'examiner mon travail et de l'enrichir par leurs propositions.

Je tiens à remercier Monsieur Morgan Pierre, Professeur à l'Université de Poîtiers, Monsieur Fahd Karami, Professeur à l'Université Cadi Ayyad et Monsieur Ali Souissi, Professeur à l'Université Mohammed V, pour l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant d'être dans mon jury de thèse.

Enfin, j'adresse mes plus sincères remerciements à mes parents, mon mari, mes soeurs et mes amis, qui m'ont toujours soutenu et encouragé au cours de la réalisation de ce mémoire.

A tous je tiens à vous signifier ma sincère gratitude.

A Theoretical and Numerical Study of a Nonlinear Black-Scholes Equation in the presence of Transaction Costs

Résumé

La contribution principale de cette thèse est l'analyse théorique et numérique d'un modèle de Black-Scholes non linéaire pour la valorisation d'une option d'achat européenne obtenu par G. Barles et H. Soner. L'analyse théorique de ce problème a été réalisée à l'aide d'une approche récente qui consiste à faire un changement de variable afin de placer le problème dans le cadre des équations de type Barenblatt. D'une part, nous avons étudié le problème avec des méthodes standard (utilisant la monotonie du système), plutôt que la théorie des solutions de viscosité. D'autre part, nous avons développé un modèle bidimensionnel pour une option panier en présence des coûts de transaction. Bien que ce produit financier soit simple, il n'en demeure pas moins que cet instrument est complexe. En effet, comme pour la majorité des options multi-dimensionnelles, les équations modélisant les options paniers n'ont pas de solution analytique même dans le cas linéaire. Nous devons donc recourir à des méthodes numériques, mais l'efficacité de ces dernières est sensible à la dimension de l'espace. Nous avons appliqué une méthode multigrille (en variable d'espace) afin de simuler numériquement la solution du problème de Barles et Soner en un temps raisonnable. Le gain attendu est une simulation numérique moins coûteuse en temps que les méthodes itératives de résolution numérique standard.

Mots-clés : Black-Scholes, modèle de Barles et Soner, coûts de transaction, solutions convexes, schéma des itérations monotones, équation de Barenblatt, différences finies, méthodes des multigrilles, option Européenne, option panier.

Abstract

The first contribution of this thesis is the theoretical study of a nonlinear Black-Scholes equation resulting from market frictions, like pricing options under transaction costs. We focused our attention on the Barles and Soner's model where the volatility is enlarged due to the presence of transaction costs. On the one hand we give a constructive mathematical approach for proving the existence of convex solutions for the Barles and Soner equation which is a non degenerate fully nonlinear deterministic problem with nonlinear dependence upon the highest derivative. The existence of a strong solution to the original equation is shown by considering a monotone sequence satisfying an abstract Barenblatt equation and converging toward the solution of a limit problem. On the other hand, we give a numerical simulation using finite difference technique since an exact solution of the Barles and Soner problem does not exist. The second contribution of this thesis is the pricing of a European basket options in the presence of transaction costs. We develop a model that incorporates the illiquidity of the market into the classical two-assets Black-Scholes framework. We perform a numerical simulation using finite difference method. We consider a multigrid method in order to reduce computational costs. The aim of this study is to investigate a deterministic extension for the Barles and Soner model and to demonstrate the effectiveness of multigrid approach to solving a fully nonlinear two dimensional Black-Scholes problem.

Keywords : Black-Scholes, transaction costs, Barenblatt equation, convex solutions, multigrid method, finite difference method, Barles and Soner's model, European option , basket option.

Table des matières

I État de l'art-Le modèle de Black-Scholes **13**

1 Notions de calcul stochastique **14**
1.1 Généralités . . . 14
1.1.1 Variable aléatoire . . . 14
1.1.2 Espérance, indépendance . . . 15
1.1.3 Topologie et Convergence . . . 16
1.1.4 Variable aléatoire gaussienne . . . 17
1.2 Processus stochastique . . . 18
1.2.1 Processus stochastique . . . 19
1.2.2 Espérance conditionnelle et martingale . . . 19
1.2.3 Mouvement Brownien . . . 20
1.3 Intégration stochastique . . . 23
1.3.1 L'intégrale de Wiener . . . 23
1.3.2 L'intégrale d'Itô . . . 25
1.3.3 Lemme d'Itô . . . 26

2 Le modèle de Black-Scholes **29**
2.1 Une introduction à la finance de marché . . . 29
2.1.1 Actifs financiers . . . 29
2.1.2 Les produits dérivés . . . 29
2.1.3 Les contrats à terme . . . 30
2.1.4 Les options . . . 30
2.2 Modélisation des marchés financiers en temps continu . . . 31
2.2.1 Les actifs de base . . . 32
2.3 Les hypothèses du modèle de Black-Scholes . . . 32
2.3.1 Achat et vente à découvert . . . 32
2.3.2 Coût de transaction . . . 32
2.3.3 Absence d'opportunité d'arbitrage . . . 33
2.3.4 Liquidité du marché . . . 33
2.4 l'EDP de Black-Scholes . . . 33
2.4.1 Interpretation financière de l'EDP de Black-Scholes . . . 35
2.4.2 Valorisation risque neutre . . . 35
2.5 Les grecques . . . 36
2.5.1 Le delta d'une option Δ . . . 36
2.5.2 le gamma d'une option Γ . . . 36
2.6 Analyse mathématique de l'EDP déterministe de Black-Scholes . . . 36
2.6.1 Conditions aux limites pour un Call . . . 36
2.6.2 Convexité du prix de l'option V . . . 37
2.7 Conclusion . . . 40

3 Les coûts de transaction **41**
3.1 Introduction . . . 41
3.2 Modèle de Leland . . . 41
3.2.1 Modélisation . . . 42
3.3 Modèle de Barles et Soner . . . 43
3.3.1 Fonction d'utilité . . . 43
3.3.2 Modélisation . . . 44
3.4 Modèle RAPM (Risk Adjusted Pricing Methodology) . . . 45
3.5 Conclusion . . . 45

II Le modèle de Black-Scholes non linéaire **46**

4 Le modèle de Barles & Soner **47**
4.1 Introduction . . . 47
4.2 L'équation de Black-Scholes non linéaire . . . 47
4.3 Cadre mathématique de l'EDP de Barles et Soner . . . 48
4.3.1 Transformation de l'équation . . . 48
4.3.2 Cadre fonctionnel . . . 49
4.3.3 Schéma d'approximation . . . 50
4.3.4 Existence et unicité d'une solution pour un $\tau > 0$ fixé . . . 52
4.3.5 Passage au problème continu en temps . . . 55
4.3.6 Estimations a priori . . . 56
4.3.7 Passage à la limite (quand $\tau \to 0$) . . . 57
4.3.8 Retour à l'équation originale de Barles et Soner . . . 59
4.4 Comparaison avec la solution du modèle linéaire Black-Scholes . . . 59
4.5 Simulation numérique du modèle de Barles et Soner . . . 61
4.5.1 Le schéma de Crank-Nicolson . . . 62
4.5.2 Résultats numériques . . . 64
4.6 Conclusion . . . 66

5 Valorisation d'une option sur deux actifs financiers **68**
5.1 Introduction . . . 68
5.2 Option sur deux actifs sous-jacents . . . 68
5.2.1 Option panier . . . 68
5.3 Évaluation du prix d'une option panier Européenne . . . 69
5.3.1 L'équation aux dérivées partielles . . . 70
5.3.2 Analyse numérique du modèle . . . 70
5.3.3 Résultats numériques . . . 71
5.4 Black-Scholes non linéaire en deux dimensions . . . 73
5.4.1 Pricing d'une option panier avec le modèle de Barles et Soner . . . 73
5.4.2 Le schéma aux differences finies . . . 74
5.4.3 Résultats numériques : Impact des coûts de transaction . . . 75
5.5 Conclusion . . . 79

III La méthode multigrille **80**

6 La méthode multigrille **81**
6.1 Introduction . . . 81
6.2 Principe de la méthode multigrille . . . 81
6.3 Les opérateurs de transfert . . . 85

6.3.1 Restriction . . . 85
6.3.2 Prolongement . . . 85
6.4 Les algorithmes multigrilles . . . 86
6.4.1 L'algorithme CG (Coarse Grid Correction) . . . 86
6.4.2 Le V-cycle . . . 86
6.4.3 Le W-Cycle . . . 87
6.4.4 L'algorithme FMG . . . 89
6.5 Cas d'un opérateur non linéaire . . . 90
6.6 Application des multigrilles sur le modèle non linéaire de Barles-Soner . . . 90
6.6.1 Résultats numériques . . . 91
6.7 Multigrille dans le cas bidimensionnel . . . 93
6.7.1 Interpolation et restriction en 2 dimensions . . . 93
6.7.2 Application des multigrilles au modèle bidimensionnel de Barles et Soner . . . 95
6.7.3 Résultats numériques . . . 95
6.8 Conclusion . . . 97

Table des figures

1.1 Diagramme de convergence de variables aléatoires . . . 17
1.2 Trajectoires Browniennes . . . 21

2.1 La valeur terminale d'une option d'achat . . . 30
2.2 La valeur terminale d'une option de vente . . . 31

3.1 Graphe d'une fonction d'utilité U . . . 43
3.2 Graphe de la fonction Ψ . . . 45

4.1 Schéma de la fonction σ. . . . 55
4.2 Schéma des fonctions σ_n. . . . 55
4.3 Grille uniforme pour la simulation numérique de l'option Européenne. . . . 62
4.4 La donnée initiale du problème transformé (4.73) . . . 63
4.5 Le prix de l'option européenne V en présence des coûts de transaction. . . . 64
4.6 Différence entre le prix de l'option pour le modèle Barles et Soner (marché soumis à des coûts de transaction) et le prix de l'option dans le modèle de Black-Scholes. . . . 65
4.7 Graphe de l'option dans le cas non linéaire en comparaison avec le cas linéaire et la donnée initiale. . . . 65
4.8 Le prix de l'option pour différentes valeurs de a. . . . 66
4.9 Comparaison du prix de l'option pour différents modèles. . . . 66

5.1 La valeur terminale de l'option panier ($K = 100$, $a_1 = a_2 = 1$). . . . 70
5.2 La valeur terminale de l'option panier ($K = 100$, $a_1 = a_2 = 0.5$). . . . 70
5.3 Conditions au bord pour une option panier. . . . 71
5.4 Le prix de l'option panier ($a_1 = a_2 = 1$). . . . 72
5.5 Le prix de l'option panier ($a_1 = a_2 = 0.5$). . . . 72
5.6 Test 1 : L'actif S_1 est plus volatile que S_2. . . . 76
5.7 Test 2 : Actifs S_1 et S_2 faiblement volatiles. . . . 77
5.8 Test 3 : Actifs S_1 et S_2 avec volatilités identiques. . . . 78

6.1 Grille Ω^h . . . 82
6.2 Les modes $v_j = \sin(\frac{jk\pi}{N}), 0 \leq j \leq N$, avec les nombres d'ondes $k = 1,\ 3,\ 6.$ . . . 83
6.3 Tracé de $||e||_\infty$ en fonction du nombre d'itération (Gauss-Seidel) . . . 83
6.4 Restriction par la méthode du Full Weighting d'un vecteur d'une grille fine Ω^h à une grille grossière Ω^{2h} . . . 85
6.5 Interpolation d'un vecteur d'une grille grossière Ω^{2h} à une grille fine Ω^h . . . 86
6.6 Illustration d'un cycle V . . . 87
6.7 Illustration d'un cycle W . . . 88
6.8 Illustration d'un FMG cycle . . . 89
6.9 Comparaison de la convergence pour la méthode de Gauss-Seidel standard en utilisant 4 différents maillages (128, 256, 512 et 1024) dans le cas de Barles et Soner et le cas linéaire. . . . 92

6.10 Comparaison de la convergence pour la méthode multigrille en utilisant 4 différents maillages (128, 256, 512 et 1024) dans le cas du modèle de Barles et Soner et le cas linéaire. 92
6.11 Illustration d'un V-cycle dans le cas bidimensionnel 93
6.12 La restriction à l'aide de 5 points 94
6.13 Multigrille pour un maillage 2D uniforme 95
6.14 Comparaison de convergence de la méthode monogrille pour le cas linéaire et non linéaire pour différentes tailles de maillage ($128^2, 256^2$ et 512^2). 96
6.15 Comparaison de convergence de la méthode Multigrilles pour le cas linéaire et le cas de Barles Soner réspectivement et pour différentes tailles de maillage ($128^2, 256^2$ et 512^2). 96
6.16 maillage non uniforme. 99

Liste des tableaux

5.1 Les paramètres choisis pour chaque test numérique 75

6.1 Comparaison du temps écoulé CPU avec la méthode multigrille et la méthode de Gauss-Seidel standard pour différents pas de discretisation. 93
6.2 Comparaison du temps écoulé CPU avec la méthode multigrille et la méthode de Gauss-Seidel standard pour différents pas de discrétisation en espace pour le cas non linéaire et le cas linéaire (Black-Scholes). 97

Notations

Abréviations

AOA	Absence d'opportunité d'arbitrage
EDS	Équation différentielle stochastique
EDP	Équation aux dérivées partielles
FAS	Full approximation storage
CPU	Central processing unit
GS	Gauss-Seidel
EDO	Équation différentielle ordinaire
CG	Coarse Grid
OA	Opportunité d'arbitrage

Symboles

Variables de l'option

t	Le temps
T	La maturité
K	Le prix d'exercice ou Strike
r	Le taux d'intérêt sans risque
σ	La volatilité (constante)
$\tilde{\sigma}$	La volatilité modifiée (non constante)
S	Le prix de l'actif
μ	Le rendement espéré de l'actif S
V	Le prix de l'option
ρ	Le coefficient de corrélation

Variables du maillage

dt	Le pas en temps
dx ou dS	Le pas en espace
ν_1	Nombre des itérations pré-relaxation
ν_2	Nombre des itérations post-relaxation

Introduction

Introduction générale

Les mathématiques financières constituent une branche des mathématiques appliquées permettant de modéliser des marchés financiers. Ce domaine de mathématiques a connu un grand succès durant ces deux dernières décennies. Cette thèse est basée sur le modèle introduit par Fischer Black et Myron Scholes qui leur a valu le prix Nobel en économie. Leur théorie fut le commencement d'une nouvelle ère d'ingénierie financière. En effet, la force du modèle de Black-Scholes réside dans le fait qu'il nous permet d'estimer le prix de l'option à l'aide d'une formule analytique et qu'il permet d'écrire la volatilité (qui est un paramètre non observable sur le marché) d'un actif financier en fonction du prix de l'option et du temps. Son second point fort se caractérise par la notion de couverture, autrement dit, il s'agit d'une stratégie, appelée «delta neutre», qui permet à l'investisseur d'être couvert contre le risque relatif a la fluctuation de l'actif à la maturité du contrat et cette couverture se fait en reéquilibrant de manière continue le portefeuille de l'investisseur par rapport au delta (qui désigne la variation de l'option par rapport au sous-jacent). Le modèle de Black-Scholes, utilisé dans le monde entier, se fonde sur des hypothèses non réalistes sur les marchés financiers. Ces hypothèses seront discutées en détails dans la suite.
L'intérêt de la valorisation des produits dérivés (ou de manière plus précise le «pricing» des options) résulte du fait que les produits dérivés peuvent être utilisés afin de minimiser les risques liés aux fluctuations des prix des actifs sous-jacents. Cette technique de protection est appelée couverture. Il existe une variété de produits dérivés sur le marché, tels que les contrats à termes comme les *Futures, Forwards, swaps* et contrats optionnels (options).
Afin de décrire la réalité des marchés financiers, une théorie des marchés avec les coûts de transaction est en plein essor, Cette théorie a donné naissance aux équations aux dérivées partielles non linéaires de Black-Scholes qui suscitent de plus en plus d'intérêt, car elles fournissent des valeurs plus précises en tenant compte d'hypothèses plus réalistes, telles que les coûts de transaction, les préférences des investisseurs ou les marchés illiquides, qui peuvent avoir un impact important sur le prix de l'actif, la volatilité et le prix d'option lui-même.

Plan de la thèse

La première partie de cette thèse est une introduction aux éléments de base du calcul stochastique et de la finance de marché. En combinant ces deux éléments on peut comprendre l'origine de l'équation aux dérivées partielles de Black-Scholes ainsi que les limites de ce fameux modèle. La seconde partie concerne l'étude d'un modèle de Black-Scholes non linéaire pour le cas des marchés soumis à des coûts de transactions, il s'agit de l'étude théorique et numérique de ce modèle qui est une équation aux dérivées partielles fortement non linéaire pour une option Européenne ainsi que pour les options paniers autrement dit, options portant sur plus d'un actif sous-jacent où nous avons proposé une extension déterministe du modèle dans des marchès soumis à des coûts de transaction proportionnels au volume d'actifs échangés.
La troisième partie concerne la méthode multigrille qui permet de diminuer le temps de calcul (qui devient couteux en augmentant la dimension du problème).

Première partie

État de l'art-Le modèle de Black-Scholes

Chapitre 1

Notions de calcul stochastique

Dans ce chapitre, on rappelle quelques éléments de calcul stochastique en se basant sur [47, 51, 30]. Il s'agit de notions clés indispensables pour la modélisation des marchés financiers en s'inspirant des travaux de [32] et [56, 26]. Parmi ces concepts de base, on trouve la notion de mouvement Brownien et d'intégration stochastique [43], en particulier, le lemme d'Itô, qui est un outil nécessaire pour comprendre l'origine du modèle de Black-Scholes [12].

1.1 Généralités

1.1.1 Variable aléatoire

Définition 1. *Soit $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace mesurable. Une probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathcal{F})$ est une application de $\mathcal{F}$ vers* [0,1] *qui vérifie*

1. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

2. *si A_1, A_2,...,A_n,.. sont des parties de $\mathcal{F}$ deux à deux disjointes, alors*

$$\mathbb{P}\left[\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

La deuxième propriété porte le nom de $\sigma-$additivité. On utilise souvent l'écriture avec les fonctions indicatrices

$$\mathbb{P}[A] = \int_A d\mathbb{P} = \int_\Omega \mathbb{1}_A d\mathbb{P}.$$

Un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{F})$ muni d'une probabilité $\mathbb{P}$ s'écrit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et on parle alors d'espace probabilisé.

Définition 2. *Soit $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace mesurable. Une variable aléatoire réelle notée (v.a.r.) X est une application mesurable de $(\Omega, \mathcal{F})$ vers $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, avec $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est la tribu Borélienne (tribu engendrée par les intervalles $]a,b[$, $a > b \ \in \mathbb{R}$).*

Définition 3. *Soit X une v.a.r définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ la loi de X est la probabilité $\mathbb{P}_X$ sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ définie comme mesure image de $\mathbb{P}$ par X, pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,*

$$\mathbb{P}_X(A) = P[X \in A] = \mathbb{P}[\omega \in \Omega / X(\omega) \in A].$$

Définition 4. *La fonction de répartition de la variable aléatoire réelle X est la fonction F_X qui à tout réel x associe :*

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x).$$

Définition 5. *On dit qu'une variable aléatoire X est à densité, s'il existe f définie sur $\mathbb{R}$ t.q*

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt,$$

où $f \in L^1(\mathbb{R})$ avec

1. $f(t) \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$.
2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1.$

1.1.2 Espérance, indépendance

Définition 6. *Soit X une v.a.r telle que*

$$\int_{\Omega} |X(\omega)|d\mathbb{P} := \int_{\mathbb{R}} |x|d\mathbb{P}_X(x) < \infty.$$

On définit alors l'espérance de X par

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\Omega} X(\omega)d\mathbb{P} = \int_{\mathbb{R}} xd\mathbb{P}_X(x).$$

Proposition 1. *Nous avons les propriétés suivantes,*

- $\mathbb{E}(a) = a, \quad a \in \mathbb{R}$.
- *X,Y v.a.r tq* $X \leq Y \Rightarrow \mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y)$.
- $\mathbb{E}(aX + bY) = a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y)$.

Définition 7. *Soit X une variable aléatoire réelle telle que $\mathbb{E}\left(X^2\right)$ existe. On définit la variance par*

$$\mathrm{Var}(X) \equiv V(X) \overset{def}{=} \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])^2\right].$$

Définition 8. *La covariance de deux variables aléatoires réelles X et Y ayant chacune une variance finie est la valeur*

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])\,(Y - \mathbb{E}[Y])].$$

Remarque 1.

1. *La variance est quadratique dans le sens où* $\mathrm{Var}(aX + b) = a^2\,\mathrm{Var}(X)$.
2. *La covariance est symétrique ($Cov(X,Y) = Cov(Y,X)$).*
3. *Voici d'autres expressions de la variance et la covariance en fonction de l'espérance*
   a) $Cov(X,Y) = \mathbb{E}(X,Y) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.
   b) $Var(X) = Cov(X,X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$.

Définition 9. *La variance de la somme de deux variables aléatoires réelles X et Y ayant chacune une variance finie est donnée par*

$$\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + 2\ \mathrm{Cov}(X,Y),$$

ou de manière plus générale, pour $(X_i)_i$ une famille finie de variables aléatoires

$$\mathrm{var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{var}(X_i) + 2 \sum_{1\leq i<j\leq n} \mathrm{cov}(X_i,X_j).$$

Définition 10. *Le coefficient de corrélation entre deux variables aléatoires est défini par*

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}}.$$

Nous avons toujours $\rho(X,Y) \in [-1,1]$. Plus $|\rho(X,Y)|$ est proche de 1 plus la dépendance entre les variables X et Y est forte.

Remarque 2. *Si X et Y sont indépendantes, alors $Cov(X,Y) = 0$ et donc $\rho(X,Y) = 0$ on a par conséquent*

$$Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y).$$

La réciproque est fausse, en effet $Cov(X,Y) = 0$ n'implique pas forcément que X et Y sont indépendantes.

De manière générale, une corrélation nulle indique une indépendance parfaite, alors qu'une corrélation de 1 indique un comportement similaire. Une corrélation de -1 indique des comportements opposés.

1.1.3 Topologie et Convergence

On considère, sur un espace probabilisé fixé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ une suite de variables aléatoires $\{X_n, n \geq 0\}$ et l'on s'intéresse à la convergence de cette suite. Le caractère aléatoire de cette suite met en évidence plusieurs types de convergence.

La convergence ponctuelle

La convergence ponctuelle est la convergence la plus simple qui s'énonce,

$$\forall \omega \in \Omega \qquad X_n(\omega) \longmapsto X(\omega), \quad n \mapsto \infty.$$

Dans la théorie des probabilités, il est très restrictif de demander une convergence pour tous les $\omega \in \Omega$. A la place, on définit la convergence **presque sûre**.

Définition 11. *Une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires converge presque sûrement vers X si*

$$\mathbb{P}\Big(\Big[\omega \in \Omega / \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\Big]\Big) = 1.$$

La convergence en mesure (ou en probabilité)

La convergence en probabilité de X_n vers X garantie que la probabilité que "X_n reste éloignée de X" tend vers 0.

Définition 12. *Une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires converge en probabilité vers la variable aléatoire X si*

$$\forall \epsilon > 0 \quad \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \epsilon) = 0.$$

La convergence en norme

Définition 13. *L'espace $L^p(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}) = \{X : (\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}) \to \mathbb{R} \mid \mathbb{E}(|X|^p) < +\infty\}$ est un espace vectoriel normé ayant pour norme*

$$||X|| = (\mathbb{E}[|X|^p])^{\frac{1}{p}}.$$

L'espace $(L^p(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}),||.||_p)$ est un espace de Banach.

Définition 14. *Une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires converge en norme p vers X si*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[|X_n - X|^p] = 0.$$

On note : $X_n \xrightarrow{L^p} X$.

La convergence en Loi

Définition 15. *Une suite $(X_n)_n$ de variables aléatoires converge en loi vers X si*

$$\mathbb{P}(X_n \in A) \longmapsto \mathbb{P}(X \in A), \quad \text{quand } n \to \infty, \quad \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Le lien entre les différentes convergences est schématisé par le diagramme suivant

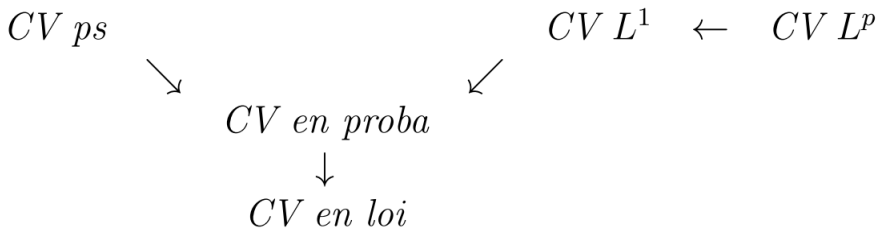


FIGURE 1.1 – Diagramme de convergence de variables aléatoires

1.1.4 Variable aléatoire gaussienne

Définition 16. *Une variable aléatoire réelle X est dite gaussienne si sa loi de probabilité admet la densité*

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{-(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Cette loi est noté $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$.

Remarque 3. *Lorsque $\mu = 0$, $\sigma = 1$ (i.e $X \sim \mathcal{N}(0,1)$) on dit que X est une v.a.r gaussienne centrée réduite (standard).*

Proposition 2. *Une variable aléatoire X de loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ a pour*

Espérance $\mathbb{E}[X] = \mu$.

Variance $Var(X) = \sigma^2$.

Démonstration. Espérance

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x d\mathbb{P}_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x.\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

En utilisant le changement de variable $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ $dz = \frac{1}{\sigma}dx$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\sigma z + \mu)}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{z^2}{2}} dz, \\
\mathbb{E}(X) &= \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz + \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} z e^{-\frac{z^2}{2}} dz, \\
\mathbb{E}(X) &= \mu.
\end{aligned}$$

Variance

$$Var(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^2] = \mathbb{E}[(X-\mu)^2].$$

Nous allons utiliser le résultat suivant, soit $\Phi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que : $\Phi(X)$ est intégrable. Alors

$$\mathbb{E}(\Phi(X)) = \int_{\Omega} \Phi(X) d\mathbb{P} = \int_{\mathbb{R}} \Phi(x) d\mathbb{P}_X(x).$$

Dans notre cas, $\Phi(X) = (X-\mu)^2$. Nous avons

$$\mathbb{E}(X-\mu)^2] = \int_{\Omega} (X-\mu)^2 d\mathbb{P} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-\mu)^2}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

En utilisant le même changement de variable,

$$\begin{aligned}
Var(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z^2\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-z^2}{2}} dz = -\sigma^2 \int_{-\infty}^{+\infty} -z e^{\frac{z^2}{2}}.\frac{z}{\sqrt{2\pi}} dz, \\
&= -\sigma^2 \left(\left[\frac{z}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \right), \\
&= -\sigma^2 (0 - 1) = \sigma^2.
\end{aligned}$$

□

1.2 Processus stochastique

On commence par introduire une notion mathématique qui joue un rôle central en théorie des marchés financiers.

1.2.1 Processus stochastique

Définition 17. *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ une famille de sous-tribus de $\mathcal{F}$. On dit que $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ est une filtration si c'est une famille croissante au sens où $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ si $s \leq t$.*
Il faut comprendre $\mathcal{F}_t$ comme "l'information au temps t" c'est-à-dire : plus le temps croît ($s \leq t$), plus on a d'information ($\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$).

Si $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ est une filtration sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, on dit que $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé filtré.

Définition 18. *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Un processus stochastique (ou fonction aléatoire) est une famille de variables aléatoires $(X_t; t \in [0, \infty[)$ définies sur le même espace de probabilité Ω.*

Définition 19. *Un processus stochastique $X = (X_t, t \geq 0)$ est dit adapté (par rapport à une filtration $\mathcal{F}_t$) si X_t est $\mathcal{F}_t$ mesurable $\forall t \geq 0$. On dit que le processus est $\mathcal{F}_t$-adapté.*

Remarque 4.
1. *Pour $t \geq 0$ fixé, $\omega \in \Omega \longrightarrow X_t(\omega)$ est une variable aléatoire sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.*
2. *Pour $\omega \in \Omega$ fixé, $t \in \mathbb{R} \longrightarrow X_t(\omega)$ est une fonction à valeurs réelles, appelée trajectoire du processus.*
3. *On dit que le processus X est continu si ses trajectoires sont continues pour presque tout $\omega \in \Omega$.*

Définition 20. *Un processus $V = \{V_t, t \geq 0\}$ est dit à variations finies sur $[0,t]$ si*

$$\sup_{t_i} \sum_i |V_{t_{i+1}} - V_{t_i}| < \infty,$$

Le sup étant pris sur les subdivisions $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq ... \leq t_i \leq t_{i+1} \leq ... \leq t$.

Définition 21. *Un processus $X = (X_t)_t$ est dit gaussien si toute combinaison linéaire finie de $(X_t, t \geq 0)$ est une variable aléatoire gaussienne, c'est-à-dire si*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t_i,\ \forall a_i \in \mathbb{R},\ 1 \leq i \leq n,\ \text{ on a } \sum_{i=1}^{n} a_i X_{t_i} \text{ est une v.a.r gaussienne.}$$

Un processus gaussien est caractérisé par son espérance et sa covariance.

1.2.2 Espérance conditionnelle et martingale

Espérance conditionnelle

L'espérance d'une variable aléatoire conditionnée par un événement B est, intuitivement, la moyenne que l'on obtient si on renouvelle un grand nombre de fois l'expérience liée à la variable aléatoire et que l'on ne retient que les cas où l'événement B est réalisé.

Théorème 1. *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, $\mathcal{G}$ une sous tribu de $\mathbb{F}$ et X une v.a.r intégrable. Il existe une unique v.a.r Z $\mathcal{G}$-mesurable telle que $\forall A \in \mathcal{G}$,*

$$\mathbb{E}[X \mathbb{1}_A] = \mathbb{E}[Z \mathbb{1}_A].$$

On appelle Z l'espérance conditionnelle de X sachant $\mathbb{G}$ et on note : $Z := \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$. Elle est caractérisée par $\mathbb{E}(XG) = \mathbb{E}(ZG)$, $\forall G$, v.a. bornée $\mathcal{G}-$ mesurable.

Proposition 3. *L'espérance conditionelle possède les propriétés suivantes, (les égalités entre les variables aléatoires sont vérifiées presque sûrement)*

1. $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]] = \mathbb{E}[X]$.
2. *si* X *est* $\mathcal{G}-$*mesurable,* $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = X$.
3. *si* X *est indépendante de* $\mathcal{G}$, $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = \mathbb{E}[X]$.

Martingale

Définition 22. *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_{t,\ t\geq 0}, \mathbb{P})$ *un espace de probabilité filtré et* $X = \{X_t, t \geq 0\}$ *un processus* $(\mathcal{F}_t)$*-adapté. On dit que* X *est une* $(\mathcal{F}_t)$*-martingale si*
a) $\mathbb{E}[|X_t|] < +\infty$ *(autrement dit* $X_t \in L^1(\Omega)$*) pour tout* $t \geq 0$*).*
b) $\mathbb{E}[X_t|F_s] = X_s$ *pour tout* $s \leq t$.

La propriété fondamentale (utilisée souvent par les financiers) d'une martingale est que pour tout horizon $T > 0$, l'ensemble du processus $\{X_t, t \leq T\}$ est complètement déterminé par la valeur terminale X_T au sens où $X_t = \mathbb{E}[X_T|F_t]$ pour tout $t \leq T$.

1.2.3 Mouvement Brownien

Le mouvement Brownien est la représentation mathématique de la trajectoire aléatoire d'une particule dans un fluide. Il a été introduit en 1827 par le botaniste *Robert Brown (1773-1858)*. Il a ensuite été défini rigoureusement par *Louis Bachelier* en *1900*. De grands scientifiques ont travaillé dessus au XX^{me} siècle, comme *Paley, Zygmund, Wiener* ou encore *Einstein*. Dans ce qui suit, on se donne un espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et un processus $(B_t, t \geq 0)$ sur cet espace.

Définition 23. *Soit* $B = \{B_t, t \geq 0\}$ *un processus issu de* 0 *et à valeurs dans* $\mathbb{R}$. *On dit que* B *est un mouvement Brownien (standard) si* $B_0 = 0$ *et*

1. *Pour tout* $s \leq t$, $B_t - B_s$ *est une variable réelle de loi gaussienne, donnée par* $\mathcal{N}(0, t-s)$.
2. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et* $0 = t_0 < t_1 < ... < t_n$, *la suite* $B_{t_1}; B_{t_2} - B_{t_1}; ...; B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ *est une suite de variables aléatoires indépendantes. (On dit que le mouvement est à acroissements indépendants).*
3. *Les trajectoires de* B *sont presque sûrement continues.*

Propriétés du mouvement Brownien

Proposition 4. *Le mouvement Brownien possède les propriétés suivantes,*

1. *Les trajectoires du mouvement brownien sont presque-sûrement continues et nulle part dérivables. C'est-à-dire que pour presque tout* $\omega \in \Omega$, *la fonction* $t \mapsto B_t(\omega)$ *est nulle part dérivable.*
2. *Le processus* B *est un processus gaussien, sa loi est caractérisée par son espérance nulle (*$\mathbb{E}[B_t] = 0\ \forall t \geq 0$*) et sa covariance* $Cov(B_t, B_s) = min(s,t)$.

