# Commande en réseau des systèmes flous : application à la dynamique de véhicule

Chedia Latrech

▶ **To cite this version:**

Chedia Latrech. Commande en réseau des systèmes flous : application à la dynamique de véhicule. Autre. Université de Picardie Jules Verne, 2015. Français. NNT : 2015AMIE0005 . tel-03654134

**HAL Id: tel-03654134**
**https://theses.hal.science/tel-03654134**

Submitted on 28 Apr 2022

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Thèse de Doctorat

**Spécialité : Automatique**

**Ecole doctorale en Sciences, technologie et Santé (Amiens)**

**Présentée par**


## Chedia LATRECH


**Pour l'obtention du grade de**

## Docteur de l'Université de Picardie Jules Verne

**Sujet de la thèse :**

# Commande en réseau des systèmes flous : Application à la dynamique de véhicule

**Soutenue le mardi 19 Mai 2015, devant le jury :**

| | | |
|---|---|---|
| **M.** | **Driss MEHDI** | Président de jury |
| **M.** | **Thierry-marie GUERRA** | Rapporteur |
| **M.** | **Ali CHARARA** | Rapporteur |
| **M.** | **Ahmed EL HAJJAJI** | Directeur de thèse |
| **M.** | **Abdelhamid RABHI** | Co-encadrant |

# Remerciements

Je tiens à remercier, en premier lieu, mon directeur de thèse Monsieur Ahmed El Hajjaji, Professeur à l'Université de Picardie Jules Verne (UPJV) à Amiens, et Messieurs Mourad Kchaou, Maître assistant à l'ENIS à Sfax et Abdelhamid Rabhi, Maître de conférences à l'UPJV à Amiens, pour avoir assuré l'encadrement scientifique de ce travail, pour leurs conseils très précieux durant ces trois années, leurs encouragements si nécessaires et la confiance qu'ils m'ont accordée.
Je tiens à exprimer ma reconnaissance à Monsieur Driss Mehdi, Professeur à l'université de Poitier, pour l'honneur et l'intérêt qu'il m'a témoignés en acceptant de présider mon jury de thèse.
J'adresse mes sincères remerciements à Monsieur Thierry-Marie Guerra, Professeur à l'université de Valenciennes pour l'honneur qu'il m'a fait de participer à mon jury de thèse et d'être rapporteur.
Je suis très reconnaissante à Monsieur Ali Charara, Professeur à l'UTC à Compiègne, pour l'intérêt qu'il a manifesté à l'égard de ce travail en acceptant de le juger en tant que rapporteur et membre du jury.
Je remercie vivement tous les membres de l'équipe COVE au sein du laboratoire Modélisation, Informations et Systèmes (MIS) de UPJV pour l'accueil et l'aide que j'ai pu trouver auprès de chacun d'eux.
Je souhaite enfin exprimer toute ma reconnaissance à ma mère et ma soeur.

# Sommaire


**1 Introduction générale** **5**
1.1 Introduction . . . . . 5
1.2 Introduction Générale et motivations . . . . . 6
1.3 Plan de la thèse . . . . . 13

**2 Modélisation d'un véhicule automobile, aspects généraux** **15**
2.1 Introduction . . . . . 15
2.2 Les différents mouvements du véhicule et définition des repères . . . . . 16
2.3 Modèle de pneumatique . . . . . 19
2.4 Dynamique de roulis . . . . . 26
2.5 Modèle dérive/lacet (bicyclette) . . . . . 28
2.6 Modèle dérive/lacet/roulis . . . . . 31
2.7 Modèle longitudinal d'un quart de véhicule . . . . . 32
2.8 Représentation floue de type Takagi-Sugeno TS de la dynamique du véhicule 34
2.9 Conclusion . . . . . 39

**3 Contrôle des systèmes flous commandés en réseau** **41**
3.1 Introduction . . . . . 41
3.2 Les systèmes commandés en réseau (SCRs) . . . . . 42
3.3 Stabilisation par retour d'état flou . . . . . 47
3.4 Stabilisation par retour de sortie statique . . . . . 65
3.5 Stabilisation par retour d'état reconstruit . . . . . 78
3.6 Conclusion . . . . . 97

**4 Commande floue décentralisée des systèmes de grande dimension** **99**
4.1 Introduction . . . . . 99
4.2 Systèmes flous interconnectés en réseau et architecture de commande adoptée100
4.3 Conclusion . . . . . 128

**A Quelques Lemmes mathématiques** **131**
A.1 Techniques de relaxation . . . . . 131

**B Formulation LMI et approche PDC** **135**
B.1 Formulation LMI . . . . . 135
B.2 Principe de l'approche PDC . . . . . 136

**Bibliographie** **137**

# Notations

**Matrices et opérateurs**

$M > 0$ ($M \geq 0$) : Matrice carré symétrique définie (resp. semi-définie) positive

$M < 0$ ($M \leq 0$) : Matrice carré symétrique définie (resp. semi-définie) négative

$\lambda_{max}$ : valeur propre maximale de la matrice symétrique $M$

$\lambda_{min}$ : valeur propre minimale de la matrice symétrique $M$

$\begin{pmatrix} M_{11} & * \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}$ : Matrice symétrique, le symbole $*$ représente $M_{21}^T$

$diag(M_1,...,M_n)$ : Matrice bloc diagonale

$\|x\|$ : Norme euclidienne du vecteur $x$ de dimension $p$

**Notations algébriques**

TS : Takagi Sugeno

TSR : Takagi-Sugeno à retard

NCS : Networked Control System

SCR : Système Commandé en Réseau

SDCR : Système décentralisé Commandé en Réseau

DNCS : Decentralized Networked Control System

ABS : Anti-lock Braking System

ESP : Electronic Stability Program

CGC : Contrôle Global du Châssis

LTI : Linéaire à temps Invariant

MIMO : Multiple Input Multiple Output

MISO : Multiple Input Single Output

LMI : Linear Matrix Inequality (Inégalité Matricielle Linéaire)

BMI : Bilinear Matrix Inequality (Inégalité Matricielle Bilinéaire)

PDC : Compensation parallèle distribuée (Parallel Distributed Compensation)

UDP : User Datagram Protocol

TCP : Protocole de contrôle de transfert

BOZ : Bloqueur d'Ordre Zéro

**Notations dynamique du véhicule**

| | | |
|---|---|---|
| $v$ | | : Vitesse longitudinale du véhicule au CG (m/s) |
| $v_y$ | | : Vitesse latérale du véhicule au CG (m/s) |
| $\beta$ | | : Angle de dérive du véhicule au CG (rad) |
| $z$ | | : Déplacement vertical du véhicule au CG (m) |
| $\theta$ | | : Angle de tangage du véhicule (rad) |
| $\psi$ | | : Angle du lacet du véhicule (rad) |
| $\phi$ | | : Angle de roulis du véhicule (rad) |
| $\dot{\psi}$ | | : Vitesse du lacet (rad/s) |
| $\dot{\phi}$ | | : Vitesse du roulis (rad/s) |
| $\delta_f$ | | : Angle de braquage des roues avant (rad) |
| $\delta_r$ | | : Angle de braquage des roues arrières (rad) |
| $\alpha_f$, | $\alpha_r$ | : Angle de dérive latéral de la roue avant, arrière (rad) |
| $m$ | | : Masse du véhicule (Kg) |
| $m_s$ | | : Masse suspendue du véhicule (Kg) |
| $I_z$ | | : Moment d'inertie au centre de gravité du véhicule ($Kg.m^2$) |
| $I_x$ | | : Moment d'inertie d'axe du roulis ($Kg.m^2$) |
| $C_\phi$ | | : Coefficient d'atténuation du mouvement de roulis (N.m.s/rad) |
| $K_\phi$ | | : Coefficient de ressort du mouvement de roulis (N.m/rad) |
| $a_f$, | $a_r$ | : Distance entre respectivement le train avant, arrière et le centre de gravité du véhicule (m) |
| $h$ | | : Distance de l'axe de roulis au centre de gravité de la masse suspendue (m) |
| $T$ | | : Longueur des essieux (m) |
| $g$ | | : Constante de gravité ($m/s^2$) |
| $\omega$ | | : Vitesse angulaire de la roue (rad/s) |
| $R_\omega$ | | : Rayon à vide de la roue (m) |
| $I_\omega$ | | : Inertie de la roue ($Kg.m^2$) |
| $F_{xf}$,$F_{xr}$ | | : Forces longitudinales exercées sur chaque roue(N) |
| $F_{yf}$,$F_{yr}$ | | : Forces latérales exercées sur chaque roue (N) |

# Références personnelles

**Articles publiés et soumis dans des revues internationales**

1. C. Latrach, M. Kchaou, A. Rabhi, A. El Hajjaji. *Decentralized networked control system design using (TS) fuzzy approach*. International Journal of Automation and computing (IJAC), Vol 12, No 2, pages :125-133, 2015
2. C. Latrach, M. Kchaou, A. El Hajjaji, A. Rabhi. *Networked Non-fragile Static Output Feedback Control Design for Vehicle Dynamics Stability*. Soumis à International Journal of Control Automation and Systems (IJCAS).

**Conférences internationales avec comité de lecture**

1. C. Latrach, M. Kchaou, A. Toumi, A. El Hajjaji. *Robust stabilization for continuous fuzzy systems with time varying delay* FUZZ-IEEE, 2011, Taipei, Taiwan, 1411-1416.
2. C. Latrach, M. Kchaou, A. El Hajjaji, M. Chaabane. *Robust stabilization conditions for time-delay fuzzy systems using fuzzy weighting-dependent approach* . MED-IEEE 2011, 1484-1489.
3. C. Latrach, M. Kchaou , A. El Hajjaji, A. Rabhi. *Fuzzy Lyapunov approach for robust stabilization of fuzzy systems with time varying delay, 2nd International Conference on Systems and Control (ICSC12)* Marrakesh, 2012, Morocco, 238-243.
4. C. Latrach, M.Kchaou, A. El Hajjaji, A. Rabhi. *Resilient output feedback fuzzy control design for nonlinear networked control systems, 12th International conference on Sciences and Techniques of Automatic control and computer engineering* STA'12, Sousse, 2012.
5. C. Latrach, M. Kchaou, A. El Hajjaji, A. Rabhi. *$H_\infty$ fuzzy Networked control for vehicle lateral dynamics*. In 21st Mediterranean Conference on Control and Automation, IEEE MED, 2013, Crete, Greece, 1538-1543.
6. C. Latrach, M. Kchaou, A. El Hajjaji, A. Rabhi. *Robust $H_\infty$ fuzzy networked control for vehicle lateral dynamics* In 16th International IEEE Conference on Intelligent Transportation Systems, 2013, Hague, Netherlands, 905-910.
7. C. Latrach, M. Kchaou, A. Rabhi, A. El Hajjaji. *Decentralized static output feedback fuzzy control design for nonlinear interconnected networked control systems, 13th International conference on Sciences and Techniques of Automatic control and computer engineering* STA, 2013, Sousse, 201-206.
8. C. Latrach, M. Kchaou, A. Rabhi, A. El Hajjaji. *$H_\infty$ networked fuzzy control for vehicle lateral dynamic with limited communication*. In 19th World Congress IFAC WC, 2014, Cape Town, 6313-6318.

