



Méthodes bi-grilles en éléments finis pour les systèmes phase-fluide

Clara Alkousseifi

► To cite this version:

Clara Alkousseifi. Méthodes bi-grilles en éléments finis pour les systèmes phase-fluide. Mathématiques générales [math.GM]. Université de Picardie Jules Verne, 2018. Français. NNT : 2018AMIE0048 . tel-03647454

HAL Id: tel-03647454

<https://theses.hal.science/tel-03647454>

Submitted on 20 Apr 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Thèse de Doctorat

Mention: Mathématiques

présentée à l'*Ecole Doctorale en Sciences Technologie et Santé (ED 585)*

de l'Université de Picardie de Jules Verne

par

Clara ALKOSSEIFI

pour obtenir le grade de Docteur de l'Université de Picardie Jules Verne

Méthodes bi-grilles en éléments finis pour les systèmes phase-fluide.

Soutenue le 20 novembre 2018 après avis des rapporteurs, devant le jury d'examen:

Mme Laurence CHERFILS	MCF HDR	Univ. La Rochelle	Rapporteur
Mr François JAUBERTEAU	Professeur	Univ. Nantes	Rapporteur
Mr Serge DUMONT	Professeur	Univ. Nîmes	Examineur
Mr Olivier GOUBET	Professeur	UPJV	Examineur
Mme Benedetta NORIS	MCF	UPJV	Examineur
Mr Ali WEHBE	Professeur	Univ. Libanaise	Examineur
Mme Hyam ABOUD	MCF	Univ. Libanaise	Co-directrice de thèse
Mr Jean-Paul CHEHAB	Professeur	UPJV	Directeur de thèse
Mr Alejandro A.FRANCO	Professeur	UPJV IUF	Invité

Mis en page avec la classe thloria.

*À ma marraine Jocelyne,
à mes parents Tamame & Jean,
avec amour et gratitude...*

Remerciements

Aujourd'hui je tourne la page d'un des plus beaux chapitres de ma vie. J'aimerais remercier ceux et celles qui d'une manière ou d'une autre ont participé à ses événements. Les mots ne parviennent pas à exprimer mes remerciements. Pardonnez-moi si ma mémoire me trahit et j'oublie quelqu'un.

Je tiens à exprimer mes plus vifs remerciements à mon directeur de thèse Jean-Paul Chehab, pour sa confiance qu'il m'a accordée depuis mon stage de Master 2 et pour avoir accepté d'encadrer ce travail. Il fut pour moi un directeur attentif, veillant à assurer les bonnes conditions de travail et disponible malgré ses nombreuses charges et la distance France-Liban. Sa patience, sa clairvoyance, sa compréhension m'ont accompagné tout au long de ces années. J'aimerais également lui dire à quel point j'ai apprécié sa sympathie, ses qualités humaines d'écoute et ses conseils précieux. J'ai beaucoup appris à ses côtés et je lui adresse toute ma gratitude pour tout cela.

J'adresse de chaleureux remerciements à ma co-directrice de thèse Hyam Abboud. Un grand merci à une super femme libanaise (Leader) pour la patience et le soutien dont elle a fait preuve pendant toute la durée de cette thèse. Depuis mes années de licence, elle m'a beaucoup inspiré et encouragé à suivre le chemin de la recherche. Sa gentillesse, son caractère aimable et serviable ont été une source de laquelle je puisais. Son énergie, sa disponibilité et sa confiance ont été et resteront des éléments moteurs pour mon travail de recherche.

Toute ma reconnaissance va vers celles et ceux qui ont évalué ce travail. Mes remerciements vont à Laurence Cherfils et François Jauberteau qui ont accepté d'être les rapporteurs de cette thèse. Leur fine connaissance et leur lecture attentive sont pour moi un grand honneur.

Je souhaiterais aussi adresser ma gratitude à Serge Dumont, Olivier Goubet, Benedetta Noris et Ali Wehbe qui ont accepté d'être examinateurs dans mon jury de thèse. Je suis particulièrement reconnaissante à Olivier Goubet de l'intérêt qu'il a manifesté à l'égard de cette recherche en s'engageant à être non seulement un examinateur mais aussi un membre de mon comité de suivi de thèse. Je me dois également de le remercier pour ces multiples discussions et pour les subventions que j'ai eues de la Fédération de Recherche ARC, CNRS FR 3399.

Merci à Alejandro Franco d'avoir accepté mon invitation et de faire partie de mon comité de suivi de thèse.

J'ai eu la chance d'effectuer ma thèse en co-direction entre le Laboratoire Amiénois de Mathématiques Fondamentales et Appliquées (LAMFA) de l'UPJV et le Laboratoire de Physique Appliquée (LPA) de la Faculté des Sciences-II (FS-II) de l'Université Libanaise. J'aimerais particulièrement remercier les personnes qui ont rendu cette coopération possible notamment les directeurs du LAMFA, Fabien Durand et Ivan Marin, et le directeur de la FS-II, Youssef Zaatar.

Je tiens à adresser mes sincères remerciements à Ivan Marin et Fabien Durand qui m'ont accueilli au LAMFA et m'ont permis de travailler dans d'aussi bonnes conditions. Ma participation à des conférences, des congrès internationaux et des formations n'aurait pas été possible sans leur soutien financier (UPJV/CNRS).

Je suis reconnaissante à Youssef Zaatar de m'avoir encouragé à faire ma thèse en co-direction. Je le remercie aussi pour sa confiance et ses conseils qui m'ont été précieux.

Je remercie tous les organismes pour l'octroi de bourse et de financement sans quoi la thèse n'aurait pas eu lieu. Entre autre je remercie le Conseil National de Recherche Scientifique Libanais et le conseil scientifique de l'Université Libanaise. Je remercie aussi le LAMFA, UMR CNRS 7352 de l'UPJV pour son support ainsi que la Fédération de Recherche ARC, CNRS FR 3399.

Le doctorat en soi est loin d'être dénué de vie, de créativité et d'interactions humaines. Je désire remercier tous les membres du LAMFA pour leur présence, leurs conseils et les discussions intéressantes. Merci aux secrétaires du laboratoire Christelle Calimez et Isabelle Wallet pour leur sourire, leur disponibilité, leur gentillesse et leur amitié. Je remercie en outre les secrétaires de l'école doctorale (EDSTS), Audrey Lecompte et Virginie Pecourt pour leur efficacité, leur disponibilité, leur bonne humeur et l'effort consacré à la mise en oeuvre de la convention de co-direction.

J'adresse aussi une pensée à Laurent Renault pour son sourire, sa gentillesse et son aide dans tout problème informatique que j'ai rencontré. Je le remercie pour avoir supporté mes plaintes et mes questions sur le système Windows.

Je remercie également Georges Sadaka qui a été plus qu'un frère et m'a aidé dès mon arrivée à Amiens pour mon Master 2. Je lui suis de gré de toutes les aides administratives et les questions techniques de Freefem++, pour tout cela et aussi pour sa sympathie, son optimisme et nos discussions.

Je n'oublie évidemment pas mes amis et camarades doctorants du LAMFA avec lesquels j'ai partagé tous ces moments de doute et de plaisir. Tous ces instants autour de sushi, de pizza, d'un café et les dîners de mes arrivées et départs ont été des moments de détente indispensables. Je remercie toutes les personnes formidables que j'ai rencontrées. Je pense particulièrement à Valérie qui comme une grande soeur nous a accueilli pour nos soirées doctorants, le Thanksgiving et pour nos discussions aux pauses thé. Merci à Alexandre pour les discussions amusantes et les mails permanents avec une question du jour du séminaire doctorants, au couple joyeux Emna et Pierre bisous pour le petit Youssef, à Lucie pour son sourire permanent et son dynamisme, à Aktham pour nos discussions en arabe et ton aide dans mes déménagements, à Guillaume pour ta bonne humeur et ta serviabilité, à Marouan mon "petit" frère qui m'a beaucoup aidé avec le Crous et aussi pour tes messages quand je suis au Liban, à Hatice pour nos discussions entre filles, shopping et la Turquie, à Arrianne pour nos photos selfie et keep going in learning French and add Lebanon to your travel list, aux belles du Maroc Aicha, Amal, Laila, Houda et aux joyeux thésards Afaf, Clément, Henry, Sebastian et Sylvain pour leur bonne humeur, leur amitié et nos discussions inter et extra-scientifiques.

Une pensée particulière à Anne-Sophie : une amie et une soeur que la vie a oublié de me donner. Merci pour ton soutien infaillible, tes mots réconfortants et rassurants, pour nos séances cuisines et nos journées shopping. Hier était le début mais notre amitié ne connaîtra pas la fin, et comme on dit en libanais : j'ai une maison à Paris et tu auras une maison qui t'accueillera au Liban.

L'amitié double les joies et réduit de moitié les peines. Pour cela, n'hésitez pas à m'écrire je resterai une amie et une soeur prête à vous aider et partager vos difficultés.

Je n'oublie évidemment pas la municipalité de Blat qui par ses présidents B. Kosseifi et A. Kosseifi et par le responsable du département culturel J-L Daher m'a beaucoup soutenu.

A Catherine, qui m'a toujours accueilli les bras ouvertes comme si j'étais sa fille et m'a écouté pendant ma solitude.

A Louise et Jean-Luc, j'adresse mille merci pour leur accueil à Paris, leurs multiples conseils et leur soutien affectif.

A Maroun (Chéga) et sa grande famille, qui était mon sauveur en informatique.

Enfin, les mots les plus simples étant les plus forts, j'adresse toute mon affection à ma famille : mes grands-parents pour leur prière continue, mes tantes et mes oncles : Jocelyne, Glades, Denise, Renné et Nabil, Pascal et Sassine pour leur soutien moral et financier ; en particulier ma marraine Jocelyne qui m'a accompagné dès le premier jour dans toutes les démarches. Que Dieu la bénisse. Je pense aussi à ma soeur Eliza pour son coeur aimable et mon frère Patricio qui m'encourageait en disant "Never give up". Je remercie mes parents Jean et Tamame pour leur amour, leur prière et leur soutien constant. J'espère que vous êtes fiers de votre grande fille. Vous trouvez ici le résultat de sacrifices et de privations pour m'aider à avancer dans la vie. Particulièrement, ta tendresse maman et tes encouragements ont contribué à l'aboutissement de ce travail. Merci pour avoir fait de moi ce que je suis aujourd'hui. Que la Vierge Marie te bénisse maman ; toi qui me disait toujours une parole de Al-moutanabi pour le poète libanais Gibran Khalil Gibran "Celui qui voulait atteindre les sommets doit veiller des nuits".

Une pensée pour terminer ces remerciements pour toi le bon Dieu, tout puissant, de m'avoir donné la forme pour survivre, ainsi que l'audace pour dépasser toutes les difficultés. Merci Saint Charbel pour ton amour infini.

Table des matières

Notations	3
------------------	----------

Introduction

1	Modèles de champs de phase et couplage avec Navier-Stokes	1
2	Motivation et objectifs de la thèse	3
3	Principaux résultats	6
3.1	Équations d'Allen-Cahn et de Cahn-Hilliard	6
3.2	Équations de Navier-Stokes	9
3.3	Couplage AC/NS et CH/NS	11
4	Organisation de la thèse	16

Première partie : Méthodes bi-grilles en éléments finis pour les équations de champs de phase	19
--	-----------

Chapitre 1

Etat de l'art : modèles de champs de phase

1.1	Méthode de modélisation par champs de phase - historique et développements récents	21
1.2	Équations de champs de phase	22
1.2.1	Équation d'Allen-Cahn	22
1.2.2	Équation de Cahn-Hilliard	25
1.2.3	Résultats d'analyse - Existence et unicité	28
1.2.3.1	Équation d'Allen-Cahn stationnaire en dimension 1	28

1.2.3.2	Équation d'Allen-Cahn avec conditions de Neumann homogènes	29
1.2.3.3	Équation d'Allen-Cahn avec conditions de Dirichlet homogènes	29
1.2.4	Schémas numériques classiques et régularité	30
1.2.4.1	Allen-Cahn	31
1.2.4.2	Cahn-Hilliard	34
Chapitre 2		
Méthodes bi-grilles pour l'équation d'Allen-Cahn		39
2.1	Motivation et approche générale de la méthode bi-grilles	40
2.2	Séparation des échelles	41
2.3	Cas linéaire : équation de la chaleur	46
2.4	Équation d'Allen-Cahn	49
2.4.1	Schéma de référence sur grille fine	51
2.4.2	Cadre bi-grilles	56
2.4.2.1	Simulation des petites échelles	56
2.4.2.2	Construction de l'algorithme bi-grilles	58
2.4.2.3	Comment choisir V_H et V_h ?	59
2.4.3	Résolution technique bi-grilles	60
2.4.3.1	Schémas bi-grilles	60
2.4.3.2	Propriétés des schémas	61
2.4.4	Stabilisation globale vs stabilisation en modes élevés	63
2.4.4.1	Stabilisation des modes élevés selon le schéma semi-implicite (Schéma 4.1)	63
2.4.4.2	Stabilisation des modes élevés par une linéarisation du terme non linéaire (Schéma 4.2)	64
2.4.5	Précision et réduction du temps CPU	66
2.5	Conclusion	68
Chapitre 3		
Méthodes bi-grilles pour l'équation de Cahn-Hilliard		69
3.1	Équation de Cahn-Hilliard	69
3.1.1	Schéma de référence sur grille fine	71
3.1.2	Cadre bi-grilles : simulation des petites échelles	74
3.1.3	Résolution technique bi-grilles	76
3.1.3.1	Schémas bi-grilles	76
3.1.3.2	Propriétés des schémas	77

3.1.4	Stabilisation globale vs stabilisation en modes élevés	80
3.1.4.1	Stabilisation des modes élevés selon le schéma semi-implicite (Algorithme 14)	81
3.1.4.2	Stabilisation des modes élevés par une linéarisation du terme non linéaire (Algorithme 15)	83
3.1.5	Précision et réduction du temps CPU	85
3.2	Conclusion	88

Deuxième partie : Méthodes bi-grilles en éléments finis pour les couplages fluides/champs de phase 91

Chapitre 4

Méthodes bi-grilles pour les équations de Navier-Stokes

93

4.1	Principe bi-grilles	94
4.2	Équations de Navier-Stokes en dimension 2	97
4.3	Méthode de projection	98
4.3.1	Méthode de projection non incrémentale : Chorin-Temam	99
4.3.2	Méthode de projection incrémentale : Correction de pression	100
4.4	Méthode bi-grilles : séparation des échelles	100
4.4.1	Schémas bi-grilles non incrémentaux	100
4.4.2	Schémas bi-grilles incrémentaux	102
4.5	Résultats numériques : cavité entraînée	104
4.5.1	Méthode bi-grilles non incrémentale	105
4.5.1.1	Les extrema des fonctions de courant et de vorticité	120
4.5.1.2	Comparaison en temps de calcul	124
4.5.2	Méthode bi-grilles incrémentale	127
4.5.2.1	Les extrema des fonctions de courant	132
4.5.2.2	Comparaison en temps de calcul	134
4.5.3	Étude de stabilité : comparaison avec un schéma semi-implicite	136
4.5.3.1	Navier-Stokes par projection non incrémentale	136
4.5.3.2	Navier-Stokes par projection incrémentale	139

4.6	Résultats numériques : comparaison avec une solution exacte	140
4.6.1	Méthode bi-grilles non incrémentale	141
4.6.2	Méthode bi-grilles incrémentale	147
4.7	Conclusion et idées futures	150

Chapitre 5

Couplage Allen-Cahn/Navier-Stokes 155

5.1	Modèle de champs de phase AC/NS	156
5.2	Schéma classique sur une grille	157
5.3	Schémas bi-grilles	158
5.3.1	Séparation d'échelles uniquement pour la vitesse	158
5.3.2	Séparation d'échelles pour la concentration et la vitesse	161
5.4	Simulations numériques	165
5.4.1	Fusionnement de deux bulles	165
5.4.1.1	Décomposition uniquement pour la vitesse	166
5.4.1.2	Décomposition de la concentration et de la vitesse	169
5.4.1.3	Comparaison en temps de calcul	173
5.4.2	Bulle montante	175
5.4.2.1	Décomposition uniquement pour la vitesse	175
5.4.2.2	Décomposition de la concentration et de la vitesse	180
5.4.2.3	Comparaison en temps de calcul	186
5.5	Étude de stabilité : comparaison avec un schéma semi-implicite	188
5.6	Conclusion	190

Chapitre 6

Couplage Cahn-Hilliard/Navier-Stokes 193

6.1	Modèle de champs de phase CH/NS	194
6.2	Schéma classique sur une grille	195
6.3	Schémas bi-grilles	196
6.3.1	Séparation d'échelles uniquement pour la vitesse	196
6.3.2	Séparation d'échelles pour la concentration et la vitesse	198
6.4	Simulations numériques	203
6.4.1	Déformation d'une bulle rectangulaire	203
6.4.1.1	Décomposition uniquement pour la vitesse	204
6.4.1.2	Décomposition de la concentration et de la vitesse	208
6.4.1.3	Comparaison en temps de calcul	211
6.4.1.4	Loi sur l'énergie et conservation de la masse	213

6.4.2	Fusionnement de deux bulles	213
6.4.2.1	Décomposition uniquement pour la vitesse	214
6.4.2.2	Décomposition de la concentration et de la vitesse	218
6.4.2.3	Comparaison en temps de calcul	223
6.4.2.4	Loi sur l'énergie et conservation de la masse	225
6.5	Étude de stabilité : comparaison avec un schéma semi-implicite	225
6.6	Conclusion	227

Conclusion et perspectives	229
-----------------------------------	------------

Conclusion et perspectives	231
Index	231
Index	233
Bibliographie	235
Table des figures	247
Liste des tableaux	257

Notations

Notations générales

- d : dimension de l'espace
- Ω : ouvert borné de $\mathbb{R}^d$
- $\partial\Omega$: frontière de Ω
- n : vecteur normal unité extérieur à $\partial\Omega$
- ϕ : concentration du matériau
- u : champ de vecteur vitesse
- u^* : champ de vecteur vitesse intermédiaire
- p : pression
- t : temps
- Δt : pas de temps
- h, H : pas d'espace
- $\frac{\partial}{\partial t}$: dérivée par rapport au temps
- ∇u : gradient d'un champ de vecteur u
- $\nabla \cdot u$ ou $\operatorname{div} u$: divergence d'un champ de vecteur u
- Δ : opérateur laplacien
- $\mathcal{T}$: triangulation
- ε : épaisseur de l'interface

- τ, S : paramètre de stabilisation
- E : fonction de l'énergie
- F : fonction potentielle
- ν : viscosité cinématique
- λ : coefficient de tension superficielle
- γ : temps de relaxation élastique
- ρ_0 : densité de fond
- ρ_1, ρ_2 : densité des fluides
- g : gravité
- S_ϕ : force de flottabilité
- Re : nombre de Reynolds

Espaces fonctionnels

- $L^2(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions de carré intégrable sur Ω
- $H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega), \nabla u \in L^2(\Omega)\}$
- $H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega), u|_{\partial\Omega} = 0\}$
- $W^{m,p}(\Omega)$ est l'espace de Sobolev d'ordre m muni de la norme $\|\cdot\|_{m,p}$
- $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$
- $C^k(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions k fois continûment différentiables sur Ω
- $C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C^k(\Omega)$

Normes

- $\forall u \in L^2(\Omega), \quad \|u\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$
- $\forall u \in H^1(\Omega), \quad \|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u|^2 + \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$

Introduction

1 Modèles de champs de phase et couplage avec Navier-Stokes

La méthode de champs de phase est une technique qui est apparue et utilisée depuis quelques décennies pour la modélisation des transitions de phases, des séparations de phases et des phénomènes interfaciaux. Étant en plein essor, son spectre d'applications est assez large : les applications les plus avancées rentrent dans le cadre des sciences des matériaux ([163, 46, 48], alliage [7, 8, 9, 33, 34, 61, 84, 88, 132, 151], batteries chimiques [44, 215, 220, 230], croissance cristalline [38, 47, 147, 195]). D'autres applications se font dans le monde du vivant, à savoir, la biologie et la médecine comme la cicatrisation de plaies [60, 142], la croissance tumorale [92, 168, 171], les modèles génétiques [100, 148], les films bactériens [69, 70, 146, 192, 193], ainsi qu'en écologie [139, 171], la dynamique des fluides [11, 75, 161, 221, 227] et la dynamique de population [66, 190]. S'ajoutent aussi les applications en traitement d'images comme la segmentation et l'inpainting [20, 21, 32, 41, 50, 51, 52, 74, 156].

Les champs de phase ont été largement exploités notamment en analyse mathématique (systèmes dynamiques, calcul de variation [20, 21, 85, 119, 168, 198] et en analyse numérique [85, 90, 180, 188].

Par définition, un modèle de champs de phase modélise la minimisation d'une énergie. Selon la propriété de la conservation de masse, nous distinguons deux types :

1. Les équations d'Allen-Cahn (AC) qui modélisent la transition de phase et qui sont des équations sans conservation de la masse.
2. Les équations de Cahn-Hilliard (CH) qui modélisent la séparation de phase et qui sont des équations avec conservation de la masse.

L'équation d'Allen-Cahn [8, 9] décrivant le phénomène de transition de phase dans un alliage métallique s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} + M(-\Delta u + \frac{1}{\varepsilon^2} f(u)) = 0, \text{ dans } \Omega, t > 0, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0, \text{ sur } \partial\Omega \\ u(0, x) = u_0(x) \end{array} \right. \quad (1)$$

où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^d$, n est la normale unitaire sortante, M étant la mobilité (prise égale à 1 pour simplifier) et $u \in [-1, 1]$ un paramètre d'ordre qui peut être la concentration de l'un des constituants de l'alliage et ε l'épaisseur de l'interface.

Son étude peut s'effectuer par deux approches : la première étant de considérer (1) comme une équation de réaction-diffusion et la deuxième approche consiste à minimiser l'énergie

$$E(u) = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} |\nabla u|^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} F(u) \right) dx \quad (2)$$

où $F(u)$ est un potentiel d'énergie. Ainsi, elle est considérée comme étant l'approche du flot de gradient de la fonctionnelle d'énergie (2)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla E(u) = 0. \quad (3)$$

Ces deux approches coïncident lorsque

$$-\Delta u + \frac{1}{\varepsilon^2} f(u) = \nabla E(u). \quad (4)$$

L'équation de Cahn-Hilliard [34] décrivant le processus de séparation de phase s'écrit

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta(-\Delta u + \frac{1}{\varepsilon^2} f(u)) = 0 \text{ dans } \Omega, t > 0, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial(\Delta u - \frac{1}{\varepsilon^2} f(u))}{\partial n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega, t > 0, \\ u(x, 0) = u^0(x) \text{ sur } \Omega. \end{cases} \quad (5)$$

où u est la concentration du matériau de l'alliage, $f(u)$ est la dérivée de la densité d'énergie libre $F(u)$ et ε l'épaisseur de l'interface diffuse. Cette équation peut être vue comme le flot de gradient de la fonctionnelle d'énergie (2) dans $H^{-1}(\Omega)$.

Elle s'écrit sous la forme du système découplé

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta \mu \quad (6)$$

$$\mu = -\Delta u + \frac{1}{\varepsilon^2} f(u) \quad (7)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0, \frac{\partial \mu}{\partial n} = 0, u(0, x) = u_0(x) \quad (8)$$

où μ est le potentiel chimique.

Les écoulements incompressibles à deux phases ont fait l'objet de nombreux travaux ces dernières années et permettent de modéliser différents phénomènes, citons par exemple les bulles de gaz piégées dans l'eau, les filaments d'eau tombant dans l'air, les mélanges huile-eau, les mélanges de polymères, les fluides biologiques.

Un modèle couplé de fluide/champs de phase Allen-Cahn intervenant dans les applications (cf. [209, 229]) s'obtient en considérant l'effet convectif de la vitesse u du fluide

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u \cdot \nabla \phi = \gamma (\Delta \phi - f(\phi)). \quad (9)$$

Ici $\phi(x, t) \in [-1, 1]$ est la phase du mélange, u la vitesse du fluide, γ correspond au temps de relaxation élastique, $f(\phi) = F'(\phi)$ avec $F(\phi) = \frac{1}{4\varepsilon^2}(\phi^2 - 1)^2$ et ε désigne l'épaisseur de

l'interface. Les équations régissant le mélange d'écoulement à deux fluides sont la condition d'incompressibilité

$$\nabla \cdot u = 0, \quad (10)$$

et l'équation de la quantité de mouvement

$$\rho_0 \left(\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u \right) - \nu \nabla \cdot D(u) + \nabla p + \lambda \nabla \cdot (\nabla \phi \otimes \nabla \phi) = S_\phi, \quad (11)$$

où u désigne la vitesse, p la pression, ν le paramètre de viscosité et λ le coefficient de tension superficielle. On note $D(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + (\nabla u)^T)$ le taux du tenseur de déformation et $S_\phi = (0, -(1 + \phi)g(\rho_1 - \rho_0) - (1 - \phi)g(\rho_2 - \rho_0))^T$ la force de flottabilité avec la densité de fond ρ_0 , la densité des deux fluides, ρ_1 et ρ_2 , respectivement et la gravité g .

D'autres modèles de couplage, comme ceux de Cahn-Hilliard/Navier-Stokes pour les fluides diphasiques ont été considérés dans [54, 62, 123]. Ils consistent à partir d'un modèle de Cahn-Hilliard avec, comme plus haut, la prise en compte de la convection due à la vitesse du fluide :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u \cdot \nabla \phi = \gamma \Delta (\Delta \phi - f(\phi)). \quad (12)$$

Cette équation est alors couplée avec l'équation de la quantité de mouvement (6.2) avec

$$\nabla \cdot u = 0. \quad (13)$$

On peut réécrire le modèle sous forme de système [136, 161] :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u \cdot \nabla \phi = \frac{\gamma}{\varepsilon^2} \Delta (w + c\phi), \quad (14)$$

$$w = -\varepsilon^2 \Delta \phi + f(\phi) - c\phi, \quad (15)$$

$$\rho_0 \left(\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u \right) - \nu \Delta u + \nabla p - \frac{\lambda}{\varepsilon^2} (w + c\phi) \nabla \phi = S_\phi, \quad (16)$$

$$\nabla \cdot u = 0, \quad (17)$$

où c est une constante positive cf. aussi [187], avec les notations précédentes.

2 Motivation et objectifs de la thèse

La simulation numérique des modèles de champs de phase s'avère délicate et difficile dans certaines situations : cela est dû à la présence d'un petit paramètre (l'épaisseur de la surface de séparation ε) qui pénalise le terme non linéaire (dérivée du potentiel F).

Plusieurs méthodes numériques ont été développées afin de résoudre les équations de champs de phase, citons par exemple [67, 76, 91, 97, 98, 141, 222, 228], mais aussi les modèles couplés avec les équations de Stokes [144, 145, 173], de Navier-Stokes [23, 26, 143] et l'équation de Darcy [73, 106, 107].

S'agissant spécifiquement de AC ou CH, dans [76, 90, 187, 188, 205, 211, 213], sont proposés des schémas implicites et coûteux au niveau temps de calcul mais aussi des schémas semi-implicites, rapides, mais peu stables énergétiquement (la décroissance de l'énergie n'est pas validée que sous

certaines conditions sur le pas de temps). Une idée pour résoudre le problème de stabilité énergétique consiste à stabiliser les schémas semi-implicites [188], cependant, dans ce cas la décroissance de l'énergie est ralentie.

Dans cette thèse nous désirons proposer des schémas rapides et garantissant les propriétés du modèle : décroissance de l'énergie sans aucune condition sur le pas de temps et la conservation de la masse (cas de l'équation de Cahn-Hilliard) sans influencer la dynamique de la décroissance de l'énergie. Pour ceci, nous avons recours aux méthodes bi-grilles, cas particulier des méthodes multigrilles.

Ces méthodes ont été proposées depuis plus d'une quarantaine d'années pour accélérer la résolution des problèmes elliptiques, (cf. [129] pour les problèmes de Dirichlet linéaires et non linéaires stables en différences finies, mais aussi pour les équations de Navier-Stokes stationnaires [31, 108]).

L'approche est d'abord définie pour deux niveaux de discrétisation (cas bi-grilles). Les deux idées clés sont à la fois la séparation des haute et basse composantes de l'erreur fournie par l'utilisation des grilles grossière et fine (ou des espaces) respectivement V_H et V_h , ainsi que la concentration de l'effort de calcul principal sur le sous-espace grossier $V_H \subset V_h$ (dimension inférieure); les modes élevés peuvent être représentés en V_h alors que seuls les bas modes sont calculés en V_H . Cela conduit à une réduction drastique du temps de calcul CPU.

La correction des composantes de l'espace fin appartenant à V_h est généralement réalisée par un schéma numérique simple et rapide et est associée à un lissage en mode élevé. Ensuite, le schéma est appliqué de manière récursive sur un ensemble de grilles (ou d'espaces) imbriquées.

Nous pouvons distinguer deux approches pour les méthodes bi-grilles en considérant les équations dissipatives non linéaires.

Dans le premier cas, les composantes en haut et bas mode sont traitées explicitement : grâce à la régularisation parabolique, les composantes en bas mode qui renferment la partie principale de l'énergie de la solution ont une dynamique différente de celle des composantes en mode élevé qui peuvent être considérées comme une correction cf. [77]. Aussi, une façon d'accélérer l'intégration numérique consiste à appliquer différents schémas à ces deux ensembles de composantes, en concentrant l'effort sur le calcul des bas modes, qui appartiennent à V_H , cf. [68].

Dans le cas des méthodes spectrales, la séparation en fréquences est évidente, mais ce n'est pas le cas lorsque des méthodes de différences finies ou d'éléments finis sont utilisées pour la discrétisation spatiale. Pour séparer les modes, une approche hiérarchique a été utilisée [226] : en utilisant un opérateur d'interpolation (ou de projection) approprié entre V_H et V_h , nous construisons un opérateur de transfert qui définit un pré-conditionneur pour les matrices de rigidité et permet également d'exprimer la solution en termes de partie principale, associée aux composantes en bas mode, et d'une partie fluctuante, de moindre amplitude, et associée à des composantes de mode élevé. Nous renvoyons le lecteur à [216, 217, 218] et aux références qui y figurent pour la discrétisation par éléments finis, [43, 182] pour les différences finies et [25, 96] pour les volumes finis. Ces schémas se sont avérés efficaces mais ils nécessitent la construction et la manipulation des bases hiérarchiques.

Dans la seconde approche, la séparation de modes n'est pas utilisée explicitement et les méthodes consistent, à chaque pas de temps, à calculer l'approximation grossière u_H de la solution

fine u_h par un schéma implicite inconditionnellement stable, puis à actualiser un schéma linéarisé à une valeur extrapolée de u_H en V_h .

Ces schémas permettent de réduire le temps de calcul avec une erreur optimale par rapport au schéma classique pour un choix adéquat de la taille de maillage de V_h par rapport à celle de V_H . Il faut souligner que $\tilde{u}_h$ représente la partie principale de la solution tandis que $z_h = u_h - \tilde{u}_h \in V_h$ représente la partie fluctuante (portant les composantes du mode élevé de la solution $u_h \in V_h$) mais n'est pas simulé dans les schémas.

De telles méthodes ont été développées et appliquées à la solution des équations de Navier-Stokes incompressibles instationnaires [3, 5, 110, 130]. Comme une linéarisation est utilisée sur V_h , la matrice à résoudre à chaque itération change et peut être coûteuse en régime transitoire.

Les méthodes numériques que nous proposons ici sont en quelque sorte intermédiaires et sont développées dans [1] pour l'équation d'Allen-Cahn et [2] pour les équations de Navier-Stokes. L'utilisation de deux niveaux de discrétisation permet de concentrer l'effort sur l'espace grossier de dimension inférieure, l'espace fin et simultanément de décomposer la solution en sa partie principale et fluctuante $u_h = \tilde{u}_h + z_h$.

Les z_h ne sont pas explicitement simulés, cependant, ils sont implicitement utilisés comme suit pour une stabilisation de mode élevé : considérons les intégrations temporelles de l'équation de réaction-diffusion, sous sa forme variationnelle :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(u, v) + (\nabla u, \nabla v) + (f(u), v) &= 0, \forall v \in V, \\ v(0) &= v_0, \end{aligned}$$

où V est un espace Hilbert approprié.

Étant donnés deux sous-espaces de dimension finie de V, V_H et V_h , avec $\dim(V_H) \ll \dim(V_h)$, nous définissons le schéma bi-grilles comme suit :

Algorithm 1 Schéma bi-grilles stabilisé pour la réaction-diffusion

- 1: u_h^0, u_H^0 donnés
 - 2: **for** $k = 0, 1, \dots$ **do**
 - 3: **Étape 1 (Schéma implicite de l'espace grossier)**
 - 4: $(\frac{u_H^{k+1} - u_H^k}{\Delta t}, \psi_H) + (\nabla u_H^{k+1}, \nabla \psi_H) + (f(u_H^{k+1}), \psi_H) = 0, \forall \psi_H \in V_H$
 - 5: **Étape 2 (Schéma semi-implicite de l'espace fin)**
 - 6: $(\frac{u_h^{k+1} - u_h^k}{\Delta t}, \phi_h) + \tau(\mathbf{u}_h^{k+1} - \mathbf{u}_h^k, \phi_h) + (\nabla u_h^{k+1}, \nabla \phi_h) + (f(u_h^k), \phi_h) = \tau(\mathbf{u}_H^{k+1} - \mathbf{u}_H^k, \phi_h), \forall \phi_h \in V_h$
 - 6: **end for**
-

La concurrence entre les termes $\tau(\mathbf{u}_h^{k+1} - \mathbf{u}_h^k, \phi_h)$ et $\tau(\mathbf{u}_H^{k+1} - \mathbf{u}_H^k, \phi_h)$ est interprétée comme un filtre de mode élevé et $\tau > 0$ est le paramètre de stabilisation (cf. [1]) et permet de compenser le traitement explicite du terme non linéaire.

Par ces schémas bi-grilles nous avons pu réduire le temps de calcul tout en conservant une bonne dynamique. En outre, l'usage des schémas classiques inconditionnellement stables sur la grille grossière nous a permis de démontrer des résultats de stabilité. Nous étendons ces résultats pour les modèles couplés aux équations de Navier-Stokes .

3 Principaux résultats

Nous présentons dans cette section les principaux résultats pour les équations d'Allen-Cahn, Cahn-Hilliard, Navier-Stokes (NS) ainsi que ceux du problème de couplage AC/NS et CH/NS.

3.1 Équations d'Allen-Cahn et de Cahn-Hilliard

Afin d'obtenir un schéma bi-grilles stable, nous adaptons le schéma implicite inconditionnellement stable défini par Shen [188] sur la grille grossière :

$$\frac{1}{\Delta t}(u^{k+1} - u^k, \psi) - (\nabla u^{k+1}, \nabla \psi) + \frac{1}{\varepsilon^2}(DF(u^k, u^{k+1}), \psi) = 0, \quad \forall \psi \in V \quad (18)$$

où nous prenons

$$DF(u, v) = \begin{cases} \frac{F(u) - F(v)}{u - v} & \text{si } u \neq v, \\ f(u) & \text{si } u = v. \end{cases}$$

L'implémentation numérique par la méthode du point fixe de Picard montre que le schéma souffre d'une instabilité artificielle (limitation en pas de temps Δt).

Nous adaptons l'opérateur d'accélération de Lemaréchal pour être capable de prendre des pas de temps supérieurs.

Ce schéma (18) est considéré comme le schéma de référence, résolu sur une grille fine, auquel nous comparons notre schéma bi-grilles et prouvons le gain en temps de calcul CPU.

Un schéma linéarisé, stabilisant uniquement les hautes fréquences de la solution, est utilisé sur la grille fine

$$\begin{aligned} & (u_h^{k+1} - u_h^k, \phi_h) + \tau \Delta t (u_h^{k+1} - u_h^k, \phi_h) + \Delta t (\nabla u_h^{k+1}, \nabla \phi_h) \\ & = \tau \Delta t (u_H^{k+1} - u_H^k, \phi_h) - \Delta t (\tilde{f}(u_h^k, u_h^{k+1}, u_H^{k+1}), \phi_h), \forall \phi_h \in V_h \end{aligned}$$

Le traitement du terme non linéaire $\tilde{f}(u_h^k, u_h^{k+1}, u_H^{k+1})$ permet d'obtenir plusieurs variantes de l'algorithme bi-grilles d'Allen-Cahn (cf. **Chapitre 2**).

$$\begin{aligned} \tilde{f}(u_h^k, u_h^{k+1}, u_H^{k+1}) &= \frac{1}{4\varepsilon^2} \left((u_h^k)^2 + 2u_H^{k+1}u_h^k + 3(u_H^{k+1})^2 - 2 \right) (u_h^{k+1} - u_H^{k+1}) \\ &+ \frac{1}{4\varepsilon^2} \left((u_H^{k+1})^2 + (u_h^k)^2 - 2 \right) (u_H^{k+1} + u_h^k). \end{aligned}$$

Une comparaison avec le schéma stabilisé de Shen (stabilisant la solution globale) est faite au **Chapitre 2**. Nous pouvons conclure que la stabilisation de notre schéma bi-grilles n'a aucune influence sur l'énergie alors que la stabilisation globale de schéma proposé par Shen ralentit la décroissance de l'énergie.

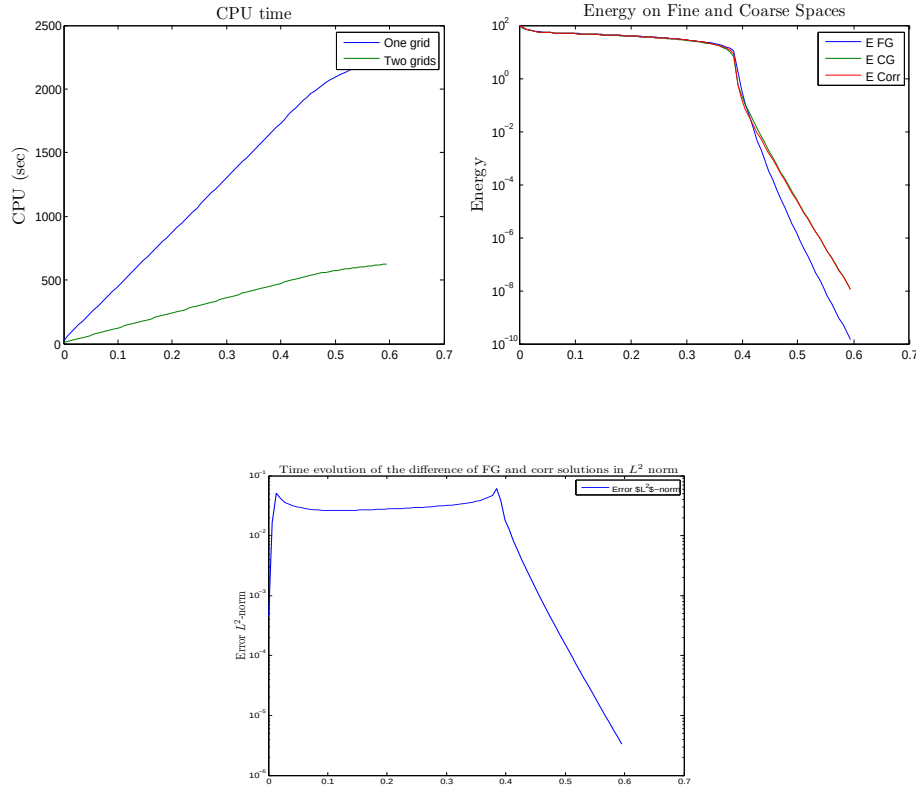


FIGURE 1 – Équation d'Allen-Cahn avec $\varepsilon = 0.03$, $\tau = 5 \times 10^{-3}$, $u_0 = \cos(\pi x) \cos(\pi y)$, $\Delta t = 7 \times 10^{-3}$.

Notre schéma bi-grilles se place à mi-distance entre le schéma semi-implicite rapide mais limité en pas de temps Δt et le schéma implicite inconditionnellement stable en Δt mais nécessitant la résolution du problème non linéaire par la méthode du point fixe et prend un temps énorme de résolution : ainsi, nous approchons par notre schéma bi-grilles la solution d'une manière similaire à celle du schéma de référence sur la grille fine (18) mais avec un gain remarquable en temps de résolution (quatre fois plus rapide cf. Fig. 1).

Comme pour l'équation d'Allen-Cahn, nous considérons pour l'équation de Cahn-Hilliard le schéma de Shen inconditionnellement stable comme un schéma de référence sur la grille fine et la première étape de notre algorithme bi-grilles serait :

$$\left(\frac{u^{k+1} - u^k}{\Delta t}, \psi \right) + (\nabla \mu^{k+1}, \nabla \psi) = 0, \quad \forall \psi \in V, \quad (19)$$

$$(\nabla u^{k+1}, \nabla \phi) + \frac{1}{\varepsilon^2} (DF(u^k, u^{k+1}), \phi) = (\mu^{k+1}, \phi), \quad \forall \phi \in W. \quad (20)$$

Aussi un schéma linéarisant le terme non linéaire est considéré sur la grille fine et la deuxième étape de notre algorithme bi-grilles serait ainsi :

$$\begin{aligned}
 (u_h^{k+1} - u_h^k, \psi_h) + \Delta t (\nabla \mu_h^{k+1}, \nabla \psi_h) &= 0, \quad \forall \psi_h \in V_h \\
 (\nabla u_h^{k+1}, \nabla \phi_h) + \tau (u_h^{k+1} - u_h^k, \phi_h) + \frac{1}{\varepsilon^2} (\tilde{f}(u_h^k, u_h^{k+1}, u_H^{k+1}), \phi_h) &= (\mu_h^{k+1}, \phi_h) \\
 &\quad + \tau (u_H^{k+1} - u_H^k, \phi_h), \quad \forall \phi_h \in W_h.
 \end{aligned}$$

Les illustrations de la Fig. 2 montrent l'accord entre le schéma de référence sur la grille fine et notre technique bi-grilles. Nous notons la réduction du temps de calcul CPU d'un facteur supérieur à 2 (cf. Fig. 2). De sus, nous représentons la moyenne spatiale de la concentration u , initialement nulle, et reste nulle au cours du temps (Fig. 3).

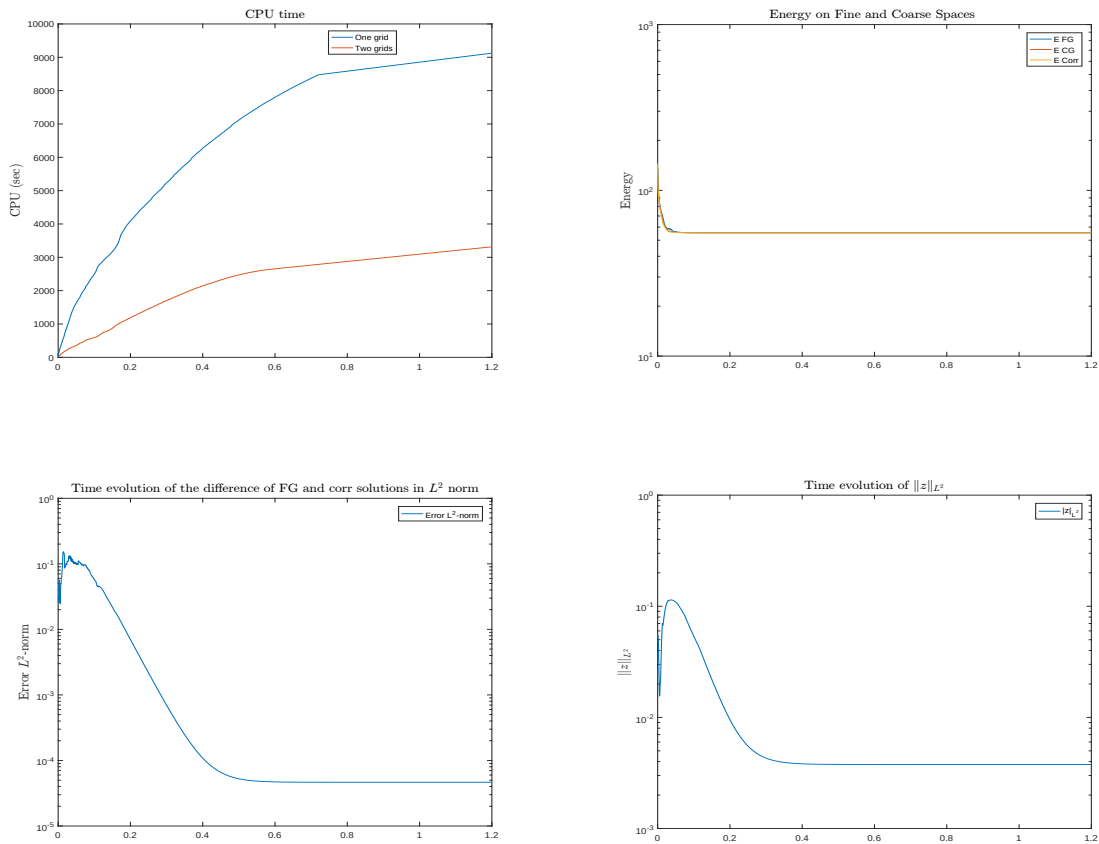


FIGURE 2 – Cahn-Hilliard $\varepsilon = 0.03$, $\tau = 2222.22$, $u_0 = \cos(\pi x) \cos(\pi y)$ et $\Delta t = 10^{-3}$.

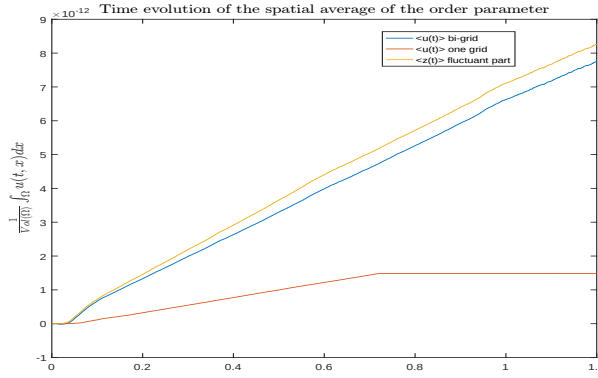


FIGURE 3 – Cahn-Hilliard $\varepsilon = 0.03$, $\tau = 2222.22$, $u_0 = \cos(\pi x) \cos(\pi y)$ et $\Delta t = 10^{-3}$.

3.2 Équations de Navier-Stokes

Nous appliquons aussi la technique de la séparation en échelles au problème de Navier-Stokes incompressible. La résolution du problème se fait par la méthode de la projection. L'**Algorithme 2** servira d'un schéma de référence sur la grille fine :

Algorithm 2 Schéma de référence non incrémental

- 1: **for** $k = 0, 1, \dots$ **do**
 - 2: **Trouver** u_h^* dans X_h $(\frac{u_h^* - u_h^k}{\Delta t}, \psi_h) + \nu(\nabla u_h^*, \nabla \psi_h) + ((u_h^* \cdot \nabla) u_h^*, \psi_h) = (f, \psi_h), \forall \psi_h \in X_h$
 - 3: **Trouver** p_h^{k+1} dans Y_h $(\text{div } \nabla p_h^{k+1}, \chi_h) = (\frac{\text{div } u_h^*}{\Delta t}, \chi_h), \forall \chi_h \in Y_h$
 - 4: **Trouver** u_h^{k+1} dans X_h $(u_h^{k+1} - u_h^* + \Delta t \nabla p_h^{k+1}, \psi_h) = 0, \forall \psi_h \in X_h$
 - 5: **end for**
-

Algorithm 3 Deux grilles Algo1

- 1: **for** $k = 0, 1, \dots$ **do**
 - 2: **Trouver** u_H^* dans X_H
 - 3: $(\frac{u_H^* - u_H^k}{\Delta t}, \psi_H) + \nu(\nabla u_H^*, \nabla \psi_H) + ((u_H^* \cdot \nabla) u_H^*, \psi_H) = (f, \psi_H), \forall \psi_H \in X_H$
 - 4: **Trouver** u_h^* dans X_h
 - 5: **Trouver** p_h^{k+1} dans Y_h $(\text{div } \nabla p_h^{k+1}, \chi_h) = (\frac{\text{div } u_h^*}{\Delta t}, \chi_h), \forall \chi_h \in Y_h$
 - 6: **Trouver** u_h^{k+1} dans X_h $(u_h^{k+1} - u_h^* + \Delta t \nabla p_h^{k+1}, \phi_h) = 0, \forall \phi_h \in X_h$
 - 7: **Résoudre** dans X_H $(u_H^{k+1} - u_h^{k+1}, \psi_H) = 0, \forall \psi_H \in X_H$
 - 8: **end for**
-

Dans l'**Algorithme 3**, nous calculons d'abord u_H^* sur l'espace grossier X_H puis stabilisons les hautes fréquences de u_h^* sur l'espace fin X_h . En se basant sur la condition de divergence nulle,

nous trouvons la pression p_h qui est à moyenne nulle. Nous trouvons par la suite u_h et la restreignons à la grille grossière pour obtenir u_H^k pour la prochaine itération.

La version de la correction de la pression est aussi considérée dans le **Chapitre 4, section 4.4.2**.

Les algorithmes bi-grilles portent sur une séparation en échelles de la vitesse intermédiaire u_h^* . Des variantes sont traitées au **Chapitre 4**. Nous étudions le problème de la cavité entraînée pour différentes valeurs du nombre de Reynolds ($Re = 100, 400, 1000, 2000, 3200, 5000$ et 7500) et trouvons la concordance avec la littérature Shen et al. [186]. Les lignes de courant et les contours de vorticité sont en accord avec ceux présentés dans Bruneau et al. [31], Ghia et al. [108], Goyon et al. [118], Gupta [128], Hou [134], Pascal [179] et Vanka [208].

Les extrema de la fonction de courant le long des axes au tourbillon principal (PV) et le contre tourbillon droit (BRV) sont compatibles avec ceux de la littérature [31], [108], [118], [128], [134], [179, 208]. Nous comparons le temps de calcul CPU (cf. Fig. 4 et 5).

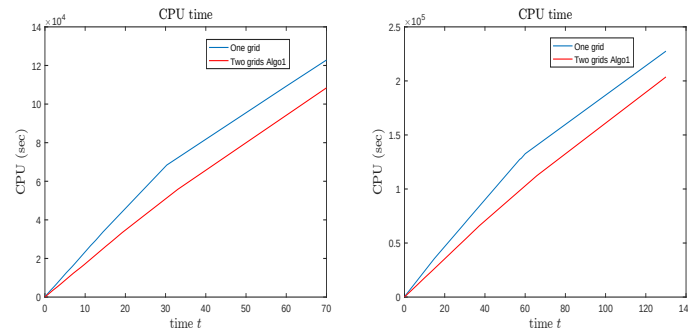


FIGURE 4 – De gauche à droite : $Re = 2000, 3200$; le temps CPU du schéma sur une grille fine (**Algorithme 2**) et celui de la méthode de séparation en échelles (**Algorithme 3**) respectivement.

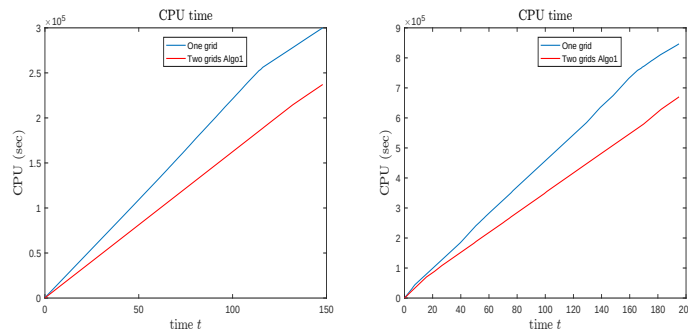


FIGURE 5 – De gauche à droite : $Re = 5000, 7500$; le temps CPU du schéma sur une grille fine (**Algorithme 2**) et celui de la méthode de séparation en échelles (**Algorithme 3**) respectivement.

Le **Chapitre 4** comprend une étude de stabilité du schéma semi-implicite suivant (**Algorithme 4**) :

Algorithm 4 Semi-implicite non incrémental

```

1: for  $k = 0, 1, \dots$  do
2:   Trouver  $u_h^*$  dans  $X_h$   $(\frac{u_h^* - u_h^k}{\Delta t}, \psi_h) + \nu(\nabla u_h^*, \nabla \psi_h) + ((u_h^k \cdot \nabla) u_h^k, \psi_h) = (f, \psi_h), \forall \psi_h \in X_h$ 
3:   Trouver  $p_h^{k+1}$  dans  $Y_h$   $(\text{div } \nabla p_h^{k+1}, \chi_h) = (\frac{\text{div } u_h^*}{\Delta t}, \chi_h), \forall \chi_h \in Y_h$ 
4:   Trouver  $u_h^{k+1}$  dans  $X_h$   $(u_h^{k+1} - u_h^* + \Delta t \nabla p_h^{k+1}, \psi_h) = 0, \forall \psi_h \in X_h$ 
5: end for

```

Pour des petits nombres de Reynolds, nous ne gagnons pas en Δt plus que le schéma semi-implicite. Ce dernier est stable même pour des grandes valeurs du pas de temps Δt . Nous pouvons déduire que par la technique bi-grilles, le schéma est 10 fois et même 50 fois plus stable que le schéma semi-implicite (**Algorithme 4**) résolu sur une grille pour $Re = 400$. Alors que pour $Re = 1000$, le gain augmente puisque le schéma semi-implicite devient de plus en plus limité par un pas de temps $\Delta t = 0.005$ et l'algorithme reste stable pour $\tau = 100$ et $\Delta t = 0.1$ et 0.5 . Le schéma est ainsi 20 fois et même 100 fois plus stable que le schéma semi-implicite (**Algorithme 4**) résolu sur une grille.

Au **Chapitre 4, section 4.6**, une comparaison avec la solution exacte

$$\begin{aligned} (u_1, u_2) &= (-2x^2y(1-y)(1-2y)(1-x)^2 \exp^{\sin t}, 2y^2x(1-x)(1-2x)(1-y)^2 \exp^{\sin t}) \\ p &= (x-0.5)(y-0.5) \end{aligned}$$

est présentée.

3.3 Couplage AC/NS et CH/NS

La technique de séparation en échelles a été aussi appliquée dans le cas du couplage AC/NS (**Chapitre 5**) et CH/NS (**Chapitre 6**). Les algorithmes bi-grilles que nous avons construits pour des problèmes de couplage se divisent en deux catégories : la première où la décomposition en échelles est effectuée uniquement pour la vitesse et la deuxième où la décomposition est faite pour la concentration et la vitesse.

Les variantes reposent sur celles considérées pour les équations de Navier-Stokes.

Pour $S_\phi = (0, -(1+\phi)g(\rho_1 - \rho_0) - (1-\phi)g(\rho_2 - \rho_0))^T$ la force de flottabilité avec la densité de fond ρ_0 , la densité des fluides 1 et 2 ρ_1 et ρ_2 respectivement et la gravité g , nous considérons le schéma de référence sur la grille fine comme suit :

Algorithm 5 Schéma de référence

-
- 1: **for** $k = 0, 1, \dots$ **do**
 - 2: **Trouver** ϕ_h^{k+1} **dans** X_h
 - 3: $(\frac{\phi_h^{k+1} - \phi_h^k}{\Delta t}, \psi_h) + \gamma(\nabla \phi_h^{k+1}, \nabla \psi_h) + ((u_h^k \cdot \nabla) \phi_h^k, \psi_h) + \frac{\gamma}{\varepsilon^2}(DF(\phi_h^k, \phi_h^{k+1}), \psi_h) = 0, \forall \psi_h \in X_h$
 - 4: **Trouver** $u_h^{*,k+1}$ **dans** Y_h
 - 5: $(\frac{u_h^{*,k+1} - u_h^k}{\Delta t}, v_h) + \nu(\nabla u_h^{*,k+1}, \nabla v_h) + ((u_h^{*,k+1} \cdot \nabla) u_h^{*,k+1} - S_\phi, v_h)$
 - 6: $= -\frac{1}{2}(\text{div } u_h^{*,k} \cdot u_h^{*,k+1}, v_h) - \frac{\lambda}{\gamma}((\frac{\phi_h^{k+1} - \phi_h^k}{\Delta t} + (u_h^{*,k+1} \cdot \nabla) \phi_h^{k+1}) \nabla \phi_h^{k+1}, v_h), \forall v_h \in Y_h$
 - 7: **end for**
-

Algorithm 6 2 grilles AC- 2 grilles NS

-
- 1: **for** $k = 0, 1, \dots$ **do**
 - 2: **Trouver** ϕ_H^{k+1} **dans** X_H
 - 3: $(\frac{\phi_H^{k+1} - \phi_H^k}{\Delta t}, \psi_H) + \gamma(\nabla \phi_H^{k+1}, \nabla \psi_H) + ((u_H^k \cdot \nabla) \phi_H^k, \psi_H) + \frac{\gamma}{\varepsilon^2}(DF(\phi_H^k, \phi_H^{k+1}), \psi_H) = 0,$
 - 4: $\forall \psi_H \in X_H$
 - 5: **Trouver** ϕ_h^{k+1} **dans** X_h
 - 6: $(\frac{\phi_h^{k+1} - \phi_h^k}{\Delta t}, \psi_h) + \tau(\phi_h^{k+1} - \phi_h^k, \psi_h) + \gamma(\nabla \phi_h^{k+1}, \nabla \psi_h) + ((u_h^k \cdot \nabla) \phi_h^k, \psi_h)$
 - 7: $= \tau(\phi_H^{k+1} - \phi_H^k, \psi_h) - \frac{\gamma}{\varepsilon^2}(\tilde{f}(\phi_H^{k+1}, \phi_h^k, \phi_h^{k+1}), \psi_h), \forall \psi_h \in X_h$
 - 8: **Trouver** $u_H^{*,k+1}$ **dans** Y_H
 - 9: $(\frac{u_H^{*,k+1} - u_H^k}{\Delta t}, v_H) + \nu(\nabla u_H^{*,k+1}, \nabla v_H) + ((u_H^{*,k+1} \cdot \nabla) u_H^{*,k+1} - S_\phi, v_H)$
 - 10: $= -\frac{1}{2}(\text{div } u_H^{*,k} \cdot u_H^{*,k+1}, v_H) - \frac{\lambda}{\gamma}((\frac{\phi_H^{k+1} - \phi_H^k}{\Delta t} + (u_H^{*,k+1} \cdot \nabla) \phi_H^{k+1}) \nabla \phi_H^{k+1}, v_H), \forall v_H \in Y_H$
 - 11: **Trouver** $u_h^{*,k+1}$ **dans** Y_h
 - 12: $(1 + \tau \Delta t)(u_h^{*,k+1} - u_h^k, v_h) + \nu \Delta t(\nabla u_h^{*,k+1}, \nabla v_h) + \Delta t((u_h^k \cdot \nabla) u_h^k, v_h) + \frac{\Delta t}{2}(\text{div } u_h^k \cdot u_h^k, v_h)$
 - 13: $= -\left(\frac{\lambda}{\gamma}(\phi_h^{k+1} - \phi_h^k + \Delta t(u_h^k \cdot \nabla) \phi_h^{k+1}) \nabla \phi_h^{k+1} - \Delta t S_\phi, v_h\right) + \tau \Delta t(u_H^{*,k+1} - u_H^k, v_h), \forall v_h \in Y_h$
 - 14: **Trouver** p_h^{k+1} **dans** P_h $\Delta t(\text{div } \nabla p_h^{k+1}, \chi_h) = (\text{div } u_h^{*,k+1}, \chi_h), \forall \chi_h \in P_h$
 - 15: **Trouver** u_h^{k+1} **dans** Y_h $(u_h^{k+1} - u_h^{*,k+1} + \Delta t \nabla p_h^{k+1}, v_h) = 0, \forall v_h \in Y_h$
 - 16: **end for**
-

Il semble qu'il est plus rentable au niveau réduction du temps de calcul CPU (cf. **Chapitre 5 section 5.4.1.3** et **5.4.2.3**) de considérer la décomposition de la concentration et de la vitesse

par l'algorithme bi-grilles (**Algorithme 6**).

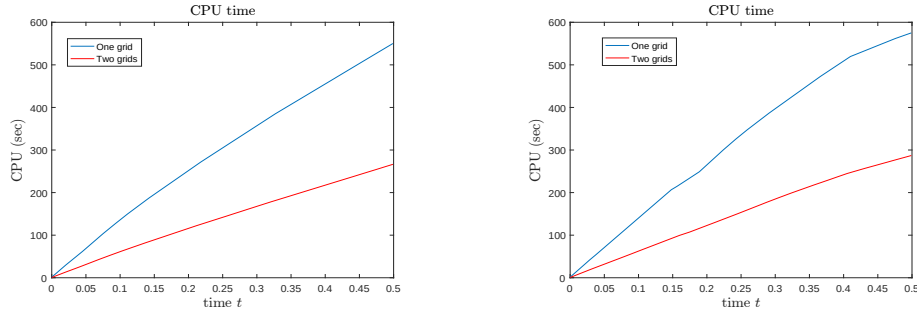


FIGURE 6 – Comparaison CPU entre le schéma sur une grille fine et la méthode de séparation en échelles (concentration et vitesse) (**Algorithme 6**), fusionnement de deux bulles (à gauche) et bulle montante (à droite) avec $N_f = 32, N_c = 16$.

Nous comparons nos résultats obtenus par la technique bi-grilles à ceux de [136] et nous notons la compatibilité.

Nous partons dans la Fig. 7 de deux bulles en contact où la phase $\phi = 1$ est à l'intérieur des bulles et $\phi = -1$ à l'extérieur des bulles et la vitesse initiale est nulle. Nous apercevons la déformation et la montée de la bulle rectangulaire (Fig 8).

Dans les deux cas, nous prenons $Re = 10, \varepsilon = 0.05, \gamma = 0.1, \lambda = 10^{-6}$ en utilisant l'EF $\mathbb{P}_2$ pour la fonction ϕ et la vitesse u et l'EF $\mathbb{P}_1$ pour la pression p .

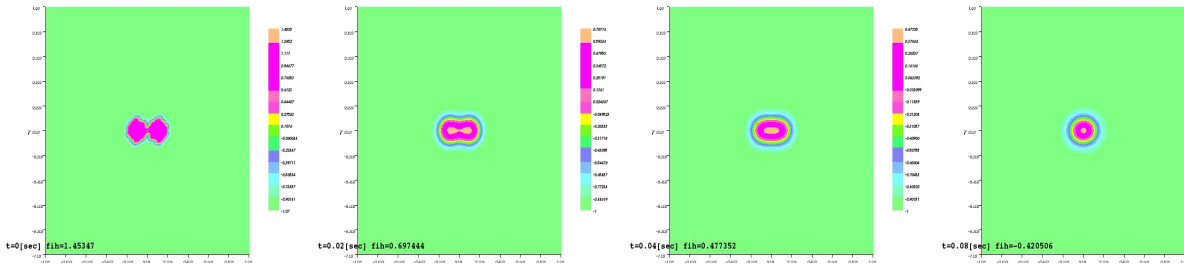


FIGURE 7 – La solution ϕ_h par l'**Algorithme 6** pour deux bulles en contact : De gauche à droite : $t = 0, 0.02, 0.04, 0.08$.

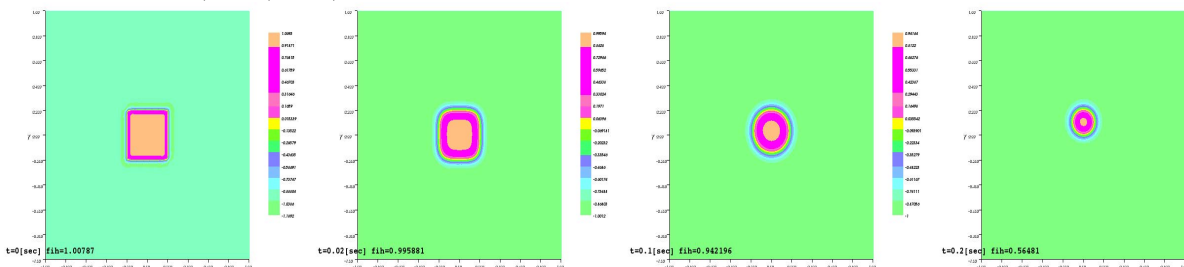


FIGURE 8 – La solution ϕ_h par l'**Algorithme 6** pour une bulle montante : De gauche à droite : $t = 0, 0.02, 0.1, 0.2$.

Pour le couplage Cahn-Hilliard/Navier-Stokes, nous considérons l'**Algorithme 7** comme schéma de référence. Plusieurs variantes sont prises en considération comme pour le modèle AC/NS (cf. **Chapitre 6**) mais nous présentons le plus avantageux en terme de CPU (**section 6.4.1.3** et **6.4.2.3**). Considérons la décomposition de la concentration et de la vitesse par l'algorithme bi-grilles (**Algorithme 8**) :

Algorithm 7 Schéma de référence CH/NS

-
- 1: **for** $k = 0, 1, \dots$ **do**
 - 2: **Trouver** $(\phi_h^{k+1}, w_h^{k+1})$ **dans** $X_h \times W_h$
 - 3: $(\frac{\phi_h^{k+1} - \phi_h^k}{\Delta t}, \psi_h) + \frac{\gamma}{\varepsilon^2}(\nabla(w_h^{k+1} + c\phi_h^{k+1}), \nabla\psi_h) + ((u_h^k \cdot \nabla)\phi_h^k, \psi_h) = 0, \forall \psi_h \in X_h$
 - 4: $(w_h^{k+1} + c\phi_h^{k+1}, \chi_h) - \varepsilon^2(\nabla\phi_h^{k+1}, \nabla\chi_h) - (DF(\phi_h^k, \phi_h^{k+1}), \chi_h) = 0, \forall \chi_h \in W_h$
 - 5: **Trouver** $u_h^{*,k+1}$ **dans** Y_h

$$\begin{aligned} & (\frac{u_h^{*,k+1} - u_h^k}{\Delta t}, v_h) + \nu(\nabla u_h^{*,k+1}, \nabla v_h) + ((u_h^{*,k+1} \cdot \nabla)u_h^{*,k+1}, v_h) \\ &= -\frac{1}{2}(\operatorname{div} u_h^{*,k} \cdot u_h^{*,k+1}, v_h) + \frac{\lambda}{\varepsilon^2}((w_h^{k+1} + c\phi_h^{k+1})\nabla\phi_h^{k+1}, v_h), \forall v_h \in Y_h \end{aligned}$$

- 6: **Trouver** p_h^{k+1} **dans** P_h $\Delta t(\operatorname{div} \nabla p_h^{k+1}, \eta_h) = (\operatorname{div} u_h^{*,k+1}, \eta_h), \forall \eta_h \in P_h$
 - 7: **Trouver** u_h^{k+1} **dans** Y_h $(u_h^{k+1} - u_h^{*,k+1} + \Delta t \nabla p_h^{k+1}, v_h) = 0, \forall v_h \in Y_h$
 - 8: **end for**
-

Algorithm 8 2 grilles CH- 2 grilles NS

-
- 1: **for** $k = 0, 1, \dots$ **do**
 - 2: **Trouver** $(\phi_H^{k+1}, w_H^{k+1})$ **dans** $X_H \times W_H$
 - 3: $(\frac{\phi_H^{k+1} - \phi_H^k}{\Delta t}, \psi_H) + \frac{\gamma}{\varepsilon^2}(\nabla(w_H^{k+1} + c\phi_H^{k+1}), \nabla\psi_H) + ((u_H^k \cdot \nabla)\phi_H^k, \psi_H) = 0, \forall \psi_H \in X_H$
 - 4: $(w_H^{k+1} + c\phi_H^{k+1}, \chi_H) - \varepsilon^2(\nabla\phi_H^{k+1}, \nabla\chi_H) - (DF(\phi_H^k, \phi_H^{k+1}), \chi_H) = 0, \forall \chi_H \in W_H$
 - 5: **Trouver** $(\phi_h^{k+1}, w_h^{k+1})$ **dans** $X_h \times W_h$

$$\begin{aligned} & (\frac{\phi_h^{k+1} - \phi_h^k}{\Delta t}, \psi_h) + \frac{\gamma}{\varepsilon^2}(\nabla(w_h^{k+1} + c\phi_h^{k+1}), \nabla\psi_h) + ((u_h^k \cdot \nabla)\phi_h^k, \psi_h) = 0, \forall \psi_h \in X_h \\ & (w_h^{k+1} + c\phi_h^{k+1}, \chi_h) - \varepsilon^2(\nabla\phi_h^{k+1}, \nabla\chi_h) - \tau(\phi_h^{k+1} - \phi_h^k, \chi_h) \\ &= -\tau(\phi_H^{k+1} - \phi_H^k, \chi_h) + (\tilde{f}(\phi_H^{k+1}, \phi_h^k, \phi_h^{k+1}), \chi_h), \forall \chi_h \in W_h \end{aligned}$$

- 6: **Trouver** $u_H^{*,k+1}$ **dans** Y_H

$$\begin{aligned} & (\frac{u_H^{*,k+1} - u_H^k}{\Delta t}, v_H) + \nu(\nabla u_H^{*,k+1}, \nabla v_H) + ((u_H^{*,k+1} \cdot \nabla)u_H^{*,k+1}, v_H) \\ &= -\frac{1}{2}(\operatorname{div} u_H^{*,k} \cdot u_H^{*,k+1}, v_H) + \frac{\lambda}{\varepsilon^2}((w_h^{k+1} + c\phi_h^{k+1})\nabla\phi_h^{k+1}, v_H), \forall v_H \in Y_H \end{aligned}$$

- 7: **Trouver** $u_h^{*,k+1}$ **dans** Y_h

$$\begin{aligned} & (1 + \tau\Delta t)(u_h^{*,k+1} - u_h^k, v_h) + \nu\Delta t(\nabla u_h^{*,k+1}, \nabla v_h) + \Delta t((u_h^k \cdot \nabla)u_h^k, v_h) + \frac{1}{2}(\operatorname{div} u_h^k u_h^k, v_h) \\ &= \tau\Delta t(u_H^{*,k+1} - u_H^k, v_h) + \frac{\lambda}{\varepsilon^2}(\Delta t(w_h^{k+1} + c\phi_h^{k+1})\nabla\phi_h^{k+1}, v_h), \forall v_h \in Y_h \end{aligned}$$

- 8: **Trouver** p_h^{k+1} **dans** P_h $\Delta t(\operatorname{div} \nabla p_h^{k+1}, \eta_h) = (\operatorname{div} u_h^{*,k+1}, \eta_h), \forall \eta_h \in P_h$
 - 9: **Trouver** u_h^{k+1} **dans** Y_h $(u_h^{k+1} - u_h^{*,k+1} + \Delta t \nabla p_h^{k+1}, v_h) = 0, \forall v_h \in Y_h$
 - 10: **Résoudre dans** Y_H $(u_H^{k+1} - u_h^{k+1}, v_H) = 0, \forall v_H \in Y_H$
 - 11: **end for**
-

L'**Algorithme 8** donne comme pour le modèle AC/NS des résultats similaires à ceux de [136] et est deux fois plus rapide que l'**Algorithme 7** implicite résolu sur la grille fine (cf. Fig. 9).

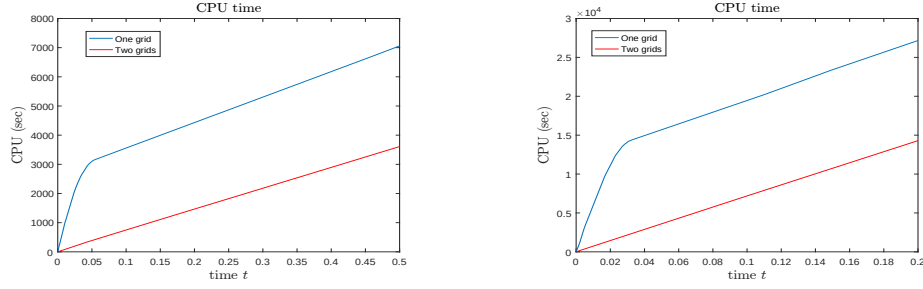


FIGURE 9 – Comparaison CPU entre le schéma sur une grille fine et la méthode de séparation en échelles (concentration et vitesse) (**Algorithme 8**), déformation d’une bulle rectangulaire (à gauche) et fusionnement de deux bulles (à droite) avec $N_f = 32, N_c = 16$.

Dans la Fig. 10, une déformation d’une bulle initiale rectangulaire a lieu et dans la Fig. 11 le fusionnement de deux bulles en contact est obtenu pour les mêmes paramètres pris pour AC/NS.

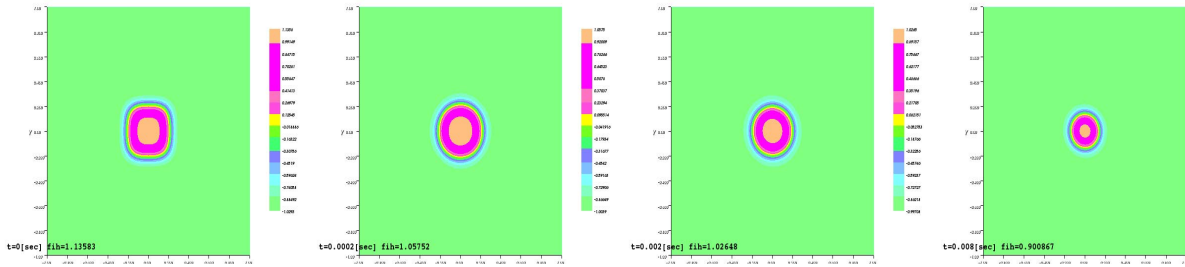


FIGURE 10 – La solution ϕ_h par l’**Algorithme 8** pour une bulle rectangulaire, de gauche à droite : $t = 0, 0.0002, 0.002, 0.008$.

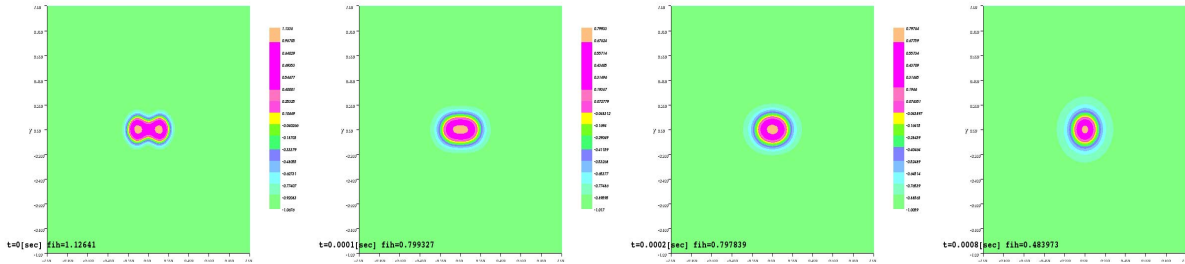


FIGURE 11 – La solution ϕ_h par l’**Algorithme 8** pour deux bulles en contact, de gauche à droite : $t = 0, 0.0001, 0.0002, 0.0008$.

Pour le modèle CH/NS, nous démontrons la conservation de la masse, caractéristique du modèle de Cahn-Hilliard. La moyenne spatiale $\int_{\Omega} \phi$ reste constante au cours du temps et est égale à -3.6875 (déformation cf. Fig. 12) et à -3.86979 (fusionnement cf. Fig. 13).

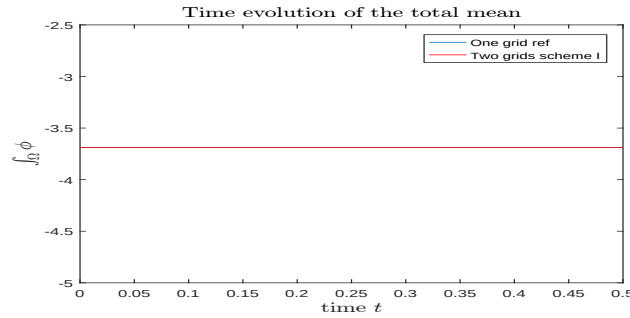


FIGURE 12 – Moyenne vs temps- Comparaison entre l’**Algorithme 7** et l’**Algorithme 8** pour $\Delta t = 0.0001$.

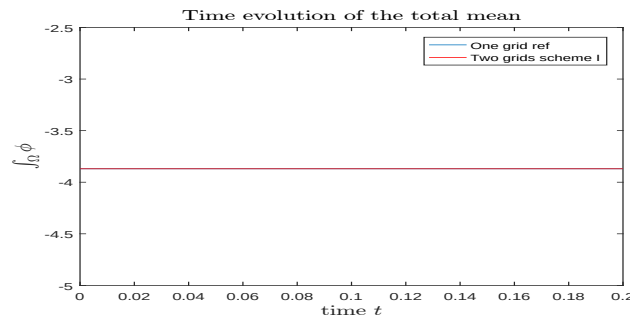


FIGURE 13 – Moyenne vs temps, Comparaison entre l’**Algorithme 7** et l’**Algorithme 8** pour $\Delta t = 0.00001$, cas de fusionnement de deux bulles.

4 Organisation de la thèse

Ce mémoire de thèse renferme six chapitres.

Le premier chapitre constitue un état de l’art dans lequel un aperçu sur les équations de champs de phases Allen-Cahn et Cahn-Hilliard est présenté. Nous rappelons des résultats d’existence et d’unicité de la solution et des schémas numériques classiques où nous discutons leur stabilité et la régularité de la solution.

La séparation en échelles est introduite au deuxième chapitre. Nous commençons par le cas simple linéaire (équation de la chaleur). Nous vérifions la possibilité d’application de cette technique sur l’équation d’Allen-Cahn en simulant les petites échelles. Nous construisons notre algorithme bi-grilles en considérant un schéma inconditionnellement stable sur la grille grossière et stabilisant uniquement les modes élevés sur la grille fine. Nous gagnons ainsi en temps de calcul CPU. Nous présentons aussi une comparaison entre la stabilisation globale (solution entière) proposée par Shen et notre stabilisation uniquement des modes élevés. Toute cette démarche est adaptée aussi pour l’équation de Cahn-Hilliard au troisième chapitre.

Nous étudions par la suite des schémas bi-grilles à séparation en échelles pour les équations de Navier-Stokes. Au quatrième chapitre, nous proposons des algorithmes bi-grilles basés sur la

technique de projection incrémentale et non incrémentale. Les résultats numériques portent sur ceux du problème standard de la cavité entraînée et la comparaison avec une solution exacte. Une étude de la stabilité est faite en comparant les pas de temps avec ceux d'un schéma semi-implicite.

Le couplage des équations d'Allen-Cahn et de Navier-Stokes fait l'objet du cinquième chapitre. Une catégorie des algorithmes bi-grilles sépare en échelles uniquement la vitesse et une autre catégorie sépare à la fois la concentration et la vitesse. Nous étudions le fusionnement de deux bulles en contact et la montée d'une bulle comme dans les travaux de Hua [136]. Nous constatons un gain en temps de calcul par rapport au schéma implicite de référence sur une grille fine ; nos schémas bi-grilles, traitant la concentration et la vitesse sur deux grilles, sont deux fois plus rapides que le schéma implicite.

Enfin au sixième chapitre, nous présentons des schémas bi-grilles pour le modèle couplé Cahn-Hilliard/Navier-Stokes similaires à ceux du problème couplé AC/NS. Nous démontrons aussi le gain en temps de calcul et la conservation de la masse, critère de l'équation de Cahn-Hilliard. Une conclusion ainsi qu'une liste de futures idées et perspectives de ce travail seront présentées à la fin de ce mémoire.

Première partie : Méthodes bi-grilles en éléments finis pour les équations de champs de phase

Chapitre 1

Etat de l'art : modèles de champs de phase

Sommaire

1.1	Méthode de modélisation par champs de phase - historique et développements récents	21
1.2	Équations de champs de phase	22
1.2.1	Équation d'Allen-Cahn	22
1.2.2	Équation de Cahn-Hilliard	25
1.2.3	Résultats d'analyse - Existence et unicité	28
1.2.3.1	Équation d'Allen-Cahn stationnaire en dimension 1	28
1.2.3.2	Équation d'Allen-Cahn avec conditions de Neumann homogènes	29
1.2.3.3	Équation d'Allen-Cahn avec conditions de Dirichlet homogènes	29
1.2.4	Schémas numériques classiques et régularité	30
1.2.4.1	Allen-Cahn	31
1.2.4.2	Cahn-Hilliard	34

1.1 Méthode de modélisation par champs de phase - historique et développements récents

Les deux derniers siècles ont été témoins d'un conflit entre deux idées sur l'interface séparant deux fluides. La première était celle de Young, Laplace et Gauss qui ont considéré que l'épaisseur de la surface de séparation entre deux fluides est nulle. La deuxième idée remonte à Poisson (1831), Maxwell (1876) et Gibbs (1876) qui ont vu que les fluides sont séparés par une zone de transition à faible épaisseur mais non nulle [11]. L'interface nette entre les phases est ainsi remplacée par des régions de transitions : c'est la méthode de champs de phase.

Lord Rayleigh (1892) et Van der Waals (1893) ont développé cette dernière idée en introduisant des théories en gradient pour l'interface basée sur les principes thermodynamiques.

Cette méthodologie de champs de phase a gagné une grande renommée en raison des applications qu'elle traite dans le domaine des écoulements diphasiques. Les flux diphasiques comprennent non seulement les flux de deux états de la matière différents (c'est à dire solide-liquide,

liquide-gaz, solide-gaz) mais aussi le mélange de deux matériaux de même état mais à propriétés chimiques différentes (c'est à dire liquide-liquide mais à densités différentes comme l'huile dans l'eau). Ce procédé de champs de phase a réussi à décrire les processus de solidification ainsi que l'évolution de la microstructure dans les solides (1945), les interfaces liquide-liquide (1998) et la décomposition spinodale [181]. En particulier, des modèles de solidification de phase ont été réalisés pour calculer des structures interfaciales réalistes compliquées telles que celles présentes lors de la croissance dendritique (Kobayashi (1993), Wheeler et al. (1993), Warren et al. (1995)).

La méthode de champs de phase introduit, non seulement un champ de température habituel, mais un paramètre d'ordre alternatif, le champ dit de phase ϕ pour caractériser les phases. Les dynamiques correspondantes sont modélisées par le flot de gradient d'une fonction d'énergie libre phénoménologique écrite en fonction du champ de phase et d'autres champs (température, concentration, déformation, etc.).

Bien que les simulations numériques de modèles de champs de phase sont plus faciles que ceux de modèles d'interface pointue, les modèles de champ de phase connaissent des limitations dans certaines situations. Il s'agit de l'émergence d'une interface mésoscopique qui rend les équations de champs de phase très rigides.

Ce cas nécessite des méthodes numériques à plusieurs échelles résolvant à la fois les interfaces minces inhérentes aux modèles de champs de phase tout en capturant des microstructures sur des échelles de millimètres.

Par exemple, la modélisation physique multi-échelle et simulation numérique de dispositifs électrochimiques pour la conversion et le stockage de l'énergie tel les batteries où un modèle de continuum est adapté sur l'échelle de millimètres, la méthode de Monte Carlo cinétique à l'échelle de micromètres, la dynamique moléculaire au niveau des nanomètres et DFT (Théorie de la Densité Fonctionnelle (quantum)) au niveau atomique à l'échelle des angstroms [101, 102].

1.2 Équations de champs de phase

1.2.1 Équation d'Allen-Cahn

L'équation d'Allen-Cahn est un sujet très actuel et actif en mathématiques et entre dans la liste de beaucoup de modèles de champs de phase modélisant différents problèmes naturels de la science des matériaux : la dynamique des matériaux cristallins, la croissance cristalline, la solidification [82, 83, 86, 87, 175, 183], l'écologie [100].

Le processus de séparation de deux phases dans un alliage, tel que considéré par Allen et Cahn,

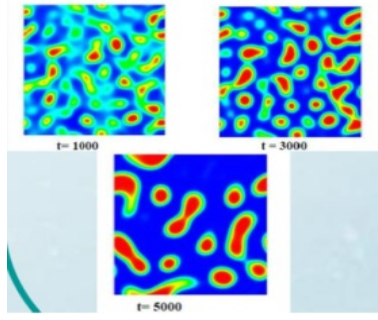


FIGURE 1.1 – Séparation en deux phases distinctes Fe-Cr.

est associé à l'énergie $E_P(u) = F(u)$, où u est le paramètre d'ordre (concentration d'un des deux composants). Ici F est le potentiel, construit de sorte à ce que les deux phases soient stables, et associées à des minima locaux ; un exemple simple, avec les phases $u = +1$ et $u = -1$, est le potentiel de Landau $F(u) = \frac{(u^2 - 1)^2}{4}$. $E_P(u)$ est donc non nulle dans les régions du domaine Ω dans lesquelles $u \neq \pm 1$. Sous l'hypothèse physique d'interface diffuse, les régions séparant les deux phases (interface) ne sont pas localement des hyperplans et ont une épaisseur ε .

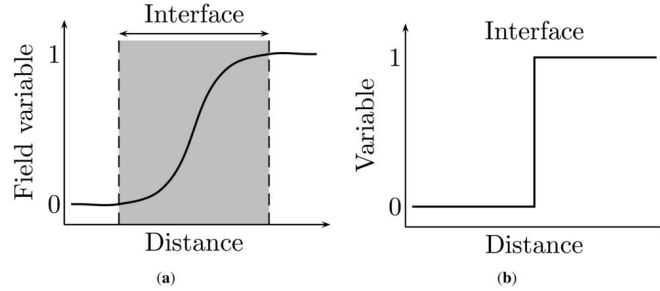


FIGURE 1.2 – Interfaces diffuse et nette

L'énergie est alors relaxée par ajout pondéré d'une énergie de Dirichlet $E_D(u) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} |\nabla u|^2 dx$ et on considère alors l'énergie totale

$$E(u) = E_D(u) + \frac{1}{\varepsilon^2} E_P(u)$$

Nous notons la compétition entre ces deux termes, $E_D(u)$, d'une part qui pénalise les variations spatiales, et $E_P(u)$, d'autre part qui, par la présence du facteur $\frac{1}{\varepsilon^2}$, force le paramètre d'ordre à coïncider avec une des deux phases : il s'agit d'un terme de pénalisation.

Les configurations particulières des phases correspondront aux minima locaux de $E(u)$. Dès lors, pour modéliser la dynamique de la transition de phase deux approches peuvent être envisagées :

La première consiste à considérer l'équation de réaction-diffusion :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + \frac{1}{\varepsilon^2} f(u) = 0, x \in \Omega, \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0, x \in \partial\Omega, \quad (1.2)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), x \in \Omega. \quad (1.3)$$

Les conditions de Neumann homogènes traduisent un flux nul de matière au bord.
La seconde consiste à considérer le flot de gradient :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla E(u) = 0, x \in \Omega, \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0, x \in \partial\Omega, \quad (1.5)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), x \in \Omega. \quad (1.6)$$

pour lequel l'énergie $E(u)$ est décroissante en temps.

Les deux approches "réaction-diffusion" et "flot de gradient" coïncident pour la fonction de Lyapunov de l'énergie

$$E(u) = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} |\nabla u|^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} F(u) \right) dx \quad (1.7)$$

où $F(u)$ est une primitive de $f(u)$. La compétition entre le terme potentiel et le terme de diffusion a lieu et correspond à la régularisation en transition de phase.

Chacune de ces approches motivera l'utilisation d'un type de schémas numériques. On citera par exemple ceux proposés dans les références suivantes : [17, 18, 212] en différences finies, des approches de décomposition [84, 119], des schémas énergétiquement stables [117, 120, 135].

Généralement les équations de réaction-diffusion (1.4) sont non linéaires par rapport à l'inconnue u et cela est dû au choix du terme $f(u)$ que nous préciserons par la suite ; il diffère selon le problème physique modélisé. Dans la littérature, on considère l'équation d'Allen-Cahn (1.4) non seulement avec le potentiel Ginzburg-Landau de double puits $F(u) = \frac{1}{4}(1-u^2)^2$ où $f(u) = F'(u)$ mais aussi le potentiel de double puits tronqué

$$\tilde{F}(u) = \begin{cases} \frac{3M^2-1}{2}u^2 - 2M^3u + \frac{1}{4}(3M^4+1) & \text{si } u > M \\ \frac{1}{4}(1-u^2)^2 & \text{si } u \in [-M, M] \\ \frac{3M^2-1}{2}u^2 + 2M^3u + \frac{1}{4}(3M^4+1) & \text{si } u < -M \end{cases}$$

et l'énergie libre logarithmique

$$F(u) = \frac{\theta}{2}(1+u)\ln(1+u) + (1-u)\ln(1-u) - \frac{\theta_c}{2}u^2$$

D'après Allen et Cahn, la solution u de (1.4) sépare Ω en deux régions où $u \approx 1$ et $u \approx -1$ et l'interface entre les deux régions se déplace avec une vitesse normale égale à la somme des courbures principales. ε désigne la largeur de la couche fine de transition d'une phase à une autre, qui est faible par rapport à la longueur caractéristique de l'échelle de laboratoire ; il s'agit du *modèle à interface diffuse* (contrairement aux modèles à interface nette, atteinte en faisant tendre ε vers 0). La condition aux limites de Neumann homogène implique qu'aucune perte de masse ne se produit dans l'ensemble de l'enceinte.

L'étude se fait pour des fonctions f qui vérifient la condition suivante : il existe une constante L telle que

$$\max_{u \in \mathbb{R}} |f'(u)| \leq L. \quad (1.8)$$

Son importance dépasse le cadre des sciences de matériaux et trouve des applications aux modèles de la génétique, de la biologie et de l'écologie [100],[148].

La dynamique d'une grande diversité de systèmes physicochimiques peut être mathématiquement modélisée comme des systèmes de réaction-diffusion dans lesquels on décrit comment la composition de plusieurs espèces chimiques distribuées dans l'espace change sous l'influence de réactions chimiques compétitives entre les espèces (origine d'une nouvelle espèce) et la diffusion qui provoque l'expansion de l'espèce dans l'espace.

Le calcul des structures optimales dans les modèles de réaction-diffusion est d'une grande importance dans de nombreux systèmes physico-chimiques. Une formation de structure intervient par exemple lors de la formation de phase solide et de l'évolution des réactions d'intercalation, lors de l'auto-organisation de matériaux d'électrodes composites pour des applications électrochimiques et lors de l'évolution microstructurale des électrodes composites lors de leur dégradation.

Une méthode pour minimiser le nombre d'interphases sur un intervalle de temps donné a été proposée dans [45], elle utilise une condition de flux limite comme contrôle.

Les équations d'Allen-Cahn ne s'adressent pas uniquement à la dynamique des motifs (pattern), elles peuvent s'appliquer en traitement d'image, plus précisément en segmentation d'image [157]. Pour f_0 une image donnée,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + \frac{F'(u)}{\varepsilon^2} + \lambda \left((1+u)(f_0 - c_1)^2 - (1-u)(f_0 - c_2)^2 \right), \quad x \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0, \quad x \in \partial\Omega \end{aligned}$$

et pour C est une courbe de segmentation, la phase u correspond aux situations

$$u(x) = \begin{cases} > 0 & \text{si } x \text{ est à l'intérieur de } C \\ = 0 & \text{si } x \in C \\ < 0 & \text{si } x \text{ est à l'extérieur de } C. \end{cases}$$

Ici λ est un paramètre non négatif, $F'(u) = u(u^2 - 1)$ et les termes c_1 et c_2 sont les moyennes de f_0 dans les régions ($u > 0$) et ($u < 0$) comme suit

$$c_1 = \frac{\int_{\Omega} f_0(x)(1+u(x))dx}{\int_{\Omega} (1+u(x))dx} \quad \text{et} \quad c_2 = \frac{\int_{\Omega} f_0(x)(1-u(x))dx}{\int_{\Omega} (1-u(x))dx}.$$

1.2.2 Équation de Cahn-Hilliard

L'équation de Cahn-Hilliard décrit la séparation des mélanges avec un écart de miscibilité dans leurs diagrammes de phase et c'est probablement le modèle de champs de phase le plus connu. En d'autres termes, la ségrégation du système dans les domaines spatiaux prédominés par l'un des composants, en présence de contrainte de la masse. L'équation de Cahn-Hilliard apparaît aussi dans la modélisation de beaucoup d'autres phénomènes. Il s'agit de l'évolution de deux

composants de matière intergalactique, la dynamique de deux populations [66], la modélisation bio-mathématique d'un film bactérien et certains problèmes de film mince [176], le traitement d'image et la retouche d'images [20],[21] et même les anneaux de Saturne et le regroupement des moules.

Cette équation dérive de la fonction énergie Ginzburg-Landau [116],[149] et s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta(-\Delta u + \frac{1}{\varepsilon^2}f(u)) = 0 \text{ sur } \Omega, t > 0, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial(\Delta u - \frac{1}{\varepsilon^2}f(u))}{\partial n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega, t > 0, \\ u(x, 0) = u^0(x) \text{ sur } \Omega. \end{cases} \quad (1.9)$$

L'équation de Cahn-Hilliard (cf. [180]) évoque des phénomènes compliqués de séparation de phase dans un solide. Il est aussi possible de considérer (1.9) comme un flot de gradient dans $H^{-1}(\Omega)$ de la fonctionnelle d'énergie libre de Ginzburg-Landau

$$E(u) = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} |\nabla u|^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} F(u) \right) dx.$$

Pour dériver l'équation de Cahn-Hilliard, le point de départ est la loi d'équilibre de masse

$$u_t + \nabla \cdot J = 0,$$

où J est le flux de phase défini par

$$J = -M(u) \nabla \left(\frac{\partial E(u)}{\partial u} \right),$$

et $M(u)$ représente la fonction dite de mobilité. Nous récupérerons (1.9) pour $M(u) = 1$.

Les deux conditions aux bords indiquent que le fluide ne passe pas à travers la bordure. La masse n'est plus conservée pour des conditions de Dirichlet homogènes aux bords par contre l'étude mathématique est simplifiée par exemple pour l'équation de Cahn-Hilliard visqueuse dans [14]. Nous prenons la concentration comme étant une fraction de volume ou une fraction de masse selon le système physique en étude.

La fraction de volume est par unité de volume du composant "A" par exemple, dans un système contenant deux composantes qu'on note "A" et "B".

Une telle description est appropriée dans la plupart des circonstances mais pas toutes. De plus, cette définition de $u(x, t)$ implique que $0 \leq u(x, t) \leq 1$. En outre, si $u(x, t)$ la concentration du composant A est connue, alors la concentration du second composant B est donnée par $1 - u(x, t)$ et donc elle est aussi connue.

Ainsi, l'évolution de la composition du système bicomposant est prédite par une seule équation scalaire de Cahn-Hilliard. Les deux composants peuvent se référer par exemple à un système de deux composants métalliques ou deux composants polymères ou même deux composants vitreux. L'équation de Cahn-Hilliard a été vue comme contenant beaucoup de paradigmes de la dynamique de séparation de phase. Et sous ce titre, cette équation a joué, et continue de jouer, un rôle important dans la compréhension de l'évolution de la séparation de phase.

Pourquoi l'équation de Cahn-Hilliard apparaît-elle dans plusieurs contextes et quel comportement est prédit par cette équation commune à tous ces systèmes ?

Nous cherchons à modéliser la dynamique d'une manière suffisamment précise pour que plusieurs des différents dispositifs puissent être expliqués et prédits.

En sciences des matériaux, cette formation du modèle est dénommée "la microstructure" de la matière. Cette microstructure est très influente dans la détermination de la plupart des propriétés du matériau telles que la conductivité, la dureté et la résistance.

Ces modèles traitent habituellement de deux composants, mais il y a eu aussi plusieurs extensions où des modèles triphasés ont été considérés (avec et sans couplage avec un écoulement de fluide). Il est connu d'après Elliott et Zheng (1986) que si les données initiales $u_o \in H_E^2(\Omega) = \{u \in H^2(\Omega); \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}$ alors (1.9) a une solution unique pour tous les pas de temps. Une méthode standard des éléments finis de Galerkin conforme exige que l'espace d'approximation soit contenu dans $H_E^2(\Omega)$ (cf. Elliott et French (1987) pour les calculs dans une dimension spatiale).

En revanche, nous proposons ici une méthode de division basée sur les éléments $H^1(\Omega)$: cette équation parabolique non linéaire du quatrième ordre peut s'écrire sous la formulation mixte suivante en se basant sur les éléments $H^1(\Omega)$ (cf. [85]) :

$$\begin{aligned} (u_t, q) + (\nabla w, \nabla q) &= 0, \quad \forall q \in H^1(\Omega), \\ (\nabla u, \nabla \psi) + \frac{1}{\varepsilon^2}(f(u), \psi) &= (w, \psi), \quad \forall \psi \in H^1(\Omega). \end{aligned} \quad (1.10)$$

Nous pouvons démontrer que la masse totale est conservée au cours du temps, c'est-à-dire que $\int_{\Omega} u(t)dt$ reste constante en temps : en effet pour $q = 1$ dans (1.10), nous obtenons

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} u = 0 \Leftrightarrow \int_{\Omega} u(t) = \int_{\Omega} u_0, \forall t > 0.$$

De plus, en prenant $q = w$ et $\psi = u_t$ dans (1.10), on arrive à la loi de l'énergie

$$\frac{\partial}{\partial t} E(u(t)) + \int_{\Omega} |\nabla w(t)|^2 dx = 0. \quad (1.11)$$

L'expression (1.11) implique que l'énergie diminue avec le temps avec un taux donné par la dissipation physique $\|\nabla w(t)\|_{L^2}^2$.

En considérant l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta(-\Delta u + \frac{1}{\varepsilon^2}f(u)) + g(x, u) = 0 \quad (1.12)$$

pour $g(x, u) = 0$, nous obtenons l'équation (1.9).

Différents choix de $g(x, u)$ ont été étudiés dans la littérature. Nous citons à titre d'exemple, $g(x, u) = \alpha u(u - 1)$ ($\alpha > 0$) pour la croissance tumorale et la cicatrisation des plaies, $g(x, u) = \lambda_0 \chi_{\Omega \setminus D(x)}(u - h)$ ($\lambda_0 > 0$) pour l'équation modélisant la retouche de l'image binaire originale $h(x)$ où D est le domaine régulier de Ω à retoucher. Dans ce cas, pour remédier à l'absence de la conservation de la masse, la dissipativité de la moyenne spatiale est démontrée dans [93] ainsi que l'existence d'attracteur global de dimension finie. Le cas $g(x, u) = \varepsilon u$ ($\varepsilon > 0$) est celui de l'équation de Oono modélisant des interactions longues (non locales). Pour $g(x, u) = g(u)$ nous

trouvons un modèle appliqué à la biologie.

Nous avons trouvé des solutions exactes de l'équation de Cahn-Hilliard dans [206] en considérant une méthode modifiée de la fonction tangente hyperbolique $\tanh$ étendue. Une solution numérique à une équation de Cahn-Hilliard est obtenue en utilisant une méthode de perturbation homotopique (HPM) combinée avec la méthode de décomposition adomienne (ADM).

Dans l'équation de Cahn-Hilliard, l'évolution de la concentration se fait en deux étapes : lors de la première étape, il y a une séparation de phase rapide et, lors de la seconde étape, il y a une phase de grossissement. À la fin de la première étape, des régions de phase, séparées par l'interface, sont formées à échelle fine tandis qu'à la fin de la deuxième étape, la solution atteindra un état d'équilibre, ce qui minimise la fonction énergétique.

Il y a trois défis principaux pour résoudre numériquement l'équation de Cahn-Hilliard ; la non linéarité dans le système, la présence du paramètre ε dans les équations (qui est généralement faible dans les applications de transition de phase) et les différentes échelles de temps de chacune des étapes de l'évolution de la concentration.

De plus, une résolution numérique efficace du problème nécessite une relation correcte des échelles numériques, c'est-à-dire que la taille spatiale du maillage et la taille du pas de temps doivent être correctement reliées à la longueur d'interaction ε .

1.2.3 Résultats d'analyse - Existence et unicité

1.2.3.1 Équation d'Allen-Cahn stationnaire en dimension 1

Pour la version stationnaire de (1.4) en dimension 1

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x) = u(x)(u(x)^2 - 1), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (1.13)$$

le théorème d'existence et d'unicité locale de Cauchy-Lipschitz est vérifié. Ainsi il existe une seule solution maximale $u(x)$ telle que $u(x_0) = u_0$ et $u'(x_0) = v_0$.

Autres solutions de (1.13) sont

$$u(x) = \tanh\left(\pm \frac{x}{\sqrt{2}}\right). \quad (1.14)$$

Remarque 1.2.1 Une conjecture de Giorgi pour $\Omega = \mathbb{R}^n$ revient à savoir si, sous certaines hypothèses, nous nous ramenons à une solution de la forme (1.14). Beaucoup d'études sur la symétrie de transition de certaines solutions de (1.13) ont été faites. Citons à titre d'exemple [94, 95].

Pour $n = 1$, un nombre fini de solutions correspond à l'équation (1.13). À l'aide des fonctions elliptiques nous pouvons les déterminer explicitement, ce qui est basique dans la description de la dynamique de l'équation d'évolution associée. Une démonstration pour des conditions aux bords de Neumann a été faite dans [180] alors que pour des conditions de Dirichlet, nous citons Chafee et Infante [39].

Remarque 1.2.2 Pour un domaine Ω borné de $\mathbb{R}^d$, ($1 \leq d \leq 4$) à frontière Lipschitzienne, toute solution variationnelle $u \in H^1(\Omega)$ de (1.13) est à valeurs dans $[-1, 1]$ telle que

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla \phi dx + \int_{\Omega} (u^3 - u) \phi dx = 0, \quad \forall \phi \in H^1(\Omega).$$

1.2.3.2 Équation d'Allen-Cahn avec conditions de Neumann homogènes

Nous présentons un théorème sur l'existence d'une solution pour l'équation d'Allen-Cahn avec conditions de Neumann homogènes (cf. [16] pour une preuve détaillée).

Théorème 1.2.3 $\forall u_0 \in L^2(\Omega)$ et $T > 0$, il existe une solution faible $u \in H^1([0, T]; H^1(\Omega)') \cap L^2([0, T]; H^1(\Omega))$ qui vérifie $u(0) = u_0$ et

$$(\partial_t u, v) + (\nabla u, \nabla v) = -\frac{1}{\varepsilon^2} (f(u), v),$$

pour presque tout $t \in [0, T]$ et tout $v \in H^1(\Omega)$. Si $u_0 \in H^1(\Omega)$ alors on a $u \in H^1([0, T]; L^2(\Omega)) \cap L^\infty([0, T]; H^1(\Omega))$ et

$$E(u(T')) + \int_0^{T'} \|\partial_t u\|^2 dt \leq E(u_0)$$

pour presque tout $T' \in [0, T]$.

Vue la monotonie de f à l'extérieur de l'intervalle $[-1, 1]$, les solutions de l'équation d'Allen-Cahn vérifient le principe du maximum cf. [16].

Proposition 1.2.4 Si u est une solution faible de l'équation d'Allen-Cahn et $|u_0(x)| \leq 1$ pour presque tout $x \in \Omega$, alors $|u(t, x)| \leq 1$ pour presque tout $(t, x) \in [0, T] \times \Omega$. Les solutions vérifiant cette propriété sont uniques.

Un résultat de la régularité [16] est présenté dans le théorème suivant :

Théorème 1.2.5 Si $\Delta u \in H^2(\Omega)$ et $u_0 \in H^1(\Omega)$, alors $u \in L^\infty([0, T]; H^2(\Omega)) \cap H^2([0, T]; H^1(\Omega)') \cap H^1([0, T]; H^2(\Omega))$ et il existe $\sigma \geq 0$ tel que

$$\sup_{t \in [0, T]} \|u\|_{H^2(\Omega)} + \left(\int_0^T \|u_{tt}\|_{H^1(\Omega)}^2 dt \right)^{1/2} + \left(\int_0^T \|u_t\|_{H^2(\Omega)}^2 dt \right)^{1/2} \leq c\varepsilon^{-\sigma}.$$

Si $E(u_0) \leq c$ et $\|\Delta u_0\|_{H^2(\Omega)} \leq c\varepsilon^{-2}$, nous pouvons choisir $\sigma = 2$.

1.2.3.3 Équation d'Allen-Cahn avec conditions de Dirichlet homogènes

Nous suivons [172] pour une étude de l'existence de solution pour l'équation d'Allen-Cahn avec conditions de Dirichlet homogènes et quelques estimations.

Définition 1.2.6 Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un ensemble ouvert, connexe et borné, de classe C^∞ . Soit $u_0 \in L^2(\Omega)$. On dit qu'une fonction

$$u \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \text{ avec } u' \in L^2(0, T; H_0^{-1}(\Omega))$$

est une solution faible du problème

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \Delta u(x, t) = u(x, t)(1 - u(x, t)^2) & (x, t) \in \Omega \times (0, T) \\ u(x, 0) = u_0(x) & x \in \Omega \\ u(x, t) = 0 & (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T) \end{cases}$$

si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

- pour chaque $v \in H_0^1(\Omega)$ on a

$$\int_{\Omega} u'(t)v dx + \int_{\Omega} \nabla u(t) \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega} u(t)(1 - u(t)^2)v dx \quad (1.15)$$

pour presque tout $t \in [0, T]$;

- $u(0) = u_0$.

Remarque 1.2.7 Le choix de $u'(t) = \Delta u(t) + \dots \in H^{-1}(\Omega)$ et pas $H_0^1(\Omega)$ revient au fait que l'hypothèse $u(t) \in H_0^1(\Omega)$ implique $\Delta u(t) \in H^{-1}(\Omega)$ et pas nécessairement dans $H_0^1(\Omega)$.

Nous vérifions maintenant qu'une solution faible régulière, est une solution classique. D'une part, étant une fonction de $H_0^1(\Omega)$, elle vaut zéro sur le bord. D'autre part, étant régulière, nous intégrons par parties dans (1.15) et nous obtenons

$$\int_{\Omega} u'(t)v dx - \int_{\Omega} \Delta u(t)v dx = \int_{\Omega} u(t)(1 - u(t)^2)v dx.$$

Nous présentons quelques estimations préliminaires sur les solutions faibles de (1.15).

Proposition 1.2.8 Soit $u_0 \in L^2(\Omega)$ et soit $u \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ une solution faible (1.15). Alors $u \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^4((0, T) \times \Omega)$ et pour $|\Omega|$ la mesure de Ω on a

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))} &= \inf_{0 < t < T} \sup \|u(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq \left(2T|\Omega| + \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2\right)^{1/2}, \\ \|u\|_{L^4((0, T) \times \Omega)}^4 &= \int_0^T \int_{\Omega} |u(s)|^4 dx ds \leq \left(2T|\Omega| + \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2\right) \end{aligned}$$

Proposition 1.2.9 Soit $u_0 \in L^2(\Omega)$ et soit $u \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ une solution faible (1.15). Alors il existe deux constantes $C_1, C_2 > 0$, qui dépendent uniquement de Ω telles que

$$\int_0^T \|u'(t)\|_{H^{-1}(\Omega)} dt \leq C_1 \int_0^T \|\nabla u(t)\|_{L^2(\Omega)} dt + C_2 \int_0^T \|\nabla u(t)\|_{L^2(\Omega)}^3 dt$$

Théorème 1.2.10 (Existence locale)

Soit $u_0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Il existe un temps $T > 0$ suffisamment petit et une fonction

$$u \in H^1(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \text{ avec } u' \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$$

solution faible de (1.15).

1.2.4 Schémas numériques classiques et régularité

Classiquement, on souhaite que les schémas en temps pour les équations de réaction-diffusion puissent allier robustesse et rapidité. Malheureusement ces deux propriétés sont souvent antagonistes :

- La robustesse est obtenue à l'aide de schémas inconditionnellement stables, implicites. Ils permettent de retrouver au niveau discret les propriétés intrinsèques de la solution du problème. En revanche ils sont coûteux en temps de calcul car ils nécessitent la résolution d'un problème de point fixe à chaque itération. Dans le cas des problèmes de champs de phase, cela peut être délicat dans la pratique à cause de la présence du petit paramètre ε .
- La rapidité est garantie par un schéma (linéaire) semi-implicite. Dans ce cas le terme non linéaire est traité explicitement mais en contre partie la stabilité du schéma est fortement contrainte.

Les schémas bi-grilles introduits dans la thèse permettent de réduire le temps de calcul tout en conservant les propriétés essentielles de la dynamique (décroissance de l'énergie). Nous les présentons en détails dans le chapitre suivant. Afin de pouvoir les situer par rapport aux schémas déjà existants, nous présentons ci-après quelques schémas en temps pour la résolution des équations d'Allen-Cahn et puis des équations de Cahn-Hilliard.

1.2.4.1 Allen-Cahn

Dans les travaux de Shen [188], nous trouvons des schémas de discrétisation en temps qui sont énergétiquement stables sous certaines conditions restrictives sur le pas de temps Δt et ε .

Pour $\Delta t \leq \frac{2\varepsilon^2}{L}$, Shen démontre la décroissance de l'énergie pour le premier schéma semi-implicite d'ordre un suivant :

$$\frac{1}{\Delta t}(u^{k+1} - u^k, \Psi) + (\nabla u^{k+1}, \nabla \Psi) + \frac{1}{\varepsilon^2}(f(u^k), \Psi) = 0, \quad \forall \Psi \in H^1(\Omega). \quad (1.16)$$

Théorème 1.2.11 *Si $u^0 \in H^2(\Omega)$ alors $u \in H^2(\Omega)$.*

✓ **Preuve :** Nous avons

$$u^{k+1} - \Delta t \Delta u^{k+1} = u^k + \frac{\Delta t}{\varepsilon^2} u^k ((u^k)^2 - 1).$$

Par la suite, la formulation variationnelle s'écrit

$$\begin{cases} \text{Trouver } u^{k+1} \in H^1(\Omega) \\ a(u^{k+1}, v) = l(v) \quad \forall v \in H^1(\Omega) \end{cases} \quad (1.17)$$

avec

$$a(u^{k+1}, v) = \int_{\Omega} u^{k+1} v dx - \Delta t \int_{\Omega} \nabla u^{k+1} \nabla v dx$$

et

$$l(v) = \int_{\Omega} \left(u^k + \frac{\Delta t}{\varepsilon^2} u^k ((u^k)^2 - 1) \right) v dx.$$

Or

$$u^k + \frac{\Delta t}{\varepsilon^2} u^k ((u^k)^2 - 1) \in L^\infty(\Omega) \subset L^2(\Omega).$$

Par suite les hypothèses du théorème de Lax-Milgram, sur la coercivité de la forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ et la continuité des formes $a(\cdot, \cdot)$ et $l(\cdot)$, sont vérifiées et donc le problème admet une unique solution $u^{k+1} \in H^1(\Omega)$. Or par l'intermédiaire du théorème de régularité elliptique, on en déduit que $u^{k+1} \in H^2(\Omega)$. $\square$

Remarque 1.2.12 Il suffit de prendre $u^0 \in L^\infty(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ et donc $u \in H^2(\Omega)$.

Nous proposons un deuxième schéma semi-implicite et prouvons que sa stabilité est liée à celle de (1.16). Soit alors le schéma étudié dans [45] suivant

$$\begin{cases} \frac{u^{k+1} - u^k}{\Delta t} - \Delta u^{k+1} + \frac{1}{\varepsilon^2} (u^k)^2 u^{k+1} = \frac{1}{\varepsilon^2} u^k & \text{sur } \Omega, t > 0 \\ \frac{\partial u^{k+1}}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega, t > 0 \\ u(x, 0) = u^0(x) & \text{sur } \Omega \end{cases} \quad (1.18)$$

Théorème 1.2.13 (1.18) est au moins aussi stable que (1.16) et vérifie l'inégalité sur l'énergie.

✓ **Preuve :**

En remarquant que

$$u^{k+1}(u^k)^2 - u^k = u^k(u^k)^2 - u^k + (u^{k+1} - u^k)(u^k)^2,$$

le schéma (1.18) s'écrit

$$\frac{1}{\Delta t} (u^{k+1} - u^k, \Psi) + (\nabla u^{k+1}, \nabla \Psi) + \frac{1}{\varepsilon^2} (u^k(u^k)^2 - u^k, \Psi) + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\Omega} (u^{k+1} - u^k)(u^k)^2 \psi dx = 0, \quad \forall \Psi \in H^1(\Omega).$$

Par la suite, en prenant $\psi = u^{k+1} - u^k$, ceci correspond à (1.16) en ajoutant le terme $\frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\Omega} (u^{k+1} - u^k)^2 (u^k)^2 \psi dx \geq 0$ au premier membre de l'égalité.

Par la suite, l'inégalité sur l'énergie est vérifiée et le schéma (1.18) est au moins aussi stable que (1.16). □

Afin de surmonter la restriction au niveau du pas de temps causée par la largeur interfaciale ε , penser à des schémas inconditionnellement stables semble logique.

Une première idée consiste à ajouter un terme de stabilisation. Les schémas semi-implicites mentionnés ci-dessus sont énergétiquement stables sous les conditions restrictives ; le choix de Δt est de l'ordre de ε^2 .

Du point de vue physique, ε est l'épaisseur de la surface de séparation entre les constituants d'un mélange et prend des valeurs au moins de l'ordre 10^{-3} dans la réalité par suite nous serons en face à un Δt d'ordre 10^{-6} . Un petit pas de temps rend la simulation numérique difficile et coûteuse et ralentit la convergence.

Néanmoins, cette difficulté est surmontée grâce à l'introduction d'un terme de stabilisation comme suit

$$\left(\frac{1}{\Delta t} + \frac{S}{\varepsilon^2}\right)(u^{k+1} - u^k, \Psi) + (\nabla u^{k+1}, \nabla \Psi) + \frac{1}{\varepsilon^2} (f(u^k), \Psi) = 0, \quad \forall \Psi \in H^1(\Omega), \quad (1.19)$$

où S est le paramètre de stabilisation (cf.[188]). Le terme $\frac{S}{\varepsilon^2}(u^{k+1} - u^k)$ ajoute une erreur de consistance d'ordre $\frac{S\Delta t}{\varepsilon^2}u_t$ et donc le schéma semi-implicite stabilisé (1.19) est du même ordre

que le schéma (1.16) mais, contrairement à lui, il est inconditionnellement stable pour $S \geq \frac{L}{2}$.

Eyre a signalé dans ses travaux [90] sur les systèmes flot du gradient que si la fonction d'énergie est décomposée de manière appropriée en parties, contractive $E_c(u)$ et expansive $E_e(u)$, traitées respectivement implicitement et explicitement

$$\begin{aligned} E(u) &= \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} |\nabla u|^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} F(u) \right) dx = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} |\nabla u|^2 + \frac{u^4 + 1}{4\varepsilon^2} \right) dx - \int_{\Omega} \frac{u^2}{2\varepsilon^2} dx \\ &= E_c(u) - E_e(u), \end{aligned} \quad (1.20)$$

alors le schéma devient inconditionnellement stable (cf. [91]).

