



HAL
open science

Méthodes fiabilistes basées sur le krigeage adaptatif : agrégation de méta-modèles et étude fiabiliste des problèmes avec variabilité spatiale

Chahrazed Amrane

► To cite this version:

Chahrazed Amrane. Méthodes fiabilistes basées sur le krigeage adaptatif : agrégation de méta-modèles et étude fiabiliste des problèmes avec variabilité spatiale. Génie mécanique [physics.class-ph]. Université Clermont Auvergne, 2021. Français. NNT : 2021UCFAC065 . tel-03651852

HAL Id: tel-03651852

<https://theses.hal.science/tel-03651852>

Submitted on 26 Apr 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université Clermont Auvergne
École Doctorale
Sciences pour l'Ingénieur de Clermont-Ferrand

Thèse

présentée par

Chahrazed Amrane

en vue d'obtenir le grade de

Docteur d'université

Méthodes fiabilistes basées sur le krigeage adaptatif : agrégation de méta-modèles et étude fiabiliste des problèmes avec variabilité spatiale.

Soutenue publiquement le 22 Juillet 2021 devant le jury

M. Eric Jacquelin	Professeur des universités, Université de Lyon	Rapporteur
M. Joseph Morlier	Professeur des universités, ISAE-SUPAERO	Rapporteur
M. Rodolphe Le Riche	Professeur des universités, Mines de Saint-Etienne et UCA	Examinateur
M. Younes Aoues	Maître de conférences, INSA de Rouen	Examinateur
M. Nicolas Gayton	Professeur des universités, SIGMA-Clermont	Directeur
M. Jean-Marc Bourinet	Maître de conférences, HDR, SIGMA-Clermont	Directeur
M. Pierre Beaurepaire	Maître de conférences, SIGMA-Clermont	Encadrant
Mme. Cécile Mattrand	Maître de conférences, SIGMA-Clermont	Encadrante

Université Clermont Auvergne
CNRS, SIGMA Clermont, Institut Pascal, UMR 6602
F-63000 Clermont-Ferrand, France

*À mes enfants Nael et Maryam,
J'espère que ce travail vous sera une inspiration*

Remerciements

C'est avec un plaisir immense et une grande fierté que je finis cette thèse. Un travail qui, grâce à Dieu et aux personnes m'ayant soutenue tout au long de mon parcours de près comme de loin, a pu se faire et voir le jour dans une ambiance de joie et de chaleur.

Je remercie tout d'abord les membres de jury pour m'avoir fait l'honneur d'évaluer ce travail. Merci au **Pr. Eric Jacquelin** et au **Pr. Joseph Morlier** d'avoir accepté d'être rapporteurs et ainsi juger le contenu scientifique de cette thèse. Merci au **Pr. Rodolph Le Riche** et au **Dr. Younes Aoues** pour leur participation à mon jury de thèse en tant qu'examineurs. Vos remarques, vos suggestions ainsi que les échanges pertinents que nous avons eus durant la soutenance ont permis d'avoir des retours très constructifs et de nouvelles perspectives de développement.

Mes profonds remerciements iront à mon équipe encadrante. À mon directeur de thèse **Nicolas Gayton** pour m'avoir accueillie au sein de son équipe en tant que stagiaire en Master en premier lieu et pour avoir renouvelé ensuite sa confiance en me permettant d'effectuer mon doctorat dans un environnement de travail de grande qualité. Ses nombreux conseils, sa rigueur scientifique et son soutien m'ont permis de mener à bien ce travail de thèse. Je le remercie particulièrement pour ses qualités humaines qui m'ont aidée, entre autre, d'avoir un bon équilibre entre vie personnelle et professionnelle.

À mon co-directeur de thèse **Jean-Marc Bourinet** pour ses idées et ses remarques rigoureuses tout au long de la thèse. À mes encadrants **Cécile Mattrand** et **Pierre Beaurepaire** qui m'ont beaucoup aidée et encouragée. Cécile, merci pour ton investissement qui s'est manifesté, entre autre, par les nombreuses et rigoureuses relectures de mes écrits ainsi que de ta patience. Pierre, merci pour le soutien que tu m'as apporté durant les moments difficiles. Tu as toujours su apporter à mes nombreux points d'interrogations des réponses simples et réconfortantes.

Encore une fois, merci à tous les quatre de m'avoir poussée à donner le meilleur de moi-même, pour m'avoir donné l'occasion d'enseigner et pour m'avoir donné l'opportunité d'assister et de présenter mes travaux dans différentes conférences nationales, conférences internationales et écoles d'été. Ce fut un plaisir de travailler avec vous.

Merci aussi à Nicolas Lelièvre pour son coup de pouce par rapport à l'utilisation d'OpenTURNS et pour toutes les astuces technico-informatiques qu'il m'a montrées au début de la thèse.

Je tiens aussi à remercier tout le personnel administratif de l'école doctorale et de l'école SIGMA Clermont. Je remercie particulièrement Jacqueline pour sa gentillesse, son professionnalisme et son beau sourire avec lequel elle m'accueillait. Je remercie également Roumar pour son humour et sa sympathie.

Mes remerciements ne seraient pas complets sans une pensée à mes co-bureau pour le temps agréable que j'ai passé avec eux au bureau SPA203. Dana, merci pour les discussions infinies, pour les chuchotements et pour les moments de partage que nous avons eus ensemble. Ta présence au bureau m'a beaucoup apporté, que ce soit à titre personnel ou à titre professionnel. Dong, aucun mot ne pourra décrire ta gentillesse, ton humour et ta capacité à créer une ambiance exceptionnelle au bureau. Merci, pour tous les moments agréables que nous avons eus ensemble et surtout pour les "Nems vietnamiennes". Je remercie également tous les doctorants, post-docs et stagiaires du master/mastère qui sont passés par le bureau SPA203 : Mathieu, Morteza, Quentin, Vincent, Fred, Samira, Islem, Thibault et Yacouba.

Un remerciement particulier va à mon amie thésarde Rym. Merci pour ta bonté de cœur et ton beau sourire malgré les moments difficiles que tu endures. Merci pour tout ce que tu m'as apporté tout au long de la thèse, pour ton soutien le jour de la soutenance et surtout pour m'avoir accueillie chez toi pour la préparation de la présentation de la soutenance, j'en avais vraiment besoin. Je remercie également Corentin pour sa disponibilité et pour la gestion du "live" de la soutenance. C'est grâce à cela que certains membres de ma famille et mes amis ont pu y assister durant cette période de COVID.

Merci à mes ami(e)s de longues dates qui sont resté(e)s dans mon entourage malgré les chemins parfois différents.

Avoir une vie épanouie en dehors de la thèse est également essentiel afin de réussir d'un point de vue professionnel et mener sa thèse dans les meilleures conditions. De mon côté, j'ai eu la chance d'être entourée par ma petite famille qui n'a pas cessé de m'apporter tout le soutien nécessaire à l'accomplissement de ce travail, même si ce n'était pas toujours évident.

J'ai eu aussi la chance d'avoir le soutien de mes parents, de mon frère et de ma sœur qui, malgré la distance qui nous sépare, ont vécu cette thèse avec moi jour pour jour. Merci pour votre soutien indéfectible, pour vos prières, pour vos encouragements et pour votre amour. Je remercie particulièrement ma mère pour les déplacements qu'elle a dû faire pour garder mon fils afin que je puisse assister tranquillement à différents événements scientifiques nationaux et internationaux. Un grand merci à ma sœur aussi pour le temps qu'elle a accordé et l'énergie qu'elle a dépensée pour la relecture de ce manuscrit et mes autres écrits.

Enfin, mes remerciements vont à tous les membres de ma famille, au sens large, qui ont cru en moi et qui m'ont encouragée. Une pensée aussi à ma grand-mère (ma deuxième maman) qui est décédée 14 jours avant le début de la thèse. C'est grâce à ses prières que je suis aujourd'hui docteur.

Résumé

Cette thèse porte sur le développement des méthodes de l'analyse de fiabilité dans le contexte des modèles numériques coûteux en temps de calcul. L'analyse de fiabilité consiste à calculer et à prédire la probabilité de défaillance d'une structure. Ceci est généralement assuré par les méthodes de simulation qui sont à ce jour un moyen incontournable vu leur capacité à traiter des problèmes complexes. Toutefois, ces méthodes souffrent des temps de calcul considérables engendrés par les multiples appels à des fonctions de performance coûteuses en temps de calcul et qui impliquent des modèles numériques onéreux. L'utilisation des méthodes d'apprentissage actif du méta-modèle de type krigeage, notamment les méthodes AK, est une des alternatives proposées pour diminuer les temps de calcul. Elle consiste à substituer la fonction de performance coûteuse à évaluer par un modèle mathématique simplifié dont les temps d'évaluation sont largement inférieurs par rapport au premier. Le méta-modèle est calibré à partir d'un nombre limité d'évaluations de la fonction de performance, appelé plan d'expériences. Ce dernier est constitué d'une façon adaptative dans le contexte de l'apprentissage actif.

Cette thèse a pour objectif d'étendre l'utilisation des méthodes AK afin d'apporter des éléments de réponse au choix du type et de la configuration du méta-modèle en premier lieu et de proposer ensuite une nouvelle méthode pour le traitement des problèmes soumis à l'aléa spatial. La première contribution de la thèse propose donc de substituer la fonction de performance par un ensemble de méta-modèles afin de se s'affranchir du choix *ad hoc* du type et/ou de la configuration du méta-modèle. Une méthode dénommée AKE-MCS est proposée pour l'estimation de la probabilité de défaillance, où la mise en place d'un ensemble de méta-modèles est effectuée par l'agrégation pondérée des prédictions de trois krigeages ordinaires ayant différents noyaux. Cet ensemble est calibré itérativement en utilisant une nouvelle fonction d'apprentissage basée sur la probabilité de mauvais classement du point de prédiction par l'ensemble de méta-modèles.

La seconde contribution porte sur l'analyse de fiabilité des structures sujettes à une variabilité spatiale aléatoire. Cette dernière peut générer de multiples lieux de défaillance qui sont généralement non pris en compte lors de l'estimation de la probabilité de défaillance à cause de l'hypothèse d'unicité du lieu de la défaillance. Ceci entraîne généralement une mauvaise estimation de la probabilité de défaillance. La considération des multiples lieux de défaillance potentiels est ici effectuée par des méthodes de fiabilité système, par analogie entre la formulation mathématique des systèmes série et celle du problème abordé. Une extension de la méthode AK-SYS est proposée, dénommée AK-SYSs. Les lieux de défaillance potentiels ne sont pas sélectionnés à l'avance puisqu'ils sont méconnus, ils sont identifiés itérativement. La méthode proposée combine donc le processus d'enrichissement de la méthode AK-SYS avec une stratégie de recherche active des lieux de défaillance potentiels.

Mots clés : fiabilité, probabilité de défaillance, méta-modèles, krigeage, apprentissage adaptatif, ensemble de méta-modèles, aléa spatial, processus stochastique.

Abstract

This dissertation discusses the development of reliability analysis methods within the context of costly-to-evaluate numerical models. Reliability analysis aims at propagating input uncertainties within a system to evaluate its failure probability. Simulation methods are nowadays an essential tool given their ability to deal with complex problems. However, those methods require a large number of calls to the costly-to-evaluate numerical model, which causes considerable computational burden. Combining reliability methods to active learning surrogate modelling is one of the proposed alternatives to reduce the computational burden. Surrogate models are simplified mathematical models with reduced evaluation time. They are used to mimic the input-output relationship of the expensive function to evaluate, allowing the several calls needed in the analysis. Their calibration is performed based on a limited number of evaluations of the performance function, called design of experiments. The latter is constituted in an adaptive way in the context of active learning. Among the existing surrogate-based reliability methods, the Active learning and Kriging based (AK) methods have shown to be efficient and simple to implement ; they are therefore extensively used to deal with different reliability analysis challenges.

This dissertation introduces a novel extension of the AK methods to new challenges. The Kriging type selection issue is first addressed. The first contribution of this dissertation proposes to substitute the costly-to-evaluate performance function by an ensemble of surrogate models (EM) to avoid the ad hoc choice of the type and/or the configuration of the surrogate model. A method, referred to as AKE-MCS, is proposed for the estimation of the failure probability, where the ensemble is constituted by a weighted aggregation of the individual responses of three ordinary Kriging having different kernels. The calibration set is iteratively enriched using a new learning function based on the probability of misclassification of the prediction point by the ensemble of surrogate models.

The second contribution addresses the reliability analysis of structures subject to spatial variability. The latter can generate multiple failure locations that are generally ignored when estimating the failure probability because of the assumption of uniqueness of the failure location. This may lead to a wrong estimation of the failure probability. The consideration of the multiple potential failure locations is performed here with system reliability methods, by analogy between the mathematical formulation of series systems and the problem at hand. An extension of the AK-SYS method is proposed, referred to as AK-SYSs. The potential failure locations are not selected beforehand since they are not known ; they are identified iteratively. The proposed method therefore combines the enrichment process of the AK-SYS method with an active search strategy for potential failure locations.

Keywords : reliability, probability of failure, surrogate models, Kriging, active learning, ensemble of surrogate models, spatial variability, stochastic process

Abréviations

- AK-MCS** Active learning reliability method combining Kriging and Monte Carlo Simulation. 8, 66–68, 70, 72, 73, 76, 82–84, 86, 88, 89, 91, 92, 94, 95, 97, 100, 105, 114, 119, 121, 122, 128
- AK-SYS** Active learning and Kriging-based SYStem reliability method. 8, 70, 109, 114–116, 119, 120, 129
- AK-SYSs** Active learning and Kriging-based SYStem reliability method for space-variant problems. 109, 116, 118–122, 128, 129
- AKE-MCS** Active learning reliability method combining Kriging ensemble and Monte Carlo Simulation. 8, 76, 84, 86, 88, 89, 91, 92, 94, 96, 97, 100, 105, 106
- ANN** Artificial neural network. 53–55, 76
- BLUP** Best linear unbiased predictor. 61, 62
- CE** Cross-entropy method. 39–41, 45
- DoE** Design of experiments. 48, 52, 54, 56, 57, 59, 60, 68, 83
- DoE_{test}** Design of experiments test. 57
- EFF** Expected Feasibility Function. 65, 66, 70, 84, 114, 115
- EGRA** Efficient Global Reliability Analysis. 65, 83, 114
- EM** Ensemble of surrogate models. 9, 76, 78–80, 82, 84, 106
- FOB** First-order bounds. 113
- FORM** First order reliability method. 32–35, 38, 44, 111–113, 119, 121, 122, 124, 127
- HDMR** High Dimensional Model Representations. 59
- IDoE** Initial design of experiments. 49, 51, 53, 67, 68, 116, 117, 119
- LHS** Latin hypercube sampling. 50, 51
- LOO** Leave-one-out cross validation error. 58, 79, 80
- MC** Monte Carlo simulation. 35, 44, 68, 72, 90, 119
- MSE** Mean Square Error. 57
- NPIS** Non-parametric importance sampling. 44
- PIS** Parametric importance sampling. 44

QMC Quasi Monte Carlo. 49, 50

RBF Radial basis functions. 55, 76, 80

SOB Second-order bounds. 113, 119, 121, 124

SORM Second order reliability method. 32–35, 44, 45

SQP Sequential quadratic programming. 32

SS Subset simulations. 41, 42, 45

SVM Support vector machines. 15, 45, 53, 56, 83, 116

SVR Support vector regresssion. 56, 58, 59, 76

Nomenclatures

- $C_{\mathbf{X}}$ Matrice de covariance du vecteur aléatoire \mathbf{X} . 22
- D_f Domaine de défaillance défini à partir de la fonction de performance. 27, 36
- D_s Domaine de sûreté défini à partir de la fonction de performance. 27
- $F_{\mathbf{X}}$ Fonction de distribution conjointe du vecteur aléatoire \mathbf{X} . 22, 29
- F Fonction de répartition d'une variable aléatoire. 20
- G Fonction de performance exprimée dans l'espace normal standard. 29, 60, 67
- N_e Taille du plan d'expériences. 48, 50, 52, 54, 58, 60, 61, 67, 79, 83, 93
- N_p Nombre de points/zones de discrétisation d'un problème soumis à la variabilité spatiale aléatoire. 116, 117
- N_{MC} Taille de la population de Monte Carlo. 35, 36, 66, 111, 114–116
- P^* Point de défaillance le plus probable ou point de conception. 31–35, 37, 38, 44, 68, 111
- P_f Probabilité de défaillance. 36, 37
- R Fonction d'autocorrélation ou Noyau. 23, 25, 61
- U_{ens} Fonction d'apprentissage de la méthode AKE-MCS. 84, 86, 88, 94, 95, 97, 102
- U_s Fonction d'apprentissage composite de la méthode AK-SYS. 114, 115, 117, 121
- U Fonction d'apprentissage de la méthode AK-MCS. 65–68, 70–72, 82–84, 86, 88, 94, 100
- X Variable aléatoire définie dans l'espace physique. 20, 21
- Φ_n Fonction de distribution jointe gaussienne standard. 29, 32, 66
- Θ Vecteur de paramètres du méta-modèle. 48, 53, 55, 56, 59, 62
- β Indice de fiabilité. 32, 33, 110
- $\hat{\Theta}$ Vecteur de paramètres optimaux du méta-modèle. 49, 52, 54, 56
- $\hat{\theta}$ Vecteur de paramètres optimaux du noyau R. 63
- τ Indice représentant la variabilité spatiale (ou temporelle). 23, 108
- θ Vecteur de paramètres du noyau R. 25, 26, 61, 62
- δ_X Coefficient de variation de la variable aléatoire X . 21
- \hat{D}_f Domaine de défaillance défini à partir de la prédiction du méta-modèle. 48
- \hat{G}_{ens} Ensemble de méta-modèles exprimé dans l'espace normal standard. 78, 86
- \hat{G} Méta-modèle de la fonction de performance exprimé dans l'espace normal standard. 60, 68
- \hat{g} Méta-modèle de la fonction de performance exprimé dans l'espace physique. 48, 52, 53, 56
- \mathcal{X} Espace des entrées. 48–50

- \mathcal{Y} Espace des sorties. 48
- N_g Nombre d'appels à la vraie fonction de performance. 88
- μ_X Moyenne de la variable aléatoire X . 21
- $\mu_{\mathbf{X}}$ Vecteur moyen du vecteur aléatoire \mathbf{X} . 22
- σ_X^2 Variance de la variable aléatoire X . 21
- σ_X Écart-type de la variable aléatoire X . 21
- \mathbf{U} Vecteur aléatoire défini dans l'espace normal standard. 29, 30, 60, 66, 112, 116
- \mathbf{X} Vecteur aléatoire défini dans l'espace physique. 9, 22, 28–30, 35, 36, 40, 41, 43, 54, 60, 108, 112
- \mathbf{u}^* Coordonnées du point de défaillance le plus probable P^* . 32
- $\mathbf{u}^{(*)}$ Point à enrichir durant le processus d'enrichissement adaptatif du plan d'expériences. 65, 67, 68, 82, 115–117
- \mathbf{u} Réalisation du vecteur aléatoire \mathbf{U} . 60
- \mathbf{x} Réalisation du vecteur aléatoire \mathbf{X} . 22
- φ_n Fonction de densité jointe gaussienne standard. 29, 66
- d Dimension de l'espace de variabilité. 23
- f_X Fonction de densité de la variable aléatoire X . 21
- $f_{\mathbf{X}}$ Fonction de densité jointe du vecteur aléatoire \mathbf{X} . 22, 28, 35, 42
- g Fonction de performance exprimée dans l'espace physique. 27–29, 48, 52, 53
- m Nombre de métamodèles dans un EM. 78, 93
- n Taille du vecteur aléatoire d'entrée \mathbf{X} . 23, 28, 35, 36, 43, 50, 51, 83
- p Nombre de zones potentielles de défaillance retenues pour l'analyse de fiabilité des problèmes avec une variabilité spatiale. 110, 117
- w_i Poids du $i^{\text{ème}}$ méta-modèle de l'EM. 78, 79, 86
- x Réalisation de la variable aléatoire X . 20, 21

Table des matières

Introduction	13
1 Analyse de fiabilité	18
1.1 Introduction	19
1.2 Éléments de l'analyse de fiabilité	19
1.2.1 Probabilités	19
1.2.2 Variable aléatoire	20
1.2.3 Vecteur aléatoire	22
1.2.4 Processus aléatoire	23
1.2.4.1 Définitions	23
1.2.4.2 Représentation des processus aléatoires	24
1.2.4.3 Exemples de fonctions d'autocovariance stationnaires	25
1.3 Notions fondamentales du problème de fiabilité	27
1.3.1 Définitions	27
1.3.2 Formulation mathématique générale d'un problème de fiabilité	27
1.3.3 Transformation iso-probabiliste	29
1.3.3.1 De l'espace physique à l'espace standard	29
1.3.3.2 Quelques transformations usuelles	30
1.4 Méthodes fiabilistes traditionnelles	31
1.4.1 Les méthodes d'approximation FORM / SORM	31
1.4.2 La méthode de Monte Carlo classique	35
1.4.3 Tirages d'importance	36
1.4.4 Subset simulation	41
1.5 Enjeux du calcul de la probabilité de défaillance	42
1.6 Conclusions	46

2	Méta-modélisation pour la fiabilité	47
2.1	Introduction	48
2.2	Calibration d'un méta-modèle	48
2.2.1	Génération du plan d'expériences	49
2.2.1.1	Plan d'expériences statique	49
2.2.1.2	Plan d'expériences actif ou adaptatif	50
2.2.2	Calibration du méta-modèle : revue des techniques dédiées à certains méta-modèles	52
2.2.3	Validation de l'approximation du méta-modèle	56
2.2.4	Discussions	58
2.3	Focus sur le méta-modèle du krigeage	59
2.3.1	Formulation du krigeage	60
2.3.1.1	Principe	60
2.3.1.2	Prédiction	60
2.3.1.3	Estimation des hyper-paramètres	62
2.3.2	Illustration de l'approximation par krigeage	63
2.3.3	krigeage adaptatif	64
2.3.3.1	Méthode AK-MCS	66
2.3.3.2	Extensions de la méthode AK-MCS	68
2.3.3.3	Critères de convergence	70
2.4	Conclusions	72
3	Agrégation de méta-modèles pour l'estimation de probabilité de défaillance	74
3.1	Introduction	76
3.2	Ensembles de méta-modèles	77
3.2.1	Principe des ensembles de méta-modèles	77
3.2.2	Techniques de pondération	78
3.2.3	Les ensembles de méta-modèles en analyse de fiabilité	82
3.3	AKE-MCS : ensemble de krigeages adaptatifs pour l'analyse de fiabilité	84
3.3.1	Fonction d'apprentissage U_{ens}	84
3.3.2	Technique de pondération adoptée	87
3.3.3	Critère de convergence	87
3.4	Validation de la méthode AKE-MCS sur des problèmes composant	87
3.4.1	Fonction multimodale	88
3.4.2	Fonction choc latéral sur un véhicule	89
3.4.3	Système à deux barres	90

3.4.4	Fonction borehole	92
3.5	Validation de la méthode AKE-MCS sur des problèmes système	94
3.5.1	Fonction système série à quatre branches	94
3.5.2	Fonction système série à quatre branches avec un écart-type augmenté	96
3.5.3	Fonction système mixte	98
3.5.4	Fonction système parallèle	102
3.6	Conclusions	104
4	Utilisation du krigeage adaptatif pour l'analyse de fiabilité des problèmes avec variabilité spatiale	107
4.1	Introduction	108
4.2	Variabilité spatiale et fiabilité système	109
4.2.1	Utilisation des méthodes de fiabilité système pour la prise en compte de la variabilité spatiale	110
4.2.2	Méthodes classiques pour la fiabilité système	111
4.2.3	Méta-modélisation pour la fiabilité système	114
4.3	AK-SYSs pour l'analyse de fiabilité des structures avec variabilité spatiale	116
4.4	Exemple académique	118
4.5	Plaque trouée avec propriétés matériau variables spatialement	120
4.5.1	Description	120
4.5.2	Résultats	121
4.6	Plaque trouée avec propriétés du matériau et chargement aléatoires	123
4.6.1	Description	123
4.6.2	Résultats	124
4.6.3	Sensibilité au plan d'expériences initial	125
4.6.4	Effets de la taille du plan d'expériences initial	126
4.7	Analyses et discussions	127
4.8	Conclusions	129
	Conclusions & Perspectives	131
	Bibliographie	135

Introduction

Contexte

Tout système en ingénierie est sujet au risque qu'il ne soit plus capable d'accomplir les fonctions désirées et pour lesquelles il a été conçu. Dans ce cas, le système est dit défaillant. Cette défaillance peut avoir un impact mineur comme elle peut avoir des conséquences majeures économiques, humaines et même environnementales. L'occurrence de la défaillance et ses conséquences sont incertaines en raison des phénomènes aléatoires qu'impliquent les problèmes de l'ingénierie. Ces derniers sont entachés d'incertitudes ayant différentes sources et natures, d'où l'incertitude sur leur performance. La prise en compte des incertitudes en ingénierie a longtemps été réalisée par les méthodes dites « au pire des cas » ou par l'intégration des coefficients de sécurité permettant d'assurer des marges suffisantes entre la résistance et la sollicitation des systèmes. Ces approches permettent de protéger les systèmes de l'aléa et du comportement incertain de la défaillance en utilisant des modèles mathématiques simples qui requièrent peu d'informations sur les incertitudes. De plus, cette pratique implique une définition subjective et arbitraire de l'événement de la défaillance qui peut être grave mais peu récurrent. Ceci conduit à des conceptions très conservatrices et à la mise en place de règlements trop strictes.

Pour cette raison, une approche probabiliste a été mise en avant pour la conception, la régulation et le management de la sûreté des systèmes entachés d'incertitudes. L'effet de ces dernières sur la performance des systèmes est quantifié et modélisé par des méthodes issues de la théorie des probabilités, par exemple par l'utilisation de la notion de variable aléatoire et de ses propriétés pour caractériser l'incertitude sur les paramètres d'entrée du système. La théorie des probabilités a été initiée par Blaise Pascal et Pierre de Fermat dans les années 1600 pour répondre aux questions des jeux de pari et qui a été ensuite élargie à différents problèmes par Laplace dans les années 1800. Cette approche probabiliste permet de gérer quantitativement les incertitudes dans le but de détecter tous les scénarios possibles de la défaillance des systèmes. Ensuite, leur probabilité d'occurrence est quantifiée et elle est considérée comme étant l'une des mesures typiques de la fiabilité des systèmes. Elle est une information primordiale car elle donne une indication sur la performance du système, contribue à sa gestion et à son optimisation, comme elle aide à la prise de décision dans les contextes incertains vis-à-vis de sa pertinence.

L'estimation de la probabilité de défaillance d'un événement redouté passe par la définition d'un état-limite qui caractérise par exemple la sécurité d'une structure vis-à-vis de l'écroulement ou des limitations sur les dommages, les déformations ou sur d'autres critères. Le dépassement de cet état-limite est défini comme étant une atteinte à un état indésirable du système. La mesure de la probabilité de défaillance est ensuite déterminée par l'intégrale multidimensionnelle de la fonction de densité jointe des variables aléatoires d'entrée sur tout le domaine de défaillance, i.e le domaine où l'état-limite est atteint ou dépassé. Le calcul de cette intégrale n'étant pas trivial,

surtout quand l'état-limite ne dispose pas d'une expression analytique explicite, l'intégrale est plutôt simplifiée soit en approchant la forme de l'état-limite par des formes plus simples (e.g hyperplans ou hyperparaboles), soit en utilisant des méthodes de simulations numériques.

Les méthodes d'approximation géométrique de l'état-limite par des formes simplifiées utilisent les développements en série de Taylor. Ces développements sont effectués au point de défaillance le plus probable qui est déterminé dans l'espace standard à partir de la résolution d'un problème d'optimisation. Les résultats de ces méthodes sont obtenus avec des coûts de calcul relativement raisonnables et sont assez correctes quand la forme de l'état-limite est suffisamment simple. En effet, la qualité de leurs résultats dépend fortement des hypothèses simplificatrices de la forme de l'état-limite. De plus, le degré de cette dépendance n'est pas quantifiable *a posteriori*. En ce qui concerne les méthodes de simulation, elles permettent d'obtenir une estimation statistique du résultat de l'intégral multidimensionnelle en générant aléatoirement un nombre suffisamment grand de réalisations des variables aléatoires et en évaluant la fonction de performance du système sur toutes ces réalisations. La montée en puissance de l'utilisation de la modélisation numérique des systèmes de l'ingénierie rend l'évaluation de leurs fonctions de performance de plus en plus coûteuse en temps de calcul. Par conséquent, pour une estimation robuste de la probabilité de défaillance, les méthodes de simulation requièrent un effort numérique assez important qui est souvent inenvisageable vu la complexité des systèmes de l'ingénierie et les modèles numériques associés. Une estimation précise de la probabilité de défaillance avec un coût de calcul minimum est donc le premier verrou sur lequel des développements restent toujours nécessaires et ce dans plusieurs contextes.

Dans le but d'alléger le coût de calcul de l'analyse de fiabilité, il devient plus intéressant d'utiliser des modèles de substitution ayant des temps de réponse plus rapides et dont les prédictions sont les plus proches possibles des modèles onéreux. Ces modèles dits de substitution, modèles réduits, méta-modèles, surfaces de réponse ou encore *surrogate models* dans la littérature anglosaxonne sont des modèles mathématiques qui remplacent les modèles numériques et sont paramétrés par des évaluations de ce dernier. Dans cette thèse, le terme méta-modèle est privilégié et est utilisé pour désigner un modèle de substitution. La construction mathématique des méta-modèles nécessite tout d'abord la collecte d'un certain nombre d'évaluations du modèle numérique onéreux. Ces évaluations constituent le plan d'expériences à partir duquel le méta-modèle est calibré. Cette étape est considérée comme étant le premier challenge de l'utilisation des méta-modèles. Ce plan d'expériences doit être limité mais représentatif du comportement du modèle remplacé. Il doit donc permettre au méta-modèle d'avoir la plus faible erreur possible de substitution. En analyse de fiabilité, la minimisation de cette erreur n'est pas exigée sur tout le domaine de définition des variables aléatoires. La qualité d'approximation du méta-modèle est uniquement requise au voisinage de l'état-limite qui sépare le domaine de sûreté du domaine de défaillance. L'utilisation des plans d'expériences adaptatifs semble faire consensus dans la littérature. L'objectif est de raffiner la qualité d'approximation du méta-modèle itérativement tout en générant des points du plan d'expériences proches de l'état-limite. Ainsi, les points du plan d'expériences seront situés dans des zones stratégiques (au voisinage de l'état-limite) et leur nombre sera réduit. Ceci constitue l'idée principale des méthodes AK (*adaptive Kriging*) proposées par Echard *et al.* (2011) qui emploient des fonctions d'apprentissage basées sur les prédictions du méta-modèle type krigeage pour une sélection judicieuse du plan d'expériences. En plus de l'aspect adaptatif du plan d'expériences, ces méthodes classent les points en fonction du signe des valeurs de la fonction de performance.

L'efficacité et la simplicité d'implémentation des méthodes AK ont encouragé de nombreux chercheurs à étendre leur utilisation pour traiter les différents challenges de l'analyse de fiabilité.

Elles ont donc été utilisées/adaptées pour l'estimation de faibles probabilités, de probabilités en grande dimension, de probabilités systèmes, de probabilités dépendantes du temps et de probabilités floues. Elles ont même trouvé leur place dans d'autres domaines tels que l'optimisation sous incertitudes, la métrologie, la vérification de la conformité géométrique et la gestion des dérogations en fabrication.

Un autre challenge que les utilisateurs de méta-modèles rencontrent est le choix *a priori* d'un méta-modèle parmi les familles existantes (polynômes, réseaux de neurones, SVM, etc.), et même parfois le choix d'une configuration spécifique au sein d'une même famille. Il est en effet souvent difficile de déterminer le meilleur méta-modèle pour un plan d'expériences fixé. De plus, d'un problème à un autre, le meilleur méta-modèle n'est pas nécessairement le même. Pour le krigeage par exemple, un choix doit être fait par rapport à ces deux composants principaux : la tendance et le noyau. Un choix inapproprié de ces deux fonctions peut entraîner de mauvaises approximations et, par conséquent, une mauvaise estimation de la probabilité de défaillance. De plus, il n'existe aucun consensus ou critères pour le choix *a priori* des deux fonctions tendance et noyau. Traditionnellement, la solution est pragmatique et est guidée par l'intuition. On se base sur les expériences antérieures, la disponibilité de logiciels ou simplement la calibration de plusieurs méta-modèles, pour sélectionner ensuite le meilleur méta-modèle selon un certain critère. Il peut être intéressant de prendre en compte plusieurs méta-modèles pour l'évaluation de la probabilité de défaillance en utilisant un ensemble de méta-modèles qui agrège leurs prédictions. Dans ce mémoire, nous proposons une nouvelle extension aux méthodes AK qui agrège un ensemble de modèles de krigeage.

L'analyse de fiabilité des systèmes sujets à la variabilité spatiale se présente aussi comme un défi pour les scientifiques. Les paramètres d'entrée sont dans ce cas aléatoires et non-homogènes dans l'espace. Le traitement de ces problèmes passe généralement par des hypothèses simplificatrices sur la localisation de la défaillance dans l'espace qui la considèrent unique et parfaitement identifiée. Cette localisation est généralement déterminée pour une unique réalisation des variables aléatoires. Cette simplification semble anodine mais peut avoir des conséquences importantes en termes de probabilité de défaillance. En effet si la détermination de cette localisation est effectuée sur une réalisation aberrante ou peu probable des variables aléatoires, le résultat peut en être totalement erroné et non représentatif du scénario principal de la défaillance. Cette hypothèse peut sous-estimer la probabilité de défaillance du système puisque la variabilité spatiale des paramètres d'entrée engendre assez souvent plusieurs localisations à haut risque de défaillance qui sont négligées. Ainsi, il paraît judicieux de trouver toutes les localisations de défaillance possibles. Par ailleurs, la corrélation spatiale entre les différentes localisations fait que la défaillance en l'une localisation implique la défaillance de tout le système. Ce comportement est semblable à celui des systèmes série. Par conséquent, les méthodes de fiabilité système ont été jugées pertinentes pour mener l'analyse de fiabilité avec variabilité spatiale, ce qui fait l'objet du second axe de travail. En utilisant ce principe, les localisations à haut risque de défaillance détectées sont toutes prises en compte, ce qui permet d'améliorer la qualité d'estimation de la probabilité de défaillance pour ce type de problèmes.

Objectifs et organisation de la thèse

Cette thèse apporte en premier lieu une réponse au verrou principal des problèmes d'ingénierie qui est le caractère onéreux des modèles numériques mis en œuvre. Elle présente donc des développements basés sur les méta-modèles, notamment le krigeage adaptatif. Cet outil mathématique

permet de réduire considérablement les temps de calcul pour les différentes problématiques traitées jusqu'à présent. Son utilisation pour deux autres types de problèmes est également examinée. L'objectif de la thèse est donc de :

- développer une combinaison entre les ensembles de méta-modèles et les méthodes d'apprentissage actif pour l'analyse de fiabilité afin de s'affranchir du choix *a priori* du type de méta-modèle et/ou de sa configuration. Une des motivations de cette combinaison est d'étudier la pertinence de l'utilisation d'un ensemble de méta-modèles comme substitut de la fonction de performance pour estimer la probabilité de défaillance avec les méthodes actuellement employées.
- proposer une stratégie pour l'analyse de fiabilité des problèmes avec variabilité spatiale en utilisant les méthodes de fiabilité système. Cela nécessite tout d'abord l'identification des zones de défaillance qui sont dans la plupart des cas méconnues à l'avance. La méthode AK-SYS proposée par Fauriat et Gayton (2014) est l'une des méthodes proposées pour les problèmes système. Elle nécessite tout d'abord l'identification des composants du système. L'objectif est donc de proposer une adaptation de la méthode AK-SYS qui permet de détecter les zones à haut risque de défaillance pour les problèmes à variabilité spatiale.

Les développements relatifs à ces objectifs sont décrits dans cette thèse à travers quatre chapitres. Les deux premiers chapitres présentent l'état de l'art de ces problématiques. Les chapitres suivants présentent les contributions de la thèse.

Chapitre 1. Il est consacré à la présentation des notions de base et des méthodes nécessaires à l'analyse de fiabilité. Tel qu'évoqué précédemment, les incertitudes inhérentes aux systèmes de l'ingénierie sont quantifiées et modélisées par des méthodes issues de la théorie des probabilités dans le cadre des approches probabilistes. Les principales notions de cette théorie sont tout d'abord rappelées. Ce chapitre évoque aussi les bases de l'analyse de fiabilité à travers des définitions et des formulations mathématiques. Ensuite, les méthodes de la propagation d'incertitudes sont discutées. Ces méthodes sont bien connues et largement employées au sein de la communauté scientifique. Une brève présentation est donnée pour quelques unes d'entre elles. À la fin de ce chapitre, une discussion est menée sur les enjeux majeurs de l'analyse de fiabilité.

Chapitre 2. Il se concentre sur la technique de méta-modélisation. Le couplage de ces techniques aux méthodes traditionnelles de l'analyse de fiabilité est souvent nécessaire quand l'enjeu des temps de calcul est important. Ainsi, ce chapitre aborde en premier lieu les étapes principales de la construction d'un méta-modèle : génération du plan d'expériences, calibration et validation. Ensuite, une attention particulière est donnée au méta-modèle de type krigeage en raison de sa forte utilisation dans cette thèse pour l'atteinte des objectifs mentionnés ci-dessus.

Chapitre 3. Il aborde la question du choix de méta-modèle, notamment celui de la meilleure combinaison tendance/noyau du krigeage. Il est proposé dans ce chapitre d'utiliser les ensembles de méta-modèles qui sont souvent considérés comme l'interprétation en *machine learning* de la théorie de la sagesse de la foule, voir e.g (Yi *et al.*, 2012). Selon cette théorie, la combinaison de plusieurs prédicteurs permet d'avoir des prédictions plus exactes que celles des prédicteurs individuels. La mise en place d'un ensemble de méta-modèles est ici effectuée par agrégation pondérée des prédictions de krigeages ordinaires avec différents noyaux. Cet ensemble est calibré itérativement

dans le cadre de la méthode *active learning reliability method combining Kriging ensemble and Monte Carlo Simulation* (AKE-MCS) introduite dans ce chapitre. Tous les développements liés à cette méthode sont évoqués après un état de l'art sur le principe des ensembles des méta-modèles ainsi que leur utilisation en analyse de fiabilité. Enfin, la méthode proposée est appliquée à huit exemples souvent utilisés en analyse de fiabilité.

Chapitre 4. Ce dernier chapitre aborde l'analyse de fiabilité des structures sujettes à une variabilité spatiale. Comme expliqué précédemment, la variabilité spatiale peut générer de multiples zones de défaillance. La plupart de ces zones sont généralement ignorées lors de l'estimation de la probabilité de défaillance à cause de l'hypothèse d'unicité du lieu de défaillance. Ceci cause généralement une sous-estimation de la probabilité de défaillance. La considération de plusieurs zones de défaillance rend le comportement des problèmes soumis à une variabilité spatiale comparable à celui des problèmes système série. Il est ainsi apparu pertinent d'employer les méthodes de fiabilité système pour l'analyse de fiabilité du problème étudié. L'utilisation de cette technique est d'abord discutée dans ce chapitre. Une extension de la méthode AK-SYS est ensuite proposée. Elle est nommée AK-SYSs et combine le processus d'enrichissement de la méthode AK-SYS avec une stratégie de recherche active des zones à haut risque de défaillance. Après une illustration sur un exemple académique, cette méthode est appliquée à un problème aux éléments finis ayant plusieurs configurations de la variabilité spatiale qui est ici modélisée par des processus gaussiens.

Chapitre 1

Analyse de fiabilité

Éléments clés

- Poser les bases de la théorie des probabilités.
 - Formuler un problème d'analyse de fiabilité et présenter différentes méthodes pour l'estimation de la probabilité de défaillance.
-

Sommaire

1.1	Introduction	19
1.2	Éléments de l'analyse de fiabilité	19
1.2.1	Probabilités	19
1.2.2	Variable aléatoire	20
1.2.3	Vecteur aléatoire	22
1.2.4	Processus aléatoire	23
1.3	Notions fondamentales du problème de fiabilité	27
1.3.1	Définitions	27
1.3.2	Formulation mathématique générale d'un problème de fiabilité	27
1.3.3	Transformation iso-probabiliste	29
1.4	Méthodes fiabilistes traditionnelles	31
1.4.1	Les méthodes d'approximation FORM / SORM	31
1.4.2	La méthode de Monte Carlo classique	35
1.4.3	Tirages d'importance	36
1.4.4	Subset simulation	41
1.5	Enjeux du calcul de la probabilité de défaillance	42
1.6	Conclusions	46

1.1 Introduction

Le risque qu'un système échoue à répondre correctement aux exigences de son bon fonctionnement existe à tout moment. L'occurrence de cet événement est souvent liée aux dommages ou aux changements causés par le dépassement de la résistance du système par les charges auxquelles il est soumis. L'existence de la probabilité qu'un système soit défaillant rend sa performance incertaine. L'analyse de fiabilité d'un système en ingénierie revient à avoir une évaluation fiable de sa performance afin de l'améliorer et réduire les chances d'occurrence de l'évènement "défaillance". Elle prend en compte les incertitudes inhérentes du système afin de quantifier l'incertitude sur sa performance. L'incertitude est définie par Singh *et al.* (2007) comme étant une mesure imparfaite d'un savoir ou d'une erreur probable qui peut se produire durant le processus de collection de données, la modélisation et l'analyse d'un système en ingénierie et la prédiction d'un processus aléatoire. Les incertitudes sont généralement causées par une variabilité intrinsèque au système et par l'interaction avec son environnement, comme elles peuvent être causées par le manque de données. Les données sont souvent éparses et ne sont pas de bonne qualité. De plus, la complexité des systèmes en ingénierie rend le recours à des modélisations numériques et/ou mathématiques inévitables. Ceci engendre donc deux autres sources d'incertitudes. La première est causée par l'incertitude sur les paramètres du modèle car leur qualité dépend fortement des données et/ou des techniques et méthodes utilisées pour leur détermination. La deuxième source d'incertitude est liée à la capacité du modèle à bien capter le comportement du système réel et cela dépend des hypothèses et des simplifications faites lors de sa conception.

Des facteurs de sécurité empiriques sont couramment utilisés pour la prise en compte des incertitudes. Toutefois, ces facteurs peuvent ne pas répondre aux exigences de sécurité des structures comme ils peuvent engendrer des sur-dimensionnements. De plus, ils ne fournissent aucune information concernant l'influence des différents paramètres sur la fiabilité des systèmes (Verma *et al.*, 2010). Une approche probabiliste permet d'éviter cela car l'incertitude sur les paramètres d'entrée est modélisée par différentes lois de probabilité. Ainsi, il est possible d'avoir plus de maîtrise sur l'aspect incertain des paramètres. Des notions de la théorie des probabilités sont brièvement rappelées dans la Section 1.2 et, pour plus de détails, le lecteur peut se référer à (Loève, 1963; Kobayashi *et al.*, 2011). Ensuite, divers éléments de base nécessaires à l'analyse de fiabilité sont introduits dans la Section 1.3. La Section 1.4 décrit les techniques les plus couramment utilisées pour l'estimation de la probabilité de défaillance. Enfin, une synthèse et des éléments de discussions sont proposés dans la Section 1.6.

1.2 Éléments de l'analyse de fiabilité

1.2.1 Probabilités

La théorie des probabilités concerne principalement les expériences aléatoires et leurs réalisations. L'ensemble des issues possibles ω est souvent appelé l'univers des possibles ou l'ensemble fondamental et est noté Ω . Un événement est l'ensemble des réalisations qui répondent à certaines conditions et il est un sous-ensemble de Ω . À chaque événement, une mesure de la probabilité lui est attribuée. La probabilité d'un événement A est notée $P(A)$. Elle doit avoir un ensemble de propriétés souvent appelées **axiomes de la probabilité**.

Axiome 1 : La probabilité d'un événement est un nombre réel positif inférieur ou égal à l'unité, i.e. $0 \leq P(A) \leq 1$

Axiome 2 : La probabilité de l'évènement certain, associé à Ω est l'unité, i.e., $P(\Omega) = 1$.

Axiome 3 : La probabilité de l'union de deux évènements A et B mutuellement exclusifs est égale à la somme des probabilités de chaque évènement, i.e. si $A \cap B = \emptyset$, alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Le triplet (Ω, \mathcal{A}, P) est appelé l'espace de probabilité, où \mathcal{A} est une tribu sur Ω (tribu des évènements).

La probabilité conditionnelle est la mesure de la probabilité de l'évènement A , sachant que l'évènement B a eu lieu. C'est un concept important de la théorie de la probabilité car elle permet de calculer des probabilités lorsque des informations partielles sur les résultats d'une expérience aléatoire sont à disposition. Elle est définie par le ratio entre la probabilité de l'intersection des évènements A et B et la probabilité de l'évènement B :

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad (1.1)$$

Si $P(B) = 0$, la probabilité conditionnelle $P(A|B)$ est non-définie. Sinon, on peut facilement déduire la probabilité de l'intersection $P(A \cap B)$ à partir de l'équation 1.1 qui s'écrit donc de la façon suivante :

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B) \quad (1.2)$$

Une généralisation de l'équation 1.2 permet d'exprimer la probabilité de l'intersection d'un nombre important d'évènement arbitraires. Cette formulation est généralement connue sous *la loi de la multiplication*. Elle est donnée par l'expression suivante pour l'ensemble d'évènements $\{A_1, A_2, \dots, A_t\}$:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_t) = P(A_1)P(A_2|A_1)\dots P(A_t|A_{t-1}) \quad (1.3)$$

Dans le cas particulier où l'occurrence de l'évènement B n'influe pas sur l'évènement A , on dit que A et B sont *indépendants*. En d'autres termes, la mesure de la probabilité d'un évènement n'altère pas la mesure de la probabilité de l'autre. Dans ce cas, on a :

$$P(A|B) = P(A) \iff P(A \cap B) = P(A)P(B) \quad (1.4)$$

1.2.2 Variable aléatoire

La variable aléatoire est un concept qui cadre la notion des valeurs qui varient lors d'une expérience aléatoire. La fonction mesurable X de l'espace des probabilité (Ω, \mathcal{A}, P) vers l'espace connu et mesurable W^1 est une variable aléatoire de Ω vers W . Pour $W = \mathbb{R}$, la variable aléatoire est dite réelle.

$$X : \omega \in \Omega \mapsto X(\omega) \in \mathbb{R} \quad (1.5)$$

La mesure image de P par X est appelée *loi de probabilité* de X et est notée P_X . Une réalisation de X sera notée x dans toute la suite. La fonction F définie par :

$$F(x) = P(X \leq x) = P_X([-\infty, x]) \quad (1.6)$$

est appelée la *fonction de distribution cumulative*, ou plus simplement, la *fonction de répartition* de X . Elle donne, pour toute valeur réelle de x , la probabilité que la variable aléatoire X soit

1. W est mesurable implique que l'image réciproque de chaque élément de sa tribu \mathbb{W} est un élément de \mathcal{A} .

inférieure ou égale à x . C'est une application de \mathbb{R} dans $[0, 1]$ et elle est monotone croissante à gauche.

Les variables aléatoires se distinguent en deux catégories : discrète et continue. La variable aléatoire discrète a des valeurs dans un ensemble fini et sa loi de probabilité est une fonction masse f . La fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète est donnée par :

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i) \quad (1.7)$$

La somme de l'équation 1.7 est faite sur les valeurs de x où la fonction masse f est définie.

La variable aléatoire continue est souvent la plus utilisée en ingénierie pour la modélisation mathématique des phénomènes physiques. Ainsi, dans ce qui suit, les variables aléatoires seront continues. X est une variable aléatoire continue s'il existe une fonction f_X non-négative, définie sur \mathbb{R} , telle que :

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f_X(x) dx \quad (1.8)$$

La fonction f_X est dans ce cas appelée *fonction de densité* de la variable aléatoire X et elle vérifie :

$$\int_{\mathbb{R}} f_X(x) dx = 1 \quad (1.9)$$

Elle peut être déduite de la fonction de répartition de X , si cette dernière est connue, par la relation suivante :

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} \quad (1.10)$$

La description complète du comportement d'une variable aléatoire est contenue dans sa loi de probabilité, que ce soit la fonction de répartition ou la fonction de densité. Toutefois, des valeurs typiques récapitulant les caractéristiques dominantes et le comportement de la variable aléatoire sont les plus souvent utilisées. Elles sont liées aux notions de moyenne, de dispersion et de forme de la distribution. Ces valeurs sont connues mathématiquement sous le nom de *moments*. Le moment d'ordre k d'une variable aléatoire X est donné par :

$$E_f[X^k] = \int_x x^k f_X(x) dx \quad (1.11)$$

Le premier moment $E_f[X]$ est l'espérance mathématique ou la moyenne μ_X de la distribution $f(x)$. Il décrit la tendance moyenne des valeurs de la variable aléatoire. Les moments centrés d'ordre k sont utilisés pour mesurer différents aspects de la distribution par rapport à sa moyenne μ_X et ils sont exprimés par :

$$E_f[(X - \mu_X)^k] = \int_x (x - \mu_X)^k f_X(x) dx \quad (1.12)$$

Le moment centré d'ordre 2, appelé *variance*, mesure la dispersion de la variable aléatoire X autour de sa moyenne μ_X . Il est exprimée mathématiquement par :

$$\sigma_X^2 = E_f[(X - \mu_X)^2] = E_f[X^2] - (E_f[X])^2 \quad (1.13)$$

La racine carrée positive de la variance est appelée *écart-type* et est notée σ_X . Le *coefficient de variation* de X , noté δ_X , est une caractéristique adimensionnelle qui facilite la comparaison de la dispersion entre des variables aléatoires n'ayant pas les mêmes unités.

$$\delta_X = \frac{\sigma_X}{|\mu_X|}, \quad \text{pour } \mu_X \neq 0 \quad (1.14)$$

1.2.3 Vecteur aléatoire

Un vecteur aléatoire de dimension n est un vecteur dont tous les composants (X_1, X_2, \dots, X_n) sont des variables aléatoires. C'est une application de Ω vers \mathbb{R}^n qui est définie sur l'espace de probabilité (Ω, \mathcal{A}, P) .

$$\mathbf{X} : \omega \in \Omega \mapsto \mathbf{X}(\omega) \in \mathbb{R}^n \quad (1.15)$$

La loi de distribution conjointe $F_{\mathbf{X}}: \mathbb{R}^n \mapsto [0, 1]$ des composantes (X_1, X_2, \dots, X_n) de \mathbf{X} est la probabilité image de P par \mathbf{X} . Elle est définie par :

$$F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = P(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n) \quad (1.16)$$

où $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ est une réalisation de $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$.

La probabilité de l'évènement $\{\mathbf{X} \leq \mathbf{x}\}$ est donnée par une intégrale multidimensionnelle d'une fonction de densité :

$$P_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n \quad (1.17)$$

où $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n)$ est la fonction de densité jointe du vecteur aléatoire \mathbf{X} . Elle vérifie la propriété suivante :

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 1 \quad (1.18)$$

Tout comme la variable aléatoire, le vecteur aléatoire peut aussi être caractérisé par des *moments*. Il possède n moments d'ordre un $\mu_i, i = 1, \dots, n$ liés à chacune des variables aléatoires qui le composent et est définie comme suit :

$$\mu_i = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} x_i f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) dx_1 \dots dx_n \quad (1.19)$$

Dans ce cas un *vecteur moyen* est définie pour le vecteur aléatoire et est composé des valeurs moyennes de chacune des variables X_i .

$$\mu_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \mu_{X_1} \\ \mu_{X_2} \\ \vdots \\ \mu_{X_n} \end{bmatrix} \quad (1.20)$$

Les moments mixtes d'ordre 2 sont associés, pour le cas du vecteur aléatoire, à la *covariance* entre deux variable aléatoires X_i et X_j . Ils sont donnés par l'expression suivante :

$$C(X_i, X_j) = \sigma_{x_i x_j} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} (x_i - \mu_i)(x_j - \mu_j) f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) dx_1 \dots dx_n \quad (1.21)$$

La covariance permet de caractériser le degré de dépendance linéaire entre deux variables aléatoires. La variance est un cas particulier de la covariance, i.e. quand $i = j, \sigma_{X_i}^2 = C(X_i, X_i)$ où σ_{X_i} est l'écart-type de la variable aléatoire X_i . Les termes de la covariance forment ce qu'on appelle la *matrice de covariance* $C_{\mathbf{X}}$.

$$C_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \sigma_{X_1}^2 & \sigma_{X_1 X_2} & \dots & \sigma_{X_1 X_n} \\ \sigma_{X_2 X_1} & \sigma_{X_2}^2 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{X_n X_1} & \dots & \dots & \sigma_{X_n}^2 \end{bmatrix} \quad (1.22)$$

La forme normalisée de la covariance est donnée par la corrélation. Ses valeurs sont comprises dans l'intervalle $[-1, 1]$ et la matrice de corrélation s'écrit :

$$\mathbf{R} = [\rho_{ij}]_{n \times n} \quad (1.23)$$

avec :

$$\rho_{ij} = \frac{\sigma_{X_i X_j}}{\sigma_{X_i} \sigma_{X_j}} \quad (1.24)$$

Si X_i et X_j sont des variables aléatoires indépendantes, la valeur de la corrélation est nulle².

1.2.4 Processus aléatoire

1.2.4.1 Définitions

Considérons un espace quelconque $\mathcal{D} \in \mathbb{R}^d$, où $d \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Un processus aléatoire H peut être défini comme étant un ensemble de variables aléatoires indexées par un paramètre continu $\boldsymbol{\tau} \in \mathcal{D}$. L'espace \mathcal{D} contient les valeurs des indices $\boldsymbol{\tau}$ représentant la variabilité spatiale ou temporelle.

$$H(\boldsymbol{\tau}, \omega) : (\boldsymbol{\tau}, \omega) \in (\mathcal{D}, \Omega) \mapsto h(\boldsymbol{\tau}) \in \mathbb{R}^n \quad (1.25)$$

où $h(\boldsymbol{\tau}) = H(\boldsymbol{\tau}, \omega)$ indique une réalisation du processus aléatoire à l'aléa ω fixé. $h(\boldsymbol{\tau})$ est aussi appelée *trajectoire* du processus aléatoire. Pour chaque valeur de $\boldsymbol{\tau}_0$, le processus $H(\boldsymbol{\tau}_0, \omega)$ est une variable aléatoire qui définit l'état du processus à la position $\boldsymbol{\tau}_0$. Selon la dimension de $\boldsymbol{\tau}$, le processus H peut être *unidimensionnel* si $d = 1$ ou *multidimensionnel* si $d > 1$. Il est *univarié* si $n = 1$, sinon le processus est dit *multivarié*.

Un processus aléatoire est complètement caractérisé par sa loi de probabilité conjointe connue $f_{H(\boldsymbol{\tau}_1), \dots, H(\boldsymbol{\tau}_d)}(h_1, \dots, h_d)$, quelque soit $\boldsymbol{\tau} = \{\tau_1, \dots, \tau_d\} \in \mathcal{D}$, un ensemble fini d'indices temporels ou spatiaux. Lorsque le processus aléatoire est gaussien, il est complètement défini par ses moments statistiques d'ordre 1 (la moyenne) μ et d'ordre 2 (la matrice de covariance) C_H . Il est à noter que ces derniers dépendent aussi du paramètre $\boldsymbol{\tau} \in \mathcal{D}$.

$$\mu(\boldsymbol{\tau}) = \mathbb{E}[H(\boldsymbol{\tau}, \omega)] \quad (1.26)$$

$$C_H(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\tau}') = \mathbb{E}[(H(\boldsymbol{\tau}) - \mu(\boldsymbol{\tau}))(H(\boldsymbol{\tau}') - \mu(\boldsymbol{\tau}'))] \quad (1.27)$$

La fonction d'autocovariance C_H doit être symétrique et définie positive. Elle doit satisfaire les relations suivantes pour tout sous-ensemble $\mathcal{T} = \{\tau_1, \dots, \tau_d\}$ et pour tout vecteur $\mathbf{v} = \{v_1, \dots, v_d\} \in \mathbb{R}^d$:

$$C_H(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\tau}') = C_H(\boldsymbol{\tau}', \boldsymbol{\tau}) \quad (1.28)$$

$$\sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d v_i v_j C_H(\tau_i, \tau_j) \geq 0 \quad (1.29)$$

Lorsque la moyenne du processus ne dépend pas de l'indice $\boldsymbol{\tau}$, le processus aléatoire est dit *stationnaire*. Dans ce cas, la moyenne se réduit à une constante :

$$\mu(\boldsymbol{\tau}) = \mu, \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \mathcal{D} \quad (1.30)$$

et la fonction d'autocovariance $C_H(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\tau}')$ s'écrit :

$$C_H(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\tau}') = \sigma^2 R(\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}') \quad (1.31)$$

où σ^2 est la variance et R est la fonction d'autocorrélation du processus qui ne dépend que de l'écart $\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}'$.

². Le contraire n'est pas vrai, i.e., $\rho_{ij} = 0$ n'implique pas l'indépendance statistique entre les variables aléatoires X_i et X_j

1.2.4.2 Représentation des processus aléatoires

Un processus aléatoire est composé d'une infinité de variables aléatoires en raison de sa dépendance à des paramètres continus spatiaux ou temporels. Pour une manipulation pratique du processus, seulement un ensemble fini de variables aléatoires centrées $\Xi = \{\Xi_k, k \in \mathbb{N}^+\}$ est utilisé lors de sa modélisation numérique. Le processus $H(\cdot)$ est alors discrétisé et est approché par le processus $\hat{H}(\cdot)$ qui est défini par l'ensemble Ξ .

$$H(\boldsymbol{\tau}) \xrightarrow{\text{discrétisation}} \hat{H}(\boldsymbol{\tau}) = \mathcal{F}(\boldsymbol{\tau}, \Xi) \quad (1.32)$$

La formalisation mathématique \mathcal{F} de cette approximation a fait l'objet de plusieurs recherches. Une revue bibliographique intéressante sur les techniques de représentation des processus aléatoires est faite par Sudret et Der Kiureghian (2000) et Dang (2012) où on retrouve des exemples et des applications en analyse de fiabilité.

La méthode de Karhunen-Loève (Loève, 1963; Karhunen, 1947) est particulièrement intéressante et la plus largement utilisée en pratique en raison de son applicabilité à tous les champs aléatoires gaussiens, non-gaussiens, stationnaires ou non-stationnaires. Le processus aléatoire est développé en séries, en le projetant sur un ensemble de fonctions orthogonales $\{\varphi_k(\boldsymbol{\tau}), k \in \mathbb{N}^+\}$, comme suit :

$$H(\boldsymbol{\tau}) = \mu(\boldsymbol{\tau}) + \sum_{k=1}^{\infty} \Xi_k \sqrt{\lambda_k} \varphi_k(\boldsymbol{\tau}) \quad (1.33)$$

La distribution jointe du vecteur aléatoire Ξ dépend de la distribution du processus $H(\boldsymbol{\tau})$. Si cette dernière est gaussienne, l'ensemble $\{\Xi_k, k \in \mathbb{N}^+\}$ forme un vecteur gaussien (Ghanem et Spanos, 1991). Une réalisation du vecteur aléatoire Ξ correspond à une réalisation du processus aléatoire discrétisé. Les fonctions $\{\varphi_k(\boldsymbol{\tau}), k \in \mathbb{N}^+\}$ sont les fonctions propres solutions de l'équation suivante :

$$\int_{\mathcal{D}} C_H(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\tau}') \varphi_k(\boldsymbol{\tau}') d\boldsymbol{\tau}' = \lambda_k \varphi_k(\boldsymbol{\tau}) \quad (1.34)$$

où λ_k sont les valeurs propres correspondantes aux vecteurs propres $\{\varphi_k(\boldsymbol{\tau}), k \in \mathbb{N}^+\}$. L'approximation $\hat{H}(\boldsymbol{\tau})$ est obtenu par la troncature du développement en série à r termes. Elle s'écrit alors :

$$\hat{H}(\boldsymbol{\tau}) = \mu(\boldsymbol{\tau}) + \sum_{k=1}^r \Xi_k \sqrt{\lambda_k} \varphi_k(\boldsymbol{\tau}) \quad (1.35)$$

Un critère de troncature qui permet de déterminer le nombre de termes r est définie par Dang (2012) comme suit :

$$\sum_{i=1}^r \lambda_i \geq (1 - \epsilon) \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \quad (1.36)$$

où ϵ représente l'erreur de discrétisation tolérée. Il est à noter que les couples $\{(\lambda_k, \varphi_k), k \in \mathbb{N}^+\}$ sont ordonnées de telle façon que $\lambda_1 > \dots > \lambda_r > \lambda_{r+1} > \dots > 0$, voir e.g. (Dubourg, 2011).

L'implémentation de cette méthode rencontre une difficulté principale liée à la résolution de l'intégrale définie à équation 1.34 qui permet de calculer les valeurs et les vecteurs propres du développement en série. Pour les fonctions d'autocovariances triangulaires et exponentielles d'un processus aléatoire unidimensionnel et bidimensionnel, des solutions analytiques approchées sont proposées par Ghanem et Spanos (2003) et Ghanem et Spanos (1991). Cependant, quand aucune solution analytique n'est possible, le problème doit être résolu numériquement, voir e.g (Dang, 2012; Phoon *et al.*, 2002; Ghanem et Spanos, 2003). Une deuxième difficulté apparaît quand le processus aléatoire est non-gaussien. Dans ce cas, la détermination de la distribution du vecteur aléatoire Ξ peut aussi être problématique. Toutefois, des approches sont proposées par Dubourg *et al.* (2011); Phoon *et al.* (2005); Guillemot *et al.* (2008) dans le but de lever ce verrou.

1.2.4.3 Exemples de fonctions d'autocovariance stationnaires

Les réalisations (ou trajectoires) générées à partir d'un processus stationnaire donné sont fortement affectées par le choix du modèle de la fonction d'autocorrélation R . Les propriétés de ces modèles sont contrôlées par des paramètres regroupés dans un vecteur souvent noté θ . Cette section présente les modèles les plus utilisés. Les processus aléatoires illustrés ici sont gaussiens, stationnaires, unidimensionnels, de moyenne nulle et de variance unitaire. Une extension vers le multidimensionnel est toujours possible en faisant le produit des corrélations unidimensionnelles sur chaque dimension comme suit (Moustapha, 2016) :

$$R(\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}'; \boldsymbol{\theta}) = \prod_{i=1}^d R(\tau_i - \tau'_i; \theta_i) \quad (1.37)$$

La fonction d'autocorrélation exprimée par cette équation (équation 1.37) est appelée fonction d'autocorrélation anisotrope ou aussi noyau anisotrope car chaque dimension $i = 1, \dots, n$ est caractérisée par son propre paramètre θ_i . En revanche, quand la fonction d'autocorrélation est invariante par rotation, celle ci est dite isotrope et elle est exprimée comme suit :

$$R(\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}'; \boldsymbol{\theta}) = R(\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}'; \theta) \quad (1.38)$$

Les fonctions d'autocorrélation les plus utilisées sont :

- la fonction d'autocorrélation linéaire

$$R(\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}'; l) = \max\left(0, 1 - \frac{|\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}'|}{l}\right) \quad (1.39)$$

Ici, $\theta = \{l\}$ où $l > 0$ représente la longueur de corrélation.

- la fonction d'autocorrélation γ -exponentielle

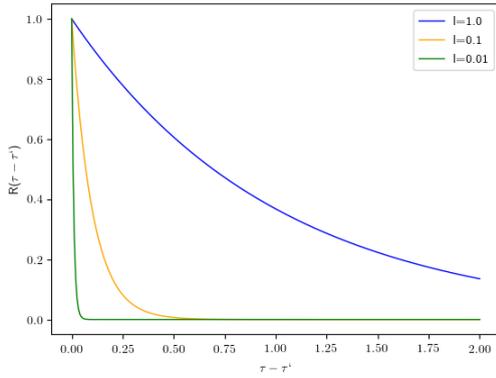
$$R(\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}'; \theta) = \exp\left(-\left(\frac{\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}'}{l}\right)^\gamma\right) \quad (1.40)$$

où le vecteur θ regroupe dans ce cas les deux paramètres l et γ , i.e. $\theta = \{l, \gamma\}$ et $0 < \gamma \leq 2$ est le paramètre qui contrôle la régularité du processus. Plus sa valeur est élevée, plus la trajectoire du processus est lisse. Quand $\gamma = 1$, la fonction d'autocorrélation est dite exponentielle. La variation de cette dernière en fonction de l'écart $\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}'$ est illustrée sur la Figure 1.1(a) pour quelques valeurs de la longueur de corrélation $l = \{1.0, 0.1, 0.01\}$. Des trajectoires d'un processus gaussien associés à ces valeurs sont présentées sur la Figure 1.1(b).

