



**HAL**  
open science

# Quantification probabiliste des taux de déformation crustale par inversion bayésienne de données GPS

Colin Pagani

► **To cite this version:**

Colin Pagani. Quantification probabiliste des taux de déformation crustale par inversion bayésienne de données GPS. Sciences de la Terre. Université de Lyon, 2021. Français. NNT : 2021LYSE1204 . tel-03640544

**HAL Id: tel-03640544**

**<https://theses.hal.science/tel-03640544>**

Submitted on 13 Apr 2022

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



N°d'ordre NNT : 2021LYSE1204

**THESE de DOCTORAT DE L'UNIVERSITE DE LYON**

opérée au sein de

**l'Université Claude Bernard Lyon 1**

**Ecole Doctorale N° 52**

**École Doctorale de Physique et Astrophysique**

**Spécialité de doctorat** : Géophysique

**Discipline** : Sciences de la Terre

Soutenue publiquement le 14/10/2021, par :

**Colin Dominique Pagani**

---

**Quantification probabiliste des taux de  
déformation crustale par inversion  
bayésienne de données GPS**

---

## Devant le jury composé de :

JOLIVET Romain Maître de Conférences École Normale Supérieure de Paris UMR 8538 – LG-ENS	Rapporteur
MAZZOTI Stéphane Professeur des Universités Université de Montpellier UMR 5243 - Géosciences Montpellier	Rapporteur
ANDREANI Muriel Professeure des Universités Université Lyon 1 UMR 5276B – LGL-TPE	Présidente
CHANARD Kristel Chargée de recherche Institut de Physique du Globe de Paris UMR7154 - LAREG	Examinatrice
KLINGER Yann Directeur de Recherche CNRS Paris UMR7154 - IPGP-UMR	Examineur
BODIN Thomas Chargé de recherche CNRS Lyon UMR 5276B - LGL-TPE	Directeur de thèse
MÉTOIS Marianne Maître de Conférences Université Lyon 1 UMR 5276B – LGL-TPE	Co-directrice de thèse
LASSERRE Cécile Directrice de recherche CNRS Lyon UMR 5276B - LGL-TPE	Co-directrice de thèse

# Remerciements

Je souhaite remercier toutes les personnes qui, de près ou de loin, ont contribué à différentes échelles et de différentes manières à l'aboutissement de cette thèse. En premier lieu, je pense bien évidemment à mon extraordinaire trio de directeur et directrices de thèse, Thomas Bodin, Marianne Métois et Cécile Lasserre, qui m'ont accompagné au cours de ces trois années (et même plus!). Je remercie en particulier Thomas Bodin de m'avoir entraîné à sa suite dans le monde merveilleux des probabilités bayésiennes, ainsi que pour les longues discussions et démonstrations dans son bureau, armé d'un stylo, de beaucoup de patience et de tout autant de papier. Je remercie également Marianne pour l'aide qu'elle m'a apporté sur l'aspect géologique du sujet, ainsi que pour le rôle crucial qu'elle a joué dans la résurgence de la motivation nécessaire à la rédaction de ce manuscrit. Je remercie également Cécile Lasserre dont le recul aussi bien académique que scientifique fut une aide précieuse tout du long de ce travail de thèse. Enfin, je souhaite remercier mes trois encadrants pour le soutien moral dont j'ai pu bénéficier de leur part dans les épisodes difficiles induits par la situation sanitaire liée au Covid (que lui, je ne remercie pas).

Je remercie également Stéphane Mazzoti et Romain Jolivet d'avoir accepté d'être rapporteurs de ce manuscrit, ainsi que pour l'intérêt certain qu'ils ont manifesté envers ce projet et l'entrain avec lequel ils ont accueilli la partie théorique de cet ouvrage. En particulier, les suggestions et l'œil extérieur de Stéphane Mazzoti ont été d'une aide très précieuse pour lever certains obstacles rencontrés au cours de ce doctorat. Je remercie également Muriel Andreani, Kristel Chanard et Yann Klinger d'avoir accepté de figurer au sein du jury.

Merci aux collègues de l'équipe d'inférence bayésienne pour les discussions et les sismolunchs riches en idées et découvertes variées, et plus généralement à tous les membres du LGLTPE pour leur accueil, que ce soit à l'ENS ou à la Doua. J'adresse une pensée aux autres doctorants du laboratoire, Selma, Anastasios, Laëtitia arrivée sur la fin, et en particulier Elena pour son énergie et sa gentillesse, ainsi que Keith, mon co-bureau, dont les goûts musicaux semblables aux miens nous ont permis plus d'une fois de profiter ensemble d'un après-midi de Queen ou de Pink Floyd à refaire les graphiques de nos posters pour l'AGU. Je suis également redevable à d'autres étudiants ou post-doctorants du département de géologie pour leur accompagnement au cours de mes études au sein de l'ENS, notamment Adrien et Dorian (promis, tu auras un morceau d'éclogite polie un jour!), et surtout Mathieu Bouffard, dont le rôle de mentor aussi bien associatif que scientifique a eu une influence majeure sur mon parcours - et avec qui j'espère bien avoir l'occasion de redanser un rock un jour. Merci également à Valentin, que j'ai eu beaucoup de plaisir à encadrer et dont la présence a fait souffler un joyeux vent frais sur la fin de mon doctorat.

Un mot également pour tous mes camarades de promotion de géologie de l'ENS, dont Quentin et en particulier Gaspard, avec qui j'ai énormément apprécié partager ces quelques

années d'études, ces stages de terrain, ces projets, ces partiels, ces écoles doctorales des Houches et leurs discussions à 4h du matin autour d'une bière avec Thomas et Laurent Husson (que je salue au passage!). J'espère que tu parviendras à trouver ta voie dans le monde de la recherche académique si tu le souhaites! Je souhaite également remercier les différents chercheurs qui ont eu un rôle dans mon cheminement académique, notamment Pierre Thomas (auquel je m'excuse d'avoir fait prendre 30 ans d'un coup...), Christophe Vigny pour m'avoir donné le goût du Chili et de la recherche et Sergio Ruiz pour les avoir confirmés. Merci aussi à François Leguern, « Fanfan », qui n'est plus parmi nous mais qui, le premier, m'a offert une opportunité de toucher du doigt le monde de la volcanologie, et dont je conserve religieusement les cadeaux qu'il m'a offerts dans ses derniers jours.

Tout du long de mes études, j'ai pu compter sur le soutien indéfectible de mes parents, jusqu'au bout de ma thèse pour la relecture de ce manuscrit afin d'y traquer avec force fourches et torches les dernières erreurs grammaticales qui se terraient dans les sombres recoins entre les équations. La superbe mise en page de ce manuscrit doit tout à Linux-Senseï, Bruno, dont l'aide système et Latex fut inestimable (enfin si, mais probablement très cher).

Merci aussi à tous ces gens auxquels j'oublie trop souvent d'exprimer ma reconnaissance à leur égard pour avoir eu la chouette idée d'exister dans ma vie lyonnaise, et dont la présence contribue fortement à rendre le quotidien nettement plus intéressant qu'il ne le serait sans eux : Angèle, Alice, Emile, Lois, Hugo, Lilian, Adèle, Redouanne, Baptiste, Clément et Meven pour toutes les soirées, vacances et autres brunchs au cours des dernières années. J'ai hâte d'assister aux soutenances de vos thèses respectives! Et merci également aux giffois, dont je n'ai même plus besoin de citer les noms, et qui, bien qu'à distance, ont toujours su me faire sentir chez moi à la seconde où je franchissais la porte de l'un d'entre eux (généralement pour y retrouver tous les autres dans un joyeux bazar festif).

Enfin, j'aimerais adresser des remerciements tout particuliers à Alix pour le soutien moral salvateur que tu m'as manifesté durant les heures les plus obscures de ce travail de thèse. Ta gentillesse, ta bienveillance et surtout ta folie créatrice sont pour moi des modèles, que je n'ai certes aucun espoir d'égaliser un jour mais bon, ça ne coûte pas grand chose d'essayer. Un immense merci à Arthur, qui a depuis le temps largement dépassé le stade de simple collocataire, avec qui j'ai partagé un nombre incalculable de discussions tantôt ludiques, tantôt philosophiques, tantôt déraisonnablement tardives, mais toujours extrêmement enrichissantes. Et pour finir, Señor Quentin Villalobos Y Sangrin, ce fut un réel plaisir de te voir hocher la tête d'un air aussi ravi que perdu quand je t'expliquais mes tribulations jacobiniennes et combinatoires, et que cette seule vision suffit à dénouer mes problèmes mathématiques les plus complexes. C'est avec un plaisir absolument non dissimulé que j'attends avec impatience notre prochaine découverte au rayon métal à partager avec Arthur, notre prochain voyage au Kamtchamka ou sur l'Erta Ale. J'attends ta propre rédaction de manuscrit avec impatience, pour pouvoir me rendre aussi insupportable et indispensable que tu as pu l'être pour moi.

# Résumé

Au cours du cycle sismique, la déformation accumulée par la lithosphère terrestre peut être relâchée lors de séismes pouvant provoquer de nombreuses pertes humaines et matérielles. L'analyse de l'aléa et du risque sismique passe par l'étude de la déformation accumulée et relâchée lors des différentes étapes du cycle sismique. En particulier, l'étude géodésique du déplacement de la surface terrestre permet de localiser et de comprendre l'accumulation de la déformation élastique lors des phases intersismiques.

Avec l'expansion des réseaux GNSS, il est devenu possible d'obtenir le tenseur du taux de déformation à partir des vitesses de déplacement surfacique afin d'étudier et de contraindre la déformation crustale. Cependant, calculer le gradient de vitesse de déplacement en tout point d'une surface continue à partir de données GNSS discrètes consiste en un problème inverse dont la solution est hautement non-unique. De ce fait, de nombreuses méthodes destinées à réaliser cette inversion ont vu le jour au cours des dernières décennies, chacune comportant ses avantages et ses inconvénients propres. Toutefois, certaines limitations des schémas d'inversion employés jusqu'alors, reposant soit sur la dérivation d'un champ de vitesses interpolé, soit sur l'inversion directe du taux de déformation via une procédure d'optimisation, persistent : en particulier, le besoin de paramètres *ad hoc* définis par l'opérateur, la sensibilité à la géométrie du réseau GNSS et la difficulté à déterminer de manière robuste les incertitudes associées aux résultats, pourtant nécessaires à l'intégration des cartes de déformation dans les méthodes d'analyse du risque sismique, compromettent la fiabilité des résultats.

Afin de pallier ces lacunes dans les techniques existantes, nous développons une nouvelle méthode bayésienne transdimensionnelle permettant d'inverser des données GNSS discrètes afin d'obtenir le champ 2D continu de vitesses, son gradient et le tenseur de déformation associés. Le champ de vitesses est décrit par une paramétrisation reposant sur la triangulation de Delaunay, et la distribution *a posteriori* est échantillonnée grâce à un algorithme de Metropolis-Hastings à saut réversible, qui appartient à la classe des MCMC (*Markov chain Monte Carlo*). Cet algorithme dispose d'un maillage adaptatif qui prend en compte les hétérogénéités spatiales, de vitesse et de niveau de bruit présentes dans les données. Contrairement aux méthodes d'inversion classiques qui proposent un unique modèle, la solution est une fonction de densité de probabilité complète pour chaque composante du champ de vitesses et du tenseur du taux de déformation.

Des tests synthétiques permettent de comparer l'approche proposée à un schéma d'interpolation b-spline standard. Cette méthode s'avère plus résistante à l'influence du bruit sur les données ainsi qu'à une répartition spatialement hétérogène de celles-ci, tout en fournissant des incertitudes associées aux vitesses et aux taux de déformation récupérés. Elle est également appliquée à des jeux de données réels, couvrant notamment le sud-ouest des États-Unis, une région largement étudiée et surveillée. Nous obtenons des taux de déformation probabilistes le long des

principaux systèmes de failles, y compris celui de San Andreas, à partir de l'inversion des vitesses intersismiques GNSS. Les caractéristiques de plusieurs points clés de cette région sont étudiées grâce à l'utilisation des fonctions de densité de probabilité *a posteriori* des différents paramètres inversés. Enfin, d'autres applications de l'algorithme développées au cours de cette thèse, ses limitations actuelles ainsi que les différentes perspectives d'amélioration de cette méthode sont discutées en conclusion de cette thèse.

# Abstract

During the seismic cycle, the deformation accumulated by the earth's lithosphere can be released anelastically during earthquakes that can cause numerous human and material losses. The analysis of the seismic risk requires the study of this deformation during the different stages of the seismic cycle. In particular, the geodetic study of the earth surface displacement allows to understand and to localize the accumulation of the elastic deformation during the interseismic phases.

With the expansion of GNSS networks, it has become possible to obtain the strain rate tensor from surface displacement velocities to study and constrain crustal deformation. However, computing the deformation gradient at any point on a continuous surface from discrete GNSS data is an inverse problem with a highly non-unique solution. As a result, many methods to perform this inversion have emerged in the last decades, each with its own advantages and disadvantages. However, some limitations of the direct inversion schemes used until now persist: in particular, the need for *ad hoc* operator-defined parameters, the sensitivity to the geometry of the GNSS network, and the difficulty to robustly determine the uncertainties associated with the results, which are necessary for the integration of deformation maps in seismic hazard analysis methods, impairs the reliability of the results.

In order to overcome these shortcomings in existing techniques, we develop a new transdimensional Bayesian method to invert discrete GNSS data in order to obtain the 2D continuous velocity field, its gradient and the associated deformation tensor. The velocity field is described by a parameterization based on Delaunay triangulation, and the *a posteriori* distribution is sampled using a reversible jump Metropolis-Hasting algorithm, which belongs to the MCMC (*Markov chain Monte Carlo*) class. This algorithm features an adaptive mesh that takes into account the spatial, speed and noise level heterogeneities present in the data. Unlike classical inversion methods that propose a single model, the solution is a complete probability density function for each component of the velocity and deformation field.

Synthetic tests allow to compare the proposed approach to a standard b-spline interpolation scheme. This method proves to be more robust to the presence of outliers in the data as well as to a spatially heterogeneous distribution of the data, while providing uncertainties associated with the recovered velocities and strain rates. It is also applied to real data sets, including the Southwestern United States, a widely studied and monitored region. We obtain probabilistic strain rates along major fault systems, including the San Andreas Fault, from GNSS interseismic velocity inversion. The characteristics of several key points in this region are studied through the use of probability density functions *a posteriori* of the different inverted parameters. Finally, the current limitations as well as the different perspectives of improvement of this method are discussed in conclusion of this thesis.





# Table des matières

<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
<b>1. Méthode : inversion bayésienne du tenseur de déformation</b>	<b>9</b>
1.1. Introduction à l'inférence bayésienne	10
1.1.1. Théorème de Bayes	10
1.1.2. Description du prior	11
1.1.3. Fonction de vraisemblance	12
1.1.4. Distribution <i>a posteriori</i>	14
1.1.5. Application de l'inférence bayésienne aux problèmes inverses	15
1.2. Echantillonnage de la PDF par rj-McMC	16
1.2.1. Théorie des Markov chain Monte Carlo pour l'inférence bayésienne	16
1.2.2. Algorithme de Metropolis-Hastings	17
1.2.3. Extension à un nombre variable de paramètres : reversible jump McMC	20
1.3. Application à l'inversion de vitesses GNSS	21
1.3.1. Formulation du problème inverse	23
1.3.2. Résolution du problème par rj-MCMC	31
1.3.3. Optimisation de la vitesse de convergence	42
1.3.4. Résultats et sauvegarde des modèles	46
1.4. Conclusion	48
<b>2. Application à des données GNSS synthétiques et au sud-ouest des États-Unis</b>	<b>51</b>
2.1. Introduction	54
2.1.1. Surface strain, fault behavior and space geodesy	54
2.1.2. The strain rate tensor : formulation, assumptions and analysis	55
2.1.3. Aim of the study	56
2.2. Inverting for the strain rate tensor : state of the art	57
2.3. Tectonic context of the Southwestern US and GNSS velocity field	59
2.4. Method : Inverting for the geodetic strain rate	62
2.4.1. Parameterizing the velocity field	62
2.4.2. Bayesian inference	64
2.4.3. Sampling models from the posterior distribution	64
2.4.4. Extracting relevant information from the ensemble solution	66
2.5. Results	67
2.5.1. Synthetic tests on an ideal San Andreas Fault	67
2.5.2. Bayesian inversion of the MIDAS dataset	74

## Table des matières

2.6.	Discussion . . . . .	77
2.6.1.	Advantages and limits of the Bayesian surface reconstruction . . . . .	77
2.6.2.	From a probabilistic solution to tectonic interpretations . . . . .	78
2.6.3.	Future developments . . . . .	80
2.7.	Conclusion . . . . .	81
2.8.	Appendix . . . . .	83
<b>3.</b>	<b>Discussions et perspectives</b>	<b>89</b>
3.1.	Outil de visualisation . . . . .	90
3.2.	Inversion de mécanismes au foyer . . . . .	92
3.2.1.	Description des mécanismes au foyer et style de déformation . . . . .	93
3.2.2.	Reconstitution d'une surface continue du type de déformation . . . . .	95
3.3.	Limitations de l'inversion bayésienne . . . . .	98
3.3.1.	Un coût calculatoire élevé . . . . .	98
3.3.2.	Définition de la loi de probabilité <i>a priori</i> sur les modèles . . . . .	99
3.4.	Vers une exploitation plus fine de l'incertitude sur les vitesses . . . . .	100
3.4.1.	Bruit et incertitudes affectant les données . . . . .	100
3.4.2.	Une meilleure prise en compte de l'incertitude : approche bayésienne hiérarchique . . . . .	102
3.4.3.	Résultats de la méthode hiérarchique . . . . .	104
3.4.4.	Des données d'une qualité trop hétérogène ? . . . . .	106
3.5.	Axes d'amélioration et perspectives de développement . . . . .	110
3.5.1.	Raffinement de l'approche hiérarchique . . . . .	110
3.5.2.	Des modèles de vitesse plus réguliers : interpolation non-linéaire au sein des triangles de Delaunay . . . . .	110
3.5.3.	Inversion 2D sphérique . . . . .	111
3.5.4.	Inversion jointe de données GNSS et InSAR . . . . .	112
	<b>Conclusion générale</b>	<b>115</b>
	<b>Annexes</b>	<b>119</b>
<b>A.</b>	<b>Present-day geodynamics of the Western Alps : new insights from earthquake mechanisms</b>	<b>121</b>
<b>B.</b>	<b>Transport parallèle de vecteur pour l'inversion sur une surface 2D sphérique</b>	<b>145</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>149</b>

# Table des figures

1.	Comparaison des taux de moment géodésique et sismique à proximité du détroit de Gibraltar . . . . .	4
2.	Comparaison de deux cartes du $2^{nd}$ invariant du tenseur des taux de déformation sur le sud-ouest des États-Unis . . . . .	5
3.	Artefacts dans l'inversion du gradient de vitesse causé par la géométrie du réseau GNSS . . . . .	6
4.	Carte du risque sismique en Europe issue du projet SPARSE . . . . .	7
1.1.	Exemple simple de fonction de vraisemblance dans l'inférence bayésienne . . .	13
1.2.	Influence du prior sur la distribution <i>a posteriori</i> dans un exemple simple . . .	14
1.3.	Exemple élémentaire d'utilisation de l'algorithme de Metropolis-Hastings . . .	18
1.4.	Fonctionnement schématique de l'algorithme rj-McMC . . . . .	22
1.5.	Séries temporelles de deux stations GPS . . . . .	23
1.6.	Comparaison d'une triangulation de Delaunay et d'une triangulation quelconque	26
1.7.	Construction du modèle initial . . . . .	32
1.8.	Représentation des différentes propositions pour créer un nouveau modèle . .	35
1.9.	Évolution et distribution <i>a posteriori</i> du nombre de nœuds pour l'inversion de bruit blanc . . . . .	42
1.10.	Rejet différé : deux propositions successives pour un nouveau modèle . . . .	43
1.11.	Évolution du nombre de nœuds au cours d'une inversion - choix du <i>burn-in</i> . .	45
1.12.	Distribution du nombre de nœud <i>a posteriori</i> . . . . .	46
1.13.	Distribution gaussienne bidimensionnelle pour la vitesse, projetée selon $x$ et $y$	48
2.1.	Représentation du champ de vitesse MIDAS pour le sud-est des États-Unis . .	60
2.2.	Exemple de triangulation de Delaunay pour un modèle de vitesse . . . . .	63
2.3.	Convergence de la moyenne des modèles échantillonnés pour le rotationnel . .	66
2.4.	Tests synthétiques d'inversion du champ de vitesse horizontal sur une faille de San Andreas idéale . . . . .	68
2.5.	Cartes moyennes pour le $2^{nd}$ invariant, la divergence et le rotationnel obtenus pour la faille synthétique - comparaison entre inversion bayésienne et b-spline	69
2.6.	Distance au modèle vrai sur le $2^{nd}$ invariant - comparaison entre l'inversion bayésienne et le b-spline . . . . .	71
2.7.	Écart-type de la PDF <i>a posteriori</i> pour la vitesse horizontale sur le test synthétique	72
2.8.	Profils des PDF perpendiculairement à la faille synthétique pour la vitesse, le $2^{nd}$ invariant, la divergence et le rotationnel . . . . .	73

## Table des figures

2.9.	Cartes de la moyenne des modèles pour le 2 <sup>nd</sup> invariant et la divergence correspondant à l'inversion des vitesses MIDAS . . . . .	74
2.10.	Profils des PDF perpendiculairement à la faille de San Andreas en deux emplacements . . . . .	75
2.11.	Représentation de la distribution pour les axes principaux de déformation . . . . .	76
2.12.	Écart-type de la PDF <i>a posteriori</i> pour la vitesse horizontale correspondant à l'inversion des vitesses MIDAS . . . . .	83
2.13.	Cartes de la moyenne des modèles pour le rotationnel correspondant à l'inversion des vitesses MIDAS . . . . .	84
2.14.	Résidus moyen sur les données GPS pour l'inversion des vitesses MIDAS . . . . .	85
2.15.	Densité spatiale des nœuds contrôlant la triangulation de Delaunay moyennée sur l'ensemble des modèles obtenus au cours de l'inversion . . . . .	86
2.16.	Profil de la PDF pour la divergence perpendiculairement à la faille de San Andreas au niveau de Monarch Peak et de Salton Sea Lake . . . . .	87
3.1.	Interface graphique pour l'exploitation des résultats : fenêtre principale . . . . .	91
3.2.	Interface graphique pour l'exploitation des résultats : profil et PDF . . . . .	92
3.3.	Exemple de carte interactive sous Jupyter-Notebook . . . . .	93
3.4.	Représentation et classification des mécanismes au foyer . . . . .	94
3.5.	Inversion du type prédominant de déformation dans les Alpes occidentales . . . . .	95
3.6.	Inversion du type prédominant de déformation le long d'une coupe transversale des Alpes . . . . .	97
3.7.	Distribution de $\lambda$ pour différents niveaux de bruit . . . . .	104
3.8.	Comparaison des cartes de $I_2$ et de divergence sur l'ouest des États-Unis pour l'inversion bayésienne classique et l'inversion bayésienne hiérarchique . . . . .	105
3.9.	Comparaison des distributions de probabilité <i>a posteriori</i> dans les Wasatch Moutains pour l'inversion bayésienne classique et l'inversion bayésienne hiérarchique . . . . .	107
3.10.	Distribution des résidus normalisés sur l'inversion des données MIDAS et synthétiques . . . . .	108
3.11.	Comparaison de l'interpolation linéaire et de l'interpolation de Clough-Tocher sur une triangulation . . . . .	111
3.12.	Déformation cosismique associée au séisme de Ridgecrest, 2019 . . . . .	112
3.13.	Cartes de déformation pour l'Anatolie, obtenues par inversion de données GNSS et inversion jointe GNSS-InSAR . . . . .	113
B.1.	Représentation du transport parallèle entre deux points sur la sphère . . . . .	146

# Listes des acronymes

<b>GNSS</b>	<b>G</b> lobal <b>N</b> avigation <b>S</b> atellite <b>S</b> ystem
<b>GPS</b>	<b>G</b> lobal <b>P</b> ositioning <b>S</b> ystem
<b>McMC</b>	<b>M</b> arkov chain <b>M</b> onte <b>C</b> arlo
<b>MH</b>	<b>M</b> etropolis- <b>H</b> astings
<b>rj-MCMC</b>	reversible jump <b>M</b> arkov chain <b>M</b> onte <b>C</b> arlo
<b>MIDAS</b>	<b>M</b> edian <b>I</b> nterannual <b>D</b> ifferences <b>A</b> justed for <b>S</b> kewness
<b>InSAR</b>	<b>I</b> nterferometric <b>S</b> ynthetic <b>A</b> perture <b>R</b> adar
<b>LOS</b>	<b>L</b> ine <b>O</b> f <b>S</b> ight
<b>IGS14</b>	<b>I</b> nternational <b>G</b> PS <b>S</b> ervice <b>14</b> (référentiel pour les données GPS)
<b>PDF</b>	<b>P</b> robability <b>D</b> ensity <b>F</b> unction
<b>SAF</b>	<b>S</b> an <b>A</b> ndreas <b>F</b> ault
<b>RAM</b>	<b>R</b> andom <b>A</b> ccess <b>M</b> emory
<b>API</b>	<b>A</b> pplication <b>P</b> rogramming <b>I</b> nterface
<b>PSHA</b>	<b>P</b> robabilist <b>S</b> eismic <b>H</b> azard <b>A</b> nalysis



# Liste des symboles & notations utilisés

*Pour l'ensemble de ce manuscrit, les vecteurs seront notés en gras.*

$p(a|b)$  représente la probabilité conditionnelle de  $a$  sachant  $b$ ,

$p(a \cap b)$  représente la probabilité de  $a$  et  $b$

$\mathcal{U}(a, b)$  représente la loi uniforme sur  $[a, b]$ .

$\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  représente la loi normale de moyenne  $\mu$  et de variance  $\sigma^2$ .

$\mathcal{R}^n$  représente l'espace usuel à  $n$  dimensions muni de sa base canonique.

$\mathcal{C}_0$  décrit l'espace des fonctions continues, et  $\mathcal{C}^1$  l'espace des fonctions dérivables de dérivée continue.

$\mathcal{O}(n)$  décrit une complexité algorithmique proportionnelle à  $n$ .





# Introduction générale

La lithosphère, en tant que partie supérieure et couche limite thermique de la convection du manteau terrestre, est constamment en mouvement. La théorie de la tectonique des plaques suppose que le mouvement relatif des blocs lithosphériques rigides s'effectue sur un ensemble limité de zones de failles localisées, où la lithosphère connaît un cycle sismique alternant phases d'accumulation et de relâchement : elle se déforme progressivement de manière élastique pendant la période intersismique du cycle, jusqu'à ce que la contrainte provoque la libération de cette déformation de manière cassante pendant la période cosismique (LE PICHON, 1968; MORGAN, 1968; OLIVER et al., 1969). Ces ruptures provoquent alors des mouvements brusques de la croûte terrestre qui se propagent à travers la roche : ce sont les séismes. Étudier et comprendre la déformation de la lithosphère est donc essentiel pour évaluer l'aléa sismique, et *in fine* le risque, qui affecte une région donnée. Dans le cadre d'une hypothèse élastique, il est possible de calculer la déformation de surface générée par le glissement le long d'une faille en fonction de son amplitude, de la profondeur du glissement et de son inclinaison (OKADA, 1985); ainsi, l'analyse des modèles spatiaux de déformation de surface et de leurs évolutions temporelles autour des failles actives peut donc aider à contraindre le comportement des systèmes de failles à chaque étape du cycle sismique. De ce fait, il devient nécessaire d'imager et de quantifier la déformation de la croûte terrestre pour comprendre la manière dont celle-ci s'accumule à long terme, ainsi que sa localisation.

L'introduction de la technologie GPS (*Global Positioning System*) au début des années 90, permettant de localiser avec précision la position d'un point à la surface de la Terre par triangulation satellitaire, a représenté une opportunité nouvelle pour la communauté des géodésistes d'étudier les déplacements de surface de la croûte terrestre avec une précision inégalée jusqu'alors, de l'ordre du millimètre par an. Des campagnes de déploiement de réseaux GNSS (*Global Navigation Satellite System*) ont alors vu le jour afin d'apporter un nouvel éclairage sur les caractéristiques de la déformation crustale dans les zones tectoniquement actives. Ces réseaux, qui se densifient depuis plusieurs décennies, enregistrent les mouvements du sol le long des principales failles actives à travers les différents stades du cycle sismique : ces observations, couplées à la connaissance de l'historique des séismes ayant affecté ces failles, ont conduit à l'élaboration de modèles cohérents permettant d'évaluer l'aléa sismique afférent aux différents segments de ces failles.

La majeure partie de la déformation due aux mouvements relatifs des blocs est absorbée le long de frontières de plaques bien localisées et cartographiées, parfois matérialisées par des failles actives majeures telles que la faille de San Andreas ou la faille nord-anatolienne, mais la lithosphère peut également se déformer de manière plus diffuse sur des zones plus étendues. Une telle déformation diffuse peut être accommodée de manière élastique par des réseaux de failles

## Introduction générale

actives, ou par d'autres processus non élastiques au sein de la lithosphère (ENGLAND et MOLNAR, 1997; COPLEY, 2008; D'AGOSTINO et al., 2014). En combinaison avec les données géologiques, tectoniques et sismologiques, les mesures géodésiques de la déformation de surface peuvent aider à affiner le degré de localisation de la déformation sur de larges zones intracontinentales, à identifier les structures actives et à contraindre le style de la déformation, ainsi que les processus mécaniques qui en sont à l'origine.

La déformation associée au champ de vitesses intersismique de la surface  $\mathbf{V}$  peut être décrit à l'aide du gradient de vitesse :

$$\vec{\nabla}\mathbf{V} = \partial_i V_j = \begin{bmatrix} \partial_x V_x & \partial_y V_x & \partial_z V_x \\ \partial_x V_y & \partial_y V_y & \partial_z V_y \\ \partial_x V_z & \partial_y V_z & \partial_z V_z \end{bmatrix} \quad (0.1)$$

En règle générale, les observations des déplacements horizontaux de la surface sont bien mieux contraints que les déplacements verticaux, qui sont à la fois plus faibles et plus difficile à mesurer. Aussi, nous n'allons considérer que le champ de vitesses horizontal et son gradient 2D associé :

$$\vec{\nabla}\mathbf{V} = \partial_i V_j = \begin{bmatrix} \partial_x V_x & \partial_y V_x \\ \partial_x V_y & \partial_y V_y \end{bmatrix} \quad (0.2)$$

Cette matrice peut se décomposer comme la somme d'une matrice symétrique  $\dot{\epsilon} = \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\mathbf{V} + \vec{\nabla}\mathbf{V}^T)$  et d'une matrice antisymétrique  $\dot{\mathbf{r}} = \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\mathbf{V} - \vec{\nabla}\mathbf{V}^T)$ . Cette partie symétrique se nomme le tenseur des taux de déformation :

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_i V_j + \partial_j V_i) = \begin{bmatrix} \partial_x V_x & \frac{1}{2}(\partial_y V_x + \partial_x V_y) \\ \frac{1}{2}(\partial_y V_x + \partial_x V_y) & \partial_y V_y \end{bmatrix} \quad (0.3)$$

Pour quantifier l'amplitude et la nature de la déformation, on définit trois scalaires qui caractérisent le gradient de vitesse :

- la divergence  $div\mathbf{V} = \partial_x V_x + \partial_y V_y$ , qui correspond à la trace du tenseur et qui caractérise un changement de volume;

- le rotationnel  $rot\mathbf{V} = \partial_y V_x - \partial_x V_y$ , qui est donné par la partie antisymétrique du gradient de vitesse et qui correspond à une rotation sans déformation;
- le second invariant du tenseur des taux de déformation  $I_2 = \sqrt{\dot{\epsilon}_{xx}^2 + \dot{\epsilon}_{yy}^2 + 2\dot{\epsilon}_{xy}^2}$

Cette dernière quantité correspond à la norme euclidienne de  $\dot{\epsilon}$  vu dans  $\mathcal{R}^4$  et est une mesure du niveau global de déformation, largement adoptée dans la communauté des géodésistes (*e.g.* PÉROUSE et al., 2012; D'AGOSTINO, 2014; MÉTOIS et al., 2015; SHEN et al., 2015; KREEMER et al., 2018; SANDWELL et al., 2010). Elle présente un intérêt tout particulier pour l'analyse de l'aléa sismique : détecter les régions présentant des taux de déformation élevés peut permettre d'identifier les failles actives, capable d'accumuler de la déformation, et à terme de produire un séisme de forte amplitude.

L'obtention de cartes continues des différentes composantes ou combinaisons de composantes du gradient de vitesse horizontal et du tenseur de déformation peut aider à comprendre le régime tectonique et le style de déformation d'une zone donnée. Notamment, l'analyse du second invariant du tenseur de déformation  $I_2$  donne des indices sur les variations de la quantité et de la localisation des déformations à travers un réseau de failles. La divergence du champ de vitesses met en évidence les zones subissant une dilatation ou une compression (une divergence positive correspond à une dilatation tandis qu'une divergence négative correspond à une compression), tandis que le rotationnel horizontal qui correspond à une rotation dans le sens horaire (rotationnel négatif) ou anti-horaire (rotationnel positif) permet d'identifier les blocs presque rigides.

Les directions principales du tenseur de vitesse de déformation, qui correspondent aux vecteurs propres du tenseur, peuvent également être comparées aux directions de contrainte lorsque la lithosphère est considérée comme totalement élastique. Elles sont donc souvent tracées par rapport à des mécanismes focaux ou à des orientations de contraintes à long terme liés au contexte géologique (ENGLAND et al., 2016; MATHEY et al., 2020, *e.g.*).

Au cours des dernières décennies, le tenseur des taux de déformation déterminé par la géodésie a également été utilisé pour calculer l'énergie sismique équivalente stockée sous forme de déformation élastique qui pourrait être libérée lors des séismes. En particulier, WARD (1998) propose d'utiliser la formule de KOSTROV (1974) pour calculer les taux de moment géodésique  $\dot{M}_o^g$  à partir de  $\dot{\epsilon}$ , dans le cas d'une déformation uniaxiale. Pour une région de surface donnée  $A$ , son taux de moment géodésique s'exprime par :

$$\dot{M}_o^g = 2\mu H_s A \dot{\epsilon}_{max}, \quad (0.4)$$

où  $\mu$  est le module de rigidité de la roche,  $H_s$  l'épaisseur sismogénique, et  $\dot{\epsilon}_{max}$  est la plus grande valeur propre du tenseur des taux de déformation. La comparaison de  $\dot{M}_o^g$  avec l'énergie sismique libérée, basée sur des catalogues historiques et instrumentaux de sismicité, fournit des informations sur l'énergie qu'il reste à libérer, soit sismiquement, soit asismiquement (figure 1) : cela contraint l'amplitude maximale qu'un séisme pourrait atteindre dans cette région, permettant ainsi d'adapter les mesures parasismiques en vigueur (*e.g.* SPARACINO et al., 2020; PANCHA, 2006; MIDDLETON et al., 2018).

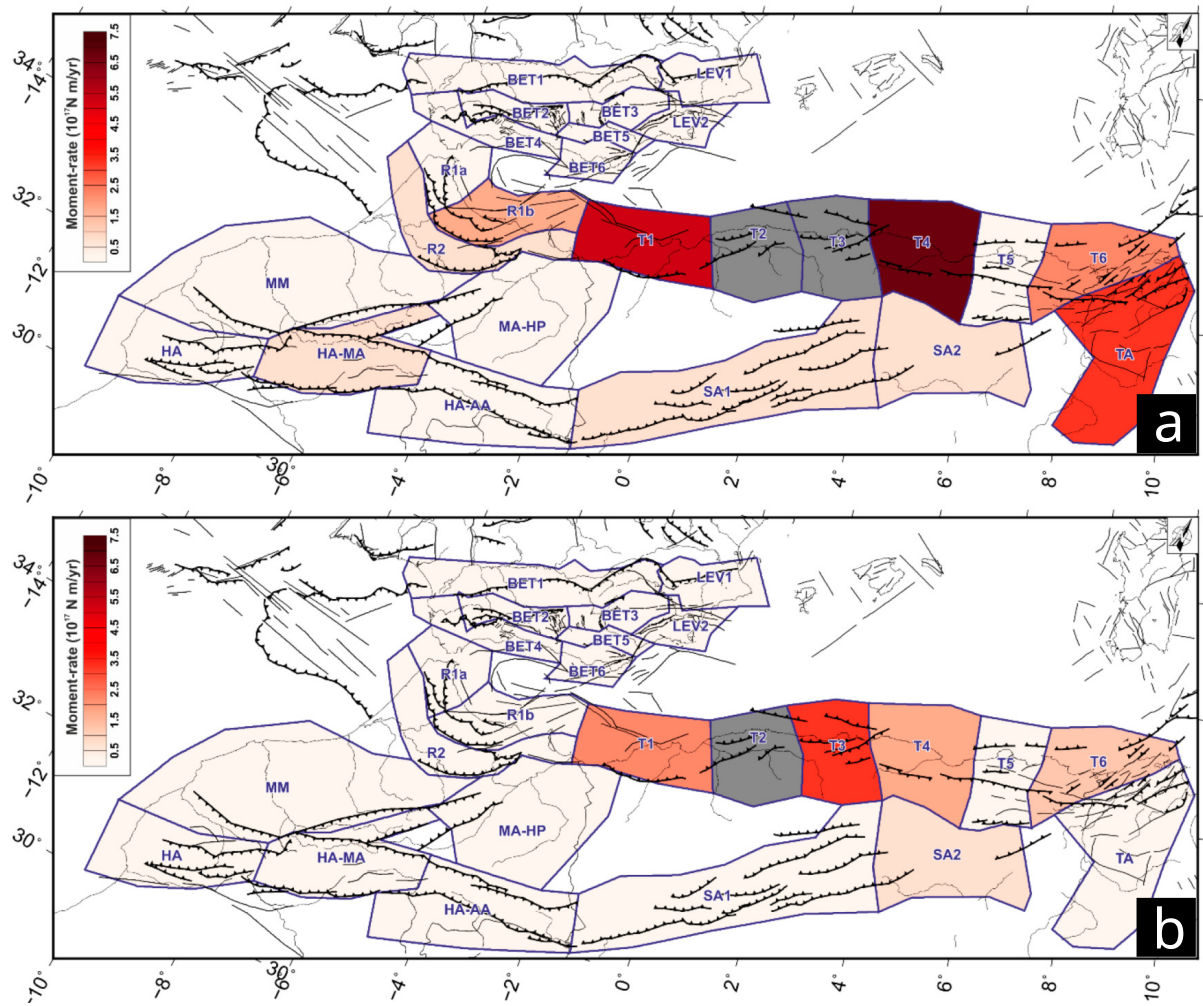


FIGURE 1. – Modifiée d'après SPARACINO et al. (2020). Comparaison des taux de moment géodésique et sismique à proximité du détroit de Gibraltar. **a)** Taux de moment sismique calculé à partir du catalogue historique des séismes de la région. **b)** Taux de moment géodésique obtenu à partir de la loi de Kostrov. Le tenseur de déformation est obtenu par inversion de données GNSS grâce à la méthode proposée par SHEN et al. (2015).

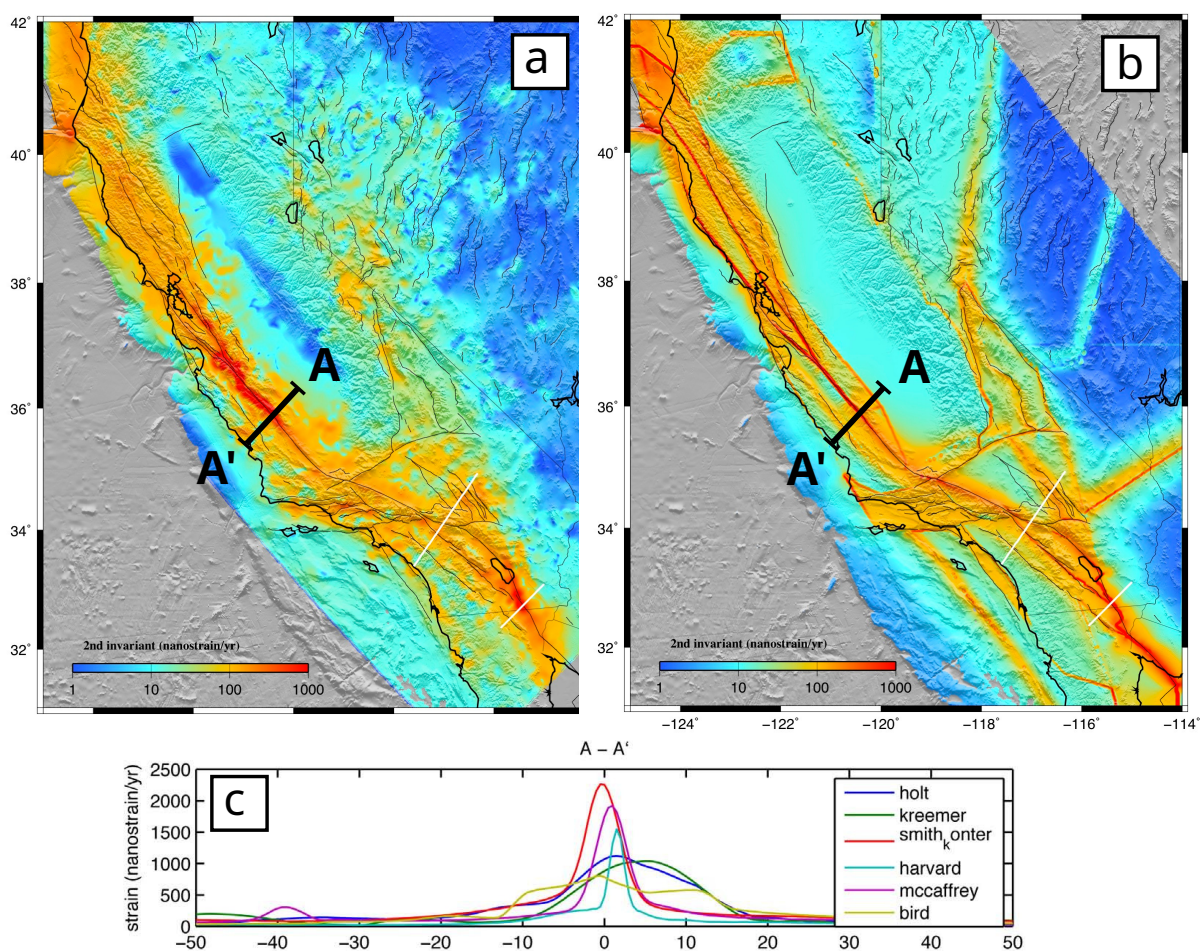


FIGURE 2. – Modifiée d'après SANDWELL et al. (2010). Comparaison de deux cartes du 2<sup>nd</sup> invariant du tenseur des taux de déformation sur le sud-ouest des États-Unis. **a)** Carte proposée par Kreemer (KREEMER et HAMMOND, 2007), reposant sur une inversion par optimisation des vitesses GNSS **b)** Carte proposée par MacCaffrey (MCCAFFREY, 2005), employant un modèle de bloc utilisant aussi bien les données GNSS que les observations géologiques et sismologiques, dont notamment la position des failles. **c)** Coupe transversale de la faille de San Andreas au sud du segment de Parkfield, matérialisée en noir sur la carte.

Depuis les toutes premières observations géodésiques des mouvements de la surface de la Terre par triangulation ou nivellement, de nombreuses méthodes ont été développées pour déduire les taux de déformation de surface à partir des champs de vitesse. Aujourd’hui, ces techniques utilisent principalement les données GNSS et commencent à intégrer les données géodésiques spatiales provenant de l’InSAR (*Interferometric Synthetic Aperture Radar*) (e.g. WEI et al., 2010; WEISS et al., 2020; XU et al., 2020) et de l’imagerie optique (e.g. BARNHART et al., 2020; DELORME et al., 2020). Certaines de ces méthodes s’appuient sur des modèles géophysiques, tels que des modèles de blocs élastiques ou viscoélastiques avec des failles actives prédéfinies, pour calculer la vitesse de surface et les taux de déformation. D’autres visent à dériver le tenseur des taux de déformation à partir des seules observations de surface, sans modèle physique sous-jacent. Les résultats proposés par ces différentes méthodes peuvent exhiber des caractéristiques parfois irréconciliables. Des efforts ont été menés par exemple par SANDWELL et al. (2010) et WU et al. (2011) pour faire un état des lieux des méthodes existantes, et comparer leurs différentes forces et faiblesses (figure 2). Dans la même optique, un exercice de *benchmarking* mené par RESIF-RENAG est en cours sur des jeux de données synthétiques représentant la France métropolitaine, et auquel la méthode développée au cours de cette thèse prend part.

Les techniques standards d’inversion, qui reposent sur des schémas d’optimisation déterministes, requièrent généralement l’usage de paramètres de lissage ou de régularisation qui limitent l’amplitude maximale des variations du taux de déformation, et sont sensibles à la géométrie du réseau GNSS (avec des données espacées de façon irrégulière dans la plupart des cas), aux erreurs sur les données et aux paramètres ad-hoc des utilisateurs. Ceci est reconnu comme étant un problème majeur dans la communauté, menant potentiellement à des artefacts systématiques qui pourraient être mal interprétés comme des signaux tectoniques tel que BAXTER et al. (2011) le suggère (figure 3).

La production de cartes exhaustives fiables du champ de vitesses à la surface ainsi que de ses dérivées spatiales et des incertitudes associées peut profiter à une large communauté. Cependant, deux principales limitations méthodologiques subsistent : tout d’abord, les données géodésiques issues des stations GNSS nous fournissent des informations sur la vitesse de déplacement de la surface qui sont spatialement discrètes et inégalement répar-

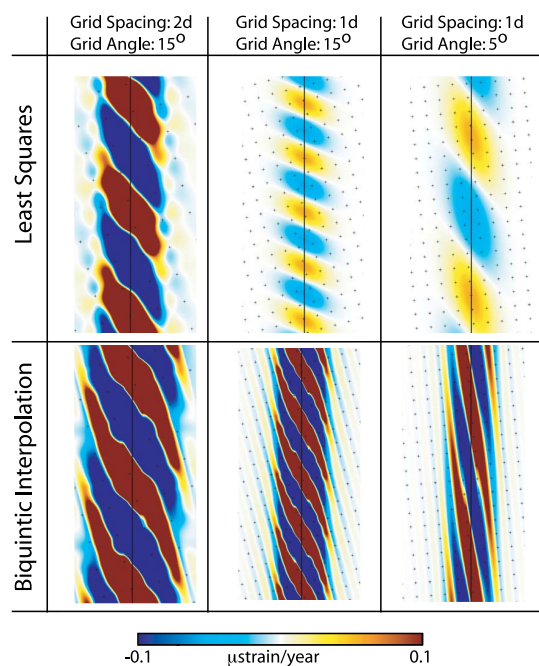


FIGURE 3. – Modifiée d’après BAXTER et al. (2011). Artefacts dans l’inversion du gradient de vitesse causé par la géométrie du réseau GNSS. Sur cette faille synthétique en décrochement pur, la divergence théorique est nulle. On constate cependant qu’en fonction de la géométrie du réseau, de sa densité spatiale et de la technique d’inversion employée, des artefacts plus ou moins importants peuvent apparaître sur la divergence ici représentée.

ties; ces données doivent donc être interpolées afin de récupérer un champ de déformation continu. Une telle opération constitue formellement un problème inverse dont la solution est non unique, et qui implique un compromis important entre la complexité du modèle et son niveau de régularisation, c'est-à-dire entre le niveau de résolution spatiale et le niveau d'erreurs propagées depuis les données dans la solution. De plus, les incertitudes sur le champ de vitesses interpolé et leur propagation sur les composantes du gradient de vitesse sont souvent mal estimées. La détermination précise de ces incertitudes est pourtant cruciale si l'on souhaite que les estimations géodésiques des taux de déformation intègrent à terme les schémas probabilistes d'évaluation des risques sismiques.

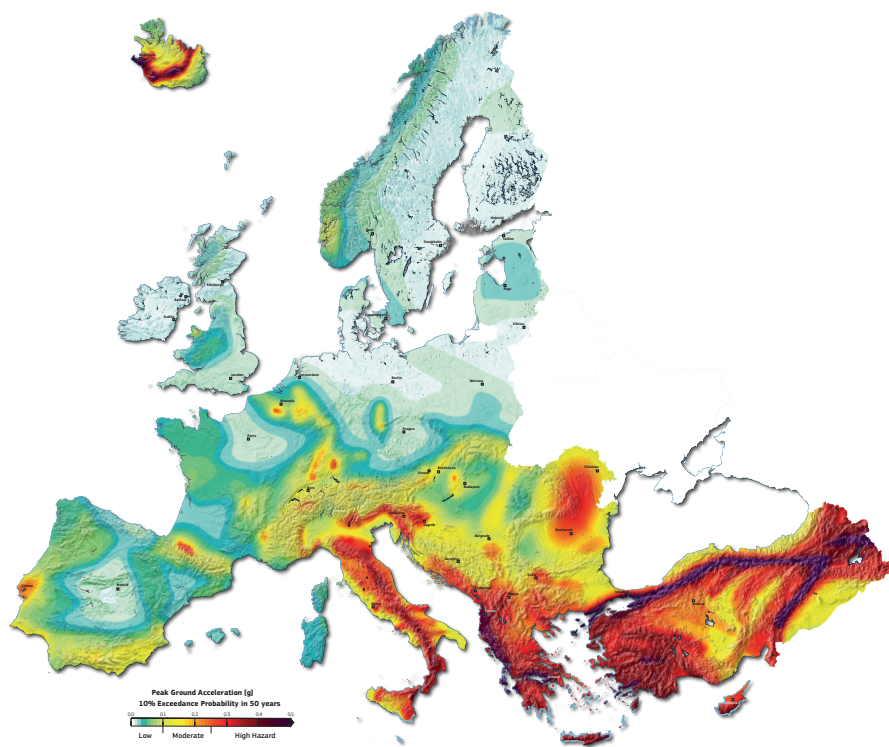


FIGURE 4. – D'après WOESSNER et al. (2015). Carte du risque sismique en Europe issue du projet SPARSE visant à homogénéiser les méthodes de PSHA (*Probabilist Seismic Hazard Assessment*) en Europe.

Afin de prendre pleinement en compte les incertitudes sur les données ainsi que le caractère non-unique de la solution, nous proposons, pour inverser le taux de déformation et plus généralement le champ de vitesses et son gradient, d'utiliser une méthode de résolution du problème inverse par inférence bayésienne. C'est un changement de paradigme visant à considérer la solution sous un aspect probabiliste et non plus déterministe. Ainsi, son but n'est pas



d'obtenir un unique modèle par un processus d'optimisation, mais de déterminer, en fonction des données dont on dispose, la probabilité de différents scénarii susceptibles de les expliquer. Cette approche a déjà été utilisée avec succès dans d'autres domaines des géosciences, comme par exemple en tomographie sismique (*e.g.* BODIN et al., 2009; BODIN, SAMBRIDGE, RAWLINSON et al., 2012; MALINVERNO et BRIGGS, 2004) ou encore sur les caractéristiques du mouvement cosismique (DUPUTEL et al., 2014; GOMBERT et al., 2018) ou intersismique (*e.g.* JOLIVET et al., 2015; JIAN et al., 2020) le long des failles.

Cette thèse a ainsi pour visée de développer une méthode basée sur l'inférence bayésienne, pour inverser des vitesses discrètes provenant de mesures GNSS, afin d'obtenir le champ continu de vitesses 2D, son gradient et le tenseur des taux de déformation associé. L'objectif est multiple :

1. Se défaire des paramètres arbitraires définis par l'utilisateur, dont le choix influence fortement la solution de l'inversion.
2. Tenir compte de la distribution spatiale inégale de l'information et de la déformation.
3. Proposer une estimation robuste des incertitudes correspondant aux résultats de l'inversion.

Ce manuscrit est organisé en 3 chapitres distincts :

Le premier chapitre expose la méthode d'inversion bayésienne développée au cours de cette thèse. Il propose une formulation bayésienne ainsi qu'une paramétrisation du problème, puis détaille l'algorithme *rj-McMC* (*reverse jump Markov chain Monte Carlo*) employé pour le résoudre ainsi que son implémentation.

Le second chapitre est une publication dans la revue *Journal of Geophysical Research* servant de preuve de concept de notre méthode bayésienne auprès de la communauté. Elle comporte une contextualisation et un état de l'art, ainsi qu'une description simplifiée de la méthode développée. L'inversion bayésienne est ensuite appliquée à des jeux de données synthétiques pour évaluer la robustesse de la méthode en comparaison avec une inversion par spline bi-cubiques, suivi d'une expérimentation sur un jeu de données réel couvrant la côte ouest des États-Unis.

Enfin, le troisième chapitre aborde les limites pratiques et théoriques de cette méthode ainsi que les perspectives de développement en cours de réalisation afin de permettre un usage aussi large que possible de la méthode présentée dans ce manuscrit au sein de la communauté scientifique.



# 1. Méthode : inversion bayésienne du tenseur de déformation

## Sommaire

---

<b>1.1. Introduction à l'inférence bayésienne</b> . . . . .	<b>10</b>
1.1.1. Théorème de Bayes . . . . .	10
1.1.2. Description du prior . . . . .	11
1.1.3. Fonction de vraisemblance . . . . .	12
1.1.4. Distribution <i>a posteriori</i> . . . . .	14
1.1.5. Application de l'inférence bayésienne aux problèmes inverses . . . . .	15
<b>1.2. Echantillonnage de la PDF par rj-McMC</b> . . . . .	<b>16</b>
1.2.1. Théorie des Markov chain Monte Carlo pour l'inférence bayésienne . . . . .	16
1.2.2. Algorithme de Metropolis-Hastings . . . . .	17
1.2.3. Extension à un nombre variable de paramètres : reversible jump McMC . . . . .	20
<b>1.3. Application à l'inversion de vitesses GNSS</b> . . . . .	<b>21</b>
1.3.1. Formulation du problème inverse . . . . .	23
1.3.2. Résolution du problème par rj-MCMC . . . . .	31
1.3.3. Optimisation de la vitesse de convergence . . . . .	42
1.3.4. Résultats et sauvegarde des modèles . . . . .	46
<b>1.4. Conclusion</b> . . . . .	<b>48</b>

---

Théoriquement, une connaissance parfaite du champ de vitesses à la surface de la Terre permettrait de calculer, en tout point, le tenseur des taux de déformation par dérivation. Cependant, obtenir ce champ de vitesses à l'aide des seules données GNSS revient à interpoler une surface continue à partir d'observations spatialement discrètes, ce qui constitue un problème dont la solution est non-unique par essence : il existe une infinité de champs de vitesses continus pouvant expliquer ces observations - et donc une infinité de champs de tenseurs des taux de déformation correspondants. De même, les méthodes qui visent à retrouver ce tenseur directement à partir des données GNSS au moyen de modèles physiques n'ont pas non plus de solution unique puisque le résultat dépend des paramètres utilisés lors de l'inversion. De plus, les données ne sont pas parfaites : les valeurs observées aux emplacements des stations GNSS ne correspondent pas exactement au champ de vitesses intersismique à ces positions, puisque celles-ci sont affectées par toute une gamme de phénomènes qui perturbent la mesure de cette vitesse. Afin de prendre pleinement en compte cette incertitude sur les données et l'aspect non-unique de la solution, nous reformulons ce problème inverse dans le cadre de l'inférence bayésienne : il ne s'agit plus de

## 1. Méthode : inversion bayésienne du tenseur de déformation

trouver un unique modèle dont les propriétés expliquent au mieux les données, mais d'établir la probabilité de différents modèles en fonction d'observations imparfaites.

Ce chapitre a ainsi pour objectif de présenter la méthode bayésienne développée au cours de cette thèse pour inverser le tenseur des taux de déformation à partir de données GNSS, en commençant par détailler le fondement théorique de l'inversion bayésienne (1.1).

Il n'est généralement pas possible de décrire analytiquement la solution dans le cas de problèmes inverses non-linéaires. Il faut alors avoir recours à des méthodes d'échantillonnage de la fonction de densité de probabilité *a posteriori*, tels que les algorithmes de type Markov chain Monte Carlo (1.2). Ici, on s'intéressera en particulier à l'algorithme rj-McMC permettant de réaliser une inversion où le nombre de paramètres contraignant le modèle est lui-même une inconnue du problème.

La dernière section de ce chapitre aura pour but de traduire notre problème d'inversion du tenseur des taux de déformation dans le cadre de l'inférence bayésienne, puis de décrire sa résolution par rj-McMC ainsi que l'implémentation algorithmique qui en découle (1.3).

## 1.1. Introduction à l'inférence bayésienne

L'inférence bayésienne propose d'appréhender les données ainsi que les paramètres du modèle non plus de manière déterministe mais sous un angle probabiliste, c'est-à-dire comme des variables aléatoires ayant chacune leur propre distribution de probabilité. L'objectif devient alors de retrouver la fonction de densité de probabilité (*Probability Density Function*, ou PDF) sur ces modèles connaissant les données, dite distribution *a posteriori*. En utilisant la loi de Bayes (BAYES, 1763), il est possible d'intégrer les informations issues des observations à nos connaissances *a priori* du modèle, c'est-à-dire ce que l'on sait du modèle avant de prendre en compte les données, pour obtenir cette distribution. D'innombrables ouvrages aussi bien dans la littérature scientifique que dans celle destinée à l'ingénierie traitent de l'inférence bayésienne à la fois des points de vue théorique et pratique. Nous suggérons par exemple BOX et TIAO (2011) et CARLIN et LOUIS (2008) au lecteur désireux d'approfondir ces questions.

### 1.1.1. Théorème de Bayes

Supposons qu'on dispose d'un ensemble d'observations  $\mathbf{d}_{\text{obs}}$ . Considérons un modèle décrit par le vecteur de ses paramètres  $\mathbf{m}$ . On cherche à déterminer la distribution de probabilité du modèle connaissant les données  $p(\mathbf{m}|\mathbf{d}_{\text{obs}})$ . La définition des probabilités conditionnelles, pour deux événements A et B, s'écrit

$$p(A \cap B) = p(A)p(B|A) = p(B)p(A|B) \quad (1.1)$$

En remplaçant A et B par  $\mathbf{d}_{\text{obs}}$  et  $\mathbf{m}$ , en supposant  $p(\mathbf{d}_{\text{obs}})$  non nulle, on obtient la loi de Bayes :

$$p(\mathbf{m}|\mathbf{d}_{\text{obs}}) = \frac{p(\mathbf{m})p(\mathbf{d}_{\text{obs}}|\mathbf{m})}{p(\mathbf{d}_{\text{obs}})} \quad (1.2)$$

avec  $p(\mathbf{m}|\mathbf{d}_{\text{obs}})$  la probabilité *a posteriori* du modèle,  $p(\mathbf{m})$  sa PDF *a priori*,  $p(\mathbf{d}_{\text{obs}}|\mathbf{m})$  la probabilité d'obtenir nos données connaissant le modèle, appelée vraisemblance ou *likelihood*, et  $p(\mathbf{d}_{\text{obs}})$  la probabilité marginale, qui peut être perçue comme l'intégrale sur l'espace des modèles  $\mathcal{M}$  du terme situé au numérateur et qui agit donc en tant que constante de normalisation dans l'équation 1.2 :

$$p(\mathbf{d}_{\text{obs}}) = \int_{\mathcal{M}} p(\mathbf{d}_{\text{obs}}|\mathbf{m})p(\mathbf{m})d\mathbf{m} \quad (1.3)$$

ce qui donne, en réinjectant dans l'équation 1.2 :

$$p(\mathbf{m}|\mathbf{d}_{\text{obs}}) = \frac{p(\mathbf{m})p(\mathbf{d}_{\text{obs}}|\mathbf{m})}{\int_{\mathcal{M}} p(\mathbf{d}_{\text{obs}}|\mathbf{m})p(\mathbf{m})d\mathbf{m}} \quad (1.4)$$

Dans le cas général, comme  $p(\mathbf{d}_{\text{obs}})$  ne dépend pas de  $\mathbf{m}$ , il n'influe pas sur la probabilité des différents modèles les uns par rapport aux autres, et l'équation 1.4 peut alors s'exprimer :

$$p(\mathbf{m}|\mathbf{d}_{\text{obs}}) \propto p(\mathbf{m})p(\mathbf{d}_{\text{obs}}|\mathbf{m}) \quad (1.5)$$

En d'autres termes, la distribution de probabilité du modèle  $\mathbf{m}$  postérieure aux données  $\mathbf{d}_{\text{obs}}$  est proportionnelle au produit de la distribution de  $\mathbf{m}$  préalable aux observations et de la vraisemblance du modèle aux données.

Ainsi, l'inférence bayésienne peut, philosophiquement, être assimilée à un processus d'apprentissage où notre connaissance *a priori* du modèle est modifiée par la prise en compte de nouvelles données, pour donner naissance au modèle *a posteriori*. Il est à noter que ce processus peut être effectué de manière séquentielle : la distribution de probabilité des modèles *a posteriori* peut devenir le nouveau prior, qui sera à son tour mis à jour par de nouvelles observations, *etc* (e.g. YARDIM et al., 2013).

### 1.1.2. Description du prior

La fonction de densité de probabilité *a priori*  $p(\mathbf{m})$ , ou *prior*, représente l'information dont on dispose sur le modèle avant toute observation des données. La caractérisation de cette information disponible a priori est souvent perçue comme l'un des points les plus délicats - et controversés - de la formulation bayésienne. En réalité, il s'agit à la fois d'une force et d'une faiblesse de cette approche : elle permet d'inclure dans le processus d'inversion les connaissances préalables dont on dispose (qu'il s'agisse des résultats d'études précédentes ou de l'estimation raisonnable qu'en fait un expert du domaine), à condition toutefois que ces informations puissent être traduites sous la forme d'une distribution de probabilité (GOUVEIA et SCALES, 1998; SCALES et SNIEDER, 1998).

## 1. Méthode : inversion bayésienne du tenseur de déformation

Plusieurs approches sont possibles pour déterminer un prior adapté à l'objet que l'on souhaite étudier.

- Une première solution, en l'absence totale d'informations préalables sur le modèle attendu, est d'utiliser un prior dit *non-informatif* tel que le prior de Jeffreys (JEFFREYS, 1946). Il faut cependant garder à l'esprit qu'aucun choix de prior n'est véritablement neutre ; le terme « prior non-informatif » est un abus de langage qu'on pourrait remplacer par « prior objectif » en ce qu'il ne comporte pas de choix subjectif de l'opérateur (voir BOX et TIAO (2011) sur ce sujet).
- Afin de ne pas favoriser tel ou tel modèle par rapport aux autres, on peut choisir une distribution uniforme sur l'espace des modèles, à condition que le support de la distribution *a priori* soit compact afin que celle-ci demeure intégrable (ou sommable dans le cas discret).
- On peut également choisir de restreindre le prior à une distribution connue (généralement gaussienne) dont les caractéristiques seront fixées en fonction de ce qu'il est raisonnable de supposer pour le modèle. Ce choix est particulièrement adapté lorsqu'on dispose d'informations fiables issues de travaux antérieurs ou d'une itération précédente du processus d'inférence bayésienne.

Lorsque la distribution *a posteriori* et *a priori* appartiennent à la même famille de distributions, on parle alors de prior conjugué à la fonction de vraisemblance (SCHLAIFER et RAIFFA, 1961). Cette construction offre l'avantage de proposer une solution analytique pour le posterior, qui n'est pas toujours disponible dans le cas général.

Le choix du prior est un point vivement débattu de l'inférence bayésienne, en ce qu'un mauvais choix de prior peut avoir un impact extrêmement fort sur la solution. Par exemple, un prior qui accorderait une probabilité nulle au « vrai » modèle conduira à obtenir une probabilité également nulle sur le posterior en vertu de l'équation 1.5.

### 1.1.3. Fonction de vraisemblance

En premier lieu, la vraisemblance  $p(\mathbf{d}_{\text{obs}}|\mathbf{m})$  s'interprète mathématiquement comme la probabilité conditionnelle des données connaissant le modèle. En pratique, on ne dispose que d'un unique jeu de données et on ne peut faire varier que le modèle. Si l'on considère les données  $\mathbf{d}_{\text{obs}}$  comme étant fixées, on peut percevoir la vraisemblance  $p(\mathbf{d}_{\text{obs}}|\mathbf{m})$  comme une fonction de  $\mathbf{m}$ . Elle quantifie donc la capacité d'un modèle à expliquer les observations et joue un rôle particulièrement important dans l'inférence bayésienne puisque c'est à travers elle que les données vont pouvoir modifier notre connaissance *a priori* des paramètres du modèle.

Afin de mieux visualiser ce que représente cette fonction de vraisemblance, on peut imaginer un problème simple, proche d'une variante continue du problème du char allemand (voir par exemple CLARK et al., 2021), dans lequel on dispose de  $n$  observations parfaites indépendantes  $\mathbf{d}_{\text{obs}}$  tirées depuis une distribution uniforme sur  $[0, \phi_{\text{true}}]$ , dont on connaît la nature mais

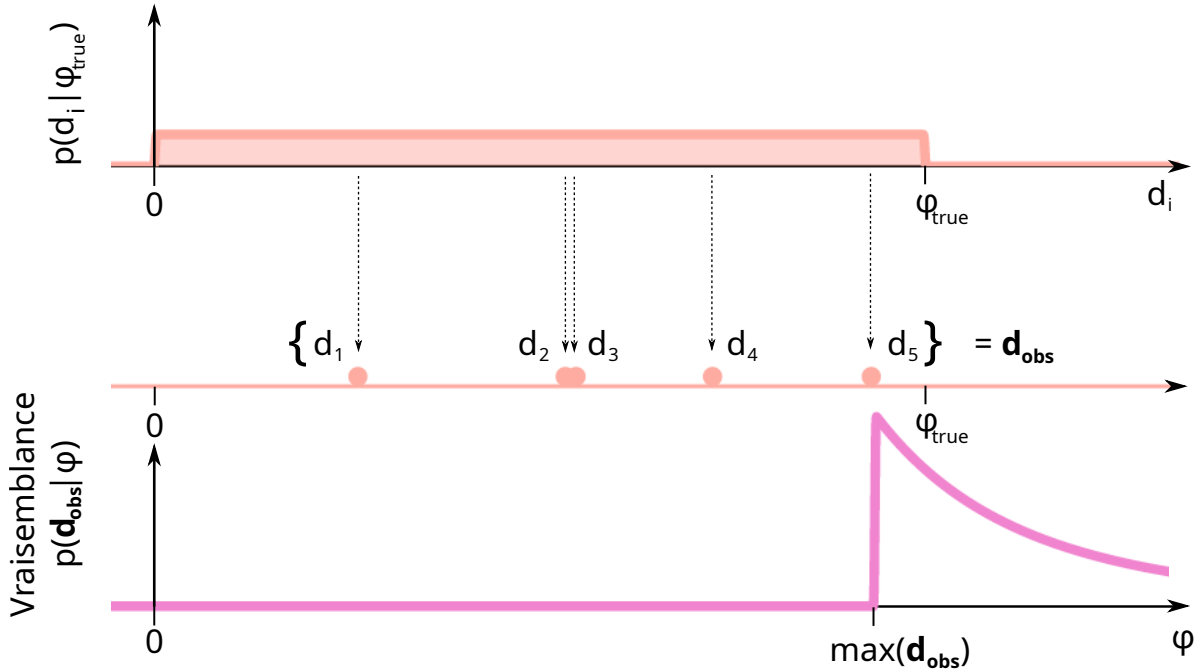


FIGURE 1.1. – Exemple simple de fonction de vraisemblance dans l'inférence bayésienne. Le phénomène que l'on cherche à étudier est représenté par la distribution uniforme en première ligne, les observations  $\mathbf{d}_{\text{obs}}$  issues de cette distribution sur la seconde. La densité de probabilité de la vraisemblance en fonction de  $\varphi$  est représentée sur la dernière ligne.

pas la borne supérieure. On cherche à retrouver cette borne supérieure à l'aide de l'inférence bayésienne : notre modèle est représenté par une distribution uniforme sur  $[0, \varphi]$ , où  $\varphi$  est une inconnue que l'on cherche à déterminer. Ainsi, notre fonction de vraisemblance  $p(\mathbf{d}_{\text{obs}} | \varphi)$  peut s'exprimer analytiquement

$$p(\mathbf{d}_{\text{obs}} | \varphi) = \begin{cases} 0 & \text{si } \varphi < \max(\mathbf{d}_{\text{obs}}) \\ \prod_{i=1}^n \frac{1}{\varphi} = \frac{1}{\varphi^n} & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.6)$$

En effet, si la valeur proposée pour la borne supérieure de la distribution est inférieure à l'une des observations, la probabilité de cette observation est nulle. Sinon, elle atteint son maximum pour  $\varphi = \max(\mathbf{d}_{\text{obs}})$  puis décroît selon  $\prod_{i=1}^n \frac{1}{\varphi}$  puisque chaque observation a une probabilité uniforme d'être tirée sur  $[0, \varphi]$  dans notre modèle (figure 1.1).

On notera que l'expression de la vraisemblance dépend du modèle statistique de la variable aléatoire  $\mathbf{d}_{\text{obs}}$  dans le cadre de notre modèle, et donc de la manière dont celui-ci est paramétrisé : un lien complexe entre les paramètres et les observations peut rapidement conduire à une fonction de vraisemblance extrêmement difficile à intégrer, opération nécessaire au calcul de la moyenne ou de la médiane de  $p(\mathbf{m} | \mathbf{d}_{\text{obs}})$ .

### 1.1.4. Distribution *a posteriori*

En effectuant le produit du prior et de la fonction de vraisemblance, on obtient la fonction de densité de probabilité *a posteriori* des modèles  $p(\mathbf{m}|\mathbf{d}_{\text{obs}})$ , ce qui constitue l'objectif de l'inférence bayésienne. Comme il s'agit d'une distribution de probabilité, il n'est pas possible d'exhiber un modèle unique qu'on pourrait ensuite interpréter : au mieux, on peut extraire le modèle de probabilité maximale ou des indicateurs statistiques sur la distribution lorsque ceux-ci ont un sens (par exemple, la moyenne ou la médiane d'une distribution gaussienne). Une propriété intéressante de la PDF *a posteriori* est d'indiquer la probabilité que le modèle  $\mathbf{m}$  se situe dans un sous-espace donné de l'espace des paramètres  $\mathcal{M}$ , permettant ainsi de déterminer des intervalles de confiance exploitables dans un cadre décisionnel.

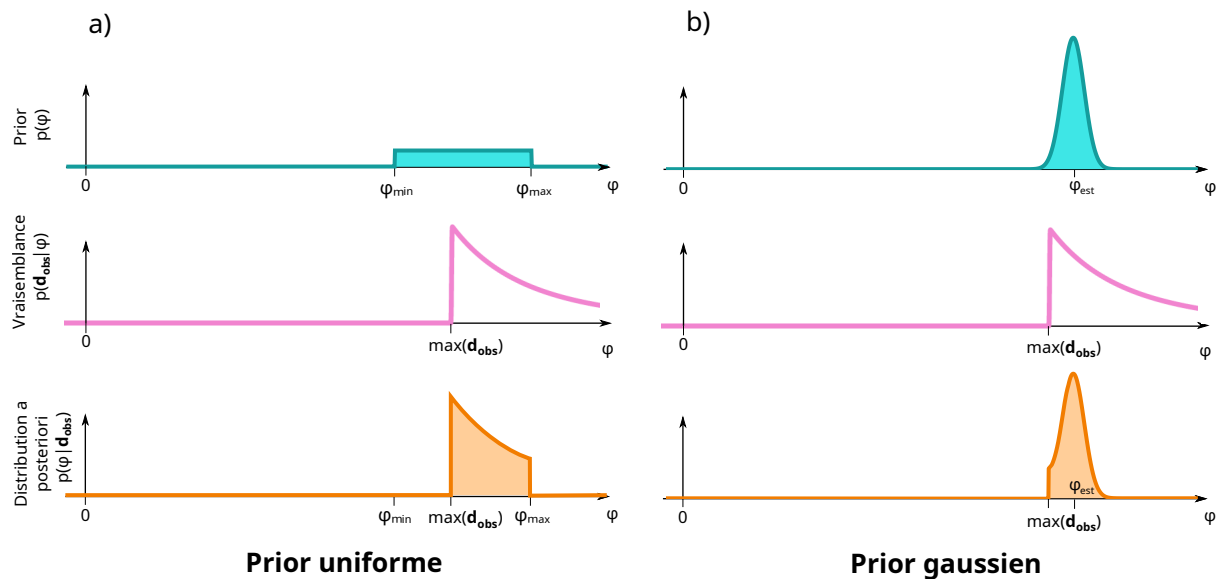


FIGURE 1.2. – Influence du prior sur la distribution *a posteriori* dans un exemple simple. En combinant la fonction de vraisemblance issue des observations (voir figure 1.1) avec un prior uniforme en **a**) ou un prior gaussien en **b**), on obtient des distributions *a posteriori* différentes.

Afin de visualiser l'influence du prior sur la PDF *a posteriori* du modèle, on peut reprendre l'exemple précédent en comparant les résultats obtenus pour deux priors différents :

- Dans un premier cas, on estime avoir des bornes raisonnables pour contraindre la limite supérieure du support de la distribution qu'on recherche, sans toutefois disposer de plus d'informations pour choisir une valeur en particulier. On choisit donc d'imposer un prior uniforme entre ces bornes pour la valeur du paramètre  $\phi$ .
- Dans un second cas, on possède une bonne estimation de la valeur de cette borne supérieure, sans contrainte sur sa valeur maximale ou minimale. On décide donc d'employer un prior

gaussien centré autour de cette estimation, avec un écart-type correspondant au degré de confiance qu'on lui octroie.

On obtient alors deux distributions *a posteriori*  $p(\mathbf{m}|\mathbf{d}_{\text{obs}})$  différentes après avoir mis à jour les priors à l'aide des observations selon l'équation 1.5 (figure 1.2). On voit ainsi que le choix du prior n'est jamais sans conséquences, même si, dans le cas général, un prior faiblement informatif tel qu'un prior uniforme permet de laisser aux données la plus grande influence possible dans la détermination de la distribution *a posteriori*; cependant même ce choix n'est pas véritablement neutre. Supposons qu'on ne dispose que d'une unique observation : la vraisemblance s'exprimera alors

$$p(d_1|\varphi) = \begin{cases} 0 & \text{si } \varphi < d_1 \\ \frac{1}{\varphi} & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.7)$$

qui n'est pas une densité de probabilité correctement définie puisque non intégrable sur  $\mathcal{R}^+$ . Elle n'a donc pas de moment statistique, et même dans le cas d'un prior uniforme, sa borne supérieure ne pourra jamais être « suffisamment grande » pour ne pas influencer sur les moments de la distribution *a posteriori*.