Un schéma de décomposition convexe (proposé dans [157]) où le terme non linéaire est décomposé en deux parties : $F_c(u) = \frac{u^4 + 1}{4}$ et $F_e(u) = \frac{-u^2}{2}$

$$F(u) = F_c(u) + F_e(u), \quad (1.21)$$

est le suivant

$$\frac{u^{k+1} - u^k}{\Delta t} + Au^{k+1} = -\nabla F_c(u^{k+1}) - \nabla F_e(u^k). \quad (1.22)$$

Ce schéma comportant une discrétisation semi-implicite en temps se traduit par

$$\frac{u^{k+1} - u^k}{\Delta t} = \frac{u^k - (u^{k+1})^3}{\varepsilon^2} + \Delta u^{k+1}. \quad (1.23)$$

Li et al. proposent dans [157] une décomposition de l'équation d'Allen-Cahn en deux équations linéaire et non linéaire :

L'équation linéaire est discrétisée à l'aide d'un schéma de Crank-Nicholson puis nous résolvons analytiquement l'équation non linéaire :

$$\frac{u_h^* - u_h^k}{\Delta t} = \frac{1}{2} (\Delta u_h^* + \Delta u_h^k), \quad (1.24)$$

$$\frac{u_h^{k+1} - u_h^*}{\Delta t} = \frac{u_h^{k+1} - (u_h^{k+1})^3}{\varepsilon^2} \quad (1.25)$$

L'équation (1.24) correspond au schéma de Crank-Nicholson pour $\partial_t u_h = \Delta u_h$ avec une condition initiale u_h^k et l'équation (1.25) est considérée comme une approximation de l'équation

$$\partial_t u_h = \frac{u_h - u_h^3}{\varepsilon^2} \quad (1.26)$$

qui peut être résolue analytiquement pour obtenir la solution comme suit :

$$u_h^{k+1} = \frac{u_h^*}{\sqrt{\exp^{-\frac{2\Delta t}{\varepsilon^2}} + (u_h^*)^2 \left(1 - \exp^{-\frac{2\Delta t}{\varepsilon^2}} \right)}}.$$

Remarque 1.2.14 Un schéma semi-implicite de second ordre basé sur les Formules de différence arrière de second ordre et Adam-Bashforth est le suivant :

$$\frac{1}{2\Delta t} (3u^{k+1} - 4u^k + u^{k-1}, \Psi) + (\nabla u^{k+1}, \nabla \Psi) + \frac{1}{\varepsilon^2} (2f(u^k) - f(u^{k-1}), \Psi) = 0, \quad \forall \Psi \in H^1(\Omega). \quad (1.27)$$

Nous rappelons que $f(u^{k-1})$ et $f(u^k)$ sont déjà calculés à l'étape précédente, à partir de u^{k-1} et u^k . Donc cette méthode multi-étapes explicite ne nécessite aucun travail supplémentaire et améliore la précision. Ici la condition de stabilité est $\Delta t \leq \frac{2\varepsilon^2}{3L}$. Comme pour le schéma semi-implicite du premier ordre, la version stabilisée de ce schéma de second ordre se traduit comme suit :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\Delta t}(3u^{k+1} - 4u^k + u^{k-1}, \Psi) + \frac{S}{\varepsilon^2}(u^{k+1} - 2u^k + u^{k-1}, \Psi) + (\nabla u^{k+1}, \nabla \Psi) \\ & + \frac{1}{\varepsilon^2}(2f(u^k) - f(u^{k-1}), \Psi) = 0, \quad \forall \Psi \in H^1(\Omega) \end{aligned} \quad (1.28)$$

Le terme $\frac{S}{\varepsilon^2}(u^{k+1} - 2u^k + u^{k-1})$ ajoute une erreur de consistance d'ordre $\frac{S\Delta t^2}{\varepsilon^2}u_{tt}$ qui est du même ordre que l'erreur introduite en remplaçant $f(u^{k+1})$ par $(2f(u^k) - f(u^{k-1}))$ et donc le schéma semi-implicite stabilisé (1.28) est du même ordre que le schéma (1.27) mais contrairement à lui, est inconditionnellement stable pour $S \geq 0$.

Il est bien connu que le schéma implicite de Crank-Nicolson de second ordre ne satisfait pas une loi sur l'énergie (n'est pas énergétiquement stable). Un autre schéma de second ordre repose sur la construction de $\tilde{f}$ une approximation du terme non linéaire $f(u)$ comme suit

$$\tilde{f}(u, v) = \begin{cases} \frac{F(u) - F(v)}{u - v} & \text{si } u \neq v \\ f(u) & \text{si } u = v \end{cases} \quad (1.29)$$

et le schéma sera

$$\frac{1}{\Delta t}(u^{k+1} - u^k, \Psi) + (\nabla \frac{u^{k+1} + u^k}{2}, \nabla \Psi) + \frac{1}{\varepsilon^2}(\tilde{f}(u^{k+1}, u^k), \Psi) = 0, \quad \forall \Psi \in H^1(\Omega), \quad (1.30)$$

Une autre approche cf.[127] permettant d'avoir la décroissance de l'énergie (stabilité énergétique) est de considérer une approximation de second ordre de $f(\frac{u^{k+1} + u^k}{2})$. Dans cette thèse, nous ne considérons pas des schémas de second ordre mais nous référons le lecteur à [122, 127, 219] pour des schémas de second ordre pour les équations d'Allen-Cahn et de Cahn-Hilliard.

1.2.4.2 Cahn-Hilliard

Pour l'équation de Cahn-Hilliard, nous introduisons le schéma semi-implicite d'ordre un, énergétiquement stable si $\Delta t \leq \frac{4\varepsilon^4}{L}$, suivant :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta t}(u^{k+1} - u^k, q) + (\nabla w^{k+1}, \nabla q) = 0, \quad \forall q \in H^1(\Omega), \\ & (\nabla u^{k+1}, \nabla \psi) + \frac{1}{\varepsilon^2}(f(u^k), \psi) = (w^{k+1}, \psi), \quad \forall \psi \in H^1(\Omega). \end{aligned} \quad (1.31)$$

Nous considérons maintenant la méthode semi-implicite stabilisée de premier ordre suivante

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta t}(u^{k+1} - u^k, q) + (\nabla w^{k+1}, \nabla q) = 0, \quad \forall q \in H^1(\Omega), \\ & (\nabla u^{k+1}, \nabla \psi) + \frac{S}{\varepsilon^2}(u^{k+1} - u^k, \psi) + \frac{1}{\varepsilon^2}(f(u^k), \psi) = (w^{k+1}, \psi), \quad \forall \psi \in H^1(\Omega). \end{aligned} \quad (1.32)$$

Comme dans le cas d'Allen-Cahn, l'erreur de consistance supplémentaire introduite par le terme de stabilisation est du même ordre, en termes de Δt et de ε , que l'erreur de troncature dominante dans (1.31). Pour $S \geq \frac{L}{2}$, le schéma stabilisé (1.32) est inconditionnellement stable.

De même une version stabilisée mais du second ordre est proposée par le suivant

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\Delta t}(3u^{k+1} - 4u^k + u^{k-1}, q) + (\nabla w^{k+1}, \nabla q) &= 0, \quad \forall q \in H^1(\Omega), \\ (\nabla u^{k+1}, \nabla \psi) + \frac{S}{\varepsilon^2}(u^{k+1} - 2u^k + u^{k-1}, \psi) + \frac{1}{\varepsilon^2}(2f(u^k) - f(u^{k-1}), \psi) &= (w^{k+1}, \psi), \quad \forall \psi \in H^1(\Omega). \end{aligned} \quad (1.33)$$

La même technique adaptée dans l'équation d'Allen-Cahn pour le traitement du terme non linéaire par la construction de $\tilde{f}(u, v)$ dans (1.29), nous permet d'avoir aussi un schéma inconditionnellement stable pour Cahn-Hilliard

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t}(u^{k+1} - u^k, q) + (\nabla w^{k+1}, \nabla q) &= 0, \quad \forall q \in H^1(\Omega), \\ \left(\frac{\nabla u^{k+1} + \nabla u^k}{2}, \nabla \psi\right) + \frac{1}{\varepsilon^2}(\tilde{f}(u^k, u^{k+1}), \psi) &= (w^{k+1}, \psi), \quad \forall \psi \in H^1(\Omega). \end{aligned} \quad (1.34)$$

Nous renvoyons le lecteur à [188] pour les analyses de stabilité et des estimations d'erreur pour les schémas numériques cités précédemment. Les estimations d'erreur pour les schémas sélectionnés avec une approximation spectrale-Galerkin sont également dérivées. Les analyses de stabilité et les estimations d'erreurs reposent sur une formulation faible, de sorte que les résultats peuvent facilement être étendus à d'autres discrétisations spatiales, telles que les méthodes d'éléments finis de Galerkin, basées sur une formulation faible.

Des formules de quadrature de Gomez-Hughes [116] introduites pour l'approximation d'un potentiel logarithmique peuvent être considérées pour le cas du potentiel polynomial $f(u) = u(u^2 - 1)$. L'idée principale est de diviser le potentiel suivant la convexité de leurs dérivées secondes, nous pouvons toujours prendre (1.21) (bien que cette division ne soit pas unique)

$$\tilde{f}(u^{k+1}, u^k) = \frac{1}{2} \left[(u^{k+1})^3 - (u^k)^2 u^k + 2u^{k+1} (u^k)^2 \right] - \frac{1}{2} (u^{k+1} + u^k).$$

Pour cette approximation de $\tilde{f}(u^{k+1}, u^k)$, le schéma

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t}(u^{k+1} - u^k, q) + \left(\frac{\nabla w^{k+1} + \nabla w^k}{2}, \nabla q\right) &= 0, \quad \forall q \in H^1(\Omega), \\ \left(\frac{\nabla u^{k+1} + \nabla u^k}{2}, \nabla \psi\right) + \frac{1}{\varepsilon^2}(\tilde{f}(u^k, u^{k+1}), \psi) &= \left(\frac{w^{k+1} + w^k}{2}, \psi\right), \quad \forall \psi \in H^1(\Omega), \end{aligned} \quad (1.35)$$

est inconditionnellement stable.

La décomposition du potentiel $F(u)$ due à Eyre (1.21) nous permet d'avoir un schéma de premier ordre et inconditionnellement stable

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t}(u^{k+1} - u^k, q) + (\nabla w^{k+1}, \nabla q) &= 0, \quad \forall q \in H^1(\Omega), \\ (\nabla u^{k+1}, \nabla \psi) + \frac{1}{\varepsilon^2}(\tilde{f}(u^k, u^{k+1}), \psi) &= (w^{k+1}, \psi), \quad \forall \psi \in H^1(\Omega), \end{aligned} \quad (1.36)$$

où $\tilde{f}(u^k, u^{k+1}) = F'_c(u^{k+1}) + F'_e(u^k) = (u^{k+1})^3 - u^k$.

Aussi Eyre [90] a proposé une décomposition linéaire de $F(u) = F_1(u) + F_2(u)$ où $F_1(u) = u^2$ et $F_2(u) = \frac{1}{4}(u^4 - 2u^2 + 1)$. Ceci permet d'écrire

$$\tilde{f}(u^k, u^{k+1}) = F'_1(u^{k+1}) + F'_2(u^k) = 2u^{k+1} + ((u^k)^3 - 3u^k).$$

Cette méthode est linéaire, donc plus rapide que le schéma non linéaire car une seule résolution linéaire est requise par étape.

Un système de croissance tumorale à interface diffuse constitué d'une équation de Cahn-Hilliard réactive et d'une équation de réaction-diffusion a été étudié par Wu et al.[214]. Ces schémas stabilisent artificiellement de la diffusivité en introduisant le terme $\alpha_1(\nabla u^{k+1}, \nabla q)$ dans (1.35).

L'approximation de $\tilde{f}(u^k, u^{k+1})$ pour $f_c(u) = F'_c(u)$ et $f_e(u) = F'_e(u)$ se traduit par

$$\tilde{f}(u^k, u^{k+1}) = f_c(u^{k+1}) - \frac{u^{k+1} - u^k}{2} f'_c(u^{k+1}) - f_e(u^{k+1}) - \frac{u^{k+1} - u^k}{2} f'_e(u^{k+1})$$

où $f_c(u) = 2u$ et f_e est définie par morceaux cf. la dérivée du potentiel $F(u)$

$$F(u) = F_c(u) - F_e(u) = \begin{cases} \left(u^2 + \frac{1}{4}\right) - \left(-2u - \frac{3}{4}\right) & u < -1, \\ \left(u^2 + \frac{1}{4}\right) - \left(\frac{3}{2}u^2 - \frac{1}{4}u^4\right) & u \in [-1, 1], \\ \left(u^2 + \frac{1}{4}\right) - \left(2u - \frac{3}{4}\right) & u > 1. \end{cases} \quad (1.37)$$

Si la stabilisation introduite par le terme $\alpha_1(\nabla u^{k+1}, \nabla q)$ est suffisamment grande, alors le schéma numérique (1.35) avec l'approximation potentielle (1.37) est inconditionnellement stable.

Du point de vue convergence, on n'est pas sûr que la solution pour le potentiel (1.37) converge vers le problème original (1.10) qui considère $F(u) = \frac{1}{4}(u^2 - 1)^2$ parce que le problème de Cahn-Hilliard ne satisfait pas le principe du maximum.

Tous ces modèles présentés ci-dessus ont un point commun ; ils peuvent être formulés à partir d'une certaine énergie. Il n'y a pas trop de résultats montrant la convergence des solutions des schémas numériques à la solution du problème continu original, et peut-être que cette étape cruciale donnera de nouvelles idées pour décider laquelle des approximations numériques est plus pratique.

Les conditions aux limites adaptées dans cette thèse sont celles de Neumann homogènes. L'équation de Cahn-Hilliard avec des conditions aux limites dynamiques est considérée [55, 61, 63, 64, 109, 115, 169, 184] où u et μ sont périodiques ; Le cas d'un vaisseau avec un mur imperméable est traité et des interactions avec les murs imposent des conditions sur la dérivée temporelle du paramètre d'ordre u et des conditions de type Neumann homogènes sur le potentiel μ . Les équations d'Allen-Cahn et de Cahn-Hilliard sont légèrement modifiées en ajoutant un petit paramètre à l'énergie libre de Ginzburg-Landau ; Plus précisément, la régularisation de Willmore [53], les équations d'Allen-Cahn et de Cahn-Hilliard d'ordre supérieur [56, 57, 58, 59].

Les équations de champs de phase (Allen-Cahn et Cahn-Hilliard) sont pertinentes dans des domaines variés. Nous citons à titre d'exemple la science des matériaux [46, 48, 163], la dynamique des fluides [11, 75, 161, 221, 227], la biologie [60] et le traitement d'image [49, 50, 51, 52]. Plusieurs méthodes numériques sont développées [67, 76, 91, 97, 98, 141, 222, 228] afin de résoudre les équations de champs de phase. Ces équations sont couplées à d'autres équations citons les équations de Stokes [144, 145, 173], de Navier-Stokes [23, 26, 54, 62, 143] et l'équation de Darcy [73, 106, 107].

Les modèles de flux multiphasés sont devenus populaires en raison de leurs applications en mécanique des fluides [150, 223] : fluide à bulles [12, 81] (bulles gazeuses dans un liquide continu), écoulement de gouttelettes [121, 197, 204] (gouttelettes de fluide dans un fluide continu), écoulement annulaire [105, 138, 185] (liquide continu le long des parois, gaz dans le cœur) et écoulement stratifié et à surface libre [13, 160, 170] (fluides non miscibles séparés par une interface clairement définie). Ce sont des flux simultanés non seulement d'états différents de matériaux (c'est-à-dire gazeux, liquide ou solide) mais également de propriétés chimiques différentes mais dans un même état (système liquide-liquide à densité variable tel que des gouttelettes d'huile dans l'eau). Chaque phase a un champ de vitesse et une fraction de volume dont la somme est l'unité.

Pour modéliser des flux polyphasiques, une large gamme de méthodes est introduite. Celles-ci contiennent des méthodes Cell et Level-Set [178] ou Marker (Welch et al., 1965) qui calculent et analysent le mouvement de l'interface, la méthode Volume of Fluid (Nichols et Hirt 1971 et Youngs 1982, 1987) [133, 224, 225] qui résolvent le problème de la conservation de la masse de la méthode Level-Set. Mais, contrairement à la précédente, la méthode Front Tracking représente la surface de l'interface avec un maillage non structuré et utilise ces marqueurs pour suivre cette interface explicitement [113, 207]. Pour les écoulements multiphasiques dispersés, deux approches de modélisation sont disponibles : le modèle eulérien-lagrangien [194] et le modèle eulérien-eulérien [40]. Le flux à deux phases peut se produire dans diverses disciplines : en milieux poreux [10, 99], en système microfluidique [189, 191, 196] et hydrodynamique [22, 72, 210] mais nous nous intéressons aux écoulements diphasiques dispersés où une phase est présente sous forme de particules, de gouttelettes ou de bulles.

Chapitre 2

Méthodes bi-grilles pour l'équation d'Allen-Cahn

Sommaire

2.1	Motivation et approche générale de la méthode bi-grilles	40
2.2	Séparation des échelles	41
2.3	Cas linéaire : équation de la chaleur	46
2.4	Équation d'Allen-Cahn	49
2.4.1	Schéma de référence sur grille fine	51
2.4.2	Cadre bi-grilles	56
2.4.2.1	Simulation des petites échelles	56
2.4.2.2	Construction de l'algorithme bi-grilles	58
2.4.2.3	Comment choisir V_H et V_h ?	59
2.4.3	Résolution technique bi-grilles	60
2.4.3.1	Schémas bi-grilles	60
2.4.3.2	Propriétés des schémas	61
2.4.4	Stabilisation globale vs stabilisation en modes élevés	63
2.4.4.1	Stabilisation des modes élevés selon le schéma semi-implicite (Schéma 4.1)	63
2.4.4.2	Stabilisation des modes élevés par une linéarisation du terme non linéaire (Schéma 4.2)	64
2.4.5	Précision et réduction du temps CPU	66
2.5	Conclusion	68

De ce chapitre a été tiré l'article soumis à Computational and Applied Mathematics [1]. Il s'agit d'une approche originale portant sur une décomposition des échelles sur deux grilles. Notre technique permet d'approximer la partie principale de la solution sur une grille grossière par un schéma stable puis de stabiliser uniquement les hautes fréquences (partie fluctuante de la solution) sur une grille fine.

Étant donnée que la résolution des schémas semi-implicites est assez rapide (vu le fait qu'un seul problème linéaire doit être résolu à chaque pas de temps) et que les schémas implicites sont stables, proposer de nouvelles méthodes numériques qui combinent les deux précédents avantages s'avère être pertinent. De ce fait, des méthodes de stabilisation ont été envisagées [188].

Elles sont basées sur un amortissement de type L^2 , mais peuvent ralentir la dynamique : en effet, ceci est dû au fait que l'amortissement agit sur toutes les composantes, y compris sur celles en bas modes de la solution qui contiennent la partie principale de l'information ; les composantes

de modes élevés représentent une partie fluctuante qui peut jouer un rôle crucial pour la stabilité numérique : en effet, la stabilité d'un système repose sur sa capacité à contrôler son expansion.

Indépendamment, les méthodes bi-grilles ont été largement étudiées pour la résolution de l'équation de réaction-diffusion ainsi que pour les équations de Navier-Stokes [3, 131] ; elles sont basées sur le calcul d'une approximation de la solution sur l'espace grossier V_H en utilisant un schéma implicite ; la solution dans l'espace fin V_h est alors obtenue en appliquant un schéma simplifié c'est-à-dire semi-implicite.

L'avantage de notre technique est le gain en temps de calcul en comparaison avec le temps de résolution d'un problème implicite sur une seule grille. Nous tenons à noter que l'approximation des solutions a été effectuée sans l'usage de bases hiérarchiques ; ceci facilitera le passage à la résolution par la technique multigrilles.

Le but de ce chapitre est de proposer un cadre de méthodes bi-grilles en éléments finis pour l'approximation numérique des équations d'Allen-Cahn. L'utilisation de deux grilles, plus précisément de deux espaces d'éléments finis V_H et V_h avec $\dim(V_H) \ll \dim(V_h)$, permet de décomposer (en espace et en fréquences) la solution $u_h \in V_h$ comme suit

$$u_h = \tilde{u}_h + z_h,$$

où $\tilde{u}_h = \mathcal{P}(u_H)$ est le prolongement L^2 de u_H dans V_h (u_H étant l'approximation de la solution dans V_H) est défini par

$$(\tilde{u}_h - \mathcal{P}(u_H), \phi_h) = 0, \forall \phi_h \in V_h.$$

$(\cdot, \cdot)$ désigne le produit scalaire dans $L^2(\Omega)$. Par conséquent $\mathcal{P}(u_H) \in V_h$ représente la partie principale de la solution ; $z_h \in V_h$ est la partie fluctuante et correspond alors à une petite correction qui porte les hautes fréquences.

De cette façon, nous pouvons appliquer l'approche bi-grilles pour réduire le temps CPU et stabiliser l'étape de correction sur l'espace fin en lissant la composante fluctuante.

2.1 Motivation et approche générale de la méthode bi-grilles

La méthode bi-grilles a été utilisée pour la résolution d'équations elliptiques semi-linéaires comme dans les travaux de Xu [217]. Elle a été adaptée par Girault et Lions [110], [111] et Abboud et al. [3],[4],[5] dans l'étude du problème de Navier-Stokes stationnaire et instationnaire.

Approcher la solution u d'une EDP non linéaire revient à :

- Étape 1 : Approcher la solution par u_H sur une grille grossière de pas H .
- Étape 2 : Effectuer une discrétisation de l'EDP avec linéarisation autour de la solution u_H déjà calculée précédemment, sur une grille fine de pas h ; la solution sera notée u_h^{lin} .

Pour un choix adéquat des pas d'espaces grossier et fin H et h , l'erreur $\|u - u_h^{lin}\|$ est du même ordre que $\|u - u_h\|$, où u_h est l'approximation de l'EDP résolue sur la grille fine.

Il est plus favorable de calculer u_H et u_h^{lin} que de calculer directement u_h . L'avantage de la méthode à deux-grilles est de réduire le temps de calcul de la solution du problème non linéaire.

Notre technique bi-grilles est différente de celle citée ci-dessus. Il s'agit d'une séparation sur les maillages des composantes de la solution à approcher.

La stabilité des schémas numériques est liée à la représentation des hautes fréquences de la solution. Les schémas numériques traitant uniformement toutes les données de la solution sont instables à cause du comportement des fréquences élevées.

Un outil de stabilisation des schémas numériques et donc d'augmentation de la précision des calculs, mais en un temps réduit, est la décomposition des inconnues de la solution en grandes et petites structures et leur traitement de manières différentes.

La méthode bi-grilles est un cas particulier des méthodes multiniveaux (cf. [36], [37]) où nous nous restreignons à deux niveaux d'étude : un grossier et un fin.

Comme dans [36],[37], notre étude bi-grilles en séparation en échelles consiste à approcher les grandes structures u_H sur la grille grossière puis traiter les petites structures z_h , partie fluctuante oscillant avec des fréquences élevées, sur la grille fine.

Cette technique se résume ainsi en quatre étapes :

- Étape 1 : Approcher la solution par u_H sur une grille grossière de pas H .
- Étape 2 : Approcher la partie principale de la solution par $\tilde{u}_h = \Pi u_H$ sur la grille fine de pas h .
- Étape 3 : Calculer la partie fluctuante z_h sur la grille fine.
- Étape 4 : Calculer la solution $u_h = \tilde{u}_h + z_h$ sur la grille fine.

2.2 Séparation des échelles

La simulation des grandes échelles nécessite la décomposition de la solution en

$$u = \tilde{u} + z, \quad (2.1)$$

où $\tilde{u}$ représente les grandes structures et z les petites.

Les $\tilde{u}$ désignent la partie principale de la solution alors que les z constituent sa partie fluctuante. Cette stratégie apparaît dans beaucoup de travaux : citons ceux de Temam *et al.* [198] pour des systèmes dynamiques dissipatifs, Foias-Manley-Temam [104] pour la modélisation des structures des écoulements turbulents, Bouchon-Jauberteau [24] pour les équations de Navier-Stokes en dimension trois, Calgaro-Debussche-Laminie [36] pour les équations de Navier-Stokes en éléments finis (hiérarchiques), Debussche-Laminie-Zahrouni [71] pour les équations de Burgers et Calgaro-Chehab-Laminie-Zahrouni [35] pour les équations d'ondes non linéaires.

Les composantes à haute fréquence régissent la stabilité du système et l'idée principale d'un système stabilisé est d'arrêter ou de ralentir leur expansion. Par l'écriture de la solution (2.1), nous trouvons un moyen d'extraire la partie haute de la solution pour la stabiliser.

Cette décomposition peut être obtenue en utilisant plusieurs espaces d'approximation imbriqués, comme dans les méthodes hiérarchiques et les méthodes de Galerkin non linéaires [15, 77, 79, 166] et les références qui s'y trouvent ; Cependant, l'intégration n'est pas obligatoire comme indiqué ci-après.

Soient V_h (resp. V_H) l'espace fin d'éléments finis (resp. grossier) tel que $\dim(V_H) < \dim(V_h)$. Nous notons H et h les pas spatiaux et Δt le pas temporel. Pour permettre le passage du maillage grossier au maillage fin, nous définissons l'opérateur de prolongation $\mathcal{P} : V_H \longrightarrow V_h$ par

$$(\tilde{u}_h - \mathcal{P}(u_H), \phi_h) = 0, \forall \phi_h \in V_h. \quad (2.2)$$

Ainsi, la décomposition sera

$$u_h = \tilde{u}_h + z_h \text{ tel que } |z_h| \ll 1, \quad (2.3)$$

où $\tilde{u}_h$ est la prolongation de u_H .

Remarque 2.2.1 *Il n'est pas nécessaire d'avoir $V_H \subset V_h$, ce qui nous permet d'éviter de construire des bases hiérarchiques et d'appliquer la méthode pour différents espaces d'éléments finis.*

Soient $(\phi_i)_{i=1}^N$ et $(\psi_j)_{j=1}^M$ deux bases de V_h et de V_H respectivement ($M < N$). Nous définissons les matrices B_H^h comme $(B_H^h)_{i,j} = (\phi_i, \psi_j)$, $i = 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, M$. La prolongation s'écrit

$$M_h \mathcal{P}(u_H) = B_H^h u_H.$$

M_h étant la matrice de masse, $\mathcal{P}(u_H)$ est défini de manière unique chaque fois le rang de B_H^h est maximal égal M . Évidemment cette condition est automatiquement satisfaite quand $V_H \subset V_h$.

Nous donnons une condition suffisante pour l'injectivité de B_H^h :

Proposition 2.2.2 *Soit V_H et V_h deux espaces d'éléments finis basés sur des éléments de référence $\mathcal{C}^0$. Supposons que $\forall u_H \in V_H, ((u_H, \phi_h) = 0, \forall \phi_h \in V_h \Rightarrow u_H = 0)$ alors, B_H^h est injective. De plus, il existe deux constantes β et $\alpha_H^h > 0$ tel que $0 < \alpha_H^h < \beta \leq 1$ et*

$$\alpha_H^h \|u_H\| \leq \|\mathcal{P}(u_H)\| \leq \beta \|u_H\|, \forall u_H \in V_H.$$

✓ Preuve : L'hypothèse implique que si $\mathcal{P}(u_H) = 0$, alors $(u_H, \phi_h) = 0$, $\forall \phi_h \in V_h$, alors $u_H = 0$ ce qui garantit l'injectivité.

Supposons maintenant que $\mathcal{P}(u_H) \neq 0$ et en prenant $\phi_h = \mathcal{P}(u_H)$ dans (2.2), nous trouvons

$$\|\mathcal{P}(u_H)\|^2 = (\mathcal{P}(u_H), u_H) = \frac{(\mathcal{P}(u_H), u_H)}{\|u_H\| \|\mathcal{P}(u_H)\|} \|u_H\| \|\mathcal{P}(u_H)\|.$$

Soit $\alpha_H^h = \inf_{u_H \in V_H} \frac{(\mathcal{P}(u_H), u_H)}{\|u_H\| \|\mathcal{P}(u_H)\|}$. Nous démontrons que $\alpha_H^h > 0$. Nous pouvons écrire

$$\alpha_H^h = \inf_{u_H \in V_H, \|u_H\|=1} (\mathcal{P}(u_H), u_H) \geq 0.$$

La fonction $u_H \in V_H \mapsto (\mathcal{P}(u_H), u_H) \in \mathbb{R}^+$ est évidemment continue sur l'ensemble compact $\mathcal{B} = \{u_H \in V_H, \|u_H\| = 1\}$. Son minimum est atteint et ne peut pas être égal à 0 car 0, la seule racine, est à l'extérieur de $\mathcal{B}$. Ainsi $\alpha_H^h > 0$ et nous déduisons de ce qui précède que

$$\|\mathcal{P}(u_H)\| \geq \alpha_H^h \|u_H\| \geq 0.$$

Maintenant, de la même façon, nous avons

$$\|\mathcal{P}(u_H)\|^2 = (\mathcal{P}(u_H), u_H) = \frac{(\mathcal{P}(u_H), u_H)}{\|u_H\| \|\mathcal{P}(u_H)\|} \|u_H\| \|\mathcal{P}(u_H)\|.$$

Mais, comme conséquence de l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\frac{(\mathcal{P}(u_H), u_H)}{\|u_H\| \|\mathcal{P}(u_H)\|} \leq 1,$$

par suite $\beta = \sup_{u_H \in V_H, \|u_H\|=1} (\mathcal{P}(u_H), u_H) \leq 1$. Enfin

$$\alpha_H^h \|u_H\| \leq \|\mathcal{P}(u_H)\| \leq \beta \|u_H\|, \forall u_H \in V_H.$$

□

Remarque 2.2.3 Ces conditions signifient que le rang des angles entre les éléments de V_H et ceux de $\mathcal{P}(V_H) \subset V_h$ est dans l'intervalle $[\arccos \beta, \arccos \alpha_H^h]$; la condition $\alpha_H^h > 0$ nous permet d'éviter les situations d'orthogonalité. Évidemment α_H^h peut dépendre de H et de h et diminue quand H et h tendent vers 0. Le meilleur cas est quand α_H^h est indépendante des deux h et H .

La correction z est définie sur tout l'espace fin V_h et pas sur un espace complémentaire. Bien sûr, nous nous attendons à ce que z soit une correction (i.e. petit en norme) pour des fonctions régulières u . Plus précisément, nous avons le résultat suivant :

Proposition 2.2.4 Soient V_H et V_h deux espaces d'EF que nous supposons de classe $\mathcal{C}^0$ et associés à des triangulations régulières de Ω , un ensemble ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^n$; (K, P, Σ) est l'élément de référence. Pour $u \in H^{k+1}(\Omega)$, nous notons $u_h = \Pi_h u$ et $u_H = \Pi_H u$ le P -interpolé de u dans V_h et V_H respectivement. Nous supposons que $P_k \subset P$. Nous avons les estimations suivantes :

$$\|u_h - \mathcal{P}u_H\|_{L^2(\Omega)} \leq CH^{k+1}\|u\|_{H^{k+1}(\Omega)}.$$

✓ **Preuve :** Nous commençons des estimations d'erreurs d'interpolation classiques dans les espaces d'EF [89],

$$\|u - \Pi_h u\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^{k+1}\|u\|_{H^{k+1}(\Omega)} \text{ et } \|u - \Pi_H u\|_{L^2(\Omega)} \leq CH^{k+1}\|u\|_{H^{k+1}(\Omega)}.$$

Nous pouvons écrire

$$u_h - \mathcal{P}(u_H) = u_h - u + u - u_H + u_H - \mathcal{P}(u_H),$$

alors

$$(u_h - u + u - u_H + u_H - \mathcal{P}(u_H), \phi_h) = (u_h - u + u - u_H, \phi_h), \forall \phi_h \in V_h.$$

En prenant $\phi_h = u_h - \mathcal{P}(u_H) \in V_h$, nous trouvons,

$$\|u_h - \mathcal{P}(u_H)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|u_h - u + u - u_H\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|u_h - \mathcal{P}(u_H)\|_{L^2(\Omega)},$$

ainsi

$$\|u_h - \mathcal{P}(u_H)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u_h - u + u - u_H\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u_h - u\|_{L^2(\Omega)} + \|u_H - u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Enfin

$$\|u_h - \mathcal{P}(u_H)\|_{L^2(\Omega)} \leq C'H^{k+1}\|u\|_{H^{k+1}(\Omega)},$$

où $C' > 0$ est indépendante de h, H et u . □

Remarque 2.2.5 Pour $0 \leq m \leq k+1$, en définissant $\mathcal{P}$ comme $(\mathcal{P}(u_H) - u_H, \phi_h)_m = 0, \forall \phi_h \in V_h$, où $(\cdot, \cdot)_m$ est le produit scalaire ordinaire dans H^m , par suite, nous procédons comme avant, nous pouvons démontrer que

$$\|u_h - \mathcal{P}(u_H)\|_{H^m(\Omega)} \leq CH^{k+1-m}\|u\|_{H^{k+1}(\Omega)}.$$

Pour des fonctions données et des espaces d'éléments finis $\mathbb{P}_1$ et $\mathbb{P}_2$, nous construisons la décomposition (2.2)-(2.3). Nous générons les maillages par FreeFem++ [103] en utilisant une triangulation de Delaunay. Nous avons pris $N_f = 100$ points aux bords pour la construction de $\mathcal{T}_h$, le maillage associé à l'espace fin V_h et $N_c = 50$ points aux bords pour la construction $\mathcal{T}_H$, le maillage associé à l'espace grossier V_H .

La première illustration est la décomposition de la fonction $u(x, y) = (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4)$ sur le tore Fig 2.1, la seconde est pour $u(x, y) = \sin(72x(1-x)y(1-y))$ sur le carré unité Fig 2.2. Dans les figures 2.1 et 2.2, nous observons que les composantes z sont beaucoup plus petites en norme que celles de la fonction originale (10% pour l'élément $\mathbb{P}_1$ et 0.5% pour l'élément $\mathbb{P}_2$).

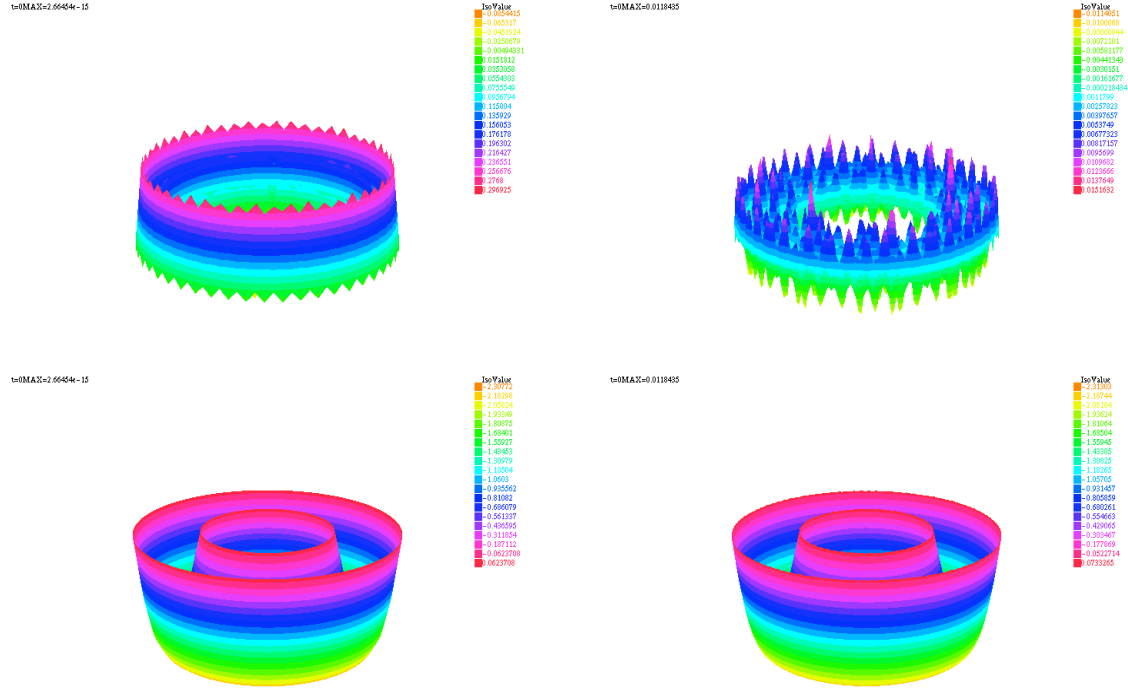


FIGURE 2.1 – Iso-valeurs et représentation 3D pour $u(x, y) = (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4)$ sur le tore. Haut-gauche les composantes z_h et Bas-gauche la fonction u avec les éléments $\mathbb{P}_1$. Haut-droite les composantes z_h et Bas-droite la fonction u avec les éléments $\mathbb{P}_2$

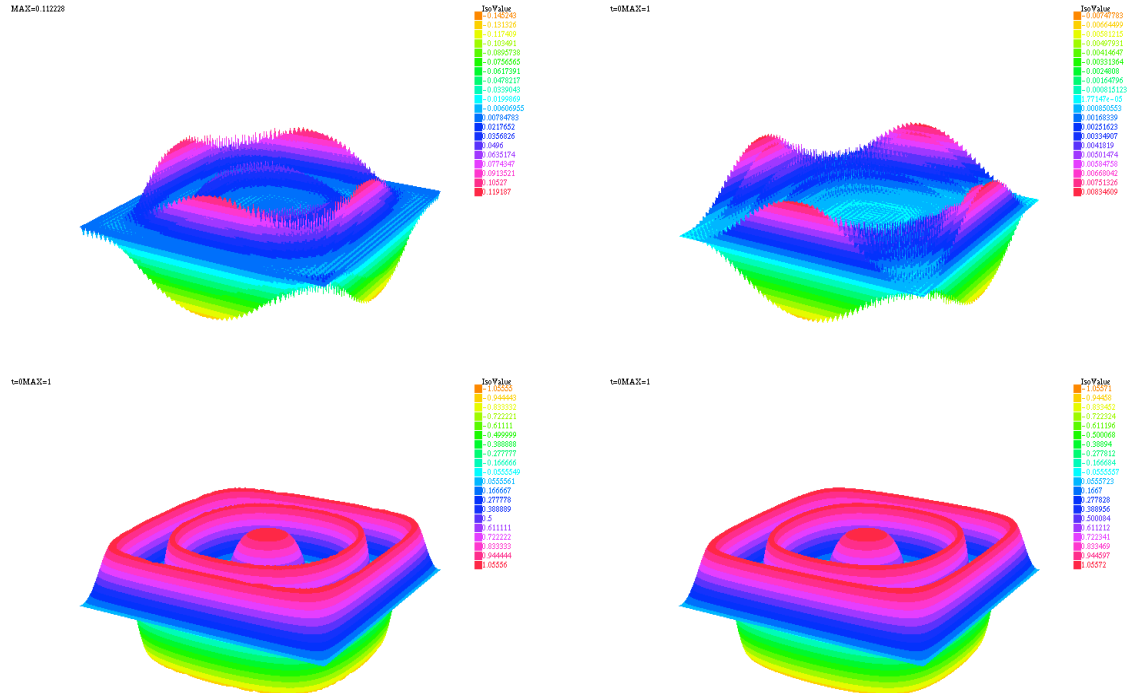


FIGURE 2.2 – Iso-valeurs et représentation 3D pour $u(x, y) = \sin(72x(1-x)y(1-y))$ sur le tore. Haut-gauche les composantes z_h et Bas-gauche la fonction u avec les éléments $\mathbb{P}_1$. Haut-droite les composantes z_h et Bas-droite la fonction u avec les éléments $\mathbb{P}_2$

Remarque 2.2.6 *La même chose peut être faite avec des conditions aux bords de Neumann qui sont les conditions aux bords habituels pour l'équation d'Allen-Cahn sur laquelle nous allons nous concentrer maintenant.*

Dans les figures précédentes, nous avons illustré l'effet de la séparation en échelles dans l'espace : la partie fluctuante de la fonction, z , est d'amplitude faible et inférieure à celle de la fonction d'origine. Ceci est observé lorsque l'on considère $\mathbb{P}_1$ ainsi que les éléments $\mathbb{P}_2$. Nous observons également que la composante z présente des oscillations élevées caractéristiques de la partie haute fréquence d'une fonction. Nous quantifions maintenant cette propriété.

Nous générons l'approximation de la fonction propre dans l'espace des EF en résolvant un problème de valeurs propres numériquement par

$$\int_{\Omega} u_h v_h dx + \int_{\Omega} \nabla u_h \nabla v_h dx = \lambda \int_{\Omega} u_h v_h dx \quad \forall v_h \in V_h \quad (2.4)$$

ce qui équivaut à trouver les éléments propres de

$$A_h u = \lambda M_h u \quad (2.5)$$

où A_h et M_h sont respectivement la matrice de rigidité et la matrice de masse sur l'espace V_h de MEF.

Si nous notons par $w^{(i)}$ les vecteurs propres associés aux valeurs propres λ_i , nous comparons les premiers composants propres de U et ceux de Z à souligner, c'est-à-dire

$$\int_{\Omega} U w^{(i)} dx \text{ and } \int_{\Omega} Z w^{(i)} dx$$

Dans les figures 2.3 et 2.4, nous avons représenté le spectre d'énergie de $u(x, y) = \cos(44(1 - x)xy(1 - y))$ et de sa composante fluctuante z , lorsqu'on utilise $\mathbb{P}_2$ ainsi que des éléments $\mathbb{P}_1$.

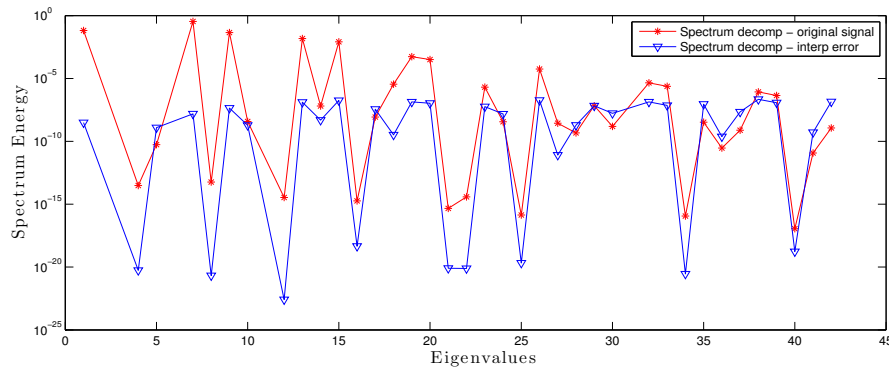


FIGURE 2.3 – Pour EF $\mathbb{P}_2$, $N_f = 20$, $N_c = 10$ pour $u(x, y) = \cos(44(1 - x)xy(1 - y))$, $\dim(V_h) = 1681$, $\dim(V_H) = 441$.

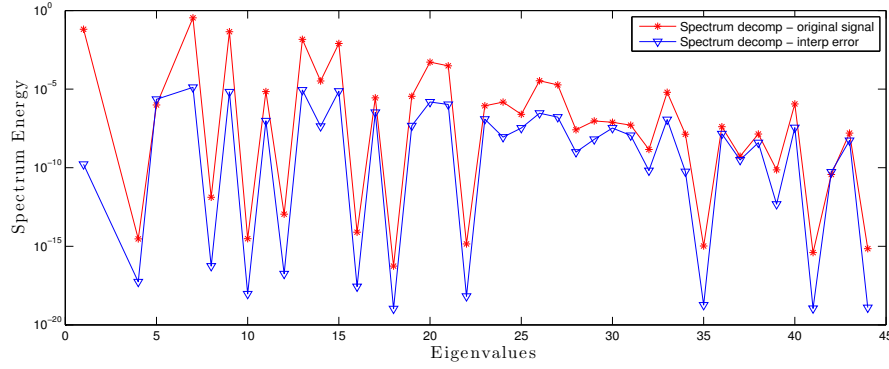


FIGURE 2.4 – Pour EF $\mathbb{P}_1$, $N_f = 40$, $N_c = 20$ pour $u(x, y) = \cos(44(1-x)xy(1-y))$, $\dim(V_h) = 1681$, $\dim(V_H) = 441$.

Nous remarquons dans les figures 2.3 – 2.4 que, comme prévu, les facteurs de correction propres qui correspondent à des valeurs propres faibles (fréquences élevées) sont très faibles en fonction de ceux de la fonction originale.

2.3 Cas linéaire : équation de la chaleur

Le problème de la chaleur constitue une étude préliminaire validant notre approche de séparation en hautes fréquences z_h et la partie principale de la solution u_H . Le terme $\partial_t u - \Delta u$ représente la partie linéaire de l'équation d'Allen-Cahn que nous considérons dans la section suivante. L'idée principale est d'approcher par un schéma implicite la grande partie de la solution sur la grille grossière puis par la prolongation passer à la stabilisation des hautes fréquences par un schéma explicite sur la grille fine.

Algorithm 9 Stabilisation des hautes fréquences

- 1: **for** $k = 0, 1, \dots$ **do**
 - 2: **Résoudre dans** V_H $(\frac{u_H^{k+1} - u_H^k}{\Delta t}, \psi_H) + (\nabla u_H^{k+1}, \nabla \psi_H) = (f, \psi_H), \forall \psi_H \in V_H$
 - 3: **Résoudre dans** V_h $(\tilde{u}_h^{k+1}, \phi_h) - (u_H^{k+1}, \phi_h), \forall \phi_h \in V_h$
 - 4: **Résoudre dans** V_h
 - 5: $(1 + \tau \Delta t)(z_h^{k+1} - z_h^k, \phi_h) + \Delta t(\nabla u_h^k, \nabla \phi_h) + (\tilde{u}_h^{k+1} - \tilde{u}_h^k, \phi_h) = \Delta t(f, \phi_h), \forall \phi_h \in V_h$
 - 6: **Soit** $u_h^{k+1} = \tilde{u}_h^{k+1} + z_h^{k+1}$
 - 7: **end for**
-

Remarque 2.3.1 *Il est important de noter que le schéma ci-dessus peut être implémenté très simplement sans calculer explicitement la séquence z_h^k ; Il suffit de voir que $z_h^{k+1} - z_h^k = u_h^{k+1} - u_h^k - (\tilde{u}_h^{k+1} - \tilde{u}_h^k)$ et se servir de la prolongation établie : en effet, nous pouvons réécrire l'étape de correction comme*

$$(u_h^{k+1} - u_h^k, \phi_h) + \Delta t \tau (u_h^{k+1} - u_h^k, \phi_h) + \Delta t (\nabla u_h^k, \nabla \phi_h) = \Delta t \tau (u_H^{k+1} - u_H^k, \phi_h) + \Delta t (f, \phi_h), \forall \phi_h \in V_h.$$

Ainsi l'algorithme simplifié sera le suivant

Algorithm 10 Schéma simplifié

- 1: **for** $k = 0, 1, \dots$ **do**
 - 2: **Résoudre dans** V_H $(\frac{u_H^{k+1} - u_H^k}{\Delta t}, \psi_H) + (\nabla u_H^{k+1}, \nabla \psi_H) = (f, \psi_H), \forall \psi_H \in V_H$
 - 3: **Résoudre dans** V_h
 - 4: $(u_h^{k+1} - u_h^k, \phi_h) + \Delta t \tau(u_h^{k+1} - u_h^k, \phi_h) + \Delta t (\nabla u_h^k, \nabla \phi_h) = \Delta t \tau(u_H^{k+1} - u_H^k, \phi_h) + \Delta t (f, \phi_h) \forall \phi_h \in V_h$
 - 5: **end for**
-

Afin de bien situer notre approche, nous présentons une comparaison entre notre **Algorithme 10** et les schémas suivants :

- **Schéma 1 : Schéma explicite**

$$\frac{u^{k+1} - u^k}{\Delta t} - \Delta u^k = f, \quad x \in \Omega, \quad (2.6)$$

Ce schéma requiert uniquement la résolution d'un problème linéaire à chaque étape mais il est limité en pas de temps.

- **Schéma 2 : Schéma implicite**

$$\frac{u^{k+1} - u^k}{\Delta t} - \Delta u^{k+1} = f, \quad x \in \Omega, \quad (2.7)$$

Ce schéma est inconditionnellement stable, au sens où il converge pour de gros pas de temps Δt .

- **Schéma 3 : Schéma semi-implicite stabilisé**

La restriction en pas de temps est résolue en ajoutant un terme de stabilisation comme suit :

$$\frac{u^{k+1} - u^k}{\Delta t} + \tau(u^{k+1} - u^k) - \Delta u^{k+1} = f, \quad x \in \Omega, \quad (2.8)$$

Par ce schéma, nous stabilisons la solution toute entière par le terme $\tau(u^{k+1} - u^k)$. Ainsi la stabilité est aussi inconditionnelle.

D'une part, la résolution du problème par l'**Algorithme 10** est plus chère en temps de calcul que la résolution du problème par un schéma explicite (2.6) pour un même pas de temps Δt . Mais notre **Algorithme 10** est plus stable que le schéma explicite ; un pas de temps plus grand peut être considéré ce qui permet de converger plus rapidement (si la comparaison est faite sur un interval de temps fixé). En effet, la perte en temps de calcul est récompensé en terme de stabilité.

D'autre part, nous démontrons que notre **Algorithme 10**, malgré la limitation en pas de temps, approche pour un même Δt d'une façon similaire à la simulation par un schéma implicite (2.7).

Nous comparons la convergence vers les solutions exactes dans la Fig. 2.5 pour l'**Algorithme 10**, le schéma implicite (2.7) et le schéma stabilisant la solution entière (2.8). Un avantage pour la technique de séparation des échelles apparaît ; la convergence est plus rapide que celle de la stabilisation globale (2.8).

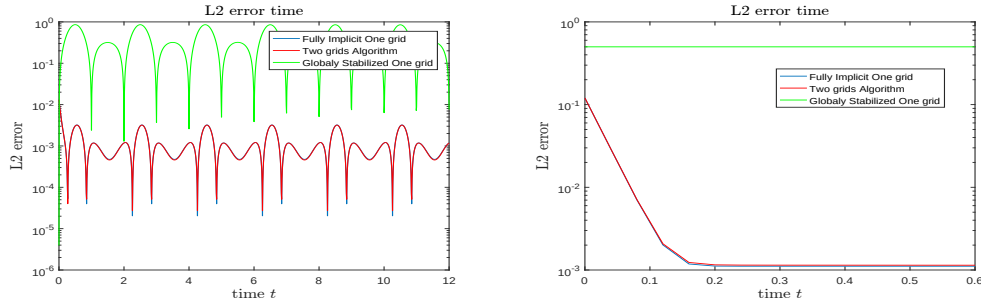


FIGURE 2.5 – L'erreur L^2 entre l'**Algorithme 10**, le schéma implicite (2.7), le schéma stabilisé (2.8) et la solution exacte : à gauche $u_{ex}(x, y, t) = \cos(\pi x) \cos(\pi y) \exp^{\sin(\pi t)}$, $\Delta t = 0.01$, $\tau = 4 \times 10^5$ et $u_0 = \cos(\pi x) \cos(\pi y)$; à droite $u_{ex}(x, y, t) = \cos(\pi x) \cos(\pi y)$, $\Delta t = 0.04$, $\tau = 5 \times 10^6$ et $u_0 = (x(1-x)y(1-y))^2$

Proposition 2.3.2 Si $\tau \geq \rho(A_h)$ alors $\gamma = 1 + \frac{\Delta t}{2}(\tau - \rho(A_h)) > 0$ et la solution du schéma bi-grilles simplifié (**Algorithme 10**) vérifie

$$|\nabla u_h^{k+1}|^2 \leq |\nabla u_h^0|^2 + \frac{\tau \Delta t}{2} |\nabla u_H^0|^2, \quad (2.9)$$

ainsi l'**Algorithme 10** est stable (inconditionnellement en énergie).

✓ **Preuve :**

Nous considérons en premier, le schéma inconditionnellement stable sur l'espace grossier et pour simplifier nous prenons $f = 0$

$$\left(\frac{u_H^{k+1} - u_H^k}{\Delta t}, \psi_H \right) + (\nabla u_H^{k+1}, \nabla \psi_H) = 0, \quad \forall \psi_H \in V_H, \quad (2.10)$$

pour $\psi_H = u_H^{k+1} - u_H^k$ et en utilisant l'identité

$$(a - b, 2a) = |a|^2 - |b|^2 + |a - b|^2, \quad (2.11)$$

nous trouvons

$$\frac{1}{\Delta t} |u_H^{k+1} - u_H^k|^2 + \frac{1}{2} \left(|\nabla u_H^{k+1}|^2 - |\nabla u_H^k|^2 + |\nabla(u_H^{k+1} - u_H^k)|^2 \right) = 0. \quad (2.12)$$

Nous sommes pour $j = 0, \dots, k$ et nous obtenons

$$\frac{1}{\Delta t} \sum_{j=0}^k |u_H^{j+1} - u_H^j|^2 + \frac{1}{2} (|\nabla u_H^{k+1}|^2 - |\nabla u_H^0|^2) + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^k |\nabla(u_H^{j+1} - u_H^j)|^2 = 0, \quad (2.13)$$

ce qui implique

$$\sum_{j=0}^k |u_H^{j+1} - u_H^j|^2 + \frac{\Delta t}{2} |\nabla u_H^{k+1}|^2 + \frac{\Delta t}{2} \sum_{j=0}^k |\nabla(u_H^{j+1} - u_H^j)|^2 \leq \frac{\Delta t}{2} |\nabla u_H^0|^2. \quad (2.14)$$

D'autre part, en prenant $\phi_h = u_h^{k+1} - u_h^k$ dans le schéma de la grille fine de l'**Algorithme 10** et par l'identité (2.11), nous avons

$$(1 + \tau \Delta t) |u_h^{k+1} - u_h^k|^2 + \frac{\Delta t}{2} (|\nabla u_h^{k+1}|^2 - |\nabla u_h^k|^2) - \frac{\Delta t}{2} |\nabla(u_h^{k+1} - u_h^k)|^2 = \tau \Delta t (u_H^{k+1} - u_H^k, u_h^{k+1} - u_h^k). \quad (2.15)$$

Par l'inégalité de Hölder nous trouvons

$$(1 + \tau \Delta t) |u_h^{k+1} - u_h^k|^2 + \frac{\Delta t}{2} (|\nabla u_h^{k+1}|^2 - |\nabla u_h^k|^2) - \frac{\Delta t}{2} |\nabla(u_h^{k+1} - u_h^k)|^2 \leq \frac{\tau \Delta t}{2} \left(\eta |u_H^{k+1} - u_H^k|^2 + \frac{1}{\eta} |u_h^{k+1} - u_h^k|^2 \right). \quad (2.16)$$

Par l'inégalité du Poincaré inverse

$$|\nabla u_h|^2 \leq \rho(A_h) |u_h|^2,$$

nous obtenons

$$\left(1 + \Delta t \left(\tau - \frac{1}{2} \rho(A_h) - \frac{\tau}{2\eta} \right) \right) |u_h^{k+1} - u_h^k|^2 + \frac{\Delta t}{2} |\nabla u_h^{k+1}|^2 \leq \frac{\tau \Delta t \eta}{2} |u_H^{k+1} - u_H^k|^2 + \frac{\Delta t}{2} |\nabla u_h^k|^2. \quad (2.17)$$

Pour $\eta = 1$, nous posons $\gamma = 1 + \frac{\Delta t}{2} (\tau - \rho(A_h))$ et sommons pour $j = 0, \dots, k$ nous obtenons

$$\gamma \sum_{j=0}^k |u_h^{j+1} - u_h^j|^2 + \frac{\Delta t}{2} |\nabla u_h^{k+1}|^2 \leq \frac{\tau \Delta t}{2} \sum_{j=0}^k |\nabla(u_H^{j+1} - u_H^j)|^2 + \frac{\Delta t}{2} |\nabla u_h^0|^2. \quad (2.18)$$

Or d'après (2.14), on a

$$\frac{\tau \Delta t}{2} \sum_{j=0}^k |\nabla(u_H^{j+1} - u_H^j)|^2 \leq \frac{\tau \Delta t^2}{4} |\nabla u_H^0|^2$$

et donc finalement

$$\gamma \sum_{j=0}^k |u_h^{j+1} - u_h^j|^2 + \frac{\Delta t}{2} |\nabla u_h^{k+1}|^2 \leq \frac{\Delta t}{2} |\nabla u_h^0|^2 + \frac{\tau \Delta t^2}{4} |\nabla u_H^0|^2. \quad (2.19)$$

d'où $|\nabla u_h^{k+1}|^2 \leq |\nabla u_h^0|^2 + \frac{\tau \Delta t}{2} |\nabla u_H^0|^2$. □

2.4 Équation d'Allen-Cahn

Les équations de champs de phase, comme Allen-Cahn, sont largement utilisées dans plusieurs domaines des sciences appliquées. Nous-en citons quelques-uns : pour modéliser les phénomènes naturels en science des matériaux [7, 88], en traitement d'image [156] ou en écologie et en médecine [139]. Elles s'écrivent

$$\frac{\partial u}{\partial t} + M(-\Delta u + \frac{1}{\varepsilon^2} f(u)) = 0, \quad x \in \Omega, t > 0, \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0, \quad (2.21)$$

$$u(0, x) = u_0(x), \quad (2.22)$$

où Ω est un ensemble ouvert borné dans $\mathbb{R}^d$ et n le vecteur normal unitaire.

L'équation d'Allen-Cahn a été introduite pour décrire le processus de séparation de phase dans les alliages de fer [8, 9], y compris transitions ordre-désordre : M est la mobilité (prise 1 pour la simplicité), $F = \int_{-\infty}^u f(v)dv$ est l'énergie libre, u est le paramètre d'ordre (non-conservé) et $\varepsilon > 0$ est l'épaisseur de la surface. La condition aux limites de Neumann homogène implique qu'il n'y a pas de perte de masse en dehors du domaine. Il est important de noter qu'il existe une compétition entre le terme potentiel et le terme de diffusion : ceci produit une régularisation en transition de phase. Cette équation peut également être considérée comme un flot de gradient pour l'énergie

$$E(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \|\nabla u\|^2 dx + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\Omega} F(u) dx,$$

et peut être réécrite comme

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla E(u) = 0,$$

Une conséquence importante est que $\frac{\partial E(u)}{\partial t} \leq 0$, l'énergie diminue en temps le long des solutions, c'est une propriété de stabilité qu'il est important de récupérer numériquement ; nous renvoyons le lecteur à des travaux récents sur la méthode numérique des écoulements de gradient appliquée à ces équations [167].

La satisfaction du principe du maximum par la solution est une autre propriété de stabilité (en norme L^∞). Nous nous référons à [16] pour plus de détails sur la modélisation du champ de phase et sur les propriétés mathématiques des solutions.

La présence du petit paramètre ε conduit à des difficultés numériques : il rend la fonction $E(u)$ "très non convexe" au sens où elle possède de nombreux minima locaux. Par conséquent, l'utilisation de méthodes semi-implicites souffre d'une limitation difficile de temps tandis que l'utilisation de schémas implicites permet d'obtenir des méthodes de diminution d'énergie mais à un coût important en temps CPU ; Cependant, elles présentent des difficultés pratiques pour leur mise en œuvre.

Nous considérons maintenant la semi-discretisation temporelle et nous focalisons sur les schémas en temps. Soit $u^k \simeq u(x, k\Delta t)$ une suite de fonctions ; Δt est le pas de temps. Nous rappelons les trois schémas classiques suivants qui seront utilisés pour construire nos nouvelles méthodes. À noter qu'un schéma réduit l'énergie si

$$E(u^{k+1}) \leq E(u^k).$$

- **Schéma 1 : Schéma semi-implicite**

$$\frac{u^{k+1} - u^k}{\Delta t} - \Delta u^{k+1} + \frac{1}{\varepsilon^2} f(u^k) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (2.23)$$

$$\frac{\partial u^{k+1}}{\partial n} = 0, \quad \text{sur } \partial\Omega. \quad (2.24)$$

Ce schéma est à énergie décroissante : il est facile à mettre en œuvre (un seul problème de Neumann linéaire doit être résolu à chaque étape) mais il souffre d'une condition stricte et contraignante sur le pas de temps

$$0 < \Delta t < \frac{2\varepsilon^2}{L},$$

où $L = \|f'\|_\infty$, cf. [188].

• **Schéma 2 : Schéma implicite**

$$\frac{u^{k+1} - u^k}{\Delta t} - \Delta u^{k+1} + \frac{1}{\varepsilon^2} DF(u^k, u^{k+1}) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (2.25)$$

$$\frac{\partial u^{k+1}}{\partial n} = 0, \quad \text{sur } \partial\Omega, \quad (2.26)$$

$$\text{où nous prenons } DF(u, v) = \begin{cases} \frac{F(u) - F(v)}{u - v} & \text{si } u \neq v, \\ f(u) & \text{si } u = v \end{cases}.$$

Ce schéma est inconditionnellement énergétiquement stable, c'est-à-dire que l'énergie diminue pour tous les $\Delta t > 0$, voir [84]. Cependant, il faut résoudre un problème de point fixe à chaque étape.

• **Schéma 3 : Schéma semi-implicite stabilisé**

Une façon de surmonter la restriction de pas de temps tout en résolvant un seul problème linéaire à chaque étape est d'ajouter un terme de stabilisation comme suit [188] :

$$\frac{u^{k+1} - u^k}{\Delta t} + \frac{S}{\varepsilon^2} (u^{k+1} - u^k) - \Delta u^{k+1} + \frac{1}{\varepsilon^2} f(u^k) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (2.27)$$

$$\frac{\partial u^{k+1}}{\partial n} = 0, \quad \text{sur } \partial\Omega. \quad (2.28)$$

Le schéma réduit l'énergie pour tout $\Delta t > 0$ quand $S \geq \frac{L}{2}$, voir [188].

En tant que schéma semi-implicite, cette méthode est facile à mettre en œuvre, mais la stabilisation ralentit la dynamique. On peut l'expliquer comme suit : le terme d'amortissement $\frac{S}{\varepsilon^2} (u^{k+1} - u^k)$ agit sur toutes les composantes modales de la solution, les basses qui représentent la partie principale de la solution et les hauts modes dont la limitation de la propagation permet d'obtenir la stabilité.

Une solution numérique efficace du problème doit satisfaire un système entièrement discrétisé, nous considérons ici la méthode des éléments finis (MEF) pour la discrétisation de l'espace. Pour développer un système efficace, nous devons prendre en compte des arguments pratiques, tels que la mise en œuvre ainsi que le coût en temps CPU.

Remark 2.4.1 *Une autre propriété importante des solutions de l'équation d'Allen-Cahn est le principe maximum. Par exemple, quand $f(u) = u(u^2 - 1)$, on peut prouver que si $|u_0(x)| \leq 1, \forall x \in \Omega$ alors $|u(x, t)| \leq 1, \forall x \in \Omega, \forall t > 0$: c'est la stabilité L^∞ .*

2.4.1 Schéma de référence sur grille fine

Comme présenté ci-dessus, le schéma bi-grilles est basé sur un schéma implicite (stable) appliqué sur l'espace grossier V_H et sur un schéma semi-implicite simplifié sur l'espace fin V_h , pour le calcul du terme de correction (fluctuant) z . Le schéma sur V_H est considéré comme le schéma de référence.

Nous nous inspirons des travaux de Condette [67] et de Shen [188] pour démontrer la stabilité énergétique inconditionnelle du schéma (2.25).

Théorème 2.4.2 *Le schéma (2.25) est inconditionnellement stable et vérifie l'inégalité sur l'énergie suivante*

$$E(u_h^{k+1}) \leq E(u_h^k), \quad \forall k \geq 0.$$

✓ **Preuve :**

Pour $v_h = u_h^{k+1} - u_h^k$ et à l'aide de l'identité du parallélogramme nous avons,

$$\frac{1}{\Delta t} \|u_h^{k+1} - u_h^k\|_0^2 + \frac{1}{2} \left(\|\nabla u_h^{k+1}\|_0^2 - \|\nabla u_h^k\|_0^2 + \|\nabla(u_h^{k+1} - u_h^k)\|_0^2 \right) + \frac{1}{\varepsilon^2} (DF(u_h^k, u_h^{k+1}), u_h^{k+1} - u_h^k) = 0.$$

Comme $u_h^k \neq u_h^{k+1}$, le dernier terme sera $(F(u_h^{k+1}) - F(u_h^k), 1)$.

Ainsi

$$\frac{1}{2} \left(\|\nabla u_h^{k+1}\|_0^2 - \|\nabla u_h^k\|_0^2 \right) + \frac{1}{\varepsilon^2} (F(u_h^{k+1}) - F(u_h^k), 1) \leq -\frac{1}{\Delta t} \|u_h^{k+1} - u_h^k\|_0^2 - \frac{1}{2} \|\nabla(u_h^{k+1} - u_h^k)\|_0^2.$$

L'inégalité devient

$$\left(\frac{1}{2} \|\nabla u_h^{k+1}\|_0^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\Omega} F(u_h^{k+1}) dx \right) - \left(\frac{1}{2} \|\nabla u_h^k\|_0^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\Omega} F(u_h^k) dx \right) \leq 0.$$

D'où $E(u_h^{k+1}) - E(u_h^k) \leq 0$ donc $E(u_h^{k+1}) \leq E(u_h^k) \quad \forall k \geq 0$. □

Sa mise en œuvre nécessite la résolution numérique d'un problème de point fixe à chaque pas de temps. Nous présentons ci-après un moyen de surmonter l'instabilité artificielle portée par l'utilisation des itérations de Picard classiques. Les nouvelles itérations non linéaires seront implémentées pour définir le schéma de référence effectif lorsqu'il est appliqué à V_h et auquel nous comparerons les schémas bi-grilles. En effet, l'implémentation du schéma (2.25), inconditionnellement stable déjà démontré ci-dessus, souffre d'une instabilité. La résolution d'un problème de point fixe à chaque itération en est la cause. En pratique, la convergence des itérations du point fixe Picard n'est réalisée que pour des petites valeurs de Δt plus précisément d'ordre 10^{-4} . Cela est dramatique car nous cherchons à long terme le comportement numérique de la solution.

Cette restriction sur le pas de temps est vraiment artificielle parce que le schéma est censé être inconditionnellement stable. Soit Id la matrice identité et si nous posons

$$\phi(v, u^k) = \left(Id + \Delta t A \right)^{-1} \left\{ u^k - \frac{\Delta t}{\varepsilon^2} DF(u^k, v) \right\},$$

alors le schéma sera réduit à la résolution du problème de point fixe, à l'itération k ,

$$v = \phi(v, u^k). \tag{2.29}$$

Nous proposons de résoudre (2.29) en accélérant la séquence Picard

$$\begin{aligned} v^0 &= u^k \\ \text{for } m &= 0, \dots \\ v^{(m+1)} &= \phi(v^{(m)}, u^k) \end{aligned} \tag{2.30}$$

afin de pouvoir donner à Δt des valeurs supérieures. Nous avons recours à la procédure d'accélération Δ^K voir [28] pour l'extension au cas non linéaire de la procédure hybride introduite dans [29] et voir [6] où une application sur les équations de Schrödinger a été faite.

Cette technique consiste à remplacer les itérations de Picard par

$$\begin{aligned} v^0 &= u^k \\ \text{for } m &= 0, \dots \\ v^{(m+1)} &= v^{(m)} - (-1)^K \alpha_m^K \Delta_\phi^K v^{(m)}; \end{aligned} \quad (2.31)$$

où $\Delta_\phi^K v^{(m)} = \sum_{j=0}^K C_j^K (-1)^{K-j} \phi^{(j)}(v^{(m)}, u^k)$, $C_j^K = \frac{K!}{j!(K-j)!}$ est le coefficient binomial et $\phi^{(j)}$ désigne la j^{me} composition de ϕ par elle même avec

$$\alpha_m^K = (-1)^K \frac{\langle \Delta_\phi^1 v^{(m)}, \Delta_\phi^{K+1} v^{(m)} \rangle}{\langle \Delta_\phi^{K+1} v^{(m)}, \Delta_\phi^{K+1} v^{(m)} \rangle}. \quad (2.32)$$

Nous avons appliqué cette procédure avec Δ^1 (Lemaréchal $K = 1$); Nous pouvons ainsi prendre $\Delta t = 10^{-2}$ et le schéma (2.25) reste stable.

Une comparaison des courbes de l'énergie montre une convergence numérique en variant N le nombre de nœuds sur le côté du carré unité pour $\varepsilon = 0.03$ et l'accélération Lemaréchal.

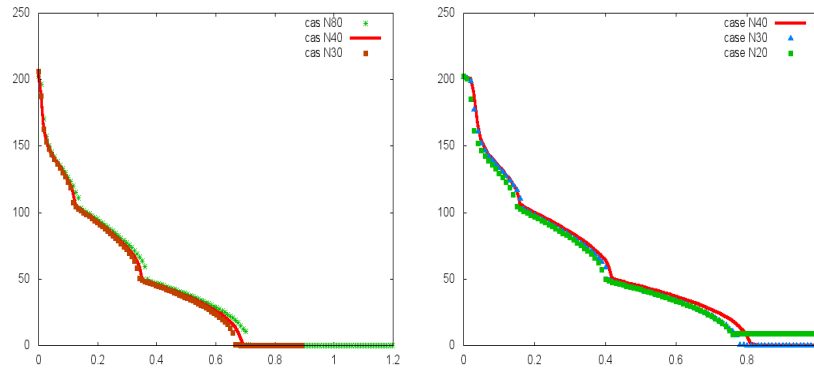


FIGURE 2.6 – Courbes d'énergie : à gauche pour $N = 30, 40, 80$ sur le carré unité avec l'EF $\mathbb{P}_1$, $\Delta t = 0.009$ et l'accélération Lemaréchal et à droite pour $N = 20, 30, 40$ sur le carré unité avec l'EF $\mathbb{P}_2$, $\Delta t = 10^{-2}$ et l'accélération Lemaréchal.

L'efficacité de cette méthode apparaît en réduisant le nombre d'itérations nécessaires pour atteindre un temps final T . Nous présentons dans la Table 2.1 le temps de calcul CPU et le nombre d'itérations suite à l'implémentation de (2.25) sur le carré unité pour $T = 0.4$ et les pas de temps maximaux pour Picard et Lemaréchal.

Cas $\mathbb{P}_2$ N=20	Picard	$\Delta t = 3 \times 10^{-4}$	T=0.4	Nb iter=34266	CPU=2851.62s
	Lemaréchal	$\Delta t = 5 \times 10^{-2}$	T=0.4	Nb iter=360	CPU=73.595s
Cas $\mathbb{P}_2$ N=40	Picard	$\Delta t = 3 \times 10^{-4}$	T=0.4	Nb iter=34796	CPU=11639.8s
	Lemaréchal	$\Delta t = 10^{-2}$	T=0.4	Nb iter=1600	CPU=1598.8s
Cas $\mathbb{P}_2$ N=80	Picard	$\Delta t = 3 \times 10^{-4}$	T=0.4	Nb iter=35142	CPU=47686.2s
	Lemaréchal	$\Delta t = 10^{-2}$	T=0.4	Nb iter=1599	CPU=11250.5s

TABLE 2.1 – Comparaison du temps CPU et des itérations globales pour la méthode du point fixe de Lemaréchal et Picard et pour différentes valeurs de N .

Nous présentons ci-dessous les courbes d'énergie et quelques solutions à des instants différents suite à l'implémentation du schéma (2.25). Les simulations sont faites sur le carré unité avec 40 nœuds à chaque côté avec $\varepsilon = 0.03$, l'EF $\mathbb{P}_2$, $\Delta t = 10^{-4}$ et la CI $u_0 = \cos(4\pi x) \cos(4\pi y)$.

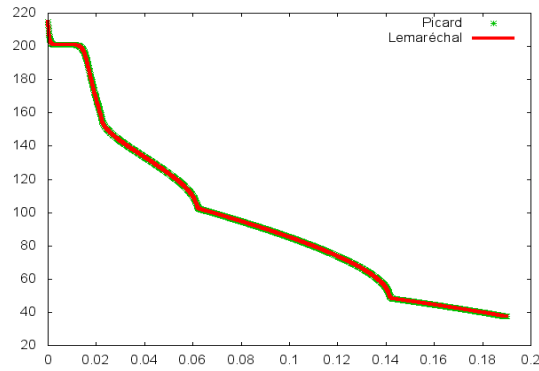


FIGURE 2.7 – Courbes d'énergie pour Picard et pour Lemaréchal.

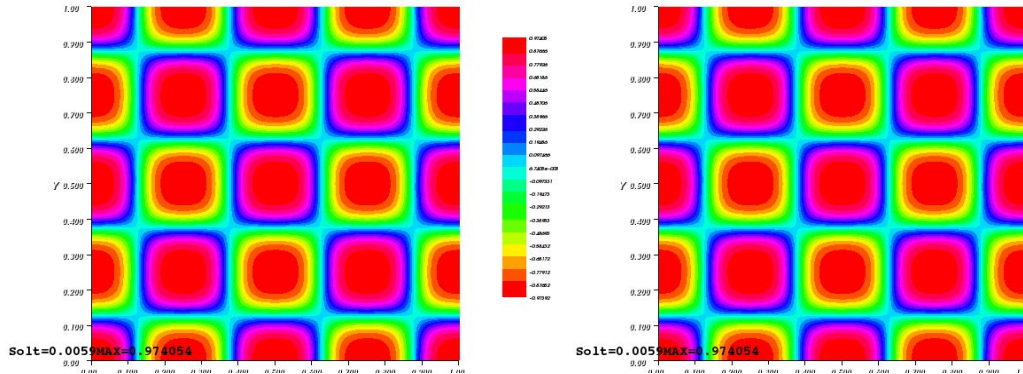


FIGURE 2.8 – Solution à gauche pour Picard et à droite pour Lemaréchal à $t = 0.0059$.

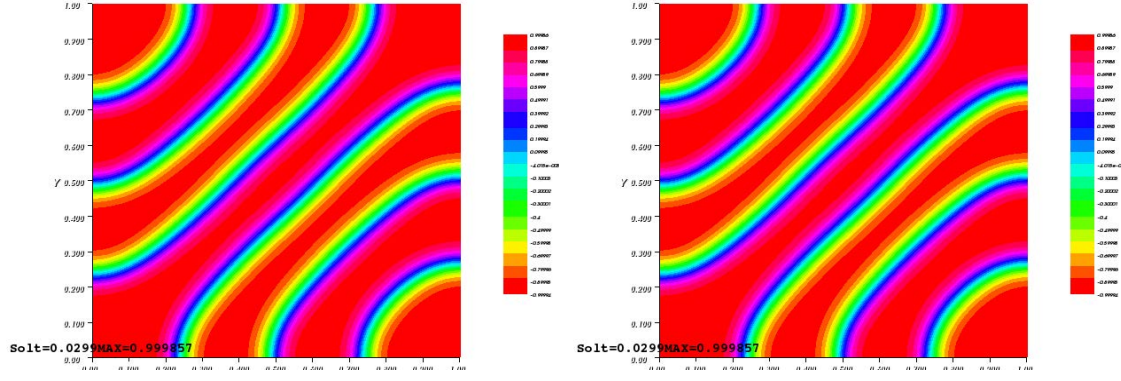


FIGURE 2.9 – Solution à gauche pour Picard et à droite pour Lemaréchal à $t = 0.0299$.

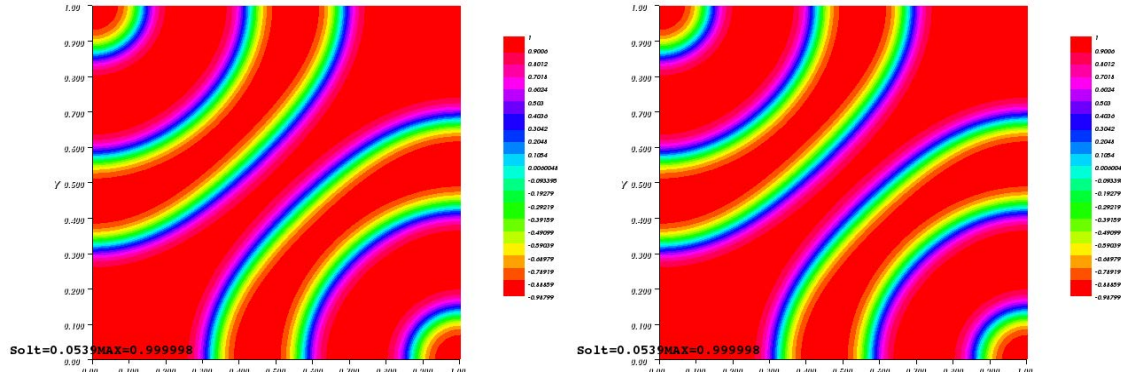


FIGURE 2.10 – Solution à gauche pour Picard et à droite pour Lemaréchal à $t = 0.0539$.

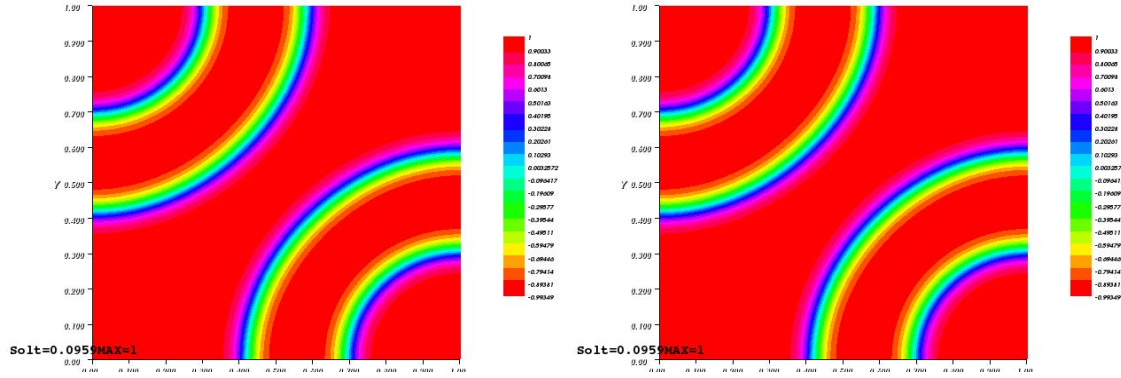


FIGURE 2.11 – Solution à gauche pour Picard et à droite pour Lemaréchal à $t = 0.0959$.

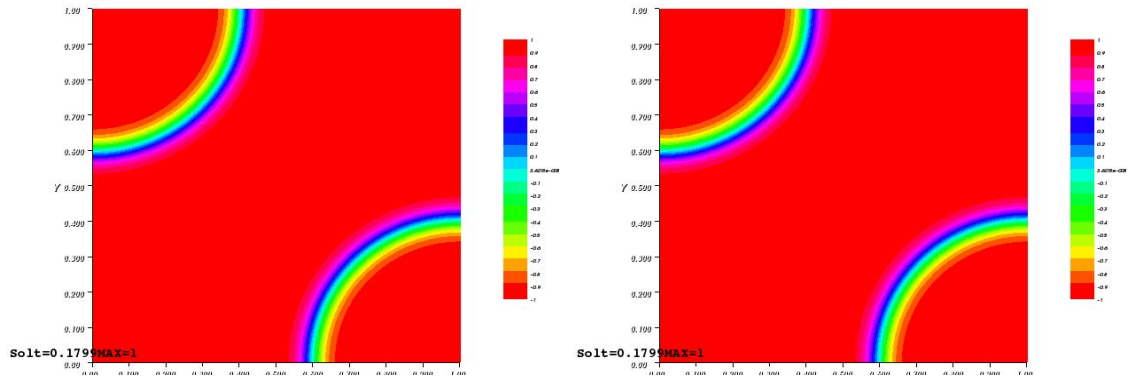


FIGURE 2.12 – Solution à gauche pour Picard et à droite pour Lemaréchal à $t = 0.1799$.

En effet, la décroissance de l'énergie indique la stabilité de notre schéma. De plus, la comparaison des solutions aux mêmes instants permet de dire que les deux méthodes approchent de la même manière la solution. La méthode Lemaréchal nous a permis de prendre des pas de temps élevés par contre, en adaptant la méthode de Picard nous sommes limités par les petites valeurs du pas de temps. Un autre gain s'écoule de l'augmentation du pas de temps, la réduction du temps de calcul. Les itérations du Lemaréchal sont 4 fois plus rapides que celles de Picard même pour un maillage fin de 80 nœuds.

2.4.2 Cadre bi-grilles

2.4.2.1 Simulation des petites échelles

Nous prenons une solution exacte $u_{ex} = \cos(\pi x) \cos(\pi y)$ de l'équation d'Allen-Cahn avec un second terme et simulons cette dernière sur deux maillages du carré unité avec $N_f = 40$ et $N_c = 20$ et les espaces d'EF ($\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2$) Fig (2.13)-(2.14). Nous effectuons la même simulation de l'équation d'Allen-Cahn mais sans second terme. Nous étudions le comportement de la composante fluctuante $z_h = u_h - \tilde{u}_h$: la différence entre la solution obtenue sur le domaine fin et la prolongation de celle obtenue sur le domaine grossier.

Nous constatons à partir des figures 2.13 – 2.15 que $|z_h|$ est faible et z_h oscille au cours du temps.

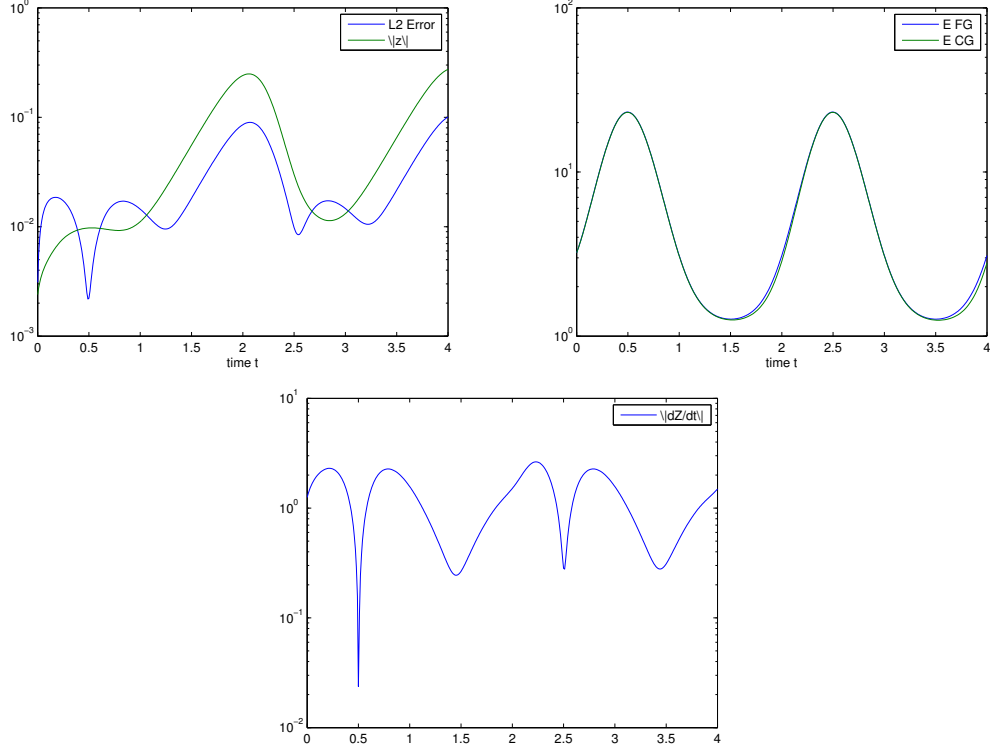


FIGURE 2.13 – L'équation d'Allen-Cahn avec second membre pour $\varepsilon = 0.5$, $\Delta t = 0.01$, $t \in [0, 4]$ et l'élément $\mathbb{P}_1$.

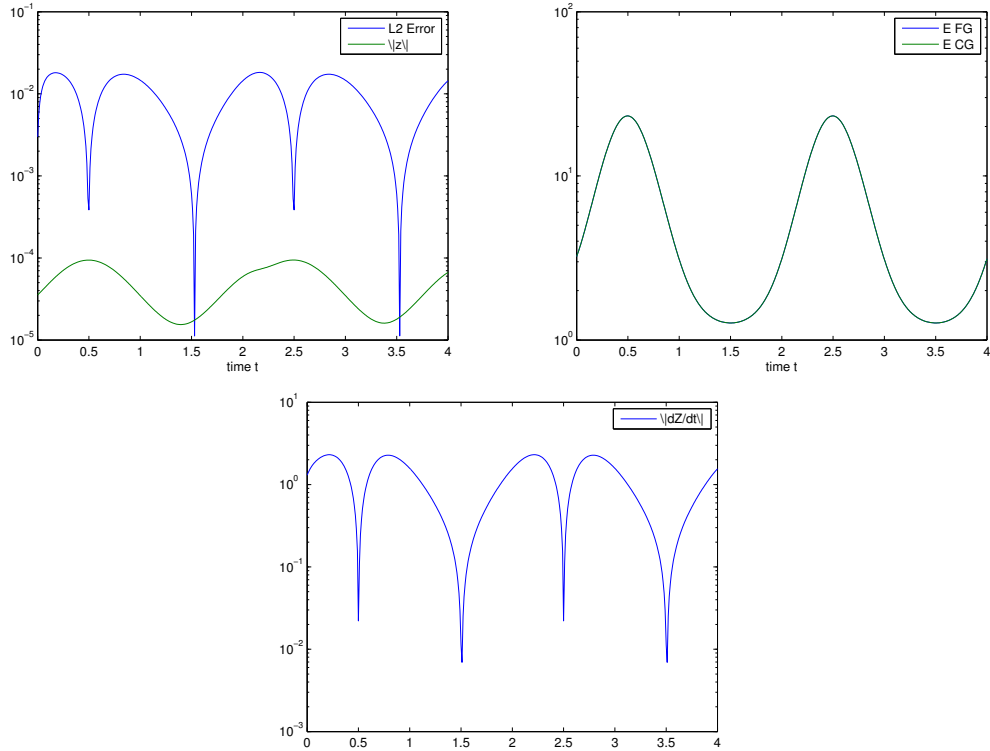
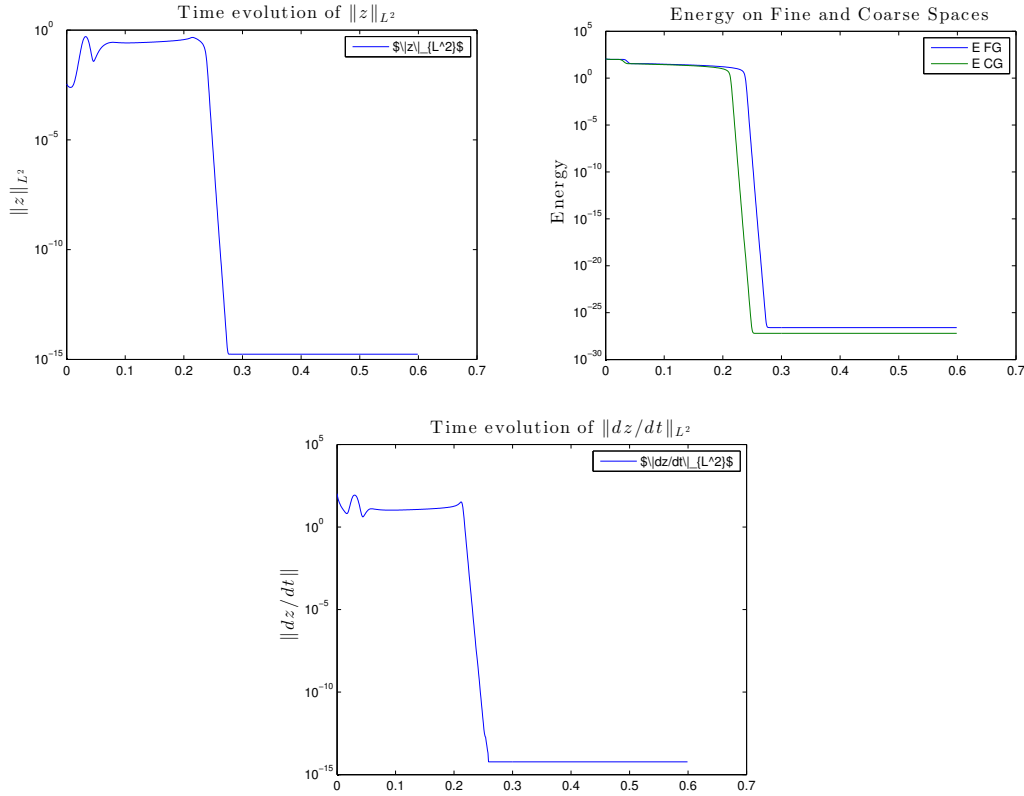


FIGURE 2.14 – L'équation d'Allen-Cahn avec second membre pour $\varepsilon = 0.5$, $\Delta t = 0.01$, $t \in [0, 4]$ et l'élément $\mathbb{P}_2$.


 FIGURE 2.15 – L'équation d'Allen-Cahn pour $\varepsilon = 0.05, \Delta t = 0.001, t \in [0, 0.6]$ et l'élément $\mathbb{P}_2$.

2.4.2.2 Construction de l'algorithme bi-grilles

Nous définissons le modèle de la méthode bi-grilles en utilisant un schéma de référence sur l'espace grossier V_H et un schéma semi-implicite sur l'espace fin V_h avec une stabilisation uniquement des composantes en modes élevés.

Structure générale du schéma bi-grilles	
Étape 1	Trouver u_H^{k+1} connaissant u_H^k dans V_H par un schéma inconditionnellement stable
Étape 2	Calculer la prolongation $\tilde{u}_h^{k+1}$ de u_H^{k+1} dans V_h en utilisant (2.2)
Étape 3	Décomposer $u_h^{k+1} = \tilde{u}_h^{k+1} + z_h^{k+1}$ Calculer z_h^{k+1} par un schéma semi-implicite linéaire stabilisé
Étape 4	Soit $u_h^{k+1} = \tilde{u}_h^{k+1} + z_h^{k+1}$, avec z_h^{k+1} trouvé à l'Étape 3.

Modèle 1 : Structure générale du schéma bi-grilles

Cette approche permet de concentrer l'effort de calcul principal sur l'espace V_H de faible dimension et d'utiliser un schéma simple mais rapide sur l'espace fin V_h .

Algorithm 11 Schéma 4 : Schéma Bi-grilles1: **for** $k = 0, 1, \dots$ **do**2: **Résoudre dans** V_H

$$\left(\frac{u_H^{k+1} - u_H^k}{\Delta t}, \psi_H\right) + (\nabla u_H^{k+1}, \nabla \psi_H) + \frac{1}{\varepsilon^2} (DF(u_H^{k+1}, u_H^k), \psi_H) = 0, \forall \psi_H \in V_H$$

3: **Résoudre dans** V_h $(\tilde{u}_h^{k+1}, \phi_h) - (u_H^{k+1}, \phi_h) = 0, \forall \phi_h \in V_h$ 4: **Résoudre dans** V_h

$$(1 + \tau \Delta t)(z_h^{k+1} - z_h^k, \phi_h) + \Delta t (\nabla z_h^{k+1}, \nabla \phi_h) + \Delta t (\nabla \tilde{u}_h^{k+1}, \nabla \phi_h) \\ + (\tilde{u}_h^{k+1} - \tilde{u}_h^k, \phi_h) + \Delta t \frac{1}{\varepsilon^2} (\tilde{f}(u_h^k, \tilde{u}_h^{k+1}, z_h^{k+1}), \phi_h) = 0, \forall \phi_h \in V_h$$

5: **Soit** $u_h^{k+1} = \tilde{u}_h^{k+1} + z_h^{k+1}$ 6: **end for**

Le traitement du terme non linéaire $\tilde{f}(u_h^k, u_h^{k+1}, u_H^{k+1})$ permet de voir plusieurs variantes de l'Algorithme bi-grilles d'Allen-Cahn (**Algorithme 11**).

i. $\tilde{f}(u_h^k, u_h^{k+1}, u_H^{k+1}) = f(u_h^k)$: l'étape de correction du schéma bi-grilles est une simple stabilisation des modes élevés du schéma semi-implicite.

ii. Linéarisation du terme non linéaire :

$$\begin{aligned} \tilde{f}(u_h^k, u_h^{k+1}, u_H^{k+1}) &= \frac{1}{4\varepsilon^2} ((u_h^k)^2 + 2u_H^{k+1}u_h^k + 3(u_H^{k+1})^2 - 2)(u_h^{k+1} - u_H^{k+1}) \\ &\quad + \frac{1}{4\varepsilon^2} ((u_H^{k+1})^2 + (u_h^k)^2 - 2)(u_H^{k+1} + u_h^k). \end{aligned}$$

Ce choix définit le Schéma 4.2 présenté après.

2.4.2.3 Comment choisir V_H et V_h ?

Une question principale pour la méthode bi-grilles est le choix des deux espaces d'approximation V_H et V_h . Nous devons concilier entre deux critères :

- les capacités de réduction de CPU apportées par le schéma bi-grilles : la partie la plus importante des calculs est réalisée dans l'espace grossier (itérations non linéaires). Ceci est directement lié au rapport des dimensions de V_H et V_h , que nous désignons par

$$DR = \frac{\dim(V_H)}{\dim(V_h)}.$$

- la séparation d'échelles en fréquence qui permet de faire une correction par un schéma simplifié sur V_h . Il semble qu'un bon indicateur est que le terme de correction z soit petit en norme, cela signifie que l'approximation sur l'espace grossier est suffisamment correcte pour être une approximation acceptable sur l'espace fin, une fois prolongée. Selon le cas général, cf. la **Proposition 2.2.4**, un indicateur de la norme L^2 de z est contrôlé par l'erreur d'interpolation dans V_H .

Les estimations sur la taille relative de V_H et V_h dans le cas $V_H \subset V_h$ ont été obtenues dans différents contextes, cf. [166, 218] pour la Galerkin bi-grilles non linéaire (problème de réaction-diffusion) et [3] pour les équations de Navier-Stokes dépendantes du temps.

Dans notre cas, la condition $V_H \subset V_h$ n'est pas nécessaire et nous pouvons définir un schéma d'élément fini mixte, une condition de compatibilité entre les EF est donnée par la **Proposition 2.2.2**.

Nous donnons des choix possibles pour V_H et V_h dans différentes situations :

- Le cas $V_H \subset V_h$

— Quand $\mathcal{T}_H = \mathcal{T}_h$:

$$V_H = \{v_h \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega}), v_h|_K \in P_p, \forall K \in \mathcal{T}_h\}, \quad V_h = \{v_h \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega}), v_h|_K \in P_q, \forall K \in \mathcal{T}_h\},$$

avec $q > p$. Par exemple $p = 1, q = 2$ or $q = 3$.

Suivant **Proposition 2.2.4**, il est facile de voir que

$$\|u - \Pi_h u\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^{q+1} \|u\|_{H^{q+1}(\Omega)} \text{ et } \|u - \Pi_H u\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^{p+1} \|u\|_{H^{p+1}(\Omega)},$$

ainsi l'estimation *a priori* optimale pour l'erreur de prolongation est H^{p+1} .

— Quand $\mathcal{T}_H \subset \mathcal{T}_h$:

$$V_H = \{v_h \in \mathcal{C}^m(\bar{\Omega}), v_h|_K \in P_p, \forall K \in \mathcal{T}_h\}, \quad V_h = \{v_h \in \mathcal{C}^m(\bar{\Omega}), v_h|_K \in P_p, \forall K \in \mathcal{T}_h\}.$$

Une autre façon de construire V_H de V_h est d'appliquer une procédure grossière, nous renvoyons le lecteur à [15].

- Le cas $V_H \not\subset V_h$: l'estimation *a priori* donnée par la **Proposition 2.2.4** tient encore et la relation $H^{p+1} \simeq h^{q+1}$ donne une indication pour choisir la taille relative des pas h et H de $\mathcal{T}_H$ et $\mathcal{T}_h$. Comme ci-dessus, la condition $h \ll H$ est nécessaire pour s'attendre à une réduction de temps CPU.

Remarque 2.4.3 *Nous nous concentrons ici sur les éléments $\mathbb{P}_k$ mais la méthode bi-grilles peut s'appliquer aux espaces d'EF construits avec des éléments rectangulaires ou cubiques $\mathbb{Q}_k$.*

2.4.3 Résolution technique bi-grilles

2.4.3.1 Schémas bi-grilles

Nous présentons maintenant des schémas bi-grilles basés sur des choix différents de $\tilde{f}(u_h^k, u_h^{k+1}, u_H^{k+1})$ dans le cas $f(u) = u(u^2 - 1)$: Nous pouvons voir que nos schémas bi-grilles n'ont pas de difficultés dans leur mise en œuvre.

Sur une grille grossière nous calculons la solution u_H^{k+1} de l'équation par un schéma implicite (inconditionnellement stable). La deuxième étape consiste à résoudre l'équation sur une grille fine tout en projetant u_H^{k+1} déjà calculée précédemment. A ce stade le terme $\tau(u_H^{k+1} - u_H^k)$ vient stabiliser les hautes fréquences de la solution. Nous proposons deux schémas bi-grilles d'ordre un en temps pour l'équation d'AC :

Algorithm 12 Schéma 4.1 : Équation d'Allen-Cahn stabilisée à deux grilles avec correction

```

1:  $u_h^0, u_H^0$  donné
2: for  $k = 0, 1, \dots$  do
3:   Résoudre dans  $V_H$ 
4:    $(u_H^{k+1}, \psi_H) + \Delta t(\nabla u_H^{k+1}, \nabla \psi_H) + \Delta t \frac{1}{\varepsilon^2} (DF(u_H^{k+1}, u_H^k), \psi_H) = (u_H^k, \psi_H), \forall \psi_H \in V_H$ 
5:   Résoudre dans  $V_h$ 
6:    $(u_h^{k+1} - u_h^k, \phi_h) + \Delta t \tau (u_h^{k+1} - u_h^k, \phi_h) + \Delta t (\nabla u_h^{k+1}, \nabla \phi_h)$ 
7:    $= \Delta t \tau (u_H^{k+1} - u_H^k, \phi_h) - \frac{\Delta t}{\varepsilon^2} (f(u_h^k), \phi_h) \forall \phi_h \in V_h$ 
8: end for

```

Algorithm 13 Schéma 4.2 : Équation d'Allen-Cahn stabilisée à deux grilles avec correction

```

1:  $u_h^0, u_H^0$  donné
2: for  $k = 0, 1, \dots$  do
3:   Résoudre dans  $V_H$ 
4:    $(u_H^{k+1}, \psi_H) + \Delta t(\nabla u_H^{k+1}, \nabla \psi_H) + \Delta t \left( \frac{1}{\varepsilon^2} DF(u_H^{k+1}, u_H^k), \psi_H \right) = (u_H^k, \psi_H), \forall \psi_H \in V_H$ 
5:   Résoudre dans  $V_h$ 
6:    $(u_h^{k+1} - u_h^k, \phi_h) + \Delta t \tau (u_h^{k+1} - u_h^k, \phi_h) + \Delta t (\nabla u_h^{k+1}, \nabla \phi_h)$ 
7:    $= \Delta t \tau (u_H^{k+1} - u_H^k, \phi_h) - \frac{\Delta t}{\varepsilon^2} (\tilde{f}(u_h^k, u_h^{k+1}, u_H^{k+1}), \phi_h) \forall \phi_h \in V_h$ 
8: end for

```

Remarque 2.4.4 La stabilisation que nous utilisons ici s'applique aux composantes des modes élevés, ceci peut être comparé aux méthodes développées par Costa-Dettori-Gottlieb et Temam [68] en utilisant des méthodes spectrales (Fourier, Chebyshev) ou Chehab-Costa [42, 43] en différences finies : dans ces cas, plusieurs grilles ont été utilisées pour générer une hiérarchie de composantes fluctuantes dans les grilles encadrées et pour les stabiliser avec un terme d'amortissement comme ci-dessus ; cependant, l'approche que nous proposons ici peut être non hiérarchique et peut être appliquée pour de nombreux choix d'espaces EF. Dans un travail récent, une stabilisation de grille a été proposée en différences finies pour les équations paraboliques en utilisant des techniques de préconditionnement, cf. [27].

2.4.3.2 Propriétés des schémas

La stabilisation en modes élevés rend le schéma bi-grilles cohérent avec le calcul des états stationnaires. Plus précisément on a

Proposition 2.4.5 Supposons que pour h et H fixés, il existe une unique pair d'éléments $\bar{u}_H \in V_H$ et $\bar{u}_h \in V_h$ tel que

$$(\nabla \bar{u}_H, \nabla \psi_H) + (f(\bar{u}_H), \psi_H) = 0, \forall \psi_H \in V_H \text{ et } (\nabla \bar{u}_h, \nabla \phi_h) + (f(\bar{u}_h), \phi_h) = 0, \forall \phi_h \in V_h.$$

Supposons que $\lim_{k \rightarrow +\infty} u_H^k = \bar{u}_H$ et que z_h^k est convergent vers $\bar{z}_h$. Alors

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} u_h^k = \bar{u}_h.$$

✓ **Preuve :**

Pour établir la cohérence, nous montrons que $u_h^k = z_h^k + \tilde{u}_h^k$ converge vers $\bar{u}_h$.
D'après la continuité de la prolongation $\mathcal{P}$, nous avons

$$\mathcal{P}(u_H^k) = \tilde{u}_h^k \rightarrow \mathcal{P}(\bar{u}_H) = \tilde{u}_h, \text{ quand } k \rightarrow +\infty.$$

En passant à la limite dans l'étape de correction du schéma et après simplifications, nous aurons

$$(\nabla z_h, \nabla \phi_h) + (\nabla \tilde{u}_h, \nabla \phi_h) + (f(z_h + \tilde{u}_h), \phi_h) = 0, \forall \phi_h \in V_h.$$

Pour $w_h = z_h + \tilde{u}_h$, nous trouvons

$$(\nabla w_h, \nabla \phi_h) + (f(w_h), \phi_h) = 0, \forall \phi_h \in V_h.$$

Par identification, $w_h = z_h + \tilde{u}_h = \bar{u}_h$. □

Proposition 2.4.6 Soient $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ une fonction réelle et F la primitive de f . Nous supposons que $L = \|f'\|_\infty < +\infty$ et que $F \geq 0$ sur $\mathbb{R}$.

Si $\tau \geq \frac{L}{\varepsilon^2}$, alors la solution de l'**Algorithme 12** satisfait

$$E(u_h^{k+1}) \leq E(u_h^0) + \frac{\tau \Delta t}{2} E(u_H^0). \quad (2.33)$$

✓ **Preuve :**

Nous considérons le schéma inconditionnellement stable implicite sur la grille grossière

$$\left(\frac{u_H^{k+1} - u_H^k}{\Delta t}, \psi_H \right) + (\nabla u_H^{k+1}, \nabla \psi_H) + \frac{1}{\varepsilon^2} (DF(u_H^k, u_H^{k+1}), \psi_H) = 0, \forall \psi_H \in W_H \quad (2.34)$$

En prenant $\psi_H = u_H^{k+1} - u_H^k$ dans (2.34) et en utilisant l'identité du parallélogramme (2.11), nous trouvons :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta t} \|u_H^{k+1} - u_H^k\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|\nabla u_H^{k+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{1}{2} \|\nabla u_H^k\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|\nabla (u_H^{k+1} - u_H^k)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & + \frac{1}{\varepsilon^2} (F(u_H^{k+1}) - F(u_H^k), 1) = 0. \end{aligned} \quad (2.35)$$

En sommant pour $j = 0, \dots, k$, nous avons :

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^k \|u_H^{j+1} - u_H^j\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\Delta t}{2} (\|\nabla u_H^{k+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|\nabla u_H^0\|_{L^2(\Omega)}^2) + \frac{\Delta t}{2} \sum_{j=0}^k \|\nabla (u_H^{j+1} - u_H^j)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & + \frac{\Delta t}{\varepsilon^2} (F(u_H^{k+1}) - F(u_H^0), 1) = 0, \end{aligned} \quad (2.36)$$

ce qui implique

$$\sum_{j=0}^k \|u_H^{j+1} - u_H^j\|_{L^2(\Omega)}^2 + \Delta t E(u_H^{k+1}) \leq \Delta t E(u_H^0). \quad (2.37)$$

D'autre part en prenant $\phi_h = u_h^{k+1} - u_h^k$, nous obtenons :

$$(1 + \tau\Delta t)\|u_h^{k+1} - u_h^k\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\Delta t}{2}(\|\nabla u_h^{k+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|\nabla u_h^k\|_{L^2(\Omega)}^2) + \frac{\Delta t}{2}\|\nabla(u_h^{k+1} - u_h^k)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ + \frac{\Delta t}{\varepsilon^2}(F(u_h^{k+1}) - F(u_h^k), 1) + \frac{\Delta t}{2\varepsilon^2}(f'(\zeta_h)(u_h^{k+1} - u_h^k), (u_h^{k+1} - u_h^k)) = \tau\Delta t(u_H^{k+1} - u_H^k, u_h^{k+1} - u_h^k).$$

En utilisant les inégalités de Hölder et de Young, nous avons :

$$(1 + \tau\Delta t)\|u_h^{k+1} - u_h^k\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\Delta t}{2}(\|\nabla u_h^{k+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|\nabla u_h^k\|_{L^2(\Omega)}^2) + \frac{\Delta t}{2}\|\nabla(u_h^{k+1} - u_h^k)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ + \frac{\Delta t}{\varepsilon^2}(F(u_h^{k+1}) - F(u_h^k), 1) \\ \leq \frac{\Delta t}{2\varepsilon^2}L\|u_h^{k+1} - u_h^k\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\tau\Delta t}{2}\left(\eta\|u_H^{k+1} - u_H^k\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{\eta}\|u_h^{k+1} - u_h^k\|_{L^2(\Omega)}^2\right),$$

avec $L = \|f'\|_\infty$.

Ici η est un nombre réel strictement positif. Pour contrôler $\|u_h^{k+1} - u_h^k\|_{L^2(\Omega)}^2$ nous devons choisir

$\eta > \frac{1}{2}$, par exemple $\eta = 1$.

La somme pour $j = 0, \dots, k$ donne

$$\left(1 + \frac{\Delta t}{2}\left(\tau - \frac{L}{\varepsilon^2}\right)\right) \sum_{j=0}^k \|u_h^{j+1} - u_h^j\|_{L^2(\Omega)}^2 + \Delta t \sum_{j=0}^k \left(E(u_h^{j+1}) - E(u_h^j)\right) \leq \frac{\tau\Delta t}{2} \sum_{j=0}^k \|u_H^{j+1} - u_H^j\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (2.38)$$

Par suite en utilisant le résultat obtenu sur la grille grossière (2.37), nous obtenons le résultat désiré

$$E(u_h^{k+1}) \leq E(u_h^0) + \frac{\tau\Delta t}{2}E(u_H^0). \quad (2.39)$$

□

Cette condition de stabilité énergétique est similaire à celle du schéma globalement stabilisé (**Schéma 3, section 2.4**) et qui est $\tau = \frac{S}{\varepsilon^2} \geq \frac{L}{2\varepsilon^2}$, cf. [188]; en conséquence de l'inégalité (2.38), nous avons une propriété de décroissance de l'énergie approchée par

$$E(u_h^{k+1}) - E(u_h^k) \leq \frac{\tau\Delta t}{2}E(u_H^0).$$

Cependant, les simulations numériques ci-après montrent la diminution en temps de l'énergie pour nos schémas bi-grilles.

2.4.4 Stabilisation globale vs stabilisation en modes élevés

Avant de comparer les performances de la méthode bi-grilles et le schéma de référence sur une grille, nous souhaitons illustrer l'effet de la stabilisation des modes élevés par rapport à la stabilisation globale, dans l'évolution du temps de l'énergie.

2.4.4.1 Stabilisation des modes élevés selon le schéma semi-implicite (Schéma 4.1)

Nous considérons $\Omega =]0, 1]^2$ et deux triangulations $\mathcal{T}_h$ et $\mathcal{T}_H$; elles sont composées de 1681 et 441 triangles respectivement. Chacun de V_H et V_h sont des espaces d'EF basés sur les éléments $\mathbb{P}_2$, leurs dimensions sont $\dim(V_H) = 1681$ et $\dim(V_h) = 6561$, donc $DR(V_H, V_h) = 0.256211$.

La stabilisation appliquée uniquement pour les composantes de modes élevés permet de calculer la solution avec une bonne précision ; la courbe d'énergie du schéma de référence sur une grille est proche de celle de la méthode bi-grilles, tandis que la stabilisation du schéma sur toutes les composantes de la solution ralentit la dynamique. Le terme de stabilisation est évidemment nécessaire pour le schéma d'une grille, mais aussi pour le schéma bi-grilles : sur le même exemple que ci-dessus, pour $S = 0.05$ les deux schémas 4.2 et (2.25) sont instables.

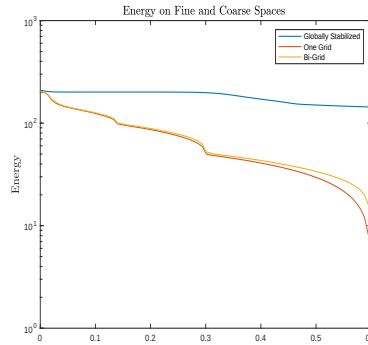


FIGURE 2.16 – Equation d'Allen-Cahn - Energie vs temps - Comparaison entre le schéma globalement stabilisé sur une grille, le schéma sur une grille et la stabilisation des modes élevés bi-grilles, $\varepsilon = 0.03$, $\Delta t = 7 \times 10^{-3}$, $\tau = S/\varepsilon^2$, $S = 2$, $u_0(x, y) = \cos(4\pi x) \cos(4\pi y)$

2.4.4.2 Stabilisation des modes élevés par une linéarisation du terme non linéaire (Schéma 4.2)

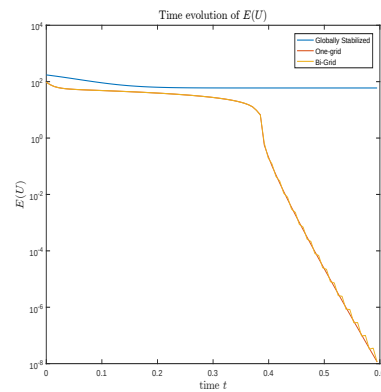
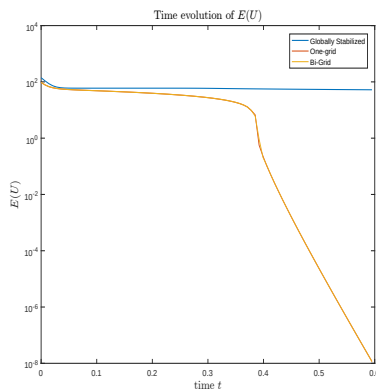


FIGURE 2.17 – Equation d'Allen-Cahn - Energie vs temps - Comparaison entre le schéma globalement stabilisé sur une grille, le schéma sur une grille et la stabilisation des modes élevés bi-grilles. $\varepsilon = 0.03$, $\Delta t = 7 \times 10^{-3}$, $\tau = S/\varepsilon^2$, $S = 1.5$ (gauche), $S = 10$ (droite), $u_0(x, y) = \cos(\pi x) \cos(\pi y)$, $\dim(V_H) = 1681$, $\dim(V_h) = 6561$, $DR(V_H, V_h) = 0.256211$.

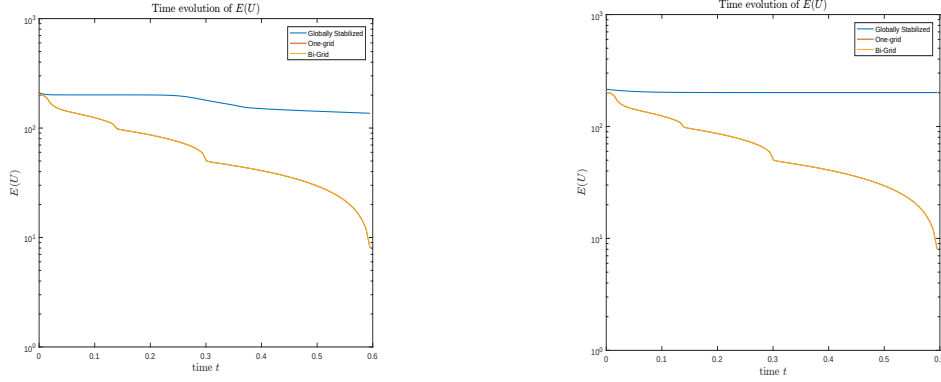


FIGURE 2.18 – Equation d'Allen-Cahn - Energie vs temps - Comparaison entre le schéma globalement stabilisé sur une grille, le schéma sur une grille et la stabilisation des modes élevés bi-grilles. $\varepsilon = 0.03$, $\Delta t = 7 \times 10^{-3}$. $\tau = S/\varepsilon^2$, $S = 1.5$ (gauche), $S = 10$ (droite). $u_0(x, y) = \cos(4\pi x) \cos(4\pi y)$, $\dim(V_H) = 1681$, $\dim(V_h) = 6561$, $DR(V_H, V_h) = 0.256211$.

Nous ajoutons deux illustrations obtenues dans le cas où la même triangulation est utilisée pour les deux espaces d'EF V_H et V_h . Nous choisissons

$$V_H = \{v_H \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega}) / v_H|_K \in \mathbb{P}_1, \forall K \in \mathcal{T}_h\} \text{ et } V_h = \{v_h \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega}) / v_h|_K \in \mathbb{P}_2, \forall K \in \mathcal{T}_h\}.$$

Nous avons $V_H \subset V_h$.

Nous considérons d'abord l'équation d'Allen-Cahn sur un domaine en forme de L . Les dimensions sont $\dim(V_h) = 1606$, $\dim(V_H) = 424$, $DR(V_H, V_h) = 0.26401$ et nous partons d'une solution initiale $u_0(x, y) = \cos(16\pi x) \cos(4\pi y)$. L'évolution en temps de l'énergie pour les trois méthodes est signalée à la Figure 2.19.

Dans la Fig. 2.19 (gauche), les conclusions sont les mêmes que dans les exemples précédents : la stabilisation en modes élevés par des valeurs modérées de S , ($S = 0.1$) permet de stabiliser sans détériorer la dynamique. Dans la Fig. 2.19 (droite) nous reprenons le même exemple mais pour une valeur supérieure de S , ($S = 1$) ; nous remarquons que les courbes d'énergie de notre schéma bi-grilles sont en accord avec celles du schéma de référence sur la grille fine. Par contre l'énergie du schéma globalement stabilisé décroît lentement et cela est dû à la stabilisation par un grand S .

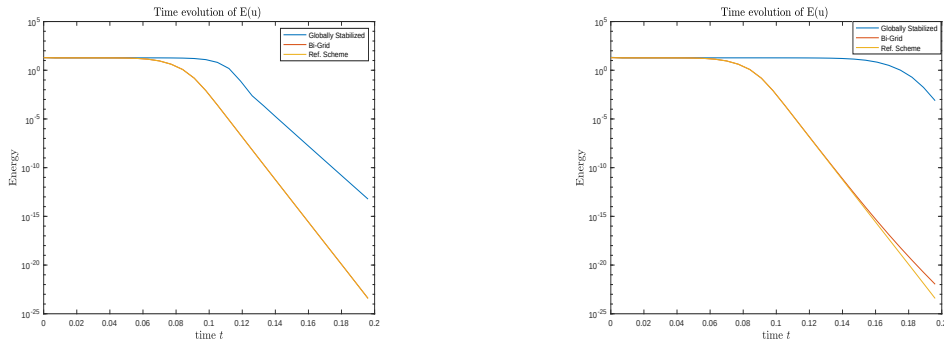


FIGURE 2.19 – Ω est le domaine en forme de L - Energie vs temps - $\varepsilon = 0.1$, $\Delta t = 7 \times 10^{-3}$. $\tau = S/\varepsilon^2$. A gauche, $S = 0.1$ et à droite $S = 1$. Les éléments $\mathbb{P}_1$ sur V_H , $\mathbb{P}_2$ sur V_h .

Nous avons tracé pour différentes données initiales sur les Figures 2.17 et 2.18 l'évolution en temps de l'énergie pour les 3 méthodes. Nous observons que pour les mêmes paramètres de stabilisation, dans les schémas bi-grilles basés sur l'amortissement en modes élevés réside une dynamique énergétique comparable à celle du schéma de référence tandis que la stabilisation sur une grille ralentit la décroissance de l'énergie. En outre, comme prévu, les valeurs plus élevées de τ produisent une énergie plus importante et ralentissent pour le schéma stabilisé à une grille. Les mêmes résultats sont obtenus en utilisant des éléments $\mathbb{P}_1$ au lieu de $\mathbb{P}_2$.

Schéma	ε	S	$\tau = S/\varepsilon^2$	Δt	Stable
Schéma 3 une grille stabilisé	0.03	0.1	111.11	0.007	oui
Schéma 4.2 bi-grilles	0.03	0.1	111.11	0.007	oui
Schéma 3 une grille stabilisé	0.03	0.05	55.55	0.007	non
Schéma 4.2 bi-grilles	0.03	0.05	55.55	0.007	oui
Schéma 3 une grille stabilisé	0.03	0.01	1.11	0.007	non
Schéma 4.2 bi-grilles	0.03	0.01	11.11	0.007	oui

TABLE 2.2 – $\varepsilon = 0.03$, $\Delta t = 0.007$, $u_0(x, y) = \cos(4\pi x) \cos(4\pi y)$, éléments $\mathbb{P}_2$.

Schéma	ε	S	$\tau = S/\varepsilon^2$	Δt	Stable
Schéma 3 une grille stabilisé	0.03	10	111111.11	0.01	oui
Schéma 4.2 bi-grilles	0.03	10	111111.11	0.01	oui

TABLE 2.3 – $\varepsilon = 0.03$, $\Delta t = 0.01$, $u_0(x, y) = \cos(4\pi x) \cos(4\pi y)$, éléments $\mathbb{P}_1$.