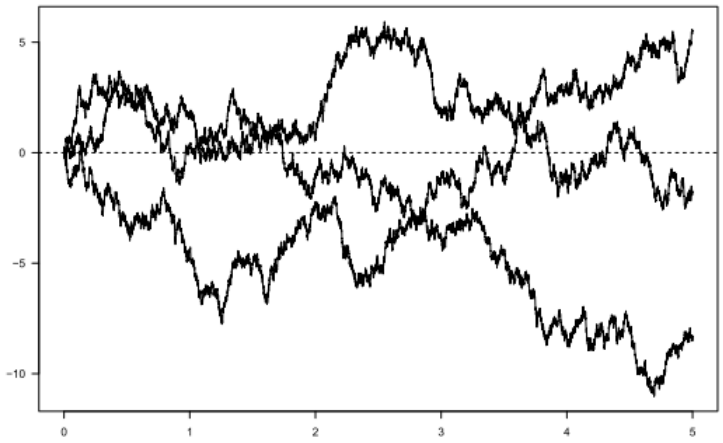


FIGURE 1.2 – Trajectoires Browniennes

Théorème 2. *Soit n fixé et $t_j = \frac{j}{2^n}t$ pour j variant de 0 à 2^n. Alors on a*

$$\sum_{j=1}^{2^n}[B(t_j) - B(t_{j-1})]^2 \to t \text{ quand } n \to \infty.$$

Cette convergence a lieu en moyenne quadratique et presque surement.

Démonstration. Soit $Z_t^n = \sum_{j=1}^{2^n}[B(t_j)-B(t_{j-1})]^2$. On doit montrer que $\mathbb{E}((Z_t^n - t)^2) \to 0$. On a d'abord

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Z_t^n) &= \mathbb{E}(\sum_{j=1}^{2^n}[B(t_j) - B(t_{j-1})]^2) \\
&= \sum_{j=1}^{2^n}\mathbb{E}([B(t_j) - B(t_{j-1})]^2) \\
&= \sum_{j=1}^{2^n} Var([B(t_j) - B(t_{j-1})]) \\
&= \sum_{j=1}^{2^n}(t_j - t_{j-1}) = t.
\end{aligned}$$

Donc il suffit de montrer que $Var(Z_t^n) \to 0$.

$$\begin{aligned}
Var(Z_t^n) &= \sum_{j=1}^{2^n} Var([B(t_j) - B(t_{j-1})]^2), \\
&\quad + 2 \sum_{0\le i<j\le 2^n} \underbrace{Cov[B(t_j) - B(t_{j-1}), B(t_i) - B(t_{i-1})]}_{=0}, \\
&= \sum_{j=1}^{2^n} 2(\frac{t}{2^n})^2 = 2^{n+1}\frac{t^2}{2^{2n}}.
\end{aligned}$$

cette dernière égalité est vérifiée car si $X \sim \mathcal{N}(0,\sigma)$ alors la variance de X^2 est, $2\sigma^2$. d'où le fait que

Z_t^n converge en moyenne quadratique vers t.

□

Théorème 3. *Soit σ une subdivision de l'intervalle $[0,\ t]$ caractérisée par $0 = t_0 \leq t_1 \ldots \leq t_n = t$. Soit V_t la variation de la trajectoire du Brownien sur $[0,\ t]$ définie par*

$$V_t(\omega) = \sup_{\sigma} \sum_i |B_{t_{i+1}}(\omega) - B_{t_i}(\omega)|.$$

Alors $V_t(\omega) = \infty$ p.s.

Démonstration. On pose $Y_k = B_{t_{k+1}^*} - B_{t_k^*}$ où les points t_k^* de la subdivision sont choisis comme précédemment i.e : $t_k^* = \dfrac{k}{2^n}t$. On a alors

$$\sup_{\sigma} \sum_i |B_{t_{i+1}} - B_{t_i}| \geq \sup_n \sum_{k=0}^{2^n} |Y_k|.$$

On peut majorer Z_t^n par

$$Z_t^n = \sum_{j=1}^{2^n} |B_{t_j^*} - B_{t_{j-1}^*}|^2 \leq \left(\sup_k |B_{t_{k+1}^*} - B_{t_k^*}| \right) \sum_{k=0}^{2^n} |Y_k|. \qquad (*)$$

Quand $n \to +\infty$ le terme $\sup_k |B_{t_{k+1}^*} - B_{t_k^*}| \to 0$ *p.s* (par continuité uniforme des trajectoires sur [0,t]). Nous allons montrer que $\sum_{k=0}^{2^n} |Y_k| \to \infty$ quand $n \to \infty$. En effet, en raisonnant par l'absurde, si on suppose que $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{2^n} |Y_k|$ est finie, alors, d'après $(*)$, $Z_t^n \to 0$ ce qui est absurde ; et par suite,

$$V_t(\omega) = \sup_{\sigma} \sum_i |B_{t_{i+1}}(\omega) - B_{t_i}(\omega)| = \infty.$$

□

Brownien multidimensionnel

Définition 24. *Soit $B_t = (B_t^{(1)}, B_t^{(2)}, \ldots, B_t^{(n)})^T$ un processus $n-$dimensionnel. On dit que B_t est un Brownien multidimensionnel si les processus $(B_t^{(i)}, i \leq n)$ sont des browniens indépendants.*
Si B_t est un Brownien $n-$dimensionnel, on a

$$\mathbb{E}[<< B_t, B_s >>] = n.\min(s,t),$$

où $<<\ ,\ >>$ désigne le produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$.

Définition 25. *On dira que deux mouvements Browniens réels B^1 et B^2 sont corrélés avec un coefficient de corrélation ρ si le processus $t \to B_t^1 B_t^2 - \rho t$ est une martingale.*

1.3 Intégration stochastique

On cherche à définir des variables aléatoires du type

$$\omega \mapsto Y_t(\omega) = \int_0^t X_s dB_s,$$

où $\{X_t, t \geq 0\}$ est un processus stochastique et $\{B_t, t \geq 0\}$ est le mouvement Brownien. Le problème est bien sûr de donner un sens à l'élément différentiel dB_s puisque la fonction $s \to B_s$ n'est pas dérivable. Dans la pratique, on s'intéresse souvent à des quantités du type : $F(Y_t(\omega))$ avec F est une fonction réelle suffisamment régulière.

1.3.1 L'intégrale de Wiener

L'intégrale au sens de Riemann-Stieltjes

Définition 26. *Considérons deux fonctions réelles f et g définies sur un intervalle fermé [a,b], et une subdivision $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$, notée Π de cet intervalle. Si g est à variations finies alors la quantité*

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(g(x_{i+1}) - g(x_i)),$$

*avec $\xi \in [x_i, x_{i+1}]$, tend vers une limite fixe S lorsque le pas $\max |x_{i+1} - x_i|$ tend vers 0, S est alors appelée l'intégrale de **Riemann-Stieltjes** de la fonction f par rapport à g. On la note*

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}g(x),$$

$$f(g(t)) - f(g(0)) = \int_0^t f'(g(s))\mathrm{d}g(s).$$

Cette intégrale est bien définie lorsque f est continue et g est à variations bornées,

$$\sup_{\Pi} \sum_{i=0}^{n-1} |g(t_{i+1}) - g(t_i)| < \infty.$$

Cependant, lorsque g n'est pas à variations bornées, en particulier lorsque $g(t) = B_t$, on ne peut rien dire sur cette intégrale.

L'intégrale de Wiener

On se donne un espace $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$, et un mouvement Brownien B sur cet espace. On désigne par $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s, s \leq t)$ la filtration naturelle du mouvement Brownien. On note $L^2(\mathbb{R}^+)$ l'ensemble des fonctions boréliennes f de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ de carré intégrable (qui verifient $\int_0^{+\infty} |f(s)|^2 ds < \infty$), qui est un espace de Hilbert pour la norme

$$||f||_2 = \left(\int_0^{+\infty} f^2(s) ds \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Pour $f = \mathbb{1}_{]u,v]}$, on pose

$$\int_0^{+\infty} f(s)dB_s \stackrel{\text{def}}{=} B(v) - B(u).$$

a-Cas des fonctions en escalier

Soit maintenant f une fonction en escalier $f(x) = \sum_{i=1}^{n} f_{i-1}\mathbb{1}_{]t_{i-1},t_i]}(x)$. Il est facile de définir son intégrale de Wiener par

$$\mathrm{I}(f) = \int_0^{+\infty} f(s)dB_s = \sum_{i=1}^{n} f_{i-1}(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}).$$

Proposition 5. *La variable aléatoire* $\mathrm{I}(f)$ *est une variable gaussienne d'espérance nulle et de variance* $||f||_2^2$*, et si* f *et* g *sont des fonctions en escaliers alors*

$$\mathbb{E}(\mathrm{I}(f)\mathrm{I}(g)) = \int_{\mathbb{R}^+} f(s)g(s)ds.$$

b-Cas général

On sait que, pour $f \in L^2(\mathbb{R}^+)$, il existe une suite f_n de fonctions en escalier qui converge dans $L^2(\mathbb{R}^+)$ vers f c'est-à-dire

$$\int_0^{+\infty} |f_n - f|^2(x)dx \to 0 \ , \ n \to +\infty,$$

Dans ce cas, la suite f_n est de Cauchy dans $L^2(\mathbb{R}^+)$. La suite de v.a. $F_n = f_n(s)dB_s$ est une suite de Cauchy dans l'espace de Hilbert $L^2(\Omega)$ (en effet : $||F_n - F_m||_2 = ||f_n - f_m||_2 \to 0$ lorsque m,$n \to \infty$), donc elle est convergente. On pose

$$\mathrm{I}(f) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{\infty} f(s)dB_s = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{\infty} f_n(s)dB_s.$$

La limite est prise dans $L^2(\Omega)$.

Processus lié à l'intégrale stochastique

On définit pour $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$ la variable aléatoire $\displaystyle\int_0^{\infty} f(s)\mathrm{d}B_s = \int_0^{\infty} \mathbb{1}_{[0,t]}(s)\ f(s)dB_s$.

On peut de la même façon définir $\displaystyle\int_0^{t} f(s)\mathrm{d}B_s$ pour f telle que $\displaystyle\int_0^{T} |f(s)|^2 ds < \infty, \forall T$, ce qui permet de définir l'intégrale stochastique pour une classe plus grande de fonctions. On notera L^2_{loc} cette classe de fonctions.

Théorème 4. *Soit* $f \in L^2_{loc}$ *et* $M_t = \displaystyle\int_0^{t} f(s)\mathrm{d}B_s$.

1. *Le processus* M *est une martingale continue, la v.a.* M_t *est d'espérance nulle et de variance égale à* $\int_0^t f^2(s)\mathrm{d}s$.
2. *Le processus* M *est un processus gaussien centré de covariance* $\int_0^{t\wedge s} f^2(u)\mathrm{d}u$ *à accroissements indépendants.*
3. *Le processus* $\Big(M_t^2 - \int_0^t f^2(s)\mathrm{d}s, t \geq 0\Big)$ *est une martingale.*
4. *Si* f *et* g *sont dans* L^2_{loc} *, on a* $\mathbb{E}\left(\displaystyle\int_0^t f(u)\mathrm{dB}_u \ \int_0^s g(u)\mathrm{dB}_u\right) = \int_0^{t\wedge s} f(u)g(u)\mathrm{d}u.$

1.3.2 L'intégrale d'Itô

On veut généraliser l'intégrale de Wiener et définir $\int_0^t \theta_s dB_s$ pour des processus stochastiques θ.

a-Cas des processus étagés

Définition 27. *On dit qu'un processus θ est étagé, s'il existe une suite de réels t_j $0 \leq t_0 \leq t_1 \ldots \leq t_n$ et une suite de variable aléatoires θ_j telle que θ_j soit $\mathcal{F}_{t_j}$ mesurable, appartienne à L^2 et que $\theta_t = \theta_j$ pour tout $t \in]t_j, t_{j+1}]$, soit*

$$\theta_s(w) = \sum_{j=0}^{n-1} \theta_j(w) \mathbb{1}_{]t_j, t_{j+1}]}(s).$$

On définit alors

$$\mathrm{I_t}(\theta) = \int_0^{\mathrm{t}} \theta_{\mathrm{s}} \mathrm{dB_s} = \sum_{\mathrm{i}=0}^{\mathrm{p}} \theta_{\mathrm{i}} (\mathrm{B_{t_{i+1}}} - \mathrm{B_{t_i}}).$$

b-Cas général

Le principe est le même pour l'intégrale de Wiener, mais les outils mathématiques sont plus compliqués. On approche θ par une suite de processus étagés, soit $\theta = \lim_{n\to\infty} \theta_n$, l'intégrale $\int_0^\infty \theta_s dB_s$ est alors la limite dans $L^2(\Omega)$ des sommes $\sum_{i=0}^{p_n} \theta_i (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})$.

On note :

$$\int_0^t \theta_s dB_s \overset{\text{def}}{=} \int_0^\infty \theta_s \mathbb{1}_{[0,t]}(s) dB_s.$$

Définition 28. *On considère un mouvement Brownien B_t et un processus stochastique X adapté à la filtration naturelle associée à B_t. L'intégrale d'Itô de X est définie par*

$$\int_0^T X_t \, \mathrm{d}B_t = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} X_{t_i} \left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i} \right),$$

lorsque le pas de la partition $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T$ de $[0, T]$ tend vers 0.

Remarque 5. *La limite précédente est en moyenne quadratique c'est-à-dire dans L^2.*

Processus d'Itô

Définition 29. *Le processus d'Itô est un processus stochastique qui s'écrit sous la forme*

$$X_t = x + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s, \tag{1.1}$$

avec σ_s et b_s sont deux processus adaptés à la filtration $\mathcal{F}_t = \sigma(X_1, \ldots, X_t)$. Et :

$$\int_0^t |b_s| ds < \infty, \quad \int_0^t |\sigma_s|^2 ds < \infty \qquad \forall t \geq 0.$$

On utilise la notation formelle

$$\begin{cases} dX_t &= b_t dt + \sigma_t dB_t, \\ X_0 &= x. \end{cases} \tag{1.2}$$

Le coefficient b s'appelle la dérive ou (drift) du processus, et σ son coefficient de diffusion. On appelle aussi le processus

$$t \mapsto x + \int_0^t b_s ds, \tag{1.3}$$

la partie à variation finie de X. Et le processus

$$t \mapsto \int_0^t \sigma_s dB_s, \tag{1.4}$$

la partie martingale de X.

Remarque 6. *Le mouvement Brownien est un processus d'Itô. En effet, on peut l'écrire comme suit*

$$B_t = \int_0^t 1 dB_s. \tag{1.5}$$

Définition 30. *(Crochet d'un processus stochastique) On définit le crochet de deux processus stochastiques M et N (quand il existe) par :*

$$< M,N >_t = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})(N_{t_{i+1}} - N_{t_i}). \tag{1.6}$$

Remarque 7. *Si M et N sont continus, alors le crochet est nul dès que l'un des deux processus est à variation finie.*

On étend la définition du crochet au processus d'Itô si

$$dX_i(t) = b_i(t)dt + \sigma_i(t)dB_t, \qquad i = 1,2$$

sont deux processus d'Itô, leur crochet est par définition le crochet de leur partie martingale.

Définition 31. *(Crochet d'un processus d'Itô)*
On définit le crochet du processus d'Itô X comme étant le crochet de sa partie martingale ie

$$< X >_t = \int_0^t \sigma_s^2 ds,$$

Proposition 6. *Pour le cas d'un mouvement Brownien, on a* $B_t = \int_0^t 1 dB_s$ *alors* $< B >_t = \int_0^t 1^2 ds = t$.

1.3.3 Lemme d'Itô

Lemme 1. *(Lemme d'Itô) Soit X un processus d'Itô et* $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R},\mathbb{R})$. *Alors*

$$df(t,X_t) = \left(\frac{\partial f}{\partial X}(t,X_t) b_t + \frac{\partial f}{\partial t}(t,X_t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial X^2}(t,X_t) \sigma_t^2 \right) dt + \frac{\partial f}{\partial X}(t,X_t) \sigma_t dB_t.$$

Définition 32. *Une équation différentielle stochastique est une équation de la forme*

$$X_t = x + \int_0^t b(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(t, X_s) dB_s,$$

ou sous la forme condensée,

$$\begin{cases} dX_t &= b(t,X_t)dt + \sigma(t,X_t)dB_t, \\ X_0 &= x, \end{cases} \tag{1.7}$$

où l'inconnue est le processus X. Une solution de (1.7) est un processus $\mathcal{F}_t$-adapté tel que les intégrales $\int_0^t b(s,X_s)ds$ et $\int_0^t \sigma(s,X_s)dB_s$ ont un sens.

Théorème 5. *(Théorème d'existence de solution de l'EDS) On suppose que*

1. *Les fonctions b et σ sont continues.*
2. *il existe une constante K tel que pour tout $t \in [0,T]$, $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$ on a*

$$|b(t,x) - b(t,y)| + |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \leq K|x-y|, \tag{1.8}$$

$$|b(t,x)|^2 + |\sigma(t,x)|^2 \leq K^2(1+|x|^2). \tag{1.9}$$

3. *La condition initiale X_0 est indépendante de $(B_t, t \geq 0)$ et de carré intégrable.*

Alors il existe une unique solution de (1.7) à trajectoires continues pour $t \leq T$.

Proposition 7. *L'équation différentielle stochastique*

$$dS_t = S_t\mu dt + \sigma S_t dB_t, \tag{1.10}$$

admet une unique solution qui est donnée par

$$\begin{cases} S_t &= S_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma B_t}, \qquad \mathbb{P}-p.s \\ S_0 &= s. \end{cases}$$

Démonstration. Vérifions d'abord que la solution proposée vérifie l'EDS (1.10). On prend

$$f(t,x) = S_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma x}.$$

On applique la formule d'Itô à f

$$df(t,B_t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t,B_t)dB_t + \frac{\partial f}{\partial t}(t,B_t)dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,B_t)dt,$$

donc

$$df(t,B_t) = \sigma f(t,B_t)dB_t + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})f(t,B_t)dt + \frac{\sigma^2}{2}f(t,B_t)dt.$$

Par suite $df(t,B_t) = \sigma f(t,B_t)dB_t + \mu f(t,B_t)dt$; cela veut dire que S_t est bien une solution de l'EDS (1.10).

Unicité : Soit Y_t un processus vérifiant (1.10). Remarquons que S_t ne s'annule jamais, on peut

appliquer alors la formule d'Itô pour déterminer la dynamique de $\frac{1}{S_t}$. On a

$$\begin{aligned} d\left(\frac{1}{S_t}\right) &= -\frac{1}{S_t^2}dS_t + \frac{1}{2}\frac{2}{S_t^3}\sigma^2 S_t^2 dt, \\ &= -\frac{1}{S_t}(\mu dt + \sigma dB_t) + \frac{1}{S_t}\sigma^2 dt, \end{aligned}$$

donc la formule d'intègration par parties donne la dynamique de $\frac{Y_t}{S_t}$,

$$\begin{aligned} d(\frac{Y_t}{S_t}) =& Y_t d\left(\frac{1}{S_t}\right) + \frac{1}{S_t}dY_t + d < \frac{1}{S}, Y >_t , \\ =& \frac{Y_t}{S_t}\left((\sigma^2 - \mu)dt - \sigma dB_t\right) + \frac{Y_t}{S_t}(\mu dt + \sigma dB_t) - \sigma Y_t \frac{\sigma}{S_t}dt, \\ =& 0. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\frac{Y_t}{S_t} = \frac{Y_0}{S_0} = 1.$$

D'où l'unicité de la solution de (1.10). □

Chapitre 2

Le modèle de Black-Scholes

Ce chapitre est une introduction aux notions de base de la finance de marché tiré de [24] et [46]. nous allons voir en details le modèle de Black-Scholes, en particulier, la valorisation et couverture des options.

2.1 Une introduction à la finance de marché

2.1.1 Actifs financiers

Définition 33. *Un actif financier est un titre ou un contrat négociable qui génère de la valeur ou un revenu pour l'investisseur, mais en contrepartie une certaine prise de risque. Voici quelques exemples,*
***Action** : C'est un produit financier négociable de propriété sur une fraction du capital social d'une entreprise donnée. Chaque année, le propriétaire d'une action reçoit une fraction des bénéfices de l'entreprise sous forme de Dividendes.*
***Obligation** : Une obligation est un titre de créance. Lorsqu'un investisseur achète une obligation, il prête à l'émetteur de l'obligation une somme d'argent. Par conséquent, l'émetteur (ou vendeur de l'obligation) est créancier et l'acheteur est prêteur.*

Dans le langage financier, un portefeuille désigne l'ensemble d'actifs financiers détenus par l'investisseur.

2.1.2 Les produits dérivés

Définition 34. *Un produit dérivé est un produit financier dérivant d'un autre produit, il s'agit d'un contrat entre deux parties, un acheteur et un vendeur, qui fixe à l'avance le prix auquel ils peuvent acheter ou vendre une certaine quantité d'actifs, c'est un contrat qui dépend d'un produit financier dont le règlement s'effectue à une date future fixée appelée échéance.*

Remarque 8. *L'actif sur lequel porte le produit dérivé est appelée **actif sous-jacent**, ou underlying asset, il s'agit du support du produit dérivé. Il peut être financier (actions, obligations, devises...) ou physique (matières premières...). L'intérêt principal des produits dérivées est de limiter les risques liés aux transactions réalisées directement sur l'actif sous-jacent.*
Le marché des produits dérivés est le marché financier le plus important, en effet, sa valeur nominale est estimée à environ 600 000 milliards de dollars. Bien que ces instruments aient beaucoup de succès, les transactions de ces produits ont joué un rôle important dans la crise financière de 2007.

2.1.3 Les contrats à terme

Définition 35. *Un contrat à terme (futures en anglais) est un engagement ferme, dont les caractéristiques sont connues à l'avance, portant sur une quantité déterminée d'un actif sous-jacent, et une date, appelée échéance à laquelle l'actif sera vendu ou acheté.*

2.1.4 Les options

Définition 36. *Une option est un contrat entre un acheteur et un vendeur. L'acheteur de l'option obtient le droit, et non pas l'obligation, d'acheter (Call) ou de vendre (Put) un actif sous-jacent à un prix fixé à l'avance (appelé Strike), à une date fixée à l'avance dans le contrat. Le vendeur s'engage à respecter les termes du contrat si l'acheteur décide d'exercer son option, en contrepartie, l'acheteur lui donne de l'argent. Si l'option n'est pas exercée, le vendeur a gagné un montant égal au prix de l'option.*

Il existe deux type d'options, les options vanilles (ou simples) et exotiques (complexes). Les options vanilles sont les plus rencontrées sur le marché, il s'agit des options européennes et américaines.

Définition 37. *Une option d'achat européenne, appelée Call Européen, donne le droit à son détenteur d'acheter une certaine quantité d'actif sous jacent c'est à dire l'action ou la marchandise qu'on souhaite vendre (de valeur S_t à l'instant t) à une certaine date future, appelée maturité notée T, et à un prix fixé dans le contrat noté K appelé Srike. L'acheteur ayant donc le droit et non l'obligation d'exercer l'option à la maturité, il va exercer l'option si $S_T > K$ sinon il ne fait rien. La valeur réelle donc échangée à la maturité, appelée le Pay-off de l'option, est donc*

$$V(S_T,T) = (S_T - K)^+ = \max(S_T - K,0). \tag{2.1}$$

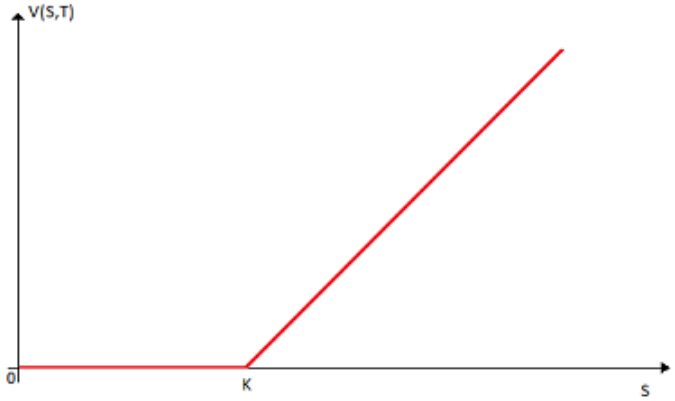


FIGURE 2.1 – La valeur terminale d'une option d'achat

Définition 38. *Une option de vente européenne, appelé Put Européen, donne le droit à son détenteur de vendre l'actif S_t à une certaine date future T, à un prix fixé à l'avance K. Par le même raisonnement similaire à l'option d'achat, la valeur réelle de l'option de vente à l'échéance vaut*

$$V(S_T,T) = (K - S_T)^+ = \max(K - S_T,0). \tag{2.2}$$

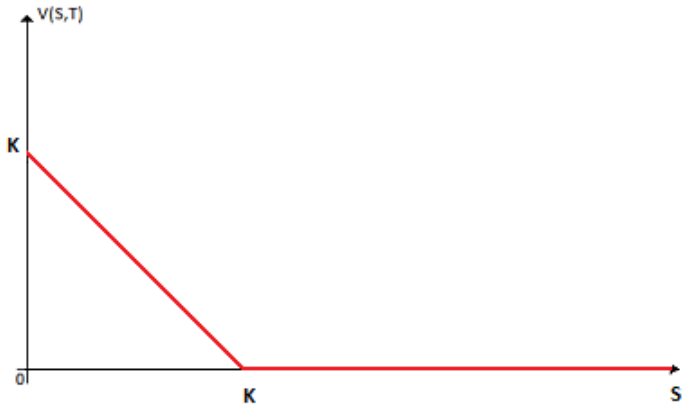


FIGURE 2.2 – La valeur terminale d'une option de vente

Définition 39. *Une option américaine est une option qui donne le droit à son détenteur d'acheter ou de vendre un actif à tout instant t compris dans l'intervalle $[0,T]$ avec T c'est l'échéance du contrat.*

Remarque 9. *On ne sera pas surpris que l'option américaine soit plus chère, ou au moins aussi chère, que l'option européenne correspondante puisqu'elle donne plus de droits à son détenteur.*

Option exotique

Ce sont des produits complexes qui ont pris une réelle importance depuis ces deux dernières décénies. Ce sont des options qui ne dépendent pas uniquement de la valeur de l'actif à l'échéance mais également de son maximum, minimum, ou même de la moyenne de ses cours dans l'intervalle $[0,t]$. Parmi ces options exotiques on trouve les **options asiatiques** qui sont des contrats qui donnent à leur détenteur, un capital à la maturité lorsque la moyenne des cours du sous-jacent durant une période déterminée est en dessous ou au dessus d'un certain niveau prédéterminé à l'avance (le Strike). On trouve également les options qui portent sur plusieurs actifs sous-jacents comme les **options paniers** que nous allons voir de manière plus détaillée dans le Chapitre 5

Remarque 10. *Les options sont aussi utilisées à des fins de couverture, comme un contrat d'assurance, en quelque sorte. Avec des options, On peut nous assurer contre le risque de baisse de l'actif financier. Les options permettent d'atténuer les risques à moindres frais, et de profiter du plein potentiel de croissance des actifs sous-jacents.*

2.2 Modélisation des marchés financiers en temps continu

Pour modéliser le prix d'un produit dérivé, nous avons besoin d'un modèle stochastique pour décrire la dynamique de l'évolution incertaine de l'actif sous-jacent. Un bon modèle doit capturer à la fois les propriétés statistiques de la dynamique du prix et s'intégrer efficacement dans la théorie de l'analyse stochastique. Le célèbre modèle de Black-Scholes est un compromis entre ces deux exigences et donne des formules explicites de prix d'options.

L'incertitude sur les marchés financiers est modélisée par un espace de probabilité $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ muni d'une filtration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ où Ω représente tous les états du monde. La tribu $\mathcal{F}$ représente la structure d'information globale disponible sur le marché. $(\mathcal{F}_t)$ est une filtration croissante décrivant l'information disponible aux agents du marché à la date t, $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$. Dans le cas où l'horizon T des investisseurs sur le marché est fini, on suppose usuellement $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$. La propriété de croissance $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$, si $s \leq t$,

traduit le fait que le marché n'oublie rien et donc qu'on dispose de plus en plus d'informations au fur et à mesure du temps. Une probabilité $\mathbb{P}$ qui donne les probabilités a priori des évènements considérés. C'est la probabilité historique ou objective.

2.2.1 Les actifs de base

On suppose que nous avons $d+1$ actifs sur le marché, que l'on note $S^0, S^1, \ldots, S^d$, pouvant être négociés à toute date $t \geq 0$. $S_t^i(\omega)$ désigne le prix de l'actif i à l'instant t dans l'état du monde $\omega \in \Omega$. On suppose que pour presque tout ω, l'application $t \to S_t^i(\omega)$ est continue. L'actif S^0 représente l'actif sans risque, le rendement de S^0 dans un intervalle de temps $[t, t+dt]$ est connu à la date t de l'opération. On note r le taux d'intérêt sans risque, supposé constant, pour un placement entre t et $t+dt$ à la banque. L'évolution de l'actif S^0 est donc

$$dS_t^0 = rS_t^0 dt. \tag{2.3}$$

Les actifs $S = (S^1, \ldots, S^d)$ représentent usuellement les prix des actifs risqués comme les actions, obligations... . Notre modélisation de référence sera donnée par le modèle de Black-Scholes-Merton pour $d = 1$ actif risqué

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t, \tag{2.4}$$

où B est un mouvement Brownien par rapport à $\mathcal{F}$ sa filtration, et b, σ sont des constantes. C'est le modèle de Black, Scholes et Merton introduit en 1973 [12].

Remarque 11. *Un portefeuille est toujours composé de deux types d'actifs*

- *des actifs risqués (actions, obligations, matières premières..).*
- *des actifs sans risques (emprunts d'état).*

Proposition 8. *(Rendement d'un actif sans risque)*
Soit S_t une somme d'argent initiale qu'on place à la banque à un instant $t = 0$. On note r le taux d'intérêt sans risque annuel. Alors la valeur de S_t pour chaque instant t est donnée par

$$S_t = S_0 \, \mathrm{e}^{rt}. \tag{2.5}$$

2.3 Les hypothèses du modèle de Black-Scholes

2.3.1 Achat et vente à découvert

Définition 40. *La vente à découvert se caractérise par la vente à terme d'un actif que l'on ne possède pas le jour de la négociation de la vente mais qu'on s'engage à le détenir le jour où la livraison de l'actif est prévue.*

Définition 41. *L'achat à découvert se caractérise par l'achat d'actifs pour lesquels on ne dispose pas de l'équivalent en monnaie. on acquiert donc aujourd'hui des titres mais que l'on paiera qu'à une date fixée.*

2.3.2 Coût de transaction

Un coût de transaction est un coût supplémentaire provenant d'un échange économique. Ce coût n'existe pas dans le cadre de la concurrence pure et parfaite.

2.3.3 Absence d'opportunité d'arbitrage

Définition 42. *L'arbitrage est un ensemble d'opérations qui permettent de réaliser un bénéfice sans la moindre prise de risque en tirant profit des imperfections qui apparaîssent entre les marchés financiers. L'arbitrage permet d'assurer la fluidité entre les différents marchés et contribue à leur liquidité.*

On dit qu'il existe une opportunité d'arbitrage (O.A.) lorsqu'il est possible de réaliser un profit sans risque et sans apports de fonds par une combinaison de plusieurs transactions. Exemple : Un produit coté à 2 prix différents sur deux marchés.

Théorème 6. *En absence d'opportunité d'arbitrage, si A et B deux portefeuilles financiers tels que $V_A(T) = V_B(T)$. Alors*

$$\forall 0 \leq t \leq T, \qquad V_A(t) = V_B(t). \tag{2.6}$$

Ce théorème nous permet de mettre en place des raisonnement par A.O.A. Pour montrer qu'un actif a un certain prix, on suppose le contraire et on montre qu'alors un arbitrage est possible. Supposons $V_B(t) > V_A(t)$

— À la date t et pour un coût de transaction nul

1. on vend à découvert B
2. on achète A
3. on place à la banque $V_B(t) - V_A(t)$

— À la date T on a un bénéfice de $(V_B(t) - V_A(t))e^{r(T-t)} > 0$

1. on vend A
2. on rembourse B
3. on encaisse les intérêts à la banque.

Contradiction avec le principe A.O.A.

2.3.4 Liquidité du marché

Définition 43. *La liquidité d'un marché financier désigne le pouvoir de vendre ou acheter des actifs de manière rapide, lorsque le marchéest liquide les transactions sont faciles a effectué et sont à coût faible.*

Nous supposons désormais que le marché financier vérifie les propriétés suivantes

— le prix de l'actif S_t a la dynamique suivante $dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t$.

— Absence de l'opportunité de l'arbitrage.

— La vente et l'achat à découvert est possible.

— Taux de transactions nul.

— le portefeuille contient un actif risqué S_t et un actif sans risque.

2.4 l'EDP de Black-Scholes

Nous allons voir en détail la dérivation de l'EDP de Black-Scholes. Nous rappelons que la dynamique de l'actif risqué donnée par ce modèle est décrite par l'EDS (1.10). Fixons maintenant un horizon $T > 0$. On étudie un actif contingent de payoff $h(S_T)$ avec h est une fonction mesurable. Le cas d'une option

d'achat européenne correspond à $h(x) = (x - K)^+$. On note $u(t, S_t)$ la valeur de l'option d'achat à l'instant t, on a

$$u(T, S_T) = h(S_T). \tag{2.7}$$

On constitue un portefeuille composé de α_t parts d'actifs sans risque et de β_t parts de l'actif risqué, avec une valeur terminale $h(S_T)$. La valeur de ce portefeuille à l'instant t est

$$V_t = \alpha_t S_t^0 + \beta_t S_t. \tag{2.8}$$

La condition d'auto-financement se formalise par

$$dV_t = \alpha_t dS_t^0 + \beta_t dS_t. \tag{2.9}$$

Soit

$$\begin{aligned} dV_t &= r\alpha_t S_t^0 dt + \beta_t dS_t, \\ dV_t &= rV_t dt + \beta_t S_t((\mu - r)dt + \sigma dB_t), \end{aligned}$$

et $V_T = h(S_T) = u(T,S_T)$.

Par principe d'absence d'opportunité d'arbitrage, deux portefeuilles ayant la même valeur terminale ont la même valeur presque sûrement pour toute date intermédiaire t tel que $0 \leq t \leq T$, donc $V_t = u(t,S_t) \ \ \forall \ \ 0 \leq t \leq T$.