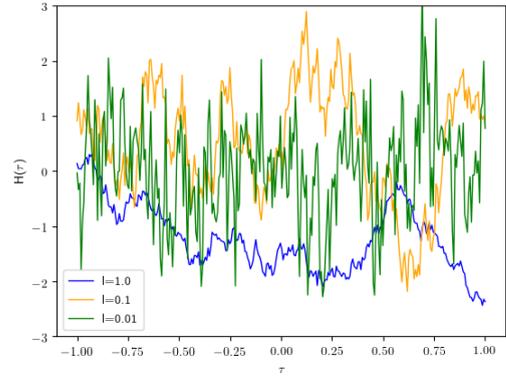
- la fonction d'autocorrélation gaussienne

$$R(\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}'; l) = \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}'}{l}\right)^2\right) \quad (1.41)$$

où $l > 0$ représente la longueur de corrélation et $\theta = \{l\}$. C'est la fonction d'autocorrélation la plus couramment utilisée. Elle est infiniment différentiable et par conséquent très régulière. Une illustration de ce modèle de corrélation est donnée sur la Figure 1.2 pour les valeurs $l = \{1.0, 0.1, 0.01\}$ de la longueur de la corrélation. La modélisation des cas physiques par ce noyau gaussien peut ne pas être assez représentative de la réalité en raison de la forte hypothèse de régularité. Ceci rend l'utilisation du noyau Matérn plus attractive et plus recommandée (Williams et Rasmussen, 2006).



(a) Fonction d'autocorrélation exponentielle.



(b) Trajectoires du processus gaussien générées avec le noyau exponentiel.

FIGURE 1.1: Illustration de trajectoires d'un processus gaussien ayant une fonction d'autocorrélation exponentielle pour différentes valeurs de la longueur de corrélation.

- la fonction d'autocorrélation de Matérn

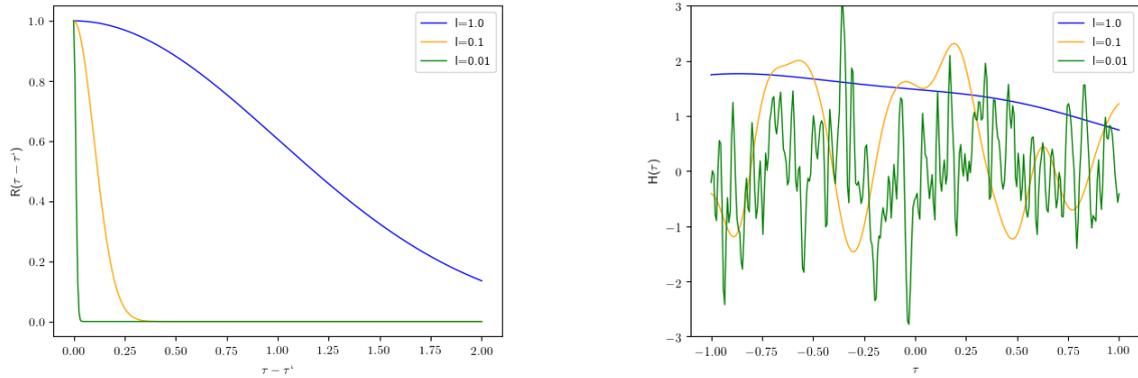
$$R(\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}'; \boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{2^{\nu-1}\Gamma(\nu)} \left(\sqrt{2\nu} \frac{|\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}'|}{l} \right)^{\nu} K_{\nu} \left(\sqrt{2\nu} \frac{|\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}'|}{l} \right) \quad (1.42)$$

où $\boldsymbol{\theta} = \{l, \nu\}$, $\nu \geq 1/2$ est le paramètre de forme qui contrôle la régularité du processus, Γ est la fonction Gamma et K_{ν} est la fonction de Bessel modifiée du second type. Pour tout entier positif $k < \nu$, cette fonction d'autocorrélation est différentiable k fois. De plus, si $\nu = k + 1/2$, sa fonction analytique devient particulièrement simple et s'écrit comme le produit d'une exponentielle et d'un polynôme d'ordre k , voir e.g (Williams et Rasmussen, 2006). Les cas particuliers où $\nu = 3/2$ et $\nu = 5/2$ sont les plus utilisés en pratique et sont respectivement exprimés par :

$$R(\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}'; l) = \left(1 + \sqrt{3} \frac{|\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}'|}{l} \right) \exp \left(-\sqrt{3} \frac{|\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}'|}{l} \right), \quad \text{quand } \nu = 3/2 \quad (1.43)$$

$$R(\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}'; l) = \left(1 + \sqrt{5} \frac{|\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}'|}{l} + \frac{5}{3} \frac{(\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}')^2}{l^2} \right) \exp \left(-\sqrt{5} \frac{|\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}'|}{l} \right), \quad \text{quand } \nu = 5/2 \quad (1.44)$$

Une illustration de ce modèle de corrélation est donnée sur la Figure 1.3 pour les valeurs $l = \{1.0, 0.1, 0.01\}$ de la longueur de la corrélation et les valeurs $\nu = \{1/2, 3/2, 5/2\}$ du paramètre de forme ν . Cette illustration montre que les trajectoires du processus gaussien sont de plus en plus lisses quand la valeur du paramètre ν augmente. De plus, pour $\nu = 1/2$, les trajectoires générées à partir de la fonction d'autocorrélation de Matérn coïncident avec celles de la fonction d'autocorrélation exponentielle. Elles sont dans ce cas continues mais non-différentiables. Il est à noter que quand ν tend vers l'infini, la fonction de Matérn tend vers la fonction d'autocorrélation gaussienne et les trajectoires générées dans ce cas sont infiniment différentiables.



(a) Fonction d'autocorrélation gaussienne.

(b) Trajectoires du processus gaussien générées avec le noyau gaussien.

FIGURE 1.2: Illustration de trajectoires d'un processus gaussien ayant un noyau gaussienne pour différentes valeurs de la longueur de corrélation.

1.3 Notions fondamentales du problème de fiabilité

1.3.1 Définitions

En mécanique, la réponse d'une structure dépend du type et de l'ampleur des charges auxquelles elle est soumise et de sa résistance. Juger que cette réponse est satisfaisante ou non dépend des exigences qui doivent être satisfaites par certains critères, liés par exemple à la flexion, aux vibrations, à la fatigue, à la corrosion ou autres. Le terme *état-limite* est souvent utilisé par la communauté scientifique pour exprimer ces exigences. La violation d'un état-limite met la structure dans des conditions indésirables.

La fonction de performance g est l'opérateur mathématique qui représente le comportement de la structure en prenant en compte les paramètres aléatoires (e.g. propriétés géométriques et mécaniques, chargement, ...) et d'éventuels paramètres déterministes (e.g. seuils prédéfinis). Elle est définie sur le domaine de définition des variables aléatoires du problème et permet de définir deux sous-domaines selon ses valeurs. Ces sous-domaines permettent d'interpréter l'état de fonctionnement de la structure et permet de distinguer trois notions de base qui reviendront assez souvent dans ce mémoire :

- **le domaine de sûreté** D_s : les exigences du bon fonctionnement de la structure sont satisfaites dans ce domaine, i.e. $D_s = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : g(\mathbf{x}) > 0\}$.
- **le domaine de défaillance** D_f : la structure est dans ce cas en état de dysfonctionnement, i.e. $D_f = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : g(\mathbf{x}) \leq 0\}$.
- **l'état-limite** : la surface qui sépare les domaines de sûreté et de défaillance, i.e. $D_l = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : g(\mathbf{x}) = 0\}$.

1.3.2 Formulation mathématique générale d'un problème de fiabilité

Dans la littérature, les principes de base de la fiabilité sont souvent illustrés par un modèle mathématique simplifié contenant deux variables R et S représentant respectivement la résistance

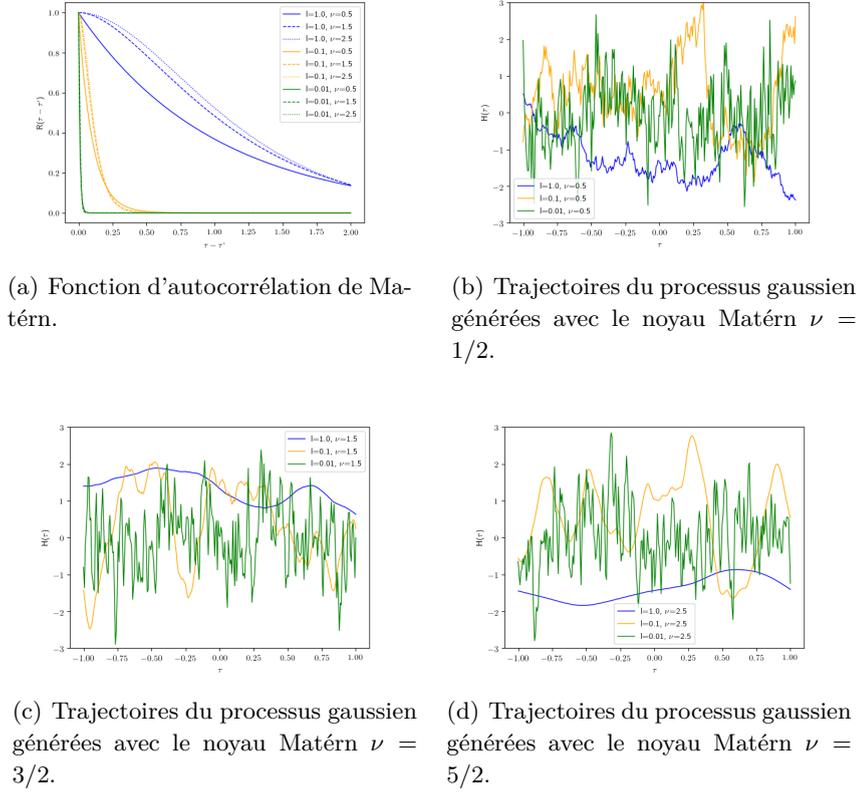


FIGURE 1.3: Illustration de trajectoires d'un processus gaussien ayant un noyau Matérn pour différentes valeurs de la longueur de corrélation et du paramètre de forme ν .

et la sollicitation. Le modèle *résistance/sollicitation* (R/S) est adopté dans plusieurs ouvrages pour illustrer le concept de l'analyse de fiabilité, voir e.g (Ditlevsen et Madsen, 1996; Lemaire *et al.*, 2009).

Dans le cas général, on considère que les paramètres incertains du problème sont modélisés par le vecteur aléatoire continu $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^T$ de dimension n . Il est défini par sa fonction de densité $f_{\mathbf{X}}(x)$. La fonction de performance s'écrit donc en fonction de ce vecteur et est notée $g(\mathbf{X})$. La probabilité de défaillance s'écrit donc :

$$\begin{aligned}
 P_f &= P(g(\mathbf{X}) \leq 0) \\
 &= \int \dots \int_{D_f} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) dx_1 \dots dx_n \\
 &= \int \dots \int_{g(\mathbf{x}) \leq 0} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}
 \end{aligned} \tag{1.45}$$

Dans la pratique, les utilisateurs de ces approches se fixent un seuil critique P_{seuil} à ne pas dépasser. La structure est donc dite fiable si l'inégalité suivante est satisfaite :

$$P_f \leq P_{seuil} \tag{1.46}$$

À l'exception de quelques cas particuliers, le calcul de l'intégrale multidimensionnelle de l'équation 1.45 ne peut pas se faire analytiquement. Les solutions analytiques existent rarement. De plus, elles requièrent la connaissance de l'expression explicite de la fonction de performance. De manière générale, l'évaluation de la fonction de performance requière des simulations numériques de codes

très complexes. La fonction de performance est dans ce cas implicite et rend le calcul de l'intégrale particulièrement plus difficile. Le recours à l'intégration numérique avec les méthodes de Gauss ou des trapèzes par exemple n'est pas non-plus adapté à l'analyse de fiabilité. L'erreur engendrée par ces méthodes peut être du même ordre de grandeur que la probabilité recherchée. Ainsi des méthodes alternatives ont été développées dans le but de s'adapter au mieux au contexte de l'analyse de la fiabilité. Ces méthodes sont présentées en Section 1.4. Ces méthodes requièrent souvent le passage de l'espace de définition des variables aléatoires du problème à un espace où celles-ci sont centrées normées, et non-corrélées. Ce passage est assuré par une transformation dite iso-probabiliste dont les principes généraux sont donnés dans la section suivante.

1.3.3 Transformation iso-probabiliste

1.3.3.1 De l'espace physique à l'espace standard

À l'équation 1.45, les valeurs prises par le vecteur aléatoire \mathbf{X} sont définies sur un espace \mathbb{X} souvent appelé *espace physique* ou aussi *espace des \mathbf{x}* . Les composantes de ce vecteur peuvent être corrélées et sont souvent des quantités physiques hétérogènes avec des unités de mesures ou des magnitudes différentes. Ainsi, le problème de fiabilité défini par l'intégrale multidimensionnelle à l'équation 1.45 est reformulé et le vecteur aléatoire \mathbf{X} est reformulé dans un nouvel espace appelé *espace standard* ou aussi *espace des \mathbf{u}* . Dans ce dernier, le vecteur aléatoire $\mathbf{U} = (U_1, \dots, U_n)^T$ est un vecteur gaussien standard (normé, centré et à variables aléatoires non-corrélées) de la même dimension n que le vecteur aléatoire \mathbf{X} . Il est défini par la loi de distribution jointe gaussienne standard Φ_n . Le passage de l'espace physique à l'espace standard est assuré par l'application différentiable et bijective T définie comme suit :

$$\begin{aligned} T : \mathbb{X} &\mapsto \mathbb{R}^n \\ \mathbf{x} &\mapsto \mathbf{u} = T(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (1.47)$$

qui vérifie la propriété suivante :

$$\mathbf{U} = T(\mathbf{X}) \iff \mathbf{X} = T^{-1}(\mathbf{U}) \quad (1.48)$$

Ce passage d'un espace à l'autre est appelé *transformation iso-probabiliste* car il préserve la probabilité :

$$F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \Phi_n(\mathbf{u}) \quad (1.49)$$

où $F_{\mathbf{X}}$ désigne la loi de distribution jointe du vecteur aléatoire \mathbf{X} . La fonction de performance est notée G dans l'espace standard et est définie comme suit pour tout $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} G : \mathbb{R}^n &\mapsto \mathbb{R} \\ \mathbf{u} &\mapsto G(\mathbf{u}) = (g \circ T^{-1})(\mathbf{u}) \end{aligned} \quad (1.50)$$

Pour rappel, g est la fonction de performance définie dans l'espace physique. La formule de la probabilité de défaillance dans l'espace standard est obtenue après introduction du vecteur aléatoire \mathbf{U} dans l'équation 1.45 en effectuant le changement de variables $\mathbf{x} = T^{-1}(\mathbf{u})$. Elle devient donc :

$$P_f = \int_{G(\mathbf{u}) \leq 0} \varphi_n(\mathbf{u}) d\mathbf{u} \quad (1.51)$$

où φ_n est la fonction de densité du vecteur aléatoire \mathbf{U} . Le domaine de défaillance dans l'espace standard est $D_f = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n : G(\mathbf{u}) \leq 0\}$.

1.3.3.2 Quelques transformations usuelles

Dans la littérature, plusieurs transformations T sont proposées et la plupart sont détaillées par Ditlevsen et Madsen (1996); Lemaire *et al.* (2009); Melchers et Beck (2018). L'utilisation d'une méthode ou d'une autre dépend des informations disponibles sur les composantes du vecteur aléatoire, e.g. leurs corrélations, leurs distributions marginales ou leur distribution jointe. Dans cette section deux d'entre elles sont présentées.

La transformation standard

Cette transformation s'applique aux vecteurs aléatoires à composantes indépendantes et dont les distributions marginales sont connues. La transformation T est dans ce cas un ensemble de *transformations iso-probabilistes élémentaires* $T = \{T_i, i = 1, \dots, n\}$, où T_i est définie comme étant la fonction composée de la fonction de répartition F_{X_i} de la variable aléatoire X_i par l'inverse de la loi gaussienne standard Φ de la variable aléatoire U_i :

$$T_i = \Phi^{-1} \circ F_{X_i} \quad (1.52)$$

Par conséquent, la transformation standard T s'écrit pour le vecteur aléatoire \mathbf{X} comme suit :

$$T : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{R}^n$$

$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi^{-1} \circ F_{X_1} \\ \vdots \\ \Phi^{-1} \circ F_{X_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad (1.53)$$

Et pour le vecteur aléatoire \mathbf{U} , on définit la transformation inverse T^{-1} :

$$T^{-1} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{X}$$

$$\mathbf{u} \mapsto \mathbf{x} = \begin{pmatrix} F_{X_1}^{-1} \circ \Phi \\ \vdots \\ F_{X_n}^{-1} \circ \Phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \quad (1.54)$$

La transformation de Nataf

Dans le cas des variables aléatoires corrélées ayant des distributions marginales f_{X_i} et une matrice de corrélation $\mathbf{R} = [\rho_{ij}]_{n \times n}$ connues, la transformation iso-probabiliste est connue sous le nom de transformation de Nataf (Nataf, 1962). Introduite par Der Kiureghian and Liu (Der Kiureghian et Liu, 1986) en analyse de fiabilité, elle s'appuie sur la composition de deux fonctions $T = T_2 \circ T_1$, telle que :

$$T_1 : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{V}$$

$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \Phi^{-1} \circ F_{X_1} \\ \vdots \\ \Phi^{-1} \circ F_{X_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad (1.55)$$

et

$$T_2 : \mathbb{V} \mapsto \mathbb{R}^n$$

$$\mathbf{v} \mapsto \mathbf{u} = \mathbf{L}_0^{-1} \mathbf{v} \quad (1.56)$$

La première transformation T_1 traduit le passage de l'espace physique à l'espace des variables aléatoires gaussiennes centrées, normées et corrélées, où le vecteur aléatoire \mathbf{V} est de moyenne nulle, de variance unitaire et de matrice de corrélation $\mathbf{R}_0 = [\rho_{0,ij}]_{n \times n}$. Cette dernière est appelée *fonction de corrélation fictive* et elle est différente de la matrice de corrélation \mathbf{R} , i.e. $\mathbf{R}_0 \neq \mathbf{R}$. Les éléments $\rho_{0,ij}$ de la matrice \mathbf{R}_0 peuvent être déterminés par la relation suivante :

$$\rho_{ij} = \frac{1}{\sigma_{X_i} \sigma_{X_j}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_i - \mu_{X_i})(x_j - \mu_{X_j}) \varphi(v_i, v_j, \rho_{0,ij}) dv_i dv_j \quad (1.57)$$

où

$$\varphi(\mathbf{v}, \mathbf{R}_0) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det \mathbf{R}_0}} \exp\left(-\frac{1}{2} \mathbf{v}^T \mathbf{R}_0^{-1} \mathbf{v}\right) \quad (1.58)$$

est la fonction de densité normale à n dimensions de moyenne nulle, de variance unitaire et de matrice de corrélation \mathbf{R}_0 . μ_{X_i} , μ_{X_j} , σ_{X_i} et σ_{X_j} sont les moyennes et les écarts types des variables aléatoires X_i et X_j respectivement.

La résolution de l'équation 1.57 nécessite un processus itératif fastidieux étant donné que les coefficients inconnus $\rho_{0,ij}$ sont dans la double intégrale (Melchers et Beck, 2018). Par conséquent, les coefficients $\rho_{0,ij}$ sont souvent approchés numériquement et des formules semi-empiriques sont proposées par Der Kiureghian et Liu (1986) pour le ratio R :

$$R = \frac{\rho_{0,ij}}{\rho_{ij}} \quad (1.59)$$

Ces coefficients $\rho_{0,ij}$ peuvent être aussi déterminés par intégration numérique telle qu'implémentée dans FERUM4.x (Bourinet *et al.*, 2009).

Le passage à l'espace standard est assuré par la seconde transformation T_2 définie à l'équation 1.56 où \mathbf{L}_0 représente la matrice triangulaire inférieure obtenue soit par décomposition de Cholesky ou de Karhunen-Loève de la matrice de corrélation fictive \mathbf{R}_0 .

1.4 Méthodes fiabilistes traditionnelles

Cette section a pour objectif de donner un aperçu sur les méthodes les plus utilisées en analyse de fiabilité. Ces techniques ont été développées par des scientifiques de différents horizons dans le but d'estimer la probabilité de défaillance. Elles sont souvent distinguées en deux catégories : *les méthodes d'approximation géométrique de l'état-limite* et *les méthodes de simulation*. Dans ce qui suit, les méthodes d'approximation FORM/SORM sont d'abord présentées. Ensuite, quelques variantes des méthodes basées sur la simulation de Monte Carlo sont décrites.

1.4.1 Les méthodes d'approximation FORM / SORM

Elles sont basées sur l'approximation de l'état-limite par des formes géométriques simplifiées. Le calcul de la probabilité de défaillance par ces méthodes est effectué dans l'espace standard. Ainsi, une transformation isoprobabiliste (voir Section 1.3.3) est requise en premier lieu. Ces méthodes s'appuient sur deux notions fondamentales :

- *Le point de défaillance le plus probable* dit *point de conception* P^* : il se situe sur l'état-limite exprimé dans l'espace normal standard et il correspond au point le plus proche de l'origine dans cet espace. En ce point, la fonction de densité est maximale dans la région de défaillance

(Lemaire *et al.*, 2009). Le point de défaillance le plus probable est totalement défini par ses coordonnées \mathbf{u}^* qui sont solutions du problème d'optimisation sous contrainte suivant :

$$\mathbf{u}^* = \underset{\mathbf{u} \in \mathbb{R}}{\operatorname{argmin}} \mathbf{u}^T \mathbf{u} \quad \text{s.c.} \quad G(\mathbf{u}) = 0 \quad (1.60)$$

Pour la résolution de ce problème, les algorithmes usuels d'optimisation, tels que *sequential quadratic programming* (SQP) ou la méthode du gradient projeté, peuvent être utilisés. D'autres algorithmes ont été développés spécialement pour un contexte fiabiliste, voir e.g. (Liu et Der Kiureghian, 1991). L'algorithme de référence est le HLRF (Hasofer-Lind-Rackwitz-Fiessler) (Hasofer et Lind, 1974; Rackwitz et Fiessler, 1978) qui est une adaptation de la méthode du gradient projeté au problème de la détermination du point P^* .

- *L'indice de fiabilité* β : c'est la distance euclidienne entre l'origine et le point P^* , voir Figure 1.4. Il est exprimé par l'expression suivante :

$$\beta = \|\mathbf{u}^*\| \quad (1.61)$$

La méthode FORM

The *first order reliability method* (FORM) est l'approximation géométrique la plus classique. Elle consiste en la linéarisation de l'état-limite au voisinage du point P^* . L'état-limite est approché par un hyperplan tangent à l'état-limite au point P^* , voir Figure 1.4(a). En supposant l'état-limite continu et dérivable autour de P^* , l'approximation FORM est exprimée par un développement en série de Taylor à l'ordre 1 de l'état-limite $G(\mathbf{u}) = 0$ au point de défaillance le plus probable :

$$\tilde{G}_1(\mathbf{u}) \approx G(\mathbf{u}^*) + \nabla G(\mathbf{u}^*)^T (\mathbf{u} - \mathbf{u}^*) \quad (1.62)$$

Étant donné que le point P^* appartient à l'état-limite, le terme $G(\mathbf{u}^*)$ est nul. La normalisation de la partie restante permet d'écrire l'équation 1.62 comme suit :

$$\tilde{G}_1(\mathbf{u}) = \frac{\nabla G(\mathbf{u}^*)^T}{\|\nabla G(\mathbf{u}^*)\|} (\mathbf{u} - \mathbf{u}^*) = \beta - \boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{u} \quad (1.63)$$

où $\boldsymbol{\alpha} = -\nabla G(\mathbf{u}^*) / \|\nabla G(\mathbf{u}^*)\|$ est le vecteur des cosinus directeurs qui vérifie $\boldsymbol{\alpha}^T \boldsymbol{\alpha} = 1$ et ∇ est l'opérateur gradient. La probabilité de défaillance est dans ce cas calculée à partir de cette approximation et elle est exprimée par :

$$P(G(\mathbf{U}) \leq 0) \approx P(\tilde{G}_1(\mathbf{U}) \leq 0) = P(-\boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{U} \leq \beta) \quad (1.64)$$

L'expression analytique de la probabilité de défaillance calculée avec FORM peut être exprimée en fonction de la distribution gaussienne standard Φ_n étant donné que le terme $\boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{U}$ est un vecteur aléatoire gaussien de moyenne nulle et de matrice de covariance identité :

$$P_f^{FORM} = \Phi_n(-\beta) \quad (1.65)$$

La méthode SORM

L'approximation SORM (*second order reliability method*) est obtenue à partir du développement en série de Taylor à l'ordre 2 de l'état-limite au point de défaillance le plus probable. L'état-limite est supposé continu et dérivable au moins deux fois au voisinage du point P^* . Dans ce cas l'approximation quadratique \tilde{G}_2 s'écrit comme suit :

$$\tilde{G}_2(\mathbf{u}) \approx \nabla G(\mathbf{u}^*)^T (\mathbf{u} - \mathbf{u}^*) + \frac{1}{2} (\mathbf{u} - \mathbf{u}^*)^T \nabla^2 G(\mathbf{u}^*) (\mathbf{u} - \mathbf{u}^*) \quad (1.66)$$

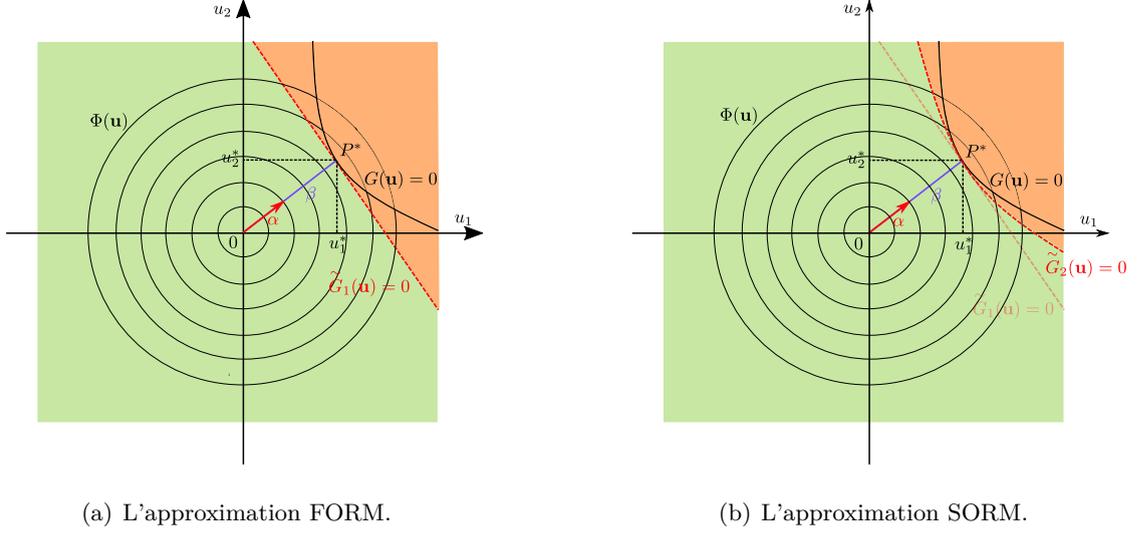


FIGURE 1.4: Illustration des méthodes d'approximation FORM/SORM sur un exemple 2D. Les zones oranges correspondent aux domaines de défaillance approchés.

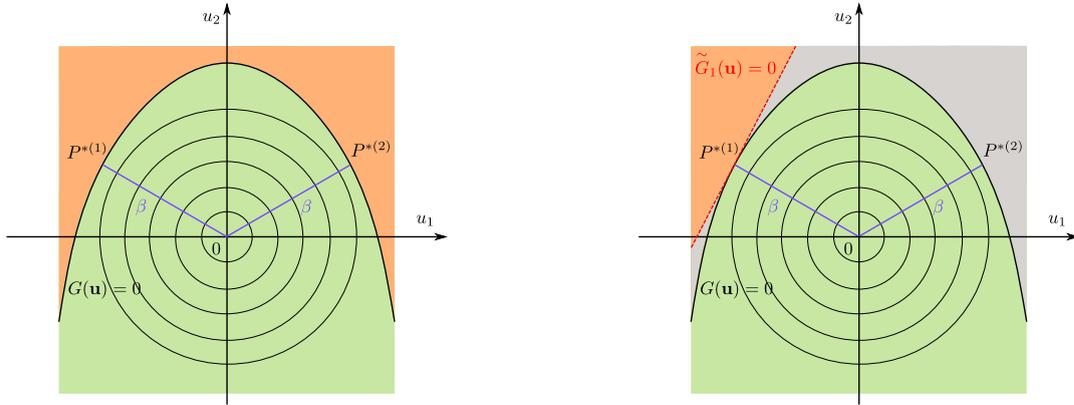
où ∇^2 indique l'opérateur Hessien. Contrairement à la méthode FORM où l'état-limite est approché par un hyperplan, la méthode SORM utilise une approximation du second ordre, voir Figure 1.4(b). Cette méthode a pour but de mieux prendre en compte les états-limites non-linéaires en prenant en compte les courbures au voisinage du point P^* . La détermination des courbures principales $\kappa_i, i = 1, \dots, n - 1$ permet d'estimer une valeur approchée de la probabilité de défaillance en appliquant l'expression asymptotique suivante (Breitung, 1984) :

$$P_f^{SORM} \approx \Phi_n(-\beta) \left(\prod_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{1 + \beta \kappa_i}} \right) \quad (1.67)$$

À partir de cette équation, on peut facilement déduire que chaque terme $1/\sqrt{1 + \beta \kappa_i}$ agit comme un facteur correcteur à l'approximation FORM permettant de prendre en compte les courbures principales κ_i de l'état-limite. L'erreur de cette approximation est généralement méconnue mais on dit qu'elle est asymptotiquement correcte quand β tend vers l'infini (Melchers et Beck, 2018) sous réserve que la conditions $1 - \beta \kappa_i > 0$ soit vérifiée. Dans le but de minimiser cette erreur, des corrections sont proposées par Hohenbichler et Rackwitz (1988); Hong (1999). Il est à noter que cette approximation, souvent appelée *curvature fitting* SORM (SORM_{cf}), nécessite le calcul de la matrice Hessienne $\nabla^2 G(\mathbf{u}^*)$. Le calcul de cette matrice peut se faire avec la méthode des différences finies dont le nombre d'appels à l'état-limite est de l'ordre de $n + n(n + 1)/2$ (Bourinet, 2018). Néanmoins, il est clair que dans le cadre des problèmes à grande dimension ayant des états-limites non-linéaires issues d'algorithmes numériques compliqués, un coût de calcul considérable peut être engendré. Der Kiureghian *et al.* (1987) proposent donc une alternative appelée *point fitting* SORM (SORM_{pf}). Cette méthode a des coûts de calcul réduits par rapport à SORM_{cf} et elle est moins sensible à la non-linéarité de l'état-limite.

Limitations

Les méthodes d'approximation FORM et SORM sont largement utilisées dans la littérature. Elles donnent des résultats assez corrects avec un coût de calcul minimal. Cependant, deux principaux facteurs peuvent en général détériorer la qualité de l'approximation :



(a) Etat-limite ayant deux points de conception $P^{*(1)}$ et $P^{*(2)}$.

(b) L'approximation FORM d'un état-limite ayant deux points P^* . La zone grise montre l'erreur de l'approximation

FIGURE 1.5: Illustration d'un exemple à multiples points de conception.

- la forme de l'état-limite ;
- la détermination du point de défaillance le plus probable P^* .

Il est assez clair que la précision de ces méthodes dépend de la linéarité de l'état-limite. Pour FORM, l'estimation de la probabilité de défaillance n'est exacte que si l'état-limite est linéaire dans l'espace normal standard. Quand de faibles non-linéarités sont présentes, SORM peut potentiellement donner une meilleure approximation en prenant en compte les courbures principales de l'état-limite. Néanmoins, des calculs assez importants sont requis avec SORM. Ils sont issus à la fois du problème d'optimisation nécessaire à la détermination du point P^* et de l'évaluation de la matrice hessienne. De plus, si les variables aléatoires du problème sont non-gaussiennes, leur transformation iso-probabiliste vers l'espace standard rend en général l'état-limite fortement non-linéaire (Chowdhury *et al.*, 2009).

Il est important de souligner aussi que les résultats de ces méthodes (voir équation 1.65 et équation 1.67) sont établis sur l'hypothèse de l'unicité du point de défaillance le plus probable. Dans la pratique, cette hypothèse ne peut pas être vérifiée ni *a priori*, ni *a posteriori*. En effet, certains problèmes peuvent avoir de multiples points P^* comme illustré sur la Figure 1.5 (Der Kiureghian et Dakessian, 1998). C'est un problème 2D avec deux points de l'état-limite à des distances à l'origine proches l'une de l'autre. Il possède donc deux points de conception $P^{*(1)}$ et $P^{*(2)}$. La détection d'un point engendre la négligence de l'autre point qui a la même importance en terme de contribution à la probabilité de défaillance. L'existence de plusieurs points P^* peut aussi causer la convergence prématurée de l'algorithme d'optimisation, i.e. une convergence vers un point de défaillance le plus probable local. Pour résoudre ce problème, l'algorithme développé par Der Kiureghian et Dakessian (1998) propose de trouver successivement les points de défaillance les plus probables. Ce processus itératif se résume en deux étapes principales : (1) l'utilisation de FORM pour trouver le $i^{\text{ème}}$ point de défaillance le plus probable $P^{*(i)}$; (2) la modification locale de l'état-limite en ajoutant une zone d'exclusion centrée sur le point $P^{*(i)}$ trouvé. L'algorithme s'arrête quand le $i^{\text{ème}}$ point détecté se trouve au pied de l'une des courbures créées. Une illustration du processus est présentée sur la Figure 1.6.

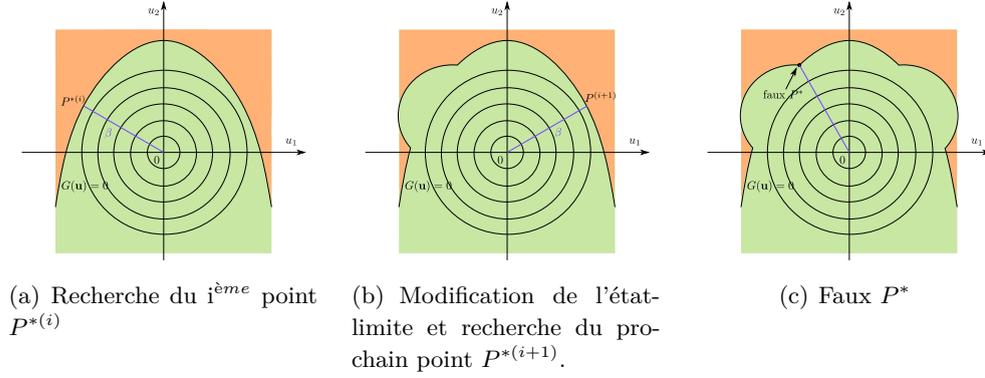


FIGURE 1.6: Processus itératif pour la recherche des multiples points de conception.

Ces méthodes sont aussi affectées par la dimension du problème. En effet, l'investigation des propriétés géométriques de l'espace standard de dimension n effectuée par Katafygiotis et Zuev (2008); Valdebenito *et al.* (2010) a prouvé que, pour un nombre élevé de variables aléatoires, il existe une hypersphère de rayon $R \approx \sqrt{n}$ possédant la plus grande contribution à la probabilité de défaillance. Pour ces problèmes à grande dimension, le point de défaillance le plus probable P^* n'appartient pas à cette région car $\beta \ll R$. Ainsi, les approximations FORM et SORM peuvent conduire à des erreurs considérables en grande dimension à cause de la faible information probabiliste contenue autour du point P^* .

1.4.2 La méthode de Monte Carlo classique

La méthode de Monte Carlo, notée méthode MC dans ce manuscrit, est la plus connue et la plus utilisée pour le calcul des intégrales. Son résultat est considéré dans ce manuscrit comme le résultat de référence si le nombre de simulations est suffisant. La méthode MC vise à calculer numériquement l'intégrale multidimensionnelle de l'équation 1.45 en utilisant la loi des grands nombres. Le principe de base de cette méthode de simulation repose sur l'introduction de la fonction indicatrice de défaillance $\mathbb{1}_{D_f}$ dans l'équation 1.45 :

$$P_f = \int_{g(\mathbf{x}) \leq 0} f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_{D_f}(\mathbf{x}) f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (1.68)$$

Il est à rappeler que la fonction $\mathbb{1}_{D_f}$ est définie par :

$$\mathbb{1}_{D_f}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } g(\mathbf{x}) \leq 0 \\ 0 & \text{si } g(\mathbf{x}) > 0 \end{cases} \quad (1.69)$$

La probabilité de défaillance peut être ainsi vue comme l'espérance de la variable de Bernoulli $\mathbb{1}_{D_f}(\mathbf{X})$, soit :

$$P_f = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_{D_f}(\mathbf{x}) f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = E_f[\mathbb{1}_{D_f}(\mathbf{X})] \quad (1.70)$$

L'estimation de la probabilité de défaillance par la méthode Monte Carlo passe d'abord par la simulation de réalisations indépendantes $x^{(i)}, i = 1, \dots, N_{MC}$ de la variable aléatoire \mathbf{X} suivant sa fonction de densité conjointe $f_{\mathbf{x}}$. Une illustration de ces simulations est donnée sur la Figure 1.7 dans l'espace standard et l'espace physique. L'estimateur \hat{P}_f^{MC} est ensuite calculé comme suit :

$$\hat{P}_f^{MC} = \frac{1}{N_{MC}} \sum_{i=1}^{N_{MC}} \mathbb{1}_{D_f}(\mathbf{X}^{(i)}) = \frac{|N_f|}{N_{MC}} \quad (1.71)$$

où $|N_f|$ indique le cardinal de l'ensemble $N_f = \{i : g(x^{(i)}) \leq 0\}$.

L'estimateur \hat{P}_f^{MC} est lui même une variable aléatoire puisqu'il est la somme des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées $\mathbb{1}_{D_f}(X^{(i)})$, $i = 1, \dots, N_{MC}$ qui suivent la loi de Bernoulli. Quand le nombre N_{MC} est suffisamment large, la loi des grands nombres implique que cet estimateur \hat{P}_f^{MC} converge vers la vraie valeur de la probabilité de défaillance P_f . Il est donc sans biais, i.e. :

$$E[\hat{P}_f^{MC}] = P_f \quad (1.72)$$

Sa variance est exprimée par :

$$\sigma_{\hat{P}_f^{MC}}^2 = \frac{P_f(1 - P_f)}{N_{MC}} \quad (1.73)$$

Le coefficient de variation de l'estimateur \hat{P}_f^{MC} , largement utilisé pour estimer sa précision, s'écrit donc :

$$\delta_{\hat{P}_f^{MC}} = \sqrt{\frac{1 - P_f}{N_{MC} P_f}} \quad (1.74)$$

Plus cette quantité est faible et plus l'estimateur \hat{P}_f^{MC} est précis. Il est important de noter que le coefficient de variation $\delta_{\hat{P}_f^{MC}}^2$ est indépendant de la dimension n du vecteur aléatoire \mathbf{X} , ce qui implique la non-sensibilité de la méthode de Monte Carlo aux problèmes à grande dimension.

Toutefois, la méthode est connue pour être inefficace pour les problèmes à faibles probabilités de défaillance. En effet, pour un coefficient de variation et une probabilité de défaillance donnés, le nombre de simulations N_{MC} peut être estimé à partir de l'équation 1.74 :

$$N_{MC} = \frac{1 - P_f}{\delta_{\hat{P}_f^{MC}}^2 P_f} \quad (1.75)$$

Si par exemple, $P_f = 10^{-4}$ et $\delta_{\hat{P}_f} = 10\%$, le nombre de simulations nécessaires est de l'ordre de $N_{MC} = 10^6$. Dans le cas où la fonction de performance est très coûteuse en temps de calcul, l'obtention d'un estimateur \hat{P}_f^{MC} ayant une bonne précision demande des efforts numériques en général trop importants. Le recours à d'autres méthodes de simulation est dans ce cas nécessaire. L'objectif est de réduire le coût des simulations engendré par la méthode de Monte Carlo dans le cadre des faibles probabilités. Ces méthodes sont des variantes de la méthode de Monte Carlo et sont communément appelées *méthodes de réduction de la variance*.

1.4.3 Tirages d'importance

Le principe de cette méthode est d'avoir plus de simulations dans le domaine de défaillance D_f afin de réduire le nombre de simulations. Ceci est assuré par l'utilisation d'une loi de densité instrumentale, notée $h_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$. La fonction $h_{\mathbf{X}}$ doit dominer la fonction de densité nominale $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$, ce qui signifie que la condition suivante doit être vérifiée :

$$h_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = 0 \Rightarrow \mathbb{1}_{D_f}(\mathbf{x})f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = 0 \iff \mathbb{1}_{D_f}(\mathbf{x})f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) \neq 0 \Rightarrow h_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) \neq 0 \quad (1.76)$$

L'introduction de la fonction de densité artificielle $h_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ dans l'équation 1.68 permet de définir la probabilité de défaillance comme suit :

$$\begin{aligned} P_f &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_{D_f}(\mathbf{x}) \frac{f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})}{h_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})} h_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &= E_h[\mathbb{1}_{D_f}(\mathbf{X}) \frac{f_{\mathbf{X}}(\mathbf{X})}{h_{\mathbf{X}}(\mathbf{X})}] \end{aligned} \quad (1.77)$$

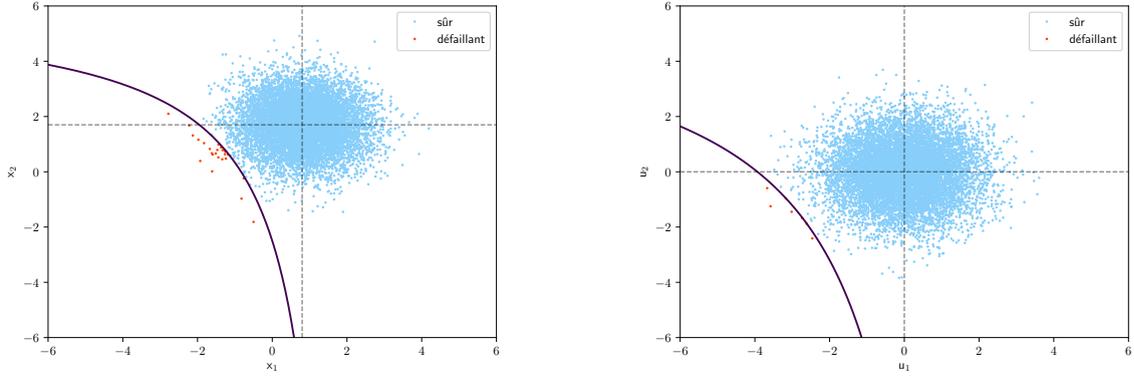


FIGURE 1.7: Illustration de la méthode Monte Carlo classique dans l'espace physique (à gauche) et l'espace standard (à droite).

Par conséquent, si $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_{N_{IS}} \stackrel{i.i.d}{\sim} h_{\mathbf{X}}$, alors l'estimateur de la probabilité de défaillance \hat{P}_f^{IS} s'écrit comme suit :

$$\hat{P}_{fIS} = \frac{1}{N_{IS}} \sum_{i=1}^{N_{IS}} \mathbb{1}_{D_f}(\mathbf{X}^{(i)}) \frac{f_{\mathbf{X}}(\mathbf{X}^{(i)})}{h_{\mathbf{X}}(\mathbf{X}^{(i)})} \quad (1.78)$$

C'est un estimateur sans biais, i.e. $E[\hat{P}_{fIS}] = P_f$, dont la variance vaut :

$$\sigma_{\hat{P}_{fIS}}^2 = \frac{1}{N_{IS}} \left(E_h \left[\mathbb{1}_{D_f}(\mathbf{X}) \left(\frac{f_{\mathbf{X}}(\mathbf{X})}{h_{\mathbf{X}}(\mathbf{X})} \right)^2 \right] - P_f^2 \right) \quad (1.79)$$

L'efficacité de la méthode des tirages d'importance se base essentiellement sur un choix judicieux de la fonction instrumentale $h_{\mathbf{X}}$. La minimisation de la variance $\sigma_{\hat{P}_{fIS}}^2$ permet d'obtenir la formulation de la solution optimale $h_{\mathbf{X}}^*$ qui permet effectivement de réduire la variance à zéro (Rubinstein et Kroese, 2016) :

$$h_{\mathbf{X}}^*(\mathbf{x}) = \frac{\mathbb{1}_{D_f}(\mathbf{x}) f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})}{P_f} \quad (1.80)$$

Il est clair que l'obtention de cette solution est utopique en raison de l'existence de la quantité d'intérêt inconnue P_f au dénominateur. Néanmoins, la définition d'une fonction de densité quasi-instrumentale proche de la fonction de densité théorique définie en équation 1.80 permet de réduire significativement la variance. Il est important de souligner que la fonction de densité $h_{\mathbf{X}}$ doit vérifier la condition exprimée par l'équation 1.81 afin que la variance de l'estimateur (voir équation 1.79) soit finie.

$$E_h \left[\mathbb{1}_{D_f}^2(\mathbf{X}) \frac{f_{\mathbf{X}}^2(\mathbf{X})}{h_{\mathbf{X}}^2(\mathbf{X})} \right] = E_f \left[\mathbb{1}_{D_f}^2(\mathbf{X}) \frac{f(\mathbf{X})}{h_{\mathbf{X}}(\mathbf{X})} \right] < \infty \quad (1.81)$$

Différentes approches sont proposées dans la littérature pour construire la fonction de densité quasi-instrumentale. Les approches les plus utilisées peuvent être distinguées en deux catégories : tirages d'importance au point de conception P^* et tirages d'importance adaptatifs.

Tirages d'importance au point de conception P^*

Cette approche consiste à simuler des réalisations qui suivent la loi de densité instrumentale $h_{\mathbf{X}}$ centrée sur le point de défaillance le plus probable P^* défini dans la Section 1.4.1. Le choix de

ce point est motivé par le fait que la masse de la probabilité soit localisée autour de P^* (Melchers, 1989). Ainsi, un grand nombre de simulations se situent dans les régions ayant la plus grande contribution à la défaillance, voir Figure 1.8. La variance de la probabilité de défaillance est par conséquent réduite.

Dans les premières applications du principe des tirages d'importance en analyse de fiabilité, la fonction de densité instrumentale est définie dans l'espace standard par une loi gaussienne multivariée centrée sur P^* (Schuëller et Stix, 1987; Melchers, 1989) :

$$h_{\mathbf{U}} = \varphi_n(\mathbf{u} - \mathbf{u}^*) \quad (1.82)$$

Il est important de souligner que les développements faits avant dans l'espace physique (voir les équations 1.77-1.81) auraient pu être faits dans l'espace standard et auraient conduit au résultat suivant pour l'estimateur de la probabilité de défaillance :

$$\begin{aligned} \hat{P}_{fIS} &= \frac{1}{N_{IS}} \sum_{i=1}^{N_{IS}} \mathbb{1}_{D_f}(\mathbf{U}^{(i)}) \frac{f_{\mathbf{U}}(\mathbf{U}^{(i)})}{h_{\mathbf{U}}(\mathbf{U}^{(i)})} \\ &= \frac{1}{N_{IS}} \sum_{i=1}^{N_{IS}} \mathbb{1}_{D_f}(\mathbf{U}^{(i)}) \frac{\varphi_n(\mathbf{U}^{(i)})}{\varphi_n(\mathbf{U}^{(i)} - \mathbf{u}^*)} \end{aligned} \quad (1.83)$$

où $\mathbf{U}_1, \dots, \mathbf{U}_n \stackrel{i.i.d}{\sim} h_{\mathbf{U}}$. Il est à noter que d'autres suggestions ont été faites pour la fonction de densité instrumentale permettant d'améliorer davantage les résultats de cette approche (Melchers et Beck, 2018).

Il est clair que la recherche du point P^* par la méthode FORM est un prérequis à cette approche. La méthode a donc les mêmes limitations que FORM, i.e. elle est bien évidemment sensible à la linéarité de l'état-limite ainsi qu'à l'hypothèse de l'unicité du point de défaillance le plus probable P^* . Si cette dernière est vérifiée, cette méthode est nettement plus efficace que la méthode de Monte Carlo. Toutefois, dans le cas où le problème est caractérisé par de multiples points P^* , l'utilisation d'une fonction de densité multimodale instrumentale centrée sur les différents points de conception s'avère plus efficace (Schuëller et Stix, 1987; Au *et al.*, 1999; Cambier *et al.*, 2002). Cela permet d'avoir des simulations autour de tous les points P^* potentiels du problème, permettant ainsi l'obtention d'un maximum de simulations dans toutes les régions contribuant à la défaillance (Au *et al.*, 1999). Néanmoins, la recherche des points P^* potentiels requiert un effort numérique important en raison de l'utilisation d'algorithmes sophistiqués (Yang et Beck, 1998; Der Kiureghian et Dakessian, 1998) pour résoudre le problème d'optimisation défini à l'équation 1.60. Cet effort représente une part importante de l'effort numérique total nécessaire à l'obtention du résultat définitif par les tirages d'importance au point de défaillance le plus probable. Ces difficultés réduisent considérablement la robustesse et l'efficacité de cette méthode.

Tirages d'importance adaptatifs

Les tirages d'importance adaptatifs sont communément utilisés car ils n'impliquent pas la notion de point de conception (Au *et al.*, 1999). Leur objectif est d'apprendre la fonction de densité optimale avec un processus itératif qui permet aux propriétés statistiques, représentées par le vecteur de paramètres \mathbf{q} , des fonctions de densités intermédiaires $h_{\mathbf{X}}^{(i)}(\cdot; \mathbf{q}^{(i)})$, $i = 1, \dots, N$ d'approcher graduellement celles de la fonction de densité optimale $h_{\mathbf{X}}^*$.

Plusieurs choix sont possibles pour la sélection adaptative de la densité instrumentale. Il est possible d'utiliser les tirages d'importance paramétriques caractérisés par des fonctions de densité

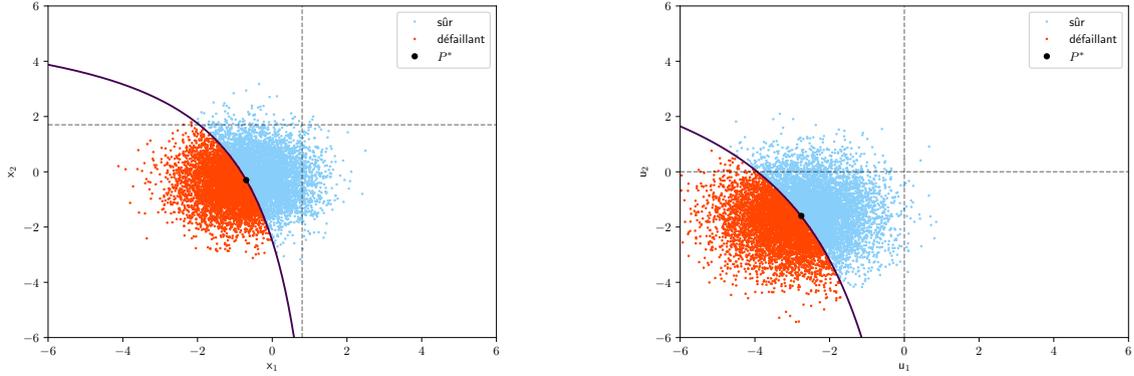


FIGURE 1.8: Illustration de la méthode des tirages d'importance au point de conception P^* dans l'espace physique (à gauche) et l'espace standard (à droite).

instrumentale et nominale supposées appartenir à la même famille de distributions paramétriques :

$$f_{\mathbf{X}}, h_{\mathbf{X}} \in \{f(\cdot; \mathbf{q}), \mathbf{q} \in \mathcal{Q}\} \quad (1.84)$$

où $\mathbf{q} = \{q_1, \dots, q_{n_q}\}$ est un vecteur de n_q paramètres réels de dimension finie. Ce vecteur de paramètres doit être sélectionné tel que $h(\cdot; \mathbf{q})$ soit la proche possible de la solution optimale $h_{\mathbf{X}}^*$. Cette proximité est souvent mesurée par une distance exprimée par la fonction divergence \mathcal{D}_ϕ ³ :

$$\mathcal{D}_\phi(h_{\mathbf{X}}^*(\mathbf{x}) || h_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}; \mathbf{q})) = \int h_{\mathbf{X}}^*(\mathbf{x}) \phi \left(\frac{h_{\mathbf{X}}^*(\mathbf{x})}{h_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}; \mathbf{q})} \right) d\mathbf{x} \quad (1.85)$$

où $\phi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ est continue et différentiable deux fois et $\phi(1) = 0$, $\phi''(x) > 0$ pour tout $x > 0$. Il est souvent plus pratique de choisir une fonction de densité instrumentale équivalente à la fonction nominale à paramètre \mathbf{q}^* , i.e. $h_{\mathbf{X}}(\cdot) \equiv f_{\mathbf{X}}(\cdot; \mathbf{q}^*)$. La solution \mathbf{q}^* est naturellement le jeu de paramètres qui minimise la fonction divergence \mathcal{D}_ϕ (Botev *et al.*, 2013) :

$$\mathbf{q}^* = \operatorname{argmin}_{\mathbf{q} \in \mathcal{Q}} \int h_{\mathbf{X}}^*(\mathbf{x}) \phi \left(\frac{h_{\mathbf{X}}^*(\mathbf{x})}{h_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}; \mathbf{q})} \right) d\mathbf{x} \quad (1.86)$$

Quand $\phi(\cdot) = \ln(\cdot)$, on retrouve la méthode de l'entropie croisée (CE) (Rubinstein et Kroese, 2013) où la divergence de l'entropie croisée, aussi appelée divergence de Kullback-Leibler (KL) \mathcal{D}_{KL} (Kullback et Leibler, 1951) entre la solution optimale $h_{\mathbf{X}}^*$ et la solution approchée $h(\cdot; \mathbf{q})$ est exprimée comme suit :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{KL} &= \int h_{\mathbf{X}}^*(\mathbf{x}) \ln \left(\frac{h_{\mathbf{X}}^*(\mathbf{x})}{h_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}; \mathbf{q})} \right) d\mathbf{x} \\ &= \int h_{\mathbf{X}}^*(\mathbf{x}) \ln(h_{\mathbf{X}}^*(\mathbf{x})) d\mathbf{x} - \int h_{\mathbf{X}}^*(\mathbf{x}) \ln(h_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}; \mathbf{q})) d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (1.87)$$

La solution optimale \mathbf{q}^* est dans ce cas donnée par :

$$\mathbf{q}^* = \operatorname{argmax}_{\mathbf{q} \in \mathcal{Q}} \int h_{\mathbf{X}}^*(\mathbf{x}) \ln(h_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}; \mathbf{q})) d\mathbf{x} \quad (1.88)$$

3. La fonction divergence est une fonction qui permet de mesurer la différence entre deux fonctions de distribution en théorie de l'information, les statistiques et la théorie des probabilités. Les distances théoriques telles que la distance de l'entropie croisée, la distance de Hellinger, la α -entropie de Havrda-Charvat, la divergence de Burg et la distance χ^2 de Pearson sont des cas particuliers de cette fonction (Liese et Vajda, 2006)

La méthode CE consiste à définir une séquence d'évènements de défaillance $\{D_t, t = 1, \dots, T\}$ où $D_t = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : g(\mathbf{x}) \leq \xi_t\}$ et $\xi_t \geq 0$. Le paramètre ξ_t est le ρ -quantile des simulations $\{g(\mathbf{X}_j)\}$ évaluées sur l'ensemble $\{\mathbf{X}^{(j)}\}_{j=1}^{n_s} \stackrel{i.i.d}{\sim} h_{\mathbf{X}}(\cdot; \mathbf{q}_{t-1})$ où \mathbf{q}_{t-1} est la solution de l'itération précédente $t - 1$. La valeur du ρ -quantile, qui varie généralement dans l'intervalle $[0.01, 0.1]$, doit assurer qu'une bonne partie des simulations de l'itération actuelle soit dans le domaine de défaillance de l'itération suivante (Papaioannou *et al.*, 2019). La solution optimale \mathbf{q}^* définie à l'équation 1.88 peut se simplifier et s'écrit comme suit pour l'itération t :

$$\hat{\mathbf{q}}_t^* = \operatorname{argmax}_{\mathbf{q} \in \mathcal{Q}} \frac{1}{n_s} \sum_{j=1}^{n_s} \mathbb{1}_{D_t}(\mathbf{X}^{(j)}) \frac{f_{\mathbf{X}}(\mathbf{X}^{(j)})}{h_{\mathbf{X}}(\mathbf{X}^{(j)}; \mathbf{q}_t)} \ln(h_{\mathbf{X}}(\mathbf{X}^{(j)}; \mathbf{q}_t)) \quad (1.89)$$

Les développements mathématiques qui permettent le passage de l'équation 1.88 à l'équation 1.89 ne sont pas détaillés dans cette sous-section afin de l'alléger. Le lecteur intéressé peut se référer à Rubinstein et Kroese (2013), au chapitre 1 du rapport d'HDR de Bourinet (2018) et au chapitre 3 du manuscrit de thèse de Chabridon (2018). Pour chaque itération t , le problème d'optimisation de l'équation 1.89 est résolu et, à la fin du processus itératif, un ensemble de paramètres $\{\hat{\mathbf{q}}_t, t = 1, \dots, T\}$ est obtenu. Le dernier jeu de paramètres $\hat{\mathbf{q}}_T$ doit approcher la solution de l'équation 1.88. La densité $h_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}; \hat{\mathbf{q}}_T)$ peut donc être utilisée dans l'expression de l'estimateur de la probabilité de la défaillance \hat{P}_{FIS} par la méthode des tirages d'importance exprimée par l'équation 1.78. Le processus itératif s'arrête quand le quantile devient négatif, ce qui signifie qu'au moins ρn_s simulations se trouvent dans le domaine de défaillance de l'itération actuelle.

Le principal avantage de l'utilisation de la méthode CE comparée à d'autres techniques, e.g. la minimisation de la variance (Asmussen et Glynn, 2007), est sa simplicité et l'explicité des solutions de l'équation 1.89 pour certains cas particuliers, e.g. fonctions de densité appartenant à la famille exponentielle et les distributions discrètes. L'optimisation de l'équation 1.89 est similaire au calcul de l'estimateur du maximum de la vraisemblance de \mathbf{q} pour la fonction de densité $h_{\mathbf{X}}(\cdot; \mathbf{q})$ (Rubinstein et Kroese, 2013). En supposant que le terme droit de cette équation soit convexe et différentiable par rapport \mathbf{q} , la solution $\hat{\mathbf{q}}^*$ est obtenue en imposant le gradient de la somme égal à zéro :

$$\frac{1}{n_s} \sum_{j=1}^{n_s} \mathbb{1}_{D_t}(\mathbf{X}^{(j)}) \frac{f_{\mathbf{X}}(\mathbf{X}^{(j)})}{h_{\mathbf{X}}(\mathbf{X}^{(j)}; \mathbf{q}_t)} \nabla_{\mathbf{q}} \ln(h_{\mathbf{X}}(\mathbf{X}^{(j)}; \mathbf{q}_t)) = 0 \quad (1.90)$$

où $\nabla_{\mathbf{q}} \ln(h_{\mathbf{X}}(\mathbf{X}^{(j)}; \mathbf{q}_t))$ est la *fonction score* de l'estimateur du maximum de la vraisemblance. Les solutions de cette équation sont donc analytiques et le recours à des optimisations coûteuses en temps de calcul est non nécessaire dans ce cas pour la méthode CE (Botev *et al.*, 2013).

Les méthodes des tirages d'importance paramétriques connaissent des difficultés pour l'obtention d'un bon estimateur de la probabilité de défaillance quand les états-limites sont fortement non-linéaires et quand plusieurs sous-régions de défaillance importantes existent. Ceci est majoritairement causé par le choix de la famille paramétrique qui est souvent arbitraire, uni-modale et suppose l'indépendance statistique entre les variables aléatoires de vecteur \mathbf{X} . Dans ce cas, les fonctions de densité instrumentales peuvent ne pas être assez flexibles pour approcher la forme et l'orientation de la fonction de densité optimale $h_{\mathbf{X}}$ (Morio *et al.*, 2014). Une des solutions proposées dans la littérature pour résoudre ce problème est présentée par Kurtz et Song (2013). Elle est basée sur l'utilisation d'une fonction de densité gaussienne multimodale. Néanmoins, les auteurs ont souligné l'échec de la méthode pour les problèmes à grande dimension. En effet, cette méthode est sensible à la dimension du problème car cela affecte le nombre des paramètres du vecteur \mathbf{q} qui devient nécessairement large. Les problèmes d'optimisation nécessaires à cette méthode sont

par conséquent difficiles et très coûteux en temps de calcul. Papaioannou *et al.* (2019) proposent donc une version améliorée où ils utilisent le modèle de distribution de von Mises-Fisher Nakagami comme famille de distributions paramétriques pour la méthode CE, ce qui permet de mieux gérer les problèmes à grande dimension.

1.4.4 Subset simulation

La méthode des subsets simulations (SS) fait partie des techniques de réduction de variance. Elle a été introduite en analyse de fiabilité par Au et Beck (2001) dans le but d'avoir une méthode qui hérite de la robustesse de la méthode de Monte Carlo vis-à-vis de la dimension du vecteur aléatoire \mathbf{X} et de la complexité de l'état-limite, tout en étant efficace dans l'estimation des faibles probabilités. Pour ce faire, le problème de l'évaluation de la probabilité faible d'un événement rare A est remplacé par l'évaluation de probabilités d'événements intermédiaires $\{A_1, \dots, A_t\}$. Les probabilités d'occurrence de ces événements intermédiaires doivent être plus importantes que la probabilité recherchée, ce qui rend leurs estimations plus faciles.

L'évènement de défaillance A a lieu quand une réalisation du vecteur aléatoire appartient au domaine de défaillance $D_f = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : g(\mathbf{x}) \leq 0\}$ tel que $A = \{\mathbf{x} \in D_f\}$. Ce dernier peut être défini par l'union d'un ensemble d'événements intermédiaires A_t :

$$A = A_t = \cup_{d=1}^t A_d \quad (1.91)$$

où $A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_t = A$. Les domaines de défaillance de ces événements imbriqués sont définis comme suit :

$$D_{f,d} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : g(\mathbf{x}) \leq g_d\}, \quad d = 1, \dots, t \quad (1.92)$$

où g_d représente un niveau intermédiaire de l'état-limite tel que $g_1 > \dots > g_{t-1} > g_t$ et $g_t = 0$ correspond à l'état-limite considéré. La séquence des domaines de défaillance intermédiaires est illustrée sur la Figure 1.9.

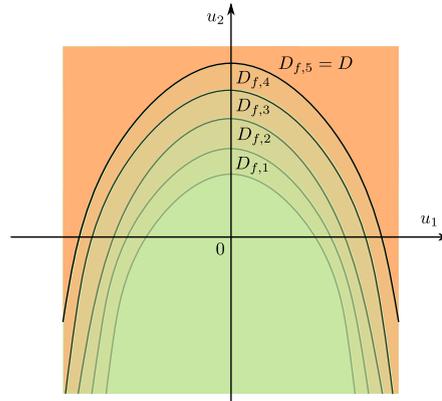


FIGURE 1.9: Illustration des domaines de défaillance intermédiaires sur un exemple à deux dimensions.