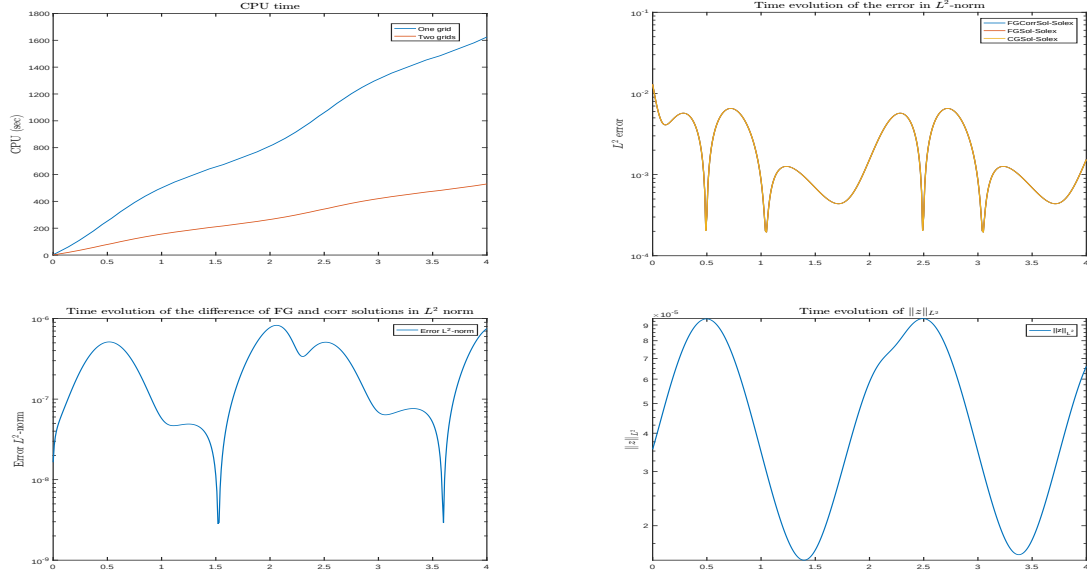
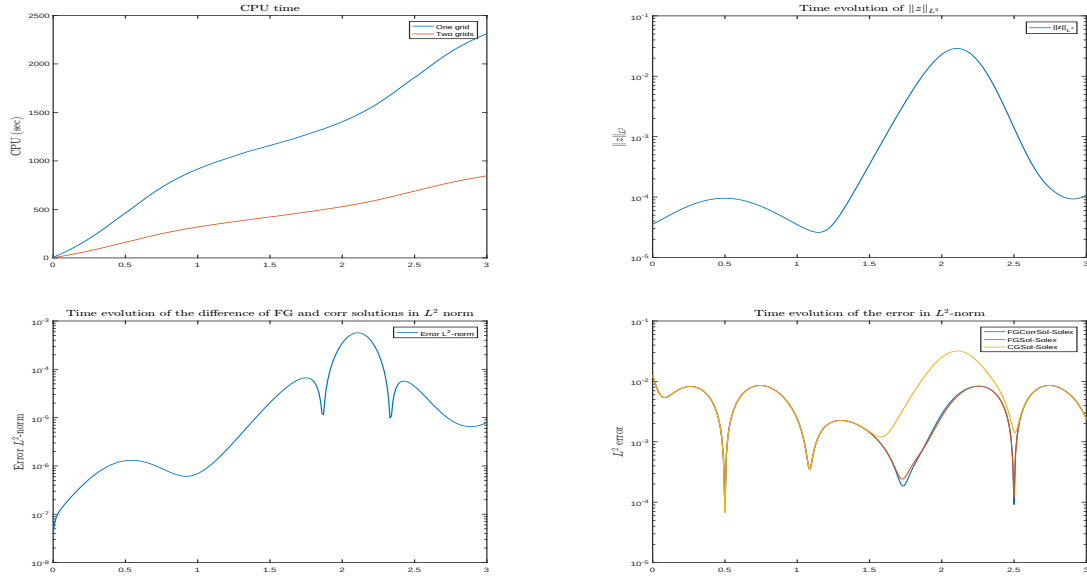
Schéma	ε	S	$\tau = S/\varepsilon^2$	Δt	Stable
Schéma 3 une grille stabilisé	0.03	0.1	111.11	0.007	non
Schéma 4.2 bi-grilles	0.03	0.1	111.11	0.007	non

TABLE 2.4 – $\varepsilon = 0.03$, $\Delta t = 0.01$, $u_0(x, y) = \cos(8\pi x) \cos(7\pi y)$, éléments $\mathbb{P}_2$.

2.4.5 Précision et réduction du temps CPU

Nous avons $\Omega =]0, 1]^2$ et deux triangulations $\mathcal{T}_h$ et $\mathcal{T}_H$ composées de 1681 et 441 triangles respectivement. Les dimensions des espaces d'EF sont $\dim(V_H) = 1681$ et $\dim(V_h) = 6561$, donc $DR(V_H, V_h) = 0.256211$.

Nous comparons la méthode bi-grilles Schéma 4.2 (**Algorithme 13**) avec le schéma d'une grille inconditionnellement stable (Schéma (2.25)) simulant une solution exacte : nous choisissons la fonction $u_{ex}(x, y, t) = \cos(\pi x) \cos(\pi y) \exp(\sin(\pi t))$ comme solution exacte, un second terme approprié est ajouté pour cet objet. Nous observons que l'erreur est faible et le temps CPU est réduit pour le schéma bi-grilles, d'un facteur 3 dans la Figure 2.20, pour $\varepsilon = 0.5$, et supérieur à 4 dans la Figure 2.21, pour $\varepsilon = 0.3$.


 FIGURE 2.20 – Allen-Cahn - simulation d'une solution exacte $\varepsilon = 0.5, \tau = 1.2, \Delta t = 10^{-2}$.

 FIGURE 2.21 – Allen-Cahn - simulation d'une solution exacte $\varepsilon = 0.3, \tau = 1.8, \Delta t = 10^{-2}$.

Aussi, nous observons que les énergies sont comparables et que l'évolution en temps de la différence entre les solutions obtenues de ces schémas reste faible. Enfin, nous observons que le temps CPU est réduit pour le schéma bi-grilles, d'un facteur supérieur à 4.

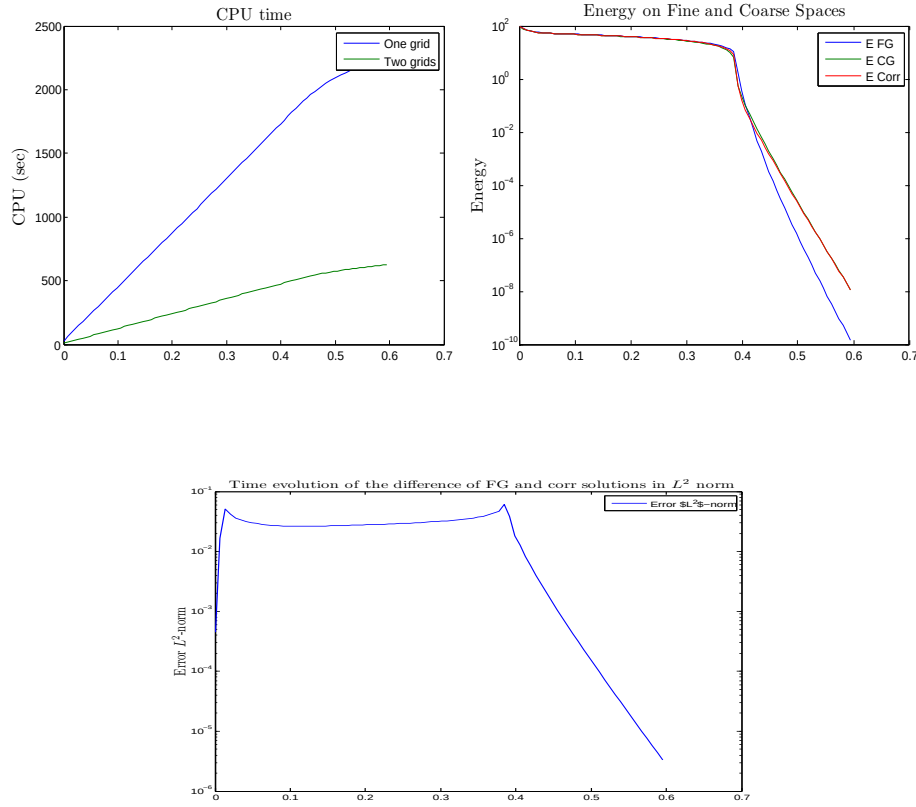


FIGURE 2.22 – Allen-Cahn - $\varepsilon = 0.03$, $\tau = 5 \times 10^{-3}$ et $\Delta t = 7 \times 10^{-3}$.

2.5 Conclusion

La méthode à deux grilles en les éléments finis pour les équations de réaction-diffusion que nous avons présentée ici permet de produire des itérations rapides et stables, nous avons également montré que nos schémas à deux-grilles restituent au niveau discret des propriétés importantes telles que la diminution de l'énergie. L'approche développée peut être étendue à un plus grand nombre d'espaces imbriqués, comme dans [77, 79, 131], avec pour objectif d'économiser encore davantage plus de temps de calcul.

La séparation des échelles permet d'amortir principalement les composantes en mode élevé de la solution ; cette procédure peut être interprétée comme lissage des modes élevés. Un avantage important du cadre bi-grilles est qu'il n'est pas nécessaire que l'espace grossier soit inclus dans celui fin, conférant à la méthode un caractère mixte, ce qui se retrouve à travers la condition de compatibilité de type inf-sup que doivent satisfaire V_H et V_h . Enfin, il n'est pas nécessaire de calculer une base hiérarchique, le filtrage est automatiquement fourni par l'étape de prolongation.

Chapitre 3

Méthodes bi-grilles pour l'équation de Cahn-Hilliard

Sommaire

3.1 Équation de Cahn-Hilliard	69
3.1.1 Schéma de référence sur grille fine	71
3.1.2 Cadre bi-grilles : simulation des petites échelles	74
3.1.3 Résolution technique bi-grilles	76
3.1.3.1 Schémas bi-grilles	76
3.1.3.2 Propriétés des schémas	77
3.1.4 Stabilisation globale vs stabilisation en modes élevés	80
3.1.4.1 Stabilisation des modes élevés selon le schéma semi-implicite (Algorithme 14)	81
3.1.4.2 Stabilisation des modes élevés par une linéarisation du terme non linéaire (Algorithme 15)	83
3.1.5 Précision et réduction du temps CPU	85
3.2 Conclusion	88

Ce chapitre est consacré à l'étude de l'équation de Cahn-Hilliard. Nous appliquons la méthode bi-grilles présentée dans le chapitre précédent et dans [1]. Comme pour l'équation d'Allen-Cahn, nous décomposons la solution en partie principale et partie fluctuante

$$u_h = \tilde{u}_h + z_h.$$

Nous utilisons un schéma implicite inconditionnellement stable pour calculer la partie principale sur un espace grossier V_H et un schéma semi-implicite pour la partie fluctuante z_h sur un espace fin V_h . Nous nous inspirons des schémas implicites et des méthodes de stabilisation de Shen, mais nous ne stabilisons que les hautes fréquences de la solution (partie fluctuante).

Notre méthode bi-grilles permet de gagner en temps de calcul en comparaison avec le temps de résolution d'un problème implicite sur une seule grille.

3.1 Équation de Cahn-Hilliard

L'équation de Cahn-Hilliard

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \Delta^2 u - \frac{1}{\varepsilon^2} \Delta f(u) = 0, \quad x \in \Omega, t > 0, \quad (3.1)$$

est un modèle simple pour les processus de séparation de phase d'un alliage binaire ; Elle est aussi pertinente pour l'étude de la dynamique de population, les films bactériens, la biologie, les films minces, le traitement d'images et même les anneaux de Saturne. La fonction f est de type bistable avec trois zéros simples et est la dérivée d'un potentiel de double puits F dont les puits correspondent aux phases du matériau. Un modèle typique est donnée par $F(u) = \frac{1}{4}(u^2 - 1)^2$ c'est-à-dire $f(u) = u^3 - u$. La fonction $u(x, t)$ représente la concentration de l'un des composants métalliques de l'alliage. L'équation (3.1) est généralement munie de conditions aux limites de Neumann homogènes

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial(\Delta u - \frac{1}{\varepsilon^2} f(u))}{\partial n} = 0.$$

En particulier, ceci donne la conservation de la masse, c'est-à-dire de la moyenne spatiale du paramètre d'ordre u ,

$$\bar{u} = \int_{\Omega} u(x, t) dx = \int_{\Omega} u_0(x) dx. \quad (3.2)$$

La décroissance de l'énergie

$$\frac{\partial E(u)}{\partial t} = - \int_{\Omega} |\nabla(-\Delta u + \frac{1}{\varepsilon^2} f(u))|^2 dx \leq 0, \quad (3.3)$$

est aussi vérifiée par l'équation (3.1). L'équation de Cahn-Hilliard peut s'écrire sous la formulation mixte suivante cf. [85]

$$(\frac{\partial u}{\partial t}, \psi) + (\nabla \mu, \nabla \psi) = 0, \quad \forall \psi \in V, \quad (3.4)$$

$$(\mu, \phi) = (\nabla u, \nabla \phi) + \frac{1}{\varepsilon^2} (f(u), \phi), \quad \forall \phi \in W. \quad (3.5)$$

En effet, en prenant la fonction test $\psi = 1$ et $\phi = 1$ l'équation de Cahn-Hilliard vérifie

$$(\frac{\partial u}{\partial t}, 1) = 0, \quad (3.6)$$

$$(\mu - \frac{1}{\varepsilon^2} f(u), 1) = 0. \quad (3.7)$$

Pour cette formulation, (3.6) implique que la conservation de la masse (3.2) est vérifiée.

Comme pour l'équation d'Allen-Cahn, les schémas semi-implicites sont énergétiquement stables $E(u^{k+1}) \leq E(u^k)$ sous des conditions très restrictives. Nous nous référons à [188] pour des schémas classiques :

• **Schéma 1 : Schéma semi-implicite**

$$\frac{u^{k+1} - u^k}{\Delta t} - \Delta \mu^{k+1} = 0, \quad x \in \Omega, \quad (3.8)$$

$$-\Delta u^{k+1} + \frac{1}{\varepsilon^2} f(u^k) = \mu^{k+1}, \quad x \in \Omega, \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial u^{k+1}}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial(\Delta u^{k+1} - \frac{1}{\varepsilon^2} f(u^{k+1}))}{\partial n} = 0, \quad \text{sur } \partial\Omega. \quad (3.10)$$

Le terme non linéaire est traité explicitement, par suite le schéma est facile à implémenter mais il n'est pas énergétiquement stable que sous une condition stricte et contraignante sur le pas de temps ; l'énergie ne décroît que pour

$$0 < \Delta t < \frac{4\varepsilon^4}{L^2},$$

où $L = \|f'\|_\infty$, cf. [188].

• **Schéma 2 : Schéma implicite**

$$\frac{u^{k+1} - u^k}{\Delta t} - \Delta \mu^{k+1} = 0, \quad x \in \Omega, \quad (3.11)$$

$$-\Delta u^{k+1} + \frac{1}{\varepsilon^2} DF(u^k, u^{k+1}) = \mu^{k+1}, \quad x \in \Omega, \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial u^{k+1}}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial(\Delta u^{k+1} - \frac{1}{\varepsilon^2} f(u^{k+1}))}{\partial n} = 0, \quad \text{sur } \partial\Omega, \quad (3.13)$$

où nous prenons $DF(u, v) = \begin{cases} \frac{F(u) - F(v)}{u - v} & \text{si } u \neq v, \\ f(u) & \text{si } u = v \end{cases}$.

Ce schéma nécessite une méthode de point fixe pour la résolution du problème non linéaire à chaque itération. Cependant, l'énergie est décroissante pour tous les $\Delta t > 0$, c'est-à-dire il est inconditionnellement énergétiquement stable (cf. [84]).

• **Schéma 3 : Schéma semi-implicite stabilisé**

Shen propose d'ajouter un terme de stabilisation afin de résoudre un seul problème linéaire à chaque itération sans aucune condition sur le pas de temps [188] :

$$\frac{u^{k+1} - u^k}{\Delta t} - \Delta \mu^{k+1} = 0, \quad x \in \Omega, \quad (3.14)$$

$$-\Delta u^{k+1} + \frac{S}{\varepsilon^2} (u^{k+1} - u^k) + \frac{1}{\varepsilon^2} f(u^k) = \mu^{k+1}, \quad x \in \Omega, \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial u^{k+1}}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial(\Delta u^{k+1} - \frac{1}{\varepsilon^2} f(u^{k+1}))}{\partial n} = 0, \quad \text{sur } \partial\Omega. \quad (3.16)$$

Cette stabilisation rend le schéma semi-implicite inconditionnellement énergétiquement stable ; l'énergie décroît au cours du temps pour $\Delta t > 0$ quand $S \geq \frac{L}{2}$. Mais la décroissance est ralentie puisqu'il stabilise la solution tout entière. Dans la suite nous proposons de stabiliser uniquement la partie fluctuante de la solution (les modes élevés).

3.1.1 Schéma de référence sur grille fine

L'implémentation du schéma (3.11)-(3.13) nécessite la résolution d'un problème non linéaire à chaque pas de temps. Soient Id et A les matrices de masse et d'identité respectivement. Si nous posons

$$\phi(v, \mu, u^k) = \begin{pmatrix} Id & \Delta t A \\ -A & Id \end{pmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} u^k \\ \frac{1}{\varepsilon^2} DF(u^k, v) \end{Bmatrix}$$

nous nous ramenons à la résolution du problème de point fixe, à l'itération k ,

$$(v, \mu) = \phi(v, \mu, u^k). \quad (3.17)$$

Malgré la stabilité inconditionnelle du schéma (3.11)-(3.13) nous sommes limités en pas de temps Δt . Comme pour l'équation d'Allen-Cahn [1], nous adaptons la procédure d'accélération de Lemaréchal. Ainsi Δt peut être égal à 10^{-4} alors que par l'itération du point fixe Picard Δt maximal ne dépasse pas 3×10^{-6} , cf. [28, 155]. Nous comparons les courbes de l'énergie en adaptant l'accélération du Lemaréchal pour différentes valeurs de N , le nombre de nœuds sur le côté du carré unité, et $\varepsilon = 0.03$. Les courbes collent pour les éléments finis $\mathbb{P}_1$ et $\mathbb{P}_2$.

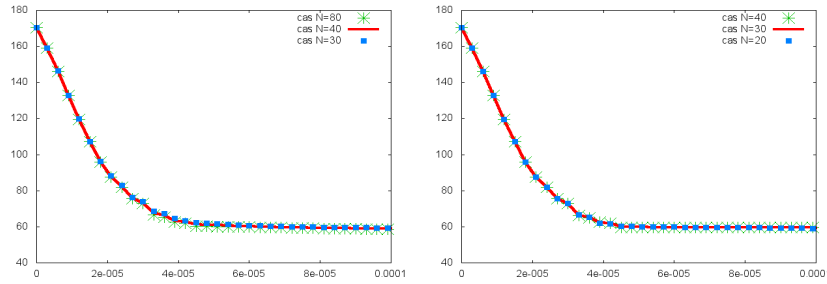


FIGURE 3.1 – Courbes d'énergie : à gauche pour $N = 30, 40, 80$, $\Delta t = 3 \times 10^{-6}$ et l'EF $\mathbb{P}_1$ et à droite pour $N = 20, 30, 40$, $\Delta t = 3 \times 10^{-6}$ et l'EF $\mathbb{P}_2$.

La réduction du nombre d'itérations nécessaires pour atteindre un temps final T est l'un des avantages de cette méthode. Le tableau 3.1 renferme le temps de calcul CPU, le nombre d'itérations et les pas de temps maximaux pour la résolution suivant le schéma (3.11) – (3.13) par les méthodes de point fixe de Picard et de Lemaréchal.

Cas $\mathbb{P}_2$	Picard	$\Delta t = 3 \times 10^{-6}$	T=0.219	Nb iter = $2.89175e^{06}$	CPU=375994 s
N=20	Lemaréchal	$\Delta t = 10^{-3}$	T=0.219	Nb iter=3879	CPU=977.86 s
Cas $\mathbb{P}_2$	Picard	$\Delta t = 3 \times 10^{-6}$	T=0.027	Nbiter=360040	CPU=797520 s
N=40	Lemaréchal	$\Delta t = 10^{-3}$	T=0.027	Nb iter=861	CPU=869.68 s
Cas $\mathbb{P}_2$	Picard	$\Delta t = 3 \times 10^{-6}$	T=0.027	Nb iter=360040	CPU=803631 s
N=80	Lemaréchal	$\Delta t = 10^{-3}$	T=0.027	Nb iter=900	CPU=3799.72 s

TABLE 3.1 – Comparaison du temps CPU et des nombre d'itérations pour les méthodes du point fixe de Lemaréchal et Picard et pour différentes valeurs de N .

Nous implémentons le schéma (3.11) – (3.13) sur le carré unité avec 40 nœuds à chaque côté avec $\varepsilon = 0.03$, l'EF $\mathbb{P}_2$, $\Delta t = 3 \times 10^{-6}$ et la CI $u_0 = \cos(\pi x) \cos(\pi y)$. Nous comparons ci-dessous les courbes d'énergie et quelques solutions à des instants différents pour les méthodes du point fixe de Lemaréchal et Picard.

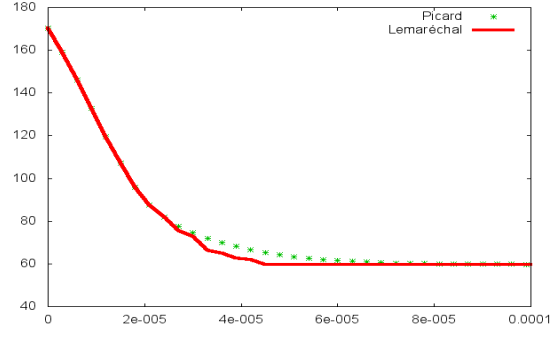
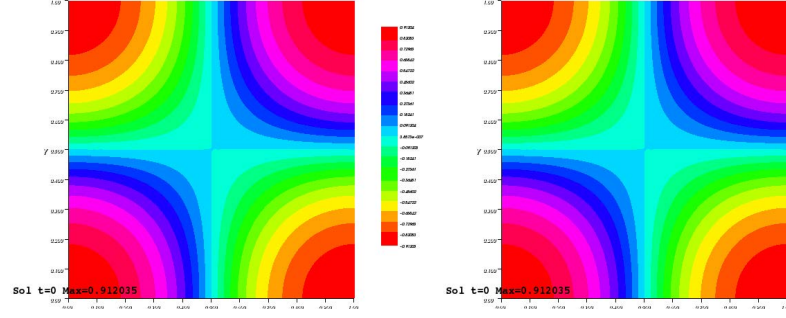
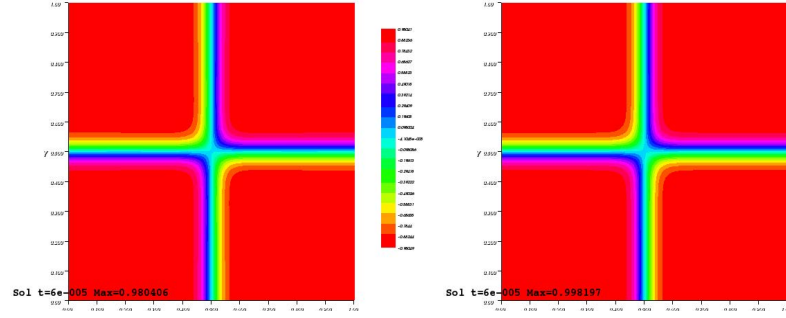
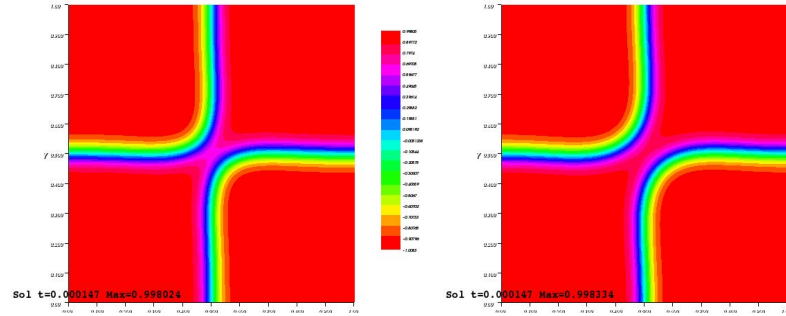


FIGURE 3.2 – Courbes d'énergie pour Picard et pour Lemaréchal.


 FIGURE 3.3 – Solution à gauche pour Picard et à droite pour Lemaréchal à $t = 0$.

 FIGURE 3.4 – Solution à gauche pour Picard et à droite pour Lemaréchal à $t = 6 \times 10^{-5}$.

 FIGURE 3.5 – Solution à gauche pour Picard et à droite pour Lemaréchal à $t = 0.000147$.

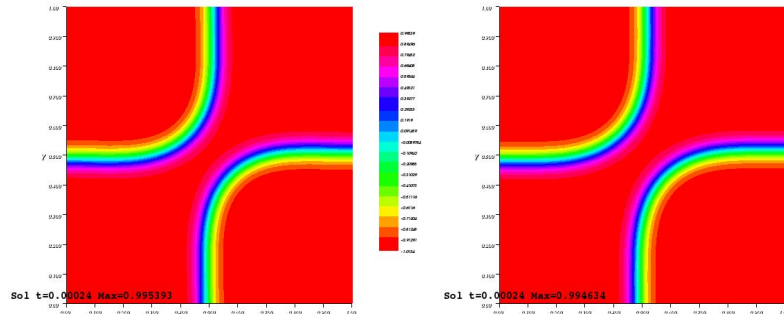


FIGURE 3.6 – Solution à gauche pour Picard et à droite pour Lemaréchal à $t = 0.00024$.

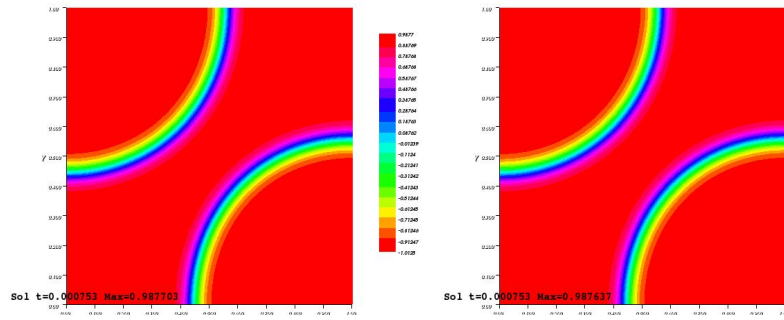


FIGURE 3.7 – Solution à gauche pour Picard et à droite pour Lemaréchal à $t = 0.000753$.

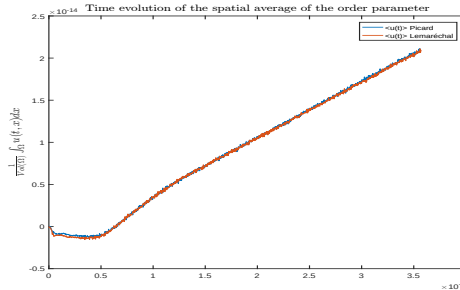


FIGURE 3.8 – Courbes de la moyenne spatiale pour Picard et pour Lemaréchal.

3.1.2 Cadre bi-grilles : simulation des petites échelles

Les figures 3.9 et 3.10 correspondent à la simulation de l'équation de Cahn-Hilliard avec un second terme convenable à la solution exacte $u_{ex} = \cos(\pi x) \cos(\pi y)$ sur deux maillages du carré unité avec $N_f = 40$ et $N_c = 20$. Les résultats pour l'équation de Cahn-Hilliard sans second terme sont présentés à la figure 3.11.

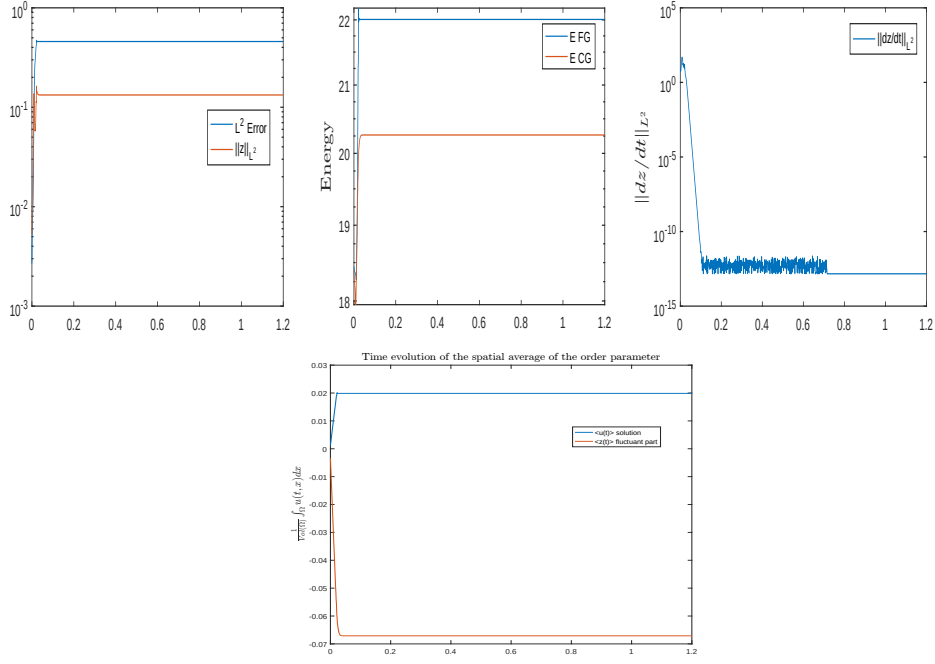


FIGURE 3.9 – L'équation de Cahn-Hilliard avec second membre pour $\varepsilon = 0.1$, $\Delta t = 0.001$, $t \in [0, 1.2]$ et l'élément $\mathbb{P}_1$.

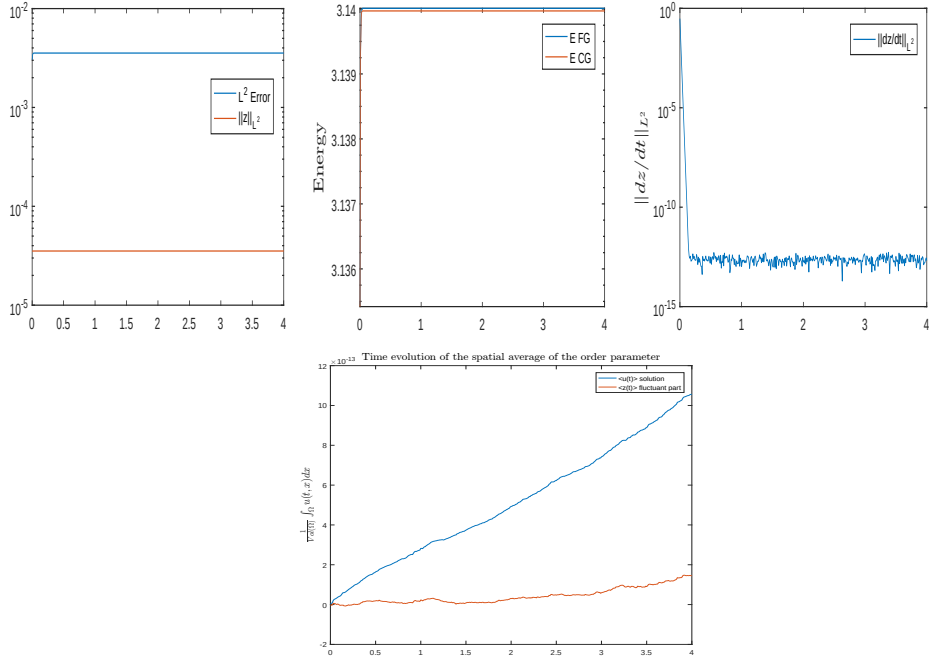


FIGURE 3.10 – L'équation de Cahn-Hilliard avec second membre pour $\varepsilon = 0.5$, $\Delta t = 0.01$, $t \in [0, 4]$ et l'élément $\mathbb{P}_2$.

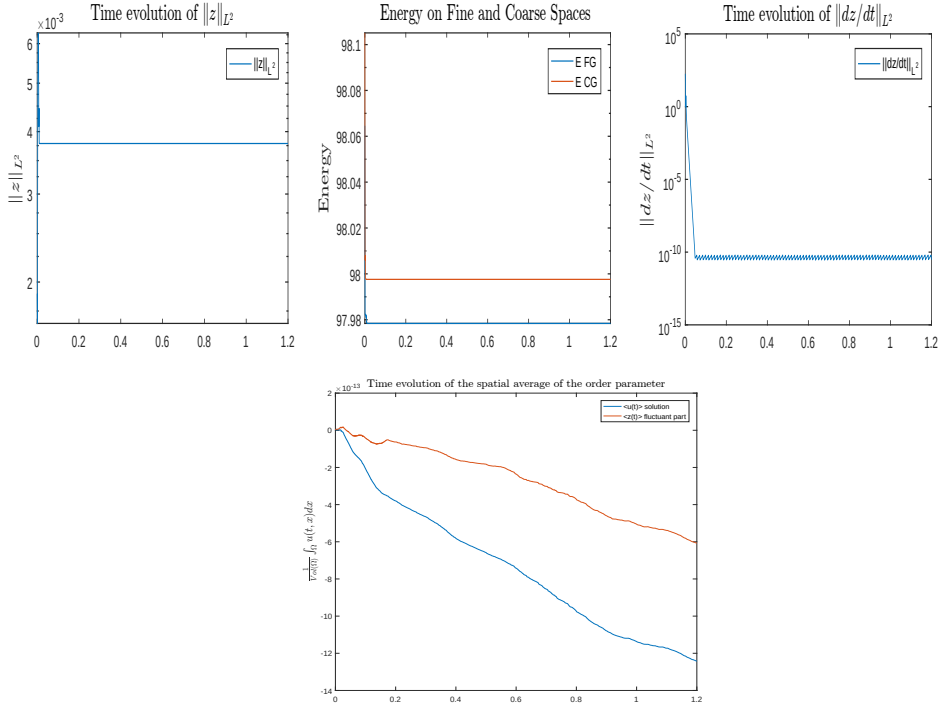


FIGURE 3.11 – L'équation de Cahn-Hilliard pour $\varepsilon = 0.05, \Delta t = 0.001, t \in [0, 1.2]$ et l'élément $\mathbb{P}_2$.

Les figures 3.9–3.11 montrent que la partie fluctuante $z_h = u_h - \tilde{u}_h$, la différence entre la solution obtenue sur le domaine fin et la prolongation de celle obtenue sur le domaine grossier, oscille au cours du temps et que $|z_h|$ est faible.

3.1.3 Résolution technique bi-grilles

3.1.3.1 Schémas bi-grilles

Nous désirons construire des algorithmes bi-grilles énergétiquement stables et réduisant le temps de calcul du problème non linéaire.

Concernant la stabilité nous pensons appliquer la stabilisation de Shen [188] mais uniquement aux modes élevés de la solution pour ne pas ralentir la dynamique. L'idée de nos algorithmes bi-grilles est de décomposer la solution u_h en deux parties et les traiter différemment.

Il est commode d'adapter un schéma implicite inconditionnellement stable pour le calcul de la partie principale u_H^{k+1} sur la grille grossière. Sur la grille fine nous utilisons un schéma semi-implicite avec le terme de stabilisation $\tau(u_h^{k+1} - u_h^k) - \tau(u_H^{k+1} - u_H^k)$.

Les algorithmes que nous présentons ci-dessous diffèrent au niveau du schéma semi-implicite de la grille fine. L'**Algorithme 14** traite le terme non linéaire explicitement $f(u) = u_h^k((u_h^k)^2 - 1)$ alors que l'**Algorithme 15** prend la linéarisation du terme non linéaire :

$$\begin{aligned} \tilde{f}(u_h^k, u_h^{k+1}, u_H^{k+1}) &= \frac{1}{4\varepsilon^2}((u_h^k)^2 + 2u_H^{k+1}u_h^k + 3(u_H^{k+1})^2 - 2)(u_h^{k+1} - u_H^{k+1}) \\ &\quad + \frac{1}{4\varepsilon^2}((u_H^{k+1})^2 + (u_h^k)^2 - 2)(u_H^{k+1} + u_h^k). \end{aligned}$$

Algorithm 14 Équation de Cahn-Hilliard (explicite) stabilisée à deux grilles avec correction

```

1:  $u_h^0, u_H^0$  donnés
2: for  $k = 0, 1, \dots$  do
3:   Résoudre dans  $V_H \times W_H$ 
4:    $(u_H^{k+1} - u_H^k, \psi_H) + \Delta t (\nabla \mu_H^{k+1}, \nabla \psi_H) = 0, \forall \psi_H \in V_H$ 
5:    $(\nabla u_H^{k+1}, \nabla \phi_H) + \frac{1}{\varepsilon^2} (DF(u_H^{k+1}, u_H^k), \phi_H) = (\mu_H^{k+1}, \nabla \phi_H), \forall \phi_H \in W_H$ 
6:   Résoudre dans  $V_h \times W_h$ 
7:    $(u_h^{k+1} - u_h^k, \psi_h) + \Delta t (\nabla \mu_h^{k+1}, \nabla \psi_h) = 0, \forall \psi_h \in V_h$ 
8:    $(\nabla u_h^{k+1}, \nabla \phi_h) + \tau(u_h^{k+1} - u_h^k, \phi_h) + \frac{1}{\varepsilon^2} (f(u_h^k), \phi_h) = (\mu_h^{k+1}, \phi_h) + \tau(u_H^{k+1} - u_H^k, \phi_h), \forall \phi_h \in W_h$ 
9: end for

```

Algorithm 15 Équation de Cahn-Hilliard (linéarisation) stabilisée à deux grilles avec correction

```

1:  $u_h^0, u_H^0$  donnés
2: for  $k = 0, 1, \dots$  do
3:   Résoudre dans  $V_H \times W_H$ 
4:    $(u_H^{k+1} - u_H^k, \psi_H) + \Delta t (\nabla \mu_H^{k+1}, \nabla \psi_H) = 0, \forall \psi_H \in V_H$ 
5:    $(\nabla u_H^{k+1}, \nabla \phi_H) + \frac{1}{\varepsilon^2} (DF(u_H^{k+1}, u_H^k), \phi_H) = (\mu_H^{k+1}, \nabla \phi_H), \forall \phi_H \in W_H$ 
6:   Résoudre dans  $V_h \times W_h$ 
7:    $(u_h^{k+1} - u_h^k, \psi_h) + \Delta t (\nabla \mu_h^{k+1}, \nabla \psi_h) = 0, \forall \psi_h \in V_h$ 
8:    $(\nabla u_h^{k+1}, \nabla \phi_h) + \tau(u_h^{k+1} - u_h^k, \phi_h) + \frac{1}{\varepsilon^2} (\tilde{f}(u_h^k, u_h^{k+1}, u_H^{k+1}), \phi_h)$ 
9:    $= (\mu_h^{k+1}, \phi_h) + \tau(u_H^{k+1} - u_H^k, \phi_h), \forall \phi_h \in W_h$ 
10: end for

```

3.1.3.2 Propriétés des schémas

Proposition 3.1.1 Si $(1, 1) \in V_H \times W_H$ et $(1, 1) \in V_h \times W_h$ alors les schémas sur une grille (3.11)-(3.13) et (3.14)-(3.16) et les **Algorithmes 14** et **15** bi-grilles vérifient les deux propriétés (3.6), (3.7) de l'équation de Cahn-Hilliard

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}, 1\right) = 0, \text{ et } \left(\mu - \frac{1}{\varepsilon^2} f(u), 1\right) = 0.$$

✓ Preuve :

Nous considérons les fonctions test $1 \in V_H$ et $1 \in W_H$ alors le schéma inconditionnellement stable implicite (3.11)-(3.13) adapté sur la grille grossière satisfait

$$\left(\frac{u_H^{k+1} - u_H^k}{\Delta t}, 1\right) = 0 \text{ et } \left(\mu_H^{k+1} - \frac{1}{\varepsilon^2} DF(u_H^{k+1}, u_H^k), 1\right) = 0, \forall k \geq 0. \quad (3.18)$$

Et aussi pour $(1, 1) \in V_h \times W_h$, le schéma (3.14)-(3.16) globalement stabilisé vérifie

$$\left(\frac{u_h^{k+1} - u_h^k}{\Delta t}, 1\right) = 0 \text{ et } \left(\mu_h^{k+1} - \frac{1}{\varepsilon^2} f(u_h^k), 1\right) = 0, \forall k \geq 0, \quad (3.19)$$

car $\frac{S}{\varepsilon^2}(u_h^{k+1} - u_h^k, 1) = 0$.

Comme le schéma (3.11)-(3.13) adapté sur la grille grossière satisfait (3.18), alors $\tau(u_H^{k+1} - u_H^k, 1) = 0$ et l'**Algorithme 14** bi-grilles explicite satisfait

$$\left(\frac{u_h^{k+1} - u_h^k}{\Delta t}, 1\right) = 0 \text{ et } \left(\mu_h^{k+1} - \frac{1}{\varepsilon^2}f(u_h^k), 1\right) = 0, \quad \forall k \geq 0, \quad (3.20)$$

car $\tau(u_h^{k+1} - u_h^k, 1) = 0$.

De même l'**Algorithme 15** bi-grilles explicite satisfait

$$\left(\frac{u_h^{k+1} - u_h^k}{\Delta t}, 1\right) = 0 \text{ et } \left(\mu_h^{k+1} - \frac{1}{\varepsilon^2}\tilde{f}(u_h^k, u_h^{k+1}, u_H^{k+1}), 1\right) = 0, \quad \forall k \geq 0, \quad (3.21)$$

car $\tau(u_h^{k+1} - u_h^k, 1) = 0$. □

Proposition 3.1.2 Soient $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ une fonction réelle et F la primitive de f . On fait les hypothèses suivantes :

- $L = \|f'\|_\infty < +\infty$,
- $F \geq 0$ sur $\mathbb{R}$,
- u_H^0 et u_h^0 sont à moyenne nulle,
- $\tau \geq \frac{L}{\varepsilon^2}$.

Alors, il existe une constante κ ne dépendant que de Ω , $E(u_h^0)$, $E(u_H^0)$ et de τ telle que

$$E(u_h^{k+1}) \leq \kappa, \forall k \geq 0,$$

et le schéma 14 est alors stable en énergie.

✓ **Preuve :**

Soit k fixé. Nous considérons le schéma inconditionnellement stable implicite sur l'espace grossier (V_H, W_H)

$$(u_H^{k+1} - u_H^k, \phi_H) + \Delta t(\nabla \mu_H^{k+1}, \nabla \phi_H) - (\mu_H^{k+1}, \psi_H) + (\nabla u_H^{k+1}, \nabla \psi_H) + \frac{1}{\varepsilon^2}(DF(u_H^k, u_H^{k+1}), \psi_H) = 0, \quad (3.22)$$

$$\forall (\phi_H, \psi_H) \in V_H \times W_H \text{ où } DF(u, v) = \begin{cases} \frac{F(u) - F(v)}{u - v} & \text{si } u \neq v, \\ f(u) & \text{si } u = v \end{cases}.$$

En prenant respectivement $\phi_H = \mu_H^{k+1}$ et $\psi_H = u_H^{k+1} - u_H^k$ dans (3.22), nous obtenons après simplification

$$\Delta t \|\nabla \mu_H^k\|_{L^2(\Omega)}^2 + (\nabla u_H^{k+1}, \nabla (u_H^{k+1} - u_H^k)) + \frac{1}{\varepsilon^2}(DF(u_H^k, u_H^{k+1}), u_H^{k+1} - u_H^k) = 0.$$

En utilisant l'identité du parallélogramme dans cette dernière identité, il vient

$$\begin{aligned} & \Delta t \|\nabla \mu_H^{k+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \left(\|\nabla u_H^{k+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|\nabla u_H^k\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla (u_H^{k+1} - u_H^k)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \\ & + \frac{1}{\varepsilon^2}(F(u_H^{k+1}) - F(u_H^k), 1) = 0. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Finalement,

$$\Delta t \|\nabla \mu_H^{k+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|\nabla(u_H^{k+1} - u_H^k)\|_{L^2(\Omega)}^2 + E(u_H^{k+1}) = E(u_H^k). \quad (3.24)$$

Ceci implique que le schéma sur (V_H, W_H) est inconditionnellement stable et à énergie (discrète) décroissante ($E(u_H^k) \geq 0, \forall k \geq 0$ en vertu des hypothèses sur F). En sommant ces relations pour $j = 0, \dots, k$ nous obtenons

$$\Delta t \sum_{j=0}^k \|\nabla \mu_H^{j+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^k \|\nabla(u_H^{j+1} - u_H^j)\|_{L^2(\Omega)}^2 + E(u_H^{k+1}) - E(u_H^0) = 0. \quad (3.25)$$

En particulier, puisque u_H^0 est à moyenne nulle, il en est de même pour toute la suite u_H^k . En utilisant une inégalité de Poincaré sur les fonctions de $H^1(\Omega)$ à moyenne nulle, nous en déduisons qu'il existe $C = C(\Omega) > 0$ tel que

$$\|u_H^{j+1} - u_H^j\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \|\nabla(u_H^{j+1} - u_H^j)\|_{L^2(\Omega)}^2, \forall j = 0, \dots, k.$$

En particulier

$$\sum_{j=0}^k \|u_H^{j+1} - u_H^j\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \sum_{j=0}^k \|\nabla(u_H^{j+1} - u_H^j)\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad (3.26)$$

d'où

$$\sum_{j=0}^k \|u_H^{j+1} - u_H^j\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{2}{C} E(u_H^0). \quad (3.27)$$

Maintenant, en prenant $\phi_h = \mu_h^{k+1}$ et $\psi_h = u_h^{k+1} - u_h^k$, nous obtenons, en procédant comme plus haut et après les simplifications usuelles :

$$\begin{aligned} \Delta t \|\nabla \mu_h^{k+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \left(\|\nabla u_h^{k+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|\nabla u_h^k\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla(u_h^{k+1} - u_h^k)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) + \tau \|u_h^{k+1} - u_h^k\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ + \frac{1}{\varepsilon^2} (F(u_h^{k+1}) - F(u_h^k), 1) + \frac{1}{2\varepsilon^2} (f'(\zeta_h)(u_h^{k+1} - u_h^k), (u_h^{k+1} - u_h^k)) = \tau (u_h^{k+1} - u_h^k, u_h^{k+1} - u_h^k). \end{aligned} \quad (3.28)$$

En utilisant la définition de $E(\cdot)$, les inégalités de Holder et de Young, nous avons

$$\begin{aligned} \Delta t \|\nabla \mu_h^{k+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|\nabla(u_h^{k+1} - u_h^k)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \tau \|u_h^{k+1} - u_h^k\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ + E(u_h^{k+1}) - E(u_h^k) \leq \frac{L}{2\varepsilon^2} \|u_h^{k+1} - u_h^k\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\tau}{2} \|u_h^{k+1} - u_h^k\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\tau}{2} \|u_h^{k+1} - u_h^k\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

où $L = \|f'\|_\infty$. Avec $\gamma = \frac{1}{2} \left(\tau - \frac{L}{\varepsilon^2} \right) \geq 0$, d'après les hypothèses, nous en déduisons

$$\Delta t \|\nabla \mu_h^{k+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|\nabla(u_h^{k+1} - u_h^k)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \gamma \|u_h^{k+1} - u_h^k\|_{L^2(\Omega)}^2 + E(u_h^{k+1}) - E(u_h^k) \leq \frac{\tau}{2} \|u_h^{k+1} - u_h^k\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Pour finir, nous considérons la somme de ces inégalités pour $j = 0, \dots, k$. Il vient

$$\begin{aligned} \left(\gamma \sum_{j=0}^k \|u_h^{j+1} - u_h^j\|_{L^2(\Omega)}^2 + \Delta t \sum_{j=0}^k \|\nabla \mu_h^{j+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^k \|\nabla(u_h^{j+1} - u_h^j)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \\ + E(u_h^{k+1}) \leq E(u_h^0) + \frac{\tau}{2} \sum_{j=0}^k \|u_h^{j+1} - u_h^j\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Par suite, en utilisant (3.27), nous obtenons le résultat annoncé :

$$E(u_h^{k+1}) \leq \kappa, \quad (3.30)$$

avec $\kappa = E(u_h^0) + \frac{\tau}{C}E(u_H^0)$. $\square$

L'hypothèse u_h^0 à moyenne nulle n'a pas été utilisée mais doit être faite par cohérence.

3.1.4 Stabilisation globale vs stabilisation en modes élevés

Nous présentons dans cette section une comparaison entre la stabilisation de la solution par Shen et la stabilisation des modes élevés de la solution par nos algorithmes bi-grilles. L'étude est faite sur $\Omega =]0, 1[^2$ avec deux triangulations $\mathcal{T}_h$ et $\mathcal{T}_H$ composées de 1681 et 441 triangles respectivement et les espaces d'EF V_H et V_h de dimensions $\dim(V_H) = 1681$ et $\dim(V_h) = 6561$.

Les courbes d'énergie du schéma implicite (3.11)-(3.13) sont en accord avec celles de nos algorithmes bi-grilles et décroissent plus rapidement que celle du schéma globalement stabilisé (3.14)-(3.16) ; la décroissance de l'énergie est ralentie dans le cas du schéma (3.14)-(3.16) stabilisant toutes les composantes de la solution.

3.1.4.1 Stabilisation des modes élevés selon le schéma semi-implicite (Algorithme 14)

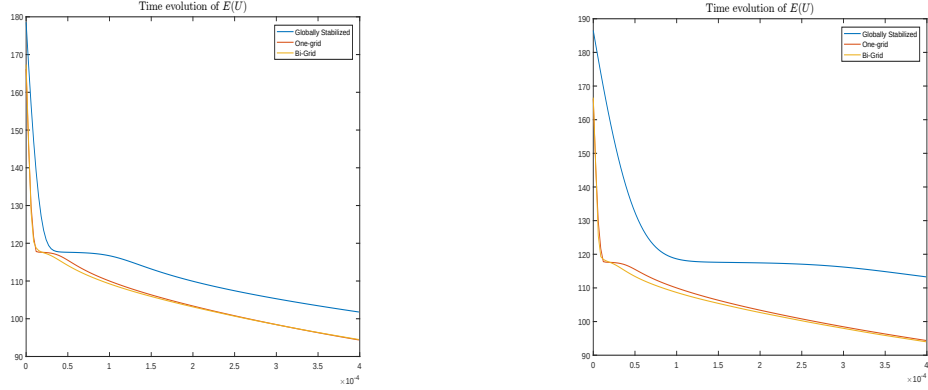


FIGURE 3.12 – Equation de Cahn-Hilliard - Energie vs temps - Comparaison entre le globalement stabilisé sur une grille, le schéma sur une grille et la stabilisation des modes élevés bi-grilles (**Algorithme 14**), $\varepsilon = 0.03$, $\Delta t = 3 \times 10^{-6}$, $\tau = S/\varepsilon^2$, $S = 2$ (gauche), $S = 10$ (droite), $u_0(x, y) = \cos(\pi x) \cos(3\pi y)$ et l'élément $\mathbb{P}_1$.

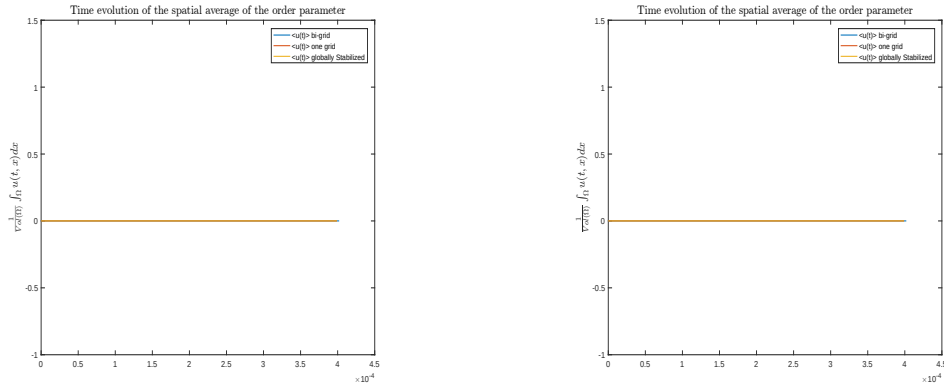


FIGURE 3.13 – Equation de Cahn-Hilliard - Moyenne spatiale vs temps - Comparaison entre le globalement stabilisé sur une grille, le schéma sur une grille et la stabilisation des modes élevés bi-grilles (**Algorithme 14**), $\varepsilon = 0.03$, $\Delta t = 3 \times 10^{-6}$, $\tau = S/\varepsilon^2$, $S = 2$ (gauche), $S = 10$ (droite), $u_0(x, y) = \cos(\pi x) \cos(3\pi y)$ et l'élément $\mathbb{P}_1$.

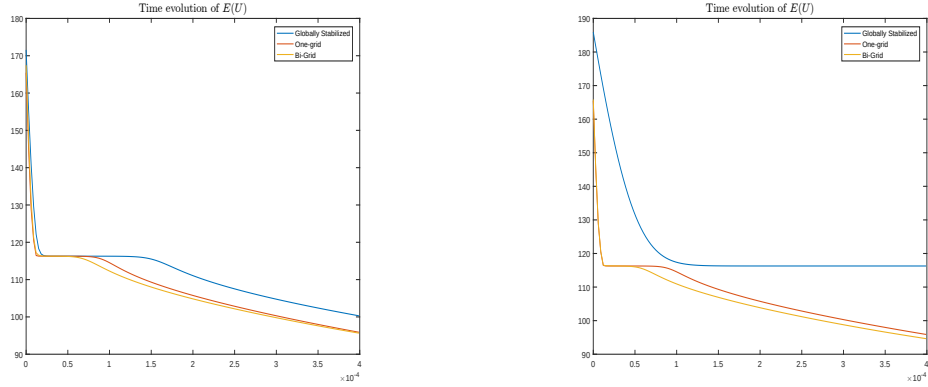


FIGURE 3.14 – Equation de Cahn-Hilliard - Energie vs temps - Comparaison entre le globalement stabilisé sur une grille, le schéma sur une grille et la stabilisation des modes élevés bi-grilles (**Algorithme 14**), $\varepsilon = 0.03$, $\Delta t = 3 \times 10^{-6}$, $\tau = S/\varepsilon^2$, $S = 0.5$ (gauche), $S = 10$ (droite), $u_0(x, y) = \cos(\pi x) \cos(3\pi y)$ et l'élément $\mathbb{P}_2$.

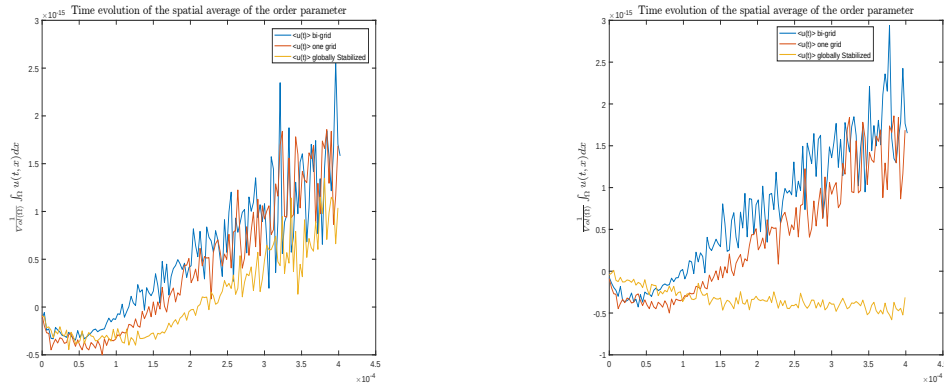


FIGURE 3.15 – Equation de Cahn-Hilliard - Moyenne spatiale vs temps - Comparaison entre le globalement stabilisé sur une grille, le schéma sur une grille et la stabilisation des modes élevés bi-grilles (**Algorithme 14**), $\varepsilon = 0.03$, $\Delta t = 3 \times 10^{-6}$, $\tau = S/\varepsilon^2$, $S = 0.5$ (gauche), $S = 10$ (droite), $u_0(x, y) = \cos(\pi x) \cos(3\pi y)$ et l'élément $\mathbb{P}_2$.

3.1.4.2 Stabilisation des modes élevés par une linéarisation du terme non linéaire (Algorithme 15)

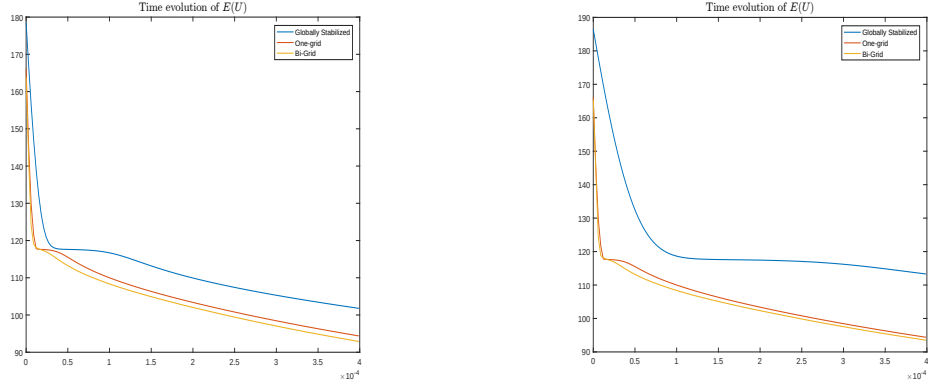


FIGURE 3.16 – Equation de Cahn-Hilliard - Energie vs temps - Comparaison entre le globalement stabilisé sur une grille, le schéma sur une grille et la stabilisation des modes élevés bi-grilles (**Algorithme 15**). $\varepsilon = 0.03$, $\Delta t = 3 \times 10^{-6}$, $\tau = S/\varepsilon^2$, $S = 2$ (gauche), $S = 10$ (droite), $u_0(x, y) = \cos(\pi x) \cos(3\pi y)$ et l'élément $\mathbb{P}_1$.

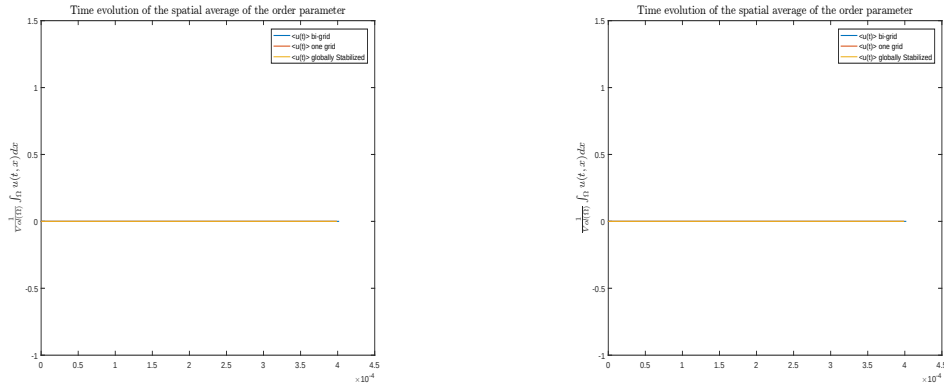


FIGURE 3.17 – Equation de Cahn-Hilliard - Moyenne spatiale vs temps - Comparaison entre le globalement stabilisé sur une grille, le schéma sur une grille et la stabilisation des modes élevés bi-grilles (**Algorithme 15**). $\varepsilon = 0.03$, $\Delta t = 3 \times 10^{-6}$, $\tau = S/\varepsilon^2$, $S = 2$ (gauche), $S = 10$ (droite), $u_0(x, y) = \cos(\pi x) \cos(3\pi y)$ et l'élément $\mathbb{P}_1$.

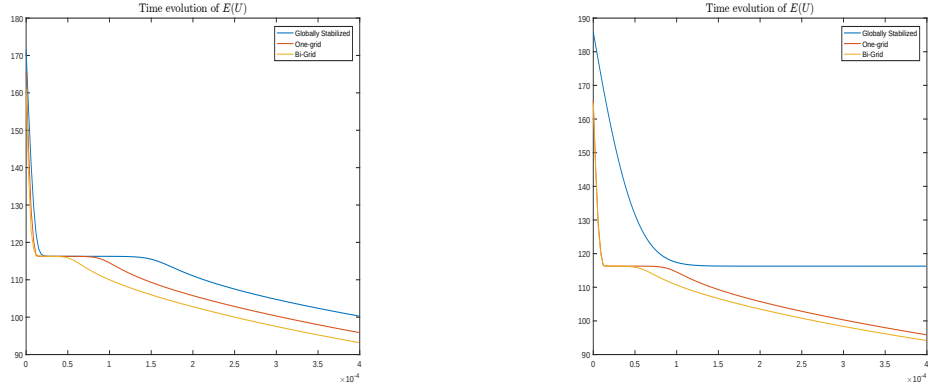


FIGURE 3.18 – Equation de Cahn-Hilliard - Energie vs temps - Comparaison entre le globalement stabilisé sur une grille, le schéma sur une grille et la stabilisation des modes élevés bi-grilles (**Algorithme 15**). $\varepsilon = 0.03$, $\Delta t = 3 \times 10^{-6}$. $\tau = S/\varepsilon^2$, $S = 0.5$ (gauche), $S = 10$ (droite). $u_0(x, y) = \cos(\pi x) \cos(3\pi y)$ et l'élément $\mathbb{P}_2$.

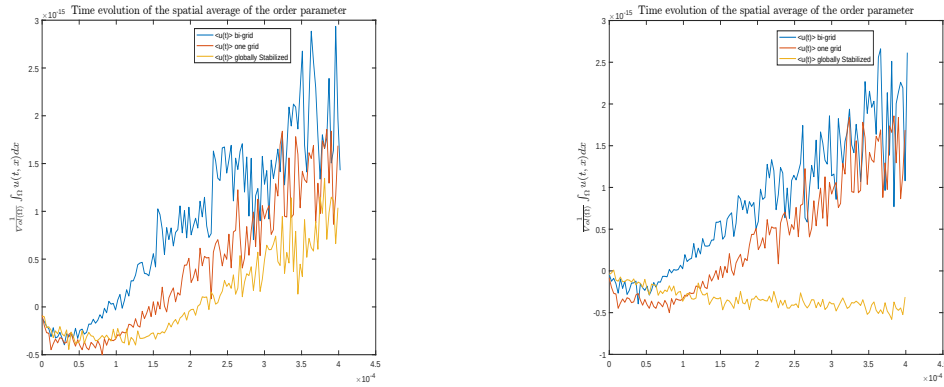


FIGURE 3.19 – Equation de Cahn-Hilliard - Moyenne spatiale vs temps - Comparaison entre le globalement stabilisé sur une grille, le schéma sur une grille et la stabilisation des modes élevés bi-grilles (**Algorithme 15**). $\varepsilon = 0.03$, $\Delta t = 3 \times 10^{-6}$. $\tau = S/\varepsilon^2$, $S = 0.5$ (gauche), $S = 10$ (droite). $u_0(x, y) = \cos(\pi x) \cos(3\pi y)$ et l'élément $\mathbb{P}_2$.

Pour les mêmes paramètres de stabilisation, nous vérifions que la stabilisation globale ralentit la décroissance de l'énergie alors que la stabilisation uniquement des modes élevés dans nos algorithmes bi-grilles n'a pas d'influence sur la décroissance de l'énergie ; les courbes d'énergie de nos algorithmes bi-grilles collent avec celle du schéma implicite sur une grille.

Nous déduisons aussi qu'en augmentant les valeurs de S , ($S = 10$), la décroissance de l'énergie devient plus lente.

De plus, la comparaison des courbes de la moyenne spatiale montre que nos algorithmes bi-grilles et le schéma implicite sur une grille approchent de la même manière la solution.

Nous remarquons l'importance du terme de stabilisation pour le schéma d'une grille et nos algorithmes bi-grilles : pour $S = 0.05$ les deux schémas (3.14)-(3.16) et (15) sont instables (cf. Tab. 3.2,3.3).

Schéma	ε	S	$\tau = S/\varepsilon^2$	Δt	Stable
Schéma (3.14)-(3.16) une grille stabilisé	0.03	0.8	888.88	0.001	oui
Algorithme 15 bi-grilles	0.03	0.8	888.88	0.001	oui
Schéma (3.14)-(3.16) une grille stabilisé	0.03	0.5	555.55	0.001	non
Algorithme 15 bi-grilles	0.03	0.5	555.55	0.001	oui
Schéma (3.14)-(3.16) une grille stabilisé	0.03	0.05	55.55	0.001	non
Algorithme 15 bi-grilles	0.03	0.05	55.55	0.001	non

 TABLE 3.2 – $\varepsilon = 0.03$, $\Delta t = 0.001$, $u_0(x, y) = \cos(4\pi x) \cos(4\pi y)$, éléments $\mathbb{P}_2$.

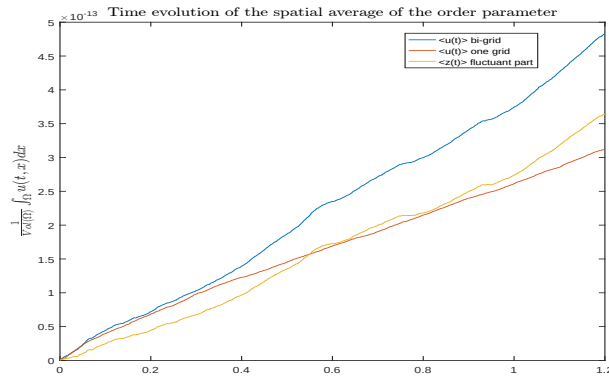
Schéma	ε	S	$\tau = S/\varepsilon^2$	Δt	Stable
Schéma (3.14)-(3.16) une grille stabilisé	0.03	2	2222.22	0.001	oui
Algorithme 15 bi-grilles	0.03	2	2222.22	0.001	oui
Schéma (3.14)-(3.16) une grille stabilisé	0.03	0.5	555.55	0.001	non
Algorithme 15 bi-grilles	0.03	0.5	555.55	0.001	non

 TABLE 3.3 – $\varepsilon = 0.03$, $\Delta t = 0.001$, $u_0(x, y) = \cos(4\pi x) \cos(4\pi y)$, éléments $\mathbb{P}_1$.

3.1.5 Précision et réduction du temps CPU

Nous prenons $\Omega =]0, 1[^2$, deux triangulations $\mathcal{T}_h$ et $\mathcal{T}_H$ composées de 1681 et 441 triangles respectivement et les espaces d'EF V_H et V_h de dimensions $\dim(V_H) = 1681$ et $\dim(V_h) = 6561$.

Les figures 3.20-3.21-3.22-3.23 correspondent à la simulation d'une solution exacte par notre méthode bi-grilles (**Algorithme 15**) et le schéma d'une grille inconditionnellement stable (Schéma (3.11)-(3.13)). Nous prenons la fonction $u_{ex}(x, y, t) = \cos(\pi x) \cos(\pi y) \exp(\sin(\pi t))$ et ajoutons un second terme approprié. Nous trouvons que le temps CPU est réduit pour le schéma bi-grilles et l'erreur est faible (cf. Figures 3.21 pour $\varepsilon = 0.3$ et 3.22 pour $\varepsilon = 0.5$)


 FIGURE 3.20 – Cahn-Hilliard - simulation d'une solution exacte $\varepsilon = 0.3$, $\tau = 2222.22$, $\Delta t = 10^{-3}$.

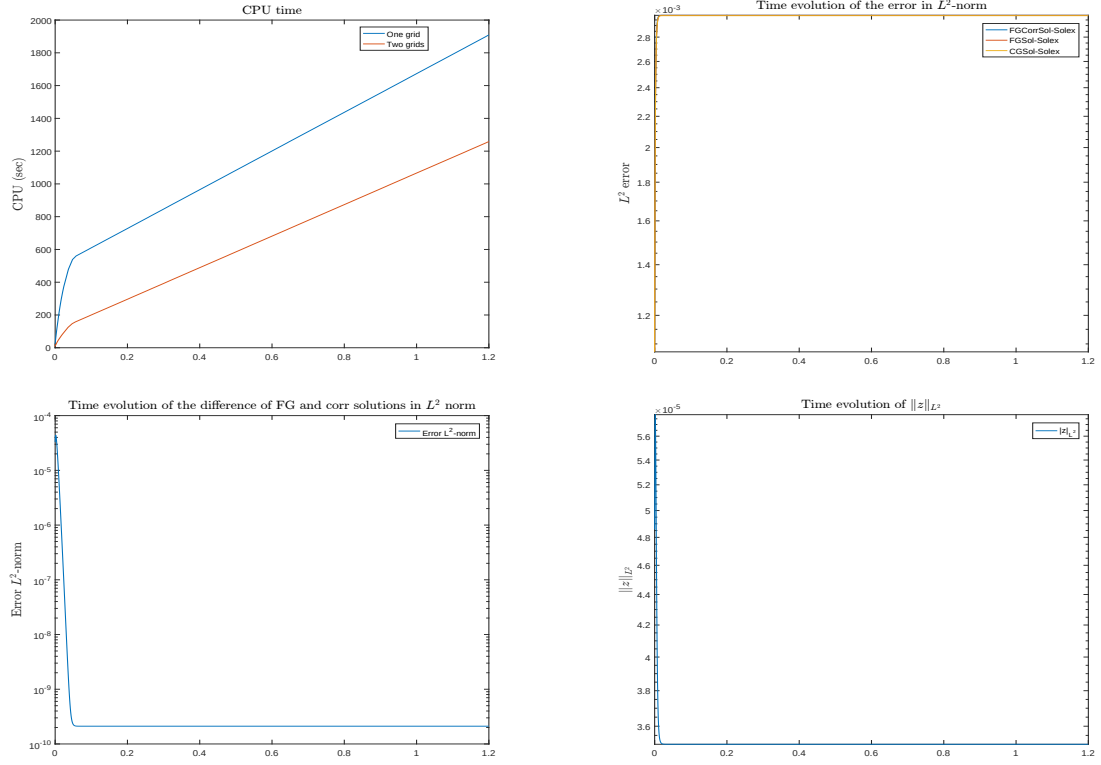


FIGURE 3.21 – Cahn-Hilliard - simulation d'une solution exacte $\varepsilon = 0.3, \tau = 2222.22, \Delta t = 10^{-3}$.

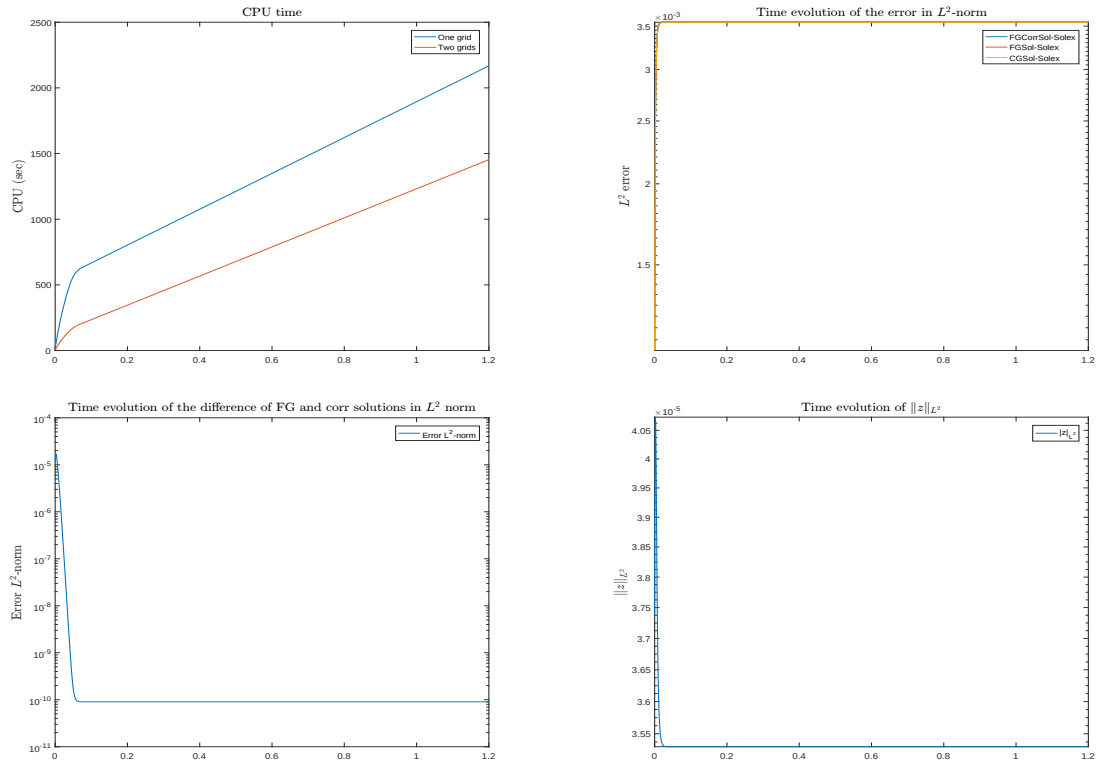


FIGURE 3.22 – Cahn-Hilliard - simulation d'une solution exacte $\varepsilon = 0.5, \tau = 5555.55, \Delta t = 10^{-3}$.

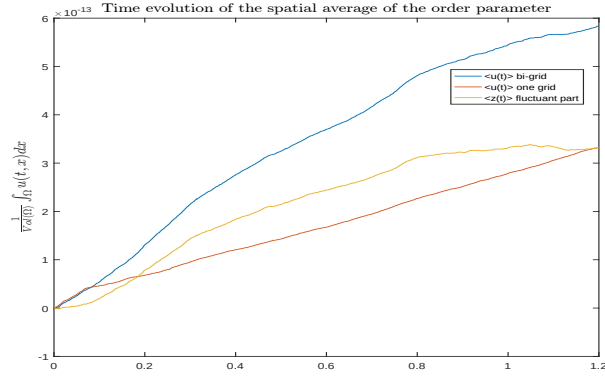


FIGURE 3.23 – Cahn-Hilliard - simulation d'une solution exacte $\varepsilon = 0.5$, $\tau = 5555.55$, $\Delta t = 10^{-3}$.

Aussi pour l'équation de Cahn-Hilliard sans second membre, nous obtenons une réduction du temps de calcul CPU pour l'**Algorithme 15** bi-grilles, d'un facteur supérieur à 3. De plus, les énergies sont comparables.

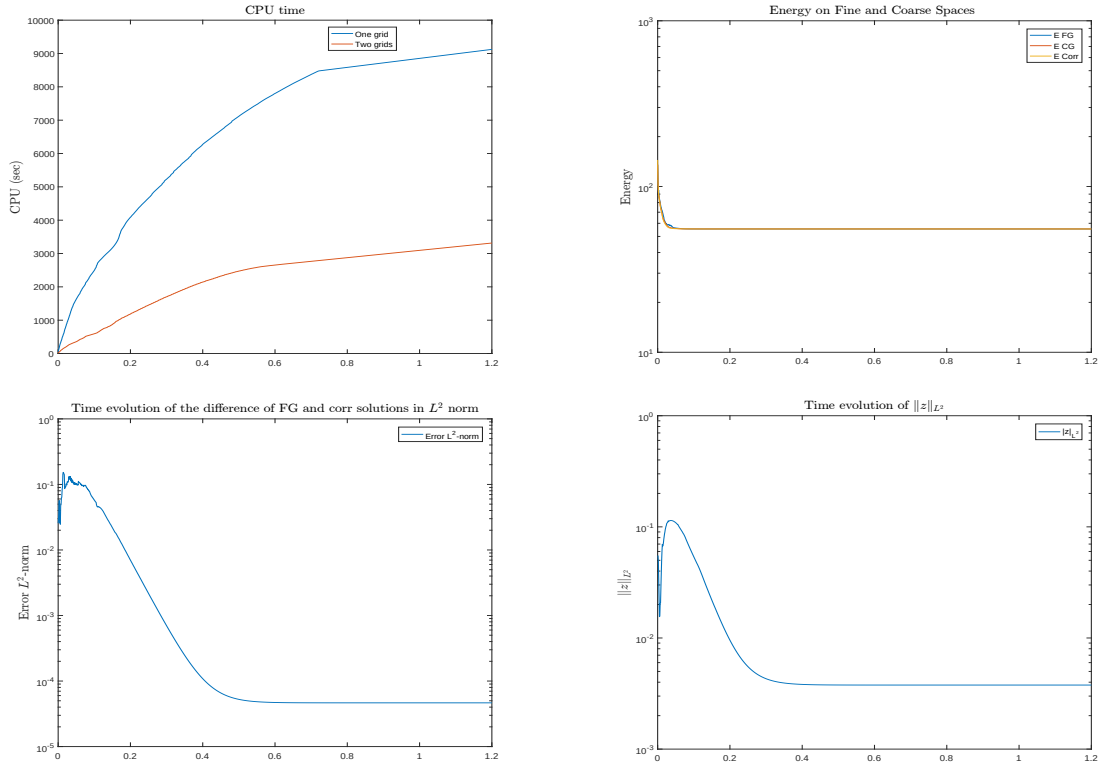


FIGURE 3.24 – Cahn-Hilliard $\varepsilon = 0.03$, $\tau = 2222.22$ et $\Delta t = 10^{-3}$.

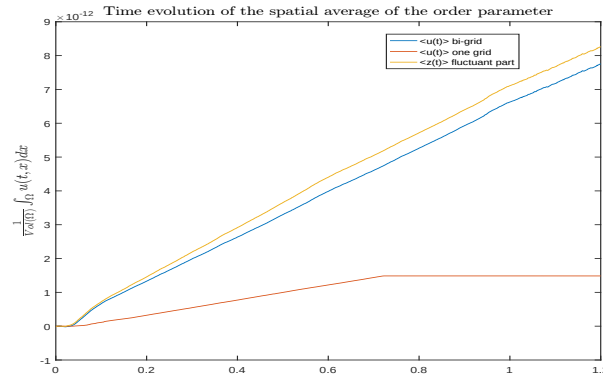


FIGURE 3.25 – Cahn-Hilliard $\varepsilon = 0.03$, $\tau = 2222.22$ et $\Delta t = 10^{-3}$.

Enfin, la comparaison des courbes de la moyenne spatiale montre que notre algorithme bi-grilles (**Algorithme 15**) et le schéma d'une grille inconditionnellement stable (Schéma (3.11)-(3.13)) approchent de la même manière la solution. Mais la moyenne spatiale de la concentration u qui était initialement nulle augmente au cours du temps en restant faible. L'**Algorithme 15** bi-grilles et le schéma d'une grille inconditionnellement stable ne conservent pas la masse (la conservation de la masse étant un critère essentiel de l'équation de Cahn-Hilliard).

3.2 Conclusion

Nous avons proposé des schémas bi-grilles énergétiquement stables et réduisant le temps de calcul. L'idée était de stabiliser uniquement la partie fluctuante de la solution ; nos schémas bi-grilles ne détériorent pas la dynamique comme pour la stabilisation globale de la solution [188].

Concentrer l'effort sur l'espace grossier de faible dimension nous a permis de réduire le temps de calcul CPU. Nous avons montré que nos schémas bi-grilles et le schéma d'une grille inconditionnellement stable vérifient le critère de conservation de la masse mais les simulations numériques ont montré que la moyenne spatiale de la concentration qui était initialement nulle augmente au cours du temps mais reste faible.

Nous étendons ces résultats pour les modèles couplés aux équations de Navier-Stokes .

Deuxième partie : Méthodes bi-grilles en éléments finis pour les couplages fluides/champs de phase

Chapitre 4

Méthodes bi-grilles pour les équations de Navier-Stokes

Sommaire

4.1 Principe bi-grilles	94
4.2 Équations de Navier-Stokes en dimension 2	97
4.3 Méthode de projection	98
4.3.1 Méthode de projection non incrémentale : Chorin-Temam	99
4.3.2 Méthode de projection incrémentale : Correction de pression	100
4.4 Méthode bi-grilles : séparation des échelles	100
4.4.1 Schémas bi-grilles non incrémentaux	100
4.4.2 Schémas bi-grilles incrémentaux	102
4.5 Résultats numériques : cavité entraînée	104
4.5.1 Méthode bi-grilles non incrémentale	105
4.5.1.1 Les extrema des fonctions de courant et de vorticité	120
4.5.1.2 Comparaison en temps de calcul	124
4.5.2 Méthode bi-grilles incrémentale	127
4.5.2.1 Les extrema des fonctions de courant	132
4.5.2.2 Comparaison en temps de calcul	134
4.5.3 Étude de stabilité : comparaison avec un schéma semi-implicite	136
4.5.3.1 Navier-Stokes par projection non incrémentale	136
4.5.3.2 Navier-Stokes par projection incrémentale	139
4.6 Résultats numériques : comparaison avec une solution exacte	140
4.6.1 Méthode bi-grilles non incrémentale	141
4.6.2 Méthode bi-grilles incrémentale	147
4.7 Conclusion et idées futures	150

Nous considérons dans ce chapitre la méthode de projection et appliquons notre technique de séparation d'échelles qui a été vérifiée dans les chapitres précédents pour les équations d'Allen-Cahn et de Cahn-Hilliard. Ce chapitre est organisé comme suit : au début, nous décrivons le principe bi-grilles pour les équations de réaction-diffusion. Puis nous présentons les techniques de correction de pression incrémentale et non incrémentale. Ensuite nous proposons nos schémas bi-grilles séparant en fréquences les vitesses intermédiaires introduites par la méthode de projection. En premier lieu, nous comparons nos schémas bi-grilles aux schémas implicites et ceux de la littérature pour le problème de la cavité entraînée. Le premier avantage de notre approche apparaît dans la concordance de nos résultats avec ceux des références tout en réduisant le temps

de calcul CPU. En second lieu, nous traitons le cas d'une solution exacte. Le deuxième avantage de notre méthode bi-grilles apparaît par la stabilité en terme de pas de temps par rapport aux schémas explicites.

Nous terminons par conclure que notre approche se situe entre les schémas implicites stables mais lents et les schémas explicites instables mais rapides. D'une part, notre technique n'est pas assez stable que les schémas totalement implicites mais plus rapide que ces derniers. D'autre part, elle est plus stable que le schéma explicite rapide mais limité en pas de temps. En outre, ce gain en stabilité d'un rapport de 10 pour les schémas incrémentaux et non incrémentaux implique que la technique bi-grilles est plus rapide que le schéma explicite. Si nous considérons les pas de temps maximaux qui peuvent être pris par les deux procédés, la convergence est atteinte en premier par les schémas bi-grilles et donc ils sont plus rapides que les schémas explicites.

4.1 Principe bi-grilles

Comme indiqué dans l'introduction **section 2**, considérer deux espaces de discrétisation V_H (grossier) et V_h (fin), concentrer le calcul sur le grossier par un schéma implicite (non linéaire) et utiliser un schéma semi-implicite (linéaire) sur le fin permet de gagner en temps de calcul CPU. Plus précisément, le schéma bi-grilles pour les équations de réaction-diffusion s'écrit

Algorithm 16 Schéma bi-grilles pour l'équation de réaction-diffusion

- 1: u_h^0, u_H^0 donnés
 - 2: **for** $k = 0, 1, \dots$ **do**
 - 3: **Étape 1 (Schéma implicite espace grossier)**
 - 4: $(\frac{u_H^{k+1} - u_H^k}{\Delta t}, \psi_H) + (\nabla u_H^{k+1}, \nabla \psi_H) + (f(u_H^{k+1}), \psi_H) = 0, \forall \psi_H \in V_H$
 - 5: **Étape 2 (Schéma semi-implicite espace fin)**
 - 6: $(\frac{u_h^{k+1} - u_h^k}{\Delta t}, \phi_h) + (\nabla u_h^{k+1}, \nabla \phi_h) + (f(u_h^k), \phi_h) + (f'(u_H^{k+1})u_h^{k+1}, \phi_h) = 0, \forall \phi_h \in V_h$
 - 7: **end for**
-

Cette approche a été proposée dans [110, 130, 153].

Afin d'éviter de calculer la linéarisation $f'(u_H^{k+1})$, de f en u_H^{k+1} , un schéma semi-implicite est adapté avec le terme d'amortissement $\tau(u_h^{k+1} - u_h^k)$:

-
-
- 1: **Étape 2 (Schéma semi-implicite stabilisé espace fin)**
 - 2: $(\frac{u_h^{k+1} - u_h^k}{\Delta t}, \phi_h) + \tau(u_h^{k+1} - u_h^k, \phi_h) + (\nabla u_h^{k+1}, \nabla \phi_h) + (f(u_h^k), \phi_h) = 0, \forall \phi_h \in V_h$
-

Ce schéma est rapide et inconditionnellement stable mais il ralentit la dynamique. Cela est dû à la stabilisation de toutes les composantes de la solution. Un moyen d'y remédier est de stabiliser uniquement les composantes en modes élevés z_h de la solution u_h ; z_h constitue la partie fluctuante de u_h . Par suite le schéma s'écrit

-
-
- 1: **Étape 2 (Schéma semi-implicite stabilisé en modes élevés espace fin)**
 - 2: $(\frac{u_h^{k+1} - u_h^k}{\Delta t}, \phi_h) + \tau(\mathcal{P}(u_h^{k+1} - u_h^k), \phi_h) + (\nabla u_h^{k+1}, \nabla \phi_h) + (f(u_h^k), \phi_h) = 0, \forall \phi_h \in V_h$
-

où $\mathcal{P}(u_h^{k+1} - u_h^k)$ traite les composantes en modes élevés de $u_h^{k+1} - u_h^k$.

Il existe deux possibilités de décomposer u_h en une partie principale $\tilde{u}_h$ et une partie fluctuante z_h :

- Bases hiérarchiques en éléments finis : l'espace fin V_h est décomposé en $V_h = V_H \oplus W_h \subset H^1$, où $V_H \subset V_h$ est l'espace grossier adapté pour les composantes en bas mode, et W_h est l'espace complémentaire obtenu suivant les fonctions de base de V_h n'appartenant pas à V_H , traitant les composantes en modes élevés. Ainsi l'approximation sur V_h sera

$$u_h = u_H + z_h$$

où $u_H \in V_H$ et $z_h \in W_h$. Cette séparation en échelles $S : u_h \rightarrow (u_H, z_h)$ permet d'avoir un préconditionneur efficace pour les matrices de rigidité [164, 165, 226].

La discrétisation satisfaite par u_H et z_h , est

$$\frac{d}{dt}(u_H + z_h, \phi_H) + (\nabla(u_H + z_h), \nabla \phi_H) + (f(u_H + z_h), \phi_H) = 0, \forall \phi_H \in V_H, \quad (4.1)$$

$$\frac{d}{dt}(u_H + z_h, \psi_h) + (\nabla(u_H + z_h), \nabla \psi_h) + (f(u_H + z_h), \psi_h) = 0, \forall \psi_h \in V_h. \quad (4.2)$$

Par cette séparation en échelles nous pouvons utiliser un schéma simple et rapide pour les composantes z_h et gagner en temps de calcul.

Une autre approche est proposée dans [166] : Soit P_H la projection orthogonale en norme L^2 de V_h dans V_H , par la décomposition $u_h = u_H + w_h$ où $u_H = P_H u_h$ et $w_h = (Id - P_H)u_h$, u_H et w_h sont orthogonaux. Les schémas de type Galerkin non linéaires proposés comportent une approche asymptotique ($\Phi(u_H) = w_h$) et un schéma en temps sur u_H . Cela nécessite la construction de base pour $(Id - P_H)V_h$.

Nous citons en différences finies [35, 43] et méthodes spectrales [68, 77, 80, 137]

- Nous adapterons le filtrage de type L^2 proposé dans [1] où un opérateur de prolongation $\mathcal{P} : V_H \rightarrow V_h$ est défini par

$$(u_H - \mathcal{P}(u_H), \phi_h) = 0, \forall \phi_h \in V_h. \quad (4.3)$$

En posant $\tilde{u}_h = \mathcal{P}(u_H)$, nous obtenons

$$u_h = \tilde{u}_h + (u_h - \tilde{u}_h) = \tilde{u}_h + z_h.$$

La stabilisation des composantes en modes élevés z_h se traduit par

1: **Étape 2 (Schéma semi-implicite stabilisé en modes élevés espace fin)**

$$2: \left(\frac{u_h^{k+1} - u_h^k}{\Delta t}, \phi_h \right) + \tau(z_h^{k+1} - z_h^k, \phi_h) + (\nabla u_h^{k+1}, \nabla \phi_h) + (f(u_h^k), \phi_h) = 0, \forall \phi_h \in V_h$$

En utilisant l'identité

$$(z_h^{k+1} - z_h^k, \phi_h) = (u_h^{k+1} - u_h^k, \phi_h) - (\tilde{u}_h^{k+1} - \tilde{u}_h^k, \phi_h) = (u_h^{k+1} - u_h^k, \phi_h) - (u_H^{k+1} - u_H^k, \phi_h), \forall \phi_h \in V_h$$

le schéma semi-implicite stabilisé en modes élevés sera

Algorithm 17 Schéma bi-grilles stabilisé pour l'équation de réaction-diffusion

```

1:  $u_h^0, u_H^0$  donnés
2: for  $k = 0, 1, \dots$  do
3:   Étape 1 (Schéma implicite espace grossier)
4:    $(\frac{u_H^{k+1} - u_H^k}{\Delta t}, \psi_H) + (\nabla u_H^{k+1}, \nabla \psi_H) + (f(u_H^{k+1}), \psi_H) = 0, \forall \psi_H \in V_H$ 
5:   Étape 2 (Schéma semi-implicite stabilisé en mode élevé espace fin)
6:    $(\frac{u_h^{k+1} - u_h^k}{\Delta t}, \phi_h) + \tau(\mathbf{u}_h^{k+1} - \mathbf{u}_h^k, \phi_h) + (\nabla u_h^{k+1}, \nabla \phi_h) + (f(u_h^k), \phi_h) =$   

 $\tau(\mathbf{u}_H^{k+1} - \mathbf{u}_H^k, \phi_h), \forall \phi_h \in V_h$ 
7: end for

```

Pour les équations de Navier-Stokes des méthodes bi-grilles selon l'**Algorithme 16** sont proposées dans [3, 5, 110, 130, 153]. Étant donné les deux espaces en éléments finis (X_H, Y_H) et (X_h, Y_h) vérifiant la condition Inf-sup, avec $X_H \subset X_h$ et $Y_H \subset Y_h$, le schéma bi-grilles sera

Algorithm 18 Schéma bi-grilles pour les équations de Navier-Stokes

```

1:  $u_h^0, u_H^0$  donnés
2: for  $k = 0, 1, \dots$  do
3:   Étape 1 (Schéma implicite espace grossier)
4:    $(\frac{u_H^{k+1} - u_H^k}{\Delta t}, \psi_H) + \frac{1}{Re}(\nabla u_H^{k+1}, \nabla \psi_H) + ((u_H^{k+1} \cdot \nabla)u_H^{k+1}, \psi_H) - (div(\psi_H), p_H^{k+1}) =$   

 $(f, \psi_H), \forall \psi_H \in X_H$ 
5:    $(div(u_H^{k+1}), q_H) = 0, \forall q_H \in Y_H$ 
6:   Étape 2 (Schéma semi-implicite espace fin)
7:    $(\frac{u_h^{k+1} - u_h^k}{\Delta t}, \phi_h) + \frac{1}{Re}(\nabla u_h^{k+1}, \nabla \phi_h) + (u_H^{k+1} \cdot \nabla u_h^{k+1}, \phi_h) - (div(\psi_h), p_h^{k+1}) = (f, \psi_h), \forall \psi_h \in$   

 $X_h$ 
8:    $(div(u_h^{k+1}), q_h) = 0, \forall q_h \in Y_h$ 
9: end for

```

La linéarisation à l'**Étape 2** du terme non linéaire $(u_H^{k+1} \cdot \nabla u_h^{k+1}, \phi_h)$ a été proposée dans [110], mais d'autres linéarisations peuvent être envisagées. À chaque itération nous résolvons un problème non linéaire sur l'espace grossier (X_H, Y_H) , puis un problème linéarisé sur l'espace fin (X_h, Y_h) . Cela nécessite une actualisation de la linéarisation à chaque étape.

Dans ce qui suit, nous construisons des algorithmes bi-grilles stabilisés suivant l'idée de l'**Algorithme 17** et par la méthode de projection. Cette méthode nous permet de trouver la vitesse et la pression séparément à l'aide d'une vitesse intermédiaire satisfaisant une équation non linéaire de convection-diffusion. L'avantage de ces algorithmes bi-grilles stabilisés est la réduction du temps de calcul.

4.2 Équations de Navier-Stokes en dimension 2

La formulation variationnelle mixte du mouvement d'un fluide visqueux et incompressible dans un domaine Ω est décrite par les équations instationnaires de Navier-Stokes

$$\begin{cases} (\frac{\partial u}{\partial t}, v) + (u \cdot \nabla u, v) + \nu(\nabla u, \nabla v) - (p, \operatorname{div} v) = (f, v), \quad \forall v \in X = [H_0^1(\Omega)]^d, \\ (\operatorname{div} u, q) = 0, \quad \forall q \in Y = L^2(\Omega), \end{cases}$$

où Ω est un domaine de $\mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$ à bords lipschitziens et un intervalle de temps $[0, T]$, $T > 0$. Nous proposons le choix suivant des espaces d'approximation X_h et Y_h pour la vitesse et la pression

$$X_h = \{v \in C^0(\bar{\Omega})^2 | v|_K \in \mathbb{P}_2^2, \quad \forall K \in T_h, \quad v = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}, \quad (4.4)$$

$$Y_h = \{q \in C^0(\bar{\Omega}) | q|_K \in \mathbb{P}_1, \quad \forall K \in T_h\} \cap L_0^2(\Omega). \quad (4.5)$$

Nous introduisons aussi les formes bilinéaires suivantes :

$$\begin{aligned} a : H_0^1(\Omega)^d \times H_0^1(\Omega)^d &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\longrightarrow a(u, v) = \nu(\nabla u, \nabla v) \\ &\text{et} \\ b : H_0^1(\Omega)^d \times L^2(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, q) &\longrightarrow b(u, q) = -(\operatorname{div} u, q) \end{aligned}$$

et la forme trilinéaire définie par

$$\begin{aligned} c : H_0^1(\Omega)^d \times H_0^1(\Omega)^d \times H_0^1(\Omega)^d &\longrightarrow \mathbb{R} \\ c(w, z, v) &= \int_{\Omega} [(w \cdot \nabla) z] \cdot v dx = \sum_{i,j=1}^d \int_{\Omega} w_j \frac{\partial z_i}{\partial x_j} v_i dx. \end{aligned}$$

Avec les notations précédentes, la formulation mixte du problème de Navier-Stokes s'écrit :

$$\text{Trouver } (u, p) \in H_0^1(\Omega)^d \times L_0^2(\Omega) \text{ tels que} \quad (4.6)$$

$$(\frac{\partial u}{\partial t}, v) + c(u, u, v) + a(u, v) + b(v, p) = (f, v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)^d \quad (4.7)$$

$$b(u, q) = 0, \quad \forall q \in L_0^2(\Omega). \quad (4.8)$$

$$(4.9)$$

Nous introduisons l'espace des fonctions de $L^2(\Omega)$ à moyenne nulle :

$$L_0^2(\Omega) = \{q \in L^2(\Omega), \int_{\Omega} q dx = 0\}.$$

Remarque 4.2.1 La condition de moyenne nulle sur p est nécessaire pour assurer l'unicité de la pression. En effet, si p vérifie l'équation de Stokes alors il en est de même pour $p + C$ où C est une constante quelconque. D'où l'importance de travailler dans l'espace $L_0^2(\Omega)$.

Nous choisissons

$$X_h = \{v \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega})^2 | v|_K \in \mathbb{P}_2^2, \forall K \in T_h, v = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}, \quad (4.10)$$

$$Y_h = \{q \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega}) | q|_K \in \mathbb{P}_1, \forall K \in T_h\} \cap L_0^2(\Omega). \quad (4.11)$$

Les degrés de liberté pour la vitesse sont les sommets de la triangulation et les points médians des bords des triangles de T_h . Ceux de la pression sont les sommets de la triangulation T_h supposés uniformément réguliers.

Pour un tel choix d'éléments finis, la condition Inf-Sup de Babuska-Brezis cf. [112] est satisfaite. Ainsi la formulation mixte admet une unique solution.

4.3 Méthode de projection

Cette méthode est connue sous plusieurs noms tels que la méthode de l'étape fractionnaire ou la méthode de Chorin. Chorin et Temam [65, 202] l'ont introduite comme un moyen de réduction du coût de calcul dans la formulation vitesse-pression pour un écoulement visqueux incompressible dépendant du temps. La méthode de projection de Chorin-Temam [65, 199, 201, 203] est l'une des approches les plus utilisées pour la discrétisation temporelle.

C'est une méthode pas à pas fractionnée où le calcul de la vitesse est découplé de celui de la pression, en résolvant d'abord un problème de convection-diffusion de sorte que la vitesse résultante ne soit pas nécessairement à divergence nulle ; puis dans un second temps, celui-ci est projeté sur un espace de fonctions à divergence nulle pour satisfaire la condition d'incompressibilité.

Il s'agit des méthodes de correction de pression où la pression est traitée explicitement ou ignorée dans la première étape et corrigée dans la seconde en projetant la vitesse intermédiaire déjà introduite.

Nous considérons maintenant la semi-discrétisation temporelle. Soit $u^k \simeq u(x, k\Delta t)$ une suite de fonctions ; Δt est le pas de temps.

$$\begin{cases} \frac{u^{k+1} - u^k}{\Delta t} - \nu \Delta u^{k+1} + (u^{k+1} \cdot \nabla) u^{k+1} + \nabla p^{k+1} = f \text{ dans } \Omega, \\ \operatorname{div} u^{k+1} = 0 \text{ dans } \Omega, \\ u(x, 0) = u^0(x) \text{ sur } \Omega, \\ u^{k+1} = g \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (4.12)$$

Orszag et al. [177] et Karniadakis et al. [140] ont eu l'idée d'inverser le rôle de la vitesse et la pression dans les schémas de correction de pression. Dans ces schémas de correction de vitesse [125, 126], le terme de viscosité est traité explicitement ou même éliminé de la première étape et la vitesse est corrigée à la deuxième étape.

Ces schémas proposent de trouver, sous l'hypothèse de divergence nulle de la vitesse, p^{k+1} et par la suite la vitesse intermédiaire u^* :

Étape 1 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{u^{k+1} - u^{*,k}}{\Delta t} + \nabla p^{k+1} = f(t^{k+1}) \text{ dans } \Omega, \\ \operatorname{div} u^{k+1} = 0 \text{ dans } \Omega, u^{k+1} \cdot n|_{\partial\Omega} = 0, \end{array} \right. \Leftrightarrow \Delta p^{k+1} = \frac{\operatorname{div} u^*}{\Delta t} + \operatorname{div} f(t^{k+1}) \text{ dans } \Omega.$$

Étape 2 :

$$\frac{u^{*,k+1} - u^{k+1}}{\Delta t} - \nu \Delta u^{*,k+1} = 0, u^{*,k+1}|_{\partial\Omega} = 0.$$

Nous nous intéressons dans ce chapitre uniquement aux méthodes de correction pression incrémentale et non incrémentale.

4.3.1 Méthode de projection non incrémentale : Chorin-Temam

Approcher le problème de Navier-Stokes (4.12) avec des conditions aux limites non homogènes par la méthode de projection revient à le décomposer en deux étapes :

Étape 1 : Trouver u^* tels que

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{u^* - u^k}{\Delta t} - \nu \Delta u^* + (u^* \cdot \nabla) u^* = f \text{ dans } \Omega, \\ u^* = g \text{ sur } \partial\Omega. \end{array} \right. \quad (4.13)$$

Étape 2 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{u^{k+1} - u^*}{\Delta t} + \nabla p^{k+1} = 0 \text{ dans } \Omega, \\ \operatorname{div} u^{k+1} = 0 \text{ dans } \Omega. \end{array} \right. \quad (4.14)$$

En appliquant l'opérateur div à l'équation (4.14) sous l'hypothèse $\operatorname{div} u^{k+1} = 0$ et connaissant u^* d'après l'Étape 1, (4.14) est équivalente à trouver p^{k+1} vérifiant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta p^{k+1} = \frac{\operatorname{div} u^*}{\Delta t} \text{ dans } \Omega, \\ \frac{\partial p^{k+1}}{\partial n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \\ \int_{\Omega} p^{k+1} dx = 0. \end{array} \right. \quad (4.15)$$

Enfin, nous déduisons facilement $u^{k+1} = u^* - \Delta t \nabla p^{k+1}$.

Dans le travail de Guermond et al. [124], une série de questions numériques pour les trois classes, les méthodes de correction de pression, les méthodes de correction de vitesse, et les méthodes de séparation cohérentes sont présentées.

Nous introduisons le schéma de référence :

Algorithm 19 Schéma de référence non incrémental "Ref1"

```

1: for  $k = 0, 1, \dots$  do
2:   Trouver  $u_h^*$  dans  $X_h$   $(\frac{u_h^* - u_h^k}{\Delta t}, \psi_h) + \nu(\nabla u_h^*, \nabla \psi_h) + ((u_h^* \cdot \nabla)u_h^*, \psi_h) = (f, \psi_h), \forall \psi_h \in X_h$ 
3:   Trouver  $p_h^{k+1}$  dans  $Y_h$   $(\text{div } \nabla p_h^{k+1}, \chi_h) = (\frac{\text{div } u_h^*}{\Delta t}, \chi_h), \forall \chi_h \in Y_h$ 
4:   Trouver  $u_h^{k+1}$  dans  $X_h$   $(u_h^{k+1} - u_h^* + \Delta t \nabla p_h^{k+1}, \psi_h) = 0, \forall \psi_h \in X_h$ 
5: end for

```

4.3.2 Méthode de projection incrémentale : Correction de pression

Vu que le terme de gradient de pression est absent dans (4.13), Goda [114] était le premier qui a observé qu'ajouter une ancienne valeur du gradient de pression ∇p^k dans la première étape et ensuite corriger la vitesse dans la seconde étape augmente la précision.

Algorithm 20 Schéma de référence incrémental "Ref2"

```

1: for  $k = 0, 1, \dots$  do
2:   Trouver  $u_h^*$  dans  $X_h$ 
3:    $(\frac{u_h^* - u_h^k}{\Delta t}, \psi_h) + \nu(\nabla u_h^*, \nabla \psi_h) + ((u_h^* \cdot \nabla)u_h^*, \psi_h) + (\nabla p_h^k, \psi_h) = (f, \psi_h), \forall \psi_h \in X_h$ 
4:   Trouver  $p_h^{k+1}$  dans  $Y_h$   $\alpha(\text{div } \nabla p_h^{k+1} - \text{div } \nabla p_h^k, \chi_h) = (\frac{\text{div } u_h^*}{\Delta t}, \chi_h), \forall \chi_h \in Y_h$ 
5:   Trouver  $u_h^{k+1}$  dans  $X_h$   $(u_h^{k+1} - u_h^* + \alpha \Delta t (\nabla p_h^{k+1} - \nabla p_h^k), \psi_h) = 0, \forall \psi_h \in X_h$ 
6: end for

```

4.4 Méthode bi-grilles : séparation des échelles

4.4.1 Schémas bi-grilles non incrémentaux

Notre première approche consiste à séparer en échelles la vitesse intermédiaire u_h^* que nous avons introduite selon la méthode de projection de Chorin-Temam. Nous calculons d'abord u_H^* sur l'espace grossier X_H puis stabilisons les hautes fréquences de u_h^* sur l'espace fin X_h . En se basant sur la condition de divergence nulle, on trouve la pression p_h qui est à moyenne nulle. Nous finissons par trouver u_h et la restreindre à la grille grossière pour obtenir u_H^k pour la prochaine itération.

Algorithm 21 Deux grilles "Algo1"

```

1: for  $k = 0, 1, \dots$  do
2:   Trouver  $u_H^*$  dans  $X_H$ 
3:    $(\frac{u_H^* - u_H^k}{\Delta t}, \psi_H) + \nu(\nabla u_H^*, \nabla \psi_H) + ((u_H^* \cdot \nabla)u_H^*, \psi_H) = (f, \psi_H), \forall \psi_H \in X_H$ 
4:   Trouver  $u_h^*$  dans  $X_h$ 
    $(1 + \tau \Delta t)(\frac{u_h^* - u_h^k}{\Delta t}, \phi_h) + \nu(\nabla u_h^*, \nabla \phi_h) + ((u_h^k \cdot \nabla)u_h^k, \phi_h) = \tau(u_H^* - u_H^k, \phi_h) + (f, \phi_h), \forall \phi_h \in X_h$ 
5:   Trouver  $p_h^{k+1}$  dans  $Y_h$   $(\text{div } \nabla p_h^{k+1}, \chi_h) = (\frac{\text{div } u_h^*}{\Delta t}, \chi_h), \forall \chi_h \in Y_h$ 
6:   Trouver  $u_h^{k+1}$  dans  $X_h$   $(u_h^{k+1} - u_h^* + \Delta t \nabla p_h^{k+1}, \phi_h) = 0, \forall \phi_h \in X_h$ 
7:   Résoudre dans  $X_H$   $(u_H^{k+1} - u_h^{k+1}, \psi_H) = 0, \forall \psi_H \in X_H$ 
8: end for

```

Nous proposons dans l'algorithme qui suit de remplacer $(u_h^k \cdot \nabla)u_h^k$ par $(u_H^* \cdot \nabla)u_h^*$.

Algorithm 22 Variante de l'algorithme (Deux grilles "Algo1") : Deux grilles "Algo2"

- 1: **for** $k = 0, 1, \dots$ **do**
- 2: **Trouver** u_H^* **dans** X_H
- 3: $(\frac{u_H^* - u_H^k}{\Delta t}, \psi_H) + \nu(\nabla u_H^*, \nabla \psi_H) + ((u_H^* \cdot \nabla)u_H^*, \psi_H) = (f, \psi_H), \forall \psi_H \in X_H$
- 4: **Trouver** u_h^* **dans** X_h

$$(1 + \tau \Delta t)(\frac{u_h^* - u_h^k}{\Delta t}, \phi_h) + \nu(\nabla u_h^*, \nabla \phi_h) + ((u_h^* \cdot \nabla)u_h^*, \phi_h) = \tau(u_H^* - u_H^k, \phi_h) + (f, \phi_h), \forall \phi_h \in X_h$$

- 5: **Trouver** p_h^{k+1} **dans** Y_h $(\text{div } \nabla p_h^{k+1}, \chi_h) = (\frac{\text{div } u_h^*}{\Delta t}, \chi_h), \forall \chi_h \in Y_h$
 - 6: **Trouver** u_h^{k+1} **dans** X_h $(u_h^{k+1} - u_h^* + \Delta t \nabla p_h^{k+1}, \phi_h) = 0, \forall \phi_h \in X_h$
 - 7: **Résoudre dans** X_H $(u_H^{k+1} - u_h^{k+1}, \psi_H) = 0, \forall \psi_H \in X_H$
 - 8: **end for**
-

La deuxième approche que nous considérons dans les deux algorithmes qui suivent est de trouver u_H par la méthode de projection appliquée sur la grille grossière. Par cette technique, à la prochaine itération, on utilise u_H et non la restriction de la solution trouvée après stabilisation sur la grille fine par la méthode de projection.

Algorithm 23 Deux grilles "Algo3"

- 1: **for** $k = 0, 1, \dots$ **do**
- 2: **Trouver** u_H^* **dans** X_H
- 3: $(\frac{u_H^* - u_H^k}{\Delta t}, \psi_H) + \nu(\nabla u_H^*, \nabla \psi_H) + ((u_H^* \cdot \nabla)u_H^*, \psi_H) = (f, \psi_H), \forall \psi_H \in X_H$
- 4: **Trouver** p_H^{k+1} **dans** Y_H $(\text{div } \nabla p_H^{k+1}, \chi_H) = (\frac{\text{div } u_H^*}{\Delta t}, \chi_H), \forall \chi_H \in Y_H$
- 5: **Trouver** u_H^{k+1} **dans** X_H $(u_H^{k+1} - u_H^* + \Delta t \nabla p_H^{k+1}, \psi_H) = 0, \forall \psi_H \in X_H$
- 6: **Trouver** u_h^* **dans** X_h

$$(1 + \tau \Delta t)(\frac{u_h^* - u_h^k}{\Delta t}, \phi_h) + \nu(\nabla u_h^*, \nabla \phi_h) + ((u_h^* \cdot \nabla)u_h^*, \phi_h) = \tau(u_H^* - u_H^k, \phi_h) + (f, \phi_h), \forall \phi_h \in X_h$$

- 7: **Trouver** p_h^{k+1} **dans** Y_h $(\text{div } \nabla p_h^{k+1}, \chi_h) = (\frac{\text{div } u_h^*}{\Delta t}, \chi_h), \forall \chi_h \in Y_h$
 - 8: **Trouver** u_h^{k+1} **dans** X_h $(u_h^{k+1} - u_h^* + \Delta t \nabla p_h^{k+1}, \phi_h) = 0, \forall \phi_h \in X_h$
 - 9: **end for**
-

La même variante est aussi considérée pour le cas de la résolution de Navier-Stokes complet sur la grille grossière (**Algorithme 23**).

Algorithm 24 Variante de l'algorithme (Deux grilles "Algo3") : Deux grilles "Algo4"

- 1: **for** $k = 0, 1, \dots$ **do**
- 2: **Trouver** u_H^* **dans** X_H
- 3: $(\frac{u_H^* - u_H^k}{\Delta t}, \psi_H) + \nu(\nabla u_H^*, \nabla \psi_H) + ((u_H^* \cdot \nabla) u_H^*, \psi_H) = (f, \psi_H), \forall \psi_H \in X_H$
- 4: **Trouver** p_H^{k+1} **dans** Y_H $(\text{div } \nabla p_H^{k+1}, \chi_H) = (\frac{\text{div } u_H^*}{\Delta t}, \chi_H), \forall \chi_H \in Y_H$
- 5: **Trouver** u_H^{k+1} **dans** X_H $(u_H^{k+1} - u_H^* + \Delta t \nabla p_H^{k+1}, \psi_H) = 0, \forall \psi_H \in X_H$
- 6: **Trouver** u_h^* **dans** X_h

$$(1 + \tau \Delta t)(\frac{u_h^* - u_h^k}{\Delta t}, \phi_h) + \nu(\nabla u_h^*, \nabla \phi_h) + ((u_h^* \cdot \nabla) u_h^*, \phi_h) = \tau(u_H^* - u_H^k, \phi_h) + (f, \phi_h), \forall \phi_h \in X_h$$

- 7: **Trouver** p_h^{k+1} **dans** Y_h $(\text{div } \nabla p_h^{k+1}, \chi_h) = (\frac{\text{div } u_h^*}{\Delta t}, \chi_h), \forall \chi_h \in Y_h$
 - 8: **Trouver** u_h^{k+1} **dans** X_h $(u_h^{k+1} - u_h^* + \Delta t \nabla p_h^{k+1}, \phi_h) = 0, \forall \phi_h \in X_h$
 - 9: **end for**
-

4.4.2 Schémas bi-grilles incrémentaux

Comme pour les schémas non incrémentaux nous proposons quatre algorithmes où la première approche consiste à séparer en échelles la vitesse intermédiaire u_h^* que nous avons introduite selon la méthode de projection de Chorin-Temam.

Nous calculons d'abord u_H^* sur l'espace grossier X_H puis stabilisons les hautes fréquences de u_h^* sur l'espace fin X_h . En se basant sur la condition de divergence nulle, nous trouvons la pression p_h qui est à moyenne nulle. Nous finissons par trouver u_h et la restreindre à la grille grossière pour obtenir u_H^k pour la prochaine itération.

La deuxième approche que nous considérons dans les deux algorithmes qui suivent est de trouver u_H par la méthode de projection appliquée sur la grille grossière. Par cette technique, à la prochaine itération, nous utilisons u_H et non la restriction de la solution trouvée après stabilisation sur la grille fine par la méthode de projection.

Algorithm 25 Deux grilles "Algo5"

- 1: **for** $k = 0, 1, \dots$ **do**
- 2: **Trouver** u_H^* **dans** X_H
- 3: $(\frac{u_H^* - u_H^k}{\Delta t}, \psi_H) + \nu(\nabla u_H^*, \nabla \psi_H) + ((u_H^* \cdot \nabla) u_H^*, \psi_H) + (\nabla p_H^k, \psi_H) = (f, \psi_H), \forall \psi_H \in X_H$
- 4: **Trouver** u_h^* **dans** X_h

$$(1 + \tau \Delta t)(u_h^* - u_h^k, \phi_h) + \nu \Delta t (\nabla u_h^*, \nabla \phi_h) + \Delta t ((u_h^* \cdot \nabla) u_h^k, \phi_h) + \Delta t (\nabla p_h^k, \phi_h) = \tau \Delta t (u_H^* - u_H^k, \phi_h) + \Delta t (f, \phi_h), \forall \phi_h \in X_h$$

- 5: **Trouver** p_h^{k+1} **dans** Y_h $(\alpha(\text{div } \nabla p_h^{k+1} - \text{div } \nabla p_h^k), \chi_h) = (\frac{\text{div } u_h^*}{\Delta t}, \chi_h), \forall \chi_h \in Y_h$
 - 6: **Trouver** u_h^{k+1} **dans** X_h $(u_h^{k+1} - u_h^* + \alpha \Delta t (\nabla p_h^{k+1} - \nabla p_h^k), \phi_h) = 0, \forall \phi_h \in X_h$
 - 7: **Résoudre** **dans** X_H $(u_H^{k+1} - u_H^k, \psi_H) = 0, \forall \psi_H \in X_H$
 - 8: **Résoudre** **dans** Y_H $(p_H^{k+1} - p_H^k, \chi_H) = 0, \forall \chi_H \in Y_H$
 - 9: **end for**
-

Nous proposons dans le second algorithme de remplacer $(u_h^k \cdot \nabla)u_h^k$ par $(u_H^* \cdot \nabla)u_h^*$.

Algorithm 26 Variante de l'algorithme (Deux grilles "Algo5") : Deux grilles "Algo6"

- 1: **for** $k = 0, 1, \dots$ **do**
 - 2: **Trouver** u_H^* **dans** X_H
 - 3: $(\frac{u_H^* - u_H^k}{\Delta t}, \psi_H) + \nu(\nabla u_H^*, \nabla \psi_H) + ((u_H^* \cdot \nabla)u_H^*, \psi_H) + (\nabla p_H^k, \psi_H) = (f, \psi_H), \forall \psi_H \in X_H$
 - 4: **Trouver** u_h^* **dans** X_h

$$(1 + \tau \Delta t)(u_h^* - u_h^k, \phi_h) + \nu \Delta t(\nabla u_h^*, \nabla \phi_h) + \Delta t((u_H^* \cdot \nabla)u_h^*, \phi_h) + \Delta t(\nabla p_h^k, \phi_h)$$

$$= \tau \Delta t(u_H^* - u_H^k, \phi_h) + \Delta t(f, \phi_h), \forall \phi_h \in X_h$$
 - 5: **Trouver** p_h^{k+1} **dans** Y_h $(\alpha(\text{div } \nabla p_h^{k+1} - \text{div } \nabla p_h^k), \chi_h) = (\frac{\text{div } u_h^*}{\Delta t}, \chi_h), \forall \chi_h \in Y_h$
 - 6: **Trouver** u_h^{k+1} **dans** X_h $(u_h^{k+1} - u_h^* + \alpha \Delta t(\nabla p_h^{k+1} - \nabla p_h^k), \phi_h) = 0, \forall \phi_h \in X_h$
 - 7: **Résoudre dans** X_H $(u_H^{k+1} - u_H^k, \psi_H) = 0, \forall \psi_H \in X_H$
 - 8: **Résoudre dans** Y_H $(p_H^{k+1} - p_h^{k+1}, \chi_H) = 0, \forall \chi_H \in Y_H$
 - 9: **end for**
-

Algorithm 27 Deux grilles "Algo7"

- 1: **for** $k = 0, 1, \dots$ **do**
 - 2: **Trouver** u_H^* **dans** X_H
 - 3: $(\frac{u_H^* - u_H^k}{\Delta t}, \psi_H) + \nu(\nabla u_H^*, \nabla \psi_H) + ((u_H^* \cdot \nabla)u_H^*, \psi_H) + (\nabla p_H^k, \psi_H) = (f, \psi_H), \forall \psi_H \in X_H$
 - 4: **Trouver** p_H^{k+1} **dans** Y_H $(\alpha(\text{div } \nabla p_H^{k+1} - \text{div } \nabla p_H^k), \chi_H) = (\frac{\text{div } u_H^*}{\Delta t}, \chi_H), \forall \chi_H \in Y_H$
 - 5: **Trouver** u_H^{k+1} **dans** X_H $(u_H^{k+1} - u_H^* + \alpha \Delta t(\nabla p_H^{k+1} - \nabla p_H^k), \psi_H) = 0, \forall \psi_H \in X_H$
 - 6: **Trouver** u_h^* **dans** X_h

$$(1 + \tau \Delta t)(u_h^* - u_h^k, \phi_h) + \nu \Delta t(\nabla u_h^*, \nabla \phi_h) + \Delta t((u_h^k \cdot \nabla)u_h^k, \phi_h) + \Delta t(\nabla p_h^k, \phi_h)$$

$$= \tau \Delta t(u_H^* - u_H^k, \phi_h) + \Delta t(f, \phi_h), \forall \phi_h \in X_h$$
 - 7: **Trouver** p_h^{k+1} **dans** Y_h $(\alpha \Delta t(\text{div } \nabla p_h^{k+1} - \text{div } \nabla p_h^k), \chi_h) = (\frac{\text{div } u_h^*}{\Delta t}, \chi_h), \forall \chi_h \in Y_h$
 - 8: **Trouver** u_h^{k+1} **dans** X_h $(u_h^{k+1} - u_h^* + \alpha \Delta t(\nabla p_h^{k+1} - \nabla p_h^k), \phi_h) = 0, \forall \phi_h \in X_h$
 - 9: **end for**
-

La même variante est aussi considérée pour le cas de la résolution de Navier-Stokes complet sur la grille grossière (**Algorithme 27**).