### 1.1.5. Application de l'inférence bayésienne aux problèmes inverses

Un problème courant dans le domaine de la physique est de déterminer les propriétés d'un objet ou d'un phénomène à partir des observations de ses effets. Par exemple, retrouver un champ vectoriel  $f : \mathcal{R}^2 \rightarrow \mathcal{R}^2$  à partir d'observations discrètes de ce champ est un cas typique de problème inverse. En pratique, la solution est approximée par une fonction dépendant d'un nombre fini de paramètres, qui permet de calculer de manière prédictive les observations en fonction de ceux-ci :

$$\mathbf{d}_{\text{obs}} = g(\mathbf{m}) \quad (1.8)$$

où  $g$  correspond au problème direct (TARANTOLA, 2005) et décrit en creux la manière dont notre modèle est paramétré. De cette paramétrisation dépendent les différentes caractéristiques du problème inverse (linéarité, dépendance des observations aux paramètres, unicité ou non de la solution, ...); il s'agit donc d'une étape importante du processus.

Le problème inverse consiste à déterminer le jeu de paramètre  $\mathbf{m}$  permettant d'expliquer les observations  $\mathbf{d}_{\text{obs}}$ . Cependant, dans la réalité, la présence d'erreurs statistiques vient perturber l'équation 1.8, qui se réécrit alors

$$\mathbf{d}_{\text{obs}} = g(\mathbf{m}) + \varepsilon \quad (1.9)$$

où  $\varepsilon$  correspond aux résidus sur les données et inclut à la fois les erreurs de mesure sur les observations liées à l'imperfection du matériel, mais également l'erreur engendrée par le choix de modélisation traduit par  $g$ , qui n'est qu'une approximation de la réalité.



## 1. Méthode : inversion bayésienne du tenseur de déformation

Lorsque l'on souhaite employer l'inférence bayésienne pour résoudre le problème inverse, ces erreurs sont considérées comme une variable aléatoire qui vient perturber les observations. Elles jouent un rôle crucial dans l'inversion, car la distribution de la vraisemblance est alors déterminée par la distribution du modèle statistique de l'erreur sur les données :

$$p(\mathbf{d}_{\text{obs}}|\mathbf{m}) = p(\boldsymbol{\varepsilon}) \quad (1.10)$$

Ce modèle n'est pas forcément connu avec exactitude, notamment parce que l'erreur de modélisation peut s'avérer être particulièrement délicate à quantifier (TARANTOLA, 2005).

## 1.2. Echantillonnage de la PDF par rj-McMC

La détermination et l'exploitation de la distribution *a posteriori* revient en pratique à effectuer des intégrations multidimensionnelles complexes. À l'exception notable des cas où prior et vraisemblance sont conjugués, ces intégrales sont analytiquement incalculables dès que l'on sort des configurations les plus simples (telles qu'un modèle linéaire associé à une vraisemblance gaussienne) (CARLIN et LOUIS, 2008). Différentes stratégies ont alors été développées pour permettre d'obtenir une approximation du résultat.

Une première solution est d'utiliser un modèle asymptotique afin d'approximer analytiquement la distribution *a posteriori*, telle que la méthode de Laplace présentée par TIERNEY et KADANE (1986). Cependant, ces approximations emploient des hypothèses fortes sur la forme de la distribution *a posteriori* qui restreignent fortement leur usage. De plus, leur complexité numérique augmente exponentiellement avec le nombre de paramètres du modèle, rendant leur usage prohibitif dans les problèmes de haute dimension.

Une alternative est d'utiliser une méthode dérivée de l'algorithme d'espérance-maximisation (DEMPSTER et al., 1977 ; GIVENS et HOETING, 2012) afin de déterminer le mode de probabilité maximal du posterior. Cependant, si l'on souhaite estimer la distribution complète, la seule manière réaliste de procéder est d'évaluer le posterior en différents points de l'espace des modèles via des techniques d'échantillonnage. Lorsque la dimension de cet espace devient trop importante, un échantillonnage uniforme n'est plus envisageable; il faut alors recourir à des algorithmes itératifs de type McMC (*Markov chain Monte Carlo*).

### 1.2.1. Théorie des Markov chain Monte Carlo pour l'inférence bayésienne

L'idée fondamentale des méthodes de Markov chain Monte Carlo (noté McMC) pour l'inférence bayésienne est de générer une chaîne de modèles de manière stochastique telle que la distribution de ces modèles dans  $\mathcal{M}$  corresponde à la distribution *a posteriori*. Chaque modèle de cette chaîne est obtenu de manière séquentielle à partir du précédent suivant une distribution de probabilité appelée loi de transition : chaque état-modèle dépend exclusivement de celui qui l'a précédé, formant ainsi une chaîne de Markov. L'avantage par rapport à un échantillonnage uniforme est que la chaîne peut explorer principalement les régions de forte probabilité dans

l'espace des modèles, obtenant ainsi une bien meilleure description du posterior avec un nombre largement inférieur d'échantillons.

Une propriété importante des chaînes de Markov est que sous réserve que cette chaîne soit irréductible (*i.e.* que tous les états soient accessibles à partir de n'importe quel autre état) et récurrente positive (*i.e.* que l'espérance du temps de retour de tout état - le nombre d'itérations nécessaires à ce que la chaîne, en partant de cet état, y revienne - soit fini), alors cette chaîne admet une distribution stationnaire : la distribution des modèles est asymptotiquement stable. Il s'agit donc de construire une chaîne de modèles vérifiant ces deux conditions et munie d'une loi de transition telle que cette distribution stationnaire soit proportionnelle à la distribution *a posteriori* recherchée : on dit alors que la chaîne converge vers cette distribution (TIERNEY, 1994).

Il reste à choisir une méthode d'échantillonnage qui décrit la manière dont on passe d'un modèle au suivant au sein de la chaîne de Markov. Dans la plupart des travaux employant les McMC dans le cadre de l'inférence bayésienne, le choix se porte soit sur l'échantillonnage de Gibbs (S. GEMAN et D. GEMAN, 1984; GELFAND et A. F. SMITH, 1990) ou sur l'algorithme de Metropolis-Hastings (METROPOLIS et al., 1953; HASTINGS, 1970). C'est ce second algorithme qui sert de base aux travaux conduits pendant cette thèse.

Ces différentes méthodes d'échantillonnage sont plus ou moins performantes selon le type de problème et la nature du posterior que l'on cherche à explorer; cependant, elles ne peuvent pas fonctionner lorsque le modèle est décrit par un nombre trop important de paramètres : chaque dimension ajoutée au problème augmente d'autant l'espace de la distribution *a posteriori* des modèles, et donc le temps nécessaire à ce que celle-ci soit correctement approximée. C'est une manifestation du *fléau des dimensions*, qui oblige à adopter des paramétrisations n'employant qu'un nombre raisonnable de paramètres.

### 1.2.2. Algorithme de Metropolis-Hastings

Le principe fondateur de l'algorithme de Metropolis (et de son extension Metropolis-Hastings) est, à chaque itération, de tirer aléatoirement un nouveau modèle  $\mathbf{m}'$  dans une distribution de probabilité  $q(\mathbf{m}' | \mathbf{m})$ , appelée loi de transition, qui dépend exclusivement de l'état précédent  $\mathbf{m}$ .

Ensuite, ce nouveau modèle est accepté ou refusé en fonction du ratio des probabilités dans le posterior, appelé taux d'acceptance :

$$\alpha(\mathbf{m} \rightarrow \mathbf{m}') = \frac{p(\mathbf{m}' | \mathbf{d}_{\text{obs}})}{p(\mathbf{m} | \mathbf{d}_{\text{obs}})} = \frac{p(\mathbf{m}')p(\mathbf{d}_{\text{obs}} | \mathbf{m}')}{p(\mathbf{m})p(\mathbf{d}_{\text{obs}} | \mathbf{m})} \quad (1.11)$$

Si ce ratio est supérieur ou égal à 1, alors notre nouveau modèle a une probabilité plus élevée dans le posterior et est conservé. Si ce ratio est inférieur à 1, le nouveau modèle est accepté avec une probabilité  $\alpha(\mathbf{m} \rightarrow \mathbf{m}')$ . Si le nouveau modèle est refusé, on garde l'ancien pour l'itération suivante. Cette loi d'acceptance garantit à la fois l'ergodicité de la chaîne, c'est-à-dire sa capacité à explorer l'ensemble de l'espace des modèles - le fait d'accepter les modèles de moindre probabilité permet de ne pas converger irrémédiablement vers un maximum de probabilité local, où la chaîne deviendrait alors stationnaire sur un unique modèle -, mais également la

1. Méthode : inversion bayésienne du tenseur de déformation

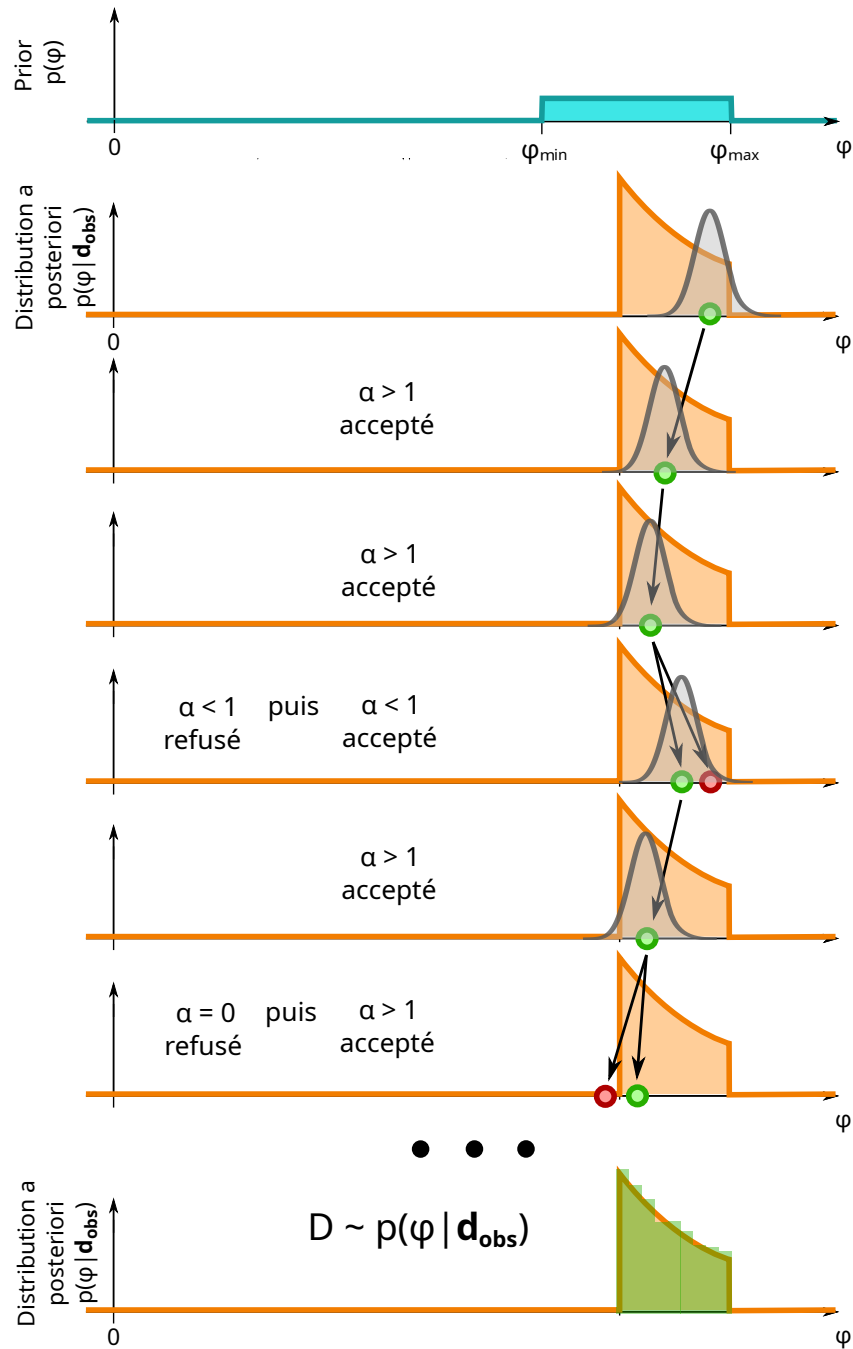


FIGURE 1.3. – Exemple élémentaire d'utilisation de l'algorithme de Metropolis-Hastings. Chaque modèle de la chaîne est obtenu par tirage aléatoire sur une gaussienne (tronquée afin de ne pas excéder les bornes admissibles pour le paramètre  $\varphi$ ) représentée en gris. Les modèles acceptés sont représentés en vert, ceux refusés en rouge. Lorsque suffisamment de modèles ont été tirés, leur distribution  $D$ , représentée sous forme d'histogramme en vert sur le dernier graphique, approxime  $p(\mathbf{m} | \mathbf{d}_{\text{obs}})$ .

convergence de la distribution stationnaire de la chaîne vers  $p(\mathbf{m}|\mathbf{d}_{\text{obs}})$  (GILKS et al., 1995). On note que la probabilité des données  $p(\mathbf{d}_{\text{obs}})$  se simplifie dans le ratio des vraisemblances.

Dans le cas de l’algorithme de Metropolis, il est nécessaire que la probabilité de transition soit symétrique, c’est-à-dire que  $q(\mathbf{m}'|\mathbf{m}) = q(\mathbf{m}|\mathbf{m}')$ . Une loi de transition usuelle est la loi gaussienne centrée sur  $\mathbf{m}$  d’écart-type constant, qui respecte ce critère de symétrie et permet d’augmenter les chances de visiter les points les plus proches du modèle actuel. Cette approche est appelée *random walk Metropolis* et se traduit en pratique par le tirage aléatoire d’une perturbation dans une distribution gaussienne de moyenne nulle, appliquée à l’un des paramètres du modèle. Les différents paramètres sont donc modifiés séquentiellement le long de la chaîne de modèles.

L’algorithme de Metropolis-Hastings est une généralisation où l’on autorise l’utilisation d’une loi de transition dissymétrique en changeant le terme d’acceptance de l’équation 1.11 :

$$\alpha(\mathbf{m} \rightarrow \mathbf{m}') = \frac{p(\mathbf{m}'|\mathbf{d}_{\text{obs}})q(\mathbf{m}|\mathbf{m}')}{p(\mathbf{m}|\mathbf{d}_{\text{obs}})q(\mathbf{m}'|\mathbf{m})} \quad (1.12)$$

Un résumé visuel de ce processus, réalisé en reprenant l’exemple précédent, est présenté sur la figure 1.3.

Bien que la distribution statistiquement stationnaire de la chaîne finisse toujours par être asymptotiquement atteinte, il n’est évidemment pas envisageable de tirer une infinité de modèles. Comme la distribution cible n’a que rarement une forme standard, cet état de convergence suffisant ne peut généralement pas être formellement démontré, et sera plutôt établi à l’aide d’outils de diagnostic empiriques (*e.g.* COWLES et CARLIN, 1996; S. P. BROOKS et ROBERTS, 1998; ROY, 2020) visant généralement à s’assurer qu’aucun paramètre ne dévie par rapport à la distribution stationnaire.

Afin d’éviter que la contribution des premières itérations, qui peuvent suivre une distribution potentiellement très différente dépendamment du modèle de départ, ne vienne perturber la distribution finale, on emploie alors un *burn-in* qui élimine les premiers modèles afin d’accélérer la vitesse de convergence (figures 1.9 et 1.11). Par ailleurs, les échantillons de la PDF *a posteriori* ne sont pas indépendants les uns des autres : il existe une corrélation importante entre deux itérations successives de la chaîne. Il est donc nécessaire d’en éliminer une part importante en ne conservant qu’un modèle toutes les  $n$  itérations, avec  $n$  assez grand pour que le nouveau modèle puisse être considéré comme suffisamment indépendant du précédent modèle retenu (MACKEY, 2003).

Le choix de la loi de transition a également un impact important sur la vitesse de convergence. Bien qu’il existe une grande liberté dans le choix de la distribution  $q(\mathbf{m}'|\mathbf{m})$ , un choix douteux pourrait fortement augmenter le nombre de modèles requis afin d’échantillonner correctement le posterior. Dans le cas d’une loi de transition gaussienne, par exemple, si l’écart-type est trop grand, chaque nouveau modèle proposé risque d’être très éloigné du précédent, rendant complexe l’exploration des régions de forte densité de probabilité et provoquant un fort taux de rejet. À l’inverse, si l’on choisit un écart-type trop restreint, les modèles seront choisis à proximité les uns des autres et seront aisément acceptés puisqu’ils auront des vraisemblances similaires; cependant,

## 1. Méthode : inversion bayésienne du tenseur de déformation

l'exploration de l'espace des paramètres sera d'autant plus lente que chaque déplacement sera faible. On peut toutefois noter que la distribution stationnaire théorique de la chaîne n'est pas plus impactée par l'efficacité de l'exploration que par les premiers modèles explorés, et donc la distribution *a posteriori* non plus, si l'on dispose d'un temps de calcul illimité. Ainsi, un mauvais choix de loi de transition ne fausse pas l'inférence sur le plan mathématique, mais elle rend son application inefficace sur le plan numérique (GEYER, 1992).

Un critère fréquemment retenu pour évaluer la vitesse de convergence d'un algorithme de Metropolis-Hastings est le taux moyen de modèles acceptés au cours du temps, un taux trop élevé indiquant une exploration trop lente, et un taux trop faible, une exploration inefficace (S. P. BROOKS et GELMAN, 1998; TIERNEY et MIRA, 1999; J. S. LIU et DAI, 2020). La solution consiste à adapter la densité de probabilité de la loi de transition afin d'équilibrer le taux d'acceptation autour de 30 %, valeur proposée empiriquement par GELMAN et al. (1996).

Une autre approche est de permettre à l'algorithme de redéfinir, au cours de l'inversion, les caractéristiques de la loi de transition afin d'optimiser le ratio de modèles acceptés. Cette solution, appelée MCMC adaptatif, doit être utilisée avec précaution, le risque étant que le changement de loi de transition ne finisse par briser l'ergodicité de la chaîne, entraînant la perte de son irréductibilité et de sa capacité à atteindre sa distribution stationnaire (voir ANDRIEU et THOMS (2008) et ROBERTS et ROSENTHAL (2009) pour une discussion à ce sujet).

### 1.2.3. Extension à un nombre variable de paramètres : reversible jump MCMC

Jusqu'ici, nous avons considéré des modèles présentant un nombre constant de paramètres. Cependant, la dimension du modèle peut également être une inconnue du problème, ou, en d'autres termes : « le nombre de choses que l'on ignore est l'une des choses que l'on ignore » (GREEN, 2003). Pour pouvoir effectuer un échantillonnage tel que présenté précédemment, il faut alors être capable de générer et de comparer des modèles de dimensions variables.

GREEN (1995) propose une extension de l'algorithme de Metropolis-Hastings, nommée *reversible jump Markov chain Monte Carlo* (rj-MCMC), permettant d'échantillonner un posterior transdimensionnel. Comme précédemment, à chaque itération de la chaîne de Markov, on tire un modèle  $\mathbf{m}'$  selon la distribution  $q(\mathbf{m}' | \mathbf{m})$  ne dépendant que du modèle précédent  $\mathbf{m}$ . Cependant,  $\mathbf{m}'$  peut également être d'une dimension différente de  $\mathbf{m}$ .

On calcule alors le taux d'acceptance  $\alpha(\mathbf{m} \rightarrow \mathbf{m}')$  afin de déterminer si l'on garde ou non le nouveau modèle. Cependant, afin de tenir compte du changement de dimension potentiel, celui-ci est modifié par rapport à l'équation 1.12 :

$$\begin{aligned}\alpha(\mathbf{m} \rightarrow \mathbf{m}') &= \frac{p(\mathbf{m}' | \mathbf{d}_{\text{obs}}) q(\mathbf{m} | \mathbf{m}')}{p(\mathbf{m} | \mathbf{d}_{\text{obs}}) q(\mathbf{m}' | \mathbf{m})} * |\mathbf{J}| \\ &= \frac{p(\mathbf{d}_{\text{obs}} | \mathbf{m}') p(\mathbf{m}') q(\mathbf{m} | \mathbf{m}')}{p(\mathbf{d}_{\text{obs}} | \mathbf{m}) p(\mathbf{m}') q(\mathbf{m}' | \mathbf{m})} * |\mathbf{J}| \end{aligned} \quad (1.13)$$

où  $|\mathbf{J}|$  est le jacobien de la transformation de  $\mathbf{m}$  à  $\mathbf{m}'$ . On conserve ensuite le modèle avec une probabilité de 1 si  $\alpha > 1$ , et de  $\alpha$  sinon.

Ce terme supplémentaire dans le taux d'acceptance est nécessaire pour préserver la convergence de la chaîne de Markov vers la distribution *a posteriori* du modèle. Il apparaît comme une compensation du changement de variable (HASTIE et GREEN, 2012) : lorsque  $\mathbf{m}'$  est d'une dimension supérieure à  $\mathbf{m}$ , il faut générer une variable aléatoire afin d'attribuer une valeur au paramètre nouvellement créé (DENISON et al., 2002; GREEN, 2003). Lors du processus inverse, le jacobien prend la valeur inverse par symétrie. Bien évidemment, si  $\mathbf{m}'$  et  $\mathbf{m}$  sont de même dimension, alors la matrice jacobienne sera la matrice identité de déterminant 1, et on retrouve l'acceptance de Metropolis-Hastings. Une vue synthétique de l'algorithme de rj-McMC est schématisée sur la figure 1.4.

La vitesse de convergence dans le cadre transdimensionnel ne peut pas être établie de la même manière que dans le cas unidimensionnel, à cause précisément de la variation de l'espace à échantillonner. D'autres techniques, s'appuyant par exemple sur la distribution du nombre de paramètres au cours de l'inversion, sont alors mises en place pour définir aussi bien la longueur du *burn-in* que le nombre total d'échantillons requis (CASTELLOE et ZIMMERMAN, 2002; SISSON, 2005; SOMOGYVÁRI et REICH, 2020).

## 1.3. Application à l'inversion de vitesses GNSS

Comme exposé précédemment, l'obtention d'un champ vectoriel à partir de données spatialement discrètes est un problème mal posé sans unicité de la solution. De plus, le bruit qui affecte ces observations joue un rôle majeur dans notre connaissance réelle de la déformation. Nous proposons donc d'aborder cette inversion d'un point de vue probabiliste afin de prendre en compte la pleine mesure des incertitudes qui affectent le résultat.

Le problème inverse que nous cherchons à résoudre consiste à obtenir la distribution de probabilité sur les modèles de vitesse surfacique grâce aux données GNSS dont nous disposons. Il s'agit donc avant tout d'une inversion du champ de vitesses, réalisée par l'échantillonnage de la PDF *a posteriori* à l'aide d'un algorithme de type rj-McMC. Cependant, un choix judicieux de paramétrisation nous permet de calculer pour chaque modèle échantillonné le tenseur des taux de déformation ainsi que ses principales caractéristiques, notamment la divergence, le rotationnel, le  $2^{nd}$  invariant et les axes principaux de déformation. On dispose alors d'une distribution de probabilité sur ceux-ci, qui est liée à la distribution *a posteriori* sur les vitesses.

Bien que la Terre soit sphérique en première approximation, nous nous plaçons ici dans un repère cartésien en deux dimensions, dénommés axes  $x$  et  $y$  par la suite. Nous faisons l'hypothèse que sous réserve d'une projection adaptée à la portion de la sphère étudiée, les déformations de distance ou d'angle induites par la sphéricité restent négligeables pour des inversions régionales du champ de vitesses et du tenseur des taux de déformation. Une inversion à l'échelle globale ne respecterait évidemment pas cette hypothèse et nécessitera des adaptations (voir 3.5.3 et Annexe B).

1. Méthode : inversion bayésienne du tenseur de déformation

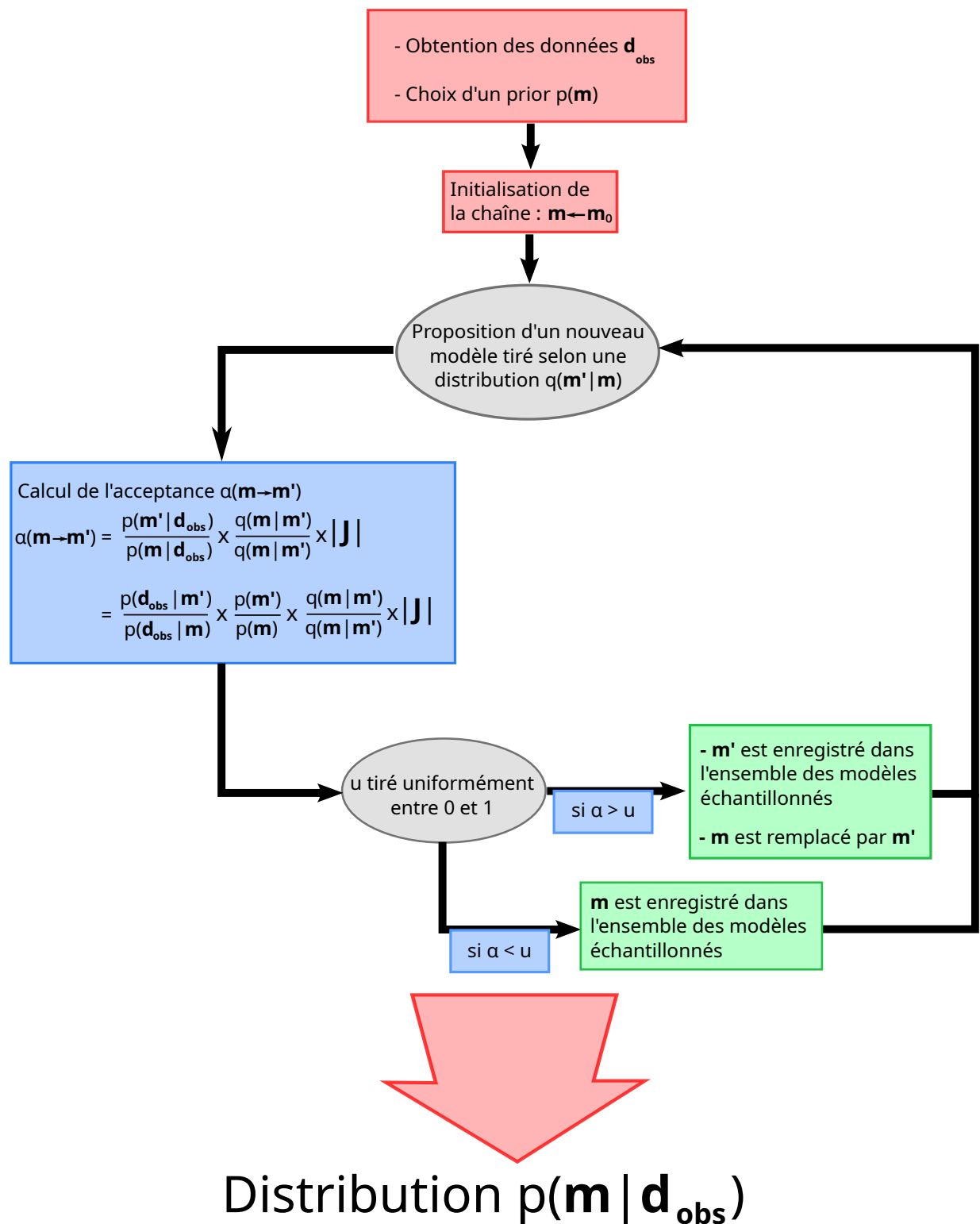


FIGURE 1.4. – Fonctionnement schématique de l'algorithme rj-McMC

### 1.3.1. Formulation du problème inverse

#### Nature des données

Le principe du positionnement GNSS (*Global Navigation Satellite System*) repose sur la trilatération du signal émis par une balise sol grâce à un réseau de satellites en orbite autour de la Terre : le premier de ces réseaux, le réseau GPS (*Global Positioning System*), né entre les années 80 et 90 des besoins de l'armée américaine, est le plus connu d'entre eux. Il est ainsi possible d'obtenir la position tridimensionnelle de n'importe quel point à la surface de la Terre. L'enregistrement de cette position à intervalles réguliers, typiquement à une fréquence journalière, résulte en un nuage de points correspondant au déplacement de cette station dans l'espace au cours du temps, appelée série temporelle (figure 1.5).

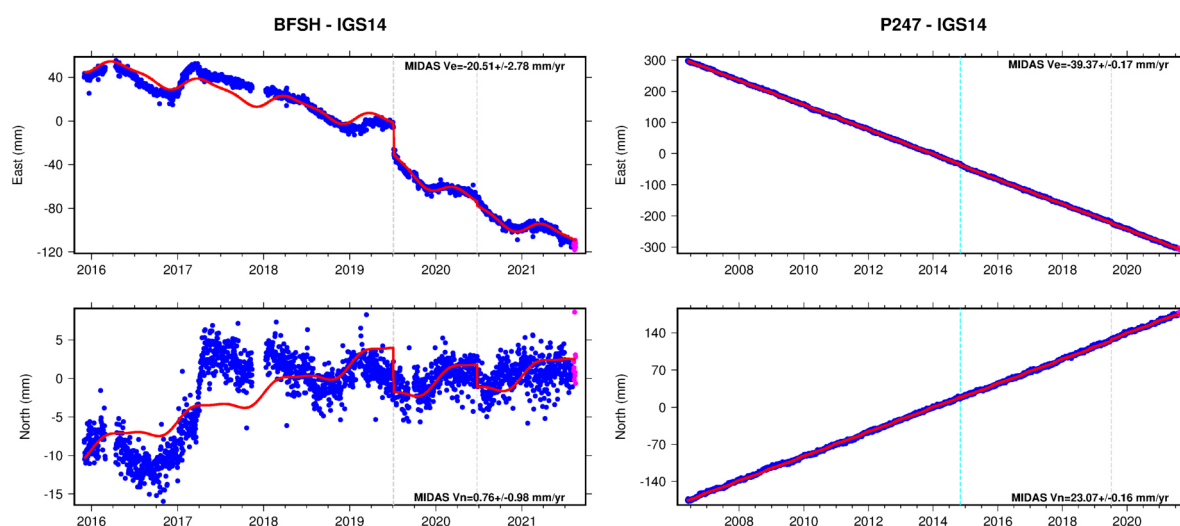


FIGURE 1.5. – Adapté depuis le site du Nevada Geodetic Laboratory (BLEWITT et al., 2018). Séries temporelles pour les composantes nord et est de deux stations GPS. Les lignes pointillées grises correspondent à des séismes connus, les lignes pointillées bleu cyan à des changements de matériel sur la station. La ligne rouge correspond au modèle de déplacement calculé par MIDAS (voir 2.3). Les déplacements intersismiques prédits par le modèle pour chaque composante ainsi que leurs incertitudes associées sont indiqués à droite dans les cadres correspondants.

Ces positions, en plus du bruit introduit par les perturbations affectant la trilatération, sont la conséquence d'un ensemble de phénomènes (tels que les variations saisonnières ou les séismes) ne se limitant pas au déplacement intersismique. Par ailleurs, une station peut ne pas avoir été active de manière continue, créant des lacunes dans les données. Ainsi, la vitesse de déplacement attribuée à une station est déjà le fruit d'une première inversion consistant à modéliser les différentes sources de perturbation afin de les retirer du signal, puis à effectuer une régression linéaire sur la série temporelle résultante. Plusieurs stratégies existent pour réaliser cette opération (voir HE et al. (2017) pour un aperçu), et l'estimation des incertitudes sur les vitesses de déplacement issues de ce processus est un point critique ayant une forte influence



## 1. Méthode : inversion bayésienne du tenseur de déformation

sur toute utilisation ultérieure de ces données (e.g. MAZZOTTI et al., 2020; LANGBEIN, 2020; C. MASSON, MAZZOTTI et VERNANT, 2019).

Dans le cadre de notre travail, nous ferons ici l'hypothèse que les vitesses observées  $\mathbf{d}_{\text{obs}}$  par les stations GNSS correspondent à la déformation intersismique, constante au cours du temps, auquel s'ajoute un bruit blanc gaussien  $\boldsymbol{\varepsilon}$  de moyenne nulle dont l'écart-type est défini par l'incertitude résultante du processus d'inversion décrit ci-dessus, bruit indépendant d'une station à l'autre et entre les composantes d'une même station. Ces hypothèses ne sont pas toujours vérifiées dans la pratique, et leur non-respect peut avoir des conséquences importantes sur le processus d'inversion bayésien : ce sujet fait l'objet d'une plus ample discussion dans la section 3.4. Par ailleurs, on ne s'intéresse qu'à la vitesse horizontale et donc au tenseur 2D des taux de déformation : la composante verticale du déplacement n'est pas prise en compte.

Les données s'expriment sous la forme d'un vecteur

$$\mathbf{d}_{\text{obs}} = \begin{bmatrix} (V_{x_1}, V_{y_1}), \\ \dots, \\ (V_{x_n}, V_{y_n}) \end{bmatrix}$$

où  $(V_{x_i}, V_{y_i})$  définit la vitesse horizontale de la surface observée à la position de la  $i$ -ème station de notre réseau GNSS. De la même manière, les incertitudes associées à ces observations sont définies par un vecteur

$$\boldsymbol{\sigma}_{\text{obs}} = \begin{bmatrix} (\sigma_{x_1}, \sigma_{y_1}), \\ \dots, \\ (\sigma_{x_n}, \sigma_{y_n}) \end{bmatrix}$$

où  $\sigma_{x_i}$  correspond à l'incertitude sur  $V_{x_i}$  et  $\sigma_{y_i}$  à l'incertitude sur  $V_{y_i}$  pour  $i \in [0, n]$ .

### Paramétrisation du modèle et problème direct : la triangulation de Delaunay

On souhaite respecter deux conditions lors de la paramétrisation de notre modèle :

1. Le nombre de paramètre doit rester *raisonnable* pour que l'inversion puisse s'effectuer en un temps acceptable.
2. Chaque modèle doit permettre de calculer le gradient de la vitesse de déplacement, et donc le tenseur des taux de déformation, sur toute la surface considérée.

Il est difficile d'évaluer ce que *raisonnable* recouvre comme valeurs possibles pour le nombre de paramètres, d'autant plus que le coût en temps réel de l'inversion ne dépend pas exclusivement du coût en temps de calcul mais également du nombre et de la puissance des processeurs disponibles, pour peu que le code soit parallélisé. La seconde condition, quant à elle, contraint le choix de paramétrisation du modèle.

### 1.3. Application à l'inversion de vitesses GNSS

Afin de décrire le champ de vitesses sur la surface étudiée, on définit un ensemble de  $k$  nœuds comportant chacun quatre paramètres : position selon les axes  $x$  et  $y$ , et vitesses selon ces mêmes axes. Ce nombre de nœuds  $k$  est une inconnue du problème inverse qui détermine donc la dimension du modèle, lequel peut alors s'écrire sous forme vectorielle

$$\mathbf{m} = [k, \mathbf{N}] = [k, (\mathbf{N}_{x_1}, \mathbf{N}_{y_1}, x_1, y_1), \dots, (\mathbf{N}_{x_k}, \mathbf{N}_{y_k}, x_k, y_k)]$$

où  $(\mathbf{N}_{x_i}, \mathbf{N}_{y_i})$  représente le vecteur vitesse du  $i$ -ème nœud de la paramétrisation, situé aux coordonnées  $(x_i, y_i)$ , et  $\mathbf{N}$  contient le vecteur de l'ensemble des nœuds.

Le problème direct consiste, à partir d'un modèle  $\mathbf{m}$ , à déterminer les vitesses de déplacement prédites par ce modèle aux positions des données. En définissant une triangulation sur l'ensemble des nœuds  $\mathbf{N}$ , il est possible d'interpoler linéairement la vitesse au sein de chaque triangle afin d'attribuer une vitesse à chaque point situé à l'intérieur de l'enveloppe convexe de ces nœuds. Par construction, la vitesse de chaque nœud n'a alors d'influence que sur les triangles dont il est un sommet; la distance caractéristique de propagation de l'information est donc inversement proportionnelle à la concentration spatiale des nœuds. Afin de s'assurer que toute la région étudiée est bien incluse au sein de cette enveloppe convexe, il suffit d'ajouter quatre nœuds inamovibles aux coins de cette région. Cette construction assure un champ de vitesses  $C^0$  et  $C^1_{\text{parparties}}$ , et donc dérivable hormis sur les arêtes des triangles, lesquelles sont de mesure nulle dans le plan euclidien.

La triangulation d'un ensemble de points en deux dimensions n'a pas de solution unique. On choisit ici la triangulation de Delaunay (DELAUNAY et al., 1934), qui est définie de telle sorte qu'aucun nœud ne se situe à l'intérieur du cercle circonscrit à l'un des triangles. Deux arguments permettent de considérer cette triangulation comme étant la plus appropriée aux besoins de notre paramétrisation :

1. À l'exception de quelques rares cas dégénérés, cette triangulation existe et est unique (on pourra citer en exceptions notables la configuration où tous les points sont alignés, conduisant à sa non-existence, ou celui où ces points forment un polygone régulier, auquel cas elle est non-unique). Ainsi, un modèle matérialisé par un ensemble de nœuds ne peut conduire qu'à un unique champ de vitesses.
2. La triangulation de Delaunay maximise l'angle minimal de la triangulation, et permet globalement d'éviter les triangles étirés. Cette propriété provient du fait que la triangulation de Delaunay correspond au dual du diagramme de Voronoï, qui est un pavage de l'espace composé de cellules centrées sur des nœuds, chacune étant formée par l'ensemble des points qui sont plus proches de ce nœud que d'aucun autre. Les arêtes de la triangulation de Delaunay ne relient que des nœuds qui ont une frontière commune dans le diagramme de Voronoï, c'est-à-dire qu'un nœud n'est relié qu'à ses plus proches voisins. Ainsi, les nœuds de notre modèle n'auront d'influence que sur les régions dont ils sont « les plus proches »

### 1. Méthode : inversion bayésienne du tenseur de déformation

tout en évitant au maximum les cas où la vitesse d'un sommet n'aurait aucune influence sur des points situés dans son voisinage presque immédiat, comme cela peut être le cas dans une triangulation quelconque (figure 1.6).

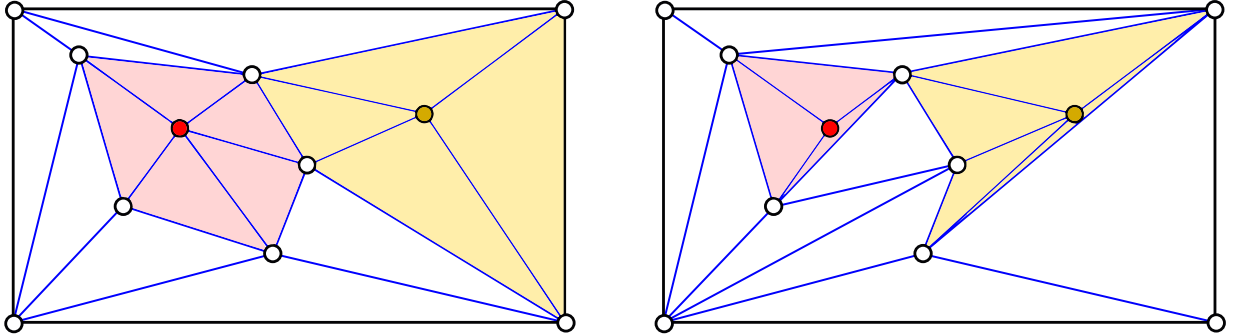


FIGURE 1.6. – Comparaison d'une triangulation de Delaunay (gauche) et d'une triangulation quelconque (droite) sur un même ensemble de nœuds. Les « zones d'influences » des nœuds rouge et jaune sont matérialisées à l'aide des couleurs correspondantes sur chaque triangulation.

La construction du diagramme de Delaunay pour un ensemble de points quelconque ainsi que la recherche du triangle contenant un point donné au sein de ce diagramme sont résolus de manière optimale par LEE et SCHACHTER (1980), qui repose sur une variation de l'algorithme de retournement décrit par LAWSON (1972). Nous utilisons le logiciel Qhull (BARBER et al., 1996) qui fournit une implémentation Fortran90 de ces algorithmes.

Une fois la triangulation de Delaunay effectuée, l'interpolation de chaque composante de la vitesse s'effectue séparément. Soit un point P de coordonnées  $(x_p, y_p)$  dans  $\mathcal{R}^2$ . On visualise les sommets A, B et C d'un triangle contenant P comme des points de  $\mathcal{R}^3$  décrits par un triplet  $(x_A, y_A, V_{x_A})$   $((x_B, y_B, V_{x_B})$  et  $(x_C, y_C, V_{x_C})$ , respectivement). Vu que ces trois points sont non alignés dans le plan, ils le sont également dans l'espace; il passe donc un unique plan par ces trois points, défini par l'équation

$$\alpha x + \beta y + \gamma V_x = -1 \quad (1.14)$$

où  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  sont donnés par

$$\begin{pmatrix} x_A & y_A & V_{x_A} \\ x_B & y_B & V_{x_B} \\ x_C & y_C & V_{x_C} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (1.15)$$

Interpoler linéairement la vitesse selon l'axe  $x$  en P revient à dire que P vu dans  $\mathcal{R}^3$  de coordonnées  $(x_p, y_p, V_{x_p})$  vérifie l'équation 1.14, d'où

$$V_{x_p} = \frac{-x_p \alpha - y_p \beta - 1}{\gamma} \quad (1.16)$$

On obtient  $V_{y_p}$  par le même procédé. Cela revient exactement à considérer la vitesse en P comme la somme des vitesses aux sommets pondérées par les coordonnées barycentriques de P. L'expression obtenue est une forme bilinéaire de  $x$  et  $y$ , dérivable et de dérivée constante : il est donc possible d'exprimer analytiquement le gradient de vitesse et le tenseur des taux de déformation en P, ce qui vérifie notre seconde condition. Par la suite, on notera  $S(\mathbf{m})$  le champ de vitesses paramétré par  $\mathbf{m}$ .

Contrairement aux méthodes d'inversion du taux de déformation reposant sur la triangulation de Delaunay utilisées par KREEMER et al. (2018) ou FAROLFI et DEL VENTISETTE (2017), ni la position, ni la vitesse de ces nœuds n'est fixée au cours de l'inversion : ceux-ci sont distincts et indépendants des positions des stations GNSS, et sont donc libres de se déplacer sur toute la surface considérée. Ils peuvent ainsi se concentrer dans les zones nécessitant une reconstruction plus fine, soit parce que le gradient de vitesse  $y$  est plus complexe, soit parce qu'une concentration importante de données permet de déceler des variations de plus faible amplitude. Cette approche auto-adaptative, qui permet de prendre en compte à la fois les hétérogénéités du gradient de vitesse et celles de la distribution spatiale des données, est similaire à celle développée par BODIN et al. (2009) et BODIN, SALMON et al. (2012), qui reposait sur des cellules de Voronoï - lesquelles n'auraient pas permis, ici, de réaliser une interpolation de la vitesse respectant notre seconde condition sur la paramétrisation du modèle. Bien que la reconstruction du champ vectoriel de vitesses repose sur une interpolation linéaire au sein de chaque triangle, le lien entre  $\mathbf{m}$  et  $\mathbf{d}$  n'est pas linéaire pour autant, car une variation sur les paramètres correspondant aux positions des nœuds a un effet non-linéaire sur les données; de même pour un changement du nombre de nœuds. Cette non-linéarité justifie le recours aux méthodes d'échantillonnage de type rj-McMC dans le cadre de ces travaux.

## Description du prior

Afin de minimiser autant que possible l'influence du prior sur la distribution *a posteriori* et pour extraire le maximum d'information des observations, on définit pour tous les paramètres un prior uniforme sur une plage raisonnable de valeurs (BOX et TIAO, 2011; MOSEGAARD et SAMBRIDGE, 2002). Le prior sur les vitesses correspond à l'intervalle autorisé pour les vitesses portées par les nœuds, et donc pour l'ensemble du champ déterminé par un modèle puisque l'interpolation linéaire entre les nœuds prohibe la présence d'extrema en dehors de ces points. Le prior sur les positions détermine quant à lui la surface 2D de l'inversion.

Soit un modèle  $\mathbf{m}$ , comportant  $k$  nœuds décrits par un vecteur  $\mathbf{N}$ . On a alors

$$p(\mathbf{m}) = p(\mathbf{N} \cap k) = p(\mathbf{N}|k)p(k) \quad (1.17)$$

où  $p(k)$  correspond au prior sur le nombre de nœuds du modèle. Celui-ci étant défini par une distribution uniforme sur un intervalle compris entre  $k_{min}$  et  $k_{max}$ , en notant  $\Delta k = k_{max} - k_{min}$ , il peut s'exprimer sous la forme

1. Méthode : inversion bayésienne du tenseur de déformation

$$p(k) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta k} & \text{si } k \in [k_{min}, k_{max}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.18)$$

On s'intéresse à présent à  $p(\mathbf{N}|k)$ , soit la probabilité dans le prior d'un ensemble de  $k$  nœuds  $\mathbf{N}$  pour  $k$  fixé. Dans le prior, les distributions sur les vitesses et les positions sont mutuellement indépendantes :

$$p(\mathbf{N}|k) = p(x_1, y_1, \dots, x_k, y_k | k) p(N_{x_1}, N_{y_1}, \dots, N_{x_k}, N_{y_k} | k) \quad (1.19)$$

Les quatre premiers nœuds sont fixés : ce sont les nœuds des coins du domaine, construits à l'origine et qui ne peuvent pas être déplacés ni supprimés. Ainsi, ils ne rentrent pas dans le calcul du prior sur les positions, puisque tout modèle disposera de ces quatre mêmes nœuds en ces emplacements. Pour chaque nœud, le prior sur sa position est une distribution uniforme sur un intervalle compris entre  $x_{min}$  et  $x_{max}$  ( $y_{min}$  et  $y_{max}$ , respectivement). Comme la position selon chaque axe est indépendante, on a alors, en notant  $\Delta x = x_{min} - x_{max}$  ( $\Delta y = y_{min} - y_{max}$ , respectivement), pour tout  $i \in [5, k]$  :

$$p(x_i, y_i | k) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta x \Delta y} & \text{si } (x_i, y_i) \in (J_x, J_y) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.20)$$

avec  $J_x = [x_{min}, x_{max}]$  et  $J_y = [y_{min}, y_{max}]$ .

Ainsi, la probabilité pour une configuration ordonnée de nœuds (où chaque nœud est choisi indépendamment des autres) s'exprime

$$p(x_1, y_1, \dots, x_k, y_k | k) = \prod_{i=1}^{k-4} p(x_i | k) p(y_i | k) \quad (1.21)$$

$$= \begin{cases} \prod_{i=1}^{k-4} \frac{1}{\Delta x \Delta y} = \frac{1}{(\Delta x \Delta y)^{k-4}} & \text{si } \forall i \in [5, k], (x_i, y_i) \in (J_x, J_y) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.22)$$

Or, comme les nœuds, à l'exception des quatre premiers, ne sont pas ordonnés dans le modèle, toute permutation de cet ensemble conduit à une disposition de nœuds identique : il existe donc  $(k - 4)!$  combinaisons de nœuds conduisant à ce même ensemble, et on a

$$p(x_1, y_1, \dots, x_k, y_k | k) = \begin{cases} \frac{(k-4)!}{(\Delta x \Delta y)^{k-4}} & \text{si } \forall i \in [1, k], (x_i, y_i) \in (J_x, J_y) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.23)$$

Le prior sur les vitesses pour  $k$  fixé est défini, pour chaque axe et pour chaque nœud, par une distribution uniforme sur un intervalle compris entre  $V_{x_{min}}$  et  $V_{x_{max}}$  ( $V_{y_{min}}$  et  $V_{y_{max}}$ , respectivement). On a alors, en notant  $\Delta V_x = V_{x_{min}} - V_{x_{max}}$  :

### 1.3. Application à l'inversion de vitesses GNSS

$$p(N_{x_i} | k) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta V_x} & \text{si } N_{x_i} \in [V_{x_{min}}, V_{x_{max}}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.24)$$

et idem pour  $V_y$ .

Comme la vitesse selon chaque axe est indépendante, et que les vitesses sont indépendantes entre les nœuds, on obtient en notant  $\Delta V_y = V_{y_{min}} - V_{y_{max}}$

$$p(N_{x_1}, N_{y_1}, \dots, N_{x_k}, N_{y_k} | k) = \prod_{i=1}^k p(N_{x_i} | k) p(N_{y_i} | k) \quad (1.25)$$

$$= \begin{cases} \prod_{i=1}^k \frac{1}{\Delta V_x \Delta V_y} = \frac{1}{(\Delta V_x \Delta V_y)^k} & \text{si } \forall i \in [1, k], (N_{x_i}, N_{y_i}) \in (I_x, I_y) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.26)$$

avec  $I_x = [V_{x_{min}}, V_{x_{max}}]$  et  $I_y = [V_{y_{min}}, V_{y_{max}}]$ . En réinjectant 1.18, 1.26 et 1.23 dans l'équation 1.17, on obtient

$$p(\mathbf{m}) = \begin{cases} \frac{(n-4)!}{\Delta k (\Delta y \Delta x)^{k-4} (\Delta V_x \Delta V_y)^k} & \text{si } k \in [k_{min}, k_{max}] \text{ et } \forall i \in [1, k], (x_i, y_i, N_{x_i}, N_{y_i}) \in (J_x, J_y, I_x, I_y) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.27)$$

Concernant le choix des bornes du prior sur les vitesses en  $x$  et en  $y$ , on les définit empiriquement de telle sorte que la distribution *a posteriori* soit quasi-nulle au niveau de ces bornes. Généralement, il suffit pour cela de prendre un intervalle légèrement plus large que les plages de vitesses connues *a priori* sur la région étudiée : un modèle proposant une vitesse strictement supérieure selon un axe à tout ce qui a été observé ne peut que réduire sa vraisemblance aux données, sauf rares exceptions. En revanche, le domaine spatial acceptable pour les nœuds doit être choisi considérablement plus large que celui dans lequel se trouvent les données : en effet, malgré la capacité de la triangulation de Delaunay à éviter les triangles élongés, la présence de ceux-ci est inévitable à proximité des limites spatiales de l'inversion (voir figure 1.6), créant une sorte « d'effet de bord » qui rend inutilisables les résultats au voisinage de ces limites. La borne inférieure de la distribution *a priori* sur le nombre de nœuds peut être fixée à 4 (puisque 4 nœuds sont toujours requis *a minima* pour maintenir l'enveloppe convexe sur toute la surface), et sa borne supérieure égale au nombre de données.

#### Description de la fonction de vraisemblance

Dans le cadre de notre problème inverse, la vraisemblance correspond, pour un modèle  $\mathbf{m}$  donné, à une mesure de l'écart entre les vitesses proposées par la solution du problème direct  $g(\mathbf{m})$  et celles observées par les stations GNSS. Plus la distance (au sens vectoriel) entre  $\mathbf{d}_{obs}$  et  $g(\mathbf{m})$  est faible, meilleure est la capacité de notre modèle à expliquer les données, et plus sa

### 1. Méthode : inversion bayésienne du tenseur de déformation

vraisemblance est élevée. De par notre hypothèse que le bruit sur les données est indépendant entre chaque station et chaque composante, et qu'il suit une distribution gaussienne de moyenne nulle et d'écart-type  $\sigma_{\text{obs}}$ , la densité de probabilité de la fonction de vraisemblance s'exprime alors sous la forme d'une loi normale multidimensionnelle :

$$p(\mathbf{d}_{\text{obs}}|\mathbf{m}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |\mathbf{C}|}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{d}_{\text{obs}} - g(\mathbf{m}))^T \mathbf{C}^{-1}(\mathbf{d}_{\text{obs}} - g(\mathbf{m}))\right], \quad (1.28)$$

où  $\mathbf{C}$  est la matrice de covariance de  $\sigma_{\text{obs}}$  définie par

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \sigma_{x_1}^2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{y_1}^2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_{x_n}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \sigma_{y_n}^2 \end{pmatrix} \quad (1.29)$$

Comme  $\mathbf{C}$  est une matrice diagonale à termes strictement positifs (une incertitude nulle sur une observation physique n'a pas de sens), le terme

$$(\mathbf{d}_{\text{obs}} - g(\mathbf{m}))^T \mathbf{C}^{-1}(\mathbf{d}_{\text{obs}} - g(\mathbf{m}))$$

correspond au carré de la norme euclidienne canonique (ou norme L2) des résidus  $\mathbf{d}_{\text{obs}} - g(\mathbf{m})$ , pondérés par l'écart-type du bruit sur les observations  $\sigma_{\text{obs}}$ , et est appelé *misfit*.

On obtient alors

$$p(\mathbf{d}_{\text{obs}}|\mathbf{m}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \prod_{i \in [1,n]} \sigma_{x_i} \sigma_{y_i}}} \exp\left[-\frac{1}{2} \sum_{i \in [1,n]} \left( \frac{(V_{x_i} - S_{x_i}(\mathbf{m}))^2}{\sigma_{x_i}^2} + \frac{(V_{y_i} - S_{y_i}(\mathbf{m}))^2}{\sigma_{y_i}^2} \right)\right] \quad (1.30)$$

où  $S_{x_i}$  et  $S_{y_i}$  correspondent aux composantes de la vitesse de déplacement prédite par le modèle  $\mathbf{m}$  à la position de la  $i$ -ème station. Le terme de normalisation situé devant l'exponentielle ne dépend pas des paramètres du modèle, et se comporte comme une constante au cours de l'inversion. Il se simplifie donc lors du rapport des vraisemblances à chaque itération de la chaîne de Markov.

On observe également que la contribution de chaque station à la vraisemblance dépend de l'incertitude qui lui est associée : si une observation est dotée d'une très forte incertitude, le coût en termes de vraisemblance pour un modèle qui proposerait une vitesse très différente en ce point restera acceptable ; à l'inverse, si les données d'une station GNSS sont associées à une très faible incertitude, un modèle qui ne respecterait pas ces informations serait jugé peu probable au regard de sa vraisemblance aux données. Cela démontre l'importance d'une estimation correcte du bruit sur les données ; ce point sera discuté plus en détail en 3.4.

Par la suite, nous simplifierons l'équation 1.30 par

$$p(\mathbf{d}_{\text{obs}}|\mathbf{m}) \propto \exp\left(-\frac{\Phi(\mathbf{m})}{2}\right) \quad (1.31)$$

Le produit du prior (1.27) et de la vraisemblance (1.31) permet alors de calculer la PDF *a posteriori* des modèles.

### 1.3.2. Résolution du problème par rj-MCMC

Comme précisé précédemment, le fait que le nombre de nœuds et leurs positions soient des inconnues du problème rend la relation entre le modèle et les observations fortement non-linéaire. On recourt donc à un algorithme de type rj-McMC pour échantillonner la PDF *a posteriori*, puisque le nombre de paramètres du modèle, proportionnel au nombre de nœuds, est variable.

En partant d'un modèle initial  $\mathbf{m}_0$ , à chaque étape de la chaîne, on va perturber le modèle actuel  $\mathbf{m}$  pour obtenir un nouveau modèle  $\mathbf{m}'$ , et calculer les vitesses de déplacement  $g(\mathbf{m}')$  prédites par ce modèle aux emplacements des différentes stations GNSS. On calcule alors le ratio d'acceptance  $\alpha(\mathbf{m} \rightarrow \mathbf{m}')$  à partir duquel on décide ou non de garder ce nouveau modèle. La distribution sur l'ensemble des modèles parcourus au cours de la chaîne de Markov forme le résultat de notre inversion, en proposant en tout point de la surface une densité de probabilité pour la vitesse de déplacement, son gradient et le tenseur des taux de déformation.

#### Initialisation

L'état initial d'une chaîne de Markov irréductible récurrente positive n'a pas d'influence sur sa distribution stationnaire. Ainsi, le choix du modèle de départ ne peut pas faire échouer, théoriquement parlant, l'inversion bayésienne (S. BROOKS et al., 2011). Cependant, pour accélérer la vitesse à laquelle la distribution des modèles échantillonnés converge vers la PDF *a posteriori* des modèles, on utilise un *burn-in* qui défasse les premiers modèles tirés jusqu'à ce que la chaîne soit statistiquement stable. Le temps de convergence de la chaîne vers cette configuration stable peut être plus ou moins long selon le modèle de départ; aussi, un mauvais choix pour  $\mathbf{m}_0$  peut conduire à un très grand nombre d'itérations inutiles engendrant une perte de temps de calcul conséquente.

Afin de se prémunir contre cet effet, on construit  $\mathbf{m}_0$  en sélectionnant aléatoirement un sous-ensemble des données (généralement, un tiers des données totales), en créant un nœud pour chacune d'entre elles, et en modifiant ses paramètres de vitesse et de position à l'aide d'une perturbation tirée sur une distribution gaussienne de moyenne nulle, en s'assurant que les paramètres des nœuds ne sortent pas du support du prior uniforme. Ainsi, on s'assure que le modèle initial n'ait pas un *misfit* trop élevé et qu'il ne se trouve pas sur un vaste plateau de probabilité *a posteriori* quasi-nulle dont il serait laborieux de s'extirper. On ajoute ensuite les 4 nœuds des coins du domaine, auxquels on attribue une vitesse choisie aléatoirement dans le prior (figure 1.7).



1. Méthode : inversion bayésienne du tenseur de déformation

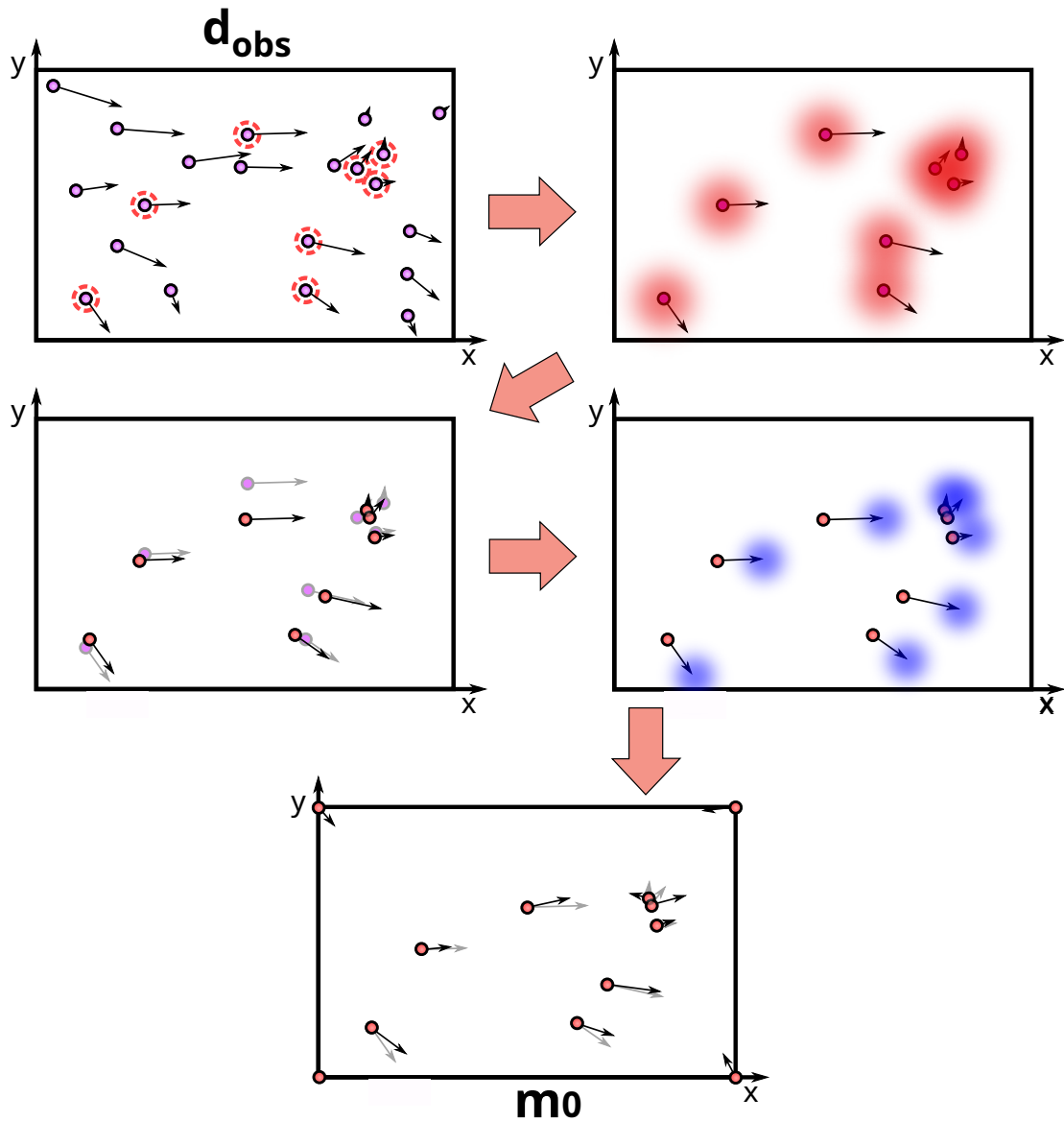


FIGURE 1.7. – Construction du modèle initial à partir de  $d_{obs}$ . Un sous-ensemble de stations est sélectionné (entouré en rouge pointillé), puis les positions sont perturbées aléatoirement suivant une distribution gaussienne bidimensionnelle (en rouge). Les vitesses des nœuds ainsi obtenus sont perturbées suivant le même processus, pour créer le modèle initial  $m_0$ .

### Génération d'un nouveau modèle à partir du précédent

Dans le cas d'un algorithme de  $rj$ -McMC, la fonction de transition qui permet de créer le prochain modèle de la chaîne à partir du précédent doit permettre de se déplacer dans un espace de dimension inconnue. Elle doit donc autoriser des sauts de dimension dans l'espace des paramètres, c'est-à-dire des changements du nombre de nœuds qui composent le modèle.

On propose ainsi quatre perturbations différentes : à chaque itération paire de la chaîne, la vitesse d'un nœud est modifiée, et à chaque itération impaire, on choisit de manière équiprobable de supprimer, d'ajouter ou de déplacer un nœud. La combinaison de ces transitions permet d'explorer l'intégralité de l'espace des modèles.

#### Modification de la vitesse d'un nœud

On choisit au hasard l'un des  $k$  nœuds du modèle, noté  $\mathbf{N}_i = (N_{x_i}, N_{y_i})$ , selon une distribution uniforme discrète sur  $[1, \dots, k]$  et on modifie les deux composantes de sa vitesse en tirant deux variables aléatoires selon des gaussiennes centrées en 0 et d'écart-type  $\sigma_v$ . Comme les autres nœuds ne sont pas modifiés et sont mutuellement indépendants du nœud affecté, et que le choix du nœud  $i$  modifié est indépendant de tout le reste,

$$\begin{aligned}
 q(\mathbf{m}' | \mathbf{m}) &= q(i \cap \mathbf{N}_i \cap \mathbf{m}' \setminus \{\mathbf{N}_i'\} | \mathbf{m}) \\
 &= \frac{1}{k} q(\mathbf{m}' \setminus \{\mathbf{N}_i'\} | \mathbf{m} \cap i) q(\mathbf{N}_i' | \mathbf{m} \cap i) \\
 &= \frac{1}{k} q(\mathbf{N}_i' | \mathbf{m} \cap i) \\
 &= \frac{1}{k} q(\mathbf{N}_i' | \mathbf{N}_i)
 \end{aligned} \tag{1.32}$$

La distribution de probabilité pour le changement de vitesse est une loi normale bidimensionnelle, exprimée par

$$q(\mathbf{N}_i' | \mathbf{N}_i) = \frac{1}{2\pi\sigma_v^2} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_v^2} ((N_{x_i} - N'_{x_i})^2 + (N_{y_i} - N'_{y_i})^2)\right] \tag{1.33}$$

et en combinant 1.32 et 1.33 on obtient

$$q(\mathbf{m}' | \mathbf{m}) = \frac{1}{k} * \frac{1}{2\pi\sigma_v^2} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_v^2} ((N_{x_i} - N'_{x_i})^2 + (N_{y_i} - N'_{y_i})^2)\right] \tag{1.34}$$

avec

$$\begin{aligned}
 N'_{x_i} &= N_{x_i} + u_x \\
 N'_{y_i} &= N_{y_i} + u_y
 \end{aligned}$$

## 1. Méthode : inversion bayésienne du tenseur de déformation

où  $u_x, u_y \sim \mathcal{N}(0, \sigma_v^2)$

$\sigma_v$  contrôle la distance caractéristique de laquelle on se déplace dans l'espace des paramètres lorsqu'on modifie une vitesse : une valeur élevée autorisera des vitesses très différentes de la vitesse initiale du nœud, mais qui risquent d'être fréquemment rejetées. À l'inverse, une valeur trop faible ne permettra pas une exploration efficace, car la chaîne « piétinera » sur place et les modèles produits successivement seront fortement corrélés.

### Modification de la position d'un nœud

Comme pour la vitesse, on choisit au hasard un nœud (à l'exception des quatre premiers, qui définissent l'enveloppe convexe et qui sont inamovibles par construction) et on perturbe simultanément sa position selon les deux axes :

$$q(\mathbf{m}' | \mathbf{m}) = \frac{1}{k-4} * \frac{1}{2\pi\sigma_p^2} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_p^2}((x_i - x'_i)^2 + (y_i - y'_i)^2)\right] \quad (1.35)$$

avec

$$\begin{aligned} x'_i &= x_i + u_x \\ y'_i &= y_i + u_y \end{aligned}$$

où  $u_x, u_y \sim \mathcal{N}(0, \sigma_p^2)$

De la même manière que précédemment,  $\sigma_p$  contrôle la distance caractéristique de laquelle on se déplace dans l'espace des paramètres lorsqu'on modifie une position.

### Mort d'un nœud

Un nœud est aléatoirement sélectionné parmi les  $k$  nœuds de  $\mathbf{m}$  à l'exception des quatre premiers, et celui-ci est supprimé.

$$q(\mathbf{m}' | \mathbf{m}) = \frac{1}{k-4} \quad (1.36)$$

Cette perturbation induit un changement de dimension sur le modèle, puisque  $\mathbf{m}'$  ne contient plus que  $k-1$  nœuds et perd quatre paramètres par rapport à  $\mathbf{m}$  (deux de position et deux de vitesse).

### Naissance d'un nœud

Pour créer un nouveau nœud, une position  $(x_{k+1}, y_{k+1})$  est choisie à partir d'une distribution uniforme bidimensionnelle sur  $([x_{min}, x_{max}], [y_{min}, y_{max}])$ . Pour déterminer la vitesse de ce nouveau nœud, on calcule la vitesse  $\mathbf{S}_{x_{k+1}, y_{k+1}}(\mathbf{m})$  prédite par  $\mathbf{m}$  à cette position grâce à la

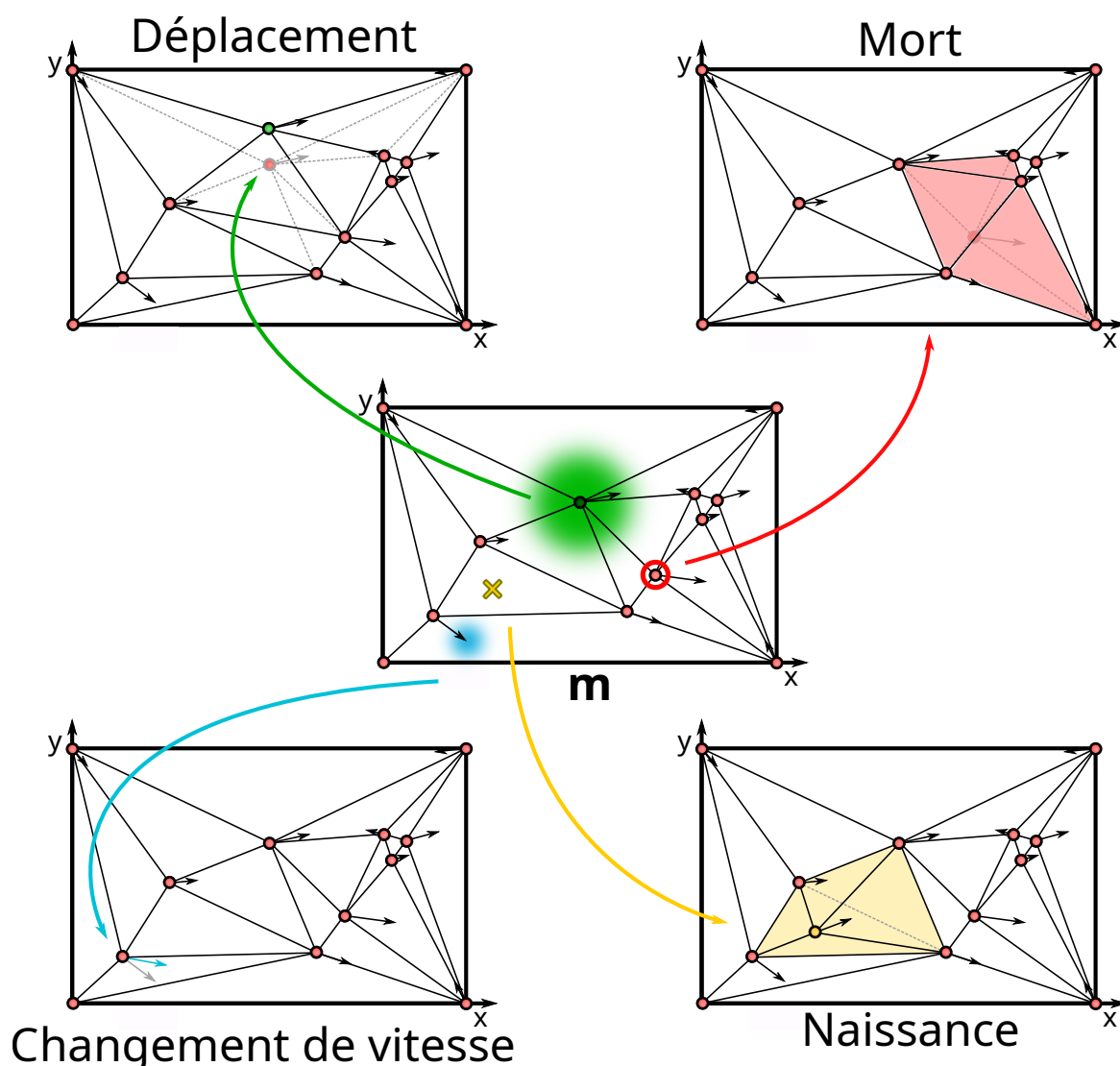


FIGURE 1.8. – Représentation des différentes propositions pour créer un nouveau modèle. Le modèle de départ est au centre. **Déplacement** : le nœud en vert est issu du déplacement du nœud recouvert par une gaussienne verte au centre, qui représente la distribution de probabilité des déplacements possibles. **Changement de vitesse** : la vitesse du nœud affecté est matérialisée par un vecteur bleu, obtenu en modifiant la vitesse du nœud initial par une perturbation indiquée de la même manière que pour le déplacement. **Mort** : le nœud cerclé en rouge est supprimé, le diagramme de Delaunay est recalculé en conséquence. La zone d'effet de cette mort est représentée en rouge sur le nouveau modèle. **Naissance** : un nœud jaune est ajouté dans le nouveau modèle à l'emplacement marqué par une croix sur le modèle initial, le diagramme de Delaunay est recalculé en conséquence et la zone d'effet de cette naissance est représentée en jaune sur le nouveau modèle. La vitesse de ce nouveau nœud dépend de la vitesse prédite par le modèle actuel à son emplacement.

### 1. Méthode : inversion bayésienne du tenseur de déformation

triangulation de Delaunay, puis on applique une perturbation de même nature que pour le changement de vitesse d'un nœud décrit ci-dessus.

À l'exception du nœud  $\mathbf{N}_{k+1}$ , tous les autres nœuds de  $\mathbf{m}'$  sont identiques à ceux de  $\mathbf{m}$ . Aussi,  $q(\mathbf{m}' | \mathbf{m})$  se ramène à la probabilité de créer un nouveau nœud à la position  $(x_{k+1}, y_{k+1})$  avec une vitesse

$$\mathbf{N}_{k+1} = \mathbf{S}_{\mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{y}_{k+1}}(\mathbf{m}) + (u_x, u_y)$$

où  $u_x, u_y \sim \mathcal{N}(0, \sigma_b^2)$

Là encore les autres nœuds de  $\mathbf{m}$  sont intouchés et indépendants du nouveau nœud. On a donc

$$\begin{aligned} q(\mathbf{m}' | \mathbf{m}) &= q((\mathbf{N}_1, \dots, \mathbf{N}_{k+1}) \cap (x_1, y_1, \dots, x_{k+1}, y_{k+1}) | \mathbf{m}) \\ &= q(\mathbf{N}_{k+1} \cap (x_{k+1}, y_{k+1}) | \mathbf{m}) \\ &= q((x_{k+1}, y_{k+1}) | \mathbf{m}) q(\mathbf{N}_{k+1} | \mathbf{m} \cap (x_{k+1}, y_{k+1})) \end{aligned} \quad (1.37)$$

La probabilité d'apparition du nœud à cette position s'exprime

$$q((x_{k+1}, y_{k+1}) | \mathbf{m}) = \frac{1}{\Delta x \Delta y} \quad (1.38)$$

Une fois cet emplacement déterminé, sa vitesse est obtenue par  $\mathbf{S}_{\mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{y}_{k+1}}(\mathbf{m})$  et on peut calculer la probabilité de la vitesse du nouveau nœud comme précédemment :

$$q(\mathbf{N}_{k+1} | \mathbf{m} \cap (x_{k+1}, y_{k+1})) = \frac{1}{2\pi\sigma_b^2} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_b^2} \left( (\mathbf{N}_{k+1} - \mathbf{S}_{\mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{y}_{k+1}}(\mathbf{m}))^\top (\mathbf{N}_{k+1} - \mathbf{S}_{\mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{y}_{k+1}}(\mathbf{m})) \right)\right] \quad (1.39)$$

En assemblant 1.38 et 1.39 dans 1.37 on obtient

$$q(\mathbf{m}' | \mathbf{m}) = \frac{1}{\Delta x \Delta y 2\pi\sigma_b^2} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_b^2} \|\mathbf{N}_{k+1} - \mathbf{S}_{\mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{y}_{k+1}}(\mathbf{m})\|^2\right] \quad (1.40)$$

avec  $\sigma_b$  l'écart-type de la loi normale pour le choix de la vitesse à l'emplacement du nouveau nœud.

Toutes ces propositions sont représentées sur la figure 1.8. On note que le déplacement d'un nœud peut, tout comme la mort ou la naissance, entraîner un changement de la configuration du diagramme de Delaunay.