La probabilité de défaillance de l'évènement A , définie par l'équation 1.91 comme une intersection d'événements, peut être exprimée par le produit de probabilités conditionnelles comme

suit :

$$\begin{aligned}
P_f = P(A) &= P(A_t) & (1.93) \\
&= P(A_t|A_{t-1})P(A_{t-1}) \\
&= P(A_t|A_{t-1})P(A_{t-1}|A_{t-2})\dots P(A_2|A_1)P(A_{-1}) \\
&= \prod_{d=1}^t P_d
\end{aligned}$$

où $P_1 = P(A_1)$ est la probabilité de défaillance P_1 du premier niveau g_1 estimée par la méthode de Monte Carlo comme suit :

$$P_1 = E_f[\mathbb{1}_{D_{f,1}}(\mathbf{X})] \quad (1.94)$$

dont l'estimateur est :

$$\hat{P}_1 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbb{1}_{D_{f,1}}(\mathbf{X}_1^{(i)}) \quad (1.95)$$

Pour $d = 2, \dots, t$, la probabilité de défaillance $P_d = P(A_d|A_{d-1})$ des autres niveaux intermédiaires est la suivante :

$$P_d = P(A_d|A_{d-1}) = E_{f_{\mathbf{X}}(A_d|A_{d-1})}[\mathbb{1}_{D_{f,d}}(\mathbf{X})] \quad (1.96)$$

où $f_{\mathbf{X}}(A_d|A_{d-1})$ est la fonction de densité conditionnelle de A_d sachant A_{d-1} . L'estimateur de P_d est donné par :

$$\hat{P}_d = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbb{1}_{D_{f,d}}(\mathbf{X}_d^{(i)}) \quad (1.97)$$

Les simulations du premier niveau $\mathbf{X}_1^{(i)}$ sont obtenues directement par une simulation de Monte Carlo selon la fonction de densité $f_{\mathbf{X}}$. Par contre, la génération des simulations des niveaux intermédiaires $\mathbf{X}_d^{(i)}$ à partir de la fonction de densité conditionnelle $f_{\mathbf{X}}(A_d|A_{d-1})$ requiert l'utilisation de l'algorithme de Metropolis-Hasting modifié (Au et Beck, 2001) qui est aussi détaillé dans le chapitre 1 du rapport d'HDR de Bourinet (2018).

Dans la pratique, les seuils g_d sont choisis de tel sorte que les probabilités $\{P_d, d = 1, \dots, t\}$ soient dans l'intervalle $[0.1, 0.3]$ tel que recommandé par Zuev *et al.* (2012). De telles valeurs permettent d'avoir un bon compromis entre le nombre t de niveaux intermédiaires et le nombre d'appels à la fonction de performance. Il est à noter qu'avoir des niveaux intermédiaires à probabilités conditionnelles égales correspond à un choix optimal du minimum de la variance asymptotique de l'estimateur de la méthode SS (Guyader, 2011). Ce dernier est exprimée par :

$$\hat{P}_f^{SS} = \prod_{d=1}^t \hat{P}_d \quad (1.98)$$

Contrairement à l'estimateur de la méthode de Monte Carlo (voir Section 1.4.2), l'estimateur \hat{P}_f^{SS} est biaisé en raison de la corrélation qui existe entre les simulations générées par l'algorithmique de Metropolis-Hasting. Ce dernier utilise les simulations du niveau $d - 1$ comme germes pour générer les simulations du niveau d (Bourinet, 2018).

1.5 Enjeux du calcul de la probabilité de défaillance

Outre les méthodes citées dans ce chapitre qui sont de nos jours les méthodes les plus usuelles pour l'analyse de fiabilité, il existe bien évidemment d'autres méthodes telles que les méthodes de

simulation directionnelles (Nie et Ellingwood, 2000b) et line sampling (Pradlwarter *et al.*, 2007a). Toutes ces méthodes visent à avoir un bon compromis entre la qualité de l'estimation, l'efficacité de la méthode et sa robustesse. Toutefois, ce compromis est généralement affecté par la rareté de l'évènement de défaillance (i.e. les faibles probabilités de défaillance typiquement $10^{-4} - 10^{-9}$), le nombre des variables aléatoires du problème (i.e. la taille n du vecteur aléatoire \mathbf{X}), la forme de l'état-limite et le coût de la fonction de performance.

Rareté de l'évènement de défaillance.

Le challenge de l'estimation des faibles probabilités a toujours suscité l'intérêt de nombreux chercheurs. Cette difficulté est souvent rencontrée avec les méthodes de simulation. Les méthodes d'approximation ne sont généralement pas affectées par cette problématique. La méthode de Monte Carlo classique souffre particulièrement des faibles probabilités car un nombre non-négligeable d'appels à la fonction de performance est requis et la méthode devient inefficace. Les méthodes du tirage d'importance et subset simulations présentées dans la section précédente sont introduites afin d'améliorer l'efficacité de la méthode de Monte Carlo dans le contexte des faibles probabilités de défaillance. Malgré l'efficacité de ces méthodes pour l'estimation des probabilités faibles, elles présentent néanmoins quelques difficultés.

La méthode des tirages d'importance requiert la construction de la fonction de densité instrumentale (voir Section 1.4.3). Pour ce faire, différentes approches sont proposées dans la littérature. Des généralités sur les tirages d'importance au point de conception et les tirages d'importance adaptatifs paramétriques, notamment ceux basés sur l'entropie croisée, sont données dans la Section 1.4.3. En plus de ces approches, d'autres travaux ont exploré l'utilisation des tirages d'importance adaptatifs non-paramétriques pour l'estimation des faibles probabilités dans plusieurs contextes et plusieurs domaines, voir e.g (Kim *et al.*, 2000; Neddermeyer, 2011; Balesdent *et al.*, 2016). Contrairement aux méthodes paramétriques, les méthodes non-paramétriques approchent la fonction de densité optimale par une fonction de densité à noyau. Le choix du noyau gaussien est par exemple adopté par Morio (2011); Au *et al.* (1999). Ces méthodes permettent d'obtenir des fonctions de densité instrumentales plus flexibles et adaptables aux formes potentiellement complexes de la fonction de densité optimale. Une autre approche basée sur l'utilisation d'une population de fonctions de densité instrumentales est proposée par Elvira *et al.* (2019). Elle est connue dans la littérature sous le nom des tirages d'importance multiples et les simulations sont générées à partir d'un ensemble de fonctions de densité instrumentales selon un certain schéma de pondération. Il existe aussi des méthodes qui combinent les tirages d'importance avec d'autres méthodes comme par exemple la combinaison avec les simulations directionnelles dans (Shayanfar *et al.*, 2018) ou même avec le splitting dans (Garvels, 2011).

La méthode subset simulations quant à elle est l'une des méthodes les plus puissantes pour les faibles probabilités. Néanmoins, son efficacité et la qualité de son estimateur dépendent directement de la génération des simulations des niveaux intermédiaires par l'algorithme de Metropolis-Hasting modifié qui utilise une marche aléatoire (random-walk). Une amélioration de la méthode est proposée par Wang *et al.* (2019) en utilisant la marche non-aléatoire hamiltonienne de Monte Carlo (HMC) (Duane *et al.*, 1987). D'autres améliorations ont été apportées à la méthode afin de réduire le nombre total de simulations requises. Ce dernier devient non-négligeable et rend la méthode inefficace quand la fonction de performance est coûteuse à évaluer, voir e.g (Chen et Li, 2017; Rashki, 2018).

L'enjeu de la rareté de l'événement de défaillance est ici discuté au travers de différentes approches, dont la liste n'est certainement pas exhaustive mais assez représentative des problématiques rencontrées. Toutefois, il est important de souligner que d'autres méthodes de simulation ont été proposées dans la littérature pour réduire la sensibilité du compromis entre la qualité de l'estimation, l'efficacité de la méthode et sa robustesse pour les faibles probabilités, voir e.g (Zuniga *et al.*, 2011; Alban *et al.*, 2017). Cet enjeu est toujours d'actualité et fait l'objet de plusieurs sujets de recherche à ce jour.

Grand nombre de variables aléatoires.

L'analyse de fiabilité des problèmes en grande dimension est toujours un challenge pour la communauté scientifique. Pour un nombre de variables aléatoires assez important, la grande majorité des méthodes présentées auparavant voient leur efficacité se détériorer dans ce contexte. Tel que mentionné dans la Section 1.4, les méthodes basées sur le point de conception P^* telles que FORM, SORM et les tirages d'importance au point P^* deviennent inefficaces dans ce cas en raison de la faible information probabiliste contenue au voisinage de P^* . En effet, les investigations de Valdebenito *et al.* (2010); Katafygiotis et Zuev (2008) montrent qu'en grande dimension le point P^* n'appartient pas à l'hypersphère contenant la plus grande contribution à la probabilité de défaillance. Dans le but de réduire les efforts numériques de FORM en grande dimension, Zhong *et al.* (2020) proposent d'utiliser la méta-heuristique d'optimisation de Harris Hawks (HHO) pour trouver la solution du problème d'optimisation de FORM; cependant les faiblesses inhérentes à cette méthode ne sont pas corrigées.

La méthode de Monte Carlo classique est la méthode qui n'est pas influencée par la dimension du problème. Mais, ceci n'est pas le cas de ses variantes. En effet, la grande dimension affecte les résultats de la méthode des tirages d'importance adaptatifs paramétriques (PIS) et non paramétriques (NPIS). Les méthodes PIS (voir Section 1.4.3) tendent à avoir un grand nombre de paramètres en grande dimension. Quant aux méthodes NPIS, elles deviennent difficiles à appliquer quand le nombre de variables aléatoires est supérieur à 10 (Morio *et al.*, 2014). Dans de tels cas, le tirage d'importance séquentiel peut être utilisé. Il consiste à convertir l'approximation de la fonction de performance en une série d'approximations à faible dimension (Tokdar et Kass, 2010; Papaioannou *et al.*, 2016).

Concernant la méthode subset simulation, la grande dimension influence le taux d'acceptation de l'algorithme utilisé pour générer des simulations selon les probabilités conditionnelles des différents niveaux. En effet, tel que discuté par Au et Beck (2001); Katafygiotis et Zuev (2008); Schuëller *et al.* (2004), la probabilité qu'un point candidat de l'algorithme de Métropolis-Hasting soit accepté est inversement proportionnelle au nombre de variables aléatoires. Un taux de rejet important implique une forte corrélation des simulations et une grande variance de l'estimateur de la probabilité de défaillance. L'amélioration du taux d'acceptation des points candidats a fait l'objet de plusieurs travaux qui sont comparés les uns aux autres par Papaioannou *et al.* (2015).

Forme de l'état-limite.

Bien que certaines méthodes soient insensibles à la forme de l'état-limite telle que la méthode de MC, il en existe bien évidemment d'autres qui elles le sont. Les résultats des méthodes d'approximation FORM et SORM sont fortement affectés par la non-linéarité de l'état-limite (voir Section 1.4.1). Cependant, la transformation de l'espace physique vers l'espace normal standard

peuvent rendre l'état-limite linéaire pour certains problèmes. Ces méthodes permettent dans ce cas d'avoir un bon estimateur de la probabilité de défaillance avec un coût de calcul réduit. Dans le contexte de la grande dimension, l'état-limite est potentiellement fortement non-linéaire et le calcul des courbures principales de SORM requiert dans ce cas un effort numérique important. La robustesse de la méthode line sampling par rapport à la forme de l'état-limite a été étudiée par Pradlwarter *et al.* (2007b). Il a été déduit que, quand la non-linéarité dépasse un certain niveau, la méthode line sampling approche la méthode Monte Carlo en termes d'efficacité et devient peu avantageuse. De façon générale, le choix de la direction d'échantillonnage est un problème non-trivial qui conditionne fortement l'efficacité des méthodes directionnelles.

Coût de la fonction de performance.

En ce qui concerne le coût de calcul de la fonction de performance, il dépend de la nature du modèle utilisé pour décrire le comportement du système réel étudié. Le modèle peut être une seule ou un ensemble d'équations comme il peut être un modèle numérique très sophistiqué qui permet d'avoir une description fine du système réel. La grande majorité des modèles utilisés en ingénierie sont des modèles numériques sophistiqués tels que les modèles aux éléments finis, qui permettent de bien décrire le comportement des systèmes complexes. Néanmoins, ceci engendre des temps de calcul considérables qui peuvent aller jusqu'à des jours de calcul pour un seul appel au modèle numérique. Dans le contexte de l'analyse de fiabilité des structures, un couplage de ces modèles avec les méthodes fiabilistes est nécessaire. Le nombre d'appels au modèle physique requis par les méthodes fiabilistes est néanmoins souvent incompatible avec le caractère coûteux des modèles physiques. Une alternative consiste à s'orienter vers l'apprentissage à partir des données qui permet de substituer les modèles numériques coûteux par des fonctions mathématiques plus faciles et rapides à évaluer, appelées *méta-modèles*. Les méthodes fiabilistes sont souvent combinées avec ces méta-modèles en ingénierie afin de contourner la contrainte du coût de la fonction de performance. Les méta-modèles sont largement discutés dans le chapitre suivant et seulement quelques exemples de couplage entre les méta-modèles et les méthodes fiabilistes sont cités dans cette partie. Les *support vector machine* (SVM) et la *régression logistique* sont utilisés avec la méthode de Monte Carlo classique par Stern *et al.* (2017) pour analyser la fiabilité d'un réseau de distribution de gaz. Dans d'autres recherches, la méthode CE a été combinée avec un méta-modèle dans (Balesdent *et al.*, 2013). Chocat *et al.* (2016) ont utilisé un algorithme d'optimisation basé sur un méta-modèle pour trouver la distance minimale entre l'origine de l'espace standard et le point de conception. Le nombre d'appels à la fonction de performance de la méthode SS est aussi non négligeable dans le contexte des modèles numériques coûteux. Ainsi, plusieurs couplages avec les méta-modèles ont été effectués avec succès, voir e.g. (Bourinet *et al.*, 2011; Bect *et al.*, 2017; Bourinet, 2018).

Malgré le succès des méta-modèles en analyse de fiabilité, plusieurs difficultés ont été rencontrées par leurs utilisateurs. Xiong et Tan (2018) ont souligné la difficulté d'avoir un bon compromis entre le coût de la calibration des méta-modèles et leur robustesse. Ceci est généralement dû aux faibles valeurs des probabilités de défaillance. La grande dimension affecte aussi les méta-modèles car certains requièrent une optimisation pour l'obtention de leurs paramètres (Lelièvre *et al.*, 2018b) et d'autres nécessitent un grand nombre de données d'apprentissage, appelées plan d'expériences, pour déterminer leurs coefficients (Sudret et Der Kiureghian, 2000).

1.6 Conclusions

Ce premier chapitre a présenté la structure générale d'une démarche fiabiliste dont l'objectif est d'estimer la probabilité de défaillance des structures soumises à des incertitudes de différentes sources. La modélisation de ces incertitudes est assurée par des outils issus de la théorie des probabilités, dont les bases ont été discutées en premier lieu. Le chapitre a abordé ensuite les concepts de base de l'analyse de fiabilité des structures en allant de la définition des états-limites à la formulation mathématique du calcul de la probabilité de défaillance. Cette section a permis de discuter les difficultés majeures des approches fiabilistes. En effet, la résolution d'un problème de fiabilité passe par le calcul d'une intégrale multidimensionnelle qui est très souvent difficile à résoudre analytiquement. La résolution de cette intégrale a fait l'objet de plusieurs travaux de recherche qui ont permis de développer des méthodes pertinentes pour l'estimation de probabilités de défaillance. Certaines méthodes largement utilisées dans la littérature sont présentées à la fin de ce chapitre.

L'efficacité des méthodes probabilistes peut, pour certains types de problèmes, être altérée par la forme de l'état-limite et le temps de l'évaluation de la fonction de performance. Les méthodes d'approximation et les méthodes de simulation basées sur le point de conception sont particulièrement affectées par la forme de l'état-limite. Ceci rend leurs résultats moins précis avec une qualité difficile à évaluer. Leur principal avantage est leur faible coût de calcul. Les méthodes de simulation sont quant à elles fortement impactées par le coût de calcul. Elles requièrent un nombre d'appels à la fonction de performance non-négligeable et, plus la probabilité ciblée est faible, plus le nombre d'appels à la fonction de performance est élevé. Quand le problème traité fait l'objet d'un couplage mécano-probabiliste par exemple, la fonction de performance est souvent implicite et très coûteuse à évaluer (calcul éléments finis par exemple). Ainsi, l'effort de calcul nécessaire à l'obtention d'un estimateur de la probabilité de défaillance précis devient conséquent et les méthodes de simulation sont alors inabordables.

Dans le but de limiter les coûts de calcul des méthodes de simulation tout en gardant leur efficacité par rapport à la non-linéarité de l'état-limite et à leur faible sensibilité à la dimension du problème, une combinaison entre ces méthodes et les méta-modèles est souvent à envisager. Les méta-modèles sont des fonctions mathématiques qui peuvent être substituées à la fonction de performance originale et sont faciles à évaluer. Le chapitre suivant introduit les méta-modèles et se focalise ensuite sur la méta-modélisation par krigeage. Cette thèse considère la combinaison entre les méta-modèles et la méthode de Monte Carlo classique pour proposer des solutions aux verrous exposés dans l'introduction et qui sont le choix du type et de la configuration du méta-modèle et l'analyse de fiabilité des problèmes avec variabilité spatiale.

Chapitre 2

Méta-modélisation pour la fiabilité

Éléments clés

- Présenter les étapes principales de la calibration des méta-modèles et discuter les challenges de leur utilisation en analyse de fiabilité.
 - Aborder l'utilisation du krigeage adaptatif en analyse de fiabilité.
-

Sommaire

2.1	Introduction	48
2.2	Calibration d'un méta-modèle	48
2.2.1	Génération du plan d'expériences	49
2.2.2	Calibration du méta-modèle : revue des techniques dédiées à certains méta-modèles	52
2.2.3	Validation de l'approximation du méta-modèle	56
2.2.4	Discussions	58
2.3	Focus sur le méta-modèle du krigeage	59
2.3.1	Formulation du krigeage	60
2.3.2	Illustration de l'approximation par krigeage	63
2.3.3	krigeage adaptatif	64
2.4	Conclusions	72

2.1 Introduction

En analyse de fiabilité, les méta-modèles sont utilisés comme substituts aux fonctions de performance des modèles coûteux à évaluer. En effet, l'estimation de la probabilité de défaillance requiert toujours un nombre d'appels assez important aux modèles utilisés et ce malgré les avancées faites sur les méthodes fiabilistes telles que décrites dans le Chapitre 1. L'utilisation des méta-modèles permet d'avoir des coûts de calcul largement inférieurs à ceux engendrés par appels directs des vraies fonctions de performance, voir e.g. (Sudret, 2012). Le couplage avec les méthodes fiabilistes est réalisé en remplaçant la fonction de performance $g(\cdot)$ par son méta-modèle $\hat{g}(\cdot; \Theta)$ où Θ désigne le vecteur qui regroupe ses paramètres. La formulation du calcul de la probabilité de défaillance exprimée à l'équation 1.45 est alors réécrite comme suit dans ce contexte :

$$P_f \approx \hat{P}_f = \int_{\hat{D}_f} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (2.1)$$

où $\hat{D}_f = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \hat{g}(\mathbf{x}) \leq 0\}$ est le domaine de défaillance défini via la prédiction du méta-modèle \hat{g} . En pratique, la mise en œuvre des méta-modèles requiert un ensemble de couples entrée/sortie calculés à partir de la fonction de performance g , pour déterminer les paramètres Θ . Ces données sont connues sous le nom de *plan d'expériences* noté DoE dans ce rapport de thèse (cette notation vient de son appellation anglo-saxonne *Design of Experiments*). Le choix d'un plan d'expériences est d'une grande importance car il influence beaucoup la qualité de l'approximation réalisée par le méta-modèle. L'objectif principal est d'avoir une bonne approximation de la fonction de performance tout en réduisant au maximum l'effort numérique nécessaire à l'obtention du plan d'expériences.

Dans ce chapitre, une brève revue des méta-modèles utilisés en analyse de fiabilité est réalisée. Les principales étapes de la calibration d'un méta-modèle sont abordées dans la Section 2.2, où les techniques nécessaires à cette démarche y sont présentées. Les méthodes de génération des plans d'expériences sont discutées en premier lieu. Ensuite, des généralités sur la formulation de certains types de méta-modèles sont rappelées. Les techniques de validation de l'approximation des méta-modèles sont par la suite abordées via deux techniques largement utilisées. Enfin, les difficultés rencontrées par les utilisateurs des méta-modèles sont discutées à la fin de cette section. Pour la suite du chapitre, le méta-modèle de type krigeage est présenté plus spécifiquement en Section 2.3. Le choix du krigeage est motivé par certaines propriétés de cette technique qui sont détaillées dans la Section 2.3.1 et illustrées dans la Section 2.3.2. Ces propriétés facilitent la mise en place de plans d'expériences adaptatifs, ce qui donne lieu au krigeage adaptatif abordé à la Section 2.3.3. Ce type d'approche est largement utilisé dans la littérature et il représente à ce jour un domaine de recherche très actif en analyse de fiabilité et en optimisation.

2.2 Calibration d'un méta-modèle

Un méta-modèle est une description mathématique entre les entrées $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ et la sortie $y \in \mathcal{Y}$ construite à partir d'un certain plan d'expériences $\{(\mathbf{x}^{(i)}, y^{(i)}), i = 1, \dots, N_e\}$. Il est à noter que dans cette thèse la sortie y est considérée être un scalaire, $y^{(i)}$ est l'évaluation de la fonction de performance sur l'entrée $\mathbf{x}^{(i)}$. D'une manière générale, la calibration d'un méta-modèle passe par trois étapes principales qui sont rappelées ci-dessous. La première consiste à construire un plan d'expériences. Ceci est assuré soit avec des techniques de génération de plans d'expériences de taille fixe, soit avec des techniques adaptatives où le plan d'expériences est itérativement enrichi

par de nouveaux points jusqu'à l'obtention d'une qualité souhaitée. La deuxième étape consiste à calibrer le méta-modèle $\hat{g}(\cdot; \Theta)$. Cette opération a pour objectif de déterminer le jeu de paramètres optimaux $\hat{\Theta}$ à partir du plan d'expériences. Il est important de souligner que la nature et le nombre de paramètres dépendent du type du méta-modèle choisi, voir Section 2.2.2 pour une description de quelques exemples de méta-modèles. Ces derniers sont définis à partir d'hypothèses différentes qui donnent lieu à des paramétrages différents. Enfin, l'étape de validation permet d'évaluer la qualité du méta-modèle en calculant l'écart entre la prédiction du méta-modèle et la vraie valeur de la fonction de performance.

2.2.1 Génération du plan d'expériences

Les techniques d'échantillonnage des plans d'expériences ont pour objectif de tirer le maximum d'informations de la fonction de performance tout en minimisant le nombre d'appels à cette dernière qui, dans le contexte de la méta-modélisation, est supposée être très coûteuse en temps de calcul. Le plan d'expériences doit être suffisamment représentatif de l'espace d'entrée pour bien capter la forme de la fonction de performance. On cherche donc des plans ayant un nombre de points suffisants et assez bien répartis dans l'espace \mathcal{X} afin de minimiser l'erreur de répétabilité. Les plans d'expériences peuvent être statiques (tous les points sont générés en même temps) ou alors adaptatifs (les points sont générés séquentiellement).

2.2.1.1 Plan d'expériences statique

Un plan d'expériences statique a pour objectif de remplir l'espace des entrées \mathcal{X} . Ceci est généralement fait après normalisation dans l'hypercube unitaire $[0, 1]^n$. La génération des points $\mathbf{x}^{(i)}$ est dans ce cas effectuée sur la base de considérations géométriques et de distribution dans l'espace. Elle est donc indépendante des évaluations $y^{(i)}$ de la fonction de performance en ces points ou de la prédiction par méta-modèle. Les techniques de génération des plans d'expériences statiques sont nombreuses, voir e.g. (Garud *et al.*, 2017; Abtini, 2018; Franco, 2008) pour de plus amples détails et des études comparatives. Il est à noter que ces méthodes sont aussi utilisées pour générer le plan d'expériences initial IDoE des méta-modèles basés sur les plans d'expériences adaptatifs, voir Section 2.2.1.2 et Section 2.3.3.

L'un des échantillonnages les plus simples consiste à utiliser la méthode de Monte Carlo pour générer des points selon la fonction de densité jointe du vecteur aléatoire d'entrée. Cette méthode n'est pas influencée par la dimension du vecteur aléatoire d'entrée. Toutefois, certains domaines de l'espace d'entrée peuvent ne pas être couverts et d'autres domaines peuvent contenir un regroupement de points. Une répartition homogène du plan d'expériences dans l'espace ne peut être assurée que si sa taille est assez importante. Dans ce cas, la calibration d'un méta-modèle peut devenir aussi coûteuse que l'utilisation de la fonction de performance.

Afin d'améliorer cet échantillonnage aléatoire et donc naïf, plusieurs techniques sont proposées dans la littérature. On retrouve par exemple les méthodes de quasi Monte Carlo (QMC) pour l'obtention de plans d'expériences à répartition plus homogène. Ces méthodes sont basées sur la génération de suites à faible discrétance¹ telles que les suites de Halton (Halton, 1964) et les suites

1. La discrétance quantifie l'écart entre la fonction de distribution des points donnés et celle de la loi uniforme. Plus cette quantité est faible, plus les points du plan d'expériences ont une répartition homogène dans l'espace (Abtini, 2018).

de Sobol (Sobol', 1967). Il est à noter que, contrairement à la méthode de Monte Carlo, la méthode QMC est influencée par la dimension du vecteur aléatoire (Kuo *et al.*, 2011).

Il est également possible d'utiliser les plans d'expériences hypercube latin LHS développés par McKay *et al.* (1979). Ils permettent de réduire la sensibilité à la dimension du problème et ils sont une généralisation de l'idée du carré Latin² à n dimensions. Cette technique permet d'assurer une uniformité sur chaque variable aléatoire marginale. Dans la pratique, l'intervalle de variation de chaque variable aléatoire, i.e. l'intervalle $[0, 1]$, est divisée en N_e sous-intervalles uniformes. La combinaison de tous ces intervalles permet d'avoir n^{N_e} hypercubes à partir desquels N_e hypercubes sont sélectionnés de telle sorte qu'un hypercube latin soit créé. Dans chaque hypercube choisi, un point est choisi aléatoirement selon une loi uniforme. Cette démarche permet d'avoir une répartition uniforme des points du plan d'expériences. Néanmoins, cette répartition reste aléatoire et ne garantit pas le remplissage uniforme de l'espace des entrées \mathcal{X} . Par conséquent, cet espace peut contenir des zones ayant un regroupement de points ou des zones lacunaires tel qu'il est le cas quand tous les points se retrouvent sur la diagonale dans un espace à deux dimensions. Pour pallier ces problèmes, des plans LHS optimisés sont proposés sur la base de critères de remplissage qui ne sont pas abordés dans ce manuscrit mais le lecteur intéressé peut se référer aux travaux de Abtini (2018); Franco (2008); Garud *et al.* (2017) pour plus de détails. On peut citer par exemple, le plan LHS de Jourdan et Franco (2010) optimisé selon le critère de Kullback-Leibler. Les critères géométriques basés sur la distance euclidienne sont aussi utilisés pour optimiser les plans LHS, voir par exemple les travaux de Long *et al.* (2016); Fu et Huang (2020).

Les techniques de génération de plans d'expériences abordées dans cette partie sont populaires pour la simplicité de leur implémentation et pour la bonne répartition des points dans l'espace qu'ils garantissent. Néanmoins, elles peuvent engendrer les phénomènes du sous/sur-échantillonnage. L'approximation du méta-modèle est dans ce cas mauvaise ou inefficace. La taille des plans statiques est définie au préalable soit sur la base d'un jugement d'expert, soit sur la base de connaissances généralement acquises *a priori* par rapport au comportement de la fonction de performance. Toutefois, les fonctions de performance qu'on envisage dans ces travaux sont souvent implicites et numériquement très coûteuses, ce qui représente un vrai challenge pour le choix de la taille du plan d'expériences.

2.2.1.2 Plan d'expériences actif ou adaptatif

La mise en œuvre de plans d'expériences adaptatifs vise à s'affranchir d'un choix *a priori* sur la taille du plan d'expériences, tout en optimisant l'effort numérique de construction. Ces plans constituent une amélioration des plans d'expériences statiques, avec un choix itératif des points. Les travaux de Crombecq (2011); Aute *et al.* (2013) montrent bien que cette amélioration donne de meilleures approximations du méta-modèle avec des coûts de calcul réduits. Généralement, les techniques adaptatives commencent par un plan d'expériences initial construit avec l'une des méthodes statiques existantes. Ensuite, ce plan est enrichi point par un point ou par paquets à chaque itération et ce jusqu'à convergence.

L'exploration et l'exploitation sont les objectifs visés pour la génération des plans d'expériences adaptatifs. Les techniques à base d'exploration ont pour objectif de couvrir uniformément l'espace des entrées afin d'acquérir une connaissance globale sur le comportement du modèle que l'on veut approcher. Les points sont dans ce cas ajoutés itérativement en se basant sur certains critères de

2. Le carré latin est une grille carrée contenant des points placés de telle sorte qu'aucune colonne et qu'aucune ligne ne contienne plus qu'un seul échantillon.

remplissage géométriques tout en ignorant les valeurs en ces points du modèle et du méta-modèle construit à chaque itération. Husslage (2006) utilisent des plans de type maximin-LHS imbriqués. La démarche proposée est limitée à deux plans imbriqués en dimension 2. Crombecq *et al.* (2009) génèrent des plans d'expériences adaptatifs à partir du diagramme de Voronoï et de la triangulation de Delaunay. Les deux approches se sont montrées efficaces quand elles sont comparées au LHS.

Les techniques basées sur l'exploitation visent quant à elles à l'obtention d'un maximum d'information sur le modèle ou son méta-modèle, en utilisant les valeurs obtenues à chaque itération du processus itératif afin de définir le ou les points à ajouter. L'objectif est de placer les points dans les sous-domaines d'intérêt qui influencent le plus la réponse du modèle ou les quantités d'intérêt issues du post-traitement de cette réponse. Ceci est clairement le cas au voisinage de la solution optimale en optimisation. C'est aussi le cas en analyse de fiabilité où l'objectif primordial est d'avoir un bon méta-modèle dans les zones de défaillance ayant une grande contribution à l'estimation de la probabilité de défaillance. Bien que les techniques basées sur l'exploitation et celles basées sur l'exploration aient des stratégies radicalement opposées, il est plus intéressant de les combiner pour bénéficier des avantages de chacune. Des techniques d'échantillonnage dites hybrides ont été proposées pour cette raison. Elles permettent d'obtenir un bon compromis entre l'exploitation et l'exploration, voir e.g. (Fuhg *et al.*, 2020).

Un algorithme général des méthodes adaptatives est présenté dans l'organigramme en Figure 2.1. Les principales étapes sont les suivantes :

1. La première étape de telles approches est bien évidemment la construction d'un plan d'expériences initial IDoE nécessaire à la calibration du premier méta-modèle. Le choix de la taille du IDoE semble être relativement arbitraire dans la littérature (Fuhg *et al.*, 2020). La taille est généralement choisie par l'utilisateur en fonction de la dimension du problème à résoudre, du coût de l'évaluation de la fonction de performance et de son degré de complexité si ce dernier est connu. Il faut aussi garder à l'esprit qu'un trop petit IDoE peut compromettre les premières étapes du processus itératif à cause de la mauvaise qualité des premiers méta-modèles construits. Un trop grand IDoE peut quant à lui avoir des conséquences sur les coûts de calcul surtout quand l'approximation du méta-modèle ne doit pas être obligatoirement précise sur tout l'espace des entrées. En analyse de fiabilité par exemple, l'effort numérique peut être inutilement dépensé initialement sur des zones qui ne contribuent pas à la défaillance. Guimarães *et al.* (2018) ont mis l'accent sur ce point en discutant d'autres alternatives pour le choix de la taille du plan d'expériences initial. Loepky *et al.* (2009); Silvestrini *et al.* (2013) suggèrent de commencer avec une taille du IDoE qui dépend de la dimension n du problème et d'utiliser par exemple $10n$ à $15n$ points initialement. Dans la pratique, différents travaux de la littérature utilisent des plans d'expériences de tailles différentes et très souvent avec des informations limitées sur les critères de ce choix.
2. La première itération du processus adaptatif consiste à évaluer la fonction de performance sur les points d'entrée du IDoE. Cette opération permet de finaliser la première étape par l'obtention de la réponse de la fonction de performance sur le IDoE. Ensuite, le premier méta-modèle est calibré sur le IDoE en utilisant une démarche spécifique au type du méta-modèle choisi, voir Section 2.2.2.
3. À chaque itération du processus d'enrichissement :
 - Un ensemble de nouveaux points est choisi à partir d'une fonction d'apprentissage qui permet de satisfaire un bon compromis entre l'exploration d'un nombre maximal de régions et l'exploration par raffinement des régions d'intérêt. Cet ensemble peut être

constitué d'un seul ou d'un paquet de points définis par l'information obtenue à partir du méta-modèle $\hat{g}^{(i-1)}$ de l'itération $i - 1$.

- La fonction g est évaluée en ces nouveaux points et les nouveaux couples entrées/sorties sont ajoutés au plan d'expériences de l'itération $i - 1$.
 - Le méta-modèle est re-calibré à partir du plan d'expériences de l'itération actuelle.
4. Le processus itératif s'arrête si l'un des critères de convergence du méta-modèle est atteint. Le méta-modèle est alors jugé suffisamment précis pour être utilisé. Généralement quatre critères de convergence sont considérés dans la littérature (Fuhg *et al.*, 2020) :
- Le critère basé sur une contrainte du temps. Il est défini par exemple par un temps CPU limité pour les simulations. Dans le cadre industriel ce critère est décisif.
 - Le nombre d'appels à la fonction de performance est aussi utilisé comme critère de convergence. Le nombre à ne pas dépasser est généralement défini par les contraintes numériques ou expérimentales nécessaires à l'obtention de la vraie valeur à chaque itération, voir e.g. (Aute *et al.*, 2013).
 - Le processus itératif peut aussi s'arrêter quand la précision voulue est atteinte. Cette précision est quantifiée généralement à travers des métriques qui visent à évaluer l'écart entre les prédictions du méta-modèle et les vraies valeurs de la fonction de performance, voir Section 2.2.3. Pour des applications plus particulières et des méta-modèles particuliers, les critères de convergence peuvent être aussi définis à partir de la fonction d'apprentissage utilisée, ou bien à partir de l'erreur de l'estimation de la quantité d'intérêt, voir Section 2.3.3.3.
 - L'amélioration apportée à chaque itération au méta-modèle est un des critères adoptés dans la littérature, voir e.g. (Dubourg *et al.*, 2013). Si aucune amélioration n'est constatée au bout d'un certain nombre d'itérations, l'ajout de nouveaux points au plan d'expériences est jugé inefficace et le processus est arrêté.

2.2.2 Calibration du méta-modèle : revue des techniques dédiées à certains méta-modèles

Après la construction du plan d'expériences vient l'étape de la calibration d'un méta-modèle sur les points du DoE : $\{(\mathbf{x}^{(i)}, y^{(i)}), i = 1, \dots, N_e\}$. Chaque type de méta-modèle possédant ses propres paramètres, sa calibration requiert par conséquent l'utilisation d'approches qui lui sont spécifiques. Cette calibration a pour objectif de trouver, à partir du plan d'expériences, le jeu de paramètres optimal $\hat{\Theta}$ qui minimise le risque \mathcal{R} caractérisant la performance du méta-modèle \hat{g} :

$$\mathcal{R}(\hat{g}(\mathbf{X}; \Theta)) = \mathbb{E}_{f(\mathbf{X}, Y)}[l(g(\mathbf{X}), \hat{g}(\mathbf{X}; \Theta))] = \int_{\mathcal{X} \times \mathcal{Y}} l(g(\mathbf{x}), \hat{g}(\mathbf{x}; \Theta)) f(\mathbf{x}, y) d\mathbf{x} dy \quad (2.2)$$

où l est une fonction de perte prise égale à la fonction de perte quadratique $l_2(g, \hat{g}) = (g - \hat{g})^2$ très souvent en régression, par exemple. Dans la pratique, la fonction de densité jointe $f(\mathbf{x}, y)$ des variables aléatoires liant les entrées \mathbf{X} à la sortie Y étant inconnue, la recherche du vecteur $\hat{\Theta}$ revient à minimiser le risque empirique évalué directement à partir des points du plan d'expériences :

$$\hat{\Theta} = \underset{\Theta}{\operatorname{argmin}} \mathcal{R}_{emp}(\hat{g}(\cdot; \Theta)) \quad (2.3)$$

où :

$$\mathcal{R}_{emp}(\hat{g}(\cdot; \Theta)) = \frac{1}{N_e} \sum_{i=1}^{N_e} l(g(\mathbf{x}^{(i)}), \hat{g}(\mathbf{x}^{(i)})) \quad (2.4)$$

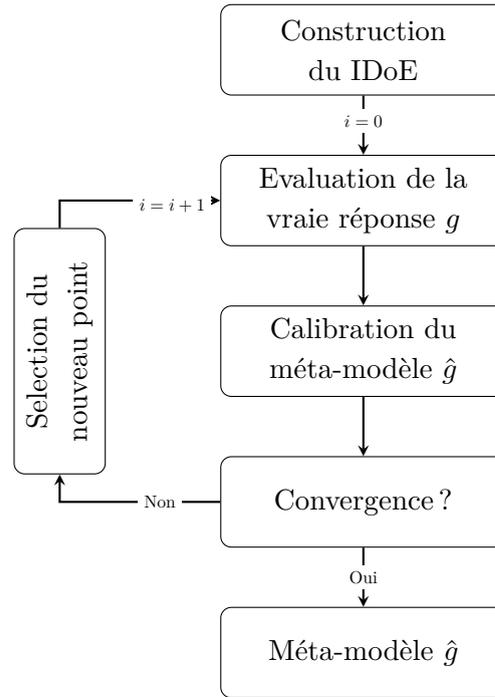


FIGURE 2.1: Schéma typique des techniques adaptatives pour la construction des plans d'expériences

Il existe dans la littérature plusieurs types de méta-modèles. Dans cette section, une présentation assez synthétique est donnée pour le chaos polynomial, les réseaux de neurones (ANN) et les *Support Vector Machine* (SVM). Pour plus des détails sur les aspects théoriques et les implémentations de ces méta-modèles, le lecteur intéressé peut consulter les références citées au fur et à mesure dans cette section. Le krigeage et les ensembles de méta-modèles appliqués dans le cadre des travaux présentés dans ce mémoire sont respectivement détaillés dans la Section 2.3 et le Chapitre 3.

Chaos polynomial

L'approximation par chaos polynomial considère la réponse aléatoire comme étant une combinaison linéaire de polynômes orthonormés multivariés. Les variables d'entrée sont supposées être indépendantes (si ce n'est pas le cas, une transformation convenable peut être appliquée tel que décrit dans la Section 1.3.3). La théorie du chaos polynomial est formalisée dans un cadre mathématique rigoureux, voir e.g. (Ghanem et Spanos, 2003; Blatman, 2009). Une revue globale des propriétés principales de ce type de méta-modèle est seulement donnée dans la suite, compte tenu de l'objectif de cette sous-section.

La réponse aléatoire g est décomposée sur une base polynomiale orthogonale de l'espace de Hilbert de taille infinie. En pratique, une approximation limitée avec un nombre fini de termes est considérée (Soize et Ghanem, 2004) :

$$\hat{g}(\mathbf{X}; \Theta) = \sum_{\mathbf{a} \in \mathbb{N}^n} c_{\mathbf{a}} \Psi_{\mathbf{a}}(\mathbf{X}) \quad (2.5)$$

où $\mathbf{a} = \{a_1, \dots, a_n\}$ sont les degrés des polynômes univariés qui doivent être inférieurs ou égaux à l'ordre de troncature r de la décomposition, $c_{\mathbf{a}}$ sont des coefficients déterministes inconnus regroupés dans le vecteur Θ et $\Psi_{\mathbf{a}}$ est une base polynomiale orthogonale multivariée, dont le choix

dépend des fonctions de densités marginales des variables aléatoires $\{X_i, i = 1, \dots, n\}$ regroupées dans le vecteur aléatoire \mathbf{X} . On peut citer par exemple, les polynômes d'Hermite pour des variables aléatoires normales centrées réduites et les polynômes de Legendre pour les variables aléatoires uniformes. Sous l'hypothèse d'indépendance des variables aléatoires X_i , les polynômes $\Psi_{\mathbf{a}}$ peuvent s'écrire sous la forme de produits tensoriels de polynômes univariés exprimés comme suit :

$$\Psi_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n \psi_a(x_i) \quad (2.6)$$

Les coefficients inconnus $\Theta = \mathbf{c}_{\mathbf{a}}$ sont déterminés soit par projection (Marelli et Sudret, 2015), soit par régression (Hadigol et Doostan, 2018). Grâce à l'orthogonalité, la méthode de la projection permet d'estimer ces coefficients à l'aide de l'intégrale suivante :

$$\hat{\Theta} = \hat{\mathbf{c}}_{\mathbf{a}} = \int_{\mathbb{R}^n} g(\mathbf{x}) \Psi_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \mathbb{E}[g(\mathbf{x}) \Psi_{\mathbf{a}}(\mathbf{x})] \quad (2.7)$$

La méthode de régression utilise le plan d'expériences *DoE* : $\{\mathbf{x}^{(i)}, y^{(i)}, i = 1, \dots, N_e\}$ pour l'obtention du jeu optimal de coefficients regroupés dans le vecteur $\hat{\Theta}$ à partir de la minimisation de la fonction de perte quadratique comme suit :

$$\hat{\Theta} = \hat{\mathbf{c}}_{\mathbf{a}} = \underset{\Theta}{\operatorname{argmin}} \frac{1}{N_e} \sum_{i=1}^{N_e} (g(\mathbf{x}^{(i)}) - \hat{g}(\mathbf{x}^{(i)}))^2 \quad (2.8)$$

dont la solution s'écrit :

$$\hat{\Theta} = \hat{\mathbf{c}}_{\mathbf{a}} = (\Psi^T \Psi)^{-1} \Psi^T \mathbf{y} \quad (2.9)$$

où $\mathbf{y} = \{y^{(1)}, \dots, y^{(N_e)}\}$ et la matrice Ψ définie par l'équation 2.10 regroupe les évaluations des polynômes multivariés aux points $\{\mathbf{x}^{(i)}, i = 1, \dots, N_e\}$ du plan d'expériences.

$$\Psi = \begin{bmatrix} \psi_0(\mathbf{x}^{(1)}) & \psi_1(\mathbf{x}^{(1)}) & \dots & \psi_{r-1}(\mathbf{x}^{(1)}) \\ \psi_0(\mathbf{x}^{(2)}) & \psi_1(\mathbf{x}^{(2)}) & \dots & \psi_{r-1}(\mathbf{x}^{(2)}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_0(\mathbf{x}^{(N_e)}) & \psi_1(\mathbf{x}^{(N_e)}) & \dots & \psi_{r-1}(\mathbf{x}^{(N_e)}) \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

Le post-traitement des coefficients $\hat{\mathbf{c}}_{\mathbf{a}}$ permet de déduire les moments statiques, voir e.g. chapitre 3 de la thèse de Blatman (2009) et d'effectuer de l'analyse de sensibilité, voir e.g. (Crestaux *et al.*, 2009). Toutefois, l'ordre de troncature de la décomposition peut engendrer des erreurs d'approximation difficiles à estimer. De plus, le nombre de coefficients inconnus augmente exponentiellement avec la dimension du problème (He *et al.*, 2020). Pour contourner ce problème, plusieurs formes de chaos polynomiaux creux ont été proposées où le nombre de termes retenus est réduit uniquement aux termes importants, voir e.g. (Blatman et Sudret, 2011; Abraham *et al.*, 2017).

Réseaux de neurones

Les réseaux de neurones (ou *Artificial Neural Networks* ANN) représentent un autre type de méta-modèle fréquemment utilisé en analyse de fiabilité, voir e.g. (Nezhad *et al.*, 2019; Chojaczyk *et al.*, 2015; Li et Wang, 2020; Hurtado et Alvarez, 2001). Inspirés par les réseaux de neurones biologiques du cerveau, McCulloch et Pitts (1943) ont développé ce méta-modèle afin d'imiter le fonctionnement du cerveau dans le processus du traitement de l'information. Un ANN est un ensemble de nœuds (neurones) connectés selon une certaine architecture prédéfinie qui permet de

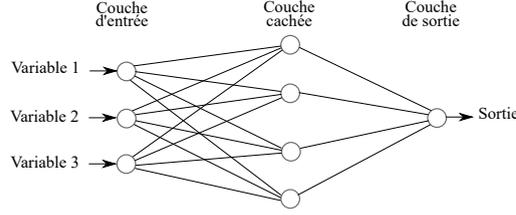


FIGURE 2.2: Exemple d'un ANN à 3 entrées et une couche cachée.

préciser le nombre de couches intermédiaires. Le nombre de couches dans un ANN est au minimum égal à trois, la première couche étant la couche des entrées et la dernière couche celle des sorties. Les autres couches sont des couches intermédiaires. Un schéma représentant un exemple d'une architecture ANN est présenté sur la Figure 2.2. Un exemple d'approximation mathématique par ANN est donné par l'expression suivante :

$$\hat{g}(\mathbf{X}; \Theta) = \sum_{i=1}^m w_i f \left(\sum_{j=1}^n w_{ij} \mathbf{X}_j \right) + w_{i0} + w_0 \quad (2.11)$$

où m indique ici le nombre de neurones et f est une fonction d'activation, telle que la fonction sigmoïde par exemple :

$$f(a) = \frac{1}{(1 + \exp(-\alpha a))} \quad (2.12)$$

Le poids w_{ij} de l'entrée x_j pour le $i^{\text{ème}}$ neurone, le poids w_i de la sortie de chaque neurone, les biais w_{i0} de chaque neurone et le poids w_0 sur la sortie sont les paramètres à déterminer. Ils sont généralement optimisés durant le processus d'apprentissage par les algorithmes de la propagation inverse, voir e.g. (De Lozzo, 2013). L'objectif de cette optimisation est la minimisation du risque empirique défini à l'équation 2.4, où Θ regroupe les paramètres inconnus. La convergence de l'algorithme d'optimisation vers un minimum local est souvent rencontrée. Pour cette raison, différentes initialisations de poids doivent être considérées. De plus, le comportement du ANN peut être imprévisible en raison de sa complexité, menant ainsi à de mauvaises interprétations. Cependant, l'ANN est capable de capter l'interaction entre les variables du système malgré la non-linéarité et les complexités qui peuvent exister.

Plusieurs types de modèles ANN sont disponibles en pratique, les fonctions à base radiale RBF introduites par Lowe *et al.* (1988) en sont un exemple. Ce type de modèle est plus facile à gérer que les ANN, d'où leur popularité. Le modèle consiste en une combinaison linéaire de fonctions symétriques radiales. Il y a généralement trois couches : la couche d'entrée, une couche intermédiaire ayant la même fonction d'activation radialement symétrique ϕ pour les m neurones et une couche de sortie linéaire. Son approximation s'écrit de la façon suivante :

$$\hat{g}(\mathbf{X}; \Theta) = \mathbf{w}^T \boldsymbol{\phi} = \sum_{i=1}^m w_i \phi(\|\mathbf{X} - c_i\|) \quad (2.13)$$

où w_i et c_i représentent respectivement le poids et le centre du $i^{\text{ème}}$ neurone. $\boldsymbol{\phi}$ est un vecteur contenant les m valeurs de la fonction ϕ évaluée sur la base des distances euclidiennes entre le point \mathbf{x} et les centres c_i . L'application des ANN de type RBF en analyse de fiabilité est récente, voir e.g. (Xu *et al.*, 2003; Deng, 2006; Dai *et al.*, 2011; Li *et al.*, 2018; Zhang *et al.*, 2020a).

Support vector machine SVM

Les *support vector machines* (SVM) (Vapnik *et al.*, 1996; Vapnik, 2013) ont été initialement développés pour des problèmes de classification, puis leur utilisation a été étendue à la régression. L'utilisation des SVM en régression est connue dans la littérature sous le nom de support vector regression SVR. En analyse de fiabilité, ce méta-modèle est utilisé avec ces deux approches : la prédiction des valeurs continues de la fonction de performance par régression (Bourinet, 2016; De Brabanter, 2011) ou la prédiction du caractère défaillant/non-défaillant par classification (Bourinet *et al.*, 2011; Alibrandi *et al.*, 2015; Hariri-Ardebili et Pourkamali-Anaraki, 2018). Pour les deux approches, le méta-modèle SVM est exprimé mathématiquement par l'expression suivante pour les états-limites linéaires :

$$\hat{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{w}^T \mathbf{x} + b \quad (2.14)$$

où b est un paramètre scalaire et \mathbf{w} est un vecteur de coefficients qui permet de déterminer la direction de l'hyperplan. Dans la plupart des cas, les états-limites sont non-linéaires. Dans ce cas, la formulation mathématique de ce modèle est basée sur la technique du *kernel trick* (Boser *et al.*, 1992; Hofmann *et al.*, 2008), qui permet un passage de l'espace des entrées vers un nouvel espace de dimension supérieure (potentiellement infinie) via un noyau noté k ³. Il existe de nombreux exemples de noyaux, voir Section 1.2.4.3. On peut montrer que le modèle SVM (voir équation 2.14) prend la forme suivante (théorème du représentant) :

$$\hat{g}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N_e} c_i k(\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{x}) + b \quad (2.15)$$

où les c_i et b sont des paramètres à déterminer.

L'approximation SVM requière la résolution d'un problème d'optimisation, la fonction coût étant la somme du risque empirique avec une fonction de perte donnée (par exemple, *Hinge loss function* en classification et *ϵ -insensitive loss function* en régression) et un terme représentatif de la complexité du modèle. Le poids relatif de ces deux termes étant réglé par un coefficient de régularisation (noté c en général).

$$\text{Hinge loss : } l(y, u) = \max(0, 1 - yu) \quad (2.16)$$

$$\epsilon - \text{insensitive loss : } l(y, u) = \max(0, |y - u| - \epsilon) \quad (2.17)$$

Les problèmes d'optimisation nécessaires à la calibration d'un méta-modèle de type SVM sont classés dans la catégorie des problèmes d'optimisation convexes. Par conséquent, la solution trouvée est toujours un optimum global (Hariri-Ardebili et Pourkamali-Anaraki, 2018).

2.2.3 Validation de l'approximation du méta-modèle

L'étape de validation d'un méta-modèle est le processus qui permet d'évaluer sa performance. Elle donne aussi la possibilité de sélectionner un méta-modèle parmi plusieurs méta-modèles candidats et d'optimiser le vecteur de paramètres Θ regroupant : paramètres du noyau, paramètre de régularisation pour les SVM, etc. On notera $\hat{\Theta}$ le jeu de paramètres optimaux pour le méta-modèle \hat{g} et le DoE à partir duquel il a été calibré. Toutefois, la bonne performance et la précision d méta-modèle en termes de prédiction sur de nouveaux points ne sont toujours pas garanties. L'évaluation de la performance est assurée soit avec des estimateurs d'erreurs calculés à partir d'une base de données test, soit avec des techniques de rééchantillonnage.

3. Dans le cas d'un noyau stationnaire, k est le noyau R abordé en Section 1.2.4.

Estimateurs d'erreurs

L'erreur de prédiction commise par le méta-modèle $\hat{g}(\cdot; \hat{\Theta})$ est ici évaluée sur un nouveau plan d'expériences $DoE_{\text{test}} = \{(\mathbf{x}_i, y_i); i = 1, \dots, N_t\}$. Il est important de souligner qu'aucun point de ce plan d'expériences n'est utilisé pour la calibration du méta-modèle. En d'autres termes, le plan d'expériences utilisé pour l'apprentissage est indépendant du plan test. L'objectif est donc de mesurer l'écart entre les valeurs réelles $y_i = g(\mathbf{x}_i)$ et les valeurs prédites par le méta-modèle $\hat{y}_i = \hat{g}(\mathbf{x}_i; \hat{\Theta})$ aux points \mathbf{x}_i des données test.

L'erreur quadratique moyenne MSE est l'un des estimateurs les plus utilisés. Déduite à partir de la fonction perte quadratique, son expression est donnée par :

$$MSE = \frac{1}{N_t} \sum_{i=1}^{N_t} (y_i - \hat{y}_i)^2 \quad (2.18)$$

Il existe aussi le coefficient de détermination R^2 dont les valeurs varient entre 0 et 1. Quand les valeurs de R^2 se rapprochent du 1, le méta-modèle $\hat{g}(\cdot; \hat{\Theta})$ possède une bonne performance en terme de prédiction sur de nouveaux points. Il est exprimé par :

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{N_t} (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^{N_t} (y_i - \bar{y})^2} \quad (2.19)$$

où $\bar{y} = 1/N_t \sum_{i=1}^{N_t} y_i$ est la moyenne des sorties du plan d'expériences test. L'obtention d'une bonne estimation de cette erreur est conditionnée par la taille du plan test. Ce dernier doit être suffisamment large. Cependant, l'évaluation d'une fonction de performance coûteuse sur un grand nombre de points peut ruiner l'efficacité de l'approche en raison des temps de calcul que cela peut engendrer.

Techniques de rééchantillonnage

Ces techniques sont largement utilisées dans le cadre des fonctions de performance coûteuses en temps de calcul. En effet, dans ce contexte, il est toujours préférable d'avoir un plan d'expériences de taille suffisante pour l'ajustement du méta-modèle sans avoir besoin de générer un plan test pour sa validation. Ces techniques utilisent donc un seul plan d'expériences pour la calibration et la validation.

La méthode de validation croisée est l'une des techniques de rééchantillonnage initialement proposée par Stone (1974) et Geisser (1975) dont le but est d'avoir un bon compromis entre estimation de l'erreur de prédiction et temps de calcul acceptable. L'idée est de scinder le plan d'expériences disponible en K sous-ensembles $DoE^{(k)}$ de telle sorte que $\bigcup_{k=1}^K DoE^{(k)} = DoE$. Les points des ensembles $DoE^{(K-1)}$ sont utilisés pour la calibration du méta-modèle et donc l'obtention du vecteur paramètres $\hat{\Theta}^{(K-1)}$. Les points du $K^{i\grave{e}me}$ ensemble (\mathbf{x}', y') , où $y' = g(\mathbf{x}')$, sont utilisés comme un plan test pour la validation du méta-modèle $\hat{g}(\cdot; \hat{\Theta}^{(K-1)})$. Ainsi, l'erreur de prédiction du méta-modèle $\hat{g}(\mathbf{x}'; \hat{\Theta}^{(K-1)})$ est obtenue à partir du calcul de la fonction de perte quadratique l_2 , par exemple, entre sa prédiction et les valeurs de la fonction de performance y' du $K^{i\grave{e}me}$ ensemble. Cette procédure est répétée pour toutes les combinaisons possibles des $(K-1)$ ensembles. À la fin, K vecteurs de paramètres $\{\hat{\Theta}^{(k)}; k = 1, \dots, K\}$ correspondant aux K méta-modèles $\hat{g}(\cdot; \hat{\Theta}^{(k)})$

sont obtenus et l'erreur par validation croisée est calculée comme suit :

$$e_{VC}(\hat{g}(\cdot; \hat{\Theta})) = \frac{1}{N_e} \sum_{i=1}^{N_e} \sum_{k=1}^K l_2 \left(\hat{g} \left(\mathbf{x}_i; \hat{\Theta}^{(k)} \right), y_i \right) \mathbb{1}_{(x_i, y_i) \in D_{oE}^{(k)}} \quad (2.20)$$

Dans le cas où la taille du plan d'expériences est très limitée, l'utilisation d'une fraction des points pour l'apprentissage pose problème. Dans ce cas, la validation croisée LOO, proposée par Jones *et al.* (1998), où l'abréviation LOO fait référence à l'appellation anglosaxonne "leave-one-out" est préférée. Dans cette approche, le nombre d'ensembles K est égal au nombre de points d'apprentissage N_e . Ainsi, un seul point est mis à chaque fois de côté pour la validation du méta-modèle calibré à partir des autres points. L'erreur estimée par LOO est donnée par :

$$e_{VC-LOO}(\hat{g}(\cdot; \hat{\Theta})) = \frac{1}{N_e} \sum_{i=1}^{N_e} l_2 \left(\hat{g} \left(\mathbf{x}_i; \hat{\Theta}^{(\sim i)} \right), y_i \right) = \frac{1}{N_e} \sum_{i=1}^{N_e} \left(\hat{g}^{(\sim i)}(\mathbf{x}_i) - y_i \right)^2 \quad (2.21)$$

où $\hat{g}^{(\sim i)}$ désigne le méta-modèle construit avec tous les points du plan d'expériences sauf le $i^{\text{ème}}$ et $\hat{\Theta}^{(\sim i)}$ est le vecteur qui regroupe le jeu de paramètres optimaux correspondant. Selon Queipo *et al.* (2005), l'approche de la validation croisée LOO permet d'avoir un estimateur d'erreur quasi sans biais. Cette approche nécessite néanmoins N_e calibrations du méta-modèle. Un indicateur Q^2 similaire au coefficient de détermination R^2 de l'équation 2.19 est définie dans le cadre de la validation croisée :

$$Q^2 = 1 - \frac{e_{VC-LOO}}{\sum_{i=1}^{N_e} (y_i - \bar{y})^2} \quad (2.22)$$

Une approche similaire à l'estimation de l'erreur par validation croisée appelée Bootstrap est introduite par Efron et Tibshirani (1994), avec la spécificité que les points du plan d'expériences peuvent être répétés. Le tirage avec remise permet d'avoir des ensembles avec une taille égale à la taille du plan d'expériences à disposition.

2.2.4 Discussions

Comme évoqué précédemment, l'estimation de la probabilité de défaillance rencontre plusieurs obstacles tels que les faibles valeurs de la probabilité de défaillance recherchée, la grande dimension du vecteur d'entrée, la forme de l'état-limite et le coût de l'évaluation de la fonction de performance, voir Section 1.5. Les méta-modèles sont un outil qui permet de dépasser le problème du coût de calcul de la fonction de performance dans de nombreuses applications. Toutefois, leur performance reste sensible à la forme de l'état-limite, par exemple. En raison du manque d'informations concernant la forme de l'état-limite, une hypothèse de régularité est souvent posée par l'utilisateur. Cette hypothèse permet de calibrer des méta-modèles sur un plan d'expériences de taille acceptable vis-à-vis des efforts numériques. Toutefois, les applications à des états-limites non-réguliers peuvent apparaître dans le contexte de l'analyse de fiabilité, voir par exemple l'application en section 5.2.2 des travaux de Kouassi (2017). Cette application est reprise par Bourinet (2019) dans le cadre de ses travaux d'investigation de l'utilisation d'un noyau de Matérn (voir Section 1.2.4.3) avec un paramètre de régularisation pour chaque dimension, ces paramètres étant ajustés aux données. Ce noyau est utilisé pour une approximation par SVR. L'obtention d'une bonne approximation dans ce contexte est possible avec ce noyau. Toutefois, ce méta-modèle à grande flexibilité requiert le calibrage de nombreux paramètres.

La grande dimension du problème à traiter représente aussi un obstacle pour les méta-modèles et ce pour plusieurs raisons. L'ordre de troncature du chaos polynomial par exemple augmente

avec la dimension du problème, ce qui implique de nombreux coefficients à déterminer. De plus, la taille du plan d'expériences doit être assez grande afin de bien capter la forme de l'état-limite dans l'espace à grande dimension. Ceci n'est malheureusement pas toujours possible en analyse de fiabilité en raison des efforts numériques considérables requis à chaque évaluation de la fonction de performance. Ces efforts peuvent être réduits et la calibration d'un méta-modèle peut devenir moins coûteuse si la fonction de performance est linéaire. Pour les fonctions de performance plus complexes, la faible taille du DoE influence directement l'estimation de ses paramètres.

Concernant l'estimation des paramètres Θ , leur détermination requiert la résolution d'un problème d'optimisation sous contrainte. Le recours à des outils d'optimisation peu sensibles au nombre de paramètres tel que les algorithmes évolutionnaires (Holland, 1992) est assez répandu pour l'optimisation des paramètres Θ , voir e.g. (Bourinet, 2018; Lessmann *et al.*, 2006; Tomioka *et al.*, 2007). Toutefois, leur utilisation nécessite le réglage de plusieurs paramètres de l'algorithme, ce qui est souvent une tâche difficile à réaliser. La réduction de la dimension du problème original avant la calibration d'un méta-modèle peut aussi être envisagée pour les problèmes à grande dimension. Ceci peut être effectué par la sélection d'un sous-ensemble de variables significatives à l'étude menée en effectuant une analyse de sensibilité, par exemple, (Zhang *et al.*, 2016). Il est aussi possible d'effectuer une recherche d'un nouvel ensemble de variables, de dimension inférieure, qui sont représentées par une combinaison linéaire ou non-linéaire des variables initiales (Zhou et Peng, 2020; Pan et Dias, 2017; Zuniga *et al.*, 2021). En plus de ces techniques, il existe aussi la technique *High Dimensional Model Representations* HDMR (Rabitz *et al.*, 1999), qui permet de décomposer le problème de grande dimension en sous-problèmes de dimensions plus faibles, voir e.g. chapitre 4 de la thèse de Lelièvre (2018).

L'estimation de la probabilité de défaillance d'événements rares requiert très généralement un nombre élevé d'appels à la fonction de performance. Ceci est rencontré pour le calcul de la probabilité de défaillance par méthodes de simulation avec la fonction de performance, mais aussi avec les méta-modèles. En effet, ces derniers ont besoin d'un plan d'expériences de taille suffisamment importante pour disposer d'information probabiliste contenue dans des régions éloignées de la tendance centrale des variables aléatoires, i.e. contenue dans les queues de distribution. Dans la littérature, l'estimation de probabilités est de nos jours de plus en plus réalisée avec des plans d'expériences adaptatifs (Wei *et al.*, 2019; Schöbi *et al.*, 2017; Song *et al.*, 2020). Cette approche permet d'atteindre efficacement les zones de défaillance se trouvant dans les queues de distribution. Bourinet (2016), (2019) présente dans ses travaux l'efficacité de l'utilisation des SVR adaptatives pour des probabilités de défaillance de l'ordre de $10^{-4} - 10^{-7}$. Papadopoulos *et al.* (2012) ont amélioré l'efficacité de la méthode subset simulations en utilisant des réseaux de neurones adaptatifs capable de trouver des probabilités allant de 10^{-3} à 10^{-5} . L'amélioration de la méthode subset simulations par krigeage a aussi fait l'objet de travaux de recherche, voir e.g. Xiao *et al.* (2019). D'autres méthodes de simulation sont couplées avec le krigeage et on peut citer par exemple les travaux de Zhang *et al.* (2020c, 2019b) pour les tirages d'importance et Lelièvre *et al.* (2018a); Meng *et al.* (2020) pour la méthode de Monte Carlo.

2.3 Focus sur le méta-modèle du krigeage

Cette section a pour objectif de rappeler les bases du méta-modèle de krigeage et de présenter son utilisation en analyse de fiabilité. Ce méta-modèle doit son nom à l'ingénieur sud-africain Danie G. Krige qui a développé les premières idées d'application des méthodes statistiques à l'étude de

nouvelles mines d'or avec un nombre limité de forages (Krige, 1951). Sa formalisation mathématique est due à Matheron (1963) et son adaptation au contexte d'expériences numériques a été proposée plus tard par Sacks *et al.* (1989). Le krigeage est aussi connu comme une régression par processus gaussien en machine learning, voir e.g. (Rasmussen et Williams, 2006). Le krigeage est basé sur l'hypothèse que la fonction à approximer est une réalisation d'un processus gaussien indexé sur le vecteur d'entrée \mathbf{X} et conditionné par les données du plan d'expériences.

2.3.1 Formulation du krigeage

2.3.1.1 Principe

La formulation générale du krigeage est donnée par l'équation 2.23, dans laquelle la fonction de performance $G(\mathbf{u})$ est supposée être une réalisation du processus stochastique $\mathcal{G}(\mathbf{u})$. Il est à noter que les développements décrits dans cette section sont exprimés dans l'espace normal standard des variables aléatoires \mathbf{U} , où \mathbf{u} est une réalisation du vecteur aléatoire \mathbf{U} .

$$\mathcal{G}(\mathbf{u}) = \mathbf{f}(\mathbf{u})^T \boldsymbol{\beta} + H(\mathbf{u}) \quad (2.23)$$

La combinaison linéaire déterministe $\mathbf{f}(\mathbf{u})^T \boldsymbol{\beta}$ entre la base de fonctions $\mathbf{f} = \{f_i, i = 1, \dots, p\}$ et les coefficients de régression $\boldsymbol{\beta} = \{\beta_i, i = 1, \dots, p\}$ exprime la tendance du processus. Sa nature permet de distinguer trois types de krigeage. Le krigeage universel possède la formulation générale exprimée par l'équation 2.23, où la tendance est exprimée par la combinaison linéaire $\mu(\mathbf{u}) = \mathbf{f}(\mathbf{u})^T \boldsymbol{\beta}$. Quand $p \leq 1$ et $\mathbf{f} = \{1\}$, la tendance $\mu(\mathbf{u}) = \mu = \beta_1$ est constante. Dans ce cas, si β_1 est inconnu le krigeage est dit ordinaire, si β_1 est connu, on parle de krigeage simple. Le processus stochastique $H(\mathbf{u})$ est un processus gaussien stationnaire du second ordre. Il exprime les fluctuations de la réponse du méta-modèle autour de la tendance. Il est de moyenne nulle et sa fonction d'autocovariance s'écrit $C_H(\mathbf{u}, \mathbf{u}') = \sigma^2 R(\mathbf{u} - \mathbf{u}'; \boldsymbol{\theta})$ (voir équation 1.31). Tel que discuté dans la Section 1.2.4, il existe plusieurs modèles pour le noyau et chacun d'entre eux est défini par un ensemble d'hyperparamètres regroupés ici dans le vecteur $\boldsymbol{\theta}$.

