



HAL
open science

Le concept d'adjonction dans la théorie des catégories : son développement et son importance

Sergio Ivan Valencia Marin

► **To cite this version:**

Sergio Ivan Valencia Marin. Le concept d'adjonction dans la théorie des catégories : son développement et son importance. Philosophie. Université Paris Cité, 2021. Français. NNT : 2021UNIP7077 . tel-03648089

HAL Id: tel-03648089

<https://theses.hal.science/tel-03648089>

Submitted on 21 Apr 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**Thèse de doctorat
de l'Université de Paris**

École doctorale : Savoirs, Sciences, Education (ED 623)

Laboratoire SPHERE, UMR 7219

**Le concept d'adjonction dans la théorie des
catégories : son développement et son
importance**

Par **Sergio VALENCIA**

Thèse de doctorat d'Histoire et philosophie des sciences

Dirigée par Jean-Jacques SZCZECINIARZ

Professeur du Département Histoire et Philosophie des Sciences

Présentée et soutenue publiquement le 27 Mars 2021

Devant un jury composé de :

Jean-Pierre MARQUIS (Rapporteur, Président du jury). Professeur à l'Université de Montréal (Canada)

Claudio BARTOCCI (Rapporteur). Professeur à l'Université de Gènes (Italie)

Guillermo ORTIZ RICO (Examineur). Professeur du Département de mathématiques à l'Université de Valle (Colombie)

Maribel ANACONA (Examinatrice). Professeur de l'Institut d'éducation et de pédagogie à l'Université de Valle (Colombie)

Ralph KRÖMER (Examineur). Professeur à l'Université de Wuppertal (Allemagne)

Jessica CARTER (Examinatrice). Professeur à l'Université d'Aarhus (Danemark)

Marco PANZA (Membre invité). Directeur de recherche au CNRS

Jean-Jacques SZCZECINIARZ (Directeur de thèse). Professeur à l'Université de Paris



Le concept d'adjonction dans la théorie des catégories : son développement et son importance

Résumé : L'objectif de cette thèse est de faire une étude historique et épistémologique de la notion d'adjonction dans le cadre de la théorie des catégories, afin de montrer son développement historique, sa relation avec d'autres concepts et méthodes mathématiques et, en fin de compte, de montrer son importance à la fois du point de vue mathématique et son intervention dans la discussion sur les fondements des mathématiques.

L'analyse historique portera sur la période historique de 1945 à 1958, période qui va de la naissance des premiers concepts catégoriels par Samuel Eilenberg et Saunders MacLane à la publication de l'article *Adjoint Functors* par Daniel Kan.

De même, on analysera certains contextes mathématiques associés au concept d'adjonction pour apprécier si dans de tels contextes le phénomène de l'adjonction était déjà présenté avant la publication de l'article de Kan.

Mots-clés : Adjonction, foncteurs adjoints, fondements des mathématiques, morphisme universel, correspondance de Galois.

The concept of adjunction in category theory : its development and importance

Abstract : The objective of this thesis is to make a historical and epistemological study of the notion of adjunction within the framework of the category theory, in order to show its historical development, its relationship with other mathematical concepts and methods and, in the end, to show its importance both from the mathematical point of view and its intervention in the discussion on the foundations of mathematics. The historical analysis will focus on the historical period from 1945 to 1958, from the birth of the first categorical concepts by Samuel Eilenberg and Saunders MacLane to the publication of the article *Adjoint Functors* by Daniel Kan.

In addition, some mathematical contexts associated with the concept of addition will be analysed to assess whether in such contexts the phenomenon of addition was already presented before the publication of Kan's article.

Keywords : Adjunction, adjoint functors, foundations of mathematics, universal morphism, Galois connection.

Remerciements.

J'aimerais tout d'abord remercier mon directeur de thèse, le professeur Jean-Jacques Szczeciniarz, pour m'avoir pris comme étudiant sous sa direction. Sa lecture méticuleuse des chapitres de la thèse et ses observations précieuses m'a sans aucun doute permis de préciser mon propos.

Je voudrais également remercier les professeurs Marco Panza, Fernando Gálvez, Maribel Anacona et Guillermo Ortiz pour m'encourager à terminer cette thèse. Grâce à ses précieuses contributions et à ses conseils, j'ai pu terminer ma thèse de manière satisfaisante.

J'exprime ma gratitude aux membres de l'équipe SPHERE, et mes anciens collègues doctorants. En particulier M. Vincent Daudon, qui s'est beaucoup préoccupé de moi et de mes études. J'apprécie grandement ses conseils sur l'élaboration de la thèse et ses observations sur la forme et sur la rédaction de celle-ci.

Enfin, je voudrais remercier ceux qui étaient avec moi à un moment très difficile de ma vie : Mme. Elisabeth Bourginat, M. Yves Dougin, Mme. Catherine Simonnet, Mme. Marie-Lo Chinaud et M. Louis Etienne. Et surtout ces trois grands amis qui m'ont accompagné et soutenu dans ces moments que, malgré les difficultés, je garde comme des moments de grande joie : M. Laurent Lecornec, et ces deux amis qui ne sont plus dans ce monde : Lorenzo et Richard.

Table des matières

Introduction	1
1 Les concepts de catégorie et de foncteur.	5
1.1 L'émergence des concepts de foncteur et de transformation naturelle. . .	5
1.1.1 Les antécédents des concepts catégoriels dans la topologie algébrique avant 1942.	5
1.1.2 Les premiers concepts catégoriels.	17
1.1.3 Catégories et foncteurs : l'article de 1945	23
1.1.4 La transformation naturelle.	33
1.1.5 La réception immédiate de ces concepts.	36
1.2 Foncteurs : quels sont-ils ?	49
1.2.1 La signification et l'importance du concept de «naturalité». . . .	54
1.2.2 Sur la préservation des structures.	63
1.2.3 Pourquoi ce concept n'est-il pas réductible au concept de fonction ?	74
2 L'œuvre de Daniel Kan : l'apparition des foncteurs adjoints.	81
2.1 Préliminaires : la nécessité d'une théorie homotopique abstraite.	81
2.2 <i>Abstract Homotopy</i> I-IV et <i>On c.s.s. Complexes</i>	90
2.3 L'article <i>Adjoint functors</i> de 1958.	98
2.4 <i>Functors involving c.c.s. complexes</i>	114
2.5 La signification de l'adjonction.	115
3 Les contextes de l'adjonction.	125
3.1 Introduction : des concepts catégoriels à la théorie des catégories. . . .	125
3.2 La compactification de Stone-Čech.	133
3.3 La notion de «propriété universelle».	143
3.3.1 La définition de Samuel.	147

3.3.2	L'universalité <i>implicite</i> chez MacLane.	154
3.3.3	Les applications universelles impliquent les constructions de MacLane.	160
3.4	La correspondance de Galois.	167
3.5	L'hypothèse d'Herrlich et la critique de MacLane.	174
3.6	L'hypothèse de MacLane sur le travail de Stone.	182
3.7	L'adjonction et le problème de l'équivalence.	189
4	Conclusions.	195
4.1	L'importance mathématique de l'adjonction.	195
4.2	La notion de «fondement» chez Lawvere : <i>Adjointness in foundations</i>	212
4.3	Fondements = universel.	216
4.3.1	Adjonction et les fondements.	222
4.3.2	Repenser la notion de fondement.	227
	Bibliographie	233

Introduction.

En 1971, le mathématicien américain Saunders MacLane publie *Categories for the working mathematician*. Ce livre constitue dans une certaine mesure la consolidation de la théorie des catégories comme un domaine autonome en mathématiques. Et l'un des slogans centraux que MacLane a écrits dans ce travail est que les foncteurs adjoints «surgissent partout», caractérisant avec cela, non seulement l'ubiquité de ce concept, mais son importance dans les mathématiques.

La notion d'adjonction ou d'un couple de foncteurs adjoints, a été introduite pour la première fois par Daniel Kan dans son influent article *Adjoint functors* de 1958. Kan reconnaît le phénomène de l'adjonction dans la mesure où il avance dans la construction d'une théorie homotopique abstraite fondée sur des concepts purement catégoriels. Et pour cette même raison, la caractérisation de ce nouveau concept s'effectue en utilisant uniquement des concepts de la théorie émergente des catégories. En particulier les trois concepts fondamentaux de «catégorie», de «foncteur» et d'«équivalence naturelle», qui ont été introduits en 1945 par Saunders MacLane et Samuel Eilenberg dans leur article *General theory of natural equivalences* 1945 qui donne naissance à la nouvelle théorie des catégories.

La période entre les années 40 et 50 a été d'une grande production mathématique. De nouvelles techniques, des résultats et des objets mathématiques ont été incorporés dans le corpus des mathématiques. Ce fut aussi un moment où la notion moderne de «structure mathématique» émergea dans différentes écoles de mathématiques. Et en relation avec cela, apparaissent et se consolident les théorèmes qui relient une structure mathématique à une autre ou qui permettent de caractériser des structures «hybrides». En particulier, la topologie algébrique, les théories homologiques et cohomologiques, qui s'étaient développées de façon vertigineuse au cours des années 1930, ont eu besoin d'un langage suffisamment puissant pour pouvoir décrire certains phénomènes dans ces domaines d'étude.

En réponse à ce besoin, les nouveaux concepts introduits par Eilenberg et MacLane sont extrêmement puissants pour expliquer des phénomènes entre des structures mathématiques de différents types. Ainsi, la notion de catégorie est suffisamment versatile pour capturer l'idée de «structure commune» dans différents objets mathématiques, et le concept de foncteur constitue un outil assez efficace pour transférer les propriétés structurelles d'une structure mathématique dans une autre.

De cette manière, un foncteur $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ entre deux catégories \mathcal{C} et \mathcal{D} peut être considéré comme un « pont » ou un « dictionnaire » permettant d'envoyer, de traduire ou de préserver certaines propriétés structurelles des objets de la catégorie \mathcal{C} dans la catégorie \mathcal{D} . Ainsi, les foncteurs sont présents dans une grande partie des constructions mathématiques où une structure X est munie de beaucoup plus de propriétés pour construire une nouvelle structure \hat{X} , beaucoup plus riche structurellement que X , tel que $\hat{X} = F(X)$.

La découverte de Kan montre que, quand un foncteur $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ a comme adjoint à gauche ou à droite un autre foncteur $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$, le foncteur G peut être pensé comme un « inverse généralisé » du foncteur F . C'est-à-dire un nouveau dictionnaire ou pont qui permet de retraduire ou de revenir à la structure d'origine. Mais ce n'est pas n'importe quel pont ou dictionnaire, mais c'est le *meilleur* pont ou dictionnaire pour revenir à la catégorie de départ \mathcal{C} , dans la mesure où G est l'« inverse optimal » de F .

Par conséquent, si on considère un foncteur élémentaire comme le foncteur d'oubli $U : \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Ens}$ entre les catégories des groupes et homomorphismes (\mathbf{Grp}) et la catégorie des ensembles et des fonctions (\mathbf{Ens}) dont l'action consiste à «oublier la structure» de groupe lorsque chaque groupe G est envoyé à son ensemble sous-jacent X , donc ce foncteur U possède un adjoint à gauche $F : \mathbf{Ens} \rightarrow \mathbf{Grp}$ qui est une construction de grande importance : le groupe libre généré par un ensemble X .

Compte tenu de ce qui précède, la présente thèse réalisera une étude historique et épistémologique du concept d'adjonction dans le cadre de la théorie des catégories.

Dans le premier chapitre, on réalisera une analyse historique de l'émergence des concepts qui ont conduit à l'émergence de l'adjonction, à partir de l'article d'Eilenberg et MacLane de 1945 : les concepts de catégorie et de foncteur. On ne procédera pas à une analyse historique exhaustive, mais sera observée comment ces concepts émergent

comme des outils conceptuels pour synthétiser, unifier et expliquer des concepts et des phénomènes présents dans la topologie algébrique. En particulier, le concept de «morphisme naturel». En outre, on s'efforcera de réaliser une étude de la signification de ces notions, notamment celle de foncteur.

L'œuvre de Daniel Kan, et en particulier son important article *Adjoint functors*, sera abordée dans le deuxième chapitre. C'est dans cet article qu'apparaît pour la première fois le concept d'adjonction. Pour cette raison, on étudiera la relation qu'a ce phénomène avec le projet de Kan de caractériser une théorie homotopique abstraite. La signification de ce nouveau concept sera également analysée.

Le troisième chapitre examinera trois «contextes» mathématiques dans lesquels l'adjonction apparaît implicitement, afin de valider ou de réfuter trois hypothèses, selon lesquelles, dans ces contextes, on pouvait déjà parler de plein droit d'une paire de foncteurs adjoints. Les contextes à étudier sont ceux associés à l'émergence des morphismes universels, la compactification de Stone-Čech et le théorème de dualité de Stone, et les correspondances de Galois.

Enfin, quatrième et dernier chapitre est un chapitre de conclusions. On montrera l'importance mathématique de l'adjonction, en plus de sa pertinence philosophique, du point de vue des fondements des mathématiques. À cet effet, on étudiera la conception particulière de F. W. Lawvere sur la notion de «fondement», présente dans son article *Adjointness in foundations* de 1969, et la relation de ce point de vue sur les fondements avec la notion d'adjonction.

Chapitre 1

Les concepts de catégorie et de foncteur.

1.1 L'émergence des concepts de foncteur et de transformation naturelle.

1.1.1 Les antécédents des concepts catégoriels dans la topologie algébrique avant 1942.

L'affirmation selon laquelle les concepts fondamentaux de la théorie des catégories ont été introduits par Samuel Eilenberg et Saunders MacLane est largement reconnue, dans le but de résoudre certains problèmes conceptuels et opératoires dans le domaine de la topologie algébrique, entre 1942 et 1945 (voir [97, pp.39-61] et [117, pp.100-104]). Et c'est dans ce même domaine et dans certains de ses sous-domaines (qui, peu à peu, ont commencé à se développer jusqu'à devenir des domaines mathématiques indépendants) que certains des premiers concepts catégoriels ont été mis en œuvre avec succès ; et d'autres concepts fondamentaux ont émergé, en plus de ceux présentés par Eilenberg & MacLane, qui érigerait la future théorie des catégories comme une discipline mathématique indépendante. En particulier, l'objet mathématique qui nous concerne (l'adjonction), avec ceux qui l'ont rendu possible *théoriquement* (la transformation naturelle, les foncteurs et les catégories) ont émergé au sein d'une réflexion sur certains résultats et propriétés par rapport à des théories homotopiques, des complexes simpliciaux, et l'extension de certains groupes d'homologie respectivement. Concepts et propriétés étudiés dans le cadre de la topologie algébrique.

Il serait plausible d'affirmer que l'on peut retracer certains concepts fondamentaux de la topologie abstraite, en général, et de l'algébrique, en particulier, jusqu'à l'œuvre de Descartes sur la formule du polyèdre¹ ; on peut également affirmer que certaines des considérations sur les aspects conceptuels sous-jacents à la topologie sont la conception de Leibniz, vers 1679, sur une « nouvelle géométrie », qui sera appelée par lui-même *Analysis situs* ; en outre, Vandermonde avec ses *Remarques sur des problèmes de situation* de 1771, avait étudié quelques problèmes sur des nœuds, qui aboutiront plusieurs siècles plus tard à la discipline autonome de la théorie des nœuds. Cependant, pendant de nombreuses années, ces concepts et résultats extrêmement nouveaux qui constitueraient le substrat de la topologie émergente de la fin du XIXe siècle, sont passés inaperçus (ou peut-être comme de simples curiosités) par une bonne partie des mathématiciens, mais c'est à la fin de ce siècle, et au début du XXe siècle, ils seraient sauvés d'un tel abandon. Il est très probable que l'un des motifs qui ont conduit à la poursuite de ces développements théoriques, a constitué le travail de Riemann dans sa thèse de 1851 sur une théorie générale des fonctions à variable complexe², où il introduit la notion de *variété complexe*, qui, par la suite, favoriserait la naissance et la conceptualisation de la notion d'«ensemble» par Cantor et Dedekind.

C'est l'étude des propriétés de ces nouveaux concepts (les variétés complexes) déclenchera une série de résultats dans lesquels, peu à peu, on apprécierait leur indépendance par rapport aux domaines théoriques établis à l'époque : la grande majorité de ces résultats se rapportaient à des propriétés qui, à première vue, rendaient compte d'attributs géométriques, mais ne prenaient pas en compte l'aspect *quantitatif* de ces attributs. Certains de ces résultats les plus remarquables est constitué, d'abord le célèbre théorème de la courbe de Jordan, démontré par Camille Jordan dans son *Cours d'Analyse* de 1887 ; d'autre part, il convient de noter l'introduction de ce qui sera par la suite appelé les *nombre de Betti*, par le mathématicien Enrico Betti en 1871 dans son article *Sopra gli spazi di un numero qualunque di Dimensioni*, où on étudiait certaines des propriétés fondamentales des espaces de dimensions supérieures à trois.

1. Cette formule se trouve dans un mémoire non publiée par Descartes entre 1672 et 1676, mais qui a été popularisé par Euler en 1752 (ver [33])

2. Thèse de l'Université de Göttingen, dont le titre est *Grundlagen für eine Allgemeine Theorie der Funktionen einer Veränderlichen complexen Größe* (Fondements pour une théorie générale des fonctions de variable complexe).

Il est à noter qu'à la fin du XIXe siècle, plusieurs nouvelles théories mathématiques ont commencé à se mettre en place sans se consolider complètement, comme l'étaient la théorie émergente des groupes et des corps, et la théorie intuitive des ensembles : les deux préfigureront l'algèbre et la théorie abstraite des ensembles comme disciplines autonomes, au début du XXe siècle. La coexistence simultanée de nouveaux concepts et techniques mathématiques de ces nouveaux «prédomaines» a été très enrichissante pour l'étude de certains des problèmes et des propriétés qui se sont agglutinés dans cette nouvelle «géométrie non quantitative». En particulier, les outils algébriques ont été d'une grande importance pour la constitution de la nouvelle discipline qui rendait compte de telles propriétés *qualitatives* intrinsèques aux variétés en général, et pas seulement les complexes, en particulier. Et l'artisan de la consolidation de ce nouveau domaine mathématique, qui sera d'abord appelé par *Analysis situs*, évoquant les idées de Leibniz, fut Henri Poincaré, dans une série de quatre articles appelés, effectivement, *Analysis situs I-V*, écrits entre 1895 et 1904 : c'est la naissance de la topologie algébrique.

Ces articles ont la vertu non seulement de définir certains des concepts fondamentaux de la topologie abstraite en général, mais aussi d'utiliser certains des outils théoriques prédominants de l'époque, en particulier de la théorie émergente des groupes. Parce qu'une caractérisation usuelle de la topologie algébrique, la définit comme la domaine mathématique qui étudie les propriétés qualitatives intrinsèques des variétés, qui deviennent invariantes par le biais des homéomorphismes, mais contrairement à la topologie abstraite générale, dans la topologie algébrique, une bonne partie de la machinerie mathématique pour étudier ces propriétés est effectuée en utilisant des outils et des objets algébriques, tels que les groupes et les anneaux, et leurs propriétés algébriques. C'est-à-dire que l'appareillage théorique de l'algèbre est utilisé pour l'étude des propriétés topologiques des variétés ou, plus généralement, des espaces topologiques. Cela permet de définir de nouveaux objets mathématiques tels que les *groupes d'homologie*, que Poincaré a sagement sauvés de l'article de Betti, et qui constitueront un objet fondamental pour l'étude de certaines propriétés des espaces topologiques ; les groupes d'homotopie, dont la première version se trouve dans la notion de *groupe fondamentale* introduite également par Poincaré ; ou l'introduction des «polygones courbes», qu'ils considèrent, implicitement, la notion de ce qui sera ensuite appelé «complexe simplicial». De même, il introduit explicitement le concept capital de la topologie, celui d'*homéomorphisme*, et considère que certaines propriétés qualitatives des variétés, en

particulier les numéros de Betti, étaient invariantes sous «déformations continues» :

On peut se demander si les nombres de Betti suffisent pour déterminer une surface fermée au point de vue de l'*Analysis situs*³, c'est-à-dire si, étant données deux surfaces fermées qui possèdent mêmes nombres de Betti, on peut toujours passer de l'une à l'autre par voie de déformation continue [136, pp.189-190].

Par conséquent, les ingrédients fondamentaux pour la constitution de la topologie algébrique, même d'une manière naissante, se trouvaient déjà dans les *Analysis situs I-V* de Poincaré. En particulier, en ce qui concerne le présent document, il est nécessaire d'examiner les trois concepts de base (parmi beaucoup d'autres, qui figurent dans cette série d'articles de Poincaré) qui seront essentiels pour l'analyse de l'émergence des concepts catégoriels de *transformation naturelle*, de *foncteur* et de *catégorie*, qui ont par la suite favorisé cet *adjonction*. Les concepts auxquels nous faisons référence sont ceux de *groupe d'homotopie*, des *groupes d'homologie et de cohomologie* et de *complexe simplicial*.

La première trace de ce qu'est un groupe d'homotopie générale apparaît dans la définition du «groupe fondamental» par Poincaré dans le §12 de son *Analysis situs*. Cette notion est si simple qu'il est surprenant qu'elle n'ait pas été envisagée auparavant. Poincaré prend un point M_0 sur une variété V , et dans cette variété il considère une suite de fonctions multivaluées. Si l'une de ces fonctions continue à former un *lacet* autour de M_0 (c'est-à-dire si F est défini dans un certain intervalle $[a, b]$ tel que $F(a) = F(b) = M_0$), une permutation est alors générée. Avec cela, il mentionne [136, pp. 240-241] :

L'ensemble de toutes les substitutions que les fonctions F subiront ainsi, quand le point M décrira tous les contours fermés que ton peut tracer sur la variété V en partant du point initial M_0 , formera évidemment un groupe que j'appelle g .

En d'autres termes, g est le groupe composé de *toutes* les fonctions F .

Et avant cela, Poincaré introduit les chemins «homotopiquement nulles», c'est-à-dire homotope à une application constante [136, p. 240] :

Si alors le point M décrit sur la variété V un contour infiniment petit, les fonctions F reviendront à leurs valeurs primitives. Il en sera encore de même,

3. Quand Poincaré mentionne que quelque chose possède une qualité « du point de vue de l'*Analysis situs* », il fait référence à ce que nous considérerions aujourd'hui comme une *propriété topologique*.

si le point M décrit sur la variété V un *lacet*, c'est-à-dire s'il va d'abord de M_0 en M_1 par un chemin quelconque M_0BM_1 , s'il décrit ensuite un contour infiniment petit et si, enfin, il revient de M_1 à M_0 par le même chemin M_1BM_0 .

C'est clairement une homotopie qui se réduit au point M_0 . C'est-à-dire, à la fonction constante $F = M_0$.

En d'autres termes, ce que Poincaré fait est de considérer une variété V dans laquelle il prend un *élément distingué* x_0 appartenant à la même variété. On peut étendre cela, en considérant un espace topologique $\langle X, \tau_X \rangle$, dans lequel il sera identifié un élément $x_0 \in V \subseteq X$, de sorte qu'on a maintenant un nouvel espace topologique $\langle (X, x_0), \tau_X \rangle$ qu'on appellera «espace topologique pointé avec point de base x_0 ». Comme on le sait, un homéomorphisme entre deux espaces topologiques $\langle X, \tau_X \rangle$ et $\langle Y, \tau_Y \rangle$ est une application est bijective $f : X \rightarrow Y$ telle qu'elle et son inverse f^{-1} sont continues. Eh bien, un homéomorphisme f entre deux espaces pointés comme ceux décrits ci-dessus, est un homéomorphisme entre les espaces topologiques sous-jacents, tels que $f(x_0) = y_0$.

On considère un espace topologique pointé $\langle (X, x_0), \tau_X \rangle$, ou une variété V plongé dans cet espace pointé, tel que $x_0 \in V$. Les *chemins* avec le point de départ et d'arrivée x_0 sont définis comme des applications $f_j : [0, 1] \rightarrow V$ telles que $f_j(0) = f_j(1) = x_0$, pour une famille d'indices J . Avec le concept de chemin, il est possible de définir : (i) la composition $*$ entre deux chemins⁴ f_i, f_j , (ii) le chemin *inverse* f_j^{-1} pour chaque route f_j , (iii) et, le chemin *neutre* $e : [0, 1] \rightarrow V$ tel que $e(t) = x_0, \forall t \in [0, 1]$. Avec cette définition, la collection de toutes les classes homotopiques de chemins avec point de base x_0 forme le *premier groupe d'homotopie*, ou «groupe fondamental» $\pi_1(X, x_0)$. Ainsi, le groupe fondamental d'un espace topologique est formé par tous les chemins qui peuvent se déformer jusqu'au point x_0 . Ce concept est d'une grande importance

4. La définition exacte est la suivante :

$$(f_i * f_j)(t) = \begin{cases} f_i(2t) & 0 \leq t \leq 1/2 \\ f_j(2t - 1) & 1/2 < t \leq 1 \end{cases}$$

Si l'on considère le paramètre t comme un «temps de parcours», ce que fait cette composition est de parcourir le chemin f_i à mi-temps, puis de passer à l'autre chemin f_j à la moitié du temps restant. Il est clair que cette définition peut être étendue à trois chemins f_i, f_j et f_k , où cette dernière composition est associative.

pour étudier l'un des invariants topologiques basiques : la quantité de «trous» et/ou «cavités» d'un espace topologique. Par exemple, dans le cercle \mathbf{C} , quel que soit le point x_0 choisi, tous les chemins sont homotopiques à x_0 ; cela signifie, en termes algébriques que le groupe d'homotopie peut être identifié avec n'importe quel groupe trivial constitué de l'élément neutre e . D'autre part, si l'on considère une nouvelle surface \mathbf{T} consistant en \mathbf{C} avec un trou à l'intérieur; dans ce cas, tous les chemins ne sont pas homotopiques à n'importe quel point $x_0 \in \mathbf{T}$. Et par conséquent, il n'est pas possible que leur groupe fondamental soit, en effet, e . Donc, du fait que \mathbf{T} a un trou (contrairement à \mathbf{C}) il s'ensuit que cette variété est liée, d'une manière ou d'une autre, à ses groupes fondamentaux.

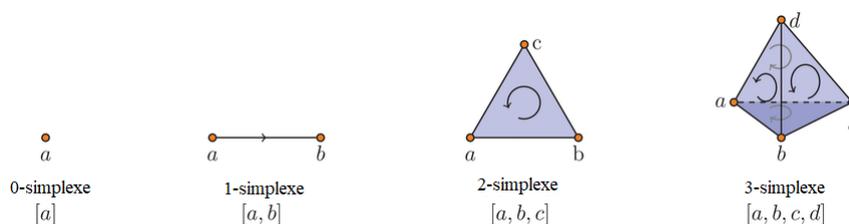
Calculer le groupe fondamental d'une variété consiste généralement à démontrer que ce groupe est isomorphe à un autre groupe connu. Or, malgré l'intuition de la définition d'un groupe fondamental, son calcul, même en variétés assez simples, peut être une tâche ardue. Par exemple, dans la démonstration habituelle du calcul du groupe fondamental de la circonférence, on arrive à $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$. Mais la preuve n'est pas élémentaire. D'autre part, dans le cas du cercle \mathbf{C} ou de la sphère S^2 , il est assez intuitif que ses groupes fondamentaux doivent être isomorphes à e . De même, les groupes d'homotopie ne se limitent pas aux groupes fondamentaux, car il est possible d'étendre leur définition pour caractériser les groupes d'homotopie d'ordre supérieur d'un espace topologique ponctué : $\pi_n(X, x_0)$. Par exemple, les classes homotopiques des applications de type $f : (S^n, s_0) \rightarrow (X, x_0)$, où S^n est la sphère n -dimensionnelle. Or, différence du groupe fondamental, les groupes d'homotopie d'ordres supérieurs ne peuvent pas se voir attribuer une intuition géométrique simple, et leur calcul n'est pas facile. Toutefois, contrairement du groupe fondamental, aux groupes d'homotopie d'ordres supérieurs il n'est pas possible d'attribuer une intuition géométrique simple, et leur calcul n'est pas facile. Mais, comme le groupe fondamental, les groupes d'homotopie d'ordre supérieur constituent un outil précieux pour compter les trous d'un espace topologique dans des dimensions supérieures. C'est pourquoi l'un des grands objectifs de la topologie algébrique après Poincaré (et encore aujourd'hui) est le calcul des groupes d'homotopie de différentes variétés (certaines, assez exotiques) et le développement d'outils théoriques permettant ce calcul.

En complément de la notion de groupe d'homotopie, dans la topologie algébrique (même à partir de l'écriture fondamentale de Poincaré) est défini le concept de

groupe d'homologie. Géométriquement, la notion d'homologie est liée à l'idée intuitive de «cycle» : en introduisant certains objets géométriques dans une variété, et en définissant la notion de cycle en eux, il est possible de construire quelques groupes qui permettront d'étudier certaines propriétés de la variété en question. En fait, la motivation de l'introduction du concept d'homologie est similaire à celle du groupe fondamental : les homologies disent aussi quelque chose au sujet des trous d'une variété.

Les objets centraux, par lesquels sont introduits les autres concepts homologiques basiques (et, qui seront capitaux pour introduire la notion d'adjonction par Daniel Kan), le constituent, les *simplexes* n -dimensionnels orientés Δ^n . Et, comme le concept de groupe fondamental, l'idée d'un simplexe est si intuitive qu'elle surprend le fait qu'elle n'ait pas été introduite avant Poincaré : les simplexes ne sont rien d'autre que la généralisation de la notion de triangle pour n'importe quelle dimension, indépendamment de la «rigidité» de tels triangles⁵. Et, comme dans la géométrie d'Euclide, tout polygone est susceptible d'être triangulé, la topologie algébrique introduit les simplexes par un principe implicite de cette discipline, bien connu dans les premières années de la topologie algébrique : On peut «triangler» une variété de n dimensions par des simplexes de dimensions inférieures ou égales à n . En effet, une collection de ces simplexes «collés» d'une certaine manière, forme ce que l'on appelle un *complexe simplicial*⁶ K . Il est important de noter un fait de grande importance : le

5. Étant donné qu'on a considéré des espaces topologiques, un disque (c'est-à-dire une circonférence) fermé est homéomorphe à un triangle. Puis, si trois points a, b, c sont marquées sur la circonférence du cercle, alors toute région homéomorphe à ce cercle peut être identifiée avec le simplexe bidimensionnel Δ^2 . Compte tenu de cela, il n'y a pas d'inconvénient à visualiser les quatre premiers simplexes (chacune avec une orientation donnée) comme suit :



Il est important de noter que l'«intérieur» d'un simplexe fait partie du simplexe. Ainsi, le 3-simplexe est un tétraèdre *solide*, et pas seulement l'union de trois 2-simplexes. En outre, on peut identifier le 3-simplexe par l'ensemble $\{a, b, c, d\}$ et, en considérant un ordre pour ce simplexe, il forme le 3-simplexe ordonné qui peut être identifié par $[a, b, c, d]$.

6. Les conditions de «collé» pour qu'une collection de simplexes forment un complexe simplicial K sont les suivantes : i) si un simplexe appartient à K , alors tous ses *faces* appartient également à K ;

principe de triangulation exposé ci-dessus était connu sous le nom d'*Hauptvermutung*, et a été formulé de manière implicite par Poincaré et de manière explicite par Ernst Steinitz et Heinrich Franz Friedrich Tietze, simultanément en 1908⁷. Pendant de nombreuses années cette conjecture a été prise pour certaine, cependant dans l'année 2015 Ciprian Manolescu a prouvé qu'elle est fautive. Or, le principe de triangulation reste vrai pour des variétés 3-dimensionnelles, et la démonstration de Manolescu implique des variétés de dimensions plus grande ou égale à 5 dans lesquelles un certain type de *torsion* est défini. Par conséquent, si l'on suppose des espaces libres de torsion, on peut encore considérer une version faible de l'*Hauptvermutung*. D'autre part, la démonstration moderne de la fausseté de ce principe, n'influence pas ostensiblement l'analyse historique de la présente thèse, puisque dans les 30 premières années de la topologie algébrique, ce principe était considéré comme vrai. De même, le théorème de Manolescu n'invalide aucun des résultats ou concepts ultérieurs, puisque tous reposent sur un espace topologique triangulable et non sur un espace topologique arbitraire.

Cela étant dit, il convient d'indiquer qu'en utilisant les simplexes ordonnés et complexes simpliciaux, il est possible de définir l'*homologie simpliciale*. Pour ce faire, il faut définir les concepts de «frontière» et de «chaîne d'un complexe simplicial», comme suit :

Si l'on considère un ensemble $\{\sigma_1^p, \sigma_2^p, \dots, \sigma_k^p\}$ de simplexes orientés p -dimensionnelles du complexe simplicial K et un groupe abélien G , une p -chaîne c_p de K avec des coefficients en G est la *somme formelle* :

$$c_p = g_1\sigma_1^p + g_2\sigma_2^p + \dots + g_k\sigma_k^p$$

où chaque $g_i \in G$.

Avec ce qui précède, on peut construire l'ensemble de toutes les p -chaînes de K par rapport à G , qui sera nommé par $C_p(K; G)$. Cet ensemble a en outre une structure de groupe abélien⁸. L'homomorphisme des groupes est ensuite défini

$$\partial_p : C_p(K; G) \rightarrow C_{p-1}(K; G)$$

ii) si deux simplexes sont coupés, leur intersection est une face commune. Si $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\}$ est un simplexe non-ordonné, une *face* de ce simplexe est un sous-ensemble de celui-ci.

7. L'article de Tietze a pour titre *Ueber die topologischen Invarianten mehrdimensionaler Mannigfaltigkeiten*, tandis que celui de Steinitz est intitulé *Beitraege zur Analysis situs*.

8. Avec l'addition induite par l'addition G : si $c_p = \sum_{i=1}^k g_i\sigma_i^p$ et $b_p = \sum_{i=1}^k h_i\sigma_i^p$, alors $c_p + b_p = \sum_{i=1}^k (g_i + h_i)\sigma_i^p$.

qui sera appelé opérateur *frontière*⁹. Comme son nom l'indique, cet opérateur formalise l'idée intuitive de « frontière » d'un simplexe ordonné. Par exemple, la frontière d'un 2-simplexe ordonné $[a, b, c]$ est la suivante :

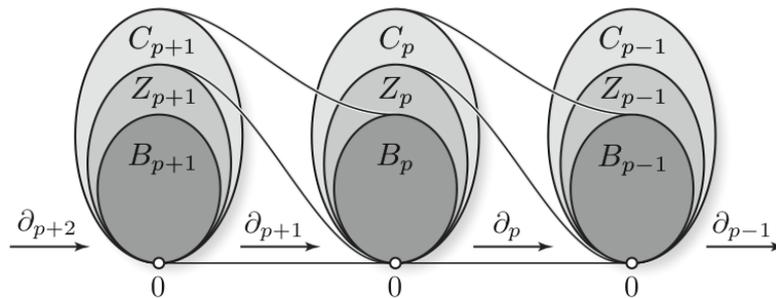
$$\begin{aligned} \partial([a, b, c]) &= (-1)^0[\hat{a}, b, c] + (-1)^1[a, \hat{b}, c] + (-1)^2[a, b, \hat{c}] \\ &= [b, c] - [a, c] + [a, b] = [b, c] + [c, a] + [a, b] \end{aligned}$$

Ce qui correspond aux segments orientés¹⁰ qui bordent le 2-simplexe.

Une propriété importante de la définition de l'opérateur frontière est que $\partial_p \circ \partial_{p+1} = 0$. Avec cette propriété, il est possible de définir une *complexe de chaînes* :

$$\dots \xrightarrow{\partial_{p+2}} C_{p+1}(K; G) \xrightarrow{\partial_{p+1}} C_p(K; G) \xrightarrow{\partial_p} C_{p-1}(K; G) \xrightarrow{\partial_{p-1}} \dots$$

Comme il s'agit d'une chaîne d'homomorphisme, ils sont définis les groupes $Z_p = Ker(\partial_p)$ et $B_p = Im(\partial_{p+1})$, appelés p -cycles et p -frontière du complexe K , respectivement¹¹



Et enfin, avec ces deux nouveaux groupes, on définit le groupe quotient $H_p(K; G) = Z_p/B_p$, qui sera appelé p -ième *groupe d'homologie* du complexe K par rapport à G . Si, dans les mêmes définitions (notamment dans celle d'une

9. Cet opérateur est tel que, si $\sigma^p = [v_0, v_1, \dots, v_n]$ est un p -simplexe d'un complexe simplicial K , alors

$$\partial_p(\sigma^p) = \sum_{i=0}^n (-1)^i [v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_p]$$

où le simplexe orienté $[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_p]$ est la i -ième face de σ dans laquelle a été omis le i -ième sommet.

10. Il est important de noter que ce n'est pas la même frontière d'un simplexe orienté que la frontière d'un simplexe non orienté. Par exemple, dans le cas du 1-simplexe orienté $[a, b]$, sa frontière est $[b] - [a]$, tandis que le simplexe non orienté $\{a, b\}$, a pour frontière $\{a\} \cup \{b\}$.

11. Autrement dit, si c_p est une p -chaîne telle que $\partial(c_p) = 0$, alors c_p sera un p -cycle. On peut également prouver que B_p est un sous-groupe de Z_p .

chaîne de complexes), le sens des homomorphismes est inversé, c'est-à-dire qu'ils sont considérés comme des applications du type $\delta_p : C_p(K; G) \rightarrow C_{p+1}(K; G)$, alors il est possible de définir le p -ième *groupe de cohomologie* $H^p(K; G)$ de K par rapport à G .

Eh bien, après cet *excursus* pour introduire les notions de groupes d'homotopie, d'homologie et de cohomologie, il faut reprendre l'analyse sur l'importance de ces concepts et leur introduction, de manière assez informelle, dans l'*Analysis situs I-V* de Poincaré.

Comme on a indiqué ci-dessus, l'un des grands objectifs de cette série d'écrits est de pouvoir déterminer, sinon toutes, au moins certaines des propriétés pertinentes permettant de caractériser et/ou de classer les différentes variétés. Une de ces propriétés invariantes dans le cas tridimensionnel, comme mentionné ci-dessus, s'avère être les nombres de Betti, qui sont un outil crucial pour déterminer la connexion, les trous et les vides d'une variété. Poincaré étudie intensivement ces objets et les relie aux classes de combinaisons linéaires des simplexes, c'est-à-dire à une version initiale des groupes de type $C_p(K; G)$. Poincaré introduit ainsi implicitement les groupes d'homologie et explicitement le premier groupe d'homotopie. Cependant, comme on le verra plus loin, Poincaré ne relie pas les groupes d'homologie aux cycles et aux frontières (Z_p et B_p , respectivement), mais les relie directement aux nombres de Betti. Ce sera Emmy Noether qui suggérera, par la suite, qu'il est plus simple de recourir aux premiers plutôt qu'aux numéros de Betti, puisque leur calcul est quelque peu complexe à effectuer.

Il est relativement facile (et, encore intuitif) de définir quelques invariants algébriques, importants pour la topologie algébrique, tels que les groupes fundamentalistes, groupes d'homotopie supérieures et groupes d'homologie et de cohomologie ; cependant, pour certains espaces topologiques, il peut être assez difficile de les calculer. Une bonne partie du développement de la topologie algébrique consiste aussi bien dans l'éclaircissement et la généralisation de plusieurs des concepts fondamentaux de ce nouveau domaine mathématique, que dans le développement de nouveaux objets et/ou outils permettant d'effectuer de tels calculs. Par exemple, en ce qui concerne le calcul des groupes d'homotopie, E. van Kampen, dans son article de 1933 *On the connection between the fundamental groups of some related Spaces*, montre comment il est possible de calculer le groupe fondamental d'un espace topologique en termes de groupes

fondamentaux des constituants d'une couverture ouverte de cet espace. Résultat qui sera connu plus tard comme théorème de van Kampen.

La maturation de la présentation formelle des idées de Poincaré sur les nombres de Betti, et l'explicitation exacte de la notion de groupe d'homologie est due à Brouwer et Noether à un dîner de Noël en 1925 (voir [82, p.996]). Bien que ces idées n'aient pas été publiées par eux, elles l'ont été par un autre participant à cette réunion : Pavel Aleksandrov. En fait, lors de ce dîner, elle a suggéré l'introduction des cycles et des frontières au lieu des numéros de Betti, pour étudier les invariants algébriques des groupes d'homologie¹². Et, comme le mentionnent Frei & Stambach dans la biographie de Heinz Hopf :

The idea was adopted at once, in particular by Vietoris, Alexandrov, and Hopf, and soon became popular in algebraic topology. It not only made it possible to give concise and simple definitions of the basic notions of algebraic topology but also prompted a wholly new view of the methods of algebraic topology [82, p.996].

L'adoption de ces idées a été immédiate, car il était l'une des nouveautés dans les séminaires de topologie algébrique, dans les étés de 1926-1928 à Göttingen, dictés par Aleksandrov et Hopf¹³.

D'autre part, en 1912 est publié l'article *A proof and Extension of the Jordan-Brouwer Separation Theorem* par J. W. Alexander, où il étudie la relation entre les nombres de Betti d'un complexe incrusté dans une sphère n -dimensional et son complément. Il indique également comment il est possible de développer une théorie homologique à partir d'ensembles ouverts et fermés. La figure d'Alexander est d'une grande importance, car il deviendrait l'un des pionniers de l'introduction de la

12. Comme défini ci-dessus : $H_n = Z_n/B_n$. Bien que les chiffres de Betti donnent des informations précises sur certaines des invariants topologiques d'une variété, leur calcul est généralement assez complexe. Dans une variété bidimensionnelle V , par exemple, il est possible de considérer trois types de numéros de Betti : β_0 , β_1 et β_2 . β_0 est l'information sur le nombre de composants connexes de V ; β_1 indique combien de trous unidimensionnels ont V ; et β_2 indique le nombre de trous bidimensionnels ou « cavités ». En particulier, si on prend la surface du tore, \mathbf{T}^2 , on a $\beta_0 = 1$, $\beta_1 = 2$ et $\beta_2 = 1$. Cela indique qu'il existe trois groupes d'homologie pour \mathbf{T}^2 , pour lesquels les anciens numéros de Betti sont leurs rangs.

13. L'idée de ne pas recourir aux nombres de Betti a été explicitée dans l'article de Hopf *Eine Verallgemeinerung der Euler-Poincareschen Formel* de 1928.

topologie algébrique dans les milieux universitaires américains. En fait, le concept de *complexe de chaînes* a été de son élaboration, dans son article de 1935 *On the chains of a complex and their duals*. Ce dernier article a été d'une grande importance, parce que certains de ses résultats seront développés par Hassler Whitney, dans son article de 1938 *On products in a complex*, où Whitney introduit non seulement les notions de produit tensoriel, mais souligne le fait que, en raison de la notion de dualité étudiée par Alexandre, une théorie co-homologique se révèle être algébriquement duale à une théorie homologique. Autrement dit, les concepts cohomologiques résultent d'«inverser» le sens des applications présentes dans les concepts homologiques.

Au fur et à mesure que les groupes d'homologie comme celui des groupes d'homotopie supérieurs étaient étudiés, les cadres théoriques dans lesquels ces analyses étaient effectuées se détachaient peu à peu de la maîtrise de la topologie algébrique, favorisant l'émergence de théories homologiques et homotopiques, respectivement. La première tentative d'une théorie homologique a été faite par E. Čech dans son article de 1932 *Théorie générale de l'homologie dans un espace quelconque*. D'autre part, les premières traces d'une théorie homotopique se trouvent dans les articles *Beiträge der Topologie der Deformationen I-IV*, publié par Hurewicz entre 1935-1936. Cette série d'articles est très importante, car c'est là que le concept de n -ième groupe d'homotopie est défini de manière générale. Et, avec une telle définition, Hurewicz calcule le troisième groupe d'homotopie de la sphère : $\pi_3(S^2)$. Et, bien qu'avec la seule introduction du concept de n -ième groupe d'homotopie, Hurewicz est déjà l'une des figures capitales dans l'histoire de la topologie algébrique (et, des mathématiques du XXe siècle) il y a un autre résultat qui montre sa grande capacité à synthétiser des idées dans ce domaine : dans sa série de documents, il établit un lien étroit entre des groupes d'homotopie et des groupes d'homologie, pour certains espaces topologiques, à travers ce qui sera appelé *homomorphisme d'Hurewicz* : si (X, x_0) est un espace pointé, pour chaque $n \geq 1$, on a l'homomorphisme $\pi_n(X, x_0) \rightarrow H_n(X)$.

Dans les années suivantes, les mathématiciens travaillant dans le domaine de la topologie algébrique se sont attachés à généraliser encore plus les idées d'Hurewicz¹⁴ et essayer de trouver les conditions dans lesquelles il était possible de lier des groupes d'ho-

14. Par exemple, Freudenthal introduit un concept central, l'application *suspension* qui permettra d'étudier les différents groupes d'homotopie d'ordre supérieur pour la sphère n -dimensionnelle. Et, il introduit également le concept de n -ième ensemble de *co-homotopie* $\pi^n(X, A)$, comme le dual du groupe d'homotopie correspondant.

mologie, d'homotopie et de cohomologie. Et, comment ces conditions permettaient le calcul de chacun d'eux. Cela nous amène à un résultat de Samuel Eilenberg et Saunders MacLane sur ce type de relations, qui conduira à l'émergence des premiers concepts catégoriels.

1.1.2 Les premiers concepts catégoriels.

L'émergence du concept fondamental de la présente thèse, l'adjonction, est étroitement liée à deux cadres théoriques, qui à leur tour, des relations étroites entre eux : les théories homotopiques et les premiers concepts catégoriels. Il est complexe de réaliser une exposition de la genèse d'une paire de foncteurs adjoints, sans éluder les origines mêmes des concepts basiques de la théorie des catégories qui permettent sa formulation théorique : ceux de «transformation naturelle», de «foncteur» et de «catégorie». C'est pour cette raison que la présente section effectuera une analyse très générale de ces derniers, dans lequel on considérera, d'une certaine manière, leur signification. Or, comme on a mentionné au début de la section précédente, ces concepts ont émergé comme des outils pour résoudre certains problèmes de topologie algébrique, ou pour clarifier certaines propriétés sous-jacentes dans certains résultats de cette discipline. Pour cette raison, on ne fera pas seulement un exposé théorique de ces concepts, mais aussi un bref historique des conditions qui ont permis leur apparition, jusqu'à sa formulation explicite dans un article fondamental écrit par Samuel Eilenberg & Saunders MacLane en 1945.

Samuel Eilenberg fut un jeune topologue polonais-américain, qui a fait partie de l'école topologique de Varsovie, dont il a obtenu son doctorat en 1936 sous la direction de Karol Borsuk et Kazimierz Kuratowski. L'école de Varsovie avait trois grands axes de recherche en mathématiques : la logique, la théorie des ensembles et la topologie. Cependant, les études topologiques étaient principalement orientées par la topologie ensembliste, comme le note Eilenberg lui-même dans un article consacré à la mémoire de Borsuk :

I remember a curious incident. In the fall of 1931 I was browsing through the Mathematics Library and I came across a book entitled *Topology* by Solomon Lefschetz¹⁵. I looked at the bibliography to see to what extent the

15. Il est important de noter le rôle de Lefschetz, non pas tant dans le développement de la topologie algébrique, mais dans la constitution de cette discipline comme un domaine mathématique indépendant et reconnu. Puisqu'il est l'un des grands synthétiseurs des résultats de cette discipline émergente et,

“Polish School” was quoted. I found only one reference. It was a paper of Knaster, Kuratowski and Mazurkiewicz in volume 15 of *Fundamenta Mathematicae* containing a combinatorial proof of the Brouwer Fixed Point Theorem. I was surprised to find no other references and I conveyed my concern to Dr. Adolf Lindenbaum (an excellent logician) who was then the assistant in charge of the library. He told me that it was a terminological misunderstanding, that book was not about Topology but about some sort of Algebra [40, p.1].

Cette anecdote montre l'état de la topologie algébrique dans les années 30, malgré les développements exposés dans la section précédente. Cependant, c'est grâce à Borsuk qu'Eilenberg a commencé à étudier la topologie algébrique de l'époque, étant l'un des grands promoteurs de l'étude de cette discipline. En fait, la grande majorité de ses publications antérieures à 1938, ont été dans le domaine de la topologie ensembliste, mais dans cette année, Eilenberg a commencé une longue série de publications sur les résultats de la topologie algébrique. Et bien qu'il ait dû émigrer aux États-Unis en mai 1939 pour fuir la Seconde Guerre mondiale, cela n'a pas été un obstacle au développement et l'introduction de nouvelles idées dans ce nouveau domaine d'étude. De plus, la rencontre avec Saunders MacLane, au début de 1941, a constitué un tournant dans l'histoire des mathématiques, parce qu'ils ont combiné les idées nouvelles d'Eilenberg en topologie algébrique, avec les observations de MacLane, dans les domaines algébriques.

Bien que les origines mathématiques de MacLane le situent comme un spécialiste en logique mathématique, car il a obtenu son doctorat en 1939 à l'Université de Göttingen sur cet aspect¹⁶, il s'intéressa peu à peu à l'algèbre abstraite. Cela est attesté non seulement par le fait que MacLane était un étudiant de Marshall Stone¹⁷, Øystein Ore

cette synthèse, il l'a traduite en plusieurs textes différents. L'un d'entre eux est le texte mentionné par Eilenberg, publié en 1930. Ce fut une première tentative de systématisation qui verra sa maturation dans le texte fondamental *Algebraic Topology*, publié en 1942. Lefschetz n'était pas le seul à tenter cette systématisation, car en 1935 Aleksandrov et Hopf publièrent le premier tome (et le seul à avoir vu le jour) de leur projet de trois volumes, intitulé simplement *Topologie*, qui fut écrit en allemand. De même, en 1934, William Threlfall & Herbert Seifert publient son *Lehrbuch der Topologie*, qui était sans doute le texte le plus complet de la topologie algébrique de l'époque. Cependant, comme c'est souvent le cas pour certains textes allemands, ceux-ci n'étaient pas accessibles à une bonne partie de la communauté, de sorte que les textes de Lefschetz ont eu un plus grand impact sur les mathématiciens que ceux d'Aleksandrov & Hopf ou de Threlfall & Seifert.

16. Le titre de sa thèse est *Abgekürzte Beweise im Logikkalkül*, sous la direction de Hermann Weyl et Paul Bernays.

17. La figure de Stone sera centrale pour MacLane, considérant que dans le travail de Stone, en

et Garrett Birkhoff¹⁸, mais aussi, avec ce dernier, il a écrit en 1941 le livre *A survey of modern algebra*, qui serait l'équivalent américain du texte *Moderne Algebra* de van der Waerden. Il convient également de noter que MacLane a également connu des résultats de topologie algébrique, même si ce n'était pas son fort¹⁹. Cependant, ce sera Eilenberg qui fournira, au moins au début de son travail collaboratif, les outils et les intuitions topologiques pour pouvoir synthétiser, l'algèbre (du point de vue de MacLane) et la topologie algébrique (resp. Eilenberg) dans les nouveaux concepts catégoriels.

Or, après cette nécessaire digression sur Eilenberg et MacLane, il faut dire que les concepts fondamentaux de «catégorie» et de «foncteur» sont apparus comme des *outils* pour pouvoir définir clairement ce qu'on appelle une équivalence ou isomorphisme *naturel*. Ces trois concepts, entre autres, constituent le substrat qui fonde la théorie des catégories et, comme cela a déjà été répété, ils ont tous été développés dans les années 40s par Samuel Eilenberg et Saunders MacLane. Le texte fondamental qui donne naissance à ce nouveau domaine mathématique est le très influent *General theory of natural equivalences* de 1945 [44], bien que plusieurs des concepts étudiés dans cet article sont déjà exposés, en particulier pour la théorie des groupes, dans son autre article *Natural isomorphisms in group theory* [43]. On pourrait penser que l'article de 1945 est une maturation des idées exposées dans celui de 1942, mais elles existaient déjà au moment de la présentation de l'article 42. En fait, MacLane lui-même mentionne que les définitions de «catégorie», de «foncteur», de «produit de catégories» et de «bifoncteur» étaient déjà connues de lui et d'Eilenberg sous leurs formes les plus simples et les plus générales, mais que celles-ci étaient trop générales, de sorte que :

Eilenberg and I did not immediately publish them in all their glowing generality . Instead, our first paper on categories was a note in the Proceedings (...) describing just functors on the category of abelian groups (...) [117, p. 109]

Bien qu'il soit vrai que l'article de 1945 peut être considéré comme l'aboutissement particulier dans son article *Applications of the theory of Boolean rings to general topology* de 1937, on trouve le germe de certaines idées catégorielles, même si Stone lui-même n'ait cette possibilité. Cet aspect sera analysé dans le §3.6 de la présente thèse.

18. Il est à noter que MacLane a également été intéressé par la théorie des treillis, dont la deuxième période a été poussée par Ore et Birkhoff. Il a notamment écrit deux articles sur ce domaine : *A classification of finite distributive lattices*, de 1934, et *A lattice formulation for transcendence degrees and p -bases* de 1938

19. En témoigne l'article de 1941, écrit avec W. Adkisson, intitulé *Extensions of homeomorphisms on the sphere*.

ment d'un processus ardu d'abstraction des propriétés fondamentales qui permettent de décrire clairement la notion d'isomorphisme naturel. Processus qui a commencé au printemps de 1941 quand Eilenberg assisté à un séminaire de MacLane, à l'Université du Michigan, sur la construction des extensions algébriques de certains groupes²⁰. En particulier MacLane étudiait le suite exacte courte

$$1 \longrightarrow R \xrightarrow{i} F \xrightarrow{\alpha} H \longrightarrow 1$$

où F est le groupe libre de générateurs de H , et R est le sous-groupe normal de tous les relations sur tels générateurs. Le morphisme $\alpha : F \rightarrow H$ est la projection du groupe libre dans le groupe quotient $F/R \cong H$. MacLane prend le cas des extensions de groupes abéliens, dans lequel il considère $R = \mathbb{Z}$, H avec des générateurs g_1, g_2, \dots, g_n et un nombre premier p tel que

$$pg_{n+1} = g_n$$

Et ensuite il montre qu' $Ex(H; R) = \mathbb{Z}_p$.

Eilenberg mentionne à MacLane que l'extension des groupes exposés ci-dessus correspond à l'homologie de Steenrod pour le solénoïde p -adique²¹

20. Étant donnés deux groupes N et H , alors E est une extension du groupe H au moyen de N s'il existe une suite exacte courte

$$1 \longrightarrow N \xrightarrow{\beta} E \xrightarrow{\alpha} H \longrightarrow 1$$

où 1 est le groupe trivial. Un exemple simple consiste en la suite de groupes

$$1 \longrightarrow N \xrightarrow{i} N \times H \xrightarrow{\pi} H \longrightarrow 1$$

où les morphismes i et π sont l'inclusion et la projection, respectivement. Or, toute suite de groupes et de morphismes n'est pas toujours exacte : pour qu'elle le soit, une condition *similaire* à celle des successions de complexe de chaînes est indispensable : la suite décrite ci-dessus est *exacte* si $Im(\beta) = Ker(\alpha)$. Or, si E est une extension de H au moyen de N , N est isomorphe à un sous-groupe normal d' E et $E/N \cong H$. Et, le groupe E Il est généralement symbolisé, actuellement pour $E = Ext(H; N)$. Par exemple, le groupe \mathbb{Z}_6 est une extension de \mathbb{Z}_3 via \mathbb{Z}_2 car il y a une succession exacte courte

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}_3 \xrightarrow{i} \mathbb{Z}_6 \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 1$$

21. Un solénoïde p -adique A est la limite de l'opération suivante : on prend un tore T_0 et, à l'intérieur, on trouve un autre tore T_1 donnant p tours dans T_0 . Et, dans T_1 , on trouve un autre tore T_2 , qui donne p tours à l'intérieur de T_1 . Et ainsi de suite. La limite de cette construction est A (c.-à-d., $A = \bigcap_{n \geq 0} T_n$). Par exemple, le graphique suivant illustre les 6 premières étapes pour la construction d'un solénoïde

En d'autres termes, il devrait y avoir un lien inattendu entre les extensions de groupes et les homologies. En se mettant au travail immédiatement, pour démêler ce lien, ils trouvent en peu de temps, pour n'importe quel espace topologique X et un groupe abélien G la relation recherchée consiste en la suite exacte courte :

$$0 \longrightarrow Ext(H_{n-1}(X); G) \xrightarrow{\beta} H^n(X; G) \xrightarrow{\alpha} Hom(H_n(X); G) \longrightarrow 0$$

dans laquelle $H_n(X) = H_n(X; \mathbb{Z})$ et $Hom(Y, Z)$ (où Y, Z sont des groupes abéliens) est le groupe abélien consistant en tous les homomorphismes de Y vers Z . Ce résultat est publié dans son deuxième article collaboratif *Group extensions and homology*, de 1942 [42].

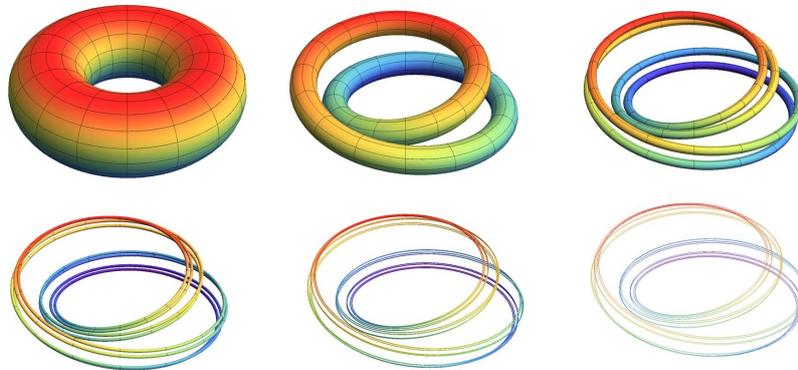
Une des particularités de la suite précédente consiste en la propriété suivante : si X et Y sont deux espaces topologiques et $f : X \rightarrow Y$ est un homéomorphisme, alors les *applications* :

$$H_n(f) : H_n(X) \rightarrow H_n(Y) \text{ et } H^n(f) : H^n(X) \rightarrow H^n(Y)$$

permettent de préserver les structures homologiques (co-homologiques, resp.) de X en Y (resp., de Y en X). Par conséquent, f induit les différentes *applications* verticales dans le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & Ext(H_{n-1}(X); G) & \longrightarrow & H^n(X; G) & \xrightarrow{\alpha} & Hom(H_n(X); G) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & Ext(H_{n-1}(Y); G) & \longrightarrow & H^n(Y; G) & \xrightarrow{\alpha} & Hom(H_n(Y); G) \longrightarrow 0 \end{array}$$

2-adidique ou, simplement, solénoïde (image fournie par Wikimedia Commons) :



MacLane et Eilenberg se concentrent sur les «applications» H_n et H^n et l'homomorphisme α . Non seulement les premiers opèrent sur les espaces topologiques en question, mais ils opèrent davantage sur les homéomorphismes entre ces espaces. D'autre part, α a un comportement très stable, c'est pourquoi ils appellent cet homomorphisme avec la propriété d'être «naturel». Il est important de noter que ce n'est pas le premier document où l'adjectif «naturel» est utilisé pour faire référence à un certain type d'applications. Le premier à le faire est Hurewicz dans un très bref communiqué de 1941 intitulé *On duality theorems* [75], dans lequel il introduit également pour la première fois les suites de morphismes :

Let A be a locally compact space, B a closed subset of A , and $H^n(A)$, $H^n(B)$, $H^n(A - B)$ the n -dimensional cohomology groups of the sets A , B and $A - B$ (with integers as coefficients). Consider "natural homomorphisms" $H^n(A) \rightarrow H^n(B) \rightarrow H^n(A - B) \rightarrow H^{n+1}(A) \rightarrow H^{n+1}(A - B)$. It can be shown that the kernel of each of these homomorphisms is the image of the preceding homomorphism [75, pp.562-563].

Mais alors, ce qui est entendu par «être naturel» dans les contextes des articles de Hurewicz et Eilenberg & MacLane? La réponse à cette question n'a pas tardé à recevoir une réponse. Tout d'abord, en [42] il y a une section (§12) dédiée à expliquer pourquoi, pour les extensions de groupes et homologies, l'homomorphisme α est naturel (en fait, la section s'intitule «Natural homomorphisms»). D'autre part, dans [43] ils mettent l'accent sur les isomorphismes naturels, mais dans le contexte de la théorie des groupes. Cependant, c'est dans son article de 1945 qu'ils définissent la propriété d'«être un morphisme naturel» dans toute sa généralité. Cependant, pour pouvoir le faire, il devient indispensable de caractériser, également de manière générale, ce qui est sous-jacent aux applications $H_n(f)$, $H^n(f)$, $Ext(f)$ et $Hom(f)$ ci-dessus exprimées, induites par la fonction f .

En effet, à l'époque, il était bien connu que, étant donné un homéomorphisme $h : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$, entre deux espaces pointés, alors h induit un homomorphisme entre $\pi_1(h) : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$ entre les groupes fondamentaux. C'est-à-dire que l'application $\pi_1(_)$, en quelque sorte, prend des homéomorphismes et les envoie sous forme d'homomorphisme. Ainsi, Eilenberg et MacLane définissent ce qui est entendu, dans les contextes exposés ci-dessus, par un homomorphisme induit et ses propriétés. Et, ce n'est pas autre chose, à un niveau purement général, que la notion de «foncteur». Or, de manière analogue, pour pouvoir caractériser ce nouvel objet appelé foncteur (mais en même temps très utilisé de manière implicite), il faut un contexte

dans lequel les homéomorphismes, homomorphismes et, en général, ce qui sera appelé «morphisme» ont un rôle prépondérant, puisque, comme on l'a vu, les applications comme $\pi_1(_)$ envoient des fonctions d'un certain type à des fonctions d'un certain type (peut-être un autre). Pour accomplir cette tâche, il a fallu introduire la notion de «catégorie».

Ainsi, les catégories sont nécessaires pour définir les foncteurs et, ceux-ci sont nécessaires pour définir ce qui sera appelé «transformations naturelles». C'est son processus logique. Cependant, le processus historique fut inverse : on suspectait déjà le phénomène de la «naturalité», dans la mesure où il existait plusieurs homomorphismes qui se comportaient très bien. Mais, pour définir ce phénomène, on a introduit le concept de foncteur et, pour introduire celui-ci, on a introduit celui de catégorie. Et, ces trois concepts sont introduits de manière générale dans l'article de 1945 d'Eilenberg et MacLane. C'est pourquoi il est considéré comme le document qui fonde les bases de la théorie des catégories.

1.1.3 Catégories et foncteurs : l'article de 1945

Les concepts de foncteur et d'équivalence naturelle sont explicitement définis pour la première fois dans l'article d'Eilenberg et MacLane *Natural Isomorphism in Group Theory*, publié en octobre 1942, mais ces définitions sont caractérisées dans le cadre de la théorie des groupes. Ces concepts ont été introduits d'une manière abstraite et indépendante dans le célèbre article *General Theory of Natural Equivalences* de septembre 1945. Dans cet article Eilenberg et MacLane introduisent aussi le concept de catégorie qui offre un cadre abstrait pour définir les concepts de foncteur et de transformation -et d'équivalence- naturelle d'une façon générale.

Ces nouveaux concepts, tel comme ils sont décrits dans l'article de 1945, sont très similaires à ceux présentés dans les actuels textes de théorie des catégories. Cependant, le terme «foncteur» apparaissait déjà, auparavant, dans l'œuvre de Rudolf Carnap *Die Logische Syntax der Sprachen* de 1937. En fait, MacLane admet que

There was also some fun with the choice of terminology. Since the philosopher Kant had made ample use of general categories [sic], the term was borrowed from him for its present mathematical use, while Carnap, in his book on *Die Logische Syntax der Sprachen* had talked of functors in a dif-

ferent sense and made some corresponding mistakes. It seemed in order to take over that word for a better and less philosophical purpose [115, p.131].

Ceci est corroboré en [116, pp.29-30] :

Now the discovery of ideas as general as these is chiefly the willingness to make a brash or speculative abstraction, in this case supported by the pleasure of purloining words from the philosophers : “Category” from Aristotle and Kant, “Functor” from Carnap (*Logische Syntax der Sprache*), and “natural transformation” from then current informal parlance.

Malgré le fait que le terme foncteur est utilisé dans l’œuvre de Carnap, son concept correspondant est significativement différent au concept utilisé par Eilenberg et MacLane. Pour Carnap, si on part d’un langage Σ_1 contenant le calcul propositionnel usuel et l’arithmétique de Peano (avec ses axiomes, quantificateurs et variables), on peut penser un nouveau langage Σ_2 qui comprend Σ_1 , mais aussi qui contient des variables pour des propositions, des variables pour des prédicats et des variables pour des fonctions. Il explique, aussitôt, qu’un foncteur est une *fonction* avec quelconque nombre d’arguments²².

Dans leur article de 1942a, Eilenberg et MacLane²³ commencent leur présentation en expliquant un cas particulier. Cet exemple n’a pas pour propos central d’introduire le concept de foncteur mais de caractériser le concept d’isomorphisme naturel. Cependant, ce premier est traité à la volée pour expliquer ce dernier. Ils considèrent deux groupes

22. «In order to express a property of an object, or of a position, or a relation between several objects or positions, **predicates** are used (...) Predicates are, so to speak, proper names for the properties of positions. We have designated positions by means of systematic order-symbols—namely, number-symbols. In like manner we may also designate their properties by number-symbols. Instead of colour-names, colour-numbers (or triads of such numbers) may be used; instead of the inexact designations ‘warm’, ‘cool’, ‘cold’, and so forth, we can now use temperature-numbers (...) In order to express properties or relations of position by means of numbers, we shall use **functors**» [24, pp.13-14]. Les foncteurs sont des prédicats fonctionnels dont les variables sont soumises à un processus d’arithmétisation». C’est-à-dire, dont les arguments sont des nombres entiers positifs. Par ailleurs, comme on le verra ci-dessous, la notion de foncteur, dans [43] et dans la théorie des catégories en général, est beaucoup plus ample. Un foncteur pourrait être pensé, *a priori*, comme un type d’application dont le domaine est une collection hétérogène d’éléments. Car elle n’opère pas seulement sur un type d’éléments, mais aussi sur certain type de relations -les «morphismes» ou les «flèches»- entre tels éléments.

23. Par l’article de 1942a on se référera à l’article *Natural Isomorphisms in Group Theory* et l’article *Group Extensions and Homology* sera référencé comme l’article de 1942.

homomorphes G et G' , et sitôt après ils prennent les correspondants groupes duals²⁴ : $Ch(G)$ et $Ch(G')$. Ensuite, Eilenberg et Maclane mentionnent que si G est un groupe quelconque, $Ch(G)$ peut être considéré comme une application dont l'argument parcourt le domaine des groupes (qui s'appellera provisoirement **GRU**). La caractéristique la plus remarquable de Ch n'est pas seulement cette manière d'opérer sur les groupes mais aussi sur les homomorphismes de groupes : $Ch : \mathbf{GRU} \rightarrow \mathbf{GRU}$ est tel que pour tout $G \in \mathbf{GRU}$ et tout homomorphisme $\gamma : G \rightarrow G'$ on a que

$$G \mapsto Ch(G)$$

et

$$(\gamma : G \rightarrow G') \mapsto (Ch(\gamma) : Ch(G') \rightarrow Ch(G))$$

C'est-à-dire, la correspondance Ch n'envoie pas seulement chaque groupe $G \in \mathbf{GRU}$ vers $Ch(G) \in \mathbf{GRU}$, mais elle envoie également chaque homomorphisme de groupes vers un homomorphisme de groupes duals. On peut penser (pour le moment) que la correspondance Ch est constituée par deux applications : celle qui opère sur les éléments de **GRU** et celle qui opère sur les homomorphismes entre ces éléments. Et cette paire d'applications constituent un *foncteur* («The functions $Ch(G)$ and $Ch(\gamma)$ jointly form what we shall call a 'functor'» [43, p.538]). Schématiquement l'action du foncteur Ch peut se représenter par le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{Ch} & Ch(G) \\ \gamma \downarrow & & \uparrow Ch(\gamma) \\ G' & \xrightarrow{Ch} & Ch(G') \end{array}$$

On pourrait penser que si on a la collection $\mathbf{Grp} = \mathbf{GRU} \cup \mathbf{HOM}$ dans lequel **HOM** est la collection des homomorphismes entre éléments de **GRU**, alors

$$Ch : \mathbf{Grp} \longrightarrow \mathbf{Grp}$$

$$G \in \mathbf{GRU} \longmapsto Ch(G) \in \mathbf{GRU}$$

$$\gamma \in \mathbf{HOM} \longmapsto Ch(\gamma) \in \mathbf{HOM}$$

24. G désigne un groupe abélien fini d'ordre n , $C^* = C \setminus \{0\}$ le groupe multiplicatif des nombres complexes non nuls. Un caractère de G est un homomorphisme de groupes $f : G \rightarrow C^*$. L'ensemble des caractères de G est appelé groupe dual (*character group*) de G : $Ch(G) = \{f : G \rightarrow C^* / \forall g_1, g_2 \in G \quad f(g_1 * g_2) = f(g_1) \oplus f(g_2)\}$, avec l'opération \oplus_{Ch} induite par l'opération $\oplus : \forall g \in G, \forall \alpha, \beta \in Ch(G), (\alpha \oplus_{Ch} \beta)(g) = \alpha(g) \oplus \beta(g)$.

Mais le choix des éléments de **HOM** doit être tel qu'il prenne en considération le domaine et codomaine du homomorphisme original. Ainsi, en ayant que $H \neq Ch(G)$ et $H' \neq Ch(G')$, il n'est pas possible que Ch envoie $\gamma : G \rightarrow G'$ vers $\delta : H \rightarrow H'$ (ou vers $\delta : H' \rightarrow H$). Un autre aspect à noter est que Ch inverse le sens du homomorphisme : lorsque $\gamma : G \rightarrow G'$, on a que $Ch(\gamma) : Ch(G') \rightarrow Ch(G)$. Lorsque cela se produit, comme Eilenberg et MacLane mentionnent, on dit que le foncteur Ch est «contravariant», tandis qu'un foncteur qui préserve la direction des applications primitives, est un foncteur «covariant».

Ensuite, ils mentionnent brièvement qu'une transformation naturelle de groupes est un isomorphisme qui *commute convenablement* avec les deux applications qui constituent le foncteur : celle qu'opère sur les éléments de **GRU**, et celle qu'opère sur les homomorphismes de **HOM** [43, p.538]. Donc, il est important de clarifier qu'est que les auteurs veulent signifier par deux applications qui «commutent convenablement». A cette question, Eilenberg et MacLane introduisent la définition d'un foncteur entre deux groupes (dans le §2). Cette définition est telle que, dans une même présentation, elle permet de caractériser les concepts de foncteur covariant et contravariant. Au lieu de prendre deux foncteurs avec une variance différente, ils supposent que $T : \mathbf{Grp} \times \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Grp}$.

La caractéristique la plus remarquable de cette définition de foncteur est l'action qu'il exerce sur les homomorphismes. La définition qu'Eilenberg et MacLane présentent est fondamentalement la suivante : étant donnés deux homomorphismes entre des groupes $\gamma : G_1 \rightarrow G_2$ et $\eta : H_1 \rightarrow H_2$, on dit que T est covariant dans le premier argument, et contravariant dans le deuxième si

1. $T(\gamma, \eta) : T(G_1, H_2) \rightarrow T(G_2, H_1)$,
2. si γ et η sont identités, alors $T(\gamma, \eta)$ est aussi une identité.
3. si les compositions entre homomorphismes $\gamma_2 \circ \gamma_1$ et $\eta_2 \circ \eta_1$ sont définies, alors

$$T(\gamma_2 \circ \gamma_1, \eta_2 \circ \eta_1) = T(\gamma_2, \eta_1) \circ T(\gamma_1, \eta_2)$$

L'usage de deux arguments, bien qu'il synthétise la définition, ne lui octroie pas de clarté. Au lieu de considérer un foncteur $T : \mathbf{Grp} \times \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Grp}$, on peut prendre deux foncteurs $T, S : \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Grp}$. Et ainsi dire que T est covariant et S contravariant si :

1. $\forall (\gamma : G_1 \rightarrow G_2) \in \mathbf{Grp}, T(\gamma) : T(G_1) \rightarrow T(G_2)$ y $S(\gamma) : S(G_2) \rightarrow S(G_1)$,

2. si γ est une identité, alors $T(\gamma)$ et $S(\gamma)$ sont aussi des identités,
3. si $\gamma_1 : G_1 \rightarrow G_2$ et $\gamma_2 : G_2 \rightarrow G_3$, alors $T(\gamma_2 \circ \gamma_1) = T(\gamma_2) \circ T(\gamma_1)$ et $S(\gamma_2 \circ \gamma_1) = S(\gamma_1) \circ S(\gamma_2)$.

Eilenberg et MacLane reprennent le concept de foncteur après la définition d'équivalence naturelle de groupes. Cette démarche est effectuée en présentant et en analysant quelques exemples de foncteurs entre des groupes [43, §3] :

- i) Le produit direct $G_1 \times G_2$ de deux groupes.
- ii) Le produit tensoriel $G_1 \otimes G_2$ de deux groupes discrets.
- iii) Le produit libre $G_1 * G_2$ de deux groupes.
- iv) Étant donnés deux groupes topologiques abéliens G_1 (compacte) et un G_2 , le groupe de tous les homomorphismes $\text{Hom}(G_1, G_2)$ est un foncteur.
- v) La dualité $Ch(G)$ d'un groupe G qu'on a observé antérieurement²⁵.

Les deux derniers paragraphes de l'article -qui occupent la plus grande partie du même- sont dédiés à la définition formelle d'équivalence naturelle entre deux foncteurs (de groupes) et à la présentation de quelques exemples de transformations naturelles²⁶.

Tandis que l'article de 1942a se focalise sur la théorie des groupes, l'article de septembre de 1945 a un propos plus large : Eilenberg et MacLane essaient de généraliser le concept de transformation naturelle. En fait, dans le §6, à la fin de l'article de 1942a, ils faisaient allusion déjà à la possibilité de cette extension :

An inspection of the concept of a functor and of a natural equivalence shows that they may be applied not only to groups with their homomorphisms, but also to topological spaces with their continuous mappings, to simplicial complexes with their simplicial transformations, and to Banach spaces with their linear transformations. These and similar applications can all be embodied in a suitable axiomatic theory. The resulting much wider concept of naturality, as an equivalence between functors, will be studied in a subsequent paper. [43, p.543]

Le document auquel la citation fait référence est, sans doute, l'article de 1945. Dans cet article ils introduisent aussi le concept de catégorie. L'introduction de ce concept est importante car, dans l'article de 1942a, Eilenberg et MacLane prennent foncteurs

25. Eilenberg et MacLane caractérisent explicitement la manière comment les foncteurs \times, \otimes et Hom opèrent sur les objets (groupes) et sur les homomorphismes. Ils mentionnent, sans entrer dans les détails, que le foncteur $*$ peut être caractérisé de manière similaire.

26. Cette partie sera analysée dans le §1.1.4 de la thèse présente.

dont les arguments sont des groupes²⁷ mais on ne mentionne pas quel type d'entité est la collection de *tous* les arguments qu'un foncteur parcourt. Par conséquent, la notion de foncteur n'est pas bien fondée dans l'article de 1942a, mais dans l'article de 1945 ils tentent une explication de ce type de collection -n'exempte pas des problèmes, comme eux-mêmes l'admettent-. En résumé, ils présentent un concept «bien défini» et plus général de foncteur.

Pour réaliser une telle généralité, Eilenberg et MacLane ont eu besoin de caractériser un type d'entité similaire à celle qui a été définie plus haut : **Grp**. Ce type d'entité est inclus dans le concept de «catégorie». Ceci peut être vu *grosso modo* la jonction entre une collection *Ob* d'objets (groupes, espaces topologiques, anneaux, etc.) et une collection de *morphismes* (ou *flèches*) entre les objets d'*Ob* de telle manière que ces morphismes accomplissent certains axiomes. Ces derniers constituent la théorie axiomatique appropriée mentionnée à la fin de l'article de 1942a. Bien qu'à première vue, les morphismes entre deux objets dans une catégorie peuvent être considérés comme des applications ou des fonctions, en général ce n'est pas le cas²⁸. De la même manière, la catégorie, la collection d'objets et la collection de morphismes ne sont pas nécessairement des ensembles.

Dans son article de 1942a Eilenberg et MacLane se focalisent, spécifiquement, sur la catégorie **Grp** de tous les groupes et ses homomorphismes, sur la catégorie des groupes discrets²⁹ et ses homomorphismes, et sur la catégorie **AbTop** des groupes

27. «The definition of a functor will be given for the typical case of a functor T which depends on two groups as arguments...» [43, p.538]

28. Par exemple, la catégorie **hTop** des homotopies de tous les espaces topologiques a pour objets les espaces topologiques et, les morphismes entre deux espaces topologiques X et Y sont les *classes d'équivalence* de toutes les applications continues $f : X \rightarrow Y$ selon la relation d'homotopie. C'est pourquoi les objets de **hTop** sont des ensembles et ses morphismes ne sont pas des applications mais des *classes d'applications*. Ce fait a été corroboré par Freyd après avoir démontré que **hTop** n'est pas concrète, c'est-à-dire elle n'est pas représentable dans la catégorie **Ens**. C'est-à-dire, il n'y a pas un foncteur fidèle $\mathbf{hTop} \rightarrow \mathbf{Ens}$ [59].

Par ailleurs, Awodey montre deux exemples des catégories qui sont non concrètes. Le premier est la catégorie **Rel**, dont les objets sont des ensembles, et les morphismes les relations binaires. Le deuxième exemple est la catégorie dont les objets sont des ensembles finis, et un morphisme $f : A \rightarrow B$ entre deux ensembles finis la matrice rectangulaire $(n_{ij})_{i < a, j < b}$ (a et b sont les cardinalités de A et B respectivement) [6, p.7].

29. Un groupe discret est un groupe muni d'une topologie discrète. C'est-à-dire, un groupe topologique dont la topologie est discrète.

topologiques abéliens³⁰ et ses homomorphismes. Bien que le titre de l'article fasse référence à la théorie des groupes, en termes généraux on peut dire qu'Eilenberg et MacLane étudient la catégorie des groupes topologiques et des certaines de ses sous-structures : **Grp** est une sous-structure³¹ de la catégorie des groupes topologiques **TopGrp**, puisque chaque groupe peut être vu comme un groupe topologique munit de la topologie discrète.

Or, dans l'article de 1945, Eilenberg et MacLane procèdent d'une manière similaire que dans l'article de 1942a : ils introduisent les concepts d'une manière approximative à travers de quelques exemples, puis ils définissent ces concepts. C'est un long article (62 pages) car les concepts sont traités minutieusement, et il développe un plus grand nombre d'exemples et d'usages. Le concept de foncteur est défini dans le premier chapitre, mais il est introduit dès l'introduction de l'article. Après d'une exposition informelle de la notion de catégorie, et de faire allusion à la signification des isomorphismes entre les objets d'une catégorie arbitraire, ils mentionnent que

Most of the standard constructions of a new mathematical object from given objects (such as the construction of the direct product of two groups the homology group of a complex, the Galois group of a field) furnish a function $T(A, B, \dots) = C$ which assigns to given objects A, B, \dots in definite categories $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \dots$ a new object C in a category \mathfrak{C} . As in the special case of the conjugate $T(L)$ of a linear space, where there is a corresponding induced mapping $T(\lambda)$, we usually find that mappings α, β, \dots in the categories $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \dots$ also induce a definite mapping $T(\alpha, \beta, \dots) = \gamma$ in the category \mathfrak{C} , properly acting on the object $T(A, B, \dots)$.