### Taux d'acceptance

Le taux d'acceptance pour un algorithme de rj-McMC, défini par 1.13, dépend, pour le passage d'un modèle  $\mathbf{m}$  à  $\mathbf{m}'$ , du ratio des priors, du ratio des vraisemblances, du ratio des

### 1.3. Application à l'inversion de vitesses GNSS

probabilités de transition et du jacobien de la transformation de  $\mathbf{m}$  à  $\mathbf{m}'$ . Comme le jacobien sert à compenser le changement de volume de l'espace des paramètres lors d'un saut de dimension, celui-ci vaut 1 lorsque qu'on effectue un changement de vitesse ou de position sur un nœud, car la dimension ne change pas (DENISON et al., 2002; GREEN, 2003). Supposons qu'une naissance soit proposée pour la prochaine itération. Cela implique le tirage de quatre variables aléatoires, deux variables  $p_x, p_y \sim \mathcal{U}(x_{min}, x_{max}), \mathcal{U}(y_{min}, y_{max})$  pour la nouvelle position et deux variables  $u_x, u_y \sim \mathcal{N}(0, \sigma_b^2)$  pour la nouvelle vitesse. On note  $h$  la fonction permettant d'effectuer la transition

$$h(\mathbf{m}, u_x, u_y, p_x, p_y) = \mathbf{m}' = (\mathbf{m}, N_{x_{k+1}}, N_{y_{k+1}}, x_{k+1}, y_{k+1}) \quad (1.41)$$

La matrice jacobienne correspondante est donc une matrice de taille  $4(k+1)$  par  $4(k+1)$ , et le jacobien de  $h$  s'exprime

$$|\mathbf{J}| = \frac{\partial(N_{x_1}, N_{y_1}, x_1, y_1, \dots, N_{x_k}, N_{y_k}, x_k, y_k, N_{x_{k+1}}, N_{y_{k+1}}, x_{k+1}, y_{k+1})}{\partial(N_{x_1}, N_{y_1}, x_1, y_1, \dots, N_{x_k}, N_{y_k}, x_k, y_k, u_x, u_y, p_x, p_y)}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial N_{x_1}}{\partial N_{x_1}} & \frac{\partial N_{x_1}}{\partial N_{x_2}} & \dots & \frac{\partial N_{x_1}}{\partial u_x} & \frac{\partial N_{x_1}}{\partial u_y} & \frac{\partial N_{x_1}}{\partial p_x} & \frac{\partial N_{x_1}}{\partial p_y} \\ \frac{\partial N_{y_1}}{\partial N_{x_1}} & \frac{\partial N_{y_1}}{\partial N_{x_2}} & \dots & \frac{\partial N_{y_1}}{\partial u_x} & \frac{\partial N_{y_1}}{\partial u_y} & \frac{\partial N_{y_1}}{\partial p_x} & \frac{\partial N_{y_1}}{\partial p_y} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial N_{x_{k+1}}}{\partial N_{x_1}} & \frac{\partial N_{x_{k+1}}}{\partial N_{x_2}} & \dots & \frac{\partial N_{x_{k+1}}}{\partial u_x} & \frac{\partial N_{x_{k+1}}}{\partial u_y} & \frac{\partial N_{x_{k+1}}}{\partial p_x} & \frac{\partial N_{x_{k+1}}}{\partial p_y} \\ \frac{\partial N_{y_{k+1}}}{\partial N_{x_1}} & \frac{\partial N_{y_{k+1}}}{\partial N_{x_2}} & \dots & \frac{\partial N_{y_{k+1}}}{\partial u_x} & \frac{\partial N_{y_{k+1}}}{\partial u_y} & \frac{\partial N_{y_{k+1}}}{\partial p_x} & \frac{\partial N_{y_{k+1}}}{\partial p_y} \\ \frac{\partial x_{k+1}}{\partial N_{x_1}} & \frac{\partial x_{k+1}}{\partial N_{x_2}} & \dots & \frac{\partial x_{k+1}}{\partial u_x} & \frac{\partial x_{k+1}}{\partial u_y} & \frac{\partial x_{k+1}}{\partial p_x} & \frac{\partial x_{k+1}}{\partial p_y} \\ \frac{\partial y_{k+1}}{\partial N_{x_1}} & \frac{\partial y_{k+1}}{\partial N_{x_2}} & \dots & \frac{\partial y_{k+1}}{\partial u_x} & \frac{\partial y_{k+1}}{\partial u_y} & \frac{\partial y_{k+1}}{\partial p_x} & \frac{\partial y_{k+1}}{\partial p_y} \end{vmatrix} \quad (1.42)$$

La sous-matrice formée des  $4k$  premières lignes et des  $4k$  premières colonnes (positionnée en haut à gauche dans  $\mathbf{J}$ ) est composée des dérivées partielles des vitesses et des positions des nœuds de  $\mathbf{m}$  en fonction des vitesses et des positions des autres nœuds de  $\mathbf{m}$ . Comme ces paramètres sont tous mutuellement indépendants, tous les termes non-diagonaux sont nuls et c'est la matrice identité  $I_{4k}$ . La sous-matrice composée des 4 dernières colonnes et des  $4k$  premières lignes (positionnée en haut à droite dans  $\mathbf{J}$ ) contient les dérivées partielles des nœuds 1 à  $k$  par rapport aux variables aléatoires utilisées pour la création du nouveau nœud; c'est donc

### 1. Méthode : inversion bayésienne du tenseur de déformation

la matrice nulle puisque  $\mathbf{m}$  ne dépend pas de ces perturbations. La sous-matrice composée des  $4k$  premières colonnes et des 2 dernières lignes contient les dérivées partielles de la position du nouveau nœud par rapport à  $\mathbf{m}$ , et est donc nulle puisque cette position dépend exclusivement de  $p_x$  et  $p_y$ . En revanche, la vitesse du nouveau nœud dépend de la paramétrisation toute entière, puisque les positions des nœuds déterminent dans quel triangle ce nœud se situe, puis les vitesses et les positions des sommets de ce triangle conditionnent sa nouvelle vitesse. La sous-matrice correspondante, formée des  $4k$  premières colonnes et des  $4k + 1$ -ème et  $4k + 2$ -ème lignes, comporte des termes non nuls et est difficile à exprimer.

Enfin, reste la sous-matrice  $4 \times 4$  formée par les 4 dernières lignes et colonnes. La position du nouveau nœud est directement donnée par  $p_x$  et  $p_y$  :

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= p_x \\ y_{k+1} &= p_y \end{aligned}$$

De même, les composantes de la vitesse du nouveau nœud  $N_{x_{k+1}}$  et  $N_{y_{k+1}}$  sont données par

$$\mathbf{N}_{k+1} = \mathbf{S}_{x_{k+1}, y_{k+1}}(\mathbf{m}) + (u_x, v_x)$$

et dépendent donc linéairement de  $u_x$  et  $u_v$ , respectivement : de ce fait tous les termes diagonaux valent 1.

$\mathbf{S}_{x_{k+1}, y_{k+1}}(\mathbf{m})$  représente la vitesse prédite par  $\mathbf{m}$  en  $(x_{k+1}, y_{k+1})$ , et dépend donc de  $p_x$  et  $p_y$ . Les termes croisés  $\frac{\partial N_{x_{k+1}}}{\partial p_y}$ ,  $\frac{\partial N_{x_{k+1}}}{\partial p_x}$ ,  $\frac{\partial N_{y_{k+1}}}{\partial p_y}$  et  $\frac{\partial N_{y_{k+1}}}{\partial p_x}$  sont non nuls ; il s'agit donc d'une matrice triangulaire supérieure :

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & \frac{\partial N_{x_{k+1}}}{\partial p_x} & \frac{\partial N_{x_{k+1}}}{\partial p_y} \\ 0 & 1 & \frac{\partial N_{y_{k+1}}}{\partial p_x} & \frac{\partial N_{y_{k+1}}}{\partial p_y} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (1.43)$$

L'équation 1.42 devient alors :

$$\mathbf{J} = \begin{vmatrix}
 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 \frac{\partial N_{x_{k+1}}}{\partial N_{x_1}} & \frac{\partial N_{x_{k+1}}}{\partial N_{x_2}} & \dots & 1 & 0 & \frac{\partial N_{x_{k+1}}}{\partial p_x} & \frac{\partial N_{x_{k+1}}}{\partial p_y} \\
 \frac{\partial N_{y_{k+1}}}{\partial N_{x_1}} & \frac{\partial N_{y_{k+1}}}{\partial N_{x_2}} & \dots & 0 & 1 & \frac{\partial N_{y_{k+1}}}{\partial p_x} & \frac{\partial N_{y_{k+1}}}{\partial p_y} \\
 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1
 \end{vmatrix} \quad (1.44)$$

Un développement par la dernière colonne du déterminant de la matrice jacobienne dans 1.44 permet d'ignorer les termes non-nuls sous la diagonale et donne  $|\mathbf{J}| = 1$ . Comme le jacobien pour la transformation correspondant à la mort d'un nœud est l'inverse de celui de la naissance, il vaut également 1 : ainsi,  $|\mathbf{J}| = 1$  dans les quatre cas possibles. Il ne reste plus qu'à calculer la probabilité d'acceptance pour chacun d'entre eux.

#### Modification de la position ou de la vitesse d'un nœud

Dans les deux cas, la modèle conserve sa dimension : aussi le ratio des priors donne, d'après 1.27 :

$$\frac{p(\mathbf{m}')}{p(\mathbf{m})} = \begin{cases} \frac{(k-4)! \Delta k (\Delta y \Delta x)^{k-4} (\Delta V_y \Delta V_x)^k}{(k-4)! \Delta k (\Delta y \Delta x)^{k-4} (\Delta V_y \Delta V_x)^k} = 1 & \text{si } \forall i \in [1, k], (x'_i, y'_i, N'_{x_i}, N'_{y_i}) \in (J_x, J_y, I_x, I_y) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.45)$$

De même, les distributions pour les lois de transition sont symétriques : dans les deux cas,

$$\begin{aligned} q(\mathbf{m}' | \mathbf{m}) &= q(\mathbf{m} | \mathbf{m}') \\ \Leftrightarrow \frac{q(\mathbf{m} | \mathbf{m}')}{q(\mathbf{m}' | \mathbf{m})} &= 1 \end{aligned} \quad (1.46)$$



## 1. Méthode : inversion bayésienne du tenseur de déformation

De ces deux équations injectées dans 1.13, il découle que le taux d'acceptance ne dépend que du rapport des vraisemblances, sauf si le modèle proposé a une probabilité *a priori* nulle, auquel cas le taux d'acceptance est également nul :

$$\alpha(\mathbf{m} \rightarrow \mathbf{m}') = \begin{cases} \frac{p(\mathbf{d}_{\text{obs}}|\mathbf{m}')}{p(\mathbf{d}_{\text{obs}}|\mathbf{m})} & \text{si } \forall i \in [1, k], (x_i, y_i, \mathbf{N}_{x_i}, \mathbf{N}_{y_i}) \in (\mathbf{J}_x, \mathbf{J}_y, \mathbf{I}_x, \mathbf{I}_y) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.47)$$

Ainsi, une perturbation de la vitesse ou de la position est systématiquement acceptée si elle améliore la vraisemblance du modèle aux données, et elle est refusée avec une probabilité qui dépend du ratio des vraisemblances sinon.

### Naissance d'un nœud

Lorsqu'un nœud se crée, le ratio des priors entre un modèle à  $k + 1$  nœuds et un modèle à  $k$  nœuds vaut

$$\frac{p(\mathbf{m}')}{p(\mathbf{m})} = \begin{cases} \frac{(k-3)! \Delta k (\Delta y \Delta x)^{k-4} (\Delta V_y \Delta V_x)^k}{(k-4)! \Delta k (\Delta y \Delta x)^{k-3} (\Delta V_y \Delta V_x)^{k+1}} = \frac{k-3}{\Delta y \Delta x \Delta V_y \Delta V_x} & \text{si } k + 1 \leq k_{\text{max}} \text{ et } (\mathbf{N}_{x_{k+1}}, \mathbf{N}_{y_{k+1}}) \in (\mathbf{I}_x, \mathbf{I}_y) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.48)$$

La naissance d'un nœud entraîne une diminution de la probabilité *a priori* du modèle : la dimension du modèle augmente, et de ce fait sa probabilité dans l'espace des paramètres diminue.

Le rapport des densités de probabilité des lois de transition n'est pas non plus symétrique :  $\frac{q(\mathbf{m}|\mathbf{m}')}{q(\mathbf{m}'|\mathbf{m})}$  correspond à la probabilité de faire mourir le nœud nouvellement créé pour repasser de  $\mathbf{m}'$  à  $\mathbf{m}$ , rapporté à la probabilité de faire naître ce nœud. Il s'agit donc du ratio des lois de transition décrites par 1.36 et 1.40, en prenant toutefois garde au fait que la mort provoque ici le passage d'un modèle à  $k + 1$  nœuds vers un modèle à  $k$  nœuds :

$$\frac{q(\mathbf{m}|\mathbf{m}')}{q(\mathbf{m}'|\mathbf{m})} = \frac{\Delta x \Delta y 2\pi\sigma_b^2}{k-3} \exp\left[\frac{1}{2\sigma_b^2} \|\mathbf{N}_{\mathbf{k}+1} - \mathbf{S}_{\mathbf{x}_{\mathbf{k}+1}, \mathbf{y}_{\mathbf{k}+1}}(\mathbf{m})\|^2\right] \quad (1.49)$$

En réinjectant 1.48, 1.49 et 1.31 dans 1.13, on obtient :

$$\alpha(\mathbf{m} \rightarrow \mathbf{m}') = \begin{cases} \frac{2\pi\sigma_b^2}{\Delta V_x \Delta V_y} \exp\left[\frac{1}{2\sigma_b^2} \|\mathbf{N}_{\mathbf{k}+1} - \mathbf{S}_{\mathbf{x}_{\mathbf{k}+1}, \mathbf{y}_{\mathbf{k}+1}}(\mathbf{m})\|^2 - \frac{\Phi(\mathbf{m}') - \Phi(\mathbf{m})}{2}\right] & \text{si } k + 1 \leq k_{\text{max}} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et } (\mathbf{N}_{x_{k+1}}, \mathbf{N}_{y_{k+1}}) \in (\mathbf{I}_x, \mathbf{I}_y) \quad (1.50)$$

Ce taux d'acceptance est une compétition au sein de l'exponentielle entre le ratio des vraisemblances (une augmentation du *misfit* entre les données et les vitesses prédites par le modèle diminue la probabilité du modèle) et un terme positif issu de la loi de transition qui incite le

nouveau nœud à proposer une vitesse  $\mathbf{N}_{k+1}$  novatrice par rapport à celle prédite par le modèle actuel  $\mathbf{S}_{x_{k+1},y_{k+1}}$ . Si la nouvelle vitesse est égale à l'ancienne, le terme au sein de l'exponentielle s'annule et la proposition n'a que peu de chances d'être acceptée. Si ce nouveau nœud permet d'améliorer la vraisemblance du modèle aux données, il est quasi systématiquement retenu pour l'itération suivante.

### Mort d'un nœud

Par symétrie directe du cas d'une naissance, le ratio des priors en cas de mort d'un nœud est donné par

$$\frac{p(\mathbf{m}')}{p(\mathbf{m})} = \begin{cases} \frac{\Delta y \Delta x \Delta V_y \Delta V_x}{k-4} & \text{si } k-1 \geq k_{min} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.51)$$

De même, le ratio des lois de proposition est l'inverse de celui d'une naissance :

$$\frac{q(\mathbf{m}|\mathbf{m}')}{q(\mathbf{m}'|\mathbf{m})} = \frac{k-4}{2\Delta x \Delta y \pi \sigma_b^2} \exp\left[\frac{1}{2\sigma_b^2} \|\mathbf{N}_i - \mathbf{S}_{x_i,y_i}(\mathbf{m}')\|^2\right] \quad (1.52)$$

où  $\mathbf{N}_i$  est la vitesse du nœud supprimé, et  $\mathbf{S}_{x_i,y_i}(\mathbf{m}')$  représente la vitesse prédite à la position de ce point dans le nouveau modèle. On obtient alors pour l'acceptance

$$\alpha(\mathbf{m} \rightarrow \mathbf{m}') = \begin{cases} \frac{\Delta V_x \Delta V_y}{2\pi\sigma_b^2} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_b^2} \|\mathbf{N}_i - \mathbf{S}_{x_i,y_i}(\mathbf{m}')\|^2 - \frac{\Phi(\mathbf{m}') - \Phi(\mathbf{m})}{2}\right] & \text{si } k-1 \geq k_{max} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.53)$$

Ce taux d'acceptance, à l'exception faite du ratio des vraisemblances, est l'inverse de celui d'une naissance. Cette fois-ci, un nœud aura d'autant plus de chance d'être supprimé que sa vitesse modifiait peu le champ de vitesses paramétré par  $\mathbf{m}$ . Dans le cas extrême où sa vitesse est exactement celle donnée par le nouveau modèle à la même position et où la vraisemblance n'est pas non plus affectée, ce nœud peut être considéré comme inutile, et donc supprimé.

Le taux d'acceptance pour une naissance fait également apparaître un terme en  $\frac{1}{\Delta V_x \Delta V_y}$  : issu du ratio des priors et correspondant à l'augmentation de volume de l'espace des paramètres, il contribue à pénaliser l'ajout de nouveaux nœuds. C'est une manifestation supplémentaire du fait que même un prior uniforme n'est jamais entièrement neutre vis-à-vis de la distribution *a posteriori* (voir 3.3.2 pour une discussion à ce sujet). Il remplit cependant un rôle important, en empêchant l'algorithme d'ajouter indéfiniment des nœuds afin de proposer un champ de vitesses qui minimise toujours plus son écart aux données, au risque de *fitter* le bruit des données au lieu du véritable signal intersismique : il faut que le gain de vraisemblance surpasse le coût de l'augmentation de la dimension du modèle. De cette manière, à vraisemblance égale - ce qui pourrait se traduire par *à pouvoir d'explication des données égal* -, un modèle ayant un plus faible nombre de nœuds sera préféré. Cette propriété de l'inférence bayésienne est appelé parcimonie

## 1. Méthode : inversion bayésienne du tenseur de déformation

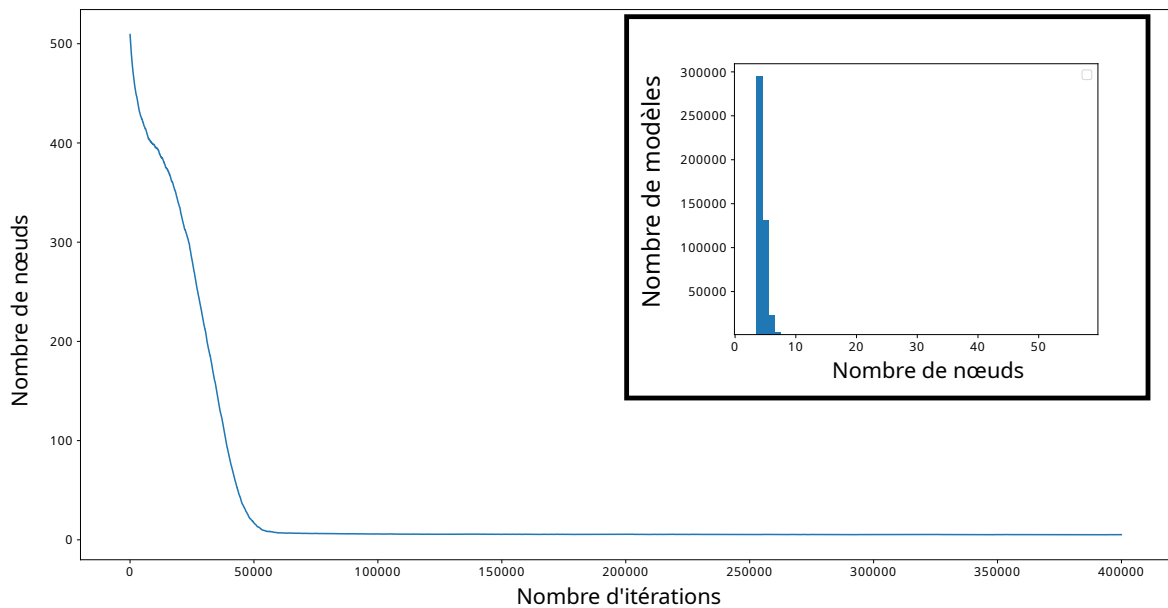


FIGURE 1.9. – Évolution et distribution *a posteriori* (en haut à droite) du nombre de nœuds pour une inversion d'un champ synthétique correspondant à la France métropolitaine mais ne contenant que du bruit blanc, dans le cadre d'une action de *benchmarking* des méthodes d'inversion du tenseur de déformation menée par RESIF-RENAG. Les modèles comportant un grand nombre de nœuds, échantillonnés au début du processus, n'apparaissent pas dans la distribution car ils ont été éliminés par le *burn-in*.

(MALINVERNO, 2002; MACKAY, 2003); elle peut s'interpréter comme une manifestation du rasoir d'Ockham.

La capacité de cet algorithme à créer ou supprimer des nœuds en fonction de ses besoins lui confère une grande partie de son adaptabilité. Par exemple, si l'on tente d'inverser des données ne contenant que du bruit blanc, ajouter des nœuds ne sera pratiquement jamais rentable puisque le nouveau nœud ne pourra souvent, au mieux, qu'éviter de dégrader la vraisemblance aux données - tandis que la pénalité dimensionnelle continuera d'inhiber leur apparition. Les suppressions de nœuds deviendront donc majoritaires, jusqu'à ce que le modèle atteigne le nombre minimal de nœuds requis pour décrire un champ de vitesses nul; c'est-à-dire, les 4 nœuds indispensables aux coins du domaine (figure 1.9).

### 1.3.3. Optimisation de la vitesse de convergence

Comparativement à un algorithme de Metropolis-Hastings, il est plus complexe de s'assurer de la convergence vers la distribution stationnaire d'un algorithme de rj-McMC : lorsque la dimension du modèle augmente, le volume de l'espace à explorer croît également. Le nombre de modèles échantillonnés nécessaires à ce que leur distribution approxime correctement la PDF *a posteriori* est donc proportionnelle à la dimension du problème. De plus, le problème de corrélation entre les modèles s'accroît également dans les hautes dimensions : 10 itérations suffisent sur un modèle à 20 nœuds pour bouleverser complètement le champ de vitesses proposé

par le modèle, alors que ces 10 mêmes itérations n'auront que peu d'effet sur un modèle à 200 nœuds. De la même manière, la probabilité qu'un nœud soit sélectionné pour être modifié à chaque itération étant proportionnelle à l'inverse du nombre de nœuds, lorsque le modèle comporte trop de paramètres, certains peuvent rester inchangés sur de très longues périodes. Dans les cas extrêmes, un même triangle peut demeurer intact sur plusieurs milliers d'itérations, conduisant à des artefacts particulièrement visibles dans la distribution *a posteriori* sur le 2<sup>nd</sup> invariant du tenseur de déformation.

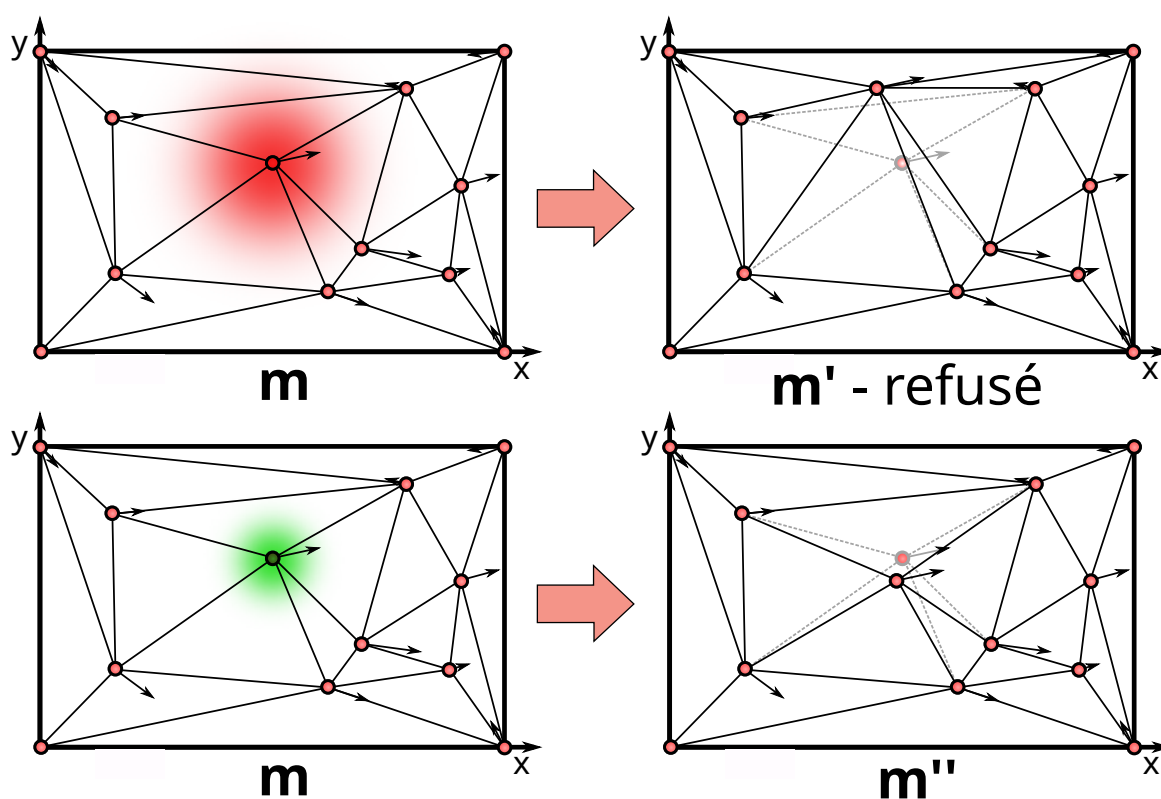


FIGURE 1.10. – Rejet différé d'une perturbation sur la position d'un nœud. La première proposition, issue d'une loi normale de large variance, crée un modèle très différent du premier, dont la vraisemblance peut être fortement dégradée. S'il est rejeté, une seconde perturbation, obtenue à partir d'une gaussienne de plus faible variance, proposera un nouveau modèle plus proche du précédent dans l'espace des modèles, qui aura empiriquement plus de chances d'être accepté.

Afin d'éviter le cas malencontreux où un nœud qui aurait été ignoré sur un très grand nombre d'itérations se verrait finalement proposer une perturbation, mais où celle-ci, trop importante, serait aussitôt rejetée, nous utilisons un système de rejet différé qui fonctionne comme une sorte de seconde chance, permettant de réaliser un nouvel essai de perturbation avec une variance moindre, sur le même nœud, avant de passer à l'itération suivante. Ce procédé, développé par TIERNEY et MIRA (1999) et MIRA et al. (2001), permet également d'explorer plus efficacement la densité de probabilité *a posteriori* lorsque celle-ci présente des variations à différentes échelles de distance caractéristique dans l'espace des paramètres : par exemple, la première perturbation, avec une variance élevée, permet de se déplacer rapidement entre deux maxima locaux de la

## 1. Méthode : inversion bayésienne du tenseur de déformation

densité de probabilité, mais ces trop grandes perturbations empêcheraient ensuite la chaîne d'explorer en détail ces maxima. La seconde loi de transition, basée sur une variance plus faible, prendrait alors le relais.

Cette méthode nécessite de tenir compte du taux d'acceptance du premier essai pour conserver l'équivalence entre la distribution stationnaire de la chaîne de Markov et la distribution *a posteriori* : en posant  $\mathbf{m}'$  le modèle obtenu (et non accepté) lors de la première tentative avec une loi de transition  $q_1$  et  $\mathbf{m}''$  le modèle proposé lors du second essai avec une loi de transition  $q_2$ , le taux d'acceptance est défini par

$$\alpha_2(\mathbf{m} \rightarrow \mathbf{m}'' | \mathbf{m}') = \frac{p(\mathbf{d}_{\text{obs}} | \mathbf{m}'') p(\mathbf{m}'') q_1(\mathbf{m}' | \mathbf{m}'') q_2(\mathbf{m} | \mathbf{m}' \cap \mathbf{m}'') \alpha_1(\mathbf{m}'' \rightarrow \mathbf{m}')}{p(\mathbf{d}_{\text{obs}} | \mathbf{m}) p(\mathbf{m}) q_1(\mathbf{m}' | \mathbf{m}) q_2(\mathbf{m}'' | \mathbf{m} \cap \mathbf{m}') \alpha_1(\mathbf{m} \rightarrow \mathbf{m}')} \quad (1.54)$$

Cette technique de rejet différé peut théoriquement être appliquée de manière récursive, c'est-à-dire en proposant des lois de transition en cascade à chaque échec de la perturbation précédente, y compris sur les sauts de dimension (GREEN et MIRA, 2001). Cependant, la complexité des calculs requis pour établir le nouveau taux d'acceptance augmente drastiquement à chaque itération ; aussi, à l'instar de BODIN et SAMBRIDGE (2009), nous n'utilisons ici qu'une seconde loi de transition sur les perturbations qui n'entraînent pas de changement de dimension du modèle, à savoir le déplacement d'un nœud ou la modification de sa vitesse. En pratique, on définit simplement une deuxième loi normale, de plus faible écart-type, pour le tirage de la nouvelle variable aléatoire correspondant à la perturbation lorsque la première échoue (figure 1.10). Le nouveau taux d'acceptation permettant de surveiller la vitesse de convergence de la chaîne devient alors le nombre de modèles acceptés lors de l'une des deux propositions, divisé par le nombre d'itérations effectuées.

Il est difficile de s'appuyer sur les distributions statistiques des paramètres des nœuds pour déterminer la longueur du *burn-in* nécessaire : comme la paramétrisation évolue constamment, un même nœud peut, en se déplaçant, changer radicalement de distribution (par exemple en étant déplacé d'une région tectoniquement active vers un espace intraplaque de vitesse quasi-nulle). Leur traçabilité est encore pire lorsqu'on tient compte des suppressions et des naissances. On préfère donc s'appuyer sur une caractéristique persistante de l'inversion, à savoir le nombre de nœuds employés par les modèles. La distribution dans le posterior suit en première approximation une loi normale (figure 1.12) ; on peut aisément repérer les modèles à défaut en observant le moment où le nombre de nœuds se stabilise autour de sa valeur moyenne (figure 1.11).

Une autre stratégie pour accélérer la convergence de l'algorithme est la parallélisation du code. Les techniques de MCMC disposent d'une parallélisation naturelle du processus : il suffit de lancer simultanément une chaîne par processeur (ROSENTHAL, 2000). Chaque chaîne peut indépendamment échantillonner la distribution *a posteriori* à l'aide de sa propre collection de modèles. La vitesse de progression des chaînes peut être légèrement variable, même sur deux processeurs identiques : le nombre de nœuds et leur configuration influe sur le temps nécessaire à l'algorithme de construction de la triangulation de Delaunay. Une fois que toutes

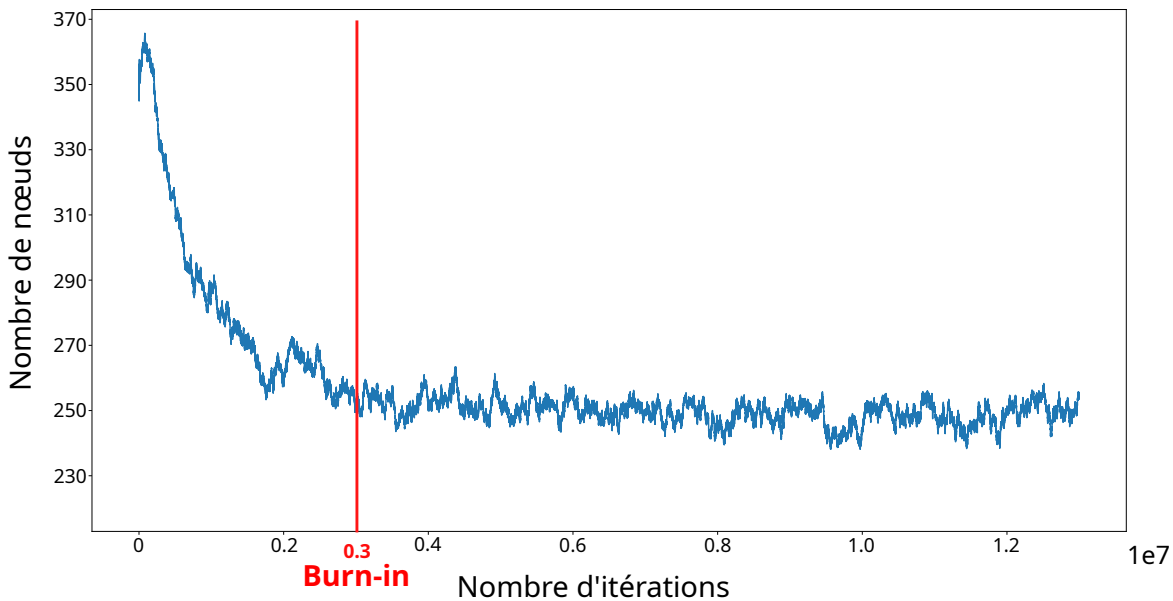


FIGURE 1.11. – Évolution du nombre de nœuds en fonction du nombre d'itérations. Lorsque la chaîne converge vers sa distribution stationnaire, le nombre de nœud évolue selon un processus stochastique autour de la moyenne. Le *burn-in* est alors choisi de manière à supprimer les modèles qui précèdent ce processus : ici, on supprime les 3 000 000 premières itérations sur 13 000 000 au total.

les chaînes ont effectué le nombre requis d'itérations, l'ensemble des modèles échantillonnés par chacune peut être sommé afin de fournir une unique distribution *a posteriori*. Comme chaque chaîne converge vers la même distribution stationnaire, leur somme exhibe également les mêmes propriétés statistiques.

Cette stratégie est d'autant plus efficace que différentes chaînes peuvent explorer simultanément différentes régions de l'espace des modèles. Si l'on imagine par exemple une PDF *a posteriori* avec des maxima locaux séparés par de grandes régions de faible densité, il peut être difficile pour une seule chaîne de les explorer tous en un temps raisonnable. En revanche, plusieurs chaînes évoluant indépendamment les unes des autres pourront se répartir dans ces maxima et les échantillonner de manière efficace.

Un avantage majeur de cette stratégie de parallélisation est que les chaînes n'ont pratiquement aucun besoin de communiquer les unes avec les autres, si ce n'est à la toute fin pour centraliser les résultats. C'est l'un des rares algorithmes à ne pas subir d'effet de seuil, où le temps consommé par les interactions entre les processeurs finit par limiter voire dépasser le gain de temps lié à l'augmentation des capacités de calculs : le gain d'efficacité est quasi linéaire. Doubler le nombre de processeur revient (presque) à doubler la vitesse de l'algorithme.

Il n'est cependant pas possible de diminuer de manière arbitrairement grande le temps de calcul de chaque chaîne en compensant par l'ajout d'une proportion équivalente de processeurs : les chaînes nécessitent un nombre d'itérations incompressible pour atteindre leur état statistiquement stable correspondant à la distribution stationnaire. Les premières itérations de chaque chaîne sont défaussées par le *burn-in*, aussi le gain d'efficacité ne se fait-il sentir qu'une fois le

## 1. Méthode : inversion bayésienne du tenseur de déformation

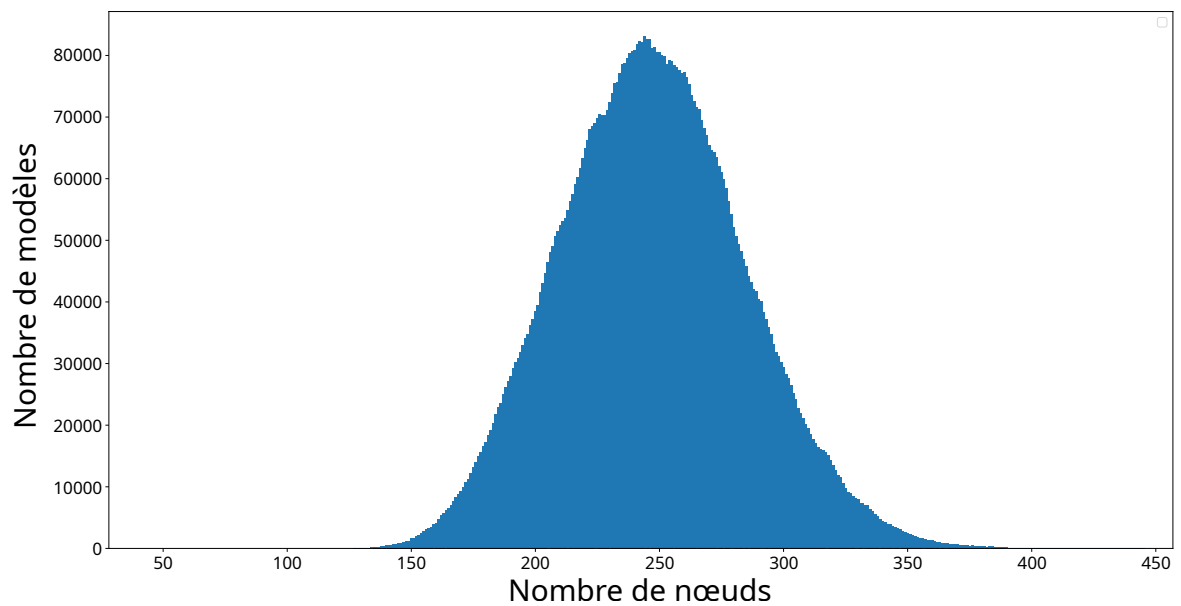


FIGURE 1.12. – Distribution du nombre de nœud *a posteriori* correspondant à l'inversion de la figure 1.11. Les modèles antérieurs au *burn-in* n'apparaissent pas dans la distribution.

*burn-in* dépassé. Lorsque le nombre d'itérations effectué par chaque chaîne est grand devant le *burn-in*, l'influence de celui-ci devient négligeable et le gain de la parallélisation se rapproche d'un gain linéaire : plus l'algorithme tourne longtemps, plus la parallélisation est efficace.

### 1.3.4. Résultats et sauvegarde des modèles

Le résultat de l'algorithme de *rj-McMC* consiste donc en une collection de modèles paramétrés par des nœuds, à partir desquels on peut reconstituer le champ de vitesses horizontal prédit par un modèle, et partant la PDF *a posteriori* sur la vitesse et ses dérivées spatiales en n'importe quel point de la surface étudiée. Cependant, pour des questions de limitation numérique, il n'est pas forcément possible de stocker le jeu de paramètres décrivant chaque modèle généré par l'algorithme.

Supposons qu'un modèle soit constitué de 200 nœuds en moyenne. Cela représente donc 800 paramètres représentés par des *floats* double précision, nécessitant 8 octets chacun. Chaque modèle nécessite donc 6400 octets de mémoire pour être stocké. Comme il est bien entendu totalement inenvisageable de sauvegarder chaque modèle dans un fichier individuel, le fichier contenant l'ensemble des modèles aura *a minima* une taille de 6.4 Ko par modèle. On peut au maximum imaginer manipuler un fichier atteignant jusqu'à une dizaine de Go sur la RAM de la plupart des ordinateurs modernes, sans avoir à invoquer de techniques de mappage qui complexifieraient la manipulation des résultats. On peut alors stocker dans notre fichier jusqu'à environ 1 500 000 modèles en faisant l'hypothèse que le stockage se fait de manière parfaite (en réalité, on ne pourra probablement pas en sauvegarder plus d'un million). Si l'on fait l'hypothèse qu'on ne garde qu'un modèle sur 50 à cause de la corrélation entre des modèles adjacents le long

### 1.3. Application à l'inversion de vitesses GNSS

de la chaîne de Markov, on peut atteindre jusqu'à 50 000 000 itérations, ce qui représente de l'ordre d'un millier d'heures de calcul sur un unique processeur. On pourrait ainsi estimer que la limite pratique ne sera presque jamais atteinte, mais en parallélisant le code, la saturation du fichier des modèles sera bien plus rapide. Ainsi, il ne serait pas possible de réaliser une inversion sur une centaine de processeurs d'une durée supérieure à une dizaine d'heures, sous peine que le fichier résultant ne soit plus utilisable, ni même écrivable par le processeur chargé de la centralisation des résultats.

Bien évidemment, de nombreuses tactiques permettant de repousser cette limite pourraient être utilisées, tel que le mappage du fichier lors de son utilisation, une lecture ligne à ligne pour un usage ne nécessitant pas de conserver toute l'information en mémoire vive, le partitionnement des résultats sur plusieurs fichiers lors de l'écriture, *etc.* Cependant, lorsqu'on souhaite appréhender le résultat d'une inversion bayésienne, il est généralement nécessaire d'observer la distribution dans son ensemble; aussi la RAM de l'utilisateur sera tout de même un facteur limitant. De plus, ces stratégies de contournement ne s'attaquent pas au problème central : cette manière d'écrire les résultats résultera toujours en un bridage de la durée du processus d'échantillonnage, qui est contraire au principe même de la méthode qui vise à approximer asymptotiquement la distribution cible, et qui souhaite donc générer le plus grand nombre de modèles possibles. À titre d'exemple, les plus longues inversions réalisées dans le chapitre 2 comportent plus de 7 millions de modèles.

Afin de pouvoir stocker la distribution d'un nombre arbitrairement grand de modèles, on définit une grille sur la région d'intérêt, et à chaque itération de l'algorithme, on calcule la vitesse prédite par le modèle sur chaque pixel de cette grille et on l'enregistre sous forme d'une contribution à un histogramme représentant la PDF *a posteriori*. On procède de même pour toutes les caractéristiques d'intérêt que l'on souhaite étudier, au premier rang desquelles le gradient de vitesse, dont on peut calculer et enregistrer chaque composante, ou plus simplement ses principales caractéristiques utilisées dans les études tectoniques (divergence, rotationnel, 2<sup>nd</sup> invariant, amplitude et angle des axes principaux de déformation).

Il faut toutefois noter que ce processus, bien qu'il permette de prendre en compte une quasi-infinité de modèles, n'enregistre pas la véritable densité de probabilité *a posteriori* mais une projection de celle-ci, ce qui induit une perte d'information. Cela est particulièrement problématique pour le champ de vitesses de déplacement, qui est un champ vectoriel, et qui est projeté sur les axes  $x$  et  $y$  lors de la sauvegarde du modèle : en supposant que la distribution réelle en un pixel donné soit une gaussienne bidimensionnelle, son enregistrement sous forme de deux gaussiennes unidimensionnelles occasionne la perte de la covariance entre  $V_x$  et  $V_y$  (figure 1.13). Lorsqu'on étudie le champ de déformations ou de vitesses le long d'une faille, les profils de vitesses orthogonal et parallèle à celle-ci peuvent être utilisés pour déterminer les différentes caractéristiques de cette faille, telles que sa vitesse de glissement (*e.g.* HUSSAIN et al., 2018), mais ces profils ne sont pas disponibles par défaut : il faut spécifiquement requérir la projection de la vitesse selon les axes idoines en amont de l'inversion.

Un problème similaire se manifeste lorsqu'on souhaite calculer la décomposition de la déformation selon ses axes principaux, technique très utilisée pour l'interprétation tectonique : s'il



## 1. Méthode : inversion bayésienne du tenseur de déformation

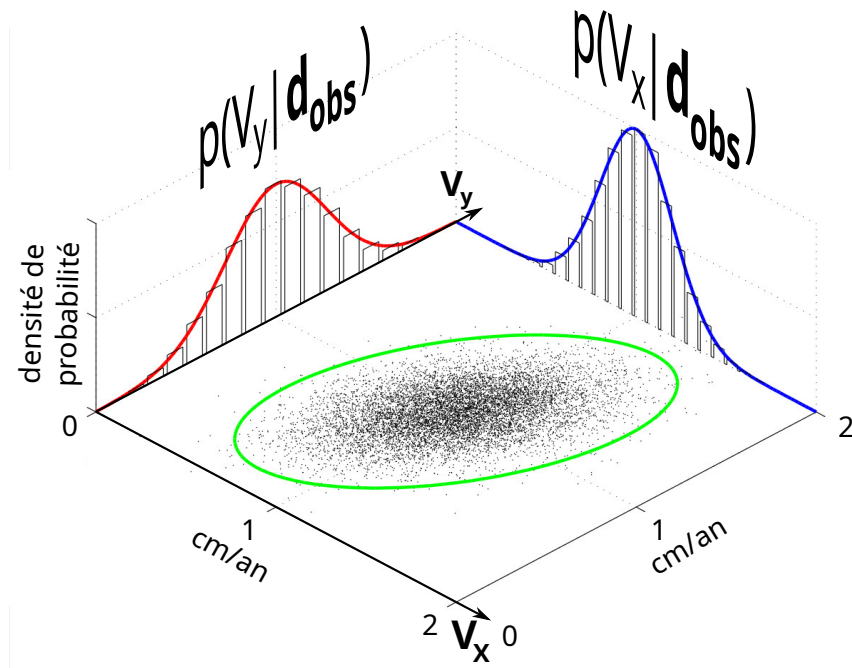


FIGURE 1.13. – Distribution gaussienne bidimensionnelle pour la vitesse en un pixel, projetée selon  $x$  et  $y$  : le lien entre  $V_x$  et  $V_y$  est perdu, de même que la covariance entre les distributions marginales  $p(V_x | \mathbf{d}_{\text{obs}})$  et  $p(V_y | \mathbf{d}_{\text{obs}})$

est possible de calculer en tout point les axes principaux de déformation et leurs valeurs propres associées, le lien entre les deux distributions est perdu dans le résultat final. Un compromis est de conserver la distribution sur l'orientation des axes au sein d'un histogramme avec des classes d'intervalles de  $10^\circ$ , et d'associer à chaque classe d'angle une distribution sur l'amplitude de la déformation correspondant à cet axe. Une démonstration de cette représentation est disponible sur la figure 2.11 dans le chapitre 2.

Cette limitation n'affecte cependant pas les champs scalaires tels que le  $2^{\text{nd}}$  invariant du tenseur de déformation.

### 1.4. Conclusion

Au cours de ce chapitre, nous avons développé les bases théoriques de l'inférence bayésienne, ainsi que son application à la résolution de problèmes inverses. Cette méthode propose d'abord la solution non plus d'un point de vue déterministe, mais d'un point de vue probabiliste : contrairement à une inversion classique par optimisation, le résultat n'est pas un unique modèle présentant les meilleures caractéristiques, mais une densité de probabilités complète sur les modèles en fonction des données ainsi que de nos connaissances *a priori*.

Il est notamment possible d'utiliser l'inférence bayésienne pour inverser le champ de vitesses horizontal à la surface de la Terre à partir de données GNSS discrètes, moyennant une paramétrisation adaptée. En utilisant un ensemble de nœuds amovibles, nous obtenons une

paramétrisation souple capable de s'adapter aux hétérogénéités spatiales dans la répartition des données, mais également aux variations du gradient de vitesse. La manière dont le problème direct est résolu à l'aide de la triangulation de Delaunay assure que chaque modèle dispose d'un champ de vitesses continu dont on peut extraire le tenseur des taux de déformation.

L'échantillonnage de la densité de probabilité *a posteriori* sur les modèles est réalisé à l'aide d'un processus de type *rj-McMC* permettant de faire varier le nombre de nœuds qui contrôlent le modèle, et donc d'offrir un maximum de liberté à l'algorithme pour s'ajuster aux données.

La distribution de probabilité résultante est plus difficilement appréhendable qu'un modèle unique, mais elle ouvre d'intéressantes opportunités d'analyses et d'interprétation ainsi que d'estimation des incertitudes sur les données, qui seront discutées en détail au cours du chapitre suivant.





## 2. Application à des données GNSS synthétiques et au sud-ouest des États-Unis

### Sommaire

---

<b>2.1. Introduction</b>	<b>54</b>
2.1.1. Surface strain, fault behavior and space geodesy	54
2.1.2. The strain rate tensor : formulation, assumptions and analysis	55
2.1.3. Aim of the study	56
<b>2.2. Inverting for the strain rate tensor : state of the art</b>	<b>57</b>
<b>2.3. Tectonic context of the Southwestern US and GNSS velocity field</b>	<b>59</b>
<b>2.4. Method : Inverting for the geodetic strain rate</b>	<b>62</b>
2.4.1. Parameterizing the velocity field	62
2.4.2. Bayesian inference	64
2.4.3. Sampling models from the posterior distribution	64
2.4.4. Extracting relevant information from the ensemble solution	66
<b>2.5. Results</b>	<b>67</b>
2.5.1. Synthetic tests on an ideal San Andreas Fault	67
2.5.2. Bayesian inversion of the MIDAS dataset	74
<b>2.6. Discussion</b>	<b>77</b>
2.6.1. Advantages and limits of the Bayesian surface reconstruction	77
2.6.2. From a probabilistic solution to tectonic interpretations	78
2.6.3. Future developments	80
<b>2.7. Conclusion</b>	<b>81</b>
<b>2.8. Appendix</b>	<b>83</b>

---

L'OBJECTIF DE CE CHAPITRE EST DE DÉMONTRER en pratique le fonctionnement de l'algorithme fondé sur l'inférence bayésienne et l'échantillonnage par MCMC décrit dans le chapitre précédent. Il s'agit d'un article publié dans JGR (*Journal of Geophysical Research*) officiant en tant que preuve de concept de la méthode développée au cours de cette thèse. L'objectif initial était de tester cette méthode d'inversion sur des jeux de données synthétiques décrivant divers scénarios simples et de comparer les résultats obtenus avec ceux d'autres méthodes préexistantes. L'étude menée par BAXTER et al. (2011) ainsi que les interrogations qu'il soulève quant à la capacité d'une inversion du tenseur de déformation

## 2. Application à des données GNSS synthétiques et au sud-ouest des États-Unis

à décrire correctement la déformation sans la présence d'artéfacts systématiques nous ont permis d'orienter nos travaux : nous avons conçu un test synthétique représentant le champ de vitesse correspondant à une faille décrochante couplée, en reprenant les caractéristiques réelles du réseau de stations GNSS de la côte ouest des États-Unis pour constituer notre jeu de données à inverser. Cette configuration nous permet de quantifier la qualité des résultats obtenus sans éliminer les principales difficultés relatives à la structure des réseaux GNSS (notamment la dispersion des stations, leur densité variable et le bruit inhomogène qui les affecte). Nous effectuons alors une comparaison avec une inversion obtenue par spline bicubique en tension en appliquant un bruit gaussien d'amplitude variable sur les données, mettant en valeur la robustesse de l'inférence bayésienne par rapport à l'interpolation par splines, bien plus sensible à ces perturbations.

Un des enjeux majeurs de cette étude est également de démontrer l'usage qui peut être fait de la PDF (*Probability Density Function*) obtenue sur les différents paramètres lors de l'inversion, afin de caractériser les incertitudes sur les résultats. Cette estimation du degré de confiance que l'on peut attribuer aux valeurs de déformation obtenues en différents points est un avantage crucial de l'inversion bayésienne dans le cadre de l'intégration des cartes de déformation dans l'étude de l'aléa sismique. Cela permet également d'appréhender les différents scénarios qui peuvent coexister dans l'interprétation des données, par exemple entre une déformation intense et localisée ou une déformation plus diffuse, possibilité qui n'était pas offerte jusqu'alors par les cartes de déformation.

La frontière entre la plaque Pacifique et la plaque de l'Amérique du Nord est particulièrement active, avec une déformation qui s'accumule principalement le long de grandes structures dont la plus importante est la faille de San Andreas. Cette zone complexe, densément étudiée et couverte par une abondante littérature scientifique, constitue un terrain d'essai idéal pour notre méthode d'inversion bayésienne dont les résultats principaux sont analysés à la lumière des résultats précédemment établis dans cette région. Une grande variété de structures tectoniques qui y figurent, notamment de très forts gradients de déplacement difficiles à obtenir avec une approche classique impliquant un paramètre de lissage, sont correctement détectés sans qu'il soit nécessaire de fournir des informations tectoniques telles que la localisation des failles au préalable.

Cet article, sélectionné par les éditeurs de JGR pour figurer dans les "Research Spotlight" de *Eos*, constitue une étape majeure de ce travail de thèse afin de permettre la diffusion de cette nouvelle méthode d'inversion bayésienne au sein de la communauté scientifique.

# Bayesian Estimation of Surface Strain Rates from GNSS Measurements : application to the Southwestern US

C. Pagani<sup>1</sup>, T. Bodin<sup>1</sup>, M. Métois<sup>1</sup>, C. Lasserre<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Univ Lyon 1, ENSL, CNRS, LGL-TPE, F-69622, Villeurbanne, France

## Key Points :

- A Bayesian interpolation scheme is applied to derive strain rates from discrete geodetic horizontal velocities
- Full probability density functions are provided for spatial derivatives of the 2D velocity field.
- Consistent estimates of strain rates are obtained without underlying physical model nor ad-hoc smoothing parameter.

## Abstract

Seismic hazard assessment in active fault zones can benefit of strain rate measurements derived from geodetic data. Producing a continuous strain rate map from discrete data is an inverse problem traditionally tackled with standard interpolation schemes. Most algorithms require user-defined regression parameters that determine the smoothness of the recovered velocity field, and the amplitude of its spatial derivatives. This may lead to biases in the strain rates estimation which could eventually impact studies on earthquake hazard. Here we propose a transdimensional Bayesian method to estimate surface strain rates from GNSS velocities. We parameterize the velocity field with a variable number of Delaunay triangles, and use a reversible jump Monte-Carlo Markov Chain algorithm to sample the probability distribution of surface velocities and spatial derivatives. The solution is a complete probability distribution function for each component of the strain rate field. We conduct synthetic tests and compare our approach to a standard b-spline interpolation scheme. Our method is more resilient to data errors and uneven data distribution, while providing uncertainties associated with recovered velocities and strain rates. We apply our method to the Southwestern US, an extensively studied and monitored area and infer probabilistic strain rates along the main fault systems, including the San Andreas one, from the inversion of interseismic GNSS velocities. Our approach provide a full description of the strain rate tensor for zones where strain rates are highly contrasted, with no need to manually tune user-defined parameters. We recover sharp velocity gradients, without systematic artifacts.

## 2.1. Introduction

### 2.1.1. Surface strain, fault behavior and space geodesy

Imaging and quantifying the present-day lithospheric deformation is crucial to understanding how and where long-term tectonic loading is accommodated. Plate tectonics theory assumes that the relative motion of rigid lithospheric blocks is accommodated on a limited set of localized fault zones, where the lithosphere either deforms elastically during the interseismic period of the seismic cycle, or in a brittle way during the coseismic rupture (LE PICHON, 1968; MORGAN, 1968; OLIVER et al., 1969). In a simple elastic framework, the surface deformation generated by slip on a dislocation buried in an elastic half-space can be computed (e.g. OKADA, 1985), as well as the surface deformation produced by full or partial locking of the buried fault using the “backslip” hypothesis (J. C. SAVAGE, 1983). Analysing the spatial patterns of surface deformation and their temporal variations around active faults can therefore help constraining the behaviour of fault systems at each stage of the seismic cycle.

With the advent of space geodesy in the 1990s, and in particular the growing development of GNSS (Global Navigation Satellite System) networks in active fault zones, precise measurements of surface displacements made it possible to detect and model various processes of tectonic deformation, thus revolutionizing our understanding of fault seismic cycle (e.g. BÜRGMANN et THATCHER, 2013). The last decades have seen the number of geodetic observations of large earthquakes and interseismic strain along major faults increase significantly (e.g. BLEWITT et al., 2018). Combined with an improved knowledge of the past seismic history of faults, such observations have highlighted a spatial correlation between portions of the seismogenic zone locked during the interseismic period and the coseismic rupture zones, while portions of faults aseismically slipping during the interseismic phase appeared as potential nucleation zones or barriers to earthquakes (e.g. CHLIEH et al., 2008; SIMONS et al., 2011; MÉTOIS et al., 2016). This paved the way to provide plausible scenarios for future earthquakes based on the monitoring of interseismic surface strain (e.g. KANEKO et al., 2010; AVOUAC, 2015; BEAUVAL et al., 2018).

If most of the deformation due to relative block motions is indeed taken up on well localized and mapped plate boundaries, the lithosphere can also deform in a more diffuse way on wider zones, in particular in and around collisional belts (e.g. THATCHER, 2009). Such diffuse deformation may be accommodated elastically by series of multiple active faults, or through other non-elastic processes within the lithosphere (ENGLAND et MOLNAR, 1997; COPLEY, 2008; D’AGOSTINO et al., 2014).

In combination with geological, tectonic and seismological data, geodetic measurements of surface deformation can then help to refine the degree of localization of the deformation over wide intracontinental areas, to identify active structures and constrain the style of the deformation, as well as the underlying mechanical processes.

Modern geodetic techniques now offer measurements of surface velocities with accuracy of the order of 1mm/yr or below for the interseismic period. They each have their own contributions and specificities concerning the components of the ground motion that they capture, their resolution and their uncertainties, and appear to be very complementary. While horizontal

and vertical motion can be measured by GNSS and optical image correlation, Interferometric Synthetic Aperture Radar (InSAR) only provide the projection of ground displacements in the line-of-sight (LOS) of the satellite. GNSS measurements remain spatially sparse, at discrete stations, but benefit from a temporal sampling up to  $\approx 1\text{Hz}$ . Space geodesy based on optical and radar images, on the contrary, provide data at all satellite image pixels, with a temporal resolution dependent on the return time of the satellites. Finally, depending on the technique, uncertainties can be spatially and temporally correlated or not. Taking advantage of the large amount and diversity of geodetic data available today to constrain spatio-temporal variations of the strain rate field is a challenge for the community involved in seismic hazard studies.

### 2.1.2. The strain rate tensor : formulation, assumptions and analysis

The variations of the strain rate field can be explored through the analysis of the velocity gradient  $\vec{\nabla}\mathbf{V} = \partial_i V_j$ , its symmetrical part, and the *strain rate tensor*  $\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_i V_j + \partial_j V_i)$ . Spotting regions with high strain rates may help identify active faults prone to high seismic hazard (e.g. ELLIOTT et al., 2016). To this end, maps of the second invariant  $I_2$  of  $\dot{\epsilon}$  are built either at the local to regional scale (e.g. D'AGOSTINO, 2014; MÉTOIS et al., 2015), or at the continental to global scale (e.g. KREEMER et al., 2014). Following KREEMER et al. (2003), PÉROUSE et al. (2012) ainsi que D'AGOSTINO (2014) and MÉTOIS et al. (2015), we define the second invariant of the horizontal strain rate tensor as :

$$I_2 = \sqrt{\dot{\epsilon}_{xx}^2 + \dot{\epsilon}_{yy}^2 + 2\dot{\epsilon}_{xy}^2}.$$

Note that most GNSS studies only consider the horizontal 2D tensor  $\dot{\epsilon}$  (WARD, 1998; D'AGOSTINO, 2014) or a partially 3D tensor (MAZZOTTI et al., 2011; SHEN et al., 2015) for two main reasons : (1) the vertical component of the GNSS velocity is often associated with large uncertainties (BENNETT et HREINSDÓTTIR, 2007), and (2) we have no access to the vertical derivative of the velocity components ( $\partial_z V_x, \partial_z V_y, \partial_z V_z$ ). Joint GNSS-InSAR studies also remain limited to a 2D strain tensor analysis (e.g. WEISS et al., 2020). In this study, we only consider the horizontal velocity field and corresponding 2D strain rate tensor, while discussing in section 2.6 the possibility to include  $V_z$  in future analysis .

Providing continuous maps of the different components or combinations of components of the horizontal strain tensor can help to understand the tectonic regime and style of deformation of a given area (e.g. PÉROUSE et al., 2012; MÉTOIS et al., 2015; CHOUSIANITIS et al., 2015; KREEMER et al., 2018). For example, the second invariant analysis gives clues on the variations of strain amount and localization across faults. The divergence of the velocity field  $d = tr(\dot{\epsilon})$  highlights areas experiencing dilation or compression (a positive divergence stands for dilation while negative divergence is compression), while the horizontal vorticity defined as  $rot\mathbf{V} = \partial_x V_y - \partial_y V_x$  allows the identification of nearly rigid blocks. The principal directions of the strain rate tensor may also be compared to directions of stress when the lithosphere is considered



## 2. Application à des données GNSS synthétiques et au sud-ouest des États-Unis

fully elastic. They are therefore often plotted against focal mechanisms or long-term stress orientations related to the geological setting (e.g. ENGLAND et al., 2016; MATHEY et al., 2021).

In the past decades, the geodetically-derived strain rate tensor has also been used to derive the equivalent seismic energy stored as elastic deformation that could be released during earthquakes. In particular, WARD (1998) proposes to use the formula from KOSTROV (1974) to calculate geodetic moment rates  $\dot{M}_o^g$  from  $\dot{\epsilon}$ , in the case of a uniaxial strain. For a region of given area  $A$ , its geodetic moment rate is expressed as :

$$\dot{M}_o^g = 2\mu H_s A \dot{\epsilon}_{max}, \quad (2.1)$$

where  $\mu$  is the rigidity modulus,  $H_s$  the seismogenic thickness, and  $\dot{\epsilon}_{max}$  is the largest eigenvalue of the strain rate tensor  $\dot{\epsilon}$ . Comparing  $\dot{M}_o^g$  to the released seismic energy based on historical and instrumental seismic catalogues provides information on the energy that remains to be released either seismically or aseismically (WARD, 1998; PANCHA, 2006; MAZZOTTI et al., 2011; ANGELICA et al., 2013; D'AGOSTINO, 2014).

### 2.1.3. Aim of the study

As shown above, mapping continuous surface velocities together with their spatial derivatives and associated uncertainties can benefit a broad community. However, two main methodological limitations remain :

1. As in-situ geodetic data provide spatially discrete and unevenly distributed information on the surface displacement rate, these data need to be interpolated in order to recover a continuous strain rate map. This also applies to InSAR data in case of low coherence. Such computing formally constitutes an inverse problem with a highly non-unique solution and a strong trade-off between model complexity and model constraints, i.e. between the level of spatial resolution and the level of errors in the solution (BODIN, SAMBRIDGE, RAWLINSON et al., 2012).
2. Uncertainties on the interpolated velocity field and their propagation onto the strain rate tensor components are often poorly estimated. These uncertainties are nonetheless required and crucial if we want geodetic estimates of the strain rates to integrate probabilistic seismic hazard assessment schemes (BEAUVAL et al., 2018; GERSTENBERGER et al., 2020).

In this paper, we propose to tackle these issues by applying a transdimensional Bayesian approach (BODIN, SALMON et al., 2012) to the strain rate reconstruction problem. We first describe the different approaches used in the community to produce strain rate maps. We then present our inversion method and illustrate its potential benefits with synthetic tests. Because the San Andreas fault system has been extensively studied in the past and is particularly well instrumented, we build our synthetic tests from its simplified geometry and kinematics. We then propose a first application to real observations of a GNSS velocity field spanning the interseismic deformation across this fault system and the Southwestern US. Finally, we discuss the main outcomes, advantages and limitations of the proposed method. We show that we are able to provide a full probabilistic description of the strain rate tensor for zones where strain rates are

highly contrasted, with no need to introduce user-defined parameters. Our method recovers sharp velocity gradients, therefore localizing strain, and distinguishing creeping from locked fault segments, without systematic biases.

## 2.2. Inverting for the strain rate tensor : state of the art

Since the first geodetic observations of ground movements by triangulation or levelling (e.g. FRANK, 1966; J. SAVAGE et BURFORD, 1970), several methods have been developed to infer surface strain rates from velocity fields. Today, they mainly use GNSS data (e.g. SHEN et al., 1996; VERGNOLLE et al., 2007; KREEMER et al., 2018; C. MASSON, MAZZOTTI, VERNANT et DOERFLINGER, 2019) and start to incorporate space geodetic data from InSAR and optical imagery (e.g. H. WANG et al., 2019; BARNHART et al., 2020). Some of these methods rely on geophysical models, such as elastic or visco-elastic block models with predefined active faults (e.g. McCAFFREY et al., 2013; PARSONS, 2006), to calculate surface velocity and strain rates. Others aim at deriving the strain rate tensor from surface observations alone, without any underlying physical model.

Among the “model-free” methods, two main approaches coexist in the literature. The most standard approach requires to first spatially interpolate local displacement rates measured at GNSS stations to build a continuous velocity field. The strain rate tensor is then simply obtained by taking the gradient of the interpolated velocity field. The interpolation (or 2D regression) is often conducted by fitting a spline function to the data (BEAVAN et J. HAINES, 2001; KREEMER et al., 2003; MÉTOIS et al., 2015). The level of smoothing to interpolate the velocity field is usually arbitrarily defined by the user. For instance, in the *SPARSE* code developed in BEAVAN et J. HAINES (2001), it is controlled by the interpolation grid spacing and the variance attributed to each grid cell (it can therefore be spatially variable). In the adjusted bi-cubic spline-in-tension method (referred to as the B-spline method in the following), a tension parameter must be chosen as well (W. H. F. SMITH, 1990; WESSEL et BERCOVICI, 1998; GAN et al., 2007; WESSEL et J. M. BECKER, 2008; HACKL et al., 2009). This tension parameter is unique for the whole study area. In the case of unevenly spaced geodetic data, regions with the densest sampling may thus be over-smoothed and information may be lost. Other interpolation techniques have been proposed to limit this weakness. For instance, the velocity for each cell of the interpolation grid can be computed as the weighted average of velocities at neighboring GPS stations (MAZZOTTI et al., 2011). However, here again, the weighting function defining the smoothness of the solution needs to be defined by the user. The level of smoothness of the velocity field (i.e. the amplitude of its derivatives) directly determines the amplitude of the strain rate tensor. An arbitrarily fixed smoothing level is therefore a serious limitation to proper strain rate assessment. Finally, B-spline methods are based on a regularized optimization scheme, and thus do not offer any constraint on the uncertainties regarding the velocity field and the strain rate tensor (ASTER et al., 2018), which is problematic in the context of hazard assessment.

In a second type of approach, geodetic strain rates are directly inverted from the GNSS data without the need for a velocity interpolation scheme (SHEN et al., 1996; SPAKMAN et NYST,

## 2. Application à des données GNSS synthétiques et au sud-ouest des États-Unis

2002; WARD, 1998). At each point on a regular geographical grid, assuming a constant strain rate field, a system of linear equations can relate the displacement and deformation at that point and GPS velocities at neighbouring stations. The observed velocities at GPS stations can thus be inverted through a standard least-square scheme to recover the unknown deformation at any given point. This method offers more robust strain rate estimates as such rates are directly computed as weighted averages. It provides also a first-order estimate on strain uncertainties. Many studies have used such least-square inversion schemes for studying surface deformation in specific areas, as for instance SAGIYA et al. (2000) in Japan, CHOUSIANITIS et al. (2015) in Greece, or PALANO et al. (2018) in Iran. However, the parameter controlling the weighting decay with distance in the least-square inversion remains again arbitrarily-chosen, and acts as a smoothing factor that affects the resulting solution. Efforts have been made to optimize the level of smoothing and to account for spatial variability of data density (SHEN et al., 2007, 2015). In particular, KREEMER et al. (2018) propose an algorithm in which, for any given evaluation point, multiple least-square inversions from different stations triplets are conducted. The median strain rates over the ensemble of inverted ones are then provided at that point.

However, the standard techniques presented above remain sensitive to the GNSS network geometry (with unevenly spaced data in most cases), data outliers and ad-hoc user parameters. This is now acknowledged as a major issue in the community, potentially leading to systematic artifacts that could be mis-interpreted as tectonic signals (e.g. HACKL et al., 2009; BAXTER et al., 2011; TITUS et al., 2011). In the Southwestern US for instance, where seismic hazard is high, a wide range of methods have been applied in the last decades to recover the strain rate tensor (e.g. HACKL et al., 2009; KREEMER et al., 2012), with results that may differ significantly (SANDWELL et al., 2010). The remaining limitations in these methods are therefore preventing further integration of geodetic measurements in seismic assessment methods.

In an attempt to overcome such limitations, we propose a method based on Bayesian inference to invert discrete GNSS velocities for the continuous 2D surface displacement field and the associated velocity gradients and strain rate tensor. We follow from the work of BODIN, SALMON et al. (2012) who proposed a transdimensional Bayesian surface reconstruction algorithm to estimate the Moho topography beneath Australia from a discrete set of local observations. In this approach, the reconstructed surface is parameterized with a mesh that self-adapts to the level of information in the data. This proves to be well suited for very heterogeneous data (spatially or in terms of data type and noise level). CHOBLET et al. (2014) used the same approach to reconstruct probabilistic maps of relative variations of coastal sea level from tide gauge records. The approach was also used by HUSSON et al. (2018) to reconstruct maps of vertical displacement rates from GPS measurements, and by HAWKINS, BODIN et al. (2019a) and HAWKINS, HUSSON et al. (2019) to reconstruct maps of sea level rise by combining vertical GPS velocities, satellite altimetry and tide gauge measurements. In this work, the reconstructed surface is defined by two parameters : the two components of the interseismic horizontal velocities measured at GNSS stations. Details of the method are presented in section 2.4.

## 2.3. Tectonic context of the Southwestern US and GNSS velocity field

To test and illustrate the potential of our methodology, we need a data set that is heterogeneous in several aspects : heterogeneous in data coverage, with a combination of densely monitored and poorly sampled areas, heterogeneous in data quality with variable uncertainties, and spatially heterogeneous in the expected strain rate amplitude and style.

In all these regards, our study area, located in the Southwestern US (31° to 43°N, 110° to 124°W, see figure 2.1) is a good test case. The plate boundary between the Pacific and North American plates accommodates  $\approx 5$  cm/yr of relative right-lateral motion (ALTAMIMI et al., 2017) partitioned over several active structures. The most famous one is the San Andreas strike-slip fault system that takes up to 78% of the relative plate motion (FREYMUELLER et al., 1999; BENNETT et al., 2003), the remaining motion being accommodated on a set of distributed active faults further inland. Eastward, the Sierra Nevada and Central Valley behave as a nearly rigid microplate that moves 11.4 mm/yr Northwestward relative to the stable North American plate (BENNETT et al., 2003; PÉROUSE et WERNICKE, 2017). This microplate is bounded to the East by the Walker Lane and East California Shear Zone where right-lateral shearing is dominant, with a small amount of extension, and that hosted significant historical earthquakes (BENNETT et al., 2003; NIEMI et al., 2004; WESNOUSKY et al., 2012). The Garlock fault zone, near which the recent Ridgecrest sequence (July 2019, Mw max 7.1 (e.g. K. WANG et BÜRGMANN, 2020)) occurred, is a SW-NE left-lateral strike slip structure perpendicular to the San Andreas and East California Shear Zone (PELTZER et al., 2001a). The large Basin and Range province farther east extends up to the Wasatch mountain belt and is characterized by a series of normal faults accomodating on the order of 3 mm/yr of the relative plate motion (e.g. NIEMI et al., 2004). The Wasatch fault zone, marking the boundary between the Basin and Range and the Colorado stable plateau, is the easternmost active structure of the plate boundary zone and is extending at low rates (1-2 mm/yr) that may allow for Mw 7 earthquakes with large recurrence time (MACHETTE et al., 1991; NIEMI et al., 2004; PÉROUSE et WERNICKE, 2017).

This complex plate boundary area is one of the best studied fault zones on Earth and geodetic measurements have been conducted there since 1923 (date of the first levelling studies in the Parkfield area) and more extensively since the 1980's (e.g. SNAY et al., 1983; MURRAY, 2006). Since then, modern GNSS networks have been installed to monitor the ongoing surface deformation, for instance in the framework of the PBO (HERRING et al., 2016), NEARNET/MAGNET (BLEWITT et al., 2009), or SCIGN (HUDNUT et al., 2001) initiatives. The observed deformation is due to a wide variety of physical phenomena : eulerian plate or microplate motions (ALTAMIMI et al., 2016), interseismic loading on active faults (e.g. PELTZER et al., 2001b; MCCAFFREY, 2005), coseismic and postseismic deformation due to relatively moderate but destructive earthquakes (e.g. SHEN et al., 1994; MURRAY, 2006; MILLINER et DONNELLAN, 2020), volcanic inflation and deflation of the Long Valley caldera (e.g. MARSHALL et al., 1997; HAMMOND et al., 2019), and hydrological depletion or infill of aquifers in particular in the Central Valley (AMOS et al., 2014; CHAUSSARD et al., 2017) or elsewhere (SILVERII et al., 2020).

## 2. Application à des données GNSS synthétiques et au sud-ouest des États-Unis

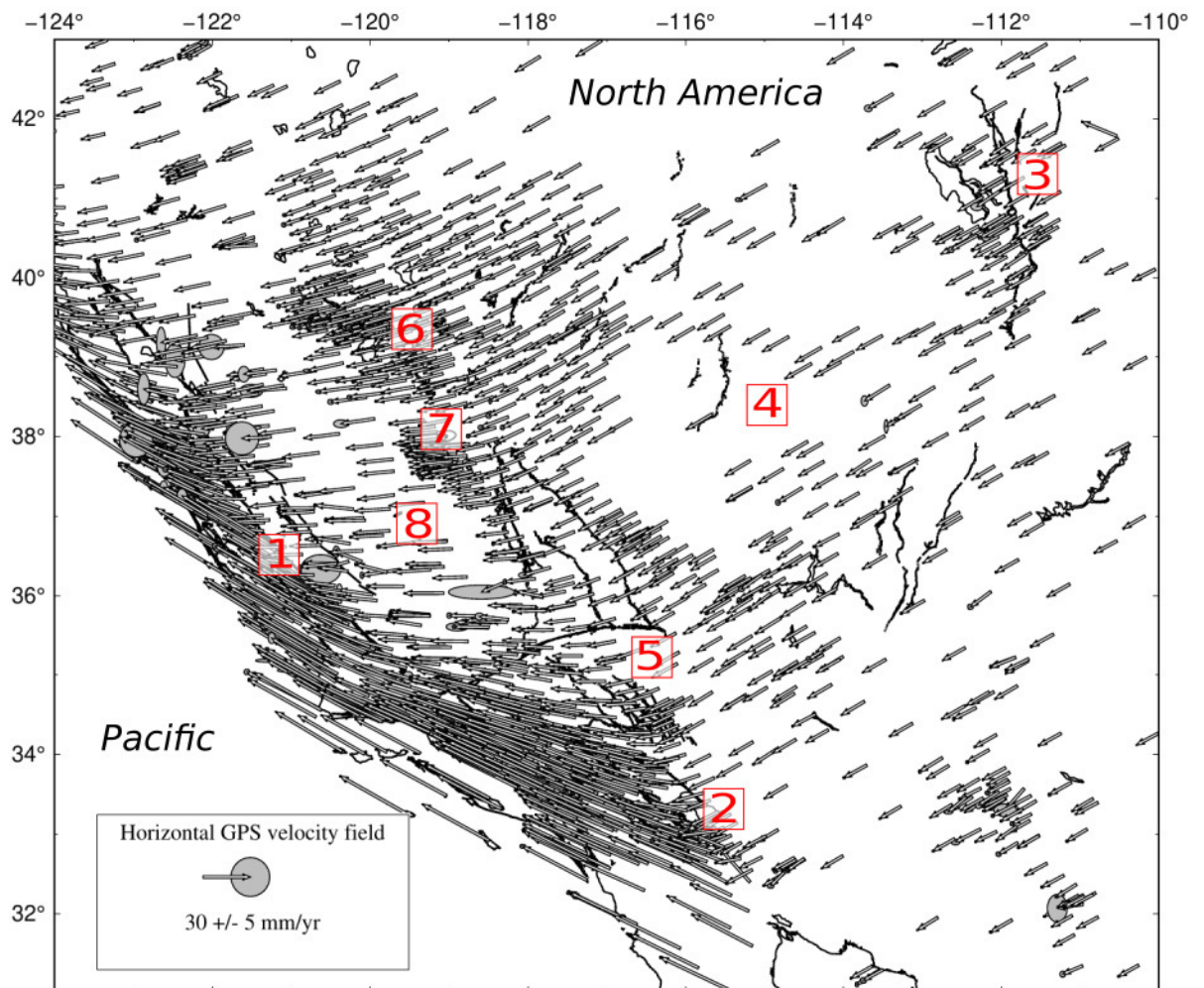


FIGURE 2.1. – Horizontal GPS velocities from the MIDAS dataset in IGS14 reference frame in the Southwestern US (this study area). Ellipses represent the uncertainties at 95% level. Black lines : active faults ([Quaternary fault and fold database 2017](#)). Note that the density of GNSS stations is highly variable and higher near the San Andreas fault system. Key features of this plate boundary zone are labeled : 1- Monarch Peak creeping section (Central section) of the main San Andreas fault, 2- Salton Sea Lake zone, 3- Wasatch mountains fault zone, 4- Basin and Range province, 5- East California Shear Zone, 6- Walker Lane, 7- Long Valley Caldera, 8- Central Valley and Sierra Nevada.