9. C. Latrach, M. Kchaou, A. Rabhi, A. El Hajjaji. *Robust $H_\infty$ reliable Networked Static Output Feedback Control Design for Vehicle Dynamics Stability* IEEE MSC, 2014, Antibes/Nice, 1232-1237.
10. C. Latrach, A. El Hajjaji, M. Kchaou, A. Rabhi. Vehicle Dynamics Decentralized Networked Control. IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE) 2015.

**Conférences nationales**

1. C. Latrach, A. Rabhi, M. Kchaou, A. El Hajjaji. *Commande en réseau de la dynamique latérale du véhicule* JD MACS 2013, Strasbourg, France, 311-316.
2. C. Latrach, M. Kchaou, A. El Hajjaji, A. Rabhi. *Commande floue décentralisée pour une classe de systèmes interconnectés en réseau* LFA 2013, Reims, France, 203-210.

Chapitre

# 1

# Introduction générale

Sommaire

1.1 Introduction
1.2 Introduction Générale et motivations
1.3 Plan de la thèse

## 1.1 Introduction

Cette thèse est le résultat de plus de trois années de travail (Octobre 2011 - Mai 2015) effectuée au sein de l'équipe (COVE) du laboratoire de Modélisation, Informations et systèmes (MIS) de l'UPJV, sur la commande en réseau en vue d'améliorer les performances dynamiques du véhicule automobile. Les principaux thèmes développés concernent :

- La modélisation, l'analyse et le contrôle de la dynamique des véhicules automobiles,
- La synthèse de la commande en réseau des systèmes dynamiques de grande dimension, utilisant les outils des Inégalités Linéaires Matricielles (LMIs).
- La conception des architectures de commande décentralisées permettant de bien gérer les différentes fonctions de sécurité active. Dans ce contexte, le contrôleur global en réseau du châssis du véhicule est étudié en prenant en compte le couplage entre la dynamique latérale et la dynamique du roulis.

Cette thèse vise à poursuivre les travaux précédemment développés dans l'équipe, notamment ceux de :

- Mohamed Oudghiri, " Commande multi-modèles tolérante aux défauts : Application au contrôle de la dynamique d'un véhicule automobile",
- Hamid Dahmani, " Système d'Evaluation de la Dynamique du Véhicule et d'Aide à la Conduite : Détection des sorties de route et des renversements ".

## 1.2 Introduction Générale et motivations

### 1.2.1 L'embarqué en automobile

#### 1.2.1.1 Contexte automobile

Le domaine de l'automobile a beaucoup évolué ces trente dernières années. Au début purement mécaniques, les fonctionnalités d'une automobile ont, depuis lors, intégré en leur sein de plus en plus d'électronique, puis d'informatique. Cette informatique embarquée a désormais pour objectif de concevoir des lois permettant d'assurer la stabilité optimale du véhicule même dans les situations les plus critiques, d'alerter et d'avertir le conducteur, et de réguler les fonctionnalités du véhicule.

L'automatique s'avère le meilleur outil du développement de ces nouvelles technologies. En se basant sur une modélisation des processus physiques (ainsi que des dispersions associées), des lois de contrôle/commande peuvent être développées afin de piloter au mieux ces processus.

L'informatique embarquée est de plus en plus utile tout en continuant à évoluer dans l'automobile. Les nouvelles normes anti-pollution, les demandes du public en terme de sécurité et de confort, et la montée en puissance des technologies électroniques sont entrain de transformer la conception automobile. Si l'électronique représente actuellement de 20 % à 25 % du coût total du véhicule, cette proportion a atteint près de 40 % en 2010. L'électronique s'avère nécessaire pour contrôler toute la dynamique du véhicule (contrôle moteur, boite de vitesses , suspension, direction, ABS, ...), les fonctions de carrosserie (phares, essuie-glaces, portes, ...) et les fonctions de confort de l'habitacle (affichage, autoradio, climatisation, ...) ; l'ensemble est coordonné par des superviseurs. En tout, nous pouvons compter jusqu' à une quarantaine de calculateurs différents dans une même voiture. Ce nombre est toutefois à la baisse chez certains constructeurs, dont PSA, car les fonctionnalités sont petit à petit regroupées au sein d'un nombre réduit de calculateurs.

La stratégie de l' électronique est basée sur le logiciel (et non la puissance de calcul) ce qui fait l'importance de son développement. Sa mission est primordiale : elle détermine le comportement du calculateur ou du superviseur auquel il est associé. Comme les fonctions électroniques traitent de plus en plus d'informations, le logiciel s'étoffe pour prendre en compte toutes les configurations possibles. En 1980, la CX Citroen embarquait 1.1Ko, tandis qu'en 2000, la 607 embarque 2Mo. L'automobile suit un rythme de progression du logiciel identique à celui de l'avionique avec un décalage d'une décennie environ. [Hilaire, 2006]

Les fonctions implémentées dans les calculateurs sont de plus en plus complexes, comme nous allons le voir au paragraphe suivant.

#### 1.2.1.2 Les différentes lois embarquées

Les véhicules automobiles « intelligents » sont de plus en plus équipés des nouveaux systèmes de sécurité active et passive. La sécurité passive permet de minimiser la gravité

et les conséquences d'un accident en concevant, par exemple, des airbags, des châssis, des capots, des pare-chocs et autres parties du véhicules pour absorber un maximum d'énergie lors du choc. La sécurité active est utilisée pour désigner la technologie d'aide à la prévention d'un accident. Elle fait référence à l'ensemble des éléments liés au véhicule ainsi qu'à l'homme et à l'environnement qui par leur présence ou leur fonctionnement peuvent éviter qu'un accident ne se produise. Elle est donc en action avant l'accident. Ces tâches font parties de ce que les systèmes d'aide à la conduite ADAS (Advanced Driver Assistant Systems) accomplissent. Parmi ces systèmes, nous trouvons le système d'anti-blocage des roues, dont l'abréviation en allemand Antiblockiersystem est ABS, qui limite le blocage des roues pendant un freinage brusque et intense, ainsi que l'ESP (Electronic Stability Program) qui améliore le contrôle de trajectoires.

De nombreux accidents sont dus, en partie tout au moins, à la perte de contrôle du véhicule par le conducteur. Une telle perte de contrôle peut avoir de nombreuses causes : une mauvaise appréciation du conducteur (par exemple, vitesse trop élevée dans un virage), une manoeuvre brusque pour éviter un danger, ou encore un sol glissant. Dans ces circonstances, le véhicule dépasse souvent la limite de traction des pneus sur la route et le véhicule glisse : soit il ne peut tourner suffisamment vite (sous-vire), soit il tourne trop vite et part en tête-à-queue (survire). Si le conducteur perd le contrôle de son véhicule, il devient très difficile de manoeuvrer en toute sécurité et cela débouche souvent sur un accident. Éviter une telle perte de contrôle ou la corriger lorsqu'elle est amorcée peut aider à éviter l'accident. [Poussot-Vassal, 2008]

A cause du besoin croissant de performances et de sécurité, les défis dans le secteur automobile, surtout en ce qui concerne le contrôle/commande, n'ont cessé de croître (confort passager, tenue de route, stabilité du véhicule, consommation d'énergie, etc.). De plus, le besoin récurrent de robustesse vis-à-vis de perturbations externes, et/ou d'incertitudes de modélisation fait que le travail de l'ingénieur devient très complexe et l'amène à une charge de travail importante pour valider les méthodes de contrôle.

Dans les véhicules actuels, la plupart des solutions de contrôle/commande sont synthétisées de manière séparée et les limitations et couplage ne sont pas toujours pris en compte de manière explicite ; c'est le cas des suspensions, du système de freinage, de la direction. Ainsi, la collaboration entre les différents actionneurs est faite a posteriori à partir des connaissances des ingénieurs du véhicule, sur la base de "essai-erreur" ou en ajoutant des blocs pour traiter des situations spécifiques de conduite. Il en résulte une architecture de plus en plus compliquée qui peut difficilement être optimale et qui résulte en un prix, une consommation d'énergie et un flux de données toujours croissant et difficile à gérer.

Les principales améliorations de la sécurité active seront portées par l'activation combinée de plusieurs actionneurs de manière optimale. C'est en ce sens que les progrès en sécurité seront réalisés à moindre coût et en tirant parti des performances des nouvelles technologies d'actionneurs.

D'une manière plus générale, l'architecture électrique, les protocoles de communication et la sureté de fonctionnement deviennent des points de plus en plus complexes. De fait, à ce jour, aucune solution de Contrôle Global de Châssis (CGC) permettant de piloter

de manière unie et synchronisée tous les actionneurs disponibles, n'existe encore sur les véhicules commercialisés (voir Figure 1.1).

Figure 1.1: Châssis d'un véhicule : architecture avec systèmes de suspensions, freinage et direction (image de Moving Graphics) [Poussot-Vassal, 2008].

Les systèmes de sécurité active et d'aide à la conduite utilisent les données des capteurs intéroceptifs et extéroceptifs du véhicule afin de pouvoir fonctionner conformément à leurs rôles et ramener le véhicule à l'état de stabilité désiré. Si la mesure de certains éléments décrivant l'état du véhicule comme la vitesse linéaire et la vitesse de lacet est possible avec un gyromètre, il reste beaucoup d'autres éléments qui sont non mesurables ou dont les capteurs dédiés sont très couteux ; comme dans le cas des forces verticales appliquées au niveau du contact pneumatique/chaussée, la dérive au centre de gravité, etc. Pour cela, des capteurs « logiciels » ou des estimateurs sont construits et implémentés dans le véhicule. Ils permettent d'estimer des états non mesurables à partir de l'information disponible des capteurs et en utilisant un modèle du véhicule. L'estimation d'état est un problème dont la résolution est indispensable à la commande et le contrôle du véhicule et, ainsi, à l'augmentation de la sécurité routière. Les mesures des différents capteurs et l'estimation d'état permettent donc de connaitre l'état actuel du véhicule et d'évaluer son comportement par rapport à un comportement désiré. Nous n'allons pas détailler ici toutes les stratégies de contrôle-commande existantes (ou à venir), ni les multiples champs d'applications de la commande dans le domaine automobile. Nous pourrons trouver dans [Gissinger et Fort-Piat, 2002a,b, Oudghiri, 2008, Rajamani, 2006, Kiencke et Nielsen, 2000, Glaser, 2004], notamment, de nombreux exemples détaillés.

