HAL open science

Prolongement des torseurs via les log schémas

Sara Mehidi

▶ To cite this version:

Sara Mehidi. Prolongement des torseurs via les log schémas. Analyse fonctionnelle [math.FA]. Université Paul Sabatier - Toulouse III, 2021. Français. NNT : 2021TOU30181 . tel-03651499

HAL Id: tel-03651499

https://theses.hal.science/tel-03651499v1

Submitted on 25 Apr 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

En vue de l'obtention du

DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par l'Université Toulouse 3 - Paul Sabatier

Présentée et soutenue par

Sara MEHIDI

Le 10 décembre 2021

Prolongements des torseurs via les log Schémas

Ecole doctorale : **EDMITT - Ecole Doctorale Mathématiques, Informatique et Télécommunications de Toulouse**

Spécialité : **Mathématiques et Applications**

Unité de recherche :
IMT : Institut de Mathématiques de Toulouse

Thèse dirigée par
Jean GILLIBERT et Dajano TOSSICI

Jury

M. Niels Borne, Rapporteur
M. Qing Liu, Examinateur
M. Michel Emsalem, Examinateur
Mme Charlotte Hardouin, Examinatrice
M. Jean Gillibert, Directeur de thèse
M. Dajano Tossici, Co-directeur de thèse

Ulac win izegren asif ur yebzig.
(proverbe berbère)

Remerciements. Mes premiers remerciements vont à mes deux directeurs de thèse, Jean Gillibert et Dajano Tossici. Je les remercie pour m'avoir pris sous leurs ailes pendant ces trois années et de m'avoir proposé un sujet de thèse sur lequel j'ai beaucoup aimé travailler. Au-delà du bagage mathématique qu'ils m'ont appris, grâce à leur disponibilité permanente à discuter et à répondre à mes questions et à leur rigueur dans les diverses relectures de mes écrits, je tiens aussi à souligner leurs qualités humaines. Leurs positivé et encouragements incessants m'ont été d'une aide indéniable. Ils m'ont appris qu'on pouvait tirer du bon dans chaque situation.

Je tiens ensuite à remercier Niels Bornes, Alessandra Bertapelle et Mattia Talpo pour avoir accepté la lourde charge de lire mon manuscrit de thèse et de rapporter cette thèse. Leurs commentaires à ce propos m'ont beaucoup encouragée.

Charlotte Hardouin, Michel Emsalem et Qing Liu me font l'honneur de faire partie de mon jury de thèse. Je les remercie pour l'intérêt qu'ils portent à mon travail. Je remercie en particulier Qing Liu pour la qualité de son cours que j'ai eu l'honneur de suivre en M2 et pour avoir pris le temps de répondre à mes questions mathématiques quand je lui en envoyais par mail.

Je suis également redevable envers tous les enseignants de l'université de Bordeaux qui m'ont formée. Je remercie Marc Perret pour ses encouragements perpétuels et sa bonne humeur, ainsi que tous les membres du laboratoire de mathématiques de Toulouse. Je n'oublie évidemment pas mes camarades doctorants qui ont rendu "cette aventure" beaucoup plus agréable. Je pense particulièrement à William avec qui j'ai eu le plaisir de travailler sur les éclatements. Je n'ai aucun doute que sa rigueur et sa détermination l'emmèneront loin, à part peut-être dans la persuasion des doctorants à le rejoindre aux différentes activités sportives... Je remercie également Dimitri, pour les différents moments partagés, particulièrement ceux à l'atelier de peinture et pour son "concert" de piano. Florian aussi, pour nous avoir souvent fait rire avec ses blagues "recherchées". Je remercie par la même occasion tous les doctorants que j'ai pu côtoyer ici ou ailleurs, et qui m'ont certainement appris quelque chose, Tu, Solène, Mehdi, Chung-Ming, Maxence, Quang-Tuan, Irène, Jean-Marc, Julia, Elena, Jordan, Sonny, Dominique, Jules, Valentin, Thoung ...

Une pensée à tous mes oncles et tantes paternels et maternels, particulièrement à tonton Nordine, tonton Madjid, tata Nadia, khali Mamoun et tata Noria. Une pensée particulière à ma cousine Maya, la plus généreuse de tous, qui a pris le temps de me préparer les très bons gâteaux de mon pot de thèse. Une pensée à tous mes amis de longue date.

Enfin, je remercie de tout cœur mes parents qui n'ont eu de cesse de m'envoyer leur soutien et bénédiction sans faille. Aucun texte ni formulation ne peuvent rendre sa juste valeur à tout ce qu'ils ont fait pour ma sœur et moi.

A Lilia , ma Grande sœur, probablement une des plus belles âmes qu'il m'ait été donné de rencontrer, je tiens à te dire que tu es aussi ma sœur préférée ! Merci d'exister !

Une pensée douce et aimante à l'ange qui n'est plus, j'aurais aimé que tu sois là.

Résumé

Soit R un anneau de valuation discrète, de corps de fractions K et de corps résiduel k de caractéristique $p > 0$.
Étant donné un K-schéma en groupes fini plat et commutatif G et une K-courbe lisse et projective C munie d'un point rationnel, on étudie dans cette thèse le prolongement des G-torseurs fppf pointés sur C en torseurs pointés sur un R-modèle régulier de la courbe sur R.
Comme on sait que le problème n'a pas toujours de solution dans la catégorie des torseurs fppf, on cherche une solution dans une catégorie plus large, à savoir celle des torseurs logarithmiques. On montre en particulier que le prolongement d'un G-torseur fppf en un torseur log plat se ramène à trouver un R-modèle fini et plat de G, pour lequel un certain morphisme de schémas en groupes dans la Jacobienne J de la courbe se prolonge sur le modèle de Néron de cette dernière.
En supposant cette condition satisfaite, on retrouve un critère déjà bien connu de la littérature pour qu'un prolongement fppf existe.

Dans un second temps, en généralisant un résultat de Chiodo, on donne un critère pour que le sous-groupe de r-torsion du modèle de Néron de la Jacobienne soit fini et plat sur R. En particulier, cela fournit des exemples intéressants de schémas en groupes commutatifs pour lesquels le critère de notre théorème principal s'applique.

Enfin, la dernière partie de cette thèse est consacrée à l'étude d'exemples de prolongements de torseurs. On se donne une courbe hyperelliptique sur $\mathbb{Q}$, dépendant d'un nombre premier p, et dont la Jacobienne contient un sous-groupe isomorphe à $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$. Cette dernière propriété implique la donnée d'un μ_p^2-torseur sur la courbe.
On construira pour commencer un modèle régulier de la courbe au-dessus de $\mathbb{Z}_l$, pour un certain nombre premier l. Ensuite, on se demandera si le torseur précédent se prolonge sur ce modèle. Pour différentes valeurs de l, on traitera différents exemples qui donneront dans certains cas un prolongement fppf du torseur initial et dans d'autres, un prolongement logarithmique ne provenant pas d'un torseur fppf.

Abstract

Let R be a discrete valuation ring, with field of fractions K and residue field k of characteristic $p > 0$.
Given a finite flat and commutative group scheme G over K and a smooth projective curve C over K with a rational point, we study in this thesis the extension of pointed fppf G-torsors over C to pointed torsors over a regular model of C over R.
We already know that an fppf extension of the torsor doesn't always exist. Therefore, we look for a solution in a larger category, namely the category of logarithmic torsors. We prove that extending a G-torsor into a log flat torsor amounts to finding a finite flat model of G over R, for which a certain group scheme morphism to the Jacobian J of the curve extends to the Néron model of J.
Assuming that this condition is satisfied, we shall see that we get to an already well-known criterion in the literature for the torsor to admit an fppf extension.

In a second step, by generalizing a result by Chiodo, we give a criterion for the r-torsion subgroup of the Néron model of J to be a finite flat group scheme, and this yields interesting examples of commutative group schemes satisfying the criterium of our main theorem.

Finally, the last part of this thesis is devoted to the study of some examples of extension of torsors. Let's give an hyperelliptic curve over $\mathbb{Q}$ depending on some prime number p and whose Jacobian contains a subgroup isomorphic to $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$. This last property implies the data of a μ_p^2-torsor over the curve.
To begin with, we construct a regular model of the curve above $\mathbb{Z}_l$, for some prime number l. Then, we will see if the previous torsor extends over this model. For various values of l, we will see two different cases, where in the first one the initial torsor extends into an fppf torsor over the regular model constructed, while in the second one, the torsor admits a logarithmic extension but not an fppf one.

Table des matières

1 introduction. **12**

2 Un peu de géométrie logarithmique. **17**
2.1 Quelques prérequis sur les monoïdes. 17
2.2 Structures logarithmiques et cartes. 20
2.2.1 Structures logarithmiques. 20
2.2.2 Images directe et inverse. 22
2.2.3 Cartes. 23
2.2.4 Produit fibré de log schémas. 24
2.3 Topologie Kummer log plate. 28
2.3.1 Torseur log plat. 29
2.4 Comparaison avec la cohomologie fppf. 30
2.4.1 Exemples de torseurs log plats. 31

3 Les éclatements. **35**
3.1 Définitions et propriétés. 35
3.1.1 Cas affine. 35
3.1.2 Cas général. 39
3.2 Normalisation des courbes par éclatements de points. 41
3.3 Surfaces fibrées. 42
3.4 Désingularisation. 43
3.5 Existence d'un modèle régulier pour une courbe lisse. 47
3.6 Modèle minimal. 47

4 Foncteur de Picard et modèles de Néron. **49**
4.1 Construction du foncteur de Picard relatif. 49
4.2 Rigidification. 51
4.3 Représentabilité du foncteur de Picard. 53
4.4 Modèles de Néron. 54
4.5 Foncteur de Picard et modèle de Néron de la Jacobienne. 56
4.6 Groupe des composantes. 57

5 Extensions et prolongement d'extensions. **61**
5.1 Interprétation d'une extension. 61
5.2 Prolongement d'extensions. 64
5.3 Lien entre torseurs et extensions 65

6 Résultats. **68**
6.1 Partie I : Prolongement des torseurs. 69
6.1.1 Obstruction au prolongement en un torseur fppf. 75
6.2 Partie II : Critère de finitude pour $\mathcal{J}[p]$. 78
6.3 Partie III : Exemples de prolongement de torseurs sur une courbe hyperelliptique. 82
6.3.1 Une courbe hyperelliptique dont la Jacobienne contient un sous-groupe isomorphe à $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$. 83

6.3.2 Construction d'un modèle régulier de C et étude du prolongement de torseurs pointés au-dessus de ce dernier. . . 84

7 Perspectives. 95

7.1 Extension des torseurs résolubles. 95

7.2 Étude de la question du prolongement des torseurs sur une base de dimension supérieure à 1. 98

1 introduction.

Soit R un anneau de valuation discrète, $K := \mathrm{Frac}(R)$ son corps de fractions et k son corps résiduel de caractéristique $p > 0$. Soit $f : \mathcal{X} \to \mathrm{Spec}(R)$ un morphisme fidèlement plat et de type fini, et soit $f_K : X \to \mathrm{Spec}(K)$ sa fibre générique, avec $X := \mathcal{X} \times_{\mathrm{Spec}(R)} \mathrm{Spec}(K)$. Soit G un K-schéma en groupes fini et plat.

On rappelle qu'un G-torseur fppf Y au-dessus de X est la donnée d'un morphisme de schémas $Y \to X$, et d'une action de groupe de G sur Y, qui est localement triviale par rapport à la topologie fppf. En d'autres termes, il existe une famille couvrante $(X_i \to X)$ (pour la topologie fppf) telle que $Y \times_X X_i \to X_i$ est le torseur trivial $G \times X_i \to X_i$, où G agit par multiplication sur le premier facteur.
Maintenant, en prenant $Y \to X$ comme famille couvrante, dire que Y est un G-torseur au dessus de X est équivalent, par décente fidèlement plate, à la donnée d'un isomorphisme

$$G \times Y \simeq Y \times_X Y \quad (g, y) \mapsto (y, g.y)$$

où $g.y$ désigne l'action de G sur Y.

Le problème de prolongement du G-torseur $Y \to X$ consiste à trouver :

1. Un R-schéma en groupes fini et plat $\mathcal{G}$, dont la fibre générique est isomorphe à G.
2. Un $\mathcal{G}$-torseur fppf $\mathcal{Y} \to \mathcal{X}$, de fibre générique isomorphe à $Y \to X$ en tant que G-torseur.

La réponse à la seule question (1) est négative en général [1]. Pour contourner cette difficulté, on peut se contenter d'un schéma en groupes $\mathcal{G}$ quasi-fini et plat. Mais même de cette manière, la réponse à la question (2) est en général négative.

Ce problème a été étudié, dans différents contextes, par Grothendieck, Dajano Tossici [34] et Marco Antei [6], entre autres. Par exemple, si G est un schéma en groupes constant d'ordre premier à p, et si $\mathcal{X} \to \mathrm{Spec}(R)$ lisse à fibres géométriquement connexes, alors le problème admet une solution ; cf. [4, Exposé X, §3.1 et §3.6].

Une stratégie naturelle consiste à chercher d'abord un *modèle* de G qui est fini et plat sur R (s'il existe), et ensuite, s'intéresser à la question du prolongement du torseur $Y \to X$. Par exemple, cela a été fait par Tossici dans le cas où p divise l'ordre de G [34]. Il a étudié le prolongement des torseurs sous des schémas en groupes finis et plats au-dessus de schémas locaux, avec certaines hypothèses

1. voir la section 6.2 pour un exemple.

supplémentaires. De plus, il a aussi étudié, en utilisant -ce qu'il nomme *modèles effectifs*, le prolongement des $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$-torseurs et $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$-torseurs dans le cas où $\mathcal{Y}$ est normal.

Antei et Emsalem ont étudié le problème de manière différente dans [8]. Comme un R-modèle fini et plat de G n'existe pas toujours, ils ont choisi de travailler avec un modèle de G plus général, à savoir, un modèle plat mais seulement quasi-fini, et ensuite, prolonger le torseur non pas au-dessus de $\mathcal{X}$, mais au-dessus d'un certain schéma $\mathcal{X}'$, obtenu en modifiant la fibre spéciale de $\mathcal{X}$. En autorisant de tels modèles de G, ils ont résolu le problème du prolongement de n'importe quel G-torseur à modification près de $\mathcal{X}$, sans aucune hypothèse sur le corps résiduel. Lorsque $\mathcal{X}$ est une courbe relative, i.e. les fibres sont de dimension 1, cette modification est obtenue en opérant un nombre fini d'éclatements sur $\mathcal{X}$ le long des sous-schémas fermés de sa fibre spéciale.

Supposons maintenant que G est commutatif et qu'il admet un modèle fini et plat $\mathcal{G} \to \mathrm{Spec}(R)$. Il est déjà établi dans la littérature l'existence d'une correspondance bijective entre les $\mathcal{G}$-torseurs (pointés) sur $\mathcal{X}$ et l'ensemble $\mathrm{Hom}(\mathcal{G}^D, \mathrm{Pic}_{\mathcal{X}/R})$ des morphismes de foncteurs de groupes, où $\mathcal{G}^D$ est le dual de Cartier de $\mathcal{G}$ et $\mathrm{Pic}_{\mathcal{X}/R}$ est le foncteur de Picard relatif de $\mathcal{X} \to \mathrm{Spec}(R)$. Par conséquent, le prolongement des torseurs se ramène au prolongement de certains schémas en groupes et de morphismes entre eux. Dans [6], Antei a tiré profit de cette remarque dans pour étudier le prolongement des torseurs. En particulier, sous l'hypothèse forte où $\mathrm{Pic}_{\mathcal{X}/R}$ est représentable par un schéma abélien sur R, il a démontré que les G-torseurs se prolongent toujours [6, Theorem 3.10].

Thèse.

Les résultats de cette thèse consistent en trois parties :

- **Partie I** : Prolongement des torseurs.
- **Partie II** : Critère de finitude pour $\mathcal{J}[p]$.
- **Partie III** : Exemples de prolongements de torseurs définis sur une courbe hyperelliptique.

Le résultat de finitude de la partie II est indépendant de la partie I. La partie III utilise la partie I.

Partie I : Prolongement des torseurs.

Dans ce travail de thèse, nous avons utilisé la même stratégie que celle d'Antei évoquée précédemment. Plus précisément, on se donne une K-courbe C munie d'un point rationnel Q_0, et un G-torseur fppf pointé (relativement à Q_0) sur C. Alors qu'Antei traite essentiellement le cas où $\mathcal{X}$ est lisse, on prend ici pour $\mathcal{X}$ un R-modèle régulier $\mathcal{C}$ de C. Notons pour commencer que l'existence d'un prolongement fppf d'un G-torseur donné est, en général, fort exigeant. Par

exemple, dans le cas où le modèle fini et plat $\mathcal{G}$ est de plus étale, le prolongement de notre G-torseur initial - s'il existe - serait aussi étale. Mais cette condition est très forte, et afin de l'alléger, nous travaillerons dans une catégorie de torseurs plus large, à savoir la catégorie des torseurs logarithmiques. Plus précisément, on munit $\mathcal{C}$ de la structure logarithmique induite par sa fibre spéciale $\mathcal{C}_k$, vue comme un diviseur. Dans le cas où $\mathcal{G}$ est étale, les torseurs logarithmiques sur $\mathcal{C}$ sont modérément ramifiés en codimension 1.

Comme rappelé précédemment, étudier le prolongement des G-torseurs sur C se ramène à l'étude du prolongement de morphismes de groupes $G^D \to \mathrm{Pic}^0_{C/K} = J$, où J est la Jacobienne de C (Lemme 6.1.0.1). On souhaite alors trouver une correspondance bijective similaire à la précédente pour les $\mathcal{G}$-torseurs logarithmiques sur $\mathcal{C}$. Si l'on suppose que le K-morphisme $G^D \to J$ correspondant à notre torseur se prolonge en un R-homomorphisme de schémas en groupes $\mathcal{G}^D \to \mathcal{J}$, où $\mathcal{J}$ est le modèle de Néron de J (la séparabilité de ce dernier assure que si ce prolongement de morphismes existe, alors il est unique), on obtient alors le résultat central de cette thèse :

Théorème 6.1.0.1
Soit C une courbe projective lisse et géométriquement connexe sur K, avec un point K-rationnel, et soit $\mathcal{C}$ un modèle régulier de C sur R. Soit G un schéma en groupes fini plat et commutatif sur K, et $Y \to C$ un G-torseur fppf pointé. Supposons que le K-homomorphisme $G^D \to J$ correspondant au torseur (Lemme 6.1.0.1) se prolonge en un R-homomorphisme $\mathcal{G}^D \to \mathcal{J}$, pour un certain R-modèle fini et plat $\mathcal{G}$ de G. Alors, le torseur $Y \to C$ se prolonge en un $\mathcal{G}$-torseur logarithmique pointé sur $\mathcal{C}$.

Le prolongement précédent se construit en utilisant le prolongement du fibré de Poincaré $\mathcal{P}_K$, défini sur $C \times J$ et vu comme une extension fppf de J_C par $\mathbb{G}_{m,C}$, en une extension logarithmique $\mathcal{P}^{log}$ de $\mathcal{J}_{\mathcal{C}}$ par $\mathbb{G}_{m,\mathcal{C}}$. De surcroît, si on restreint cette dernière à $\mathcal{J}^0_{\mathcal{C}}$, on obtient ainsi une extension fppf. Par conséquent, si le R-morphisme $\mathcal{G}^D \to \mathcal{J}$ se factorise par $\mathcal{J}^0$, la composante identité de $\mathcal{J}$ (voir le début de la section 4.3), alors on peut montrer qu'en ce cas, le prolongement logarithmique du torseur initial, construit dans le Théorème 6.1.0.1, provient d'un torseur fppf. En réalité, on ne fait que retrouver le résultat bien connu de la littérature déjà mentionné précédemment, à savoir, la correspondance bijective entre les torseurs fppf et certains morphismes de groupes. En effet, comme $\mathcal{C}$ est une courbe relative et que $\mathcal{G}$ est fini, un homomorphisme $\mathcal{G}^D \to \mathrm{Pic}_{\mathcal{C}/R}$ se factorise par $\mathrm{Pic}^0_{\mathcal{C}/R}$. De plus, comme $\mathcal{C}$ admet une section, alors $\mathrm{Pic}^0_{\mathcal{C}/R} \simeq \mathcal{J}^0$. On résume ici :

Théorème 6.1.0.2
Soit $Y \to C$ un G-torseur fppf pointé. Supposons que le K-homomorphisme $G^D \to J$ correspondant (Lemme 6.1.0.1) se prolonge en un R-homomorphisme $\mathcal{G}^D \to \mathcal{J}$, où $\mathcal{G}$ est un R-modèle fini et plat de G. Alors, le torseur $Y \to C$ se

prolonge de manière unique en un $\mathcal{G}$-torseur fppf pointé sur $\mathcal{C}$ si et seulement si le morphisme $\mathcal{G}^D \to \mathcal{J}$ se factorise par $\mathcal{G}^D \to \mathcal{J}^0$.

Partie II : Critère de finitude pour $\mathcal{J}[p]$.

Dans cette partie, on généralise un résultat de Chiodo [11, §7 ; Propositions 7.4.1 and 7.5.1], qui fournit un critère pour l'existence d'un R-modèle fini et étale de $J[r]$, avec r et p premiers entre eux. En fait, son résultat est un critère de finitude pour $\mathcal{J}[r]$, car comme r et p sont premiers entre eux, $\mathcal{J}[r]$ est étale, et ainsi, c'est le candidat naturel pour être le modèle de Néron de $J[r]$.

Si p divise r, $\mathcal{J}[r]$ n'a plus aucune raison d'être étale. Cependant, nous montrons que le critère de finitude de $\mathcal{J}[r]$ reste vrai.

Ainsi, le critère de Chiodo, lorsqu'il est vérifié, fournit une classe intéressante de schémas en groupes admettant un R-modèle fini et plat et dont le dual est un sous-groupe de $\mathcal{J}$. En utilisant les résultats de la partie I, on trouve :

Corollaire 6.2.0.2
Soit C une courbe projective lisse et géométriquement connexe sur K, de genre $g \geq 2$ et avec un point rationnel. Soit $\mathcal{C}$ le modèle minimal régulier de C sur R. Soit G un K-schéma en groupes fini plat et tué par r, et soit $Y \to C$ un G-torseur fppf pointé tel que Y est géométriquement connexe. Si C est semi-stable et si le critère de Chiodo est satisfait (pour C et r, Proposition 6.2.0.1), alors G a un R-modèle fini et plat $\mathcal{G}$, pour lequel $Y \to C$ se prolonge de manière unique en un $\mathcal{G}$-torseur logarithmique pointé sur $\mathcal{C}$.

Partie III : Exemples de prolongements de torseurs définis sur une courbe hyperelliptique.

Cette dernière partie est consacrée à l'étude d'exemples de prolongements de torseurs. On se donne une courbe hyperelliptique sur $\mathbb{Q}$, dépendant d'un nombre premier p, et dont la Jacobienne contient un sous-groupe isomorphe à $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$. Cela donne alors un μ_p^2-torseur sur la courbe par le Lemme 6.1.0.1.

On construira pour commencer un modèle régulier de la courbe au-dessus de $\mathbb{Z}_l$, pour un certain nombre premier l. Ensuite, on se demandera si le torseur précédent se prolonge sur ce modèle. Pour différentes valeurs de l, on traitera différents exemples qui donneront dans certains cas un prolongement fppf du torseur initial et dans d'autres, un prolongement logarithmique ne provenant pas d'un torseur fppf.

Organisation du manuscrit de thèse.

Ce manuscrit de thèse contient six chapitres. Dans le premier (section 2), nous exposons quelques outils de base de la géométrie logarithmique, qui nous

permettront par la suite d'introduire et de manipuler les torseurs log plats. Dans le second chapitre (section 3), nous faisons des rappels sur les éclatements des surfaces fibrées. Cette partie aboutira à la preuve de l'existence d'un R-modèle régulier d'une courbe lisse et projective sur K. Dans le troisième chapitre (section 4), nous parlons du foncteur de Picard relatif, de l'existence du R-modèle de Néron de la Jacobienne d'une courbe et enfin, du lien entre les deux.
Dans le chapitre suivant (section 5), nous rappelons le lien entre les extensions de groupes et les fibrés en droites rigidifiés. Grâce à cette interprétation, on pourra prolonger les extensions. En particulier, on prolongera le fibré de Poincaré, défini sur $C \times J$, en une extension de $\mathcal{J}_{\mathcal{C}}$ par $\mathbb{G}_{m,\mathcal{C}}$. Nous énonçons les résultats de l'article dans le chapitre 6 et enfin, nous terminons ce manuscrit par quelques perspectives en vue, sur les questions ouvertes qui se sont présentées lors de notre recherche et que nous envisageons étudier par la suite.

Dans tout ce manuscrit, tous les schémas et les log schémas sont supposés localement noethériens.

2 Un peu de géométrie logarithmique.

Dans ce chapitre, on introduit quelques outils de base pour l'étude de la géométrie logarithmique. Plus précisément, dans le cadre de cette thèse, la structure logarithmique d'un log schéma sera induite par un diviseur défini sur le schéma en question.

Ce chapitre est organisé de la façon suivante. La donnée d'une structure logarithmique sur un schéma X implique la donnée d'un faisceau de monoïdes sur le site étale de X. Par conséquent, on commencera par une première section où l'on rappellera quelques propriétés de la catégorie des monoïdes, comme l'existence des limites projectives, limites inductives etc. Ensuite, on abordera dans la section suivante les structures logarithmiques. On y verra notamment pourquoi le choix de la catégorie des log schémas fins et saturés est important pour l'étude des torseurs log plats. Enfin, on terminera ce chapitre en comparant les cohomologies fppf et Kummer log plate, ce qui permettra en particulier l'étude de l'obstruction à ce qu'un torseur log plat provienne d'un torseur fppf classique. Nous finirons par quelques exemples de torseurs log plats.

Ce chapitre s'inspire de [28] pour les deux premières sections et de [16] pour les deux suivantes.

2.1 Quelques prérequis sur les monoïdes.

Un **monoïde** est un triplet $(M, \star, e_M)$ où M est un ensemble, $\star$ une loi associative sur M et e_M l'élément unité. Un morphisme de monoïdes $\theta : (M, \star, e_M) \to (N, ., e_N)$ est une fonction $M \to N$ telle que $\theta(e_M) = e_N$ et $\theta(m \star m) = \theta(m).\theta(m')$ pour toute paire $(m, m') \in M^2$. Le monoïde est dit commutatif si, de plus, la loi $\star$ est commutative. Nous ne considérons que les monoïdes commutatifs ici.
Pour gagner de l'espace, on écrira le plus souvent M au lieu de $(M, \star, e_M)$; et plus simplement, on désignera par $+$ la loi $\star$ et donc par 0 l'élément unité e_M. Notons par **Mon** la catégorie des monoïdes commutatifs.

Exemple 2.1.0.1. *Étant donné un schéma X, son faisceau structural $\mathcal{O}_X$ est un faisceau de monoïdes pour la multiplication.*

L'intersection d'un ensemble de sous-monoïdes de M est un sous-monoïde de M. Ainsi, si S est un sous-ensemble de M, l'intersection de tous les sous-monoïdes de M contenant S est le plus petit sous-monoïde de M contenant S : c'est le sous-monoïde de M **engendré** par S, noté $< S >$. S'il existe un sous-ensemble fini S de M qui engendre M, on dit que M est un monoïde finiment engendré.

Les **limites inductives** existent dans la catégorie des monoïdes et commutent avec le foncteur d'oubli dans la catégorie des ensembles. Leur existence

provient de l'existence des **sommes directes** et des **coégaliseurs**.

Les sommes directes sont faciles à construire : la somme directe $\bigoplus_{i\in I} M_i$ d'une famille de monoïdes $\{M_i, i \in I\}$ est le sous-monoïde du produit de monoïdes $\prod_{i\in I} M_i$ dont les éléments sont de la forme $(m_i)_{i\in I}$ avec $m_i = 0$ pour presque tous les i.

La construction des coégaliseurs est plus délicate. Si $\theta : P \to M$ est un homomorphisme de monoïdes, alors l'ensemble E des paires $(p_1, p_2) \in P \times P$ telles que $\theta(p_1) = \theta(p_2)$ est une *relation d'équivalence* sur P, et aussi un sous-monoïde de $P \times P$. Si θ est surjectif, M est le quotient de P par la relation d'équivalence E. Un sous-monoïde E de $P \times P$ qui définit en plus une relation d'équivalence sur P est appelé une *congruence*. Nous vérifions aisément que si E est une congruence sur P, alors l'ensemble P/E des classes d'équivalence a une structure unique de monoïde, faisant de la projection canonique $P \to P/E$ un morphisme de monoïdes. L'intersection d'une famille de congruences sur P est aussi une congruence sur P. On peut alors parler de la congruence engendrée par un sous-ensemble quelconque de $P \times P$.

Si u et v sont des morphismes de monoïdes $Q \to P$, on peut construire leur coégaliseur comme le quotient de P par la congruence engendrée par les couples $(u(q), v(q))$ pour $q \in Q$.

On rappelle que la **somme amalgamée** d'une paire de morphismes de monoïdes $u_i : P \to Q_i$, notée $Q_1 \bigoplus_P Q_2$, est la limite inductive du diagramme $Q_2 \xleftarrow{u_2} P \xrightarrow{u_1} Q_1$. Autrement dit, c'est une paire (v_1, v_2) qui fait commuter universellement le diagramme :

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "u_1"] \arrow[d, "u_2"'] & Q_1 \arrow[d, "v_1"] \\ Q_2 \arrow[r, "v_2"] & Q_1 \bigoplus_P Q_2 \end{tikzcd}$$

On peut aussi le voir comme le coégaliseur des deux flèches $(u_1, 0); (0, u_2) : P \to Q_1 \bigoplus Q_2$.

Les **limites projectives** existent aussi dans la catégorie des monoïdes et commutent avec le foncteur d'oubli dans la catégorie des ensembles. L'intersection de monoïdes évoquée précédemment en est un cas particulier. La limite projective étant la notion duale de la limite inductive, son existence se déduit de l'existence du **produit** et de l'**égaliseur** dans cette catégorie.

Si M est un monoïde (commutatif), il existe un morphisme universel (de monoïdes) λ_M de M dans un groupe M^{gp}, autrement dit, M^{gp} est un groupe commutatif et tout morphisme de M dans un autre groupe se factorise d'une seule manière par λ_M. λ_M est le foncteur adjoint à gauche du foncteur d'oubli

de la catégorie des groupes dans celle des monoïdes.
Remarquons que le morphisme $\lambda_M : M \to M^{gp}$ n'est pas injectif en général. Par exemple, si $M_n := \{0, 1, ..., n\}$, on définit une opération sur M_n par $a + b = min\{a + b, n\}$. Alors dans ce cas, $M_n^{gp} = \{0\}$. En effet, pour tout $a, b, m \in M_n$, si $a + m = b + m$ dans M_n, alors les images de a et b coïncident dans M_n^{gp}. En particulier, comme $a+n = b+n$ pour tout $a, b \in M_n$, alors l'image de M_n par λ_M dans M_n^{gp} est le groupe trivial. Par la propriété universelle de M_n^{gp}, il s'en suit que $M_n^{gp} = \{0\}$. En particulier λ_M n'est pas injectif.

On dira que M est un monoïde **intègre** si $a+m = b+m$ implique $a = b$ pour tout $a, b, m \in M$. Un monoïde M est intègre si et seulement si le morphisme universel $\lambda_M : M \to M^{gp}$ est injectif.

Étant donné un monoïde M, nous noterons M^{int} l'image de M par le morphisme $\lambda_M : M \to M^{gp}$. Si $\mathbf{Mon}^{int}$ désigne la catégorie des monoïdes intègres, alors le foncteur $M \mapsto M^{int}$ est l'adjoint à gauche du foncteur d'oubli de la catégorie $\mathrm{Mon}^{\mathrm{int}}$ dans Mon. De plus, nous avons le résultat suivant dont une preuve se trouve dans [28, Chapitre 1 ; Proposition 1.2.2] :

Proposition 2.1.0.1. *Soit $Q_1 \bigoplus_P Q_2$ la somme amalgamée de deux morphismes de monoïdes $u_i : P \to Q_i$ dans la catégorie* Mon. *Alors $(Q_1 \bigoplus_P Q_2)^{int}$ est la somme amalgamée des deux morphismes $u_i^{int} : P^{int} \to Q_i^{int}$ dans la catégorie* Mon^{int}.

Un monoïde M est dit **cohérent** s'il est finiment engendré. Il est dit **fin** s'il est cohérent et intègre. Il est dit **saturé** s'il est intègre et si $\forall x \in M^{gp}$ tel que $mx \in M$ pour $m \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, alors $x \in M$. Par exemple, pour un entier naturel d, le sous-monoïde de $\mathbb{N}$

$$M := \{m \in \mathbb{N}, m \geq d\} \cup \{0\}$$

n'est pas saturé dès lors que $d > 1$.

Nous noterons M^{sat} l'ensemble des points x de M^{gp} tel que pour chaque $x \in M^{sat}$, il existe $n \in \mathbb{Z}^+$ avec $nx \in M$. C'est un sous-monoïde saturé de M^{gp}. Il est alors évident que M est saturé si et seulement si $M = M^{sat}$. Si $\mathbf{Mon}^{sat}$ désigne la catégorie des monoïdes saturés, alors le foncteur $M \mapsto M^{sat}$ est l'adjoint à gauche du foncteur d'oubli de la catégorie $\mathrm{Mon}^{\mathrm{sat}}$ dans Mon.

Enfin, nous noterons M^* l'ensemble contenant les éléments $m \in M$ tels qu'il existe $n \in M$ vérifiant $m + n = 0$. M^* est un sous-monoïde de M et c'est le plus grand sous-groupe contenu dans M : on l'appelle le groupe des unités de M. On note $\overline{M} := M/M^*$.

2.2 Structures logarithmiques et cartes.

2.2.1 Structures logarithmiques.

Fixons un schéma $(X, \mathcal{O}_X)$. Soit $\mathbf{Mon}_X$ la catégorie des faisceaux de monoïdes sur $X_{\acute{e}t}$, le site étale de X.

Définition 2.2.1.1. *Une structure* ***prélogarithmique*** *(ou prélog structure) sur un schéma $X := (X, \mathcal{O}_X)$ est la donnée d'un homomorphisme de faisceaux de monoïdes commutatifs $\alpha : (M, +, 0) \to (\mathcal{O}_X, ., 1)$ (que nous noterons $\alpha : M \to \mathcal{O}_X$ pour simplifier) sur X_t. Une structure* ***logarithmique*** *(ou log structure) sur X est une structure prélogarithmique telle que la flèche induite $\alpha^{-1}(\mathcal{O}_X^*) \to \mathcal{O}_X^*$ est un isomorphisme. Un morphisme de structures prélogarithmiques ou logarithmiques sur X est un diagramme commutatif :*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d] & \mathcal{O}_X \arrow[d, "id"] \\ N \arrow[r, "\beta"] & \mathcal{O}_X \end{tikzcd}$$

La catégorie des structures logarithmiques sur X a un élément initial, appelé la structure logarithmique triviale : l'inclusion $\mathcal{O}_X^* \hookrightarrow \mathcal{O}_X$. Elle a aussi un élément final : la flèche identité $\mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X$.

Un ***schéma logarithmique****, ou plus simplement un* ***log schéma****, est un schéma X, doté d'une structure logarithmique $\alpha_X : M_X \to \mathcal{O}_X$ sur son site étale $X_{\acute{e}t}$.*

Notation 2.2.1.1. *Dans la suite de ce chapitre, si X est un log schéma, on désignera par $\underline{X}$ le schéma sous-jacent au log schéma X.*

Un morphisme de log schémas est la donnée d'un morphisme $f : \underline{X} \to \underline{Y}$ entre les schémas sous-jacents, et d'un morphisme $M_Y \to f_*(M_X)$ tels que le diagramme suivant soit commutatif.

$$\begin{tikzcd} M_Y \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_Y"] & f_*(M_X) \arrow[d, "f_*(\alpha_X)"] \\ \mathcal{O}_Y \arrow[r] & f_*(\mathcal{O}_X) \end{tikzcd}$$

Le foncteur d'inclusion $X \to (X, \mathcal{O}_X^* \subset \mathcal{O}_X)$ est l'adjoint à droite du foncteur d'oubli $(Y, \alpha_Y : M_Y \to \mathcal{O}_Y) \to \underline{Y}$ de la catégorie des log schémas dans celle des schémas. Il permet alors d'identifier la catégorie des schémas à une sous-catégorie pleine de celle des log schémas.