These examples suggest the general concept of a functor T on categories $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \dots$ to a category \mathfrak{C} , defined as an appropriate pair of functions $T(A, B, \dots), T(\alpha, \beta, \dots)$. Such a functor may well be covariant in some of its arguments, contravariant in the others." [44, pp.234-235]

La définition formelle de catégorie est présentée dans le §1. Et dans la section suivante (§ 2) quelques théorèmes et exemples généraux de catégories sont présentés, en négligeant les problèmes avec les inconvénients ensemblistes. Mais, ils mettent l'accent

30. Ce sont des groupes topologiques dont les groupes sous-jacents sont abéliens.

31. Il n'est pas possible que **Grp** soit une sous-catégorie de **TopGrp** puisque $\text{Hom}(\mathbf{Grp}) \not\subset \text{Hom}(\mathbf{TopGrp})$ parce qu'il existe des homomorphismes qui ne sont pas continus.

sur les problèmes de limitation de taille dans certaines des catégories montrées³². Dans le §3, Eilenberg et MacLane offrent une définition formelle du concept de foncteur avec deux arguments. Cette définition se rapproche à celle exposée dans l'article de 1942a. Bien que cette définition présuppose l'existence de la catégorie produit³³, cette définition a l'avantage de montrer à la fois, dans un seul énoncé, ce qu'est un foncteur *covariant* et *contravariant*.

Leur définition est, essentiellement, la suivante :

Étant données \mathcal{C} , \mathcal{D} et \mathcal{E} catégories. Un *foncteur* $F : \mathcal{C} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$, *covariant* en \mathcal{C} et *contravariant* en \mathcal{D} est une fonction (*function*) telle que³⁴ :

$$1. \forall (A, B) \in \mathcal{C} \times \mathcal{D}, F(1_A, 1_B) = 1_{F(A, B)}$$

$$2. \forall (A_1 \xrightarrow{\alpha} A_2) \in \mathcal{C}, (B_1 \xrightarrow{\beta} B_2) \in \mathcal{D} \text{ on a que}$$

$$F(A_1, B_2) \xrightarrow{F(\alpha, \beta)} F(A_2, B_1)$$

$$3. \text{ Si } \alpha_2 \circ \alpha_1 \in \mathcal{C} \text{ et } \beta_2 \circ \beta_1 \in \mathcal{D}, \text{ alors}$$

$$F(\alpha_2 \circ \alpha_1, \beta_2 \circ \beta_1) = F(\alpha_2, \beta_1) \circ F(\alpha_1, \beta_2)$$

Graphiquement, cela peut être vu de la manière suivante³⁵ :

32. Parce que dans cet article, on présente parmi les exemples, la catégorie de *tous* les ensembles, la catégorie de *tous* les espaces topologiques, la catégorie de *tous* les groupes topologiques, et la catégorie de *tous* les espaces de Banach. Dans le § 6 intitulé «Fondements» (*Foundations*), ils mentionnent que ne étudieront pas les fondements, puisque considérer ces totalités conduit aux paradoxes de la théorie des ensembles. Cependant, Eilenberg et MacLane considèrent qu'une théorie qui pourrait fonder le concept de classe pourrait, également, fonder leur nouvelle théorie :

Any rigorous foundation capable of supporting the ordinary theory of classes would equally well support our theory. Hence we have chosen to adopt the intuitive standpoint, leaving the reader free to insert whatever type of logical foundation (or absence thereof) he may prefer. [44, p.246]

33. Étant données deux catégories \mathcal{C} et \mathcal{D} , on peut définir la catégorie $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ dans laquelle ses objets sont paires (α, β) avec $\alpha \in \text{Hom}(\mathcal{C})$ et $\beta \in \text{Hom}(\mathcal{D})$.

34. Le symbole \in sera utilisé dans certaines parties de la présente thèse, mais cela ne signifie pas que les catégories exposées sont concrètes.

35. Tout au long de la présente thèse on représentera quelques catégories et foncteurs au moyen des diagrammes sagittaux à l'intérieur desquels -c'est-à-dire, à l'intérieur de chaque catégorie- quelques objets et morphismes sont caractérisés illustrés. C'est le cas du graphique suivant. Cependant, dans d'autres cas, les catégories et quelques foncteurs seront représentés au moyen des diagrammes commutatifs.

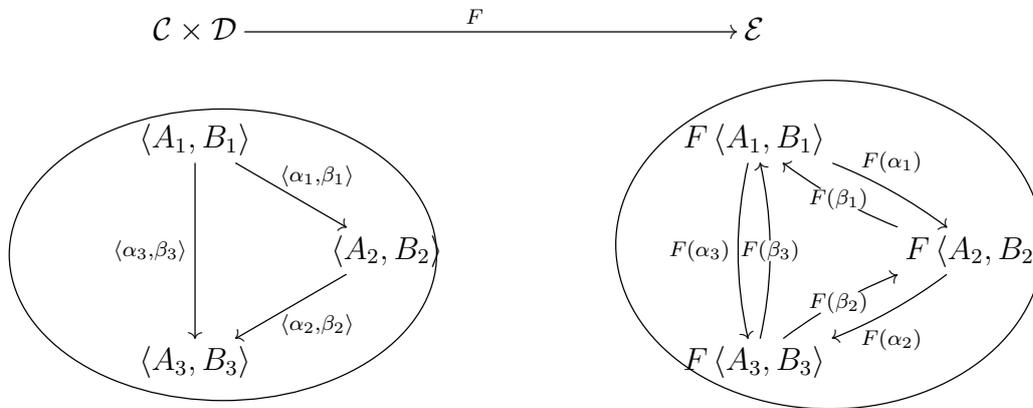


FIGURE 1.1 – Représentation d'un foncteur de deux arguments.

Comme il apparaît dans le document de 1942a, on observe que le foncteur peut être considéré comme une paire de «fonctions» : l'une qui opère sur les objets (elle envoie des objets vers des objets) et l'autre qui opère sur les morphismes (elle envoie des morphismes vers des morphismes)³⁶. Mais ils soulignent que [44, p.242] «The latter is the more important of the two».

Pour corroborer ce qui précède, ensuite ils démontrent un théorème indiquant que dans tout foncteur, la correspondance des objets à travers d'un foncteur est engendrée par la correspondance des identités³⁷.

36. En fait, les auteurs l'affirment : «According to this definition, the functor T is composed of an object function and a mapping function» [44, pp.241-242]

37. «Theorem 3.1. A function $T(\alpha, \beta)$ which associates to each pair of mappings α and β in the respective categories \mathcal{U}, \mathcal{B} a mapping $T(\alpha, \beta) = \gamma$ in a third category \mathcal{C} is the mapping function of a functor T covariant in \mathcal{U} and contravariant in \mathcal{B} if and only if the following two conditions hold :

(i) $T(1_A, 1_B)$ is a identity of mappings in \mathcal{C} for all identities $1_A, 1_B$ of \mathcal{U} and \mathcal{B} .

(ii) Whenever $\alpha_2 \circ \alpha_1 \in \mathcal{U}$ and $\beta_2 \circ \beta_1 \in \mathcal{B}$, then $T(\alpha_2, \beta_1) \circ T(\alpha_1, \beta_2)$ is defined and satisfies the equation

$$T(\alpha_2 \circ \alpha_1, \beta_2 \circ \beta_1) = T(\alpha_2, \beta_1) \circ T(\alpha_1, \beta_2)$$

If $T(\alpha, \beta)$ satisfies (i) and (ii), the corresponding functor T is uniquely determined, with an object function $T(A, B)$ given by the formula

$$1_{T(A, B)} = T(1_A, 1_B).»$$

En conséquence, si on connaît la correspondance des identités et la variance du foncteur il est possible de connaître la façon dont les objets de la catégorie sont liés. Après ce résultat, ils donnent quelques exemples des foncteurs. Dans le § 5, ils montrent comment, étant donné un foncteur avec deux arguments $F : \mathcal{C} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$ similaire au foncteur de sa définition (covariant en \mathcal{C} et contravariant en \mathcal{D}), on peut obtenir les foncteurs d'un argument $S : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{E}$ et $T : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$ avec la même variance en \mathcal{C} et \mathcal{D} , respectivement.

Dans ce qui reste de l'article de 1945, à l'égale que dans l'article de 1942a, les auteurs procèdent de manière similaire : ils présentent dans le premier chapitre des exemples de foncteurs³⁸, et dans le deuxième chapitre ils se focalisent sur le concept abstrait de transformation naturelle et sur quelques propriétés des foncteurs. Dans le troisième chapitre quelques exemples sont présentés : ils montrent comment les concepts de foncteur et de transformation naturelle permettent de traduire quelques propriétés de la théorie des groupes comme des propriétés de la catégorie **Grp**³⁹. C'est pour cela qu'ils introduisent les concepts de sub-foncteur et de foncteur quotient qui sont correspondants à ceux de sous-groupe et de groupe quotient. Ils indiquent (plus exhaustivement que dans leur article de 1942a) que le produit direct de groupes et le groupe dual peuvent aussi être formulés en termes de foncteurs. Dans le chapitre qui suit (IV), Eilenberg et MacLane étudient, fonctoriellement, les limites inductives et projectives⁴⁰ lesquels permettent de définir les catégories **Dir** et **Inv** des limites inductives et projectives d'un système de groupes, respectivement. Finalement, les deux dernières sections de ce

38. Les foncteurs ensemble de parties $\mathcal{P}^+, \mathcal{P}^- : \mathbf{Ens} \rightarrow \mathbf{Ens}$ qui envoient chaque $X \in \text{Ob}(\mathbf{Ens})$ sur son ensemble de parties $\mathcal{P}(X)$ et, chaque $(X \xrightarrow{f} Y) \in \text{Hom}(\mathbf{Ens})$ est envoyé sur : (i) $\mathcal{P}^- : \mathcal{P}(Y) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ et (ii) $\mathcal{P}^+ : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(Y)$. Le foncteur produit direct $\times : \mathbf{Grp} \times \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Grp}$ (qui a été caractérisé dans l'article de 1942). Le foncteur produit $\times : \mathbf{Top} \times \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Top}$ (covariant en les deux arguments et qui est défini d'une manière similaire que le produit direct). Le foncteur $\text{Map} : \mathbf{Top} \times \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Top}$ tel que $\text{Map}(X, Y) = Y^X$ (il est nécessaire que X soit un espace topologique de Hausdorff localement compact) et si $(X_1 \xrightarrow{\zeta} X_2), (Y_1 \xrightarrow{\eta} Y_2) \in \text{Hom}(\mathbf{Top})$ alors $\text{Map}(\zeta, \eta) = \eta \circ f \circ \zeta$ pour chaque $f \in Y_1^{X_2}$. Map est un foncteur contravariant en le premier argument et covariant en le deuxième. Les foncteurs $\text{Hom} : \mathbf{AbGrp} \times \mathbf{AbGrp} \rightarrow \mathbf{AbGrp}$ et $\text{Lin} : \mathbf{Ban} \times \mathbf{Ban} \rightarrow \mathbf{Ban}$ (ce dernier est le foncteur de toutes les transformations linéaires) qui sont définis d'une manière similaire que le foncteur Map . Et le dernier exemple est un cas particulier du foncteur Lin où le deuxième argument est fixé à l'espace de Banach \mathbb{R} . Dans ce cas, on obtient le foncteur espace dual $\text{Conj} : \mathbf{Ban} \rightarrow \mathbf{Ban}$ tel que $\text{Conj}(B) = \text{Lin}(B, \mathbb{R})$.

39. Strictement parlant, ils considèrent un groupe arbitraire G comme une catégorie qui a seulement un objet.

40. Pour cela, ils introduisent la catégorie **Ord** de tous les ensembles ordonnés [44, §20].

chapitre portent sur le principe de relèvement (*lifting principle*) et les théorèmes sur la commutativité des limites et foncteurs. Le dernier chapitre de l'article est similaire au chapitre III : quelques résultats de la topologie algébrique sont présentés (particulièrement les concepts d'homologie et de cohomologie des groupes) en employant les concepts de catégorie, de foncteur et d'isomorphisme naturel. Il est important de mentionner que dans ce chapitre, Eilenberg et MacLane définissent le foncteur Ext (qu'on étudiera dans le §1.3.2) en plus de montrer comment on peut caractériser l'homologie de Čech en termes de foncteurs [44, §30]. On pourrait dire que ces trois derniers chapitres essaient de synthétiser, dans le langage catégoriel, la plupart des sujets traités dans leur autre article de 1942 [42].

1.1.4 La transformation naturelle.

Pour caractériser en termes généraux le concept d'équivalence naturelle, Eilenberg et MacLane [44] définissent les concepts de foncteur et de catégorie. Une équivalence naturelle est un cas particulier des transformations de foncteurs et, comme on l'a vu, un foncteur est un type particulier des transformations de catégories. D'un point de vue épistémologique, le concept de transformation naturelle précède à celui de catégorie, en étant l'objet principal de l'article de 1945 [122, p.63]. De fait, ils affirment, dans cet article :

It should be observed first that the whole concept of a category is essentially an auxiliary one; our basic concepts are essentially those of a functor and of a natural transformation (...) The idea of a category is required only by the precept that every function should have a definite class as domain and a definite class as range, for the categories are provided as the domains and ranges of functors. Thus one could drop the category concept altogether(...) [44, p.247].

De même :

The concepts category, functor, and natural transformation were introduced (*in reverse order*⁴¹) during the early 1940s by Samuel Eilenberg and Saunders MacLane, aiming at resolving certain conceptual problems in algebraic topology [97, p.39].

Or, d'un point de vue logique (c'est-à-dire, en tenant compte la manière dont la théorie est présentée) il se produit l'inverse à la caractérisation épistémologique : le

41. C'est moi qui souligne

concept de catégorie est nécessaire pour définir le concept de foncteur, et cela est nécessaire pour définir le concept d'équivalence naturelle.

Bien que la propriété de naturalité ait été étudiée ou mentionnée auparavant dans d'autres deux articles par Eilenberg et MacLane⁴², le concept d'équivalence naturelle est défini *formellement* pour la première fois dans leur deuxième article de l'année de 1942, *Natural Isomorphisms in Group Theory*. Comme son nom l'indique, ce concept est discuté dans le cadre de la théorie des groupes, bien qu'à la fin de l'article ils affirment qu'il serait possible de généraliser ce concept aux espaces topologiques et aux espaces de Banach. Selon les auteurs «il sera abordé dans un document subséquent» [43, p.543]. Et, comme promis, cela (et plus) se fait dans leur célèbre article de 1945. De plus, alors que dans l'article de 1942 on ne mentionne pas ce qui est une *transformation* naturelle, en général (puisqu'ils étudient les *équivalences* naturelles), dans l'article de 1945 ils le font. Ce concept permet d'introduire une catégorie de foncteurs (quand trois catégories \mathfrak{A} , \mathfrak{B} et \mathfrak{C} sont données *a priori*) dans le §8. Malgré de cette introduction de la catégorie des foncteurs, le noyau de la discussion est à nouveau l'équivalence naturelle.

Dans le précédent paragraphe on a mis l'accent sur le caractère formel de la définition d'Eilenberg et de MacLane puisque eux-mêmes reconnaissent que ce concept existait avant sa définition, par exemple, dans les articles de 1941 et 1942. Mais ce n'était pas un concept bien défini dans le cadre d'une théorie mathématique. En fait, ils font l'allusion au *phénomène* de la naturalité comme un sujet récurrent, et l'objet de leurs deux articles est de démêler ce qui permet l'existence d'un tel phénomène : les transformations naturelles. De fait, la première chose qu'ils mentionnent dans l'Introduction de l'article 1942a :

Frequently in modern mathematics there occur phenomena of “naturali-

42. Ces articles sont les suivants :

- i) L'article de 1941 intitulé *Infinite Cycles and Homologies* où il est mentionné qu'étant donnés deux groupes topologiques G et H , le groupe $\text{Ext}(G, N)$ est *naturellement* isomorphe au produit tensoriel $G \otimes Ch(H)$ [41, p. 536].
- ii) L'article de 1942 *Group Extensions and Homology* (qui précède l'article *Natural Isomorphisms in Group Theory*, dans lequel Eilenberg et MacLane définissent de façon informelle la condition pour qu'un homomorphisme de groupes soit naturel [42, §12]. Ils présentent plusieurs résultats et, dans le §38 ils formulent d'une manière explicite ce critère de naturalité. Cependant, cette propriété n'a pas de formulation indépendante parce qu'elle est présentée dans un théorème particulier des groupes.

ty” : a “natural” isomorphism between two groups or between two complexes, a “natural” homeomorphism of two spaces and the like. We here propose a precise definition of the “naturalness” of such correspondences, as a basis for an appropriate general theory. [43, p.537]

En termes très généraux, une transformation naturelle peut être considérée comme une transformation de foncteurs. Mais de la même façon que non toute transformation de catégories peut être un foncteur, non toute transformation de foncteurs peut être une transformation naturelle. C'est-à-dire, il doit y avoir un critère de naturalité pour une transformation de foncteurs. Et, comme on a vu, ce critère avait été déjà ébauché dans [42].

Le paragraphe 4 (intitulé *Equivalence of Functors*) de l'article de 1942a introduit l'équivalence naturelle. À nouveau, Eilenberg et MacLane emploient foncteurs de deux arguments $T, S : \mathbf{Grp} \times \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Grp}$ (covariants en le premier argument et contravariants en le deuxième), et si pour chaque $G, H \in \mathbf{Grp} \times \mathbf{Grp}$ on a l'homomorphisme (de groupes)

$$\tau(G, H) : T(G, H) \rightarrow S(G, H)$$

We say that τ establishes a natural *equivalence* of the functor T to the functor S and that T is naturally *equivalent* to S (in symbols, $\tau : T \leftrightarrow S$) whenever

- (E1) Each $\tau(G, H)$ is a bicontinuous isomorphism of $T(G, H)$ onto $S(G, H)$;
- (E2) For each $\gamma : G_1 \rightarrow G_2$ and $\eta : H_1 \rightarrow H_2$,

$$\tau(G_2, H_1) \circ T(\gamma, \eta) = S(\gamma, \eta) \circ \tau(G_1, H_2).$$

The first requirement insures the term-by-term isomorphism of the two group functions $T(G, H)$ and $S(G, H)$, while the second requirement is precisely the “naturalness” condition. It can be shown that the condition (E2) is implied by two special cases ; the case when η is an identity, and the case when γ is an identity.

This relation of natural equivalence between functors is reflexive, symmetric and transitive. In many cases we dispense with condition (E1), and obtain a more general concept of a “transformation” of a functor T into a functor S [43, pp.540-541].

Pour synthétiser et simplifier on va prendre des foncteurs d'un argument (mais avec la même variance) : si \mathcal{C} et \mathcal{D} sont des catégories données, si $S, T : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ sont des foncteurs contravariants, et si on suppose que pour chaque objet $A \in \mathcal{C}$ on a un

morphisme $(\tau_A : T(A) \rightarrow S(A)) \in \mathcal{D}$ tel que, pour chaque morphisme $(\alpha : A \rightarrow B) \in \mathcal{C}$ le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} T(A) & \xrightarrow{\tau_A} & S(A) \\ T(\alpha) \downarrow & & \downarrow S(\alpha) \\ T(B) & \xrightarrow{\tau_B} & S(B) \end{array}$$

Dans ce cas, on écrit

$$\tau : T \dashrightarrow S \quad \text{ou} \quad \tau : T \rightrightarrows S \quad \text{ou} \quad \tau : T \rightarrow S$$

et τ est nommée la transformation naturelle de T sur S . On peut observer que le diagramme en haut représente la condition de naturalité (E2) parce que

$$\tau_B \circ T(\alpha) = S(\alpha) \circ \tau_A.$$

Finalement, dans la section §5 de l'article de 1942a, Eilenberg et MacLane présentent quelques exemples d'équivalences naturelles de foncteurs qui agissent sur des groupes⁴³.

1.1.5 La réception immédiate de ces concepts.

Les nouveaux concepts de catégorie, de foncteur et de transformation naturelle, qui ont été introduits d'une manière générale dans l'article de 1945, n'ont pas eu d'impact profond dans la communauté mathématique avant les années 1952-1953, quand sont publiés les premiers textes qui utilisent ces concepts : le livre *Foundations of Algebraic Topology* d'Eilenberg et Steenrod de 1952, et l'article *Acyclic Models* d'Eilenberg et MacLane de 1953. L'incidence de ces textes (particulièrement le livre) a été tel que les mathématiciens se sont intéressés à ces nouveaux outils conceptuels. Avant l'apparition de ces articles, les concepts catégoriels ont été seulement utilisés par ses créateurs. Cependant (comme Marquis mentionne), dans son article de 1947 *An exposition of the relative homotopy theory*, Hu essaie de développer une présentation de quelques résultats importants de l'état de connaissances de la théorie homotopique relative. Néanmoins

(...) the exposition is *not* done via categories. Thus, the paper does not open with a definition of the categories involved and a presentation of various

43. On étudiera plus en détail la signification du concept de naturalité dans le §1.2.1 de la présente thèse.

results in the framework of functors and natural transformations. In fact, categories are used in that paper in an awkward fashion. The homotopy groups are *not* defined as functors between categories. Furthermore, the term “category” is used only for groups and homomorphisms. Other categories are called “general categories”. Hu also introduces “local categories”, which are in fact groupoids, but the latter notion, although defined, was not used at the time. Hu’s paper had no effect on subsequent work. [122, p.123]

Bien qu’il soit nécessaire de remarquer qu’avant l’article d’Hu, en février 1945 (et avant la publication de [44]), Eilenberg et Steenrod ont publié un court article intitulé *Axiomatic approach to homology theory* dans lequel ils proposent un système de sept axiomes pour une théorie homologique. Dans cet article, ils n’utilisent pas *explicitement* les concepts catégoriels, mais il est possible de vérifier que le foncteur (covariant) d’homologie singulière $H_n : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Ab}$ est *implicitement* défini au moyen des axiomes 1 et 2. Et, d’une manière similaire l’opérateur frontière $\partial : H_q(X, A) \rightarrow H_{q-1}(A)$ est implicitement caractérisé à travers l’axiome 3 comme une transformation naturelle⁴⁴.

Dans la série des articles qu’Eilenberg et/ou MacLane ont écrits entre les années 1945 et 1952 au cours desquelles les nouveaux outils catégoriels ont été utilisés. Le concept plus amplement employé est celui de transformation naturelle, ensuite, celui de foncteur alors que celui de catégorie est rarement invoqué. Et l’affirmation précédente est cohérente avec l’esprit de l’article de 1945. Dans celui-là, Eilenberg et MacLane proposent une définition précise (formelle) du concept de transformation naturelle car, selon eux, le concept de naturalité apparaît fréquemment dans la littérature mathématique du moment (c’est-à-dire, avant 1942). Dans ce sens, le concept de transformation naturelle revêt d’une grande importance alors que les concepts de foncteur et de catégorie sont seulement des concepts auxiliaires pour fonder la propriété de naturalité.

On peut dire que ce groupe d’articles peut être classé en deux types. Le premier type d’articles emploie la propriété de naturalité (et, dans une moindre mesure, le concept de foncteur) dans le domaine de la topologie algébrique, spécialement dans la théorie homologique. Par contre il n’exploite pas la richesse ou les possibilités des outils catégoriels : [37], [46], [38], [49], [47] y [39]. Et, le deuxième groupe d’articles (deux

44. Cela s’explique dans [52, p.112-113].

exactement, écrits par MacLane) caractérise une nouvelle (et importante) propriété du nouveau cadre conceptuel catégoriel : la dualité. Il est nécessaire d'explicitier que ce deuxième groupe d'articles a eu une grande influence sur le premier groupe, puisque les propriétés de la théorie cohomologique sont déterminées au moyen de la dualité par ses correspondants dans la théorie homologique. Il est vrai aussi que ce deuxième groupe d'articles utilise d'avantage les procédures catégorielles, puisqu'il est plus indépendant d'un autre cadre théorique pour son développement, bien qu'il emploie la théorie de groupes pour se concrétiser.

Dans [37] (en 1944), Eilenberg réalise une analyse précise (et systématique) de la théorie de l'homologie singulière. Dans ce sens l'article essaie d'être une extension du livre de Lefschetz [108], mais avec quelques différences, par exemple, le fait de prendre les simplexes comme des ensembles ordonnés ou d'introduire le nouveau concept d'équivalence de chaînes (*chain equivalence*). Cet article est divisé en six chapitres et un appendice intitulé *Chain Equivalences and Naturality*. C'est dans cet appendice où la propriété de naturalité est introduite pour expliquer pour quoi quelques morphismes (*chain maps*) sont, de fait, transformations naturelles. Puisque dans cet appendice le concept de naturalité est employé d'une manière informelle, dans une note de bas de page Eilenberg remet le lecteur aux articles de 1942 et 1945 (ce dernier qui n'avait pas été publié encore) pour approfondir sur ce concept [37, p.446].

L'article de 1944 a inspiré un autre article en 1946 [46] dans lequel sont étudiées les invariants homotopiques des groupes d'homologie et cohomologie bidimensionnels. Dans cet article Eilenberg et MacLane mentionnent (sans démonstration) que l'homomorphisme d'Hurewicz entre les deuxièmes groupes d'homotopie et d'homologie supérieurs $\pi_2(X, x_0) \rightarrow H_2(X)$ est naturel. La version générale de cet homomorphisme naturel ($\pi_n(X, x_0) \rightarrow H_n(X)$) est présentée dans un article d'Eilenberg de 1947 [38]. Dans cet article sont étudiées les invariants d'un espace topologique, mais Eilenberg se focalise dans celles qui sont «simultaneous (...) and of an abstract group W acting as a group of transformations on X ». Cet dernier article est intéressant parce que dans la définition de la transformation (*map transformation*) $\tau : K_1 \rightarrow K_2$ entre deux complexes simpliciaux abstraits, sa naturalité est implicitement caractérisée (cela s'explicité dans [37]). La naturalité est explicitement mentionnée lorsque Eilenberg montre que le groupe de co-chaînes $C^q(K, \text{Hom}(J, G)) = \text{Hom}(C_q(K), \text{Hom}(J, G))$ accomplit que

$$\text{Hom}(C_q(K), \text{Hom}(J, G)) \cong \text{Hom}(J \otimes C_q(K), G)$$

où $C_q(K)$ est le groupe abélien (discret) de chaînes sur un complexe abstrait K , J est groupe abélien discret, et G est un groupe topologique abélien. Eilenberg affirme que cet isomorphisme est naturel parce qu'il est un cas particulier d'une équivalence naturelle présentée dans l'article de 1942a⁴⁵.

En 1949 Eilenberg et MacLane développent la continuation de l'article de 1947 [47] où quelques résultats présents dans un autre article de 1947 [49] sont généralisés. Dans les deux articles il est déjà reconnu explicitement que quelques applications (*maps*) et homomorphismes possèdent la propriété de naturalité. Et dans l'article de 1949 se mentionne *explicitement* que certain noyau d'un homomorphisme est un foncteur contravariant [47, p.69]. Également, dans un autre article de 1949 (qui synthétise quelques résultats des derniers articles cités [39]) Eilenberg dit que certaines des applications sont des transformations naturelles.

Au contraire du groupe d'articles employant la naturalité dans la théorie homologique, les deux articles de MacLane utilisent le concept abstrait de catégorie (mais après ils se centrent sur la catégorie **Grp**) et ils n'invoquent pas le concept de transformation naturelle. Dans l'article de 1948, MacLane emploie explicitement le concept de catégorie pour formuler de manière axiomatique, une dualité (partielle) pour les groupes. Parce que pour exprimer le phénomène de la dualité il est nécessaire de considérer le «system consisting of all groups and all homomorphisms of one group into another» [110, p.265]. MacLane formule brièvement les axiomes qui caractérisent une catégorie, et il définit axiomatiquement ce qui est une *bicatégorie*⁴⁶ afin de définir (au moyen des axiomes de bicatégorie) les concepts d'application (*map*) projective et inclusive pour des groupes et, donc, ceux de sous-groupe et de groupe quotient. L'article n'utilise pas les concepts de foncteur ou de transformation naturelle et, il ne caractérise pas non plus explicitement le principe de dualité qui est sous-jacent dans la formulation du concept de bicatégorie. Ce qui est le cas, au contraire, dans un autre article de 1950. Ce dernier peut être vu comme une version plus développée de l'article de 1948, puisque MacLane à nouveau fixe son attention sur les groupes

45. L'isomorphisme auquel il se rapporte est $\text{Hom}(C, \text{Hom}(J, G)) \cong \text{Hom}(J \otimes C, G)$ qui s'accomplit pour chaque C et J (groupes abéliens) et G groupe topologique abélien [43, p.542]. Voir l'exemple (i) dans le §1.2.2 de la thèse présente.

46. Ce n'est pas le même concept qui s'emploie de nos jours lequel a été développé par Bénabou en 1967. MacLane emploiera ses bicatégories dans son article de 1950 pour introduire le concept qu'il dénomme par «catégorie abélienne», mais qui est appelée de nos jours comme «catégorie additive».

et les bicatégories (avec un plus grand détail) mais ceux-ci s'emploient pour offrir des exemples de résultats de ses nouveaux concepts mathématiques : les catégories abéliennes (auxquelles il dédie son dernier chapitre). Le concept de bicatégorie à l'égal de celui de catégorie abélienne est utilisé entièrement d'une manière catégorielle malgré le fait que ces concepts peuvent être vus comme des généralisations d'objets de la théorie de groupes⁴⁷. Contrairement à son article de 1948, MacLane explicite les aspects sous-jacents du phénomène de la dualité, puisqu'il observe qu'une paire de théorèmes duaux pour des groupes abéliens diffère uniquement par la direction des flèches des diagrammes qui interviennent dans les théorèmes [111, p.486 y §10]. Le fait de comprendre la cause de la dualité lui permet d'examiner plus d'instances de ce phénomène et d'élaborer une table de dualité pour des groupes. C'est dans le Chapitre II de l'article qu'il introduit le concept de catégorie, à nouveau avec l'intention de présenter le concept de bicatégorie [111, p.497]. En outre, dans le §13 MacLane mentionne l'importance de la notion de variance (et, il fait référence à l'article de 1945), ce qu'implique qu'il se rapporte implicitement au concept de foncteur.

Les concepts catégoriels créés par Eilenberg et MacLane ont été discrètement introduits dans le Séminaire Henri Cartan. Dans ce séminaire, entre les années 1948 et 1951, ont été étudiés plusieurs des concepts qu'Eilenberg et MacLane avaient déjà analysés. Toutefois, des nouveaux concepts ont été étudiés comme celui de faisceau. Et, à l'égal que dans les premiers écrits d'Eilenberg et/ou de MacLane, les propriétés de fonctorialité et de naturalité sont implicitement caractérisées dans un grand nombre d'homomorphismes dans les différents exposés. Cependant, certains de ces homomorphismes sont explicitement identifiés tant que foncteurs, ou la propriété de fonctorialité est identifiée comme d'importance pour certains résultats.

Ce séminaire a débuté en 1948 et il a fini en 1964. Tout le long des années, ce séminaire a été divisé en différentes sections, dans lesquelles, dans une grande mesure, les nouveaux développements dans le domaine de la topologie algébrique ont été étudiés. Le premier séminaire (entre le novembre 8 1948 et le 15 mars 1949, et avec les exposés de J-P. Serre, H. Cartan, J. Cerf, J. Dixmier et P. Samuel) a traité sur les généralités de la topologie algébrique à ces jours : les complexes simpliciaux, les groupes d'homologie d'un complexe simplicial, l'homologie et la cohomologie singulière, les

47. Comme on a mentionné, cela se renforce par le fait que MacLane reprend constamment de divers résultats de ce champ.

opérateurs d'homotopie, la dualité, les co-chaînes, la cohomologie de Čech-Alexander et le produit tensoriel. Le deuxième séminaire (entre le 7 novembre 1949 et le 19 juin 1950, avec les exposés de Serre, Cartan, A. Blanchard, A. Borel et Wen-Tsün Wu) a eu par sujet étudier les espaces fibrés et l'homotopie.

Le troisième séminaire (entre le 13 novembre 1950 et le 18 juin 1951) a eu la particularité d'avoir la participation d'Eilenberg (avec quatre exposés). Les autres exposés ont été faites par Serre et Cartan. Eilenberg a développé les deux premières exposés sur les axiomes et l'unicité pour une théorie homologique -et cohomologique- des groupes discrets. Le sujet de ces présentations est, en essence, le même de l'article de 1945 avec Steenrod [51]. Mais avec plus de détails, puisqu'Eilenberg a montré en plus les axiomes et le théorème d'unicité pour la cohomologie -dans sa première exposition-, et il exemplifie cette théorie dans le cadre des complexes acycliques -dans sa deuxième exposition- en démontrant les théorèmes d'existence aussi bien pour la théorie homologique que pour la théorie cohomologique. On peut affirmer que, d'une manière similaire que dans l'article avec Steenrod de 1945, les concepts de foncteur et de transformation naturelle sont traités d'une façon implicite à l'intérieur du cadre axiomatique de l'homologie et la cohomologie. Les cinq exposés suivants (qui ont été faites par Serre et Cartan) ont traité les implications de la théorie homologique d'Eilenberg-Steenrod. Dans les exposés sixième et septième, Eilenberg a étudié les suites exactes d'homomorphismes de groupes abéliens et, dans le §4 du sixième exposé, Eilenberg mentionne que l'opérateur H est, de fait, un foncteur covariant. Ayant souligné ce fait, Eilenberg mentionne qu'«on a à considérer» ce type de foncteurs dans la théorie de l'homologie. Dans l'exposé 14 où Cartan reprendre l'étude des concepts de «faisceau» et de «carapace»⁴⁸ (qui ont été examinés dans quelques exposés entre 1948 et 1949). Il donne différents modes de définition d'un faisceau et, après d'une série de définitions⁴⁹ il mentionne que, pour chaque ouvert $X \subseteq \mathfrak{X}$, tout homomorphisme de faisceaux $\varphi : F \rightarrow G$ induit un homomorphisme $\Gamma(F, X) \rightarrow \Gamma(G, X)$ -il montre comment cet homomorphisme est définit-. Il mentionne que⁵⁰ «Ceci définit $\Gamma(F, X)$

48. Selon Eilenberg et Steenrod [52], une carapace remplace le concept de complexe.

49. Il est nécessaire de caractériser le type d'espace topologique \mathfrak{X} qui permette d'introduire le concept de faisceau. De plus, il définit, pour chaque ouvert $X \subseteq \mathfrak{X}$, l'ensemble de modules de sections $\Gamma(F, X)$ d'un faisceau F au-dessus de X .

50. Il reprend cette caractérisation fonctoriel dans la Proposition 2 de son exposé suivant. Et, dans l'exposé 17, il mentionne dans la définition d'un faisceau G Φ -injective (où Φ est une famille, qui doit accomplir certaines conditions -voir p.3 de l'exposé 15- de parties de l'espace topologique \mathfrak{X}) que l'homomorphisme $\Gamma_{\Phi}(G \otimes F) \rightarrow \Gamma_{\Phi}(G \otimes F')$ (induit par l'homomorphisme surjectif $F \rightarrow F'$) peut être

comme *foncteur faisceau* de F ». Après, Cartan emploie la propriété de la commutativité entre la limite inductive et le foncteur produit tensoriel, pour ainsi définir un faisceau dans l'espace produit $\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}$ de deux espaces topologiques. Dans l'exposé 19, Cartan mentionne (dans le Théorème 6) qu'un certain homomorphisme entre cohomologies d'une carapace et un faisceau (p.6) est fonctoriel.

Publié en 1952 et conçu⁵¹ vers 1945, le livre *Foundations of Algebraic Geometry* d'Eilenberg et Steenrod était le premier livre à utiliser d'une manière systématique les nouveaux outils catégoriels de catégorie, de foncteur et de transformation naturelle. Ce livre, en mots de Spanier [149, p.190] «has had a profound influence on the development of topology both before and after its publication. In the five years since its first printing it has become a standard textbook and reference work for anyone interested in topology.» Ce livre constitue un nouveau regard à ce qui concerne les fondements de la topologie algébrique, grâce à l'utilisation des nouveaux outils conceptuels et par la puissance du langage procuré par les nouveaux concepts de catégorie, foncteur et transformation naturelle; en plus des constructions catégorielles fondamentales : les sommes directes, les produits, le foncteur produit tensoriel, le foncteur Hom, etc.⁵². La plupart de ces concepts sont introduits dans le Chapitre IV : dans le §2 ils définissent ce qu'est une catégorie et ils exposent certaines de ses propriétés. Dans le §3 ils introduisent quelques exemples de catégories. Le concept de catégorie n'est pas superflu, parce que toute la théorie homologique développée dans le livre a besoin d'une catégorie admissible qui permet l'existence de telle théorie. C'est-à-dire, les catégories admissibles sont fondamentales pour le développement de la théorie homologique (et cohomologique) d'Eilenberg et Steenrod. Un cadre théorique catégoriel permet un traitement moins compliqué puisque des nombreuses propriétés des homomorphismes sont réduites aux propriétés de fonctorialité ou naturalité. De fait, une théorie homologique consiste en trois applications (*maps*) de sorte que l'utilisation des propriétés des morphismes est centrale. C'est par cela que les concepts de transformation naturelle et, particulièrement, de foncteur sont basiques dans la théorie d'Eilenberg et Steenrod

considéré comme un foncteur exact de faisceaux. C'est-à-dire, qui envoie des suites exactes de faisceaux vers des suites exactes de modules.

51. Au début de l'article de 1945, Eilenberg et Steenrod annoncent un développement complet et précis qui sera matérialisé dans leur livre de 1952.

52. Ils mentionnent que «The ideas of category and functor inspired in part the axiomatic treatment of homology theory given in this book. In addition, the point of view that these ideas engender has controlled its development at every stage» [52, p.108]

parce qu'ils permettent la démonstration des théorèmes d'unicité et d'existence d'une théorie homologique. Compte tenu de ce qui précède, on peut voir que le concept de foncteur n'a pas des changements avec celle qu'Eilenberg et MacLane ont formulée dans son article de 1945. De fait, la définition d'Eilenberg et Steenrod est la suivante :

Let \mathcal{C} and \mathcal{D} categories and let T be a function which maps the objects of \mathcal{C} into the objects of \mathcal{D} and, in addition, assigns to each map $f \in \mathcal{C}$ a map $T(f) \in \mathcal{D}$. The map T is called a *covariant functor* (from \mathcal{C} to \mathcal{D}) if it satisfies the following conditions :

1° If $f : C_1 \rightarrow C_2$, then $T(f) : T(C_1) \rightarrow T(C_2)$.

2° $T(i_C) = i_{T(C)}$.

3° If $f_2 \circ f_1$ is defined, then $T(f_2 \circ f_1) = T(f_2) \circ T(f_1)$.

The map T is called a *contravariant functor* if these conditions are replaced by :

1' If $f : C_1 \rightarrow C_2$, then $T(f) : T(C_2) \rightarrow T(C_1)$.

2' $T(i_C) = i_{T(C)}$.

3' If $f_2 \circ f_1$ is defined, then $T(f_2 \circ f_1) = T(f_1) \circ T(f_2)$.

The condition 1° can be rewritten : $T(Df) = DT(f)$ and $T(Rf) = RT(f)$. Thus T is a covariant functor if it commutes with the operations of the category. [52, p.111]

Aussitôt, ils montrent que l'application $H_q(X, A) \rightarrow H_q(Y, B)$, entre des homologies d'une catégorie admissible, est un foncteur covariant. Et, d'une manière similaire, il est possible de définir le foncteur contravariant entre des cohomologies. De plus, ils montrent que l'application caractérisée par l'axiome (3) de leur théorie est une transformation naturelle.

Dans le §9 du Chapitre IV, ils ajoutent plus de conditions aux foncteurs pour obtenir différents types de foncteurs : ∂ -foncteurs, δ -foncteurs, c -foncteurs et h -foncteurs. Ces derniers permettent, d'une certaine façon, de définir le concept général d'homotopie dans des catégories admissibles. La partie restante du livre est dédiée à l'étude des propriétés du foncteur produit tensoriel et du foncteur Hom dans les catégories des chaînes de complexes et d'espaces topologiques localement compacts.

Comment on a mentionné, ce livre d'Eilenberg et Steenrod a eu une grande importance dans la communauté mathématique. Et une partie de cette influence a été

l'adoption du langage et concepts catégoriels. De fait, Spanier [149, p.192] mentionne que :

Diagrams of homomorphisms, which are used so frequently today, were first systematically used in this book, both to motivate proofs and to assist the reader in following arguments (...) Since its publication the terminology and notation of the book has been almost universally adopted by topologists.

Un an après l'apparition du livre d'Eilenberg et Steenrod, il a été publié l'article *Acyclic Models* d'Eilenberg et MacLane. Cet article, à différence de leurs derniers articles, utilise d'une manière intégrée les concepts catégoriels qu'ils ont développé. De fait, ils ne mentionnent pas que les objets ou les propriétés étudiées dans cet article *peuvent être vues en tant qu'objets ou propriétés de certaines catégories ou de certains foncteurs*. Ils procèdent inversement : ils définissent un type de catégorie qui sera le fondement pour les constructions subséquentes, ils caractérisent le concept de foncteur représentable (définition qui utilise la propriété de naturalité⁵³), et ils définissent l'homotopie dans la catégorie des chaînes de complexes en termes de la naturalité. Après, ils mentionnent quelle est la signification du foncteur T pour pouvoir caractériser l'homologie singulière cubique d'une manière purement abstraite, en considérant les complexes (particulièrement les cubes) entant qu'applications d'ensembles ordonnés.

Cet article propose une nouvelle caractérisation purement abstraite et pas géométrique (comme il est le cas du livre de Lefschetz) de quelques concepts de la topologie algébrique. De plus, certains des concepts catégoriels ne sont pas utilisés comme des outils mais aussi sont des objets d'étude. Cependant, l'étude de ces concepts n'est pas faite d'une manière abstraite (étudier les catégories, les foncteurs, les transformations naturelles par eux-mêmes) mais ils sont étudiés les propriétés de quelques catégories et de quelques foncteurs particuliers.

En 1956, est publié le livre *Homological Algebra* de Cartan et Eilenberg⁵⁴. Dans ce livre, à l'égal que dans la livre d'Eilenberg et Steenrod, les concepts de catégorie, de

53. Eilenberg et MacLane assument, étant donnée une catégorie \mathcal{A} , un foncteur $T^* : \mathcal{A} \rightarrow \mathbf{Grp}$ qui envoie chaque $A \in \mathcal{A}$ vers le groupe libre abélien $T^*(A)$ tel que si on a un foncteur covariant $T : \mathcal{A} \rightarrow \mathbf{Grp}$ il est possible de définir une transformation naturelle $\Phi : T^* \rightarrow T$ (voir [48, p.189] pour les détails du foncteur T^*). Avec ces conditions, on dit que le foncteur T est représentable s'il existe une transformation naturelle $\Psi : T \rightarrow T^*$ tel que $\Phi \circ \Psi = 1_T$. Dans tel cas, Ψ est nommé la représentation de Φ .

54. Cependant, ce livre a été écrit entre 1950 et 1953 [27, p.xvii].

foncteur et de transformation naturelle sont fondamentaux. Ils ne définissent pas ce que sont ces concepts, mais ils les présupposent dans le même sens que ceux exposés dans [44]. Cependant, ils ne considèrent pas des foncteurs en général, mais certains types de foncteurs, ceux qui sont définis

(...)for Λ -modules and whose values are in the category of Γ -modules, where Λ and Γ are two given rings. We only consider functors which satisfy an additivity property reflecting the fact that homomorphisms of modules can be added. Functors of several variables, some covariant, some contravariant are also treated. [26, p.18]

L'un des objectifs de ce livre est de donner une présentation axiomatique de l'algèbre homologique. Pour cela, il est nécessaire de caractériser de façon précise les propriétés aussi bien du produit tensoriel $A \otimes_{\Lambda} C$ de deux Λ -modules que du groupe $\text{Hom}_{\Lambda}(A, C)$ de tous les Λ -homomorphismes entre les Λ -module à gauche A et C . Après cela, il est possible de produire le *produit de torsion* (torsion product) $\text{Tor}_{\Lambda}^n(A, C)$ entre les deux Λ -modules et le foncteur $\text{Ext}_{\Lambda}^n(A, C)$. Puis, Cartan et Eilenberg mentionnent que les propriétés formelles des foncteurs (en général) sont celles qui permettent une description axiomatique des foncteurs Ext et Tor . Ces foncteurs ont une grande importance parce qu'ils permettent de définir les groupes de cohomologie⁵⁵ $H^q(\Pi, C)$ d'un groupe d'opérateurs à gauche Π , avec coefficients dans un groupe abélien additif C (et les groupes de cohomologie $H^q(\mathfrak{g}, C)$, où \mathfrak{g} est une algèbre de Lie sur un anneau commutatif K , et C est un espace de représentation à gauche (*left representation space*) pour \mathfrak{g}). De plus, ils mentionnent que «With the functors Tor and Ext introduced we can now show how the cohomology theories of groups, Lie algebras and associative algebras fit into a uniform pattern» [26, p.viii].

Ce livre est, de fait, plus abstrait que le livre d'Eilenberg et Steenrod, dans la mesure où il y a une plus grande présence des objets catégoriels. Par exemple, entre les chapitres II-V ils développent ce qu'ils nomment «une théorie abstraite des foncteurs additifs» en introduisant les nouveaux concepts de *foncteur satellite* et de *foncteur dérivé*. Le deuxième peut être considéré, à juste titre, comme un concept purement catégoriel. Ils considèrent le cas des foncteurs dérivés sur la catégorie des chaînes de complexes et après sur des catégories additifs, mais ce concept peut se généraliser pour des catégories d'équivalences faibles⁵⁶. Le même Cartan affirme que

55. Ces concepts seront brièvement définis dans le §1.3.

56. Il s'agit d'une catégorie avec une collection de morphismes distingués qui sont composés par tous

Cet ouvrage (...) semble avoir servi de catalyseur : il a été à l'origine de rapides développements tant en Algèbre pure qu'en Géométrie algébrique et en Géométrie analytique. Le terme lui-même d'«algèbre homologique», donné comme titre à notre livre, a fait fortune. Dans ce livre nous avons traité le cas des modules sur un anneau ; mais l'exposition avait été conduite de telle sorte qu'elle pouvait immédiatement se transposer à d'autres cas, comme il était d'ailleurs indiqué dans l'Appendice a notre livre écrit par D. BUCHSBAUM. Il devait revenir à GROTHENDIECK d'introduire et d'étudier systématiquement les «catégories abéliennes», ce qui permit aussitôt, par exemple, d'intégrer dans l'Algèbre homologique la théorie de la cohomologie d'un espace à coefficients dans un faisceau de groupes abéliens. C'est aussi GROTHENDIECK qui, à la suite de SERRE, introduisit systématiquement l'Algèbre homologique comme un nouvel outil puissant en Géométrie algébrique et en Géométrie analytique [27, p.xviii].

Cela aboutit inmanquablement à l'œuvre de Grothendieck. Dans son célèbre article *Sur quelques points d'algèbre homologique* de 1957, Grothendieck a eu par objective «d'exploiter l'analogie formelle entre la théorie de la cohomologie d'un espace à coefficients dans un faisceau (...) et la théorie des foncteurs dérivés de foncteurs de modules (...), pour trouver un cadre commun permettant d'englober ces théories et d'autres.» À différence du livre de Cartan et Eilenberg, Grothendieck donne «une place assez large» à l'exposé des concepts préliminaires catégoriels. Dans ces sections (qui correspondent au Chapitre I) sont définis les concepts de : catégorie, foncteur, catégories additives, catégories abéliennes, catégories de diagrammes, limites inductives et projectives, objets inductifs et projectifs, et catégorie quotient. Il est nécessaire de mentionner que : (i) le concept central sur lequel Grothendieck développe sa théorie est celui de catégorie abélienne. Ce nouveau type de catégorie est une sous-classification des catégories additives que MacLane a introduites dans [110] et [111], mais les catégories abéliennes sont plus riches, dans la mesure où elles admettent plus des propriétés importantes pour le développement d'une théorie homologique. Et (ii) dans le Chapitre II, il reprend les concepts de foncteur dérivé de Cartan et Eilenberg⁵⁷ mais ils sont focalisés dans les catégories abéliennes.

les isomorphismes et d'autres morphismes.

57. De fait, parmi sa bibliographie on trouve le livre de Cartan et Eilenberg et l'article de MacLane de 1950.

Or, dans le §1.2 de Grothendieck définit le concept de foncteur. Sa définition ne diffère pas fondamentalement de celles présentées par Eilenberg-MacLane et Cartan-Eilenberg, mais Grothendieck utilise les catégories opposées pour une formulation plus compréhensible. De plus, Grothendieck cite les œuvres de Cartan ([26]), Buchsbaum⁵⁸ ([23]), MacLane([111]) et, quelques documents du Séminaire Henri Cartan, de sorte que la formulation du concept de foncteur est très proche de celle présente dans ces textes. La définition qu'il expose est la suivante :

Foncteurs. Soient \mathcal{C} , \mathcal{C}' deux catégories. Rappelons qu'on appelle *foncteur covariant* de \mathcal{C} dans \mathcal{C}' une "fonction" F qui à un objet $A \in \mathcal{C}$, associe un objet $F(A)$ de \mathcal{C}' , et à un morphisme $u : A \rightarrow B$ dans \mathcal{C} , un morphisme $F(u) : F(A) \rightarrow F(B)$ de telle façon qu'on ait $F(\mathbf{1}_A) = \mathbf{1}_{F(A)}$ et $F(vu) = F(v)F(u)$. Définition analogue pour les *foncteurs contravariants* de \mathcal{C} dans \mathcal{C}' (qui sont aussi des foncteurs covariants de \mathcal{C}^o dans \mathcal{C}' ou de \mathcal{C} dans \mathcal{C}'^o). On définit de même les foncteurs de plusieurs variables ou *multifoncteurs*, covariants en certaines variables et contravariants en d'autres. Dans les généralités, nous nous bornerons pour simplifier aux foncteurs d'une variable. Les foncteurs se composent comme des fonctions, cette composition est associative et les "foncteurs identiques" jouent le rôle d'unités. [69, p.124]

Compte tenu de ce qu'on a vu dans la présente section, on peut affirmer que le concept de foncteur entre les années 1945 et 1958 est, en essence, le même que celui formulé par Eilenberg et MacLane dans son article de 1945. De fait, dans les premiers livres qui ont étudié la théorie des catégories en soi, le concept de foncteur (et de transformation naturelle) n'a pas subi des changements significatifs. Il est vrai qu'il y avait des commentaires sur les «bonnes fondations» du concept de foncteur et, particulièrement, du concept de catégorie.

Conformément à ce qui précède, dans le §3 du Chapitre II du livre de Mitchell [128] les concepts de diagramme et foncteur sont définis. Cette définition est faite pour foncteurs d'un argument et dans cette perspective elle est identique à la définition de [69]. La définition de Mitchell est la même caractérisation présentée dans le Chapitre II du livre de Spanier [150] et dans le Chapitre I du livre de Pareigis [133]. Pour éviter des problèmes sur les fondements et pour ne pas présenter les foncteurs comme des applications ou des fonctions, Mitchell mentionne qu'un foncteur $T : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ est une

58. Cet article est aussi appuyé en [26] et [44].

assignment [128, p.49]. Cependant, les termes ensemblistes tels que le *domaine* et le *codomaine* sont encore supposés au moment de définir les catégories \mathcal{C} et \mathcal{D} . En plus, Spanier affirme qu'un foncteur est constitué par deux «fonctions» : une fonction entre des objets (*object function*) et une fonction entre des morphismes (*morphism function*), et MacLane fait cette distinction de deux types de fonctions dans son livre de 1972 puisqu'il mentionne initialement qu'un foncteur est un *morphisme* entre des catégories [116, p.13], et après il dit qu'un foncteur est composé par deux fonctions : l'une entre les objets des catégories et l'autre entre les morphismes. D'autre part, Pareigis affirme qu'un foncteur est composé par une application (*map*) entre des objets et une famille d'applications (*family of maps*) [133].

Or, MacLane examine (§6 dans [116]) les fondements de la théorie des catégories d'une manière qui permet d'expliquer l'usage du terme «fonction» pour définir la notion de foncteur : lorsque MacLane parle de «fonctions», il fait référence aux fonctions de la théorie des ensembles NGB. Ceci est également valable pour le livre de Pareigis : de fait, les fondements de la théorie des ensembles, en utilisant les axiomes de Gödel-Bernays, sont le sujet de l'Appendice du livre. Cependant, afin d'éviter d'encourir dans des paradoxes ensemblistes, Pareigis mentionne que : «(...) a category is in general no longer a set but a proper class. Thus, we cannot collect the categories as a new class of objects (...) In general, the functors, too, are proper classes and cannot be collected in morphism sets. But if we admit only small categories, every category, interpreted as a set of certain sets, is a set, and every functor is a set.» [133, p.8]. D'un autre côté, le livre de Spanier s'appuie (implicitement) dans la théorie des ensembles de Zermelo-Fraenkel, dans la mesure où il suppose : (i) le concept de fonction est uniquement défini parmi les ensembles, et (ii) l'existence de l'axiome de l'ensemble puissance [150, pp.1-2]. Il est nécessaire de considérer que Spanier n'a pas l'intention d'éclaircir la terminologie catégorielle, puisque les nouveaux concepts et les résultats de la théorie des catégories sont utilisés comme des outils pour la présentation de la topologie algébrique.

Finalement, Kan mentionne et utilise le concept de foncteur dans sa série d'articles sur l'homotopie abstraite ([88], [89], [90], [91]), dans ses deux articles sur c.c.s complexes de 1957 et 1958 ([92] y [94], respectivement) et, particulièrement dans son article sur des foncteurs adjoints ([93]). Dans aucun de ces articles il définit ce qui est un foncteur, puisque son intérêt est de caractériser les propriétés de certains types de foncteurs. Cependant, conformément à la bibliographie de ces articles, on peut apprécier que, par

exemple, dans son premier article de 1955 (*Abstract Homotopy I*) on peut trouver la référence des articles d'Eilenberg et Zilber de 1950 (*Semi-simplicial complexes and singular homology*), Eilenberg et MacLane de 1950 (*Relations between homology and homotopy groups of spaces II*) et Eilenberg et MacLane de 1953 (*Acyclic Models*), lesquels à la fois sont basés, entre autres, sur les articles de [44], [45], [49], [52] et [26] qui étudient et emploient les concepts catégoriels (parmi eux, le concept de foncteur). De fait, dans [93] l'une des références directes dans la bibliographie est l'article d'Eilenberg et MacLane de 1945. Donc, l'influence directe de différents articles d'Eilenberg et de MacLane sur l'œuvre de Kan est assez claire⁵⁹.

Comme on l'a vu dans cette section, dans les années postérieures à l'écriture des articles [43] et [44], mais antérieurs à 1958, les foncteurs et les catégories ont été adoptés comme des outils très utiles dans les domaines de la topologie algébrique et de l'algèbre homologique. Des outils qui ont permis une gestion plus efficace des différents résultats dans ces domaines, dans la mesure où les objets catégoriels (particulièrement, les foncteurs) ont été un langage puissant pour décrire des résultats d'une grande généralité. Ces objets ont été considérés, dans cette période, comme un «nouveau langage» (c'est-à-dire des outils) qui ne faisaient pas partie d'un domaine d'étude autonome. Cela a impliqué que les préoccupations sur les fondements, ou bien ont été abordées en manière des annexes dans les différents documents, ou bien elles ont été ignorées. De plus, dans certaines des publications de cette période, pour éviter la réflexion sur les fondements, les auteurs ont veillé à ne pas mentionner les *totalités*, de sorte que les nouveaux objets catégoriels pourraient être fondés sur un type de théorie des ensembles.

1.2 Foncteurs : quels sont-ils ?

Dans la section précédente, on a vu que la définition du foncteur n'a pas subi des changements substantiels dans sa formulation. Certaines définitions sont plus générales que d'autres. Et dans certaines, on essaie d'éviter les problèmes ensemblistes sur les fondements, alors que d'autres ne le font pas. D'une manière informelle, étant données deux catégories \mathcal{C} et \mathcal{D} on peut penser qu'un foncteur est une correspondance entre les deux catégories $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ de telle sorte que :

⁵⁹. Dans §1.3 on verra l'ordre chronologique de l'écriture des articles de Kan et comment quelques articles ont influencé les autres.

- a. Il se compose d'une correspondance $F_0 : \text{Obj}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Obj}(\mathcal{D})$ entre les objets des catégories,
 b. et une correspondance $F_1 : \text{Hom}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{D})$ entre les morphismes des catégories
 tels que

1. les sources et les cibles sont les mêmes par F_1 et F_0 ;
2. F préserve la composition : l'image de la composition de deux morphismes sous l'action de F est la composition de ses images.

Ou, d'une manière plus précise, un foncteur F d'une catégorie \mathcal{C} vers une catégorie \mathcal{D} est une correspondance (*map*) qui envoie chaque objet $X \in \mathcal{C}$ vers un objet $F(X) \in \mathcal{D}$, et chaque morphisme $f : X \rightarrow Y \in \mathcal{C}$ vers un morphisme $F(f) : F(X) \rightarrow F(Y) \in \mathcal{D}$, tels que :

- F préserve la composition : $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$,
- F préserve l'identité des morphismes : pour chaque $X \in \mathcal{C}$, $F(1_X) = 1_{F(X)}$.

Puisque les compositions (des triangles commutatifs) et les identités (des boucles commutatives) sont, les deux, diagrammes commutatifs. On peut combiner les deux conditions ci-dessus en une seule affirmation :

F préserve des diagrammes commutatifs.

Étant donnés les morphismes $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$, et $h : X \rightarrow Z$ affirmer que le triangle commute revient à affirmer que $h = g \circ f$.

Dans ce cas, dire que $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ préserve des diagrammes commutatifs signifie que $F(h) = F(g) \circ F(f)$ comme dans la Figure 1.2.

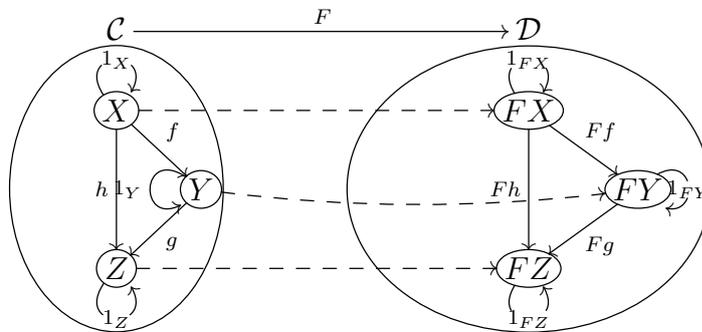


FIGURE 1.2 –

Conformément à cette figure, on pourrait penser que la propriété de préserver des diagrammes commutatifs signifierait (géométriquement) «envoyer des triangles vers triangles», mais il faut préciser que les triangles commutatifs peuvent être de trois types : avec trois sommets, avec deux et avec un sommet. Comme on peut voir dans la Table 1.1, ces trois types de diagrammes peuvent bien être représentés par les triangles de la file supérieure d'une manière étendue, ou bien par les triangles de la file inférieure d'une manière simplifiée. Il est plus approprié d'utiliser la manière simplifiée.

Un foncteur F préserve les diagrammes commutatifs, mais aussi c'est une correspondance qui envoie, *comme maximum*, un objet vers un objet et un morphisme vers un morphisme. Pour cela, F peut envoyer des triangles de Type I vers des triangles de Type I, II et III (voir Table 1.1), mais il ne peut pas envoyer des triangles de Type III vers des triangles de Type I ou II.

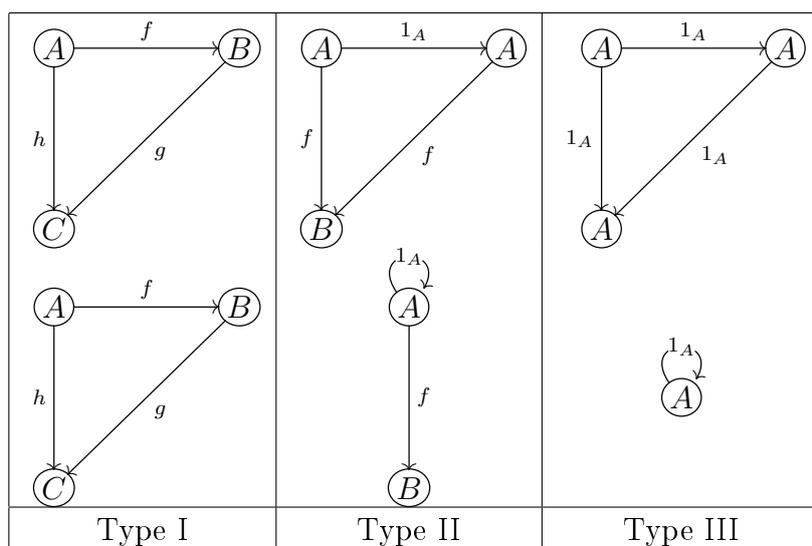


TABLE 1.1 – Les trois types de diagrammes commutatifs basiques.

Compte tenu de cet éclaircissement, on suppose qu'on a deux catégories \mathcal{C} et \mathcal{D} et un foncteur F , dont l'action sur les objets de \mathcal{C} est décrite à travers des lignes ponctuées dans la Figure 1.3.

Dans ce cas, $F(A) = F(B) = X$, $F(C) = Y$. F est un foncteur s'il envoie des identités vers identités, de tel sorte qu'on pourrait penser que $F(1_A) = F(1_B) = 1_X$ et $F(1_C) = 1_Y$. Il reste seulement de déterminer où envoyer f, g, h et j . Ceci est accompli en tenant compte de la propriété $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.

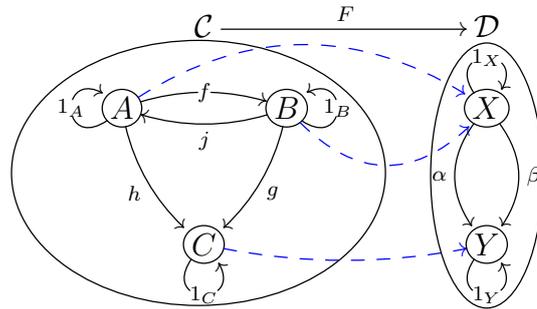


FIGURE 1.3 –

On ne peut pas envoyer tous les morphismes vers l'identité, parce que la composition avec 1_C serait impossible. La seule voie possible est en faisant $F(f) = F(j) = 1_X$ et en envoyant h et g , soit vers α , soit vers β .

Pour qu'une transformation de catégories soit un foncteur on a considéré minutieusement la manière dont les objets et les morphismes doivent être envoyés. Mais ce même implique que, étant donné une transformation arbitraire entre deux catégories, il se peut que cette transformation ne soit pas un foncteur. Par exemple, si on prend les deux catégories \mathcal{C} et \mathcal{D} ci-dessus, tels que $F(A) = F(B) = F(C) = Y$, $F(f) = F(j) = F(g) = F(h) = 1_Y$ et $F(1_A) = F(1_B) = F(1_C) = 1_Y$, alors F est un foncteur. En fait, il s'agit d'un foncteur constant. Mais si, par exemple, tout s'accomplit sauf que $F(1_A) = 1_X$, alors F n'est pas un foncteur parce qu'il ne satisfait pas la condition de préservation de l'identité. Également, si les objets sont envoyés de la même façon et la préservation de l'identité est satisfaite, mais on a que $F(h) = \alpha$, alors F n'est pas un foncteur à cause des raisons suivantes : (i) la condition de préservation de diagrammes n'est pas satisfaite, parce qu'il n'est pas possible $\alpha = F(h) : F(A) \rightarrow F(C)$; et (ii) la composition n'est pas préservée, c'est-à-dire $F(h) = F(g \circ f) \neq F(g) \circ F(f)$. Donc, on peut voir que si la correspondance des objets se détermine d'avance, on trouve plusieurs de transformations qui ne sont pas fonctorielles. De fait, si tous les objets de \mathcal{C} sont envoyés vers un objet de \mathcal{D} , pour que cette transformation soit un foncteur constant, les morphismes doivent être envoyés d'une manière unique. Il y a plusieurs façons d'envoyer les morphismes pour que cette transformation ne soit pas un foncteur. Cela suggère que la plupart des transformations entre deux catégories ne sont pas fonctorielles.

Dans les exemples précédents on a initié par expliquer l'action du foncteur sur les objets. Cependant, c'est l'action du foncteur sur les morphismes qui est la plus déterminante des deux actions d'un foncteur (et qui caractérise l'action sur les objets). Parce que les conditions du morphisme identité et de la composition sont celles qui permettent d'assigner les valeurs du foncteur sur les objets de la catégorie \mathcal{C} . Par la définition de foncteur, on a que le foncteur F doit envoyer chaque $(f : X \rightarrow Y) \in \mathcal{C}$ vers le morphisme $(F(f) : F(X) \rightarrow F(Y)) \in \mathcal{D}$. C'est-à-dire α doit accomplir que $F(Y) = F[f(X)] = \alpha[F(X)]$. Cela signifie que si X est la source de f et $Y = f(X)$ sa cible, alors $F(X)$ est la source et $F(Y)$ la cible de $\alpha = F(f)$ (Figure 1.4).

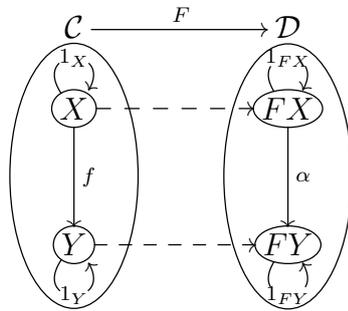


FIGURE 1.4 –

Par exemple, si on a les catégories \mathcal{C} et \mathcal{D} de la Figure 1.5. Et si $F(X) = A$ et $F(Y) = C$, nécessairement $F(\alpha) = h$, parce que h est le morphisme unique qui va de A vers C . Par ailleurs, (*) si $F(X) = B$ et $F(Y) = C$, on pourrait se produire que $F(\alpha) = i$ ou $F(\alpha) = g$, parce que $i, g : F(X) \rightarrow F(Y)$.

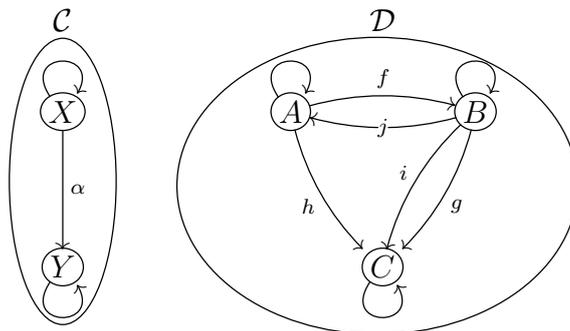


FIGURE 1.5 –

À ce point on penserait que c'est l'assignation des objets celle qui détermine l'assignation des morphismes. Cependant, c'est l'inverse qui se produit : si on assigne les

morphismes d'une manière telle qu'ils satisfaisant les conditions de l'identité et la distribution de la composition, alors, par la condition (*), il est possible d'assigner les objets. Ainsi on le remarque par [2, p.30] :

Since functors preserve identity morphisms and since there is a bijective correspondence between the class of objects and the class of identity morphisms in any category, the object-part of a functor actually is determined by the morphism-parts. Indeed, we will see later that if we choose the “object-free” definition of category, then a functor between categories can be defined simply as a function between their morphisms classes that preserves identities and composition.

Mais cela était déjà connu par Eilenberg et MacLane, comme ils le présentent dans le Théorème 3.1 dans [44, p.241-242] (lequel a été exposé dans la note de bas de page 37 du présent travail).

1.2.1 La signification et l'importance du concept de «naturalité».

Eilenberg et MacLane présentent la définition de transformation naturelle dans le § 7 de [44]. On peut dire que cette définition est fondamentalement la même qu'ils ont présentée dans l'article de 1942a mais elle est généralisée pour des catégories arbitraires. Cette nouvelle définition est développée pour les foncteurs concordants⁶⁰ de deux arguments, ce qui fait que cette définition est un peu confuse. Étant données trois catégories \mathcal{U} , \mathcal{B} et \mathcal{C} ils assument, sans perte de généralité, deux foncteurs $T : \mathcal{U} \times \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ et $S : \mathcal{U} \times \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$, les deux covariants en \mathcal{U} et contravariants en \mathcal{B} :

Definition. The function τ is a “natural” transformation of the functor T , covariant in \mathcal{U} and contravariant in \mathcal{B} , in the concordant functor S , provided that, for each pair of objects $A \in \mathcal{U}$, $B \in \mathcal{B}$

$$\tau(A, B) : T(A, B) \rightarrow S(A, B) \text{ in } \mathcal{C},$$

and provided, whenever $\alpha : A_1 \rightarrow A_2$ in \mathcal{U} and $\beta : B_1 \rightarrow B_2$ in \mathcal{B} , that

$$\tau(A_2, B_1) \circ T(\alpha, \beta) = S(\alpha, \beta) \circ \tau(A_1, B_2)$$

when these conditions hold, we write

$$\tau : T \rightarrow S$$

60. Ce sont des foncteurs avec la même variance dans les arguments correspondants.

On analysera cette définition de manière séparée. Au lieu de deux foncteurs $T : \mathcal{U} \times \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ et $S : \mathcal{U} \times \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ on prend les foncteurs $T : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{C}$ et $S : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{C}$ contravariants en \mathcal{U} . On peut supposer, afin d'illustrer, que les catégories \mathcal{U} et \mathcal{C} sont les suivantes :

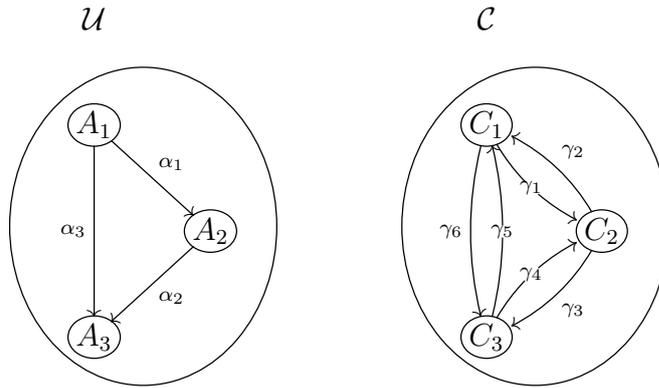


FIGURE 1.6 –

Tels que $\gamma_1 = T(\alpha_1)$, $\gamma_2 = S(\alpha_3)$, $\gamma_3 = T(\alpha_2) = S(\alpha_1)$, $\gamma_5 = S(\alpha_2)$ et $\gamma_6 = T(\alpha_3)$. De cette façon les correspondances d'objets seraient $C_1 = T(A_1) = S(A_3)$, $C_2 = T(A_2) = S(A_1)$, $C_3 = T(A_3) = S(A_2)$, lesquelles sont illustrées dans la Figure 1.7

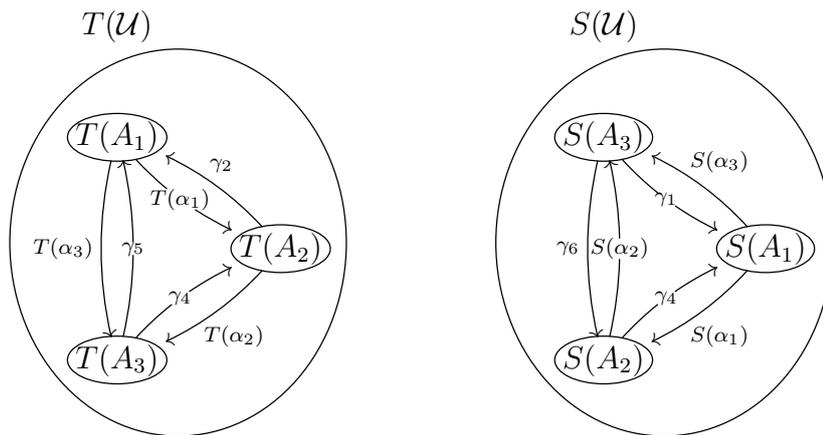


FIGURE 1.7 –

Une transformation τ entre ces foncteurs enverrait chaque $T(A_i)$ sur $S(A_j)$.

Cependant, pour que cette transformation soit «naturelle» il est nécessaire que (i) $\forall i \in \{1, 2, 3\}, \tau[T(A_i)] = S[A_i]$. Mais (ii) elle doit également satisfaire une condition pour chaque morphisme $\alpha_i \in \text{Hom}(\mathcal{U})$:

1. $\alpha_1 : A_1 \rightarrow A_2$ alors $\tau(A_2) \circ T(\alpha_1) = S(\alpha_1) \circ \tau(A_1)$,
2. $\alpha_2 : A_2 \rightarrow A_3$ alors $\tau(A_3) \circ T(\alpha_2) = S(\alpha_2) \circ \tau(A_2)$, et
3. $\alpha_3 : A_1 \rightarrow A_3$ alors $\tau(A_3) \circ T(\alpha_3) = S(\alpha_3) \circ \tau(A_1)$

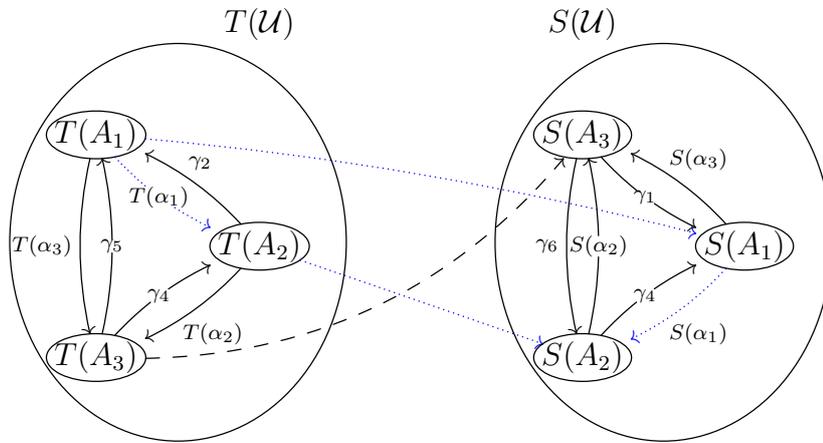


FIGURE 1.8 –

On peut voir, au cas à prendre $\alpha_1 : A_1 \rightarrow A_2$ (Figure 1.8), que les fléchés pointées forment un diagramme commutatif. De fait, il y a trois diagrammes (ou, des «carrés») commutatives :

$$\begin{array}{ccccc}
 T(A_1) \xrightarrow{\tau(A_1)} S(A_1) & T(A_2) \xrightarrow{\tau(A_2)} S(A_2) & T(A_1) \xrightarrow{\tau(A_1)} S(A_1) \\
 T(\alpha_1) \downarrow & \downarrow S(\alpha_1) & T(\alpha_2) \downarrow & \downarrow S(\alpha_2) & T(\alpha_3) \downarrow & \downarrow S(\alpha_3) \\
 T(A_2) \xrightarrow{\tau(A_2)} S(A_2) & T(A_3) \xrightarrow{\tau(A_3)} S(A_3) & T(A_3) \xrightarrow{\tau(A_3)} S(A_3)
 \end{array}$$

Il est important de tenir compte que chaque morphisme $\tau(A_i)$ doit être un morphisme de \mathcal{C} . Cela reste évident avant la définition de transformation naturelle qu’Eilenberg et MacLane présentent : comme on a mentionné auparavant, deux foncteurs sont supposés $T, S : \mathcal{U} \times \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$, les deux covariants en \mathcal{U} et contravariants en \mathcal{B} . Puis, on considère une fonction⁶¹ τ laquelle «associates to each pair of objects $A \in \mathcal{U}$ and

61. Eilenberg et MacLane la caractérisent ainsi, comme une fonction. Probablement utilisée aux fins pratiques, puisque non nécessairement chaque τ_X est une fonction.

$B \in \mathcal{B}$ a mapping $\tau(A, B) = \gamma$ in \mathcal{C} » [44, p.248]. Ou, dans une notation plus pratique, on peut voir chaque $\tau(X)$ comme un élément d'une collection de morphismes indexés par les objets de $\mathcal{U} \times \mathcal{B}$. C'est-à-dire, on peut représenter $\tau(X)$ par τ_X . De cette façon, la transformation naturelle τ est la collection

$$\tau = \{\tau_X \in \text{Hom}(\mathcal{C}) \mid X \in \text{Ob}(\mathcal{U} \times \mathcal{B})\}$$

Si on considère des foncteurs avec un argument $T, S : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{C}$, chaque τ_X est indexée par les objets de \mathcal{U} et, de cette façon, la collection des morphismes τ est constituée par τ_{A_1}, τ_{A_2} et τ_{A_3} .

Compte tenu de cet éclaircissement et de l'exemple qui a été exposé, on peut présenter une définition de transformation naturelle :

Si on a deux foncteurs contravariants $T : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{C}$ et $S : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{C}$, une transformation naturelle entre T et S est une collection de morphismes $\tau_X : T(X) \rightarrow S(X)$ en \mathcal{C} (indexée par les objets de \mathcal{U}) tel que pour chaque morphisme $(\alpha : A \rightarrow B) \in \mathcal{U}$, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} T(A) & \xrightarrow{\tau_A} & S(A) \\ T(\alpha) \downarrow & & \downarrow S(\alpha) \\ T(B) & \xrightarrow{\tau_B} & S(B) \end{array}$$

L'existence de la collection τ dépend de l'existence de morphismes dans \mathcal{C} qui font commuter le diagramme. Si, pour au moins un $(\alpha : A \rightarrow B) \in \mathcal{U}$ n'existe pas un τ_A ou un τ_B qui garantissent la commutativité du diagramme, alors la transformation τ est une transformation «non-naturelle» (*unnatural transformation*). Par exemple, si \mathcal{C} et \mathcal{D} sont les catégories suivantes :

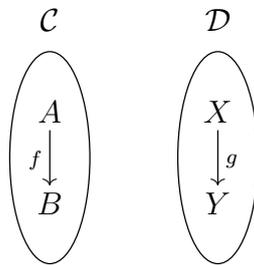


FIGURE 1.9 –

Et si on a les foncteurs suivants $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$:

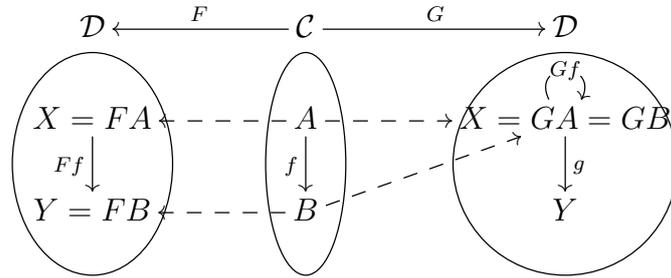


FIGURE 1.10 –

Pour qu'il soit une transformation naturelle $\tau : F \rightarrow G$, ils devraient exister deux morphismes $\tau_A, \tau_B \in \text{Hom}(\mathcal{D})$ tels que le diagramme suivant commue :

$$\begin{array}{ccc}
 F(A) & \xrightarrow{\tau_A} & G(A) \\
 Ff \downarrow & & \downarrow Gf \\
 F(B) & \xrightarrow{\tau_B} & G(B) = G(A)
 \end{array}$$

Or, quels seraient les candidats pour être τ_A et τ_B ? Comme $\tau_A : FA \rightarrow GA$ et $X = FA = GA$, alors $\tau_A : X \rightarrow X$. Et le seul morphisme dans $\text{Hom}(\mathcal{D})$ qui permet la commutativité du dernier diagramme est 1_X , donc $\tau_A = 1_X$. De la même manière $\tau_B : FB \rightarrow GB$ et, comme $FB = Y$ et $GB = X$, alors il devrait se produire que $\tau_B : Y \rightarrow X$ doit appartenir à $\text{Hom}(\mathcal{D})$ pour que la transformation soit naturelle. Mais il n'y a pas aucun morphisme $(Y \rightarrow X) \in \mathcal{D}$, en conséquence il n'existe pas τ_B et, pour cette raison il n'y a pas telle transformation naturelle entre les deux foncteurs décrits dans la Figure 1.10.