Algorithm 28 Variante de l'algorithme (Deux grilles "Algo7") : Deux grilles "Algo8"

- 1: **for** $k = 0, 1, \dots$ **do**
- 2: **Trouver** u_H^* **dans** X_H
- 3: $(\frac{u_H^* - u_H^k}{\Delta t}, \psi_H) + \nu(\nabla u_H^*, \nabla \psi_H) + ((u_H^* \cdot \nabla)u_H^*, \psi_H) + (\nabla p_H^k, \psi_H) = (f, \psi_H), \forall \psi_H \in X_H$
- 4: **Trouver** p_H^{k+1} **dans** Y_H $(\alpha(\text{div } \nabla p_H^{k+1} - \text{div } \nabla p_H^k), \chi_H) = (\frac{\text{div } u_H^*}{\Delta t}, \chi_H), \forall \chi_H \in Y_H$
- 5: **Trouver** u_H^{k+1} **dans** X_H $(u_H^{k+1} - u_H^* + \alpha \Delta t (\nabla p_H^{k+1} - \nabla p_H^k), \psi_H) = 0, \forall \psi_H \in X_H$
- 6: **Trouver** u_h^* **dans** X_h

$$(1 + \tau \Delta t)(u_h^* - u_h^k, \phi_h) + \nu \Delta t (\nabla u_h^*, \nabla \phi_h) + \Delta t ((u_h^* \cdot \nabla)u_h^*, \phi_h) + \Delta t (\nabla p_h^k, \phi_h) = \tau \Delta t (u_H^* - u_H^k, \phi_h) + \Delta t (f, \phi_h), \forall \phi_h \in X_h$$

- 7: **Trouver** p_h^{k+1} **dans** Y_h $(\alpha(\text{div } \nabla p_h^{k+1} - \text{div } \nabla p_h^k), \chi_h) = (\frac{\text{div } u_h^*}{\Delta t}, \chi_h), \forall \chi_h \in Y_h$
 - 8: **Trouver** u_h^{k+1} **dans** X_h $(u_h^{k+1} - u_h^* + \alpha \Delta t (\nabla p_h^{k+1} - \nabla p_h^k), \phi_h) = 0, \forall \phi_h \in X_h$
 - 9: **end for**
-

4.5 Résultats numériques : cavité entraînée

Nous simulons les équations de Navier-Stokes en 2D. Nous construisons un maillage carré $[0, 1] \times [0, 1]$ en faisant varier le nombre de noeuds sur la grille grossière et celui sur la grille fine de dimensions $\dim(X_H) = 6561, \dim(Y_H) = 1681, \dim(X_h) = 25921, \dim(Y_h) = 6561$ et nous choisissons les éléments finis de Taylor-Hood $\mathbb{P}_2/\mathbb{P}_1$ pour la vitesse et la pression respectivement. Nous présentons les résultats du flot de la cavité entraînée obtenus en adoptant la formulation variationnelle fournie par la technique de projection (Chorin-Temam) proposée par les deux étapes précédentes. Dans ce cas, la vitesse n'est imposée que dans la limite supérieure avec $u = (1; 0)$ et les conditions de Dirichlet homogènes sont imposées sur le reste de la frontière (cf. Fig. 4.1)

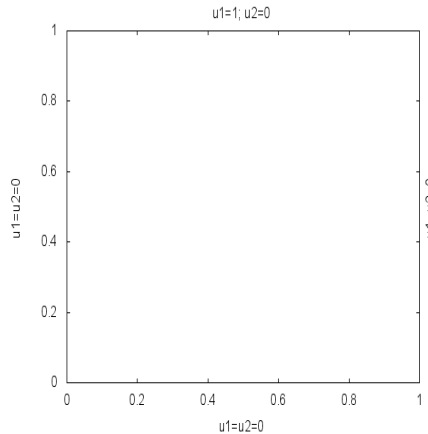


FIGURE 4.1 – Conditions aux bords

4.5.1 Méthode bi-grilles non incrémentale

Pour un nombre de Reynolds $Re = 100$, les dimensions des espaces grossiers et fin sont $\dim(X_H) = 6561$, $\dim(Y_H) = 1681$, $\dim(X_h) = 25921$, $\dim(Y_h) = 6561$ respectivement, un pas de temps $\Delta t = 10^{-2}$, un temps final $T = 17$, un coefficient de stabilité $\tau = 0.5$, nous comparons les résultats des **Algorithmes 21, 22, 23, 24** avec ceux obtenus par la résolution du schéma de référence (**Algorithme 19**) sur la grille fine.

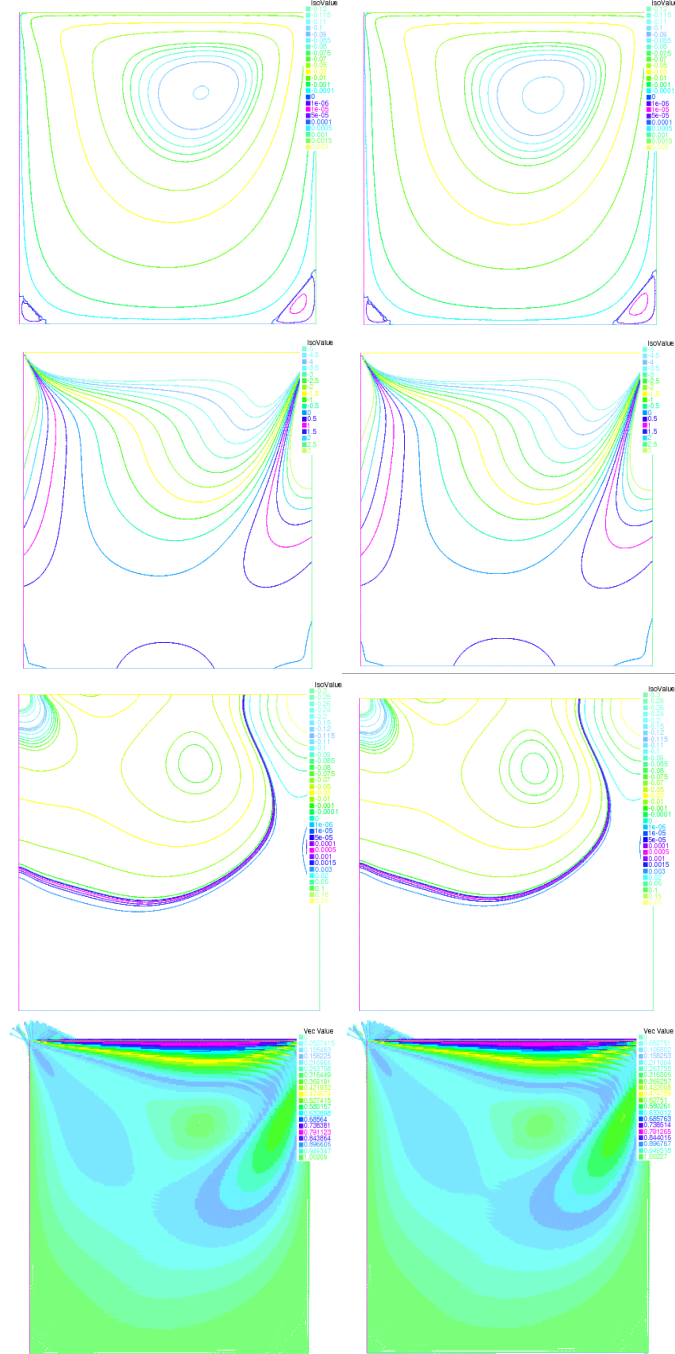


FIGURE 4.2 – De haut en bas : courant, vorticité, pression et vitesse, et de gauche à droite **Algorithmes 19** et **21**, pour $\Delta t = 10^{-2}$, $Re = 100$, $T = 17$, $\dim(X_H) = 6561$, $\dim(Y_H) = 1681$, $\dim(X_h) = 25921$, $\dim(Y_h) = 6561$.

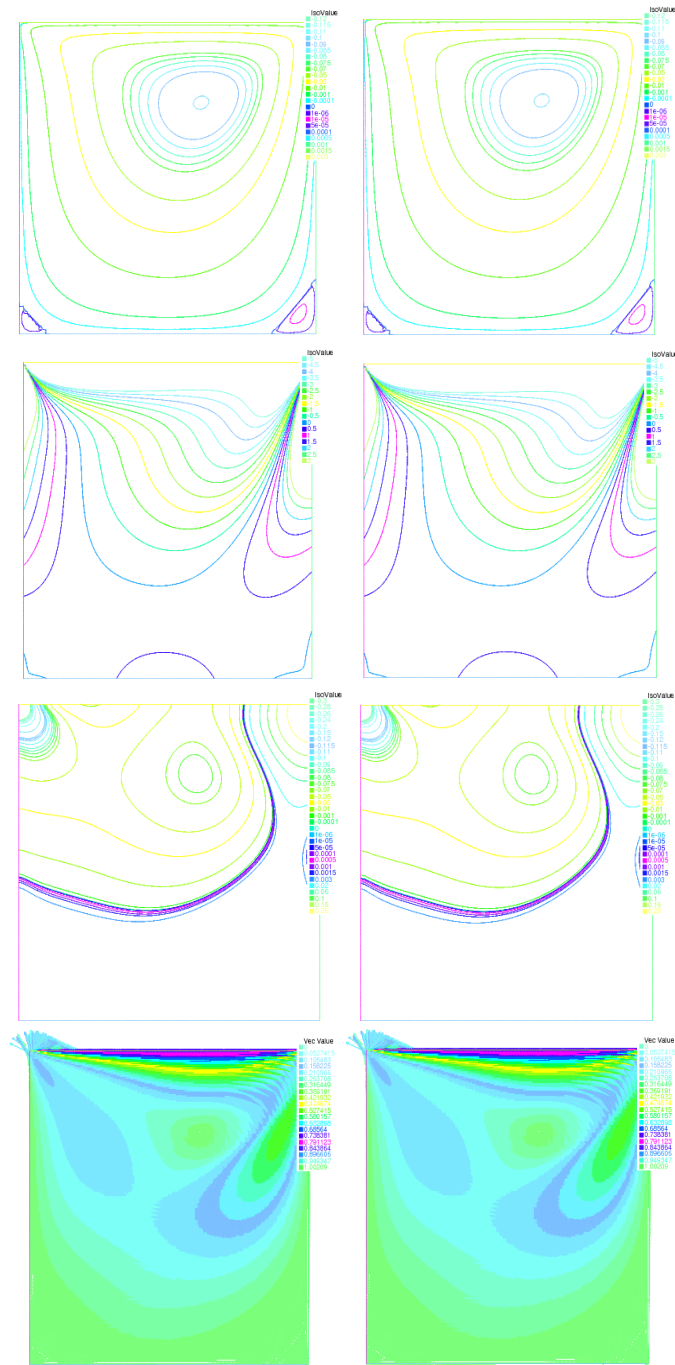


FIGURE 4.3 – De haut en bas : courant, vorticité, pression et vitesse, et de gauche à droite **Algorithmes 19** et **22**, pour $\Delta t = 10^{-2}$, $Re = 100$, $T = 17$, $\dim(X_H) = 6561$, $\dim(Y_H) = 1681$, $\dim(X_h) = 25921$, $\dim(Y_h) = 6561$.

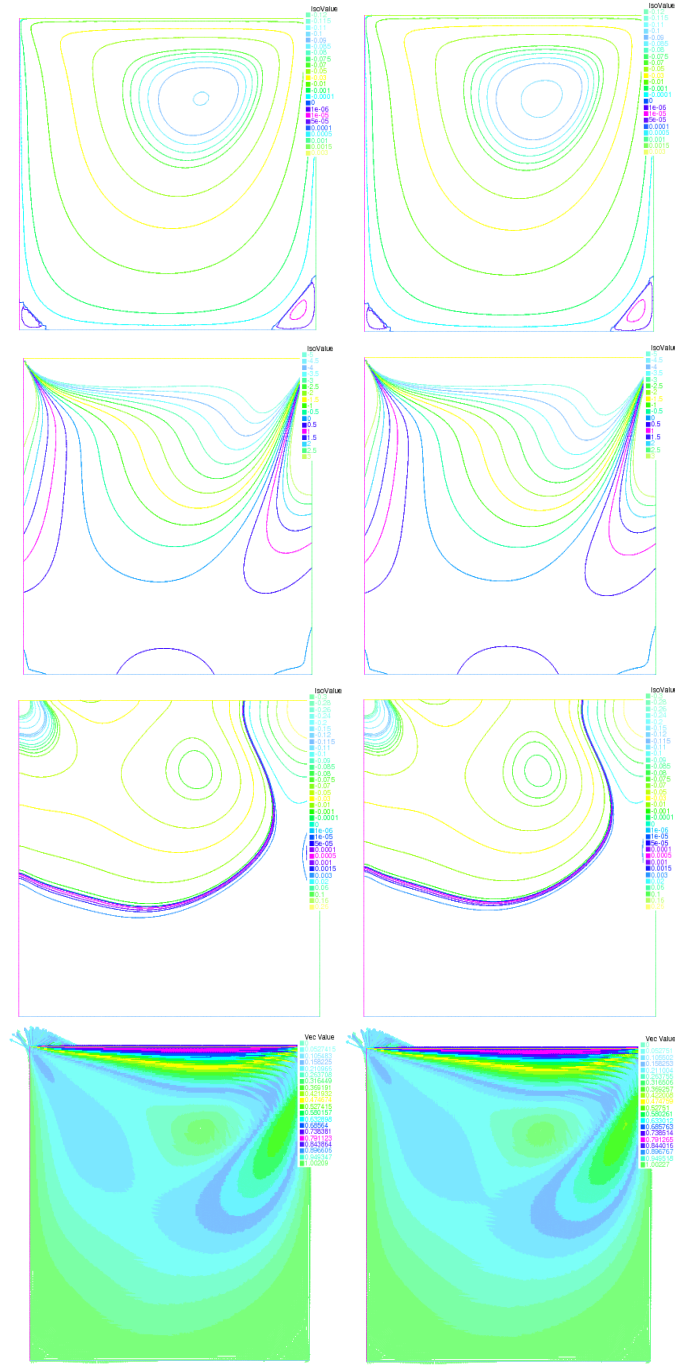


FIGURE 4.4 – De haut en bas : courant, vorticité, pression et vitesse, et de gauche à droite **Algorithmes 19** et **23**, pour $\Delta t = 10^{-2}$, $Re = 100$, $T = 17$, $\dim(X_H) = 6561$, $\dim(Y_H) = 1681$, $\dim(X_h) = 25921$, $\dim(Y_h) = 6561$.

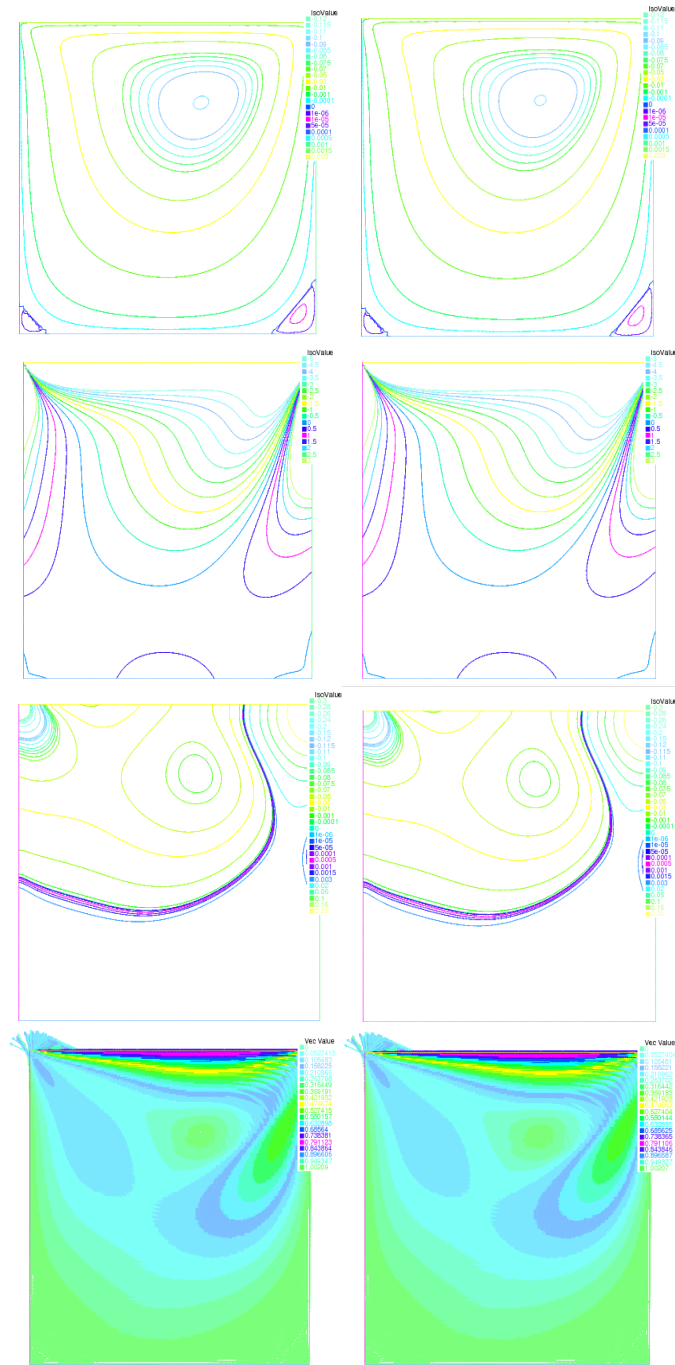


FIGURE 4.5 – De haut en bas : courant, vorticité, pression et vitesse, et de gauche à droite **Algorithmes 19** et **24**, pour $\Delta t = 10^{-2}$, $Re = 100$, $T = 17$, $\dim(X_H) = 6561$, $\dim(Y_H) = 1681$, $\dim(X_h) = 25921$, $\dim(Y_h) = 6561$.

Aussi pour un nombre de Reynolds $Re = 400$, les dimensions des grilles grossière et fine $\dim(X_H) = 6561, \dim(Y_H) = 1681, \dim(X_h) = 25921, \dim(Y_h) = 6561$ respectivement, un pas de temps $\Delta t = 10^{-2}$, un temps final $T = 35$, nous comparons les résultats des **Algorithmes 21, 22, 23, 24** avec ceux obtenus par la résolution du schéma de référence (**Algorithme 19**) sur la grille fine.

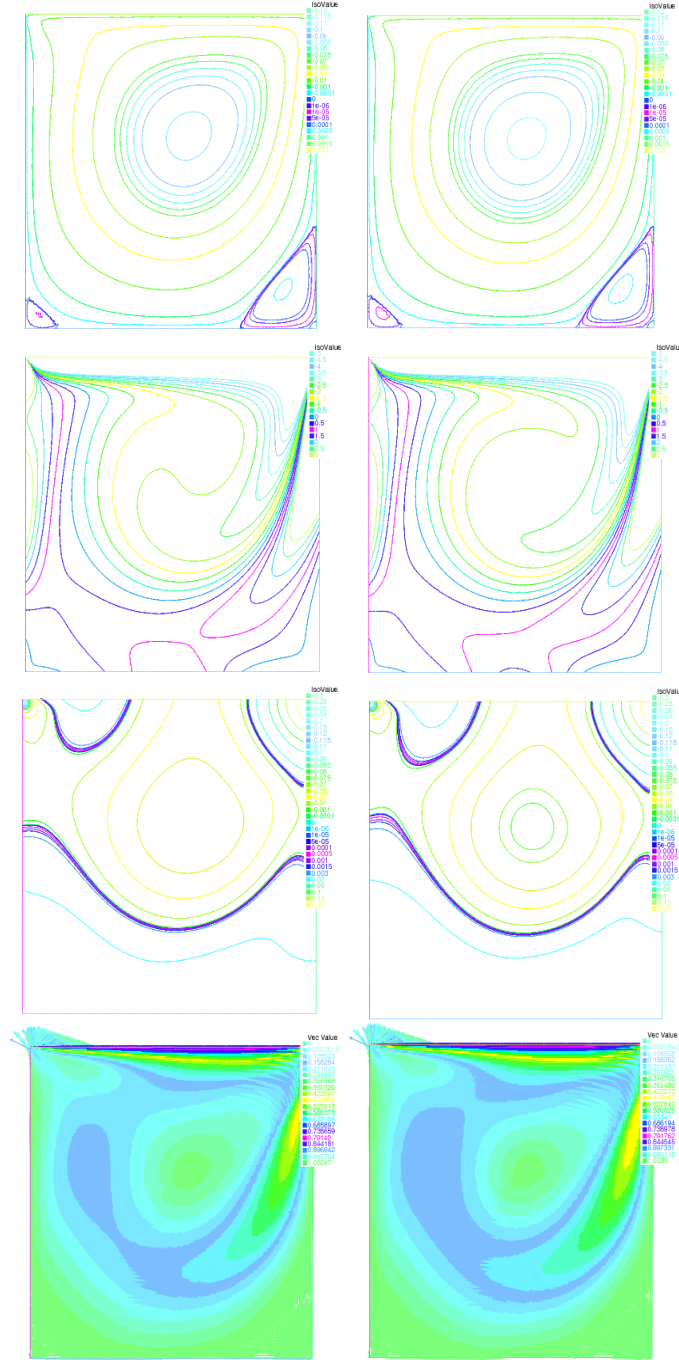


FIGURE 4.6 – De haut en bas : courant, vorticité, pression et vitesse, et de gauche à droite **Algorithmes 19** et **21**, pour $\Delta t = 10^{-2}, Re = 400, T = 35, \dim(X_H) = 6561, \dim(Y_H) = 1681, \dim(X_h) = 25921, \dim(Y_h) = 6561$.

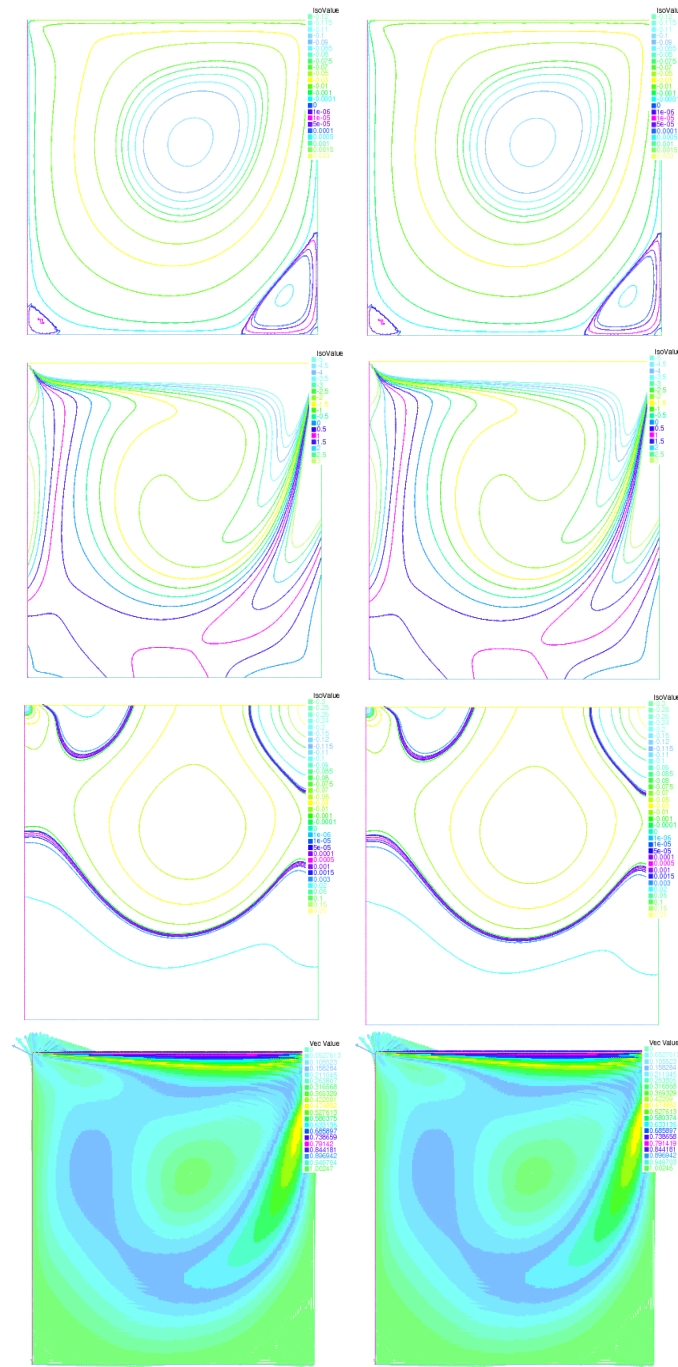


FIGURE 4.7 – De haut en bas : courant, vorticité, pression et vitesse, et de gauche à droite **Algorithmes 19** et **22**, pour $\Delta t = 10^{-2}$, $Re = 400$, $T = 35$, $\dim(X_H) = 6561$, $\dim(Y_H) = 1681$, $\dim(X_h) = 25921$, $\dim(Y_h) = 6561$.

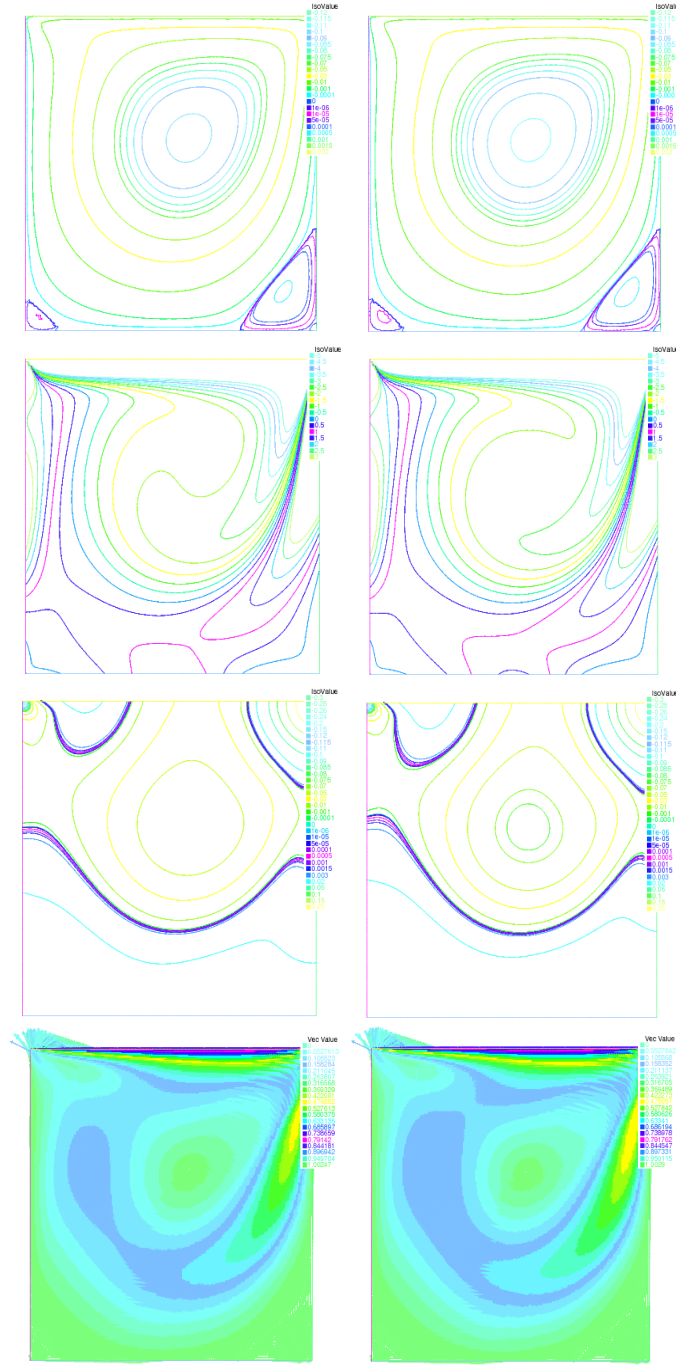


FIGURE 4.8 – De haut en bas : courant, vorticité, pression et vitesse, et de gauche à droite **Algorithmes 19** et **23**, pour $\Delta t = 10^{-2}$, $Re = 400$, $T = 35$, $\dim(X_H) = 6561$, $\dim(Y_H) = 1681$, $\dim(X_h) = 25921$, $\dim(Y_h) = 6561$.

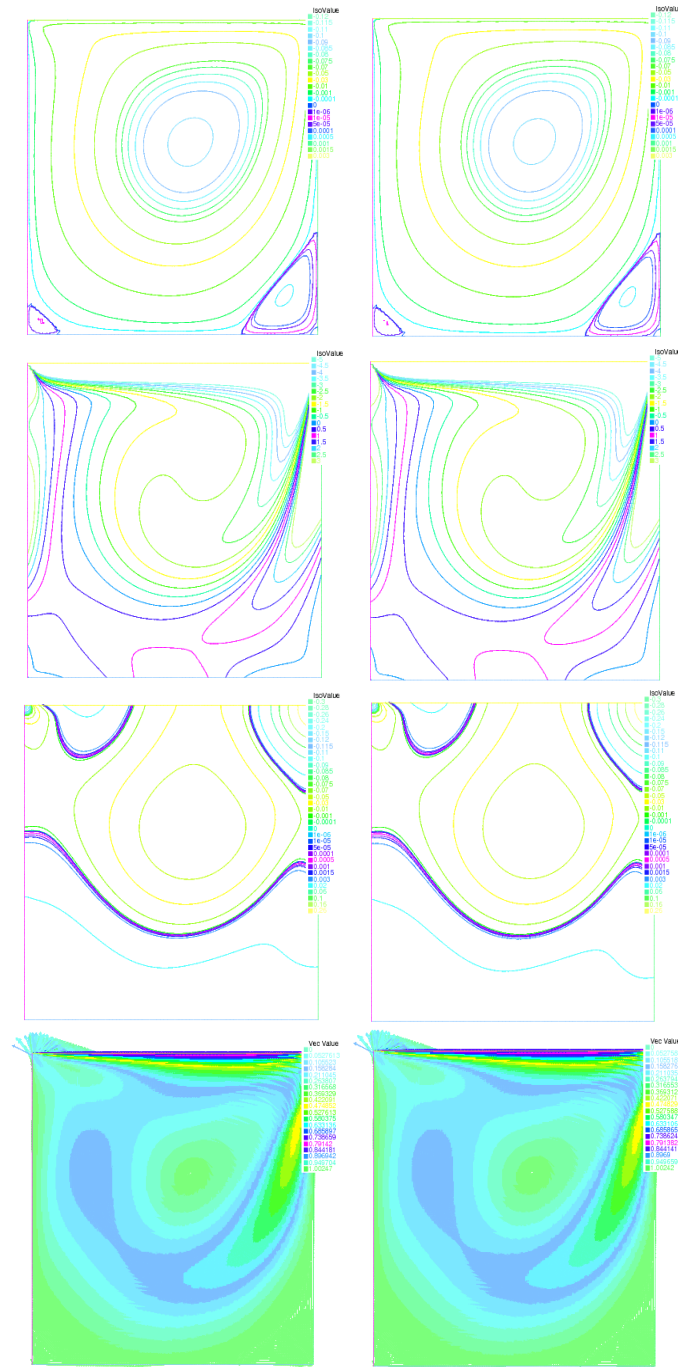


FIGURE 4.9 – De haut en bas : courant, vorticité, pression et vitesse, et de gauche à droite **Algorithmes 19** et **24**, pour $\Delta t = 10^{-2}$, $Re = 400$, $T = 35$, $\dim(X_H) = 6561$, $\dim(Y_H) = 1681$, $\dim(X_h) = 25921$, $\dim(Y_h) = 6561$.

Aussi pour un nombre de Reynolds $Re = 1000$, les dimensions des grilles grossière et fine $\dim(X_H) = 6561, \dim(Y_H) = 1681, \dim(X_h) = 25921, \dim(Y_h) = 6561$ respectivement, un pas de temps $\Delta t = 10^{-2}$, un temps final $T = 56$, nous comparons les résultats des **Algorithmes 21, 22, 23, 24** avec ceux obtenus par la résolution du schéma de référence (**Algorithme 19**) sur la grille fine.

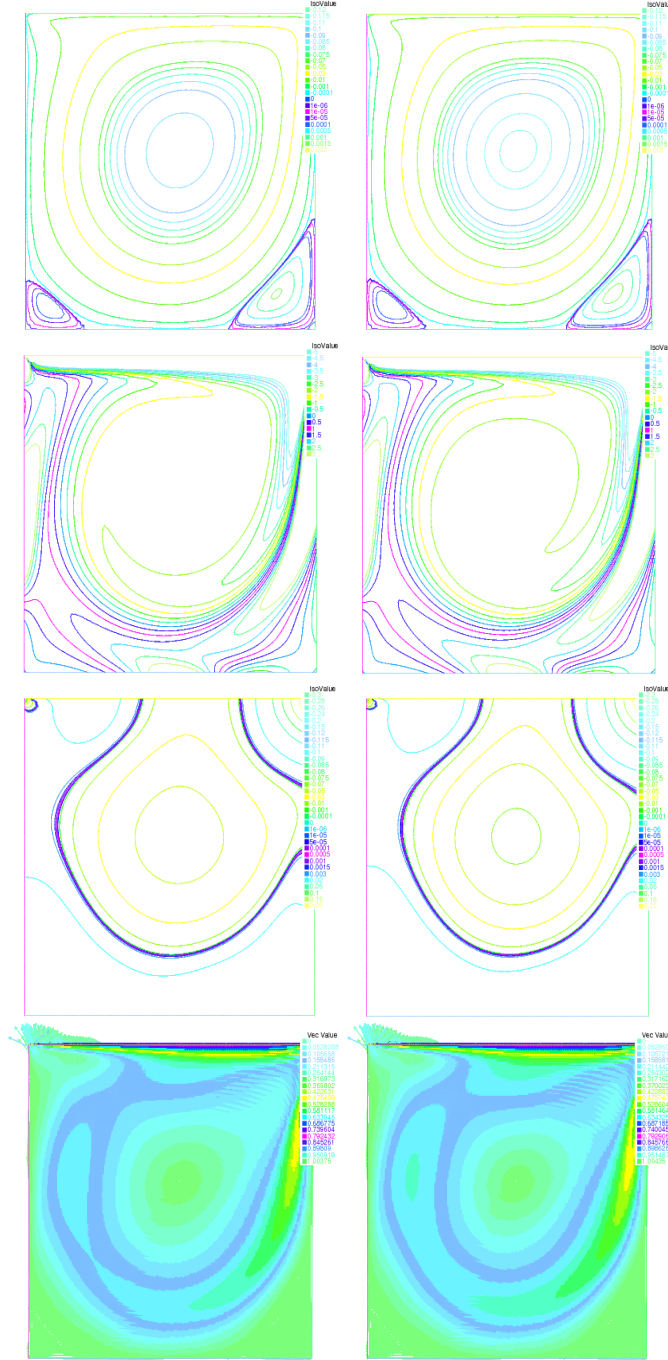


FIGURE 4.10 – De haut en bas : courant, vorticité, pression et vitesse, et de gauche à droite **Algorithmes 19** et **21**, pour $\Delta t = 5 \times 10^{-3}, Re = 1000, T = 56, \dim(X_H) = 6561, \dim(Y_H) = 1681, \dim(X_h) = 25921, \dim(Y_h) = 6561$.

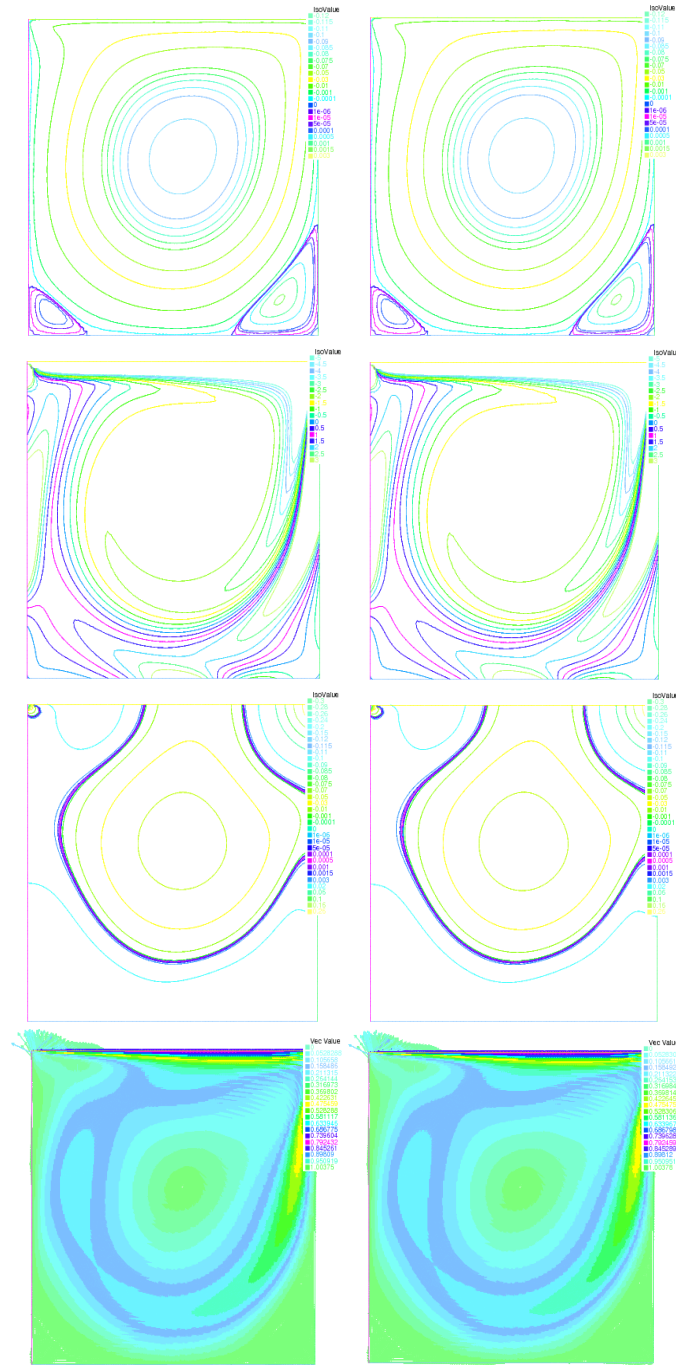


FIGURE 4.11 – De haut en bas : courant, vorticité, pression et vitesse, et de gauche à droite **Algorithmes 19** et **22**, pour $\Delta t = 5 \times 10^{-3}$, $Re = 1000$, $T = 56$, $\dim(X_H) = 6561$, $\dim(Y_H) = 1681$, $\dim(X_h) = 25921$, $\dim(Y_h) = 6561$.

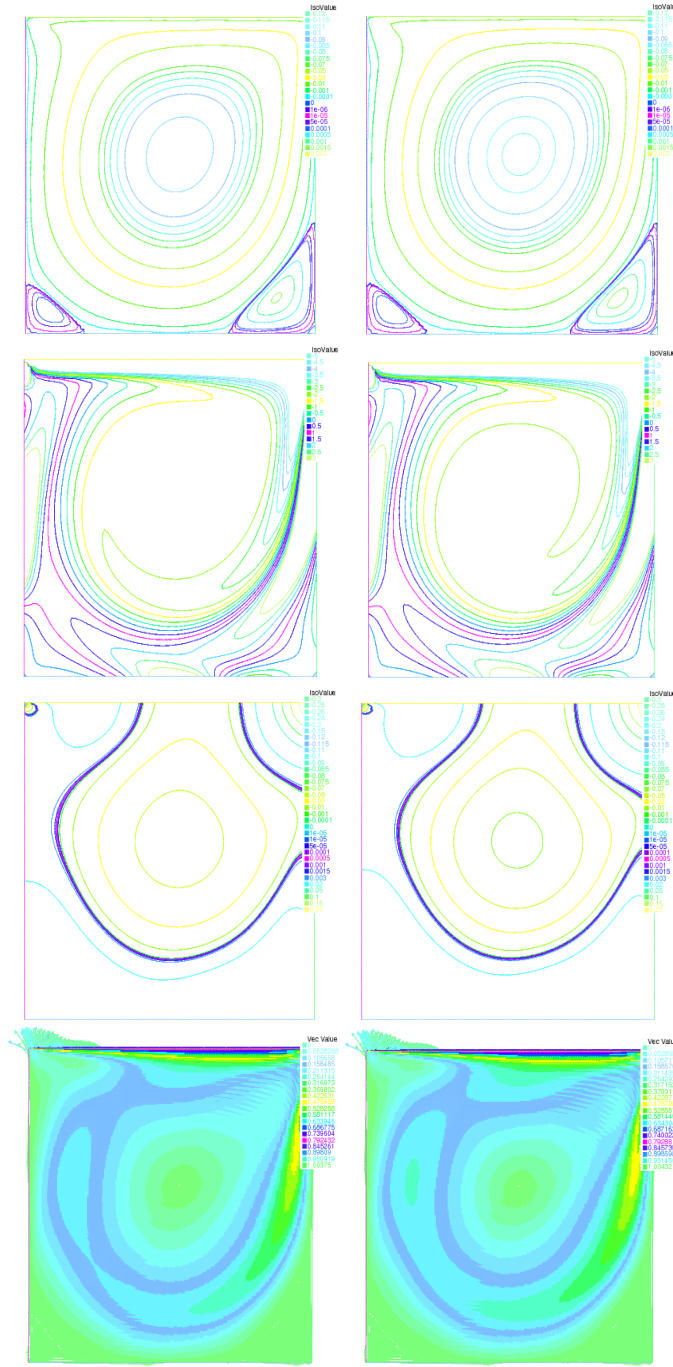


FIGURE 4.12 – De haut en bas : courant, vorticité, pression et vitesse, et de gauche à droite **Algorithmes 19** et **23**, pour $\Delta t = 5 \times 10^{-3}$, $Re = 1000$, $T = 56$, $\dim(X_H) = 6561$, $\dim(Y_H) = 1681$, $\dim(X_h) = 25921$, $\dim(Y_h) = 6561$.

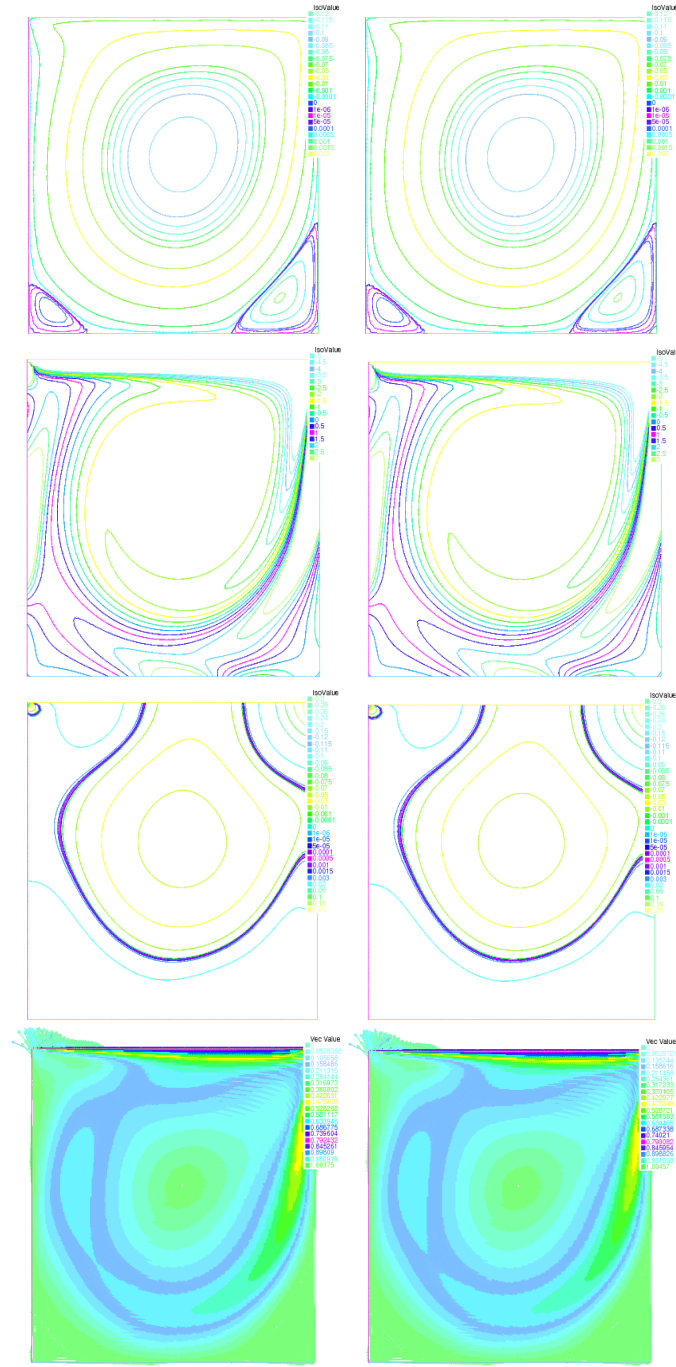


FIGURE 4.13 – De haut en bas : courant, vorticité, pression et vitesse, et de gauche à droite **Algorithmes 19** et **24**, pour $\Delta t = 5 \times 10^{-3}$, $Re = 1000$, $T = 56$, $\dim(X_H) = 6561$, $\dim(Y_H) = 1681$, $\dim(X_h) = 25921$, $\dim(Y_h) = 6561$.

Nous présentons dans les Fig. 4.14, 4.15, 4.16, 4.17 pour des Reynolds élevés, une comparaison entre le schéma sur une grille fine (**Algorithme 19**) et celui de la méthode de séparation d'échelles (**Algorithme 21**).

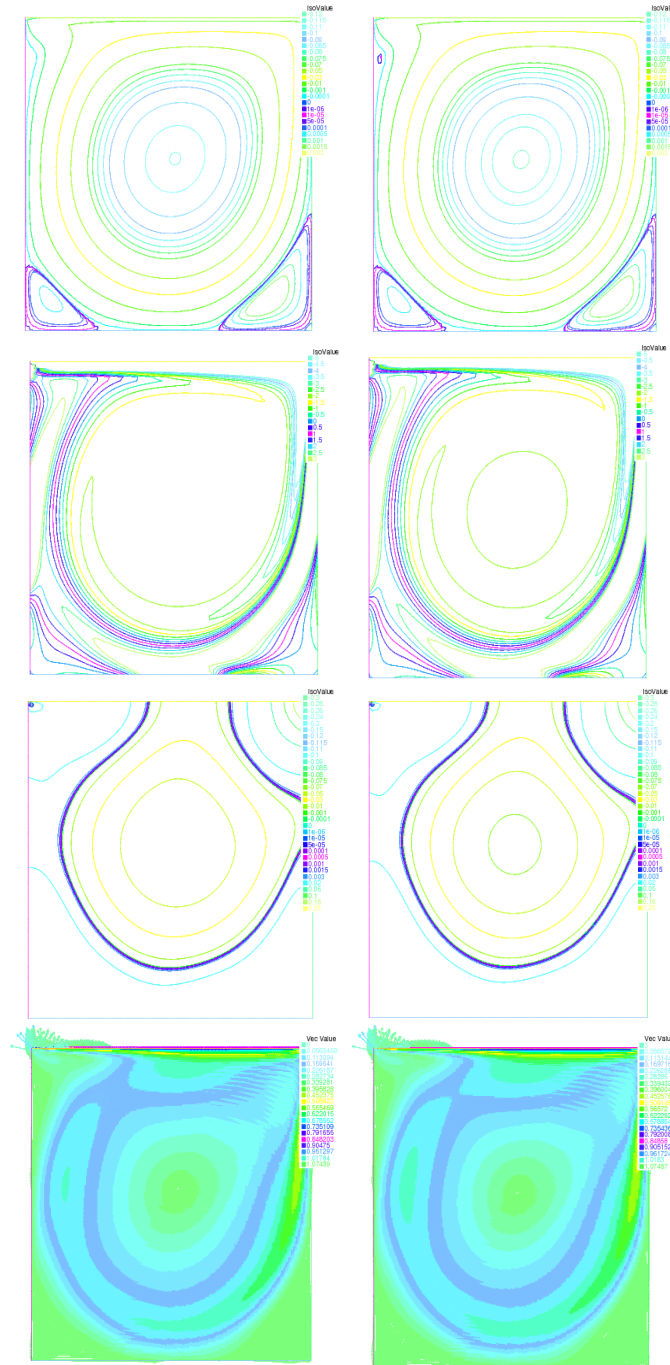


FIGURE 4.14 – De haut en bas : courant, vorticité, pression et vitesse, et de gauche à droite **Algorithmes 19** et **21**, pour $\Delta t = 10^{-3}$, $Re = 2000$, $T = 70$, $\dim(X_H) = 6561$, $\dim(Y_H) = 1681$, $\dim(X_h) = 25921$, $\dim(Y_h) = 6561$.

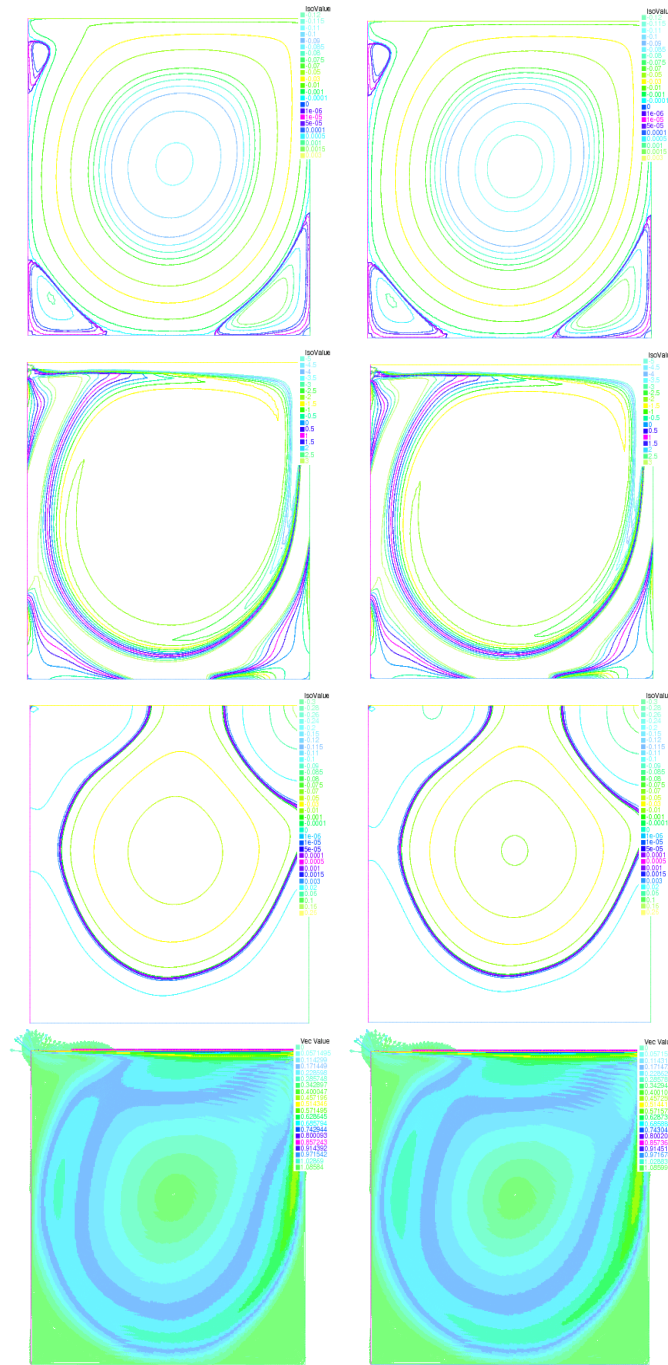


FIGURE 4.15 – De haut en bas : courant, vorticité, pression et vitesse, et de gauche à droite **Algorithmes 19** et **21**, pour $\Delta t = 10^{-3}$, $Re = 3200$, $T = 130$, $\dim(X_H) = 6561$, $\dim(Y_H) = 1681$, $\dim(X_h) = 25921$, $\dim(Y_h) = 6561$.

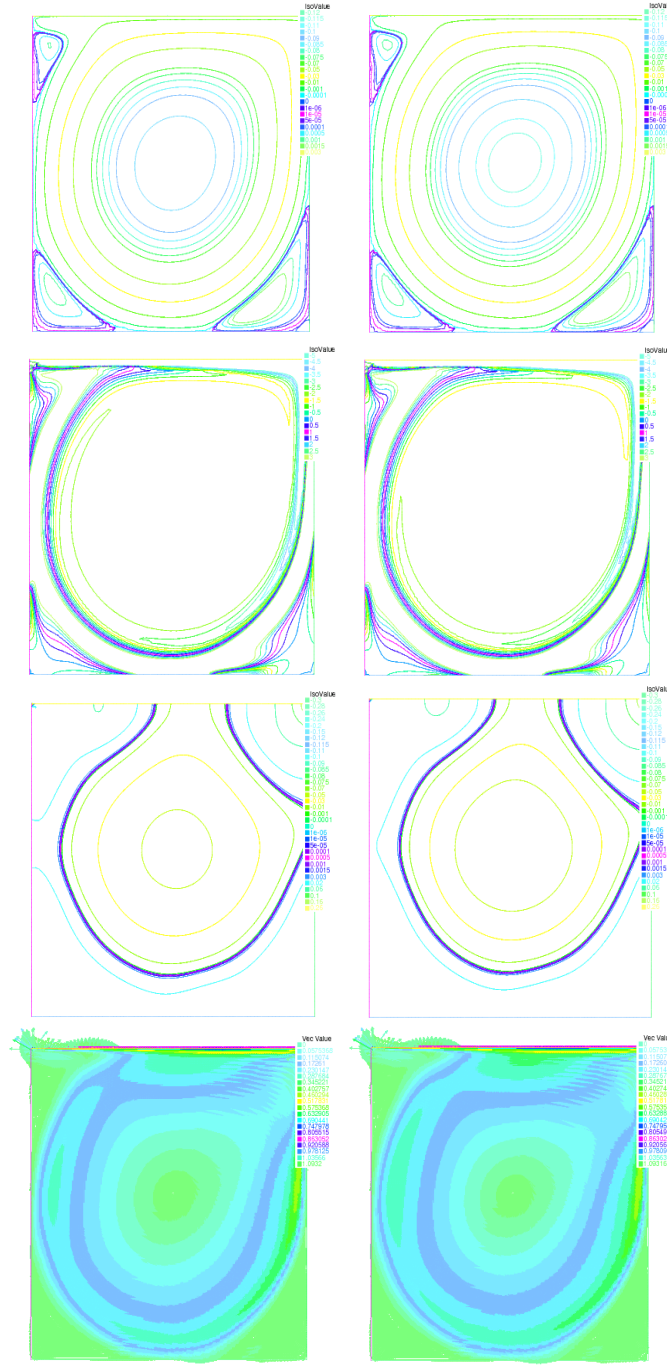


FIGURE 4.16 – De haut en bas : courant, vorticité, pression et vitesse, et de gauche à droite **Algorithmes 19** et **21**, pour $\Delta t = 10^{-3}$, $Re = 5000$, $T = 148$, $\dim(X_H) = 6561$, $\dim(Y_H) = 1681$, $\dim(X_h) = 25921$, $\dim(Y_h) = 6561$.

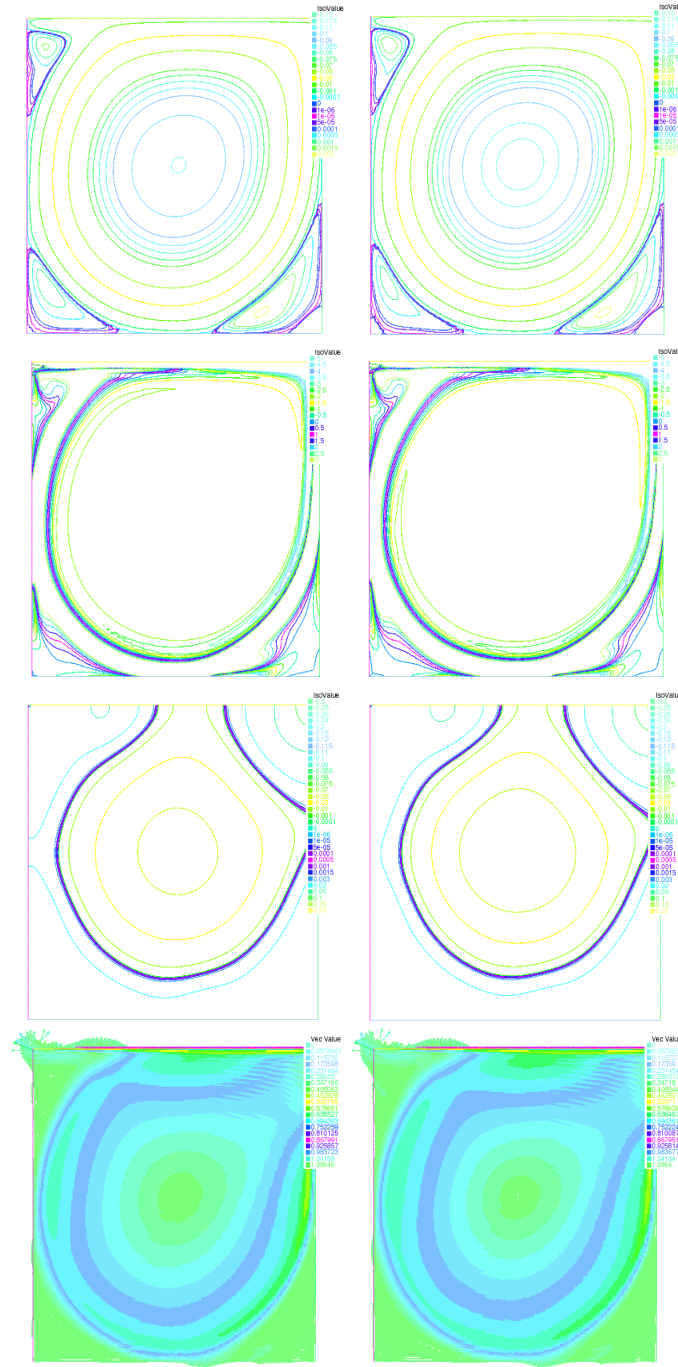


FIGURE 4.17 – De haut en bas : courant, vorticité, pression et vitesse, et de gauche à droite **Algorithmes 19** et **21**, pour $\Delta t = 5 \times 10^{-4}$, $Re = 7500$, $T = 195$, $\dim(X_H) = 6561$, $\dim(Y_H) = 1681$, $\dim(X_h) = 25921$, $\dim(Y_h) = 6561$.

4.5.1.1 Les extrema des fonctions de courant et de vorticité

La cavité entraînée est un problème de référence qui a été largement étudié même pour les grands nombres de Reynolds cf. Shen et al. [186]. Les lignes de courant et les contours de vorticité sont en accord avec ceux présentés dans Bruneau et al. [31], Goyon et al. [118], et Ghia et al. [108]. Nous présentons dans les Tab. 4.1 - 4.7 les extrema de la fonction de courant le long des axes au

tourbillon principal (PV) et le contre tourbillon droit (BRV). Nous comparons nos résultats avec les localisations de Pascal [179] pour $Re = 100, 1000$ en éléments finis et Ghia et al. [108] pour $Re = 400$ en différences finies et Bruneau et al. [31] pour $Re = 100, 1000$ en différences finies. Nous notons la compatibilité.

Re=100							
	Ref1	Algo1	Algo2	Algo3	Algo4	Pascal[179]	Bruneau[31]
N_c grossière	Eléments finis	Eléments finis	Eléments finis	Eléments finis	Eléments finis	Eléments finis	Différences finies
		40	40	40	40		
N_f fine	80	80	80	80	80	65	129
Temps Δt	10^{-2}	10^{-2}	10^{-2}	10^{-2}	10^{-2}	0.1	
PV							
x	0.6125	0.6125	0.6125	0.6125	0.6125	0.6094	0.6172
y	0.7375	0.7375	0.7375	0.7375	0.7375	0.7344	0.7344
$\psi(x, y)$	-0.100406	-0.103141	-0.100403	-0.103156	-0.100254	-0.1036	-0.1026
BRV							
x	0.9375	0.9375	0.9375	0.9375	0.9375	0.9531	0.9453
y	0.0625	0.0625	0.0625	0.0625	0.0625	0.0625	0.0625
$\psi(x, y)$	$1.457E^{-5}$	$1.609E^{-5}$	$1.457E^{-5}$	$1.609E^{-5}$	$1.437E^{-5}$	$1.09E^{-5}$	$1.23E^{-5}$

TABLE 4.1 – Navier-Stokes non incrémental $\Delta t = 10^{-2}$, $\tau = 0.5$, $Re = 100$, $T = 17$ et $\mathbb{P}_2/\mathbb{P}_1$; PV= Tourbillon principal ; BRV=Contre tourbillondroit.

Re=400						
	Ref1	Algo1	Algo2	Algo3	Algo4	Ghia [108]
N_c grossière	Eléments finis	Eléments finis	Eléments finis	Eléments finis	Eléments finis	Différences finies
		40	40	40	40	
N_f fine	80	80	80	80	80	257
Temps Δt	10^{-2}	10^{-2}	10^{-2}	10^{-2}	10^{-2}	
PV						
x	0.5625	0.55	0.5625	0.55	0.5625	0.5547
y	0.6125	0.6	0.6125	0.6	0.6125	0.6055
$\psi(x, y)$	-0.102888	-0.112556	-0.102874	-0.112616	-0.102541	-0.1139
BRV						
x	0.8875	0.8875	0.8875	0.8875	0.8875	0.8906
y	0.125	0.125	0.125	0.125	0.125	0.125
$\psi(x, y)$	$5.715E^{-4}$	$6.429E^{-4}$	$5.715E^{-4}$	$6.433E^{-4}$	$5.604E^{-4}$	$6.423E^{-4}$

TABLE 4.2 – Navier-Stokes non incrémental $\Delta t = 10^{-2}$, $\tau = 0.5$, $Re = 400$, $T = 35$ et $\mathbb{P}_2/\mathbb{P}_1$, PV= Tourbillon principal ; BRV=Contre tourbillondroit.

Re=1000							
	Ref1	Algo1	Algo2	Algo3	Algo4	Pascal[179]	Bruneau[31]
N_c grossière	Eléments finis	Eléments finis	Eléments finis	Eléments finis	Eléments finis	Eléments finis	Différences finies
		40	40	40	40		
N_f fine	80	80	80	80	80	65	256
Temps Δt	5×10^{-3}	5×10^{-3}	5×10^{-3}	5×10^{-3}	5×10^{-3}	0.1	
PV							
x	0.5375	0.525	0.5375	0.525	0.5375	0.5313	0.5313
y	0.5625	0.5625	0.5625	0.5625	0.5625	0.5625	0.5586
$\psi(x, y)$	-0.105742	-0.117156	-0.10568	-0.117193	-0.105628	-0.1231	-0.1163
BRV							
x	0.8625	0.8625	0.8625	0.8625	0.8625	0.8594	0.8711
y	0.1125	0.1125	0.1125	0.1125	0.1125	0.1094	0.1094
$\psi(x, y)$	$1.550E^{-3}$	$1.687E^{-3}$	$1.548E^{-3}$	$1.688E^{-3}$	$1.533E^{-3}$	$1.69E^{-3}$	$1.91E^{-3}$

TABLE 4.3 – Navier-Stokes non incrémental $\Delta t = 5 \times 10^{-3}$, $\tau = 0.5$, $Re = 1000$, $T = 56$ et $\mathbb{P}_2/\mathbb{P}_1$; PV= Tourbillon principal; BRV=Contre tourbillondroit.

Nous constatons que les **Algorithmes 21** et **23** dans lesquels nous approchons le terme non linéaire par $u_h^k \cdot \nabla u_h^k$ sont plus proches des résultats de la littérature alors qu'utiliser la variante $u_H^* \cdot \nabla u_h^*$ nous fait éloigner des études déjà réalisées. Nous nous limitons dans les Tab. 4.4, 4.5, 4.6, 4.7 à l'**Algorithme 21** pour des Reynolds supérieurs à 2000.

Re=2000					
	Ref1	Algo1	Vanka [208]	Gupta [128]	Hou [134]
N_c grossière	Eléments finis	Eléments finis	Différences finies	Différences finies	Lattice Boltzmann
		40			
N_f fine	80	80	321	81	256
Temps Δt	10^{-3}	10^{-3}			
PV					
x	0.525	0.525	0.5250	0.5250	0.5255
y	0.55	0.55	0.5500	0.5500	0.5490
$\psi(x, y)$	-0.115	-0.120	-0.112	-0.118	-0.120
BRV					
x	0.85	0.85	0.8375	0.8375	0.8471
y	0.1	0.1	0.0938	0.1	0.0980
$\psi(x, y)$	$2.36E^{-3}$	$2.41E^{-3}$	$2.60E^{-3}$	$2.41E^{-3}$	$2.44E^{-3}$

TABLE 4.4 – Navier-Stokes non incrémental $\Delta t = 10^{-3}$, $\tau = 0.5$, $Re = 2000$, $T = 70$ et $\mathbb{P}_2/\mathbb{P}_1$; PV= Tourbillon principal; BRV=Contre tourbillon droit.

Re=3200				
	Ref1	Algo1	Ghia [108]	Goyon [118]
N_c grossière	Eléments finis	Eléments finis	Différences finies	Différences finies
		40		
N_f fine	80	80	257	129
Temps Δt	10^{-3}	10^{-3}		10^{-2}
PV				
x	0.525	0.5125	0.5165	0.5234
y	0.5375	0.5375	0.5469	0.5468
$\psi(x, y)$	-0.11186	-0.11967	-0.1204	-0.1122
BRV				
x	0.825	0.825	0.8125	0.8281
y	0.0875	0.0875	0.0859	0.0859
$\psi(x, y)$	$2.660E^{-3}$	$2.737E^{-3}$	$3.1395E^{-3}$	$2.62E^{-3}$

TABLE 4.5 – Navier-Stokes non incrémental $\Delta t = 10^{-3}$, $\tau = 0.5$, $Re = 3200$, $T = 130$ et $\mathbb{P}_2/\mathbb{P}_1$, PV= Tourbillon principal ; BRV=Contre tourbillon droit.

Re=5000					
	Ref1	Algo1	Ghia [108]	Goyon [118]	Bruneau[31]
N_c grossière	Eléments finis	Eléments finis	Différences finies	Différences finies	Différences finies
		40			
N_f fine	80	80	257	257	512
Temps Δt	10^{-3}	10^{-3}		5×10^{-3}	
PV					
x	0.5125	0.5125	0.5117	0.5156	0.5156
y	0.5375	0.5375	0.5352	0.5391	0.5313
$\psi(x, y)$	-0.1086	-0.1191	-0.1189	-0.1115	-0.1142
BRV					
x	0.8125	0.812	0.8086	0.8086	0.8301
y	0.075	0.075	0.0742	0.0742	0.0703
$\psi(x, y)$	$2.852E^{-3}$	$2.889E^{-3}$	$3.083E^{-3}$	$2.99E^{-3}$	$4.55E^{-3}$

TABLE 4.6 – Navier-Stokes non incrémental $\Delta t = 10^{-3}$, $\tau = 0.5$, $Re = 5000$, $T = 148$ et $\mathbb{P}_2/\mathbb{P}_1$, PV= Tourbillon principal ; BRV=Contre tourbillon droit.

Re=7500					
	Ref1	Algo1	Ghia [108]	Goyon [118]	Bruneau[31]
N_c grossière	Eléments finis	Eléments finis	Différences finies	Différences finies	Différences finies
		40			
N_f fine	80	80	257	257	256
Temps Δt	10^{-3}	10^{-3}		5×10^{-3}	
PV					
x	0.5125	0.5125	0.5117	0.5156	0.5156
y	0.5375	0.5375	0.5322	0.5312	0.5234
$\psi(x, y)$	-0.1102	-0.1179	-0.1199	-0.1052	-0.1113
BRV					
x	0.7875	0.7875	0.7813	0.8008	0.8828
y	0.0625	0.0625	0.0625	0.0644	0.0820
$\psi(x, y)$	$3.174E^{-3}$	$3.171E^{-3}$	$3.284E^{-3}$	$3.06E^{-3}$	$8.32E^{-3}$

TABLE 4.7 – Navier-Stokes non incrémental $\Delta t = 5 \times 10^{-4}$, $\tau = 0.5$, $Re = 7500$, $T = 195$ et $\mathbb{P}_2/\mathbb{P}_1$, PV= Tourbillon principal ; BRV=Contre tourbillondroit.

Nos résultats sont en accord avec ceux de la littérature Vanka [208], Gupta [128] et Hou [134] pour $Re = 2000$ et Ghia [108], Goyon [118] pour ($Re = 3200, 5000$ et 7500) et Bruneau [31] pour ($Re = 5000$ et 7500).

4.5.1.2 Comparaison en temps de calcul

Il apparaît dans les Fig. 4.18, 4.19 que nos schémas bi-grilles sont plus rapides que le schéma implicite (**Algorithme 19**) sur une grille fine mais que le gain en temps CPU n'est pas très important. Très probablement, et puisqu'une solution stationnaire est calculée, au voisinage de celle-ci, le schéma de référence ne fera qu'une seule itération non linéaire dans le pas de temps, cela signifie que son coût est identique à une itération d'un schéma semi-implicite ; donc le schéma bi-grilles coûte une itération implicite sur la grille grossière plus chère dans ces conditions.

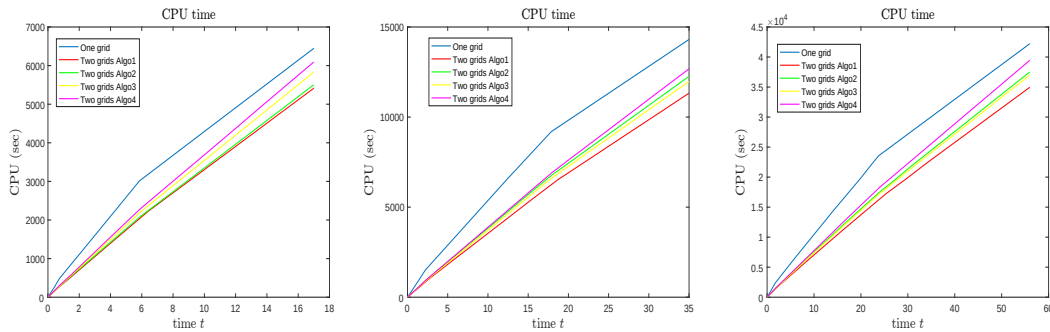


FIGURE 4.18 – De gauche à droite : $Re = 100, 400, 1000$; du temps CPU du schéma sur une grille fine (**Algorithme 19**) et celui de la méthode de séparation d'échelles respectivement.

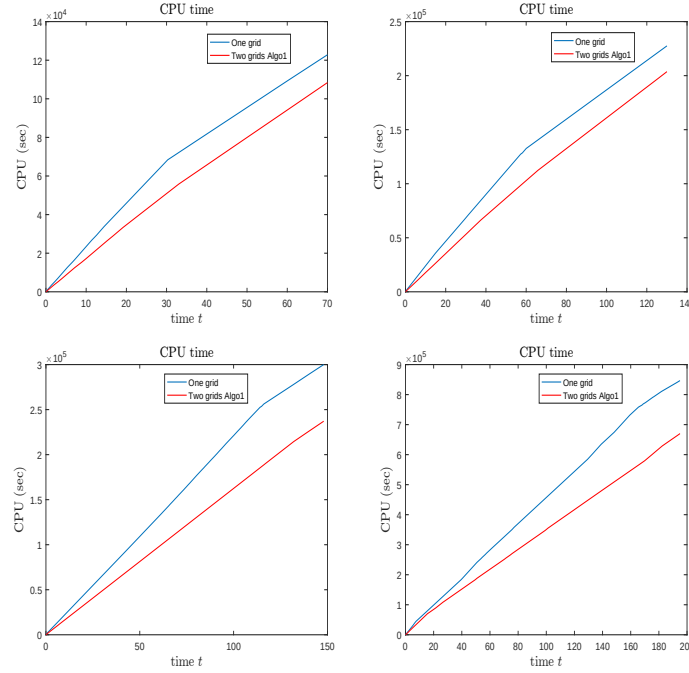


FIGURE 4.19 – De haut en bas et de gauche à droite : $Re = 2000, 3200, 5000, 7500$; du temps CPU du schéma sur une grille fine (**Algorithme 19**) et celui de la méthode de séparation d'échelles (**Algorithme 21**) respectivement.

Pour mesurer le temps de calcul, nous représentons le nombre d'itérations non linéaires en fonction du temps et calculons la norme L^2 de $\frac{\partial u}{\partial t}$, la différence de la vitesse à l'étape $k + 1$ et celle de l'étape précédente k divisée par Δt . Nous identifions le temps à partir duquel il y aura une seule itération et nous déduisons environ θ_s la valeur seuil de $\frac{\partial u}{\partial t}$. Nous avons alors un critère heuristique pour analyser la technique bi-grilles. Tant que $\|\frac{\partial u}{\partial t}\| > \theta_s$ nous appliquons le schéma bi-grilles et dès que $\|\frac{\partial u}{\partial t}\| < \theta_s$, la grille fine sera appliquée. Nous représentons dans les Tab. 4.8, 4.9, 4.10, 4.11 les temps de calcul pour les quatre algorithmes. Nous remarquons que le rapport de gain passe de 0,9 à 0,7.

80×40 points $T = 17$	Algorithme 21 Algo1	Algorithme 22 Algo2	Algorithme 23 Algo3	Algorithme 24 Algo4
t_{1G} (en sec.)	6448.39	6448.39	6448.39	6448.39
t_{2G} (en sec.)	5414	5504.2	5833.06	6094.01
$\frac{t_{2G}}{t_{1G}}$	0.8396	0.8536	0.9046	0.9450
θ_s	0.000528406	0.000528406	0.000528406	0.000528406
t_{1G} (en sec.)	3015.92	3015.92	3015.92	3015.92
t_{2G} (en sec.)	2036.78	2074.37	2190.44	2273.63
$\frac{t_{2G}}{t_{1G}}$	0.675	0.687	0.726	0.753

TABLE 4.8 – Navier-Stokes non incrémental $Re = 100, \Delta t = 10^{-2}$ et $\mathbb{P}_2/\mathbb{P}_1$

80×40 points $T = 35$	Algorithme 21 Algo1	Algorithme 22 Algo2	Algorithme 23 Algo3	Algorithme 24 Algo4
t_{1G} (en sec.)	14311.1	14311.1	14311.1	14311.1
t_{2G} (en sec.)	11330.3	12259.1	11978	12680.4
$\frac{t_{2G}}{t_{1G}}$	0.7917	0.8566	0.8369	0.8860
θ_s	0.000438706	0.000438706	0.000438706	0.000438706
t_{1G} (en sec.)	9191.99	9191.99	9191.99	9191.99
t_{2G} (en sec.)	6247.12	6756.45	6595.52	6886.03
$\frac{t_{2G}}{t_{1G}}$	0.679	0.735	0.717	0.749

 TABLE 4.9 – Navier-Stokes non incrémental $Re = 400, \Delta t = 10^{-2}$ et $\mathbb{P}_2/\mathbb{P}_1$

80×40 points $T = 56$	Algorithme 21 Algo1	Algorithme 22 Algo2	Algorithme 23 Algo3	Algorithme 24 Algo4
t_{1G} (en sec.)	42230.3	42230.3	42230.3	42230.3
t_{2G} (en sec.)	34967.7	37511.5	37009.8	39466.6
$\frac{t_{2G}}{t_{1G}}$	0.8280	0.8882	0.8764	0.9346
θ_s	0.000948096	0.000948096	0.000948096	0.000948096
t_{1G} (en sec.)	23564.3	23564.3	23564.3	23564.3
t_{2G} (en sec.)	16212.7	17382	17121.7	18146.9
$\frac{t_{2G}}{t_{1G}}$	0.688	0.737	0.726	0.77

 TABLE 4.10 – Navier-Stokes non incrémental $Re = 1000, \Delta t = 5 \times 10^{-3}$ et $\mathbb{P}_2/\mathbb{P}_1$

80×40 points Temps final	$Re = 2000$ $\Delta t = 10^{-3}$ $T = 70$	$Re = 3200$ $\Delta t = 10^{-3}$ $T = 130$	$Re = 5000$ $\Delta t = 10^{-3}$ $T = 148$	$Re = 7500$ $\Delta t = 5 \times 10^{-4}$ $T = 195$
t_{1G} (en sec.)	122826	227543	299998	846647
t_{2G} (en sec.)	108401	203692	237105	670244
$\frac{t_{2G}}{t_{1G}}$	0.8826	0.8952	0.7904	0.791
θ_s	0.00521845	0.00502797	0.00321512	0.00462578
t_{1G} (en sec.)	68396.7	132604	256175	758398
t_{2G} (en sec.)	51375.2	102922	188600	565283
$\frac{t_{2G}}{t_{1G}}$	0.751	0.776	0.736	0.745

 TABLE 4.11 – Navier-Stokes non incrémental **Algorithme 21** pour $Re = 2000, 3200, 5000, 7500$ et $\mathbb{P}_2/\mathbb{P}_1$

4.5.2 Méthode bi-grilles incrémentale

Pour un nombre de Reynolds $Re = 100$, les grilles grossière et fine de dimensions $\dim(X_H) = 6561$, $\dim(Y_H) = 1681$, $\dim(X_h) = 25921$, $\dim(Y_h) = 6561$ respectivement, un pas de temps $\Delta t = 10^{-2}$, un temps final $T = 17$, un coefficient de stabilité $\tau = 0.5$, $\alpha = 0.5$ nous comparons les résultats des **Algorithmes 25, 26** avec ceux obtenus par la résolution du schéma de référence (**Algorithme 20**) sur la grille fine.

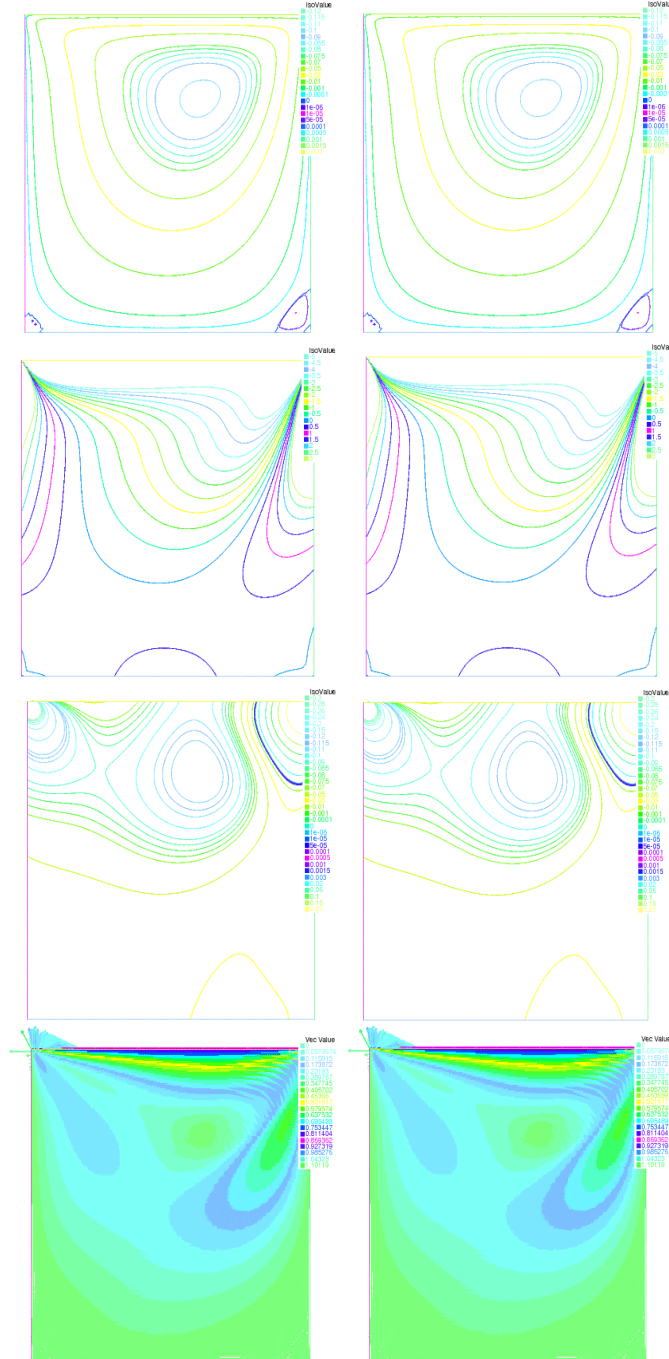


FIGURE 4.20 – De haut en bas : courant, vorticité, pression et vitesse, et de gauche à droite **Algorithmes 20** et **25**, pour $\alpha = 0.5$, $\Delta t = 10^{-2}$, $Re = 100$, $T = 17$, $\dim(X_H) = 6561$, $\dim(Y_H) = 1681$, $\dim(X_h) = 25921$, $\dim(Y_h) = 6561$.

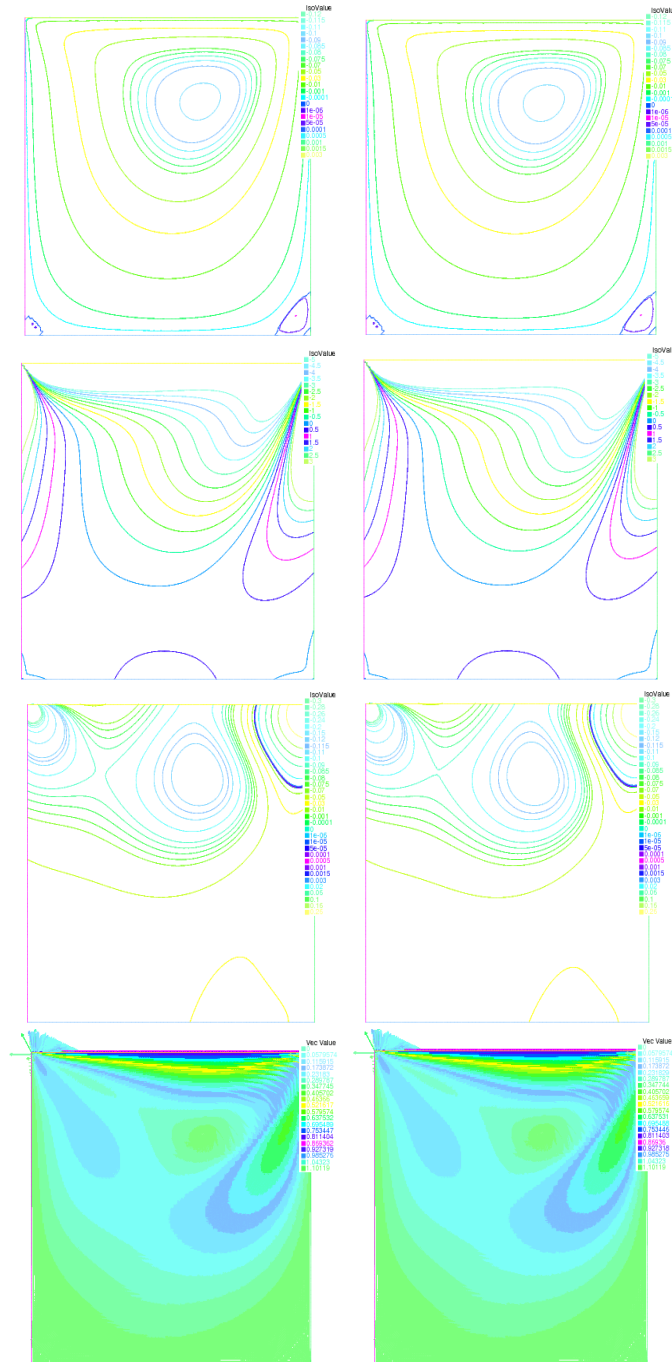


FIGURE 4.21 – De haut en bas : courant, vorticité, pression et vitesse, et de gauche à droite **Algorithmes 20** et **26**, pour $\alpha = 0.5$, $\Delta t = 10^{-2}$, $Re = 100$, $T = 17$, $\dim(X_H) = 6561$, $\dim(Y_H) = 1681$, $\dim(X_h) = 25921$, $\dim(Y_h) = 6561$.

Aussi pour un nombre de Reynolds $Re = 400$, les dimensions des grilles grossière et fine sont $\dim(X_H) = 6561, \dim(Y_H) = 1681, \dim(X_h) = 25921, \dim(Y_h) = 6561$ respectivement, un pas de temps $\Delta t = 10^{-2}$, un temps final $T = 35$, nous comparons les résultats des **Algorithmes 25**, **26** avec ceux obtenus par la résolution du schéma de référence (**Algorithme 19**) sur la grille fine.

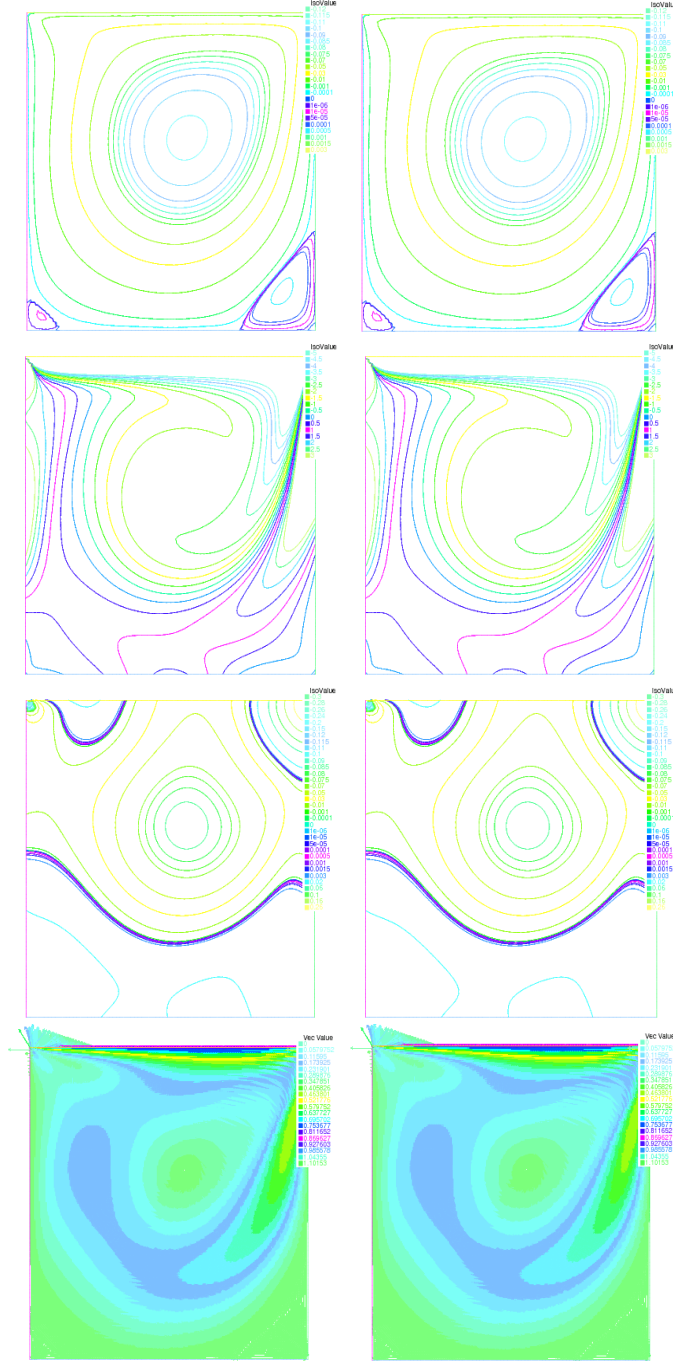


FIGURE 4.22 – De haut en bas : courant, vorticité, pression et vitesse, et de gauche à droite **Algorithmes 20** et **25**, pour $\alpha = 0.5, \Delta t = 10^{-2}, Re = 400, T = 35, \dim(X_H) = 6561, \dim(Y_H) = 1681, \dim(X_h) = 25921, \dim(Y_h) = 6561$.

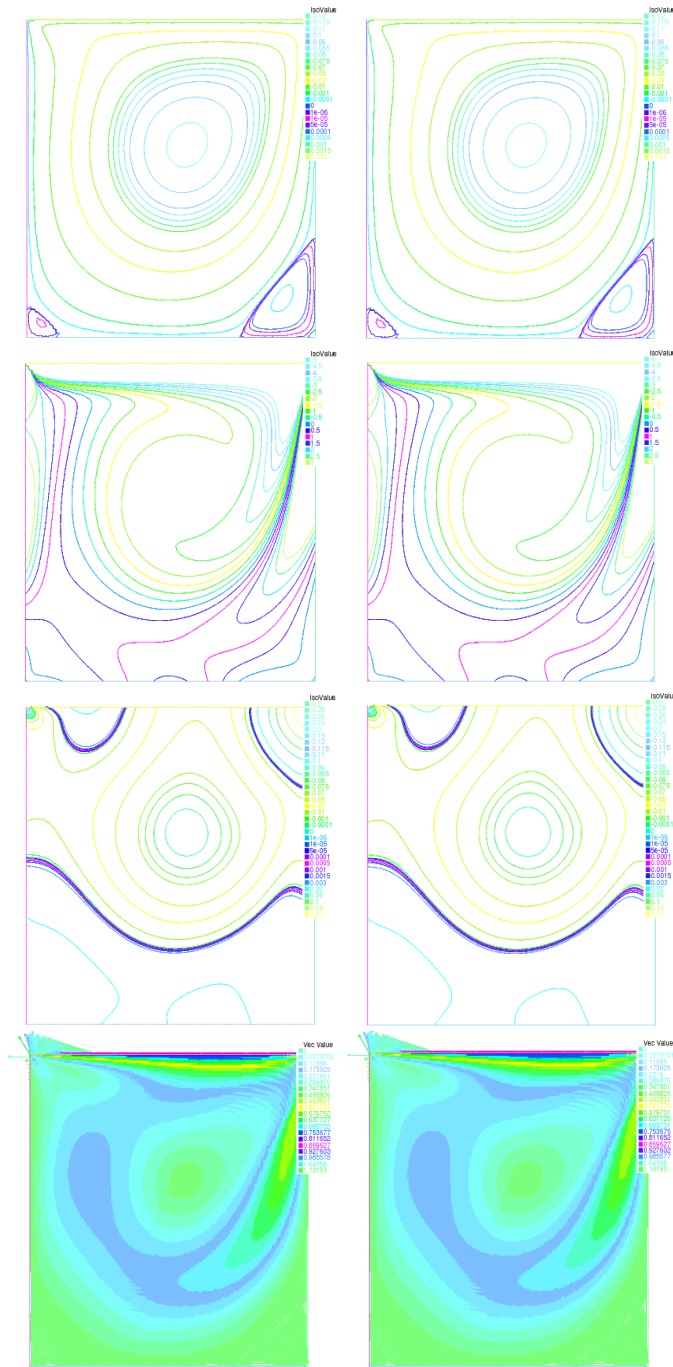


FIGURE 4.23 – De haut en bas : courant, vorticité, pression et vitesse, et de gauche à droite **Algorithmes 20** et **26**, pour $\alpha = 0.5, \Delta t = 10^{-2}, Re = 400, T = 35, \dim(X_H) = 6561, \dim(Y_H) = 1681, \dim(X_h) = 25921, \dim(Y_h) = 6561$.

Aussi pour un nombre de Reynolds $Re = 1000$, les dimensions des grilles grossière et fine sont $\dim(X_H) = 6561, \dim(Y_H) = 1681, \dim(X_h) = 25921, \dim(Y_h) = 6561$ respectivement, un pas de temps $\Delta t = 5 \times 10^{-3}$, un temps final $T = 56$, nous comparons les résultats des **Algorithmes 25, 26** avec ceux obtenus par la résolution du schéma de référence (**Algorithme 20**) sur la grille fine.

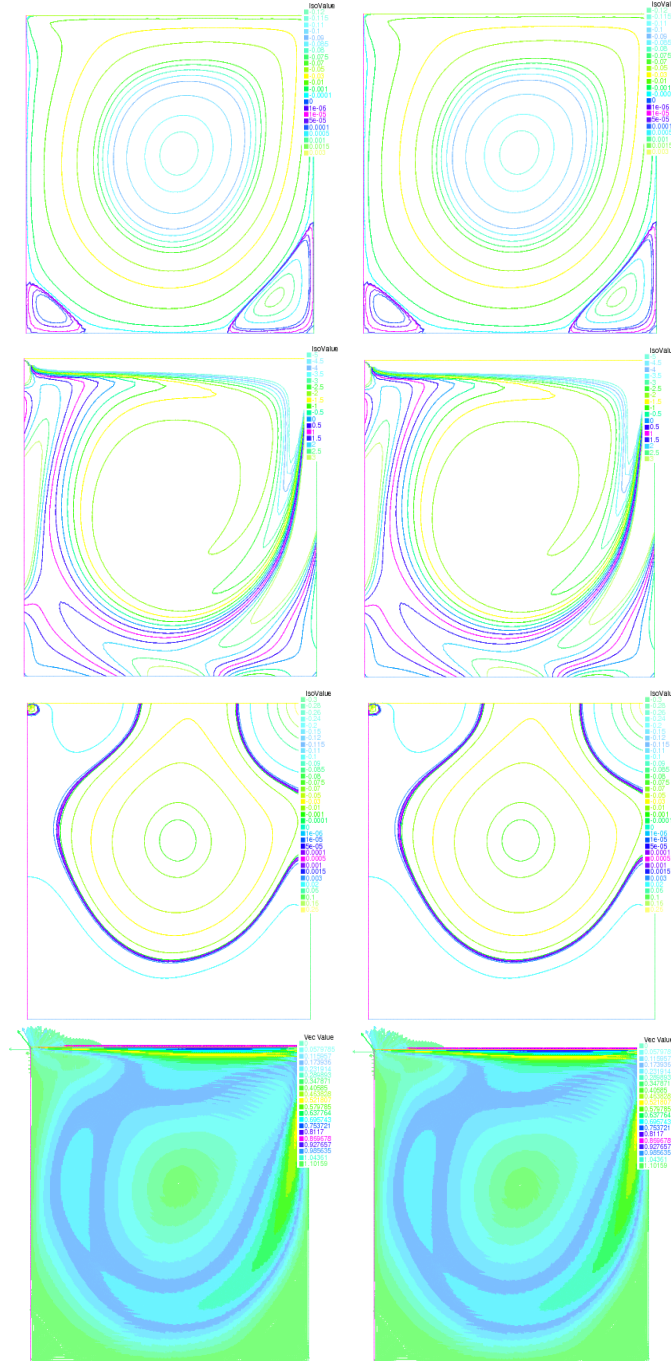


FIGURE 4.24 – De haut en bas : courant, vorticité, pression et vitesse, et de gauche à droite **Algorithmes 20** et **25**, pour $\alpha = 0.5, \Delta t = 5 \times 10^{-3}, Re = 1000, T = 56, \dim(X_H) = 6561, \dim(Y_H) = 1681, \dim(X_h) = 25921, \dim(Y_h) = 6561$.

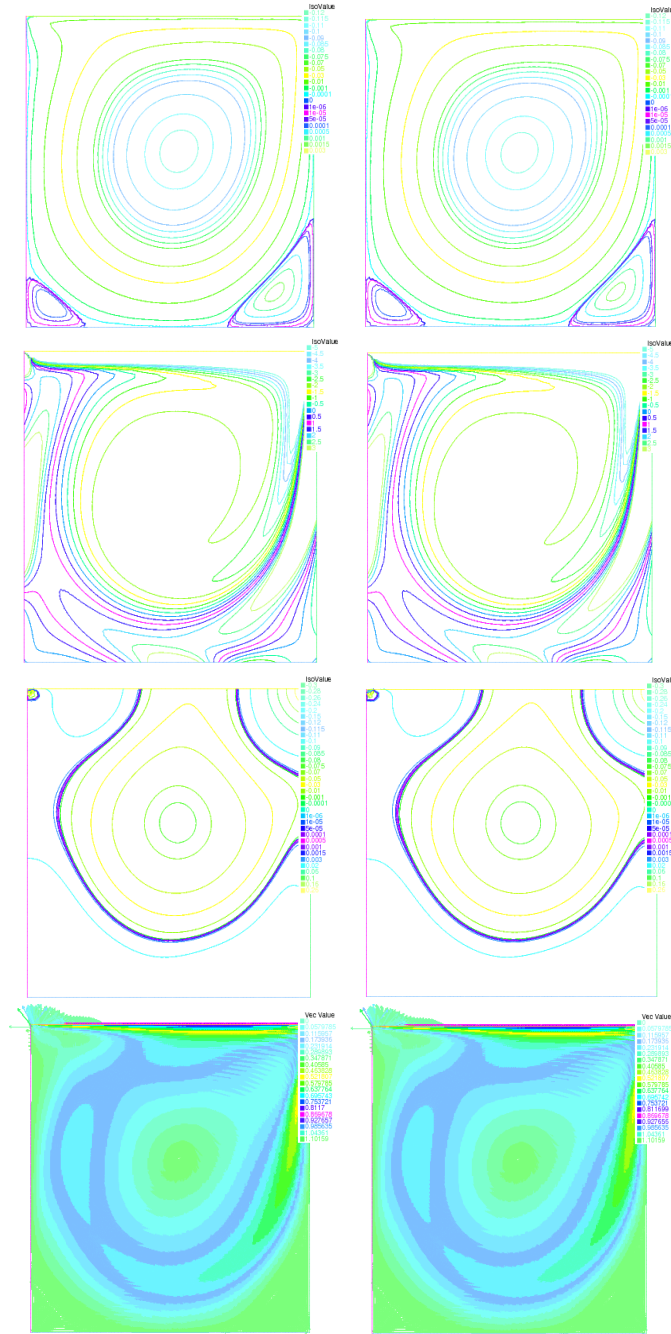


FIGURE 4.25 – De haut en bas : courant, vorticité, pression et vitesse, et de gauche à droite **Algorithmes 20** et **26**, pour $\alpha = 0.5, \Delta t = 5 \times 10^{-3}, Re = 1000, T = 56, \dim(X_H) = 6561, \dim(Y_H) = 1681, \dim(X_h) = 25921, \dim(Y_h) = 6561$.

4.5.2.1 Les extrema des fonctions de courant

Comme pour le cas non incrémental nous traitons le problème de la cavité entraînée. Les Tab. 4.12, 4.13 et 4.14 renferment les extrema de la fonction de courant le long des axes au tourbillon principal (PV) et le contre tourbillon droit (BRV). Pour $Re = 100, 1000$ nous comparons nos résultats avec les localisations de Pascal [179] en éléments finis et Bruneau et al. [31] en différences finies. Pour $Re = 400$ nous comparons avec les travaux de Ghia et al. [108] en différences finies.

Re=100							
	Ref2	Algo5	Algo6	Algo7	Algo8	Pascal[179]	Bruneau[31]
N_c grossière	Eléments finis	Eléments finis	Eléments finis	Eléments finis	Eléments finis	Eléments finis	Différences finies
		40	40	40	40		
N_f fine	80	80	80	80	80	65	129
Temps Δt	10^{-2}	10^{-2}	10^{-2}	10^{-2}	10^{-2}	0.1	
PV							
x	0.6125	0.6125	0.6125	explose	explose	0.6094	0.6172
y	0.7375	0.7375	0.7375			0.7344	0.7344
$\psi(x, y)$	-0.103127	-0.103127	-0.100125			-0.1036	-0.1026
BRV							
x	0.95	0.95	0.95			0.9531	0.9453
y	0.0625	0.0625	0.0625			0.0625	0.0625
$\psi(x, y)$	$1.00596E^{-5}$	$1.00595E^{-5}$	$1.00584E^{-5}$			$1.09E^{-5}$	$1.23E^{-5}$

TABLE 4.12 – Navier-Stokes incrémental $\Delta t = 10^{-2}$, $\alpha = 0.5$, $\tau = 0.5$, $Re = 100$, $T = 17$ et $\mathbb{P}_2/\mathbb{P}_1$; PV= Tourbillon principal; BRV=Contre tourbillon droit.

Re=400						
	Ref2	Algo5	Algo6	Algo7	Algo8	Ghia [108]
N_c grossière	Eléments finis	Eléments finis	Eléments finis	Eléments finis	Eléments finis	Différences finies
		40	40	40	40	
N_f fine	80	80	80	80	80	257
Temps Δt	10^{-2}	10^{-2}	10^{-2}	10^{-2}	10^{-2}	
PV						
x	0.55	0.55	0.55	explose	explose	0.5547
y	0.6	0.6	0.6			0.6055
$\psi(x, y)$	-0.112763	-0.112763	-0.112714			-0.1139
BRV						
x	0.8875	0.8875	0.8875			0.8906
y	0.125	0.125	0.125			0.125
$\psi(x, y)$	$6.1585E^{-4}$	$6.1586E^{-4}$	$6.1535E^{-4}$			$6.423E^{-4}$

TABLE 4.13 – Navier-Stokes incrémental $\Delta t = 10^{-2}$, $\alpha = 0.5$, $\tau = 0.5$, $Re = 400$, $T = 35$ et $\mathbb{P}_2/\mathbb{P}_1$, PV= Tourbillon principal; BRV=Contre tourbillon droit.

Re=1000							
	Ref2	Algo5	Algo6	Algo7	Algo8	Pascal[179]	Bruneau[31]
N_c grossière	Eléments finis	Eléments finis	Eléments finis	Eléments finis	Eléments finis	Eléments finis	Différences finies
		40	40	40	40		
N_f fine	80	80	80	80	80	65	256
Temps Δt	5×10^{-3}	5×10^{-3}	5×10^{-3}	5×10^{-3}	5×10^{-3}	0.1	
PV x y $\psi(x, y)$	0.525 0.5625 -0.117298	0.525 0.5625 -0.117306	0.525 0.5625 -0.117143	explose	explose	0.5313 0.5625 -0.1231	0.5313 0.5586 -0.1163
BRV x y $\psi(x, y)$	0.8625 0.1125 $1.6712E^{-3}$	0.8625 0.1125 $1.6713E^{-3}$	0.8625 0.1125 $1.6680E^{-3}$			0.8594 0.1094 $1.69E^{-3}$	0.8711 0.1094 $1.91E^{-3}$

TABLE 4.14 – Navier-Stokes incrémental $\Delta t = 5 \times 10^{-3}$, $\alpha = 0.5$, $\tau = 0.5$, $Re = 1000$, $T = 56$ et $\mathbb{P}_2/\mathbb{P}_1$; PV= Tourbillon principal; BRV=Contre tourbillon droit.

4.5.2.2 Comparaison en temps de calcul

Nos schémas bi-grilles sont plus rapides que la résolution du schéma implicite (**Algorithme 20**) sur une grille fine cf. Fig. 4.26. Et comme dans le cas non incrémental le gain n'est pas énorme puisque le coût du schéma bi-grilles est similaire au coût d'une itération d'un schéma semi-implicite.

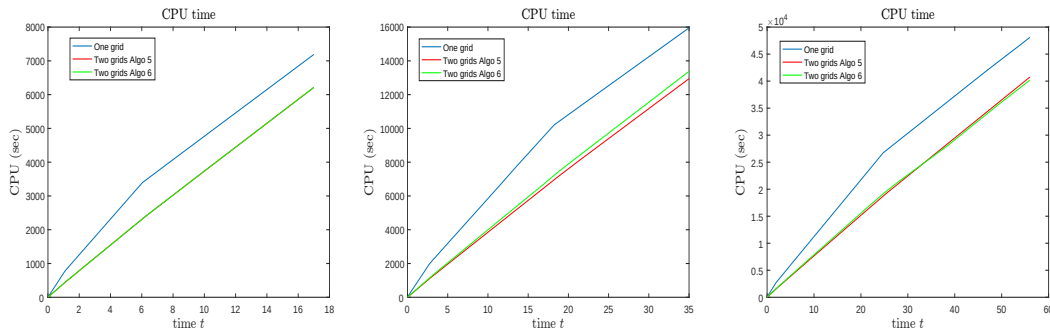


FIGURE 4.26 – De gauche à droite : $Re = 100, 400, 1000$; du temps CPU du schéma sur une grille fine (**Algorithme 20**) et celui de la méthode de séparation d'échelles respectivement.

Nous calculons le nombre d'itérations non linéaires et la valeur seuil de $\theta_s = \|\frac{\partial u}{\partial t}\|$ comme dans le cas non incrémental **section 3.4.1.2**. Les Tab. 4.15, 4.16, 4.17 comportent les temps de calcul pour les deux algorithmes. Le rapport de gain est réduit à 0,7.

80×40 points $T = 17$	Algorithme 25 Algo5	Algorithme 26 Algo6
t_{1G} (en sec.)	7189.34	7189.34
t_{2G} (en sec.)	6213.35	6325.45
$\frac{t_{2G}}{t_{1G}}$	0.864	0.880
θ_s	0.000637188	0.000637188
t_{1G} (en sec.)	3398.72	3398.72
t_{2G} (en sec.)	2324.22	2366.08
$\frac{t_{2G}}{t_{1G}}$	0.683	0.696

TABLE 4.15 – Navier-Stokes incrémental $\alpha = 0.5$, $Re = 100$, $\Delta t = 10^{-2}$ et $\mathbb{P}_2/\mathbb{P}_1$

80×40 points $T = 35$	Algorithme 25 Algo5	Algorithme 26 Algo6
t_{1G} (en sec.)	15953.2	15953.2
t_{2G} (en sec.)	12945.7	13377.5
$\frac{t_{2G}}{t_{1G}}$	0.811	0.839
θ_s	0.00049205	0.00049205
t_{1G} (en sec.)	10213.7	10213.7
t_{2G} (en sec.)	6967.05	7229.57
$\frac{t_{2G}}{t_{1G}}$	0.682	0.707

TABLE 4.16 – Navier-Stokes incrémental $\alpha = 0.5$, $Re = 400$, $\Delta t = 10^{-2}$ et $\mathbb{P}_2/\mathbb{P}_1$

80×40 points $T = 56$	Algorithme 25 Algo5	Algorithme 26 Algo6
t_{1G} (en sec.)	48097	48097
t_{2G} (en sec.)	40743.2	40183
$\frac{t_{2G}}{t_{1G}}$	0.847	0.835
θ_s	0.000886836	0.000886836
t_{1G} (en sec.)	27238.3	27238.3
t_{2G} (en sec.)	18734.2	19137.6
$\frac{t_{2G}}{t_{1G}}$	0.687	0.702

TABLE 4.17 – Navier-Stokes incrémental $\alpha = 0.5$, $Re = 1000$, $\Delta t = 5 \times 10^{-3}$ et $\mathbb{P}_2/\mathbb{P}_1$

4.5.3 Étude de stabilité : comparaison avec un schéma semi-implicite

Si nous comparons nos schémas bi-grilles au schéma complètement implicite sur une grille fine nous gagnons en temps de calcul mais nous perdons au niveau de stabilité. Des grands pas de temps Δt peuvent être prises si le schéma implicite est adapté sur la grille fine.

Par contre, la comparaison de notre approche à la simulation par un schéma semi-implicite (prenant $(u^k \cdot \nabla)u^k$ pour le terme non linéaire) permet de dire que la méthode bi-grilles est plus stable au sens de pas de temps Δt élevé. L'approximation par le schéma semi-implicite réduit le temps de calcul puisqu'un problème linéaire est résolu à chaque itération. Mais l'approche semi-implicite se trouve limitée en pas de temps. Ici apparaît l'avantage de la séparation d'échelles que nous appliquons. Elle nous permet d'adapter des pas de temps supérieurs à ceux du schéma semi-implicite. Comparer les deux techniques pour un même pas de temps Δt , montre que la simulation semi-implicite est plus avantageuse en terme de temps de calcul CPU. Mais nous pouvons nous servir de la stabilité que nous avons gagnée pour adapter un pas de temps plus grand et converger plus rapidement pour atteindre un temps final fixé T .

4.5.3.1 Navier-Stokes par projection non incrémentale

Nous présentons dans les Tab. 4.18, 4.19, 4.20 une comparaison en stabilité entre les **Algorithmes 21, 22, 23, 24** et les schémas semi-implicites (**Algorithmes 29 et 30**) suivants

Algorithm 29 Schéma 1 semi-implicite non incrémental "Ref3"

- 1: **for** $k = 0, 1, \dots$ **do**
 - 2: **Trouver** u_h^* **dans** X_h $(\frac{u_h^* - u_h^k}{\Delta t}, \psi_h) + \nu(\nabla u_h^*, \nabla \psi_h) + ((u_h^k \cdot \nabla)u_h^k, \psi_h) = (f, \psi_h), \forall \psi_h \in X_h$
 - 3: **Trouver** p_h^{k+1} **dans** Y_h $(\text{div } \nabla p_h^{k+1}, \chi_h) = (\frac{\text{div } u_h^*}{\Delta t}, \chi_h), \forall \chi_h \in Y_h$
 - 4: **Trouver** u_h^{k+1} **dans** X_h $(u_h^{k+1} - u_h^* + \Delta t \nabla p_h^{k+1}, \psi_h) = 0, \forall \psi_h \in X_h$
 - 5: **end for**
-

Algorithm 30 Schéma 2 semi-implicite non incrémental "Ref4"

- 1: **for** $k = 0, 1, \dots$ **do**
 - 2: **Trouver** u_h^* **dans** X_h $(\frac{u_h^* - u_h^k}{\Delta t}, \psi_h) + \nu(\nabla u_h^*, \nabla \psi_h) + ((u_h^k \cdot \nabla)u_h^*, \psi_h) = (f, \psi_h), \forall \psi_h \in X_h$
 - 3: **Trouver** p_h^{k+1} **dans** Y_h $(\text{div } \nabla p_h^{k+1}, \chi_h) = (\frac{\text{div } u_h^*}{\Delta t}, \chi_h), \forall \chi_h \in Y_h$
 - 4: **Trouver** u_h^{k+1} **dans** X_h $(u_h^{k+1} - u_h^* + \Delta t \nabla p_h^{k+1}, \psi_h) = 0, \forall \psi_h \in X_h$
 - 5: **end for**
-

Schéma	τ	Δt	Stable	τ	Δt	Stable	τ	Δt	Stable
Algorithme 21 Algo1	0.5	0.01	oui	0.5	0.05	oui	0.5	0.1	oui
Algorithme 22 Algo2	0.5	0.01	oui	0.5	0.05	oui	0.5	0.1	oui
Algorithme 23 Algo3	0.5	0.01	oui	0.5	0.05	oui	0.5	0.1	oui
Algorithme 24 Algo4	0.5	0.01	oui	0.5	0.05	oui	0.5	0.1	oui
Algorithme 29 Ref3		0.01	oui		0.05	oui		0.1	oui
Algorithme 30 Ref4		0.01	oui		0.05	oui		0.1	oui

TABLE 4.18 – $Re = 100, \dim(X_H) = 6561, \dim(Y_H) = 1681, \dim(X_h) = 25921, \dim(Y_h) = 6561, \mathbb{P}_2/\mathbb{P}_1$.

Schéma	τ	Δt	Stable	τ	Δt	Stable	τ	Δt	Stable
Algorithme 21 Algo1	0.5	0.01	oui	0.5	0.05	non	0.5	0.1	non
	—	—	—	30	0.05	oui	30	0.1	oui
Algorithme 22 Algo2	0.5	0.01	oui	0.5	0.05	oui	0.5	0.1	oui
	—	—	—	30	0.05	oui	30	0.1	oui
Algorithme 23 Algo3	0.5	0.01	oui	0.5	0.05	non	0.5	0.1	non
	—	—	—	30	0.05	oui	35	0.1	oui
Algorithme 24 Algo4	0.5	0.01	oui	0.5	0.05	oui	0.5	0.1	oui
	—	—	—	30	0.05	oui	30	0.1	oui
Algorithme 29 Ref3		0.01	oui		0.05	non		0.1	non
Algorithme 30 Ref4		0.01	oui		0.05	oui		0.1	oui

TABLE 4.19 – $Re = 400, \dim(X_H) = 6561, \dim(Y_H) = 1681, \dim(X_h) = 25921, \dim(Y_h) = 6561, \mathbb{P}_2/\mathbb{P}_1$.

Scheme	τ	Δt	Stable	Δt	Stable	τ	Δt	Stable
Algorithme 21 Algo1	0.5	0.005	oui	0.007	non	100	0.05	oui
Algorithme 22 Algo2	0.5	0.005	oui	0.007	oui	0.5	0.05	oui
Algorithme 23 Algo3	0.5	0.005	oui	0.007	non	150	0.05	oui
Algorithme 24 Algo4	0.5	0.005	oui	0.007	oui	0.5	0.05	oui
Algorithme 29 Ref3		0.005	oui	0.007	non		0.05	non
Algorithme 30 Ref4		0.005	oui	0.007	oui		0.05	oui

TABLE 4.20 – $Re = 1000, \dim(X_H) = 6561, \dim(Y_H) = 1681, \dim(X_h) = 25921, \dim(Y_h) = 6561, \mathbb{P}_2/\mathbb{P}_1$.

Nous remarquons que le schéma implicite (**Algorithme 30**) est trop stable par rapport au schéma semi-implicite (**Algorithme 29**) et assez stable que notre technique bi-grilles. Nous ne trouvons pas de gain en terme de Δt . Nous nous limitons dans la suite à la comparaison de notre approche bi-grilles et le schéma semi-implicite (**Algorithme 29**).

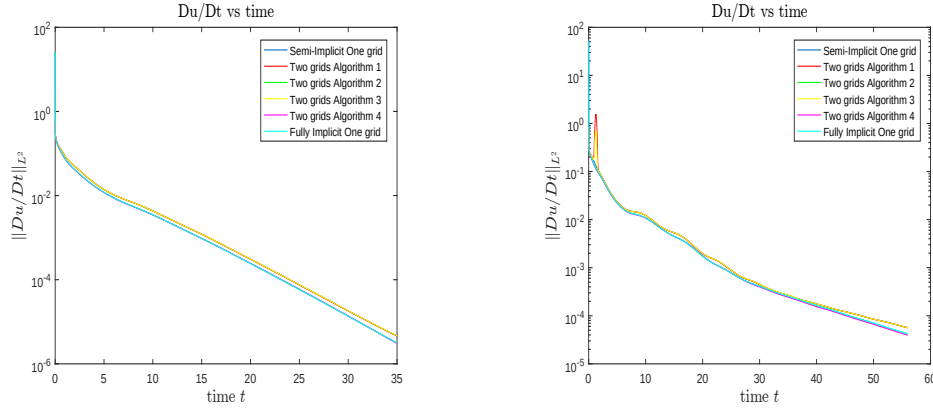


FIGURE 4.27 – $\left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega)}$ vs temps : à gauche pour $\Delta t = 10^{-2}$, $Re = 400$, $T = 35$ et à droite pour $\Delta t = 5 \times 10^{-3}$, $Re = 1000$, $T = 56$ et $\dim(X_H) = 6561$, $\dim(Y_H) = 1681$, $\dim(X_h) = 25921$, $\dim(Y_h) = 6561$.