### 2.3. Tectonic context of the Southwestern US and GNSS velocity field

To represent the current deformation in Southwestern US, we choose here to use the MIDAS (Median Interannual Difference Adjusted for Skewness) velocity field that compiles long-term velocities derived from GNSS daily times-series. It is provided by the Nevada Geodetic Laboratory (BLEWITT et al., 2016, 2018). In our study area, the MIDAS data set, downloaded on February 2020 (see corresponding velocity file in supplementary material Table 1), provides velocities for 2441 stations with at least 4 years of recording from different local networks (PBO, MAGNET, SCIGN, see Figure 2.1). The velocities are calculated for the 1994 to 2020 time-span in the IGS14 reference frame.

In the densest parts of the velocity field, in particular near the San Andreas fault or in the Long Valley Caldera, baselines between stations are around 10 km (even shorter near some large city centers), while they reach more than 250 km in the less densely instrumented areas within the Basin and Range (figure 2.1).

The MIDAS algorithm computes velocities for each individual time-series as the median of the linear trends obtained between two dates separated by approximately one year (BLEWITT et al., 2016). As a result, MIDAS estimated velocities should be less affected by seasonality than when using classical regressions, and give robust estimates for surface average velocities (HAMMOND et al., 2016), except where non-linear deformation, such as post-seismic deformation or multi-annual hydrological loading, occurs. These types of deformation must be present in our data. Several major earthquakes occurred during the time period considered in the study area (notably the 1994 Northridge, 1999 Hector Mine, 2004 Parkfield, 2010 El Mayor-Cucapah and 2019 Ridgecrest earthquakes). There is also evidence that multi-annual hydrological variation affects horizontal motion to some extent (KIM et al., 2021, e.g.). However, we assume that the data set mostly captures the interseismic deformation in the area and we take into account the existence of non linear deformation effects by increasing the uncertainties on the MIDAS velocities. We remove only 4 stations from our data set, either because their velocities were computed on a too short time-span (lower than one year of continuous recording) or because their velocities were larger than 150  $mm/yr$  on at least one component. In our study area, average uncertainties are of 0.31, 0.28 and 0.81  $mm/yr$  on the East, North and Up components, respectively. The uncertainties estimated by the MIDAS algorithm may be considered slightly overestimated compared to those obtained with usual techniques for long and clean time series (MAZZOTTI et al., 2020). However, because we chose to use on purpose the raw MIDAS interseismic velocity field provided online, without very restrictive quality criterion (see above), our data set may still include velocities that are not fully consistent with the long-term interseismic trends (when calculated on a too short time period or in cases of large data gaps for instance). To take into account this remaining heterogeneity in the data set, we thus chose to increase the MIDAS uncertainties by 10%. In the Bayesian inversion carried out in this study, we assume that errors affecting the velocities are Gaussian, uncorrelated between different stations and independent on each horizontal component. This is a strong first-order hypothesis. Indeed, the structure of noise on a single GPS station is usually considered to be composite, both white and flicker (WILLIAMS et al., 2004; SANTAMARÍA-GÓMEZ et al., 2011), and spatially correlated noise has been identified on regional to global scale (also called common-mode error, see W DOWINSKI

## 2. Application à des données GNSS synthétiques et au sud-ouest des États-Unis

et al. (1997), DONG et al. (2006) ainsi que BENOIST et al. (2020)). This hypothesis and its implications will be discussed further in section 2.6.

Other velocity estimates have been published for this region (e.g. McCAFFREY, 2005 ; KLEIN et al., 2019) and may be substantially different from the MIDAS data set (either because they cover a different time-span or because of different post-processing choices). To assess the behavior and the performances of our algorithm, we first create a realistic synthetic set of velocity measurements that mimics the real MIDAS velocity field described above. We compute a theoretical (target) velocity field, and sample it at each GNSS station used in MIDAS (see section 2.5.1 for details on the synthetic model used). We then add random Gaussian errors to each measurement with a variance as given by MIDAS uncertainties. The resulting dataset is inverted using our Bayesian algorithm and the results are compared with those obtained with a bicubic spline-in-tension interpolation method. In a second step, we apply the inversion scheme to the real MIDAS velocity field described above. Both data sets share the exact same characteristics and can be considered as an ensemble of displacement rates measured at  $n$  GNSS stations that can be formally described by the vector :

$$\mathbf{d}_{\text{obs}} = \begin{bmatrix} (V_{x_1}, V_{y_1}), \\ \dots \\ (V_{x_n}, V_{y_n}) \end{bmatrix}$$

where  $(V_{x_i}, V_{y_i})$  define the observed ground velocities for the  $i^{\text{th}}$  of our  $n$  GNSS stations used as an input. Similarly, uncertainties associated with these observations are given by a vector

$$\boldsymbol{\sigma}_{\text{obs}} = \begin{bmatrix} (\sigma_{x_1}, \sigma_{y_1}), \\ \dots \\ (\sigma_{x_n}, \sigma_{y_n}) \end{bmatrix}$$

## 2.4. Method : Inverting for the geodetic strain rate

### 2.4.1. Parameterizing the velocity field

To parameterize the continuous horizontal velocity field at the surface, we use a set of nodes scattered on the surface as represented in red in figure 2.2. A horizontal velocity vector is assigned to each node. Note that nodes are independent of the location of the GNSS stations : their number, position, and velocity value are unknown parameters to be inverted for. They can be freely modified during the inversion. This surface parametrization is given by the vector :

## 2.4. Method : Inverting for the geodetic strain rate

$$\mathbf{m} = [k, (N_{x_1}, N_{y_1}, x_1, y_1), \dots, (N_{x_k}, N_{y_k}, x_k, y_k)]$$

where  $k$  is the number of nodes, and  $(N_{x_j}, N_{y_j}, x_j, y_j)$  define the horizontal velocities and position for the  $j^{th}$  node of the parametrization.

A continuous planar surface can be constructed from the vector  $\mathbf{m}$ . The nodes are used to partition the plane into Delaunay triangles, so that no node is inside the circumcircle of any triangle. The velocity field within a triangle is then defined by a linear interpolation between the velocities assigned at each node defining the triangle. Within each triangle, the velocity field is a linear function of space, and the gradient (which is constant within the triangle) can be obtained from the node velocities through an analytical expression.

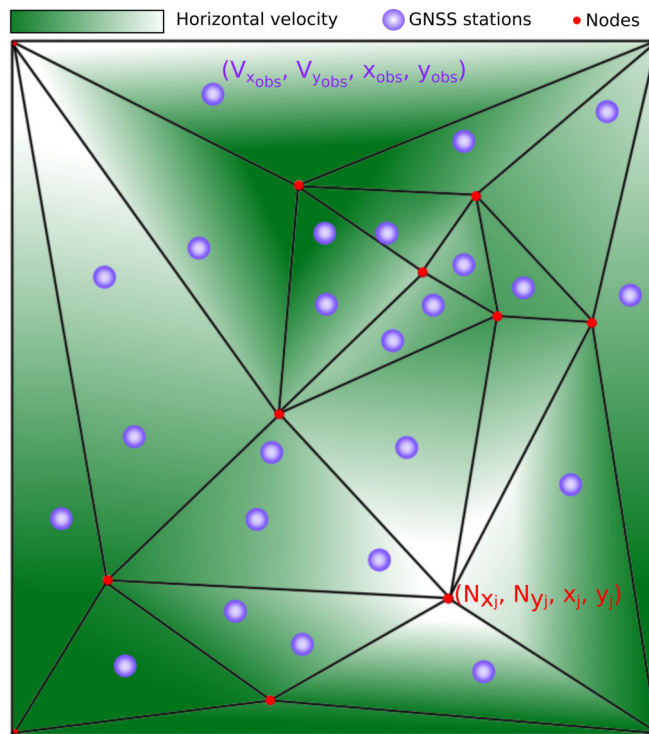


FIGURE 2.2. – Example of surface meshing using Delaunay triangulation. Each node (in red) is assigned an horizontal velocity and the full velocity field (green gradient) can be obtained using a first order linear interpolation between the vertices on each triangle. Vertices can be added, suppressed or displaced during the algorithm, and their values can be modified. They are distinct from fixed GNSS stations (in purple) where data are available.



## 2. Application à des données GNSS synthétiques et au sud-ouest des États-Unis

Delaunay triangulation schemes have previously been used to compute geodetic strain rates (KREEMER et al., 2018). In these techniques, the vertices are usually fixed, for example at the location of GNSS stations (CAI et al., 2008; FAROLFI et DEL VENTISETTE, 2017). In contrast, we propose here an evolutive triangulation : the nodes' location and velocity are the unknown of the inversion and will adapt to the level of information provided by the data. Higher concentration of nodes are mostly linked to deformation gradients rather than GPS data location, as can be seen in Figure S4.

Additional nodes are added at the four corners of the area of interest to insure that every point in this area is within the convex hull of the Delaunay triangulation.

### 2.4.2. Bayesian inference

The solution  $\mathbf{m}$  of our regression problem is clearly non-unique, and a Bayesian approach can be used to represent the solution in probabilistic terms (TARANTOLA, 2005). In a Bayesian framework, the solution to the inverse problem is the *a posteriori* probability density function (PDF), that is the probability of the model parameters  $\mathbf{m}$  given the observed data  $\mathbf{d}_{\text{obs}}$ . It can be written through Baye's theorem :

$$p(\mathbf{m}|\mathbf{d}_{\text{obs}}) = \frac{p(\mathbf{m})p(\mathbf{d}_{\text{obs}}|\mathbf{m})}{p(\mathbf{d}_{\text{obs}})} \quad (2.2)$$

where  $p(\mathbf{m})$  is the *a priori* probability distribution on the model (or prior), which represents our knowledge about the model before observing the data. In this work, we assume minimal prior knowledge, and use a uniform prior distribution within a reasonable range for each parameter.  $p(\mathbf{d}_{\text{obs}})$  is the evidence and can be ignored here as it is constant and does not depend on  $\mathbf{m}$ .

The term  $p(\mathbf{d}_{\text{obs}}|\mathbf{m})$  is the likelihood distribution. It represents the probability of observing the data given the model and the distribution of data errors. Assuming that data errors are normally distributed with standard deviations given by  $\sigma_{\text{obs}}$ , the likelihood can be related to a  $L_2$  misfit function, and expressed as :

$$p(\mathbf{d}_{\text{obs}}|\mathbf{m}) \propto \exp\left(-\sum_{i \in [1, n]} \left( \frac{(V_{x_i} - S_{x_i}(\mathbf{m}))^2}{2\sigma_{x_i}^2} + \frac{(V_{y_i} - S_{y_i}(\mathbf{m}))^2}{2\sigma_{y_i}^2} \right)\right), \quad (2.3)$$

where  $S_{x_i}(\mathbf{m})$  and  $S_{y_i}(\mathbf{m})$  stand for the components of the surface velocity predicted by the model  $\mathbf{m}$  at the position of data points  $[d_{x_i}, d_{y_i}]$ . These values are compared with the observed velocities  $V_{x_i}$  and  $V_{y_i}$  at the same positions, the differences being weighted by the corresponding uncertainties on the velocities  $(\sigma_{x_i}, \sigma_{y_i})$ .

### 2.4.3. Sampling models from the posterior distribution

We use a Markov chain Monte Carlo (MCMC) scheme to generate a large ensemble of models which distribution asymptotically converges to the *a posteriori* PDF. Here we use the reversible-jump Markov chain Monte-Carlo algorithm (GREEN, 1995, 2003) which is a generalization of

---

**Algorithm 1** rj-MCMC main loop

---

Start with an initial model described by a set of vertices  $\mathbf{m}(N_{x_i}, N_{y_i}, x_i, y_i)$ , obtained by randomly selecting a subset of the data and adding a random perturbation on position and velocity to each node.

**for**  $i = 1, N_{samples}$  **do**

**1** : Propose a new model  $\mathbf{m}$  by randomly perturbing the current model. Choose one of the following perturbation at random :

- Birth of a node on a random point of the surface.
- Death of a node.
- Change the horizontal velocity of a node.
- Displacement of a node.

**2** : Calculate the *a posteriori* probability of the perturbed model  $p(\mathbf{m}' | \mathbf{d}_{obs})$

**3** : Randomly accept the new model with probability  $\alpha(\mathbf{m}' | \mathbf{m}) = f\left(\frac{p(\mathbf{m}' | \mathbf{d}_{obs})}{p(\mathbf{m} | \mathbf{d}_{obs})}\right)$

where  $f(\cdot)$  is a function defined in BODIN et SAMBRIDGE (2009).

**4** : If accepted,  $\mathbf{m} \leftarrow \mathbf{m}'$ . Else,  $\mathbf{m} \leftarrow \mathbf{m}$ .

**5** : Compute the velocity field  $S(\mathbf{m})$  predicted for the model, and keep it in the ensemble solution. For each point of the map (i.e. on an underlying small grid as defined in section 2.4.4), calculate the velocity field at the point, its spatial derivatives, the strain rate tensor, and any quantity of interest (second invariant, divergence, vorticity, ...). Store these values for the final distribution.

**end for**

---

the Metropolis-Hasting algorithm (METROPOLIS et al., 1953; HASTINGS, 1970) to the case where the number of parameters is variable.

This algorithm randomly explores the model space by generating a chain of models. The starting model is obtained by randomly selecting a subset of the data, creating a node for each GNSS station selected this way, and adding a perturbation to the node (in position and velocity). At each step, the current model is perturbed to produce a new proposed model. Then, the *a posteriori* probability of the current and proposed model are compared, and the new model is either accepted in the chain or rejected according to an acceptance rule depending on the ratio of posterior values. A pseudocode for the algorithm is given in table Algorithm 1 below. For a general description of MCMC sampling, see (GEYER, 1992; S. BROOKS et al., 2011; SAMBRIDGE et MOSEGAARD, 2002). For specific applications to transdimensional geophysical problems where the number of parameter is variable, see (BODIN et SAMBRIDGE, 2009; BODIN, SAMBRIDGE, RAWLINSON et al., 2012; SAMBRIDGE et al., 2012).

As the number of iterations in the Markov chain increases, the values of sampled parameters (e.g. the number of nodes) progressively converge toward a statistically stationary distribution which approximates the posterior distribution.

## 2. Application à des données GNSS synthétiques et au sud-ouest des États-Unis

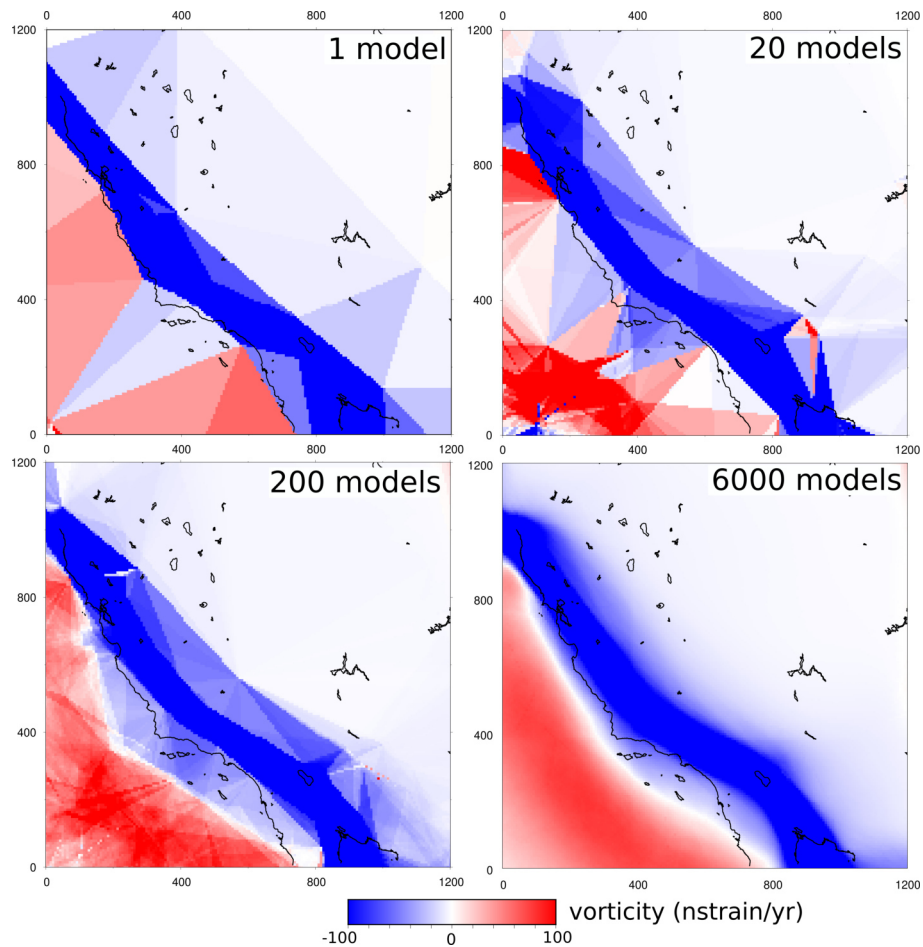


FIGURE 2.3. – Convergence of the mean vorticity map. Convergence tests are performed on the synthetic velocity field built for our study area. Each panel shows the mean of the vorticity in the ensemble solution that is composed of either 1, 20, 200 or 6000 models. As the number of sampled models increases (i.e. the number of steps in the random walk), the relevant characteristics of the vorticity field begin to appear while the triangle-shaped areas due to the Delaunay triangulation tend to fade away.

### 2.4.4. Extracting relevant information from the ensemble solution

It is important to note that the solution to our problem is not a single Delaunay velocity model that minimizes a misfit function. A model with zero misfit could be easily obtained by placing a Delaunay node at each GNSS station. However, such a model would be strongly unrealistic, as it would fit data errors, and depict a constant velocity gradient in each triangle, with sharp and discontinuous changes in strain rate at the triangle edges.

Instead, the solution of a Bayesian inverse problem is rather the entire *a posteriori* probability distribution (PDF), i.e. an ensemble of velocity models with varying number of Delaunay cells. To appraise this distribution, we define an underlying grid (which can be as fine as needed for visualization), and store at each pixel of the grid the full distribution of all parameters of interest, such as velocity components, spatial derivatives, divergence, vorticity,  $I_2$ , or any other combination of the strain tensor components. By combining the information from several

tens of thousand of models, we therefore obtain at each pixel of the map the entire probability distribution on any desired parameter.

For visualization, we exhibit 2D maps of statistical indicators for the parameter of interest : the representation of the posterior PDF is, at each point of the map, the average, the median value or the mode of maximum probability from all sampled models on that point. As an example, the mean vorticity map obtained for the synthetic test case presented in section 2.5.1 is shown in Figure 2.3. In this way, a large number of models with different Delaunay parametrizations are stacked together. In a single model, the vorticity is constant over each triangle (top-left panel in Figure 2.3). But the continuous mean model contains features common to the entire family of models and considerably more information than any single Delaunay model.

Finally, it is important to insure that the algorithm has reasonably converged. A great number of models (typically between  $10^4$  and  $10^5$ ) are required to obtain an accurate depiction of the complete *a posteriori* probability distribution function. The influence of the number of models on the mean solution is shown in Figure 2.3, where the map of mean vorticity value is shown for different numbers of MCMC iterations.

## 2.5. Results

### 2.5.1. Synthetic tests on an ideal San Andreas Fault

In order to assess the efficiency of our algorithm, we build a synthetic velocity field that results from the relative plate motion and interseismic loading on a simplified San Andreas fault. We use the TDEFNODE code developed by McCAFFREY (2005) and based on OKADA (1985)'s equations, and assume full locking of the fault (from 0 to 30 km depth) embedded in an elastic homogeneous half-space (Figures 2.4 and 2.5). The fault is designed as vertical and is forced to be purely strike-slip. The Pacific plate motion relative to the fixed North American plate is described by an ad-hoc Euler pole (21.9°E, 14.2°N, 0.48°/Myr), that generates an overall 5 cm/yr relative right lateral motion.

We then extract the velocities at the locations of stations used in the MIDAS dataset (see section 2.3 and BLEWITT et al. (2016)), and add random Gaussian errors to each component with a variance given by the MIDAS uncertainties. We invert this synthetic data set to recover a continuous velocity field, its divergence, vorticity and the second invariant  $I_2$  of the strain rate tensor using two methods : our Bayesian algorithm presented above, and a standard bi-cubic spline-in-tension inversion method (see figures 2.4 and 2.5). Our method could also be compared to other strain rate estimation schemes such as those proposed by BEAVAN et J. HAINES (2001), SHEN et al. (2015) or KREEMER et al. (2018). A large scale comparison such as the one performed by SANDWELL et al. (2010) is underway in France, and will include this method in its results. In order to assess the quality of the inversion, we use the  $L_2$  distance between maps of second invariant for the recovered model and those for the true synthetic model :

$$Distance = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (I_2^{true} - I_2^m)_i^2} \quad (2.4)$$

## 2. Application à des données GNSS synthétiques et au sud-ouest des États-Unis

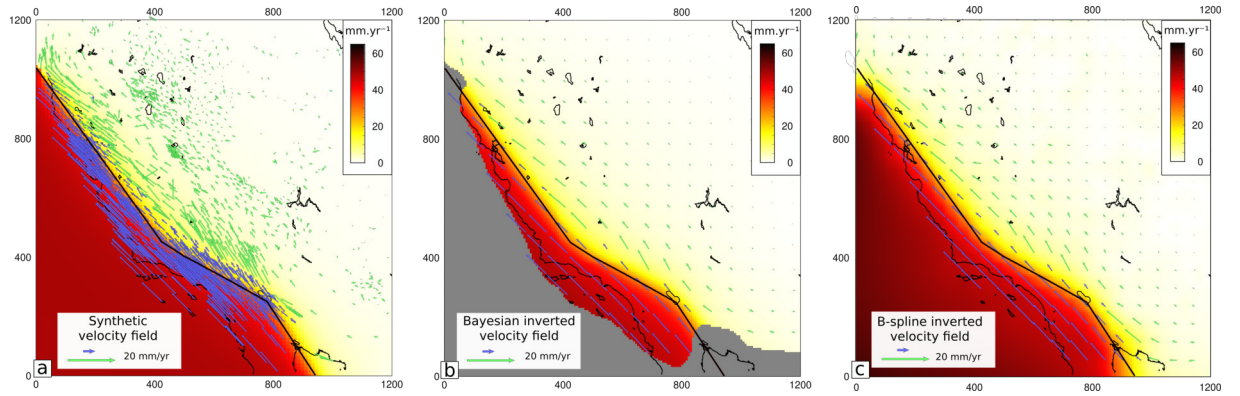


FIGURE 2.4. – Synthetic tests for velocity field recovery on an idealized San Andreas fault. Black line : fault location. a) The amplitude of the synthetic horizontal velocity is color coded. Blue and green arrows stands for the synthetic velocity data sampled at the position of the GNSS stations from the real MIDAS velocity field, perturbed by the addition of a random Gaussian error. b) Average velocity field obtained with our Bayesian scheme. Areas where the PDF displays a standard deviation  $\geq 3\text{mm}/\text{yr}$  are masked. c) Interpolated velocity field inverted with B-spline standard procedure.

where  $I_2^{true}$  and  $I_2^m$  are the second invariant derived from the true synthetic model and the inverted velocity field, respectively, and  $n$  is the number of pixels in the maps. We choose to define the distance on  $I_2$  rather than on the velocity components since inversion artifacts appear on the spatial derivatives of the velocity (HACKL et al., 2009; BAXTER et al., 2011; TITUS et al., 2011). This distance indicates the ability of a method to recover the original signal over the entire region for a given data distribution, though it does not reflect the level of data fit (measured only at stations).

To perform the B-spline interpolation, we use a minimum curvature approach, where the interpolated surface minimizes the level of data fit, while having continuous second derivatives and minimal total squared curvature (W. H. F. SMITH, 1990). We use the GMT *blockmean* and *surface* functions (WESSEL et al., 2019), and calculate independently the velocity components  $V_{east}$  and  $V_{north}$  on each node of a predefined grid. In this procedure, the smoothness of the solution is determined by two parameters arbitrarily chosen by the user : the size of the grid and a tension parameter (see W. H. F. SMITH (1990) for more details on the method). Those user-defined inputs are critical and should be carefully chosen. On figures 2.4 and 2.5, the B-spline solution that minimizes the distance to the true model (equation 2.4) is obtained by manually adjusting the tension and grid parameters. Of course, in a real data case, this manual adjustment could not be done.

Figures 2.4 and 2.5 show the comparison of the mean of the posterior PDF obtained with our Bayesian scheme and that obtained with the B-spline interpolation, for the velocity field, vorticity, divergence and second invariant. Overall, both inversion methods retrieve reasonably well the synthetic target with a fit to the true  $I_2$  model of 37.6 and 39.5 nstrain/yr for the average of our Bayesian solution and B-spline best model, respectively. Though, major differences arise locally on spatial derivatives of the velocity field. The distributions for  $I_2$ , vorticity and divergence

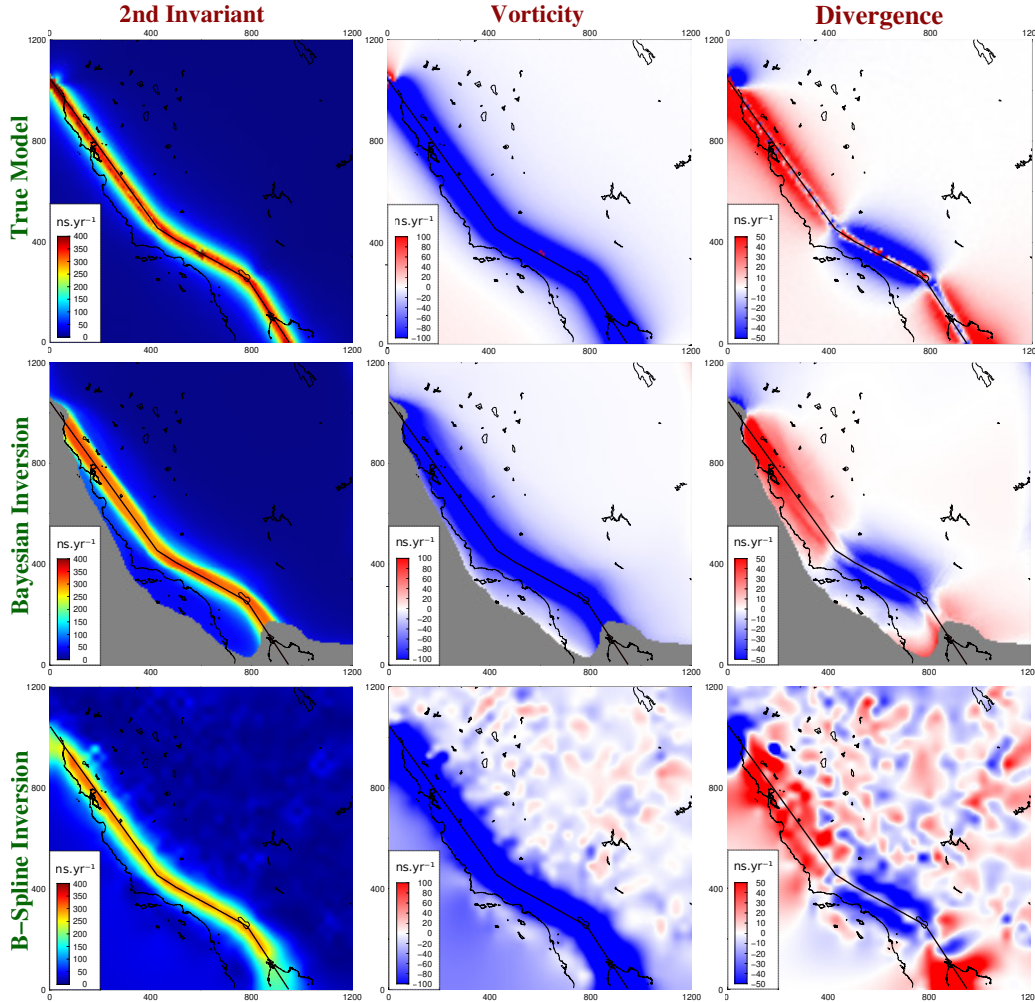


FIGURE 2.5. – Strain rate tensor recovery from our synthetic test on an idealized San Andreas fault. Maps of the second invariant (left), vorticity (center) and divergence (right, compression is negative, dilation is positive) of the strain rate tensor are shown. The values expected from our synthetic model are shown on the upper panels (“True model”), together with results from our Bayesian inversion (average of the posterior distribution, middle), and from standard B-spline inversion (model obtained with optimal tension and grid parameters, lower panels). Black line : simplified San Andreas fault trace. Areas where the standard deviation of the horizontal velocity PDF is higher than 3 mm/yr are masked since our Bayesian inversion is insufficiently constrained there (see figure 2.4). Parameters of the B-spline inversion were chosen to minimize the distance to the true model on the second invariant (see equation 2.4).

## 2. Application à des données GNSS synthétiques et au sud-ouest des États-Unis

obtained from B-spline inversion contain small wavelengths that are well known interpolation artifacts, mainly due to network geometry and data outliers (BAXTER et al., 2011). Moreover,  $I_2$  is systematically underestimated in the near field of the fault due to over-smoothing (by around 100 nstrain/yr), and the divergence map is particularly affected by small scale artifacts that may lead to incorrect interpretations. On the contrary, the average maps resulting from the Bayesian inversion are free from these small scale artifacts and recover well both the amplitude and spatial variations of deformation.

### Noise sensitivity

One of the main limitation of conventional approaches used to produce strain rate maps is their high sensitivity to noise. As shown in Figure 2.5, the Bayesian inversion appears significantly more resilient to errors than the B-spline method. The patchy aspect of the divergence map obtained from the B-spline interpolation could be reduced by using a higher level of smoothing but any significant signal in the near-field of the fault would then be lost.

We test the influence of the level of noise added to the synthetic data set on both inversion techniques. Random errors are kept Gaussian and uncorrelated between stations. We test different synthetic data sets, progressively increasing their noise using a scaling factor varying between 0 and 3 on the errors given by the MIDAS uncertainties, and following the generation process described in section 2.5.1. Because results from the B-spline interpolation highly depends on user-defined parameters, as mentioned above, we systematically test different smoothing values (i.e. grid steps) for each noise level with a constant tension. We compare in figure 2.6 the results obtained for the B-spline and Bayesian methods. For the Bayesian inversion, we represent both the average and the median of the  $I_2$  PDF.

As expected, the quality of both interpolations decreases with the level of noise. However, the Bayesian scheme performs better than the B-spline inversion, whatever the smoothing factor (i.e. grid step) considered. Figure 2.6 also illustrates well the sensitivity of the B-spline interpolation to the smoothing parameter (grid step) : low smoothing produces data over-fitting and unstable results, whereas high smoothing causes information loss. Our Bayesian inversion scheme avoids having to arbitrarily choose the level of complexity in the reconstructed model (BODIN et SAMBRIDGE, 2009).

### Visualizing and interpreting the Posterior solution

Obtaining a comprehensive estimate of the posterior uncertainties affecting the interpolated velocity field and its spatial derivatives can be challenging. One option is to consider at each geographical point the standard deviation of the posterior PDF for each inverted parameter (velocity,  $I_2$ , vorticity, divergence). We plot in figure 2.7 this error map for the norm of the horizontal velocities. The standard deviation is the highest where data are scarce or missing : there, the solution is not constrained and the PDF is nearly flat. We chose to mask these unconstrained zones based on a threshold value fixed at 3 mm/yr (see grey areas in figure 2.5 for instance). On the other hand, zones where the velocity field is well captured by the data set are characterized by

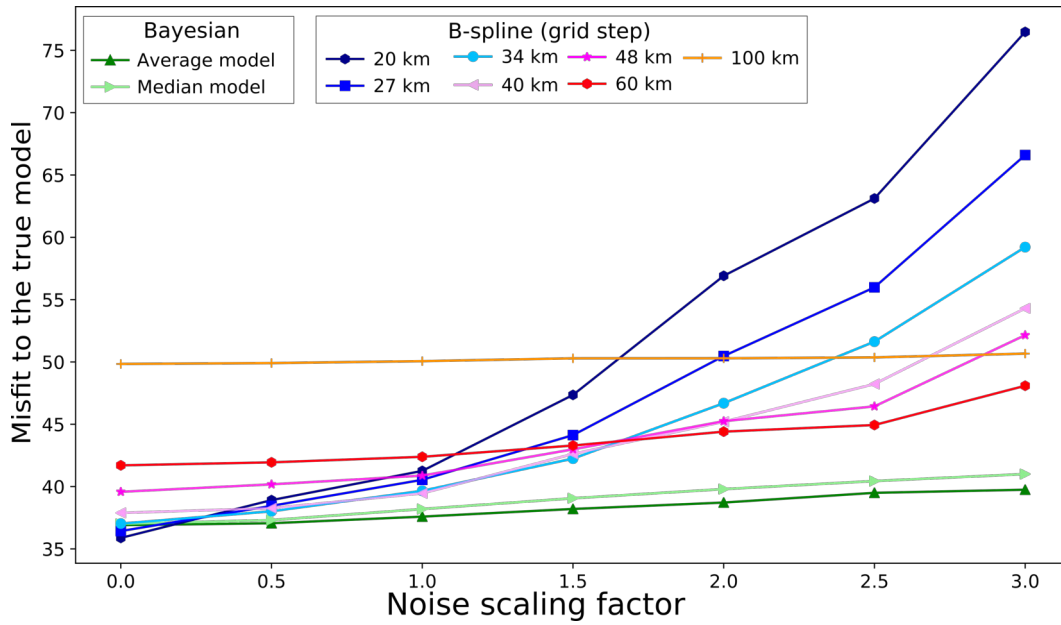


FIGURE 2.6. – Distance to the true model calculated on the second invariant for the Bayesian inversion (based on the average model) and the B-spline method, for increasing level of data noise (see equation 2.4). Different B-spline inversions with increasing grid steps, corresponding to an increased level of smoothing are presented.

low error values ( $\leq 0.5\text{mm/yr}$ ). Intermediate levels of errors are observed in areas with a strong velocity gradient, i.e. in the very near field of the San Andreas fault in our synthetic model.

A careful inspection of the posterior distribution can be conducted on areas of interest to better interpret the results. A convenient way to do so is to plot the full distribution on chosen cross-sections. In figure 2.8, we present the posterior distribution for both components of horizontal velocity (b-c), second invariant  $I_2$  (d), divergence (e) and vorticity (f) along a 230 km-long profile roughly perpendicular (azimuth N55) to the southernmost section of the San Andreas fault (see figure 2.8-a). The normalized probability distribution is color-coded for each pixel. The mean and 90% credible interval of the distribution are indicated as well as the result from the B-spline interpolation method and the true synthetic model. The posterior distributions for the velocity components are very narrow ( $< 1.5\text{mm/yr}$  wide), and centered on the true model. The distribution is wider for the derivatives because small oscillations in the velocity field can lead to substantial variations on the components of the strain rate tensor. The true model is enclosed in the 90% confidence interval and is in general well estimated by the mean of the distribution, except in the very near field of the fault, where deformation is strongly localized.

Results from the B-spline interpolation often deviate significantly from the true model with misplaced or non-existent oscillations, that are directly due to noisy data and that correspond to the small-wavelength patches seen in figure 2.5. It is therefore difficult to conduct a proper interpretation of spatial derivatives of the velocity field obtained from direct interpolation



## 2. Application à des données GNSS synthétiques et au sud-ouest des États-Unis

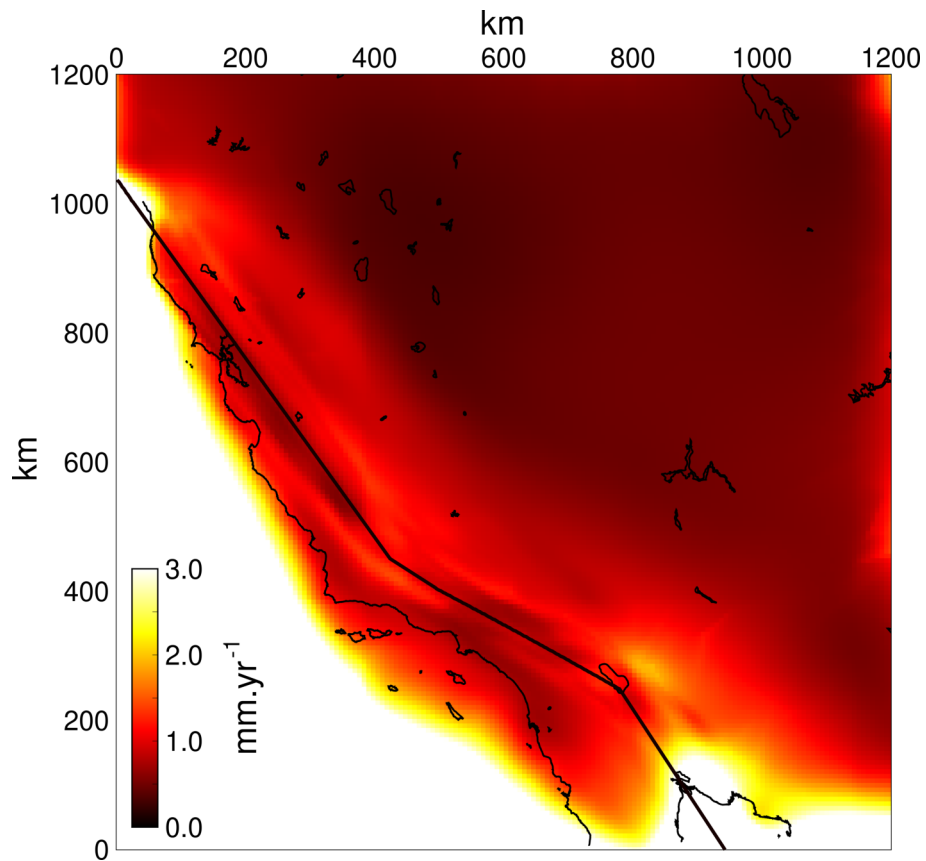


FIGURE 2.7. – Standard deviation of the probability density function (PDF) obtained for the norm of the horizontal velocity using our Bayesian method on synthetic noisy data set (noise factor of 1). The color-scale is saturated for  $\sigma \geq 3\text{mm}/\text{yr}$ , this threshold help masking the poorly constrained areas in figures 2.5, 2.4 and 2.9. Areas of high velocity gradients are characterized by intermediate standard deviations, while zones with no or few data exhibit higher standard deviations (e.g. edges of the studied area). This statistic measure can be used as a proxy for the robustness of the result (see figure 2.5).

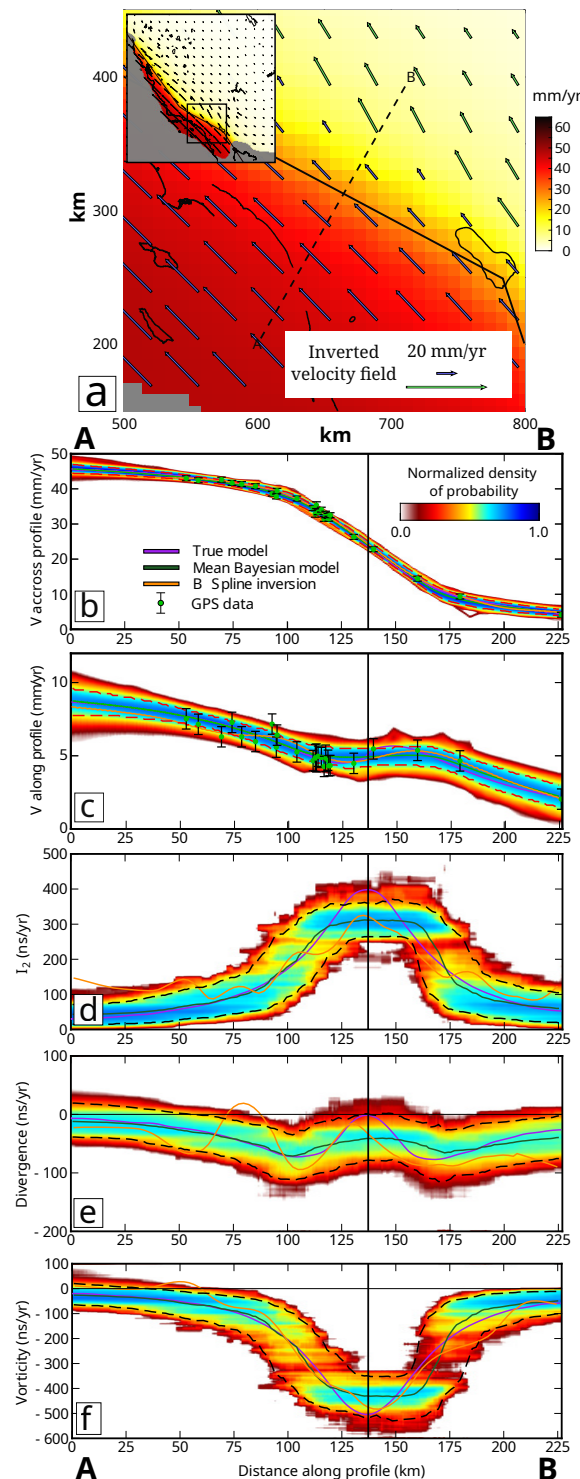


FIGURE 2.8. – Slices of the entire PDF for different parameters along the cross-section displayed on top left of the picture. The location of the fault is materialized by a vertical black line on the profiles. The horizontal axis represents the distance along the section and the vertical axis corresponds to the range of the prior, i.e. the allowed range of values for the parameter. The color scale indicate the probability for the parameter on each point to take the corresponding value in the posterior. Profiles of the true model, the mean Bayesian model and the B-spline inversion are superposed on the PDF. The red dotted line delimits the interval of 90% confidence. a) PDF of the velocity, along and across profiles b) PDF of the  $2^{nd}$  invariant, the divergence and the vorticity of the strain rate tensor.

## 2. Application à des données GNSS synthétiques et au sud-ouest des États-Unis

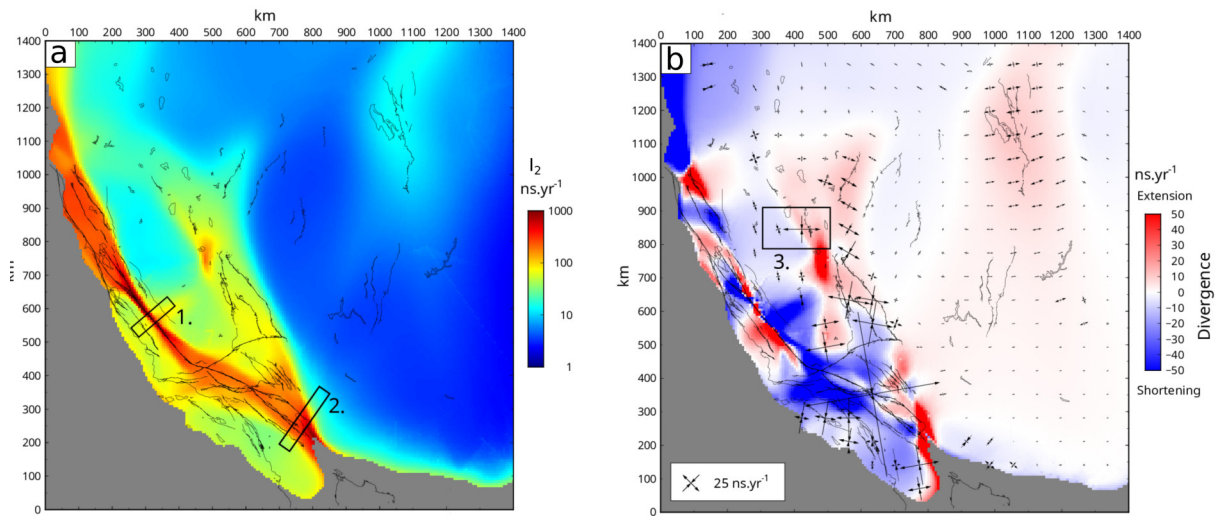


FIGURE 2.9. – a- Average of the *a posteriori* probability distribution (PDF) of the second invariant of the strain rate tensor  $I_2$  in nstrain/yr. The color scale is saturated for values above 1000 nstrain/yr. Black lines : active faults from [Quaternary fault and fold database \(2017\)](#). Box 1 and 2 stand for the chosen cross sections presented in figure 2.10 for the creeping segment north of Parkfield (Monarch peek segment) and Salton Sea Lake segments, respectively. b- Same but for the divergence. Positive divergence stands for extension, negative for compression. Black arrows : mean of the principal directions of the strain rate tensor for an arbitrarily chosen set of points, scaled by their amplitude. Box 3 is the area represented in figure 2.11.

schemes, especially since these artifacts resemble the signal that could be expected around active faults ([HACKL et al., 2009](#); [BAXTER et al., 2011](#); [TITUS et al., 2011](#)).

### 2.5.2. Bayesian inversion of the MIDAS dataset

We finally invert the real observations from the MIDAS dataset ([BLEWITT et al., 2016](#)) with associated uncertainties described in section 2.3. We present in figure 2.9 the map of posterior mean for  $I_2$  and the divergence (see Figure S1, S2 and S3 in the supplementary materials for map of the vorticity, standard deviation, and velocity residuals). Figure 2.10 shows the full distribution plotted along two distinct profiles, perpendicular to the San Andreas fault, of the fault-parallel velocity component and second invariant  $I_2$ . These profiles in figures 2.10 a) and b) cross the creeping, Monarch Peek and locked, Salton Sea lake segments of the San Andreas fault, respectively.

The recovered map of second invariant is rather smooth, except in the near field of the San Andreas fault zone where high values of  $I_2$  (higher than 1000 nstrain/yr) are observed on relatively narrow zones around the main fault. In the Walker lane,  $I_2$  reaches intermediate values ( $\sim 100$  nstrain/yr) while it is lower than 10 nstrain/yr in the Basin and Range area with a slight increase over the Wasatch mountains.

The Salton sea lake segment (box 2 in figure 2.9 and figure 2.10-b) shows a 80 km wide zone of deformation around the fault. An extreme situation is observed along the Monarch Peek

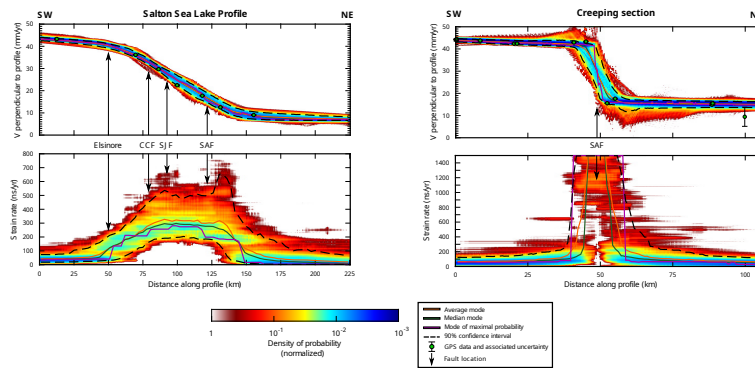


FIGURE 2.10. – Variations of the profile-perpendicular velocity component (or fault-parallel velocity component, upper panel) and  $I_2$  (bottom panel) along two profiles shown in figure 2.9. The full posterior probability (normalized) is plotted together with its average (orange line), median (green line), maximum (purple) and 90% of probability envelop (dashed black line). Black arrows stand for the main mapped faults (Quaternary fault and fold database 2017; FIALKO, 2006) : SAF San Andreas fault, SJF : San Jacinto fault, CCF : Coyote Creek fault, and Elsinore fault.

segment (box 1 in figure 2.9 and figure 2.10-a) where  $I_2$  reaches values well above 1000 nstrain/yr on a 15 km narrow zone around the main fault. Both zones are relatively well constrained by the data set since the posterior distribution of the velocity components is narrow all along the profile line, except in the very near field of the fault along the Monarch Peak segment. Distributions are wider for  $I_2$  than for velocities, in particular when crossing the active faults. The average, median and maximum probabilities are plotted, together with the 90% confidence interval. Differences are small between the average and median in the velocity profiles (less than 1mm/yr) and trends are very similar in  $I_2$  cross-section. Some significant variations arise when looking at the maximum probability mode that exhibits sharper transitions in particular in the Monarch Peak profile (figure 2.10-a).

The map showing the mean of the distribution for the divergence exhibits much more complex spatial variations (figure 2.9-b). Values range from -500 to 300 nstrain/yr, with extrema located in the vicinity of the San Andreas main fault zone (color scale is saturated in figure 2.9-b for clarity). Compression is dominant in the Garlock-San Andreas junction zone, while extension occurs at low rates in the Wasatch mountains in a nearly E-W direction. Slightly higher dilation rates are observed in the Walker Lane region (20-30 nstrain/yr) and in the Long Valley caldera (up to 200 nstrain/yr locally). Some localized extensional areas are also found in the vicinity of the main San Andreas fault zone in agreement with previously published dilatation maps (e.g. KREEMER et HAMMOND, 2007). However, similarly to the second invariant, the divergence in the vicinity of the creeping segment should be examined with extreme caution : at the position of the Monarch Peak segment, the distribution is widely spread out as the 90% confidence interval ranges from -850 to 420 ns/yr and display a rather homogeneous shape (Figure S5). Therefore the mean or median values are not representative of the distribution and should not be used for geophysical interpretations.

2. Application à des données GNSS synthétiques et au sud-ouest des États-Unis

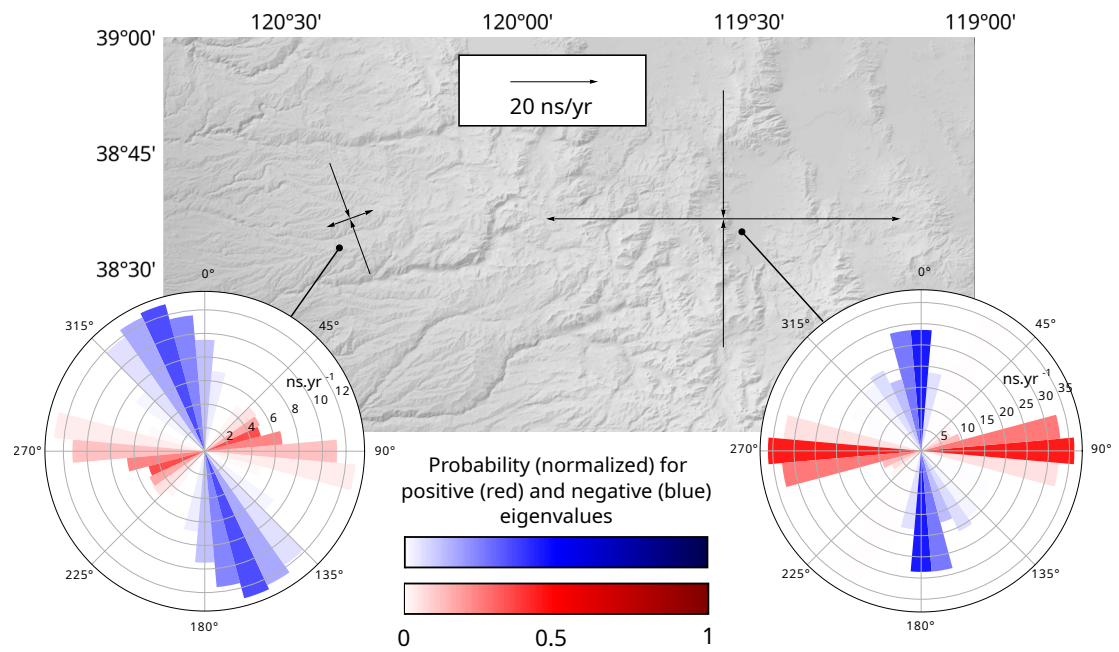


FIGURE 2.11. – Zoom on Sierra Nevada (west) to Walker Lane (east) transition zone (zone 3 in figure 2.9-b). Black arrows stand for the average of the PDF for the principal components of the strain rate tensor. A more complete description of the PDF is proposed as windroses for both points : the amplitude (in nstrain/yr) and normalized probability (color coded) is represented for each 10° bin. Blue stands for compression, red for extension.

To further discuss the tectonic style in the area, we also compute the distribution for principal strain rate directions, and plot the mean directions in figure 2.9-b. Figure 2.11 shows a representation of the full distribution corresponding to box 3 in figure 2.9-b as rose diagrams. It provides a convenient way to jointly plot the principal strain rate direction, its amplitude (length of the histogram bin), style (compression is blue, extension is red) and the associated normalized probability (color coded, see figure 2.11). Using such a representation, one can assess how well constrained is the strain rate tensor and whether the tectonic style is robustly defined : for instance, the dispersion is lower around the principal directions to the East (Walker Lane) than to the West (Sierra Nevada). In the Sierra (figure 2.11, left), the windrose shows a large dispersion both in the direction of the principal strain and in their amplitude : while the maximum probability mode, represented by the directions in brightest red and blue, shows a dominant roughly N160 compression and a limited N70 extension, a few models, represented by the bars in lightest red and blue, propose a dominant N110 extension and a limited N20 compression, i.e. a completely distinct tectonic regime. Such poorly constrained principal strain rate components should therefore be considered with extreme caution if used for tectonic interpretation.

## 2.6. Discussion

### 2.6.1. Advantages and limits of the Bayesian surface reconstruction

As shown with synthetic tests, our method provides better strain rate estimates compared to conventional interpolation schemes, where the level of smoothing is manually adjusted by the user. In a transdimensional formulation, the number of parameters defining the surface is not fixed in advance, and the complexity of the solution (smoothness) naturally adapts to the level of information present in the data. A probabilistic solution also provides a full description of uncertainties for any parameter of interests (here, vorticity, divergence, etc) by the PDF visualisation either on one specific pixel, or in cross sections as presented in figure 2.10. In the case of nearly Gaussian PDF, the standard deviation  $\sigma$  (Figure S1 for the inversion of the MIDAS data set) is a good estimate of the overall uncertainty on the inverted parameter. In particular, our approach can provide uncertainty estimates on the largest eigenvalue of the strain rate tensor, which is used in the Kostrov formulation for geodetic moment rate calculation (KOSTROV, 1974; D'AGOSTINO, 2014). Some PSHA techniques are also starting to integrate geodetic estimates of surface strain (BEAUVAl et al., 2018). The full posterior distribution for principal directions, velocity derivatives and strain rate invariants estimated with our approach could directly be included in logic trees.

However, our method is based on a Monte Carlo sampling scheme where a large number of Delaunay models are tested against the data, and is therefore computationally intensive. Our final ensemble solution represented in figure 2.9 is obtained after 84 hours of calculation on 92 parallel processors, which is much larger than standard interpolation approaches.

We shall also acknowledge that a Bayesian formulation is entirely based on the mathematical model used to describe the statistics of data errors. In this study, we assume that the errors are

## 2. Application à des données GNSS synthétiques et au sud-ouest des États-Unis

Gaussian, and uncorrelated between different stations and between each horizontal component. A more accurate model could be used to account for the spatial correlation of errors in regional velocity fields, as well as for the correlation of errors between components (WDOWINSKI et al., 1997; WILLIAMS et al., 2004; DONG et al., 2006; SANTAMARÍA-GÓMEZ et al., 2011; BENOIST et al., 2020). This can be done by using a full covariance matrix of data errors in the likelihood function (BODIN, SAMBRIDGE, RAWLINSON et al., 2012). A Bayesian scheme naturally propagates errors in the data towards errors in the posterior solution, and the form of the probabilistic solution also depends on the estimated amplitude of data uncertainties. If data errors are misestimated, posterior uncertainties will also be misestimated. In the case where data uncertainties are difficult to quantify, the total level of errors can be treated as an unknown parameter to be inverted for in a Hierarchical Bayes framework (GOUVEIA et SCALES, 1998; BODIN, SALMON et al., 2012). This hierarchical approach was successfully used in this study for synthetic tests : the level of noise added to the synthetic data was considered unknown in the inversion, and was correctly recovered by the algorithm. However, when the hierarchical approach is used for the MIDAS dataset, data uncertainties were clearly overestimated because of two effects : 1) the noise affecting observations is not Gaussian, and 2) observations are partially inconsistent from one station to another because of local effects unrelated to inter-seismic deformation. This led to important losses of structures, for example in the Wasatch mountains fault area. Conversely, fixing the level of uncertainties to MIDAS uncertainties resulted in the addition of extra triangles needed to fit the data down to the level of observational noise, leading to artifacts due to incoherent stations. We decided to increase the noise by 10% as it was the smallest value for which we could get rid of said artifacts.

We shall also note that the method presented in this study has been implemented in cartesian coordinates, i.e. assuming the effect of Earth's sphericity is negligible. This assumption requires the use of a projection adapted to the region of interest, and remains valid as long as one concentrates on relatively small areas. In the present case, using a transverse Mercator projection, the deformation remains less than 1% up to 800km from the reference meridian, which includes the entire region studied. However the code should be adapted to spherical coordinates if to be applied to larger continental-scale regions (e.g. A. J. HAINES et W. E. HOLT, 1993; KREEMER et al., 2014, 2018; H. WANG et al., 2019).

### 2.6.2. From a probabilistic solution to tectonic interpretations

The method is applied to one of the most extensively studied area in terms of active tectonics : the San Andreas strike-slip fault system and the neighboring Basin and Range extensional area (see section 2.3 and references therein). The maps of second invariant and divergence presented in figure 2.9 agree with previous studies (e.g. W. E. HOLT et al., 2000; MCCAFFREY, 2005; KREEMER et HAMMOND, 2007; KREEMER et al., 2012) which have been compared by SANDWELL et al. (2010). We confirm that (i) transtension is dominant in the Walker Lane (WESNOUSKY et al., 2012), (ii) the innermost Basin and Range (Central Great Basin) experiences very low strain rates and could therefore be considered as rigid (BENNETT et al., 2003), and (iii) 10 nstrain/yr of roughly E-W extension occurs in the Wasatch mountains (NIEMI et al.,

2004). Previous studies have argued whether or not the Sierra Nevada and Central Valley can be considered to behave as a rigid block (BENNETT et al., 2003; KREEMER et al., 2014); our results tend to show that this area deforms internally and accommodates some amount of NNW-SSE directed compression ( $I_2 \geq 10$  nstrain/yr).

In addition, our mean map of second invariant depicts very clear along strike variations in the width of the highly straining area near the main fault of the San Andreas system, that are consistent with the along-strike segmentation of the fault. In particular, our results clearly highlight creep along the Monarch Peak segment (BEN-ZION et al., 1993; ROLANDONE et al., 2008; JOLIVET et al., 2015), located in between locked fault sections northwest and southeast of it. To investigate further the ability of our method to capture along-strike segmentation without *a priori* information on the fault position, we plot the full PDF for  $I_2$  and for fault-parallel velocities on two selected profile across Monarch Peak and Salton Sea segments (figures 2.9 and 2.10). The surface velocity gradient across the fault (between 40 mm/yr and 45 mm/yr depending on the considered segment) is accommodated on a 80 km wide zone around the Salton Sea segment while it is concentrated on a narrow 15 km wide zone around the Monarch Peak creeping segment. There, the expected velocity change should be even more abrupt (as seen from InSAR analysis for instance, jolivet2015) but the GNSS network is not dense enough to capture changes over distances smaller than 15 km. However, interestingly, the mode of maximum probability exhibits such an abrupt change while the average and median of the PDF are smoother (figure 2.10-a). The second invariant  $I_2$  along the creeping segment increases abruptly near the fault, starting around 10 km from it, well above 1000 nstrain/yr.

In the Salton Sea Lake area, several faults are parallel to the main San Andreas fault and potentially active (figure 2.10-b). Identifying the amount of relative motion that is taken by each of these structures is still debated (FIALKO, 2006; LUNDGREN et al., 2009; LINDSEY et FIALKO, 2013) and is needed to properly assess seismic hazard. For instance, LINDSEY et FIALKO (2013) explore several physical models with distinct fault geometries or spatial heterogeneities in the crustal elastic properties to estimate the slip rate on each of these faults based on the inversion of GPS and InSAR surface velocities. The ambiguity between those models comes from the very similar resulting surface velocity field. However, these models predict larger differences in surface strain rates than in velocities and could be better distinguished by looking at the fit to the second invariant  $I_2$ , for instance. This requires uncertainties on  $I_2$  to be correctly estimated, as done here and shown in figure 2.10-b.

The Bayesian method developed in this study thus allows to identify creeping segments from locking segments and potentially active faults during the interseismic period without a priori constraints on the structure of deformation. It is also to note that it jointly retrieves the velocity field and its derivatives in areas of large strain rates such as the San Andreas fault system, but also in areas of lower deformation rates such as the Wasatch mountains experiencing a  $\sim 20$  nstrain/yr extension. It appears robust enough to discuss with confidence second order features of the strain rate tensor that could be meaningful in well resolved areas. For instance, the surface strain pattern above an active locked fault can show some level of asymmetry depending on the rheology and lithology contrast on either side of the fault (LE PICHON et al., 2005; FIALKO,



## 2. Application à des données GNSS synthétiques et au sud-ouest des États-Unis

2006; CHÉRY, 2008; JOLIVET et al., 2008). The posterior distribution for velocity or second invariant could show whether this asymmetry is required by the data.

Furthermore, having access to the uncertainties associated with the principal strain directions will help comparing deformation over broader spatial scale and discuss more finely how strain is partitioned over active structures and within lithospheric blocks. However, this method is primarily dependent on the density and quality of observations, which remains the limiting factor in such discussions.

### 2.6.3. Future developments

The development of modern geodetic techniques in the last decades (with GNSS continuously recording networks, optical and radar satellite imagery, tiltmeters) has led to the generalisation of the production of strain rate maps, based on velocities averaged over several years. These maps have a very broad range of applications, in long-term tectonics (e.g. KREEMER et al., 2003; FLESCHE et KREEMER, 2010), seismic cycle (e.g. D'AGOSTINO, 2014; H. WANG et al., 2019; KLEIN et al., 2019), or hydrology (e.g. SILVERII et al., 2020). Recently, strain rates have been calculated on much shorter time-spans in order to capture the surface deformation associated with phenomena such as ground water variations (KLEIN et al., 2019; SILVERII et al., 2020), magmatic intrusions (SILVERII et al., 2019) or slow-slip events (e.g. DELBRIDGE et al., 2020). Our interpolation method, with its ability to properly account for data errors, could prove useful in these cases where observations are associated with larger than usual uncertainties.

The algorithm presented in this study has been designed for and applied to GNSS horizontal velocity fields. It could also be applied to a variety of interpolation problems in the geosciences, providing correct estimates of uncertainties. For instance, one could easily apply our proposed approach to the interpolation of horizontal coseismic displacements and associated strain tensor. Recently, BARNHART et al. (2020) use high-resolution optical images correlation technique to recover the horizontal coseismic displacement associated with the Ridgecrest earthquake sequence that stroke the East California Shear Zone and Garlock fault in 2019 (Mw 6.4 and Mw 7.1 for the main shocks). Their interpretation of the derived dilatation maps in terms of inelastic deformation in the very near field from the fault is highlighted by FENG et ALMEIDA (2020) since it would have important consequences on our understanding of faults and earthquakes. However, as previously shown, dilatation maps are prone to strong interpolation artifacts and should be carefully interpreted, or built with our artifact-free method.

The next step is therefore to adapt our technique to more continuous pictures of the surface deformation as produced by optical image correlation (e.g. VALLAGE et al., 2015; DELORME et al., 2020; BARNHART et al., 2020) or InSAR (LOS velocities, e.g. HUSSAIN et al. (2016), H. WANG et al. (2019) ainsi que WEISS et al. (2020)). One difficulty to do so is to properly account for the spatially correlated noise between pixels, fully described by a covariance matrix for InSAR (e.g. LOHMAN et SIMONS, 2005). Second, image correlation (when including elevation information), and InSAR can provide the vertical displacement field and the projection of horizontal and vertical velocities in the LOS direction, respectively. Our method should therefore be adapted to jointly interpolate the three components of the velocity field (including the vertical

velocities coming from high quality GNSS measurements). The implementation is relatively straightforward and will be added in the future, though it will add computational cost. Including vertical velocities will give us access to the horizontal derivatives of  $V_z$  that could help identifying active faults, subsidence and uplift patterns. However, even with this more complete view of the 3D strain rate tensor, this latter will remain incomplete as derivative with respect to the vertical direction will be missing. Note that some attempts to take into account the horizontal gradients of the vertical velocity into a pseudo 3D strain rate tensor have been performed by MAZZOTTI et al. (2005) ainsi que SHEN et Z. LIU (2020) or PIÑA-VALDÉS et al. (2020) and could be similarly conducted within our Bayesian framework in the future.

## 2.7. Conclusion

We develop a transdimensional Bayesian method, adapted from seismic imaging (BODIN, SALMON et al., 2012; BODIN, SAMBRIDGE, RAWLINSON et al., 2012) to estimate surface strain rates from discrete GNSS horizontal velocity fields. Synthetic tests conducted on an idealized velocity field produced by the interseismic loading of the San Andreas fault zone show that this approach is more robust than a standard B-spline interpolation technique. In particular, it is able to correctly recover the strain rate tensor on a wide range of rates, without need of manually tuned user-defined parameters. The solution is a full probability distribution on model parameters defining the velocity field and its spatial derivatives. We propose several ways to visualize the solution through maps of the mean, median, standard deviation, or maximum probability. We also show fault-perpendicular profiles presenting the full posterior distribution. The probability distribution of principal directions of strain rates can be plotted on wind rose diagrams, allowing for a better comparison with long-term tectonic studies.

We apply our method to the MIDAS velocity dataset on the San Andreas and Basin and Range area and find that, while in general agreement with previously published strain rate maps, our results are smoother and artifact free. They allow for more rigorous tectonic interpretation, and help discriminating between creeping and locked fault segments. Our Bayesian inversion method designed to solve this very common interpolation and derivation problem will be applied in future work to continuous images of deformation obtained from InSAR or image correlation, with the possibility of combining all types of datasets together. We hope that the proposed approach will allow to take full profit of multi-scale geodetic measurements and to better include them in probabilistic seismic hazard assessment techniques.

## Acknowledgement

This work has been supported by the Programme National de Télédétection Spatiale (PNTS, <http://www.insu.cnrs.fr/pnts>), grant n°PNTS-2019-7. It has been conducted in the frame of the European Union's Horizon2020 research and innovation programme under grant agreement no.716542. The authors would like to thank Camille Noûs and the open source Generic Mapping Tool software <https://www.generic-mapping-tools.org/>. The software

## *2. Application à des données GNSS synthétiques et au sud-ouest des États-Unis*

described in this study is available on request. Datasets for this research are available at DOI : [10.6084/m9.figshare.14538072](https://doi.org/10.6084/m9.figshare.14538072) under the CC0 license.

## 2.8. Appendix

This supplementary material provides additional figures presenting the map of the PDF standard deviation associated with our inversion of the MIDAS data set (figure 2.12); the average of the PDF for vorticity (figure 2.13); the average residuals obtained at each observation point (figure 2.14); the density of nodes resulting from the inversion of the MIDAS data set (figure 2.15); and the cross-sections of the divergence at the location of the profiles from Figure 11 (figure 2.16).

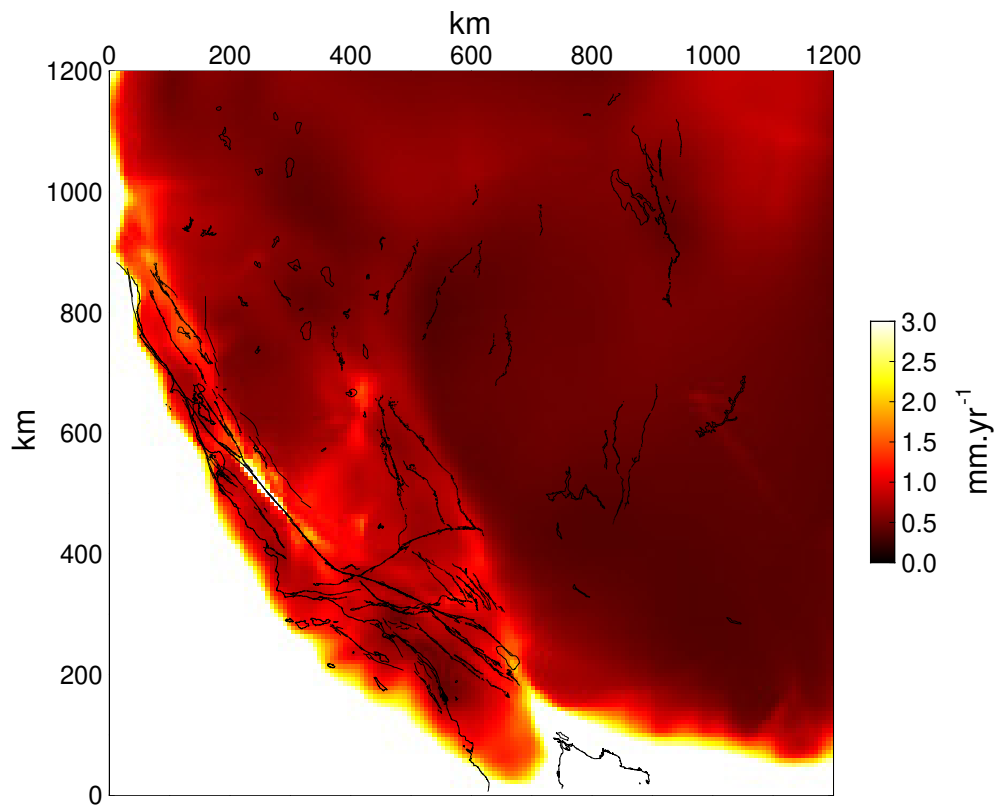


FIGURE 2.12. – Standard deviation of the probability density function (PDF) obtained for horizontal velocity using our Bayesian method on MIDAS dataset. The color-scale is saturated for  $\sigma \geq 3\text{mm/yr}$ . The  $\sigma > 3\text{mm.yr}^{-1}$  external contour closely match the GPS stations locations, as in figure 7. However, high standard deviation is also found in the vicinity of the creeping section of the SAF, which is related to the consistency of the data themselves.



2. Application à des données GNSS synthétiques et au sud-ouest des États-Unis

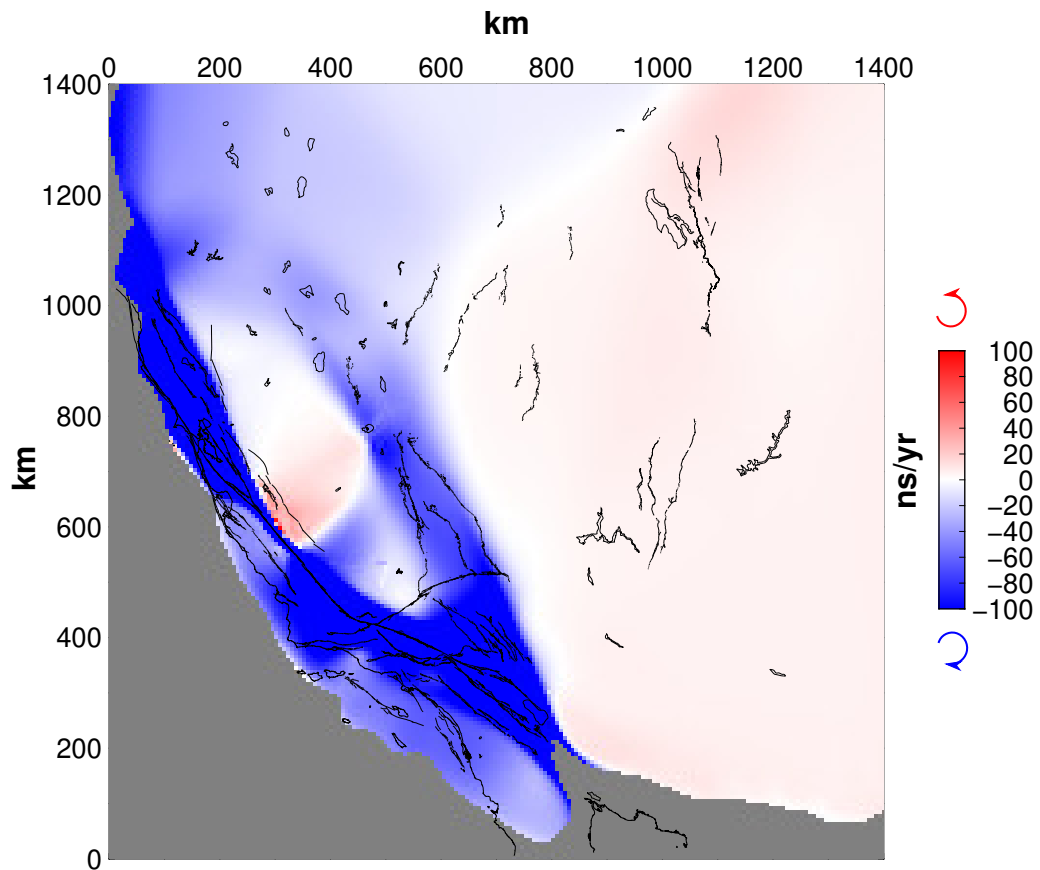


FIGURE 2.13. – Average model for the vorticity obtained with the Bayesian method on MIDAS dataset. Rotation is mostly clockwise over the San Andreas active fault system. Minor counterclockwise motion occur over the Basin and Range and the northernmost part of the central Valley.