Si, d'un autre côté \mathcal{D} est la catégorie suivante :

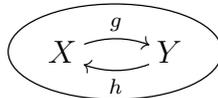


FIGURE 1.11 –

Et les deux foncteurs F et G sont les mêmes définis précédemment, alors il existe une transformation naturelle τ entre F et G . Cela conduit à penser que l'existence d'une transformation naturelle dépend de (i) les caractéristiques de la catégorie «cible», et (ii) la manière dans laquelle les foncteurs sont définis.

Comme on a mentionné d'avance, étant donnés les foncteurs $S, T : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$, la collection des morphismes τ est naturelle si $\forall(\alpha : X \rightarrow Y) \in \mathcal{C}$ il existent $(\tau_X : TX \rightarrow SX), (\tau_Y : TY \rightarrow SY) \in \mathcal{D}$ tels que

$$\tau_Y \circ T(\alpha) = S(\alpha) \circ \tau_X$$

Comme τ est une transformation de foncteurs, on peut supposer que τ opère sur les entités sur lesquelles, de la même manière, les foncteurs dans \mathcal{C} opèrent. Ainsi, étant donné $(\alpha : X \rightarrow Y) \in \mathcal{C}$ et les deux foncteurs S, T , alors il est valable de penser que $\tau[TX] = SX$ et $\tau[T(\alpha)] = S(\alpha)$. La dernière équation est conforme à l'esprit de ce qu'est une transformation naturelle : une transformation de transformations; cependant, aussi elle peut être réduite à une transformation entre les «images» de S et T . Or, si τ opère tellement que $T(\alpha) \mapsto S(\alpha)$, alors elle opère aussi sur la source et la cible de $T(\alpha)$ et $S(\alpha)$. C'est-à-dire, $\forall(\alpha : X \rightarrow Y) \in \text{Hom}(\mathcal{C})[\tau[T(\alpha)] = S(\alpha) \text{ ssi } \tau[TX] = SX \wedge \tau[TY] = SY]$. De fait, cela répond à la question suivante : la condition de naturalité dit que $\tau_Y \circ T(\alpha) = S(\alpha) \circ \tau_X$, mais on vient de dire que $\tau[T(\alpha)] = S(\alpha)$, ces deux conditions sont-elles équivalentes? En réalité, la première définit la deuxième. Donc, la définition de τ dépend de la définition de τ_X et de τ_Y , parce qu'ils opèrent sur la source et la cible de $T(\alpha)$, respectivement. La première caractérisation (celle qui a recours à τ) est *globale*, alors que la deuxième est *locale*.

Pour chaque morphisme $(\alpha : A \rightarrow B) \in \mathcal{U}$, qu'est que ça veut dire que τ fait commuter le diagramme? Dans cet aspect il faut souligner que *tous* les morphismes sont tenus en compte. Et, dans une certaine mesure, cela signifie que la transformation τ ne dépend pas des particularités (caractéristiques) des éléments constitutifs de A et de B . Dans l'Introduction de l'article de 1945, Eilenberg et MacLane présentent un exemple avec l'objectif de faire comprendre ce qui est sous-jacent dans le phénomène de la «naturalité» et, par conséquent, de distinguer les transformations naturelles de celles qui ne le sont pas. En effet, ce qui est sous-jacent, est en correspondance avec la non-dépendance des éléments constitutifs de chaque objet. Cet exemple est devenu le paradigme d'une transformation naturelle et, de nombreux textes et d'articles l'exhibent comme exemple introductif de la même façon qu'Eilenberg et MacLane le font : la naturalité de l'isomorphisme entre un espace vectoriel L et son double espace dual⁶²

62. Eilenberg et MacLane dénotent l'espace dual par $T(L)$ et, le double dual par $T(T(L))$. De fait, après ils disent que $T^2(_) = T(T(_)) : \mathbf{Vect}_K \rightarrow \mathbf{Vect}_K$ est un foncteur.

L^{**} . Ils montrent que cet isomorphisme ne dépend pas du choix de la base de L . Selon eux, cela est équivalent à dire que tel isomorphisme est naturel, dans la mesure où il est *simultané*⁶³ pour *tous* les espaces vectoriels finis V [44, p.232]. Et, de la même manière, telle «simultanéité» signifie considérer (i) *tous* les morphismes entre deux espaces vectoriels, et (ii) *tous* les espaces vectoriels.

A discussion of the “simultaneous” or “natural” character of the isomorphism $L \cong T(T(L))$ clearly involves a simultaneous consideration of all spaces L and all transformations λ connecting them ; this entails a simultaneous consideration of the conjugate spaces $T(L)$ and the induced transformations $T(\lambda)$ between them [44, p.233].

Donc, considérer tous les morphismes entre deux espaces vectoriels est équivalent (dans une certaine mesure) à la propriété d’«être indépendant de leur base». Parce que, quand tous les morphismes entre les deux espaces sont pris, tous les morphismes de changement de base sont également pris. Et, comme on prend plus de morphismes que ceux du changement de base, la caractérisation du phénomène de la naturalité par la simultanéité de tous les morphismes, est plus générale que celle qui se fait par l’indépendance des éléments constitutifs.

Après avoir présenté leur définition de transformation naturelle, Eilenberg et MacLane définissent de manière informelle, dans le §8, la catégorie \mathfrak{F} des foncteurs dont les objets sont des foncteurs et ses morphismes sont des transformations naturelles de foncteurs. Puis, dans le §9, ils présentent la définition de composition entre foncteurs (similaire à la composition de deux applications dans les ensembles, mais en tenant en compte la variance des foncteurs) et, après, ils définissent la composition de deux transformations naturelles.

Dans le §10 ils présentent plusieurs exemples des transformations naturelles. Réellement, ils présentent des *isomorphismes naturels* : des transformations naturelles τ dans lesquelles chaque $\tau_X \in \tau$ est un isomorphisme, c’est-à-dire, un morphisme inversible⁶⁴.

63. Il est nécessaire de mentionner que dans l’article de 1942a ils considèrent que la naturalité d’un homomorphisme entre deux groupes existe si tel homomorphisme «commutes» with the application of any homomorphism» [42, p.777]. La permutation au quelle ils se rapportent (bien que dans le cas particulier des groupes) c’est celle de τ avec les foncteurs T et S . C’est-à-dire $\tau_B \circ T(\alpha) = S(\alpha) \circ \tau_A$. Ils considèrent implicitement l’invariance de la base (c’est-à-dire, qui est indistinct prendre A ou B) mais ils mettent l’accent sur la commutativité de τ .

64. Comme dans les définitions précédentes, soient $S, T : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{C}$ deux foncteurs avec la même variance

Les équivalences naturelles qu'ils présentent sont les suivantes [44, pp.251-256] :

- a) Soient les foncteurs $S, T : \mathbf{Top}^3 \rightarrow \mathbf{Top}^3$ définies de la manière suivante : étant donnés les morphismes $\xi : X_1 \rightarrow X_2$, $\eta : Y_1 \rightarrow Y_2$ y $\zeta : Z_1 \rightarrow Z_2$ en \mathbf{Top} , alors $S(X_1, Y_1, Z_1) = (X_1 \times Y_1) \times Z_1$, $S(\xi, \eta, \zeta) = ((\xi, \eta), \zeta)$, $T(X_1, Y_1, Z_1) = X_1 \times (Y_1 \times Z_1)$ y $T(\xi, \eta, \zeta) = (\xi, (\eta, \zeta))$. Donc, il existent deux morphismes

$$\tau_{(X_1, Y_1, Z_1)} : S(X_1, Y_1, Z_1) \Rightarrow T(X_1, Y_1, Z_1) \quad \text{et}$$

$$\tau_{(X_2, Y_2, Z_2)} : S(X_2, Y_2, Z_2) \Rightarrow T(X_2, Y_2, Z_2)$$

dans \mathbf{Top}^3 tels que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} (X_1 \times Y_1) \times Z_1 & \xrightarrow{\tau_{(X_1, Y_1, Z_1)}} & X_1 \times (Y_1 \times Z_1) \\ (\xi, (\eta, \zeta)) \downarrow & & \downarrow ((\xi, \eta), \zeta) \\ (X_2 \times Y_2) \times Z_2 & \xrightarrow{\tau_{(X_2, Y_2, Z_2)}} & X_2 \times (Y_2 \times Z_2) \end{array}$$

Comme cela est certain pour tout trio d'espaces topologiques de \mathbf{Top}^3 , alors dire que l'isomorphisme $S \cong T$ est naturel implique dire que $\forall X, Y, Z \in \mathbf{Top}$ (qui est le même que dire $\forall (X, Y, Z) \in \mathbf{Top}^3$) on a que

$$(X \times Y) \times Z \cong X \times (Y \times Z)$$

est une équivalence naturelle. Ils mentionnent également que les propriétés associative et commutative du produit direct de groupes, et les mêmes propriétés pour le produit cartésien d'espaces de Banach.

- b) Si $J = \langle \mathbb{Z}, + \rangle$ est le groupe des entiers avec l'addition, et H est n'importe quel groupe topologique abélien⁶⁵. Soient, de plus, les foncteurs

en \mathcal{U} , si chaque τ_X «is an equivalence mapping of the category \mathcal{C} , we call τ a *natural equivalence* of T to S (...) and say that the functors T and S are *naturally equivalent*» [44, p.248]. Par la suite, ils mentionnent (bien que pour des foncteurs de deux arguments dans $\mathcal{U} \times \mathcal{B}$) que la condition de naturalité

$$\tau_A \circ T(\alpha) = S(\alpha) \circ \tau_B$$

pour chaque morphisme $(\alpha : A \rightarrow B) \in \mathcal{U}$ peut être réécrite comme

$$\tau_A \circ T(\alpha) \circ [\tau_B]^{-1} = S(\alpha)$$

. Il est important de souligner que (pour Eilenberg et MacLane) ce dernier suppose un caractère fonctionnel de chaque τ_X , ce qui n'est pas toujours vrai.

65. Par exemple, le groupe des nombres réels \mathbb{R} avec l'addition et la topologie usuelle, et les groupes additifs des espaces de Banach ou des espaces de Hilbert sont aussi également des groupes topologiques abéliens.

$S, T : \mathbf{AbTop} \rightarrow \mathbf{AbTop}$ définis (sur les objets⁶⁶) de la manière suivante : $T(H) = \text{Hom}(J, H)$ et $S(H) = H$. On peut démontrer que l'isomorphisme

$$\text{Hom}(J, H) \cong H$$

est naturel.

- c) Si on a l'espace de Banach \mathbb{R} des nombres réels, et les foncteurs⁶⁷ $S, T : \mathbf{Ban} \rightarrow \mathbf{Ban}$, $T(B) = \text{Lin}(\mathbb{R}, B)$, $S(B) = 1_{\mathbf{Ban}}(B) = B$, alors on a l'équivalence naturelle

$$\text{Lin}(\mathbb{R}, B) \cong B$$

- d) Si X, Y et Z sont des espaces topologiques, la suivante est aussi une équivalence naturelle :

$$\text{Map}(Z, X) \times \text{Map}(Z, Y) \cong \text{Map}(Z, X \times Y)$$

- e) Si G, H et K sont des groupes, on a aussi que

$$\text{Hom}(G, H) \times \text{Hom}(G, K) \cong \text{Hom}(G, H \times K)$$

est une équivalence naturelle.

- f) De même, si B, C et D sont des espaces de Banach, on a l'équivalence naturelle suivante :

$$\text{Lin}(B, C) \times \text{Lin}(B, D) \cong \text{Lin}(B, C \times D)$$

- g) Si G, H et K sont des groupes,

$$\text{Hom}(G, K) \times \text{Hom}(H, K) \cong \text{Hom}(G \times H, K)$$

est une équivalence naturelle.

- h) Soient X, Y et Z des espaces topologiques, alors

$$Z^{X \times Y} \cong (Z^Y)^X$$

est une équivalence naturelle.

- i) Si \otimes est le produit tensoriel de groupes, alors

$$\text{Hom}(G \otimes H, K) \cong \text{Hom}(G, \text{Hom}(H, K))$$

est une transformation naturelle⁶⁸.

66. Si $(f : H \rightarrow H') \in \mathbf{AbTop}$, comme $S = 1_{\mathbf{AbTop}}$ est le foncteur identité, alors $S(f) = f$; d'un autre coté, un morphisme $h : \text{Hom}(J, H) \rightarrow \text{Hom}(J, H')$ est un morphisme $h : H \rightarrow H'$. Par conséquent $T(f)$ est, en effet, l'un de tels h .

67. Si B et C sont deux espaces de Banach, $\text{Lin}(B, C)$ est la collection de toutes les applications linéaires λ entre B et C avec la norme usuelle de l'application.

68. Cet exemple sera d'une grande importance au moment d'aborder le concept de foncteur adjoint.

1.2.2 Sur la préservation des structures.

Selon les déclarations faites par Corry [32], il n’y a pas de caractérisation unique de ce qui est considéré comme une structure mathématique. Il montre quelques visions informelles et formelles de ce qu’on entend par une «structure mathématique». Dans certains cas, une structure mathématique peut être vue comme un ensemble muni d’une série de relations associées⁶⁹ Et dans les autres cas, le concept de structure mathématique n’est pas réductible aux ensembles⁷⁰. Dans les deux cas, une structure mathématique peut être pensée comme une *entité*, étudiée par un domaine des mathématiques, constituée par d’autres entités (de différent *type*⁷¹), qui sont liés entre eux d’une certaine façon. Ce sont ces liens qui déterminent une structure et qui permettent de la différencier d’une autre structure.

Conformément à ce qui précède, différents auteurs soulignent l’importance des morphismes d’une catégorie et des foncteurs entre des catégories, les deux vues comme des transformations qui permettent la préservation des propriétés structurelles. À ce sujet, dans l’Introduction de [6, p. 2] il est mentionné que :

The general notion of a category provides a characterization of the notion of a “structure-preserving transformation”, and thereby of a species of structures admitting such transformations.

Awodey va plus loin, parce qu’il considère l’existence d’un cadre référentiel suffisamment ample pour fonder plusieurs des structures mathématiques : le concept de

69. Voir, par exemple, la définition d’espèce de structure Σ faite par Bourbaki[20, E IV .4]. Le concept de structure chez Boubaki ne joue pas un rôle décisif dans le développement des *Éléments de Mathématique* [32, p.330].

70. Tandis que la caractérisation «ensembliste» construit des structures après avoir muni des relations aux ensembles en construisant des structures particulières d’une espèce, dans la théorie des catégories, sont considérées *toutes* les structures d’une espèce :

Category theory proposes (...) to overlook the existence of elements and to examine the links of the given domain with all possible domains of the same type, and even the links of a structure of a given type with those of a different type. By examining those links, one is bound to uncover the essence of the structural character of mathematics. [32, p.348]

71. Ce vocable peut générer des confusions. Le *type* d’une entité fait référence à sa nature. Dans ce sens, une structure de certain *type* n’est pas en correspondance avec la «espèce de structure» de Bourbaki ou au «type» que Corry mentionne.

catégorie des petites catégories **Cat**, qui a été introduit par Lawvere en 1965 [105]. Après avoir présenté **Cat** et l'idée de naturalité (dans le §7.1), Awodey mentionne :

Thus, **Cat** provides a setting for comparing structures of many different kinds. For instance, one can have a functor $R : G \rightarrow \mathcal{C}$ from a group G to a category \mathcal{C} that is not a group. If \mathcal{C} is a poset, then any such functor must be trivial (why?). But if \mathcal{C} is, say, the category of finite dimensional, real vector spaces and linear maps, then a functor R is exactly a linear representation of the group G , representing every element of G as an invertible matrix of real numbers and the group multiplication as matrix multiplication. [6, p.149]

Cela lui permet d'introduire dans §7.2 le concept de «structure représentable». La représentation d'une structure abstraite consiste à l'interpréter dans la catégorie **Ens**, au moyen d'un foncteur $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Ens}$. Dans ce sens, la catégorie \mathcal{C} est prise comme l'«environnement» dans lequel une structure arbitraire est déterminée. Mais, non toute catégorie est représentable : le foncteur F doit être naturellement équivalent au foncteur $\text{Hom}(C, -) : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Ens}$ pour chaque $C \in \mathcal{C}$ et, \mathcal{C} doit être une catégorie localement petite. Les catégories qui englobent des structures représentables sont fréquemment dénommés par «catégories concrètes». Cependant, ce terme peut être généralisé pour des catégories plus générales qu'**Ens**. Par exemple, Adamek *et al* considèrent cette alternative et affirment qu'une catégorie concrète sur **Ens** est dénommée une «construction» (*construct*) [2, p.61].

D'autre part (malgré le fait que c'est un livre très basique et avec des prétentions didactiques), dans [107] Lawvere et Schanuel étudient, à travers des cas particuliers, la préservation des structures du même type à l'intérieur d'une catégorie. C'est-à-dire, par des morphismes d'une catégorie et pas par des foncteurs :

Categories other than sets usually involve objects that are more richly structured, and, correspondingly, isomorphic objects will be alike in much more than just 'number of elements' - they will have the 'same shape', 'same structure', or whatever the category itself involves. [107, p.55]

Et après [p.89], ils mentionnent que

The study of various types of 'structure' and the categories to which they give rise will be a recurring theme in the rest of the book, and you will see how 'respecting structure' is made precise.

La notion d'*application qui préserve une structure* est étudiée dans la Partie III du livre, mais elle n'est pas définie d'une manière générale. Parce que quelques cas sont présentés dans différentes catégories spécifiques. Dans ces catégories il est nécessaire de choisir, avec beaucoup d'attention, les morphismes parmi les objets, d'une manière telle que la structure *entre* les objets est préservée. C'est un point de vue «de bas en haut» dans lequel, pour tester les propriétés d'une catégorie, de ses objets et de ses morphismes, il est nécessaire de recourir aux éléments qui composent les objets. Cela est fait avec un propos didactique (c'est l'intention de tout le livre : un rapprochement des concepts basiques de la théorie des catégories à travers des exemples simples de la théorie des ensembles), parce qu'il n'est pas possible de tenir pour certain l'existence de catégories abstraites. De la même manière, cela fait que l'introduction d'applications entre des catégories (c'est-à-dire, foncteurs) soit difficile. Cependant, les foncteurs et les catégories sont présentés comme concepts analogues à ceux de morphisme et d'objet :

(...) a 'structure-preserving' interpretation of one category into another is called a functor (from the first category to the second). [107, p.167]

Cela il est aussi signalé par Adamek *et al* dans [2, p.29], lorsque le concept de foncteur est introduit :

In category theory it is the morphisms, rather than the objects, that have the primary role (...) Now, we take a more global viewpoint and consider categories themselves as structured objects. The “morphisms” between them that preserve their structure are called functors.

Mais, qu'est-ce que c'est exactement, cette chose qui est préservée par les morphismes ou les foncteurs ? Un morphisme (ou un foncteur, selon le cas) permet de préserver des propriétés structurelles. Une première approximation formelle au concept de «propriété structurelle» peut être effectuée au moyen de l'œuvre de Bourbaki. Selon la définition de Bourbaki (et, clairement, du point de vue de la théorie des ensembles), s'il existent deux structures de la même espèce Σ et Σ' , une propriété P des objets constituants de, par exemple, Σ peut être vue comme une formule φ (de'un ou plusieurs arguments) que prédique sur les objets de Σ . Or, on suppose que Σ possède la propriété P et qu'il existe une transformation $f : \Sigma \rightarrow \Sigma'$ dans une théorie Γ (ou entre deux théories Γ et Γ'). On dit que f *préserve la propriété P* si $f(\Sigma)$ possède aussi la propriété P . Par exemple, si la théorie Γ est la théorie topologique ensembliste usuelle (basée sur la théorie des ensembles ZFC), $P(X)$ est la propriété « X est un espace topologique connexe», et si Σ satisfait P (c'est-à-dire, si Σ est un espace topologique

connexe); si f est une application *continue* entre Σ et Σ' , alors $f(\Sigma) \subset \Sigma'$ est un espace topologique connexe. C'est-à-dire, $f(\Sigma)$ satisfait P . D'une manière similaire, si Γ' est la théorie des groupes usuelle, $Q(X)$ est la propriété « X est un groupe commutatif», et si $h : G \rightarrow G'$ est un homomorphisme de groupes; si G est un groupe commutatif, alors $f(G) \subset G'$ est aussi un groupe commutatif. Il est nécessaire de clarifier que, pour que la préservation d'une propriété soit possible entre deux structures de la même espèce, une application quelconque entre celles-ci n'est pas suffisante et, cette application dépendra de l'espèce de structure à laquelle appartient la propriété : les applications sont continues si les structures sont des espaces topologiques, des isométries si les structures sont des espaces métriques, et des homomorphismes de groupes si les structures sont des groupes, etc. De plus, si la application f est une bijection, toutes les propriétés d'une structure sont transportées vers l'autre et vice-versa ⁷².

Cependant, comme on a observé, cette caractérisation a été faite pour des structures *de la même espèce*. Or, comment est-il possible de déterminer la préservation de propriétés et de transporter des propriétés entre des structures similaires? C'est-à-dire, comment une propriété P d'un espace topologique peut être transportée à un autre espace topologique? Comment déterminer si deux espaces métriques possèdent la même propriété Q ?, etc. Ces questions ont une réponse commune : s'il est possible de trouver une application *appropriée* entre les deux structures, qui permet la préservation de la propriété. Mais, qu'est-ce qui se passe si les deux structures sont de différentes espèces? C'est-à-dire, si Σ et Σ' sont des structures de différentes espèces : est-il possible de trouver une transformation $f : \Sigma \rightarrow \Sigma'$ de telle sorte que certaines propriétés de Σ sont préservées? D'une certaine manière, le concept de foncteur peut être considéré comme la transformation qui permet une telle préservation, à travers de la préservation des propriétés structurelles d'une catégorie en autre catégorie. Toutefois, il est nécessaire de différencier les propriétés structurelles des objets d'une catégorie et des propriétés structurelles de la catégorie, pour pouvoir comprendre qu'est-ce qui préserve un foncteur après avoir opéré sur une catégorie donnée.

En conséquence, et en reprenant le mentionné ci-dessus par Adamek *et al* et Lawvere et Schanuel, si on a les catégories **Top**, **Grp** et **Ens**, et les foncteurs d'oubli $F_1 : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Ens}$ et $F_2 : \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Set}$ qui envoient chaque espace topologique (resp. chaque groupe) à son ensemble sous-jacent, en oubliant la structure topologique (resp. la structure de groupe) qui possède (Figure 1.12). Et si un foncteur est une correspon-

⁷². On peut trouver une définition formelle de ce fait dans [20, E IV.6], quand il définit les concepts d'isomorphismes et transport de structures.

dance entre des catégories «qui préserve des structures», alors : qu'est-ce qui est arrivé avec la structure topologique et de groupe quand F_1 et F_2 opèrent, respectivement ? Pour répondre à cette question, il est nécessaire de préciser ce qu'on entend par «préservation de la structure» en termes fonctoriels. Cela doit être quelque chose de différent que la préservation de la structure en termes des morphismes internes de la catégorie, parce que, d'être tel, les uniques foncteurs qui préserveraient des structures seraient les endofoncteurs et les foncteurs entre des catégories et ses sous-catégories (et vice-versa).

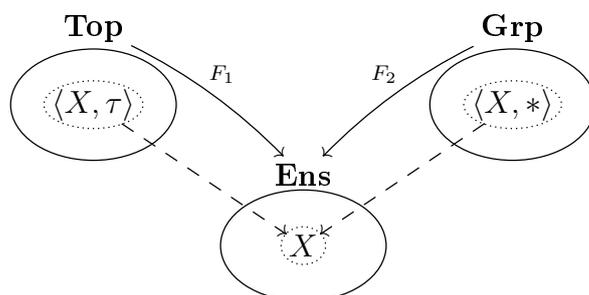


FIGURE 1.12 –

Conformément à ce qui précède, il est différent de dire que les morphismes d'une catégorie préservent la structure *des objets* de la catégorie, que de dire que les foncteurs préservent la structure de la catégorie *en général*. Comme on a observé quelques paragraphes ci-dessus, étant données deux structures de la même espèce, la préservation d'une propriété des objets dépend de l'existence de certain type d'application. De fait, étant donné une collection d'objets, la capacité de préserver la structure de ces objets est le critère selon lequel on «choisit» les morphismes qui permettent de construire une catégorie. Par exemple, dans [107] on mentionne la signification de la propriété par laquelle les morphismes préservent les structures des objets d'une catégorie, d'un point de vue ensembliste. Pour cela, Lawvere et Schanuel prennent comme exemple deux catégories : la catégorie \mathbf{Ens}° des ensembles et des endofonctions, et la catégorie $\mathbf{Ens}^{\Downarrow}$ des graphes non-réflexifs (*non-reflexive graphs*). Comme les objets sont déjà donnés, il est nécessaire se questionner : qu'est-ce qui est un morphisme f entre (a) deux objets $X^{\circ\alpha}, Y^{\circ\beta} \in \mathbf{Ens}^\circ$ et (b) deux objets $X^{\Downarrow}, Y^{\Downarrow} \in \mathbf{Ens}^{\Downarrow}$? Pour répondre à ces deux questions, il est nécessaire d'examiner comment ils sont les objets des deux catégories et d'analyser sa *configuration interne*⁷³ pour déterminer quels seraient les candidats

73. C'est-à-dire, il est nécessaire d'étudier comment les objets sont déterminés dans les termes d'autres objets qui les constituent, s'ils existent. Ou, dit autrement, comment ils sont caractérisés

optimaux pour jouer le rôle de morphismes dans chaque catégorie.

Donc, dans le cas de la question (a), comme $X^{\circ\alpha}, Y^{\circ\beta} \in \mathbf{Ens}^{\circ}$, les deux sont des ensembles avec une endofonction, alors $X^{\circ\alpha}$ peut être considéré comme $X \xrightarrow{\alpha} X$ et $Y^{\circ\beta}$ comme $Y \xrightarrow{\beta} Y$. Selon [107], un morphisme $f : X^{\circ\alpha} \rightarrow Y^{\circ\beta}$ est une correspondance qui «respect the given structure». Et cela se traduit par le fait que f satisfait l'équation fonctionnelle $f \circ \alpha = \beta \circ f$. Graphiquement, cela signifie que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\alpha} & X \\ f \downarrow & & \downarrow f \\ Y & \xrightarrow{\beta} & Y \end{array}$$

Apparemment, cela ne dit pas grand chose. Cependant, si f est inversible on a que $X^{\circ\alpha}$ et $Y^{\circ\beta}$ sont des objets isomorphes. Autrement dit, ils ont les mêmes propriétés structurelles. Comme ce cas est inclus dans \mathbf{Ens}° , les propriétés structurelles sont celles qui possèdent les ensembles munis d'une endofonctions. Quelques de ces propriétés : avoir n points, avoir des cycles de longueur m , avoir des points fixes, avoir des points qui se meuvent t pas avant d'entrer à un cycle, etc.

Par exemple, dans la Figure 1.13, il est seulement possible que $f(a) = m$. Par contre, si $f(a) = l$, alors $f \circ \alpha(a) = f(a) = l$ mais $\beta \circ f(a) = \beta(l) = m$. C'est-à-dire, $f \circ \alpha(a) \neq \beta \circ f(a)$. Donc, la propriété de préservation de structure ne s'accomplit pas pour l'élément a . Pour qu'elle s'accomplisse, f doit envoyer le point fixe a vers un autre point fixe. On peut observer que $X^{\circ\alpha}$ possède deux propriétés structurelles remarquables : il a un point fixe (a) et les éléments b, c et d ont un cycle de longueur 3. Par conséquent, f doit envoyer ce cycle vers un autre cycle de la même longueur (ou à un cycle «dégénéré» : d'une longueur 1). Alors, chaque élément de $\{b, c, d\}$ doit être envoyé vers chaque élément de $\{t, u, v\}$ (en préservant l'ordre du cycle) ou tous doivent être envoyés vers a . Compte tenu de ce qui précède il est possible de trouver quatre fonctions entre $X^{\circ\alpha}$ et $Y^{\circ\beta}$ qui préservent les propriétés structurelles de $X^{\circ\alpha}$.

Dans le cas de la question (b), un objet $X^{\Downarrow} \in \mathbf{Ens}^{\Downarrow}$ est une paire d'ensembles X_0 et X_1 (qui sont les ensembles d'arêtes et de sommets, respectivement) avec une

dans des termes d'«éléments». C'est par cela que cette caractérisation est ensembliste. Il est possible d'effectuer cette procédure dans des catégories spécifiques. Et dans ceux qui ne sont pas, la détermination des morphismes peut être faite seulement d'une manière abstraite, c'est-à-dire, qui font aux axiomes qui définissent la catégorie et les morphismes.

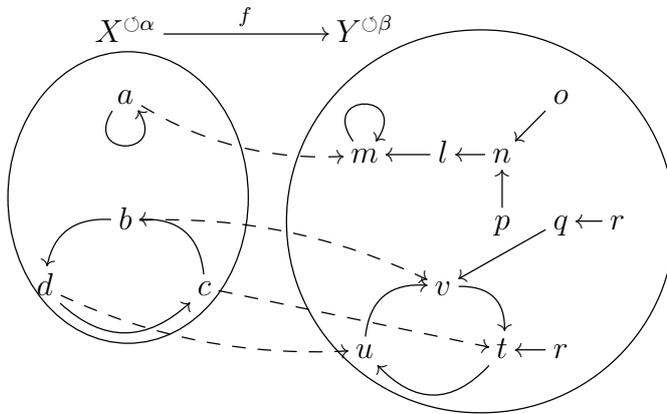


FIGURE 1.13 –

paire de morphismes $s, t : X_0 \rightarrow X_1$ (appelés «source» et «cible», respectivement). Un morphisme $(X_0 \begin{smallmatrix} \xrightarrow{t} \\ \xleftarrow{s} \end{smallmatrix} X_1) \xrightarrow{f} (Y_0 \begin{smallmatrix} \xrightarrow{t'} \\ \xleftarrow{s'} \end{smallmatrix} Y_1)$ est une paire des fonctions $f_0 : X_0 \rightarrow Y_0$ et $f_1 : X_1 \rightarrow Y_1$ pour lesquelles le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} X_0 & \xrightarrow{f_0} & Y_0 \\ \begin{smallmatrix} s \downarrow \\ \downarrow \\ \downarrow \\ t \end{smallmatrix} & & \begin{smallmatrix} s' \downarrow \\ \downarrow \\ \downarrow \\ t' \end{smallmatrix} \\ X_1 & \xrightarrow{f_1} & Y_1 \end{array}$$

C'est-à-dire, on a les deux équations fonctionnelles $f_1 \circ s = s' \circ f_0$ et $f_1 \circ t = t' \circ f_0$. Dans ce cas, la propriété structurelle est celle de «préserver les relations de source et de cible» dans les graphes [107, p.142].

Comme on a pu observer, les propriétés structurelles des objets de \mathbf{Ens}° ne sont pas nécessairement les mêmes que celles des objets de \mathbf{Ens}^{\llcorner} . Il est possible que ces deux catégories possèdent certaines propriétés en commun (par exemple, la propriété d'«avoir n points»), ou, dans ce cas, des propriétés ensemblistes *du fond*, parce que dans les deux catégories ses objets sont des ensembles avec certains types de structure. Cependant, il y a des propriétés qui sont inhérentes aux objets d'une catégorie et seulement ils les possèdent (par exemple, bien que la catégorie \mathbf{AbGrp} est une sous-catégorie pleine de \mathbf{Grp} , tous ses objets possèdent au moins une propriété extra qui ne possèdent pas tous les objets de \mathbf{Grp} : la propriété commutative de l'opération. Ainsi, la commutativité est une propriété inhérente de \mathbf{AbGrp} qui permet sa différenciation structurelle de

Grp). Donc, les propriétés structurelles *des objets* dans chaque catégorie ont un degré élevé de spécificité, alors que (comme il sera apprécié ci-après) les propriétés structurelles *de toute la catégorie* peuvent être caractérisées avec un haut degré de généralité.

Pour des catégories spécifiques, la généralisation du concept «morphisme qui préserve des structures» est discutée dans [107, 149].

Ce qui précède implique la distinction suivante entre deux types de propriétés -intra-structurelles et inter-structurelles- à l'intérieur de la théorie des catégories. Les premières sont les propriétés à l'intérieur d'une catégorie spécifique, c'est-à-dire, les propriétés structurelles *des objets* de cette catégorie donnée. Les deuxièmes sont celles qui existent entre deux ou plusieurs catégories, c'est-à-dire, les propriétés qui déterminent la catégorie comme une entité bien différenciée. Ainsi, les propriétés intra-structurelles de la catégorie **Grp** sont celles inhérentes aux groupes et qui ne sont pas propres d'autre type de catégories (par exemple, les propriétés qui sont étrangères à **Top**). D'un autre côté, les propriétés inter-structurelles entre, par exemple **Grp** et **Top**, sont celles communes dans les deux catégories. On pourrait dire que ce sont des disciplines spécifiques qui étudient les propriétés intra-structurelles (la topologie étudie les propriétés intra-structurelles dans **Top**, la théorie des groupes celles dans **Grp**, etc.), alors que la théorie des catégories étudie (parmi d'autres choses), les propriétés inter-structurelles.

Les propriétés inter-structurelles, au contraire des propriétés intra-structurelles, sont plus générales et sont en correspondance avec quelques objets et constructions admissibles dans une catégorie quelconque. Aussi, étant donné une catégorie \mathcal{C} , elle peut ou peut ne pas posséder les propriétés suivantes :

1. \mathcal{C} a un objet terminal.
2. \mathcal{C} a un objet initial.
3. Dans quelques cas, il est possible de faire des produits dans \mathcal{C} .
4. Il est toujours possible de faire des produits dans \mathcal{C} .
5. Dans quelques cas, il est possible de réaliser des coproduits dans \mathcal{C} .
6. Il est toujours possible de faire des coproduits dans \mathcal{C} .
7. Dans quelques cas, il est possible de faire exponentiels dans \mathcal{C} .
8. Il est toujours possible de faire exponentiels dans \mathcal{C} .

- 9. \mathcal{C} a des limites.
- 10. \mathcal{C} a des colimites.

Comment opère-t-il un foncteur pour que la préservation de la structure d'une catégorie soit possible ? On a vu dans le §1.2.1 que la propriété essentielle pour qu'une transformation F de catégories soit un foncteur, consiste en ce qu'elle peut préserver des diagrammes commutatifs. Et, cela même signifie qu'un foncteur peut envoyer des «triangles de composition» des morphismes d'un type vers des triangles d'un type moindre ou égal. Pour cette raison, ce sont les diagrammes commutatifs (les triangles) qui codifient les propriétés structurelles d'une structure. Or : est-il possible de réduire les antérieures propriétés intra-structurelles aux triangles de composition de morphismes ? On pourrait donner, *a priori*, une réponse affirmative. Mais d'avant il est nécessaire d'étudier les concepts de morphisme et de propriété *universelle*. Cela se fera dans le troisième chapitre. Comme exemple, on peut voir la propriété suivante «transférable» entre deux catégories de différentes espèces : l'«isomorphisme» entre des objets. Si on prend la catégorie **Top.** des espaces pointés et la catégorie **Grp**, il existe un foncteur groupe fondamental⁷⁴ $\pi_1 : \mathbf{Top.} \rightarrow \mathbf{Grp}$. Alors, si (X, x_0) et (Y, y_0) sont deux espaces homéomorphes ($(X, x_0) \sim (Y, y_0)$) on a qu'il existent deux homéomorphismes $(X, x_0) \xrightarrow{f} (Y, y_0) \xrightarrow{f'} (X, x_0)$ tels que $f \circ f' = 1_{(Y, y_0)}$ et $f' \circ f = 1_{(X, x_0)}$. Cela est représenté dans la Figure 1.14 et, conformément à la même figure, on a que $g = \pi_1(f)$ et $g' = \pi_1(f')$.

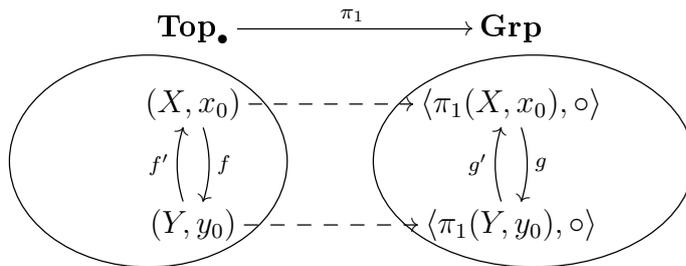


FIGURE 1.14 –

De cette façon on obtient les deux équations fonctionnelles

$$\pi_1(f \circ f') = \pi_1(f) \circ \pi_1(f') = g \circ g' = 1_{\pi_1(Y, y_0)}$$

74. Si $(X, x_0) \in \text{Ob}(\mathbf{Top.})$ et $(f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)) \in \text{Hom}(\mathbf{Top.})$ on a que $\pi_1[(X, X_0)] = \pi_1(X, X_0)$ qui est le groupe de classes d'homotopie lesquelles initient et finissent dans le point de base x_0 , et $\pi(f)$ est l'homomorphisme induit.

$$\pi_1(f' \circ f) = \pi_1(f') \circ \pi_1(f) = g' \circ g = 1_{\pi_1(X, x_0)}.$$

En d'autres termes, les groupes $\langle \pi_1(X, x_0), \circ \rangle$ et $\langle \pi_1(Y, y_0), \circ \rangle$ sont isomorphes. Ainsi le foncteur π_1 préserve l'«isomorphisme» d'espaces topologiques, en le traduisant dans un isomorphisme de groupes. Donc, la propriété «être isomorphe» est une propriété inter-structurelle. Cependant, il est également possible de «construire» cette propriété : on peut avoir deux objets X et Y et il peut y avoir un foncteur T tel que $T(X)$ et $T(Y)$ soient isomorphes sans que X et Y soient isomorphes, mais dans le cas où ils le sont, cette propriété est préservée. Il est nécessaire de dire que cette propriété doit être généralisée d'une manière telle qui ne dépend pas des particularités de chaque catégorie. C'est-à-dire qui comprend aussi bien l'homéomorphisme que l'isomorphisme de groupes. Mais si on observe les exemples donnés ci-dessus, deux objets A, B d'une catégorie \mathcal{C} sont dits isomorphes s'il existe une paire de morphismes $A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} A$ tels que $\alpha \circ \beta = 1_B$ et $\beta \circ \alpha = 1_A$. Et, il est simple de démontrer que cette propriété abstraite peut être préservée au moyen de foncteurs. De la même manière, ce qui a été décrit permet de réaliser l'affirmation suivante : une propriété inter-structurelle est celle qui peut être préservée par des foncteurs. Ou, dit autrement, les concepts de propriété inter-structurelle et de propriété fonctorielle peuvent être pris comme équivalents.

Avant de terminer cette section il est nécessaire de souligner qu'il peut en avoir deux variations de l'envoi des triangles d'une catégorie \mathcal{C} sur des triangles d'une autre catégorie \mathcal{D} à travers d'un foncteur F . Et, chacune de ces variations représente le sens de la préservation de la composition : cette conservation de la structure peut être effectuée, même inversant les morphismes. Dans le cas dont la condition $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ est satisfaite, le foncteur est *covariant*, et si $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$, le foncteur est *contravariant*.

Par exemple, le foncteur de la Figure 1.2 est covariant, alors que le foncteur de la Figure 1.15 est contravariant.

Comme on peut le voir, les foncteurs contravariants doivent avoir une condition supplémentaire, de sorte que la condition $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$ soit satisfaite : le foncteur doit inverser tous les morphismes. C'est-à-dire, $\forall (f : A \rightarrow B) \in \text{Hom}(\mathcal{C}), F(f) : F(B) \rightarrow F(A)$. Et, sans prendre en compte la variance du foncteur, on peut voir que celui-ci peut envoyer des triangles d'un type vers triangles d'un type moindre ou égal.

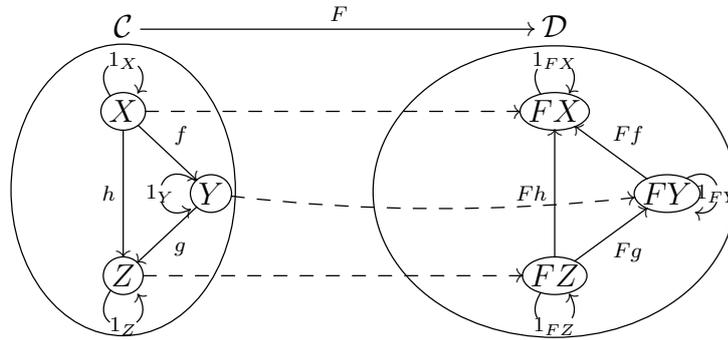


FIGURE 1.15 –

Un autre exemple très important, pour pouvoir définir le concept de foncteur adjoint, est celui du hom-foncteur : soit \mathcal{C} une catégorie localement petite et $\forall A, B \text{Ob}(\mathcal{C})$ on définit les deux foncteurs $\text{Hom}(A, -) : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Ens}$ et $\text{Hom}(-, B) : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Ens}$ de la manière suivante :

1. $\text{Hom}(A, -)$ est tel que par chaque $X \in \mathcal{C}$, $X \mapsto \text{Hom}(A, X) \in \mathbf{Ens}$ et, si $(f : X \rightarrow Y) \in \mathcal{C}$ alors $\text{Hom}(A, f) : \text{Hom}(A, X) \rightarrow \text{Hom}(A, Y)$, défini par $t \mapsto f \circ t, \forall t \in \text{Hom}(A, X)$.
2. $\text{Hom}(-, B)$ est tel que par chaque $X \in \mathcal{C}$, $X \mapsto \text{Hom}(X, B) \in \mathbf{Ens}$ et, si $(f : X \rightarrow Y) \in \mathcal{C}$ alors $\text{Hom}(f, B) : \text{Hom}(Y, B) \rightarrow \text{Hom}(X, B)$, défini par $t \mapsto t \circ f, \forall t \in \text{Hom}(X, B)$ ⁷⁵.

75. Par la définition de l'action des foncteurs $\text{Hom}(A, -)$ et $\text{Hom}(-, B)$ sur les morphismes on a que si $(f : X \rightarrow Y), (g : Y \rightarrow Z), (h : X \rightarrow Z) \in \mathcal{C}$ tels que $h = g \circ f$, alors on a que :

$$\text{Hom}(A, f) : \text{Hom}(A, X) \rightarrow \text{Hom}(A, Y),$$

$$\text{Hom}(A, g) : \text{Hom}(A, Y) \rightarrow \text{Hom}(A, Z) \text{ et}$$

$$\text{Hom}(A, h) : \text{Hom}(A, X) \rightarrow \text{Hom}(A, Z)$$

alors $\text{Hom}(A, g) \circ \text{Hom}(A, f) : \text{Hom}(A, X) \rightarrow \text{Hom}(A, Z)$, ainsi on a que $\text{Hom}(A, g) \circ \text{Hom}(A, f) = \text{Hom}(A, h) = \text{Hom}(A, g \circ f)$. C'est-à-dire, $\text{Hom}(A, -)$ est un foncteur covariant. Et

$$\text{Hom}(f, B) : \text{Hom}(Y, B) \rightarrow \text{Hom}(X, B),$$

$$\text{Hom}(g, B) : \text{Hom}(Z, B) \rightarrow \text{Hom}(Y, B) \text{ et}$$

$$\text{Hom}(h, B) : \text{Hom}(Z, B) \rightarrow \text{Hom}(X, B)$$

alors $\text{Hom}(A, f) \circ \text{Hom}(A, g) : \text{Hom}(Z, B) \rightarrow \text{Hom}(X, B)$, ainsi on a que $\text{Hom}(A, f) \circ \text{Hom}(A, g) = \text{Hom}(A, h) = \text{Hom}(A, g \circ f)$. C'est-à-dire, $\text{Hom}(-, B)$ est un foncteur contravariant.

Si on combine les deux définitions dans une seule, on obtient le bi-foncteur $\text{Hom}(-, -) : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Ens}$ qui est contravariant dans le premier argument et covariant dans le deuxième. De même, $\text{Hom}(-, -) : \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Ens}$ est un bi-foncteur covariant dans ses deux arguments. Par conséquent, si on a $(X, X'), (Y, Y') \in \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C}$, un morphisme $(X, X') \xrightarrow{h} (Y, Y')$ est une paire de morphismes $(f : Y \rightarrow X) \in \mathcal{C}^{op}$ et $(g : X' \rightarrow Y') \in \mathcal{C}$. Donc, le foncteur $\text{Hom}(-, -) : \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Ens}$ envoie :

1. Chaque $(X, X') \in \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C}$ à $\text{Hom}(X, X') \in \mathbf{Ens}$.
2. Chaque morphisme $(X, X') \xrightarrow{h} (Y, Y')$ à l'application $\text{Hom}(X, X') \rightarrow \text{Hom}(Y, Y')$ telle que $(X \xrightarrow{\alpha} X') \mapsto g \circ \alpha \circ f$, où

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\alpha} & X' \\ f \uparrow & & \downarrow g \\ Y & & Y' \end{array}$$

1.2.3 Pourquoi ce concept n'est-il pas réductible au concept de fonction ?

Pour pouvoir répondre à cette question, il est nécessaire de connaître quel était le concept d'application ou de fonction prédominante dans les cercles mathématiques, autour de 1942. Cela permettra de déterminer le concept d'application qu'Eilenberg et MacLane employaient au moment de définir un foncteur. Il est bien connu, le lien que Saunders MacLane a eu avec l'école fondée par Emmy Noether dans Göttingen, grâce à l'influence d'E. H. Moore. De fait, MacLane a fait ses études de doctorat entre 1931-1933 dans cette université sous la direction de Paul Bernays et Hermann Weyl. Dans ces années, les conceptions de Noether à propos de l'algèbre ont été d'une grande influence pour MacLane :

The use of axioms to describe algebraic objects was a basic element in Emmy Noether's view of algebra. In her view, algebra should deal with concepts and not just manipulation. It was only in Göttingen that I came to understand these things well—an understanding that was important to my later exposition of modern algebra in my joint book with Garrett Birkhoff, *A Survey of Modern Algebra* [117, p.50]

De la même manière, et comme Corry [32] mentionne, Emmy Noether et Emil Artin étaient des figures d'une grande influence pour l'écriture de l'un des livres les plus importants pour les mathématiques modernes : le *Moderne Algebra* de van der

Waerden. De fait, le sous-titre du livre est «En partie un développement des lectures par E. Artin et E. Noether». Et, ce livre est utilisé par MacLane pour donner son premier cours d'algèbre à Harvard (en 1934)⁷⁶. Qui sera d'une grande inspiration pour l'écriture, avec Birkhoff, de son propre texte d'algèbre : *A Survey of Modern Algebra* en 1941.

L'emphase donné dans les derniers paragraphes sur l'influence des idées de Noether sur MacLane (soit par l'influence directe de Noether soit par Weyl, ou par l'influence du livre de van der Waerden) a eu pour objet de mettre en relief que le concept d'application que MacLane, maniait au moment de la coécriture de son article de 1945, correspondait à celle qui circulait dans les sphères mathématiques de Göttingen. L'affirmation précédente peut être appréciée avec toute clarté dans *Moderne Algebra*.

Dans le § 2 du premier chapitre de *Moderne Algebra I* [162] intitulé *Applications. Cardinalité* (Abbildungen. Mächtigkeiten), van der Waerden définit une application (Abbildung) comme suit :

Wenn durch irgend eine Vorschrift jedem Element a einer Menge⁷⁷ \mathfrak{M} ein einziges neues Objekt $\varphi(a)$ zugeordnet wird, so nennen wir diese Zuordnung eine Funktion und die Menge \mathfrak{M} den Definitionsbereich der Funktion. Die Menge \mathfrak{N} aller Funktionswerte $\varphi(a)$ heißt der Wertevorrat der Funktion. Man nennt eine solche Zuordnung, bei welcher jedem Element von \mathfrak{M} genau ein Element von \mathfrak{N} zugeordnet wird und dabei alle Elemente von \mathfrak{N} mindestens einmal benutzt werden, auch eine (eindeutige) Abbildung der Menge \mathfrak{M} auf die Menge \mathfrak{N} . Das Element $\varphi(a)$ heißt dann das Bild von a , und a heißt ein Urbild von $\varphi(a)$. Das Bild $\varphi(a)$ ist durch a eindeutig bestimmt, aber nicht notwendig umgekehrt a durch $\varphi(a)$. Das Wort Abbildung wird im ganzen Buch nur für diese eindeutigen Abbildungen benutzt⁷⁸

76. «(...) I taught a half course using van der Waerden's recent two-volume *Modern Algebra* as the text : it was a fine book, presenting Noether's modern conceptual (or abstract) view of algebra.» [117, p.68]

77. van der Waerden mentionne dans l'Introduction qui n'approfondira pas dans le relatif aux fondements de la théorie des ensembles. Cependant, lorsqu'il introduit de façon informelle la notion d'ensemble, il mentionne que ce concept n'est pas libre des difficultés et, par conséquent, il remet le lecteur à la lecture du texte de Fraenkel : *Einführung in die Mengenlehre*, 3e édition (Berlin, 1928) [162, p.4 note en pied].

78. Traduction libre : «Si, par une règle donnée, il correspond à chaque élément d'un ensemble [Menge] \mathfrak{M} une seule nouvel objet $\varphi(a)$, nous appellerons cette correspondance une fonction [*Funktion*], et l'ensemble \mathfrak{M} est appelé le domaine de définition de la fonction. L'ensemble \mathfrak{N} de toutes les valeurs de

D'un autre côté, les développements autour de la théorie des ensembles ZFC (en particulier les œuvres de Borel, Lebesgue et Baire) ont eu une influence importante dans l'école polonaise des années 20s et 30s. Ces travaux ont influencé les recherches de Sierpiński et Kuratowski⁷⁹ (ce dernier par Janiszewski). Par conséquent, la théorie des ensembles ZFC régnait au moment où Eilenberg développait ses études à l'Université de Varsovie. En plus de l'influence des mathématiciens déjà mentionnés, Eilenberg fait allusion au rôle décisif des articles sur la théorie de l'homotopie⁸⁰ de Hurewicz [100]. Dans ce contexte, la notion de fonction (et d'application) qui prédominait (aussi bien dans la topologie que dans la théorie des ensembles) était celle limitée à la théorie des ensembles ZFC. Et, on pourrait dire que cela est le même que on peut trouver dans le livre de van der Waerden ou dans les *Éléments des Mathématiques* de Bourbaki. De fait, l'influence de *Moderne Algebra* dans les premières étapes du groupe Bourbaki ne passe pas inaperçu :

(...) Bourbaki's treatise, as it gradually came to be conceived and worked out, may actually be seen as an extension of van der Waerden's achievement to the whole of mathematics; that is, much the same as van der Waerden had succeeded in presenting the whole of algebra as a hierarchy of structures, so did Bourbaki present much larger portions of mathematics in a similar way. [32, p.306]

Selon les livres sur la théorie des ensembles et la topologie générale des *Éléments des*

la fonction $\varphi(a)$ est appelée la rang de valeurs [*Wertevorrat*] de la fonction. Une telle correspondance, où chaque élément de \mathfrak{M} correspond exactement un élément de \mathfrak{N} , et où tous les éléments de \mathfrak{N} sont utilisés au moins une fois, est également connu comme une (unique) application [*Abbildung*] de l'ensemble \mathfrak{M} sur l'ensemble \mathfrak{N} . L'élément $\varphi(a)$, est appelée l'image [*Bild*] de a , tandis que a est une image réciproque [*Urbild*] de $\varphi(a)$. L'image $\varphi(a)$ est uniquement déterminé par a , mais l'inverse n'est pas nécessairement vrai. Tout au long du livre, le terme application [*Abbildung*] sera utilisé pour ces applications uniques».

79. Entre les années 10s et les années 30s, de nombreuses écoles ont adopté un rôle décisif dans le développement des écoles topologistes et ensemblistes de Varsovie. Il convient de souligner, l'école de Moscou (grâce à Luzin, Aleksandrov et Egorov. Ce dernier avait connu les développements de la topologie et la théorie des ensembles des écoles de Göttingen, Berlin et Paris) et les influences françaises déjà mentionnées. Pour approfondir plus à ce sujet, voir [60], [61] et l'article intitulé *90th anniversary of emergence of the Polish School of Mathematics; Polish mathematics between the world wars* qui peut se trouver dans la direction suivante : http://www.hpm-americas.org/wp-content/uploads/2010/04/PSMatHPMcorrected_2.pdf

80. *Beiträge zur Theorie der Deformationen I-IV* publiés dans Proc. Akad. Amsterdam dans les années 1935 et 1936.

Mathématiques de Bourbaki⁸¹ il est possible de déterminer quel est le concept d'application prédominant dans la période 1924-1958, en plus d'explorer son origine *immédiate*.

Les premières définitions du concept d'application se trouvent dans le fascicule de résultats du livre de théorie des ensembles. Ce fascicule est composé par les rédactions⁸² numéro 48 et 49, écrites par Dieudonné et Delsarte en 1939, respectivement. La définition que Dieudonné donne est la suivante⁸³ :

Soient E et F deux ensembles, distincts ou non. Une relation entre un élément arbitraire x de E et un élément arbitraire y de F est dite relation fonctionnelle en y , ou relation fonctionnelle de E vers F , si, quel que soit $x \in E$, il existe un élément y et un seul de F qui soit dans la relation considérée avec x .

On donne le nom fonction à l'opération qui associe ainsi à tout élément $x \in E$ l'élément $y \in F$ qui se trouve dans la relation donnée avec x ; on dit que y est la valeur de la fonction pour l'élément x , et que la fonction est déterminée par la relation fonctionnelle considérée.

Dans le chapitre du livre de théorie des ensembles, qui a été écrit en 1954 (Rédaction numéro 172), bien que soit présentée une définition plus sophistiquée du concept de fonction, cela ne perd pas son essence purement ensembliste :

DÉFINITION 9.- On dit qu'un graphe F est un graphe fonctionnel si pour tout x , il existe un objet au plus correspondant à x par F . On dit qu'une correspondance⁸⁴ $f = (F, A, B)$ est une fonction si son graphe F est un graphe fonctionnel, et si son ensemble de départ A est égal à son ensemble de définition $pr_1 F$. Autrement dit, une correspondance $f = (F, A, B)$ est une fonction si, pour tout x appartenant à l'ensemble de départ A de f , la

81. La chronologie des documents de Bourbaki a été possible grâce à la table chronologique des différentes sections des premières éditions françaises des *Éléments des Mathématiques*. Cette chronologie se trouve dans les Archives Jean Delsarte de l'Institut Élie Cartan à Nancy et la table chronologique sur la page Web : <http://www.iecn.u-nancy.fr/eguether/archives/elements.pdf>.

82. Conformément aux Archives de l'Association des Collaborateurs de Nicolas Bourbaki

83. La définition de Delsarte est essentiellement la même.

84. La définition de correspondance est présentée auparavant :

«DÉFINITION 2.- On appelle correspondance entre un ensemble A et un ensemble B un triplet $\Gamma = (G, A, B)$ où G est un graphe tel que $pr_1 G \subset A$ et $pr_2 G \subset B$. On dit que G est le graphe de Γ , A l'ensemble de départ et B l'ensemble d'arrivée de Γ .»

Il est important de remarquer qu'une correspondance, pour Bourbaki, est un type de *relation*.

relation $(x, y) \in F$ est fonctionnelle en y ; l'objet unique correspondant à x par f s'appelle la valeur de f pour l'élément x et se désigne par $f(x)$ ou f_x (ou $F(x)$, ou F_x).

D'ailleurs, dans ce chapitre Bourbaki définit une *application* f de A sur B comme une fonction dans laquelle l'ensemble d'arrivée est égal à B .

Si on lit le dictionnaire du livre de topologie générale de Bourbaki, où les références les plus importantes pour l'écriture du livre sont exhibées (ce chapitre a été écrit en 1949 et correspond à la Rédaction numéro 135), on peut voir que le concept d'application ou de fonction (indifféremment), est basé sur le concept d'«abbildung» qui est pris du livre *Topologie I* d'Alexandroff et Hopf et la deuxième édition du *Mengenlehre* de Hausdorff. Aussi, il est basé sur le concept de «transformation» qui est exposé dans *Algebraic topology* de Lefschetz. Le livre d'Alexandroff et Hopf correspond à l'édition allemande de 1935 et, l'édition du *Mengenlehre* de Hausdorff est l'édition résumée du *Grundzüge der mengenlehre* qui a été publié en 1927.

La définition d'Alexandroff et Hopf est la suivante :

Allgemeines über Abbildungen. Liegen zwei Mengen X und Y vor, und entspricht jedem Element x von X ein eindeutig bestimmtes Element $y = f(x)$ von Y , so spricht man von einer *Abbildung* von X in Y ⁸⁵ [4, p.51].

Tout ce qui précède permet d'affirmer que, quand Eilenberg et MacLane mentionnent le terme de «fonction» (*function*) et d'application (*map*) dans les articles 1942a et 1945, ils le font en termes de théorie des ensembles ZFC. Cependant, ce concept, bien qu'utile pour introduire le concept de foncteur, il est insuffisant pour le caractériser complètement. De fait, si on analyse le foncteur Ch qu'ils étudient dans l'article de 1942a, ce ne peut être une fonction en termes de théorie des ensembles ZFC.

Pourquoi? D'abord, parce que c'est une transformation qui non seulement envoie d'«éléments» (dans ce cas, les groupes) vers des éléments, mais aussi opère sur des homomorphismes de groupes. D'un autre côté, il faut apprécier la nature du «domaine» et «codomaine» de Ch : G et G' sont des groupes abéliens et, par conséquent, ils sont des éléments de la collection **AbGrp** de tous les groupes abéliens. Mais cette collection

85. Applications générales. Étant donnés deux ensembles X et Y , si à chaque élément $x \in X$ correspond seulement un élément particulier $y = f(x)$ de Y , on parle d'une *fonction* de X dans Y .

n'est pas un ensemble. En conséquence, Ch ne peut pas être une fonction.

Eilenberg et MacLane semblent être conscients du problème de penser des entités telles que **AbGrp**. Cependant, l'article de 1942a ne répond pas à ce problème, parce que son objectif est le concept d'équivalence naturelle de groupes. Au contraire, dans son article 1945, ils soulignent que ces entités (comme celles des espaces vectoriels avec ses transformations vectorielles, ou ce des groupes avec ses homomorphismes) ne sont pas des ensembles. Ces entités sont des exemples d'une entité plus générale : les catégories⁸⁶.

86. Ils affirment le suivant :

Such as consideration of vector spaces and their linear transformations is but one example of many similar situations ; for instance we may deal with groups and their homomorphisms, with topological spaces and their continuous mappings, with simplicial complexes and their simplicial transformations, with ordered sets and their orders preserving transformations. In order to deal in a general way with such situations, we introduce the concept of *category*. Thus a category \mathfrak{A} will consist of abstract elements of two types : the objects A (for example, vector spaces, groups) and the mappings α (for example, linear transformations, homomorphisms). For some pairs of mappings in the category is defined a product (in the examples, the product is the usual composite of two transformations). Certain of these mapping act as a identities with respect to this product, and there is a one-to-one correspondence between the objects of the category and these identities [44, p.234].

Chapitre 2

L'œuvre de Daniel Kan : l'apparition des foncteurs adjoints.

2.1 Préliminaires : la nécessité d'une théorie homotopique abstraite.

Dans le premier chapitre, il a été noté que Poincaré dans son *Analysis Situs* définit le concept de groupe fondamental. Le concept d'homotopie apparaît explicitement dans cette définition, bien que Poincaré ne lui donne pas de nom. Cependant, la notion d'homotopie apparaissait déjà implicitement dans l'analyse complexe. En particulier dans le théorème intégral de Cauchy, dans le *Mémoire sur les Intégrales Définies Prises entre des Limites Imaginaires* publié par Cauchy en 1825. Ce théorème se généralise dans le cadre des variétés de Riemann et, en fait, c'est lui qui fait implicitement usage des homotopies dans son *Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Funktionen einer veränderlichen komplexen Größe* (1851). Et, également les résultats de Riemann ont été étudiés et étendus par Jordan (*Des contours tracés sur les surfaces* et *Sur la déformation des surfaces* de 1866, et *Cours d'Analyse* de 1882) et une série d'écrits de Felix Klein (voir [83] pour une description plus détaillée sur la «période analytique» de la notion d'homotopie).

Dans son *Analysis situs*, Poincaré considère l'ensemble formé par toutes les substitutions des fonctions qui représentent les chemins qui commencent et se terminent à un point M_0 , qui avec l'opération composition forme le groupe fondamental g associé à une variété V . Ce groupe sera connu plus tard comme le premier groupe

d'homotopie et sera symbolisé par $\pi_1(V)$. En effet, cet ensemble de substitutions est ce qu'on appellera ultérieurement une homotopie avec le même point de départ et d'arrivée (M_0). Cependant, Poincaré ne donne pas de nom à cet ensemble de chemins déformables jusqu'au même point M_0 .

Le terme « homotopie » apparaît pour la première fois dans l'*Analysis situs* de Max Dehn & Poul Heegaard, publié en 1907, bien qu'il ne corresponde pas au concept moderne d'homotopie. Cependant, c'est dans les articles *Beweis der Invarianz der Dimensionenzahl* (1911) et *Continuous one-one transformations of surfaces in themselves (5th communication)* (1912) de L.E.J Brouwer que l'idée contemporaine d'homotopie apparaît tout à fait explicite. Dans la note 4 du deuxième article, il mentionne ce qui suit [22, p. 352] :

Under a continuous modification of a univalent continuous transformation we understand in the following always the construction of a continuous series of univalent continuous transformations, i. e. a series of transformations depending in such manner on a parameter, that the position of an arbitrary point is a continuous function of its initial position and the parameter.

Ce qui correspond clairement à la définition actuelle de l'homotopie. En fait, il ajoute ce qui suit [22, p. 353] :

We shall say that two transformations *belong to the same class*, if they can be transformed continuously into each other.

Avec cela, Brouwer classe les applications (sur une variété V) en différentes classes, selon qu'elles sont déformables ou non entre elles. En outre, dans son article *Beweis der Invarianz der geschlossenen Kurve* de 1912, il démontre l'invariance topologique des courbes planes fermées¹

Or, comme cela a également été mentionné dans le premier chapitre, Hurewicz en 1935 (*Beitrage zur Topologie der Deformationen. I. Hbherdimensionale Homotopiegruppen; II. Homotopie- und Homologiegruppen*) et Čech dans une note très brève de 1932 (*Höherdimensionale Homotopiegruppen*) généralisent la notion de groupe fondamental de Poincaré $\pi_1(_)$ au n -ième groupe d'homotopies, en considérant les applications d'une n -sphère ($n > 1$) dans un espace donné comme une généralisation des chemins qui définissent $\pi_1(_)$. La note complète de Čech est la suivante (p.203) :

1. Une courbe fermée dans le plan est un sous-ensemble du plan parfaitement délimité et connexe, qui divise le plan en deux régions, qui partagent la même frontière.

Si a est un point fixe d'un espace topologique R , et soit p un nombre naturel. Soit G_p l'ensemble des sphères singulières p -dimensionnelles contenant a et qui sont dans R (= image continue d'une sphère p -dimensionnelle ordinaire); deux éléments de G_p sont considérés comme égaux s'ils peuvent être convertis en R par une homotopie contenant a . Dans G_p , il est possible de définir la multiplication et de cette façon G_p est un groupe. G_1 est le groupe classique des chemins de Poincaré².

C'est-à-dire, $\pi_n(X) = [S^n, *; (X, x_0)]$. Cependant Čech n'a pas prêté beaucoup d'attention à ce fait, parce que $\pi_n(X)$ s'avère être abélien si $n \geq 2$. Quelle en est la raison? Eh bien, le premier groupe d'homologie $H_1(X)$ résulte de l'«abelianisation» de $\pi_1(X)$, puisque

$$H_1(X; Z) \cong \pi_1(X)/[\pi_1(X), \pi_1(X)]$$

alors dans ce processus $H_1(X)$ perd d'information par rapport à $\pi_1(X)$.

Cependant, cela n'a pas arrêté Hurewicz. Il reprend la définition de Čech et étudie les interrelations entre les n -ième groupes d'homotopie et les différents groupes d'homologie et de cohomologie. Cela a été consigné dans ses *Beiträge*. En effet, dans le III de son *Beiträge*, Hurewicz a défini ce que signifie avoir le même type d'homotopie (*Homotopietypus*) ou, d'être «homotopiquement équivalents» [77, p. 125] :

Définition. On dit que deux espaces compacts X et Y ont le même *type d'homotopie* s'il existent deux applications $f \in Y^X$ et $\varphi \in X^Y$ telles que les applications composites $\varphi(f)$ et $f(\varphi)$ sont homotopiques aux applications respectives identité (de X et Y)³.

Cette définition peut être généralisée pour des espaces topologiques arbitraires. D'autre part, le concept d'équivalence homotopique est d'une grande importance pour les mathématiques suivantes, car il généralise la notion d'homéomorphisme (il ne s'agit là que d'un cas particulier d'homotopie). Ainsi, si deux espaces sont homéomorphes, ils

2. Sei a ein fester Punkt eines topologischen Raumes R ; sei p eine natürliche Zahl. Sei G_p die Menge der a enthaltenden und in R gelegenen p -dimensionalen singulären Kugeln (= stetigen Bildern einer gewöhnlichen p -dim. Kugel); zwei Elemente von G_p werden als gleich betrachtet, wenn sie sich durch eine a festhaltende Homotopie in R ineinander überführen lassen. Es wird in G_p eine Multiplikation definiert, vermöge der G_p zu einer Gruppe wird. G_1 ist die klassische Wegegruppe Poincares.

3. Definition. Von zwei kompakten Räumen X und Y sagen wir, sie haben denselben Homotopietypus, wenn es eine Abbildung $f \in Y^X$ und eine Abbildung $\varphi \in X^Y$ gibt, so dass die zusammengesetzten Abbildungen $f \cdot \varphi$ und $\varphi \cdot f$ den identischen Abbildungen (von X in X . bzw. von Y in Y) homotop sind.

sont homotopiquement équivalents, mais le convers n'est pas vrai. Par exemple, si un espace X a le même type d'homotopie qu'un singleton, on dit que X est contractile. Ainsi, un simplexe, une sphère solide, un disque dans le plan ou un intervalle, étant tous contractiles, sont homotopiquement équivalents. Et, clairement, le disque dans le plan n'est pas homéomorphe avec la sphère solide ou avec l'intervalle.

En outre, certains invariants de la topologie algébrique ne dépendent que du type d'homotopie de l'espace topologique étudié. Par exemple, Brouwer dans son article *Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten* de 1911 démontre que le degré d'une application continue est invariant sous homotopie. C'est-à-dire, si deux applications sont homotopiquement équivalentes, alors elles possèdent le même degré⁴.

Dans sa première partie du *Beiträge*, Hurewicz introduit ce qui sera connu comme l'espace de lacets⁵ $\Omega(X, x_0)$ d'un espace topologique pointé (X, x_0) .

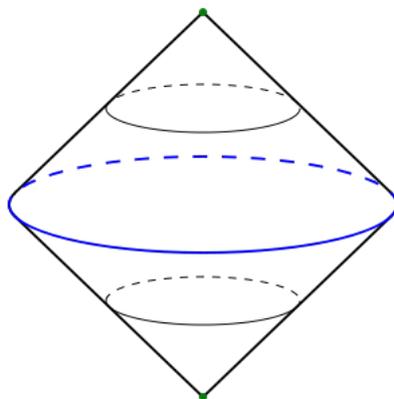
Avec cela, il montre : (i) que le groupe fondamental $\pi_1(X, x_0)$ est un cas particulier de sa définition de $\pi_n(X, x_0)$, et (ii) que $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_0[\Omega(X, x_0), z_0]$. Ceci prouve que :

$$\pi_n(X, x_0) \cong \pi_{n-1}[\Omega(X, x_0), z_0]$$

D'autre part, en 1938 dans son article *Über die Klassen der Sphärenabbildungen I. Große Dimensionen* [57], Hans Freudenthal reprend les idées que Hurewicz a consignées dans ses *Beiträge*. Il introduit l'idée de «suspension» (*Einhängung*). La définition de Freudenthal est assez géométrique et consiste intuitivement à «étirer» un espace topologique X dans un cylindre, puis à faire s'effondrer les deux faces finales du cylindre en points. Par exemple, une illustration de la suspension du cercle S^1 correspond à la figure suivante :

4. Soit $f : X \rightarrow Y$ une application continue entre deux variétés compactes, connexes et orientées de la même dimension, le *degré* de f est un nombre entier représentant le nombre de fois où le domaine de la variété est «enveloppé» autour de le rang de l'autre variété par l'action de l'application.

5. On considère (S^1, s_0) comme l'espace pointé du cercle S^1 , alors l'espace de fonctions $(X, x_0)^{(S^1, s_0)}$ (qui sera symbolisé par $\Omega(X, x_0)$), tel que chacune des applications f de cet espace respecte que $f(s_0) = x_0$, est appelé l'espace de lacets. La topologie de cet espace est la topologie compacte-ouverte et cet espace considéré en lui-même comme espace pointé a comme point de base z_0 au lacet constant sur le point de base x_0 .



En ce sens, en raison de l'action de la suspension, la dimension d'un espace X est augmentée à une dimension supplémentaire. Et on peut voir que, géométriquement, la suspension se compose de deux «cônes» reliés par la «base» et, dont «base» est en effet l'espace X . Spécifiquement, étant donné un espace topologique X , l'intervalle $[-1, 1]$ et est une relation d'équivalence \sim tel que $(x_1, 1) \sim (x_2, 1)$ et $(x_1, -1) \sim (x_2, -1)$, la suspension de X est l'espace quotient

$$\Sigma(X) = (X \times [1, -1]) / \sim$$

En ce sens, tous les points $(x, 1)$ sont identifiés par l'un des sommets du cône, tandis que les points $(x, -1)$ sont identifiés par le sommet opposé.

Comme on a observé dans le cas de la 1-sphère, $\Sigma(S^1)$ consiste en deux cônes collés entre eux, il est donc topologiquement équivalent à la sphère S^2 . Cela peut être extrapolé, de sorte que $\Sigma(S^n) \cong S^{n+1}$.

Ainsi, Freudenthal montre que l'application Σ induit un homomorphisme $\pi_k(S^n) \rightarrow \pi_{k+1}(S^{n+1})$, qui est un isomorphisme si $1 \leq k \leq 2n$, et un épimorphisme si $k = 2n + 1$.

Ce théorème sera généralisé par J. H. C. Whitehead en 1949 : si X est un «CW-complexe n -connexe», on a un homomorphisme $\pi_k(X) \rightarrow \pi_{k+1}(\Sigma(X))$, qui est un isomorphisme si $1 \leq k \leq 2n$, et un épimorphisme si $k = 2n + 1$. Pour prouver ceci, il introduit le concept d'un «CW-complexe» (abréviation de *de closure finite complexes with weak topology*) dans son article *Combinatorial homotopy. I* de 1949. Ce concept a été créé *ad hoc* pour généraliser la notion de complexe simplicial dans le cadre d'une théorie homotopique. Un CW-complexe est constitué de blocs de base

appelés «cellules». La définition précise prescrit comment les cellules peuvent être collées topologiquement⁶.

Plus tard, dans un article de 1953 intitulé *On the Freudenthal Theorems*, G. W. Whitehead montre qu'il existe différentes relations entre les groupes fondamentaux d'ordre supérieur des sphères n -dimensionnelles, l'espace des lacets Ω et la suspension de Freudenthal Σ . Tout d'abord, il montre que $\pi_{k+1}(S^{n+1}) \cong \pi_k(\Omega^{n+1})$ où Ω^{n+1} est l'espace de lacets dans S^{n+1} (appelé «isomorphisme d'Hurewicz»). Il montre également que l'application $\varphi : S^n \rightarrow \Omega^{n+1}$ induit l'homomorphisme $\varphi_* : \pi_k(S^n) \rightarrow \pi_k(\Omega^{n+1})$, qui est en effet la suspension Σ de Freudenthal [165, p. 211]. L'application φ implique implicitement la suspension de S^n , de sorte qu'elle est équivalente à $\varphi : S^n \rightarrow \Omega(\Sigma(S^n))$ qui peut être généralisé pour tout espace topologique pointé connexe (X, x_0) : l'application $(X, x_0) \rightarrow \Omega(\Sigma(X, x_0))$ induit l'application $\pi_k(X, x_0) \rightarrow \pi_k(\Omega(\Sigma(X, x_0)))$. Cette application est un isomorphisme si $k < 2n$, et un épimorphisme si $k = 2n + 1$.

Les applications Σ et Ω s'afficheront avec des relations plus étroites. En fait, selon Barcus & Meyer [8, p. 895], il était bien connu dans les années 50 la relation biunivoque

$$\psi : M(\Sigma Y, p_+, p_-), (X, x_0, x_0) \rightarrow M(Y, \Omega(X, x_0))$$

où p_+ et p_- sont les points de suspension de l'espace topologique Y et $M(X, Y) = \text{Hom}(X, Y)$.

Or, l'un des premiers à considérer une *théorie homotopique* par opposition aux théories homologiques a été Beno Eckmann avec sa thèse de doctorat *Zur Homotopietheorie gefaserner Räume*. Comme le propose Eckmann, une théorie homotopique consiste en un cadre théorique suffisamment autonome dans lequel on peut étudier de manière systématique les diverses situations dans lesquelles intervient le concept d'«homotopie», à tous ses degrés de généralité et de singularité. Et une telle théorie est fondamentale. Comme mentionné ci-dessus, le concept d'homotopie est lié à ceux d'homologie et de cohomologie. Mais la prémisse d'une théorie homotopique n'est pas d'être expliquée par une théorie homologique (ou cohomologique) mais d'être une

6. Plus précisément, un CW-complexe est un espace K qui remplit deux conditions (i) $K(e)$ est un sous-complexe fini pour n'importe quelle cellule $e \in K$. C'est-à-dire, K est constitué d'un nombre fini de cellules. (ii) si $F \subseteq K$ et si pour n'importe quelle cellule t dans K , l'intersection $F \cap \bar{t}$ est fermée dans \bar{t} (et donc aussi dans K), alors F est un sous-ensemble fermé de K .

théorie indépendante.

En 1947, Sze-Tsen Hu écrit *An exposition of the relative homotopy theory*. Cet article, en plus de synthétiser les résultats de Hurewicz, Eckmann et J. H. C. Withehead, afin de développer une théorie homotopique relative, a la vertu d'être l'un des premiers (en dehors de la sphère d'Eilenberg & MacLane) en utilisant le langage catégoriel pour décrire des phénomènes propres à l'homotopie.

Dans les années 40 et 50, il y avait déjà de nombreux résultats qui reliaient des groupes fondamentaux, des groupes d'homotopies, des types d'homotopies et des concepts d'homologie et de cohomologie. Comme résultat de ces résultats apparaît en 1953 le premier grand ouvrage sur la théorie homotopique proprement dite : le livre *An introduction to homotopy theory* de Peter Hilton, publié en 1953. Il s'agit d'un compendium de la plupart des résultats importants dans lesquels le concept d'homotopie, et les invariants topologiques et algébriques invariants sous homotopie, sont l'axe central de l'ouvrage.

De même, en 1943, Samuel Eilenberg & Saunder MacLane publiaient un article qui montrait davantage de relations entre les groupes d'homologie et les groupes d'homotopie (*Relations between Homology and Homotopy Groups*). Mais ils n'utilisaient pas encore le langage catégoriel. Cet article serait étendu dans deux articles ultérieurs : *Relations Between Homology and Homotopy Groups of Spaces I* et *II* de 1945 et 1949, respectivement, où la seule allusion aux propriétés catégorielles consiste à affirmer que, étant donné un espace topologique X , il existe un homomorphisme naturel $v_n : \pi_n(X) \rightarrow H_n(X)$.

D'autre part, Eilenberg & Steenrod avaient développé en 1945 une première approche pour un développement axiomatique de la théorie homologique [51]. Cette présentation serait effectuée sans utiliser le nouveau langage catégoriel. Cependant, dans l'influent livre *Homological Algebra* de 1956 par Cartan & Eilenberg, les nouveaux concepts catégoriels de «catégorie», de «foncteur» et de «transformation naturelle» se sont montrés suffisamment puissants et versatiles pour développer une théorie homologique qui pourrait synthétiser une grande partie des propriétés homologiques, dans un cadre suffisamment général pour développer une théorie homologique abstraite. Le succès d'*Homological Algebra* conduit d'autres mathématiciens, en dehors de la sphère

d'Eilenberg et/ou MacLane, à considérer plus sérieusement les nouveaux concepts catégoriels comme des outils suffisamment puissants pour décrire des phénomènes de topologie algébrique. En outre, comme de nombreux résultats de l'algèbre homologique étaient fortement liés à des propriétés homotopiques, ce n'était qu'une question de temps pour l'émergence d'une théorie homotopique abstraite basée également sur ces nouveaux concepts catégoriels. Le premier à franchir ce pas fut Daniel Kan.

Daniel Kan fut un mathématicien néerlandais-israélien, qui a obtenu son doctorat à l'Université Hébraïque de Jérusalem en 1955, sous la direction de Samuel Eilenberg. Sa thèse était *Abstract Homotopy*. Et, comme son titre le suggère Kan vise à développer une théorie abstraite de l'homotopie à travers les concepts catégoriels en suivant les lignes directrices des théories homologiques abstraites. La thèse a été publiée en Hébreu en 1954, mais une traduction des résultats les plus importants de celui-ci a été publiée dans une série de quatre articles publiés entre décembre 1955 et avril 1956 : *Abstract homotopy I-IV*. L'objectif central de Kan était de développer une théorie homotopique abstraite semblable à la théorie homologique abstraite, en utilisant le nouveau langage catégoriel. À cet effet, Kan a dû identifier les catégories, morphismes et foncteurs nécessaires pour caractériser les concepts d'une théorie homotopique par moyen de ce nouveau langage. Heureusement, une grande partie de ces concepts ont déjà été étudiés catégoriquement et le travail de Kan a consisté à synthétiser beaucoup de ces concepts et résultats. Cependant, alors qu'il étudiait certaines relations fonctorielles de base de sa nouvelle théorie homotopique, il découvrit quelques relations très similaires à celles que possédait la suspension Σ et l'espace des lacets Ω , décrite ci-dessus. Kan a découvert cette relation en considérant les foncteurs «subdivision» et Ex-foncteur entre catégories de complexes simpliciaux. Et en décrivant de la manière la plus générale possible le phénomène qui lie ces deux foncteurs, Kan a défini l'un des concepts fondamentaux de la théorie des catégories : l'adjonction.