Proposition 2.2.1.1. *Soit X un schéma muni d'une structure prélogarithmique $\alpha : M \to \mathcal{O}_X$. Le foncteur inclusion de la catégorie des structures logarithmiques*

dans celle des structures prélogarithmiques admet un foncteur adjoint à gauche $(M, \alpha) \to (\widetilde{M}, \widetilde{\alpha})$*, où* $\tilde{M}$ *est la somme amalgamée*

$$\begin{tikzcd}
\alpha^{-1}(\mathcal{O}_X^*) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & \mathcal{O}_X^* \arrow[d, "i"] \arrow[dr] & \\
M \arrow[r, "\gamma"'] & \widetilde{M} \arrow[r, "\widetilde{\alpha}"'] & \mathcal{O}_X
\end{tikzcd}$$

et $\widetilde{\alpha}$ *est la flèche* $\widetilde{M} \to \mathcal{O}_X$*, induite par* α *et par l'inclusion* $\mathcal{O}_X^* \hookrightarrow \mathcal{O}_X$*.*

Démonstration. Montrons que $\widetilde{M}$ induit une structure logarithmique sur X. En fait, comme l'inclusion $\mathcal{O}_X^* \to \mathcal{O}_X$ se factorise par $\widetilde{M}$, il suffit de montrer que $\widetilde{\alpha}^{-1}(0) = \{0\}$. Si $\widetilde{m} \in \widetilde{M}(U)$, pour un morphisme étale $U \to X$, il existe alors localement $m \in M(U)$ et $u \in \mathcal{O}_X^*(U)$ tels que $\widetilde{m} = \gamma(m) + i(u)$, et si $\widetilde{\alpha}(\widetilde{m}) = 0$, alors $\widetilde{\alpha}(\gamma(m)) + \widetilde{\alpha}(i(u)) = \alpha(m) + u = 0$. Ainsi, $m \in \alpha^{-1}(\mathcal{O}_X^*)(U)$ et $i(\alpha(m)) = \gamma(m) \in \widetilde{M}(U)$. D'où, $\widetilde{m} = i(\alpha(m)) + i(u) = i(\alpha(m) + u) = i(0) = 0$. De plus, la factorisation $\alpha = \widetilde{\alpha} \circ \gamma$ est universelle par l'universalité de la somme amalgamée. □

Si X est un log schéma, alors le plus grand ouvert de Zariski de X sur lequel la log structure induite est triviale s'appelle **l'ouvert de trivialité** de X (possiblement vide).

Exemple 2.2.1.1. *Soit* A *un anneau et soit* $X := \mathrm{Spec}(A)$*. La donnée d'un morphisme de monoïdes* $P \to A$ *induit une structure prélogarithmique* $\underline{P} \to \mathcal{O}_X$ *sur* X*, avec* $\underline{P}$ *le faisceau constant sur* X*, de valeur* P*. En particulier, pour* $A = \mathbb{Z}[P]$ *(la* $\mathbb{Z}$*-algèbre librement engendrée par* P*), on note* A_P *le log schéma dont le schéma sous-jacent est Spec*$(\mathbb{Z}[P])$ *et dont la log structure est celle associée à la prélog structure induite par l'inclusion* $P \hookrightarrow \mathbb{Z}[P]$*.*
Ici, $A_{P^{gp}}$ *(dont le schéma sous-jacent est Spec*$(\mathbb{Z}[P^{gp}])$*) est l'ouvert de trivialité de* A_P*. En effet, d'une part, la log structure induite par* P *sur* $A_{P^{gp}}$ *est la log structure associée à* $P^{gp} \hookrightarrow \mathbb{Z}[P^{gp}]$*, et est donc triviale. Il reste à montrer que* $A_{P^{gp}}$ *est le plus grand ouvert de Zariski de* X *où la log structure induite est triviale. Autrement dit, tout ouvert de Zariski* $i : V \hookrightarrow \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[P])$ *où la log structure induite par* P *(*$\underline{P} \to \mathcal{O}_V$*) est triviale est contenu dans* $A_{P^{gp}}$*.*

Comme la log structure induite par P *sur* V *est triviale, on a un morphisme* $\underline{P} \to \widetilde{\underline{P}} \simeq \mathcal{O}_V^*$*. Comme* $\mathcal{O}_V^*$ *est un faisceau de groupes, ce morphisme se factorise par* $\underline{P}^{gp}$*. On obtient ainsi un morphisme* $\underline{P}^{gp} \to \mathcal{O}_V$ *et cela induit un morphisme de schémas* $g : V \to \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[P^{gp}])$ *tel que la composition avec* $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[P^{gp}]) \to \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[P])$ *donne le morphisme d'inclusion* $i : V \hookrightarrow \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[P])$

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "i"'] & \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[P^{gp}]) \arrow[d] \\
& \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[P])
\end{tikzcd}$$

Comme i est injectif, cela implique que g l'est aussi.

Soit P un monoïde et notons $\alpha_P : M_P \to \mathcal{O}_{A_P}$ la log structure de A_P. Par construction de M_P, nous avons un homomorphisme naturel

$$e_P : P \to \Gamma(A_P, M_P).$$

La proposition suivante généralise une propriété bien connue sur les schémas :

Proposition 2.2.1.2. *Soit T un log schéma dont la log structure est notée M_T et soit P un monoïde. Pour chaque morphisme $f : T \to A_P$ de log schémas, on considère la composition*

$$e_f : P \to \Gamma(A_P, M_P) \to \Gamma(T, M_T).$$

Alors $f \mapsto e_f$ définit une bijection

$$\mathrm{Mor}(T, A_P) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Hom}(P, \Gamma(T, M_T)).$$

En particulier, si T est muni de la log structure triviale, cela implique immédiatement que l'ensemble des T-points de A_P est le même que l'ensemble des T-points de son ouvert de trivialité A_P^{gp}.

2.2.2 Images directe et inverse.

Si $f : X \to Y$ est un morphisme de schémas et $\alpha_X : M_X \to \mathcal{O}_X$ une log (resp. prélog) structure sur X, alors la flèche β dans le diagramme ci-dessous

$$\begin{tikzcd} f_*M_X \times_{f_*\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_Y \arrow[r, "\beta"] \arrow[d] & \mathcal{O}_Y \arrow[d] \\ f_*M_X \arrow[r, "f_*\alpha_X"] & f_*\mathcal{O}_X \end{tikzcd}$$

est une log (resp. prélog) structure sur Y, dite **la log (**resp. **prélog) structure image directe** induite par α_X, et que l'on note :

$$f_*^{log}(\alpha_X) : f_*^{log}(M_X) \to \mathcal{O}_Y.$$

Si $\alpha_Y : M_Y \to \mathcal{O}_Y$ est une log structure sur Y, alors la composition

$$f^{-1}M_Y \xrightarrow{f^{-1}\alpha_Y} f^{-1}\mathcal{O}_Y \to \mathcal{O}_X$$

est une prélog structure sur X ; la log structure qui lui est associée et que l'on note par

$$f_{log}^*(\alpha_Y) : f_{log}^*(M_Y) \to \mathcal{O}_X$$

est appelée **la log structure image inverse** de α_Y.

Un morphisme de log schémas $f : X \to Y$ est dit **strict** si la flèche induite $f_{log}^*(M_Y) \to M_X$ est un isomorphisme, c'est-à-dire que la log structure de X est la log structure image inverse de celle de Y.

2.2.3 Cartes.

Définition 2.2.3.1. *Soit $\alpha_X : M_X \to \mathcal{O}_X$ une log structure sur un schéma X et soit P un monoïde. Une* ***carte pour*** *α_X* ***modelée sur*** *P est un morphisme de prélog structures*

$$\begin{tikzcd} \underline{P} \arrow[r, "\theta"] \arrow[dr, "\beta"'] & M_X \arrow[d, "\alpha_X"] \\ & \mathcal{O}_X \end{tikzcd}$$

tel que $\widetilde{\underline{P}} \to M_X$ est un isomorphisme (Proposition 2.2.1.1).
Une carte existe toujours localement pour la topologie étale de X.

Une log structure sur un schéma X sera dite ***quasi-cohérente*** *(resp.* ***cohérente****) si, localement pour la topologie étale sur X, elle admet une carte (resp. modelée sur un monoïde finiment engendré).*
Une carte $\underline{P} \to M_X$ est dite cohérente (resp. intègre, fine, saturée) si P est un monoïde de type fini (resp. intègre, fin, saturé).
On dit qu'un log schéma X est ***intègre*** *(resp.* ***fin, saturé****) si, localement pour la topologie étale sur X, il admet une carte intègre (resp. cohérente et intègre, saturée).*

Remarque 2.2.3.1. *Soit X un log schéma. La donnée d'un morphisme de monoïdes $P \to \Gamma(X, M_X)$ équivaut, d'après la Proposition 2.2.1.2, à la donnée d'un morphisme de log schémas $X \to A_P$. Il découle des définitions que $P \to M_X$ est une carte pour α_X si et seulement si le morphisme $X \to A_P$ est strict.*

Exemple 2.2.3.1. *Soit X un schéma muni de la log structure triviale. Alors $\alpha : \underline{\{1\}} \to \mathcal{O}_X^*$ est une carte pour X, avec 1 l'unité de $\mathcal{O}_X$. En effet, la log structure associée à α est la somme amalgamée $\underline{\{1\}} \leftarrow \alpha^{-1}(\mathcal{O}_X^*) = \underline{\{1\}} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{O}_X^*$, et ce dernier n'est autre que $\mathcal{O}_X^*$.*

Exemple 2.2.3.2. *Soit X un schéma régulier et localement noethérien et soit $D \subset X$ un diviseur à croisements normaux. Soit $j : U := X - D \hookrightarrow X$ l'immersion ouverte correspondante.*
Si l'on munit U de la log structure triviale $\alpha : M_U := \mathcal{O}_U^* \hookrightarrow \mathcal{O}_U$, alors on peut définir une log structure sur X par l'image directe de celle de U :

$$j_*^{log} : M_X := j_*^{log}(\mathcal{O}_U^*) = j_*\mathcal{O}_U^* \times_{j_*\mathcal{O}_U} \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X.$$

Ainsi, les sections de $j_*^{log}(\mathcal{O}_U^*)$ sont par définition les fonctions régulières sur X dont la restriction à U est triviale.
De plus, nous pouvons associer à cette log structure une carte fine et saturée, de sorte que X, munie de cette log structure, est un log schéma fin et saturé.
Supposons que D est un diviseur réduit. Par définition, chaque point $x \in X$ admet un voisinage étale où l'on peut écrire $D = V(\prod_{i \in I} t_i)$. On en déduit que les sections locales de $j_*^{log}(\mathcal{O}_U^*)$ s'écrivent sous la forme $u.\prod_{i \in I} t_i^{n_i}$, où u est

inversible et $n_i \in \mathbb{N}$ ($\prod_{i\in I} t_i^{n_i}$ s'annule exactement le long de D, et est donc inversible sur U).
On voit alors que le morphisme local $\beta : \underline{\mathbb{N}^r} \to j_*^{log}(\mathcal{O}_U^*)$, $n_i \mapsto \prod_{1\leq i\leq r} t_i^{n_i}$ détermine essentiellement $j_*^{log}(\mathcal{O}_U^*)$. Il manque en fait les sections inversibles que l'on récupère avec la log structure induite par la carte β.
Enfin, nous remarquons que cette carte étant fine et saturée, la log structure ainsi définie sur X l'est également.

Maintenant, on remarque que la théorie des log structures peut très bien se faire sur X_{Zar}, le site de Zariski de X, à la place de son site étale (en particulier, on peut définir la notion de carte dans ce contexte). Si D n'est pas supposé à croisements normaux, chaque point $x \in X$ admet un voisinage de Zariski où $D = V(\prod_{i\in I} t_i)$. On considère alors la log structure définie sur X (les faisceaux étant considérés sur X_{Zar}) :

$$\alpha_X : M_X := j_*\mathcal{O}_U^* \times_{j_*\mathcal{O}_U} \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X.$$

Par le même raisonnement que précédemment, on constate que $\beta : \underline{\mathbb{N}^r} \to M_X$, $n_i \mapsto \prod_{1\leq i\leq r} t_i^{n_i}$ est une carte pour α_X. Maintenant, en calculant son pull-back sur le site étale $X_{ét}$, on trouve alors une carte fine et saturée pour la log structure définie par D, et ce, sans que D soit un diviseur à croisements normaux.

Définition 2.2.3.2. *Soit $f : X \to Y$ un morphisme de log schémas et soit $\theta : Q \to P$ un morphisme de monoïdes. Une* ***carte pour f modelée sur θ*** *est un diagramme commutatif*

$$\begin{tikzcd} Q \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\theta"] & \Gamma(Y, M_Y) \arrow[d] \\ P \arrow[r, "\beta"] & \Gamma(X, M_X) \end{tikzcd}$$

où γ et β sont des cartes pour α_Y et α_X, respectivement.

Localement pour la topologie étale, tout morphisme entre log schémas fins (fins et saturés) admet une carte.

2.2.4 Produit fibré de log schémas.

Comme dans le cas des schémas, le produit fibré existe dans la catégorie des log schémas. Avant d'énoncer la proposition du produit fibré, nous avons besoin du lemme suivant, dont une preuve se trouve dans [28, Chapite 2 , Corollaire 2.2.3]

Lemme 2.2.4.1. *Soit $f : X \to Y$ un morphisme de log schémas cohérents et soit $\underline{Q} \to M_Y$ une carte cohérente pour α_Y. Alors, localement pour la topologie étale sur X, il existe une carte pour f, modelée sur un morphisme de monoïdes finiment engendrés $Q \to P$.*

Proposition 2.2.4.1. *Le produit fibré existe dans la catégorie des log schémas. De plus, le produit fibré de deux log schémas cohérents est cohérent. Enfin, le foncteur $X \to \underline{X}$ qui envoie un log schéma à son schéma sous-jacent commute avec le produit fibré.*

Démonstration. L'existence du produit fibré dans la catégorie des log schémas repose sur l'existence du produit fibré dans la catégorie des schémas et des sommes amalgamées dans la catégorie des log structures.
Soit $\{\alpha_i : M_i \to \mathcal{O}_X : i \in I\}$ une famille inductive de structures prélogarithmiques sur X et soit M la limite inductive du système M_i dans la catégorie des faisceaux de monoïdes sur X. Ainsi, les flèches α_i induisent une flèche $\beta : M \to \mathcal{O}_X$ où β est la limite inductive du système $\{\alpha_i, i \in I\}$ dans la catégorie des prélog structures sur X. De plus, si chaque α_i est une log structure sur X, alors la log structure $\alpha := \widetilde{\beta} : \widetilde{M} \to \mathcal{O}_X$, associée à la structure prélog β, est la limite du système $\{\alpha_i, i \in I\}$ dans la catégorie des log structures sur X. Cela provient du fait que le foncteur $\beta \mapsto \widetilde{\beta}$ est un adjoint à gauche (au foncteur d'oubli), et donc, commute avec les limites inductives. Montrons maintenant que si tous les α_i sont cohérents, alors α l'est aussi. Le cas des sommes directes étant plutôt évident, nous regardons ici le cas des sommes amalgamées.
On se donne une paire de flèches de log structures cohérentes :

$$\begin{tikzcd} \alpha_0 \arrow[r, "\theta_1"] \arrow[d, "\theta_2"'] & \alpha_1 \\ \alpha_2 & \end{tikzcd}$$

On note $\alpha : M \to \mathcal{O}_X$ la somme amalgamée dans la catégorie des log structures. On peut supposer que α_0 admet une carte β_0 modelée sur un monoïde Q_0 finiment engendré. Alors, par le Lemme 2.4, il existe des cartes modelées sur des monoïdes cohérents $\psi_1 : Q_0 \to Q_1$ et $\psi_2 : Q_0 \to Q_2$ pour les morphismes θ_1 et θ_2, respectivement. Soit Q la somme amalgamée $Q_1 \oplus_{Q_0} Q_2$, avec sa flèche canonique $\beta : \underline{Q} \to M$. Comme le foncteur $\beta \mapsto \widetilde{\beta}$ est adjoint à gauche, il commute avec les limites inductives. On en déduit que $\widetilde{\beta} : \widetilde{\underline{Q}} \to \mathcal{O}_X$ est la limite inductive de la famille $\{\alpha_i, i \in I\}$, i.e. $\widetilde{\beta} = \alpha$. On a donc trouvé une carte cohérente pour la somme amalgamée α.
Il reste à montrer la dernière assertion. Pour cela, nous calculons le produit fibré. Soit deux morphismes de log schémas $f : X \to Z$ et $g : Y \to Z$. Alors, sur le produit fibré X' des schémas sous-jacents, nous avons une paire de morphismes de structures logarithmiques

$$\begin{tikzcd} pr_Z^* \alpha_Z \arrow[r] \arrow[d] & pr_X^* \alpha_X \\ pr_Y^* \alpha_Y & \end{tikzcd}$$

où pr_T désigne la projection de $X \times_Z Y \to T$, pour $T \in \{X, Y, Z\}$.
Si on prend alors la limite inductive de ce diagramme, nous obtenons une struc-

ture logarithmique sur X' faisant commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd} X \times_Z Y \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, "g"'] & Z \end{tikzcd}$$

□

Remarque 2.2.4.1. *Soit X un log schéma de carte P, et soit $P \to Q$ un morphisme de monoïdes. Comme la log structure sur X est l'image inverse de la log structure sur A_P, on déduit de la preuve précédente que la log structure sur $X \times_{A_P} A_Q$ est l'image inverse de la log structure sur A_Q. Autrement dit, Q est une carte pour $X \times_{A_P} A_Q$.*

Remarque 2.2.4.2. *La somme amalgamée de deux monoïdes intègres (resp. saturés) n'est pas intègre (resp. saturée) en général. De ce fait, le produit fibré construit précédemment n'est pas le bon candidat si l'on cherche à calculer le produit fibré dans la catégorie des log schémas fins ou celle des log schémas fins et saturés. Pour construire ce produit fibré, nous avons besoin de la proposition suivante :*

Proposition 2.2.4.2. *Le foncteur d'oubli de la catégorie des log schémas fins dans celle des log schémas cohérents admet un adjoint à droite $X \mapsto X^{int}$. Le foncteur d'oubli de la catégorie des log schémas fins et saturés dans celle des log schémas fins admet lui aussi un adjoint à droite $X \mapsto X^{sat}$.*

Démonstration. Supposons que X est un log schéma cohérent (resp. fin) et soit F le foncteur de la catégorie des log schémas fins (resp. fins et saturés) qui envoie T sur l'ensemble des morphismes $T \to X$. On souhaite démontrer que F est représentable. Supposons pour commencer que l'on dispose d'une carte cohérente (resp. fine) $f : X \to A_P$ pour α_X. Notons que si F est représentable par un log schéma X', alors $X' \to X$ est unique à isomorphisme près et ne dépend pas du choix de f.
On pose $P' := P^{int}$ (resp. P^{sat}) et $X' := X \times_{A_P} A_{P'}$. Comme $X \to A_P$ est strict, $X' \to A_{P'}$ est strict (Remarque 2.2.4.1) et donc, X' qui admet P' pour carte est fin (resp. saturé). Si T est un log schéma fin (resp. fin et saturé), alors d'après la Proposition 2.2.1.2, se donner un morphisme de log schémas $T \to X$ revient à se donner un morphisme de schémas $\underline{T} \to \underline{X}$ et un morphisme de monoïdes $P \to \Gamma(T, M_T)$, où M_T désigne la log structure de T. Comme $\Gamma(T, M_T)$ est intègre (resp. saturé), le morphisme $P \to \Gamma(T, M_T)$ se factorise de manière unique par P'. Il s'en suit que le morphisme $T \to A_P$ se factorise de manière unique par $A_{P'}$. D'où, $T \to X$ se factorise de façon unique par X'. Cela montre que X' représente F.
Dans le cas général, X admet un recouvrement étale où chaque ouvert admet une carte cohérente (resp. fine). On recolle alors les morceaux obtenus précédemment afin de conclure.

□

Nous pouvons maintenant construire les produits fibrés souhaités :

Proposition 2.2.4.3. *Le produit fibré existe dans la catégorie des log schémas fins (resp. fins et saturés) : étant donné des log schémas X, Y et Z fins (resp. fins et saturés), et des morphismes $X \to Z$ et $Y \to Z$, le produit fibré de X et Y le long de Z dans la catégorie des log schémas fins (resp. fins et saturés) est donné par $(X \times_Z Y)^{int}$ (resp. $(X \times_Z Y)^{sat}$)..*

Démonstration. Si $X \to Z$ et $Y \to Z$ est une paire de morphismes de log schémas fins (resp. fins et saturés), alors il vient de la propriété universelle que $(X \times_Z Y)^{int}$ (resp. $(X \times_Z Y)^{sat}$), avec les flèches induites sur X, Y et Z, est produit fibré de X et Y dans la catégorie des log schémas fins (resp fins saturés). □

Exemple 2.2.4.1. *([26, §0 ; Exemple 0.3]) Nous donnons ici un exemple de calcul de produit fibré ne donnant pas le même résultat dans la catégorie des log schémas et celle des log schémas fins et saturés.*
Pour k un corps, on pose :

$$X = \mathrm{Spec}(k) \longrightarrow Z = \mathrm{Spec}(k) \longleftarrow Y = \mathrm{Spec}(k).$$

Nous munissons chacun de X, Y et Z des log structures données par les cartes suivantes :

- *$P_X :=< (1,0),(-1,1) >\subseteq \mathbb{N} \oplus \mathbb{N}$ et $P_X \to k$ est donné par $(0,0) \mapsto 1$, et le reste est envoyé vers 0.*
- *$P_Y :=< (0,1),(1,-1) >\subseteq \mathbb{N} \oplus \mathbb{N}$ et $P_Y \to k$ est donné par $(0,0) \mapsto 1$, et le reste est envoyé vers 0.*
- *$P_Z := \mathbb{N} \oplus \mathbb{N}$ et $P_Z \to k$ est donné par $(0,0) \mapsto 1$, et le reste est envoyé vers 0.*

Regardons ce que vaut le produit fibré de X et Y le long de Z dans la catégorie des log schémas fins et saturés. Pour ce faire, nous suivons ce qui a été fait dans la preuve de la Proposition 2.2.4.2.

On note par Q la somme amalgamée $P_X \oplus_{P_Z} P_Y$. D'après la Proposition 2.1.0.1, cette somme amalgamée est intègre puisque chacun des P_X, P_Y et P_Z, l'est. Dans la catégorie des log schémas fins et saturés, le produit fibré est donc

$$\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[Q^{st}]) \times_{\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[Q])} \mathrm{Spec}(k) = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[Q^{st}] \otimes_{\mathbb{Z}[Q]} k).$$

Montrons que $\mathbb{Z}[Q^{st}] \otimes_{\mathbb{Z}[Q]} k = \{0\}$ et cela impliquera que le produit fibré recherché est vide. Soit $x \otimes y \in \mathbb{Z}[Q^{st}] \times_{\mathbb{Z}[Q]} k$. Par linéarité, on peut supposer que $x \in Q^{st}$.

Soit alors $x \otimes y$ avec $x \in Q^{st}$ et $y \in k$. Par définition, il existe $n \in \mathbb{Z}^{+*}$ tel que $nx \in Q$.
On a

$$\begin{aligned} x \otimes y &= x \otimes n.\frac{y}{n} \\ &= nx \otimes \frac{y}{n} \end{aligned}$$

On a alors deux cas. Si $nx = 0$, les égalités précédentes impliquent que $x \otimes y = 0$. Sinon, on peut écrire

$$nx \otimes \frac{y}{n} = 1 \otimes f(nx).\frac{y}{n}$$

avec f le morphisme canonique $\mathbb{Z}[Q] \to k$, induit par les morphismes $P_X \to k$, $P_Y \to k$ et $P_Z \to k$. Comme $nx \neq 0$, alors $f(nx) = 0$. Il en vient que $x \otimes y = 0$.

D'autre part, on voit bien que dans la catégorie des log schémas (et celle des log schémas fins), le schéma sous-jacent à ce produit fibré est $\mathrm{Spec}(k)$.

2.3 Topologie Kummer log plate.

A partir de maintenant, nous travaillerons dans la catégorie des log schémas fins et saturés. Le choix de cette catégorie est important dans l'étude des torseurs logarithmiques comme on le verra dans l'Exemple 2.4.1.3.
On définit dans cette section la topologie Kummer log plate que l'on utilisera dans la catégorie des log schémas fins et saturés, afin de construire des log torseurs.

Remarquons que si $f : X \to Y$ est un morphisme de log schémas fins et saturés, et $\theta : Q \to P$ une carte pour celui-ci, alors le morphisme $X \to Y \times_{A_Q} A_P$, induit par les deux morphismes $X \to Y$ et $X \to A_P$, est strict.

Définition 2.3.0.1. *Soit $f : X \to Y$ un morphisme de log schémas fins et saturés. On dit que f est log plat si, localement pour la topologie fppf sur X et Y, f admet une carte $\theta : Q \to P$ telle que*

1. *Le morphisme $\theta^{gp} : Q^{gp} \to P^{gp}$ est injectif;*
2. *Le morphisme strict $X \to Y \times_{\mathrm{Spec}(Z[Q])} \mathrm{Spec}(Z[P])$ est plat au sens classique.*

Remarque 2.3.0.1. *Soit $f : X \to Y$ un morphisme plat de schémas. Si l'on munit chacun de X et Y de leurs log structures triviales respectives, alors f est un morphisme log plat, au sens de la Définition 2.3.0.1. En effet, d'après l'Exemple 2.2.3.1, $\underline{\{1_X\}} \to \mathcal{O}_X^*$ (resp. $\underline{\{1_Y\}} \to \mathcal{O}_Y^*$) est une carte pour α_X (resp. pour α_Y), avec 1_X l'élément neutre de $\mathcal{O}_X$ (resp. 1_Y l'élément neutre de $\mathcal{O}_Y$).*

Ainsi, le morphisme strict $X \to Y \times_{\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[1_Y])} \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[1_X])$ est simplement le morphisme $X \to Y$ (car $\mathbb{Z}[1_X] = \mathbb{Z}[1_Y] = \mathbb{Z}$), qui lui, est plat par hypothèse.

Définition 2.3.0.2. *Soit $\theta : P \to Q$ un morphisme de monoïdes fins et saturés. On dit que θ est kummérien (ou de Kummer) s'il est injectif, et si pour tout $a \in Q$, il existe un entier $n \geq 1$ tel que $a^n \in \theta(P)$.*

Définition 2.3.0.3. *On définit une topologie de Grothendieck, dans la catégorie des log schémas fins et saturés, de la façon suivante :*
La topologie Kummer log plate est la topologie la moins fine telle que les familles ensemblistement surjectives de morphismes log plats, kummériens et localement de présentation finie sur les schémas sous-jacents, soient couvrantes.

2.3.1 Torseur log plat.

Nous appelons **torseur log plat**, ou plus simplement **torseur logarithmique** ou **torseur log**, un torseur construit dans la catégorie des log schémas fins et saturés, munie de la topologie Kummer log plate. Dans cette section, nous donnons un moyen classique de construction de torseurs log plats : les torseurs kummériens standards. Nous verrons ensuite que la topologie Kummer log plate est engendrée par les recouvrements fppf et les torseurs kummériens standards.

Si M est un groupe abélien, nous noterons dans cette partie $D(M)$ le log schéma A_M : c'est le schéma en groupes diagonalisable associé à M, muni de la log structure triviale.

Proposition 2.3.1.1. *[16, §2.3 ; Proposition 2.9] Soit X un log schéma muni d'une carte $P \to M_X$, et soit $\theta : P \to Q$ un morphisme kummérien de monoïdes fins et saturés. Alors la projection naturelle*

$$Y := X \times_{A_P} A_Q \to X$$

*est un torseur pour la topologie Kummer log plate sous le groupe $D(Q^{gp}/\theta(P^{gp}))$. Un torseur obtenu de la sorte s'appelle un **torseur kummérien standard**.*

Démonstration. D'après [22, §3 ; Remarque 3.4, (c)], sous les hypothèses envisagées, le morphisme $A_Q \to A_P$ est formellement principal homogène pour le groupe $D(Q^{gp}/\theta(P^{gp}))$. En d'autres termes, nous avons un isomorphisme

$$D(Q^{gp}/\theta(P^{gp})) \times A_Q \to A_Q \times_{A_P} A_Q, \quad (g, x) \mapsto (x, g.x) \tag{1}$$

dans la catégorie des log schémas fins et saturés. Donc

$$\begin{aligned} Y \times_X Y &= X \times_{A_P} A_Q \times_{A_P} A_Q \\ &\simeq X \times_{A_P} A_Q \times D(Q^{gp}/\theta(P^{gp})) \\ &= Y \times D(Q^{gp}/\theta(P^{gp})). \end{aligned}$$

Donc le morphisme $Y \to X$ est formellement principal homogène, de groupe $D(Q^{gp}/\theta(P^{gp}))$. Il reste à montrer que $Y \to X$ est un épimorphisme, ce qui est clair étant donné qu'il est Kummer log plat. □

Nous donnerons un peu plus loin un exemple d'un torseur kummérien standard.

Nous avons le résultat suivant, dont l'analogue en topologie Kummer étale est bien connu (cf. [22, §3 ; Corollaire 3.6]).

Proposition 2.3.1.2. *[16, §2.3 ; Corollaire 2.11] Soit X un log schéma. La topologie Kummer plate sur X est engendrée par les recouvrements fppf classiques et les torseurs kummériens standards.*

2.4 Comparaison avec la cohomologie fppf.

Dans ce qui suit, nous comparerons la cohomologie fppf et la cohomologie induite par la topologie Kummer log plate (voir [16, §2.4] pour plus de détails). Nous noterons **klp** pour signifier la topologie Kummer log plate en guise de simplification.

Étant donné un log schéma fin et saturé X, on notera (fs/X) la catégorie des log schémas fins et saturés sur X et on notera $(fs/X)_{klp}$ le site obtenu en munissant (fs/X) de la topologie klp. De même, si X est un schéma, on notera (Sch/X) la catégorie des X-schémas et $(Sch/X)_{fppf}$ le site obtenu en munissant cette dernière de la topologie fppf. Le foncteur d'oubli induit un morphisme de sites

$$\epsilon : (fs/X)_{klp} \to (Sch/X)_{fppf}.$$

Soit Y un X-schéma et soit h_Y le faisceau qu'il représente (son foncteur des points) ; alors le faisceau $\epsilon^* h_Y$ est représentable par le log schéma obtenu en munissant Y de la log structure image réciproque de celle de X.
Si G est un X-schéma en groupes , on notera par abus de langage G le log schéma en groupes $\epsilon^* G$. On notera alors $\mathbb{G}_m$ le groupe multiplicatif et μ_n le groupe des racines n-ièmes de l'unité, que l'on considérera indifféremment comme des schémas et des log schémas en groupes.

Soit F un faisceau abélien pour la topologie Kummer log plate sur X. Par dérivation de foncteurs composés

$$(fs/X) \xrightarrow{\epsilon_*} (Sch/X) \xrightarrow{\Gamma} (Ab)$$

on obtient la suite spectrale

$$H^p_{fppf}(X, R^q\epsilon_* F) \Rightarrow H^{p+q}_{klp}(X, F).$$

En prenant le cas particulier où $F = \epsilon^* G$, avec G un X-schéma en groupes commutatif, le morphisme d'adjonction $G \to \epsilon_*\epsilon^* G$ est un isomorphisme. On déduit alors de la suite spectrale précédente la suite exacte suivante [16, §2.4 ; suite exacte (3)] :

$$0 \to H^1_{fppf}(X, G) \xrightarrow{i} H^1_{klp}(X, G) \to H^0(X, R^1\epsilon_* G) \to H^2_{fppf}(X, G). \qquad (2)$$

Nous rappelons que le premier groupe de cohomologie $H^1_{fppf}(X,G)$ classifie les G-torseurs fppf sur X (vu comme schéma) et le premier groupe de cohomologie $H^1_{klp}(X,G)$ classifie les G-torseurs log plats sur X (muni de sa log structure). De la suite exacte précédente, nous déduisons qu'un torseur fppf peut être vu comme un torseur log via l'injection i. En effet, si l'on se donne un G-torseur fppf $Y \to X$ et si l'on munit Y de la log structure inverse de celle de X, alors $Y \to X$ est un torseur log plat sous G. Cela provient du fait que dans ce cas, le produit fibré $Y \times_X Y$ dans la catégorie des log schémas fins et saturés a pour schéma sous-jacent $\underline{Y} \times_{\underline{X}} \underline{Y}$ et est muni de la log structure inverse de celle de X. Ainsi donc, l'isomorphisme $Y \times_X Y \simeq G \times Y$ est un isomorphisme dans la catégorie des log schémas fins et saturés et $Y \to X$ est donc un G-torseur log plat.

Dans la suite de cette section, nous donnons quelques exemples de torseurs log plats ne provenant pas de torseurs $fppf$.

Dans les cas qui nous intéresseront pour la suite, Kato a calculé le faisceau $R^1\epsilon_* G$:

Théorème 2.4.0.1. *[23, §4 ; Théorème 4.1] Soit X un log schéma localement noethérien, et soit G un X-schéma en groupes commutatif. On suppose que G est fini et localement libre sur X, ou que G est affine lisse sur X. Alors on dispose d'un isomorphisme canonique*

$$R^1\epsilon_* G \simeq \varinjlim \underline{\mathrm{Hom}}(\mu_n, G) \otimes_{\mathbb{Z}} \overline{M_X^{gp}}$$

la limite inductive étant prise par rapport aux projections canoniques $\mu_{mn} \to \mu_n$ avec $m, n \neq 0$.

Remarque 2.4.0.1. *[16, §2.4 ; Remarque 2.13] Nous déduisons du théorème précédent les deux exemples suivants :*

— *Dans le cas où $G = \mathbb{G}_m$, on trouve*

$$R^1\epsilon_* \mathbb{G}_m = \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \otimes \overline{M^{gp}}_X.$$

— *Dans le cas où $G = \mu_n$, il vient*

$$R^1\epsilon_* \mu_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes \overline{M^{gp}}_X.$$

2.4.1 Exemples de torseurs log plats.

Exemple 2.4.1.1. ***Les $\mathbb{G}_m$-torseurs.***
Soit X un schéma régulier et soit $\mathrm{Pic}(X)$ le groupe de Picard de X. Soit $\mathrm{Div}(X)$ (resp. $\mathrm{DivPrin}(X)$) le groupe des diviseurs de Cartier (resp. diviseurs de Cartier principaux) sur X. Il est bien connu que $\mathrm{Pic}(X) = H^1_{fppf}(X, \mathbb{G}_m) \simeq \mathrm{Div}(X)/\mathrm{DivPrin}(X)$. En reprenant les résultats de [15, §3], nous verrons dans cette section que l'on

peut donner une description analogue au groupe $H^1_{klp}(X, \mathbb{G}_m)$.

Soit D un diviseur sur X (muni de sa structure de schéma réduit) de complémentaire U (on note j le morphisme $U \to X$), et supposons que $D = \sum_{m=1}^{r} D_m$ où les D_m sont les composantes irréductibles de D. Si l'on munit U de la log structure triviale $M_U := \mathcal{O}_U^*$, d'après l'Exemple 2.2.3.2, X peut être muni lui aussi d'une log structure fine et saturée, image directe de celle sur U.

On appelle groupe des diviseurs à coefficients rationnels au-dessus de D, et l'on note $\mathrm{DivRat}(X, D)$, le sous-groupe de $\mathrm{Div}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, constitué des diviseurs dont la restriction à U est à coefficients entiers.
On vérifie aisément que

$$\mathrm{DivRat}(X, D) = \mathrm{Div}(U) \bigoplus_{m=1}^{r} \mathbb{Q}.D_m.$$

Théorème 2.4.1.1. *[15, §3.1 ; Théorème 3.1.3] On dispose d'un isomorphisme canonique*

$$\mathrm{DivRat}(X, D)/\mathrm{DivPrin}(X) \xrightarrow{\simeq} H^1_{klp}(X, \mathbb{G}_m).$$

Autrement dit, les fibrés en droites logarithmiques (ou les $\mathbb{G}_m$-torseurs log plats) ne sont autres que des diviseurs de Cartier à coefficients rationnels.