Le choix de la complexité de la tendance et du type du noyau pour un problème donné est souvent arbitraire et se base généralement sur un avis *a priori* qui est fonction de la connaissance que l'on a de la fonction à approximer. Toutefois, quand cette dernière est inconnue, leur spécification risque d'entraîner des erreurs de prédiction. Différentes études ont ainsi été menées dans la littérature pour comparer les choix possibles ou pour proposer des méthodes permettant la sélection d'une solution optimale. Chen *et al.* (2016) effectuent, par exemple, une étude comparative avec des méta-modèles de krigeage ayant différentes tendances et différents noyaux. Selon ces auteurs, l'ajout de termes de régression plus complexes n'entraîne pas une meilleure prédiction qu'avec le krigeage ordinaire. De plus, cela engendre des temps de calcul plus importants. En ce qui concerne les fonctions d'autocorrélation, leurs résultats montrent que le noyau gaussien est généralement plus performant que le noyau exponentiel.

2.3.1.2 Prédiction

Le principe de base du méta-modèle de krigeage est d'obtenir la meilleure prédiction \hat{G} à partir du processus stochastique \mathcal{G} en n'importe quel point $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ en le conditionnant sur les points du plan d'expériences $DoE : \{(\mathbf{u}^{(i)}, y^{(i)}), i = 1, \dots, N_e\}$. La prédiction par krigeage en un point donné

\mathbf{u} est la variable aléatoire $\hat{G}(\mathbf{u})$ qui suit une loi gaussienne conditionnée par les points du plan d'expériences, i.e :

$$\hat{G}(\mathbf{u})|\hat{G}(\mathbf{U}) = \mathbf{y} \sim N(\mu_{\hat{G}}(\mathbf{u}), \sigma_{\hat{G}}^2(\mathbf{u})) \quad (2.24)$$

où $\mathbf{y} = \{y^{(i)}, i = 1, \dots, N_e\}$, $\mathbf{U} = \{\mathbf{u}^{(i)}, i = 1, \dots, N_e\}$, $\mu_{\hat{G}}(\mathbf{u})$ est sa moyenne et $\sigma_{\hat{G}}^2(\mathbf{u})$ est sa variance.

Le prédicteur $\hat{G}(\mathbf{u})$ est obtenu par combinaison linéaire entre les observations \mathbf{y} et le vecteur poids inconnu $\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{u})$ qui dépend de \mathbf{u} . Il s'écrit comme suit :

$$\hat{G}(\mathbf{u}) = \boldsymbol{\lambda}(\mathbf{u})^T \mathbf{y} \quad (2.25)$$

Le prédicteur doit être sans biais :

$$\mathbb{E} [\hat{G}(\mathbf{u}) - G(\mathbf{u})] = 0 \quad (2.26)$$

et il doit être le meilleur au sens des moindres carrés :

$$\hat{G}(\mathbf{u}) = \underset{G^*}{\operatorname{argmin}} \mathbb{E} [(G^*(\mathbf{u}) - G(\mathbf{u}))^2] \quad (2.27)$$

Connu dans la littérature par son appellation anglo-saxonne *best linear unbiased predictor* (BLUP), il est obtenu par résolution du problème d'optimisation suivant :

$$\begin{aligned} \underset{\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^{N_e}}{\operatorname{argmin}} \quad & \mathbb{E} \left[(\hat{G}(\mathbf{u}) - G(\mathbf{u}))^2 \right] \\ \text{s.t.} \quad & \mathbb{E} [\hat{G}(\mathbf{u}) - G(\mathbf{u})] = 0 \end{aligned} \quad (2.28)$$

Ainsi, les poids $\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{u})$ de l'équation 2.25 sont déterminés et le prédicteur de krigeage $\hat{G}(\mathbf{u})$ est défini par sa moyenne $\mu_{\hat{G}}(\mathbf{u})$ et sa variance minimale $\sigma_{\hat{G}}(\mathbf{u})$ données par l'équation 2.29 et l'équation 2.30, respectivement. La détermination de ces deux dernières métriques requiert des développements algébriques assez longs qui ne sont pas rappelés dans ce manuscrit. Elle peuvent être trouvées par exemple dans la thèse de Dubourg (2011), chapitre 1.

$$\mu_{\hat{G}}(\mathbf{u}) = \mathbb{E} [\hat{G}(\mathbf{u})|\hat{G}(\mathbf{U}) = \mathbf{y}] \quad (2.29)$$

$$= \mathbf{f}(\mathbf{u})^T \boldsymbol{\beta} + \mathbf{r}(\mathbf{u})^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{F} \boldsymbol{\beta})$$

$$\sigma_{\hat{G}}^2(\mathbf{u}) = \operatorname{var} [\hat{G}(\mathbf{u})|\hat{G}(\mathbf{U}) = \mathbf{y}] \quad (2.30)$$

$$= \sigma^2 \left(1 - \mathbf{r}(\mathbf{u})^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{r}(\mathbf{u}) + u^T(\mathbf{u}) \left(\mathbf{F}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{F} \right)^{-1} u(\mathbf{u}) \right)$$

où $u(\mathbf{u}) = \mathbf{F}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{r}(\mathbf{u}) - \mathbf{f}(\mathbf{u})$. Les coefficients de régression $\boldsymbol{\beta}$, la variance σ^2 et les hyper-paramètres $\boldsymbol{\theta}$ du noyau sont supposés être connus à ce stade. Leur détermination est discutée dans la section suivante. Les notations \mathbf{R} , $\mathbf{r}(\mathbf{u})$ et \mathbf{F} sont utilisées pour exprimer respectivement les quantités suivantes :

- la matrice de corrélation qui couvre tous les couples du plan d'expériences, où $\boldsymbol{\theta}$ est le vecteur qui regroupe les hyper-paramètres du noyau stationnaire R

$$R_{ij} = R(\mathbf{u}^{(i)} - \mathbf{u}^{(j)}; \boldsymbol{\theta}), i, j = 1, \dots, N_e \quad (2.31)$$

- la corrélation entre le point de prédiction \mathbf{u} et les points du plan d'expériences $\{\mathbf{u}^{(i)}, i = 1, \dots, N_e\}$

$$r_i(\mathbf{u}) = R(\mathbf{u} - \mathbf{u}^{(i)}; \boldsymbol{\theta}), i = 1, \dots, N_e \quad (2.32)$$

— la matrice qui regroupe les fonctions de base de la tendance moyenne :

$$F_{ij} = f_j(\mathbf{u}_i), i = 1, \dots, N_e, j = 1, \dots, p \quad (2.33)$$

Les formulations de la moyenne $\mu_{\hat{G}}(\mathbf{u})$ et de la variance $\sigma_{\hat{G}}^2(\mathbf{u})$ possèdent des caractéristiques intéressantes. Celles-ci satisfont les équations suivantes pour tout point du plan d'expériences :

$$\mu_{\hat{G}}(\mathbf{u}^{(i)}) = y_i = g(\mathbf{u}^{(i)}) \quad \text{et} \quad \sigma_{\hat{G}}^2(\mathbf{u}^{(i)}) = 0, \quad i = 1, \dots, N_e \quad (2.34)$$

En d'autres termes, la prédiction est exacte sur les points d'apprentissage et sa variance associée est nulle telle que démontrée par Vazquez (2005)⁴. La variance $\sigma_{\hat{G}}^2(\mathbf{u})$ est une mesure de l'incertitude épistémique de prédiction. En effet, l'augmentation de la taille du plan d'expériences permet de réduire cette variance. En pratique, la prise en compte de cette incertitude est effectuée via des intervalles de confiance tels que les intervalles à 95% construits à partir de l'équation 2.24. L'information sur la variance a favorisé le développement de nouveaux critères d'échantillonnage probabilistes pour la construction des plans d'expériences adaptatifs.

Remarque. En analyse de fiabilité ou en optimisation, la moyenne $\mu_{\hat{G}}(\mathbf{u})$ est utilisée comme méta-modèle de krigeage en substitution à la fonction de performance.

2.3.1.3 Estimation des hyper-paramètres

La formulation complète du méta-modèle de krigeage requiert la spécification de ses différents paramètres Θ . Ces paramètres regroupent les coefficients β de la tendance, la variance de la fonction d'autocovariance σ^2 et les hyper-paramètres θ du noyau. Leur identification peut être assurée par exemple par la méthode de validation croisée déjà introduite à la Section 2.2.3. Le principe de l'utilisation de cette méthode pour l'estimation des paramètres du krigeage n'est pas détaillé dans ce mémoire car non employé, mais on peut citer par exemple les travaux de Bachoc (2013); Bompard (2011); Bachoc *et al.* (2020).

Dans le cadre de cette thèse, la méthode du maximum de vraisemblance est choisie pour l'estimation des paramètres inconnus. L'approche classique repose sur la construction d'un BLUP empirique en utilisant une fonction de vraisemblance des observations définie par une loi normale multivariée qui s'écrit comme suit :

$$\mathcal{L}(\mathbf{y}|\beta, \sigma^2, \theta) = \frac{1}{((2\pi\sigma^2)^{N_e} [\det \mathbf{R}(\theta)])^{\frac{1}{2}}} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2} (\mathbf{y} - \mathbf{F}\beta)^T \mathbf{R}(\theta)^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{F}\beta) \right] \quad (2.35)$$

À partir des conditions d'optimalité du problème de maximisation de la fonction de vraisemblance, les estimateurs $\hat{\beta}$ et $\hat{\sigma}^2$ respectifs des paramètres β et σ^2 peuvent être déterminés :

$$\hat{\beta}(\theta) = (\mathbf{F}^T \mathbf{R}(\theta)^{-1} \mathbf{F})^{-1} \mathbf{F}^T \mathbf{R}(\theta)^{-1} \mathbf{y} \quad (2.36)$$

$$\hat{\sigma}^2(\theta) = \frac{1}{N_e} (\mathbf{y} - \mathbf{F}\hat{\beta})^T \mathbf{R}(\theta)^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{F}\hat{\beta}) \quad (2.37)$$

Il est important de souligner que ces estimateurs ne dépendent que de θ . Leur insertion dans l'équation 2.35 permet d'exprimer la fonction de vraisemblance \mathcal{L} en fonction de θ uniquement. La maximisation est dans ce cas conduite uniquement par rapport aux hyper-paramètres θ :

$$\hat{\theta} = \operatorname{argmax}_{\theta \in \mathbb{R}^n} \mathcal{L}(\theta) \quad (2.38)$$

4. Il est à préciser qu'il existe une version bruitée du krigeage avec effet de pépite, qui autorise le krigeage à ne plus être interpolant.

Cette maximisation est équivalente à la minimisation de $-\ln\mathcal{L}$:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \operatorname{argmin}_{\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^n} [-\ln\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta})] \quad (2.39)$$

$$= \operatorname{argmin}_{\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^n} \frac{N_e}{2} \ln \left(\hat{\sigma}^2 [\det \mathbf{R}(\boldsymbol{\theta})]^{\frac{1}{N_e}} \right) + \frac{N_e}{2} (\ln(2\pi) + 1) \quad (2.40)$$

En introduisant la fonction de vraisemblance réduite $\psi(\boldsymbol{\theta}) = \hat{\sigma}^2 [\det \mathbf{R}(\boldsymbol{\theta})]^{\frac{1}{N_e}}$, l'identification de l'estimateur $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ revient à résoudre le problème d'optimisation suivant :

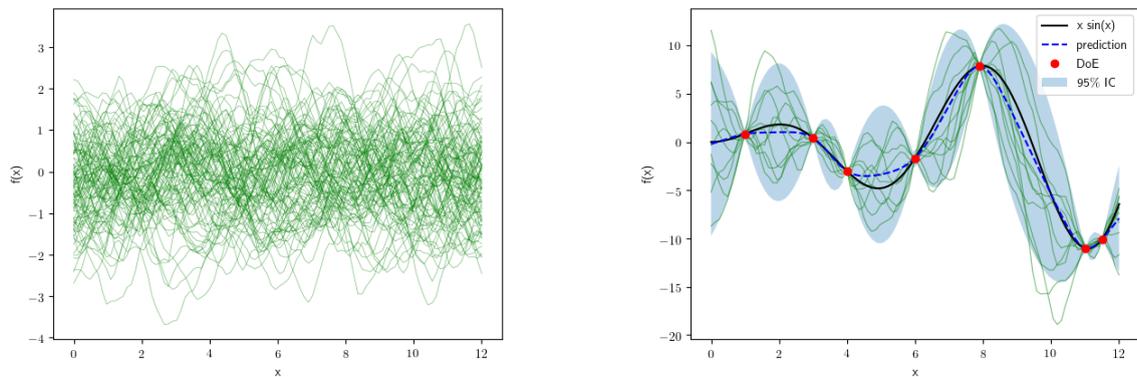
$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \operatorname{argmin}_{\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^n} \ln \psi(\boldsymbol{\theta}) \quad (2.41)$$

La difficulté majeure du krigeage vient de la résolution du problème de l'équation 2.41. L'identification de l'estimateur $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ ne peut pas être effectuée analytiquement, d'où la nécessité de recourir à des techniques d'optimisation numériques. Selon Marrel *et al.* (2008, 2011), le problème d'optimisation peut être mal conditionné et difficile à résoudre en grande dimension ($n > 5$). De plus, l'irrégularité observée de la fonction de vraisemblance réduite $\psi(\boldsymbol{\theta})$ entraîne l'apparition de minimas locaux. Dans ce cas il est recommandé d'utiliser des algorithmes stochastiques telle que la méthode de Hook & Jeeves, voir e.g. (Lophaven *et al.*, 2002). Cette dernière requiert malheureusement la spécification d'un point de départ et des intervalles de variation pour les valeurs des paramètres. Ces deux exigences peuvent poser problème quand peu de connaissances sont disponibles *a priori* concernant le domaine de variation des valeurs de paramètres à optimiser. Pour ce cas de figure, les algorithmes explorateurs sont plutôt favorisés. Lataniotis *et al.* (2017) proposent d'autres algorithmes dans la toolbox UQLAB de Matlab où on retrouve par exemple la méthode CMA-ES hybride proposée par Moustapha *et al.* (2018). Dans cette thèse, les méta-modèles de krigeage sont calibrés avec la toolbox OpenTURNS de Python (Baudin *et al.*, 2016). L'optimisation dans cette toolbox est par défaut assurée par la méthode non-linéaire tronquée de Newton (TNC).

2.3.2 Illustration de l'approximation par krigeage

Après avoir présenté les grandes lignes et les hypothèses sur lesquelles la formulation du krigeage se base, une illustration des principales propriétés du krigeage est donnée sur l'exemple 1D présentée en Figure 2.3. La Figure 2.3(a) donne un ensemble de trajectoires générées à partir d'un processus gaussien avec moyenne nulle et fonction d'autocorrélation de type Matérn 3/2. Le conditionnement de ce processus sur le plan d'expériences obtenu pour la fonction $f(x) = x \sin(x)$, nous permet de tracer la prédiction moyenne du krigeage et de définir un intervalle de confiance à 95% à partir de l'estimation de la variance. Telle qu'observée sur la Figure 2.3(b), la prédiction est exacte aux points du plan d'expériences pour toutes les trajectoires du processus gaussien conditionné et, par conséquent, pour la moyenne de krigeage. On peut également noter que l'intervalle de confiance devient plus large quand le point à prédire est loin des points du plan d'expériences. Il est à rappeler que cet intervalle de confiance est issu directement de la prédiction du krigeage et ne peut pas être utilisé comme un outil de validation de l'approximation du méta-modèle. Il exprime toutefois un manque d'information au niveau des régions ayant un large intervalle de confiance, et donc une variance élevée.

Comme évoqué dans la Section 2.3.1.1, le choix de la tendance et du type du noyau se fait généralement sur la base de certaines hypothèses et de certaines connaissances sur le comportement de la fonction, le cas échéant. Afin de mieux illustrer l'effet de ce choix sur l'approximation du krigeage, l'exemple de la fonction à quatre branches (voir l'équation 3.47) est ici utilisé. La Figure 2.4



(a) Trajectoires d'un processus gaussien de moyenne nulle.

(b) L'approximation du krigage.

FIGURE 2.3: Illustration des propriétés du krigage

présente les approximations de neuf configurations possibles du krigage avec différentes tendances (constante, linéaire et quadratique) et différents noyaux (gaussien, Matérn 3/2, Matérn 5/2). Il est à noter que ces méta-modèles ont tous été calibrés à partir du même plan d'expériences. En comparant leurs approximations, il est évident qu'ils n'ont pas les mêmes prédictions. La différence est nettement plus visible au niveau des pointes où la forme de l'état-limite est plus complexe. L'utilisation d'une tendance quadratique rend l'approximation quasiment insensible au choix du noyau tel qu'illustré sur la Figure 2.4(c). Ce résultat est bien évidemment non généralisable car le choix des tendances et des noyaux dépend du problème considéré. En termes de classification de points dans les domaines de défaillance ou de sûreté, il est clair que cette différence est non négligeable et peut avoir des conséquences indésirables sur la valeur de la probabilité de défaillance.

2.3.3 krigage adaptatif

Tel que déjà discuté en Section 2.3.1.1, la génération du plan d'expériences peut se faire en statique ou en adaptatif. Les plans d'expériences statiques peuvent souffrir d'un manque de flexibilité. Les techniques adaptatives sont de nos jours les plus favorisées. Elles permettent de placer plus de points dans les régions d'intérêt en exploitant l'information cumulée à partir des points et des méta-modèles précédents. Ainsi, en les comparant aux techniques traditionnelles statiques, les plans d'expériences adaptatifs ont un grand potentiel pour calibrer efficacement les méta-modèles. À chaque étape de l'enrichissement, ces techniques utilisent l'information contenue dans le méta-modèle courant afin de choisir efficacement un ou plusieurs points à ajouter au plan d'expériences. Le méta-modèle est donc analysé à chaque itération afin d'identifier l'emplacement du ou des nouveau(x) point(s) pour avoir une approximation la plus précise possible du méta-modèle en question. Ces points sont choisis sur la base de certains critères définis par des fonctions d'apprentissage. Ces dernières sont des fonctions mathématiques qui utilisent les propriétés du méta-modèle pour trouver le point qui améliore le plan d'expériences. Elles prennent en compte l'incertitude du méta-modèle afin d'approximer au mieux les régions de défaillance. Cette approche est appropriée à l'analyse de fiabilité car il est plus intéressant d'avoir une densité de points plus grande au voisinage de l'état-limite.

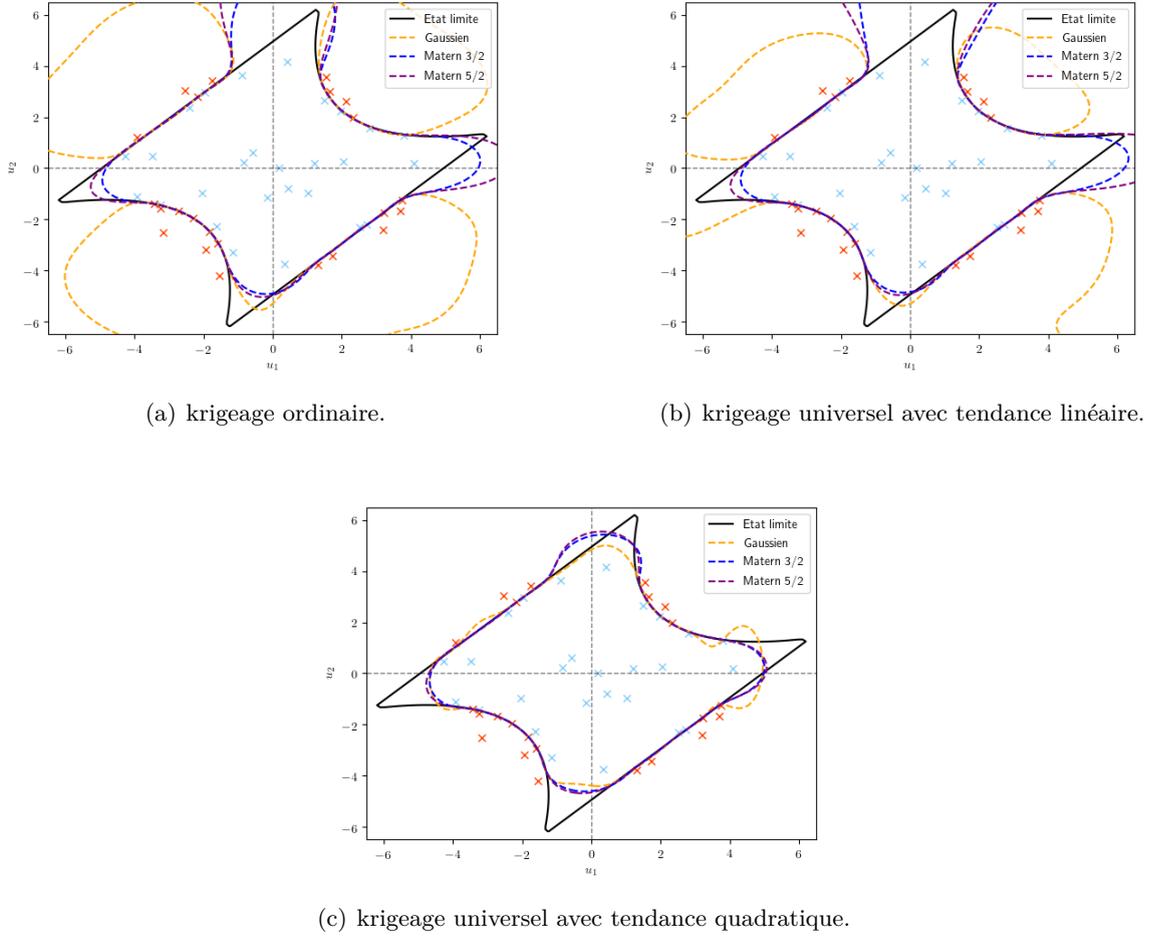


FIGURE 2.4: Illustration de l'approximation du krigage pour trois noyaux et trois tendances

Le krigage fait parti des méta-modèles les plus utilisés en analyse de fiabilité avec les techniques des plans d'expériences adaptatifs. Son avantage dans le contexte de l'échantillonnage adaptatif est dû à sa variance σ_G^2 qui permet de définir des fonctions d'apprentissage simples à implémenter et généralement assez efficaces. Il existe dans la littérature plusieurs fonctions d'apprentissage pour le krigage adaptatif en analyse de fiabilité, voir e.g. (Bichon *et al.*, 2008; Picheny *et al.*, 2010; Echard *et al.*, 2011; Wen *et al.*, 2016; Sun *et al.*, 2017; Ma *et al.*, 2017; Zhang *et al.*, 2019c; Tong *et al.*, 2019; Shi *et al.*, 2020). Parmi ces fonctions on peut distinguer la fonction *EFF* pour *expected feasibility function* de Bichon *et al.* (2008) et la fonction *U* de Echard *et al.* (2011) en raison de leur simplicité d'implémentation et leur rapidité d'évaluation par rapport aux autres fonctions proposées.

- **Fonction *EFF*.** Bichon *et al.* (2008) utilisent cette fonction pour la méthode *efficient global reliability analysis* (EGRA). Le point à enrichir $\mathbf{u}^{(*)}$ est le point qui la maximise à chaque itération.

$$\mathbf{u}^{(*)} = \operatorname{argmax}_{\mathbf{u} \in \mathbb{R}} \operatorname{EFF}(\mathbf{u}) \quad (2.42)$$

Elle permet d'avoir en un point \mathbf{u} non-évalué une indication sur l'espérance que la fonction de performance $G(\mathbf{u})$ soit égale à zéro. Plus cette fonction est faible, plus le méta-modèle de krigage est précis au voisinage de l'état-limite. À chaque itération, le point à enrichir est

celui qui maximise la fonction EFF qui s'exprime comme suit :

$$\begin{aligned}
EFF(\mathbf{u}) = & \mu_{\hat{G}}(\mathbf{u}) \left[2\Phi_n \left(\frac{-\mu_{\hat{G}}(\mathbf{u})}{\sigma_{\hat{G}}(\mathbf{u})} \right) - \Phi_n \left(\frac{-\epsilon(\mathbf{u}) - \mu_{\hat{G}}(\mathbf{u})}{\sigma_{\hat{G}}(\mathbf{u})} \right) - \Phi_n \left(\frac{\epsilon(\mathbf{u}) - \mu_{\hat{G}}(\mathbf{u})}{\sigma_{\hat{G}}(\mathbf{u})} \right) \right] \\
& - \sigma_{\hat{G}}(\mathbf{u}) \left[2\varphi_n \left(\frac{-\mu_{\hat{G}}(\mathbf{u})}{\sigma_{\hat{G}}(\mathbf{u})} \right) - \varphi_n \left(\frac{-\epsilon(\mathbf{u}) - \mu_{\hat{G}}(\mathbf{u})}{\sigma_{\hat{G}}(\mathbf{u})} \right) - \varphi_n \left(\frac{\epsilon(\mathbf{u}) - \mu_{\hat{G}}(\mathbf{u})}{\sigma_{\hat{G}}(\mathbf{u})} \right) \right] \\
& + \epsilon(\mathbf{u}) \left[\Phi_n \left(\frac{\epsilon(\mathbf{u}) - \mu_{\hat{G}}(\mathbf{u})}{\sigma_{\hat{G}}(\mathbf{u})} \right) - \Phi_n \left(\frac{-\epsilon(\mathbf{u}) - \mu_{\hat{G}}(\mathbf{u})}{\sigma_{\hat{G}}(\mathbf{u})} \right) \right]
\end{aligned} \quad (2.43)$$

où les paramètres $\pm\epsilon(\mathbf{u})$ délimitent la région se situant dans le voisinage immédiat de l'état-limite, Φ_n est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite et φ_n est sa densité de probabilité. L'inconvénient majeur de cette méthode vient de la résolution du problème de maximisation de la fonction EFF à chaque itération pour l'obtention du nouveau point à enrichir.

- **Fonction U.** Cette fonction est issue de la méthode *active learning reliability method combining Kriging and Monte Carlo Simulation* (AK-MCS). Elle mesure la distance en termes d'écart-type entre la moyenne du krigeage et l'état-limite. Elle est calculée sur une population de Monte Carlo (échantillon de points générés dans l'espace normal standard) comme suit :

$$U(\mathbf{u}) = \frac{|\mu_{\hat{G}}(\mathbf{u})|}{\sigma_{\hat{G}}(\mathbf{u})} \quad (2.44)$$

où le point \mathbf{u} est un point de cette population. La gaussianité hypothétique du prédicteur défini à l'équation 2.24 permet de mesurer la probabilité que la moyenne de krigeage $\mu_{\hat{G}}$ ait un signe opposé au signe de la fonction de performance $G(\mathbf{u})$. Cette probabilité est donnée par la quantité $1 - \Phi_n(U(\mathbf{u}))$. Une faible valeur de U traduit une probabilité d'erreur sur le signe du prédicteur proche de 1/2. Ainsi, le point à enrichir est celui qui minimise la fonction U . L'avantage de cette fonction réside dans sa simplicité et sa rapidité de calcul puisqu'elle ne requiert aucun calcul supplémentaire, la moyenne et la variance du prédicteur étant des quantités déjà calculées. De plus, l'optimisation est effectuée sur la base des points de la population de Monte Carlo.

Les méthodes proposées dans le cadre de cette thèse s'appuient sur la fonction d'apprentissage U , utilisée dans des variantes de la méthode AK-MCS.

2.3.3.1 Méthode AK-MCS

Principe

Tel que mentionné ci-dessus, Echard *et al.* (2011) proposent la première méthode qui se base sur la fonction U . Elle combine le krigeage adaptatif avec la méthode de simulation de Monte Carlo. La principale idée de cette méthode est de classer une population de Monte Carlo entre domaines de défaillance et de sûreté à partir d'un méta-modèle de krigeage itérativement recalibré. Le plan d'expériences est enrichi jusqu'à ce que la classification soit jugée correcte. L'ajout de points est réalisé à partir d'une fonction d'apprentissage notée U . Les étapes de cette méthode sont décrites ci-dessous. Elles sont aussi résumées sur le diagramme de la Figure 2.5.

1. Génération d'une population de Monte Carlo de taille N_{MC} dans l'espace normal standard où toutes les variables aléatoires du vecteur \mathbf{U} sont centrées réduites et indépendantes.

2. Sélection du plan d'expériences initial IDoE en utilisant l'une des techniques de génération de plans d'expériences statiques (voir Section 2.2.1.1).
3. Calibration du méta-modèle de krigage à partir du plan d'expériences $\{(\mathbf{u}^{(i)}, G(\mathbf{u}^{(i)})), i = 1, \dots, N_e\}$.
4. Évaluation de la fonction d'apprentissage U en chacun des points de la population de Monte Carlo et identification du point candidat $\mathbf{u}^{(*)}$ qui la minimise.

$$\mathbf{u}^{(*)} = \underset{\mathbf{u} \in \{\mathbf{u}^{(i)}, i=1, \dots, N_{MC}\}}{\operatorname{argmin}} U(\mathbf{u}) \quad (2.45)$$

où

$$U(\mathbf{u}) = \frac{|\mu_{\hat{G}}(\mathbf{u})|}{\sigma_{\hat{G}}(\mathbf{u})} \quad (2.46)$$

avec $\mu_{\hat{G}}(\mathbf{u})$ et $\sigma_{\hat{G}}^2(\mathbf{u})$ représentent respectivement la prédiction moyenne du krigage et sa variance.

5. Vérification du critère d'arrêt défini par :

$$\min_{i=1, \dots, N_{MC}} U(\mathbf{u}^{(i)}) \geq 2 \quad (2.47)$$

Une valeur de U égale à 2 correspond à une probabilité de mauvais classement de 0.023. Si le critère d'arrêt est vérifié, l'algorithme s'arrête et le méta-modèle est considéré suffisamment précis pour classer la population de Monte Carlo. Sinon, le plan d'expériences est enrichi par l'évaluation de G au point $\mathbf{u}^{(*)}$. L'algorithme reboucle ensuite à l'étape 3.

6. Estimation de la probabilité de défaillance comme suit :

$$\hat{P}_f^{MC} = \frac{1}{N_{MC}} \sum_{i=1}^{N_{MC}} \mathbb{1}_{\hat{D}_f}(\mathbf{u}^{(i)}) = \frac{|\hat{N}_f|}{N_{MC}} \quad (2.48)$$

où $|\hat{N}_f|$ indique le cardinal de l'ensemble $\hat{N}_f = \{i : \hat{G}(u^{(i)}) \leq 0\}$.

Illustration

La Figure 2.6 illustre les principales étapes de la méthode AK-MCS sur la fonction à quatre branches (voir équation 3.47), où quatre régions de défaillance peuvent être distinguées. On voit bien que cette fonction d'apprentissage réussit à maintenir un certain équilibre entre exploration et exploitation. Vu le peu d'information contenue dans le IDoE, les premières itérations (jusqu'à l'itération 13) ont plutôt tendance à exploiter. La méthode jusque-là se concentre sur l'amélioration d'une seule région parmi les quatre. L'ajout de points supplémentaires permet à la méthode d'explorer deux nouvelles régions entre les itérations 13 et 14 et de détecter la dernière région entre les itérations 43 et 44. Le caractère d'exploration et d'exploitation de la fonction d'apprentissage U permet sur cet exemple de trouver les quatre régions de défaillance (exploration) tout en restant au voisinage des différents états-limites qui définissent ces régions (exploitation). L'approximation finale est proche de l'état-limite avec les quatre régions de défaillance bien identifiées.

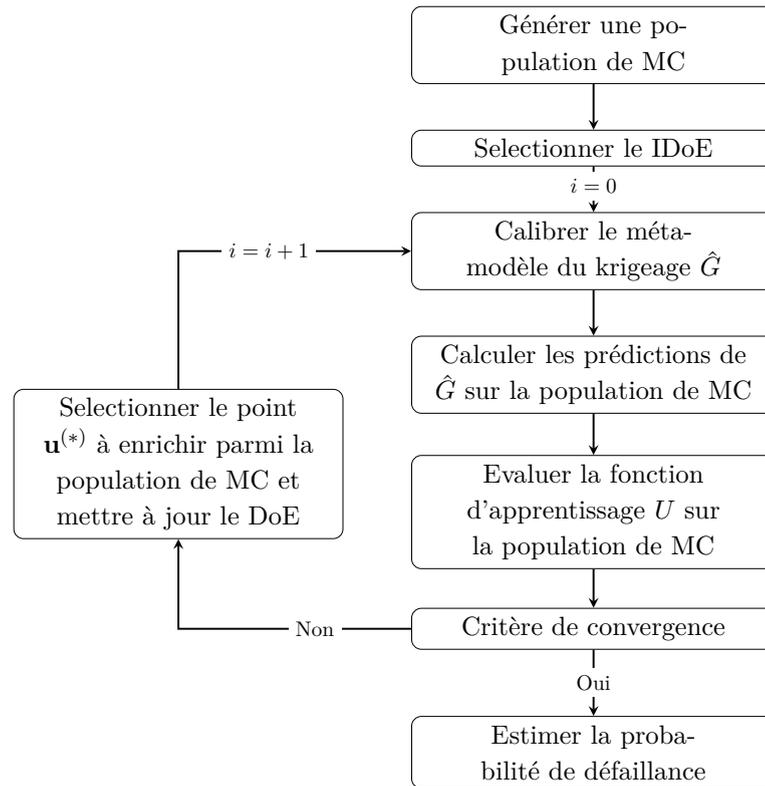


FIGURE 2.5: Organigramme de la méthode AK-MCS.

2.3.3.2 Extensions de la méthode AK-MCS

La méthode AK-MCS souffre de quelques lacunes qui sont discutées dans la thèse de Lelièvre (2018), section 2.4. Ces lacunes concernent principalement son utilisation dans des contextes bien spécifiques, tels que l'estimation de faibles probabilités, l'existence de plusieurs régions de défaillance, l'estimation de probabilités systèmes et le traitement fiabiliste des problèmes dépendants du temps. L'utilisation d'une population de Monte Carlo dans la méthode AK-MCS la rend difficile à appliquer au contexte des faibles probabilités. Elle requière dans ce cas une population de taille importante qui peut rendre les temps de calcul rédhibitoires. Des méthodes avancées basées sur le krigeage adaptatif et sur la fonction U sont proposées dans la littérature afin d'alléger l'effort numérique et de préserver les avantages de la méthode AK-MCS. Lelièvre *et al.* (2018a) utilisent une population de Monte Carlo séquentielle dans la méthode AK-MCSi pour évaluer les faibles probabilités. L'utilisation de la méthode des tirages d'importance avec un krigeage adaptatif basé sur la fonction U est également efficace tel que montré par Echard *et al.* (2013). Toutefois, la dépendance de la méthode des tirages d'importance au point de conception P^* la rend vulnérable quand plusieurs P^* se présentent dans le problème. Cadini *et al.* (2014); Chen *et al.* (2019); Zhang *et al.* (2020c) ont pour cette raison proposer des approches capables de gérer ce problème. Zhang *et al.* (2020c) ont également mis au point la méthode AKOIS, où la population de Monte Carlo est remplacée par des tirages d'importance avec des centres de tirage optimisés, ce qui permet à la méthode de trouver les multiples points de conception P^* potentiels. La méthode des subsets simulations a aussi été utilisée par Huang *et al.* (2016b); Zhang *et al.* (2019a); Ling *et al.* (2019a) en remplacement de celle de Monte Carlo. Ces méthodes sont désignées par les acronymes suivants : AK-SS, AK-SS² et AKEE-SS. En voulant garder les avantages de la population de Monte Carlo et en traitant les problèmes à faibles probabilités, Su *et al.* (2020) combinent le krigeage adaptatif et

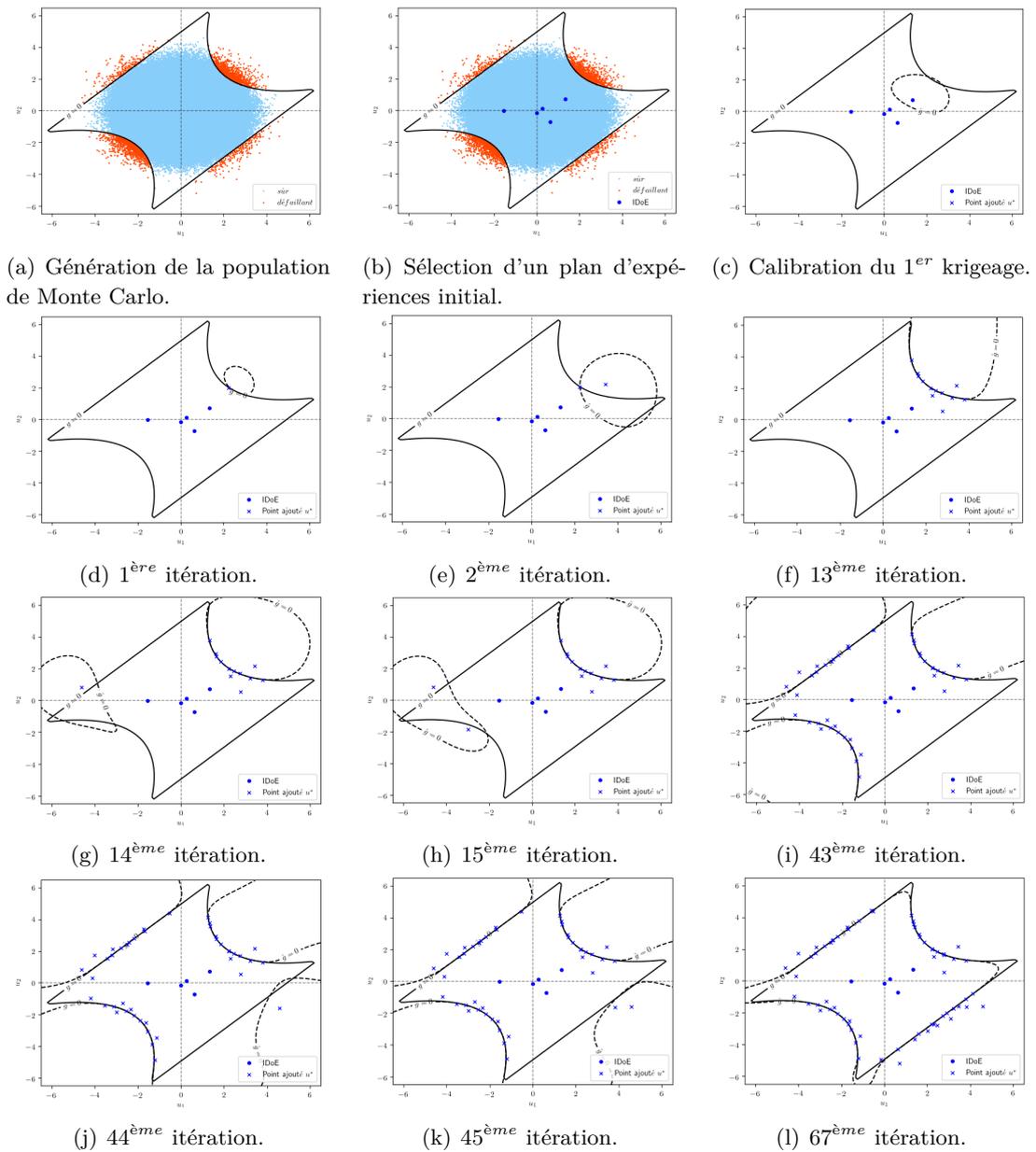


FIGURE 2.6: Illustration de la méthode AK-MCS sur la fonction à quatre branches. La ligne continue représente la fonction de performance et la ligne discontinue est son approximation par le méta-modèle de krigeage.

la décomposition sphérique dans la méthode AK-SDMCS. La décomposition sphérique permet de décomposer l'apprentissage intensif de la méthode AK-MCS en une série d'apprentissages faciles à mener dans des sous-ensembles distincts les uns des autres.

Les méthodes basées sur la fonction U ont aussi été proposées pour les problèmes dépendants du temps et les problèmes système. Pour ces derniers, on peut citer par exemple le travail de Fauriat et Gayton (2014) qui propose une adaptation de la méthode AK-MCS aux problèmes système, méthode appelée AK-SYS. La description de cette méthode ainsi qu'une discussion de son utilisation dans différents contextes, notamment la variabilité spatiale, sont fournies au Chapitre 4. Concernant l'estimation des probabilités de défaillance dépendantes du temps, l'incertitude des variables intrinsèques au problème et l'incertitude des variables dépendantes du temps sont classiquement prises en compte via une double boucle, voir par exemple la méthode RUAK de Wang et Shafieezadeh (2020) et les méthodes AK-co-IS et AK-co-SS de Ling *et al.* (2019b). La prise en compte de ces incertitudes dans une unique boucle a aussi été envisagée par Hu et Mahadevan (2016), qui proposent dans la méthode SILK de calibrer directement le krigeage avec toutes les variables aléatoires du problème en même temps, ce qui a permis de gagner en efficacité. Une autre approche a été proposée par Ahmadi *et al.* (2019) pour traiter les problèmes dépendants du temps. Cette approche adapte la méthode AK-SYS en discrétisant la durée de vie du système en un nombre fini de temps. Ensuite, le problème est traité comme un système série, où chaque instant représente un composant du système. L'application du krigeage adaptatif est davantage étendue à l'analyse de fiabilité des problèmes système dépendants du temps et ayant par conséquent plusieurs fonctions de performance qui dépendent du temps. Cette application est d'abord introduites par Qian *et al.* (2021a) et ensuite combinée dans Qian *et al.* (2021b) avec la méthode subset simulations pour traiter les faibles probabilités.

2.3.3.3 Critères de convergence

Dans les méthodes basées sur les plans d'expériences adaptatifs, les critères de convergence sont utilisés à la fois pour valider le méta-modèle et pour arrêter le processus itératif. Tel que déjà évoqué dans la Section 2.2.1.2, le processus itératif peut s'arrêter pour différentes raisons : contraintes temporelles ou logistiques ou objectif désiré en termes de précision. Pour le krigeage adaptatif appliqué à l'analyse de fiabilité, les critères de convergence utilisés dans la littérature peuvent être classés en deux catégories : les critères basés sur la fonction d'apprentissage et les critères basés sur l'erreur de l'estimation de la probabilité de défaillance.

Critères de convergence basés sur la fonction d'apprentissage

Ces critères fixent en général un seuil à la valeur de la fonction d'apprentissage. Bichon *et al.* (2008); Wen *et al.* (2016) utilisent un critère de convergence qui se base sur le maximum de la fonction d'apprentissage EFF . Le maximum de cette dernière doit être inférieur à un certain seuil, e.g. $\max(EFF) \leq 10^{-3}$. Le critère d'arrêt de la méthode AK-MCS (voir équation 2.47) a aussi été très utilisé dans la littérature, voir e.g. Fauriat et Gayton (2014); Huang *et al.* (2016b); Hu et Mahadevan (2016); Balesdent *et al.* (2013); Zhang *et al.* (2020c). Ce critère vise la valeur de $\Phi_n(-2) = 0.023$ pour la probabilité de se tromper sur le signe de la fonction de performance avec la prédiction de krigeage en chaque point de manière indépendante, l'objectif étant d'assurer une bonne classification de la population de Monte Carlo.

Cependant, ces critères peuvent se montrer trop sévères car ils engendrent des itérations supplémentaires qui selon Gaspar *et al.* (2015) sont non-nécessaires. En effet, Gaspar *et al.* (2015) soulignent que, pour certains problèmes, l'estimation de la probabilité de défaillance tend à se stabiliser sur plusieurs itérations avant que le critère de convergence ne soit atteint. Partant de ce constat, plusieurs travaux récents ont été menés pour proposer des critères de convergences alternatifs qui se basent sur la probabilité de défaillance estimée.

Critères de convergence basés sur l'estimation de la probabilité de défaillance

Les critères évoqués dans cette partie ne visent plus l'amélioration de l'approximation du méta-modèle autour de l'état-limite, mais plutôt l'estimation de la quantité d'intérêt qui est la probabilité de défaillance en fiabilité. Parmi les critères qui existent dans la littérature, on peut citer en premier lieu le critère d'arrêt de Gaspar *et al.* (2015) qui exploite la stabilisation de l'estimation de la probabilité de défaillance durant le processus itératif. Ils définissent donc une bande de tolérance sur l'estimation de la probabilité de défaillance comme suit :

$$\frac{|\hat{P}_f^{(i)} - \hat{P}_f^{(1)}|}{\hat{P}_f^{(1)}} \leq \gamma, \forall i \in \{2, \dots, N_\gamma\} \quad (2.49)$$

où $\hat{P}_f^{(1)}$ est la valeur de référence de la probabilité de défaillance qui permet de détecter la stabilisation, $\hat{P}_f^{(i)}$, $i \in \{2, \dots, N_\gamma\}$, est la $i^{\text{ème}}$ estimation de la probabilité de défaillance parmi les $N_\gamma - 1$ prochaines itérations et γ est le seuil de tolérance sur l'estimation de la probabilité de défaillance.

Zhu et Du (2016) proposent un critère d'arrêt qui prend en compte l'aspect aléatoire de l'estimateur de la probabilité de défaillance dont l'intervalle de confiance est $1 - \alpha$. Ce critère est défini comme suit :

$$\frac{\sigma_{\hat{P}_f}}{E[\hat{P}_f]} < \left| \frac{\epsilon}{\Phi_n^{-1}(\alpha/2)} \right| \quad (2.50)$$

où ϵ est l'erreur relative tolérée, $E[\hat{P}_f]$ est l'espérance de la probabilité de défaillance calculée à partir de la fonction d'apprentissage U :

$$E[\hat{P}_f] = \frac{1}{N_{MC}} \sum_{i=1}^{N_{MC}} \Phi_n(-U(\mathbf{u}^{(i)})) \quad (2.51)$$

et $\sigma_{\hat{P}_f} = \sqrt{\text{var}(\hat{P}_f)}$ est l'écart-type de la probabilité de défaillance qui nécessite l'estimation d'une fonction de distribution jointe pour chaque couple de points de la population de Monte Carlo. Les détails du calcul de $\sigma_{\hat{P}_f}$ et des propositions de simplification sont donnés par Zhu et Du (2016). Ce critère d'arrêt a été utilisé et adapté à l'analyse de fiabilité des systèmes série et parallèle par Wu *et al.* (2020). Une autre adaptation a été faite par Xiao *et al.* (2020) pour les systèmes mixtes.

En suivant l'idée de Dubourg (2011) où des bornes inférieures \hat{P}_f^- et supérieures \hat{P}_f^+ ont été développées pour la probabilité de défaillance, Schöbi *et al.* (2017) proposent le critère d'arrêt suivant :

$$\frac{\hat{P}_f^+ - \hat{P}_f^-}{\hat{P}_f} \leq \epsilon_{\hat{P}_f} \quad (2.52)$$

où $\epsilon_{\hat{P}_f}$ est un seuil prédéfini.

Dans la méthode AK-MCSi (Lelièvre *et al.*, 2018a), il a été constaté que l'utilisation d'un critère global sur toute la population de Monte Carlo pour l'évaluation de la classification des points par

l'approximation du krigeage est plus robuste que de considérer le pire cas via le critère d'arrêt classique de la méthode AK-MCS. Le critère de convergence proposée pour cette méthode a pour objectif de bien classer tous les points de la population de Monte Carlo :

$$\prod_{i=1}^{N_{MC}} \Phi_n(-U(\mathbf{u}^{(i)})) \leq P_{seuil} \quad (2.53)$$

Le choix de la valeur de la probabilité seuil est discuté dans (Lelièvre *et al.*, 2018a). Il apparaît que $P_{seuil} = 0.99$ semble donner un bon compromis entre le nombre de points mal classés et l'effort numérique à fournir pour la plupart des problèmes d'ingénierie traités.

Un critère d'arrêt basé sur l'erreur relative de l'estimation de la probabilité de défaillance par rapport à son estimation par la méthode MC sur la fonction de performance est utilisé dans la méthode AMK-MCS-AEFF (Yi *et al.*, 2021). Cette erreur est exprimée comme suit :

$$e = \left| \frac{P_f^{MCS} - \hat{P}_f}{P_f^{MCS}} \right| = \left| \frac{N_f - \hat{N}_f}{N_f} \right| \quad (2.54)$$

où N_f indique le vrai nombre de points défaillants et \hat{N}_f représente le nombre de points défaillants selon la prédiction de krigeage. La véritable erreur e n'est pas connue puisque N_f est inconnu. Il est donc proposé de la majorer par l'erreur maximale \hat{e}_{max} exprimée par :

$$e \leq \hat{e}_{max} = \frac{\hat{N}_r}{\hat{N}_f - \hat{N}_r} \quad (2.55)$$

où $\hat{N}_r = \sum_{i=1}^{N_{MC}} \left(E \left[\mathbb{1}_{\hat{D}_f}(\mathbf{u}^{(i)}) \Phi_n(-U(\mathbf{u}^{(i)})) \right] \right)$ fournit une estimation du nombre de points ayant un mauvais signe. L'erreur maximale \hat{e}_{max} est encore simplifiée afin de réduire les efforts numériques durant le processus itératif. Seuls les points où la fonction d'apprentissage U est inférieure à 3 sont considérés, i.e. les points à haut risque d'être mal classés dont la probabilité d'erreur sur leurs signes est supérieure à 0.0027 :

$$e \leq \hat{e}_{max} = \frac{\hat{N}_r}{\hat{N}_f - \hat{N}_r} \approx \frac{\hat{N}_{hr}}{\hat{N}_f - \hat{N}_{hr}} \quad (2.56)$$

où \hat{N}_{hr} indique le nombre estimé de points à haut risque d'être mal classés. Enfin, ce critère d'arrêt consiste finalement à vérifier que :

$$\hat{e}_{max} \leq e_{seuil} \quad (2.57)$$

2.4 Conclusions

Ce chapitre a dressé une revue sur les méta-modèles en analyse de fiabilité. L'objectif de la méta-modélisation est la substitution des fonctions de performance coûteuses en temps de calcul par des modèles mathématiques simplifiés et rapides à évaluer. La mise en place pratique de ces derniers est basée principalement sur trois étapes : la sélection d'un plan d'expériences approprié, la calibration du méta-modèle et enfin sa validation. La première étape est d'une grande importance car elle affecte directement la qualité d'approximation du méta-modèle. En effet, le plan d'expériences doit être assez représentatif et doit contenir un maximum d'information sur la fonction de performance. Les plans d'expériences adaptatifs se sont montrés très efficaces et robustes pour assurer cette tâche, surtout dans le contexte de l'analyse de fiabilité où l'objectif est de garantir une bonne

approximation au voisinage de l'état-limite. La calibration des méta-modèles dépend du type du méta-modèle choisi dont certains sont présentés dans ce chapitre. Elle consiste à déterminer les paramètres qui permettent de donner la meilleure approximation basée sur l'information contenue dans le plan d'expériences.

Le méta-modèle de krigeage est populaire car il fournit la distribution de la prédiction analytiquement. À chaque point non-observé, le krigeage donne une mesure locale de l'incertitude de prédiction via la variance de la prédiction. Cette variance a permis le développement d'un grand nombre de méthodes efficaces en krigeage adaptatif, notamment la méthode AK-MCS. Cette dernière se base sur la classification d'une population de Monte Carlo dans le domaine de défaillance ou de sûreté. De plus, la détermination des points à enrichir est effectuée à l'aide d'une fonction d'apprentissage simple et efficace. Cette méthode est largement reprise dans la littérature où de nombreuses adaptations et extensions sont réalisées pour les différents challenges de l'analyse de fiabilité.

Dans la suite de ce mémoire, on s'intéresse dans un premier temps au challenge du choix du méta-modèle. Tel qu'évoqué auparavant, il existe plusieurs types de méta-modèles et chaque type peut avoir plusieurs configurations possibles. Ce choix n'est jamais facile à réaliser car il n'y a, à notre connaissance, aucune directive ou recommandation claire qui permet de sélectionner *a priori* le méta-modèle le plus approprié pour un problème donné. Ainsi, la question du choix du méta-modèle est souvent posée. Ce challenge est discuté dans le Chapitre 3 où une approche est proposée pour le méta-modèle du krigeage. Ce dernier peut être construit avec plusieurs configurations possibles avec des tendances et noyaux différents. D'une configuration à une autre, les approximations ne sont pas les mêmes ce qui peut engendrer des conséquences indésirables sur la quantité d'intérêt à estimer.

Chapitre 3

Agrégation de méta-modèles pour l'estimation de probabilité de défaillance

Éléments clés

- Proposer une stratégie qui permet de s'affranchir du choix *ad hoc* du type et de la structure du méta-modèle à utiliser dans le contexte des fonctions de performance coûteuses en temps de calcul.
 - Étudier la pertinence de l'utilisation d'un ensemble de méta-modèles de type krigeage adaptatif en analyse de fiabilité.
 - Développer la méthode AKE-MCS qui est une adaptation de la méthode AK-MCS et qui apporte trois nouvelles techniques :
 - Une fonction d'apprentissage basée sur la probabilité de mauvais classement des points par l'ensemble.
 - Un nouveau critère d'arrêt pour le processus d'enrichissement.
 - Un schéma de pondération local pour l'agrégation des prédictions de krigeage individuelles.
-

Sommaire

3.1	Introduction	76
3.2	Ensembles de méta-modèles	77
3.2.1	Principe des ensembles de méta-modèles	77
3.2.2	Techniques de pondération	78
3.2.3	Les ensembles de méta-modèles en analyse de fiabilité	82
3.3	AKE-MCS : ensemble de krigeages adaptatifs pour l'analyse de fiabilité	84
3.3.1	Fonction d'apprentissage U_{ens}	84
3.3.2	Technique de pondération adoptée	87
3.3.3	Critère de convergence	87
3.4	Validation de la méthode AKE-MCS sur des problèmes composant	87
3.4.1	Fonction multimodale	88
3.4.2	Fonction choc latéral sur un véhicule	89
3.4.3	Système à deux barres	90
3.4.4	Fonction borehole	92
3.5	Validation de la méthode AKE-MCS sur des problèmes système	94
3.5.1	Fonction système série à quatre branches	94
3.5.2	Fonction système série à quatre branches avec un écart-type augmenté	96
3.5.3	Fonction système mixte	98
3.5.4	Fonction système parallèle	102
3.6	Conclusions	104

3.1 Introduction

Les méta-modèles sont très souvent utilisés pour remplacer les fonctions de performance impliquant des simulations/codes numériques très coûteux en temps de calcul. Ils ont pour objectif d'imiter la relation entrée-sortie de la fonction de performance en utilisant des modèles mathématiques qui sont quasi-immédiat à évaluer. La méta-modélisation a attiré l'attention de plusieurs chercheurs durant les dernières décennies. Les chercheurs visent à développer le meilleur méta-modèle en termes de robustesse, d'efficacité et d'applicabilité à la majorité des problèmes rencontrés. Toutefois, aucun des méta-modèles existants n'est pertinent pour l'ensemble des problèmes posés. Dans la pratique, les chercheurs choisissent généralement le méta-modèle à utiliser en fonction de leurs expériences antérieures sur des problèmes similaires au problème traité. D'autres chercheurs optent pour la comparaison entre différents méta-modèles et ce pour plusieurs types de problèmes et plusieurs critères de performance. Jin *et al.* (2001) effectuent par exemple une première étude comparative entre quatre méta-modèles : le krigeage, les fonctions à bases radiales RBF, les surfaces de réponses polynomiales et la régression par splines adaptatives multivariées. Les résultats de cette étude montrent que les quatre méta-modèles ont des avantages et inconvénients similaires. Bucher et Most (2008) et Sudret (2012) concluent après une comparaison entre différents types de méta-modèles que la qualité d'approximation dépend du problème considéré. En réalisant qu'aucun type de méta-modèle n'est meilleur que les autres pour tous les problèmes, le choix du meilleur méta-modèle pour un problème donné reste un vrai challenge pour l'utilisateur. Il n'est pas toujours possible de calibrer plusieurs méta-modèles pour finalement ne choisir que le plus performant à la fin. Plusieurs travaux de recherche ont été menés dans le but de trouver une stratégie qui permette de lever ce verrou. Une des alternatives proposées consiste à utiliser un ensemble de méta-modèles (EM). Il est montré que la qualité de la prédiction peut être améliorée par une agrégation de modèles (Goel *et al.*, 2007; Sanchez *et al.*, 2008; Acar et Rais-Rohani, 2009; Acar, 2010).

En pratique, un ensemble de méta-modèles peut être soit constitué de différents types de méta-modèles tels que les ANN, SVR ou chaos polynomial, soit constitué de plusieurs configurations d'un seul type de méta-modèles, tel qu'envisagé dans ce chapitre avec le krigeage basé sur différents noyaux. Le krigeage est particulièrement intéressant en raison des informations statistiques qu'il est capable de fournir en chaque point du domaine. Cependant, il n'existe aucun consensus ou critère pour le choix *a priori* de la tendance et du noyau. Un choix inapproprié donne lieu à des prédictions biaisées tel qu'indiqué par Sundar et Shields (2019). Le choix *a priori* d'un méta-modèle pour un problème donné n'est donc pas systématique et reste un challenge. Dans cette partie de la thèse, la pertinence d'utiliser un ensemble de méta-modèles de type krigeage comme substitut de la fonction de performance pour estimer la probabilité de défaillance est étudiée. Une revue sur les ensembles de méta-modèles est présentée en Section 3.2, où différents schémas de pondération sont répertoriés. L'ensemble de méta-modèles proposé ici pour le traitement des problèmes en analyse de fiabilité est un ensemble de krigeages adaptatifs utilisé dans le cadre de la méthode AKE-MCS, voir Section 3.3. Cette dernière est une combinaison entre la méthode AK-MCS (Echard *et al.*, 2011) et les ensembles de méta-modèles, via une nouvelle fonction d'apprentissage proposée pour l'ensemble. Un nouveau critère de convergence basé sur le nombre de points bien classés par la prédiction d'ensemble est également proposé pour cette méthode. La méthode AKE-MCS est enfin appliquée à différents exemples en Section 3.4 afin de mettre en évidence son intérêt.

3.2 Ensembles de méta-modèles

Le choix du meilleur méta-modèle dépend des caractéristiques du plan d'expériences (nombre de points, distribution des points, etc) et des exigences du problème en question (exigences d'exploration/exploitation, régularité, existence de discontinuités, dimension du problème, etc). Ce choix est difficile notamment pour certains problèmes où plusieurs méta-modèles peuvent être candidats. Dans ce cas, l'approche classique consiste à calibrer un certain nombre de méta-modèles pour sélectionner ensuite le meilleur d'entre eux selon un ou plusieurs critères, voir e.g. (Shi *et al.*, 2012; Kang *et al.*, 2017b). Cependant, cette approche possède deux inconvénients majeurs. Le premier vient de l'effort numérique inutilement dépensé pour la calibration des méta-modèles écartés. Le second inconvénient vient du fait que la performance des différents méta-modèles dépend des points du plan d'expériences. Ainsi, rien ne garantit que le méta-modèle choisi sera toujours le meilleur avec un autre plan d'expériences. Pour éviter ces inconvénients et pour pouvoir profiter des informations apportées par chacun des méta-modèles considérés, il paraît plus intéressant d'utiliser un ensemble de méta-modèles. Cela permet potentiellement de réduire la sensibilité des résultats au choix du type de méta-modèle et aussi d'améliorer leur robustesse.

3.2.1 Principe des ensembles de méta-modèles

Le principe d'un ensemble de méta-modèles est de combiner plusieurs méta-modèles individuels dans le but d'avoir une prédiction d'ensemble meilleure que celles des méta-modèles individuels. La mise en place d'un tel principe est effectuée dans le contexte du machine learning sur la base des méthodes présentées dans plusieurs articles sur ce sujet spécifique, voir e.g. (Ren *et al.*, 2016; Sagi et Rokach, 2018). Ces méthodes proposent différentes stratégies pour la définition des plans d'expériences des méta-modèles individuels, le choix des membres de l'ensemble et enfin l'agrégation des différentes prédictions individuelles dans la prédiction de l'ensemble. Tel qu'expliqué dans (Tang *et al.*, 2006), la diversité est l'élément clé des méthodes basées sur les ensembles. Elle peut être créée par la diversité des plans d'expériences et/ou la diversité des structures du méta-modèle, mais aussi par la diversité de leurs paramètres. Les méta-modèles individuels peuvent être calibrés avec différents plans d'expériences tels que ceux proposés par certaines méthodes de la littérature, voir e.g. l'agrégation bootstrap (Breiman, 1996), AdaBoost (Freund et Schapire, 1996) et les forêts aléatoires (Tan *et al.*, 2008). Il est important de souligner à ce stade que, dans le contexte des fonctions coûteuses en temps de calcul, la mise en place de différents plans d'expériences pour les membres de l'ensemble peut ne pas être efficace. Dans ce contexte, il serait plus intéressant d'avoir le même plan d'expériences pour tous les membres de l'ensemble. La diversité est dans ce cas créée en faisant varier les structures des membres de l'ensemble ainsi que leurs paramètres. Une façon de faire varier les paramètres consiste à jouer sur les critères de convergence des méthodes de calibration des méta-modèles. Ainsi, pour le même type de méta-modèle, un jeu de paramètres est obtenu à chaque fois que le critère de convergence est modifié, voir e.g. (Lin et Chen, 2012). Il est aussi possible de former un ensemble de méta-modèles ayant différentes structures, ceci est connu comme sous le nom d'ensemble hétérogène, voir e.g. (Mendes-Moreira *et al.*, 2012).

Concernant l'agrégation des prédictions individuelles dans la prédiction d'ensemble, on distingue deux approches principales. L'approche du méta-apprentissage consiste à mettre en place plus d'un niveau d'apprentissage, les prédictions des méta-modèles individuels servant de base de données au nouveau méta-modèle du niveau supérieur, qui servira comme prédicteur final, voir e.g. *stacking* (Wolpert, 1992). La deuxième approche est l'agrégation des prédictions par pondération.

La façon la plus simple pour effectuer cette agrégation est de moyenniser les prédictions individuelles comme suit :

$$\hat{G}_{ens}(\mathbf{u}) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \hat{G}_i(\mathbf{u}) \quad (3.1)$$

où $\hat{G}_{ens}(\mathbf{u})$ est la prédiction de l'EM pour le vecteur d'entrée \mathbf{u} , m est le nombre de méta-modèles utilisés dans l'EM et $\hat{G}_i(\mathbf{u})$ est la prédiction du $i^{\text{ème}}$ méta-modèle. Néanmoins, les méta-modèles risquent d'avoir des prédictions de précision variable. Il est donc plus intuitif et plus raisonnable de donner plus d'importance aux méta-modèles les plus performants en utilisant des poids qui sont attribués aux méta-modèles selon leur qualité d'approximation. L'EM est dans ce cas formulé comme suit :

$$\hat{G}_{ens}(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^m w_i(\mathbf{u}) \hat{G}_i(\mathbf{u}) \quad (3.2)$$

Pour ne pas avoir une réponse biaisée de l'ensemble, les poids $w_i(\mathbf{u})$, $i = 1, \dots, m$ doivent satisfaire l'équation 3.3. Ces poids doivent être sélectionnés avec une grande attention afin d'optimiser au maximum l'approximation de l'EM.

$$\sum_{i=1}^m w_i(\mathbf{u}) = 1, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n \quad (3.3)$$

Dans le cadre des présents travaux, on s'intéresse plutôt à l'approche d'agrégation par pondération, où la variété de l'ensemble est assurée par la variété de la structure des membres de l'ensemble. Ainsi, dans la suite de cette section, différentes techniques de détermination du jeu optimal de poids sont présentées.

3.2.2 Techniques de pondération

Les poids associés à chacun des méta-modèles doivent refléter le niveau de confiance en chaque méta-modèle, et ils doivent aussi éliminer l'effet des méta-modèles ayant une mauvaise performance dans les régions non-explorées. Dans le but d'atteindre ces deux objectifs, plusieurs techniques de détermination des poids sont proposées dans la littérature. Elles sont généralement classées en trois groupes selon la nature des poids : globale, locale et hybride. Cette section décrit brièvement les techniques inhérentes à chacune de ces trois catégories.