Or, comme on a déjà mentionné au début du premier chapitre, Saunders MacLane et Samuel Eilenberg affirment que les catégories ont été définies pour pouvoir caractériser ce qui est un foncteur. Et ces derniers, à la fois, ont été définis pour pouvoir caractériser ce qui est une transformation naturelle. Foncteurs et transformations naturelles ont été utilisés dans l'homologie, la topologie algébrique et la géométrie algébrique, comme des outils puissants qui ont permis : de décrire quelques résultats très importants de ces champs (plusieurs desquels avaient été déjà décrits sans recourir à ces concepts catégoriels), de lier quelques résultats parmi eux, et de démontrer de nouveaux théorèmes

dans ces cadres. Il y a eu quelques progressions dans le développement d'une *naissante* théorie des catégories : la définition de certains foncteurs, l'intégration de la dualité, la caractérisation du foncteur dérivé, la caractérisation de l'équivalence de catégories ou l'abstraction de certaines structures dans le cadre catégoriel (comme la définition des catégories abéliennes ou les catégories avec homotopie). Cependant, ces avancements ont été effectués pour développer ces cadres théoriques et pas avec l'intention de créer (ou permettre d'évoluer) une *insoupçonnée* théorie des catégories. Et, à l'exception des articles d'Eilenberg et MacLane de 1945 et de MacLane de 1950 aucun autre document a eu pour propos d'être éminemment catégoriel. C'est par cela qu'on a fait emphase sur le fait que la théorie des catégories dans cette période était «naissante» ou «insoupçonnée» : il y avait de nombreux résultats dispersés mais il n'y avait pas un cadre qui les articulait. De plus, dans beaucoup de textes qui utilisaient les concepts de foncteur ou de transformation naturelle, les fondements ou la caractérisation de ces concepts s'effectuait en manière d'une annexe, ou s'en remettait à l'article d'Eilenberg et de MacLane de 1945.

Il est probable que l'apparition de deux nouveaux concepts puissants, purement catégoriels, fût nécessaire pour que les mathématiciens, de fin des années 50 et début des années 60, se rendaient compte que ces concepts préfiguraient une nouvelle théorie mathématique, indépendant de l'usage de ses propres concepts comme outils dans d'autres cadres théoriques. Ces concepts sont celui de catégorie abélienne et, particulièrement, celui d'adjonction de foncteurs. Dans ce sens, Awodey mentionne, dans l'introduction de son livre, que :

The concept of adjoint functor is in fact one of the main things that the reader should take away from the study of this book. It is a strictly category-theoretical notion that has turned out to be a conceptual tool of the first magnitude—on par with the idea of a continuous function [6, p.2].

Et, après il explique le pourquoi de cette importance [6, p.207]

The notion of adjoint functor, first discovered by D. Kan in the 1950s, applies everything that we have learned up to now to unify and subsume all of the different universal mapping properties that we have encountered, from free groups to limits to exponentials. But more importantly, it also captures an important mathematical phenomenon that is invisible without the lens of category theory. Indeed, I will make the admittedly provocative claim that adjointness is a concept of fundamental logical and mathematical

importance that is not captured elsewhere in mathematics.

Many of the most striking applications of category theory involve adjoints, and many important and fundamental mathematical notions are instances of adjoint functors. As such, they share the common behavior and formal properties of all adjoints, and in many cases this fact alone accounts for all of their essential features.

D'un autre côté, dans la Préface à la Première Édition du livre de MacLane *Categories for the Working Mathematician*, il mentionne le célèbre slogan «Adjoint functors arise everywhere» [116, p. vii]. Et, dans une Note postérieure (après avoir montré, au long du Chapitre IV ce qui est une paire de foncteurs adjoints, ses propriétés et la relation de ce concept avec d'autres constructions catégorielles et des concepts mathématiques), MacLane dit que :

The multiple examples, here and elsewhere, of adjoint functors tend to show that adjoints occur almost everywhere in many branches of Mathematics. It is the thesis of this book that a systematic use of all these adjunctions illuminates and clarifies these subjects [116, pp.107].

Il a fallu d'attendre plus de 10 ans après l'article d'Eilenberg et MacLane de 1945, pour que le concept d'adjonction de foncteurs émergeât, malgré le fait que l'adjonction peut être définie en utilisant les outils conceptuels présentés dans tel article. La caractérisation générale, pour la première fois, de ce qui est une paire de foncteurs adjoints apparaissait dans l'article notoire de Daniel Kan *Adjoint Functors*, publié en 1958. Cependant, dans trois articles antérieurs à la publication de *Adjoint Functors*, Kan avait déjà considéré des foncteurs adjoints, de manière explicite ou implicite. Ainsi, dans *Abstract Homotopy III* il a apparu pour la première fois une paire de foncteurs adjoints, mais Kan ne les nomme pas de cette façon, bien que dans son article suivant (mais antérieurs à *Adjoint Functors*), *On c.s.s. Complexes*, Kan caractérise ces deux foncteurs comme adjoints entre eux.

2.2 *Abstract Homotopy I-IV* et *On c.s.s. Complexes*.

Pour pouvoir caractériser les motivations qui ont conduit à la découverte du phénomène de l'adjonction par Kan, il est nécessaire de présenter (d'une manière générale) quelle était la direction de ses recherches précédentes à telle découverte. Et,

pour expliquer cette direction, il faut examiner les articles précédents à *Adjoint Functors* : d'abord, la série d'articles *Abstract Homotopy I-IV* et, après *On c.s.s. Complexes*.

On pourrait dire, d'une manière très générale, que l'objectif de ces quatre articles de Kan [88], [89], [90] et [91] est celui de caractériser d'une manière purement abstraite le concept d'homotopie. Kan considère que les structures dans lesquels le concept d'homotopie peut-être développé de la manière la plus générale possible sont les catégories avec homotopie. Or, Kan ne développe pas seulement une théorie d'homotopie d'un point de vue catégorique, mais il construit peu à peu un modèle purement algébrique qui satisfait les conditions de cette théorie. Cela est d'une grande importance, puisque le concept de l'homotopie, avant Kan a été intégrée à un domaine purement topologique et la caractérisation de ce concept d'un point de vue algébrique, ouvre des possibilités et permet un traitement, dans de nombreux cas, plus simple. Ce modèle est celui de la catégorie des ensembles simpliciaux⁷ :

The category of simplicial sets is historically the first full algebraic model for homotopy theory to have been found, but the verification of its closed model structure is still the most difficult proof of abstract homotopy theory. These theorems and their proofs effectively summarize all of the classical homotopy theory of simplicial sets, as developed mostly by Kan in the 1950's. Kan's work was a natural outgrowth of the work of Eilenberg and Mac Lane on singular homology theory, and is part of a thread of ideas that used to be called "combinatorial homotopy theory" and which can be traced back to the work of Poincaré at the beginning of the twentieth century [65, p.2].

Dans *Abstract Homotopy I*, Kan emploie des complexes cubiques au lieu d'utiliser des complexes simpliciaux⁸. De la même façon, comme un complexe simplicial peut

7. L'importance du travail avec complexes réside au fait qu'ils permettent le traitement algébrique des variétés :

The advantage of this viewpoint lies in the fact that with its help the difficult—partially purely geometric, partially set-theoretic—considerations to which the study of manifolds leads are replaced by the investigation of a finite combinatorial model—namely, the system of the simplexes of a simplicial decomposition of the polyhedron (i.e., the geometrical complex)—which opens the way to the application of algebraic methods [3, p.12].

8. Les complexes cubiques ont été introduits pour la première fois dans l'article de Serre de 1951 *Homologie Singulière Des Espaces Fibrés* [145]

être vu comme un ensemble constitué par des tétraèdres généralisés, un complexe cubique peut être vu comme un ensemble constitué par des «cubes» généralisés.

D'une manière informelle, un complexe cubique K de dimension n est une collection de cubes de dimension (maximale) n qui satisfont la condition suivante : si un cube appartient à K , ses faces appartiennent aussi à K . La définition formelle que Kan présente est similaire à la définition d'ensemble simplicial : une collection de cubes (au plus) n -dimensionnels $\{\Sigma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ avec trois applications (deux applications ε, ω «face» et une application η «dégénérescence») : (i) $\varepsilon_i, \omega_i : \Sigma_n \rightarrow \Sigma_{n-1}$, et (ii) $\eta_i : \Sigma_n \rightarrow \Sigma_{n+1}$, tels qu'elles satisfont quelques identités⁹.

Après, Kan affirme qu'une application $f : K \rightarrow L$ entre deux complexes cubiques avec la même dimension telle qu'elle commute avec les applications face et dégénérescence¹⁰ est nommée une *application cubique*. Et, la collection de complexes cubiques avec des applications cubiques constituent une catégorie : **Cub**.

Avant de continuer, il est nécessaire de caractériser le concept d'homotopie dans la catégorie **Cub**. Kan fait référence à l'article de 1953 *Acyclic Models* d'Eilenberg et MacLane dans lequel ce concept est défini. Dans cet article est introduite la catégorie

9. Les identités sont les suivantes :

$$\varepsilon_i \circ \omega_{j-1} = \omega_j \circ \varepsilon_i \text{ (si } i < j \text{)}$$

$$\eta_{j-1} \circ \eta_i = \eta_i \circ \eta_j \text{ (si } i < j \text{)}$$

$$\eta_j \circ \varepsilon_i = \varepsilon_i \circ \eta_{j-1} \text{ (si } i < j \text{)}$$

$$\eta_j \circ \varepsilon_i = id \text{ (si } i = j \text{)}$$

$$\eta_j \circ \varepsilon_i = \varepsilon_{i-1} \circ \eta_j \text{ (si } i > j \text{)}$$

10. D'une manière stricte l'application f est une succession d'applications $f_n : K_n \rightarrow L_n$ pour chaque cube de dimension n .

$\partial\mathcal{G}$ des complexes de chaînes¹¹ dans une catégorie additive. Après il fait la définition d'une application de deux complexes (en général) K et L en utilisant la notion de transformation naturelle. Et, par conséquent, la notion d'homotopie entre deux complexes est aussi définie en utilisant des transformations naturelles : si $f, g : K \rightarrow L$ sont deux applications de complexes, une homotopie $D : f \simeq g$ est une séquence de transformations naturelles $D_q : K_q \rightarrow L_{q+1}$ tels que $\partial_{q+1} \circ D_q + D_{q-1} \circ \partial_q = g_q - f_q$ [48, p.190]. Il importe de souligner que la catégorie $\partial\mathcal{G}$ est définie sur des groupes abéliens et non sur une catégorie abélienne. Compte tenu de ce qui précède, l'objectif du premier article de Kan est de définir une homotopie dans la catégorie des complexes de chaînes à travers de la catégorie des complexes cubiques. Pour cela, Kan utilise le foncteur quotient $F^N = F / \simeq : \mathbf{Cub} \rightarrow \partial\mathcal{G}$. Ce foncteur est très important puisqu'il préserve deux propriétés structurelles de la catégorie \mathbf{Cub} : les produits tensoriels¹² et les homotopies. Cela permet de caractériser le concept d'homotopie dans la catégorie $\partial\mathcal{G}$ [88, p.1093]. Après cela, Kan définit l'axiome d'extension pour des homotopies qui lui permettra de définir les groupes d'homotopie d'un complexe cubique K . Tout cela lui permet de démontrer que ces groupes d'homotopie sont abéliens.

Dans son deuxième article (*Abstract Homotopy II*) Kan a pour propos de définir le concept d'homotopie dans d'autres catégories à travers la catégorie \mathbf{Cub} , de manière similaire à comme il l'a fait dans son premier article avec la catégorie $\partial\mathcal{G}$. Il est important de mettre en relief que, pour cela, il définit initialement ce qui est une catégorie avec homotopie et un foncteur cubique singulier. Pour la définition d'homotopies dans des termes catégoriels, le concept de transformation naturelle est

11. Un complexe de chaînes est une suite infinie :

$$A_0 \xleftarrow{\partial_0} A_1 \xleftarrow{\partial_1} A_2 \xleftarrow{\partial_2} \dots \xleftarrow{\partial_{n-1}} A_n \xleftarrow{\partial_n} A_{n+1} \xleftarrow{\partial_{n+1}} \dots$$

avec A_i un groupe abélien et ∂_i un morphisme de groupes, appelé *opérateur frontière*, tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$. Si Z est un objet zéro et A_i et A_j des objets arbitraires, il y a un unique $f : A_i \rightarrow Z$ et un unique $g : Z \rightarrow A_j$. Le 0-morphisme $0 : A_i \rightarrow A_j$, est défini comme $g \circ f$.

Une collection de complexes de chaînes avec homomorphismes de complexes de chaînes est nommée la catégorie des complexes de chaînes.

12. Dans la catégorie \mathbf{Cub} il est possible de définir le produit tensoriel $K \otimes L$ de deux complexes cubiques qui dit de manière très informelle, consiste à obtenir des cubes dont la dimension est la somme des dimensions des cubes originaux : si $\sigma \in K$ est de dimension p et $\tau \in L$ est de dimension q , alors $\sigma \otimes \tau \in K \otimes L$ est de dimension $p+q$. Étant donné que ce produit tensoriel est intrinsèque à la catégorie \mathbf{Cub} , cela peut être vue comme une catégorie monoïdale.

central¹³. Et, en ayant une catégorie \mathcal{B} avec homotopie, Kan généralise le concept de complexe cubique, d'une manière plus abstraite : tout d'abord, il définit ce qu'est un « n -cube» dans \mathcal{B} comme un type de morphisme $\sigma \in \mathcal{B}$, puis il mentionne ce qui est une application cubique dans \mathcal{B} . Finalement, cela lui permet de définir le foncteur singulier cubique $Q_P : \mathcal{B} \rightarrow \mathbf{Cub}$ qui dépend de l'élection d'un objet P de \mathcal{B} . Ce foncteur possède une grande importance puisqu'il a la propriété d'envoyer des applications homotopiques sur des applications homotopiques. Dans ce sens, le foncteur singulier cubique est une généralisation du foncteur F^N qu'a été considéré ci-dessus.

Le reste de l'article (et la plupart du même) est dédié à présenter cinq exemples d'homotopies induites par foncteurs singulières cubiques¹⁴. Dans les cas que la catégorie \mathcal{B} avec homotopie est : \mathbf{Top} , \mathbf{Cub} , $\partial\mathcal{G}$, $s\mathbf{Ens}$ ou \mathbf{Cub}^3 . Le cas des complexes semi-simpliciaux complets¹⁵ (c'est-à-dire, la catégorie $s\mathbf{Ens}$) est importante, car le foncteur que Kan présente n'est pas foncteur cubique singulier, mais une plus général : le foncteur simplicial singulier s'applique seulement aux espaces topologiques $Q_P : \mathbf{Top} \rightarrow s\mathbf{Ens}$.

De fait, après avoir utilisé des complexes cubiques dans *Abstract Homotopy I* et *II*, Kan commence à travailler avec les ensembles simpliciaux (c.s.s. complexes) dans les deux autres articles de cette série. Il est possible que Kan ait trouvé des difficultés pour travailler avec des complexes cubiques. Par exemple, il est possible que la réalisation géométrique¹⁶ des produits cartésiens de complexes cubiques puisse avoir le type d'homotopie erroné.

13. Soit \mathcal{B} une catégorie, une *homotopie* dans \mathcal{B} est un foncteur $I : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ avec trois transformations naturelles $\varepsilon_0, \varepsilon_1 : Id_{\mathcal{B}} \rightarrow I$ et $\eta : I \rightarrow Id_{\mathcal{B}}$ telles que $\eta \circ \varepsilon_0 = \eta \circ \varepsilon_1 = Id_{\mathcal{B}}$. $(f, g : X \rightarrow Y) \in \mathcal{B}$ sont appelées transformations homotopiques s'il existe une application $(f_I : I(X) \rightarrow Y) \in \mathcal{B}$ tel que $f_I \circ \varepsilon_0(X) = f$ et $f_I \circ \varepsilon_1(X) = g$. Cela est symbolisé par $f_I : f \simeq g$ ou $f \simeq g$ [89, p.255].

14. Il est nécessaire de souligner que, en plus de définir homotopies dans ces catégories spécifiques, Kan définit aussi l'éniesme groupe d'homotopie relatif à une application f au moyen du foncteur Q_P : si \mathcal{B}_E est l'image réciproque de la catégorie \mathcal{C}_E sous le foncteur Q_P , alors étant donnée l'application $(f : I^{n-1}(P) \rightarrow K) \in \mathcal{B}$ et $K \in \mathcal{B}_E$, le n -ième groupe d'homotopie de K relatif à f ($\pi_n(K; f)$) est défini par $\pi_n(Q_P K; f)$, où I^0 est l'identité $Id_{\mathcal{B}}$ et I^m est le foncteur I appliqué m fois.

15. Il est nécessaire d'éclaircir la terminologie de Kan. Ce qu'il dénomme par «complexe semi-simplicial complet» (*c.s.s. complex*) est ce qui se reconnaît, de nos jours, comme «ensemble simplicial».

16. Étant donné un ensemble simplicial K , sa réalisation géométrique (symbolisé par $|K|$) est l'opération qui permet la construction d'un espace topologique à partir de K . Pour une caractérisation complète et quelques propriétés de cette opération dans le cas des complexes semi-simpliciaux voir [126].

Dans le troisième article, Kan a pour propos de fournir une bonne théorie d'homotopie dans la catégorie $s\mathbf{Ens}$ en partant d'une sous-catégorie spéciale de $s\mathbf{Ens}$ et en utilisant un foncteur très important : le foncteur d'extension Ex . Ce foncteur est introduit à travers la propriété d'extension d'un ensemble simplicial K , $\text{Ex}(K)$. Cependant, avant d'introduire tel foncteur il est nécessaire de caractériser la propriété d'extension d'un point de vue *more geometrico*. Cette caractérisation est présentée par Kan comme la propriété d'extension proprement dite dans [92], bien qu'elle soit aussi présentée dans [90] comme l'une des propriétés du foncteur Ex : l'ensemble simplicial K satisfait la *condition d'extension* si pour chaque collection de $(n - 1)$ -simplexe $\sigma_0, \dots, \sigma_{k-1}, \sigma_{k+1}, \dots, \sigma_n \in K$ telle que $d_i \circ \sigma_j = d_{j-1} \circ \sigma_i$ pour chaque $i < j$ avec $i \neq k \neq j$, il existe un n -simplexe $\sigma \in K$ tel que $d_i \circ \sigma = \sigma_i$ pour chaque $i \neq k$ [92, p.449]. Le $(n - 1)$ -simplexe $\sigma_0, \dots, \sigma_{k-1}, \sigma_{k+1}, \dots, \sigma_n \in K$ qui satisfait la condition ci-dessus décrite est ce qui est connu actuellement par une corne : la corne simpliciale (*simplicial horn*) $\Lambda_k^n \subseteq \Delta^n$ est l'union de tous les faces de Δ^n sauf la k -ième face¹⁷.

Alors, l'énoncé affirme que chaque fois qu'une corne Λ_k^n fait partie d'un simplexe $X \in K$, il est possible de trouver un simplexe $\Delta^n \in K$ qui peut être étendu à X (c'est-à-dire qui peut se «coller» à X), alors la condition de Kan est satisfaite. En d'autres termes, l'objet simplicial X satisfait la condition d'extension de Kan si n'importe quelle application d'ensembles simpliciaux $f : \Lambda_k^n \rightarrow X$ peut être étendue à une application $g : \Delta^n \rightarrow X$. Un tel X est souvent nommé un *complexe de Kan*. Cette extension est faite par le morphisme d'inclusion $\Lambda_k^n \hookrightarrow \Delta^n$:

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_k^n & \xrightarrow{f} & X \\ \downarrow & \nearrow g & \\ \Delta^n & & \end{array}$$

Ensuite, il définit l'extension d'un ensemble simpliciale K . Cette extension est, en effet, l'action du foncteur Ex sur K (c'est-à-dire, $\text{Ex}(K)$). Et, ce dernier est défini en termes de l'opération de division Sd (laquelle on expliquera plus tard), de la manière suivante¹⁸ : un n -simplexe de $\text{Ex}(K)$ est une application d'ensembles simpliciaux $\sigma : \text{Sd}(\Delta_n) \rightarrow K$. Dans ce sens, le foncteur Ex opère sur K de la manière suivante : $K \mapsto \text{Hom}_{s\mathbf{Ens}}(\text{Sd}(\Delta_n), K)$. D'une manière similaire, si $(f : K \rightarrow L) \in s\mathbf{Ens}$, alors

17. C'est-à-dire, le corne Λ_k^n est le sous-complexe de Δ^n obtenu après avoir remué l'intérieur du Δ^n et l'intérieur de la face $d_k(\Delta^n)$. Dit autrement, c'est le sous-ensemble simplicial de Δ^n généré par l'ensemble $\{d_0, d_1, \dots, d_{k-1}, d_{k+1}, \dots, d_n\}$

18. *Grosso modo*, c'est la définition que Kan présente dans [90, pp.419-420] et [92, 452].

$\text{Ex}(f) : \text{Ex}(K) \rightarrow \text{Ex}(L)$ assigne à chaque n -simplexe $\sigma \in \text{Ex}(K)$ à l'application composée $\text{Sd}(\Delta_n) \xrightarrow{\sigma} K \xrightarrow{f} L$. C'est-à-dire $f \mapsto \{f \circ \sigma_k / \sigma_k \in \text{Ex}(K)\}$. Ce qui implique que $\text{Ex} : \mathbf{sEns} \rightarrow \mathbf{sEns}$ est un foncteur covariant. Et Kan mentionne qu'il est possible de construire le foncteur Ex^n en itérant n fois le foncteur Ex .

Conformément à ce qui précède, Kan caractérise la réalisation géométrique $|K|$ ($K \in \mathbf{sEns}$), le foncteur $\text{Sing} : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{sEns}$ qui envoie chaque espace topologique X vers l'ensemble simplicial $\text{Sing}(X)$ et, l'application $j_K : K \rightarrow \text{Sing}(|K|)$ ¹⁹. Après, dans quelques paragraphes, extrêmement denses mais conceptuellement très riches, Kan caractérise la transformation naturelle $e_K : K \rightarrow \text{Ex}(K)$ et, à travers d'elle, il définit le foncteur Ex^∞ comme la *limite inductive* (*direct limit*) de la séquence des transformations naturelles :

$$\begin{array}{ccccccc} K & \xrightarrow{e_K} & \text{Ex}(K) & \xrightarrow{e_{\text{Ex}(K)}} & \text{Ex}^2(K) & \xrightarrow{e_{\text{Ex}^2(K)}} & \dots \\ \downarrow f & & \downarrow \text{Ex}(f) & & \downarrow \text{Ex}^2(f) & & \\ L & \xrightarrow{e_L} & \text{Ex}(L) & \xrightarrow{e_{\text{Ex}(L)}} & \text{Ex}^2(L) & \xrightarrow{e_{\text{Ex}^2(L)}} & \dots \end{array}$$

Cela lui permet également de définir une nouvelle transformation naturelle $e^\infty : K \rightarrow \text{Ex}^\infty(K)$ considérée comme la limite de transformations naturelles $e_{\text{Ex}^n(K)}$. De plus, que les complexes $\text{Sing}(|K|)$ et $\text{Ex}^\infty(K)$ ont le même type d'homotopie. Au demeurant, Kan mentionne un fait important : il y a un phénomène très singulier entre les applications $\text{Sd}^n(K) \rightarrow L$ et $K \rightarrow \text{Ex}^n(L)$ pour chaque $K, L \in \text{Ob}(\mathbf{sEns})$. On reviendra sur ce résultat à la fin de §1.3.4, parce que c'est le premier phénomène explicite d'adjonction aperçu par Kan.

Dans *Abstract Homotopy IV*, Kan considère les résultats des derniers articles de la série, mais en examinant les ensembles simpliciaux munis d'une structure de groupe. L'objectif de cela est de définir les groupes d'homologie des objets de \mathbf{sEns} . Ainsi, il définit les groupes simpliciaux qui, de plus, satisfont l'axiome d'extension. Après, Kan démontre qu'il est possible de définir les n -ièmes groupes d'homotopie d'un groupe simplicial et d'un complexe simplicial $\pi_n(G, e)$ et $\pi_n(\text{Sing}(|K|), \varphi)$, respectivement²⁰, en termes des groupes d'homologie. Cela permet de réduire le problème de calculer les groupes d'homotopie au moyen des groupes d'homologie.

19. Définie de la suivante manière $j_K \circ \sigma = |\varphi_\sigma|$. Où $\varphi_\sigma : \Delta_n \rightarrow K$ est telle que $\varphi_\sigma \circ \alpha = \sigma \circ \alpha$, pour chaque n -simplexe $\sigma \in K$ et chaque $\alpha \in \Delta_n$.

20. Les éléments distingués sont choisis sous certaines conditions (voir [91]).

Comme on l'a vu, Kan définit le foncteur Ex en fonction de l'opération de subdivision sur un n -simplexe standard ($\text{Sd}(\Delta_n)$). Cette opération a clairement une origine géométrique, puisque selon Kan, il reprend le processus de subdivision en conformité avec l'exposé faite par Lefschetz dans son *Introduction to Topology*. C'est une généralisation de la définition de subdivision barycentrique des complexes simpliciaux aux ensembles simpliciaux [90, p.421]. De fait, dans *Abstract Homotopy III* Kan ne définit pas le foncteur $\text{Sd} : \mathbf{sEns} \rightarrow \mathbf{sEns}$, mais il définit la subdivision du n -simplexe abstrait Δ_n , de plus, il suppose et il présente quelques propriétés du foncteur Sd . Kan présente réellement une définition précise de ce foncteur dans le § 7 de son article postérieur *On c.s.s. Complexes* (publié peu plus d'un an que *Abstract Homotopy III*). Cet article peut être considéré comme une systématisation de l'exposé dans ses articles précédents. Et il ne peut pas être pris comme une synthèse de ceux-ci parce qu'il explique avec une grande profondeur beaucoup d'objets et de propriétés qui n'ont pas été mentionnés dans les autres articles.

D'abord il définit la subdivision de Δ_n et, avec elle, Kan montre in détail comment il est possible de définir la subdivision d'un ensemble simplicial arbitraire $K \in \mathbf{sEns}$. Il procède de la même manière pour les foncteurs Ext^n et Ext^∞ . Après il définit une homotopie dans la catégorie \mathbf{sEns} en termes de foncteurs et de transformations naturelles et, à travers des foncteurs du type $N : \mathbf{sEns} \rightarrow \mathcal{C}$, il étend ce concept aux catégories arbitraires. Alors, Kan caractérise les foncteurs réalisation géométrique $|-| : \mathbf{sEns} \rightarrow \mathbf{Top}$, et $\text{Sing} : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{sEns}$ et il démontre que ces deux foncteurs définissent une homotopie. Un résultat similaire a été obtenu par le foncteurs Ext^∞ . Et, presque à la fin de l'exposé de l'article (§7) Kan développe quelques relations importantes entre le foncteur Ext et le foncteur Sd .

Il est important d'analyser l'un de tels résultats : le Lemme 7.1. Mais il est tout aussi important de tenir compte les considérations que Kan fait sur ce lemme. Kan affirme que ces deux foncteurs sont étroitement liés (*closely related*) de la façon suivante [92, p.460] : si on a l'application (*map*) $f : \text{Sd}(K) \rightarrow L$ il est possible d'associer une application des ensembles simpliciaux $\beta \circ f : K \rightarrow \text{Ext}(L)$ de la manière suivante. Soit $\sigma \in K$ un n -simplexe et soit $c : \overline{K} \rightarrow \text{Sd}(K)$ l'application de réduction (*collapsing map*). Alors, $\beta \circ f(\sigma)$ est le n -simplexe d' $\text{Ext}(L)$, c'est-à-dire, l'application des ensembles simpliciaux $\beta \circ f(c) : \Delta'[n] \rightarrow L$ donnée par $((\beta \circ f)\sigma)\xi = (f \circ c)(\sigma, \xi)$. L'application β est naturelle, c'est-à-dire, pour chaque paire d'applications $a : K' \rightarrow K$, $b : L \rightarrow L'$ telles que

$$\beta(b \circ f \circ \text{Sd}(a)) = \text{Ex}(b) \circ \beta \circ f \circ a$$

Dans ces conditions, Kan mentionne que l'application β satisfait la propriété suivante :

LEMMA (7. 1). Let $K, L \in \mathbf{sEns}$. Then the function β establishes a one-to-one correspondence between the c.s.s. maps $\text{Sd}(K) \rightarrow L$ and the c.s.s. maps $K \rightarrow \text{Ex}(L)$.

Or, quelle est la signification de la «dualité» entre Sd et Ex ? Le développement que Kan fait pour expliquer la naturalité de β , bien qu'il soit vérifiable directement, il est également compliqué de suivre. Heureusement, Kan éclaircit que le lemme est une conséquence immédiate des résultats compris dans son article de 1958, *Adjoint Functors*. De fait, au début de l'article (*On c.s.s. Complexes*), Kan dit d'avance quelle est la propriété fondamentale que ces deux foncteurs possèdent : ils sont une paire de *foncteurs adjoints*. Il mentionne que «the extension $\text{Ex}(K)$ of a c.s.s. complex K (...) is in a certain sense dual to the subdivision $\text{Sd}(K)$ of K .» Et, après il mentionne que, dans la terminologie de l'article de 1958, «this means that the functor Ex is a right adjoint of the functor Sd » [92, p.450].

2.3 L'article *Adjoint functors* de 1958.

La définition d'une paire de foncteurs adjoints d'une variable, est présentée dans le §3 du Premier Chapitre de l'article. Après avoir énoncé (et démontré) deux théorèmes qui impliquent ce type de foncteurs, dans le §4, Kan étend cette définition pour des foncteurs de deux variables (Définition 4.3), qui permet d'étendre encore plus la définition pour foncteurs de plusieurs variables. Le Deuxième Chapitre présente quelques résultats importants qui lient des limites (inductive et projective) et des foncteurs adjoints. Et, dans le Troisième Chapitre, il montre comment il est possible de construire nouveaux foncteurs adjoints en utilisant la propriété de relèvement d'un foncteur.

Les notions et la terminologie basique sont présentées dans le §2. Kan renvoie le lecteur vers l'article d'Eilenberg et MacLane de 1945 pour les définitions de catégorie, de foncteur, de transformation naturelle, de variance d'un foncteur, etcétera. Ainsi, Kan définit les concepts de catégorie *duale* et de foncteur dual²¹. Et, il souligne son intérêt d'étudier des catégories localement petites.

21. Les concepts de catégorie duale et foncteur dual sont les mêmes concepts contemporains de catégorie opposée et foncteur opposé.

La définition, que Kan donne, d'une paire de foncteurs adjoints d'une variable est la suivante :

Définition (3.1). Soient \mathcal{X} et \mathcal{Z} deux catégories²², soient $S : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Z}$ et $T : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{X}$ deux foncteurs covariants et soit

$$\alpha : \text{Hom}(S(\mathcal{X}), \mathcal{Z}) \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{X}, T(\mathcal{Z}))$$

une équivalence naturelle. Alors, S est nommé l'adjoint à gauche de T sous α et T l'adjoint à droite de S sous α (Symbolisé $\alpha : S \dashv T$) [93, p.296].

La différence entre cette définition, et celle qui est présente dans la plupart des textes contemporains, réside dans deux aspects : en premier lieu, l'action du foncteur Hom est effectuée sur la totalité des catégories \mathcal{X} et \mathcal{Z} , alors qu'usuellement une paire d'objets arbitraires est prise (c'est-à-dire, pour chaque $X \in \mathcal{X}$ et chaque $Z \in \mathcal{Z}$) et, le foncteur Hom opère sur ces objets. De cette façon, au lieu de considérer la transformation naturelle $\alpha : \text{Hom}(S(\mathcal{X}), \mathcal{Z}) \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{X}, T(\mathcal{Z}))$, de nos jours, on considère la transformation suivante $\alpha : \text{Hom}(S(X), Z) \rightarrow \text{Hom}(X, T(Z))$, $\forall X \in \mathcal{X}, \forall Z \in \mathcal{Z}$.

La deuxième différence est que, de nos jours, il est précisé que la naturalité de α se présente aussi bien en chaque $X \in \mathcal{X}$ qu'en chaque $Z \in \mathcal{Z}$. Ou, conformément à la définition de Kan, la transformation est naturelle dans \mathcal{X} et dans \mathcal{Z} à la fois²³. C'est-à-dire, pour chaque $X \in \mathcal{X}$ et chaque $Z \in \mathcal{Z}$ il existe une application

$$\alpha_{X,Z} : \text{Hom}_{\mathcal{Z}}(S(X), Z) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{X}}(X, T(Z))$$

qui est une équivalence naturelle d'hom-ensembles.

Ainsi, l'application $\alpha_{X,Z}$ est telle que les applications :

a) $\alpha_{X,-} : \text{Hom}_{\mathcal{Z}}(S(X), _) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{X}}(X, T(_))$ et

22. Comme on a dit en haut, elles doivent être localement petites

23. Autrement dit, soient \mathcal{X} et \mathcal{Z} deux catégories localement petites, et soient $S : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Z}$ et $T : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{X}$ deux foncteurs covariants, on dit que S est l'adjoint à gauche de T (d'une manière équivalente, T est l'adjoint à droite de S) si, pour chaque $X \in \mathcal{X}$ et chaque $Z \in \mathcal{Z}$, il existe une isomorphisme naturel (en X et Z)

$$\alpha : \text{Hom}_{\mathcal{Z}}(S(X), Z) \cong \text{Hom}_{\mathcal{X}}(X, T(Z))$$

On symbolise cette adjonction par $S \dashv T$.

b) $\alpha_{-,Z} : \text{Hom}_{\mathcal{Z}}(S(-), Z) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{X}}(X, T(Z))$

sont des isomorphismes naturels pour chaque X en \mathcal{X} et pour chaque Z en \mathcal{Z} . En d'autres termes, $\alpha_{X,Z}$ doit être une application telle que pour chaque X en \mathcal{X} , pour chaque Z en \mathcal{Z} et pour chaque paire de morphismes $f : X_2 \rightarrow X_1$ et $g : Z_1 \rightarrow Z_2$, les diagrammes suivants doivent être commutatifs :

$$\begin{array}{ccc} Z_1 & \text{Hom}_{\mathcal{Z}}(S(X), Z_1) & \xrightarrow{\alpha_{X,Z_1}} \text{Hom}_{\mathcal{X}}(X, T(Z_1)) \\ \downarrow g & \downarrow g & \downarrow Tg \\ Z_2 & \text{Hom}_{\mathcal{Z}}(S(X), Z_2) & \xrightarrow{\alpha_{X,Z_2}} \text{Hom}_{\mathcal{X}}(X, T(Z_2)) \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccc} X_2 & \text{Hom}_{\mathcal{Z}}(S(X_1), Z) & \xrightarrow{\alpha_{X_1,Z}} \text{Hom}_{\mathcal{X}}(X_1, T(Z)) \\ \downarrow f & \downarrow Sf & \downarrow f \\ X_1 & \text{Hom}_{\mathcal{Z}}(S(X_2), Z) & \xrightarrow{\alpha_{X_2,Z}} \text{Hom}_{\mathcal{X}}(X_2, T(Z)) \end{array}$$

Ces deux diagrammes conjugués, c'est-à-dire, en caractérisant la naturalité simultanée pour chaque X en \mathcal{X} et pour chaque Z en \mathcal{Z} , peuvent être représentés en un seul diagramme : si $(f : X' \rightarrow X) \in \mathcal{X}$ et $(g : Z \rightarrow Z') \in \mathcal{Z}$, alors, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{Z}}(S(X), Z) & \xrightarrow{\alpha_{X,Z}} & \text{Hom}_{\mathcal{X}}(X, T(Z)) \\ \downarrow \text{Hom}_{\mathcal{Z}}(Sf,g) & & \downarrow \text{Hom}_{\mathcal{X}}(f,Tg) \\ \text{Hom}_{\mathcal{Z}}(S(X'), Z') & \xrightarrow{\alpha_{X',Z'}} & \text{Hom}_{\mathcal{X}}(X', T(Z')) \end{array}$$

Conformément à la définition du foncteur Hom (qui a été présentée à la fin du §1.2.2) que le même Kan aborde ([93, p.296]), on peut préciser quelles sont les applications $\text{Hom}_{\mathcal{Z}}(Sf, g)$ et $\text{Hom}_{\mathcal{X}}(f, Tg)$.

a) Soit $(f : X' \rightarrow X) \in \mathcal{X}$ et $(g : Z \rightarrow Z') \in \mathcal{Z}$. Et, comme S est un foncteur covariant, on a que $(Sf : S(X') \rightarrow S(X)) \in \mathcal{Z}$. Alors $\forall h \in \text{Hom}_{\mathcal{Z}}(S(X), Z)$, on a que

$$\text{Hom}_{\mathcal{Z}}(Sf, g) \circ h = g \circ h \circ Sf.$$

b) Soit f et g comme là-haut. De même, comme T est covariant, on a que $(Tg : T(Z) \rightarrow T(Z')) \in \mathcal{X}$. Alors, $\forall h^* \in \text{Hom}_{\mathcal{X}}(X, T(Z))$, on a que

$$\text{Hom}_{\mathcal{X}}(f, Tg) \circ h^* = Tg \circ h^* \circ f.$$

Mais (par convenance de notation), comme $\alpha_{X,Z}$ est une application bijective, alors $h^* = \alpha_{X,Z}(h)$ pour quelque $h \in \text{Hom}_{\mathcal{Z}}(S(X), Z)$. C'est-à-dire

$$\text{Hom}_{\mathcal{X}}(f, Tg) \circ \alpha_{X,Z}(h) = Tg \circ \alpha_{X,Z}(h) \circ f.$$

Si on observe cette dernière équation, elle correspond au chemin suivant du diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{Z}}(S(X), Z) & \xrightarrow{\alpha_{X,Z}} & \text{Hom}_{\mathcal{X}}(X, T(Z)) \\ & & \downarrow \text{Hom}_{\mathcal{X}}(f, Tg) \\ & & \text{Hom}_{\mathcal{X}}(X', T(Z')) \end{array}$$

Et, le chemin restant est obtenu en composant l'application $\alpha_{X',Z'}$ avec la partie droite de la dernière équation de (a). C'est-à-dire, $\alpha_{X',Z'}(g \circ h \circ Sf)$ est le chemin :

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{Z}}(S(X), Z) & & \\ \downarrow \text{Hom}_{\mathcal{Z}}(Sf, g) & & \\ \text{Hom}_{\mathcal{Z}}(S(X'), Z') & \xrightarrow{\alpha_{X',Z'}} & \text{Hom}_{\mathcal{X}}(X', T(Z')) \end{array}$$

Et, comme le diagramme est commutatif, alors on a l'égalité de ces deux équations. Par conséquent, la naturalité de α signifie que $\forall (h : S(X) \rightarrow Z) \in \text{Hom}_{\mathcal{Z}}(S(X), Z)$ on a l'équation suivante :

$$\alpha_{X',Z'}(g \circ h \circ Sf) = Tg \circ \alpha_{X,Z}(h) \circ f.$$

Selon ce qui précède, il est important de noter que l'adjonction est une relation *binaires* : un foncteur peut être l'adjoint à d'un autre foncteur. Ainsi, n'a pas de sens de dire « F est un foncteur adjoint», car on ne sait pas, par rapport quel autre foncteur, F est son adjoint. Ainsi, dire que S est l'adjoint à gauche de T ($S \dashv T$ ou, ce qui est le cas, que T est l'adjoint à droite de S) caractérise une relation d'adjonction qui

est déterminée par S et T . Habituellement dans certains textes contemporains, cette relation est la même que de dire que S et T forment une *paire adjointe*, symbolisée par (S, T) . Mais l'importance de la transformation naturelle α dans l'adjonction fait que dans d'autres textes, la relation d'adjonction peut être caractérisée comme une relation ternaire. Ainsi, l'adjonction définie par la paire adjointe (S, T) peut être caractérisée par le terne (S, T, α) .

De plus, si F possède un foncteur adjoint à gauche ou à droite, il n'est pas négligeable : pas nécessairement son foncteur adjoint à gauche pourrait être le même foncteur adjoint à droite. Comme on le verra plus loin, cela n'est possible que si les catégories dans lesquelles ces foncteurs sont définis sont des *catégories équivalentes*.

Enfin, si on a le foncteur $T : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{X}$ il n'existe pas toujours le foncteur adjoint à gauche. Cependant, on appréciera plus tard quelles sont les conditions pour que ce foncteur à gauche existe, ce qui est caractérisé par le théorème du foncteur adjoint dont Freyd a démontré en 1960. Ce sera abordé dans le dernier chapitre de la présente thèse.

Or, après avoir présenté sa définition d'une paire de foncteurs adjoints, Kan a formulé et démontré le théorème d'unicité de foncteurs adjoints : étant donné un foncteur T , son adjoint à droite est unique, sauf équivalence naturelle. Le même est vrai pour les adjoints à gauche²⁴. Ensuite, dans le §4, Kan a étendu ce théorème (et celui-là de dualité) pour une paire de foncteurs adjoints de deux variables, après avoir défini l'adjonction pour ce type de foncteurs. Cette définition a la particularité qu'il faut tenir en compte la variance des foncteurs :

Définition (4.3). Soit $S : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Z}$ un foncteur covariant, soit $T : \mathcal{Y} \times \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{X}$ un foncteur contravariant en \mathcal{Y} et covariant en \mathcal{Z} et soit

$$\alpha : \text{Hom}(S(\mathcal{X}, \mathcal{Y}), \mathcal{Z}) \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{X}, T(\mathcal{Y}, \mathcal{Z}))$$

une équivalence naturelle. Alors, S est nommé l'adjoint à gauche de T sous α et T l'adjoint à droite de S sous α ²⁵ (Symbolisé $\alpha : S \dashv T$) [93, p.300].

24. Puis, il a formulé (et démontré) le théorème de dualité de foncteurs adjoints : $S \dashv T$ si et seulement si $T^{op} \dashv S^{op}$.

25. Et, dans le cas de foncteurs de plus de deux variables [93, p.302] on a que si $S : \mathcal{X} \times \prod_1^m \mathcal{A}_i \times \prod_1^n \mathcal{B}_i \rightarrow \mathcal{Z}$ est un foncteur covariant en $\mathcal{X} \times \mathcal{A}_1 \times \cdots \times \mathcal{A}_m$ et contravariant en $\mathcal{B}_1 \times \cdots \times \mathcal{B}_n$ et si $T : \prod_1^m \mathcal{A}_i \times \prod_1^n \mathcal{B}_i \times \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{X}$ est un foncteur contravariant en $\mathcal{A}_1 \times \cdots \times \mathcal{A}_m$ et

Ensuite, dans le §5, Kan présente la généralisation du hom-foncteur. Cette généralisation est très importante, parce qu'elle permet d'introduire la généralisation d'une paire de foncteurs adjoints [93, p302] : Soient $F : \mathcal{L} \rightarrow \mathbf{Ens}$ et $Q : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{L}$ deux foncteurs, le premier covariant et, le deuxième covariant dans la première variable et contravariant dans la deuxième, s'il existe une transformation naturelle

$$\gamma : \text{Hom}(\mathcal{X}, \mathcal{X}) \rightarrow FQ(\mathcal{X}, \mathcal{X})$$

on peut dire que le foncteur Q est l'Hom-foncteur relatif à F (rel. F).

La définition généralisée d'adjonction est la suivante :

Définition (5.3). Soient $S : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Z}$, $T : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{X}$ et $F : \mathcal{L} \rightarrow \mathbf{Ens}$ des foncteurs covariants. Soient $Q : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{L}$ et $R : \mathcal{Z} \times \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{L}$ des Kom-foncteurs rel. F . Et soit

$$\beta : R(S(\mathcal{X}), \mathcal{Z}) \rightarrow Q(\mathcal{X}, T(\mathcal{Z}))$$

une équivalence naturelle. Alors, S est nommé l'adjoint à gauche de T rel. F sous β et T l'adjoint à droite de S rel. F sous β (Symbolisé $\alpha : S \dashv T$ rel. F) [93, pp.302-303].

Et, postérieurement, Kan démontre que, en effet, cette définition est plus générale que la définition usuelle d'adjonction. C'est-à-dire il démontre que la définition 5.3 implique la définition 3.1. Comme on l'espèrerait, Kan étend la définition d'adjonction relative pour foncteurs de deux variables. Il n'étend pas encore plus cette définition. Néanmoins, si on applique le résultat de la note 81, cette généralisation émerge immédiatement. Après cette série de définitions et de théorèmes, Kan procède à montrer six exemples de foncteurs adjoints :

1. Si $\text{Hom} : \mathbf{AbGrp} \times \mathbf{AbGrp} \rightarrow \mathbf{AbGrp}$ est l'Hom-foncteur relatif au foncteur d'oubli $U : \mathbf{AbGrp} \rightarrow \mathbf{Ens}$, et $\otimes : \mathbf{AbGrp} \times \mathbf{AbGrp} \rightarrow \mathbf{AbGrp}$ est le foncteur produit tensoriel. Alors, comme Eilenberg et MacLane avaient déjà démontré dans [44] $\forall A, B, C \in \mathbf{AbGrp}$, il existe une équivalence naturelle

$$\beta : \text{Hom}(A \otimes B, C) \cong \text{Hom}(A, \text{Hom}(B, C))$$

covariant en $\mathcal{B}_1 \times \dots \times \mathcal{B}_n \times \mathcal{Z}$, alors on peut construire une nouvelle catégorie

$$\mathcal{Y} = \prod_1^m \mathcal{A}_i \times \prod_1^n \mathcal{B}_i^{op}.$$

De cette façon, les foncteurs S et T peuvent être vus comme les foncteurs $S' : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Z}$ (contravariant) et $T' : \mathcal{Y} \times \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{X}$ (contravariant en \mathcal{Y} et covariant en \mathcal{Z}). Donc, on a le cas de deux variables, dans lesquelles déjà l'adjonction est définie.

Alors, le produit tensoriel \otimes est un adjoint à gauche du foncteur Hom , relatif au foncteur d'oubli U ($\otimes \dashv \text{Hom rel. } U$).

2. Soient les foncteurs $\text{Map} : \mathbf{Top} \times \mathbf{Top}^* \rightarrow \mathbf{Top}$ (où \mathbf{Top}^* est la sous-catégorie de \mathbf{Top} générée par les espaces localement compacts), $U : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Ens}$ (le foncteur d'oubli), et le foncteur $\times : \mathbf{Top} \times \mathbf{Top}^* \rightarrow \mathbf{Top}$ (le foncteur produit). Alors, Kan démontre, brièvement que, $\forall A, C \in \mathbf{Top}$ et $\forall B \in \mathbf{Top}^*$, il existe une équivalence naturelle

$$\beta : \text{Map}(A \times B, C) \cong \text{Map}(A, \text{Map}(B, C))$$

C'est-à-dire $\times \dashv \text{Map rel. } U$.

3. Si, dans l'exemple antérieur, on remplace la catégorie \mathbf{Top}^* par l'intervalle d'unité I , on a les foncteurs $\times_I : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Top}$ et $\text{Map}_I : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Top}$ (tels que $\forall A \in \mathbf{Top}$, $\times_I(A) = A \times I$ et $\text{Map}_I(A) = \text{Map}(I, A)$) qui sont adjoints entre eux (dû, de la même manière, à ce qui a été exposé dans l'exemple antérieur). Alors, $\times_I \dashv \text{Map}_I \text{ rel. } U$.

4. Soit \mathbf{Top}_\bullet la catégorie des espaces pointés, si $F : \mathbf{Top}_\bullet \rightarrow \mathbf{Ens}$ est le foncteur d'oubli, alors $\text{Map}_0 : \mathbf{Top}_\bullet \times \mathbf{Top}_\bullet \rightarrow \mathbf{Top}_\bullet$ est un Hom-foncteur rel. F . De plus, soit $\Sigma : \mathbf{Top}_\bullet \rightarrow \mathbf{Top}_\bullet$ le foncteur suspension et $\Omega : \mathbf{Top}_\bullet \rightarrow \mathbf{Top}_\bullet$ le foncteur espace des lacets (*loop functor*) tel que $\forall (X, x_0) \in \mathbf{Top}_\bullet$, $\Omega((X, x_0)) = \text{Map}_0((S^1, s), (X, x_0))$, où S^1 est le 1-sphère et $s \in S^1$. Alors, $\forall (X, x_0), (Y, y_0) \in \mathbf{Top}_\bullet$, il existe une équivalence naturelle

$$\beta_0 : \text{Map}_0(\Sigma(X, x_0), (Y, y_0)) \cong \text{Map}_0((X, x_0), \Omega(Y, y_0))$$

C'est-à-dire $\Sigma \dashv \Omega \text{ rel. } F$.

5. Soit $\times^2 : \mathbf{Top}_\bullet \rightarrow \mathbf{Top}_\bullet$ et $\vee^2 : \mathbf{Top}_\bullet \rightarrow \mathbf{Top}_\bullet$. Alors, Kan démontre que $\forall (X, x_0), (Y, y_0) \in \mathbf{Top}_\bullet$, il existe une équivalence naturelle

$$\beta_0 : \text{Map}_0(\vee^2(X, x_0), (Y, y_0)) \cong \text{Map}_0((X, x_0), \times^2(Y, y_0)).$$

Alors, $\vee^2 \dashv \times^2 \text{ rel. } F$.

Dans §6, après avoir présenté ces exemples d'adjonctions relatives, Kan formule un lemme et un théorème (avec ses versions respectives duales), dans lesquels il introduit deux transformations naturelles qui seront d'une grande importance puisqu'elles permettent une formulation différente du phénomène de l'adjonction. Ces transformations sont celles qui, de nos jours, sont dénommées comme l'*unité* et la *co-unité* de l'adjonction. Si $S : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Z}$ et $T : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{X}$ son deux foncteurs covariants avec $\alpha : S \dashv T$,

l'unité de l'adjonction est la transformation naturelle $\eta : \mathbf{1}_X \rightarrow T \circ S$ et, la co-unité de l'adjonction est la transformation naturelle²⁶ $\varepsilon : S \circ T \rightarrow \mathbf{1}_Z$. Kan ne les nomme pas de cette façon et, il n'arrive pas à formuler l'adjonction entre deux foncteurs à travers de l'unité et la co-unité. Cependant, cette formulation est implicite, d'une manière ou d'une autre, dans les théorèmes 6.4 et 6.4* (le dual du 6.4) si les deux sont prises ensemble. En fait, ce que Kan fait dans ces deux théorèmes c'est de démontrer l'équivalence entre sa formulation (la Définition 3.1) et la définition implicite à travers de l'unité et la co-unité.

Dans son article sur des catégories fibrées et co-fibrées [68], Gray met d'avant la définition d'adjonction qu'emploie de la unité et co-unité sur la définition qu'emploie des Hom-foncteurs. Lorsqu'il développe cette présentation, il renvoie le lecteur à son article précédent [67] où il présente la définition dans des termes d'hom-foncteurs. Il mentionne que si on a l'équivalence naturelle entre ces hom-foncteurs (c'est-à-dire, l'adjonction), il est possible *d'induire* une unité et une co-unité [p.2 y p.13]. Dans le (3) de l'Appendice A il montre que si l'unité et la co-unité existent, il est possible de construire l'équivalence naturelle entre les hom-foncteurs et vice-versa. Pour le démontrer, il renvoie le lecteur vers deux articles : *Homotopy Theory in general categories* écrits par Huber et publiés en 1961, et vers l'Exposé 7 de Shih dans le Séminaire Cartan, intitulée *Ensembles simpliciaux et opérations cohomologiques*. Cette exposition a été présentée le 18 Janvier 1959. Bien que dans ce dernier article, des outils catégoriels sont utilisés (entre celles-ci, l'adjonction de foncteurs) dans le cadre des théories des opérations cohomologiques (aussi bien dans **Top** que dans **sEns**), il a la particularité d'avoir une section (§3) dédiée au phénomène de l'adjonction de manière purement abstraite. Par la date de l'exposé, il est possible de déduire que Shih est le premier à définir, d'une manière *explicite*, l'adjonction en utilisant l'unité et la co-unité : d'abord il définit le concept d'une paire de foncteurs adjoints dans des termes d'hom-foncteurs (pour lequel il fait référence à l'article de Kan de 1958), puis il présente les Propositions 1 et 1 bis., équivalents aux Théorèmes 6.4 et 6.4* de Kan. Avec cette équivalence et la démonstration des

26. Ces deux transformations doivent accomplir, de plus, la condition que les diagrammes suivants soient commutatifs :

$$\begin{array}{ccc}
 S & \xrightarrow{S\eta} & STS \\
 & \searrow & \downarrow \varepsilon T \\
 & & S \\
 & \swarrow 1_S & \\
 & &
 \end{array}
 \quad \text{et} \quad
 \begin{array}{ccc}
 T & \xrightarrow{\eta T} & TST \\
 & \searrow & \downarrow T\varepsilon \\
 & & T \\
 & \swarrow 1_T & \\
 & &
 \end{array}$$

Ces diagrammes sont équivalentes aux équations suivantes $\varepsilon T \circ S\eta = 1_S$ et $T\varepsilon \circ \eta T = 1_T$.

propositions 2 et 2bis.²⁷, Shih présente sa nouvelle formulation d'une paire de foncteurs adjoints²⁸ :

Nous pouvons maintenant conclure : se donner S et T comme *foncteurs adjoints* revient à se donner deux morphismes de foncteurs

$$\eta : \mathbf{1}_{\mathcal{X}} \rightarrow T \circ S, \varepsilon : S \circ T \rightarrow \mathbf{1}_{\mathcal{Z}}$$

de manière que le morphisme composé $(T\varepsilon) \circ (\eta T)$ soit l'identité et que le morphisme composé $(\varepsilon S) \circ (S\eta)$ soit l'identité [146, p.7]

Huber [74] a peut-être connu ce résultat directement ou indirectement²⁹, parce qu'il reprend ces démonstrations en les synthétisant dans un seul un théorème qui dit explicitement que la formulation de l'adjonction dans des termes de la Définition (3.1) de Kan est équivalente à la formulation dans des termes de l'unité et de la co-unité³⁰.

Avant de reprendre l'article de Kan, il est nécessaire de dire que MacLane, dans son livre *Categories for the working mathematician*, est la première personne à donner

27. Lesquelles démontrent que, pour que l'application composée $\eta \circ \varepsilon$ soit l'identité, il faut et il suffit que le morphisme composé $T \xrightarrow{\eta T} TST \xrightarrow{T\varepsilon} T$ soit le morphisme identité 1_T (Proposition 2). Et de même (Proposition 2bis.), pour que l'application composée $\varepsilon \circ \eta$ soit l'identité, il faut et il suffit que le morphisme composé $S \xrightarrow{S\eta} STS \xrightarrow{\varepsilon S} S$ soit le morphisme identité 1_S [146, pp.6-7].

28. On a changé l'ordre des foncteurs et de la nomenclature pour qu'elle corresponde avec la nomenclature employée dans la thèse présente.

29. Le dernier est plus probable, puisque l'Exposé de Shih n'apparaît pas dans la bibliographie de l'article de Huber.

30. En utilisant la même notation qu'on a employée jusqu'à présent, le théorème est le suivant [74, p.369] :

Theorem 4.1. Let $S : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Z}$, $T : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{X}$ be covariant functors. The following two assertions are equivalent :

- a) There exists an isomorphism of functors

$$\alpha : \text{Hom}(S, _) \rightarrow \text{Hom}(_, T)$$

i.e., S and T are adjoints in the sense of Kan [93]. Usually, we shall identify $\text{Hom}(S(X), Z) \cong \text{Hom}(X, T(Z))$ by α .

- b) There exists two functor morphisms

$$\eta : \mathbf{1}_{\mathcal{X}} \rightarrow T \circ S, \varepsilon : S \circ T \rightarrow \mathbf{1}_{\mathcal{Z}}$$

which satisfy the relations

$$(\varepsilon S) \circ (S\eta) = 1_S : S \rightarrow STS \rightarrow S, (T\varepsilon) \circ (\eta T) = 1_T : T \rightarrow TST \rightarrow T.$$

la dénomination d'*unité* et *co-unité* pour ces deux transformations. Néanmoins, il les nomme adjonction de front (*front adjunction*) et adjonction postérieure (*back adjunction*) respectivement [116, p.83]. Avant ce livre, les expressions «*unité*» et «*co-unité*» étaient réservées à l'une des transformations qui définissent une *monade* et une *comonade*, aussi appelées de cette façon par MacLane [116, p.138]. Barr [9] nomme ces derniers objets une *triple* et une *cotriple* respectivement³¹. Grâce à la structure de l'unité et la co-unité des monades et co-monades, on peut penser qu'elles gardent un type de relation avec l'unité et la co-unité de l'adjonction. Et, en effet, il est possible d'obtenir les unes des autres (et vice-versa). Mais ce lien sera analysé dans le chapitre suivant. Ce concept sera examiné plus avant dans le §4.1.

Après d'avoir présenté les Théorèmes 6.4 et 6.4* et de montrer, avec un exemple, comment il est possible d'induire un isomorphisme de groupes fondamentaux et l'autre d'homologies (en partant de l'équivalence naturelle exposée dans l'exemple 5 : $\beta_0 : \text{Map}_0(\Sigma(X, x_0), (Y, y_0)) \cong \text{Map}_0((X, x_0), \Omega(Y, y_0))$), Kan procède à montrer les relations fondamentales entre l'adjonction et les concepts de limite inductive (*direct limit*) et de limite projective (*inverse limit*). Cela se fait au long de tout le Chapitre II de l'article.

31. Étant donnée une catégorie \mathcal{C} , une monade est est le triplet (T, η, μ) avec :

- Un foncteur $T : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$.
- Une transformation naturelle $\eta : \mathbf{1}_{\mathcal{C}} \rightarrow T$.
- Une transformation naturelle $\mu : T \circ T \rightarrow \mathbf{1}_{\mathcal{C}}$.

telles que, pour $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, les diagrammes suivants commutent :

$$\begin{array}{ccccc}
 T(X) & \xrightarrow{\eta_{T(X)}} & T(T(X)) & \xleftarrow{T(\eta_X)} & T(X) \\
 & \searrow \eta_X & \downarrow \mu_X & & \swarrow \eta_X \\
 & & T(X) & &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 T(T(T(X))) & \xrightarrow{T(\mu_X)} & T(T(X)) \\
 \mu_{T(X)} \downarrow & & \downarrow \mu_X \\
 T(T(X)) & \xrightarrow{\mu_X} & T(X)
 \end{array}$$

La transformation naturelle η est nommée la *unité* de T . D'une manière analogue, si on inverse les morphismes (et, donc, on opère sur la catégorie \mathcal{C}^{op}), on obtient une *comonade* (U, ε, δ) et, en conséquence, on obtient aussi la définition de *co-unité* entant que la transformation naturelle $\varepsilon : U \rightarrow \mathbf{1}_{\mathcal{C}^{op}}$.

Dans le §7, Kan définit la catégorie \mathcal{Z}_V de \mathcal{V} -diagrammes³² sur une catégorie \mathcal{Z} et le foncteur plongement³³ (*embedding functor*) $1_V : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{Z}_V$, qui lui permet de définir le concept de limite inductive. Ce concept diffère de la catégorie de foncteurs d'Eilenberg et MacLane ([44, §8]) par l'usage de la sous-catégorie V . Cette catégorie permet d'éviter le problème de l'identification des morphismes.

Après, il présente quelques exemples de limites inductives et, trois théorèmes qui rattachent ce concept à l'adjonction. La synthèse de ces résultats, constitue le Théorème 7.8, qui affirme que :

A category \mathcal{Z} is \mathcal{V} -direct if and only if the functor $1_V : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{Z}_V$ has a left adjoint [93, p.311].

Le concept de limite projective est défini par dualité dans le §8. Par conséquent, les théorèmes et les exemples duaux pour la limite inductive sont associés au concept de la limite projective³⁴.

Il est nécessaire d'éclaircir que, dans la littérature il existe une distinction entre la limite inductive et la colimite, et également entre la limite projective et la limite. Et, bien que Kan utilise les concepts de limite inductive et projective (*direct* et *inverse limit*, respectivement), ils diffèrent des concepts qui de nos jours sont connus avec ces noms :

32. Un \mathcal{V} -diagramme sur une catégorie \mathcal{Z} est un foncteur covariant $K : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{Z}$ où \mathcal{V} est une sous-catégorie *propre* de \mathcal{Z} , c'est-à-dire où $\text{Ob}(\mathcal{V})$ est un ensemble. \mathcal{Z}_V est alors une catégorie dont les objets sont des foncteurs $K : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{Z}$ et les morphismes sont des transformations naturelles. Fréquemment, cette catégorie est symbolisée par $\text{Func}(\mathcal{V}, \mathcal{Z})$ ou $\mathcal{Z}^{\mathcal{V}}$ parce que c'est une généralisation du concept d'espace fonctionnel.

33. $1_V : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{Z}_V$. Ce foncteur est tel que :

1. $\forall Z \in \text{Ob}(\mathcal{Z}), Z \mapsto (1_V Z : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{Z})$ qui est le foncteur constant tel que $1_V Z(X) = X$ ($\forall X \in \text{Ob}(\mathcal{V})$) y $1_V Z(f) = id_Z$ ($\forall f \in \text{Hom}(\mathcal{V})$).
2. $\forall (z : Z \rightarrow Z') \in \text{Hom}(\mathcal{Z}), z \mapsto (1_V z : 1_V Z \rightarrow 1_V Z')$, qui est la transformation naturelle telle que $1_V z(X) = z, \forall X \in \text{Ob}(\mathcal{V})$.

34. Spécialement, le dual du Théorème 7.8 (qui est le Théorème 8.6) :

A category \mathcal{X} is \mathcal{V} -inverse if and only if the functor $1_V^{op} : \mathcal{X}^{op} \rightarrow \mathcal{Z}_V^{op}$ has a right adjoint [93, p.313].

Dans le §9, Kan procède à définir ce qui est une catégorie qui possède colimites (resp. limites) pour pouvoir formuler les deux résultats analogues aux Théorèmes 7.8 et 8.6 : les Théorèmes 9.6 et 9.6* (le dual du 9.6). Par exemple, le Théorème 9.6 affirme que [93, p.315] «A category \mathcal{Z} has direct limits if and only if the functor $1_d : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{Z}_d$ » (où \mathcal{Z}_d est la catégorie de tous les diagrammes sur \mathcal{Z} , qui est définie au début de §9, et où 1_d est le foncteur plongement). Par dualité, le Théorème 9.6* rattache des limites projectives au foncteur opposé 1_d^{op} .

alors que, dans la définition d'une limite inductive, la catégorie \mathcal{V} doit être un ensemble ordonné filtrant, la définition de Kan restreint que \mathcal{V} est une petite sous-catégorie petite de \mathcal{Z} . Cependant, les définitions actuelles n'imposent pas de restrictions à \mathcal{V} , par ce que la définition de Kan se trouve à mi-chemin de la définition contemporaine. C'est par cela que, pour des propos de la présente thèse on identifiera la limite inductive par la colimite et, la limite projective par la limite.

Or, compte tenu du susdit, les concepts de colimite et de limite sont définis presque de la même façon que de nos jours : bien qu'elle n'utilise pas les notions explicites de cône ou de co-cône, par exemple, dans le cas de la colimite, chaque morphisme $k : K \rightarrow 1_V A$ préfigure un co-cône. C'est-à-dire, les concepts de cône et co-cône sont caractérisés d'une manière implicite dans la définition de Kan. De plus, il est important de tenir compte que, même si ces concepts apparaissent implicitement ou explicitement, la limite et la co-limite sont définies à travers d'un problème universelle³⁵.

Dans la dernière partie de l'article (le Chapitre III), dont le titre est *Existence Theorems*, Kan introduit ce qui est le foncteur relèvement³⁶ (*lifted functor*) dans le §11. Cette dernière partie peut être considérée comme une extension du Chapitre IV de l'article d'Eilenberg et MacLane de 1945. Parce que Kan associe plusieurs des résultats présents dans tel chapitre au phénomène de l'adjonction. Eilenberg et MacLane commencent (dans le §20 de l'article de 1945) en définissant les ensembles ordonnés filtrants. Et, tout de suite, dans le §21, ils considèrent le système inductif d'objets $G = \langle G_d, \phi_{d_2 d_1} \rangle$ de la catégorie de groupes discrets \mathfrak{G}_0 sur un ensemble ordonné filtrant \mathbf{D} et, ils démontrent que, si on pense à \mathbf{D} comme une catégorie, alors G peut être vu comme un foncteur $T : \mathbf{D} \rightarrow \mathfrak{G}_0$. Puis, ils mentionnent que les expressions suivantes peuvent être prises comme synonymes [44, p.273] : «système inductif indexé par l'ensemble ordonné filtrant \mathbf{D} » et «foncteur covariant de \mathbf{D} sur \mathfrak{G}_0 ». Avec cela, ils présentent une définition informelle de limite inductive dans la catégorie \mathfrak{G}_0 . Et, bien qu'Eilenberg et MacLane prennent compte, seulement, des systèmes inductifs de \mathfrak{G}_0 , ils mentionnent brièvement que le concept de limite inductive peut être réglé non seulement pour des groupes, mais aussi pour des objets de n'importe quelle catégorie [44, p.275] :

(...) the limit group of a direct system of groups can be defined up to an isomorphism by means of a direct system of groups can be defined up

35. Dans le chapitre suivant on analysera la relation entre les problèmes universels et le concept d'adjonction.

36. Bien que, pour pouvoir faire cela, il présente une définition purement abstraite de la subdivision d'un complexe simplicial, et il étend ce concept à une catégorie propre \mathcal{V} .

to an isomorphism by means of such extensions of functors. This indicates that the concept (but not necessarily the existence) of direct “limits” could be set up not only for groups, but also for objects of any category.

Les mêmes résultats pour des limites projectives sont montrés dans le §22. Bien que, au lieu de procéder sur la catégorie \mathfrak{G}_0 , ils introduisent ces résultats dans la catégorie **TopGrp** des groupes topologiques. Ils ne recourent pas à la propriété de dualité pour les caractériser (cette propriété est introduite après, dans le §28), mais ils mentionnent que certains des théorèmes concernant aux limites projectives peuvent être démontrés de la même manière³⁷ que ceux théorèmes sur des limites inductives. Ensuite, ils définissent les catégories **Dir** et **Inv** (dans le §23) entant que la catégorie de systèmes inductifs et la catégorie de systèmes projectifs, respectivement. Kan généralise ces deux concepts pour construire les catégories \mathcal{Z}_d et \mathcal{X}^i . De plus, il étend la propriété de relèvement (*lifting principle*) qu'Eilenberg et MacLane ont présentée dans le §24 de leur article de 1945.

Il est important de souligner que dans la citation antérieure d'Eilenberg et MacLane, ils mentionnent la possibilité d'*étendre* un foncteur vers un autre, pour définir le concept de limite inductive. Cela est fait au moyen de la propriété de relèvement d'un foncteur. De plus, cela est étroitement lié avec les problèmes de relèvement. Si on considère un sous-ensemble $X \subset Z$ pour lequel est définie un morphisme $f : X \rightarrow Y$, un problème d'extension émerge lorsqu'on veut étendre l'action de f sur Z d'une manière telle que cette extension est la meilleure possible. C'est-à-dire, trouver un morphisme $h : Z \rightarrow Y$ tel qu'on a le morphisme $g : X \rightarrow Z$ pour lequel $f = g \circ h$. D'un autre côté, dans un problème du relèvement on a deux morphismes $f : X \rightarrow Y$ et $g : Z \rightarrow Y$, on doit lever f jusqu'à $h : X \rightarrow Z$ tel que $f = h \circ g$. Les extensions et les relèvements ne sont pas nécessairement uniques parce qu'ils existent beaucoup de manières d'étendre ou de lever un morphisme. Cela peut être généralisé pour un X arbitraire : s'il existe le morphisme $h : X \rightarrow Z$ tel que le diagramme commute :

$$\begin{array}{ccc}
 W & \xrightarrow{k} & Z \\
 \downarrow i & \nearrow h & \downarrow g \\
 X & \xrightarrow{f} & Y
 \end{array}$$

37. Ils disent plusieurs fois *as before* et avant de formuler les Théorèmes 22.2 et 22.3 : *The following two theorems may also be proved as in the preceding section* [44, p.277].

alors on dit que le morphisme $f : X \rightarrow Y$ a la propriété de relèvement. Dans ce cas, $k : W \rightarrow Z$ est un morphisme relèvement du morphisme f à travers du morphisme h . Si on considère le morphisme h en relation avec le morphisme g on dit que g a la propriété de relèvement à droite et, d'habitude, les morphismes g et i sont nommés la fibration³⁸ et co-fibration [65].

Selon Eilenberg et MacLane, si on a un foncteur $Q : \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Grp}$ il est possible de le «lever» (*lift*) vers le foncteur $Q_L : \mathbf{Dir}_{\mathbf{Grp}} \rightarrow \mathbf{Dir}_{\mathbf{Grp}}$ (ou $Q_L : \mathbf{Inv}_{\mathbf{Grp}} \rightarrow \mathbf{Inv}_{\mathbf{Grp}}$) tel que, pour un certain un foncteur approprié P le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Dir}_{\mathbf{Grp}} & \xrightarrow{Q_L} & \mathbf{Dir}_{\mathbf{Grp}} \\ \downarrow P & & \downarrow P \\ \mathbf{Grp} & \xrightarrow{Q} & \mathbf{Grp} \end{array}$$

où $\mathbf{Dir}_{\mathbf{Grp}}$ et $\mathbf{Inv}_{\mathbf{Grp}}$ sont les catégories de systèmes inductifs et projectifs de groupes respectivement. Dans quelques cas, le foncteur P est le foncteur d'inclusion ou le foncteur d'oubli. Cependant, en dépendant des conditions du problème du relèvement, le foncteur peut être différent. Kan généralise la procédure de relèvement pour des foncteurs et des catégories arbitraires. Alors, si on a le foncteur covariant $F : \mathfrak{K} \rightarrow \mathfrak{L}$, ce foncteur induit le foncteur relèvement (*lifted*) $F_V : \mathfrak{K}_V \rightarrow \mathfrak{L}_V$ où V est un objet de la catégorie propre \mathcal{V} . C'est-à-dire, les foncteurs relèvement sont indexés par les objets de \mathcal{V} . En dépendant de la variance de F et du choix de \mathcal{V} ou \mathcal{V}^{op} il est possible de trouver des autres trois types de foncteurs relèvement :

- Pour F covariant et \mathcal{V}^{op} on obtient le foncteur $F^V : \mathfrak{K}^V \rightarrow \mathfrak{L}^V$
- Si F est contravariant et on choisit à \mathcal{V} , on a le foncteur $F_V : \mathfrak{K}^V \rightarrow \mathfrak{L}_V$
- Pour F contravariant et \mathcal{V}^{op} , on a le foncteur $F^V : \mathfrak{K}_V \rightarrow \mathfrak{L}^V$

Dans le §12, Kan montre quelles sont les conditions suffisantes pour que le foncteur relèvement d'une variable ait un adjoint à droite ou un adjoint à gauche. Cela est présenté dans le Théorème 12.1 et est étendu pour des foncteurs de plus de variables, dans le Théorème 12.4 (et, son dual, le Théorème 12.4*). Finalement, Kan généralise encore plus ces théorèmes, en les étendant dans les cas d'adjonctions relatives (Théorèmes 13.8 et 13.8*).

38. Ce terme est lié au concept de fibration de Serre [145] qui a été étudié par Hurewicz [76].

La série de théorèmes du §12 permettent de construire nouveaux foncteurs adjoints d'un foncteur donné à travers de ses foncteurs relèvement. Cela représente un résultat significatif parce qu'il est possible que l'on ignore l'existence d'un foncteur adjoint à une gauche ou à droite de certain foncteur F^* et, encore moins, quels sont ces foncteurs adjoints. Mais si on peut démontrer que F^* est le relèvement d'un foncteur F qui a l'un ou les deux adjoints, cela garantit l'existence d'un (ou des) adjoint(s) de F^* et montre comment construire tels adjoints.

Avant de terminer cette section, on doit mentionner que, bien que le concept d'une paire de foncteurs adjoints soit pleinement caractérisé pour la première fois dans l'article de 1958, un exemple de ce type de foncteurs peut être trouvé dans *Abstract Homotopy III*. Dans cet article est mentionnée, pour la première fois, une particularité d'une paire de foncteurs : \mathbf{Ex}^n et \mathbf{Sd}^n . Précisément cette particularité est que ces foncteurs sont adjoints. Mais Kan ne les nomme pas de cette façon, bien que dans son article suivant (*On c.s.s. Complexes*), Kan caractérise ces deux foncteurs comme adjoints entre eux. Dans cet article, son article sur foncteurs adjoints apparaît dans la bibliographie, mais comme tel article avait été donné aux éditeurs en la même date (le 20 septembre 1956), et encore il n'avait pas été publié, alors l'article de 1958 apparaît décrit comme «à apparaître» (*to appear*). De fait, on peut apprécier que les trois articles *On c.s.s. Complexes*, *Functors Involving c.s.s. Complexes* et *Adjoint Functors* ont été reçus la même date, mais conformément à son contenu (et la manière comme ils sont référencés entre eux), on peut dire que son développement a été fait dans l'ordre susdit.

L'article *Abstract Homotopy III* a été reçu par l'éditeur le 6 Avril 1956 et, par conséquent, il a été écrit avant cette date. De fait, Marquis mentionne que la période dans laquelle Kan a développé ses idées a été entre les années 1954 et 1956 [122, p.125], par ce qu'il est probable que tel article a été écrit en 1955 ou au début de 1956. Dans cet article, Kan soupçonnait déjà qu'il est possible de rattacher deux foncteurs d'une manière différente à l'inversion. Comme on a vu, Kan introduit le foncteur \mathbf{Ex} pour développer une théorie d'homotopie dans la catégorie $s\mathbf{Ens}$ et, au début de l'article, il mentionne que ce foncteur est, d'une certaine manière, le *dual* de la subdivision (barycentrique) de K ³⁹. Mais, quel est le sens de la «dualité» que

39. Our main tool will be what we call the *extension* $\mathbf{Ex} K$ of a c.s.s. complex K , which is in a certain sense the *dual* of the (baricentric) subdivision of K [90, p.419]. L'emphase sur le mot «dual»

Kan mentionne ? Dans le moment que Kan a écrit cet article, les uniques foncteurs qui étaient dénommés comme «duals» étaient les foncteurs $\mathbf{F}, \mathbf{G} : \mathbf{Vect}_K \rightarrow \mathbf{Vect}_K$ qui envoient un espace vectoriel V vers son espace dual V^* et vers son espace double dual V^{**} respectivement. D'un autre côté, MacLane [112, p.44] mentionne que le concept de foncteur dual est amplement étudié par Fuks, Švarc, Linton et Mitjagin⁴⁰, tout en étant un concept qui a été défini pour la première fois dans l'article *On duality in homotopy theory* de Fuks qui a été écrit en 1961. Bien que le principe de dualité, comme il est connu actuellement, ait déjà été introduite par MacLane en 1948 [110], approfondie en 1950 [111] et, amplement étudié dans une topologie par Eckmann et Hilton dans son article *Homotopy groups of maps and exact sequences* de 1960.

Par conséquent, la «dualité» à laquelle Kan fait référence, bien qu'elle garde certaines relations avec le principe de dualité (et, dans une plus grande mesure avec le concept de foncteur dual, *mais* cela a été introduit trois ans après), diffère de tel principe par le détail. Heureusement, Kan éclaircit (à la fin de l'article) ce qu'il veut dire par telle dualité :

The duality between subdivision and extension then may be illustrated by the following lemma.

§6.1. Let $K, L \in s\mathbf{Ens}$. For every integer $n > 0$, there exists (in a natural way) a one-to-one correspondence between c.s.s. maps $\mathbf{Sd}^n(K) \rightarrow L$ and the c.s.s. maps $K \rightarrow \mathbf{Ex}^n(L)$ [90, p.421].

Il y a quatre choses à tenir en compte dans cette caractérisation : (i) l'élection arbitraire de K et L (aussi de n , mais cette élection n'est pas la plus importante dans la définition), (ii) la correspondance est entre des *collections de morphismes* (c'est-à-dire, qu'il existe une correspondance α entre $\mathrm{Hom}_{s\mathbf{Ens}}(\mathbf{Sd}^n(K), L)$ et est mienne.

40. Les articles que MacLane mentionne sont les suivants :

- D. B. Fuks, *On duality in homotopy theory*, Soviet Math. Dokl. 2 (1961), 1575-1578.
- D. B. Fuks, *Natural transformations of functors in the category of topological spaces*, Mat. Sb. (N.S.) 62 (1963), 160-179. (Russian).
- D. B. Fuks and A. B. Švarc, *On the homotopy theory of functors in the category of topological spaces*, Soviet Math. Dokl. 3 (1962), 444-447.
- F. E. J. Linton, *Autonomous categories and duality*, J. Algebra, 01/1965 ; 2(3) :315-349.
- B. S. Mitjagin and A. S. Švarc, *Functors in categories of Banach spaces*, Uspehi Mat. Nauk 19 (1964), 65-130. (Russian).
- A. S. Švarc, *Duality of functors*, Soviet Math. Dokl. 4 (1963), 89-92.

$\text{Hom}_{\mathbf{sEns}}(K, \mathbf{Ex}^n(L))$), (iii) cette correspondance α est un *isomorphisme* (c'est-à-dire $\alpha : \text{Hom}_{\mathbf{sEns}}(\mathbf{Sd}^n(K), L) \cong \text{Hom}_{\mathbf{sEns}}(K, \mathbf{Ex}^n(L))$) et, (iv) cet isomorphisme est *naturel*.

Et on peut vérifier que ces quatre caractéristiques sont inhérentes à une adjonction.

2.4 *Functors involving c.c.s. complexes*

Les articles *Adjoint Functors* et *Functors involving c.c.s. complexes* ont été publiés, dans cet ordre, l'un après l'autre dans le même nombre de la revue *Transactions of the American Mathematical Society*. Le premier article peut se considérer comme le cadre théorique abstrait qui permet la présentation de quelques résultats pratiques du deuxième article. Par conséquent, dans une certaine mesure, le premier article fonde le deuxième. Ou bien, on peut penser aux deux articles comme un grand article divisé en théorie et en pratique. Mais il est également vrai que le deuxième article reprend l'exposé dans *On c.c.s. complexes* (et, par conséquent, l'exposé dans *Abstract homotopy I-IV*) et, pour cela, il peut également être pris comme la synthèse de travail effectué par Kan jusqu'à ce moment.

Or, l'article peut être divisé en deux grandes parties : l'une où Kan développe plusieurs des propriétés de sa théorie de l'adjonction pour différents cas particuliers des foncteurs $- \otimes \Sigma : \mathbf{sEns} \rightarrow \mathcal{Z}$ et $H^V(\Sigma, -) : \mathcal{Z} \rightarrow \mathbf{sEns}$ où \mathcal{Z} est une catégorie avec des limites inductives et $\Sigma \in \text{Ob}(\mathcal{Z}_V)$ (c'est-à-dire, un foncteur covariant $\Sigma : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{Z}$). La deuxième partie de l'article utilise certains des résultats de cette première partie pour étendre quelques théorèmes consignés dans *Abstrac Homotopy III* et *IV*, et *On c.c.s. complexes*.