Les deux grands domaines que l'automatique a principalement investi sont le contrôle du groupe motopropulseur et le contrôle dynamique de châssis. [Hilaire, 2006]
Dans cette thèse, nous nous intéressons au contrôle dynamique du châssis pour maîtriser le comportement longitudinal, latéral et vertical du véhicule en fonction du choix du conducteur et du comportement routier de la voiture.

La nécessité de réaliser ces systèmes comporte en soi deux problématiques : la première est de réaliser des systèmes d'aide à la conduite agissant chacun sur un ou plusieurs organes du véhicule. La deuxième est de faire travailler ensemble les systèmes liés à la dynamique latérale et verticale.

Chaque système d'aide à la conduite est basé logiquement sur des lois de commande. Ces lois devant considérer le fait que le véhicule est un système complexe qui est sujet à plusieurs incertitudes : des paramètres comme la masse, la vitesse, l'adhérence, les perturbations latérales ainsi que les caractéristiques de la route sont soit mal connues, soit inconnues. Pour réaliser ces lois il est possible d'utiliser les compétences développées en automatique, qui pendant ces dernières années a proposé des solutions à ce type de problèmes. Néanmoins toutes les méthodes ne sont pas adéquates pour résoudre notre problématique : les méthodes utilisant des correcteurs du type PID ou à gains constants ne sont plus suffisantes pour satisfaire les performances envisagées par le constructeur automobile [Ackermann *et al.*, 1995]. Les lois nécessaires pour satisfaire pleinement notre problème doivent satisfaire des critères de robustesse très importants. La synthèse des lois de commande est donc un problème de robustesse vis-à-vis des incertitudes et des perturbations. Il nous a donc paru logique d'utiliser les techniques basées sur la norme $H_\infty$ qui sont aujourd'hui largement utilisées pour résoudre les problèmes de robustesse et dont les résultats théoriques sont bien connus. Ces méthodes de commande ont fait l'objet de plusieurs années d'activité de recherche pour aboutir entres autres à différents travaux [Font, 1995], [Mammar, 1992], [Scorletti, 1995], [Raharijona, 2004].

En partant de ces considérations, il est possible d'obtenir plusieurs systèmes d'aide à la conduite chacun agissant sur un ou plusieurs organes du véhicule. Logiquement chaque système présente des avantages vis-à-vis de certaines situations de conduite et des inconvénients par rapport à d'autres situations. Il est aussi possible de constater que les inconvénients d'un système ne sont pas forcément communs avec ceux des autres. Il est donc possible d'envisager de faire travailler ensemble plusieurs contrôleurs afin d'exploiter de façon optimale les avantages de tous ces systèmes et de minimiser leurs désavantages. La solution à ce problème est donc l'établissement d'un système de contrôle intégré pour véhicule [Gordon *et al.*, 2003].

Pour plus de détails sur la méthode, il est possible de reprendre rapidement les concepts introduits dans [Palladino, 2006].

### 1.2.2 Contrôle global du châssis du véhicule (CGC)

Les systèmes utilisant les actions coordonnées de plusieurs actionneurs (freins, directions, suspensions actives/semi-actives, etc) permettent d'améliorer la sécurité active du véhicule par rapport aux systèmes n'utilisant qu'un seul type d'actionneurs. [Akhmetov, 2011]

#### 1.2.2.1 Commande décentralisée

L'approche conventionnelle pour contrôler la dynamique du véhicule utilise la décomposition du système global en sous-systèmes d'ordres réduits (suspensions, directions). Cette approche facilite la synthèse des lois de commande et aussi diminue les charges élevées de calcul des algorithmes de programmation. Un nombre croissant de problèmes de contrôle des systèmes complexes considère que l'utilisation d'une structure de commande

décentralisée avec des contrôleurs physiquement distribués est plus appropriée pour atteindre les performances souhaitées en termes de stabilité, sécurité et confort.

Il existe plusieurs possibilités pour faire coopérer les contrôleurs. Parmi les structures possibles, nous pouvons en dégager trois dont les caractéristiques permettent de couvrir l'intégralité des structures existantes.

La structure la plus simple est celle de la Figure 1.2, qui fait intervenir deux niveaux : le niveau bas qui intègre tous les contrôleurs dédiés à l'asservissement des actionneurs et le niveau haut composé par les contrôleurs capables de piloter le comportement de la voiture. Les contrôleurs du niveau haut sont conçus pour pouvoir communiquer et échanger des informations comme, par exemple, des mesures ou leurs actions sur les actionneurs. Dans cette structure tous les contrôleurs de niveau haut ont les mêmes droits. Il est donc possible d'avoir parfois des conflits entre eux. Pour pouvoir éviter les conflits et pour effectuer l'arbitrage entre les contrôleurs il est nécessaire d'introduire soit des priorités entre les contrôleurs soit un troisième niveau qui est dédié à la supervision de la structure (Figure 1.3). Bien sûr parmi les solutions existantes il est possible d'en prévoir une où il y a un seul contrôleur capable de contrôler tous les actionneurs, comme par exemple celle de la Figure 1.4. Cette structure a le gros inconvénient de manquer de modularité : lorsqu'un actionneur est supprimé il est nécessaire de procéder à une nouvelle synthèse de loi de commande. Par la suite dans notre synthèse, on étudiera la structure décentralisée proposée dans la Figure 1.2. [Menighed, 2010].

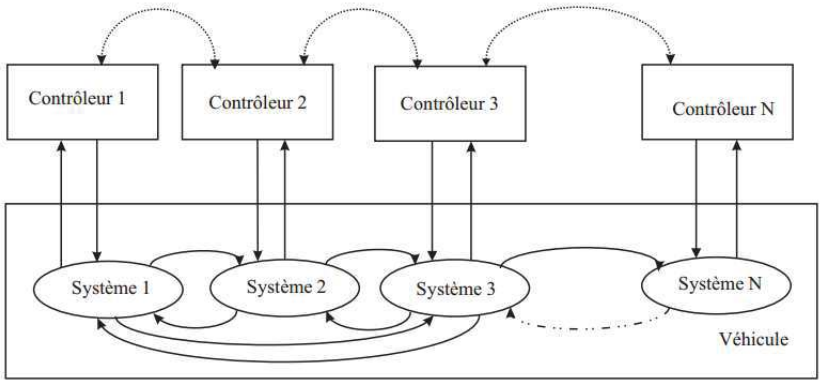


Figure 1.2: Structure monovariable.

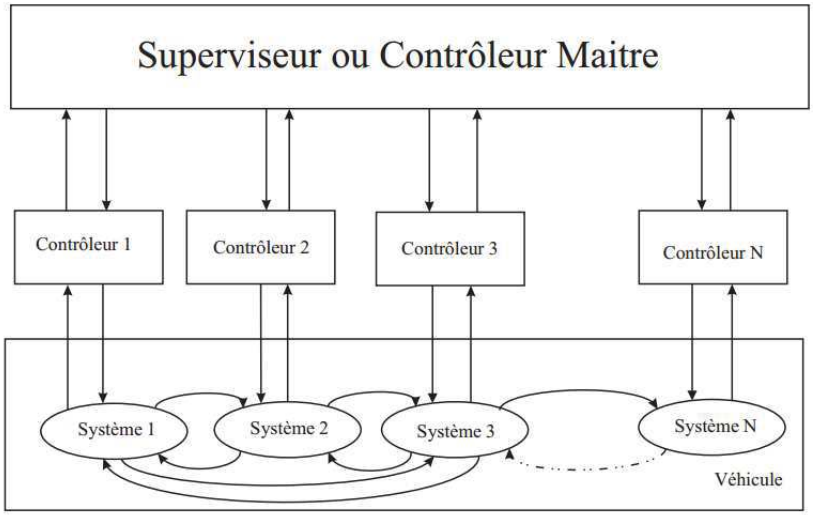


Figure 1.3: Structure avec superviseur.

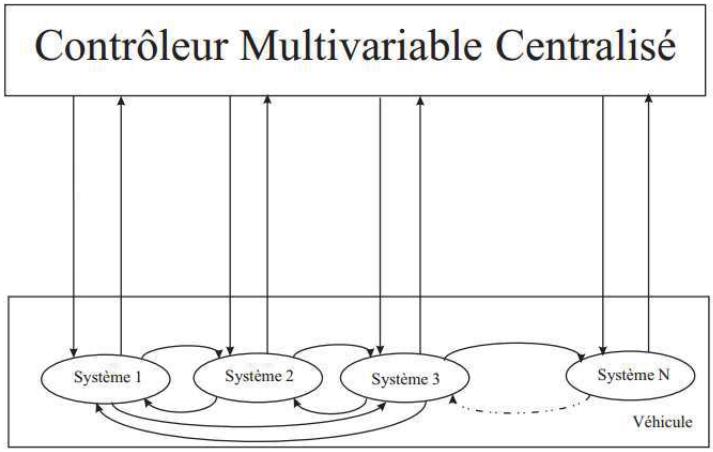


Figure 1.4: Structure multivariable.

#### 1.2.2.2 Commande décentralisée en réseau

Au cours de la dernière décennie, l'étude des Systèmes Commandés en Réseau (SCRs) est devenue un axe de recherche très actif, principalement motivée par l'important développement de réseaux filaires ou sans fils à faibles coûts (voir, par exemple [Hespanha *et al.*, 2007a], [Tang et Yu, 2007] et [Yang, 2006] et les références qui y sont mentionnées). En effet, de tels réseaux s'avèrent particulièrement adéquats pour des systèmes commandés en réseau dans lesquels les capteurs, les actionneurs et les contrôleurs communiquent via des supports de communication partagés.

Dans ce sens, la dynamique de véhicule muni de systèmes de contrôle qui opère à travers un réseau de communication est étudiée.

L'idée principale pour assurer la stabilité de ce type de système complexe de grande dimension est de le fragmenter en un ensemble fini de sous-systèmes, de dimension acceptable, interconnectés. C'est pourquoi nous avons introduit la notion de réseau de communication pour les relier, et ainsi les données sont échangées entre les différents sous-systèmes via le réseau de communication.