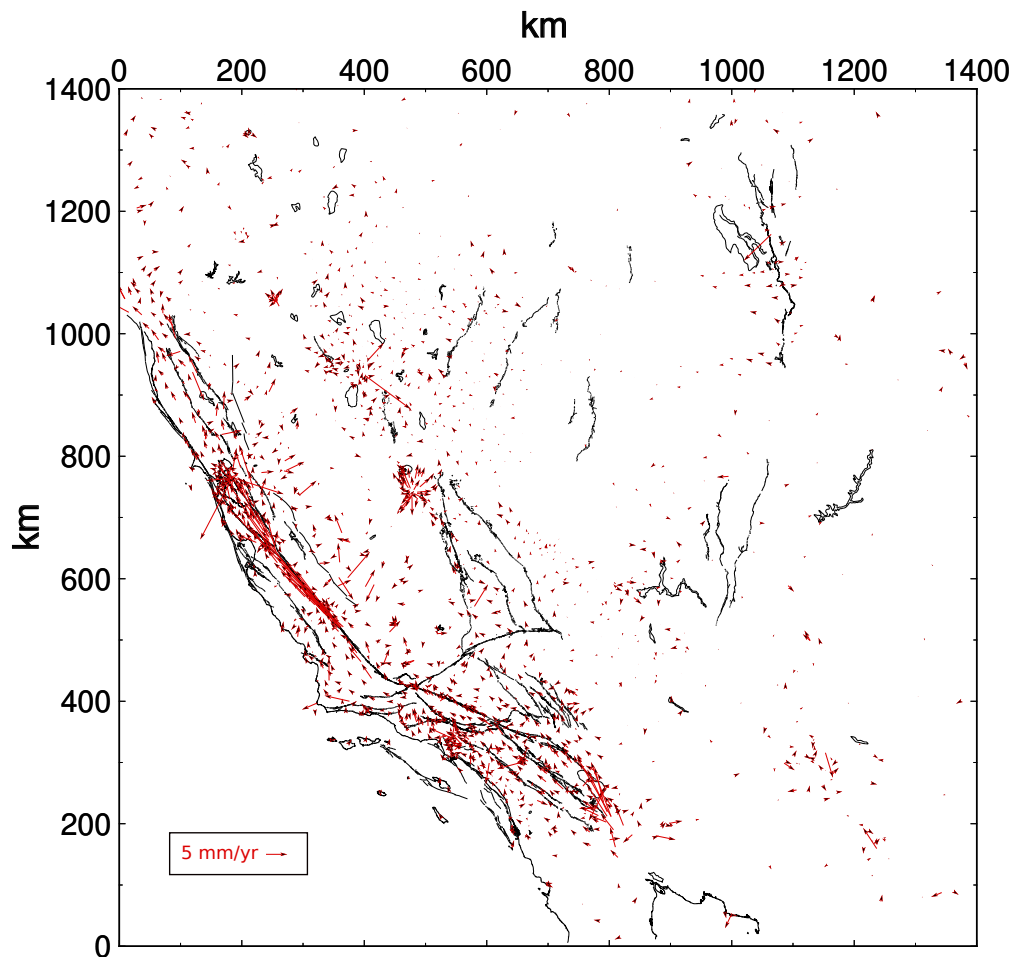


FIGURE 2.14. – Mean of the residuals on each model for the horizontal velocities from the Bayesian models obtained on the MIDAS dataset. Residuals are especially high around the creeping section of the San Andreas fault, in the southern area of the San Francisco Bay and within the long valley caldera. Those areas partly coincide with high standard deviations (see Figure 2.12).

## 2. Application à des données GNSS synthétiques et au sud-ouest des États-Unis

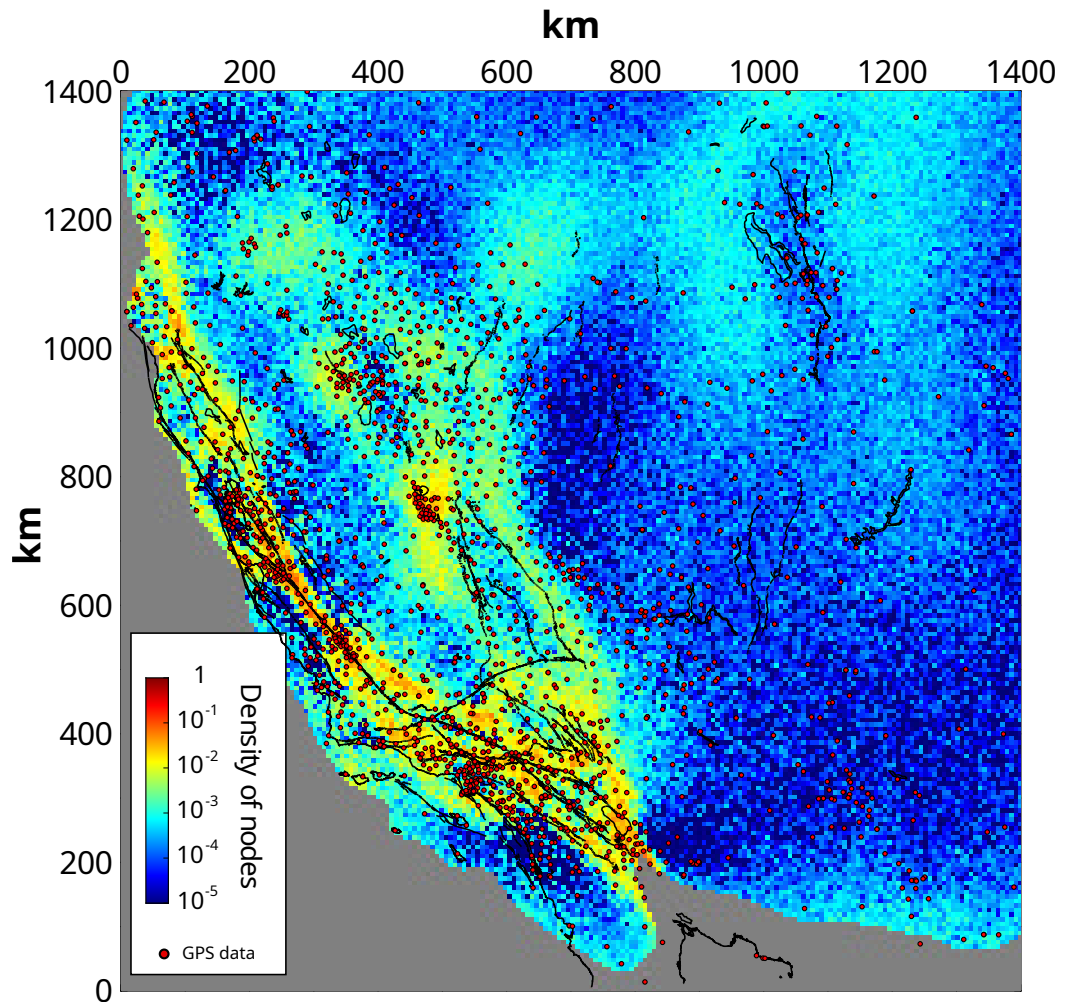


FIGURE 2.15. – Density of Delaunay nodes (number of nodes per pixel) averaged over all of the models produced by the inversion. A density of 1 or higher on a pixel means that there was more than one node per model on this pixel on average. There is no clear direct correlation between the location of GPS stations and the density of nodes : it is rather correlated with deformation gradients. In particular, the area approximately 400 km eastward of the Salton Sea Lake is tightly surveyed, yet the density of nodes remains very low as there is no noticeable deformation in this region.

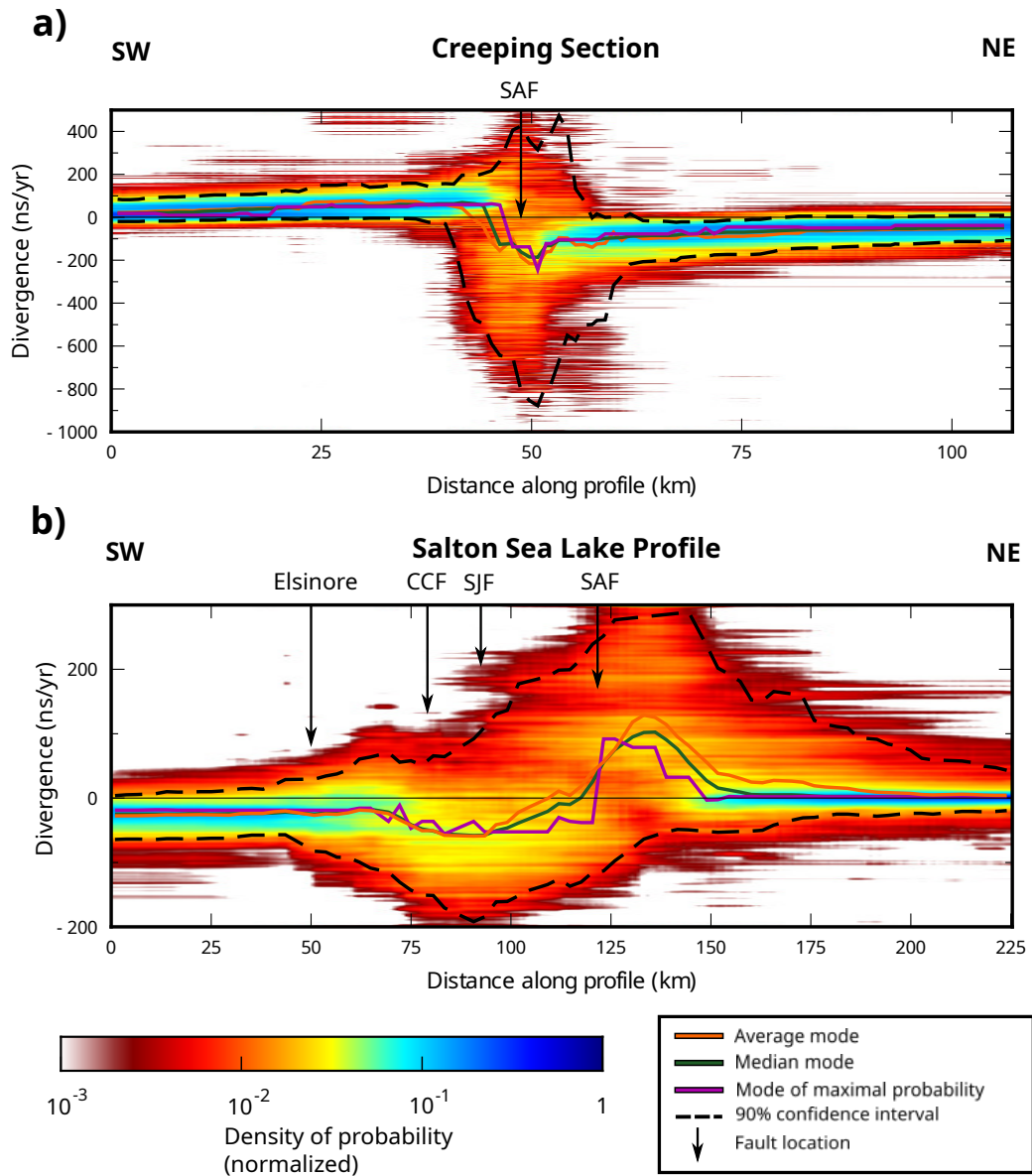


FIGURE 2.16. – Full posterior probability distribution for the divergence along the Monarch Peek segment (top panel) and the Salton Sea Lake segment (bottom panel). The wide distribution in the close vicinity of the fault on the creeping section is consistent with the high standard deviation assigned to this area on Figure S1. The statistical tools such as the mean and the median lose their significance and should not be interpreted in this configuration.





# 3. Discussions et perspectives

## Sommaire

---

<b>3.1. Outil de visualisation</b>	<b>90</b>
<b>3.2. Inversion de mécanismes au foyer</b>	<b>92</b>
3.2.1. Description des mécanismes au foyer et style de déformation	93
3.2.2. Reconstitution d'une surface continue du type de déformation	95
<b>3.3. Limitations de l'inversion bayésienne</b>	<b>98</b>
3.3.1. Un coût calculatoire élevé	98
3.3.2. Définition de la loi de probabilité <i>a priori</i> sur les modèles	99
<b>3.4. Vers une exploitation plus fine de l'incertitude sur les vitesses</b>	<b>100</b>
3.4.1. Bruit et incertitudes affectant les données	100
3.4.2. Une meilleure prise en compte de l'incertitude : approche bayésienne hiérarchique	102
3.4.3. Résultats de la méthode hiérarchique	104
3.4.4. Des données d'une qualité trop hétérogène?	106
<b>3.5. Axes d'amélioration et perspectives de développement</b>	<b>110</b>
3.5.1. Raffinement de l'approche hiérarchique	110
3.5.2. Des modèles de vitesse plus réguliers : interpolation non-linéaire au sein des triangles de Delaunay	110
3.5.3. Inversion 2D sphérique	111
3.5.4. Inversion jointe de données GNSS et InSAR	112

---

UN DES OBJECTIFS CENTRAUX DE CETTE THÈSE EST DE POPULARISER la méthode d'inversion bayésienne développée au cours de celle-ci au sein de la communauté scientifique. Pour cela, nous présentons dans ce chapitre les développements issus des travaux présentés dans les chapitres précédents. Dans la section 3.1, nous présentons une application graphique permettant de produire simplement des cartes moyennes des différents paramètres inversés, ainsi que des profils des distributions de ces mêmes paramètres.

La versatilité de l'algorithme le rend adapté à la résolution de nombreux problèmes dans le domaine des géosciences. De manière analogue à la reconstitution d'un champ de vitesse horizontal, il est par exemple possible d'obtenir des cartes continues de régime tectonique à partir de données discrètes de mécanismes au foyer (section 3.2).

Les méthodes d'inversion itérative par MCMC présentent toutefois des désavantages propres à leur construction par rapport aux méthodes d'inversion classiques. Le coût calculatoire important doit être mis en balance avec le bénéfice escompté; par ailleurs, le choix de la distribution de

### 3. Discussions et perspectives

probabilités *a priori* sur le modèle reste une étape cruciale de toute inversion employant l'inférence bayésienne, de par son impact sur les distributions de probabilités *a posteriori* obtenues (section 3.3).

La fonction de vraisemblance, qui entre dans le calcul du posterior permettant de comparer les modèles entre eux au sein des chaînes de Markov, repose sur plusieurs hypothèses concernant la nature des données et le bruit qui les affecte. La connaissance des incertitudes qui leur sont associées n'est pas parfaite; or celles-ci sont à l'origine de l'estimation des incertitudes sur les résultats ainsi que du degré de complexité et de détail que les modèles proposés peuvent atteindre. Une manière de compenser cette lacune dans la détermination du prior est d'adopter une approche bayésienne hiérarchique : en introduisant un hyperparamètre régulant l'amplitude du bruit *a priori* sur les données, on laisse celles-ci libre de déterminer leur propre niveau d'incertitude, ainsi que le degré de complexité des modèles (section 3.4).

Enfin, différents axes d'améliorations ont été explorés au cours de cette thèse afin de pallier les lacunes de l'implémentation actuelle de notre algorithme. Celles-ci sont présentées dans la section 3.5.

## 3.1. Outil de visualisation

Ainsi que nous l'avons évoqué dans le chapitre précédent (section 2.4.4), la solution proposée par l'inversion bayésienne consiste en la description complète de la PDF pour chaque paramètre (vitesse horizontale,  $2^{nd}$  invariant, rotationnel et dilatation) en chaque pixel de la grille initialement définie pour la représentation des résultats. Cela se traduit par des matrices 3D de taille  $N_{p_x} * N_{p_y} * N_D$  où  $N_{p_x}$ ,  $N_{p_y}$  correspondent au nombre de pixels selon les axes x et y, respectivement, et  $N_D$  correspond au nombre de valeurs distinctes que peuvent prendre ces paramètres dans la distribution *a posteriori*. Informatiquement, cela représente des fichiers pouvant atteindre plusieurs gigaoctets de données pour chaque paramètre : à titre d'exemple, les PDF obtenues pour la Californie, échantillonnées sur une grille de 200\*200 pixels avec une discrétisation de la distribution sur 800 valeurs, constituent des fichiers de 1.6 Go, dont la manipulation se doit d'être optimisée afin de ne pas saturer la RAM des postes de travail dotés de faibles capacités.

Afin que les utilisateurs de l'algorithme puissent réaliser simplement des cartes et des coupes telles que celles décrites au chapitre précédent (section 2.5.1) à partir de ces fichiers de PDF, nous avons développé avec la collaboration de Valentin GUILLER, étudiant en master à l'ENS de Lyon, une interface de visualisation pour les résultats issus de notre algorithme bayésien (Figure 3.1).

Pour permettre à la plus large audience possible de s'appropriier cet outil et de le modifier selon ses besoins, cette interface est codée en Python 3, dont le status de langage *open source* de haut niveau à la syntaxe intuitive en a fait l'un des langages les plus utilisés dans la communauté scientifique. Elle exploite principalement CartoPy (MET OFFICE, 2021) qui permet la projection et la visualisation des données sur une carte, et Tkinter (LUNDH, 1999) pour l'interface interactive. Celle-ci permet la représentation des PDF *a posteriori* via des cartes de moyenne, de médiane ou de mode de probabilité maximal pour chaque paramètre, dont l'utilisateur peut

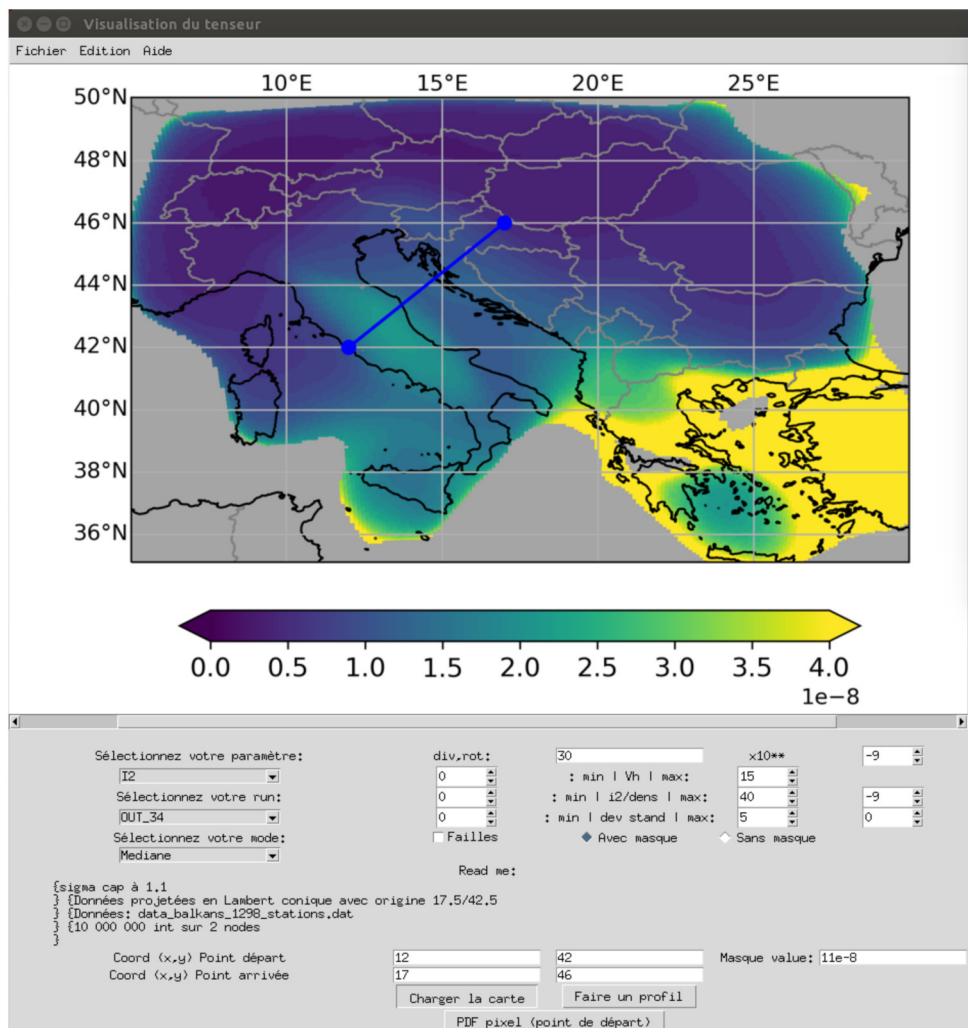


FIGURE 3.1. – Exemple d'utilisation de l'interface graphique développée pour la représentation et l'exploitation des résultats de l'inversion bayésienne

définir les bornes maximales et minimales pour l'affichage. Il est également possible de définir un masque à seuil déterminé par l'utilisateur basé sur l'écart-type des distributions (voir Figure 2.7) et de choisir de les incorporer ou non sur les cartes produites; de même pour les failles sur la région étudiée si l'on dispose d'un catalogue idoine. Enfin, l'utilisateur peut réaliser des profils en choisissant les positions de départ et d'arrivée de ceux-ci, ainsi que représenter la PDF *a posteriori* sur n'importe quel paramètre à une position donnée (Figure 3.2).

Deux prolongements de ce projet sont en cours de développement : le premier vise à remplacer Tkinter par PyQt5, un module d'interfaçage de Python pour la bibliothèque Qt de C++ permettant de réaliser des interfaces graphiques plus modernes, et qui a déjà été utilisé dans un projet similaire en tomographie sismique (DURAND et al., 2018).

Le second vise à porter cette interface sous Jupyter Notebook (KLUYVER et al. (2016), utilisé par exemple par STYRON et HETLAND (2014)) afin de développer une interface HTML5-compatible directement sur le web. Grâce à l'utilisation d'outils tels que ipyleaflet, l'objectif est

### 3. Discussions et perspectives

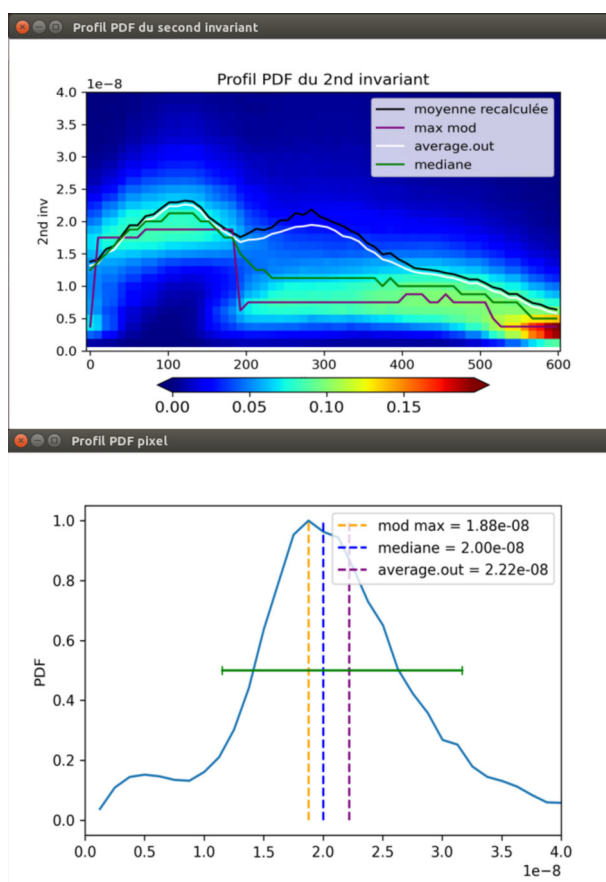


FIGURE 3.2. – Représentation du profil correspondant de la Figure 3.1, ainsi que de la PDF au point localisé à 100km de l’origine de ce profil

d’exploiter l’API de services tels que Google Map ou OpenStreetMap pour les combiner aux résultats de l’inversion bayésienne afin de proposer des cartes dynamiques interactives en ligne (figure 3.3).

À terme, cet outil, en facilitant la prise en main de l’algorithme et l’exploitation de ses résultats, devrait constituer un atout pour promouvoir le calcul de taux de déformation géodésique par inférence bayésienne au sein de la communauté scientifique.

## 3.2. Inversion de mécanismes au foyer

Dans les régions sismiquement actives, l’étude des sources sismiques par le prisme des mécanismes au foyer permet de déterminer le champ de contraintes et de déformation tectonique. Ces mécanismes au foyer permettent de décrire la géométrie du glissement engendré par la rupture sur le plan de faille. Ils sont reconstruits pour chaque événement sismique à partir de la polarité du premier mouvement des ondes P observées sous différents azimuths, et sont similairement localisés dans l’espace par l’inversion des temps d’arrivée aux différents sismomètres. En adoptant une méthode d’inversion bayésienne directement adaptée de celle présentée dans le chapitre 1,

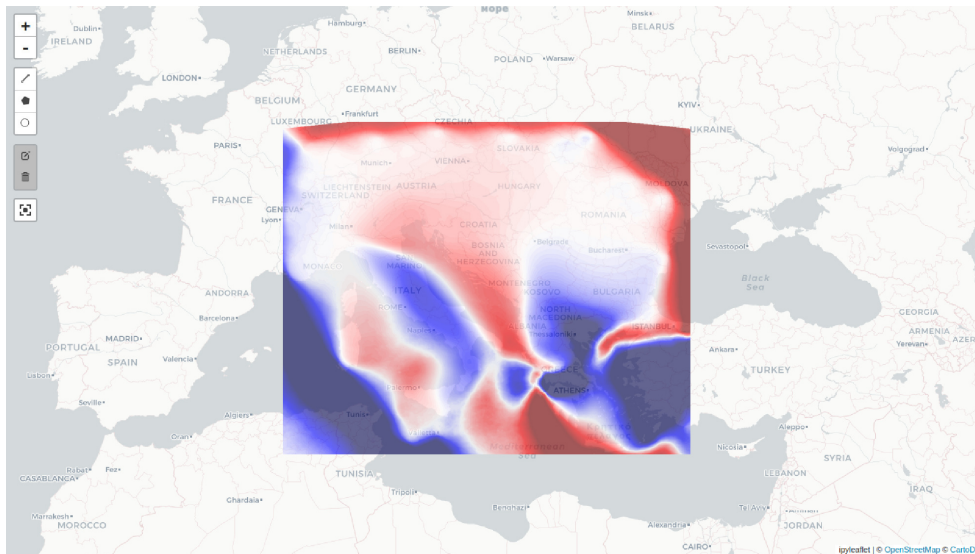


FIGURE 3.3. – Exemple de carte interactive sous Jupyter-Notebook intégrant la moyenne de la distribution de probabilités de la divergence à l'API d'OpenStreetMap.

il a été possible de contraindre le style de déformation sur les Alpes occidentales à partir d'un ensemble de mécanismes au foyer, qui ont été calculés grâce au catalogue des données sismiques disponible sur cette région (MATHEY et al., 2021).

#### 3.2.1. Description des mécanismes au foyer et style de déformation

Lorsqu'un séisme a lieu, on peut décrire le mouvement à l'origine de la rupture par un tenseur des moments sismiques, qui est une combinaison des forces élémentaires qui s'appliquent au point de rupture. Lorsque ce séisme est d'origine tectonique, lié à un glissement le long d'un plan de faille, ce tenseur se réduit à la somme de deux couples dont les forces de rotation se compensent et qui décrivent un cisaillement dans l'espace, formant un système double-couple. En diagonalisant ce tenseur, on peut l'exprimer comme la somme d'une compression (valeur propre négative) et d'une tension (valeur propre positive) orthogonales et d'égale amplitude. Les vecteurs propres correspondants décrivent les axes sur lesquels s'exercent cette compression et cette tension, et sont appelés P et T, respectivement. Le troisième vecteur propre, correspondant à la valeur propre nulle, est l'axe B, ou *null axis*, orthogonal aux deux autres. Les mécanismes au foyer peuvent être décrits selon la classification de Frohlich (FROHLICH, 1992) : en fonction des angles de plongée des axes P, T et B, la déformation co-sismique associée au mécanisme est identifiée comme étant en décrochement, normale ou inverse. Par exemple, si l'angle de plongée de l'axe P est de  $90^\circ$ , un observateur à la surface verra un mouvement en extension selon un axe, et nul selon l'autre : c'est un déplacement de faille inverse. La représentation en diagramme ternaire de Kaverina (KAVERINA et al., 1996; ÁLVAREZ-GÓMEZ, 2019) permet de représenter les mécanismes au foyer qui caractérisent des types de déformation intermédiaires entre ces trois pôles (Figure 3.4-a). Comme les trois axes descriptifs P, T et B sont orthogonaux

### 3. Discussions et perspectives

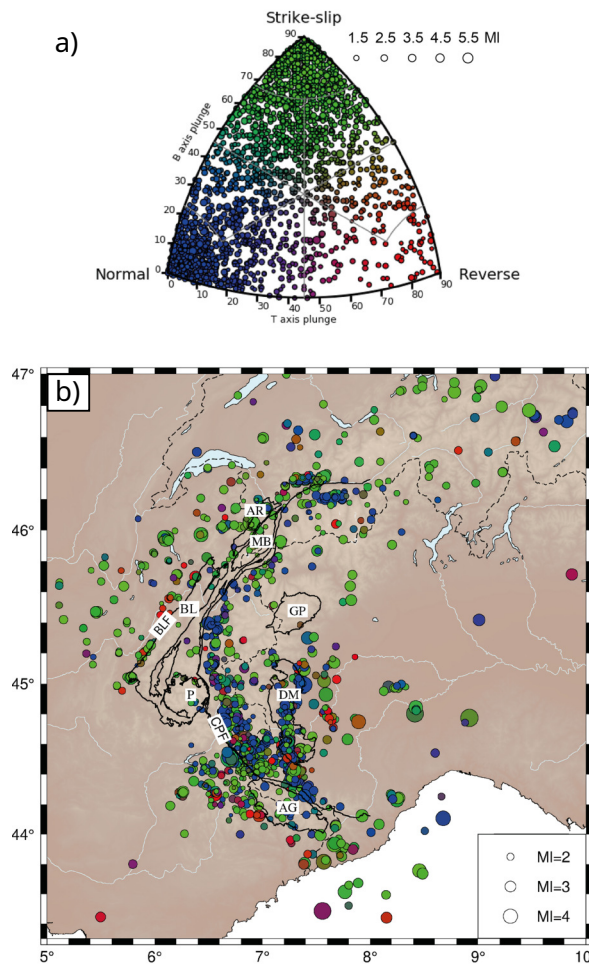


FIGURE 3.4. – Modifié d'après MATHEY et al. (2021). **a)** Diagramme de Kaverina montrant le style de déformation des mécanismes inclus dans l'étude de MATHEY et al. (2021) en fonction de leurs plongées selon l'axe T et l'axe B. Les styles de déformation normal, inverse et de décrochant correspondant aux axes verticaux P, T et B sont indiqués par des cercles bleus, rouges et verts, respectivement. **b)** Localisation des mécanismes focaux avec le code couleur correspondant à leur classification dans le diagramme de Kaverina en **a)**.

les uns aux autres, leurs angles de plongée sont également liés : deux des trois paramètres suffisent à déterminer la position dans le diagramme ternaire d'un mécanisme focal, et donc le type de déformation associé (Figure 3.4-a). En attribuant un code couleur aux pôles de ce diagramme, on obtient une classification visuelle intuitive des mécanismes au foyer en fonction du style de déformation qu'ils représentent.

Enfin, cette déformation co-sismique nous renseigne sur l'état des contraintes physiques à l'origine de la rupture, et permet donc d'appréhender le contexte tectonique dans lequel elle s'inscrit.

L'ensemble des mécanismes au foyer calculés par MATHEY et al. (2021) est représenté sur la Figure 3.4-b. Il s'agit d'un jeu de 2215 mécanismes correspondant à des séismes de magnitudes

comprises entre 0.2 et 4.9, auxquels un facteur de qualité est attribué en fonction de différents paramètres propres au calcul des mécanismes focaux, tels que le nombre de polarités utilisées, la distribution spatiale des stations et les incertitudes sur les polarités. L'incertitude sur l'orientation du plan de faille correspondant est également associée à chaque mécanisme.

### 3.2.2. Reconstitution d'une surface continue du type de déformation

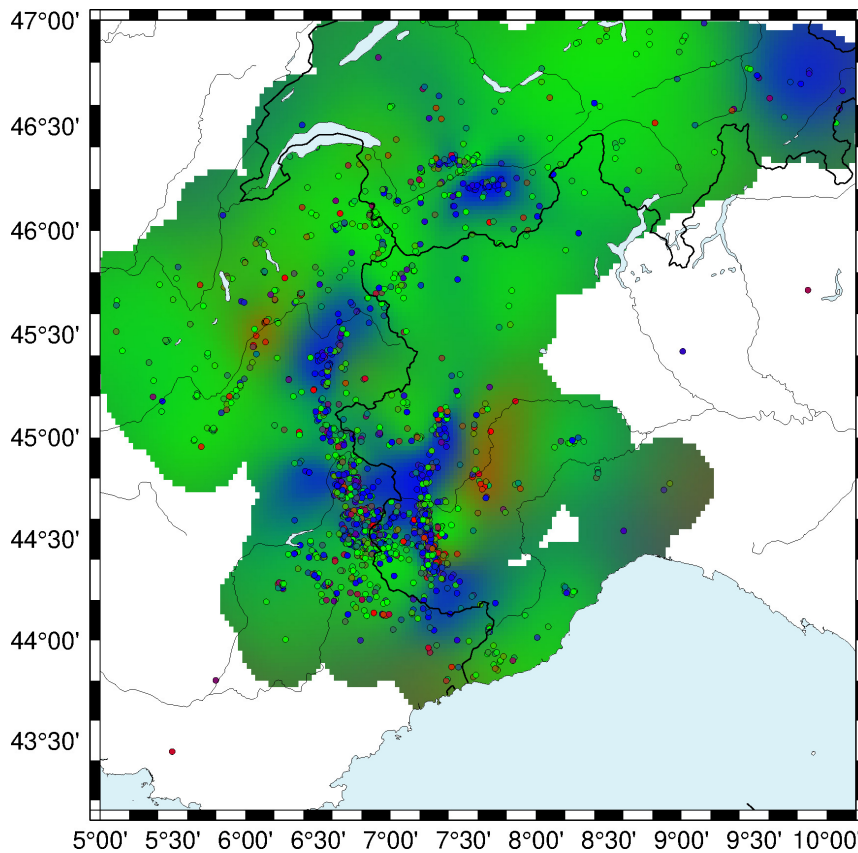


FIGURE 3.5. – Modifié d'après MATHEY et al. (2021). Valeurs moyennes des distributions des plongées des axes P, T, et B résultant d'une inversion bayésienne. Le code couleur correspond à la classification de Kaverina du style de déformation (les pôles rouge, bleu et vert étant respectivement associés aux styles de déformation inverse, normal et décrochant). Les mécanismes focaux utilisés sont représentés par des points colorés avec la même convention.

Les données dont on dispose constituent un ensemble d'informations spatialement discrètes, déterminées par six paramètres : trois pour leur position dans l'espace, deux pour les angles de plongée des axes B et T et un pour l'incertitude sur le plan de faille. Si l'on traduit ce dernier paramètre en une incertitude sur les axes de plongée, on peut décrire ce jeu de données de manière analogue à celui d'un réseau GNSS :



### 3. Discussions et perspectives

$$\mathbf{d}_{\text{obs}} = [(P_1, T_1, x_1, y_1, z_1, \sigma_1), \\ \dots, \\ (P_n, T_n, x_n, y_n, z_n, \sigma_n)]$$

où  $(P_i, T_i)$  définit les angles de plongée des axes B et T pour le  $i^{\text{ème}}$  de nos  $n$  mécanismes au foyer,  $(x_i, y_i, z_i)$  définit la position de ce mécanisme, et  $\sigma_i$  l'incertitude associée simultanément à  $P_i$  et  $T_i$ .

Afin de se ramener à un problème d'inversion en deux dimensions, les hypocentres ont été projetés à la surface, ce qui permet d'exprimer la position des données grâce à deux coordonnées dans le plan horizontal. Le jeu de données peut alors être exprimé sous la forme

$$\mathbf{d}_{\text{obs}} = [(P_1, T_1, x_1, y_1, \sigma_1), \\ \dots, \\ (P_n, T_n, x_n, y_n, \sigma_n)]$$

Nous avons alors pu adapter l'algorithme d'inversion bayésienne des vitesses GNSS décrit dans la section 1.3.2 à ce nouveau type de données. Les angles de plongée des axes de compression et de tension se substituent aux vitesses selon les axes  $x$  et  $y$ . On paramétrise la surface à l'aide de nœuds formant une tessellation grâce à la triangulation de Delaunay et les angles de plongée des axes B et T sont interpolés linéairement sur chaque triangle. La distribution *a posteriori* sur les modèles ainsi paramétrés est échantillonnée à l'aide d'un même algorithme de *reversible jump* Markov chain Monte Carlo.

Le résultat obtenu est une distribution de probabilités continue pour les angles de plongée des axes P et T sur l'ensemble des Alpes occidentales. De la même manière que le tenseur des taux de déformation intersismique pouvait être dérivé sur chaque modèle afin d'obtenir une distribution sur celui-ci, la position dans le diagramme de Kaverina du régime tectonique peut être obtenu en tout point de chaque modèle, et ainsi disposer de sa propre distribution *a posteriori*. Les résultats de cette inversion sont présentés en Figure 3.5, et donnent un aperçu de la dynamique sismotectonique qui affecte cette zone. L'article complet peut être trouvé en annexe A de ce manuscrit.

Un point délicat de la transposition de l'algorithme à ce nouveau type de données concerne le modèle statistique du bruit qui les affecte. En effet, la nature de cette distribution est importante puisque c'est elle qui contrôle l'expression de la fonction de vraisemblance. Tout comme les vitesses GNSS sont le résultat d'une première inversion des séries temporelles des stations, les mécanismes au foyer sont issus d'une inversion réalisée à partir des temps d'arrivée et des polarités des ondes P, et les incertitudes résultantes sont difficiles à quantifier (HARDEBECK et HAUSSON, 2001). Nous avons choisi de modéliser le bruit sur les angles de plongée par une distribution gaussienne dont l'écart-type est déterminé par l'incertitude sur le plan de faille, ce

qui implique une corrélation entre l'erreur sur les deux angles P et T d'un même mécanisme. Afin de limiter l'impact de cette définition relativement arbitraire du modèle statistique de bruit, nous avons employé l'approche hiérarchique décrite en 3.4.2, avec plus de succès toutefois puisque cette stratégie a permis d'établir que l'incertitude estimée de cette manière était probablement surestimée pour le jeu de données utilisé.

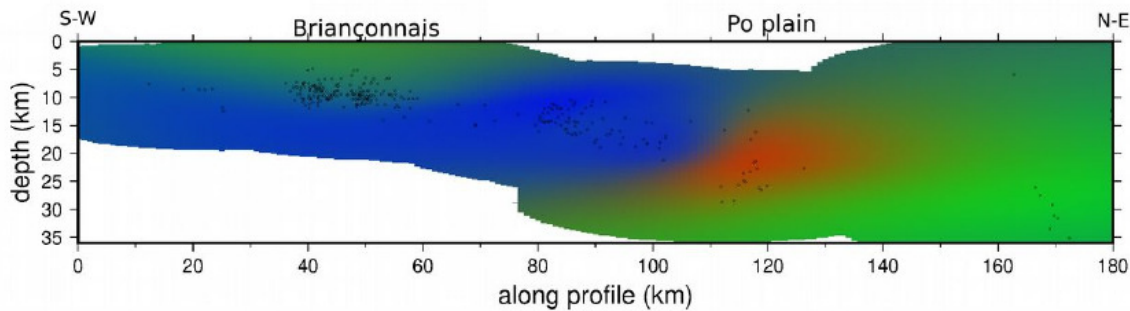


FIGURE 3.6. – Modifié d'après MATHEY et al. (2021). Valeurs moyennes des distributions des plongées des axes P, T, et B le long d'une coupe transversale des Alpes située approximativement à  $44^{\circ}45'$  de latitude nord. Le code couleur correspond à la classification de Kaverina du style de déformation (les pôles rouge, bleu et vert étant respectivement associés aux styles de déformation inverse, normal et décrochant).

La répartition spatiale des observations, qui est en réalité en trois dimensions et non en deux, est également problématique : les mécanismes au foyer, une fois calculés, ont été projetés à la surface pour pouvoir être utilisés par notre algorithme qui ne peut prendre en compte que des observations coplanaires. L'impact de cette approximation importante - l'échelle verticale n'étant pas négligeable devant l'échelle horizontale - et ses conséquences sur la distribution *a posteriori* du régime tectonique ne sont pas aisément quantifiables. Des profils 2D verticaux du style de déformation ont été réalisés perpendiculairement et longitudinalement aux Alpes afin d'avoir un aperçu tridimensionnel du massif, en projetant cette fois les mécanismes situés jusqu'à environ 20 km de part et d'autre de la coupe sur le plan vertical du profil. Ils montrent une variabilité importante selon l'axe vertical des angles de plongée de B, P et T (figure 3.6); il faut donc voir la figure 3.5 comme l'intégration du régime tectonique sur toute l'épaisseur du volume contenant les données, et non comme une caractérisation du style de déformation de surface.

Bien que cette méthode d'inversion du régime tectonique rencontre encore des difficultés, il s'agit tout de même d'une première étape encourageante pour l'utilisation de l'inférence bayésienne dans ce domaine. L'amélioration la plus importante serait de prendre véritablement en compte l'axe vertical et de réaliser une inversion 3D du régime tectonique, ce qui reste possible avec des modèles décrits par une triangulation de Delaunay (pour se convaincre que celle-ci existe bien en trois dimensions, il suffit de la voir comme le dual du diagramme de Voronoï - dont l'existence est triviale pour n'importe quel nombre de dimensions). Définir avec plus d'exactitude le modèle de bruit théorique sur les données permettrait également de s'assurer que la fonction de vraisemblance est correctement exprimée, ou, à défaut, de la modifier.

## 3.3. Limitations de l'inversion bayésienne

### 3.3.1. Un coût calculatoire élevé

L'explosion des travaux basés sur des méthodes MCMC dans les années 90, et leur succès grandissant depuis, est certes en partie lié à plusieurs découvertes théoriques de l'époque, mais surtout au phénoménal gain de puissance de calcul des outils informatiques au cours des dernières décennies. Bien que la fréquence des processeurs stagne depuis le milieu des années 2000, l'augmentation du nombre de coeurs et la parallélisation des tâches offre toujours plus de puissance de calcul à disposition des scientifiques. Par ailleurs, les algorithmes de la classe des MCMC disposent d'une solution simple et extrêmement efficace de parallélisation : il suffit d'initier une chaîne par coeur, puis de compiler les résultats sur un unique coeur à l'issue de l'exécution de toutes les chaînes. Comme celles-ci sont indépendantes, l'absence d'opérations de communication offre un gain théoriquement linéaire en fonction du nombre de coeurs.

Dans la pratique, il n'est pas possible de réduire indéfiniment le temps physique de calcul en augmentant le nombre de processeurs afin de conserver un temps de calcul informatique constant : une chaîne doit avoir suffisamment convergé vers son état statistiquement stationnaire, ce qui implique un temps de calcul incompressible pour chaque coeur. Or, ce temps de calcul peut s'avérer nettement plus important que dans la plupart des méthodes classiques d'inversion par optimisation.

Considérons le nombre d'opérations nécessaire à chaque itération d'une chaîne de Markov. On dispose d'un modèle  $\mathbf{m}$  contenant  $K$  noeuds en moyenne pour une inversion portant sur  $D$  données. On applique une perturbation pouvant potentiellement nécessiter de redéfinir la triangulation localement, opération dont le coût calculatoire est en  $\mathcal{O}(\log K)$  en utilisant l'algorithme de Bowyer-Watson (BOWYER, 1981; WATSON, 1981). Il faut alors calculer la probabilité des données connaissant le modèle,  $p(\mathbf{d}_{\text{obs}} | \mathbf{m})$ , ce qui nécessite de déterminer la valeur de déplacement prédite par le modèle en chaque position d'une station GNSS. La recherche d'un point dans la triangulation s'effectuant en  $\mathcal{O}(\sqrt{K})$  et le calcul de l'interpolation au sein d'un triangle en  $\mathcal{O}(1)$ , l'opération totale aura donc un coût de  $\mathcal{O}(D\sqrt{K})$ . La comparaison de la probabilité conditionnelle des modèles et la décision d'acceptation s'effectuent également en  $\mathcal{O}(1)$ . Reste alors à enregistrer les valeurs prédites en tout point de la surface par le modèle conservé : il s'agit donc, pour chaque pixel, de rechercher le triangle dans lequel sa position est incluse, puis de calculer la valeur de chaque paramètre à partir des informations portées par les sommets de ce triangle. Cette opération de stockage des résultats nécessite  $\mathcal{O}(P\sqrt{K})$  opérations, avec  $P$  le nombre de pixels. Comme en règle générale  $P \gg D$ , il s'agit donc de l'étape la plus coûteuse. En pratique, l'algorithme n'enregistre les modèles qu'à une fréquence donnée de l'ordre de  $\frac{1}{50}$ , et le calcul de la probabilité du modèle peut alors s'avérer être d'une complexité comparable à celle de l'étape finale.

Au final, en négligeant les étapes d'initialisation et d'écriture des résultats (bien que cette dernière puisse nécessiter plusieurs minutes en fonction de la résolution spatiale choisie), pour une chaîne itérée  $I$  fois, la complexité totale sera de  $\mathcal{O}(IP\sqrt{K})$ . En comparaison, la majorité des techniques d'interpolation ou d'inversion par optimisation exhibent des complexités linéaires ou

au pire quadratique en  $D$ . Comme  $P \gg D$ , cela se traduit par un coût calculatoire massivement plus élevé dans le cas de la méthode bayésienne.

En pratique, en considérant une inversion employant 400 000 itérations, une grille de sortie de 200 par 200 pixels et comportant 120 nœuds en moyenne, il faut compter environ 5 heures de temps de calcul par chaîne (celles-ci pouvant être trivialement parallélisées, comme mentionné précédemment), contre quelques minutes voire quelques secondes pour une inversion classique.

Bien que consacrer quelques heures de calcul à l'analyse d'un jeu de données ayant nécessité plusieurs années de collecte et de traitement reste parfaitement raisonnable, cette différence de temps de calcul ne saurait toutefois être négligée.

### 3.3.2. Définition de la loi de probabilité *a priori* sur les modèles

La quantification de l'information *a priori* dont on dispose sur le modèle est en règle générale l'un des points les plus délicats dans le cadre d'une inversion bayésienne. Ici, l'utilisation d'un prior uniforme s'est imposé pour des considérations pratiques (voir 1.3.1), mais ceci reste un choix qui emporte un certain nombre de conséquences :

1. À l'exception des vitesses maximales connues sur la région, on ignore délibérément toute donnée géologique ou tectonique dont on pourrait disposer en amont de l'inversion. Il s'agit à la fois d'une force, puisque notre méthode devient alors applicable à n'importe quel jeu de données GNSS sans aucune connaissance préalable des spécificités de la région étudiée, mais également d'une faiblesse car on se prive d'informations utiles, telle que la localisation de failles bien cartographiées ou leur vitesse de glissement, qui permettraient de mieux contraindre les modèles proposés. Par ailleurs, même si l'on souhaitait intégrer ces informations dans le prior, il faudrait alors les convertir sous forme d'une distribution de probabilités afin que celles-ci puissent être décrites en termes statistiques, tâche qui pourrait s'avérer particulièrement hardue.
2. Le choix du support compact de cette distribution, *id est* des bornes de l'intervalle des valeurs possible, comporte en soi une information *a priori* : on limite l'espace des paramètres explorables, et donc des modèles accessibles, puisque les vitesses de déplacement à l'extérieur de cet intervalle ne pourront jamais être atteintes.

Il pourrait être tentant de proposer un prior exagérément étendu (par exemple, autorisant des vitesses comprises entre -100 mm/an et 100 mm/an sur chaque axe), mais cela se répercutera nécessairement sur la distribution de probabilités *a posteriori* : en effet, le taux d'acceptance  $\alpha(\mathbf{m} \rightarrow \mathbf{m}')$  d'un modèle  $\mathbf{m}'$  à partir d'un modèle  $\mathbf{m}$ , dans un algorithme de MCMC à saut réversible, dépend notamment du rapport des probabilités *a priori* des modèles ainsi que de la probabilité de passage de l'un à l'autre (voir 1.2.3) :

$$\alpha(\mathbf{m} \rightarrow \mathbf{m}') \propto \frac{p(\mathbf{m}')}{p(\mathbf{m})} * \frac{q(\mathbf{m}|\mathbf{m}')}{q(\mathbf{m}'|\mathbf{m})} \quad (3.1)$$

Or, si ce rapport vaut 1 lorsque  $\mathbf{m}$  et  $\mathbf{m}'$  appartiennent à des espaces de même dimension (c'est-à-dire, quand ils possèdent autant de nœuds de paramétrisation), il devient proportionnel

### 3. Discussions et perspectives

à  $\frac{1}{\theta_x * \theta_y}$  dans le cas d'une naissance de cellule, et à  $\theta_x * \theta_y$  dans le cas d'une mort, avec  $\theta_x$  et  $\theta_y$  les longueurs des intervalles définissant le support compact du prior uniforme pour les vitesses sur l'axe  $x$  et  $y$ , respectivement. Ce terme provient de la probabilité *a priori* d'un modèle à  $k$  nœuds (voir 1.27) :

$$p(\mathbf{m}) \propto \frac{1}{(\Delta V_y \Delta V_x)^k} \quad (3.2)$$

Elle est inversement proportionnelle à l'étendue du prior, et ce pour chaque dimension du modèle. Ainsi, plus cet intervalle est étendu, plus les modèles présentant un grand nombre de cellules seront pénalisés, influant de fait sur la distribution *a posteriori* des modèles : leur probabilité dans le prior diminue quand le nombre de nœuds croît, mais également quand  $\theta_x$  ou  $\theta_y$  augmente.

Concernant notre application du rj-McMC, choisir des bornes légèrement plus larges que les valeurs extrêmes contenues dans les données semble être un compromis judicieux, puisqu'il n'y a pas de raison de supposer *a priori* que la vitesse surfacique puisse atteindre des valeurs significativement plus élevées que ce que les données indiquent. On constate cependant que le choix du prior n'est jamais neutre dans le cadre de l'inférence bayésienne.

## 3.4. Vers une exploitation plus fine de l'incertitude sur les vitesses

Un des avantages majeurs de l'inférence bayésienne sur les méthodes d'inversion classiques est qu'elle offre une méthode naturelle de propagation des incertitudes depuis les données vers les résultats. Il est donc nécessaire d'accorder la plus grande attention aux incertitudes sur les vitesses fournies par les stations GNSS, afin d'obtenir de pouvoir estimer correctement la fiabilité de la distribution de probabilités obtenue *a posteriori*.

### 3.4.1. Bruit et incertitudes affectant les données

Lors de la construction de la fonction de vraisemblance des données connaissant le modèle  $p(\mathbf{d}_{\text{obs}} | \mathbf{m})$ , nous avons formulé l'hypothèse que le bruit affectant chaque composante de la vitesse horizontale suivait une loi normale centrée, d'écart-type égal à l'incertitude associée à la donnée, indépendante entre les différentes composantes d'une même station ainsi qu'entre les différentes stations d'un même réseau (voir chapitre 1.3.1). Cette assertion est discutable : en effet, les vitesses de déplacement GNSS sont elles-mêmes issues de l'inversion de séries temporelles correspondant à la position des stations au cours du temps, ce qui représente un champ d'étude à part entière (e.g. SANTAMARÍA-GÓMEZ et RAY, 2021; KLOS et al., 2018; HACKL et al., 2011; SANTAMARÍA-GÓMEZ et al., 2011; WILLIAMS et al., 2004). Il est à présent clairement établi que le bruit qui affecte les séries temporelles n'est pas un simple bruit blanc gaussien, mais une combinaison de bruit de scintillement, de bruit blanc et de bruit brownien, auxquels se surajoutent des problèmes de lacune dans les enregistrements de position. La modélisation de ce

### 3.4. Vers une exploitation plus fine de l'incertitude sur les vitesses

bruit joue un rôle crucial dans la détermination de l'incertitude sur les vitesses GNSS lors de l'inversion des séries temporelles. Aussi, il n'est pas garanti que l'inversion de ces séries temporelles engendre systématiquement des jeux de données respectant notre hypothèse de départ. Par ailleurs, plusieurs études mentionnent l'existence de bruit spatialement corrélé (BENOIST et al., 2020; DONG et al., 2006; WADOWINSKI et al., 1997, e.g), actuellement non pris en compte dans notre modèle.

De plus, plusieurs facteurs locaux peuvent perturber la mesure de la déformation intersismique à long terme, tel que le mouvement saisonnier lié aux variations hydrologiques, l'activité volcanique et surtout la relaxation post-sismique qui suit un tremblement de terre. Dans de tels cas, la modélisation du déplacement de la station par une vitesse constante conduit à une importante erreur théorique. Bien que des tentatives aient été effectuées pour tenir compte de cette déformation viscoélastique transitoire parasite (e.g. HAMMOND et al., 2010), il reste particulièrement délicat de s'assurer que de tels signaux ne sont pas présents dans les données, ou bien d'estimer correctement leur poids dans l'incertitude sur la vitesse proposée.

Dans le cas où une station ayant subi une perturbation d'une nature quelconque serait incohérente avec les stations environnantes, les modèles proposés par l'algorithme bayésien devront effectuer un compromis entre ignorer cette donnée, au prix d'une augmentation du *misfit*, ou respecter ses spécificités, ce qui nécessitera l'ajout de plusieurs nœuds supplémentaires, lesquels diminueront la probabilité d'un tel modèle (1.3.2). Ainsi, en supposant que l'incertitude  $(\sigma_{x_i}, \sigma_{y_i})$  sur cette donnée soit correctement estimée, et donc élevée à l'image de l'erreur qui l'affecte, le terme

$$\left( \frac{(V_{x_i} - S_{x_i}(\mathbf{m}))^2}{2\sigma_{x_i}^2} + \frac{(V_{y_i} - S_{y_i}(\mathbf{m}))^2}{2\sigma_{y_i}^2} \right)$$

n'aura que peu de poids dans le calcul du *misfit* (voir 1.30), et la station sera ignorée lors de la régression. À l'inverse, si son incertitude est fortement sous-estimée, l'algorithme tentera alors d'en tenir compte puisque la diminution de la probabilité du modèle sera insuffisante pour compenser le gain de vraisemblance, faisant apparaître des structures indépendantes de la déformation intersismique dans la distribution *a posteriori* des modèles. On voit de cette manière que le niveau de complexité (assimilable au nombre de nœuds) des modèles proposés est fortement lié au niveau d'incertitude sur les données : si celles-ci sont affectées d'incertitudes très importantes, l'algorithme pourra alors s'autoriser à proposer des modèles comportant des cellules couvrant de grandes surfaces englobant de nombreuses données chacune, puisque le prix à payer en termes de *misfit* pour ne pas respecter les informations qu'elles contiennent sera faible. Le principe de parcimonie (1.3.2) aboutira ainsi à une solution lissée, comportant peu de structure. À l'inverse, une incertitude trop faible forcerait le maillage à se raffiner excessivement de manière à respecter l'ensemble des informations fournies par les données, au risque de faire apparaître le bruit sur les données dans les résultats.

Il est donc crucial de s'assurer que le niveau d'incertitude global sur les données est correctement estimé afin que le nombre de nœuds du modèle, et donc son niveau d'information et de complexité, reflète bien le niveau d'information réellement contenu dans les données.

### 3.4.2. Une meilleure prise en compte de l'incertitude : approche bayésienne hiérarchique

Afin de rendre pleinement compte de la méconnaissance du bruit exact affectant les données, il est possible d'adopter une approche bayésienne dite hiérarchique. Dans le cadre de l'inférence bayésienne, les données sont perçues comme une variable aléatoire suivant une loi statistique connue - dans notre cas, une loi normale dont l'écart-type correspond à l'incertitude des vitesses GNSS. Le paradigme hiérarchique propose de considérer les paramètres qui contrôlent la distribution de probabilités des données comme des variables aléatoires, appelées *hyperparamètres*, disposant de leur propre distribution *a priori* et *a posteriori* (GELMAN et al., 1995). Ainsi, l'idée est de traiter le niveau de bruit global comme une inconnue du problème à part entière : les écart-types des incertitudes sur les données sont modifiés par un paramètre inconnu, qui fait partie du modèle et qu'il faut également inverser.

Cette approche d'estimation du bruit a été utilisée pour la première fois en géophysique par MALINVERNO et BRIGGS (2004) et MALINVERNO et PARKER (2006) dans le cadre d'une inversion sismologique 1D linéaire impliquant une distribution gaussienne *a priori* sur le bruit. Elle a par la suite été employée dans le cadre de la tomographie sismique (BODIN, SAMBRIDGE, RAWLINSON et al., 2012), puis étendue à des inversions jointes (BODIN, SAMBRIDGE, TKALČIĆ et al., 2012) ou incluant plusieurs jeux de données indépendants (BODIN, SALMON et al., 2012). Plus récemment et dans un registre différent, MADSEN et al. (2017) a également tenté d'employer cette méthode pour l'analyse AVO (*Amplitude Versus Offset*), utilisée par exemple dans le cadre de la recherche d'hydrocarbures.

En pratique, dans notre problème d'inversion de données GPS, il s'agit de ne plus simplement considérer les incertitudes  $(\sigma_{x_i}, \sigma_{y_i})$  fournies par les données, mais de leur adjoindre un paramètre  $\lambda$  traité comme une inconnue du problème :

$$\sigma_{\mathcal{H}} = \lambda \sigma_{\text{obs}} = [(\lambda \sigma_{x_1}, \lambda \sigma_{y_1}), \dots, (\lambda \sigma_{x_n}, \lambda \sigma_{y_n})]$$

L'ensemble des paramètres décrivant un modèle devient alors (voir 1.3.1)

$$\mathbf{m}_{\mathcal{H}} = (\mathbf{m}, \lambda) = [\lambda, k, (N_{x_1}, N_{y_1}, x_1, y_1), \dots, (N_{x_k}, N_{y_k}, x_k, y_k)]$$

avec  $k$  le nombre de nœuds et  $(N_{x_i}, N_{y_i}, x_i, y_i)$  le quadruplet décrivant le  $i$ -ième nœud (vitesse et position). On constatera que sous cette formulation, le nombre de nœuds  $k$  est assimilable à un hyperparamètre, en ce qu'il contraint la distribution des modèles tout en disposant lui aussi

### 3.4. Vers une exploitation plus fine de l'incertitude sur les vitesses

d'un prior et d'une distribution *a posteriori*. L'algorithme de rj-McMC peut donc être perçu comme un cas particulier d'inversion bayésienne hiérarchique.

Une fois définie cette nouvelle paramétrisation, le résultat de l'inférence bayésienne est alors la distribution *a posteriori* jointe du modèle et de l'hyperparamètre de bruit :

$$p(\mathbf{m}_{\mathcal{H}} | \mathbf{d}_{\text{obs}}) = p(\mathbf{m} \cap \lambda | \mathbf{d}_{\text{obs}}) \quad (3.3)$$

Afin d'échantillonner la distribution *a posteriori* de  $\lambda$ , on procède de manière similaire qu'avec les autres paramètres : à chaque itération de l'algorithme,  $\lambda$  est perturbé par tirage d'une perturbation aléatoire sur une gaussienne centrée. Dans l'inversion hiérarchique, l'adéquation d'un modèle  $\mathbf{m}_{\mathcal{H}}$  aux données est calculée grâce à la fonction de vraisemblance (cf 1.28) mise à jour pour tenir compte du nouveau paramètre :

$$p(\mathbf{d}_{\text{obs}} | \mathbf{m}_{\mathcal{H}}) \propto \frac{e^{-\frac{\phi}{2}}}{\sqrt{2\pi\lambda^{2N}}} \quad (3.4)$$

avec  $N$  le nombre de données et

$$\phi = \sum_{i \in [1, N]} \left( \frac{(V_{x_i} - S_{x_i}(\mathbf{m}_{\mathcal{H}}))^2}{(\lambda\sigma_{x_i})^2} + \frac{(V_{y_i} - S_{y_i}(\mathbf{m}_{\mathcal{H}}))^2}{(\lambda\sigma_{y_i})^2} \right) \quad (3.5)$$

On peut alors calculer la probabilité de passer du modèle  $\mathbf{m}_{\mathcal{H}}$  au modèle  $\mathbf{m}'_{\mathcal{H}}$  de la même manière que précédemment, sachant que seule la fonction de vraisemblance est modifiée par le nouvel hyperparamètre (le prior sur le modèle  $p(\mathbf{m}_{\mathcal{H}})$  comporte un terme en  $\lambda$ , mais celui-ci est constant et s'annule dans le ratio des priors).

L'influence de ce nouveau paramètre se situe dans la fonction de vraisemblance : lorsque  $\lambda$  augmente, le terme

$$\frac{(V_{x_i} - S_{x_i}(\mathbf{m}_{\mathcal{H}}))^2}{2(\lambda\sigma_{x_i})^2} + \frac{(V_{y_i} - S_{y_i}(\mathbf{m}_{\mathcal{H}}))^2}{2(\lambda\sigma_{y_i})^2}$$

est atténué. Augmenter l'incertitude sur les données revient donc à réduire le *misfit* : la confiance accordée dans les vitesses observées étant moindre, les modèles ont une plus grande liberté pour ne pas les respecter. Cependant, la normalisation de la fonction gaussienne de vraisemblance fait apparaître un terme en  $\lambda^{2N}$  qui vient contrebalancer cet effet : une augmentation trop forte de  $\lambda$  conduirait à un effondrement de la vraisemblance du modèle. Ainsi, la valeur de l'hyperparamètre reflète un compromis entre ces deux effets opposés, et converge donc vers une valeur optimale qui permet aux modèles de prendre en compte le niveau d'incertitude réel sur les données. Si  $\lambda = 1$ , le paramètre est neutralisé : cela signifie que les incertitudes issues de l'inversion des séries temporelles décrit parfaitement le bruit sur les vitesses GNSS.

On pourra noter que si  $\lambda$  augmente, l'avantage en termes de *misfit* d'un modèle possédant plus de nœuds, et donc capable de s'ajuster aux données avec plus de granularité, diminue. Le principe



### 3. Discussions et perspectives

de parcimonie (cf 1.3.2) va donc conduire à favoriser des modèles possédant un plus faible nombre de nœuds et globalement plus lisses. Le fait de laisser libre ces deux paramètres permet ainsi de laisser le degré de complexité des modèles s'ajuster librement au niveau d'information contenu dans les données.

#### 3.4.3. Résultats de la méthode hiérarchique

Afin d'éprouver la capacité de notre algorithme bayésien hiérarchique à identifier correctement le niveau d'incertitude sur les données, nous avons réitéré le test de résilience au bruit présenté sur la figure 2.6, sans ajuster les incertitudes associées aux données. En partant des mêmes jeux synthétiques affectés d'un bruit croissant décrit en section 2.5.1, nous les inversons de nouveau en conservant toutefois les incertitudes initiales fournies par MIDAS : ainsi, le bruit réel sur les données est, selon les cas, de 2 fois inférieur à 2,5 fois supérieur à ce qu'indique l'incertitude associée aux données. Le prior de  $\lambda$  est intentionnellement étendu, afin de permettre aux modèles de déterminer totalement librement le niveau de confiance qu'ils accordent aux incertitudes.

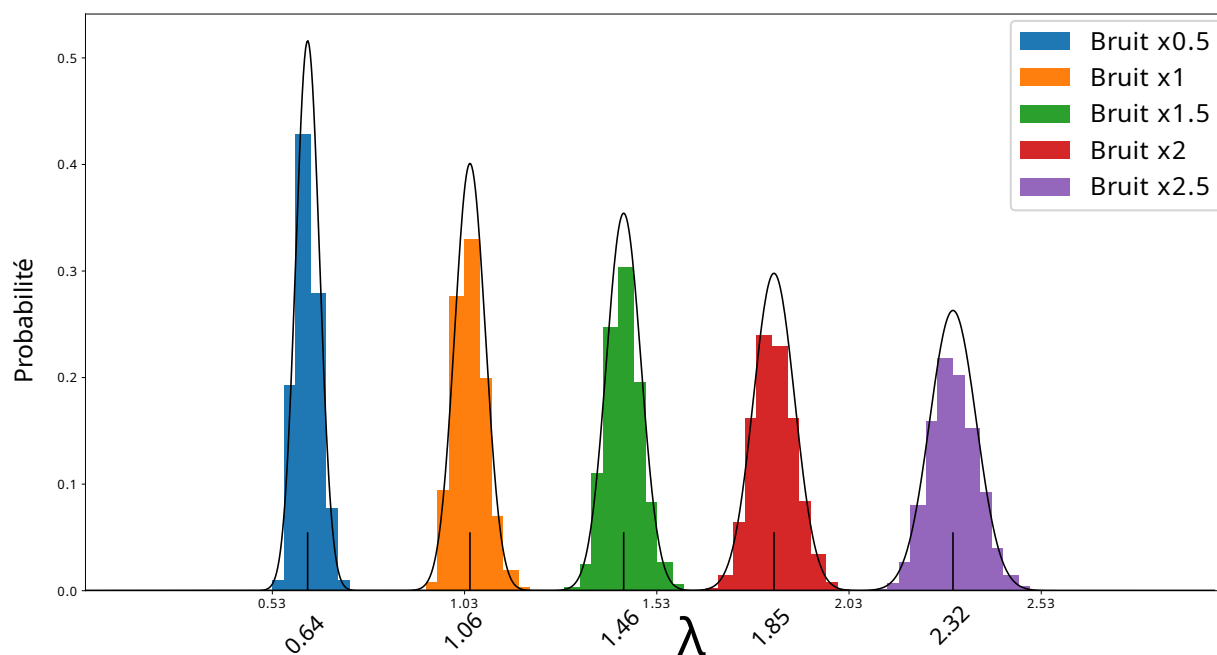


FIGURE 3.7. – Distribution *a posteriori* de  $\lambda$  pour différents jeux de données synthétiques comportant des niveaux croissants de bruit, sans que les incertitudes ne soient ajustées en conséquence. Les valeurs moyennes des distributions sont indiquées à la base de celles-ci. Les lois normales de même écart-type et de même moyenne sont représentées en noir.

Au cours de l'inversion, l'hyperparamètre  $\lambda$  converge rapidement vers la valeur permettant d'appréhender au mieux le bruit réel sur les données, et sa distribution *a posteriori* correspond au premier ordre à une gaussienne centrée sur une valeur proche du facteur multiplicatif qui a été appliqué au bruit blanc sur les données (figure 3.7). On constate cependant un décalage entre le centre de la gaussienne et la valeur exacte du coefficient multiplicateur utilisé pour le

### 3.4. Vers une exploitation plus fine de l'incertitude sur les vitesses

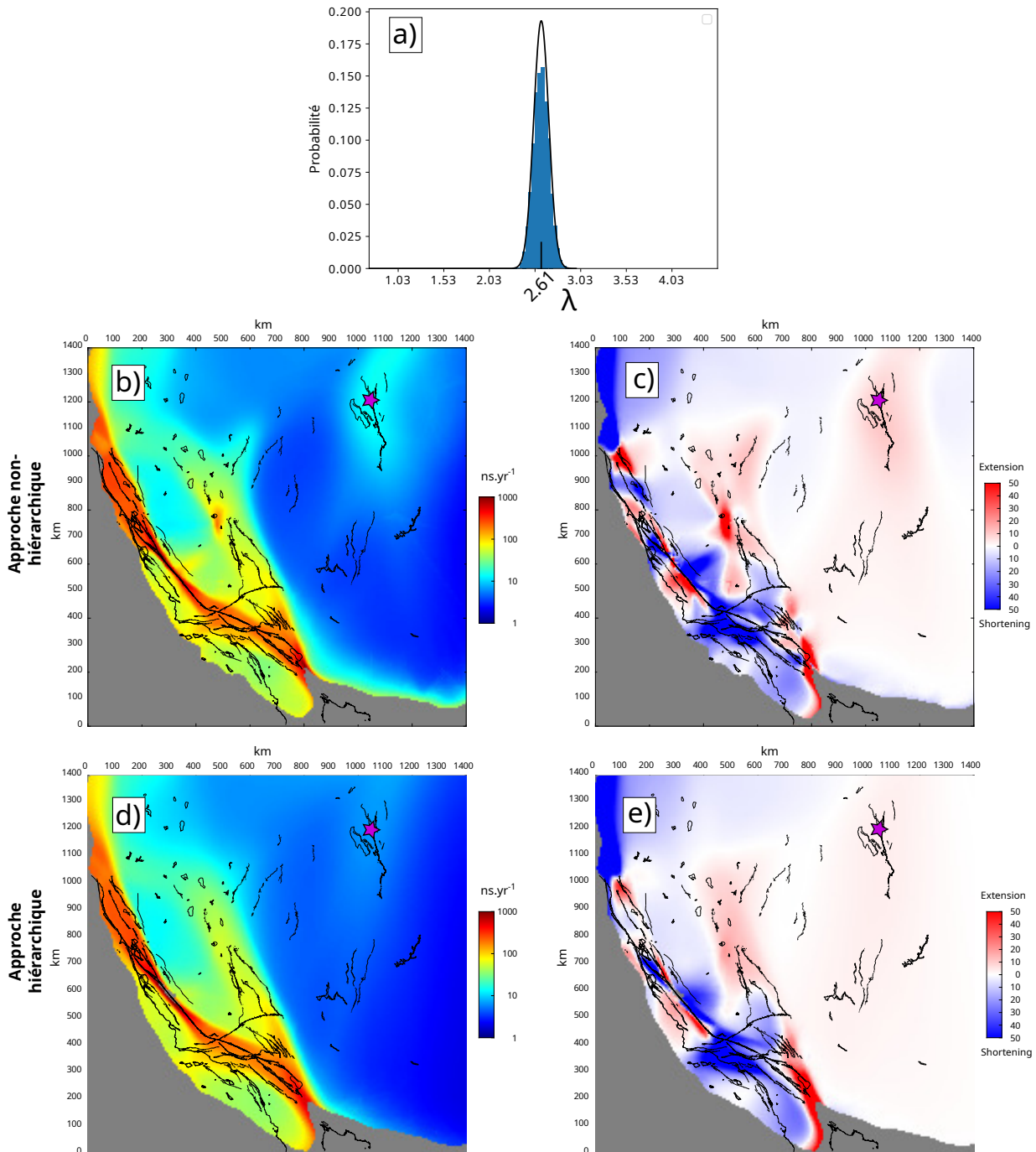


FIGURE 3.8. – Résultats de l'inversion bayésienne hiérarchique du jeu de données MIDAS, comparés à ceux présentés en section 2.5.2. **a)** distribution de probabilités *a posteriori* pour l'hyperparamètre  $\lambda$ . La loi normale de même moyenne et écart-type est représentée en noir. **b)** Moyenne de la fonction de densité de probabilité (PDF) *a posteriori* du second invariant du tenseur de déformation en extitmisfit obtenue par inversion bayésienne classique. Les lignes noires représentent les failles actives issues de [Quaternary fault and fold database \(2017\)](#). **c)** Idem pour la divergence. **d)** et **e)** : idem que **b)** et **c)** pour l'inversion bayésienne hiérarchique. Les distributions de probabilité correspondant au point marqué en violet sont représentées sur la figure 3.9.

### 3. Discussions et perspectives

bruit appliqué aux données, et cet écart tend à s'accroître lorsque des niveaux de bruit de plus en plus importants sont appliqués. De même, l'écart-type des distributions suit la même évolution, impliquant que l'incertitude sur les données est plus aisément déterminée à de faibles niveaux de bruit : on peut supposer que le bruit sur les données perturbe également sa propre estimation dans une certaine mesure.

Une inversion sur les données MIDAS réelles a également été réalisée (figure 3.8).  $\lambda$  converge rapidement autour d'une valeur stable de 2,6; cela signifie que l'amplitude du bruit réel affectant les données serait statistiquement 2,6 fois plus importante que les incertitudes ne l'indiquent! Cela est d'autant plus improbable qu'il existe un consensus grandissant sur le fait que la méthode MIDAS propose des incertitudes plus importantes que ce que la précision des réseaux GNSS et l'inversion des séries temporelles n'exigent (NISTOR et al., 2021; LANGBEIN, 2020). Cette surestimation très importante du bruit par l'algorithme bayésien hiérarchique équivaut à une sous-estimation de l'information réelle contenue dans les données, et conduit à une perte notable de structure dans les régions où la déformation est de faible amplitude ou bien très localisée. Cela est particulièrement visible au niveau de la Long Valley Caldeira, site volcanique actif en extension dont la déformation est à peine perceptible sur 3.8-d) et e). Le second invariant  $I_2$  atteint également des amplitudes moins élevées le long des principales failles actives, comme l'extrémité sud de Salton Sea Lake, et l'extension à l'est du Basin and Range le long des Wasatch Mountains est pratiquement absente (figure 3.9) : l'extension est-ouest, décrite par une distribution gaussienne centrée autour de 10 nanostrain/an, n'atteint plus que 3.5 nanostrain/an environ. De même, la moyenne du second invariant du tenseur de déformation chute de 14 nanostrain/an à 7 nanostrain/an. Le résultat de l'inversion apparaît comme étant « lissé » bien qu'il conserve la plupart des grandes structures observables de la région.

#### 3.4.4. Des données d'une qualité trop hétérogène?

Plusieurs hypothèses pourraient expliquer cette surestimation du niveau de bruit global sur les données. Il faut rappeler la définition même du bruit ici considéré : il s'agit à la fois des erreurs sur les vitesses GNSS, mais également des erreurs théoriques liées à la paramétrisation du problème. Il est impossible pour un modèle, constitué d'une collection de triangles sur lesquels la vitesse varie linéairement, et dont toutes les dérivées secondes spatiales sont nulles, de reconstituer parfaitement la complexité d'un champ réel de vitesse. Une partie de l'augmentation du bruit estimé lors de l'inversion de données réelles pourrait provenir de cette « erreur de modélisation ». Cependant, d'autres essais conduits sur des données réelles correspondant au bassin méditerranéen n'ont pas conduit à une telle explosion de la valeur de  $\lambda$ .