Le théorème le plus important de l'article est expliqué dans le §3. Fondamentalement, il mentionne le suivant : pour chaque objet Σ de \mathcal{Z}_V il est possible d'associer deux foncteurs covariants

$$- \otimes \Sigma : \mathbf{sEns} \rightarrow \mathcal{Z} \text{ et } H^V(\Sigma, -) : \mathcal{Z} \rightarrow \mathbf{sEns}$$

tels que $- \otimes \Sigma \dashv H^V(\Sigma, -)$ (†). Et n'importe quelle paire des foncteurs $S : \mathbf{sEns} \rightarrow \mathcal{Z}$ et $T : \mathcal{Z} \rightarrow \mathbf{sEns}$ où $S \dashv T$ peuvent être obtenus à travers de $- \otimes \Sigma$ et $H^V(\Sigma, -)$.

Ce résultat permet de démontrer quelques adjonctions importantes s'il est utilisé dans une catégorie particulière \mathcal{Z} . Cependant, pour pouvoir faire cela, il est nécessaire

de démontrer que ces catégories particulières ont des limites inductives. Kan démontre que les catégories **Top**, **sEns**, **Ens**, $\partial\mathcal{G}$, **AbGrp** ont des limites inductives. Dans le cas de la catégorie **Top**, pour chaque espace topologique X et chaque ensemble simplicial K , Kan mentionne que $H^V(\Sigma, X) = \mathbf{Sing}(X)$ et $K \otimes \Sigma = |K|$, c'est-à-dire, par le résultat (‡) on a la nouvelle adjonction $| \dashv \mathbf{Sing}$. L'application du résultat (‡) dans **sEns** implique l'adjonction $\times \dashv \mathbf{Map}$. Pour $\partial\mathcal{G}$, le produit tensoriel \otimes est l'adjoint à droite du foncteur normalisation de chaînes (*normalized chain functor*) $C_N : \mathbf{sEns} \rightarrow \partial\mathcal{G}$. Les sections suivantes de l'article (§§7-11) sont dédiées à présenter les propriétés du foncteur $H^V(\Sigma, -)$ sur la catégorie $\partial\mathcal{G}$ avec l'objectif de démontrer quelques théorèmes d'équivalence entre homotopies et homologies dans lesquels ce foncteur intervient. Et telles équivalences sont résumées dans la Proposition 8.1.

L'une des équivalences les plus importantes est présentée dans l'Appendice de l'article. Kan définit le foncteur libre $FA : \mathbf{sEns} \rightarrow \mathbf{sAbGrp}$ où **sAbGrp** est la catégorie des groupes abéliens simpliciaux, et pour chaque $K \in \text{Ob}(\mathbf{sEns})$ et chaque entier $n \geq 0$ on a que $\pi_n(FA(K)) \cong H_n(C_N(K))$.

2.5 La signification de l'adjonction.

Comme on l'a vu dans le §1.3, aussi bien MacLane qu'Awodey, affirment que le phénomène de l'adjonction peut être considéré comme l'un des plus importants, non seulement dans la théorie des catégories mais aussi pour les mathématiques en général. Ils ne sont pas les seuls à apprécier cette importance du concept d'une paire de foncteurs adjoints. Par exemple, Ivancevic et Ivancevic [81, p.111] déclarent que «The most important functorial operation is adjunction». De plus, Marquis et Reyes [124, p.696] affirment que le concept d'adjonction est «arguably the core concept of the whole theory and which plays a key role in categorical logic as well.» Et après [p.697] «Adjoint functors and functor categories occupied right from the start a central role in categorical logic». Adamek *et al* [2, p.305] mentionnent que «Perhaps the most successful concept of category theory is that of *adjoint functor*. Adjoint functors occur frequently in many branches of mathematics and the “adjoint functor theorems” have a surprising range of applications.» Dans le chapitre VII de son livre, Taylor [158, p.367] en faisant référence à la notion d'adjonction mentionne que «Nowadays, every user of category theory agrees that this is the concept which justifies the fundamental position of the subject in mathematics.» Et, Goldblatt assure que «The isolation and

explication of the notion of *adjointness* is perhaps the most profound contribution that category theory has made to the history of general mathematical ideas.»

Or, ayant reconnu que l'adjonction est importante, qu'est-ce qui peut expliquer ce phénomène ? Une réponse à cette question est proposée par Marquis et Reyes. Ils considèrent qu'une paire de foncteurs adjoints [124, p.696] «can be thought of as conceptual inverses.» Cela avait été déjà mentionné par Marquis dans un article de 2006, intitulée *What is Category Theory?* [121]. Mais dans cet article il précise ce qu'il comprend par ladite affirmation :

Adjoint functors are not, strictly speaking, inverses to one another. Strict inverses are isomorphisms of categories. But they *are* inverses in *some sense* and this is what makes them so important. It is tempting and certainly appealing to say that adjoint functors are *conceptual* inverses to one another. [121, p.241].

Il est nécessaire de dire qu'un foncteur $F : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{X}$ est un *isomorphisme de catégories* s'il existe un foncteur $G : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Z}$ tel que

$$1_{\mathcal{X}} = F \circ G \text{ et } 1_{\mathcal{Z}} = G \circ F. (\heartsuit)$$

C'est-à-dire G est le foncteur inverse de F .

Si on reprend les théorèmes 6.4 et 6.4* de l'article de Kan de 1958 (où l'adjonction est implicitement caractérisée au moyen de l'unité et la co-unité), et l'équivalence de Shih (voir pp. 105-106 de la présente thèse) alors on a que si $\alpha : S \dashv T$ ils existent les transformations naturelles (unité et co-unité respectivement) :

$$\eta : 1_{\mathcal{X}} \rightarrow T \circ S \text{ et } \varepsilon : S \circ T \rightarrow 1_{\mathcal{Z}}. (\spadesuit)$$

On peut voir que les expressions \heartsuit et \spadesuit sont similaires en sa forme (sauf en la direction de la transformation ε), mais dans la première les compositions sont *égales* aux identités, alors que dans les deuxièmes les compositions sont *naturellement transformables* aux identités. Cette différence est très significative parce l'égalité est plus restrictive que la transformation naturelle. De fait, si on a une égalité, alors cela implique que on a une transformation naturelle (voir [1, p.4]). Ainsi, on a les implications

$$\text{égalités} \Rightarrow \text{équivalences naturelles} \Rightarrow \text{transformations naturelles}$$

C'est-à-dire, les égalités sont une type particulier des transformations naturelles. C'est pour cela que l'expression (#) est plus générale que l'expression (¶).

Une telle généralité implique qu'une expression comme # permette de lier une plus grande quantité de catégories que l'expression ¶. Mais dans sa généralité, les foncteurs S et T perdent quelques propriétés associées à l'isomorphisme. Et, deux de telles propriétés sont : (i) les foncteurs ne sont pas strictement inverses entre eux et, (ii) S et T peuvent avoir multiple «inverses conceptuels» aussi bien à droite qu'à gauche. Le premier arrive parce que la définition d'une paire des foncteurs inverses est étroitement liée à l'égalité de la composition. Le deuxième se justifie parce que deux adjoints (les deux à gauche ou les deux à droite) d'un foncteur sont isomorphes⁴¹.

Or, en grande partie des textes sur théorie des catégories (par exemple, [116, p.93]) les auteurs présentent brièvement le concept d'isomorphisme de catégories en le considérant inutilisable, et lorsqu'ils introduisent le concept d'équivalence de catégories on mentionne (dans quelques cas) que ce dernier concept constitue le milieu pour rattacher deux catégories. Par exemple, MacLane mentionne que l'équivalence de catégories «is a more general (and more useful) notion» [116, p.93]. Dans ses Barr et Wells considèrent que le concept d'équivalence de catégories est le correct en comparaison avec celui d'isomorphisme [10, p.34], et Goldblatt affirme que le concept d'isomorphisme «is stricter than it need be» [66, p.200]. D'une manière similaire, Awodey mentionne que

Experience has shown that the mathematically significant properties of objects are those that are invariant under isomorphisms, and in category theory, identity of objects is a much less important relation than isomorphism. So it is really equivalence of categories that is the more important notion of “similarity” for categories [6, p.173].

Le concept d'isomorphisme de catégories est extrêmement restrictif dans la mesure que deux catégories, pour qu'elles soient isomorphes, elles doivent être très similaires. Mais le conglomérat des catégories est très divers, et il est nécessaire de trouver un outil conceptuel qui permette d'établir ce qu'ont en commun deux catégories dissemblables. Dans ce contexte, Pareigis affirme que l'isomorphisme des catégories \mathcal{Z} et \mathcal{X} suppose une correspondance biunivoque entre $\text{Ob}(\mathcal{Z})$ et $\text{Ob}(\mathcal{X})$, alors que l'équivalence entre

41. Cela est confirmé cela par Marquis après avoir affirmé que «Notice immediately that a functor can have *both* a right *and* a left adjoint, up to (unique) isomorphisms, and thus it can have two conceptual inverses» [121, p.241].

ces catégories suppose *seulement* une bijection entre les classes des isomorphismes des objets (*isomorphism classes of objects*) d' $\text{Ob}(\mathcal{Z})$ et d' $\text{Ob}(\mathcal{X})$ respectivement [133, p.18]. La correspondance entre $\text{Ob}(\mathcal{Z})$ et $\text{Ob}(\mathcal{X})$ est très limitative parce que, sous tel bijection, l'égalité de taille entre deux catégories est une condition nécessaire pour que ces deux catégories soient isomorphes⁴². Cependant, encore des catégories très similaires peuvent être non-isomorphes. Par exemple, Awodey [6, p.171-172] démontre que les catégories \mathbf{Ord}_{fin} (des nombres ordinaux finis) et \mathbf{Ens}_{fin} (des ensembles finis) ne sont pas isomorphes malgré le fait qu'elles sont catégories très similaires.

Dans ce qui précède, on a signalé que le concept d'équivalence est plus approprié que celui d'isomorphisme, mais : qu'est-ce qu'une équivalence de catégories et quelle est sa relation avec l'adjonction ? La définition d'une équivalence de catégories proposée dans la majorité des textes sur une théorie des catégories est la suivante :

Un foncteur $F : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{X}$ est une *équivalence de catégories* s'ils existent, un foncteur $G : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Z}$ et deux *équivalences* naturelles $\eta : 1_{\mathcal{X}} \rightarrow F \circ G$ et $\varepsilon : 1_{\mathcal{Z}} \rightarrow G \circ F$. Il est clair cette définition est un cas particulier de l'expression \sharp qui caractérise une adjonction. Par cela, toute paire de foncteurs qui forment une équivalence de catégories sont des foncteurs adjoints entre eux.

Et, il est possible de transformer une adjonction en une équivalence. En essence, dans une adjonction (\sharp), le processus consiste à choisir les objets $Z \in \mathcal{Z}$ et $X \in \mathcal{X}$ pour lesquels ε_Z et η_X sont des isomorphismes, et de cette façon on obtient les sous-catégories pleines $\mathcal{Z}^* \subset \mathcal{Z}$ et $\mathcal{X}^* \subset \mathcal{X}$ respectivement. Alors, on restreint les foncteurs F et G à ces sous-catégories et, par construction, \mathcal{Z}^* et \mathcal{X}^* sont des catégories équivalentes. Donc, une adjonction induit une équivalence de catégories.

On peut observer ce fait d'une manière plus détaillée. Selon la Définition (3.1) de Kan, au moyen des Hom-foncteurs, une paire de foncteurs $S : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Z}$ et $T : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{X}$ forment une adjonction $S \dashv T$ si, pour chaque $X \in \mathcal{X}$ et $Z \in \mathcal{Z}$, on a une équivalence naturelle

$$\alpha : \text{Hom}(S(X), Z) \cong \text{Hom}(X, T(Z)) (*)$$

42. De fait, une définition plus complète et qui capture l'essence du mentionné par Pareigis, mais restreinte à la catégorie des petites catégories, est la suivante [14, p.19] : un foncteur $F : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{X}$ est un isomorphisme de catégories s'il est *plein et fidèle*, et s'il induit une bijection $F^* : \text{Ob}(\mathcal{Z}) \rightarrow \text{Ob}(\mathcal{X})$.

Cette équivalence peut être identifiée comme une transformation bijective de morphismes : par la définition de transformation naturelle, pour une paire $X, Z \in \mathcal{X} \times \mathcal{Z}$, α est paramétrisée par X et Z , c'est-à-dire $\alpha_{X,Z}$. Dans ce cas, si $f \in \text{Hom}(S(X), Z)$ il existe un $g \in \text{Hom}(X, T(Z))$ tel que $\alpha_{X,Z}(f) = g$ (Figure 2.1). Et, comme la transformation α est un isomorphisme, il existe aussi la transformation inverse $\alpha'_{X,Z}$ tel que $\alpha'_{X,Z}(g) = f$.

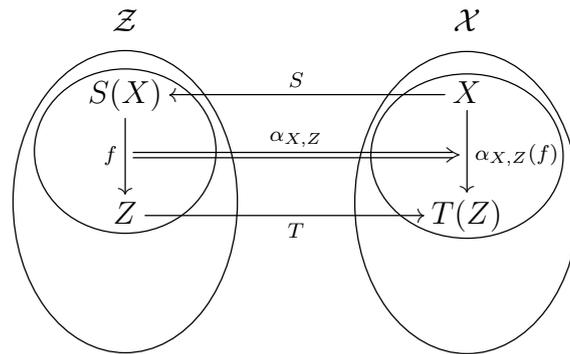


FIGURE 2.1 –

Or, $\text{Hom}(S(X), Z)$ et $\text{Hom}(X, T(Z))$ sont des sous-collections d' $\text{Hom}(\mathcal{Z})$ et d' $\text{Hom}(\mathcal{X})$ respectivement. Aussi, on a mentionné que le Théorème 3.1 de l'article d'Eilenberg et MacLane de 1942a (voir la note en bas de page 13 dans la thèse présente) affirme que la détermination des morphismes dans une catégorie permet la détermination de la catégorie dans son intégralité. C'est pour ce qui précède qu' $\text{Hom}(S(X), Z)$ et $\text{Hom}(X, T(Z))$ caractérisent, respectivement, deux sous-collections $\mathcal{Z}^\diamond \subset \text{Ob}(\mathcal{Z})$ et $\mathcal{X}^\diamond \subset \text{Ob}(\mathcal{X})$. Donc, l'expression (*) détermine une équivalence de sous-collections de \mathcal{Z} et de \mathcal{X} . C'est-à-dire, il existe une sorte d'«équivalence» $\mathcal{Z} \sim \mathcal{X}$ caractérisée par l'adjonction $S \dashv T$. Ce n'est pas, en essence, une équivalence de catégories parce qu'elle non considère seulement les équivalences naturelles qui sont obtenues après avoir restreint l'unité et la co-unité de l'adjonction. Mais les deux sous-collections équivalentes $\text{Ob}(\mathcal{Z}^*)$ et $\text{Ob}(\mathcal{X}^*)$ font partie des sous-collections \mathcal{Z}^\diamond et \mathcal{X}^\diamond respectivement.

Clairement, cette équivalence entre des catégories n'est pas du genre ontologique parce que les objets de chaque catégorie \mathcal{Z} et \mathcal{X} peuvent être d'une nature totalement différente. Par exemple, le foncteur oublie $U_1 : \mathbf{AbGrp} \rightarrow \mathbf{Grp}$ a par adjoint à gauche le foncteur F_1 tel qu'«abélianise» chaque groupe $G \in \text{Ob}(\mathbf{Grp})$ au moyen du groupe quotient $G/[G, G]$ où $[G, G]$ est le groupe dérivé⁴³. Bien qu'il y ait des groupes qui ne

43. $[G, G]$ est le sous-groupe engendré par les commutateurs de G .

sont pas abéliens, on peut démontrer que chaque groupe abélien est en correspondance avec un objet de **Grp** et le foncteur F_1 permet (ou «force») la bijectivité.

Dans leur article de 2012 Marquis et Reyes soulignent que le concept d'une paire de foncteurs adjoints est très utile et puissant parce qu'il unifie quelques résultats apparemment distincts. Et immédiatement affirment que «Many important theorems and almost all fundamental mathematical constructions can be cast in the frame of adjoint functors. It is also a surprise to see that many fundamental constructions simply appear as adjoints to basic functors» [124, p.697]. C'est-à-dire, une paire de foncteurs adjoints peut-être considérée comme une paire de *constructions* qui résolvent un problème pour passer d'une catégorie à l'autre. De fait, MacLane montre dans deux tables sur exemples d'adjonctions [116, p.87] que : (i) les adjoints à gauche de différents foncteurs d'oubli sont des constructions pour récupérer la structure oubliée. (ii) Les unités de l'adjonction correspondent aux actions (ou opérations) nécessaires pour obtenir tels constructions. Par exemple, dans le cas du foncteur oubli $U_2 : \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Ens}$ son adjoint à gauche est le foncteur F_2 qui construit le groupe libre pour chaque ensemble $X \in \text{Ob}(\mathbf{Ens})$. Et l'unité appliquée sur X ($X \mapsto U_2 \circ F_2(X)$) correspond à l'action «insertion des générateurs».

Or, dans la table susdite de MacLane on peut vérifier l'affirmation de Marquis et Reyes selon laquelle beaucoup de constructions *fondamentales* sont des foncteurs adjoints de foncteurs basiques. Les cases emblématiques sont les différents foncteurs d'oubli $U : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ où \mathcal{C} est une catégorie plus riche que \mathcal{D} , c'est-à-dire, munie avec plus des propriétés structurelles. Tous les différents foncteurs de l'oubli que MacLane montre ont par adjoint à gauche un foncteur «objet libre». Il n'y a aucun doute sur l'importance des constructions libres dans les mathématiques et, spécifiquement, dans l'algèbre. Également, le foncteur d'oubli $U_i : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Ens}$ a par adjoint à gauche le foncteur libre $F_i : \mathbf{Ens} \rightarrow \mathbf{Top}$ qui munit à chaque ensemble $X \in \text{Ob}(\mathbf{Ens})$ la topologie discrète, et U_i a par foncteur à droite le foncteur $G_i : \mathbf{Ens} \rightarrow \mathbf{Top}$ qui munit à chaque ensemble $X \in \text{Ob}(\mathbf{Ens})$ la topologie triviale.

De plus, d'une manière purement abstraite, pour une catégorie arbitraire⁴⁴ \mathcal{C} , les foncteurs diagonaux $\Delta_k : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ont par foncteurs adjoints à gauche et à droite (s'ils existent) des constructions fondamentales pour la théorie des catégories. Par exemple, si Δ est le foncteur diagonal $\Delta_1 : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ on a les adjonctions $\Pi \dashv \Delta_1 \dashv \Pi$, où Π et Π sont les foncteurs somme et produit, respectivement [116, p.87].

44. Le choix de \mathcal{C} dépend des constructions que les adjonctions permettent.

En conformité avec ce qui précède, si on a les foncteurs $S : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Z}$ et $T : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{X}$ tels que $S \dashv T$, on peut considérer ces deux foncteurs comme une paire de «ponts» qui permettent d'aller et de venir d'une catégorie à l'autre. De plus, ces ponts ont codifié, dans son intérieur, l'ensemble d'instructions pour les construire. Ces deux ponts sont indissolublement associés dans la mesure que l'un détermine l'autre et vice-versa, sauf isomorphisme. Et c'est pour cela qu'on peut considérer l'affirmation de Marquis et Reyes sur une paire de foncteurs adjoints en tant que «inverses conceptuels» en tant qu'ils sont plus riches et permettent un plus grand degré de liberté qu'une inversion *stricto sensu*. Dans ce sens, on pourrait dire qu'une adjonction est, dans une certaine mesure, une transposition. On verra dans le chapitre suivant, lorsqu'on étudiera la relation entre l'adjonction et les problèmes universels, que chaque foncteur qui intervient dans une adjonction n'est pas *une* construction, mais il est la construction *optimale*. C'est-à-dire, dans la solution d'un problème au moyen d'une paire des foncteurs adjoints, cette adjonction est la meilleure transposition pour résoudre ce problème.

Comme on l'a mentionné dans le §1.2.2 un foncteur $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ permet de préserver quelques propriétés structurelles de la catégorie \mathcal{C} sur la catégorie \mathcal{D} . Cependant, cette préservation des propriétés structurelles d'une catégorie dans l'autre ne constitue pas nécessairement un «pont» entre les deux catégories. Dans la mesure que le foncteur puisse permettre d'aller et de revenir d'une catégorie à l'autre en récupérant les propriétés structurelles initiales pour chaque $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$. Par exemple, dans la Figure 1.12, les foncteurs U_1 et U_2 permettent d'aller des catégories **Top** et **Grp** respectivement vers la catégorie **Ens**. Cependant, il peut y avoir une multiplicité des foncteurs pour revenir vers les catégories initiales. Cette situation est illustrée dans la Figure 2.2 : pour revenir vers la catégorie **Grp** il peut y avoir plusieurs foncteurs F_i qui associent à chaque ensemble $X \in \text{Ob}(\mathbf{Ens})$ un groupe $F_i(X) \in \text{Ob}(\mathbf{Grp})$, mais parmi cette multiplicité il y a un foncteur F tel qui récupère les propriétés structurelles initiales. Ce foncteur F est le foncteur libre qui est, à la fois, l'adjoint à gauche d' U_2 . Une situation similaire arrive avec le foncteur U_1 , mais dans ce cas ils existent deux foncteurs pour revenir vers la catégorie **Top** le foncteur libre G et le foncteur G^* de la topologie triviale.

Il est nécessaire d'éclaircir que le travail de trouver les foncteurs adjoints à un foncteur donné n'est pas une chose immédiate. D'abord c'est nécessaire si tels foncteurs existent et, après avoir garanti son existence, il faut les trouver (ou les construire). Pour réaliser le premier résultat (son existence) il est nécessaire de recourir aux propriétés purement catégorielles de l'adjonction, spécialement d'utiliser le très puissant Théorème

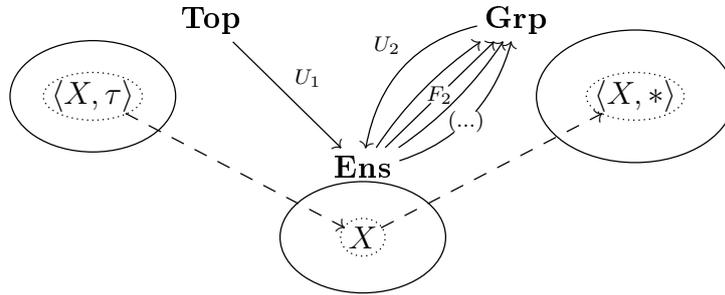
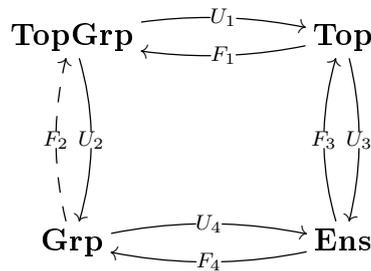


FIGURE 2.2 –

du foncteur adjoint (qui on analysera dans le suivant chapitre). Le deuxième est plus difficile de réaliser, parce qu'il dépend de l'analyse des conditions et des propriétés spécifiques des foncteurs d'un domaine particulier. Par exemple, pour trouver l'adjoint à gauche du foncteur d'oubli $U_1 : \mathbf{TopGrp} \rightarrow \mathbf{Top}$, il est nécessaire d'utiliser le Théorème de «relèvement tendu» (*Taut Lift Theorem*⁴⁵) qui est illustré dans le suivant diagramme commutative par les foncteurs d'oubli U_1, U_2, U_3 et U_4 .



Les foncteurs F_3 et F_4 sont les foncteurs libres. Et, à travers de ce diagramme il est possible d'inférer l'existence *possible* du foncteur adjoint à gauche $F_2 : \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{TopGrp}$ dans la mesure qu'il *pourrait* être induit par le foncteur F_3 en associant à chaque groupe $X \in \mathit{Ob}(\mathbf{Grp})$ la topologie discrète. Cependant, cette conjecture doit être vérifiée dans les deux niveaux ci-mentionnés.

Pour conclure, on peut résumer l'importance de l'adjonction dans les aspects suivants :

1. Elle permet de caractériser une définition puissante d'équivalence entre des catégories.

45. Ce théorème a été initialement formulé par Wyler en 1971 ([167] et [168]) pour des catégories topologiques, cependant a été étendu par Tholen en 1976 ([159]) dans des contextes plus généraux.

2. Beaucoup de constructions importantes dans théorie des catégories, et dans les mathématiques en général, sont des paires de foncteurs adjoints.
3. En relation avec le point précédent, l'un (ou, dans certains cas, les deux) des foncteurs qui interviennent à l'adjonction, constitue la solution optimale à un problème pour munir d'une structure aux objets d'une catégorie donnée.
4. L'existence d'une adjonction facilite l'intercommunication entre les catégories où elle est définie. Et, dans ce sens, une adjonction peut être considérée comme un «dictionnaire» qui permet de traduire les propriétés et les intuitions d'une catégorie dans l'autre.

Et, comme on l'a déjà indiqué, on analysera plus en détail dans le chapitre suivant les causes de ce qu'on a mentionné dans le point 3.

Chapitre 3

Les contextes de l'adjonction.

3.1 Introduction : des concepts catégoriels à la théorie des catégories.

Tout au long du premier chapitre de la présente thèse, on a parlé sans cesse de la «théorie émergente des catégories» ou des «concepts catégoriels» au lieu d'affirmer que, dans ses premières années, on peut parler d'une «théorie des catégories» à bon droit.

Or, bien que depuis l'article de 1945 d'Eilenberg & MacLane, ils mentionnent dans le chapitre I qu'ils décrivent une «théorie des catégories et des foncteurs», ou bien que, d'un point de vue formel ou épistémologique, le tissu conceptuel présenté dans cet article devrait être considéré comme une «théorie», il est important de noter que, du point de vue de la communauté mathématique ou (ce qui reflète le mode de pensée de cette communauté) dans les classifications mathématiques auxquels appartient une publication mathématique spécifique, la théorie des catégories atteindrait une autonomie comme domaine mathématique indépendant vers la fin des années 50. En fait, dans le système de classification MSC, l'item «théorie des catégories, algèbre homologique» serait incorporé dans la table des matières des *Mathematical Reviews* à partir de 1968. Il convient toutefois de noter que cette nouvelle table des matières a été associée à une modification des systèmes de classification de l'American Mathematical Society qui jusqu'aux années 60 n'avait pas considéré une reformulation de son système de classement général conforme aux développements mathématiques contemporains, mais chaque année, il modifie son système de classification en fonction des publications de l'époque.

Compte tenu de ce qui précède, on peut dire qu'il y a eu trois grands événements qu'ont fait passer les concepts catégoriels d'un statut de simples outils qui étaient utili-

sés dans d'autres disciplines mathématiques ou qui faisaient partie d'une «émergente» théorie des catégories, aux concepts d'une «théorie des catégories» proprement dite. Les faits en question sont les suivants : (i) l'apparition des premiers textes qui ont synthétisé les principaux résultats et concepts purement catégoriels, (ii) l'émergence des premiers séminaires sur des concepts catégoriels, des résultats catégoriels ou des thèmes connexes, et (iii) l'énorme influence qu'ont eu certaines des publications d'Alexander Grothendieck. Le point (iii) ne sera pas présenté ici, car il y a déjà assez de littérature à ce sujet [voir Marquis [122] et Krömer [97]]. Cependant, on analysera comment Grothendieck intègre les concepts d'«adjonction» et d'«universalité» dans le cadre de ses premiers écrits dans lesquels il fait usage des concepts catégoriels. Il convient également de souligner que ces trois éléments sont fortement liés, parce que beaucoup des résultats présents dans les travaux de Grothendieck ont été discutés dans certains de ces séminaires et, bonne partie de ses articles (et, par conséquent, les textes de compilation) postérieures à 1957 (année de publication de *Sur quelques points d'algèbre homologique*) ont été étudiés, en élargissant les horizons de nombreux résultats de Grothendieck. Cela dit, regardons «vue du haut» le panorama des séminaires et des événements où les concepts catégoriels étaient le centre d'attention.

Sans aucun doute, les premiers séminaires qui ouvrirent leurs bras à l'étude des concepts catégoriels et leurs résultats eurent lieu en France dans les années 50 et 60. Cela peut paraître paradoxal étant donné la forte prédominance de la perspective bourbakiste dans les séminaires français et sa réticence apparente à l'incorporation des concepts catégoriels dans le cadre des *Éléments de mathématiques*. Je n'ai pas l'intention de présenter ici cette «réticence», car Krömer [99] a déjà écrit un très bon article sur ce sujet. Il suffit de noter que ce qui était étudié dans les séminaires ne correspondait pas nécessairement à ce qui était publié dans les *Éléments*. En ce sens, les séminaires étaient à l'avant-garde de ce qui a été exposé dans l'œuvre de Bourbaki dans les années 50. Ainsi, bien que les *Éléments* soient considérés comme le recueil des mathématiques «de leur époque», ce travail était en retard par rapport aux grandes discussions mathématiques de leur époque. Même dans les mêmes séminaires français, où les grands développements mathématiques étaient discutés et embrassaient les idées mathématiques nouvelles et révolutionnaires.

On peut dire que les grands séminaires, où les idées catégorielles ont été présentées et utilisées comme outils, principalement par Grothendieck et Charles Ehresmann, ont été cinq : le même *Séminaire Bourbaki*, le *Séminaire Ehresmann*, le *Séminaire Claude Chevalley*, le *Séminaire Henri Cartan* et l'important *Séminaire de Géométrie Algébrique*

du Bois Marie (SGA) par Grothendieck. Il y a eu aussi des exposés au *Séminaire Dubreil*.

Il convient également de souligner qu'entre 1960 et 1963 au *Séminaire Bourbaki*, Grothendieck a présenté une série d'exposés sur la géométrie algébrique (*Géométrie formelle et Géométrie algébrique* en 1960, et *Technique de descente et théorèmes d'existence en géométrie algébrique I-VI* entre 1960-1962) et plusieurs exposés sur la géométrie simpliciale.

Par ailleurs, Charles Ehresmann était un autre membre du groupe Bourbaki qui a adopté les concepts catégoriels sans hésiter. En effet, il a dirigé le *Séminaire de Topologie et Géométrie Différentielle*, qui a abouti à partir de 1957 à la revue *Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle Catégoriques* qui avait pour principal objectif l'utilisation des concepts catégoriels dans la topologie et la géométrie différentielle. Ehresmann lui-même a beaucoup contribué à cette revue dans les années 60. Et il a été l'un des pionniers dans l'introduction du langage catégoriel pour l'étude de la géométrie différentielle.

Il faut aussi mentionner le *Séminaire Claude Chevalley* (1956-1959), dans lequel, dans les exposés de 1958 par Grothendieck, il les présente par le langage catégoriel, comme il l'avait fait dans son article de 1957. De plus, en 1958, Pierre Gabriel présente dans ce séminaire l'exposé *Les foncteurs dérivés des foncteurs classiques*.

De plus, dans le *Séminaire Henri Cartan*, les exposés gravitaient autour des résultats et des problèmes de topologie algébrique et d'algèbre homologique. C'est pourquoi Grothendieck fait une utilisation novatrice des concepts catégoriels dans ses exposés *Techniques de construction en géométrie analytique I-X* (1960-1961).

Paradoxalement, malgré le thème central du *Séminaire Dubreil* (Algèbre et théorie des nombres), les exposés sur des sujets catégoriels dans les années 60 furent peu nombreux. Parmi celles-ci, il convient de noter une première compilation des notions catégorielles de base (catégorie, foncteur, catégorie de foncteurs, foncteurs représentatifs, limites projectives et inductives, et catégories abéliennes. Mais non les notions de dualité, des foncteurs adjoints ou de problèmes universels) dans l'exposé *Étude élémentaire des catégories* par M.-P. Brameret, M. Enguehard & G. Renault en 1964 ; l'exposé importante *Problèmes universels, foncteurs représentables et foncteurs adjoints* par Paul Jaffard en 1965 (à laquelle on reviendra ultérieurement) ; et les exposés de Jacques Riguet *Théorie des catégories semi-abéliennes* (1968) et *Catégorisation de la notion de structures et de structures locales chez N. Bourbaki et C. Ehresmann, I* (1960).

Enfin, il ne faut pas oublier le *Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie* par Grothendieck, Michèle Raynaud, Michel Demazure, Michael Artin, Jean-Louis Verdier, Pierre Deligne, Pierre Berthelot et Luc Illusie entre 1960 et 1969. Dans ce séminaire, Grothendieck fait un usage extensif des concepts catégoriels pour décrire de nombreux concepts et résultats de la géométrie algébrique : cohomologie locale et étale, faisceaux et la théorie des topos est introduite. Le contenu fondamental du Séminaire a été publié dans les *Éléments de Géométrie algébrique* par Grothendieck et Jean Dieudonné¹.

Tel était en gros le panorama de l'adoption des concepts catégoriels dans les séminaires français. Cependant, aux États-Unis, les premiers congrès sur la «théorie» des catégories étaient également organisés. C'est-à-dire les premiers congrès où les concepts catégoriels et leurs usages étaient l'objet central. Le premier de ces grands congrès a été la *Conference on Categorical Algebra*, qui a eu lieu entre Juin 7-12 de 1965 sur le campus de l'Université de Californie. À la suite de ce congrès a été publiée le célèbre *Proceedings of the Conference on Categorical Algebra : La Jolla 1965*. Et parmi ses conférenciers se trouvaient les figures les plus remarquables de la naissante théorie des catégories : F. W. Lawvere, Peter Freyd, John Isbell, Peter Hilton, Michael Barr, Samuel Eilenberg et Saunders MacLane, pour n'en nommer que quelques-uns. Et bien que le titre de ce congrès suggère que le thème central est l'algèbre catégorielle, il est à noter qu'une grande variété de sujets a été présentée, parmi lesquels la présentation de Lawvere *The category of Categories as a Foundation for Mathematics*. Après cet événement, des séminaires de théorie des catégories ont eu lieu, la plupart du temps à l'Université de Chicago. Ces séminaires ont abouti à la publication des *Reports of the Midwest Category Seminar* I-V publiés chaque année entre 1967 et 1971. L'objet principal de ces séminaires était les nouveaux concepts et les résultats catégoriels sans qu'ils soient considérés comme subsidiaires d'une autre théorie mathématique. Autrement dit, il y avait déjà une prise de conscience dans le statut autonome de la théorie des catégories.

Comme on a dit ci-dessus, il existait une relation dialectique entre ces séminaires et congrès et les publications concernant les concepts catégoriels. C'était une relation de rétroaction qui est encore maintenue de nos jours dans toute recherche sur des nouveaux concepts mathématiques : les séminaires et congrès se sont concrétisées en publications

1. Outre ces séminaires, il est important de souligner le même *Séminaire Grothendieck* sur l'algèbre homologique. Bien que cela n'ait été fait qu'en 1957.

qui ont servi de support à l'écriture des premiers textes qui ont essayé de synthétiser tous les résultats importants dans le cadre de cette «émergente» théorie des catégories.

Ainsi, dans les années qui ont suivi l'article de 1945 d'Eilenberg & MacLane, plusieurs auteurs ont complété ce corps de connaissances émergentes avec de nouveaux concepts purement catégoriels (c'est-à-dire qu'ils ne dépendaient pas d'un autre corps de connaissances, mais qu'ils pouvaient être complètement décrits par le langage catégoriel inauguré par Eilenberg & MacLane). Certains des plus importants de ces nouveaux concepts étaient ceux des «objets initiaux et finaux», des «produits et coproduits», de «catégories abéliennes», de «propriétés universelles» et de «foncteurs adjoints». Et une grande partie de ces concepts ont été introduits dans les années 50 et les deux premières années des années 60.

Cependant, même à cette époque, il n'existait pas de «compendium » regroupant tous les résultats purement catégoriels et les classant de manière cohérente, sur la base d'un système axiomatique et de définitions pour que ces résultats et/ou définitions se succèdent les uns des autres, compte tenu des définitions des concepts de «catégorie», de «foncteur» et de «transformation naturelle», présentées par Eilenberg & MacLane.

Or, à partir des années 60 commencent à apparaître les premiers textes qui cherchent à compiler dans une plus ou moins grande mesure, les résultats catégoriels les plus importants à ce moment-là. On peut dire que le premier texte qui atteint ce but est *Abelian Categories. An Introduction to the Theory of functors* de Peter Freyd. Ce texte est le résultat de la présentation *in extenso* de sa thèse de doctorat effectuée à Princeton en 1960 sous la supervision de Norman Steenrod et David Buchsbaum, et dont le titre est *Functor Theory*.

Cependant, le texte de Freyd ne serait pas le seul dans le but de synthétiser les résultats catégoriels les plus importants. En 1965 apparaîtrait le texte *Theory of Categories* de B. Mitchell, qui pourrait être considéré comme une version beaucoup plus complète et ordonnée du texte de Freyd (qui, évidemment, apparaît dans la bibliographie de Mitchell). Nous reviendrons sur ce texte plus tard, bien que ça vaille le coup de comparer les principaux sujets des textes de Freyd et Mitchell.

Les deux textes commencent par un chapitre sur les concepts préliminaires (appelés «Fundamentals» chez Freyd et «Preliminaries» chez Mitchell). Les concepts qu'ils

étudient sont similaires, sauf que Freyd introduit les notions de «catégorie», de «foncteur» et de «transformation naturelle» déjà depuis l'introduction de son texte, pour que le chapitre de «Fundamentals» soit consacré presque entièrement à des concepts qui peuvent être caractérisés de façon fonctoriel : foncteurs contravariants, catégorie duale, sous-objets, kernels et co-kernels, et objets initiaux et finaux. Ces concepts lui permettront d'introduire dans le chapitre suivant (appelé «Fundamentals of Abelian Categories») les catégories abéliennes. Et dans les chapitres suivants il étudie quelques foncteurs spéciaux et sous-catégories (chapitre 3), certains «métathéorèmes» (chapitre 4) parmi lesquels il souligne la condition d'exactitude dans les catégories abéliennes, tandis que dans le chapitre 5 il examine les catégories de foncteurs. Dans les deux autres chapitres, Freyd étudie certaines propriétés des catégories de Grothendieck et la notion d'«extension» (chapitre 6) et les théorèmes d'immersion dans les catégories de Grothendieck (chapitre 7). Comme on peut le voir, le texte de Freyd se focalise particulièrement sur la notion de «catégorie abélienne» et sur les catégories de foncteurs. L'ordre de présentation des concepts catégoriels diffère considérablement des présentations contemporaines. En fait, beaucoup de notions fondamentales sont présentées dans les exercices. Ainsi, le concept d'adjonction et les théorèmes principaux associés à ce concept (encore le même théorème du foncteur adjoint qui constitue l'un des résultats fondamentaux du livre de Freyd) apparaissent dans la section des exercices du chapitre 3 de ce livre.

D'autre part, le texte de Mitchell est très semblable dans sa structure aux textes contemporains : dans le premier chapitre sont exposés tous les concepts catégoriels qui n'ont pas besoin de la fonctorialité : catégorie, kernels et co-kernels, objets initiaux et finaux, catégories exactes, produits et le chapitre termine par la définition des catégories abéliennes. Le chapitre 2 se concentre sur la notion de foncteur et sa relation avec les diagrammes, en plus de présenter les concepts de transformation naturelle, d'équivalence de catégories et de catégories de foncteurs. Également, Mitchell introduit les limites inductives et projectives. Les chapitres 3 et 4 sont consacrés respectivement aux théorèmes de complétude et d'immersion. Alors que les chapitres 5 et 6 sont exclusivement dédiés aux foncteurs adjoints : généralités et applications, respectivement. Les chapitres restants ont pour objet les extensions de foncteurs (chapitre 7), les satellites (chapitre 8), les catégories libres et polynomiales (chapitre 9) et les faisceaux (chapitre 10). À l'exception des chapitres 7 et 8 et de certains sujets des chapitres 3 et 4, le texte de Mitchell est très similaire au texte de MacLane de 1971, qui sera le paradigme de tous les textes ultérieurs de la théorie des catégories.

Il convient de noter la différence de rôles qu'a le concept d'adjonction dans le texte de Mitchell par rapport au texte de Freyd : le premier lui donne un rôle central, assez pour lui dédier 2 chapitres à ce concept. Alors que Freyd le présente de façon marginale. Cela est évidemment dû aux buts des deux textes : l'objectif du texte de Freyd est de présenter les catégories abéliennes et leurs propriétés et, les autres concepts catégoriels, ne sont qu'un support pour parvenir à cette fin. Par ailleurs, le texte de Mitchell aspire à être un compendium des concepts catégoriels fondamentaux. C'est pourquoi son organisation est beaucoup plus cohérente avec ce que l'on attendrait d'un texte de théorie des catégories. Le titre même du texte illustre d'autant plus ce propos.

Les textes de Freyd et Mitchell serviront d'inspiration pour l'apparition d'autres textes de théorie des catégories. À cet égard, *Kategorien und Funktoren* a été publié en 1966 par H.-B. Brinkmann & D. Puppe. La même année, il apparaît *Theorie der Kategorien* de M. Hasse et L. Michler. Les deux textes sont très basiques et ne présentent que quelques-uns des résultats catégoriels les plus importants. Néanmoins, le livre de Puppe & Brinkmann comporte de notions fondamentales comme celle d'adjonction.

En outre, ces deux textes, ainsi que ceux de Freyd et Mitchell, serviront de base au texte de B. Peregis *Kategorien und Funktoren*, publié en Allemand en 1969 et en Anglais (*Categories and functors*) en 1970. La structure de ce livre est très similaire à celle de Mitchell, bien que tous les concepts catégoriels de base soient présentés dans le premier chapitre : catégorie, foncteur, transformation naturelle, dualité, produit et coproduit, objets initiaux et finaux et, enfin, le lemme de Yoneda. Et le deuxième chapitre est exclusivement consacré aux foncteurs adjoints et la relation de ceux-ci avec d'autres notions telles que les limites inductives et projectives (en particulier, le théorème du foncteur adjoint, qui a une sous-section propre). Mais il faut souligner que dans ce livre est également donné un rôle important à la notion de «problème universel» et sa relation avec les foncteurs adjoints. Ce concept apparaît également dans les textes de Freyd et Mitchell, mais de manière très marginale. En fait, ils ne définissent pas ce que sont les problèmes et morphismes universels². Les deux autres chapitres ont pour objectif la présentation de l'algèbre universelle d'un point de vue catégoriel dans le chapitre 3 et, dans le chapitre 4, l'étude des catégories abéliennes.

2. On observera dans la section suivante comment les concepts de «propriété universelle» et de «morphisme universel» ont été adoptés dans le cadre catégoriel.

Comme on a vu, les années 60 ont été une grande décennie pour la théorie des catégories, car on pourrait dire qu'elle a acquis le statut d'une théorie autonome, indépendante d'autres théories mathématiques qui valident ses résultats ou ses objets d'étude. En conséquence de ce nouveau statut, est apparu le phénomène de la «catégorisation» de résultats qui n'ont pas eu leur origine dans la théorie des catégories. *Grosso modo* la catégorisation consiste à «traduire» ou à trouver un «analogue» dans le cadre de la théorie des catégories à certains concepts qui n'ont pas l'origine dans ce cadre théorique. C'est-à-dire, lui traduire dans le langage des catégories, des foncteurs et des transformations naturelles. Et, bien que l'origine de ce concept soit souvent attribuée à J. Baez & J. Dolan³ ou à L. Crane & D. Yetter⁴, on a vu ci-dessus que cette notion apparaissait déjà depuis l'article de Riguet [140]. En fait, il mentionne que :

Les insuffisances du langage ensembliste, et la supériorité du langage des catégories, deviennent manifestes lorsqu'après la lecture des structures fondamentales de Nicolas BOURBAKI on cherche à faire entrer, dans ce cadre, des structures locales comme la structure de variété différentiable par exemple. On est alors conduit à "catégoriser" la notion d'espèce de structure définie par N. BOURBAKI, puis à définir, en termes de catégorie, comme l'a fait C. EHRESMANN, la notion de structure locale ; obtenant ainsi une notion d'espèce de structure assez générale pour englober toutes les structures mathématiques actuellement connues.

Le processus de catégorisation peut réussir ou ne pas réussir, car il n'est pas toujours possible de réduire tout concept de mathématiques dans le cadre de la théorie des catégories (par exemple, il y a eu de nombreuses tentatives de catégoriser l'analyse mathématique, mais chacune de ces tentatives perd beaucoup de l'intuition de l'analyse mathématique ensembliste). Or, l'un des concepts propres de la théorie des structures de Bourbaki qui a subi un processus de catégorisation réussi est celui de «propriété universelle» qui, en fait, est devenu l'un des concepts fondamentaux de la théorie des catégories.

Cependant, aux fins de la présente thèse, ce n'est pas le seul concept «extra-categorial» qui a subi un processus de catégorisation, car l'importante notion de «correspondance de Galois» a également manifesté un processus similaire.

3. Baez, J., Dolan, J. *Categorification*. En : arXiv :math/9802029

4. Crane, Louis ; Yetter, David N. *Examples of categorification*. Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle Catégoriques, Tome 39 (1998) no. 1, p. 3-25

Ainsi, dans les sections suivantes on observera comment la notion de foncteur adjoint est étroitement liée à ces deux nouveaux concepts afin d'exposer trois grands contextes dans lesquels la notion d'adjonction apparaît de manière implicite. L'expression «contexte» est considérée ici comme un concept, un problème ou un domaine de connaissances mathématiques qui est consolidé par certains résultats mathématiques. Par exemple, la théorie des ensembles ZFC peut être considérée comme un «contexte mathématique», mais aussi un résultat concret comme la notion de «problème universel» peut également être pensée comme un contexte mathématique. Autrement dit, le «contexte» associé à un concept catégoriel est un arrière-plan, un *background*, qui n'a pas nécessairement été catégorisé.

En ce sens, les contextes à étudier sont associés à des hypothèses selon lesquelles le phénomène de l'adjonction était déjà présent dans trois grands résultats mathématiques et que ce n'était qu'une question de temps pour que l'adjonction émergera par elle-même. En premier lieu, on posera ces contextes, puis leur catégorisation, pour présenter ensuite les différentes hypothèses qui soutiennent que l'adjonction était «là-bas, bien avant l'adjonction elle-même». On analysera ensuite la force historique-épistémologique de ces hypothèses pour en tirer quelques conclusions. Ces contextes sont : les propriétés universelles, les correspondances de Galois et la compactification de Stone-Čech.

3.2 La compactification de Stone-Čech.

L'une des notions les plus importantes dans la topologie et l'analyse est celle-là de compacité. On peut affirmer que la notion de compacité généralise l'idée d'un sous-ensemble d'un espace euclidien. Étant donné que les espaces compacts peuvent être étudiés d'une manière finitiste (par sa définition), ils constituent un outil approprié pour étudier des espaces «grands» d'une manière finitiste au moyen des espaces compacts qui ressemblent à ces espaces grands. Si X est un espace topologique, une compactification est une technique de construction d'un espace compact X^* d'une manière telle que X est un plongement dans X^* .

La première caractérisation explicite d'une procédure pour compactifier des espaces topologiques a été faite par Tychonoff en 1930 dans son article *Über die topologische Erweiterung von Räumen*. Dans cet article Tychonoff a démontré deux théorèmes très importants. Le premier affirme que «tout produit d'espaces topologiques compacts est

compact», et le deuxième est le théorème de compacité qui affirme brièvement que «chaque espace complètement régulier est un sous-ensemble d'un espace compact.» Dans cet article, le premier théorème est démontré en utilisant des puissances de l'intervalle unité fermé, alors que dans son article de 1935 *Ein Fixpunktsatz* Tychonoff développe une preuve plus générale⁵. Cependant, Tychonoff ne présente pas réellement de démonstration de ce théorème, mais il affirme immédiatement qu'«On prouve ce théorème, mot par mot, comme dans le cas de la bicompatibilité⁶ du produit d'intervalles (fermés) de l'unité⁷» [ibid.]. C'est-à-dire en suivant les procédures de la démonstration de son théorème principal de l'article de 1930 [p.544].

Or, le théorème de compacité est énoncé dans le théorème II de l'article de 1930 (p.545) de la manière suivante :

Satz II. Ein Raum ist dann einer Teilmenge eines bikompakten topologischen Raumes homöomorph, wenn er vollständig regulär ist⁸.

Ce théorème a été pleinement développé dans l'article de Čech de 1937 *On Bicom-pact Spaces* qui est assez didactique puisque dans le Chapitre I il définit initialement les concepts d'espace topologique, d'une base ouverte d'un espace topologique, d'une application entre deux espaces topologiques, d'homéomorphisme, d'un espace de Kolmogoroff, d'un espace de Riesz, d'un espace de Hausdorff, d'un recouvrement d'un espace topologique et, finalement, il présente la définition d'un espace topologique bicom-pact. La formulation du théorème de compacité est faite au commencement du Chapitre II, où Čech affirme qu'étant donné n'importe quel espace de Tychonoff⁹ S il est toujours possible de construire la compactification $\beta(S)$.

Pour obtenir cette construction, il considère un espace complètement régulier S et l'intervalle unité $I = [0, 1]$. Alors, c'est possible de construire l'espace $\Phi = [0, 1]^S$. Tout

5. De fait, cet article contient la formulation exacte de ce théorème [p.772] : «Das Produkt von bikompakten Räumen ist wieder bikompakt». Le produit des espaces bicom-pacts est de nouveau bi-compact.

6. Un ensemble X est dit *bicom-pact* si toute partie infinie de X a un point d'accumulation complète.

7. Diesen Satz beweist man wörtlich so wie die Bikompaktheit des Produktes von Strecken.

8. Théorème II. Un espace est alors un sous-ensemble d'un espace topologique homéomorphe com-pacte s'il est complètement régulier.

9. Un espace topologique S est un espace de Tychonoff s'il est espace topologique complètement régulier et T_1 . C'est-à-dire, si S vérifie la propriété de séparation $T_{3\frac{1}{2}}$: si pour chaque point $s \in S$ et pour tout fermé $F \in S$ ne contenant pas s , il existe une application continue $f : S \rightarrow [0, 1]$ tel que $f(s) = 0$ et $f(x) = 1$ pour chaque $x \in F$.

de suite, il considère l'existence d'un ensemble T tel que¹⁰ $\text{Card}(T) = \text{Car}(\Phi)$. Et, pour chaque $t \in T$ on prend $I_t = I = [0, 1]$ et soit $R = \times_t I_t$. Par le premier théorème de Tychonoff, comme chaque I_t est un compact de Hausdorff, alors R est aussi un compact de Hausdorff. En partant de cet espace R , on définit la fonction $g : S \rightarrow S^* \subseteq R$ tel que $g(x) = \{f_t(x)\} \in R$. Et, il est possible de démontrer que cette fonction g est continue et, par conséquent, un homéomorphisme. Cet espace S^* (et, par conséquent, R) est d'une grande importance pour construire la compactification d'un espace complètement régulier S .

Particulièrement, telle compactification satisfait quatre propriétés [p.831] :

1. $\beta(S)$ est un espace topologique de Hausdorff compacte.
2. $S \subset \beta(S)$.
3. S est dense dans $\beta(S)$.
4. Chaque fonction bornée continue (*bounded continuous function*) f dans le domaine S peut être étendu au domaine $\beta(S)$.

Enfin, Čech affirme que l'adhérence de l'espace S^* par rapport à R accomplit les quatre propriétés. C'est-à-dire $\bar{S}^* = \beta(S)$.

Il est nécessaire de mentionner que la propriété 4 est très importante. Elle affirme que si H est un espace de Hausdorff compact et S est un espace complètement régulier, n'importe quelle fonction continue $f : S \rightarrow H$ peut être étendue (levée) d'une manière unique à la fonction continue $\beta(f) : \beta(S) \rightarrow H$. Čech démontre ensuite que la construction est unique sauf isomorphisme. De plus, il est possible d'étendre le résultat pour n'importe quel espace topologique X puisque Čech démontre que X détermine un espace topologique complètement régulier S .

Marshall Stone a aussi démontré ce théorème dans son article de 1937 *Applications of the Theory of Boolean Rings to General Topology* (qui sera d'une grande importance dans le §3.6 de la présente thèse). Cependant, sa formulation et démonstration sont différentes. Cela s'explique par le fait que Stone considère certains types de fonctions entre des espaces topologiques et certains anneaux de Boole, lesquels sont en effet espaces topologiques de Hausdorff compacts. La formulation de la compactification est consignée dans les théorèmes 78 et 79 de son article¹¹. Il est important de mentionner

10. Dans ce case, il suppose l'existence d'une fonction bijective $\varphi : T \rightarrow \Phi$ tel que $\varphi(t) = f_t \in \Phi$. L'existence de T est possible parce que φ c'est une fonction de choix.

11. Selon Fitzpatrick, un étudiant de R.L. Moore appelé Renke Gustav Lubben a démontré d'une

qu'aussi bien Čech que Stone démontrent : (i) étant donné un espace complètement régulier S , il existe une fonction $f : S \hookrightarrow \beta(S)$ qui est un plongement de S dans $\beta(S)$; si $\kappa(S)$ est d'autre compactification, alors $\kappa(S) \hookrightarrow \beta(S)$, c'est-à-dire, la compactification de Stone-Čech est la maximale sous l'ordre de compactification¹² de S . Cette dernière propriété sera d'une grande importance au moment d'analyser les problèmes universels.

Or, si on analyse en détail la propriété (4) qui caractérise la compactification de Čech, en premier lieu, qu'est-ce qui signifie qu'une fonction f est dans le domaine (*in the domain*) S ? Cela veut dire qu'elle est une fonction $f : S_1 \rightarrow S_2$ entre des espaces complètement réguliers. Par conséquent, la propriété (4) peut être exprimée de la manière suivante :

- 4' Si $f : S_1 \rightarrow S_2$ est une fonction continue entre espaces complètement réguliers, alors f peut être étendue à une fonction $f^* : \beta(S_1) \rightarrow \beta(S_2)$ entre des espaces topologiques de Hausdorff compacts.

Puisque f^* est complètement déterminé par la compactification β et la fonction f , il est possible d'écrire cette première fonction comme $\beta(f) : \beta(S_1) \rightarrow \beta(S_2)$. Il est facile de vérifier que pour n'importe quelle fonction identité d'un espace complètement régulier $1_S : S \rightarrow S$ il est satisfait que $\beta(1_S) = 1_{\beta(S)} : \beta(S) \rightarrow \beta(S)$ et, si $f : S_1 \rightarrow S_2$ et $g : S_2 \rightarrow S_3$ alors $\beta(g \circ f) = \beta(g) \circ \beta(f) : S_1 \rightarrow S_3$. Le caractère fonctoriel de β saute aux yeux. De fait, déjà dans le livre d'Eilenberg et Steenrod il est considéré que cette compactification est un foncteur covariant «on the category of completely regular spaces and continuous maps with values in the category of compact spaces and continuous maps» [52, p.278], bien qu'ils la dénomment comme compactification de Tychonoff¹³. Par conséquent, il est possible de considérer la compactification de Stone-Čech comme un foncteur covariant $\beta : \mathbf{CReg} \rightarrow \mathbf{CHaus}$ où \mathbf{CReg} est la catégorie

manière indépendante la compactification de Stone-Čech, bien que par la suite. Cela a été effectué dans son article *Concerning the decomposition and amalgamation of points, upper semi-continuous collections, and topological extensions*. Bien que parmi la bibliographie de son article, on trouve les articles de Čech et de Stone, et l'article a été publié en 1941, Fitzpatrick mentionne que «Professor F. B. Jones has informed me that Lubben presented his results on compactifications in a seminar at the University of Texas in the academic year 1931-32» [56, p.52].

12. Une étude extrêmement détaillée et profonde de la compactification de Stone-Čech peut se trouver dans les livres de Johnstone [84] et Walker [164].

13. C'était une question du temps pour obtenir cette identification fonctorielle en vertu de qu'Eilenberg et MacLane ont été intéressés à étudier les propriétés des groupes topologiques compacts [42] et Steenrod avait étudié les groupes d'homologie dérivés des espaces métriques compacts dans son article de 1949 *Regular Cycles of Compact Metric Spaces*.

des espaces complètement réguliers et **CHaus** est la catégorie des espaces compacts de Hausdorff. En effet, Eilenberg et Steentod formulent dans son Théorème 9.10 que le foncteur $\beta : \mathcal{A}_N \rightarrow \mathcal{A}_C$ est un foncteur covariant, où \mathcal{A}_N et \mathcal{A}_C sont les catégories des paires d'espaces normaux¹⁴ et des paires d'espaces compacts, respectivement [52, p.282]. Ce foncteur β a été bien connu par Isbell [78] comme un cas particulier d'un foncteur $H : \mathbf{Top} \rightarrow \mathcal{C}$ où \mathcal{C} est une catégorie topologique enrichie.

Compte tenu de ce qui précède, est-il possible d'établir une adjonction au foncteur β ? Et, dans l'affirmative : quel était le contexte pour cette adjonction? La réponse à la première question est affirmative : il existe l'adjoint à droite de la compactification de Stone-Čech. Particulièrement, en 1965 Linton reconnaissait que le foncteur β est, en effet, l'adjoint à gauche du foncteur d'oubli¹⁵ $U : \mathbf{CHaus} \hookrightarrow \mathbf{CReg}$ [109, p.90]. Selon MacLane [112, p.60], Kennison a été l'un des premiers mathématiciens pionniers dans la recherche du cas inverse, c'est-à-dire l'adjonction par rapport au foncteur β , dans son article de 1964 [95]. Kennison considère la catégorie **CReg** et le foncteur β comme des cas particuliers d'une sous-catégorie et d'un foncteur réflexives, respectivement. Ces derniers concepts ont été introduits de la manière suivante dans la section d'exercices du Chapitre 3 du livre de Freyd¹⁶ de 1964 [58, p.79] :

Soit \mathcal{A} une sous-catégorie de \mathcal{B} . Étant donné un objet $B \in \text{Ob}(\mathcal{B})$ on définit sa *réflexion* dans \mathcal{A} comme un objet $\bar{B} \in \text{Ob}(\mathcal{A})$ qui est la «meilleure approximation» de B par le morphisme (*map*) $B \rightarrow \bar{B}$. Ou en d'autres termes, pour chaque $A \in \text{Ob}(\mathcal{A})$ et pour chaque morphisme (*map*) $B \rightarrow A$ il n'existe qu'un *seul* morphisme (*map*) $(\bar{B} \rightarrow A) \in \text{Hom}(\mathcal{A})$ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} B & \longrightarrow & \bar{B} \\ & \searrow & \downarrow \\ & & A \end{array}$$

14. Il est important de mentionner que tout espace normal (T_4) est un espace complètement régulier.

15. Pour être précis, Linton mentionne les foncteurs $U^* : \mathbf{CHaus} \rightarrow \mathbf{Ens}$ et $\beta^* : \mathbf{Ens} \rightarrow \mathbf{CHaus}$ et il affirme que $\beta^* \dashv U^*$. Cependant, l'adjonction antérieure est réductible à l'adjonction $\beta \dashv U$ dans la mesure que $\beta^* = \beta \circ F$, où $F : \mathbf{Ens} \rightarrow \mathbf{Top}$ est le foncteur libre qui munit à chaque ensemble la topologie discrète.

16. Il faut signaler que Freyd définit beaucoup de concepts fondamentaux dans ses sections d'exercices. Particulièrement, dans la section correspondant au troisième chapitre, il définit les concepts d'équivalence de catégories, des limites inductives et projectives, des foncteurs adjoints et ses transformations, et spécialement il formule le célèbre théorème du foncteur adjoint (qu'on étudiera dans le chapitre suivant de la présente thèse).

Les réflexions sont uniques sauf isomorphisme. Si chaque objet dans $\text{Ob}(\mathcal{B})$ a une réflexion dans $\text{Ob}(\mathcal{A})$ on dit que \mathcal{A} est une sous-catégorie *réflective*. Dans ce cas on obtient un foncteur $R : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ qui assigne à chaque objet $B \in \text{Ob}(\mathcal{B})$ une réflexion dans $\text{Ob}(\mathcal{A})$. Et R est dénommé un *réflecteur*. Selon Isbell, la théorie des réflexions et coréflexions a été développée par Freyd dans sa thèse de 1960 [80, p.35]. C'est pourquoi il est plausible de prendre comme point de référence son livre de 1964. De plus, Freyd mentionne que la notion duale d'une réflexion est celle-là de coréflexion. Et, ensuite il dit que

Among the best known examples of reflective subcategories are : the category of compact spaces in the category of normal Hausdorff spaces ; the category of abelian groups in the category of all groups ; the category of torsion-free groups in the category of abelian groups ; the category of complete metric spaces in the category of all metric spaces and uniformly continuous maps. The category of torsion groups in the category of abelian groups is an example of a coreflexive subcategory [58, p.79].

Comme on a déjà mentionné, Freyd définit le concept d'une paire de foncteurs adjoints dans la section d'exercices, particulièrement dans le §G. Cette définition est similaire à la définition de Kan. Après avoir présenté sa définition, Freyd mentionne que, parmi les exemples d'une paire de foncteurs adjoints on se trouve les foncteurs réflecteur et inclusion :

Let \mathcal{A} be a reflective subcategory of \mathcal{B} . Then its reflector is the left-adjoint of the inclusion functor $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$. Indeed, a subcategory is reflective iff its inclusion functor has a left left-adjoint, and is coreflexive iff its inclusion functor has a right-adjoint [58, p.81].

Quelques auteurs contemporains ont l'habitude de prendre la deuxième affirmation de la dernière citation comme la définition d'une catégorie réflective et, c'est la manière comme Kennison procède¹⁷, qui affirme que «The most famous example of a reflector on **Top** is a probably the Stone-Čech compactification [95, p.305].»

Les notions de réflexion et de coréflexion sont d'une grande importance dans la topologie puisque beaucoup de constructions dans ce domaine sont des cas particuliers

17. A category \mathcal{B} is *reflective in* \mathcal{A} if \mathcal{B} is a full subcategory of \mathcal{A} such that the injection functor from \mathcal{B} into \mathcal{A} has an adjoint $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$. In this case, F is the *reflective functor* (or *reflector*) associated with \mathcal{B} [95, p.303].

d'un de ces concepts [71, pp.261-262] : des extensions de domaines ou de propriétés, des formations de quotients, des modifications de la topologie d'une structure topologique sans changer l'ensemble sous-jacent, et des combinaisons de ces constructions. Par conséquent, la définition de Freyd est un outil de synthèse puissant qui permet de décrire et de développer des propriétés des dernières constructions. Donc, les sous-catégories et les foncteurs réflecteurs sont des concepts de grande importance pour la topologie et, spécialement pour la topologie catégorielle.

Or, bien que la compactification de Čech-Stone a été reconnue depuis le début des années 50's comme qu'un foncteur $\beta : \mathbf{CReg} \rightarrow \mathbf{CHaus}$, on peut affirmer qu'a été Freyd (autour de 8 ans plus tard) le premier à reconnaître *explicitement* l'adjonction $\beta \dashv U$. Cependant : est-il possible de reconnaître cette adjonction avant la formulation de Freyd? Ou dit autrement : une préfiguration de cette adjonction existe-t-il avant le livre de Freyd et, encore plus, avant l'article de Kan? Selon Herrlich et Strecker, la réponse est oui. Ils manifestent que, version de la compactification de Čech de 1937 et la construction de Kakutani de 1944 «contains in fact the *core* of all later adjoint functor constructions» [71, p.277]. Avant d'analyser l'affirmation qui précède, il faut d'étudier la construction de Kakutani à laquelle ils font référence.

L'écrit de Kakutani intitulé *Free Topological Groups and Infinite Direct Product Topological Groups* est un bref article qui a pour thème central l'étude et la simplification de la caractérisation des groupes topologiques libres présentée par Markoff en 1941. Les groupes libres étaient déjà bien connus depuis le milieu des années 20's et ils ont été amplement étudiés des années 30's. Cependant, l'extension de la propriété d'«être libre» pour des groupes topologiques a fallu de nombreuses années pour être développée. L'article de Markoff de 1941 est amplement reconnu pour être le premier à introduire ces nouveaux objets mathématiques ([5], [138], [87], [63] y [141]). Selon Arkhangel'skii et Tkachenk, Markoff introduit ce concept dans un bref article de quatre pages publié en 1941, mais il a développé une construction plus complète dans un article¹⁸ de 1945.

18. Les articles de Markoff ont été écrits en Russe et, bien qu'il existe une version en anglais de l'article de 1945, c'est un très rare document. Pour cette raison, on fera référence dans la présente thèse aux articles de Markoff et de Graev par les articles de Kakutani et [87] Nakayama [129], mais spécialement des commentaires historiques du Chapitre 7 du livre d'Arkhangel'skii et Tkachenko [5] et de la très précieuse et très complète analyse historique que Tkachenko [160] fait du concept de groupe topologique. Les articles de Markoff sont les suivants :

Markoff, A. A. (1941). On free topological groups, Dokl. Akad. Nauk SSSR 31, pp. 299–301.

Markoff, A. A. (1945). On free topological groups, In : Topology and Topological Algebra, Translation

Dans ce dernier article Markoff développe une théorie des groupes topologiques (appuyé sur son article de 1941) avec l'objet de démontrer le théorème qui affirme que pour n'importe quel espace de Tychonoff X il existe un sous-espace fermé $F(X)$ d'un groupe topologique homéomorphe à $F(X)$.

Dans l'article de 1941 Markoff démontre qu'il existe un plongement (*embedding*) entre n'importe quel espace complètement régulier X et un sous-espace fermé $F(X)$ d'un groupe topologique. La construction complète¹⁹ de ce plongement elle est effectuée dans l'article de 1945. Le sous-espace $F(X)$ est également un groupe topologique et, est dénommé par Markoff comme le groupe topologique *libre* sur X :

The word *free* appears in the name of the group $F(X)$ due to the fact that Markov's construction makes X to be the set of free algebraic generators of the group $F(X)$, so that $F(X)$ is algebraically a free group over X . In spite of the algebraic "simplicity" of $F(X)$, the topological nature of this group is fairly complicated and its investigation is still far from complete [160, p.1033].

Markoff définit d'abord ce qui est un groupe topologique libre et tout de suite il démontre l'existence de ceux-ci. Ce dernier (la démonstration de l'existence) est la partie la plus laborieuse de son article de 1945. De fait, Kakutani simplifie énormément cette procédure, mais sa démonstration n'est pas constructive. Une définition assez proche de celle-là de l'article Markoff de 1941 est celle qui propose Nakayama. Cela a la même structure que la définition de Markoff, cependant elle est plus générale parce que Markoff considère des espaces uniformes alors que Nakayama part des espaces topologiques complètement réguliers. La définition de Nakayama est la suivante [129, p.471] :

Let R be a completely regular space. The free topological group F generated by R is characterized by the properties :

- i) R is a subspace of F ,

Series 1, 8 (1962), pp. 195–272. American Math. Society. Russian original in : *Izv. Akad. Nauk SSSR* 9 (1945), pp. 3–64.

Les articles de Graev sont les suivantes :

Graev, M. I. (1948). Free topological groups, In : *Topology and Topological Algebra*, Translations Series 1, 8 (1962), pp. 305–364 (American Mathematical Society). Russian original in : *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* 12 (1948), pp. 279–323.

Graev, M. I. (1950). Theory of topological groups I, *Uspekhi Mat. Nauk* 5, pp. 3–56.

19. Selon Tkachenko [160, p.1033], cette construction est assez compliquée.

- ii) R generates F algebraically,
- iii) Given a continuous mapping φ of R into any topological group, there exists a continuous homomorphism Φ of F into G which is an extension of the mapping φ .

Kakutani part de cette définition et il démontre dans son Théorème 1 que tels groupes topologiques libres existent effectivement. C'est-à-dire, étant donné un espace complètement régulier R il existe un espace F qui satisfait les trois dernières propriétés [87, p.596]. De plus, il formule dans son Théorème 4 le cas particulier lorsque R est un espace uniforme. Il est important de mentionner que la propriété (iii) est celle qui revêt une plus grande importance dans la définition antérieure. De fait, dans l'article de 1945 Markoff remarque que cette propriété est celle qui caractérise la *condition d'existence* qui doit satisfaire un groupe topologique libre généré par un espace complètement régulier [120, p.6] [160, p.1092].

Il faut remarquer quelque chose d'important en ce qui concerne la définition de la propriété d'«être libre» pour les groupes topologiques de Markoff, Nakayama et Kakutani par rapport de la même propriété à l'intérieur de l'algèbre. Comme on a dit, les groupes libres ont été étudiés dans les années 20's, particulièrement par Nielsen, Schreier et Reidemeister²⁰ mais ce concept avait été déjà introduit par Walther von Dyck en 1882 sans y donner de nom, dans son article *Gruppentheoretische Studien*. C'est Nielsen dans son article de 1924 qui étudie amplement ce concept et il le nomme groupe libre (*freie Gruppe*). Sa caractérisation est constructive puisqu'il présente la méthode classique pour construire un groupe libre, qui est présent dans presque tous livres d'algèbre moderne : on part d'un ensemble générateur X , des «symboles inverses» sont ajoutés à cet ensemble pour chaque élément $x \in X$, tout de suite l'opération est définie dans ce nouvel ensemble étendu X^* comme une concaténation réduite de symboles (en incluant les éléments d' X). On ajoute finalement un nouveau symbole qui joue le rôle de neutre de l'opération.

20. Nielsen, J. (1917) *Die Isomorphismen der allgemeinen unendlichen Gruppe mit zwei Erzeugenden*. Mathematische Annalen 78 (1) : 385–397.

Nielsen, J. (1924) *Die Isomorphismengruppe der freien Gruppen*. Mathematische Annalen 91 (3) : 169–209.

Schreier, O. (1928) *Die Untergruppen der freien Gruppen*. Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg 5 : 161–183.

Reidemeister, K. (1932) *Einführung in die kombinatorische Topologie*. Springer Fachschriften Wiesbaden 1951.

Compte tenu de ce qui précède, il est important de remarquer que dans la construction et les propriétés d'un groupe libre étudiées dans les années 20's et 30's, il n'existe pas une propriété similaire à la (iii) de la caractérisation d'un groupe topologique libre par Markoff. On met l'accent sur cela pour montrer comment la définition de Markoff suppose un point d'inflexion dans ce que par la suite on comprendra comme un problème universel, concept qu'on analysera en détail dans le § 3.3 de la présente thèse. Cependant, on peut mentionner que les rudiments de ce concept se trouvent dans la propriété (iii) de Markoff que, d'une manière insoupçonnée, elle est étroitement liée avec la compactification de Stone–Čech. Le premier à remarquer telle relation a été Kakutani parce que dans le §2 de son article il fait une présentation de la compactification que Čech expose dans son article de 1937. Mais la présentation de Kakutani a une structure très similaire à la définition du groupe libre par Nakayama (et, par conséquent, par Markoff). Et, tout de suite, dans son Théorème 1, il présente la même définition de Nakayama. Apparemment, Kakutani utilise sa présentation de la compactification comme d'outil de procédure pour démontrer l'existence d'un groupe topologique libre. Cela peut s'expliquer par deux raisons : a) la démonstration de Markoff (comme on a mentionné en haut) est assez longue et compliquée ; b) dans la démonstration de Kakutani le théorème de compactification n'est pas utilisé comme un résultat intermédiaire : seulement le théorème de compactification est formulé. Selon les mots de Kakutani [87, p.595] :

The purpose of this note is to give a simple and direct proof to the existence theorem of A. Markoff. Our method of proof is based on the use of an infinite direct product topological group, and will make it possible to obtain many other known and new results concerning free topological groups almost immediately.

S'il met la formulation de la compactification et la formulation du théorème d'existence, côte à côte, on obtient la Table 3.1.

Les similitudes sautent aux yeux. D'abord, les conditions (1) et (4) sont identiques sauf dans l'espace qui contient à l'espace complètement régulier R . Mais la similitude qui revêt un plus grand intérêt est la correspondante à la condition (iii) de Nakayama : les conditions (3) et (6) sont «structurellement» identiques (dans des termes de sa forme). En outre, les conditions (2) et (5) sont propres de la spécificité des objets qu'interviennent. Par ailleurs, il faut mentionner que dans son article de 1945 Markoff

Compactification de Stone-Čech	Théorème 1. Existence de groupes topologiques libres
For any completely regular topological space R , there exists a compact Hausdorff space \bar{R} with the following properties :	For any completely regular topological space R , there exists a topological group F with the following properties :
(1) R is a subspace of \bar{R} ,	(4) R is a subspace of F ,
(2) R is dense in \bar{R} ,	(5) R generate F algebraically,
(3) for any continuous mapping $\varphi(x)$ of R into any compact Hausdorff space S , there exists a continuous mapping $\Phi(x)$ of \bar{R} into S such that $\varphi(x) = \Phi(x)$ on R .	(6) for any continuous mapping $\varphi(x)$ of R into any topological group G , there exists a continuous homomorphism $\Phi(x)$ of F into G such that $\varphi(x) = \Phi(x)$ on R .

TABLE 3.1 – Compactification et théorème d’existence.

procède de la même manière que Nakayama, puisqu’il étend son résultat de 1941 aux espaces complètement réguliers.

3.3 La notion de «propriété universelle».

En 1947, quelques mois après avoir terminé son doctorat à Princeton, Pierre Samuel écrit un article intitulé *On universal mappings and free Topological groups* [141]. Cet article a été envoyé presque en même temps qu’un autre article où il présentait les résultats de sa thèse de doctorat²¹. Dans le premier article, Samuel introduit un concept qui jouera un rôle clé dans les mathématiques, mais qui le fera de manière insoupçonnée, dans la florissante théorie des catégories : le concept d’*application universelle*. Cet article est assez court (environ 8 pages), puisqu’il synthétise de nombreux résultats antérieurs dans le but d’introduire ce nouveau concept, qui est présenté, comme l’auteur l’admet lui-même, de manière axiomatique. Cependant, dans l’introduction, il manifeste la motivation pour intégrer les applications universelles [p.591] :

21. Sa thèse est intitulée *Ultrafilters and Compactification of Uniform Spaces*. Celle-ci fut réalisée sous la direction d’Oscar Zariski, puis publiée dans un article en 1948 ([142]) L’article de la thèse fut reçu par les éditeurs le 8 mai 1947, alors que son article sur les applications universelles a été fait le 12 août 1947.

It has been observed that constructions so apparently different as Kronecker products, extension of the ring of operators of a module, field of quotients of an integral domain, free groups, free topological groups, completion of a uniform space, Čech compactification enter in the same frame. We intend in this paper to explain a rather general process of construction which may be applied to most of the examples quoted above.

L'observation à laquelle Samuel fait référence dans une note, correspond aux «manuscrits non publiés de N. Bourbaki». Et, bien qu'il affirme que cette nouvelle notion transversale est implicitement présente dans des résultats assez différents entre eux, on peut prendre comme point de départ l'article de Markoff de 1945 dans lequel les groupes topologiques libres sont caractérisés par une propriété universelle présentée de façon particulière pour leur construction²² : par cette propriété, il définit les groupes topologiques libres de Hausdorff sur des espaces topologiques complètement réguliers. Il montre ensuite le mode de construction de ces groupes topologiques et démontre leur unicité *sauf isomorphisme*. La construction que Markoff fait est, essentiellement, très similaire à celle pour construire un groupe libre à partir d'un ensemble donné²³, bien que le coeur de sa construction réside dans l'adjonction d'une topologie appropriée aux groupes libres construits à travers un espace topologique complètement régulier donné.

Kakutani simplifie en grande partie la démonstration vaste et compliqué de Markoff (basé sur le travail de Nakayama [129]) en appréciant que la procédure pour la construc-

22. On a vu que l'article de Markoff est *On free Topological groups* ([120]), qui développe l'idée *in extenso* présentée dans un autre article homonyme de 1941 ([119]), et bien que les deux documents soient entièrement en russe, ils ont été rapidement propagés, en grande partie grâce aux articles de Nakayama [129] et Kakutani [87].

23. Cette construction était déjà connue depuis la publication du célèbre article de von Dyck en 1882, intitulé *Gruppentheoretische Studien* [34]. Bien qu'il le fasse dans un cadre plus géométrique que l'habituel (donc il fait référence au «polygone fondamental» - *Fundamentalpolygon* - au lieu du groupe F qui donne le nombre de ce polygone), la construction de von Dyck est essentiellement la même que de nos jours : étant donné un ensemble S , tous ses éléments $x \in S$ sont considérés comme des symboles formels ; puis, pour chaque symbole x un symbole x^{-1} , en supposant qu'il n'est pas dans S . L'ensemble $T = S \cup S^{-1}$ a donc été construit où S^{-1} est l'ensemble des symboles «inverses» de S . Ensuite, l'ensemble C de toutes les chaînes finies de symboles de T , est construit. Deux de ces chaînes seront équivalentes si on peut passer de l'une à l'autre, en enlevant ou en mettant, peu importe la position, des chaînes de la forme xx^{-1} ou $x^{-1}x$. Ceci définit un rapport d'équivalence R . Notre groupe libre F est alors défini comme M/R .

D'autre part, c'est Nielsen qui en 1924 [130] appelle pour la première fois ce groupe F sous le nom de «groupe libre» (*Freien Gruppen*), étudiant certaines des propriétés de ce groupe par rapport à d'autres sous-groupes d'un groupe donné, dont F est aussi un sous-groupe.

tion d'un espace topologique libre de Hausdorff peut être effectuée de manière similaire au processus de compactification de Čech [87]. Cette construction de Kakutani est, en substance, la présentation de Samuel²⁴. Cependant, alors que le premier n'aborde que l'exposition d'un problème particulier (la construction d'un groupe topologique libre), le second voit au-delà et observe qu'il y a quelque chose sous-jacent à la construction de Markoff-Nakayama qui se trouve également dans d'autres résultats mathématiques pertinents. Cela constitue un saut qualitatif, puisque Samuel effectue un processus d'abstraction de plusieurs propriétés singulières, montrant le noyau commun de celles-ci.

Le théorème fondamental dans l'article de Kakutani (qui, puis Markoff reprendra dans le théorème 1 de son article de 1945 [120, pp.7 et 59]), affirme ce qui suit :

Theorem 1. For any completely regular space R , there exists a topological group F with the following properties :

- a) R is a subspace of F .
- b) R generates F algebraically.
- c) for any continuous mapping $\varphi(x)$ of R into any topological group G , there exists a continuous homomorphism $\Phi(x)$ of F in G such that $\Phi(x) = \varphi(x)$ on R [87, p.596].

L'idée de la démonstration de (a) et (b) est de prendre un groupe approprié G , qui est le produit de groupes topologiques de Hausdorff générés par R . Kakutani montre que R est un sous-espace de G et puis considère le sous-groupe libre F de G . Cette partie constitue la première partie de la démonstration : l'*existence* du groupe topologique libre. La deuxième partie, effectuée au point (c), consiste à démontrer l'*unicité* d'un tel groupe topologique libre. Avant d'examiner la présentation de Samuel et d'analyser la signification des conditions (a)-(c) de Kakutani-Markoff, il est nécessaire d'étudier la construction sur laquelle Kakutani s'est basée pour élaborer son schéma de démonstration.