En appliquant le lemme d'Itô sur u on obtient

$$du = \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \mu S_t \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\sigma^2}{2} S_t^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) dt + \sigma S_t \frac{\partial u}{\partial x} dB_t. \tag{2.10}$$

Comme $V_t = u(t,S_t) \ \ \forall \ \ 0 \leq t \leq T$ alors,

$$\begin{aligned} u(t, S_t) &= \alpha_t S_t^0 + \beta_t S_t, & (2.11) \\ dV_t &= \alpha_t dS_t^0 + \beta_t dS_t = du(t, S_t), & (2.12) \end{aligned}$$

avec $dS_t^0 = rS_t^0 dt$ et $dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t$. Ainsi on a

$$du(t, S_t) = (r\alpha_t S_t^0 + \mu\beta_t S_t)dt + \sigma\beta_t S_t dB_t.$$

Par identification avec l'équation (2.10) nous avons

$$\begin{aligned} \beta_t &= \frac{\partial u}{\partial x}(t, St), & (2.13) \\ r\alpha_t S_t^0 + \mu\beta_t S_t &= \frac{\partial u}{\partial t}(t,S_t) + \mu S_t \frac{\partial u}{\partial x}(t,S_t) + \frac{\sigma^2}{2} S_t^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,S_t), & (2.14) \end{aligned}$$

et donc d'après (2.11)

$$\alpha_t = (S_t^0)^{-1}(u(t, S_t) - S_t \frac{\partial u}{\partial x}(t, S_t)), \tag{2.15}$$

Ainsi (2.14) devient

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) + rS_t\dfrac{\partial u}{\partial x}(t,S_t) + \dfrac{\sigma^2}{2}S_t^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,S_t) - ru(t,S_t) &= 0, \\ u(T,S_T) &= h(S_T). \end{cases}$$

Comme S_t est une variable aléatoire qui peut prendre toutes les valeurs de $\mathbb{R}^+$, on en déduit que u vérifie l'EDP parabolique

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) + rx\dfrac{\partial u}{\partial x}(t,x) + \dfrac{\sigma^2}{2}x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) - ru(t,x) &= 0; \qquad t \in [0,T], x \in \mathbb{R}^+, \\ u(T,x) &= (x-K)^+. \qquad \forall x \in \mathbb{R}^+. \end{cases} \tag{2.16}$$

2.4.1 Interpretation financière de l'EDP de Black-Scholes

Une conséquence essentielle de l'EDP d'évaluation est que le prix de l'option ne dépend pas du rendement μ de l'actif risqué, car ce paramètre n'apparait pas dans l'EDP (2.16). En effet, la stratégie de couverture dynamique permet à l'émetteur de l'option de se couvrir contre les mouvements défavorables du marché. Il a annulé le risque lié à la tendance du marché μ, mais le risque lié aux fluctuations du marché est toujours présent et influe significativement sur le prix de l'option par l'intermédiaire du paramètre de la volatilité.

2.4.2 Valorisation risque neutre

La valorisation risque neutre est une approche probabiliste qui permet de determiner le prix d'une option européenne à l'aide d'une probabilité dite risque neutre. En effet, l'une des conséquences du non arbitrage et de complétude des marchés est l'existence et l'unicité à équivalence près d'une mesure de probabilité dite probabilité martingale ou «probabilité risque-neutre» telle que le processus du prix actualisé est une martingale sous cette probabilité. D'après cette approche, le prix de l'option (dont la valeur terminale est $h(S_T)$) est égale à l'instant t à

$$H_t = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{r(T-t)}h(S_T)|\mathcal{F}_t\right]. \tag{2.17}$$

où $\mathbb{Q}$ est la probabilité risque neutre. L'expression (2.17) se traduit comme suit : la valeur de l'option à l'instant t est égale à l'espérance de son Pay-off actualisé sous la probabilité $\mathbb{Q}$. A partir de (2.17), on peut déduire la célèbre formule de F. Black et M. Scholes décrite dans leur article pour la valorisation d'une option européenne [12]. Cette formule est la suivante

$$H_t = S\mathcal{N}(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\mathcal{N}(d_2), \tag{2.18}$$

avec $\mathcal{N}$ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$, $\mathcal{N}(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}u^2}\,du$,

$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left[\ln\left(\frac{S}{K}\right) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)T\right], \tag{2.19}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}. \tag{2.20}$$

2.5 Les grecques

Les grecques sont les outils de base de l'analyse financière des options, elles désignent la sensibilité du prix d'une option par rapport aux variations des différents paramètres qui la constituent.

2.5.1 Le delta d'une option Δ

Le delta d'une option mesure la sensibilité de son prix à une variation donnée du cours du sous-jacent. Il s'agit de la première dérivée de l'option par rapport à l'actif S. Si on note par V le prix de l'option alors

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S} = \mathcal{N}(d_1). \tag{2.21}$$

2.5.2 le gamma d'une option Γ

Le gamma représente la dérivée seconde du prix d'une option par rapport au cours du sous-jacent. Il indique si le prix de l'option a tendance à évoluer plus ou moins vite que le prix du sous-jacent. Dans le modèle de Black-Scholes, plus le Γ est élevé, plus la convexité est importante et le prix de l'option varie très rapidement en valeur. Un gamma positif indique que le prix du sous-jacent et du delta évoluent dans le même sens, alors qu'un gamma négatif montre le contraire. Dans le modèle Black-Scholes, le gamma est donnée par

$$\Gamma = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = \frac{\mathcal{N}'(d_1)}{S\sigma\sqrt{T}}. \tag{2.22}$$

Le gamma du Call et celui du Put sont identiques.

2.6 Analyse mathématique de l'EDP déterministe de Black-Scholes

L'équation aux dérivées partielles de Black-Scholes permet d'évaluer le prix d'une option européenne notée $V(S,t)$, elle est donnée par

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial t} + \dfrac{1}{2}\sigma^2 S^2 \dfrac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\dfrac{\partial V}{\partial S} - rV = 0, \qquad S > 0, \quad t \in (0,T), \\ \\ V(S,T) = (S-K)^+, \quad 0 \leq S < \infty. \end{cases} \tag{2.23}$$

Nous rappelons que S est le prix de l'actif sur lequel on applique l'option V, T est la maturité ou l'échéance du contrat, K est le prix d'exercice ou le prix auquel le détenteur de l'option peut acheter l'actif S (ce prix est déterminé lors de la négociation initiale de l'option et n'est pas modifiable pendant la durée de vie du contrat jusqu'à l'échéance). la fonction σ est la volatilité qui est supposée constante et r est le taux d'intérêt sans risque qui est constant. Remarquons que (2.23) est un problème avec condition finale et non pas initiale.

2.6.1 Conditions aux limites pour un Call

Dans le cas d'une option européenne, nous avons une condition finale à l'instant $t = T$. Le domaine d'étude, en espace (le sous-jacent S) est $[0, +\infty[$, il faut donc préciser des conditions aux limites pour le prix de l'option V. Si $S = 0$, alors le bénéfice à terme est nul. Il n'y a donc aucun intérêt à exercer

l'option d'achat, dans ce cas, même s'il reste du temps avant son expiration. On a donc la condition suivante

$$V(0,t) = 0, \qquad \forall\ 0 \leq t \leq T. \tag{2.24}$$

Si au contraire le prix de l'action augmente considérablement ($S \to +\infty$), il est clair que le prix d'exercice sera négligeable devant le prix de l'action, on a donc la condition suivante

$$V(S,t) \approx S - Ke^{r(t-T)}, \qquad S \to +\infty. \tag{2.25}$$

L'ensemble des équations (2.23)-(2.24)-(2.25) peut être résolu afin de déterminer la valeur d'une option.

2.6.2 Convexité du prix de l'option V

Afin de démontrer la convexité de V par rapport au sous-jacent S, nous allons utiliser deux approches,

Première approche **:** Passer par la formule de black-Scholes.
On peut calculer la dérivée seconde de V à partir de l'équation (2.18), on a

$$V_{SS} = \frac{N'(d_1)}{S\sigma\sqrt{T}} \geq 0.$$

Seconde approche **:** Passer par l'équation de la chaleur.
L'équation aux dérivées partielles de Black-Scholes peut se transformer à l'aide d'un changement de variable à l'équation de la chaleur. L'idée est de se ramener de l'équation de Black-Scholes à l'équation suivante

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ \\ u(x,0) = & u_0(x), \end{cases} \tag{2.26}$$

en utilisant un changement de variable. On considère donc l'équation

$$\frac{\partial V}{\partial t}(S,t) + rS\frac{\partial V}{\partial S}(S,t) + \frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(S,t) - rV(S,t) = 0,$$

avec les conditions aux limites (2.24)-(2.25) et la condition finale

$$V(S,T) = (S-K)^+ = \max(S-K,0).$$

Dans un premier temps on effectue le changement de variable

$$S = Ke^x, \quad t = T - \frac{2\tau}{\sigma^2}, \quad V(S,t) = Kv(x,\tau),$$

pour éviter une dégénérescence en $S = 0$, un changement de temps de ce type parait naturel pour se ramener à une condition initiale en $t = 0$. À l'aide de ce changement de variable, on obtient l'équation suivante

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (k-1)\frac{\partial v}{\partial x} - kv,$$

avec $k = \frac{2r}{\sigma^2}$. En effet, nous avons

$$v(x,\tau) = \frac{1}{K}V(Ke^x,T - \frac{2\tau}{\sigma^2}) = \frac{1}{K}V(S,t), \tag{2.27}$$

On dérive (2.27) par rapport à x,

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{K}\frac{\partial V}{\partial S}\frac{\partial S}{\partial x} + \underbrace{\frac{1}{K}\frac{\partial V}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x}}_{=0} = \frac{S}{K}\frac{\partial V}{\partial S}$$

On dérive une nouvelle fois par rapport à x,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{K}S\frac{\partial V}{\partial S}\right)\\ &= \frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{1}{K}S\frac{\partial V}{\partial S}\right)\frac{\partial S}{\partial x},\\ &= \frac{1}{K}\left(\frac{\partial V}{\partial S} + S\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right)S = \frac{S}{K}\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{S^2}{K}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}.\end{aligned}$$

Dérivons maintenant (2.27) par rapport à τ

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{1}{K}\frac{\partial V}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial \tau} = -\frac{2}{K\sigma^2}\frac{\partial V}{\partial t}.$$

On a donc

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial t} &= -\dfrac{K\sigma^2}{2}\dfrac{\partial v}{\partial \tau},\\ S\dfrac{\partial V}{\partial S} &= K\dfrac{\partial v}{\partial x},\\ S^2\dfrac{\partial^2 V}{\partial S^2} &= K\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} - K\dfrac{\partial v}{\partial x}. \end{cases} \tag{2.28}$$

En injectant (2.28) dans l'équation de Black-Scholes on trouve

$$-\frac{K}{2}\sigma^2\frac{\partial v}{\partial \tau} + \frac{K}{2}\sigma^2\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) + rK\frac{\partial v}{\partial x} - rKv = 0.$$

Soit, en divisant par $\frac{K}{2}\sigma^2$,

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial v^2}{\partial x^2} + (k-1)\frac{\partial v}{\partial x} - kv, \tag{2.29}$$

avec $k = \frac{2r}{\sigma^2}$. On a alors comme condition initiale en $(\tau = 0)$

$$v(x,0) = \frac{1}{K}C(Ke^x,T) = \frac{1}{K}\max(Ke^x - K,0) = \max(e^x - 1,0), \tag{2.30}$$

et l'intervalle de temps considéré est maintenant $\left[0,\frac{\sigma^2 T}{2}\right]$. Pour arriver à l'équation (2.26), on procède à un second changement de variables, on pose

$$v(x,\tau) = e^{\alpha x + \beta\tau}u(x,\tau).$$

On réinjecte alors cela dans l'équation (2.29)

$$e^{\alpha x+\beta\tau}\left(\beta u+\frac{\partial u}{\partial \tau}\right)=e^{\alpha x+\beta\tau}\left(\alpha^2 u+2\alpha\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+(k-1)(\alpha u+\frac{\partial u}{\partial x})-ku\right).$$

Soit encore :

$$\beta u+\frac{\partial u}{\partial \tau}=\alpha^2 u+2\alpha\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+(k-1)(\alpha u+\frac{\partial u}{\partial x})-ku.$$

En regroupant les termes de même dérivée

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+(\alpha^2+(k-1)\alpha-k-\beta)u+(2\alpha+k-1)\frac{\partial u}{\partial x}.$$

Pour se ramener au cas de l'équation de la chaleur, il nous faut éliminer les termes en u et en $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, on doit donc résoudre le système suivant

$$\left\{\begin{array}{rcl}\beta &=& \alpha^2+(k-1)\alpha-k,\\ 2\alpha &=& 1-k,\end{array}\right.$$

qui est équivalent à

$$\left\{\begin{array}{rcl}\alpha &=& -\dfrac{1}{2}(k-1),\\ \beta &=& -\dfrac{1}{4}(k+1)^2.\end{array}\right.$$

On a donc

$$v(x,\tau)=e^{-\frac{1}{2}(k-1)x-\frac{1}{4}(k+1)^2\tau}u(x,\tau),$$

et u vérifie alors

$$\left\{\begin{array}{rcl}\dfrac{\partial u}{\partial \tau} &=& \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad \forall x\in\mathbb{R} \qquad \forall \tau>0\\ u(x,0) &=& e^{\frac{1}{2}(k-1)x}\max(e^x-1,0)=\max(e^{\frac{1}{2}(k+1)x}-e^{\frac{1}{2}(k-1)x},0).\end{array}\right.$$

On voit que l'équation de Black-Scholes se ramène à l'équation de la chaleur, qui est plus facile à résoudre (numériquement et analytiquement). À partir de la solution de l'équation de la chaleur, on remonte à l'équation de Black-Scholes en faisant les changements de variable à l'envers. Nous étudions maintenant la convexité de la solution de l'équation de la chaleur. Considèrons l'équation

$$\left\{\begin{array}{l}V_t-V_{SS}=0,\\ \\ V(0,S)=v_0(S)=(S-K)^+.\end{array}\right.$$

La solution de l'équation de la chaleur est donnée par

$$V(S,\tau)=v_0*G(\tau,S)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}}v_0(S-s)e^{-\dfrac{s^2}{4\tau}}ds.$$

Appliquons le théorème de dérivation sous le signe somme

$$\frac{\partial V}{\partial S}(S,\tau)=\frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}}\int_{-\infty}^{+\infty}v_0'(S-s)e^{-\frac{s^2}{4\tau}}ds,$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(S,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} v_0''(S-s) e^{-\frac{s^2}{4\tau}} ds,$$

$v_0 \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+) \hookrightarrow D'(\mathbb{R}^+)$ définie une distribution, soit $\phi \in D(\mathbb{R}^+)$ on a

$$< v_0', \phi >_{D',D} = - < v_0, \phi' > = - \int_0^K v_0 \phi' dx - \int_K^{+\infty} (x-K)\phi' dx = \int_K^{+\infty} \phi(x) dx = < 1_{[K,+\infty[}, \phi > .$$

Par le même calcul nous déduisons que : $v'' = \delta_K$. Finalement nous avons

$$\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(S,\tau) = \delta_K * G(S,\tau) = G(S-K) \geq 0.$$

2.7 Conclusion

Nous avons étudié ici le modèle classique de Black-Scholes pour le pricing des options européennes. De manière générale, ce modèle reste l'outil fondamental de l'ingénierie financière moderne. Cependant il présente beaucoup de faiblesses puisqu'il n'est pas conforme à la réalité, en effet le temps n'est pas continu et il peut y avoir des coûts de transaction supplémentaires suites aux échanges économiques. La volatilité n'est pas observable dans le marché donc on ne peut pas l'estimer juste avec une constante. Par conséquent, de nombreux modèles ont été proposés au fil du temps, tous tentent d'inclure les caractéristiques du marché «réel».

Chapitre 3

Les coûts de transaction

3.1 Introduction

De manière générale, la gestion d'un portefeuille se fait en supposant par défaut que les coûts de transaction sont nuls. Cette hypothèse simplifie les calculs, cependant elle demeure loin de la réalité. L'objet de ce chapitre est d'analyser l'impact des coûts de transaction sur la gestion d'un portefeuille, et notamment sur le prix de l'option. Comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, les hypothèses du modèle de Black-Scholes ne sont pas toujours vérifiées, parmi ces hypothèses on a la liquidité du marché. Considérons par exemple la présence des coûts de transaction, cela aura certainement un impact sur le prix de l'actif, la volatilité, et le prix de l'option. Par conséquent, la dérivation de quelques extensions devient nécessaire. En 1985, Leland a montré que les réajustements fréquents de portefeuille pour maintenir les actifs près de leurs proportions cibles menaient à des coûts de transaction très rapidement élevés [38].
Le modèle Black-Scholes nécessite un ajustement continu du portefeuille afin de couvrir l'option sans risque. En présence des coûts de transaction, cet ajustement devient coûteux, car il engendre un nombre infini de transactions [6]. Ainsi, l'investisseur doit trouver l'équilibre entre les coûts de transaction requis pour rééquilibrer le portefeuille et les coûts implicites des erreurs de couverture. Il a été montré que dans un marché avec des coûts de transaction, on ne peut pas avoir un portefeuille de réplication pour l'option d'achat Européenne et le portefeuille de couverture va dominer plutôt que de reproduire la valeur de l'option (voir [50, 6]). Il existe beaucoup de travaux qui revoient les problèmes de couverture des options lorsque les marchés sont soumis aux coûts de transaction. Beaucoup de travaux analysent l'effet des coûts de transaction sur la stratégie de couverture, à la fois en temps discret et continu. Nous en citons Soner, Shreve et Cvitanic [50, 13], Lépinette et al. [27]. Une attention particulière a été portée sur le problème de couverture approximative avec les coûts de transaction, par exemple la méthode de Leland [38] et certaines tentatives par la suite comme Bensaid et al. [11], Soner et al. [20, 13], Hodges et Neuberger [29], Davis et Norman [16] et Barles et Soner [8].

3.2 Modèle de Leland

En 1985, Leland a proposé une approche de la valorisation des produits dérivés dans le cadre des coûts de transaction proportionnels au volume d'actifs échangés pendant une période donnée [38]. Son idée clé est d'utiliser la formule classique Black-Scholes avec une volatilité convenablement élargie pour un portefeuille périodiquement révisé dont la valeur terminale se rapproche du Pay-off $h(S_T) = (S_T - K)^+$ de l'option.

3.2.1 Modélisation

L'idée de Leland est de relaxer la condition de la couverture de l'option, en faisant le trading en temps discret. Il a supposé que le coût de transaction vaut

$$\frac{k}{2}|\Delta|S, \tag{3.1}$$

avec k désigne tous les coûts associés à l'ouverture et à la fermeture d'une transaction financière (commissions, taxes...) et qui est donné en dollars, et Δ est le nombre d'actifs achetés ($\Delta > 0$) ou vendus ($\Delta < 0$) au prix S.
On considère maintenant un portefeuille de réplication avec Δ actifs sous-jacents et une obligation notée B (qui est un actif sans risque). Alors la valeur du portefeuille sera égale à

$$\Pi = \Delta S + B. \tag{3.2}$$

Après un petit changement en temps de durée δt, le changement observé dans le portefeuille est

$$\delta\Pi = \Delta\delta S + rB\delta t - \frac{k}{2}|\delta\Delta|S. \tag{3.3}$$

Où δS désigne le changement du prix S. Le premier terme dans (3.3) désigne le changement de la valeur de l'actif S, le second terme représente la croissance de l'obligation dans la période δt, $\delta\Delta$ représente le changement de la quantité des actifs et le dernier terme désigne les coûts de transactions liés au changement du portefeuille. On applique le lemme d'Itô (voir Sect 1.3.3 du chapitre 1), pour trouver la valeur de l'option $V = V(S,t)$ et nous obtenons

$$\delta V = V_S\delta S + (V_t + \frac{\sigma^2}{2}S^2V_{SS})\delta t. \tag{3.4}$$

Si on suppose que le prix de l'option est répliqué par le portefeuille Π, la valeur de l'option et du portefeuille doivent coïncider pour tout $0 < t < T$ et qu'il n'y a pas d'opportunité d'arbitrage, et nous obtenons

$$\delta\Pi = \delta V. \tag{3.5}$$

Par identification des termes dans (3.3) et (3.4), nous obtenons

$$\Delta = V_S \quad \text{et} \quad rB\delta t - \frac{k}{2}|\delta\Delta|S = (V_t + \frac{\sigma^2}{2}S^2V_{SS)}\delta t. \tag{3.6}$$

Leland montre dans [38] que

$$\frac{k}{2}|\delta\Delta|S = \frac{\sigma^2}{2}LeS^2|V_{SS}|\delta t. \tag{3.7}$$

Avec Le est le nombre de Leland qui est donné par

$$Le = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{k}{\sigma_0\sqrt{\delta t}}\right), \tag{3.8}$$

avec δt étant la fréquence des transaction (intervalle entre deux revisions successives du portefeuille). Finalement on injecte (3.7) et $B = \Pi - \Delta S = V - SV_S$ dans l'équation (3.6) et on trouve que

$$rV - rSV_S - \frac{\sigma^2}{2}LeS^2|V_{SS}| = V_t + \frac{\sigma^2}{2}V_{SS}. \tag{3.9}$$

Ainsi, Leland déduit que le prix de l'option est solution de l'équation non linéaire suivante

$$V_t + \frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2 S^2 V_{SS} + rSV_S - rV = 0, \tag{3.10}$$

avec

$$\tilde{\sigma}^2 = \sigma^2(1 + Le\ \text{sign}(V_{SS})). \tag{3.11}$$

Il découle de la définition du nombre de Leland que plus le rééquilibrage du portefeuille est fréquent (δt très petit), plus le coût des transaction est important et par conséquent le prix de l'option V est élevé . On sait que $V_{SS} > 0$ pour les Calls et Puts Européens en l'absence des coûts de transaction, en supposant le même comportement en présence de transaction l'équation (3.10) devient linéaire avec une volatilité constante ajustée $\tilde{\sigma}^2 = \sigma^2(1 + Le) > \sigma^2$ (voir [6]).

3.3 Modèle de Barles et Soner

Un modèle plus robuste a été proposé par G. Barles et H. Soner [8]. Les auteurs considèrent le problème de la valorisation des options européennes similaire à celui de Black-Scholes, sauf que des frais de transaction proportionnels sont perçus sur toutes les ventes et les achats d'actifs. La «réplication parfaite» n'est plus possible et la détention d'une option implique un élément de risque essentiel. L'approche de G. Barles et H. Soner est fondée sur l'hypothèse que les préférences des investisseurs sont caractérisées par une fonction d'utilité exponentielle introduite dans [29].

3.3.1 Fonction d'utilité

Il s'agit d'une fonction qui désigne le degré de satisfaction de l'investisseur par rapport à la richesse globale de son portefeuille. Notons U la fonction d'utilité qui renvoie à chaque revenu noté w un degré d'utilité. Cette fonction U est continue et strictement croissante. On suppose que l'investisseur même très riche il préfère être encore plus riche plutôt que de se satisfaire de son enviable condition, l'investisseur préfère recevoir des gains ou revenus encore plus élevés, cela se traduit mathématiquement par la positivité de la première dérivée de U $(U'(w) > 0)$.
D'autre part, la satisfaction de l'investisseur diminue quand sa richesse augmente, cela se caractérise par la concavité de la fonction U, $(U''(w) < 0)$.

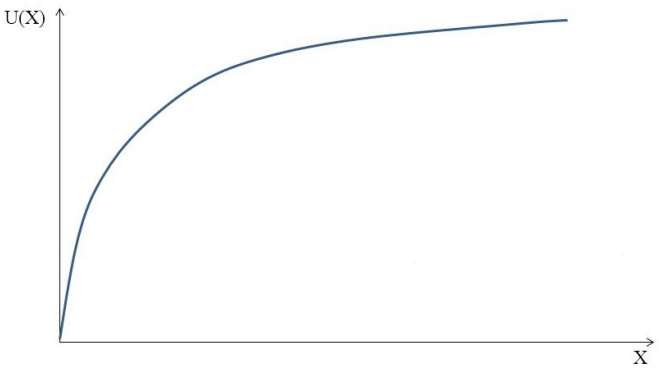


FIGURE 3.1 – Graphe d'une fonction d'utilité U

3.3.2 Modélisation

La couverture contre le risque dans le cas du modèle de Barles et Soner est faite à l'aide de l'approche de Hodges et Neuberger [29] qui ont utilisé une fonction d'utilité exponentielle afin de maximiser l'espérance de la richesse terminale du portefeuille.

Spécification de la fonction d'utilité

Définition 44. *Étant donné une richesse X, la fonction d'utilité exponentielle est définie par*

$$\mathcal{U}(X) = 1 - e^{-\gamma X}, \tag{3.12}$$

avec $\gamma > 0$ est le coefficient d'aversion au risque.

Nous avons alors le problème d'optimisation stochastique suivant

$$\mathcal{V}(S_t,t) = \max(\mathbb{E}(\mathcal{U}(X_T)). \tag{3.13}$$

La fonction valeur $\mathcal{V}$ est solution d'une équation de programmation dynamique associée à (3.13) (voir [16, 25] pour plus de détails). Étant donné un coût de transaction k avec $k = \dfrac{a}{\sqrt{\gamma}}$ et a une constante positive, G. Barles et H. Soner ont réalisé une analyse asymptotique et ont montré que $\mathcal{V} \to V$ quand $\gamma \to 0$, avec V est l'unique solution (de viscosité) du problème limite

$$V_t + \frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2(r,S,V_{SS})S^2V_{SS} + rSV_S - rV = 0, \tag{3.14}$$

avec

$$\tilde{\sigma}(S,t,V_{SS})^2 = \sigma^2(1 + \Psi(e^{r(T-t)}a^2S^2V_{SS})), \tag{3.15}$$

et Ψ est solution de l'équation différentielle ordinaire suivante

$$\begin{cases} \Psi'(x) = & \dfrac{\Psi(x)+1}{2\sqrt{x\Psi(x)} - x}, \quad x \neq 0, \\ \Psi(0) = & 0. \end{cases} \tag{3.16}$$

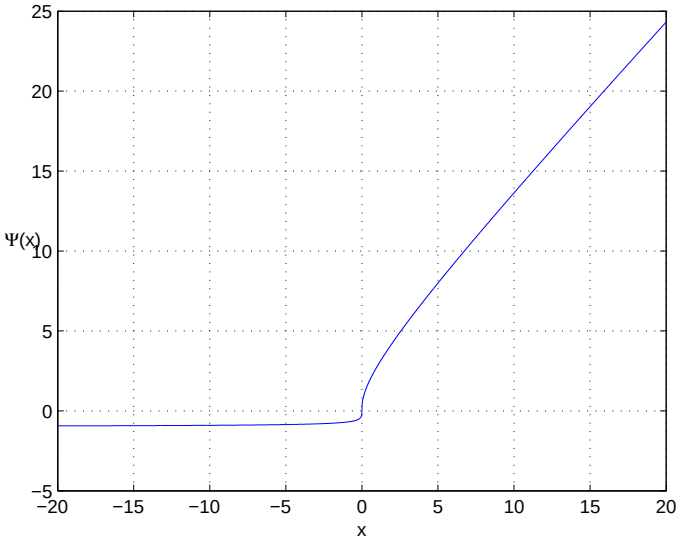


FIGURE 3.2 – Graphe de la fonction Ψ

Une analyse asymptotique de (3.16) a été donnée par G. Barles et H. Soner,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\Psi(x)}{x}=1 \qquad \lim_{x\to-\infty}\Psi(x)=-1 \tag{3.17}$$

La propriété (3.17) nous encourage à traiter Ψ comme l'identité pour les grandes valeurs de x.

3.4 Modèle RAPM (Risk Adjusted Pricing Methodology)

Le modèle RAPM ou méthodologie d'ajustement du risque liée à la valorisation des options a été proposé par Kratka dans [37] et développé ensuite par Ševčovič et al. dans [31]. Ce modèle prend en considération le risque lié a un portefeuille non protégé. La volatilité dans ce cas est de la forme suivante

$$\tilde{\sigma}^2=\sigma^2\left(1+3(\frac{CM^2}{2\pi}SV_{SS})^{\frac{1}{3}}\right), \tag{3.18}$$

avec $C\geq 0$ est le paramètre qui désigne les coûts de transaction décrit dans le modèle de Leland et $M\geq 0$ est le coefficient désignant la prime du risque.

Remarque 12. *Il est à noter que les modèles non linéaires décrits dans ce chapitre se ramènenent facilement au modèle standard de Black-Scholes en absence des coûts de transaction, autrement dit, lorsque les paramètres Le, Ψ et M sont nuls.*

3.5 Conclusion

Ce chapitre présente quelques travaux sur la théorie des marchés financiers en présence des coûts de transaction qui est en plein essor. Il existe quelques améliorations des modèles que nous avons discuté ici notament pour le cas des coûts de transaction variables. Dans les chapitres suivants, nous allons nous concentrer uniquement sur l'étude théorique et numérique modèle de Barles et Soner (3.14) avec la volatilité (3.15).

Deuxième partie

Le modèle de Black-Scholes non linéaire

Chapitre 4

Le modèle de Barles & Soner

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons une étude théorique de l'EDP non linéaire de Black-Scholes qui permet de modéliser les marchés financiers incomplets. Nous nous limitons au modèle présenté par G. Barles et H.M. Soner qui ont proposé une volatilité élargie afin de modéliser la présence des coûts de transaction. L'objectif principal de ce chapitre est de présenter une approche constructive pour démontrer l'existence et l'unicité d'une solution convexe pour l'EDP déterministe fortement non linéaire (3.14) contrairement à la méthode des solutions de viscosité présentée dans [8] et nous terminons ce chapitre par des simulations numériques. Les résultats de ce chapitre ont été publiés dans [1].

4.2 L'équation de Black-Scholes non linéaire

De manière générale, en présence des coûts de transaction, L'EDP classique de Black-Scholes devient une équation non linéaire [38] de la forme suivante

$$V_t + \frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2(t,S,V_S,V_{SS})S^2V_{SS} + rSV_S - rV = 0, \tag{4.1}$$

où la fonction $\tilde{\sigma}$ est une volatilité modifiée qui est généralement une fonction de t, S, V_S , et V_{SS} . En supposant que les coûts de transaction sont proportionnels à la valeur monétaire de l'actif S acheté ou vendu. Leland [38] a suggéré que le prix de l'option est la solution de (4.1) avec la volatilité modifiée

$$\tilde{\sigma}^2 = \sigma^2(1 + Le\ \text{sign}(V_{SS})), \tag{4.2}$$

avec

$$Le = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{k}{\sigma\sqrt{\delta t}}\right), \tag{4.3}$$

Dans le modèle proposé par Barles et Soner la volatilité non linéaire est donnée par

$$\tilde{\sigma}^2 = \sigma^2(1 + \Psi(a^2\,\mathrm{e}^{r(T-t)}\,S^2V_{SS})), \tag{4.4}$$

où Ψ est solution de l'EDO (3.16). L'analyse asymptotique (3.17) de (3.16) faite par G. Barles et H. Soner nous permet d'étudier le problème (4.1) en considérant $\Psi(x) = x$ pour de grands valeurs de x,

dans ce cas la volatilité (3.15) devient

$$\tilde{\sigma}(t,S,V_{SS})^2 = \sigma^2(1 + e^{r(T-t)}a^2S^2V_{SS}). \tag{4.5}$$

Généralement, les non linéarités (4.2) et (4.4) proviennent du phénomène du "Marché incomplet". Un marché est appelé complet lorsque chaque produit contingent, par exemple le Pay-off d'une option, peut être atteint avec une richesse finale d'une stratégie de couverture admissible. D'autre part, un marché est dit incomplet s'il existe des produits contingents non atteignables. La variation de la stratégie de couverture est un problème important auquel les traders d'options sont confrontés dans la pratique et elle est mesurée par le coefficient Γ. D'où la dépendance de la non linéarité du coefficient Γ (la dérivée seconde du prix de l'option). Parmi les raisons classiques de l'incomplétude des marchés il y a les restrictions faites sur le trading, ou ajout de quelques phénomènes aléatoires dans le modèle (e.g. volatilité stochastique) ou la présence des coûts de transaction. Dans ce qui suit, nous allons étudier théoriquement l'EDP de Barles et Soner. Nous allons nous limiter au cas où $\Psi(x) = x$ si $x \geq 0$ pour la simplicité de l'exposé.