L'autre source possible serait alors la forme du bruit sur les données GNSS, constitué de l'erreur liée au bruit sur les séries temporelles et de l'erreur théorique consistant à considérer ces vitesses comme des constantes caractérisant le déplacement intersismique. Nous sommes partis du postulat que ce bruit suit une distribution gaussienne, ce qui se traduit mathématiquement dans l'expression de la fonction de vraisemblance - c'est en réalité une hypothèse forte de notre méthode d'inversion, et le problème pourrait provenir de la qualité individuelle des données qui falsifierait cette hypothèse. Précédemment, nous avons mentionné l'existence de stations incohérentes du

### 3.4. Vers une exploitation plus fine de l'incertitude sur les vitesses

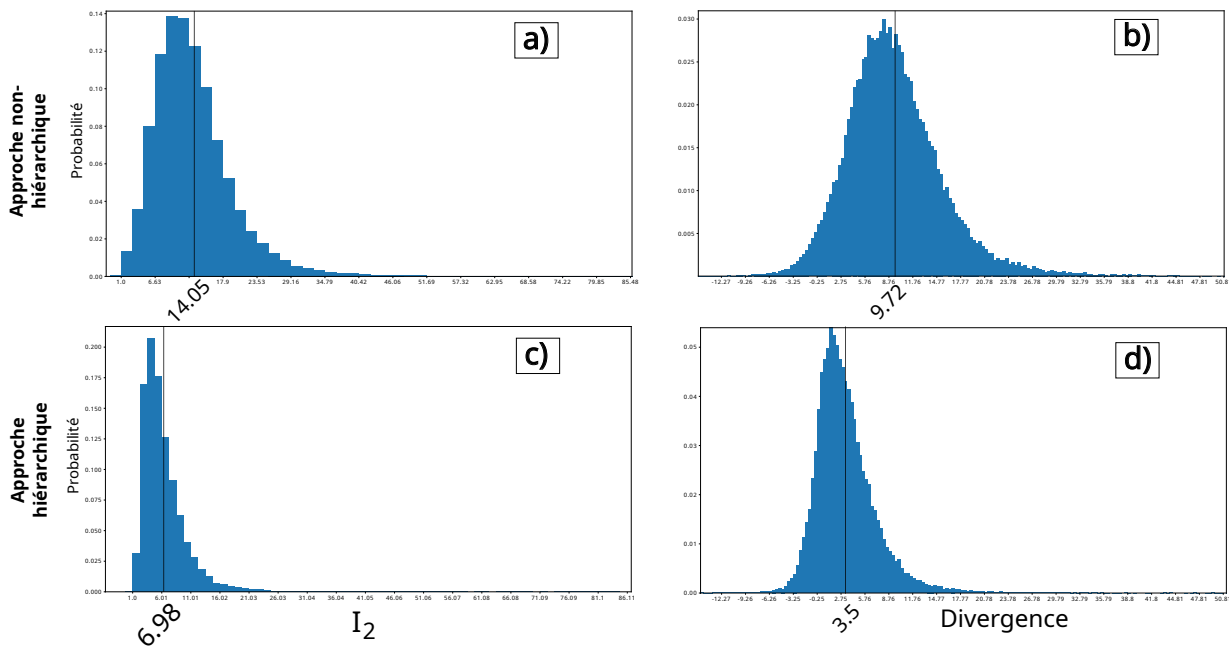


FIGURE 3.9. – distribution de probabilités *a posteriori* à l'emplacement figuré par l'étoile sur la figure 3.8. Les moyennes sont indiquées sous les histogrammes. **a) et b)** Distribution du second invariant et de la divergence du tenseur de déformation dans l'approche non-hiérarchique, respectivement. **c) et d)** Idem pour l'approche hiérarchique.

point de vue de la déformation intersismique, parce qu'elles avaient été affectées par un effet local d'origine géologique ou non, par exemple en ayant enregistré la déformation transitoire post-sismique associée à un séisme majeur. Or, si l'incertitude attribuée à ces stations est sous-estimée par rapport à l'amplitude du bruit qui les affecte, celles-ci peuvent forcer le modèle à s'adapter à leur vitesse proposée quitte à démultiplier localement le nombre de nœuds jusqu'à trouver un équilibre entre l'augmentation du *misfit* causée par la donnée incohérente et la probabilité *a priori* du modèle (voir 3.4.1). Une augmentation de la valeur de  $\lambda$  permettrait alors de déplacer cet équilibre : puisque l'incertitude augmente, le *misfit* lié à la station aberrante diminue, et respecter à tout prix l'information qu'elle porte perd en intérêt en regard de la vraisemblance du modèle - ce comportement étant parfaitement illustré au niveau de la Long Valley Caldeira. Cependant, là où le compromis entre nombre de nœuds et respect des données était local jusqu'à présent, il peut maintenant être résolu de manière globale puisque le paramètre  $\lambda$  impacte toutes les incertitudes de manière uniforme. Un nombre trop important de stations incohérentes provoquerait ainsi une augmentation déraisonnable de la valeur prise par l'hyperparamètre, sans lien avec le niveau réel de bruit qui affecte toutes les autres stations.

Pour vérifier cette hypothèse, on peut représenter la distribution des résidus, c'est-à-dire la différence entre chaque donnée et la valeur prédite à sa position par le modèle, normalisés par les incertitudes sur les données. L'inférence bayésienne ne produisant pas un unique modèle mais une distribution de probabilités sur l'espace des modèles, il n'existe pas de manière unique d'appréhender les résidus. On choisit ici de représenter la distribution des résidus moyens

### 3. Discussions et perspectives

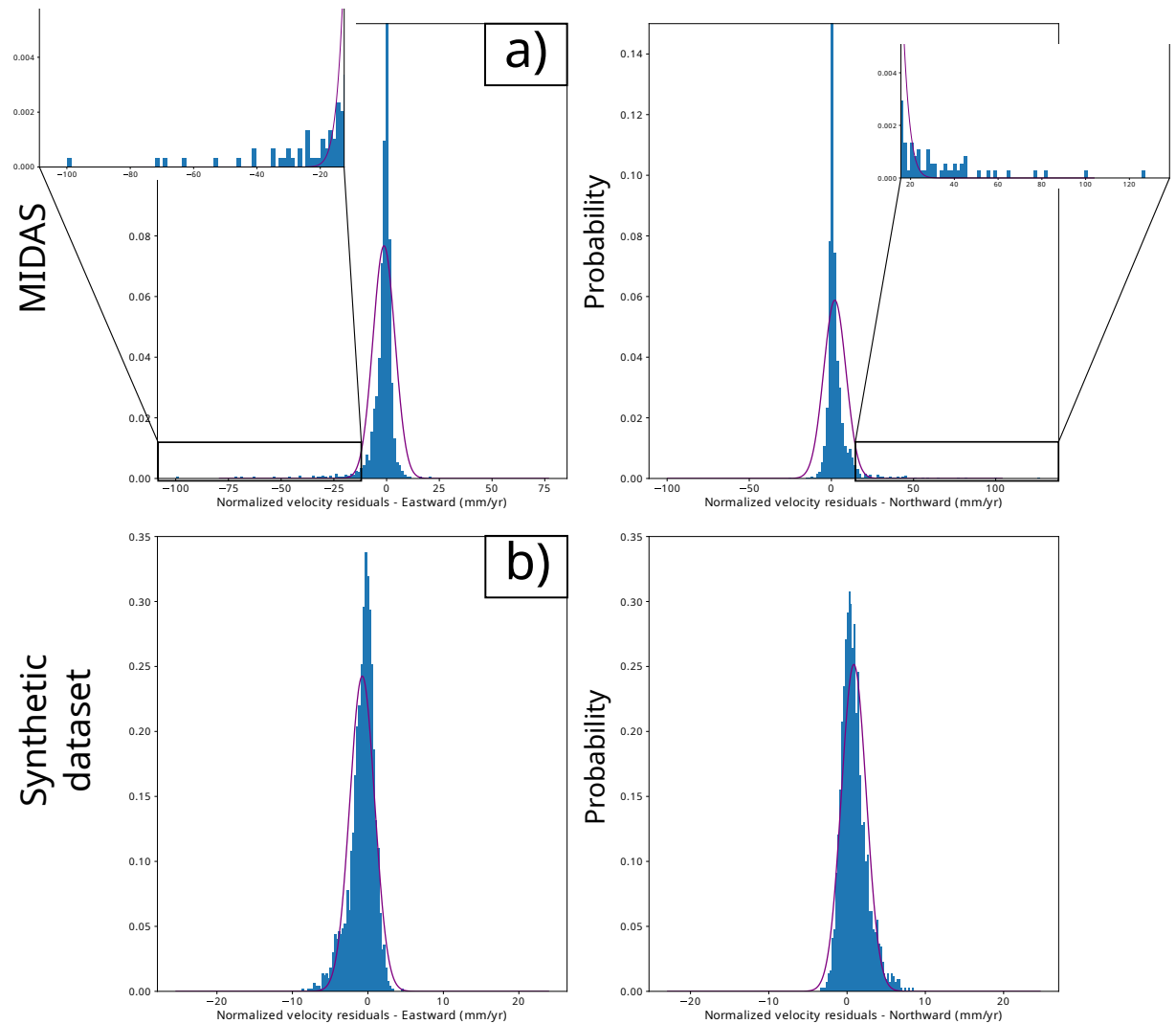


FIGURE 3.10. – Distribution des résidus normalisés sur les vitesses GNSS. **a)** Composante est-ouest (gauche) et nord-sud (droite) des résidus de l'inversion effectuée sur le jeu de données MIDAS présenté dans la section 2.3. **b)** Idem pour le jeu synthétique correspondant à la section 2.5.1.

### 3.4. Vers une exploitation plus fine de l'incertitude sur les vitesses

calculés sur l'ensemble des modèles; par linéarité, les résidus normalisés  $R_{i_x}$  pour la vitesse en  $x$  s'expriment pour la  $i$ -ième donnée sous la forme

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R}_{i_x} &= \frac{1}{N_m} \sum_{k \in [1, N_m]} \frac{V_{i_x} - S_{i_x}(\mathbf{m}_k)}{\sigma_{i_x}} \\
 &= \frac{1}{N_m} \sum_{k \in [1, N_m]} \frac{V_{i_x}}{\sigma_{i_x}} - \frac{1}{N_m} \sum_{k \in [1, N_m]} \frac{S_{i_x}(\mathbf{m}_k)}{\sigma_{i_x}} \\
 &= \frac{V_{i_x} - \overline{S_{i_x}(\mathbf{m})}}{\sigma_{i_x}} \tag{3.6}
 \end{aligned}$$

et de même pour  $\mathbf{R}_{i_y}$ , avec  $N_m$  le nombre de modèles générés,  $S_{i_x}(\mathbf{m}_k)$  la vitesse prédite par le  $k$ -ième modèle aux coordonnées de la  $i$ -ième donnée,  $\overline{S_{i_x}(\mathbf{m})}$  la vitesse prédite par le modèle moyen et  $V_{i_x}$  la vitesse observée aux mêmes coordonnées. Cela revient donc à représenter les résidus du modèle moyen (Figure 3.10).

On observe que l'écart-type de la distribution des résidus obtenue lors de l'inversion de MIDAS est de 6.3, contre 1.8 pour celle correspondant à l'inversion du jeu synthétique. Ceux-ci sont donc statistiquement bien plus faibles dans ce dernier cas, indiquant une meilleure adéquation entre fit aux données et niveau d'incertitude sur ces mêmes données. De plus, si cette distribution dans le cas synthétique est correctement approximée par une loi normale au premier ordre, ce n'est pas le cas pour les résidus résultant de l'inversion du jeu de données MIDAS. Le nombre de résidus proches de 0 est statistiquement très élevé, ce qui semble indiquer un niveau de bruit potentiellement plus faible que ce que laissent supposer les incertitudes, mais on note surtout la présence d'un nombre important de valeurs fortement excentrées par rapport à la moyenne de la distribution (sections agrandies de la figure 3.10-b). Ces « *outliers* » correspondent à plusieurs dizaines de stations pour lesquelles l'incertitude ne suffit pas à justifier leur incohérence avec les autres stations environnantes, et est donc largement sous-estimée par rapport au bruit réel qui perturbe la mesure de la déformation intersismique. En introduisant un hyperparamètre sur le niveau de bruit, on autorise le modèle à ignorer plus facilement ces données, au prix d'une augmentation de la valeur de  $\lambda$  et donc d'une perte d'information globale lors de l'inversion.

Ainsi, cette approche bayésienne hiérarchique, bien qu'elle offre une résilience supplémentaire face aux hauts niveaux de bruits et aux données localement incohérentes, n'a pas de protection particulière contre les « *outliers* » : il existe un risque de lisser les structures que l'on cherche à obtenir dans le cas où les données se seraient pas d'une qualité homogène ou que l'hypothèse d'une distribution gaussienne du bruit serait une mauvaise approximation de la réalité.

## 3.5. Axes d'amélioration et perspectives de développement

Au cours de cette thèse, plusieurs pistes ont été explorées afin de pallier les principales limitations de notre méthode d'inversion, ainsi qu'étendre son champ d'application.

### 3.5.1. Raffinement de l'approche hiérarchique

Une première amélioration concernerait la manière dont l'hyperparamètre  $\lambda$  est défini. Comme évoqué en 3.4.4, ce paramètre étant global, l'information des stations dont le bruit est correctement évalué risque d'être perdue à cause de l'influence des données aberrantes. Une solution pourrait être non plus de définir un unique paramètre global de confiance sur les incertitudes, mais de traiter l'incertitude de chaque station comme un paramètre indépendant à inverser. Le principal obstacle à cette formulation serait l'augmentation drastique du nombre de paramètres à inverser de  $P = 2 + 4 * K$  (avec  $K$  le nombre de nœuds) à  $P = 2 + 4 * K + D$ , où  $D$  est le nombre de données GNSS - qui excède fréquemment  $N$  d'un facteur 10. Or, la complexité d'une inversion bayésienne par les algorithmes de la classe Metropolis-Hasting - qu'il faut ici comprendre comme le temps nécessaire avant que les chaînes n'aient correctement échantillonné l'espace des paramètres - est de l'ordre de  $\mathcal{O}(P^2)$  (BELLONI et CHERNOZHUKOV, 2007; S. BROOKS et al., 2011). Il n'est donc pas raisonnable de doubler ou tripler le nombre de paramètres à inverser.

Une alternative consisterait à associer à chaque nœud un paramètre de confiance sur les incertitudes, puis à effectuer une régression linéaire au sein de chaque triangle afin d'obtenir une valeur  $\lambda_{x,y}$  en tout point  $(x, y)$  de la surface, laquelle pourrait alors être utilisée dans le calcul du *misfit*. Cette approche aurait l'avantage de n'augmenter « que » de 25 % le nombre de paramètres à inverser (ce qui correspondrait encore à une augmentation de ~ 50 % du temps de convergence).

### 3.5.2. Des modèles de vitesse plus réguliers : interpolation non-linéaire au sein des triangles de Delaunay

Dans son implémentation actuelle, notre algorithme reconstruit un modèle de vitesse en interpolant linéairement au sein de chaque triangle les vitesses attribuées aux nœuds des sommets. Cette construction assure un champ de vitesse  $C^0$  et  $C^1$  par parties, et donc dérivable hormis sur les arêtes des triangles. Cependant, les dérivées ne bénéficient pas de cette propriété de continuité et sont constantes sur chaque triangle, conduisant à des distributions en « marche d'escalier » qui peinent à être lissées même avec un très grand nombre de modèles (voir par exemple le 2<sup>nd</sup> invariant sur Salton Sea Lake, figure 2.10). Adopter une interpolation polynomiale des vitesses portées par les nœuds de paramétrisation (par exemple au moyen de splines ou de polynômes de Lagrange) permettrait d'obtenir une surface  $C^\infty$  et donc des dérivées continues et régulières, et non plus constantes par parties. Ainsi chaque modèle échantillonné adopterait des caractéristiques plus conformes à la réalité géologique, réduisant le nombre d'itérations nécessaires à ce que la distribution *a posteriori* exhibe elle aussi des caractéristiques réalistes.

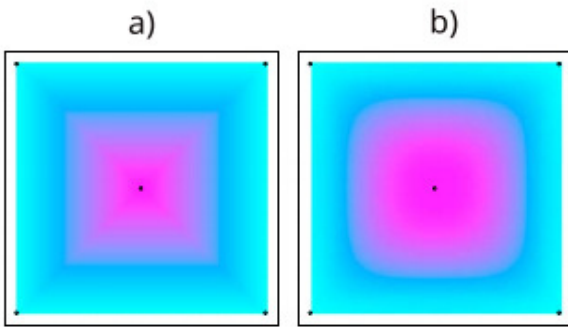


FIGURE 3.11. – Modifié d'après HAWKINS, BODIN et al. (2019b). Comparaison de l'interpolation linéaire et de l'interpolation de Clough-Tocher sur une triangulation. Chaque image comporte 5 nœuds, 4 sur les coins et un au centre. **a)** Interpolation linéaire. Le gradient de vitesse est constant sur chaque triangle et discontinu aux limites de ceux-ci. **b)** Interpolation de Clough-Tocher. Le gradient de vitesse est linéaire et continu entre les triangles.

L'implémentation d'une telle interpolation aurait toutefois une contrepartie : la vitesse au sein d'un triangle ne dépendrait plus exclusivement des vitesses portées par les sommets de ce triangle. Ainsi, une perturbation locale de la triangulation affecterait le modèle jusqu'à plusieurs générations de nœuds voisins.

Une solution intermédiaire est proposée par HAWKINS, BODIN et al. (2019b), qui utilise une interpolation de Clough-Tocher pour garantir une interpolation  $C^1$  sur l'ensemble de la triangulation (figure 3.11) : la vitesse de chaque triangle dépend de celles des sommets de ce triangle, ainsi que des sommets des triangles adjacents. Le gradient de vitesse devient alors linéaire et varie continuellement, sans saut entre les triangles, permettant d'obtenir des distributions plus lisses sur le  $2^{nd}$  invariant du tenseur de déformation.

### 3.5.3. Inversion 2D sphérique

Les dimensions spatiales des régions inversibles sont limitées par le cadre 2D cartésien dans lequel notre algorithme opère. Les déformations engendrées par la sphéricité de la Terre, lorsque projetée dans un repère cartésien, peuvent s'exprimer sur les distances et/ou sur l'orientation des axes, selon le type de projection choisi. Dans tous les cas, au-delà d'une certaine distance par rapport au centre de la projection, celles-ci deviennent trop importantes pour être négligées. Ainsi, il est nécessaire d'adapter le code en coordonnées sphériques si l'on souhaite réaliser des inversions à l'échelle continentale et réaliser des cartes globales de déformation, ce qui est l'un des objectifs de la communauté (e.g. A. J. HAINES et W. E. HOLT, 1993; KREEMER et al., 2014, 2018; H. WANG et al., 2019).

Si le problème de la construction d'une triangulation de Delaunay sur la surface d'une sphère est résolu depuis plusieurs décennies grâce à des variations simples des algorithmes développés pour sa variante en coordonnées cartésiennes (RENKA, 1997), interpoler des vecteurs sur une surface sphérique nécessite une approche plus complexe : il n'est plus possible de considérer 2 champs scalaires indépendants puisque l'orientation des axes du repère tangent en un point à la sphère dépend de la position de celui-ci. Si l'on souhaite obtenir un champ régulier  $C^\infty$  (voir 3.5.2 précédemment), on peut utiliser la décomposition en fonctions à base radiale (SMOLIK et SKALA, 2017; FUSELIER et WRIGHT, 2009). Alternativement, afin de préserver l'aspect local de l'interpolation tout en conservant un champ de vitesse  $C^1_{parparties}$ , on peut effectuer une interpolation linéaire dans chaque triangle en considérant le point à interpoler comme un barycentre pondéré des sommets du triangle dans lequel il se trouve, puis en effectuant un



### 3. Discussions et perspectives

transport parallèle des vecteurs vitesse aux 3 sommets le long des géodésiques qui les lient au point d'interpolation. Le détail des calculs correspondant se situe en Annexe B.

#### 3.5.4. Inversion jointe de données GNSS et InSAR

Une autre évolution majeure consisterait à étendre notre méthode d'inversion aux données produites par la corrélation d'images optiques (*e.g.* BARNHART et al., 2020; DELORME et al., 2020; VALLAGE et al., 2015) et InSAR (*e.g.* HUSSAIN et al., 2016; H. WANG et al., 2019; WEISS et al., 2020; XU et al., 2020).

Bien que la méthode développée au cours de cette thèse vise en premier lieu à étudier la déformation intersismique, nous avons montré par notre collaboration avec MATHEY et al. (2021) qu'elle avait également un potentiel pour l'application aux données cosismiques : plus que le type de déformation, c'est la nature des observations qui détermine l'applicabilité de cet algorithme. En l'occurrence, la corrélation d'images optiques pour l'étude de la déformation cosismique produit un champ de déplacement quasi continu, avec une résolution spatiale de l'ordre de quelques mètres, obtenu en comparant des images satellites prises avant et après un séisme. Il s'agit d'un outil puissant pour analyser la déformation à proximité de l'épicentre, à des échelles spatiales de quelques centaines de mètres ou quelques kilomètres inaccessibles pour la plupart des autres types d'observations (figure 3.12).

Cependant, les méthodes d'optimisation utilisées pour l'inversion de la déformation cosismique à partir du déplacement horizontal des pixels rencontrent les mêmes difficultés que pour l'inversion du champ de vitesse à partir de vitesses GNSS. Une approche classique consiste à redéfinir une grille plus large dont chaque cellule englobe plusieurs pixels. Le tenseur de déformation cosismique est alors calculé par inversion locale des pixels contenus dans la cellule; cependant, le choix de la résolution spatiale de la grille et des paramètres de régularisation pour la contribution des pixels au sein de chaque cellule sont des paramètres arbitraires qui doivent être manuellement définis par l'opérateur, et qui peuvent ne pas être uniformément adaptés à une même carte de déplacement

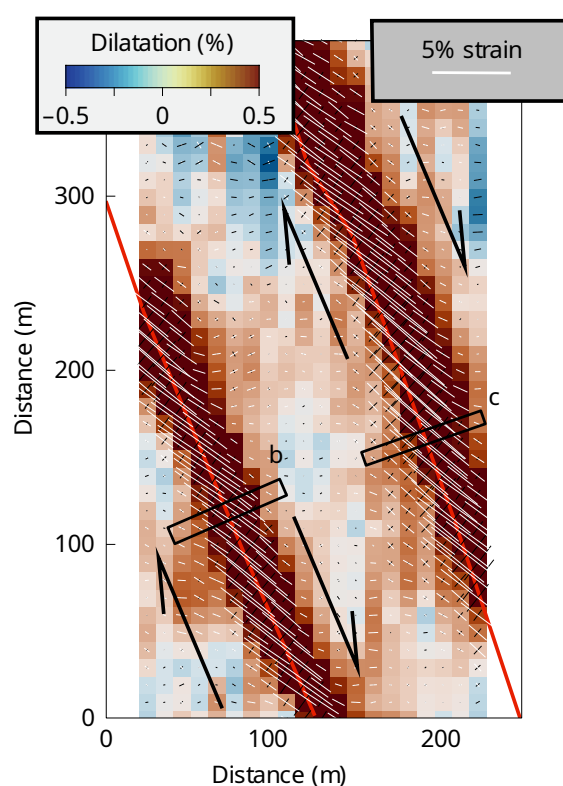


FIGURE 3.12. – Modifié d'après BARNHART et al. (2020). Divergence de la déformation cosismique associée au séisme de Ridgecrest, 2019. Les axes principaux de déformation sont représentés en blanc pour l'extension et en noir pour la compression. Les lignes rouges correspondent à la rupture.

### 3.5. Axes d'amélioration et perspectives de développement

optique. Notre algorithme bayésien pourrait libérer l'inversion de ces contraintes, pour peu que l'on dispose d'une description correcte du bruit qui affecte le déplacement des pixels. Il n'est pas non plus facile de prédire comment le réseau de nœuds adaptatifs va réagir à la surabondance de données, mais des tests synthétiques réalisés avec une densité très importante de données GNSS n'ont pas révélé d'obstacles majeurs - sinon un temps de calcul allongé lors de la comparaison des vraisemblances des modèles.

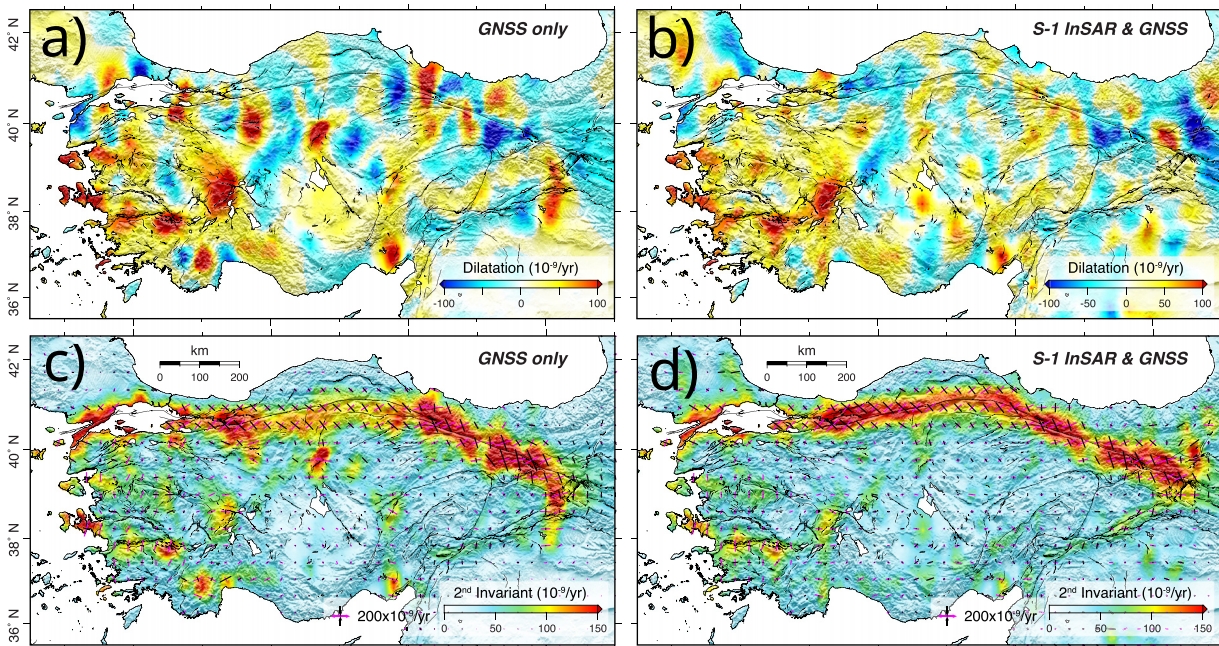


FIGURE 3.13. – Modifié d'après WEISS et al. (2020). Cartes de déformation pour l'Anatolie, obtenue par inversion de données GNSS et inversion jointe GNSS-InSAR. **a)** Divergence pour l'inversion de données GNSS uniquement. **b)** Divergence pour l'inversion jointe GNSS-InSAR. **c)** 2<sup>nd</sup> invariant pour l'inversion de données GNSS uniquement. **d)** 2<sup>nd</sup> invariant pour l'inversion jointe GNSS-InSAR. Les axes principaux de déformation sont indiqués sur les cartes de 2<sup>nd</sup> invariant, en noir pour la compression et en magenta pour l'extension.

Les données InSAR, quant à elles, se présentent sous la forme d'interférogrammes de phase entre deux images radars cohérentes : si le sol s'est déformé entre les deux passages du satellite, un déphasage du signal entre les deux images se crée, et pourra être interprété en termes de déplacement le long de la ligne de visée (LOS, *line of sight*). En connaissant la position du satellite lors de ses passages et en combinant les interférogrammes obtenus selon différentes lignes de visées, on peut alors reconstruire le déplacement de la surface en trois dimensions avec une précision proche de celle des stations GNSS, mais avec une résolution spatiale largement supérieure, allant du mètre à la centaine de mètres. Ces observations ont donc une excellente complémentarité avec les données GNSS, notamment par leur capacité à combler les lacunes spatiales dans les réseaux de stations. Aussi, plusieurs études ont déjà tenté de réaliser des inversions jointes de la déformation intersismique (*e.g.* WEI et al., 2010; WEISS et al., 2020) à partir de ces deux types de données (figure 3.13); en intégrant les données InSAR dans notre méthode d'inversion

### 3. *Discussions et perspectives*

bayésienne, nous nous inscrivons dans la même démarche d'exploitation de toutes les données disponibles.

La difficulté pour inverser les données issues de ces images satellites à l'aide de cette méthode bayésienne est que la corrélation optique (lorsqu'elle inclut des informations sur la composante verticale des déplacements) et l'InSAR proposent tous deux une vision tridimensionnelle de la déformation. Notre méthode doit donc être adaptée pour interpoler conjointement les trois composantes du champ de vitesse (en incluant les vitesses verticales provenant de mesures GNSS de haute qualité). L'inclusion des vitesses verticales offrira un accès aux dérivées horizontales de  $V_z$  et à la déformation correspondante, ce qui pourrait aider à identifier les failles normales et inverses actives ainsi qu'à établir des modèles de subsidence ou de soulèvement. Cependant, même avec cette vue plus complète du tenseur des taux de déformation 3D, ce dernier restera impossible à déterminer entièrement, car les dérivées par rapport à la direction verticale seront manquantes. On note que certaines tentatives de prise en compte des gradients horizontaux de la vitesse verticale dans un pseudo-tenseur des taux de déformation 3D ont été réalisées par MAZZOTTI et al. (2005), SHEN et Z. LIU (2020) ainsi que PIÑA-VALDÉS et al. (2020) et pourraient être implémentées de manière similaire dans notre cadre bayésien à l'avenir.



# Conclusion générale

Le développement des réseaux de stations GNSS a permis, depuis les années 90, de multiplier le volume de données géodésiques employées par les études tectoniques. Cette augmentation volumétrique s'est accompagné d'un gain de précision et de résolution aussi bien spatiale que temporelle, permettant d'analyser et de quantifier la déformation de la surface de la Terre de manière bien plus fine qu'auparavant. Cependant, certains défauts persistants dans les méthodes d'inversion usuelles, basées sur des schémas d'optimisation, qui sont utilisées pour déterminer les propriétés des mécanismes à l'origine de ces observations, limitent la fiabilité de leurs résultats ainsi que la portée des interprétations qui peuvent en être tirées.

L'approche bayésienne propose d'aborder le problème de la détermination des processus à l'origine des observations d'un point de vue probabiliste ; il ne s'agit plus de trouver un unique modèle permettant d'expliquer au mieux les données par le biais d'une optimisation, mais d'évaluer la probabilité des différentes valeurs possibles de tous les paramètres, connaissant les données. Ce changement de paradigme est particulièrement adapté au calcul du champ de déformation continu par inversion de vitesses GNSS, au regard des incertitudes qui affectent les observations effectuées par les stations. Cependant, l'aspect non-linéaire du problème, notamment en ce que la paramétrisation du modèle elle-même est une inconnue, ne permet pas de trouver une solution analytique dans le cas présent ; il faut alors avoir recours à des méthodes de type Markov chain Monte-Carlo afin d'approximer numériquement la distribution de probabilité *a posteriori* sur les modèles.

Les méthodes d'inversion bayésienne basées sur l'échantillonnage par des algorithmes de la classe des *Markov chain Monte Carlo* ont connu un essor fulgurant au cours des dernières décennies. L'augmentation des capacités de calculs ainsi que les développements théoriques de la fin du XXIème siècle ont ouvert la voie à la résolution de toute une catégorie de problèmes non-linéaires hermétiques jusqu'alors à la résolution par inférence bayésienne. Dans le sillage de la physique et de la biologie, la géologie s'est à son tour emparée de ces méthodes, aussi bien pour l'étude des bassins sédimentaires que pour la tomographie sismique. Cependant, l'étude du champ de déformation de la surface de la Terre à partir de données GNSS, bien qu'ayant fait l'objet d'abondantes recherches matérialisées par la coexistence de nombreuses méthodes d'inversion directes visant à obtenir le tenseur de déformation ou certaines de ses composantes, n'avait pas encore été explorée à travers le prisme de l'inférence bayésienne. Ce manuscrit synthétise ainsi les travaux menés au cours de cette thèse pour introduire l'inférence bayésienne dans ce pan de la géophysique, en ouvrant de nouvelles perspectives d'interprétation des données géodésiques disponibles. L'objectif principal est d'assurer la robustesse des champs de déformation obtenus à partir de données géodésiques ainsi que de fournir les incertitudes

## Conclusion générale

associées aux différents paramètres recouverts afin que ceux-ci puissent, à terme, être intégrés dans les études probabilistes d'évaluation des risques sismiques.

La première avancée majeure proposée par notre algorithme est sa capacité d'auto-adaptation spatiale. Grâce à sa paramétrisation reposant sur un nombre de nœuds variable, celui-ci peut s'affranchir des contraintes liées aux hétérogénéités de distribution des stations ainsi qu'aux fortes variations du gradient de vitesse en fonction des régions : les zones comportant des structures plus fines, échantillonnées par un grand nombre de stations GNSS, pourront naturellement bénéficier d'un maillage plus fin, tandis que les surfaces présentant peu d'évolution spatiale seront reconstruites à l'aide d'un faible nombre de nœuds. Ce maillage obtenu par une triangulation de Delaunay de ces nœuds, permet de construire des modèles de vitesse continus variant linéairement au sein de chaque triangle, permettant ainsi de calculer analytiquement le tenseur du taux de déformation en n'importe quel point du modèle. De cette manière, on obtient non seulement la distribution de probabilité *a posteriori* en chaque point sur les vitesses, mais également celle du tenseur de taux de déformation et de chacune de ses composantes. Ce processus fournit des résultats bien plus robustes que ceux obtenus par la dérivation d'un unique champ de vitesse issus de l'interpolation des données GNSS.

Son second point fort réside en la - presque - absence de paramètres *ad hoc* d'inversion, tels qu'un paramètre de lissage ou de régularisation, définis préalablement par l'utilisateur (une exception notable étant le choix des bornes du prior pour la vitesse, voir 3.3.2). Ces paramètres arbitrairement choisis ont un impact important sur la solution proposée et peuvent conduire à des différences significatives entre les différents modèles obtenus par une même méthode. De plus, ces paramètres, fréquemment définis de manière unique pour toute la zone d'étude, s'avèrent rapidement inadaptés pour faire face aux hétérogénéités des réseaux GNSS. Il est toutefois important de garder à l'esprit que cette méthode d'inversion bayésienne, si elle ne nécessite pas de choix en aval de la part de l'utilisateur, repose sur une succession de décisions de paramétrisation dont aucune n'est réellement neutre : le maillage par triangulation de Delaunay, l'interpolation linéaire de la vitesse au sein des triangles ainsi que la distribution *a priori* gaussienne du bruit sur les données ont tous des conséquences qui sont détaillées dans le chapitre 3.

Enfin, notre méthode répond également à la nécessité d'obtenir une estimation fiable de l'incertitude sur les paramètres recouverts lors de l'inversion. En exploitant la distribution de probabilité *a posteriori* des modèles, il nous est possible de fournir des intervalles de confiance statistique pour l'amplitude de la déformation en n'importe quel point, ou encore d'identifier des compromis entre différents scénarii tectoniques possibles, ce qui était jusqu'alors impossible avec les méthodes classiques d'inversion utilisées pour recouvrir le tenseur du taux de déformation. L'analyse de l'écart-type des distributions *a posteriori* permet de déterminer la confiance que l'on peut accorder localement aux valeurs obtenues sur les différents paramètres d'intérêt. L'apparence des distributions (gaussienne,  $\chi^2$ , bimodale) est elle aussi un bon indicateur de la fiabilité des résultats.

Nous avons validé le comportement de l'algorithme à l'aide de tests synthétiques, en comparant les résultats obtenus avec ceux d'une interpolation par splines bicubiques. De par son paradigme qui place les incertitudes au cœur du dispositif, l'inférence bayésienne est théorique-

ment résiliente à de hauts niveaux de bruit sur les données, ce qui s'est avéré être le cas dans la pratique. En évitant l'écueil du lissage de la solution pour ne pas fitter le bruit qui affecte les vitesses observées, il a été possible de préserver les principales structures des modèles synthétiques sans que les résultats ne soient rendus inutilisables par la présence d'artéfacts liés au bruit sur les données. Cependant, cette résilience ne reste effective qu'à condition que le niveau de bruit soit correctement reflété dans les incertitudes associées aux vitesses des stations GNSS et que l'hypothèse gaussienne sur la distribution de ce bruit soit vérifiée. En pratique, il est difficile de s'assurer du respect systématique de ces deux conditions; les développements basés sur le paradigme d'inversion bayésien hiérarchique visant à s'assurer du respect de la première hypothèse ont démontré que la seconde pouvait être mise à mal par la présence de valeurs aberrantes - observations dont les incertitudes associées ne correspondent pas à l'écart avec la véritable vitesse de déformation intersismique que l'on cherche à mesurer - dans les données. Une méthode hiérarchique employant un hyperparamètre de bruit local permettrait d'éviter que ces erreurs d'estimation des incertitudes ne se propagent à l'ensemble du modèle, et résoudrait du même coup la dépendance aux deux hypothèses sus-citées.

La côte ouest des États-Unis a représenté un terrain d'expérimentation idéal pour confronter notre méthode bayésienne à un jeu de données GNSS réel. La présence de structures tectoniques variées à différentes échelles spatiales associées à des déformations présentant plusieurs ordres de grandeur d'amplitude d'écart, étudiées par un réseau de stations GPS particulièrement dense et couvertes par une littérature scientifique abondante, offre un aperçu de toute la gamme de situations auxquelles nous pouvons être confrontés. Nous avons pu mettre en valeur la capacité de notre méthode à recouvrir simultanément des gradients de vitesse particulièrement marqués et précisément localisés (par exemple le long de différents segments de la faille de San Andreas) ainsi que des déformations plus diffuses sur des structures à plus grande échelle. Le maillage adaptatif employé pour paramétriser les modèles obtenus au cours de l'inversion s'est avéré être parfaitement adapté aux hétérogénéités de déformation ou de couverture spatiale du réseau GNSS auxquelles on peut être confronté dans la pratique. L'utilisation de l'inférence bayésienne dans le cadre des études du taux de déformation semble donc être une démarche fructueuse qui pourrait être généralisée aux autres types de données produites par la géodésie spatiale.

Le nouveau chantier qui s'ouvre à présent consiste à intégrer les observations issues de la corrélation d'images optiques et InSAR dans notre méthode. Des analyses jointes de données GPS et InSAR, par exemple sur les vitesses de glissement afférentes aux différents segments d'un jeu de failles, existent depuis plusieurs années, mais les techniques d'inversion conjointe de ces deux types de données visant à obtenir le taux de déformation à la surface de la Terre en sont encore au stade de l'expérimentation balbutiante. À terme, l'objectif est de proposer une vision synthétique de la déformation crustale en exploitant les forces et les faiblesses respectives des différentes observations issues de la géodésie spatiale, au sein d'un outil qui soit aussi bien adapté à l'étude de régions spécifiques qu'à l'établissement de cartes de déformation à l'échelle globale.





# **Annexes**





## **Annexe A**

# **Present-day geodynamics of the Western Alps : new insights from earthquake mechanisms**



# Present-day geodynamics of the Western Alps: new insights from earthquake mechanisms

Marguerite Mathey<sup>1</sup>, Christian Sue<sup>1,2</sup>, Colin Pagani<sup>3</sup>, Stéphane Baize<sup>4</sup>, Andrea Walpersdorf<sup>1</sup>, Thomas Bodin<sup>3</sup>, Laurent Husson<sup>1</sup>, Estelle Hannouz<sup>1</sup>, and Bertrand Potin<sup>5</sup>

<sup>1</sup>University Grenoble Alpes, University Savoie Mont Blanc, CNRS, IRD, IFSTTAR, ISTERre, Grenoble, 38000, France

<sup>2</sup>Chrono-Environnement Besançon, OSU THETA, University Bourgogne-Franche-Comté, Besançon, 25000, France

<sup>3</sup>Univ Lyon, Université Lyon 1, Ens de Lyon, CNRS, Lyon, 69000, France

<sup>4</sup>IRSN, PSE-ENV/SCAN/BERSSIN, BP 17, Fontenay-aux-Roses, 92262, France

<sup>5</sup>Departamento de Geofísica, Universidad de Chile, Blanco Encalada 2002, Santiago, 8320000, Chile

**Correspondence:** Marguerite Mathey (marguerite.mathey@univ-grenoble-alpes.fr)

Received: 20 November 2020 – Discussion started: 2 December 2020

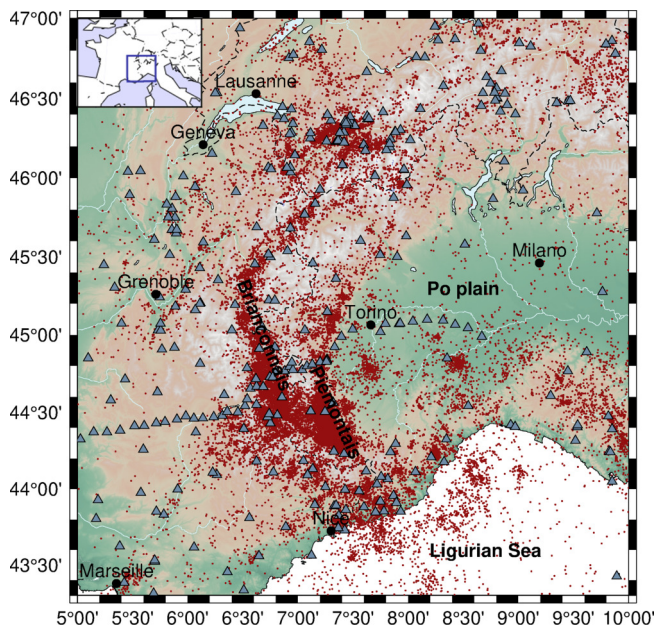
Revised: 9 June 2021 – Accepted: 14 June 2021 – Published: 21 July 2021

**Abstract.** Due to the low to moderate seismicity of the European Western Alps, few focal mechanisms are available in this region to this day, and the corresponding current seismic stress and strain fields remain partly elusive. The development of dense seismic networks in past decades now provides a substantial number of seismic records in the 0–5 magnitude range. The corresponding data, while challenging to handle due to their amount and relative noise, represent a new opportunity to increase the spatial resolution of seismic deformation fields. The aim of this paper is to quantitatively assess the current seismic stress and strain fields within the Western Alps, from a probabilistic standpoint, using new seismotectonic data. The dataset comprises more than 30 000 earthquakes recorded by dense seismic networks between 1989 and 2013 and more than 2200 newly computed focal mechanisms in a consistent manner. The global distribution of  $P$  and  $T$  axis plunges confirms a majority of transcurrent focal mechanisms in the entire western Alpine realm, combined with pure extension localized in the core of the belt. We inverted this new set of focal mechanisms through several strategies, including a seismotectonic zoning scheme and grid procedure, revealing extensional axes oriented obliquely to the strike of the belt. The Bayesian inversion of this new dataset of focal mechanisms provides a probabilistic continuous map of the style of seismic deformation in the Western Alps. Extension is found to be clustered, instead of continuous, along the backbone of the belt. Robust indications for compression are only observed at the boundary between the

Adriatic and Eurasian plates. Short-wavelength spatial variations of the seismic deformation are consistent with surface horizontal Global Navigation Satellite System (GNSS) measurements, as well as with deep lithospheric structures, thereby providing new elements with which to understand the current 3D dynamics of the belt. We interpret the ongoing seismotectonic and kinematic regimes as being controlled by the joint effects of far-field forces – imposed by the anticlockwise rotation of Adria with respect to Europe – and buoyancy forces in the core of the belt, which together explain the short-wavelength patches of extension and marginal compression overprinted on an overall transcurrent tectonic regime.

## 1 Introduction

The European Alps are characterized by a complex orogenic history. The Alpine belt results from the collision between the African and European plates during the Cenozoic (e.g. Coward and Dietrich, 1989; Handy et al., 2010). Tertiary continental collision followed the late Cretaceous to Eocene closure of the Ligurian Tethys Ocean (e.g. Stampfli et al., 1998), leading to the indentation of the European plate by Adria. The anticlockwise rotation of the Adriatic plate with respect to the European plate prevails in the tectonic history of the Western Alps (e.g. D’Agostino et al., 2008; Nocquet and Calais, 2004; Serpelloni et al., 2007). More pre-



**Figure 1.** Map of the seismicity (red dots) encompassing the Western Alps, compiled in Potin (2016) from national and regional networks seismic stations (triangles). The two major seismic arcs (Briançonnais and Piémontais arcs) can be clearly identified in the seismicity.

cisely, multiple collision phases led to nappe stacking, as well as folds and thrusts, from the inner zones to the outer front of the belt. The Frontal Penninic Thrust (FPT) is the main compressional structure of Oligocene age along the Western Alpine arc (Tricart, 1984). Concurrently with the Miocene progradation of the collision front towards the external zones, the inner part of the belt was affected by orogen-parallel extension, crosscutting earlier compressional structures and resulting in intertwined networks of normal and strike-slip faults (e.g. Champagnac et al., 2006; Sue and Tricart, 2003; Bertrand and Sue, 2017). A late phase of orogen-perpendicular extension developed in the core of the Western Alps during the Plio-Pleistocene (Bilau et al., 2021; Sue et al., 2007b), leading to the extensional reactivation of the FPT (Sue and Tricart, 1999). This continued tectonic regime is currently revealed by the moderate seismicity of the Western Alps, which is distributed along two main seismic arcs, namely the Briançonnais seismic arc running along the FPT and the Piémontais seismic arc running along the western side of the Ivrea Body (Sue et al., 2002; Fig. 1). Congruent with the late brittle extension, ongoing seismicity shows normal faulting combined with dextral longitudinal strike-slip (Sue et al., 1999, 2007b; Delacou et al., 2004).

From the end of the 1990s onward, seismotectonic studies brought increasing constraints on the current strain and stress states of the Western Alpine realm as a whole (e.g. Maurer et al., 1997; Kastrup et al., 2004; Eva et al., 2020). The progressive development of dense permanent and temporary seismic

networks in the Western Alps (e.g. Sismalp, Thouvenot et al., 1990, 2013; CIFALPS, Zhao et al., 2013) improved the catalogues by decreasing both the magnitude of completeness and the minimum magnitude from which focal mechanisms could be computed. These updated catalogues offer the opportunity to reappraise the disputed current dynamics of the Western Alps (e.g. Nocquet et al., 2016; Sternai et al., 2019; Champagnac et al., 2012; Mazzotti et al., 2020).

In this paper, we apply an integrated seismotectonic approach taking advantage of a comprehensive seismic dataset (Potin, 2016) that compiles the seismicity recorded from 1989 to 2013 by five national and regional networks and includes more than 30 000 events with local magnitudes ( $M_L$ ) in the 0 to 5 range. Given the exceptional amount of data available in this catalogue we unveil the highest-resolution stress and strain fields to date based on the computation of more than 2200 focal mechanisms, and we retrieve the robust deformation signals at the regional scale. This is achieved thanks to a Bayesian inversion for the deformation style, combined to a stress inversion of the focal mechanisms. Principal stress orientations, combined with the regionalization of deformation modes, are of primary importance to understand the seismogenic processes within the belt and to seismic hazard analyses.

## 2 Data and methods

### 2.1 Seismic database and earthquake localizations

Our large dataset is a compilation of P- and S-wave travel time arrivals recorded by five local or national networks operated from 1989 to 2013 (Potin, 2016, Fig. 1). (i) The Sismalp (OG) network from Grenoble Observatory (Thouvenot et al., 1990, 2013; Thouvenot and Fréchet, 2006) consisted of up to 44 permanent and 10 temporary stations from 1989 and 2013 and specifically targeted the weak seismicity of the Western Alps. (ii) The French RéNaSS (Réseau National de Surveillance Sismique) and LDG (Laboratoire de Détection Géophysique) (FR) networks (<https://doi.org/10.15778/RESIF.FR>, RESIF, 1995) cover all of Metropolitan France and include 36 stations in the Western Alps. (iii) The Italian RSNI (GU) network (Regional Seismic Network of North Western Italy, <https://doi.org/10.7914/SN/GU>, University of Genoa, 1967; Scafidi et al., 2015) comprises 40 stations in the Western Alps and the Po plain and collected data from the 1960s onward. (iv) The Swiss SED (CH) network (<https://doi.org/10.12686/sed/networks/ch>, SED, 1983; Cauzzi and Clinton, 2013) has maintained an increasing number of stations in Switzerland since the 1970s, with more than 200 stations at time of writing (Diehl et al., 2018). (v) The CIFALPS (YP) network (<https://doi.org/10.15778/RESIF.YP2012>, Zhao et al., 2016a, 2013) was installed between 2012 and 2013 along a profile

across the southwestern (SW) Alps. Potin (2016) standardized and homogenized the seismic data collected from these different networks: duplicate events were removed, and arrival time uncertainties were harmonized. Potential picking errors were identified and cleared out. The remaining dataset includes 36 010 events, for which at least seven phases were read by at least four seismic stations. A total of 791 754 P- and S-wave arrival times, recorded at 375 stations, were retained. Potin (2016) combined a 3D velocity inversion and earthquake re-localizations; take-off angles of seismic rays were estimated with an uncertainty of the order of a few degrees for well-constrained hypocentres, thus providing an enhanced localization of the events with a precision of a few kilometres both laterally and vertically.

## 2.2 Focal mechanism computation

From the aforementioned large dataset, we computed focal mechanisms with the code HASH (Hardebeck and Shearer, 2002). The computation makes use only of P-wave first-motion polarities. Thanks to the high density of stations provided by the combination of six networks, we were able to apply strict computation criteria. From the 36 010 events of the above-described dataset, we retained those with at least 10 P-wave polarities and at least 1 S-wave polarity. The maximum allowed azimuthal gap between polarities was set to  $90^\circ$  and the maximum azimuthal gap of incidence angles to  $60^\circ$ . The maximum allowed distance to the seismic station was set to 600 km since all the stations used are within this range and covered by the same velocity model from Potin (2016). The preferred solution corresponds to the average solution of all acceptable solutions (Hardebeck and Shearer, 2002). The HASH code yields a quality flag from A to F for each computed focal mechanism (A, best constrained), which takes into account several parameters, such as the number of polarities used, spatial distribution of stations, and uncertainties of the polarities. The quality flag distribution of the computed focal mechanisms is available in Fig. S1 in the Supplement. From the 2215 events for which a focal mechanism has been computed, 58 have a  $M_1 < 1$ , 1200 have a  $M_1$  ranging from 1 to 2, 769 have a  $M_1$  ranging from 2 to 3, 102 have a  $M_1$  ranging from 3 to 4, and 19 have a  $M_1 > 4$  (Fig. 2a). A total of 15 of them are A quality events with  $M_1$  ranging from 1.6 to 4.6, 52 are B quality events with  $M_1$  ranging from 1.3 to 4.9, 72 are C quality events with  $M_1$  ranging from 0.9 to 4.8, and all other mechanisms are D quality events with  $M_1$  ranging from 0.2 to 4.5. According to Hardebeck and Shearer (2002), A quality events have an associated fault strike uncertainty between  $0$  and  $25^\circ$ , B events have an uncertainty between  $25$  and  $35^\circ$ , C events have an uncertainty between  $35$  and  $45^\circ$ , and D events have an uncertainty between  $45$  and  $55^\circ$ .

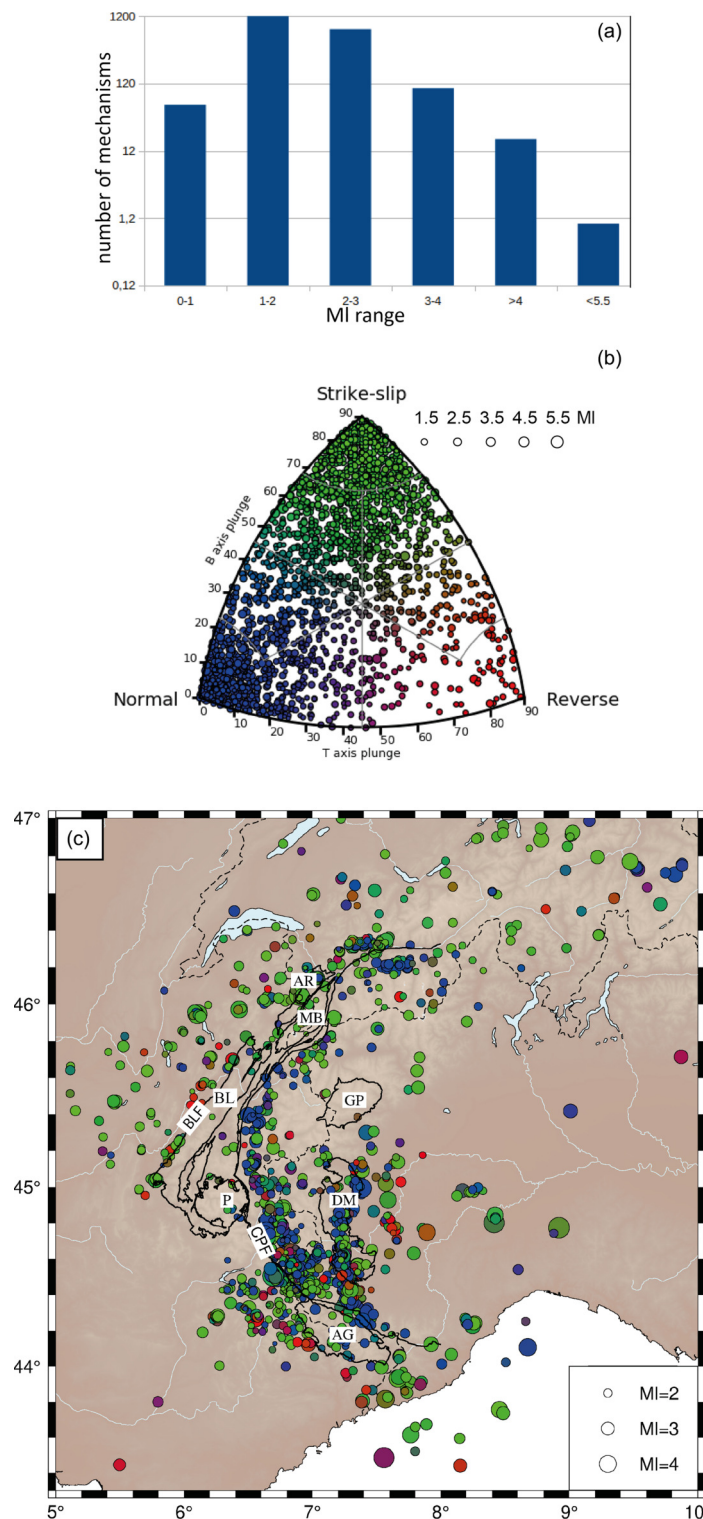
While low-magnitude seismic events account for less seismic energy release compared to larger ones, they will nonetheless be used both in an approach in which all focal

mechanisms are used regardless of their magnitude (stress inversions, Sect. 2.3) and in approaches in which focal mechanisms are weighted depending on their magnitude (seismic moment summation, Sect. 2.3) and overall quality (Bayesian inversion, Sect. 2.4).

To further analyse the regional distribution of the focal mechanisms, we classified them according to the plunges of their pressure ( $P$ ), tension ( $T$ ), and null ( $B$ ) axes (following the method of Frohlich, 1992). One can use ternary diagrams to graphically represent intermediate faulting styles between pure strike-slip, pure normal, or pure reverse motion. Each pole of the diagram represents one of the three pure styles of deformation (pure strike-slip, pure normal, or pure reverse motion). For each focal mechanism, Kaverina diagrams (e.g. Alvarez-Gómez, 2019) allow the representation of the styles of deformation, including cases of intermediate modes such as transpression or transtension. Frohlich's classification with Kaverina diagrams allows the representation of a focal mechanism in the ternary diagram by only two coordinates, the  $B$  and  $T$  axis plunges, with  $P$  axis plunge being retrieved by the product of the first two axes ones (e.g. if both  $T$  plunge and  $B$  plunge =  $0^\circ$ , then  $P$  plunge =  $90^\circ$ ). The representation of the style of deformation through the Frohlich classification thus allows one to project a focal mechanism into a 2D parameter space and to account for intermediate styles of deformation, while information on the focal plane solution is lost. The Kaverina diagram for the complete catalogue is presented in Fig. 2b, and the corresponding map is shown in Fig. 2c. Kaverina diagrams per  $M_1$  ranges are available in Fig. S2.

## 2.3 Strain quantification and stress inversions

Strain rates are computed by averaging moment tensors (i.e. symmetrical nine-component second-order tensor, plus seismic moment amplitude), for which the nine components directly depend on strike, dip, and rake parameters of the focal mechanisms. The seismic moment for each focal mechanism is by definition related to moment magnitude  $M_w$  (Hanks and Kanamori, 1979). The local magnitude ( $M_l$ ) of the catalogue is based on the maximum amplitude among all three components of the signal. A double conversion toward  $M_w$  has been proposed by Cara et al. (2015), through another national-scale local magnitude ( $M_l$  LDG). However, a careful analysis of this double conversion (Laurendeau et al., 2019) shows that this relationship is misleading for  $M_l$  Sismalp  $> 2.5$ : above this value, a linear relationship could be derived from the available dataset; below this value, a polynomial equation is a better approximation. Finally,  $M_w = M_l$  is a reasonable hypothesis, but it underestimates moment magnitude on the complete range of values. According to Kostrov (1974), in order to retrieve an annual strain rate, the sum of the individual moment tensors is divided by a volume and a time span. This method thus requires defining homogeneous volumes in terms of deformation style prior to summing compatible



**Figure 2.** Set of the 2215 focal mechanisms computed in this study. **(a)** Histogram of magnitude distribution (local magnitude,  $M_l$ ) for the computed focal mechanisms. **(b)** Kaverina diagram displaying the style of deformation of the mechanisms according to their  $T$  axis (tension axis) and  $B$  axis (null axis) plunges. Normal, reverse, and strike-slip deformation style corresponding to the vertical  $P$ ,  $T$ , and  $B$  axes is indicated by circles in blue, red, and green, respectively. **(c)** Localization of the focal mechanisms colour-coded according to their classification in the Kaverina diagram in **(b)**. Note the different scale for events size between **(b)** and **(c)**. Black lines outline the crystalline massifs of the area. External crystalline massifs (Aiguilles Rouges, AR; Mont Blanc, MB; Belledonne, BL; Pelvoux, P; Argentera, AG) are separated from the internal crystalline massifs (Gran Paradiso, GP; Dora Maira, DM) by the Crustal Penninic Front (CPF). The Belledonne external massif is delineated by the Belledonne Fault (BLF) along its western flank.

focal mechanisms in each volume. We defined 11 volumes within our region of interest, based on structural criteria, taking into account both the arcuate structure of the belt, as well as its geological structures, or based on the focal mechanism distribution and density of earthquakes. The 11 seismotectonic zones are named according to their structural environment: the VSS and VSN zones in the southern and northern Valais; BRN, BRS, and BRS2 from north to south along the Briançonnais seismic arc; PIE along the Piémontais seismic arc; PPO, SMT, NMT, and VAR for the areas at the periphery of the belt: Po plain to the east, southern Mercantour to the south, and northern Mercantour and VAR to the southwest; and finally DPH in the external Dauphinois zone (map view and definitions given in Fig. 3).

In a second analysis, focal mechanisms were inverted to retrieve the principal stress directions. Different inversion methodologies exist, all based on the same assumption of a locally uniform stress regime in the crust producing a slip, which occurs in a direction parallel to the plane of resolved shear stress (Hardebeck and Hauksson, 2001; Lund and Townend, 2007). In the stress inversion strategy, all mechanisms are equally weighted, regardless of their magnitude. In order to strengthen our analysis, we compare the classic FMSI (Focal Mechanism Stress Inversion, Gephart, 1990) method based on a grid search algorithm with the SI (StressInverse, Vavryčuk, 2014) method based on a linear least-squares inversion. These methods allow retrieving a partial stress tensor, since orientations of the three principle stresses can be obtained, as well as the shape ratio of the stress tensor, but not their absolute amplitude. The retrieved information is constitutive of the deviatoric stress tensor (D'Amico, 2018). In a first step, these two procedures were implemented on the same seismotectonic zones that were defined for strain rate quantification, in order to assess the robustness of the inversion. In a second step, we inverted the mechanisms on a regular grid rather than on pre-defined seismotectonic zones, which enables us to increase the spatial resolution of the derived stress field, at the cost of a reduced level of constraint, since fewer data are used to derive each tensor. We used the MSATSI (MATLAB Spatial And Temporal Stress Inversion, Martínez-Garzón et al., 2014) software to perform an inversion for each cell encompassing at least 10 focal mechanisms. While MSATSI allows the user to modulate the damping factor describing the attenuation of the weight of neighbouring cells in a given cell inversion, we choose to run the inversion without damping in order to identify any spatial heterogeneity in the stress field.

## 2.4 Bayesian interpolation of focal mechanisms

We choose to interpolate the style of deformation, in order to construct a continuous map of the regional trends prevailing among the locally varying mechanisms. As shown in Fig. 2, our dataset consists of an ensemble of  $P$  and  $T$  plunge angles given at each event location. In order to better investigate

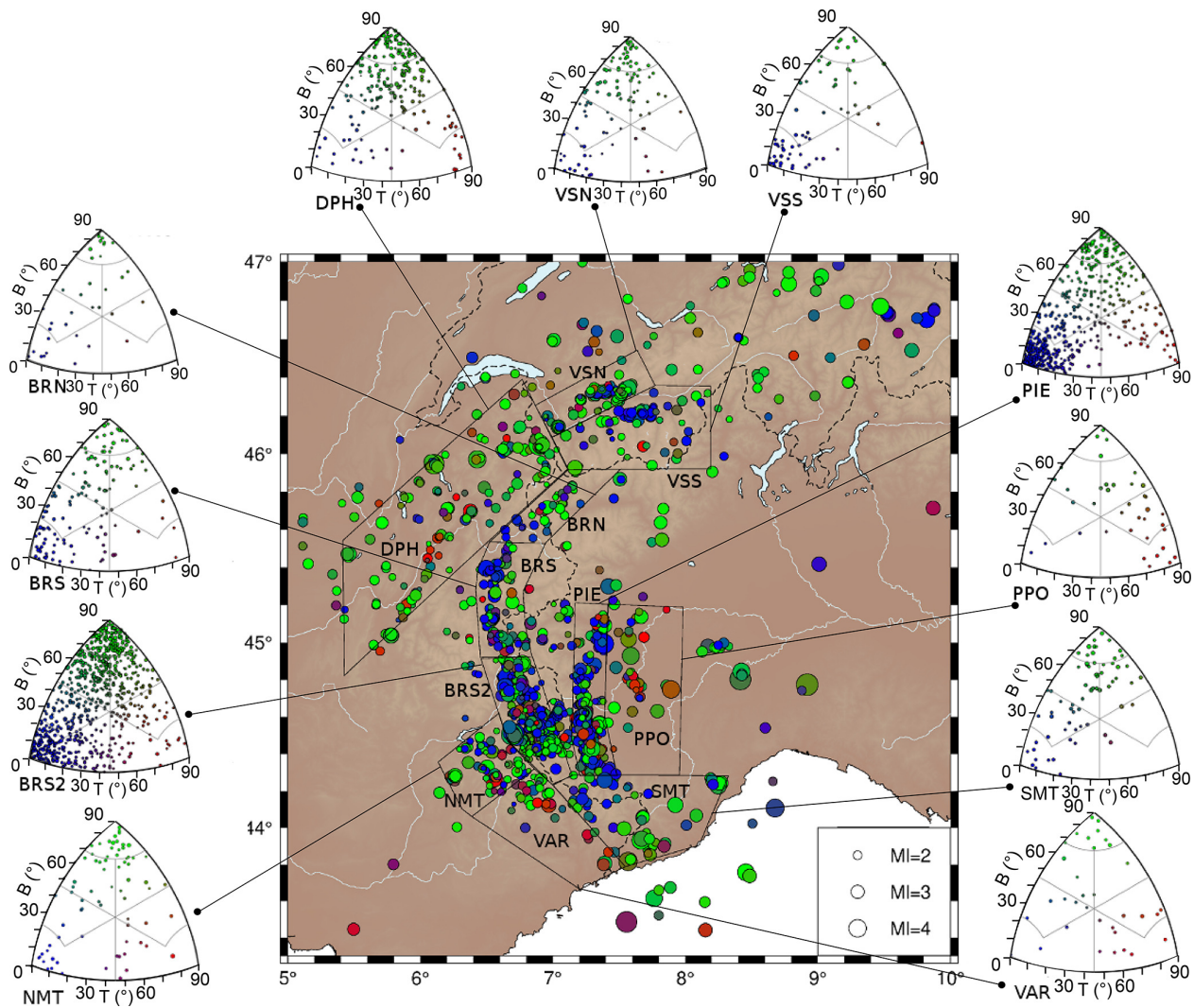
the spatial variations of this dataset, we implemented a 2D Bayesian regression method (following Bodin et al., 2012) to reconstruct a continuous surface of  $P$  and  $T$  plunge angles. The procedure is based on a transdimensional regression, which can be used over  $n$ -dimension datasets that are evenly distributed, and variable uncertainties. The reconstructed surface is parameterized with a mesh that self-adapts to the level of information in the data. The solution is a full probability distribution for each parameter at each geographical location, which is useful to estimate uncertainties. This method was first used to reconstruct the Moho topography beneath Australia from a discrete set of local observations (Bodin et al., 2012). Choblet et al. (2014) used it to reconstruct probabilistic maps of coastal relative sea level variation from tide gauge records. The approach was also used by Husson et al. (2018) to reconstruct maps of vertical displacement rates measured at GPS stations and by Hawkins et al. (2019a, b) to produce probabilistic maps of sea level rise by combining GPS, satellite altimetry, and tide gauge measurements.

In this work, the transdimensional regression algorithm applied to focal mechanisms output probability distributions for  $P$  and  $T$  plunge values at each geographical location. The method accounts for the heterogeneous data density thanks to a self-adapting parameterization based on Delaunay triangles. It also accounts for variable uncertainties in the data and thus allows deciphering which signal is robust at the regional scale despite the data heterogeneity. Moreover, a hierarchical Bayesian approach is used and data uncertainties are rescaled by a global adaptive factor depending on the level of data fit (Malinverno and Briggs, 2004). This factor enables us to assess whether formal uncertainties on fault planes and thus on  $P$  and  $T$  axes are overestimated or underestimated. In our case, we took into account the fault plane uncertainty as input error on our focal mechanisms. We were able to assess through the Bayesian inversions that these formal errors are overestimated by a factor of  $\sim 0.6$ .

## 3 Results

### 3.1 Focal mechanism distribution

To get a general overview of the 2200 focal mechanisms in terms of mode of deformation, we plotted them all together on a Kaverina diagram, i.e. according to their  $B$  and  $T$  axis plunges. The corresponding plot (Fig. 2b) shows a majority of strike-slip mechanisms ( $\sim 1200$ ; 54.5%), a large number of extensional ones ( $\sim 800$ ; 36.5%), and a minority of reverse ones ( $\sim 200$ ; 9%) over the Western Alps as a whole. The localization of the events is shown in Fig. 2c with respect to the main geological features covering the area. At a first glance, a strike-slip regime is distributed all over the belt while extension is mainly located in the inner part of the belt, i.e. along the Briançonnais and Piémontais arcs, confirming previous studies (Bauve et al., 2014; Delacou et al., 2004;



**Figure 3.** Seismotectonic zonation of the study area, yielding 11 zones based on structural criteria, style of seismic deformation, and density. VSS stands for Valais south, VSN stands for Valais north, BRN stands for Briançon north, BRS stands for Briançon south, BRS2 stands for Briançon south 2, PIE stands for Piémontais seismic arc, PPO stands for Po plain, VAR represents Var; NMT stands for northern Mercantour, SMT stands for southern Mercantour, and DPH stands for Dauphinois zone. Kaverina diagrams are shown for each seismotectonic zone, highlighting their homogeneous style of deformation, associating either normal and strike-slip events or reverse and strike-slip events.

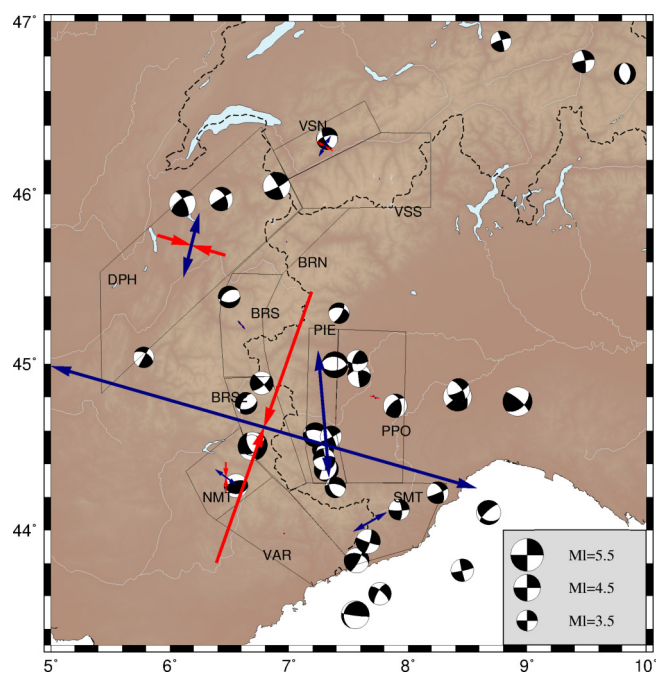
Sue et al., 2002). Compression is scattered, and mostly expressed in the Po plain and in the southwestern external part of the belt.

In a second step, we plotted Frohlich classes on Kaverina diagrams for each of the 11 predefined seismotectonic zones (Fig. 3). These plots confirm that the 11 zones display roughly consistent deformation modes; the homogeneity of the deformation mode in each zone is a prerequisite to strain estimates. Importantly, strike-slip mode prevails everywhere, either as almost pure transcurrent or in association with extension.

### 3.2 Up-to-date strain and stress fields

The strain rate tensors computed in each of the 11 seismotectonic zones with Kostrov's (1974) method are presented as surface projections in Fig. 4, and the related parameters (rate, azimuth, and dip) are listed in Table 1. The largest strain tensor of the belt is located in the southern Briançonnais area (BRS2). The deformation style of the strain tensors is generally strike-slip (both extension and compression horizontal), except for the Piémontais (PIE) and southern Mercantour (SMT) areas, which show vertical compression axes and negligible compression rates, respectively. However, in the Kostrov methodology, the style of deformation and its orientation are dominated by the larger events in each sub-area, as





**Figure 4.** Seismic strain rates computed according to Kostrov's (1974) method in each of the 11 subareas, based on 25 years of seismicity records from Potin (2016). Blue and red arrows respectively show the extensive and compressive components of the strain rate projected at the surface ( $\varepsilon \cdot \cos(\delta)$ ), where  $\varepsilon$  is the given eigenvalue and  $\delta$  is the dip (see values in Table 1). Black arrows represent the scale of the strain rate. Focal mechanisms with  $M_1 \geq 3.5$  are represented in the background since strain rates mostly depend on higher-moment tensors.

they bring most of the energy released. The short time span of the observations (24 years) prevents a thorough investigation of spatial and temporal variations in seismic energy release. Therefore, including historical events that occurred in the Western Alps in the summation could modify the strain rate distribution in the belt.

To better explore the current tectonic regime in each sub-area, we investigated the distribution of stress orientations using focal mechanism inversions. All inverted earthquakes are equally weighted, regardless of their magnitude. Figure 5 shows the azimuths of maximum ( $\sigma_1$ ) and minimum ( $\sigma_3$ ) compressive stresses, as given by SI and a FMSI inversions, plotted according to their plunge (i.e. the length of the stress axes being expressed as a unitary value  $\cdot \cos(\text{plunge})$ ). The three principal stresses are orthogonal: horizontal  $\sigma_1$  by itself (i.e.  $\sigma_1$  axis length at the maximum unitary value) represents a compressional regime, horizontal  $\sigma_3$  by itself (i.e.  $\sigma_3$  axis length at the maximum unitary value) gives an extensional regime, and both horizontal  $\sigma_1$  and  $\sigma_3$  (i.e. both  $\sigma_1$  and  $\sigma_3$  axis lengths at the maximum unitary value) indicate a strike-slip regime. The most representative focal mechanism in each zone is plotted beside each sub-area. Associated azimuth and dip values, as well as strike, dip, and rake of both

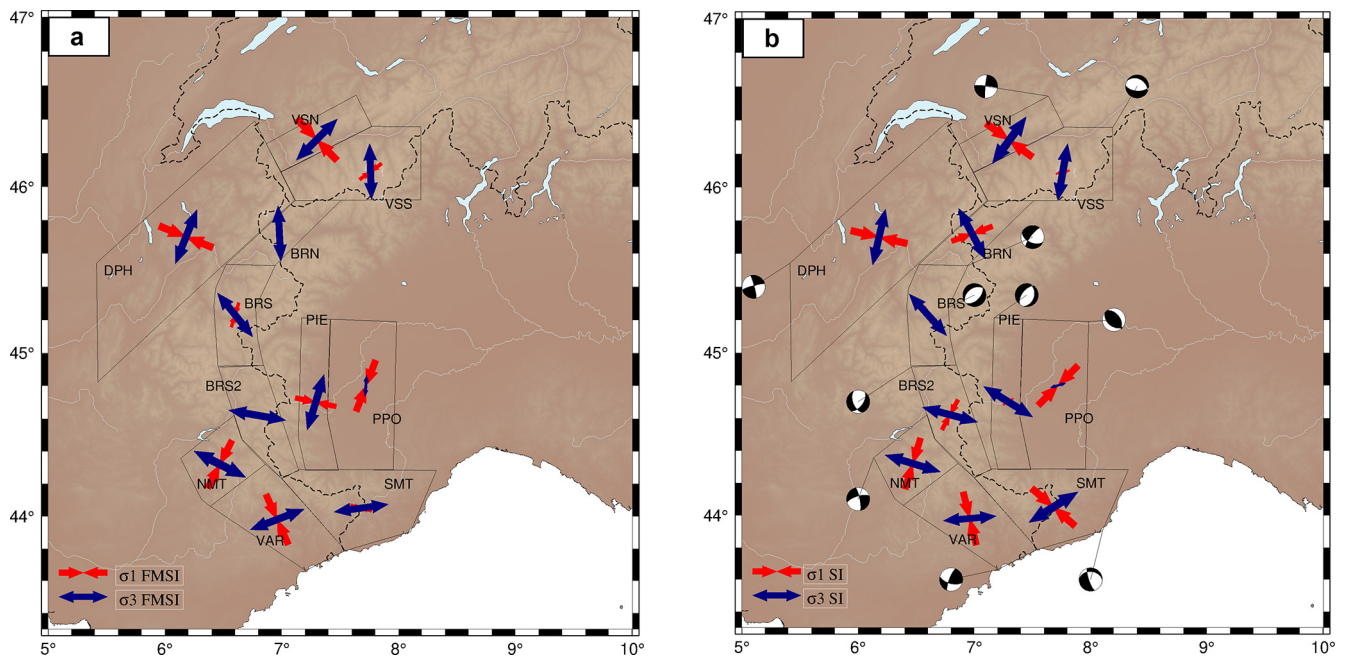
**Table 1.** Strain tensors (Kostrov's method) for each of the 11 sub-areas. Strain rates display the first ( $\varepsilon_1$ ) and third ( $\varepsilon_3$ ) eigenvalues of the strain tensor, corresponding to compression and extension, respectively, as well as their azimuth ( $\theta$ , in degrees from north) and dip ( $\delta$ , degrees) used to project the strain tensors at the surface in Fig. 4.