Bien que, l'utilisation de ces réseaux présente des avantages en termes de flexibilité et de réduction des coûts d'installation et de maintenance. Il est bien connu qu'en raison de la limitation des ressources du réseau, les retards induits par le réseau et les pertes de paquets de données à travers le réseau pourraient dégrader les performances du SCR et conduire à l'instabilité de ce dernier. La présence de telles contraintes affecte naturellement le comportement global des SCRs, engendrant la dégradation des performances et de la stabilité (voir, par exemple, [Hespanha *et al.*, 2007b], [Jianyong *et al.*, 2004] et [Pan *et al.*, 2006]). De tels problèmes ont alors suscité, ces dernières années, l'intérêt de nombreux automaticiens [Azimi-Sadjadi, 2003], [Nilsson, 1998] et [Zhan *et al.*, 2001]. Notamment, une attention particulière a été portée à la stabilité/stabilisation des SCRs en tenant compte, d'une part, des retards intrinsèques à la transmission d'informations de contrôle/commande et de mesures à travers des réseaux de communication (voir [Nilsson, 1998] [Seuret *et al.*, 2006], [Tipsuwan et Chow, 2003] et [Witrant *et al.*, 2007]), et, d'autre part, du problème des pertes de données (voir, entre autres, [Azimi-Sadjadi, 2003], [Ling et Lemmon, 2002], [Ling et Lemmon, 2003] et [Zhan *et al.*, 2001]) ainsi qu'au problème de la quantification des mesures ([Yue *et al.*, 2006, Zhang *et al.*, 2011, Latrach *et al.*, 2013a, Mahmoud et Al-Rayyah, 2011, Wu *et al.*, 2012, Liu et Zhang, 2010]).
Dans ce cas, la communication en réseau peut entraîner une dégradation des résultats, mais cette dégradation a pu être maîtrisée et reste inférieure à la tolérance que l'on pouvait admettre.
Cela dit, ces problèmes récurrents se posent à chaque nouvelle synthèse de loi de commande et montrent la nécessité d'étudier des outils et des méthodes adaptés à cette problématique.
L'objectif principal de ce mémoire est de développer des méthodes de contrôle qui prennent en compte le retard de transmission, les pertes de paquets d'information et le phénomène de quantification pour piloter différents actionneurs du véhicule dans le but d'améliorer le confort et la sécurité, et par la suite de maîtriser le comportement dynamique du véhicule. En utilisant la représentation TS des systèmes non linéaires, la commande floue en réseau mono actionneur a été étudiée et ses performances analysées en considérant différentes architectures de commande (retour d'état statique, retour de sortie statique, retour de sortie dynamique). Ensuite, nous nous sommes intéressés à la commande décentralisée en réseau incluant les problèmes de robustesses à la fois vis-à-vis des perturbations extérieures et des variations paramétriques. Dans la synthèse, l'approche de Lyapunov Krasovskii (LK), la norme $H_\infty$ et le formalisme LMI sont utilisés. Pour réduire le conservatisme et relâcher les conditions de synthèse, la fonction de (LK) avec des termes intégraux triples, la technique de répartition du retard et l'introduction des variables libres (Slack

variables) ont été utilisées. L'ensemble des résultats obtenus sont validés en simulation pour le contrôle de la dynamique de véhicule.

Nos principales contributions concernent l'analyse de stabilité, la stabilisation et le contrôle des systèmes non linéaires décrits par des modèles flous de type Takagi Sugeno (TS) incluant les contraintes liées à la transmission d'information en réseau, aux rejets de perturbations, aux variations paramétriques et à la non-fragilité de commande.

## 1.3 Plan de la thèse

Le premier chapitre intitulé « Introduction générale » présente brièvement la problématique et les objectifs principaux de la thèse ainsi que le cadre du travail.

Dans le deuxième chapitre intitulé « Modélisation de la dynamique du véhicule », nous présentons les principaux modèles de comportement de la dynamique de véhicule utilisés pour illustrer nos résultats théoriques. Après un rappel des principaux modèles existants dans la littérature des forces de contact pneu/chaussée, nous rappelons le modèle de la dynamique longitudinale, le modèle de la dynamique latérale (dérive/lacet) et le modèle de roulis. Nous présentons par la suite une classe particulière de modèles non linéaires appelée modèle TS. Nous donnons dans ce contexte un aperçu sur les différentes méthodes d'obtention des modèles TS. Cette classe de modèles permet de décrire la dynamique non linéaire du véhicule.

Le troisième chapitre intitulé « Contrôle des systèmes commandés en réseau » comprend quatre parties. Dans la première, nous définissons les SCRs (Systèmes Commandés en Réseau) avec leurs avantages et leurs inconvénients. Dans la deuxième partie, la commande PDC (Parallel Distributed Compensation) robuste en réseau pour des systèmes flous de type TS perturbés est étudiée. Ainsi, en utilisant l'approche de Lyapunov et la norme $H_\infty$, des conditions de synthèse mises sous forme des LMIs et qui prennent en compte les contraintes du réseau de communication sont développées. Ensuite, une commande non-fragile par retour de sortie statique est développée pour les SCRs incertains en se basant sur la technique de bi-partition du retard. Enfin, deux autres stratégies de commande basées sur observateur pour les SCRs sont développées. La première utilise en plus du retard et des pertes de paquets, la quantification des données capteurs et la seconde prend en compte, en plus, la quantification des informations de commande. De nouveaux résultats de synthèse moins conservatifs sont proposés. Pour valider notre approche, des résultats de simulation pour le contrôle en réseau de la dynamique latérale de véhicule, sont présentés.

Le quatrième chapitre intitulé « Commande floue décentralisée des systèmes de grande dimension » concerne la stabilisation des systèmes non linéaires décrits par des systèmes flous de type TS interconnectés. Après un bref rappel des définitions des systèmes de grande dimension et une description des systèmes flous de type TS interconnectés, la commande décentralisée par retour d'état flou ensuite par retour de sortie flou est étudiée et des conditions de synthèses sous forme LMIs sont proposées. Une application à la com-

mande globale du châssis basée sur la représentation du comportement de la dynamique du véhicule par des modèles flous de type TS interconnectés est donnée pour valider notre approche.

Le dernier chapitre « Conclusion et perspectives » récapitule le travail réalisé dans un bilan et propose des perspectives pour la suite.

Chapitre

# 2

# Modélisation d'un véhicule automobile, aspects généraux

Sommaire


2.1 Introduction
2.2 Les différents mouvements du véhicule et définition des repères
2.3 Modèle de pneumatique
2.4 Dynamique de roulis
2.5 Modèle dérive/lacet (bicyclette)
2.6 Modèle dérive/lacet/roulis
2.7 Modèle longitudinal d'un quart de véhicule
2.8 Représentation floue de type Takagi-Sugeno TS de la dynamique du véhicule
2.9 Conclusion


## 2.1 Introduction

Ce chapitre sera consacré à la modélisation de la dynamique du véhicule et son mouvement par rapport à la route. Après un bref rappel sur les différents mouvements du véhicule, nous présentons les modèles pneumatiques. Ensuite, nous décrirons la dynamique longitudinale, la dynamique dérive/lacet et la dynamique dérive/lacet/roulis. Enfin, nous présentons les modèles TS des différents modèles de la dynamique du véhicule.

## 2.2 Les différents mouvements du véhicule et définition des repères

Le véhicule avec suspension est un système relativement complexe et la modélisation de son comportement dynamique est souvent délicate explorée par plusieurs auteurs [Kiencke et Nielsen, 2005, Pham, 1991]. Un modèle à six degrés de liberté est souvent utilisé pour décrire la dynamique d'un véhicule de façon complète. La caisse du véhicule possède six degrés de liberté, constitués par trois mouvements de translation et trois mouvement de rotations illustrés sur la figure 2.1. Le mouvement de translation sur l'axe $\overrightarrow{X}$ représente le déplacement longitudinal, la translation sur l'axe $\overrightarrow{Y}$ représente le déplacement latéral et le déplacement vertical se fait sur l'axe $\overrightarrow{Z}$. Les trois mouvements de rotations se font sur ces mêmes axes et sont définies comme suit : une rotation autour de l'axe $\overrightarrow{X}$ appelée le mouvement de roulis du véhicule et donnée par l'angle $\Phi$, ce mouvement se produit généralement suite à un braquage des roues avants et se détecte en particulier lorsque le véhicule aborde un virage. La deuxième rotation autour de l'axe $\overrightarrow{Y}$ appelée le mouvement de tangage du véhicule et donnée par l'angle $\Theta$, ce mouvement est généré par un freinage ou une accélération longitudinale. Et enfin une troisième rotation autour de l'axe $\overrightarrow{Z}$ appelée le mouvement du lacet du véhicule et donnée par l'angle $\Psi$. [Dahmani, 2011]

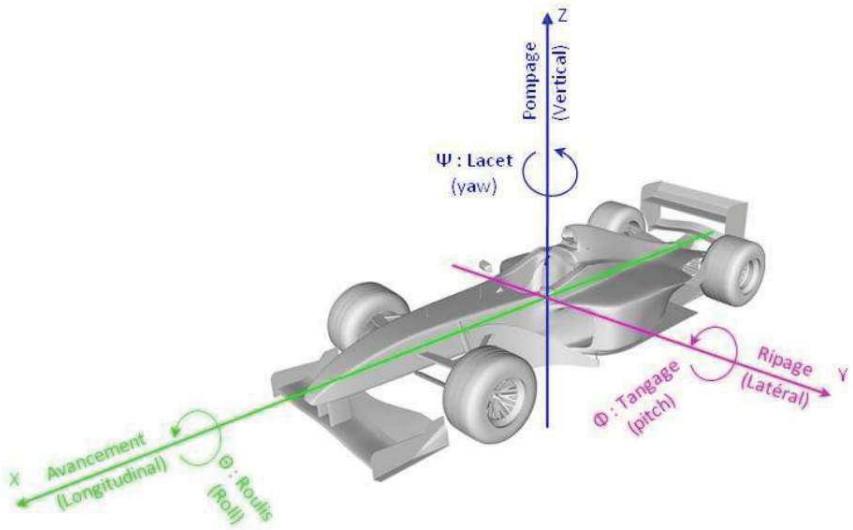


Figure 2.1: Illustration des différents mouvements du véhicule.

En plus des variations des paramètres du véhicule (vitesse, forces de contact,...etc.), la prise en compte de toutes les interactions entre ses composants engendre un modèle fortement non linéaire. Afin d'obtenir des modèles moins complexes et facilement exploitables, des hypothèses sont généralement souvent mises selon l'objectif de l'application et le degré de précision souhaité. Les hypothèses simplificatrices sont de nature variées et interviennent entre autres au niveau des moments d'inertie du véhicule. Du fait de la symétrie du véhicule par rapport à un plan vertical-longitudinal, les moments d'inertie croisées ($I_{xy}$, $I_{xz}$ et $I_{yz}$) sont relativement faibles comparés aux valeurs des moments dans les directions $x$,$y$ et $z$.