Pondération globale

Les EMs globaux sont caractérisés par un poids w_i constant pour chaque méta-modèle \hat{G}_i sur le domaine de définition des variables d'entrée. Ainsi, la valeur des poids ne dépend pas de la position des points de prédiction dans l'espace standard, i.e. $w_i(\mathbf{u}) = w_i \forall \mathbf{u}$. Les poids sont dans ce cas déterminés sur la base de la performance de chaque méta-modèle sur tout le domaine de définition des variables d'entrée. Ce type de pondération a été adopté par plusieurs chercheurs, voir e.g. (Goel *et al.*, 2007; Ginsbourger *et al.*, 2008; Acar et Rais-Rohani, 2009; Viana *et al.*, 2009; Zhou *et al.*, 2011; Zhou et Jiang, 2016; Sundar et Shields, 2019; Ye et Pan, 2020). Parmi ces travaux, on retrouve les schémas de pondération suivants :

- Goel *et al.* (2007) proposent une technique basée sur l'erreur de validation croisée LOO e_{VC-LOO} des méta-modèles individuels, où les poids sont définis par :

$$w_i = \frac{w_i^*}{\sum_i w_i^*} \quad (3.4)$$

$$w_i^* = (E_i + \alpha E_{avg})^\beta$$

$$E_{avg} = \frac{\sum_i E_i}{m}, \quad \alpha < 1 \text{ et } \beta < 0$$

$$E_i = \sqrt{e_{VC-LOO}(\hat{G}_i)} = \sqrt{\frac{1}{N_e} \sum_{k=1}^{N_e} (G^{(k)} - \hat{G}_i^{(\sim k)})^2}$$

où $G^{(k)}$ indique la vraie réponse en un point $\mathbf{u}^{(k)}$, $\hat{G}_i^{(\sim k)}$ est la prédiction donnée en ce point par le $i^{\text{ème}}$ méta-modèle calibré à partir de toutes les données du plan d'expériences sauf le couple $(\mathbf{u}^{(k)}, G(\mathbf{u}^{(k)}))$ et N_e est la taille du plan d'expériences. α et β sont des paramètres dont les valeurs sont à fixer au préalable. Par exemple, $\alpha = 0.05$ et $\beta = -1$ sont utilisés dans l'article de Goel *et al.* (2007). Ces paramètres sont sélectionnés selon l'importance de E_i et E_{avg} . Toutefois, Acar et Rais-Rohani (2009) estiment que fixer les valeurs de ces paramètres peut entraîner une perte de flexibilité de l'ensemble de méta-modèles.

- Acar et Rais-Rohani (2009) proposent d'estimer les poids à partir de la minimisation de l'erreur de la validation croisée LOO de l'EM :

$$e_{VC-LOO}(\hat{G}_{ens}(w)) = \frac{1}{N_e} \sum_{k=1}^{N_e} (G^{(k)} - \hat{G}_{ens}^{(\sim k)}(w))^2 \quad (3.5)$$

$$= \frac{1}{N_e} \sum_{k=1}^{N_e} \left(G^{(k)} - \sum_{i=1}^m w_i \hat{G}_i^{(\sim k)} \right)^2 \quad (3.6)$$

où $\hat{G}_{ens}^{(\sim k)}$ est la prédiction de l'EM au point $\mathbf{u}^{(k)}$ calibré à partir de toutes les données du plan d'expériences sauf le couple $(\mathbf{u}^{(k)}, G(\mathbf{u}^{(k)}))$. Les poids sont alors les solutions du problème d'optimisation suivant :

$$\min_w e_{VC-LOO}(\hat{G}_{ens}(w)) \quad (3.7)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^m w_i = 1$$

- En s'inspirant des travaux de Goel *et al.* (2007) et de Acar et Rais-Rohani (2009), Ye et Pan (2020),(2018) suggèrent de déterminer les poids w_i et les paramètres α et β en résolvant le problème d'optimisation suivant :

$$\min_w e_{VC-LOO}(\hat{G}_{ens}) = \frac{1}{N_e} \sum_{k=1}^{N_e} \left(G^{(k)} - \sum_{i=1}^m w_i \hat{G}_i^{(\sim k)} \right)^2 \quad (3.8)$$

$$w_i = \frac{w_i^*}{\sum_i w_i^*}, \quad w_i^* = (E_i + \alpha E_{avg})^\beta \quad (3.9)$$

$$E_{avg} = \frac{\sum_i E_i}{m}$$

$$\text{s.t.} \quad \alpha < 1, \quad \beta < 0, \quad E_i + \alpha E_{avg} > 0$$

Remarque. Il est important de noter que l'erreur d'approximation des méta-modèles peut être estimée à partir d'autres métriques telles que celles discutées en Section 2.2.3. Acar (2015) analyse notamment l'effet de ce choix sur la prédiction via un ensemble de méta-modèles.

Pondération locale

Contrairement à la pondération globale, les poids de l'EM local varient en fonction du point de prédiction, i.e. les poids sont déterminés selon la qualité d'approximation des méta-modèles en chacun des points de prédiction. Selon Acar (2010), cette stratégie peut donner des résultats plus précis. Néanmoins, une mauvaise estimation des poids peut aussi mener à retenir localement un modèle inapproprié (Liu *et al.*, 2016). De plus dans le contexte de l'optimisation, ces méthodes se sont avérées être plus exigeantes en termes d'efforts numériques que la pondération globale selon Lee et Choi (2014). Divers schémas de pondération sont présentés dans la littérature et ce pour différentes applications, voir e.g. (Zerpa *et al.*, 2005; Acar, 2010; Zhang *et al.*, 2013; Lee et Choi, 2014; Liu *et al.*, 2016; Ye *et al.*, 2020). Deux techniques de pondération locale sont présentées ci-dessous.

- Zerpa *et al.* (2005) proposent de combiner les prédictions du krigeage, des fonctions à bases radiales RBF et de la régression polynomiale en calculant leurs poids à partir de leurs variances de prédiction respectives en chaque point de prédiction $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$:

$$w_i(\mathbf{u}) = \frac{\frac{1}{V_i(\mathbf{u})}}{\sum_{j=1}^m \frac{1}{V_j(\mathbf{u})}} \quad (3.10)$$

où $V_i(\mathbf{u})$ est la variance de prédiction du $i^{\text{ème}}$ méta-modèle \hat{G}_i en \mathbf{u} . Il est à noter que cette méthode suppose que les prédictions soient non-biaisées et non-corrélées. La variance est ici calculée analytiquement pour chacun des méta-modèles. Pour les méta-modèles n'ayant pas une formulation analytique pour la variance, Sanchez *et al.* (2008) proposent d'utiliser les v points se trouvant au voisinage du point de prédiction \mathbf{u} comme suit :

$$V_i(\mathbf{u}) = \frac{1}{v-1} \sum_{h=1}^v (G^{(h)} - \hat{G}_i^{(h)})^2 \quad (3.11)$$

- Acar (2010) développe une méthode qui permet d'obtenir un EM ponctuel. Les poids sont déterminés à partir de la distance entre les points d'apprentissage et les points de prédiction et aussi à partir de l'erreur de validation croisée LOO calculée localement en chaque point de prédiction. Seule la troisième approche est présentée dans cette section, pour les autres approches, voir (Acar, 2010). Au niveau des points d'apprentissage, un poids égal à un est attribué au méta-modèle qui minimise l'erreur de validation croisée, tandis qu'un poids nul est attribué aux autres méta-modèles. Au point de prédiction \mathbf{u} , les poids sont égaux aux poids estimés au point d'apprentissage le plus proche. Cette approche est formulée comme suit :

$$w_i(\mathbf{u}) = \sum_{k=1}^{N_e} w_{ik} I_k(\mathbf{u}) \quad (3.12)$$

où

$$I_k(\mathbf{u}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{u}^{(k)} \text{ est le point le plus proche de } \mathbf{u} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.13)$$

et où w_{ik} est le poids attribué au $i^{\text{ème}}$ méta-modèle en un point d'apprentissage $\mathbf{u}^{(k)}$.

Pondération hybride

La pondération hybride est une stratégie qui permet de bénéficier de la précision de la pondération locale tout en minimisant l'effort numérique. Elle a pour objectif de tirer profit des deux schémas de pondération globale et locale afin de générer un ensemble plus précis et plus robuste. Des propositions de schémas de pondération hybride sont faites par Yin *et al.* (2018); Chen *et al.* (2018); Zhang *et al.* (2020b) :

- Yin *et al.* (2018) divisent l'espace des entrées en plusieurs sous-domaines, où chaque sous-domaine possède ses propres poids. Ces derniers sont déterminés à partir de la résolution du problème d'optimisation proposé par Acar et Rais-Rohani (2009), voir équation 3.7. Pour les points de prédiction frontaliers se trouvant entre deux ou plusieurs sous-domaines, leurs poids sont déduits à partir de la moyenne de tous les poids déterminés pour chacun des sous-domaines.
- Chen *et al.* (2018) optent aussi pour la division de l'espace de variation des paramètres d'entrée. Contrairement à l'approche précédente, l'espace est ici divisé en deux sous-domaines : le sous-domaine intérieur R^i contient les points de prédiction qui se trouvent à une certaine distance des points du plan d'expériences et le sous-domaine extérieur R^o contient tous les autres points de prédiction. Il définit donc les poids en chaque point selon leurs positions dans l'espace des entrées comme suit :

$$\begin{aligned}
 w_i &= \frac{w_i^*}{\sum_i w_i^*} & (3.14) \\
 w_i^* &= \begin{cases} w_i^H & \text{si } \mathbf{u}^{(k)} \in R^o \\ w_i^L \rho + w_i^H (1 - \rho) & \text{si } \mathbf{u}^{(k)} \in R^i \end{cases} \\
 w_i^H &= \sqrt{\frac{(w_i^G)^2 + (w_i^L)^2}{2}}
 \end{aligned}$$

où w_i^L et w_i^G sont les poids calculés à partir de l'approche locale de Acar (2010) et l'approche globale de Goel *et al.* (2007) respectivement, w_i^H est la pondération hybride qui combine la pondération globale et locale pour les points se trouvant dans le sous-domaine extérieur et ρ est le paramètre qui mesure l'impact de la pondération locale dans le sous-domaine intérieur. Le calcul du paramètre d'impact se fait comme suit :

$$\rho = 1 - \left(\frac{\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_{\text{proche}}^{(k)}\|}{r_k} \right)^{N_e} \quad (3.15)$$

où r_k représente le rayon de la région intérieure du $k^{\text{ème}}$ point d'apprentissage $\mathbf{u}_{\text{proche}}^{(k)}$. Ce dernier est le point d'apprentissage le plus proche du point de prédiction \mathbf{u} .

- Zhang *et al.* (2020b) proposent une formulation plus simplifiée pour l'obtention d'un bon compromis entre la pondération locale et globale en introduisant le paramètre $\lambda(\mathbf{u})$ qui permet de contrôler l'influence entre les deux types de pondération. Les poids sont dans ce cas déterminés comme suit :

$$\begin{aligned}
 w_i &= \frac{w_i^*}{\sum_i w_i^*} & (3.16) \\
 w_i^* &= w_i^G \lambda(\mathbf{u}) + w_i^L (1 - \lambda(\mathbf{u}))
 \end{aligned}$$

où :

$$\lambda(\mathbf{u}) = \left\{ \frac{\pi}{2} \left(\frac{d_1(\mathbf{u})}{d_2(\mathbf{u})} \right) \right\} \quad (3.17)$$

et $d_1(\mathbf{u})$ et $d_2(\mathbf{u})$ sont les distances entre le point de prédiction \mathbf{u} et les deux points qui lui sont les plus proches.

3.2.3 Les ensembles de méta-modèles en analyse de fiabilité

Les ensembles de méta-modèles sont largement utilisés en machine learning et en optimisation pour des applications dans de nombreux domaines : médecine (Oza et Tumer, 2008), aérodynamique (Palar et Shimoyama, 2018, 2019), industrie pétrolière (Zerpa *et al.*, 2005), *reliability-based design optimization* (RBDO) (Gu *et al.*, 2015; Papadrakakis *et al.*, 2019) et autres applications en ingénierie de manière générale (Zhang *et al.*, 2013; Ye *et al.*, 2019). Leur utilisation en analyse de fiabilité est à ce jour assez limitée car peu de recherches lui sont dédiées. Des travaux de recherche récents ont été menés sur le sujet, essentiellement sur les trois dernières années et certaines approches sont présentées dans les paragraphes suivants. Ces approches combinent les ensembles de méta-modèles aux méthodes fiabilistes basées sur méta-modèles uniques telle que la méthode AK-MCS (Echard *et al.*, 2011).

Différentes extensions et adaptations de la méthode AK-MCS ont été proposées pour une éventuelle utilisation des ensembles de méta-modèles. La méthode AK-MCS est utilisée avec un ensemble de méta-modèles par Vahedi *et al.* (2018), (2019) dans le cadre de la méthode AMK-MCS, où l'EM est constitué de trois méta-modèles de type krigeage ayant différentes tendances (constante, linéaire et quadratique). Cet ensemble se base sur une pondération locale, où pour chaque point de prédiction, un poids unitaire est attribué au méta-modèle ayant la plus grande valeur de la fonction d'apprentissage U et des poids nuls sont attribués aux autres méta-modèles. Le choix du point à ajouter lors du processus d'enrichissement de la méthode AMK-MCS se fait avec une fonction d'apprentissage définie à partir de la fonction divergence entre les membres de l'EM dans (Vahedi *et al.*, 2018). Le point $\mathbf{u}^{(*)}$ à enrichir est celui qui maximise la fonction d'apprentissage comme suit :

$$\mathbf{u}^{(*)} = \operatorname{argmax}_{i=1, \dots, N_{MC}} \sum_{j=1}^m \mathcal{D}_{KL}(P_j(y|\mathbf{u}) || P_{ens}(y|\mathbf{u})) \quad (3.18)$$

où $P_i(y|\mathbf{u})$ et $P_{ens}(y|\mathbf{u})$ sont les probabilités que le point \mathbf{u} soit classé dans le domaine de défaillance ou de sûreté, i.e. $y = \operatorname{signe}(G(\mathbf{u})) \in \{-1, +1\}$, par le $i^{\text{ème}}$ méta-modèle individuel et par l'ensemble de méta-modèles, respectivement. Une autre fonction d'apprentissage basée sur le principe du maximum d'entropie a été proposée pour la méthode AMK-MCS dans (Vahedi *et al.*, 2019). Le point $\mathbf{u}^{(*)}$ est dans ce cas celui qui maximise la fonction suivante :

$$\mathbf{u}^{(*)} = \operatorname{argmax}_{i=1, \dots, N_{MC}} \sum_y P_{ens}(y|\mathbf{u}) \log P_{ens}(y|\mathbf{u}) \quad (3.19)$$

Sundar et Shields (2019) proposent de combiner seize configurations possibles du méta-modèle de krigeage avec une pondération globale basée sur une extension du *Akaike information criterion* (AIC). Cette extension implique un terme de correction du second ordre du biais, qui est exprimé par :

$$\text{AICc} = -2\log(\mathcal{L}(\hat{\boldsymbol{\theta}}|\mathbf{y}, \hat{G})) + 2n + \frac{2n(n+1)}{N_e - n - 1} \quad (3.20)$$

Où n désigne la dimension du problème et N_e indique la taille du DoE. Le schéma de pondération globale est ensuite défini comme suit :

$$w_i = \frac{\exp\left(-\frac{\Delta_A^{(i)}}{2}\right)}{\sum_i \exp\left(-\frac{\Delta_A^{(i)}}{2}\right)} \quad (3.21)$$

où $\Delta_A^{(i)} = \text{AICc}^{(i)} - \text{AICc}^{\min}$ permet d'avoir une information sur la qualité de prédiction relative du $i^{\text{ème}}$ méta-modèle par rapport à celui qui possède le critère minimal AICc^{\min} . Cette agrégation de différentes configurations des méta-modèles de krigeage est intégrée dans le processus d'enrichissement de la méthode AK-MCS en introduisant une nouvelle fonction d'apprentissage. Cette dernière apporte, selon les auteurs, une légère amélioration à la fonction d'apprentissage U en faisant intervenir la probabilité d'occurrence des points de la population de Monte Carlo $\{p(\mathbf{u}^{(i)}), i = 1, \dots, N_{MC}\}$ comme suit :

$$U_w = \frac{\max_{\mathbf{u}}[p(\mathbf{u}^{(i)})] - p(\mathbf{u}^{(i)})}{\max_{\mathbf{u}}[p(\mathbf{u}^{(i)})]} U_{MMk}(\mathbf{u}^{(i)}) \quad (3.22)$$

où $U_{MMk} = |\mu_{MMk}|/\sigma_{MMk}$ est la fonction d'apprentissage de l'ensemble de krigeages.

Les ensembles de méta-modèles hétérogènes sont aussi considérés par Cheng et Lu (2020) qui combine un krigeage, un chaos polynomial et un SVM. Cet ensemble est utilisé avec la méthode AK-MCS, où le point à enrichir est celui qui minimise la fonction d'apprentissage U_{WAS} suivante :

$$U_{WAS} = \frac{|M_{WAS}|}{\sqrt{V_{WAS}}} \quad (3.23)$$

où M_{WAS} est la prédiction de l'ensemble et V_{WAS} est sa variance. Cette dernière est calculée comme suit :

$$V_{WAS}(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^m w_i \left(\hat{G}_i(\mathbf{u}) - G_{ens}(\mathbf{u}) \right)^2 \quad (3.24)$$

où $w_i, i = 1, \dots, m$ correspondent aux poids déterminés avec la méthode de Goel *et al.* (2007).

Un processus adaptatif basé sur un ensemble de méta-modèles a aussi été proposé pour les problèmes dépendants du temps. La méthode SILK à une seule boucle proposée par (Hu et Mahadevan, 2016) pour ce type de problèmes est adaptée par Shi *et al.* (2019) pour son utilisation avec un ensemble de krigeages avec différentes tendances. L'approche proposée dans ce contexte combine deux processus adaptatifs dans la même boucle. Le premier sert à identifier les points à enrichir. Quant au deuxième, il permet d'identifier les membres de l'ensemble qui peuvent ne pas être les mêmes d'une itération à une autre. En effet, si l'un des krigeages est jugé de très mauvaise qualité, il est éliminé de l'ensemble. De plus, si la taille du plan d'expériences est inférieure au nombre de coefficients de régression de la tendance quadratique par exemple, cette dernière est automatiquement exclue de l'ensemble. Il ne sera possible de l'ajouter que si la taille du plan d'expériences est suffisante pour son utilisation. Enfin, l'agrégation des prédictions des membres de l'ensemble à chaque itération est ponctuelle. Elle se fait avec la technique proposée par Vahedi *et al.* (2018), où un poids unitaire est attribué au méta-modèle ayant la plus grande valeur de la fonction d'apprentissage U .

La méthode EGRA (Bichon *et al.*, 2008) a aussi été utilisée avec un ensemble de méta-modèles de type krigeage avec différentes tendances dans la contribution de Liu et Xie (2019). L'agrégation des prédictions des différents méta-modèles individuels est assurée par la technique de pondération

proposée par Goel *et al.* (2007). Le processus itératif est assuré par la fonction EFF calculée à partir de l'EM, où l'incertitude sur sa prédiction est évaluée avec l'équation 3.24. Selon Liu et Xie (2019), cette façon de calculer la variance de la prédiction d'ensemble permet d'identifier qualitativement les régions ayant une large incertitude de l'EM. Ceci s'avère convenir au processus d'enrichissement du plan d'expériences, les points à enrichir étant ajoutés dans ces régions.

3.3 AKE-MCS : ensemble de krigeages adaptatifs pour l'analyse de fiabilité

Vue l'efficacité et la simplicité de la méthode AK-MCS (voir Section 2.3.3), on s'intéresse ici à proposer une adaptation de cette méthode pour son utilisation avec un ensemble de méta-modèles de type krigeage. Il est à rappeler que l'idée de la méthode AK-MCS est de classer une population de Monte Carlo entre les domaines de défaillance et de sûreté à partir d'un méta-modèle de krigeage itérativement re-calibré. Le plan d'expériences est enrichi jusqu'à ce que la classification soit jugée correcte. L'ajout des points est réalisé à partir d'une fonction d'apprentissage U (voir équation 2.46). L'utilisation d'un ensemble de méta-modèles avec la méthode AK-MCS consiste à remplacer la prédiction du méta-modèle unique par la prédiction de l'ensemble de méta-modèles. Pour ce faire, une nouvelle fonction d'apprentissage appelée U_{ens} est proposée pour adapter le processus d'enrichissement de la méthode AK-MCS à l'utilisation de l'EM. La construction de ce dernier se fait selon une technique de pondération locale basée sur la probabilité qu'un point soit mal-classé. Cependant, d'autres techniques de pondération peuvent être bien évidemment utilisées selon le choix de l'utilisateur. L'arrêt du processus d'enrichissement est ici assuré par un critère de convergence basé sur la proportion des points ayant une forte probabilité d'être mal classés par l'ensemble de méta-modèles. Cette proportion de points ne doit pas dépasser un certain seuil de tolérance.

3.3.1 Fonction d'apprentissage U_{ens}

Soit $\{\hat{g}_i, i = 1, \dots, m\}$ l'ensemble des méta-modèles de krigeage candidats à l'approximation de la fonction de performance d'un problème donné. Les prédictions de ces méta-modèles sont agrégées en effectuant une moyenne pondérée tel que déjà expliqué dans la section précédente. L'intégration de cet ensemble de krigeages au processus d'enrichissement de la méthode AK-MCS consiste à substituer la prédiction d'un unique méta-modèle de krigeage par la prédiction de l'ensemble. Ainsi, en remplaçant la prédiction de l'ensemble $\mu_{\hat{G}_{ens}}$ ainsi que son écart-type $\sigma_{\hat{G}_{ens}}$ dans la formule de la fonction d'apprentissage de la méthode AK-MCS (voir équation 2.46), on obtient la formulation suivante pour la fonction d'apprentissage U_{ens} de la méthode AKE-MCS :

$$U_{ens} = \frac{|\mu_{\hat{G}_{ens}}|}{\sigma_{\hat{G}_{ens}}} \quad (3.25)$$

Pour rappel, la prédiction du krigeage individuel suit une loi normale (voir équation 2.24). Ainsi, l'ensemble de méta-modèles formulé ici comme une moyenne pondérée des prédictions des krigeages individuels, i.e. $\hat{G}_{ens}(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^m w_i(\mathbf{u})\hat{G}_i(\mathbf{u})$, revient à faire la moyenne pondérée de variables aléatoires normales. Par conséquent, l'obtention des paramètres de l'ensemble (moyenne et écart-type) passe par l'utilisation de la règle de la somme pondérée de variables aléatoires normales

comme suit :

$$\mu_{\hat{G}_{ens}}(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^m w_i(\mathbf{u}) \mu_{\hat{G}_i}(\mathbf{u}) \quad (3.26)$$

$$\sigma_{\hat{G}_{ens}}(\mathbf{u}) = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m w_i(\mathbf{u}) w_j(\mathbf{u}) Cov[\hat{G}_i(\mathbf{u}), \hat{G}_j(\mathbf{u})]} \quad (3.27)$$

où $\hat{G}_i(\mathbf{u})$ et $\hat{G}_j(\mathbf{u})$ sont les prédictions des méta-modèles M_i et M_j au point \mathbf{u} , respectivement. L'estimation de la variance est problématique à cause des termes de covariance $Cov[\hat{G}_i(\mathbf{u}), \hat{G}_j(\mathbf{u})]$. Selon Ginsbourger *et al.* (2008), l'estimation de ces termes est difficile. Une hypothèse d'indépendance entre les prédicteurs, certes non vérifiée en pratique et donc très restrictive, peut être adoptée afin de contourner ce problème tel que fait par Sundar et Shields (2019).

Une agrégation des distributions statistiques des prédicteurs est plutôt proposée par Ginsbourger *et al.* (2008) pour s'affranchir du problème de l'estimation de la variance. Cette agrégation considère que la variable aléatoire gaussienne U^1 suit la distribution du mélange f_{ens} des fonctions de distribution f_1, \dots, f_m . La distribution du mélange est donnée par (Ginsbourger *et al.*, 2008) :

$$f_{ens}(u) = \sum_{i=1}^m w_i(\mathbf{u}) f_i(u) \quad (3.28)$$

où u est une réalisation de la variable aléatoire gaussienne U et \mathbf{u} est un point de prédiction appartenant à \mathbb{R}^n . La moyenne de la distribution du mélange peut être directement calculée comme suit :

$$\begin{aligned} \mu_U = E_{f_{ens}}[U] &= \int_u u f_{ens}(u) du \\ &= \int_u u \left(\sum_{i=1}^m w_i(\mathbf{u}) f_i(u) \right) du \end{aligned} \quad (3.29)$$

L'expression de la variance de la distribution du mélange peut aussi être déduite en écrivant :

$$\begin{aligned} \sigma_U^2 &= E_{f_{ens}}[(U - \mu_U)^2] \\ &= \int_u (u - \mu_U)^2 f_{ens}(u) du \\ &= \int_u (u - \mu_U)^2 \left(\sum_{i=1}^m w_i(\mathbf{u}) f_i(u) \right) du \end{aligned} \quad (3.30)$$

Ce principe peut être extrapolé aux méta-modèles de krigeage étant donné que leurs prédictions sont des variables aléatoires caractérisées par leurs distributions $f_{\hat{G}_i}, i = 1, \dots, m$. En suivant les équations 3.28-3.30 établies pour le mélange de distributions, on obtient la formule suivante pour la distribution d'un ensemble de krigeages :

$$f_{\hat{G}_{ens}} = \sum_{i=1}^m w_i(\mathbf{u}) f_{\hat{G}_i} \quad (3.31)$$

1. Il est à préciser que la notation U adoptée ici n'a rien à avoir avec la fonction d'apprentissage U de la méthode AK-MCS.

Ceci est équivalent à dire que chacun des méta-modèles possède une probabilité d'être choisi proportionnelle à son poids w_i . La moyenne du mélange des distributions de l'équation 3.29 peut être exprimée comme suit en utilisant la loi de l'espérance totale (Ginsbourger *et al.*, 2008) :

$$\mu_{\hat{G}_{ens}} = \sum_{i=1}^m w_i(\mathbf{u}) \mu_{\hat{G}_i} \quad (3.32)$$

La formulation de la moyenne est équivalente à celle de l'ensemble précédemment donnée par l'équation 3.2. En effet, la prédiction moyenne de la distribution d'un ensemble de krigeages est exprimée par la moyenne pondérée des prédictions moyennes des krigeages individuels. Sa variance correspondante peut être déduite de la même façon. En appliquant la loi de la variance totale à l'équation 3.30, on obtient l'expression suivante pour la variance de la distribution d'un ensemble de krigeages (Ginsbourger *et al.*, 2008) :

$$\sigma_{\hat{G}_{ens}(\mathbf{u})}^2 = \sum_{i=1}^m w_i(\mathbf{u}) \sigma_{\hat{G}_i(\mathbf{u})}^2 + \sum_{i=1}^m w_i(\mathbf{u}) \left(\mu_{\hat{G}_i(\mathbf{u})} - \mu_{\hat{G}_{ens}(\mathbf{u})} \right)^2 \quad (3.33)$$

Cette variance peut bien évidemment être utilisée pour la définition de la fonction d'apprentissage de l'ensemble. Toutefois, la fonction d'apprentissage U_{ens} proposée dans ce chapitre se base sur l'estimation de la probabilité qu'un point de la population de Monte Carlo soit mal classé par l'ensemble de krigeages en utilisant la formule de sa distribution donnée par l'équation 3.31. Ainsi, si S correspond à l'évènement « le point \mathbf{u} de la population de Monte Carlo est mal classé par la prédiction de \hat{G}_{ens} », alors la probabilité d'occurrence de cet évènement peut être déduite comme suit :

$$P_{ens}(S) = \sum_{i=1}^m w_i(\mathbf{u}) \Phi_n(-U_i(\mathbf{u})) \quad (3.34)$$

où $\Phi_n(-U_i(\mathbf{u}))$ correspond à la probabilité qu'un point \mathbf{u} soit mal-classé par la prédiction du $i^{\text{ème}}$ méta-modèle de krigeage et U_i est la fonction d'apprentissage du $i^{\text{ème}}$ méta-modèle développée pour la méthode AK-MCS. Dans le contexte de l'ensemble de méta-modèles, un indice U_{ens} conceptuel est introduit afin de définir une fonction d'apprentissage de l'ensemble qui soit proche de la fonction U de la méthode AK-MCS. Cet indice doit donc être positif et proche de zéro lorsque le point \mathbf{u} possède une probabilité d'être mal classé proche de 1/2 et doit valoir $+\infty$ lorsque cette probabilité est très faible. Ainsi, par analogie avec la méthode AK-MCS, la probabilité qu'un point soit mal classé par l'ensemble de méta-modèles peut être définie en fonction de la fonction d'apprentissage U_{ens} comme suit :

$$P_{ens}(S) = \Phi_n(-U_{ens}(\mathbf{u})) \quad (3.35)$$

La fonction d'apprentissage U_{ens} est ensuite déduite en inversant l'équation 3.35 :

$$U_{ens}(\mathbf{u}) = \Phi_n^{-1}(P_{ens}(S)) \quad (3.36)$$

$$= \Phi_n^{-1} \left(\sum_{i=1}^m w_i(\mathbf{u}) \Phi_n(U_i(\mathbf{u})) \right) \quad (3.37)$$

Le processus d'apprentissage de la méthode AKE-MCS est donc effectué avec la nouvelle fonction d'apprentissage U_{ens} . Une discussion sur les stratégies envisageables (moyenne ou mélange de distributions de méta-modèles) peut être trouvée dans (Amrane *et al.*, 2019).

3.3.2 Technique de pondération adoptée

Généralement, les poids sont utilisés pour refléter le niveau de confiance en un méta-modèle par rapport aux autres, tout en atténuant l'effet des méta-modèles ayant une mauvaise qualité d'approximation. Dans ce travail, il est proposé un schéma de pondération ponctuel qui se base sur la probabilité qu'un point soit mal classé. Dans ce cas, les poids sont calculés comme suit :

$$w_i(\mathbf{u}) = \frac{|\log(P_i(\mathbf{u}))|}{\sum_{i=1}^m |\log(P_i(\mathbf{u}))|} \quad (3.38)$$

où

$$P_i(\mathbf{u}) = \Phi_n \left(-\frac{|\mu_{\hat{G}_i}|}{\sigma_{\hat{G}_i}} \right) \quad (3.39)$$

et $\mu_{\hat{G}_i}$ et $\sigma_{\hat{G}_i}$ représentent respectivement la moyenne et la variance du $i^{\text{ème}}$ méta-modèle. Avec cette technique, le méta-modèle qui donne la plus faible probabilité qu'un point \mathbf{u} soit mal classé est le méta-modèle qui obtient le poids le plus élevé.

3.3.3 Critère de convergence

On propose ici un nouveau critère de convergence basé sur le nombre de points défailants et sûrs qui sont jugés bien classés par l'ensemble de méta-modèles. Contrairement au critère qui exige que tous les points de la population de Monte Carlo soient bien classés, i.e. $\min_{i=1, \dots, N_{MC}} U_{ens}(\mathbf{u}^{(i)}) \geq 2$, le critère de convergence utilisé ici quantifie la proportion des points dont l'ensemble de krigeages n'est pas certain de leur bonne classification. Cette proportion ne doit pas être supérieure à un certain seuil de tolérance. Ainsi, le critère de convergence utilisé dans le cadre de ces travaux est défini comme étant le rapport entre les points dont la probabilité d'être mal classés est supérieure à $\Phi_n(-2)$ et le nombre de points défailants dont la probabilité d'être mal classés est inférieure à ce seuil et que nous considérons bien classés. Ce critère est exprimé par :

$$\frac{N_{MC} - N^+ - N^-}{N^-} \leq \epsilon_{seuil} \quad (3.40)$$

où ϵ_{seuil} est un seuil prédéfini et ici pris égale à 0.01, N^+ est le nombre de points de prédiction ayant un signe positif selon la prédiction de l'ensemble et qui sont jugés bien classés et N^- indique le nombre de points défailants ayant une faible probabilité d'être mal classés par l'ensemble. La répartition des points de la population de Monte Carlo $\{\mathbf{u}^{(i)}, i = 1, \dots, N_{MC}\}$ dans l'ensemble N^+ ou N^- se fait comme suit :

$$\mathbf{u}^{(i)} \in \begin{cases} N^+ & \text{si } \mu_{\hat{G}_{ens}} > 0 \text{ et } U_{ens} > 2 \\ N^- & \text{si } \mu_{\hat{G}_{ens}} \leq 0 \text{ et } U_{ens} > 2 \end{cases} \quad (3.41)$$

3.4 Validation de la méthode AKE-MCS sur des problèmes composant

Selon Zhou *et al.* (2011), la qualité de l'approximation d'un ensemble de méta-modèles est relativement élevée, si le nombre de méta-modèles est maintenu entre 3 et 5. Le choix fait ici suit cette recommandation et trois types de krigeage ordinaire sont considérés en changeant le modèle du noyau. Dans ce qui suit, M1 correspond à un krigeage ordinaire avec un noyau gaussien, M2

représente un krigeage ordinaire avec un noyau de Matérn 3/2 et M3 est un krigeage ordinaire avec un noyau de Matérn 5/2. Ces trois méta-modèles sont ici combinés selon le schéma de pondération proposé dans la Section 3.3.2. Il est aussi à noter qu'à des fins de comparaison, les poids des membres de l'ensemble sont aussi calculés avec trois autres techniques de pondération. Les acronymes des différentes configurations considérées sont précisés dans le Tableau 3.1.

TABLEAU 3.1: Descriptif des stratégies de méta-modélisation utilisées.

Acronyme	Description
M1	AK-MCS avec krigeage ordinaire et noyau gaussien
M2	AK-MCS avec krigeage ordinaire et noyau de Matérn 3/2
M3	AK-MCS avec krigeage ordinaire et noyau de Matérn 5/2
EG	AKE-MCS avec pondération globale proposée par Goel <i>et al.</i> (2007)
EME	AKE-MCS avec pondération globale optimisée proposée par Acar et Rais-Rohani (2009)
EV	AKE-MCS avec pondération locale proposée par Zerpa <i>et al.</i> (2005)
ECP	AKE-MCS telle que proposée en Section 3.3

La méthode AK-MCS est appliquée avec les méta-modèles de krigeage individuels M1, M2 et M3 en utilisant la fonction d'apprentissage U . Les différents ensembles de méta-modèles sont utilisés avec la méthode AKE-MCS avec la même fonction d'apprentissage U_{ens} (voir équation 3.36) et le même critère d'arrêt (voir équation 3.40). Seule la technique de pondération change d'un ensemble de méta-modèles à un autre. L'approche proposée est tout d'abord testée ici sur quatre problèmes composant déjà utilisés dans la littérature pour valider les méthodes de l'analyse de fiabilité. Pour tous ces problèmes, la population de points à classer est générée avec la méthode de Monte Carlo. Le plan d'expériences initial est obtenu à partir d'une sélection aléatoire d'un certain nombre de points (ce nombre dépend du problème considéré) à partir des points de la population de Monte Carlo. Il est important de noter que les méthodes AK-MCS et AKE-MCS utilisent la même population de Monte Carlo et le même plan d'expériences initial.

3.4.1 Fonction multimodale

Le premier exemple est la fonction multimodale exprimée par l'équation 3.42. Cette fonction est souvent utilisée dans la littérature dans le but de valider des méthodes de l'analyse de fiabilité, voir e.g. (Bichon *et al.*, 2008; Yi *et al.*, 2021). C'est une fonction à deux variables fortement non-linéaire. Les distributions considérées pour les deux variables sont gaussiennes de moyennes [2.5, 1.5] et d'écart-types [1, 1], respectivement.

$$g(\mathbf{x}) = 2 - \frac{(x_1^2 + 4)(x_2 - 1)}{20} - \sin\left(\frac{5x_1}{2}\right) \quad (3.42)$$

Les résultats obtenus par la méthode AK-MCS avec des méta-modèles individuels et par la méthode AKE-MCS avec différents schémas de pondération de l'ensemble sont donnés dans le Tableau 3.2, où N_g indique le nombre d'appels à la fonction de performance. Le temps indiqué comprend le temps nécessaire à l'évaluation de la fonction de performance et à la calibration du ou des méta-modèles. Il a été arbitrairement choisi de normaliser ce temps en prenant comme unité le temps nécessaire à la calibration du meilleur méta-modèle individuel. Ces résultats montrent la capacité de toutes les approches considérées à converger vers la valeur de référence de la probabilité

de défaillance. en termes de nombre d'appels à la fonction de performance, des différences sont constatées entre les approches testées. Pour les méta-modèles individuels, le krigeage ayant le noyau gaussien permet d'avoir la convergence la plus rapide à la valeur de référence. Avec les ensembles de méta-modèles, il est constaté que la méthode AKE-MCS à pondération globale est exigeante en termes du nombre d'appels à la fonction de performance que la méthode AK-MCS basée sur le meilleur méta-modèle individuel. Ceci n'est pas le cas de la méthode AKE-MCS à pondération locale qui permet pour cet exemple d'avoir une convergence plus efficace que le meilleur méta-modèle individuel. Il est à souligner que les approches basées sur les ensembles de méta-modèles nécessitent plus de temps pour atteindre la convergence car plusieurs méta-modèles sont calibrés à chaque itération.

TABLEAU 3.2: Résultats de l'analyse de fiabilité de la fonction multimodale.

Méthode	MC	M1	M2	M3	EG	EME	EV	ECP
N_g	2×10^4	26	58	38	42	33	23	23
$P_f \times 10^2$	2.605	2.605	2.605	2.605	2.605	2.605	2.605	2.605
Temps	–	1.00	4.03	2.12	10.06	7.57	2.57	2.69

Par ailleurs, la fonction d'apprentissage proposée permet sur cet exemple de bien classer les populations de Monte Carlo. Les points enrichis se retrouvent tous au voisinage de l'état-limite tel qu'illustré sur la Figure 3.1. La variation des poids globaux tout au long du processus d'enrichissement est aussi présentée en Figure 3.2. Cette dernière montre que les trois méta-modèles individuels sont très compétitifs au début du processus d'enrichissement, mais au final le méta-modèle M3 est le plus favorisé. Quant aux poids locaux, une illustration de la répartition de ces poids à la dernière itération est donnée sur la Figure 3.3, où il est constaté que le méta-modèle M1 est majoritairement favorisé à la dernière itération.

3.4.2 Fonction choc latéral sur un véhicule

Le second exemple est défini via une fonction analytique qui exprime la résistance au choc latéral d'un véhicule. C'est un exemple en dimension 7 où la fonction de performance est donnée par l'équation 3.43, voir Yi *et al.* (2021). Les propriétés des variables aléatoires de ce problème sont listées dans le Tableau 3.3.

$$g(\mathbf{x}) = 0.489x_1x_2 + 0.843x_2x_3 - 0.0432x_5x_6 + 0.0556x_5x_7 - 0.00078x_7^2 - 0.75 \quad (3.43)$$

Les résultats fiabilistes de cet exemple, donnés dans le Tableau 3.4, montrent que la probabilité de référence est atteinte avec toutes les méthodes testées. Le nombre d'appels à la fonction de performance est différent d'une approche à une autre. Il est clair que la méthode AK-MCS avec krigeage et noyau gaussien requiert un nombre minimal d'appels. Elle est suivie par les méthodes d'ensemble à pondération locale. Ces ensembles permettent de converger efficacement vers la valeur de référence de la probabilité de défaillance tout en étant un peu plus exigeants en termes de nombre d'appels que le meilleur méta-modèle, mais ils restent quand même moins exigeants que les deux autres méta-modèles individuels. Les ensembles à pondération globale requièrent un nombre d'appels qui reste inférieur au méta-modèle individuel le plus exigeant. Toutefois, leur temps d'exécution est le plus élevé car, pour rappel, ces méthodes nécessitent l'évaluation de l'erreur de validation croisée à chaque itération afin de déterminer les poids à attribuer à chacun des

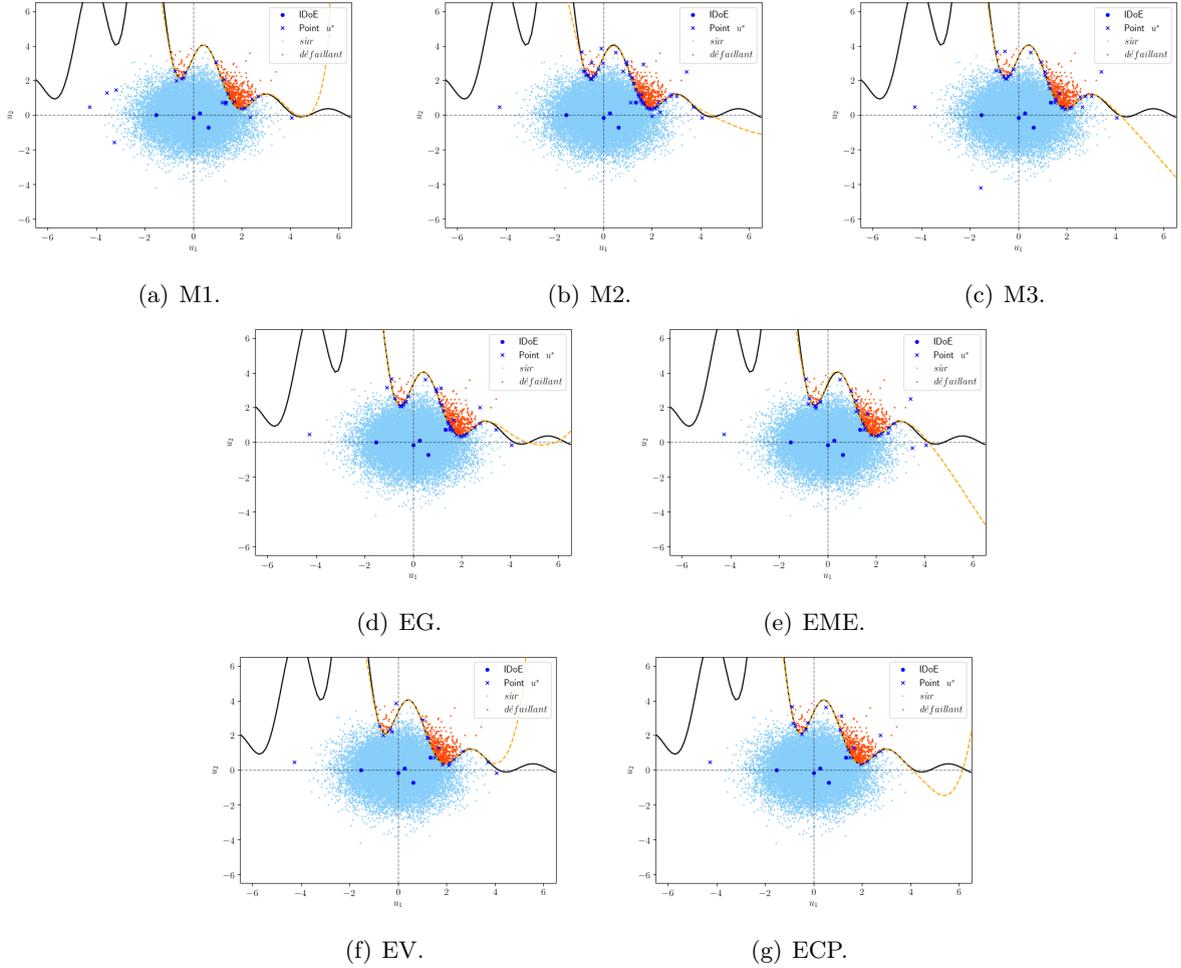


FIGURE 3.1: Approximation des méta-modèles individuels par la méthode AK-MCS et les EMs par la méthode AKE-MCS avec différentes techniques de pondération pour la fonction multimodale.

méta-modèles individuels. La tendance globale des variations des poids pour cet exemple est plutôt monotone, tel qu'illustré sur la Figure 3.4, et tend à favoriser de plus en plus l'un des méta-modèles au fur et à mesure de l'enrichissement. Il est important de noter que pour les techniques locales, le poids de chaque méta-modèle à chaque itération est donné par la moyenne des valeurs attribuées à ce méta-modèle sur tous les points de la population MC.

3.4.3 Système à deux barres

Un exemple avec 7 variables aléatoires est considéré ici pour tester l'efficacité de l'approche proposée. On considère une structure à deux barres telle qu'illustrée sur la Figure 3.5. Cet exemple est également étudié dans les travaux de Cheng et Lu (2020). La défaillance de cette structure a lieu quand la contrainte dans les barres dépasse la contrainte seuil S . La fonction de performance établie pour ce problème s'écrit comme suit :

$$g(\mathbf{x}) = S - 2W \frac{\sqrt{h^2 + (s/2)^2}}{\pi (d_{ext}^2 - d_{int}^2)} \left(\frac{\sin\theta}{h} + 2 \frac{\cos\theta}{s} \right) \quad (3.44)$$

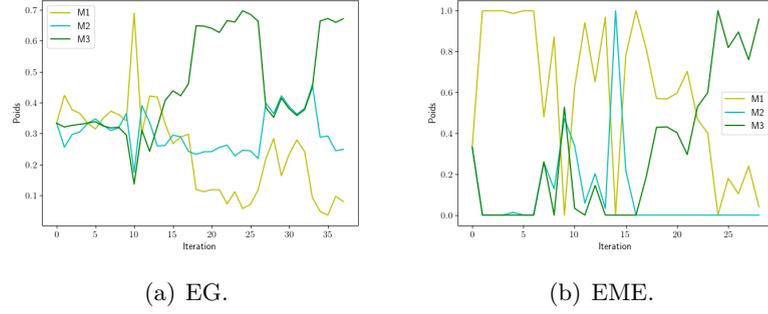


FIGURE 3.2: Variation des poids globaux en fonction des itérations pour la fonction multimodale.

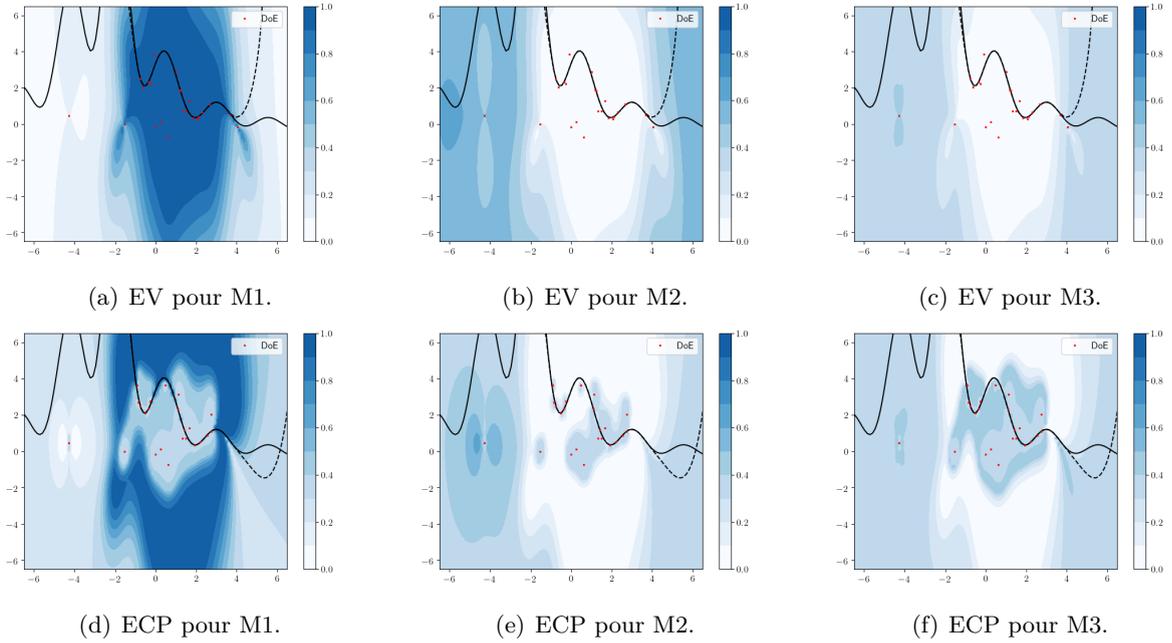


FIGURE 3.3: Cartographie des poids à la dernière itération des méthodes locales EV et ECP pour l'exemple 1.

où d_{ext} et d_{int} sont respectivement les rayons externes et internes des deux barres et h , s , W et θ sont respectivement la hauteur, l'ouverture entre les deux appuis, le chargement et l'angle que fait la direction de l'application de la charge avec l'horizontale. Le vecteur $\mathbf{x} = (S, W, h, s, d_{ext}, d_{int}, \theta)$ regroupe ces variables aléatoires qui sont normales et mutuellement indépendantes. Les paramètres de leurs distributions sont listés dans le Tableau 3.5.

La probabilité de défaillance estimée avec les différents types de méta-modèles (individuels ou ensembles) est la même que la valeur de référence tel qu'indiqué dans le Tableau 3.6. Toutefois, l'efficacité change d'une méthode à une autre. Dans cet exemple, l'utilisation de la méthode AKE-MCS avec la technique EME semble être la plus efficace car un nombre minimal d'appels à la fonction de performance est requis comparé aux autres cas de figures. La méthode AKE-MCS avec la méthode EV et la méthode AK-MCS avec le méta-modèle individuel M1 ont quasiment la même performance. L'utilisation du schéma de pondération proposé et du schéma de pondération EG avec la méthode AKE-MCS engendre clairement un peu plus d'itérations que les deux dernières techniques, mais elles restent plus efficaces que la méthode AK-MCS utilisée avec les méta-modèles individuels M2 et M3.

TABLEAU 3.3: Propriétés statistiques des variables aléatoires de la fonction choc latéral sur un véhicule.

Variable aléatoire	Distribution	Moyenne	Écart-type
x_1	Normale	1.38	0.3
x_2	Normale	1.38	0.3
x_3	Normale	1.38	0.3
x_4	Normale	1.38	0.3
x_5	Normale	0.30	0.06
x_6	Normale	0.00	10
x_7	Normale	0.00	10

TABLEAU 3.4: Résultats de l'analyse de fiabilité de la fonction choc latéral sur un véhicule.

Méthode	MC	M1	M2	M3	EG	EME	EV	ECP
N_g	5×10^5	81	164	118	106	142	86	97
$P_f \times 10^4$	1.64	1.64	1.64	1.64	1.64	1.64	1.64	1.64
Temps	–	1.00	3.08	2.07	4.16	5.66	3.42	3.80

Une variation des poids en fonction des itérations est aussi présentée pour toutes les techniques de pondération globale et locale sur le Figure 3.6. Ces figures montrent que le méta-modèle M1 est le plus favorisé pour toutes les techniques. La différence entre les poids attribués à ce méta-modèle M1 dans chacune des techniques de pondération fait probablement la différence en termes d'efficacité.

3.4.4 Fonction borehole

Cette fonction modélise le flux d'eau w_f dans un forage (Worley, 1987). La possibilité d'avoir une formulation numérique du flux rend ce problème intéressant pour tester une variété de méthodes dans le domaine des expériences numériques. Pour son utilisation en analyse de fiabilité, on définit ici un seuil théorique pour le flux de l'eau $w_{f_{seuil}} = 170 \text{ m}^3/\text{an}$ afin de pouvoir écrire une fonction de performance pour ce problème :

$$g(\mathbf{x}) = w_{f_{seuil}} - w_f \quad (3.45)$$

où

$$w_f = \frac{2\pi T_u (H_u - H_l)}{\ln(r/r_w) \left(1 + \frac{2LT_u}{\ln(r/r_w)r_w^2 K_w} + \frac{T_u}{T_l} \right)} \quad (3.46)$$

Le vecteur $\mathbf{x} = (r_w, r, T_u, H_u, T_l, H_l, L, K_w)$ regroupe les variables aléatoires dont la description est donnée dans le Tableau 3.7.

Les résultats présentés dans le Tableau 3.8 pour cet exemple montrent que l'estimation de la probabilité de défaillance est la même pour toutes les combinaisons considérées dans ce travail (AK-MCS pour les méta-modèles individuels et AKE-MCS pour différents schémas de pondération de l'ensemble). Cependant, le nombre d'appels à la fonction de performance diffère d'une combinaison à une autre. Il est observé ici que le méta-modèle M1 converge plus rapidement que les autres

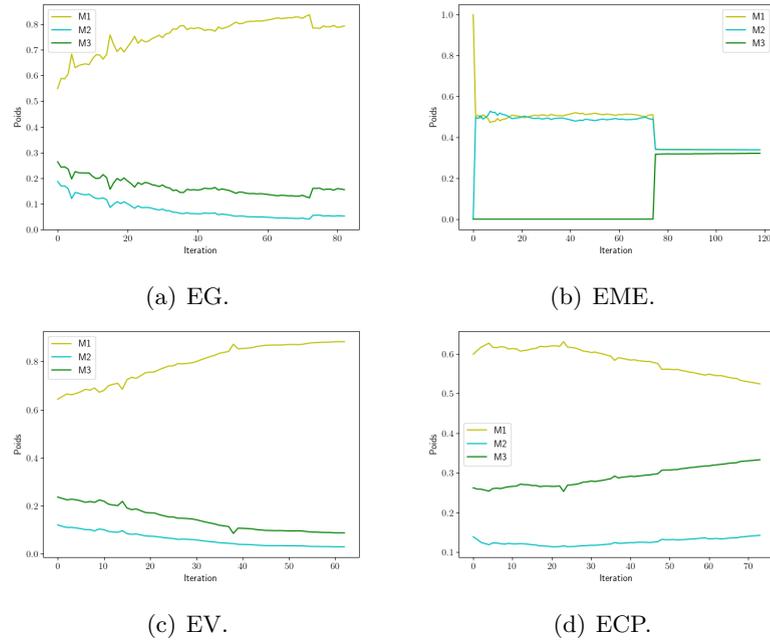


FIGURE 3.4: Variation des poids des différentes techniques de pondération en fonction des itérations pour la fonction choc latéral sur un véhicule.

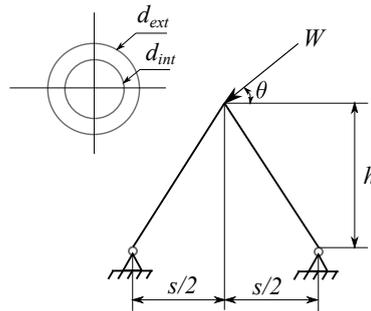


FIGURE 3.5: Illustration du système à deux barres.

méta-modèles individuels. La méthode AKE-MCS donne aussi des résultats satisfaisants par rapport à l'estimation de la probabilité de défaillance. D'une technique de pondération à une autre, des différences sont constatées au niveau des efforts numériques requis. Les techniques globales requièrent plus d'itérations par rapport au meilleur méta-modèle individuel M1 pour converger. Elles nécessitent aussi les temps CPU les plus importants car le calcul des poids est ici effectué à partir de l'erreur de validation croisée qui nécessite la calibration des méta-modèles $N_e \times m$ fois par itération pour estimer l'erreur d'approximation de l'ensemble de méta-modèles. La méthode EV est pour cet exemple la plus efficace. Elle permet d'atteindre la probabilité de défaillance cible efficacement que ce soit en termes de nombre d'appels à la fonction de performance ou en termes de temps CPU. La Figure 3.7 illustre la variation des poids en fonction des itérations pour toutes les techniques de pondération considérées. Il est constaté que, pour les techniques globales, ce sont les méta-modèles M1 et M2 qui ont majoritairement les poids les plus importants au cours des processus d'enrichissement. Concernant les méthodes locales, il est constaté que les courbes de variation des poids des techniques EV et ECP ont la même tendance pour cet exemple. Le méta-modèle M1

TABLEAU 3.5: Propriétés statistiques des variables aléatoires du système à deux barres.

Variable aléatoire (unité)	Distribution	Moyenne	Écart-type
S (MPa)	Normale	200	20.0
W (KN)	Normale	47.75	5.00
h (mm)	Normale	100	3.00
s (mm)	Normale	100	3.00
d_{ext} (mm)	Normale	30	0.90
d_{int} (mm)	Normale	18	0.54
θ (°)	Normale	60	3.00

TABLEAU 3.6: Résultats de l'analyse de fiabilité du système à deux barres.

Méthode	MC	M1	M2	M3	EG	EME	EV	ECP
N_g	5×10^5	101	244	148	147	95	102	110
$P_f \times 10^4$	6.8	6.8	6.8	6.8	6.8	6.8	6.8	6.8

à noyau gaussien est ici le plus favorisé sur la majorité des points de la population de Monte Carlo.

3.5 Validation de la méthode AKE-MCS sur des problèmes système

Dans cette partie, des problèmes système académiques sont considérés afin de valider l'approche proposée sur des exemples ayant des états-limites de formes plus complexes. Ainsi, quatre problèmes sont examinés et, pour rappel, la méthode AK-MCS est appliquée avec des méta-modèles de krigage ayant trois noyaux différents (gaussien, Matérn 3/2 et Matérn 5/2) en utilisant la fonction d'apprentissage U . Différents schémas de pondération sont considérés pour la méthode AKE-MCS, où la fonction d'apprentissage U_{ens} (voir équation 3.36) et le critère d'arrêt de l'équation 3.40) sont utilisés. Il est important de rappeler que les méthodes AK-MCS et AKE-MCS utilisent la même population de Monte Carlo et le même plan d'expériences initial.

3.5.1 Fonction système série à quatre branches

Le premier exemple est un système série dont la forme de l'état-limite possède quatre branches. Il est largement étudié dans la littérature, voir e.g. (Echard *et al.*, 2011; Sun *et al.*, 2017; Cheng et Lu, 2020). Sa fonction de performance est donnée par :

$$g(x_1, x_2) = \min \begin{cases} 3 + 0.1(x_1 - x_2)^2 - \frac{(x_1+x_2)}{\sqrt{2}} \\ 3 + 0.1(x_1 - x_2)^2 + \frac{(x_1+x_2)}{\sqrt{2}} \\ (x_1 - x_2) - \frac{7}{\sqrt{2}} \\ (x_2 - x_1) - \frac{7}{\sqrt{2}} \end{cases} \quad (3.47)$$

où X_1 et X_2 sont des variables aléatoires normales centrées réduites ($\mu_1 = \mu_2 = 0$ et $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$) et indépendantes. La valeur de référence de la probabilité de défaillance est de 2.13×10^{-3} . Cette

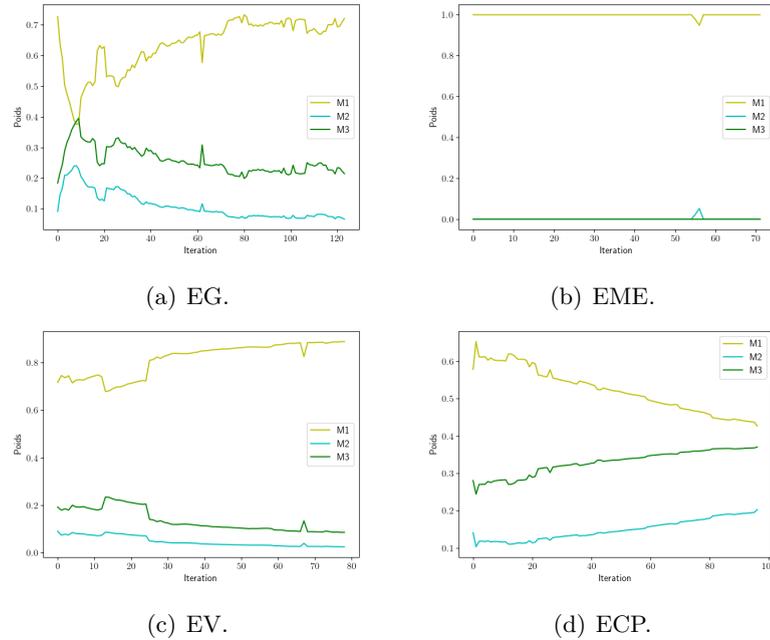


FIGURE 3.6: Variation des poids des différentes techniques de pondération en fonction des itérations pour le système à deux barres.

probabilité est estimée par la méthode de Monte Carlo avec un échantillon de taille 10^5 .

Les résultats obtenus sur cet exemple, donnés dans le Tableau 3.9, montrent l'incapacité de la méthode AK-MCS à converger vers la valeur de référence de la probabilité de défaillance avec les méta-modèles M2 (noyau de Matérn 3/2) et M3 (noyau de Matérn 5/2). Ceci est aussi constaté sur la Figure 3.8(b) et la Figure 3.8(c), où les approximations des méta-modèles M2 et M3 n'arrivent pas à capter certaines branches de la fonction d'état-limite. La taille du plan d'expériences initial et la position des points dans l'espace ne permettent probablement pas l'obtention d'une approximation correcte avec M2 et M3. Ceci n'empêche pas par contre les ensembles de méta-modèles de prédire correctement la probabilité de défaillance et de bien approcher la fonction d'état-limite, même si M2 et M3 échouent à le faire. En effet, l'approximation des ensembles de méta-modèles est assez proche de la forme du vrai état-limite tel qu'illustré sur les Figures 3.8(d)-3.8(g). Sur ces mêmes figures, les points ajoutés lors du processus d'enrichissement sont aussi représentés. Il est clair que la fonction d'apprentissage U_{ens} réussit à ajouter des points proches de l'état-limite (exploitation) tout en essayant de trouver toutes les zones de défaillance potentielles (exploration). Il est à noter qu'il est impératif de bien trouver les 4 branches pour prédire correctement la probabilité de défaillance. L'estimation de la probabilité de défaillance par les ensembles de méta-modèles est par conséquent égale à la valeur de référence. En comparant les résultats des ensembles de méta-modèles au meilleur méta-modèle M1 ayant un noyau gaussien, on constate que le nombre d'appels à la fonction de performance des ensembles de méta-modèles est un peu plus élevé que celui du méta-modèle M1. Il est important de souligner ici que le coût des ensembles de méta-modèles en termes de temps CPU n'est pas seulement influencé par le nombre d'appels à la fonction de performance. Il est élevé par rapport au méta-modèle individuel M1 car les ensembles de méta-modèles requièrent la calibration de trois méta-modèles à chaque itération. Les résultats montrent aussi que le nombre d'appels à la fonction de performance diffère d'une technique de pondération à une autre. La méthode EG par exemple est la plus exigeante. Ceci est probablement dû au choix des paramètres α et β . En effet,

TABLEAU 3.7: Propriétés statistiques des variables aléatoires de la fonction borehole. Il est à préciser que a et b désignent les paramètres de la loi uniforme.

VARIABLE ALÉATOIRE (UNITÉ)	NOTATION	DISTRIBUTION	MOYENNE / a	ÉCART-TYPE / b
Diamètre du forage (m)	r_w	Normale	0.1	0.0161812
Rayon d'influence (m)	r	LogNormale	7.71	1.0056
Conductivité de la nappe supérieure (m ² /an)	T_u	uniforme	63070	115600
Charge hydraulique de la nappe supérieure (m)	H_u	uniforme	990	1110
Conductivité de la nappe inférieure (m ² /an)	T_l	uniforme	63.1	116
Charge hydraulique de la nappe inférieure (m)	H_l	uniforme	700	820
Longueur du forage (m)	L	uniforme	1120	1680
Conductivité hydraulique du forage (m/an)	K_w	uniforme	9855	12045

TABLEAU 3.8: Résultats de l'analyse de fiabilité de la fonction borehole.

Méthode	MC	M1	M2	M3	EG	EME	EV	ECP
N_g	10^5	204	306	240	262	232	218	225
$P_f \times 10^3$	3.9	3.9	3.9	3.9	3.9	3.9	3.9	3.9
Temps	—	1.00	2.32	1.39	5.61	4.72	3.47	3.6

leur choix est empirique et problème-dépendant (Goel *et al.*, 2007). L'utilisation de la méthode AKE-MCS avec la technique de pondération proposée ECP permet pour cet exemple d'atteindre la probabilité de référence avec un coût minimal comparé à son utilisation avec d'autres techniques de pondération et sans choisir *a priori* la structure du méta-modèle.

Par ailleurs, la Figure 3.9 illustre la variation des poids de la méthode AKE-MCS combinée avec les techniques de pondération globale EME et EG. Les poids de chacun des méta-modèles varient d'une itération à une autre. En effet, l'ajout des points à chaque itération influence beaucoup la qualité de chacun des méta-modèles individuellement, ce qui influence automatiquement les poids qui leur sont attribués. Concernant l'utilisation de la méthode AKE-MCS avec les techniques locales ES et ECP, une cartographie des poids calculés à la dernière itération est donnée sur la Figure 3.10. Il est à rappeler que pour ces techniques de pondération le poids varie d'un point à un autre et il n'est pas constant dans l'espace, contrairement aux méthodes globales. À partir de ces différentes figures de variation des poids, il est possible de conclure que pour cet exemple aucun des méta-modèles individuels n'est favorisé mais leur combinaison a permis d'avoir une bonne estimation de la probabilité. L'utilisation des ensembles de méta-modèles nécessite davantage d'appels à la fonction de performance mais permet de s'affranchir d'un mauvais choix de méta-modèle individuel.