Les courbes de la Fig. 4.27 montrent que notre technique approche de la même manière que les schémas implicite et semi-implicite. Nous remarquons que la stabilité par notre technique est garantie pour des grandes valeurs de τ . Par exemple, pour $Re = 400$ et $\Delta t = 0.05$ l'**Algorithme 21** était instable pour $\tau = 0.5$ mais en prenant un $\tau = 30$ nous pouvons avoir un schéma stable. De même pour $Re = 1000$ et $\Delta t = 0.05$, l'**Algorithme 21** était instable pour $\tau = 0.5$ mais en prenant un $\tau = 100$ nous obtenons un schéma stable. Afin de bien localiser notre gain au niveau de pas de temps Δt , nous présentons dans le Tab. 4.21 une comparaison entre le pas de temps maximal permettant la stabilité du schéma semi-implicite (**Algorithme 29**) et de notre schéma bi-grilles (**Algorithme 21**) pour la valeur de τ minimal nécessaire à la stabilisation.

	Re=400		Re=1000	
Algorithme 29 Ref3	$\Delta t = 10^{-2}$	$\Delta t = 10^{-2}$	$\Delta t = 5 \times 10^{-3}$	$\Delta t = 5 \times 10^{-3}$
Algorithme 21 Algo1	$\Delta t = 0.1$	$\Delta t = 0.5$	$\Delta t = 0.1$	$\Delta t = 0.5$
	$\tau = 30$	$\tau = 30$	$\tau = 100$	$\tau = 100$
$\frac{Dt_{\text{Algorithme 21}}}{Dt_{\text{Algorithme 29}}}$	10	50	20	100

TABLE 4.21 – Navier-Stokes non incrémental Δt maximal et stabilité.

Pour des Re petits, nous ne gagnons pas en Δt plus que le schéma semi-implicite. Ce dernier est stable même pour des grandes valeurs du pas de temps Δt . Nous pouvons déduire que le schéma bi-grilles est 10 fois et même 50 fois plus stable que le schéma semi-implicite résolu sur une grille pour $Re = 400$. Alors que pour $Re = 1000$, le gain augmente puisque le schéma semi-implicite devient de plus en plus limité par un pas de temps $\Delta t = 0.005$ et l'**Algorithme 21** reste stable pour $\tau = 100$ et $\Delta t = 0.1$ et 0.5 .

4.5.3.2 Navier-Stokes par projection incrémentale

Nous présentons aussi pour le cas de Navier-Stokes incrémental dans les Tab. 4.22, 4.23, 4.24 une comparaison avec le schéma semi-implicite avec incrémentation suivant

Algorithm 31 Schéma semi-implicite incrémental "Ref5"

-
- ```

1: for $k = 0, 1, \dots$ do
2: Trouver u_h^* dans X_h
3: $(\frac{u_h^* - u_h^k}{\Delta t}, \psi_h) + \nu(\nabla u_h^*, \nabla \psi_h) + ((u_h^k \cdot \nabla)u_h^k, \psi_h) + (\nabla p_h^k, \psi_h) = (f, \psi_h), \forall \psi_h \in X_h$
4: Trouver p_h^{k+1} dans Y_h $\alpha(\text{div } \nabla p_h^{k+1} - \text{div } \nabla p_h^k, \chi_h) = (\frac{\text{div } u_h^*}{\Delta t}, \chi_h), \forall \chi_h \in Y_h$
5: Trouver u_h^{k+1} dans X_h $(u_h^{k+1} - u_h^* + \alpha \Delta t (\nabla p_h^{k+1} - \nabla p_h^k), \psi_h) = 0, \forall \psi_h \in X_h$
6: end for

```
- 

| Schéma                        | $\tau$ | $\Delta t$ | Stable | $\tau$ | $\Delta t$ | Stable | $\tau$ | $\Delta t$ | Stable |
|-------------------------------|--------|------------|--------|--------|------------|--------|--------|------------|--------|
| <b>Algorithme 25</b><br>Algo5 | 0.5    | 0.01       | oui    | 0.5    | 0.05       | oui    | 0.5    | 0.5        | oui    |
| <b>Algorithme 26</b><br>Algo6 | 0.5    | 0.01       | oui    | 0.5    | 0.05       | oui    | 0.5    | 0.5        | oui    |
| <b>Algorithme 31</b><br>Ref5  |        | 0.01       | oui    |        | 0.05       | oui    |        | 0.5        | oui    |

TABLE 4.22 -  $Re = 100, \alpha = 0.5, \dim(X_H) = 6561, \dim(Y_H) = 1681, \dim(X_h) = 25921, \dim(Y_h) = 6561, \mathbb{P}_2/\mathbb{P}_1$ .

| Schéma                        | $\tau$ | $\Delta t$ | Stable | $\tau$ | $\Delta t$ | Stable | $\tau$ | $\Delta t$ | Stable |
|-------------------------------|--------|------------|--------|--------|------------|--------|--------|------------|--------|
| <b>Algorithme 25</b><br>Algo5 | 0.5    | 0.01       | oui    | 0.5    | 0.05       | non    | 40     | 0.05       | oui    |
| <b>Algorithme 26</b><br>Algo6 | 0.5    | 0.01       | oui    | 0.5    | 0.05       | oui    | 40     | 0.05       | oui    |
| <b>Algorithme 31</b><br>Ref5  |        | 0.01       | oui    |        | 0.05       | non    |        | 0.05       | non    |

TABLE 4.23 -  $Re = 400, \alpha = 0.5, \dim(X_H) = 6561, \dim(Y_H) = 1681, \dim(X_h) = 25921, \dim(Y_h) = 6561, \mathbb{P}_2/\mathbb{P}_1$ .

| Schéma                        | $\tau$ | $\Delta t$ | Stable | $\tau$ | $\Delta t$ | Stable | $\tau$ | $\Delta t$ | Stable |
|-------------------------------|--------|------------|--------|--------|------------|--------|--------|------------|--------|
| <b>Algorithme 25</b><br>Algo5 | 0.5    | 0.005      | oui    | 0.5    | 0.007      | non    | 200    | 0.05       | oui    |
| <b>Algorithme 26</b><br>Algo6 | 0.5    | 0.005      | oui    | 0.5    | 0.007      | oui    | 200    | 0.05       | oui    |
| <b>Algorithme 31</b><br>Ref5  |        | 0.005      | oui    |        | 0.007      | non    |        | 0.05       | non    |

TABLE 4.24 -  $Re = 1000, \alpha = 0.5, \dim(X_H) = 6561, \dim(Y_H) = 1681, \dim(X_h) = 25921, \dim(Y_h) = 6561, \mathbb{P}_2/\mathbb{P}_1$ .

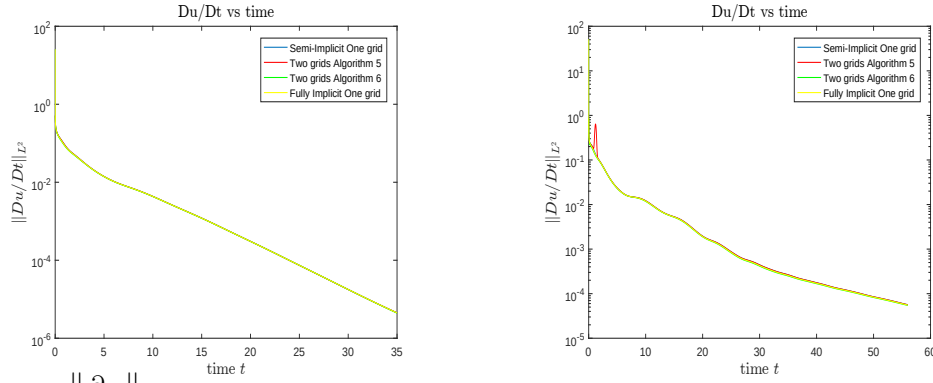


FIGURE 4.28 –  $\left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega)}$  vs temps : à gauche pour  $\Delta t = 10^{-2}$ ,  $Re = 400$ ,  $T = 35$  et à droite pour  $\alpha = 0.5$ ,  $\Delta t = 5 \times 10^{-3}$ ,  $Re = 1000$ ,  $T = 56$  et  $\dim(X_H) = 6561$ ,  $\dim(Y_H) = 1681$ ,  $\dim(X_h) = 25921$ ,  $\dim(Y_h) = 6561$ .

Les courbes de la Fig. 4.28 montrent que notre technique approche de la même manière que les schémas implicite et semi-implicite. Comme pour le cas non incrémental, nous remarquons que la stabilité par notre technique est assurée pour des grandes valeurs de  $\tau$ . Par exemple pour  $Re = 1000$  et  $\Delta t = 0.007$  l'**Algorithme 25** était instable pour  $\tau = 0.5$  mais en prenant un  $\tau = 200$  nous pouvons avoir un schéma stable pour un  $\Delta t = 0.05$ . Afin de bien localiser notre gain au niveau de pas de temps  $\Delta t$ , nous présentons dans le Tab. 4.25 une comparaison entre le pas de temps maximal permettant la stabilité du schéma semi-implicite **Algorithme 31** et de notre **Algorithme 25** bi-grilles pour la valeur de  $\tau$  minimal nécessaire à la stabilisation.

|                                                               | Re=400            |                   |                   | Re=1000            |                    |                    |
|---------------------------------------------------------------|-------------------|-------------------|-------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| <b>Algorithme 31</b><br>Ref5                                  | $\Delta t = 0.01$ | $\Delta t = 0.01$ | $\Delta t = 0.01$ | $\Delta t = 0.005$ | $\Delta t = 0.005$ | $\Delta t = 0.005$ |
| <b>Algorithme 25</b><br>Algo5                                 | $\Delta t = 0.05$ | $\Delta t = 0.1$  | $\Delta t = 0.5$  | $\Delta t = 0.01$  | $\Delta t = 0.1$   | $\Delta t = 0.5$   |
|                                                               | $\tau = 40$       | $\tau = 40$       | $\tau = 40$       | $\tau = 100$       | $\tau = 200$       | $\tau = 200$       |
| $\frac{Dt_{\text{Algorithme 25}}}{Dt_{\text{Algorithme 31}}}$ | 5                 | 10                | 50                | 2                  | 20                 | 100                |

TABLE 4.25 – Navier-Stokes incrémental  $\alpha = 0.5$ ,  $\Delta t$  maximal et stabilité.

## 4.6 Résultats numériques : comparaison avec une solution exacte

Afin de montrer l'efficacité de notre technique bi-grilles nous proposons de résoudre les équations de Navier-Stokes pour une solution de type Bercovier-Engelman [19]

$$(u_1, u_2) = (-2x^2y(1-y)(1-2y)(1-x)^2 \exp^{\sin t}, 2y^2x(1-x)(1-2x)(1-y)^2 \exp^{\sin t})$$

$$p = (x - 0.5)(y - 0.5)$$

et avec le terme  $f$  correspondant.

## 4.6.1 Méthode bi-grilles non incrémentale

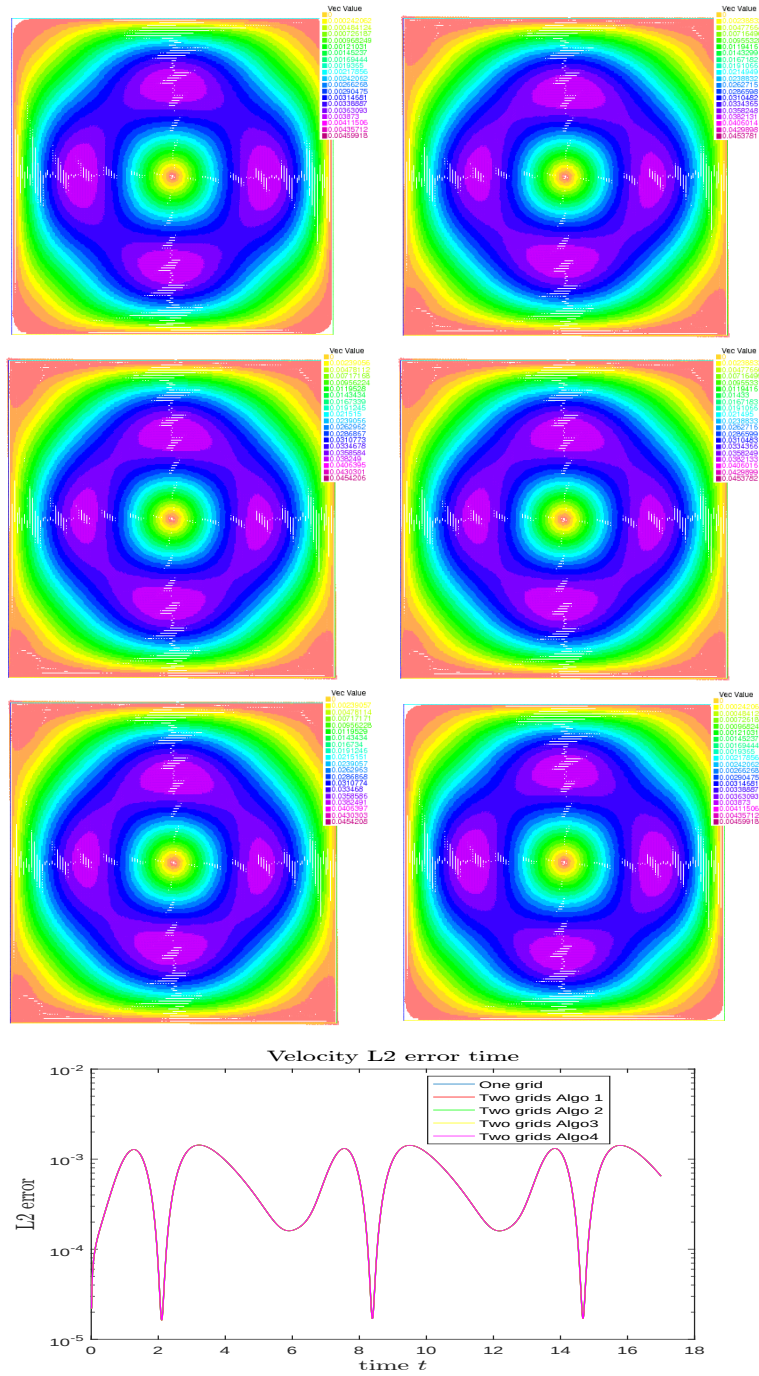


FIGURE 4.29 – De haut en bas et de gauche à droite : la vitesse exacte puis celles du schéma sur une grille fine (**Algorithme 19**) et celles de la méthode de séparation d'échelles **Algorithmes 21, 22, 23, 24**, pour  $\Delta t = 10^{-2}$ ,  $Re = 100$ ,  $T = 17$  et  $\dim(X_H) = 6561$ ,  $\dim(Y_H) = 1681$ ,  $\dim(X_h) = 25921$ ,  $\dim(Y_h) = 6561$ .

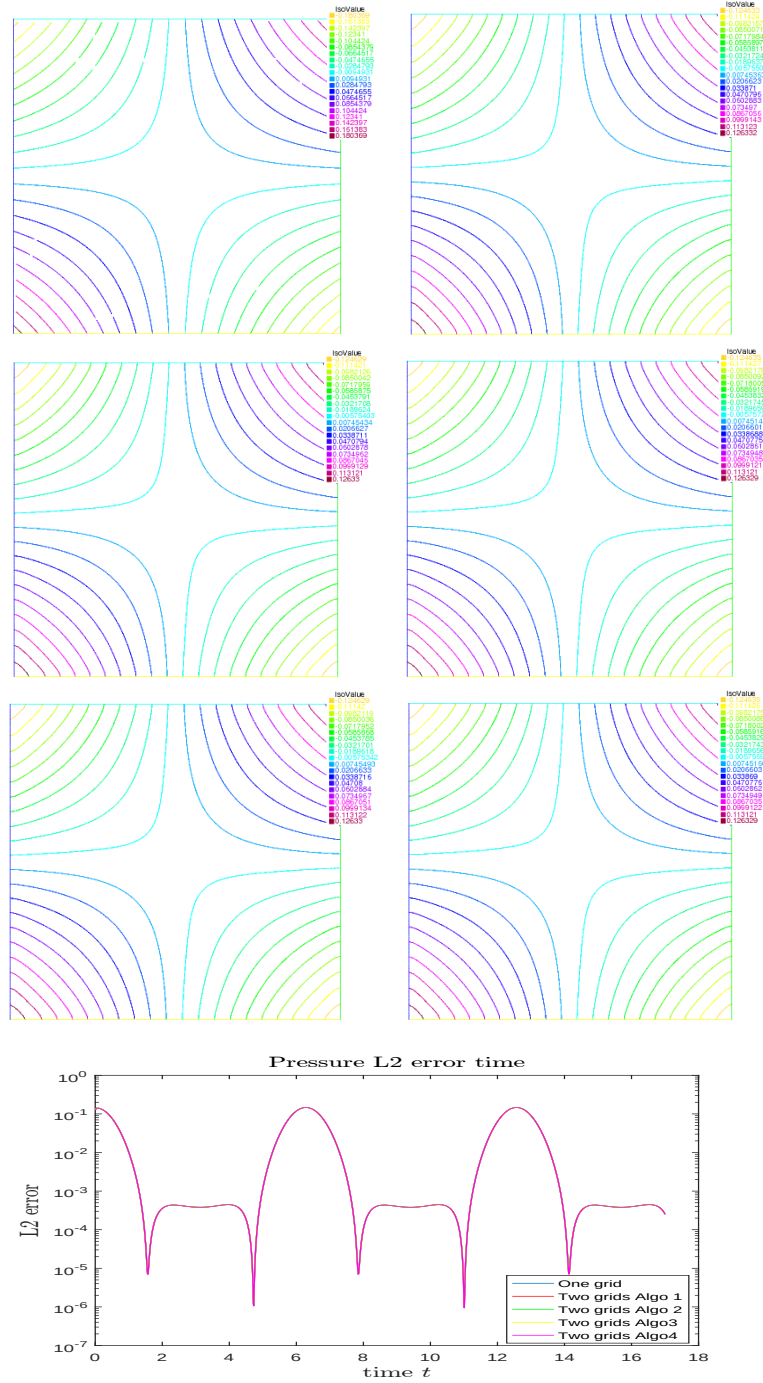


FIGURE 4.30 – De haut en bas et de gauche à droite : la pression exacte puis celles du schéma sur une grille fine (**Algorithme 19**) et celles de la méthode de séparation d'échelles **Algorithmes 21, 22, 23, 24**, pour  $\Delta t = 10^{-2}$ ,  $Re = 100$ ,  $T = 17$  et  $\dim(X_H) = 6561$ ,  $\dim(Y_H) = 1681$ ,  $\dim(X_h) = 25921$ ,  $\dim(Y_h) = 6561$ .

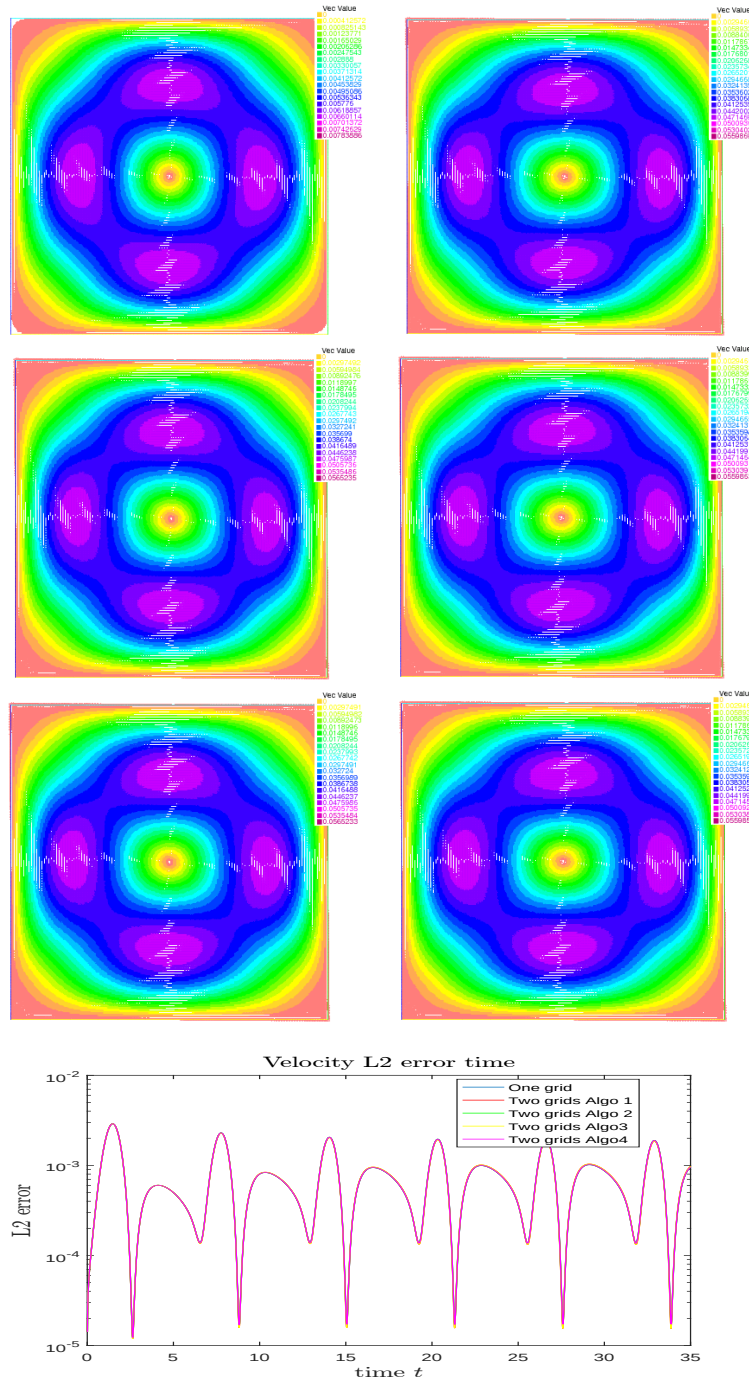


FIGURE 4.31 – De haut en bas et de gauche à droite : la vitesse exacte puis celles du schéma sur une grille fine (**Algorithme 19**) et celles de la méthode de séparation d'échelles **Algo-rithmes 21, 22, 23, 24**, pour  $\Delta t = 10^{-2}$ ,  $Re = 400$ ,  $T = 35$  et  $\dim(X_H) = 6561$ ,  $\dim(Y_H) = 1681$ ,  $\dim(X_h) = 25921$ ,  $\dim(Y_h) = 6561$ .

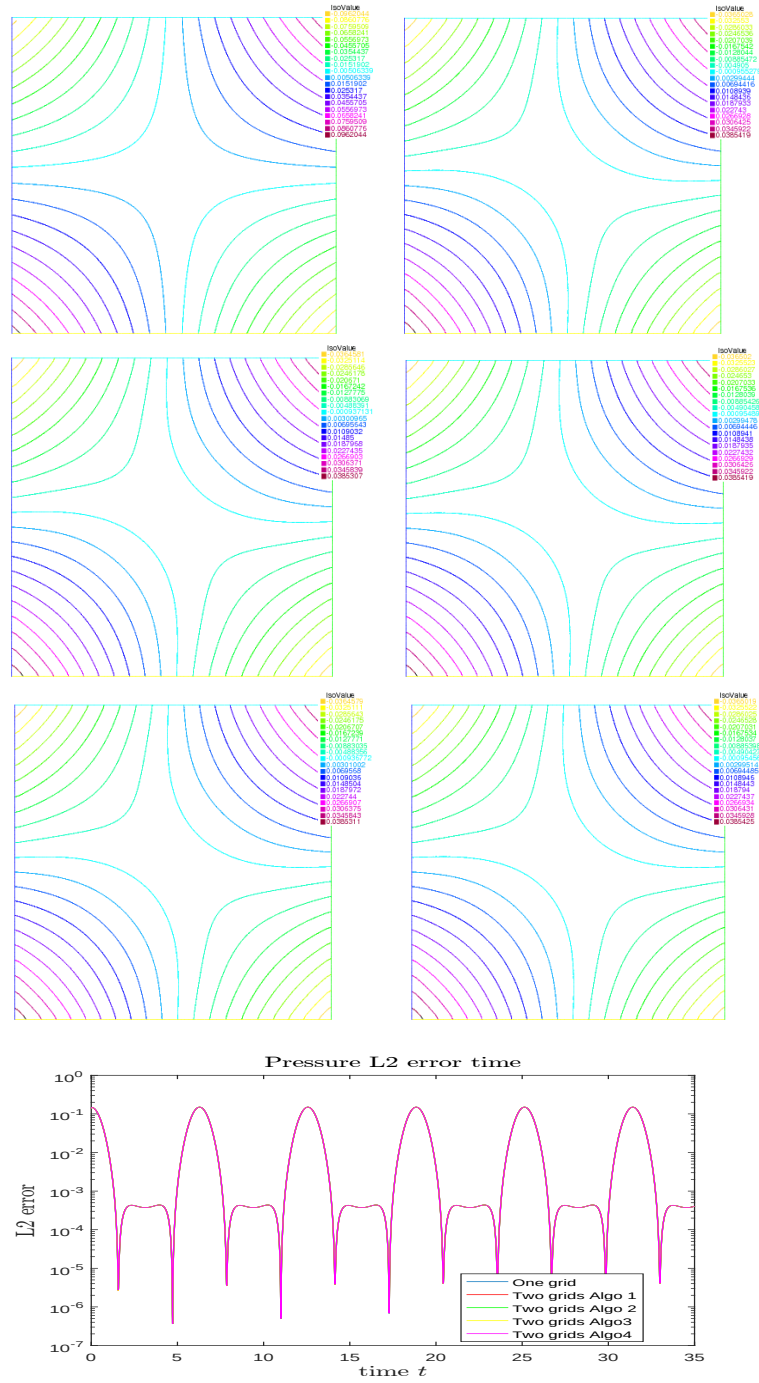


FIGURE 4.32 – De haut en bas et de gauche à droite : la pression exacte puis celles du schéma sur une grille fine (**Algorithme 19**) et celles de la méthode de séparation d'échelles **Algorithmes 21, 22, 23, 24**, pour  $\Delta t = 10^{-2}$ ,  $Re = 400$ ,  $T = 35$  et  $\dim(X_H) = 6561$ ,  $\dim(Y_H) = 1681$ ,  $\dim(X_h) = 25921$ ,  $\dim(Y_h) = 6561$ .

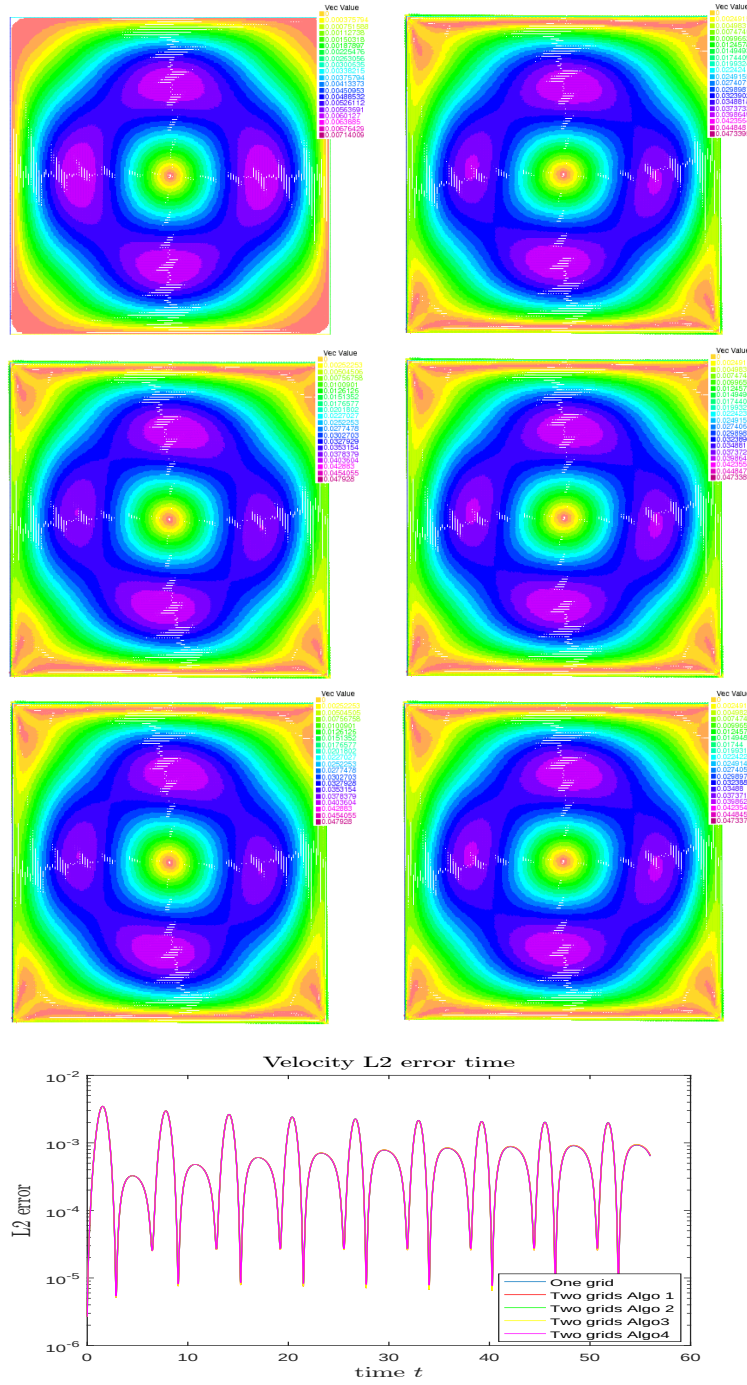


FIGURE 4.33 – De haut en bas et de gauche à droite : la vitesse exacte puis celles du schéma sur une grille fine (**Algorithme 19**) et celles de la méthode de séparation d'échelles **Algorithmes 21, 22, 23, 24**, pour  $\Delta t = 5 \times 10^{-3}$ ,  $Re = 1000$ ,  $T = 56$  et  $\dim(X_H) = 6561$ ,  $\dim(Y_H) = 1681$ ,  $\dim(X_h) = 25921$ ,  $\dim(Y_h) = 6561$ .



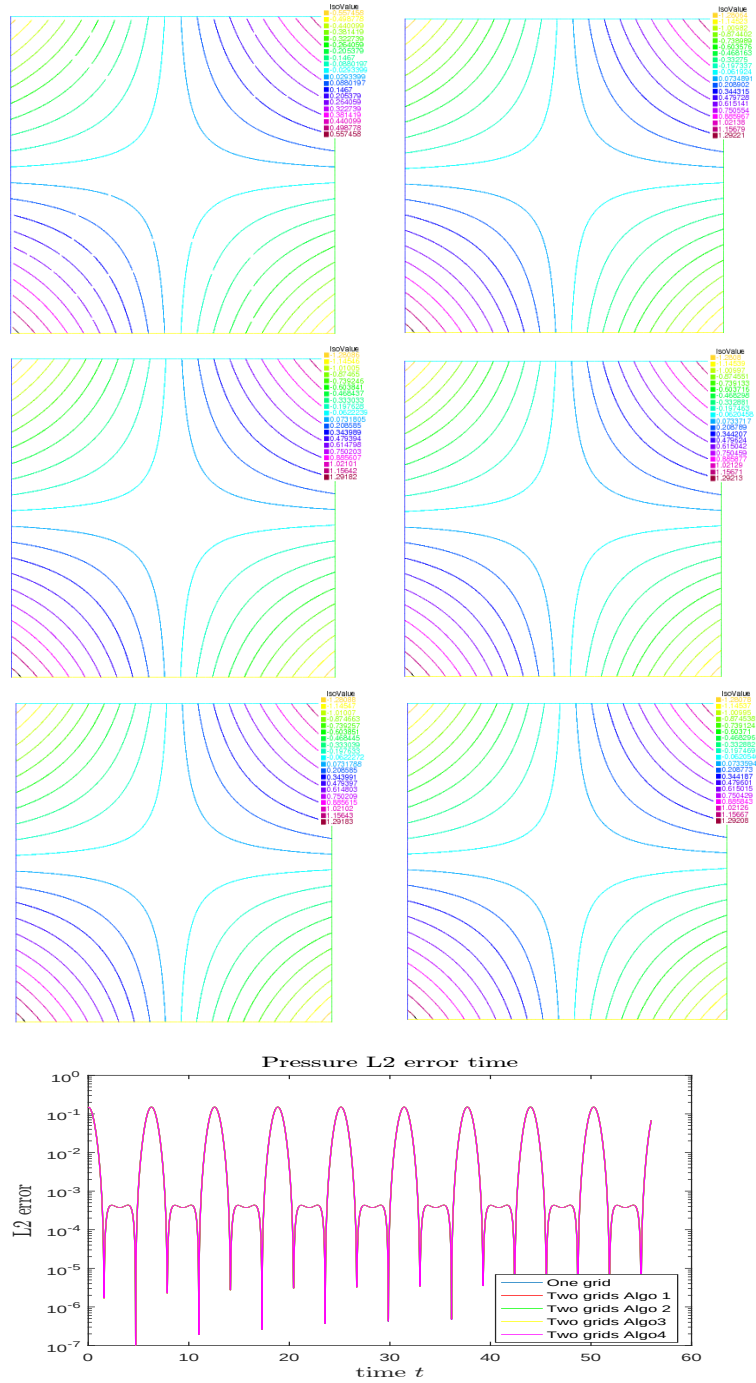


FIGURE 4.34 – De haut en bas et de gauche à droite : la pression exacte puis celles du schéma sur une grille fine (**Algorithme 19**) et celles de la méthode de séparation d'échelles **Algorithmes 21, 22, 23, 24**, pour  $\Delta t = 5 \times 10^{-3}$ ,  $Re = 1000$ ,  $T = 56$  et  $\dim(X_H) = 6561$ ,  $\dim(Y_H) = 1681$ ,  $\dim(X_h) = 25921$ ,  $\dim(Y_h) = 6561$ .

## 4.6.2 Méthode bi-grilles incrémentale

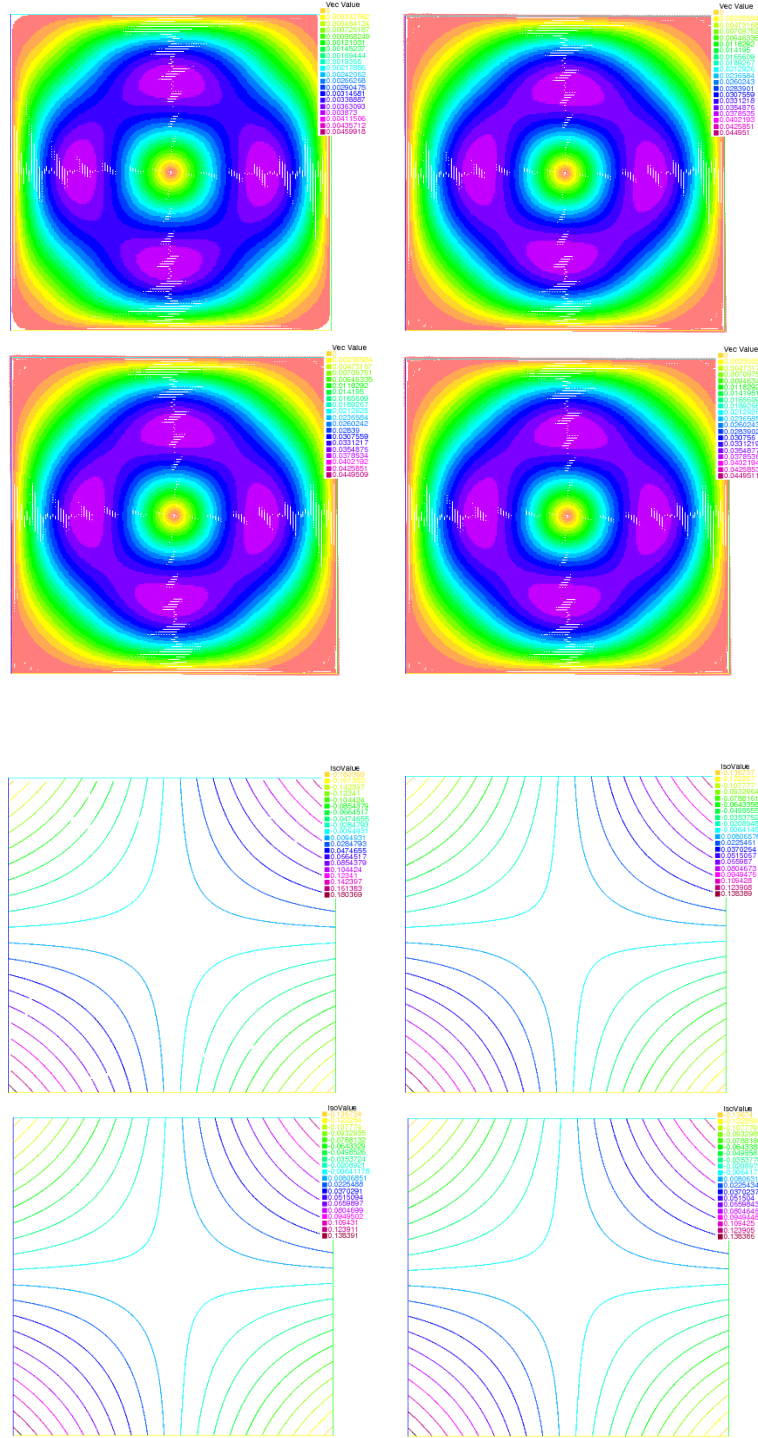


FIGURE 4.35 – De haut en bas et de gauche à droite : la vitesse exacte puis celles du schéma sur une grille fine incrémental (**Algorithme 20**) et celles de la méthode de séparation d'échelles **Algorithmes 25, 26**, de même pour la pression pour  $\Delta t = 10^{-2}$ ,  $Re = 100$ ,  $\alpha = 0.5$ ,  $T = 17$  et  $\dim(X_H) = 6561$ ,  $\dim(Y_H) = 1681$ ,  $\dim(X_h) = 25921$ ,  $\dim(Y_h) = 6561$ .

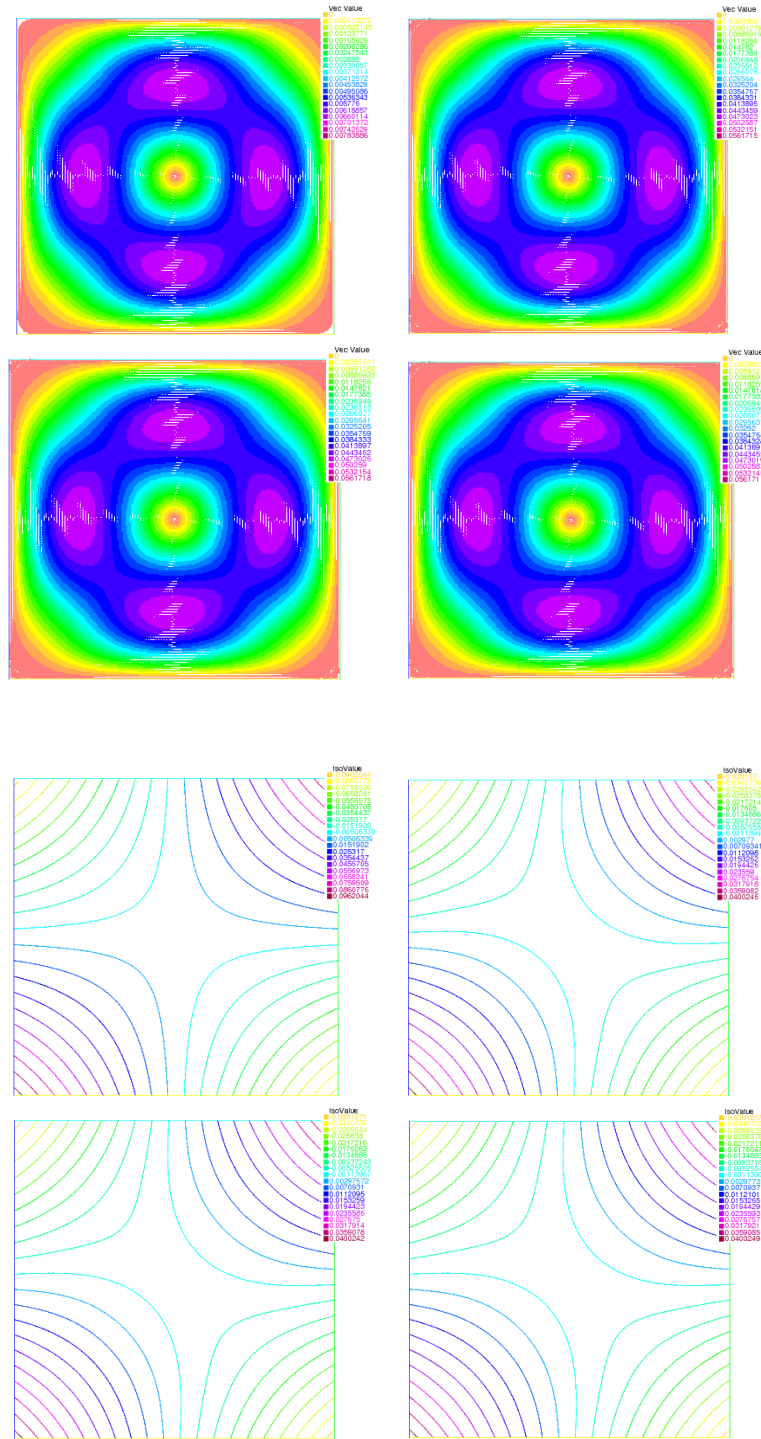


FIGURE 4.36 – De haut en bas et de gauche à droite : la vitesse exacte puis celles du schéma sur une grille fine incrémental (**Algorithme 20**) et celles de la méthode de séparation d'échelles **Algorithmes 25, 26**, de même pour la pression pour  $\Delta t = 10^{-2}$ ,  $Re = 400$ ,  $\alpha = 0.5$ ,  $T = 35$  et  $\dim(X_H) = 6561$ ,  $\dim(Y_H) = 1681$ ,  $\dim(X_h) = 25921$ ,  $\dim(Y_h) = 6561$ .

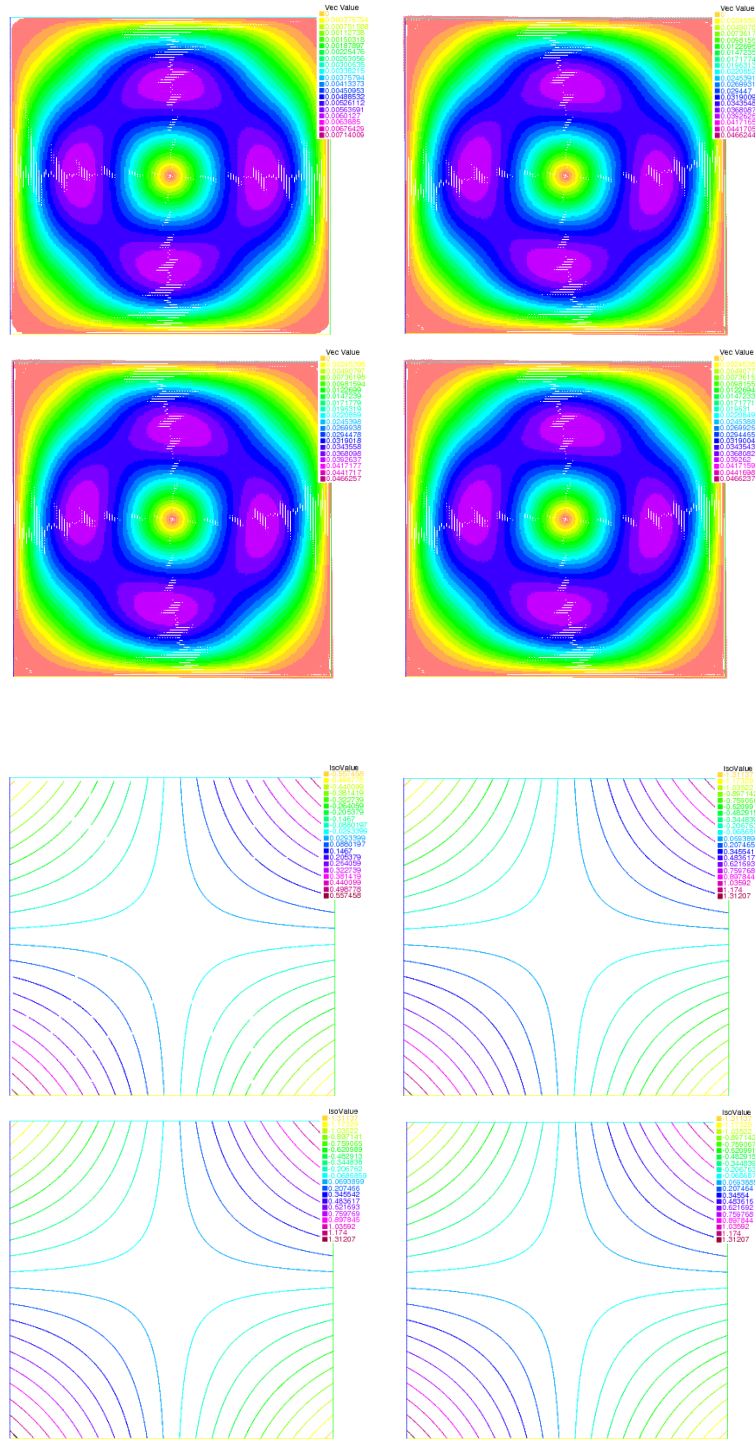


FIGURE 4.37 – De haut en bas et de gauche à droite : la vitesse exacte puis celles du schéma sur une grille fine incrémental (**Algorithme 20**) et celles de la méthode de séparation d'échelles **Algorithmes 25, 26**, de même pour la pression pour  $\Delta t = 5 \times 10^{-3}$ ,  $Re = 1000$ ,  $\alpha = 0.5$ ,  $T = 56$  et  $\dim(X_H) = 6561$ ,  $\dim(Y_H) = 1681$ ,  $\dim(X_h) = 25921$ ,  $\dim(Y_h) = 6561$ .

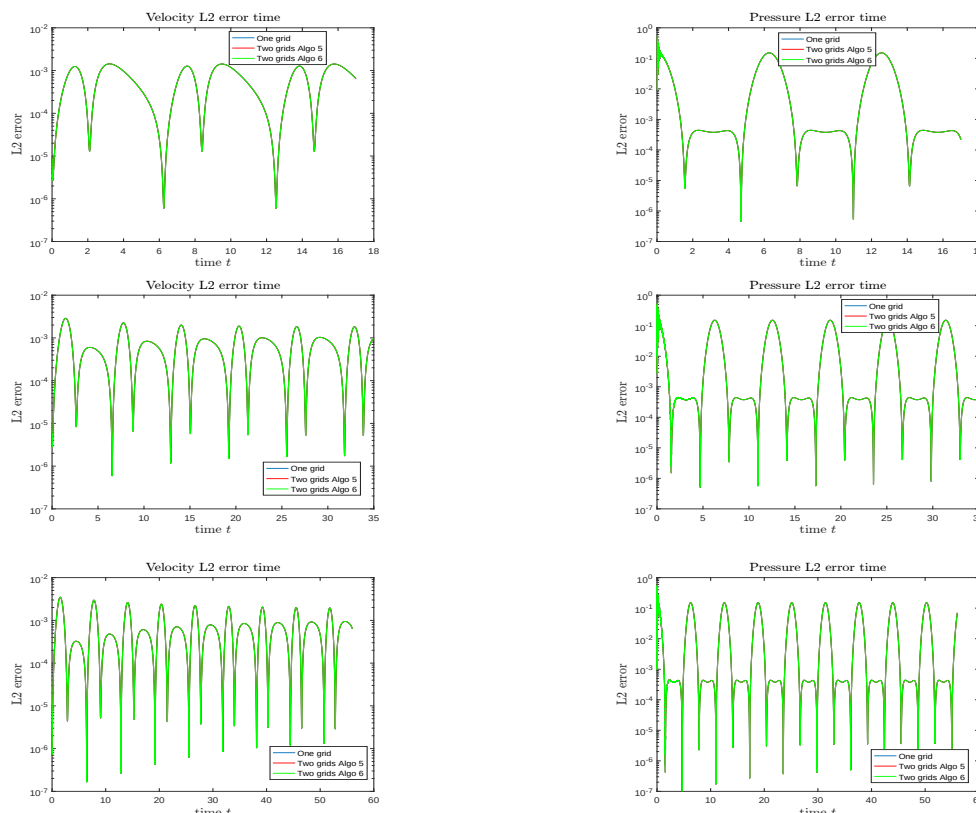


FIGURE 4.38 – L’erreur en norme  $L^2$  à gauche pour les vitesses et à droite pour les pressions entre le schéma sur une grille fine incrémental (**Algorithme 20**), celles de la méthode de séparation d’échelles **Algorithmes 25, 26** et la solution exacte. De bas en haut  $\Delta t = 10^{-2}$ ,  $Re = 100$ ,  $\alpha = 0.5$ ,  $T = 17$  puis  $\Delta t = 10^{-2}$ ,  $Re = 400$ ,  $\alpha = 0.5$ ,  $T = 35$  et  $\Delta t = 5 \times 10^{-3}$ ,  $Re = 1000$ ,  $\alpha = 0.5$ ,  $T = 56$  pour  $\dim(X_H) = 6561$ ,  $\dim(Y_H) = 1681$ ,  $\dim(X_h) = 25921$ ,  $\dim(Y_h) = 6561$ .

## 4.7 Conclusion et idées futures

Les nouveaux schémas bi-grilles de projection introduits dans ce chapitre ont permis de gagner en temps de calcul CPU par comparaison avec un schéma de projection totalement implicite. Leur stabilité est prouvée par comparaison avec un schéma de projection semi-implicite (des pas de temps plus larges peuvent être utilisés). Nous avons stabilisé uniquement la vitesse, sur ses modes élevés, sans détériorer la consistance, comme effectué au chapitres précédents pour les équations d’Allen-Cahn et de Cahn-Hilliard.

Les résultats numériques obtenus, sur la cavité entraînée, pour des régimes laminares, correspondent à ceux de la littérature.

Ceci constitue une première et prometteuse idée avant de considérer la stratégie multi-grilles ou l’adaptation multi-niveaux de notre technique, en utilisant plus que deux espaces d’éléments finis. Les méthodes des EF utilisées ici correspondent aux discrétisations spatiales, mais l’approche est aussi applicable à d’autres techniques de discrétisation, comme la méthode des différences finies ou les méthodes spectrales.

Comme prochaines étapes de travail, nous pouvons considérer les idées suivantes :

- Stabilisation de la pression. Bien évidemment, d’autres types de techniques de stabilisation peuvent être considérés, par exemple, ceux appliqués à la pression et reliés à l’approche de compressibilité artificielles [200] ; nous renvoyons à la méthode de stabilisation de la

pression introduite par Brezzi et Pitkäranta [30] pour le problème de Stokes et à Olshanski et al. [174] pour les équations de Navier-Stokes. La conservation de la masse (la condition de la divergence nulle) est modifiée comme suit :

$$\varepsilon \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla u = 0,$$

où  $\varepsilon > 0$  est un petit nombre réel positif. La stabilisation en modes élevés de la pression peut être effectuée comme suit :

★ En premier, nous cherchons la pression sur  $Y_H$  :

$$\begin{aligned} (\nabla p_H^{k+1}, \nabla \psi_H) &= -(\nabla u_H^*, \psi_H), \forall \psi_H \in Y_H, \\ (u_H^{k+1}, \phi_H) &= (u_H^*, \phi_H) - \Delta t (\nabla p_H^{k+1}, \phi_H), \forall \phi_H \in X_H, \end{aligned}$$

★ Puis, nous effectuons une corection sur l'espace fin  $Y_h$

$$\begin{aligned} \tau(p_h^{k+1}, \psi_h) + (\nabla p_h^{k+1}, \nabla \psi_h) &= \tau(p_h^k, \psi_h) + \tau(p_H^{k+1} - p_H^k, \psi_h) - (\nabla u_h^*, \psi_h), \forall \psi_h \in Y_h \\ (u_h^{k+1}, \psi_h) &= (u_h^*, \psi_h) - \Delta t (\nabla p_h^{k+1}, \psi_h), \forall \psi_h \in X_h \end{aligned}$$

- Étude de modèles turbulents. L'étude de régimes laminaires est intéressante pour la validation de l'approche pour de grandes valeurs du nombre de Reynolds (jusqu'à  $Re = 7500$ ). L'approche bi-grilles peut être appliquée aux modèles turbulents, en utilisant un terme modifié de la viscosité. Le modèle turbulent de Smagorinsky peut être considéré. Des simulations numériques, avec différents choix de la constante de viscosité, peuvent être comparées à d'autres études déjà faites. Dans ces cas, la turbulence est modélisée en introduisant une viscosité de turbulence  $\nu_T$ , par exemple comme suit :

$$u_t + (u \cdot \nabla)u - \nabla \cdot ((\nu + \nu_T) \nabla u) + \nabla p = f \quad x \in \Omega, t \geq 0 \quad (4.16)$$

$$\nabla \cdot u = 0 \quad x \in \Omega \quad (4.17)$$

$$u = 0 \quad x \in \partial\Omega \quad (4.18)$$

$$u(0, x) = u_0 \quad x \in \Omega. \quad (4.19)$$

avec  $\nu > 0$  est une viscosité constante,  $\nu_T = \beta \delta |u - \bar{u}|$ , où  $\bar{u}$  est une moyenne locale de  $u$ ,  $\beta > 0$ ,  $\delta > 0$ . Ce modèle de type Smagorinsky est considéré, par exemple, dans [154]. Dans un travail plus récent [152] Layton a considéré

$$\nu + \nu_T = (C_s \delta)^2 |\nabla u|$$

Nous renvoyons aussi à [78].

- Fluides 3D. Le cas bi-dimensionnel a été étudié. La technique bi-grilles peut être appliquée aux cas 3D. On peut s'attendre à un plus large gain en temps de calcul CPU vu que pour  $H \equiv 2h$  nous avons  $R = \frac{\dim(X_H)}{\dim(X_h)} \simeq 0.25$  en 2D alors que  $R \simeq 0.125$  en 3D. Notons que, en étudiant les équations NSE, différents comportements des composantes modes élevés peuvent se produire en dimension 2 et en dimension 3, cf. [78] et les références qui en découlent.
- L'étude de schémas d'ordre deux en temps est une piste à exploiter. Nous proposons les algorithmes suivants :

---

**Algorithm 32** Schéma de référence non incrémental d'ordre deux

---

```

1: for $k = 0, 1, \dots$ do
2: Trouver u_h^* dans X_h
3: $(\frac{3u_h^* - 4u_h^k + u_h^{k-1}}{2\Delta t}, \psi_h) + \nu(\nabla u_h^*, \nabla \psi_h) + ((u_h^* \cdot \nabla)u_h^*, \psi_h) + (\nabla p_h^k, \psi_h) = (f, \psi_h), \forall \psi_h \in X_h$
4: Trouver p_h^{k+1} dans Y_h $(\text{div } \nabla p_h^{k+1}, \chi_h) = (\frac{\text{div } 3u_h^*}{2\Delta t}, \chi_h), \forall \chi_h \in Y_h$
5: Trouver u_h^{k+1} dans X_h $(u_h^{k+1} - u_h^* + \frac{2}{3}\Delta t \nabla p_h^{k+1}, \psi_h) = 0, \forall \psi_h \in X_h$.
6: end for

```

---

Comme le schéma en temps utilisé sur l'équation en  $u_h^*$  est le schéma de Gear d'ordre deux, il est naturel de lui associer une stabilisation du second ordre. Ainsi, quand nous utilisons uniquement une grille, le terme à ajouter serait  $\tau(u_h^* - 2u_h^k + u_h^{k-1}, \phi_h) \simeq \tau\Delta t^2(\frac{\partial u}{\partial t^2}, \phi_h)$ , comme proposé dans [188] pour la stabilisation de schéma semi-explicite appliqué au schéma de réaction-diffusion. Nous pouvons appliquer cette stabilisation à notre approche bi-grilles, comme présenté ci-après et nous proposons les algorithmes suivants :

---

**Algorithm 33** Deux grilles d'ordre deux "Algo1Order2"

---

```

1: for $k = 0, 1, \dots$ do
2: Trouver u_H^* dans X_H
3: $(\frac{3u_H^* - 4u_H^k + u_H^{k-1}}{2\Delta t}, \psi_H) + \nu(\nabla u_H^*, \nabla \psi_H) + ((u_H^* \cdot \nabla)u_H^*, \psi_H)s = (f, \psi_H), \forall \psi_H \in X_H$
4: Trouver u_h^* dans X_h
 $(\frac{3u_h^* - 4u_h^k + u_h^{k-1}}{2\Delta t}, \phi_h) + \nu(\nabla u_h^*, \nabla \phi_h) + ((u_h^k \cdot \nabla)u_h^k, \phi_h) + \tau(u_h^* - 2u_h^k + u_h^{k-1}, \phi_h)$
 $= \tau(u_H^* - 2u_H^k + u_H^{k-1}, \phi_h) + (f, \phi_h), \forall \phi_h \in X_h$
5: Trouver p_h^{k+1} dans Y_h $(\text{div } \nabla p_h^{k+1}, \chi_h) = (\frac{\text{div } 3u_h^*}{2\Delta t}, \chi_h), \forall \chi_h \in Y_h$
6: Trouver u_h^{k+1} dans X_h $(u_h^{k+1} - u_h^* + \frac{2}{3}\Delta t \nabla p_h^{k+1}, \phi_h) = 0, \forall \phi_h \in X_h$
7: Résoudre dans X_H $(u_H^{k+1} - u_h^{k+1}, \psi_H) = 0, \forall \psi_H \in X_H$
8: end for

```

---

---

**Algorithm 34** Variante de l'algorithme "Algo1Order2" : Deux grilles d'ordre deux "Algo2Order2"

---

- 1: **for**  $k = 0, 1, \dots$  **do**
  - 2:   **Trouver**  $u_H^*$  **dans**  $X_H$
  - 3:    $(\frac{3u_H^* - 4u_H^k + u_H^{k-1}}{2\Delta t}, \psi_H) + \nu(\nabla u_H^*, \nabla \psi_H) + ((u_H^* \cdot \nabla)u_H^*, \psi_H)s = (f, \psi_H), \forall \psi_H \in X_H$
  - 4:   **Trouver**  $u_h^*$  **dans**  $X_h$
  - 5:    $(\frac{3u_h^* - 4u_h^k + u_h^{k-1}}{2\Delta t}, \phi_h) + \nu(\nabla u_h^*, \nabla \phi_h) + ((u_h^* \cdot \nabla)u_h^*, \phi_h) + \tau(u_h^* - 2u_h^k + u_h^{k-1}, \phi_h)$   
 $= \tau(u_H^* - 2u_H^k + u_H^{k-1}, \phi_h) + (f, \phi_h), \forall \phi_h \in X_h$
  - 6:   **Trouver**  $p_h^{k+1}$  **dans**  $Y_h$   $(div \nabla p_h^{k+1}, \chi_h) = (\frac{div 3u_h^*}{2\Delta t}, \chi_h), \forall \chi_h \in Y_h$
  - 7:   **Trouver**  $u_h^{k+1}$  **dans**  $X_h$   $(u_h^{k+1} - u_h^* + \frac{2}{3}\Delta t \nabla p_h^{k+1}, \phi_h) = 0, \forall \phi_h \in X_h$
  - 8:   **Résoudre dans**  $X_H$   $(u_H^{k+1} - u_h^{k+1}, \psi_H) = 0, \forall \psi_H \in X_H$
  - 9: **end for**
- 

**Algorithm 35** Deux grilles d'ordre deux "Algo3Order2"

---

- 1: **for**  $k = 0, 1, \dots$  **do**
  - 2:   **Trouver**  $u_H^*$  **dans**  $X_H$   $(\frac{3u_H^* - 4u_H^k + u_H^{k-1}}{2\Delta t}, \psi_H) + \nu(\nabla u_H^*, \nabla \psi_H) + ((u_H^* \cdot \nabla)u_H^*, \psi_H)s = (f, \psi_H), \forall \psi_H \in X_H$
  - 3:   **Trouver**  $p_H^{k+1}$  **dans**  $Y_H$   $(div \nabla p_H^{k+1}, \chi_H) = (\frac{div 3u_H^*}{2\Delta t}, \chi_H), \forall \chi_H \in Y_H$
  - 4:   **Trouver**  $u_H^{k+1}$  **dans**  $X_H$   $(u_H^{k+1} - u_H^* + \frac{2}{3}\Delta t \nabla p_H^{k+1}, \phi_H) = 0, \forall \phi_H \in X_H$
  - 5:   **Trouver**  $u_h^*$  **dans**  $X_h$
  - 6:    $(\frac{3u_h^* - 4u_h^k + u_h^{k-1}}{2\Delta t}, \phi_h) + \nu(\nabla u_h^*, \nabla \phi_h) + ((u_h^* \cdot \nabla)u_h^*, \phi_h) + \tau(u_h^* - 2u_h^k + u_h^{k-1}, \phi_h)$   
 $= \tau(u_H^* - 2u_H^k + u_H^{k-1}, \phi_h) + (f, \phi_h), \forall \phi_h \in X_h$
  - 7:   **Trouver**  $p_h^{k+1}$  **dans**  $Y_h$   $(div \nabla p_h^{k+1}, \chi_h) = (\frac{div 3u_h^*}{2\Delta t}, \chi_h), \forall \chi_h \in Y_h$
  - 8:   **Trouver**  $u_h^{k+1}$  **dans**  $X_h$   $(u_h^{k+1} - u_h^* + \frac{2}{3}\Delta t \nabla p_h^{k+1}, \phi_h) = 0, \forall \phi_h \in X_h$
  - 9:   **Résoudre dans**  $X_H$   $(u_H^{k+1} - u_h^{k+1}, \psi_H) = 0, \forall \psi_H \in X_H$
  - 10: **end for**
-



**Algorithm 36** Variante de l'algorithme "Algo3Order2" : Deux grilles d'ordre deux "Algo4Order2"

---

- 1: **for**  $k = 0, 1, \dots$  **do**
  - 2:   **Trouver**  $u_H^*$  **dans**  $X_H$   $(\frac{3u_H^* - 4u_H^k + u_H^{k-1}}{2\Delta t}, \psi_H) + \nu(\nabla u_H^*, \nabla \psi_H) + ((u_H^* \cdot \nabla)u_H^*, \psi_H)s = (f, \psi_H), \forall \psi_H \in X_H$
  - 3:   **Trouver**  $p_H^{k+1}$  **dans**  $Y_H$   $(\text{div } \nabla p_H^{k+1}, \chi_H) = (\frac{\text{div } 3u_H^*}{2\Delta t}, \chi_H), \forall \chi_H \in Y_H$
  - 4:   **Trouver**  $u_H^{k+1}$  **dans**  $X_H$   $(u_H^{k+1} - u_H^* + \frac{2}{3}\Delta t \nabla p_H^{k+1}, \phi_H) = 0, \forall \phi_H \in X_H$
  - 5:   **Trouver**  $u_h^*$  **dans**  $X_h$ 

$$(\frac{3u_h^* - 4u_h^k + u_h^{k-1}}{2\Delta t}, \phi_h) + \nu(\nabla u_h^*, \nabla \phi_h) + ((u_h^* \cdot \nabla)u_h^*, \phi_h) + \tau(u_h^* - 2u_h^k + u_h^{k-1}, \phi_h)$$

$$= \tau(u_h^* - 2u_h^k + u_h^{k-1}, \phi_h) + (f, \phi_h), \forall \phi_h \in X_h$$
  - 6:   **Trouver**  $p_h^{k+1}$  **dans**  $Y_h$   $(\text{div } \nabla p_h^{k+1}, \chi_h) = (\frac{\text{div } 3u_h^*}{2\Delta t}, \chi_h), \forall \chi_h \in Y_h$
  - 7:   **Trouver**  $u_h^{k+1}$  **dans**  $X_h$   $(u_h^{k+1} - u_h^* + \frac{2}{3}\Delta t \nabla p_h^{k+1}, \phi_h) = 0, \forall \phi_h \in X_h$
  - 8:   **Résoudre dans**  $X_H$   $(u_H^{k+1} - u_h^{k+1}, \psi_H) = 0, \forall \psi_H \in X_H$
  - 9: **end for**
-

# Chapitre 5

## Couplage Allen-Cahn/Navier-Stokes

### Sommaire

---

|            |                                                                       |            |
|------------|-----------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>5.1</b> | <b>Modèle de champs de phase AC/NS</b>                                | <b>156</b> |
| <b>5.2</b> | <b>Schéma classique sur une grille</b>                                | <b>157</b> |
| <b>5.3</b> | <b>Schémas bi-grilles</b>                                             | <b>158</b> |
| 5.3.1      | Séparation d'échelles uniquement pour la vitesse                      | 158        |
| 5.3.2      | Séparation d'échelles pour la concentration et la vitesse             | 161        |
| <b>5.4</b> | <b>Simulations numériques</b>                                         | <b>165</b> |
| 5.4.1      | Fusionnement de deux bulles                                           | 165        |
| 5.4.1.1    | Décomposition uniquement pour la vitesse                              | 166        |
| 5.4.1.2    | Décomposition de la concentration et de la vitesse                    | 169        |
| 5.4.1.3    | Comparaison en temps de calcul                                        | 173        |
| 5.4.2      | Bulle montante                                                        | 175        |
| 5.4.2.1    | Décomposition uniquement pour la vitesse                              | 175        |
| 5.4.2.2    | Décomposition de la concentration et de la vitesse                    | 180        |
| 5.4.2.3    | Comparaison en temps de calcul                                        | 186        |
| <b>5.5</b> | <b>Étude de stabilité : comparaison avec un schéma semi-implicite</b> | <b>188</b> |
| <b>5.6</b> | <b>Conclusion</b>                                                     | <b>190</b> |

---

L'étude des fluides incompressibles à deux phases a largement évolué durant ces deux derniers siècles. L'interface diffuse séparant ces deux fluides vient remplacer le suivi du mouvement des interfaces. Cette poursuite nécessite un maillage qui évolue avec leurs déformations ou une grille fixe mais qui les régularise citons la méthode du volume de fluide (VOM) (cf. [37]) qui est simple mais puissante et approche les limites libres dans les simulations numériques à différences finies, Front-tracking, level-set.

Le cas de deux fluides à rapport de densité élevé reste difficile à résoudre malgré le progrès qu'a connu le modèle de champ de phase, c'est-à-dire l'interface diffuse voir [187]. En effet, les fluides dans cette mince région de transition ne conservent pas l'énergie du mélange "Mixing energy", qui est un critère indispensable substituant la fonction de lissage artificiel de l'interface. En se basant sur cette loi d'énergie, des schémas numériques sont développés pour deux fluides à densités égales.

Dans le cas de fluides à un faible rapport de densité, nous remplaçons la densité variable par une densité de fond et nous ajoutons une force gravitationnelle externe pour modéliser l'effet de la

différence de densité. Il s'agit d'une approximation de Boussinesq qui mène à une loi sur l'énergie grâce au petit rapport de densité.

Nous nous concentrons dans ce chapitre sur l'étude d'un modèle de champs de phase d'Allen-Cahn. Nous combinons les techniques de séparation d'échelles adaptées dans le **Chapitre 2** pour l'équation d'Allen-Cahn et dans le **Chapitre 4** pour les équations de Navier-Stokes. Nous commençons par un schéma de référence sur une grille fine basé sur la projection de Chorin-Temam à la **section 5.2**. Ensuite dans la **section 5.3**, nous présentons nos schémas bi-grilles qui traitent en premier lieu la séparation de la vitesse sur deux espaces et en second lieu, nous passons à la décomposition de la concentration et la vitesse.

La **section 5.4** comporte des simulations numériques pour le cas de fusionnement de deux bulles (fluides à densités égales) et le cas d'une bulle montante (fluides à rapport de densité petit). Nous remarquons la compatibilité de nos résultats avec ceux de Hua [136] pour les bulles. Nous montrons aussi un gain en temps de calcul et prouvons que les schémas bi-grilles rapportent un gain en coût de calcul. Nous terminons par une comparaison en stabilité avec un schéma semi-implicite à la **section 5.5**. Nous concluons dans la **section 5.6** que la séparation d'échelles permet d'atteindre de grands  $\Delta t$  sans affaiblir la stabilité.

## 5.1 Modèle de champs de phase AC/NS

Nous considérons un modèle de champs de phase Allen-Cahn [209, 229]. Il peut être écrit comme l'équation de réaction-advection-diffusion.

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u \cdot \nabla \phi = \gamma (\Delta \phi - f(\phi)) \quad (5.1)$$

où  $\phi(x, t) \in [-1, 1]$  est la phase du mélange,  $u$  la vitesse du fluide et  $\gamma$  correspond au temps de relaxation élastique. Ici  $f(\phi) = F'(\phi)$ , et nous prenons la fonction potentielle de double puits  $F$  comme

$$F(\phi) = \frac{1}{4\varepsilon^2}(\phi^2 - 1)^2$$

avec  $\varepsilon$  l'épaisseur de l'interface. Les équations régissant le mélange d'écoulement à deux fluides sont la condition d'incompressibilité

$$\nabla \cdot u = 0, \quad (5.2)$$

et l'équation de la quantité de mouvement

$$\rho_0 \left( \frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla) u \right) - \nu \nabla \cdot D(u) + \nabla p + \lambda \nabla \cdot (\nabla \phi \otimes \nabla \phi) = S_\phi, \quad (5.3)$$

où  $u$  désigne la vitesse,  $p$  la pression,  $\nu$  le paramètre de viscosité et  $\lambda$  le coefficient de tension superficielle. Nous notons  $D(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + (\nabla u)^T)$  le taux du tenseur de déformation et

$S_\phi = (0, -(1 + \phi)g(\rho_1 - \rho_0) - (1 - \phi)g(\rho_2 - \rho_0))^T$  la force de flottabilité avec la densité de fond  $\rho_0$ , la densité des fluides 1 et 2  $\rho_1$  et  $\rho_2$  respectivement et la gravité  $g$ .

Dans ce qui suit, nous prenons  $\rho_0 = \rho_1$ . Nous utilisons l'identité

$$\nabla \cdot (\nabla \phi \otimes \nabla \phi) = \Delta \phi \nabla \phi + \frac{1}{2} \nabla |\nabla \phi|^2$$

et (5.1) pour substituer  $\Delta \phi$  cf. [136, 161, 187] et réécrire  $\nabla \cdot (\nabla \phi \otimes \nabla \phi)$  comme suit

$$\nabla \cdot (\nabla \phi \otimes \nabla \phi) = \frac{1}{\gamma} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} + u \cdot \nabla \phi \right) \nabla \phi + \nabla \left( \frac{|\nabla \phi|^2}{2} + F(\phi) \right).$$

En notant la nouvelle pression  $p := p + \frac{|\nabla\phi|^2}{2} + F(\phi)$  le système (5.1)– (5.3) modifié se réduit à

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + u \cdot \nabla\phi = \gamma(\Delta\phi - f(\phi)) \quad (5.4)$$

$$\rho_0 \left( \frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u \right) - \nu \Delta u + \nabla p + \frac{\lambda}{\gamma} \left( \frac{\partial\phi}{\partial t} + u \cdot \nabla\phi \right) \nabla\phi = S_\phi, \quad (5.5)$$

$$\nabla \cdot u = 0, \quad (5.6)$$

Le modèle vérifie une loi sur l'énergie totale du mélange

$$E = \frac{1}{2} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\lambda}{2} \|\nabla\phi\|_{L^2(\Omega)}^2 + \lambda \int_{\Omega} F(\phi)$$

qui se traduit par

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\lambda}{2} \|\nabla\phi\|_{L^2(\Omega)}^2 + \lambda \int_{\Omega} F(\phi) \right) = -\nu \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{\lambda}{\gamma} \left\| \frac{\partial\phi}{\partial t} + (u \cdot \nabla)\phi \right\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (5.7)$$

## 5.2 Schéma classique sur une grille

Il existe une large gamme de schémas numériques. Nous référons à [161, 187] où la méthode de correction de pression et celle de projection de Chorin-Temam est adaptée pour l'équation (5.5) et la stabilisation pour l'équation (5.4).

Liu et al.[136, 158, 159, 162] ont présenté un schéma temporel de second ordre pour le modèle de champ de phase d'Allen-Cahn, où une loi d'énergie discrète est obtenue pour des éléments finis  $C^0$ . Nous présentons un schéma implicite où la vitesse et la pression sont calculées par la méthode de projection Chorin-Temam introduite dans le **Chapitre 4**. Nous présentons le schéma de référence :

---

**Algorithm 37** AC-NS une grille (référence) "Ref 1"

---

- 1: **for**  $k = 0, 1, \dots$  **do**
- 2:   **Trouver**  $\phi_h^{k+1}$  **dans**  $X_h$
- 3:  $\left( \frac{\phi_h^{k+1} - \phi_h^k}{\Delta t}, \psi_h \right) + \gamma(\nabla\phi_h^{k+1}, \nabla\psi_h) + ((u_h^k \cdot \nabla)\phi_h^k, \psi_h) + \frac{\gamma}{\varepsilon^2}(DF(\phi_h^k, \phi_h^{k+1}), \psi_h) = 0, \forall \psi_h \in X_h$
- 4:   **Trouver**  $u_h^{*,k+1}$  **dans**  $Y_h$

$$\begin{aligned} & \left( \frac{u_h^{*,k+1} - u_h^k}{\Delta t}, v_h \right) + \nu(\nabla u_h^{*,k+1}, \nabla v_h) + ((u_h^{*,k+1} \cdot \nabla)u_h^{*,k+1} - S_\phi, v_h) \\ & = -\frac{1}{2}(\operatorname{div} u_h^{*,k} u_h^{*,k+1}, v_h) - \frac{\lambda}{\gamma} \left( \left( \frac{\phi_h^{k+1} - \phi_h^k}{\Delta t} + (u_h^{*,k+1} \cdot \nabla)\phi_h^{k+1} \right) \nabla\phi_h^{k+1}, v_h \right), \forall v_h \in Y_h \end{aligned}$$

- 5:   **Trouver**  $p_h^{k+1}$  **dans**  $P_h$   $\Delta t(\operatorname{div} \nabla p_h^{k+1}, \chi_h) = (\operatorname{div} u_h^{*,k+1}, \chi_h), \forall \chi_h \in P_h$
  - 6:   **Trouver**  $u_h^{k+1}$  **dans**  $Y_h$   $(u_h^{k+1} - u_h^{*,k+1} + \Delta t \nabla p_h^{k+1}, v_h) = 0, \forall v_h \in Y_h$
  - 7: **end for**
- 

où  $DF(u, v) = \begin{cases} \frac{F(u) - F(v)}{u - v} & \text{si } u \neq v, \\ f(u) & \text{si } u = v, \end{cases}$  est le choix qui garantit la stabilité inconditionnelle

de l'équation d'Allen-Cahn cf. **Chapitre 2** et [188].

Nous essayons de calculer  $(u_h^{k+1}, p_h^{k+1}, \phi_h^{k+1})$  l'approximation de  $u(t^{k+1}) = u((k+1)\Delta t)$ ,  $p(t^{k+1}) = p((k+1)\Delta t)$  et  $\phi(t^{k+1}) = \phi((k+1)\Delta t)$  à partir de  $(u_h^k, p_h^k, \phi_h^k)$ .

## 5.3 Schémas bi-grilles

Nous construisons nos algorithmes en se basant sur l'idée de séparation d'échelles développée précédemment au **Chapitre 2** pour l'équation d'Allen-Cahn et au **Chapitre 4** pour l'équation de Navier-Stokes. En premier lieu, nous proposons de décomposer uniquement la vitesse et résoudre l'équation d'Allen-Cahn sur la grille fine. En second lieu, nous décomposons la concentration  $\phi$  et la vitesse.

### 5.3.1 Séparation d'échelles uniquement pour la vitesse

Quatre algorithmes traitant la vitesse sur deux grilles se présentent :

- L'**Algorithme 38** comporte une stabilisation des hautes fréquences de la vitesse intermédiaire  $u_h^*$  sur l'espace fin  $X_h$ . C'est par la méthode de projection que nous trouvons  $u_h$  et la restreignons à la grille grossière pour obtenir  $u_H^k$  pour la prochaine itération.
- L'**Algorithme 39** est une variante de l'**Algorithme 38** où  $(u_h^k \cdot \nabla)u_h^k$  est remplacé par  $(u_H^* \cdot \nabla)u_h^*$ .
- L'**Algorithme 40** propose de trouver premièrement  $u_H$  par la méthode de projection sur la grille grossière puis l'utiliser à la prochaine itération et non pas la restriction de la solution trouvée après stabilisation sur la grille fine par la méthode de projection.
- L'**Algorithme 41** substitue  $(u_h^k \cdot \nabla)u_h^k$  par  $(u_H^* \cdot \nabla)u_h^*$  pour avoir une variante de l'**Algorithme 40**.

**Algorithm 38** 1 grille AC- 2 grilles NS "schéma 1"

---

```

1: for $k = 0, 1, \dots$ do
2: Trouver ϕ_h^{k+1} dans X_h
3: $(\frac{\phi_h^{k+1} - \phi_h^k}{\Delta t}, \psi_h) + \gamma(\nabla \phi_h^{k+1}, \nabla \psi_h) + ((u_h^k \cdot \nabla) \phi_h^k, \psi_h) + \frac{\gamma}{\varepsilon^2}(DF(\phi_h^k, \phi_h^{k+1}), \psi_h) = 0, \forall \psi_h \in X_h$
4: Trouver $u_H^{*,k+1}$ dans Y_H
 $(\frac{u_H^{*,k+1} - u_H^k}{\Delta t}, v_H) + \nu(\nabla u_H^{*,k+1}, \nabla v_H) + ((u_H^{*,k+1} \cdot \nabla) u_H^{*,k+1} - S_\phi, v_H)$
 $= -\frac{1}{2}(\text{div } u_H^{*,k} u_H^{*,k+1}, v_H) - \frac{\lambda}{\gamma} \left((\frac{\phi_h^{k+1} - \phi_h^k}{\Delta t} + (u_H^{*,k+1} \cdot \nabla) \phi_h^{k+1}) \nabla \phi_h^{k+1}, v_H \right), \forall v_H \in Y_H$
5: Trouver $u_h^{*,k+1}$ dans Y_h
 $(1 + \tau \Delta t)(u_h^{*,k+1} - u_h^k, v_h) + \nu \Delta t(\nabla u_h^{*,k+1}, \nabla v_h) + \Delta t((u_h^k \cdot \nabla) u_h^k, v_h) + \frac{\Delta t}{2}(\text{div } u_h^k u_h^k, v_h)$
 $= -\left(\frac{\lambda}{\gamma}(\phi_h^{k+1} - \phi_h^k + \Delta t(u_h^k \cdot \nabla) \phi_h^{k+1}) \nabla \phi_h^{k+1} - \Delta t S_\phi, v_h \right) + \tau \Delta t(u_H^{*,k+1} - u_H^k, v_h), \forall v_h \in Y_h$
6: Trouver p_h^{k+1} dans P_h $\Delta t(\text{div } \nabla p_h^{k+1}, \chi_h) = (\text{div } u_h^{*,k+1}, \chi_h), \forall \chi_h \in P_h$
7: Trouver u_h^{k+1} dans Y_h $(u_h^{k+1} - u_h^{*,k+1} + \Delta t \nabla p_h^{k+1}, v_h) = 0, \forall v_h \in Y_h$
8: Résoudre dans Y_H $(u_H^{k+1} - u_H^{*,k+1}, v_H) = 0, \forall v_H \in Y_H$
9: end for

```

---

**Algorithm 39** Variante de "schéma 1" : "schéma 2"

---

```

1: for $k = 0, 1, \dots$ do
2: Trouver ϕ_h^{k+1} dans X_h
3: $(\frac{\phi_h^{k+1} - \phi_h^k}{\Delta t}, \psi_h) + \gamma(\nabla \phi_h^{k+1}, \nabla \psi_h) + ((u_h^k \cdot \nabla) \phi_h^k, \psi_h) + \frac{\gamma}{\varepsilon^2}(DF(\phi_h^k, \phi_h^{k+1}), \psi_h) = 0, \forall \psi_h \in X_h$
4: Trouver $u_H^{*,k+1}$ dans Y_H
 $(\frac{u_H^{*,k+1} - u_H^k}{\Delta t}, v_H) + \nu(\nabla u_H^{*,k+1}, \nabla v_H) + ((u_H^{*,k+1} \cdot \nabla) u_H^{*,k+1} - S_\phi, v_H)$
 $= -\frac{1}{2}(\text{div } u_H^{*,k} u_H^{*,k+1}, v_H) - \frac{\lambda}{\gamma} \left((\frac{\phi_h^{k+1} - \phi_h^k}{\Delta t} + (u_H^{*,k+1} \cdot \nabla) \phi_h^{k+1}) \nabla \phi_h^{k+1}, v_H \right), \forall v_H \in Y_H$
5: Trouver $u_h^{*,k+1}$ dans Y_h
 $(1 + \tau \Delta t)(u_h^{*,k+1} - u_h^k, v_h) + \nu \Delta t(\nabla u_h^{*,k+1}, \nabla v_h) + \Delta t((u_h^{*,k+1} \cdot \nabla) u_h^{*,k+1}, v_h) + \frac{\Delta t}{2}(\text{div } u_h^k u_h^k, v_h)$
 $= -\left(\frac{\lambda}{\gamma}(\phi_h^{k+1} - \phi_h^k + \Delta t(u_h^k \cdot \nabla) \phi_h^{k+1}) \nabla \phi_h^{k+1} - \Delta t S_\phi, v_h \right) + \tau \Delta t(u_H^{*,k+1} - u_H^k, v_h), \forall v_h \in Y_h$
6: Trouver p_h^{k+1} dans P_h $\Delta t(\text{div } \nabla p_h^{k+1}, \chi_h) = (\text{div } u_h^{*,k+1}, \chi_h), \forall \chi_h \in P_h$
7: Trouver u_h^{k+1} dans Y_h $(u_h^{k+1} - u_h^{*,k+1} + \Delta t \nabla p_h^{k+1}, v_h) = 0, \forall v_h \in Y_h$
8: Résoudre dans Y_H $(u_H^{k+1} - u_H^{*,k+1}, v_H) = 0, \forall v_H \in Y_H$
9: end for

```

---

---

**Algorithm 40** 1grille AC/ 2grilles NS (NS complet GG) "schéma 3"

---

- 1: **for**  $k = 0, 1, \dots$  **do**
  - 2:   **Trouver**  $\phi_h^{k+1}$  **dans**  $X_h$
  - 3:  $(\frac{\phi_h^{k+1} - \phi_h^k}{\Delta t}, \psi_h) + \gamma(\nabla \phi_h^{k+1}, \nabla \psi_h) + ((u_h^k \cdot \nabla) \phi_h^k, \psi_h) + \frac{\gamma}{\varepsilon^2}(DF(\phi_h^k, \phi_h^{k+1}), \psi_h) = 0, \forall \psi_h \in X_h$
  - 4:   **Trouver**  $u_H^{*,k+1}$  **dans**  $Y_H$
  - $(\frac{u_H^{*,k+1} - u_H^k}{\Delta t}, v_H) + \nu(\nabla u_H^{*,k+1}, \nabla v_H) + ((u_H^{*,k+1} \cdot \nabla) u_H^{*,k+1} - S_\phi, v_H)$   
 $= -\frac{1}{2}(\text{div } u_H^{*,k} u_H^{*,k+1}, v_H) - \frac{\lambda}{\gamma} \left( (\frac{\phi_h^{k+1} - \phi_h^k}{\Delta t} + (u_H^{*,k+1} \cdot \nabla) \phi_h^{k+1}) \nabla \phi_h^{k+1}, v_H \right), \forall v_H \in Y_H$
  - 5:   **Trouver**  $p_H^{k+1}$  **dans**  $P_H$   $\Delta t(\text{div } \nabla p_H^{k+1}, \chi_H) = (\text{div } u_H^{*,k+1}, \chi_H), \forall \chi_H \in P_H$
  - 6:   **Trouver**  $u_H^{k+1}$  **dans**  $Y_H$   $(u_H^{k+1} - u_H^{*,k+1} + \Delta t \nabla p_H^{k+1}, v_H) = 0, \forall v_H \in Y_H$
  - 7:   **Trouver**  $u_h^{*,k+1}$  **dans**  $Y_h$
  - $(1 + \tau \Delta t)(u_h^{*,k+1} - u_h^k, v_h) + \nu \Delta t(\nabla u_h^{*,k+1}, \nabla v_h) + \Delta t((u_h^k \cdot \nabla) u_h^k, v_h) + \frac{\Delta t}{2}(\text{div } u_h^k u_h^k, v_h)$   
 $= -\left( \frac{\lambda}{\gamma}(\phi_h^{k+1} - \phi_h^k + \Delta t(u_h^k \cdot \nabla) \phi_h^{k+1}) \nabla \phi_h^{k+1} - \Delta t S_\phi, v_h \right) + \tau \Delta t(u_H^{*,k+1} - u_H^k, v_h), \forall v_h \in Y_h$
  - 8:   **Trouver**  $p_h^{k+1}$  **dans**  $P_h$   $\Delta t(\text{div } \nabla p_h^{k+1}, \chi_h) = (\text{div } u_h^{*,k+1}, \chi_h), \forall \chi_h \in P_h$
  - 9:   **Trouver**  $u_h^{k+1}$  **dans**  $Y_h$   $(u_h^{k+1} - u_h^{*,k+1} + \Delta t \nabla p_h^{k+1}, v_h) = 0, \forall v_h \in Y_h$
  - 10: **end for**
- 

**Algorithm 41** Variante de "schéma 3" : "schéma 4"

---

- 1: **for**  $k = 0, 1, \dots$  **do**
  - 2:   **Trouver**  $\phi_h^{k+1}$  **dans**  $X_h$
  - 3:  $(\frac{\phi_h^{k+1} - \phi_h^k}{\Delta t}, \psi_h) + \gamma(\nabla \phi_h^{k+1}, \nabla \psi_h) + ((u_h^k \cdot \nabla) \phi_h^k, \psi_h) + \frac{\gamma}{\varepsilon^2}(DF(\phi_h^k, \phi_h^{k+1}), \psi_h) = 0, \forall \psi_h \in X_h$
  - 4:   **Trouver**  $u_H^{*,k+1}$  **dans**  $Y_H$
  - $(\frac{u_H^{*,k+1} - u_H^k}{\Delta t}, v_H) + \nu(\nabla u_H^{*,k+1}, \nabla v_H) + ((u_H^{*,k+1} \cdot \nabla) u_H^{*,k+1} - S_\phi, v_H) + \frac{\Delta t}{2}(\text{div } u_h^k u_h^k, v_h)$   
 $= -\frac{1}{2}(\text{div } u_H^{*,k} u_H^{*,k+1}, v_H) - \frac{\lambda}{\gamma} \left( (\frac{\phi_h^{k+1} - \phi_h^k}{\Delta t} + (u_H^{*,k+1} \cdot \nabla) \phi_h^{k+1}) \nabla \phi_h^{k+1}, v_H \right), \forall v_H \in Y_H$
  - 5:   **Trouver**  $p_H^{k+1}$  **dans**  $P_H$   $\Delta t(\text{div } \nabla p_H^{k+1}, \chi_H) = (\text{div } u_H^{*,k+1}, \chi_H), \forall \chi_H \in P_H$
  - 6:   **Trouver**  $u_H^{k+1}$  **dans**  $Y_H$   $(u_H^{k+1} - u_H^{*,k+1} + \Delta t \nabla p_H^{k+1}, v_H) = 0, \forall v_H \in Y_H$
  - 7:   **Trouver**  $u_h^{*,k+1}$  **dans**  $Y_h$
  - $(1 + \tau \Delta t)(u_h^{*,k+1} - u_h^k, v_h) + \nu \Delta t(\nabla u_h^{*,k+1}, \nabla v_h) + \Delta t((u_H^{*,k+1} \cdot \nabla) u_h^{k+1}, v_h) + \frac{\Delta t}{2}(\text{div } u_h^k u_h^k, v_h)$   
 $= -\left( \frac{\lambda}{\gamma}(\phi_h^{k+1} - \phi_h^k + \Delta t(u_h^k \cdot \nabla) \phi_h^{k+1}) \nabla \phi_h^{k+1} - \Delta t S_\phi, v_h \right) + \tau \Delta t(u_H^{*,k+1} - u_H^k, v_h), \forall v_h \in Y_h$
  - 8:   **Trouver**  $p_h^{k+1}$  **dans**  $P_h$   $\Delta t(\text{div } \nabla p_h^{k+1}, \chi_h) = (\text{div } u_h^{*,k+1}, \chi_h), \forall \chi_h \in P_h$
  - 9:   **Trouver**  $u_h^{k+1}$  **dans**  $Y_h$   $(u_h^{k+1} - u_h^{*,k+1} + \Delta t \nabla p_h^{k+1}, v_h) = 0, \forall v_h \in Y_h$
  - 10: **end for**
-

### 5.3.2 Séparation d'échelles pour la concentration et la vitesse

Dans les **Algorithmes 38, 39, 40** et **41**, nous présentons seulement la décomposition de la vitesse ; la concentration  $\phi$  est calculée par un schéma implicite sur une grille fine. Dans ce qui suit nous proposons de décomposer également la concentration. Dans l'**Algorithme 42**, la vitesse n'est pas décomposée ; les **Algorithmes 43, 44, 45** et **46** traitent la décomposition de la concentration et de la vitesse où

$$\tilde{f}(\phi_H^{k+1}, \phi_h^k, \phi_h^{k+1}) = DF(\phi_h^{k+1}, \phi_h^k) + 2\phi_H^{k+1}(\phi_H^{k+1} - \phi_h^{k+1})(\phi_H^{k+1} - \phi_h^k)$$

comme défini dans [1] la partie linéaire de  $DF(\phi_h^{k+1}, \phi_H^{k+1})$ .

---

**Algorithm 42** 2 grilles AC- 1 grille NS (concentration uniquement)

---

- 1: **for**  $k = 0, 1, \dots$  **do**
- 2:   **Trouver**  $\phi_H^{k+1}$  **dans**  $X_H$
- 3:  $(\frac{\phi_H^{k+1} - \phi_H^k}{\Delta t}, \psi_H) + \gamma(\nabla \phi_H^{k+1}, \nabla \psi_H) + ((u_h^k \cdot \nabla) \phi_H^k, \psi_H) + \frac{\gamma}{\varepsilon^2}(DF(\phi_H^k, \phi_H^{k+1}), \psi_H) = 0,$
- 4:  $\forall \psi_H \in X_H$
- 5:   **Trouver**  $\phi_h^{k+1}$  **dans**  $X_h$

$$\begin{aligned} & (\frac{\phi_h^{k+1} - \phi_h^k}{\Delta t}, \psi_h) + \tau(\phi_h^{k+1} - \phi_h^k, \psi_h) + \gamma(\nabla \phi_h^{k+1}, \nabla \psi_h) + ((u_h^k \cdot \nabla) \phi_h^k, \psi_h) \\ & = \tau(\phi_H^{k+1} - \phi_H^k, \psi_h) - \frac{\gamma}{\varepsilon^2}(\tilde{f}(\phi_H^{k+1}, \phi_h^k, \phi_h^{k+1}), \psi_h), \forall \psi_h \in X_h \end{aligned}$$

- 6:   **Trouver**  $u_h^{*,k+1}$  **dans**  $Y_h$

$$\begin{aligned} & (\frac{u_h^{*,k+1} - u_h^k}{\Delta t}, v_h) + \nu(\nabla u_h^{*,k+1}, \nabla v_h) + ((u_h^{*,k+1} \cdot \nabla) u_h^{*,k+1} - S_\phi, v_h) + \frac{1}{2}(\text{div } u_h^{*,k} u_h^{*,k+1}, v_h) \\ & = -\frac{\lambda}{\gamma}((\frac{\phi_h^{k+1} - \phi_h^k}{\Delta t} + (u_h^{*,k+1} \cdot \nabla) \phi_h^{k+1}) \nabla \phi_h^{k+1}, v_h), \forall v_h \in Y_h \end{aligned}$$

- 7:   **Trouver**  $p_h^{k+1}$  **dans**  $P_h$   $\Delta t(\text{div } \nabla p_h^{k+1}, \chi_h) = (\text{div } u_h^{*,k+1}, \chi_h), \forall \chi_h \in P_h$
  - 8:   **Trouver**  $u_h^{k+1}$  **dans**  $Y_h$   $(u_h^{k+1} - u_h^{*,k+1} + \Delta t \nabla p_h^{k+1}, v_h) = 0, \forall v_h \in Y_h$
  - 9: **end for**
-



---

**Algorithm 43** 2 grilles AC- 2 grilles NS "schéma I"

---

- 1: **for**  $k = 0, 1, \dots$  **do**
  - 2:   **Trouver**  $\phi_H^{k+1}$  **dans**  $X_H$
  - 3:    $(\frac{\phi_H^{k+1} - \phi_H^k}{\Delta t}, \psi_H) + \gamma(\nabla \phi_H^{k+1}, \nabla \psi_H) + ((u_h^k \cdot \nabla) \phi_H^k, \psi_H) + \frac{\gamma}{\varepsilon^2}(DF(\phi_H^k, \phi_H^{k+1}), \psi_H) = 0,$
  - 4:    $\forall \psi_H \in X_H$
  - 5:   **Trouver**  $\phi_h^{k+1}$  **dans**  $X_h$
  - 6:    $(\frac{\phi_h^{k+1} - \phi_h^k}{\Delta t}, \psi_h) + \tau(\phi_h^{k+1} - \phi_h^k, \psi_h) + \gamma(\nabla \phi_h^{k+1}, \nabla \psi_h) + ((u_h^k \cdot \nabla) \phi_h^k, \psi_h)$   
 $= \tau(\phi_H^{k+1} - \phi_H^k, \psi_h) - \frac{\gamma}{\varepsilon^2}(\tilde{f}(\phi_H^{k+1}, \phi_h^k, \phi_h^{k+1}), \psi_h), \forall \psi_h \in X_h$
  - 7:   **Trouver**  $u_H^{*,k+1}$  **dans**  $Y_H$
  - 8:    $(\frac{u_H^{*,k+1} - u_H^k}{\Delta t}, v_H) + \nu(\nabla u_H^{*,k+1}, \nabla v_H) + ((u_H^{*,k+1} \cdot \nabla) u_H^{*,k+1} - S_\phi, v_H)$   
 $= -\frac{1}{2}(\text{div } u_H^{*,k} u_H^{*,k+1}, v_H) - \frac{\lambda}{\gamma} \left( (\frac{\phi_h^{k+1} - \phi_h^k}{\Delta t} + (u_H^{*,k+1} \cdot \nabla) \phi_h^{k+1}) \nabla \phi_h^{k+1}, v_H \right), \forall v_H \in Y_H$
  - 9:   **Trouver**  $u_h^{*,k+1}$  **dans**  $Y_h$
  - 10:    $(1 + \tau \Delta t)(u_h^{*,k+1} - u_h^k, v_h) + \nu \Delta t(\nabla u_h^{*,k+1}, \nabla v_h) + \Delta t((u_h^k \cdot \nabla) u_h^k, v_h) + \frac{\Delta t}{2}(\text{div } u_h^k u_h^k, v_h)$   
 $= -\left( \frac{\lambda}{\gamma}(\phi_h^{k+1} - \phi_h^k + \Delta t(u_h^k \cdot \nabla) \phi_h^{k+1}) \nabla \phi_h^{k+1} - \Delta t S_\phi, v_h \right) + \tau \Delta t(u_H^{*,k+1} - u_H^k, v_h), \forall v_h \in Y_h$
  - 11:   **Trouver**  $p_h^{k+1}$  **dans**  $P_h$   $\Delta t(\text{div } \nabla p_h^{k+1}, \chi_h) = (\text{div } u_h^{*,k+1}, \chi_h), \forall \chi_h \in P_h$
  - 12:   **Trouver**  $u_h^{k+1}$  **dans**  $Y_h$   $(u_h^{k+1} - u_h^{*,k+1} + \Delta t \nabla p_h^{k+1}, v_h) = 0, \forall v_h \in Y_h$
  - 13: **end for**
-

**Algorithm 44** Variante de "schéma I" : "schéma II"

- 
- 1: **for**  $k = 0, 1, \dots$  **do**  
2:   **Trouver**  $\phi_H^{k+1}$  **dans**  $X_H$   
3:    $(\frac{\phi_H^{k+1} - \phi_H^k}{\Delta t}, \psi_H) + \gamma(\nabla \phi_H^{k+1}, \nabla \psi_H) + ((u_h^k \cdot \nabla) \phi_H^k, \psi_H) + \frac{\gamma}{\varepsilon^2}(DF(\phi_H^k, \phi_H^{k+1}), \psi_H) = 0,$   
4:    $\forall \psi_H \in X_H$   
5:   **Trouver**  $\phi_h^{k+1}$  **dans**  $X_h$

$$\begin{aligned} & (\frac{\phi_h^{k+1} - \phi_h^k}{\Delta t}, \psi_h) + \tau(\phi_h^{k+1} - \phi_h^k, \psi_h) + \gamma(\nabla \phi_h^{k+1}, \nabla \psi_h) + ((u_h^k \cdot \nabla) \phi_h^k, \psi_h) \\ & = \tau(\phi_h^{k+1} - \phi_h^k, \psi_h) - \frac{\gamma}{\varepsilon^2}(\tilde{f}(\phi_H^{k+1}, \phi_h^k, \phi_h^{k+1}), \psi_h), \forall \psi_h \in X_h \end{aligned}$$

- 6:   **Trouver**  $u_H^{*,k+1}$  **dans**  $Y_H$

$$\begin{aligned} & (\frac{u_H^{*,k+1} - u_H^k}{\Delta t}, v_H) + \nu(\nabla u_H^{*,k+1}, \nabla v_H) + ((u_H^{*,k+1} \cdot \nabla) u_H^{*,k+1} - S_\phi, v_H) \\ & = -\frac{1}{2}(\text{div } u_H^{*,k} u_H^{*,k+1}, v_H) - \frac{\lambda}{\gamma} \left( (\frac{\phi_h^{k+1} - \phi_h^k}{\Delta t} + (u_H^{*,k+1} \cdot \nabla) \phi_h^{k+1}) \nabla \phi_h^{k+1}, v_H \right), \forall v_H \in Y_H \end{aligned}$$

- 7:   **Trouver**  $u_h^{*,k+1}$  **dans**  $Y_h$

$$\begin{aligned} & (1 + \tau \Delta t)(u_h^{*,k+1} - u_h^k, v_h) + \nu \Delta t(\nabla u_h^{*,k+1}, \nabla v_h) + \Delta t((u_H^{*,k+1} \cdot \nabla) u_h^{*,k+1}, v_h) + \frac{\Delta t}{2}(\text{div } u_h^k u_h^k, v_h) \\ & = -\left( \frac{\lambda}{\gamma}(\phi_h^{k+1} - \phi_h^k + \Delta t(u_h^k \cdot \nabla) \phi_h^{k+1}) \nabla \phi_h^{k+1} - \Delta t S_\phi, v_h \right) + \tau \Delta t(u_H^{*,k+1} - u_H^k, v_h), \forall v_h \in Y_h \end{aligned}$$

- 8:   **Trouver**  $p_h^{k+1}$  **dans**  $P_h$   $\Delta t(\text{div } \nabla p_h^{k+1}, \chi_h) = (\text{div } u_h^{*,k+1}, \chi_h), \forall \chi_h \in P_h$   
9:   **Trouver**  $u_h^{k+1}$  **dans**  $Y_h$   $(u_h^{k+1} - u_h^{*,k+1} + \Delta t \nabla p_h^{k+1}, v_h) = 0, \forall v_h \in Y_h$   
10: **end for**
-

---

**Algorithm 45** 2 grilles AC- 2 grilles NS (NS complet GG) "schéma III"

---

- 1: **for**  $k = 0, 1, \dots$  **do**
- 2:   **Trouver**  $\phi_H^{k+1}$  **dans**  $X_H$
- 3:  $(\frac{\phi_H^{k+1} - \phi_H^k}{\Delta t}, \psi_H) + \gamma(\nabla \phi_H^{k+1}, \nabla \psi_H) + ((u_h^k \cdot \nabla) \phi_H^k, \psi_H) + \frac{\gamma}{\varepsilon^2}(DF(\phi_H^k, \phi_H^{k+1}), \psi_H) = 0,$
- 4:  $\forall \psi_H \in X_H$
- 5:   **Trouver**  $\phi_h^{k+1}$  **dans**  $X_h$

$$\begin{aligned} & (\frac{\phi_h^{k+1} - \phi_h^k}{\Delta t}, \psi_h) + \tau(\phi_h^{k+1} - \phi_h^k, \psi_h) + \gamma(\nabla \phi_h^{k+1}, \nabla \psi_h) + ((u_h^k \cdot \nabla) \phi_h^k, \psi_h) \\ & = \tau(\phi_H^{k+1} - \phi_H^k, \psi_h) - \frac{\gamma}{\varepsilon^2}(\tilde{f}(\phi_H^{k+1}, \phi_h^k, \phi_h^{k+1}), \psi_h), \forall \psi_h \in X_h \end{aligned}$$

- 6:   **Trouver**  $u_H^{*,k+1}$  **dans**  $Y_H$

$$\begin{aligned} & (\frac{u_H^{*,k+1} - u_H^k}{\Delta t}, v_H) + \nu(\nabla u_H^{*,k+1}, \nabla v_H) + ((u_H^{*,k+1} \cdot \nabla) u_H^{*,k+1} - S_\phi, v_H) \\ & = -\frac{1}{2}(\text{div } u_H^{*,k} u_H^{*,k+1}, v_H) - \frac{\lambda}{\gamma} \left( (\frac{\phi_h^{k+1} - \phi_h^k}{\Delta t} + (u_H^{*,k+1} \cdot \nabla) \phi_h^{k+1}) \nabla \phi_h^{k+1}, v_H \right), \forall v_H \in Y_H \end{aligned}$$

- 7:   **Trouver**  $p_H^{k+1}$  **dans**  $P_H$   $\Delta t(\text{div } \nabla p_H^{k+1}, \chi_H) = (\text{div } u_H^{*,k+1}, \chi_H), \forall \chi_H \in P_H$
- 8:   **Trouver**  $u_H^{k+1}$  **dans**  $Y_H$   $(u_H^{k+1} - u_H^{*,k+1} + \Delta t \nabla p_H^{k+1}, v_H) = 0, \forall v_H \in Y_H$
- 9:   **Trouver**  $u_h^{*,k+1}$  **dans**  $Y_h$

$$\begin{aligned} & (1 + \tau \Delta t)(u_h^{*,k+1} - u_h^k, v_h) + \nu \Delta t(\nabla u_h^{*,k+1}, \nabla v_h) + \Delta t((u_h^k \cdot \nabla) u_h^k, v_h) + \frac{\Delta t}{2}(\text{div } u_h^k u_h^k, v_h) \\ & = -\left( \frac{\lambda}{\gamma}(\phi_h^{k+1} - \phi_h^k + \Delta t(u_h^k \cdot \nabla) \phi_h^{k+1}) \nabla \phi_h^{k+1} - \Delta t S_\phi, v_h \right) + \tau \Delta t(u_H^{*,k+1} - u_H^k, v_h), \forall v_h \in Y_h \end{aligned}$$

- 10:   **Trouver**  $p_h^{k+1}$  **dans**  $P_h$   $\Delta t(\text{div } \nabla p_h^{k+1}, \chi_h) = (\text{div } u_h^{*,k+1}, \chi_h), \forall \chi_h \in P_h$
  - 11:   **Trouver**  $u_h^{k+1}$  **dans**  $Y_h$   $(u_h^{k+1} - u_h^{*,k+1} + \Delta t \nabla p_h^{k+1}, v_h) = 0, \forall v_h \in Y_h$
  - 12: **end for**
-

**Algorithm 46** Variante de "schéma III" : "schéma IV"

- 
- 1: **for**  $k = 0, 1, \dots$  **do**
  - 2:   **Trouver**  $\phi_H^{k+1}$  **dans**  $X_H$
  - 3:    $(\frac{\phi_H^{k+1} - \phi_H^k}{\Delta t}, \psi_H) + \gamma(\nabla \phi_H^{k+1}, \nabla \psi_H) + ((u_h^k \cdot \nabla) \phi_H^k, \psi_H) + \frac{\gamma}{\varepsilon^2}(DF(\phi_H^k, \phi_H^{k+1}), \psi_H) = 0,$
  - 4:    $\forall \psi_H \in X_H$
  - 5:   **Trouver**  $\phi_h^{k+1}$  **dans**  $X_h$

$$\begin{aligned} & (\frac{\phi_h^{k+1} - \phi_h^k}{\Delta t}, \psi_h) + \tau(\phi_h^{k+1} - \phi_h^k, \psi_h) + \gamma(\nabla \phi_h^{k+1}, \nabla \psi_h) + ((u_h^k \cdot \nabla) \phi_h^k, \psi_h) \\ & = \tau(\phi_h^{k+1} - \phi_h^k, \psi_h) - \frac{\gamma}{\varepsilon^2}(\tilde{f}(\phi_H^{k+1}, \phi_h^k, \phi_h^{k+1}), \psi_h), \forall \psi_h \in X_h \end{aligned}$$

- 6:   **Trouver**  $u_H^{*,k+1}$  **dans**  $Y_H$

$$\begin{aligned} & (\frac{u_H^{*,k+1} - u_H^k}{\Delta t}, v_H) + \nu(\nabla u_H^{*,k+1}, \nabla v_H) + ((u_H^{*,k+1} \cdot \nabla) u_H^{*,k+1} - S_\phi, v_H) \\ & = -\frac{1}{2}(\text{div } u_H^{*,k} u_H^{*,k+1}, v_H) - \frac{\lambda}{\gamma} \left( (\frac{\phi_h^{k+1} - \phi_h^k}{\Delta t} + (u_H^{*,k+1} \cdot \nabla) \phi_h^{k+1}) \nabla \phi_h^{k+1}, v_H \right), \forall v_H \in Y_H \end{aligned}$$

- 7:   **Trouver**  $p_H^{k+1}$  **dans**  $P_H$   $\Delta t(\text{div } \nabla p_H^{k+1}, \chi_H) = (\text{div } u_H^{*,k+1}, \chi_H), \forall \chi_H \in P_H$
- 8:   **Trouver**  $u_H^{k+1}$  **dans**  $Y_H$   $(u_H^{k+1} - u_H^{*,k+1} + \Delta t \nabla p_H^{k+1}, v_H) = 0, \forall v_H \in Y_H$
- 9:   **Trouver**  $u_h^{*,k+1}$  **dans**  $Y_h$

$$\begin{aligned} & (1 + \tau \Delta t)(u_h^{*,k+1} - u_h^k, v_h) + \nu \Delta t(\nabla u_h^{*,k+1}, \nabla v_h) + \Delta t((u_H^{*,k+1} \cdot \nabla) u_h^{*,k+1}, v_h) + \frac{\Delta t}{2}(\text{div } u_h^k u_h^k, v_h) \\ & = -\left( \frac{\lambda}{\gamma}(\phi_h^{k+1} - \phi_h^k + \Delta t(u_h^k \cdot \nabla) \phi_h^{k+1}) \nabla \phi_h^{k+1} - \Delta t S_\phi, v_h \right) + \tau \Delta t(u_H^{*,k+1} - u_H^k, v_h), \forall v_h \in Y_h \end{aligned}$$

- 10:   **Trouver**  $p_h^{k+1}$  **dans**  $P_h$   $\Delta t(\text{div } \nabla p_h^{k+1}, \chi_h) = (\text{div } u_h^{*,k+1}, \chi_h), \forall \chi_h \in P_h$
  - 11:   **Trouver**  $u_h^{k+1}$  **dans**  $Y_h$   $(u_h^{k+1} - u_h^{*,k+1} + \Delta t \nabla p_h^{k+1}, v_h) = 0, \forall v_h \in Y_h$
  - 12: **end for**
- 

## 5.4 Simulations numériques

### 5.4.1 Fusionnement de deux bulles

En prenant le cas homogène ( $S_\phi = 0$ ) et un  $\phi_0$  égal à deux bulles en contact nous pouvons remarquer le fusionnement des deux bulles et la formation d'un oval dans les Fig. 5.1 à 5.4 pour la décomposition uniquement de la vitesse et dans les Fig. 5.5 à 5.8 pour les algorithmes décomposant à la fois la concentration et la vitesse. Nous comparons nos résultats à ceux de [136] et nous notons la compatibilité.

Sur un carré  $[-1, 1] \times [-1, 1]$  nous considérons un maillage fin de  $N_f \times N_f = 32 \times 32$  nœuds et un grossier de  $N_c \times N_c = 16 \times 16$  nœuds, pour un pas de temps  $\Delta t = 10^{-3}$  et un temps final  $T = 0.5$ , nous partons de deux bulles en contact où la phase  $\phi = 1$  est à l'intérieur des bulles et  $\phi = -1$  à l'extérieur des bulles et la vitesse initiale est nulle avec  $Re = 10, \varepsilon = 0.05, \gamma = 0.1, \lambda = 10^{-6}$  et nous présentons la fonction  $\phi$  aux temps  $t = 0, 0.02, 0.04, 0.08$  en adaptant l'EF  $\mathbb{P}_2$  pour la fonction  $\phi$  et la vitesse  $u$  et l'EF  $\mathbb{P}_1$  pour la pression  $p$ .

### 5.4.1.1 Décomposition uniquement pour la vitesse

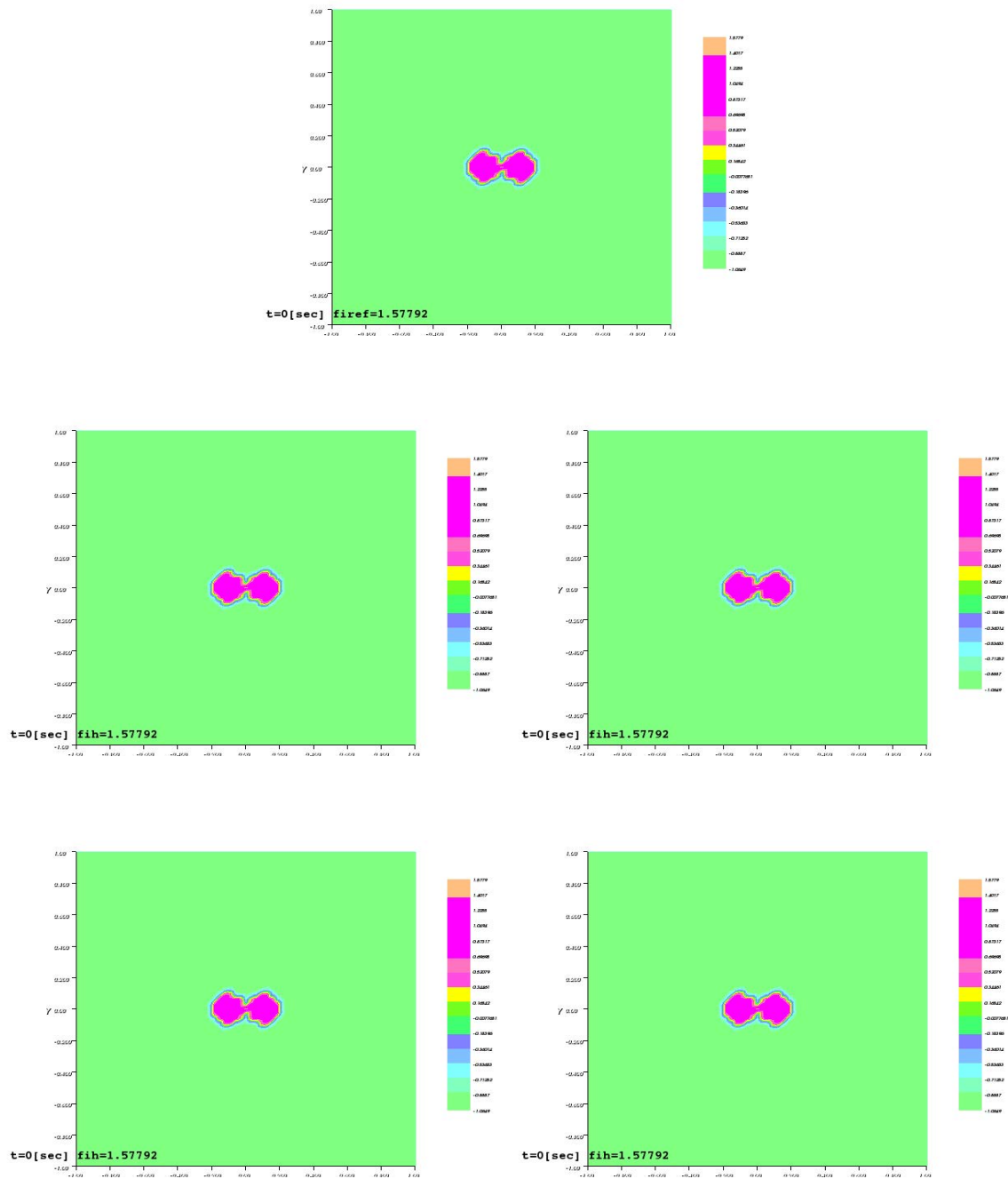


FIGURE 5.1 – La solution  $\phi_h$ ; de haut en bas et de gauche à droite pour : **Algorithme 37** (Référence 1 grille), **Algorithmes 38, 39, 40, 41** à  $t = 0$ .

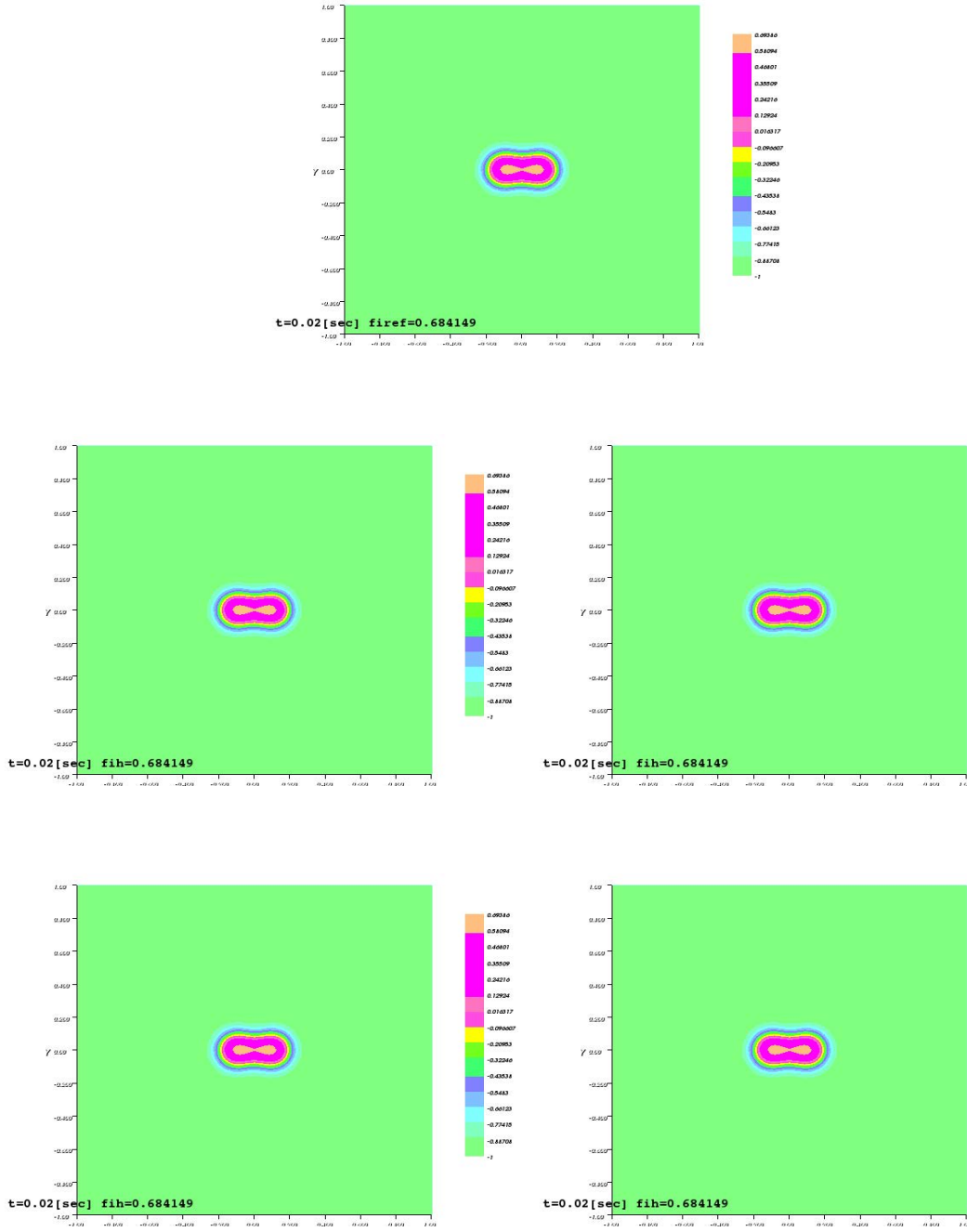


FIGURE 5.2 – La solution  $\phi_h$ ; de haut en bas et de gauche à droite pour : **Algorithme 37** (Référence 1 grille), **Algorithmes 38, 39, 40, 41** à  $t = 0.02$ .