Comme on a indiqué ci-dessus, ce schéma est essentiellement basé sur le théorème de compactification de Stone-Čech. Et, il faut aussi rappeler que celui-ci, en plus de la construction d'un groupe libre, est une des constructions qui, pour Samuel, partagent

24. Il faut souligner que les deux démonstrations sont réalisées de manière indépendante. En effet, Samuel lui-même note à la fin de son article que l'examineur de celui-ci lui a indiqué que Kakutani «gives substantially the same proof of Markoffs Theorem as I do» [141, p. 598]. De même, que le résultat de Nakayama est un cas particulier de sa méthode d'application universelle.

une même structure ou cadre commun (*frame*). Comme il est bien connu, le théorème de compactification, fournit une technique pour construire un espace Hausdorff compact $\beta(X)$, étant donné un espace topologique X arbitraire²⁵. Ainsi, dans l'article de Čech, il considère que, étant donné tout espace topologique complètement régulier S , et si $\beta(S)$ est un espace topologique qui satisfait les propriétés suivantes :

- (1) $\beta(S)$ is a bicomact Hausdorff space, (2) $S \subset \beta(S)$, (3) S is dense in $\beta(S)$ (i.e. the closure of S in the space $\beta(S)$ is the whole space $\beta(S)$), (4) every bounded continuous function f may be extended to the domain $\beta(S)$ (i.e. there exists a continuous function φ in the domain $\beta(S)$ such that $\varphi(x) = f(x)$ for every $x \in S$ [29, p.831].

Compte tenu de cette affirmation et de ce qui est indiqué dans Table 3.1, on peut voir l'énorme similitude entre cette proposition et le théorème 1 de Kakutani. Les conditions (2) et (1) affirment de façon analogue la même chose que s'exprime dans les conditions (a) et (b) de Kakutani, respectivement. En d'autres termes, ces deux conditions caractérisent l'*existence* de la compactification de S . Par ailleurs, la similitude entre les conditions (4) et (c) des deux résultats est également remarquable. Ainsi, si $F(R)$ est le groupe topologique libre construit sur R et si T est n'importe quel espace de Hausdorff compact, ces deux dernières conditions peuvent être exprimées dans les diagrammes suivants :

Groupe topologique libre	Compactification de Stone-Čech
$ \begin{array}{ccc} R^c & \longrightarrow & F(R) \\ & \searrow \varphi & \downarrow \Phi \\ & & G \end{array} $	$ \begin{array}{ccc} S^c & \longrightarrow & \beta(S) \\ & \searrow f & \downarrow \varphi \\ & & T \end{array} $

Un diagramme similaire peut être effectué pour représenter une des conditions dans la construction d'un groupe libre, sans annexer la topologie.

25. On a vu que ce résultat est implicitement mentionné dans l'article de Tychonoff de 1930 *Über die topologische Erweiterung von Räumen* ([161]), bien qu'il ait été popularisé grâce aux versions explicites de celui-ci données par Čech et Stone en 1937 ([29] et [153], respectivement). Alors que la démonstration de Tychonoff est un peu plus restrictive (car elle montre la compactification pour un espace topologique complètement régulier) et ne prouve pas son unicité, les démonstrations de Stone et Čech se généralisent à des espaces topologiques quelconques, dans la mesure où il est possible de définir un espace topologique complètement régulier, au moyen d'un espace topologique arbitraire.

3.3.1 La définition de Samuel.

Comme Samuel l'exprime au début de son article, les deux exemples ci-dessus, avec d'autres bien connus à l'époque (les produits de Kronecker, l'extension de l'anneau d'opérateurs d'un module, le corps de quotients d'un domaine d'intégrité et la complétion d'un espace uniforme) ont un «cadre» (*frame*) commune. On a déjà été observé que les résultats de Kakutani-Markoff et de Stone-Čech sont en effet très similaires. La question que Samuel pose est donc, en quoi consiste une telle similitude ? La réponse qu'il donne est, essentiellement, la suivante : ce sont tous des cas particuliers de *problèmes universels*, qui sont appelés ainsi parce que ce type de problèmes sont résolus par l'incorporation d'*applications universelles*. L'introduction de celles-ci se fait de manière axiomatique, mais pour pouvoir le faire, il faut considérer les concepts bourbakistes de *structure*, *type de structure* et *isomorphisme entre structures*, qui étaient déjà connus depuis le *Fascicule de résultats* de la théorie des ensembles de Bourbaki, écrit en 1939 [15], bien que peu à peu, certains de ces concepts ont changé au fil du temps, ou bien des concepts supplémentaires ont été annexés, jusqu'à sa version formalisée et rigoureuse exposée dans le dernier chapitre du livre de théorie des ensembles, dans son édition de 1957. C'est ainsi que bon nombre des documents qui feraient partie de cette dernière version, bien qu'ils circulaient en tant que rédactions internes du groupe Bourbaki, ne virent pas la lumière sur la communauté mathématique mais jusqu'à la publication des premiers livres dans lesquels étaient compilées les versions finales de ces rédactions. C'est à ces rédactions que Samuel fait allusion lorsqu'il se réfère aux dits «manuscrits non publiés par N. Bourbaki».

Ainsi, d'un point de vue bourbakiste simplifié, une structure est une donnée d'une série de propriétés dans un ensemble de base. On peut dire que ce sont là les propriétés structurelles fondamentales qui déterminent une structure. Si deux ensembles différents possèdent le même ensemble de propriétés, alors on dit que les deux ensembles ont le même type de structure. Par exemple, deux ensembles A et B auxquels sont associées deux opérations bien définies, une pour chaque ensemble, de sorte que les deux opérations soient associatives, et qu'il existe des éléments neutres et inverses pour les deux opérations, alors, on peut affirmer que, A et B possèdent la structure de groupe ou, ce qui est la même chose, que les deux sont des groupes. Dans ce cas, la structure de groupe est un *type de structure*, qui peut différer du type de structure d'anneau, du corps, d'espace topologique, etc. Pour simplifier, Samuel indique un type de structure pour S , T , etc., laissant entendre que ce sont des types de structures différents et, un ensemble a

un type de structure T (qu'il appelle un T -ensemble), ce n'est pas la même chose que si le *même* ensemble avait un type de structure S . Enfin, les isomorphismes pour la structure T , par exemple, seront appelés T -isomorphismes. Cependant, ces isomorphismes sont très restrictifs, car pas nécessairement tous les T -ensembles sont isomorphes les uns des autres : Par exemple, il est clair que dans tout l'univers des groupes, il n'est pas vrai que compte tenu de deux groupes *arbitraires*, ceux-ci sont isomorphes les uns des autres. Ensuite, il est nécessaire d'élargir la définition de T -isomorphisme, à une application plus générale, de sorte qu'elle permette de lier, deux T -ensembles arbitraires. Et, une telle généralisation constitue la notion de T -application. Sa définition est ce qu'on pourrait supposer : étant donné une paire E_1 et E_2 de T -ensembles, une famille d'applications de E_1 est définie à E_2 , telles que les conditions suivantes sont remplies²⁶ :

- A_1 . Chaque T -isomorphisme est une T -application.
- A_2 . Si $f : E_1 \rightarrow E_2$ y $g : E_2 \rightarrow E_3$ sont des T -applications, alors la composition $g \circ f : E_1 \rightarrow E_3$ est une T -application.
- A_3 . Une T -application $f : E_1 \rightarrow E_2$ est un isomorphisme si et seulement si'il existe la T -application inverse f^{-1} .

Dans une certaine mesure, la notion de T -application est très similaire à celle de morphisme entre objets d'une même catégorie, puisque si T est le type de structure de groupe, les T -applications sont les homomorphismes de groupes, qui sont les morphismes dans la catégorie **Grp**. En fait, l'idée de T -application a, pour Samuel, une place aussi importante dans son article, de la même manière que les morphismes dans la définition d'une catégorie, dans l'article d'Eilenberg et MacLane de 1945. Cela se voit dans la mesure où la plupart de ses définitions et constructions ultérieures reposent, en fin de compte, sur le concept de T -application : par la suite, il caractérise ce qui est une structure *induite* par une autre structure ; et puis définit le produit cartésien entre des structures du même type T . Les deux descriptions sont faites par les T -applications.

Avec tout l'échafaudage ci-dessus, Samuel peut déterminer avec précision ce qu'est l'*approche* et la *solution* d'un problème d'application universelle :

Statement and solution of the problem of universal mappings. Given two kinds of structures S and T , suppose we have defined the T -mappings, and also mappings on S -sets into T -sets, called the $(S - T)$ -mappings, denoted by greek letters, and satisfying :

²⁶. «Axiomes», dans la présentation de Samuel [141, p. 591].

$(S - T)_1$. The composite mapping $f \circ \phi$ of an $(S - T)$ -mapping ϕ and of a T -mapping is an $(S - T)$ -mapping.

$(S - T)_2$. The product mapping of a family of $(S - T)$ -mappings is an $(S - T)$ -mapping [141, pp.592-593].

Si les T -applications peuvent être considérées comme des «morphisme» entre structures d'un même type, les $(S - T)$ -applications le sont, mais entre structures différentes. Ce sont donc des applications *inter-structurelles*. On a ainsi une généralisation de la notion d'application. Et, ce degré de généralité est déterminé par la première des conditions précédentes qui définissent ces nouvelles applications : les applications *inter-structurelles* «absorbent» les applications *intra-structurelles*, par la composition. Samuel explique que ce nouveau type d'application existe, à condition que la structure T vérifie les conditions de : i) posséder T -applications, ii) soit conforme aux axiomes de clôture²⁷, et iii) pouvoir toujours faire des produits cartésiens. Avec ce nouveau type d'application *inter-structurelle*, Samuel peut définir ce qu'est un «problème d'applications universelles» (*problem of universal mappings* ou, «problème U», de la manière suivante :

(...) given any S -set E to find a T -set F_0 and an $(S - T)$ -mapping ϕ_0 of E into F such that :

U_1 . Every $(S - T)$ -mapping ϕ of E into any T -set has the form $\phi = f \circ \phi_0$ where f is a T -mapping of F_0 into F [141, p.593].

Ceci est exprimé par le théorème de compactification de Stone-Čech et le théorème de Kakutani-Markoff, mais appliqué à des structures plus générales : étant donné la S -structure E , on demande i) *construire* une nouvelle structure F_0 d'un type différent (une T -structure) et ii) *déterminer* l'application *inter-structurelle* ϕ_0 qui permet une telle construction, de sorte que si F est n'importe quelle autre T -structure, le diagramme

27. Samuel définit les conditions de clôture avant l'introduction des produits cartésiens, comme suit [141, p.592] :

If $E' \subset E$ is capable of an induced structure we shall say that E' is *T-closed*. We suppose that the following axioms hold :

S_1 . A subset of E composed of all elements where a family of T -mappings takes the same value is *T-closed*.

S_2 . Any intersection of *T-closed* sets is *T-closed*.

ci-dessous commute :

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\phi_0} & F_0 \\ & \searrow \phi & \downarrow f \\ & & F \end{array}$$

Si un tel F_0 existe, alors la propriété de clôture de $\phi_0(E) \subset F_0$, doit être respectée, donc si l'on considère la variation suivante du diagramme ci-dessus :

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\phi_0} & \phi_0(E) \\ & \searrow \phi & \downarrow f \\ & & F \end{array}$$

Alors, si $f, g : \phi_0(E) \rightarrow F$ on a $f = g$. Ce dernier est ce que Samuel a appelé la condition U_2 d'un problème U. En conséquence immédiate des deux conditions et, par la condition A_3 de la définition de T -application, Samuel affirme que le couple (F_0, ϕ_0) est déterminé de manière unique, sauf isomorphisme.

L'exposition que Samuel fait pour construire le couple (F_0, ϕ_0) a une certaine similitude avec la compactification de Čech, bien que Samuel simplifie quelques étapes. Et, après sa démonstration, il mentionne que ce schéma est applicable à tous les exemples décrits dans l'introduction de son article, de sorte qu'il ne les montre pas, laissant l'exercice de cette tâche au lecteur. Cependant, il montre le cas de la complétion d'un espace uniforme, probablement en raison de l'importance qu'un tel exemple revêt dans le texte de topologie générale de Bourbaki²⁸. Par la suite, dans les sections restantes de son article, Samuel considère le cas particulier où les S -ensembles sont une sous-structure des

28. En fait Samuel renvoie le lecteur au chapitre 2 de l'édition de 1940 de ce livre. Le résultat fondamental auquel Samuel renvoie n'a pas encore changé dans les éditions ultérieures de *Topologie générale*. Celui-ci apparaît dans le §7 du deuxième chapitre de l'édition de 1971, qui porte le titre *La complétion d'un espace uniforme*. Le théorème en question est le suivant [21, TG II.21] :

THÉORÈME 3.- Soit X un espace uniforme. Il existe un espace uniforme séparé et complet \hat{X} , et une application uniformément continue $i : X \rightarrow \hat{X}$, ayant la propriété suivante :

(P) Pour toute application uniformément continue f de X dans un espace uniforme séparé et complet Y , il existe une application uniformément continue $g : \hat{X} \rightarrow Y$ et une seule telle que $f = g \circ i$.

Si (i_1, X_1) est un second couple formé d'un espace uniforme séparé et complet X_1 et d'une application uniformément continue $i_1 : X \rightarrow X_1$, possédant la propriété (P), alors il existe un isomorphisme $\varphi : \hat{X} \rightarrow X_1$ et un seul tel que $i_1 = \varphi \circ i$.

T -ensembles, de sorte que le $(S - T)$ -morphisme est, en fin de compte, une immersion d'une structure dans une autre plus riche. Et, dans la dernière section du document, il souligne le cas particulier de la construction des groupes topologiques libres, mentionnant en passant (comme cela a été dit précédemment) que les résultats de Kakutani (et donc de Markoff) et, en particulier, de Nakayama, découlent son théorème-schéma sur des problèmes U.

Il importe de souligner que l'article de Samuel a été immédiatement accepté par la communauté mathématique, en particulier au sein du groupe Bourbaki. C'est illustrée par une lettre envoyée par André Weil à Henri Cartan le 9 juin 1947 :

(...) nous avons reçu de Samuel un papier sur les applications universelles
 (...) Il conviendra que Samuel (qui, bien entendu, devra être convoqué à vos réunions, Bourbaki, Topologie, etc.) vous fasse un laïus là-dessus, et que vous vous fassiez une opinion sur l'opportunité d'insérer ça dans Bourbaki et où. (...) En revanche, je conseillerais assez à Samuel de publier son papier, de préférence aux USA ; cela lui fera beaucoup plus vite sa «réputation» en cet heureux pays que des travaux plus solides et plus mûris (d'où accroissement de sa «valeur marchande» et autres avantages qui après tout ne sont pas à dédaigner!). De tout ça, il conviendra que vous parliez en détail [28, p. 234].

Dans la moitié de la citation ci-dessus, Weil indique dans quelle partie possible des *Éléments* de Bourbaki pourrait entrer ce nouveau concept de Samuel : comme une annexe au chapitre X de *Topologie*, ou bien dans un livre qui ferait l'office d'annexe générale de plusieurs livres (certains de *Topologie* et d'autres d'*Algèbre*), ou, dans une annexe au chapitre III du livre d'*Algèbre*. Ces emplacements hypothétiques ne doivent rien au hasard, car il s'agit d'abord d'un résultat de grande importance pour la démonstration de la complétion d'un espace uniforme. Deuxièmement, il est nécessaire de considérer la «seconde utilisation» que Bourbaki fait des applications universelles : la définition d'un produit tensoriel entre deux modules. Et, cette définition est présente, comme on peut s'y attendre, dans le premier livre d'*Algèbre*²⁹. En effet, dans une annexe des *Observations du Congrès de Paris* sur les chapitres I et II du livre des *Fonctions d'une variable réel*³⁰, daté du 15-18 mars 1947 et rédigé par Cartan, est mentionné que la notion d'application universelle aurait sa place dans une annexe du chapitre III du livre d'*Algèbre* :

29. Dans l'édition de 1971 (en Anglais), la définition d'un produit tensoriel est donnée au §3 du chapitre II.

30. C'est le livre IV, qui est appelé fréquemment comme *livre élémentaire*.

Lecture est faite de l'Appendice 1 (Applications universelles) du Chap. III d'Algèbre. L'auditoire est vivement intéressé, et une partie de l'auditoire est séduite. Il se manifeste néanmoins une assez vive opposition à l'insertion dudit appendice au Chap. III d'Algèbre. Ne sont pas opposantes : Charles [Ehresmann], parce qu'on y parle du groupe libre (!) ; Cartan, qui aime mieux le voir au Chap. III que dans le livre de théorie des ensembles, *où l'on n'aura aucun exemple à montrer*³¹. Les opposants n'ont pas de suggestion précise à faire quant à la place la plus opportune de cet Appendice [17].

Le lieu définitif des applications universelles dans les *Éléments*, n'a commencé à apparaître qu'en 1951. Dans le rapport du Congrès de Pelvoux-le-Poët effectué entre le 25 juin et le 8 juillet de cette année, il est mentionné que, dans le plan du chapitre IV du livre de *Théorie des ensembles*, consacré aux structures :

SAMMY fera un rapport sur ce qu'on pourra y dire des foncteurs, homomorphismes, variances, structures induites, etc. *On y ajoutera l'appendice des applications universelles*³² [18].

En appréciant les différentes rédactions du livre d'*Algèbre*, et les discussions autour de celles-ci à l'intérieur du groupe Bourbaki, on peut constater que, même jusqu'à la troisième version de ce livre, on considérait le produit tensoriel dans le chapitre II. Ça s'est passé jusqu'aux environs de 1943, car dans le document sur *Décisions du 1er Congrès de Liffré* du 10 au 18 septembre 1943, la section sur les produits tensoriels et les tenseurs fut remplacée par une nouvelle section consacrée aux algèbres. Et cela est confirmé dans le rapport du Congrès de Paris du 22 juin au 4 juillet 1945. Dans ce rapport est mentionnée une nouvelle rédaction du chapitre III, qui verra le jour dans une autre nouvelle rédaction (la quatrième version de ce chapitre), dans laquelle le produit tensoriel est le premier sujet. Même au moment de cette version (entre fin 1945 et début 1947), la démonstration de l'existence du produit tensoriel était présentée de manière classique : on définit le concept de forme multilinéaire sur un anneau commutatif avec unité, et après la propriété fondamentale permettant de définir le produit tensoriel est démontrée :

31. C'est moi qui souligne.

32. c'est moi qui souligne. Le Sammy auquel il est fait allusion n'est personne d'autre que Samuel Eilenberg, qui a commencé à faire partie du groupe de manière itinérante, à partir de 1950. Le rôle d'Eilenberg dans la complémentarité du chapitre IV est souligné dans le rapport du Congrès qui a eu lieu du 25 juin au 8 juillet 1952, où il est mentionné que l'introduction de la notion d'application universelle dans ce chapitre, dépend du succès de la caractérisation des notions de «structure induite» et de «structure quotient» [19].

PROPOSITION 1.- Soient M_i ($i = 1, 2$) deux A -modules tels qu'il existe une application bilinéaire φ de $E \times F$ dans M_i ayant les propriétés suivantes : 1) M_i est engendré par $\varphi_i(E \times F)$; 2) si f est une application bilinéaire de $E \times F$ dans un A -module quelconque N , il existe une application linéaire g_i de M_i dans N , telle que $f = g_i \circ \varphi_i$. Dans ces conditions, il existe un isomorphisme u de M_1 sur M_2 tel que $\varphi_2 = u \circ \varphi_1$ [16, p.4]

Cette démonstration est constructive et un peu longue. En fin de compte, pour chaque $(x, y) \in E \times F$, $\varphi(x, y)$ est désigné par $x \otimes y$, celui-ci étant le produit tensoriel de x pour y .

La rédaction suivante (# 41) correspond justement à la notion explicite d'application universelle (de fait, son titre est *Rapport sur les applications universelles*), qui est essentiellement l'article de Samuel de 1948. En ce moment, il est considéré que ce nouveau concept doit encore faire partie du livre d'*Algèbre*. En effet, dans une rédaction ultérieure (# 100), on considère cette notion à l'intérieur d'un *Appendice 1* pour pouvoir démontrer d'une manière plus simple, outre l'existence des produits tensoriels, aussi celle d'un monoïde libre, d'un groupe (et module) libre, du corps de fractions d'un domaine d'intégrité, de la complétion d'un espace uniforme et de la compactification de Stone-Čech.

Par la suite, vers 1953, une nouvelle version du chapitre II du livre d'*Algèbre* est présentée, dans lequel est réintroduite la section relative aux produits tensoriels. Cela est réaffirmé dans le rapport sur la re-édition du livre d'*Algèbre*, qui date de juin 1953³³. Enfin, le rapport # 188 intègre définitivement les applications universelles au chapitre IV du livre de *Théorie des ensembles*.

Bien que le résultat général de Samuel n'ait pas été formellement incorporé dans les *Éléments* jusqu'à la publication de la version définitive du chapitre IV du livre de *Théorie des ensembles* en 1957, les deux applications fondamentales des applications universelles en topologie et en algèbre, avaient déjà été publiées dans les livres correspondants, en faisant référence à l'article de Samuel.

33. Le rapport correspond à la rédaction # 183, intitulée *Algèbre. Chapitres III et IV. Rapport pour la réédition*. En particulier, il est mentionné que le projet pour la nouvelle version du Chapitre II (qui, est mentionné comme l'ancien chapitre III) a comme premier point à étudier, les concepts de tenseur et de produit tensoriel.

3.3.2 L'universalité *implicite* chez MacLane.

Presque en même temps qu'est publié l'article de Samuel sur les applications universelles, MacLane publie un article intitulé *Groups, Categories and Duality*³⁴ ([110]). Dans ce document, MacLane étudie ce qu'on appellera plus tard le «principe de dualité», principe qu'il étudiera plus en détail, bien que focalisé sur les groupes, dans son article de 1950 *Duality for groups* ([111]).

Le phénomène de la dualité est quelque chose qui apparaissait dans différents domaines des mathématiques avant les articles de MacLane. Le cas le plus emblématique où la dualité apparaît explicitement est la géométrie projective plane. Dans ce domaine mathématique, il arrive que de nombreux théorèmes où interviennent des points et des droites, possèdent leurs «théorèmes symétriques», dans lesquels les points sont échangés par les plans et vice-versa, dans les théorèmes initiaux. Ces théorèmes, peuvent être appelés *théorèmes duals*, qui peuvent être obtenus «gratuitement» en échangeant les éléments du théorème initial. Par exemple, dans le livre emblématique de Veblen et Young *Projective geometry* de 1910, ce phénomène est l'un de ses premiers théorèmes :

THEOREM 11. *The theorem of duality for a space of three dimensions.*
Any proposition deducible from Assumptions³⁵ A and E concerning points, lines and planes of a three-space remains valid, if stated in the “on” terminology, when the words “points” and “plane” are interchanged [163, p. 28]

Cet échange d'éléments de base dans un théorème, pour obtenir un nouveau théorème dual, n'est pas une exclusivité de la géométrie projective. Par exemple Corfield [31, p.54] mentionne que les célèbres lois de De Morgan pour la logique propositionnelle sont essentiellement des lois duales³⁶. En outre, la dualité de Pontrjagin, exposée dans son article de 1934 *Theory of topological commutative groups* ([137]) : étant donné un groupe topologique abélien A qui est aussi Hausdorff et localement compact, l'ensemble de ses caractères, désigné par $Ch(A)$, est appelé le dual de Pontrjagin. La dualité de Pontrjagin affirme que $A \cong Ch(Ch(A))$. D'autre part, MacLane lui-même mentionne dans son article de 1948 que dans le treillis des sous-groupes d'un groupe,

34. Publié en juin 1948 et communiqué à Marshall Stone en mai 1 de la même année.

35. Il s'agit de deux ensembles de présomptions (axiomes) pour pouvoir échanger les terminologies. Par exemple, l'une des hypothèses, la E_3 , affirme que «tous les points ne se trouvent pas sur un même plan».

36. En fait, il les appelle «dualités de De Morgan».

on peut constater une dualité entre l'infime (*meet*) et le suprême (*join*), bien que la dualité ne se présente pas dans le même sens de la dualité de la géométrie projective : la proposition duale d'un théorème sur les treillis n'est pas nécessairement vraie [110, p.263].

Dans cet article de 1948, après avoir mentionné l'exemple des treillis, MacLane observe qu'il existe d'autres exemples dans la théorie des groupes dans lesquels on peut apprécier un certain type de dualité, mais qui n'est pas expressible en termes de théorie des treillis. Ces exemples sont des cas de ce qu'on appellera «situation de dualité», puisque la formulation contemporaine du principe de dualité n'est pas exprimée de manière explicite jusqu'à l'article de 1950. Et même si certains de ces cas seraient repris dans ce dernier article de manière plus détaillée, il est important d'avoir à l'horizon l'article de 1948, puisque certaines des situations de dualité qu'ils présentent, sont étroitement liés à la notion d'application universelle de Samuel. MacLane présente trois exemples de dualités : i) le produit direct et le produit libre entre deux groupes, ii) les définitions du groupe abélien infiniment divisible, et du groupe abélien libre, et iii) la dualité de Pontrjagin décrite ci-dessus.

L'article de 1950 est beaucoup plus long et reprend dans le §1 de la première partie les exemples ci-dessus, tout en les développant plus en détail. Par exemple, MacLane mentionne que les deux théorèmes suivants sont duaux entre eux³⁷ [111, pp.485-486] :

THEOREM 1.1. The abelian group F is free if and only if, whenever $\rho : B \rightarrow B$ is a homomorphism of an abelian group B onto an abelian group B and $\alpha : F \rightarrow A$ a homomorphism of F into A , there exists a homomorphism $\beta : F \rightarrow B$ with

$$\rho \circ \beta = \alpha$$

(...)

THEOREM 1.1'. The abelian group D is infinitely divisible if and only if, whenever $\lambda : A \rightarrow B$ is an isomorphism of an abelian group A into an abelian group B and $\alpha : A \rightarrow D$ an homomorphism of A into D , there exists a homomorphism $\beta : B \rightarrow D$ with

$$\beta \circ \lambda = \alpha$$

³⁷. Il est nécessaire de noter que, après leurs formulations respectives, MacLane démontre chacun de ces théorèmes.

Si on examine la composition des homomorphismes dans les deux théorèmes, on peut voir que les directions de ceux-ci sont opposées dans les deux théorèmes. En fait, dans l'en-tête de chacun des théorèmes, MacLane présente les deux diagrammes suivants qui les représentent :

Théorème 1.1

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{\beta} & B \\ & \searrow \alpha & \downarrow \rho \\ & & A \end{array}$$

Théorème 1.1'

$$\begin{array}{ccc} D & \xleftarrow{\beta} & B \\ & \swarrow \alpha & \uparrow \lambda \\ & & A \end{array}$$

Ainsi, la différence entre les deux théorèmes dans leur représentation graphique, réside dans la direction de leurs flèches. De même, dans le remplacement d'un homomorphisme surdimensionnel ρ par un homomorphisme injectif λ . Alors que dans les conclusions, la différence, comme mentionné ci-dessus, est présentée dans l'ordre de la composition. MacLane mentionne que ces deux théorèmes induisent des propriétés duales³⁸. Après avoir présenté un couple de théorèmes duaux entre eux sur les extensions de groupes et, discuter dans le §2 les propriétés duales qui apparaissent dans la formulation des hypothèses de ces théorèmes et dans les 1.1 et 1.1', MacLane présente dans le §3, le schéma de base pour la définition de deux concepts *fondamentaux*, non seulement pour la théorie des catégories, mais pour les mathématiques en général, qui s'avèrent être duaux entre eux : le produit et co-produit de deux objets d'une catégorie.

Il le fait particulièrement pour le cas des groupes, mais ces définitions ne changeront pas du tout (sauf dans le choix des objets), dans la définition des catégories arbitraires. Habituellement, le produit (direct) de deux groupes A et B , désigné par $A \times B$, est défini comme l'ensemble des paires (a, b) (avec $a \in A$ et $b \in B$), et il est prouvé que le produit est également un groupe. Cependant, cette caractérisation ne permet pas de déterminer si, en effet, $A \times B$ est le produit. C'est-à-dire s'il est unique.

38. Par exemple, la propriété dérivée par le théorème 1.1, qui affirme que «tout sous-groupe d'un groupe [abélien] libre, est également libre», est dual à la propriété dérivée du théorème 1.1' qui affirme que «tout groupe quotient d'un groupe [abélien] infiniment divisible, est à son tour infiniment divisible» [111, p.486]. Cet exemple, avec un autre qui mentionne immédiatement MacLane, permet d'entrevoir que les propriétés d'«être sous-groupe» et d'«être groupe quotient» sont duales entre elles, relatives aux théorèmes 1.1 et 1.1'.

À cet effet, MacLane définit le produit par ses propriétés des morphismes de la manière suivante [111, p.490] :

Let α and β denote the natural homomorphisms $\alpha(a, b) = a$ and $\beta(a, b) = b$ of the direct product onto its respective factors. The direct product may then be described conceptually in terms of α and β and the diagram

$$\begin{array}{ccccc} A & \xleftarrow{\alpha} & A \times B & \xrightarrow{\beta} & B \\ & \searrow \alpha' & \uparrow \gamma & \nearrow \beta' & \\ & & C & & \end{array}$$

as follows. Given any group C , and any homomorphisms α' and β' of C into A and B respectively, there exists one and only one homomorphism $\gamma : C \rightarrow A \times B$ with

$$\alpha \circ \gamma = \alpha' \quad \beta \circ \gamma = \beta'$$

Les homomorphismes α et β sont appelés les *projections* de $A \times B$ en A et B respectivement. Il est également possible d'expliciter l'homomorphisme γ , car si on prend un $c \in C$, on a $\gamma(c) = (\alpha'(c), \beta'(c))$. En outre et, peut-être plus important, cette présentation permet de définir le produit en deux groupes, avec ses projections *sauf isomorphisme*, et est donc considérée comme une bonne définition du produit, dans la mesure où n'importe quel autre groupe qui est «candidat» à être le produit entre A et B , n'a que deux options : i) ou n'est pas en fait un produit, ii) ou si c'est le cas, c'est isomorphe à $A \times B$.

MacLane définit immédiatement la notion de produit libre des groupes A et B , symbolisé par $A * B$, qui en termes catégoriels, est ce qu'on appelle de nos jours comme le co-produit de ces derniers. Il le décrit d'une manière duale par rapport à la définition du produit : deux isomorphismes sont considérés : $\alpha : A \rightarrow A * B$ et $\beta : B \rightarrow A * B$ tels que chaque $a \in A$ est envoyé au symbole formel « a » dans $A * B$ (β fonctionne de manière analogue). Ainsi, $A * B$ est le produit libre de deux groupes si, étant donné n'importe quel autre groupe C et n'importe quelle paire d'homomorphismes injections $\alpha' : A \rightarrow C$ et $\beta' : B \rightarrow C$, il existe un et un seul homomorphisme $\gamma : A * B \rightarrow C$ l'égalité suivante est satisfaite

$$\gamma \circ \alpha = \alpha' \quad \gamma \circ \beta = \beta'$$

Ou, ce qui est la même chose, que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccccc}
 A & \xrightarrow{\alpha} & A * B & \xleftarrow{\beta} & B \\
 & \searrow \alpha' & \downarrow \gamma & \swarrow \beta' & \\
 & & C & &
 \end{array}$$

Comme pour le produit, cette définition caractérise le produit libre de deux groupes *sauf isomorphisme*. Et il est clair que tant la direction des flèches, que l'ordre de la composition est opposé à celui de la définition du produit, de sorte que cette définition est duale.

Ensuite, dans le §15, MacLane discute du concept du *zéro d'une catégorie C*. Cette notion avait déjà été envisagée dans une recherche de Jónsson et Tarski de 1947 [85, p.53], mais dans le cas particulier d'une variante de l'algèbre universelle qui serait connue sous le nom d'algèbres de Jónsson-Tarski. Dans cette recherche, dans sa partie finale, se posent les conséquences importantes de la prise en compte des algèbres dans lesquelles leur centre ne comprend que l'élément zéro (qu'ils appellent «algèbres sans centre»). Par exemple, si C et D sont des sous-algèbres d'une algèbre de Jónsson-Tarski A , et B est sa sous-algèbre sans centre, alors il est vrai que $B \times C = B \times D$ implique que $C = D$.

La définition de catégorie ayant un zéro, dans l'article de MacLane, est introduite par un axiome (appelé «axiome Z»). Ainsi, une catégorie \mathcal{C} a un objet zéro si elle satisfait les conditions suivantes :

Z. There is an object Z such that for every object A of \mathcal{C} there exists exactly one mapping $\zeta : A \rightarrow Z$ and exactly one mapping $\eta : Z \rightarrow$. We call Z the *zero object* [111, p. 504].

Les objets zéro ont une grande importance dans l'article de MacLane, puisque la définition d'une catégorie abélienne \mathcal{A} dépend de l'existence de zéros dans \mathcal{A} . En effet, bien qu'à première vue, le but central de l'article de 1950 semble être de discuter du phénomène de la dualité (en partie parce que son titre l'indique), après une lecture détaillée de celui-ci, on constate que son véritable objectif est l'introduction des catégories abéliennes : l'introduction et la discussion des notions de produit et d'objets zéro (en plus de celles de noyau, co-noyau et objets normaux), constituent les éléments de base pour définir les catégories abéliennes.

Il convient de mentionner que dans la définition de l'objet zéro sont présentées, de manière implicite, les définitions de ce que MacLane appellera par la suite des objets

terminaux et *initiaux* : un objet T d'une catégorie C est terminal si, pour chaque objet X de C , il existe un morphisme unique $t : X \rightarrow T$. De manière duale, un objet I de C est dit initial, si pour chaque objet Y de C , il y a un morphisme unique $i : I \rightarrow Y$. Ainsi, selon l'axiome Z, un objet qui est à la fois terminal et initial, est un objet zéro.

Il est intéressant de noter que l'idée d'objet zéro a précédé celle d'objets initiaux et terminaux. Ce sont peut-être Isbell [79] et Mitchell [128] qui ont d'abord explicité ce fait dans quelque écrit : le premier a appelé les objets initiaux et terminaux comme des «zéros à gauche et à droite», respectivement (*left zero* et *right zero*), tandis que Mitchell a appelé les secondes comme de «objets nuls » et les premiers comme des objets «co-nuls» (*conull object*). Cependant, MacLane mentionne dans un article de 1965 [112], que les désignations d'être «terminal» et «initial» étaient dues à Zilber, qui les a présentées dans sa thèse de doctorat à l'Université de Harvard en 1963³⁹. Or, on peut supposer que ces notions étaient implicitement utilisées (notamment celle d'objet terminal) dans la définition du concept de kernel.

Toutes ces définitions et les théorèmes 1.1 et 1.1', qui sont présentes dans l'article de 1950, méritent d'être analysés plus en détail, car ils sont fortement liés aux applications universelles de Samuel. Cependant, il est nécessaire de dire quelques choses sur l'article de MacLane. Tout d'abord, dans le §6, il mentionne qu'il est possible de considérer deux types de dualités en mathématiques : la fonctionnelle et l'axiomatique. Les dualités que MacLane a décrites dans l'article correspondent au premier type, car elles sont déterminées par l'orientation des flèches dans les diagrammes ; cependant, il est possible de définir une dualité en termes purement axiomatiques, comme Eilenberg et Steenrod l'ont fait, dans leur article *Axiomatic approach to homology theory*, pour définir la théorie homologique et donc pour identifier les dualités entre les groupes d'homologie

39. Le titre de la thèse est *Categories in homotopy Theory*. Si on considère une catégorie C , la définition de MacLane est la suivante [112, p. 42] :

An object T is *terminal* in C if to each object A there is exactly one morphism $A \rightarrow T$. (This terminology is due to A. J. Zilber.) If T is terminal, the only morphism $T \rightarrow T$ is the identity, and any two terminal objects in C are equivalent. Dually, an object J in C is *initial* if to each object A there is exactly one morphism $J \rightarrow A$.

Outre les terminologies d'Isbell, Mitchell et MacLane, Semanedi, en 1963 [144] utilisait les expressions «singleton» et «co-singleton» pour se référer aux objets initial et final, respectivement. En fait, cette terminologie est souvent utilisée dans certains textes contemporains.

et de cohomologie⁴⁰. Deuxièmement, MacLane définit explicitement la propriété qui détermine la dualité dans les exemples et les théorèmes qui sont exposés dans son article. Toutefois, il introduit le concept de *bicatégorie* dans la deuxième partie du document pour donner une définition suffisamment générale de la dualité. Deux définitions sont présentées : celle qui précise l'introduction des bicatégories et celle qui n'a besoin que du cadre théorique catégoriel de l'article d'Eilenberg & MacLane de 1945. Seule la seconde, qui a le nom de *principe de dualité*, sera présentée, et comme tel, est considérée comme un axiome supplémentaire au cadre catégoriel présent dans son travail conjoint avec Eilenberg :

DUALITY PRINCIPLE. If any statement about a category is deducible from the axioms for a category, the dual⁴¹ statement is likewise deducible [111, p.498].

Enfin, il convient de mentionner que les catégories abéliennes joueront un rôle central dans le développement de la théorie des catégories et de ses applications. L'introduction de ce nouvel objet (les catégories abéliennes), n'est pas fortuite, car c'est dans ces catégories que le principe de dualité à la Veblen est respecté : si P est un théorème sur les catégories abéliennes, alors son énoncé dual sera aussi un théorème sur les catégories abéliennes. Ainsi, les catégories abéliennes sont un type de catégories très approprié pour servir de support dans le développement des théories homologiques et cohomologiques. Plus tard, ce sera Grothendieck qui montrera la grande importance et l'omniprésence de ces catégories.

3.3.3 Les applications universelles impliquent les constructions de MacLane.

Sur l'importance immédiate de l'article de MacLane de 1950, on peut voir deux positions contradictoires, mais qui, en partie, ont raison dans leurs affirmations. Tout d'abord, il y a la position de Mitchell qui affirme en 1965 que, bien que la théorie des catégories émergente ait été dans une situation de léthargie pendant environ une décennie, beaucoup des apports conceptuels nouveaux à cette période ont été faits par MacLane, qui parmi d'autres choses

40. Pour plus d'informations sur cet aspect, voir l'article de Krömer et Corfield [98].

41. Les énoncés déductibles par l'intermédiaire des axiomes d'une catégorie, sont des propositions de premier ordre du type «il existe un h tel que $g \circ f = h$ ». Un énoncé dual d'une proposition P consiste en «inverser» les compositions de P .

(...) introduced the important idea of defining kernels, cokernels, direct sums, etc., *in terms of universal mapping properties*⁴² rather than in terms of the elements of the objects involved. MacLane also gave some insight into the nature of the duality principle (...) [128, p.vii].

Les travaux dans lesquels se trouvent les contributions auxquelles Mitchell fait allusion sont les articles de 1948 et 1950 de MacLane. Cependant, cette affirmation est un peu naïve dans la mesure où, bien que MacLane utilise les propriétés des applications universelles, il ne le fait pas *explicitement* : en fait, ce n'est pas jusqu'à l'écriture des *Éléments de Géométrie algébrique* (EGA) en 1960 par Grothendieck et Dieudonné[70] que l'on peut constater une véritable intégration des applications universelles dans un langage catégoriel. En outre, dans un article important de 1965, MacLane montre *explicitement* le lien entre les résultats initiaux de ses articles et le concept créé par Samuel.

Contrairement à l'idée optimiste de Mitchell, on peut trouver l'affirmation un peu pessimiste de Freyd. Il mentionne dans la même année de l'affirmation de Mitchell qui, bien que plus tard, l'importance énorme de l'article de MacLane de 1950 a été reconnue, étrangement tel article passé un peu inaperçu par les mathématiciens et, plus encore, par ceux qui utilisaient les outils catégoriels [58, p.156]. Mais ce n'est pas tout à fait vrai non plus : si l'on jette un premier coup d'oeil, on pourrait penser que les quelques références qui sont faites à l'écrit de MacLane correspondent au §3 de l'Annexe du livre *Homological Algebra* de Cartan et Eilenberg [26, pp. 381-384] et l'article de Buchsbaum de 1955 *Exact Categories and Duality* ([23]), jusqu'à ce que Grothendieck montre l'importance des catégories abéliennes dans son article de 1957 *Sur quelques points d'algèbre homologique*. À l'exception du dernier article, aucun autre article n'indique la pertinence de la définition du produit et du co-produit dans des termes des morphismes, comme le fait MacLane. Mais il est vrai qu'après l'article révolutionnaire de Grothendieck, on peut trouver plusieurs auteurs qui ont étudié, étendu et généralisé ce qui a été exposé par MacLane. Il n'était pas un grand nombre de mathématiciens, mais leur travail a joué un rôle dans la transmission des résultats de MacLane.

Parmi les mathématiciens qui mettent l'accent sur ces concepts, on remarque : i) Ohkuma [131], qui dans un court article de 1958 donne une définition plus générale que celle de MacLane pour le produit, dans la mesure où il l'étend pour un produit de

42. C'est moi qui souligne.

n groupes ; ii) et Kurosh *et al* [101] qui, en 1960, présentent le produit d'objets d'une catégorie, d'une manière similaire à celle d'Ohkuma, et présentent le dual de cette même définition ; iii) Semanedi qui dans deux articles de 1963, influencé par Kurosh *et al.*, étend, dans son premier article [143], l'idée de produit direct et produit libre de groupes à des objets de catégories arbitraires, tandis que dans le second [144] ils montrent un intérêt particulier dans les concepts de dualité et de bicatégorie, pour définir les *objets projectifs*, qui permettront de décrire dans un cadre catégoriel, les problèmes d'applications universelles.

MacLane reprend les idées d'Ohkuma⁴³, Kurosh *et al.* et Semanedi, en développant de manière plus précise et *in extenso* la relation étroite entre les applications universelles et pas seulement leurs définitions et théorèmes exposés dans ses articles du 48 et 50, mais aussi beaucoup d'objets catégoriels qui ont émergé depuis la publication de ce dernier article. Il reprend également la caractérisation d'un problème universel traduite dans le langage des catégories que fait Sonner en 1963 [147]. C'est ce qu'il fait dans plusieurs sections de son article *Categorical Algebra* de 1965, où il définit le concept de «points universels» de certains foncteurs, qui correspondra à la notion d'application universelle de Samuel. Plus tard, grâce à la définition par Lawvere des catégories *comma* dans sa thèse de doctorat [104], MacLane généralise cette relation dans son livre de 1971 [116]. Toutefois, les deux présentations ont besoin de l'introduction de la catégorie de foncteurs. Et, bien que cette catégorie ait déjà été présentée dans le §8 de l'article d'Eilenberg et MacLane de 1945, ce n'est que jusqu'à ce que Grothendieck [69], Freyd [58] et Mitchell [127] soulignent leur importance, que la catégorie de foncteurs commence à être prise au sérieux, d'autant plus que n'importe quelle catégorie \mathcal{C} peut s'incruster dans une catégorie de foncteurs, qui peut parfois avoir de meilleures propriétés que la catégorie initiale \mathcal{C} , permettant une meilleure étude de \mathcal{C} par le biais de la catégorie de foncteurs.

Or, malgré ce qui précède, il faut souligner que l'incorporation de la notion de «propriété universelle» dans le cadre catégoriel n'a pas été effectuée de manière canonique : il a été mentionné précédemment que la présentation de ce concept, dans l'article de 1965 n'est pas la même que celle du livre de 1971.

43. L'article d'Ohkuma est peu référencé dans les publications mathématiques du début des années 60, bien qu'il soit MacLane lui-même l'un des rares qui le référencent.

C'est probablement Richard Swan qui traduit pour la première fois en langage catégoriel les notions de problème et d'application universelle. Il le fait dans son article *The homology of cyclic products* de 1960 [156] (basé sur sa thèse de doctorat de 1957). Swan se base directement sur l'article de Samuel de 1948 et sur l'Annexe III du livre d'*Algèbre multilinéaire* de Bourbaki (1958). En particulier dans le §2 appelé *Universal maps*.

Swan considère deux catégories \mathcal{C} et \mathcal{D} et les ensembles de morphismes $\text{Hom}(C, C')$ en \mathcal{C} et $\text{Hom}(D, D')$ en \mathcal{D} . Il suppose que pour chaque paire d'objets $C \in \mathcal{C}$ et $D \in \mathcal{D}$ on a l'ensemble $\text{Hom}(C, D)$. Alors, il appelle cet ensemble $\text{Hom}(C, D)$ comme l'ensemble des \mathcal{CD} -morphisms de C vers D . Et il écrit $f : C \rightarrow D$ au lieu de $f \in \text{Hom}(C, D)$. En outre, il est supposé que pour chaque $C, C' \in \mathcal{C}$ et $D, D' \in \mathcal{D}$, on a les applications

$$\text{Hom}(C', D) \times \text{Hom}(C, C') \rightarrow \text{Hom}(C, D)$$

$$\text{Hom}(D', D) \times \text{Hom}(C, D') \rightarrow \text{Hom}(C, D)$$

qui sont des compositions usuelles de morphismes. Swan assume ensuite les deux conditions suivantes :

- (a) La composition est associative. Autrement dit, si α, α' sont des applications en \mathcal{C} , β, β' sont des applications en \mathcal{D} , et si f est une \mathcal{CD} -application, alors $(\beta f)\alpha = \beta(f\alpha)$, $(\beta'\beta)f = \beta'(\beta f)$ et $(f\alpha)\alpha' = f(\alpha\alpha')$ lorsque ces compositions sont définies.
- (b) Si $f : C \rightarrow D$, alors $f i_C = f$ et $i_D f = f$ où i_C et i_D sont les applications d'identité pour C et D respectivement.

On peut voir que Swan traduit dans le langage des morphismes et des hom-sets les notions de $S-T$ -applications de Samuel. Avec ces définitions il procède à définir ce qui est un morphisme universel [156, p. 28] :

Définition 2.1. Une \mathcal{CD} -application $u : C \rightarrow D$ est appelée universelle à droite (*right universal*) si, chaque fois que $f : C \rightarrow D'$ est une \mathcal{CD} -application avec domaine C , il existe une seule application $g : D \rightarrow D'$ en \mathcal{D} tel que $f = gu$.

Par dualité, on dit qu' u est universel à gauche (*left universal*) si, quand $f : C' \rightarrow D$ est une \mathcal{CD} -application avec rang D , il existe une seule application $g : C' \rightarrow C$ en \mathcal{C} telle que $f = ug$.

Avec ce qui précède, Swan définit un foncteur comme suit : on suppose que pour chaque objet $C \in \mathcal{C}$, il existe une $\mathcal{C}\mathcal{D}$ -application universelle à droite $u : C \rightarrow D$. Pour chaque $C \in \mathcal{C}$, on choisit une $\mathcal{C}\mathcal{D}$ -application universelle à droite particulier $u_C : C \rightarrow D$ et on définit $T(C) = D$. Si $\alpha : C \rightarrow C'$ dans \mathcal{C} , on définit $T(\alpha) : T(C) \rightarrow T(C')$, de telle sorte qu'elle soit la seule application en \mathcal{D} telle que $T(\alpha)u_C = u_{C'}\alpha$. En raison de la condition d'unicité des applications universelles, T est un foncteur covariant de \mathcal{C} en \mathcal{D} . En dualisant la construction on peut définir la notion de foncteur contravariant.

MacLane reprend cette définition dans son article de 1965 en nommant les morphismes universels par «points universels» (*universal points*). Cependant, dans le livre de 1971 la définition catégorielle des morphismes universels prend déjà une forme plus raffinée, beaucoup plus proche des définitions contemporaines. Ils sont définis comme suit [116, III.1] :

Soit $U : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ un foncteur de la catégorie \mathcal{D} vers la catégorie \mathcal{C} , et soit X un objet de \mathcal{C} . Un morphisme universel de X vers U consiste d'un couple (A, ϕ) où A est un objet de \mathcal{D} et $\phi : X \rightarrow U(A)$ est un morphisme dans \mathcal{C} , de telle sorte que la propriété d'application universelle suivante soit satisfaite :

Si Y est un objet de \mathcal{D} et $f : X \rightarrow U(Y)$ est un morphisme dans \mathcal{C} , alors il existe un morphisme unique $g : A \rightarrow Y$ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc}
 & U(A) & A \\
 & \nearrow \phi & \vdots \\
 X & & \\
 & \searrow f & \downarrow g \\
 & U(Y) & Y
 \end{array}$$

L'existence du morphisme g exprime intuitivement le fait que A est «assez général», alors que le caractère unique du morphisme fait en sorte qu' A est «pas trop général».

On peut également considérer le dual de la définition ci-dessus en inversant toutes les flèches. Soit $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ soit un functor, et soit X un objet de \mathcal{D} . Un morphisme co-universel de F vers X se compose d'un couple (A, ϕ) où A est un objet de \mathcal{C} et $\phi : F(A) \rightarrow X$ est un morphisme dans \mathcal{D} , de sorte que la propriété d'application universelle suivante soit satisfaite :

Si Y est un objet de \mathcal{C} et $f: F(Y) \rightarrow X$ est un morphisme en \mathcal{D} , alors il existe un morphisme unique $g: Y \rightarrow A$ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc}
 Y & & F(Y) \\
 \vdots & & \downarrow \\
 & & F(g) \\
 \vdots & & \downarrow \\
 A & & F(A)
 \end{array}
 \begin{array}{ccc}
 & & \searrow f \\
 & & X \\
 & \nearrow \phi & \\
 & & F(A)
 \end{array}$$

Il n'est pas difficile de voir que ces deux définitions généralisent la définition de Samuel. En outre, on peut constater que la définition du produit direct de MacLane peut être décrite par une propriété universelle.

Si A et B sont des objets d'une catégorie \mathcal{C} , un produit direct d' A et B est un objet X , dénoté par $A \times B$, avec un couple de morphismes $\alpha: A \times B \rightarrow A$ et $\beta: A \times B \rightarrow B$ tels qu'ils satisfont la propriété universelle suivante :

Pour chaque objet C et chaque couple de morphismes $\alpha': C \rightarrow A$ et $\beta': C \rightarrow B$, il existe un unique morphisme $\gamma: C \rightarrow A \times B$ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & A & \xleftarrow{\alpha} & A \times B & \xrightarrow{\beta} & B \\
 & & \swarrow \alpha' & & \uparrow \gamma & & \searrow \beta' \\
 & & C & & & &
 \end{array}$$

De même, si F est le foncteur constant qui envoie tout objet X de \mathcal{C} sur un même singleton $\{x\}$, et toutes les flèches de \mathcal{C} sur l'identité de ce singleton, alors la résolution du problème universel associé à F consiste à déterminer un objet I vérifiant : pour tout objet X , il existe un unique morphisme $g: I \rightarrow X$. Un tel objet s'appelle objet initial de la catégorie. Si on raisonne sur la catégorie opposée, alors la solution du problème universel est l'objet final de la catégorie.

Or, il est important de noter qu'il existe un lien étroit entre les morphismes universels et les adjonctions. En fait, c'est peut-être le même Swan qui a montré pour la première fois la relation entre les applications universelles et les adjonctions. Swan mentionne que «The theory of adjoint functors may also be developed within the framework of the theory of universal maps» [156, p. 29]. Il procède comme suit :

3.4 La correspondance de Galois.

Un concept qui est récurrent dans différents textes de théorie des catégories comme un cas particulier d'adjonction est celui d'une correspondance de Galois ([2, p.318], [6, pp.219-220], [14, p.105]). Ce concept a été explicitement défini par Ore en 1944 [132] et sa relation avec l'adjonction est assez simple, par ce que l'on serait tenté de conjecturer que la notion de correspondance de Galois aurait pu influencer, de l'un ou une autre manière, sur le surgissement de la notion d'adjonction.

Les textes contemporains présentent différentes définitions d'une correspondance de Galois, toutes équivalentes, parmi lesquelles on trouve la définition d'Ore. La définition la plus commune est la suivante [54, p.104] :

Soient $\mathfrak{P} = \langle P, \leq_P \rangle$ et $\mathfrak{Q} = \langle Q, \leq_Q \rangle$ deux ensembles partiellement ordonnés (posets). Si $F : P \rightarrow Q$ et $G : Q \rightarrow P$ sont des fonctions monotones telles que pour chaque $p \in P$ et chaque $q \in Q$ on a que

$$q \leq_Q F(p) \Leftrightarrow p \leq_P G(q)$$

alors, la quadruple $\langle \mathfrak{P}, F, G, \mathfrak{Q} \rangle$ est dénommée une correspondance de Galois *isotone*.

Bien qu'Ore ait défini ce concept en 1944, il mentionne qu'il avait déjà développé la plupart du travail sur ce concept dans un colloque sur *Mathematical relations* qui a été offert en 1941 dans le Summer Meeting of the American Mathematical Society à l'Université de Chicago. Cependant, ce concept était déjà implicite à la première édition du livre de Birkoff *Lattice theory* de 1940 [13] au moyen du concept de polarité (*polatiry*).

Il faut préciser que, selon Erné [53], il est possible de trouver les germes des correspondances de Galois, d'une manière plus ou moins implicite, dans des constructions très antérieures : en commençant par le travail de Lagrange *Réflexions sur la résolution algébrique des équations* (1770-1771) [53, p.30], en passant par le *Mémoire sur les conditions de résolubilités des équations par radicaux* de Galois⁴⁴ de 1831 [53, §2.3] et, en se cristallisant dans les Lectures sur l'Algèbre (*Vorlesungen über Algebra*) de Dedekind entre 1858 et 1868 et, particulièrement dans les articles *Über Zerlegung von Zahlen durch ihre*

44. Cependant, après avoir lu la partie d'Erné sur l'influence de l'œuvre de Galois dans le développement de la théorie des treillis, on peut apprécier que telle influence n'est pas suffisamment claire : Galois joue plutôt un rôle d'une «charnière» qui, à travers de son œuvre, supporte les études de Dedekind sur une théorie prématurée des treillis.

größen gemeinsamen Teiler de 1897, *Über die von drei Moduln erzeugte Dualgruppe* de 1900 et *Über die Permutationen des Körpers aller algebraischen Zahlen* de 1901. Or, ces derniers articles ont eu une grande influence sur l'écriture du livre de Birkhoff et de l'article d'Ore ([53, p.52] et [114, p.450]). Néanmoins, dans la caractérisation d'une polarité et, par conséquent, d'une correspondance de Galois, l'un des concepts de la plus grande importance que Dedekind a étudiés a été celui d'opérateur de clôture qui est implicite dans sa définition de chaîne (*Kette*) d'un système, laquelle est couverte dans la Définition 44 de son célèbre livre *Was sind und was sollen die Zahlen?* de 1888 : si $A \subset S$, $\phi_0(A)$ est l'intersection de chaînes dans S pour lesquelles A est un sous-ensemble. C'est-à-dire $\phi_0(A)$ est le moindre élément d'un système de chaînes de S sous l'ordre de l'inclusion.

Selon Erné, l'application ϕ_0 est, en effet, un opérateur de clôture [53, p.50] parce que, par définition, elle satisfait la relation $A \subset \phi_0(A)$; de plus, il est possible de démontrer par les propriétés du concept de chaîne que, pour toute paire d'éléments A et B d'un système de chaînes dans S , on a que $A \subset B \Rightarrow \phi_0(A) \subset \phi_0(B)$. Birkhoff utilise exactement ces trois propriétés pour caractériser explicitement la notion d'une opération de clôture dans la première définition du Chapitre IV de son livre. Ce chapitre a par objet d'étude des treillis complètes. Le concept de polarité est présenté dans le même chapitre de la manière suivante :

Soit une relation ρ entre deux ensembles X et Y , c'est-à-dire un sous-ensemble $\rho \subseteq X \times Y$, et deux nouveaux ensembles sont définis

$$Y^* = \{y \in Y \mid \rho(x, y) \forall x \in A \subseteq X\} \text{ et}$$

$$X^+ = \{x \in X \mid \rho(x, y) \forall y \in B \subseteq Y\}$$

Ces deux ensembles définissent implicitement deux fonctions

$$F : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(Y) \text{ et } G : \mathcal{P}(Y) \rightarrow \mathcal{P}(X)$$

tels que $F(A) = Y^*$ et $F(B) = X^+$. Et, le terme (F, ρ, G) est dénommé une polarité⁴⁵. Birkhoff démontre que les correspondances $Y \mapsto (Y^*)^+$ et $X \mapsto (X^+)^*$ sont des opérateurs de clôture.

45. Bien que Birkhoff ait une partie dans son livre intitulé *Polarity* (dans laquelle cette définition est rapportée), il ne donne pas ce nom à un objet spécifique.

Ore généralise le concept de polarité dans celui de correspondance de Galois. Alors que les polarités sont définies au moyen d'une relation et deux applications entre des ensembles de parties, la correspondance de Galois est définie par posets. Cependant, il est possible d'obtenir un de l'autre, puisque le même Ore admet que :

It has already been pointed out by Garrett Birkhoff that any binary relation defines a correspondence of the type of a Galois connexion between the subsets of two sets and it is easily seen that conversely every Galois connexion can be constructed in this manner [132, p.494].

La définition d'Ore, en employant une symbologie contemporaine, est la suivante [132, p.495] :

Soient (P, \leq_P) et (Q, \leq_Q) deux posets. On assume deux correspondances $F : P \rightarrow Q$ et $G : Q \rightarrow P$. Ces deux correspondances, prises ensemble, sont nommées une correspondance de Galois si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

$\alpha)$ si $p_2 \leq_P p_1$ sont deux éléments de P ou $q_2 \leq_Q q_1$ sont deux éléments de Q , alors

$$F(p_1) \leq_Q F(p_2) \text{ et } G(q_1) \leq_P G(q_2).$$

$\beta)$ $\forall p \in P$ et $\forall q \in Q$

$$p \leq_P G(F(p)) \text{ et } q \leq_Q F(G(q)).$$

Et, après Ore mentionne que, si les conditions (α) et (β) sont combinées, on obtient directement les relations suivantes :

$$F \circ G \circ F(p) = F(p) \text{ et } G \circ F \circ G(q) = G(q)$$

De laquelle on peut obtenir la relation équivalente suivante :

$$F(p) \leq_Q F \circ G \circ F(p) \leq_Q F(p) \text{ et } G(q) \leq_P G \circ F \circ G(q) \leq_P G(q) \text{ (§§)}$$

Or, pourquoi affirme-t-on qu'une correspondance de Galois détermine une adjonction et vice-versa ? Premièrement, il est indispensable de considérer lequel ou lesquels sont les catégories et les foncteurs qui interviendraient dans une correspondance de Galois. Puisqu'Ore considère des fonctions entre deux posets (P, \leq_P) et (Q, \leq_Q) , ceux peuvent être pris entant que deux catégories \mathfrak{P} et \mathfrak{Q} dans lesquelles, par exemple, un morphisme $(f : a \rightarrow b) \in \text{Hom}(\mathfrak{P})$ est la relation $a \leq_P b$.

Puis, un foncteur covariant $F : \mathfrak{P} \rightarrow \mathfrak{Q}$ est une fonction monotone, c'est-à-dire $a \leq_P b \Rightarrow F(a) \leq_Q F(b)$. D'ailleurs, un foncteur contravariant F^* est une fonction antitone ($a \leq_P b \Rightarrow F^*(b) \leq_Q F^*(a)$) par ce qu'il peut être considéré comme un foncteur covariant $F^* : \mathfrak{P} \rightarrow \mathfrak{Q}^{op}$. D'autre part, puisque \mathfrak{P} et \mathfrak{Q} sont des posets, ils satisfont toujours que $p \leq_P p$ et $q \leq_P q$. Ce dernier peut se représenter par $1_p : p \rightarrow p$ et $1_q : q \rightarrow q$, respectivement, qui sont uniques. De plus, si $p_1, p_2 \in \text{Ob}(\mathfrak{P})$ (ou bien $q_1, q_2 \in \text{Ob}(\mathfrak{Q})$) et il existe un morphisme $p_1 \rightarrow p_2$ (resp. $q_1 \rightarrow q_2$) alors ce morphisme est aussi unique. C'est-à-dire, par exemple, si $(f, g : p_1 \rightarrow p_2) \in \text{Ob}(\mathfrak{P})$, alors $f = g$.

Compte tenu de ce qui précède, l'expression (§§) est équivalent à l'expression $\forall p \in \text{Ob}(\mathfrak{P})$ et $\forall q \in \text{Ob}(\mathfrak{Q})$:

1. $F(p) \rightarrow F \circ G \circ F(p) \rightarrow F(p)$ est exactement $1_{F(p)}$ y
2. $G(q) \rightarrow G \circ F \circ G(q) \rightarrow G(q)$ est exactement $1_{G(q)}$.

C'est-à-dire, les diagrammes suivants sont commutatifs :

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{\phi} & FGF \\ & \searrow 1_F & \downarrow \varphi \\ & & F \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\lambda} & FFG \\ & \searrow 1_G & \downarrow \sigma \\ & & G \end{array}$$

Et, dans ces diagrammes, les morphismes σ y φ sont implicitement déterminés par le morphisme $\varepsilon : FG \rightarrow 1_{\mathfrak{P}}$. De la même manière ϕ y λ sont implicitement déterminés par $\eta : 1_{\mathfrak{Q}} \rightarrow GF$.

Conformément à la définition d'une adjonction par Shih dans des termes d'unité et de co-unité (voir pp. 105-106 de la présente thèse), le diagramme antérieur avec les morphismes ε et η impliquent une adjonction $F \dashv G$ à condition que les morphismes ε et η soient des transformations naturelles. Mais cela est immédiat dans la mesure que, pour un $p \in \text{Ob}(\mathfrak{P})$ ou un $q \in \text{Ob}(\mathfrak{Q})$ fixes, les morphismes qui interviennent dans le diagramme sont uniques.

Si on considère la unité et la co-unité de l'adjonction dans des termes d'inégalités, celles-ci affirment que $\forall p \in \text{Ob}(\mathfrak{P})$ et $\forall q \in \text{Ob}(\mathfrak{Q})$ alors

$$p \leq_P GF(p) \text{ et } FG(q) \leq_Q q$$

Cette expression est presque identique à la condition β d'Ore. Pour tel motif, quelques auteurs comme MacLane, considèrent les foncteurs $F : \mathfrak{P} \rightarrow \mathfrak{Q}^{op}$ et $G : \mathfrak{Q}^{op} \rightarrow \mathfrak{P}$ [116, p.95].

On a déjà éclairci la relation entre l'adjonction et les correspondances de Galois, alors il est important de se demander : les correspondances de Galois ont-ils eu un type d'influence directe ou indirecte sur l'émergence du concept d'adjonction ? La réponse à cette question implique de considérer quelques sujets :

1. Le panorama de la théorie des treillis et, spécialement, la théorie d'Ore entre 1944 et 1958.
2. L'étude des catégories de posets et ses dérivées dans la même période.

Les études de la théorie des treillis ont été fructifères dans les années 30's et 40's. Les résultats de cela c'étaient le livre et les articles de Birkhoff⁴⁶, les articles d'Ore⁴⁷, les différents articles de Ward et de Dilworth sur treillis résiduels⁴⁸ et l'article de von Neumann sur géométrie continue⁴⁹, entre autres. Cette richesse des études a entraîné le premier Symposium on Partially Ordered Sets and Lattice Theory en 1938.

À la suite de ces recherches en théorie des treillis, on peut considérer trois grands domaines mathématiques dans lesquels y a eu une appropriation et un développement de quelques concepts et de résultats de cette théorie. Le premier de ces contextes est la théorie abstraite de treillis. Dans la période postérieure à l'écriture de l'article d'Ore et

46. Birkhoff, G. *Lattice-Ordered Groups*. Ann. of Math. (2), Vol. 43, No. 2 (Apr., 1942), pp. 298-331.
Birkhoff, G. *What is a lattice ?* Amer. Math. Monthly 50, (1943). 484-487.

Birkhoff G. D. and Birkhoff G. *Distributive postulates for systems like Boolean algebras*. Trans. Amer. Math. Soc. 60 (1946) pp. 3-11.

Birkhoff, G. and Frink, O. *Representations of lattices by sets*. Trans. Amer. Math. Soc. 64 (1948), 299-316.

Birkhoff, G. *Théorie et Applications des Treillis*. Annales de l'institut Henri Poincaré. 11 (1949), 227-240.

47. Ore, O. : *On the foundations of abstract algebra, II*, Annals of Math. 37 (1936), 265-292.

Ore, O. : *Combinations of closure relations*. Ann. of Math. (2) 44 (1943), 514-533.

Ore, O. : *Some studies on closure relations*. Duke Math. J. 10 (1943), 573-627.

48. Un treillis résiduel est une structure algébrique qui est, simultanément, un treillis et un monoïde. Cette structure admet de plus deux opérations qui sont analogues à la division ou l'implication. Ces nouvelles opérations sont dénommées résiduelles à gauche et à droite. Certains des articles de Ward et de Dilworth sont les suivants :

Ward, M. : *Residuation in structures over which a multiplication is defined*. Duke Math. J. 3 (1937), 627-636.

Ward, M. : *Some arithmetical applications of residuation*. A mer. J. Math. 39 (1937), 921-926.

Ward, M. : *Structure residuation*. Ann. Math. 39 (1938), 558-568.

Ward, M. : *The closure operators of a lattice*. Ann. of Math. (2) 43 (1942) 191-196.

Ward, M., Dilworth, R.P. : *Residuated lattices*. Trans. Amer. Math. Soc. 45 (1939), 335-354.

Ward, M., Dilworth, R.P. : *Evaluations over residuated structures*. Ann. Math. 40 (1939), 328- 338.

49. Von Neumann, J. : *Continuous Geometry*. Reprint of Lectures from 1935/6. Princeton, 1960.

avant les années 60's il y a eu peu des résultats dans ce domaine. Les plus importants sont, peut-être, les articles d'Everet en 1944 [55], Riguet en 1948 [139], Benado en 1949 [12] et Pickert en 1952 [135]; et le livre de Daubreil-Jacotin, Lesieur et Croisot *Leçons sur la théorie des treillis des structures algébriques ordonnées et des treillis géométriques* de 1949.

L'article de Riguet est très didactique et systématique et il utilise un cadre ensembliste pour définir ses concepts centraux (relation binaire, fermeture et correspondance de Galois). La définition d'une correspondance de Galois est effectuée dans la dernière partie de l'article, et est essentiellement la même définition d'Ore [139, p.152]. Il est important de remarquer que Riguet mentionne qu'il est possible de considérer la correspondance entre filtres et grilles définies par Choquet comme un type particulier de correspondance de Galois. L'article de Pickert est focalisé sur les correspondances de Galois et il considère aussi la définition exacte d'Ore, en développant de nouveaux résultats et en étendant la théorie d'Ore. C'était Benado qui a effectué une généralisation du concept de correspondance dans son bref article de 1949, dans lequel il définit l'une *connexion monotone* entre deux ensembles partiellement ordonnés \mathfrak{P} et \mathfrak{Q} , lorsqu'on peut y définir deux applications $\varphi : \mathfrak{P} \rightarrow \mathfrak{Q}$ et $\bar{\varphi} : \mathfrak{Q} \rightarrow \mathfrak{P}$ tels que l'axiome I et l'un au moins des axiomes II', II'', II ci-dessous, soient vérifiés [12, p.529] :

- I. $p_2 \leq_P p_1$ entraîne $\varphi(p_2) \leq_Q \varphi(p_1)$; $q_2 \leq_Q q_1$ entraîne $\bar{\varphi}(q_2) \leq_P \bar{\varphi}(q_1)$.
- II'. $\forall p \in \mathfrak{P}, \forall q \in \mathfrak{Q}, \bar{\varphi} \circ \varphi(p) \leq_P p$ et $\varphi \circ \bar{\varphi}(q) \leq_Q q$.
- II''. $\forall p \in \mathfrak{P}, \forall q \in \mathfrak{Q}, p \leq_P \bar{\varphi} \circ \varphi(p)$ et $q \leq_Q \varphi \circ \bar{\varphi}(q)$.
- II. $\forall p \in \mathfrak{P}, \forall q \in \mathfrak{Q}, p \leq_P \bar{\varphi} \circ \varphi(p)$ et $\varphi \circ \bar{\varphi}(q) \leq_Q q$

C'est clairement une généralisation de définition d'Ore puisque les axiomes un I et α , et les axiomes II'' et β sont identiques mutuellement. D'autre part, l'axiome II de Benado est la définition implicite de l'unité et de la co-unité qu'on a décrit en haut⁵⁰. Il y a eu une série d'articles qui ont été produits dans les différents séminaires français dans les années 50's. Parmi ceux on trouve l'article de Dubreil et Croisot *Propriétés générales de la résiduation en liaison avec les correspondances de Galois*⁵¹ de 1954 qui offre la même définition d'Ore et ces correspondances sont utilisées dans la théorie des treillis résiduels.

50. Benado dénomme des *connexions monotones de première espèce* aux correspondances qui satisfont I et II', ou I et II'' ; ces correspondances qui satisfont I et II sont des connexions d'*espèce mixte*.

51. *Collectanea Mathematica*, Vol. 7 Ns. 2-3. Cet article a eu sa continuation dans l'article *Applications résiduées* (Croisot, R. Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure, Sér. 3, 73 no. 4 (1956), p. 453-474)

Il y a eu un autre chemin suivi par le développement de la théorie des treillis qui a été celui dans lequel les concepts développés par Birkhoff et Ore ont eu certaines incidences dans d'autres domaines mathématiques. L'un des plus significatifs a été celui des contributions dans la topologie grâce à la forte relation qui existe entre le concept de filtre et les correspondances de Galois. Ce point de vue est nommé «Topologie Analytique» (*Analytische Topologie*). Dans ce sens, l'un des premiers à adopter cette perspective a été Nöbeling dans son *Grundlagen der Analytischen Topologie* de 1954. La théorie d'homomorphismes (§3) de Nöbeling est basée sur la théorie d'Ore (bien que Nöbeling ne le mentionne pas) et dans telle section il démontre le théorème qui affirme que ces homomorphismes et ses inverses préservent les bornes supérieures et bornes inférieures arbitraires, respectivement. Particulièrement, cette préservation est implicitement déterminée au moyen d'un type de correspondance de Galois. Bien que ce type de correspondance ne soit pas exactement le même qu'Ore considère, mais elle inverse l'un des ordres partiels [53, p.88]. D'une manière similaire, dans le bref article *Beiträge zur Filtertheorie II* de Schmidt, publié en 1953, les correspondances de Galois sont utilisées pour étudier spécifiquement le concept de filtre et, il considère aussi les correspondances monotones croissantes. Aussi comme Nöbeling, Schmidt formule sa théorie

in the set-theoretical language, with inclusion as order etc., but he emphasizes that all conclusions remain valid in complete lattices, and many of them even in arbitrary partially ordered sets [53, p.91].

De même, Sonner (dans *Die Polarität zwischen topologischen Räumen und Limesräumen* en 1953) utilise le concept de polarité dans les espaces topologiques⁵².

Finalement, à partir des années 60's la théorie des treillis commence à être reprise d'une manière revitalisée : en 1959 s'est tenue le deuxième Symposium on Partially Ordered Sets and Lattice Theory et de nouveaux livres de théorie des treillis ont été publiés (*Introduction to Lattice Theory* de Szász en 1963, *Lattice theory* de Gericke en 1967, *Introduction to Lattice Theory* de Rutherford en 1965, entre autres). Cependant, ni dans le symposium, ni dans les nouveaux livres, une étude sur les correspondances de Galois est considérée. Peut-être les premiers articles qui reprennent l'étude de ce

⁵². Il est aussi important de tenir compte des exposés du *Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres* de Lesieur (*Les treillis en topologie. I et II*. Exposés No. 3 et 4 de 1954), Benabou (*Treillis locaux et Treillis locaux et paratopologies*. Exposés 2 et 7 de 1957). Ces exposés suivent les mêmes linéaments de l'article de Schmidt mais il n'y a pas de référence aux correspondances de Galois.

concept sont les articles de Wright en 1960 (*Polarity and Duality*), Schmidt en 1967 (*Symmetric approach to the fundamental notions of general topology*) et Raney en 1969 (*Tight Galois Connections and Complete Distributivity*). Et ces articles suivent les mêmes linéaments initiés par Ore.

En somme, dans la période antérieure à 1958 il y a eu deux manières par lesquelles les concepts de treillis et de correspondance de Galois ont participé dans les mathématiques : une topologique et l'autre algébrique. Le point de vue topologique qu'on a brièvement exposé était focalisé sur la convergence dans des espaces topologiques et, les concepts propres de la topologie algébrique ou de l'homologie brillent par leur absence. C'est-à-dire, dans cette perspective, les complexes simpliciaux, l'homotopie ou les groupes d'homologie ne sont pas étudiés. C'est une topologie ensembliste focalisée sur une théorie métrique. Le point de vue algébrique était essentiellement le même développé par Birkhoff, en incorporant quelques concepts ou de nouveaux résultats.

3.5 L'hypothèse d'Herrlich et la critique de MacLane.

Dans son article *Categorical Topology - its Origins, as exemplified by the Unfolding of the Theory of Topological Reflections and coreflections before 1971* ([71]), Horst Herrlich & George Strecker réalisent un compte-rendu historique de la topologie categorical avant les années 70, en tenant compte du contexte topologique non catégorique de nombreux concepts qui, après que la topologie catégorielle se soit développée, à partir des années 60, avaient leur «traduction» dans le langage de la théorie des catégories.

Or, Herrlich & Strecker mentionnent que [71, p.260] l'expression «topologie categorical» apparaît pour la première fois en 1971, notamment en raison de plusieurs articles du même Herrlich dans lequel étaient étudiés certains problèmes catégoriels ouverts dans **Top**. Cependant, l'idée de l'article d'Herrlich & Strecker consiste à rechercher les origines de cette topologie catégorielle avant 1971.

Comme on l'a vu auparavant, la théorie des catégories a ses origines dans la topologie algébrique. Et, peu à peu, les différents concepts catégoriels se sont étendus au-delà des frontières de la topologie algébrique ou de l'algèbre homologique. Ainsi, de nombreux autres domaines mathématiques commencent à utiliser les concepts catégoriels pour décrire beaucoup de leurs objets, propriétés et résultats d'une manière

plus synthétique ou globale. Ainsi, de nombreuses structures topologiques commencent à être étudiées catégoriquement, de sorte qu'en plus de **Top** apparaissent des catégories comme **Unif** (d'espaces uniformes et de fonctions continues), **App** (d'espaces d'approche et de contraction), **PrTop** (d'espaces pré-topologiques et de fonctions continues), **PsTop** (d'espaces pseudo-topologiques et de fonctions continues), **Conv** (d'espaces de convergence et de fonctions continues), **CReg** (d'espaces Tychonoff et de fonctions continues), **Haus** (d'espaces Hausdorff et de fonctions continues), **CHaus** (d'espaces compacts Hausdorff et de fonctions continues), etc.

Le langage catégoriel fournit de puissants outils pour décrire de nombreuses constructions topologiques. Par exemple, on a vu que la compactification de Stone-Čech peut être vue comme un foncteur $\beta : \mathbf{CReg} \rightarrow \mathbf{CHaus}$. En outre, grâce à l'adjonction on savait dans les années 60 que l'adjoint à gauche du foncteur d'oubli $U : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Ens}$ est le foncteur $F : \mathbf{Ens} \rightarrow \mathbf{Top}$ qui envoie chaque ensemble X vers l'espace topologique (X, τ) où τ est la topologie triviale. Également, il est possible de montrer que β est l'adjoint à gauche du foncteur inclusion $I : \mathbf{CHaus} \hookrightarrow \mathbf{CReg}$.

Herrlich & Strecker mentionnent dans la section intitulée *Remarks on historical notes* mentionnent ce qui suit [71, pp.262-263] :

Mathematical truth does not depend on the history of its discovery. The most elegant and insightful representations of mathematical theories are usually not those that try to recreate the actual historical developments. However, notes about the latter are frequently interesting and useful. They should give a succinct picture of the historical process. Such a picture is obtained via simplification and condensation, since the real picture quite often is far too complex to be described correctly in a few words. Unfortunately this process often leads to oversimplifications and even misrepresentations. There are many reasons for this.

Et ils mentionnent quelques questions historiques qui peuvent être posées dans le domaine de la topologie catégorielle [p. 263] :

Example 1

- (a) Who introduced Tychonoff spaces ?
- (b) Who introduced topological products ?
- (c) Who discovered and proved the Tychonoff Product Theorem ?

Example 2

- (a) Who introduced adjoint functors ?
- (b) Who discovered and proved the first Adjoint Functor Theorem ?

La réponse à la question (a) de l'exemple 2 est celle qui intéresse la présente thèse. À ce sujet Herrlich & Strecker disent ce qui suit [p. 267] :

(a) *Adjoint*s may be defined in various equivalent ways, e.g., by means of (a) *universal arrows* or (b) a *natural isomorphism between suitable bifunctors*. Samuel [1948], inspired by Markoff's [1945] theory of free topological groups, defined universal arrows in the context of structures. His definition was certainly general enough to be accepted as universal. Kan [1958] defined adjoints via (b) in the language of category theory. Categorists quite often credit Kan alone for the creation of adjoints. Even though Kan's paper is a milestone in the development of category theory, Samuel created the concept of adjoints (in an equivalent form) ten years earlier.

Il s'agit d'une hypothèse très risquée, fondée sur un anachronisme clair dans lequel on prend les concepts du moment pour les utiliser comme point de comparaison (ou, si l'analogie est possible, comme une «loupe») pour analyser les concepts du passé. Il est quelque peu semblable aux hypothèses, selon lesquelles il est possible de trouver la notion de nombre réel dans la théorie des proportions des *Éléments* d'Euclide.

Cela ne veut pas dire que, par exemple, la même théorie des proportions a servi de base à la consolidation du concept de nombre réel. Mais ce concept de nombre réel est un concept propre au XIXe siècle.

Or, on a constaté qu'il existe un lien étroit entre un couple de foncteurs adjoints et la notion de morphisme universel de Samuel : les morphismes universels impliquent logiquement les adjonctions. Et une fois que les concepts d'application et de problème universel entrent dans le langage catégoriel, Et une fois que les concepts d'application et de problème universel entrent dans le langage catégoriel, une telle relation semble assez «évidente». En fait, il semblait une question de temps avant d'apprécier la relation entre les $(S - T)$ -applications de Samuel et la notion de foncteur, puisque les $(S - T)$ -applications peuvent être considérées comme morphismes inter-structuraux. Mais bien que les applications universelles impliquent *logiquement* les adjonctions, tel et tel comme Swan ou MacLane l'ont montré (et qui, de nos jours, est un résultat bien connu) on ne peut pas dire pour autant qu'ils impliquent *historiquement* les seconds. Surtout dans la mesure où l'incorporation des applications universelles dans

le langage catégoriel n'a pas été un processus immédiat, malgré leur «ductilité» pour être adaptées au langage catégoriel.

À propos de ce qui précède, MacLane se demande pourquoi, en effet, la notion d'adjonction a pris tant de temps à apparaître, alors que le concept d'application universelle existait déjà et circulait depuis 1948. MacLane affirme que [116, p. 103]

Note that his [Kan] discovery came ten years after the exact formulation of universal constructions. Initially, the idea of adjunctions took so slowly, and the relation to universal arrows was no clear (...)