**Definition des repères** :

Plusieurs repères peuvent être utilisés pour décrire les mouvements du véhicule. Nous allons définir dans ce travail trois repères qui seront utiles à l'écriture des différentes équations régissant la dynamique du véhicule (Figure 2.2). [Oudghiri, 2008]

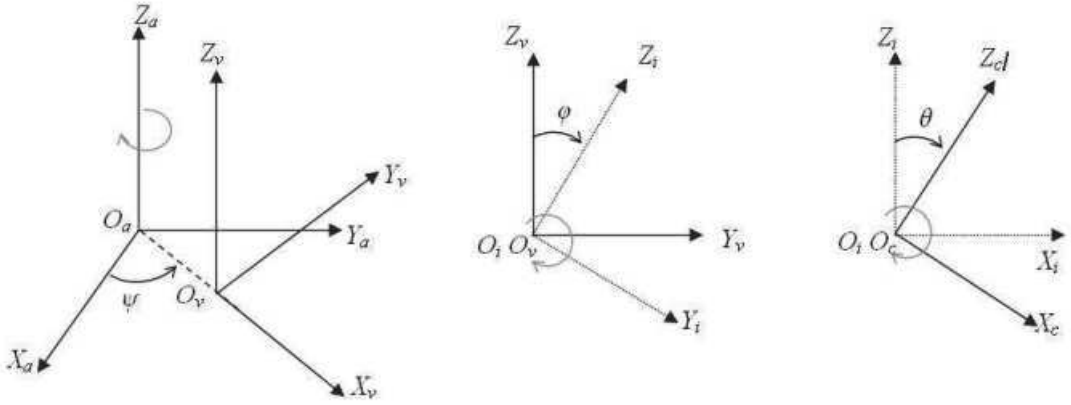


Figure 2.2: Passage entre les différents repères utilisés.

Comme le montre la Figure 2.3, nous pouvons distinguer trois repères. Le premier repère est le repère inertiel ou absolu lié à la terre $R^a$ ($O_a$, $\overrightarrow{X}_a$, $\overrightarrow{Y}_a$, $\overrightarrow{Z}_a$ ), il peut être considéré comme un repère galiléen de référence. Un deuxième repère lié au mouvement du véhicule par rapport au sol, noté $R^v$ ($O_v$, $\overrightarrow{X}_v$, $\overrightarrow{Y}_v$, $\overrightarrow{Z}_v$ ). Ensuite un troisième repère dont les mouvements sont liés à ceux de la caisse (mouvement de roulis et tangage) $R^c$ ($O_c$, $\overrightarrow{X}_c$, $\overrightarrow{Y}_c$, $\overrightarrow{Z}_c$ ). Un repère intermédiaire noté $R^i$ ($O_i$, $\overrightarrow{X}_i$, $\overrightarrow{Y}_i$, $\overrightarrow{Z}_i$ ), est introduit pour exprimer le passage du repère $R^v$ au repère $R^c$. [Dahmani, 2011]

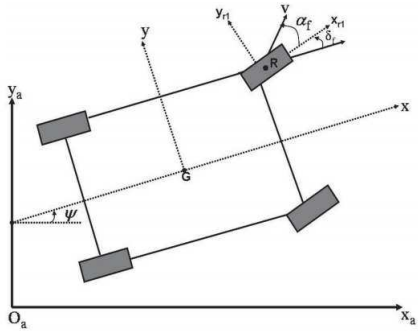


Figure 2.3: Définition des repères.

L'axe $x_{ri}$ est dans le plan de la roue, $y_{ri}$ est perpendiculaire au plan de la roue et $z_{ri}$ est normal au plan de la route. Le repère roue est utilisé pour déterminer les efforts pneumatiques. Par ailleurs, la caisse (masse suspendue) effectue des mouvements de roulis $\Phi$ et de tangage $\Theta$ par rapport à la masse non suspendue (voir figures 2.4 et 2.5).

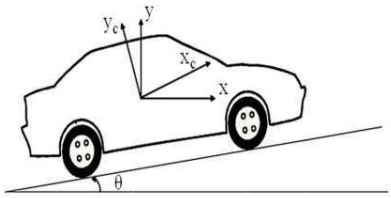


Figure 2.4: Repère lié à la caisse après un mouvement de tangage.

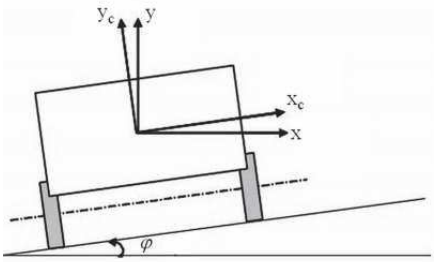


Figure 2.5: Repère lié à la caisse après un mouvement de roulis.

Dans la suite, nous nous intéressons aux différentes étapes permettant de décrire l'évolution de la vitesse de translation et de la vitesse angulaire du véhicule dans le repère lié à la caisse. Pour obtenir les équations de mouvement du véhicule, nous appliquons le principe fondamental de la mécanique des corps solides (Principe de Newton). Le premier principe concerne l'équilibre des forces extérieures agissant sur le véhicule et le deuxième, l'équilibre des moments dynamiques du véhicule par rapport aux moments extérieurs. [Dahmani, 2011]

$$\begin{aligned} m\vec{\Gamma}_a &= \sum \vec{F}_{ext}, \\ \vec{H}_o &= \sum \vec{M}_{ext} \end{aligned} \tag{2.1}$$

où $\sum \vec{F}_{ext}$ et $\sum \vec{M}_{ext}$ représentent, respectivement, les forces extérieures et les moments extérieurs appliqués au véhicule, $m$ est la masse du véhicule, $\vec{\Gamma}_a$ est le vecteur d'accélération du véhicule et $\vec{H}_o$ est le vecteur des moments appliqués au centre de gravité du véhicule.

**Hypothèses**

Afin de simplifier la modélisation du véhicule, nous allons nous intéresser dans la suite de cette section uniquement à des dynamiques précises du véhicule et en négliger celles qui ne seront pas utiles pour le développement des techniques proposées dans ce document. Des hypothèses simplificatrices permettant d'obtenir des modèles de synthèse des lois de commande pour la dynamique de véhicule seront considérées comme suit :

**Hypothèse 1** L'ensemble masse non-suspendue/ masse suspendue (caisse) du véhicule constitue un seul même corps rigide. Les déformations et les mouvements relatifs de la caisse qui sont engendrés par les éléments de suspension ne sont donc pas pris en compte.

**Hypothèse 2** Le repère $R_c$ lié à la caisse a son origine au centre de gravité du véhicule. Sous l'hypothèse 1 et l'hypothèse 2, les équations (2.1) deviennent ainsi :

$$\begin{aligned} m(\dot{\vec{V}}+\vec{\Omega}\times\vec{V}) &= \sum \vec{F}_{ext}, \\ I\dot{\vec{\Omega}}+\Omega\times I\vec{\Omega} &= \sum \vec{M}_{ext} \end{aligned} \tag{2.2}$$

$\overrightarrow{V} = (v_x,v_y,v_z)^T$ est la vitesse du centre de gravité du véhicule dans le repère absolu. Notons aussi que $v_x = u$ et $v_y = v_r$. $\vec{\Omega} = (p,q,r)^T$ est la vitesse de rotation de la caisse du véhicule. La matrice $I$ est le tenseur d'inertie de la caisse du véhicule définie sous la forme :

$$I = \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_z \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

où les indices $(x,y,z)$ de l'équation (2.3) sont des notations abrégées pour les directions $O_cX_c$ , $O_cY_c$ et $O_cZ_c$ . Cette matrice est constante dans le référentiel lié à la caisse. [Dahmani, 2011]

**Remarque 2.1** Les forces extérieures $\sum \vec{F}_{ext}$ dues aux pneumatiques sont principalement à l'origine des non linéarité de la dynamique du véhicule et seront détaillées dans la section suivante.

## 2.3 Modèle de pneumatique

### 2.3.1 Introduction

Un pneumatique est un composant d'interface entre le véhicule et la route permettant de transmettre les efforts pour une bonne tenue de route. Ses qualités d'amortissement constituent également un premier dispositif d'isolation vibratoire vis-à-vis des sollicitations engendrées par la route. En mouvement, un pneumatique est soumis à plusieurs types d'efforts. Les efforts longitudinaux sont responsables de l'accélération ou du freinage. Les efforts latéraux permettent au véhicule de négocier un virage. A part les efforts aérodynamiques, toutes les forces et moments externes appliqués sur un véhicule sont essentiellement dus au contact entre le pneu et le sol. En effet, la connaissance et la compréhension des propriétés des pneumatiques (l'étude des forces développées à l'interface entre le pneu et le sol) sont particulièrement importantes pour toute étude de comportement dynamique des véhicules automobiles.

Un pneumatique possède trois fonctions principales :

- il supporte la charge verticale,
- il développe les forces longitudinales en cas d'accélération et de freinage,
- il développe les forces latérales dans un virage.

### 2.3.2 Forces du pneumatique

Le pneumatique est un système sujet aux forces et moments externes. Ces forces et moments sont exprimés dans un repère lié à la roue, repère mobile lorsqu'on tourne le volant, par exemple. Ce repère, utilisé généralement pour décrire l'orientation de la roue, correspond aux normes ISO (International Organization for Standardization). L'origine du repère $R$=($O$,$x$,$y$,$z$) coïncide avec le centre de l'aire de contact pneu/sol (Figure 2.6). Sur un sol considéré plan et horizontal, l'axe des $x$ est l'intersection entre le plan du pneumatique (réduit à un disque) et le sol. L'axe des $z$ est perpendiculaire au sol. L'axe des $y$ complète le repère direct suivant la règle de la main droite. L'angle de carrossage $\gamma$ est l'angle entre le plan du pneumatique et le plan vertical ($xOz$). L'angle de dérive $\alpha$ est l'angle entre le vecteur de vitesse du pneumatique $v$ et l'axe des $x$. Ces deux angles sont mieux illustrés par des vues de dessus et de face dans la figure 2.7.

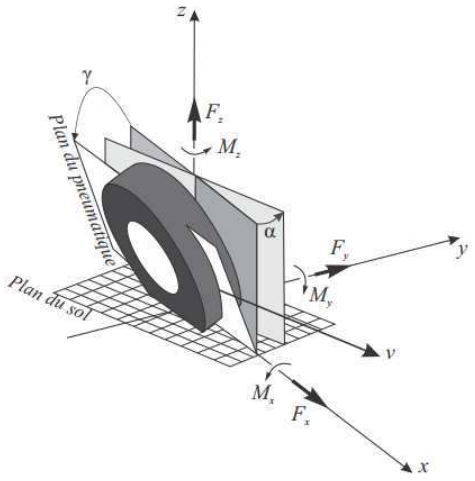


Figure 2.6: Forces et moments appliqués sur la roue [Jazar, 2008].