Enfin, le corollaire suivant nous permet de comparer les $\mathbb{G}_m$-torseurs fppf et les $\mathbb{G}_m$-torseurs log plats :

Corollaire 2.4.1.1. *[15, §3.1 ; Corollaire 3.1.4] On dispose d'une suite exacte*

$$0 \to H^1_{fppf}(X, \mathbb{G}_m) \to H^1_{klp}(X, \mathbb{G}_m) \to \bigoplus_{m=1}^{r} (\mathbb{Q}/\mathbb{Z}).D_m \to 0. \tag{3}$$

Démonstration. En écrivant la suite exacte (2) dans le cas où $G = \mathbb{G}_m$, et en utilisant le premier point de la Remarque 2.4.0.1, on obtient la suite exacte

$$0 \to H^1_{fppf}(X, \mathbb{G}_m) \to H_{klp}(X, \mathbb{G}_m) \xrightarrow{\rho} (\overline{M_X^{gp}} \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z})(X) \to \ker(\zeta) \to 0$$

avec ζ le morphisme canonique qui s'obtient si l'on poursuit l'écriture de la suite exacte (2)

$$\zeta : H^2_{fppf}(X, \mathbb{G}_m) \to H^2_{klp}(X, \mathbb{G}_m).$$

De plus, par l'universalité de M_X^{gp}, $M_X^{gp} = j_* M_U^{gp} = j_* \mathcal{O}_U^*$. Enfin, $\overline{M_X^{gp}} = M_X^{gp}/\mathcal{O}_X^* = j_* \mathcal{O}_U^*/\mathcal{O}_X^*$. Maintenant, il n'est pas difficile de voir que le faisceau $j_* \mathcal{O}_U^*/\mathcal{O}_X^*$ sur X n'est autre que le faisceau des diviseurs de Cartier effectifs sur X, de support $X \backslash U$. Et donc, d'après le Théorème 2.4.1.1, ρ peut être identifié à la flèche

$$\mathrm{DivRat}(X, D)/\mathrm{DivPrin}(X) \to \bigoplus_{m=1}^{r} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} D_m$$

elle, déduite de la projection naturelle

$$\mathrm{DivRat}(X, D) \to \bigoplus_{m=1}^{r} \mathbb{Q}D_m.$$

On en déduit que ρ est surjective, et donc $\mathrm{Ker}(\zeta) = 0$

□

Exemple 2.4.1.2. ***Les μ_n-torseurs log plats.***
Soit X un schéma régulier et localement noethérien, que l'on munit de la log structure induite par un ouvert U de X. En employant les mêmes outils que précédemment, il est démontré dans [15, §3.2 ; Proposition 3.2.1] que les μ_n-torseurs log plats sur X sont exactement ceux dont la restriction à U est un μ_n-torseur fppf. Autrement dit, on a un ismorphisme

$$H^1_{klp}(X, \mu_n) \xrightarrow{\simeq} H^1_{fppf}(U, \mu_n).$$

Exemple 2.4.1.3. ***Un $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-torseur log plat.****[23, §1 ; 1.9.3]*
Soit A un anneau de valuation discrète, $n \geq 2$ un entier inversible dans A et π une uniformisante de A. On pose $B := A[\pi^{1/n}]$ et on suppose que A contient une racine primitive n-ième de l'unité. Soit $G := \mathcal{A}ut_A(B) \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (ici μ_n est étale car n est inversible dans A, et comme A contient une racine n-ème de l'unité, alors $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \simeq \mu_n$.
On munit $Y = \mathrm{Spec}(A)$ (resp. $X = \mathrm{Spec}(B)$) de la log structure associée à $\mathbb{N} \to A$, $1 \mapsto \pi$ (resp. $\mathbb{N} \to B$, $1 \mapsto \pi^{1/n}$). Alors

$$G \times X \simeq X \times_Y X \tag{4}$$

est un isomorphisme dans la catégorie des log schémas fins et saturés mais ce n'est pas un isomorphisme dans la catégorie des schémas (si on oublie les log structures). Pour le vérifier, il faut montrer que $X \times_Y X$ est connexe en tant que schéma.
Géométriquement, $X \times_Y X$ est deux copies de $\mathrm{Spec}(A[\pi^{1/n}])$ qui se croisent au-dessus de l'idéal maximal de A, il est donc connexe. Toutefois, $G \times X$ n'est clairement pas connexe.

Nous en déduisons en particulier que l'isomorphisme (4) n'est pas un isomorphisme dans la catégorie des log schémas (ni celle des log schémas fins). En effet, comme on l'a déjà vu, le produit fibré dans la catégorie des log schémas a pour schéma sous-jacent le produit fibré des schémas sous-jacents (ici, les cartes étant intègres, le produit fibré dans la catégorie des log schémas et dans celle des log schémas fins est le même).

Il s'agit donc d'un torseur log plat ne provenant pas d'un torseur fppf.

En fait, on peut aussi voir que c'est un torseur kummérien standard. En effet, $\mathrm{Spec}(A)$ est muni de la carte $\mathbb{N} \to A$, $1 \mapsto \pi$ et le morphisme $\theta : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$,

$a \mapsto a^n$ est kummérien. Donc, la projection

$$\mathrm{Spec}(A) \times_{A_{\mathbb{N}}} A_{\mathbb{N}} \to \mathrm{Spec}(A)$$

est un torseur kummérien standard. Maintenant, si on calcule ce produit fibré

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Spec}(A) \times_{A_{\mathbb{N}}} A_{\mathbb{N}} \arrow[r] \arrow[d] & A_{\mathbb{N}} \arrow[d, "\theta^{-1}"] \\
\mathrm{Spec}(A) \arrow[r] & A_{\mathbb{N}}
\end{tikzcd}$$

il est facile de voir que $\mathrm{Spec}(A) \times_{A_{\mathbb{N}}} A_{\mathbb{N}} = \mathrm{Spec}(A[\pi^{1/n}]) = \mathrm{Spec}(B)$.
Une autre manière de voir que ce torseur n'est pas un torseur fppf est de remarquer que si $\mathrm{Spec}(A[\pi^{1/n}]) \to \mathrm{Spec}(A)$ *était un* $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$*-torseur fppf, il serait étale puisque* $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ *l'est, donc en particulier non ramifié. Or,* $A \to A[\pi^{1/n}]$ *est totalement ramifié.*

3 Les éclatements.

Tout au long de ce chapitre, nous fixons un schéma de Dédekind S, de point générique η. On notera $K(S)$ l'anneau $\mathcal{O}_{S,\eta}$, que l'on appelle *corps des fractions rationnelles* de S. Si s est un point fermé de S, on notera $k(s)$ le corps résiduel de S en s. Parfois, S sera supposé affine et on l'appelera anneau de Dédekind. Le cas échéant, si par exemple $S = \mathrm{Spec}(A)$, K désignera le corps des fractions de l'anneau de Dédekind A.

Étant donné un schéma $\mathcal{X}$ sur S, on notera X sa fibre générique $\mathcal{X} \times_S K(S)$, et $\mathcal{X}_s$ sa fibre $\mathcal{X} \times_S \mathrm{Spec}\, k(s)$ au-dessus du point fermé $s \in S$.

Ce chapitre est consacré à l'étude des éclatements d'une S-surface donnée. En particulier, on verra qu'on peut normaliser une surface définie sur un corps par le biais des éclatements. Plus généralement, si S est affine, on verra que les éclatements permettent de construire un S-modèle régulier d'une courbe lisse et projective sur K. Nous terminons ce chapitre par la définition et l'existence du modèle minimal régulier d'une courbe. A noter que la première partie des résultats de cette thèse (section 6.1) utilise un modèle régulier quelconque, tandis que la deuxième (section 6.2) se sert du modèle minimal.

Ce chapitre s'inspire essentiellement de [24].

3.1 Définitions et propriétés.

3.1.1 Cas affine.

On rappelle qu'étant donné un anneau A (commutatif avec une unité) et I un idéal de A, on notera $V(I)$ le fermé $\mathrm{Spec}(A/I)$.
Commençons par donner une description locale des éclatements. Soit A un anneau et I un idéal de A. Considérons la A-algèbre graduée

$$\tilde{A} = \bigoplus_{d \geq 0} I^d$$

Soit $f_1, ..., f_n$ un système de générateurs de I. On les voit comme éléments homogènes de $\tilde{A}$ de degré 0. Soit $t_i \in I$, l'élément f_i, vu comme élément homogène de $\tilde{A}$ de degré 1. Nous avons un morphisme surjectif de A-algèbres graduées

$$\begin{aligned} \phi : A[T_1, ..., T_n] &\to \tilde{A} \\ T_i &\mapsto (0, t_i, 0, ..., 0) \end{aligned}$$

Définition 3.1.1.1. *Soit $X = \mathrm{Spec}(A)$ un schéma affine et noethérien, et soit I un idéal de A. On pose $\tilde{X} := Proj(\tilde{A})$. Le morphisme canonique $\tilde{X} \to X$ est appelé l'éclatement de X pour centre (ou le long de) $V(I)$.*

Lemme 3.1.1.1. *[24, §8.1.1 ; Lemme 1.2] Soit A un anneau noethérien et I un idéal de A. On considère le morphisme surjectif suivant, induit par ϕ*

$$\begin{aligned}\phi_{(T_1)} : A[T_1, ..., T_n]_{(T_1)} \simeq A[T_2/T_1, ..., T_n/T_1] &\to \tilde{A}_{(t_1)} \\ T_i/T_1 &\mapsto (0, t_i/t_1, 0, ..., 0)\end{aligned}$$

Alors :

1. *Si I est engendré par un seul élément non diviseur de 0, alors $\tilde{A} = A[T]$. En d'autres termes, $\mathrm{Proj}(\tilde{A}) \to \mathrm{Spec}(A)$ est un isomorphisme.*
2. *A est intègre (resp. réduit) si et seulement si $\tilde{A}$ est intègre (resp. réduit).*
3. *Soit B une A-algèbre plate et soit $\tilde{B}$ la B-algèbre graduée associée à l'idéal IB. On a un isomorphisme canonique $\tilde{B} \simeq B \otimes_A \tilde{A}$.*
4. *Le noyau $\mathrm{Ker}(\phi_{(T_1)})$ est égal à*

   $$J_1 := \{P \in A[T_2/T_1, ..., T_n/T_1] \mid \exists d \geq 0, f_1^d P \in (f_1T_2/T_1 - f_2, ..., f_1T_n/T_1 - f_n)\}$$

   De plus, $\tilde{A}_{(t_i)}$ peut être identifié à la sous-A-algèbre de A_{f_1}, engendrée par les éléments f_i/f_1, $2 \leq i \leq n$.

Démonstration.

1. Supposons que f engendre I, et soit $\phi : A[T] \to \tilde{A}$, $T \mapsto (0, t, 0, ..., 0)$ où t désigne l'élément f vu comme élément homogène de $\tilde{A}$ de degré 1. Il est clair que ϕ est un isomorphisme. Il vient alors que $\mathrm{Proj}(\tilde{A}) = \mathrm{Proj}(A[T]) \simeq \mathrm{Spec}(A)$.
2. Supposons A intègre. Soient $a, b \in \tilde{A}$ tels que $ab = 0$ et $a \neq 0$. Soient a_n, b_m leurs composantes homogènes du degré le plus élevé, alors $a_n b_m = 0$. Il vient que $b_m = 0$. La réciproque est évidente puisque A est un sous-anneau de $\tilde{A}$.
   Maintenant, supposons que $\tilde{A}$ a un élément nilpotent a non trivial. Il existe alors $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $a^m = 0$. Écrivons $a = \sum_{d \geq 0} a_d$ et soit d_0 le plus petit degré tel que $a_{d_0} \neq 0$. Alors $a_{d_0}^m = 0$ et donc a_{d_0} est un élément nilpotent de A.
   Réciproquement, si $a \in A$ est nilpotent, alors c'est aussi un élément nilpotent de $\tilde{A}$ puisque A est un sous-anneau de $\tilde{A}$.
3. On a $B \otimes_A I \simeq IB$ ([24, §1.2 ; Théorème 2.4]) et $(IB)^d \simeq B \otimes_A I^d$. D'où

   $$\tilde{B} \simeq \oplus_{d \geq 0}(B \oplus_A I^d) \simeq B \otimes_A (\oplus_{d \geq 0} I^d) = B \otimes_A \tilde{A}$$

   .

4. Soit $P \in A[T_2/T_1, ..., T_n/T_1]$. En multipliant P par une puissance de f_1 si nécessaire, on peut effectuer des divisions euclidiennes successives et on trouve

   $$f_1^d P(T_2/T_1, ..., T_n/T_1) = \sum_{2 \leq i \leq n} Q_i(T_2/T_1, ..., T_n/T_1)(f_1T_i/T_1 - f_i) + a, a \in A \tag{5}$$

Si $P \in \mathrm{Ker}(\phi_{(T_1)})$, alors l'image de a dans $\tilde{A}_{(t_1)}$ est zéro. Autrement dit, il existe $r \geq 0$ tel que $at_1^r = 0$, ce qui est équivalent à $af_1^r = 0$. En multipliant (5) par f_1^r, il apparaît que quitte à remplacer f^d par f^{d+r}, on peut supposer que $a = 0$. D'où, $P \in J_1$.
Réciproquement, soit $P \in J_1$. Alors, il existe $d \geq 0$ tel que $f_1^d P \in (f_1T_2/T_1, ..., f_1T_n/T_1 - f_n)$.
Écrivons $P(T_2/T_1, ..., T_n/T_1) = Q(T_1, ..., T_n)/T_1^r$ avec $Q(T_1, ...T_n)$ un polynôme homogène de degré r. Il existe $e \geq 0$ tel que $f_1^d T_1^e Q(T)$ appartient à l'idéal $(f_1T_2 - f_2T_1, ..., f_1T_n - f_nT_1)$. Donc $f_1^d t_1^f Q(t_1, ..., t_n) = 0$, ce qui implique que $t_1^{d+e} Q(t_1, ..., t_n) = 0$. On en déduit que $P(T_2/T_1, ..., T_n/T_1) = (Q(T_1, ..., T_n)T_1^{d+e})/T_1^{d+e+r} \in \mathrm{Ker}(\phi_{(T_1)})$. Ce qui termine la première partie de ce point.
Nous avons donc un isomorphisme

$$A[T_2/T_1, ..., T_n/T_1]/J_1 \xrightarrow{\simeq} \tilde{A}_{(t_1)}. \tag{6}$$

D'autre part, considérons le morphisme de A-algèbres

$$\begin{aligned} \psi : A[T_2/T_1, ..., T_n/T_1] &\to A_{f_1} \\ T_i/T_1 &\mapsto f_i/f_1 \end{aligned}$$

D'après ce qui précède, il vient immédiatement que $\mathrm{Ker}(\psi) = J_1$. De plus, $\psi(A[T_2/T_1, ..., T_n/T_1]) = A[f_2/f_1, ..., f_n/f_1]$. Cela implique, en utilisant (6), que

$$\tilde{A}_{(t_1)} \simeq A[f_2/f_1, ..., f_n/f_1].$$

□

Corollaire 3.1.1.1. *[24, §8.1.1 ; Lemme 1.4] Soit $\tilde{X} \to X = \mathrm{Spec}(A)$ l'éclatement d'un anneau noethérien, intègre et affine, le long du schéma fermé $V(I)$. Soit $I = (f_1, ..., f_n)$, avec $f_i \neq 0$ pour tous les i. Alors $\tilde{X}$ est l'union des sous-schémas affines $SpecA_i$, $a \leq i \leq n$, où A_i est la sous-A-algèbre de $Frac(A)$ engendrée par les $f_j f_i^{-1}$, $1 \leq j \leq n$.*

Démonstration. Cela découle du Lemme 3.1.1.1.(4). □

Exemple 3.1.1.1. *On se donne la surface suivante*

$$\mathcal{W} = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[X, Y]/(Y^2 - P(X)))$$

Avec $P(X) = (X^p - 1)(X^p - c^2) = X^{2p} - (1 + c^2)X^p - c^2$, $c \in \mathbb{Z}\backslash\{-1, 0, 1\}$ et p un nombre premier impair ne divisant pas $1 - c^2$. On note x, y les images respectives de X et Y dans le quotient.
On pose $A := \mathbb{Z}[X, Y]/(Y^2 - P(X))$ et soit $I = (x - 1, y, p)$.
On souhaite éclater $\mathcal{W}$ le long de $V(I)$. D'après le Lemme 3.1.1.1(4), l'éclatement $\tilde{\mathcal{W}}$ est recouvert par trois cartes affines. Calculons la première carte affine

que l'on notera $\mathrm{Spec}(A_1)$. *On note*

$$\begin{aligned}\psi_1 : A[T_2/T_1, T_3/T_1] &\to A_{x-1}\\ T_2/T_1 &\mapsto \frac{y}{x-1}\\ T_3/T_1 &\mapsto \frac{p}{x-1}\end{aligned}$$

Posons $y_1 := \frac{y}{x-1}$ *et* $p_1 := \frac{p}{x-1}$, *le calcul donne :*

$$\begin{aligned}y^2 - P(x) &= (x-1)^2 y_1^2 - \sum_{i=0}^{2p} a_i (x-1)^i\\ &= (x-1)^2 y_1^2 - (x-1)^2 \sum_{i=0}^{2p-2} a_{i+2}(x-1)^i - a_0 - a_1(x-1)\\ &= (x-1)^2 \left[y_1^2 - \sum_{i=0}^{2p-2} a_{i+2}(x-1)^i \right] - p(1-c^2)(x-1)\\ &= (x-1)^2 \left[y_1^2 - \sum_{i=0}^{2p-2} a_{i+2}(x-1)^i - p_1(1-c^2) \right].\end{aligned}$$

Ainsi donc, dans la A*-algèbre* A_{x-1}, $y^2 - P(x) = 0$ *équivaut à* $y_1^2 - \sum_{i=0}^{2p-2} a_{i+2}(x-1)^i - p_1(1-c^2) = 0$. *D'où, d'après le Lemme 3.1.1.1(4),* A_1 *est la sous-*A*-algèbre de* A_{x-1} *donnée par*

$$A_1 = \frac{\mathbb{Z}[X,Y]}{(Y^2 - f(X)}[y_1, p_1] = \mathbb{Z}[x,y][y_1,p_1] = \mathbb{Z}[x, y_1, p_1]$$

avec $p = p_1(x-1)$ *et* $y_1^2 = \sum_{i=0}^{2p-2} a_{i+2}(x-1)^i + p_1(1-c^2)$. *Ce qui termine le calcul de la première carte affine.*

De même, on calcule la deuxième carte affine, notée $\mathrm{Spec}(A_2)$. *On pose* $x_2 := \frac{x-1}{y}$ *et* $p_2 := \frac{x-1}{p}$. *Le calcul donne*

$$\begin{aligned}y^2 - f(x) &= y^2 - \sum_{i=0}^{2p} a_i y^i x_2^i\\ &= y^2 - y^2 \sum_{i=0}^{2p-2} a_{i+2} y^i x_2^{i+2} - a_0 - a_1 y x_2\\ &= y^2 \left[1 - \sum_{i=0}^{2p-2} a_{i+2} y^i x_2^{i+2} \right] - p(1-c^2) y x_2\\ &= y^2 \left[1 - \sum_{i=0}^{2p-2} a_{i+2} y^i x_2^{i+2} - (1-c^2) p_2 x_2 \right].\end{aligned}$$

Par un raisonnement similaire que pour la première carte, on trouve que A_2 est la sous-A-algèbre de A_y donnée par $\mathbb{Z}[y, x_2, p_2]$ avec $p = p_2 y$ et $1 = \sum_{i=0}^{2p-2} a_{i+2} y^i x_2^{i+2} + (1-c^2)p_2 x_2$.

Enfin, si l'on note $\mathrm{Spec}(A_3)$ la troisième carte affine, et si l'on pose $x_3 := \frac{x-1}{p}$ et $y_3 := \frac{y}{p}$, le calcul donne

$$\begin{aligned} y^2 - f(x) &= p^2 y_3^2 - \sum_{i=0}^{2p} a_i p^i x_3^i \\ &= p^2 \left[y_3^2 - \sum_{i=0}^{2p-2} a_{i+2} p^i x_3^{i+2} \right] - a_1 p x_3 \\ &= p^2 \left[y_3^2 - \sum_{i=0}^{2p-2} a_{i+2} p^i x_3^{i+2} - (1-c^2) x_3 \right]. \end{aligned}$$

A_3 est donc la sous-A-algèbre de A_p donnée par $\mathbb{Z}[x_3, y_3]$, avec $y_3^2 = \sum_{i=0}^{2p-2} a_{i+2} p^i x_3^{i+2} + (1-c^2)x_3$.

3.1.2 Cas général.

Définition 3.1.2.1. *Soit X un schéma. Une $\mathcal{O}_X$-algèbre graduée $\mathcal{B}$ est un faisceau quasi-cohérent de $\mathcal{O}_X$-algèbres, doté d'une graduation $\mathcal{B} = \oplus_{x \geq 0} \mathcal{B}_n$, où les $\mathcal{B}_n$ sont des sous-$\mathcal{O}_X$-modules quasi-cohérents. On dira que $\mathcal{B}$ est homogène si, de plus, $\mathcal{B}_1$ est finiment engendré et si $(\mathcal{B}_1)^n = \mathcal{B}_n$ pour tout $n \geq 1$.*

Exemple 3.1.2.1. *Soit X un schéma. Soit $\mathcal{I}$ un faisceau quasi-cohérent d'idéaux et finiment engendré sur X. Alors $\mathcal{B} := \oplus_{n \geq 0} \mathcal{I}^n$ est une $\mathcal{O}_X$-algèbre homogène.*

Etant fixée une $\mathcal{O}_X$-algèbre graduée $\mathcal{B}$, supposons pour commencer que X est affine : $\mathcal{B}(X)$ est alors une $\mathcal{O}_X(X)$-algèbre homogène. On pose

$$\mathrm{Proj}(\mathcal{B}) := \mathrm{Proj}(\mathcal{B}(X)).$$

Pour chaque ouvert affine V de X, on a

$$\begin{aligned} \mathrm{Proj}(\mathcal{B}(V)) &= \mathrm{Proj}(\mathcal{B}(X) \otimes_{\mathcal{O}_X(X)} \mathcal{O}_X(V)) \\ &\simeq (\mathrm{Proj}(\mathcal{B}(X)) \times_X V. \end{aligned}$$

Plus généralement, si X est muni d'un recouvrement affine $(X_i)_i$, on pose

$$\mathrm{Proj}(\mathcal{B}_{|X_i}) := \mathrm{Proj}(\mathcal{B}(X_i)).$$

De plus, étant donné l'existence et l'unicité des $\mathrm{Proj}(\mathcal{B}_{|X_i \cap X_j})$, on peut recoller les $\mathrm{Proj}(\mathcal{B}_{|X_i})$ pour constituer le schéma $\mathrm{Proj}(\mathcal{B})$.

Lemme 3.1.2.1. *[24, §8.1.1 ; Lemme 1.8] Soit X un schéma et $\mathcal{B}$ une $\mathcal{O}_X$-algèbre graduée. Il existe une unique structure de X-schéma $f : \mathrm{Proj}(\mathcal{B}) \to X$, telle que pour chaque ouvert affine U de X, on a un isomorphisme de U-schémas $\mathrm{Proj}(\mathcal{B}) \simeq f^{-1}(U)$, compatible avec la restriction à tout ouvert affine $V \subset U$.*

Proposition 3.1.2.1. *[24, §5.1.3 ; Proposition 1.15] Soit X un schéma et soit Z un sous-schéma fermé de X. Soit $i : Z \to X$ l'immersion fermée correspondante. Si $i^\sharp$ est le morphisme $\mathcal{O}_X \to i_*\mathcal{O}_Z$, alors $\mathrm{Ker}(i^\sharp)$ est un faisceau quasi-cohérent d'idéaux sur X. La correspondance $Z \mapsto \mathrm{Ker}(i^\sharp)$ établit une bijection entre les sous-schémas fermés de X et les faisceaux d'idéaux quasi-cohérents de X.*

Remarque 3.1.2.1. *Si X est un schéma, pour tout faisceau d'idéaux quasi-cohérent $\mathcal{J}$, on désignera par $V(\mathcal{J})$ le sous-schéma fermé de X qui correspond à $\mathcal{J}$ (cf. proposition précédente). En particulier, dans le cas affine, i.e. si $X = \mathrm{Spec}(A)$, son sous-schéma fermé $\mathrm{Spec}(A/I)$ correspond par la bijection évoquée dans la proposition précédente à l'idéal I (autrement dit, au faisceau d'idéaux associé à l'idéal I). Or, $\mathrm{Spec}(A/I) = V(I)$, ce qui justifie la notation $V(\mathcal{J})$ dans le cas général.*

Définition 3.1.2.2. *Soit $\mathcal{I}$ un faisceau d'idéaux cohérent sur un schéma X localement noethérien. Le X-schéma $\mathrm{Proj}(\oplus_{n\geq 0}\mathcal{I}^n) \to X$ est l'éclatement de X de centre $V(\mathcal{I})$. Si X est affine, d'après la Remarque 3.1.2.1, cette définition coïncide avec la Définition 3.1.1.1.*

Soit $\pi : Y \to X$ un morphisme de schémas et soit $\mathcal{I}$ un faisceau d'idéaux quasi-cohérent de X. On a un morphisme canonique $\pi^*\mathcal{I} \to \pi^*\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_Y$. L'image de $\pi^*\mathcal{I}$ dans $\mathcal{O}_Y$ est un faisceau d'idéaux quasi-cohérent sur Y. On le note $(\pi^{-1}\mathcal{I}\mathcal{O}_Y)$ ou, plus simplement, $\mathcal{I}\mathcal{O}_Y$.

Proposition 3.1.2.2. *[24, §8.1.1 ; Proposition 1.12] Soit X un schéma localement noethérien et $\mathcal{I}$ un faisceau d'idéaux quasi-cohérent sur X. Soit $\pi : \tilde{X} \to X$ l'éclatement de X de centre $V(\mathcal{I})$. Les propriétés suivantes sont vraies :*

1. *Si $\mathcal{I}$ est un faisceau inversible sur X, alors π est un isomorphisme.*
2. *Le morphisme π est propre.*
3. *Soit $Z \to X$ un morphisme plat avec Z localement noethérien. Soit $\tilde{Z} \to Z$ l'éclatement de Z de centre $\mathcal{I}\mathcal{O}_Z$; alors $\tilde{Z} = \tilde{X} \times_X Z$.*
4. *Le morphisme π induit un isomorphisme $\pi^{-1}(X\backslash V(\mathcal{I})) \to X\backslash V(\mathcal{I})$. Si X est intègre, et si $\mathcal{I} \neq 0$, alors $\tilde{X}$ est intègre et π est un morphisme birationnel.*

Démonstration. 1. $\mathcal{I}$ étant un faisceau inversible sur X, pour chaque $x \in X$, il existe un ouvert U_x de X contenant x et tel que $\mathcal{I}_{|U_x} \simeq \mathcal{O}_{X|U_x}$. Pour chaque $x \in X$, on éclate U_x le long de $\mathcal{I}\mathcal{O}_{U_x} = \mathcal{I}_{|U_x}$. D'après le Lemme 3.1.1.1(1), comme $\mathcal{I}_{|U_x}$ est principal, on a un isomorphisme $\tilde{U_x} \to U_x$. De plus, $U_x \to X$ étant une immersion ouverte, c'est un morphisme plat. On en déduit en utilisant le point (3) de ce présent lemme (ce point est

indépendant des autres points) que $\tilde{U_x} \simeq \pi^{-1}(U_x)$. On a alors :

$$\begin{aligned}\tilde{X} &= \pi^{-1}(X)\\ &= \cup_{x\in X}\pi^{-1}(U_x)\\ &\simeq \cup_{x\in X}\tilde{U_x}\\ &\simeq \cup_{x\in X}U_x\\ &= X.\end{aligned}$$

2. π étant projectif par construction, il est alors propre.
3. Résulte directement du Lemme 3.1.1.1.(3).
4. Soit $U = X\backslash V(\mathcal{I})$. Alors $\mathcal{I}_{|U} = \mathcal{O}_U$. Ainsi, comme $\mathcal{I}_{|U}$ est un faisceau inversible, il vient des points (1) et (3) appliqués au morphisme plat $U \to X$ que le morphisme $\pi^{-1}(U) = \tilde{U} \to U$ est un isomorphisme.

□

3.2 Normalisation des courbes par éclatements de points.

Définition 3.2.0.1. *Soit X un schéma intègre. Un morphisme $\pi : X' \to X$ est dit* ***morphisme de normalisation*** *si X' est normal, et que tout morphisme dominant $f : Y \to X$, avec Y normal, se factorise par π*

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r] \arrow[dr, "f"'] & X' \arrow[d, "\pi"] \\ & X \end{tikzcd}$$

On appelle Y le normalisé de X.

Exemple 3.2.0.1. *Soit A un anneau intègre et soit A' sa clôture intégrale dans* $\mathrm{Frac}(A)$. *Alors le morphisme* $\mathrm{Spec}(A') \to \mathrm{Spec}(A)$ *induit par l'injection canonique $A \to A'$ est un morphisme de normalisation. En effet, soit $Y \to$* $\mathrm{Spec}(A)$ *un morphisme dominant avec Y normal. Alors $A \to \mathcal{O}_Y(Y)$ est injectif. De plus, comme $\mathcal{O}_Y(Y)$ est normal, le morphisme $A \to \mathcal{O}_Y(Y)$ se factorise par le morphisme $A' \to \mathcal{O}_Y(Y)$ par définition de A'. Enfin, il est clair que le morphisme $A \to A'$ ainsi obtenu n'est autre que l'injection. Par conséquent, $Y \to$* $\mathrm{Spec}(A)$ *est la composition de* $\mathrm{Spec}(A') \to \mathrm{Spec}(A)$ *et* $Y \to \mathrm{Spec}(A')$.

Proposition 3.2.0.1. *Soit X un schéma intègre. Il existe un morphisme de normalisation $\pi : X' \to X$, unique à isomorphisme près (de X-schémas).*

Démonstration. L'unicité est immédiate par la propriété universelle. Pour montrer son existence, on se donne $(X_i)_i$ un recouvrement de X par des ouverts affines. En utilisant l'Exemple 3.2.0.1, on construit pour chaque i la normalisation $\pi_i : X'_i \to X_i$. Par l'unicité de la normalisation des $X_i \cap X_j$, on peut recoller les X'_i et ainsi obtenir une normalisation pour X. □

Définition 3.2.0.2. *Soit X un schéma localement noethérien. On note l'ensemble des points réguliers de X par* $\mathrm{Reg}(X)$ *(le lieu régulier de X) et l'ensemble des points singuliers de X par* $\mathrm{Sing}(X)$ *(le lieu singulier de X). Si X est une variété algébrique sur un corps, alors* $\mathrm{Reg}(X)$ *est un ouvert ([24, §4.2.2 ; Remarque 2.25]).*

Comme application des éclatements, nous montrons qu'on peut calculer la normalisée d'une courbe intègre projective X sur un corps k par un calcul explicite (la normalisée d'une courbe -ou d'une variété algébrique de manière plus générale- est une variété algébrique, cf. [24, §4.1.2 ; Proposition 1.27]). D'abord, remarquons que dans ce cas, les notions de normalité et régularité coïncident. Supposons que X est singulière et soit $X_1 \to X_0 := X$ l'éclatement de X le long de $\mathrm{Sing}(X)$ [2] (muni de la structure de schéma réduit). Si X_1 est encore singulier, on procède à l'éclatement $X_2 \to X_1$ de la même manière, ainsi de suite.

Proposition 3.2.0.2. *[24, §8.1.4 ; Proposition 1.26] Avec la notation ci-dessus, la suite*

$$... \to X_n \to X_{n-1} \to ... \to X_0 := X$$

est finie. Autrement dit, on désingularise X avec un nombre fini d'éclatements consécutifs.

3.3 Surfaces fibrées.

Définition 3.3.0.1. *On appelle un S-schéma intègre projectif et plat $\mathcal{X} \to S$, de dimension 2, une surface fibrée sur S. Nous dirons que $\mathcal{X}$ est une surface fibrée normale (resp. régulière) si $\mathcal{X}$ est un schéma normal (resp. régulier).*

On distingue deux types de surfaces fibrées. Si $\dim S = 0$, alors X est une surface algébrique intègre et projective sur un corps ; on dira que c'est une *surface absolue*. Si $\dim S = 1$, on dira que c'est une *courbe relative*, c'est à dire que ses fibres sont des courbes absolues (cf. le Lemme 3.3.0.1 ci-dessous).

Exemple 3.3.0.1. *Soit m un entier non nul. On considère la surface suivante*

$$f : \mathcal{X} = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[x,y]/(xy^2 - m)) \to \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}).$$

$\mathcal{X}$ est intègre car $xy^2 - m$ est irréductible dans $\mathbb{Z}[x,y]$ qui est factoriel. En fait, c'est une surface fibrée.
La fibre générique de $\mathcal{X}$ est

$$X = \mathrm{Spec}(\mathbb{Q}[x,y]/(xy^2 - m)) = \mathrm{Spec}(\mathbb{Q}[x, 1/x]) = \mathbb{G}_{m,\mathbb{Q}}$$

et est donc intègre et lisse.
Pour chaque $p \in \mathbb{Z}$, on note X_p la fibre de $\mathcal{X}$ en $p\mathbb{Z} \in \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$. On a

$$\mathcal{X}_p = \mathbb{F}_p[x,y]/(xy^2 - m).$$

2. Si X est une variété algébrique sur un corps k, $\mathrm{Reg}(X)$ est ouvert et donc $\mathrm{Sing}(X)$ est fermé ([24, §4 ; Proposition 2.24 et Remarque 2.25]).

Cette fibre est isomorphe à $\mathbb{F}_p[x, 1/x] = \mathbb{G}_{m,\mathbb{F}_p}$ si p ne divise pas m et est donc lisse dans ce cas. Si p divise m, alors $X_p = \mathbb{F}_p[x, y]/(xy^2)$ a deux composantes irréductibles ($y^2 = 0$ et $x = 0$) et n'est pas réduite.

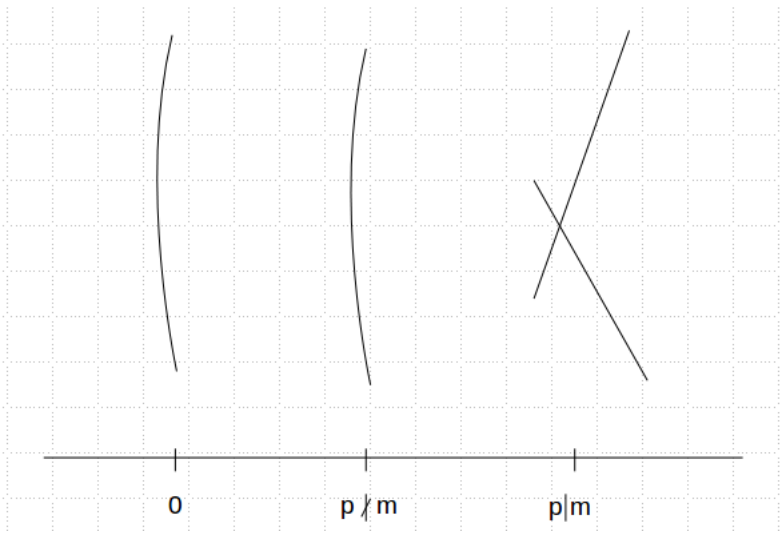

FIGURE 1 – Les fibres de $\mathcal{X}$ sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$.

Remarquons que dans cet exemple, les fibres de $\mathcal{X}$ sont des courbes. On a en fait la propriété suivante :

Lemme 3.3.0.1. *[24, §8.3.1 ; Lemme 3.3]. Supposons que S est de dimension 1. Soit $\mathcal{X} \to S$ une surface fibrée. Alors sa fibre générique X est une courbe intègre sur $K(S)$ et pour chaque $s \in S$, $\mathcal{X}_{k(s)} := \mathcal{X} \times_S \mathrm{Spec}(k(s))$ est une courbe sur $k(s)$.*

3.4 Désingularisation.

Définition 3.4.0.1. *Soit X un schéma réduit et localement noethérien. Un morphisme propre et birationnel $\pi : Z \to X$, avec Z régulier, est appelé* ***désingularisation*** *de X (ou résolution de singularités). Si π est un isomorphisme au-dessus de chaque point régulier de X, on dira que c'est une* ***désingularisation au sens fort****.*

Exemple 3.4.0.1. *Soit X une courbe réduite sur un corps k. La normalisation $X' \to X$ est une désingularisation. Cela vient du fait qu'en dimension 1 sur un corps, un schéma normal est régulier. Plus généralement, si X est un schéma excellent, réduit et noethérien de dimension 1, alors une normalisation est une désingularisation ([24, §8.2.3 ; Théorème 2.39(d)]). Ainsi, le problème de l'existence d'une désingularisation commence en dimension 2.*

Soit X un schéma excellent, réduit et noethérien de dimension 2. Considérons la suite suivante de morphismes birationnels

$$.. \to X_{n+1} \to X_n \to ... \to X_1 \to X \tag{7}$$

où $X_1 \to X$ est la normalisation de X, et pour chaque $i \geq 1$, $X_{i+1} \to X_i$ est la composition de l'éclatement $X_i' \to X_i$ le long de $\mathrm{Sing}(X_i)$ [3] qu'on munit de la structure de schéma réduit, et de la normalisation $X_{i+1} \to X_i'$. La suite s'arrête dès lors que X_n est régulier.

Théorème 3.4.0.1 (Lipman)**.** *Soit X un schéma excellent, réduit et noethérien de dimension 2. Alors la suite précédente est finie. En particulier, X admet une désingularisation au sens fort.*

Corollaire 3.4.0.1. *[24, §8.3.4 ; Corollaire 3.45] Supposons que S est excellent et soit $\mathcal{X} \to S$ une surface fibrée. Alors $\mathcal{X}$ admet une désingularisation au sens fort.*

On souhaite généraliser ce résultat dans le cas où S n'est pas nécessairement excellent. Commençons par le cas local. Soit R un anneau de valuation discrète, K son corps de fractions, $\hat{R}$ sa complétion et t une uniformisante de R.

Lemme 3.4.0.1. *[24, §8.3.4 ; Lemme 3.49] Soit $\mathcal{X} \to \mathrm{Spec}(R)$ une surface fibrée de fibre générique X. Soit $\hat{K} = \mathrm{Frac}(\hat{R})$. Les propriétés suivantes sont vraies :*

1. *Supposons que X est régulier et que $\mathcal{X}$ admet une désingularisation. Alors $X_{\hat{K}} := X \times_{\mathrm{Spec}(K)} \mathrm{Spec}(\hat{K})$ est régulier.*
2. *Supposons $X_{\hat{K}}$ régulier. Alors $\mathcal{X}$ admet une désingularisation au sens fort. Plus précisément, la suite (7) est définie (i.e. les morphismes de normalisation sont finis et les lieux singuliers sont fermés) et est finie.*

Remarquons que si K est un corps parfait, le premier point est vrai sans l'hypothèse de désingularisation de $\mathcal{X}$. En effet, dans ce cas, la régularité de X équivaut à sa lissité, et la lissité étant une notion relative, cela entraîne sans hypothèse supplémentaire que $X_{\hat{K}}$ est régulier.