Cependant, MacLane attribue à Bourbaki l'«erreur historique» de l'apparition tardive des foncteurs adjoints (*ibid.*)

One may speculate as to why the discovery of adjoint functors was so delayed. (...) Bourbaki just missed (...) His definition of universal construction was clumsy, because it avoided categorical language, but it amounted to studying a bifunctor $W : X^{op} \times A \rightarrow \mathbf{Ens}$ and asking for a universal element of $W(x, -)$ for each x . This amounts to asking for objects $Fx \in A$ and a natural isomorphism $W(x, a) \cong A(Fx, a)$; it *includes* the problem of finding a left adjoint F to a functor $G : A \rightarrow X$, with $W(x, a) = \text{Hom}_x(x, Ga)$. It also includes the problem of finding a tensor product for two modules A and B , with $W(\langle A, B \rangle, C)$ taken to be the set of bilinear functions $A \times B \rightarrow C$. Moreover, the tensor product $A \otimes B$ is not in this way an example of a left adjoint (though it is an example of our universal arrow). In other word Bourbaki's idea of universal construction was devised to be so general as to include more -and in particular, to include the ideas of multilinear algebra which where important to French Mathematical traditions. In retrospect, this added generality seems mistaken; Bourbaki's construction problem empathized representable functors, and asked "Find Fx so that $W(x, a) \cong A(Fx, a)$ ". This formulation lacks the symmetry of the adjunction problem, "Find Fx so that $X(x, Ga) \cong A(Fx, a)$ " -and so missed the basic discovery; this discovery was left to a younger man, perhaps one less beholden to tradition to fashion. Put different, good general theory does not search for the maximum generality, but the right generality.

Il s'agit d'une critique sévère dans laquelle MacLane se plaint du «compliqué» du langage bourbakiste pour caractériser la notion de structure mathématique et, en particulier, la notion d'application universelle. MacLane a peut-être raison dans la mesure

où Bourbaki n'a pas fait un usage extensif de la notion de structure abstraite et les concepts associés à cette, qui sont présents dans le chapitre sur les structures du livre *Théorie des ensembles* (Chapitre IV).

Mais il est très risqué d'affirmer que c'était peut-être faute de Bourbaki la non-découverte de la notion d'adjonction, parce qu'il a eu un résultat très proche de l'adjonction et n'a pas su reconnaître sa «forme générale».

Par exemple, comme on l'a vu dans la section sur les correspondances de Galois, celles-ci ne sont qu'un cas particulier d'une adjonction. Et, dans beaucoup de livres comme celui de Spivak ([151]), les adjonctions sont introduites comme généralisations de correspondances de Galois. Autrement dit, il introduit d'abord les correspondances de Galois puis il définit l'adjonction de manière générale. C'est un choix didactique parce que les premières sont beaucoup plus «intuitives» que les secondes.

Or, au vu d'un certain intérêt par les treillis et les correspondances de Galois avant 1958, on peut analyser si, en effet dans la même période, il y a eu un type d'étude des posets dans le cadre catégoriel. Pourquoi sélectionner directement ce cadre ? Le cadre topologique susdit n'est pas correspondant avec le cadre avec l'«environnement topologique» dans lequel Kan a développé sa théorie : la topologie algébrique, par exemple. C'est-à-dire, il est peu probable que le contexte de la topologie algébrique du moment eût donné à Kan un rapprochement aux résultats de la théorie des treillis. Par conséquent, il est nécessaire d'analyser l'autre cadre théorique que Kan a utilisé : le catégoriel. Ceci semble raisonnable dans la mesure que MacLane a étroitement travaillé avec Birkhoff avant l'article de 1945 avec Eilenberg, par ce que MacLane connaissait certains des développements théoriques de Birkhoff vers les années 40's.

Par exemple, dans l'article de 1945 Eilenberg et MacLane apprécient qu'il est possible de définir les opérations des treillis sur des foncteurs avec des valeurs dans **Grp**[44, p.261]. Mais la référence la plus importante et directe aux posets est effectuée dans le Chapitre IV (particulièrement dans le §20) où s'étudient les ensembles partiellement ordonnés et sa relation avec les limites. Ils affirment que

The notions of functors and their natural equivalences apply to partially ordered sets, to lattices, and to related mathematical systems [44, p.272].

Ils définissent la catégorie **Pos** de tous les posets de la manière usuelle⁵³, et men-

53. Et, de fait, après ils remarquent que chaque poset P peut être vu comme une catégorie \mathfrak{C}_P .

tionnent la catégorie des treillis qui a par objets les posets qui sont des treillis, et dont les morphismes sont des correspondances qui préservent la borne supérieure et la borne inférieure. Après ils mentionnent

Specifically, the general theory of arithmetic of partially ordered sets, as developed recently by Birkhoff, can be viewed as the construction of a large number of functors (cardinal power, ordinal power, and so on) defined on suitable subcategories of **Pos**, together with a collection of natural equivalences and transformations between these functors [44, p.272].

Mais c'est étrange que, après avoir mentionné Birkhoff, ils remettent à un bref article de 1942 (*Generalized arithmetic*) au lieu de son livre, qui est plus complet. Ensuite, Eilenberg et MacLane définissent les concepts de foncteur covariant et contravariant entre deux posets P et Q lorsqu'ils sont pris en tant que des catégories \mathfrak{C}_P et \mathfrak{C}_Q . Et, dans les paragraphes suivants du chapitre, ils développent les concepts de limite inductive et de limite projective en utilisant des posets.

À ce point, il est possible d'apprécier qu'Eilenberg et MacLane jettent les fondements, dans le §20, pour le développement d'une théorie de l'ordre dans une perspective catégorielle. De fait, dans les remarques finales de l'article, ils suggèrent la nécessité des bons fondements pour les catégories dont l'objet central ce sont les structures ordonnées :

Most of the categories which we have considered have an intrinsic partial order. For instance, in the categories **Ens**, **Top**, and **Grp** the concepts of subset, subspace, and subgroup furnish a partial order. In view of⁵⁴ (I), $A_1 \neq A_2$ implies that $R(A_1)$ and $R(A_2)$ are disjoint, so that the representation R destroys this order completely. The problem of getting "order preserving representations" would require probably a suitable formalization of the concept of a partially ordered category [44, p.294].

Malgré le dernier commentaire d'Eilenberg et MacLane, il n'y a pas eu d'étude des catégories des ensembles partiellement ordonnés dans le cadre du langage des catégo-

54. Quelques paragraphes d'avance, Eilenberg et MacLane présentaient les définitions suivantes : si \mathfrak{A} est une catégorie arbitraire et $(\alpha : A_1 \rightarrow A_2) \in \text{Hom}(\mathfrak{A})$, le domaine A_1 de α est dénoté par $d(\alpha)$ et le codomaine (*range*) A_2 de α est dénoté par $r(\alpha)$. Étant donné un objet $A \in \text{Ob}(\mathfrak{A})$ l'ensemble $R(A)$ est défini par

$$R(A) = \{\alpha : \alpha \in \text{Hom}(\mathfrak{A}), r(\alpha) = A\}$$

et la définition de cet ensemble est le point (I) auquel Eilenberg et MacLane font référence.

ries. Cela s'explique en partie par le lieu du cadre catégoriel dans ses commencements (avant 1958) : bien que les concepts catégoriels basiques de catégorie, de foncteur et de transformation naturelle aient beaucoup de possibilités théoriques dans des domaines variés, les mêmes concepts ont été utilisés dans les domaines spécifiques de la topologie algébrique et de l'homologie (et cohomologie). Dans ce sens, les catégories spécifiques qui ont été étudiées ou utilisées dans telle période sont **Grp**, **AbGrp**, **Top**, **AbGrp**, **hTop**, $R - \mathbf{Mod}$, $\partial\mathcal{G}$, $\partial\mathbf{AbGrp}$, **sEns**, la catégorie des groupes abéliens compacts, la catégorie \mathcal{A} admissible pour une théorie homotopique, la catégorie avec couples, et quelques catégories dérivées de celles-ci. Dans ce cadre topologique et homologique, l'usage des ensembles partiellement ordonnés est très spécifique et, se limite seulement à servir d'outils pour introduire :

1. le concept de filtre dans une suite spectrale. Par exemple, dans le Chapitre XV du livre de Cartan et Eilenberg.
2. les concepts de limite inductive et de limite projective de la même façon comme Eilenberg et MacLane l'ont fait. Par exemple, dans le §2 du Chapitre VIII du livre de Cartan et Eilenberg.

Bien que dans le livre de Cartan et Eilenberg soit remarquée la possibilité de considérer les ensembles partiellement ordonnés entant que catégories⁵⁵, tels ensembles ne sont pas étudiés ou utilisés dans sa forme catégorielle.

Peut-être que la seule personne qui s'est aventurée à étudier un peu plus les posets d'une manière catégorielle a été le même MacLane. Dans son article de 1948 *Groups, Categories and Duality*, MacLane reprend brièvement l'étude de l'ordre partiel et il définit informellement le concept d'une bicatégorie des treillis après avoir mentionné qu'un groupe peut être pris comme l'une de telles bicatégories [110, p.266] :

A group can be interpreted as a lattice-ordered bicategory with an identity; the mappings of the category are all equivalences, and are the elements of the group.

55. Ils affirment le suivant :

A directed set M becomes a category if each relation $\alpha < \beta$ is regarded as a map $\alpha \rightarrow \beta$. Then a direct [inverse] system over M is simply a covariant [contravariant] functor from M to the category of sets and maps, or to the category of R -modules and homomorphisms, etc [52, p.213].

Cela est analysé plus en profondeur dans son article de 1950 *Duality for Groups*. MacLane est plus spécifique dans le lien entre des bicatégories et des posets dans son Théorème 11.5⁵⁶ et, dans le §14, il définit avec une plus grande précision le concept de l'une bicatégorie des treillis⁵⁷.

Il est singulier que quelques développements de ces deux articles n'aient pas été incorporés dans les articles postérieurs d'Eilenberg et MacLane ou d'Eilenberg. Surtout lorsque dans quelques articles d'Eilenberg ou d'Eilenberg et MacLane l'usage de posets est d'une grande importance pour étudier les groupes d'homologie et de cohomologie d'un espace topologique X .

En accord avec ce qui précède, MacLane a eu les outils théoriques nécessaires pour développer une théorie des ordres par le langage catégoriel. D'autre part, il a été étudiant d'Ore à Göttingen au début des années 30 et il a été professeur à Harvard en même temps que Birkhoff à la fin de 1938. Avec ce dernier, MacLane publie en 1941 *A Survey of Modern Algebra* qui pourrait être considéré comme une «version américaine» du livre *Moderne Algebra* de van der Waerden. Et enfin, il n'était pas ignorant de la théorie des treillis, car en 1938 il a écrit son article *A lattice formulation for transcendence degrees and p -bases*.

Pour ces raisons, si l'argument de MacLane envers Bourbaki sur le «délai» dans l'adoption de la notion d'application universelle par le langage des catégories et des facteurs est accepté, alors on peut également se demander de s'interroger sur le «délai» dans l'adoption de la théorie des treillis et, en particulier, les correspondances de Galois par le langage catégoriel. Surtout si on remarque que dans le §5 du chapitre 4 de son livre de 1971 il démontre que chaque correspondance de Galois est une adjonction et vice-versa.

56. THEOREM 11.5. The class of objects in a bicategory is partially ordered by either of the relations
 (11.1) $S \subset B$ if and only if there is an injection $K : S \rightarrow B$;
 (11.1') $Q \leq A$ if and only if there is a projection $\pi : A \rightarrow Q$ [111, p.499].

Où les expressions $S \subset B$ et $Q \leq A$ représentent les relations « S est sous-groupe de B » et « Q est groupe quotient d' A », respectivement.

57. Les deux articles MacLane ont parmi sa bibliographie le livre de Birkhoff *Lattice Theory*. Dans l'article de 1950 il incorpore de plus les articles de Birkhoff *On the structure of abstract algebras* de 1935 et *Universal algebra* de 1945.

3.6 L'hypothèse de MacLane sur le travail de Stone.

Dans sa conférence sur Stone de 1968, MacLane présente quelques arguments qui affirment que, en effet, il est possible de trouver le concept d'adjonction dans l'œuvre de Stone [113]. MacLane indique que la décennie 1929-1939 a eu différents tons avec les décennies antérieures. Ces tons se manifestent dans l'usage «of all relevant mathematical methods to get at the deeper structure of the mathematical entities» [113, p.229] et, Stone n'était pas étranger à ce nouvel esprit de faire des mathématiques. Par exemple, MacLane considère que la notion de foncteur en tant que morphisme de catégories est suggérée par l'exemple décisif (*decisive example*) du foncteur d'homologie⁵⁸ $H_n : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{AbGrp}$. Ce foncteur a la particularité de rattacher les domaines \mathbf{Top} et \mathbf{AbGrp} , par ce que son surgissement a supposé un fait historique dans la naissance du concept de foncteur en tant qu'outil qui permet de lier deux domaines mathématiques (catégories) différentes. Cette action d'«établir un lien entre des différents domaines» est en conformité avec l'esprit de la décennie que MacLane souligne. Dans ce contexte, MacLane affirme qu'on peut trouver le concept de foncteur dans l'article *Applications of the Theory of Boolean Rings to General Topology* de 1937.

De fait, dans un article antérieur [152], Stone a démontré qu'il est possible de représenter d'une manière biunivoque les anneaux booléens⁵⁹ sur les algèbres d'ensembles. C'est-à-dire, pour chaque anneau de Boole \mathcal{B} il existe un ensemble X tel que pour son anneau de sous-ensembles \mathcal{S} il existe un isomorphisme (d'anneaux) $f : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{S}$. Bien que ce résultat rattache différents domaines, il n'est pas fonctoriel parce qu'il ne considère pas quelque type de morphisme entre des anneaux booléens.

À la lumière de ce qui précède, dans l'article de 1937 Stone effectue un «saut qualitatif» : il considère non seulement des correspondances entre des objets de différents domaines, mais aussi des correspondances entre des morphismes de ces domaines. De fait, dans le théorème 4 Stone affirme l'équivalence entre la *théorie* des anneaux booléens et la *théorie* topologique des espaces booléens⁶⁰, de telle sorte que :

58. Ce foncteur est tel que pour chaque $X \in \text{Ob}(\mathbf{Top})$ et chaque $(f : X \rightarrow Y) \in \text{Hom}(\mathbf{Top})$, $H_n(X)$ est l'éniesme groupe d'homologie singulière et $H_n(f) : H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$ est l'homomorphisme induit par f .

59. Un anneau de Boole est un anneau unitaire $\mathcal{B} = \langle B, +, \times, 0, 1 \rangle$ tel que $\forall b \in B$ on a que $b \times b = b$.

60. Stone définit un espace booléen B comme un espace topologique de Hausdorff totalement disconnexe et localement compact [153, p.381]. Cet espace B est généralement nommé espace de Stone.

- (1) every Boolean ring has a representative Boolean space ; every Boolean space is the representative of some Boolean ring ; and two Boolean rings are isomorphic if and only if their representatives are topologically equivalent ;
- (2) the group of automorphisms of a Boolean ring is isomorphic to the topological group of an arbitrary representative of the ring⁶¹ [153].

Il est possible d'envisager la collection des anneaux booléens et la collection de ses homomorphismes comme la catégorie **BooAlg**, et la collection des espaces de Stone et la collection de ses homéomorphismes comme la catégorie **Stone**. Avec cette identification, le théorème 4 de Stone peut être interprété en termes fonctoriels et MacLane procède de cette façon. Dans ce sens, MacLane mentionne que ce théorème affirme qu'ils existent deux foncteurs

$$E : \mathbf{BooAlg} \rightarrow \mathbf{Stone} \text{ et } B : \mathbf{Stone} \rightarrow \mathbf{BooAlg}$$

tels que, pour chaque $A \in \text{Ob}(\mathbf{BooAlg})$ on a que $E(A) = \text{Spec}(A)$ est le spectre des idéaux premiers d' A qui a les propriétés de séparation, de compacité et de disconnexité total et, par conséquent, $E(A) \in \text{Ob}(\mathbf{Stone})$. Réciproquement, chaque $\mathcal{S} \in \text{Ob}(\mathbf{Stone})$ est envoyé, au moyen de B , vers l'anneau booléen de tous les sous-ensembles ouverts compacts de \mathcal{S} .

Comme on l'a été déjà mentionné, le caractère fonctoriel d' E et de B se manifeste dans leurs actions sur les morphismes de **BooAlg** et de **Stone**. Cependant, par sa définition ces foncteurs n'opèrent pas sur $\text{Hom}(\mathbf{BooAlg})$ et $\text{Hom}(\mathbf{Stone})$ mais sur leurs respectives collections d'automorphismes. Et clairement, ce sont des sous-collections propres des collections de morphismes.

61. Les autres trois conditions sont les suivantes :

- (3) the representatives of Boolean rings which are isomorphic to the various ideals in a Boolean ring A are characterized topologically as the open subsets of an arbitrary representative of A ; in particular, $\mathfrak{C}(\mathfrak{a})$ is a representative of the ideal \mathfrak{a} in A ;
- (4) the representatives of the homomorphs of a Boolean ring A are characterized topologically as the closed subsets of an arbitrary representative of A ; in particular, $\mathfrak{C}'(\mathfrak{a})$ is a representative of the quotient ring A/\mathfrak{a} ;
- (5) the representatives of Boolean rings with unit are characterized topologically by the property of bicompactness.

Or, la dernière partie du point (1), du théorème 4, affirme que « $A \cong C$ si et seulement si $E(A) \simeq E(C)$ » où \cong est l'isomorphisme d'anneaux et \simeq est l'homéomorphisme. Si $E(C) \mapsto A' = B \circ E(C)$, alors cette dernière affirmation se transforme en la suivante : « $A \cong A' = B \circ E(C)$ si et seulement si $E(A) \simeq E(C)$ » (*). Pour le cas particulier où C est remplacé par A , l'affirmation (*) devient :

$$A \cong B \circ E(A) \text{ si et seulement si } E(A) \simeq E(A)$$

puisque le côté droit de cette affirmation est toujours vrai, la proposition suivante est obtenue :

$$\forall A \in \text{Ob}(\mathbf{BooAlg}), A \cong B \circ E(A) \text{ (\P)}$$

D'un autre côté, le théorème 2 de Stone affirme que [153, p.380], pour $\mathcal{S} \in \text{Ob}(\mathbf{Stone})$ on a que $B(\mathcal{S}) = A$ et, pour cet anneau A on a que $E(A) = \mathcal{E}$, alors $\mathcal{S} \simeq \mathbf{E}$. C'est-à-dire, $\mathcal{S} \simeq E(A) = E \circ B(\mathcal{S})$. On obtient la proposition suivante :

$$\forall \mathcal{S} \in \text{Ob}(\mathbf{Stone}), \mathcal{S} \simeq E \circ B(\mathcal{S}) \text{ (\#)}$$

Comme les foncteurs préservent la propriété « X et Y sont des objets isomorphes», et puisque les expressions (\P) et (\#) sont vrais pour chaque $A \in \text{Ob}(\mathbf{BooAlg})$ et chaque $\mathcal{S} \in \text{Ob}(\mathbf{Stone})$, alors ces deux expressions peuvent être réduites à la suivante

$$1_{\mathbf{BooAlg}} \cong B \circ E \text{ et } 1_{\mathbf{Stone}} \cong E \circ B$$

MacLane mentionne que ces deux isomorphismes «are natural ones in the technical sense of category theory» et, par conséquent, la dernière expression signifie que les foncteurs E et B produisent (*provide*) une *équivalence de catégories* [113, p.230]. Cela amènerait à conclure que ces deux foncteurs sont des foncteurs adjoints. De fait, MacLane affirme que :

It will appear that STONE'S work provides both a formalism which inspired that for adjoint functors and an exhibition of several decisive examples of such adjointness [113, p.230].

Après avoir mentionné l'apparition du terme «adjonction» dans la théorie de Sturm-Liouville et chez von Neumann, MacLane considère le concept catégoriel d'adjonction chez Kan. C'est-à-dire, en termes d'Hom-foncteurs. Et quelques paragraphes plus loin, dans le même ordre d'idées, MacLane reprend le thème de l'adjonction dans l'œuvre de Stone. Particulièrement, il met l'accent sur le résultat principal de l'article de 1936

de Stone. Dans cet article on démontre qu'il existe une correspondance biunivoque entre chaque anneau de Boole A et chaque algèbre d'ensembles⁶² $\langle X, \mathfrak{B} \rangle$ (aussi nommée une algèbre de Boole *concrète*). MacLane affirme que, dans l'article de 1936 Stone démontre l'équivalence entre les catégories **BooAlg** et $\wp\mathbf{Ens}$, où $\wp\mathbf{Ens}$ est la catégorie d'algèbres des ensembles et ses fonctions. MacLane mentionne que chaque algèbre d'ensembles peut être envisagé comme un anneau booléen par «the evident forgetful functor» $U : \wp\mathbf{Ens} \rightarrow \mathbf{BooAlg}$ et «Stone explicitly constructed a left adjoint» [113, p.233] $E : \mathbf{BooAlg} \rightarrow \wp\mathbf{Ens}$ qui assigne à chaque $A \in \text{Ob}(\mathbf{BooAlg})$ l'algèbre $E(A)$ de tous les sous-ensembles de tous les idéaux premiers d' A . MacLane explique qu'il y a une forte relation entre la propriété d'universalité⁶³ d' E et les Théorèmes 68 et 69 de l'article de Stone de 1936.

Malgré les mots de MacLane, au contraire de l'article de 1937, dans l'article de 1936 le caractère fonctoriel de la correspondance n'est pas très clair. Alors que dans l'article de 1937 Stone non présente seulement la correspondance entre les objets, mais aussi (bien que d'une manière partielle) la correspondance entre les morphismes, l'article de 1936 Stone construit uniquement la correspondance entre les objets sans la moindre mention aux morphismes. De telle sorte qu'on ne peut pas *explicitement* considérer le paire de foncteurs U et E décrits en haut, mais les applications $U_0 : \text{Ob}(\wp\mathbf{Ens}) \rightarrow \text{Ob}(\mathbf{BooAlg})$ et $E_0 : \text{Ob}(\mathbf{BooAlg}) \rightarrow \text{Ob}(\wp\mathbf{Ens})$. C'est-à-dire, si on peut accepter que les concepts de foncteur et d'une adjonction sont préfigurés dans l'article de 1937, il n'est pas possible d'assumer le même dans l'article de 1936 sans encourir dans une sorte d'anachronisme.

L'accent mis par MacLane sur le rôle de Stone dans l'émergence du concept des foncteurs adjoints est confirmé par Stone lui-même dans son commentaire à l'article de MacLane. Stone affirme que, d'une certaine manière, les origines du concept d'adjonction peuvent être identifiés dans quelques développements de l'analyse fonctionnelle :

(...) I am equally certain that EILENBERG, MACLANE, and the other early pioneers in category theory would have hit quite early upon the idea of adjoint functor if they had been more fully aware of contemporary work

62. $\mathfrak{B} \subseteq \wp(X)$ doit accomplir les propriétés suivantes :

- $\emptyset \in \mathfrak{B}$,
- \mathfrak{B} est stable par union (finie),
- \mathfrak{B} est stable par intersection (finie),
- \mathfrak{B} est stable par complémentation.

63. On a vu la relation entre l'universalité et l'adjonction dans le§3.3 de la présente thèse.

in Hilbert space theory and its background in the theories of differential equations and topological groups. As it was, they drew mainly upon algebra and algebraic topology-especially the theory of abelian groups- for sources of the new theory. Of course, it will never take very long for such a central and essentially simple concept as that of adjoint functor to emerge from research carried on strictly inside a growing branch of mathematics. While I do not know the private history of KAN'S introduction of the adjoint functor, *I suspect that it may have come about in just this manner*⁶⁴. [155, p.237].

Sur la première partie de cette affirmation et, particulièrement, sur le rôle de l'analyse fonctionnelle dans le surgissement de l'adjonction, Marquis considère que cela n'est pas vrai. De plus, dans une certaine mesure, MacLane et Stone ont commis un type d'anachronisme : il est possible de traduire plusieurs résultats au langage catégoriel et d'apprécier que quelques concepts antérieurs au surgissement de ces concepts catégoriels peuvent être envisagés comme des foncteurs, des transformations naturelles ou des adjonctions. Mais, clairement, cela ne signifie pas que ces concepts catégoriels existent dans toute leur étendue dans ces contextes antérieurs. Cependant, il est aussi vrai que ces contextes ont contribué à la configuration (une tematización ou objectivation) des nouveaux concepts catégoriels. Selon ce qui précède, Marquis mentionne que, sans doute, le concept d'opérateur adjoint a ses origines dans l'analyse fonctionnelle, mais «some mathematicians using category theory in the early years knew about adjoint operators and their properties» [122, p.111]. Ayant pris en considération cet usage des concepts catégoriels «it is entirely conceivable that the notion of adjoint functors could have been discovered by someone working in functional analysis» [122, p.111]. Il est important de noter le «pourrait» dont Marquis fait référence : malgré le mérite que MacLane a accordé à l'œuvre de Stone, il n'y a pas de grandes évidences sur les apports de l'analyse fonctionnelle dans la genèse et le développement des premiers concepts catégoriels. Comme on l'a vu au début des chapitres premier et deuxième de la présente thèse, ce sont les problèmes propres à la topologie algébrique et ses sous-branches qui ont conduit à l'émergence de ces concepts.

Néanmoins, il convient de reprendre les affirmations de MacLane sur l'attitude de Stone en relation avec la manière de construire et de faire des recherches dans des mathématiques qui était en conformité avec l'esprit de la décennie 1929-1939. Cet esprit se manifeste chez Stone dans la mesure où il a indiqué qu'«on the use of all relevant mathematical methods to get at the deeper structure of the mathematical entities»

64. C'est moi qui souligne.

[113, p.229]. Cependant, pourquoi Stone n'a pas continué avec ladite attitude dans les années postérieures à telle décennie ? La question antérieure est particulièrement importante si on considère la période que MacLane a dénommée comme l'Ère de Stone (*Stone Age* [117, Ch.27]) dans l'Université de Chicago, entre les années 1946 et 1952. Dans cette période, MacLane a été professeur titulaire de l'Université de Chicago dans le Département de Mathématiques qui était à la tête par Stone (et qui comprenait également à Abraham Albert, Irving Kaplansky, Otto Schilling et André Weil). Et, également, c'était la période dans laquelle Eilenberg et MacLane ont écrit divers des articles où ils ont utilisé les concepts catégoriels dans la topologie et l'algèbre. C'est-à-dire, cet esprit unificateur était encore présent dans l'atmosphère mathématique de l'Université de Chicago dans cette période, au moins représenté par MacLane. De fait, grâce à l'énorme influence de l'œuvre de Bourbaki, les années postérieures à 1939 ont fourni une éclosion de cadres théoriques (ou pre-théoriques) unificateurs. Et, l'un des membres principaux du groupe Bourbaki, André Weil, faisait partie du Département de Mathématiques de l'Université de Chicago.

Si l'on tient compte du contexte antérieur, on pourrait penser qu'il y avait des conditions appropriées pour que Stone eût développé plus ses idées présentes dans l'article de 1937. De plus, après cet article, Stone écrit à nouveau sur analyse fonctionnelle⁶⁵. Et, bien que dans l'article de 1938 il mentionne explicitement son attitude sur la nouvelle manière de procéder dans les mathématiques modernes de ces jours⁶⁶, la même attitude n'est pas présente dans ses articles postérieurs.

En outre, il est important de signaler certaines de ces relations entre l'analyse fonctionnelle et la théorie des treillis étudiées par Stone. En particulier, son article *Bounded-*

65. En 1939 il a écrit un article intitulé *The Representation of Boolean Algebras*, qui synthétise les résultats les plus importants de l'article de 1937. De plus, les articles les plus importants que Stone a écrits dans cette période sont les suivants : *A General Theory of Spectra. I* (1940).

A General Theory of Spectra. II (1941).

American Mathematics in the Present War (1944).

Pseudo-Norms and Partial Orderings in Abelian Groups (1947).

The Generalized Weierstrass Approximation Theorem (1948).

Les quatre articles Notes on Integration I-IV entre 1948 et 1949.

Et *Postulates for Generalizations of Hilbert Space* de 1953.

Les seuls articles où Stone reprend l'équivalence de 1937 sont ceux-là de 1940 et 1941, mais il n'étend pas ce résultat.

66. Dans le §8 (*Topological considerations*) Stone affirme que «A cardinal principle of modern mathematical research may be stated as a maxim : "One must always topologize."» [154, p.814]

ness properties in function-lattices de 1949 où il montre que dans un espace topologique X les fonctions réelles peuvent être ordonnées comme d'habitude⁶⁷. Avec cet ordre, l'ensemble de ces fonctions constitue un treillis avec les opérations \wedge et \vee définies comme suit : $(f \vee g)(x) = \max(f(x), g(x))$ et $(f \wedge g)(x) = \min(f(x), g(x))$. Avec ceci Stone détermine la condition de boundedness (boundedness property) qui doit remplir les fonctions-treillis pour montrer ensuite que cette condition est équivalente à dire que X doit être un espace de Boole associé qui a certaines propriétés additives fortes. Ce qui implique que chaque fonction bornée de Baire sur X diffère d'une fonction continue déterminée uniquement sur un ensemble de première catégorie⁶⁸.

De fait, Johnstone affirme que les constructions principales de l'article 1937 sont cas de foncteurs :

Moreover, any homomorphism of Boolean algebras gives rise to a continuous map in the opposite direction between their prime ideal spaces ; and any continuous map of Stone spaces gives rise to a homomorphism in the opposite direction between their clopen-set algebras. The constructions 'prime ideal space' and 'clopen-set algebra' are thus examples of (contravariant) *functors* ; and together they form one of the earliest nontrivial examples of an *equivalence of categories* [84, p.xvi].

Marquis présente quatre arguments qui justifient le pourquoi du retard dans la genèse du concept d'adjonction dans le cadre de la théorie des catégories [122, pp.112-113].

- i) La découverte des foncteurs adjoints ne se correspond pas à une activité typique de solution de problèmes.
- ii) Dans telle découverte, il semble plausible que l'activité de reconnaissance de patrons joue un rôle prépondérant.
- iii) Un certain type d'activité ou un certain type d'état mental pour voir le patron, est nécessaire.
- iv) Quand le patron a été reconnu, on doit avoir des raisons pour croire que là il y a un concept général et utile, et des raisons pour croire que ce concept mérite un développement complet et indépendant.

67. $f \leq g$ si et seulement si $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in X$.

68. Un sous-ensemble E d'un espace topologique X est dit de première catégorie dans X (ou «maigre» dans X) si E si elle est une union dénombrable de parties nulle part denses de X . Et un sous-ensemble d'un espace topologique est appelé «nulle part dense» si sa fermeture a un intérieur vide.

3.7 L'adjonction et le problème de l'équivalence.

Avant de conclure ce troisième chapitre, il est important de montrer que le phénomène de l'adjonction est intrinsèquement lié à l'un des grands problèmes des mathématiques structuralistes : quelle est la meilleure façon de définir que deux structures sont «similaires» ? En d'autres termes, quelle est la meilleure façon de définir la propriété d'«être similaire» entre deux structures mathématiques ?

Comme dans la théorie des catégories, les objets des catégories peuvent être considérés comme des «objets munis d'une structure» et, une catégorie elle-même peut être considérée comme une classe d'objets partageant la même structure mathématique (et peut donc être vue comme une super-structure, ou une structure de structure), le problème de la similarité entre catégories (et entre leurs objets) a également été étudié à l'origine même des premiers concepts catégoriels.

Or, la théorie des catégories vise à réduire ce problème aux notions de morphisme et de foncteur : il n'est pas possible de dire si deux objets ou catégories sont égaux, comme c'est le cas dans la théorie des ensembles ZFC par l'axiome d'extensionnalité, mais il est possible de décider si deux objets ou catégories «sont très semblables».

En effet, dans la théorie des catégories, la question de l'égalité entre objets et catégories ne pose aucun problème : dans la pratique mathématique, on travaille avec des objets mathématiques qui ont un certain degré d'«isomorphie» plutôt qu'une sorte d'«égalité» entre ces objets, car il est pratiquement impossible de déterminer si deux objets mathématiques sont identiques.

Il s'agit d'un problème philosophique qui va au-delà de la présente thèse et qui consiste en la discussion sur la nécessité et la pertinence de l'égalité entre les entités mathématiques. Il suffit de noter que dans une bonne partie des mathématiques modernes et contemporaines, le problème de l'égalité n'est pas un problème qui affecte la pratique même du mathématicien. Mais cela ne veut pas dire qu'il s'agit d'un problème mineur. En ce sens, le but de cette section est de discuter de la «meilleure» façon de définir une «similarité» entre les catégories au-delà de l'égalité (ce qui n'est pas possible dans le cadre même de la théorie des catégories, à moins qu'elle ne s'applique à une théorie des catégories aux fondements conjonctifs) et s'il existe une relation entre cette notion appropriée de «similarité» et la notion centrale de la présente thèse : l'adjonction.

Tout d'abord, il n'est pas possible de caractériser quand deux objets X et X' d'une catégorie \mathcal{C} sont *égaux*. Il est seulement possible de décider s'ils sont *isomorphes*. Et cette relation d'isomorphisme est donnée s'il y a un morphisme inversible $\alpha : X \rightarrow X'$ à l'intérieur de la catégorie \mathcal{C} . Ainsi, deux groupes $\langle G, * \rangle$ et $\langle G', \otimes \rangle$ sont isomorphes si $h : \langle G, * \rangle \rightarrow \langle G', \otimes \rangle$ est un homomorphisme inversible ou deux espaces topologiques $\langle X, \tau \rangle$ et $\langle X', \tau' \rangle$ sont isomorphes si l'homéomorphisme $f : \langle X, \tau \rangle \rightarrow \langle X', \tau' \rangle$ est inversible.

En ce sens, la relation d'être «isomorphe» parmi des objets d'une catégorie est une relation qui se présente «de haut en bas». En d'autres termes, on suppose que cette relation est déjà donnée et n'est pas définie en termes des éléments constitutifs de chaque objet mathématique (comme c'est le cas dans la théorie des ensembles ZFC). Cela peut constituer un problème philosophique associé au problème de l'égalité décrit ci-dessus. Toutefois, le problème qui se pose dans la présente section est celui de la «similarité» entre catégories.

Dans les premiers écrits catégoriels d'Eilenberg et de MacLane, la notion considérée comme la plus appropriée pour caractériser la propriété d'«être similaire» était celle d'*isomorphisme de catégories*. Cela est corroboré par Marquis dans une note bas du page [123, p. 50] en affirmant qu'«Eilenberg and Mac Lane introduced the notion of isomorphism of categories in 1945, thinking that it was the proper criterion of identity for them.»

Or, deux catégories \mathcal{C} et \mathcal{D} sont isomorphes s'il existent deux foncteurs $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ et $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ tels que FG et GF sont *égaux* aux foncteurs identité $\mathbf{1}_{\mathcal{D}}$ et $\mathbf{1}_{\mathcal{C}}$, respectivement. Dans ce cas, on dit que F est un isomorphisme entre les catégories \mathcal{C} et \mathcal{D} , ou ce qui est le même que G est un isomorphisme entre \mathcal{D} et \mathcal{C} .

Cette définition n'est pas explicitement présentée dans l'article d'Eilenberg & MacLane de 1945. En fait, Krömer mentionne que [97, p.229] Eilenberg et MacLane :

(...) speak neither about equivalence nor about isomorphism of categories in the sense these terms later take in category theory. First of all, they employ the term “equivalence” already in two other ways : on the one hand, they call “natural equivalences” the special type of natural transformations which is central in their paper ; on the other hand, they call “equivalences” just the arrows nowadays called isomorphisms in the terminology of CT.

Cependant, on peut constater que la définition d'isomorphisme apparaît implicitement dans l'Appendice de son article de 1945, qui étudie les théorèmes de représentation d'une catégorie \mathcal{C} dans la catégorie **Ens** que : «[t]he purpose of this appendix is to show that every category is isomorphic with a suitable subcategory of the category of sets \mathfrak{S} » [44, p. 292]. En fait, dans le théorème 20.1 de son article de 1950, MacLane présente un résultat similaire («Any abelian category \mathcal{C} is isomorphic to a category of semigroups» [111, p. 512]), et quelques pages en arrière il définit la notion d'«équivalence» entre deux objets d'une catégorie [111, p. 496] :

A mapping θ is an *equivalence* in \mathcal{C} if there are mappings ϕ and ψ in \mathcal{C} such that $\theta\phi$ and $\psi\theta$ are defined and are identities. Then $\phi = \psi$ is the unique inverse θ^{-1} of θ . It is itself an equivalence (...)

Cette même définition (et, en utilisant le mot «équivalence») apparaît également dans l'article de Buchsbaum de 1955 [23, p. 2].

Le problème de la définition d'isomorphisme entre catégories, c'est qu'elle est très stricte parce qu'elle implique l'égalité des compositions par rapport aux foncteurs d'identité. Seules sont isomorphes les catégories qui, d'un point de vue pratique, ne diffèrent que dans la notation de leurs objets et morphismes.

Par exemple⁶⁹, si **Ens**_{*} est la catégorie des ensembles pointés⁷⁰ et **Ens**_{part} est la catégorie des ensembles et des fonctions partielles⁷¹. Il est possible de construire un foncteur $F : \mathbf{Ens}_* \rightarrow \mathbf{Ens}_{part}$ qui envoie un ensemble pointé $\langle X, x_0 \rangle$ vers son sous-ensemble d'éléments non distingués, et une fonction pointée à la fonction partielle induite sur ceux-ci (qui est définie sur les éléments non envoyés à l'élément distingué). Ce foncteur n'est pas réversible, même si les catégories **Ens**_{*} et **Ens**_{part} sont très similaires. Donc, les deux catégories ne sont pas isomorphes. Cependant, ce sont des catégories *équivalentes*. Qu'est-ce que ça veut dire ? Et pourquoi cette définition est-elle plus appropriée que celle de l'isomorphisme pour rendre compte de la propriété «être

69. Cette exemple a été pris de <https://ncatlab.org/nlab/show/equivalence+of+categories#Isomorphism>. Consulté en décembre 2020.

70. Comme la catégorie des espaces topologiques pointés **Top**_•, la catégorie **Ens**_{*} a comme objets paires $\langle X, x \rangle$, où X est un ensemble et x est un élément distingué. Un morphisme entre deux objets $\langle X, x_0 \rangle$ et $\langle Y, y_0 \rangle$ d'**Ens**_{*} est une fonction $f : X \rightarrow Y$ telle que $f(x_0) = y_0$.

71. Une fonction partielle est semblable à une fonction $f : A \rightarrow B$ de A en B à l'exception que $f(x)$ peut ne pas être défini sur tout élément x de A . La catégorie **Ens**_{part} a pour objets les ensembles mais les morphismes sont les fonctions partielles entre ensembles.

semblable» ?

Curieusement, la notion même d'équivalence entre deux catégories fut formulée par Grothendieck en 1957 : elle passa inaperçue pendant les 12 années de l'émergence des premiers concepts catégoriels à leur formulation explicite. Sur la quatrième page de *Sur quelques points d'algèbre homologique*, Grothendieck mentionne [69, p. 125] :

Une *équivalence* d'une catégorie \mathcal{C} avec une catégorie \mathcal{C}' est un système (F, G, φ, ψ) forme de foncteurs covariants :

$$F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}' \quad G : \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}$$

et d'homomorphismes de foncteurs

$$\varphi : \mathbf{1}_{\mathcal{C}} \rightarrow GF \quad \psi : \mathbf{1}_{\mathcal{C}'} \rightarrow FG$$

(où $\mathbf{1}_{\mathcal{C}}$, $\mathbf{1}_{\mathcal{C}'}$ sont les foncteurs identiques dans \mathcal{C} , resp. \mathcal{C}') tels que pour tout $A \in \mathcal{C}$, $A' \in \mathcal{C}'$, les composés

$$F(A) \xrightarrow{F(\varphi(A))} FGF(A) \xrightarrow{\psi^{-1}(F(A))} F(A)$$

$$G(A') \xrightarrow{G(\psi(A'))} GFG(A') \xrightarrow{\varphi^{-1}(G(A'))} G(A')$$

soient l'identité dans $F(A)$ resp. $G(A')$. Alors pour tout couple A, B d'objets de \mathcal{C} l'application $f \rightarrow F(f)$ de $\text{Hom}(A, B)$ dans $\text{Hom}(F(A), F(B))$ est une bijection, dont l'inverse est l'application $g \rightarrow G(g)$ de $\text{Hom}(F(A), F(B))$ dans $\text{Hom}(GF(A), GF(B))$ identifié à $\text{Hom}(A, B)$ grâce aux isomorphismes $\varphi(A) : A \rightarrow GF(A)$ et $\varphi(B) : B \rightarrow GF(B)$. Les équivalences entre catégories se composent comme les foncteurs. Deux catégories sont dites *équivalentes* s'il existe une équivalence entre ces catégories.

Si les deux conditions sont combinées, la définition de Grothendieck indique que les applications $\varphi : \mathbf{1}_{\mathcal{C}} \cong GF$ et $\psi : \mathbf{1}_{\mathcal{C}'} \cong FG$ sont des isomorphismes naturels.

Il est important de remarquer que Grothendieck lui-même était conscient des avantages de sa définition et des limites de la notion d'isomorphisme, car, comme il le dit lui-même, de manière presque immédiate à la formulation de sa définition [69, p. 125] :

Il importe cependant d'observer la différence de cette notion avec la notion beaucoup plus stricte d'isomorphisme (qui s'applique si on veut comparer des catégories qui sont des ensembles) : Soit \mathcal{C} un ensemble non vide, soit pour tout couple d'objets $A, B \in \mathcal{C}$, un ensemble $\text{Hom}(A, B)$ réduit à un élément, alors \mathcal{C} devient (pour les uniques lois de composition possibles $\text{Hom}(A, B) \times \text{Hom}(B, C) \rightarrow \text{Hom}(A, C)$) une catégorie, et deux catégories construites par ce procédé sont toujours équivalentes, mais elles ne sont isomorphes que si elles sont équipotentes. Aucune des équivalences de catégories qu'on rencontre en pratique n'est un isomorphisme.

Cependant, dans la définition de Grothendieck, on peut remarquer une adjonction. En fait, il est possible de démontrer que si (F, G, φ, ψ) est une équivalence, alors F est un adjoint à gauche de G . Cependant, la converse n'est pas vraie. Comme on l'a vu dans la §2.5, si on a deux foncteurs $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ et $G : \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}$ on a deux formulations : une pour l'isomorphisme entre catégories (♠) et autre pour l'adjonction entre catégories (♯). Pour qu'il y ait un isomorphisme, la condition suivante doit être satisfaite :

$$1_{\mathcal{C}} = FG \text{ et } 1_{\mathcal{C}'} = GF. \text{ (♠)}$$

Tandis que, pour que $F \dashv G$ s'il y a des transformations naturelles η et ε telles que

$$\eta : 1_{\mathcal{C}} \rightarrow GF \text{ et } \varepsilon : FG \rightarrow 1_{\mathcal{C}'}. \text{ (♯)}$$

D'autre part, la notion d'équivalence introduite par Grothendieck est un cas particulier de cette définition, car il suppose que η et ε non seulement doivent être des transformations naturelles mais aussi des *isomorphismes* naturels. C'est-à-dire qu'il est satisfait :

$$\eta : 1_{\mathcal{C}} \cong GF \text{ et } \varepsilon : FG \cong 1_{\mathcal{C}'}. \text{ (♣)}$$

En d'autres termes, la notion d'équivalence est à mi-chemin entre l'isomorphisme et l'adjonction. Ceci montre son degré de généralité, mais pas la généralité suffisante pour être une adjonction *arbitraire*. C'est-à-dire, tout isomorphisme est une équivalence ; mais toute équivalence n'est pas un isomorphisme (tel comme on a vu avec l'exemple précédent d' \mathbf{Ens}_* et \mathbf{Ens}_{part} ou le contre-exemple de Grothendieck). De même, toute équivalence est une adjonction, mais pas toute adjonction est une équivalence.

Malgré ce qui précède, il n'est pas possible d'affirmer que la notion d'adjonction apparaît implicitement dans la définition de l'équivalence de classe de Grothendieck. Il est clair que, quand on a la notion d'adjonction *a priori*, on peut dire que toute

équivalence est une adjonction. Mais il serait imprudent d'affirmer que Grothendieck n'a pas eu assez de vision pour faire un pas en avant et pouvoir découvrir les foncteurs adjoints avant Kan. Ce serait une critique similaire au reproche que MacLane a fait à Bourbaki pour «empêcher» la formulation de la notion d'application universelle dans le langage des catégories (et qui a été analysée dans le §3.3). Et il a été observé que ce genre de critiques a souvent un biais anachroniste parce que ces critiques sont postulats d'une position d'«ici et maintenant» considérant le contexte dans lequel ces critiques sont formulées comme le contexte développé souhaitable. De plus, suppose également que ce développement subit d'une sorte de «flux naturel», presque linéaire, ignorant les difficultés rencontrées par un concept ou une théorie mathématique pour être acceptée ou développée.

Or, dans le cas de la définition de Grothendieck et de la notion de foncteur adjoint, on ne trouve pas dans la littérature spécialisée une critique semblable à celle de MacLane. Ceci est peut-être dû à deux raisons : d'abord, la proximité dans le temps de la publication de l'article *Adjoint functors* par Kan (1958) et la publication de l'article de Grothendieck (1957). Cependant, l'article de Kan a été reçu en Septembre 1956 et Grothendieck note que les principaux aspects des chapitres I, II et IV ont été développés au printemps de 1955 «à l'occasion d'un séminaire d'Algèbre Homologique donne à l'Université de Kansas» [69, p. 119]. Cette différence d'un an ou moins entre les deux découvertes contraste considérablement avec l'écart d'environ 12 ans entre la formulation de la notion d'application universelle par Samuel (1948) et la caractérisation catégorielle par Swan en 1960.

Deuxièmement, la définition de l'équivalence de Grothendieck avait un but plus «modeste» : elle constitue un critère d'identification des catégories. C'est-à-dire un outil pour classer les catégories selon un certain degré de similarité. Ceci a été corroboré par Krömer [97, pp. 221 et 229]. Et une définition comme adjonction serait, dans une certaine mesure, inefficace pour atteindre cet objectif : une adjonction est trop générale et, comme on l'a vu permet de «lier» des constructions catégories de manière optimale. Cependant, ces deux catégories pourraient être trop différentes pour satisfaire à un critère d'identification.

Chapitre 4

Conclusions.

4.1 L'importance mathématique de l'adjonction.

Comme il a été noté dans le §3.1 que, bien que les concepts catégoriels étaient utilisés par de nombreuses années après sa naissance en 1945, il n'a pas été jusqu'à la fin des années 50 et début des années 60 qu'il est possible de parler d'une vraie théorie des catégories. En fait Marquis souligne cet aspect en contraste avec la théorie des structures de Bourbaki [123, p. 40] :

Moreover, although categories, functors and natural transformations had been introduced in 1945 and used quickly after in algebraic topology and homological algebra, it was not a proper theory before the publication of Bourbaki's volume on sets and structures, namely 1957.

L'adjonction est l'un des concepts fondamentaux qui a constitué (et qu'il constitue encore) la colonne vertébrale de cette nouvelle théorie mathématique. Cela est évident dans la manière dont a été reçu ce nouveau concept par la communauté mathématique, et même au-delà des spécialistes en catégories, après sa formulation par Kan en 1958. Peut-être que ce sont les mathématiciens français dans les différents séminaires qui ont été les premiers à étudier les foncteurs adjoints. Dans ce sens, Cartan présente un exposé au *Séminaire Cartan*, intitulé *Sur la théorie de Kan* [25]. Cet exposé a été divisé en deux sessions qui ont eu lieu 10 et 17 décembre 1956. L'exposé de Cartan se compose de la théorie homotopique abstraite de Kan et, étant donné la date des sessions, Cartan n'avait pas encore à disposition l'article de 1958. Il mentionne dans la bibliographie au début de l'exposé les articles *Abstract homotopy III* et *IV*, et «[e]n outre, quelques "papiers secrets" de KAN. à Voir aussi les Notes de cours de J.C. MOORE, Princeton 1955-56.» Quels pourraient être ces

«papiers secrets»? On peut spéculer qu'ils pourraient être des versions prématurées d'*On c.s.s complexes* et d'*Adjoint Functors*. Mais l'absence de la discussion de la notion d'adjonction dans son exposé ferait penser le contraire au sujet de ce dernier article.

Cependant, cet exposé met en évidence l'intérêt dans les séminaires français pour la théorie de Kan. En fait, on a observé dans le §2.3 que, dans le même *Séminaire Cartan*, que Shih présente son exposé *Ensembles simpliciaux et opérations cohomologiques* le 18 janvier 1959, où il présente pour la première fois la notion d'adjonction en termes d'unité et de co-unité, en plus de démontrer que cette présentation est équivalente à la formulation de Kan, en termes de Hom foncteurs.

Mais cet intérêt pour le résultat de Kan ne s'est pas seulement produit dans le cadre des séminaires français. Par exemple, on peut apprécier l'inclination à poursuivre le travail de Kan sur les théories homotopiques abstraites. À cet égard, on peut apprécier l'article de Whitehead de 1962 *Generalized homology theories* [166]. Dans cet article Whitehead montre que l'adjonction bien connue $\text{Hom}(G \otimes H, K) \cong \text{Hom}(G, \text{Hom}(H, K))$ qui était déjà présente depuis l'article de Eilenberg & MacLane de 1945 est important pour le développement d'une théorie homologique et homotopique. De même, la notion d'adjonction est récurrente dans les articles d'Eckmann & Hilton de 1962 [35] et 1963 [36], respectivement. Dans le §6 du premier article, la notion d'adjonction est étudiée de manière abstraite, en présentant la définition de Kan en termes d'Hom-foncteurs, pour ensuite présenter la relation d'adjonction largement connue dans les années 50 entre le foncteur des espaces de lacets Ω et le foncteur suspension Σ [p. 247]. En fait, Hilton avait déjà étudié cette relation dans son article de 1958 *Homotopy Theory of modules and Duality*, mais en termes de groupes d'homotopie. Dans cet article, Hilton montre comment c'est possible construire un résultat basique dans la théorie homotopique, mais qui n'avait pas été étudié auparavant [72, p. 273] :

$$\pi(\Sigma X; Y) \cong \pi(X; \Omega Y)$$

Mais il ne considère pas Ω et Σ comme des foncteurs, mais comme des opérateurs d'une théorie homotopique. Cependant, il mentionne plus tard que ce résultat «derives from the fact that Σ and Ω are adjoint (Σ is a left adjoint of Ω)», puis de dire que les concepts de p -théorie homotopique et i -théorie homotopique « may be expressed in terms of Kan's notion of 'adjoint functors' » [p. 279]. Hilton réutilise certains résultats d'adjonction dans son article *On a Generalization of Nilpotency to Semi-Simplicial Complexes* de 1960 [73]. Cependant, comme dans son article précédent, Hilton emploie

la notion d'adjonction de Kan, pour étendre quelques résultats ponctuels de la théorie homotopique abstraite de Kan lui-même, ou de présenter certains résultats propres dans le cadre de cette théorie.

Or, il convient de noter l'affirmation qu'Eckmann & Hilton font dans l'article de 1962, sur l'importance de l'adjonction et la préservation d'un certain type de propriétés structurelles [p. 229] :

It turns out that the condition of possessing an adjoint has important implications for the structure preserving properties of the functor.

De quel type de propriétés s'agit-il ? Il y est répondu dans son deuxième article : étant donné un foncteur $S : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Z}$, s'il existe son foncteur adjoint à droite T , alors S préserve les coproduits et les coégaliseurs¹, tandis que T préserve les produits et les égaliseurs [p. 181].

D'autre part, à partir de 1964, divers articles commencent à être publiés dans lesquels la relation entre l'adjonction et les applications universelles de Samuel est mise en évidence. Il est particulièrement important de noter l'article de Sonner *Universal solutions and adjoint homomorphisms* [148] de 1964 et l'article influent de MacLane de 1965 *Categorical Algebra* [112]. Il est assez étrange que les deux articles ne mentionnent nulle part l'article de Swan de 1960 (et qui a été reçu en février 1959), alors que ce fut le premier à démontrer cette relation, comme on l'a vu dans le §3.3.3 de la présente thèse, et bien plus encore quand Swan remercie J. C. Moore et MacLane, entre autres² «for their advice and encouragement in connection with this work» [156, p. 28]. En fait, Sonner se réfère essentiellement à l'article de Kan de 1958, la thèse de doctorat de Freyd de 1960 (qui sera discutée plus tard), son article de 1963 *Universal and special problems* [147] (dans lequel il décrit la notion de propriété universelle de manière catégorielle, mais sans mentionner l'article de Swan) et une série de lectures de MacLane intitulée *Categorical Algebra*, présentées lors d'un colloque présenté à Boulder, Colorado en 1953. Des lectures qui devaient devenir son article de 1965. En fait, dans cet article MacLane ne cite pas l'article de Swan de 1960, mais son livre de 1964 *Theory of sheaves*, et ce livre ne mentionne nulle part son résultat de 1960. Cette remarque d'une grande im-

1. Soit \mathcal{C} une catégorie et deux objets X et Y de cette catégorie. Soient deux morphismes parallèles $f, g : X \rightarrow Y$ entre ces objets. On dit qu'une flèche $e : E \rightarrow X$ *égalise* la paire lorsque les morphismes composés $f \circ e = g \circ e$ coïncident. Quand cela se produit, on dit que e est un *égaliseur*. Par dualité est définie la notion de coégaliseur.

2. Les autres mathématiciens sont P. E. Conner et N. E. Steenrod.

portance, car il semble que MacLane a oublié l'article de Swan en faisant la critique de Bourbaki qui a été exposée dans le §3.5.

L'article de MacLane de 1965 a eu un grand retentissement parce que MacLane montre comment la nouvelle théorie des catégories (dans ce moment historique, comme exposé dans le §3.1, il est possible de dire que la théorie des catégories est une «théorie» proprement dite) peut être mis en œuvre dans de nombreuses branches des mathématiques, en particulier comme une nouvelle façon de caractériser l'algèbre universelle, tel qu'elle a été exposée par Lawvere dans sa thèse de doctorat de 1963³.

MacLane mentionne au début de son article que, après 22 ans d'être né les concepts de «catégorie», de «foncteur» et de «transformation naturelle» [p. 40]

(...) they have recently attracted especially active interest in many quarters. This interest is probably a reflection of the very rapid current proliferation of mathematical ideas—a situation favoring and, indeed, almost requiring unifying notions such as those of category and functor.

Et plus tard, il souligne l'importance de l'adjonction dans les nouveaux développements mathématiques dans lesquels intervient le langage catégoriel [ibid] :

This article (...) will summarize a number of the developments which use categories, with particular attention to the ubiquity of adjoint functors, the utility of abelian categories, a unified categorical treatment of types of algebras, relative homological algebra via adjoint functors, differential graded objects, and universal algebra via suitable “very small” categories.

MacLane consacre les §§1-6 de son article à exposer les concepts catégoriels de base, et dans le §7 il introduit la définition de propriété universelle de manière catégorielle, pour qu'ensuite dans le §8 (appelé *Adjunctions*) il étudie en profondeur la notion d'adjonction et sa relation à l'universalité. Dans cette section il montre plusieurs exemples d'adjonctions (dont son résultat de l'article de 1945 entre le produit tensoriel et le foncteur Hom) :

- a) Soient les foncteurs $T : \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{AbGrp}$ et $N : \mathbf{AbGrp} \rightarrow \mathbf{Grp}$ où T assigne à n'importe quel groupe G son groupe dérivé TG et N est le foncteur d'oubli. Alors $T \dashv N$.

3. Il est important de mentionner que MacLane considère comme une source primaire pour cet article, la thèse de doctorat de Lawvere de 1963 (dont MacLane était l'un de ses rapporteurs) et l'article de 1964 qui résume cette thèse.

- b) Dans la catégorie **Top**, le foncteur $_ \times Y$ est l'adjoint à gauche du foncteur $(_)^Y$, pour tout objet Y de **Top**
- c) L'adjonction $\Sigma \dashv \Omega$ dans la catégorie **Top**_• des espaces pointés.

Après avoir esquissé une théorie des catégories abéliennes dans les sections suivantes, MacLane montre dans le §13 qu'il est possible de caractériser la notion d'«additivité» au travers l'adjonction. Et, dans le Chapitre IV (appelé *Relative Homological Algebra*), il montre le rôle de l'adjonction dans l'algèbre homologique, comprenant certains des résultats de Cartan & Eilenberg, mais en utilisant la notion d'adjonction.

Compte tenu de ce qui précède, il convient de noter que l'article de MacLane de 1965, ainsi que la thèse de Lawvere de 1963 (et en particulier cette dernière) ont été capitales pour montrer l'importance de l'adjonction tant dans le cadre de la théorie des catégories que dans les mathématiques en général. Dans ce sens, il est possible de voir deux façons dont, comme l'a mentionné MacLane, on apprécie l'«ubiquité» de l'adjonction. C'est-à-dire son intervention comme concept de base en mathématiques : tout d'abord, l'adjonction comme un outil pour *décrire et découvrir* de nouvelles relations dans différentes branches des mathématiques en dehors de la théorie des catégories (comme on l'a vu, dans l'algèbre homologique, la topologie algébrique, l'homotopie abstraite et, comme le montrent MacLane et Lawvere, dans l'algèbre universelle). Et, deuxièmement, l'adjonction comme concept fondamental propre à la théorie des catégories, qui permet de définir de nouveaux concepts catégoriels, ou de caractériser de nouvelles propriétés ou résultats propres à la théorie des catégories.

Les exemples présentés par MacLane dans son article de 1965, ainsi que ceux présentés par Kan dans son article de 1958 montrent que, en effet, le phénomène de l'adjonction est présent dans différents résultats importants de la topologie algébrique (en général et en particulier dans l'algèbre homologique) et la théorie homotopique. À cela s'ajoute que, au début des années 60, les concepts catégoriels commencent à être mis en œuvre pour étudier les concepts et propriétés propres à la topologie, donnant naissance à une nouvelle branche des mathématiques : la topologie catégorielle. Isbell a été l'un des pionniers de ce nouveau domaine mathématique avec son livre *Uniform Spaces* de 1964 [80]. Dans ce livre, il définit la notion de transformation uniforme d'un point de vue fonctoriel (en utilisant les notions de «réflexion» et de «co-réflexion», introduites par Freyd en 1960 [58, p. 79]), et il montre ensuite dans son théorème II, 25 que «la complétion d'un espace uniforme X est une réflexion complète de X ». Et de même, il caractérise la compactification de Stone-Čech en termes de foncteurs. Ainsi, dans les

années 60, plusieurs constructions topologiques fondamentales (telles que la complétion et la compactification) ont été étudiées en termes fonctoriels. En outre, Freyd avait déjà démontré dans l'Exercice I de son livre de 1964 la relation qui existe entre les adjonctions et les réflexions [58, p. 83]. Par conséquent, à la fin des années 60, ces constructions n'étaient pas seulement considérées fonctoriellement, mais ont également été observées qu'elles étaient des foncteurs adjoints à gauche de certains foncteurs élémentaires.

De cette manière, la communauté mathématique (en particulier dans les spécialistes de la théorie des catégories) a commencé à percevoir que certaines constructions mathématiques répondent au critère de fonctorialité. En particulier, les constructions dans lesquelles une structure d'un certain type est munie de nouvelles propriétés, de sorte que l'on obtient une structure plus riche, comme cela a été observé dans les cas de la compactification de Stone-Čech ou des constructions libres.

Ces constructions émergent en grande partie comme des adjoints des foncteurs assez simples, comme on l'a observé, par exemple, dans le cas du foncteur d'oubli. Et comme on l'a vu à la fin du deuxième chapitre, un couple de foncteurs adjoints peut être considéré comme une sorte des «inverses généralisées». On peut penser au foncteur $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ comme une sorte de «dictionnaire» qui permet de traduire en \mathcal{D} les théorèmes, propriétés, objets et intuitions des objets de \mathcal{C} . Puis, l'existence de l'adjoint à gauche $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ de F , peut être vu comme un autre nouveau dictionnaire qui permet de «recomposer» la grande partie de ce qui avait été construit en \mathcal{D} par action de F . Mais ce n'est pas n'importe quel dictionnaire à l'inverse, parce que supposons qu'il existe un foncteur $H : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ qui peut «revenir» de la catégorie \mathcal{D} à la catégorie \mathcal{C} . Ainsi, quatre situations pourraient se présenter : i) que $F \circ H = 1_{\mathcal{D}}$ et $H \circ F = 1_{\mathcal{C}}$, de sorte que les catégories \mathcal{C} et \mathcal{D} sont *isomorphes*, ce qui impliquerait qu'un objet X est «traduit» dans un objet $Y = F(X)$ et, en «recomposant» Y , on obtient à nouveau le même objet X . C'est-à-dire $H \circ F(X) = X$. ii) Les catégories \mathcal{C} et \mathcal{D} sont *équivalentes*, de sorte que l'on a les équivalences naturelles $F \circ H \cong 1_{\mathcal{D}}$ et $H \circ F \cong 1_{\mathcal{C}}$. Cela signifierait que si $Y = F(X)$, alors $H \circ F(X) = Z$ où Z n'est pas nécessairement X , mais il est vrai que $X \cong Z$. iii) $F \dashv H$ ou $H \dashv F$. Et iv) H est un foncteur quelconque «de retour», qui n'est ni isomorphisme, ni équivalence, ni adjointe à F . Il serait idéal que les deux catégories soient isomorphes ou équivalentes (i et ii) : dans le cas de l'isomorphisme il n'y a aucune perte d'information, parce que l'information de chaque objet retourne le même objet, tandis que dans l'équivalence, cette information est envoyée à un objet isomorphe à l'objet initial. Toutefois, le cas

de l'isomorphisme se présente rarement entre les catégories et l'équivalence se présente lorsque les deux catégories sont «très semblables» entre elles. En outre, le cas (iv) pourrait entraîner une perte d'informations excessive lors du retour à la catégorie initiale, rendant impossible la recombinaison des informations initiales dans la catégorie \mathcal{C} . Pour cette raison, dans l'adjonction (qui n'est ni isomorphisme ni équivalence), on revient à un objet W qui n'est pas X , ni isomorphe à X , mais qui est lié à X par un morphisme. Ainsi, bien qu'il y ait une certaine perte d'information, la perte ne suffit pas pour ne pas pouvoir «recomposer» l'information initiale significative de l'objet X . C'est parce que le foncteur H satisfait une propriété universelle par rapport à F , il est le foncteur optimal qui permet une telle recombinaison.

En fait, dans son livre de 1971, MacLane présente une table où il montre beaucoup d'adjonctions (en termes d'unité et de co-unité) dans différents domaines des mathématiques. Voici quelques-uns adjoints des foncteurs d'oubli [116, p. 85].

Foncteur d'oubli	Adjointe à gauche	Unité de l'adjonction
$U : \mathbf{R-Mod} \rightarrow \mathbf{Ens}$	$X \mapsto F(X)$ R -module libre. Base X	$j : X \rightarrow UF(X)$ «insertion de générateurs»
$U : \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Ens}$	$G \mapsto C(G)$ Groupe libre. X Générateurs $x \in X$	$j : G \rightarrow UC(G)$ «insertion de générateurs»
$U : \mathbf{Ab} \rightarrow \mathbf{Grp}$	$G \mapsto G/[G, G]$ Groupe dérivé	$G \mapsto G/[G, G]$ projection du quotient
$U : \mathbf{R-Mod} - S \rightarrow \mathbf{R-Mod}$	$A \mapsto A \otimes S$	$A \rightarrow U(A \otimes S)$ $1 \mapsto 1 \otimes S$
$U : \mathbf{Fld} \rightarrow \mathbf{Dom}_m$	$D \mapsto Q(D)$ Corps des fractions	$D \hookrightarrow UQ(D)$ Inclusion de $D : a \mapsto a/1$
$U : \mathbf{CompMet} \rightarrow \mathbf{Met}$	complétion d'un espace métrique	

Le dernier exemple présenté par MacLane : la complétion d'un espace métrique. En particulier, on a constaté que dans les premières éditions du livre de *Topologie* de Bourbaki, il montre que, étant donné un espace uniforme X , il est possible de construire son espace uniforme complet \widehat{X} . Cette construction est complètement constructive.

Cependant, dans les éditions ultérieures du livre de *Topologie*, dans lesquelles a été incorporé le résultat de Samuel sur les applications universelles.

L'énoncé du théorème de Bourbaki et sa démonstration est faite dans le §7, appelé *La complétion d'un espace uniforme* [21, TG II, 21] :

Théorème 3. Soit X un espace uniforme. Il existe un espace uniforme séparé et complet \widehat{X} , et une application uniformément continue $i : X \rightarrow \widehat{X}$, ayant la propriété suivante :

(P) Pour toute application uniformément continue f de X dans un espace uniforme séparé et complet Y , il existe une application uniformément continue $g : \widehat{X} \rightarrow Y$ et une seule telle que $f = g \circ i$.

Si (i_1, X_1) est un second couple formé d'un espace uniforme séparé et complet X_1 et d'une application uniformément continue $i_1 : X \rightarrow X_1$, possédant la propriété (P), alors il existe un isomorphisme $\varphi : \widehat{X} \rightarrow X_1$ et un seul tel que $i_1 = \varphi \circ i$.

La démonstration, selon les propres mots de Bourbaki est la suivante :

La première assertion de l'énoncé signifie encore que le couple (i, \widehat{X}) est solution du *problème d'application universelle* (...) dans lequel on prend pour Σ -ensembles les espaces uniformes *séparés* et *complets*, pour σ -morphisms les applications uniformément continues et pour α -applications les applications uniformément continues de X dans un espace uniforme séparé et complet. L'unicité du couple (i, \widehat{X}) à un isomorphisme unique près résulte donc des propriétés générales des solutions de problèmes d'application universelle (*loc. cit.*). Reste à prouver l'existence du couple (i, \widehat{X}) .

On peut voir que cette deuxième démonstration de la complétion d'un espace uniforme suit des lignes similaires à l'argument exposé dans la démonstration de Samuel fait pour les applications universelles. Cependant, il est nécessaire de préciser que, bien que similaires, ils ne sont pas exactement la même démonstration : tandis que la démonstration de Samuel dans son article de 1948 est réalisée pour le cas d'un espace uniforme qui a été défini par une famille d'écart, c'est-à-dire, pour un espace uniforme séparé (et par conséquent elle *dépend* de l'existence des nombres réels) [141, pp. 593-594], la démonstration de Bourbaki est donnée pour le cas d'un espace uniforme beaucoup plus général. Et, par conséquent, il n'a pas besoin d'une existence *a priori*

des nombres réels. En fait, les nombres réels émergent grâce à ce théorème de Bourbaki. Cependant, dans les deux démonstrations, le problème de la complétion d'un espace uniforme est un problème universel et, l'application i est une application universelle.

De cette manière, il est possible de décrire les espaces uniformes en termes de catégories : la catégorie **Unif** des espaces uniformes et des fonctions uniformément continues. Entre cette catégorie et la catégorie des espaces uniformes complets **CUnif**, on peut définir le foncteur d'oubli $U : \mathbf{CUnif} \rightarrow \mathbf{Unif}$. Et comme la démonstration de Samuel et Bourbaki fait appel aux applications universelles, alors l'application i est fonctorielle. De même, comme on l'a dans le chapitre 2, chaque application universelle fait émerger une paire de foncteurs adjoints. Alors il existe un foncteur qui est adjoint à gauche du foncteur d'oubli U . Et, en effet, ce foncteur est le foncteur de complétion i .

Or, on pourrait penser que les différentes adjonctions jusqu'à présent exprimées décrivent des constructions qui existent déjà. C'est-à-dire qu'ils ne sont qu'une manière différente de décrire quelque chose déjà prouvé ou constitué. Cependant, on notera qu'il existe un puissant théorème qui permet d'indiquer l'existence d'un foncteur à gauche (ou à droite) d'un foncteur donné $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$. En ce sens, si l'adjoint à F peut être une construction fondamentale possible, dont l'existence de ce foncteur adjoint dépend exclusivement de certaines propriétés du foncteur F . C'est le théorème du foncteur adjoint de Freyd, qui est un théorème éminemment catégoriel. Mais avant de l'étudier, remarquons l'importance de l'adjonction dans un autre domaine de la théorie des catégories : la définition de la notion d'un triple.

Dans sa thèse de doctorat *Homotopy Theory in general Categories*, de 1961, Huber présente une brève théorie des foncteurs adjoints, présentant les définitions de Kan et Shih, et montrant leur équivalence. Il est important de noter que, comme dans l'article de Hilton, le but de Huber est l'étude d'une théorie homotopique abstraite, suivant les lignes directrices de Kan. Cependant, le §7 de sa thèse dont le titre est *Adjoint constructions*, il étudie la relation entre les foncteurs adjoints et la notion de «construction standard», introduite par Godement en 1958 sous le nom de «construction fondamentale» [64, p. 271]. La définition de Godement est quelque peu compliquée parce qu'elle est caractérisée dans le contexte spécifique des complexes semi-simpliciaux. Cependant, Huber précise que [74, p. 362] :

The standard constructions may be considered as being a generalization of the path space and cone constructions in topology. For instance, the

triple $\{E, k, p\}$, consisting of the path functor E , of the natural fibre map $k(Y) : EY \rightarrow Y$ and of a hitherto scarcely noticed natural map $p(Y) : EY \rightarrow EEY$, constitutes a standard construction. Dually, the cone functor C , the natural imbedding $k(X) : X \rightarrow GX$, and a certain map $p(X) : CCX \rightarrow CX$ constitute a dual standard construction.

La notion de construction standard a été largement étudiée au début des années 60 et, dans plusieurs articles a été analysée la relation de ce concept avec les foncteurs adjoints. Eilenberg & Moore appellent les constructions fondamentales comme un «triple». Et sa définition est celle qui a été maintenue jusqu'à de nos jours [50, p. 383-384] :

Un *triple* $\mathbf{F} = (F, \eta, \mu)$ dans une catégorie \mathcal{C} consiste en un foncteur $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ et deux morphismes

$$\eta : \mathbf{1}_{\mathcal{C}} \rightarrow F \quad \mu : F^2 \rightarrow F$$

tels que

(T.1) la composition $F \xrightarrow{\eta^F} F^2 \xrightarrow{\mu} F$ est l'identité 1_F

(T.2) la composition $F \xrightarrow{F\eta} F^2 \xrightarrow{\mu} F$ est l'identité 1_F

(T.3) le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} F^3 & \xrightarrow{F\mu} & F^2 \\ \mu F \downarrow & & \downarrow \mu \\ F^2 & \xrightarrow{\mu} & F \end{array}$$

De manière duale, une co-triple en \mathcal{C} est donnée par le triple $(F^*, \varepsilon^*, \delta^*)$ dans la catégorie duale \mathcal{C}^{op} .

Huber avait montré que, si on a une paire de foncteurs adjoints $S \dashv T$, avec unité de l'adjonction β , et co-unité α alors $(TS, \beta, T\alpha S)$ est une triple en \mathcal{C} , et $(S\beta T, \alpha, ST)$ est une co-triple en \mathcal{C} .

Eilenberg et Moore montrent les conditions dans lesquelles le cas converse est possible : étant donné un triple \mathbf{F} , il est possible de construire une paire de foncteurs adjoints dans une catégorie appropriée. Ce résultat sera généralisé en 1965 par Kreisli [96] en démontrant que non seulement une adjonction permet de caractériser un triple, mais que tout triple est généré par une adjonction.

Le concept de triple est important parce qu'il est un outil fondamental pour la description et l'analyse de certaines structures algébriques d'un point de vue catégoriel. Par exemple, les structures de monoïde ou d'anneau commutatif peuvent être décrites en termes de triples. Barr & Wells mentionnent en outre que les triples sont devenus un outil important pour l'étude des toposes [11, p. 97]. En fait, tout le chapitre IV du livre de MacLane de 1971 est consacré aux triples et à leurs relations avec les algèbres. Cependant, MacLane les appelle «monades», et c'est un nom souvent utilisé dans de nombreux textes contemporains.

Or, on a observé que les premières utilisations de l'adjonction ont été effectuées dans le cadre de la théorie homotopique abstraite, mais les résultats d'Elieberg & Moore, et de Kreisli, sont des résultats purement abstraits propres à la théorie des catégories. Cependant, ils n'étaient pas les seuls à présenter les concepts catégoriels d'une perspective abstraite et pas nécessairement liés à un domaine mathématique d'application. Il est possible de caractériser autres résultats et/ou domaines mathématiques qui ont permis un plus grand champ d'action dans l'étude des foncteurs adjoints. Tout d'abord, la caractérisation catégorielle de la notion d'application universelle et le résultat montrant sa relation avec le concept d'adjonction, comme on l'a vu au §3.3.3 grâce à l'article de Swan de 1960. La relation entre les adjonctions et les applications universelles est de la plus haute importance car si on part d'un foncteur $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ et $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ est un adjoint à gauche, alors G est une solution d'un problème universel (il en est de même si l'on part de G et que l'on détermine son adjoint à droite F). G étant la solution d'un problème universel, cela signifie que G est le foncteur *optimal* qui satisfait la propriété d'adjonction. De même, si G' est une autre adjoint à gauche de F , alors $G \cong G'$. Qu'est-ce que cela signifie que G est le foncteur optimal qui satisfait la propriété d'adjonction ? Il a été observé ci-dessus (§2.5 et §3.7) que l'adjonction est une sorte de généralisation de la notion d'équivalence. Ou, répétant les mots de Marquis [121, p. 241], elle constitue une sorte d'«inversion conceptuelle». Cette «inversion» signifie que si $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ est un foncteur, de tous les foncteurs $G_1, G_2, \dots, G_n : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ qui font «le chemin inverse» (s'ils existent), le meilleur foncteur associé à F qui est assez général pour ne pas être un isomorphisme ou une équivalence, est le foncteur adjoint G .

D'autre part, les adjonctions ont commencé à être utilisées dans le cadre abstrait de la théorie des catégories abéliennes. Pierre Gabriel dans son article de 1962 *Des catégories abéliennes* [62] est l'un des premiers à le faire. Gabriel ne renvoie pas dans sa bibliographie à l'article de Kan mais à l'article de Shih. L'un des résultats clés qui montre comment Gabriel utilise les foncteurs adjoints est le suivant [p. 341] :

PROPOSITION 11. Soient \mathcal{A} et \mathcal{B} deux catégories abéliennes, T un foncteur (additif) de \mathcal{A} dans \mathcal{B} , S un foncteur adjoint à T . Alors S est exact à gauche et T est exact à droite.

Gabriel présente également la définition d'équivalence des catégories de Grothendieck et montre qu'en effet cette définition est caractérisée par une adjonction.

Enfin, on trouve le théorème qui résout le problème de l'existence des foncteurs adjoints : étant donné un foncteur $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$, il n'existe pas toujours un foncteur adjoint à droite ou à gauche. Alors, quelles sont les conditions que F (ou \mathcal{C} ou \mathcal{D} , ou les trois) doivent avoir pour que ces adjoints existent ?

La solution à cette question est très importante, parce que comme on l'a vu, la notion de foncteur est d'une importance capitale (peut-être beaucoup plus que celle de catégorie), dans la mesure où elle permet de préserver certaines propriétés structurelles entre des structures de types différents. De cette façon, si $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ est un foncteur, tel que l'objet X de \mathcal{C} est envoyé vers l'objet $X' = F(X)$ de \mathcal{D} alors on peut dire que dans X' a été préservé *quelque chose* de la structure originale de X . Par exemple, soit $F : \mathbf{Ens} \rightarrow \mathbf{Grp}$ le foncteur libre tel que chaque ensemble X d' \mathbf{Ens} est envoyé vers son groupe libre $F(X)$. Le mode de construction de ce foncteur est caractérisé par la présentation de Markoff-Kakutani qui a été observé au chapitre 3.

Ce foncteur permet de préserver la propriété structurale ensembliste de la cardinalité : bien que dans la construction de $F(X)$ des éléments nouveaux aient été ajoutés, ces nouveaux éléments sont déterminés par les éléments de base, de sorte qu'il est possible *reconstruire* l'ensemble original X donné un groupe libre $F(X)$. De même, la propriété d'équipotence en \mathbf{Ens} devient la propriété d'isomorphisme en \mathbf{Grp} .

Or, le foncteur libre F décrit ci-dessus est l'adjoint à gauche du foncteur d'oubli $U : \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Ens}$. C'est-à-dire, d'un foncteur aussi élémentaire qu' U émerge son adjoint à gauche qui est une construction fondamentale en mathématiques : la construction libre. En ce sens, la construction libre peut être considérée comme un quasi-inverse du foncteur oubli. Mais il faut se rappeler qu'un foncteur n'a pas toujours des adjoints à droite ou à gauche.

Ainsi, si on a un foncteur $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$, on peut s'interroger sur l'existence de son éventuel adjoint à gauche $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ comme dans le cas du foncteur oubli et du foncteur libre.

Du fait que les foncteurs adjoints à gauche ou à droite d'un foncteur donné (s'ils existent) sont des solutions d'un problème universel, il est possible de dire que si $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$, alors déterminer un adjoint à gauche de F équivaut à spécifier pour chaque $D \in \mathcal{D}$ un objet initial⁴ de la catégorie comma⁵ $(\mathcal{D} \downarrow F)$. De même, si $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ est un foncteur, la détermination d'un adjoint à droite de G équivaut à spécifier pour chaque $C \in \mathcal{C}$ un objet final de la catégorie comma $(G \downarrow \mathcal{C})$. Cependant, il est nécessaire de présenter les conditions pour que cette spécification et l'existence des objets initiaux et finals.

Eh bien, dans son livre de 1964, Freyd démontre le théorème qui caractérise les conditions suffisantes et nécessaires pour qu'un foncteur F ait adjoints à gauche. Comme on a mentionné au chapitre 2, cet important théorème apparaît (avec d'autres résultats et définitions importantes) comme l'exercice J de la section exercices du Chapitre 3 [58, pp. 84-86]. Il est à noter que dans l'exercice G du même chapitre, Freyd définit le concept d'adjonction, tandis que dans les H et I définit la transformation entre des adjoints et le théorème de réflexion des adjoints. Pour pouvoir formuler le théorème, Freyd définit ce qu'est une *well-powered* catégorie. Autrement dit, une catégorie telle que donné n'importe quel objet X de la catégorie, la collection de tous les sous-objets de X , est un ensemble.

Le théorème est formulé par Freyd comme suit :

Soit \mathcal{C} une catégorie localement petite⁶ et complète⁷, et $T : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ n'importe quel foncteur covariant. Alors, T possède adjoint à gauche si et seulement si :

1. Pour chaque $D \in \mathcal{D}$, il y a $C \in \mathcal{C}$ et une application $(D \rightarrow T(C)) \in \mathcal{D}$.
2. T préserve les limites.

4. Parce que les notions d'objet initial et final peuvent être décrites en termes de solutions de problèmes universels.

5. La catégorie comma $(\mathcal{D} \downarrow F)$ est la catégorie de morphismes de \mathcal{D} vers F . Duale, la catégorie $(G \downarrow \mathcal{C})$ est la catégorie de morphismes de G vers \mathcal{C} .