3.5.2 Fonction système série à quatre branches avec un écart-type augmenté

Dans cet exemple, la fonction à quatre branches précédemment utilisée est reprise mais avec un écart-type $\sigma_1 = \sigma_2 = 1.7$ pour les variables aléatoires normales centrées X_1 et X_2 . L'absence de points de la population de Monte Carlo dans les parties angulaires de l'exemple précédent avec écart-type unitaire a motivé l'adaptation de cet exemple. Ainsi, une dilatation du nuage de points est ici effectuée afin d'atteindre les pointes. Ceci rend l'exemple un peu plus complexe à résoudre

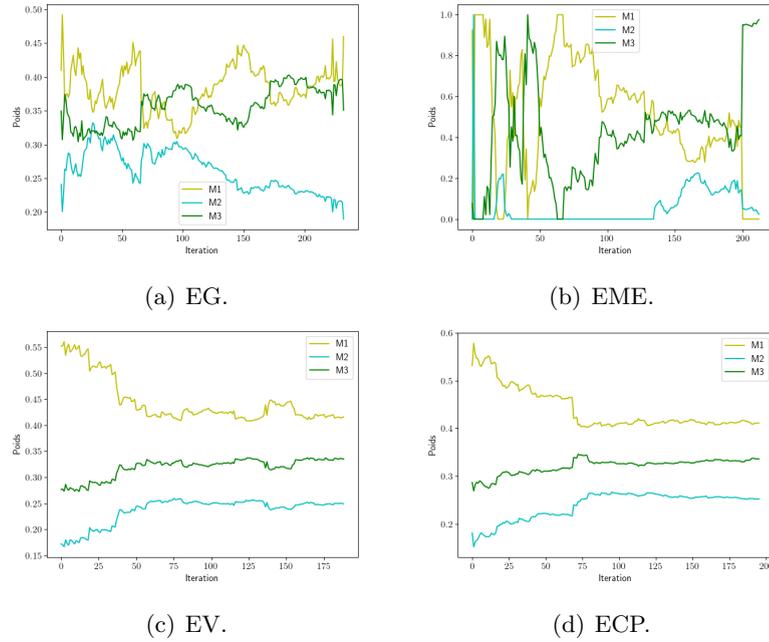


FIGURE 3.7: Variation des poids des différentes techniques de pondération en fonction des itérations pour la fonction borehole.

TABLEAU 3.9: Résultats de l'analyse de la fonction système série à quatre branches.

Méthode	MC	M1	M2	M3	EG	EME	EV	ECP
N_g	10^5	41	36	41	66	57	51	49
$P_f \times 10^3$	2.13	2.13	0.96	1.96	2.13	2.13	2.13	2.13
Temps	—	1.00	0.40	1.007	4.06	3.45	2.05	1.73

que le précédent. Le Tableau 3.10 regroupe les résultats obtenus pour cet exemple. La méthode AK-MCS est appliquée en utilisant les trois mêmes noyaux que pour l'exemple précédent ; la méthode AKE-MCS est utilisée avec quatre techniques de pondération différentes (voir Tableau 3.1). Contrairement aux résultats de l'exemple précédent, ici tous les méta-modèles permettent d'estimer des probabilités de défaillance très proches voire égales à la valeur de référence. En termes d'efficacité, le M3 (Matérn 5/2) est le meilleur car il requiert un nombre d'appels à la fonction de performance le plus faible par rapport aux autres méta-modèles individuels. En ce qui concerne l'utilisation de l'ensemble de méta-modèles, la méthode AKE-MCS utilisée avec les techniques EME, EV et ECP s'avère encore plus efficace que le meilleur méta-modèle M3 pour cet exemple. En effet, elle permet d'économiser sept itérations pour la technique EME et neuf itérations pour les méthodes EV et ECP. Cependant, leurs temps d'exécution restent élevés par rapport au meilleur méta-modèle en raison de la calibration de trois méta-modèles à chaque itération.

La nouvelle fonction d'apprentissage U_{ens} se montre très efficace aussi sur cet exemple. Il est notamment constaté qu'elle permet d'avoir un bon compromis entre exploration et exploitation, toutes les branches ayant bien été détectées et les points sélectionnés pour l'apprentissage se trouvant tous au voisinage de ces branches tel que montré sur la Figure 3.11. Concernant les valeurs des poids attribués à chacun des méta-modèles, on voit sur la Figure 3.12(a) que, sur les dernières itérations, la technique de pondération EG exclut le méta-modèle M1 et la prédiction de l'ensemble

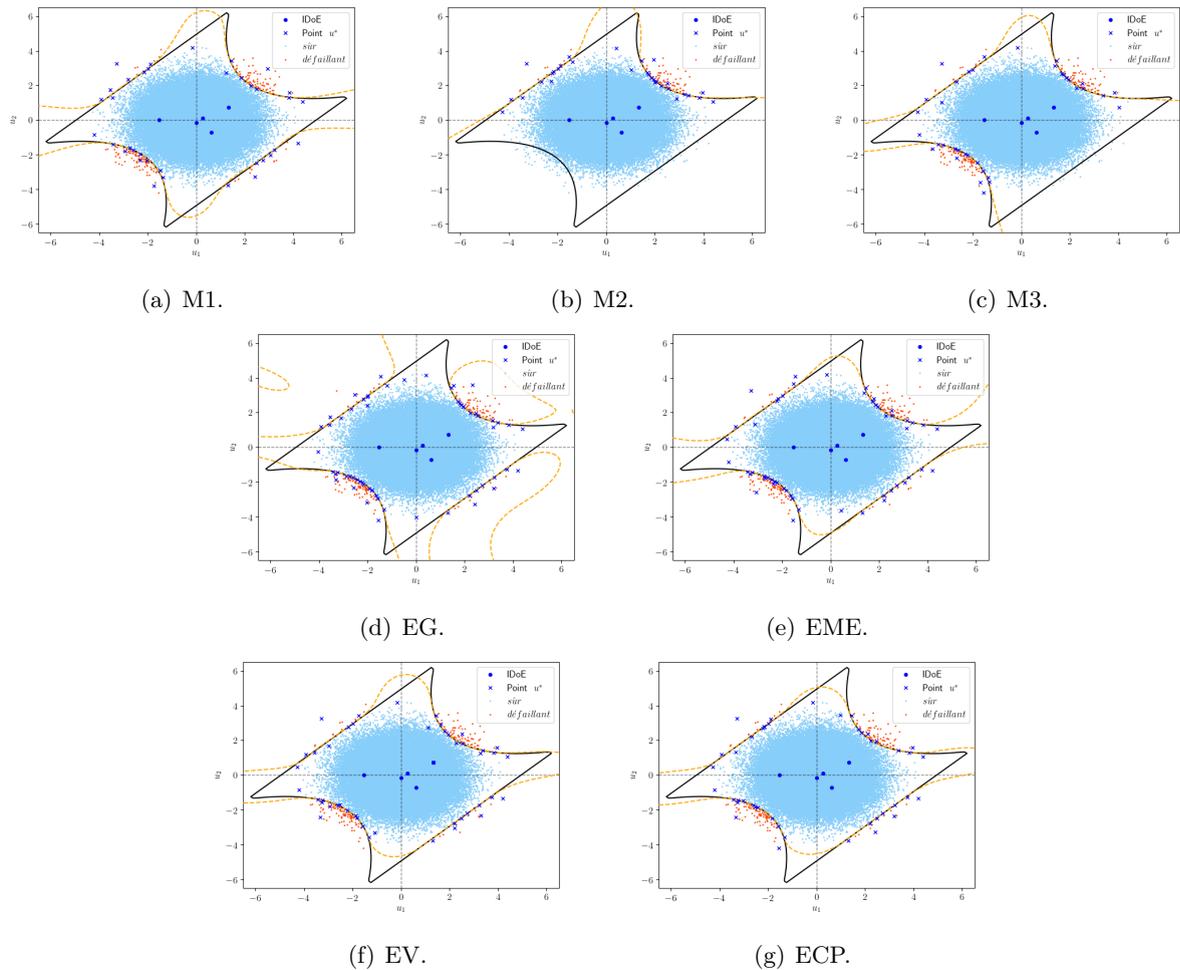


FIGURE 3.8: Approximation des méta-modèles individuels par la méthode AK-MCS et les EMs par la méthode AKE-MCS avec différentes techniques de pondération pour la fonction système série à quatre branches.

est uniquement constituée des prédictions des méta-modèles M2 et M3. Quant à la technique EME, c'est plutôt le méta-modèle M3 qui est le plus favorisé sur les dernières itérations tel qu'indiqué sur la Figure 3.12(b). Les cartographies des poids de la méthode EV illustrées sur les Figure 3.13 (a-c) permettent de distinguer deux régions. Dans la région qui se trouve à l'intérieur de l'état-limite, c'est le méta-modèle M1 qui est le plus favorisé. À l'extérieur de cette région, le méta-modèle M1 est quasiment écarté et seulement une combinaison entre le M2 et le M3 est considérée. Par rapport à la méthode ECP (voir Figure 3.13 (d-f)), on peut dire que globalement les trois méta-modèles sont presque considérés de la même façon en chacun des points de l'espace des entrées.

3.5.3 Fonction système mixte

Le système mixte illustré sur la Figure 3.14(a) est maintenant considéré. Ce système est étudié dans la littérature par Yuan *et al.* (2020) pour tester des méthodes de fiabilité système. Sa fonction composite est ici utilisée afin de valider l'approche proposée sur des problèmes ayant un état-limite non-linéaire (voir Figure 3.14(b)). Les fonctions de performance de ses composants sont données

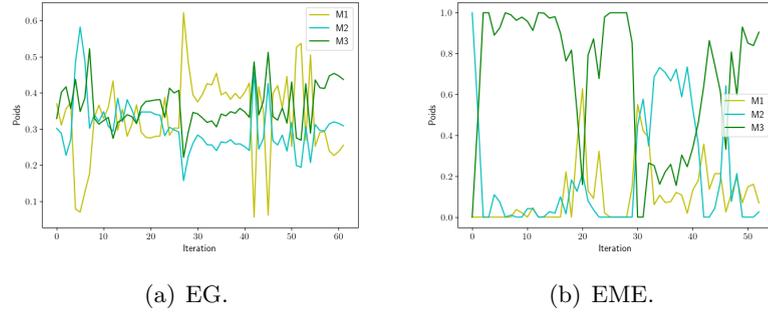


FIGURE 3.9: Variation des poids globaux de la fonction système série à quatre branches en fonction des itérations.

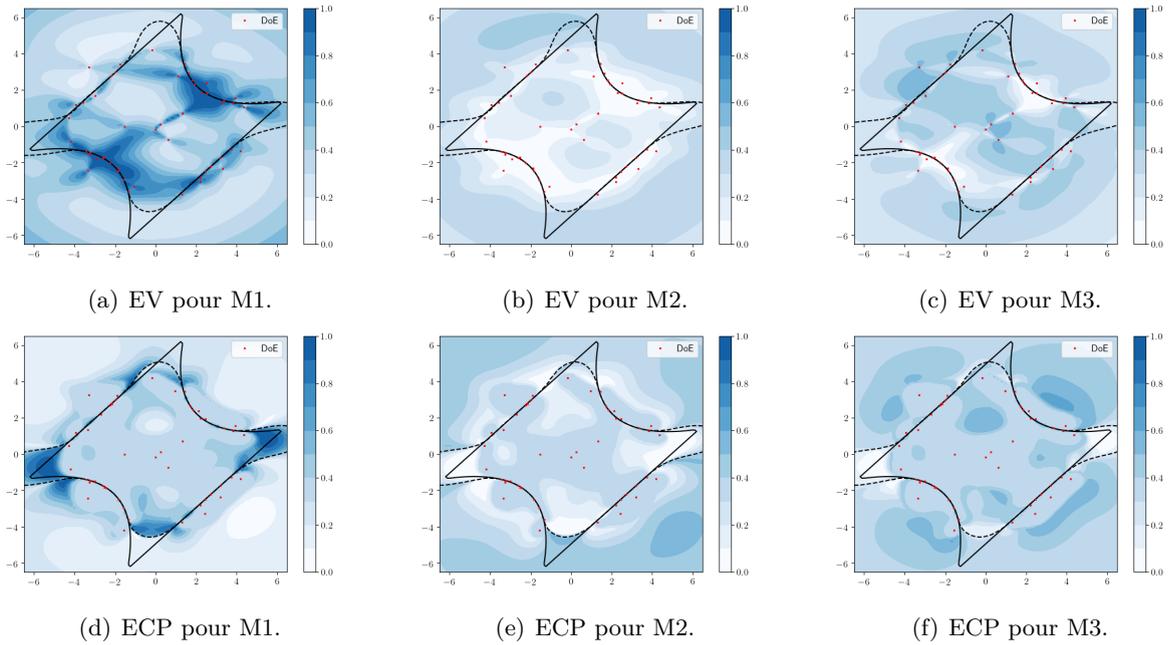


FIGURE 3.10: Cartographie des poids à la dernière itération des méthodes locales EV et ECP pour la fonction système série à quatre branches.

par :

$$\begin{cases} g_1(\mathbf{x}) = \sin(2.5x_1) - 0.05(x_1^2 + 4)(x_2 - 1) + 2 \\ g_2(\mathbf{x}) = (x_1^2 - x_2 + x_1) + 3.5 \\ g_3(\mathbf{x}) = x_1^3 + x_1^2x_2 + x_2^3 - 18 \\ g_4(\mathbf{x}) = 3 + 0.5(x_1 - x_2)^2 - 0.5(x_1 + x_2) \\ g_5(\mathbf{x}) = 0.5 - 0.5(x_1 - x_2)^2 + 0.5(x_1 + x_2) \end{cases} \quad (3.48)$$

avec $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ et où X_1 et X_2 sont des variables aléatoires normales indépendantes de moyennes respectives 2 et 3, et d'écart-types unitaires.

TABLEAU 3.10: Résultats de l'analyse de fiabilité de la fonction système série à quatre branches avec un écart-type augmenté.

Méthode	MC	M1	M2	M3	EG	EME	EV	ECP
N_g	10^4	136	124	98	100	91	89	89
$P_f \times 10^2$	8.74	8.73	8.74	8.74	8.74	8.74	8.74	8.73
Temps	–	1.60	1.62	1.00	3.85	2.88	2.68	2.23

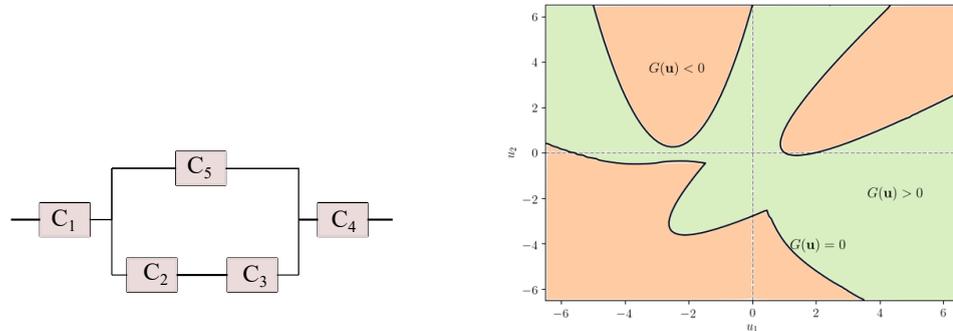


FIGURE 3.14: Illustration de la composition du système mixte à gauche et du domaine de défaillance et de sûreté dans l'espace normal standard à droite.

TABLEAU 3.11: Résultats de l'analyse de fiabilité de la fonction système mixte.

Méthode	MC	M1	M2	M3	EG	EME	EV	ECP
N_g	10^4	–	89	389	350	69	464	270
P_f	0.125	0.1245	0.1085	0.125	0.125	0.1092	0.125	0.1402
Temps	–	4.45	0.09	1.00	3.62	0.20	1.64	1.27

Les résultats des méthodes AK-MCS et AKE-MCS pour cet exemple sont comparés dans le Tableau 3.11. Les approximations de chacune des méthodes utilisées ainsi que les plans d'expériences associés sont illustrés sur la Figure 3.15. Sur cet exemple, la méthode AK-MCS des deux méta-modèles individuels M1 et M2 ne convergent pas. La méthode AK-MCS du méta-modèle M1 a été arrêtée à 1000 itérations sans qu'il y ait convergence, i.e. le minimum de la fonction d'apprentissage U à la dernière itération est égale à 0.01, ce qui est très inférieur à la valeur exigée par la méthode. Le méta-modèle M2 permet à la méthode AK-MCS de converger mais pas vers la valeur de référence de la probabilité de défaillance. En ce qui concerne les ensembles de méta-modèles, les techniques de pondération EME et ECP ne permettent pas d'atteindre la valeur de la probabilité de défaillance recherchée. Quand la méthode AKE-MCS est combinée avec ces deux schémas de pondération, sa convergence a lieu avant la détection de toutes les zones de défaillance (voir Figure 3.15(e) et 3.15(g)).

Les techniques EG et EV permettent à la méthode AKE-MCS de converger vers la valeur de référence de la probabilité de défaillance. En comparant leurs résultats avec ceux de la méthode AK-MCS du meilleur méta-modèle M3, on constate que, en termes du nombre d'appels à la fonc-

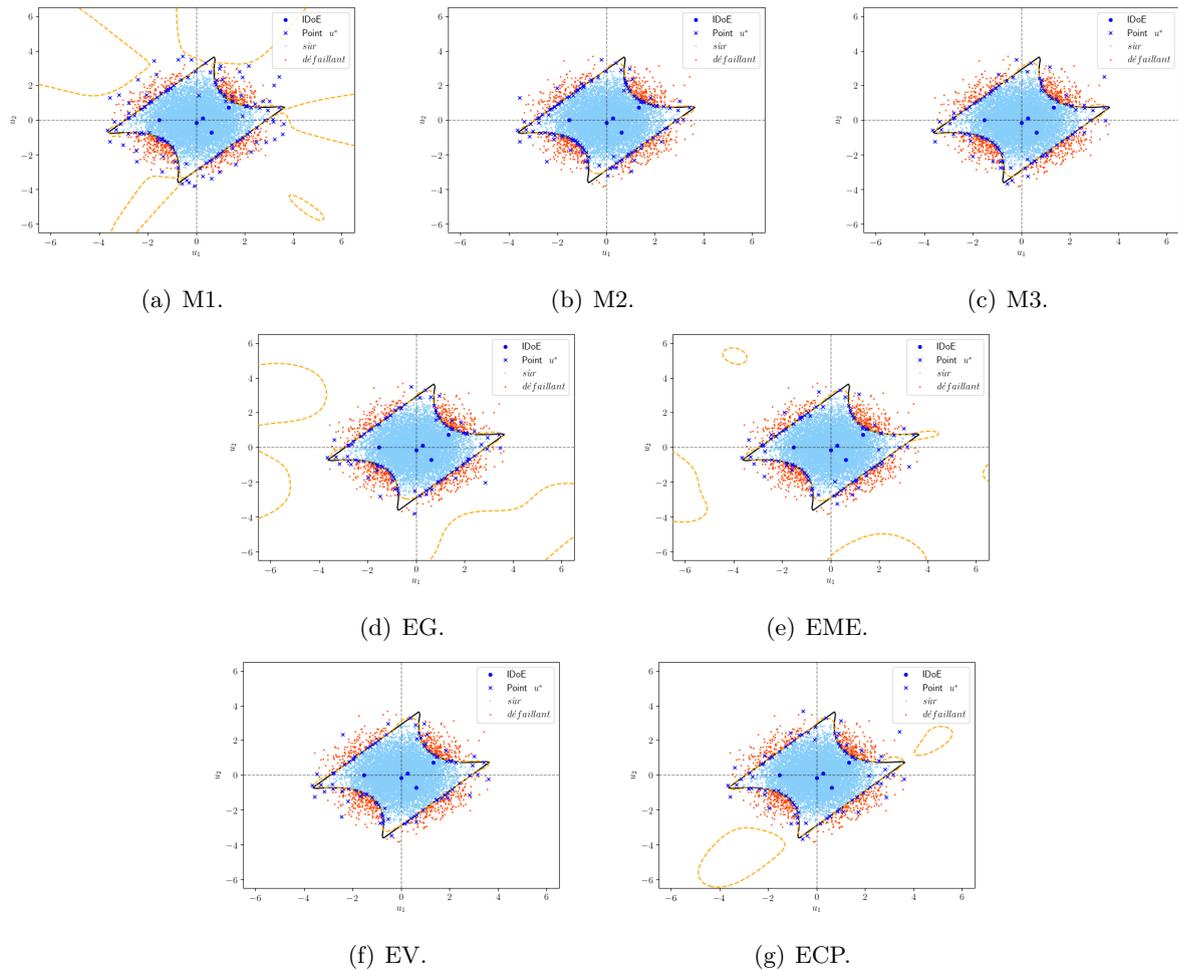


FIGURE 3.11: Approximation des méta-modèles individuels par la méthode AK-MCS et les EMs par la méthode AKE-MCS avec différentes techniques de pondération pour la fonction système série à quatre branches avec un écart-type augmenté.

tion de performance, la combinaison de AKE-MCS avec la technique EG est plus efficace que le meilleur méta-modèle. Toutefois, il est important de rappeler que la technique EG utilise l'erreur de validation croisée pour calculer les poids des différents méta-modèles de l'ensemble. Ceci la rend plus exigeante en termes de temps CPU qui est ici presque quatre fois supérieur à celui du meilleur méta-modèle. Contrairement à la technique EG, la technique EV est plus exigeante en termes d'appels à la fonction de performance. Toutefois, elle reste la plus rapide en termes de temps CPU car le calcul des poids est fait directement à partir de la variance de prédiction de chacun des méta-modèles. De plus, la méthode EV permet d'avoir un ensemble de méta-modèles donnant une approximation plus correcte que celle obtenue avec la méthode EG telle qu'illustrée sur la Figure 3.15.

La Figure 3.16 donne la variation des poids en fonction des itérations pour les techniques globales EG et EME. Les poids des deux techniques varient durant le processus d'enrichissement. À la dernière itération, l'ensemble de méta-modèles est construit uniquement avec les méta-modèles M2 et M3 pour la méthode EG. Pour la méthode EME, le méta-modèle M3 est le plus favorisé par rapport au méta-modèle M2 et le M1 est écarté à la fin du processus. Contrairement aux deux techniques de pondération précédentes, la technique locale EV favorise plutôt le méta-modèle M1

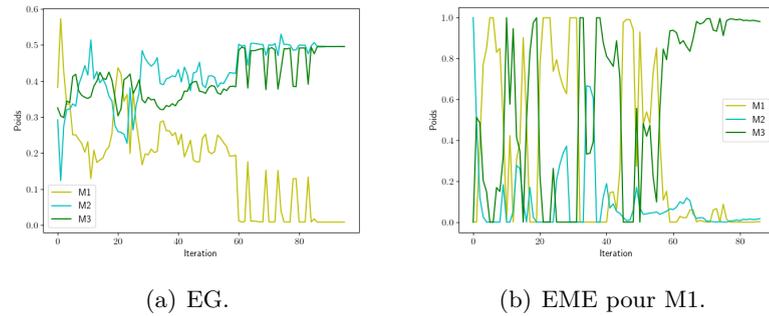


FIGURE 3.12: Variation des poids globaux en fonction des itérations pour la fonction système série à quatre branches avec un écart-type augmenté.

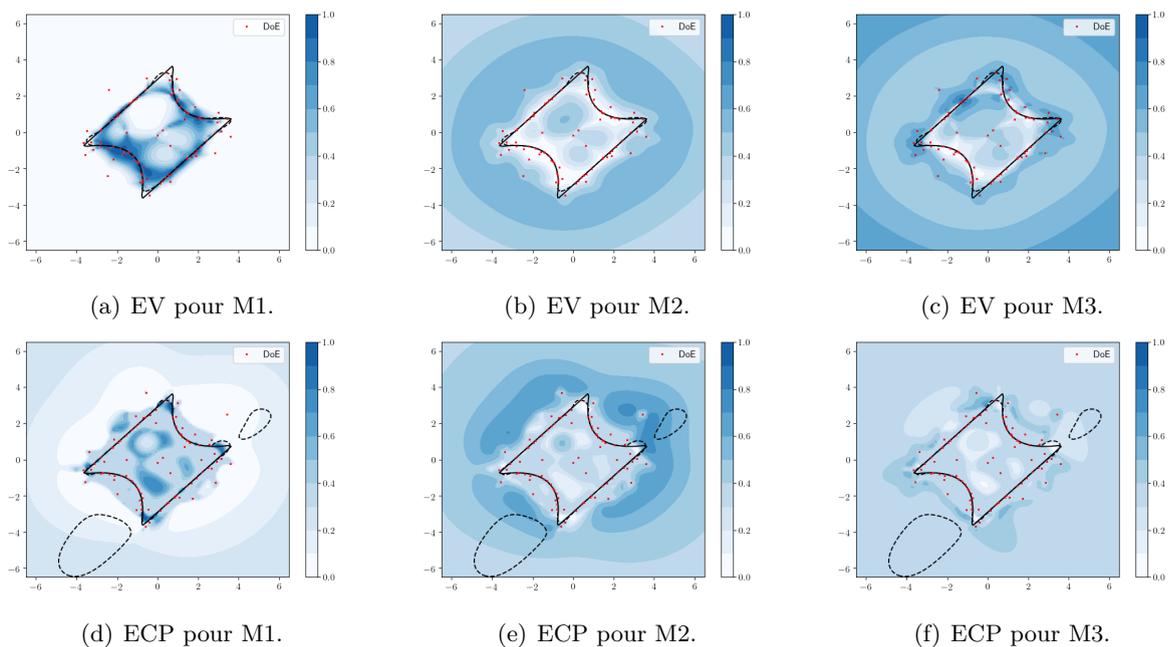


FIGURE 3.13: Cartographie des poids à la dernière itération des méthodes locales EV et ECP pour la fonction système série à quatre branches avec un écart-type augmenté.

sur la région d'échantillonnage de la population de Monte Carlo, voir Figure 3.17(a). Les points enrichis par la fonction d'apprentissage U_{ens} ont probablement favorisé l'amélioration de la qualité de prédiction du premier méta-modèle dans cette région. En dehors de cette région, un poids unitaire est attribué au méta-modèle M2, ce qui écarte les deux autres.

3.5.4 Fonction système parallèle

Le dernier exemple est un système parallèle à cinq variables aléatoires normales centrées réduites et indépendantes. C'est un exemple qui est déjà étudié par Engelund et Rackwitz (1993); Bourinet (2016). L'exemple proposée ici est légèrement modifié par rapport à celui de la littérature. Cette modification permet d'avoir une probabilité de l'ordre de 10^{-3} au lieu de 10^{-4} . La fonction de

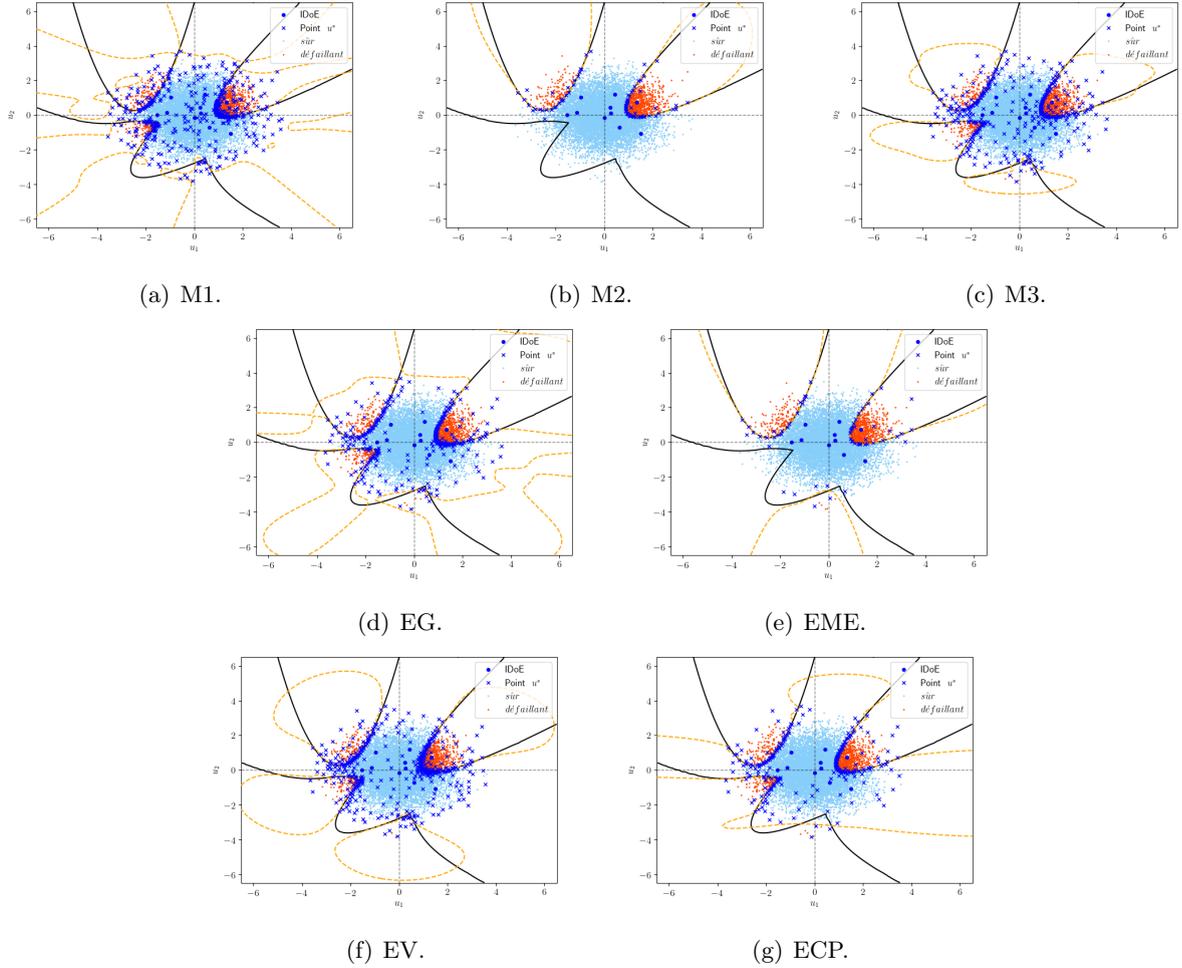


FIGURE 3.15: Approximation des méta-modèles individuels par la méthode AK-MCS et les EMs par la méthode AKE-MCS avec différentes techniques de pondération pour la fonction système mixte.

performance est exprimée comme suit :

$$g(\mathbf{x}) = \max \begin{cases} g_1(\mathbf{x}) = 1.677 - x_1 - x_2 \\ g_2(\mathbf{x}) = 1.500 - x_2 - x_3 \\ g_3(\mathbf{x}) = 1.323 - x_3 - x_4 \\ g_4(\mathbf{x}) = 1.250 - x_4 - x_5 \end{cases} \quad (3.49)$$

où $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_5)$.

D'après le Tableau 3.12, il est constaté que, pour cet exemple, les méta-modèles individuels ayant un noyau de Matérn ont quasiment le même comportement. En effet, les deux permettent de converger vers la valeur de référence de la probabilité de défaillance tout en ayant presque le même nombre d'appels à la fonction de performance. Le noyau gaussien est quasiment deux fois plus exigeant en termes de nombre d'appels à la fonction de performance. Cependant, il permet de converger vers une valeur très proche de la valeur de référence de la probabilité de défaillance. Pour les ensembles de méta-modèles, la convergence vers la valeur de référence de la probabilité de défaillance est bien assurée par tous les schémas de pondération considérés. Dans cet exemple, le nombre d'appels à la fonction de performance est aussi du même ordre de grandeur pour les

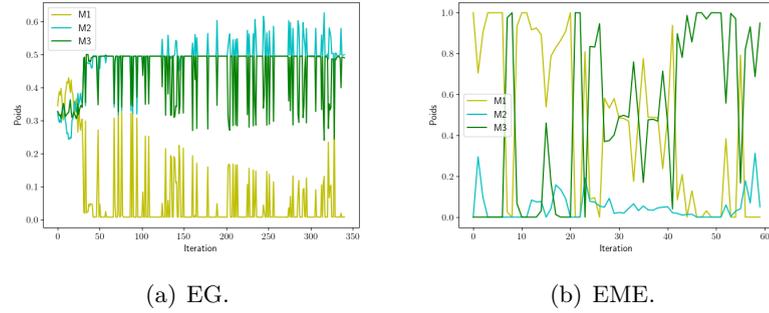


FIGURE 3.16: Variation des poids globaux de la fonction système mixte en fonction des itérations.

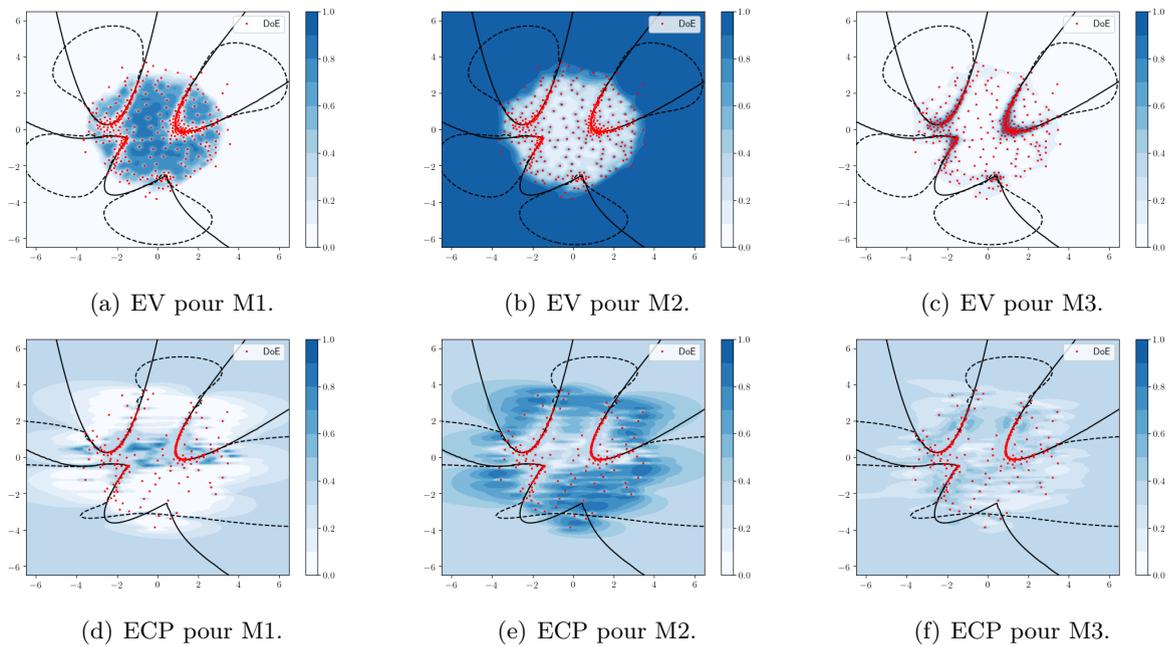


FIGURE 3.17: Cartographie des poids à la dernière itération des méthodes locales EV et ECP pour la fonction système mixte.

ensembles considérés. Ceci peut être expliqué par la Figure 3.18 qui fournit la variation des poids en fonction des itérations. Il est clair que, malgré les quelques fluctuations des valeurs des poids au début du processus d'enrichissement, les deux méta-modèles M2 (Matérn 3/2) et M3 (Matérn 5/2) ont les poids les plus élevés et le méta-modèle M1 (noyau gaussien) est complètement écarté à la fin de l'enrichissement. Cette tendance est la même pour tous les schémas de pondération, ce qui explique potentiellement le rapprochement entre leurs nombres d'appels à la fonction de performance et leurs valeurs de probabilité de défaillance.

3.6 Conclusions

L'analyse de fiabilité basée sur les méta-modèles est largement adoptée de nos jours. La variété des types de méta-modèles et de leurs paramétrages impose aux utilisateurs de faire des choix *a priori*. Une approche intéressante consiste à sélectionner un méta-modèle parmi plusieurs en se basant sur les résultats d'une étude préliminaire qui permet de juger la qualité de l'approximation

TABLEAU 3.12: Résultats de l'analyse de fiabilité du système parallèle.

Méthode	MC	M1	M2	M3	EG	EME	EV	ECP
N_g	7×10^4	693	383	390	443	397	443	454
$P_f \times 10^3$	5.58	5.54	5.58	5.58	5.57	5.57	5.58	5.57
Temps	—	2.16	1.00	1.01	3.59	3.10	3.29	3.33

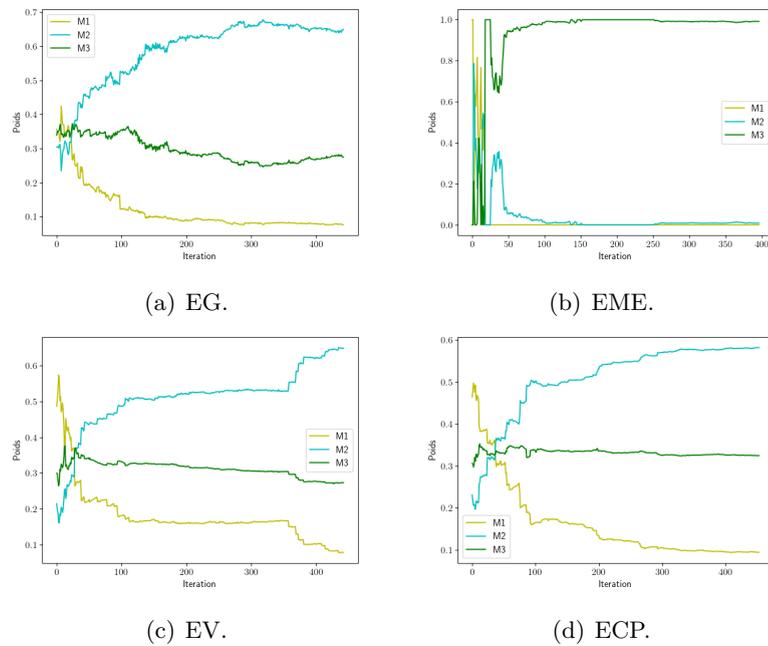


FIGURE 3.18: Variation des poids des différentes techniques de pondération en fonction des itérations pour le système parallèle.

des différents méta-modèles considérés. Cette approche écarte définitivement tous les méta-modèles non-sélectionnés. De plus, le choix d'un méta-modèle dépend du problème et les utilisateurs n'ont souvent aucune information préliminaire qui puisse faciliter ce choix. Ainsi, une stratégie basée sur un ensemble de méta-modèles permet potentiellement de profiter des méta-modèles pré-calibrés pour la sélection du meilleur méta-modèle, permettant ainsi d'améliorer l'efficacité et la qualité prédictive.

La mise en place d'un ensemble de méta-modèles est ici effectuée par agrégation des prédictions de méta-modèles de type krigeage ordinaire ayant différents noyaux. Des plans d'expériences identiques sont utilisés pour la calibration de tous les membres de l'ensemble. La méthode AKE-MCS proposée dans ce travail combine la méthode AK-MCS avec un ensemble de krigeages. Elle utilise une nouvelle fonction d'apprentissage pour l'enrichissement du plan d'expériences itérativement. Elle utilise aussi un critère de convergence qui se base sur le nombre de points bien classés par l'ensemble de méta-modèles. Le critère basé sur la nouvelle fonction d'apprentissage est finalement aussi sévère que le critère de la méthode AK-MCS classique. Un schéma de pondération ponctuel basé sur la probabilité qu'un point soit mal classé est aussi proposé dans ce travail pour agréger les prédictions des membres de l'ensemble. Il est important de noter que les poids des membres de l'ensemble sont mis à jour à chaque itération jusqu'à convergence. L'efficacité de l'approche proposée est validée sur quatre problèmes composant et quatre problèmes système. Les résultats

d'ensemble sont comparés aux résultats des méta-modèles individuels. Une analyse de l'influence des schémas de pondération existants dans la littérature est également effectuée.

Les résultats montrent d'abord qu'aucun des méta-modèles individuels n'est le meilleur pour les problèmes considérés, que ce soit en termes de prédiction ou d'efficacité. Ceci n'est pas le cas des ensembles de méta-modèles. Ces derniers garantissent une estimation précise de la probabilité de défaillance sur ces problèmes, quel que soit la technique de pondération retenue. Toutefois, il a été constaté que, d'une technique de pondération à une autre, les résultats ainsi que l'efficacité peuvent être légèrement différents en fonction des exemples. En effet, les techniques de pondération globale se sont montrées les moins efficaces et leur efficacité varie fortement d'un problème à l'autre. Quant aux techniques de pondération locale, contrairement à ce qui est connu dans la littérature dans le contexte de l'optimisation, elles se sont montrées les plus efficaces et les plus stables par rapport à la diversité des problèmes considérés. La technique de pondération locale proposée par Zerpa *et al.* (2005) a notamment permis de converger efficacement vers les valeurs de référence de la probabilité pour tous les problèmes traités. Il est important de noter que les ensembles restent plus exigeants que le meilleur méta-modèle individuel en termes de temps de calcul car ils requièrent la calibration de plusieurs méta-modèles à chaque itération. L'ensemble de méta-modèles permet surtout d'éviter la pire configuration, c'est-à-dire celle basée sur un mauvais choix *a priori* de méta-modèle, et qui échoue alors à estimer correctement la probabilité de défaillance. Par ailleurs, quand le meilleur méta-modèle n'est pas connu au préalable, l'utilisation de l'EM semble être une bonne stratégie pour éviter de se tromper sur le choix du méta-modèle et pour améliorer la performance des méthodes AK.

Au travers de ces résultats, le potentiel de l'utilisation de l'ensemble de méta-modèles en analyse de fiabilité est illustré. Néanmoins, des améliorations doivent être apportées au niveau de l'efficacité. Pour ce faire, une sélection des méta-modèles membres de l'ensemble peut être faite à chaque itération afin d'écarter ceux qui ont une variance de prédiction élevée. Si avec cette sélection un méta-modèle est écarté au début du processus d'enrichissement, il est recommandé de vérifier sa qualité à chaque itération afin d'examiner la possibilité de son retour dans l'ensemble. En effet, la qualité du membre écarté peut s'améliorer en raison de l'information contenue dans les points enrichis au fur et à mesure. La diversité des plans d'expériences des méta-modèles individuels peut être aussi une piste à étudier tout en prenant en compte la contrainte du coût de calcul de l'évaluation de la fonction de performance. Dans le cas des faibles probabilités, il est attendu que la méthode AKE-MCS ne soit pas la plus efficace vue qu'elle utilise une population de Monte Carlo. Une adaptation de la méthode avec une éventuelle utilisation des tirages d'importance ou des subset simulations pourrait ainsi être envisagée pour de futurs travaux afin de lever ce verrou.

Chapitre 4

Utilisation du krigeage adaptatif pour l'analyse de fiabilité des problèmes avec variabilité spatiale

Éléments clés

- Utiliser une approche de fiabilité système pour l'analyse de fiabilité des problèmes avec variabilité spatiale.
 - Proposer une extension de la méthode AK-SYS, nommée AK-SYSs.
 - Combiner le processus d'enrichissement de la méthode AK-SYS à une stratégie de recherche active des lieux de défaillance potentiels qui sont généralement méconnus *a priori*.
-

Sommaire

4.1	Introduction	108
4.2	Variabilité spatiale et fiabilité système	109
4.2.1	Utilisation des méthodes de fiabilité système pour la prise en compte de la variabilité spatiale	110
4.2.2	Méthodes classiques pour la fiabilité système	111
4.2.3	Méta-modélisation pour la fiabilité système	114
4.3	AK-SYSs pour l'analyse de fiabilité des structures avec variabilité spatiale	116
4.4	Exemple académique	118
4.5	Plaque trouée avec propriétés matériau variables spatialement	120
4.5.1	Description	120
4.5.2	Résultats	121
4.6	Plaque trouée avec propriétés du matériau et chargement aléatoires	123
4.6.1	Description	123
4.6.2	Résultats	124
4.6.3	Sensibilité au plan d'expériences initial	125
4.6.4	Effets de la taille du plan d'expériences initial	126
4.7	Analyses et discussions	127
4.8	Conclusions	129

4.1 Introduction

L'analyse de fiabilité permet aux ingénieurs d'évaluer la probabilité d'occurrence d'évènements rares. Les incertitudes associées aux paramètres d'entrée, e.g. dimensions, propriétés des matériaux et chargements sont propagées vers la réponse de la structure. L'analyse de fiabilité requière la définition de tous les scénarios de défaillance possibles, exprimés via des fonctions de performance. Si le scénario de défaillance est unique, on parle de fiabilité composant par opposition à la fiabilité système qui met en jeu plusieurs scénarios de défaillance. Par ailleurs, les paramètres d'entrée peuvent ne pas être homogènes dans le temps ou l'espace pour plusieurs raisons, liées par exemple aux variations des conditions environnementales. Dans de telles situations, les fonctions de performance sont exprimées en fonction de champs aléatoires ou processus stochastiques. Différentes méthodes sont proposées dans la littérature pour les problèmes dépendants du temps, la méthode AK-SYS-t proposée dans le chapitre 3 de la thèse de Ahmadivala (2020) pouvant être citée comme un exemple. Cette méthode procède à une discrétisation de l'intervalle du temps en un nombre fini d'instantes afin d'assimiler les problèmes dépendants du temps à des problèmes système. Ensuite, une approche système basée sur le krigeage adaptatif est adoptée afin d'évaluer la probabilité de défaillance. Les problèmes dépendants du temps ne sont pas abordés dans ce mémoire. On s'intéresse ici plutôt aux problèmes avec variabilité spatiale, qui font l'objet de ce chapitre.

La probabilité de défaillance des structures soumises à une variabilité spatiale est définie comme étant la probabilité que le minimum de la fonction de performance, sur tous les points de l'espace de coordonnées noté \mathcal{D} , soit inférieur ou égal à zéro, i.e :

$$P_f = P(\min_{\boldsymbol{\tau}} g(\mathbf{X}, \boldsymbol{\tau}) \leq 0), \boldsymbol{\tau} \in \mathcal{D} \quad (4.1)$$

où $\boldsymbol{\tau}$ indique ici les coordonnées spatiales, e.g. $\boldsymbol{\tau} = (y_1, y_2, y_3)$ pour un système 3D en coordonnées cartésiennes et le vecteur \mathbf{X} regroupe toutes les variables aléatoires du problème y compris celles qui sont nécessaires à la représentation du champ aléatoire. Le point spatial $\boldsymbol{\tau}^{\min}$, où la fonction de performance est minimale, est souvent supposé connu dans la pratique, i.e. sa localisation est supposée indépendante de l'aléa et cette localisation peut par exemple être identifiée pour une réalisation particulière (moyenne, médiane, etc) des variables aléatoires notée \mathbf{x}^{nom} . Dans ce cas, la probabilité de défaillance exprimée par l'équation 4.1 est réécrite comme suit :

$$\tilde{P}_f = P(g(\mathbf{X}, \boldsymbol{\tau}^{\min}) \leq 0) \quad (4.2)$$

où :

$$\boldsymbol{\tau}^{\min} = \underset{\boldsymbol{\tau} \in \mathcal{D}}{\operatorname{argmin}} g(\mathbf{x}^{\text{nom}}, \boldsymbol{\tau}) \leq 0 \quad (4.3)$$

Cette hypothèse est forte et n'est vérifiée que si la localisation du minimum est bien identifiée et ne change pas avec les réalisations des variables aléatoires, i.e :

$$\tilde{P}_f = P_f \quad \text{si } \boldsymbol{\tau}^{\min}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\tau}^{\min}(\mathbf{x}^{\text{nom}}), \forall \mathbf{x} \quad (4.4)$$

Si la localisation $\boldsymbol{\tau}^{\min}$ est identifiée pour une réalisation aberrante ou peu probable des variables aléatoires, la probabilité calculée peut en être totalement erronée et non représentative du scénario principal de la défaillance. De plus, en supposant à tort l'existence d'une unique zone de défaillance, la probabilité de défaillance estimée peut être sur ou sous-estimée selon le problème considéré.

La variabilité spatiale aléatoire est susceptible de générer plusieurs zones de défaillance. Dans le but d'avoir une bonne estimation de la probabilité de défaillance, toutes les zones de défaillance

potentielles doivent être considérées. De plus, la défaillance d'une zone entraîne la défaillance de toute la structure. Ceci rend le comportement des problèmes soumis à une variabilité spatiale comparable à celui de problèmes système série. Il est ainsi possible d'appliquer les méthodes de fiabilité système. Parmi les méthodes existantes, on peut noter les méthodes de fiabilité système basées sur les méta-modèles qui sont efficaces dans le contexte des fonctions de performance coûteuses à évaluer, voir e.g. (Acar et Solanki, 2009; Fauriat et Gayton, 2014; Kang *et al.*, 2017a; Yang *et al.*, 2019). L'idée principale de ce travail est d'utiliser et d'adapter l'une des méthodes de fiabilité système existantes, spécifiquement la méthode AK-SYS proposée par Fauriat et Gayton (2014). En plus du fait qu'elle soit facile à implémenter, AK-SYS propose une stratégie qui donne plus d'importance, durant le processus d'enrichissement, aux composants ayant une contribution importante dans la probabilité de défaillance du système.

En se basant sur les idées principales de la méthode AK-SYS, une extension aux problèmes soumis à une variabilité spatiale est proposée ici et est appelée AK-SYSs. Contrairement à la méthode AK-SYS standard, la méthode mise au point permet une recherche active des lieux de défaillance qui sont dans la plupart des cas méconnus à l'avance. Pour ce faire, une discrétisation de l'espace en un nombre fini de lieux est d'abord effectuée. Ensuite, un nombre faible de lieux potentiels est sélectionné sur la base de l'information contenue dans le plan d'expériences initial. L'ensemble des lieux de défaillance considérés pour l'évaluation de la probabilité de défaillance du problème est progressivement enrichi durant le processus d'apprentissage, si besoin. L'objectif de la stratégie proposée vise à sélectionner les lieux de défaillance principaux, i.e. ceux qui contribuent le plus à la probabilité de défaillance. Contrairement à la méthode AK-SYS-t proposée par Ahmadivala (2020) (voir chapitre 3 de sa thèse) pour les problèmes dépendants du temps et qui considère tous les instants issus de la discrétisation pour l'évaluation de la probabilité de défaillance, l'approche proposée ici ne considère qu'un nombre limité de lieux de défaillance principaux. Cette limitation à quelques lieux seulement permet de réduire au maximum les coûts de calcul liés à la calibration des méta-modèles. Après une brève revue de la fiabilité système et des problèmes à variabilité spatiale dans la Section 4.2, les principes de la méthode de AK-SYS sont rappelés dans la même section. La méthode AK-SYSs proposée est ensuite décrite en Section 4.3. Sa validation est effectuée sur un exemple illustratif et deux applications présentées dans les Sections 4.4-4.6. Enfin, des discussions et conclusions sont données dans la Section 4.7 et la Section 4.8 respectivement.

4.2 Variabilité spatiale et fiabilité système

L'effet de la variabilité spatiale sur les résultats de l'analyse de fiabilité a déjà fait l'objet de nombreux travaux de recherche. Des comparaisons entre les approches standards basées sur les facteurs de sécurité (principalement empiriques ou semi-probabilistes) et méthodes prenant en compte l'effet de l'aléa dans l'espace ont été effectuées pour différentes applications, voir e.g. (Atadero *et al.*, 2005; Piluso et Rizzano, 2007; Ji et Low, 2012; Zhu *et al.*, 2017; Jiang et Huang, 2018; Ji *et al.*, 2018). Il est conclu que la non-prise en compte de la variabilité spatiale peut avoir des conséquences non-désirables telles qu'une conception trop conservatrice ou une sur-estimation de la valeur de la probabilité de défaillance. Dans le cas contraire, la considération de la variabilité spatiale peut générer des zones de défaillance multiples dont la localisation peut varier avec l'aléa.

4.2.1 Utilisation des méthodes de fiabilité système pour la prise en compte de la variabilité spatiale

En pratique, l'espace est discrétisé et seules les zones les plus critiques sont retenues pour l'estimation de la probabilité de défaillance. Ainsi, l'équation 4.1 peut être réécrite comme suit :

$$P_f \simeq P(\min_{j=1,\dots,p} G(\mathbf{X}, \boldsymbol{\tau}^{(j)}) \leq 0) \quad (4.5)$$

où $j = 1, \dots, p$ indiquent les zones potentielles de défaillance retenues pour l'analyse. En notant $G_j(\mathbf{X}) = G(\mathbf{X}, \boldsymbol{\tau}^{(j)})$ la fonction de performance calculée au $j^{\text{ème}}$ point spatial $\boldsymbol{\tau}^{(j)}$, la probabilité de défaillance s'écrit :

$$P \simeq \text{Prob}(\min_{j=1,\dots,p} G_j(\mathbf{X}) \leq 0) \quad (4.6)$$

Le domaine de défaillance est par conséquent défini par l'équation suivante :

$$\Omega = \{\mathbf{x} : \min_{j=1,\dots,p} G_j(\mathbf{x}) \leq 0\} \quad (4.7)$$

Par ailleurs, il faut rappeler que la probabilité de défaillance système s'exprime via l'intégrale de la fonction de densité de probabilité jointe sur tout le domaine de défaillance Ω^S , voir e.g. (Wang et Wang, 2015).

$$P_{Sys} = \int_{\Omega^S} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (4.8)$$

Pour un problème système série ayant p composants, le domaine de défaillance est donné par :

$$\Omega^S = \{\mathbf{x} : \cup_{j=1}^p G_j(\mathbf{x}(\omega)) \leq 0\} \quad (4.9)$$

Il est important de souligner ici que la fiabilité système peut aussi être traitée comme un problème de fiabilité composant via une unique fonction de performance composite $g_{comp}(\mathbf{X})$ qui définit la défaillance du système, voir e.g. (Fauriat et Gayton, 2014; Wang et Wang, 2015; Wei *et al.*, 2018; Yang *et al.*, 2019). Ainsi, l'équation 4.9 exprimant le domaine de défaillance d'un problème série peut être formulée comme suit :

$$\Omega^S = \{\mathbf{x} : G_{comp}(\mathbf{x}) \equiv \min_j G_j(\mathbf{x}) \leq 0\} \quad (4.10)$$

Le domaine de défaillance du système série Ω^S est similaire à celui d'une structure soumise à une variabilité spatiale après discrétisation tel qu'exprimé par l'équation 4.7. La défaillance d'une zone dans l'espace de variabilité conduit à la défaillance de toute la structure. Ceci montre bien l'analogie entre le système série et le problème à variabilité spatiale discrétisé. **En conséquence, les méthodes classiques de fiabilité système peuvent être appliquées pour estimer la probabilité de défaillance d'une structure soumise à une variabilité spatiale.**

Cette approche a été souvent utilisée en analyse de fiabilité de la stabilité des talus. Des surfaces de glissement représentatives sont choisies comme étant des surfaces de glissement critiques à prendre en compte lors de l'évaluation de la probabilité de défaillance. Certaines techniques ont été proposées afin de déterminer ces surfaces représentatives. Elles sont principalement basées sur les valeurs des facteurs de sécurité du talus, l'indice de fiabilité β et la corrélation entre des surfaces de glissement dites déterministes et un grand nombre de surfaces critiques aléatoires, voir e.g. (Zhang *et al.*, 2011; Jiang *et al.*, 2015; Zeng *et al.*, 2015; Jiang *et al.*, 2017; Xiao *et al.*, 2017;

Wang *et al.*, 2020). D'autres applications sont également proposées par Sahraoui et Chateaneuf (2016) et Gong et Frangopol (2020). Dans ces deux articles, les zones critiques sont choisies *a priori* et aucune approche n'est proposée pour leur sélection. Dans le premier article, l'effet de l'agressivité du sol sur un pipeline souterrain corrodé est étudié. Dans le second, on étudie les poutres de la coque d'un navire sujettes à la variabilité spatiale du phénomène de corrosion.

Pour l'estimation de la probabilité de défaillance, on fait appel aux méthodes classiques de la fiabilité système rappelées dans la section suivante : méthode FORM système utilisée par (Xiao *et al.*, 2017; Zeng *et al.*, 2015; Gong et Frangopol, 2020), méthode de simulation de Monte Carlo système utilisée par (Sahraoui et Chateaneuf, 2016; Zhang *et al.*, 2011; Wang *et al.*, 2020; Zeng *et al.*, 2015). Une alternative utilisée par Zhang *et al.* (2011) consiste à borner la valeur de la probabilité de défaillance du système via la définition d'un intervalle de variation pour la quantité d'intérêt.

4.2.2 Méthodes classiques pour la fiabilité système

Une brève description des méthodes classiques de fiabilité système est rappelée ci-dessous.

Méthode de Monte Carlo système

La méthode de Monte Carlo est une méthode d'échantillonnage qui se base sur la génération de réalisations des variables aléatoires selon leur densité de probabilité jointe. La probabilité de défaillance exprimée par l'intégrale multidimensionnelle de l'équation 4.8, peut être approchée par :

$$\hat{P}_{Sys} = \frac{1}{N_{MC}} \sum_{i=1}^{N_{MC}} I(\mathbf{x}^{(i)}) \quad (4.11)$$

$$I(\mathbf{x}^{(i)}) = \begin{cases} 1 & \text{si } G_{comp}(\mathbf{x}^{(i)}) \leq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où N_{MC} désigne la taille de la population de Monte Carlo. L'estimateur \hat{P}_{Sys} est non-biaisé et son coefficient de variation est donné par :

$$C.O.V_{\hat{P}_{Sys}} = \sqrt{\frac{1 - \hat{P}_{Sys}}{N_{MC} \hat{P}_{Sys}}} \quad (4.12)$$

Pour une précision élevée sur la probabilité de défaillance ($C.O.V_{\hat{P}_{Sys}}$ aussi faible que possible), il est nécessaire d'avoir une taille d'échantillon N_{MC} grande, ce qui est incompatible avec des fonctions de performance coûteuses à évaluer. La réduction de la taille d'échantillon peut être envisagée par la méthode des tirages d'importance (Mahadevan et Raghoeamachar, 2000) et la méthode des subsets simulations (Li *et al.*, 2015) appliquées aux problèmes système. Toutefois, malgré les améliorations apportées par ces approches, celles-ci restent tout de même relativement exigeantes en termes de nombre de simulations requises.

Méthode FORM système

La méthode FORM approche chacun des états-limites du système par un hyperplan en utilisant un développement en séries de Taylor du 1^{er} ordre au point de conception P^* . Les états-limites

approchés sont calculés dans l'espace standard et sont notés $G_j(\mathbf{U}) = 0, j = 1, \dots, p$. Une transformation iso-probabiliste (voir Section 1.3.3) est donc effectuée pour le passage de l'espace physique (vecteur aléatoire \mathbf{X}) vers l'espace normal standard (vecteur aléatoire \mathbf{U}).

L'approche FORM système commence tout d'abord par une linéarisation des états-limites autour de leurs points de conception respectifs, voir Figure 4.1. Ensuite, la probabilité de défaillance du système P_{Sys} est calculée en utilisant la fonction de distribution gaussienne standard multidimensionnelle Φ_p . Pour un système série, la probabilité de défaillance est donnée par :

$$P_{Sys} \approx 1 - \Phi_p(\boldsymbol{\beta}; \rho) \quad (4.13)$$

où $\boldsymbol{\beta} = \{\beta_1, \dots, \beta_p\}$ est le vecteur des indices de fiabilité de chacune des fonctions de performance du système, $\rho = \{\rho_{ij}, i, j = 1, \dots, p\}$ est la matrice des corrélations avec $\rho_{ij} = \boldsymbol{\alpha}_i^T \boldsymbol{\alpha}_j$. Le cosinus directeur $\boldsymbol{\alpha}_i$ est le vecteur gradient normé de la $i^{\text{ème}}$ fonction de performance, voir e.g. (Sitar *et al.*, 1987) :

$$\boldsymbol{\alpha}_i = - \frac{\nabla_{\mathbf{u}} G_i(\mathbf{u}_i^*)}{\|\nabla_{\mathbf{u}} G_i(\mathbf{u}_i^*)\|} \quad (4.14)$$

où \mathbf{u}_i^* est le vecteur des coordonnées de point de conception de la fonction de performance G_i . Les coefficients de corrélation donnent une interprétation géométrique immédiate sur l'interaction entre les différentes fonctions de performance du système. Différentes configurations entre deux états-limites sont illustrées sur la Figure 4.2 pour des valeurs typiques du coefficient de corrélation. Cette méthode peut être efficace mais ses résultats peuvent être erronés à cause de l'hypothèse de la linéarité de chacune des fonctions de performance.

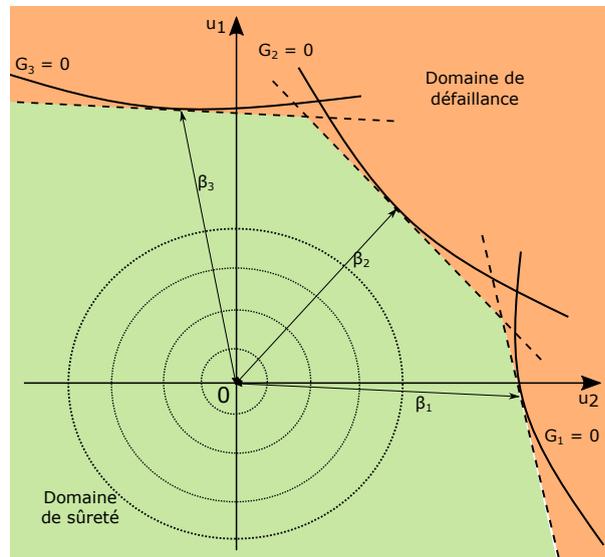


FIGURE 4.1: Illustration de la méthode FORM système

Encadrement de la probabilité de défaillance système

Borner la probabilité de défaillance d'un système est un autre moyen qui peut être adopté quand les valeurs des probabilités de défaillance sont connues pour chacun des composants. Un

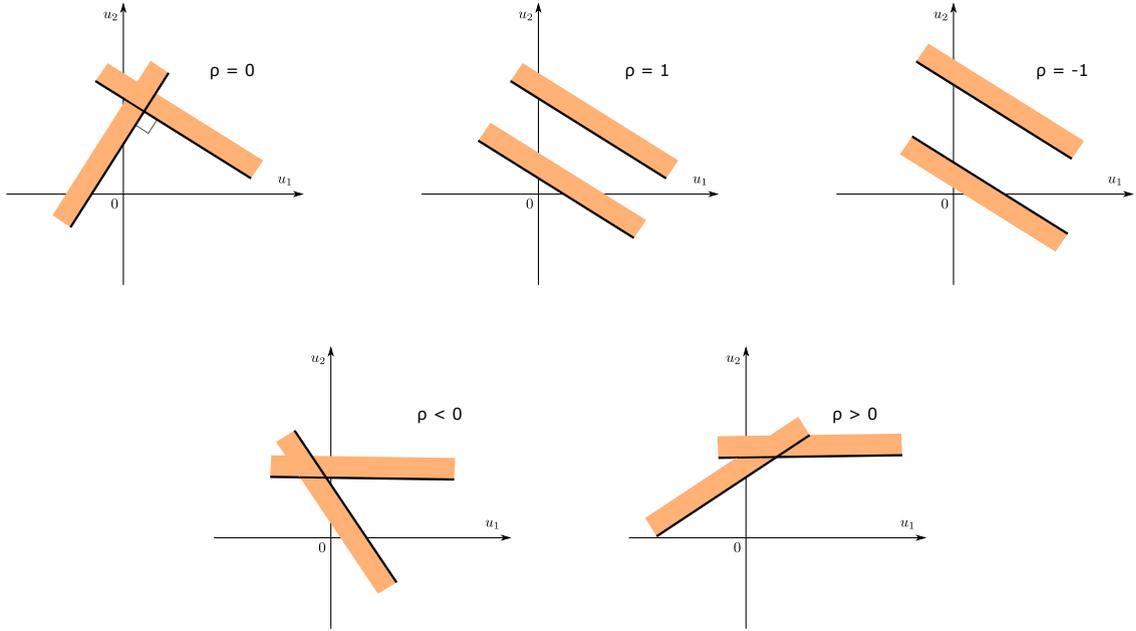


FIGURE 4.2: Représentation géométrique de la corrélation entre les états-limites entre deux fonctions de performance pour différentes de valeurs du coefficient de corrélation.

encadrement au premier ordre FOB est donné par (Bennett et Ang, 1983) :

$$\min_j [P_j] \leq P_{Sys} \leq \min \left[\sum_{j=1}^p P_j, 1 \right] \quad (4.15)$$

Ces bornes sont souvent larges. Pour plus de précisions, il est utile de faire un encadrement plus fin au second ordre SOB, voir e.g. (Ji *et al.*, 2012; Liu et Low, 2017). Cet encadrement considère l'interaction deux-à-deux des modes de défaillance comme suit :

$$\begin{aligned} P_{max} + \sum_{j=2}^p \max \left[\left\{ P_j - \sum_{i=1}^{j-1} P_{ij} \right\}; 0 \right] \\ \leq P_{Sys} \leq \min \left[\left\{ \sum_{j=1}^p P_j - \sum_{j=2}^p \max_{i < j} P_{ij} \right\}; 1 \right] \end{aligned} \quad (4.16)$$

où P_{max} indique la probabilité de défaillance composant la plus importante et :

$$P_{ij} = P(G_i(\mathbf{U}) \leq 0 \cap G_j(\mathbf{U}) \leq 0) \quad (4.17)$$

Discussions

Bien que les méthodes de fiabilité système décrites ci-avant soient utiles dans le contexte de la variabilité spatiale, elles ont tout de même quelques inconvénients : (1) Borner la valeur de la probabilité de défaillance du système peut conduire à des intervalles très larges ; (2) l'approche FORM système peut être imprécise quand les fonctions de performance sont non-linéaires et implicites en raison de la forte hypothèse de la linéarité de l'état-limite par la méthode, voir e.g.