4.3 Cadre mathématique de l'EDP de Barles et Soner

Pour un sous ensemble $\Omega \subset \mathbb{R}$, $D(\Omega)$ est l'espace des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans Ω et $D'(\Omega)$ son espace dual. On note par $L^p_{loc}(\Omega)$ l'espace des fonctions telles que $|f|^p$ est localement intégrable sur Ω avec $1 \leq p < \infty$ et on note $L^p_S(\Omega)$ l'espace de Lebesgue avec poids décroissant à l'infini,

$$L^p_S(\Omega) = \left\{ V \in L^p_{loc}(\Omega) \ ; \int_\Omega \frac{V(S)^p}{S^2} dS < \infty \right\}, \qquad (1 \leq p < \infty), \tag{4.6}$$

et on définit l'espace

$$W = \left\{ V \in L^2_S(\Omega) \ ; \ \int_\Omega V_S^2(S) dS < \infty \right\}. \tag{4.7}$$

4.3.1 Transformation de l'équation

Afin d'étudier théoriquement l'équation (3.14) on effectue le changement de variable suivant

$$v(S,t) = e^{r(T-t)}V(S,t);$$

la dérivation par rapport à t nous donne $v_t = e^{r(T-t)}(V_t - rV)$. En injectant cette dérivée dans (3.14) on trouve

$$\begin{cases} v_t + \dfrac{1}{2}\sigma^2(1 + a^2S^2v_{SS})S^2v_{SS} + rSv_S = 0, \\ v(T,S) = (S-K)^+, \\ v(t,0) = 0, \\ v(t,S) \underset{+\infty}{\sim} e^{r(T-t)}S. \end{cases} \tag{4.8}$$

Pour se débarrasser du terme de convection et avoir une équation parabolique 'forward' en temps, on effectue un second changement de variable $S = \mathrm{e}^x$. En posant $U(T-t,x) = v(t,S)$, on obtient

$$\begin{cases} U_t - \dfrac{1}{2}\sigma^2(1+a^2(U_{xx}-U_x))(U_{xx}-U_x) - rU_x = 0, \\ U(0,x) = (\mathrm{e}^x - K)^+, \\ \lim\limits_{x\to-\infty} U(t,x) = 0, \\ U(t,x) \underset{+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{r(T-t)}\,\mathrm{e}^x. \end{cases} \tag{4.9}$$

Finalement, la translation $Z(t,y) = U(t,x-rt)$ nous donne

$$\begin{cases} Z_t - \dfrac{1}{2}\sigma^2(1+a^2(Z_{yy}-Z_y))(Z_{yy}-Z_y) = 0, \\ Z(0,y) = (\mathrm{e}^y - K)^+, \\ \lim\limits_{y\to-\infty} Z(t,y) = 0, \\ Z(t,y) \underset{+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{rT}\,\mathrm{e}^y. \end{cases} \tag{4.10}$$

On revient à notre variable initiale avec la transformation $y = \ln(S)$, et on note $Z(t,y) = V(t,S)$, alors on obtient le système suivant

$$\begin{cases} V_t - \dfrac{1}{2}\sigma^2(1+a^2S^2V_{SS})S^2V_{SS} = 0, \qquad S>0,\ t\in(0,T) \\ V(0,S) = (S-K)^+, \qquad S>0 \\ V(t,0) = 0, \qquad t\in(0,T) \\ V(t,S) \underset{+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{rT}\,S \qquad t\in(0,T). \end{cases} \tag{4.11}$$

Pour des raisons de simplicité, on prend dans ce qui suit les constantes égales à 1 et on cherche à résoudre le problème

$$\begin{cases} V_t - (1+S^2V_{SS})S^2V_{SS} &= 0, \qquad S>0,\ t\in(0,T) \\ V(t,0) &= 0, \\ V(t,S) &\underset{+\infty}{\sim} S, \\ V(0,S) &= (S-K)^+. \end{cases} \tag{4.12}$$

Afin de surmonter la difficulté qui vient de la condition aux bord quand S tend vers l'infini, on introduit le changement d'inconnue $V(t,S) = V(t,S) - S$. L'équation (4.12) devient

$$\begin{cases} V_t - (1+S^2V_{SS})S^2V_{SS} &= 0, \qquad S>0,\ t\in(0,T) \\ V(t,0) &= 0, \\ V(0,S) &= (S-K)^+ - S, \\ \lim\limits_{S\to+\infty} V_S(t,S) &= 0. \end{cases} \tag{4.13}$$

4.3.2 Cadre fonctionnel

On définit l'opérateur non borné

$$\begin{aligned} A : D(A) \subset L^2_S(\mathbb{R}^+) &\mapsto L^2_S(\mathbb{R}^+), \\ V &\mapsto -S^2V_{SS}. \end{aligned} \tag{4.14}$$

L'opérateur A est monotone, en effet pour $V \in D(A)$,

$$< AV,V >_{L^2_S} = -\int_0^{+\infty} V_{SS}V = \int_0^{+\infty} V_S^2 dS \geq 0. \tag{4.15}$$

Nous allons utiliser une approche décrite dans [9] pour étudier le problème (4.13). On définit $\beta : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}^+$ la fonction inverse de $y \mapsto y^2 + y$, c'est à dire

$$\beta^2(y) + \beta(y) = y \quad \text{i.e} \quad \beta(y) = \sqrt{y + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2}. \tag{4.16}$$

L'équation (4.13) devient

$$V_t - \beta^{-1}(-AV) = 0. \tag{4.17}$$

Plutôt que résoudre (4.17) avec les conditions aux bords de (4.13), nous allons résoudre

$$\begin{cases} \beta(V_t) + AV &= 0, \qquad S > 0,\, t \in (0,T) \\ V(t,0) &= 0, \\ V(0,S) &= (S-K)^+ - S, \\ \lim\limits_{S \to +\infty} V_S(t,S) &= 0. \end{cases} \tag{4.18}$$

Le problème (4.18) est un problème de type Barenblatt. Nous allons l'approcher par un schéma discret en temps et par suite nous allons utiliser le schéma des itérations monotones [40].

4.3.3 Schéma d'approximation

Étant donné V^n dans un espace K_n qui sera défini par la suite et $\tau > 0$, on résout récursivement le problème

$$\begin{cases} \beta\left(\dfrac{V^{n+1} - V^n}{\tau}\right) - S^2 V_{SS}^{n+1} &= 0 \qquad S > 0, \\ V^{n+1}(0) &= 0, \\ \lim\limits_{S \to +\infty} V_S^{n+1}(S) &= 0. \end{cases} \tag{4.19}$$

Avec $V^0(S) = (S-K)^+ - S$.
Pour montrer que le problème (4.19) est bien posé, les méthodes classiques (basées sur des espaces de Sobolev) ne peuvent pas être appliquées. On introduit alors les espaces d'Orlicz [3, 18]. On considère la fonction J définie par

$$\begin{aligned} J : \ \mathbb{R}^+ &\mapsto \mathbb{R}^+, \\ y \ &\mapsto \beta(y)y. \end{aligned}$$

Proposition 9. *La fonction J est convexe et croissante sur $\mathbb{R}^+$.*

Démonstration. On dérive J deux fois, on a

$$J'(y) = \sqrt{y + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} + \frac{y}{2\sqrt{y + \frac{1}{4}}} \geq 0,$$

et

$$J''(y) = \frac{1}{2\sqrt{y + \frac{1}{4}}} + \frac{y + \frac{1}{2}}{4(y + \frac{1}{4})^{\frac{3}{2}}} \geq 0.$$

Par suite J est convexe et croissante sur $\mathbb{R}^+$. □

Définition 45. *L'espace d'Orlicz avec poids, noté E, associé à J est l'espace vectoriel généré par les fonctions $v \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+)$ satisfaisant*

$$\int_{\mathbb{R}^+} \frac{J(|v(S)|)}{S^2} dS = \int_{\mathbb{R}^+} \beta(|v(S)|) \frac{|v(S)|}{S^2} dS < +\infty, \tag{4.20}$$

Cet espace est muni de la norme de Luxemburg

$$L_J(v) = \inf \left\{ \lambda > 0 / \int_{\mathbb{R}^+} \beta\left(\frac{|v(S)|}{\lambda}\right) \frac{|v(S)|}{\lambda} \frac{dS}{S^2} \leq 1 \right\}. \tag{4.21}$$

Nous cherchons une norme équivalente à la norme de Luxemburg ci-dessus. Plus précisement, nous avons la proposition suivante

Proposition 10. *Nous avons,*

$$(a) \quad E = \left\{ V \ ; \ \int_{\mathbb{R}^+} \min\left(\frac{V^2(S)}{S^2}, \frac{|V(S)|^{\frac{3}{2}}}{S^2} \right) dS < +\infty \right\}, \tag{4.22}$$

et

$$(b) \ E = L^2_S(\mathbb{R}^+) + L^{\frac{3}{2}}_S(\mathbb{R}^+) = \left\{ v = a + b \ ; \quad a \in L^2_S(\mathbb{R}^+), \, b \in L^{\frac{3}{2}}_S(\mathbb{R}^+) \right\}. \tag{4.23}$$

Démonstration. (a). On sait que $\beta(y) = \sqrt{y + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} = \dfrac{y}{\sqrt{y + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2}}$. donc $\beta(y) \leq \min(y, \sqrt{y})$, et par suite

$$\beta(|V(S)|) \frac{|V(S)|}{S^2} \leq \min\left(\frac{V(S)^2}{S^2}, \frac{|V(S)|^{\frac{3}{2}}}{S^2} \right). \tag{4.24}$$

Réciproquement, on a $y = \beta(y) + \beta^2(y)$, par consèquent $y \leq 2\max(\beta(y), \beta^2(y))$. Si $\beta(y) \geq 1$ alors $y \leq 2\beta^2(y)$ ou $\beta(y) \leq 1$ et donc $y \leq 2\beta(y)$. Ainsi, il existe une constante $c > 0$ telle que $c \min(y, \sqrt{y}) \leq \beta(y)$. Par suite nous avons,

$$c \min\left(\frac{V(S)^2}{S^2}, \frac{|V(S)|^{\frac{3}{2}}}{S^2} \right) \leq \beta(|V(S)|) \frac{|V(S)|}{S^2}. \tag{4.25}$$

(b) On sait que $L^2_S(\mathbb{R}^+) + L^{\frac{3}{2}}_S(\mathbb{R}^+)$ est le plus petit espace vectoriel qui contient $L^2_S(\mathbb{R}^+) \cup L^{\frac{3}{2}}_S(\mathbb{R}^+)$, i.e.

$$L^2_S(\mathbb{R}^+) + L^{\frac{3}{2}}_S(\mathbb{R}^+) = \mathrm{Vect}(L^2_S(\mathbb{R}^+) \cup L^{\frac{3}{2}}_S(\mathbb{R}^+)). \tag{4.26}$$

Soit $u \in L^2_S(\mathbb{R}^+) \cup L^{\frac{3}{2}}_S(\mathbb{R}^+)$, on sait que

$$\int_{\mathbb{R}^+} \min\left(\frac{u(S)^2}{S^2}, \frac{|u(S)|^{\frac{3}{2}}}{S^2} \right) < \min\left(\int_{\mathbb{R}^+} \frac{u^2(S)}{S^2}, \int_{\mathbb{R}^+} \frac{|u(S)|^{\frac{3}{2}}}{S^2} \right) < \infty, \tag{4.27}$$

donc $u \in E$, par suite $L^2_S(\mathbb{R}^+) \cup L^{\frac{3}{2}}_S(\mathbb{R}^+) \subset E$. Ainsi on a

$$\mathrm{Vect}(L^2_S(\mathbb{R}^+) \cup L^{\frac{3}{2}}_S(\mathbb{R}^+)) = L^2_S(\mathbb{R}^+) + L^{\frac{3}{2}}_S(\mathbb{R}^+) \subset \mathrm{Vect}(E) = E.$$

Réciproquement, on montre que $E \subset L^2_S(\mathbb{R}^+) + L^{\frac{3}{2}}_S(\mathbb{R}^+)$, si $u \in E$, alors

$$\int_{\mathbb{R}^+} \min\left(\frac{u(S)^2}{S^2}, \frac{|u(S)|^{\frac{3}{2}}}{S^2}\right) < +\infty \ . \tag{4.28}$$

Par suite u peut être vu comme suit

$$u = \underbrace{u\mathbf{I}_{u\leq 1}}_{\in L^2_S(\mathbb{R}^+)} + \underbrace{u\mathbf{I}_{u\geq 1}}_{\in L^{3/2}_S(\mathbb{R}^+)} \ , \tag{4.29}$$

donc $u \in L^2_S(\mathbb{R}^+) + L^{\frac{3}{2}}_S(\mathbb{R}^+)$. Ainsi, $E = L^2_S(\mathbb{R}^+) + L^{\frac{3}{2}}_S(\mathbb{R}^+)$.

□

4.3.4 Existence et unicité d'une solution pour un $\tau > 0$ fixé

Dans cette section on donne quelques résultats théoriques pour le problème en temps discret (4.19). On considère l'ensemble convexe K_n,

$$K_n = \left\{V \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+)/\ V^n \leq V \leq 0,\, V(0) = 0,\, V \in W,\, V - V^n \in E\right\}; \tag{4.30}$$

la première itération V^0 vérifie

$$\begin{cases} V^0(0) = 0, \\ V^0 \leq 0, \\ V^0 \in W, \\ \lim\limits_{S\to\infty} V^0(S) = -K. \end{cases}$$

Théorème 7. *Pour tout $n \geq 0$, il existe une unique solution $V^{n+1} \in K_n$ solution de*

$$\begin{cases} \beta\left(\dfrac{V^{n+1} - V^n}{\tau}\right) - S^2 V^{n+1}_{SS} = 0 \ , \quad S > 0, \\ \\ V^{n+1}(0) = 0 \quad et \quad \lim\limits_{S\to\infty} V^{n+1}(S) = -K. \end{cases} \tag{4.31}$$

Remarque 13. *La condition $\lim\limits_{S\to\infty} V^{n+1}_S = 0$ dans le problème (4.19) a été remplacé par $\lim\limits_{S\to\infty} V^{n+1}(S) = -K$ dans le but de rendre l'analyse moins difficile. On peut justifier cette condition par un raisonnement par contradiction.*

Démonstration. (Unicité) Soit V^{n+1} et $\tilde{V}^{n+1}$ deux solutions du problème (4.31), et $w = \tilde{V}^{n+1} - V^{n+1}$. Alors w vérifie l'équation

$$-S^2 w_{SS} + \beta\left(\frac{\tilde{V}^{n+1} - V^n}{\tau}\right) - \beta\left(\frac{V^{n+1} - V^n}{\tau}\right) = 0. \tag{4.32}$$

On multiplie l'équation (4.32) par w et on intègre par rapport à S

$$\int_{\mathbb{R}^+} w_S^2 dS + \int_{\mathbb{R}^+} \left(\beta\left(\frac{\tilde{V}^{n+1} - V^n}{\tau}\right) - \beta\left(\frac{V^{n+1} - V^n}{\tau}\right)\right)\frac{w(S)}{S^2} dS = 0. \tag{4.33}$$

Comme β est monotone sur $L^2_S(\mathbb{R}^+)$, alors $\int_{\mathbb{R}^+} w_S^2 dS \leq 0$, et par suite $w(S) = w(0) = 0$.

Existence par itérations monotones

Nous allons construire une suite croissante de fonctions qui converge vers la solution. Fixons n, on résout récursivement en m le problème

$$\begin{cases} -\tau S^2 V^{n,m+1}_{SS} + V^{n,m+1} = V^{n,m} - \tau\beta\left(\dfrac{V^{n,m} - V^n}{\tau}\right) & \text{sur } (0,K+n+1)\ , \\ \\ V^{n,m+1}(0) = 0, \quad V^{n,m+1}(K+n+1) = -K. \end{cases} \tag{4.34}$$

La suite $V^{n,m}$ est telle que pour son premier terme $V^{n,0}$, nous avons $V^{n,0} = V^n$. Nous avons le résultat suivant

Lemme 2. *Pour $V^{n,m} \in K_n$, le problème (4.34) a une solution unique $V^{n,m+1} \in W_n$, avec W_n est l'ensemble*

$$W_n = \left\{ V \in L^2_S([0,n+K+1])\ ;\ \int_0^{n+K+1} V_S^2(S)dS < \infty \right\},$$

muni du produit scalaire

$$< u,w >_{W_n} = \int_0^{n+K+1} \frac{uv}{S^2} dS + \int_0^{n+K+1} u_S v_S.$$

Preuve. On pose $\Omega_n = [0,K+n+1]$ et on définit $w^{n,m+1} = V^{n,m+1} + \dfrac{KS}{n+1+K}$. L'équation (4.34) devient

$$\begin{cases} -\tau S^2 w^{n,m+1}_{SS} + w^{n,m+1} &= V^{n,m} - \tau\beta\left(\dfrac{V^{n,m} - V^n}{\tau}\right) + \dfrac{KS}{n+1+K} & \text{sur } \Omega_n, \\ \\ w^{n,m+1} &= 0 & \text{sur } \partial\Omega_n. \end{cases} \tag{4.35}$$

Considérons la forme bilinéaire

$$\begin{aligned} a : W_n \times W_n &\mapsto \mathbb{R} \\ (u,v) &\mapsto \tau \int_{\Omega_n} u_S v_S + \int_{\Omega_n} \frac{1}{S^2} uv. \end{aligned}$$

Alors la forme bilinéaire a est continue ; en effet,

$$\begin{aligned} |a(u,v)| &\leq \max(\tau,1)| < u,v >_{W_n} |, \\ &\leq \max(\tau,1)||u||_{W_n}||v||_{W_n}. \end{aligned}$$

Prouvons la coercivité de a, on sait que

$$a(v,v) = \tau||v_S||^2_{L^2} + ||v||^2_{L^2_S} \geq \min(\tau,1)||v||^2_{W_n}. \tag{4.36}$$

On considère la forme linéaire L définie par

$$L(w) = \int_{\Omega_n} \frac{V^{n,m}w}{S^2} - \tau \int_{\Omega_n} \beta\left(\frac{V^{n,m}-V^n}{\tau}\right)\frac{w}{S^2} + \int_{\Omega_n} \frac{Kw}{S(n+1+K)}. \tag{4.37}$$

Comme β est continue et $\mathcal{C}(\Omega_n) \subset L^2(\Omega_n) \subset L^2_S(\Omega_n)$ pour $S > 1$ alors

$$|L(w)| \leq ||V^{n,m}||_{L^2_S}||w||_{L^2_S} + \tau \left|\left|\beta\left(\frac{V^{n,m}-V^n}{\tau}\right)\right|\right|_{L^2_S} ||w||_{L^2_S} + \left|\left|\frac{SK}{n+1+K}\right|\right|_{L^2_S} ||w||_{L^2_S}. \tag{4.38}$$

Puisque a est continue et coercive alors par le théorème de Lax-Milgram il existe un unique $u \in W_n$ tel que

$$a(u,w) = L(w), \qquad \forall w \in W_n. \qquad \square$$

Lemme 3. *Soit $m \in \mathbb{N}$. La suite $m \mapsto V^{n,m}$ est croissante et $V^{n,m}(S) \leq 0,\ \forall S \in \mathbb{R}^+$.*

Preuve. Soit $n \in \mathbb{N}$, nous allons raisonner par récurrence, puisque $V^{n,0} = V^n$ est négative pour tout n, alors le raisonnement est valable pour $m = 0$. Supposons que $V^{n,m} \leq 0$ et montrons que $V^{n,m+1} \leq 0$, comme $V^{n,m} \leq 0$ alors 0 est une sur-solution de l'équation (4.34) et par suite $V^{n,m+1} \leq 0$ sur Ω_n et comme $V^{n,m+1}$ est prolongée par $-K$ sur $]K+n+1,+\infty[$ alors $V^{n,m+1}(S) \leq 0\ \forall S \in \mathbb{R}^+$.
Toujours par récurrence, nous allons montrer que $m \mapsto V^{n,m}$ est croissante pour tout m, on a pour le premier pas

$$\begin{cases} -\tau S^2 V^{n,1}_{SS} + V^{n,1} = V^n \quad \text{sur} \quad [0,K+n+1[, \\ \\ \quad V^{n,1}(0) = 0, \quad V^{n,1}(K+n+1) = -K. \end{cases} \tag{4.39}$$

Alors V^n est une sous-solution de (4.39) comme $-\tau S^2 V^n_{SS} + V^n - V^n = -\tau S^2 V^n_{SS} \leq 0$ et $V^n(0) = 0 \leq 0$, $V^n(K+n+1) = -K \leq -K$. Par suite $V^n \leq V^{n,1}$, alors la proposition est valable pour le premier pas. Supposons que $V^{n,m-1} \leq V^{n,m}$, nous devons montrer que $V^{n,m} \leq V^{n,m+1}$; on sait que

$$\begin{aligned} -\tau S^2 V^{n,m}_{SS} + V^{n,m} &= V^{n,m-1} - \tau\beta\left(\frac{V^{n,m-1}-V^n}{\tau}\right) \\ &\leq V^{n,m} - \tau\beta\left(\frac{V^{n,m}-V^n}{\tau}\right), \end{aligned}$$

comme $f(x) = x - \tau\beta(\frac{x-V^n}{\tau})$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$ car $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{2\sqrt{\frac{x-V^n}{\tau} + \frac{1}{4}}} \geq 0$. Pour les valeurs du bords nous avons $V^{n,m}(0) = 0 \leq 0$ et $V^{n,m}(n+K+1) = -K \leq -K$ et donc, $V^{n,m}$ est une sous-solution de (4.34) et par suite $V^{n,m} \leq V^{n,m+1}$. $\square$

On prolonge la suite $V^{n,m+1}$ par $-K$ sur l'intervalle $]K+n+1,+\infty[$. Comme $m \mapsto V^{n,m}$ est croissante et bornée par 0, alors elle converge vers V^{n+1}, i.e.

$$V^{n+1} = \lim_{m\to\infty} V^{n,m} = \sup_{m\in\mathbb{N}} V^{n,m}.$$

En multipliant dans $L^2(\mathbb{R}^+)$ (4.34) par une fonction test φ, on obtient

$$-\tau \int_{\mathbb{R}^+} S^2 V^{n,m+1}_{SS}\varphi + \int_{\mathbb{R}^+} V^{n,m+1}\varphi = \int_{\mathbb{R}^+} V^{n,m}\varphi - \tau \int_{\mathbb{R}^+} \beta\left(\frac{V^{n,m}-V^n}{\tau}\right)\varphi. \tag{4.40}$$

En passant à la limite, lorsque $m \to \infty$, on a

$$\int_{\mathbb{R}^+} S^2 V_{SS}^{n+1} \varphi = \int_{\mathbb{R}^+} \beta\left(\frac{V^{n+1}-V^n}{\tau}\right)\varphi; \tag{4.41}$$

ce qui implique que

$$-S^2 V_{SS}^{n+1} + \beta\left(\frac{V^{n+1}-V^n}{\tau}\right) = 0 \quad \text{sur} \quad D'(\mathbb{R}^+). \tag{4.42}$$

Il reste à montrer que $V^{n+1} \in K_n$. On multiplie (4.42), par $V^{n+1}-V^n$ et on a

$$\begin{array}{c} < \beta\left(\frac{V^{n+1}-V^n}{\tau}\right), V^{n+1}-V^n >_{L^2_S} + \frac{1}{2} < V^{n+1}-V^n, V^{n+1}-V^n >_W \\ + \frac{1}{2} < V^{n+1}, V^{n+1} >_W = \frac{1}{2} < V^n, V^n >_W . \end{array} \tag{4.43}$$

Comme $V^n \in W$ alors $V^{n+1} \in W$ et donc

$$\int_{\mathbb{R}^+} \beta\left(\frac{V^{n+1}-V^n}{\tau}\right)\left(\frac{V^{n+1}-V^n}{S^2}\right) < \infty, \tag{4.44}$$

ce qui veut dire que $V^{n+1}-V^n \in L^2_S(\mathbb{R}^+) + L^{\frac{3}{2}}_S(\mathbb{R}^+)$ et donc $V^{n+1} \in K_n$. □

4.3.5 Passage au problème continu en temps

Fixons $T > 0$. Pour $\tau > 0$, soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $N\tau = T$. On considère la fonction

$$V^\tau(t,S) = \sum_{n=0}^{N} \sigma(\frac{t}{\tau} - n) V^n(S), \tag{4.45}$$

où σ est définie par

$$\sigma(t) = \begin{cases} t+1 & \text{si} \quad -1 \le t \le 0, \\ 1-t & \text{si} \quad 0 \le t \le 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

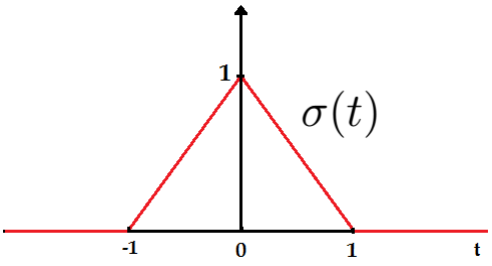


FIGURE 4.1 – Schéma de la fonction σ.

On pose $\sigma_n(t) = \sigma(\frac{t}{\tau} - n)$, nous avons

$$\sigma_n(t) = \begin{cases} \dfrac{t-(n-1)\tau}{\tau} & \text{si} \quad (n-1)\tau \le t \le n\tau, \\ \dfrac{(n+1)\tau - t}{\tau} & \text{si} \quad n\tau \le t \le (n+1)\tau, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

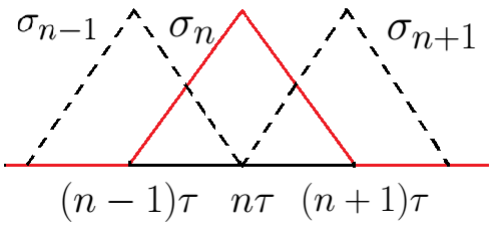


FIGURE 4.2 – Schéma des fonctions σ_n.

On veut faire tendre $N \to +\infty$ (et donc $\tau \to 0$).

4.3.6 Estimations a priori

Notons que sur l'intervalle en temps $I_n =]n\tau,(n+1)\tau[$ nous avons

$$V^\tau(t,S) = \sigma_n V^n(S) + \sigma_{n+1} V^{n+1}(S), \tag{4.46}$$

$$\frac{dV^\tau}{dt}(t,S) = \frac{V^{n+1}(S) - V^n(S)}{\tau}. \tag{4.47}$$

Proposition 11. *Nous avons les assertions suivantes*
1. La suite $\dfrac{dV^\tau}{dt}$ *est bornée dans* $L^2_S(\mathbb{R}^+ \times [0,T]) + L^{\frac{3}{2}}_S(\mathbb{R}^+ \times [0,T])$.
2. La suite V^τ *est bornée dans* $L^\infty(\mathbb{R}^+ \times [0,T])$.
3. La suite V^τ_S *est bornée dans* $L^\infty([0,T]; L^2(\mathbb{R}^+))$.

Démonstration. 1. En sommant (4.43) par rapport à n on trouve

$$\sum_{n=0}^{N} \tau \int_{\mathbb{R}^+} \beta\left(\frac{V^{n+1}-V^n}{\tau}\right)\left(\frac{V^{n+1}-V^n}{\tau S^2}\right) dS + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^+} |V_S^{N+1}|^2 dS \le \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^+} |V_S^0|^2 dS,$$

et donc
$$\sum_{n=0}^{N} \tau \int_{\mathbb{R}^+} \beta\left(\frac{V^{n+1}-V^n}{\tau}\right)\left(\frac{V^{n+1}-V^n}{\tau S^2}\right) dS < \infty,$$

ce qui veut dire

$$\sum_{n=0}^{N} \tau \int_{\mathbb{R}^+} \min\left(\frac{|V^{n+1}-V^n|^2}{\tau^2}, \frac{|V^{n+1}-V^n|^{\frac{3}{2}}}{\tau^{\frac{3}{2}}}\right)\frac{dS}{S^2} < \infty, \tag{4.48}$$

et

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^+} \min\left(\left(\frac{dV^\tau}{dt}\right)^2, \left|\frac{dV^\tau}{dt}\right|^{\frac{3}{2}}\right)\frac{dS}{S^2}dt < \infty. \tag{4.49}$$

Donc $\dfrac{dV^\tau}{dt}$ est bornée dans $L^2_S(\mathbb{R}^+ \times [0,T]) + L^{\frac{3}{2}}_S(\mathbb{R}^+ \times [0,T])$.
2. On remarque que V^τ est une combinaison convexe de V^n et V^{n+1}, et que $V^0 \le V^n \le 0\ \forall n \in \mathbb{N}$, donc

$$V^n(S) \le V_\tau(t,S) \le V^{n+1}(S), \qquad \forall\ n\tau < t < (n+1)\tau, \tag{4.50}$$

cela vient du fait que $V^n \le V^{n+1}$, ainsi V^τ est bornée dans $L^\infty(\mathbb{R}^+ \times [0,T])$.
3. Nous avons

$$V^\tau_S(t,S) = (n+1-\frac{t}{\tau})V^n_S(S) + (\frac{t}{\tau} - n)V^{n+1}_S(S), \tag{4.51}$$

De manière analogue, on peut montrer que V^τ_S est bornée dans $L^\infty([0,T]; L^2(\mathbb{R}^+))$. □

Proposition 12. *Nous avons en plus* $\beta\left(\dfrac{dV^\tau}{dt}\right)$ *est bornée dans*

$$L^2_S(\mathbb{R}^+ \times [0,T]) \cap L^3_S(\mathbb{R}^+ \times [0,T]).$$

Démonstration. On sait que $\beta(\frac{dV^\tau}{dt}) \leq \min(\frac{dV^\tau}{dt}, \sqrt{\frac{dV^\tau}{dt}})$, et donc

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^+\times[0,T]} \beta\left(\frac{dV^\tau}{dt}\right)^2 \frac{dS}{S^2} \leq & \int_{\substack{\mathbb{R}^+\times[0,T] \\ \{\frac{dV^\tau}{dt}\leq 1\}}} \frac{dV^\tau}{dt}^2 \frac{dS}{S^2} + \int_{\substack{\mathbb{R}^+\times[0,T] \\ \{\frac{dV^\tau}{dt}\geq 1\}}} \frac{dV^\tau}{dt} \frac{dS}{S^2} \\ \leq & \int_{\{\frac{dV^\tau}{dt}\leq 1\}} \frac{dV^\tau}{dt}^2 \frac{dS}{S^2} + \int_{\{\frac{dV^\tau}{dt}\geq 1\}} \frac{dV^\tau}{dt}^{\frac{3}{2}} \frac{dS}{S^2} < \infty,\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^+\times[0,T]} \beta\left(\frac{dV^\tau}{dt}\right)^3 \frac{dS}{S^2} = & \int_{\{\frac{dV^\tau}{dt}\leq 1\}} \frac{dV^\tau}{dt}^3 \frac{dS}{S^2} + \int_{\{\frac{dV^\tau}{dt}\geq 1\}} \frac{dV^\tau}{dt}^{\frac{3}{2}} \frac{dS}{S^2} \\ \leq & \int_{\{\frac{dV^\tau}{dt}\leq 1\}} \frac{dV^\tau}{dt}^2 \frac{dS}{S^2} + \int_{\{\frac{dV^\tau}{dt}\geq 1\}} \frac{dV^\tau}{dt}^{\frac{3}{2}} \frac{dS}{S^2} < \infty.\end{aligned}$$

Par suite, $\beta\left(\frac{dV^\tau}{dt}\right)$ est bornée dans $L^2_S(\mathbb{R}^+\times[0,T]) \cap L^3_S(\mathbb{R}^+\times[0,T])$.

□

4.3.7 Passage à la limite (quand $\tau \to 0$)

Théorème 8. *Le problème (4.18) admet une solution unique convexe $V \in \mathcal{C}(0,T;W)$ telle que $\frac{dV}{dt} \in L^2_S(\mathbb{R}^+\times[0,T]) + L^{\frac{3}{2}}_S(\mathbb{R}^+\times[0,T])$.*

Démonstration. Nous avons V^τ converge faiblement * dans $L^\infty(\mathbb{R}^+\times[0,T])$. Pour $(t,S) \in I_n \times \mathbb{R}^+$, il vient de (4.42), (4.46) et (4.47),

$$\beta\left(\frac{dV^\tau}{dt}\right) - S^2 V^\tau_{SS} = S^2(n+1-\frac{t}{\tau})(V^{n+1}_{SS} - V^n_{SS}). \tag{4.52}$$

On passe à la limite faible dans (4.52) et on conclut par un raisonnement de monotonie [40]. On multiplie d'abord par une fonction test $\phi \in D(\mathbb{R}^+)$, et on intègre dans $L^2_S(\mathbb{R}^+)$ l'équation (4.52)

$$\int_{\mathbb{R}^+} \left(\beta\left(\frac{dV^\tau}{dt}\right) - S^2 V^\tau_{SS}\right) \frac{\phi(S)}{S^2} dS = \epsilon_n, \tag{4.53}$$

où

$$\epsilon_n = (n+1-\frac{t}{\tau}) \int_{\mathbb{R}^+} \left(\frac{V^{n+1}-V^n}{\tau}\right) \tau \phi_{SS}.$$

On applique l'inégalité de Hölder

$$|\epsilon_n| \leq \tau \left(\int_{\{|\frac{dV^\tau}{dt}|\leq 1\}} \left|\frac{dV^\tau}{dt}\right|^2 \frac{dS}{S^2}\right)^{\frac{1}{2}} ||\phi_{SS}||_{L^2_S} + \tau \left(\int_{\{|\frac{dV^\tau}{dt}|\geq 1\}} \left|\frac{dV^\tau}{dt}\right|^{\frac{3}{2}} \frac{dS}{S^2}\right)^{\frac{2}{3}} ||\phi_{SS}||_{L^3_S}. \tag{4.54}$$

Lorsque $\tau \to 0$, $\beta\left(\frac{dV^\tau}{dt}\right)$ et $S^2 V^\tau_{SS}$ ont la même limite faible.