	Kostrov strain rates	
	$\varepsilon_1$ ( $\text{yr}^{-1}$ ); $\theta$ ( $^\circ$ ); $\delta$ ( $^\circ$ )	$\varepsilon_3$ ( $\text{yr}^{-1}$ ); $\theta$ ( $^\circ$ ); $\delta$ ( $^\circ$ )
BRN	$-9.8 \times 10^{-13}$ ; $-124$ ; $7$	$1.2 \times 10^{-12}$ ; $-33$ ; $7$
BRS	$-8.4 \times 10^{-12}$ ; $-69$ ; $65$	$7.9 \times 10^{-12}$ ; $-41$ ; $9$
BRS2	$-2.75 \times 10^{-10}$ ; $19$ ; $42$	$3.1 \times 10^{-10}$ ; $107$ ; $3$
DPH	$-4.9 \times 10^{-11}$ ; $-74$ ; $6$	$4.7 \times 10^{-11}$ ; $14$ ; $13$
NMT	$-2.1 \times 10^{-11}$ ; $179$ ; $11$	$1.8 \times 10^{-11}$ ; $126$ ; $71$
PIE	$-1.1 \times 10^{-10}$ ; $121$ ; $89$	$8.9 \times 10^{-11}$ ; $-5$ ; $0$
PPO	$-6.9 \times 10^{-12}$ ; $105$ ; $20$	$7.9 \times 10^{-12}$ ; $-37$ ; $65$
SMT	$-8.4 \times 10^{-14}$ ; $39$ ; $69$	$2.9 \times 10^{-11}$ ; $-121$ ; $20$
VAR	$-1.8 \times 10^{-12}$ ; $-39$ ; $18$	$1.2 \times 10^{-12}$ ; $64$ ; $36$
VSN	$-1.6 \times 10^{-11}$ ; $120$ ; $36$	$1.6 \times 10^{-11}$ ; $-149$ ; $0$
VSS	$-7.3 \times 10^{-13}$ ; $26$ ; $57$	$1.3 \times 10^{-12}$ ; $148$ ; $19$

inversions and the corresponding mean mechanism from SI inversion, are listed in Table 2. The FMSI inversion additionally reports a misfit value, listed after the principal stress components. The results of the two inversion methods are in rather good agreement for each of the 11 zones, highlighting the overall stability and the robustness of our stress inversions.

Overall, the set of inversions allows for deciphering six mostly extensive sub-areas in the core of the belt (VSS, BRN, BRS, BRS2, SMT, PIE), four strike-slip sub-areas at the periphery (VSN, DPH, NMT and VAR), and only one compressive sub-area in the Po plain (PPO).

To test the significance of the observed heterogeneity between the inner and outer parts of the belt, we implemented a MSATSI stress inversion (based on SI method, see above) on a  $0.5^\circ \times 0.5^\circ$  geographical grid for each cell encompassing at least 10 focal mechanisms (Hardebeck and Michael, 2006). This inversion procedure allows us to get past any a priori seismotectonic zoning for the Alpine stress determination along the arc of the orogen. Such an inversion on a regular  $0.5^\circ \times 0.5^\circ$  grid (Fig. 6) is possible for the first time in the Alps thanks to the large number of focal mechanisms computed in our dataset, resulting in the highest-resolution stress map to date in the Alps. It is worth noting that neighbouring stress tensors appear consistent in orientation. The orientations are also in good agreement with the stress tensors derived in the seismotectonic zoning scheme. The orientations of the strike-slip tensors appear in good agreement with previous studies, whether at the regional (e.g. Delacou et al., 2004) or local scale (e.g. Bauve et al., 2014; Kastrup et al., 2004). However, the orientation of the extensive tensors



**Figure 5.** Comparison of stress orientations resulting from FMSI (a) and SI (b) inversions of focal mechanisms within each subarea. The most compressional ( $\sigma_1$ , in red) and least compressional ( $\sigma_3$  in blue) stresses are plotted given their plunge (i.e. arrows length depending on the plunge: the scale arrows in the bottom-left corner represent  $0^\circ$  plunging stress axes (horizontal stresses), while  $90^\circ$  plunging stress axes will not be seen on the map). The mean focal mechanism retrieved from SI inversion, corresponding to each partial stress tensor, is plotted for each subarea in (b).

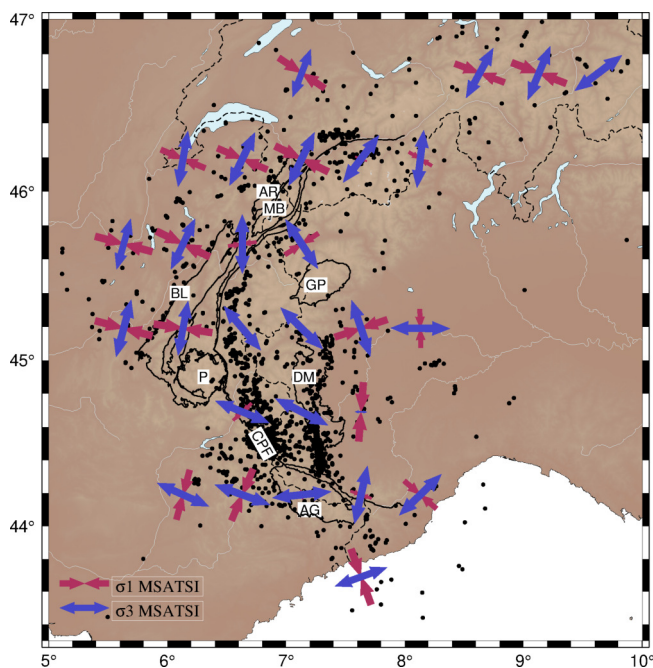
**Table 2.** Stress (FMSI and SI) results for each of the 11 subareas. Stress orientations display the azimuth ( $\theta$ , in degrees from north) and the dip ( $\delta$ , degrees) of the most compressional stress ( $\sigma_1$ ), intermediate stress ( $\sigma_2$ ), and least compressional stress ( $\sigma_3$ ) for the two methods. FMSI also yields a misfit value (dimensionless) for the deviatoric stress tensor constituted by the three principal stresses. SI yields the focal mechanism corresponding to the inverted deviatoric stress tensor.

	FMSI stress orientations				SI stress orientations			Mean mechanism		
	$\sigma_1 (\theta; \delta)$	$\sigma_2 (\theta; \delta)$	$\sigma_3 (\theta; \delta)$	misfit	$\sigma_1 (\theta; \delta)$	$\sigma_2 (\theta; \delta)$	$\sigma_3 (\theta; \delta)$	strike	dip	rake
BRN	173; 73	267; 1	357; 17	6.242	70; 41	232; 46	332; 8	217	76	-138
BRS	197; 64	57; 20	321; 15	10.842	160; 73	50; 5	318; 15	45	50	-97
BRS2	135; 80	11; 6	280; 8	10.195	28; 54	188; 33	285; 9	36	55	-47
DPH	292; 1	188; 86	22; 4	8.710	283; 1	21; 80	193; 9	255	82	174
NMT	207; 23	26; 67	117; 0	8.088	197; 23	14; 66	107; 1	348	79	-159
PIE	282; 44	112; 46	17; 5	21.324	238; 78	31; 9	122; 5	217	57	-78
PPO	21; 20	289; 5	184; 69	11.130	45; 13	137; 7	254; 74	323	47	99
SMT	106; 68	355; 8	262; 20	9.556	131; 58	334; 29	238; 10	161	77	-60
VAR	336; 19	176; 70	69; 6	9.737	346; 19	223; 57	85; 24	202	77	30
VSN	136; 2	268; 86	45; 3	7.397	126; 6	312; 83	216; 0	276	86	-175
VSS	234; 62	96; 22	358; 17	7.905	256; 76	101; 11	10; 5	94	58	-104

appears slightly less perpendicular to the belt than previously observed (e.g. Sue et al., 1999, 2007b; see Sect. 4).

Extension is localized along the Briançonnais and Piémontais seismic arcs (Fig. 1) as previously shown (review in Sue et al., 2007b; Sect. 4), but it is found to be oblique to the strike of the Alpine belt, whereas it has been often described

as perpendicular to the orogen (Sue et al., 2007b). This feature is observed all along the arcuate shape of the belt, from the Valais area in the north to the southernmost tip of the Alps in the south. The entire western periphery of the belt (corresponding to the zones VSN, DPH, NMT, and VAR in Fig. 5) shows strike-slip stress fields, with a rotating state



**Figure 6.** Stress orientations resulting from MSATSI inversion (based on the SI method) on a  $0.5^\circ \times 0.5^\circ$  grid, for all cells containing at least 10 focal mechanisms (black dots). The most compressional ( $\sigma_1$ , in red) and least compressional ( $\sigma_3$ , in blue) stresses are projected according to their plunge. Solid lines and their labels refer to major geological features described in Fig. 2.

of stresses compatible with dextral motions on fault parallel to the strike of the belt (such as the Belledonne fault, Thouvenot et al., 2003). Compression is once again only retrieved in the cell centred on the Po plain, with an axis oriented almost north–south. This grid inversion shows the prevalence of strike-slip around the bend of the Western Alps, as well as the deflection of the extension in the core of the orogen with respect to its strike, and the very limited importance of compression.

### 3.3 Probabilistic reconstruction of tectonic regimes throughout the Western Alps

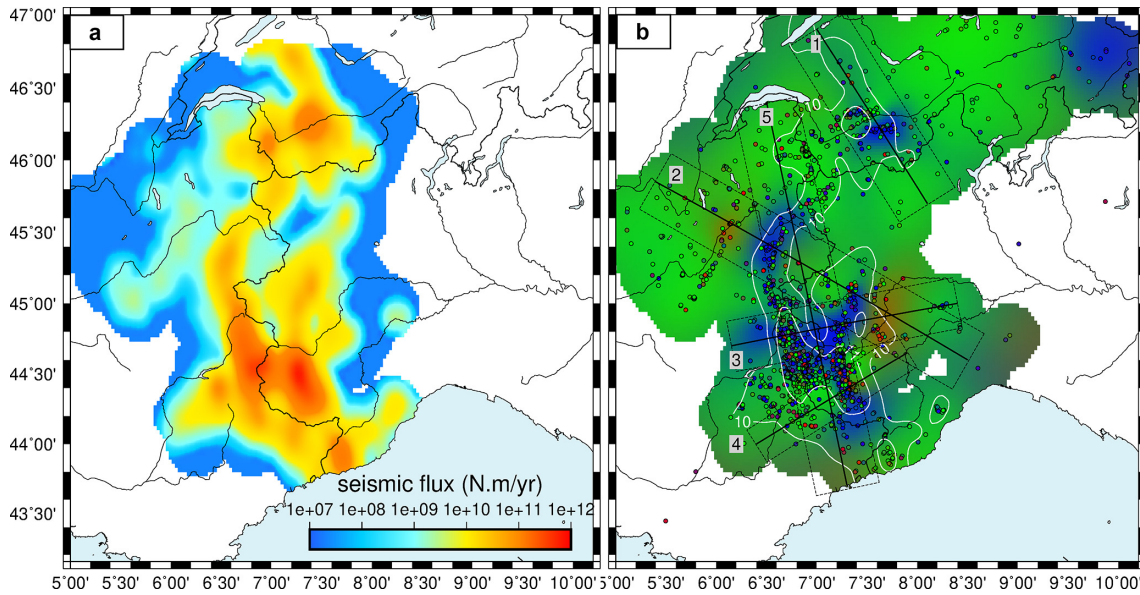
Spatial variations of the deformation modes are assessed through the Bayesian reconstruction of continuous surfaces for  $P$  and  $T$  axis plunges. This is achieved through a 2D regression, where hypocentre locations are first projected at the surface and depth is ignored. In the following, all the focal mechanisms were projected to the surface. Inversion tests were also implemented for different depth intervals projected at the surface (Fig. S4). From a discrete set of values ( $P$  and  $T$  axis plunges for each event) distributed on a 2D map, the problem consists of reconstructing a smooth surface for these values. As shown with the earthquake classification in Sect. 3.1, these two parameters are sufficient to describe the style of deformation. The Bayesian approach provides full

probability distributions for the  $P$  and  $T$  axes at any point in a  $300 \times 300 \text{ km}^2$  area covering the entire western part of the belt. From these two distributions, a continuous probabilistic map of the deformation style can be constructed in the region.

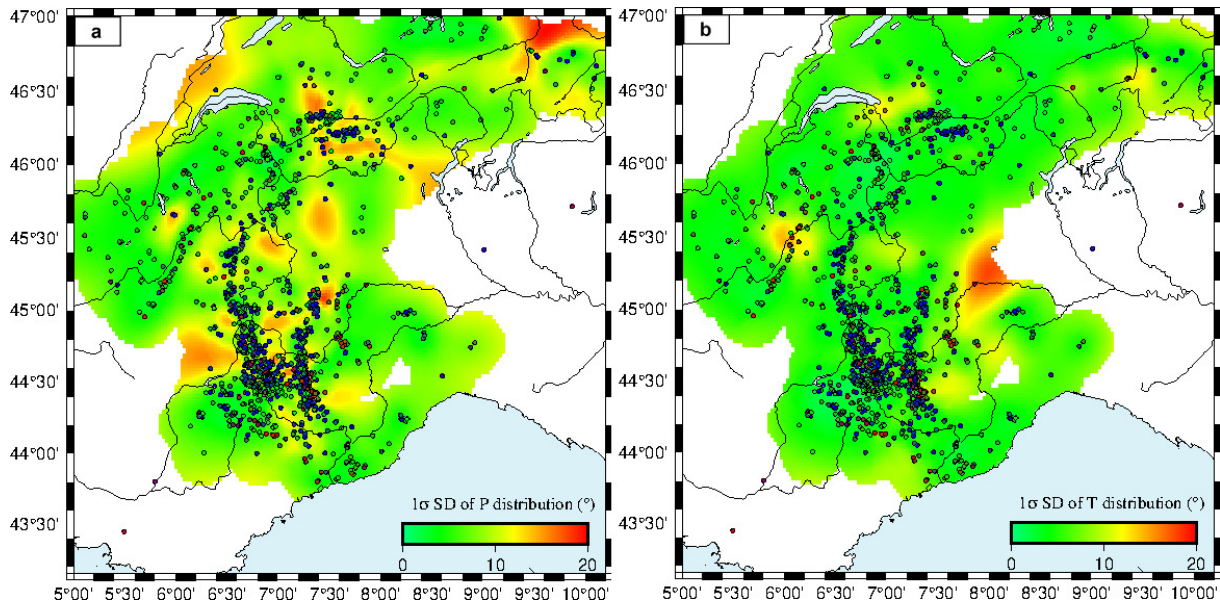
The information about the style of deformation retrieved from the Bayesian inversion, once combined with the information about the seismic energy released in the area, thus delivers a comprehensive view of the current seismic deformation in the western Alps. Figure 7a shows a smoothed map of the seismic flux in the area. This map was generated by interpolating the seismic moment ( $M_0$ ) values of events in the full dataset described in Sect. 2.1. The seismic moment is estimated assuming that  $M_1 = M_w$  in our region (Sect. 2.3) and using the Hanks and Kanamori (1979) magnitude–moment relationship.  $M_0$  values are then summed on the 25-year period (the raw seismic moment map is displayed in Fig. S3) and annualized. It appears from Fig. 7a that most of the seismic energy was released during the considered time interval along the Briançonnais arc, from the Briançon region to the Valais region, and along the Piémontais arc.

Figure 7b shows a map of deformation modes obtained by combining the mean values of the Bayesian posterior distributions for  $P$  and  $T$  axis plunges, converted to a colour code in RGB triplet at each geographical location, according to the ternary diagram representation (Fig. 2b). Transcurrent and transtensive deformation predominate all over the belt. Extension is specifically localized in the core of the belt, as shown by previous studies (review in Sue et al., 2007b). However, whereas previous works have shown a continuous stretch of extension, our interpolation shows much more localized extensional areas. They are located discontinuously along the Briançonnais seismic arc (running along the CPF from the southern Briançonnais region to the Swiss Valais region, Fig. 1), the Piémontais seismic arc, and embedded within an overall strike-slip regime that prevails throughout (Fig. 7). The extensional areas correspond in general to areas of higher seismic energy release, even if some strike-slip areas also bear significant energy, such as in the Aiguilles Rouges and Mont Blanc crystalline massifs (Fig. 6). Figure 8 shows the standard deviations of the  $P$  and  $T$  axis plunges probability distributions (see Sect. 2.2). Uncertainties range between 5 and 20° on interpolated  $P$  and  $T$  axis plunges. As in any inverse problem, the level of uncertainty associated with the solution can only be interpreted relative to the level of resolution. Here, it is important to keep in mind that the solution model is smooth and represents an average over a given wavelength. The model uncertainties shown in Fig. 8 are associated with this spatial average and can therefore be much smaller than the data variability or data uncertainties (see Choblet et al., 2014). Figure 8b shows that on the two compressive patterns retrieved, only the one lying east of the Piémontais arc appears as a robust feature.

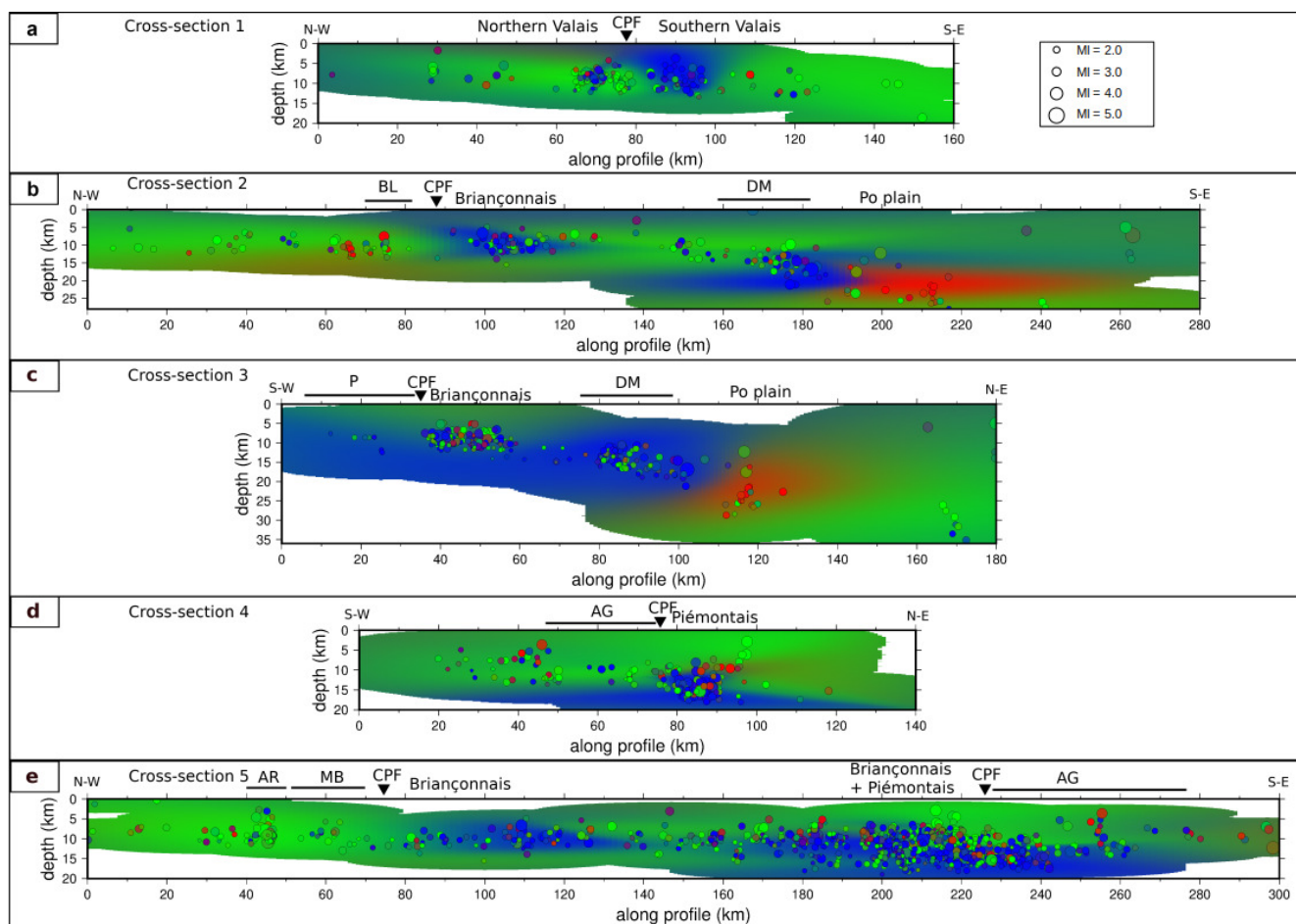
To investigate the spatial variability of deformation mode at depth and thus obtain a 3D view of the overall deformation



**Figure 7.** (a) Seismic flux computed using the annualized seismic moment ( $M_0$ ) over the 1989–2014 time interval, summed in  $0.05^\circ \times 0.05^\circ$  cells and interpolated with an adjustable tension curvature surface algorithm (Smith and Wessel, 1990). Areas without focal mechanisms within 35 km are masked out, as well as mechanisms in the Ligurian Sea and in NE Switzerland, due to the lack of constraints. (b) Mean values of the distributions of  $P$ ,  $T$ , and  $B$  axis plunges resulting from a Bayesian inversion. The colour code is according to the Kaverina classification of the style of deformation (the end-members red, blue, and green corresponding to reverse, normal, and strike-slip deformation styles, respectively). Focal mechanisms used are represented as dots filled with the same colour code. Areas without focal mechanisms within 35 km are masked out, as are mechanisms in the Ligurian Sea, due to the lack of constraints. White lines show isocontours of the seismic flux from (a) in  $\log_{10}(M_0)$ . Profiles numbered from 1 to 5 correspond to the interpolated vertical cross sections in Fig. 9. Dashed boxes encompass the focal mechanisms projected along each profile in Fig. 9.



**Figure 8.** The  $1\sigma$  uncertainties (in degrees) of the mean values of  $P$  distributions (a) and  $T$  distributions (b) resulting from the Bayesian interpolation in Fig. 7. Superimposed focal mechanisms allow us to distinguish between two types of higher-uncertainty areas: areas without enough data and areas displaying high data heterogeneity.



**Figure 9.** Vertical cross sections displaying averages of  $P$ ,  $T$ , and  $B$  distributions from the Bayesian interpolation of events projected along five profiles. Focal mechanisms used are represented as dots with their size depending on their magnitude ( $M_I$ ). Profile locations are indicated in Fig. 7. Labels refer to geological features displayed in Fig. 2c. Uncertainties in  $P$  and  $T$  plunges distributions are available in Figs. S5 and S6.

in the belt, in a second step we perform 2D inversions over five vertical cross sections across the belt (Figs. 7 and 9). To do so, we first projected focal mechanisms onto the 2D cross sections (Fig. 7). We then interpolated  $P$  and  $T$  axis plunges in the vertical 2D cross section. The  $1\sigma$  uncertainties of the  $P$  and  $T$  axis plunges probability distributions are displayed in Figs. S5 and S6, respectively. The cross section uncertainties show that the localizations of the deformation patches are in general well resolved, while their exact spatial extent is less constrained.

Cross section 1 (Fig. 9a) is comprised of the Swiss molasse basin to the north of the Po plain 153 focal mechanisms projected from 25 km on each side of the profile with depths in the 5–12 km range. Their inversion shows a majority of strike-slip mechanisms, with a pattern of extension localized in the inner part of the chain in the southern Valais area, east of the CPF trace (seismicity cluster and corresponding complex faulting style already described in previous studies; see, e.g. Maurer et al., 1997; Eva et al., 1998; Diehl et al., 2018,

2021). A small extensional zone appears at 10 km depth under the northern Valais seismic zone, encompassed in a major transcurrent signal. These results are consistent with the version obtained at the surface, i.e. surface-projected results. The extension appears to be relatively shallow on this cross section, as it develops from 10 km depth up to the surface.

Interpolated cross section 2 (Fig. 9b) is located more or less along the ECORS profile (Sect. 4.1; Marchant and Stampfli, 1997). It is constrained by 218 focal mechanisms distributed over 25 km on each side of the profile. The focal depths are quite shallow (i.e. approximately 10 km) in the western part of the section and increase significantly eastward at around 140 km along the profile from 10 up to 30 km deep. This section shows two extensional areas, one in the shallow part, corresponding to the Briançonnais arc east of the CPF, and the other around 20 km deep, corresponding to the northern tip of the Piémontais arc beneath the DM massif, separated by an area of strike-slip regime, as shown in Fig. 7b. This section reveals a striking juxtaposition of ex-

tension and compression at 190 km along the profile. This compression pattern lies underneath the Po plain at a depth of 20 to 25 km. The occurrence of this unique compressive pattern appears robust from Figs. S5 and S6, even if the juxtaposition limit between the extensive Piémontais pattern and the compression area seems less constrained.

Cross section 3 (Fig. 9c) runs from the Pelvoux massif (“P”, external zone) to the Po plain. It is made of 302 focal mechanisms up to 20 km away from the profile line, which corresponds to the width of deformation patches seen on the map (Fig. 7b). It also shows a deepening of the seismicity from west to east, from 10 to 30 km. The vertical interpolation gives a quite different view of the extensional pattern compared to the map interpolation. Figure 7b thus shows two extensive patterns separated by a narrow strip of strike-slip strip deformation along the Briançonnais arc. The cross section, however, reveals that this extension is rather continuous at depth, with a shallower strike-slip pattern on the top centred on the CPF. These features appear robust from the standard deviation cross sections (Figs. S5c and S6c). This strike-slip pattern located in the Briançonnais area seems to correspond to a local transcurrent zone in a regional extensional area. In continuity with cross section 2 (Fig. 9b), the compressional zone is located directly next to the extensional area, with a sharp boundary at depth (10–25 km), while the respective shapes of the compressional and extensive patterns are poorly resolved (Figs. S5 and S6).

Cross section 4 (Fig. 9d) runs from the Provence area to the south of the Po plain and regroups 245 focal mechanisms located up to 15 km away from the profile. This profile is designed tighter than the other ones due to the higher heterogeneity in the focal mechanisms at the surface (Fig. 7b). The vertical interpolation is consistent with the map interpolation and reveals that the extensive pattern seen on the Piémontais arc is rather deep (from 12 to 20 km deep) and is surrounded by a predominant strike-slip regime all around, especially at shallower levels. The extensive area located at depth under the Piémontais arc appears robust; however, its lateral extension deep under the Argentera massif and the Po plain seems poorly constrained.

Cross section 5 (Fig. 9e) is drawn along the strike of the belt and runs from Lake Geneva (Chablais area) to the region of Nice. It gathers 1186 focal mechanisms spread over 25 km on each side of the profile. This section aims to investigate the connections between the different extensional patches observed in the map interpolation (see also Fig. S4). It appears that extension is characterized by a depth increasing from ~10 to ~20 km from north to south, while strike-slip remains dominant in the whole upper crust of the northern external zone and in the shallow levels to the south. In this specific section, extension appears as a 200 km strip dipping southward that cuts through external geological units both north and south of the profile. The extent of the deformation patterns is rather well resolved on this cross section. Only the thin lineaments observed in the extensive area be-

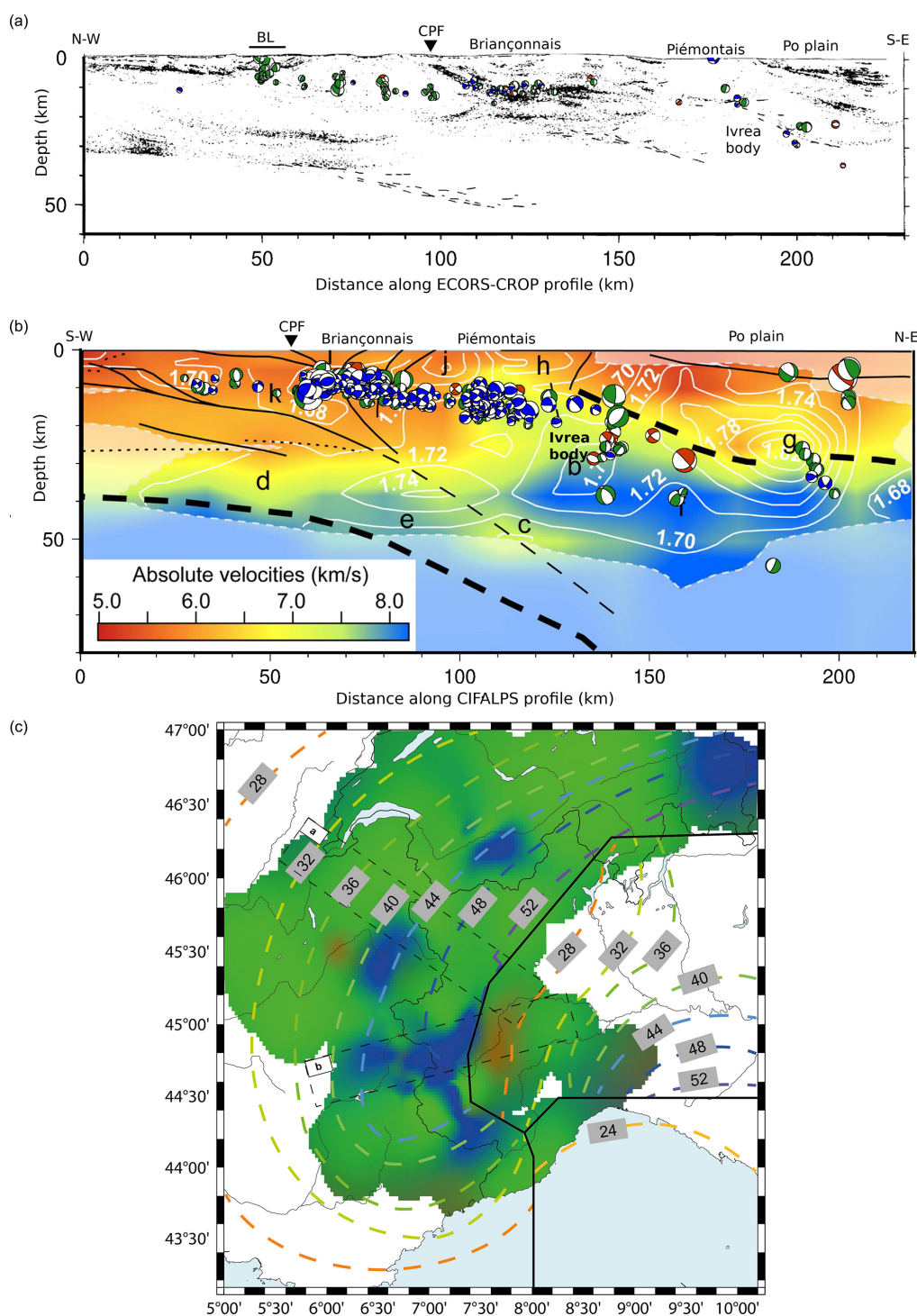
low the CPF and in the surrounding strike-slip areas appear to be artefacts.

These features appear robust from the standard deviation cross sections (Figs. S5c and S6c). This strike-slip pattern located in the Briançonnais area seems to correspond to a local transcurrent zone in a regional extensional area. In continuity with cross section 2 (Fig. 9b), the compressional zone is located directly next to the extensional area, with a sharp boundary at depth (10–25 km), while the respective shapes of the compressional and extensive patterns are poorly resolved (Figs. S5 and S6). Cross section 4 (Fig. 9d) runs from the Provence area to the south of the Po plain and regroups 245 focal mechanisms located up to 15 km away from the profile. This profile is designed tighter than the other ones due to the higher heterogeneity in the focal mechanisms at the surface (Fig. 7b). The vertical interpolation is consistent with the map interpolation and reveals that the extensive pattern seen on the Piémontais arc is rather deep (from 12 to 20 km deep) and is surrounded by predominant strike-slip regime all around, and more specifically at shallower levels. The extensive area located at depth under the Piémontais arc appears robust; however, its lateral extension, deep under the Argentera massif and the Po plain, seems poorly constrained.

## 4 Discussion

### 4.1 Comparative analysis of surficial and deep seismic deformation

The reconstructed maps of deformation styles presented in Sect. 3.3 permit us to address the structural control on the seismicity distribution and its deformation mode. From seismicity maps and focal mechanism distributions, extension first appears continuous along the Briançonnais and Piémontais seismic arcs. However, once interpolated, strike-slip to transpressive regimes are prevailing not only at the periphery of the chain but also at several places intersecting the Briançonnais seismic arc, such as in the northern Briançonnais and Argentera, in association with significant energy release. Thus extension appears rather concentrated in several places along the belt in the southern Valais, in the Briançonnais, and in the Piémontais areas. Cross section views of the focal mechanism distribution on the contrary seem to indicate transverse clusters of seismic events located beneath the Briançonnais and Piémontais arcs and the Po plain (cross sections 2, 3, and 4 of Fig. 9), sometimes undergoing a continuous extensive regime from west to east (cross sections 3 and 4). These discrepancies are due to the vertical integration of all focal mechanisms resulting from the projection to the surface. In particular, it hides the vertical stratification of the tectonic regime, where strike-slip events often occur above the extensive ones. This is well documented by the Piémontais extensive events (cross sections 2 and 4).



**Figure 10.** (a) Cross section of computed focal mechanisms (vertical sections) projected on an ECORS-CROP seismic reflection profile (see projection width in c), modified from Marchant and Stampfli (1997). Green, blue, and red are for strike-slip, normal, and reverse mechanisms, respectively. Labels refer to geological features displayed in Fig. 3. (b) Focal mechanism (vertical sections) cross section projected on a CIFALPS profile (see projection width in c) of local earthquake tomography, modified from Solarino et al. (2018) and colour-coded as in (a). White contours are isolines of equal  $V_p/V_s$ , solid lines represent main tectonic features, and bold letters refer to different regions of the model discussed in Solarino et al. (2018). Thick dashed lines represent European and Adriatic Mohos following Solarino et al. (2018). The Adriatic Moho is deflected west of the Po plain (~ 15 km depth) at the location of the Ivrea body gravimetric anomaly. (c) Contours of Moho depth (in km) from Spada et al. (2013) superposed on the map of deformation style from Fig. 7. The European Moho (to the west), the Adriatic Moho (to the east), and the Ligurian Moho (to the south) are separated by thick black lines. The location of the seismic profiles (a) and (b) are indicated by dashed lines.

The link between these deformation patterns and the structural information is investigated in Fig. 10, where we show the location of our focal mechanisms at depth superposed on top of two geophysical profiles. One profile is based on seismic reflection (ECORS-CROP, Marchant and Stampfli, 1997), and the second profile is based on local earthquake tomography (Solarino et al., 2018). Our focal mechanisms appear to follow the main horizontal reflectors along the ECORS-CROP profile (Fig. 10a), with their depth increasing from west to east. Seismicity appears grouped in several patches of distinct deformation style along these two transverse profiles, especially beneath the Belledonne area and the Briançonnais and Piémontais arcs where the two main extensive patterns described in Sect. 3.3 lie. Both profiles highlight the limits between European and Adriatic upper crust, with a wedge of Adriatic mantle (the so-called Ivrea body, e.g. Lyon-Caen and Molnar, 1989; Paul et al., 2001) located at the boundary between the two crustal entities. Our focal mechanisms are localized in the upper crust. While the depth distribution of the focal mechanisms follows the dip of the European crust (Fig. 10b), the distribution of the style of deformation does not appear controlled by the structure of the European Moho, with both extensive and strike-slip events being imaged on the same sub-horizontal structure. However, a few seismic events are found deeper in the mantle wedge (Malusà et al., 2017), which correspond to the compressive fault plane solutions observed in the Po plain (Fig. 10b). The limit between the Piémontais extensive and the Po compressive patterns thus coincides with the boundary between the European crust and the Adriatic one. This is illustrated by the geometry of the Moho (Spada et al., 2013) on top of our map of interpolated deformation modes (Fig. 10c), where the limit between the European and the Adriatic Moho separates the Piémontais extensive zone from the Po compressive one (Fig. 10c).

#### 4.2 Implications on Alpine geodynamics

In the present study we used state-of-the-art methods plus an innovative statistical approach to provide an updated 3D high-resolution view of the seismic deformation in this mountain belt. The unprecedented resolution of our analysis sheds new light regarding several detailed geodynamical aspects.

The current Alpine stress field and its related deformation mode have been investigated using inversion methods of focal mechanisms since the end of the 1990s (e.g. Baroux et al., 2001; Kastrup et al., 2004; Maurer et al., 1997) with increasing accuracy. Actually, these studies dealt with more or less local or regional areas, and only Delacou et al. (2004) addressed the problem at the scale of the entire Western and Central Alps. All these previous surveys relied on a limited number of focal mechanisms with respect to the present investigation, and they systematically were inverted within zones expected to be homogeneous in terms of deforma-

tion style based on structural criteria. Notwithstanding these limitations, former stress inversions in the Alps have established a first-order contrasted stress field (e.g. Maurer et al., 1997; Baroux et al., 2001; Sue et al., 2002; Delacou et al., 2004; Kastrup et al., 2004; Bauve et al., 2014). It is characterized by roughly orogen-perpendicular extension all along the backbone of the arc, surrounded by a transcurrent stress state at the periphery of the orogeny, locally modulated by a reverse component. These features remain compatible everywhere with a dextral motion along the strike of the belt. One of the main improvements of the present paper is the stress inversion using a grid strategy (Sect. 3.2), which is independent of any a priori zonation. Our new high-resolution imaging of the stress field around the Alpine arc injects important modulations into this first-order distribution. Firstly, transcurrent tectonism appears robust and much more important in the whole Alpine realm than previously thought, in association with significant energy release. This point is very important in terms of geodynamic interpretations and could not be properly imaged by the previous 2D analyses (Delacou et al., 2004). Secondly, we confirm the prevalence of extension in the core of the Alpine arc, but we point out a more complex scheme for the extensional zones (Figs. 7 and 9) in 3D, which appear now as extensional patches embedded within an overall transcurrent field (Fig. 7). These patches are located all along the so-called Briançonnais and Piémontais seismic arcs, but the continuity of the extensional area is no more supported by the inversion, as we retrieved four main zones of extension more or less disconnected one from the other (Fig. 7). The in-depth geometry of the extensional zones is also revealed for the first time by our inversion of the deformation mode (Fig. 9). Thirdly, the direction of the least compressive stress axes in the internal zones (namely the  $\sigma_3$  axes) is almost systematically deflected 30 to 40° clockwise from the orogen-perpendicular extension previously proposed (Sue et al., 2007a; Delacou et al., 2004; Sue et al., 1999; Eva et al., 1997). Moreover, we retrieved fewer and smaller local compressive areas than shown by the previous studies (e.g. Delacou et al., 2004; Eva et al., 1997). The only significant zone of shortening appears to be located in the Po plain. We also found a small zone of compression at the western front (Belledonne zone), but it is poorly constrained. Although some individual reverse focal mechanisms are noticed to the south of the arc (Mercantour and Var regions, Figs. 2 and 3), neither the deformation mode inversion nor the stress inversion pointed out a reliable stable compression in this zone, in contrast to the interpretation of Delacou et al. (2004). This may arise from the lack of data in the Ligurian Sea and surroundings in our dataset (for this specific zone see for instance Béthoux et al., 1992; Larroque et al., 2016). The compressive pattern we obtained in the Po plain is, however, stable and sharply juxtaposed with extension at the limit between Adriatic and European plates.

The contrasting juxtaposition of extension and compression occurs in a region of complex geometry and complex



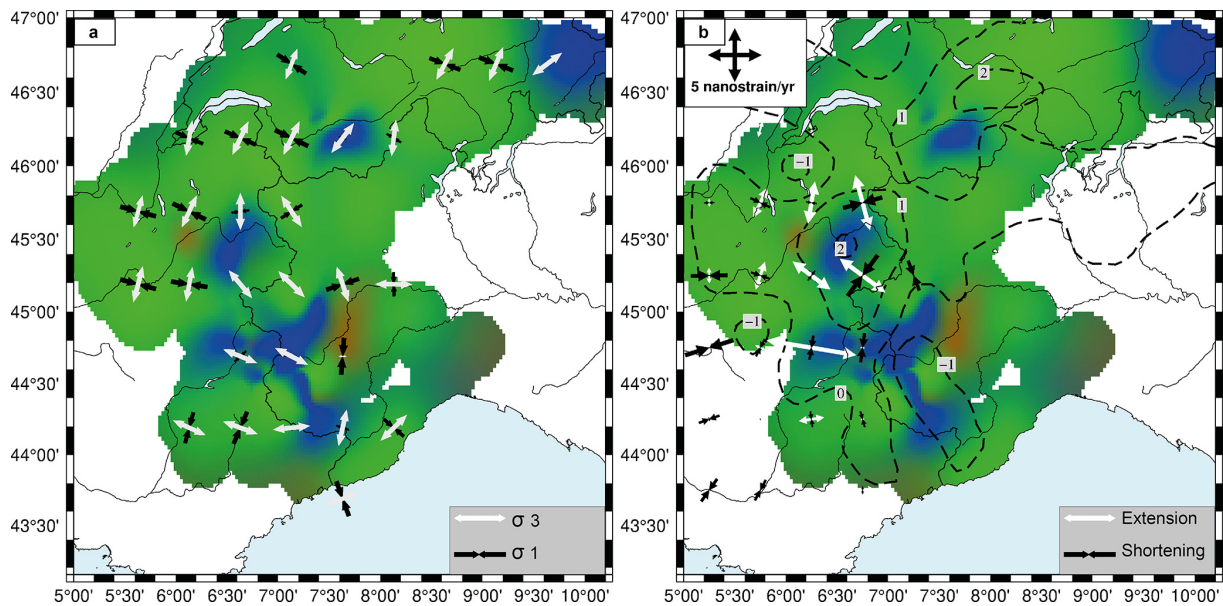
processes related to the Alpine orogeny (plate boundaries, Ivrea body). It has sometimes been interpreted in the literature as a border effect of gravitational collapse of the Western Alpine chain (e.g. Delacou et al., 2005), as well as a marker of indentation resulting from Africa–Eurasia current plate dynamics in other studies (e.g. Eva et al., 2020). In both cases, sharp variations in the stress field are expected. In the case of the gravitational collapse for instance, stresses depend on the spatial derivative of the load, and to some extent this varies like the derivative of the crustal thickness and topography: clearly, these variations occur on short spatial scales. While we cannot decipher which processes are at the origin of this very specific and local pattern, gravitational collapse schemes fail to explain the localized compressive pattern observed at the border of the chain, and indentation by Adria or Corso-Sardinia blocks does not appear to be the main process controlling crustal deformation nowadays in the Western Alps, since a majority of extension and strike-slip mechanisms are found, drawing a self-consistent transcurrent deformation field over the whole Western Alpine region.

Beyond the seismotectonic approach *sensu stricto* (i.e. focal mechanisms analyses), the comparison of the seismotectonic-related deformation with the one mapped using geodesy can still enhance our comprehension of the Alpine geodynamics. The horizontal geodetic deformation in the Alps is well correlated with the seismotectonic one in terms of deformation style and of orientations (Fig. 11; Walpersdorf et al., 2018). In particular, the extensional tectonics observed in the core of the belt are now generally identified by recent GNSS studies (Masson et al., 2019; Mathey et al., 2020; Sánchez et al., 2018; Walpersdorf et al., 2015). However, vertical motions seen by GNSS yield a regional uplift roughly correlated to the Alpine topography in the northern and central part of the Western Alps, possibly up to 1 to 2 mm yr<sup>-1</sup> (e.g. Serpelloni et al., 2013; Nocquet et al., 2016; although the magnitude can be disputed; see Husson et al., 2018). Our precise mapping of the seismic extension compared to GNSS uplift shows that the patterns of extension and uplift are spatially uncorrelated, especially in the southern branch of the Alpine arc (Fig. 11). Only two patterns of extension of our interpolated deformation map (in the northern Briançonnais seismic arc BRN and in the southern Valais VSS) correlate with uplift. The extension located along the Piémontais arc is (in contrast) associated with a zone of subsidence. Therefore, we state that uplift and extension, which were sometimes considered correlated (Champagnac et al., 2007; Vernant et al., 2013), are partially disconnected.

In terms of geodynamics, the question of the processes driving the current deformation of the Alps remains a matter of debate. The prevalence of extension in the core of the belt reinforced mounting evidence of geodetic uplift of the elevated regions of the Western Alps and led to the development of a series of models, alternatively involving intrinsic forces due to crustal and/or lithospheric roots and extrinsic

processes (see Sternai et al., 2019, for a review). Extrinsic processes include the glacial isostatic adjustment (GIA; e.g. Gudmundsson, 1994; Mey et al., 2016; Chéry et al., 2016) and erosion (e.g. Champagnac et al., 2007; Sternai et al., 2012). According to Sternai et al. (2019), together they could explain 50 % to 70 % of the uplift rates observed in the Alps. Besides isostatic adjustment to crustal deformation, intrinsic processes are related to deep dynamics in the Alpine lithosphere and predictions largely rely on the knowledge of the thermo-mechanical properties of deep structures. The current state of the European slab beneath the Western Alps remains a matter of debate to this day. Evidence for both a detached slab (e.g. Lippitsch et al., 2003; Kissling et al., 2006; Diehl et al., 2009; Kästle et al., 2018) or a continuous slab (e.g. Piromallo and Faccenna, 2004; Zhao et al., 2015, 2016b) is claimed between different tomography models. The focal mechanisms derived in this study thus only provide seismic deformation styles up to 35 km, while the debated continuation of the European Moho beneath the Adriatic one is likely deeper than ~60 km. While our results constrain a depth too shallow to help decipher between these two end-member models, we rely on the literature to suggest that a recently (< 5 Myr, e.g. Lippitsch et al., 2003) detached slab, with its detached extent nowadays located beneath the eastern margin of the Western Alps, could induce extension as well as uplift, due to lithospheric rebound processes and/or mantle upwelling related to the sinking into the asthenosphere of more dense lithospheric material (e.g. Sternai et al., 2019). Slab dynamics in particular (see Lippitsch et al., 2003; Zhao et al., 2015; Kästle et al., 2018) can cause transient dynamic topography (e.g. Faccenna and Becker, 2020) or influence exhumation processes (Baran et al., 2014; Fox et al., 2015).

All these mechanisms may, jointly or independently, explain the short-wavelength variations of the seismicity and kinematics. Yet, they cannot account for the robust transcurrent motion that prevails over the entire region. This strain field requires a more global geodynamic cause, and far-field forces need to be invoked. Plate tectonics set the stage for local Alpine tectonics. The anticlockwise rotation of Adria with respect to stable Europe (e.g. Calais et al., 2002; Serpelloni et al., 2005, 2007) largely counterbalances buoyancy forces (Delacou et al., 2005). While a purely plate-related geodynamic model seems discarded by now (D'Agostino et al., 2008; Devoti et al., 2008) due to the evidence of both extension and uplift in many places all along the Western Alpine arc, which cannot be explained by plate kinematics alone, we stress that our observations revive the role of plate motion in interaction with buoyancy forces in an attempt to explain the current Alpine kinematics and seismicity (Fig. 12). Indeed, in addition to the predominance of transcurrent tectonics that we point out at the scale of the whole Western and Central Alps and forelands, we show a deflection of the extension axes in the core of the belt with respect to simple orogen-perpendicular extension. Both the transcurrent stress field at the periphery of the orogen and the de-

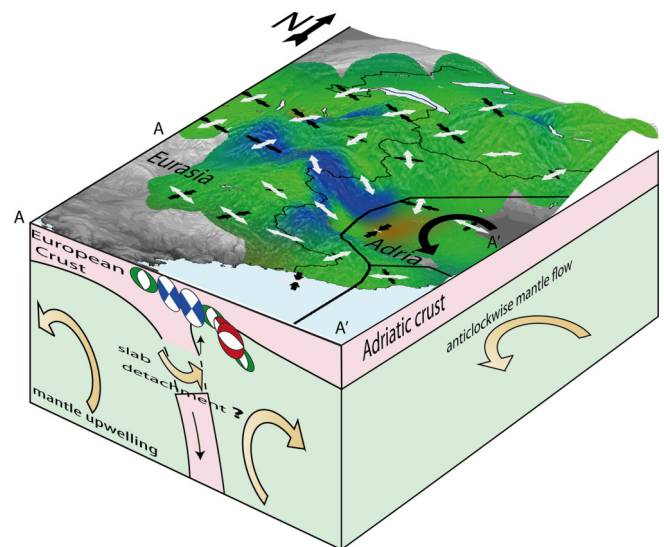


**Figure 11.** (a) Stress field from MSATSI inversion from Fig. 6. (b) Global Navigation Satellite System (GNSS) strain rates from Walpersdorf et al. (2018) showing extension (white arrows) and compression (black arrows). Dashed lines represent contours of vertical velocities (in  $\text{mm yr}^{-1}$ ) from Sternai et al. (2019). In the background of both graphs is the Bayesian interpolation of deformation style from focal mechanisms from Fig. 7.

flection of the extensional direction in the inner zones could be driven by anticlockwise rotation of Adria with respect to Europe. According to this scenario, buoyancy forces set the short-wavelength patterns of extension and compression, while far-field forces control the overall transcurrent field. Their joint effects interact to produce the complex deformation pattern and stress field revealed here (Fig. 12).

## 5 Conclusions

The three-dimensional analysis of the mode and orientation of seismic deformation within the Western Alps provides, for the first time, a spatial resolution without the use of any a priori seismotectonic zonation. The exceptional density of seismic data acquired within the Western Alps for the past 25 years allowed us to derive focal mechanisms for low-magnitude events that were, to date, unavailable. From this new dataset we inferred a continuous seismic deformation field characterized by the deformation style, at the surface and at depth, associated with an up-to-date objective surface stress field. The resulting seismic deformation field is overall consistent with the deformation patterns retrieved by previous seismotectonics studies as well as with the horizontal geodetic observations. At depth, the distribution of computed focal mechanisms matches the main reflectors already unveiled by seismic imaging methods. Our results also highlight new features that could be observed only due to the increased spatial resolution we provided. Most importantly, the probabilistic inversion of focal mechanisms points



**Figure 12.** Interpretative 3D block diagram of the current geodynamics of the Western Alps. The southern front of the diagram represents the interpretative A–A' cross section running from the Pelvoux massif to the Po plain. The main observations are represented as in Fig. 11a. Forces suggested to be involved together to produce the observed seismic deformation field (far-field plate kinematics and buoyancy forces) are represented as solid arrows: Adria anticlockwise rotation is shown as a black arrow, and mantle upwelling and possible slab detachment are shown as gold arrows.

out a robust predominant strike-slip regime at the regional scale, with dextral motion consistent with the strike of the belt and robust discontinuous extensive patches in the core of the belt, while restricting robust compression to the Po plain and western Alpine front. The pattern of deformation at depth raises the issue of the continuity of the extension pattern, as patches of extension appear clustered along the two main seismic arcs. Extensional directions are in good agreement with long-term geodetic strain rates and appear robustly oblique to the arc from three inversion methods. The high spatial resolution seismotectonic field sheds a new light on the current dynamics of the Alpine orogen, wherein far-field plate tectonics, linked to the anticlockwise rotation of Adria with respect to Europe, imposes a global transcurrent regime, while buoyancy forces explain the short wavelength variations of extension and marginal compression in the core of the belt.

*Data availability.* All the focal mechanisms computed for this study and the corresponding dataset are available in the Supplement.

*Supplement.* Supplementary\_revised2.pdf contains Figs. S1 to S8 and Tables S1 to S2. liste\_meca.txt contains Table S1 in digital format. computedFM\_HASHformat.inp contains the data used to compute the focal mechanisms. The supplement related to this article is available online at: <https://doi.org/10.5194/se-12-1661-2021-supplement>.

*Author contributions.* BP relocated the dataset. MM and BP computed the focal mechanisms. MM, CS, and EH carried the formal analysis out. CP and TB developed the surface reconstruction algorithms and codes. CS, AW, SB, and LH administered and supervised the project. All authors analysed, discussed, and validated the results. MM prepared the manuscript with contributions from all co-authors.

*Competing interests.* The authors declare that they have no conflict of interest.

*Disclaimer.* Publisher's note: Copernicus Publications remains neutral with regard to jurisdictional claims in published maps and institutional affiliations.

*Special issue statement.* This article is part of the special issue "New insights into the tectonic evolution of the Alps and the adjacent orogens". It is not associated with a conference.

*Acknowledgements.* This work was funded by both the IRSN (Institut de Radioprotection et de Sûreté Nucléaire) and the LabEx OSUG@2020 (Investissement d'avenir – ANR10LABX56).

The authors thank the editor and two anonymous reviewers for their help in improving the manuscript. The authors would like to thank the Sismalp team for maintaining the regional seismic observation network. This work contributes to an effort toward the valorization of long-term seismic and geodetic observations in the framework of the RESIF-EPOS National Research Infrastructure (Réseau Sismologique et géodésique Français, <https://doi.org/10.15778/RESIF.FR>, RESIF, 1995). This work was only possible thanks to the operators of the following networks: RESIF (FR, <https://doi.org/10.15778/RESIF.FR>, RESIF, 1995), RSNI (GU, <https://doi.org/10.7914/SN/GU>, University of Genoa, 1967), SED (CH, <https://doi.org/10.12686/sed/networks/ch>, SED, 1983), and CIFALPS (YP, (<https://doi.org/10.15778/RESIF.YP2012>, Zhao et al., 2016a).

*Financial support.* This research has been supported by the Institut de Radioprotection et de Sûreté Nucléaire (grant no. ANR10LABX56).

*Review statement.* This paper was edited by Giancarlo Molli and reviewed by two anonymous referees.

## References

- Alvarez-Gómez, J. A.: FMC – Earthquake focal mechanisms data management, cluster and classification, *SoftwareX*, 9, 299–307, <https://doi.org/10.1016/j.softx.2019.03.008>, 2019.
- Baran, R., Friedrich, A. M., and Schlunegger, F.: The late Miocene to Holocene erosion pattern of the Alpine foreland basin reflects Eurasian slab unloading beneath the western Alps rather than global climate change, *Lithosphere*, 6, 124–131, 2014.
- Baroux, E., Béthoux, N., and Bellier, O.: Analyses of the stress field in southeastern France from earthquake focal mechanisms, *Geophys. J. Int.*, 145, 336–348, <https://doi.org/10.1046/j.1365-246x.2001.01362.x>, 2001.
- Bauve, V., Plateaux, R., Rolland, Y., Sanchez, G., Bethoux, N., Delouis, B., and Darnault, R.: Long-lasting transcurrent tectonics in SW Alps evidenced by Neogene to present-day stress fields, *Tectonophysics*, 621, 85–100, <https://doi.org/10.1016/j.tecto.2014.02.006>, 2014.
- Bertrand, A. and Sue, C.: Reconciling late faulting over the whole Alpine belt: from structural analysis to geochronological constraints, *Swiss J. Geosci.*, 110, 565–580, 2017.
- Béthoux, N., Fréchet, J., Guyoton, F., Thouvenot, F., Cattaneo, M., Eva, C., Nicolas, M., and Granet, M.: A closing Ligurian Sea?, *Pure Appl. Geophys.*, 139, 179–194, <https://doi.org/10.1007/BF00876326>, 1992.
- Bilau, A., Rolland, Y., Schwartz, S., Godeau, N., Guihou, A., Deschamps, P., Brigaud, B., Noret, A., Dumont, T., and Gautheron, C.: Extensional reactivation of the Penninic frontal thrust 3 Myr ago as evidenced by U–Pb dating on calcite in fault zone cataclasis, *Solid Earth*, 12, 237–251, <https://doi.org/10.5194/se-12-237-2021>, 2021.
- Bodin, T., Salmon, M., Kennett, B. L. N., and Sambridge, M.: Probabilistic surface reconstruction from multiple data sets: An ex-

- ample for the Australian Moho, *J. Geophys. Res.-Sol. Ea.*, 117, B10307, <https://doi.org/10.1029/2012JB009547>, 2012.
- Calais, E., Nocquet, J.-M., Jouanne, F., and Tardy, M.: Current strain regime in the Western Alps from continuous Global Positioning System measurements, 1996–2001, *Geology*, 30, 651–654, [https://doi.org/10.1130/0091-7613\(2002\)030<0651:CSRITW>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1130/0091-7613(2002)030<0651:CSRITW>2.0.CO;2), 2002.
- Cara, M., Cansi, Y., Schlupp, A., Arroucau, P., Béthoux, N., Beucier, E., Bruno, S., Calvet, M., Chevrot, S., Deboissy, A., Delouis, B., Denieul, M., Deschamps, A., Doubre, C., Fréchet, J., Godey, S., Golle, O., Grunberg, M., Guilbert, J., Haugmard, M., Jenatton, L., Lambotte, S., Leobal, D., Maron, C., Mendel, V., Merrer, S., Macquet, M., Mignan, A., Mocquet, A., Nicolas, M., Perrot, J., Potin, B., Sanchez, O., Sautoire, J.-P., Sèbe, O., Sylvander, M., Thouvenot, F., Woerd, J. V. D., and Woerd, K. V. D.: SI-Hex: a new catalogue of instrumental seismicity for metropolitan France, *Bull. Société Géologique Fr.*, 186, 3–19, <https://doi.org/10.2113/gssgfbull.186.1.3>, 2015.
- Cauzzi, C. and Clinton, J.: A high- and low-noise model for high-quality strong-motion accelerometer stations, *Earthq. Spectra*, 29, 85–102, <https://doi.org/10.1193/1.4000107>, 2013.
- Champagnac, J. D., Sue, C., Delacou, B., Tricart, P., Allanic, C., and Burkhard, M.: Miocene lateral extrusion in the inner western Alps revealed by dynamic fault analysis, *Tectonics*, 25, TC3014, <https://doi.org/10.1029/2004TC001779>, 2006.
- Champagnac, J. D., Molnar, P., Anderson, R. S., Sue, C., and Delacou, B.: Quaternary erosion-induced isostatic rebound in the western Alps, *Geology*, 35, 195–198, <https://doi.org/10.1130/G23053A.1>, 2007.
- Champagnac, J.-D., Molnar, P., Sue, C., and Herman, F.: Tectonics, climate, and mountain topography, *J. Geophys. Res.-Sol. Ea.*, 117, B02403, <https://doi.org/10.1029/2011JB008348>, 2012.
- Chéry, J., Genti, M., and Vernant, P.: Ice cap melting and low-viscosity crustal root explain the narrow geodetic uplift of the Western Alps, *Geophys. Res. Lett.*, 43, 3193–3200, <https://doi.org/10.1002/2016GL067821>, 2016.
- Choblet, G., Husson, L., and Bodin, T.: Probabilistic surface reconstruction of coastal sea level rise during the twentieth century, *J. Geophys. Res.-Sol. Ea.*, 119, 9206–9236, 2014.
- Coward, M. and Dietrich, D.: Alpine tectonics – an overview, *Geol. Soc. Lond. Spec. Publ.*, 45, 1–29, 1989.
- D’Agostino, N., Avallone, A., Cheloni, D., D’Anastasio, E., Mantenuto, S., and Selvaggi, G.: Active tectonics of the Adriatic region from GPS and earthquake slip vectors, *J. Geophys. Res.-Sol. Ea.*, 113, B12413, <https://doi.org/10.1029/2008JB005860>, 2008.
- D’Amico, S.: Moment tensor solutions: A useful tool for seismotectonics, Springer, Cham, Switzerland, 2018.
- Delacou, B., Sue, C., Champagnac, J.-D., and Burkhard, M.: Present-day geodynamics in the bend of the western and central Alps as constrained by earthquake analysis, *Geophys. J. Int.*, 158, 753–774, <https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.2004.02320.x>, 2004.
- Delacou, B., Sue, C., Champagnac, J.-D., and Burkhard, M.: Origin of the current stress field in the western/central Alps: role of gravitational re-equilibration constrained by numerical modelling, *Geol. Soc. Lond. Spec. Publ.*, 243, 295–310, 2005.
- Devoti, R., Riguzzi, F., Cuffaro, M., and Doglioni, C.: New GPS constraints on the kinematics of the Apennines subduction, *Earth Planet. Sci. Lett.*, 273, 163–174, <https://doi.org/10.1016/j.epsl.2008.06.031>, 2008.
- Diehl, T., Husen, S., Kissling, E., and Deichmann, N.: High-resolution 3-DP-wave model of the Alpine crust, *Geophys. J. Int.*, 179, 1133–1147, 2009.
- Diehl, T., Clinton, J., Deichmann, N., Cauzzi, C., Kästli, P., Kraft, T., Molinari, I., Böse, M., Michel, C., Hobiger, M., Haslinger, F., Fäh, D., and Wiemer, S.: Earthquakes in Switzerland and surrounding regions during 2015 and 2016, *Swiss J. Geosci.*, 111, 221–244, 2018.
- Diehl, T., Clinton, J., Cauzzi, C., Kraft, T., Kästli, P., Deichmann, N., Massin, F., Grigoli, F., Molinari, I., Böse, M., Hobiger, M., Haslinger, F., Fäh, D., and Wiemer, S.: Earthquakes in Switzerland and surrounding regions during 2017 and 2018, *Swiss J. Geosci.*, 114, 1–29, 2021.
- Eva, E., Solarino, S., Eva, C., and Neri, G.: Stress tensor orientation derived from fault plane solutions in the southwestern Alps, *J. Geophys. Res.-Sol. Ea.*, 102, 8171–8185, <https://doi.org/10.1029/96JB02725>, 1997.
- Eva, E., Pastore, S., and Deichmann, N.: Evidence for ongoing extensional deformation in the western Swiss Alps and thrust-faulting in the southwestern Alpine foreland, *J. Geodyn.*, 26, 27–43, [https://doi.org/10.1016/S0264-3707\(97\)00022-7](https://doi.org/10.1016/S0264-3707(97)00022-7), 1998.
- Eva, E., Malusà, M., and Solarino, S.: Seismotectonics at the transition between opposite-dipping slabs (western Alpine region), *Tectonics*, 39, e2020TC006086, <https://doi.org/10.1029/2020TC006086>, 2020.
- Faccenna, C. and Becker, T. W.: Topographic expressions of mantle dynamics in the Mediterranean, *Earth-Sci. Rev.*, 209, 103327, <https://doi.org/10.1016/j.earscirev.2020.103327>, 2020.
- Fox, M., Herman, F., Kissling, E., and Willett, S. D.: Rapid exhumation in the Western Alps driven by slab detachment and glacial erosion, *Geology*, 43, 379–382, 2015.
- Frohlich, C.: Triangle diagrams: ternary graphs to display similarity and diversity of earthquake focal mechanisms, *Phys. Earth Planet. Inter.*, 75, 193–198, 1992.
- Gephart, J. W.: FMSI: A fortran program for inverting fault/slickenside and earthquake focal mechanism data to obtain the regional stress tensor, *Comput. Geosci.*, 16, 953–989, [https://doi.org/10.1016/0098-3004\(90\)90105-3](https://doi.org/10.1016/0098-3004(90)90105-3), 1990.
- Gudmundsson, G.: An order-of-magnitude estimate of the current uplift-rates in Switzerland caused by the Würm Alpine deglaciation, *Eclogae Geol. Helv.*, 87, 545–557, 1994.
- Handy, M. R., M. Schmid, S., Bousquet, R., Kissling, E., and Bernoulli, D.: Reconciling plate-tectonic reconstructions of Alpine Tethys with the geological–geophysical record of spreading and subduction in the Alps, *Earth-Sci. Rev.*, 102, 121–158, <https://doi.org/10.1016/j.earscirev.2010.06.002>, 2010.
- Hanks, T. C. and Kanamori, H.: A moment magnitude scale, *J. Geophys. Res.-Sol. Ea.*, 84, 2348–2350, <https://doi.org/10.1029/JB084iB05p02348>, 1979.
- Hardebeck, J. L. and Hauksson, E.: Stress Orientations Obtained from Earthquake Focal Mechanisms: What Are Appropriate Uncertainty Estimates?, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, 91, 250–262, <https://doi.org/10.1785/0120000032>, 2001.
- Hardebeck, J. L. and Michael, A. J.: Damped regional-scale stress inversions: Methodology and examples for southern California and the Coalinga aftershock sequence, *J. Geophys. Res.-Sol. Ea.*, 111, B11310, <https://doi.org/10.1029/2005JB004144>, 2006.

- Hardebeck, J. L. and Shearer, P. M.: A New Method for Determining First-Motion Focal Mechanisms, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, 92, 2264–2276, <https://doi.org/10.1785/0120010200>, 2002.
- Hawkins, R., Husson, L., Choblet, G., Bodin, T., and Pfeffer, J.: Virtual tide gauges for predicting relative sea level rise, *J. Geophys. Res.-Sol. Ea.*, 124, 13367–13391, 2019a.
- Hawkins, R., Bodin, T., Sambridge, M., Choblet, G., and Husson, L.: Trans-dimensional surface reconstruction with different classes of parameterization, *Geochem. Geophys. Geosy.*, 20, 505–529, 2019b.
- Husson, L., Bodin, T., Spada, G., Choblet, G., and Kreemer, C.: Bayesian surface reconstruction of geodetic uplift rates: Mapping the global fingerprint of Glacial Isostatic Adjustment, *J. Geodyn.*, 122, 25–40, <https://doi.org/10.1016/j.jog.2018.10.002>, 2018.
- Kästle, E. D., El-Sharkawy, A., Boschi, L., Meier, T., Rosenberg, C., Bellahsen, N., Cristiano, L., and Weidle, C.: Surface Wave Tomography of the Alps Using Ambient-Noise and Earthquake Phase Velocity Measurements, *J. Geophys. Res.-Sol. Ea.*, 123, 1770–1792, <https://doi.org/10.1002/2017JB014698>, 2018.
- Kastrup, U., Zoback, M. L., Deichmann, N., Evans, K. F., Giardini, D., and Michael, A. J.: Stress field variations in the Swiss Alps and the northern Alpine foreland derived from inversion of fault plane solutions, *J. Geophys. Res.-Sol. Ea.*, 109, B01402, <https://doi.org/10.1029/2003JB002550>, 2004.
- Kissling, E., Schmid, S. M., Lippitsch, R., Ansorge, J., and Fügenschuh, B.: Lithosphere structure and tectonic evolution of the Alpine arc: new evidence from high-resolution teleseismic tomography, *Geological Society, London, Memoirs*, 32, 129–145, 2006.
- Kostrov, V. V.: Seismic moment and energy of earthquakes, and seismic flow of rock, *Izv. Acad. Sci. USSR Phys. Solid Earth Engl. Transl.*, 1, 23–44, 1974.
- Larroque, C., Delouis, B., Sage, F., Régner, M., Béthoux, N., Courboulex, F., and Deschamps, A.: The sequence of moderate-size earthquakes at the junction of the Ligurian basin and the Corsica margin (western Mediterranean): The initiation of an active deformation zone revealed?, *Tectonophysics*, 676, 135–147, <https://doi.org/10.1016/j.tecto.2016.03.027>, 2016.
- Laurendeau, A., Clement, C., and Scotti, O.: A unified  $M_w$ -based earthquake catalog for metropolitan France consistent with European catalogs, Montréal, available at: <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02635592> (last access: 16 August 2020), 2019.
- Lippitsch, R., Kissling, E., and Ansorge, J.: Upper mantle structure beneath the Alpine orogen from high-resolution teleseismic tomography, *J. Geophys. Res.-Sol. Ea.*, 108, 2376, <https://doi.org/10.1029/2002JB002016>, 2003.
- Lund, B. and Townend, J.: Calculating horizontal stress orientations with full or partial knowledge of the tectonic stress tensor, *Geophys. J. Int.*, 170, 1328–1335, <https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.2007.03468.x>, 2007.
- Lyon-Caen, H. and Molnar, P.: Constraints on the deep structure and dynamic processes beneath the Alps and adjacent regions from an analysis of gravity anomalies, *Geophys. J. Int.*, 99, 19–32, 1989.
- Malinverno, A. and Briggs, V. A.: Expanded uncertainty quantification in inverse problems: Hierarchical Bayes and empirical Bayes, *Geophysics*, 69, 1005–1016, 2004.
- Malusà, M. G., Zhao, L., Eva, E., Solarino, S., Paul, A., Guillot, S., Schwartz, S., Dumont, T., Aubert, C., Salimbeni, S., Pondrelli, S., Wang, Q., and Zhu, R.: Earthquakes in the western Alpine mantle wedge, *Gondwana Res.*, 44, 89–95, <https://doi.org/10.1016/j.gr.2016.11.012>, 2017.
- Marchant, R. H. and Stampfli, G. M.: Subduction of continental crust in the Western Alps, *Tectonophysics*, 269, 217–235, [https://doi.org/10.1016/S0040-1951\(96\)00170-9](https://doi.org/10.1016/S0040-1951(96)00170-9), 1997.
- Martínez-Garzón, P., Kwiatak, G., Ickrath, M., and Bohnhoff, M.: MSATSI: A MATLAB Package for Stress Inversion Combining Solid Classic Methodology, a New Simplified User-Handling, and a Visualization Tool, *Seismol. Res. Lett.*, 85, 896–904, <https://doi.org/10.1785/0220130189>, 2014.
- Masson, C., Mazzotti, S., Vernant, P., and Doerflinger, E.: Extracting small deformation beyond individual station precision from dense Global Navigation Satellite System (GNSS) networks in France and western Europe, *Solid Earth*, 10, 1905–1920, <https://doi.org/10.5194/se-10-1905-2019>, 2019.
- Mathey, M., Walpersdorf, A., Sue, C., Baize, S., and Deprez, A.: Seismogenic potential of the High Durance Fault constrained by 20 yr of GNSS measurements in the Western European Alps, *Geophys. J. Int.*, 222, 2136–2146, <https://doi.org/10.1093/gji/ggaa292>, 2020.
- Maurer, H. R., Burkhard, M., Deichmann, N., and Green, A. G.: Active tectonism in the central Alps: contrasting stress regimes north and south of the Rhone Valley, *Terra Nova*, 9, 91–94, <https://doi.org/10.1111/j.1365-3121.1997.tb00010.x>, 1997.
- Mazzotti, S., Jomard, H., and Masson, F.: Processes and deformation rates generating seismicity in metropolitan France and continuous Western Europe, *BSGF – Earth Sci. Bull.*, 191, 19, <https://doi.org/10.1051/bsgf/2020019>, 2020.
- Mey, J., Scherler, D., Wickert, A. D., Egholm, D. L., Tesauero, M., Schildgen, T. F., and Strecker, M. R.: Glacial isostatic uplift of the European Alps, *Nat. Commun.*, 7, 13382, <https://doi.org/10.1038/ncomms13382>, 2016.
- Nocquet, J.-M. and Calais, E.: Geodetic Measurements of Crustal Deformation in the Western Mediterranean and Europe, *Pure Appl. Geophys.*, 161, 661–681, <https://doi.org/10.1007/s00024-003-2468-z>, 2004.
- Nocquet, J.-M., Sue, C., Walpersdorf, A., Tran, T., Lenôtre, N., Vernant, P., Cushing, M., Jouanne, F., Masson, F., Baize, S., Chéry, J., and van der Beek, P. A.: Present-day uplift of the western Alps, *Sci. Rep.*, 6, 28404, <https://doi.org/10.1038/srep28404>, 2016.
- Paul, A., Cattaneo, M., Thouvenot, F., Spallarossa, D., Béthoux, N., and Fréchet, J.: A three-dimensional crustal velocity model of the southwestern Alps from local earthquake tomography, *J. Geophys. Res.-Sol. Ea.*, 106, 19367–19389, <https://doi.org/10.1029/2001JB000388>, 2001.
- Piomallo, C. and Faccenna, C.: How deep can we find the traces of Alpine subduction?, *Geophys. Res. Lett.*, 31, L06605, <https://doi.org/10.1029/2003GL019288>, 2004.
- Potin, B.: Les Alpes occidentales: tomographie, localisation de séismes et topographie du Moho, thesis, Grenoble Alpes, 1 July, available at: <http://www.theses.fr/2016GREAU022> (last access: 27 February 2020), 2016.
- RESIF: RESIF-RLBP French Broad-band network, RESIF-RAP strong motion network and other seismic stations in metropolitan France [data set], RESIF – Réseau Sismologique et géodésique Français, <https://doi.org/10.15778/RESIF.FR>, 1995.