Théorème 3.4.0.2. *[24, §8.3.4 ; Théorème 3.50] Supposons que S est de dimension 1, et soit $\pi : \mathcal{X} \to S$ une surface fibrée avec une fibre générique X régulière. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *Le schéma $\mathcal{X}$ admet une désingularisation.*
2. *L'ensemble $\mathrm{Reg}(\mathcal{X})$ est ouvert et la courbe $\mathcal{X} \times_S \mathrm{Spec}(\mathrm{Frac}(\hat{O}_{S,s}))$ est régulière pour tout point fermé $s \in S$.*
3. *L'ensemble $\mathrm{Sing}(\mathcal{X})$ est contenu dans une union finie de fibres fermées $\mathcal{X}_{s_1}, ..., \mathcal{X}_{s_r}$, et la courbe $\mathcal{X} \times_S \mathrm{Spec}(\mathrm{Frac}(\hat{\mathcal{O}}_{S,s_i}))$ est régulière pour tout $i \in \{1, ..., r\}$.*

3. X étant excellent, $\mathrm{Reg}(X)$ est un ouvert par définition.

4. *$\mathcal{X}$ admet une désingularisation au sens fort. Plus précisément, la suite (7) dans ce cas est définie et finie.*

Démonstration. (1) $\implies$ (2) Soit $\mathcal{Z} \to \mathcal{X}$ une désingularisation. Comme c'est un morphisme birationnel, $\mathcal{X}$ contient un ouvert dense régulier. Donc $\mathrm{Sing}(\mathcal{X})$ est contenu dans un nombre fini de fibres fermées, notons les $\mathcal{X}_{s_1}, ..., \mathcal{X}_{s_n}$. Pour chaque $1 \leq i \leq n$, on considère la surface fibrée $\mathcal{X} \times \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{S,s_i}) \to \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{S,s_i})$. Pour chaque $1 \leq i \leq n$, d'après [24, §8.2.3 ; Corollaire 2.38], $\mathrm{Reg}(\mathcal{X} \times \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{S,s_i})$ est ouvert et donc $\mathrm{Reg}(\mathcal{X}_{s_i})$ est ouvert. On en déduit que $\mathrm{Reg}(\mathcal{X})$ est ouvert. D'autre part, $\mathcal{X} \times_S \mathrm{Spec}(\mathrm{Frac}(\mathcal{O}_{S,s}))$ est régulier par hypothèse. Comme de plus $\mathcal{X}$ se désingularise (en particulier au-dessus de s), il vient du Lemme 3.4.0.1(1) que $\mathcal{X} \times_S \mathrm{Spec}(\mathrm{Frac}(\hat{\mathcal{O}}_{S,s_i}))$ est régulier.

(3) $\implies$ (2) Par le même raisonnement que précédemment, on montre que $\mathrm{Reg}(\mathcal{X})$ est ouvert. Pour chaque $s \in S$ tel que $\mathcal{X}_s \subset \mathrm{Reg}(\mathcal{X})$, $\mathcal{X} \times_S \mathrm{Spec}(\mathrm{Frac}(\mathcal{O}_{S,s}))$ est régulier et $\mathcal{X}$ se désingularise au-dessus de s puisque les points de $\mathcal{X}_s$ sont réguliers. On peut alors de nouveau conclure en utilisant le Lemme 3.4.0.1(1).

(2) $\implies$ (3) Évident.

(2) $\implies$ (4) Soit $f : \mathcal{X}_1 \to \mathcal{X}$ le morphisme de normalisation. Pour chaque $s \in S$, le changement de base $\mathcal{X}_1 \times_S \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{S,s}) \to \mathcal{X} \times_S \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{S,s})$ est une normalisation (la normalisation commute avec le changement de base $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{S,s}) \to S$). Comme $\mathcal{X} \times_S \mathrm{Spec}(\mathrm{Frac}(\hat{\mathcal{O}}_{S,s}))$ est régulier par hypothèse, le dernier morphisme de normalisation est fini par le Lemme 3.4.0.1(2). Donc f est un morphisme fini. Comme $\mathcal{X}_1 \to \mathcal{X}$ est birationnel, par le même raisonnement qu'aux points précédents, on déduit que $\mathrm{Sing}(\mathcal{X}_1)$ est contenu dans un nombre fini de fibres fermées. On peut alors conclure comme précédemment que $\mathrm{Reg}(\mathcal{X}_1)$ est ouvert. Donc $\mathrm{Sing}(\mathcal{X}_1)$ est fermé et fini (il ne contient aucun point de codimension 1). Par conséquent, la suite (7) est bien définie. De plus, cette suite est finie en appliquant le Lemme 3.4.0.1(2) au nombre fini de fibres contenant $\mathrm{Sing}(\mathcal{X})$. Remarquons que l'éclatement commute avec le changement de base $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{S,s}) \to S$.

(4) $\implies$ (1) Évident.

□

Corollaire 3.4.0.2. *[24, §8.3.4 Corollaire 3.51] Supposons que S est de dimension 1 et soit $\mathcal{X} \to S$ une surface fibrée de fibre générique lisse X. Alors $\mathcal{X}$ admet une désingularisation au sens fort.*

Démonstration. Par [24, §8.3.1 ; Proposition 3.11], $\mathcal{X} \to S$ est lisse au-dessus d'un ouvert non vide V de S et $\mathcal{X}_{k(s)}$ est lisse au-dessus de $k(s)$ sauf pour un nombre fini de fibres fermées de $\mathcal{X}$. Donc $\mathcal{X}_V := \mathcal{X} \times_S V$ est régulier et $\mathrm{Sing}(\mathcal{X})$ est contenu dans un nombre fini de fibres fermées. De plus, X étant lisse, le produit fibré $\mathcal{X} \times_S \mathrm{Spec}(\mathrm{Frac}(\hat{\mathcal{O}}_{S,s})) = X \times_{\mathrm{Spec}(K)} \mathrm{Spec}(\mathrm{Frac}(\hat{\mathcal{O}}_{S,s}))$ est

régulier. Ainsi, le point (3) du Théorème 3.4.0.2 est vérifié et on peut tirer la conclusion. □

Exemple 3.4.0.2. *[24, §8.3.4 ; Exemple 3.53] Soit R un anneau de valuation discrète avec une uniformisante notée t, un corps résiduel noté k et un corps de fractions noté K. Soit $a \in R$ un élément non-nul. Considérons*

$$\mathcal{X} = \mathrm{Spec}(R[x,y]/(xy-a)).$$

Le but de cet exemple est d'illustrer la désingularisation de X en utilisant la suite (7).
Le morphisme $\mathcal{X} \to \mathrm{Spec}(R)$ est lisse si et seulement si $\mathcal{X}_{\overline{k}} := \mathcal{X} \times_{\mathrm{Spec}(R)} \mathrm{Spec}(\overline{k})$ est régulier ([24, §4.2.2 ; Corollaire 2.17]). Le critère jacobien montre que si a est inversible, $\mathcal{X}_{\overline{k}}$ n'a pas de points singuliers. En revanche, si a n'est pas inversible, $\mathcal{X}$ est régulier, sauf peut-être au point $(0,0)$ de la fibre spéciale.

Si val_t est la valuation dans l'anneau de valuation discrète R, et si $val_t(a) = 1$, alors dans ce cas $\mathcal{X}$ est régulier. En effet, le seul point potentiellement singulier est le point $(\overline{x}_0 = 0, \overline{y}_0 = 0)$ de la fibre spéciale, et comme $x_0y_0 = ut^2$ et $a = u't$ avec $u, u' \in R^*$, ce point ne vérifie pas l'équation $xy = a$ et n'est donc pas un point de la surface considérée.

Si $val_t(a) \geq 2$, on écrit $a = u''t^e$ avec $u'' \in R^*$ et $e \geq 2$. Dans ce cas, $\mathcal{X}$ est normal car X est normal (car régulier) et $\mathcal{X}_k$ est réduite (car intègre) [24, §4.1.1 ; Lemme 1.18]. On note $\mathcal{M} = (x,y,t)$ l'idéal maximal correspondant au point $(0,0)$ de la fibre spéciale. Soit $\mathcal{X}_1 \to \mathcal{X}$ l'éclatement de X le long de $V(\mathcal{M})$. Par le Lemme 3.1.1.1(4), $\mathcal{X}_1$ est recouvert par trois cartes affines notées $\mathrm{Spec}(A_i)$, $i \in \{1,2,3\}$:

- *En posant $x_1 = \frac{x}{t}$ et $y_1 = \frac{y}{t}$, on a $A_1 = R[x,y,x_1,y_1] = R[x_1,y_1]$ avec $x_1y_1 = t^{e-2}u''$.*

- *En posant $x_2 = x$, $y_2 = \frac{y}{x}$ et $t_2 = \frac{t}{x}$, $A_2 = R[x_2,y_2,t_2]$, avec $y_2 = x_2^{e-2}t_2^e u''$.*

- *Et enfin, en posant $x_3 = \frac{x}{y}$, $y_3 = y$ et $t_3 = \frac{t}{y}$, on a $A_3 = R[x_3,y_3,t_3]$, avec $x_3 = y_3^{e-2}t_3^e u''$.*

Le seul point potentiellement singulier appartenant à la fibre spéciale se trouve sur la première carte et est le point $(\overline{x_1} = 0, \overline{y_1} = 0)$. On peut alors écrire $x_1y_1 = vt^2$, avec $v \in R^*$. Ainsi, si $e = 2$ ou $e = 3$, ce point n'est pas sur la surface considérée et cette dernière est donc sans points singuliers, donc régulière. Si $e \geq 4$, l'idéal maximal $\mathcal{M}' = (x_1,y_1,t)$ est un point singulier sur la première carte car $\dim_k \mathcal{M}'/\mathcal{M}'^2 = 3$ et la dimension de l'anneau local $(R[x_1,y_1]/(x_1y_1 - t^{e-2}u))_{\mathcal{M}'}$ est au plus 2.

Remarquons au passage que $\mathrm{Spec}(A_1)$ *a une écriture similaire à* $\mathcal{X}$*, avec* e *remplacé par* $e-2$*. Son éclatement le long de l'idéal* $\mathcal{M}'$ *est fait de la même manière que l'éclatement* $\mathcal{X}_1 \to \mathcal{X}$*. On voit alors qu'après* $[e/2]$ *éclatements successifs des points singuliers, on finit par obtenir une désingularisation* $\mathcal{Z} \to \mathcal{X}$ *de* $\mathcal{X}$*.*

3.5 Existence d'un modèle régulier pour une courbe lisse.

Pour cette partie, on supposera S affine $S := \mathrm{Spec}(A)$, avec $K = \mathrm{Frac}(A)$.

Définition 3.5.0.1. *Soit* C *une courbe lisse, projective et géométriquement connexe sur* K*. On appelle modèle de* C *sur* S *une surface fibrée normale* $\mathcal{C}$*, de fibre générique* C*. On dira que c'est un modèle régulier si la surface fibrée en question est un schéma régulier.*

Exemple 3.5.0.1. *Soit* E *une courbe elliptique sur* K*. Elle admet une équation homogène du type*

$$v^2z + (a_1u + a_3z)vz = u^3 + a_2u^2z + a_4uz^2 + a_6z^3. \tag{8}$$

Si les $a_i \in A$*, on associe alors à* E *le* S*-schéma*

$$\mathcal{W} := \mathrm{Proj}(A[u,v,z]/(v^2z + (a_1u + a_3z)vz - (u^3 + a_2u^2z + a_4uz^2 + a_6z^3)))$$

que l'on appelle le modèle de Weierstrass de E *sur* S*, associé à l'équation (8).* $\mathcal{W}$ *est un modèle de* E*.*

Exemple 3.5.0.2. *Soit* C *une courbe normale et projective sur* K*, définie par des polynômes homogènes* $F_1, ..., F_m \in K[T_0, ..., T_n]$*. Supposons que* $S = \mathrm{Spec}(A)$*. En multipliant les polynômes* F_i *par des éléments de* $A\backslash\{0\}$ *si nécessaire, on peut supposer que les* F_i *sont à coefficients dans* A*. Si, par chance, le schéma* $\mathcal{C}_0 := \mathrm{Proj}\, A[T_0, ..., T_n]/(F_1, ..., F_m)$ *est normal, c'est alors un modèle de* C *sur* S *car sa fibre générique est isomorphe à* C *([24, §3.1.2 ; Proposition 1.9]).*

Proposition 3.5.0.1. *Soit* C *une courbe lisse et projective sur* K*. Alors* C *admet un modèle régulier sur* S*.*

Démonstration. Soit $\mathcal{C}_0$ comme dans l'Exemple 3.5.0.2 et soit $\mathcal{C}$ la normalisée de $\mathcal{C}_0$. Alors $\mathcal{C} \to S$ est une surface fibrée de fibre générique isomorphe à C. C étant lisse, on sait d'après le Corollaire 3.4.0.2 que $\mathcal{C}$ admet une désingularisation ; on obtient ainsi un modèle régulier de C sur S. □

3.6 Modèle minimal.

Supposons que S est de dimension 1 et soit $\mathcal{X} \to S$ une surface fibrée normale. Si $\mathcal{X}$ est munie d'un morphisme birationnel $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ et si E est une courbe verticale sur $\mathcal{X}$ telles que l'ensemble $f(E)$ est réduit à un point, on appelle f une **contraction** de E. Si cette dernière existe, alors elle est unique ([24, §8.3.3 ; Proposition 3.28]).

Définition 3.6.0.1. *Soit $\mathcal{X}$ une S-surface fibrée. Un diviseur premier E sur $\mathcal{X}$ est dit* ***diviseur exceptionnel****, s'il existe une surface régulière $\mathcal{Y} \to S$ et un morphisme $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ de S-schémas, tels que $f(E)$ est réduit à un point, et que $f : \mathcal{X} \backslash E \to \mathcal{Y} \backslash f(E)$ est un isomorphisme. En d'autres termes, un diviseur exceptionnel est une courbe intègre verticale pouvant être contractée en un point régulier.*

Exemple 3.6.0.1. *L'éclatement $\tilde{\mathcal{X}} \to \mathcal{X} := \mathrm{Spec}(A)$ de la surface $\mathcal{X}$ de centre $V(J) = J$, avec J un idéal maximal de A, donne lieu au diviseur exceptionnel $f^{-1}(J)$. Réciproquement, la contraction $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ de E est l'éclatement de $\mathcal{Y}$ le long du point $f(E)$. En effet, d'après [24, §9.2.1 ; Théorème 2.2], tout morphisme birationnel entre deux surfaces fibrées régulières est une succession d'un nombre fini d'éclatements, et comme E est irréductible par définition, alors il provient de l'éclatement d'un point fermé ([24, §9.2.1 ; Corollaire 2.3]).*

Une surface fibrée régulière $\mathcal{X} \to S$ a une infinité de surfaces fibrées régulières auxquelles elle est birationnellement équivalente sans leur être isomorphe. On voudrait déterminer un élément canonique dans une telle classe de morphismes birationnels.

Définition 3.6.0.2. *On dira qu'une surface fibrée $\mathcal{X} \to S$ est relativement minimale (ou plus simplement,* ***minimale****), si elle ne contient pas de diviseur exceptionnel. D'après [24, §9.2.1 ; Théorème 2.2] rappelé précédemment, cela correspond à ce que tout morphisme birationnel de surfaces fibrées $\mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ soit un isomorphisme.*

Théorème 3.6.0.1. *[24, §9.3.3 ; Théorème 3.21] Supposons que S est de dimension 1 et soit $\mathcal{X} \to S$ une surface fibrée. Supposons que le genre arithmétique de sa fibre générique X est supérieur ou égal à 1. Alors X admet un unique modèle minimal au-dessus de S, à isomorphisme près.*

Conclusion. Ainsi donc, si S est un anneau de Dédekind de dimension 1 et K son corps de fonctions, si l'on veut construire le S-modèle régulier minimal d'une K-courbe projective et lisse X de genre ≥ 1, on commence d'abord par en construire un S-modèle régulier à partir d'un S-modèle de X en le désingularisant par des éclatements. Ensuite, on procède à la contraction des diviseurs exceptionnels produits par les éclatements pour obtenir une surface minimale.

4 Foncteur de Picard et modèles de Néron.

On fixe un schéma S.

Ce chapitre contient deux parties essentielles. La première sera consacrée à l'étude du foncteur de Picard relatif d'un S-schéma X, construit en faisceautisant, par rapport à la topologie fppf, le foncteur

$$\begin{aligned} P_{X/S} : (Sch/S) &\to (Ens) \\ T &\mapsto \mathrm{Pic}(X \times_S T) \end{aligned}$$

Nous verrons ensuite que la rigidification des fibrés en droites fournit un faisceau qui s'identifie au foncteur de Picard relatif, sans faire recours à la faisceautisation.
Dans un second temps, on définira les modèles de Néron sur un schéma de Dédekind et on terminera par la preuve de l'existence de ce dernier pour une variété abélienne (Théorème 4.4.0.1).
Ensuite, on consacrera une partie à l'étude du lien entre le foncteur de Picard relatif d'un modèle régulier d'une courbe et le modèle de Néron de la Jacobienne de la courbe en question. En particulier, le Théorème 4.5.0.2(2) identifie les composantes identités des deux schémas en groupes sus-cités (dans notre contexte spécifique).
Enfin, la fin du chapitre a pour but de permettre le calcul explicite du groupe des composantes de la fibre spéciale du modèle de Néron de la Jacobienne d'une courbe. Comme on le verra un peu plus loin, le Lemme 6.3.2.1 fournit une condition suffisante -portant sur le cardinal de ce groupe des composantes- pour le prolongement des torseurs en torseurs fppf.

Ce chapitre s'inspire essentiellement de [10].

4.1 Construction du foncteur de Picard relatif.

Pour un schéma X, on note $\mathrm{Pic}(X) = H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$ le groupe des classes d'isomorphismes de faisceaux inversibles sur X. On l'appelle *le groupe de Picard absolu*.
Fixons une base S et soit X un S-schéma. On considère le foncteur

$$P_{X/S} : (\mathrm{Sch}/S) \to (\mathrm{Gp}), \qquad T \mapsto \mathrm{Pic}(X \times_S T)$$

de la catégorie (Sh/S) des S-schémas dans la catégorie des groupes commutatifs. On rappelle que si (Sh/S) est muni de la topologie de Zariski, un préfaisceau F de (Sch/S) dans (Gp) est un faisceau pour cette topologie si, pour toute famille couvrante $(T_i \to T)$, le diagramme suivant

$$F(T) \to \prod_i F(T_i) \rightrightarrows \prod_{i,j} F(T_i \cap T_j) \tag{9}$$

est un égaliseur (où la première flèche est induite par les restrictions $\mathrm{res}_{T_i,T}$: $F(T) \to F(T_i)$ et les flèches parallèles sont induites par les flèches $\mathrm{res}_{T_i \cap T_j, T_i}$ et $\mathrm{res}_{T_i \cap T_j, T_j}$).

Si (Sch/S) est muni de la topologie $fppf$ (resp. étale), on demandera de plus à ce que, pour chaque S-morphisme $fppf$ (resp. étale) $T' \to T$, le diagramme suivant

$$F(T) \to F(T') \rightrightarrows F(T' \times_T T')$$

soit un égaliseur (où les flèches parallèles sont induites par les deux projections de $T' \times_T T'$ dans T').

Cela est équivalent à demander à ce que toute famille couvrante de morphismes fppf (resp. étales) $(T_i \to T)$, donne lieu à un égaliseur

$$F(T) \to \prod_i F(T_i) \rightrightarrows \prod_{i,j} F(T_i \times_T T_j).$$

Soit F un foncteur contravariant de (Sch/S) dans (Gp), représentable par un S-schéma X. Alors $F(T) = \mathrm{Hom}_S(T, X)$. Comme les morphismes sur X peuvent être définis localement pour la topologie de Zariski, il vient immédiatement que pour tout recouvrement ouvert $\{T_i\}$ de T, la suite (9) est exacte. F est donc un faisceau pour la topologie de Zariski. Plus généralement, nous avons le résultat :

Proposition 4.1.0.1. *[10, §8.1 Proposition 1] Soit F un foncteur contravariant représentable de* (Sch/S) *dans* (Ens)*. Alors F est un faisceau pour les topologies $fppf$, étale et Zariski.*

Maintenant, il n'est pas difficile de voir que $P_{X/S}$ n'est pas un faisceau, même pas pour la topologie de Zariski. En effet, pour un S-schéma T, soit L un fibré en droites sur T dont le pull-back à X_T n'est pas trivial ; soit $\{T_i\}_i$ un recouvrement par des ouverts de T qui trivialise L. Alors le pull-back de L sur $X_T \times_T T_i$ est trivial pour tout i.
C'est pourquoi nous procédons à la faisceautisation de ce foncteur :

Définition 4.1.0.1. *Le faisceau $fppf$ associé au foncteur*

$$P_{X/S} : (\mathrm{Sch/S}) \to (\mathrm{Ens}), \qquad T \mapsto \mathrm{Pic}(X \times_S T)$$

est appelé ***le foncteur de Picard relatif*** *de X sur S, et est noté* $\mathrm{Pic}_{X/S}$.

Le procédé de faisceautisation est expliqué dans [10, p 201].

Concrètement, si T est un S-schéma, alors on peut décrire un élément ζ de $\mathrm{Pic}_{X/S}(T)$ en donnant un morphisme $fppf$ $T' \to T$ et un fibré en droites L sur $X_T \times_T T'$ tel que les deux pull-backs de L sur $X_T \times_T (T' \times_T T')$ sont isomorphes. Réciproquement, si l'on dispose d'un autre morphisme $fppf$ $U' \to T$ et d'un fibré en droites M sur $X_T \times_T U'$ dont les deux pull-backs à $X_T \times_T (U' \times_T U')$ sont isomorphes, alors $(T' \to T, L)$ et $(U' \to T, M)$ définissent le même élément de $\mathrm{Pic}_{X/S}(T)$, si U' et T' admettent un raffinement commun sur lequel les fibrés

en droites L et M deviennent isomorphes.

D'autre part, si $\zeta \in \mathrm{Pic}_{X/S}(S)$ est induit par le pull-back sur X d'un fibré en droites L sur S, et si l'on se donne un recouvrement $\{S_i\}$ qui trivialise L, alors le pull-back de L sur $X \times_S S_i$ est trivial pour tout i, et comme $\mathrm{Pic}_{X/S}$ est un faisceau, cela implique que ζ est trivial. La réciproque n'est pas toujours vraie, i.e. les éléments triviaux de $\mathrm{Pic}_{X/S}(S)$ ne proviennent pas tous de S.

Proposition 4.1.0.2. *[10, §8.1 ; Proposition 3] Supposons que $f : X \to S$ est propre et de présentation finie. Soit $\zeta \in \mathrm{Pic}_{X/S}(S)$ un élément induit par un fibré en droites L sur X. Alors ζ est trivial si et seulement s'il existe un recouvrement ouvert $\{S_i\}_i$ de S tel que L se trivialise sur $X \times_S S_i$ pour chaque i.*

Supposons que $f : X \to S$ est quasi-compact et quasi-séparé et soit T un S-schéma. Notons $f_T : X_T \to T$. La suite spectrale de Leray, associée à f_T et $\mathbb{G}_{m,T}$, donne lieu à la suite exacte

$$0 \to H^1_{fppf}(T, f_{T,*}(\mathbb{G}_{m,T})) \to H^1_{fppf}(X_T, \mathbb{G}_{m,T}) \to H^0_{fppf}(T, R^1 f_{T,*}(\mathbb{G}_{m,T})) \to \\ H^2_{fppf}(T, f_{T,*}(\mathbb{G}_{m,T})) \to H^2_{fppf}(X_T, \mathbb{G}_{m,T}).$$

Ici, $H^1_{fppf}(X_T, \mathbb{G}_{m,T}) = \mathrm{Pic}(X_T)$ (par [10, p 203]) et $H^0_{fppf}(T, R^1 f_{T,*}(\mathbb{G}_{m,T})) = \mathrm{Pic}_{X/S}(T)$ (par [10, p 202]). Si de plus, $f_*(\mathcal{O}_X) = \mathcal{O}_S$ est vérifié universellement, i.e. pour tout changement de base $S' \to S$, alors $f_{T,*}(\mathcal{O}_{X_T}) = \mathcal{O}_T$, et donc, $H^1_{fppf}(T, f_{T,*}(\mathbb{G}_{m,T})) = \mathrm{Pic}(T)$. La suite exacte précédente devient alors

$$0 \to \mathrm{Pic}(T) \to \mathrm{Pic}(X \times_S T) \to \mathrm{Pic}_{X/S}(T) \to H^2_{fppf}(T, \mathbb{G}_{m,T}) \to H^2_{fppf}(X_T, \mathbb{G}_{m,T}).$$

Si de plus, $f : X \to S$ admet une section, alors la dernière flèche dans la suite exacte précédente est injective. Ainsi, en ce cas, on a une suite exacte

$$0 \to \mathrm{Pic}(T) \to \mathrm{Pic}(X \times_S T) \to \mathrm{Pic}_{X/S}(T) \to 0. \tag{10}$$

En particulier, on peut identifier dans ce cas le foncteur de Picard relatif $\mathrm{Pic}_{X/S}$ au foncteur

$$(\mathrm{Sch/S}) \to (\mathrm{Ens}) \qquad T \mapsto \mathrm{Pic}(X \times_S T)/\,\mathrm{Pic}(T).$$

4.2 Rigidification.

Pour construire le foncteur de Picard relatif $\mathrm{Pic}_{X/S}$, on peut aussi rigidifier les objets que l'on souhaite classifier.

Supposons ici que le morphisme $f : X \to S$ est quasi-compact et quasi-séparé, que $f_*(\mathcal{O}_X) = \mathcal{O}_S$ est verifié universellement et que f admet une section $\epsilon : S \to X$. Soit L un fibré en droites sur X_T pour un S-schéma T. Alors, en notant $\epsilon_T : T \to X_T$ la section induite par ϵ, on entend par **rigidification** de

L le long de ϵ_T, la donnée d'un isomorphisme $\alpha : \mathcal{O}_T \xrightarrow{\simeq} \epsilon_T^* L$.

Soit (L_1, α_1) et (L_2, α_2) deux fibrés en droites sur X_T, munis chacun d'une rigidification le long de ϵ_T. Un morphisme de fibrés en droites (L_1, α_1) et (L_2, α_2) rigidifiés est un morphisme de fibrés en droites $h : L_1 \to L_2$ vérifiant $(\epsilon_T^* h) \circ \alpha_1 = \alpha_2$.

En particulier, les fibrés en droites rigidifiés n'admettent pas d'automorphismes non-triviaux. En effet, un automorphisme de (L, α) est un automorphisme $h : L \xrightarrow{\simeq} L$ tel que

$$(\epsilon_T^* h) \circ \alpha : \mathcal{O}_T \xrightarrow{\simeq} \epsilon_T^* L \xrightarrow{\simeq} \epsilon_T^* L$$

est égal à α. D'où $\epsilon_T^* h = 1$. D'autre part, comme on peut trivialiser L localement, se donner un endomorphisme de L localement revient à se donner un endomorphisme de $\mathcal{O}_{X_T}$ localement. Par conséquent, se donner un endomorphisme de L est équivalent à se donner un endomrphisme de $\mathcal{O}_{X_T}$, et donc, une section globale de $\Gamma(X_T, \mathcal{O}_{X_T}) = \Gamma(T, f_{T,*}(\mathcal{O}_X)) = \Gamma(T, \mathcal{O}_T)$. Par conséquent, $h \in \Gamma(T, \mathcal{O}_T)$ et ainsi $\epsilon_T^* h = h = 1$.

On définit le foncteur $\mathrm{Pic}^{rig}_{X/S} : (\mathrm{Sch}) \to (\mathrm{Ens})$ par

$$\mathrm{Pic}^{rig}_{X/S}(T) = \{\text{classes d'isomorphismes de fibrés en droites rigidifiés sur } X_T\ \}.$$

La structure de groupe à l'arrivée est donnée par $(L, \alpha) \otimes (M, \beta) = (L \otimes M, \gamma)$, avec

$$\gamma = \alpha \otimes \beta : \mathcal{O}_T \to \epsilon_T^* L \otimes_{\mathcal{O}_T} \epsilon_T^* M = \epsilon_T^*(L \otimes M).$$

Si L est un fibré en droites sur X_T, remarquons que $L \otimes f_T^*(\epsilon_T^*(L^{-1}))$ est un fibré en droites rigidifié sur X_T. En effet, $\epsilon_T^*(L \otimes f_T^*(\epsilon_T^* L^{-1})) = \epsilon_T^* L \otimes \epsilon_T^*(f_T^*(\epsilon_T^* L^{-1})) = \epsilon_T^* L \otimes \epsilon_T^* L^{-1} = \mathcal{O}_{X_T}$ (ici on a utilisé le fait que $\epsilon_T^* f_T^* = (f_T \circ \epsilon_T)^* = id^*$).

On peut donc définir un morphisme

$$\mathrm{Pic}(X_T)/\mathrm{Pic}(T) \to \mathrm{Pic}^{rig}_{X/S} \quad L \mapsto L \otimes f_T^*(\epsilon_T^*(L^{-1})) \tag{11}$$

qui est en fait un isomorphisme. En effet, soit ζ un élément de $\mathrm{Pic}(X_T)/\mathrm{Pic}(T)$ et soit L un fibré en droites sur X_T qui le représente. Alors le fibré en droites $L \otimes f_T^*(\epsilon_T^*(L^{-1}))$ le représente aussi puisque la classe de $f_T^* \epsilon_T^*(L^{-1})$ est triviale dans $\mathrm{Pic}(X_T)/\mathrm{Pic}(T)$. On montre alors sans difficulté que le morphisme induit par

$$\mathrm{Pic}^{rig}_{X/S} \to \mathrm{Pic}(X_T), \qquad (L, \alpha) \mapsto L$$

est l'inverse du morphisme (11).

Nous en déduisons alors que $\mathrm{Pic}^{rig}_{X/S}$ est canoniquement isomorphe au foncteur de Picard relatif, dans les hypothèses envisagées. $\mathrm{Pic}^{rig}_{X/S}$ est donc automatiquement un faisceau.

4.3 Représentabilité du foncteur de Picard.

Si K est un corps et G un K-schéma en groupes commutatif et localement de type fini, alors G possède un plus petit sous-groupe ouvert connexe, sa composante neutre G^0 [14, Exposé VIA ; §2]. Plus généralement, si T est un schéma et G un T-foncteur en groupes commutatif, dont les fibres sont représentables et localement de type fini (comme $\mathrm{Pic}_{X/T}$ avec $X \to T$ propre), on définit G^0 comme étant le sous-foncteur de G, constitué des éléments dont chaque restriction aux fibres appartient à $G_t^0 := G \times_T \mathrm{Spec}(k(t))$, avec $k(t)$ le corps résiduel en $t \in T$. Si $G = \mathrm{Pic}_{X/T}$, alors $G_t = \mathrm{Pic}_{X/T} \times_T \mathrm{Spec}(k(t)) = \mathrm{Pic}_{X_t/k(t)}$.

Dans cette partie, on s'intéressera à la représentabilité du foncteur de Picard par un schéma. Pour que $\mathrm{Pic}_{X/S}$ soit représentable par un S-schéma, il est nécessaire de mettre des conditions sur le morphisme structural $X \to S$. Nous recensons ici les cas importants.

Proposition 4.3.0.1. *[20, n.232 ; Théorème 3.1] Soit $f : X \to S$ un morphisme projectif et de présentation finie. Supposons que f est plat et que ses fibres géométriques sont réduites et irréductibles. Alors $\mathrm{Pic}_{X/S}$ est représentable par un S-schéma séparé, qui est localement de présentation finie sur S.*

Théorème 4.3.0.1. *([27] et [29]) Soit X un schéma propre sur un corps K. Alors $\mathrm{Pic}_{X/K}$ est représentable par un schéma qui est localement de type fini sur K.*

Il découle de l'isomorphisme (11) que les éléments de $\mathrm{Pic}^0_{X/S}(T)$ correspondent aux fibrés en droites rigidifiés et de degré relatif zéro, i.e. les fibrés en droites dont la restriction à chaque fibre géométrique de $X \times_S T \to T$ est de degré zéro.

Soit K un corps et C une K-courbe projective lisse et géométriquement connexe. $\mathrm{Pic}^0_{C/K}$ est alors une variété abélienne, dite la **Jacobienne** J de C. Dans ce cas, d'après le Théorème 4.3.0.1, le foncteur de Picard relatif $\mathrm{Pic}_{C/K}$ est représentable par un K-schéma que nous notons de la même manière. On a alors

$$\mathrm{Pic}^{0,rig}_{C/K}(T) \simeq \mathrm{Pic}^0_{C/K}(T) = \mathrm{Hom}_{K-sch\acute{e}mas}(T, \mathrm{Pic}^0_{C/K}) \tag{12}$$

pour chaque K-schéma T.

Si on pose $T := \mathrm{Pic}^0_{C/K}$, alors la flèche identité $1 : \mathrm{Pic}^0_{C/K} \to \mathrm{Pic}^0_{C/K}$ correspond d'après (12) a un fibré en droites $\mathcal{P}_K$ sur $C \times J$, qui est donc un fibré en droites rigidifié de degré relatif 0. On l'appelle le **fibré de Poincaré** sur $C \times J$.
En écrivant explicitement la condition de représentabilité du foncteur de Picard relatif, on trouve que le fibré de Poincaré a la propriété universelle suivante : à tout fibré en droites rigidifié L de degré nul sur C, correspond par définition un unique élément de $\mathrm{Pic}^{0,rig}_{C/K}(T)$, donc un unique morphisme de schémas $f : T \to \mathrm{Pic}^0_{C/K} = J$, et on a $(id_C \times f)^*\mathcal{P}_K \simeq L$.

4.4 Modèles de Néron.

Dans cette partie, la base S est un schéma de Dédekind, et pour simplifier les notations, on notera ici par K le corps des fonctions $K(S)$.

Définition 4.4.0.1. *Soit X un K-schéma lisse séparé et de type fini. Un **modèle de Néron** $\mathcal{X}$ de X est un schéma lisse séparé et de type fini sur S, tel que pour tout S-schéma lisse $\mathcal{Y}$, la propriété suivante (dite propriété de Néron) est satisfaite : le morphisme de restriction*

$$\mathrm{Hom}_S(\mathcal{Y}, \mathcal{X}) \to \mathrm{Hom}_K(Y, X)$$

est bijectif.

Proposition 4.4.0.1. *[10, §1.2 ; Proposition 2] Soit $\mathcal{X}$ un S-schéma lisse et séparé, modèle de Néron de sa fibre générique X. Alors :*

1. *$\mathcal{X}$ est déterminé de manière unique par X, à isomorphisme près.*
2. *La construction du modèle de Néron commute avec le changement de base étale, i.e. si $S' \to S$ est un morphisme étale de schémas de Dédekind, et si $K' := K(S')$ est le corps de fonctions de S', alors $\mathcal{X}_{S'} = \mathcal{X} \times_S S'$ est le modèle de Néron sur S' du K'-schéma $\mathcal{X}_{K'} = X \times_{\mathrm{Spec}(K)} \mathrm{Spec}(K')$.*

Démonstration.

1. Cela provient immédiatement de la propriété de Néron.

2. Il faut montrer la propriété de Néron pour $\mathcal{X}_{S'}$. Soit $\mathcal{Y}'$ un S'-schéma lisse de fibre générique Y', et soit un K'-morphisme $Y' \to \mathcal{X}_{K'}$. En composant ce dernier morphisme avec la projection $\mathcal{X}_{K'} \to X$, on obtient un K-morphisme $Y' \to X$, qui se prolonge de manière unique en un S-morphisme $\mathcal{Y}' \to \mathcal{X}$, étant donné que $\mathcal{X}$ est le modèle de Néron de X et que $\mathcal{Y}'$ est lisse au-dessus de S (car c'est la composition du morphisme lisse $\mathcal{Y}' \to S'$ et du morphisme étale $S' \to S$). Le S-morphisme $\mathcal{Y}' \to \mathcal{X}$ induit un S'-morphisme $\mathcal{Y}' \to \mathcal{X}_{S'}$ et ce dernier est une extension unique du K'-morphisme $Y' \to \mathcal{X}_{K'}$.