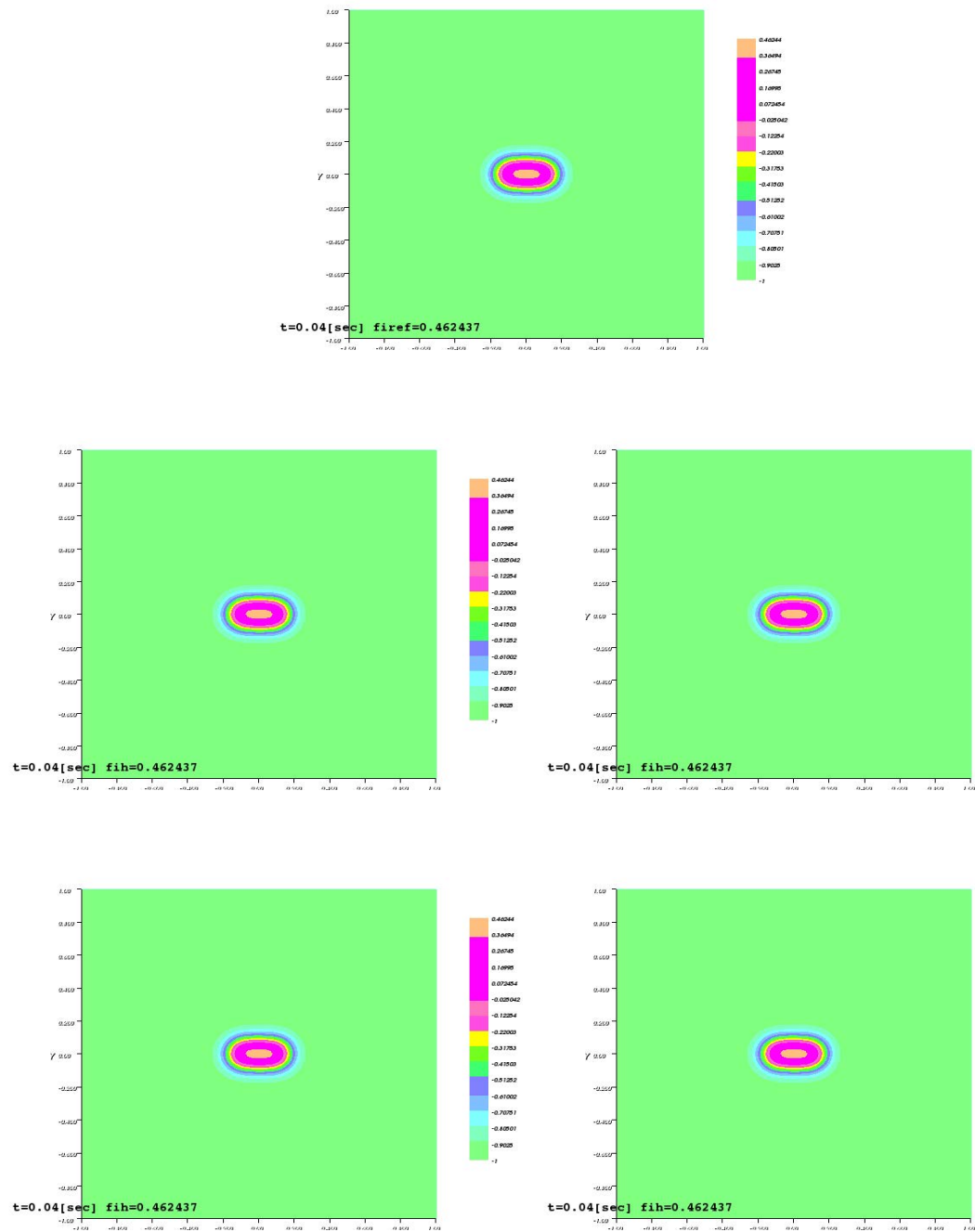


FIGURE 5.3 – La solution  $\phi_h$ ; de haut en bas et de gauche à droite pour : **Algorithme 37** (Référence 1 grille), **Algorithmes 38, 39, 40, 41** à  $t = 0.04$ .

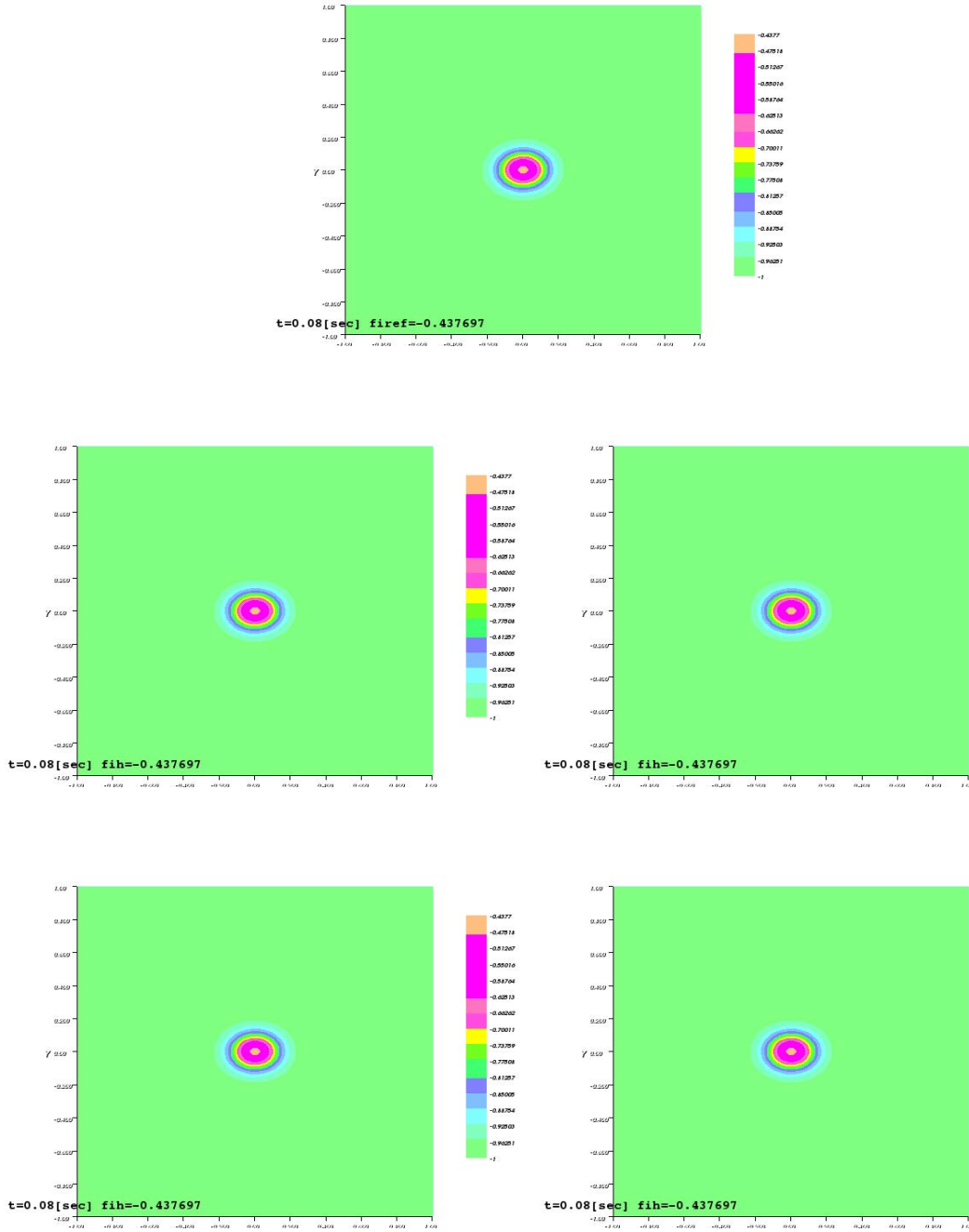


FIGURE 5.4 – La solution  $\phi_h$ ; de haut en bas et de gauche à droite pour : **Algorithme 37** (Référence 1 grille), **Algorithmes 38, 39, 40, 41** à  $t = 0.08$ .

#### 5.4.1.2 Décomposition de la concentration et de la vitesse

Pour les mêmes paramètres, nous testons les algorithmes de la décomposition non seulement de la vitesse mais aussi de la concentration.



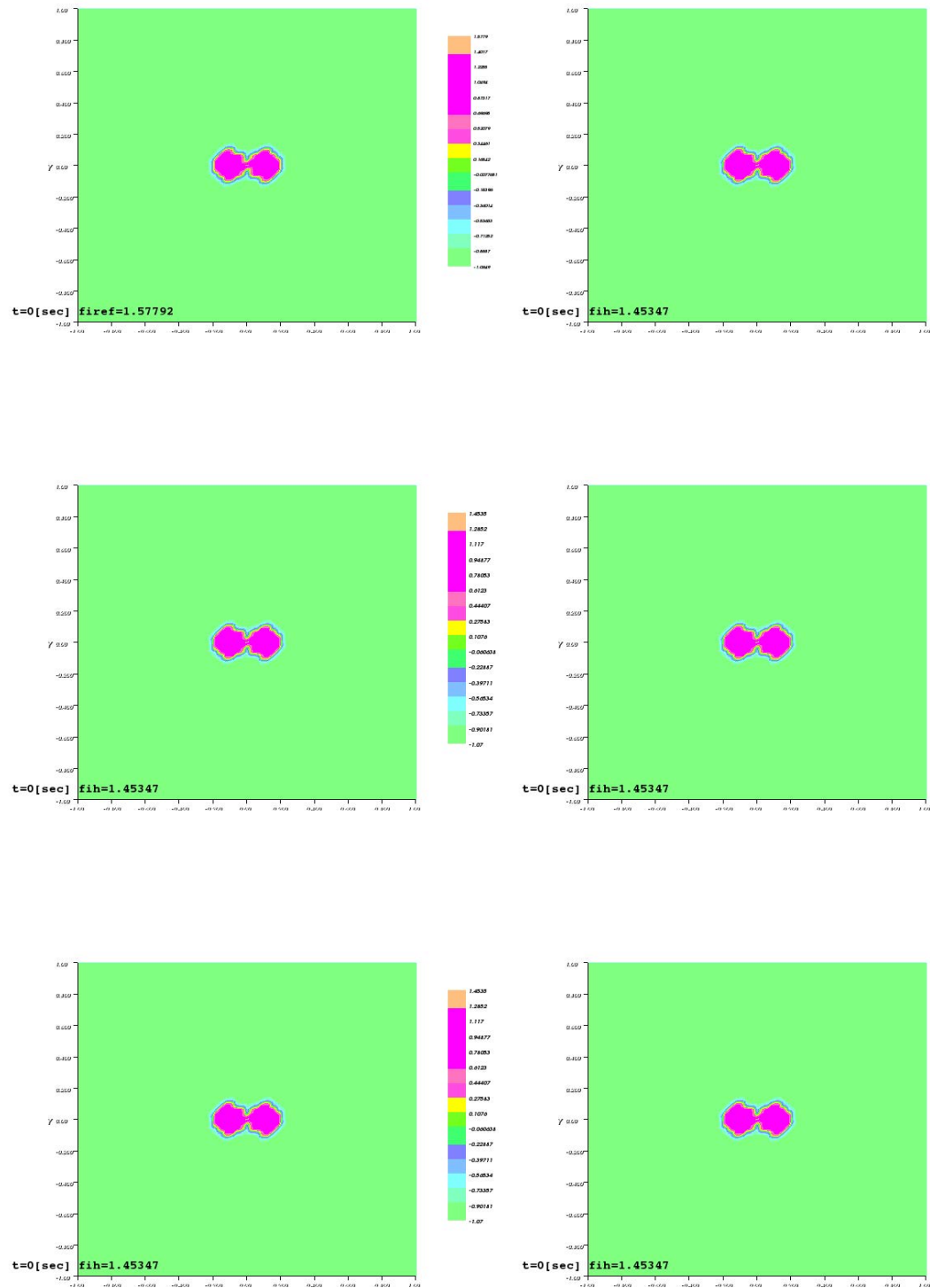


FIGURE 5.5 – La solution  $\phi_h$ ; de haut en bas et de gauche à droite pour : **Algorithme 37** (Référence 1 grille), **Algorithmes 42, 43, 44, 45, 46** à  $t = 0$ .

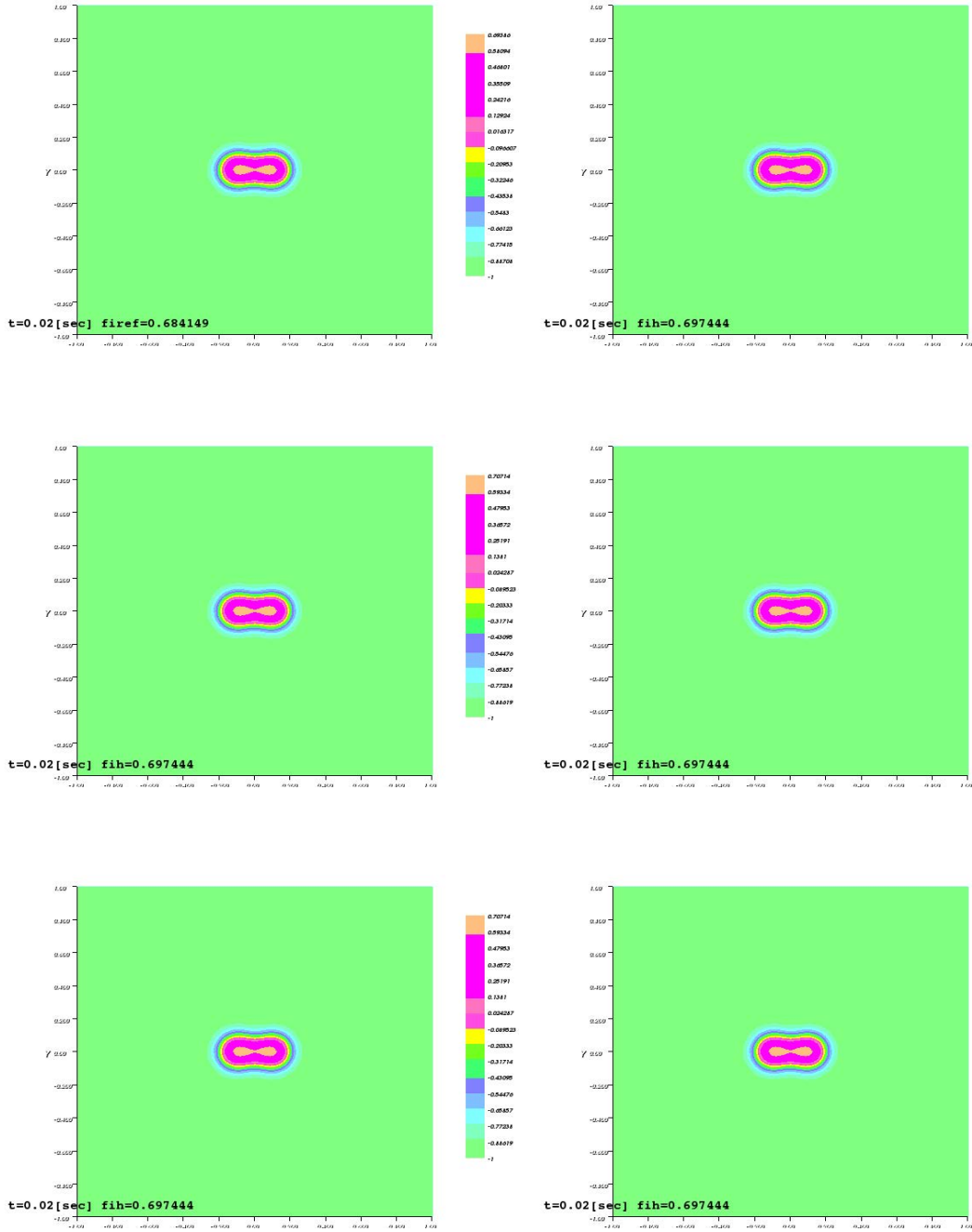


FIGURE 5.6 – La solution  $\phi_h$ ; de haut en bas et de gauche à droite pour : **Algorithme 37** (Référence 1 grille), **Algorithmes 42, 43, 44, 45, 46** à  $t = 0.02$ .

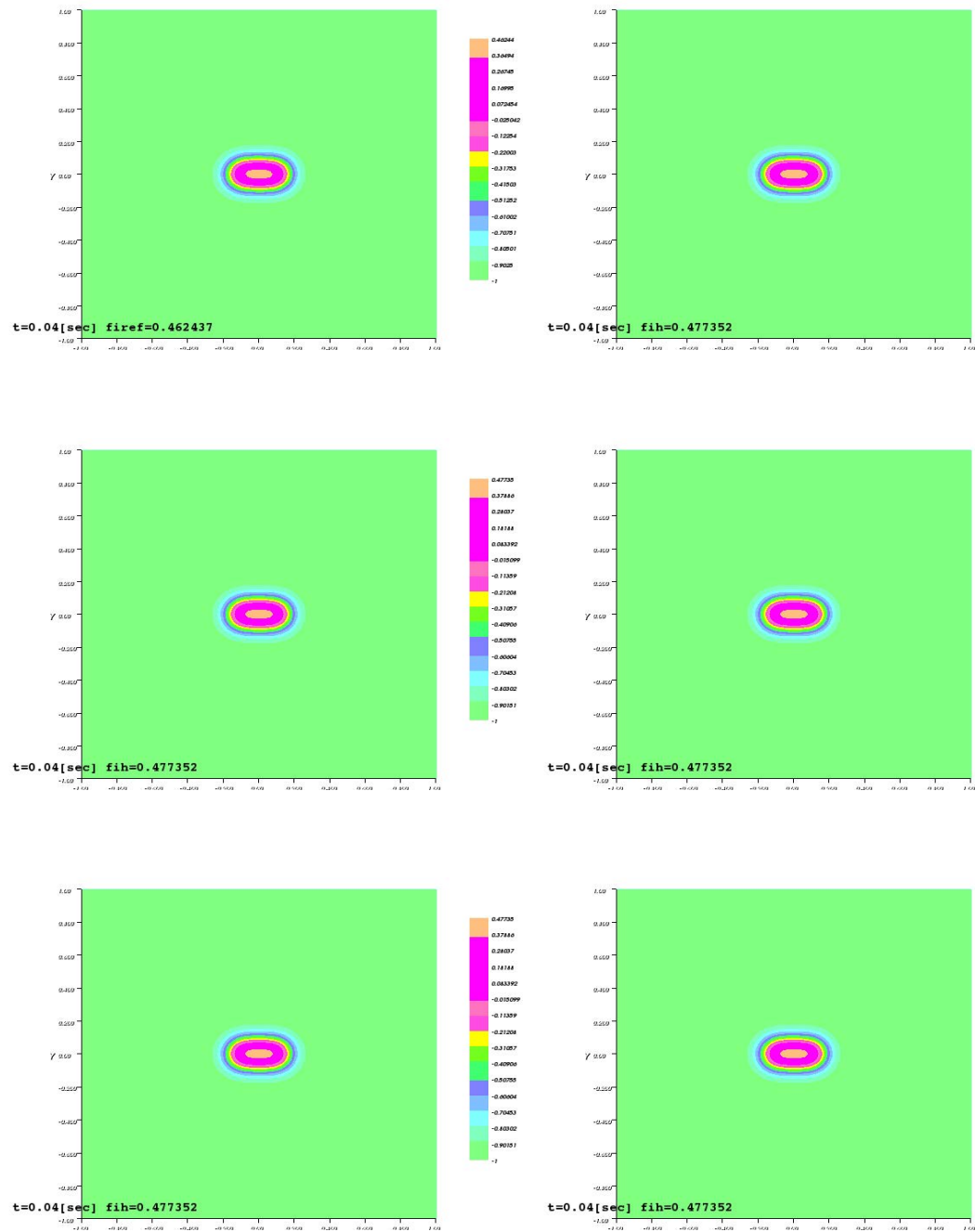


FIGURE 5.7 – La solution  $\phi_h$ ; de haut en bas et de gauche à droite pour : **Algorithme 37** (Référence 1 grille), **Algorithmes 42, 43, 44, 45, 46** à  $t = 0.04$ .

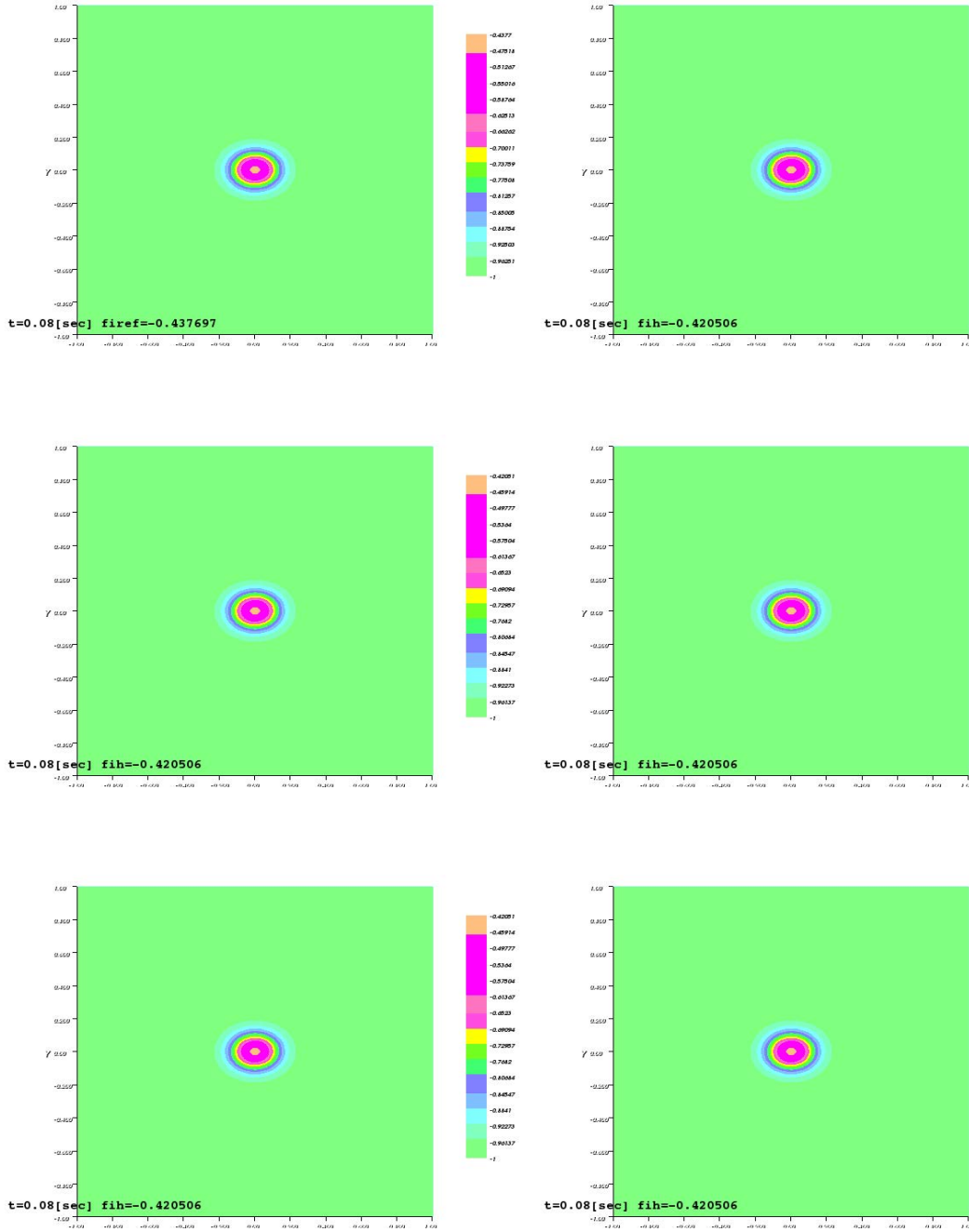


FIGURE 5.8 – La solution  $\phi_h$ ; de haut en bas et de gauche à droite pour : **Algorithme 37** (Référence 1 grille), **Algorithmes 42, 43, 44, 45, 46** à  $t = 0.08$ .

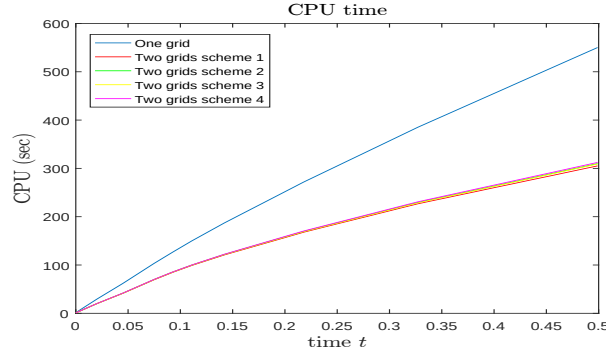
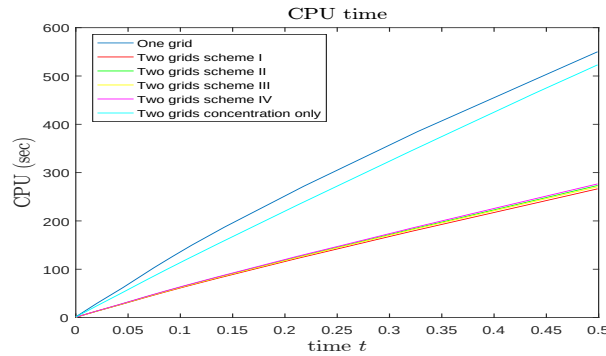
### 5.4.1.3 Comparaison en temps de calcul

Nous représentons le gain en temps de calcul CPU apporté par notre technique bi-grilles. La comparaison est faite entre le schéma implicite (référence) résolu sur une grille fine et ceux de la décomposition de la vitesse Tab. 5.1 et Fig. 5.9 et de la vitesse et la concentration Tab. 5.2 et Fig. 5.10.

|                                    |                                 |                                 |                                 |                                 |
|------------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|
| $32 \times 16$ points<br>$T = 0.5$ | <b>Algorithm 38</b><br>schéma 1 | <b>Algorithm 39</b><br>schéma 2 | <b>Algorithm 40</b><br>schéma 3 | <b>Algorithm 41</b><br>schéma 4 |
| $t_{1G}$ (en sec.)                 | 550.18                          | 550.18                          | 550.18                          | 550.18                          |
| $t_{2G}$ (en sec.)                 | 305.19                          | 309.88                          | 309.13                          | 312.39                          |
| $\frac{t_{2G}}{t_{1G}}$            | 0.55                            | 0.56                            | 0.56                            | 0.57                            |

 TABLE 5.1 – Séparation d'échelles Allen-Cahn/Navier-Stokes deux bulles (bi-grilles vitesse uniquement)  $\mathbb{P}_2/\mathbb{P}_1$ .

|                                    |                     |                                 |                                  |                                   |                                  |
|------------------------------------|---------------------|---------------------------------|----------------------------------|-----------------------------------|----------------------------------|
| $32 \times 16$ points<br>$T = 0.5$ | <b>Algorithm 42</b> | <b>Algorithm 43</b><br>schéma I | <b>Algorithm 44</b><br>schéma II | <b>Algorithm 45</b><br>schéma III | <b>Algorithm 46</b><br>schéma IV |
| $t_{1G}$ (en sec.)                 | 550.18              | 550.18                          | 550.18                           | 550.18                            | 550.18                           |
| $t_{2G}$ (en sec.)                 | 523.09              | 266.43                          | 273.4                            | 270.65                            | 276.63                           |
| $\frac{t_{2G}}{t_{1G}}$            | 0.95                | 0.48                            | 0.497                            | 0.49                              | 0.503                            |

 TABLE 5.2 – Séparation d'échelles Allen-Cahn/Navier-Stokes deux bulles (bi-grilles concentration et vitesse)  $\mathbb{P}_2/\mathbb{P}_1$ .

 FIGURE 5.9 – Comparaison CPU (deux bulles) entre le schéma sur une grille fine et ceux de la méthode de séparation d'échelles (uniquement vitesse) : **Algorithmes 38, 39, 40, 41** avec  $T = 0.5$  et  $N_f = 32, N_c = 16$ .

 FIGURE 5.10 – Comparaison CPU (deux bulles) entre le schéma sur une grille fine et ceux de la méthode de séparation d'échelles (concentration et vitesse) : **Algorithmes 42, 43, 44, 45, 46** avec  $T = 0.5$  et  $N_f = 32, N_c = 16$ .

Ainsi, nous constatons que la résolution par notre technique est deux fois plus rapide que la résolution par un schéma implicite sur la grille fine. Le gain est maximal pour la décomposition simultanée de la concentration et la vitesse.

### 5.4.2 Bulle montante

Nous utilisons encore le modèle d'Allen-Cahn mais nous commençons par un  $\phi_0$  égal à une bulle rectangulaire et la force de flottabilité  $S_\phi = (0, -(1 + \phi)g(\rho_1 - \rho_0) - (1 - \phi)g(\rho_2 - \rho_0))^T \neq 0$  parce que nous considérons deux fluides avec des densités différentes  $\rho_1 = 1$  et  $\rho_2 = 2$  (densité de fond  $\rho_0 = \rho_1$ ) et  $g = 10$ .

#### 5.4.2.1 Décomposition uniquement pour la vitesse

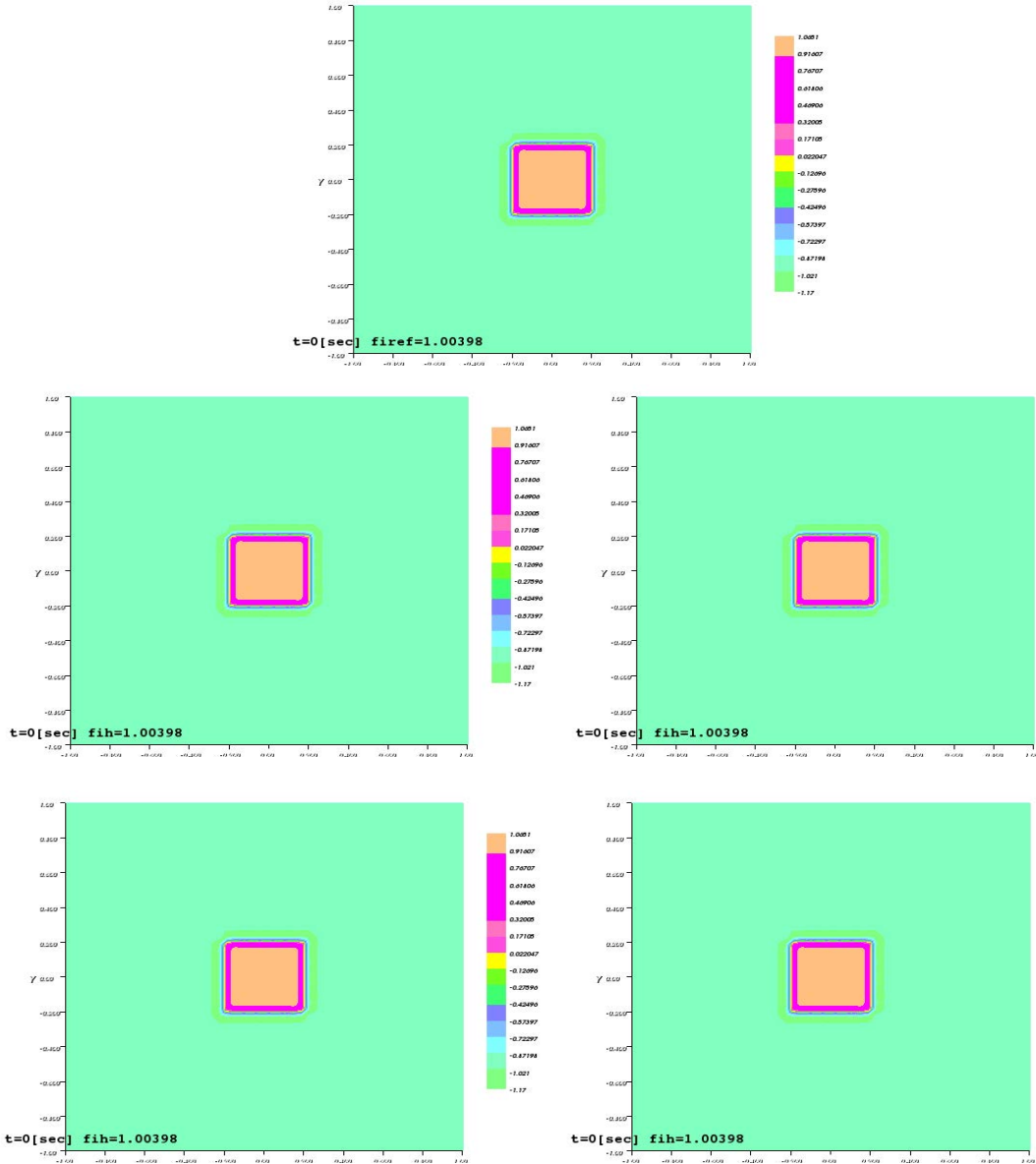


FIGURE 5.11 – La solution  $\phi_h$  bulle montante ; de haut en bas et de gauche à droite pour : **Algorithme 37** (Référence 1 grille), **Algorithmes 38, 39, 40, 41** à  $t = 0$ .

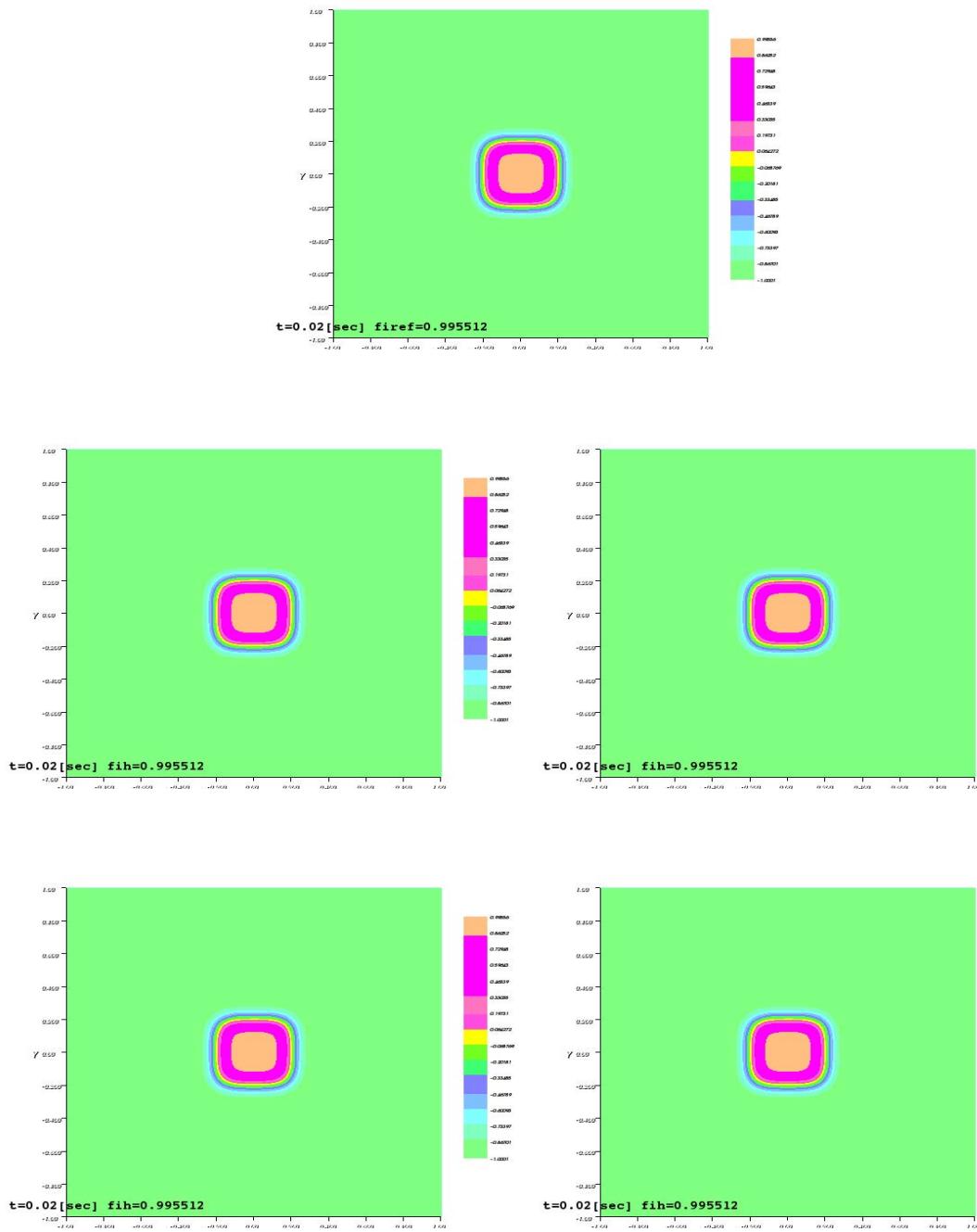


FIGURE 5.12 – La solution  $\phi_h$  bulle montante ; de haut en bas et de gauche à droite pour : **Algorithme 37** (Référence 1 grille), **Algorithmes 38, 39, 40, 41** à  $t = 0.02$ .

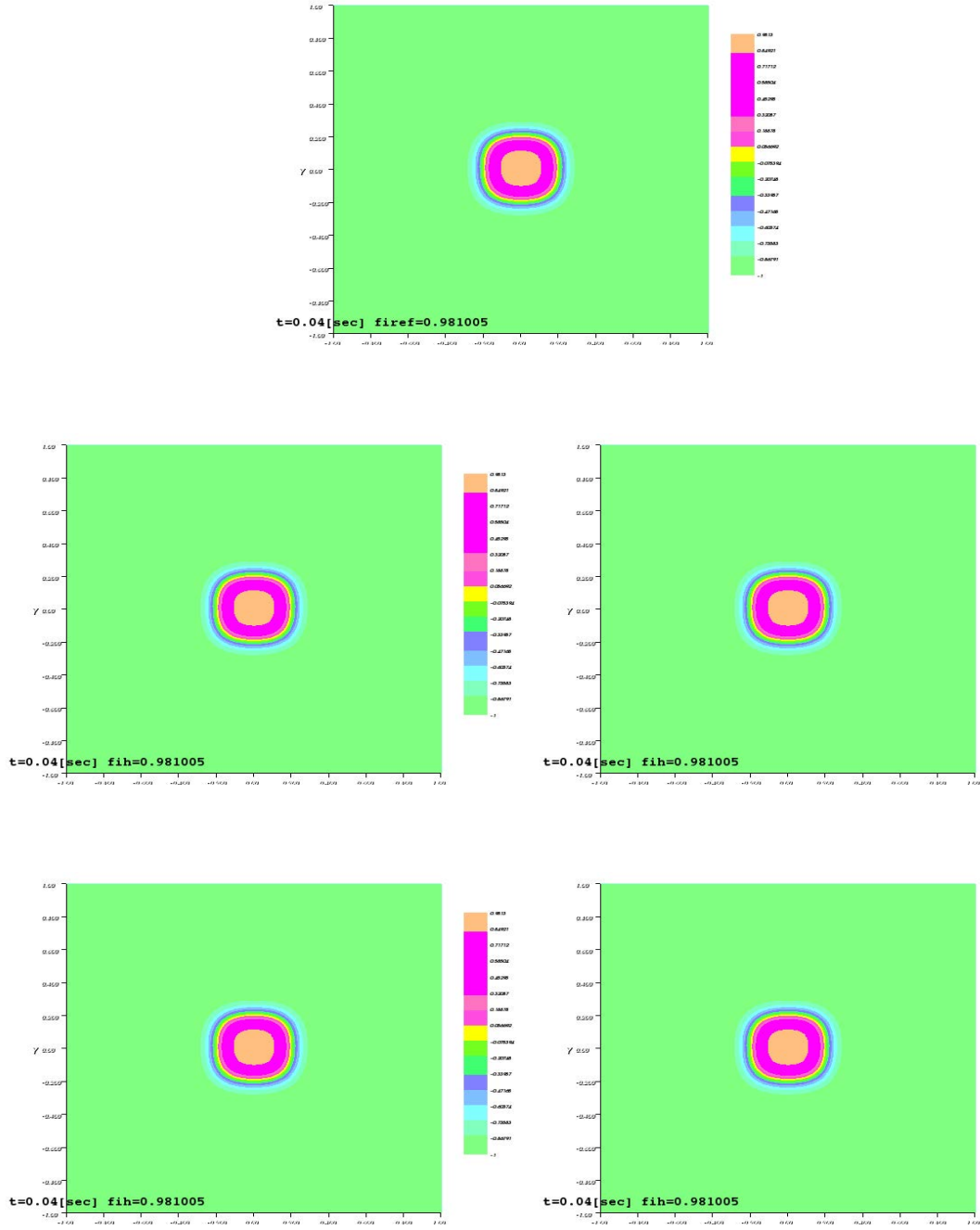


FIGURE 5.13 – La solution  $\phi_h$  bulle montante ; de haut en bas et de gauche à droite pour : **Algorithme 37** (Référence 1 grille), **Algorithmes 38, 39, 40, 41** à  $t = 0.04$ .



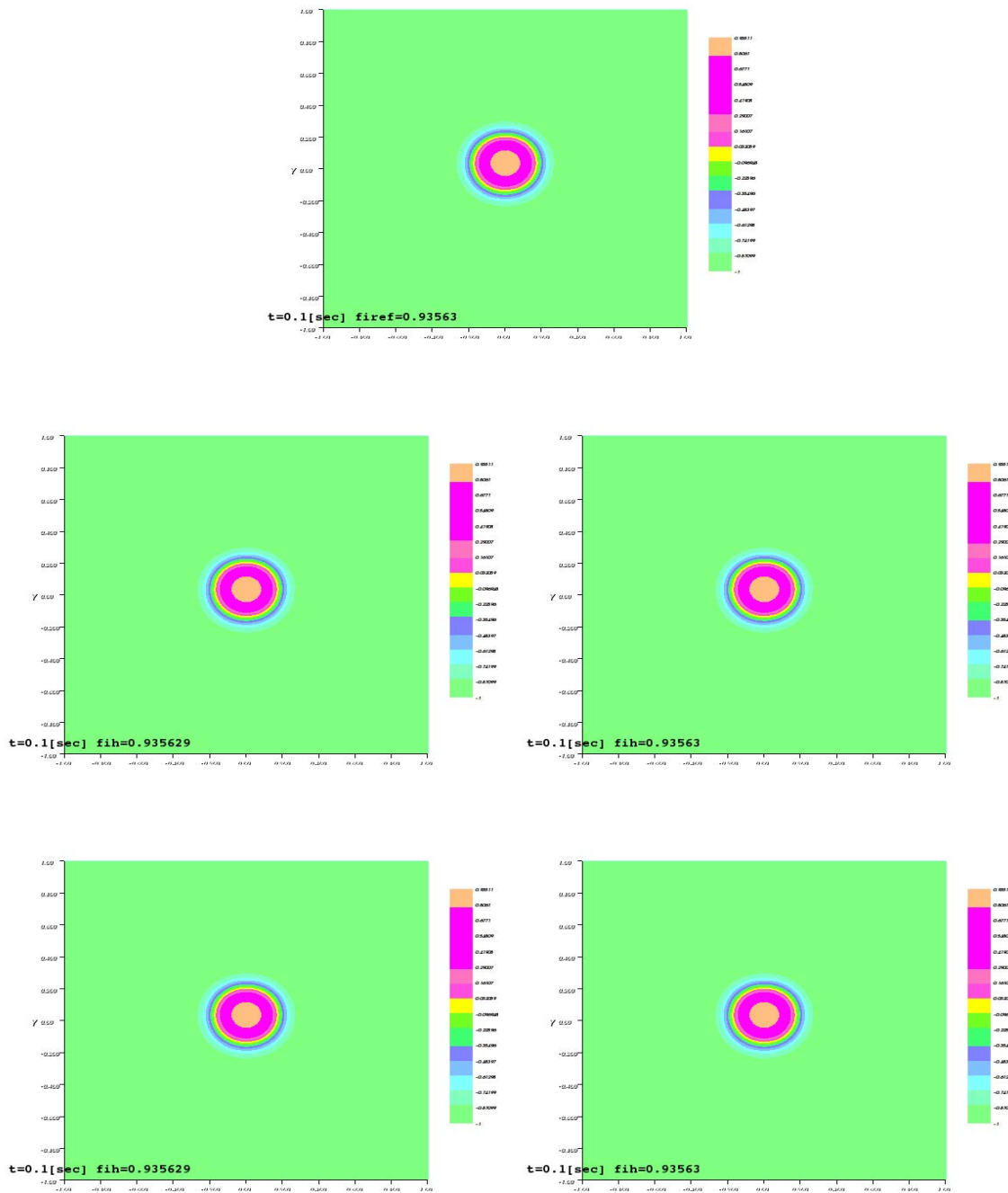


FIGURE 5.14 – La solution  $\phi_h$  bulle montante ; de haut en bas et de gauche à droite pour : **Algorithme 37** (Référence 1 grille), **Algorithmes 38, 39, 40, 41** à  $t = 0.1$ .

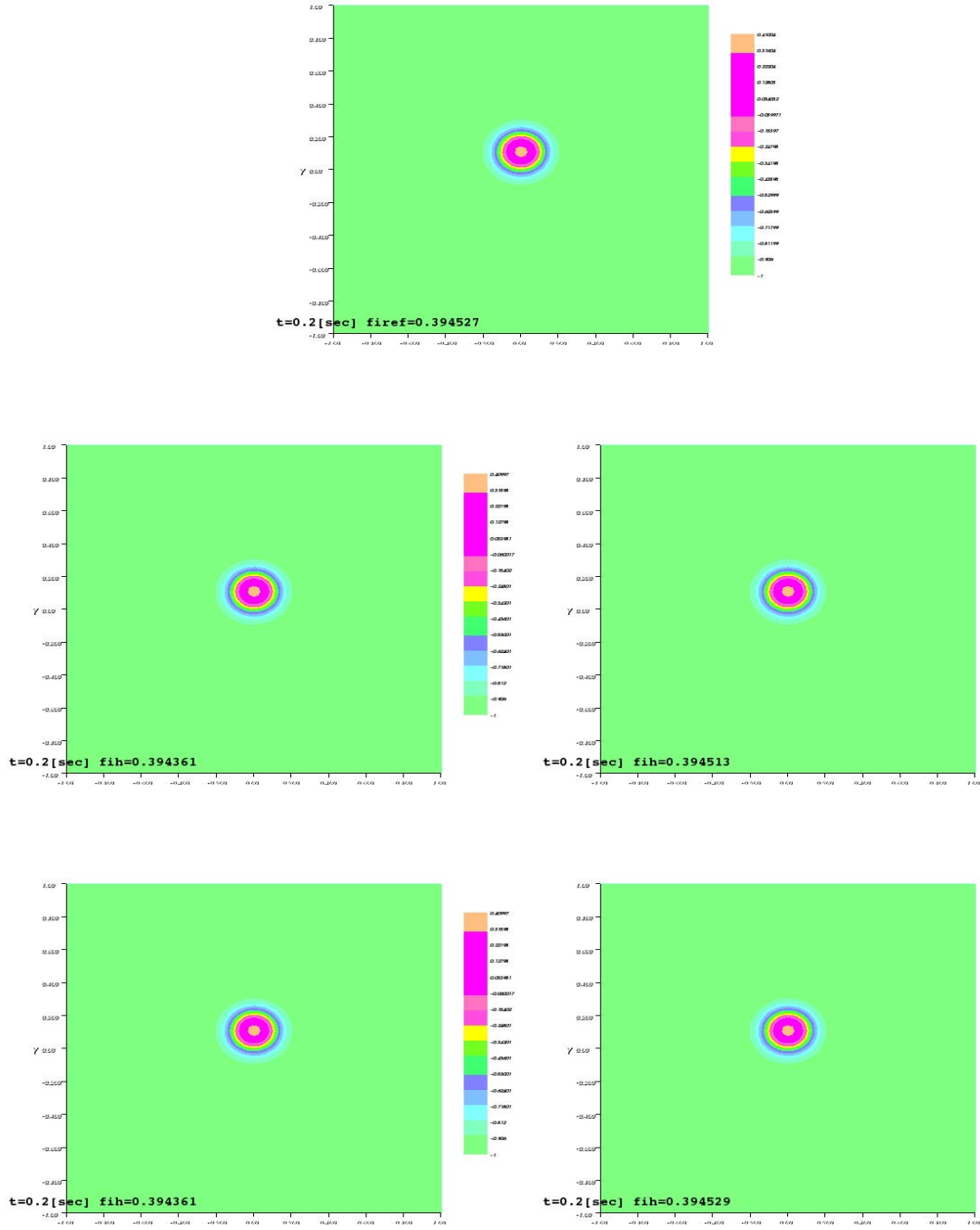


FIGURE 5.15 – La solution  $\phi_h$  bulle montante ; de haut en bas et de gauche à droite pour : **Algorithme 37** (Référence 1 grille), **Algorithmes 38, 39, 40, 41** à  $t = 0.2$ .

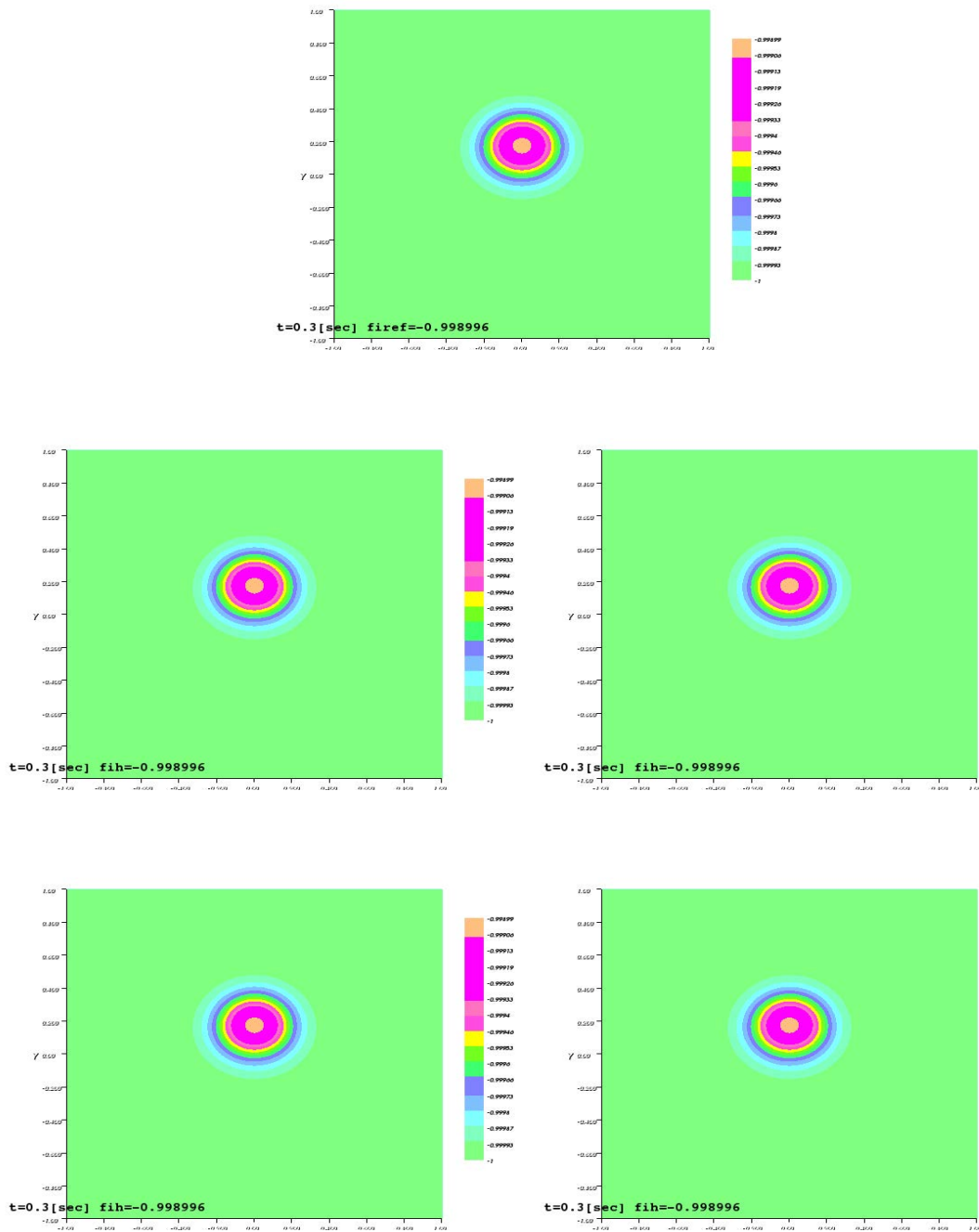


FIGURE 5.16 – La solution  $\phi_h$  bulle montante ; de haut en bas et de gauche à droite pour : **Algorithme 37** (Référence 1 grille), **Algorithmes 38, 39, 40, 41** à  $t = 0.3$ .

#### 5.4.2.2 Décomposition de la concentration et de la vitesse

Pour les mêmes paramètres, nous testons les algorithmes de la décomposition non seulement de la vitesse mais aussi de la concentration.

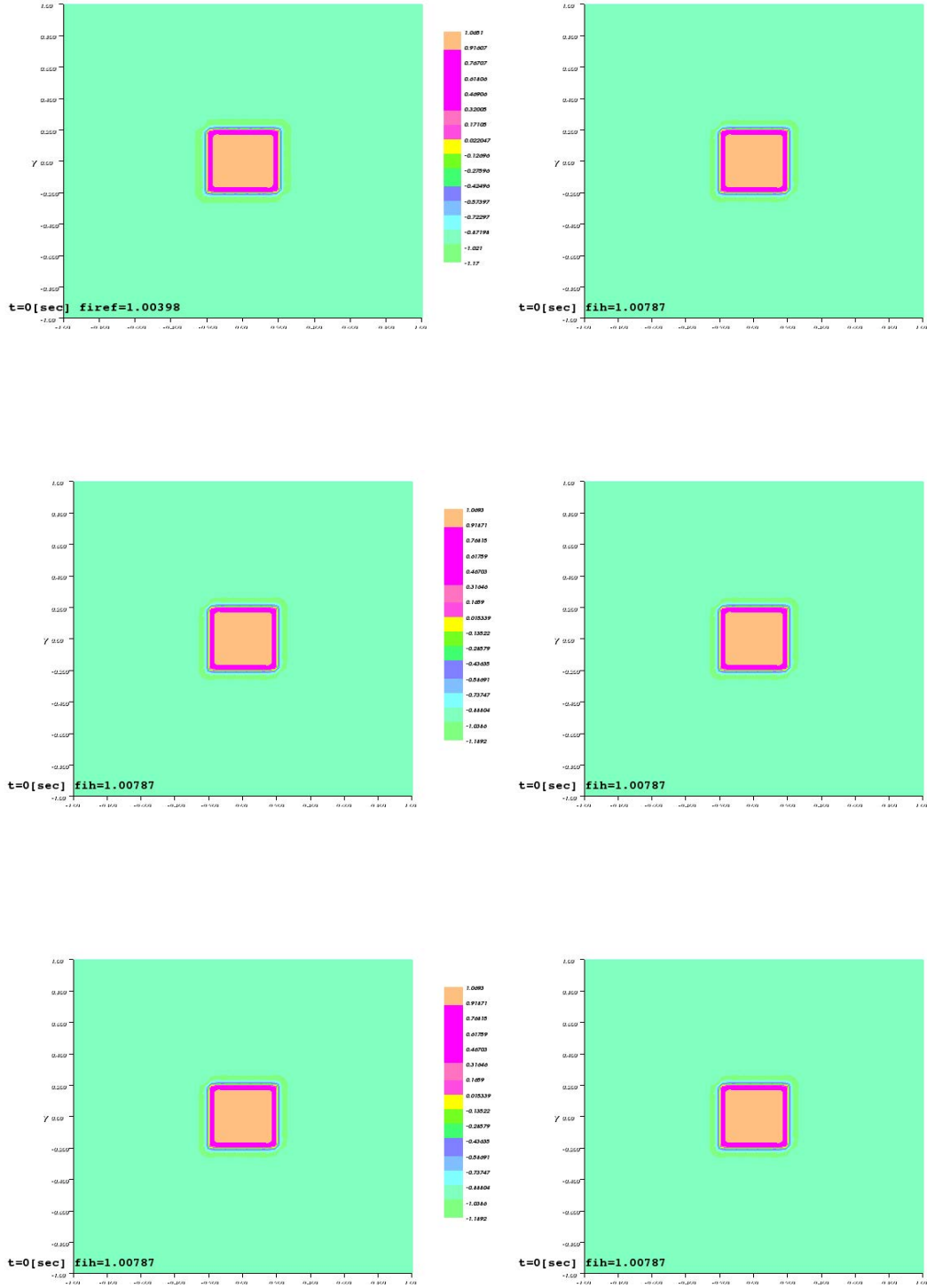


FIGURE 5.17 – La solution  $\phi_h$  bulle montante ; de haut en bas et de gauche à droite pour : **Algorithme 37** (Référence 1 grille), **Algorithmes 42, 43, 44, 45, 46** à  $t = 0$ .

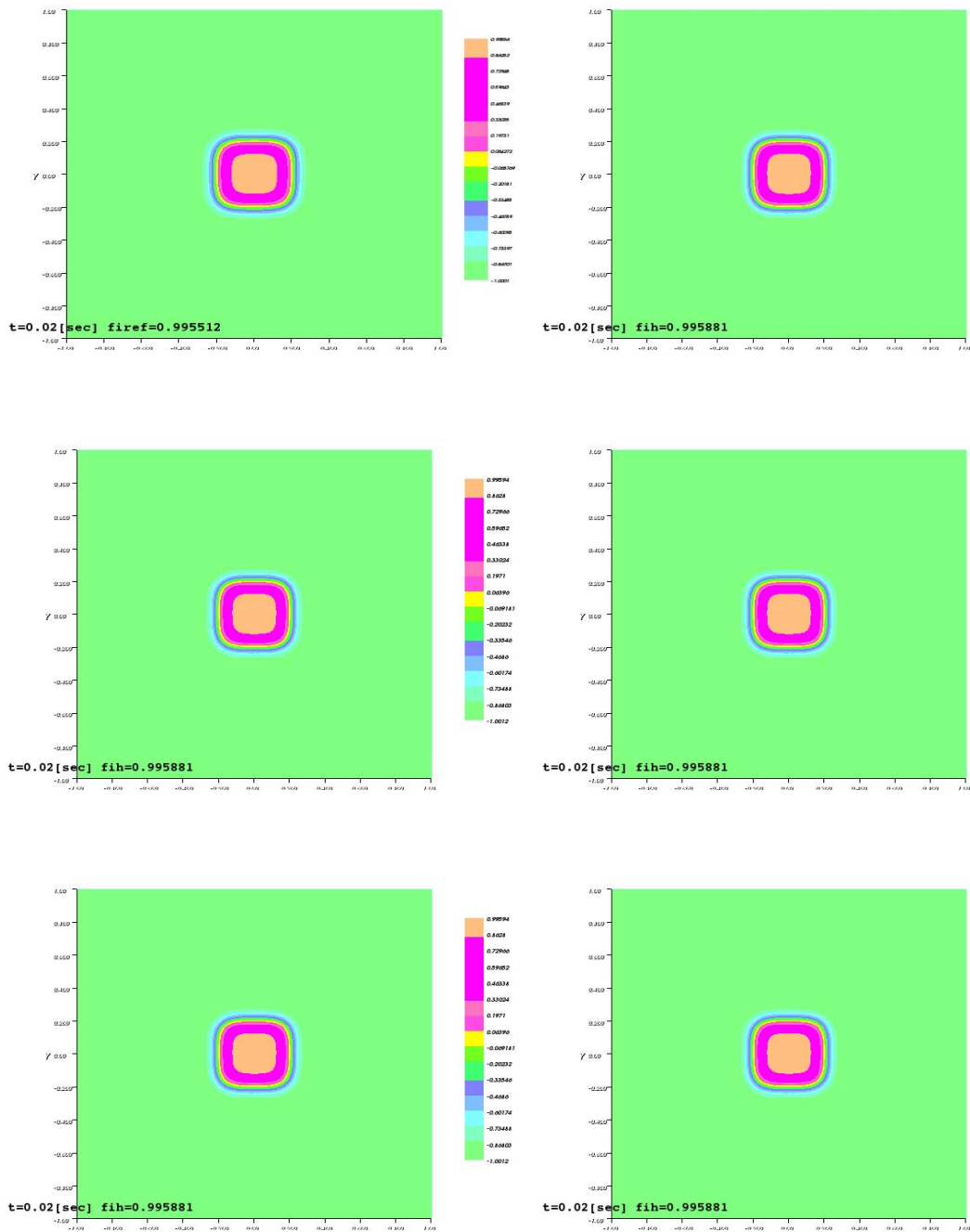


FIGURE 5.18 – La solution  $\phi_h$  bulle montante ; de haut en bas et de gauche à droite pour : **Algorithme 37** (Référence 1 grille), **Algorithmes 42, 43, 44, 45, 46** à  $t = 0.02$ .

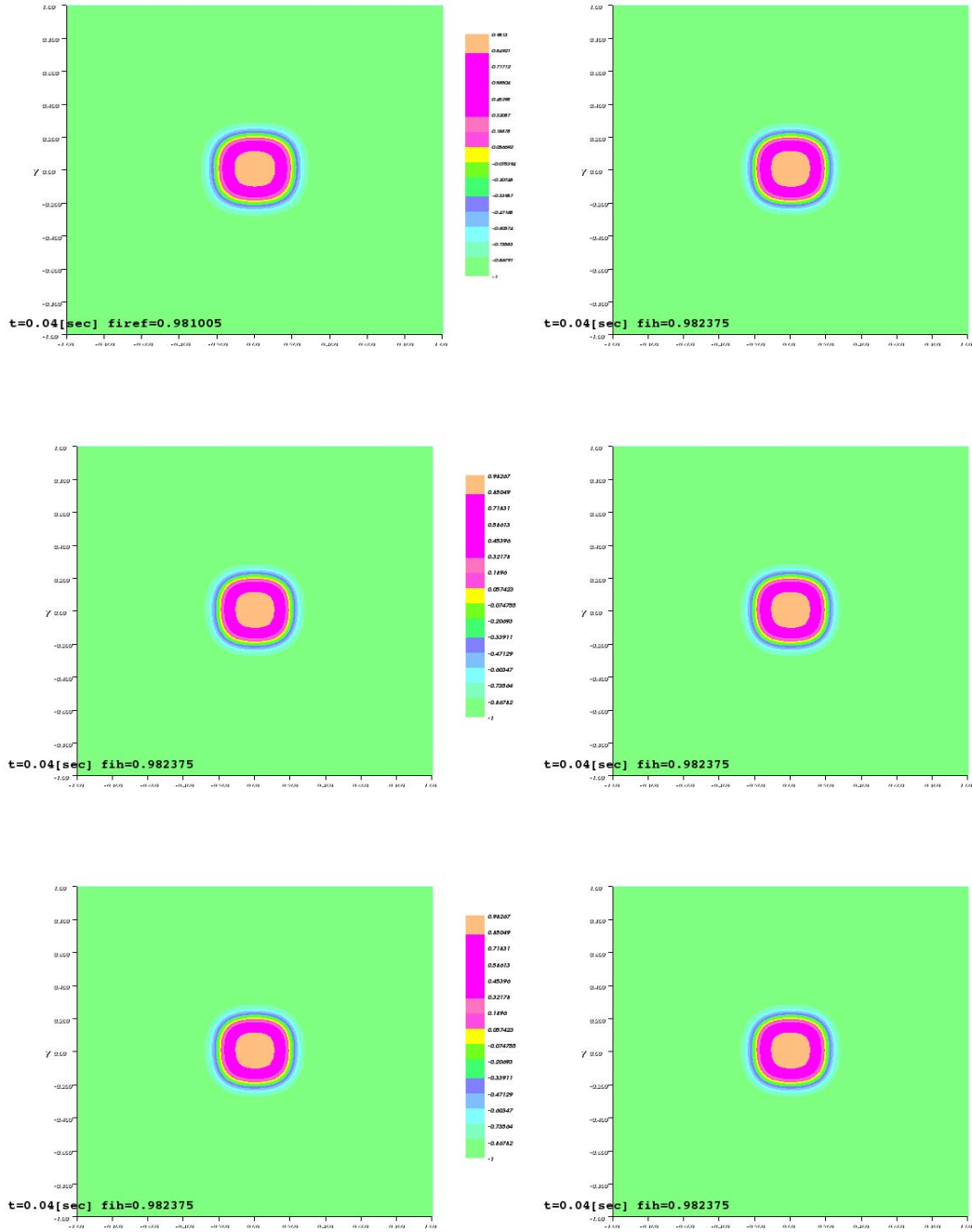


FIGURE 5.19 – La solution  $\phi_h$  bulle montante ; de haut en bas et de gauche à droite pour : **Algorithme 37** (Référence 1 grille), **Algorithmes 42, 43, 44, 45, 46** à  $t = 0.04$ .

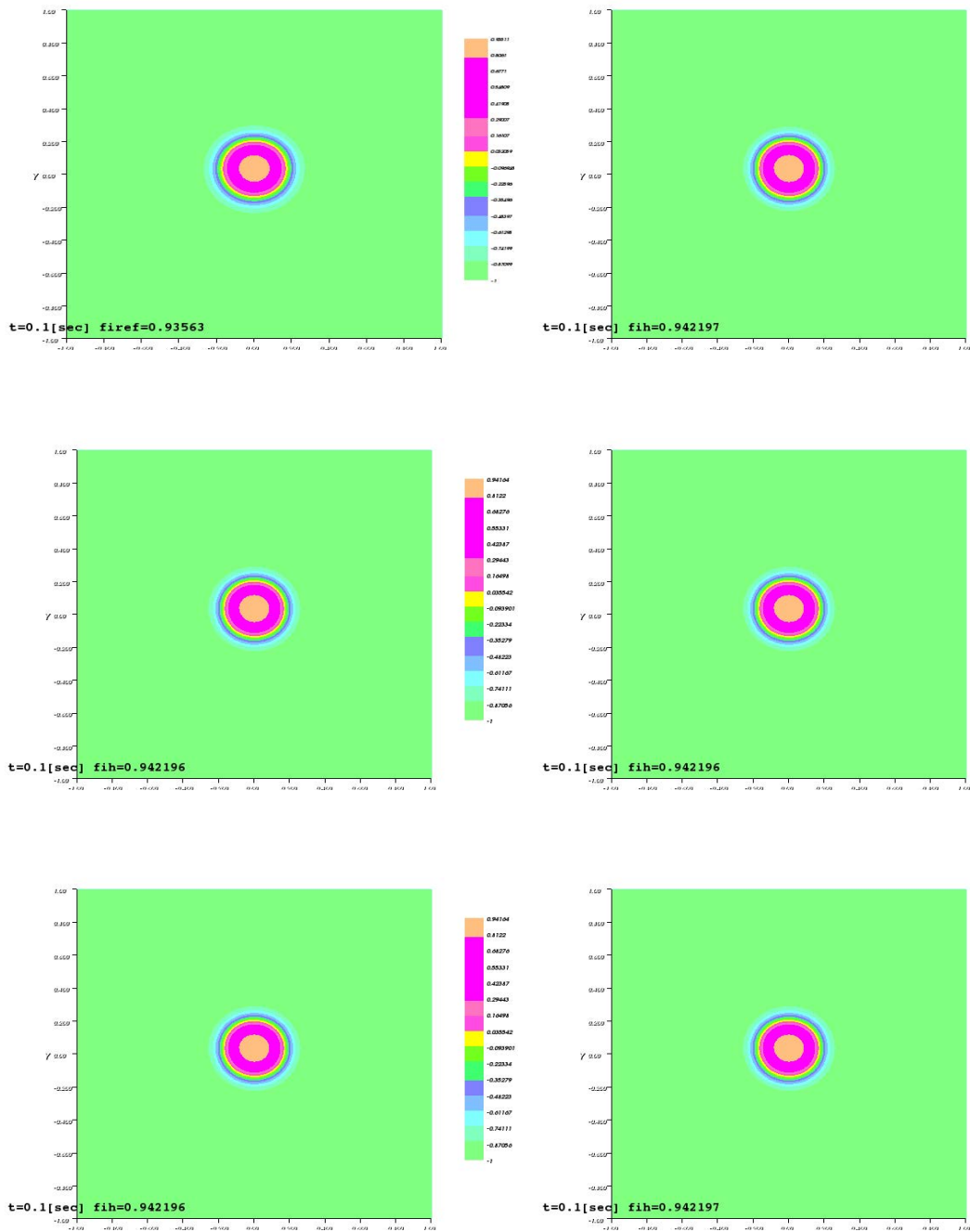


FIGURE 5.20 – La solution  $\phi_h$  bulle montante ; de haut en bas et de gauche à droite pour : **Algorithme 37** (Référence 1 grille), **Algorithmes 42, 43, 44, 45, 46** à  $t = 0.1$ .

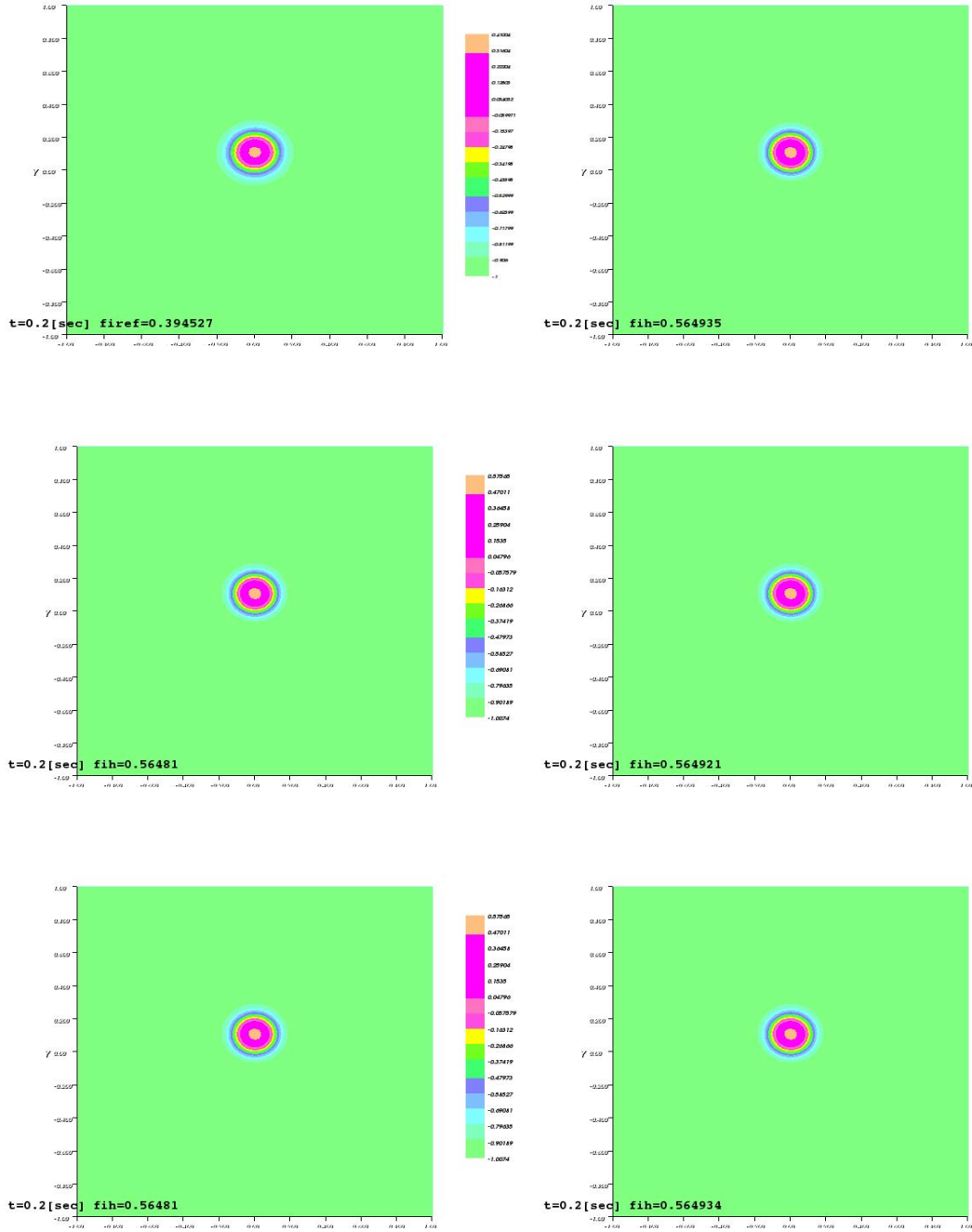


FIGURE 5.21 – La solution  $\phi_h$  bulle montante ; de haut en bas et de gauche à droite pour : **Algorithme 37** (Référence 1 grille), **Algorithmes 42, 43, 44, 45, 46** à  $t = 0.2$ .



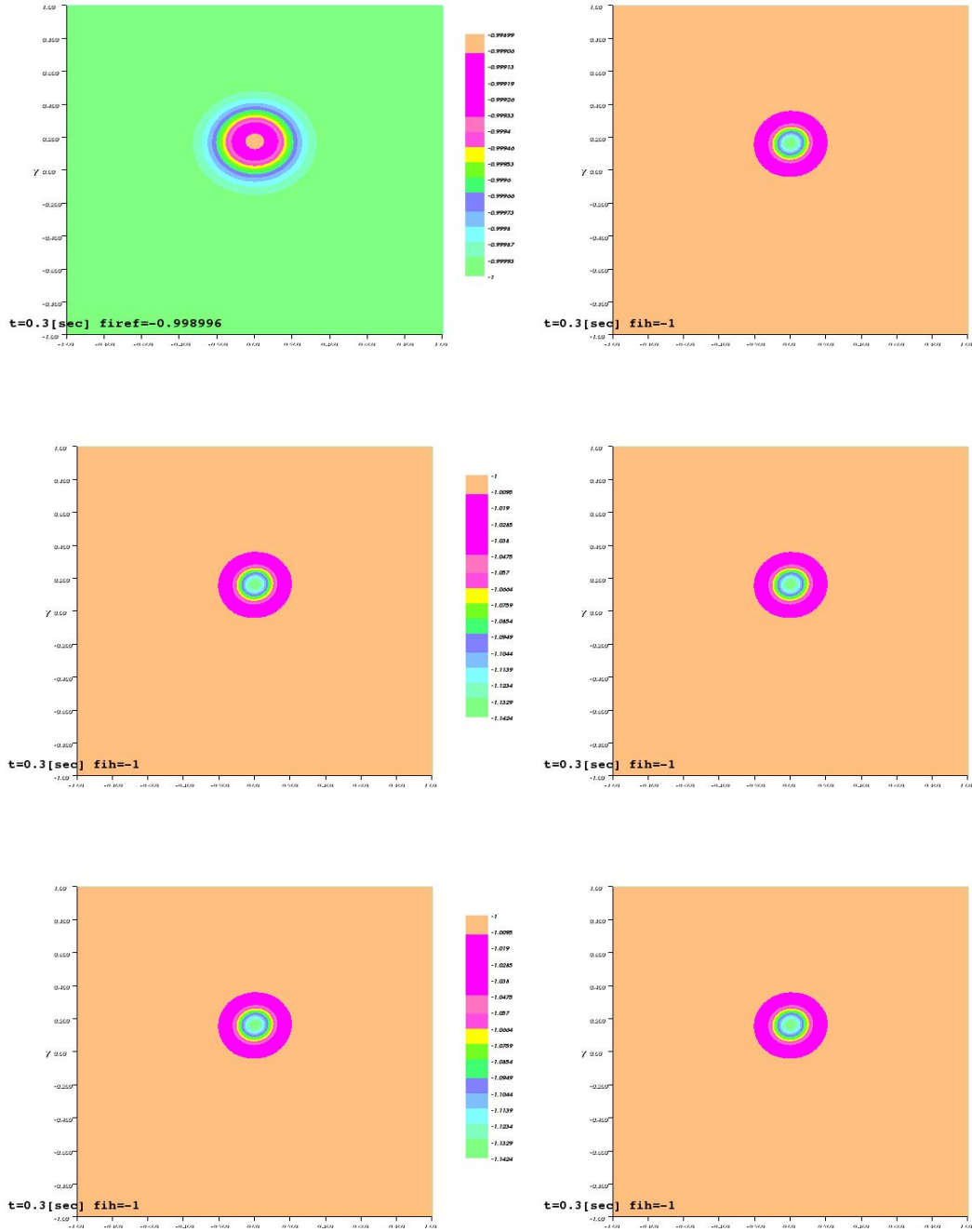


FIGURE 5.22 – La solution  $\phi_h$  bulle montante ; de haut en bas et de gauche à droite pour : **Algorithme 37** (Référence 1 grille), **Algorithmes 42, 43, 44, 45, 46** à  $t = 0.3$ .

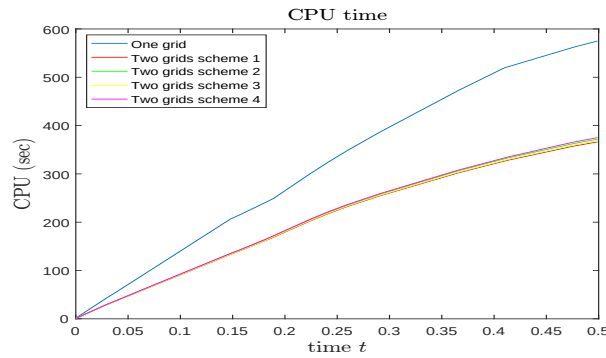
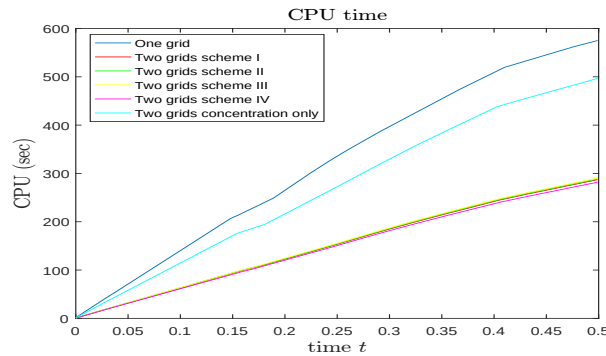
### 5.4.2.3 Comparaison en temps de calcul

Nous représentons le gain en temps de calcul CPU apporté par notre technique bi-grilles. La comparaison est faite entre le schéma implicite (référence) résolu sur une grille fine et ceux de la décomposition de la vitesse Tab. 5.3 et Fig. 5.23 et de la vitesse et la concentration Tab. 5.4 et Fig. 5.24.

|                                    |                                 |                                 |                                 |                                 |
|------------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|
| $32 \times 16$ points<br>$T = 0.5$ | <b>Algorithm 38</b><br>schéma 1 | <b>Algorithm 39</b><br>schéma 2 | <b>Algorithm 40</b><br>schéma 3 | <b>Algorithm 41</b><br>schéma 4 |
| $t_{1G}$ (en sec.)                 | 575.1                           | 575.1                           | 575.1                           | 575.1                           |
| $t_{2G}$ (en sec.)                 | 366.35                          | 371.8                           | 368.42                          | 375.12                          |
| $\frac{t_{2G}}{t_{1G}}$            | 0.64                            | 0.65                            | 0.64                            | 0.65                            |

TABLE 5.3 – Séparation d'échelles Allen-Cahn/Navier-Stokes bulle montante (bi-grilles vitesse uniquement)  $\mathbb{P}_2/\mathbb{P}_1$ .

|                                    |                     |                                 |                                  |                                   |                                  |
|------------------------------------|---------------------|---------------------------------|----------------------------------|-----------------------------------|----------------------------------|
| $32 \times 16$ points<br>$T = 0.5$ | <b>Algorithm 42</b> | <b>Algorithm 43</b><br>schéma I | <b>Algorithm 44</b><br>schéma II | <b>Algorithm 45</b><br>schéma III | <b>Algorithm 46</b><br>schéma IV |
| $t_{1G}$ (en sec.)                 | 575.1               | 575.1                           | 575.1                            | 575.1                             | 575.1                            |
| $t_{2G}$ (en sec.)                 | 496.71              | 287.06                          | 288.71                           | 290.32                            | 281.88                           |
| $\frac{t_{2G}}{t_{1G}}$            | 0.86                | 0.499                           | 0.502                            | 0.505                             | 0.490                            |

TABLE 5.4 – Séparation d'échelles Allen-Cahn/Navier-Stokes bulle montante (bi-grilles concentration et vitesse)  $\mathbb{P}_2/\mathbb{P}_1$ .FIGURE 5.23 – Comparaison CPU (bulle montante) entre le schéma sur une grille fine et ceux de la méthode de séparation d'échelles (uniquement vitesse) : **Algorithmes 38, 39, 40, 41** avec  $T = 0.5$  et  $N_f = 32, N_c = 16$ .FIGURE 5.24 – Comparaison CPU (bulle montante) entre le schéma sur une grille fine et ceux de la méthode de séparation d'échelles (concentration et vitesse) : **Algorithmes 42, 43, 44, 45, 46** avec  $T = 0.5$  et  $N_f = 32, N_c = 16$ .

Nous déduisons que la méthode de séparation d'échelles réduit le temps de calcul CPU de la résolution par un schéma implicite sur une grille fine à sa moitié. Nous bénéficions d'un gain si notre technique est appliquée à la fois à la concentration et à la vitesse.

## 5.5 Étude de stabilité : comparaison avec un schéma semi-implicite

Nous avons démontré dans les sections précédentes que notre technique bi-grilles (deux bulles en contact ou bulle montante) est plus rapide que l'approche par un schéma implicite sur une grille fine. Il est clair que le schéma implicite est super stable mais nous pouvons comparer la stabilité de nos algorithmes bi-grilles à celle du schéma semi-implicite (explicite en  $\phi_h^k((\phi_h^k)^2 - 1)$  et  $(u^k \cdot \nabla)u^k$ ).

Nous démontrons que notre schéma bi-grilles est plus stable en termes de  $\Delta t$ . L'avantage de la séparation d'échelles que nous appliquons est qu'elle nous permet d'adapter des pas de temps supérieurs à ceux du schéma semi-implicite. Comparer les deux techniques pour un même pas de temps  $\Delta t$  montre que notre technique nécessite plus de temps que l'approche par le schéma semi-implicite. Mais si nous investissons dans le gain de stabilité en  $\Delta t$  nous adapterons un pas de temps plus grand et nous convergerons plus rapidement pour un temps final fixé  $T$ .

Comme la décomposition de la concentration et de la vitesse est plus avantageuse que la décomposition de la vitesse uniquement, nous comparons l'**Algorithme 43** bi-grilles au schéma explicite en terme non linéaire de l'équation d'Allen-Cahn et de Navier-Stokes suivant :

---

**Algorithm 47** AC-NS une grille : Schéma semi-implicite "Ref 2"

---

- 1: **for**  $k = 0, 1, \dots$  **do**
  - 2:     **Trouver**  $\phi_h^{k+1}$  **dans**  $X_h$
  - 3:  $(\frac{\phi_h^{k+1} - \phi_h^k}{\Delta t}, \psi_h) + \gamma(\nabla \phi_h^{k+1}, \nabla \psi_h) + ((u_h^k \cdot \nabla)\phi_h^k, \psi_h) + \frac{\gamma}{\varepsilon^2}(\phi_h^k((\phi_h^k)^2 - 1), \psi_h) = 0, \forall \psi_h \in X_h$
  - 4:     **Trouver**  $u_h^{*,k+1}$  **dans**  $Y_h$
  - 5:
  - 6:     **Trouver**  $p_h^{k+1}$  **dans**  $P_h$   $\Delta t(\text{div } \nabla p_h^{k+1}, \chi_h) = (\text{div } u_h^{*,k+1}, \chi_h), \forall \chi_h \in P_h$
  - 7:     **Trouver**  $u_h^{k+1}$  **dans**  $Y_h$   $(u_h^{k+1} - u_h^{*,k+1} + \Delta t \nabla p_h^{k+1}, v_h) = 0, \forall v_h \in Y_h$
  - 8: **end for**
- 

| Schéma                           | $\tau$ | $\Delta t$ | Stable | $\Delta t$ | Stable | $\Delta t$ | Stable | $\Delta t$ | Stable |
|----------------------------------|--------|------------|--------|------------|--------|------------|--------|------------|--------|
| <b>Algorithme 43</b><br>schéma I | 0.001  | 0.001      | oui    | 0.01       | oui    | 0.05       | oui    | 0.1        | oui    |
| <b>Algorithme 47</b><br>Ref 2    |        | 0.001      | oui    | 0.01       | oui    | 0.05       | non    | 0.1        | non    |

TABLE 5.5 –  $Re = 10, N_f = 32, N_c = 16, \mathbb{P}_2/\mathbb{P}_1$  éléments (cas de deux bulles)

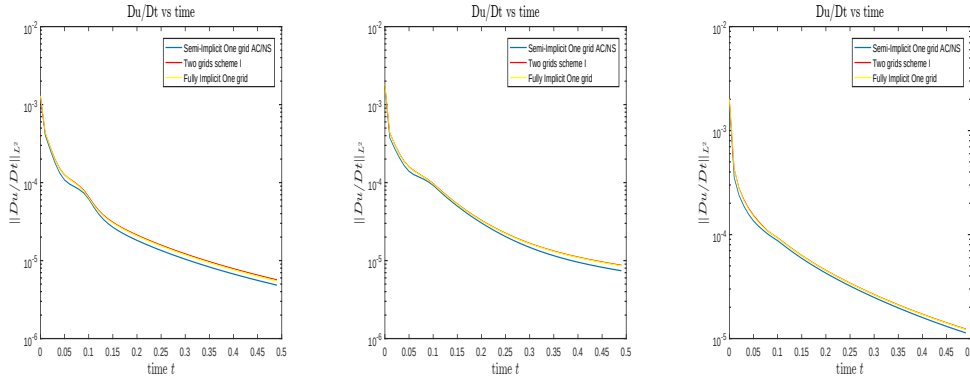
| Schéma                           | $\tau$ | $\Delta t$ | Stable | $\Delta t$ | Stable | $\Delta t$ | Stable |
|----------------------------------|--------|------------|--------|------------|--------|------------|--------|
| <b>Algorithme 43</b><br>schéma I | 0.001  | 0.01       | oui    | 0.05       | oui    | 0.1        | oui    |
| <b>Algorithme 47</b><br>Ref 2    |        | 0.01       | oui    | 0.05       | non    | 0.1        | non    |

 TABLE 5.6 –  $Re = 100, N_f = 32, N_c = 16, \mathbb{P}_2/\mathbb{P}_1$  éléments (cas de deux bulles)

| Schéma                           | $\tau$ | $\Delta t$ | Stable | $\Delta t$ | Stable | $\Delta t$ | Stable |
|----------------------------------|--------|------------|--------|------------|--------|------------|--------|
| <b>Algorithme 43</b><br>schéma I | 0.001  | 0.01       | oui    | 0.05       | oui    | 0.1        | oui    |
| <b>Algorithme 47</b><br>Ref 2    |        | 0.01       | oui    | 0.05       | non    | 0.1        | non    |

 TABLE 5.7 –  $Re = 400, N_f = 32, N_c = 16, \mathbb{P}_2/\mathbb{P}_1$  éléments (cas de deux bulles)

| Schéma                           | $\tau$ | $\Delta t$ | Stable | $\Delta t$ | Stable | $\Delta t$ | Stable |
|----------------------------------|--------|------------|--------|------------|--------|------------|--------|
| <b>Algorithme 43</b><br>schéma I | 0.001  | 0.01       | oui    | 0.05       | oui    | 0.1        | oui    |
| <b>Algorithme 47</b><br>Ref 2    |        | 0.01       | oui    | 0.05       | non    | 0.1        | non    |

 TABLE 5.8 –  $Re = 1000, N_f = 32, N_c = 16, \mathbb{P}_2/\mathbb{P}_1$  éléments (cas de deux bulles)

 FIGURE 5.25 –  $\left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega)}$  vs temps : pour  $\Delta t = 10^{-2}, N_f = 32, N_c = 16$  pour  $Re = 100, 400, 1000$  de gauche à droite (cas de deux bulles).

Les courbes des Fig. 5.25 (respectivement 5.26) montrent que notre technique approche de la même manière que les schémas implicite et semi-implicite pour le cas de deux bulles (respectivement le cas d'une bulle montante). Nous pouvons déduire que par la technique bi-grilles nous sommes 10 fois plus stable que le schéma semi-implicite résolu sur une grille pour  $Re = 10, 100, 400$  et  $1000$ .

Pour le cas d'une bulle montante nous gagnons en stabilité de pas de temps  $\Delta t$ . Notre schéma bi-grilles (**Algorithme 43**) est 3 fois plus stable pour  $Re = 10, 100$ . Mais nous perdons ce gain pour des grands Reynolds ; le schéma bi-grilles (**Algorithme 43**) est autant stable que le schéma semi-implicite (**Algorithme 47**) pour  $Re = 400$  et  $1000$ .

| Schéma                           | $\tau$ | $\Delta t$ | Stable | $\Delta t$ | Stable | $\Delta t$ | Stable | $\Delta t$ | Stable |
|----------------------------------|--------|------------|--------|------------|--------|------------|--------|------------|--------|
| <b>Algorithme 43</b><br>schéma I | 0.001  | 0.001      | oui    | 0.01       | oui    | 0.03       | oui    | 0.05       | non    |
| <b>Algorithme 47</b><br>Ref 2    |        | 0.001      | oui    | 0.01       | oui    | 0.03       | non    | 0.05       | non    |

 TABLE 5.9 –  $Re = 10, N_f = 32, N_c = 16, \mathbb{P}_2/\mathbb{P}_1$  éléments (cas d'une bulle montante)

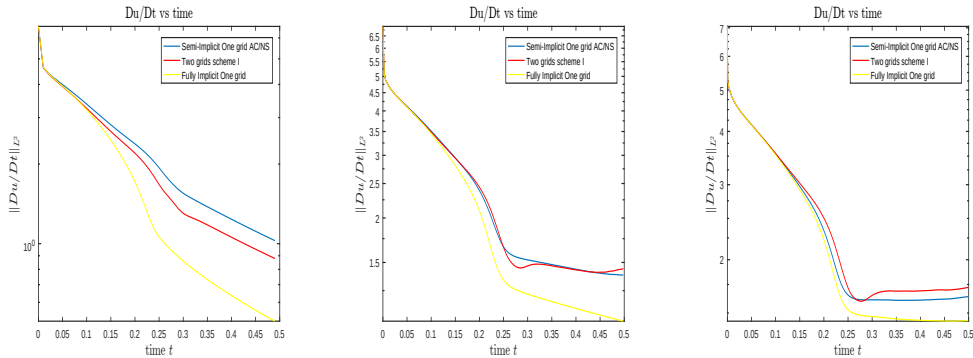
| Schéma                           | $\tau$ | $\Delta t$ | Stable | $\Delta t$ | Stable | $\Delta t$ | Stable |
|----------------------------------|--------|------------|--------|------------|--------|------------|--------|
| <b>Algorithme 43</b><br>schéma I | 0.001  | 0.01       | oui    | 0.03       | oui    | 0.05       | non    |
| <b>Algorithme 47</b><br>Ref 2    |        | 0.01       | oui    | 0.03       | non    | 0.05       | non    |

 TABLE 5.10 –  $Re = 100, N_f = 32, N_c = 16, \mathbb{P}_2/\mathbb{P}_1$  éléments (cas d'une bulle montante)

| Schéma                           | $\tau$ | $\Delta t$ | Stable | $\Delta t$ | Stable | $\Delta t$ | Stable |
|----------------------------------|--------|------------|--------|------------|--------|------------|--------|
| <b>Algorithme 43</b><br>schéma I | 0.001  | 0.003      | oui    | 0.005      | non    | 0.01       | non    |
| <b>Algorithme 47</b><br>Ref 2    |        | 0.003      | oui    | 0.005      | non    | 0.01       | non    |

 TABLE 5.11 –  $Re = 400, N_f = 32, N_c = 16, \mathbb{P}_2/\mathbb{P}_1$  éléments (cas d'une bulle montante)

| Schéma                           | $\tau$ | $\Delta t$ | Stable | $\Delta t$ | Stable | $\Delta t$ | Stable |
|----------------------------------|--------|------------|--------|------------|--------|------------|--------|
| <b>Algorithme 43</b><br>schéma I | 0.001  | 0.001      | oui    | 0.003      | non    | 0.005      | non    |
| <b>Algorithme 47</b><br>Ref 2    |        | 0.001      | oui    | 0.003      | non    | 0.005      | non    |

 TABLE 5.12 –  $Re = 1000, N_f = 32, N_c = 16, \mathbb{P}_2/\mathbb{P}_1$  éléments (cas d'une bulle montante)

 FIGURE 5.26 –  $\left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega)}$  vs temps : (cas d'une bulle montante) de gauche à droite :  $\Delta t = 10^{-2}, Re = 100$ ,  $\Delta t = 3 \times 10^{-3}, Re = 400$  et  $\Delta t = 10^{-3}, Re = 1000$ .

## 5.6 Conclusion

Nous pouvons conclure que notre technique bi-grilles approche la solution plus rapidement que le schéma implicite sans perte de consistance ; le temps de calcul CPU est réduit de rapport

0.5 pour une décomposition en échelles et espaces de la concentration et de la vitesse. Par la séparation d'échelles nous atteignons des grands  $\Delta t$  sans affaiblir la stabilité. Cette stabilité en terme de  $\Delta t$  peut se traduire aussi en un gain en temps de calcul CPU par rapport au schéma semi-implicite ; l'adaptation d'un grand pas de temps  $\Delta t$  par notre technique permet d'atteindre un temps final  $T$  en moins de temps que le schéma semi-implicite limité par son  $\Delta t$ .

Nos schémas bi-grilles sont à mi-chemin entre le schéma implicite (lent mais stable) et le schéma semi-implicite (rapide mais limité en  $\Delta t$ ).



# Chapitre 6

## Couplage Cahn-Hilliard/Navier-Stokes

### Sommaire

---

|            |                                                                       |            |
|------------|-----------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>6.1</b> | <b>Modèle de champs de phase CH/NS</b>                                | <b>194</b> |
| <b>6.2</b> | <b>Schéma classique sur une grille</b>                                | <b>195</b> |
| <b>6.3</b> | <b>Schémas bi-grilles</b>                                             | <b>196</b> |
| 6.3.1      | Séparation d'échelles uniquement pour la vitesse                      | 196        |
| 6.3.2      | Séparation d'échelles pour la concentration et la vitesse             | 198        |
| <b>6.4</b> | <b>Simulations numériques</b>                                         | <b>203</b> |
| 6.4.1      | Déformation d'une bulle rectangulaire                                 | 203        |
| 6.4.1.1    | Décomposition uniquement pour la vitesse                              | 204        |
| 6.4.1.2    | Décomposition de la concentration et de la vitesse                    | 208        |
| 6.4.1.3    | Comparaison en temps de calcul                                        | 211        |
| 6.4.1.4    | Loi sur l'énergie et conservation de la masse                         | 213        |
| 6.4.2      | Fusionnement de deux bulles                                           | 213        |
| 6.4.2.1    | Décomposition uniquement pour la vitesse                              | 214        |
| 6.4.2.2    | Décomposition de la concentration et de la vitesse                    | 218        |
| 6.4.2.3    | Comparaison en temps de calcul                                        | 223        |
| 6.4.2.4    | Loi sur l'énergie et conservation de la masse                         | 225        |
| <b>6.5</b> | <b>Étude de stabilité : comparaison avec un schéma semi-implicite</b> | <b>225</b> |
| <b>6.6</b> | <b>Conclusion</b>                                                     | <b>227</b> |

---

Les écoulements incompressibles à deux phases ont fait l'objet des recherches ces dernières années vu leur large domaine d'application : les bulles de gaz piégées dans l'eau, les filaments d'eau tombant dans l'air, les mélanges huile-eau, les mélanges de polymères, les fluides biologiques.

La complexité de ces modèles apparaît dans les équations couplant la vitesse  $u$  et la pression  $p$ . Afin de dépasser cet obstacle, nous avons eu recours aux schémas de type projection [124, 125, 126, 187] où nous découplons la vitesse de la pression en introduisant une vitesse intermédiaire et utilisant la propriété de divergence nulle.

D'autre part, l'épaisseur de la surface de séparation  $\varepsilon$  (généralement petite) rend les équations de phase difficiles à résoudre. En effet, les schémas numériques semi-implicites, faciles à résoudre car le terme non linéaire est traité explicitement, sont limités en pas de temps  $\Delta t < \varepsilon^4$  (cf. [187]). Pour y remédier, Shen a proposé d'ajouter un terme de stabilisation afin de traiter explicitement le terme non linéaire. Nous présentons dans [1] et au **Chapitre 2** une technique de séparation d'échelles et stabilisation uniquement des hautes fréquences. En effet, nous aurons des schémas



inconditionnellement stables.

Dans ce chapitre, nous adaptons la méthode bi-grilles développée au **Chapitre 3** pour l'équation de Cahn-Hilliard et celle bi-grilles de projection du **Chapitre 4** pour les équations de Navier-Stokes. Dans la **section 6.2**, nous introduisons un schéma de référence. Des schémas bi-grilles décomposant en échelles uniquement la vitesse et d'autres traitant la concentration  $\phi$  et la vitesse  $u$  sur deux espaces grossier et fin sont développés à la **section 6.3**. Des simulations numériques sont présentées à la **section 6.4** pour le cas d'une bulle rectangulaire et deux bulles en contact. Ces résultats sont en accord avec ceux de Hua [136] et sont obtenus en un temps réduit de CPU par rapport à ceux du schéma implicite considéré sur un espace fin. Dans la **section 6.5**, nous gagnons aussi au niveau du pas de temps maximal  $\Delta t$ , si nous comparons nos algorithmes bi-grilles au schéma semi-implicite limité par la finesse de la surface de séparation.

## 6.1 Modèle de champs de phase CH/NS

Le modèle de champs de phase Cahn-Hilliard/Navier-Stokes pour les fluides diphasiques a été étudié numériquement par plusieurs auteurs [54, 62, 123]. Pour un mélange de fluides de différentes densités nous référons le lecteur à [161]. Nous considérons un modèle de champs de phase de Cahn-Hilliard. Il peut être écrit comme l'équation de réaction-advection-diffusion.

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u \cdot \nabla \phi = \gamma \Delta (\Delta \phi - f(\phi)) \quad (6.1)$$

et l'équation de la quantité de mouvement

$$\rho_0 \left( \frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla) u \right) - \nu \nabla \cdot D(u) + \nabla p + \lambda \nabla \cdot (\nabla \phi \otimes \nabla \phi) = S_\phi, \quad (6.2)$$

avec

$$\nabla \cdot u = 0, \quad (6.3)$$

une condition d'incompressibilité. Ici  $\phi(x, t) \in [-1, 1]$  est la phase du mélange,  $u$  la vitesse du fluide,  $p$  la pression,  $\nu$  le paramètre de viscosité,  $\lambda$  le coefficient de tension superficielle,  $\varepsilon$  l'épaisseur de l'interface,  $f(\phi) = F'(\phi)$  et  $\gamma$  le temps de relaxation élastique.  $D(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + (\nabla u)^T)$  désigne le taux du tenseur de déformation et  $S_\phi = (0, -(1+\phi)g(\rho_1 - \rho_0) - (1-\phi)g(\rho_2 - \rho_0))^T$  la force de flottabilité avec la densité de fond  $\rho_0$ , la densité des fluides 1 et 2  $\rho_1$  et  $\rho_2$  respectivement et la gravité  $g$ .

Dans la suite nous prenons  $F(\phi) = \frac{1}{4\varepsilon^2}(\phi^2 - 1)^2$  et  $\rho_0 = \rho_1$ . D'après [136, 161], nous réécrivons  $\nabla \cdot (\nabla \phi \otimes \nabla \phi)$  comme suit

$$\nabla \cdot (\nabla \phi \otimes \nabla \phi) = \frac{-1}{\varepsilon^2} (w + c\phi) \nabla \phi + \nabla \left( \frac{|\nabla \phi|^2}{2} + F(\phi) \right).$$

Ainsi le système sera

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u \cdot \nabla \phi = \frac{\gamma}{\varepsilon^2} \Delta (w + c\phi), \quad (6.4)$$

$$w = -\varepsilon^2 \Delta \phi + f(\phi) - c\phi, \quad (6.5)$$

$$\rho_0 \left( \frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla) u \right) - \nu \Delta u + \nabla p - \frac{\lambda}{\varepsilon^2} (w + c\phi) \nabla \phi = S_\phi, \quad (6.6)$$

$$\nabla \cdot u = 0, \quad (6.7)$$

Le modèle de champs de phase de Cahn-Hilliard vérifie une loi (6.9) sur l'énergie du système

$$E = \frac{1}{2} \rho_0 \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\lambda}{2} \|\nabla \phi\|_{L^2(\Omega)}^2 + \lambda \int_{\Omega} F(\phi). \quad (6.8)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\lambda}{2} \|\nabla \phi\|_{L^2(\Omega)}^2 + \lambda \int_{\Omega} F(\phi) \right) = -\nu \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{\lambda\gamma}{\varepsilon^4} \|\nabla(w + c\phi)\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad (6.9)$$

cf. [136, 161, 187].

## 6.2 Schéma classique sur une grille

Liu et al.[136, 158, 159, 162] ont présenté un schéma temporel de second ordre pour le modèle de champs de phase de Cahn-Hilliard, où une loi d'énergie discrète est obtenue en utilisant l'élément fini  $C^0$  en espace et un schéma centré. Nous proposons de comparer notre étude à celle effectuée dans [136].

Nous présentons un schéma implicite où la vitesse et la pression sont calculées par la méthode de projection Chorin-Temam introduite dans le **Chapitre 4**. Nous présentons le schéma de référence :

---

**Algorithm 48** CH-NS une grille (référence) "Ref 1"

---

- 1: **for**  $k = 0, 1, \dots$  **do**
  - 2:   **Trouver**  $(\phi_h^{k+1}, w_h^{k+1})$  **dans**  $X_h \times W_h$
  - 3:  $(\frac{\phi_h^{k+1} - \phi_h^k}{\Delta t}, \psi_h) + \frac{\gamma}{\varepsilon^2} (\nabla(w_h^{k+1} + c\phi_h^{k+1}), \nabla\psi_h) + ((u_h^k \cdot \nabla)\phi_h^k, \psi_h) = 0, \forall \psi_h \in X_h$
  - 4:  $(w_h^{k+1} + c\phi_h^{k+1}, \chi_h) - \varepsilon^2 (\nabla\phi_h^{k+1}, \nabla\chi_h) - (DF(\phi_h^k, \phi_h^{k+1}), \chi_h) = 0, \forall \chi_h \in W_h$
  - 5:   **Trouver**  $u_h^{*,k+1}$  **dans**  $Y_h$ 

$$\begin{aligned} & (\frac{u_h^{*,k+1} - u_h^k}{\Delta t}, v_h) + \nu (\nabla u_h^{*,k+1}, \nabla v_h) + ((u_h^{*,k+1} \cdot \nabla)u_h^{*,k+1}, v_h) \\ & = -\frac{1}{2} (\text{div } u_h^{*,k} u_h^{*,k+1}, v_h) + \frac{\lambda}{\varepsilon^2} ((w_h^{k+1} + c\phi_h^{k+1})\nabla\phi_h^{k+1}, v_h), \forall v_h \in Y_h \end{aligned}$$
  - 6:   **Trouver**  $p_h^{k+1}$  **dans**  $P_h$   $\Delta t (\text{div } \nabla p_h^{k+1}, \eta_h) = (\text{div } u_h^{*,k+1}, \eta_h), \forall \eta_h \in P_h$
  - 7:   **Trouver**  $u_h^{k+1}$  **dans**  $Y_h$   $(u_h^{k+1} - u_h^{*,k+1} + \Delta t \nabla p_h^{k+1}, v_h) = 0, \forall v_h \in Y_h$
  - 8: **end for**
- 

où  $DF(u, v) = \begin{cases} \frac{F(u) - F(v)}{u - v} & \text{si } u \neq v, \\ f(u) & \text{si } u = v, \end{cases}$  est le choix qui garantit la stabilité inconditionnelle de l'équation de Cahn-Hilliard cf. **Chapitre 3** et [188].

Nous appliquons la technique de projection et essayons de calculer  $(u_h^{k+1}, p_h^{k+1}, \phi_h^{k+1})$  l'approximation de  $u(t^{k+1}) = u((k+1)\Delta t)$ ,  $p(t^{k+1}) = p((k+1)\Delta t)$  et  $\phi(t^{k+1}) = \phi((k+1)\Delta t)$  à partir de  $(u_h^k, p_h^k, \phi_h^k)$ .

## 6.3 Schémas bi-grilles

Nos algorithmes suivent la technique de séparation d'échelles exposée au **Chapitre 3** pour l'équation de Cahn-Hilliard et au **Chapitre 4** pour l'équation de Navier-Stokes. Deux types d'algorithmes apparaissent ; certains décomposent uniquement la vitesse d'autres décomposent la concentration  $\phi$  et la vitesse.

### 6.3.1 Séparation d'échelles uniquement pour la vitesse

La vitesse peut être traitée sur deux grilles de quatre manières différentes :

- L'**Algorithme 49** sépare les échelles de la vitesse intermédiaire  $u_h^*$ . Sous la condition de divergence nulle, la pression  $p_h$  est calculée puis la vitesse  $u_h$  qui est restreinte à la grille grossière pour obtenir  $u_H^k$  pour la prochaine itération.
- L'**Algorithme 50** remplace  $(u_h^k \cdot \nabla)u_h^k$  par  $(u_H^* \cdot \nabla)u_h^*$  : variante de l'**Algorithme 49**.
- L'**Algorithme 51** consiste à utiliser  $u_H$  (obtenu par la méthode de projection sur la grille grossière) et non la restriction de la solution trouvée après stabilisation sur la grille fine.
- L'**Algorithme 52** constitue une variante de l'**Algorithme 51** ; nous employons  $(u_h^k \cdot \nabla)u_h^k$  au lieu de  $(u_H^* \cdot \nabla)u_h^*$ .

---

**Algorithm 49** 1 grille CH- 2 grilles NS "schéma 1"

---

1: **for**  $k = 0, 1, \dots$  **do**

2:   **Trouver**  $(\phi_h^{k+1}, w_h^{k+1})$  **dans**  $X_h \times W_h$

3:  $(\frac{\phi_h^{k+1} - \phi_h^k}{\Delta t}, \psi_h) + \frac{\gamma}{\varepsilon^2}(\nabla(w_h^{k+1} + c\phi_h^{k+1}), \nabla\psi_h) + ((u_h^k \cdot \nabla)\phi_h^k, \psi_h) = 0, \forall \psi_h \in X_h$

4:  $(w_h^{k+1} + c\phi_h^{k+1}, \chi_h) - \varepsilon^2(\nabla\phi_h^{k+1}, \nabla\chi_h) - (DF(\phi_h^k, \phi_h^{k+1}), \chi_h) = 0, \forall \chi_h \in W_h$

5:   **Trouver**  $u_H^{*,k+1}$  **dans**  $Y_H$

$$\begin{aligned} & (\frac{u_H^{*,k+1} - u_H^k}{\Delta t}, v_H) + \nu(\nabla u_H^{*,k+1}, \nabla v_H) + ((u_H^{*,k+1} \cdot \nabla)u_H^{*,k+1}, v_H) \\ & = -\frac{1}{2}(\text{div } u_H^{*,k} u_H^{*,k+1}, v_H) + \frac{\lambda}{\varepsilon^2}((w_h^{k+1} + c\phi_h^{k+1})\nabla\phi_h^{k+1}, v_H), \forall v_H \in Y_H \end{aligned}$$

6:   **Trouver**  $u_h^{*,k+1}$  **dans**  $Y_h$

$$\begin{aligned} & (1 + \tau\Delta t)(u_h^{*,k+1} - u_h^k, v_h) + \nu\Delta t(\nabla u_h^{*,k+1}, \nabla v_h) + \Delta t((u_h^k \cdot \nabla)u_h^k, v_h) + \frac{1}{2}(\text{div } u_h^k u_h^k, v_h) \\ & = \tau\Delta t(u_H^{*,k+1} - u_h^k, v_h) + \frac{\lambda}{\varepsilon^2}(\Delta t(w_h^{k+1} + c\phi_h^{k+1})\nabla\phi_h^{k+1}, v_h), \forall v_h \in Y_h \end{aligned}$$

7:   **Trouver**  $p_h^{k+1}$  **dans**  $P_h$   $\Delta t(\text{div } \nabla p_h^{k+1}, \eta_h) = (\text{div } u_h^{*,k+1}, \eta_h), \forall \eta_h \in P_h$

8:   **Trouver**  $u_h^{k+1}$  **dans**  $Y_h$   $(u_h^{k+1} - u_h^{*,k+1} + \Delta t\nabla p_h^{k+1}, v_h) = 0, \forall v_h \in Y_h$

9:   **Résoudre** **dans**  $Y_H$   $(u_H^{k+1} - u_h^{k+1}, v_H) = 0, \forall v_H \in Y_H$

10: **end for**

---

**Algorithm 50** Variante de "schéma 1" : "schéma 2"

---

```

1: for $k = 0, 1, \dots$ do
2: Trouver $(\phi_h^{k+1}, w_h^{k+1})$ dans $X_h \times W_h$
3: $(\frac{\phi_h^{k+1} - \phi_h^k}{\Delta t}, \psi_h) + \frac{\gamma}{\varepsilon^2}(\nabla(w_h^{k+1} + c\phi_h^{k+1}), \nabla\psi_h) + ((u_h^k \cdot \nabla)\phi_h^k, \psi_h) = 0, \forall \psi_h \in X_h$
4: $(w_h^{k+1} + c\phi_h^{k+1}, \chi_h) - \varepsilon^2(\nabla\phi_h^{k+1}, \nabla\chi_h) - (DF(\phi_h^k, \phi_h^{k+1}), \chi_h) = 0, \forall \chi_h \in W_h$
5: Trouver $u_H^{*,k+1}$ dans Y_H

$$(\frac{u_H^{*,k+1} - u_H^k}{\Delta t}, v_H) + \nu(\nabla u_H^{*,k+1}, \nabla v_H) + ((u_H^{*,k+1} \cdot \nabla)u_H^{*,k+1}, v_H)$$

$$= -\frac{1}{2}(\text{div } u_H^{*,k} u_H^{*,k+1}, v_H) + \frac{\lambda}{\varepsilon^2}((w_h^{k+1} + c\phi_h^{k+1})\nabla\phi_h^{k+1}, v_H), \forall v_H \in Y_H$$

6: Trouver $u_h^{*,k+1}$ dans Y_h

$$(1 + \tau\Delta t)(u_h^{*,k+1} - u_h^k, v_h) + \nu\Delta t(\nabla u_h^{*,k+1}, \nabla v_h) + \Delta t((u_h^{*,k+1} \cdot \nabla)u_h^{*,k+1}, v_h)$$

$$= -\frac{1}{2}(\text{div } u_h^k u_h^{*,k+1}, v_h) + \tau\Delta t(u_H^{*,k+1} - u_H^k, v_h) + \frac{\lambda}{\varepsilon^2}(\Delta t(w_h^{k+1} + c\phi_h^{k+1})\nabla\phi_h^{k+1}, v_h), \forall v_h \in Y_h$$

7: Trouver p_h^{k+1} dans P_h $\Delta t(\text{div } \nabla p_h^{k+1}, \eta_h) = (\text{div } u_h^{*,k+1}, \eta_h), \forall \eta_h \in P_h$
8: Trouver u_h^{k+1} dans Y_h $(u_h^{k+1} - u_h^{*,k+1} + \Delta t\nabla p_h^{k+1}, v_h) = 0, \forall v_h \in Y_h$
9: Résoudre dans Y_H $(u_H^{k+1} - u_H^{*,k+1}, v_H) = 0, \forall v_H \in Y_H$
10:
11: end for

```

---

**Algorithm 51** 1 grille CH/ 2 grilles NS (NS complet GG) "schéma 3"

---

```

1: for $k = 0, 1, \dots$ do
2: Trouver $(\phi_h^{k+1}, w_h^{k+1})$ dans $X_h \times W_h$
3: $(\frac{\phi_h^{k+1} - \phi_h^k}{\Delta t}, \psi_h) + \frac{\gamma}{\varepsilon^2}(\nabla(w_h^{k+1} + c\phi_h^{k+1}), \nabla\psi_h) + ((u_h^k \cdot \nabla)\phi_h^k, \psi_h) = 0, \forall \psi_h \in X_h$
4: $(w_h^{k+1} + c\phi_h^{k+1}, \chi_h) - \varepsilon^2(\nabla\phi_h^{k+1}, \nabla\chi_h) - (DF(\phi_h^k, \phi_h^{k+1}), \chi_h) = 0, \forall \chi_h \in W_h$
5: Trouver $u_H^{*,k+1}$ dans Y_H

$$(\frac{u_H^{*,k+1} - u_H^k}{\Delta t}, v_H) + \nu(\nabla u_H^{*,k+1}, \nabla v_H) + ((u_H^{*,k+1} \cdot \nabla)u_H^{*,k+1}, v_H)$$

$$= -\frac{1}{2}(\text{div } u_H^{*,k} u_H^{*,k+1}, v_H) + \frac{\lambda}{\varepsilon^2}((w_h^{k+1} + c\phi_h^{k+1})\nabla\phi_h^{k+1}, v_H), \forall v_H \in Y_H$$

6: Trouver p_H^{k+1} dans P_H $\Delta t(\text{div } \nabla p_H^{k+1}, \eta_H) = (\text{div } u_H^{*,k+1}, \eta_H), \forall \eta_H \in P_H$
7: Trouver u_H^{k+1} dans Y_H $(u_H^{k+1} - u_H^{*,k+1} + \Delta t\nabla p_H^{k+1}, v_H) = 0, \forall v_H \in Y_H$
8: Trouver $u_h^{*,k+1}$ dans Y_h

$$(1 + \tau\Delta t)(u_h^{*,k+1} - u_h^k, v_h) + \nu\Delta t(\nabla u_h^{*,k+1}, \nabla v_h) + \Delta t((u_h^k \cdot \nabla)u_h^k, v_h)$$

$$= -\frac{1}{2}(\text{div } u_h^k u_h^{*,k+1}, v_h) + \tau\Delta t(u_H^{*,k+1} - u_H^k, v_h) + \frac{\lambda}{\varepsilon^2}(\Delta t(w_h^{k+1} + c\phi_h^{k+1})\nabla\phi_h^{k+1}, v_h), \forall v_h \in Y_h$$

9: Trouver p_h^{k+1} dans P_h $\Delta t(\text{div } \nabla p_h^{k+1}, \eta_h) = (\text{div } u_h^{*,k+1}, \eta_h), \forall \eta_h \in P_h$
10: Trouver u_h^{k+1} dans Y_h $(u_h^{k+1} - u_h^{*,k+1} + \Delta t\nabla p_h^{k+1}, v_h) = 0, \forall v_h \in Y_h$
11: end for

```

---

---

**Algorithm 52** Variante de "schéma 3" : "schéma 4"
 

---

```

1: for $k = 0, 1, \dots$ do
2: Trouver $(\phi_h^{k+1}, w_h^{k+1})$ dans $X_h \times W_h$
3: $(\frac{\phi_h^{k+1} - \phi_h^k}{\Delta t}, \psi_h) + \frac{\gamma}{\varepsilon^2}(\nabla(w_h^{k+1} + c\phi_h^{k+1}), \nabla\psi_h) + ((u_h^k \cdot \nabla)\phi_h^k, \psi_h) = 0, \forall \psi_h \in X_h$
4: $(w_h^{k+1} + c\phi_h^{k+1}, \chi_h) - \varepsilon^2(\nabla\phi_h^{k+1}, \nabla\chi_h) - (DF(\phi_h^k, \phi_h^{k+1}), \chi_h) = 0, \forall \chi_h \in W_h$
5: Trouver $u_H^{*,k+1}$ dans Y_H

$$(\frac{u_H^{*,k+1} - u_H^k}{\Delta t}, v_H) + \nu(\nabla u_H^{*,k+1}, \nabla v_H) + ((u_H^{*,k+1} \cdot \nabla)u_H^{*,k+1}, v_H)$$

$$= -\frac{1}{2}(\text{div } u_H^{*,k} u_H^{*,k+1}, v_H) + \frac{\lambda}{\varepsilon^2}((w_h^{k+1} + c\phi_h^{k+1})\nabla\phi_h^{k+1}, v_H), \forall v_H \in Y_H$$

6: Trouver p_H^{k+1} dans P_H $\Delta t(\text{div } \nabla p_H^{k+1}, \eta_H) = (\text{div } u_H^{*,k+1}, \eta_H), \forall \eta_H \in P_H$
7: Trouver u_H^{k+1} dans Y_H $(u_H^{k+1} - u_H^{*,k+1} + \Delta t \nabla p_H^{k+1}, v_H) = 0, \forall v_H \in Y_H$
8: Trouver $u_h^{*,k+1}$ dans Y_h

$$(1 + \tau\Delta t)(u_h^{*,k+1} - u_h^k, v_h) + \nu\Delta t(\nabla u_h^{*,k+1}, \nabla v_h) + \Delta t((u_h^{*,k+1} \cdot \nabla)u_h^{*,k+1}, v_h)$$

$$= -\frac{1}{2}(\text{div } u_h^k u_h^{*,k+1}, v_h) + \tau\Delta t(u_h^{*,k+1} - u_h^k, v_h) + \frac{\lambda}{\varepsilon^2}(\Delta t(w_h^{k+1} + c\phi_h^{k+1})\nabla\phi_h^{k+1}, v_h), \forall v_h \in Y_h$$

9: Trouver p_h^{k+1} dans P_h $\Delta t(\text{div } \nabla p_h^{k+1}, \eta_h) = (\text{div } u_h^{*,k+1}, \eta_h), \forall \eta_h \in P_h$
10: Trouver u_h^{k+1} dans Y_h $(u_h^{k+1} - u_h^{*,k+1} + \Delta t \nabla p_h^{k+1}, v_h) = 0, \forall v_h \in Y_h$
11: end for

```

---

### 6.3.2 Séparation d'échelles pour la concentration et la vitesse

Une décomposition uniquement pour la vitesse est présentée dans les **Algorithmes 49, 50, 51** et **52**, alors que nous calculons la concentration  $\phi$  par un schéma implicite sur une grille fine. Dans ce qui suit nous proposons de décomposer également la concentration. Dans l'**Algorithme 53**, la vitesse n'est pas décomposée ; les **Algorithmes 54, 55, 56** et **57** traitent de la décomposition de la concentration et de la vitesse où  $\tilde{f}(\phi_H^{k+1}, \phi_h^k, \phi_h^{k+1}) = DF(\phi_h^{k+1}, \phi_h^k) + 2\phi_H^{k+1}(\phi_H^{k+1} - \phi_h^{k+1})(\phi_H^{k+1} - \phi_h^k)$  comme défini dans [1] la partie linéaire de  $DF(\phi_h^{k+1}, \phi_h^{k+1})$ .