La réaction entre le pneumatique et la chaussée est décrite par trois forces et trois moments [Gillespie, 1992] :

- Force verticale $F_z$
- Moment d'auto-alignement $M_z$
- Force horizontale $F_x$
- Moment de renversement $M_x$
- Force latérale $F_y$
- Moment de résistance au roulement $M_y$

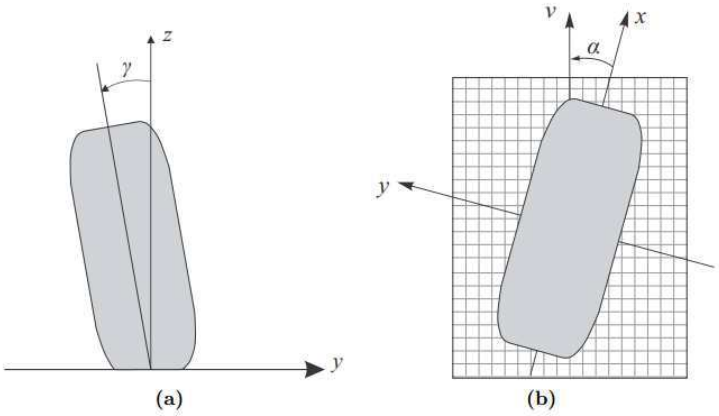


Figure 2.7: Illustration des angles du pneumatique : (a) : vue de face de l'angle de carrossage $\gamma$ ; (b) : vue de dessus de l'angle de dérive $\alpha$.

#### 2.3.2.1 Force verticale $F_z$

La force verticale d'un pneumatique, ou la charge normale, vient d'une grande partie du poids du véhicule. Elle est influencée par [Rajamani, 2006] :

- les demi-empattements avant et arrière (donc indirectement la position du centre de gravité),
- l'accélération longitudinale,
- les forces aérodynamiques,
- l'inclinaison de la route.

Une accélération positive diminue les forces verticales sur les roues avants et les accroît sur les roues arrières. Ce qui est à l'inverse du freinage.

Les forces aérodynamiques sont proportionnelles au carré de la vitesse du véhicule. Sur une route plane et avec des petites vitesses, les projections de ces forces, considérées parallèles au plan horizontal, sont nulles, et ainsi ne sont par introduites dans l'expression des forces verticales. Quand il est possible, les pentes des grandes routes sont limitées à 4%, tandis que sur les autres routes, ces limites peuvent atteindre 10% à 12%. Une pente positive (véhicule montant une route inclinée) transfert la charge de l'avant vers l'arrière du véhicule [Gillespie, 1992].

#### 2.3.2.2 Force longitudinale $F_x$ et glissement longitudinal $\lambda$

La force longitudinale $F_x$ est la force appliquée selon l'axe $X$ entre la surface de contact du pneu et la chaussée. Elle est en fonction du coefficient d'adhérence longitudinale $\mu$ et de la force verticale $F_z$ . Elle est décrite par l'expression suivante :

$$F_x = \mu(\lambda) F_z \tag{2.4}$$

Le coefficient d'adhérence $\mu$ détermine l'état de la chaussée. Il dépend du glissement $\lambda$ défini ci-dessous, de la charge et de la vitesse du véhicule. Son comportement par rapport

au glissement longitudinal $\lambda$ est représenté dans la figure 2.8 pour un état de chaussée donné. L'adhérence est considérée nulle dans le cas où $\lambda$ tend vers 0.
Dans notre étude, nous utilisons le modèle expérimental, donné par Burckhardt [Burckhardt, 1993] décrit par l'équation (2.14). (voir la sous-section 2.3.3.2)

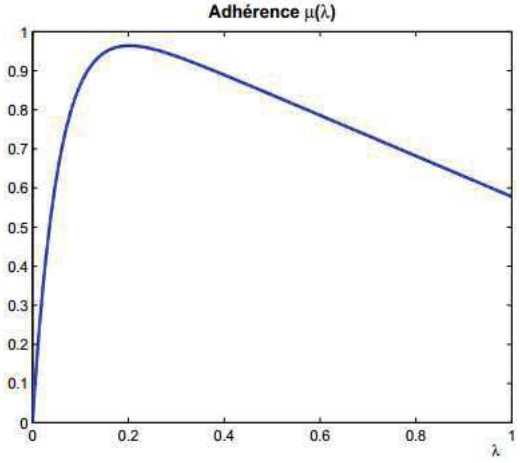


Figure 2.8: Variation du coefficient de frottement en fonction du glissement [Oudghiri, 2008].

De plus, la figure 2.9 représente les caractéristiques du coefficient de frottement pour différents types de revêtement et d'état de chaussée.

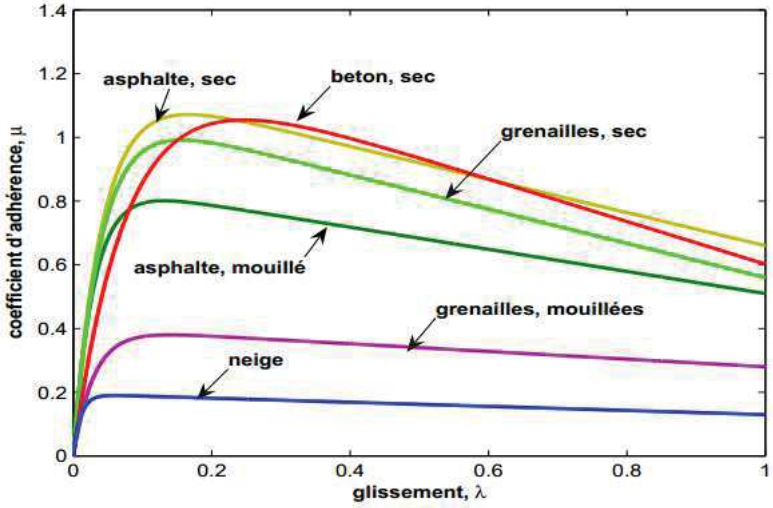


Figure 2.9: Variation du coefficient d'adhérence en fonction de l'état de la chaussée.

**Taux de glissement longitudinal** : Le taux de glissement longitudinal $\lambda$ de la roue est défini par [Oudghiri, 2008] :

$$\begin{cases} \lambda = \dfrac{v_x - \omega R}{v_x} \text{ si } v_x > \omega R \text{ (durant le freinage)} \\ \lambda = \dfrac{\omega R - v_x}{v_x} \text{ si } \omega R > v_x \text{ (durant l'accélération)} \end{cases} \tag{2.5}$$

Où $v_x$ étant la vitesse linéaire du véhicule au point de contact pneu/sol, $\omega R$ est la vitesse linéaire du pneumatique avec $\omega$ est la vitesse angulaire du véhicule $(rad/s^2)$ et $R$ est le rayon de la roue $(m)$. Ce glissement décrit la différence normalisée entre ces deux vitesses. Ainsi, en fonction de la valeur prise par $\lambda$, on distingue deux situations :

- $\lambda = 0$, la roue est libre : aucune force longitudinale n'est exercée sur la roue.
- $\lambda = 1$, la roue est bloquée $(\omega = 0)$.

Notons que pour le moment, le glissement longitudinal reste une variable difficile à estimer à cause de la connaissance imprécise du rayon dynamique de la roue qui dépend de plusieurs facteurs comme l'état du pneumatique, la nature de la chaussée, la pression, la température, la charge,... Rappelons que le système de freinage et d'anti-blocage de la roue (ABS) est conçu pour contrôler le glissement longitudinal et le maintenir autour d'une petite valeur désirée ne dépassant pas le seuil de 10% pendant une conduite normale ; la relation liant la force longitudinale et $\lambda$ est linéaire. Dans des conditions de conduite plus agressives, la relation devient non linéaire. Le pneumatique devient instable et tend à patiner (lors d'une traction) ou à se bloquer (lors d'un freinage). Différents modèles existent pour modéliser ce comportement non linéaire comme celui de Dugoff ou de Pacejka. Ce dernier est présenté dans la sous-section ( 2.3.3.1).

#### 2.3.2.3 Force latérale $F_y$ et angle de dérive $\alpha$

La force latérale $F_y$ est la force exercée entre le pneu et la chaussée suivant l'axe $y$. La déformation transversale que subissent les pneumatiques quand ils sont soumis à l'action d'une force latérale est à l'origine de la dérive qui est la variation de trajectoire du véhicule. Elle est définie par l'expression suivante :

$$F_y = \mu(\alpha) F_z \tag{2.6}$$

L'angle formé par le vecteur vitesse de la roue et le plan de la roue est appelé "angle de dérive du pneumatique", donné par l'expression suivante :

$$\alpha = \delta_f - arctan(\frac{u_y}{u_x}) \tag{2.7}$$

où $\delta_f$ est l'angle de braquage de la roue, $u_x$ et $u_y$ sont respectivement les projections de la vitesse $u$ de la roue selon l'axe longitudinal et latéral du véhicule.

### 2.3.3 Modèle des forces pneumatiques

La modélisation des efforts interagissant entre le pneumatique et la chaussée est complexe car de nombreux phénomènes physiques interfèrent selon une multitude de caractéristiques environnementales et de paramètres de pneumatique (nature de la chaussée,

température, pression, ... ). Plusieurs modèles décrivant le comportement statique du pneumatique existent dans la littérature. Dans la suite, nous présentons le modèle de Pacejka [Bakker *et al.*, 1989], le modèle de Burckhardt/Kiencke et le modèle linéaire. [Oudghiri, 2008, Dahmani, 2011]

#### 2.3.3.1 Modèle de Pacejka, Formule "magique"

C'est un modèle semi-empirique basé sur les données expérimentales mais contient des structures inspirées des modèles physiques ce qui permet de faire l'interpolation. Appelé aussi « formule magique », il est basé sur un $sin(arctan)$ qui offre une excellente approximation de la courbe de la force latérale $F_y$ en régime permanent (Figure 2.10) qui montre un exemple des variations de la force latérale et les zones de fonctionnement du pneumatique en utilisant le modèle de pacejka pour une charge $F_z = 4500N$.