(Valdebenito *et al.*, 2010; Zhong *et al.*, 2020); (3) Les méthodes de simulation telle que la méthode de Monte Carlo conduit, dans le contexte des fonctions de performance coûteuses en temps de calcul, à des temps de calcul considérables. En effet, une large population de points est requise pour une bonne estimation de la valeur de probabilité de défaillance. Les méta-modèles sont encore une fois un moyen efficace pour réduire les temps de calcul de la méthode de Monte Carlo. Ils sont fréquemment utilisés en fiabilité système car les coûts de calcul augmentent rapidement avec les nombreuses fonctions de performance à évaluer.

4.2.3 Méta-modélisation pour la fiabilité système

Les méta-modèles sont fréquemment utilisés en analyse de fiabilité, pour leur capacité à réduire les efforts numériques de la méthode de Monte Carlo. Tel que déjà discuté dans le Chapitre 2, les méta-modèles sont des modèles mathématiques simplifiés qui remplacent les fonctions de performance coûteuses à évaluer. Leur calibration requiert la constitution d'un plan d'expériences qui est, dans le contexte de l'analyse de fiabilité, de taille potentiellement plus faible quand il est adaptatif.

L'utilisation des méta-modèles adaptatifs en fiabilité système a été initiée par Bichon *et al.* (2011). Ces derniers ont adapté la méthode EGRA à la fiabilité système. Pour chaque fonction de performance (composant), un méta-modèle est calibré sur la base du plan d'expériences initial. Ensuite, à chaque itération, le méta-modèle qui correspond à la fonction de performance participant le plus à la défaillance est re-calibré. Les points ajoutés adaptativement sont définis à partir d'une fonction d'apprentissage EFF composite qui permet de détecter les fonctions de performance contribuant le plus à la défaillance du système durant le processus d'enrichissement. Il est à rappeler que le point à ajouter est déterminé à partir de la maximisation de la fonction EFF composite dans tout le domaine de définition des variables aléatoires. Cette opération d'optimisation représente l'inconvénient majeur de cette méthode certes efficace. Fauriat et Gayton (2014) ont proposé une alternative en développant la méthode *Active learning and Kriging-based SYStem reliability method* (AK-SYS), qui est une adaptation de la méthode AK-MCS (voir Section 2.3.3) à la fiabilité système. En suivant l'idée de la méthode EGRA-SYS, une fonction d'apprentissage de la méthode AK-SYS est définie. Elle permet d'ignorer autant que possible les fonctions de performance qui ne contribuent pas à la défaillance du système.

Description de la méthode AK-SYS

Partant du principe de la méthode AK-MCS, la méthode AK-SYS a pour objectif de traiter des problèmes système avec plusieurs scénarios de défaillance possibles en utilisant le krigeage adaptatif. Contrairement aux problèmes composant où une seule fonction de performance est considérée, chaque scénario de défaillance est ici caractérisé par sa propre fonction de performance. Cette méthode vise à classer une population de Monte Carlo de taille N_{MC} dans le domaine de sûreté ou de défaillance comme avec la méthode AK-MCS. Néanmoins, elle utilise autant de méta-modèles de krigeage que de fonctions de performance. Un plan d'expériences initial est d'abord sélectionné aléatoirement à partir de la population de Monte Carlo et des méta-modèles de type krigeage (un pour chaque composant du système) sont calibrés. La fonction d'apprentissage composite U_s est ensuite définie comme étant le ratio entre la valeur absolue de la prédiction moyenne $\mu_{\hat{G}_s}$ du krigeage et son écart type $\sigma_{\hat{G}_s}$. Elle est exprimée par :

$$U_s(\mathbf{u}^{(k)}) = \frac{|\mu_{\hat{G}_s}(\mathbf{u}^{(k)})|}{\sigma_{\hat{G}_s}(\mathbf{u}^{(k)})} \quad (4.18)$$

où s est l'indice du krigeage qui minimise $\mu_{\hat{G}_s}(\mathbf{u}^{(k)})$, $j = 1, \dots, p$, en une réalisation du vecteur aléatoire $\mathbf{u}^{(k)}$, $k = 1, \dots, N_{MC}$ pour les systèmes série :

$$s = \underset{j}{\operatorname{argmin}} \mu_{\hat{G}_j}(\mathbf{u}^{(k)}) \quad (4.19)$$

et p est le nombre de composants, i.e. le nombre de fonctions de performance. Le point à enrichir $\mathbf{u}^{(*)}$ est celui qui minimise U_s et seule la fonction de performance G_s est évaluée en ce point. Ce dernier est supposé être proche de l'état-limite et/ou il est caractérisé par une variance importante du krigeage (Echard *et al.*, 2011). Seul le krigeage \hat{G}_s est re-calibré et les autres krigeages ayant une moindre contribution à la défaillance sont ignorés. Le processus d'enrichissement s'arrête quand le minimum de U_s est supérieur ou égal à 2, i.e. quand :

$$\min_{k=1, \dots, N_{MC}} U_s(\mathbf{u}^{(k)}) \geq 2 \quad (4.20)$$

Contrairement à la fonction d'apprentissage composite EFF qui est maximisée sur tout l'espace de conception, celle de la méthode AK-SYS, notée U_s , est évaluée uniquement sur une population de Monte Carlo choisie au préalable. Cette méthode est facile à implémenter et ne requiert pas la résolution d'un problème d'optimisation. Néanmoins, Yang *et al.* (2018); Yun *et al.* (2019) ont reporté que AK-SYS peut ne pas bien identifier les fonctions de performance influençant le plus la probabilité de défaillance du système. Selon Yang *et al.* (2018), ceci est causé par la différence qui peut exister entre les ordres de grandeurs des fonctions de performance, potentiellement liée aux unités employées pour ces fonctions. Une autre méthode appelée ALK-TCR a été proposée, basée sur la troncature des régions qui n'influencent pas la probabilité de la défaillance et ne cherchant pas à identifier les fonctions de performance non-importantes par leurs valeurs numériques. Yun *et al.* (2019) indiquent qu'une mauvaise identification des fonctions de performance importantes est causée par l'imprécision des méta-modèles du krigeage pendant les premières itérations. Ils développent pour cette raison une nouvelle fonction d'apprentissage donnée par l'équation 4.21 pour les systèmes série. Cette fonction d'apprentissage est utilisée dans le cadre de la méthode AK-SYSi.

$$U_{sr}(\mathbf{u}^{(k)}) = \begin{cases} \min_{j=1, \dots, p} \frac{|\mu_{\hat{G}_j}(\mathbf{u}^{(k)})|}{\sigma_{\hat{G}_j}(\mathbf{u}^{(k)})} & \text{si } \forall j = 1, \dots, p \quad \mu_{\hat{G}_j}(\mathbf{u}^{(k)}) > 0 \\ \max_{\hat{j}=1, \dots, \hat{p}} \frac{|\mu_{\hat{G}_{\hat{j}}}(\mathbf{u}^{(k)})|}{\sigma_{\hat{G}_{\hat{j}}}(\mathbf{u}^{(k)})} & \text{si } \exists \hat{j} = \hat{1}, \dots, \hat{p} \quad \mu_{\hat{G}_{\hat{j}}}(\mathbf{u}^{(k)}) \leq 0 \end{cases} \quad (4.21)$$

où $\hat{j} = \hat{1}, \dots, \hat{p}$ indique le nombre de composants défaillants pour le système série. L'idée de cette fonction d'apprentissage est d'identifier le méta-modèle à enrichir en se basant sur la probabilité de bonne prédiction de la vraie valeur. Ainsi, si toutes les prédictions des méta-modèles \hat{G}_j , $j = 1, \dots, p$ sont positives (tous les composants sont non-défaillants), le méta-modèle à enrichir est celui qui possède la plus faible probabilité d'une prédiction correcte de la vraie valeur. S'il existe au moins une prédiction négative (au moins un composant défaillant), le méta-modèle à enrichir est celui qui possède la probabilité maximale d'une prédiction correcte de la vraie valeur parmi toutes les prédictions négatives existantes.

D'autres améliorations ont ensuite été proposées par Jiang *et al.* (2020) dans le cadre de la méthode EEK-SYS. Cette dernière utilise la probabilité de défaillance système et son erreur pour déterminer les points à enrichir et le critère d'arrêt du processus d'enrichissement. L'efficacité du krigeage adaptatif est davantage étudiée pour les problèmes système, ce qui conduit Yuan *et al.* (2020) à proposer une nouvelle fonction d'apprentissage pour les systèmes mixtes.

Remarque. Il est important de souligner que l'utilisation d'autres types de méta-modèles est à notre connaissance peu reportée dans la littérature de la fiabilité système. Toutefois, on peut trouver quelques travaux récents basés sur l'utilisation du chaos polynomial dans le cadre de l'application du principe de la fiabilité système pour la stabilité des talus, voir e.g. (Jiang *et al.*, 2015; Liu *et al.*, 2018). Les SVM ont aussi été utilisées par Kang *et al.* (2016) pour ce même type d'application.

4.3 AK-SYSs pour l'analyse de fiabilité des structures avec variabilité spatiale

L'objet de ce chapitre est motivé par le fait que très peu de travaux considèrent à notre connaissance le krigeage adaptatif pour les problèmes à variabilité spatiale vus comme problèmes de fiabilité système. En se basant sur le principe de la méthode AK-SYS, la méthode AK-SYSs est ici proposée pour les problèmes avec variabilité spatiale. Malgré les limitations de la méthode AK-SYS pointées par certains chercheurs et discutées précédemment, cette méthode reste efficace et pertinente pour traiter les problèmes de fiabilité système. De plus, pour les problèmes à variabilité spatiale, les fonctions de performances des zones de défaillance potentielles ne présentent pas de différences d'ordre de grandeur notables. En effet, les techniques usuelles partent du principe qu'il y a un modèle (potentiellement coûteux) associé à chaque composant du système. Ici, le modèle fournit la réponse pour tous les points du domaine étudié et nous allons proposer une stratégie optimale en ce sens.

Dans le contexte de la variabilité spatiale, les zones de défaillance potentielles sont méconnues à l'avance. La méthode AK-SYSs a pour objectif de combiner le processus d'enrichissement de la méthode AK-SYS avec une stratégie de recherche active de ces zones. Ces dernières ne sont donc pas sélectionnées à l'avance. Leur détermination passe tout d'abord par la considération d'un nombre très limité de zones où les fonctions de performance possèdent les valeurs les plus faibles parmi toutes les valeurs du vrai modèle évalué sur le plan d'expériences initial. Ensuite, cette ensemble de zones ou de fonctions de performance est si besoin mis-à-jour durant le processus d'enrichissement en se basant sur la réponse du vrai modèle évalué au point enrichi $\mathbf{u}^{(*)}$. De plus, contrairement à la méthode AK-SYS où un seul krigeage est re-calibré à chaque itération, ici toutes les fonctions de performance considérées sont évaluées au point enrichi et les méta-modèles de type krigeage sont re-calibrés à chaque itération. Il est important de souligner qu'aucun coût de calcul supplémentaire n'est requis pour cette opération grâce à la nature du problème qui permet d'avoir la réponse de la structure en tout point de l'espace en une seule fois. Il est donc plus avantageux de profiter de cette propriété afin d'enrichir tous les méta-modèles de krigeage à chaque itération. La méthode AK-SYSs proposée pour les problèmes soumis à la variabilité spatiale suit ainsi les étapes suivantes :

1. Génération de N_{MC} points dans l'espace normal standard, où toutes les variables aléatoires \mathbf{U} sont normales, centrées, réduites et indépendantes.
2. Discrétisation de l'espace \mathcal{D} en τ_j zones. Une fonction de performance $G_j, j = 1, \dots, N_p$ est associée à chaque zone τ_j .
3. Sélection aléatoire des points du plan d'expériences initial IDoE à partir des points de la population de Monte Carlo.
4. Évaluation des fonctions de performance $G_j, j = 1, \dots, N_p$ sur le IDoE.

5. Sélection d'un ensemble initial de fonctions de performance utilisé pour l'estimation de la probabilité de défaillance du système. La détermination de cette ensemble se fait avec l'Algorithme 1. À cette étape, l'Algorithme 1 prend comme entrée les points du plan d'expériences initial IDoE, i.e. $P = \{u^{(k_0)}\}, k_0 = 1, \dots, N_{IDoE}$. L'ensemble M des fonctions de performances retenues pour l'analyse est vide au départ. À la fin de l'algorithme, cet ensemble contient les fonctions de performance sélectionnées à partir du IDoE.
6. Calibration des méta-modèles de krigeage $\hat{G}_j, j = 1, \dots, p$, pour chacune des fonctions de performance considérées, où p est ici le cardinal de l'ensemble des fonctions de performance M .
7. Identification du point à enrichir $\mathbf{u}^{(*)}$. Ce dernier minimise la fonction d'apprentissage U_s évaluée sur chaque point $\mathbf{u}^{(k)}$ de la population de Monte Carlo, voir équation 4.18.

$$\mathbf{u}^{(*)} = \underset{k=1, \dots, N_{MC}}{\operatorname{argmin}} U_s(\mathbf{u}^{(k)}) \quad (4.22)$$

Pour rappel, s indique ici l'indice de la fonction de performance ayant la moyenne de prédiction de krigeage la plus petite parmi celles de toutes les fonctions de performance considérées, i.e. celle qui minimise $\mu_{\hat{G}_j}(\mathbf{u}^{(k)}), j = 1, \dots, p$, voir équation 4.19.

8. Vérification du critère de convergence défini comme suit :

$$U_s(\mathbf{u}^{(*)}) \geq 2 \quad (4.23)$$

9. Si le critère de convergence n'est pas satisfait :

- Évaluation des fonctions de performance $G_j, j = 1, \dots, N_p$ sur le nouveau point $\mathbf{u}^{(*)}$.
- Détermination de la $j^{\text{ème}}$ fonction ayant la valeur la plus faible parmi toutes les valeurs des N_p fonctions de performance et mise à jour de l'ensemble M des fonctions de performance utilisées pour l'évaluation de la probabilité de défaillance en ajoutant la $j^{\text{ème}}$ fonction à l'ensemble M , si besoin. Cette étape est effectuée selon l'Algorithme 1, où l'ensemble P est composé uniquement du point enrichi, i.e. $P = \{\mathbf{u}^{(*)}\}$, et M est l'ensemble de l'itération actuelle contenant toutes les fonctions de performance sélectionnées jusque-là.
- Le plan d'expériences de chaque fonction de performance est actualisé par le point enrichi et son évaluation $(\mathbf{u}^{(*)}, G_j(\mathbf{u}^{(*)})), j = 1, \dots, p$. Retour ensuite à l'étape 6.

10. Si le critère de convergence est satisfait, le processus d'enrichissement s'arrête. Les méta-modèles du krigeage sont supposés être assez précis et le processus passe à l'étape suivante.

11. Estimation de la probabilité de défaillance comme suit :

$$\begin{aligned} \hat{P}_f &= \frac{1}{N_{MC}} \sum_{k=1}^{N_{MC}} I\{\cup_{j=1}^p G_j(\mathbf{u}^{(k)}) \leq 0\} \\ &= \frac{1}{N_{MC}} \sum_{k=1}^{N_{MC}} I\{\min_{j=1, \dots, p} \hat{G}_j(\mathbf{u}^{(k)}) \leq 0\} \end{aligned} \quad (4.24)$$

où I est la fonction indicatrice de la défaillance qui s'écrit comme suit :

$$I(\mathbf{u}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \cup_{j=1}^p G_j(\mathbf{u}) \leq 0 \\ 0 & \text{si } \cup_{j=1}^p G_j(\mathbf{u}) > 0 \end{cases} \quad (4.25)$$

Algorithm 1 Recherche active des zones potentielles**Inputs:**

$$P = \{\mathbf{u}^{(i)}\}, i = 1, \dots, n \text{ and } M$$

for $i = 1$ **to** n **do**

$$j = \underset{j=1, \dots, N_p}{\operatorname{argmin}} G_j(\mathbf{u}^{(i)})$$

if $j \notin M$ **then**

$$M = M \cup \{j\}$$

end if**end for**

$$p = \operatorname{card}(M)$$

return M, p

4.4 Exemple académique

Dans cette section, la méthode proposée AK-SYSs est appliquée à une poutre en flexion composée de deux sections de dimensions différentes, tel que présenté sur la Figure 4.3. Les deux sections droites sont définies par leurs largeurs et hauteurs b_1, b_2, h_1 et h_2 . L'objectif est de calculer la probabilité que la contrainte de flexion ne dépasse pas la limite d'élasticité σ_y . La fonction de performance pour cette exemple est exprimée par :

$$G(\mathbf{x}, \tau) = \sigma_y - \frac{6F(2l - \tau)}{b(\tau)h^2(\tau)} \quad (4.26)$$

où b et h sont exprimées en fonction de la position τ .

$$b(\tau) = \begin{cases} b_1 & \text{si } \tau \leq l \\ b_2 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.27)$$

$$h(\tau) = \begin{cases} h_1 & \text{si } \tau \leq l \\ h_2 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.28)$$

$\mathbf{X} = \{b_1, b_2, h_1, h_2, F, \sigma_y\}$ est le vecteur aléatoire d'entrée avec des composantes indépendantes entre elles.

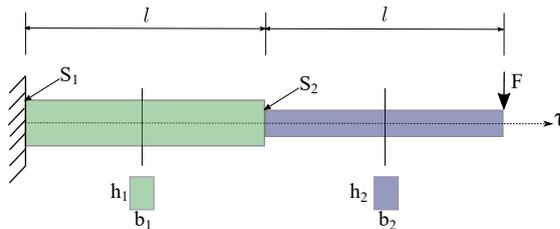


FIGURE 4.3: Poutre en flexion composée de deux sections

Ce problème peut être formulé comme un problème système ayant deux fonctions de performance calculées en $\tau = 0$ et $\tau = l$. L'ensemble des fonctions de performance utilisé pour l'analyse de fiabilité est fixe et supposé être connu à l'avance en raison de la simplicité de l'exemple. Ainsi,

l'expression de la probabilité de défaillance donnée pour le cas général par l'équation 4.1 devient :

$$\begin{aligned} P_f &= \text{Prob} (\min (G_1(\mathbf{X}, 0), G_2(\mathbf{X}, l)) \leq 0) \\ &= \text{Prob} (G_1(\mathbf{X}, 0) \leq 0 \cup G_2(\mathbf{X}, l) \leq 0) \end{aligned} \quad (4.29)$$

avec :

$$G_1(\mathbf{x}, 0) = \sigma_y - \frac{12Fl}{b_1 h_1^2} \quad (4.30)$$

$$G_2(\mathbf{x}, l) = \sigma_y - \frac{6Fl}{b_2 h_2^2} \quad (4.31)$$

Deux cas d'études sont proposés dans le Tableau 4.1 afin d'illustrer l'efficacité de l'approche proposée pour l'enrichissement du plan d'expériences, i.e. l'amélioration du méta-modèle ayant la plus importante contribution à la défaillance du système. Le premier cas est choisi tel que les deux fonctions de performance aient presque la même importance. Le second cas est choisi afin d'avoir la défaillance seulement au niveau de la première section. Le Tableau 4.2 et le Tableau 4.3 listent les résultats de la méthode de Monte Carlo système, les bornes du second ordre SOB, FORM système, AK-MCS, AK-SYS et AK-SYSs. Pour chaque méthode de simulation, la population de MC et le IDoE sont les mêmes. Les résultats de la méthode de Monte Carlo sont considérés comme étant les valeurs de référence. Ils sont estimés avec une population de taille 10^4 , ce qui conduit à un coefficient de variation de 8%. L'intervalle déterminé avec SOB contient la valeur de référence de la probabilité de défaillance estimée par la méthode de Monte Carlo. Cette dernière a aussi été correctement déterminée par FORM système. Les états-limites des fonctions de performance G_1 et G_2 sont linéaires dans l'espace standard, d'où le bon résultat de la méthode FORM système dans les deux cas. La méthode AK-MCS est appliquée à la fonction composite (voir équation 4.10), où un seul méta-modèle de krigeage ayant une tendance constante et un noyau gaussien est calibré pour remplacer la fonction composite. D'après les résultats du premier cas, la méthode AK-MCS requiert 213 appels à la fonction de performance pour converger vers une valeur très proche de la valeur référence de la probabilité de défaillance. En effet, l'approximation de la fonction composite avec un seul méta-modèle peut être assez compliquée en raison des discontinuités des dérivées partielles au niveau de l'intersection des états-limites. Dans le deuxième cas d'étude, la méthode AK-MCS donne des résultats acceptables car, pour ce cas, la deuxième section ne contribue pas à la défaillance. Ainsi, la méthode traite ce cas comme un problème de fiabilité composant.

TABLEAU 4.1: Données des cas d'étude de la poutre en flexion.

Variable aléatoire (unité)	Distribution	Cas 1		Cas 2	
		Moyenne	Écart-type	Moyenne	Écart-type
h_1 (cm)	Normale	2.0	0.05	1.6	0.05
h_2 (cm)	Normale	1.6	0.05	1.6	0.05
b_1 (cm)	Normale	1.0	0.05	1.6	0.05
b_2 (cm)	Normale	0.8	0.05	1.6	0.05
F (N)	Normale	130	6.50	130	6.50
σ_y (MPa)	Normale	50.0	2.50	50.0	2.50

Les méthodes AK-SYS et AK-SYSs se différencient pour cet exemple à l'étape de la calibration des méta-modèles durant l'enrichissement. Pour rappel, AK-SYS re-calibre à chaque itération le méta-modèle ayant la valeur minimale de la prédiction moyenne de krigeage. Quant à la méthode AK-SYSs, tous les méta-modèles sont re-calibrés à chaque itération. Les deux méthodes assurent une convergence vers la valeur de référence de la probabilité. Les résultats du premier cas montrent que la méthode AK-SYSs est plus efficace en termes d'appels à la fonction de performance. En ce qui concerne le deuxième cas d'étude, les résultats permettent de conclure que AK-MCS, AK-SYS et AK-SYSs ont tous le même comportement car le système se comporte comme un seul composant avec un seul mode de défaillance. Le processus d'enrichissement des méthodes AK-SYS et AK-SYSs est toujours guidé par les fonctions qui contribuent le plus à la défaillance. En effet, les fonctions G_1 et G_2 sont utilisées presque équitablement pour guider l'enrichissement tel que présenté dans le Tableau 4.2 pour le premier cas. La fonction G_2 est ensuite complètement ignorée pour le second cas car elle ne contribue pas à la défaillance de la poutre.

TABLEAU 4.2: Résultats probabilistes de l'exemple académique pour le cas 1.

Méthode	N_g	$P_{Sys} (\delta_{P_{Sys}})$
MC	10^4	0.0156 (8%)
SOB	136	[0.0092, 0.0157]
FORM	136	0.0016
AK-MCS	213	0.0157 (8%)
AK-SYS	40 (11(IDoE)+11(G_1)+18(G_2))	0.0156 (8%)
AK-SYSs	29 (11(IDoE)+7(G_1)+11(G_2))	0.0156 (8%)

TABLEAU 4.3: Résultats probabilistes de l'exemple académique pour le cas 2.

Méthode	N_g	$P_{Sys} (\delta_{P_{Sys}})$
MC	10^4	0.0036 (10%)
SOB	185	[0.0035, 0.0035]
FORM	185	0.0035
AK-MCS	19	0.0036 (10%)
AK-SYS	19 (11(IDoE)+8(G_1)+0(G_2))	0.0036 (10%)
AK-SYSs	19 (11(IDoE)+8(G_1)+0(G_2))	0.0036 (10%)

4.5 Plaque trouée avec propriétés matériau variables spatialement

4.5.1 Description

La structure considérée ici est une plaque rectangulaire de taille 600×200 mm ayant cinq trous de 20 mm de diamètre. Un déplacement constant de 0.5 mm est imposé à l'une de ces deux extrémités tel que montré sur la Figure 4.4, tandis que l'autre extrémité est encastree. Le

matériau est supposé être linéairement élastique avec un coefficient de Poisson $\nu = 0.3$. Dans cette application, le module d'Young E est modélisé par un champ aléatoire lognormal dont la moyenne est $\mu_E = 200$ GPa et l'écart-type vaut $\sigma_E = 50$ GPa. La méthode de Karhunen-Loève (KL) (voir Section 1.2.4.2) est utilisée pour la modélisation du processus gaussien stationnaire dont la fonction d'autocorrélation est gaussienne. La longueur de corrélation est arbitrairement fixée à $3L/4$, où $L = 200$ mm est la largeur de la plaque. La décomposition KL est tronquée à $r = 18$ termes. Une réalisation du champ aléatoire du module d'Young $E(\boldsymbol{\tau})$ est illustrée sur la Figure 4.5. Le modèle éléments finis implémenté sous Abaqus est composé de 1946 nœuds. Une fonction de performance est calculée sur chacun d'entre eux, i.e. la fonction de performance G_j correspond à la fonction de performance évaluée au nœud j et elle a pour expression :

$$G_j(\mathbf{u}) = \sigma_y - \sigma_j \quad (4.32)$$

où $\sigma_y = 800$ MPa est la limite d'élasticité du matériau et σ_j est la contrainte de von Mises calculée avec le modèle éléments finis au nœud j , où $j = 1, \dots, 1946$.

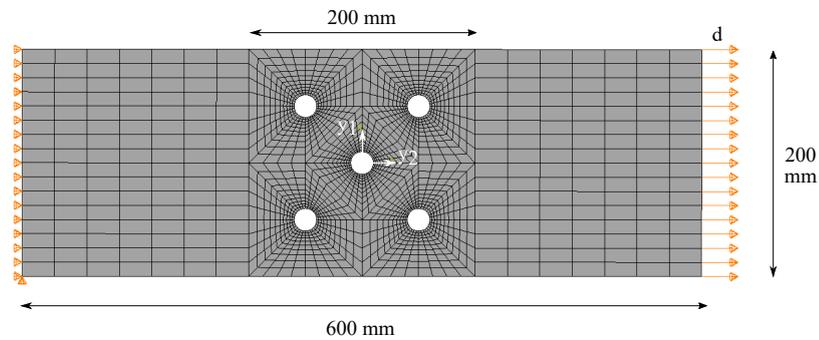


FIGURE 4.4: Maillage et conditions aux limites du modèle éléments finis de la plaque trouée.

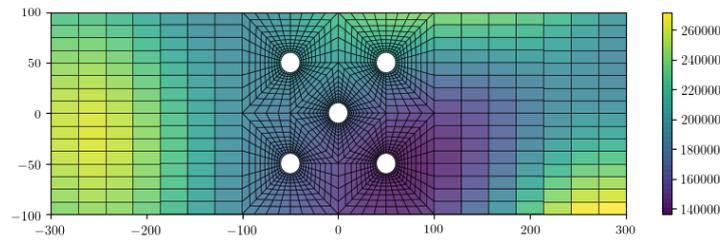


FIGURE 4.5: Une réalisation donnée du champ aléatoire du module d'Young $E(\boldsymbol{\tau})$.

4.5.2 Résultats

À des fins de comparaison, l'analyse de fiabilité est menée avec différentes méthodes telles que Monte Carlo système, SOB, FORM système, AK-MCS et l'approche proposée AK-SYSs. Il est à noter que cette dernière est présentée dans la Section 4.2.3 avec la fonction d'apprentissage U_s

exprimée par l'équation 4.18. D'autres fonctions d'apprentissage adaptées aux problèmes système peuvent être éventuellement utilisées. Ainsi, la fonction d'apprentissage U_{sr} , voir équation 4.21, est aussi testée et l'acronyme AK-SYSis correspond dans ces travaux à l'utilisation de cette fonction d'apprentissage U_{sr} avec la méthode AK-SYSs. Il est à rappeler aussi que le résultat de la méthode de Monte Carlo système fournit la valeur de référence de la probabilité de défaillance.

Les résultats obtenus avec les différentes méthodes sont regroupés dans le Tableau 4.4. Il est à noter que les méthodes AK-MCS, AK-SYSs et AK-SYSis sont appliquées avec la même population de Monte Carlo et le même plan d'expériences initial de taille 100. L'identification des zones potentielles de défaillance n'est pas une tâche aisée pour cette application. Ainsi, un ensemble réduit de zones est itérativement choisi tel que décrit dans la Section 4.2.3 pour AK-SYSs et AK-SYSis. Cet ensemble est aussi utilisé pour le calcul de la probabilité de défaillance avec la méthode FORM système. Il est à rappeler que la détermination des points de défaillance le plus probable pour les 1946 nœuds de l'application aurait nécessité des temps de calcul trop importants, une optimisation étant requise pour chaque nœud.

La méthode AK-MCS requiert 190 appels à la fonction de performance pour converger vers une valeur assez proche de la valeur de référence de la probabilité de défaillance. Il est à rappeler que cette méthode utilise un seul méta-modèle de krigeage pour approcher la fonction composite. Celle-ci peut être très irrégulière autour des intersections des différents états-limites. Les méthodes AK-SYSs et AK-SYSis estiment une probabilité de défaillance égale à la valeur de référence et avec moins d'appels à la fonction de performance par rapport à AK-MCS. La convergence de la méthode AK-SYSis nécessite 11 itérations supplémentaires par rapport à celle de AK-SYSs. Les fonctions de performance identifiées par ces deux méthodes pour l'estimation de la probabilité de défaillance sont données dans le Tableau 4.5 et sont illustrées sur la Figure 4.6. L'indice correspond au numéro du nœud dans le modèle éléments finis. Deux zones de défaillance principales situées sur le trou central (nœuds 12 et 27) sont les plus utilisées pour guider le processus d'enrichissement. Elles possèdent aussi le nombre le plus élevé de points défaillants F_p . Ces six zones ont été choisies sur la base du plan d'expériences initial et aucune fonction supplémentaire n'a été ajoutée durant l'enrichissement. Sur la base de ces résultats, la probabilité de défaillance et ces bornes du second ordre sont ensuite estimées à l'aide de FORM système. La probabilité de défaillance estimée par FORM système possède une erreur relative en valeur absolue (RAE) de 29.7%. Ceci est potentiellement dû à la forte non-linéarité des états-limites qui sont approchés par des hyperplans avec FORM système. Les bornes aussi sont supérieures à la valeur de référence et donnent un intervalle de variation assez large.

TABLEAU 4.4: Résultats de l'analyse de fiabilité de la plaque trouée avec variabilité spatiale du module d'Young, où $RAE = |P_{fMC} - \hat{P}_f|/P_{fMC}$.

Méthode	N_g	P_{Sys}	RAE
MC	50000	0.00156	–
SOB	2855	[0.00187, 0.00205]	–
FORM	2855	0.00202	29.7 %
AK-MCS	190	0.00154	1.28 %
AK-SYSs	166	0.00156	0.00 %
AK-SYSis	177	0.00156	0.00 %

TABLEAU 4.5: Fonctions de performance utilisées pour l'estimation de la probabilité de défaillance du système et sélectionnées par AK-SYSs pour la plaque trouée avec variabilité spatiale aléatoire du module d'Young. g_s indique le nombre de fois où la fonction de performance est utilisée pour guider le processus d'enrichissement. Fp représente le nombre de points défaillants selon le signe de l'approximation de la $G^{\text{ème}}$ fonction de performance.

Fonctions de performance	Ensemble initial					
	G_{39}	G_{12}	G_{27}	G_{47}	G_{37}	G_{56}
g_s	2	23	33	1	3	4
Fp	3	28	39	1	2	5

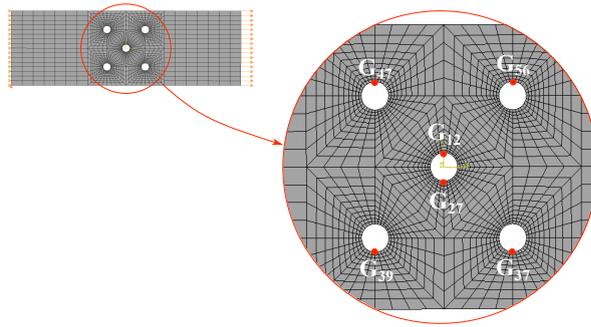


FIGURE 4.6: Zones critiques sélectionnées par AK-SYSs pour la plaque trouée avec variabilité spatiale aléatoire du module d'Young.

4.6 Plaque trouée avec propriétés du matériau et chargement aléatoires

4.6.1 Description

Les propriétés géométriques de cette application sont les mêmes que celles de la première application, voir Figure 4.4. Les variables aléatoires spatiales pour ce problème sont le chargement et le module d'Young qui sont modélisés par des champs aléatoires. Comme pour la première application la méthode KL est utilisée pour la représentation de ces champs, où la troncature est effectuée à $r = 18$ pour le module d'Young et six valeurs propres sont utilisées pour le chargement. Ces ordres de troncature font que le nombre de variables aléatoires total pour ce problème est égal à 24. Le champ aléatoire du déplacement imposé $d(\boldsymbol{\tau})$ est normal avec une moyenne $\mu_d = 0.5$ mm et un écart-type $\sigma_d = 0.05$ mm. La longueur de corrélation est prise égale à $L/4$. Une illustration d'une réalisation du champs aléatoire du chargement est donnée sur la Figure 4.7. Dans l'objectif de valider la capacité de la méthode proposée à identifier les zones potentielles, le maillage du modèle éléments finis et la limite d'élasticité sont les mêmes que ceux utilisés pour la première application.

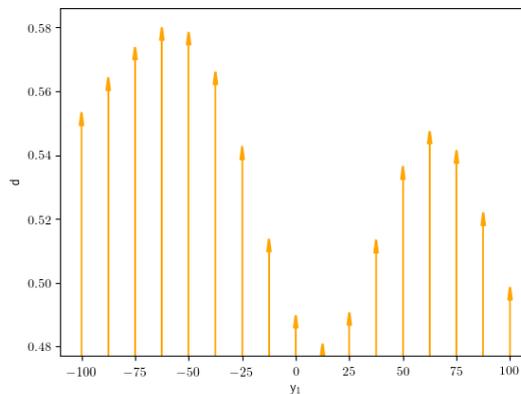


FIGURE 4.7: Une réalisation donnée du déplacement imposé $d(\tau)$.

4.6.2 Résultats

Les zones potentielles identifiées par AK-SYSs et AK-SYSis sont données dans le Tableau 4.6, où les valeurs de g_s et de F_p sont entre parenthèses pour la méthode AK-SYSis. On peut noter aussi que la fonction de performance calculée au nœud 1839 a seulement été ajoutée par le processus d'enrichissement d'AK-SYSis. L'approche proposée réussit à détecter de nouvelles zones potentielles issues de l'application du chargement aléatoire. En effet, en plus des zones détectées précédemment quand seul le module d'Young était aléatoire, de nouvelles zones apparaissent ici au niveau des points d'application du chargement, voir Figure 4.8. Les fonctions de performance initialement choisies par les méthodes AK-SYSs et AK-SYSis sont majoritairement celles qui participent le plus à la défaillance. Les fonctions de performance ajoutées sont sélectionnées durant l'enrichissement. Elles permettent à ces deux méthodes de gagner en précision. Leurs indices correspondent aux numéros des nœuds sur le modèle éléments finis, voir Figure 4.8.

En utilisant les fonctions de performance du Tableau 4.6, les calculs FORM système sont d'abord effectués. Ensuite, les bornes du second ordre sont déduites. Leurs résultats sont donnés dans le Tableau 4.7. L'intervalle fourni sur la probabilité de défaillance avec la méthode SOB ne contient pas la valeur référence. FORM système ne permet pas d'avoir une bonne estimation de la probabilité de défaillance. De plus, la convergence des optimisations effectuées pour l'obtention du point de défaillance le plus probable de chaque fonction n'est pas immédiate. Un grand nombre d'appels au modèle éléments finis est requis pour cette application avec 9195 appels au total pour les 13 fonctions de performance.

Concernant les méthodes fiabilistes basées sur le krigeage adaptatif, le même plan d'expériences initial de taille 200 est utilisé. Selon les résultats obtenus par ces méthodes (voir Tableau 4.7), AK-MCS ne converge pas vers la valeur de référence et son erreur relative en valeur absolue est de 23%. Il apparaît que le méta-modèle de krigeage est incapable d'approcher correctement l'état-limite de la fonction composite. Les méthodes AK-SYSs et AK-SYSis permettent d'avoir une meilleure estimation de la probabilité comparée à AK-MCS. Par ailleurs, l'erreur relative en valeur absolue avec AK-SYSis est la plus basse mais la méthode nécessite plus d'itérations par rapport à AK-SYSs.

TABLEAU 4.6: Fonctions de performance utilisées pour l'estimation de la probabilité de défaillance du système et sélectionnées par AK-SYSs pour la plaque trouée avec variabilité spatiale aléatoire du module d'Young et du déplacement imposé. g_s indique le nombre de fois où la fonction de performance est utilisée pour guider le processus d'enrichissement. Fp représente le nombre de points défaillants selon le signe de l'approximation de la $G^{\text{ème}}$ fonction de performance.

Fonctions G sélectionnées	Ensemble initial										Fonctions ajoutées		
	G_{27}	G_{39}	G_{12}	G_{56}	G_{1855}	G_{37}	G_{1834}	G_{47}	G_{1854}	G_{1836}	G_{1832}	G_{1835}	G_{1839}
g_s	45 (44)	11(14)	31 (47)	5 (10)	54 (49)	10 (23)	0 (0)	12 (19)	50 (52)	5 (5)	0 (0)	1 (2)	– (0)
Fp	72 (75)	14 (14)	55 (51)	11 (10)	22 (22)	9 (9)	0 (0)	10 (13)	19 (19)	2 (2)	1 (1)	1 (1)	– (0)

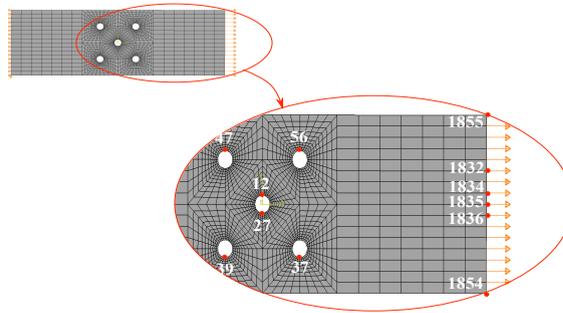


FIGURE 4.8: Zones critiques sélectionnées par AK-SYSs pour la plaque trouée avec variabilité spatiale aléatoire du module d'Young et du déplacement imposé.

4.6.3 Sensibilité au plan d'expériences initial

Dans le but d'examiner la robustesse de l'approche proposée par rapport à la variation du plan d'expériences initial, vingt plans différents avec chacun 200 points sont ici considérés. Il est à noter que la population de Monte Carlo est la même pour tous les cas considérés. Les moyennes et coefficients de variation δ de la probabilité de défaillance ainsi que le nombre d'appels au modèle éléments finis sont regroupés dans le Tableau 4.8. L'erreur moyenne relative en valeur absolue (RMAE) est aussi donnée dans le même tableau afin d'évaluer la qualité de l'estimation de la probabilité de défaillance par rapport à la valeur de référence donnée par la méthode de Monte Carlo. Les résultats montrent la robustesse des méthodes AK-SYSs et AK-SYSsis par rapport à la variation du plan d'expériences initial. Comparées à la méthode AK-MCS, ces deux méthodes requièrent moins d'itérations pour converger vers des valeurs assez proches de la valeur de référence de la probabilité de défaillance. La méthode AK-SYSsis donne des résultats un peu meilleurs que AK-SYSs en termes de robustesse et de qualité d'estimation de la probabilité de défaillance. Toutefois, sa convergence est plus lente et nécessite un peu plus d'itérations. En effet, l'évolution des valeurs estimées de la probabilité de défaillance telle qu'illustrée sur la Figure 4.9 montre bien que AK-SYSs converge plus rapidement que AK-SYSsis et AK-MCS. Cette figure illustre les courbes d'évolution de 10 calculs parmi les 20 effectués. Chaque courbe est annotée par un marqueur pour bien identifier les courbes des méthodes AK-MCS, AK-SYSs et AK-SYSsis qui ont le même plan d'expériences initial. La majorité des courbes tracées pour AK-SYSs et AK-SYSsis convergent vers la valeur de référence de la probabilité de défaillance, ce qui n'est pas le cas pour la méthode AK-MCS.

TABLEAU 4.7: Résultats de l'analyse de fiabilité de la plaque trouée avec variabilité spatiale du module d'Young et du déplacement imposé.

Méthode	N_g	P_{Sys}	RAE
MC	50000	0.00452	–
SOB	9195	[0.00507, 0.00591]	–
FORM	9195	0.00538	19.5 %
AK-MCS	439	0.00348	23 %
AK-SYSs	424	0.00432	4.42 %
AK-SYSis	465	0.00434	3.98 %

TABLEAU 4.8: Sensibilité des méthodes à différents plans d'expériences de même taille.

Méthode	N_g	δ_{N_g}	P_{Sys}	$\delta_{P_{Sys}}$	RMAE
MC	50000	–	0.00452	–	–
AK-MCS	492.35	26%	0.00352	2.95 %	22%
AK-SYSs	404.00	21%	0.00412	8.04 %	8.73 %
AK-SYSis	460.86	12%	0.00428	6.05 %	5.19 %

4.6.4 Effets de la taille du plan d'expériences initial

L'effet de la taille du plan d'expériences initial sur les résultats des méthodes AK-MCS, AK-SYSs et AK-SYSis est examiné dans cette partie. Le Tableau 4.9 résume les résultats obtenus. Pour chaque méthode et chaque taille du plan d'expériences initial la probabilité de défaillance, le nombre de points enrichis et l'ensemble des fonctions de performance sélectionnées par AK-SYSs et AK-SYSis sont donnés. L'ensemble des fonctions de performance initiales et les fonctions ajoutées durant l'enrichissement est donné sur les deux dernières lignes du tableau. Les fonctions ajoutées par les deux méthodes AK-SYSs et AK-SYSis sont quasiment les mêmes. Les fonctions supplémentaires ajoutées uniquement dans le cadre de la méthode AK-SYSis sont mises entre parenthèses dans ce tableau.

L'estimation de la probabilité de défaillance par la méthode AK-MCS reste mauvaise quelle que soit la taille du plan d'expériences initial. Le nombre de points enrichis par cette méthode augmente avec la taille du plan d'expériences initial. La performance des méthodes AK-SYSs et AK-SYSis s'améliore quand la taille du plan d'expériences initial augmente. Ces méthodes peuvent oublier certaines zones critiques si la taille du plan d'expériences n'est pas suffisamment grande, pour 100 et 150 points initiaux par exemple. Pour 250 points initiaux, AK-SYSis est plus performante que AK-SYSs. Cette dernière réussit à détecter les zones les plus critiques mais la fonction de performance G_{1855} n'a jamais été utilisée pour guider le processus d'enrichissement et la qualité du krigeage correspondant n'a pas été améliorée dans les sous-domaines d'intérêt. Cette information manquante a un impact sur le nombre de points défaillants dans cette zone. Pour des plans d'expériences de taille initiale supérieure ou égale à 300, les probabilités de défaillance estimées par AK-SYSs et AK-SYSis se rapprochent le plus de la valeur de référence tout en ayant dans les deux cas la même

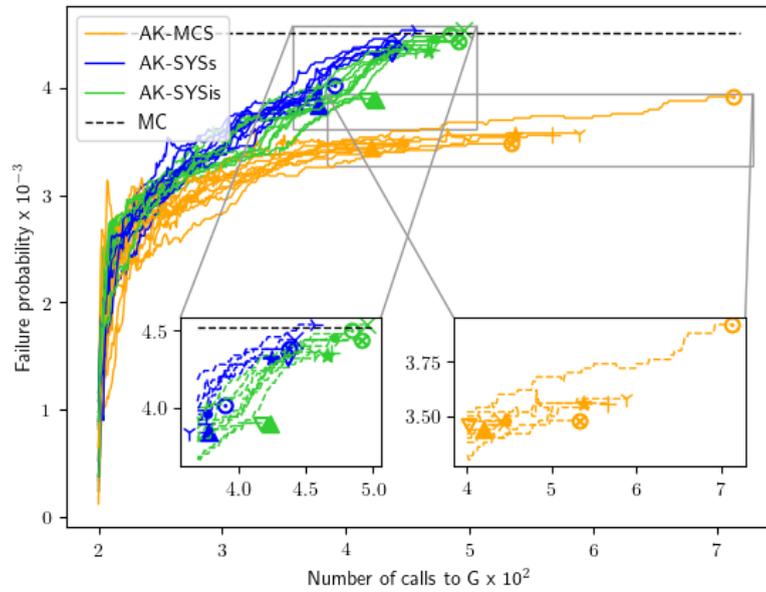


FIGURE 4.9: Évolution de la probabilité de défaillance pour différents plans d'expériences de même taille. Le marqueur indiqué en fin de chaque courbe permet d'identifier les calculs qui se basent sur les mêmes plans d'expériences.

évolution tel qu'illustré sur la Figure 4.10. Cependant, la méthode AK-SYSis reste plus exigeante en termes de nombre d'appels au modèle éléments finis et sa convergence est toujours moins rapide que celle d'AK-SYSs.

4.7 Analyses et discussions

Les résultats obtenus pour le problème de plaque trouée étudié dans les Sections 4.5-4.6 ont montré l'efficacité de l'approche proposée, qui permet de sélectionner la majorité des zones critiques. Ceci permet d'avoir une bonne estimation de la probabilité de défaillance d'un problème soumis à une variabilité spatiale aléatoire avec un coût de calcul réduit. Néanmoins, une étude plus approfondie sur l'interaction entre les différents modes de défaillance pourrait mener à une compréhension plus en profondeur des résultats obtenus.

En utilisant les résultats de FORM système (voir Section 4.2.2), les corrélations entre les zones de défaillance peuvent être calculées. Elles permettent d'obtenir une interprétation des interactions entre les différentes fonctions de performance. Les résultats regroupés dans le Tableau 4.10 concernent uniquement la seconde application, plaque trouée avec propriétés du matériau et chargement aléatoire (voir Section 4.6). Les corrélations entre les zones critiques de la première application ($G_{12,27,37,39,47,56}$) sont à peu près les mêmes que celles qui sont données dans le Tableau 4.10. Une corrélation assez élevée est constatée entre les zones critiques centrales. D'un point de vue géométrique, les états-limites des couples $G_{12,27}$, $G_{37,39}$, $G_{47,56}$ sont approximativement parallèles et sont positivement corrélés. Concernant les autres couples de la zone centrale, les corrélations sont aussi positives et elles sont supérieures à 0.48. Cela veut dire que leurs intersections mutuelles forment des angles obtus proches de 180° . Les zones critiques situées au niveau de l'extrémité

TABLEAU 4.9: Sensibilité à la taille du plan d'expériences initial.

Taille du IDoE	100	150	200	250	300	350	400	
AK-MCS : P_{Sys}	0.00346	0.0035	0.00348	0.00348	0.00344	0.00356	0.00356	
Points ajoutés	222	263	264	248	309	322	312	
AK-SYSs : P_{Sys}	0.00348	0.00396	0.00432	0.00398	0.00444	0.00442	0.00444	
Points ajoutés	142	194	224	167	215	194	187	
AK-SYSis : P_{Sys}	0.00348	0.00398	0.00434	0.00444	0.00444	0.00446	0.00446	
Points ajoutés	188	240	265	259	240	243	271	
Ensemble initial de G	39, 1834, 27, 47, 12, 37, 1832, 56	39, 1834, 27, 47, 12, 37, 1832, 56, 1854	39, 1834, 27 47, 12, 37, 56, 1854, 1855, 1836	39, 1834, 27, 47, 12, 37, 1832, 56, 1854, 1855, 1836	39, 1834, 27, 47, 12, 37, 1832, 56, 1854, 1855, 1836	39, 1834, 27, 47, 12, 37, 1832, 56, 1854, 1855, 1836	39, 1834, 27, 47, 12, 37, 1832, 56, 1854, 1855, 1836	39, 1834, 27, 47, 12, 37, 1832, 56, 1854, 1855, 1836
Fonctions G ajoutées	1833	1835, 1836, 1833	1835, 1832 (1839)	1835, 1833 (1830)	1835, 1833, 1830	1835, 1833, 1830 (1839)	1835, 1833, 1830	

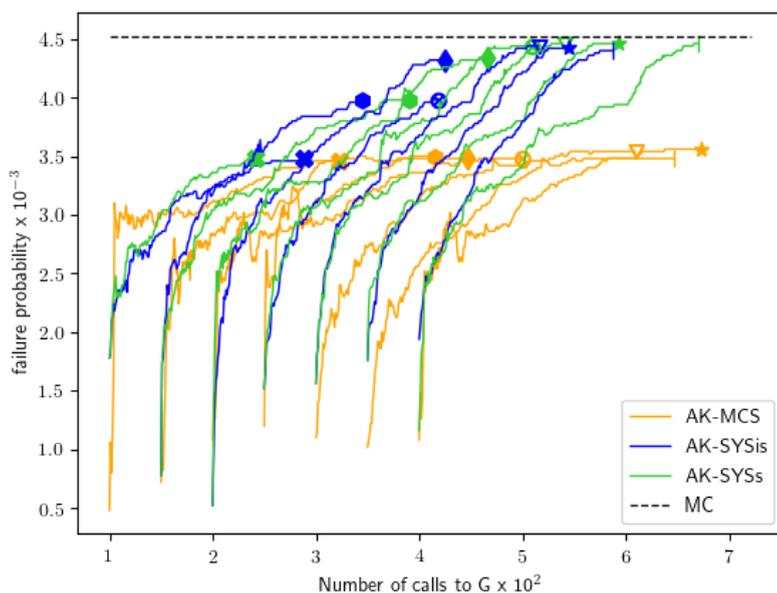


FIGURE 4.10: Évolution de la convergence de la probabilité de défaillance pour différentes tailles du plan d'expériences initial.

droite, voir Figure 4.8, sont moins corrélées entre elles et aussi moins corrélées avec les zones critiques centrales (voir les valeurs en bleue du Tableau 4.10). Leurs intersections forment plutôt des angles droits et/ou très aigus. Les interactions entre ces différentes fonctions de performance peuvent expliquer les résultats obtenus avec AK-MCS. Dans la première application, les coins formés par les intersections ne sont pas très pointus grâce à la forte corrélation entre les fonctions de performance considérées pour l'estimation de la probabilité de défaillance. La fonction composite dans cette application est par conséquent régulière, ce qui rend son approximation par la méthode AK-MCS presque aussi efficace qu'avec les autres méthodes. Dans la seconde application, les faibles corrélations, voire les corrélations négatives, font apparaître des intersections très pointues. Leur approximation par un seul méta-modèle explique les difficultés de convergence de la méthode AK-MCS vers la valeur de référence de la probabilité de défaillance. L'utilisation de l'approche AK-SYSs permet de contourner ce problème étant donné qu'elle n'est pas influencée par la forme de l'état-limite composite.

TABLEAU 4.10: Corrélation entre les fonctions de performance sélectionnées par AK-SYSs.

G	12	27	37	39	47	56	1832	1834	1835	1836	1839	1854	1855
12	1.00	0.99	0.79	0.79	0.87	0.87	0.32	0.32	0.32	0.31	0.28	0.13	0.13
27		1.00	0.87	0.87	0.79	0.79	0.30	0.32	0.32	0.32	0.32	0.13	0.14
37			1.00	0.99	0.48	0.48	0.18	0.24	0.28	0.32	0.40	0.08	0.17
39				1.00	0.48	0.48	0.17	0.24	0.28	0.32	0.40	0.08	0.17
47					1.00	0.99	0.38	0.32	0.28	0.24	0.15	0.16	0.09
56						1.00	0.38	0.32	0.28	0.25	0.15	0.17	0.08
1832							1.00	0.69	0.38	0.10	0.04	0.24	-0.02
1834								1.00	0.89	0.61	-0.02	0.37	0.37
1835									1.00	0.89	0.09	0.43	0.44
1836										1.00	0.35	0.37	0.38
1839											1.00	-0.22	0.25
1854												1.00	-0.10
1855													1.00

■ $0.40 < \rho_{ij} \leq 1$
■ $-0.40 \leq \rho_{ij} \leq 0.40$

4.8 Conclusions

Ce chapitre propose une extension de la méthode AK-SYS aux problèmes soumis à une variabilité spatiale. L'estimation de la probabilité de défaillance pour de tels problèmes implique généralement une minimisation de la fonction de performance sur tout l'espace des coordonnées afin d'identifier la zone critique de défaillance. Cette dernière est supposée être unique et n'est identifiée qu'une seule fois sans prise en compte d'une éventuelle possibilité de changement ou d'apparition de nouvelles zones causée par l'aléa spatial. Cette hypothèse peut avoir des conséquences indésirables sur les résultats de l'analyse de fiabilité. Le problème est souvent simplifié par la discrétisation de l'espace en un nombre réduit de zones. Seules les zones les plus critiques sont sélectionnées pour l'analyse de fiabilité. Ainsi, le problème est converti en un problème système et sa probabilité de défaillance est définie comme étant une probabilité de défaillance système. L'approche proposée, ici appelée AK-SYSs, a pour objectif de localiser les zones critiques de défaillance sans hypothèses préalables sur leurs localisations dans l'espace. Elle sélectionne d'abord très peu de zones critiques sur la base des valeurs de la fonction de performance évaluée sur les points du plan d'expériences initial. Ensuite, de nouvelles zones sont ajoutées durant le processus d'enrichissement du krigeage adaptatif. Ce dernier est utilisé pour remplacer chacune des fonctions de performance définies sur les zones critiques. La méthode permet de trouver les zones critiques de défaillance et de définir un plan d'expériences approprié en utilisant un processus d'apprentissage.

L'efficacité de la méthode proposée est examinée au travers d'un exemple illustratif et de deux applications. Le premier réussit à illustrer l'efficacité de la méthode avec une bonne estimation de la probabilité de défaillance et avec un nombre réduit d'appels à la fonction de performance. Pour mettre en valeur la stratégie de sélection des zones critiques, deux applications basées sur le même modèle mécanique aux éléments finis et avec variabilité spatiale aléatoire du module d'Young sont considérées. Elles se différencient par les conditions aux limites qui sont déterministes pour la première et aléatoires pour la seconde. Dans la première application, les zones critiques sélectionnées se situent autour des trous. Dans la seconde application, la méthode réussit à détecter de nouvelles zones critiques qui sont situées sur l'extrémité droite de la plaque, aux points d'application du déplacement. La méthode AK-SYSs permet d'obtenir une meilleure précision et une meilleure ro-

bustesse avec un effort numérique réduit par rapport à la méthode AK-MCS. Cette dernière utilise un seul méta-modèle de krigeage pour approcher la fonction composite du système qui peut être irrégulière au niveau des intersections des états-limites. Ceci rend la méthode plus exigeante en termes d'efforts numériques sans pour autant garantir plus de précision. Il est important de souligner que la méthode AK-SYSs telle qu'elle est présentée dans la Section 4.2.3 peut être sensible à la taille du plan d'expériences initial. Quand la taille n'est pas suffisamment grande, l'approche peut oublier des zones de défaillance critiques importantes. Pour cette raison, la fonction d'apprentissage proposée par Yun *et al.* (2019) dans le cadre de la méthode AK-SYSi a été testée aussi. Son utilisation pour la méthode AK-SYSs permet effectivement d'améliorer légèrement la sensibilité au plan d'expériences initial. Toutefois, sa convergence vers la valeur de référence de la probabilité de référence est moins rapide qu'avec AK-SYSs.

Pour de futurs travaux, des méthodes de fiabilité système plus récentes telle que la méthode EEK-SYS proposée par Jiang *et al.* (2020) pourraient aussi être appliquées pour les problèmes soumis à la variabilité spatiale. La stratégie de recherche active des zones critiques de défaillance proposée dans ces travaux peut en effet être couplée avec cette méthode. La combinaison de AK-SYSs avec les techniques de réduction de la variance doit aussi être envisagée pour traiter les problèmes à faibles probabilités de défaillance. Enfin, il est à rappeler que ces travaux concernent uniquement les problèmes soumis à une variabilité spatiale. On peut noter que l'analyse de fiabilité des problèmes dépendants du temps et l'analyse des tolérances des mécanismes hyperstatiques possèdent des formulations très similaires au problème traité. En effet, la détermination de leurs probabilités de défaillance respectives passent toutes par la minimisation de la fonction de performance sur un certain domaine. Ce dernier est l'espace des coordonnées pour les variables spatiales, un intervalle de temps quand la variabilité est temporelle ou un ensemble de positions des pièces les unes par rapport aux autres dans les mécanismes hyperstatiques. La pratique commune à toutes ces applications est le calcul de la probabilité de défaillance en un seul minima déterminé pour une réalisation des variables aléatoires. Ce minima peut être un point de l'espace, un temps ou une position. Tel que déjà expliqué, cette pratique pénalise la valeur de la probabilité calculée car elle risque d'omettre des zones, des temps ou des positions ayant une contribution importante dans la défaillance. La méthode AK-SYSs proposée pour les problèmes à variabilité spatiale pourrait aussi être appliquée à ces types de problèmes. L'objectif serait donc d'utiliser la stratégie de recherche active de zones, de temps et/ou de position afin d'éviter des choix *a priori*.

Conclusions & Perspectives

Conclusions

Le coût de calcul des modèles numériques utilisés pour modéliser la défaillance reste un frein important en analyse de fiabilité, en raison du grand nombre d'appels nécessaires pour l'estimation des probabilités de défaillance. Les méthodes de résolution usuelles restent encore exigeantes en temps de calcul pour les modèles numériques complexes à évaluer, et ce malgré les grandes avancées faites sur leur efficacité. La substitution de ces modèles par des approximations mathématiques dont le temps d'évaluation est largement réduit est une alternative prometteuse vers laquelle de nombreux chercheurs se sont orientés. Ces modèles mathématiques sont appris à partir d'évaluations du modèle numérique substitué, ils sont appelés méta-modèles dans ce mémoire. Cette thèse a porté sur le développement de nouvelles méthodes fiabilistes basées sur les méta-modèles, notamment le krigeage adaptatif, afin de gérer au mieux le caractère onéreux des modèles numériques. La réduction en terme de nombre d'appels au modèle coûteux à évaluer est importante, d'autant plus importante que la population de Monte Carlo est grande. Les développements proposés dans cette thèse s'inscrivent ainsi dans le contexte de l'apprentissage à partir d'un nombre limité d'évaluations du modèle onéreux.

Les travaux de cette thèse ont pris deux directions principales. La première est motivée par la question du choix du méta-modèle. Les utilisateurs sont souvent contraints de faire des choix ad hoc et arbitraires. Pour certaines applications, ce choix peut ne pas avoir de conséquences graves sur la qualité d'approximation du méta-modèle choisi. Toutefois, pour d'autres applications, un mauvais choix de méta-modèle peut induire une approximation trop imprécise, ce qui influence directement la qualité de l'estimateur de la probabilité de défaillance en analyse de fiabilité. La deuxième problématique abordée dans cette thèse s'est concentrée sur l'analyse de fiabilité des structures sujettes à une variabilité spatiale par des méthodes de fiabilité système basées sur le krigeage adaptatif. Ce travail a été motivé par la rareté voire l'inexistence des travaux de recherche dans ce domaine. Pour ce type de problèmes, l'apparition potentielle de plusieurs lieux de défaillance en raison de l'existence de l'aléa spatial est souvent ignorée. En effet, la pratique habituelle consiste à identifier un seul lieu de défaillance sur lequel une analyse de fiabilité composant est effectuée. Cette considération peut avoir des conséquences indésirables sur la qualité de l'estimation de la probabilité de défaillance.

Afin de répondre à la question du choix des méta-modèles, nous avons opté pour l'agrégation des prédictions d'un ensemble de méta-modèles. Nous avons donc proposé d'agréger les prédictions de trois krigeages ordinaires avec différents noyaux. Cette agrégation est effectuée par une moyenne pondérée. Le choix des poids est d'une grande importance pour la qualité de l'approximation, avec des poids élevés pour les meilleurs méta-modèles et des poids faibles pour les moins précis. Une nouvelle méthode notée AKE-MCS a été proposée pour l'estimation de la probabilité de défaillance

en utilisant un ensemble de krigeages dans le processus d'enrichissement de la méthode AK-MCS. L'agrégation des prédictions de krigeage est effectuée avec les techniques de pondération existantes dont certaines sont présentées dans le Chapitre 3. En plus de ces techniques, nous avons proposé, dans le cadre de la méthode AKE-MCS, une nouvelle technique de pondération ponctuelle basée sur la probabilité qu'un point soit mal classé par chacun des méta-modèles individuels considérés. Ainsi, un poids important est attribué au méta-modèle ayant la plus faible probabilité de mal classer un certain point de prédiction. La fonction d'apprentissage de la méthode proposée est un autre volet sur lequel nous avons travaillé. Une nouvelle fonction basée sur la probabilité de mauvais classement d'un point de prédiction par l'ensemble a été proposée. Un nouveau critère de convergence a été d'autre part ajouté. Le processus d'enrichissement s'arrête, si le taux du nombre de points ayant une forte probabilité d'être mal classés par l'ensemble ne dépasse pas un certain seuil. Ce critère permet d'avoir une certaine tolérance par rapport au nombre de points mal classés par l'ensemble si ces derniers n'influencent pas trop la valeur de la probabilité de défaillance estimée. Les résultats de l'application de cette méthode sur différents exemples académiques confirment davantage les motivations de ce travail car il a été constaté au final qu'aucun des méta-modèles individuels considérés n'a été toujours le meilleur pour toutes les applications. Certains avaient même de très mauvaises approximations et par conséquent des valeurs de probabilité de défaillance inexactes. Ceci n'est pas le cas de la méthode proposée qui s'est montrée assez robuste par rapport à la diversité des applications. L'utilisation de la méthode AKE-MCS avec d'autres techniques de pondération existantes a aussi été considérée. Il a été constaté que les techniques ponctuelles étaient les plus efficaces et les moins sensibles à la complexité des états-limites dans les applications considérées.

Concernant la prise en compte de l'aléa spatial lors d'une analyse de fiabilité, nous avons d'abord privilégié les méthodes de fiabilité système pour la prise en compte de tous les lieux possibles de la défaillance. L'enjeu principal de ces problèmes est la définition des lieux qui sont généralement méconnus à l'avance. Nous avons donc proposé une extension de la méthode AK-SYS à ce type de problématique afin de gérer l'aspect système et de détecter les lieux de défaillance potentiels. Deux améliorations ont donc été apportées par la méthode proposée AK-SYSs. La première amélioration consiste à combiner un processus de recherche actif des lieux de défaillance avec le processus d'enrichissement de la méthode AK-SYS. Pour ce faire, le plan d'expériences initial nous permet d'abord de définir un ensemble initial de lieux à haut risque de défaillance. Ensuite, cet ensemble est progressivement enrichi durant le processus d'apprentissage. Il est à noter qu'en chaque lieu potentiel sélectionné, une fonction de performance est définie et un krigeage est calibré. Par ailleurs, la nature du problème traité permet d'avoir simultanément la réponse en chaque lieu de l'espace via un seul appel au modèle numérique, d'où la deuxième amélioration. Cette dernière consiste en une re-calibration de tous les méta-modèles à chaque itération sans aucun effort numérique supplémentaire lié à l'évaluation des fonctions de performance. Les valeurs de ces dernières sont obtenues simultanément à chaque itération. La méthode proposée a ensuite été testée et validée sur un exemple académique et deux applications impliquant un code de calcul par éléments finis. Les résultats montrent une certaine efficacité pour la détection des lieux de défaillance potentiels via la constitution d'un plan d'expériences approprié.