On pose $\chi = \lim_{\tau\to 0} \beta\left(\frac{dV^\tau}{dt}\right)$. On montre que $\chi = \beta\left(\frac{dV}{dt}\right)$. Pour ce faire on calcule

$$Q_\tau = \int_0^T < \beta\left(\frac{dV^\tau}{dt}\right) - \beta(v), \frac{dV^\tau}{dt} - v >_{L^2_S} \geq 0, \tag{4.55}$$

avec v est une fonction test. Par la convergence faible nous avons

$$\int_0^T < \beta\left(\frac{dV^\tau}{dt}\right), v >_{L^2_S} \to \int_0^T < \chi, v >_{L^2_S} , \tag{4.56}$$

et

$$\int_0^T < \beta(v), \frac{dV^\tau}{dt} >_{L^2_S} \to \int_0^T < \beta(v), \frac{dV}{dt} >_{L^2_S} . \tag{4.57}$$

Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned}\int_0^T < \beta\left(\frac{dV^\tau}{dt}\right), \frac{dV^\tau}{dt} >_{L^2_S} &= \sum_n \int_{\mathbb{R}^+} V_{SS}^{n+1}(V^{n+1} - V^n) dS \\ &= -\frac{1}{2}\sum_n \int_{\mathbb{R}^+} |V_S^{n+1} - V_S^n|^2 dS - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^+} |V_S^\tau(T)|^2 dS \\ &\quad + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^+} |V_S^0(0)|^2 dS,\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}\overline{\lim} \int_0^T < \beta\left(\frac{dV^\tau}{dt}\right), \frac{dV^\tau}{dt} >_{L^2_S} &\leq -\frac{1}{2}\overline{\lim} \int_{\mathbb{R}^+} |V_S^\tau(T)|^2 dS + \frac{1}{2}\overline{\lim} \int_{\mathbb{R}^+} |V_S^0(0)|^2 dS \\ &\leq \underbrace{-\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^+} |V_S(T)|^2 dS + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^+} |V_S(0)|^2 dS}_{=-\frac{1}{2}\int_0^T \frac{d}{dt}||V||^2_W dt} .\end{aligned}$$

Comme

$$-\frac{1}{2}\int_0^T \frac{d}{dt}||V||^2_W = \int_0^T < \chi, \frac{dV}{dt} >_{L^2_S}, \tag{4.58}$$

donc

$$\overline{\lim} \int_{\mathbb{R}^+} \int_0^T \beta\left(\frac{dV^\tau}{dt}\right) \frac{dV^\tau}{dt} \leq \int_0^T < \chi, \frac{dV}{dt} >_{L^2_S}, \tag{4.59}$$

et il vient

$$0 \leq \overline{\lim} Q_\tau \leq \int_0^T < \beta(v), v - \frac{dV}{dt} >_{L^2_S} + \int_0^T < \chi, \frac{dV}{dt} - v >_{L^2_S} . \tag{4.60}$$

On choisit $v = \frac{dV}{dt} + \epsilon\phi$ avec ϕ est une fonction test ; alors on a

$$0 \leq \epsilon \int_0^T < \beta\left(\frac{dV}{dt}\right) - \chi, \phi >_{L^2_S} + o(\epsilon). \tag{4.61}$$

On change ϕ par $-\phi$ et on tend ϵ vers 0^+ on obtient

$$\beta\left(\frac{dV}{dt}\right) = \chi \quad \text{p.p .} \tag{4.62}$$

Unicité de la solution

Soit u et $\tilde{u}$ deux solutions de (4.18), et $w = u - \tilde{u}$, on a

$$< \beta\left(\frac{du}{dt}\right) - \beta\left(\frac{d\tilde{u}}{dt}\right), \frac{dw}{dt} >_{L^2_S} + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}||w||^2_W = 0. \tag{4.63}$$

Ainsi $u = \tilde{u}$. □

Corollaire 1. *On a de plus*

$$\frac{dV^\tau}{dt} \to \frac{dV}{dt} \quad \textit{fortement dans } L^2_S([0,T]\times\mathbb{R}^+) + L^{\frac{3}{2}}_S([0,T]\times\mathbb{R}^+). \tag{4.64}$$

Démonstration. Si $v = 0$ alors

$$\begin{aligned}\overline{\lim}\int_0^T < \beta\left(\frac{dV^\tau}{dt}\right), \frac{dV^\tau}{dt} >_{L^2_S} \leq & \int_0^T < \beta\left(\frac{dV}{dt}\right), \frac{dV}{dt} >_{L^2_S}, \\ & \leq \underline{\lim}\int_0^T < \beta\left(\frac{dV^\tau}{dt}\right), \frac{dV^\tau}{dt} >_{L^2_S}\end{aligned}$$

Ce qui veut dire

$$\frac{dV^\tau}{dt} \to \frac{dV}{dt} \quad \text{fortement dans } L^2_S([0,T]\times\mathbb{R}^+) + L^{\frac{3}{2}}_S([0,T]\times\mathbb{R}^+). \tag{□}$$

4.3.8 Retour à l'équation originale de Barles et Soner

Par raison de simplicité, nous avons pris $\Psi(x) = x$. Nous indiquons maintenant comment gérer l'équation originale de Barles-Soner. La principale différence est la définition de l'epace d'Orlicz qui est défini par la fonction $\tilde{J}(y) = \tilde{\beta}(y)y$ avec $\tilde{\beta}(y)$ est la solution de $(1 + \Psi(\tilde{\beta}(y))\tilde{\beta}(y) = y$. Cet espace d'Orlicz a les mêmes propriétés que $L^2_S(\Omega) + L^{\frac{3}{2}}_S(\Omega)$, cela vient du fait que $\tilde{\beta}$ et β ont le même comportement pour $y \sim 0$ et $y \sim \infty$.

4.4 Comparaison avec la solution du modèle linéaire Black-Scholes

En faisant un changement d'échelle à la solution V du Théorème 8 par $V^a = a^{-2}V$ on obtient l'équation suivante

$$V^a_t = (1 + a^2S^2V^a_{SS})S^2V^a_{SS}, \tag{4.65}$$

avec la condition initiale $V^0(S) = e^{rT}((S - Ke^{-rT})_+ - S)$. Nous allons comparer cette solution à la solution *linéaire* de l'équation de Barles-Soner V^l

$$V^l_t = S^2V^l_{SS},$$

avec la même donnée initiale. En fait, si les coûts de transaction sont petits, alors $a \to 0^+$. Pour commencer, nous prouvons un résultat montrant que le paramètre $\Gamma^a = V^a_{SS}$ reste borné lorsque a

converge vers 0.

Lemme 4. *Il existe une constante C qui dépends de r,K,T mais qui ne dépends pas du paramètre a telle que*

$$\int_0^t \int_\Omega (S^2 V_{SS}^a)^2 \frac{dS}{S^2} d\tau \leq C. \tag{4.66}$$

Démonstration. On sait que

$$\beta_a(\frac{dV_a}{dt}) = S^2 V_{SS}^a,$$

avec $\beta_a(y)$ est la solution positive de $a^2\beta_a + \beta_a - y = 0$. En multipliant cette équation par $S^{-2}\frac{dV^a}{dt}$ et en intègrant dans $\Omega \times [0,t]$, on trouve

$$\int_0^t \int_\Omega \beta_a(\frac{dV^a}{dt}) \frac{dV^a}{dt} \frac{dS}{S^2} \leq \frac{1}{2} \int_\Omega V_S^0 dS = C. \tag{4.67}$$

D'autre part, on a

$$S^2 V_{SS}^a \leq S^2 V_{SS}^a + a^2 (S^2 V_{SS}^a)^2 = \frac{dV^a}{dt},$$

et donc $(S^2 V_{SS}^a)^2 \leq \beta_a(\frac{dV^a}{dt})\frac{dV_a}{dt}$ ce qui permet d'achever la preuve du Lemme. □

Proposition 13. *Nous avons $V^a \geq V^l$, et il existe une constante C qui dépends de K,r,T telle que*

$$||V^a - V^l||_{L^1_S(\Omega)} \leq Ca^2.$$

Démonstration. Posons $W = V^a - V^l$. puisque $W_t - S^2 W_{SS} \geq 0$ alors par le principe du maximum $W \geq 0$. D'autre part

$$W_t - S^2 W_{SS} \leq a^2 (S^2 V_{SS}^a)^2,$$

multiplions par S^{-2} et intègrons dans Ω , alors

$$\frac{d}{dt}||V^a - V^l||_{L^1_S(\Omega)} = -W_S(0) + a^2 \int_\Omega S^2 (V_{SS}^a)^2(S) dS,$$

car $W_S(S) \to 0$ quand S tend vers $+\infty$. Puisque $W(0) = 0$ et $W(S) \geq 0$ pour $S > 0$ alors on a $-W_S(0) \leq 0$. Par suite

$$\frac{d}{dt}||V^a - V^l||_{L^1_S(\Omega)} \leq a^2 \int_\Omega S^2 (V_{SS}^a)^2(S) dS,$$

une intégration en temps conclut, grâce au Lemme 4, la preuve de la Proposition 13. □

La Proposition 13 signifie que le prix de l'option en présence des coûts de transaction est plus cher que le prix de l'option dans le cadre linéaire Black-Scholes. Il s'agit d'un résultat attendu, car le pricing dans ce cas implique des coûts supplémentaires. En effet, plus le paramètre a est élevé, plus le prix de l'option est grand. La Proposition 13 peut également être considérée comme une manière déterministe de prouver que les erreurs de couverture disparaissent lorsque les coûts de transaction convergent vers 0, où le produit dérivé peut être répliqué avec la stratégie de couverture delta-hedge. Voir [44, 13] pour plus de détails.

4.5 Simulation numérique du modèle de Barles et Soner

Dans cette partie, nous allons présenter une méthode aux différences finies pour la simulation numérique du modèle de Barles et Soner. De manière générale afin de résoudre des EDPs de Black-Scholes non linéaires on utilise des méthodes numériques du au fait qu'une solution analytique n'existe pas, d'où l'intérêt de la simulation numérique. Dans ce qui suit, nous allons utiliser le schéma de Crank-Nicolson. Nous avons vu que dans le modèle de Barles et Soner, la volatilité est la suivante

$$\tilde{\sigma}(S,t,V_{SS})^2 = \sigma^2(1+\Psi(e^{r(T-t)}a^2S^2V_{SS})), \tag{4.68}$$

où Ψ est solution de l'EDO (3.16), cette EDO peut être résolue avec la méthode Runge-Kutta d'ordre 4. Nous rappelons les conditions aux limites pour l'équation (3.14)

$$V(S,T) = \max(0,S-K); \quad 0 \leq S < \infty, \tag{4.69}$$

$$V(S,t) \sim S - Ke^{r(t-T)}, \qquad S \to \infty, \tag{4.70}$$

$$V(0,t) = 0, \qquad 0 \leq t \leq T. \tag{4.71}$$

Afin d'enlever la dégénerescence du problème (3.14) en 0, et de pouvoir le résoudre numériquement avec une donnée initiale, nous allons effectuer le changement de variables suivant

$$x = \ln\left(\frac{S}{K}\right), \qquad \tau = \frac{1}{2}\sigma^2(T-t), \qquad u(x,\tau) = e^{-x.}\frac{V(S,t)}{K}.$$

Ce qui nous donne

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial t}(S,t) &= Ke^x\dfrac{\partial u}{\partial \tau}(x,\tau)\dfrac{\partial \tau}{\partial t} = -\dfrac{K}{2}\sigma^2 e^x\dfrac{\partial u}{\partial \tau}(x,\tau), \\ \dfrac{\partial V}{\partial S}(S,t) &= \dfrac{\partial}{\partial x}\left(Ke^x u(x,\tau)\right)\dfrac{\partial x}{\partial S} = (Ke^x u(x,\tau) + Ke^x\dfrac{\partial u}{\partial x})\dfrac{\partial}{\partial S}(\ln\left(\frac{S}{K}\right)) = \left(u+\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)(x,\tau), \\ \dfrac{\partial^2 V}{\partial S^2}(S,t) &= \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,\tau) + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\dfrac{\partial x}{\partial S} = \dfrac{1}{S}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right). \end{cases} \tag{4.72}$$

En injectant ces dérivées dans l'équation (4.1) on obtient

$$-\frac{K}{2}\sigma^2 e^x\frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2 Ke^x\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + rKe^x\left(u+\frac{\partial u}{\partial x}\right) - rKe^x u = 0$$

On multiplie par $-\dfrac{2e^{-x}}{\sigma^2 K}$, et on obtient

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{\tilde{\sigma}^2}{\sigma^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) - D\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \tag{4.73}$$

avec $D = \dfrac{2r}{\sigma^2}$, $x \in \mathbb{R}$, $0 \leq \tau \leq \dfrac{\sigma^2 T}{2}$, et $\tilde{\sigma}^2$ devient

$$\tilde{\sigma}^2 = \sigma^2\left(1+\Psi\left(e^{\frac{2r}{\sigma^2}}a^2 Ke^x\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\right)\right). \tag{4.74}$$

Et les nouvelles conditions aux limites

$$u(x,0) = \max(1 - e^{-x},0), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{4.75}$$

$$u(x,\tau) = 0 \quad (x \to -\infty), \tag{4.76}$$

$$u(x,\tau) \sim 1 \quad (x \to +\infty). \tag{4.77}$$

Dans le cas linéaire, $(a = 0)$, l'équation (4.73) se simplifie et devient

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} - (1 + D)\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \tag{4.78}$$

4.5.1 Le schéma de Crank-Nicolson

Nous avons considéré le schéma aux différences finies de type Crank-Nicolson pour L'EDP (4.73) avec la volatilité (4.74). Nous avons suivi la technique proposée par [6, 22] qui consiste à traiter le terme non linéaire de manière explicite en temps. Dans le cas des équations de Black-Scholes, il existe une condition aux limites à l'infini ; or, pour faire des simulations numériques l'intervalle de calcul doit être borné. Cette question a été discutée dans plusieurs travaux (voir, par exemple, [35, 23]) où une taille appropriée du domaine a été proposée après une analyse minutieuse. Des conditions aux limites artificielles peuvent également être introduites [6]. Dans ce qui suit on remplace l'intervalle $\mathbb{R}$ par l'intervalle $[-R,R]$ avec $R > 0$ et on prend τ dans $[0, \frac{\sigma^2 T}{2}]$. Soit dx le pas en espace et dt le pas en temps. On définit U_i^n comme une approximation de $u(x_i, \tau_n)$ où $x_i = idx$, $i \in [-N,N]$ et $\tau_n = ndt$ avec $n \in [0,M]$ où M est le nombre de point de discretisation en temps et $2N + 1$ est le nombre de points de discrétisation en espace.

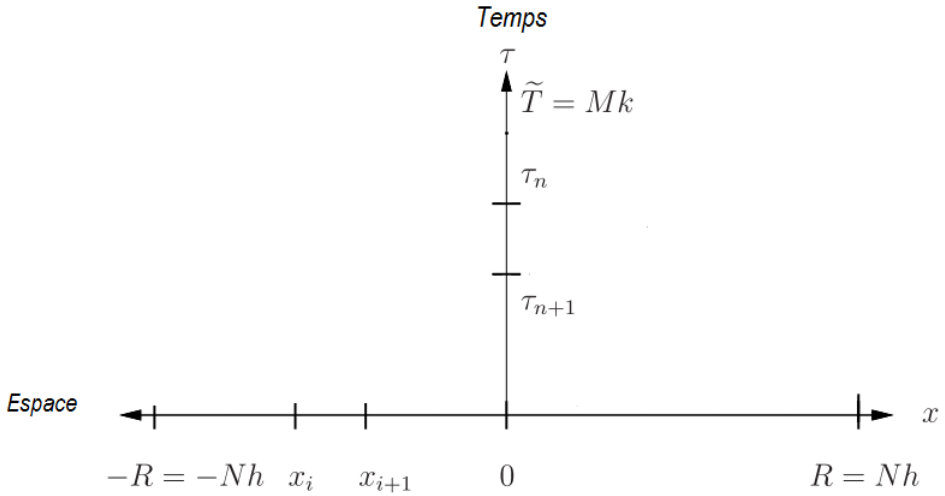


FIGURE 4.3 – Grille uniforme pour la simulation numérique de l'option Européenne.

Enfin, nous discrétisons les conditions initiales et limites comme suit

$$\begin{cases} U_i^0 &= (1 - \mathrm{e}^{-idx})^+, \\ U_{-N}^n &= 0, \\ U_N^n &= 1 - \mathrm{e}^{Dndt - Ndx}. \end{cases} \tag{4.79}$$

En utilisant le schéma de Crank-Nicolson et en remplaçant toutes les dérivées dans l'équation (4.73),

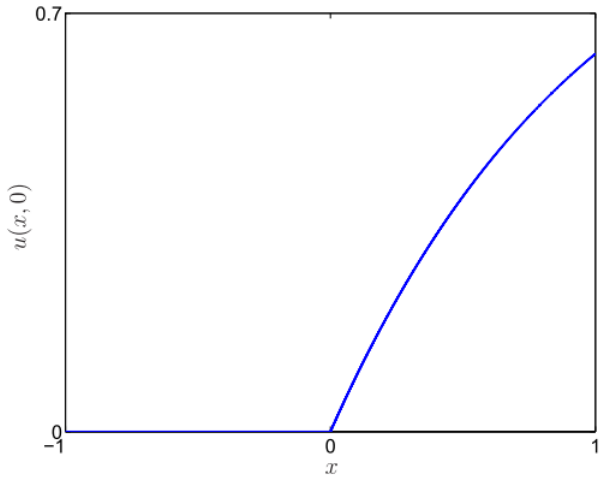


FIGURE 4.4 – La donnée initiale du problème transformé (4.73)

nous obtenons,

$$\frac{U_i^{n+1}-U_i^n}{dt}=\frac{s_i^n}{2}\left(\frac{U_{i+1}^n-2U_i^n+U_{i-1}^n}{dx^2}+\frac{U_{i+1}^n-U_{i-1}^n}{2dx}\right)+$$
$$\frac{s_i^n}{2}\left(\frac{U_{i+1}^{n+1}-2U_i^{n+1}+U_{i-1}^{n+1}}{dx^2}+\frac{U_{i+1}^{n+1}-U_{i-1}^{n+1}}{2dx}\right)$$
$$+(1+D)\frac{U_{i+1}^n-U_{i-1}^n+U_{i+1}^{n+1}-U_{i-1}^{n+1}}{4dx}+\frac{U_{i+1}^n-2U_i^n+U_{i-1}^n+U_{i+1}^{n+1}-2U_i^{n+1}+U_{i-1}^{n+1}}{2dx^2},$$

avec s_i^n est la volatilité non linéaire discrétisée (noter que s_i^n a été traité explicitement).

$$s_i^n=\Psi(\mathrm{e}^{(Dndt+x_i)}\,a^2K(\frac{U_{i-2}^n-2U_i^n+U_{i+2}^n}{4dx^2}+\frac{U_{i+1}^n-U_{i-1}^n}{2dx})). \tag{4.80}$$

Remarque 14. *Un mot de prudence doit être dit à propos de la précision lors de l'approximation des dérivées avec des différences finies. Le développement de Taylor suppose l'existence de plusieurs dérivées de $u(x,\tau)$. Cependant, la plupart des problèmes de pricing d'options ont des données terminales non régulières et donc des dérivés discontinues au niveau du prix d'exercice, ce qui équivaut à des données initiales non régulières pour notre problème transformé en u(0,0) (voir la figure 4.4). Dans [45], ce problème est résolu et la précision est améliorée par une technique de raffinement de maillage qui est basée sur l'idée de placer plus de points au voisinage des points qui présentent des singularités. Nous garderons cette stratégie de lissage à l'esprit, mais pour simplifier, nous utilisons la grille uniforme décrite plus haut dans cette section.*

Algorithme 1 Valorisation d'une option Européenne pour le cas du modèle de Barles et Soner

données d'entrée : S,σ,K, r, a, T.
-Résoudre l'ODE (3.16) en utilisant un schéma d'ordre 4 de Runge-Kutta explicite.
-Interpolation de la solution de (3.16) en utilisant une méthode de spline cubique.
Pour n=0...T :
-Initialisation de V^n et calcul du terme non linéaire.
-Calcul de V^{n+1}en utilisant la methode de Gauss-Seidel.
-Copie de V^{n+1} dans V^n.
Fin Pour.

4.5.2 Résultats numériques

Pour nos calculs nous avons utilisé les paramètres suivants

$$r = 0.1,\ \ \sigma = 0.2,\ \ a = 0.02,\ \ K = 100,\ \ T = 1 \text{ (une année)},\ \ dx = 0.1,\ \ dt = 10^{-3}\ \ R = 1.$$

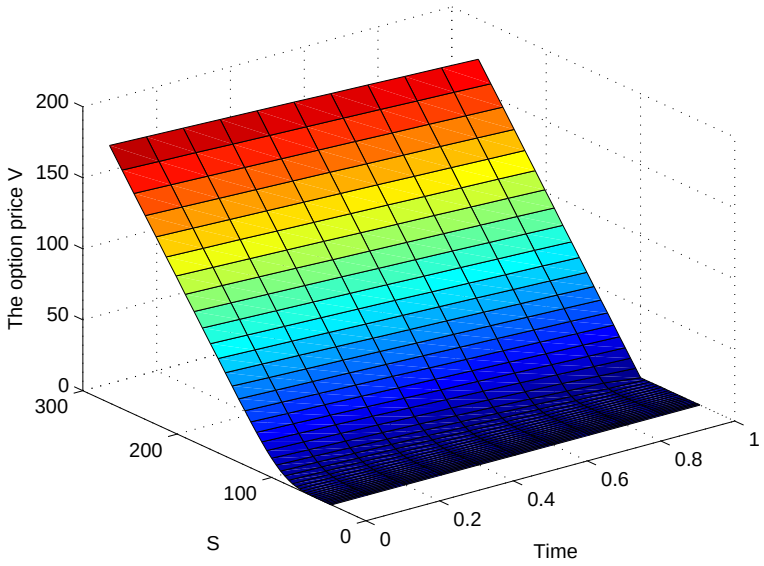


FIGURE 4.5 – Le prix de l'option européenne V en présence des coûts de transaction.

La figure 4.5 est une représentation du prix de l'option pour le modèle de Barles et Soner pour chaque temps entre la date de la négociation du contrat ($t = 0$) et la date d'échéance ($t = T$).

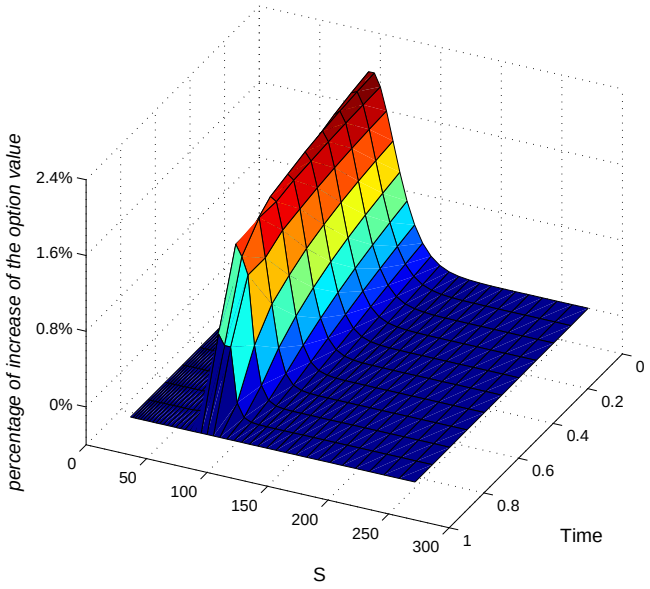


FIGURE 4.6 – Différence entre le prix de l'option pour le modèle Barles et Soner (marché soumis à des coûts de transaction) et le prix de l'option dans le modèle de Black-Scholes.

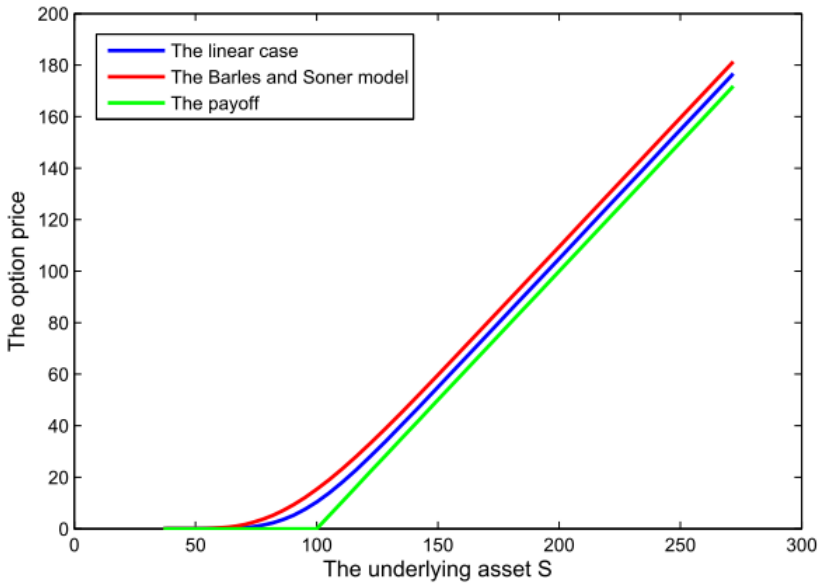


FIGURE 4.7 – Graphe de l'option dans le cas non linéaire en comparaison avec le cas linéaire et la donnée initiale.

La figure 4.6 montre que la solution du modèle non linéaire est plus grande que la solution dans le cas linéaire (ce qui est attendu vu qu'il y a des coûts de transactions supplémentaires).

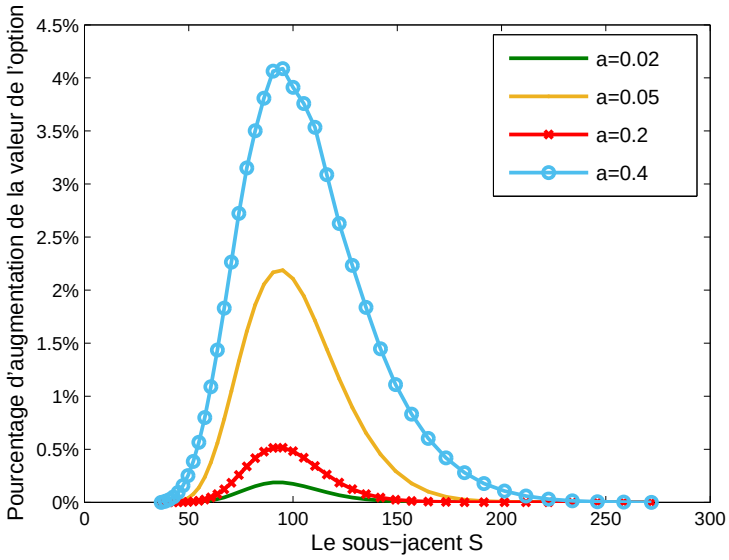


FIGURE 4.8 – Le prix de l'option pour différentes valeurs de a.

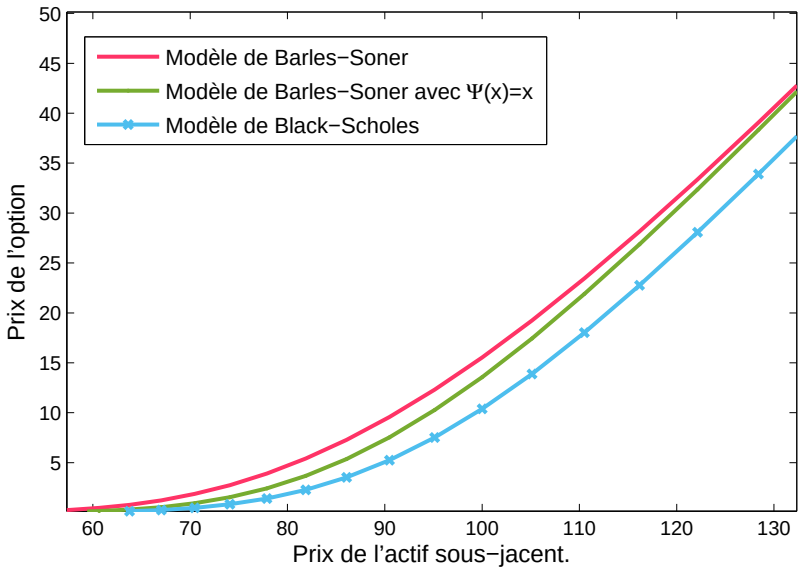


FIGURE 4.9 – Comparaison du prix de l'option pour différents modèles.

Nous terminons nos expériences numériques en démontrant l'effet du paramètre de coût de transaction a sur le prix de l'option. Dans la figure 4.8, nous illustrons l'influence des coûts de transaction sur la solution numérique. Nous constatons que plus a est élevé, plus le prix de l'option grandit. Notons que l'augmentation du paramètre a a un impact considérable sur la stabilité du schéma Crank-Nicolson. En effet, pour $a = 0.2$ et $a = 0.4$, il a fallu ajuster le pas en temps pour surmonter l'instabilité du schéma numérique.

4.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons donné une étude théorique et numérique du problème limite de Barles et Soner en présence des coûts de transaction. D'une part, nous avons proposé une méthode

constructive afin de démontrer l'existence d'une solution convexe à l'aide de la méthode des itérations monotones. D'autre part, nous avons approximé la solution numériquement par la méthode des différences finies et nous avons comparé nos résultats au cas linéaire (modèle de Black-Scholes standard).

Chapitre 5

Valorisation d'une option sur deux actifs financiers

5.1 Introduction

Les options multi-actifs sont des options qui portent sur plusieurs actifs sous-jacents, contrairement aux options standards de type vanille, ces options sont plus complexes car leur pricing engendre des paramètres supplémentaires comme les volatilités relatives à chaque produit et le paramètre de dépendance entre les actifs. Dans ce chapitre, nous allons estimer la valeur de cette option pour le cas de deux actifs en présence de coûts de transaction. Ce que nous avons vu dans les chapitres précedents s'étend donc de deux manière, d'une part, le probème que nous allons traiter est bidimensionnel, d'autre part, nous généralisons le modèle de Barles-Soner et nous développons un schéma numérique pour un type d'option spécifique appelé panier.

5.2 Option sur deux actifs sous-jacents

Définition 46. *Une option sur deux actifs est une option qui donne à son détenteur le droit, mais non l'obligation, d'acheter ou de vendre deux actifs sous-jacents.*

L'évaluation de ce type d'options est plus complexe car elle nécessite de connaître tous les éléments de chaque sous-jacent (volatilité, cours, etc...). Il existe plusieurs types de ces options, en effet, la différence réside dans la fonction Pay-off Λ, on peut citer,

«Spread»	$: \Lambda(S_1,S_2) = (S_1 - S_2 - K)^+$.
Panier ou «Basket»	$: \Lambda(S_1,S_2) = (a_1S_1 + a_2S_2 - K)^+$ avec $a_1,a_2 > 0$.
Max	$: \Lambda(S_1,S_2) = (\max(S_1,S_2) - K)^+$.
Min	$: \Lambda(S_1,S_2) = (\min(S_1,S_2) - K)^+$.
Digitale	$: \Lambda(S_1,S_2) = \begin{cases} 1 & \text{si } S_1, S_2 \geq K, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

5.2.1 Option panier

Définition 47. *Une option panier, est une option sur deux actifs sous-jacents dont le Pay-off est généralement une combinaison linéaire des cours des actifs.*

L'utilisation des options panier a connu un grand succès, et ce principalement en raison du fait qu'elles ont l'avantage d'offrir une couverture similaire à celle d'un portefeuille d'options standard tout en étant moins coûteuse. Bien que cet instrument financier soit simple, il n'en demeure pas moins que l'évaluation de ce nouveau produit dérivé est généralement complexe. En effet, comme pour la grande majorité des produits contingents multidimensionnels, les équations modélisant les options panier n'ont pas de solution analytique. Nous devons donc recourir à des méthodes numériques, mais l'efficacité de ces dernières est sensible à la dimension de l'espace.

5.3 Évaluation du prix d'une option panier Européenne

Notons $S_i(t)$ le processus du prix de l'actif i à l'instant t, $i = \{1,2\}$. On considère une option panier Européenne offrant au détenteur la possibilité d'acheter au prix d'exercice K un portefeuille composé de a_i d'actifs S_i avec $a_1 + a_2 = 1$. Les constantes a_i sont déterministes et positives et spécifiées au préalable dans le contrat. On suppose que

$$dS_i(t) = \mu_i S_i(t)dt + \sigma_i S_i(t)dB_i(t), \tag{5.1}$$

avec $\{B_i(t), t \geq 0\}$ est un mouvement Brownien standard associé à $S_i(t)$ et tel que $\mathbb{E}(B_1(t)B_2(t)) = \rho t$, avec ρ est le coefficient de corrélation entre les deux Browniens. Les constantes μ_1, σ_1 et μ_2, σ_2 sont les volatilités et les rendements des actifs S_1 et S_2 respectivement.
En tenant compte de la dynamique (5.1), le prix du i-ème actif à l'instant t est donné par

$$S_i(t) = S_i(0)\,\mathrm{e}^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma_i^2)t + \sigma_i B_i(t)}. \tag{5.2}$$

Sous la probabilité risque-neutre $\mathbb{Q}$, le prix de l'option panier est complètement déterminé à l'aide de sa valeur terminale, le prix à l'instant $t = 0$ est donc

$$V(S_1,S_2,0) = e^{-rT}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\left(\sum_{i=1}^{2} a_i S_i(T) - K\right)_+\right], \tag{5.3}$$

avec r est le taux d'interêt sans risque.