- Sánchez, L., Völksen, C., Sokolov, A., Arenz, H., and Seitz, F.: Present-day surface deformation of the Alpine region inferred from geodetic techniques, *Earth Syst. Sci. Data*, 10, 1503–1526, <https://doi.org/10.5194/essd-10-1503-2018>, 2018.
- Scafidi, D., Barani, S., De Ferrari, R., Ferretti, G., Pasta, M., Pavan, M., Spallarossa, D., and Turino, C.: Seismicity of Northwestern Italy during the last 30 years, *J. Seismol.*, 19, 201–218, 2015.
- Serpelloni, E., Anzidei, M., Baldi, P., Casula, G., and Galvani, A.: Crustal velocity and strain-rate fields in Italy and surrounding regions: new results from the analysis of permanent and non-permanent GPS networks, *Geophys. J. Int.*, 161, 861–880, <https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.2005.02618.x>, 2005.
- Serpelloni, E., Vannucci, G., Pondrelli, S., Argnani, A., Casula, G., Anzidei, M., Baldi, P., and Gasperini, P.: Kinematics of the Western Africa-Eurasia plate boundary from focal mechanisms and GPS data, *Geophys. J. Int.*, 169, 1180–1200, <https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.2007.03367.x>, 2007.
- Serpelloni, E., Faccenna, C., Spada, G., Dong, D., and Williams, S. D. P.: Vertical GPS ground motion rates in the Euro-Mediterranean region: New evidence of velocity gradients at different spatial scales along the Nubia-Eurasia plate boundary, *J. Geophys. Res.-Sol. Ea.*, 118, 6003–6024, <https://doi.org/10.1002/2013JB010102>, 2013.
- Smith, W. H. F. and Wessel, P.: Gridding with continuous curvature splines in tension, *Geophysics*, 55, 293–305, 1990.
- Solarino, S., Malusà, M. G., Eva, E., Guillot, S., Paul, A., Schwartz, S., Zhao, L., Aubert, C., Dumont, T., Pondrelli, S., Salimbeni, S., Wang, Q., Xu, X., Zheng, T., and Zhu, R.: Mantle wedge exhumation beneath the Dora-Maira (U)HP dome unravelled by local earthquake tomography (Western Alps), *Lithos*, 296–299, 623–636, <https://doi.org/10.1016/j.lithos.2017.11.035>, 2018.
- Spada, M., Bianchi, I., Kissling, E., Agostinetti, N. P., and Wiemer, S.: Combining controlled-source seismology and receiver function information to derive 3-D Moho topography for Italy, *Geophys. J. Int.*, 194, 1050–1068, <https://doi.org/10.1093/gji/ggt148>, 2013.
- Stampfli, G., Mosar, J., Marquer, D., Marchant, R., Baudin, T., and Borel, G.: Subduction and obduction processes in the Swiss Alps, *Tectonophysics*, 296, 159–204, 1998.
- Sternaï, P., Herman, F., Champagnac, J.-D., Fox, M., Salcher, B., and Willett, S. D.: Pre-glacial topography of the European Alps, *Geology*, 40, 1067–1070, <https://doi.org/10.1130/G33540.1>, 2012.
- Sternaï, P., Sue, C., Husson, L., Serpelloni, E., Becker, T. W., Willett, S. D., Faccenna, C., Di Giulio, A., Spada, G., Jolivet, L., Valla, P., Petit, C., Nocquet, J.-M., Walpersdorf, A., and Castellort, S.: Present-day uplift of the European Alps: Evaluating mechanisms and models of their relative contributions, *Earth-Sci. Rev.*, 190, 589–604, <https://doi.org/10.1016/j.earscirev.2019.01.005>, 2019.
- Sue, C. and Tricart, P.: Late alpine brittle extension above the Frontal Pennine Thrust near Briançon, western Alps, *Eclogae Geol. Helv.*, 92, 171–181, 1999.
- Sue, C. and Tricart, P.: Neogene to ongoing normal faulting in the inner western Alps: A major evolution of the late alpine tectonics, *Tectonics*, 22, 1050, <https://doi.org/10.1029/2002TC001426>, 2003.
- Sue, C., Thouvenot, F., Fréchet, J., and Tricart, P.: Widespread extension in the core of the western Alps revealed by earthquake analysis, *J. Geophys. Res.-Sol. Ea.*, 104, 25611–25622, <https://doi.org/10.1029/1999JB900249>, 1999.
- Sue, C., Grasso, J. R., Lahaie, F., and Amitrano, D.: Mechanical behavior of western alpine structures inferred from statistical analysis of seismicity, *Geophys. Res. Lett.*, 29, 65-1-65-4, <https://doi.org/10.1029/2001GL014050>, 2002.
- Sue, C., Delacou, B., Champagnac, J.-D., Allanic, C., and Burkhard, M.: Aseismic deformation in the Alps: GPS vs. seismic strain quantification, *Terra Nova*, 19, 182–188, <https://doi.org/10.1111/j.1365-3121.2007.00732.x>, 2007a.
- Sue, C., Delacou, B., Champagnac, J.-D., Allanic, C., Tricart, P., and Burkhard, M.: Extensional neotectonics around the bend of the Western/Central Alps: an overview, *Int. J. Earth Sci.*, 96, 1101–1129, <https://doi.org/10.1007/s00531-007-0181-3>, 2007b.
- Swiss Seismological Service (SED): National Seismic Networks of Switzerland, ETH Zürich, <https://doi.org/10.12686/sed/networks/ch>, 1983.
- Thouvenot, F. and Fréchet, J.: Seismicity Along The Northwestern Edge Of The Adria Microplate, in: *The Adria Microplate: GPS Geodesy, Tectonics and Hazards*, edited by: Pinter, N., Gyula, G., Weber, J., Stein, S., and Medak, D., Springer Netherlands, Dordrecht, the Netherlands, 335–349, 2006.
- Thouvenot, F., Fréchet, J., Guyoton, F., Guiguet, R., and Jenatton, L.: Sismalp: an automatic phone-interrogated seismic network for the western Alps, *Cah. Cent. Eur. Géodynamique Séismologie*, 1, p. 10, 1990.
- Thouvenot, F., Fréchet, J., Jenatton, L., and Gamond, J.-F.: The Belledonne Border Fault: identification of an active seismic strike-slip fault in the western Alps, *Geophys. J. Int.*, 155, 174–192, <https://doi.org/10.1046/j.1365-246X.2003.02033.x>, 2003.
- Thouvenot, F., Jenatton, L., and Sanchez, O.: Région Alpes: Contribution OSUG, OSUG observatory, Grenoble, France, report, Annexe A–V, 94–123, 2013.
- Tricart, P.: From passive margin to continental collision; a tectonic scenario for the Western Alps, *Am. J. Sci.*, 284, 97–120, 1984.
- University of Genoa: Regional Seismic Network of North Western Italy, International Federation of Digital Seismograph Networks [data set], <https://doi.org/10.7914/SN/GU>, 1967.
- Vavryčuk, V.: Iterative joint inversion for stress and fault orientations from focal mechanisms, *Geophys. J. Int.*, 199, 69–77, <https://doi.org/10.1093/gji/ggu224>, 2014.
- Vernant, P., Hivert, F., Chéry, J., Steer, P., Cattin, R., and Rigo, A.: Erosion-induced isostatic rebound triggers extension in low convergent mountain ranges, *Geology*, 41, 467–470, <https://doi.org/10.1130/G33942.1>, 2013.
- Walpersdorf, A., Sue, C., Baize, S., Cotte, N., Bascou, P., Beauval, C., Collard, P., Daniel, G., Dyer, H., Grasso, J.-R., Haute-coeur, O., Helmstetter, A., Hok, S., Langlais, M., Menard, G., Mousavi, Z., Ponton, F., Rizza, M., Rolland, L., Souami, D., Thirard, L., Vaudey, P., Voisin, C., and Martinod, J.: Coherence between geodetic and seismic deformation in a context of slow tectonic activity (SW Alps, France), *J. Geodyn.*, 85, 58–65, <https://doi.org/10.1016/j.jog.2015.02.001>, 2015.
- Walpersdorf, A., Pinget, L., Vernant, P., Sue, C., Deprez, A., and the RENAG team: Does Long-Term GPS in the Western Alps Finally Confirm Earthquake Mechanisms?, *Tectonics*, 37, 3721–3737, <https://doi.org/10.1029/2018TC005054>, 2018.
- Zhao, L., Paul, A., Solarino, S., Aubert, C., Zheng, T., Salimbeni, S., Guillot, S., Wang, Q., Ai, Y., Zangelmi, P., He, Y., Lainé, R.,

- Chen, L., Xu, W., Lin, W., Margheriti, L., Pondrelli, S., and Zhu, R.: First results of a new seismic profile across the southwestern Alps, CIFALPS, 15, EGU General Assembly, 7–12 April 2013, Vienna, Austria, EGU2013-6436, 2013.
- Zhao, L., Paul, A., Guillot, S., Solarino, S., Malusà, M. G., Zheng, T., Aubert, C., Salimbeni, S., Dumont, T., Schwartz, S., Zhu, R., and Wang, Q.: First seismic evidence for continental subduction beneath the Western Alps, *Geology*, 43, 815–818, <https://doi.org/10.1130/G36833.1>, 2015.
- Zhao, L., Paul, A., Solarino, S., and RESIF: Seismic network YP: CIFALPS temporary experiment (China-Italy-France Alps seismic transect) [data set], RESIF – Réseau Sismologique et géodésique Français, <https://doi.org/10.15778/RESIF.YP2012>, 2016a.
- Zhao, L., Paul, A., Malusà, M. G., Xu, X., Zheng, T., Solarino, S., Guillot, S., Schwartz, S., Dumont, T., Salimbeni, S., Aubert, C., Pondrelli, S., Wang, Q., and Zhu, R.: Continuity of the Alpine slab unraveled by high-resolution P wave tomography, *J. Geophys. Res.-Sol. Ea.*, 121, 8720–8737, 2016b.







## Annexe B

# Transport parallèle de vecteur pour l'inversion sur une surface 2D sphérique

On dispose d'un ensemble de vitesses discrètes tangente à la surface d'une sphère, reliés entre eux de manière à définir une triangulation de Delaunay sphérique. Les sommets des triangles sont reliés entre eux le long des géodésiques, c'est-à-dire le long des grands cercles dans l'approximation de la Terre sphérique.

On souhaite interpoler la vitesse surfacique en tout point de la sphère de manière à ce qu'elle réponde aux critères suivants :

1. Le champ de vitesse interpolé doit être au moins  $C^0$  et  $C^1_{\text{parpartie}}$  et de dérivée non-nulle, afin de permettre le calcul du tenseur du taux de déformation sur toute la surface de la sphère.
2. La vitesse au sein d'un triangle ne doit dépendre que des vitesses aux sommets de ce triangle.

Une solution est de réaliser une interpolation linéaire au sein de chaque triangle, de manière analogue à ce que nous avons effectué en 2D cartésien. Nous considérons donc tout point comme le barycentre pondéré des sommets du triangle dans lequel il se trouve, et cette pondération appliquée aux vitesses des sommets détermine la vitesse du point. Cependant, il n'est pas possible d'exprimer directement la relation barycentrique dans la mesure où les vecteurs émanant de chaque sommet doivent être comparés en tenant compte de la courbure de l'espace considéré. Pour cela, on emploie le transport parallèle de vecteurs : pour évaluer un vecteur originant d'un point A en un point B, le point d'application du vecteur est déplacé le long de la géodésique (chemin le plus court) reliant A à B de telle façon que le module de ce vecteur et l'angle qu'il fait avec cette géodésique restent constants.

Cependant, l'expression analytique du transport parallèle est en pratique particulièrement complexe à déterminer. Pour réaliser ce transport parallèle, on utilise une combinaison de rotations du repère sphérique avec un transport parallèle effectué le long de l'équateur.

Considérons un point P quelconque à la surface de la sphère. Celui-ci est inclus dans un triangle dont on nomme les sommets A, B et C, portant les vitesses  $V_A$ ,  $V_B$  et  $V_C$  respectivement.

Soit  $\mathcal{S}^2$  la sphère unité. Soient  $a, b \in \mathcal{S}^2$  vus dans  $\mathcal{R}^3$ , avec  $(\theta_a, \phi_a)$  les coordonnées sphériques de a et  $(\theta_b, \phi_b)$  celles de b.

Ainsi, on a

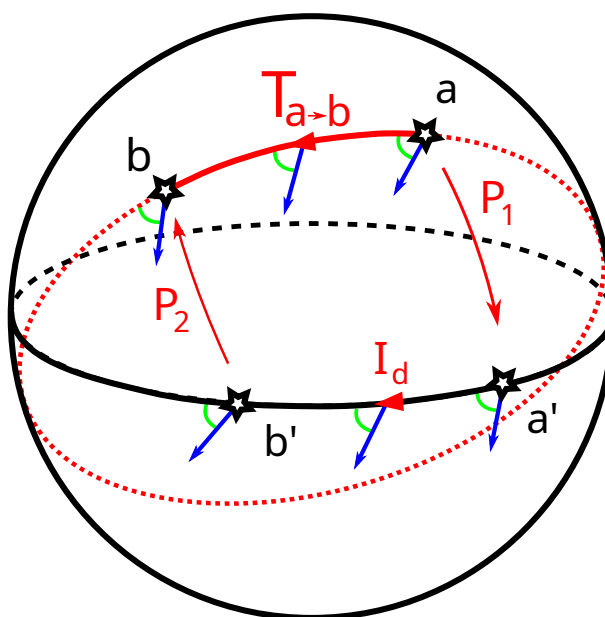


FIGURE B.1 – Transport parallèle entre deux points sur la sphère.

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} \sin \theta_a \cos \phi_a \\ \sin \theta_a \sin \phi_a \\ \cos \theta_a \end{pmatrix}$$

et

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} \sin \theta_b \cos \phi_b \\ \sin \theta_b \sin \phi_b \\ \cos \theta_b \end{pmatrix}$$

Chaque vecteur tangent de  $\mathcal{S}^2 \setminus \{N, S\}$  (avec N, S les pôles nord et sud de la sphère, respectivement) est identifié au vecteur correspondant de  $\mathcal{R}^2$  par ses coordonnées polaires via l'application

$$\begin{cases} \mathcal{R}^2 & \longrightarrow T_{(\theta, \phi)} \mathcal{S}^2 \\ (x, y) & \longmapsto x e_\theta + y e_\phi \end{cases}$$

On souhaite déterminer le transport parallèle d'un point  $a$  à un point  $b$   $T_s : T_a \mathcal{S}^2 \longrightarrow T_b \mathcal{S}^2$ , tel que vu dans  $\mathcal{R}^2$ , noté  $T : \mathcal{R}^2 \longrightarrow \mathcal{R}^2$ .

Soit  $\varrho \in \text{SO}_2(\mathcal{R}^3)$  la rotation qui envoie  $(a, b) \in (\mathcal{S}^2)^2$  sur  $((\frac{\pi}{2}, 0), (\frac{\pi}{2}, d_{ab}))$  avec  $d_{ab}$  la distance géodésique entre  $a$  et  $b$ . Soient  $P_1$  et  $P_2^{-1}$  les opérations induites par cette rotation sur les vecteurs tangents vus dans  $\mathcal{R}^3$  (figure B.1). Comme le transport parallèle le long de l'équateur est la fonction identité, le transport parallèle au point  $b$  d'un vecteur tangent originant en  $a$  peut alors s'écrire

$$T_{a \rightarrow b} = P_1 \times P_2$$

avec

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} [e] \begin{bmatrix} \cos \theta_1 \cos \phi_1 & -\sin \theta_1 \sin \phi_1 \\ \cos \theta_1 \sin \phi_1 & \sin \theta_1 \cos \phi_1 \\ -\sin \theta_1 & 0 \end{bmatrix}$$

et

$$P_2 = \frac{1}{\sin^2 \theta_2 \sin \phi_2} \begin{bmatrix} 0 & \sin \theta_2 \sin \phi_2 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 \cos \phi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} {}^t [e] \begin{bmatrix} 0 & -v \\ 0 & u \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{où } [e] = {}^t \left[ \mathbf{a} \quad \frac{\mathbf{b} - (\mathbf{a}|\mathbf{b})\mathbf{b}}{|\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}|} \quad \frac{\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}}{|\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}|} \right] \text{ et } \begin{bmatrix} u \\ v \\ 0 \end{bmatrix} = [e] \cdot \mathbf{b}$$

Ainsi, pour tout couple  $(a, b)$  de  $\mathcal{S}^2$ , on obtient  $T_{a \rightarrow b}$  sous forme d'une matrice  $2 \times 2$ . Il ne reste alors plus qu'à calculer les coefficients du point interpolé à partir des coordonnées barycentriques à l'aide de ce transport parallèle.

Soit trois points  $a, b, c \in \mathcal{S}^2$  n'étant pas sur un même grand cercle de la sphère unité (ce qui correspond à ne pas être alignés dans  $\mathcal{S}^2$ , et  $p \in \mathcal{S}^2$  situé dans le triangle sphérique délimité par les sommets  $(a, b, c)$ . On définit les vecteurs surfaciques  $\overrightarrow{PA}$ ,  $\overrightarrow{PB}$  et  $\overrightarrow{PC}$  appartenant à  $T_p \mathcal{S}^2$  comme étant orientés selon la géodésique passant par  $a$  et  $p$  ( $b$  et  $p$ ,  $c$  et  $p$  respectivement), et de norme  $d_{ap}$  ( $d_{bp}$  et  $d_{cp}$  respectivement) avec  $d_{ap}$  la distance entre  $a$  et  $p$  selon cette même géodésique.

Il existe alors un unique triplet  $(\alpha, \beta, \gamma) \in (\mathcal{R}^+)^3$  tel que

$$\begin{cases} \alpha \overrightarrow{PA} + \beta \overrightarrow{PB} + \gamma \overrightarrow{PC} = \vec{0} \\ \alpha + \beta + \gamma = 1 \end{cases}$$

On définit  $\overrightarrow{V}_a$  ( $\overrightarrow{V}_b$  et  $\overrightarrow{V}_c$  respectivement) appartenant à  $T_a \mathcal{S}^2$  ( $T_b \mathcal{S}^2$  et  $T_c \mathcal{S}^2$  respectivement) les vitesses surfaciques aux points  $a, b$  et  $c$ . On note  $\overrightarrow{V}_{a_p}$ ,  $\overrightarrow{V}_{b_p}$  et  $\overrightarrow{V}_{c_p}$  ces vecteurs vitesses transportés parallèlement en  $p$ .

L'interpolation linéaire de la vitesse en  $p$  dans le triangle  $abc$  est alors définie par

$$\overrightarrow{V}_p = \alpha \overrightarrow{V}_{a_p} + \beta \overrightarrow{V}_{b_p} + \gamma \overrightarrow{V}_{c_p}$$





# Bibliographie

## Livres & Thèses

- I. ASTER, Richard C, BORCHERS, Brian et THURBER, Clifford H (2018). *Parameter estimation and inverse problems*. Elsevier (cf. p. 57).
- II. BOX, George EP et TIAO, George C (2011). *Bayesian inference in statistical analysis*. T. 40. John Wiley & Sons (cf. p. 10, 12, 27).
- III. BROOKS, Steve, GELMAN, Andrew, JONES, Galin et MENG, Xiao-Li (2011). *Handbook of markov chain monte carlo*. CRC press (cf. p. 31, 65, 110).
- IV. CARLIN, Bradley P et LOUIS, Thomas A (2008). *Bayesian methods for data analysis*. CRC Press (cf. p. 10, 16).
- V. DENISON, David GT, HOLMES, Christopher C, MALLICK, Bani K et SMITH, Adrian FM (2002). *Bayesian methods for nonlinear classification and regression*. T. 386. John Wiley & Sons (cf. p. 21, 37).
- VI. GELMAN, Andrew, CARLIN, John B, STERN, Hal S et RUBIN, Donald B (1995). *Bayesian data analysis*. Chapman et Hall/CRC (cf. p. 102).
- VII. GILKS, Walter R, RICHARDSON, Sylvia et SPIEGELHALTER, David (1995). *Markov chain Monte Carlo in practice*. CRC press (cf. p. 19).
- VIII. GIVENS, Geof H et HOETING, Jennifer A (2012). *Computational statistics*. T. 703. John Wiley & Sons (cf. p. 16).
- IX. MACKEY, David JC (2003). *Information theory, inference and learning algorithms*. Cambridge university press (cf. p. 19, 42).
- X. SCHLAIFER, Robert et RAIFFA, Howard (1961). *Applied statistical decision theory* (cf. p. 12).
- XI. TARANTOLA, Albert (2005). *Inverse problem theory and methods for model parameter estimation*. SIAM (cf. p. 15, 16, 64).

## Articles

1. ALTAMIMI, Zuheir, MÉTIVIER, Laurent, REBISCHUNG, Paul, ROUBY, Hélène et al. (juin 2017). "ITRF2014 plate motion model". *Geophysical Journal International* 209.3, p. 1906-1912 (cf. p. 59).

2. ALTAMIMI, Zuheir, REBISCHUNG, Paul, MÉTIVIER, Laurent et COLLILIEUX, Xavier (août 2016). “ITRF2014: A new release of the International Terrestrial Reference Frame modeling nonlinear station motions”. *Journal of Geophysical Research (Solid Earth)* 121.8, p. 6109-6131 (cf. p. 59).
3. ÁLVAREZ-GÓMEZ, José A. (jan. 2019). “FMC-Earthquake focal mechanisms data management, cluster and classification”. *SoftwareX* 9, p. 299-307 (cf. p. 93).
4. AMOS, Colin B., AUDET, Pascal, HAMMOND, William C., BÜRGMANN, Roland et al. (mai 2014). “Uplift and seismicity driven by groundwater depletion in central California”. *Nature* 509.7501, p. 483-486 (cf. p. 59).
5. ANDRIEU, Christophe et THOMS, Johannes (2008). “A tutorial on adaptive MCMC”. *Statistics and computing* 18.4, p. 343-373 (cf. p. 20).
6. ANGELICA, Carmelo, BONFORTE, Alessandro, DISTEFANO, Giovanni, SERPELLONI, Enrico et al. (nov. 2013). “Seismic potential in Italy from integration and comparison of seismic and geodetic strain rates”. *Tectonophysics* 608, p. 996-1006 (cf. p. 56).
7. AVOUAC, Jean-Philippe (mai 2015). “From Geodetic Imaging of Seismic and Aseismic Fault Slip to Dynamic Modeling of the Seismic Cycle”. *Annual Review of Earth and Planetary Sciences* 43, p. 233-271 (cf. p. 54).
8. BARBER, C Bradford, DOBKIN, David P et HUHDANPAA, Hannu (1996). “The quick-hull algorithm for convex hulls”. *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)* 22.4, p. 469-483 (cf. p. 26).
9. BARNHART, William D., GOLD, Ryan D. et HOLLINGSWORTH, James (sept. 2020). “Localized fault-zone dilatancy and surface inelasticity of the 2019 Ridgecrest earthquakes”. *Nature Geoscience* 13.10, p. 699-704 (cf. p. 6, 57, 80, 112).
10. BAXTER, Sean C., KEDAR, Sharon, PARKER, Jay W., WEBB, Frank H. et al. (jan. 2011). “Limitations of strain estimation techniques from discrete deformation observations”. *Geophysical Research Letters* 38.1, L01305, p. L01305 (cf. p. 6, 51, 58, 68, 70, 74).
11. BAYES, Thomas (1763). “LII. An essay towards solving a problem in the doctrine of chances. By the late Rev. Mr. Bayes, FRS communicated by Mr. Price, in a letter to John Canton, AMFR S”. *Philosophical transactions of the Royal Society of London* 53, p. 370-418 (cf. p. 10).
12. BEAUVAL, C., MARINIÈRE, J., YEPES, H., AUDIN, L. et al. (juin 2018). “A New Seismic Hazard Model for Ecuador”. *The Bulletin of the Seismological Society of America* 108.3A, p. 1443-1464 (cf. p. 54, 56, 77).
13. BEAVAN, John et HAINES, John (jan. 2001). “Contemporary horizontal velocity and strain rate fields of the Pacific-Australian plate boundary zone through New Zealand”. *Journal of Geophysical Research* 106.B1, p. 741-770 (cf. p. 57, 67).
14. BELLONI, Alexandre et CHERNOZHUKOV, Victor (avr. 2007). “On the Computational Complexity of MCMC-based Estimators in Large Samples”. *arXiv e-prints*, arXiv:0704.2167, arXiv:0704.2167. arXiv : 0704 . 2167 [math . ST] (cf. p. 110).
15. BEN-ZION, Yehuda, RICE, James R. et DMOWSKA, Renata (fév. 1993). “Interaction of the San Andreas Fault Creeping Segment with Adjacent great rupture zones and

- earthquake recurrence at Parkfield”. *Journal of Geophysical Research* 98.B2, p. 2135-2144 (cf. p. 79).
16. BENNETT, R. A., WERNICKE, B. P., NIEMI, N. A., FRIEDRICH, A. M. et al. (avr. 2003). “Contemporary strain rates in the northern Basin and Range province from GPS data”. *Tectonics* 22.2, 1008, p. 1008 (cf. p. 59, 78, 79).
  17. BENNETT, Richard A. et HREINSDÓTTIR, Sigrún (mai 2007). “Constraints on vertical crustal motion for long baselines in the central Mediterranean region using continuous GPS”. *Earth and Planetary Science Letters* 257.3-4, p. 419-434 (cf. p. 55).
  18. BENOIST, C., COLLILIEUX, X., REBISCHUNG, P., ALTAMIMI, Z. et al. (avr. 2020). “Accounting for spatiotemporal correlations of GNSS coordinate time series to estimate station velocities”. *Journal of Geodynamics* 135, 101693, p. 101693 (cf. p. 61, 62, 78, 101).
  19. BLEWITT, Geoffrey, HAMMOND, William C et KREEMER, Corné (2009). “Geodetic observation of contemporary deformation in the northern Walker Lane: 1. Semipermanent GPS strategy”. *Geological Society of America Special Paper*, p. 1-15 (cf. p. 59).
  20. BLEWITT, Geoffrey, HAMMOND, William C et KREEMER, Corné (2018). “Harnessing the GPS data explosion for interdisciplinary science”. *Eos* 99, p. 1-2 (cf. p. 23, 54, 61).
  21. BLEWITT, Geoffrey, KREEMER, Corné, HAMMOND, William C. et GAZEAX, Julien (mars 2016). “MIDAS robust trend estimator for accurate GPS station velocities without step detection”. *Journal of Geophysical Research (Solid Earth)* 121.3, p. 2054-2068 (cf. p. 61, 67, 74).
  22. BODIN, T., SALMON, M., KENNETT, B. L. N. et SAMBRIDGE, M. (oct. 2012). “Probabilistic surface reconstruction from multiple data sets: An example for the Australian Moho”. *Journal of Geophysical Research (Solid Earth)* 117.B10, B10307, B10307 (cf. p. 27, 56, 58, 78, 81, 102).
  23. BODIN, T., SAMBRIDGE, M. et GALLAGHER, K. (mai 2009). “A self-parametrizing partition model approach to tomographic inverse problems”. *Inverse Problems* 25.5, 055009, p. 055009 (cf. p. 8, 27).
  24. BODIN, T., SAMBRIDGE, M., TKALČIĆ, H., ARROUCAU, P. et al. (fév. 2012). “Trans-dimensional inversion of receiver functions and surface wave dispersion”. *Journal of Geophysical Research (Solid Earth)* 117.B2, B02301, B02301 (cf. p. 102).
  25. BODIN, Thomas et SAMBRIDGE, Malcolm (sept. 2009). “Seismic tomography with the reversible jump algorithm”. *Geophysical Journal International* 178.3, p. 1411-1436 (cf. p. 44, 65, 70).
  26. BODIN, Thomas, SAMBRIDGE, Malcolm, RAWLINSON, Nick et ARROUCAU, Pierre (juin 2012). “Transdimensional tomography with unknown data noise”. *Geophysical Journal International* 189.3, p. 1536-1556 (cf. p. 8, 56, 65, 78, 81, 102).
  27. BOWYER, Adrian (1981). “Computing dirichlet tessellations”. *The computer journal* 24.2, p. 162-166 (cf. p. 98).
  28. BROOKS, Stephen P et GELMAN, Andrew (1998). “General methods for monitoring convergence of iterative simulations”. *Journal of computational and graphical statistics* 7.4, p. 434-455 (cf. p. 20).



29. BROOKS, Stephen P et ROBERTS, Gareth O (1998). “Convergence assessment techniques for Markov chain Monte Carlo”. *Statistics and Computing* 8.4, p. 319-335 (cf. p. 19).
30. BÜRGMANN, Roland et THATCHER, Wayne (2013). “Space geodesy: A revolution in crustal deformation measurements of tectonic processes”. *Geol. Soc. Am. Spec. Pap.* 500, p. 397-430 (cf. p. 54).
31. CAI, Jianqing, WANG, Jiexian, WU, Jicang, HU, Congwei et al. (2008). “Horizontal deformation rate analysis based on multiepoch GPS measurements in Shanghai”. *Journal of Surveying Engineering* 134.4, p. 132-137 (cf. p. 64).
32. CASTELLOE, John M et ZIMMERMAN, Dale L (2002). “Convergence assessment for reversible jump MCMC samplers”. *Department of Statistics and Actuarial Science, University of Iowa, Technical Report*313 (cf. p. 21).
33. CHAUSSARD, Estelle, MILILLO, Pietro, BÜRGMANN, Roland, PERISSIN, Daniele et al. (oct. 2017). “Remote Sensing of Ground Deformation for Monitoring Groundwater Management Practices: Application to the Santa Clara Valley During the 2012-2015 California Drought”. *Journal of Geophysical Research (Solid Earth)* 122.10, p. 8566-8582 (cf. p. 59).
34. CHÉRY, Jean (mai 2008). “Geodetic strain across the San Andreas fault reflects elastic plate thickness variations (rather than fault slip rate)”. *Earth and Planetary Science Letters* 269.3-4, p. 352-365 (cf. p. 80).
35. CHLIEH, M., AVOUAC, J. P., SIEH, K., NATAWIDJAJA, D. H. et al. (mai 2008). “Heterogeneous coupling of the Sumatran megathrust constrained by geodetic and paleogeodetic measurements”. *Journal of Geophysical Research (Solid Earth)* 113.B5, B05305, B05305 (cf. p. 54).
36. CHOBLET, Gaël., HUSSON, Laurent et BODIN, Thomas (déc. 2014). “Probabilistic surface reconstruction of coastal sea level rise during the twentieth century”. *Journal of Geophysical Research (Solid Earth)* 119.12, p. 9206-9236 (cf. p. 58).
37. CHOUSIANITIS, Konstantinos, GANAS, Athanassios et EVANGELIDIS, Christos P. (mai 2015). “Strain and rotation rate patterns of mainland Greece from continuous GPS data and comparison between seismic and geodetic moment release”. *Journal of Geophysical Research (Solid Earth)* 120.5, p. 3909-3931 (cf. p. 55, 58).
38. CLARK, George, GONYE, Alex et MILLER, Steven J (2021). “Lessons from the German Tank Problem”. *arXiv preprint arXiv:2101.08162* (cf. p. 12).
39. COPLEY, Alex (sept. 2008). “Kinematics and dynamics of the southeastern margin of the Tibetan Plateau”. *Geophysical Journal International* 174.3, p. 1081-1100 (cf. p. 2, 54).
40. COWLES, Mary Kathryn et CARLIN, Bradley P (1996). “Markov chain Monte Carlo convergence diagnostics: a comparative review”. *Journal of the American Statistical Association* 91.434, p. 883-904 (cf. p. 19).
41. D’AGOSTINO, N. (fév. 2014). “Complete seismic release of tectonic strain and earthquake recurrence in the Apennines (Italy)”. *Geophysical Research Letters* 41.4, p. 1155-1162 (cf. p. 3, 55, 56, 77, 80).

42. D'AGOSTINO, N., ENGLAND, P., HUNSTAD, I. et SELVAGGI, G. (juill. 2014). "Gravitational potential energy and active deformation in the Apennines". *Earth and Planetary Science Letters* 397, p. 121-132 (cf. p. 2, 54).
43. DELAUNAY, Boris et al. (1934). "Sur la sphere vide". *Izv. Akad. Nauk SSSR, Otdelenie Matematicheskii i Estestvennyka Nauk* 7.793-800, p. 1-2 (cf. p. 25).
44. DELBRIDGE, Brent G., CARMICHAEL, Joshua D., NADEAU, Robert M., SHELLY, David R. et al. (mai 2020). "Geodetic Measurements of Slow-Slip Events Southeast of Parkfield, CA". *Journal of Geophysical Research (Solid Earth)* 125.5, e19059, e19059 (cf. p. 80).
45. DELORME, Arthur, GRANDIN, Raphaël, KLINGER, Yann, PIERROT-DESEILLIGNY, Marc et al. (2020). "Complex deformation at shallow depth during the 30 October 2016 Mw6. 5 Norcia earthquake: interference between tectonic and gravity processes?" *Tectonics* 39.2, e2019TC005596 (cf. p. 6, 80, 112).
46. DEMPSTER, Arthur P, LAIRD, Nan M et RUBIN, Donald B (1977). "Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm". *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)* 39.1, p. 1-22 (cf. p. 16).
47. DONG, D., FANG, P., BOCK, Y., WEBB, F. et al. (mars 2006). "Spatiotemporal filtering using principal component analysis and Karhunen-Loeve expansion approaches for regional GPS network analysis". *Journal of Geophysical Research (Solid Earth)* 111.B3, B03405, B03405 (cf. p. 61, 62, 78, 101).
48. DUPUTEL, Zacharie, AGRAM, Piyush S., SIMONS, Mark, MINSON, Sarah E. et al. (avr. 2014). "Accounting for prediction uncertainty when inferring subsurface fault slip". *Geophysical Journal International* 197.1, p. 464-482 (cf. p. 8).
49. DURAND, Stéphanie, ABREU, R et THOMAS, C (2018). "Seistomopy: Fast visualization, comparison, and calculations in global tomographic models". *Seismological Research Letters* 89.2A, p. 658-667 (cf. p. 91).
50. ELLIOTT, J. R., WALTERS, R. J. et WRIGHT, T. J. (déc. 2016). "The role of space-based observation in understanding and responding to active tectonics and earthquakes". *Nature Communications* 7, 13844, p. 13844 (cf. p. 55).
51. ENGLAND, Philip, HOUSEMAN, Gregory et NOCQUET, Jean-Mathieu (2016). "Constraints from GPS measurements on the dynamics of deformation in Anatolia and the Aegean". *Journal of Geophysical Research: Solid Earth* 121.12, p. 8888-8916 (cf. p. 3, 56).
52. ENGLAND, Philip et MOLNAR, Peter (oct. 1997). "Active Deformation of Asia: From Kinematics to Dynamics". *Science* 278, p. 647 (cf. p. 2, 54).
53. FAROLFI, Gregorio et DEL VENTISETTE, Chiara (2017). "Strain rates in the Alpine Mediterranean region: Insights from advanced techniques of data processing". *GPS solutions* 21.3, p. 1027-1036 (cf. p. 27, 64).
54. FENG, Wanpeng et ALMEIDA, Rafael V. (sept. 2020). "Inelastic earthquake damage". *Nature Geoscience* 13.10, p. 661-662 (cf. p. 80).
55. FIALKO, Yuri (juin 2006). "Interseismic strain accumulation and the earthquake potential on the southern San Andreas fault system". *Nature* 441.7096, p. 968-971 (cf. p. 75, 79).

56. FLESCH, Lucy M. et KREEMER, Corné (fév. 2010). “Gravitational potential energy and regional stress and strain rate fields for continental plateaus: Examples from the central Andes and Colorado Plateau”. *Tectonophysics* 482.1, p. 182-192 (cf. p. 80).
57. FRANK, F. C. (fév. 1966). “Deduction of earth strains from survey data”. *The Bulletin of the Seismological Society of America* 56.1, p. 35-42 (cf. p. 57).
58. FREYMUELLER, Jeffrey T., MURRAY, Mark H., SEGALL, Paul et CASTILLO, David (avr. 1999). “Kinematics of the Pacific-North America Plate Boundary Zone, northern California”. *Journal of Geophysical Research* 104.B4, p. 7419-7441 (cf. p. 59).
59. FROHLICH, Cliff (déc. 1992). “Triangle diagrams: ternary graphs to display similarity and diversity of earthquake focal mechanisms”. *Physics of the Earth and Planetary Interiors* 75.1-3, p. 193-198 (cf. p. 93).
60. FUSELIER, Edward J et WRIGHT, Grady B (2009). “Stability and error estimates for vector field interpolation and decomposition on the sphere with RBFs”. *SIAM Journal on Numerical Analysis* 47.5, p. 3213-3239 (cf. p. 111).
61. GAN, Weijun, ZHANG, Peizhen, SHEN, Zheng-Kang, NIU, Zhijun et al. (août 2007). “Present-day crustal motion within the Tibetan Plateau inferred from GPS measurements”. *Journal of Geophysical Research (Solid Earth)* 112.B8, B08416, B08416 (cf. p. 57).
62. GELFAND, Alan E et SMITH, Adrian FM (1990). “Sampling-based approaches to calculating marginal densities”. *Journal of the American statistical association* 85.410, p. 398-409 (cf. p. 17).
63. GELMAN, A, ROBERTS, G et GILKS, W (1996). “Efficient metropolis jumping hules”. *Bayesian statistics* (cf. p. 20).
64. GEMAN, Stuart et GEMAN, Donald (1984). “Stochastic relaxation, Gibbs distributions, and the Bayesian restoration of images”. *IEEE Transactions on pattern analysis and machine intelligence* 6, p. 721-741 (cf. p. 17).
65. GERSTENBERGER, Matthew C, MARZOCCHI, Warner, ALLEN, Trevor, PAGANI, Marco et al. (2020). “Probabilistic seismic hazard analysis at regional and national scales: State of the art and future challenges”. *Reviews of Geophysics* 58.2, e2019RG000653 (cf. p. 56).
66. GEYER, Charles J (1992). “Practical markov chain monte carlo”. *Statistical science*, p. 473-483 (cf. p. 20, 65).
67. GOMBERT, Baptiste, DUPUTEL, Zacharie, JOLIVET, Romain, DOUBRE, C et al. (2018). “Revisiting the 1992 Landers earthquake: a Bayesian exploration of co-seismic slip and off-fault damage”. *Geophysical Journal International* 212.2, p. 839-852 (cf. p. 8).
68. GOUVEIA, Wences P. et SCALES, John A. (fév. 1998). “Bayesian seismic waveform inversion: Parameter estimation and uncertainty analysis”. *Journal of Geophysical Research* 103.B2, p. 2759-2779 (cf. p. 11, 78).
69. GREEN, Peter J (1995). “Reversible jump Markov chain Monte Carlo computation and Bayesian model determination”. *Biometrika* 82.4, p. 711-732 (cf. p. 20, 64).
70. GREEN, Peter J (2003). “Trans-dimensional markov chain monte carlo”. *Oxford Statistical Science Series*, p. 179-198 (cf. p. 20, 21, 37, 64).
71. GREEN, Peter J et MIRA, Antonietta (2001). “Delayed rejection in reversible jump Metropolis–Hastings”. *Biometrika* 88.4, p. 1035-1053 (cf. p. 44).

72. HACKL, M., MALSERSVISI, R., HUGENTOBLE, U. et WONNACOTT, R. (nov. 2011). “Estimation of velocity uncertainties from GPS time series: Examples from the analysis of the South African TrigNet network”. *Journal of Geophysical Research (Solid Earth)* 116.B11, B11404, B11404 (cf. p. 100).
73. HACKL, M., MALSERSVISI, R. et W DOWINSKI, S. (juill. 2009). “Strain rate patterns from dense GPS networks”. *Natural Hazards and Earth System Sciences* 9.4, p. 1177-1187 (cf. p. 57, 58, 68, 74).
74. HAINES, A. J. et HOLT, W. E. (juill. 1993). “A procedure for obtaining the complete horizontal motions within zones of distributed deformation from the inversion of strain rate data”. *Journal of Geophysical Research* 98.B7, p. 12, 057-12, 082 (cf. p. 78, 111).
75. HAMMOND, W. C., KREEMER, C., ZALIAPIN, I. et BLEWITT, G. (juin 2019). “Drought-Triggered Magmatic Inflation, Crustal Strain, and Seismicity Near the Long Valley Caldera, Central Walker Lane”. *Journal of Geophysical Research (Solid Earth)* 124.6, p. 6072-6091 (cf. p. 59).
76. HAMMOND, William C., BLEWITT, Geoffrey et KREEMER, Corné (oct. 2016). “GPS Imaging of vertical land motion in California and Nevada: Implications for Sierra Nevada uplift”. *Journal of Geophysical Research (Solid Earth)* 121.10, p. 7681-7703 (cf. p. 61).
77. HAMMOND, William C., KREEMER, Corné, BLEWITT, Geoffrey et PLAG, Hans-Peter (mars 2010). “Effect of viscoelastic postseismic relaxation on estimates of interseismic crustal strain accumulation at Yucca Mountain, Nevada”. *Geophysical Research Letters* 37.6, L06307, p. L06307 (cf. p. 101).
78. HARDEBECK, Jeanne L et HAUSSON, Egill (2001). “Stress orientations obtained from earthquake focal mechanisms: what are appropriate uncertainty estimates?” *Bulletin of the Seismological Society of America* 91.2, p. 250-262 (cf. p. 96).
79. HASTIE, David I et GREEN, Peter J (2012). “Model choice using reversible jump Markov chain Monte Carlo”. *Statistica Neerlandica* 66.3, p. 309-338 (cf. p. 21).
80. HASTINGS, W. K. (avr. 1970). “Monte Carlo Sampling Methods using Markov Chains and their Applications”. *Biometrika* 57.1, p. 97-109 (cf. p. 17, 65).
81. HAWKINS, Rhys, BODIN, Thomas, SAMBRIDGE, Malcolm, CHOBLET, Gaël. et al. (jan. 2019a). “Trans-Dimensional Surface Reconstruction With Different Classes of Parameterization”. *Geochemistry, Geophysics, Geosystems* 20.1, p. 505-529 (cf. p. 58).
82. HAWKINS, Rhys, BODIN, Thomas, SAMBRIDGE, Malcolm, CHOBLET, Gaël et al. (2019b). “Trans-dimensional surface reconstruction with different classes of parameterization”. *Geochemistry, Geophysics, Geosystems* 20.1, p. 505-529 (cf. p. 111).
83. HAWKINS, Rhys, HUSSON, Laurent, CHOBLET, Gaël., BODIN, Thomas et al. (déc. 2019). “Virtual Tide Gauges for Predicting Relative Sea Level Rise”. *Journal of Geophysical Research (Solid Earth)* 124.12, p. 13, 367-13, 391 (cf. p. 58).
84. HE, Xiaoxing, MONTILLET, Jean-Philippe, FERNANDES, Rui, BOS, Machiel et al. (2017). “Review of current GPS methodologies for producing accurate time series and their error sources”. *Journal of Geodynamics* 106, p. 12-29 (cf. p. 23).

85. HERRING, Thomas A., MELBOURNE, Timothy I., MURRAY, Mark H., FLOYD, Michael A. et al. (déc. 2016). "Plate Boundary Observatory and related networks: GPS data analysis methods and geodetic products". *Reviews of Geophysics* 54.4, p. 759-808 (cf. p. 59).
86. HOLT, W. E., CHAMOT-ROOKE, N., LE PICHON, X., HAINES, A. J. et al. (août 2000). "Velocity field in Asia inferred from Quaternary fault slip rates and Global Positioning System observations". *Journal of Geophysical Research* 105.B8, p. 19, 185-19, 209 (cf. p. 78).
87. HUDNUT, Kenneth W, BOCK, Yehuda, GALETZKA, John E, WEBB, Frank H et al. (2001). "The southern California integrated GPS network (SCIGN)". In : *The 10th FIG International Symposium on Deformation Measurements*. Orange California, USA, p. 19-22 (cf. p. 59).
88. HUSSAIN, Ekbal, HOOPER, Andrew, WRIGHT, Tim J, WALTERS, Richard J et al. (2016). "Interseismic strain accumulation across the central North Anatolian Fault from iteratively unwrapped InSAR measurements". *Journal of Geophysical Research: Solid Earth* 121.12, p. 9000-9019 (cf. p. 80, 112).
89. HUSSAIN, Ekbal, WRIGHT, Tim J, WALTERS, Richard J, BEKAERT, David PS et al. (2018). "Constant strain accumulation rate between major earthquakes on the North Anatolian Fault". *Nature communications* 9.1, p. 1-9 (cf. p. 47).
90. HUSSON, Laurent, BODIN, Thomas, SPADA, Giorgio, CHOBLET, Gaël et al. (déc. 2018). "Bayesian surface reconstruction of geodetic uplift rates: Mapping the global fingerprint of Glacial Isostatic Adjustment". *Journal of Geodynamics* 122, p. 25-40 (cf. p. 58).
91. JEFFREYS, Harold (sept. 1946). "An Invariant Form for the Prior Probability in Estimation Problems". *Proceedings of the Royal Society of London Series A* 186.1007, p. 453-461 (cf. p. 12).
92. JIAN, HuiZi, WANG, LiFeng, REN, ZhiKun, GONG, WenYu et al. (2020). "Present-day slip rate and interseismic fault coupling along the Elashan fault using GPS". *Chinese Journal of Geophysics* 63.3, p. 1127-1142 (cf. p. 8).
93. JOLIVET, R., CATTIN, R., CHAMOT-ROOKE, N., LASSERRE, C. et al. (jan. 2008). "Thin-plate modeling of interseismic deformation and asymmetry across the Altyn Tagh fault zone". *Geophysical Research Letters* 35.2, L02309, p. L02309 (cf. p. 80).
94. JOLIVET, R., SIMONS, M., AGRAM, P. S., DUPUTEL, Z. et al. (jan. 2015). "Aseismic slip and seismogenic coupling along the central San Andreas Fault". *Geophysical Research Letters* 42.2, p. 297-306 (cf. p. 8, 79).
95. KANEKO, Yoshihiro, AVOUAC, Jean-Philippe et LAPUSTA, Nadia (mai 2010). "Towards inferring earthquake patterns from geodetic observations of interseismic coupling". *Nature Geoscience* 3.5, p. 363-369 (cf. p. 54).
96. KAVERINA, A. N., LANDER, A. V. et PROZOROV, A. G. (avr. 1996). "Global Creepex Distribution and Its Relation to Earthquake-Source Geometry and Tectonic Origin". *Geophysical Journal International* 125.1, p. 249-265 (cf. p. 93).

97. KIM, Jeonghyeop, BAHADORI, Alireza et HOLT, William E. (jan. 2021). “Crustal Strain Patterns Associated With Normal, Drought, and Heavy Precipitation Years in California”. *Journal of Geophysical Research (Solid Earth)* 126.1, e19560, e19560 (cf. p. 61).
98. KLEIN, Emilie, BOCK, Yehuda, XU, Xiaohua, SANDWELL, David T. et al. (nov. 2019). “Transient Deformation in California From Two Decades of GPS Displacements: Implications for a Three-Dimensional Kinematic Reference Frame”. *Journal of Geophysical Research (Solid Earth)* 124.11, p. 12, 189-12, 223 (cf. p. 62, 80).
99. KLOS, Anna, OLIVARES, German, TEFERLE, Felix Norman, HUNEGNAW, Addisu et al. (2018). “On the combined effect of periodic signals and colored noise on velocity uncertainties”. *GPS solutions* 22.1, p. 1-13 (cf. p. 100).
100. KLUYVER, Thomas, RAGAN-KELLEY, Benjamin, PÉREZ, Fernando, GRANGER, Brian et al. (2016). “Jupyter Notebooks – a publishing format for reproducible computational workflows”. In : *Positioning and Power in Academic Publishing: Players, Agents and Agendas*. Sous la dir. de F. LOIZIDES et B. SCHMIDT. IOS Press, p. 87-90 (cf. p. 91).
101. KOSTROV, VV (1974). “Seismic moment and energy of earthquakes, and seismic flow of rock”. *Izv. Acad. Sci. USSR Phys. Solid Earth, Engl. Transl.* 1, p. 23-44 (cf. p. 3, 56, 77).
102. KREEMER, Corné, BLEWITT, Geoffrey et KLEIN, Elliot C. (oct. 2014). “A geodetic plate motion and Global Strain Rate Model”. *Geochemistry, Geophysics, Geosystems* 15.10, p. 3849-3889 (cf. p. 55, 78, 79, 111).
103. KREEMER, Corné et HAMMOND, William C (2007). “Geodetic constraints on areal changes in the Pacific–North America plate boundary zone: What controls Basin and Range extension?” *Geology* 35.10, p. 943-946 (cf. p. 5, 75, 78).
104. KREEMER, Corné, HAMMOND, William C, BLEWITT, Geoff, HOLLAND, Austin Adams et al. (2012). “A geodetic strain rate model for the Pacific-North American plate boundary, western United States”. *EGUGA*, p. 6785 (cf. p. 58, 78).
105. KREEMER, Corné, HAMMOND, William C. et BLEWITT, Geoffrey (mai 2018). “A Robust Estimation of the 3-D Intraplate Deformation of the North American Plate From GPS”. *Journal of Geophysical Research (Solid Earth)* 123.5, p. 4388-4412 (cf. p. 3, 27, 55, 57, 58, 64, 67, 78, 111).
106. KREEMER, Corné, HOLT, William E. et HAINES, A. John (juill. 2003). “An integrated global model of present-day plate motions and plate boundary deformation”. *Geophysical Journal International* 154.1, p. 8-34 (cf. p. 55, 57, 80).
107. LANGBEIN, John (juill. 2020). “Methods for Rapidly Estimating Velocity Precision from GNSS Time Series in the Presence of Temporal Correlation: A New Method and Comparison of Existing Methods”. *Journal of Geophysical Research (Solid Earth)* 125.7, e19132, e19132 (cf. p. 24, 106).
108. LAWSON, Charles L (1972). “Transforming triangulations”. *Discrete mathematics* 3.4, p. 365-372 (cf. p. 26).
109. LE PICHON, Xavier (juin 1968). “Sea-floor spreading and continental drift”. *Journal of Geophysical Research* 73.12, p. 3661-3697 (cf. p. 1, 54).

110. LE PICHON, Xavier, KREEMER, Corné et CHAMOT-ROOKE, Nicolas (mars 2005). “Asymmetry in elastic properties and the evolution of large continental strike-slip faults”. *Journal of Geophysical Research (Solid Earth)* 110.B3, B03405, B03405 (cf. p. 79).
111. LEE, Der-Tsai et SCHACHTER, Bruce J (1980). “Two algorithms for constructing a Delaunay triangulation”. *International Journal of Computer & Information Sciences* 9.3, p. 219-242 (cf. p. 26).
112. LINDSEY, E. O. et FIALKO, Y. (fév. 2013). “Geodetic slip rates in the southern San Andreas Fault system: Effects of elastic heterogeneity and fault geometry”. *Journal of Geophysical Research (Solid Earth)* 118.2, p. 689-697 (cf. p. 79).
113. LIU, Jun S et DAI, Chenguang (2020). “Metropolis Jumping Rules”. *Wiley StatsRef: Statistics Reference Online*, p. 1-12 (cf. p. 20).
114. LOHMAN, Rowena B. et SIMONS, Mark (jan. 2005). “Some thoughts on the use of InSAR data to constrain models of surface deformation: Noise structure and data downsampling”. *Geochemistry, Geophysics, Geosystems* 6.1, Q01007, Q01007 (cf. p. 80).
115. LUNDGREN, Paul, HETLAND, Eric A., LIU, Zhen et FIELDING, Eric J. (fév. 2009). “Southern San Andreas-San Jacinto fault system slip rates estimated from earthquake cycle models constrained by GPS and interferometric synthetic aperture radar observations”. *Journal of Geophysical Research (Solid Earth)* 114.B2, B02403, B02403 (cf. p. 79).
116. LUNDH, Fredrik (1999). “An introduction to tkinter”. URL:[www.pythonware.com/library/tkinter/introduction/index.htm](http://www.pythonware.com/library/tkinter/introduction/index.htm) (cf. p. 90).
117. MACHETTE, Michael N., PERSONIUS, Stephen F., NELSON, Alan R., SCHWARTZ, David P. et al. (jan. 1991). “The Wasatch fault zone, Utah—segmentation and history of Holocene earthquakes”. *Journal of Structural Geology* 13.2, p. 137-149 (cf. p. 59).
118. MADSEN, Rasmus Bødker, ZUNINO, Andrea et HANSEN, Thomas Mejer (2017). “On inferring the noise in probabilistic seismic AVO inversion using hierarchical Bayes”. In : *SEG Technical Program Expanded Abstracts 2017*. Society of Exploration Geophysicists, p. 601-606 (cf. p. 102).
119. MALINVERNO, Alberto (déc. 2002). “Parsimonious Bayesian Markov chain Monte Carlo inversion in a nonlinear geophysical problem”. *Geophysical Journal International* 151.3, p. 675-688 (cf. p. 42).
120. MALINVERNO, Alberto et BRIGGS, Victoria A. (jan. 2004). “Expanded uncertainty quantification in inverse problems: Hierarchical Bayes and empirical Bayes”. *Geophysics* 69.4, p. 1005 (cf. p. 8, 102).
121. MALINVERNO, Alberto et PARKER, Robert L. (jan. 2006). “Two ways to quantify uncertainty in geophysical inverse problems”. *Geophysics* 71.3, W15 (cf. p. 102).
122. MARSHALL, Grant A, LANGBEIN, John, STEIN, Ross S, LISOWSKI, Michael et al. (1997). “Inflation of Long Valley caldera, California, Basin and Range strain, and possible Mono Craters dike opening from 1990–94 GPS surveys”. *Geophysical Research Letters* 24.9, p. 1003-1006 (cf. p. 59).

123. MASSON, Christine, MAZZOTTI, Stephane et VERNANT, Philippe (fév. 2019). “Precision of continuous GPS velocities from statistical analysis of synthetic time series”. *Solid Earth* 10.1, p. 329-342 (cf. p. 24).
124. MASSON, Christine, MAZZOTTI, Stephane, VERNANT, Philippe et DOERFLINGER, Erik (nov. 2019). “Extracting small deformation beyond individual station precision from dense Global Navigation Satellite System (GNSS) networks in France and western Europe”. *Solid Earth* 10.6, p. 1905-1920 (cf. p. 57).
125. MATHEY, M., WALPERSDORF, A., SUE, C., BAIZE, S. et al. (juin 2020). “Seismogenic potential of the High Durance Fault constrained by 20 yr of GNSS measurements in the Western European Alps”. *Geophysical Journal International* 222.3, p. 2136-2146 (cf. p. 3).
126. MATHEY, Marguerite, SUE, Christian, PAGANI, Colin, BAIZE, Stéphane et al. (juill. 2021). “Present-day geodynamics of the Western Alps: new insights from earthquake mechanisms”. *Solid Earth* 12.7, p. 1661-1681 (cf. p. 56, 93-95, 97, 112).
127. MAZZOTTI, S., LEONARD, L. J., CASSIDY, J. F., ROGERS, G. C. et al. (déc. 2011). “Seismic hazard in western Canada from GPS strain rates versus earthquake catalog”. *Journal of Geophysical Research (Solid Earth)* 116.B12, B12310, B12310 (cf. p. 55-57).
128. MAZZOTTI, Stephane, DÉPREZ, Aline, HENRION, Eric, MASSON, Christine et al. (2020). *Comparative analysis of synthetic GNSS time series-Bias and precision of velocity estimations*. RESIF (cf. p. 24, 61).
129. MAZZOTTI, Stéphane, JAMES, Thomas S., HENTON, Joe et ADAMS, John (nov. 2005). “GPS crustal strain, postglacial rebound, and seismic hazard in eastern North America: The Saint Lawrence valley example”. *Journal of Geophysical Research (Solid Earth)* 110.B11, B11301, B11301 (cf. p. 81, 114).
130. McCAFFREY, Robert (juill. 2005). “Block kinematics of the Pacific-North America plate boundary in the southwestern United States from inversion of GPS, seismological, and geologic data”. *Journal of Geophysical Research (Solid Earth)* 110.B7, B07401, B07401 (cf. p. 5, 59, 62, 67, 78).
131. McCAFFREY, Robert, KING, Robert W., PAYNE, Suzette J. et LANCASTER, Matthew (fév. 2013). “Active tectonics of northwestern U.S. inferred from GPS-derived surface velocities”. *Journal of Geophysical Research (Solid Earth)* 118.2, p. 709-723 (cf. p. 57).
132. MET OFFICE (2021). *Cartopy: a cartographic python library with a matplotlib interface*. Exeter, Devon (cf. p. 90).
133. MÉTOIS, M., D’AGOSTINO, N., AVALLONE, A., CHAMOT-ROOKE, N. et al. (déc. 2015). “Insights on continental collisional processes from GPS data: Dynamics of the peri-Adriatic belts”. *Journal of Geophysical Research (Solid Earth)* 120.12, p. 8701-8719 (cf. p. 3, 55, 57).
134. MÉTOIS, M., VIGNY, C. et SOCQUET, A. (mai 2016). “Interseismic Coupling, Megathrust Earthquakes and Seismic Swarms Along the Chilean Subduction Zone (38°-18°S)”. *Pure and Applied Geophysics* 173.5, p. 1431-1449 (cf. p. 54).



135. METROPOLIS, Nicholas, ROSENBLUTH, Arianna W., ROSENBLUTH, Marshall N., TELLER, Augusta H. et al. (juin 1953). "Equation of State Calculations by Fast Computing Machines". *Journal of Chemical Physics* 21.6, p. 1087-1092 (cf. p. 17, 65).
136. MIDDLETON, Timothy A, PARSONS, Barry et WALKER, Richard T (2018). "Comparison of seismic and geodetic strain rates at the margins of the Ordos Plateau, northern China". *Geophysical Journal International* 212.2, p. 988-1009 (cf. p. 3).
137. MILLINER, Chris et DONNELLAN, Andrea (2020). "Using daily observations from Planet Labs satellite imagery to separate the surface deformation between the 4 July Mw 6.4 foreshock and 5 July Mw 7.1 mainshock during the 2019 Ridgecrest earthquake sequence". *Seismological Research Letters* 91.4, p. 1986-1997 (cf. p. 59).
138. MIRA, Antonietta et al. (2001). "On Metropolis-Hastings algorithms with delayed rejection". *Metron* 59.3-4, p. 231-241 (cf. p. 43).
139. MORGAN, W. Jason (mars 1968). "Rises, trenches, great faults, and crustal blocks". *Journal of Geophysical Research* 73.6, p. 1959-1982 (cf. p. 1, 54).
140. MOSEGAARD, Klaus et SAMBRIDGE, Malcolm (2002). "Monte Carlo analysis of inverse problems". *Inverse problems* 18.3, R29 (cf. p. 27).
141. MURRAY, J. (sept. 2006). "Slip on the San Andreas Fault at Parkfield, California, over Two Earthquake Cycles, and the Implications for Seismic Hazard". *The Bulletin of the Seismological Society of America* 96.4B, S283-S303 (cf. p. 59).
142. NIEMI, Nathan A., WERNICKE, Brian P., FRIEDRICH, Anke M., SIMONS, Mark et al. (déc. 2004). "BARGEN continuous GPS data across the eastern Basin and Range province, and implications for fault system dynamics". *Geophysical Journal International* 159.3, p. 842-862 (cf. p. 59, 78).
143. NISTOR, Sorin, SUBA, Norbert-Szabolcs, MACIUK, Kamil, KUDRYS, Jacek et al. (juill. 2021). "Analysis of Noise and Velocity in GNSS EPN-Repro 2 Time Series". *Remote Sensing* 13.14, p. 2783 (cf. p. 106).
144. OKADA, Yoshimitsu (août 1985). "Surface deformation due to shear and tensile faults in a half-space". *The Bulletin of the Seismological Society of America* 75.4, p. 1135-1154 (cf. p. 1, 54, 67).
145. OLIVER, J., SYKES, L. et ISACKS, B. (juin 1969). "Seismology and the new global tectonics". *Tectonophysics* 7.5, p. 527-541 (cf. p. 1, 54).
146. PALANO, Mimmo, IMPRESCIA, Paola, AGNON, Amotz et GRESTA, Stefano (avr. 2018). "An improved evaluation of the seismic/geodetic deformation-rate ratio for the Zagros Fold-and-Thrust collisional belt". *Geophysical Journal International* 213.1, p. 194-209 (cf. p. 58).
147. PANCHA, A. (fév. 2006). "Comparison of Seismic and Geodetic Scalar Moment Rates across the Basin and Range Province". *The Bulletin of the Seismological Society of America* 96.1, p. 11-32 (cf. p. 3, 56).
148. PARSONS, Tom (mars 2006). "Tectonic stressing in California modeled from GPS observations". *Journal of Geophysical Research (Solid Earth)* 111.B3, B03407, B03407 (cf. p. 57).

149. PELTZER, Gilles, CRAMPÉ, Frédéric, HENSLEY, Scott et ROSEN, Paul (nov. 2001a). “Transient strain accumulation and fault interaction in the Eastern California shear zone”. *Geology* 29.11, p. 975 (cf. p. 59).
150. PELTZER, Gilles, CRAMPÉ, Frédéric, HENSLEY, Scott et ROSEN, Paul (nov. 2001b). “Transient strain accumulation and fault interaction in the Eastern California shear zone”. *Geology* 29.11, p. 975 (cf. p. 59).
151. PÉROUSE, Eugénie, CHAMOT-ROOKE, Nicolas, RABAUTE, Alain, BRIOLE, Pierre et al. (sept. 2012). “Bridging onshore and offshore present-day kinematics of central and eastern Mediterranean: Implications for crustal dynamics and mantle flow”. *Geochemistry, Geophysics, Geosystems* 13.9, Q09013, Q09013 (cf. p. 3, 55).
152. PÉROUSE, Eugénie et WERNICKE, Brian P. (fév. 2017). “Spatiotemporal evolution of fault slip rates in deforming continents: The case of the Great Basin region, northern Basin and Range province”. *Geosphere* 13.1, p. 112-135 (cf. p. 59).
153. PIÑA-VALDÉS, Jesus, SOCQUET, Anne, BEAUVAL, Céline, BARD, Pierre-Yves et al. (mai 2020). “Toward the Development of Earthquake Recurrence Models from 3D GNSS Velocity Field in Europe”. In : *EGU General Assembly Conference Abstracts*. EGU General Assembly Conference Abstracts, 19808, p. 19808 (cf. p. 81, 114).
154. RENKA, Robert J (1997). “Algorithm 772: STRIPACK: Delaunay triangulation and Voronoi diagram on the surface of a sphere”. *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)* 23.3, p. 416-434 (cf. p. 111).
155. ROBERTS, Gareth O et ROSENTHAL, Jeffrey S (2009). “Examples of adaptive MCMC”. *Journal of computational and graphical statistics* 18.2, p. 349-367 (cf. p. 20).
156. ROLANDONE, F., BÜRGMANN, R., AGNEW, D. C., JOHANSON, I. A. et al. (juill. 2008). “Aseismic slip and fault-normal strain along the central creeping section of the San Andreas fault”. *Geophysical Research Letters* 35.14, L14305, p. L14305 (cf. p. 79).
157. ROSENTHAL, Jeffrey S (2000). “Parallel computing and Monte Carlo algorithms”. *Far east journal of theoretical statistics* 4.2, p. 207-236 (cf. p. 44).
158. ROY, Vivekananda (2020). “Convergence diagnostics for markov chain monte carlo”. *Annual Review of Statistics and Its Application* 7, p. 387-412 (cf. p. 19).
159. SAGIYA, T., MIYAZAKI, S. et TADA, T. (jan. 2000). “Continuous GPS Array and Present-day Crustal Deformation of Japan”. *Pure and Applied Geophysics* 157.11-12, p. 2303-2322 (cf. p. 58).
160. SAMBRIDGE, M., BODIN, T., GALLAGHER, K. et TKALCIC, H. (déc. 2012). “Transdimensional inference in the geosciences”. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series A* 371.1984, p. 20110547-20110547 (cf. p. 65).
161. SAMBRIDGE, Malcolm et MOSEGAARD, Klaus (sept. 2002). “Monte Carlo Methods in Geophysical Inverse Problems”. *Reviews of Geophysics* 40.3, 1009, p. 1009 (cf. p. 65).
162. SANDWELL, D, BECKER, T, BIRD, P, FREED, A et al. (2010). “Comparison of 16 Strain-Rate Maps of Southern California”. *SCEC Presentation* 1.5 (cf. p. 3, 5, 6, 58, 67, 78).
163. SANTAMARÍA-GÓMEZ, Alvaro, BOUIN, Marie-Noëlle, COLLILIEUX, Xavier et WÖPPELMANN, Guy (jan. 2011). “Correlated errors in GPS position time series: Implications for veloc-

- ity estimates”. *Journal of Geophysical Research (Solid Earth)* 116.B1, B01405, B01405 (cf. p. 61, 78, 100).
164. SANTAMARÍA-GÓMEZ, Alvaro et RAY, Jim (mars 2021). “Chameleonic Noise in GPS Position Time Series”. *Journal of Geophysical Research (Solid Earth)* 126.3, e19541, e19541 (cf. p. 100).
  165. SAVAGE, J. C. (juin 1983). “A dislocation model of strain accumulation and release at a subduction zone”. *Journal of Geophysical Research* 88.B6, p. 4984-4996 (cf. p. 54).
  166. SAVAGE, JC et BURFORD, RO (1970). “Accumulation of tectonic strain in California”. *Bulletin of the Seismological Society of America* 60.6, p. 1877-1896 (cf. p. 57).
  167. SCALES, John A et SNIEDER, Roel (1998). “What is noise?”. *Geophysics* 63.4, p. 1122-1124 (cf. p. 11).
  168. SHEN, Zheng-Kang, JACKSON, David D, FENG, Yanjie, CLINE, Michael et al. (1994). “Postseismic deformation following the Landers earthquake, California, 28 June 1992”. *Bulletin of the Seismological Society of America* 84.3, p. 780-791 (cf. p. 59).
  169. SHEN, Zheng-Kang, JACKSON, David D et KAGAN, Yan Y (2007). “Implications of geodetic strain rate for future earthquakes, with a five-year forecast of M5 earthquakes in southern California”. *Seismological Research Letters* 78.1, p. 116-120 (cf. p. 58).
  170. SHEN, Zheng-Kang, JACKSON, David D. et GE, Bob X. (déc. 1996). “Crustal deformation across and beyond the Los Angeles basin from geodetic measurements”. *Journal of Geophysical Research* 101.B12, p. 27, 957-27, 980 (cf. p. 57).
  171. SHEN, Zheng-Kang et LIU, Zhen (avr. 2020). “Integration of GPS and InSAR Data for Resolving 3-Dimensional Crustal Deformation”. *Earth and Space Science* 7.4, e01036, e01036 (cf. p. 81, 114).
  172. SHEN, Zheng-Kang, WANG, Min, ZENG, Yuehua et WANG, Fan (août 2015). “Optimal Interpolation of Spatially Discretized Geodetic Data”. *The Bulletin of the Seismological Society of America* 105.4, p. 2117-2127 (cf. p. 3, 4, 55, 58, 67).
  173. SILVERII, F., MONTGOMERY-BROWN, E. K., BORSA, A. A. et BARBOUR, A. J. (mai 2020). “Hydrologically Induced Deformation in Long Valley Caldera and Adjacent Sierra Nevada”. *Journal of Geophysical Research (Solid Earth)* 125.5, e19495, e19495 (cf. p. 59, 80).
  174. SILVERII, Francesca, D’AGOSTINO, Nicola, BORSA, Adrian A., CALCATERRA, Stefano et al. (jan. 2019). “Transient crustal deformation from karst aquifers hydrology in the Apennines (Italy)”. *Earth and Planetary Science Letters* 506, p. 23-37 (cf. p. 80).
  175. SIMONS, Mark, MINSON, Sarah E., SLADEN, Anthony, ORTEGA, Francisco et al. (juin 2011). “The 2011 Magnitude 9.0 Tohoku-Oki Earthquake: Mosaicking the Megathrust from Seconds to Centuries”. *Science* 332.6036, p. 1421 (cf. p. 54).
  176. SISSON, Scott A (2005). “Transdimensional Markov chains: A decade of progress and future perspectives”. *Journal of the American Statistical Association* 100.471, p. 1077-1089 (cf. p. 21).
  177. SMITH, W. H. F. (mars 1990). “Gridding with continuous curvature splines in tension”. *Geophysics* 55.3, p. 293 (cf. p. 57, 68).

178. SMOLIK, Michal et SKALA, Vaclav (2017). “Spherical RBF vector field interpolation: experimental study”. In : *2017 IEEE 15th International Symposium on Applied Machine Intelligence and Informatics (SAMII)*. IEEE, p. 000431-000434 (cf. p. 111).
179. SNAY, Richard A., CLINE, Michael W. et TIMMERMAN, Edward L. (juin 1983). “Regional deformation of the Earth model for the San Diego Region, California”. *Journal of Geophysical Research* 88.B6, p. 5009-5024 (cf. p. 59).
180. SOMOGYVÁRI, Márk et REICH, Sebastian (2020). “Convergence tests for transdimensional Markov Chains in geoscience imaging”. *Mathematical Geosciences* 52.5, p. 651-668 (cf. p. 21).
181. SPAKMAN, W. et NYST, M. C. J. (oct. 2002). “Inversion of relative motion data for estimates of the velocity gradient field and fault slip”. *Earth and Planetary Science Letters* 203.1, p. 577-591 (cf. p. 57).
182. SPARACINO, Federica, PALANO, Mimmo, PELÁEZ, José Antonio et FERNÁNDEZ, José (2020). “Geodetic deformation versus seismic crustal moment-rates: insights from the Ibero-Maghrebian region”. *Remote Sensing* 12.6, p. 952 (cf. p. 3, 4).
183. STYRON, Richard H et HETLAND, Eric A (2014). “Estimated likelihood of observing a large earthquake on a continental low-angle normal fault and implications for low-angle normal fault activity”. *Geophysical Research Letters* 41.7, p. 2342-2350 (cf. p. 91).
184. THATCHER, Wayne (mai 2009). “How the Continents Deform: The Evidence From Tectonic Geodesy”. *Annual Review of Earth and Planetary Sciences* 37.1, p. 237-262 (cf. p. 54).
185. TIERNEY, Luke (1994). “Markov chains for exploring posterior distributions”. *the Annals of Statistics*, p. 1701-1728 (cf. p. 17).
186. TIERNEY, Luke et KADANE, Joseph B (1986). “Accurate approximations for posterior moments and marginal densities”. *Journal of the american statistical association* 81.393, p. 82-86 (cf. p. 16).
187. TIERNEY, Luke et MIRA, Antonietta (1999). “Some adaptive Monte Carlo methods for Bayesian inference”. *Statistics in medicine* 18.17-18, p. 2507-2515 (cf. p. 20, 43).
188. TITUS, S. J., DYSON, M., DEMETS, C., TIKOFF, B. et al. (mai 2011). “Geologic versus geodetic deformation adjacent to the San Andreas fault, central California”. *Geological Society of America Bulletin* 123.5-6, p. 794-820 (cf. p. 58, 68, 74).
189. Quaternary fault and fold database (jan. 2017). *U.S. Geological Survey and New Mexico Bureau of Mines and Mineral Resources, Quaternary fault and fold database for the United States*. (Visité le 01/09/2019) (cf. p. 60, 74, 75, 105).
190. VALLAGE, A, KLINGER, Y, GRANDIN, R, BHAT, HS et al. (2015). “Inelastic surface deformation during the 2013 Mw 7.7 Balochistan, Pakistan, earthquake”. *Geology* 43.12, p. 1079-1082 (cf. p. 80, 112).
191. VERGNOLLE, M., CALAIS, E. et DONG, L. (nov. 2007). “Dynamics of continental deformation in Asia”. *Journal of Geophysical Research (Solid Earth)* 112.B11, B11403, B11403 (cf. p. 57).

192. WANG, Hua, WRIGHT, Tim J., LIU-ZENG, Jing et PENG, Lincai (mai 2019). “Strain Rate Distribution in South-Central Tibet From Two Decades of InSAR and GPS”. *Geophysical Research Letters* 46.10, p. 5170-5179 (cf. p. 57, 78, 80, 111, 112).
193. WANG, Kang et BÜRGMANN, Roland (2020). “Co-and early postseismic deformation due to the 2019 Ridgecrest earthquake sequence constrained by Sentinel-1 and COSMO-SkyMed SAR data”. *Seismological Research Letters* 91.4, p. 1998-2009 (cf. p. 59).
194. WARD, Steven N. (juill. 1998). “On the consistency of earthquake moment rates, geological fault data, and space geodetic strain: the United States”. *Geophysical Journal International* 134.1, p. 172-186 (cf. p. 3, 55, 56, 58).
195. WATSON, David F (1981). “Computing the n-dimensional Delaunay tessellation with application to Voronoi polytopes”. *The computer journal* 24.2, p. 167-172 (cf. p. 98).
196. WADOWINSKI, Shimon, BOCK, Yehuda, ZHANG, Jie, FANG, Peng et al. (août 1997). “Southern California permanent GPS geodetic array: Spatial filtering of daily positions for estimating coseismic and postseismic displacements induced by the 1992 Landers earthquake”. *Journal of Geophysical Research* 102.B8, p. 18, 057-18, 070 (cf. p. 61, 78, 101).
197. WEI, Meng, SANDWELL, David et SMITH-KONTER, Bridget (2010). “Optimal combination of InSAR and GPS for measuring interseismic crustal deformation”. *Advances in Space Research* 46.2, p. 236-249 (cf. p. 6, 113).
198. WEISS, Jonathan R., WALTERS, Richard J., MORISHITA, Yu, WRIGHT, Tim J. et al. (sept. 2020). “High-Resolution Surface Velocities and Strain for Anatolia From Sentinel-1 InSAR and GNSS Data”. *Geophysical Research Letters* 47.17, e87376, e87376 (cf. p. 6, 55, 80, 112, 113).
199. WESNOUSKY, Steven G., BORMANN, Jayne M., KREEMER, Corné, HAMMOND, William C. et al. (mai 2012). “Neotectonics, geodesy, and seismic hazard in the Northern Walker Lane of Western North America: Thirty kilometers of crustal shear and no strike-slip?” *Earth and Planetary Science Letters* 329, p. 133-140 (cf. p. 59, 78).
200. WESSEL, P, LUIS, JF, UIEDA, L, SCHARROO, R et al. (2019). “The generic mapping tools version 6”. *Geochemistry, Geophysics, Geosystems* 20.11, p. 5556-5564 (cf. p. 68).
201. WESSEL, P. et BECKER, J. M. (juill. 2008). “Interpolation using a generalized Green’s function for a spherical surface spline in tension”. *Geophysical Journal International* 174.1, p. 21-28 (cf. p. 57).
202. WESSEL, Paul et BERCOVICI, David (1998). “Interpolation with splines in tension: a Green’s function approach”. *Mathematical Geology* 30.1, p. 77-93 (cf. p. 57).
203. WILLIAMS, Simon D. P., BOCK, Yehuda, FANG, Peng, JAMASON, Paul et al. (mars 2004). “Error analysis of continuous GPS position time series”. *Journal of Geophysical Research (Solid Earth)* 109.B3, B03412, B03412 (cf. p. 61, 78, 100).
204. WOESSNER, Jochen, LAURENTIU, Danciu, GIARDINI, Domenico, CROWLEY, Helen et al. (2015). “The 2013 European seismic hazard model: key components and results”. *Bulletin of Earthquake Engineering* 13.12, p. 3553-3596 (cf. p. 7).

205. WU, Yanqiang, JIANG, Zaisen, YANG, Guohua, WEI, Wenxin et al. (2011). “Comparison of GPS strain rate computing methods and their reliability”. *Geophysical Journal International* 185.2, p. 703-717 (cf. p. 6).
206. XU, Xiaohua, SANDWELL, David T, WARD, Lauren A, MILLINER, Chris WD et al. (2020). “Surface deformation associated with fractures near the 2019 Ridgecrest earthquake sequence”. *Science* 370.6516, p. 605-608 (cf. p. 6, 112).
207. YARDIM, Caglar, GERSTOFT, Peter et MICHALOPOULOU, Zoi-Heleni (avr. 2013). “Geophysical signal processing using sequential Bayesian techniques”. *Geophysics* 78.3, p. V87-V100 (cf. p. 11).