---

**Algorithm 53** 2 grilles CH- 1 grille NS (concentration uniquement)

---

- 1: **for**  $k = 0, 1, \dots$  **do**
  - 2:   **Trouver**  $(\phi_H^{k+1}, w_H^{k+1})$  **dans**  $X_H \times W_H$
  - 3:    $(\frac{\phi_H^{k+1} - \phi_H^k}{\Delta t}, \psi_H) + \frac{\gamma}{\varepsilon^2}(\nabla(w_H^{k+1} + c\phi_H^{k+1}), \nabla\psi_H) + ((u_H^k \cdot \nabla)\phi_H^k, \psi_H) = 0, \forall \psi_H \in X_H$
  - 4:    $(w_H^{k+1} + c\phi_H^{k+1}, \chi_H) - \varepsilon^2(\nabla\phi_H^{k+1}, \nabla\chi_H) - (DF(\phi_H^k, \phi_H^{k+1}), \chi_H) = 0, \forall \chi_H \in W_H$
  - 5:   **Trouver**  $(\phi_h^{k+1}, w_h^{k+1})$  **dans**  $X_h \times W_h$ 

$$(\frac{\phi_h^{k+1} - \phi_h^k}{\Delta t}, \psi_h) + \frac{\gamma}{\varepsilon^2}(\nabla(w_h^{k+1} + c\phi_h^{k+1}), \nabla\psi_h) + ((u_h^k \cdot \nabla)\phi_h^k, \psi_h) = 0, \forall \psi_h \in X_h$$

$$(w_h^{k+1} + c\phi_h^{k+1}, \chi_h) - \varepsilon^2(\nabla\phi_h^{k+1}, \nabla\chi_h) - \tau(\phi_h^{k+1} - \phi_h^k, \chi_h)$$

$$= -\tau(\phi_H^{k+1} - \phi_H^k, \chi_h) + (\tilde{f}(\phi_H^{k+1}, \phi_h^k, \phi_h^{k+1}), \chi_h), \forall \chi_h \in W_h$$
  - 6:   **Trouver**  $u_h^{*,k+1}$  **dans**  $Y_h$ 

$$(\frac{u_h^{*,k+1} - u_h^k}{\Delta t}, v_h) + \nu(\nabla u_h^{*,k+1}, \nabla v_h) + ((u_h^{*,k+1} \cdot \nabla)u_h^{*,k+1}, v_h) + \frac{1}{2}(\text{div } u_h^{*,k} u_h^{*,k+1}, v_h)$$

$$= \frac{\lambda}{\varepsilon^2}((w_h^{k+1} + c\phi_h^{k+1})\nabla\phi_h^{k+1}, v_h), \forall v_h \in Y_h$$
  - 7:   **Trouver**  $p_h^{k+1}$  **dans**  $P_h$   $\Delta t(\text{div } \nabla p_h^{k+1}, \eta_h) = (\text{div } u_h^{*,k+1}, \eta_h), \forall \eta_h \in P_h$
  - 8:   **Trouver**  $u_h^{k+1}$  **dans**  $Y_h$   $(u_h^{k+1} - u_h^{*,k+1} + \Delta t \nabla p_h^{k+1}, v_h) = 0, \forall v_h \in Y_h$
  - 9: **end for**
-

---

**Algorithm 54** 2 grilles CH- 2 grilles NS "schéma I"

---

```

1: for $k = 0, 1, \dots$ do
2: Trouver $(\phi_H^{k+1}, w_H^{k+1})$ dans $X_H \times W_H$
3: $(\frac{\phi_H^{k+1} - \phi_H^k}{\Delta t}, \psi_H) + \frac{\gamma}{\varepsilon^2}(\nabla(w_H^{k+1} + c\phi_H^{k+1}), \nabla\psi_H) + ((u_h^k \cdot \nabla)\phi_H^k, \psi_H) = 0, \forall \psi_H \in X_H$
4: $(w_H^{k+1} + c\phi_H^{k+1}, \chi_H) - \varepsilon^2(\nabla\phi_H^{k+1}, \nabla\chi_H) - (DF(\phi_H^k, \phi_H^{k+1}), \chi_H) = 0, \forall \chi_H \in W_H$
5: Trouver $(\phi_h^{k+1}, w_h^{k+1})$ dans $X_h \times W_h$

 $(\frac{\phi_h^{k+1} - \phi_h^k}{\Delta t}, \psi_h) + \frac{\gamma}{\varepsilon^2}(\nabla(w_h^{k+1} + c\phi_h^{k+1}), \nabla\psi_h) + ((u_h^k \cdot \nabla)\phi_h^k, \psi_h) = 0, \forall \psi_h \in X_h$
 $(w_h^{k+1} + c\phi_h^{k+1}, \chi_h) - \varepsilon^2(\nabla\phi_h^{k+1}, \nabla\chi_h) - \tau(\phi_h^{k+1} - \phi_h^k, \chi_h)$
 $= -\tau(\phi_H^{k+1} - \phi_H^k, \chi_h) + (\tilde{f}(\phi_H^{k+1}, \phi_h^k, \phi_h^{k+1}), \chi_h), \forall \chi_h \in W_h$

6: Trouver $u_H^{*,k+1}$ dans Y_H

 $(\frac{u_H^{*,k+1} - u_H^k}{\Delta t}, v_H) + \nu(\nabla u_H^{*,k+1}, \nabla v_H) + ((u_H^{*,k+1} \cdot \nabla)u_H^{*,k+1}, v_H)$
 $= -\frac{1}{2}(\text{div } u_H^{*,k} u_H^{*,k+1}, v_H) + \frac{\lambda}{\varepsilon^2}((w_h^{k+1} + c\phi_h^{k+1})\nabla\phi_h^{k+1}, v_H), \forall v_H \in Y_H$

7: Trouver $u_h^{*,k+1}$ dans Y_h

 $(1 + \tau\Delta t)(u_h^{*,k+1} - u_h^k, v_h) + \nu\Delta t(\nabla u_h^{*,k+1}, \nabla v_h) + \Delta t((u_h^k \cdot \nabla)u_h^k, v_h) + \frac{1}{2}(\text{div } u_h^k u_h^k, v_h)$
 $= \tau\Delta t(u_H^{*,k+1} - u_H^k, v_h) + \frac{\lambda}{\varepsilon^2}(\Delta t(w_h^{k+1} + c\phi_h^{k+1})\nabla\phi_h^{k+1}, v_h), \forall v_h \in Y_h$

8: Trouver p_h^{k+1} dans P_h $\Delta t(\text{div } \nabla p_h^{k+1}, \eta_h) = (\text{div } u_h^{*,k+1}, \eta_h), \forall \eta_h \in P_h$
9: Trouver u_h^{k+1} dans Y_h $(u_h^{k+1} - u_h^{*,k+1} + \Delta t\nabla p_h^{k+1}, v_h) = 0, \forall v_h \in Y_h$
10: Résoudre dans Y_H $(u_H^{k+1} - u_h^{k+1}, v_H) = 0, \forall v_H \in Y_H$
11:
12: end for

```

---

**Algorithm 55** Variante de "schéma I" : "schéma II"

---

```

1: for $k = 0, 1, \dots$ do
2: Trouver $(\phi_H^{k+1}, w_H^{k+1})$ dans $X_H \times W_H$
3: $(\frac{\phi_H^{k+1} - \phi_H^k}{\Delta t}, \psi_H) + \frac{\gamma}{\varepsilon^2}(\nabla(w_H^{k+1} + c\phi_H^{k+1}), \nabla\psi_H) + ((u_h^k \cdot \nabla)\phi_H^k, \psi_H) = 0, \forall \psi_H \in X_H$
4: $(w_H^{k+1} + c\phi_H^{k+1}, \chi_H) - \varepsilon^2(\nabla\phi_H^{k+1}, \nabla\chi_H) - (DF(\phi_H^k, \phi_H^{k+1}), \chi_H) = 0, \forall \chi_H \in W_H$
5: Trouver $(\phi_h^{k+1}, w_h^{k+1})$ dans $X_h \times W_h$

 $(\frac{\phi_h^{k+1} - \phi_h^k}{\Delta t}, \psi_h) + \frac{\gamma}{\varepsilon^2}(\nabla(w_h^{k+1} + c\phi_h^{k+1}), \nabla\psi_h) + ((u_h^k \cdot \nabla)\phi_h^k, \psi_h) = 0, \forall \psi_h \in X_h$
 $(w_h^{k+1} + c\phi_h^{k+1}, \chi_h) - \varepsilon^2(\nabla\phi_h^{k+1}, \nabla\chi_h) - \tau(\phi_h^{k+1} - \phi_h^k, \chi_h)$
 $= -\tau(\phi_H^{k+1} - \phi_H^k, \chi_h) + (\tilde{f}(\phi_H^{k+1}, \phi_h^k, \phi_h^{k+1}), \chi_h), \forall \chi_h \in W_h$

6: Trouver $u_H^{*,k+1}$ dans Y_H

 $(\frac{u_H^{*,k+1} - u_H^k}{\Delta t}, v_H) + \nu(\nabla u_H^{*,k+1}, \nabla v_H) + ((u_H^{*,k+1} \cdot \nabla)u_H^{*,k+1}, v_H)$
 $= -\frac{1}{2}(\text{div } u_H^{*,k} u_H^{*,k+1}, v_H) + \frac{\lambda}{\varepsilon^2}((w_h^{k+1} + c\phi_h^{k+1})\nabla\phi_h^{k+1}, v_H), \forall v_H \in Y_H$

7: Trouver $u_h^{*,k+1}$ dans Y_h

 $(1 + \tau\Delta t)(u_h^{*,k+1} - u_h^k, v_h) + \nu\Delta t(\nabla u_h^{*,k+1}, \nabla v_h) + \Delta t((u_H^{*,k+1} \cdot \nabla)u_h^{*,k+1}, v_h)$
 $= -\frac{1}{2}(\text{div } u_h^k u_h^k, v_h) + \tau\Delta t(u_H^{*,k+1} - u_H^k, v_h) + \frac{\lambda}{\varepsilon^2}(\Delta t(w_h^{k+1} + c\phi_h^{k+1})\nabla\phi_h^{k+1}, v_h), \forall v_h \in Y_h$

8: Trouver p_h^{k+1} dans P_h $\Delta t(\text{div } \nabla p_h^{k+1}, \eta_h) = (\text{div } u_h^{*,k+1}, \eta_h), \forall \eta_h \in P_h$
9: Trouver u_h^{k+1} dans Y_h $(u_h^{k+1} - u_h^{*,k+1} + \Delta t\nabla p_h^{k+1}, v_h) = 0, \forall v_h \in Y_h$
10: Résoudre dans Y_H $(u_H^{k+1} - u_h^{k+1}, v_H) = 0, \forall v_H \in Y_H$
11:
12: end for

```

---



---

**Algorithm 56** 2 grilles CH/ 2 grilles NS (NS complet GG) "schéma III"

---

- 1: **for**  $k = 0, 1, \dots$  **do**
  - 2:   **Trouver**  $(\phi_H^{k+1}, w_H^{k+1})$  **dans**  $X_H \times W_H$
  - 3:    $(\frac{\phi_H^{k+1} - \phi_H^k}{\Delta t}, \psi_H) + \frac{\gamma}{\varepsilon^2}(\nabla(w_H^{k+1} + c\phi_H^{k+1}), \nabla\psi_H) + ((u_h^k \cdot \nabla)\phi_H^k, \psi_H) = 0, \forall \psi_H \in X_H$
  - 4:    $(w_H^{k+1} + c\phi_H^{k+1}, \chi_H) - \varepsilon^2(\nabla\phi_H^{k+1}, \nabla\chi_H) - (DF(\phi_H^k, \phi_H^{k+1}), \chi_H) = 0, \forall \chi_H \in W_H$
  - 5:   **Trouver**  $(\phi_h^{k+1}, w_h^{k+1})$  **dans**  $X_h \times W_h$ 

$$(\frac{\phi_h^{k+1} - \phi_h^k}{\Delta t}, \psi_h) + \frac{\gamma}{\varepsilon^2}(\nabla(w_h^{k+1} + c\phi_h^{k+1}), \nabla\psi_h) + ((u_h^k \cdot \nabla)\phi_h^k, \psi_h) = 0, \forall \psi_h \in X_h$$

$$(w_h^{k+1} + c\phi_h^{k+1}, \chi_h) - \varepsilon^2(\nabla\phi_h^{k+1}, \nabla\chi_h) - \tau(\phi_h^{k+1} - \phi_h^k, \chi_h)$$

$$= -\tau(\phi_h^{k+1} - \phi_h^k, \chi_h) + (\tilde{f}(\phi_H^{k+1}, \phi_h^k, \phi_h^{k+1}), \chi_h), \forall \chi_h \in W_h$$
  - 6:   **Trouver**  $u_H^{*,k+1}$  **dans**  $Y_H$ 

$$(\frac{u_H^{*,k+1} - u_H^k}{\Delta t}, v_H) + \nu(\nabla u_H^{*,k+1}, \nabla v_H) + ((u_H^{*,k+1} \cdot \nabla)u_H^{*,k+1}, v_H)$$

$$= -\frac{1}{2}(\text{div } u_H^{*,k} u_H^{*,k+1}, v_H) + \frac{\lambda}{\varepsilon^2}((w_h^{k+1} + c\phi_h^{k+1})\nabla\phi_h^{k+1}, v_H), \forall v_H \in Y_H$$
  - 7:   **Trouver**  $p_H^{k+1}$  **dans**  $P_H$   $\Delta t(\text{div } \nabla p_H^{k+1}, \eta_H) = (\text{div } u_H^{*,k+1}, \eta_H), \forall \eta_H \in P_H$
  - 8:   **Trouver**  $u_H^{k+1}$  **dans**  $Y_H$   $(u_H^{k+1} - u_H^{*,k+1} + \Delta t \nabla p_H^{k+1}, v_H) = 0, \forall v_H \in Y_H$
  - 9:   **Trouver**  $u_h^{*,k+1}$  **dans**  $Y_h$ 

$$(1 + \tau\Delta t)(u_h^{*,k+1} - u_h^k, v_h) + \nu\Delta t(\nabla u_h^{*,k+1}, \nabla v_h) + \Delta t((u_h^k \cdot \nabla)u_h^k, v_h)$$

$$= -\frac{1}{2}(\text{div } u_h^k u_h^k, v_h) + \tau\Delta t(u_H^{*,k+1} - u_H^k, v_h) + \frac{\lambda}{\varepsilon^2}(\Delta t(w_h^{k+1} + c\phi_h^{k+1})\nabla\phi_h^{k+1}, v_h), \forall v_h \in Y_h$$
  - 10:   **Trouver**  $p_h^{k+1}$  **dans**  $P_h$   $\Delta t(\text{div } \nabla p_h^{k+1}, \eta_h) = (\text{div } u_h^{*,k+1}, \eta_h), \forall \eta_h \in P_h$
  - 11:   **Trouver**  $u_h^{k+1}$  **dans**  $Y_h$   $(u_h^{k+1} - u_h^{*,k+1} + \Delta t \nabla p_h^{k+1}, v_h) = 0, \forall v_h \in Y_h$
  - 12: **end for**
-

**Algorithm 57** Variante de "schéma III" : "schéma IV"

- 
- 1: **for**  $k = 0, 1, \dots$  **do**
  - 2:   **Trouver**  $(\phi_H^{k+1}, w_H^{k+1})$  **dans**  $X_H \times W_H$
  - 3:    $(\frac{\phi_H^{k+1} - \phi_H^k}{\Delta t}, \psi_H) + \frac{\gamma}{\varepsilon^2}(\nabla(w_H^{k+1} + c\phi_H^{k+1}), \nabla\psi_H) + ((u_H^k \cdot \nabla)\phi_H^k, \psi_H) = 0, \forall \psi_H \in X_H$
  - 4:    $(w_H^{k+1} + c\phi_H^{k+1}, \chi_H) - \varepsilon^2(\nabla\phi_H^{k+1}, \nabla\chi_H) - (DF(\phi_H^k, \phi_H^{k+1}), \chi_H) = 0, \forall \chi_H \in W_H$
  - 5:   **Trouver**  $(\phi_h^{k+1}, w_h^{k+1})$  **dans**  $X_h \times W_h$
  - 6:    $(\frac{\phi_h^{k+1} - \phi_h^k}{\Delta t}, \psi_h) + \frac{\gamma}{\varepsilon^2}(\nabla(w_h^{k+1} + c\phi_h^{k+1}), \nabla\psi_h) + ((u_h^k \cdot \nabla)\phi_h^k, \psi_h) = 0, \forall \psi_h \in X_h$   
 $(w_h^{k+1} + c\phi_h^{k+1}, \chi_h) - \varepsilon^2(\nabla\phi_h^{k+1}, \nabla\chi_h) - \tau(\phi_h^{k+1} - \phi_h^k, \chi_h)$   
 $= -\tau(\phi_H^{k+1} - \phi_H^k, \chi_h) + (\tilde{f}(\phi_H^{k+1}, \phi_h^k, \phi_h^{k+1}), \chi_h), \forall \chi_h \in W_h$
  - 7:   **Trouver**  $u_H^{*,k+1}$  **dans**  $Y_H$
  - 8:    $(\frac{u_H^{*,k+1} - u_H^k}{\Delta t}, v_H) + \nu(\nabla u_H^{*,k+1}, \nabla v_H) + ((u_H^{*,k+1} \cdot \nabla)u_H^{*,k+1}, v_H)$   
 $= -\frac{1}{2}(\text{div } u_H^{*,k} u_H^{*,k+1}, v_H) + \frac{\lambda}{\varepsilon^2}((w_h^{k+1} + c\phi_h^{k+1})\nabla\phi_h^{k+1}, v_H), \forall v_H \in Y_H$
  - 9:   **Trouver**  $p_H^{k+1}$  **dans**  $P_H$   $\Delta t(\text{div } \nabla p_H^{k+1}, \eta_H) = (\text{div } u_H^{*,k+1}, \eta_H), \forall \eta_H \in P_H$
  - 10:   **Trouver**  $u_H^{k+1}$  **dans**  $Y_H$   $(u_H^{k+1} - u_H^{*,k+1} + \Delta t \nabla p_H^{k+1}, v_H) = 0, \forall v_H \in Y_H$
  - 11:   **Trouver**  $u_h^{*,k+1}$  **dans**  $Y_h$
  - 12:    $(1 + \tau\Delta t)(u_h^{*,k+1} - u_h^k, v_h) + \nu\Delta t(\nabla u_h^{*,k+1}, \nabla v_h) + \Delta t((u_h^{*,k+1} \cdot \nabla)u_h^{*,k+1}, v_h)$   
 $= -\frac{1}{2}(\text{div } u_h^k u_h^k, v_h) + \tau\Delta t(u_H^{*,k+1} - u_H^k, v_h) + \frac{\lambda}{\varepsilon^2}(\Delta t(w_h^{k+1} + c\phi_h^{k+1})\nabla\phi_h^{k+1}, v_h), \forall v_h \in Y_h$
  - 13:   **Trouver**  $p_h^{k+1}$  **dans**  $P_h$   $\Delta t(\text{div } \nabla p_h^{k+1}, \eta_h) = (\text{div } u_h^{*,k+1}, \eta_h), \forall \eta_h \in P_h$
  - 14:   **Trouver**  $u_h^{k+1}$  **dans**  $Y_h$   $(u_h^{k+1} - u_h^{*,k+1} + \Delta t \nabla p_h^{k+1}, v_h) = 0, \forall v_h \in Y_h$
  - 15: **end for**
- 

## 6.4 Simulations numériques

### 6.4.1 Déformation d'une bulle rectangulaire

Nous présentons dans cette section la déformation de la bulle rectangulaire  $\phi_0$  et la formation d'une bulle circulaire. Les résultats des **Algorithmes 49, 50, 51, 52** décomposant uniquement la vitesse sont dans les figures 6.1, 6.2, 6.3, 6.4. Alors que les figures 6.5, 6.6, 6.7, 6.8 correspondent aux **Algorithmes 53, 54, 55, 56, 57** décomposant la concentration et la vitesse. Dans les deux cas la fonction  $\phi$  est représentée aux temps  $t = 0, 0.0002, 0.002, 0.008$ .

Nous construisons un maillage fin de  $32 \times 32$  noeuds et un grossier de  $16 \times 16$  noeuds pour le carré  $[-1, 1] \times [-1, 1]$  en adaptant l'EF  $\mathbb{P}_2$  pour la fonction  $\phi$  et la vitesse  $u$  et l'EF  $\mathbb{P}_1$  pour la pression  $p$ . L'état initial est la bulle rectangulaire avec  $\phi = 1$  à l'intérieur et  $\phi = -1$  à l'extérieur et la vitesse nulle. Nous prenons comme dans [136] un nombre de Reynolds  $Re = 10, \varepsilon = 0.05, \gamma = 0.1, \lambda = 10^{-6}$  avec un pas de temps  $\Delta t = 10^{-4}$  et un temps final  $T = 0.5$ .

### 6.4.1.1 Décomposition uniquement pour la vitesse

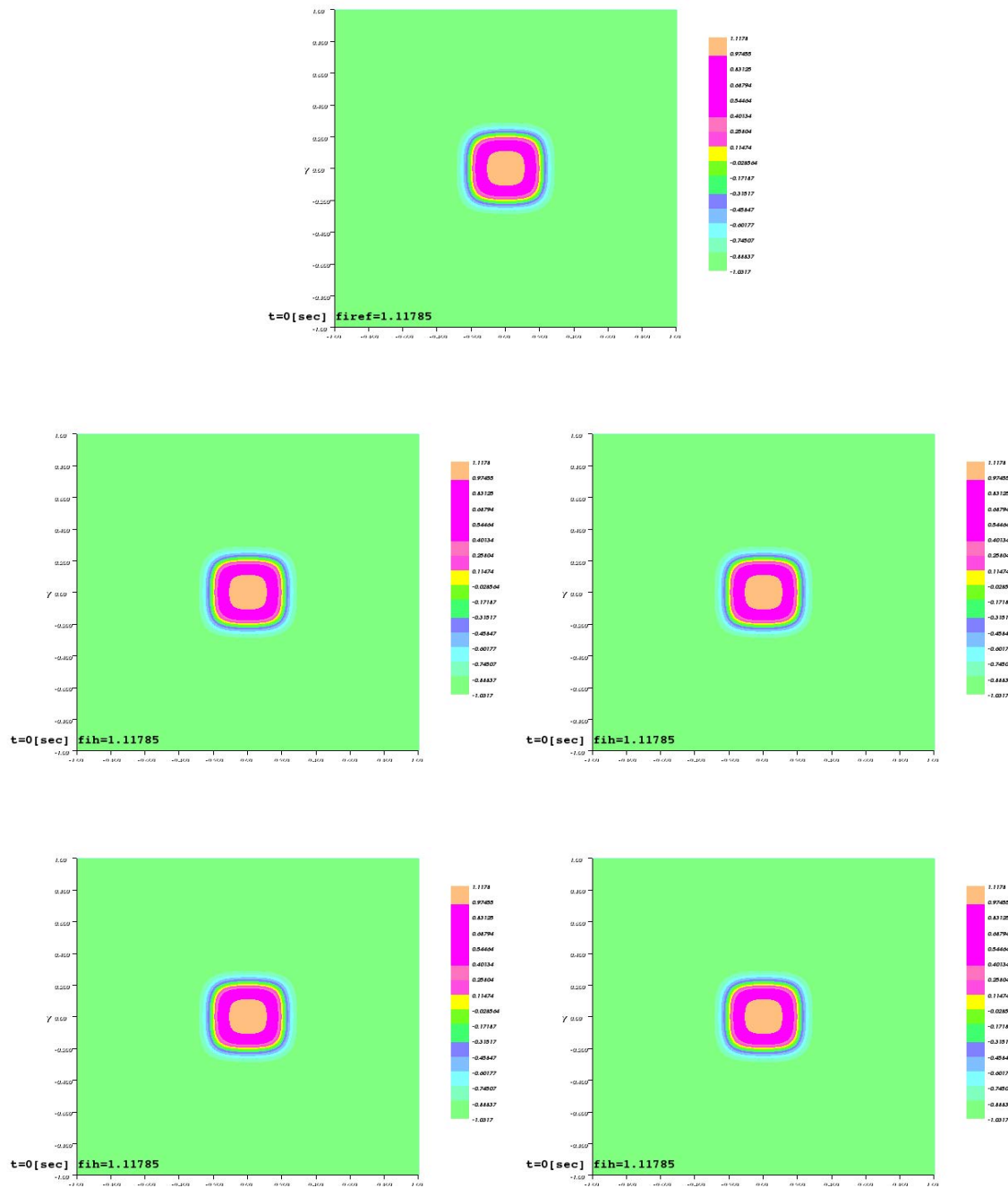


FIGURE 6.1 – La solution  $\phi_h$ ; de haut en bas et de gauche à droite pour : **Algorithme 48** (Référence 1 grille), **Algorithmes 49, 50, 51, 52** à  $t = 0$ .

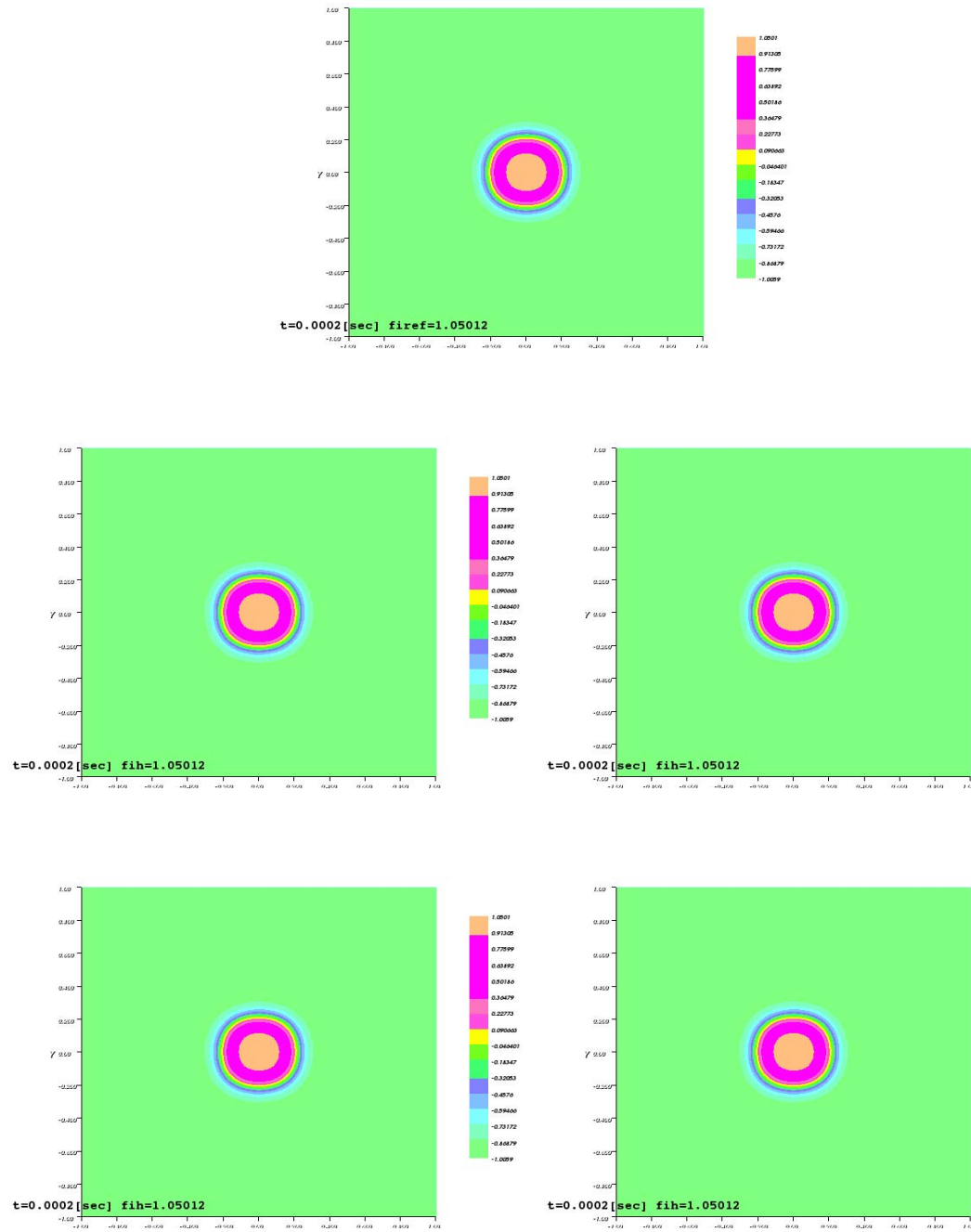


FIGURE 6.2 – La solution  $\phi_h$ ; de haut en bas et de gauche à droite pour : **Algorithme 48** (Référence 1 grille), **Algorithmes 49, 50, 51, 52** à  $t = 0.0002$ .

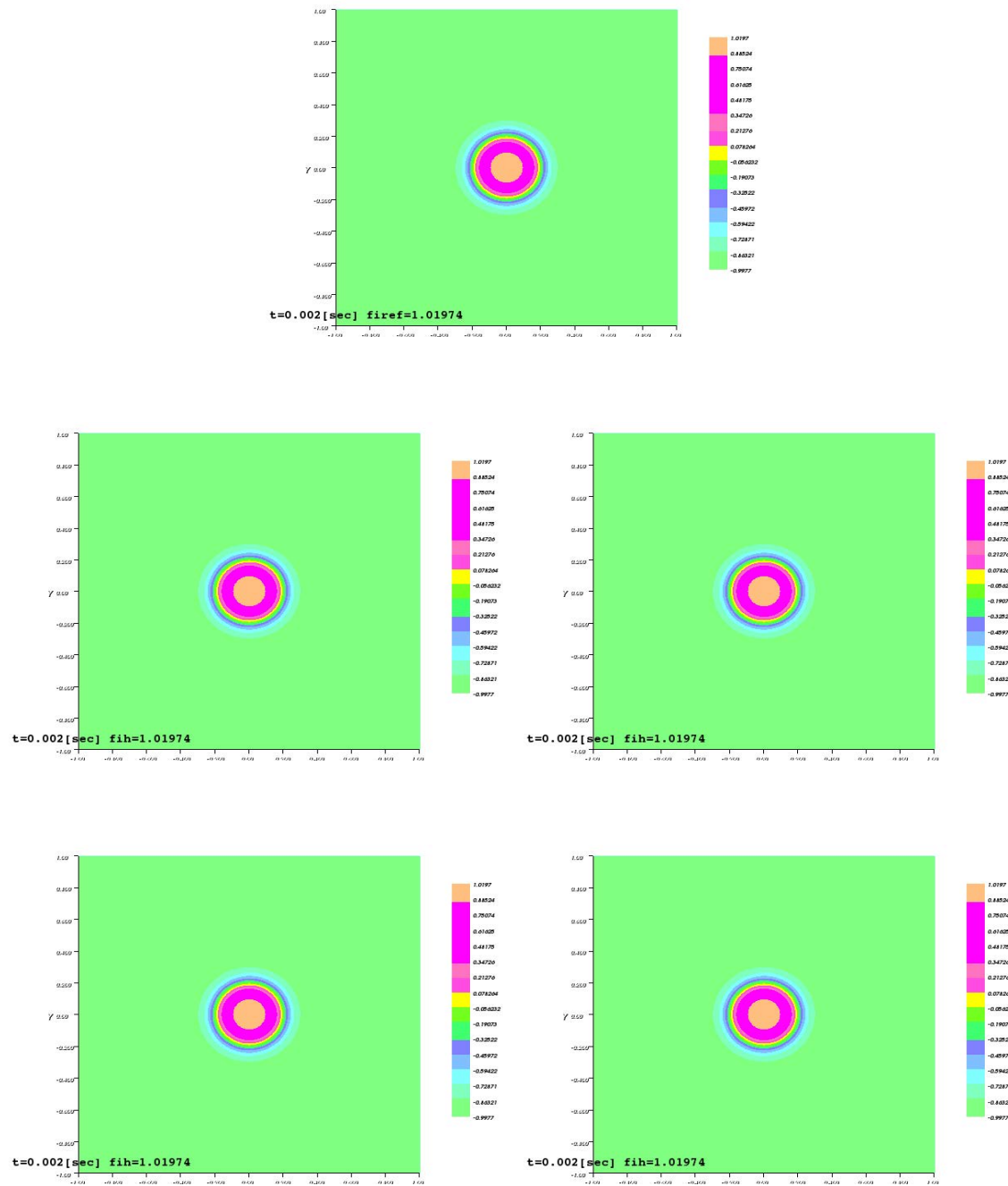


FIGURE 6.3 – La solution  $\phi_h$ ; de haut en bas et de gauche à droite pour : **Algorithme 48** (Référence 1 grille), **Algorithmes 49, 50, 51, 52** à  $t = 0.002$ .

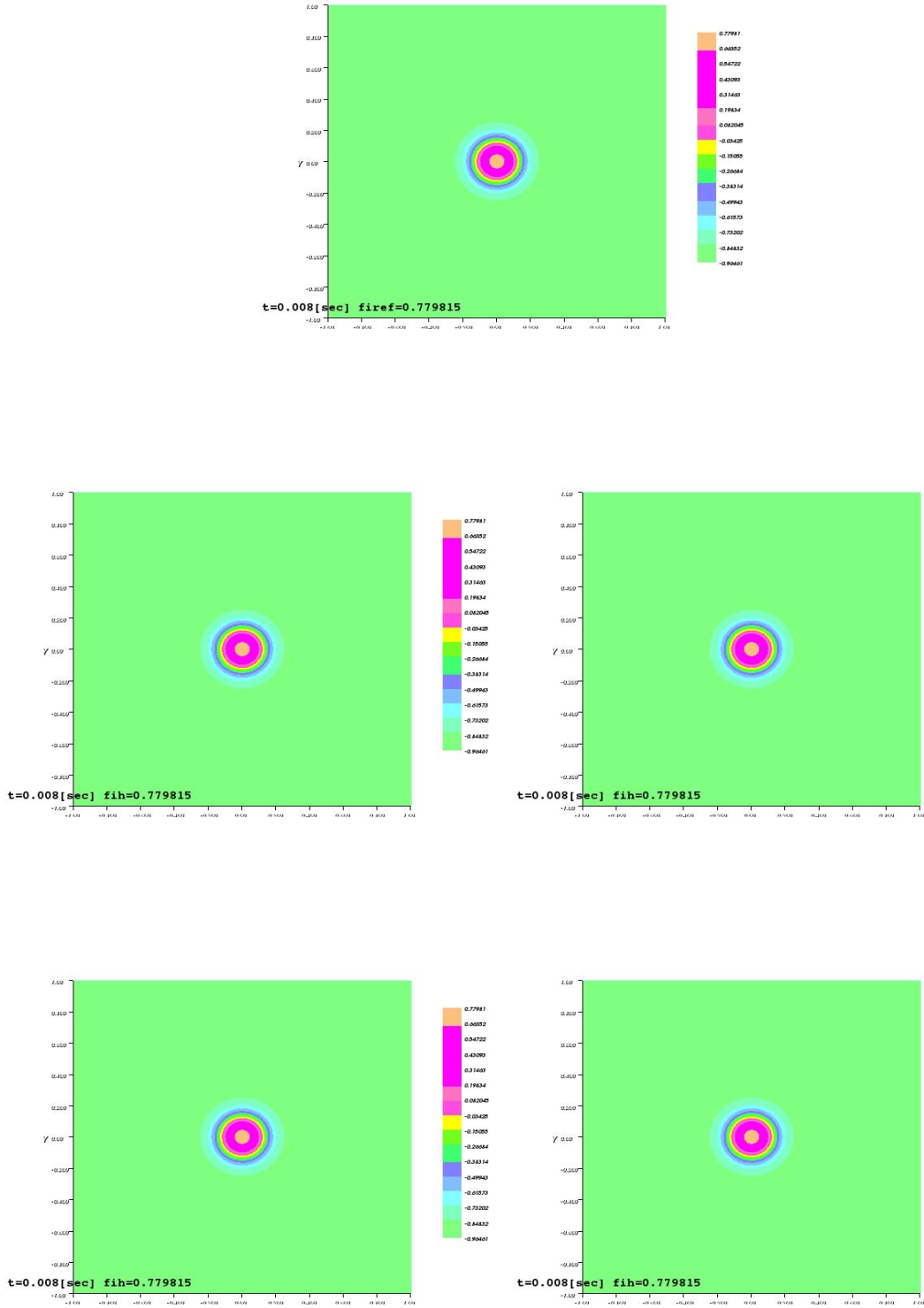


FIGURE 6.4 – La solution  $\phi_h$ ; de haut en bas et de gauche à droite pour : **Algorithme 48** (Référence 1 grille), **Algorithmes 49, 50, 51, 52** à  $t = 0.008$ .

### 6.4.1.2 Décomposition de la concentration et de la vitesse

Pour les mêmes paramètres, nous testons les algorithmes de la décomposition non seulement de la vitesse mais aussi de la concentration.

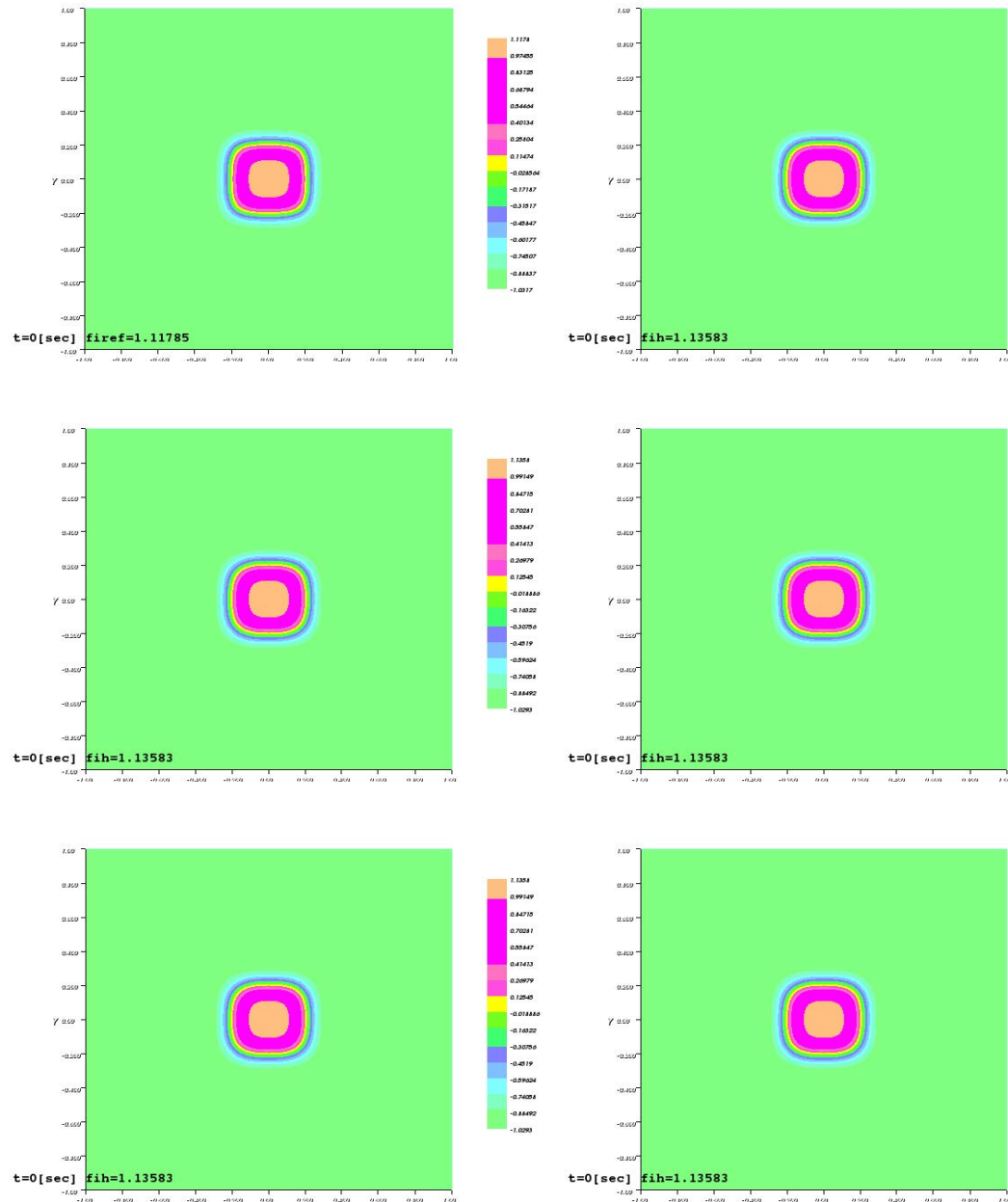


FIGURE 6.5 – La solution  $\phi_h$ ; de haut en bas et de gauche à droite pour : **Algorithme 48** (Référence 1 grille), **Algorithmes 53, 54, 55, 56, 57** à  $t = 0$ .

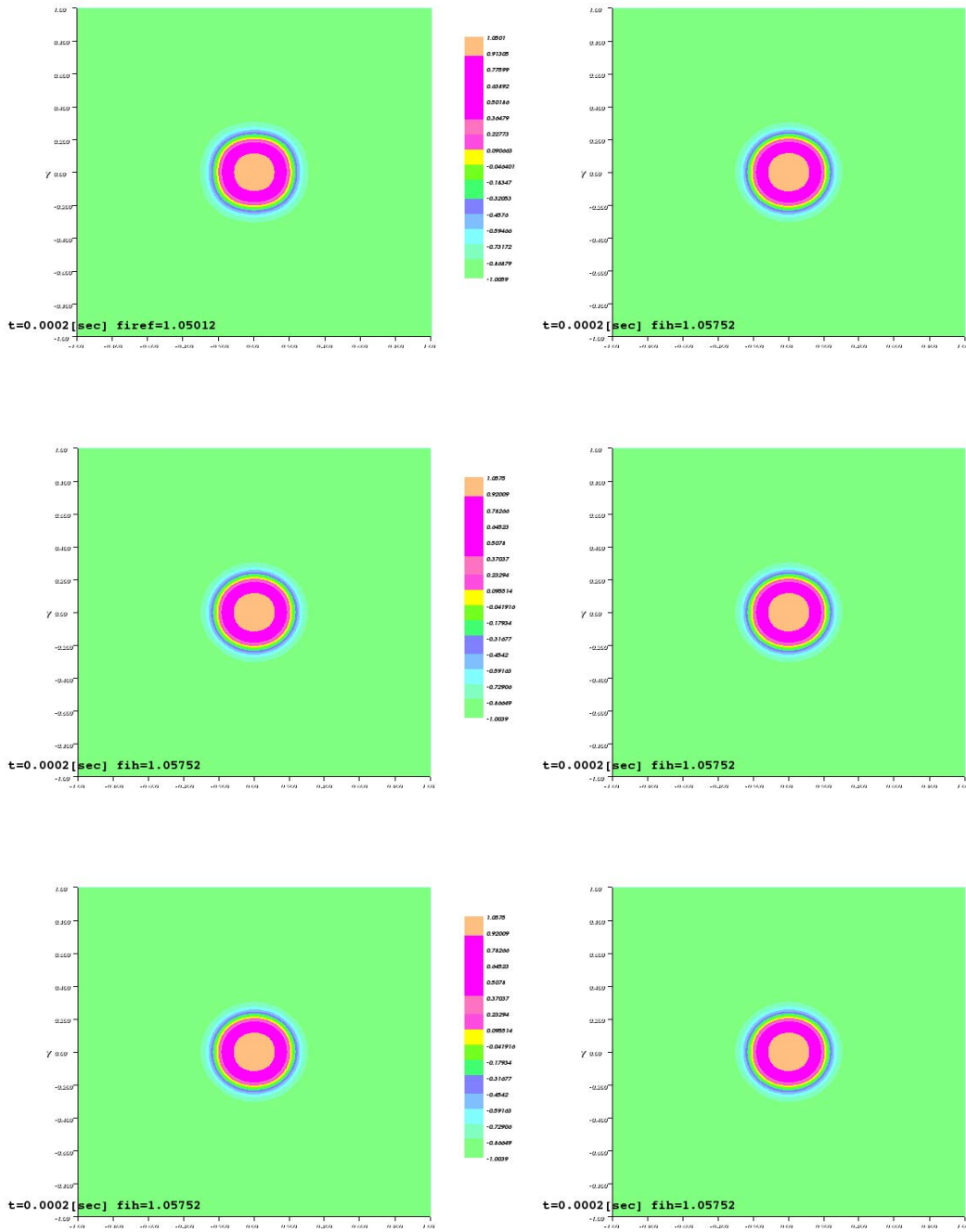


FIGURE 6.6 – La solution  $\phi_h$ ; de haut en bas et de gauche à droite pour : **Algorithme 48** (Référence 1 grille), **Algorithmes 53, 54, 55, 56, 46** à  $t = 0.0002$ .



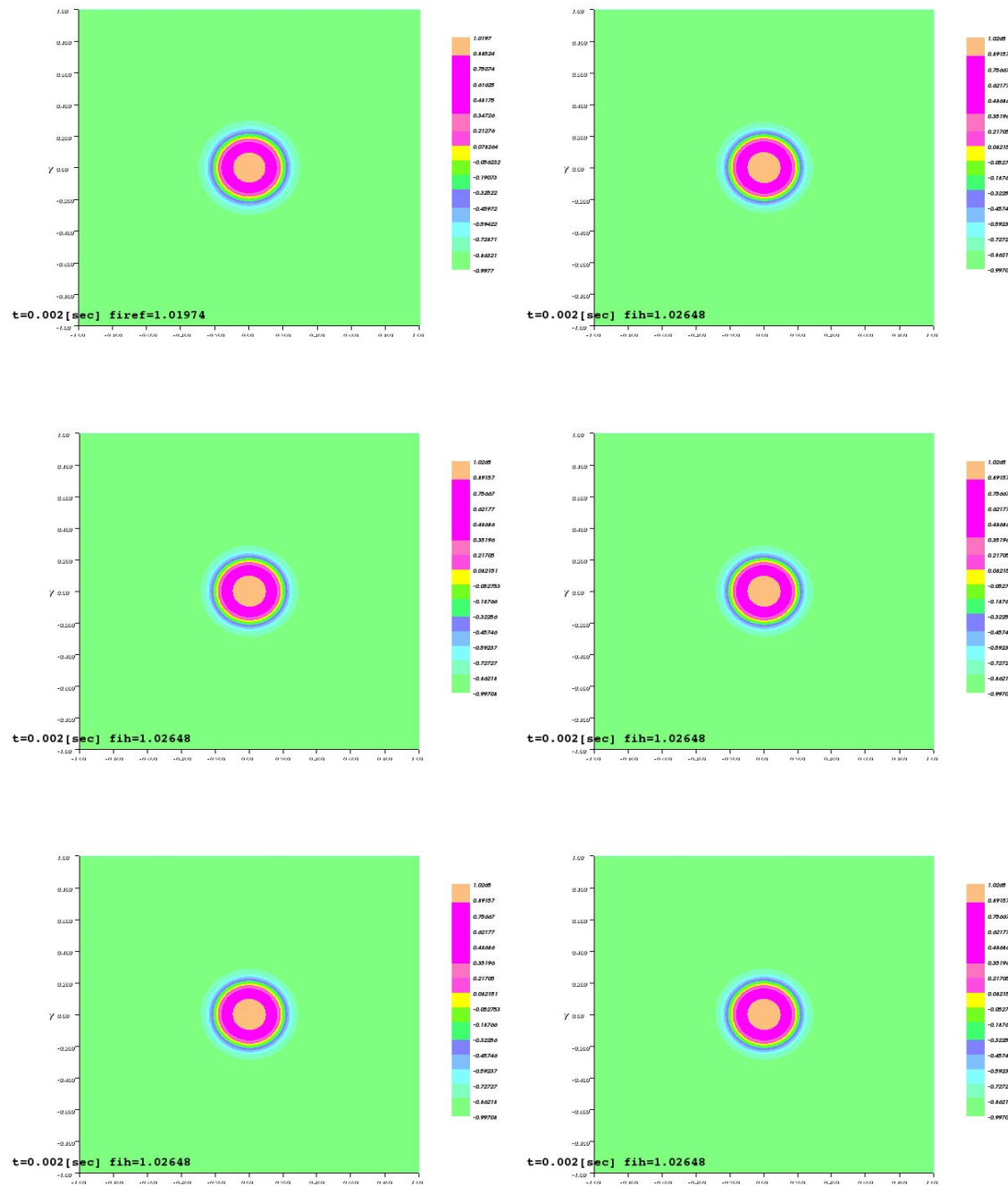


FIGURE 6.7 – La solution  $\phi_h$ ; de haut en bas et de gauche à droite pour : **Algorithme 48** (Référence 1 grille), **Algorithmes 53, 54, 55, 56, 57** à  $t = 0.002$ .

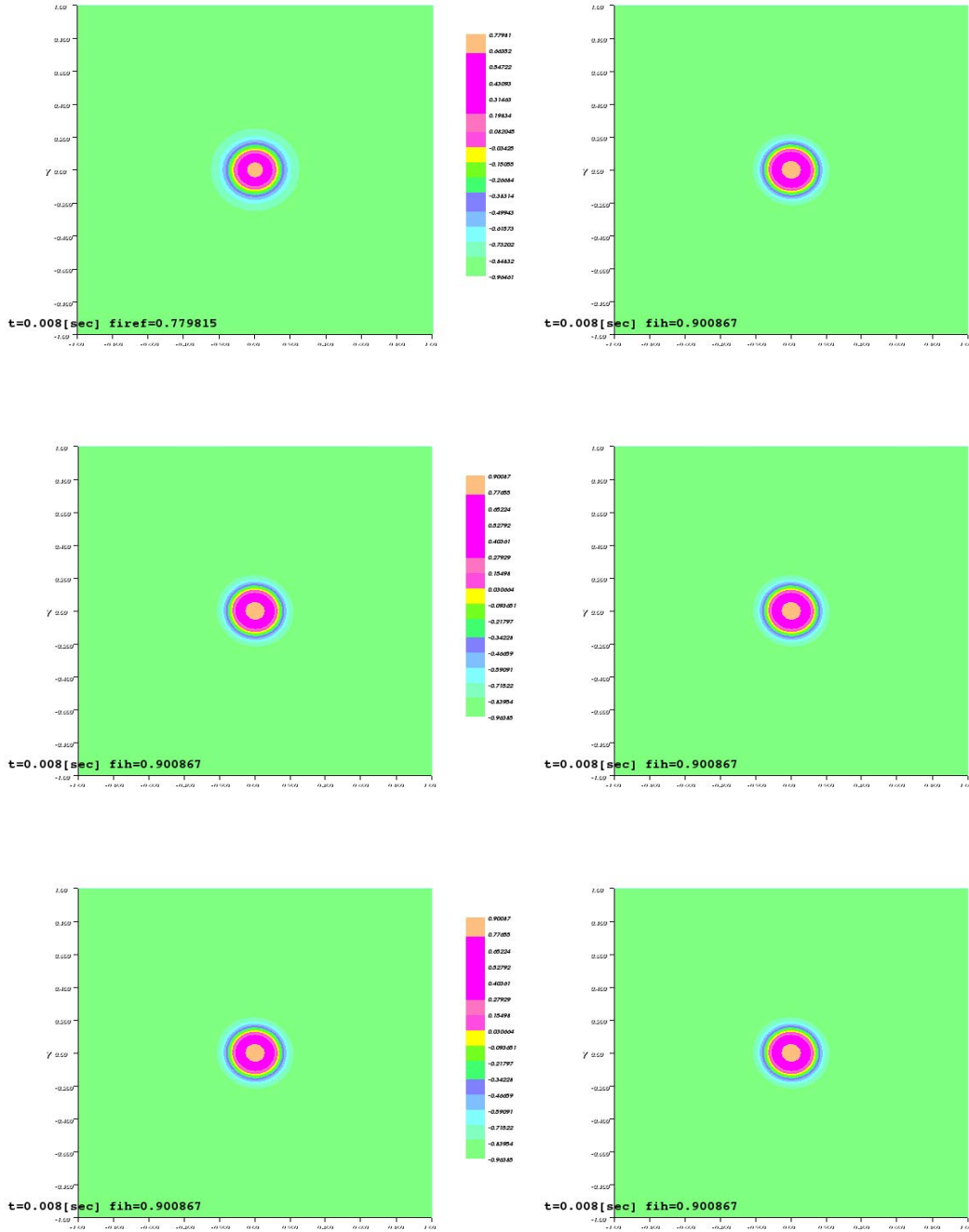


FIGURE 6.8 – La solution  $\phi_h$ ; de haut en bas et de gauche à droite pour : **Algorithme 48** (Référence 1 grille), **Algorithmes 53, 54, 55, 56, 57** à  $t = 0.008$ .

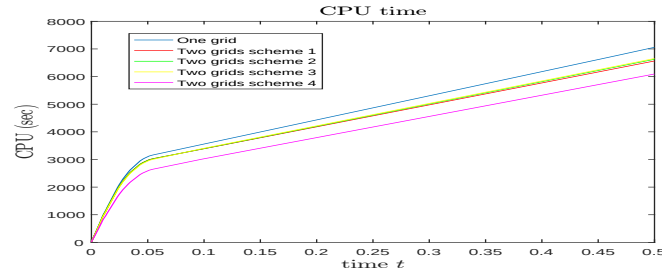
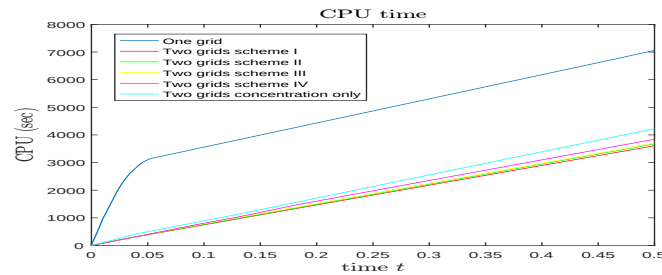
### 6.4.1.3 Comparaison en temps de calcul

Nous représentons le gain en temps de calcul CPU apporté par notre technique bi-grilles. Nous comparons le schéma implicite (référence) résolu sur une grille fine aux schémas décomposant la vitesse (cf. Tab. 6.1 et Fig. 6.9) et aux schémas décomposant à la fois la vitesse et la concentration (cf. Tab. 6.2 et Fig. 6.10).

|                                    |                                 |                                 |                                 |                                 |
|------------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|
| $32 \times 16$ points<br>$T = 0.5$ | <b>Algorithm 49</b><br>schéma 1 | <b>Algorithm 50</b><br>schéma 2 | <b>Algorithm 51</b><br>schéma 3 | <b>Algorithm 52</b><br>schéma 4 |
| $t_{1G}$ (en sec.)                 | 7059.43                         | 7059.43                         | 7059.43                         | 7059.43                         |
| $t_{2G}$ (en sec.)                 | 6564.18                         | 6625.53                         | 6653.83                         | 6092.97                         |
| $\frac{t_{2G}}{t_{1G}}$            | 0.92                            | 0.93                            | 0.94                            | 0.86                            |

 TABLE 6.1 – Séparation d'échelles Cahn-Hilliard/Navier-Stokes bulle rectangulaire (bi-grilles vitesse uniquement)  $\mathbb{P}_2/\mathbb{P}_1$ .

|                                    |                     |                                 |                                  |                                   |                                  |
|------------------------------------|---------------------|---------------------------------|----------------------------------|-----------------------------------|----------------------------------|
| $32 \times 16$ points<br>$T = 0.5$ | <b>Algorithm 53</b> | <b>Algorithm 54</b><br>schéma I | <b>Algorithm 55</b><br>schéma II | <b>Algorithm 56</b><br>schéma III | <b>Algorithm 57</b><br>schéma IV |
| $t_{1G}$ (en sec.)                 | 7059.43             | 7059.43                         | 7059.43                          | 7059.43                           | 7059.43                          |
| $t_{2G}$ (en sec.)                 | 4229.09             | 3608.58                         | 3673.29                          | 3717.31                           | 3844.53                          |
| $\frac{t_{2G}}{t_{1G}}$            | 0.59                | 0.51                            | 0.54                             | 0.52                              | 0.54                             |

 TABLE 6.2 – Séparation d'échelles Cahn-Hilliard/Navier-Stokes bulle rectangulaire (bi-grilles vitesse et concentration)  $\mathbb{P}_2/\mathbb{P}_1$ .

 FIGURE 6.9 – Comparaison CPU (bulle rectangulaire) entre le schéma sur une grille fine et ceux de la méthode de séparation d'échelles (uniquement vitesse) : **Algorithmes 49, 50, 51, 52** avec  $T = 0.5$  et  $N_f = 32, N_c = 16$ .

 FIGURE 6.10 – Comparaison CPU (bulle rectangulaire) entre le schéma sur une grille fine et ceux de la méthode de séparation d'échelles (concentration et vitesse) : **Algorithmes 53, 54, 55, 56, 57** avec  $T = 0.5$  et  $N_f = 32, N_c = 16$ .

Donc la résolution par la méthode bi-grilles est deux fois plus rapide que la résolution par un schéma implicite sur la grille fine. La décomposition uniquement de la concentration  $\phi$ , la vitesse est calculée sur une grille fine, n'apporte pas de gain en temps de calcul. Le gain est maximal pour la décomposition simultanée de la concentration et la vitesse.

#### 6.4.1.4 Loi sur l'énergie et conservation de la masse

Les simulations données par les algorithmes bi-grilles sont similaires à celles du schéma de référence (**Algorithme 48**) sur grille fine et de Hua [136]. De plus, ces schémas vérifient la loi sur l'énergie du système (6.8). Nous représentons l'énergie de l'**Algorithme 54** bi-grilles ainsi que celle de l'**Algorithme 48** (Référence 1 grille) et remarquons sa décroissance au cours du temps.

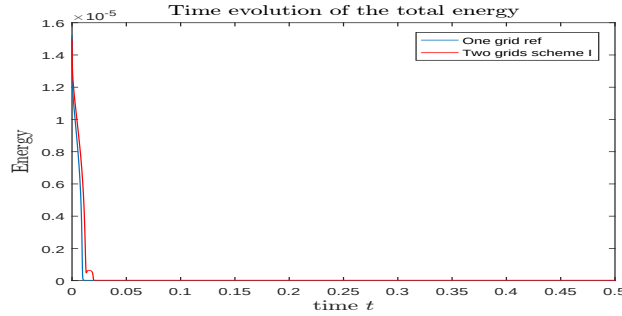


FIGURE 6.11 – Energie vs temps- Comparaison entre l'**Algorithme 48** (Référence 1 grille) et l'**Algorithme 54** pour  $\Delta t = 0.0001$ .

Les Fig. 6.1-6.8 montrent que la surface de la bulle semble rétrécir au cours du temps. Nous testons un critère primordiale du modèle dissipatif de Cahn-Hilliard : la conservation de la masse. Il apparaît dans la Fig. 6.12 que la moyenne spatiale  $\int_{\Omega} \phi$  est conservée au cours du temps et est égale à  $-3.6875$  pour la bulle rectangulaire. C'est le cas de tous les algorithmes bi-grilles présentés dans les sections précédentes. Nous nous limitons à une comparaison entre l'**Algorithme 48** (Référence 1 grille) et l'**Algorithme 54** bi-grilles pour  $\Delta t = 0.0001$ .

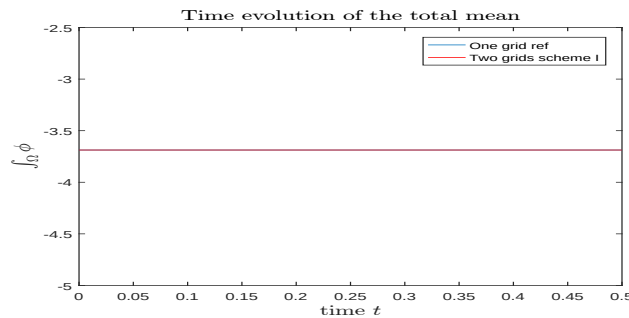


FIGURE 6.12 – Moyenne vs temps- Comparaison entre l'**Algorithme 48** (Référence 1 grille) et l'**Algorithme 54** pour  $\Delta t = 0.0001$ .

#### 6.4.2 Fusionnement de deux bulles

Pour un  $\phi_0$  égal à deux bulles en contact nous remarquons comme dans [136] le fusionnement des deux bulles et la formation d'un oval dans les figures 6.13, 6.14, 6.15, 6.16, 6.17 pour la décomposition uniquement de la vitesse et dans les figures 6.18, 6.19, 6.20, 6.21, 6.22 pour les

algorithmes décomposant à la fois la concentration et la vitesse. Nous présentons les résultats obtenus pour  $\Delta t = 10^{-5}$ ,  $Re = 10$ ,  $\varepsilon = 0.05$ ,  $\gamma = 0.1$ ,  $\lambda = 10^{-6}$  et temps final  $T = 0.2$ .

#### 6.4.2.1 Décomposition uniquement pour la vitesse

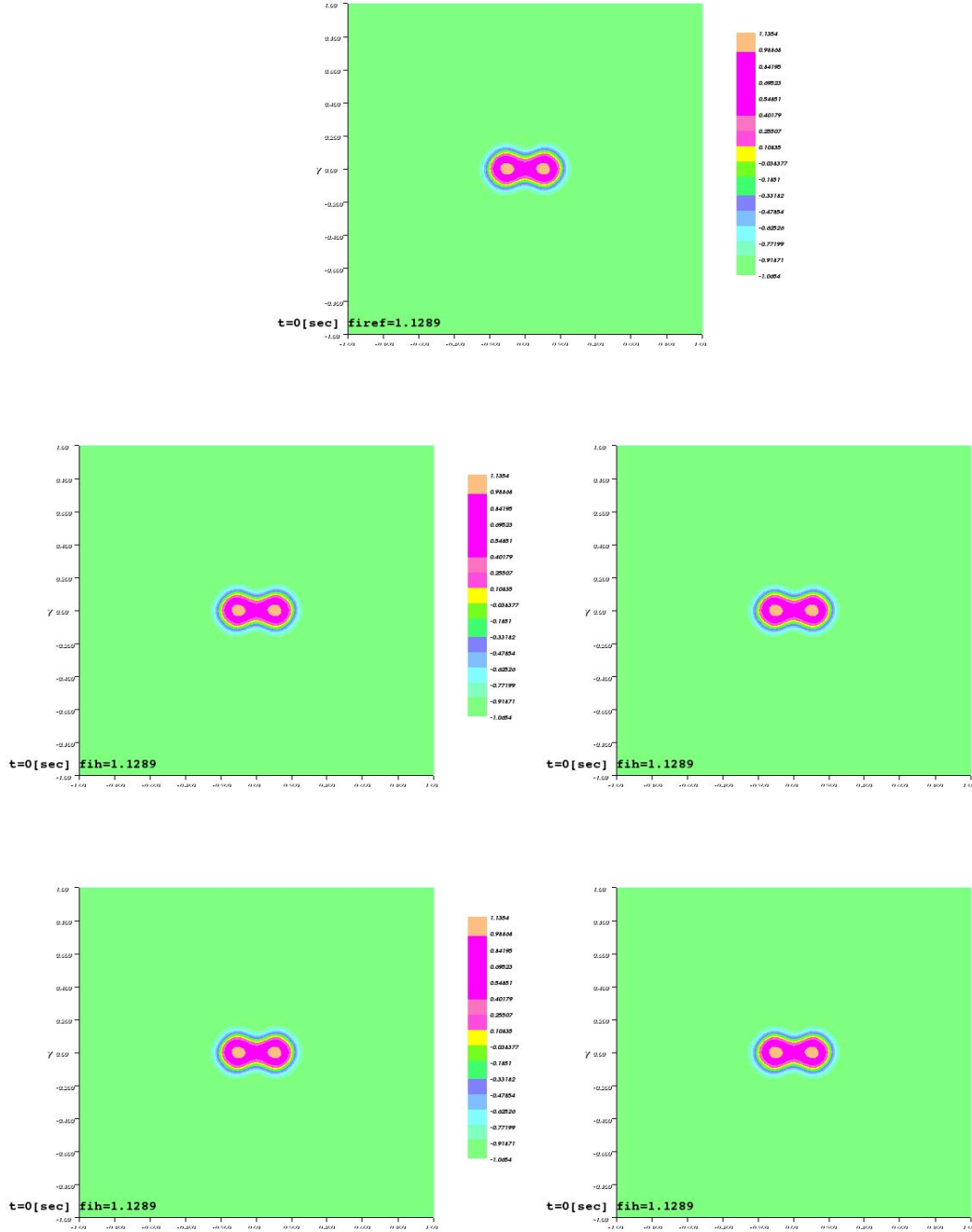


FIGURE 6.13 – La solution  $\phi_h$ ; de haut en bas et de gauche à droite pour : **Algorithme 48** (Référence 1 grille), **Algorithmes 49, 50, 51, 52** à  $t = 0$ .

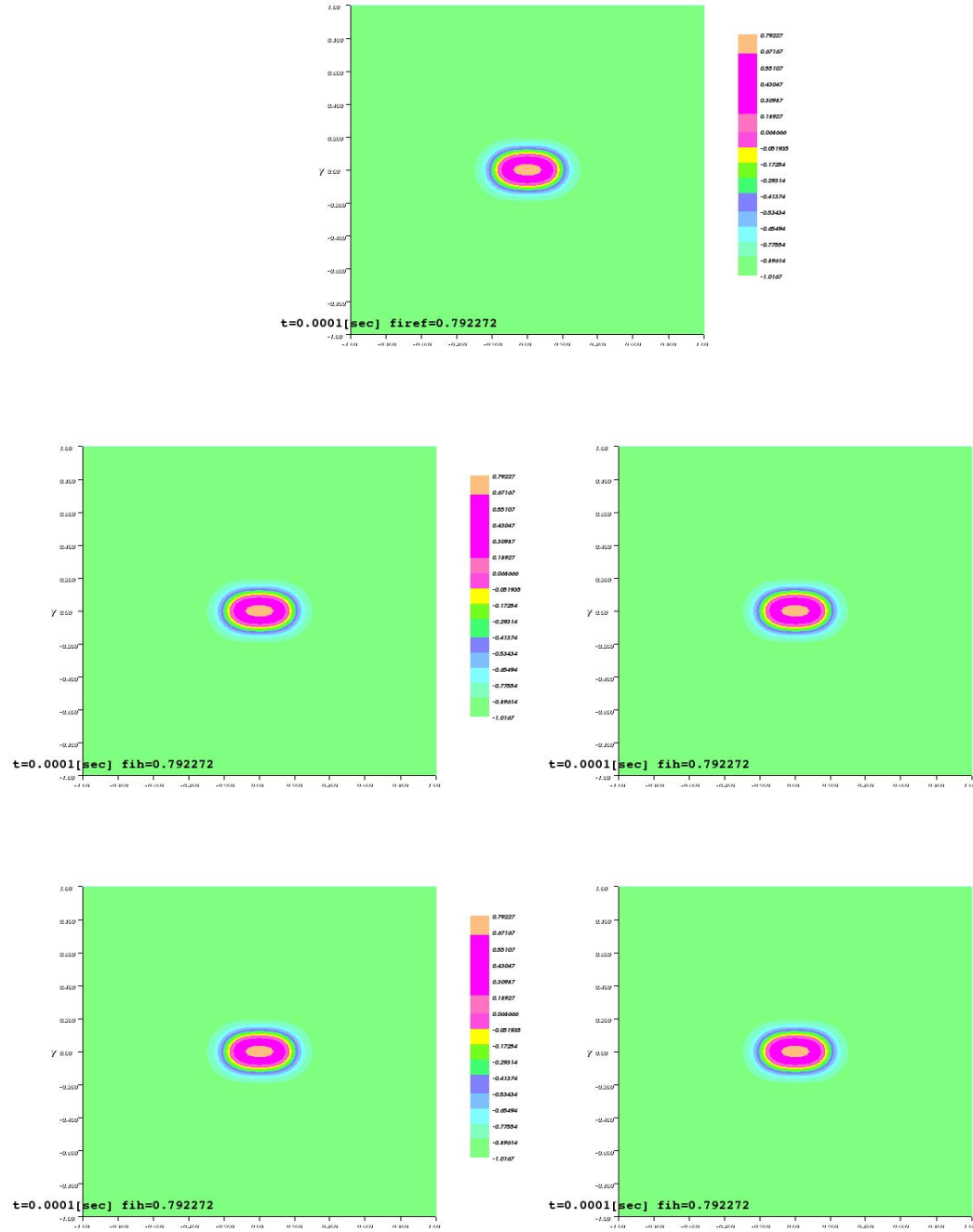


FIGURE 6.14 – La solution  $\phi_h$ ; de haut en bas et de gauche à droite pour : **Algorithme 48** (Référence 1 grille), **Algorithmes 49, 50, 51, 52** à  $t = 0.0001$ .

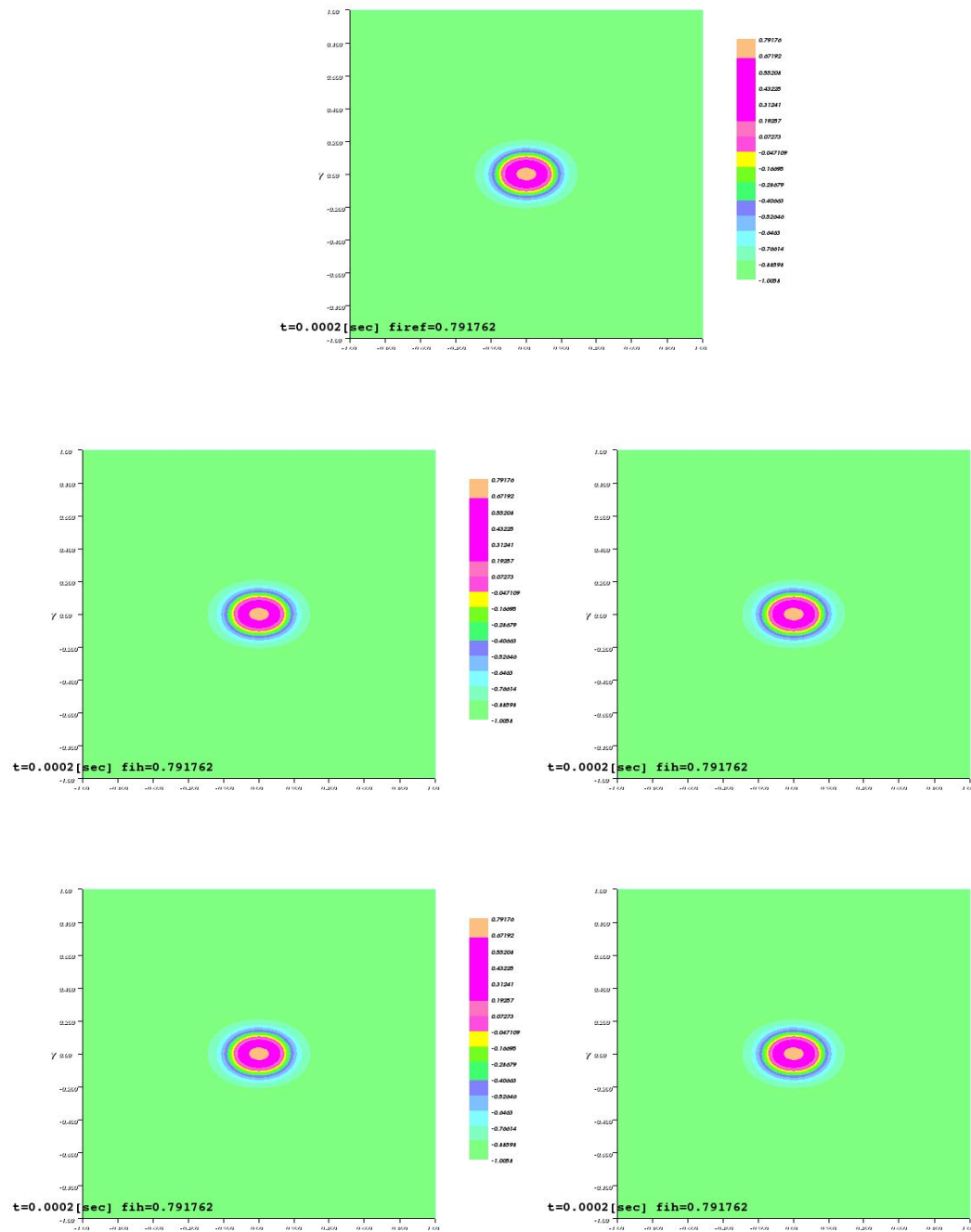


FIGURE 6.15 – La solution  $\phi_h$  ; de haut en bas et de gauche à droite pour : **Algorithme 48** (Référence 1 grille), **Algorithmes 49, 50, 51, 52** à  $t = 0.0002$ .

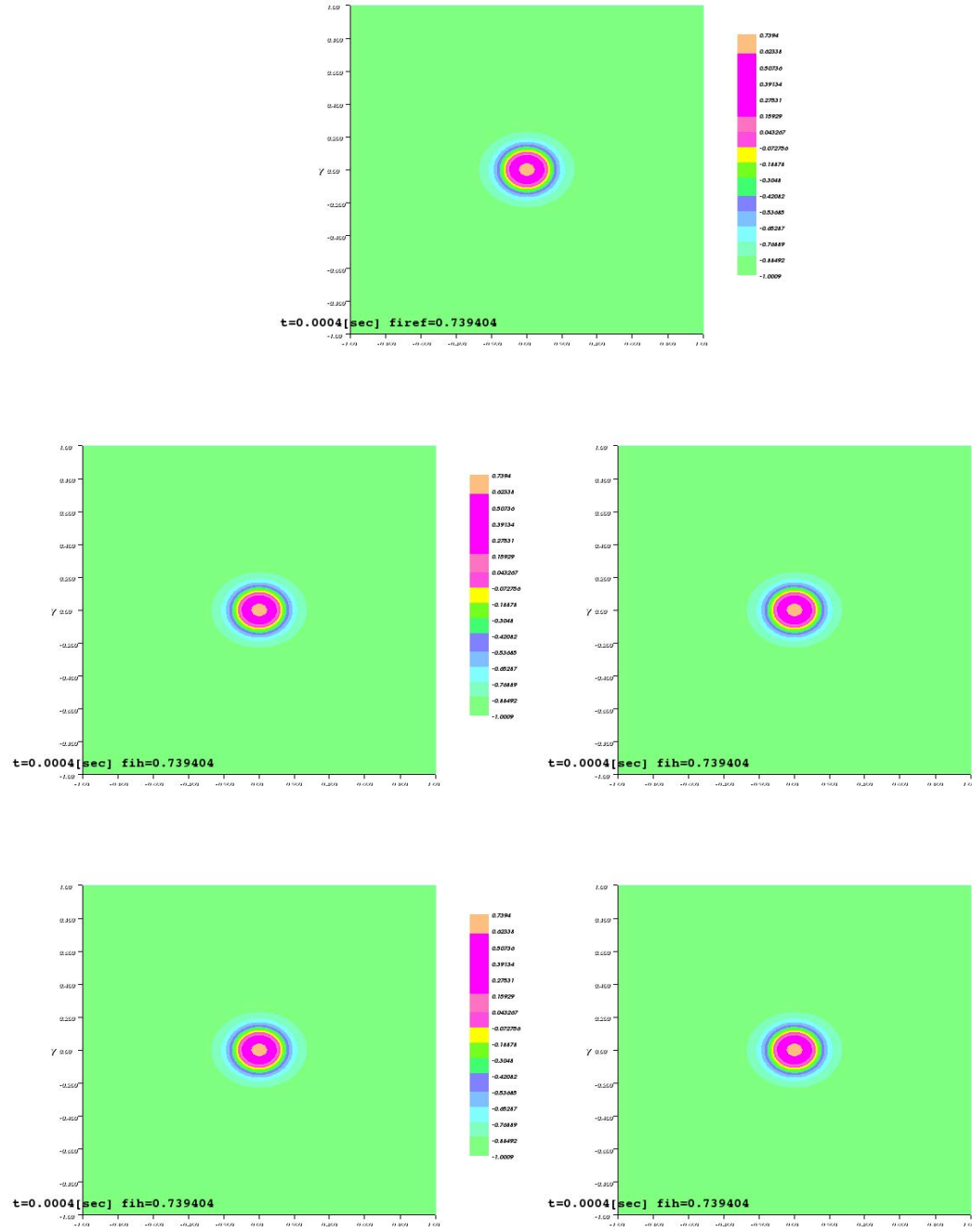


FIGURE 6.16 – La solution  $\phi_h$ ; de haut en bas et de gauche à droite pour : **Algorithme 48** (Référence 1 grille), **Algorithmes 49, 50, 51, 52** à  $t = 0.0004$ .



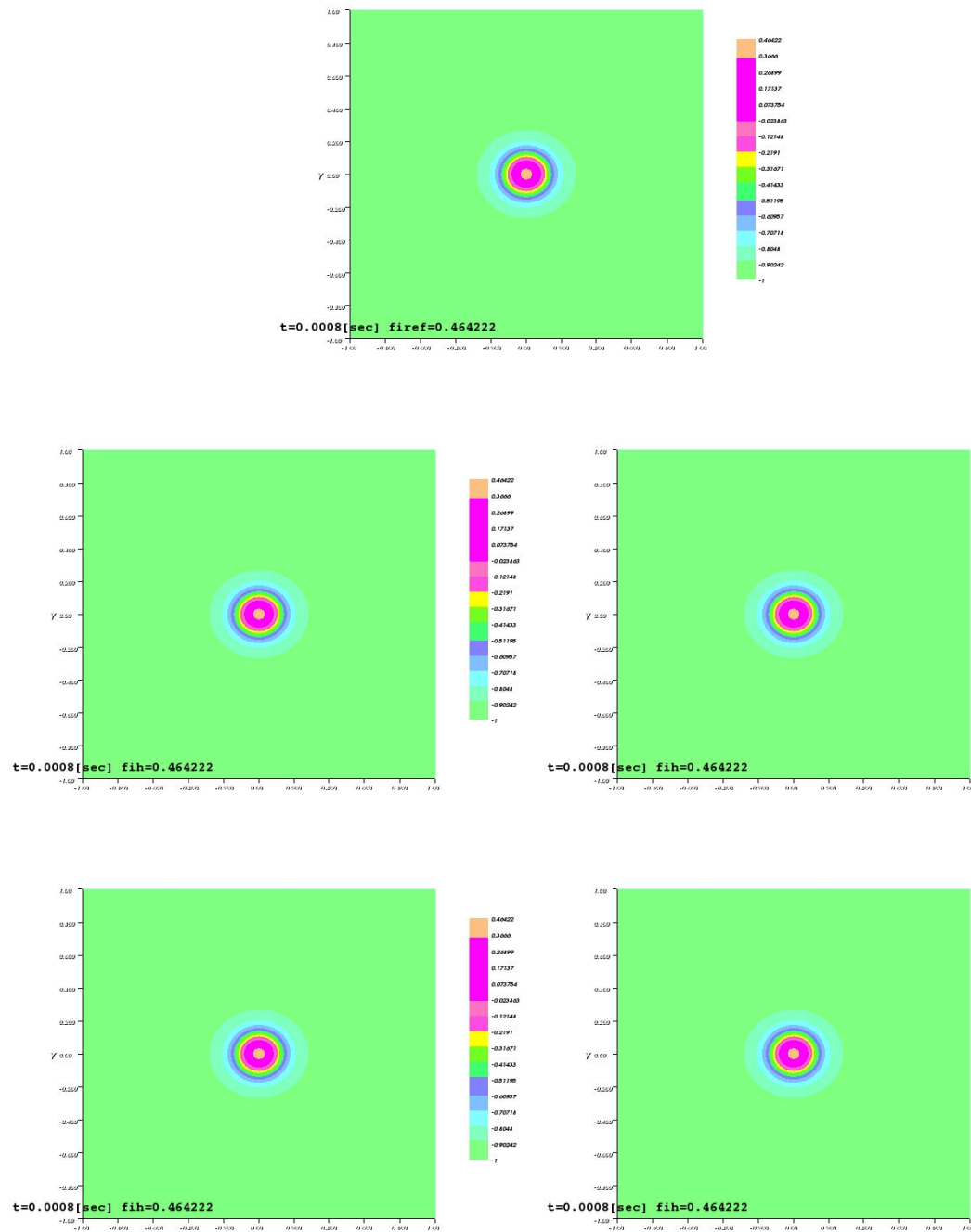


FIGURE 6.17 – La solution  $\phi_h$  ; de haut en bas et de gauche à droite pour : **Algorithme 48** (Référence 1 grille), **Algorithmes 49, 50, 51, 52** à  $t = 0.0008$ .

#### 6.4.2.2 Décomposition de la concentration et de la vitesse

Pour les mêmes paramètres, nous testons les algorithmes de la décomposition non seulement de la vitesse mais aussi de la concentration.

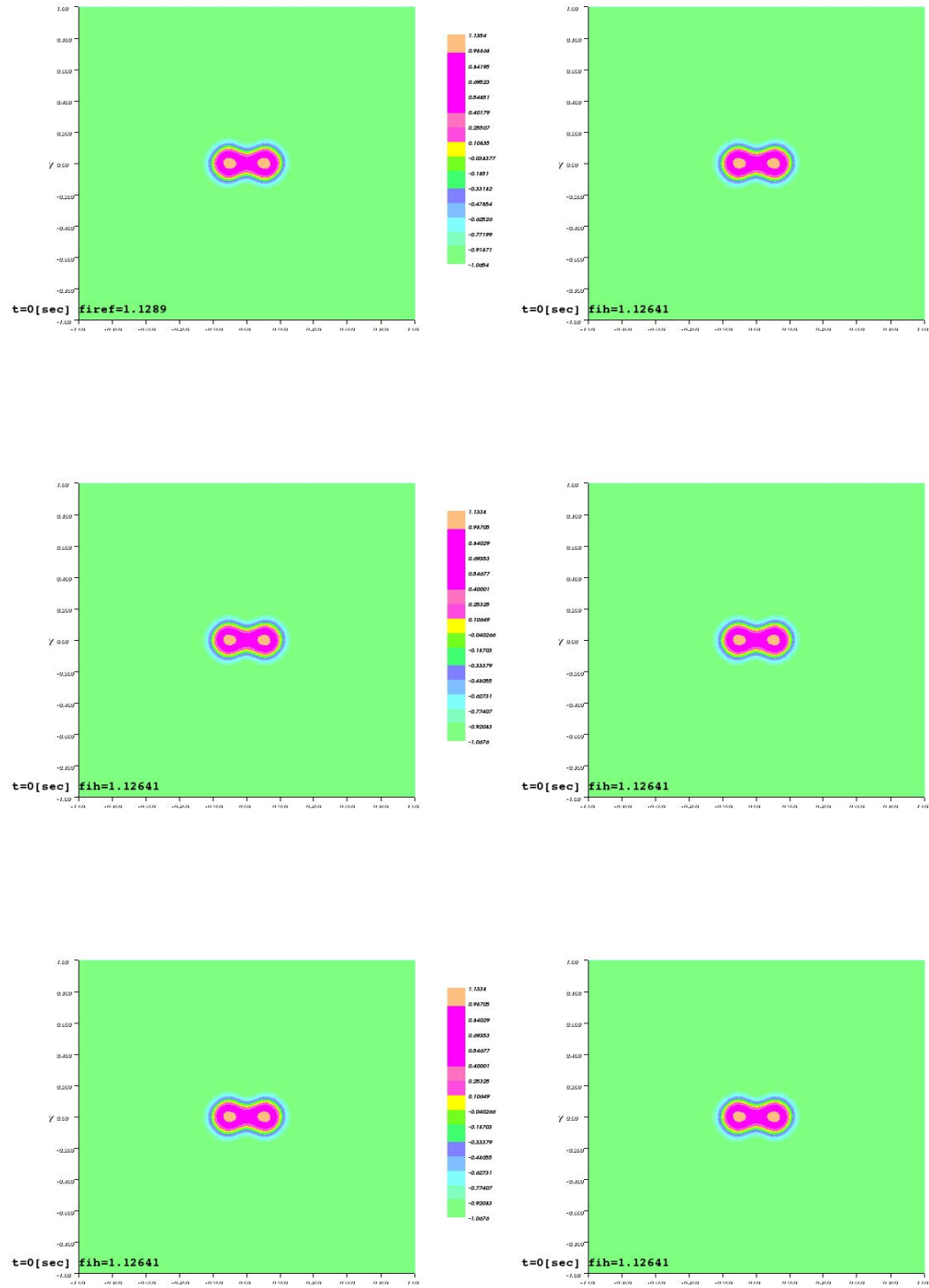


FIGURE 6.18 – La solution  $\phi_h$ ; de haut en bas et de gauche à droite pour : **Algorithme 48** (Référence 1 grille), **Algorithmes 53, 54, 55, 56, 57** à  $t = 0$ .

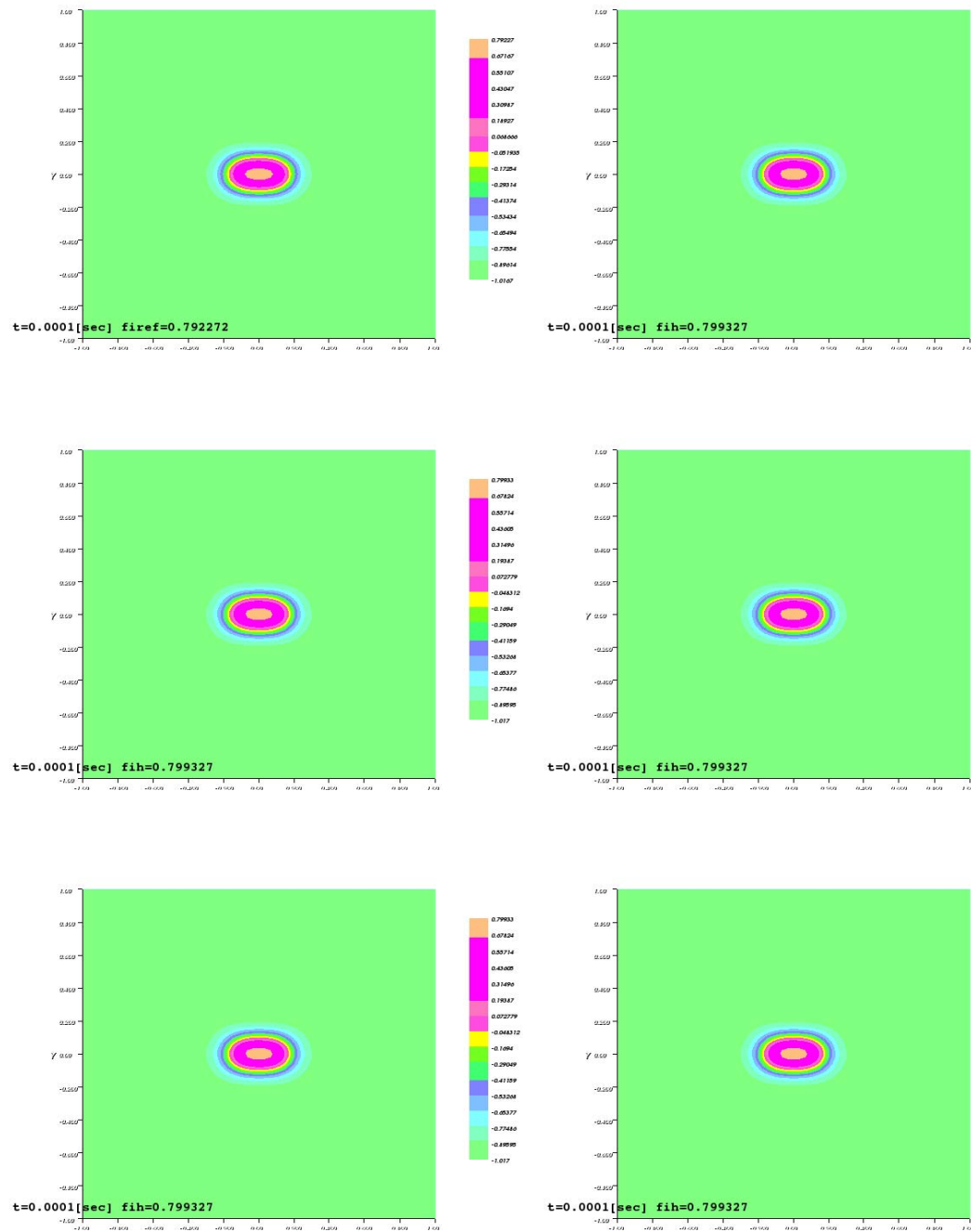


FIGURE 6.19 – La solution  $\phi_h$  ; de haut en bas et de gauche à droite pour : **Algorithme 48** (Référence 1 grille), **Algorithmes 53, 54, 55, 56, 57** à  $t = 0.0001$ .

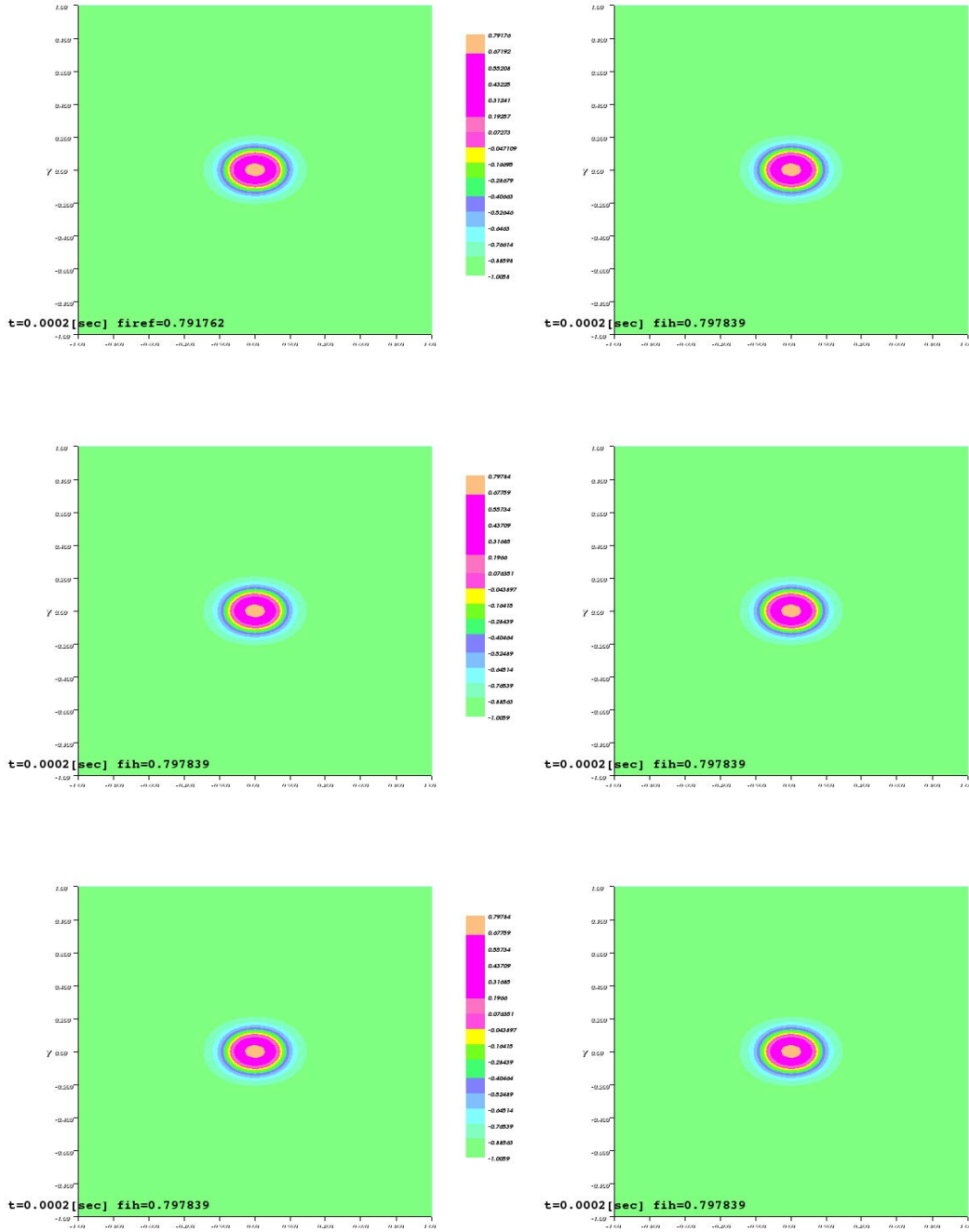


FIGURE 6.20 – La solution  $\phi_h$  ; de haut en bas et de gauche à droite pour : **Algorithme 48** (Référence 1 grille), **Algorithmes 53, 54, 55, 56, 57** à  $t = 0.0002$ .

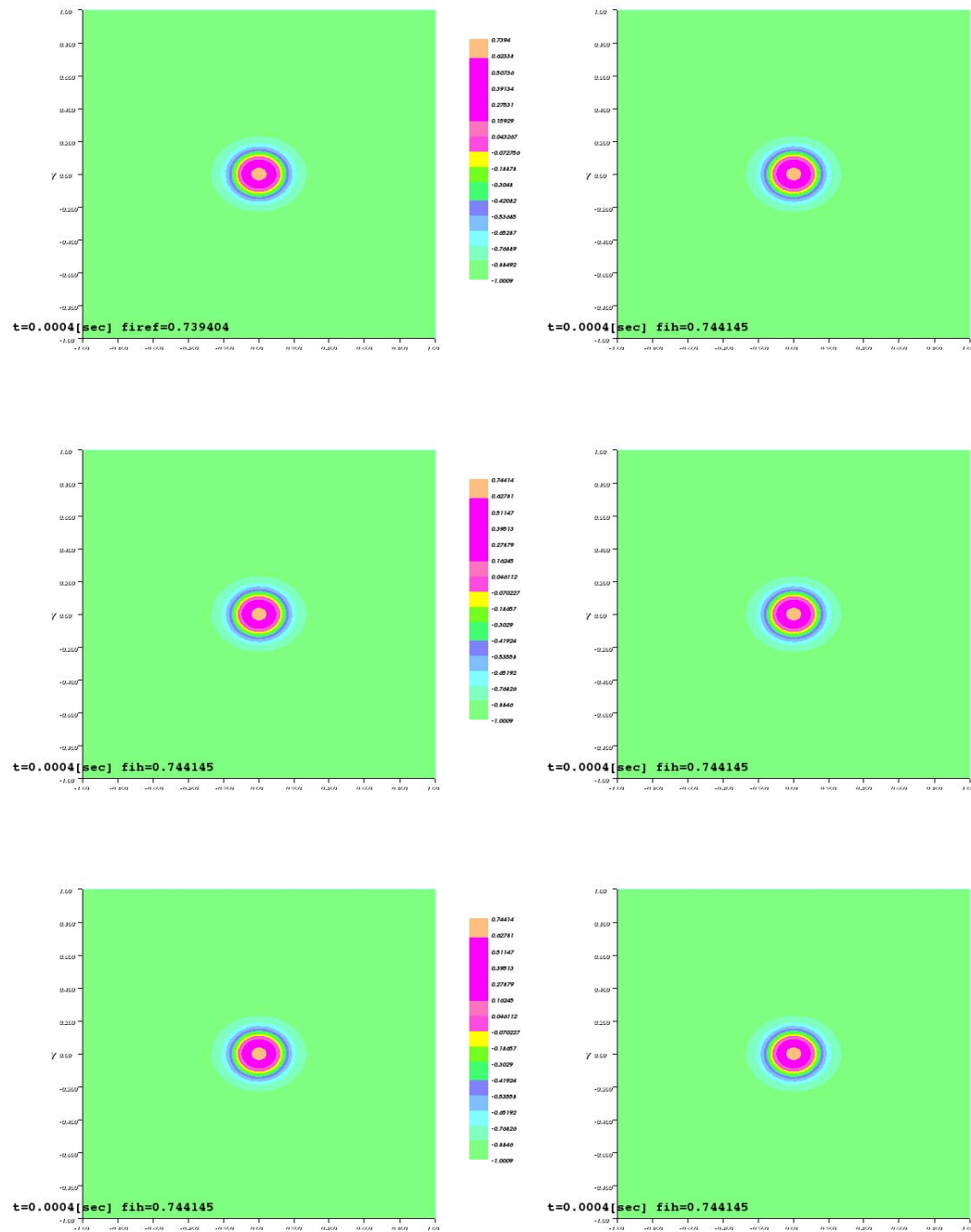


FIGURE 6.21 – La solution  $\phi_h$ ; de haut en bas et de gauche à droite pour : **Algorithme 48** (Référence 1 grille), **Algorithmes 53, 54, 55, 56, 57** à  $t = 0.0004$ .

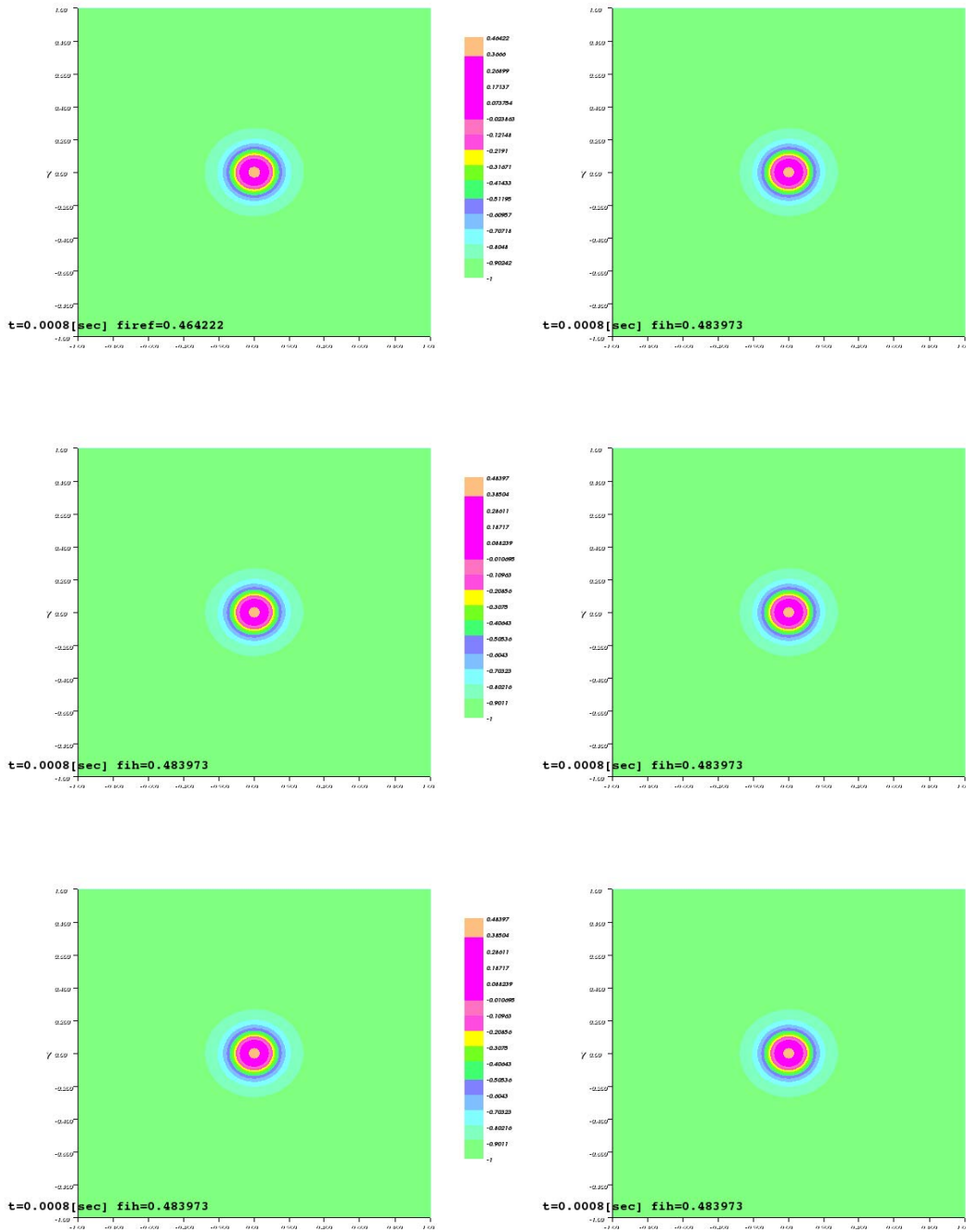


FIGURE 6.22 – La solution  $\phi_h$  ; de haut en bas et de gauche à droite pour : **Algorithme 48** (Référence 1 grille), **Algorithmes 53, 54, 55, 56, 57** à  $t = 0.0008$ .

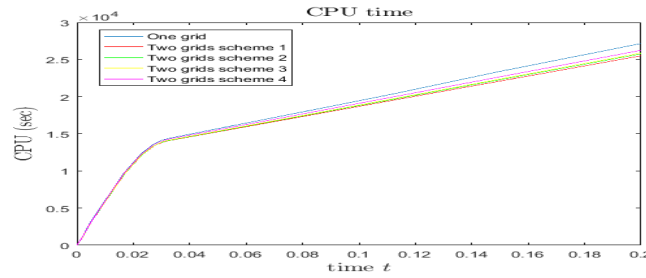
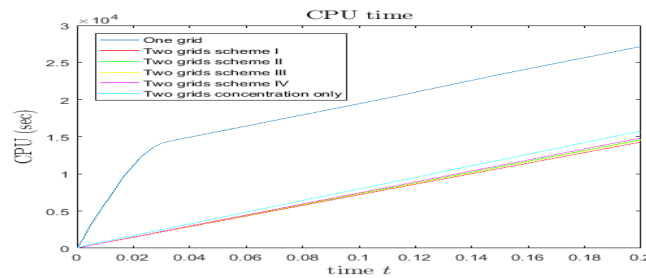
### 6.4.2.3 Comparaison en temps de calcul

Nous représentons le gain en temps de calcul CPU apporté par notre technique bi-grilles. Le schéma implicite (référence) résolu sur une grille fine est comparé aux schémas décomposant la vitesse dans Tab. 6.3 et Fig. 6.23 et aux schémas décomposant la vitesse et la concentration dans Tab. 6.4 et Fig. 6.24.

|                                    |                                 |                                 |                                 |                                 |
|------------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|
| $32 \times 16$ points<br>$T = 0.2$ | <b>Algorithm 49</b><br>schéma 1 | <b>Algorithm 50</b><br>schéma 2 | <b>Algorithm 51</b><br>schéma 3 | <b>Algorithm 52</b><br>schéma 4 |
| $t_{1G}$ (en sec.)                 | 27165.5                         | 27165.5                         | 27165.5                         | 27165.5                         |
| $t_{2G}$ (en sec.)                 | 25515.7                         | 25771.1                         | 25882.5                         | 26252.9                         |
| $\frac{t_{2G}}{t_{1G}}$            | 0.93                            | 0.94                            | 0.95                            | 0.96                            |

 TABLE 6.3 – Séparation d'échelles Cahn-Hilliard/Navier-Stokes deux bulles (bi-grilles vitesse uniquement)  $\mathbb{P}_2/\mathbb{P}_1$ .

|                                    |                     |                                 |                                  |                                   |                                  |
|------------------------------------|---------------------|---------------------------------|----------------------------------|-----------------------------------|----------------------------------|
| $32 \times 16$ points<br>$T = 0.2$ | <b>Algorithm 53</b> | <b>Algorithm 54</b><br>schéma I | <b>Algorithm 55</b><br>schéma II | <b>Algorithm 56</b><br>schéma III | <b>Algorithm 57</b><br>schéma IV |
| $t_{1G}$ (en sec.)                 | 27165.5             | 27165.5                         | 27165.5                          | 27165.5                           | 27165.5                          |
| $t_{2G}$ (en sec.)                 | 15788.9             | 14295.5                         | 14633.1                          | 14545.5                           | 14852.6                          |
| $\frac{t_{2G}}{t_{1G}}$            | 0.58                | 0.52                            | 0.54                             | 0.53                              | 0.54                             |

 TABLE 6.4 – Séparation d'échelles Cahn-Hilliard/Navier-Stokes deux bulles (bi-grilles vitesse et concentration)  $\mathbb{P}_2/\mathbb{P}_1$ .

 FIGURE 6.23 – Comparaison CPU (deux bulles) entre le schéma sur une grille fine et ceux de la méthode de séparation d'échelles (uniquement vitesse) : **Algorithmes 49, 50, 51, 52** avec  $T = 0.2$  et  $N_f = 32, N_c = 16$ .

 FIGURE 6.24 – Comparaison CPU (deux bulles) entre le schéma sur une grille fine et ceux de la méthode de séparation d'échelles (concentration et vitesse) : **Algorithmes 53, 54, 55, 56, 57** avec  $T = 0.2$  et  $N_f = 32, N_c = 16$ .

Nous pouvons déduire que la méthode de séparation d'échelles réduit le temps de calcul CPU de la résolution par un schéma implicite sur une grille fine à sa moitié. Le gain est remarquable pour la décomposition à la fois de la concentration et de la vitesse.

#### 6.4.2.4 Loi sur l'énergie et conservation de la masse

Nous notons la compatibilité des résultats obtenus en adaptant la méthode bi-grilles avec le schéma de référence sur grille fine et celui de Hua [136]. La décroissance de l'énergie du système est représentée dans la Fig. 6.25 pour l'**Algorithme 54** bi-grilles ainsi que celle de l'**Algorithme 48** (Référence 1 grille).

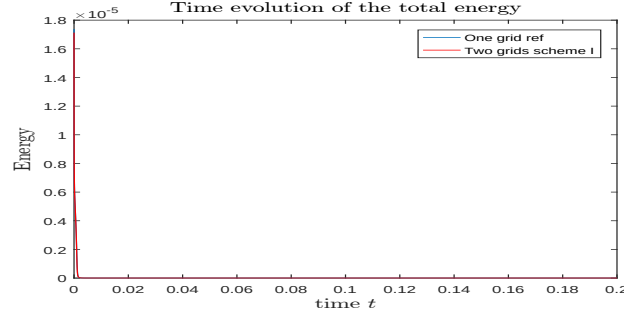


FIGURE 6.25 – Energie vs temps- Comparaison entre l'**Algorithme 48** (Référence 1 grille) et l'**Algorithme 54** pour  $\Delta t = 0.00001$ .

Comme pour le cas d'une bulle rectangulaire, la surface du  $\phi_0$  égal à deux bulles en contact diminue au cours du temps cf. Fig. 6.13-6.22.

Par contre, la conservation de la masse, caractéristique du modèle de Cahn-Hilliard, est garantie. La moyenne spatiale  $\int_{\Omega} \phi$  reste constante au cours du temps et est égale à  $-3.86979$  (cf. Fig. 6.26). Tous les algorithmes bi-grilles présentés dans les sections précédentes vérifient cette propriété. Nous nous limitons à une comparaison entre l'**Algorithme 48** (Référence 1 grille) et l'**Algorithme 54** pour  $\Delta t = 0.00001$ .

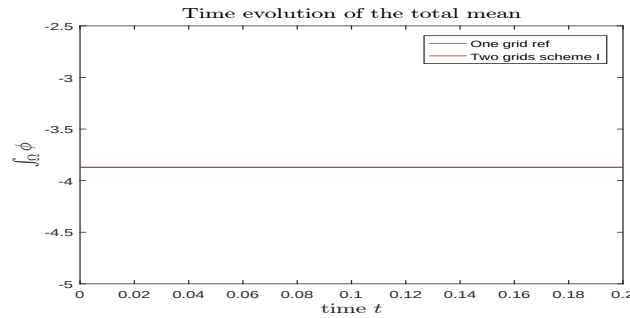


FIGURE 6.26 – Moyenne vs temps- Comparaison entre l'**Algorithme 48** (Référence 1 grille) et l'**Algorithme 54** pour  $\Delta t = 0.00001$ .

## 6.5 Étude de stabilité : comparaison avec un schéma semi-implicite

Notre approche bi-grilles permet de gagner en temps de calcul si nous comparons ce dernier avec celui du schéma implicite sur grille fine. Mais au niveau stabilité notre approche reste limitée face au schéma implicite super stable. Par contre, nos algorithmes bi-grilles sont plus stables en pas



de temps  $\Delta t$  que le schéma semi-implicite conditionné par l'épaisseur de la surface de séparation  $\varepsilon$  pour l'équation de champs de phase (6.4)-(6.5). Nous considérons le schéma suivant

---

**Algorithm 58** CH-NS une grille : Schéma semi-implicite "Ref 2"

---

- 1: **for**  $k = 0, 1, \dots$  **do**
  - 2:   **Trouver**  $(\phi_h^{k+1}, w_h^{k+1})$  **dans**  $X_h \times W_h$
  - 3:  $(\frac{\phi_h^{k+1} - \phi_h^k}{\Delta t}, \psi_h) + \frac{\gamma}{\varepsilon^2}(\nabla(w_h^{k+1} + c\phi_h^{k+1}), \nabla\psi_h) + ((u_h^k \cdot \nabla)\phi_h^k, \psi_h) = 0, \forall \psi_h \in X_h$
  - 4:  $(w_h^{k+1} + c\phi_h^{k+1}, \chi_h) - \varepsilon^2(\nabla\phi_h^{k+1}, \nabla\chi_h) - (\phi_h^k((\phi_h^k)^2 - 1), \chi_h) = 0, \forall \chi_h \in W_h$
  - 5:   **Trouver**  $u_h^{*,k+1}$  **dans**  $Y_h$
  - $$(\frac{u_h^{*,k+1} - u_h^k}{\Delta t}, v_h) + \nu(\nabla u_h^{*,k+1}, \nabla v_h) + ((u_h^k \cdot \nabla)u_h^k, v_h)$$

$$= -\frac{1}{2}(\text{div } u_h^{*,k} u_h^{*,k+1}, v_h) + \frac{\lambda}{\varepsilon^2}((w_h^{k+1} + c\phi_h^{k+1})\nabla\phi_h^{k+1}, v_h), \forall v_h \in Y_h$$
  - 6:   **Trouver**  $p_h^{k+1}$  **dans**  $P_h$   $\Delta t(\text{div } \nabla p_h^{k+1}, \eta_h) = (\text{div } u_h^{*,k+1}, \eta_h), \forall \eta_h \in P_h$
  - 7:   **Trouver**  $u_h^{k+1}$  **dans**  $Y_h$   $(u_h^{k+1} - u_h^{*,k+1} + \Delta t \nabla p_h^{k+1}, v_h) = 0, \forall v_h \in Y_h$
  - 8: **end for**
- 

semi-implicite (explicite en  $\phi_h^k((\phi_h^k)^2 - 1)$  et  $(u^k \cdot \nabla)u^k$ ).

| Schéma                           | $\tau$ | $\Delta t$ | Stable | $\Delta t$ | Stable | $\Delta t$ | Stable |
|----------------------------------|--------|------------|--------|------------|--------|------------|--------|
| <b>Algorithme 54</b><br>schéma I | 0.001  | 0.0001     | oui    | 0.0005     | oui    | 0.0007     | non    |
| <b>Algorithme 58</b><br>Ref 2    |        | 0.0001     | oui    | 0.0005     | non    | 0.0007     | non    |

TABLE 6.5 –  $Re = 10, N_f = 32, N_c = 16, \mathbb{P}_2/\mathbb{P}_1$  éléments (cas d'une bulle rectangulaire)

| Schéma                           | $\tau$ | $\Delta t$ | Stable | $\Delta t$ | Stable | $\Delta t$ | Stable |
|----------------------------------|--------|------------|--------|------------|--------|------------|--------|
| <b>Algorithme 54</b><br>schéma I | 0.001  | 0.0001     | oui    | 0.0005     | oui    | 0.0007     | non    |
| <b>Algorithme 58</b><br>Ref 2    |        | 0.0001     | oui    | 0.0005     | non    | 0.0007     | non    |

TABLE 6.6 –  $Re = 100, N_f = 32, N_c = 16, \mathbb{P}_2/\mathbb{P}_1$  éléments (cas d'une bulle rectangulaire)

| Schéma                           | $\tau$ | $\Delta t$ | Stable | $\Delta t$ | Stable | $\Delta t$ | Stable |
|----------------------------------|--------|------------|--------|------------|--------|------------|--------|
| <b>Algorithme 54</b><br>schéma I | 0.001  | 0.0001     | oui    | 0.0005     | oui    | 0.0007     | non    |
| <b>Algorithme 58</b><br>Ref 2    |        | 0.0001     | oui    | 0.0005     | non    | 0.0007     | non    |

TABLE 6.7 –  $Re = 400, N_f = 32, N_c = 16, \mathbb{P}_2/\mathbb{P}_1$  éléments (cas d'une bulle rectangulaire)

| Schéma                           | $\tau$ | $\Delta t$ | Stable | $\Delta t$ | Stable | $\Delta t$ | Stable |
|----------------------------------|--------|------------|--------|------------|--------|------------|--------|
| <b>Algorithme 54</b><br>schéma I | 0.001  | 0.0001     | oui    | 0.0005     | oui    | 0.0007     | non    |
| <b>Algorithme 58</b><br>Ref 2    |        | 0.0001     | oui    | 0.0005     | non    | 0.0007     | non    |

TABLE 6.8 –  $Re = 1000, N_f = 32, N_c = 16, \mathbb{P}_2/\mathbb{P}_1$  éléments (cas d'une bulle rectangulaire)

## 6.6 Conclusion

Notre technique bi-grilles ne garantit pas seulement une réduction du temps de calcul CPU (50% par rapport au schéma semi-implicite) pour une décomposition en échelles et espaces de la concentration et de la vitesse mais aussi une stabilité en terme de  $\Delta t$  par rapport au schéma semi-implicite ; par notre technique nous pouvons adapter un grand pas de temps  $\Delta t$  et atteindre le temps final fixé  $T$  en moins de temps que le schéma semi-implicite limité par son  $\Delta t$ .