Remarque 15. *Il faut noter que les options paniers (comme pour la plupart des options multidimensionnelles) n'ont pas d'expression analytique pour leur solution, même dans le cas linéaire, cela vient du fait que la somme de deux processus géométriques n'est pas forcément géométrique et la formule célèbre de Black-Scholes ne peut donc pas être appliquée. Plusieurs approches ont été proposées pour résoudre ce problème, notamment les simulations par la méthode de Monte Carlo, les méthodes basées sur des arbres, les simulations numériques des équations aux dérivées partielles et les approximations analytiques de* (5.3)*. (Voir les travaux de Beisser [10], Ju [34], Alexander et Venkatramanan [4]).*

5.3.1 L'équation aux dérivées partielles

En utilisant le calcul d'Itô et la théorie d'arbitrage, le prix d'un panier Européen $V(S_1,S_2,t)$ est solution de l'EDP parabolique linéaire suivante

$$\begin{cases} V_t + \frac{1}{2}\sigma_1^2 S_1^2 V_{S_1S_1} + \frac{1}{2}\sigma_2^2 S_2^2 V_{S_2S_2} + \rho\sigma_1\sigma_2 S_1 S_2 V_{S_1S_2} + rS_1V_{S_1} + rS_2V_{S_2} - rV = 0, \quad S_1,S_2 > 0, \\ \\ V(S_1,S_2,T) = (a_1S_1 + a_2S_2 - K)^+. \end{cases} \tag{5.4}$$

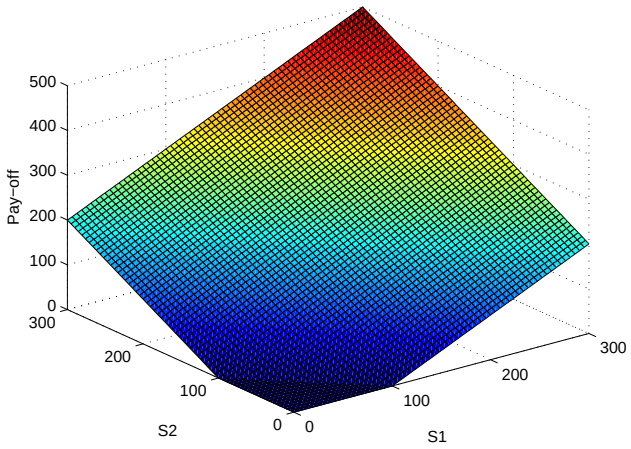


FIGURE 5.1 – La valeur terminale de l'option panier ($K = 100$, $a_1 = a_2 = 1$).

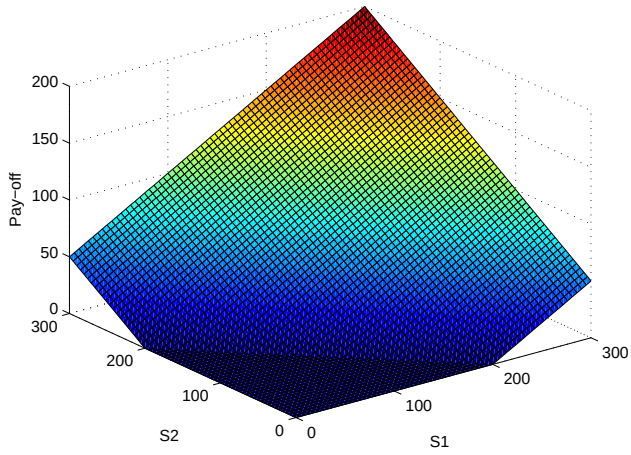


FIGURE 5.2 – La valeur terminale de l'option panier ($K = 100$, $a_1 = a_2 = 0.5$).

5.3.2 Analyse numérique du modèle

Conditions au bord champ lointain ou 'Far field'

Dans le cas de l'équation de Black-Scholes, la condition au bord est posée à l'infini. Cela veut dire que le bord droit $S_{\max}$ doit être choisi 'le plus loin possible', ce qui est problématique pour un schéma numérique, car le nombre des points de la grille peut grandir d'une manière flagrante. Dans [35] le bord $S_{\max}$ a été proposé après une analyse rigoureuse. La condition au bord "far field" est la suivante

$$S_{i,\max} = K\,\mathrm{e}(\sqrt{2\sigma_i^2 \ln(100d)}), \tag{5.5}$$

avec d est la dimension du problème. Dans nos travaux, les conditions aux bords que nous avons choisi sont les suivantes, lorsque $S_i = S_{i\,\max}$, alors le prix du Call est

$$V(t, S_{i\,\max}) = S_{i\,\max} - K\,\mathrm{e}^{-r(T-t)}\,. \tag{5.6}$$

On remarque que la valeur de l'option a un comportement linéaire par rapport à S_i lorsqu'il s'approche à $S_{i\,\max}$. Un autre type des conditions au bord sont les conditions au bord linéaires [21]. Ce type de conditions limites est très courant en finance ; une telle condition sur un bord $\partial\Omega$ est donnée par

$$\frac{\partial^2 V}{\partial S_i^2} = 0, \qquad \forall S_i \in \partial\Omega, \quad i \in \{1,2\}, \tag{5.7}$$

avec $\Omega = [0,S_{1\,\max}]\times[0,S_{2\,\max}]$. L'équation (5.7) veut dire que le prix de l'option est presque linéaire par rapport au prix de l'actif lorsque nous nous approchons de l'infini. Cependant, ce type de conditions limites pour Black-Scholes ne garantit pas un problème bien posé, et cela peut entraîner des oscillations sur la solution numérique. Néanmoins, Tavella [55] et Forsyth [57] ont montré que les problèmes du pricing des options avec des valeurs linéaires au bord, peuvent être traités avec une précision suffisante. Dans ce qui suit, nous utilisons les conditions de Dirichlet non homogènes (5.6), i.e. si S_1 et S_2 sont tous les deux égaux à 0 alors le prix de l'option $V(0,0,n\Delta t) = 0$ pour tout $n = 1,...N_t+1$. Si seulement l'un des deux est nul, i.e $S_i = 0$ $(i = 1,2)$ alors l'équation (5.10) avec $S_i = 0$ se transforme en l'EDP de Black-Scholes unidimensionnelle pour l'actif S_j, $j = \{1,2\}\setminus i$, par exemple, si $S_1 = 0$ on résout

$$V_t + \frac{1}{2}\sigma_2 S_2^2 V_{S_2S_2} + rS_2V_{S_2} - rV = 0, \tag{5.8}$$

avec les conditions aux bords

$$\begin{cases} U(0,S_2,n\Delta t) = 0 \text{ pour } S_2 = 0, \\ \\ U(0,S_{2\,\max},n\Delta t) = S_{2\,\max} - K\,\mathrm{e}^{-r(T-n\Delta t)}\,. \end{cases}$$

Sur les bords $S_1 = S_{1\,\max}$ et $S_2 = S_{2\,\max}$ nous utilisons la condition de linéarité (5.7). Enfin, sur le bord à l'infini, c'est à dire $S_i = S_{i\,\max}$ $(i = \{1,2\})$, on utilise la condition de la linéarité par rapport aux deux variables

$$\frac{\partial^2 V}{\partial S_1^2}(t,S_{1\,\max},S_{2\,\max}) = \frac{\partial^2 V}{\partial S_2^2}(t,S_{1\,\max},S_{2\,\max}) = \frac{\partial^2 V}{\partial S_1 \partial S_2}(t,S_{1\,\max},S_{2\,\max}) = 0.$$

On résume ces conditions à l'aide du schéma suivant,

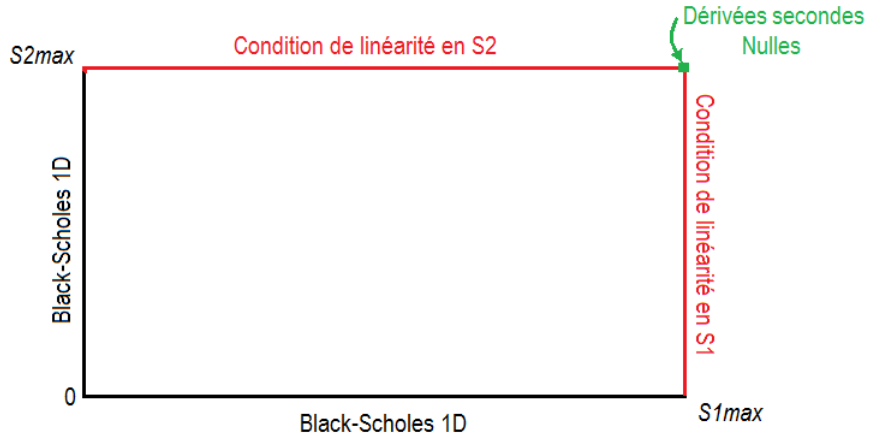


FIGURE 5.3 – Conditions au bord pour une option panier.

5.3.3 Résultats numériques

On effectue un changement de variable en temps afin d'avoir une équation avec donnée initiale. On utilise un schéma aux différences finies de type Crank-Nicolson. À l'aide d'un maillage uniforme on discrétise en espace avec $N_x = N_y$ points, on fixe $S_{1\,\max} = 300$ et $S_{2\,\max} = 300$, $\sigma_1 = 0.02$, $\sigma_2 = 0.02$, $r = 0.05$, $\rho = 0.5$, $a = 0.02$, $K = 100, r = 0.1$, $N_x = N_y = 128$, $dt = 10^{-3}$, et on calcule le

prix de l'option sur une année. Les figures 5.4 et 5.5 représentent le prix des options paniers après l'écoulement d'une année.

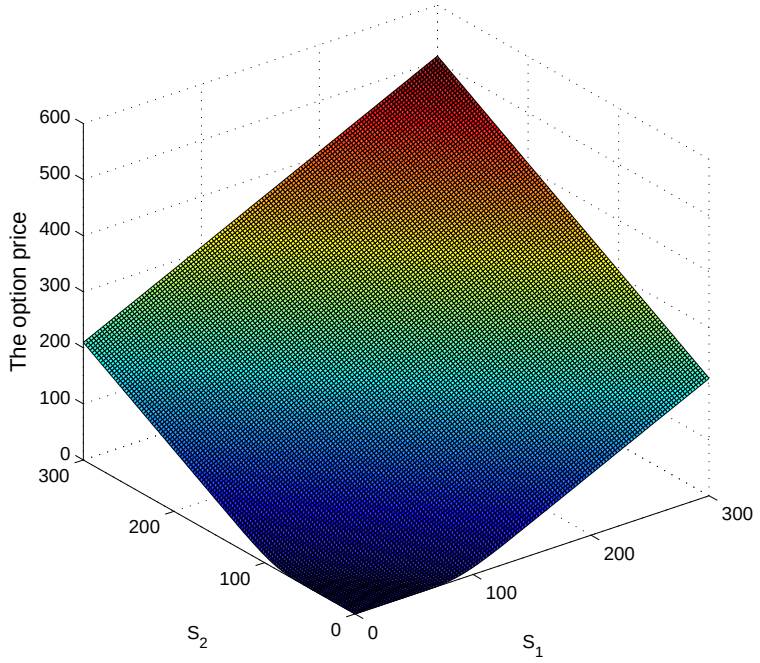


FIGURE 5.4 – Le prix de l'option panier ($a_1 = a_2 = 1$).

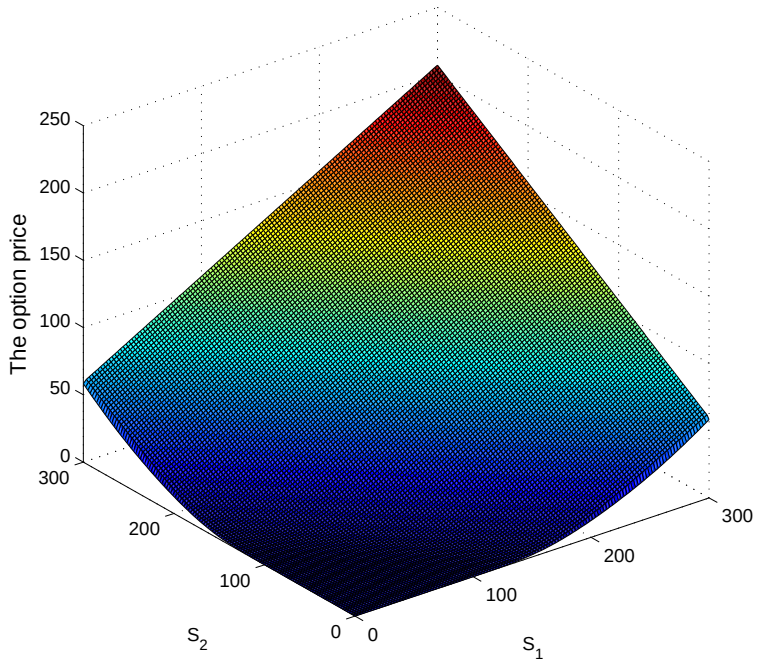


FIGURE 5.5 – Le prix de l'option panier ($a_1 = a_2 = 0.5$).

L'évaluation des options paniers avec l'approche classique de Black-Scholes est largement utilisé

pour le pricing des actifs sur les marchés financiers, mais comme nous avons vu dans les chapitres précédents, cette approche présente des faiblesses comme l'utilisation des volatilités constantes pour les sous-jacents, alors que les modèles avec des volatilités variables semblent mieux correspondre aux observations empiriques. Cela fera l'objet de la section suivante.

5.4 Black-Scholes non linéaire en deux dimensions

Le modèle de Black-Scholes s'appuie sur différentes hypothèses, telles que des valeurs constantes des volatilités et du taux d'intérêt, l'absence de dividendes, la liquidité des marchés et l'absence des coûts de transaction. En s'appuyant sur l'approche de Leland [38], les coûts de transaction peuvent être inclus dans le modèle de Black-Scholes en appliquant une stratégie de réplication en temps discret. Une équation aux dérivées partielles non linéaire est alors obtenue pour le prix de l'option. Dans ce qui suit, nous développons un modèle qui intègre les coûts de transaction dans le cadre classique Black-Scholes à deux actifs.

5.4.1 Pricing d'une option panier avec le modèle de Barles et Soner

Nous supposons que l'investisseur doit payer des frais de transaction lors de la négociation de chaque opération financière, qui sont proportionnels au montant des fonds des actifs S_1 et S_2. On suppose que S_1 and S_2 suivent deux mouvements Browniens géométriques gouvernés par le système

$$\begin{cases} dS_1 = \mu_1 S_1 dt + \sigma_1 S_1 dB_1, \\ \\ dS_2 = \mu_2 S_2 dt + \sigma_2 S_2 dB_2, \end{cases} \tag{5.9}$$

avec σ_i et μ_i $(i = 1,2)$ sont la volatilité et la dérive respectivement pour chaque actif S_i.
La littérature sur les portefeuilles de couverture avec des actifs risqués corrélés dans des marchés soumis à des coûts de transaction est très limitée. Dans [7], la valeur de l'option est obtenue en résolvant des problèmes d'optimisation et en utilisant une analyse asymptotique. V. Zakamouline a donné dans [59] une généralisation des EDPs non linéaires pour une option sur multi-actifs et a introduit des schémas aux différences finis pour les résoudre. Yazdanian et al. [58] ont évalué le prix d'une option "Spread" sur deux actifs en prenant en considération l'illiquidité du marché. Enfin, P. Amster et Al. [5] ont donné une étude théorique et numérique de l'EDP de Leland pour le cas d'une option sur multi sous-jacents à l'aide de la méthode des solutions de viscosité. Dans notre travail, nous utilisons une approche déterministe. Nous donnons ci-dessous une généralisation du modèle de Barles et Soner pour la valorisation d'une option panier,

$$\begin{cases} V_t + \dfrac{1}{2}(1 + \Psi(a^2\, \mathrm{e}^{r(T-t)} \displaystyle\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} \sigma_i\sigma_j\rho_{ij}S_iS_jV_{S_iS_j}))\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} \sigma_i\sigma_j\rho_{ij}S_iS_jV_{S_iS_j} \\ + \displaystyle\sum_{i=1}^{2} rS_iV_{S_i} - rV = 0, \\ \\ V(S_1,S_2,T) = \max(S_1 + S_2 - K,0). \end{cases} \tag{5.10}$$

Ici $(S_1,S_2) \in \mathbb{R}^2_+$, $t \in (0,T)$, et ρ_{ij} est le coefficient de corrélation entre les deux actifs S_1 et S_2 *i.e* $\rho_{i,j} = \rho$ si $i \neq j$ et $\rho_{ij} = 1$ sinon. La fonction Ψ est la solution de (3.16).

5.4.2 Le schéma aux differences finies

On pose $\Omega = [0,S_{1,\max}] \times [0,S_{2,\max}]$. Dans ce qui suit, on adopte le schéma aux différences finies en deux dimensions de Crank-Nicolson pour l'équation (5.10) avec un stencil de 9 points. Nous utilisons un changement de variable en temps afin d'avoir une équation parabolique 'forward'

$$\begin{cases} V_t - \dfrac{1}{2}\left(1+\Psi\left(a^2\,\mathrm{e}^{rt}\left(\sigma_1^2S_1^2\dfrac{\partial^2V}{\partial^2S_1^2}+\sigma_2^2S_2^2\dfrac{\partial^2V}{\partial^2S_2}+2\rho\sigma_1\sigma_2S_1S_2\dfrac{\partial^2V}{\partial S_1\partial S_2}\right)\right)\right) \\ \left(\sigma_1^2S_1^2\dfrac{\partial^2V}{\partial^2S_1^2}+\sigma_2^2S_2^2\dfrac{\partial^2V}{\partial^2S_2}+2\rho\sigma_1\sigma_2S_1S_2\dfrac{\partial^2V}{\partial S_1\partial S_2}\right)-\displaystyle\sum_{i=1}^{2}rS_i\frac{\partial V}{\partial S_i}+rV=0, \\ \\ V(S_1,S_2,0)=\max(S_1+S_2-K,0). \end{cases} \tag{5.11}$$

On discretise uniformément l'intervalle en temps $[0,T]$ par $N+1$ points et l'intervalle en espace $\Omega = [0,S_{1,\max}] \times [0,S_{2,\max}]$ par N_1+1 et N_2+1 points respectivement. Pour simplifier l'écriture, on note $x = S_1$ et $y = S_2$. L'équation (5.11) devient

$$\begin{cases} V_t - \dfrac{1}{2}\left(1+\Psi\left(a^2\,\mathrm{e}^{rt}\left(\sigma_1^2x^2\dfrac{\partial^2V}{\partial^2x^2}+\sigma_2^2y^2\dfrac{\partial^2V}{\partial^2y}+2\rho\sigma_1\sigma_2xy\dfrac{\partial^2V}{\partial x\partial y}\right)\right)\right) \\ \left(\sigma_1^2x^2\dfrac{\partial^2V}{\partial^2x^2}+\sigma_2^2y^2\dfrac{\partial^2V}{\partial^2y}+2\rho\sigma_1\sigma_2xy\dfrac{\partial^2V}{\partial x\partial y}\right)-rx\dfrac{\partial V}{\partial x}-ry\dfrac{\partial V}{\partial y}+rV=0, \\ \\ V(x,y,0)=\max(x+y-K,0). \end{cases} \tag{5.12}$$

On note la solution discrete par $V_{ij}^n = V(x_i,y_j,n\Delta t)$ avec $\Delta t = t^{n+1}-t^n$, $n \in \{0,\ldots,N\}$, $0 \le i \le N_1$ et $0 \le j \le N_2$. On pose

$$D_{xx}V_{ij}^n = \frac{V_{i+1,j}^n - 2V_{i,j}^n + V_{i-1,j}^n}{\Delta x^2}\ ,\ D_{yy}V_{ij}^n = \frac{V_{i,j+1}^n - 2V_{i,j}^n + V_{i,j-1}^n}{\Delta y^2},\ \ D_xV_{ij}^n = \frac{V_{i+1,j}^n - V_{i-1,j}^n}{2\Delta x},$$

et

$$D_{xy}V_{ij}^n = \frac{V_{i+1,j+1}^n - V_{i+1,j-1}^n - V_{i-1,j+1}^n + V_{i-1,j-1}^n}{4\Delta x\Delta y},\ D_yV_{ij}^n = \frac{V_{i,j+1}^n - V_{i,j-1}^n}{2\Delta y},$$

et

$$\Delta_\rho V_{ij}^n = \sigma_1^2x_i^2D_{xx}V_{ij}^n + \sigma_2^2y_j^2D_{yy}V_{ij}^n + 2\rho\sigma_1\sigma_2x_iy_jD_{xy}V_{ij}^n. \tag{5.13}$$

En supposant que V_{ij}^n est connue, on discretise l'équation (5.12) explicitement pour le terme non linéaire (voir [22]), et pour les autres termes on utilise un schéma de Crank-Nicolson.

$$\begin{aligned} &\frac{V_{ij}^{n+1}-V_{ij}^n}{\Delta t} - \frac{1}{4}(1+\Psi(a^2\,\mathrm{e}^{rn\Delta t}\,\Delta_\rho V_{ij}^n))(\Delta_\rho V_{ij}^{n+1}+\Delta_\rho V_{ij}^n) \\ &-\frac{rx}{2}(D_xV_{ij}^{n+1}+D_xV_{ij}^n) - \frac{ry}{2}(D_yV_{ij}^{n+1}+D_yV_{ij}^n) + \frac{r}{2}(V_{ij}^{n+1}+V_{ij}^n) = 0. \end{aligned} \tag{5.14}$$

Algorithme 2 Valorisation d'une option panier pour le cas du modèle de Barles et Soner

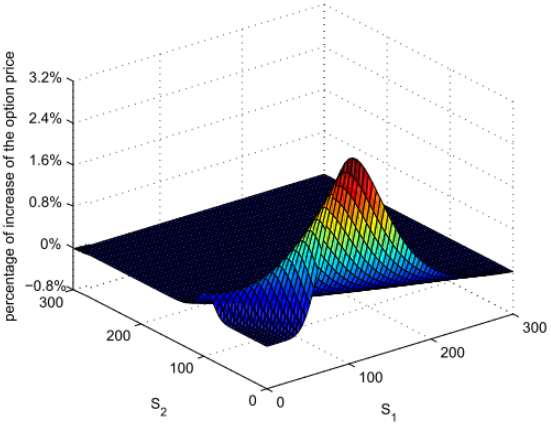
données d'entrée : $S_{1\max}$, $S_{2\max}$,σ_1, σ_2 K, r, ρ, a, T.
-Résoudre l'ODE (3.16) en utilisant un schéma d'ordre 4 de Runge-Kutta explicite.
-Interpolation de la solution de (3.16) en utilisant une méthode de spline cubique.
Pour n=0...T :
-Initialisation de V^n et calcul du terme non linéaire.
-Calcul de V^{n+1}en utilisant la methode de Gauss-Seidel.
-Copie de V^{n+1} dans V^n.
Fin Pour.

5.4.3 Résultats numériques : Impact des coûts de transaction

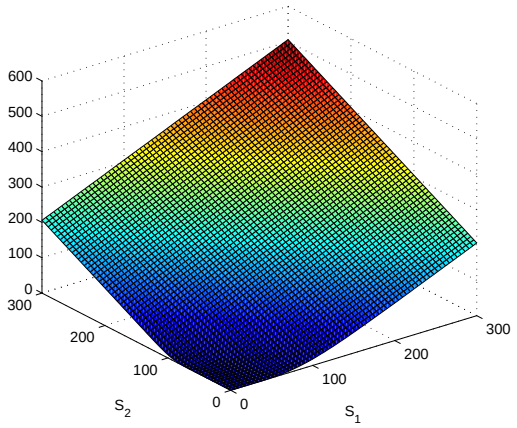
Dans ce qui suit, nous analysons différents aspects de la dynamique générale du modèle des coûts de transaction proposé (modèle bidimensionnel de Barles et Soner), ainsi que le schéma de Crank-Nicolson que nous avons mis en oeuvre. Pour les tests numériques nous avons utilisé les valeurs suivantes ;

TABLE 5.1 – Les paramètres choisis pour chaque test numérique

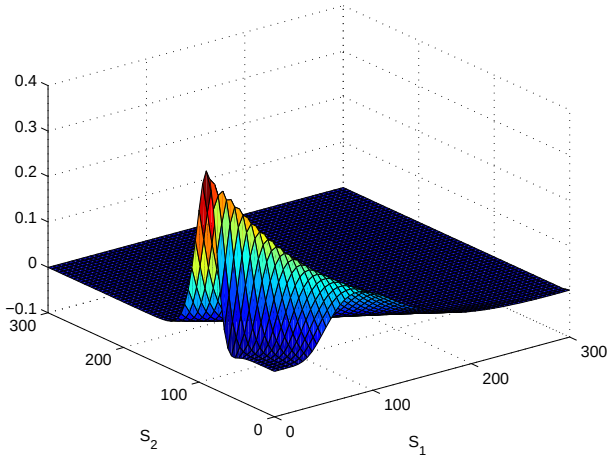
Paramètre	test 1	test 2	test 3
σ_1, σ_2	0.4 0.15	0.05 0.1	0.2 0.2
ρ	0.5	0.5	0.5
T	Une année	Une année	Une année
r	0.06	0.02	0.1
a	0.02	0.04	0.04
K	100	200	70
dS_1, dS_2	1.17	1.17	1.17
dt	10^{-3}	10^{-4}	10^{-4}



(a) L'influence des coûts de transaction à $t = 0$.

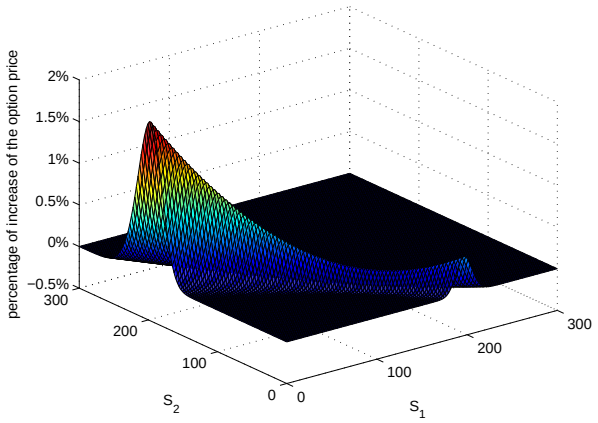


(b) Le prix de l'option à $t = 0$.

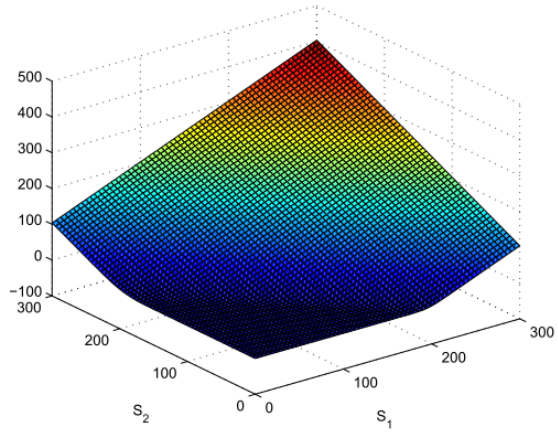


(c) Le 'Gamma' de l'option à $t = 0$

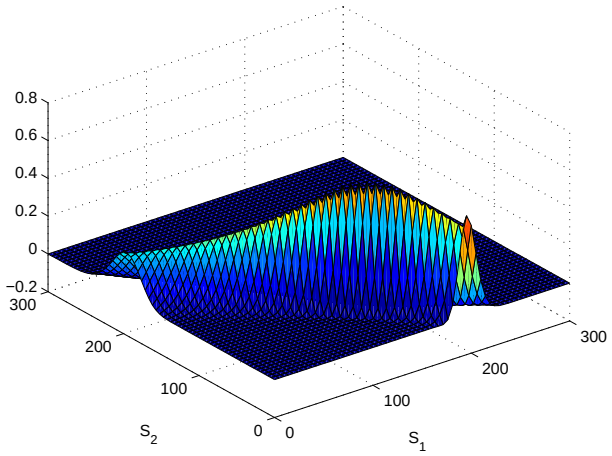
FIGURE 5.6 – Test 1 : L'actif S_1 est plus volatile que S_2.



(a) L'influence des coûts de transaction à $t = 0$.

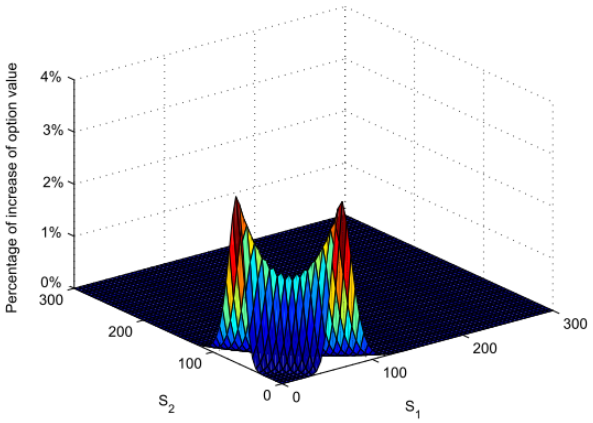


(b) Le prix de l'option à $t = 0$.

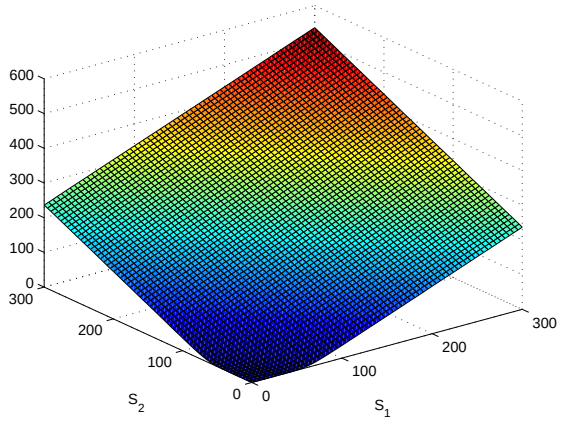


(c) Le 'Gamma' de l'option à $t = 0$

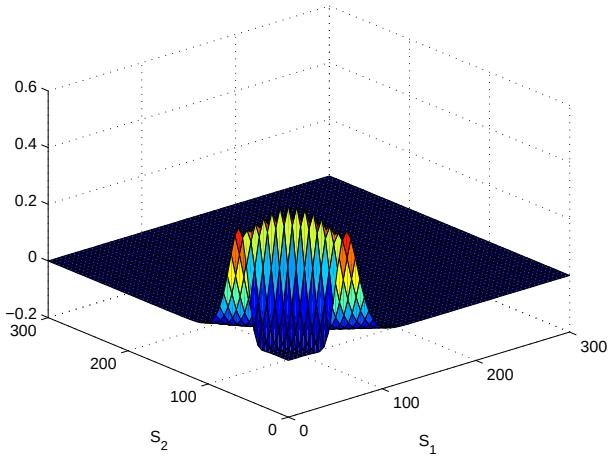
FIGURE 5.7 – Test 2 : Actifs S_1 et S_2 faiblement volatiles.



(a) L'influence des coûts de transaction à $t = 0$.



(b) Le prix de l'option à $t = 0$.



(c) Le 'Gamma' de l'option à $t = 0$

FIGURE 5.8 – Test 3 : Actifs S_1 et S_2 avec volatilités identiques.

Les tests 5.6, 5.7 et 5.8 illustrent l'impact des coûts de transaction et le prix de l'option à $t = 0$. On remarque que les coûts de transaction sont influencés par plusieurs facteurs, notamment la volatilité de chaque sous-jacent et la dérivée seconde des actifs. Sur la figure 5.6 (test 1), on observe que le maximum de ces coûts de transaction est atteint au voisinage de K, cela est justifié par le comportement du 'Gamma' de l'option (le 'Gamma' est maximal pour des valeurs proches de K). En outre on constate l'effet de volatilité de l'actif S_2 sur les coûts de transaction au voisinage de S_2, cela est obsérvé également pour le test 2 (figure 5.7). Le 'Gamma' a un comportement opposé avec les coûts de transaction, car il a tendance à décroître quand la volatilité croît). Finalement, pour le test 3 (figure 5.8) nous remarquons une symétrie sur les figures (5.8-(a)-5.8-(b)) due au fait que les deux actifs ont la même volatilité, encore une fois, le maximum des coûts de transaction est atteint quand les deux actifs sont proche du prix d'exercice K et que ces coûts s'annulent quand S_1 et S_2 sont loins de K.

5.5 Conclusion

La principale contribution de ce chapitre est la réalisation d'une solution acceptable d'un point de vue à la fois théorique et numérique qui serait utilisable par les investisseurs tout en étant réaliste à l'égard des observations empiriques dans les marchés financiers. Cette solution est fruit d'une extension déterministe du problème limite de Barles et Soner pour le pricing des options avec deux actifs sous-jacents en présence de coûts de transaction proportionnels au volume d'actifs. Les résultats numériques obtenus valident le modèle proposé. En effet, nous avons démontré numériquement que ces coûts dépendent principalement des prix des actifs, l'ampleur de la dérivée seconde (i.e. le 'Gamma') et la volatilité de chaque actif. Il est à noter que le schéma devient instable en augmentant le paramètre des coûts de transaction a.

Troisième partie

La méthode multigrille

Chapitre 6

La méthode multigrille

6.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous rappelons les concepts de la méthode multigrille introduite par Brandt [14] dans les années 70 et développée dans [15, 28, 52]. Les méthodes multigrilles permettent de régler le problème lié au temps de calcul, ce dernier, est conditionné souvent par l'efficacité de l'algorithme de résolution du système discret. Les méthodes itératives (du type Jacobi, Gauss-Seidel) sont très rapides, mais leur inconvénient réside dans leur incapacité à réduire les composantes basses fréquences de l'erreur (l'erreur diminue de manière très lente même en augmentant le nombre des itérations), d'où l'intérêt de la méthode multigrille, cette méthode utilise les grilles grossières afin de supprimer les composantes de basse fréquences et quelques itérations de la méthode itérative suffisent à régler le problème. Différents types de méthodes multigrilles existent utilisant différents cycles à l'aide des opérateurs de restrictions et de prolongements. À la fin du chapitre, nous allons appliquer la méthode multigrille sur le problème non linéaire de Barles et Soner, l'avantage de la méthode en terme de temps de calcul sera expliqué.