6. Une catégorie \mathcal{C} est localement petite si pour chaque paire d'objets A et B , il est satisfait que $\text{Hom}(A, B)$ est un ensemble. En revanche, une catégorie \mathcal{C} est petite si $\text{Ob}(\mathcal{C})$ et $\text{Hom}(\mathcal{C})$ sont des ensembles.

7. Une catégorie \mathcal{C} est complète si chaque *diagramme* $F : J \rightarrow \mathcal{C}$ (où J est petite) a une limite dans \mathcal{C} . Duale, on dit qu'une catégorie est co-complète si tous les petits colimites existent. Un diagramme du type J dans une catégorie \mathcal{C} est un foncteur (covariant) $F : J \rightarrow \mathcal{C}$. La catégorie J est appelée catégorie d'indices ou schéma du diagramme F ; le foncteur F est parfois appelé diagramme avec forme J .

3. (Condition de solution). Pour chaque $D \in \mathcal{D}$ il existe un ensemble $S_D \subset \mathcal{C}$ tel que pour chaque $C \in \mathcal{C}$ et application $(D \rightarrow T(C)) \in \mathcal{D}$, il existe un objet $C' \in S_D$ et des applications $(x : C' \rightarrow C) \in \mathcal{C}$, $(D \rightarrow T(C')) \in \mathcal{D}$ tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} D & \longrightarrow & T(C') \\ & \searrow & \downarrow T(x) \\ & & T(A) \end{array}$$

Plus tard, dans l'exercice M du même chapitre, Freyd démontre une version alternative de ce théorème, qui est généralement connu comme théorème spécial du foncteur adjoint. Une formulation de ce théorème est la suivante :

Soit $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ un foncteur, et on suppose que les conditions suivantes sont satisfaites :

1. \mathcal{C} et \mathcal{D} sont localement petites.
2. \mathcal{C} possède des petites limites.
3. \mathcal{C} est *well-powered*.
4. \mathcal{C} possède un ensemble S qu'est petit co-générateur.
5. F préserve des limites.

Alors, F possède un adjoint à gauche.

Par exemple, il existe le foncteur inclusion $I : \mathbf{CHaus} \hookrightarrow \mathbf{Top}$ de la catégorie des espaces compacts Hausdorff dans la catégorie de tous les espaces topologiques. Ces deux catégories sont localement petites. Du théorème de Tychonoff se suit que \mathbf{CHaus} possède des petits produits et F possède également des petites limites. \mathbf{CHaus} est *well-powered*. et on peut voir que $[0, 1]$ est un co-générateur pour \mathbf{CHaus} . Alors, F possède un foncteur adjoint à gauche G . Et ce foncteur G est, en effet, le foncteur de compactification de Stone-Čech. Il est important de noter qu'il n'a pas été montré à quoi ressemble le foncteur G , mais on a prouvé que ledit foncteur existe. En d'autres termes, que la compactification Stone-Čech existe. Par exemple, Bradley *et al* mentionnent cette adjonction dans le §5.5.2 [157, pp. 99-100] en expliquant ce que signifie la functorialité de la compactification et l'adjonction de celle-ci au foncteur d'oubli : dire que β est un adjoint à gauche à I signifie que pour tout espace topologique X et tout espace compact

de Hausdorff Y , l'équivalence naturelle suivante est satisfaite

$$\text{Hom}(\beta X, Y) \cong \text{Hom}(X, IY) = \text{Hom}(X, Y)$$

Cela signifie que les fonctions continues $f : X \rightarrow Y$ d'un espace X vers un espace compact de Hausdorff Y , correspondent *justement* aux fonctions continues $\hat{f} : \beta X \rightarrow Y$. Il est cependant nécessaire de préciser que cette spécification de l'espace βX ne garantit pas son existence. En fait, il est nécessaire de recourir au théorème du foncteur adjoint ou à une construction de l'objet βX pour assurer cette existence :

0

Specifying the continuous functions from βX determines the space βX if it exists, but it doesn't prove it exists. For that, you need a construction (...), or you could invoke some version of the Adjoint Functor Theorem to prove that $I : \mathbf{CHaus} \leftrightarrow \mathbf{Top}$ has a left adjoint.

Et ce type d'adjonction n'est pas seulement limité à la compactification de Stone-Čech, car il est également possible de prouver que la compactification d'Alexandroff X^* répond également à l'adjonction

$$\text{Hom}(X^*, Y) \cong \text{Hom}(X, Y)$$

MacLane montre également dans son livre de 1971 l'application du théorème général du foncteur adjoint pour le foncteur oublié $U : \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Ens}$, en montrant d'abord l'existence de son foncteur adjoint à gauche F , et puis qu'en effet, F est le foncteur libre [116, p. 198]. Également, il montre une version plus générale de la compactification de Stone-Čech : qu'étant donné le foncteur $V : \mathbf{CHaus} \rightarrow \mathbf{Ens}$ il existe son adjoint à gauche, en raison du théorème général de Freyd [116, p. 121].

Ainsi, grâce au théorème du foncteur adjoint, si on a un foncteur qui permet de passer d'une structure mathématique à une autre (ou même un foncteur intra-structural), on peut enquêter l'existence du foncteur qui permet de revenir à la structure initiale. Le théorème du foncteur adjoint n'est pas complètement constructif, parce qu'il ne dit pas quel devrait être le foncteur adjoint à gauche d'un foncteur donné. En pratique, c'est plus un critère d'existence. Mais ayant la certitude d'une telle existence, la suivante tâche pour le mathématicien consiste, en effet, en cherchant (ou en construisant) ce foncteur à gauche. Par exemple, dans la démonstration de l'existence d'un espace uniforme complet, Bourbaki effectue cette preuve des deux manières : d'abord, il montre l'existence de l'espace complet \hat{X} en utilisant le théorème de Samuel, et il montre *aussi* comment cet espace est construit en détail. Ainsi, le fait que l'espace uniforme complet

satisfait une propriété universelle montre l'existence d'un tel espace, mais pas comment il doit être.

Cependant, bien que ne pas montrer une construction fondamentale en détail (comme dans le cas de l'achèvement de Bourbaki), l'enquête sur l'existence de l'adjoint (à gauche ou à droite) de cette construction devient un problème central parce qu'elle permet d'établir des ponts entre structures mathématiques. C'est ainsi qu'on peut voir comment les foncteurs adjoints apparaissent de nombreux résultats mathématiques.

En plus des exemples que MacLane montre dans la table ci-dessus décrite, il montre que dans la même théorie des catégories, il existe différents adjoints à gauche et à droite du foncteur diagonal Δ , selon les catégories impliquées. Et ces adjonctions représentent des constructions basiques de la théorie des catégories. Cette omniprésence des foncteurs adjoints corrobore les affirmations de MacLane dans son article de 1964 et dans son livre de 1971. Dans le premier, après avoir présenté la définition de l'adjonction et sa relation avec les applications universelles, il affirme que «Examples of adjoints are myriad. In general topology there are many, such as the Stone-Cech compactification» [112, p. 60]. D'autre part, dans la note finale bien connue du chapitre 4 de son livre de 1971 (dont on a apprécié dans le Chapitre 2, la critique que MacLane fait à Bourbaki), MacLane réaffirme la grande importance et ubiquité des foncteurs adjoints en mathématiques

The multiple examples, here and elsewhere, of adjoint functors tend to show that adjoints occur almost everywhere in many branches of Mathematics. It is the thesis of this book that a systematic use of all these adjunctions illuminates and clarifies these subjects.

De nombreux exemples de constructions que MacLane montre peuvent être considérés comme des exemples de catégorisation. De même, la notion de triple *pourrait* être considérée comme un exemple de «traduction» de concepts algébriques dans le langage des catégories. Cependant, des objets comme les triples constituent la réflexion sur les propriétés d'objets qui ont subi un ou plusieurs processus d'abstraction. C'est dans ce cadre abstrait qu'on a constaté que certains objets et/ou résultats particuliers répondent à certaines régularités. Et en appréciant qu'il y a un autre objet beaucoup plus abstrait qui peut rendre compte de cette régularité ou de cette forme, c'est quand apparaissent de nouveaux objets pour lesquels les cas particuliers qui ont favorisé leur origine, ne sont que des exemples de la structure générale qui les décrit. C'est pourquoi Spivak mentionne que le concept de triple «would probably not have been invented

without category theory» [151, p. 433]. Cela signifie que, bien qu'il soit possible de décrire des concepts comme les triples dans un cadre algébrique très général, c'est le pouvoir de l'abstraction de la théorie des catégories qui a permis de voir sa structure sous-jacente. Il en va de même pour le concept d'adjonction : bien qu'il soit possible, *a posteriori*, de voir des exemples d'adjonctions dans des périodes historiques antérieures à sa formulation explicite, il a été la tentative de développer une théorie homotopique abstraite et, par conséquent, l'utilisation des concepts catégoriels dans ce développement, ceux qui ont permis de voir, la structure sous-jacente à l'adjonction.

Si on pensait le contraire, on pourrait penser que l'adjonction n'est qu'une nouvelle façon de décrire quelque chose qui était déjà dans un nouveau langage. C'est-à-dire, un *idem per idem*. Mais ce n'est pas tout à fait vrai, car si l'on raisonne ainsi, on pourrait penser que l'adjonction était déjà présente «avant l'adjonction elle-même». Mais comme on l'a vu au chapitre 3, ce n'est pas vrai. Parce qu'on pourrait décrire un phénomène de la fin du XIXe siècle comme la théorie de Galois dans des termes catégoriels, mais cela signifie-t-il que chez Galois, on peut trouver une sorte de théorie des catégories ? Non. Et de même, pour ne pas aller plus loin, peut-on penser que l'adjonction était déjà présente dans l'article d'Eilenberg & MacLane de 1945, parce qu'on peut y trouver un cas particulier d'une adjonction ? De même, non. Ce type de raisonnements constitue un certain anachronisme comme celui que MacLane a encouru en attribuant à Stone la genèse même de la théorie des catégories (et que Stone lui-même a nié, comme on l'a vu dans le §3.6).

Par ailleurs, la catégorisation est un phénomène d'une grande importance car elle permet de révéler la structure sous-jacente à certains problèmes, objets ou théories particuliers. En les étudiant le plus largement possible, il est possible d'établir des interconnexions entre ces problèmes, objets ou théories. Cela peut permettre de décrire ou de résoudre des problèmes d'une structure mathématique dans une autre. Et cela peut être très utile car, comme on l'a vu, cela peut permettre de résoudre le problème initial dans un cadre théorique différent qui peut fournir de meilleurs outils pour traiter et résoudre ce problème. En ce sens, l'utilisation des triples (et donc des adjonctions) pour la description et l'étude des structures algébriques a été un grand pas en avant parce qu'il a permis dans une caractérisation purement catégorielle de l'algèbre universelle. Cela a été fait en 1963 par Lawvere dans sa thèse de doctorat. C'est pourquoi Lawvere accorde une grande attention au concept d'adjonction et est l'un des premiers à montrer sa omniprésence en mathématiques.

4.2 La notion de «fondement» chez Lawvere : *Adjointness in foundations.*

Il est important de noter d'emblée que la notion de «fondement mathématique» elle-même a été peu étudiée par les mathématiciens du XXe siècle. La notion de «fondement» a été prise comme un *a priori* qui est considéré comme allant de soi par tous ceux qui l'emploient. Cela ne signifie pas que l'on ne peut pas démêler le sens qu'a eu cette notion lorsqu'elle a été employée dans la période de la crise des fondements.

Par exemple, si l'on reprend la phrase de Kronecker «Dieu a fait les nombres entiers, tout le reste est l'œuvre de l'Homme», on peut considérer qu'elle signifie que tous les concepts mathématiques pertinents, ou du moins ceux de l'arithmétique et/ou de l'analyse mathématique, ont besoin de la notion de nombre naturel pour «justifier» son existence. En d'autres termes, on considère qu'un objet mathématique peut fonder toutes les mathématiques, ou au moins une série de domaines mathématiques beaucoup plus vaste que le domaine principal auquel cet objet appartient *a priori*. Dans le cas de l'analyse, il semble peut-être un peu exagéré que la notion de nombre naturel constitue *son* fondement. Mais on peut considérer qu'au milieu du XIXe siècle la notion de nombre naturel pourrait être prise comme *l'un* des concepts qui ont rendu possible la construction de la notion de nombre réel, dans la mesure où les constructions de Cantor et Dedekind partent du système des rationnels comme une donnée nécessaire pour que cette construction soit possible. Et, si l'on va plus loin, l'existence des rationnelles émerge de l'existence même des naturels, et ceux-ci fondent leur existence sur les ensembles. Ainsi, on pourrait dire qu'un «fondement» d'un domaine théorique de connaissance mathématique peut être un ou plusieurs objets mathématiques, aussi bien du même domaine que d'un autre qui tente de le réduire.

D'autre part, dans le cas de la caractérisation de l'arithmétique par Stuart Mill, il a été considéré que la notion de nombre réel est construite par l'induction, qui est possible par l'activité de comptage. Dans ce cas, l'idée de nombre naturel ne se fonde pas sur un autre objet mathématique d'une maîtrise théorique propre à l'arithmétique ou d'un domaine qui cherche à le réduire, mais fait appel à une activité extra-mathématique.

Or, il peut arriver que cette activité soit fondée mathématiquement à travers l'objet que l'activité extra-mathématique voulait initialement fonder. Un exemple en est

l'activité de «mesurer», qui a été une activité extra-mathématique pendant de nombreux siècles, qui d'une manière ou d'une autre a essayé d'expliquer la préconception du nombre réel, mais à partir de la construction des nombres réels, l'action de «mesurer» possède déjà une formulation purement mathématique. Il en va de même pour l'activité de «compter», qui acquiert une validité purement mathématique quand on analyse que cette activité peut être expliquée par les concepts de «chaîne» et «application similaire» dans la construction de Dedekind des naturels, exposée dans son livre de 1888.

Cela semble être un cercle vicieux, mais au contraire (et comme nous le verrons plus loin) est une spirale dans laquelle l'activité extra-mathématique «fonde» un concept mathématique, mais comme ce concept est fondé d'un point de vue purement mathématique, lui-même rend possible l'explication mathématique de cette activité extra-mathématique. Cela pourrait être considéré comme un processus de mathématisation des fondements.

Enfin, un fondement peut être pris comme la réduction d'un domaine théorique mathématique à un autre, ou au moins à un système d'énoncés qui peuvent être considérés comme les «points de départ» logiques pour le domaine mathématique en question. Par exemple, dans l'Introduction des *Fondements de la géométrie*, Hilbert publié en 1899, affirme ce qui suit

La géométrie, comme l'arithmétique, ne requiert pour son développement logique qu'un petit nombre de principes fondamentaux simples. Ces principes fondamentaux sont appelés les axiomes de la géométrie. Le choix des axiomes et la recherche de leurs relations mutuelles est un problème qui, depuis l'époque d'Euclide, a été discuté dans de nombreux et importants mémoires trouvés dans la littérature mathématique.

Autrement dit, pour Hilbert, les fondements de la géométrie ou de l'arithmétique sont ces «principes» ou «raisons fondamentales». Ce sont les points de départ logiques sur lesquels se dresse la théorie (dans ce cas, la géométrie ou l'arithmétique). Même si cela ne signifie pas qu'il n'y a pas eu de géométrie ou d'arithmétique *avant* la postulation de ces fondements. L'étude des fondements est, dans une large mesure, épistémologiquement opposée à leur présentation logique : les théories peuvent déjà exister *a priori* (par exemple la géométrie ou l'arithmétique) et la recherche de leurs fondements peut être effectuée *a posteriori*. Cependant, l'image que Hilbert a de la notion de «fondement» est très semblable à l'*arché* grec que l'on peut qualifier d'«origine», de «commencement» ou de «cause première» des choses. Cela ressort clairement de sa position sur la théorie

des ensembles comme fondement des mathématiques en affirmant le 4 juin 1925 lors d'une conférence à Münster à la Société mathématique allemande : «Aus dem Paradies, das Cantor uns geschaffen, soll uns niemand vertreiben können» (Personne ne pourra nous expulser du paradis que Cantor a créé pour nous). En d'autres termes, bien que *les* fondements de la géométrie ou de l'arithmétique soient quelques «principes» logiques sur lesquels la géométrie ou l'arithmétique est érigée, *le* fondement des mathématiques est la théorie des ensembles (en particulier la théorie des ensembles ZFC).

Cela peut sembler paradoxal, mais peut être interprété de deux manières (au moins *a priori*) : i) la différence entre les deux Hilbert, le premier qui comprend la période entre la fin du XIXe siècle et le début des années 20, et le «deuxième Hilbert» qui est celui qui formule le célèbre «programme de Hilbert» sur les bases métamathématiques des mathématiques. ii) La différence entre la méthode axiomatique comme «fondement» et la «méthode». En raison des limites du présent article, nous ne analyserons que le (ii) : clairement dans la citation précédente de Hilbert, les «fondements» de la géométrie sont les axiomes qui la rendent possible en tant que discipline. D'autre part, les «fondements» de l'arithmétique sont d'autres axiomes complètement différents de ceux de la géométrie (bien que, peut-être, similaires). Ensuite, il y a des bases pour la géométrie et d'*autres* pour l'arithmétique. En ce sens, la notion de «fondement» est relative et non absolue.

Cependant, si l'on considère *un seul* système formel comme le fondement des mathématiques, comme c'est le cas pour la théorie des ensembles ZFC, Hilbert abandonne le relativisme et cherche à réduire toutes les mathématiques à un autre domaine mathématique. Il n'y a plus de notion relative de «fondement» mais il devrait y avoir un fondement absolu (le «paradis de Cantor»). Et en ce sens, la méthode axiomatique acquiert une valeur méthodologique et non fondatrice. Bien que le cas de la théorie des ensembles ait cette double valeur : la méthode axiomatique permet de rechercher les axiomes appropriés pour la théorie des ensembles et ces axiomes sont ceux qui sous-tendent toutes les mathématiques. Ainsi, dans la théorie des ensembles ZFC, la notion de fondement possède deux caractéristiques fondamentales : les fondements de la théorie des ensembles ZFC sont les axiomes de cette théorie et cette théorie fonde les mathématiques dans la mesure où elle permet de réduire toute autre discipline mathématique en son sein. Cette caractérisation n'a pas beaucoup changé. Par exemple, Joachim Lambek dans l'entrée sur «Les fondements des mathématiques» de l'*Encyclopédie britannique* affirme que :

Foundations of mathematics [is] the study of the logical and philosophical basis of mathematics, including whether the axioms of a given system ensure its completeness and its consistency⁸.

D'autre part dans l'entrée sur «Philosophie des mathématiques» dans l'*Encyclopédie Stanford de Philosophie*, Leon Horsten mentionne ce qui suit :

When professional mathematicians are concerned with the foundations of their subject, they are said to be engaged in foundational research. When professional philosophers investigate philosophical questions concerning mathematics, they are said to contribute to the philosophy of mathematics. Of course the distinction between the philosophy of mathematics and the foundations of mathematics is vague, and the more interaction there is between philosophers and mathematicians working on questions pertaining to the nature of mathematics, the better⁹.

On constate une fois de plus qu'il n'existe pas de caractérisation précise de la notion de fondement des mathématiques en soi. Lamberk effectue un *idem per idem* en remplaçant le terme «base» par «base». Bien qu'il affirme plus tard que «les mathématiciens du XIX siècle ont découvert que le langage des mathématiques pourrait être réduit à la théorie des ensembles». Ces deux affirmations, ajoutées à celle de Hilbert, permettent de conclure que la notion de «fondement des mathématiques», qui sera appelée «classique» pour l'opposer à d'autres approches, possède les caractéristiques suivantes : i) les fondements des mathématiques sont un «point de départ» les «principes» par lesquels les mathématiques sont construites. ii) Un domaine mathématique dans lequel toute théorie mathématique X peut être *réduite*. La théorie des ensembles ZFC a été considérée comme le domaine mathématique par excellence qu'elle réalise. Cependant, la position logiciste considère que même la théorie des ensembles peut être réduite à la logique. Cette réduction évoque une caractérisation «physique» de la notion de fondement : réduire une théorie mathématique à une autre signifie que la seconde est la «base», le «substrat», la «fondation», le «support» ou «pilier» de la seconde. Alors que la considération de la notion de «fondement mathématique» comme un point de départ signifie que les mêmes sont les justifications ou les raisons premières qui valident l'existence des objets mathématiques de la première théorie.

8. Consulté en août 2020.

9. Consulté en août 2020.

Compte tenu de ce qui précède, une première approximation permet de voir que la notion «classique» du concept de fondement mathématique peut consister en un ou plusieurs des éléments suivants :

1. Une(s) activité(s) : abstraction/participation, comptage, comparaison, calcul, organisation, argumentation, mesure, classification, etc.
2. Un(s) objet(s) : le nombre, la bijection, les opérations et leurs règles, les permutations, les démonstrations, les structures, etc.
3. Un domaine mathématique de la connaissance : la (les) logique(s), la (les) théorie(s) des ensembles, la (les) théorie(s) des types, la théorie des catégories, la théorie des types homotopiques (fondements univalents), etc.

Dans le cas de la théorie des ensembles ZFC, en tant que domaine qui fonde toutes les mathématiques, on peut considérer plusieurs objets tels que celui d'«ensemble» et d'«élément», en plus de la relation d'«appartenance».

4.3 Fondements = universel.

On reconnaît de nos jours que les premiers concepts catégoriels n'ont pas émergé comme une tentative de «refonder» les mathématiques d'un point de vue non ensembliste. Ces concepts sont apparus comme des outils pour expliquer de la manière la plus synthétique possible pour le moment (les années 40) certains phénomènes qui se manifestaient dans la topologie algébrique. C'est-à-dire un langage qui permet la description et l'explication de certains phénomènes mathématiques, et qui le fait d'une manière plus efficace par rapport à la façon dont la théorie des ensembles le faisait, en se débarrassant d'éléments inutiles et en ne conservant que l'essentiel de cette explication. En particulier, parmi les phénomènes que l'on voulait expliquer, on trouve ceux d'«isomorphisme naturel» et de «transfert des propriétés structurelles». Or, le second n'est pas exprimé de manière explicite dans les articles précités, mais peu à peu dans la communauté mathématique qui a adopté le nouveau langage catégoriel, il y eut une prise de conscience de l'importance du concept de foncteur comme celui qui permet de transférer des propriétés d'une structure mathématique à une autre. Alors que le concept de catégorie était présenté comme problématique dans la mesure où de nombreuses catégories ne pouvaient pas être fondées sur la théorie des ensembles ZFC puisqu'elles étaient «trop grandes», elles devraient donc avoir besoin d'une théorie des classes pour une éventuelle réduction. En effet, le même MacLane manifeste dans le

§6 de l'article de 1945 que des catégories telles que «tous les ensembles» ou «tous les groupes» sont illégitimes dans le cadre de la théorie des ensembles. Mais

Any rigorous foundation capable of supporting the ordinary theory of classes would equally well support our theory. Hence we have chosen to adopt the intuitive standpoint, leaving the reader free to insert whatever type of logical foundation (or absence thereof) he may prefer. These ideas will now be illustrated, with particular reference to the category of groups.

En d'autres termes, les fondements de la notion de «catégorie» n'étaient pas très préoccupants. Peu à peu, les mathématiciens ont commencé à utiliser ces concepts en dehors de ce problème, parce qu'ils fonctionnaient dans les mathématiques qu'ils développaient. Par exemple, on a vu au Chapitre 3 que la notion de «propriété universelle» a été introduite par Pierre Samuel en 1948, en utilisant le langage ensembliste et la notion de structure de Bourbaki. Et bien qu'elle ait été introduite dans le chapitre IV du livre sur la Théorie des ensembles dans les *Éléments de mathématique*, ce n'était pas un concept fertile dans cette approche théorique. Mais lorsque cette notion a été exprimée et présentée dans le langage catégoriel à la fin des années 50, elle est devenue l'un des résultats fondamentaux de la théorie émergente des catégories, dans la mesure où de nombreux concepts et constructions catégorielles étaient de simples cas particuliers de constructions universelles. Ainsi, les outils catégoriels de catégorie, de foncteur et de transformation naturelle ont gagné en pertinence parce qu'ils permettaient une utilisation efficace dans les mathématiques «réelles» (en termes de Corfield [30]). C'est-à-dire, dans les mathématiques où ils étaient confrontés à une grande partie des mathématiciens dans leur travail. Le plus grand exemple en a été Grohendieck, qui n'a eu aucun problème à utiliser les concepts catégoriels pour décrire les phénomènes de la géométrie algébrique ou de l'algèbre homologique.

Or, dès le début des années 60, avec les premiers compendiums mathématiques sur les concepts catégoriels et les résultats que ces concepts rendaient possibles, ce nouveau domaine de connaissances commence à se profiler comme un domaine mathématique autonome. En d'autres termes, on commence déjà à parler d'une «théorie» des catégories proprement dite et ce n'est pas seulement un projet qu'Eilenberg et MacLane ont porté sur leurs épaules pendant environ une décennie. Et malgré la consolidation théorique des concepts et des résultats catégoriels, ni Eilenberg ni MacLane ont estimé que la théorie des catégories pourrait être considérée comme un domaine de connaissances qui

rivaliserait avec la théorie des ensembles ZFC en ce qui concerne les fondements des mathématiques. L'artisan de ce changement conceptuel était un doctorant d'Eilenberg : F. W. Lawvere.

Les années 60 et 70 ont été une grande production de Lawvere. Cependant, dès sa thèse de 1963, Lawvere avait laissé entendre qu'auparavant au développement de sa thèse, il considérait qu'une axiomatisation de la catégorie de catégories (la catégorie CAT) pourrait être considéré comme un fondement des mathématiques, alternative à la théorie des ensembles. Expectatives auxquelles Eilenberg et MacLane étaient sceptiques. Cette tentative d'axiomatisation de CAT est connue sous le nom d'*Elementary Theory of the category of Categories* (ETCC) et apparaît explicitement dans une publication de 1966 dont le titre montre les ambitions du contenu : *The Category of Categories as a Foundation for Mathematics*. Comme on le sait, ce fondement serait fondé non pas sur les notions primitives d'élément, d'appartenance et d'ensemble, mais sur celles de morphisme, de composition et de catégorie. À cet égard, Lambeck & Scott [102, p. 171] mentionne comme anecdote de cette proposition :

In 1964, F. W. Lawvere proposed to found mathematics on the category of categories. When he lectured on this at an international conference in Jerusalem, Alfred Tarski objected : "But what is a category if not a set of objects together with a set of morphisms?" Lawvere replied by pointing out that set theory axiomatized the binary relation of membership, while category theory axiomatized the ternary relation of composition.

Cependant, John Isbell souligne que cette axiomatisation présente plusieurs problèmes, notamment avec un critère pour la construction de catégories qui n'offre pas la puissance suffisante pour construire des modèles de catégories. Ensuite, la croyance de Lawvere qu'une axiomatisation de CAT pourrait fonder toutes les mathématiques a été progressivement diluée, mais pas pour autant Lawvere a renoncé à son entreprise et, parallèlement à la fondation des mathématiques par l'ETCC, il a travaillé sur le fondement de la théorie des ensembles en utilisant les concepts catégoriels : la *Elementary Theory of the Category of Sets* (ETCS). Ce fondement tente de présenter une formulation axiomatique de la théorie des ensembles par des concepts purement catégoriels. Or, contrairement à l'ETCC, l'ETCS a eu plus de chance et a déjà permis de développer une théorie des ensembles alternative, fondée notamment sur la notion de «topos élémentaire» que Lawvere reprend de ce que l'on appelle aujourd'hui par «topos de Grothendieck», bien qu'elle soit plus générale que ce dernier.

À cet égard, il convient de noter que tant l'ETCC que l'ETCS ont essayé de fonder les mathématiques au sens «classique» comme indiqué ci-dessus. En d'autres termes, l'ETCC a essayé de réduire toutes les mathématiques à une théorie axiomatique de CAT, tandis que l'ETCS a cherché à réduire la théorie des ensembles à certains topos élémentaires avec quelques axiomes complémentaires. Cependant, le fait de proposer un fondement (dans ce sens classique) pour les mathématiques *alternative* à la théorie des ensembles ZFC a été un grand pas pour la discussion sur les fondements et la notion même de «fondement».

Ce dernier aspect est abordé par Lawvere dans un article de 1969 intitulé *Adjointness in Foundations*. L'objectif principal de cet article est d'étudier le rôle de la notion de foncteurs adjoints dans la formalisation des quantificateurs, qui sont d'une importance capitale pour les fondements de la logique catégorielle¹⁰. Mais, pour montrer ce *rôle fondateur*, Lawvere estime qu'il faut repenser la notion même de «fondement» dans les mathématiques. Ainsi, dans le §1 correspondant à la déclaration de principes de l'article, il mentionne ce qui suit [106] :

Foundations will mean here the study of what is universal in mathematics. Thus Foundations in this sense cannot be identified with any “starting-point” or “justification” for mathematics, though partial results in these directions may be among its fruits. But among the other fruits of Foundations so defined would presumably be guide-lines for passing from one branch of mathematics to another and for gauging to some extent which directions of research are likely *to be relevant*¹¹.

Autrement dit, pour Lawvere l'étude des fondements ne devrait pas être l'étude des principes qui permettraient la constitution logique de toutes les mathématiques ou d'un domaine mathématique spécifique. En ce sens, il s'éloigne du point de vue de Hilbert mentionné ci-dessus. Cependant, il n'est pas clair ce qu'«universel en mathématiques» signifie quand Lawvere mentionne que cela doit être le but de l'étude des fondements. Deux alternatives se présenteraient a priori : i) l'universel au sens platonique du terme.

10. La logique catégorielle est une tentative de décrire la logique mathématique par des concepts purement catégoriels. Dans cette description, tant la syntaxe que la sémantique sont des catégories qui répondent à certaines exigences, tandis que l'interprétation n'est rien d'autre qu'un foncteur. Cela a été un domaine assez fructueux de la théorie des catégories étant largement utilisé dans le calcul théorique.

11. C'est moi qui souligne.

C'est-à-dire les propriétés immuables des objets concrets. ii) l'universel comme ce qui est «commun dans différents domaines mathématiques», c'est-à-dire comme les objets et/ou méthodes qui sont omniprésents dans les mathématiques.

Le premier sens du «universel» semble le plus approprié. Cependant, Lawvere lui-même rejette cette possibilité. Dans une interview accordée en 2007 et 2008, qui montre que l'attitude de Lawvere vis-à-vis des motifs reste la même que dans son article de 1969, il affirme ce qui suit [134, p. 25] :

Having recognized already in the 1960s that there is no such thing as a heaven-given platonic “justification” for mathematics, I tried to give the word “Foundations” more progressive meanings in the spirit of Eilenberg and Truesdell. That is, I have tried to apply the living axiomatic method to making explicit the essential features of a science as it is developing in order to help provide a guide to the use, learning, and more conscious development of the science. A “pure” foundation which forgets this purpose and pursues a speculative “foundation” for its own sake is clearly a NON-foundation.

Foundations are derived from applications by unification and concentration, in other words, by the axiomatic method. Applications are guided by foundations which have been learned through education.

Donc, les fondements n'ont pas cette tournure platonicienne d'être des «principes uniques et immuables», mais ils sont dynamiques : comme l'affirme Lawvere lui-même, ils sont constamment renouvelés par la pratique mathématique. Ce sont les applications qui permettent de voir quels objets et/ou méthodes mathématiques sont présents dans différents domaines mathématiques. Et cela permet de dévoiler les différents «fondements».

Cela fait pencher la balance sur l'interprétation (ii) qui a été exposée ci-dessus : l'universel est ce qui est omniprésent dans les mathématiques. Mais, comment cette ubiquité est-elle détectée ? Lawvere a déjà donné un indice en affirmant que ce sont en effet les applications qui permettent de voir que tel ou tel objet ou méthode est présent dans différents domaines mathématiques et donc il est «fondamental» (comme c'est le cas, par exemple, du concept de «foncteur adjoint», qui est ce qu'il montre dans son article de 1969). Mais pour reconnaître cette ubiquité dans la pratique mathématique, l'histoire des mathématiques prend un rôle prépondérant. En fait, avant la citation précédente, il mentionne ce qui suit :

(...) an important component of mathematical practice is the careful study of historical and contemporary analysis, geometry, etc. to extract the essential recurring concepts and constructions ; making those concepts and constructions (such as homomorphism, functional, adjoint functor, etc.) explicit provides powerful guidance for further unified development of all mathematical subjects, old and new

Il semble ainsi revenir au relativisme sur les fondements de Hilbert mentionné ci-dessus. Mais Lawvere ne considère pas ce relativisme comme un problème pour fournir des bases solides pour les mathématiques. En effet, le travail principal de l'étude sur les fondements des mathématiques consiste dans la recherche incessante sur les concepts et/ou méthodes qui sont omniprésents dans les différents domaines des mathématiques. Cela peut être représenté comme une sorte de spirale qui s'étend peu à peu. Spirale dans laquelle on part arbitrairement de certains fondements F_1 , qui permettent certaines applications A_1 . Mais ces mêmes applications permettent de mettre en évidence d'autres objets et/ou méthodes qui avaient passé inaperçus dans les premiers fondements, de sorte qu'ils favorisent l'émergence de nouveaux fondements F_2 , qui, à leur tour, permettent de nouvelles applications A_2, \dots et ainsi de suite jusqu'à un «état actuel» où on a des fondements F_k et des applications A_k associées à ceux-ci.

Ainsi, pour Lawvere, il existe une relation dialectique entre les fondements et les applications. C'est pourquoi sa conception particulière des «fondements» ouvre la porte à l'étude des fondements de ce que l'on appelle généralement les «mathématiques pratiques». C'est pourquoi il mentionne ensuite que (ibid.) :

During the past forty years we have become accustomed to the fact that foundations are relative, not absolute. I believe that even greater clarifications of foundations will be achieved by consciously applying a concentration of applications from geometry and analysis, that is, by pursuing the dialectical relation between foundations and applications.

En résumé, on peut dire que pour Lawvere :

- Il existe une forte interrelation entre les applications et les fondements.
- Cette interaction est médiée par les pratiques mathématiques.
- Les fondements ne sont pas absolus, mais relatifs.
- Ensuite, il n'y a pas de dernier fondement des mathématiques telles que la théorie des ensembles, la logique, etc. Encore la même théorie des catégories.

- Chaque domaine a ses propres fondements et ceux-ci peuvent changer par rapport aux applications de la théorie.
- Toutes les bases sont guidés par la méthode axiomatique.

Il faut noter que dans la présente thèse, on ne défend pas ce point de vue des «fondements des mathématiques», mais il doit être clair que cette approche a été assez novatrice. Du moins en ce qui concerne la vision classique des fondements. Puisque le point de vue de Lawvere considère que les mathématiques sont en constante évolution : les domaines mathématiques qui sont aujourd'hui considérés comme «fondamentaux» pourraient ne pas l'être dans un siècle, donc penser qu'il existe des fondements uniques et immuables (dans la perspective classique), cela pourrait signifier la non-acceptation de ces nouveaux domaines, concepts et/ou méthodes, dans la mesure où ils ne correspondent pas au domaine mathématique dans lequel les mathématiques *devraient* être réduits. Clairement, c'est aussi une position intellectuelle de Lawvere en défendant sa dissidence face à la prédominance de la théorie des ensembles ZFC comme fondement (classique, évidemment) des mathématiques. Les partisans de la ZFC ont le droit d'y penser. De même, sa proposition souffre de la rigueur philosophique des autres propositions fondatrices basées sur la ZFC. Cependant, il est important de noter que l'approche de Lawvere ouvre de nouvelles perspectives sur la recherche philosophique sur quelque chose qui semblait évident et qui ne méritait aucune réflexion : la notion même de «fondement mathématique».

4.3.1 Adjonction et les fondements.

Tout au long de la présente thèse, on a observé que l'affirmation de MacLane selon laquelle «l'adjonction se trouve partout» n'est pas une affirmation futile. Initialement, on peut trouver des adjonctions dans le domaine mathématique qui lui a donné sa naissance : la topologie algébrique et, en particulier, la théorie homotopique abstraite. Cependant, peu à peu, des adjonctions ont été trouvées dans d'autres domaines assez différents les uns des autres. De la même théorie des catégories, l'algèbre abstraite et la théorie des treillis à la topologie.

Le concept d'adjonction a une grande importance dans les mathématiques parce qu'il caractérise le phénomène d'«inversion général» (ou, d'«inversion conceptuelle», selon Marquis [121]) entre foncteurs inter-structurels. Ces foncteurs inter-structurels sont d'une grande pertinence, parce que de nombreuses constructions mathématiques

de grande importance, sont des constructions fonctorielles. Et, dans de nombreux cas, si on a un foncteur d'oubli assez simple $U : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ entre une catégorie \mathcal{D} «plus riche en structure» que la catégorie \mathcal{C} , son foncteur adjoint à gauche (s'il existe) $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ est une construction fondamentale.

En ce sens, on peut constater l'ubiquité des foncteurs adjoints et leur participation dans les théorèmes et les constructions mathématiques basiques. C'est l'un des objectifs de Lawvere dans son article de 1969. Mais pour montrer cette prémisse, Lawvere montre que la notion d'adjonction peut également être utilisée pour décrire des phénomènes de la logique mathématique.

Déjà dans sa thèse révolutionnaire de doctorat de 1963 intitulée *Functorial Semantics of Algebraic Theories*, Lawvere montre comment il est possible de décrire l'algèbre universelle en termes purement catégoriels. Pour y parvenir, il introduit la notion de «Théorie de Lawvere» qui est une généralisation conjointe des notions de groupe, d'anneau, d'algèbre associative, etc. Lawvere définit une théorie algébrique \mathbf{T} comme une catégorie avec des produits finis et possédant une «algèbre générique» (p. ex., un groupe générique). Un modèle de cette théorie dans une catégorie \mathcal{C} avec catégorie avec des produits finis (p. ex., un groupe), est un foncteur $M : \mathbf{T} \rightarrow \mathcal{C}$ qui préserve des produits finis¹². Et un morphisme des modèles $\varphi : M \rightarrow N$ est une transformation naturelle des foncteurs M et N . Le modèle le plus naturel (mais pas l'unique) pour une théorie algébrique est

$$M : \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{Ens}$$

Par exemple, si \mathbf{T} est une théorie algébrique *sans* opérations, on peut prouver que

$$\mathbf{T} \cong \mathbf{FinEns}^{op}$$

Comme dans cette théorie algébrique il n'y a pas d'opérations, elle est souvent appelée la «théorie de l'égalité.»

En outre, si \mathcal{C} est une catégorie avec des produits finis, un «objet groupe» en \mathcal{C} peut être défini comme un foncteur $T : \mathbf{Grp} \rightarrow \mathcal{C}$ préservant des produits.

12. La définition et la préservation des produits finis sont liées à la définition et l'interprétation des *opérations* de la théorie algébrique \mathbf{T} dans son modèle \mathcal{C} .

Ainsi, une *structure algébrique* peut être considérée comme un foncteur $F : \mathbf{T} \rightarrow \mathcal{C}$ décrit ci-dessus.

Compte tenu de ce qui précède, Lawvere montre dans §1 du chapitre III de sa thèse que les modèles (c'est-à-dire, la sémantique) est l'adjoint à gauche d'une structure algébrique [104, p. 78]. Et dans le théorème 1 du §2 du chapitre 4, il démontre que chaque foncteur algébrique possède un adjoint à droite [104, p. 93].

Ces deux résultats sont d'une grande importance, car avec eux Lawvere montre que de nombreuses constructions algébriques importantes peuvent être vues comme des adjointes de certains foncteurs algébriques. C'est ce qu'il note dans le résumé de sa thèse [103, p. 869] :

(...) the constructions of free algebras, tensor algebras, monoid rings, enveloping algebras of Lie algebras, abelianization of groups, and covariant extension of rings for modules can all be viewed in a unified way as adjoints to “algebraic” functors, and we show that such adjoints always exist. Also, by formalizing “semantics” itself as a functor and showing that it has an adjoint, we are able to give a new characterization of equational classes of algebras (viewed as abstract categories) and also to provide a canonical tool for the partial analysis of many nonalgebraic categories and functors.

Or, l'article de 1969 étend les horizons de sa thèse de doctorat : Lawvere prend une catégorie cartésienne fermée, c'est-à-dire une catégorie \mathcal{C} où il existe un objet final, le produit $A \times B$ et l'objet exponentiel B^A sont définis pour chaque couple d'objets A et B dans \mathcal{C} .

Avec ces éléments, Lawvere définit ce qu'est une *hyperdoctrine* : tout d'abord il ajoute de nouvelles conditions à la catégorie \mathcal{C} pour définir une nouvelle catégorie C_T de formules dans avec contexte. Avec cela, le foncteur $F : C_T \rightarrow \mathbf{Pos}$ (où \mathbf{Pos} est une catégorie de posets) tel que pour chaque morphisme f de C_T , on a que $F(f)$ possède des adjoints à droite et à gauche. Dans ce cas, le foncteur F est appelé une hyperdoctrine. Le foncteur F est pensé comme un opérateur qui introduit de nouvelles variables dans le contexte. Autrement dit, un opérateur d'extension logique. Avec ceci, quels seraient les candidats optimaux pour être les foncteurs adjoints à gauche et à droite de F ? Lawvere montre que montre qu'ils sont les quantificateurs existentiel et universel respectivement. C'est-à-dire

$$\exists \dashv F \dashv \forall$$

L'adjonction ci-dessus est d'une grande importance, car il montre non seulement que trois concepts fondamentaux pour la logique sont adjoints entre eux, mais aussi André Joyal a montré dans son article de 2017 *Notes on Clans and Tribes* que cette adjonction constitue une pierre angulaire dans sa présentation catégorielle de la théorie des types homotopiques [86].

Après avoir présenté l'ancienne paire d'adjonctions, Lawvere montre que la notion de correspondance de Galois peut être généralisée à des catégories au-delà de **Pos**. Lawvere montre que, par exemple, la même théorie de Galois peut être considérée comme l'adjoint à gauche d'une certaine théorie algébrique, par la situation d'adjonction [106, p. 14]

$$\mathbf{Alg}_k^{op} \rightleftarrows \mathbf{Ens}^{Gal(\bar{k}, k)}$$

(...) Where the left-hand category has as object all commutative and associative algebras over a field k and the right-hand all continuous permutations representations of the compact Galois group of the separable closure \bar{k} of k while the left-to-right adjoint functor assigns to every k -algebra A the representations by permutations of the set $\mathbf{Alg}_k(A, k)$ of all algebra homomorphisms $A \rightarrow k$.

Ainsi, la théorie de Galois, en tant que théorie algébrique, peut être considérée comme l'adjoint à droite de certaines algèbres associatives.

Cependant, la généralisation la plus surprenante de cette adjonction résulte de la catégorie **Theo** de la logique du premier ordre à prédicats de plusieurs sortes. Ces I -sortes théories forment une adjonction avec la catégorie $(\mathbf{Cat}, [\mathbf{Ens}^I])$ de modèles de la manière suivante

$$SM : \mathbf{Theo} \rightleftarrows (\mathbf{Cat}, [\mathbf{Ens}^I]) : ST$$

Où SM est le foncteur «sémantique» et ST est le foncteur «structure». C'est-à-dire, pour Lawvere, sa définition fonctorielle de la sémantique, de l'interprétation d'une structure, est l'adjoint de la caractérisation fonctorielle d'une structure algébrique. C'est pourquoi Lawvere mentionne que le «formel» (c'est-à-dire la syntaxe) et le «conceptuel» (la sémantique) sont des adjoints entre eux [106, p. 15] :

$$Formal \rightleftarrows Theories$$

par ailleurs

(...) describing the presentation of the invariant theories by means of the formalized languages appropriate to the species. Composing these two adjoint situations, and tentatively identifying the Conceptual with categories of the general sort $(\text{Cat}, [\mathbf{Ens}^I])$, we arrive at a family of adjoint situations

$$\text{Formal}^{op} \rightleftarrows \text{Conceptual}$$

Ainsi, si une théorie mathématique peut être interprétée comme une théorie algébrique, il existe un lien fort d'adjonctions entre sa syntaxe et son interprétation. En d'autres termes, le phénomène de l'adjonction n'est pas seulement présent dans diverses constructions mathématiques basiques, mais il est également présent d'un point de vue méta-mathématique.

Avec ces résultats de Lawvere, on peut voir que, d'un point de vue logique, la notion d'adjonction possède un grand pouvoir unificateur au pouvoir caractériser les concepts fondamentaux de substitution et les quantificateurs universels et existentiels. Mais le phénomène de l'adjonction n'est pas seulement de la logique classique : Awodey *et al et* [7] et Menni & Smith [125] ont montré le rôle fondamental de l'adjonction dans la logique modale classique. Les deux articles montrent comment les modalités de la logique modale se produisent en tant que paires adjointes à certaines algèbres. En fait, dans l'article Menni & Smith est mentionné que le but de celui-ci est de montrer que

left and right adjointness (...) determine useful mathematical modalities
 (...) capable of encompassing some classical situations as well as many of
 the newer applications.

Ainsi, non seulement les quantificateurs, mais aussi les modalités apparaissent comme adjonctions.

D'autre part, on a également été observé que les foncteurs adjoints sont étroitement liés aux concepts d'application universelle, les connexions de Galois, les triples et dans d'innombrables constructions mathématiques fondamentales (comme celles présentées par MacLane). D'autre part, l'étude des concepts de la logique grâce au langage catégoriel a favorisé l'émergence de la logique catégorielle, qui lors de l'adoption de l'utilisation des topos, a l'adjonction comme l'un de ses concepts fondamentaux. Ainsi, l'analyse catégorielle de la logique permet la clarification et la compréhension de ses concepts, parce que les notions logiques finissent par être des cas particuliers des concepts beaucoup plus généraux, auxquels on accède par la logique catégorique. Ces concepts généraux

permettent de construire des interconnexions de la logique avec d'autres domaines très différents d'elle. Les calculs dans une logique spécifique (comme la logique classique, intuitionniste ou le calcul lambda) sont effectués du point de vue le plus général possible, en associant ces logiques avec des catégories avec différentes structures propres. Ainsi, les résultats et/ou théorèmes dans ces catégories sont suffisamment généraux pour qu'ils puissent être «transportés» dans les logiques spécifiques. En outre, on étudie l'invariance de certaines propriétés par la définition de foncteurs entre ces catégories. Et, s'il existe une relation d'adjonction entre elles, on peut dire que celles-ci possèdent un certain degré de similarité.

4.3.2 Repenser la notion de fondement.

Comme il a été noté dans le §4.2, le concept de fondement a été largement utilisé dans la littérature à la fois par les mathématiciens et par les philosophes des mathématiques. Cependant, cette notion n'a pas été analysée *par elle-même*, mais qui correspond à une vision «classique» de ce qui a été entendu comme fondement au cours de la grande majorité du XXe siècle. En ce sens, des réflexions comme celle de Lawvere sur la nécessité de donner une resignification aux fondements des mathématiques sont d'une grande valeur parce qu'elles permettent d'ouvrir la porte à de nouvelles études sur cet aspect.

Et, bien que l'appel de Lawvere ait été faite pour la première fois dans son article de 1969, celui-ci n'a pas eu la résonance qui serait attendue dans la communauté de la philosophie des mathématiques. La seule publication qui souligne la nécessité d'étudier la notion de fondement en soi et de repenser ce que l'on entend par fondement, c'est l'article *Set-theoretic foundations* de Penelope Maddy, publié en 2017. Comme son nom l'indique, Maddy étudie ce que l'on entend par «fondement» dans le cadre de la théorie des ensembles. Mais cela ne l'empêche pas de caractériser comment les fondements sont compris dans le cadre de la théorie des catégories et des «multivers ensemblistes». C'est un article très novateur parce qu'il est parmi les quelques articles en philosophie des mathématiques qui abordent ce problème explicitement. Mais, à son tour, il est paradoxal, parce qu'il tente de clarifier cette «supposition» que les mathématiciens et les philosophes des mathématiques avaient présumée pendant plus de cent ans : la notion même de «fondement des mathématiques».

Dans son article, Maddy présente les différentes *usages* de la notion de «fondement»,

en effectuant la comparaison entre la théorie des ensembles, la théorie des catégories et le «multivers ensembliste». En effet, elle commence son document en disant ceci (qui réaffirme le caractère aprioriste de la notion de «fondement» dont nous avons insisté précédemment) [118] :

It's more or less standard orthodoxy these days that set theory – ZFC, extended by large cardinals – provides a foundation for classical mathematics. Oddly enough, it's less clear what 'providing a foundation' comes to. Still, there are those who argue strenuously that category theory would do this job better than set theory does, or even that set theory can't do it at all, and that category theory can. There are also those who insist that set theory should be understood, not as the study of a single universe, V , purportedly described by ZFC + LCs, but as the study of a so-called 'multiverse' of set-theoretic universes – while retaining its foundational role. I won't pretend to sort out all these complex and contentious matters, but I do hope to compile a few relevant observations that might help bring illumination somewhat closer to hand.

Elle procède ensuite à exposer ces différents usages de la notion de «fondement mathématique» : Maddy mentionne certains usages qu'elle appelle «illégitimes» dans la mesure où il est exigé de ces usages plus que ce qu'ils donnent d'eux-mêmes, soit que cette exigence soit d'un caractère étranger aux mathématiques. Il est important de noter que cet aspect «étranger aux mathématiques» n'implique pas une réflexion métamathématique. C'est-à-dire que l'on attend à la place une réflexion de nature épistémologique ou éminemment philosophique, alors que le caractère métamathématique est d'ordre logique. Compte tenu de cela, Maddy mentionne initialement 3 usages de base de la notion de «fondement des mathématiques» :

a) Les fondements comme un «confinement métamathématique» (*meta-mathematical Corral*). Il consiste en un «encastrement» ou «réduction» (*embedding*) des mathématiques à la théorie des ensembles. Cette utilisation correspond en grande partie au point de vue «classique» de la notion de fondement qui a été prédominante pendant presque tout le XXe siècle.

b) Les fondements comme une «source épistémique de la connaissance» (*epistemic source*). En d'autres termes, la connaissance mathématique elle-même peut (et, devrait) être réduite au problème de la connaissance des axiomes ensemblistes. Ainsi, si l'on

connaît les axiomes de la théorie des ensembles, ceux-ci auraient le pouvoir suffisant pour donner les connaissances nécessaires dans *n'importe quel* domaine mathématique.

c) Les fondements comme dispositif et/ou cadre référentiel qui constitue un support pour fournir une sorte d'«acuité métaphysique» (*metaphysical insight*). Cette utilisation considère que la réduction *dans* la théorie des ensembles d'un certain objet mathématique X d'un domaine mathématique *quelconque* à un ensemble donné, révèle en fait la véritable identité métaphysique que l'objet a eue tout le temps. En d'autres termes, si l'objet X appartient à une théorie mathématique, le modèle $M(X)$ dans la théorie des ensembles peut montrer ce que l'objet est essentiellement. En ce sens, les modèles ensemblistes seraient les interprétations «les plus appropriées» pour toute théorie mathématique Σ .

d) La notion de fondement comme outil permettant la «clarification» (*elucidation*) des objets mathématiques. En ce sens, si un objet mathématique est réduit à sa caractérisation ensembliste, c'est-à-dire s'il est possible de le décrire dans un langage de la théorie des ensembles ZFC, cette description permet de remplacer la notion vague que cet objet avait *a priori* par une notion plus précise.

e) Les fondements peuvent être utilisés comme outil pour «évaluer les risques» (*risk assessment*). Par exemple, la théorie des ensembles est continuellement utilisée comme «objet-témoin» ou *testeur* pour prouver la force ou la faiblesse d'autres théories. Ainsi, le programme de Voedovsky sur les «fondements univalents» comme alternative à la même théorie des ensembles ZFC, utilise cette dernière théorie comme sujet de test pour sa propre évaluation.

f) Les fondements peuvent être utilisés comme un «modèle partagé» (*shared standard*) dans la mesure où ils peuvent être considérés comme un *échelle de mesure* pour d'autres théories. Cette utilisation peut être très similaire à celle-ci mentionnée au point (e). Cependant, Maddy ajoute que dans cet usage, la théorie des ensembles ZFC, n'est pas seulement un sujet de test, mais est la mesure par excellence. Mesure qui, par ailleurs, sert de modèle pour déterminer ce qui devrait être considéré comme une preuve informelle ou non.

g) Les fondements comme une «arène généreux» (*generous arena*). Dans cet usage,

Maddy affirme que c'est nécessaire «a single arena where all the various structures studied in all the various branches can co-exist side-by-side, where their interrelations can be studied, shared fundamentals isolated and exploited, effective methods exported and imported from one to another, and so on» [118, p. 297].

Les usages (a) à (g) sont caractéristiques de la théorie des ensembles ZFC. Et ces usages montrent que la caractérisation qui on a appelé «classique», est insuffisante pour aborder le problème des fondements des mathématiques. En fait, Maddy ne nie pas que la théorie des catégories ait essayé de fonctionner comme alternative aux fondements des mathématiques, à partir des années 60. C'est pourquoi elle ajoute ultérieurement que [118, p. 298]

Details aside, we see that the remarkable fact of the reduction doesn't, by itself, dictate any particular foundational use. For this reason, it seems to me counter-productive to begin from the question : does a given theory provide a foundation for classical mathematics ? Rather, we should be asking : what foundational purposes does the given theory serve, and how ? With this in mind, let's turn to set theory's famous rival.

En d'autres termes, ce qui est vraiment important n'est pas la justification si tel ou tel domaine, objet et/ou pratique mathématique constituent les fondements des mathématiques, mais l'étude de l'usage qui est donné à la notion de fondement dans ces contextes. De cette manière, Maddy considère un usage supplémentaire de la notion de «fondement» propre à la théorie des catégories, et qu'elle considère comme compatible avec les affirmations de Lawvere sur les fondements des mathématiques :

h) Les fondements comme «guides essentiels» (*essential guidance*). En ce sens, le but d'une théorie est de guider les mathématiciens vers des concepts et des structures vraiment importants, sans se coincer dans des détails inutiles. En d'autres termes, les fondements devraient être un fil conducteur pour montrer aux mathématiciens quels sont les concepts, les résultats et les théories pertinents pour leur pratique mathématique.

Il est intéressant de se demander si cet usage que Maddy octroie à la caractérisation des fondements du point de vue de la théorie des catégories, correspond au point de vue exposé par Lawvere dans son article de 1969. À première vue, on pourrait penser que oui. Cependant, dans les références de Maddy, il n'y a aucune allusion à cet article,

mais elle a fait référence aux tentatives fondationnistes de Lawvere qui ont encore un aspect classique : l'ETCC et l'ETCS. Ainsi, bien que la réflexion de Maddy soit une grande avancée en ce qui concerne l'étude et la révision de la notion de fondement, elle doit être complétée pour être compatible (si c'est possible) avec la caractérisation de Lawvere.

Bibliographie

- [1] J. Adámek, J. Rosický, E.M. Vitale, and F. W. Lawvere, *Algebraic theories : A categorical introduction to general algebra*, Cambridge Tracts in Mathematics, Cambridge University Press, Cambridge, 2011.
- [2] J. Adámek, H. Herrlich, and G. Strecker, *Abstract and concrete categories : The joy of cats*, John Wiley and Sons, 2004.
- [3] P.S. Aleksandrov, *Elementary concepts of topology*, Dover Books on Mathematics Series, Dover Publications, 1961.
- [4] P.S. Aleksandrov and H. Hopf, *Topologie*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Springer, Berlin, 1974.
- [5] A.V. Arkhangel'skii and M. Tkachenko, *Topological groups and related structures*, Atlantis studies in mathematics, Atlantis Press, 2008.
- [6] S. Awodey, *Category theory*, Oxford Logic Guides, Oxford University Press, Oxford, 2010.
- [7] S. Awodey, K. Kishida, and H.-C. Kotsch, *Topos semantics for higher-order modal logic*, *Logique et Analyse* **57** (2014), no. 228, 591–636.
- [8] W. D. Barcus, *The suspension of a loop space*, *American Journal of Mathematics* **80** (1958), no. 4, 895–920.
- [9] M. Barr and J. Beck, *Proceedings of the conference on categorical algebra. La Jolla 1965*, ch. Acyclic Models and Triples, pp. 336–343, Springer-Verlag, Heidelberg, 1966.
- [10] M. Barr and C. Wells, *Category theory for computing science*, Prentice Hall international series computer science, Prentice Hall, 1990.
- [11] ———, *Toposes, triples and theories*, Reprints in Theory and Applications of Categories, no. 1, Springer-Verlag, 2005.
- [12] M. Benado, *Nouveaux théorèmes de décomposition et d'intercalation attachés à la normalité α* , *C. R. Acad. Sci., Paris* **228** (1949), 529–531.

- [13] G. Birkhoff, *Lattice theory*, Colloquium publications, American Mathematical Soc., 1967.
- [14] F. Borceux, *Handbook of categorical algebra : Volume 1, basic category theory*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Cambridge University Press, 1994.
- [15] N. Bourbaki, *Éléments de mathématique : Théorie des ensembles ; fascicule de résultats*, Actualités scientifiques et industrielles, no. v. 1-2, Hermann, Paris, 1939.
- [16] ———, *Rédaction # 040. Algèbre. Chapitre III, algèbre multilinéaire (état 4)*, Archives Bourbaki, 1946.
- [17] ———, *Observations du Congrès de Paris [b] 15-18/03/1947*, Archives Bourbaki, 1947.
- [18] ———, *Compte rendu du Congrès œcuménique de Pelvoux (25 juin - 8 juillet 1951)*, Archives Bourbaki, 1951.
- [19] ———, *Compte rendu du Congrès de la motorisation de l'âne qui trotte, Pelvoux-le-Poet (25 juin-8 juil. 1952)*, Archives Bourbaki, 1952.
- [20] ———, *Théorie des ensembles*, Éléments de mathématique, Diffusion C.C.L.S., Paris, 1970.
- [21] ———, *Topologie générale, Chapitres 1 à 4*, Éléments de mathématique, Hermann, Paris, 1971.
- [22] L. E. J. Brouwer, *Continuous one-one transformations of surfaces in themselves (5th communication.)*, Proc. of the Section of Sciences, K. Nederlandse Akademie van Wetenschappen te Amsterdam **15** (1912), 352–360.
- [23] D. A. Buchsbaum, *Exact categories and duality*, Transactions of the American Mathematical Society **80** (1955), no. 1, 1–34.
- [24] R. Carnap, *Logical syntax of language*, International Library of Philosophy Series, no. v. 4, Routledge, Bound, 1937.
- [25] H. Cartan, *Sur la théorie de Kan*, Séminaire Henri Cartan **9** (1956-1957).
- [26] H. Cartan and S. Eilenberg, *Homological algebra*, Princeton paperbacks, Princeton University Press, Princeton, 1956.
- [27] H. Cartan and R. Remmert, *Collected works*, Springer, 1979.
- [28] H. Cartan, A. Weil, and M. Audin, *Correspondance entre Henri Cartan et André Weil (1928-1991)*, Société Mathématique de France, 2011.

- [29] E. Čech, *On bicomact spaces*, Annals of Mathematics **38** (1937), no. 4, 823–844.
- [30] D. Corfield, *Towards a philosophy of real mathematics*, Cambridge University Press, 2003.
- [31] ———, *Duality as a category-theoretic concept*, Studies in History and Philosophy of Science Part B : Studies in History and Philosophy of Modern Physics **59** (2017), 55–61.
- [32] L. Corry, *Modern algebra and the rise of mathematical structures*, 2nd ed., Birkhäuser Basel, Basel, 2004.
- [33] E. de Jonquières, *Note sur un mémoire de descartes longtemps inédit, et sur les titres de son auteur à la priorité d'une découverte dans la théorie des polyèdres*, Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences de Paris **110** (1890), 261–266.
- [34] W. Dyck, *Gruppentheoretische studien*, Mathematische Annalen **20** (1882), no. 1, 1–44.
- [35] Beno Eckmann and Peter J Hilton, *Group-like structures in general categories i multiplications and comultiplications*, Mathematische Annalen **145** (1962), no. 3, 227–255.
- [36] Beno Eckmann and PJ Hilton, *Group-like structures in general categories ii equalizers, limits, lengths*, Mathematische Annalen **151** (1963), no. 2, 150–186.
- [37] S. Eilenberg, *Singular homology theory*, Annals of Mathematics **45** (1944), no. 3, 407–447.
- [38] ———, *Homology of spaces with operators. I*, Trans. Amer. Math. Soc. **61** (1947), 378–417.
- [39] ———, *Topological methods in abstract algebra. cohomology theory of groups*, Bulletin of the American Mathematical Society **55** (1949), no. 1, 3–37.
- [40] ———, *Karol Borsuk-personal reminiscences*, Topological Methods in Nonlinear Analysis **1** (1993), no. 1, 1–2.
- [41] S. Eilenberg and S. Mac Lane, *Infinite cycles and homologies*, Proc. Nat. Ac. Sci. U.S.A. **27** (1941), no. 11, 535–539.
- [42] ———, *Group extensions and homology*, Annals of Mathematics **43** (1942), no. 4, 757–831.
- [43] ———, *Natural isomorphisms in group theory*, Nat. Acad. Sci. U.S.A. **28** (1942), 537–543.

- [44] ———, *General theory of natural equivalences*, Transactions of the American Mathematical Society **58** (1945), no. 2, 231–294.
- [45] ———, *Relations between homology and homotopy groups of spaces*, Annals of Mathematics **46** (1945), no. 3, 480–509.
- [46] ———, *Determination of the second homology and cohomology groups of a space by means of homotopy invariants*, Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A. **32** (1946), no. 11, 480–509.
- [47] ———, *Homology of spaces with operators II*, Trans. Amer. Math. Soc. **65** (1949), 49–99.
- [48] ———, *Acyclic models*, American Journal of Mathematics **75** (1953), no. 1, 189–199.
- [49] ———, *Cohomology theory in abstract groups I*, Annals of Mathematics **48** (1957), no. 1, 51–78.
- [50] S. Eilenberg and J. C. Moore, *Adjoint functors and triples*, Illinois Journal of Mathematics **9** (1965), no. 3, 381–398.
- [51] S. Eilenberg and N. Steenrod, *Axiomatic approach to homology theory*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **31** (1945), 117–120.
- [52] ———, *Foundations of algebraic topology*, Princeton University Press, Princeton, 1952.
- [53] M. Ern , *Adjunctions and Galois connections : Origins, history and development*, Denecke, K. and Ern , M. and Wismath, S.L. (ed.), Galois Connections and Applications. Series : Mathematics and Its Applications. Dordrecht : Spriger. 1-138 (2004), 2004.
- [54] M. Ern , E. Klossoswki, A. Melton, and G. E. Strecker, *A primer in Galois connections*, Annals New York Academy of Sciences **704** (1993), 103–125.
- [55] C. J. Everett, *Closure operators and Galois theory in lattices*, Trans. Amer. Math. Soc. **55** (1944), 514– 525.
- [56] B. Fitzpatrick, *Some aspects of the work and influence of L. R. Moore*, Aull, C.E. and Lowen, R. (ed.), Handbook of the History of General Topology. Vol. 1. Dordrecht : Spriger. 41-62 (1997), 1997.
- [57] H. Freudenthal, *Über die klassen der sphärenabbildungen i. große dimensionen*, Compositio Mathematica **5** (1938), 299–314.

- [58] P. Freyd, *Abelian categories : an introduction to the theory of functors*, Harper's series in modern mathematics, Harper & Row, New York, 1964.
- [59] ———, *Homotopy is not concrete*, Peterson, F. P. (ed.), The Steenrod Algebra and Its Applications : A Conference to Celebrate N. E. Steenrod's Sixtieth Birthday. New York : Spriger-Verlag. 25-34 (1970), 1970.
- [60] D. Gabbay, A. Kanamori, and J. Woods (eds.), *Sets and extensions in the twentieth century*, Handbook of the History of Logic, vol. 6, ch. Infinite combinatorics, pp. 146–357, Elsevier, Amsterdam, 2012.
- [61] D. Gabbay, A. Kanamori, and J. Woods (eds.), *Sets and extensions in the twentieth century*, Handbook of the History of Logic, vol. 6, ch. Set Theory from Cantor to Cohen, pp. 1–71, Elsevier, Amsterdam, 2012.
- [62] P. Gabriel, *Des catégories abéliennes*, Bulletin de la Société Mathématique de France **90** (1962), 323–448.
- [63] B. R. Gelbaum, *Free topological groups*, Proceedings of the American Mathematical Society **12** (1961), no. 5, 737–743.
- [64] R. Godement, *Topologie algébrique et théorie des faisceaux*, Hermann, 1958.
- [65] P. G. Goerss and J. F. Jardine, *Simplicial homotopy theory*, Modern Birkhäuser Classics, Birkhauser Verlag GmbH, 1997.
- [66] R. Goldblatt, *Topoi : The categorical analysis of logic*, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, 98, North-Holland, Amsterdam, 1984.
- [67] J. Gray, *Sheaves with values in a category*, Topology **3** (1965), 1–18.
- [68] ———, *Proceedings of the conference on categorical algebra. La Jolla 1965*, ch. Fibréd and Cofibréd Categories, pp. 21–83, Springer-Verlag, Heidelberg, 1966.
- [69] A. Grothendieck, *Sur quelques points d'algèbre homologique*, Tôhoku Math. J. **9** (1957), no. 2, 119–221.
- [70] A. Grothendieck and J. Dieudonné, *Eléments de géométrie algébrique*, Publications Mathématiques de l'IHÉS **4** (1960), no. 1, 5–214.
- [71] H. Herrlich and G. Strecker, *Categorical topology - its origins, as exemplified by the unfolding of the theory of topological reflections and coreflections before 1971*, Aull, C.E. and Lowen, R. (ed.), Handbook of the History of General Topology. Vol. 1. Dordrecht : Spriger. 255-342 (1997), 1997.
- [72] P. Hilton, *Homotopy theory of modules and duality*, Symp. internacional de topologica algebraica. Universidad Nacional Autónoma de México and UNESCO, 1958, pp. 273–281.

- [73] ———, *On a generalization of nilpotency to semi-simplicial complexes*, Proceedings of the London Mathematical Society **s3-10** (1960), no. 1, 604–622.
- [74] P. J. Huber, *Homotopy theory in general categories*, Math. Ann. **144** (1961), 361–385.
- [75] W. Hurewicz, *On duality theorems*, Bull. Am. Math. Soc **47** (1941), 562–563.
- [76] ———, *On the concept of fiber space*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **41** (1955), 956–961.
- [77] W. Hurewicz and K. Kuperberg, *Collected works of witold hurewicz*, American Mathematical Society, American Mathematical Society, 1995.
- [78] J. R. Isbell, *Some remarks concerning categories and subspaces*, Canadian Journal of Mathematics **9** (1957), 563–577.
- [79] ———, *Subobjects, adequacy, completeness and categories of algebras*, (1964).
- [80] ———, *Uniform spaces*, Mathematical Surveys and Monographs, American Mathematical Society, 1964.
- [81] V. Ivancevic and T. Ivancevic, *Applied differential geometry : a modern introduction*, World Scientific, 2007.
- [82] I. M. James (ed.), *History of topology*, Elsevier Science, Amsterdam, 1999.
- [83] I. M. James (ed.), *History of topology*, ch. Development of the Concept of Homotopy, pp. 65–102, Elsevier Science, Amsterdam, 1999.
- [84] P. T. Johnstone, *Stone spaces*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge University Press, 1986.
- [85] B. Jónsson and A. Tarski, *Direct decompositions of finite algebraic systems*, no. 5, Notre Dame Mathematical Lectures, 1947.
- [86] A. Joyal, *Notes on clans and tribes*, 2017.
- [87] S. Kakutani, *Free topological groups and infinite direct product topological groups*, Proc. Imp. Acad. **20** (1944), no. 8, 595–598.
- [88] D. Kan, *Abstract homotopy I*, Proc. Nat. Acad. Sci. **41** (1955), 1092–1096.
- [89] ———, *Abstract homotopy II*, Proc. Nat. Acad. Sci. **42** (1956), 255–258.
- [90] ———, *Abstract homotopy III*, Proc. Nat. Acad. Sci. **42** (1956), 419–421.
- [91] ———, *Abstract homotopy IV*, Proc. Nat. Acad. Sci. **42** (1956), 542–544.
- [92] ———, *On c.s.s complexes*, Amer. J. Math. **79** (1957), 449–476.

-
- [93] ———, *Adjoint functors*, Transactions of the American Mathematical Society **87** (1958), 294–329.
- [94] ———, *Functors involving c.s.s. complexes*, Trans. Amer. Math. Soc. **87** (1958), 330–346.
- [95] J. F. Kennison, *Reflective functors in general topology and elsewhere*, Trans. Amer. Math. Soc. **118** (1965), 303–315.
- [96] H. Kleisli, *Every standard construction is induced by a pair of adjoint functors*, Proceedings of the American Mathematical Society **16** (1965), no. 3, 544–546.
- [97] R. Krömer, *Tool and object : A history and philosophy of category theory*, Science Networks - Historical Studies, 32, Birkhäuser Verlag, Basel, 2007.
- [98] R. Krömer and D. Corfield, *The form and function of duality in modern mathematics*, Philosophia Scientiæ. Travaux d'histoire et de philosophie des sciences (2014), no. 18-3, 95–109.
- [99] Ralf Krömer, *La “machine de Grothendieck” se fonde-t-elle seulement sur des vocables métamathématiques ? Bourbaki et les catégories au cours des années cinquante*, Rev. Hist. Math. **12** (2006), no. 1, 119–162.
- [100] K. Kuperberg (ed.), *Collected works of Witold Hurewicz*, vol. 4, ch. Witold Hurewicz-Personal reminiscences, pp. xlv–xlvi, American Mathematical Society, Providence, 1995.
- [101] A. G. Kurosh, A. Kh. Livshits, and E. G. Shul’geifer, *Foundations of the theory of categories*, Russian Mathematical Surveys **15** (1960), 1–46.
- [102] J. Lambek and P. J. Scott, *Reflections on the categorical foundations of mathematics*, pp. 171–186, Springer Netherlands, Dordrecht, 2011.
- [103] F. W. Lawvere, *Functorial semantics of algebraic theories*, Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America **50** (1963), no. 5, 869.
- [104] ———, *Functorial semantics of algebraic theories and some algebraic problems in the context of functorial semantics of algebraic theories*, Ph.D. thesis, Columbia University, 1963.
- [105] ———, *The category of categories as a foundation for mathematics*, Proceedings of the Conference on Categorical Algebra. La Jolla 1965 (S. Eilenberg, D. K. Harrison, S. MacLane, and H. Röhrl, eds.), Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, 1966, pp. 1–20.

- [106] ———, *Adjointness in foundations*, *Dialectica* **23** (1969), 281–295.
- [107] F. W. Lawvere and S. Schanuel, *Conceptual mathematics : a first introduction to categories*, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- [108] S. Lefschetz, *Algebraic topology*, Colloquium Publications Series, 27, Amer Mathematical Society, Providence, 1968.
- [109] F. E. J. Linton, *Some aspects of equational categories*, Proceedings of the Conference on Categorical Algebra. La Jolla 1965 (S. Eilenberg, D. K. Harrison, S. MacLane, and H. Röhrh, eds.), Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, 1966, pp. 84–94.
- [110] S. Mac Lane, *Groups, categories and duality*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **34** (1948), 263–267.
- [111] ———, *Duality for groups*, Bull. Amer. Math. Soc. **56** (1950), 485–516.
- [112] ———, *Categorical algebra*, Bull. Amer. Math. Soc. **71** (1965), 40–106.
- [113] ———, *The influence of M. H. Stone on the origins of category theory*, Browder, F. (ed.), *Functional Analysis and Related Fields : Proceedings of a Conference in honor of Professor Marshall Stone, held at the University of Chicago, May 1968, 1970*.
- [114] ———, *Mathematics, form and function*, Springer-Verlag, New-york, 1986.
- [115] ———, *The development and prospects for category theory*, *Applied Categorical Structures* **4** (1996), 129–136.
- [116] ———, *Categories for the working mathematician*, 2nd ed., Graduate Texts in Mathematics, 5, Springer-Verlag, New York, 1998.
- [117] ———, *Saunders Mac Lane : A mathematical autobiography*, Ak Peters Series, Peters, Wellesley, Massachusetts, 2005.
- [118] P. Maddy, *Set-theoretic foundations*, Caicedo, Andrés Eduardo (ed.), *Foundations of Mathematics. Logic at Harvard Essays in Honor of W. Hugh Woodin's 60th Birthday March 27–29, 2015, May 2017*.
- [119] A. A. Markoff Jr, *On free topological groups*, *Doklady Akademii Nauk SSSR* **31** (1941), 299–301.
- [120] ———, *On free topological groups*, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **9** (1945), no. 1, 3–64.
- [121] J. P. Marquis, *What is category theory ?*, *Advanced studies in mathematics and logic*, Polimetrica, 2006.

- [122] ———, *From a geometrical point of view : A study of the history and philosophy of category theory*, Logic, epistemology and the unity of science, Springer London, Limited, 2009.
- [123] ———, *Forms of structuralism : Bourbaki and the philosophers*, Structures Mères : Semantics, Mathematics, and Cognitive Science (Alberto Peruzzi and Silvano Zipoli Caiani, eds.), Springer International Publishing, 2020, pp. 37–57.
- [124] J. P. Marquis and G. Reyes, *The history of categorical logic 1963-1977*, Sets and Extensions in the Twentieth Century (D.M. Gabbay, A. Kanamori, and J. Woods, eds.), Handbook of the History of Logic Series, Elsevier Science & Technology Books, 2012.
- [125] M. Menni and C. Smith, *Modes of adjointness*, Journal of Philosophical Logic **43** (2014), no. 2/3, 365–391.
- [126] J. Milnor, *The geometric realization of a semi-simplicial complex*, Annals of Mathematics **65** (1957), no. 2, 357–362.
- [127] B. Mitchell, *The full imbedding theorem*, American Journal of Mathematics **86** (1964), no. 3, 619–637.
- [128] ———, *Theory of categories*, Pure and Applied Mathematics, Academic Press, New York, 1965.
- [129] T. Nakayama, *Note on free topological groups*, Proc. Imp. Acad. **19** (1943), no. 8, 471–475.
- [130] J. Nielsen, *Die isomorphismengruppe der freien gruppen*, Mathematische Annalen **91** (1924), no. 3, 169–209.
- [131] T. Ohkuma, *Duality in mathematical structure*, Proceedings of the Japan Academy **34** (1958), no. 1, 6–10.
- [132] Ø. Ore, *Galois connexions*, Trans. Amer. Math. Soc. **55** (1944), 493–513.
- [133] B. Pareigis, *Categories and functors*, Pure and applied mathematics, Academic Press, New York, 1970.
- [134] J. Picado and M. Clamentino, *An interview with F. William Lawvere, part 2*, Bulletin of the International Center for Mathematics **24** (2008), 21–28.
- [135] G. Pickert, *Bemerkungen über Galois-Verbindungen*, Arch. Math. (Basel) **3** (1952), 285–289.
- [136] H. Poincaré, *Œuvres de Henri Poincaré Tome vi. Topologie*, Gauthier-Villards, 1953.

- [137] L. Pontrjagin, *The theory of topological commutative groups*, Annals of Mathematics (1934), 361–388.
- [138] H. E. Post, *On the existence and structure of free topological groups*, Herrlich, H. and Porst, H.-E. (ed.), Category Theory at Work. Series : Research and Exposition in Mathematics. Vol. 18. Berlin : 165-176 (1991), 1991.
- [139] J. Riguet, *Relations binaires, fermetures, correspondances de galois*, Bull. Soc. math. France **76** (1948), 114– 155.
- [140] ———, *Catégorisation de la notion de structures et de structures locales chez N. Bourbaki et C. Ehresmann, I*, Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres **14** (1960-1961), no. 1 (fr), talk :5.
- [141] P. Samuel, *On universal mappings and free topological groups*, Bull. Amer. Math. Soc. **54** (1948), no. 6, 591–598.
- [142] ———, *Ultrafilters and compactification of uniform spaces*, Transactions of the American Mathematical Society **64** (1948), no. 1, 100–132.
- [143] Z. Semadeni, *Free and direct objects*, Bulletin of the American Mathematical Society **69** (1963), no. 1, 63–66.
- [144] ———, *Projectivity, injectivity and duality*, (1963).
- [145] J. P. Serre, *Homologie singulière des espaces fibrés*, The Annals of Mathematics **54** (1951), no. 3, 425–505.
- [146] W. Shih, *Ensembles simpliciaux et opérations cohomologiques, exposé 7*, Seminaire H. Cartan, Paris (1958-59), 1–10.
- [147] J. Sonner, *Universal and special problems*, Mathematische Zeitschrift **82** (1963), no. 3, 200–211.
- [148] Johann Sonner, *Universal solutions and adjoint homomorphisms*, Mathematische Zeitschrift **86** (1964), no. 1, 14–20.
- [149] E. H. Spanier, *Review : Foundations of alegebraic topology*, 1958, pp. 190–192.
- [150] ———, *Algebraic topology*, McGraw-Hill, New York, 1966.
- [151] D. I. Spivak, *Category theory for the sciences*, The MIT Press, MIT Press, 2014.
- [152] M. Stone, *The theory of representation for boolean algebras*, Transactions of the American Mathematical Society **40** (1936), no. 1, 37–111.
- [153] ———, *Applications of the theory of boolean rings to general topology*, Transactions of the American Mathematical Society **41** (1937), no. 3, 375–481.

- [154] ———, *The representation of boolean algebras*, Bull. Amer. Math. Soc. **44** (1938), no. 12, 807–816.
- [155] ———, *Remarks of professor Stone*, Browder, F. (ed.), Functional Analysis and Related Fields : Proceedings of a Conference in honor of Professor Marshall Stone, held at the University of Chicago, May 1968, 1970.
- [156] R. G. Swan, *The homology of cyclic products*, Transactions of the American Mathematical Society **95** (1960), no. 1, 27–68.
- [157] T.-D. Tai-Danae Bradley, T. Bryson, and J. Terilla, *Topology : A categorical approach*, The MIT Press, 2020.
- [158] P. Taylor, *Practical foundations of mathematics*, Cambridge Studies in Pure Mathematics, 59, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- [159] W. Tholen, *On Wyler's Taut theorem*, General Topology and its Applications **8** (1976), 197–206.
- [160] M. Tkachenko, *Topological features of topological groups*, Aull, C.E. and Lowen, R. (ed.), Handbook of the History of General Topology. Vol. 3. Dordrecht : Spriger. 1027-1144 (2001), 2001.
- [161] A. Tychonoff, *Über die topologische Erweiterung von Räumen*, Mathematische Annalen **102** (1930), no. 1, 544–561.
- [162] B. L. van der Waerden, *Moderne algebra I*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, no. v. 1, Springer-Verlag Berlin, 1930.
- [163] O. Veblen and J. W. Young, *Projective geometry ; vol. i*, Boston : Ginn and Company, 1910.
- [164] R. C. Walker, *The Stone-Čech compactification*, Springer Berlin Heidelberg, 1974.
- [165] G. W. Whitehead, *On the Freudenthal theorems*, Annals of Mathematics (1953), 209–228.
- [166] ———, *Generalized homology theories*, Transactions of the American Mathematical Society **102** (1962), no. 2, 227–283.
- [167] O. Wyler, *On the categories of general topology and topological algebra*, Ann. Math. **22** (1971), 7–17.
- [168] ———, *Top categories and categorical topology*, General Topology and its Applications **1** (1971), 17–28.