Perspectives

Bien que les développements présentés dans cette thèse aient apporté des éléments de réponses aux problématiques posées, plusieurs aspects restent à approfondir et à explorer.

Perspectives de la méthode AKE-MCS

L'utilisation d'un ensemble de méta-modèles s'est montrée efficace pour s'affranchir du choix *a priori* des méta-modèles. Ce succès est conditionné par deux aspects principaux qui sont : la variété et la pondération. L'aspect de variété a été abordé dans la méthode AKE-MCS en utilisant un ensemble de krigeages ayant différents noyaux. Cependant, il existe bien évidemment d'autres types de méta-modèles tels que les SVMs, les réseaux de neurones et le chaos polynomial qui peuvent être considérés dans une approche ensemble de méta-modèles. Les hypothèses et les bases mathématiques sur lesquelles ces méta-modèles sont fondés peuvent apporter des informations importantes à la prédiction de l'ensemble, surtout s'ils ont des prédictions différentes et de faibles variances. Ainsi, la considération de différents types de méta-modèles pour la constitution d'un ensemble pourrait être une piste à explorer qui pourrait permettre d'améliorer davantage l'efficacité de la méthode. Il serait intéressant aussi d'assurer la variété dans l'ensemble en calibrant les méta-modèles sur différents plans d'expériences. Ces derniers pourraient être constitués avec des techniques qui sont largement utilisées en machine learning. Le *bagging* par exemple est l'une de ces techniques. Il consiste en un tirage aléatoire avec remise de m plans d'expériences individuels pour les m méta-modèles membres de l'ensemble à partir du plan d'expérience original. Le tirage avec remise permet potentiellement la mise en place d'un ensemble de méta-modèles à partir d'un nombre d'évaluations limité du modèle numérique onéreux.

Par ailleurs, nous avons constaté que la convergence de la méthode AKE-MCS est assez souvent perturbée par la présence d'un ou de plusieurs méta-modèles ayant une mauvaise approximation. Même si de faibles poids sont attribués à ce dernier, sa présence dans l'ensemble affecte tout de même l'efficacité de la méthode. Par conséquent, pour des travaux futurs, il serait important d'écarter les méta-modèles ayant de mauvaises prédictions par la mise en place d'un critère de sélection pour la constitution des membres de l'ensemble. De plus, étant donné que la qualité des membres écartés peut s'améliorer grâce à l'information apportée par les nouveaux points enrichis, une mise à jour des membres de l'ensemble à chaque itération pourrait aussi être envisagée, si besoin. Le problème des mauvaises approximations peut aussi être traité différemment en jouant sur la pondération. Nous avons opté dans cette thèse pour des poids qui sont compris entre 0 et 1. Or, des plages de variation de $[-1, 1]$ peuvent aussi être envisagées pour éliminer l'effet des mauvaises approximations.

Dans le contexte des faibles probabilités, la méthode AKE-MCS n'est pas la plus efficace vu que l'estimation de la probabilité de défaillance s'appuie sur la méthode de Monte Carlo. Une adaptation de la méthode avec une éventuelle utilisation des tirages d'importance ou des subset simulations pourrait être envisagée pour de futurs travaux.

Il est clair cependant que la mise en œuvre des propositions évoquées ci-avant implique l'utilisation d'algorithmes assez complexes et engendre des coûts de calcul assez importants liés à la calibration de plusieurs méta-modèles. Il serait donc important de travailler sur la simplicité de ces algorithmes tout en gardant la qualité de prédiction attendue des ensembles des méta-modèles.

Perspectives de la méthode AK-SYSs

La méthode AK-SYSs a été proposée dans ce travail pour traiter les problèmes soumis à une variabilité spatiale. Elle permet de détecter les lieux du domaine à haut risque de défaillance tout en raffinant les prédictions de krigeages dans le cadre du processus d'enrichissement de leur plan d'expériences avec le principe de la méthode AK-SYS. Une éventuelle utilisation d'autres méthodes

de fiabilité système plus récentes telle que la méthode EEK-SYS proposée par Jiang *et al.* (2020) pourrait être une perspective. Il serait aussi intéressant d'étendre l'utilisation de cette méthode aux problèmes à très faibles probabilités de défaillance en la combinant avec les techniques de réduction de variance.

Par ailleurs, il est important de souligner que la méthode proposée considère que les états-limites sélectionnés pour l'estimation de la probabilité de défaillance sont complètement indépendants. Or, ce n'est clairement pas le cas compte tenu de la corrélation spatiale. Cette hypothèse est peut être la cause d'un plan d'expérience de taille assez élevée pour avoir une faible sensibilité au changement du plan d'expérience. La prise en compte de cette corrélation avec le cokrigeage pourrait par exemple être une piste à explorer pour de futurs travaux.

L'utilisation de la méthode proposée peut être aussi étendue à d'autres problèmes de l'analyse de fiabilité dont la formulation est très proche du problème traité, notamment l'analyse de fiabilité des problèmes dépendants du temps et l'analyse des tolérances des mécanismes hyperstatiques. Le calcul de la probabilité de défaillance de ces problèmes implique aussi une minimisation de la fonction de performance sur un intervalle de temps pour le premier type de problèmes et un ensemble de positions des pièces les unes par rapport aux autres pour le second. Tel qu'expliqué précédemment pour les problèmes soumis à une variabilité spatiale, l'estimation de la probabilité de défaillance se fait généralement en un seul minima (un temps ou une position) pour ces autres problèmes aussi. La forte hypothèse de l'unicité du temps ou de la position peut avoir des conséquences indésirables sur la valeur de la probabilité de défaillance calculée. Ainsi, il serait plus judicieux de prendre en compte l'effet de l'aléa en considérant plusieurs temps pour les problèmes dépendants du temps ou plusieurs positions pour l'analyse des tolérances des mécanismes hyperstatiques comme ce qui a été proposé pour les problèmes dépendants de l'aléa spatial dans le cadre de la méthode proposée. La perspective serait donc d'utiliser une stratégie de recherche active de temps ou de positions afin d'éviter des calculs basés sur une unique optimisation de la variable d'intérêt.

Enfin, il est à rappeler qu'un krigeage ordinaire à noyau gaussien a été utilisé pour tous les méta-modèles de la méthode AK-SYSs. Ce choix est arbitraire et une comparaison avec d'autres configurations de krigeage n'a pas été possible pour une contrainte de temps liée aux calibrations multiples des méta-modèles. De plus, les deux applications considérées pour la validation de ce travail ont impliqué un modèle éléments finis dont le temps de calcul n'était pas négligeable vu le nombre d'itérations requises à la convergence et le nombre de méta-modèles calibrés à chaque itération. Par conséquent, l'utilisation d'ensemble de méta-modèles pourrait être une piste à explorer afin d'éviter les choix *ad hoc* de méta-modèles dans un contexte de variabilité spatiale. Cependant, la contrainte liée aux efforts numériques est un verrou qu'il sera important d'alléger. En effet, des temps de calcul assez conséquents peuvent être engendrés par une calibration de $m \times p$ méta-modèles, où m est le nombre de méta-modèles dans l'ensemble et p est le nombre de lieux de défaillance à prendre en compte pour l'estimation de la probabilité de défaillance système.

Bibliographie

- Simon ABRAHAM, Mehrdad RAISEE, Ghader GHORBANIASL, Francesco CONTINO et Chris LACOR : A robust and efficient stepwise regression method for building sparse polynomial chaos expansions. *Journal of Computational Physics*, 332:461–474, 2017.
- Mona ABTINI : *Plans prédictifs à taille fixe et séquentiels pour le krigeage*. Thèse de doctorat, Ecole centrale Lyon, 2018.
- Erdem ACAR : Various approaches for constructing an ensemble of metamodels using local measures. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 42(6):879–896, 2010.
- Erdem ACAR : Effect of error metrics on optimum weight factor selection for ensemble of metamodels. *Expert Systems with Applications*, 42(5):2703–2709, 2015.
- Erdem ACAR et Masoud RAIS-ROHANI : Ensemble of metamodels with optimized weight factors. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 37(3):279–294, 2009.
- Erdem ACAR et Kiran SOLANKI : System reliability based vehicle design for crashworthiness and effects of various uncertainty reduction measures. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 39(3):311–325, 2009.
- Morteza AHMADIVALA : *Towards optimal maintenance planning of existing structures based on time-dependent reliability analysis*. Thèse de doctorat, Université Clermont Auvergne, 2020.
- Morteza AHMADIVALA, Bartłomiej SAWICKI, Eugen BRÜHWILER, Thierry YAMALAS, Nicolas GAYTON, Cécile MATTRAND et André ORCESI : Application of time series methods on long-term structural monitoring data for fatigue analysis. *In 13th International Conference on Applications of Statistics and Probability in Civil Engineering, ICASP13*, 2019.
- Andres ALBAN, Hardik A DARJI, Atsuki IMAMURA et Marvin K NAKAYAMA : Efficient monte carlo methods for estimating failure probabilities. *Reliability Engineering & System Safety*, 165:376–394, 2017.
- Umberto ALIBRANDI, Amir M ALANI et Giuseppe RICCIARDI : A new sampling strategy for svm-based response surface for structural reliability analysis. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 41:1–12, 2015.
- Chahrazed AMRANE, Cécile MATTRAND, Pierre BEAUREPAIRE, Jean-Marc BOURINET et Nicolas GAYTON : On the use of ensembles of metamodels for estimation of the failure probability. *In UNCECOMP 2019 3rd ECCOMAS Thematic Conference on Uncertainty Quantification in Computational Sciences and Engineering*, 2019.

- George L ANG, Alfredo H-S ANG et Wilson H TANG : Optimal importance-sampling density estimator. *Journal of engineering mechanics*, 118(6):1146–1163, 1992.
- Søren ASMUSSEN et Peter W GLYNN : *Stochastic simulation : algorithms and analysis*, volume 57. Springer Science & Business Media, 2007.
- Rebecca ATADERO, Luke LEE et Vistasp M KARBHARI : Consideration of material variability in reliability analysis of frp strengthened bridge decks. *Composite Structures*, 70(4):430–443, 2005.
- Siu-Kui AU et James L BECK : Estimation of small failure probabilities in high dimensions by subset simulation. *Probabilistic engineering mechanics*, 16(4):263–277, 2001.
- Siu-Kui AU, Costas PAPANITRIOU et James L BECK : Reliability of uncertain dynamical systems with multiple design points. *Structural Safety*, 21(2):113–133, 1999.
- Vikrant AUTE, Khaled SALEH, Omar ABDELAZIZ, Shapour AZARM et Reinhard RADERMACHER : Cross-validation based single response adaptive design of experiments for kriging metamodeling of deterministic computer simulations. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 48(3):581–605, 2013.
- François BACHOC : *Estimation paramétrique de la fonction de covariance dans le modèle de krigeage par processus gaussiens : application à la quantification des incertitudes en simulation numérique*. Thèse de doctorat, Université de Paris 7, 2013.
- François BACHOC, José BÉTANCOURT, Reinhard FURRER, Thierry KLEIN *et al.* : Asymptotic properties of the maximum likelihood and cross validation estimators for transformed gaussian processes. *Electronic Journal of Statistics*, 14(1):1962–2008, 2020.
- Mathieu BALESDENT, Jérôme MORIO et Loïc BREVAULT : Rare event probability estimation in the presence of epistemic uncertainty on input probability distribution parameters. *Methodology and Computing in Applied Probability*, 18(1):197–216, 2016.
- Mathieu BALESDENT, Jerome MORIO et Julien MARZAT : Kriging-based adaptive importance sampling algorithms for rare event estimation. *Structural Safety*, 44:1–10, 2013.
- Michaël BAUDIN, Anne DUTFOY, Bertrand IOOSS et Anne-Laure POPELIN : *OpenTURNS : An Industrial Software for Uncertainty Quantification in Simulation*, pages 1–38. Springer International Publishing, Cham, 2016.
- Julien BECT, Ling LI et Emmanuel VAZQUEZ : Bayesian subset simulation. *SIAM/ASA Journal on Uncertainty Quantification*, 5(1):762–786, 2017.
- Richard Martin BENNETT et AH-S ANG : Investigation of methods for structural system reliability. Rapport technique, University of Illinois Engineering Experiment Station., 1983.
- Barron J BICHON, Michael S ELDRED, Laura Painton SWILER, Sandaran MAHADEVAN et John M MCFARLAND : Efficient global reliability analysis for nonlinear implicit performance functions. *AIAA journal*, 46(10):2459–2468, 2008.
- Barron J BICHON, John M MCFARLAND et Sankaran MAHADEVAN : Efficient surrogate models for reliability analysis of systems with multiple failure modes. *Reliability Engineering & System Safety*, 96(10):1386–1395, 2011.

- Géraud BLATMAN : *Chaos polynomial creux et adaptatif pour la propagation d'incertitudes et l'analyse de sensibilité*. Thèse de doctorat, Université Blaise Pascal Clermont 2, 2009.
- Géraud BLATMAN et Bruno SUDRET : Adaptive sparse polynomial chaos expansion based on least angle regression. *Journal of Computational Physics*, 230(6):2345–2367, 2011.
- Manuel BOMPARD : *Modèles de substitution pour l'optimisation globale de forme en aérodynamique et méthode locale sans paramétrisation*. Thèse de doctorat, Université de Nice-Sophia Antipolis, 2011.
- Bernhard E BOSER, Isabelle M GUYON et Vladimir N VAPNIK : A training algorithm for optimal margin classifiers. In *Proceedings of the fifth annual workshop on Computational learning theory*, pages 144–152, 1992.
- Zdravko I BOTEV, Pierre L ECUYER et Bruno TUFFIN : Markov chain importance sampling with applications to rare event probability estimation. *Statistics and Computing*, 23(2):271–285, 2013.
- Jean-Marc BOURINET : Rare-event probability estimation with adaptive support vector regression surrogates. *Reliability Engineering & System Safety*, 150:210–221, 2016.
- Jean-Marc BOURINET : Reliability analysis and optimal design under uncertainty-focus on adaptive surrogate-based approaches. *Habilitation à diriger des recherches*, 2018.
- Jean-Marc BOURINET : Reliability assessment by adaptive kernel-based surrogate models-approximation of non-smooth limit-state functions. In *13th International Conference on Applications of Statistics and Probability in Civil Engineering ICASP13*, 2019.
- Jean-Marc BOURINET, François DEHEEGER et Maurice LEMAIRE : Assessing small failure probabilities by combined subset simulation and support vector machines. *Structural Safety*, 33(6):343–353, 2011.
- Jean-Marc BOURINET, Cécile MATTRAND et Vincent DUBOURG : A review of recent features and improvements added to ferum software. In *Proc. of the 10th International Conference on Structural Safety and Reliability (ICOSSAR09)*, 2009.
- Leo BREIMAN : Bagging predictors. *Machine learning*, 24(2):123–140, 1996.
- Karl BREITUNG : Asymptotic approximations for multinormal integrals. *Journal of Engineering Mechanics*, 110(3):357–366, 1984.
- Christian BUCHER et Thomas MOST : A comparison of approximate response functions in structural reliability analysis. *Probabilistic engineering mechanics*, 23(2-3):154–163, 2008.
- Francesco CADINI, Francisco SANTOS et Enrico ZIO : An improved adaptive kriging-based importance technique for sampling multiple failure regions of low probability. *Reliability Engineering & System Safety*, 131:109–117, 2014.
- Simon CAMBIER, Pascal GUIHOT et Gérard COFFIGNAL : Computational methods for accounting of structural uncertainties, applications to dynamic behavior prediction of piping systems. *Structural safety*, 24(1):29–50, 2002.
- Vincent CHABRIDON : *Analyse de sensibilité fiabiliste avec prise en compte d'incertitudes sur le modèle probabiliste-Application aux systèmes aérospatiaux*. Thèse de doctorat, Université Clermont Auvergne, 2018.

- Hao CHEN, Jason L LOEPPKY, Jerome SACKS et William J WELCH : Analysis methods for computer experiments : How to assess and what counts? *Statistical science*, pages 40–60, 2016.
- Liming CHEN, Haobo QIU, Chen JIANG, Xiwen CAI et Liang GAO : Ensemble of surrogates with hybrid method using global and local measures for engineering design. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 57(4):1711–1729, 2018.
- Weidong CHEN, Chunlong XU, Yaqin SHI, Jingxin MA et Shengzhuo LU : A hybrid kriging-based reliability method for small failure probabilities. *Reliability Engineering & System Safety*, 189:31–41, 2019.
- Xinjuan CHEN et Jinglai LI : A subset multicanonical monte carlo method for simulating rare failure events. *Journal of Computational Physics*, 344:23–35, 2017.
- Kai CHENG et Zhenzhou LU : Structural reliability analysis based on ensemble learning of surrogate models. *Structural Safety*, 83:101905, 2020.
- Rudy CHOCAT, Paul BEAUCAIRE, Loic DEBEUGNY, Jean-Pierre LEFEBVRE, Caroline SAINVITU, Piotr BREITKOPF et Eric WYART : Reliability analysis in fracture mechanics according to combined failure criteria. In *Proc. of the VII European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering (ECCOMAS Congress 2016)*. Crete Island, Greece, 2016.
- Agnieszka A CHOJACZYK, Angelo P TEIXEIRA, Luís C NEVES, Joao B CARDOSO et C Guedes SOARES : Review and application of artificial neural networks models in reliability analysis of steel structures. *Structural safety*, 52:78–89, 2015.
- Rajib CHOWDHURY, BN RAO et Meher Anumolu PRASAD : High-dimensional model representation for structural reliability analysis. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 25(4):301–337, 2009.
- Thierry CRESTAUX, Olivier LE MAITRE et Jean-Marc MARTINEZ : Polynomial chaos expansion for sensitivity analysis. *Reliability Engineering & System Safety*, 94(7):1161–1172, 2009.
- Karel CROMBECQ : *Surrogate modeling of computer experiments with sequential experimental design*. Thèse de doctorat, Ghent University, 2011.
- Karel CROMBECQ, Ivo COUCKUYT, Dirk GORISSEN et Tom DHAENE : Space-filling sequential design strategies for adaptive surrogate modelling. In *The first international conference on soft computing technology in civil, structural and environmental engineering*, volume 38, 2009.
- Hui-Zhu DAI, Wei ZHAO, Wei WANG et Zhigang CAO : An improved radial basis function network for structural reliability analysis. *Journal of mechanical science and technology*, 25(9):2151, 2011.
- Xuan Hung DANG : *Identification de la variabilité spatiale des champs de contraintes dans les agrégats polycristallins et application à l'approche locale de la rupture*. Thèse de doctorat, Université Blaise Pascal Clermont 2, 2012.
- Kris DE BRABANTER : *Least squares support vector regression with applications to large-scale data : a statistical approach*. Thèse de doctorat, Faculty of Engineering, KU Leuven, Katholieke Universiteit Leuven, 2011.

- Matthias DE LOZZO : *Modèles de substitution spatio-temporels et multifidélité : Application à l'ingénierie thermique*. Thèse de doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Toulouse (INSA de Toulouse), 2013.
- Jian DENG : Structural reliability analysis for implicit performance function using radial basis function network. *International journal of solids and structures*, 43(11-12):3255–3291, 2006.
- Armen DER KIUREGHIAN et Taleen DAKESSIAN : Multiple design points in first and second-order reliability. *Structural Safety*, 20(1):37–49, 1998.
- Armen DER KIUREGHIAN, Hong-Zong LIN et Shyh-Jiann HWANG : Second-order reliability approximations. *Journal of Engineering mechanics*, 113(8):1208–1225, 1987.
- Armen DER KIUREGHIAN et Pei-Ling LIU : Structural reliability under incomplete probability information. *Journal of Engineering Mechanics*, 112(1):85–104, 1986.
- Ove DITLEVSEN et Henrik O MADSEN : *Structural reliability methods*, volume 178. Wiley New York, 1996.
- Ery DJUNAEDY, Kevin Van den WYMELENBERG, Brad ACKER et Harshana THIMMANA : Oversizing of hvac system : signatures and penalties. *Energy and Buildings*, 43(2-3):468–475, 2011.
- Simon DUANE, Anthony D KENNEDY, Brian J PENDLETON et Duncan ROWETH : Hybrid monte carlo. *Physics letters B*, 195(2):216–222, 1987.
- Vincent DUBOURG : *Adaptive surrogate models for reliability analysis and reliability-based design optimization*. Thèse de doctorat, Université Blaise Pascal Clermont 2, 2011.
- Vincent DUBOURG, Bruno SUDRET et Mikaël CAZUGUEL : Modélisation probabiliste de champs d'imperfections géométriques de coques résistantes de sous-marins. *In 10e colloque national en calcul des structures*, 2011.
- Vincent DUBOURG, Bruno SUDRET et François DEHEEGER : Metamodel-based importance sampling for structural reliability analysis. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 33:47–57, 2013.
- Benjamin ECHARD, Nicolas GAYTON et Maurice LEMAIRE : Ak-mcs : an active learning reliability method combining kriging and monte carlo simulation. *Structural Safety*, 33(2):145–154, 2011.
- Benjamin ECHARD, Nicolas GAYTON, Maurice LEMAIRE et Nicolas RELUN : A combined importance sampling and kriging reliability method for small failure probabilities with time-demanding numerical models. *Reliability Engineering & System Safety*, 111:232–240, 2013.
- Bradley EFRON et Robert J TIBSHIRANI : *An introduction to the bootstrap*. CRC press, 1994.
- Víctor ELVIRA, Luca MARTINO, David LUENGO et Mónica F BUGALLO : Generalized multiple importance sampling. *Statistical Science*, 34(1):129–155, 2019.
- Svend ENGELUND et Ruediger RACKWITZ : A benchmark study on importance sampling techniques in structural reliability. *Structural safety*, 12(4):255–276, 1993.
- William FAURIAT et Nicolas GAYTON : Ak-sys : an adaptation of the ak-mcs method for system reliability. *Reliability Engineering & System Safety*, 123:137–144, 2014.

- Kaixuan FENG, Zhenzhou LU, Chunyan LING et Wanying YUN : Efficient computational method based on ak-mcs and bayes formula for time-dependent failure probability function. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 60(4):1373–1388, 2019.
- Jessica FRANCO : *Planification d'expériences numériques en phase exploratoire pour la simulation des phénomènes complexes*. Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Saint-Etienne, 2008.
- Yoav FREUND et Robert E SCHAPIRE : Experiments with a new boosting algorithm. In *icml*, volume 96, pages 148–156. Citeseer, 1996.
- Jiayi FU et Hai HUANG : A topology and sizing optimization method for frame structures combined with an orthogonal-maximin latin hypercube design (lhd) method. In *Journal of Physics : Conference Series*, volume 1509, page 012001, 2020.
- Jan N FUHG, Amélie FAU et Udo NACKENHORST : State-of-the-art and comparative review of adaptive sampling methods for kriging. *Archives of Computational Methods in Engineering*, pages 1–59, 2020.
- Sushant S GARUD, Iftekhar A KARIMI et Markus KRAFT : Design of computer experiments : A review. *Computers & Chemical Engineering*, 106:71–95, 2017.
- Marnix JJ GARVELS : A combined splitting–cross entropy method for rare-event probability estimation of queueing networks. *Annals of Operations Research*, 189(1):167–185, 2011.
- B GASPAR, Angelo Palos TEIXEIRA et C Guedes SOARES : A study on a stopping criterion for active refinement algorithms in kriging surrogate models. *Safety and reliability of complex engineered systems*, pages 1219–1227, 2015.
- Seymour GEISSER : The predictive sample reuse method with applications. *Journal of the American statistical Association*, 70(350):320–328, 1975.
- Roger G GHANEM et Pol D SPANOS : Spectral stochastic finite-element formulation for reliability analysis. *Journal of Engineering Mechanics*, 117(10):2351–2372, 1991.
- Roger G GHANEM et Pol D SPANOS : *Stochastic finite elements : a spectral approach*. Courier Corporation, 2003.
- David GINSBOURGER, Céline HELBERT et Laurent CARRARO : Discrete mixtures of kernels for kriging-based optimization. *Quality and Reliability Engineering International*, 24(6):681–691, 2008.
- Tushar GOEL, Raphael T HAFTKA, Wei SHYY et Nestor V QUEIPO : Ensemble of surrogates. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 33(3):199–216, 2007.
- Changqing GONG et Dan M FRANGOPOL : System reliability of corroded ship hull girders. *Structure and Infrastructure Engineering*, 16(9):1302–1310, 2020.
- Xianguang GU, Jianwei LU et Hongzhou WANG : Reliability-based design optimization for vehicle occupant protection system based on ensemble of metamodels. *Structural and Multidisciplinary optimization*, 51(2):533–546, 2015.

- Johann GUILLEMINOT, Christian SOIZE, Djimedo KONDO et Christophe BINETRUUY : Theoretical framework and experimental procedure for modelling mesoscopic volume fraction stochastic fluctuations in fiber reinforced composites. *International Journal of Solids and Structures*, 45 (21):5567–5583, 2008.
- Hugo GUIMARÃES, José C MATOS et António A HENRIQUES : An innovative adaptive sparse response surface method for structural reliability analysis. *Structural Safety*, 73:12–28, 2018.
- Zhiwei GUO et Guangchen BAI : Application of least squares support vector machine for regression to reliability analysis. *Chinese Journal of Aeronautics*, 22(2):160–166, 2009.
- Arnaud GUYADER : Contributions à l'estimation non paramétrique et à la simulation d'événements rares. *Habilitation à diriger des recherches*, 2011.
- Mohammad HADIGOL et Alireza DOOSTAN : Least squares polynomial chaos expansion : A review of sampling strategies. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 332:382–407, 2018.
- John H HALTON : Algorithm 247 : Radical-inverse quasi-random point sequence. *Communications of the ACM*, 7(12):701–702, 1964.
- Mohammad Amin HARIRI-ARDEBILI et Farhad POURKAMALI-ANARAKI : Support vector machine based reliability analysis of concrete dams. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 104:276–295, 2018.
- Abraham M HASOFER et Niels C LIND : Exact and invariant second-moment code format. *Journal of the Engineering Mechanics division*, 100(1):111–121, 1974.
- Wanxin HE, Yan ZENG et Gang LI : An adaptive polynomial chaos expansion for high-dimensional reliability analysis. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 62(4):2051–2067, 2020.
- Thomas HOFMANN, Bernhard SCHÖLKOPF et Alexander J SMOLA : Kernel methods in machine learning. *The annals of statistics*, pages 1171–1220, 2008.
- Michael HOHENBICHLER et Ruediger RACKWITZ : Improvement of second-order reliability estimates by importance sampling. *Journal of Engineering Mechanics*, 114(12):2195–2199, 1988.
- John Henry HOLLAND : *Adaptation in natural and artificial systems : an introductory analysis with applications to biology, control, and artificial intelligence*. MIT press, 1992.
- Han-Ping HONG : Simple approximations for improving second-order reliability estimates. *Journal of engineering mechanics*, 125(5):592–595, 1999.
- Zhen HU et Sankaran MAHADEVAN : A single-loop kriging surrogate modeling for time-dependent reliability analysis. *Journal of Mechanical Design*, 138(6), 2016.
- ChangWu HUANG, Abdelkhalak EL HAMI et Bouchaïb RADI : Overview of structural reliability analysis methods part ii : sampling methods. *ISTE OpenScience : London, UK*, 2016a.
- Xiaoxu HUANG, Jianqiao CHEN et Hongping ZHU : Assessing small failure probabilities by ak-ss : An active learning method combining kriging and subset simulation. *Structural Safety*, 59:86–95, 2016b.

- Jorge E HURTADO et Diego A ALVAREZ : Neural-network-based reliability analysis : a comparative study. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 191(1-2):113–132, 2001.
- Jorge E HURTADO et Diego A ALVAREZ : Classification approach for reliability analysis with stochastic finite-element modeling. *Journal of Structural Engineering*, 129(8):1141–1149, 2003.
- Bartholomeus Gerardus Martinus HUSSLAGÉ : Maximin designs for computer experiments. Rapport technique, CentER, Center for Economic Research, 2006.
- Jian JI, HJ LIAO et BK LOW : Modeling 2-d spatial variation in slope reliability analysis using interpolated autocorrelations. *Computers and Geotechnics*, 40:135–146, 2012.
- Jian JI et Bak Kong LOW : Stratified response surfaces for system probabilistic evaluation of slopes. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 138(11):1398–1406, 2012.
- Jian JI, Chunshun ZHANG, Yufeng GAO et Jayantha KODIKARA : Effect of 2d spatial variability on slope reliability : a simplified form analysis. *Geoscience Frontiers*, 9(6):1631–1638, 2018.
- Chen JIANG, Haobo QIU, Liang GAO, Dapeng WANG, Zan YANG et Liming CHEN : Eek-sys : System reliability analysis through estimation error-guided adaptive kriging approximation of multiple limit state surfaces. *Reliability Engineering & System Safety*, 198:106906, 2020.
- Shui-Hua JIANG et Jinsong HUANG : Modeling of non-stationary random field of undrained shear strength of soil for slope reliability analysis. *Soils and foundations*, 58(1):185–198, 2018.
- Shui-Hua JIANG, Jinsong HUANG, Chi YAO et Jianhua YANG : Quantitative risk assessment of slope failure in 2-d spatially variable soils by limit equilibrium method. *Applied Mathematical Modelling*, 47:710–725, 2017.
- Shui-Hua JIANG, Dian-Qing LI, Zi-Jun CAO, Chuang-Bing ZHOU et Kok-Kwang PHOON : Efficient system reliability analysis of slope stability in spatially variable soils using monte carlo simulation. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 141(2):04014096, 2015.
- Ruichen JIN, Wei CHEN et Timothy W SIMPSON : Comparative studies of metamodelling techniques under multiple modelling criteria. *Structural and multidisciplinary optimization*, 23(1):1–13, 2001.
- Donald R JONES, Matthias SCHONLAU et William J WELCH : Efficient global optimization of expensive black-box functions. *Journal of Global optimization*, 13(4):455–492, 1998.
- Astrid JOURDAN et J FRANCO : Optimal latin hypercube designs for the kullback–leibler criterion. *AStA Advances in Statistical Analysis*, 94(4):341–351, 2010.
- Fei KANG, Jing-Shuang LI, Yuan WANG et Junjie LI : Extreme learning machine-based surrogate model for analyzing system reliability of soil slopes. *European Journal of Environmental and Civil Engineering*, 21(11):1341–1362, 2017a.
- Fei KANG, Bin XU, Junjie LI et Sizeng ZHAO : Slope stability evaluation using gaussian processes with various covariance functions. *Applied Soft Computing*, 60:387–396, 2017b.
- Fei KANG, Qing XU et Junjie LI : Slope reliability analysis using surrogate models via new support vector machines with swarm intelligence. *Applied Mathematical Modelling*, 40(11-12):6105–6120, 2016.

- Kari KARHUNEN : *Über lineare Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, volume 37. Universität Helsinki, 1947.
- Lambros S KATAFYGIOTIS et Konstantin M ZUEV : Geometric insight into the challenges of solving high-dimensional reliability problems. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 23(2-3):208–218, 2008.
- Yun Bae KIM, Deok Seon ROH et Myeong Yong LEE : Nonparametric adaptive importance sampling for rare event simulation. In *2000 Winter Simulation Conference Proceedings (Cat. No. 00CH37165)*, volume 1, pages 767–772. IEEE, 2000.
- Hisashi KOBAYASHI, Brian L MARK et William TURIN : *Probability, random processes, and statistical analysis : applications to communications, signal processing, queueing theory and mathematical finance*. Cambridge University Press, 2011.
- Attibaud KOUASSI : *Propagation d'incertitudes en CEM. Application à l'analyse de fiabilité et de sensibilité de lignes de transmission et d'antennes*. Thèse de doctorat, Université Clermont Auvergne, 2017.
- Daniel G KRIGE : A statistical approach to some basic mine valuation problems on the Witwatersrand. *Journal of the Southern African Institute of Mining and Metallurgy*, 52(6):119–139, 1951.
- Solomon KULLBACK et Richard A LEIBLER : On information and sufficiency. *The Annals of Mathematical Statistics*, 22(1):79–86, 1951.
- Frances Y KUO, Christoph SCHWAB et Ian H SLOAN : Quasi-Monte Carlo methods for high-dimensional integration : the standard (weighted Hilbert space) setting and beyond. *The ANZIAM Journal*, 53(1):1–37, 2011.
- Nolan KURTZ et Junho SONG : Cross-entropy-based adaptive importance sampling using Gaussian mixture. *Structural Safety*, 42:35–44, 2013.
- Christos LATANIOTIS, Stefano MARELLI et Bruno SUDRET : Uqlab user manual—kriging (Gaussian process modelling). *Chair of Risk, Safety and Uncertainty Quantification, ETH Zurich, Zurich, Switzerland, Report, (3)*, 2017.
- Yongbin LEE et Dong-Hoon CHOI : Pointwise ensemble of meta-models using v nearest points cross-validation. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 50(3):383–394, 2014.
- Nicolas LELIÈVRE : *Développement des méthodes AK pour l'analyse de fiabilité. Focus sur les événements rares et la grande dimension*. Thèse de doctorat, Université Clermont Auvergne, 2018.
- Nicolas LELIÈVRE, Pierre BEAUREPAIRE, Cécile MATTRAND et Nicolas GAYTON : Ak-mcsi : A kriging-based method to deal with small failure probabilities and time-consuming models. *Structural Safety*, 73:1–11, 2018a.
- Nicolas LELIÈVRE, Pierre BEAUREPAIRE, Cécile MATTRAND, Nicolas GAYTON et Virgile MARGUIN : A kriging-based method to deal with high dimensional reliability problems. *Reliability and optimization of structural systems*, page 31, 2018b.

- Maurice LEMAIRE, Alaa CHATEAUNEUF et Jean-Claude MITTEAU : *Structural reliability*. Wiley Online Library, 2009.
- Stefan LESSMANN, Robert STAHLBOCK et Sven F CRONE : Genetic algorithms for support vector machine model selection. In *The 2006 IEEE International Joint Conference on Neural Network Proceedings*, pages 3063–3069. IEEE, 2006.
- Hong-Shuang LI, Yuan-Zhuo MA et Zijun CAO : A generalized subset simulation approach for estimating small failure probabilities of multiple stochastic responses. *Computers & Structures*, 153:239–251, 2015.
- Mingyang LI et Zequn WANG : High-dimensional reliability analysis using deep neural networks. In *AIAA Scitech 2020 Forum*, page 1150, 2020.
- Xu LI, Chunlin GONG, Liangxian GU, Wenkun GAO, Zhao JING et Hua SU : A sequential surrogate method for reliability analysis based on radial basis function. *Structural Safety*, 73:42–53, 2018.
- Friedrich LIESE et Igor VAJDA : On divergences and informations in statistics and information theory. *IEEE Transactions on Information Theory*, 52(10):4394–4412, 2006.
- Shih-Wei LIN et Shih-Chieh CHEN : Parameter determination and feature selection for c4. 5 algorithm using scatter search approach. *Soft Computing*, 16(1):63–75, 2012.
- Chunyan LING, Zhenzhou LU, Kaixuan FENG et Xiaobo ZHANG : A coupled subset simulation and active learning kriging reliability analysis method for rare failure events. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 60(6):2325–2341, 2019a.
- Chunyan LING, Zhenzhou LU et Xianming ZHU : Efficient methods by active learning kriging coupled with variance reduction based sampling methods for time-dependent failure probability. *Reliability Engineering & System Safety*, 188:23–35, 2019b.
- Bolin LIU et Liyang XIE : Reliability analysis of structures by iterative improved ensemble of surrogate method. *Shock and Vibration*, 2019, 2019.
- Haitao LIU, Shengli XU, Xiaofang WANG, Jigang MENG et Shuhua YANG : Optimal weighted pointwise ensemble of radial basis functions with different basis functions. *AIAA Journal*, 54(10):3117–3133, 2016.
- Huaxin LIU et Bak Kong LOW : System reliability analysis of tunnels reinforced by rockbolts. *Tunnelling and Underground Space Technology*, 65:155–166, 2017.
- Lei-Lei LIU, Zhi-Ping DENG, Shao-he ZHANG et Yung-Ming CHENG : Simplified framework for system reliability analysis of slopes in spatially variable soils. *Engineering Geology*, 239:330–343, 2018.
- Pei-Ling LIU et Armen DER KIUREGHIAN : Optimization algorithms for structural reliability. *Structural safety*, 9(3):161–177, 1991.
- Jason L LOEPPKY, Jerome SACKS et William J WELCH : Choosing the sample size of a computer experiment : A practical guide. *Technometrics*, 51(4):366–376, 2009.
- Michel LOÈVE : *Probability theory*. 1963.

- Teng LONG, Di WU, Xin CHEN, Xiaosong GUO et Li LIU : A deterministic sequential maximin latin hypercube design method using successive local enumeration for metamodel-based optimization. *Engineering Optimization*, 48(6):1019–1036, 2016.
- Søren Nyman LOPHAVEN, Hans Bruun NIELSEN et Jacob SØNDERGAARD : Dace-a matlab kriging toolbox, version 2.0. 2002.
- David LOWE, D BROOMHEAD, Royal SIGNALS et Malvern (United Kingdom) ; RADAR ESTABLISHMENT : Radial basis functions multivariable functional interpolation and adaptive networks. *No. RSRE-MEMO-4148. Royal Signals and Radar Establishment Malvern (United Kingdom)*, 1988.
- Zhaoyan LV, Zhenzhou LU et Pan WANG : A new learning function for kriging and its applications to solve reliability problems in engineering. *Computers & Mathematics with Applications*, 70(5):1182–1197, 2015.
- Jiangang MA, Ziyang REN, Guoxin ZHAO, Yanli ZHANG et Chang-Seop KOH : A new reliability analysis method combining adaptive kriging with weight index monte carlo simulation. *IEEE transactions on magnetics*, 54(3):1–4, 2017.
- Sankaran MAHADEVAN et Prakash RAGHOTHAMACHAR : Adaptive simulation for system reliability analysis of large structures. *Computers & Structures*, 77(6):725–734, 2000.
- Stefano MARELLI et Bruno SUDRET : Uqlab user manual–polynomial chaos expansions. *Chair of Risk, Safety & Uncertainty Quantification, ETH Zürich, 0.9-104 edition*, pages 97–110, 2015.
- Amandine MARREL, Bertrand IOOSS, Michel JULLIEN, Beatrice LAURENT et Elena VOLKOVA : Global sensitivity analysis for models with spatially dependent outputs. *Environmetrics*, 22(3):383–397, 2011.
- Amandine MARREL, Bertrand IOOSS, François VAN DORPE et Elena VOLKOVA : An efficient methodology for modeling complex computer codes with gaussian processes. *Computational Statistics & Data Analysis*, 52(10):4731–4744, 2008.
- Georges MATHERON : Principles of geostatistics. *Economic geology*, 58(8):1246–1266, 1963.
- Warren S McCULLOCH et Walter PITTS : A logical calculus of the ideas immanent in nervous activity. *The bulletin of mathematical biophysics*, 5(4):115–133, 1943.
- MD MCKAY, Richard J BECKMAN et William Jay CONOVER : Comparison of three methods for selecting values of input variables in the analysis of output from a computer code. *Technometrics*, 21(2):239–245, 1979.
- Robert MELCHERS : Importance sampling in structural systems. *Structural safety*, 6(1):3–10, 1989.
- Robert MELCHERS : Search-based importance sampling. *Structural safety*, 9(2):117–128, 1990.
- Robert E MELCHERS et André T BECK : *Structural reliability analysis and prediction*. John wiley & sons, 2018.
- Joao MENDES-MOREIRA, Carlos SOARES, Alípio Mário JORGE et Jorge Freire De SOUSA : Ensemble approaches for regression : A survey. *Acm computing surveys (csur)*, 45(1):1–40, 2012.

- Zeng MENG, Zhuohui ZHANG, Gang LI et Dequan ZHANG : An active weight learning method for efficient reliability assessment with small failure probability. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 61(3):1157–1170, 2020.
- Jérôme MORIO : Non-parametric adaptive importance sampling for the probability estimation of a launcher impact position. *Reliability engineering & system safety*, 96(1):178–183, 2011.
- Jérôme MORIO, Mathieu BALESDENT, Damien JACQUEMART et Christelle VERGÉ : A survey of rare event simulation methods for static input–output models. *Simulation Modelling Practice and Theory*, 49:287–304, 2014.
- Maliki MOUSTAPHA : *Métamodèles adaptatifs pour l'optimisation fiable multi-prestations de la masse de véhicules*. Thèse de doctorat, Université Blaise Pascal Clermont 2, 2016.
- Maliki MOUSTAPHA, Jean-Marc BOURINET, Benoît GUILLAUME et Bruno SUDRET : Comparative study of kriging and support vector regression for structural engineering applications. *ASCE-ASME Journal of Risk and Uncertainty in Engineering Systems, Part A : Civil Engineering*, 4(2):04018005, 2018.
- Andre NATAF : Détermination des distributions dont les marges sont données. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, 225:42–43, 1962.
- Jan C NEDDERMEYER : Non-parametric partial importance sampling for financial derivative pricing. *Quantitative Finance*, 11(8):1193–1206, 2011.
- Hossein Beheshti NEZHAD, Mahmoud MIRI et Mohammad Reza GHASEMI : New neural network-based response surface method for reliability analysis of structures. *Neural Computing and Applications*, 31(3):777–791, 2019.
- Jinsuo NIE et Bruce R ELLINGWOOD : Directional methods for structural reliability analysis. *Structural Safety*, 22(3):233–249, 2000a.
- Jinsuo NIE et Bruce R ELLINGWOOD : Directional methods for structural reliability analysis. *Structural Safety*, 22(3):233–249, 2000b.
- Nikunj C OZA et Kagan TUMER : Classifier ensembles : Select real-world applications. *Information fusion*, 9(1):4–20, 2008.
- Pramudita Satria PALAR et Koji SHIMOYAMA : Ensemble of kriging with multiple kernel functions for engineering design optimization. In *International Conference on Bioinspired Methods and Their Applications*, pages 211–222. Springer, 2018.
- Pramudita Satria PALAR et Koji SHIMOYAMA : Efficient global optimization with ensemble and selection of kernel functions for engineering design. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 59(1):93–116, 2019.
- Qiuqing PAN et Daniel DIAS : Sliced inverse regression-based sparse polynomial chaos expansions for reliability analysis in high dimensions. *Reliability Engineering & System Safety*, 167:484–493, 2017.
- Vissarion PAPADOPOULOS, Dimitris G GIOVANIS, Nikos D LAGAROS et Manolis PAPADRAKAKIS : Accelerated subset simulation with neural networks for reliability analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 223:70–80, 2012.

- Manolis PAPADRAKAKIS, Vissarion PAPADOPOULOS et George STEFANOY : Reliability-based design optimization by using ensembles of metamodels. In *UNCECOMP 2019 3rd ECCOMAS Thematic Conference on Uncertainty Quantification in Computational Sciences and Engineering*, 2019.
- Iason PAPAIOANNOY, Wolfgang BETZ, Kilian ZWIRGLMAIER et Daniel STRAUB : Mcmc algorithms for subset simulation. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 41:89–103, 2015.
- Iason PAPAIOANNOY, Sebastian GEYER et Daniel STRAUB : Improved cross entropy-based importance sampling with a flexible mixture model. *Reliability Engineering & System Safety*, 191:106564, 2019.
- Iason PAPAIOANNOY, Costas PAPADIMITRIOY et Daniel STRAUB : Sequential importance sampling for structural reliability analysis. *Structural safety*, 62:66–75, 2016.
- Kok-Kwang PHOON, Hongwei HUANG et Ser Tong QUEK : Simulation of strongly non-gaussian processes using karhunen–loeve expansion. *Probabilistic engineering mechanics*, 20(2):188–198, 2005.
- Kok-Kwang PHOON, Shuping HUANG et Ser Tong QUEK : Simulation of second-order processes using karhunen–loeve expansion. *Computers & structures*, 80(12):1049–1060, 2002.
- Victor PICHENY, David GINSBOUYER, Olivier ROUSTANT, Raphael T HAFTKA et Nam-Ho KIM : Adaptive designs of experiments for accurate approximation of a target region. *Journal of Mechanical Design*, 132(7), 2010.
- Vincenzo PILUSO et Gianvittorio RIZZANO : Random material variability effects on full-strength end-plate beam-to-column joints. *Journal of constructional steel research*, 63(5):658–666, 2007.
- Helmuth PRADLWARTER, Gerhart Iwo SCHUELLER, Phaeton-Stelios KOUTSOURELAKIS et Dimos C CHARMPIS : Application of line sampling simulation method to reliability benchmark problems. *Structural Safety*, 29(3):208–221, 2007a.
- Helmuth PRADLWARTER, Gerhart Iwo SCHUELLER, Phaeton-Stelios KOUTSOURELAKIS et Dimos C CHARMPIS : Application of line sampling simulation method to reliability benchmark problems. *Structural Safety*, 29(3):208–221, 2007b.
- Hua-Ming QIAN, Tudi HUANG et Hong-Zhong HUANG : A single-loop strategy for time-variant system reliability analysis under multiple failure modes. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 148:107159, 2021a.
- Hua-Ming QIAN, Yan-Feng LI et Hong-Zhong HUANG : Time-variant system reliability analysis method for a small failure probability problem. *Reliability Engineering & System Safety*, 205:107261, 2021b.
- Nestor V QUEIPO, Raphael T HAFTKA, Wei SHYY, Tushar GOEL, Rajkumar VAIDYANATHAN et P Kevin TUCKER : Surrogate-based analysis and optimization. *Progress in aerospace sciences*, 41(1):1–28, 2005.
- Herschel RABITZ, Ömer F ALIŞ, Jeffrey SHORTER et Kyurhee SHIM : Efficient input output model representations. *Computer physics communications*, 117(1-2):11–20, 1999.
- Rüdiger RACKWITZ et Bernd FLESSLER : Structural reliability under combined random load sequences. *Computers & structures*, 9(5):489–494, 1978.

- Mohsen RASHKI : Hybrid control variates-based simulation method for structural reliability analysis of some problems with low failure probability. *Applied Mathematical Modelling*, 60:220–234, 2018.
- Carl Edward RASMUSSEN et Christopher A WILLIAMS : Gaussian processes for machine learning adaptive computation and machine learning, 2006.
- Ye REN, Le ZHANG et Ponnuthurai N SUGANTHAN : Ensemble classification and regression-recent developments, applications and future directions. *IEEE Computational intelligence magazine*, 11(1):41–53, 2016.
- Reuven Y RUBINSTEIN et Dirk P KROESE : *The cross-entropy method : a unified approach to combinatorial optimization, Monte-Carlo simulation and machine learning*. Springer Science & Business Media, 2013.
- Reuven Y RUBINSTEIN et Dirk P KROESE : *Simulation and the Monte Carlo method*, volume 10. John Wiley & Sons, 2016.
- Jerome SACKS, William J WELCH, Toby J MITCHELL et Henry P WYNN : Design and analysis of computer experiments. *Statistical science*, pages 409–423, 1989.
- Omer SAGI et Lior ROKACH : Ensemble learning : A survey. *Wiley Interdisciplinary Reviews : Data Mining and Knowledge Discovery*, 8(4):e1249, 2018.
- Yacine SAHRAOUI et Alaa CHATEAUNEUF : The effects of spatial variability of the aggressiveness of soil on system reliability of corroding underground pipelines. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 146:188–197, 2016.
- Egar SANCHEZ, Salvador PINTOS et Nestor V QUEIPO : Toward an optimal ensemble of kernel-based approximations with engineering applications. *Structural and multidisciplinary optimization*, 36(3):247–261, 2008.
- Roland SCHÖBI, Bruno SUDRET et Stefano MARELLI : Rare event estimation using polynomial-chaos kriging. *ASCE-ASME Journal of Risk and Uncertainty in Engineering Systems, Part A : Civil Engineering*, 3(2):D4016002, 2017.
- Bernhard SCHÖLKOPF, Alex J SMOLA, Robert C WILLIAMSON et Peter L BARTLETT : New support vector algorithms. *Neural computation*, 12(5):1207–1245, 2000.
- Gerhart Iwo SCHUËLLER, Helmuth PRADLWARTER et Phaedon-Stelios KOUTSOURELAKIS : A critical appraisal of reliability estimation procedures for high dimensions. *Probabilistic engineering mechanics*, 19(4):463–474, 2004.
- Gerhart Iwo SCHUËLLER et Reinhard STIX : A critical appraisal of methods to determine failure probabilities. *Structural Safety*, 4(4):293–309, 1987.
- Mohsen Ali SHAYANFAR, Mohammad Ali BARKHORDARI, Moien BARKHORI et Mohammad BARKHORI : An adaptive directional importance sampling method for structural reliability analysis. *Structural Safety*, 70:14–20, 2018.
- Lei SHI, Ren-Jye YANG et Ping ZHU : A method for selecting surrogate models in crashworthiness optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 46(2):159–170, 2012.

- Yan SHI, Zhenzhou LU, Ruyang HE, Yicheng ZHOU et Siyu CHEN : A novel learning function based on kriging for reliability analysis. *Reliability Engineering & System Safety*, 198:106857, 2020.
- Yan SHI, Zhenzhou LU, Liyang XU et Siyu CHEN : An adaptive multiple-kriging-surrogate method for time-dependent reliability analysis. *Applied Mathematical Modelling*, 70:545–571, 2019.
- Rachel T SILVESTRINI, Douglas C MONTGOMERY et Bradley JONES : Comparing computer experiments for the gaussian process model using integrated prediction variance. *Quality Engineering*, 25(2):164–174, 2013.
- Vijay P SINGH, Sharad K JAIN et Aditya TYAGI : *Risk and reliability analysis : a handbook for civil and environmental engineers*. American Society of Civil Engineers, 2007.
- Nicholas SITAR, Jeffrey D CAWLFIELD et Armen DER KIUREGHIAN : First-order reliability approach to stochastic analysis of subsurface flow and contaminant transport. *Water Resources Research*, 23(5):794–804, 1987.
- Il'ya Meerovich SOBOLE' : On the distribution of points in a cube and the approximate evaluation of integrals. *Zhurnal Vychislitel'noi Matematiki i Matematicheskoi Fiziki*, 7(4):784–802, 1967.
- Christian SOIZE et Roger GHANEM : Physical systems with random uncertainties : chaos representations with arbitrary probability measure. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 26(2):395–410, 2004.
- Jingwen SONG, Pengfei WEI, Marcos VALDEBENITO et Michael BEER : Active learning line sampling for rare event analysis. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 147:107113, 2020.
- Raphael E STERN, Junho SONG et Daniel B WORK : Accelerated monte carlo system reliability analysis through machine-learning-based surrogate models of network connectivity. *Reliability Engineering & System Safety*, 164:1–9, 2017.
- Mervyn STONE : Cross-validatory choice and assessment of statistical predictions. *Journal of the Royal Statistical Society : Series B (Methodological)*, 36(2):111–133, 1974.
- Maijia SU, Guofeng XUE, Dayang WANG, Yongshan ZHANG et Yong ZHU : A novel active learning reliability method combining adaptive kriging and spherical decomposition-mcs (ak-sdmcs) for small failure probabilities. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 62(6):3165–3187, 2020.
- Bruno SUDRET : Meta-models for structural reliability and uncertainty quantification. *arXiv preprint arXiv :1203.2062*, 2012.
- Bruno SUDRET et Armen DER KIUREGHIAN : *Stochastic finite element methods and reliability : a state-of-the-art report*. Department of Civil and Environmental Engineering, University of California, 2000.
- Zhili SUN, Jian WANG, Rui LI et Cao TONG : Lif : A new kriging based learning function and its application to structural reliability analysis. *Reliability Engineering & System Safety*, 157:152–165, 2017.
- VS SUNDAR et Michael D SHIELDS : Reliability analysis using adaptive kriging surrogates with multimodel inference. *ASCE-ASME Journal of Risk and Uncertainty in Engineering Systems, Part A : Civil Engineering*, 5(2):04019004, 2019.

- Chao TAN, Menglong LI et Xin QIN : Random subspace regression ensemble for near-infrared spectroscopic calibration of tobacco samples. *Analytical Sciences*, 24(5):647–653, 2008.
- E Ke TANG, Ponnuthurai N SUGANTHAN et Xin YAO : An analysis of diversity measures. *Machine learning*, 65(1):247–271, 2006.
- Surya T TOKDAR et Robert E KASS : Importance sampling : a review. *Wiley Interdisciplinary Reviews : Computational Statistics*, 2(1):54–60, 2010.
- Satoshi TOMIOKA, Shusuke NISIYAMA et Takeaki ENOTO : Nonlinear least square regression by adaptive domain method with multiple genetic algorithms. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 11(1):1–16, 2007.
- Cao TONG, Jian WANG et Jinguo LIU : A kriging-based active learning algorithm for mechanical reliability analysis with time-consuming and nonlinear response. *Mathematical Problems in Engineering*, 2019, 2019.
- Jafar VAHEDI, Mohammad Reza GHASEMI et Mahmoud MIRI : An adaptive divergence-based method for structural reliability analysis via multiple kriging models. *Applied Mathematical Modelling*, 62:542–561, 2018.
- Jafar VAHEDI, Mohammad Reza GHASEMI et Mahmoud MIRI : An efficient entropy-based method for reliability assessment by combining kriging meta-models. *Periodica Polytechnica Civil Engineering*, 63(2):414–422, 2019.
- Marcos VALDEBENITO, Helmuth PRADLWARTER et Gerhart Iwo SCHUËLLER : The role of the design point for calculating failure probabilities in view of dimensionality and structural nonlinearities. *Structural Safety*, 32(2):101 – 111, 2010.
- Vladimir VAPNIK : *The nature of statistical learning theory*. Springer science & business media, 2013.
- Vladimir VAPNIK, Steven GOLOWICH et Alex SMOLA : Support vector method for function approximation, regression estimation and signal processing. *Advances in neural information processing systems*, 9:281–287, 1996.
- Emmanuel VAZQUEZ : *Modélisation comportementale de systèmes non-linéaires multivariés par méthodes à noyaux et applications*. Thèse de doctorat, Université Paris Sud-Paris XI, 2005.
- Ajit Kumar VERMA, Srividya AJIT et Durga Rao KARANKI : *Reliability and safety engineering*, volume 43. Springer, 2010.
- Felipe AC VIANA, Raphael T HAFTKA et Valder STEFFEN : Multiple surrogates : how cross-validation errors can help us to obtain the best predictor. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 39(4):439–457, 2009.
- Bin WANG, Leilei LIU, Yuehua LI et Quan JIANG : Reliability analysis of slopes considering spatial variability of soil properties based on efficiently identified representative slip surfaces. *Journal of Rock Mechanics and Geotechnical Engineering*, 12(3):642–655, 2020.
- Zejun WANG et Pingfeng WANG : An integrated performance measure approach for system reliability analysis. *Journal of Mechanical Design*, 137(2), 2015.

- Zeyu WANG et Abdollah SHAFIEEZADEH : Real-time high-fidelity reliability updating with equality information using adaptive kriging. *Reliability Engineering & System Safety*, 195:106735, 2020.
- Ziqi WANG, Marco BROCCARDO et Junho SONG : Hamiltonian monte carlo methods for subset simulation in reliability analysis. *Structural Safety*, 76:51–67, 2019.
- Pengfei WEI, Fuchao LIU et Chenghu TANG : Reliability and reliability-based importance analysis of structural systems using multiple response gaussian process model. *Reliability Engineering & System Safety*, 175:183–195, 2018.
- Pengfei WEI, Chenghu TANG et Yuting YANG : Structural reliability and reliability sensitivity analysis of extremely rare failure events by combining sampling and surrogate model methods. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part O : Journal of risk and reliability*, 233(6):943–957, 2019.
- Zhixun WEN, Haiqing PEI, Hai LIU et Zhufeng YUE : A sequential kriging reliability analysis method with characteristics of adaptive sampling regions and parallelizability. *Reliability Engineering & System Safety*, 153:170–179, 2016.
- Christopher KI WILLIAMS et Carl Edward RASMUSSEN : *Gaussian processes for machine learning*, volume 2. MIT press Cambridge, MA, 2006.
- David H WOLPERT : Stacked generalization. *Neural networks*, 5(2):241–259, 1992.
- Brian A WORLEY : Deterministic uncertainty analysis. Rapport technique, Oak Ridge National Lab., TN (USA), 1987.
- Hao WU, Zhifu ZHU et Xiaoping DU : System reliability analysis with autocorrelated kriging predictions. *Journal of Mechanical Design*, 142(10), 2020.
- Mi XIAO, Jinhao ZHANG, Liang GAO, Soobum LEE et Amin Toghi ESHGHI : An efficient kriging-based subset simulation method for hybrid reliability analysis under random and interval variables with small failure probability. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 59(6):2077–2092, 2019.
- Ning-Cong XIAO, Kai YUAN et Chengning ZHOU : Adaptive kriging-based efficient reliability method for structural systems with multiple failure modes and mixed variables. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 359:112649, 2020.
- Te XIAO, Dian-Qing LI, Zi-Jun CAO et Xiao-Song TANG : Full probabilistic design of slopes in spatially variable soils using simplified reliability analysis method. *Georisk : Assessment and Management of Risk for Engineered Systems and Geohazards*, 11(1):146–159, 2017.
- Bo XIONG et HuiFeng TAN : A robust and efficient structural reliability method combining radial-based importance sampling and kriging. *Science China Technological Sciences*, 61(5):724–734, 2018.
- Kai XU, Min XIE, Loon Ching TANG et SL HO : Application of neural networks in forecasting engine systems reliability. *Applied Soft Computing*, 2(4):255–268, 2003.
- CM YANG et James L BECK : Generalized trajectory methods for finding multiple extrema and roots of functions. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 97(1):211–227, 1998.

- Xufeng YANG, Yongshou LIU, Caiying MI et Chenghu TANG : System reliability analysis through active learning Kriging model with truncated candidate region. *Reliability Engineering and System Safety*, 169(August 2016):235–241, 2018.
- Xufeng YANG, Caiying MI, Dingyuan DENG et Yongshou LIU : A system reliability analysis method combining active learning kriging model with adaptive size of candidate points. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 60(1):137–150, 2019.
- Pengcheng YE et Guang PAN : Selecting the best quantity and variety of surrogates for an ensemble model. *Mathematics*, 8(10):1721, 2020.
- Pengcheng YE, Guang PAN et Zuomin DONG : Ensemble of surrogate based global optimization methods using hierarchical design space reduction. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 58(2):537–554, 2018.
- Siyu YE, Yi ZHANG, Wen YAO, Quan CHEN et Xiaoqian CHEN : An effective surrogate ensemble modeling method for satellite coverage traffic volume prediction. *Applied Sciences*, 9(18):3689, 2019.
- Yifan YE, Zhanxue WANG et Xiaobo ZHANG : An optimal pointwise weighted ensemble of surrogates based on minimization of local mean square error. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 62(2):529–542, 2020.
- Jiaxiang YI, Fangliang WU, Qi ZHOU, Yuansheng CHENG, Hao LING et Jun LIU : An active-learning method based on multi-fidelity kriging model for structural reliability analysis. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 63(1):173–195, 2021.
- Sheng Kung Michael YI, Mark STEYVERS, Michael D LEE et Matthew J DRY : The wisdom of the crowd in combinatorial problems. *Cognitive science*, 36(3):452–470, 2012.
- Hanfeng YIN, Hongbing FANG, Guilin WEN, Matthew GUTOWSKI et Youye XIAO : On the ensemble of metamodels with multiple regional optimized weight factors. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 58(1):245–263, 2018.
- Kai YUAN, Ning-Cong XIAO, Zhonglai WANG et Kun SHANG : System reliability analysis by combining structure function and active learning kriging model. *Reliability Engineering & System Safety*, 195:106734, 2020.
- Wanying YUN, Zhenzhou LU, Yicheng ZHOU et Xian JIANG : AK-SYSi : an improved adaptive Kriging model for system reliability analysis with multiple failure modes by a refined U learning function. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 59(1):263–278, 2019.
- Peng ZENG, Rafael JIMENEZ et Rafael JURADO-PIÑA : System reliability analysis of layered soil slopes using fully specified slip surfaces and genetic algorithms. *Engineering Geology*, 193:106–117, 2015.
- Luis E ZERPA, Nestor V QUEIPO, Salvador PINTOS et Jean-Louis SALAGER : An optimization methodology of alkaline–surfactant–polymer flooding processes using field scale numerical simulation and multiple surrogates. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, 47(3-4):197–208, 2005.

- Chunyi ZHANG, Lukai SONG, Chengwei FEI, Cheng LU et Yongmei XIE : Advanced multiple response surface method of sensitivity analysis for turbine blisk reliability with multi-physics coupling. *Chinese Journal of Aeronautics*, 29(4):962–971, 2016.
- Dequan ZHANG, Ning ZHANG, Nan YE, Jianguang FANG et Xu HAN : Hybrid learning algorithm of radial basis function networks for reliability analysis. *IEEE Transactions on Reliability*, 2020a.
- Jian ZHANG, Xinxin YUE, Jiajia QIU, Muyu ZHANG et Xiaomei WANG : A unified ensemble of surrogates with global and local measures for global metamodelling. *Engineering Optimization*, pages 1–22, 2020b.
- Jie ZHANG, Souma CHOWDHURY, Junqiang ZHANG, Achille MESSAC et Luciano CASTILLO : Adaptive hybrid surrogate modeling for complex systems. *AIAA journal*, 51(3):643–656, 2013.
- Jie ZHANG, Limin ZHANG et Wilson H TANG : New methods for system reliability analysis of soil slopes. *Canadian Geotechnical Journal*, 48(7):1138–1148, 2011.
- Jinhao ZHANG, Mi XIAO et Liang GAO : An active learning reliability method combining kriging constructed with exploration and exploitation of failure region and subset simulation. *Reliability Engineering & System Safety*, 188:90–102, 2019a.
- Jinhao ZHANG, Mi XIAO, Liang GAO et Sheng CHU : A combined projection-outline-based active learning kriging and adaptive importance sampling method for hybrid reliability analysis with small failure probabilities. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 344:13–33, 2019b.
- Xufang ZHANG, Lei WANG et John Dalsgaard SØRENSEN : Reif : A novel active-learning function toward adaptive kriging surrogate models for structural reliability analysis. *Reliability Engineering & System Safety*, 185:440–454, 2019c.
- Xufang ZHANG, Lei WANG et John Dalsgaard SØRENSEN : Akois : an adaptive kriging oriented importance sampling method for structural system reliability analysis. *Structural Safety*, 82: 101876, 2020c.
- Changting ZHONG, Mengfu WANG, Chao DANG, Wenhai KE et Shengqi GUO : First-order reliability method based on harris hawks optimization for high-dimensional reliability analysis. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2020.
- Tong ZHOU et Yongbo PENG : Kernel principal component analysis-based gaussian process regression modelling for high-dimensional reliability analysis. *Computers & Structures*, 241:106358, 2020.
- Xiao Jian ZHOU, Yi Zhong MA et Xu Fang LI : Ensemble of surrogates with recursive arithmetic average. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 44(5):651–671, 2011.
- XiaoJian ZHOU et Ting JIANG : Metamodel selection based on stepwise regression. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 54(3):641–657, 2016.
- Shun-Peng ZHU, Stefano FOLETTI et Stefano BERETTA : Probabilistic framework for multiaxial lcf assessment under material variability. *International Journal of Fatigue*, 103:371–385, 2017.
- Zhifu ZHU et Xiaoping DU : Reliability analysis with monte carlo simulation and dependent kriging predictions. *Journal of Mechanical Design*, 138(12), 2016.

- Konstantin M ZUEV, James L BECK, Siu-Kui AU et Lambros S KATAFYGIOTIS : Bayesian post-processor and other enhancements of subset simulation for estimating failure probabilities in high dimensions. *Computers & structures*, 92:283–296, 2012.
- M Munoz ZUNIGA, Josselin GARNIER, Emmanuel REMY et Etienne de ROCQUIGNY : Adaptive directional stratification for controlled estimation of the probability of a rare event. *Reliability Engineering & System Safety*, 96(12):1691–1712, 2011.
- Miguel Munoz ZUNIGA, Achille MURANGIRA et Timothée PERDRIZET : Structural reliability assessment through surrogate based importance sampling with dimension reduction. *Reliability Engineering & System Safety*, 207:107289, 2021. ISSN 0951-8320.