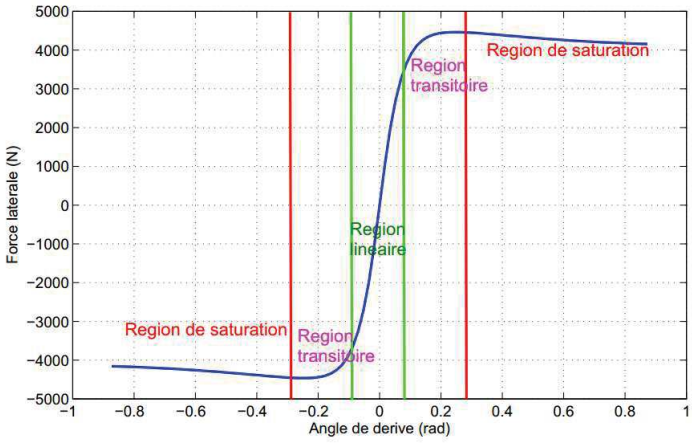


Figure 2.10: Modèle de Pacejka : courbes des efforts latéraux et les zones de fonctionnement du pneumatique.

L'expression générale de la "formule magique" proposée pour décrire les forces de contact pneu/sol est donnée par :

$$y(x) = Dsin(Carctan(Bx - E(Bx - arctan(Bx)))) \tag{2.8}$$

Cette formule (2.8) produit une courbe qui passe par l'origine $x = y = 0$. Dans certains cas, il peut être utile de produire une courbe décalée. Une translation horizontale de la courbe par $S_h$ et un décalage vertical par $S_v$ peuvent alors être ajoutés.

$$Y(X) = y(x) + S_v \tag{2.9}$$

$$x = X + S_h \tag{2.10}$$

La variable $Y$ correspond à la force longitudinale $F_x$ , à la force latérale $F_y$ ou au moment d'auto-alignement. La variable $X$ représente le glissement longitudinal ou l'angle de dérive. $S_v$ est utilisé pour introduire un décalage vertical, alors que $S_h$ est utilisé pour permettre un décalage horizontal de la courbe par rapport à l'origine.

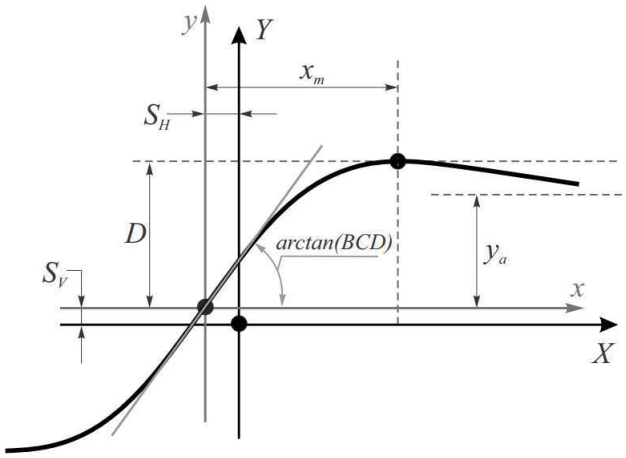


Figure 2.11: Courbe générée par l'expression 2.9.

La figure 2.11 illustre quelques facteurs. Les paramètres de l'équation (2.8) permettent d'ajuster l'allure de cette caractéristique par rapport aux relevées expérimentaux. En effet, le coefficient $D$ représente la valeur maximale à la courbe d'adhérence. Le coefficient $C$ est une constante qui fixe le type de courbe quant au coefficient $B$ il permet d'ajuster la pente à l'origine. Le coefficient $E$ contrôle l'abscisse de glissement à laquelle la valeur maximale est atteinte. La variable $arctan(BCD)$ représente la pente à l'origine de la courbe, c'est-à-dire au point d'inflexion, pour les efforts transversaux, cela correspond à la rigidité de dérive. Finalement, le calcul des différents efforts se fait comme suit :

– Efforts longitudinaux :

$$F_x(\lambda+S_{hx}) = D_x sin(B_x(\lambda+S_{hx})-E_x(B_x(\lambda+S_{hx})-arctan(B_x(\lambda+S_{hx}))))+S_{vx} \tag{2.11}$$

– Efforts transversaux :

$$F_y(\alpha+S_{hy}) = D_y sin(B_y(\alpha+S_{hy})-E_y(B_y(\alpha+S_{hy})-arctan(B_y(\alpha+S_{hy}))))+S_{vy} \tag{2.12}$$

– Moments d'auto-alignement :

$$M_z(\alpha+S_{hz}) = D_z sin(B_z(\alpha+S_{hz})-E_z(B_z(\alpha+S_{hz})-arctan(B_z(\alpha+S_{hz}))))+S_{vz} \tag{2.13}$$

avec $\lambda$ et $\alpha$ représentent respectivement le glissement longitudinal et la dérive du pneumatique.

#### 2.3.3.2 Modèle des forces de Burckhardt/Kiencke [Burckhardt, 1993, Kiencke et Nielsen, 2000]

Ce modèle est basé sur le coefficient de frottement pneu/sol qui caractérise l'état de la chaussée. Dans le cas des efforts longitudinaux, le coefficient de frottement est donné

en fonction du glissement $\lambda$, de la vitesse du véhicule $v$ et de quatre paramètres $c_1$, $c_2$, $c_3$ et $c_4$ : [Oudghiri, 2008]

$$\mu(\lambda,v) = [c_1(1-exp(-c_2\lambda)-c_3\lambda)]exp(c_4\lambda v) \tag{2.14}$$

- $c_1$ est la valeur maximale de la courbe d'adhérence
- $c_2$ est un paramètre qui détermine la forme de la courbe d'adhérence
- $c_3$ est la différence entre la valeur maximale du frottement et la valeur $\lambda = 1$
- $c_4$ est le paramètre qui caractérise l'humidité de la chaussée, compris entre 0.02 et $0.04 s/m$.

En s'inspirant du modèle de Burckhardt, Kiencke a élaboré un modèle pour calculer les forces longitudinales et latérales. Ce modèle calcule les efforts de la façon suivante :

$$\begin{aligned} F_x &= \mu(\lambda,v)F_z \\ F_y &= \mu(\alpha,v)F_z \end{aligned} \tag{2.15}$$

$F_z$ est la force verticale au niveau du pneumatique.

#### 2.3.3.3 Modèle linéaire

Les résultats expérimentaux montrent que la force longitudinale du pneumatique $F_x$ est proportionnelle aux petites valeurs du glissement longitudinal $\lambda$, et que la force latérale $F_y$ est proportionnelle aux petites valeurs de l'angle de dérive $\alpha_f$ comme le montre la figure 2.10. L'angle de carrossage $\gamma$ est négligé. Chaque pneumatique du véhicule a des petites valeurs de $\alpha$ et $\lambda$ dans les conditions de conduites normales où les accélérations longitudinale et latérale ne dépassent pas le seuil de $0.4g$ [Lechner, 2002]. Au-delà de ce seuil, le pneumatique pénètre dans une zone de saturation, et les relations liant les forces avec $\alpha_f$ et $\lambda$ ne sont plus linéaires. Le modèle linéaire sur-estime les forces. Le modèle linéaire est décrit par :

$$F_x(\lambda) = C_\lambda \lambda \tag{2.16}$$

$$F_y(\alpha) = C_\alpha \alpha \tag{2.17}$$

Les rigidités de dérive longitudinale $C_\lambda$ en $(N\ )$ et latérale $C_\alpha$ en $(N/m)$ dépendent de l'adhérence de la chaussée et de la charge verticale du pneumatique.

## 2.4 Dynamique de roulis

Dans la littérature, nous trouvons plusieurs modèles de suspension, fonction de la complexité et des hypothèses faites sur le véhicule. Le rôle de la suspension est de réduire les débattements verticaux des pneumatiques en absorbant l'énergie transmise aux roues permettent principalement d'améliorer la tenue de la route.

Les degrés de liberté de la masse suspendue ont été introduits dans le paragraphe précédent. Il est donc possible de s'intéresser maintenant aux masses non suspendues, pour compléter les équations du véhicule.

Certaines hypothèses sont faites pour pouvoir réaliser cette modélisation de façon simple.

Le roulis est un mouvement qui influence considérablement le comportement du véhicule. Ce mouvement est pris en compte par l'utilisation de la notion du centre de roulis, voir la définition ci-dessous, qui permet d'avoir une précision satisfaisante [Boitard, 1999], [Cogoluenhes, 1996] dans la description du mouvement entre le châssis et l'essieu. La définition ISO du centre de roulis est la suivante [ISO, 1991] :

**Définition 2.1** Le centre de roulis est un point du plan vertical transversal contenant les centres des roues d'un même essieu, tel que toute force transversale appliquée à la masse suspendue en ce point ne provoque aucun roulis de suspension.

**Hypothèse 3** Le mouvement de roulis du châssis se fait autour de l'axe de roulis passant par les centres de roulis des suspensions.

La dynamique verticale sera simplifiée pour cela juste la dynamique de roulis sera considérée. Nous supposons que la suspension peut être modélisée comme une suspension passive avec une entrée de déplacement. Le modèle global de roulis évolue en fonction de l'équation différentielle suivante :

$$I_x\ddot{\Phi} = mgh\Phi + mha_{yc} - K_\Phi\Phi - C_\Phi\dot{\Phi} + K_\Phi u_\Phi \tag{2.18}$$

avec $a_{yc} = v_x(\dot{\beta}+r) - h\ddot{\Phi}$ est l'accélération latérale au COG.

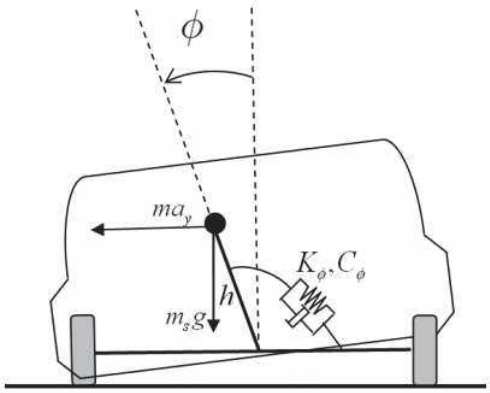


Figure 2.12: Mouvement du roulis du véhicule.

Les accélérations latérale et gravitationnelle $g$ sont à l'origine du mouvement de rotation autour de l'axe de roulis, appelé mouvement de roulis, subit par le véhicule lors du virage. L'angle de roulis $\Phi$ est l'angle que fait l'axe vertical du véhicule avec l'axe $Z$ du

repère inertiel $G$ (Figure 2.12). L'axe de roulis est l'axe traversant les deux centres de roulis avant et arrière (Figure 2.13). Un centre de roulis avant (ou arrière) est à mi-distance des deux roues avants (ou arrières respectivement). [Dandach, 2014]

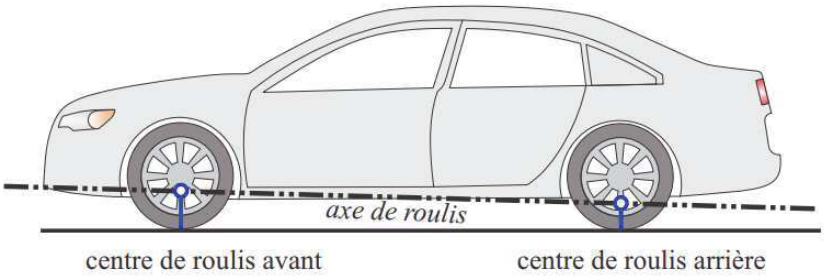


Figure 2.13: Axe de roulis.