6.2 Principe de la méthode multigrille

La méthode de Gauss-Seidel permet d'obtenir la solution d'un système linéaire par itérations. Alors qu'un maillage très fin est nécessaire pour obtenir une solution détaillée, celui-ci conduit à une convergence très lente des basses fréquences spatiales. si on décompose l'erreur en série de Fourier, on remarque que les hautes fréquences d'un maillage donné d'un pas h sont amorties beaucoup plus rapidement que les basses fréquences. l'idée du multigrille est de représenter ces bases fréquences sur le maillage grossier de pas $2h$ car elle apparaitront comme des hautes fréquences et peuvent donc être bien amorties avec la même méthode itérative. Les méthodes multigrilles ont été appliquées, à l'origine, à des problèmes simples. Comme exemple, nous considérons le problème de Dirichlet unidimensionel

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) & 0 < x < 1 \\ \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \tag{6.1}$$

Bien que nous pouvons résoudre ce problème analytiquement pour certaines fonctions f, c'est instructive de développer quelques méthodes numériques pour ses solutions. Plusieurs approches sont possibles. La plus simple, c'est la méthode aux différences finies. Le domaine du problème $\{x : 0 \leq x \leq 1\}$

est divisé en N intervalles de longueurs égaux en introduisant les points $x_j = jh$ où, $h = \frac{1}{N}$ est la longueur des intervalles. Cela constitue la grille Ω_h, montrée dans (6.1)

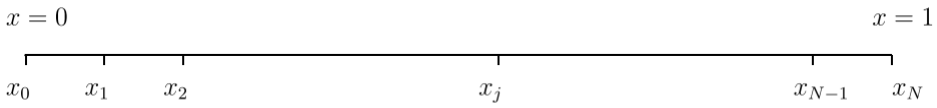


FIGURE 6.1 – Grille Ω^h

En chaque point x_j $(j = 1,\ldots,N-1)$, l'équation différentielle (6.1) est remplacée par une approximation du second ordre en différence finie. Nous introduisons v_j comme une approxiamtion de la solution exacte $u(x_j)$. Cette approximation de la solution peut donc être représentée par le vecteur $\underline{v} = (v_1,\ldots,v_{N-1})^T$. Ses composatntes vérifient les $N-1$ équations linéaires :

$$\frac{-v_{j-1} + 2v_j - v_{j+1}}{h^2} = f(x_j) \qquad 1 \leq j \leq N-1 \tag{6.2}$$

$$v_0 = v_N = 0 \tag{6.3}$$

En définissant le vecteur du second membre, $\underline{f} = (f(x_1),\ldots,f(x_{N-1})^T$, nous représentons ce système d'équations linéaires sous forme matricielle comme suit :

$$A\underline{v} = \underline{f}$$

avec A matrice carée d'ordre $N-1$, tridiagonale, symétrique et définie positive.

$$A = \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & \ddots & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & -1 \\ & & & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ v_{N-1} \end{pmatrix} \text{ et } \underline{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ f_{N-1} \end{pmatrix}$$

On considère une approximation initiale, le vecteur $\underline{v}$ de coordonnées,

$$v_j = \sin(\frac{jk\pi}{N}) \quad 0 \leq j \leq N \text{ et } 1 \leq k \leq N-1.$$

L'entier k est appelé le nombre d'ondes. Il indique le nombre de demi-onde sinus que constitue le

vecteur $\underline{v}$ sur le domaine du problème. Dans la figure (6.2) nous illustrons les données initiales correspondant à $k = 1$, $k = 3$ et $k = 6$ ($\underline{v}_1$,$\underline{v}_3$,$\underline{v}_6$).

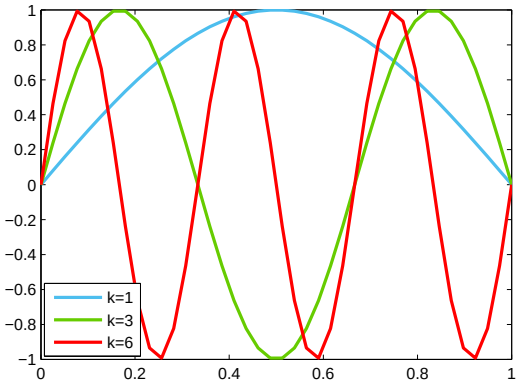


FIGURE 6.2 – Les modes $v_j = \sin(\frac{jk\pi}{N}), 0 \leq j \leq N$, avec les nombres d'ondes $k = 1,\ 3,\ 6$.

Notons que les petites valeurs de k correspondent aux basses fréquences et les grandes valeurs de k correspondent aux hautes fréquences. Dans la suite, on prend $\underline{f} = 0$. Comme méthode itérative, nous appliquons la méthode de Gauss-Seidel. Sur une grille avec $N = 64$, en initialisant la solution avec $\underline{v}_1$, $\underline{v}_3$ et $\underline{v}_6$, nous itérons 100 fois. Après chaque itération, nous calculons la norme maximale de l'erreur $||e||_\infty$ [15]. La figure (6.3) montre un tracé de l'erreur en fonction du nombre d'itérations.

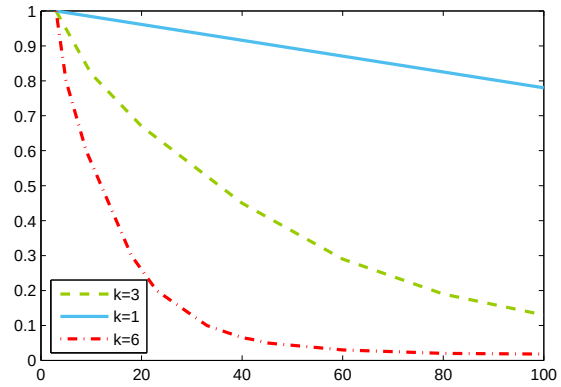


FIGURE 6.3 – Tracé de $||e||_\infty$ en fonction du nombre d'itération (Gauss-Seidel)

Nous remarquons, d'après la figure (6.3), que l'erreur $||e||_\infty$ décroit après chaque itération et la vitesse de décroissance est plus grande pour les grandes valeurs de k. En général, les données initiales ne consistent pas en un seul mode. Par exemple une donnée initiale peut consister en 3 modes : basse fréquence ($k = 1$), fréquence moyenne ($k = 6$) et haute fréquence ($k = 32$) sur une grille avec $N = 64$. L'erreur décroit rapidement au bout de cinq itérations. Après, elle décroit très lentement. La décroissance initiale de l'erreur correspond à l'élimination rapide des hautes fréquences. La décroissance lente de l'erreur est due à la présence de basses fréquences. Le premier pas pour améliorer ces méthodes itératives, tout au moins, est d'utiliser une bonne estimatin initiale. La technique bien connue pour obtenir une bonne estimation initiale est de performer quelques itérations sur une grille grossière, et d'utiliser le résultat comme estimation initiale sur la grille fine. Supposons une méthode itérative

particulière est appliquée jusqu'à ce que les basses fréquences de l'erreur subsistent. Cela suggère que quand la relaxation commence à se caler, signalant la prédominance des basses fréquences de l'erreur, il est recommandé de passer à une grille grossière sur laquelle les basses fréquences apparaissent plus oscillantes. Soit $\underline{v}$ une approximation initiale de la solution $\underline{u}$. L'erreur $\mathrm{e} = \underline{u} - \underline{v}$ satisfait l'équation

$$A\,\mathrm{e} = \underline{r} = \underline{f} - A\underline{v},$$

appelée équation du résidu.
Relaxer sur l'équation originale $A\underline{u} = \underline{f}$ avec une estimation initiale arbitraire équivaut à relaxer sur l'équation du résidu avec une estimation initiale $\mathrm{e} = 0$.
Il y'a deux stratégies d'utiliser la grille grossière. La première stratégie constitue l'idée de l'utilisation des grilles grossières pour obtenir une bonne estimation initiale. Nous présentons cette stratégie par la procédure suivante ([15]),

Relaxer	pour résoudre	$A\underline{u} = \underline{f}$	sur une grille très grossière.
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
Relaxer	pour résoudre	$A\underline{u} = \underline{f}$	pour Ω^{4h}, pour obtenir une estimation pour Ω^{2h}.
Realxer	pour résoudre	$A\underline{u} = \underline{f}$	pour Ω^{2h}, pour obtenir une estimation pour Ω^{h} .
Relaxer	pour résoudre	$A\underline{u} = \underline{f}$	pour Ω^{h} en partant de la solution obtenue à l'étape précédente (après prolongement).

Cette stratégie s'appelle Itération Emboitée (Nested Iteration).
La seconde stratégie constitue l'idée de l'utilisation de l'équation du résidu pour relaxer sur l'erreur. Nous présentons cette stratégie par la procédure suivante,

Relaxer pour résoudre $A\underline{u} = \underline{f}$ sur Ω^{h} pour obtenir une approximation $\underline{v}$.

Calculer le résidu $\underline{r} = \underline{f} - A\underline{v}$.

Relaxer sur l'équation du résidu $A\,\mathrm{e} = \underline{r}$ sur Ω^{2h} pour obtenir une approximation de l'erreur e^{2h}.

Corriger l'approximation obtenue sur Ω^{h} avec l'erreur obtenue sur Ω^{2h}

$$\underline{v} \longleftarrow \underline{v} + \mathrm{e}^{2h}\,.$$

Cette procédure s'appelle correction sur grille grossière (Coarse grid correction). Dans la suite, il est nécessaire d'utiliser les notations A_h, $\underline{u}_h$, $\underline{v}_h$ et $\underline{f}_h$ pour associer A, $\underline{u}$, $\underline{v}$ et $\underline{f}$ à la grille Ω^{h}. Nous avons besoin de quelques méchanismes pour transférer les informations entre les grilles, le transfert du résidu de la grille fine Ω^{h} à la grille grossière Ω^{2h} ; la représentation du problème original $A\underline{u}_h = \underline{f}_h$ sur la grille Ω^{2h} et le transfert de l'erreur estimée sur Ω^{2h} à la grille Ω^{h} . Les opérateurs qui permettent le passage de la grille fine à la grille grossière s'appellent les opérateurs de restriction notés $\mathcal{R}_h^{2h}$. Les

opérateurs qui permettent le passage de la grille grossière à la grille fine s'appellent les opérateurs de prolongement notés $\mathcal{P}_{2h}^{h}$.

6.3 Les opérateurs de transfert

6.3.1 Restriction

Pour approximer le problème $A_h \underline{u}_h = \underline{f}_h$ par une équation sur la grille grossière $A_{2h}\underline{u}_{2h} = \underline{f}_{2h}$, nous devons choisir raisonnablement $\underline{f}_{2h}$. La matrice A est définie pour les deux grilles Ω^h et Ω^{2h}. $\underline{f}_{2h}$ dependera linéairement de $\underline{f}_h$, $\underline{f}_{2h}$ est définie par $\underline{f}_{2h} = \mathcal{R}_h^{2h}\underline{f}_h$. Le choix le plus simple de la restriction est l'injection triviale définie par

$$(\mathcal{R}_h^{2h}\underline{f}_h)(x) = \underline{f}_h(x) \text{pour x } \in \ \Omega^{2h} \subset \ \Omega^h$$

Bien que cette restriction est facile à effectuer, elle a quelques inconvénients [14], car la copie de quelques points ne préserve pas le caractère propre à solution. Il est sans danger de prendre en compte d'autres composantes de $\underline{f}_h(x)$ $x \in \ \Omega^h/\Omega^{2h}$. Nous utiliserons la restriction définie par :

$$\underline{f}_j^{2h} = \frac{1}{4}(\underline{f}_{2j-1}^{h} + 2\underline{f}_{2j}^{h} + \underline{f}_{2j+1}^{h}) \quad 1 \leq j \leq \frac{N}{2} - 1.$$

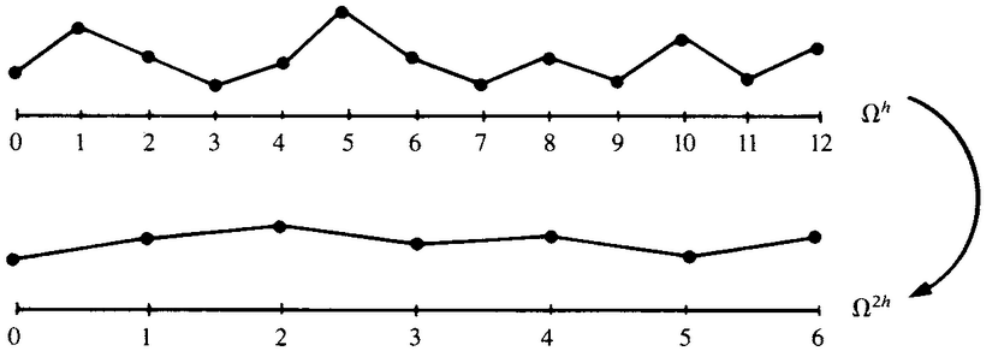


FIGURE 6.4 – Restriction par la méthode du Full Weighting d'un vecteur d'une grille fine Ω^h à une grille grossière Ω^{2h}

6.3.2 Prolongement

Pour transférer l'erreur approximative e_{2h} de la grille grossière Ω^{2h} à la grille fine Ω^h, plusieurs méthodes de prolongement peuvent être utlisées. Heureusement, pour la plus part des méthodes multigrilles, les plus simples de ces prolongements sont tout à fait efficaces. Pour cette raison, nous considérons seulement les interpolations linéaires. La plus simple interpolation linéaire est la suivante

$$\underline{v}^h = \mathcal{P}_{2h}^{h}\underline{v}^{2h}.$$

Où

$$\begin{aligned} \underline{v}_{2j}^{h} &= \ \underline{v}_j^{2h} \\ \underline{v}_{2j+1}^{h} &= \ \frac{1}{2}\ (\underline{v}_j^{2h} + \underline{v}_{j+1}^{2h}) \end{aligned} \qquad 0 \leq j \leq \frac{N}{2} - 1$$

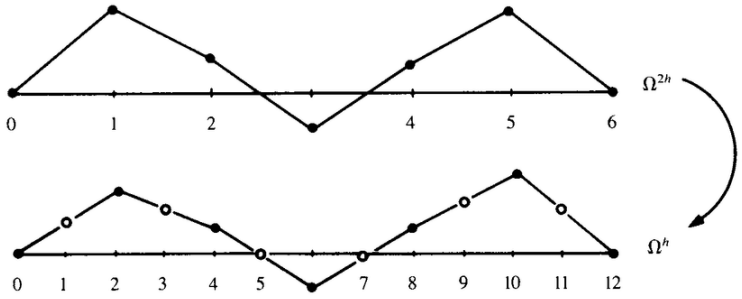


FIGURE 6.5 – Interpolation d'un vecteur d'une grille grossière Ω^{2h} à une grille fine Ω^h

6.4 Les algorithmes multigrilles

Nous rappelons brièvement les différents algorithmes multigrilles.

6.4.1 L'algorithme CG (Coarse Grid Correction)

Le principe de cet algorithme est d'effectuer quelques itérations (on notera ν_1 le nombre d'itérations) avec une méthode itérative de base pour résoudre $A_h\underline{u}_h = \underline{f}_h$ avec une estimation initiale $\underline{v}^h$. Ces itérations sont appelées pré-relaxation. On transfère ensuite le résidu sur la grille grossière à l'aide de l'opérateur de restriction $\mathcal{R}^h_{2h}$,

$$\underline{r}^{2h} = \mathcal{R}^{2h}_h(\underline{f}^h - A^h\underline{v}^h). \tag{6.4}$$

Sur la grille grossière Ω_{2h}, on résout $A^{2h}\underline{e}^{2h} = \underline{r}^{2h}$ et on corrige ensuite l'approximation sur la grille fine Ω_h,

$$\underline{v}^h \longleftarrow \underline{v}^h + \mathcal{P}^h_{2h}\underline{e}^{2h}.$$

Enfin, on effectue ν_2 itérations avec la méthode itérative de base sur $A_h\underline{u}_h = \underline{f}_h$ avec l'estimation initiale $\underline{v}_h$. Ces itérations sont appelées post-relaxation. En pratique ν_1 est souvent $1, 2$, ou 3. Le problème à résoudre sur la grille grossière n'est pas tout à fait different du problème original, ils ont la même forme. Par conséquent, nous pouvons appliquer le schéma CG à l'équation du résidu sur Ω_{2h}, qui signifie le passage à la grille Ω_{4h} , encore plus grossière, pour l'étape de correction. Nous pouvons répéter ce processus sur des grilles successivement grossières jusqu'à ce qu'une résolution exacte de l'équation du résidu soit possible.

6.4.2 Le V-cycle

Le cycle V c'est le schéma le plus simple. Il est aussi appelé la stratégie (ν_1,ν_2).
Supposons que nous avons Q grilles avec le pas sur la grille la plus grossière est donné par Lh où $L = 2^{Q-1}$. L'algorithme est le suivant,

Relaxer sur $A^h\underline{u}_h = \underline{f}^h$ ν_1 fois avec une estimation initiale $\underline{v}^h$.
Calculer $\underline{f}^{2h} = \mathcal{R}^{2h}_h\underline{r}^h$.
  Relaxer sur $A^{2h}\underline{u}_{2h} = \underline{f}^{2h}$ ν_1 fois avec une estimation initiale $\underline{v}^{2h} = 0$.
  Calculer $\underline{f}^{4h} = \mathcal{R}^{4h}_{2h}\underline{r}^{2h}$.
    Relaxer sur $A^{4h}\underline{u}_{4h} = \underline{f}^{4h}$ ν_1 fois avec une estimation initiale $\underline{v}^{4h} = 0$.
    Calculer $\underline{f}^{8h} = \mathcal{R}^{8h}_{4h}\underline{r}^{4h}$.

$\vdots$

$\vdots$

$\vdots$

$A^{Lh}\underline{u}_{Lh} = \underline{f}^{Lh}$

$\vdots$

$\vdots$

$\vdots$

Corriger $\underline{v}^{4h}$ par $\underline{v}^{4h} = \underline{v}^{4h} + \mathcal{R}_{8h}^{4h}\underline{v}^{8h}$.

Relaxer sur $A^{4h}\underline{u}_{4h} = \underline{f}^{4h}$ ν_2 fois avec comme estimation initiale $\underline{v}^{4h}$.

Corriger $\underline{v}^{2h}$ par $\underline{v}^{2h} = \underline{v}^{2h} + \mathcal{R}_{4h}^{2h}\underline{v}^{4h}$.

Relaxer sur $A^{2h}\underline{u}_{2h} = \underline{f}^{2h}$ ν_2 fois avec une estimation initiale $\underline{v}^{2h}$.

Corriger $\underline{v}^{h}$ par $\underline{v}^{h} = \underline{v}^{h} + \mathcal{R}_{2h}^{h}\underline{v}^{2h}$.

Relaxer sur $A^{h}\underline{u}_{h} = \underline{f}^{h}$ ν_2 fois avec une estimation initiale $\underline{v}^{h}$.

Ce schéma est illustré par le schéma suivant dans le cas de 5 grilles (d'où vient le nom "Cycle-V")

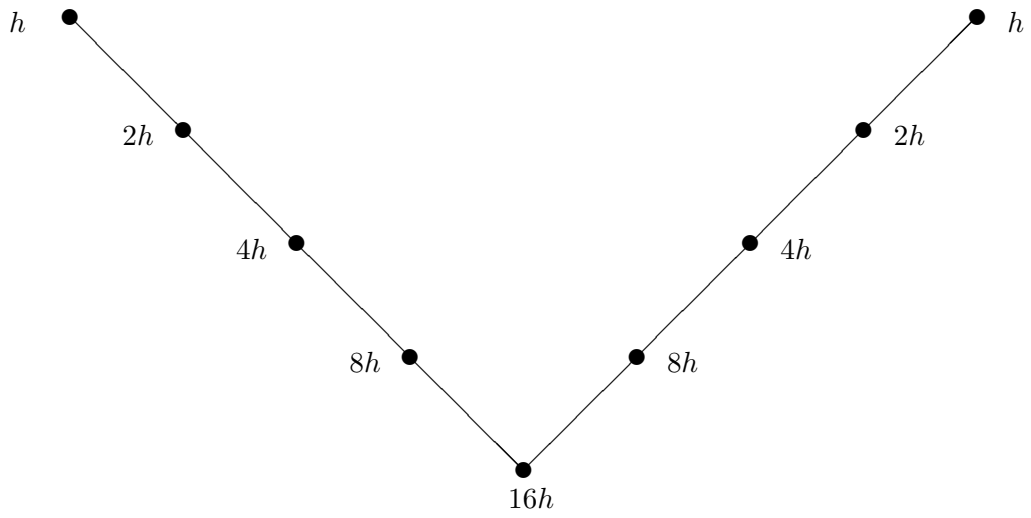


FIGURE 6.6 – Illustration d'un cycle V

6.4.3 Le W-Cycle

Supposons que nous avons 4 grilles : Ω^h grille la plus fine et Ω^{8h} la plus grossière. Les nombres de pré et post-relaxations sont préfixés. Nous effectuons 2 itérations multigrilles sur les grilles grossières au lieu d'une seule comme pour le cycle V. Une itération du cycle W est décrite par l'algorithme suivant,

Relaxer sur $A^{h}\underline{u}_{h} = \underline{f}^{h}$ ν_1 fois avec une estimation initiale $\underline{v}^{h}$.

Calculer $\underline{f}^{2h} = \mathcal{R}_{h}^{2h}\underline{r}^{h}$.

Relaxer sur $A^{2h}\underline{u}_{2h} = \underline{f}^{2h}$ ν_1 fois avec une estimation initiale $\underline{v}^{2h} = 0$.

Calculer $\underline{f}^{4h} = \mathcal{R}_{2h}^{4h}\underline{r}^{2h}$.

Relaxer sur $A^{4h}\underline{u}_{4h} = \underline{f}^{4h}$ ν_1 fois avec une estimation initiale $\underline{v}^{4h} = 0$.

Calculer $\underline{f}^{8h} = \mathcal{R}_{4h}^{8h}\underline{r}^{4h}$.

Relaxer sur $A^{8h}\underline{u}_{8h} = \underline{f}^{8h}$.

Corriger $\underline{v}^{4h}$ par $\underline{v}^{4h} = \underline{v}^{4h} + \mathcal{P}_{8h}^{4h}\underline{v}^{8h}$.

Relaxer sur $A^{4h}\underline{u}_{4h} = \underline{f}^{4h}$ ν_1 fois avec une estimation initiale $\underline{v}^{4h}$.

Calculer $\underline{f}^{8h} = \mathcal{R}_{4h}^{8h}\underline{r}^{4h}$.

Relaxer sur $A^{8h}\underline{u}_{8h} = \underline{f}^{8h}$ ν_1 fois avec une estimation initiale $\underline{v}^{8h} = 0$.

Corriger $\underline{v}^{4h}$ par $\underline{v}^{2h} = \underline{v}^{2h} + \mathcal{P}_{4h}^{2h}\underline{v}^{4h}$.

Relaxer sur $A^{4h}\underline{u}_{4h} = \underline{f}^{4h}$ ν_1 fois avec une estimation initiale $\underline{v}^{4h}$.

Corriger $\underline{v}^{2h}$ par $\underline{v}^{2h} = \underline{v}^{2h} + \mathcal{P}_{4h}^{2h}\underline{v}^{4h}$.

Relaxer sur $A^{2h}\underline{u}_{2h} = \underline{f}^{2h}$ ν_2 fois avec une estimation initiale $\underline{v}^{2h}$.

Calculer $\underline{f}^{4h} = \mathcal{R}_{2h}^{4h}\underline{r}^{2h}$.

Relaxer sur $A^{4h}\underline{u}_{4h} = \underline{f}^{4h}$ ν_1 fois avec une estimation initiale $\underline{v}^{4h} = 0$.

Calculer $\underline{f}^{8h} = \mathcal{R}_{4h}^{8h}\underline{r}^{4h}$.

Relaxer sur $A^{8h}\underline{u}_{8h} = \underline{f}^{8h}$ ν_1 fois avec une estimation initiale $\underline{v}^{8h} = 0$.

Corriger $\underline{v}^{4h}$ par $\underline{v}^{2h} = \underline{v}^{2h} + \mathcal{P}_{4h}^{2h}\underline{v}^{4h}$.

Relaxer sur $A^{4h}\underline{u}_{4h} = \underline{f}^{4h}$ ν_1 fois avec une estimation initiale $\underline{v}^{4h}$.

Calculer $\underline{f}^{8h} = \mathcal{R}_{4h}^{8h}\underline{r}^{4h}$.

Relaxer sur $A^{8h}\underline{u}_{8h} = \underline{f}^{8h}$ ν_1 fois avec une estimation initiale $\underline{v}^{8h} = 0$.

Corriger $\underline{v}^{4h}$ par $\underline{v}^{2h} = \underline{v}^{2h} + \mathcal{P}_{4h}^{2h}\underline{v}^{4h}$.

Relaxer sur $A^{4h}\underline{u}_{4h} = \underline{f}^{4h}$ ν_1 fois avec une estimation initiale $\underline{v}^{4h}$.

Corriger $\underline{v}^{2h}$ par $\underline{v}^{2h} = \underline{v}^{2h} + \mathcal{P}_{4h}^{2h}\underline{v}^{4h}$.

Relaxer sur $A^{2h}\underline{u}_{2h} = \underline{f}^{2h}$ ν_2 fois avec une estimation initiale $\underline{v}^{2h}$.

Corriger $\underline{v}^{h}$ par $\underline{v}^{h} = \underline{v}^{h} + \mathcal{R}_{2h}^{h}\underline{v}^{2h}$.

Relaxer sur $A^{h}\underline{u}_{h} = \underline{f}^{h}$ ν_2 fois avec une estimation initiale $\underline{v}^{h}$.

Ce schéma est illustré par le schéma suivant, d'où vient le nom "Cycle-W"

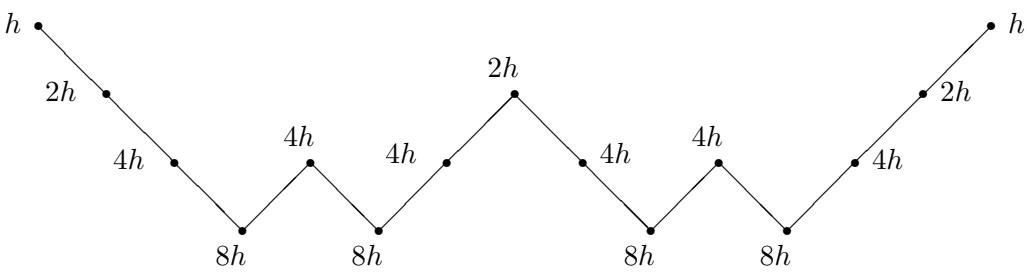


FIGURE 6.7 – Illustration d'un cycle W

Il y'a une autre stratégie où les nombres de relaxations, pré-relaxation et post-relaxation, ne sont pas préfixés. Sur chaque grille, nous continuons à relaxer tant que le facteur de réduction sur le résidu

reste inférieur à un nombre selon un critère donné. Lorsque ce facteur devient supérieur au critère et que l'on a pas encore atteint la précision désirée, on descend sur la grille immédiatement plus grossière. Dans ce processus les paramètres de controle sont le critère sur le facteur de réduction et la précision demandée sur chaque grille. Le critère sur le facteur de réduction est souvent déterminé en fonction de lissage de la méthode itérative de base utilisée. Tandis que la précision (critère de convergence) sur chaque grille est généralement donnée par le résidu sur la grille la plus fine précédente multiplié par un facteur.

6.4.4 L'algorithme FMG

Dans l'algorithme FMG (Full Multi Grid), aussi appelé "nested iteration", on calcule d'abord une solution approchée sur une grille grossière par des itérations CS sur cette grille et on interpole la solution pour obtenir une approximation initiale sur la grille immédiatement plus fine. On s'arrête sur la grille la plus fine. On illustre cette méthode par le diagramme suivant,

$\{0\}$ $k := 1$

$\{1\}$ résoudre sur Ω_k le problème $L_k(\underline{U}_k) = \underline{f}_k$

si $k > 1$ par des itérations CS en partant de $\underline{V}_k$

si $k = 1$ par une méthode directe ou par une méthode itérative.

$\{2\}$ si $k = n$ FIN

$\{3\}$ Prolonger la solution approchée $\underline{V}_k$ obtenue sur Ω_k pour obtenir une approximation initiale $\underline{V}_{k+1}$ sur Ω_{k+1} et monter sur la grille Ω_{k+1}.

$\underline{V}_{k+1} = \mathcal{P}_k^{k+1}(\underline{V}_k)$

$k := k + 1$

$\{4\}$ aller à $\{1\}$.

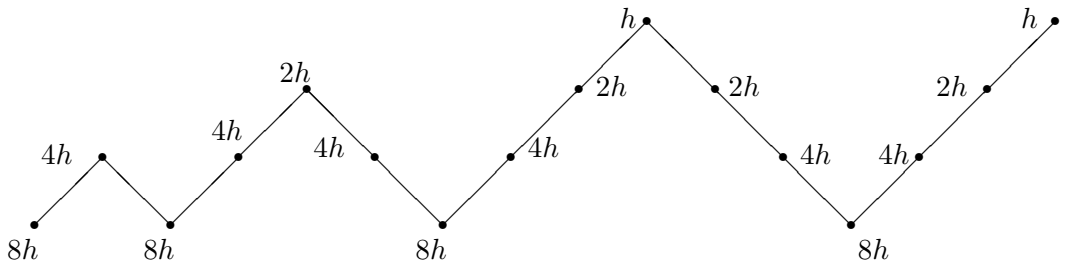


FIGURE 6.8 – Illustration d'un FMG cycle

6.5 Cas d'un opérateur non linéaire

La méthode multigrille peut être également appliquée sur des problèmes non linéaires. Une approche efficace est l'algorithme FAS (Full Approximation Storage) introduit par Brandt [14] et developpé ensuite dans [28]. Dans cette méthode, au lieu de stocker seulement la fonction de correction, on stocke la solution complète sur toutes les grilles. Considérons l'équation non linéaire

$$A\underline{u}^h = \underline{f}^h. \tag{6.5}$$

Soit $\underline{v}_h$ une approximation initiale de (6.5). Voici l'idée principale de l'algorithme FAS,

- Estimation initiale $\underline{v}^h$ de la solution de $A\underline{u}^h = \underline{f}^h$ avec GS,
- $A^h\underline{u}^h - A^h\underline{v}^h = \underline{r}^h$,
- Restriction $A^{2h}\underline{u}^{2h} - A^{2h}\underline{v}^{2h} = \underline{r}^{2h}$,
- Résolution $A^{2h}\underline{u}^{2h} = \underbrace{A^{2h}\underline{v}^{2h} + \underline{r}^{2h}}_{\underline{f}_{2h}}$,
- Correction sur la grille fine $\underline{v}^h = \underline{v}^h + \mathcal{P}(\overbrace{\underline{u}^{2h} - \underline{v}^{2h}}^{\underline{e}^{2h}})$.

6.6 Application des multigrilles sur le modèle non linéaire de Barles-Soner

L'algorithme FAS est bien établi comme solveur rapide pour des EDPs non linéaires. Supposons que sur chaque grille (Ω_k) $1 \leq k \leq n$, nous avons une méthode itérative G_k pour résoudre le problème $A_k(U_k) = f_k$ où A_k est l'opérateur non linéaire. Notons Ω_n la grille la plus fine et Ω_1 la plus grossière. On note $G_k^{m_k}(U_k,f_k)$ le résultat final après m_k itérations. Ci-dessous la description de l'algorithme FAS,

Algorithme 3 Full Approximation Storage

{0} $\underline{U}_n$ approximation initiale de la solution.
{1} $k := n$
Étape de descente
{2} $\underline{U}_k = G_k^{m_k}(\underline{U}_k, \underline{f}_k)$ m_k itérations sur la grille Ω_k
{3} $\underline{f}_{k-1} = \mathcal{R}_k^{k-1}(\underline{f}_k - A_k(\underline{U}_k)) + A_{k-1}(\mathcal{R}_k^{k-1}(\underline{U}_k))$
$\underline{U}_{k-1} = \mathcal{R}_k^{k-1}(\underline{U}_k)$
$k := k - 1$
{4} si $k > 1$ on va à {2}
sinon on se trouve sur la grille grossière et on fait m_1 itérations.
$\underline{U}_1 = G_1^{m_1}(\underline{U}_1, \underline{f}_1)$.
Étape de montée
{5} $\underline{U}_{k+1} := \underline{U}_{k+1} + \mathcal{P}_k^{k+1}(\underline{U}_k - \mathcal{R}_{k+1}^k(\underline{U}_{k+1}))$.
Correction de la solution par le prolongement de $\underline{U}_k - \mathcal{R}_{k+1}^k(\underline{U}_{k+1})$.
$k := k + 1$
{6} $\underline{U}_k := G_k^{\mu_k}(\underline{U}_k, \underline{f}_k)$ μ_k itérations sur la grille Ω_k.
{7} si $k < n$ aller à {5},
sinon on se trouve sur la grille la plus fine.
test de convergence,
s'il y' a convergence on sort,
sinon on va à {2}.

Il est facile de voir que si A_k est un opérateur linéaire, alors l'algorithme FAS se réduit directement au cas linéaire (Coarse grid Correction). L'algorithme FAS est similaire à l'algorithme multigrille linéaire. La seule différence c'est qu'on calcule la solution sur les grilles grossières au lieu de l'erreur. Nous introduisons maintenant l'algorithme 4 qui permet de calculer le prix d'une option Européene à l'aide des multigrilles,

Algorithme 4 Calcul de la valeur d'une option Européenne pour le modèle de Barles et Soner en utilisant FAS

Données d'entrée : S,σ,K, r, a, T, ν_1, ν_2.
-Résoudre l'ODE (3.16) en utilisant la méthode de Runge-Kutta explicite (4ème ordre).
-Interpoler la solution de (3.16) en utilisant des splines cubiques.
Pour n=0...T :
-Initialiser V^n et calculer le terme non linéaire.
-trouver V^{n+1} en utilisant FAS (Algorithme 3).
-Copier V^{n+1} dans V^n.
Fin Pour.

6.6.1 Résultats numériques

Toutes les expériences numériques ont été effectuées sur des grilles uniformes. Pour les calculs, nous avons utilisé les paramètres suivants, $r = 0.1,\ \sigma = 0.2,\ K = 100,\ T = 1$ (un an), $dx = 0.1$, $dt = 10^{-3}$.

Nous avons utilisé 3 niveaux de grilles avec $\nu_1 = 2$ pour le lissage et $\nu_2 = 3$ pour les corrections sur grilles grossières. Nous avons comparé le temps CPU total écoulé avec et sans l'approche Multigrille. Toutes les expériences numériques ont été établies sous Mac OS X, processeur Intel Core i5 2,7GHz.