□

La notion de modèle de Néron est une notion locale, en effet :

Proposition 4.4.0.2. *[10, §1.2 ; Proposition 4 et Lemme 5] Soit $\mathcal{X}$ un S-schéma de type fini. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *$\mathcal{X}$ est le modèle de Néron de sa fibre générique.*
2. *Pour chaque point fermé $s \in S$, le $\mathcal{O}_{S,s}$-schéma $\mathcal{X} \times_S \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{S,s})$ est le modèle de Néron de sa fibre générique*

Dans la première situation de la proposition précédente, on dira que $\mathcal{X}$ est un modèle de Néron global de X ; et dans le deuxième point, les schémas $\mathcal{X} \times_S \mathcal{O}_{S,s}$ sont dits les modèles de Néron locaux de X. En fait, l'existence du modèle de Néron global entraîne, par la proposition précédente, l'existence des modèles de Néron locaux. Inversement, une fois les modèles locaux construits, il faut trouver un moyen de les recoller au-dessus de S. Toutefois, le résultat ne sera pas forcément de type fini et donc pas un modèle de Néron de la fibre générique X.
Cependant, dans le cas où X est une variété abélienne, l'existence des modèles de Néron locaux entraîne celle du modèle de Néron global (cf. [10, §1.4]). Ce dernier cas est d'ailleurs celui qui nous intéressera dans cette thèse. Il est important de noter que la structure de groupe est préservé par le modèle de Néron :

Proposition 4.4.0.3. *Soit $\mathcal{X}$ un S-schéma qui est le modèle de Néron de sa fibre générique X. Supposons que X a une structure de K-schéma en groupes . Alors la structure de groupe de X s'étend de manière unique en une S-structure de schéma en groupes sur $\mathcal{X}$.*

Démonstration. La propriété de Néron permet de prolonger la loi de groupe de X à $\mathcal{X}$. En effet, la section unité par exemple $\mathrm{Spec}(K) \to X$ se prolonge en une section unité $S \to \mathcal{X}$ car S est un S-schéma lisse. De même, la loi de groupe sur X se prolonge sur $\mathcal{X}$ car $\mathcal{X} \times_S \mathcal{X}$ est un schéma lisse sur S. □

Théorème 4.4.0.1. *[10, §1.3 ; Corollaire 2]. Supposons que $S = \mathrm{Spec}(R)$ où R est un anneau de valuation discrète, et soit A une variété abélienne sur $K = \mathrm{Frac}(R)$. Alors A admet un modèle de Néron sur R.*

Proposition 4.4.0.4. *[10, §1.4 ; Proposition 1] Soit X un schéma séparé lisse et de type fini sur K. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *X admet un modèle de Néron global $\mathcal{X}$ sur S.*
2. *Il existe un ouvert dense $S' \subset S$ tel que X admet un modèle de Néron sur S' et des modèles de Néron locaux sur l'ensemble fini des points $S - S'$.*

Démonstration. (1) $\implies$ (2) est évident en prenant $S' = S$.
Montrons (2) $\implies$ (1) Soient $s_1, ..., s_n$ les points fermés de $S - S'$ et soient $\mathcal{X}'$ le modèle de Néron de X au-dessus de S' et $\mathcal{X}_{s_i}$ les modèles de Néron locaux de X au-dessus de $k(s_i)$.
En utilisant [10, §1.2 ; Lemme 5], pour chaque $i \in \{1, ..., n\}$, il existe un ouvert S_i de S où $\mathcal{X}_{s_i}$ se prolonge en un schéma lisse séparé et de type fini $\mathcal{X}_i$. Comme $\mathcal{X}'$ et $\mathcal{X}_i$ coïncident sur la fibre générique, ils coïncident alors sur un ouvert de S' contenant cette dernière. En enlevant un nombre fini de points fermés de S_i, on peut évidemment supposer que $S_i \cap (S - S') = \{s_i\}$ et que $\mathcal{X}'$ et $\mathcal{X}_i$ coïncident sur $S' \cap S_i$ (quitte à rendre plus petit S_i). On peut donc recoller les $\mathcal{X}_i$ avec $\mathcal{X}'$ sur les $S' \cap S_i$ et cela donne un schéma lisse séparé et de type fini $\mathcal{X}$, au-dessus de S, tel que $\mathcal{X} \times_S S' = \mathcal{X}'$ et $\mathcal{X} \times_S \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{S,s_i}) = \mathcal{X}_{s_i}$. On conclut en utilisant la Proposition 4.4.0.2. □

Remarque 4.4.0.1. *[10, §1.4 ; Théorème 3] On peut étendre le résultat du Théorème 4.4.0.1 en remplaçant* $\mathrm{Spec}(R)$ *par le schéma de Dédekind* S *et en le supposant connexe. En effet, en utilisant la Proposition 4.4.0.2, il suffit pour cela de trouver un ouvert dense* S' *de* S *où* A *admet un modèle de Néron.*
En fait, on montre que A *a bonne réduction sur presque tous les points fermés de* S*. Par conséquent,* A *admet un prolongement en un schéma lisse propre, i.e. en un schéma abélien, au-dessus de chacun de ces points. On peut même montrer qu'il existe un ouvert dense* $S' \subset S$ *où* A *s'étend en un schéma abélien. Or, d'après, ([10, §1.4 ; Proposition 2]), si* S *est supposé connexe, ce schéma abélien est un modèle de Néron de* A *sur* S'*.*

4.5 Foncteur de Picard et modèle de Néron de la Jacobienne.

On fixe pour cette partie R un anneau de valuation discrète, de corps de fractions K et de corps résiduel k. Soit $\mathcal{X}$ une surface fibrée sur R, dont la fibre générique est une courbe X, lisse et géométriquement connexe. On rappelle que dans ce cas, le schéma en groupes $\mathrm{Pic}^0_{X/K}$ a une structure de variété abélienne, que l'on appelle la Jacobienne de X et que l'on note J.
D'après le Théorème 4.4.0.1, la Jacobienne admet un modèle de Néron $\mathcal{J}$ sur R. Dans cette section, nous verrons le lien entre ce modèle de Néron et le foncteur de Picard relatif associé à $\mathcal{X}$.

Remarquons pour commencer que le foncteur de Picard $\mathrm{Pic}_{\mathcal{X}/R}$ satisfait à une propriété similaire à la propriété de Néron. En effet, supposons ici que X admet une section. Soit $\mathcal{T}$ un R-schéma lisse de fibre générique T, et soit $u_K : T \to \mathrm{Pic}_{X/K}$ un K-morphisme. D'après la suite (10), u_K correspond à un fibré en droites ζ_K sur $X \times_{\mathrm{Spec}(K)} T$, qui se prolonge en un fibré en droites sur $\mathcal{X} \times_{\mathrm{Spec}(R)} T$, dès lors que $\mathcal{X}$ est supposé régulier. Ainsi, en cette situation, u_K se prolonge en $u : T \to \mathrm{Pic}_{\mathcal{X}/R}$, avec u unique si $\mathrm{Pic}_{\mathcal{X}/R}$ est séparé. La même propriété demeure vraie pour $\mathrm{Pic}^0_{\mathcal{X}/R}$ si $\mathcal{X}_k$ est géométriquement irréductible. Si, de plus, nous savons que $\mathrm{Pic}^0_{\mathcal{X}/R}$ est lisse et séparé, ce dernier va alors coïncider avec le modèle de Néron de la Jacobienne de X ([10, §9.5 ; Théorème 1]). En particulier, en ce cas, la fibre spéciale du modèle de Néron de la Jacobienne est connexe.

Dans le cas général, $\mathrm{Pic}^0_{\mathcal{X}/R}$ n'est pas représentable par un schéma et on ne peut pas s'attendre à ce qu'il soit le modèle de Néron de la Jacobienne. De plus, même s'il existe en tant que schéma et qu'il est lisse, d'après [10, §8.4 ; Proposition 2], le morphisme canonique $\mathrm{Pic}^0_{\mathcal{X}/R} \to \mathcal{J}$, prolongeant sa fibre générique, n'est pas surjectif en général. Pour corriger cela, nous le remplaçons par $P \subset \mathrm{Pic}_{\mathcal{X}/R}$, le sous-faisceau qui consiste en tous les fibrés en droites de degré total 0 (c'est aussi, par définition, le noyau du morphisme degré $\deg : \mathrm{Pic}_{\mathcal{X}/R} \to \mathbb{Z}$). On remarque par ailleurs, que la fibre générique de P coïncide avec celle de $\mathrm{Pic}^0_{\mathcal{X}/R}$, à savoir, la Jacobienne J.

Nous passons ensuite au plus grand quotient séparé de P [4] et ce, en quotientant P par l'adhérence schématique [5] E dans P de la section unité $\mathrm{Spec}(K) \to \mathrm{Pic}_{X/K}$. Remarquons pour finir que la fibre générique de P/E est isomorphe à la Jacobienne J.
On a alors le résultat suivant :

Théorème 4.5.0.1. *[10, §9.5 ; Proposition 3] Soit $\mathcal{X}$ un R-modèle propre et plat de fibre générique X. Alors le quotient P/E est représentable par un schéma lisse et séparé sur R. De plus, $P \to P/E$ est un isomorphisme sur la fibre générique, à savoir, J.*

Théorème 4.5.0.2. *Soit X une K-courbe projective lisse et géométriquement connexe et soit $\mathcal{X}$ un R-modèle régulier de cette dernière. Supposons, de plus, que X admet une section, et notons par J sa Jacobienne. On a alors :*

1. *Le schéma P/E est le modèle de Néron de la Jacobienne J de X.*

2. *Soient $X_1, ..., X_n$ les composantes irréductibles de $\mathcal{X}_k$. Pour chaque $i \in \{1, ..., n\}$, soit δ_i la multiplicité géométrique de X_i dans $\mathcal{X}_k$ (voir la Définition 4.6.0.1). Supposons que le pgcd des δ_i est 1. Alors $\mathrm{Pic}^0_{\mathcal{X}/R}$ est séparé, et la projection $P \to P/E$ induit un isomorphisme $\mathrm{Pic}^0_{\mathcal{X}/R} \to \mathcal{J}^0$, où $\mathcal{J}$ désigne le modèle de Néron de J et $\mathcal{J}^0$ sa composante identité.*

Démonstration. [10, §9.5 ; Théorème 4]. □

4.6 Groupe des composantes.

Soit R un anneau de valuation discrète strictement hensélien, de corps de fractions K, et de corps résiduel k.
Soit $\mathcal{X}$ un R-modèle régulier d'une courbe projective lisse et géométriquement connexe X. Supposons de plus que X admet une section.

Définition 4.6.0.1. *Soit $I = \{1, ..., n\}$ et soit $(X_i)_{i \in I}$ la famille des composantes réduites et irréductibles de $\mathcal{X}_k$. On note $\overline{k}$ la clôture algébrique de k. Pour chaque $i \in \{1, ..., n\}$, on note $\eta_i \in \mathcal{X}_k$ le point générique correspondant à X_i. On a les définitions suivantes :*

— *La multiplicité d_i de X_i dans $\mathcal{X}_k$ est la longueur de l'anneau local artinien $\mathcal{O}_{\mathcal{X}_k, \eta_i}$.*

— *La multiplicité géométrique δ_i de X_i dans $\mathcal{X}_k$ est la longueur de l'anneau local artinien $\mathcal{O}_{\mathcal{X}_{\overline{k}}, \overline{\eta_i}}$, où $\overline{\eta_i}$ est le point de $\mathcal{X}_{\overline{k}} := \mathcal{X} \times_{\mathrm{Spec}(R)} \mathrm{Spec}(\overline{k})$ au-dessus de η_i.*

4. voir [10, p 265] pour la définition de la notion de séparabilité pour un foncteur
5. la notion d'adhérence schématique a un sens même si P n'est pas représentable, cf. [10, p 265-266].

— *Enfin, on note e_i la multiplicité de X_i, qui correspond à la longueur de $\mathcal{O}_{X_{i,\overline{k}},\overline{\eta_i}}$, où $X_{i,\overline{k}} := X_i \times_{\mathrm{Spec}(k)} \mathrm{Spec}(\overline{k})$.*

Nous faisons remarquer au passage, que ces définitions ne dépendent pas du choix de $\overline{\eta_i}$. De plus, pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, on a d'après, [10, §9.1 ; Lemme 4], la relation

$$\delta_i = d_i e_i \tag{13}$$

Soit $\mathcal{L}$ un fibré en droites sur $\mathcal{X}$. Pour chaque $i \in \{1, ..., n\}$, on peut alors considérer le degré partiel $\deg_i \mathcal{L}$ de $\mathcal{L}$ sur la composante X_i.
En particulier, on peut définir le morphisme

$$\rho : \mathrm{Pic}(\mathcal{X}) \to \mathbb{Z}^I \quad \mathcal{L} \mapsto (e_i^{-1}.deg_i(\mathcal{L}))_{i \in I}.$$

Soit D le groupe des diviseurs de Cartier sur $\mathcal{X}$ à support sur $\mathcal{X}_k$ et de degré total égal à 0. On obtient alors en composant ρ avec le morphisme canonique $D \to \mathrm{Pic}(\mathcal{X})$, le morphisme

$$\alpha : D \to \mathbb{Z}^I$$

Si D_0 désigne le sous-groupe de D des diviseurs qui sont principaux, il est alors clair que c'est le noyau du morphisme α.
Soit le morphisme

$$\beta : \mathbb{Z}^I \to \mathbb{Z} \quad (a_1, ..., a_n) \mapsto a_1\delta_1 + ... + a_n\delta_n.$$

Alors, $\mathrm{Im}(\alpha) \subset \mathrm{Ker}(\beta)$. En effet, pour un fibré en droites $\mathcal{L}$ de support $\mathcal{X}_k$ et de degré total 0, on a

$$\sum_{i=1}^{n} \delta_i.e_i^{-1}\mathrm{deg_i}(\mathcal{L}) = \sum_{i=1}^{n} d_i\mathrm{deg_i}(\mathcal{L}) = 0$$

la première égalité vient de la relation (13) et la seconde vient du fait que le degré total de $\mathcal{L}$ soit 0 et de la relation [10, §9.1 ; Proposition 5] :

$$\deg(\mathcal{L}) = \sum_{i=1}^{n} d_i.\deg(\mathcal{L}_{|X_i})$$

On obtient alors le complexe canonique suivant

$$0 \to D_0 \to D \xrightarrow{\alpha} \mathbb{Z}^I \xrightarrow{\beta} \mathbb{Z}. \tag{14}$$

Lemme 4.6.0.1. *[10, §9.5 ; Lemme 9] On a un isomorphisme*

$$\mathcal{J}_k(k)/\mathcal{J}_k^0(k) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Ker}(\beta)/\mathrm{Im}(\alpha).$$

Démonstration. Commençons par montrer l'exactitude de la suite suivante :

$$0 \to \mathrm{Pic}_{X/R}(R) \to P(R) \to \mathrm{Ker}(\beta) \to 0. \tag{15}$$

Par définition, P est le noyau du morphisme $\deg : \mathrm{Pic}_{X/R} \to \mathbb{Z}$. Donc

$$P(R) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Pic}_{\mathcal{X}/R}(R) \to \mathbb{Z}_R = \mathbb{Z}).$$

On définit alors un morphisme de $P(R) \to \mathrm{Ker}(\beta)$ comme on a défini le morphisme $\rho : \mathrm{Pic}(\mathcal{X}) \to \mathbb{Z}^I$ précédemment, c'est-à-dire, en envoyant un fibré en droites $\mathcal{L}$ défini sur $\mathcal{X}$ sur $(e_i^{-1}\deg_i(\mathcal{L}))_{i\in I}$. Cette image se trouve bien dans $\mathrm{Ker}(\beta)$ car le degré total de $\mathcal{L}$ est nul. De plus, le morphisme $\rho : \mathrm{Pic}(\mathcal{X}) \to \mathbb{Z}$ est surjectif d'après [10, §9.1 ; Corollaire 10], et donc le morphisme $P(R) \to \mathrm{Ker}(\beta)$ l'est aussi.

Le noyau de ce morphisme sont les fibrés en droites sur $\mathcal{X}$ de degré total nul, qui ont de plus des degrés partiels qui sont tous nuls. Comme R est strictement hensélien, $k = \overline{k}$, et il vient de la définition de $\mathrm{Pic}^0_{X/R}$ et de [10, §9.2 ; Corollaire13] que ce noyau est égal à $\mathrm{Pic}^0_{\mathcal{X}/R}(R)$. Cela prouve l'exactitude de la suite (15).

D'autre part, d'après le complexe (14), $\mathrm{Im}(\alpha)$ s'identifie à l'image de D/D_0 par le morphisme α. Or, par [10, §9.5. Lemme 8], $D/D_0 \simeq E(R)$, avec E l'adhérence schématique dans P de la section unité $\mathrm{Spec}(K) \to \mathrm{Pic}_{X/K}$. Ainsi donc, $\mathrm{Im}(\alpha)$ est l'image de $E(R)$ par α. Par conséquent, on obtient avec toutes les données accumulées, l'isomorphisme canonique

$$P(R)/(\mathrm{Pic}^0_{\mathcal{X}/R}(R) + E(R)) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Ker}(\beta)/\mathrm{Im}(\alpha).$$

On rappelle que $\mathcal{J} = P/E$. Considérons le morphisme canonique

$$P(R)/(\mathrm{Pic}^0_{\mathcal{X}/R}(R) + E(R)) \to \mathcal{J}(R)/\mathcal{J}^0(R). \tag{16}$$

Pour montrer qu'il est surjectif, il suffit de montrer la surjectivité de

$$P(R)/P^0(R) \to \mathcal{J}(R)/\mathcal{J}^0(R). \tag{17}$$

Le morphisme surjectif $P_k \to \mathcal{J}_k$ donne lieu à un morphisme surjectif entre les groupes des composantes de P_k et de $\mathcal{J}_k$, i.e. un morphisme surjectif

$$P_k(k)/P_k^0(k) \to \mathcal{J}_k(k)/\mathcal{J}_k^0(k).$$

Comme $\mathcal{J}$ est lisse et que R est strictement hensélien, alors le morphisme de restriction

$$\mathcal{J}(R)/\mathcal{J}^0(R) \to \mathcal{J}_k(k)/\mathcal{J}_k^0(k).$$

est bijectif. De même pour

$$P(R)/P^0(R) \to P_k(k)/P_k^0(k).$$

Il vient alors que le morphisme (17) est surjectif et donc le morphisme (16) l'est aussi.
Par ailleurs, d'après le Théorème 4.5.0.2, comme X admet une section, $\mathrm{Pic}^0_{\mathcal{X}/R} \simeq \mathcal{J}^0$. Et donc le morphisme (16) est injectif.

□

Définition 4.6.0.2. *Si $(X_i)_{\{}1 \leq i \leq 2\}$ est la famille des composantes irréductibles et réduites de $\mathcal{X}_k$, on appelle* ***matrice d'intersection modifiée*** *la matrice $(e_i^{-1}(X_i.X_j))_{i,j\in I}$, où l'intersection $(X_i.X_j)$ est définie comme étant le degré dans la composante X_j du fibré en droites associé à X_i (vu comme diviseur de Cartier sur $\mathcal{X}$).*

Remarque 4.6.0.1. *On peut donner une description explicite du $\mathbb{Z}$-module $\mathrm{Im}(\alpha)$. D'abord, on identifie D à $\mathbb{Z}^I$ en envoyant un fibré en droites $\mathcal{L}$, défini sur $\mathcal{X}$, sur $(d_i.\deg_i(\mathcal{L}))_i$. Ensuite, en écrivant $\mathcal{L} = d_1\deg_1(\mathcal{L})X_1+...+d_n\deg_n(\mathcal{L})X_n$, on vérifie sans difficulté qu'on peut décrire $\alpha : \mathbb{Z}^I \to \mathbb{Z}^I$ en utilisant la matrice d'intersection modifiée $(e_i^{-1}(X_i.X_j))_{i,j\in I}$.*

Corollaire 4.6.0.1. *Soient $r_1, ..., r_{n-1}, 0$ les diviseurs élémentaires de la matrice d'intersection modifiée $(e_i^{-1}(X_i.X_j))_{i,j}$. Alors le groupe des composantes de la fibre spéciale du modèle de Néron de la Jacobienne de X est isomorphe à $\mathbb{Z}/r_1\mathbb{Z} \oplus ... \oplus \mathbb{Z}/r_{n-1}\mathbb{Z}$.*

Démonstration. L'image de $\beta : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$ est sans torsion, donc est libre, de rang 1. Il s'en suit que $\mathrm{Ker}(\beta)$ est libre, de rang $n-1$: $\mathrm{Ker}(\beta) = \mathbb{Z}^{n-1}$. De plus, par [10, §9.5 ; Lemma 10], $\mathrm{Im}(\alpha) \subset \mathrm{Ker}(\beta)$ est de rang $n-1$. Par conséquent, $r_1, ..., r_{n-1}$ sont les diviseurs élémentaires de $\mathrm{Im}(\alpha)$. Le résultat en découle. □

Des exemples de calcul du groupe des composantes ont été faits dans la section 6.3.

5 Extensions et prolongement d'extensions.

Dans [1, Exposés VII et VIII], Grothendieck a étudié les extensions de groupes. Dans ce chapitre, on verra pour commencer comment interpréter une extension d'un schéma en groupes H par $\mathbb{G}_m$ (sur n'importe quel topos), comme la donnée d'un fibré en droites vérifiant le théorème du carré. Par conséquent, le prolongement des extensions se ramène à celui des fibrés en droites. En particulier, le Théorème 5.2.0.1 de Grothendieck établit un contexte où une telle extension admet un prolongement fppf. Ici, on généralisera ce théorème pour un prolongement en une extension logarithmique.
Ce travail prépare le chapitre suivant, puisque ce dernier résultat permettra de prolonger le fibré de Poincaré sur $C \times J$ (interprété comme une extension) en une extension logarithmique sur un modèle régulier de C. Cette extension prolongée, que l'on notera $\mathcal{P}^{log}$, sera ensuite nécessaire pour la construction du prolongement logarithmique d'un torseur.

5.1 Interprétation d'une extension.

Fixons $\underline{T}$ un topos. Les groupes et extensions de groupes dont il sera question dans cette section seront relatifs à ce topos. Soient P et G deux groupes commutatifs de $\underline{T}$. Une extension de P par G est la donnée d'une suite exacte

$$1 \to G \xrightarrow{i} E \xrightarrow{j} P \to 1 \tag{18}$$

où E est un groupe commutatif.
$j : E \to P$ est un épimorphisme de groupes, et i induit un isomorphisme de G dans $\operatorname{Ker} j$. Grothendieck a interprété de telles extensions en termes différents comme on l'exposera ci-dessous.

L'homomorphisme i permet de définir une action de G sur E en posant :

$$g.x := i(g)x$$

pour $g \in G(S)$ et $x \in E(S)$ pour S un objet de $\underline{T}$. De plus, il est clair que cette action fait de $E \to P$ un torseur sous G.

Remarquons que la structure de torseur précédente n'utilise qu'une partie de la structure de groupe de E, à savoir, la multiplication de couples de points dont l'un au moins provient d'un point de G via i. Nous allons maintenant interpréter la structure multiplicative de E comme une structure supplémentaire sur le torseur envisagé.

Considérons deux sections $p, p' : e \to P$ (e désignant l'objet final de $\underline{T}$) de P, ainsi que les torseurs induits E_p et $E_{p'}$, respectivement. La multiplication de E induit un morphisme d'objets de $\underline{T}$

$$\varphi : E_p \times E_{p'} \to E_{pp'}$$

qui satisfait les conditions suivantes :

$$\varphi(gx, x') = g\varphi(x, x') \tag{19}$$

$$\varphi(x, gx') = g\varphi(x, x') \tag{20}$$

avec $g \in G(S)$, $x \in E_p(S)$ et $x' \in E_{p'}(S)$, pour un objet quelconque S de $\underline{T}$. L'égalité $\varphi(x, gx') = \varphi(gx, x')$ définit une relation d'équivalence "$\sim$" sur $E_p \times E_{p'}$ et permet de définir le produit contracté

$$E_p \times^G E_{p'} := (E_p \times E_{p'})/\sim$$

On peut ainsi factoriser le morphisme φ

$$E_p \times E_{p'} \longrightarrow E_p \times^G E'_p \xrightarrow{\varphi_{p,p'}} E_{pp'}$$

où la première flèche est le morphisme canonique de passage au quotient. De plus, les égalités (19) et (20) signifient que le morphisme $\varphi_{p,p'}$ est un morphisme de G-torseurs ; c'est donc nécessairement un isomorphisme.

Remarquons que la définition de $\varphi_{p,p'}$ s'étend au cas où p et p' sont des points de P à valeurs dans un objet quelconque S de $\underline{T}$: il suffit d'appliquer ce qui précède au topos induit $\underline{T}/S$, et à l'extension de groupes sur S, déduite de (18) par changement de base.

De plus, nous notons que jusqu'ici, l'associativité de la loi de E n'a été utilisée que dans le cas du produit de trois points de E, dont au moins un provient de G ((19) et (20)). Si nous voulons exprimer l'associativité complète en termes des $\varphi_{p,p'}$, nous sommes amenés à écrire pour trois points p, p', p'' de P (à valeur dans un objet S de $\underline{T}$), que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd} E_p E_{p'} E_{p''} \arrow[r, "\varphi_{p,p'} \times id"] \arrow[d, "id \times \varphi_{p',p''}"'] & E_{pp'} E_{p''} \arrow[d, "\varphi_{pp',p''}"] \\ E_p E_{p'p''} \arrow[r, "\varphi_{p,p'p''}"'] & E_{pp'p''} \end{tikzcd} \tag{21}$$

(nous avons omis dans ce diagramme l'écriture du produit contracté de torseurs pour alléger les notations).

En particulier, si $S = P \times P$, $p = pr_1 : P \times P \to P$, $p' = pr_2 : P \times P \to P$, l'isomorphisme $\varphi_{p,p'}$ devient

$$\underline{\varphi} : pr_1^*(E) \times^G pr_2^*(E) \to \pi^*(E) \tag{22}$$

avec π définissant la multiplication dans P.

Réciproquement, les groupes P et G de $\underline{T}$ étant supposés donnés, considérons la donnée d'un G-torseur

$$j : E \to P$$

et d'autre part, la donnée d'un isomorphisme de G-torseurs

$$pr_1^*(E) \times^G pr_2^*(E) \xrightarrow{\simeq} \pi^*(E)$$

où pr_i désigne la i-ème projection $P \times P \to P$ et π la multiplication dans P, le tout vérifiant la condition d'associativité exprimée en (21). Alors, d'après [1], il existe sur E une unique structure d'extension de P par G, telle que les données pérécdentes se déduisent de cette structure par les constructions faites précédemment. Nous synthétisons dans le théorème suivant dû à Grothendieck :

Théorème 5.1.0.1. *[1, Exposé VII ; §1.1.6] Soit $\underline{T}$ un topos fixé. On a alors une équivalence de catégories entre la catégorie des extensions de groupes commutatifs de $\underline{T}$, et la catégorie des systèmes $(P, G, E, \underline{\varphi})$, où P et G sont des groupes commutatifs de $\underline{T}$, E un torseur sous G au-dessus de P, et enfin, $\underline{\varphi}$ un isomorphisme de G-torseurs (22) satisfaisant la condition d'associativité exprimée dans le diagramme (21).*

Remarque 5.1.0.1. *L'intérêt de ce résultat est qu'il est vrai dans n'importe quel topos. Ainsi, nous pourrons l'utiliser pour décrire les extensions logarithmiques.*

Remarque 5.1.0.2. *Dans le cas où $G = \mathbb{G}_m$, le $\mathbb{G}_m$-torseur en jeu du Théorème 5.1.0.1 correspond à un fibré en droites et le produit contracté de deux $\mathbb{G}_m$-torseurs correspond au produit tensoriel des fibrés en droites correspondant. Ainsi, si on note par L le fibré en droites correspondant au torseur E, (22) se réécrit :*

$$pr_1^*(L) \otimes pr_2^*(L) \xrightarrow{\simeq} \pi^*(L).$$

*On dit alors que L vérifie le **théorème du carré**.*

Exemple 5.1.0.1. *Si C est une courbe et J sa Jacobienne, on rappelle que $\mathcal{P}_\mathcal{K}$ est le fibré de Poincaré sur $C \times J$ (cf. section 4.3). Ce dernier a une unique structure d'extension de J_C par $\mathbb{G}_{m,C}$. En effet, d'une part, il est connu qu'un fibré en droites, rigidifié et de degré 0 sur un schéma abélien, vérifie le théorème du carré. Donc, si l'on voit $J \times C$ comme le schéma abélien constant J_C au-dessus de C, et si l'on note m (resp. pr_1, pr_2) la multiplication (resp. la première projection, la seconde projection) sur J_C induite par celle de J, on a*

$$pr_1^*(\mathcal{P}_K) \otimes pr_2^*(\mathcal{P}_K) \xrightarrow{\simeq} m^*(\mathcal{P}_K).$$

Il reste alors à appliquer le Théorème 5.1.0.1 pour déduire l'existence d'une structure d'extension sur $\mathcal{P}_K$.
L'unicité de cette structure d'extension découle du fait que $m^*\mathcal{P}_K$ est un fibré en droites rigidifié sur la variété projective $J \times J \times C$, et donc, n'a pas d'automorphismes non triviaux (cf. section 4.2). Par abus de notation, on notera cette extension $\mathcal{P}_K$ aussi.

5.2 Prolongement d'extensions.

Dans cette partie, nous fixons R un anneau de valuation discrète, de corps de fractions K et de corps résiduel k.

Théorème 5.2.0.1. *[1, Exposé VIII ; Théorème 7.1] Soit $\mathcal{X}$ un R-schéma régulier intègre et de fibre générique X, et soit $\mathcal{H}$ un $\mathcal{X}$-schéma en groupes lisse commutatif, à fibres connexes ($\mathcal{H} = \mathcal{H}^0$) et de type fini. Alors le morphisme de restriction*

$$\mathrm{Ext}^1_{fppf}(\mathcal{H}, \mathbb{G}_{m,\mathcal{X}}) \to \mathrm{Ext}^1_{fppf}(\mathcal{H}_X, \mathbb{G}_{m,X})$$

est un isomorphisme, avec $\mathcal{H}_X := \mathcal{H} \times_{\mathcal{X}} X$.

Question 5.2.0.1. *Peut-on espérer un prolongement de l'extension de $\mathcal{H}_X$ par $\mathbb{G}_{m,X}$ en une extension logarithmique de $\mathcal{H}$ par $\mathbb{G}_{m,\mathcal{X}}$, sans l'hypothèse que $\mathcal{H}$ est à fibres connexes ?*

La réponse est oui. Le théorème suivant répond à la question dans le cas particulier où le schéma $\mathcal{X}$ est $\mathrm{Spec}(R)$. Ici, on munit $\mathrm{Spec}(R)$ de sa log structure induite par $\mathrm{Spec}(k)$ vu comme diviseur, i.e. $\mathrm{Spec}(K)$ est l'ouvert de trivialité de cette log structure. De ce fait, la restriction à $\mathrm{Spec}(K)$ d'une extension logarithmique sur $\mathrm{Spec}(R)$ est une extension fppf.

Théorème 5.2.0.2. *[15, §4.1 ; Théorème 4.1.1] Soit $\mathcal{H}$ un R-schéma en groupes commutatif lisse, de type fini et de fibre générique H. Alors le morphisme de restriction*

$$\mathrm{Ext}^1_{klp}(\mathcal{H}, \mathbb{G}_{m,R}) \to \mathrm{Ext}^1_{fppf}(H, \mathbb{G}_{m,K})$$

est un isomorphisme.

On en déduit le résultat suivant :

Théorème 5.2.0.3. *Soit $\mathcal{X}$ un R-schéma régulier muni de la log structure induite par sa fibre spéciale vue comme un diviseur. Soit X sa fibre générique et soit $\mathcal{H}$ un $\mathcal{X}$-schéma en groupes lisse commutatif et de type fini. Alors le morphisme de restriction*

$$\mathrm{Ext}^1_{klp}(\mathcal{H}, \mathbb{G}_{m,\mathcal{X}}) \to \mathrm{Ext}^1_{fppf}(\mathcal{H}_X, \mathbb{G}_{m,X})$$

est un isomorphisme.

Lemme 5.2.0.1. *Soit $\mathcal{X}$ un schéma régulier intègre muni d'une log structure induite par un ouvert dont le complémentaire est un diviseur. Soit V un ouvert de $\mathcal{X}$ tel que $\mathrm{codim}(X \backslash V) \geq 2$ ($\mathrm{codim}(\mathcal{X} \backslash V) \geq 2$ signifie que chaque point de $X \backslash V$ a une codimension au moins 2 dans $\mathcal{X}$). Alors le morphisme de restriction*

$$H^1_{klp}(\mathcal{X}, \mathbb{G}_m) \to H^1_{klp}(V, \mathbb{G}_m)$$

est un isomorphisme.

Démonstration. On note par D le diviseur $\mathcal{X}\backslash V$ (muni de sa structure de schéma réduit). On peut alors écrire $D = \bigoplus_{m=1}^{r} D_m$ où les D_m sont des diviseurs réduits et irréductibles. On a le diagramme suivant où les suites exactes horizontales sont déduites de la suite (3), et les flèches verticales sont les morphismes de restriction à V :

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & H^1_{fppf}(\mathcal{X}, \mathbb{G}_m) & \longrightarrow & H^1_{klp}(\mathcal{X}, \mathbb{G}_m) & \longrightarrow & \bigoplus_{m=1}^{r}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}).D_m & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & H^1_{fppf}(V, \mathbb{G}_m) & \longrightarrow & H^1_{klp}(V, \mathbb{G}_m) & \longrightarrow & \bigoplus_{m=1}^{r}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}).D_{m_V} & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Les deux flèches verticales à droite et à gauche du diagramme sont en réalité des isomorphismes. En effet, comme $\mathcal{X}$ est régulier, les diviseurs de Weil et les diviseurs de Cartier coïncident sur $\mathcal{X}$. Or, comme X est intègre et normal et que $\mathrm{codim}(\mathcal{X}\backslash V) \geq 2$, on sait que tout diviseur de Weil sur V se prolonge de manière unique en un diviseur de Weil sur X. Alors les deux flèches aux extrémités du diagramme sont des isomorphismes. Par conséquent, la flèche au milieu est un isomorphisme aussi. □

Démonstration. (Preuve du Théorème 5.2.0.3)
On considère le morphisme de restriction

$$\mathrm{Ext}^1_{klp}(\mathcal{H}, \mathbb{G}_{m,\mathcal{X}}) \to \mathrm{Ext}^1_{fppf}(\mathcal{H}_X, \mathbb{G}_{m,X}).$$

Montrons qu'il est surjectif. On fixe une extension E de $\mathcal{H}_X$ par $\mathbb{G}_{m,X}$. Soit V le plus grand ouvert de $\mathcal{X}$ au-dessus duquel E admet un prolongement logarithmique. Alors V contient X et tous les points de $\mathcal{X}$ de codimension 1, puisque le problème de prolongement a une solution sur le spectre d'un anneau de valuation discrète par le Théorème 5.2.0.2. En d'autres termes, on a $\mathrm{codim}(\mathcal{X}\backslash V) \geq 2$. Or, par le Théorème 5.1.0.1 , cette extension sur V peut être interprétée comme un fibré en droites logarithmique sur $\mathcal{H}_V$, vérifiant le théorème du carré. Maintenant, on peut appliquer le Lemme 5.2.0.1 à ce fibré en droites log sur $\mathcal{H}_V$, en observant d'une part que $\mathcal{H}_V$ est un ouvert de $\mathcal{H}$, dont le complémentaire a une codimension au moins 2, et d'autre part, $\mathcal{H}$ étant lisse sur $\mathcal{X}$, il est régulier, et la log structure induite par $\mathcal{X}$ sur $\mathcal{H}$ est aussi une log structure définie par un ouvert sur $\mathcal{H}$ de complémentaire un diviseur. Par conséquent, le fibré en droites log sur $\mathcal{H}_V$ peut être prolongé en un fibré en droites sur $\mathcal{H}$. De plus, ce fibré en droites satisfait le théorème du carré par l'unicité du prolongement d'une extension (Lemme 5.2.0.1) ; d'où le résultat. □

5.3 Lien entre torseurs et extensions

On termine ce chapitre par l'interprétation d'un torseur comme une extension et vice-versa.

Théorème 5.3.0.1. *[35, §1 ; Théorèmes 1 et 2] On fixe X un schéma localement noethérien, et G un X-schéma en groupes commutatif fini et localement libre. On a alors*

$$\underline{\mathrm{Ext}}^1_{fppf}(G, \mathbb{G}_m) = 0.$$

Et il en découle alors un isomorphisme fonctoriel en G

$$H^1_{fppf}(X, G^D) \simeq \mathrm{Ext}^1_{fppf}(G, \mathbb{G}_m).$$

Ce théorème reste vrai en version logarithmique. En effet, on a :

Théorème 5.3.0.2. *[16, §4.1 ; Théorème 4.1] On fixe (X, M_X) un log schéma fin et saturé localement noethérien. Soit G un groupe commutatif sur X et supposons que G est fini et localement libre sur X. Alors on a*

$$\underline{\mathrm{Ext}}^1_{klp}(G, \mathbb{G}_m) = 0.$$

Démonstration. Soit Ω une extension de G par $\mathbb{G}_m$. Si n est l'ordre de G, la suite exacte de Kummer donnée par

$$1 \to \mu_n \to \mathbb{G}_m \xrightarrow{n} \mathbb{G}_m \to 1$$

donne lieu à une suite exacte des $\mathrm{Ext}^i_{klp}(G, _)$, qui donne ensuite un épimorphisme

$$\mathrm{Ext}^1_{klp}(G, \mu_n) \to \mathrm{Ext}^1_{klp}(G, \mathbb{G}_m).$$

Soit F une extension de G par μ_n dont l'image par ce morphisme est Ω :

$$0 \to \mu_n \to F \to G \to 1.$$

Alors, d'après le Théorème 5.1.0.1, $F \to G$ est un torseur logarithmique sous μ_n. De plus, comme μ_n est fini, plat et commutatif, il découle de [23, §9 ; Théorème 9.1] que ce torseur est représentable. Donc $F \to G$ est un morphisme kummérien de log schémas fins et saturés.
Quitte à travailler localement pour la topologie étale sur X, on peut supposer que X est affine et admet une carte globale $\underline{P} \to M_X$. Comme la log structure de G est la log structure image inverse de celle de X, on obtient ainsi une carte globale $\underline{P} \to M_G$ pour G, modelée sur le même monoïde P. Comme F est affine, il est quasi-compact, donc, d'après [23, §2 ; Proposition 2.7], il existe alors un morphisme kummérien $u : P \to Q$ tel que si $T := G \times_{\mathbb{Z}[P]} \mathbb{Z}[Q] \to G$ est le torseur kummérien standard, le morphisme

$$F \times_G T \to T$$

est strict. D'où, le morphisme

$$F \times_X Y \to G \times_X Y$$

avec $Y := X \times_{\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[P])} \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[Q])$, est strict. Nous obtenons ainsi une suite exacte de log schémas dont la log structure provient de Y

$$0 \to \mu_n \times_X Y \to F \times_X Y \to G \times_X Y \to 0$$

Autrement dit, cette suite exacte provient d'une extension fppf de G par μ_n sur Y ; or il est connu que cette dernière est localement scindée pour la topologie fppf ([1, Exposé VIII ; Proposition 3.3.1]), il en est donc de même pour Ω et cela termine la preuve.