## Conclusion et perspectives



# Conclusion et perspectives

Le cadre numérique proposé ici a permis d'introduire et de développer de nouvelles méthodes bi-grilles pour la simulation des EDP dissipatives, notamment celles de champs de phase (Allen-Cahn et Cahn-Hilliard) de Navier-Stokes incompressibles ainsi que de leurs couplages. Les nouveaux schémas permettent de réduire le temps CPU en concentrant les calculs les plus coûteux sur un sous-espace de petite dimension (espace grossier) tout en conservant la dynamique, particulièrement celle de la convergence vers les états stationnaires (Navier-Stokes) ou les minima locaux de l'énergie (Allen-Cahn, Cahn-Hilliard).

Ces nouvelles méthodes, dont un élément fondamental est la stabilisation des composantes modes élevés, sont simples à mettre en œuvre et en particulier ne nécessitent pas de manier des bases hiérarchiques.

Ces résultats constituent une première étape et établissent la faisabilité de notre approche. Nous pouvons considérer plusieurs développements à mener dans des travaux futurs :

- Le paramètre de stabilisation  $\tau$  est constant.  
Une des idées est de développer des versions adaptatives qui permettent de calculer  $\tau$  de manière optimale à chaque itération, de sorte à minimiser l'erreur. Pour cela, des estimations *a posteriori* pourraient constituer une étape de ce calcul.
- Nous n'avons utilisé que deux grilles, c'est-à-dire deux espaces d'éléments finis  $V_H$  et  $V_h$ . L'extension de l'approche bi-grilles à une méthode multi-grilles, en considérant donc une suite d'espaces d'approximation de dimensions croissantes pourrait être considérée pour pouvoir réduire encore le temps de calcul ; une stratégie multi-grilles en temps telles que celles proposées par exemple dans [77] pourrait constituer une piste à considérer.
- Nous avons étudié les équations de champs de phase avec des conditions aux limites de type Neumann homogènes. Mais des applications de ces équations dans des problèmes de la physique nécessitent de prendre d'autres conditions aux limites, comme dans [62]. La résolution des équations d'Allen-Cahn et de Cahn-Hilliard avec d'autres conditions aux limites paraît envisageable par notre technique bi-grilles.
- Les schémas développés ici s'adressent à des discrétisations par éléments finis, elles pourraient s'adapter aux méthodes de différences finies ou spectrales.



# Index

- Bas modes, 4, 39
- Bases hiérarchiques, 4, 40, 42
- Bercovier-Engelman, 140
- Bulle, 2, 13, 15–17, 37, 156, 165, 174–190, 193, 194, 203, 212, 213, 224–227
- Cauchy-Schwarz, 42
- Cavité entraînée, 10, 17, 93, 104, 120, 132
- Champs de phase, 1–3, 16, 21, 22, 31, 37, 49, 156, 194, 195, 226
- Chorin-Temam, 98–100, 102, 104, 156, 157, 195
- Condition aux limites de Dirichlet, 4
- Condition d’incompressibilité, 3, 98, 156, 194
- Conjecture de Giorgi, 28
- Conservation de la masse, 1, 4, 15, 17, 27, 37, 70, 88, 213, 225
- Contre tourbillon, 121–124, 133, 134
- Correction de pression, 93, 98
- Couplage, 1, 3, 6, 11, 13, 17, 27
- CPU, 4, 6, 8, 10, 12, 13, 15, 16, 40, 50, 51, 53, 54, 59, 60, 66, 67, 72, 85, 87, 88, 94, 124, 125, 134, 136, 173, 174, 186–188, 190, 191, 194, 211, 212, 223, 224, 227
- Crank-Nicholson, 33
- Densité, 3, 11, 22, 37, 156, 175, 194
- Dirichlet, 23, 26, 28, 29, 104
- Divergence nulle, 9, 98, 100, 102, 193, 196
- Double puits, 24, 70, 156
- Equation d’Allen-Cahn, 1, 5, 7, 16, 22, 24, 29, 33, 35, 45, 46, 50, 51, 56–58, 65, 69, 70, 72, 156–158, 188
- Equation de Cahn-Hilliard, 2, 4, 7, 16, 17, 25–28, 34, 36, 69, 70, 74–77, 87, 88, 194–196
- Equation de la chaleur, 16, 46
- Equation de Navier-Stokes, 1, 3–6, 9, 11, 16, 17, 37, 40, 41, 60, 88, 96, 97, 99, 101, 103, 104, 121–126, 133–136, 138–140, 156, 158, 188, 194, 196
- Equation de réaction-diffusion, 2, 5, 23, 30, 36, 40, 94, 96
- Existence, 16, 27–29
- Flot de gradient, 2, 22, 24, 26, 50
- Fonction de Lyapunov de l’énergie, 24
- Force de flottabilité, 3, 11, 156, 175, 194
- Galerkin, 27, 35, 41, 60, 95
- Gomez-Hughes, 35
- Gravité, 3, 156, 194
- Hölder, 49, 63
- Hautes fréquences, 6, 9, 39–41, 46, 60, 69, 100, 102, 158, 193
- Incompressible, 97, 98
- Interface, 1–3, 21–24, 28, 36, 37, 155, 156, 194
- Lemaréchal, 6, 53–56, 72–74
- Méthode bi-grilles, 40, 41, 58–60, 63, 64, 66, 69, 85, 94, 136, 194, 212, 225
- Mobilité, 1, 26, 50
- Moyenne spatiale, 8, 15, 27, 70, 74, 84, 88, 213, 225
- Neumann, 24, 29, 36, 45, 50, 70
- Nombre de Reynolds, 11, 105, 109, 113, 116, 120, 122, 127, 129, 131, 189, 203
- Picard, 6, 52–56, 72–74
- Poincaré, 49
- Point fixe, 6, 7, 31, 52, 54, 71, 72
- Potentiel Ginzburg-Landau, 24
- Principe du maximum, 29, 36, 50
- Projection incrémentale, 17, 100, 139
- Projection non incrémentale, 99, 136
- Prolongation, 41, 42, 46, 56, 58, 60, 62, 68, 76, 95



Quantité de mouvement, 3, 156, 194

Régularité, 16, 29–31

Séparation d'échelles, 59, 93, 116, 124, 125, 134,  
136, 141–150, 156, 158, 174, 187, 188,  
191, 193, 196, 212, 224

Séparation de phase, 1, 2, 26, 28, 50, 70

Stabilisation, 5–7, 16, 32, 35, 36, 39, 41, 46, 47,  
51, 58, 59, 61, 63–66, 69, 71, 76, 80–84,  
88, 94, 95, 101, 102, 138, 140, 157, 158,  
193, 196

Stabilité, 4, 6, 10, 16, 17, 31, 32, 34, 35, 40, 41,  
47, 50, 51, 56, 63, 72, 76, 94, 105, 127,  
136, 138, 140, 156, 157, 188, 189, 191,  
195, 225, 227

Taylor-Hood, 104

Tourbillon principal, 121–124, 133, 134

Transition de phase, 1, 23, 24, 28, 50

Young, 63

# Bibliographie

- [1] H. Abboud, C. Alkousseifi and J-P. Chehab. *A stabilized bi-grid method for Allen-Cahn equation in Finite Elements*. accepted to be published in Computational and Applied Mathematics (2018).
- [2] H. Abboud, C. Alkousseifi and J-P. Chehab. *Stabilized bi-grid projection methods in Finite Elements for the 2D incompressible Navier-Stokes*. AIMS Mathematics, 3(4) :485-513 2018,doi : 10.3934/Math.2018.4.485, [http ://www.aimspress.com/article/10.3934/Math.2018.4.485/pdf](http://www.aimspress.com/article/10.3934/Math.2018.4.485/pdf)
- [3] H. Abboud, V. Girault and T. Sayah. *A second order accuracy for a full discretized time-dependent Navier-Stokes equations by a two-grid scheme*. Numer. Math. DOI 10.1007/s00211-009-0251-5.
- [4] H. Abboud and T. Sayah. *Upwind discretisation of a time-dependent two dimensional grade-two fluid model*. Computers and Mathematics with Applications, 57 (2009), pp. 1249-1264.
- [5] H. Abboud and T. Sayah. *A full discretisation of a time-dependent two dimensional Navier-Stokes equations by a two-grid scheme*. M2AN Math. Model. Numer. Anal., Vol 42, N 1 (2008), pp. 141-174.
- [6] M. Abounouh, H. Al Moatassime, J-P. Chehab, S. Dumont, O. Goubet. *Discrete schrodinger equations and dissipative dynamical systems*. AIMS' Journals, Volume 7, Number 2 (2008), pp. 211-227.
- [7] S.M. Allen, J.W. Cahn. *A microscopic theory for antiphase boundary motion and its application to antiphase domain coarsening*. Acta Met. 27 (6) : 1085-1095, (1979).
- [8] S.M. Allen, J.W. Cahn. *A Correction to the Ground State of FCC Binary Ordered Alloys with First and Second Neighbor Pairwise Interactions*. Scripta Met. 7, 1261 (1973).
- [9] S.M. Allen, J.W. Cahn. *Ground State Structures in Ordered Binary Alloys with Second Neighbor Interactions*. Acta Met. 20, 423 (1972).
- [10] F.O. Alpak, B. Riviere and F. Frank. *A phase field method for the direct simulation of two-phase flows in pore-scale media using a non-equilibrium wetting boundary condition*. Comput Geosci, 20 : 881-908, 2016.
- [11] D.M. Anderson, G.B. McFadden, A.A. Wheeler, *Diffuse-interface methods in fluid mechanics*. Annu. Rev. Fluid Mech. 30(1998), 139-165.
- [12] M.V.S. Annaland, N.G. Deen and J.A.M. Kuipers. *Multi-level modelling of dispersed gas-liquid two-phase flows*. Heat and Mass Transfer (Springer Verlag).ed./ M. Sommerfield. Heidelberg : Springer Verlag, 2003. p. 139-157 (Heat and mass transfer).
- [13] A. Armanini, H. Capart, L. Fraccarollo and M. Larcher. *Rheological stratification in experimental free-surface flows of granular-liquid mixtures*. J. Fluid Mech. vol. 532, pp. 269-319, 2005.

- [14] F. Bai, C.M. Elliot, A. Gardinger, A. Spince and A.M Stuart. *The viscous Cahn-Hilliard equation*. I. Computations. Nonlinearity, 8(2) : 131-160, 1995.
- [15] R. E. Bank, J. Xu. *An Algorithm for Coarsening Unstructured Meshes*. Numerische Mathematik 73 (1996), 1–36.
- [16] S. Bartels. *Numerical Methods for Nonlinear Partial Differential Equations*. Springer Series in Computational Mathematics 47, 015
- [17] A. Baskaran, Z. Hu, J.S. Lowengrub, C. Wang, S.M. Wise and P. Zhou. *Energy stable and efficient finite-difference nonlinear multigrid schemes for the modified phase field crystal equation*. J. Comput. Physics, 250 (2013), 270-292.
- [18] A. Baskaran, J.S. Lowengrub, C. Wang and S.M. Wise. *Convergence analysis of a second order convex splitting scheme for the modified phase field crystal equation*. SIAM J. Numer. Anal., 51 (2013), 2851-2873.
- [19] M. Bercovier and M. Engelman. *A finite element for the numerical solution of viscous incompressible flows* Journal of Computational Physics, 30(2) :181 ?201, 1979.
- [20] A. Bertozzi, S. Esedoglu and A. Gillette. Analysis of a two-scale Cahn-Hilliard model for binary image inpainting. Multiscale Model. Simul 6(2007), 913-936.
- [21] A. Bertozzi, S. Esedoglu and A. Gillette. *Inpainting of binary images using the Cahn-Hilliard equation*. IEEE Trans. Image Proc. (2007), 285-291.
- [22] G. Birkhoff. *Hydrodynamics*. Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1960.
- [23] T. Bonometti and J. Magnaudet. *An interface-capturing method for incompressible two-phase flows. Validation and application to bubble dynamics*. Int. J. Multiph. Flow 33, 109-133 (2007).
- [24] F. Bouchon and F. Jaubertau. *A multi-level method applied in the nonhomogeneous direction of the channel flow problem*. Int. J. Num. Meth. Fluids, 27 : 241-258, 1998.
- [25] A. Bousquet, M. Marion, M. Petcu and R. Temam *Multilevel finite volume methods and boundary conditions for geophysical flows*. Computers and Fluids, 74, 2013, 66-90.
- [26] F. Boyer, C. Lapuerta, S. Minjeaud, B. Piar and M. Quintard. *Cahn-Hilliard/Navier-Stokes model for the simulation of three-phase flows*. Transp. Porous Media, 82(3) : 463-483, 2010.
- [27] M. Brachet, J.-P. Chehab. *Stabilized Times Schemes for High Accurate Finite Differences Solutions of Nonlinear Parabolic Equations*. Journal of Scientific Computing, 69 (3), 946-982, 2016.
- [28] C. Brezinski and J-P. Chehab. *Nonlinear hybrid procedures and fixed point iterations*. Num. Funct. Anal. Opti. 19 (1998), 465-487.
- [29] C. Brezinski, M. Redivo Zaglia. *Hybrid procedures for solving linear systems*. Numer. Math., 67 (1994), 1-19.
- [30] F. Brezzi, J. Pitkaranta, *On the Stabilized Finite Elements Aproximation of the Stokes Equation* , in Efficient Solution of Elliptic Problems Proceedings of a GAMM-Seminar, Kiel (1984), pp 11–19, W. Hackbusch Ed.
- [31] C.H. Bruneau and C. Jouron. *An efficient scheme for solving steady incompressible Navier-Stokes equations*. J Comput Phys 89, 389-413, 1990.
- [32] M. Burger, L. He and C.-B. Schölieb. *Cahn-Hillard inpainting and a generalization for grayvalue images*. SIAM J.Imag. Sci 3 (2009), 1129-1167.
- [33] J.W. Cahn. *On spinodal decomposition*. Acta Metall. 9 (1961), 795-801.

- 
- [34] J.W. Cahn and J.E. Hilliard. *Free energy of a nonuniform system I. Interfacial free energy*. J. Chem. Phys. 28 (1958), 258-267.
- [35] C. Calgaro, J.-P. Chehab, J. Laminie and E. Zahrouni. *Séparation des échelles et schémas multiniveaux pour les équations d'ondes non-linéaires*. ESAIM : Proceedings, May 2009, Vol. 27, p. 180-208.
- [36] C. Calgaro, A. Debussche and J. Laminie. *On a multi-level approach for the two dimensional navier-stokes equations with finite elements*. Int. J. Num. Meth. Fluids, 27 : (1998), 241-258.
- [37] C. Calgaro, J. Laminie and R. Temam. *Dynamical multilevel schemes for the simulation of evolution equations by hierarchical finite element discretization*. Appl. Num. Math., 23 : (1997), 403-442.
- [38] A. Cartalade, A. Younsi, E. Régnier and S. Schuller. *Simulations of phase-field models for crystal growth and phase separation*. Procedia Materials Science 7 (2014) 72-78, doi : 10.1016/j.mspro.2014.10.010.
- [39] N. Chafee and E.F. Infante. *A bifurcation problem for a nonlinear partial differential equation of parabolic type*. Applicable Annal., 4 :17-37, 1974/75.
- [40] J. Chahed, V. Roig and L. Masbernat. *Eulerian-Eulerian two-fluid model for turbulent gas-liquid bubbly flows*. International Journal of Multiphase Flow, 29 : 23-49, 2003.
- [41] V. Chalupecki. *Numerical studies of Cahn-Hilliard equations and applications in image processing*. Proceedings of Gzech-Japanese Seminar in Applied Mathematics, 4-7 August, 2004, Czech Technical University in Prague, 2004.
- [42] J.-P. Chehab, B. Costa. *Multiparameter schemes for evolutive PDEs*. Numerical Algorithms, 34 (2003), 245-257.
- [43] J.-P. Chehab, B. Costa. *Time explicit schemes and spatial finite differences splittings*. Journal of Scientific Computing, 20, 2 (2004), pp 159-189.
- [44] J.-P. Chehab, A.A. Franco and Y. Mammeri. *Boundary control of the number of interfaces for the one-dimensional Allen-Cahn equation*. Discrete and Continuous Dynamical Systems-Series S, 10 (1)(2017) 87.
- [45] J.-P. Chehab, A.A. Franco and Y. Mammeri. *A simple mathematical approach to optimize the structure of reaction-diffusion physicochemical systems (2013)*, 16 pages. <http://arxiv.org/abs/1401.0127>.
- [46] L.Q. Chen. *Phase-field models for microstructure evolution*. Annual Review of Material Research, 32 : 113, 2002.
- [47] L.Q. Chen, D.N. Fan and V. Tikare. *A Phase-Field Model for Grain Growth*. SAND 99-0076 C (1998).
- [48] L.Q. Chen and J. Shen. *Applications of semi-implicit Fourier-spectral method to phase-field equations*. Comput. Phys. Comm., 108 : 147-158, 1998.
- [49] L. Cherfils, H. Fakhir and A. Miranville. *A Complex Version of the Cahn-Hilliard Equation for Grayscale Image Inpainting*. Multiscale Model. Simul., 15(1), 575-605.
- [50] L. Cherfils, H. Fakhir and A. Miranville. *A Cahn-Hilliard system with a fidelity term for color image inpainting*. J. Math. Imag 54 (2016) 1 : 117-131.
- [51] L. Cherfils, H. Fakhir and A. Miranville. *Finite-dimensional attractors for the Bertozzi-Esedoglu-Gillette-Cahn-Hilliard equation in image inpainting*. Inv. Prob. Imag. 9 (2015), 105-125.

- [52] L. Cherfils, H. Fakhir and A. Miranville. *On the Bertozzi-Esedoglu-Gillette-Cahn-Hilliard equation with logarithmic nonlinear terms*. SIAM J. Imag. Sci 8 (2015), 1123-1140.
- [53] L. Cherfils and S. Gatti. *Robust family of exponential attractors for isotropic crystal models*. Math. Meth. Appl. Sci. 2016, 39 1705-1729.
- [54] L. Cherfils, S. Gatti and A. Miranville. *Asymptotic behavior of higher-order Navier-Stokes-Cahn-Hilliard systems*. Math Meth Appl Sci. 2018 ;1-19.
- [55] L. Cherfils, S. Gatti and A. Miranville. *A Variational Approach to a Cahn-Hilliard Model in a Domain with Nonpermeable Walls*. J. Math. Sci, Vol. 189, No. 4, 2013.
- [56] L. Cherfils, A. Miranville and S. Peng. *Higher-order anisotropic models in phase separation*. Adv. Nonlinear Anal. 2017 ; aop.
- [57] L. Cherfils, A. Miranville and S. Peng. *Higher-order models in phase separation*. J. Appl. Anal. and Comput. 7(1), 2017, 39-56.
- [58] L. Cherfils, A. Miranville and S. Peng. *Higher-Order Allen-Cahn Models with Logarithmic Nonlinear Terms*. Chapter from book Advances in Dynamical Systems and Control(pp.247-263).
- [59] L. Cherfils, A. Miranville, S. Peng and W. Zhang. *Higher-order generalized Cahn-Hilliard equations*. Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations (2017), No. 9 , 1-22 ; doi :10.14232/ejqtde.2017.1.9
- [60] L. Cherfils, A. Miranville and S. Zelik. *On a generalized Cahn-Hilliard equation with biological applications*. Discrete Cont. Dyn. Systems B 19(2014), 2013-2026.
- [61] L. Cherfils, A. Miranville and S. Zelik. *The Cahn-Hilliard equation with logarithmic potentials* . Milan J. Math. 79(2011), 561-596.
- [62] L. Cherfils and M. Petcu. *On the viscous Cahn-Hilliard-Navier-Stokes equations with dynamic boundary conditions*. Communications on Pure and Applied Analysis, 2016, 15 (4) : 1419-1449. doi : 10.3934/cpaa.2016.15.1419.
- [63] L. Cherfils and M. Petcu. *A numerical analysis of the Cahn-Hilliard equation with non-permeable walls*. Numer. Math. DOI 10.1007/s00211-014-0618-0.
- [64] L. Cherfils, M. Petcu and M. Pierre *A numerical analysis of the Cahn-Hilliard equation with dynamic boundary conditions*. Discrete Cont. Dyn. Systems 27(4) : 1511-1533, 2010 doi :10.3934/dcds.2010.27.1511.
- [65] A.J. Chorin. *Numerical solution of the Navier-Stokes equations*. Math. Comput. 22, 745-762, 1968.
- [66] D. Cohen, J.M. Murray. *A generalized diffusion model for growth and dispersion in a population*. J. Math. Biol. 12 (1981), 237-248.
- [67] N. Condette, C. Melcher and E. Suli. *Spectral approximation of pattern-forming nonlinear evolution equations with double-well potentials of quadratic growth*. Mathematics of Computation., Vol. 80, No. 273, p. 205-223.
- [68] B. Costa, L. Dettori, D. Gottlieb and R. Temam *Time marching techniques for the nonlinear Galerkin method*. SIAM J. SC. comp., 23, (2001), 1, 46-65.
- [69] J.W. Costerton. *Overview of microbial biofilms*. J. Ind. Microbiol. (1995), 15 (3) : 137-140.
- [70] J.W. Costerton and M. Wilson. *Introducing biofilms*. Biofilms (2004), 1 (1) : 1-4.
- [71] A. Debussche, J. Laminie and E. Zahrouni. *A dynamical multilevel scheme for the burgers equation : wavelet and hierarchical finite element*. J. Sc. Comput., 25(3) : 445-497, 2005.

- 
- [72] E. Delnoij, F.A. Lammers, J.A.M. Kuipers and W.P.M.V. Swaaij. *Dynamic simulation of dispersed gas-liquid two-phase flow using a discrete bubble model*. Chemical Engineering Science, Vol 52, No. 9, pp. 1429-1458, 1997.
  - [73] A.E. Diegel, X.H. Feng, A.S.M. Wise. *Analysis of a mixed finite element method for a Cahn-Hilliard-Darcy-Stokes system*. SIAM J. Numer. Anal. 53(1), pp. 127-152.
  - [74] I.C. Dolcetta, S.F. Vita and R. March. *Area-preserving curve-shortening flows : From phase separation to image processing*. Interfaces Free Bound. 4 (2002), 325-343.
  - [75] Q. Du, C. Liu and X. Wang, *Simulating the deformation of vesicle membranes under elastic bending energy in three dimensions*. J. Comput. Phys., 212 : 757-777, 2005.
  - [76] Q. Du and R.A. Nicolaides, *Numerical analysis of a continuum model of phase transition*. SIAM J. Numer. Anal., 28(5) : 1310-1322, 1991.
  - [77] T. Dubois, F. Jauberteau and R. Temam. *Dynamic multilevel methods and the numerical simulation of turbulence*. Cambridge University Press 1998.
  - [78] T. Dubois, F. Jauberteau, R. Temam, *Dynamic multilevel methods and the numerical simulation of homogeneous and non homogeneous turbulence*, Cambridge Academic Press.
  - [79] T. Dubois, F. Jauberteau and R. Temam. *Incremental unknowns, multilevel methods and the numerical simulation of turbulence*. Comp. Meth. in Appl. Mech. and Engrg. (CMAME), Elsevier Science Publishers (North-Holland).
  - [80] T. Dubois, F. Jauberteau, R. Temam, J. Tribbia, *Multilevel schemes for the shallow water equations* J. Computational Physics, 207, 2, 660-694 (2005)
  - [81] K. Ekambara, R. Sean Sanders, K. Nandakumar and J.H. Masliyah. *CFD modeling of gas-liquid bubbly ow in horizontal pipes : Influence of bubble coalescence and breakup*. International Journal of Chemical Engineering, vol. 2012, Article ID 620463, 20 pages, 2012. doi :10.1155/2012/620463.
  - [82] K.R. Elder and M. Grant. *Modeling elastic and plastic deformations in nonequilibrium processing using phase field crystal*. Phys. Rev. E, 90 (2004), 051605.
  - [83] K.R. Elder, M. Katakowski, M. Haataja and M. Grant. *Modeling elasticity in crystal growth*. Phys. Rev. Lett., 88 (2002), 245701.
  - [84] C.M. Elliott. *The Cahn-Hilliard Model for the Kinetics of Phase Separation*. Mathematical Models for Phase Change Problems, International Series of Numerical Mathematics, Vol. 88,(1989) Birkhauser.
  - [85] C.M. Elliott, D.A. French and F.A. Milner. *A second order splitting method for the Cahn-Hilliard equation*. Numer. Math. 54, 575-590 (1989).
  - [86] H. Emmerich, L. Gránásy and H. Löwen. *Selected issues of phase-field crystal simulations*. Eur. Phys. J. Plus, 126 (2011), 102.
  - [87] H. Emmerich, H. Löwen, R. Wittkowskib, T. Gruhna, G.I. Tóth, G. Tegze and L. Gránásy. *Phase field-crystal models for condensed matter dynamics on atomic length and diffusive time scales : an overview*. Adv. Phys.,61 (2012), 665-743.
  - [88] H. Emmerich. *The Diffuse Interface Approach in Materials Science Thermodynamic. Concepts and Applications of Phase-Field Models*. Lecture Notes in Physics Monographs, Springer, Heidelberg, 2003.
  - [89] A. Ern, J.-L. Guermond. *Theory and Practice of Finite Elements*. Applied Mathematical Science, 159, Springer-Verlag, New-York, 2004.
  - [90] D.J. Eyre. [http ://www.math.utah.edu/~eyre/research/methods/stable.ps](http://www.math.utah.edu/~eyre/research/methods/stable.ps).

- [91] D.J. Eyre. *Computational and mathematical models of microstructural evolution*. Materials Research Society : Symposium Proceedings, Vol. 529, Warrendale, 1998.
- [92] H. Fakhir. *A Cahn-Hilliard equation with a proliferation term for biological and chemical applications*. Asymptotic Analysis 94 (2015), 71-104.
- [93] H. Fakhir, A. Miranville and L. Cherfils. *Finite-dimensional attractors for the Bertozzi-Esedoglu-Gillette-Cahn-Hilliard equation in image inpainting*. HAL Id : hal-00849773 (2013).
- [94] A. Farina. *Some remarks on a conjecture of De Giorgi*. Calc. Var. Partial Differential Equations, 8(3) :233-245, 1999.
- [95] A. Farina and E. Valdinoci. *The state of the art for a conjecture of De Giorgi and related problems*. In Recent progress on reaction-diffusion systems and viscosity solutions, pages 74-96. World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2009.
- [96] S. Faure, J. Laminie and R. Temam. *Finite volume discretization and multilevel methods in flow problems*. J. Sci. Comp., Vol. 25, Nos. 112, November 2005.
- [97] X. Feng and A. Prohl. *Error analysis of a mixed finite element method for the Cahn-Hilliard equation*. Numer. Math., 99(1) : 47-84, 2004.
- [98] X. Feng and A. Prohl. *Numerical analysis of the Allen-Cahn equation and approximation for mean curvature flows*. Numer. Math., 94(1) : 33-65, 2003.
- [99] F. Fichot, P. Meekunnsombath, J. Belloni, F. Duval, A. Gracia and M. Quintard. *Two-phase flows in porous media : Prediction of pressure drops using a diffuse interface mathematical description*. Nuclear Engineering and Design. 237, 1887-1898, 2007.
- [100] R.A. Fisher. *The advance of advantageous genes*. Ann. of Eugenics, 7 (355-369), 1937.
- [101] A.A. Franco. *Multiscale computational modeling of rechargeable batteries*. Cours de Master 2 AAM, Amiens-France (2017).
- [102] A.A. Franco, M.L. Doublet and W.G. Bessler. *Physical Multiscale Modeling and Numerical Simulation of Electrochemical Devices for Energy Conversion and Storage. From Theory to Engineering to Practice*. Springer London 2016.
- [103] FreeFem++ page. [http : //www.freefem.org](http://www.freefem.org).
- [104] C. Foias, O. Manley and R. Temam. *Modelling of the interaction of small and large eddies in two dimensional turbulent flows*. Math. Mod. and Num. Anal., Vol. 22, No. 1, p. 93-114.
- [105] L.B. Fore and A.E. Dukler. *Droplet deposition and momentum transfer in annular flow*. AIChEJ., 41(9), 2040-2047, 1995.
- [106] H. Garcke, K.F. Lam, R. Nürnberg and E. Sitka. *A multiphase Cahn-Hilliard-Darcy model for tumour growth with necrosis*. arXiv :1701.06656.
- [107] H. Garcke, K.F. Lam, E. Sitka and V. Styles. *A Cahn-Hilliard-Darcy model for tumour growth with chemotaxis and active transport*. Mathematical Models and Methods in Applied Sciences Vol. 26, No. 6(2016) 1095-1148, DOI :10.1142/S0218202516500263.
- [108] U. Ghia, K.N. Ghia and C.T. Shin. *High-Re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method*. J Comput Phys 48, 387-411, 1982.
- [109] G. Gilardi, A. Miranville and G. Schimperna. *On the Cahn-Hilliard equation with irregular potentials and dynamic boundary conditions*. Commun. Pure Appl. Anal., 8 (2009), 881-912.
- [110] V. Girault and J.-L. Lions. *Two-grid finite element scheme for the transient Navier-Stokes equations*. M2AN 35, (2001), 945-980.

- 
- [111] V. Girault and J.-L. Lions. *Two-grid finite element scheme for the steady Navier-Stokes problem in polyhedra*. Portugal. Math. 58 (2001), 25-57.
  - [112] V. Girault and P.A. Raviart. *Finite Element Methods for the Navier-Stokes Equations. Theory and Algorithms*. In Springer Series in Computational Mathematics 5, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1979).
  - [113] J. Glimm, O. McBryan, R. Menikoff and D.H. Sharp. *Fron tracking applied to Rayleigh-Taylor instability*. SIAM J. Sci. Statist. Comput. 7, 230-251, 1986.
  - [114] K. Goda. *A multistep technique with implicit difference schemes for calculating two- or three-dimensional cavity flows*. J Comput Phys 30, 76-95, (1979).
  - [115] G.R. Goldstein, A. Miranville and G. Schimperna. *A Cahn-Hilliard equation in a domain with nonpermeable walls*. Phys. D. 240 (8), 754-766 (2011).
  - [116] H. Gomez and T.J.R. Hughes. *Provably unconditionally stable, second order time accurate, mixed variational methods for phase-field models*. Elsevier Science (2011).
  - [117] H. Gomez and X. Nogueira. *An unconditionally energy-stable method for the phase field crystal equation*. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 249/252 (2012), 52-61.
  - [118] O. Goyon. *High-Reynolds number solutions of Navier-Stokes equations using incremental unknowns*. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 130, 319-335, 1986.
  - [119] M. Grasselli and M. Pierre. *A splitting method for the Cahn-Hilliard equation with inertial term*. Math. Models Methods Appl. Sci., 20 (2010), 1-28.
  - [120] M. Grasselli and H. Wu. *Well-posedness and longtime behavior for the modified phase-field crystal equation*. Math. Models Methods Appl. Sci., 24 (2014), 2743-2783.
  - [121] H. Gu, M.H.G. Duits and F. Mugele. *Droplets formation and mergin in two-phase flow micro fluidics*. Int. J. Mol. Sci. 2011, I 2, 2572-2597 ; doi : 10.3390/ijms12042572.
  - [122] Z. Guan, J.S. Lowengrub, C. Wang, S.M. Wise. *Second-order convex splitting schemes for periodic nonlocal Cahn-Hilliard and Allen-Cahn equations*. J. Comput. Phys. 277 (2014) 48-71.
  - [123] J.L. Guermond, P. Mineev and J. Shen. *Asymptotic behavior of a Cahn-Hilliard-Navier-Stokes system in 2D*. Ann. I. H. Poincaré - AN 27 (2010) 401-436 doi :10.1016/j.anihpc.2009.11.013.
  - [124] J.L. Guermond, P. Mineev and J. Shen. *An overview of projection methods for incompressible flows*. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 195, 6011-6045, 2006.
  - [125] J.L. Guermond and J. Shen. *Velocity-correction projection methods for incompressible flows*. SIAM J. Numer. Anal., 41 (1) : 112-134, 2003.
  - [126] J.L. Guermond and J. Shen. *Quelques résultats nouveaux sur les méthodes de projection*. CR Acad. Sci. Paris, Série I 333, 1111-1116, 2001.
  - [127] F. Guillén-González and G. Tierra. *Second order schemes and time-step adaptivity for Allen-Cahn and Cahn-Hilliard models*. Comput. Math. Appli. 68(2014) 821-846.
  - [128] M.M. Gupta and J.C. Kalita. *A new paradigm for solving Navier-Stokes equations : streamfunction-velocity formulation*. J Comput Phys (2005).
  - [129] W. Hackbusch. *Multi-grid methods and application 1985*. Springer Berlin.
  - [130] Y. He, K-M. Liu. *Multi-level spectral Galerkin method for the NavierStokes equations, II : time discretization*. Advances in Computational Mathematics 25 : 403-433, 2006.



- [131] Y. He, K-M. Liu, W. Sun. *Multi-level spectral galerkin method for the navier-stokes problem I : spatial discretization*. Numer. Math. (2005) 101 : 501-522
- [132] J. Hilliard. *Spinodal decomposition, phase Transformations*. edited by H. I. Aronson (American Society for Metals, Metals Park, Ohio) 18 (1970), 497-560.
- [133] C.W. Hirt and B.D. Nicholes. *Volume of fluid method (VOM) for the dynamics of free boundaries*. Journal of Comput Phys. 39 (1981), 201-225.
- [134] S. Hou, Q. Zou, S. Chen, G. Doolen, A. Cogley. *Simulation of cavity flows by lattice Boltzmann method*. J. Comput. Phys. 118 (1995) 329-347.
- [135] Z. Hu, S. Wise, C. Wang and J. Lowengrub. *Stable and efficient finite-difference nonlinear-multigrid schemes for the phase-field crystal equation*. J. Comput. Phys., 228 (2009), 5323-5339.
- [136] J. Hua, P. Lin, C. Liu and Q. Wang, *Energy law preserving  $C^0$  finite element schemes for a couple phase field models in two-phase flow computations*. Journal of Computational Physics, Vol. 230, No. 19, 10.08.2011, p. 7115-7131.
- [137] F. Jauberteau, R. Temam and J. Tribbia, *Multiscale/fractional step schemes for the numerical simulation of the rotating shallow water flows with complex periodic topography*. J. Computational Physics, 270, 2014, 506-531, <http://dx.doi.org/10.1016/j.jcp.2014.03.036>
- [138] D.M. Jepsen, B.J. Azzopardi and P.B. Whalley. *The effect of gas properties on drops in annular flow*. Int. J. Multiphase Flow, 15, 327-339, 1989.
- [139] J. Jiang, J. Shi. *Bistability Dynamics in Structured Ecological Models*. Spatial Ecology, Stephen Cantrell, Chris Cosner, Shigui Ruan ed., CRC Press, 2009
- [140] G.E. Karniadakis, M. Israeli, and S.A. Orszag. *High-order splitting methods for the incompressible Navier-Stokes equations*. J. Comput. Phys. 97, 414-443, 1991.
- [141] D. Kessler, R.H. Nochetto and A. Schmidt. *A posteriori error control for the Allen-Cahn problem : circumventing Gronwall's inequality*. M2AN Math. Model. Numer. Anal., 38(1) : 129-142, 2004.
- [142] E. Khain and L.M. Sander. *A generalized Cahn-Hilliard equation for biological applications*. Phys. Rev. E 77 (2008), 051129.
- [143] J. Kim and J. Lowengrub. *Phase field modeling and simulation of three-phase flows*. Int. Free Bound. 7, 435-466 (2005).
- [144] J. Kim and W. Lu. *Interface instability and nanostructure patterning*. Comp.Mat.Sci. 38 (2), 418-425.
- [145] J. Kim and W. Lu. *Thin-film structures induced by electrostatic field and substrate kinetic constraint*. App. Phys. Lett. 88 (15), 153116.
- [146] I. Klapper and J. Dockery. *Role of cohesion in the material description of biofilms*. Phys. Rev. E 74 (2006), 0319021.
- [147] R.V. Kohn, and F. Otto. *Upper bounds for coarsening rates*. Commun. Math. Phys. 229 (2002), 375-395.
- [148] A.N. Kolmogorov, I. Petrovsky, and N.S. Piskunov. *Etude de l'équation de diffusion avec croissance de la quantité de matière et son application à un problème biologique*. Bull. Univ. Moscou, ser.Internat., Sec.A, 1 :1-25, 1937.
- [149] L.D. Landau, V.I. Ginzburg. *On the theory of superconductivity*. Collected papers of L.D.Landau, D.ter Haar, ed.,Pergamon Oxford (1965), 626-633.

- 
- [150] L.E. Landau and E.M. Lifshitz. *Fluid mechanics*. Pergamon Press, NY, 1959.
  - [151] J.S. Langer. *Theory of spinodal decomposition in alloys*. Ann. Phys. 65 (1975), 53-86.
  - [152] W. Layton. *Energy Dissipation in the Smagorinsky Model of Turbulence* arXiv :1601.06635 (2018)
  - [153] W. Layton. *A two-level discretization method for the Navier-Stokes equations*. Comput. Math. Appl. 26, 33-38, 1993.
  - [154] W. Layton, R. Lewandowski. *Analysis of an Eddy Viscosity Model for Large Eddy Simulation of Turbulent Flows* J. math. Fluid mech. 4 (2002) 1-26.
  - [155] C. Lemar  chal. *Une m  thode de r  solution de certains syst  mes non lin  aires bien pos  s*. C.R. Acad. Sci. Paris, s  r. A, 272 (1971), 605-607.
  - [156] Y. Li, D. Jeong, J. Choi, S. Lee, J. Kim. *Fast local image inpainting based on the Allen-Cahn model*. Digital SignalProcessing37(2015), 65-74.
  - [157] Y. Li, H.G. Lee, D. Jeong and J. Kim. *An unconditionally stable hybrid numerical method for solving the Allen-Cahn equation*. Comput. Math. Appl (2010) 60 : 1591-1606.
  - [158] P. Lin and C. Liu. *Simulations of singularity dynamics in liquid crystal flows : A  $C0$  finite element approach*. J. Comput. Phys., (2006) 215 : 348-362.
  - [159] P. Lin, C. Liu and H. Zhang. *An energy law preserving  $C0$  finite element scheme for simulating the kinematic effects in liquid crystal flow dynamics*. J. Comput. Phys., (2007) 227 : 1411-1427.
  - [160] P. Lin and D. Wang. *Numerical modelling of 3D stratified free surface flows : a case study of sediment dumping*. Int. J. Numer. Meth. Fluids, 50 : 1425-1444, 2006.
  - [161] C. Liu and J. Shen. *A phase field model for the mixture of two incompressible fluids and its approximation by a Fourier-Spectral method*. Physica D 179, 211-228, 2003.
  - [162] C. Liu and N.J. Walkington. *Mixed methods for the approximation of liquid crystal flows*. M2AN 36 (2) (2002) 205-222.
  - [163] J. Lowengrub and L. Truskinovsky. *Quasi-incompressible Cahn-Hilliard fluids and topological transitions*. Proc. R. Soc. Lond. A, 454 : 2617-2657, 1998.
  - [164] M. Marion and R. Temam, *Nonlinear Galerkin Methods*, SIAM Journal of Numerical Analysis, 26, 1989,1139-1157.
  - [165] M. Marion and R. Temam, *Nonlinear Galerkin Methods ; The Finite elements case*, Numerische Mathematik, 57, 1990 , 205-226.
  - [166] M. Marion and J. Xu. *Error estimates on a new nonlinear Galerkin method based on two-grid finite elements*. SIAM Journal on Numerical Analysis, Vol. 32, No. 4 (1995), 1170-1184.
  - [167] B. Merlet, M. Pierre. *Convergence to equilibrium for the backward Euler scheme and applications*. Commun. Pure Appl. Anal. 9 (2010), no. 3, pp. 685-702.
  - [168] A. Miranville. *Asymptotic behavior of a generalized Cahn-Hilliard equation with a proliferation term*. Appl. Anal. 92 (2013), 1308-1321.
  - [169] A. Miranville and S. Zelik. *Exponential attractors for the Cahn-Hilliard equation with dynamic boundary conditions*. Math. Methods Appl. Sci., 28 (2005), 709-735.
  - [170] R. Nagaosa and T. Saito. *Turbulence structure and scalar transfer in stratified free-surface flows*. AIChEJ., 43(10), 2393-2404, 1997.
  - [171] J. Nagumo, S. Yoshizawa and S. Arimoto. *Bistable transmission lines*. IEEE. Trans. Circuit Theory, 12 : 400-412, 1965.

- [172] B. Noris. *Modélisation multi-échelle pour la science des matériaux*. Cours de Master 2 AAM, Amiens-France (2017).
- [173] R. Nürenburg and E.J.W. Tucker. *Stable finite element approximation of a Cahn-Hilliard-Stokes system coupled to an electric field*. Euro. Jnl of Applied Mathematics : 1-29, doi :10.1017/S0956792516000395.
- [174] M. Olshanskii, G. Lube, T. Heister and J. Löwe, *Grad-div stabilization and subgrid pressure models for the incompressible Navier-Stokes equations*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 198 (2009) 3975-3988.
- [175] H. Ohnogi and Y. Shiwa. *Instability of spatially periodic patterns due to a zero mode in the phase-field crystal equation*. Phys. D., 237 (2008), 3046-3052.
- [176] A. Oron, S.H. Davis, and S.G. Bankoff, *Long-scale evolution of thin liquid films*. Rev. Mod. Phys. 69 (1997), 931-980.
- [177] S.A. Orszag, M. Israeli, and M. Deville, *Boundary conditions for incompressible flows*. J. Sci. Comput. I, 75-111, 1986.
- [178] S.J. Osher and R.P. Fedkiw. *Level set methods : An overview and some recent results*. J. Comput. Phys. 169, 463-502, 2001.
- [179] F. Pascal. *Méthodes de Galerkin non linéaires en discrétisation par éléments finis et pseudo-spectrale. Application à la mécanique des fluides*. Université de Paris-Sud Orsay, 1992.
- [180] M. Pierre. *Etude numérique et mathématique de quelques modèles de transition de phase, de séparation de phases et de cristaux liquides*. Mémoire pour une Habilitation à Diriger des Recherche à l'université de Poitiers (2011).
- [181] M. Plapp. *Phase-Field Models*. Physique de la Matière Condensée, École Polytechnique, CNRS, 91128 Palaiseau, France.
- [182] F. Pouit. *Etude de schémas numériques multiniveaux utilisant les inconnues incrémentales dans le cas des différences finies : application à la mécanique des fluides*. Thèse, Université Paris 11, 1998, in french.
- [183] N. Provatas, J.A. Dantzig, B. Athreya, P. Chan, P. Stefanovic, N. Goldenfeld and K.R. Elder. *Using the phase-field crystal method in the multi-scale modeling of microstructure evolution*. Journal of the Minerals, Metals and Materials Society, 59 (2007), 83-90.
- [184] R. Racke and S. Zheng, *The Cahn-Hilliard equation with dynamic boundary conditions*. Adv. Differential Equations, 8 (2003), 83-110.
- [185] T.W.F. Russell and D.E. Lamb. *Flow mechanism of two-phase annular flow*. Can. J. Chem. Engng., 43, 237-245, 1974.
- [186] J. Shen. *Hopf bifurcation of the unsteady regularized driven cavity flow*. J Comput Phys 95, 228-245, 1991.
- [187] J. Shen. *Modeling and numerical approximation of two-phase incompressible flows by a phase-field approach*. Lecture Note Series, IMS, NUS (2011).
- [188] J. Shen and X. Yang. *Numerical Approximations of Allen-Cahn and Cahn-Hilliard Equations*. DCDS, Series A, 28 : (2010), 1669-1691.
- [189] L. Shui, J.C.T. Eijkel and A. Van den Berg. *Engineering flows in small devices : microfluidics toward a lab-on-a-chip*. Annu. Rev. Fluid Mech. 2004. 36 : 381-411. dio : 10.1146/annurev.fluid.36.050802.122124.
- [190] J.G. Skellam. *Random dispersal in theoretical populations*. Biometrika, 38 : 196-218, 1951.

- 
- [191] H.A. Stone, A.D. Stroock and A. Ajdari. *Multiphase flow in microfluidic systems-Control and applications of droplets and interfaces*. Adv. Colloid Interface 2007, 133, 35-49.
  - [192] P. Stoodley, R. Cargo, C.J. Rupp, M. Wilson and I. Klapper. *Biofilms material properties as related to shear-induced deformation and detachment phenomena*. J. Ind. Microbiol Biotechnol (2002), 29 (6) : 361-7.
  - [193] P. Stoodley, K. Sauer, D.G. Davies and J.W. Costerton. *Biofilms as complex differentiated communities*. Annu. Rev. Microbiol. (2002), 56 : 187-209.
  - [194] S. Subramaniam. *Lagrangian-Eulerian methods for multiphase flows*. Elsevier Science, 2012.
  - [195] Y. Suwa and Y. Saito. *Computer Simulation of Grain Growth by the Phase Field Model. Effect of Interfacial Energy on Kinetics of Grain Growth*. Materials Transactions, Vol : 44, No. 11 (2003) pp. 2245-2251.
  - [196] P. Talling. *Introduction to microfluidics*. Oxford University Press. ISBN 0-19-856864-9, 2006.
  - [197] S.Y. Teh, R. Lin, L.H. Hung and A.P. Lee. *Droplet microfluidics*. Lab Chip 2008, 8, 198-220.
  - [198] R. Temam. *Infinite dimensional dynamical systems in mechanics and physics*. Number 68 in Applied Mathematical Science. Springer Verlag, (1997).
  - [199] R. Temam. *Navier-Stokes equations*. North-Holland, Amsterdam (1984). Revised version.
  - [200] R. Temam. *Navier-Stokes equations, Theory and numerical analysis*. North-Holland, Amsterdam (1977).
  - [201] R. Temam. *Approximation d'équations aux dérivées partielles par des méthodes de décomposition*. Séminaire Bourbaki 381, 1969/1970.
  - [202] R. Temam. *Sur l'approximation de la solution des équations de Navier-Stokes par la méthode des pas fractionnaires II*. Arch. Ration. Mech. Anal. 33, 337-385, (1969).
  - [203] R. Temam. *Une méthode d'approximation de la solution des équations de Navier-Stokes*. Bull. Soc. Math. France 98, 115-152, (1968).
  - [204] J.D. Tice, A.D. Lyon and R.F. Ismagilov. *Effects of viscosity on droplet formation and mixing in microfluidic channels*. Anal. Chim. Acta 2004, 507, 73-77.
  - [205] G. Tierra and F. Guillén-González. *Numerical methods for solving the Cahn-Hilliard equation and its applicability to related Energy-based models*. Nečas Center for Mathematical Modeling, Preprint no. 2013-035.
  - [206] Y. Ugurlu and D. Kaya. *Solutions of the Cahn-Hilliard equation*. Computers and Mathematics with Applications. 56, 3038-3045, (2008).
  - [207] S.O. Unverdi and G. Tryggvason. *A front-tracking method for viscous, incompressible, multi-fluid flows*. J. Comput. Phys. 100, 25-37, 1992.
  - [208] S.P. Vanka. *Block-implicit multigrid solution of Navier-Stokes equations in primitive variables*. J. Comput. Phys. 65, 138-158, (1986).
  - [209] D.F.M. Vasconcelos, A.L. Rossa and A.L.G.A. Coutinho. *A residual-based Allen-Cahn phase field model for the mixture of incompressible fluid flows*. Int. J. Numer. Meth. Fluids 75 : 645-667, 2014.
  - [210] W. Wang, W. Cheng, K. Li, C. Lou and J. Gong. *Flow patterns transition law of oil-water two-phase flow under a wide range of oil phase viscosity condition*. J. App. Math 2013.

- [211] C. Wang, X. Wang and S.M. Wise. *Unconditionally stable schemes for equations of thin film epitaxy*. Discrete Contin. Dyn. Syst., 28(1) : 405-423, 2010.
- [212] C. Wang and S.M. Wise. *An energy stable and convergent finite-difference scheme for the modified phase field crystal equation*. SIAM J. Numer. Anal., 49 (2011), 945-969.
- [213] S.M. Wise, C. Wang and J.S. Lowengrub. *An energy-stable and convergent finite-difference scheme for the phase field crystal equation*. SIAM J. Numer. Anal., 47(3) : 2269-2288, 2009.
- [214] X. Wu, G.J. Van Zwieten and K.G. Van Der Zee. *Stabilized second-order convex splitting schemes for Cahn-Hilliard models with application to diffuse-interface tumor-growth models*. Int. J. Numer. Meth. Biomed. Engng. 228 (2013) DOI : 10.1002/cnm.2597.
- [215] Y. Xie and C. Yuan. *Phase field modeling of silicon nanowire based lithium ion battery composite electrode*. Electrochimica Acta, 186(2015), pp. 542-551.
- [216] J. Xu. *Two-grid finite element discretization techniques for linear and nonlinear PDE*. SIAM J. Numer. Anal., 33(1996), pp. 1759-1777.
- [217] J. Xu. *A novel two-grid method for semilinear elliptic equations*. SIAM J.Sci. Comput.15, 231-237, (1994).
- [218] J. Xu. *Some Two-grids finite element methods*. Tech. Report, P.S.U, (1992).
- [219] C. Xu and T. Tang. *Stability analysis of large time-stepping methods for epitaxial growth models*. SIAM J. Num. Anal., 44 (2006), 1759-1779.
- [220] B.X. Xu, Y. Zhao and P. Stein. *Phase field modeling of electrochemically induced fracture in Li-ion battery with large deformation and phase segregation*. GAMM-Mitt. 39, No. 1, 92-110 (2016)/DOI 10.1002/gamm.201610006.
- [221] X. Yang, J.J. Feng, C. Liu and J. Shen. *Numerical simulations of jet pinching-off and drop formation using an energetic variational phase-field method*. J. Comput. Phys., 218 : 417-428, 2006.
- [222] X. Ye. *The Legendre collocation method for the Cahn-Hilliard equation*. J. Comput. Appl. Math., 150(1) : 87-108, 2003.
- [223] C.S. Yih. *Fluid mechanics*. McGraw-Hill Book Company.
- [224] D.L. Youngs. *An interface tracking method for a 3D Eulerian hydrodynamics code*. Technical report AWRE/44/92/35. Atomic Weapons Research Establishment, April 1987.
- [225] D.L. Youngs. *Time-dependent multi-material flow with large fluid distortion*. Numerical methods for uid dynamics, Academic Press, New York, 273.
- [226] H. Yserentant. *On multilevel splitting of finite element spaces*. Numer. Math, 49,(1986), pp 379-412.
- [227] P. Yue, J.J. Feng, C. Liu and J. Shen. *A diffuse-interface method for simulating two-phase flows of complex fluids*. J. Fluid Mech, 515 : 293-317, 2004.
- [228] J. Zhang and Q. Du. *Numerical studies of discrete approximations to the Allen-Cahn equation in the sharp interface limit*. SIAM J. Sci. Comput., Vol. 31, No. 4, pp. 3042-3063.
- [229] Z. Zhang and H. Tang. *An adaptative phase field method for the mixture of two incompressible fluids*. Computers and Fluids 36, 1307-1318, 2007.
- [230] Y. Zhao, B.X. Xu, P. Stein and D. Gross. *Phase-field study of electrochemical reactions at exterior and interior interfaces in Li-Ion battery electrode particles*. Preprint submitted to Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. May 14, 2018.

# Table des figures

|     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |    |
|-----|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1   | Équation d'Allen-Cahn avec $\varepsilon = 0.03, \tau = 5 \times 10^{-3}, u_0 = \cos(\pi x) \cos(\pi y), \Delta t = 7 \times 10^{-3}$ . . . . .                                                                                                                                                      | 7  |
| 2   | Cahn-Hilliard $\varepsilon = 0.03, \tau = 2222.22, u_0 = \cos(\pi x) \cos(\pi y)$ et $\Delta t = 10^{-3}$ . . . . .                                                                                                                                                                                 | 8  |
| 3   | Cahn-Hilliard $\varepsilon = 0.03, \tau = 2222.22, u_0 = \cos(\pi x) \cos(\pi y)$ et $\Delta t = 10^{-3}$ . . . . .                                                                                                                                                                                 | 9  |
| 4   | De gauche à droite : $Re = 2000, 3200$ ; le temps CPU du schéma sur une grille fine ( <b>Algorithme 2</b> ) et celui de la méthode de séparation en échelles ( <b>Algorithme 3</b> ) respectivement. . . . .                                                                                        | 10 |
| 5   | De gauche à droite : $Re = 5000, 7500$ ; le temps CPU du schéma sur une grille fine ( <b>Algorithme 2</b> ) et celui de la méthode de séparation en échelles ( <b>Algorithme 3</b> ) respectivement. . . . .                                                                                        | 10 |
| 6   | Comparaison CPU entre le schéma sur une grille fine et la méthode de séparation en échelles (concentration et vitesse) ( <b>Algorithme 6</b> ), fusionnement de deux bulles (à gauche) et bulle montante (à droite) avec $N_f = 32, N_c = 16$ . . . . .                                             | 13 |
| 7   | La solution $\phi_h$ par l' <b>Algorithme 6</b> pour deux bulles en contact : De gauche à droite : $t = 0, 0.02, 0.04, 0.08$ . . . . .                                                                                                                                                              | 13 |
| 8   | La solution $\phi_h$ par l' <b>Algorithme 6</b> pour une bulle montante : De gauche à droite : $t = 0, 0.02, 0.1, 0.2$ . . . . .                                                                                                                                                                    | 13 |
| 9   | Comparaison CPU entre le schéma sur une grille fine et la méthode de séparation en échelles (concentration et vitesse) ( <b>Algorithme 8</b> ), déformation d'une bulle rectangulaire (à gauche) et fusionnement de deux bulles (à droite) avec $N_f = 32, N_c = 16$ . . . . .                      | 15 |
| 10  | La solution $\phi_h$ par l' <b>Algorithme 8</b> pour une bulle rectangulaire, de gauche à droite : $t = 0, 0.0002, 0.002, 0.008$ . . . . .                                                                                                                                                          | 15 |
| 11  | La solution $\phi_h$ par l' <b>Algorithme 8</b> pour deux bulles en contact, de gauche à droite : $t = 0, 0.0001, 0.0002, 0.0008$ . . . . .                                                                                                                                                         | 15 |
| 12  | Moyenne vs temps- Comparaison entre l' <b>Algorithme 7</b> et l' <b>Algorithme 8</b> pour $\Delta t = 0.0001$ . . . . .                                                                                                                                                                             | 16 |
| 13  | Moyenne vs temps, Comparaison entre l' <b>Algorithme 7</b> et l' <b>Algorithme 8</b> pour $\Delta t = 0.00001$ , cas de fusionnement de deux bulles. . . . .                                                                                                                                        | 16 |
| 1.1 | Séparation en deux phases distinctes Fe-Cr. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                 | 23 |
| 1.2 | Interfaces diffuse et nette . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                               | 23 |
| 2.1 | Iso-valeurs et représentation 3D pour $u(x, y) = (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4)$ sur le tore. Haut-gauche les composantes $z_h$ et Bas-gauche la fonction $u$ avec les éléments $\mathbb{P}_1$ . Haut-droite les composantes $z_h$ et Bas-droite la fonction $u$ avec les éléments $\mathbb{P}_2$ . | 44 |

|      |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |    |
|------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 2.2  | Iso-valeurs et représentation 3D pour $u(x, y) = \sin(72x(1-x)y(1-y))$ sur le tore. Haut-gauche les composantes $z_h$ et Bas-gauche la fonction $u$ avec les éléments $\mathbb{P}_1$ . Haut-droite les composantes $z_h$ et Bas-droite la fonction $u$ avec les éléments $\mathbb{P}_2$ .                                                                                                                                               | 44 |
| 2.3  | Pour EF $\mathbb{P}_2$ , $N_f = 20$ , $N_c = 10$ pour $u(x, y) = \cos(44(1-x)xy(1-y))$ , $\dim(V_h) = 1681$ , $\dim(V_H) = 441$ . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                               | 45 |
| 2.4  | Pour EF $\mathbb{P}_1$ , $N_f = 40$ , $N_c = 20$ pour $u(x, y) = \cos(44(1-x)xy(1-y))$ , $\dim(V_h) = 1681$ , $\dim(V_H) = 441$ . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                               | 46 |
| 2.5  | L'erreur $L^2$ entre l' <b>Algorithme 10</b> , le schéma implicite (2.7), le schéma stabilisé (2.8) et la solution exacte : à gauche $u_{ex}(x, y, t) = \cos(\pi x) \cos(\pi y) \exp^{\sin(\pi t)}$ , $\Delta t = 0.01$ , $\tau = 4 \times 10^5$ et $u_0 = \cos(\pi x) \cos(\pi y)$ ; à droite $u_{ex}(x, y, t) = \cos(\pi x) \cos(\pi y)$ , $\Delta t = 0.04$ , $\tau = 5 \times 10^6$ et $u_0 = (x(1-x)y(1-y))^2$ . . . . .           | 48 |
| 2.6  | Courbes d'énergie : à gauche pour $N = 30, 40, 80$ sur le carré unité avec l'EF $\mathbb{P}_1$ , $\Delta t = 0.009$ et l'accélération Lemaréchal et à droite pour $N = 20, 30, 40$ sur le carré unité avec l'EF $\mathbb{P}_2$ , $\Delta t = 10^{-2}$ et l'accélération Lemaréchal. . . . .                                                                                                                                             | 53 |
| 2.7  | Courbes d'énergie pour Picard et pour Lemaréchal. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | 54 |
| 2.8  | Solution à gauche pour Picard et à droite pour Lemaréchal à $t = 0.0059$ . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | 54 |
| 2.9  | Solution à gauche pour Picard et à droite pour Lemaréchal à $t = 0.0299$ . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | 55 |
| 2.10 | Solution à gauche pour Picard et à droite pour Lemaréchal à $t = 0.0539$ . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | 55 |
| 2.11 | Solution à gauche pour Picard et à droite pour Lemaréchal à $t = 0.0959$ . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | 55 |
| 2.12 | Solution à gauche pour Picard et à droite pour Lemaréchal à $t = 0.1799$ . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | 56 |
| 2.13 | L'équation d'Allen-Cahn avec second membre pour $\varepsilon = 0.5$ , $\Delta t = 0.01$ , $t \in [0, 4]$ et l'élément $\mathbb{P}_1$ . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 57 |
| 2.14 | L'équation d'Allen-Cahn avec second membre pour $\varepsilon = 0.5$ , $\Delta t = 0.01$ , $t \in [0, 4]$ et l'élément $\mathbb{P}_2$ . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 57 |
| 2.15 | L'équation d'Allen-Cahn pour $\varepsilon = 0.05$ , $\Delta t = 0.001$ , $t \in [0, 0.6]$ et l'élément $\mathbb{P}_2$ . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | 58 |
| 2.16 | Equation d'Allen-Cahn - Energie vs temps - Comparaison entre le schéma globalement stabilisé sur une grille, le schéma sur une grille et la stabilisation des modes élevés bi-grilles, $\varepsilon = 0.03$ , $\Delta t = 7 \times 10^{-3}$ , $\tau = S/\varepsilon^2$ , $S = 2$ , $u_0(x, y) = \cos(4\pi x) \cos(4\pi y)$ . . . . .                                                                                                    | 64 |
| 2.17 | Equation d'Allen-Cahn - Energie vs temps - Comparaison entre le schéma globalement stabilisé sur une grille, le schéma sur une grille et la stabilisation des modes élevés bi-grilles. $\varepsilon = 0.03$ , $\Delta t = 7 \times 10^{-3}$ , $\tau = S/\varepsilon^2$ , $S = 1.5$ (gauche), $S = 10$ (droite), $u_0(x, y) = \cos(\pi x) \cos(\pi y)$ , $\dim(V_H) = 1681$ , $\dim(V_h) = 6561$ , $DR(V_H, V_h) = 0.256211$ . . . . .   | 64 |
| 2.18 | Equation d'Allen-Cahn - Energie vs temps - Comparaison entre le schéma globalement stabilisé sur une grille, le schéma sur une grille et la stabilisation des modes élevés bi-grilles. $\varepsilon = 0.03$ , $\Delta t = 7 \times 10^{-3}$ . $\tau = S/\varepsilon^2$ , $S = 1.5$ (gauche), $S = 10$ (droite). $u_0(x, y) = \cos(4\pi x) \cos(4\pi y)$ , $\dim(V_H) = 1681$ , $\dim(V_h) = 6561$ , $DR(V_H, V_h) = 0.256211$ . . . . . | 65 |
| 2.19 | $\Omega$ est le domaine en forme de $L$ - Energie vs temps - $\varepsilon = 0.1$ , $\Delta t = 7 \times 10^{-3}$ . $\tau = S/\varepsilon^2$ . A gauche, $S = 0.1$ et à droite $S = 1$ . Les éléments $\mathbb{P}_1$ sur $V_H$ , $\mathbb{P}_2$ sur $V_h$ . . .                                                                                                                                                                          | 65 |
| 2.20 | Allen-Cahn - simulation d'une solution exacte $\varepsilon = 0.5$ , $\tau = 1.2$ , $\Delta t = 10^{-2}$ . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | 67 |
| 2.21 | Allen-Cahn - simulation d'une solution exacte $\varepsilon = 0.3$ , $\tau = 1.8$ , $\Delta t = 10^{-2}$ . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | 67 |
| 2.22 | Allen-Cahn - $\varepsilon = 0.03$ , $\tau = 5 \times 10^{-3}$ et $\Delta t = 7 \times 10^{-3}$ . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | 68 |
| 3.1  | Courbes d'énergie : à gauche pour $N = 30, 40, 80$ , $\Delta t = 3 \times 10^{-6}$ et l'EF $\mathbb{P}_1$ et à droite pour $N = 20, 30, 40$ , $\Delta t = 3 \times 10^{-6}$ et l'EF $\mathbb{P}_2$ . . . . .                                                                                                                                                                                                                            | 72 |
| 3.2  | Courbes d'énergie pour Picard et pour Lemaréchal. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | 73 |

|      |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |    |
|------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 3.3  | Solution à gauche pour Picard et à droite pour Lemaréchal à $t = 0$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | 73 |
| 3.4  | Solution à gauche pour Picard et à droite pour Lemaréchal à $t = 6 \times 10^{-5}$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | 73 |
| 3.5  | Solution à gauche pour Picard et à droite pour Lemaréchal à $t = 0.000147$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | 73 |
| 3.6  | Solution à gauche pour Picard et à droite pour Lemaréchal à $t = 0.00024$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 74 |
| 3.7  | Solution à gauche pour Picard et à droite pour Lemaréchal à $t = 0.000753$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | 74 |
| 3.8  | Courbes de la moyenne spatiale pour Picard et pour Lemaréchal.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | 74 |
| 3.9  | L'équation de Cahn-Hilliard avec second membre pour $\varepsilon = 0.1, \Delta t = 0.001, t \in [0, 1.2]$ et l'élément $\mathbb{P}_1$ .                                                                                                                                                                                                                                                                     | 75 |
| 3.10 | L'équation de Cahn-Hilliard avec second membre pour $\varepsilon = 0.5, \Delta t = 0.01, t \in [0, 4]$ et l'élément $\mathbb{P}_2$ .                                                                                                                                                                                                                                                                        | 75 |
| 3.11 | L'équation de Cahn-Hilliard pour $\varepsilon = 0.05, \Delta t = 0.001, t \in [0, 1.2]$ et l'élément $\mathbb{P}_2$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                       | 76 |
| 3.12 | Equation de Cahn-Hilliard - Energie vs temps - Comparaison entre le globalement stabilisé sur une grille, le schéma sur une grille et la stabilisation des modes élevées bi-grilles ( <b>Algorithme 14</b> ), $\varepsilon = 0.03, \Delta t = 3 \times 10^{-6}, \tau = S/\varepsilon^2, S = 2$ (gauche), $S = 10$ (droite), $u_0(x, y) = \cos(\pi x) \cos(3\pi y)$ et l'élément $\mathbb{P}_1$ .            | 81 |
| 3.13 | Equation de Cahn-Hilliard - Moyenne spatiale vs temps - Comparaison entre le globalement stabilisé sur une grille, le schéma sur une grille et la stabilisation des modes élevées bi-grilles ( <b>Algorithme 14</b> ), $\varepsilon = 0.03, \Delta t = 3 \times 10^{-6}, \tau = S/\varepsilon^2, S = 2$ (gauche), $S = 10$ (droite), $u_0(x, y) = \cos(\pi x) \cos(3\pi y)$ et l'élément $\mathbb{P}_1$ .   | 81 |
| 3.14 | Equation de Cahn-Hilliard - Energie vs temps - Comparaison entre le globalement stabilisé sur une grille, le schéma sur une grille et la stabilisation des modes élevées bi-grilles ( <b>Algorithme 14</b> ), $\varepsilon = 0.03, \Delta t = 3 \times 10^{-6}, \tau = S/\varepsilon^2, S = 0.5$ (gauche), $S = 10$ (droite), $u_0(x, y) = \cos(\pi x) \cos(3\pi y)$ et l'élément $\mathbb{P}_2$ .          | 82 |
| 3.15 | Equation de Cahn-Hilliard - Moyenne spatiale vs temps - Comparaison entre le globalement stabilisé sur une grille, le schéma sur une grille et la stabilisation des modes élevées bi-grilles ( <b>Algorithme 14</b> ), $\varepsilon = 0.03, \Delta t = 3 \times 10^{-6}, \tau = S/\varepsilon^2, S = 0.5$ (gauche), $S = 10$ (droite), $u_0(x, y) = \cos(\pi x) \cos(3\pi y)$ et l'élément $\mathbb{P}_2$ . | 82 |
| 3.16 | Equation de Cahn-Hilliard - Energie vs temps - Comparaison entre le globalement stabilisé sur une grille, le schéma sur une grille et la stabilisation des modes élevées bi-grilles ( <b>Algorithme 15</b> ). $\varepsilon = 0.03, \Delta t = 3 \times 10^{-6}, \tau = S/\varepsilon^2, S = 2$ (gauche), $S = 10$ (droite), $u_0(x, y) = \cos(\pi x) \cos(3\pi y)$ et l'élément $\mathbb{P}_1$ .            | 83 |
| 3.17 | Equation de Cahn-Hilliard - Moyenne spatiale vs temps - Comparaison entre le globalement stabilisé sur une grille, le schéma sur une grille et la stabilisation des modes élevées bi-grilles ( <b>Algorithme 15</b> ). $\varepsilon = 0.03, \Delta t = 3 \times 10^{-6}, \tau = S/\varepsilon^2, S = 2$ (gauche), $S = 10$ (droite), $u_0(x, y) = \cos(\pi x) \cos(3\pi y)$ et l'élément $\mathbb{P}_1$ .   | 83 |
| 3.18 | Equation de Cahn-Hilliard - Energie vs temps - Comparaison entre le globalement stabilisé sur une grille, le schéma sur une grille et la stabilisation des modes élevées bi-grilles ( <b>Algorithme 15</b> ). $\varepsilon = 0.03, \Delta t = 3 \times 10^{-6}, \tau = S/\varepsilon^2, S = 0.5$ (gauche), $S = 10$ (droite). $u_0(x, y) = \cos(\pi x) \cos(3\pi y)$ et l'élément $\mathbb{P}_2$ .          | 84 |
| 3.19 | Equation de Cahn-Hilliard - Moyenne spatiale vs temps - Comparaison entre le globalement stabilisé sur une grille, le schéma sur une grille et la stabilisation des modes élevées bi-grilles ( <b>Algorithme 15</b> ). $\varepsilon = 0.03, \Delta t = 3 \times 10^{-6}, \tau = S/\varepsilon^2, S = 0.5$ (gauche), $S = 10$ (droite). $u_0(x, y) = \cos(\pi x) \cos(3\pi y)$ et l'élément $\mathbb{P}_2$ . | 84 |
| 3.20 | Cahn-Hilliard - simulation d'une solution exacte $\varepsilon = 0.3, \tau = 2222.22, \Delta t = 10^{-3}$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 85 |
| 3.21 | Cahn-Hilliard - simulation d'une solution exacte $\varepsilon = 0.3, \tau = 2222.22, \Delta t = 10^{-3}$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 86 |
| 3.22 | Cahn-Hilliard - simulation d'une solution exacte $\varepsilon = 0.5, \tau = 5555.55, \Delta t = 10^{-3}$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 86 |
| 3.23 | Cahn-Hilliard - simulation d'une solution exacte $\varepsilon = 0.5, \tau = 5555.55, \Delta t = 10^{-3}$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 87 |
| 3.24 | Cahn-Hilliard $\varepsilon = 0.03, \tau = 2222.22$ et $\Delta t = 10^{-3}$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | 87 |



|      |                                                                                                                                                                                                                                                               |     |
|------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 3.25 | Cahn-Hilliard $\varepsilon = 0.03, \tau = 2222.22$ et $\Delta t = 10^{-3}$ . . . . .                                                                                                                                                                          | 88  |
| 4.1  | Conditions aux bords . . . . .                                                                                                                                                                                                                                | 104 |
| 4.2  | De haut en bas : courant, vorticité, pression et vitesse, et de gauche à droite <b>Algorithmes 19</b> et <b>21</b> , pour $\Delta t = 10^{-2}, Re = 100, T = 17, \dim(X_H) = 6561, \dim(Y_H) = 1681, \dim(X_h) = 25921, \dim(Y_h) = 6561$ . . . . .           | 105 |
| 4.3  | De haut en bas : courant, vorticité, pression et vitesse, et de gauche à droite <b>Algorithmes 19</b> et <b>22</b> , pour $\Delta t = 10^{-2}, Re = 100, T = 17, \dim(X_H) = 6561, \dim(Y_H) = 1681, \dim(X_h) = 25921, \dim(Y_h) = 6561$ . . . . .           | 106 |
| 4.4  | De haut en bas : courant, vorticité, pression et vitesse, et de gauche à droite <b>Algorithmes 19</b> et <b>23</b> , pour $\Delta t = 10^{-2}, Re = 100, T = 17, \dim(X_H) = 6561, \dim(Y_H) = 1681, \dim(X_h) = 25921, \dim(Y_h) = 6561$ . . . . .           | 107 |
| 4.5  | De haut en bas : courant, vorticité, pression et vitesse, et de gauche à droite <b>Algorithmes 19</b> et <b>24</b> , pour $\Delta t = 10^{-2}, Re = 100, T = 17, \dim(X_H) = 6561, \dim(Y_H) = 1681, \dim(X_h) = 25921, \dim(Y_h) = 6561$ . . . . .           | 108 |
| 4.6  | De haut en bas : courant, vorticité, pression et vitesse, et de gauche à droite <b>Algorithmes 19</b> et <b>21</b> , pour $\Delta t = 10^{-2}, Re = 400, T = 35, \dim(X_H) = 6561, \dim(Y_H) = 1681, \dim(X_h) = 25921, \dim(Y_h) = 6561$ . . . . .           | 109 |
| 4.7  | De haut en bas : courant, vorticité, pression et vitesse, et de gauche à droite <b>Algorithmes 19</b> et <b>22</b> , pour $\Delta t = 10^{-2}, Re = 400, T = 35, \dim(X_H) = 6561, \dim(Y_H) = 1681, \dim(X_h) = 25921, \dim(Y_h) = 6561$ . . . . .           | 110 |
| 4.8  | De haut en bas : courant, vorticité, pression et vitesse, et de gauche à droite <b>Algorithmes 19</b> et <b>23</b> , pour $\Delta t = 10^{-2}, Re = 400, T = 35, \dim(X_H) = 6561, \dim(Y_H) = 1681, \dim(X_h) = 25921, \dim(Y_h) = 6561$ . . . . .           | 111 |
| 4.9  | De haut en bas : courant, vorticité, pression et vitesse, et de gauche à droite <b>Algorithmes 19</b> et <b>24</b> , pour $\Delta t = 10^{-2}, Re = 400, T = 35, \dim(X_H) = 6561, \dim(Y_H) = 1681, \dim(X_h) = 25921, \dim(Y_h) = 6561$ . . . . .           | 112 |
| 4.10 | De haut en bas : courant, vorticité, pression et vitesse, et de gauche à droite <b>Algorithmes 19</b> et <b>21</b> , pour $\Delta t = 5 \times 10^{-3}, Re = 1000, T = 56, \dim(X_H) = 6561, \dim(Y_H) = 1681, \dim(X_h) = 25921, \dim(Y_h) = 6561$ . . . . . | 113 |
| 4.11 | De haut en bas : courant, vorticité, pression et vitesse, et de gauche à droite <b>Algorithmes 19</b> et <b>22</b> , pour $\Delta t = 5 \times 10^{-3}, Re = 1000, T = 56, \dim(X_H) = 6561, \dim(Y_H) = 1681, \dim(X_h) = 25921, \dim(Y_h) = 6561$ . . . . . | 114 |
| 4.12 | De haut en bas : courant, vorticité, pression et vitesse, et de gauche à droite <b>Algorithmes 19</b> et <b>23</b> , pour $\Delta t = 5 \times 10^{-3}, Re = 1000, T = 56, \dim(X_H) = 6561, \dim(Y_H) = 1681, \dim(X_h) = 25921, \dim(Y_h) = 6561$ . . . . . | 115 |
| 4.13 | De haut en bas : courant, vorticité, pression et vitesse, et de gauche à droite <b>Algorithmes 19</b> et <b>24</b> , pour $\Delta t = 5 \times 10^{-3}, Re = 1000, T = 56, \dim(X_H) = 6561, \dim(Y_H) = 1681, \dim(X_h) = 25921, \dim(Y_h) = 6561$ . . . . . | 116 |
| 4.14 | De haut en bas : courant, vorticité, pression et vitesse, et de gauche à droite <b>Algorithmes 19</b> et <b>21</b> , pour $\Delta t = 10^{-3}, Re = 2000, T = 70, \dim(X_H) = 6561, \dim(Y_H) = 1681, \dim(X_h) = 25921, \dim(Y_h) = 6561$ . . . . .          | 117 |
| 4.15 | De haut en bas : courant, vorticité, pression et vitesse, et de gauche à droite <b>Algorithmes 19</b> et <b>21</b> , pour $\Delta t = 10^{-3}, Re = 3200, T = 130, \dim(X_H) = 6561, \dim(Y_H) = 1681, \dim(X_h) = 25921, \dim(Y_h) = 6561$ . . . . .         | 118 |
| 4.16 | De haut en bas : courant, vorticité, pression et vitesse, et de gauche à droite <b>Algorithmes 19</b> et <b>21</b> , pour $\Delta t = 10^{-3}, Re = 5000, T = 148, \dim(X_H) = 6561, \dim(Y_H) = 1681, \dim(X_h) = 25921, \dim(Y_h) = 6561$ . . . . .         | 119 |

---

|      |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |     |
|------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 4.17 | De haut en bas : courant, vorticité, pression et vitesse, et de gauche à droite<br><b>Algorithmes 19</b> et <b>21</b> , pour $\Delta t = 5 \times 10^{-4}$ , $Re = 7500$ , $T = 195$ , $dim(X_H) = 6561$ , $dim(Y_H) = 1681$ , $dim(X_h) = 25921$ , $dim(Y_h) = 6561$ . . . . .                                                                                    | 120 |
| 4.18 | De gauche à droite : $Re = 100, 400, 1000$ ; du temps CPU du schéma sur une grille fine ( <b>Algorithme 19</b> ) et celui de la méthode de séparation d'échelles respectivement.                                                                                                                                                                                   | 124 |
| 4.19 | De haut en bas et de gauche à droite : $Re = 2000, 3200, 5000, 7500$ ; du temps CPU du schéma sur une grille fine ( <b>Algorithme 19</b> ) et celui de la méthode de séparation d'échelles ( <b>Algorithme 21</b> ) respectivement. . . . .                                                                                                                        | 125 |
| 4.20 | De haut en bas : courant, vorticité, pression et vitesse, et de gauche à droite<br><b>Algorithmes 20</b> et <b>25</b> , pour $\alpha = 0.5$ , $\Delta t = 10^{-2}$ , $Re = 100$ , $T = 17$ , $dim(X_H) = 6561$ , $dim(Y_H) = 1681$ , $dim(X_h) = 25921$ , $dim(Y_h) = 6561$ . . . . .                                                                              | 127 |
| 4.21 | De haut en bas : courant, vorticité, pression et vitesse, et de gauche à droite<br><b>Algorithmes 20</b> et <b>26</b> , pour $\alpha = 0.5$ , $\Delta t = 10^{-2}$ , $Re = 100$ , $T = 17$ , $dim(X_H) = 6561$ , $dim(Y_H) = 1681$ , $dim(X_h) = 25921$ , $dim(Y_h) = 6561$ . . . . .                                                                              | 128 |
| 4.22 | De haut en bas : courant, vorticité, pression et vitesse, et de gauche à droite<br><b>Algorithmes 20</b> et <b>25</b> , pour $\alpha = 0.5$ , $\Delta t = 10^{-2}$ , $Re = 400$ , $T = 35$ , $dim(X_H) = 6561$ , $dim(Y_H) = 1681$ , $dim(X_h) = 25921$ , $dim(Y_h) = 6561$ . . . . .                                                                              | 129 |
| 4.23 | De haut en bas : courant, vorticité, pression et vitesse, et de gauche à droite<br><b>Algorithmes 20</b> et <b>26</b> , pour $\alpha = 0.5$ , $\Delta t = 10^{-2}$ , $Re = 400$ , $T = 35$ , $dim(X_H) = 6561$ , $dim(Y_H) = 1681$ , $dim(X_h) = 25921$ , $dim(Y_h) = 6561$ . . . . .                                                                              | 130 |
| 4.24 | De haut en bas : courant, vorticité, pression et vitesse, et de gauche à droite<br><b>Algorithmes 20</b> et <b>25</b> , pour $\alpha = 0.5$ , $\Delta t = 5 \times 10^{-3}$ , $Re = 1000$ , $T = 56$ , $dim(X_H) = 6561$ , $dim(Y_H) = 1681$ , $dim(X_h) = 25921$ , $dim(Y_h) = 6561$ . . . . .                                                                    | 131 |
| 4.25 | De haut en bas : courant, vorticité, pression et vitesse, et de gauche à droite<br><b>Algorithmes 20</b> et <b>26</b> , pour $\alpha = 0.5$ , $\Delta t = 5 \times 10^{-3}$ , $Re = 1000$ , $T = 56$ , $dim(X_H) = 6561$ , $dim(Y_H) = 1681$ , $dim(X_h) = 25921$ , $dim(Y_h) = 6561$ . . . . .                                                                    | 132 |
| 4.26 | De gauche à droite : $Re = 100, 400, 1000$ ; du temps CPU du schéma sur une grille fine ( <b>Algorithme 20</b> ) et celui de la méthode de séparation d'échelles respectivement.                                                                                                                                                                                   | 134 |
| 4.27 | $\left\  \frac{\partial u}{\partial t} \right\ _{L^2(\Omega)}$ vs temps :   gauche pour $\Delta t = 10^{-2}$ , $Re = 400$ , $T = 35$ et à droite pour $\Delta t = 5 \times 10^{-3}$ , $Re = 1000$ , $T = 56$ et $dim(X_H) = 6561$ , $dim(Y_H) = 1681$ , $dim(X_h) = 25921$ , $dim(Y_h) = 6561$ . . . . .                                                           | 138 |
| 4.28 | $\left\  \frac{\partial u}{\partial t} \right\ _{L^2(\Omega)}$ vs temps :   gauche pour $\Delta t = 10^{-2}$ , $Re = 400$ , $T = 35$ et à droite pour $\alpha = 0.5$ , $\Delta t = 5 \times 10^{-3}$ , $Re = 1000$ , $T = 56$ et $dim(X_H) = 6561$ , $dim(Y_H) = 1681$ , $dim(X_h) = 25921$ , $dim(Y_h) = 6561$ . . . . .                                          | 140 |
| 4.29 | De haut en bas et de gauche à droite : la vitesse exacte puis celles du schéma sur une grille fine ( <b>Algorithme 19</b> ) et celles de la méthode de séparation d'échelles<br><b>Algorithmes 21, 22, 23, 24</b> , pour $\Delta t = 10^{-2}$ , $Re = 100$ , $T = 17$ et $dim(X_H) = 6561$ , $dim(Y_H) = 1681$ , $dim(X_h) = 25921$ , $dim(Y_h) = 6561$ . . . . .  | 141 |
| 4.30 | De haut en bas et de gauche à droite : la pression exacte puis celles du schéma sur une grille fine ( <b>Algorithme 19</b> ) et celles de la méthode de séparation d'échelles<br><b>Algorithmes 21, 22, 23, 24</b> , pour $\Delta t = 10^{-2}$ , $Re = 100$ , $T = 17$ et $dim(X_H) = 6561$ , $dim(Y_H) = 1681$ , $dim(X_h) = 25921$ , $dim(Y_h) = 6561$ . . . . . | 142 |
| 4.31 | De haut en bas et de gauche à droite : la vitesse exacte puis celles du schéma sur une grille fine ( <b>Algorithme 19</b> ) et celles de la méthode de séparation d'échelles<br><b>Algorithmes 21, 22, 23, 24</b> , pour $\Delta t = 10^{-2}$ , $Re = 400$ , $T = 35$ et $dim(X_H) = 6561$ , $dim(Y_H) = 1681$ , $dim(X_h) = 25921$ , $dim(Y_h) = 6561$ . . . . .  | 143 |

|      |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |     |
|------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 4.32 | De haut en bas et de gauche à droite : la pression exacte puis celles du schéma sur une grille fine ( <b>Algorithme 19</b> ) et celles de la méthode de séparation d'échelles <b>Algorithmes 21, 22, 23, 24</b> , pour $\Delta t = 10^{-2}$ , $Re = 400$ , $T = 35$ et $\dim(X_H) = 6561$ , $\dim(Y_H) = 1681$ , $\dim(X_h) = 25921$ , $\dim(Y_h) = 6561$ . . . . .                                                                                                                                                                                                                     | 144 |
| 4.33 | De haut en bas et de gauche à droite : la vitesse exacte puis celles du schéma sur une grille fine ( <b>Algorithme 19</b> ) et celles de la méthode de séparation d'échelles <b>Algorithmes 21, 22, 23, 24</b> , pour $\Delta t = 5 \times 10^{-3}$ , $Re = 1000$ , $T = 56$ et $\dim(X_H) = 6561$ , $\dim(Y_H) = 1681$ , $\dim(X_h) = 25921$ , $\dim(Y_h) = 6561$ . . . . .                                                                                                                                                                                                            | 145 |
| 4.34 | De haut en bas et de gauche à droite : la pression exacte puis celles du schéma sur une grille fine ( <b>Algorithme 19</b> ) et celles de la méthode de séparation d'échelles <b>Algorithmes 21, 22, 23, 24</b> , pour $\Delta t = 5 \times 10^{-3}$ , $Re = 1000$ , $T = 56$ et $\dim(X_H) = 6561$ , $\dim(Y_H) = 1681$ , $\dim(X_h) = 25921$ , $\dim(Y_h) = 6561$ . . . . .                                                                                                                                                                                                           | 146 |
| 4.35 | De haut en bas et de gauche à droite : la vitesse exacte puis celles du schéma sur une grille fine incrémental ( <b>Algorithme 20</b> ) et celles de la méthode de séparation d'échelles <b>Algorithmes 25, 26</b> , de même pour la pression pour $\Delta t = 10^{-2}$ , $Re = 100$ , $\alpha = 0.5$ , $T = 17$ et $\dim(X_H) = 6561$ , $\dim(Y_H) = 1681$ , $\dim(X_h) = 25921$ , $\dim(Y_h) = 6561$ . . . . .                                                                                                                                                                        | 147 |
| 4.36 | De haut en bas et de gauche à droite : la vitesse exacte puis celles du schéma sur une grille fine incrémental ( <b>Algorithme 20</b> ) et celles de la méthode de séparation d'échelles <b>Algorithmes 25, 26</b> , de même pour la pression pour $\Delta t = 10^{-2}$ , $Re = 400$ , $\alpha = 0.5$ , $T = 35$ et $\dim(X_H) = 6561$ , $\dim(Y_H) = 1681$ , $\dim(X_h) = 25921$ , $\dim(Y_h) = 6561$ . . . . .                                                                                                                                                                        | 148 |
| 4.37 | De haut en bas et de gauche à droite : la vitesse exacte puis celles du schéma sur une grille fine incrémental ( <b>Algorithme 20</b> ) et celles de la méthode de séparation d'échelles <b>Algorithmes 25, 26</b> , de même pour la pression pour $\Delta t = 5 \times 10^{-3}$ , $Re = 1000$ , $\alpha = 0.5$ , $T = 56$ et $\dim(X_H) = 6561$ , $\dim(Y_H) = 1681$ , $\dim(X_h) = 25921$ , $\dim(Y_h) = 6561$ . . . . .                                                                                                                                                              | 149 |
| 4.38 | L'erreur en norme $L^2$ à gauche pour les vitesses et à droite pour les pressions entre le schéma sur une grille fine incrémental ( <b>Algorithme 20</b> ), celles de la méthode de séparation d'échelles <b>Algorithmes 25, 26</b> et la solution exacte. De bas en haut $\Delta t = 10^{-2}$ , $Re = 100$ , $\alpha = 0.5$ , $T = 17$ puis $\Delta t = 10^{-2}$ , $Re = 400$ , $\alpha = 0.5$ , $T = 35$ et $\Delta t = 5 \times 10^{-3}$ , $Re = 1000$ , $\alpha = 0.5$ , $T = 56$ pour $\dim(X_H) = 6561$ , $\dim(Y_H) = 1681$ , $\dim(X_h) = 25921$ , $\dim(Y_h) = 6561$ . . . . . | 150 |
| 5.1  | La solution $\phi_h$ ; de haut en bas et de gauche à droite pour : <b>Algorithme 37</b> (Référence 1 grille), <b>Algorithmes 38, 39, 40, 41</b> à $t = 0$ . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | 166 |
| 5.2  | La solution $\phi_h$ ; de haut en bas et de gauche à droite pour : <b>Algorithme 37</b> (Référence 1 grille), <b>Algorithmes 38, 39, 40, 41</b> à $t = 0.02$ . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 167 |
| 5.3  | La solution $\phi_h$ ; de haut en bas et de gauche à droite pour : <b>Algorithme 37</b> (Référence 1 grille), <b>Algorithmes 38, 39, 40, 41</b> à $t = 0.04$ . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 168 |
| 5.4  | La solution $\phi_h$ ; de haut en bas et de gauche à droite pour : <b>Algorithme 37</b> (Référence 1 grille), <b>Algorithmes 38, 39, 40, 41</b> à $t = 0.08$ . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 169 |
| 5.5  | La solution $\phi_h$ ; de haut en bas et de gauche à droite pour : <b>Algorithme 37</b> (Référence 1 grille), <b>Algorithmes 42, 43, 44, 45, 46</b> à $t = 0$ . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 170 |
| 5.6  | La solution $\phi_h$ ; de haut en bas et de gauche à droite pour : <b>Algorithme 37</b> (Référence 1 grille), <b>Algorithmes 42, 43, 44, 45, 46</b> à $t = 0.02$ . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | 171 |
| 5.7  | La solution $\phi_h$ ; de haut en bas et de gauche à droite pour : <b>Algorithme 37</b> (Référence 1 grille), <b>Algorithmes 42, 43, 44, 45, 46</b> à $t = 0.04$ . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | 172 |

---

|      |                                                                                                                                                                                                                                                      |     |
|------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 5.8  | La solution $\phi_h$ ; de haut en bas et de gauche à droite pour : <b>Algorithme 37</b><br>(Référence 1 grille), <b>Algorithmes 42, 43, 44, 45, 46</b> à $t = 0.08$ . . . . .                                                                        | 173 |
| 5.9  | Comparaison CPU (deux bulles) entre le schéma sur une grille fine et ceux de la<br>méthode de séparation d'échelles (uniquement vitesse) : <b>Algorithmes 38, 39, 40,</b><br><b>41</b> avec $T = 0.5$ et $N_f = 32, N_c = 16$ . . . . .              | 174 |
| 5.10 | Comparaison CPU (deux bulles) entre le schéma sur une grille fine et ceux de la<br>méthode de séparation d'échelles (concentration et vitesse) : <b>Algorithmes 42,</b><br><b>43, 44, 45, 46</b> avec $T = 0.5$ et $N_f = 32, N_c = 16$ . . . . .    | 174 |
| 5.11 | La solution $\phi_h$ bulle montante; de haut en bas et de gauche à droite pour :<br><b>Algorithme 37</b> (Référence 1 grille), <b>Algorithmes 38, 39, 40, 41</b> à $t = 0$ . . . .                                                                   | 175 |
| 5.12 | La solution $\phi_h$ bulle montante; de haut en bas et de gauche à droite pour :<br><b>Algorithme 37</b> (Référence 1 grille), <b>Algorithmes 38, 39, 40, 41</b> à $t = 0.02$ . . .                                                                  | 176 |
| 5.13 | La solution $\phi_h$ bulle montante; de haut en bas et de gauche à droite pour :<br><b>Algorithme 37</b> (Référence 1 grille), <b>Algorithmes 38, 39, 40, 41</b> à $t = 0.04$ . . .                                                                  | 177 |
| 5.14 | La solution $\phi_h$ bulle montante; de haut en bas et de gauche à droite pour :<br><b>Algorithme 37</b> (Référence 1 grille), <b>Algorithmes 38, 39, 40, 41</b> à $t = 0.1$ . . .                                                                   | 178 |
| 5.15 | La solution $\phi_h$ bulle montante; de haut en bas et de gauche à droite pour :<br><b>Algorithme 37</b> (Référence 1 grille), <b>Algorithmes 38, 39, 40, 41</b> à $t = 0.2$ . . .                                                                   | 179 |
| 5.16 | La solution $\phi_h$ bulle montante; de haut en bas et de gauche à droite pour :<br><b>Algorithme 37</b> (Référence 1 grille), <b>Algorithmes 38, 39, 40, 41</b> à $t = 0.3$ . . .                                                                   | 180 |
| 5.17 | La solution $\phi_h$ bulle montante; de haut en bas et de gauche à droite pour :<br><b>Algorithme 37</b> (Référence 1 grille), <b>Algorithmes 42, 43, 44, 45, 46</b> à $t = 0$ . .                                                                   | 181 |
| 5.18 | La solution $\phi_h$ bulle montante; de haut en bas et de gauche à droite pour :<br><b>Algorithme 37</b> (Référence 1 grille), <b>Algorithmes 42, 43, 44, 45, 46</b> à $t = 0.02$ . 182                                                              |     |
| 5.19 | La solution $\phi_h$ bulle montante; de haut en bas et de gauche à droite pour :<br><b>Algorithme 37</b> (Référence 1 grille), <b>Algorithmes 42, 43, 44, 45, 46</b> à $t = 0.04$ . 183                                                              |     |
| 5.20 | La solution $\phi_h$ bulle montante; de haut en bas et de gauche à droite pour :<br><b>Algorithme 37</b> (Référence 1 grille), <b>Algorithmes 42, 43, 44, 45, 46</b> à $t = 0.1$ . 184                                                               |     |
| 5.21 | La solution $\phi_h$ bulle montante; de haut en bas et de gauche à droite pour :<br><b>Algorithme 37</b> (Référence 1 grille), <b>Algorithmes 42, 43, 44, 45, 46</b> à $t = 0.2$ . 185                                                               |     |
| 5.22 | La solution $\phi_h$ bulle montante; de haut en bas et de gauche à droite pour :<br><b>Algorithme 37</b> (Référence 1 grille), <b>Algorithmes 42, 43, 44, 45, 46</b> à $t = 0.3$ . 186                                                               |     |
| 5.23 | Comparaison CPU (bulle montante) entre le schéma sur une grille fine et ceux de<br>la méthode de séparation d'échelles (uniquement vitesse) : <b>Algorithmes 38, 39,</b><br><b>40, 41</b> avec $T = 0.5$ et $N_f = 32, N_c = 16$ . . . . .           | 187 |
| 5.24 | Comparaison CPU (bulle montante) entre le schéma sur une grille fine et ceux de<br>la méthode de séparation d'échelles (concentration et vitesse) : <b>Algorithmes 42,</b><br><b>43, 44, 45, 46</b> avec $T = 0.5$ et $N_f = 32, N_c = 16$ . . . . . | 187 |
| 5.25 | $\left\  \frac{\partial u}{\partial t} \right\ _{L^2(\Omega)}$ vs temps : pour $\Delta t = 10^{-2}, N_f = 32, N_c = 16$ pour $Re = 100, 400, 1000$<br>de gauche à droite (cas de deux bulles). . . . .                                               | 189 |
| 5.26 | $\left\  \frac{\partial u}{\partial t} \right\ _{L^2(\Omega)}$ vs temps : (cas d'une bulle montante) de gauche à droite : $\Delta t =$<br>$10^{-2}, Re = 100, \Delta t = 3 \times 10^{-3}, Re = 400$ et $\Delta t = 10^{-3}, Re = 1000$ . . . . .    | 190 |
| 6.1  | La solution $\phi_h$ ; de haut en bas et de gauche à droite pour : <b>Algorithme 48</b><br>(Référence 1 grille), <b>Algorithmes 49, 50, 51, 52</b> à $t = 0$ . . . . .                                                                               | 204 |

|      |                                                                                                                                                                                                                                                           |     |
|------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 6.2  | La solution $\phi_h$ ; de haut en bas et de gauche à droite pour : <b>Algorithme 48</b><br>(Référence 1 grille), <b>Algorithmes 49, 50, 51, 52</b> à $t = 0.0002$ . . . . .                                                                               | 205 |
| 6.3  | La solution $\phi_h$ ; de haut en bas et de gauche à droite pour : <b>Algorithme 48</b><br>(Référence 1 grille), <b>Algorithmes 49, 50, 51, 52</b> à $t = 0.002$ . . . . .                                                                                | 206 |
| 6.4  | La solution $\phi_h$ ; de haut en bas et de gauche à droite pour : <b>Algorithme 48</b><br>(Référence 1 grille), <b>Algorithmes 49, 50, 51, 52</b> à $t = 0.008$ . . . . .                                                                                | 207 |
| 6.5  | La solution $\phi_h$ ; de haut en bas et de gauche à droite pour : <b>Algorithme 48</b><br>(Référence 1 grille), <b>Algorithmes 53, 54, 55, 56, 57</b> à $t = 0$ . . . . .                                                                                | 208 |
| 6.6  | La solution $\phi_h$ ; de haut en bas et de gauche à droite pour : <b>Algorithme 48</b><br>(Référence 1 grille), <b>Algorithmes 53, 54, 55, 56, 46</b> à $t = 0.0002$ . . . . .                                                                           | 209 |
| 6.7  | La solution $\phi_h$ ; de haut en bas et de gauche à droite pour : <b>Algorithme 48</b><br>(Référence 1 grille), <b>Algorithmes 53, 54, 55, 56, 57</b> à $t = 0.002$ . . . . .                                                                            | 210 |
| 6.8  | La solution $\phi_h$ ; de haut en bas et de gauche à droite pour : <b>Algorithme 48</b><br>(Référence 1 grille), <b>Algorithmes 53, 54, 55, 56, 57</b> à $t = 0.008$ . . . . .                                                                            | 211 |
| 6.9  | Comparaison CPU (bulle rectangulaire) entre le schéma sur une grille fine et ceux<br>de la méthode de séparation d'échelles (uniquement vitesse) : <b>Algorithmes 49,</b><br><b>50, 51, 52</b> avec $T = 0.5$ et $N_f = 32, N_c = 16$ . . . . .           | 212 |
| 6.10 | Comparaison CPU (bulle rectangulaire) entre le schéma sur une grille fine et ceux<br>de la méthode de séparation d'échelles (concentration et vitesse) : <b>Algorithmes</b><br><b>53, 54, 55, 56, 57</b> avec $T = 0.5$ et $N_f = 32, N_c = 16$ . . . . . | 212 |
| 6.11 | Energie vs temps- Comparaison entre l' <b>Algorithme 48</b> (Référence 1 grille) et<br>l' <b>Algorithme 54</b> pour $\Delta t = 0.0001$ . . . . .                                                                                                         | 213 |
| 6.12 | Moyenne vs temps- Comparaison entre l' <b>Algorithme 48</b> (Référence 1 grille) et<br>l' <b>Algorithme 54</b> pour $\Delta t = 0.0001$ . . . . .                                                                                                         | 213 |
| 6.13 | La solution $\phi_h$ ; de haut en bas et de gauche à droite pour : <b>Algorithme 48</b><br>(Référence 1 grille), <b>Algorithmes 49, 50, 51, 52</b> à $t = 0$ . . . . .                                                                                    | 214 |
| 6.14 | La solution $\phi_h$ ; de haut en bas et de gauche à droite pour : <b>Algorithme 48</b><br>(Référence 1 grille), <b>Algorithmes 49, 50, 51, 52</b> à $t = 0.0001$ . . . . .                                                                               | 215 |
| 6.15 | La solution $\phi_h$ ; de haut en bas et de gauche à droite pour : <b>Algorithme 48</b><br>(Référence 1 grille), <b>Algorithmes 49, 50, 51, 52</b> à $t = 0.0002$ . . . . .                                                                               | 216 |
| 6.16 | La solution $\phi_h$ ; de haut en bas et de gauche à droite pour : <b>Algorithme 48</b><br>(Référence 1 grille), <b>Algorithmes 49, 50, 51, 52</b> à $t = 0.0004$ . . . . .                                                                               | 217 |
| 6.17 | La solution $\phi_h$ ; de haut en bas et de gauche à droite pour : <b>Algorithme 48</b><br>(Référence 1 grille), <b>Algorithmes 49, 50, 51, 52</b> à $t = 0.0008$ . . . . .                                                                               | 218 |
| 6.18 | La solution $\phi_h$ ; de haut en bas et de gauche à droite pour : <b>Algorithme 48</b><br>(Référence 1 grille), <b>Algorithmes 53, 54, 55, 56, 57</b> à $t = 0$ . . . . .                                                                                | 219 |
| 6.19 | La solution $\phi_h$ ; de haut en bas et de gauche à droite pour : <b>Algorithme 48</b><br>(Référence 1 grille), <b>Algorithmes 53, 54, 55, 56, 57</b> à $t = 0.0001$ . . . . .                                                                           | 220 |
| 6.20 | La solution $\phi_h$ ; de haut en bas et de gauche à droite pour : <b>Algorithme 48</b><br>(Référence 1 grille), <b>Algorithmes 53, 54, 55, 56, 57</b> à $t = 0.0002$ . . . . .                                                                           | 221 |
| 6.21 | La solution $\phi_h$ ; de haut en bas et de gauche à droite pour : <b>Algorithme 48</b><br>(Référence 1 grille), <b>Algorithmes 53, 54, 55, 56, 57</b> à $t = 0.0004$ . . . . .                                                                           | 222 |
| 6.22 | La solution $\phi_h$ ; de haut en bas et de gauche à droite pour : <b>Algorithme 48</b><br>(Référence 1 grille), <b>Algorithmes 53, 54, 55, 56, 57</b> à $t = 0.0008$ . . . . .                                                                           | 223 |
| 6.23 | Comparaison CPU (deux bulles) entre le schéma sur une grille fine et ceux de la<br>méthode de séparation d'échelles (uniquement vitesse) : <b>Algorithmes 49, 50, 51,</b><br><b>52</b> avec $T = 0.2$ et $N_f = 32, N_c = 16$ . . . . .                   | 224 |

---

|      |                                                                                                                                                                                                                                      |     |
|------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 6.24 | Comparaison CPU (deux bulles) entre le schéma sur une grille fine et ceux de la méthode de séparation d'échelles (concentration et vitesse) : <b>Algorithmes 53, 54, 55, 56, 57</b> avec $T = 0.2$ et $N_f = 32, N_c = 16$ . . . . . | 224 |
| 6.25 | Energie vs temps- Comparaison entre l' <b>Algorithme 48</b> (Référence 1 grille) et l' <b>Algorithme 54</b> pour $\Delta t = 0.00001$ . . . . .                                                                                      | 225 |
| 6.26 | Moyenne vs temps- Comparaison entre l' <b>Algorithme 48</b> (Référence 1 grille) et l' <b>Algorithme 54</b> pour $\Delta t = 0.00001$ . . . . .                                                                                      | 225 |



# Liste des tableaux

|      |                                                                                                                                                                                                                  |     |
|------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 2.1  | Comparaison du temps CPU et des itérations globales pour la méthode du point fixe de Lemaréchal et Picard et pour différentes valeurs de $N$ . . . . .                                                           | 54  |
| 2.2  | $\varepsilon = 0.03$ , $\Delta t = 0.007$ , $u_0(x, y) = \cos(4\pi x) \cos(4\pi y)$ , éléments $\mathbb{P}_2$ . . . . .                                                                                          | 66  |
| 2.3  | $\varepsilon = 0.03$ , $\Delta t = 0.01$ , $u_0(x, y) = \cos(4\pi x) \cos(4\pi y)$ , éléments $\mathbb{P}_1$ . . . . .                                                                                           | 66  |
| 2.4  | $\varepsilon = 0.03$ , $\Delta t = 0.01$ , $u_0(x, y) = \cos(8\pi x) \cos(7\pi y)$ , éléments $\mathbb{P}_2$ . . . . .                                                                                           | 66  |
| 3.1  | Comparaison du temps CPU et des nombre d'itérations pour les méthodes du point fixe de Lemaréchal et Picard et pour différentes valeurs de $N$ . . . . .                                                         | 72  |
| 3.2  | $\varepsilon = 0.03$ , $\Delta t = 0.001$ , $u_0(x, y) = \cos(4\pi x) \cos(4\pi y)$ , éléments $\mathbb{P}_2$ . . . . .                                                                                          | 85  |
| 3.3  | $\varepsilon = 0.03$ , $\Delta t = 0.001$ , $u_0(x, y) = \cos(4\pi x) \cos(4\pi y)$ , éléments $\mathbb{P}_1$ . . . . .                                                                                          | 85  |
| 4.1  | Navier-Stokes non incrémental $\Delta t = 10^{-2}$ , $\tau = 0.5$ , $Re = 100$ , $T = 17$ et $\mathbb{P}_2/\mathbb{P}_1$ ; PV= Tourbillon principal; BRV=Contre tourbillondroit. . . . .                         | 121 |
| 4.2  | Navier-Stokes non incrémental $\Delta t = 10^{-2}$ , $\tau = 0.5$ , $Re = 400$ , $T = 35$ et $\mathbb{P}_2/\mathbb{P}_1$ , PV= Tourbillon principal; BRV=Contre tourbillondroit. . . . .                         | 121 |
| 4.3  | Navier-Stokes non incrémental $\Delta t = 5 \times 10^{-3}$ , $\tau = 0.5$ , $Re = 1000$ , $T = 56$ et $\mathbb{P}_2/\mathbb{P}_1$ ; PV= Tourbillon principal; BRV=Contre tourbillondroit. . . . .               | 122 |
| 4.4  | Navier-Stokes non incrémental $\Delta t = 10^{-3}$ , $\tau = 0.5$ , $Re = 2000$ , $T = 70$ et $\mathbb{P}_2/\mathbb{P}_1$ ; PV= Tourbillon principal; BRV=Contre tourbillon droit. . . . .                       | 122 |
| 4.5  | Navier-Stokes non incrémental $\Delta t = 10^{-3}$ , $\tau = 0.5$ , $Re = 3200$ , $T = 130$ et $\mathbb{P}_2/\mathbb{P}_1$ , PV= Tourbillon principal; BRV=Contre tourbillon droit. . . . .                      | 123 |
| 4.6  | Navier-Stokes non incrémental $\Delta t = 10^{-3}$ , $\tau = 0.5$ , $Re = 5000$ , $T = 148$ et $\mathbb{P}_2/\mathbb{P}_1$ , PV= Tourbillon principal; BRV=Contre tourbillondroit. . . . .                       | 123 |
| 4.7  | Navier-Stokes non incrémental $\Delta t = 5 \times 10^{-4}$ , $\tau = 0.5$ , $Re = 7500$ , $T = 195$ et $\mathbb{P}_2/\mathbb{P}_1$ , PV= Tourbillon principal; BRV=Contre tourbillondroit. . . . .              | 124 |
| 4.8  | Navier-Stokes non incrémental $Re = 100$ , $\Delta t = 10^{-2}$ et $\mathbb{P}_2/\mathbb{P}_1$ . . . . .                                                                                                         | 125 |
| 4.9  | Navier-Stokes non incrémental $Re = 400$ , $\Delta t = 10^{-2}$ et $\mathbb{P}_2/\mathbb{P}_1$ . . . . .                                                                                                         | 126 |
| 4.10 | Navier-Stokes non incrémental $Re = 1000$ , $\Delta t = 5 \times 10^{-3}$ et $\mathbb{P}_2/\mathbb{P}_1$ . . . . .                                                                                               | 126 |
| 4.11 | Navier-Stokes non incrémental <b>Algorithme 21</b> pour $Re = 2000, 3200, 5000, 7500$ et $\mathbb{P}_2/\mathbb{P}_1$ . . . . .                                                                                   | 126 |
| 4.12 | Navier-Stokes incrémental $\Delta t = 10^{-2}$ , $\alpha = 0.5$ , $\tau = 0.5$ , $Re = 100$ , $T = 17$ et $\mathbb{P}_2/\mathbb{P}_1$ ; PV= Tourbillon principal; BRV=Contre tourbillon droit. . . . .           | 133 |
| 4.13 | Navier-Stokes incrémental $\Delta t = 10^{-2}$ , $\alpha = 0.5$ , $\tau = 0.5$ , $Re = 400$ , $T = 35$ et $\mathbb{P}_2/\mathbb{P}_1$ , PV= Tourbillon principal; BRV=Contre tourbillon droit. . . . .           | 133 |
| 4.14 | Navier-Stokes incrémental $\Delta t = 5 \times 10^{-3}$ , $\alpha = 0.5$ , $\tau = 0.5$ , $Re = 1000$ , $T = 56$ et $\mathbb{P}_2/\mathbb{P}_1$ ; PV= Tourbillon principal; BRV=Contre tourbillon droit. . . . . | 134 |
| 4.15 | Navier-Stokes incrémental $\alpha = 0.5$ , $Re = 100$ , $\Delta t = 10^{-2}$ et $\mathbb{P}_2/\mathbb{P}_1$ . . . . .                                                                                            | 135 |
| 4.16 | Navier-Stokes incrémental $\alpha = 0.5$ , $Re = 400$ , $\Delta t = 10^{-2}$ et $\mathbb{P}_2/\mathbb{P}_1$ . . . . .                                                                                            | 135 |



|      |                                                                                                                                         |     |
|------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 4.17 | Navier-Stokes incrémental $\alpha = 0.5, Re = 1000, \Delta t = 5 \times 10^{-3}$ et $\mathbb{P}_2/\mathbb{P}_1$                         | 135 |
| 4.18 | $Re = 100, \dim(X_H) = 6561, \dim(Y_H) = 1681, \dim(X_h) = 25921, \dim(Y_h) = 6561, \mathbb{P}_2/\mathbb{P}_1$                          | 137 |
| 4.19 | $Re = 400, \dim(X_H) = 6561, \dim(Y_H) = 1681, \dim(X_h) = 25921, \dim(Y_h) = 6561, \mathbb{P}_2/\mathbb{P}_1$                          | 137 |
| 4.20 | $Re = 1000, \dim(X_H) = 6561, \dim(Y_H) = 1681, \dim(X_h) = 25921, \dim(Y_h) = 6561, \mathbb{P}_2/\mathbb{P}_1$                         | 137 |
| 4.21 | Navier-Stokes non incrémental $\Delta t$ maximal et stabilité.                                                                          | 138 |
| 4.22 | $Re = 100, \alpha = 0.5, \dim(X_H) = 6561, \dim(Y_H) = 1681, \dim(X_h) = 25921, \dim(Y_h) = 6561, \mathbb{P}_2/\mathbb{P}_1$            | 139 |
| 4.23 | $Re = 400, \alpha = 0.5, \dim(X_H) = 6561, \dim(Y_H) = 1681, \dim(X_h) = 25921, \dim(Y_h) = 6561, \mathbb{P}_2/\mathbb{P}_1$            | 139 |
| 4.24 | $Re = 1000, \alpha = 0.5, \dim(X_H) = 6561, \dim(Y_H) = 1681, \dim(X_h) = 25921, \dim(Y_h) = 6561, \mathbb{P}_2/\mathbb{P}_1$           | 139 |
| 4.25 | Navier-Stokes incrémental $\alpha = 0.5, \Delta t$ maximal et stabilité.                                                                | 140 |
| 5.1  | Séparation d'échelles Allen-Cahn/Navier-Stokes deux bulles (bi-grilles vitesse uniquement) $\mathbb{P}_2/\mathbb{P}_1$                  | 174 |
| 5.2  | Séparation d'échelles Allen-Cahn/Navier-Stokes deux bulles (bi-grilles concentration et vitesse) $\mathbb{P}_2/\mathbb{P}_1$            | 174 |
| 5.3  | Séparation d'échelles Allen-Cahn/Navier-Stokes bulle montante (bi-grilles vitesse uniquement) $\mathbb{P}_2/\mathbb{P}_1$               | 187 |
| 5.4  | Séparation d'échelles Allen-Cahn/Navier-Stokes bulle montante (bi-grilles concentration et vitesse) $\mathbb{P}_2/\mathbb{P}_1$         | 187 |
| 5.5  | $Re = 10, N_f = 32, N_c = 16, \mathbb{P}_2/\mathbb{P}_1$ éléments (cas de deux bulles)                                                  | 188 |
| 5.6  | $Re = 100, N_f = 32, N_c = 16, \mathbb{P}_2/\mathbb{P}_1$ éléments (cas de deux bulles)                                                 | 189 |
| 5.7  | $Re = 400, N_f = 32, N_c = 16, \mathbb{P}_2/\mathbb{P}_1$ éléments (cas de deux bulles)                                                 | 189 |
| 5.8  | $Re = 1000, N_f = 32, N_c = 16, \mathbb{P}_2/\mathbb{P}_1$ éléments (cas de deux bulles)                                                | 189 |
| 5.9  | $Re = 10, N_f = 32, N_c = 16, \mathbb{P}_2/\mathbb{P}_1$ éléments (cas d'une bulle montante)                                            | 190 |
| 5.10 | $Re = 100, N_f = 32, N_c = 16, \mathbb{P}_2/\mathbb{P}_1$ éléments (cas d'une bulle montante)                                           | 190 |
| 5.11 | $Re = 400, N_f = 32, N_c = 16, \mathbb{P}_2/\mathbb{P}_1$ éléments (cas d'une bulle montante)                                           | 190 |
| 5.12 | $Re = 1000, N_f = 32, N_c = 16, \mathbb{P}_2/\mathbb{P}_1$ éléments (cas d'une bulle montante)                                          | 190 |
| 6.1  | Séparation d'échelles Cahn-Hilliard/Navier-Stokes bulle rectangulaire (bi-grilles vitesse uniquement) $\mathbb{P}_2/\mathbb{P}_1$       | 212 |
| 6.2  | Séparation d'échelles Cahn-Hilliard/Navier-Stokes bulle rectangulaire (bi-grilles vitesse et concentration) $\mathbb{P}_2/\mathbb{P}_1$ | 212 |
| 6.3  | Séparation d'échelles Cahn-Hilliard/Navier-Stokes deux bulles (bi-grilles vitesse uniquement) $\mathbb{P}_2/\mathbb{P}_1$               | 224 |
| 6.4  | Séparation d'échelles Cahn-Hilliard/Navier-Stokes deux bulles (bi-grilles vitesse et concentration) $\mathbb{P}_2/\mathbb{P}_1$         | 224 |
| 6.5  | $Re = 10, N_f = 32, N_c = 16, \mathbb{P}_2/\mathbb{P}_1$ éléments (cas d'une bulle rectangulaire)                                       | 226 |
| 6.6  | $Re = 100, N_f = 32, N_c = 16, \mathbb{P}_2/\mathbb{P}_1$ éléments (cas d'une bulle rectangulaire)                                      | 226 |
| 6.7  | $Re = 400, N_f = 32, N_c = 16, \mathbb{P}_2/\mathbb{P}_1$ éléments (cas d'une bulle rectangulaire)                                      | 226 |
| 6.8  | $Re = 1000, N_f = 32, N_c = 16, \mathbb{P}_2/\mathbb{P}_1$ éléments (cas d'une bulle rectangulaire)                                     | 227 |

# Méthodes bi-grilles en éléments finis pour les systèmes phase-fluide

## Résumé

Cette thèse porte sur le développement, l'analyse et la mise en œuvre de nouvelles méthodes bi-grilles en éléments finis pour des équations de réaction-diffusion de type champs de phase (Allen-Cahn, Cahn-Hilliard) ainsi que leur couplage avec les équations de Navier-Stokes 2D incompressible. La présence d'un petit paramètre (largeur de l'interface) dans les modèles à interface diffuse demande à utiliser des schémas temporels implicites et coûteux tandis que ceux semi implicites sont rapides mais limités en stabilité. Les nouveaux schémas introduits ici reposent sur l'utilisation conjointe de deux espaces d'éléments finis, un grossier  $V_H$  et un fin  $V_h$ , de plus grande dimension, permettant de décomposer la solution en partie principale portant les composantes bas modes et en une partie fluctuante portant les modes élevés. L'approche bi-grilles proposée consiste à appliquer les schémas stables (coûteux) sur  $V_H$  (prédiction) et à effectuer une correction sur  $V_h$  à l'aide d'un schéma linéaire dont les composantes modes élevés sont stabilisées. Un gain important en temps CPU est obtenu au prix d'une faible perte de consistance. Dans ce contexte, de nouvelles méthodes numériques sont proposées pour les modèles de champs de phase et leur couplage fluide. Nous donnons des résultats de stabilité et validons l'approche sur des bancs d'essais.

**Mots-clés:** Equation d'Allen-Cahn, équation de Cahn-Hilliard, équations de Navier-Stokes, couplage, mécanique des fluides, méthode bi-grilles, stabilisation, séparation d'échelles, projection Chorin-Temam.



# Bi-grids methods in finite elements for phase-field systems

## Abstract

This thesis deals with the development, the analysis and the implementation of new bi-grid schemes in finite elements, when applied to phase-field models such as Allen-Cahn (AC) and Cahn-Hilliard (CH) equations but also their coupling with 2D incompressible Navier-Stokes equations. Due to the presence of a small parameter, namely the length of the diffuse interface, and in order to recover the intrinsic properties of the solution, (costly) implicit time schemes must be used; semi-implicit time schemes are fast but suffer from a hard time step limitation. The new schemes introduced in the present work are based on the use of two FEM spaces, one coarse  $V_H$  and one fine  $V_h$ , of larger dimension. This allows to decompose the solution into a main part (containing only low mode components) and a fluctuant part capturing the high mode ones. The bi-grid approach consists then in applying as a prediction an unconditional stable scheme (costly) to  $V_H$  and to update the solution in  $V_h$  by using a high mode stabilized linear scheme. A gain in CPU time is obtained while the consistency is not deteriorated. This approach is extended to NSE and to coupled models (AC/NSE) and (CH/NSE). Stability results are given, the numerical simulations are validated on reference benchmarks.

**Keywords:** Allen-Cahn equation, Cahn-Hilliard equation, Navier-Stokes equation, coupling, fluid mechanics, bi-grid method, stabilization, separation of the scales, Chorin-Temam projection.