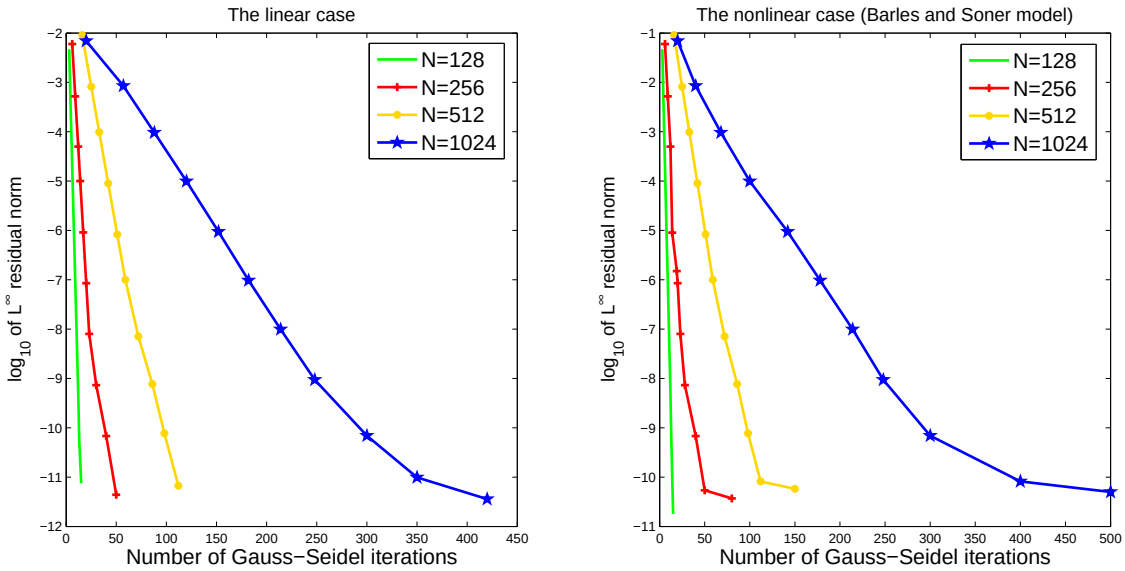


FIGURE 6.9 – Comparaison de la convergence pour la méthode de Gauss-Seidel standard en utilisant 4 différents maillages (128, 256, 512 et 1024) dans le cas de Barles et Soner et le cas linéaire.

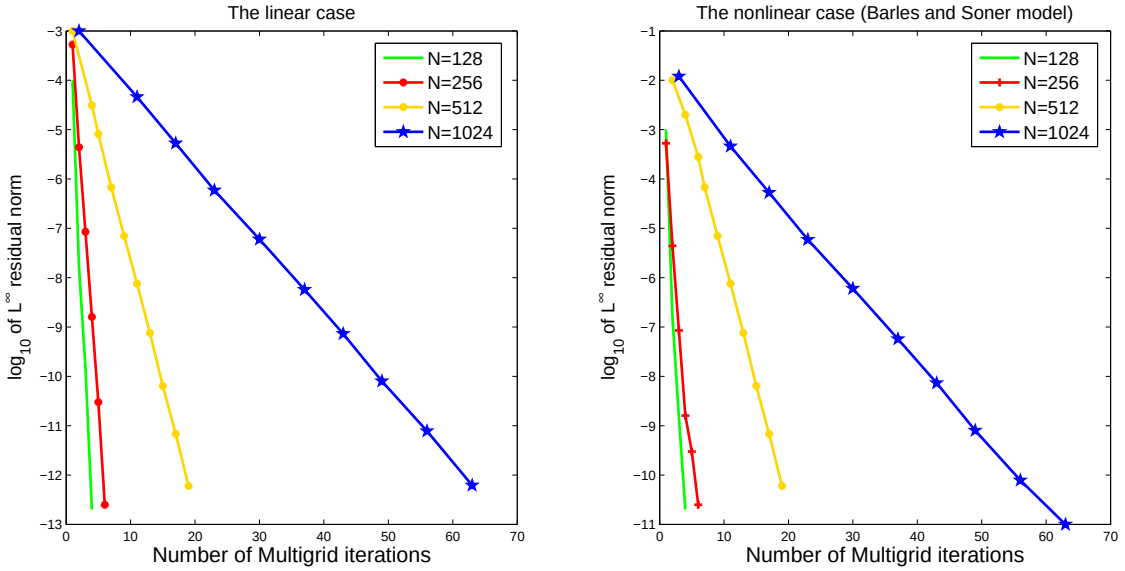


FIGURE 6.10 – Comparaison de la convergence pour la méthode multigrille en utilisant 4 différents maillages (128, 256, 512 et 1024) dans le cas du modèle de Barles et Soner et le cas linéaire.

Les figures 6.9 et 6.10 représentent une comparaison de convergence entre le cas linéaire et non linéaire pour la méthode Gauss-Seidel standard et la méthode multigrille respectivement. Dans la figure 6.9 l'erreur atteint la tolérance 10^{-11} après 100 itérations pour $N = 512$ et 430 itérations pour $N = 1024$ dans le cas de la méthode de Gauss-Seidel standard contrairement à la méthode des multigrilles où l'erreur atteint 10^{-12} après seulement 19 itérations pour $N = 512$ et 64 itérations pour

$N = 1024$ dans le cas linéaire.

TABLE 6.1 – Comparaison du temps écoulé CPU avec la méthode multigrille et la méthode de Gauss-Seidel standard pour différents pas de discretisation.

Maillage	Cas linéaire		Modèle de Barles et Soner	
	monogrille	Multigrille	monogrille	Multigrille
$N = 512$	9	1	9	1
$N = 1024$	12min	47s	8min20s	34s
$N = 2048$	26min	1min05s	21min11s	57s

Le tableau 6.2 montre le temps écoulé par la méthode monogrille (méthode de Gauss-Seidel standard) et la méthode multigrille pour différents pas de discretisation. On voit bien que la méthode multigrille donne de meilleurs résulats .

6.7 Multigrille dans le cas bidimensionnel

L'éfficacité des multigrilles est encore plus notable lorsqu'on passe à des dimensions supérieures vu que la plupart des méthodes numériques deviennent très couteuses en augmentant la dimension du problème. en effet, le temps de calul explose en raffinant le maillage, il devient donc nécessaire d'introduire des méthodes d'accelération de convergence comme les multigrilles, voici la description du schéma V-cycle pour un maillage bidimensionnel,

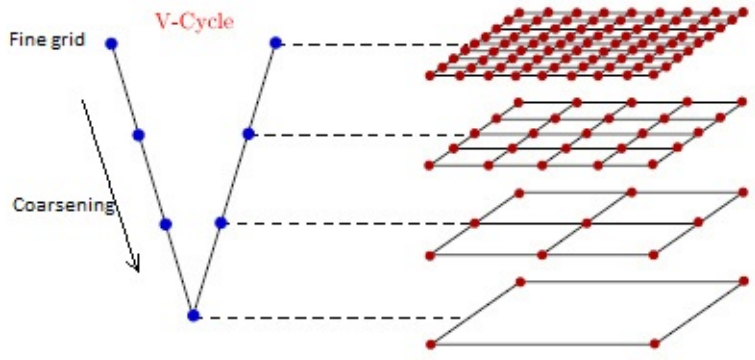


FIGURE 6.11 – Illustration d'un V-cycle dans le cas bidimensionnel

6.7.1 Interpolation et restriction en 2 dimensions

Interpolation

On utilise une interpolation bilinéaire afin de calculer les valeurs de la solution sur les grilles fines. On note i,j les indices des positions sur la grille grossière, alors cette interpolation est donnée verticalement par

$$\begin{cases} u^f_{2i,2j} & = u^c_{i,j}, \\ u^f_{2i,2j+1} & = \frac{1}{2}(u^c_{i,j} + u^c_{i,j+1}), \end{cases} \tag{6.6}$$

et horizontalement,

$$\begin{cases} u^f_{2i+1,2j} & = \frac{1}{2}(u^c_{i,j} + u^c_{i+1,j}), \\ u^f_{2i+1,2j+1} & = \frac{1}{4}(u^c_{i,j} + u^c_{i,j+1} + u^c_{i+1,j} + u^c_{i+1,j+1}), \end{cases} \tag{6.7}$$

avec u^c et u^f sont les solutions sur la grille grossière et la grille fine respectivement.

Restriction

On utilise une combinaison de restriction en utilisant uniquement l'identité dans quelques point de la grille et la méthode du 'full weighting'. Par exemple, on peut choisir notre opérateur de restriction verticalement comme suit

$$u^c_{i,j} = \frac{1}{4}(u^f_{i,2j-1} + u^f_{i,2j+1}) + \frac{1}{2}u^f_{i,2j}, \tag{6.8}$$

et horizontalement

$$u^c_{i,j} = \frac{1}{4}(u^f_{2i-1,j} + u^f_{2i+1,j}) + \frac{1}{2}u^f_{2i,j}, \tag{6.9}$$

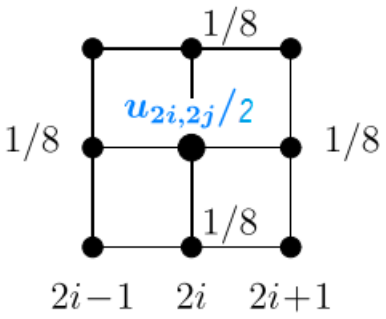


FIGURE 6.12 – La restriction à l'aide de 5 points

Pour les points intérieurs, on utilise la réstriction à l'aide des 5 points voisins, comme illustré dans la figure 6.12,

$$u^c_{i,j} = \frac{1}{2}u^f_{2i,2j} + \frac{1}{8}(u^f_{2i,2j-1} + u^f_{2i,2j+1} + u^f_{2i-1,2j} + u^f_{2i+1,2j}), \tag{6.10}$$

Sans perte de généralité on utilise l'opérateur de l'identité lorsqu'on restreint les points avec les conditions de dirichlet, c'est-à-dire,

$$u^c = u^f. \text{ si } S_1 = S_{1\max}, S_2 = S_{2\max} \text{ et } S_1 = S_2 = 0. \tag{6.11}$$

Nous avons fait nos calculs sur des grilles bidimensionnelles uniformes

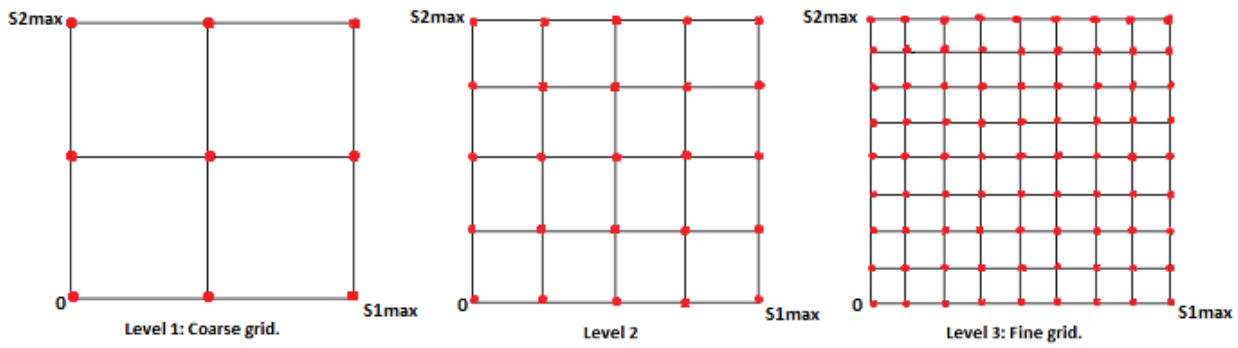


FIGURE 6.13 – Multigrille pour un maillage 2D uniforme

6.7.2 Application des multigrilles au modèle bidimensionnel de Barles et Soner

Algorithme 5 Calcul de la valeur d'une option panier pour le modèle de Barles et Soner en utilisant FAS

Données d'entrée : $S_{1\max}$, $S_{2\max}$,σ_1, σ_2 K, r, ρ, a, T, ν_1, ν_2.
-Résoudre l'ODE (3.16) en utilisant un schéma de Runge-Kutta explicite de 4ème ordre.
-Interpoler la solution de (3.16) en utilisant une méthode de spline cubique.
Pour n=0...T :
-Initialiser V^n et calculer le terme non linéaire.
-Calculer V^{n+1} en utilisant FAS (Algorithme 3).
-Copier V^{n+1} dans V^n.
Fin Pour.

6.7.3 Résultats numériques

Pour les simulations multigrilles nous avons utilisé 3 niveaux de grilles avec $\nu_1 = 2$ pour le lissage et $\nu_2 = 3$ pour les corrections sur les grilles grossières. On rappelle les valeurs des paramètres du modèle bidimensionnel de Barles-Soner, $S_{1\max} = 300$, $S_{2\max} = 300$, $T = 1$(une année), $a = 0.02$, $K = 100$, $\sigma_1 = 0.2$, $\sigma_2 = 0.2$, $\rho = 0.5$, $r = 0.1$.

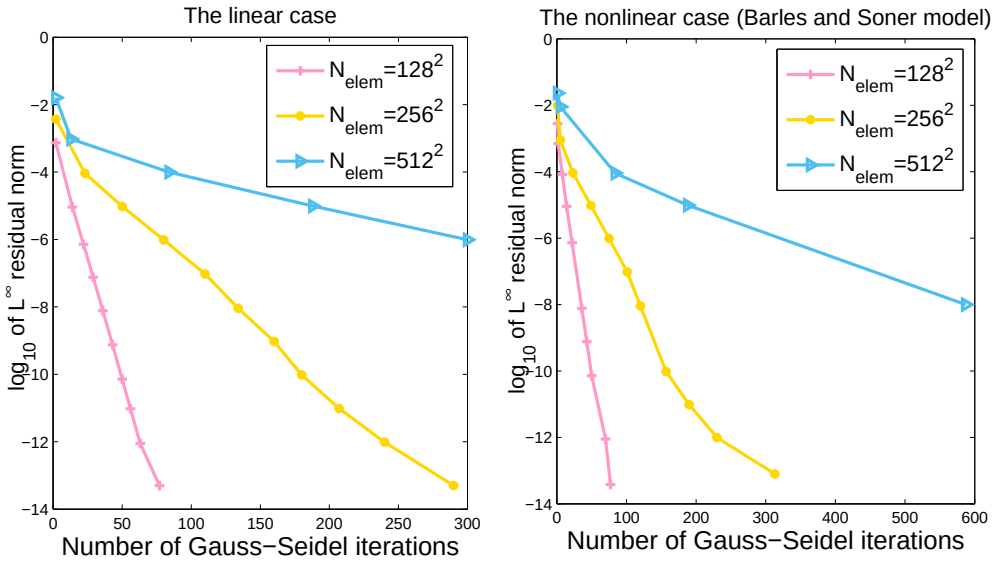


FIGURE 6.14 – Comparaison de convergence de la méthode monogrille pour le cas linéaire et non linéaire pour différentes tailles de maillage ($128^2, 256^2$ et 512^2).

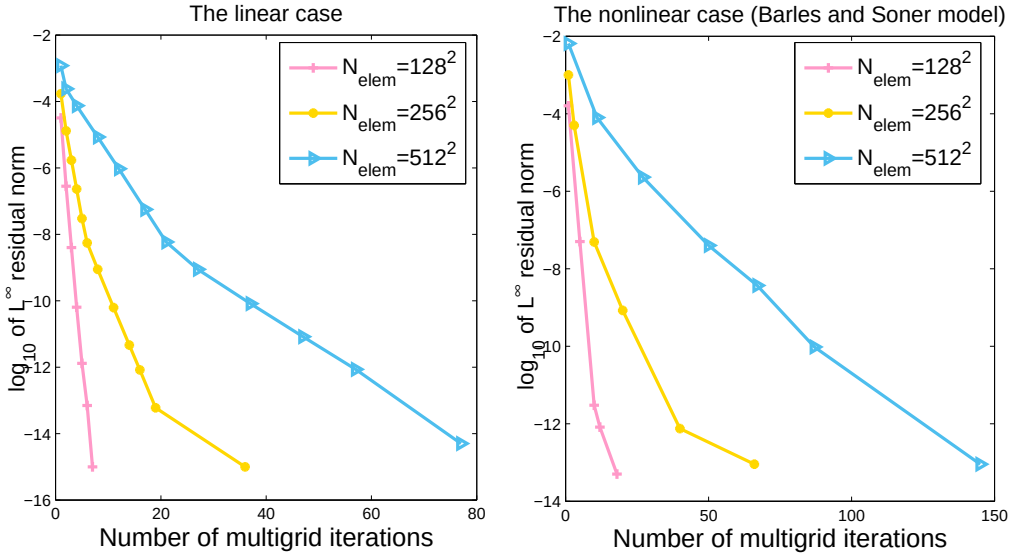


FIGURE 6.15 – Comparaison de convergence de la méthode Multigrilles pour le cas linéaire et le cas de Barles Soner réspectivement et pour différentes tailles de maillage ($128^2, 256^2$ et 512^2).

Nous avons comparé le temps CPU total écoulé en utilisant l'approche multigrilles et la méthode de Gauss-Seidel standard sur des maillages uniformes. Toutes les expériences numériques ont été effectuées sous Mac OS X, processeur Intel Core $i5$, $2{,}7GHz$.

Le tableau 6.2 représente le temps total CPU écoulé pour les deux méthodes GS standard (monogrille) et multigrilles. Nous avons effectué un changement d'échelle au temps de calcul écoulé pour la méthode multigrille. Les résultats sont remarquables, en particulier lorsque le maillage dépasse 512^2.

TABLE 6.2 – Comparaison du temps écoulé CPU avec la méthode multigrille et la méthode de Gauss-Seidel standard pour différents pas de discrétisation en espace pour le cas non linéaire et le cas linéaire (Black-Scholes).

Maillage	Cas non linéaire		Cas linéaire	
	Multigrid	Monogrid	Multigrid	Monogrid
128×128	0.8s	9.6s	0.8	9.36s
256×256	5.0s	2.1min	3.0	1.9min
512×512	31 s	20.6min	14s	15min
1024×1024	2.5min	2h28min	1.62min	1h40min

6.8 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons appliqué une méthode multigrille qui permet l'accélération de la convegrence des schémas numériques, cette méthode a aboutit à une réduction considérable du temps de calcul dont on a démontré l'éfficacité pour le cas bidimensionnel. De manière générale, le problème du pricing des options multidimensionnelles souffre de ce qu'on appelle la 'malédiction de la dimension'. En effet, le nombre de points de la grille augmente de manière exponentielle avec le nombre de dimensions (nombre d'actifs sous-jacents), et cela peut coûter cher en terme de temps de calcul quand la taille de la grille sous-jacente augmente. Ce chapitre constitue donc un point de départ pour les multigrilles pour ces problèmes multi-dimensionnels non linéaires.

Conclusion et voies de recherche

Bilan du travail réalisé

Cette thèse fourni une analyse des équations non linéaires de Black–Scholes pour la valorisation des options européennes sur un ou deux actifs dans des marchés incomplets. La non linéarité de ces équations résulte du fait que le pricing se fait en considérant des coûts supplémentaires relatifs aux transactions réalisées durant la durée de vie de l'option.
Nous avons commencé par présenter les notions de base de calcul stochastique au chapitre 1. Ensuite, dans le chapitre 2 nous avons présenté les terminologies financières demandées afin de comprendre l'origine du modèle de Black-Scholes ainsi que ces hypothèses. Le chapitre 3 est une introduction aux modèles non linéaires suite au 'pricing' des options dans des marchés soumis à des coûts de transaction, où nous avons examiné les raisons expliquant leur non-linéarité, en nous concentrant sur la non-linéarité résultante d'une fonction de volatilité modifiée. Le chapitre 4 a été consacré à l'étude théorique de l'EDP de Barles et Soner pour les options d'achat européennes en utilisant une méthode constructive. Afin de résoudre numériquement ces problèmes non linéaires, nous avons transformé le problème initial en une équation de convection-diffusion fortement non linéaire, nous avons proposé une approche numérique pour la résolution de l'EDP de Barles et Soner. Le schéma de Crank-Nicolson fourni des approximations précises du prix de l'option d'achat européenne. qui est inconditionnellement stable dans le cas linéaire et figure parmi les meilleures méthodes de calcul dans le cas non linéaire. Nous avons comparé l'influence des coûts de transaction sur le prix d'option et avons obtenu un prix sensiblement plus élevé en présence de coûts de transaction.
Le chapitre 5 est dédié au cas bidimensionel où nous avons donné une extension du modèle de Barles et Soner permettant de valoriser une option panier en présence des coûts de transaction. Les résultats numériques obtenus constituent un point de départ vers des recherches encore plus poussées en vue de résoudre les EDPs bidimensionnelles non linéaires de Black-Scholes. Enfin, au chapitre 6, nous avons utilisé une méthode d'accéleration de convergence de type multigrille non linéaire pour le problème de Barles et Soner pour le cas d'un actif et deux actifs sous-jacents. Cette méthode permet de réduire le temps de calcul en un temps raisonnable et nous avons vu que son utilité est encore plus remarquable en augmentant la dimension du problème.

Limites et prolongements de recherche

Conditions aux bords pour les options à deux actifs

Une perspective à court terme de ce travail est d'étudier théoriquement le problème de Barles et Soner pour le cas de deux actifs sous-jacents. En effet, l'élaboration de cette extension bidimensionnelle a révélé beaucoup d'enjeux car certaines variables ne sont pas directement observables notamment

les volatilités et la corrélation entre les actifs. Par ailleurs, les conditions aux bords des modèles bidimensionnels du type Black-Scholes sont complexes et obstruent l'étude théorique. La question qui se pose donc c'est de savoir si le problème que nous avons élaboré est théoriquement bien posé et sous quelles conditions ?
Il est à noter que les conditions aux bords dépendent de la valeur terminale de l'option par exemple, les conditions aux bords linéaire (5.7) sont instable pour une option panier sur le bord

$$\Omega = \{ \ (S_1, S_2) \ / S_1 \times S_2 = 0\}.$$

Afin de surmonter ce problème, il a fallut utiliser l'équation 1D de Barles et Soner sur ce bord. Contrairement à une option de type 'Max' ou 'Cash or nothing' où les conditions aux bords linéaires marchent parfaitement.

Les méthodes de rafinement de maillage

Un dernière perspective est de combiner la méthode multigrille et l'adaptation du maillage AMR (*Mesh Grid Refinement*), en effet, dans notre contexte d'étude , nous avons utilisé une méthode multigrille pour des maillages uniformes. Il existe de nouvelles méthodes d'adaptation du maillage pour le cas d'un problème avec donnée initiale non régulière comme pour le cas d'une option d'achat,

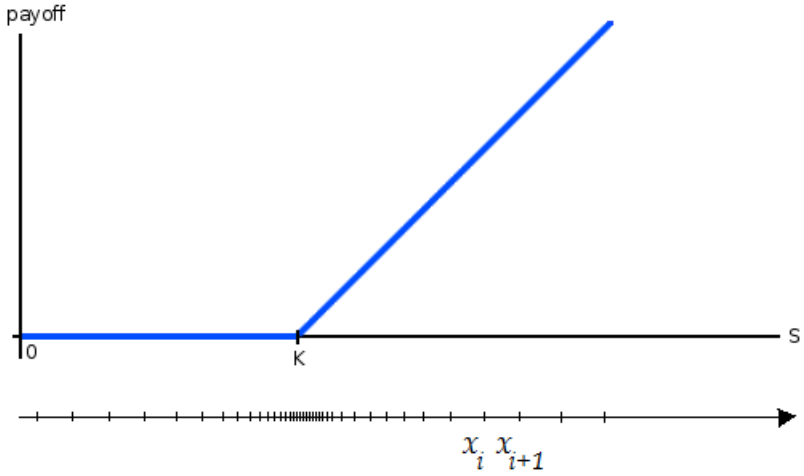


FIGURE 6.16 – maillage non uniforme.

on peut donc utiliser les méthodes de résolution multigrilles avec un générateur de grilles qui s'adaptent avec la forme de la solution. Cela a été déjà fait pour le pricing d'options dans le cadre linéaire, les résultats numériques ont montré une réduction considérable en temps de calcul sur la grille adaptative contrairement aux grilles uniformes (voir [33, 48] pour plus de détails).

Bibliographie

[1] M. Abounouh, H. Al Moatassime, A. Driouch and O. Goubet, A constructive method for convex solutions of a class of nonlinear Black-Scholes equations, *Advances in Nonlinear Analysis*, to appear

[2] Y. Achdou and O. Pironneau, Computational methods for option pricing, *SIAM frontiers in applied mathematics*. SIAM, Philadelphia, 2005.

[3] R. A. Adams, Sobolev Spaces, *Pure and Applied Mathematics : A Series of Monographs and Textbooks*, Academic Press, New-York, 1975.

[4] C. Alexander and A. Venkatramanan, Analytic Approximations for Multi-Asset Option Pricing. *International Journal of Mathematics, Statistics and Financial Economics*, 22(4) (2012), 667-689.

[5] P. Amster and A. Mogni, On a pricing problem for a multi-asset option with general transaction costs, *arXiv preprint* arXiv :1704.02036, (2017).

[6] J. Ankudinova and M. Ehrhardt, On the numerical solution of nonlinear Black-Scholes Equations, *Computers & Mathematics with Applications* 56 (2008), 799-812.

[7] C. Atkinson and P. Ingpochai, The influence of correlation on multi-asset portfolio optimization with transaction costs. *Journal of Computational Finance*, 10(2), (2006).

[8] G. Barles, H. M. Soner. Option pricing with transaction costs and a nonlinear Black-Scholes equation, *Finance and Stochastics* 2 (1998), 369-397.

[9] C. Bauzet and G. Vallet, On abstract Barenblatt equations, *Nonlinear Differential Equations and Applications*, 3(4) (2011), 487-502.

[10] J. Beisser, Another way to value basket options. Johannes Gutenberg-Universität Mainz, 1999.

[11] B. Bensaid, J. P. Lesne, H. Pagès, and J. Scheinkman, Derivative asset pricing with transaction costs. *Mathematics and Finance*, 2 (1992), 63-86.

[12] F. Black, and M. Scholes, The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of political economy* 81 (3) : 637 (1973).

[13] B. Bouchard, L. Moreau and H. M. Soner, Hedging under an expected loss constraint with small transaction costs. *SIAM Journal on Financial Mathematics*, 7(1) (2016), 508-551.

[14] A. Brandt, Multi-level adaptive solutions to boundary value problems. *Math. comp.*, (1977) 333–390.

[15] W. L. Briggs. A Multigrid Tutorial. Society for Industrial and Applied Mathematics. Philadelphia, Pennsylvania, 1987.

[16] M. Davis, V. Panis, T. Zariphopoulou, European option pricing with transaction fees. *SIAM J. Contr. Optim.* 31 (1993), 470-493.

[17] E. Denis Approximate Hedging of Contingent Claims under Transaction Costs for a more General Payoff. *Applied Mathematical Finance*, 17 (2010), 491-518 .

[18] L. Diening, P. Harjulehto, P. Hästö, and M. Ruzicka, Lebesgue and Sobolev Spaces with Variable Exponents, Springer, 2011.

[19] G. Díaz and J. I. Díaz, Finite extinction time for a class of nonlinear parabolic equations, *Comm. Partial Differential Equations*, 4(11) (1979), 1213-1231

[20] Y. Dolinsky and H. M. Soner, Robust hedging with proportional transaction costs, *Finance and Stochastics*, 18(2) (2014), 327-347.

[21] D. J. Duffy. Finite Difference methods in financial engineering : a Partial Differential Equation approach. John Wiley and Sons, (2013).

[22] B. Düring. Black-Scholes Type Equations : Mathematical Analysis, Parameter Identification & Numerical Solution. Dissertation, Universität Mainz, 2005.

[23] M. Ehrhardt and R. E. Mickens, A fast, stable and accurate numerical method for the Black-Scholes equation of American options, *Int. J. Appl. Theor. Finance*, **11** (2008), 471-501.

[24] H. Föllmer et A. Schied Stochastic Finance : an introduction in discrete time. Walter de Gruyter, Berlin, 2003

[25] W. H. Fleming and H. M. Soner, Controlled Markov processes and viscosity solutions, Springer Science & Business Media, 2006.

[26] G. Grimett and D. Stirzaker, Probability and random processes, Oxford university Press, New-York, 1982.

[27] P. Guasoni, E. Lépinette and M. Rásonyi, The fundamental theorem of asset pricing under transaction costs. *Finance and Stochastics*,16(4) (2012), 741-777.

[28] W. Hackbusch, Multi-Grid Methods and Applications. Springer-Verlag, 1985.

[29] S. Hodges and A. Neuberger, Optimal replication of contingent claims under transaction costs. *Review of Futures Markets*, 8 (1989), 222-239.

[30] J. Jacob and P. Protter, Probability essentials, Springer, Berlin 1997.

[31] M. Jandačka and D. Ševčovič, On the risk–adjusted pricing–methodology–based valuation of vanilla options and explanation of the volatility smile. *Journal of Applied Mathematics*, (2005), 235–258.

[32] M. Jeanblanc and T. Simon, Eléments de calcul stochastique. IRBID, 2005.

[33] D. Jeong, T. Ha, M. Kim, J. Shin, I. H. Yoon, and J. Kim, An adaptive finite difference method using far-field boundary conditions for the Black-Scholes equation. *Bulletin of the Korean Mathematical Society*, 51(4), (2014), 1087-1100.

[34] N. Ju, Pricing Asian and basket options via Taylor expansion. *Journal of Computational Finance*, 5(3), (2002), 79-103.

[35] R. Kangro and R. Nicolaides, Far field boundary conditions for Black-Scholes equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **38** (2000), 1357-1368.

[36] M. N. Koleva and L. G. Vulkov, Quasilinearization numerical scheme for fully nonlinear parabolic problems with applications in models of mathematical finance, *Mathematical and Computer Modelling*, **57** (2013), 2564-2575.

[37] M. Kratka. No mystery behind the smile. Risk, 9, 67-71, 1998.

[38] H. E. Leland, Option pricing and replication with transactions costs. *Journal of Finance*, 40, 1283–130. 1985.

[39] D. C. Lesmana and S. Wang, An upwind finite difference method for a nonlinear Black-Scholes equation governing European option valuation under transaction costs, *Applied Mathematics and Computation*, **219** (2013), 8811-8828.

[40] J. L. Lions, Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites Non Linéaires (Vol. 31). Paris : Dunod, 1969.

[41] M. C. Mariani, E. K. Ncheuguim and I. Sengupta, Solution to a nonlinear Black-Scholes equation. *Electronic Journal of Differential Equations*, 158 (2011), 1-10.

[42] S. Mashayekhi and J. Hugger, Finite difference schemes for a nonlinear Black-Scholes model with transaction cost and volatility risk, *Acta Mathematica Universitatis Comenianae*, **84** (2015), 255-266.

[43] H. P. McKean. Stochastic integrals (Vol. 353). American Mathematical Society 1969.

[44] T. H. Nguyen and S. Pergamenshchikov, Approximate hedging problem with transaction costs in stochastic volatility markets. *Mathematical Finance*, 27(3) (2017), 832-865.

[45] C. W. Oosterlee, C. Leentvaar and X. Huang, Accurate American option pricing by grid stretching and high order finite differences. *Delft University of Technology*, The Netherlands, Technical Report (2005).

[46] H. Pham, Introduction aux Mathématiques et Modèles Stochastiques des Marchés Financiers. Université de Paris 7, 2007.

[47] P. Protter. Stochastic Integration and Differential Equations. Springer, Berlin, 2nd edition, 2005.

[48] A. Ramage and L. von Sydow. A multigrid preconditioner for an adaptive Black-Scholes solver. *BIT Numerical Mathematics*, 51(1), (2011), 217-233.

[49] A.N. Shiryaev, Essentials of stochastic Finance. *World Scientific*, Singapore, 1999.

[50] H. M. Soner, S. E. Shreve and J. Cvitanic, There is no nontrivial hedging portfolio for option pricing with transaction costs. *The Annals of Applied Probability*, **5** (1995), 327-355.

[51] D. Stirzaker. Elementary Probability. Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

[52] K. Stuben and U. Trottenberg. Multigrid Methods Fundamental Algorithms, Model problem analysis and Applications, *Lecture notes in Mathematics*, Springer-Verlag, (1981), 1–176.

[53] D. Ševčovič, Nonlinear parabolic equations arising in mathematical finance, *Novel Methods in Computational Finance*, (2017), 3-15.

[54] D. Ševčovič and M. Žitňanská, Analysis of the nonlinear option pricing model under variable transaction costs, *Asia-Pacific Financial Markets*, 23, (2016), 153-174.

[55] D. Tavella and C. Randall. Pricing financial instruments, the finite difference method. Wiley, New York, (2000).

[56] D. Williams, Probability with martingales, *Cambridge university Press*, Cambridge (1991).

[57] H. Windcliff, P. Forsyth, and K. Vetzal, Analysis of the stability of the linear boundary condition for the Black-Scholes equation, *Journal of Computational Finance*, 8(1), (2004), 65-92.

[58] A. R. Yazdanian and T. Pirvu, Numerical analysis for Spread option pricing model in illiquid underlying asset market : full feedback model. *arXiv preprint* arXiv :1406.1149,(2014).

[59] V. Zakamouline, Hedging of option portfolios and options on several assets with transaction costs and nonlinear partial differential equations, *International Journal of Contemporary Mathematical Sciences*, 3(4),(2008) 159-180.

[60] S. Zhou, L. Han, W. Li, Y. Zhang and M. Han, A positivity-preserving numerical scheme for option pricing model with transaction costs under jump-diffusion process, *Computational and Applied Mathematics* **34** (2015), 881-900.