□

Corollaire 5.3.0.1. *[16, §4.1 ; Corollaire 4.2] Soit G un X-schéma en groupes commutatif, fini et localement libre. On dispose d'un isomorphisme*

$$H^1_{klp}(X, G^D) \simeq \mathrm{Ext}^1_{klp}(G, \mathbb{G}_m)$$

canonique, et fonctoriel en G.

Démonstration. On dispose d'une suite spectrale locale-globale pour les faisceaux Ext en topologie Kummer log plate (comme dans tout topos annelé, cf. [2, Exposé V, Proposition 6.1(3)]), laquelle donne naissance à une suite exacte

$$1 \to H^1_{klp}(X, \underline{\mathrm{Hom}}(G, \mathbb{G}_m)) \to \mathrm{Ext}^1_{klp}(G, \mathbb{G}_m) \to H^0(X, \underline{\mathrm{Ext}}^1_{klp}(G, \mathbb{G}_m))$$

avec $\underline{\mathrm{Hom}}(G, \mathbb{G}_m) = G^D$, le dual de Cartier de G. Le membre de droite étant nul, le résultat en découle. □

6 Résultats.

Ce chapitre est consacré aux résultats de la thèse. Il se découpe en trois parties.

En premier lieu, on utilisera les outils introduits dans les chapitres précédents pour étudier le prolongement des torseurs. On fixera un anneau de valuation discrète R de corps de fraction K, et on se donnera un K-schéma en groupes commutatif fini et plat G, et une K-courbe C, lisse projective géométriquement connexe et munie d'un point rationnel. On rappellera d'abord la correspondance bijective entre la donnée d'un G-torseur pointé sur C et celle d'un morphisme de groupes $G^D \to J$, avec G^D le dual de Cartier de G et J la Jacobienne de C (cf. Lemme 6.1.0.1). Pour simplifier la problématique, on supposera pour commencer l'existence de $\mathcal{G}$, un R-modèle fini et plat de G, vérifiant une certaine hypothèse le liant au modèle de Néron de la Jacobienne. On énoncera alors le premier résultat de la thèse qui prouve l'existence d'un prolongement logarithmique d'un G-torseur défini sur C, en un torseur sur un modèle régulier de C (cf. Théorème 6.1.0.1). Ensuite, dans le même contexte, on établira une condition nécessaire et suffisante pour que ce prolongement log provienne d'un torseur fppf. En particulier, on retrouvera un résultat bien connu sur l'interprétation d'un torseur fppf (cf. section 6.1.1).

Dans un second temps, on donnera une classe de groupes pour lesquels on garantit l'existence d'un R-modèle fini et plat, vérifiant l'hypothèse évoquée précédemment, le liant au modèle de Néron de la Jacobienne (cf. Corollaire 6.2.0.2). Cela découlera de l'étude de la finitude du schéma en groupes $\mathcal{J}[r]$, où $\mathcal{J}$ est le modèle de Néron de la Jacobienne et r un entier.

Pour finir, on étudiera un exemple concret de prolongement de torseurs. On se donnera une courbe hyperelliptique dont on construira un modèle régulier sur $\mathbb{Z}_p$ (p un nombre premier). On traitera ensuite deux cas : un cas où le torseur initial sur la courbe hyperelliptique admet un prolongement fppf, et un autre où le torseur admet un prolongement logarithmique ne provenant pas d'un prolongement fppf.

6.1 Partie I : Prolongement des torseurs.

On fixe pour cette section un anneau de valuation discrète R, de corps de fractions K et de corps résiduel k de caractéristique $p > 0$.
On considère G un K-schéma en groupes fini plat et commutatif et on rapelle que $G^D := \mathrm{Hom}_K(G, \mathbb{G}_{m,K})$ est son dual de Cartier.
Soit C une K-courbe lisse projective et géométriquement connexe, munie d'un point K-rational $Q_0 \in C(K)$ et soit J sa Jacobienne. On fixe $\mathcal{C}$ un modèle régulier de C sur R et on note $\mathcal{J}$ le modèle de Néron de J.

Remarquons que comme $\mathcal{C}$ est propre, alors par le critère de valuation de la propreté, la section $Q_0 : \mathrm{Spec}(K) \to C$ se prolonge en une section $\mathcal{Q}_0 : \mathrm{Spec}(R) \to \mathcal{C}$.

Un G-**torseur pointé** sur C (relativement à Q_0) est un G-torseur $f : Y \to C$, tel qu'il existe un point rationnel P_0 dans $Y(K)$ dont l'image par f est Q_0. De façon équivalente, un G-torseur $f : Y \to C$ est pointé (relativement à Q_0), si sa restriction à Q_0 est un G-torseur trivial. En effet, Soit

$$Y \times_C \mathrm{Spec}(K) \to \mathrm{Spec}(K)$$

le pull-back du torseur $Y \to C$ par $Q_0 : \mathrm{Spec}(K) \to C$. C'est aussi un G-torseur trivial : les deux morphismes $P_0 : \mathrm{Spec}(K) \to Y$ et $id : \mathrm{Spec}(K) \to \mathrm{Spec}(K)$ induisent une section $p : \mathrm{Spec}(K) \to Y \times_C \mathrm{Spec}(K)$ et on peut définir un isomorphisme $G \simeq Y \times_C \mathrm{Spec}(K)$ par $e \mapsto p$, où e est la section unité de G.

Réciproquement, si le torseur $Y \times_C \mathrm{Spec}(K) \to \mathrm{Spec}(K)$ est trivial, alors $Y \times_C \mathrm{Spec}(K)$ admet une section $p : \mathrm{Spec}(K) \to Y \times_C \mathrm{Spec}(K)$, qui, composée avec la projection $pr_1 : Y \times_C \mathrm{Spec}(K) \to Y$, donne une section $\mathrm{Spec}(K) \to Y$ dont l'image par f est Q_0 par construction, comme le montre le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Spec}(K) \arrow[dr, dashed, "p"] \arrow[drr, bend left] \arrow[ddr, bend right, "id"'] & & \\
& Y \times_C \mathrm{Spec}(K) \arrow[r, "pr_1"] \arrow[d, "pr_2"'] & Y \arrow[d, "f"] \\
& \mathrm{Spec}(K) \arrow[r, "Q_0"'] & C
\end{tikzcd}$$

On note $H^1_{fppf}(C, Q_0, G)$ le premier groupe de cohomologie classifiant les isomorphismes de classes de torseurs fppf pointés sur C (relativement à Q_0). On a une suite exacte

$$0 \to H^1_{fppf}(C, Q_0, G) \to H^1_{fppf}(C, G) \xrightarrow{Q_0^*} H^1_{fppf}(K, G)$$

où l'exactitude à gauche se déduit de la définition de $H^1_{fppf}(C, Q_0, G)$, et l'exactitude à droite découle de $Q_0^* \circ b = id$, où $b : H^1_{fppf}(K, G) \to H^1_{fppf}(C, G)$ est le changement de base.

Pour la même raison, b est injective et la suite exacte plus haut est scindée, donnant un isomorphisme

$$H^1_{fppf}(C, Q_0, G) \simeq H^1_{fppf}(C, G)/H^1_{fppf}(K, G)$$

Un G-**torseur rigidifié** sur C (relativement à Q_0) est un couple $(Y \to C, \alpha)$ où $Y \to C$ est un G-torseur et α une trivialisation de la restriction de Y à Q_0. En fait, on peut identifier les classes d'isomorphismes de torseurs pointés avec les classes d'isomorphismes de torseurs rigidifiés. Par conséquent, dans la littérature, un G-torseur rigidifié est parfois appelé un G-torseur pointé. Dans ce manuscrit, nous utiliserons seulement le fait qu'un torseur rigidifié est pointé, ce qui est évident.

Remarque 6.1.0.1. *Si T est un K-schéma, alors un fibré en droites rigidifié (relativement à $Q_{0,T} : T \to C \times T$, cf. section 4.2) n'est autre qu'un $\mathbb{G}_m$-torseur rigidifié sur $C \times T$, relativement à $Q_{0,T}$.*

Le lemme suivant est connu dans la littérature et est central pour la suite :

Lemme 6.1.0.1. *Si G est un K-schéma en groupes fini plat et commutatif, on a un isomorphisme*

$$H^1_{fppf}(C, Q_0, G) \simeq \mathrm{Hom}_K(G^D, J)$$

Démonstration. Commençons par construire un morphisme de $H^1_{fppf}(C, Q_0, G)$ dans $\mathrm{Hom}_K(G^D, J)$.
D'après [35, §4 ; Théorème 5], on a un morphisme

$$H^1_{fppf}(C, G) \simeq \mathrm{Ext}^1_{fppf}(G^D_C, \mathbb{G}_{m,C}) \to \mathrm{Pic}(C \times G^D) \tag{23}$$

qui est fonctoriel en C. En restreignant au noyau de Q_0^* des deux côtés, on en déduit le morphisme

$$H^1_{fppf}(C, Q_0, G) \to \mathrm{Pic}^{rig}(C \times G^D)$$

qui associe à une classe d'un G-torseur ξ la classe d'un fibré en droites rigidifié $L(\xi)$ sur $C \times G^D$. Comme G est fini, le groupe $H^1_{fppf}(C, Q_0, G)$ est de torsion et donc, $L(\xi)$ est de torsion aussi. Cela implique que $L(\xi)$ a un degré nul sur chaque fibre de $C \times G^D \to G^D$. Par conséquent, la classe de $L(\xi)$ appartient à $\mathrm{Pic}^{0,rig}(C \times G^D)$. Il existe donc un unique morphisme de schémas $f : G^D \to \mathrm{Pic}^0_{C/K} = J$ tel que $(id_C \times f)^* \mathcal{P}_K \simeq L(\xi)$. De plus, il vient du morphisme (23) que le fibré en droites $L(\xi)$ provient d'une extension de G^D par $\mathbb{G}_m$, et donc satisfait le théorème du carré. Or, il découle du lemme de Yoneda, que les fibrés en droites sur $G^D \times C$ vérifiant le théorème du carré, correspondent

exactement aux homomorphismes de schémas en groupes $G^D \to \mathrm{Pic}_{C/K}$ [6]. Par conséquent, $G^D \to J$ est un homomorphisme de schémas en *groupes*.

Le morphisme dans l'autre direction est construit en utilisant les mêmes outils. En effet, à partir d'un morphisme de schémas en groupes $f : G^D \to J$, on obtient un unique fibré en droites rigidifié L sur $C \times G^D$ tel que $(id_C \times f)^* \mathcal{P}_K \simeq L$, satisfaisant le théorème du carré. De plus, d'après le Théorème 5.1.0.1, ce fibré en droites peut être induit d'une structure d'extension de G^D par $\mathbb{G}_m$ sur C. Par l'isomorphisme du Théorème 5.3.0.1, il correspond à cette extension un unique G-torseur sur C. Comme L est rigidifié, ce G-torseur est rigidifié et donc pointé. Enfin, on peut voir que par construction, ces deux morphismes sont inverses l'un de l'autre. □

Définition 6.1.0.1. *On appelle un* ***modèle*** *de G sur R un R-schéma fini et plat, de fibre générique isomorphe à G. Un tel modèle, s'il existe, n'est pas forcément unique.*

On s'intéresse à présent au prolongement des G-torseurs fppf sur C en torseurs logarithmiques sur $\mathcal{C}$. On commence par citer le théorème suivant stipulant que si un tel prolongement existe, alors il est unique :

Proposition 6.1.0.1. *[16, §3.2 ; Proposition 3.6] Soit X un schéma logarithmique, intègre et normal ; soit G un X-schéma en groupes commutatif, fini et localement libre. On suppose que l'ouvert de trivialité U de cette log structure*

6. On fixe un schéma S, $\mathfrak{C}$ la catégorie des S-schémas, F un foncteur contravariant de $\mathfrak{C}$ dans la catégorie des groupes, et enfin, G un groupe objet dans $\mathfrak{C}$. On note $pr_i : G \times G \to G$ la i-ème projection et $m : G \times G \to G$ la multiplication sur G. On appelle *éléments primitifs*, les éléments de $F(G)$ appartenant au noyau de $F(pr_1) + F(pr_2) - F(m)$. Soit h^G le foncteur de groupes représenté par G. Le lemme de Yoneda établit que les transformations naturelles $h^G \to F$ de foncteurs d'*ensembles* correspondent exactement aux éléments de $F(G)$. On peut alors montrer que les éléments primitifs de $F(G)$ correspondent précisément aux homomorphismes de foncteurs *de groupes* $h^G \to F$. En effet, le lemme de Yoneda fournit un isomorphisme

$$\begin{aligned} \phi : F(G) &\to \mathrm{Hom}(h^G, F) \\ \beta &\mapsto h^G(T) \to F(T); \quad x \mapsto F(x)(\beta); \quad T \in \mathrm{ob}(\mathfrak{C}) \end{aligned}$$

Si $f \in F(G)$ est un élément primitif, alors

$$F(pr_1)(f) + F(pr_2)(f) - F(m)(f) = 0$$

On veut montrer que $\phi(f)$ est un morphisme de foncteurs de groupes, i.e. pour tout S-schéma T, pour tout $x, y \in h^G(T)$, $\phi(f)(x \star y) = \phi(f)(x) + \phi(f)(y)$, qui est équivalent à $F(x \star y)(f) = F(x)(f) + F(y)(f)$. Si l'on voit x et y comme des morphismes $T \to G$, on a

$$\begin{aligned} (F(pr_1) + F(pr_2) - F(m))(f) = 0 &\implies F(x, y) \circ (F(pr_1) + F(pr_2) - F(m))(f) = 0 \\ &\implies F(pr_1 \circ (x, y)) + F(pr_2 \circ (x, y)) - F(m \circ (x, y))(f) = 0 \\ &\implies F(x)(f) + F(y)(f) - F(x \star y)(f) = 0 \end{aligned}$$

L'autre sens est fait de la même manière.

est un ouvert dense de X. Alors, le morphisme de restriction

$$H^1_{klp}(X,G) \to H^1_{fppf}(U,G)$$

est injectif.

Notation 6.1.0.1. *A présent, on munit* $\mathrm{Spec}(R)$ *de sa log structure standard et $\mathcal{C}$ de la log structure induite par sa fibre spéciale $\mathcal{C}_k$ (vue comme un diviseur) : c'est aussi la log structure image inverse de celle de* $\mathrm{Spec}(R)$.
Comme C est l'ouvert de trivialité de cette log structure, la restriction d'un torseur logarithmique sur $\mathcal{C}$ à C est un torseur fppf.
Pour $\mathcal{G}$ un R-modèle de G, on note par $H^1_{klp}(\mathcal{C},\mathcal{Q}_0,\mathcal{G})$ le premier groupe de cohomologie qui classifie les $\mathcal{G}$-torseurs logarithmiques pointés (relativement à $\mathcal{Q}_0$).

En considérant la même flèche de restriction que dans la Proposition 6.1.0.1, mais cette fois-ci sur le groupe des torseurs pointés, on déduit immédiatement que

Corollaire 6.1.0.1. *Si $\mathcal{G}$ est un R-modèle de G, le morphisme de restriction*

$$H^1_{klp}(\mathcal{C},\mathcal{Q}_0,\mathcal{G}) \to H^1_{fppf}(C,Q_0,G)$$

est injectif.

Lemme 6.1.0.2. *L'extension de Poincaré $\mathcal{P}_K$ de l'Exemple 5.1.0.1 se prolonge de façon unique en une extension logarithmique de $\mathcal{J}_{\mathcal{C}} := \mathcal{J}\times\mathcal{C}$ par $\mathbb{G}_{m_{\mathcal{C}}}$, que l'on note $\mathcal{P}^{log}$. De plus, le fibré en droites qui y correspond (et que l'on note pareillement) est rigidifié par rapport à la section prolongeant sur $\mathcal{C}$ la section $\mathcal{Q}_0$ induite par Q_0.*

Démonstration. Comme $\mathcal{J}$ est le modèle de Néron de J sur R, il est lisse et de type fini sur R. Donc, $\mathcal{J}_{\mathcal{C}}$ est lisse et de type fini sur $\mathcal{C}$. Il découle alors du Théorème 5.2.0.3 que $\mathcal{P}_K$ se prolonge de manière unique en une extension logarithmique de $\mathcal{J}_{\mathcal{C}}$ par $\mathbb{G}_{m_{\mathcal{C}}}$, que l'on note $\mathcal{P}^{log}$.
Il reste à voir que $\mathcal{P}^{log}$ est rigidifié. On considère le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Ext}^1_{klp}(\mathcal{J}\times\mathcal{C},\mathbb{G}_{m,\mathcal{C}}) & \xrightarrow{\mathcal{Q}^*_{0,\mathcal{J}}} & \mathrm{Ext}^1_{klp}(\mathcal{J},\mathbb{G}_m) \\
\simeq\big\downarrow & & \big\downarrow\simeq \\
\mathrm{Ext}^1_{fppf}(J\times C,\mathbb{G}_{m,C}) & \xrightarrow{Q^*_{0,J}} & \mathrm{Ext}^1_{fppf}(J,\mathbb{G}_m)
\end{array}$$

dans lequel $\mathcal{Q}_{0,\mathcal{J}} : \mathcal{J} \to \mathcal{J}\times\mathcal{C}$ est la section induite par $\mathcal{Q}_0$, et les flèches verticales sont les restrictions qui sont des isomorphismes d'après le Théorème 5.2.0.3. Comme $\mathcal{P}_K$ est rigidifié le long de la section induite par Q_0, cela implique que $Q^*_{0,J}\mathcal{P}_K$ est trivial. Il vient alors du diagramme ci-dessus que $\mathcal{Q}^*_{0,\mathcal{J}}\mathcal{P}^{log}$ est trivial aussi.

□

On peut maintenant énoncer le premier résultat de la thèse :

Théorème 6.1.0.1. *On considère un G-torseur fppf $Y \to C$ pointé (relativement à Q_0). Supposons que le K-morphisme de groupes $G^D \to J$ qui y correspond (Lemme 6.1.0.1) se prolonge en un R-morphisme de groupes $i : \mathcal{G}^D \to \mathcal{J}$, pour un certain R-modèle $\mathcal{G}$ de G. Alors $Y \to C$ se prolonge de manière unique en un $\mathcal{G}$-torseur log sur $\mathcal{C}$, qui est pointé relativement à $\mathcal{Q}_0$.*

Démonstration. Soit $\mathcal{P}^{log}$ l'extension du Lemme 6.1.0.2 ci-dessus. En utilisant le morphisme

$$(i \times id_{\mathcal{C}}) : \mathcal{G}^D \times \mathcal{C} \to \mathcal{J} \times \mathcal{C}$$

on tire en arrière $\mathcal{P}^{log}$ et on obtient une extension $(i \times id_{\mathcal{C}})^*(\mathcal{P}^{log})$ de $\mathcal{G}^D_{\mathcal{C}}$ par $\mathbb{G}_{m,\mathcal{C}}$. Le Corollaire 5.3.0.1, fournit un isomorphisme canonique

$$H^1_{klp}(\mathcal{C}, \mathcal{G}) \simeq \mathrm{Ext}^1_{klp}(\mathcal{G}^D_{\mathcal{C}}, \mathbb{G}_{m,\mathcal{C}}) \tag{24}$$

On peut donc associer à l'extension $(i \times id_{\mathcal{C}})^*(\mathcal{P}^{log})$ un $\mathcal{G}$-torseur logarithmique sur $\mathcal{C}$. De plus, comme $\mathcal{P}^{log}$ est pointé relativement à $\mathcal{Q}_0$, $(i \times id_{\mathcal{C}})^*(\mathcal{P}^{log})$ a la même propriété, ainsi que le $\mathcal{G}$-torseur sur $\mathcal{C}$ qui y correspond. L'isomorphisme (24) étant compatible avec l'isomorphisme du Lemme 6.1.0.1, on en déduit que la fibre générique du torseur pointé obtenu n'est autre que Y. L'unicité du prolongement provient du Corollaire 6.1.0.1. □

Soit $\mathcal{J}^0$ la composante identité de $\mathcal{J}$, alors $\mathcal{J}^0_{\mathcal{C}} := \mathcal{J}^0 \times \mathcal{C}$ est lisse sur $\mathcal{C}$, de type fini et a des composantes connexes sur $\mathcal{C}$. On en déduit d'après le Théorème 5.2.0.1 que le morphisme de restriction à la fibre générique

$$\mathrm{Ext}^1_{fppf}(\mathcal{J}^0_{\mathcal{C}}, \mathbb{G}_{m,\mathcal{C}}) \to \mathrm{Ext}^1_{fppf}(J_C, \mathbb{G}_{m,C})$$

est un isomorphisme.
Par conséquent, on peut prolonger l'extension de Poincaré $\mathcal{P}_K$ en une extension fppf de $\mathcal{J}^0$ par $\mathbb{G}_m$ sur $\mathcal{C}$, que l'on note $\mathcal{P}^0$. En fait, étant donné l'unicité du prolongement d'une extension, et comme toute extension fppf peut être vue comme une extension logarithmique, il vient que le pull-back de $\mathcal{P}^{log}$ par l'inclusion $\mathcal{J}^0 \hookrightarrow \mathcal{J}$ est égal à $\mathcal{P}^0$, ce qui implique pour les fibrés en droites associés

$$\mathcal{P}^{log}_{|\mathcal{J}^0 \times \mathcal{C}} = \mathcal{P}^0$$

En particulier, le fibré en droites associé à $\mathcal{P}^0$ est pointé relativement à $\mathcal{Q}_0$.

En suivant le même schéma de preuve que le Théorème 6.1.0.1, nous retrouvons un résultat bien connu, à savoir que la donnée d'un $\mathcal{G}$-torseur fppf pointé $\mathcal{Y} \to \mathcal{C}$ équivaut à celle d'un R-morphisme de foncteurs de groupes $\mathcal{G}^D \to \mathrm{Pic}_{\mathcal{C}/R}$. Le théorème suivant a le mérite de montrer que ce prolongement fppf se construit à partir de l'extension de Poincaré.

Théorème 6.1.0.2. *Soit $Y \to C$ un G-torseur fppf pointé. Supposons que le K-morphisme $G^D \to J$ du Lemme 6.1.0.1 se prolonge en un R-homomorphisme $i : \mathcal{G}^D \to \mathcal{J}$, avec $\mathcal{G}$ un R-modèle de G. Alors Y se prolonge de manière unique en un $\mathcal{G}$-torseur fppf pointé sur $\mathcal{C}$, si et seulement si le morphisme i se factorise par $\mathcal{J}^0$.*

Démonstration. Commençons par prouver l'implication indirecte. Supposons donc que l'homomorphisme $G^D \to J$ se prolonge en un R-homomorphisme $i : \mathcal{G}^D \to \mathcal{J}^0$. On considère l'extension fppf $\mathcal{P}^0$ construite précédemment. Alors $(i \times id_{\mathcal{C}})^*\mathcal{P}^0$ appartient à $\mathrm{Ext}^1_{fppf}(\mathcal{G}^D_{\mathcal{C}}, \mathbb{G}_{m,\mathcal{C}})$. Or, par le Théorème 5.3.0.1, on a un isomorphisme

$$H^1_{fppf}(\mathcal{C}, \mathcal{G}) \simeq \mathrm{Ext}^1_{fppf}(\mathcal{G}^D_{\mathcal{C}}, \mathbb{G}_{m,\mathcal{C}})$$

Par conséquent, on obtient à partir de i un $\mathcal{G}$-torseur fppf sur $\mathcal{C}$. De plus, comme $\mathcal{P}^0$ est rigidifié le long de la section $\mathcal{Q}_0$ en tant que fibré en droites, le torseur associé est pointé relativement à $\mathcal{Q}_0$. De plus, l'isomorphisme plus haut étant compatible avec l'isomorphisme du Lemme 6.1.0.1, on en déduit que la fibre générique du torseur prolongé est $Y \to C$. L'unicité du prolongement provient et de l'injectivité de

$$H^1_{fppf}(\mathcal{C}, \mathcal{Q}_0, \mathcal{G}) \hookrightarrow H^1_{klp}(\mathcal{C}, \mathcal{Q}_0, \mathcal{G})$$

et du Corollaire 6.1.0.1.

Montrons à présent l'autre sens : supposons que Y se prolonge en un $\mathcal{G}$-torseur fppf (pointé) sur $\mathcal{C}$.
Comme le morphisme structural $f : \mathcal{C} \to \mathrm{Spec}(R)$ admet une section, alors $\mathcal{O}_R \simeq f_*(\mathcal{O}_{\mathcal{C}})$ est vérifié universellement. Sous cette condition, Raynaud a prouvé dans [31, §6.2 ; Proposition 6.2.1], que la donnée d'un $\mathcal{G}$-torseur fppf pointé sur $\mathcal{C}$ est équivalente à la donnée d'un morphisme de foncteurs de groupes $\mathcal{G}^D \to \mathrm{Pic}_{\mathcal{C}/R}$, où $\mathrm{Pic}_{\mathcal{C}/R}$ est le foncteur de Picard relatif de $\mathcal{C}$ sur $\mathrm{Spec}(R)$. Dans notre contexte, $\mathcal{G}$ étant fini, il est de torsion, donc le morphisme précédent se factorise par le foncteur $\mathrm{Pic}^{\tau}_{\mathcal{C}/R}$ où $\mathrm{Pic}^{\tau}_{\mathcal{C}/R} := \cup_n n^{-1}(\mathrm{Pic}_{\mathcal{C}/R})$, n étant la multiplication dans $\mathrm{Pic}_{\mathcal{C}/R}$.
Comme rappelé dans [31, §8.0], comme $\mathcal{C}$ est une courbe relative, $\mathrm{Pic}^{\tau}_{\mathcal{C}/R} = \mathrm{Pic}^0_{\mathcal{C}/R}$. De plus, sous les hypothèses envisagées, $\mathrm{Pic}^0_{\mathcal{C}/R}$ est représentable par $\mathcal{J}^0$, la composante identité du modèle de Néron $\mathcal{J}$. En effet, comme $f : \mathcal{C} \to \mathrm{Spec}(R)$ admet une section, alors le pgcd des multiplicités géométriques des composantes irréductibles de la fibre spéciale $\mathcal{C}_k$ vaut 1 [7]. Il suffit alors d'appliquer le Théorème 4.5.0.2(2). □

7. Notons $s : \mathrm{Spec}(R) \to \mathcal{C}$ la section : on obtient un diviseur horizontal. Si $x \in \mathcal{C}_k$ est un point dans l'image de s, alors x est forcément un point non-singulier de $\mathcal{C}_k$ par [33, §4 ; Proposition 4.3]. Cela implique que x appartient forcément à une composante de $\mathcal{C}_k$ de multiplicité 1, car autrement, il ne serait pas régulier.

6.1.1 Obstruction au prolongement en un torseur fppf.

Étant donné un G-torseur fppf $Y \to C$ qui se prolonge en un $\mathcal{G}$-torseur logarithmique $\mathcal{Y} \to \mathcal{C}$, on a démontré dans le Théorème 6.1.0.2 que ce torseur prolongé provient d'un torseur fppf si et seulement si le morphisme $\mathcal{G}^D \to \mathcal{J}$ se factorise par $\mathcal{J}^0$. Dans cette partie, nous donnons un autre critère pour que le torseur $Y \to C$ se prolonge en un torseur fppf sur $\mathcal{C}$. De plus, on calculera l'obstruction à ce prolongement.

A chaque G-torseur $Y \to C$, dont le morphisme de groupes associé $G^D \to J$ (Lemme 6.1.0.1) se prolonge en un morphisme $i : \mathcal{G}^D \to \mathcal{J}$, on associe, à travers la construction suivante, un morphisme $\gamma(\mathcal{P}^{log}) \circ i$, avec lequel on définit le critère mentionné ci-dessus.

Soit E_Y l'unique élément de $\mathrm{Ext}^1_{fppf}(G^D_C, \mathbb{G}_{m,C})$ qui correspond au torseur Y (cf. Théorème 5.3.0.1). D'après le Théorème 6.1.0.1, comme on a un morphisme $i : \mathcal{G}^D \to \mathcal{J}$, on sait que E_Y se prolonge de manière unique en un élément E_Y^{log} de $\mathrm{Ext}^1_{klp}(\mathcal{G}^D_{\mathcal{C}}, \mathbb{G}_{m,\mathcal{C}})$, qui est donné explicitement par

$$E_Y^{log} := (i \times id_{\mathcal{C}})^* \mathcal{P}^{log}$$

Considérons le diagramme suivant où les suites exactes proviennent d'une suite spectrale comparant les cohomologies fppf et klp [15, §4.1 ; Suite exacte 4.1.4] (pour la définition de $R^1\epsilon_*\mathbb{G}_m$, on renvoie à la section 2.4) et les flèches verticales sont induites par $i : \mathcal{G}^D \to \mathcal{J}$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1_{fppf}(\mathcal{J}_{\mathcal{C}}, \mathbb{G}_{m,\mathcal{C}}) \arrow[r, "\omega"] \arrow[d] & \mathrm{Ext}^1_{klf}(\mathcal{J}_{\mathcal{C}}, \mathbb{G}_{m,\mathcal{C}}) \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{J}_{\mathcal{C}}, R^1\epsilon_*\mathbb{G}_m) \arrow[d, "h \mapsto h \circ i"] \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1_{fppf}(\mathcal{G}^D_{\mathcal{C}}, \mathbb{G}_{m,\mathcal{C}}) \arrow[r, "\alpha"'] & \mathrm{Ext}^1_{klf}(\mathcal{G}^D_{\mathcal{C}}, \mathbb{G}_{m,\mathcal{C}}) \arrow[r, "\beta"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{G}^D_{\mathcal{C}}, R^1\epsilon_*\mathbb{G}_m)
\end{tikzcd}$$

β associe à E_Y^{log} un certain morphisme $\mathcal{G}^D_{\mathcal{C}} \to R^1\epsilon_*\mathbb{G}_m$. La partie droite du diagramme étant commutative, on a :

$$\gamma(\mathcal{P}^{log}) \circ i = (\beta \circ (i \times id)^*)(\mathcal{P}^{log}) : \mathcal{G}^D_{\mathcal{C}} \to R^1\epsilon_*\mathbb{G}_m \tag{25}$$

Théorème 6.1.1.1. *Soit $Y \to C$ un G-torseur fppf pointé et supposons que k est parfait. Supposons que le K-homomorphisme $G^D \to J$ peut être prolongé en un R-homomorphisme $i : \mathcal{G}^D \to \mathcal{J}$, où $\mathcal{G}$ est un modèle de G. Soit $\gamma(\mathcal{P}^{log} \circ i)$ le morphisme associé au torseur Y défini dans (25). Alors Y se prolonge de manière unique en un $\mathcal{G}$-torseur fppf pointé sur $\mathcal{C}$, si et seulement si $\gamma(\mathcal{P}^{log}) \circ i = 0$.*
De plus, si $\Phi := \mathcal{J}_k/\mathcal{J}_k^0$, on peut identifier $\gamma(\mathcal{P}^{log})$ à un morphisme

$$\gamma_\Phi(\mathcal{P}^{log}) : \Phi \to \bigoplus_{i=1}^{r} (\mathbb{Q}/\mathbb{Z}).E_i$$

tel que, pour chaque k-point t, on ait

$$\gamma_\Phi(\mathcal{P}^{log})(t) = (q_1, \ldots, q_r) \mod \mathbb{Z}$$

où les q_i sont des nombres rationnels dépendant de t. Qui plus est, le morphisme $\gamma_\Phi(\mathcal{P}^{log})$ est injectif, ce qui signifie que le noyau de $\gamma(\mathcal{P}^{log})$ est exactement $\mathcal{J}^0$.

Démonstration. Si on suppose qu'on a une extension fppf du torseur, d'après le Théorème 5.3.0.1, ce torseur fppf prolongé correspond à un unique élément de $\mathrm{Ext}^1_{fppf}(\mathcal{G}^D_{\mathcal{C}}, \mathbb{G}_{m,\mathcal{C}})$, dont la fibre générique est E_Y. Par conséquent, E_Y^{log} est contenu dans $\mathrm{Im}(\alpha) = \mathrm{Ker}(\beta)$. D'où, $(\beta \circ (i \times id)^*)(\mathcal{P}^{log}) = \beta(E_Y^{log}) = 0$, et donc $\gamma(\mathcal{P}^{log}) \circ i = 0$ dans $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{G}^D_{\mathcal{C}}, R^1\epsilon_*\mathbb{G}_m)$.
La preuve dans l'autre sens se fait en utilisant les mêmes arguments, en remontant la preuve.

Prouvons maintenant la deuxième partie du théorème. On va décrire le morphisme $\gamma(\mathcal{P}^{log})$ sur les k-points (remarquons que le faisceau $R^1\epsilon_*\mathbb{G}_m$ a pour support la fibre spéciale $\mathcal{C}_k$, car la log structure est triviale sur la fibre générique par définition, ce qui implique que $\gamma(\mathcal{P}^{log})$ a pour support la fibre spéciale aussi).

Soit $E_1, \ldots, E_r$ les composantes irréductibles de $\mathcal{C}_k$, de sorte que

$$\mathcal{C}_k = \sum_{i=1}^{r} n_i E_i$$

où les n_i sont des entiers positifs. $\gamma(\mathcal{P}^{\log})$ est un morphisme de faisceaux pour la topologie fppf sur $\mathcal{C}$

$$\gamma(\mathcal{P}^{\log}) : \mathcal{J}_{\mathcal{C}} \to R^1\epsilon_*\mathbb{G}_m$$

Il vient de [15, §2.3 ; Theorem 2.2.2] que la restriction du faisceau $R^1\epsilon_*\mathbb{G}_m$ au site lisse de $\mathcal{C}$ peut être décrite comme suit

$$(R^1\epsilon_*\mathbb{G}_m)|_{\mathrm{smooth}/\mathcal{C}} \simeq \bigoplus_{i=1}^{r} (\mathbb{Q}/\mathbb{Z}).E_i$$

où $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}).E_i$ est le faisceau gratte-ciel à support sur $E_i \subset \mathcal{C}$ et à valeur $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Comme $\mathcal{J}_{\mathcal{C}}$ est un schéma en groupes lisse sur $\mathcal{C}$, on a

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{J}_{\mathcal{C}}, R^1\epsilon_*\mathbb{G}_m) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{J}_{\mathcal{C}}, \bigoplus_{i=1}^{r} (\mathbb{Q}/\mathbb{Z}).E_i) = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathrm{Hom}_{E_i}(\mathcal{J}_{E_i}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

où la seconde égalité provient de la formule d'adjonction.

On observe maintenant que comme E_i est une composante irréductible et verticale de $\mathcal{C}$, on a

$$\mathrm{Hom}_{E_i}(\mathcal{J}_{E_i}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \mathrm{Hom}_k(\mathcal{J}_k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \mathrm{Hom}_k(\Phi, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

où $\Phi = \mathcal{J}_k/\mathcal{J}_k^0$ est le groupe des composantes connexes de $\mathcal{J}_k$, et la dernière égalité provient du fait que $\mathrm{Hom}(\mathcal{J}_k^0, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = 0$.

En suivant ces isomorphismes, $\gamma(\mathcal{P}^{\log})$ peut être identifié à un morphisme

$$\gamma_\Phi(\mathcal{P}^{\log}) : \Phi \to \bigoplus_{i=1}^{r} (\mathbb{Q}/\mathbb{Z}).E_i$$

On va décrire ce dernier morphisme sur les k-points. On peut supposer ici que R est strictement hensélien.

Soit $t_k \in \Phi(k)$, alors t_k provient d'un k-point de $\mathcal{J}_k$ car la flèche $\mathcal{J}_k(k) \to \Phi(k)$ est surjective (ici, on a utilisé le fait que k est algébriquement clos). De plus, on peut relever t_k à un point $t \in \mathcal{J}(R)$ car R est hensélien et $\mathcal{J}$ est lisse [10, §2.3 ; Proposition 5].
Soit $L_t := (id_C \times t_K)^*\mathcal{P}_K$ le fibré en droites de degré relatif zéro sur C, correspondant à $t_K \in J(K)$. Alors $\mathcal{L}_t := (id_{\mathcal{C}} \times t)^*\mathcal{P}^{\log}$ est un fibré en droites logarithmique sur $\mathcal{C}$, ayant pour fibre générique L_t.

Rappelons que d'après le Théorème 2.4.1.1, le groupe de Picard logarithmique de $\mathcal{C}$ peut être décrit comme le groupe des diviseurs à coefficients rationnels sur $\mathcal{C}_k$, modulo les diviseurs principaux. On peut alors décrire $\mathcal{L}_t$ comme une telle classe de diviseurs.

On rappelle que d'après le Théorème 4.5.0.2(2), on a un isomorphisme canonique $\mathcal{J}^0 \simeq \mathrm{Pic}^0_{\mathcal{C}/R}$; d'où, si n est un entier tel que $n\Phi = 0$, alors $L_{nt} \simeq L_t^{\otimes n}$ se prolonge de manière unique en un élément de $\mathrm{Pic}^0_{\mathcal{C}/R}(R)$ i.e. un fibré en droites rigidifié sur $\mathcal{C}$, de degré nul. Ainsi, si $\Delta_K(t)$ est un diviseur représentant L_t, alors il existe un diviseur $\Delta(nt)$ sur $\mathcal{C}$, qui a un degré relatif nul, et dont la fibre générique est $n\Delta_K(t)$. De plus, $\Delta(nt)$ est unique, à multiple de la fibre spéciale $\mathcal{C}_k$ près (cf. [31, §6.4 ; Theorem 6.4.1(3)]) ; on peut alors le choisir de sorte que son coefficient par rapport à la composante où Q_0 est réduit est zéro. Il vient alors que

$$D_t := \frac{1}{n}\Delta(nt) \tag{26}$$

est un diviseur avec des coefficients rationnels prolongeant $\Delta_K(t)$, de degré relatif nul (dans le sens où un de ses multiples l'est), et qui intersecte trivialement la section Q_0. D'après la discussion précédente, c'est l'unique tel diviseur.
Il s'en suit de la structure sous-jacente d'extension de $\mathcal{P}^{\log}$ que $\mathcal{L}_{nt} = \mathcal{L}_t^{\otimes n}$, et donc, par l'argument d'unicité évoqué plus haut, $\mathcal{L}_t$ est la classe du diviseur D_t.

A présent, $\gamma_\phi(\mathcal{P}^{\log})(t)$ peut être décrit comme suit : si on écrit

$$D_t = D_t^{\mathrm{hor}} + \sum_{i=1}^{r} q_i E_i$$

où D_t^{hor} est un diviseur horizontal avec des coefficients intègres, alors on a

$$\gamma_\phi(\mathcal{P}^{\log})(t) = (q_1, \ldots, q_r) \mod \mathbb{Z} \tag{27}$$

Calculons maintenant le noyau de ce morphisme. Pour ce faire, on a besoin d'introduire quelques outils. Etant donné un diviseur de degré zéro c_K sur C, on note par $\overline{c_K}$ sa clôture schématique dans $\mathcal{C}$, qui est un diviseur de Cartier par la régularité de $\mathcal{C}$, et on note par c_k son image dans $\Phi(k)$.
On note également par $[\ ,\ ]$ le symbole de Néron comme défini dans [30, §2.1 ; Définition 2.1]. Il vient de (26) que

$$[c_K\ ,\ (D_t)_K] = \overline{c_K} \cdot D_t$$

où $\overline{c_K} \cdot D_t$ est le nombre d'intersection, défini pour les diviseurs à coefficients rationnels, en prolongeant la définition classique d'intersection locale par $\mathbb{Q}$-linéarité.

D'autre part, d'après [30, §4 : Lemma 4.4], on a

$$[c_K\ ,\ (D_t)_K] = \langle c_k\ ,\ t_k \rangle \mod \mathbb{Z} \tag{28}$$

où $\langle , \rangle$ est l'accouplement de monodromie de Grothendieck $\Phi \times \Phi \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.
Supposons que t appartient au noyau de $\gamma(\mathcal{P}^{\log})$. Alors, d'après (27), tous les q_i sont des entiers. Ainsi, pour tout diviseur de degré zéro c_K sur C, il vient de (28) que $\langle c_k\ ,\ t_k \rangle = 0$. Par conséquent, $\langle c_k\ ,\ t_k \rangle = 0$ pour tous les choix possibles de c_k. Le corps k étant algébriquement clos, l'accouplement de monodromie est alors parfait [9, Theorem 1.3] et il s'en suit que $t_k = 0$. □

6.2 Partie II : Critère de finitude pour $\mathcal{J}[p]$.

Pour cette partie, R désigne un anneau de valuation discrète, de corps de fractions K et de corps résiduel k de caractéristique $p > 0$ et supposé algébriquement clos.

Pour C une K-courbe lisse et géométriquement connexe et J sa Jacobienne, cette section est consacrée à la généralisation d'un résultat de Chiodo [11, §7 ; Propositions 7.4.1 and 7.5.1], qui fournit une condition nécessaire et suffisante pour que $J[r]$ admette un modèle étale fini sur R, avec r et p premiers entre eux. Un tel modèle est un modèle de Néron de $J[r]$, et est donc égal à $\mathcal{J}[r]$.

Ici, nous traiterons le cas où p divise r. Dans ce cas, un modèle fini de $J[r]$ n'est pas forcément étale, et donc, n'est pas forcément le modèle de Néron de $J[r]$. On cherchera une condition pour que $\mathcal{J}[r]$ soit fini et plat sur R. On verra que le résultat de Chiodo se généralise à ce cas.

Une fois que cela est fait, et étant donné un K-schéma en groupes fini et plat G, tué par r, on combine ce critère de finitude de $\mathcal{J}[r]$ avec le Théorème 6.1.0.1, afin de montrer l'existence d'un R-modèle de G et d'un prolongement d'un G-torseur en un torseur sur le modèle minimal régulier de la courbe C.

On commence cette section avec quelques préliminaires sur la semistabilité. Pour la terminologie sur la théorie des graphes, la référence utilisée est [11, §2.1 and §2.2].

Une courbe propre de genre ≥ 2 sur un corps algébriquement clos k est dite **semi-stable**, si elle est réduite, connexe, ses seules singularités sont des noeuds, et ses composantes irréductibles isomorphes à $\mathbb{P}^1_k$ intersectent les autres composantes en au moins deux points. [3, Exposé 1 ; Définitions 1.1 et 1.2].

Un morphisme plat et propre de schémas $\mathcal{C} \to \mathrm{Spec}(R)$ est **semi-stable**, si ses fibres géométriques sont des courbes semi-stables. En particulier, étant donné une courbe lisse C sur K, un schéma semi-stable $\mathcal{C} \to \mathrm{Spec}(R)$ muni d'un isomorphisme $\mathcal{C} \times_{\mathrm{Spec}(R)} \mathrm{Spec}(K) \simeq C$ est dit un **modèle semi-stable** de C sur R et, par abus de notation, on dit que $\mathcal{C}$ est une courbe semi-stable sur R.

Une variété abélienne A sur K a une réduction semisatble sur R, si la composante identité de la fibre spéciale $\mathcal{A}_k$ de son modèle de Néron $\mathcal{A}$ a pour rang unipotent 0, ce qui veut dire que $\mathcal{A}^0_k$ est une extension d'une variété abélienne par un tore.

Cette terminologie est justifiée par le fait suivant : étant donné une K-courbe lisse et géométriquement connexe C de genre $g \geq 2$, les conditions suivantes sont équivalentes :

— C a une réduction semi-stable sur R

— Le modèle régulier minimal de C sur R est semi-stable ;

— La variété Jacobienne J de C a une réduction semi-stable sur R.

Voir [3, Exposé 1 ; Proposition 2.2] pour l'équivalence des deux premières assertions, et [3, Exposé 1 ; Proposition 5.7] pour l'équivalence avec la dernière.

On fixe C une K-courbe lisse géométriquement connexe de genre $g \geq 2$, ayant une réduction semi-stable sur R. Soit $\mathcal{C}$ le modèle régulier minimal de C sur R. On note par Γ le graphe dual de la fibre spéciale $\mathcal{C}_k$: c'est le graphe dont l'ensemble des arêtes est l'ensemble des composantes irréductibles de $\mathcal{C}_k$, et dont l'ensemble des sommets est l'ensemble des noeuds de $\mathcal{C}_k$; on note par $b_1(\Gamma)$ le premier nombre de Betti de Γ.

Comme précédemment, J est la Jacobienne de C et $\mathcal{J}$ son modèle de Néron sur R. On note par Φ_k le groupe des composantes de la fibre spéciale $\mathcal{J}_k$ de $\mathcal{J}$.

Définition 6.2.0.1. *Dans un graphe, un* circuit *est un chemin qui commence et se termine sur le même sommet. Un circuit où aucun sommet ne se répète est appelé un* cycle.

Si Ω est un graphe, on note par $\mathrm{Cyc}(\Omega)$ *l'ensemble des cycles dans Ω, et on définit*

$$c_2(\Omega) := \gcd\{\textit{nombre d'arêtes communes à } C \textit{ et } C' \mid C, C' \in \mathrm{Cyc}(\Omega)\}$$

Si $\mathrm{Cyc}(\Omega) = \varnothing$*, on pose* $c_2(\Omega) = 0$.

Exemple 6.2.0.1. *Si Ω est un polygone avec d arêtes, alors $c_2(\Omega) = d$. Si Ω consiste en deux polygones avec d arêtes chacun, partageant d' arêtes, alors $c_2(\Omega) = \gcd(d, d')$. D'autres exemples sont donnés dans [11, §5.6].*

Avec les hypothèses ci-dessus, l'énoncé suivant est prouvé par Chiodo [11, §7 ; Proposition 7.5.1], en utilisant une terminologie légèrement différente :

Proposition 6.2.0.1. *(Critère de Chiodo). On a*

$$\Phi_k[r] \simeq (\mathbb{Z}/r\mathbb{Z})^{b_1(\Gamma)}$$

si et seulement si r divise $c_2(\Gamma)$.

L'étape essentielle dans la généralisation du résultat de Chiodo est la suivante :

Proposition 6.2.0.2. *Soit $r > 1$ un entier. Le schéma en groupes $\mathcal{J}[r]$ est fini et plat, si et seulement si la courbe C a une réduction semi-stable et que le graphe dual Γ de sa fibre spéciale satisfait la condition*

$$\Phi_k[r] \simeq (\mathbb{Z}/r\mathbb{Z})^{b_1(\Gamma)}$$

Démonstration. Le cas où r et p sont premiers entre eux a été prouvé par Chiodo. Par conséquent, on suppose ici que p divise r.

Premièrement, on observe que si C n'a pas une réduction semisatble, alors sa Jacobienne J n'a pas de réduction semi-stable non plus. De ce fait, le rang unipotent de $\mathcal{J}_k$ n'est pas 0, ce qui implique que $\mathcal{J}_k$ contient le groupe additif $\mathbb{G}_a$ comme sous-groupe. Or, $\mathbb{G}_{a,k}[p] = \mathbb{G}_{a,k}$ puisque p est égal à la caractéristique de k, et ainsi $\mathcal{J}_k[r]$ n'est pas un schéma en groupes fini, puisqu'il contient un sous-schéma en groupes de dimension 1. Par conséquent, le fait que C a une réduction semi-stable est une condition nécessaire pour que $\mathcal{J}[r]$ soit fini.

Supposons maintenant que le modèle régulier minimal $\mathcal{C}$ de C est semi-stable. Comme J a une réduction semi-stable, $\mathcal{J}[r]$ est quasi-fini et plat (cf. [10, §7.3 ; Lemme 2]). D'après le Lemme 6.2.0.1 ci-dessous, $\mathcal{J}[r]$ est fini si et seulement si sa fibre spéciale $\mathcal{J}_k[r]$ a un rang r^{2g} en tant que k-schéma fini. D'un autre côté, par le lemme du serpent, on a une longue suite exacte :

$$0 \to \mathcal{J}_k^0[r] \to \mathcal{J}_k[r] \to \Phi[r] \to \mathcal{J}_k^0/r \to \cdots$$

Etant donné que J est semi-stable, la flèche de multiplication $\mathcal{J}_k^0 \xrightarrow{r} \mathcal{J}_k^0$ est surjective [10, §7.3 ; Lemme 1], alors $\mathcal{J}_k^0/r = 0$. Par conséquent, on a

$$\mathrm{rang}\mathcal{J}_k[r] = \mathrm{rang}\mathcal{J}_k^0[r] + \mathrm{rang}\Phi[r]. \tag{29}$$

La semistabilité de C implique que $\mathrm{Pic}^0_{\mathcal{C}} \simeq \mathcal{J}^0$ (ici, comme la fibre spéciale de $\mathcal{C}$ est réduite par définition, le pgcd des multiplicités de ses composantes irréductibles est 1, cf. Théorème 4.5.0.2(2)), et que $\mathrm{Pic}^0_{\mathcal{C}_k}$ est une extension d'une variété abélienne de rang a par un tore de rang $b_1(\Gamma)$ [10, §9.2 ; Exemple 8]. On a

$$a + b_1(\Gamma) = \dim_k H^1(\mathcal{C}_k, \mathcal{O}_{\mathcal{C}_k}) = \dim_K H^1(C, \mathcal{O}_C) = g$$

où la première égalité vient de [24, §7.5 ; Définition 5.21], et la seconde, étant donné la platitude et la projectivité de $\mathcal{C}$ sur R, vient de [24, §8.3.1 ; Corollaire 3.6].

Finalement, il est bien connu que le sous-groupe de r-torsion d'une variété abélienne (resp. tore) de dimension d est un schéma en groupes de rang r^{2d} (resp. r^d). En mettant tout ça ensemble, on déduit que

$$\mathrm{rang}\, \mathrm{Pic}^0_{\mathcal{C}_k}[r] = r^{2a} \times r^{b_1(\Gamma)} = r^{2g-b_1(\Gamma)}$$

en tant que k-schéma en groupes. Ainsi, il vient de (29) que $\mathcal{J}_k[r]$ a pour rang r^{2g} si et seulement si $\Phi_k[r]$ a pour rang $r^{b_1(\Gamma)}$, en tant que k-schéma en groupes. Comme $\Phi_k[r]$ est étale, cela signifie que $\Phi[r]$ a exactement $r^{b_1(\Gamma)}$ points sur k. Par [11, §7 ; Lemme 7.3.4], cela est équivalent à $\Phi_k[r] \simeq (\mathbb{Z}/r\mathbb{Z})^{b_1(\Gamma)}$.

□

Lemme 6.2.0.1. *Soit X un R-schéma quasi-fini plat et séparé. Si les fibres spéciale et générique de X ont le même rang, alors X est fini sur R.*

Démonstration. Par descente fidèlement plate [19, §2.7 ; Proposition 2.7.1(xv)], on peut supposer que R est un anneau de valuation discrète complet. Alors, d'après [18, §6.2 ; Corollaire 6.2.6], X est isomorphe en tant que R-schéma a l'union disjointe $X' \sqcup X''$, où X' est un R-schéma fini et X'' un R-schéma quasi-fini tels que $X'' \cap X_k = \varnothing$. La platitude de X sur R implique la platitude de X' et X'' sur R. On a alors :

$$\mathrm{rang}\ X'_K = \mathrm{rang}\ X'_k = \mathrm{rang}\ X_k$$

La première égalité vient du fait que X' est fini plat, et la seconde du fait que $X'' \cap X_k = \varnothing$. Or, on a par hypothèse $\mathrm{rang}\ X_K = \mathrm{rang}\ X_k$. Ainsi, il vient de l'égalité ci-dessus que $\mathrm{rang}\ X'_K = \mathrm{rang}\ X_K$, d'où $X'_K = X_K$. Par conséquent $X'' = \varnothing$, ce qui signifie que X est fini sur R et le résultat s'en suit. □

Corollaire 6.2.0.1. *Soit $r > 1$ un entier. Le schéma en groupes $\mathcal{J}[r]$ est fini et plat si et seulement si la courbe C a une réduction semi-stable, et que le graphe dual Γ de la fibre spéciale de $\mathcal{C}$ satisfait le critère de Chiodo.*

Démonstration. Cela se déduit en compilant la Proposition 6.2.0.1 et la Proposition 6.2.0.2. □

Corollaire 6.2.0.2. *Soit C une courbe lisse projective et géométriquement connexe sur K, de genre $g \geq 2$ et munie d'un point K-rationnel, et soit $\mathcal{C}$ le modèle régulier minimal de C sur R. Soit G un K-schéma en groupes fini plat commutatif et tué par r, et soit $Y \to C$ un G-torseur fppf pointé tel que Y est géométriquement connexe. Si $\mathcal{C}$ est semi-stable et si le critère de Chiodo est satisfait, alors G a un R-modèle (fini et plat) $\mathcal{G}$ et $Y \to C$ se prolonge de façon unique en un $\mathcal{G}$-torseur logarithmique pointé sur $\mathcal{C}$.*

Démonstration. Soit $G^D \to J$ le morphisme du Lemme 6.1.0.1 associé au G-torseur $Y \to C$. Comme G est tué par r, il en est de même pour G^D, et donc ce morphisme se factorise par $G^D \to J[r]$. De plus, étant donné que Y est géométriquement connexe, ce morphisme est injectif ; et alors, G^D peut être vu comme un sous-schéma de $J[r]$, de sorte qu'on puisse considérer $\overline{G^D}$ la clôture schématique de G^D dans $\mathcal{J}[r]$. D'après [19, §2.8 ; Proposition 2.8.5], c'est l'unique sous-schéma fermé de $\mathcal{J}[r]$ qui est plat sur R et dont la fibre générique est G^D. De plus, comme le calcul de la clôture schématique commute avec le produit fibré sur R ([19, §2.8 ; Corollaire 2.8.6]), la multiplication dans G^D se prolonge naturellement sur $\overline{G^D}$. Et donc $\overline{G^D}$ est un sous-schéma en groupes fini et plat de $\mathcal{J}[r]$.
Maintenant, comme C est semi-stable et étant donné l'hypothèse sur le graphe dual de $\mathcal{C}_k$, il vient du Corollaire 6.2.0.1 que $\mathcal{J}[r]$ est fini sur R, et donc $\overline{G^D}$ est fini sur R étant donné que les immersions fermées sont finies et la composition de morphismes finis est finie. On conclut que $\overline{G^D}$ est un modèle (fini et plat) de G^D. Si $\mathcal{G}$ est le dual de Cartier de $\overline{G^D}$, alors $\mathcal{G}$ est un modèle (fini et plat) de G, qui vient avec un morphisme d'inclusion $\mathcal{G}^D \hookrightarrow \mathcal{J}[r]$ prolongeant l'inclusion $G^D \hookrightarrow J[r]$. Il reste à utiliser le Théorème 6.1.0.1 pour conclure.

□

6.3 Partie III : Exemples de prolongement de torseurs sur une courbe hyperelliptique.

Dans cette dernière partie des résultats, on étudie le prolongement de torseurs sur une courbe donnée, afin d'illustrer les résultats de la première partie de cete thèse. Pour un nombre rationnel $c \neq \pm 1$ et un nombre premier $p \neq 2$, on considère la courbe hyperelliptique, définie sur $\mathbb{Q}$ par :

$$y^2 = f(x) = x^{2p} - (1 + c^2)x^p + c^2$$

Notons que $Q_0 = (1, 0)$ est un point rationnel sur cette courbe. Par conséquent, on peut considérer les torseurs C pointés relativement à Q_0.
On commence par construire $\mathcal{C}_l$, un modèle régulier de la courbe au-dessus de $\mathbb{Z}_l$ [8], pour un certain nombre premier l. Ainsi, sachant que la Jacobienne de cette courbe contient un sous-groupe isomorphe à $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$ [17, §3 ; Lemme 3.3], cela donne, par le Lemme 6.1.0.1, un μ_p^2-torseur pointé sur C (relativement à

8. L'emploi du terme *modèle* ici est un abus de langage. Ce qu'on veut signifier est que la fibre générique de ce *modèle* est isomorphe à la courbe après le changement de base $\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}_l$.

Q_0). Le but de cette section est d'étudier le prolongement de ce dernier en un torseur sur le modèle $\mathcal{C}_l$.

6.3.1 Une courbe hyperelliptique dont la Jacobienne contient un sous-groupe isomorphe à $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$.

Ce qui suit provient de [17, § ; Lemma 3.3]. On se donne la courbe hyperelliptique suivante C, dont l'équation affine sur $\mathbb{Q}$ est donnée par

$$y^2 = f(x) = x^{2p} - (1 + c^2)x^p + c^2$$

avec c un entier différent de ± 1 et $p \neq 2$ un nombre premier. Dans l'espace projectif, cette courbe a une singularité sur un de ses points à l'infini, que l'on peut supprimer après normalisation. On obtient alors une courbe lisse, que recouvrent les deux cartes affines suivantes :

— $y^2 = f(x) = x^{2p} - (1 + c^2)x^p + c^2$

— $t^2 = s^{2p} f(\frac{1}{s})$

et que l'on peut recoller en utilisant $(x, y) = (\frac{1}{s}, \frac{t}{s^p})$. Nous appelons cette courbe également C.

En utilisant le critère Jacobien, on peut vérifier que la courbe a mauvaise réduction au-dessus des nombres premiers 2, p et des nombres premiers qui divisent $c(c^2 - 1)$.

On a les relations suivantes :

$$(y - x^p - c)(y + x^p + c) = -(c^2 + 1)x^p$$
$$(y - x^p + c)(y + x^p - c) = -(c^2 + 1)x^p$$

Et on calcule que

$$\mathrm{div}(y - x^p - c) = p(0, c) - p\infty$$

$$\mathrm{div}(y - x^p + c) = p(0, c) - p\infty$$

où ∞ désigne un des points de C à l'infini. Ainsi, les deux diviseurs

$$(0, c) - \infty \text{ et } (0, -c) - \infty$$

définissent deux classes d'ordre p dans la Jacobienne de C, qui sont des classes de diviseurs indépendants par le théorème de Riemann-Roch. Cela signifie que la Jacobienne de C contient un sous-groupe isomorphe à $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$. Par conséquent, on a un μ_p^2-torseur pointé sur C.

Considérons $\mathcal{C}$, la surface arithmétique au-dessus de $\mathbb{Z}$ donnée par les équations :

— $y^2 = f(x) = x^{2p} - (1+c^2)x^p + c^2$

— $t^2 = s^{2p} f(\frac{1}{s})$

Il est clair que sa fibre générique est la courbe C.

6.3.2 Construction d'un modèle régulier de C et étude du prolongement de torseurs pointés au-dessus de ce dernier.

Dans cette section, on étudie deux exemples de prolongement de torseurs pointés. Pour le premier exemple, pour une classe de nombres premiers p bien choisis, et après avoir construit à partir de $\mathcal{C}$ un modèle $\mathcal{C}_p$ de C au-dessus de $\mathbb{Z}_p$, on vérifie en utilisant le Théorème 6.1.0.1 que le μ_p^2-torseur pointé sur C se prolonge en un torseur fppf sur $\mathcal{C}_p$.
Quant au second exemple, on fixe $p = 3$ et $l = c$ un nombre premier différent de p, et on construit un modèle régulier $\mathcal{C}_l$ de C sur $\mathbb{Z}_l$. En ce cas, on verra que le μ_p^2-torseur pointé ne se prolonge pas en un torseur fppf sur $\mathcal{C}_l$.

1. **Premier exemple**. On rappelle que la surface $\mathcal{C}$ au-dessus de $\mathbb{Z}$ est recouverte par les deux cartes affines :

   — $y^2 = f(x) = x^{2p} - (1+c^2)x^p + c^2$

   — $t^2 = s^{2p} f(\frac{1}{s})$

   avec c un entier différent de ± 1 et p un nombre premier impair, ne divisant pas $c(c^2-1)$ (en particulier, $p \neq 3$).

   — **Construction d'un modèle régulier $\mathcal{C}_p$ au-dessus de $\mathbb{Z}_p$.** En utilisant le critère Jacobien, on vérifie que dans chaque carte affine, il y a deux points singuliers dans la fibre de $\mathcal{C}$ au-dessus de p, se trouvant dans l'intersection de celles-ci. De ce fait, il suffit de faire la désingularisation dans une des deux cartes, par exemple, la première.

     Dans la première carte, la matrice Jacobienne au point (x, y) de $\mathcal{C}$ est donnée par

     $$J(x,y) = (-2px^{2p-1} + p(1+c^2)x^{p-1} \quad 2y) \equiv (0 \quad 2y) \mod p$$

     Par conséquent, les singularités éventuelles sont solutions du système :

     $$\begin{cases} 2y \equiv 0 \mod p \\ y^2 = (x^p-1)(x^p-c^2) \equiv (x-1)^p(x-c^2)^p \mod p \end{cases}.$$

     Ainsi, sur la surface $\mathbb{Z}[X,Y]/(Y^2 - f(X))$, au-dessus de la fibre en p, on a deux points éventuellement singuliers : $\mathfrak{M} :=< x-1, y, p >$ et $\mathfrak{M}' :=< x-c^2, y, p >$. Alors que la dimension de Krull de l'anneau local $(\mathbb{Z}[X,Y]/(Y^2-f(X)))_{\mathfrak{M}}$ est 2, on calcule que $\dim_{\mathbb{F}_p} \mathfrak{M}/\mathfrak{M}^2 = 3$.

Ainsi, $\mathfrak{M}$ n'est pas régulier, et il en va de même pour $\mathfrak{M}'$. Par la suite, on éclatera séparément $\mathcal{C}$ sur chacun de ces deux points fermés $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{M}'$.

L'éclatement de $\mathcal{C}$ en $\mathfrak{M}$ est donné par les trois cartes affines suivantes :

Carte 1 : $\mathcal{C}^1_{p,1}$. On définit de nouvelles variables $y = (x-1)v$ et $p = (x-1)w$. Écrivons $f(x) = \sum_{i=0}^{2p} a_i(x-1)^i = \sum_{i=2}^{2p} a_i(x-1)^i + p(1-c^2)(x-1)$, puisque $a_0 = 0$ et $a_1 = p(1-c^2)$. Après avoir remplacé y et p par les nouvelles variables dans l'équation de la première carte recouvrant $\mathcal{C}$, puis, en supprimant la partie exceptionnelle [9] $(x-1)^2$ [10], on obtient que $\mathcal{C}^1_{p,1}$ est donné par le système

$$\mathcal{C}^1_{p,1} \begin{cases} v^2 = \displaystyle\sum_{i=0}^{2p-2} a_{i+2}(x-1)^i + w(1-c^2) \\ (x-1)w = p \end{cases}$$

Carte 2 : $\mathcal{C}^2_{p,1}$. La deuxième carte est obtenue en utilisant les nouvelles variables $uy = x-1$ et $wy = p$. En remplaçant dans l'équation de $\mathcal{C}$, on obtient après avoir supprimé la partie exceptionnelle y^2 :

$$\mathcal{C}^2_{p,1} \begin{cases} 1 = w(1-c^2)u + \displaystyle\sum_{i=0}^{2p-2} a_{i+2}y^i u^{i+2} \\ yw = p \end{cases}$$

Carte 3 : $\mathcal{C}^3_{p,1}$. La troisième carte est obtenue en utilisant les nouvelles variables $up = x-1$ et $vp = y$. On obtient :

$$\mathcal{C}^3_{p,1} : v^2 = u(1-c^2) + \sum_{i=0}^{2p-2} a_{i+2}p^i u^{i+2}$$

Par la suite, on recolle les quatre cartes affines ensemble (les trois cartes définies ci-dessus et la partie de la carte $t^2 = s^{2p}f(\frac{1}{s})$ n'ayant pas subi d'éclatement) en utilisant les changements de variables définis ci-dessus, et cela donne alors un modèle de C sur $\mathbb{Z}$. On affirme que ce modèle construit n'est plus singulier en $\mathfrak{M}$. En effet, on doit vérifier la régularité en $\mathfrak{M}$ de chacune des trois cartes affines précédentes. Par exemple, dans la première carte $\mathcal{C}^1_{p,1}$, la matrice Jacobienne au point (x, v, w) est donnée par :

$$J(x,v,w) = \begin{pmatrix} -\sum_{i=1}^{2p-2} a_{i+2}i(x-1)^{i-1} & 2v & c^2-1 \\ w & 0 & x-1 \end{pmatrix}$$

9. Faisant partie du diviseur exceptionnel obtenu après l'éclatement.
10. Cette manipulation a déjà été justifiée dans l'Exemple 3.1.1.1.

Puisqu'on regarde les singularités après l'éclatement en $\mathfrak{M}$, on se concentre sur les points qui vérifient $x = 1$, $y = 0$ et $p = 0$. On obtient :

$$J(x, v, w) = \begin{pmatrix} -a_3 & 2v & c^2 - 1 \\ w & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On obtient le système :

$$\begin{cases} v^2 \equiv a_2 + w(1 - c^2) \mod p \\ (x-1)w \equiv 0 \mod p \\ 2vw \equiv 0 \mod p \\ (c^2 - 1)w \equiv 0 \mod p \end{cases}$$

Ainsi, $w \equiv 0 \mod p$. La première équation donne alors $v^2 - a_2 \equiv 0$. Un calcul facile donne $a_2 \equiv 0 \mod p$, et donc $v \equiv 0 \mod p$. Par conséquent, $\mathfrak{M}'' :=< x - 1, v, w, p >$ est la seule singularité possible et l'on peut vérifier que ce point est en fait régulier. En effet, on doit voir que p et w vivent dans $\mathfrak{M}''^2$. Pour p, ceci est clair puisque $p = (x-1)w$. Quant à w :

$$0 \equiv v^2 - \sum_{i=0}^{2p-2} a_{i+2}(x-1)^i - w(1-c^2) \equiv a_2 + a_3(x-1) - w(1-c^2) \mod \mathfrak{M}''^2$$

Comme a_2 et a_3 sont chacun un multiple de p (ceci se vérifie aisément), et étant donné l'hypothèse selon laquelle p ne divise pas $1 - c^2$, on en déduit que $w \in \mathfrak{M}''^2$. Par conséquent, $\mathfrak{M}''$ est régulier. En ce qui concerne les deux autres cartes, on vérifie exactement de la même manière qu'aucune n'est singulière en $\mathfrak{M}$. Finalement, on peut conclure que le modèle qu'on a construit n'est plus singulier en $\mathfrak{M}$. On tensorise alors ce dernier par $\mathbb{Z}_p$ et on obtient un modèle de C au-dessus de $\mathbb{Z}_p$. Notons-le $\mathcal{C}_{p,1}$.

On fait exactement le même travail pour l'autre point singulier de $\mathcal{C}$: l'éclatement de $\mathcal{C}$ en $\mathfrak{M}'$ est donné par les trois cartes affines suivantes :

Carte 1 : $\mathcal{C}^1_{p,2}$. On définit les nouvelles variables $y = (x-c)\beta$ et $p = (x-c)\gamma$. En écrivant $f(x) = \sum_{i=0}^{2p} b_i(x-c)^i$, on obtient :

$$\mathcal{C}^1_{p,2} \begin{cases} \beta^2 = \displaystyle\sum_{i=0}^{2p-2} b_{i+2}(x-c^2)^i - \gamma c^{2p-2}(2c^{2p} - (1+c^2)) \\ (x-c^2)\gamma = p \end{cases}$$

Carte 2 : $\mathcal{C}^2_{p,2}$. On définit les nouvelles variables $x - c = y\alpha$ et $p = y\gamma$:

$$\mathcal{C}^2_{p,2}\begin{cases} 1 = \alpha\gamma c^{2p-2}(2c^{2p} - (1+c^2)) - b_2\alpha^2 \\ y\alpha = p \end{cases}$$

Carte 3 : $\mathcal{C}^3_{p,2}$. On définit les nouvelles variables $x - c = p\alpha$ et $y = p\beta$:

$$\mathcal{C}^3_{p,2} : \beta^2 = \alpha c^{2p-2}(2c^{2p} - (1+c^2)) + \sum_{i=0}^{2p-2} b_{i+2}p^i\alpha^{i+2}$$

On recolle les quatre cartes ensemble (les trois cartes ci-dessus et la partie de la carte $t^2 = s^{2p}f(\frac{1}{s})$ n'ayant pas subi d'éclatement) en utilisant les changements de variables mentionnés ci-dessus. Cela donne alors un modèle de C sur $\mathbb{Z}$. Encore une fois, on vérifie que ce modèle n'est plus singulier en $\mathfrak{M}'$. On note par $\mathcal{C}_{p,2}$ le modèle au-dessus de $\mathbb{Z}_p$, après avoir tensorisé le recollement des quatre cartes par $\mathbb{Z}_p$. Finalement, on note par $\mathcal{C}_p$ le recollement de $\mathcal{C}_{p,1}$ et $\mathcal{C}_{p,2}$. Par le travail fait précédemment, $\mathcal{C}_p$ est un modèle *régulier* de C sur $\mathbb{Z}_p$.

— **Calcul de la fibre spéciale de $\mathcal{C}_p$ et du groupe des composantes Φ de la fibre spéciale du modèle de Néron de la Jacobienne de C.**

Dans cette section, on calcule la fibre spéciale du modèle régulier $\mathcal{C}_p$ construit précédemment, et ensuite on calculera, en utilisant le Corollaire 4.6.0.1, le groupe des composantes Φ de la fibre spéciale du modèle de Néron de la Jacobienne de C, et ce, à partir de la fibre spéciale calculée. Ce groupe donne un indice à propos de l'existence d'un prolongement fppf d'un torseur sur C. En effet, on a le lemme :

Lemme 6.3.2.1. *Supposons que R est un anneau de valuation discrète strictement hensélien, de corps résiduel k de caractéristique $p > 0$ et de corps de fractions K. Avec les hypothèses du Théorème 6.1.0.1, étant donné un G-torseur pointé sur C (relativement à $Q_0 = (1,0)$), si le morphisme $G^D \to J$ se prolonge en un morphisme $\mathcal{G}^D \to \mathcal{J}$, et si $\#\mathcal{G} \bigwedge \#\Phi = 1$, où Φ est le groupe des composantes de $\mathcal{J}_k$, alors le torseur pointé donné se prolonge en un $\mathcal{G}$-torseur fppf sur $\mathcal{C}$.*

Démonstration. Par définition, $\Phi = \mathcal{J}_k/\mathcal{J}_k^0$ (remarquons que comme R est strictement hensélien, k est algébriquement clos. Par conséquent $\mathcal{J}_k/\mathcal{J}_k^0$ est complètement déterminé par ses k-points). Ainsi, on a une suite exacte de faisceaux fppf de groupes :

$$0 \to \mathcal{J}_k^0 \to \mathcal{J}_k \to \Phi \to 0$$

de laquelle, si $\mathcal{G}_k$ est la fibre spéciale de $\mathcal{G}$, on déduit la longue suite exacte de faisceaux fppf de groupes :

$$0 \to \mathrm{Hom}_k(\mathcal{G}_k^D, \mathcal{J}_k^0) \to \mathrm{Hom}_k(\mathcal{G}_k^D, \mathcal{J}_k) \to \mathrm{Hom}_k(\mathcal{G}_k^D, \Phi) \to ...$$

Comme $\#\mathcal{G} \bigwedge \#\Phi = 1$, $\mathrm{Hom}_R(\mathcal{G}_k^D, \Phi) = \{0\}$ et le résultat découle du Théorème 6.1.0.2. $\square$

Décrivons à présent la fibre spéciale de $\mathcal{C}_p$. On peut montrer qu'après avoir recollé toutes les cartes qui recouvrent $\mathcal{C}_p$, la fibre spéciale de $\mathcal{C}_p$, que l'on note par $\tilde{\mathcal{C}}_p$, vit dans les cartes $\mathcal{C}_{p,1}^1$ et $\mathcal{C}_{p,2}^1$, hormis pour quelques points à l'infini.

La carte $\mathcal{C}_{p,1}$ contient deux composantes de la fibre spéciale, qui vivent chacune dans $\mathcal{C}_{1,p}^1$; elles s'intersectent en un seul point ($x \equiv 1, v \equiv 0, w \equiv 0 \mod p$) :

$$G_{p,1}^1 \begin{cases} x \equiv 1 \\ v^2 \equiv w(1-c^2) \end{cases} \qquad G_{p,1}^2 \begin{cases} w \equiv 0 \\ v^2 \equiv \displaystyle\sum_{i=0}^{2p-2} a_{i+2}(x-1)^i \end{cases}$$

En fait, on peut calculer les a_i et on trouve :

$$a_i = \begin{cases} 0 \quad if \quad i = 0 \\ \binom{2p}{i} - (1+c^2)\binom{p}{i} \quad if \quad 0 < i \leq p \\ \binom{2p}{i} \quad if \quad p < i \leq 2p \end{cases} \tag{30}$$

Il vient :

$$G_{p,1}^2 \begin{cases} w \equiv 0 \\ v^2 \equiv -(1+c^2)(x-1)^{p-2} + (x-1)^{2p-2} \end{cases}$$

Pour les mêmes raisons, $\mathcal{C}_{p,2}$ contient deux composantes de la fibre spéciale qui s'intersectent en un seul point ($x \equiv c, \beta \equiv 0, \gamma \equiv 0 \mod p$) :

$$G_{p,2}^1 \begin{cases} x \equiv c^2 \\ \beta^2 \equiv \gamma c^{2p-2}(2c^{2p} - (1+c^2)) \end{cases} \qquad G_{p,2}^2 \begin{cases} \gamma \equiv 0 \\ \beta^2 \equiv \displaystyle\sum_{i=0}^{2p-2} b_{i+2}(x-c)^i \end{cases}$$

Et on vérifie aussi que :

$$G^2_{p,2} \begin{cases} \gamma \equiv 0 \\ \beta^2 \equiv -(1+c^2)(x-c^2)^{p-2} + (x-c^2)^{2p-2} \end{cases}$$

Remarquons que $G^1_{p,1}$ (resp. $G^1_{p,2}$) est contenu dans le diviseur exceptionnel induit par le premier (resp. second) éclatement, tandis que $G^2_{p,1}$ (resp. $G^2_{p,2}$) intersecte le diviseur exceptionnel en un seul point. Par conséquent, après avoir recollé $\mathcal{C}_{p,1}$ et $\mathcal{C}_{p,2}$, les composantes $G^2_{p,1}$ et $G^2_{p,2}$ s'identifient puisque l'éclatement donne lieu à un isomorphisme en dehors des points éclatés. Ainsi, $\tilde{\mathcal{C}}_p$ a trois composantes (cf. la figure 2 ci-dessous).

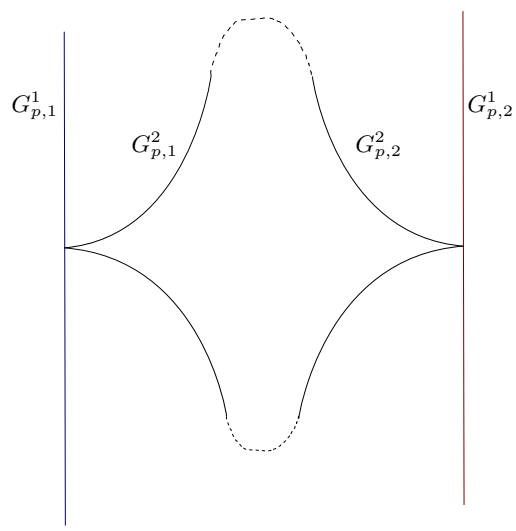

FIGURE 2 – La fibre spéciale $\tilde{\mathcal{C}}_p$.

Calculons à présent le groupe des composantes Φ. La matrice des intersections de la fibre spéciale $\tilde{\mathcal{C}}_p$ est donnée par :

$$A := \begin{bmatrix} (G^1_{p,2})^2 & G^1_{p,2}G^1_{p,1} & G^1_{p,2}G^2_{p,1} \\ G^1_{p,1}G^1_{p,2} & (G^1_{p,1})^2 & G^1_{p,1}G^2_{p,1} \\ G^2_{p,1}G^1_{p,2} & G^2_{p,1}G^1_{p,1} & (G^2_{p,1})^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

En effet, par exemple :

$$\begin{aligned}(G^1_{p,1}G^2_{p,1})_{(x=0,v=0,w=0)} &= \dim_{\mathbb{F}_p} \frac{\mathbb{F}_p[x,v,w]_{<x,v,w>}}{(x-1,w,v^2-w(1-c^2),v^2-\sum_{i=0}^{2p-2} a_{i+2}(x-1)^i)} \\ &= \dim_{\mathbb{F}_p} \frac{\mathbb{F}_p((x,v,w))}{(x,w,v^2)} \\ &= 2.\end{aligned}$$

Par le Corollaire 4.6.0.1, en utilisant cette matrice, on déduit que $\Phi \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \bigoplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

— **Étude du prolongement du μ_p^2-torseur**.
Comme on l'a vu dans la section 6.3.1, la Jacobienne de C contient un sous-groupe isomorphe à $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$; ainsi, on a un μ_p^2-torseur sur C. Soit $\mathcal{J} \to \mathbb{Z}$ le modèle de Néron de J sur $\mathbb{Z}$ (cf. Remarque 4.4.0.1) ; alors l'inclusion $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2 \subset J$ se prolonge en un morphisme $\mathcal{H} := (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2 \to \mathcal{J}$. Considérons $\mathcal{H} \times_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p \simeq \mathcal{H} \to \mathcal{J}_p$ (où $\mathcal{J}_p := \mathcal{J} \times_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p$ est le modèle de Néron de sa fibre générique car $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_p$ est un changement de base étale, cf. Proposition 4.4.0.1). En munissant $\mathcal{C}_p$ de la log structure induite par sa fibre spéciale, et par le Théorème 6.1.0.1, on sait que le μ_p^2-torseur pointé sur C considéré précédemment, se prolonge de façon unique en un μ_p^2-torseur logarithmique sur $\mathcal{C}_p$. La question est alors de savoir si ce dernier provient d'un torseur fppf ou non sur $\mathcal{C}_p$. Pour vérifier cela, en utilisant le Théorème 6.1.0.2, il suffit de regarder si l'image de $\mathcal{H}$ se trouve dans $\mathcal{J}_p^0$. Cela équivaut à se demander si les deux diviseurs

$$(0,c) - \infty \text{ et } (0,-c) - \infty$$

se prolongent en des sections de $\mathcal{J}_p^0$ sur $\mathbb{Z}_p$. Une autre façon de dire la même chose est : C et son modèle régulier $\mathcal{C}_p$ ont le même corps de fonctions et donc, on peut considérer deux diviseurs naturels sur $\mathcal{C}_p$

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{p}\mathrm{div}(y - x^p - c) &= \overline{(0,c)} - \overline{\infty} + \tfrac{1}{p}V_p \\ \tfrac{1}{p}\mathrm{div}(y - x^p + c) &= \overline{(0,-c)} - \overline{\infty} + \tfrac{1}{p}V'_p\end{aligned}$$

où $\overline{(0,c)}$, $\overline{(0,-c)}$ et $\overline{\infty}$ sont les diviseurs horizontaux correspondant aux sections de $\mathcal{C}_p$ qui prolongent les points de C, et V_p et V'_p sont deux diviseurs verticaux sur $\mathcal{C}_p$. Ces deux diviseurs à coefficients rationnels définissent les $\mathbb{G}_m$-torseurs log prolongeant les diviseurs $(0,c) - \infty$ et $(0,-c) - \infty$. On peut dire que l'image de $\mathcal{H}$ se trouve dans $\mathcal{J}_p^0$ si et seulement si les diviseurs ci-dessus sont à coefficients entiers, i.e. $\frac{1}{p}V_p$ et $\frac{1}{p}V'_p$ ont des coefficients entiers (cf. La preuve du

Théorème 6.1.1.1).

Calculons ces diviseurs sur $\mathcal{C}_p$. Considérons les idéaux $\mathfrak{N} :=< x, y - c >$ et $\mathfrak{N}' :=< x, y + c >$. Ces idéaux premiers ne sont contenus dans aucun des deux idéaux maximaux $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{M}'$ où on a effectué les éclatements, ce qui signifie que les points géométriques correspondant à $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{M}'$ ne sont contenus dans aucune des variétés correspondant à $\mathfrak{N}$ et $\mathfrak{N}'$. Comme l'éclatement induit un isomorphisme en dehors des points éclatés, cela implique que les points $(0, c)$, $(0, -c)$ et ∞ ne sont pas affectés par les éclatements effectués (en particulier, les multiplicités ne changent pas) et par conséquent, les diviseurs prolongés dans le modèle régulier $\mathcal{C}_p$ sont donnés par

$$\frac{1}{p}\mathrm{div}(y - x^p - c) = \overline{(0, c)} - \overline{\infty}$$
$$\frac{1}{p}\mathrm{div}(y - x^p + c) = \overline{(0, -c)} - \overline{\infty}$$

Conclusion. On peut conclure, en utilisant ce qui a été expliqué ci-dessus, que le μ_p^2-torseur pointé se prolonge en un torseur fppf pointé sur $\mathcal{C}_p$. Ce constat corrobore ce qu'on a trouvé à propos du groupe des composantes de $\mathcal{J}_p$. En effet, on a supposé que p est impair (cette hypothèse est utilisée dans la construction du modèle régulier) et on a trouvé $\#\Phi = 4$. Par conséquent, $p^2 \bigwedge \#\Phi = 1$, ce qui conduit, une fois de plus, en utilisant le Lemme 6.3.2.1, à la même conclusion.

2. **Deuxième exemple**. Pour le deuxième exemple, on va traiter le cas où $p = 3$ et on va construire un modèle régulier de la courbe C sur $\mathbb{Z}_l$, avec l un nombre premier différent de p, par conséquent, différent de 3. On considère ici la surface fibrée au-dessus de $\mathbb{Z}$ (notée $\mathcal{C}$ et dont la fibre générique est isomorphe à C), donnée par les équations :
   - $y^2 = f_3(x) = x^6 - (1 + l^2)x^3 + l^2$
   - $t^2 = s^6 f_3(\frac{1}{s})$
   - **Construction d'un modèle régulier $\mathcal{C}_l$ au-dessus de $\mathbb{Z}_l$, avec** $l \neq 3$. Dans ce cas, on commence par vérifier que la seconde carte ne contient aucun point singulier sur la fibre au-dessus de l.
     En utilisant le critère Jacobien, on trouve qu'il y a un seul point potentiellement singulier sur la première carte : $\tilde{\mathfrak{M}} :=< x, y, l >$, et par un calcul de dimensions, on vérifie que ce dernier est effectivement singulier. L'éclatement de $\mathcal{C}$ en $\tilde{\mathfrak{M}}$ est donnée par les trois cartes affines ci-dessous :

     Carte 1 : $\mathcal{C}_l^1$. On définit de nouvelles variables $y = xv$ et $l = xw$. Après les avoir remplacées dans l'équation de la première carte de $\mathcal{C}$, et en supprimant la partie exceptionnelle x^2, on trouve que $\mathcal{C}_l^1$ est donné par le système :

$$\mathcal{C}_l^1 \begin{cases} v^2 = x^4 - (1+l^2)x + w^2 \\ xw = l \end{cases}$$

Carte 2 : $\mathcal{C}_l^2$. La seconde carte est obtenue en utilisant les changements de variables $x = yu$ et $l = yw$. En remplaçant dans les équations de la première carte de $\mathcal{C}$ et en supprimant le facteur y^2 :

$$\mathcal{C}_l^2 \begin{cases} 1 = x^4u^6 - (1+l^2)xu^3 + w^2 \\ xw = l \end{cases}$$

Carte 3 : $\mathcal{C}_l^3$. La troisième carte est obtenue en utilisant les changements de variables $x = lu$ et $y = lv$. On trouve :

$$\mathcal{C}_l^3 : v^2 = l^4u^6 - (1+l^2)lu^3 + 1$$

Ensuite, on recolle les quatre cartes (les trois cartes ci-dessus et la carte $t^2 = s^6 f_3(\frac{1}{s})$) en utilisant les différents changements de variables donnés. Cela donne un modèle pour la courbe C sur $\mathbb{Z}$ et on affirme que ce dernier n'est plus singulier en $\tilde{\mathfrak{M}}$. On doit vérifier cela sur chacune des trois cartes affines ci-dessus. Par exemple, dans $\mathcal{C}_l^1$, la matrice Jacobienne au point (x, v, w) est donnée par :

$$J(x,v,w) = \begin{pmatrix} 4x - (1+l^2) & -2v & 2w \\ w & 0 & x \end{pmatrix}$$

Comme on regarde les singularités après l'éclatement en $\tilde{\mathfrak{M}}$, on s'intéresse aux points vérifiant $x = 0$, $y = 0$ et $l = 0$. On trouve :

$$J(x,v,w) = \begin{pmatrix} -1 & -2v & 2w \\ w & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On obtient alors le système :

$$\begin{cases} v^2 \equiv w^2 \\ 2vw \equiv 0 \\ 2w^2 \equiv 0 \end{cases}$$

Ainsi, $w \equiv v \equiv x \equiv 0 \mod l$. Par conséquent, $\tilde{\mathfrak{M}}' :=< x, v, w, l >$ est le seul point singulier potentiel sur cette carte. Or, $l = xw \in \tilde{\mathfrak{M}}'^2$ et $x = x^4 - l^2x + w^2 - v^2 \in \tilde{\mathfrak{M}}'^2$, donc $\tilde{\mathfrak{M}}'$ est régulier. On vérifie de la même manière que les deux autres cartes affines ne sont pas singulières en $\tilde{\mathfrak{M}}$. Finalement, on conclut que le modèle construit n'est pas singulier en $\tilde{\mathfrak{M}}$. On tensorise ce dernier avec $\mathbb{Z}_l$ et note celui-ci $\mathcal{C}_l$: c'est un modèle *régulier* de la courbe C sur $\mathbb{Z}_l$.

— **Calcul de la fibre spéciale de $\mathcal{C}_l$ et du groupe des composantes Φ_l et du groupe des composantes de la fibre spéciale du modèle de Néron de la Jacobienne C.**
On vérifie qu'hormis pour des points à l'infini, la fibre spéciale $\tilde{\mathcal{C}}_l$ de $\mathcal{C}_l$ vit sur la première carte $\mathcal{C}_l^1$. Elle possède trois composantes qui se rencontrent en un point $(x = 0, v = 0, w = 0)$, et qui sont données par :

$$G_l^1 \begin{cases} x \equiv 0 \\ v \equiv w \end{cases} \qquad G_l^2 \begin{cases} x \equiv 0 \\ v \equiv -w \end{cases} \qquad G_l^3 \begin{cases} w \equiv 0 \\ v^2 \equiv x^4 - x \end{cases}$$

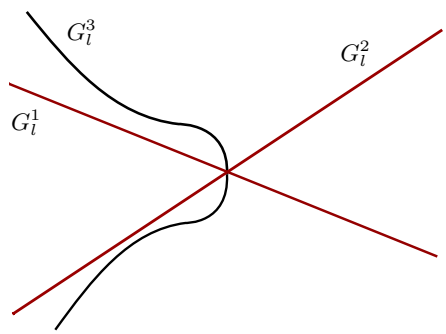

FIGURE 3 – La fibre spéciale $\tilde{\mathcal{C}}_l$.

On calcule à présent le groupe des composantes Φ_l. La matrice d'intersection de la fibre spéciale est donnée par :

$$B := \begin{bmatrix} (G_l^1)^2 & G_l^1 G_l^2 & G_l^1 G_l^3 \\ G_l^2 G_l^1 & (G_l^2)^2 & G_l^2 G_l^3 \\ G_l^3 G_l^1 & G_l^3 G_l^2 & (G_l^3)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

En utilisant cette dernière et le Corollaire 4.6.0.1, on calcule que $\Phi_l \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

— **Étude du prolongement du μ_3^2-torseur pointé**. Comme montré précédemment, la Jacobienne de la courbe C contient un sous-groupe isomorphe à $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$, et cela donne alors un μ_3^2-torseur pointé sur C (relativement à $Q_0 = (1, 0)$). Si $\mathcal{J} \to \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ est le modèle de Néron de J sur $\mathbb{Z}$, l'inclusion $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2 \hookrightarrow J$ se prolonge en un morphisme $\mathcal{H} := (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2 \to \mathcal{J}$, où $\mathcal{H}$ est un groupe fini et plat sur $\mathbb{Z}$. On sait d'après le Théorème 6.1.0.1, que le μ_3^2-torseur pointé s'étend de manière unique en un μ_3^2-torseur logarithmique sur $\mathcal{C}_l$. Dans cet exemple, on va vérifier que ce prolongement log ne provient pas d'un

torseur fppf, i.e. il n'y a pas de prolongement fppf pour le torseur initial sur la courbe.
Soient $\mathfrak{N} =< x, y-l >$ et $\mathfrak{N}' =< x, y+l >$; ces idéaux premiers sont contenus dans l'idéal maximal $\tilde{\mathfrak{M}}$ où on a éclaté $\mathcal{C}$; cela signifie que les variétés correspondant à ces idéaux premiers ont subi l'éclatement en $\tilde{\mathfrak{M}}$. Après l'éclatement, tous les points de $\mathcal{C}$ sauf $\tilde{\mathfrak{M}}$ restent inchangés, tandis que $\tilde{\mathfrak{M}}$ donne deux diviseurs verticaux G_l^1 (noté V_l) et G_l^2 (noté V_l'), correspondant au diviseur exceptionnel dans l'espace affine. On a déjà vu que ces composantes apparaissent avec multiplicité 1 ; par conséquent, on a

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{3}\mathrm{div}(y - x^p - l) &= \overline{(0,l)} - \overline{\infty} + \tfrac{1}{3}(V_l + V_l') \\ \tfrac{1}{3}\mathrm{div}(y - x^p + l) &= \overline{(0,-l)} - \overline{\infty} + \tfrac{1}{3}(V_l + V_l') \end{aligned}$$

Conclusion : On peut conclure, en utilisant ce qui a été expliqué ci-dessus, que le μ_3-torseur pointé ne se prolonge pas en un torseur fppf sur $\mathbb{Z}_l$. De plus, par le Lemme 6.3.2.1, cela implique en particulier que $\#\Phi_l$ et $\#(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2 = 9$ n'ont aucun diviseur non trivial en commun. Or, on a déjà calculé que $\Phi_l \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, et donc cela est cohérent.

7 Perspectives.

7.1 Extension des torseurs résolubles.

Fixons R un anneau de valuation discrète de corps de fractions K et de corps résiduel k de caractéristique $p > 0$.
Après avoir étudié la question du prolongement des torseurs où le groupe agissant est commutatif, il est naturel de se demander ce qui se passe si ce dernier est résoluble. Il faut noter que comme on s'est servi du dual de Cartier du schéma en groupes agissant sur le torseur pour construire le prolongement de ce dernier, si le schéma en groupes est résoluble, on ne peut pas utiliser la même stratégie de preuve, puisque le dual de Cartier n'est pas défini en ce cas. Toutefois, on peut tirer profit des résultats obtenus dans le cas commutatif pour étudier le cas résoluble.

En effet, on peut observer que chaque torseur résoluble (on entend ici que le schéma en groupes agissant est résoluble) peut s'écrire comme une tour de torseurs commutatifs. Soit G un K-schéma en groupes fini plat et résoluble, de longueur n, i.e. on a une suite de sous-schémas en groupes finis et plats de G : H_0,...,H_n tels que

$$H_n = \{e\} \lhd ... \lhd H_1 \lhd H_0 := G$$

où $H_{i+1} \lhd H_i$ signifie que H_{i+1} est un sous-schéma en groupes normal de H_i, et le schéma en groupes quotient H_i/H_{i+1} est commutatif pour tout $i \in \{0, ..., n-1\}$.

De plus, les schémas en groupes quotient H_{i-1}/H_i sont finis et plats d'après [32, §3 ; Théorème].

On se donne un G-torseur fppf pointé $Y \to C$, avec C une courbe lisse projective et géométriquement connexe sur K, munie d'un point rationnel. Ce torseur peut alors être vu comme une tour de torseurs fppf commutatifs (et pointés) : les H_i/H_{i+1}-torseurs pour un certain $i \in \{0, ..., n-1\}$. On les appelle **les composantes commutatives du torseur** résoluble $Y \to C$.

Par exemple, si $n = 2$ et si la suite correspondante à G est

$$H \lhd G$$

en supposant que G agit sur Y à droite, on définit une action de G sur $Y \times_{\mathrm{Spec}(K)} G/H$ par

$$\begin{array}{rccc} \sim : & (G, Y \times_{s_{pec(K)}} G/H) & \to & Y \times_K G/H \\ & (g, (y, f)) & \mapsto & (yg^{-1}, gf) \end{array}$$

On définit le K-schéma $Y' := Y \times^G G/H = (Y \times_K G/H)/\sim$: le produit contracté de Y et G/H. Il est en fait canoniquement isomorphe à Y/H.

Lemme 7.1.0.1. *Si $Y \to C$ est un G-torseur fppf pointé, alors $Y \to Y \times^G G/H$ est un H-torseur fppf pointé et $Y \times^G G/H \to C$ est un G/H-torseur fppf pointé.*

Démonstration. L'action de G/H sur $Y \times^G G/H$ est définie par l'action naturelle de G/H sur lui-même. Comme G/H est commutatif, on vérifie facilement que cette action est bien définie. Pour le fait que $Y \times^G G/H \to C$ est un G/H-torseur fppf, c'est démontré dans [12, III ; §4 ; n.3]. Par suite, il est clairement pointé puisque chacun de Y et G/H a un point.

Il reste à voir que $Y \to Y' = Y \times^G G/H$ est un H-torseur fppf pointé. H agit sur Y puisque H est un sous-schéma en groupes de G. Montrons qu'on a isomorphisme :

$$Y \times_{Y'} Y \simeq Y \times H$$

Soient $y_1, y_2 \in Y$. Alors, comme $Y \to C$ est un G-torseur, $\exists! g \in G$ tel que $y_2 = y_1 g$. On doit voir que si y_1 et y_2 ont la même image dans Y', alors $g \in H$. Mais il est clair que y_1 et $y_1 g$ ont la même image si et seulement si $g^{-1} \in H$ et donc $g \in H$.
Ce torseur est une fois de plus clairement pointé. □

Si $n > 2$, on réitère ce processus en factorisant $Y \to Y'$ et ainsi de suite.

Question 7.1.0.1. *Peut-on ramener la question du prolongement d'un torseur résoluble à celle d'un torseur commutatif ?*

Pour commencer, remarquons le fait suivant :

Lemme 7.1.0.2. *Soit $Y \to C$ un G-torseur fppf pointé, avec C une K-courbe lisse projective et géométriquement connexe, munie d'un point rationnel, et G un K-schéma en groupes fini plat et résoluble. Si le torseur $Y \to C$ se prolonge en un torseur logarithmique (pointé) sur un R-modèle régulier $\mathcal{C}$ de C, alors ses composantes commutatives se prolongent aussi en torseurs logarithmiques (pointés).*

Démonstration. Montrons le cas où G est de longueur 2 et la preuve se généralise facilement pour les valeurs de n supérieures.
Supposons alors que $H \lhd G$ avec G/H commutatif. Supposons qu'il existe un R-modèle fini et plat $\mathcal{G}$ de G et un $\mathcal{G}$-torseur logarithmique (et pointé) $\mathcal{Y} \to \mathcal{C}$ prolongeant $Y \to C$. On note $\mathcal{H}$ l'adhérence schématique de H dans $\mathcal{G}$. Alors $\mathcal{H}$ est plat par définition de l'adhérence schématique et est fini étant donné que les immersions fermées sont finies et la composée de deux morphismes finis est finie. De plus, $\mathcal{H}$ est un sous-groupe normal de G étant donné qu'il l'est génériquement. Par conséquent, on peut considérer le R-schéma en groupes $\mathcal{G}/\mathcal{H}$, qui est aussi fini et plat ([32, §3, Theorem]).
Ainsi, le H-torseur $Y \to Y \times^G G/H$ se prolonge en un $\mathcal{H}$-torseur logarithmique $\mathcal{Y} \to \mathcal{Y} \times^{\mathcal{G}} \mathcal{G}/\mathcal{H}$ et le torseur $Y \times^G G/H \to C$ se prolonge en un $\mathcal{G}/\mathcal{H}$-torseur logarithmique $\mathcal{Y} \times^{\mathcal{G}} \mathcal{G}/\mathcal{H} \to \mathcal{C}$. Ces deux torseurs sont clairement pointés dès lors que $\mathcal{Y} \to \mathcal{C}$ l'est.

□

Toujours dans le cas où $n = 2$, si on suppose de plus que la caractéristique de K est nulle, alors les K-schémas en groupes sont tous étales, et dans ce cas

$Y \times^G G/H \simeq Y/H$ est une K-courbe lisse et projective, munie d'un point rationnel. On peut donc considérer sa Jacobienne J' (ici, comme $Y \to Y \times^G G/H$ est un H-torseur, il vient que $Y/H \simeq Y \times^G G/H$).

D'autre part, par le Lemme 6.1.0.1, la donnée du H-torseur $Y \to Y/H$ est équivalente à la donnée d'un K-morphisme de schémas en groupes $G^D \to J'$, et celle du G/H-torseur $Y/H \to C$ est équivalente à celle d'un K-morphisme de schémas en groupes $(G/H)^D \to J$, avec J la Jacobienne de C.

Par conséquent, si l'on dispose d'un R-morphisme de schémas en groupes $\mathcal{H}^D \to \mathcal{J}'$ prolongeant le K-morphisme $H^D \to J'$, avec $\mathcal{J}'$ le R-modèle de Néron de J' et $\mathcal{H}$ un R-modèle de H ; et d'un R-morphisme de schémas en groupes $F^D \to \mathcal{J}$, avec $\mathcal{J}$ le modèle de Néron de J et $\mathcal{F}$ un R-modèle de G/H, on peut alors prolonger chacun des deux torseurs de la tour de torseurs de $Y \to C$ par le Théorème 6.1.0.1, et on obtient alors un $\mathcal{H}$-torseur logarithmique (pointé) $\mathcal{Y} \to \mathcal{Z}$ prolongeant le H-torseur $Y \to Y/H$, et un $\mathcal{F}$-torseur logarithmique (pointé) $\mathcal{Z} \to \mathcal{C}$ prolongeant le G/H-torseur $Y/H \to C$.

On peut alors se demander si l'on peut construire à partir de ces deux prolongements un prolongement du G-torseur initial $Y \to C$.
Remarquons pour commencer que $\mathcal{Y} \to \mathcal{C}$ n'est pas un torseur en général. Par exemple, la composition de deux extensions de Galois n'en est pas forcément une.

Étant donné la tour de torseurs

$$\mathcal{Y} \xrightarrow{\mathcal{H}} \mathcal{Z} \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathcal{C}$$

On souhaite en construire une sorte de *clôture Galoisienne*. Plus précisément, un R-schéma $\mathcal{T}$ et des R-schémas en groupes plats $\mathcal{G}_1$, $\mathcal{G}_2$ et $\mathcal{G}_3$ (de types finis) vérifiant :

— $\mathcal{T} \to \mathcal{Y}$ est un $\mathcal{G}_1$-torseur logarithmique.

— $\mathcal{T} \to \mathcal{Z}$ est un $\mathcal{G}_2$-torseur logarithmique.

— $\mathcal{T} \to \mathcal{C}$ est un $\mathcal{G}_3$-torseur logarithmique.

et de sorte que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{Y} \arrow[r, "\mathcal{H}"] & \mathcal{Z} \arrow[d, "\mathcal{F}"] \\
\mathcal{T} \arrow[u, "\mathcal{G}_1"] \arrow[ur, "\mathcal{G}_2"] \arrow[r, "\mathcal{G}_3"'] & \mathcal{C}
\end{tikzcd}$$

Comme tous les torseurs sont pointés, le morphisme $\mathcal{T} \to \mathcal{Z}$ induit un morphisme fidèlement plat de schémas en groupes $\gamma_1 : \mathcal{G}_3 \to \mathcal{F}$. De même, on a un morphisme fidèlement plat $\gamma_2 : \mathcal{G}_2 \to \mathcal{H}$, avec $\mathcal{G}_2 \simeq \ker(\gamma_1)$ et $\mathcal{G}_1 = \ker(\gamma_2)$.
De plus, on peut observer que $\mathcal{G}_1$ est normal dans $\mathcal{G}_3$. En effet, la fibre générique de $\mathcal{G}_1$ est le noyau du morphisme $\mathcal{G}_3 \times \mathrm{Spec}(K) \to G$, et $\mathcal{G}_1$ coïncide avec l'adhérence schématique dans $\mathcal{G}_3$ de sa fibre générique. On peut donc construire le

quotient $\mathcal{G}_3/\mathcal{G}_1$ qui est un R-schéma en groupes plat ([5, §IV ; Thèorme 4(C)]), vérifiant la suite exacte suivante ([12, III ; §3 ; n.3 ; 3.7(a)]) :

$$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G}_3/\mathcal{G}_1 \to \mathcal{H} \to 0$$

et ce schéma en groupes est fini dès lors que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{H}$ le sont.

A présent, on construit le produit contracté

$$\mathcal{W} := \mathcal{T} \times^{\mathcal{G}_3} \mathcal{G}_3/\mathcal{G}_1$$

Ce dernier est un $\mathcal{G}_3/\mathcal{G}_1$-torseur sur $\mathcal{C}$ d'après [12, III : §4 ; n.3].

Enfin, on a

$$\begin{aligned}\mathcal{W} \times \mathrm{Spec}(K) &= (\mathcal{T} \times \mathrm{Spec}(K)) \times^{\mathcal{G}_3 \times \mathrm{Spec}(K)} (\mathcal{G}_3/\mathcal{G}_1 \times \mathrm{Spec}(K)) \\ &\simeq (\mathcal{T} \times \mathrm{Spec}(K))/(\mathcal{G}_1 \times \mathrm{Spec}(K)) \\ &\simeq Y\end{aligned}$$

(le produit contracté commute avec le changement de base [12, III, §4 ; n.3 ; 3.1]).

Finalement, $\mathcal{W} \to \mathcal{C}$ serait un $\mathcal{G}_3/\mathcal{G}_1$-torseur logarithmique prolongeant $Y \to C$ (notons que $\mathcal{G}_3/\mathcal{G}_1$ est un modèle de G car on a vu que génériquement, $\mathcal{G}_1$ est le noyau du morphisme fidèlement plat (donc surjectif) $\mathcal{G}_3 \times \mathrm{Spec}(K) \to G$).

La difficulté majeure de ce travail est justement de construire cette clôture Galoisienne. Dans le cas particulier où la base $\mathrm{Spec}(R)$ est le spectre d'un corps, une preuve de l'existence de cette clôture Galoisienne (dans un sens à clarifier) a été établie dans [7]. Dans le cas d'une base plus générale, la question demeure encore ouverte.

7.2 Étude de la question du prolongement des torseurs sur une base de dimension supérieure à 1.

Dans notre travail de thèse, on a fixé pour base $S := \mathrm{Spec}(R)$, le spectre d'un anneau de valuation discrète, et tous nos modèles sont construits au-dessus de cette dernière.
Ce choix n'est pas anodin puisque l'existence d'un modèle régulier d'une courbe au-dessus de $\mathrm{Spec}(R)$ est garantie en ce cas (cf. Théorème 3.5.0.1). De même que l'existence du modèle de Néron de la Jacobienne de la courbe en question (cf. Proposition 4.4.0.1).

A présent, on peut se demander si nos résultats peuvent se généraliser à un contexte plus large, à savoir, en supposant que la base S est un schéma de dimension supérieure à 1 (de point générique η). L'idée étant de voir si notre stratégie de preuve s'étend à ce cas. On se heurte alors à certaines difficultés.

Si C est une courbe au-dessus de $K(\eta)$, la première difficulté consiste à trouver un candidat avec des propriétés suffisamment intéressantes, pouvant servir de S-modèle de C (on entend ici un schéma dont la fibre générique est C), au-dessus duquel on étudierait la question du prolongement d'un torseur sur C. Or, dans un contexte aussi large, on sait que l'existence d'un S-modèle régulier (propre) de C n'est pas garantie. Par conséquent, à défaut de pouvoir trouver un S-modèle propre de la courbe C, on cherchera un S-modèle n'étant pas forcément propre mais lisse, comme le modèle de Néron. On sait par exemple que toute courbe propre et lisse et de genre strictement positif admet un S-modèle de Néron, dès lors que S est le spectre d'un anneau de Dédekind ([25]). Si S est plus général, le problème devient encore une fois délicat. D'ailleurs, la question qui consiste à trouver un modèle de Néron d'une courbe ou d'une variété abélienne au-dessus d'un schéma S de dimension supérieure à 1 demeure encore ouverte, et ce terrain n'a commencé à être exploité que récemment.

La seconde difficulté consiste à construire un modèle de Néron de la Jacobienne sur S. Là encore, cette question est récente et un contexte où ce modèle existe a été étudié ici [21].

Il reste à voir comment adapter notre stratégie de preuve à ce contexte plus général.

Références

[1] *Groupes de monodromie en géométrie algébrique. I.* Lecture Notes in Mathematics, Vol. 288. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1972. Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1967–1969 (SGA 7 I), Dirigé par A. Grothendieck. Avec la collaboration de M. Raynaud et D. S. Rim.

[2] *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas. Tome 2.* Lecture Notes in Mathematics, Vol. 270. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1972. Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1963–1964 (SGA 4), Dirigé par M. Artin, A. Grothendieck et J. L. Verdier. Avec la collaboration de N. Bourbaki, P. Deligne et B. Saint-Donat.

[3] *Séminaire sur les Pinceaux de Courbes de Genre au Moins Deux.* Société Mathématique de France, Paris, 1981. Astérisque No. 86 (1981) (1981).

[4] *Revêtements étales et groupe fondamental (SGA 1)*, volume 3 of *Documents Mathématiques (Paris) [Mathematical Documents (Paris)]*. Société Mathématique de France, Paris, 2003. Séminaire de géométrie algébrique du Bois Marie 1960–61. [Algebraic Geometry Seminar of Bois Marie 1960-61], Directed by A. Grothendieck, With two papers by M. Raynaud, Updated and annotated reprint of the 1971 original [Lecture Notes in Math., 224, Springer, Berlin ; MR0354651 (50 #7129)].

[5] Sivaramakrishna Anantharaman. Schémas en groupes, espaces homogènes et espaces algébriques sur une base de dimension 1. In *Sur les groupes algébriques*, pages 5–79. Bull. Soc. Math. France, Mém. 33. 1973.

[6] Marco Antei. On the abelian fundamental group scheme of a family of varieties. *Israel J. Math.*, 186 :427–446, 2011.

[7] Marco Antei, Indranil Biswas, Michel Emsalem, Fabio Tonini, and Lei Zhang. Nori fundamental gerbe of essentially finite covers and Galois closure of towers of torsors. *Selecta Math. (N.S.)*, 25(2) :Paper No. 18, 37, 2019.

[8] Marco Antei and Michel Emsalem. Models of torsors and the fundamental group scheme. *Nagoya Math. J.*, 230 :18–34, 2018.

[9] Siegfried Bosch and Dino Lorenzini. Grothendieck's pairing on component groups of Jacobians. *Invent. Math.*, 148(2) :353–396, 2002.

[10] Siegfried Bosch, Werner Lütkebohmert, and Michel Raynaud. *Néron models*, volume 21 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)]*. Springer-Verlag, Berlin, 1990.

[11] Alessandro Chiodo. Quantitative Néron theory for torsion bundles. *Manuscripta Math.*, 129(3) :337–368, 2009.

[12] Michel Demazure and Pierre Gabriel. *Groupes algébriques. Tome I : Géométrie algébrique, généralités, groupes commutatifs.* Masson & Cie, Éditeur, Paris ; North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1970. Avec un appendice ıt Corps de classes local par Michiel Hazewinkel.

[13] Marco A. Garuti. On the "Galois closure" for torsors. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 137(11) :3575–3583, 2009.

[14] Philippe Gille and Patrick Polo, editors. *Schémas en groupes (SGA 3). Tome I. Propriétés générales des schémas en groupes*, volume 7 of *Documents Mathématiques (Paris) [Mathematical Documents (Paris)]*. Société Mathématique de France, Paris, 2011. Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie 1962–64. [Algebraic Geometry Seminar of Bois Marie 1962–64], A seminar directed by M. Demazure and A. Grothendieck with the collaboration of M. Artin, J.-E. Bertin, P. Gabriel, M. Raynaud and J-P. Serre, Revised and annotated edition of the 1970 French original.

[15] Jean Gillibert. Prolongement de biextensions et accouplements en cohomologie log plate. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (18) :3417–3444, 2009.

[16] Jean Gillibert. Cohomologie log plate, actions modérées et structures galoisiennes. *J. Reine Angew. Math.*, 666 :1–33, 2012.

[17] Jean Gillibert and Aaron Levin. Pulling back torsion line bundles to ideal classes. *Math. Res. Lett.*, 19(6) :1171–1184, 2012.

[18] A. Grothendieck. Éléments de géométrie algébrique. II. Étude globale élémentaire de quelques classes de morphismes. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (8) :222, 1961.

[19] A. Grothendieck. Éléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas IV. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (32) :361, 1967.

[20] Alexander Grothendieck. *Fondements de la géométrie algébrique. [Extraits du Séminaire Bourbaki, 1957–1962.]*. Secrétariat mathématique, Paris, 1962.

[21] David Holmes, Samouil Molcho, Giulio Orecchia, and Thibault Poiret. Models of jacobians of curves. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, 2020.

[22] Luc Illusie. An overview of the work of K. Fujiwara, K. Kato, and C. Nakayama on logarithmic étale cohomology. Number 279, pages 271–322. 2002. Cohomologies p-adiques et applications arithmétiques, II.

[23] Kazuya Kato. Logarithmic structures of Fontaine-Illusie. In *Algebraic analysis, geometry, and number theory (Baltimore, MD, 1988)*, pages 191–224. Johns Hopkins Univ. Press, Baltimore, MD, 1989.

[24] Qing Liu. *Algebraic geometry and arithmetic curves*, volume 6 of *Oxford Graduate Texts in Mathematics*. Oxford University Press, Oxford, 2002. Translated from the French by Reinie Erné, Oxford Science Publications.

[25] Qing Liu and Jilong Tong. Néron models of algebraic curves. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 368(10) :7019–7043, 2016.

[26] Shinichi Mochizuki. Monomorphisms in categories of log schemes. *Kodai Math. J.*, 38(2) :365–429, 2015.

[27] J. P. Murre. On contravariant functors from the category of pre-schemes over a field into the category of abelian groups (with an application to the Picard functor). *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (23) :5–43, 1964.

[28] Arthur Ogus. *Lectures on logarithmic algebraic geometry*, volume 178 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2018.

[29] Frans Oort. Sur le schéma de Picard. *Bull. Soc. Math. France*, 90 :1–14, 1962.

[30] Cédric Pépin. Néron's pairing and relative algebraic equivalence. *Algebra Number Theory*, 6(7) :1315–1348, 2012.

[31] M. Raynaud. Spécialisation du foncteur de Picard. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (38) :27–76, 1970.

[32] Stephen S. Shatz. Group schemes, formal groups, and p-divisible groups. In *Arithmetic geometry (Storrs, Conn., 1984)*, pages 29–78. Springer, New York, 1986.

[33] Joseph H. Silverman. *Advanced topics in the arithmetic of elliptic curves*, volume 151 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1994.

[34] Dajano Tossici. Effective models and extension of torsors over a discrete valuation ring of unequal characteristic. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, pages Art. ID rnn111, 68, 2008.

[35] William C. Waterhouse. Principal homogeneous spaces and group scheme extensions. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 153 :181–189, 1971.