## 2.5 Modèle dérive/lacet (bicyclette)

La dynamique latérale du véhicule est étudiée depuis les années 50. Pour décrire les mouvements latéraux, de roulis, et de lacet, Segel a développé en 1956 un modèle à trois degrés de liberté [Segel, 1956]. Dans notre travail, pour étudier la dynamique latérale du véhicule, il est possible de ne considérer que la translation dans le plan $O_aX_aY_a$ et la rotation en lacet autour de l'axe $O_aZ_a$. Les mouvements de tangage, de roulis et de pompage sont négligés.

Cette hypothèse conduira au modèle « bicyclette » du véhicule, largement utilisé pour la commande de la dynamique latérale.

Comme son nom l'indique, le modèle ne comporte que deux roues (Figure 2.14). Le modèle bicyclette est l'un des modèles les plus utilisés pour la modélisation du mouvement latéral du véhicule [Tan et Tomizuka, 1990, Mammar et Koenig, 2002, Hsiao et Tomizuka, 2004, Edwards *et al.*, 2005, Jianyong *et al.*, 2007]. Dans ce type de modèle, le véhicule est considéré comme un corps rigide, et on suppose qu'il y'a une seule roue pour chaque train, en projetant les deux roues du train sur l'axe central du véhicule. La roue issue aura un angle de braquage similaire à l'angle de braquage des deux roues, une dérive qui sera la projection des dérives des deux roues, elle n'aura pas de carrossage ni de braquage résultant.

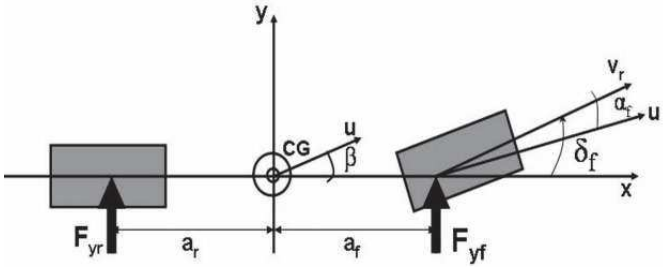


Figure 2.14: Modèle bicyclette.

**Hypothèse 4** Le mouvement du véhicule est restreint aux translations dans le plan horizontal $O_aX_aY_a$ et à la rotation autour de l'axe vertical $O_aZ_a$.

Sous l'hypothèse 4, le vecteur des vitesses de translation $\overrightarrow{V}$ devient $\overrightarrow{V} = (v_x,v_r,0)^T$ et le vecteur des vitesses de rotation devient $\vec{\Omega} = (0,0,r)^T$ . Ces nouvelles expressions injectées dans l'équation (2.2), permettent d'écrire :

$$\begin{cases} m(\dot{v}_x - rv_r) = \sum (F_{ext})_x \\ m(\dot{v}_r + rv_x) = \sum (F_{ext})_y \\ I_z\dot{r} = \sum (M_{ext})_z \end{cases} \tag{2.19}$$

où $\sum(F_{ext})_x$ et $\sum(F_{ext})_y$ représentent respectivement la projection des forces agissant sur le véhicule suivant les axes $O_cX_c$ et $O_cY_c$ .$\sum(M_{ext})_z$ et la resultante des moments appliqués sur le véhicule suivant l'axe $O_cZ_c$. Afin d'obtenir le modèle bicyclette qui considère que des variations du déplacement latéral et du mouvement du lacet du véhicule, nous introduisons l'hypothèse suivante :

**Hypothèse 5** La vitesse longitudinale du véhicule $v_x$ selon l'axe $O_cX_c$ reste constante ou subit des variations négligeables.

L'hypothèse 5 implique que $\dot{v}_x$ est nulle. De plus, la vitesse latérale $v_r$ peut maintenant être exprimée en fonction de la vitesse longitudinale $v_x$ et de l'angle $\beta$ appelé l'angle de dérive du véhicule.

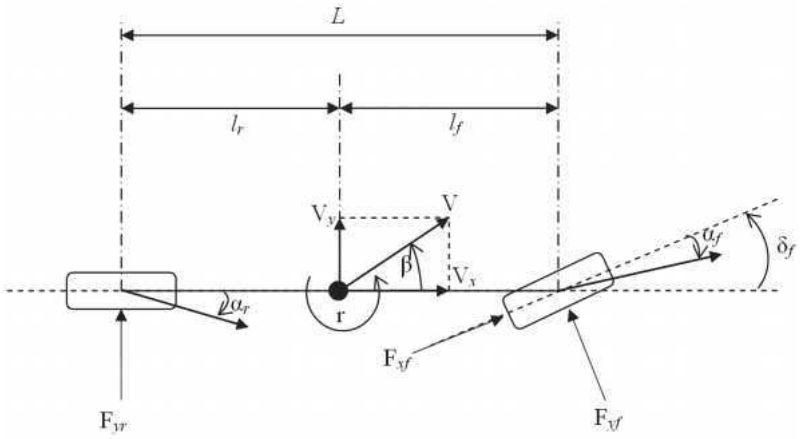


Figure 2.15: Les différents paramètres du modèle bicyclette pour la dynamique latérale du véhicule.

Cet angle de dérive demeure faible pour les situations de conduite normales et la formule approchée $v_r = v_x\beta$ pourra alors être utilisée. En ne gardant dans les équations de l'équilibre dynamique que celles qui sont liées au mouvement latéral, et au mouvement de lacet, le modèle « dérive/lacet » peut être établi :

$$\begin{cases} mv_x(\dot{\beta}+r) = \sum(F_{ext})_y \\ I_z\dot{r} = \sum(M_{ext})_z \end{cases} \tag{2.20}$$

Pour simplifier l'écriture des modèles qui seront utilisés dans la suite de ce présent travail nous posons $r = \dot{\psi}$. Les expressions $\sum(F_{ext})_x$ et $\sum(F_{ext})_y$ peuvent être exprimées en fonctions des forces de contact pneumatique chaussée :

$$\begin{cases} \sum(F_{ext})_y = 2F_{yf}cos(\delta_f)+2F_{xf}sin(\delta_f)+2F_{yr} \\ \sum(M_{ext})_z = 2F_{yf}cos(\delta_f)a_f+2F_{xf}sin(\delta_f)a_f-2F_{yr}a_r \end{cases} \tag{2.21}$$

$a_f$ et $a_r$ étant respectivement les distances qui séparent l'axe avant et arrière du centre de gravité du véhicule. L'angle de braquage des roues avants est noté par $\delta_f$. Les forces $F_{xf}$ et $F_{xr}$ sont respectivement les forces de contact longitudinales des roues avant et arrière du véhicule et $F_{yf}$ et $F_{yr}$ sont les forces de contact latérales.

**Hypothèse 6** Nous considérons l'approximation des angles faibles : $cos(\delta_f) = 1$ et $sin(\delta_f) = 0$. Sous l'hypothèse (2.19), l'expression (2.20) se simplifie. De plus l'hypothèse (5) implique l'absence d'une accélération longitudinale et donc d'une force $F_x$. Ce qui permet d'écrire :

$$\begin{cases} \sum(F_{ext})_y = 2F_{yf}+2F_{yr} \\ \sum(M_{ext})_z = 2F_{yf}a_f-2F_{yr}a_r \end{cases} \tag{2.22}$$

Pour simplifier l'écriture des modèles qui seront utilisés dans la suite de ce présent travail nous posons $F_{yf} = F_f$ et $F_{yr} = F_r$. En rapportant (2.20) (3.35), le modèle dérive/lacet s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{\beta} = \dfrac{2F_f+2F_r}{mv_x}-r \\ \dot{r} = \dfrac{2a_fF_f-2a_rF_r}{I_z} \end{cases} \tag{2.23}$$

Où $\beta$ représente l'angle de glissement latéral du véhicule au centre de gravité, $r$ est la vitesse du lacet, $F_f$ est la force de dérive des deux roues avant, $F_r$ est la force latérale des deux roues arrières. $v_x$ est la vitesse longitudinale du véhicule, $I_z$ est le moment d'inertie du lacet, $m$ est la masse du véhicule. (figure (2.15)

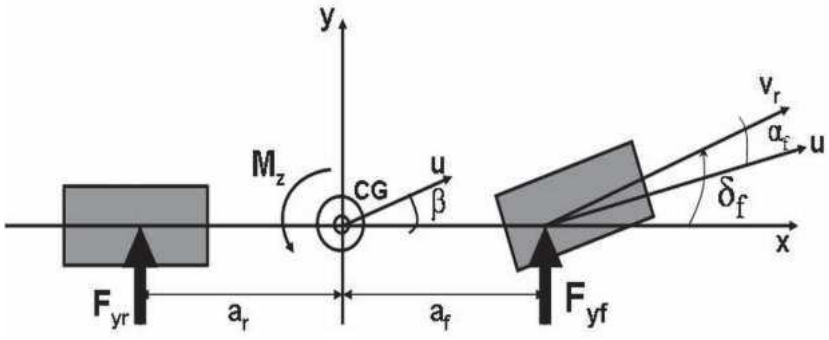


Figure 2.16: Modèle bicyclette : contrôle par le moment $M_z(t)$.

Ce modèle est l'un des plus utilisés pour l'étude du comportement de la dynamique latérale des véhicules [Kiencke et Nielsen, 2000, Pacejka, 2002, Hsiao et Tomizuka, 2004, Chadli *et al.*, 2008]. Il permet, par exemple, d'étudier la stabilité du véhicule en virage selon le potentiel d'adhérence, l'état dans lequel se trouve le système et la commande de braquage appliquée à la roue [Mammar et Koenig, 2002]. L'objectif est alors de définir la loi de commande nécessaire à appliquer au véhicule pour rester dans la zone de stabilité. La stratégie d'assistance adoptée dans notre travail pour la stabilisation du comportement latéral du véhicule automobile, consiste à utiliser comme variable de contrôle le moment du châssis autour du centre de gravité [Goodarzi *et al.*, 2001, Esmailzadeh *et al.*, 2003, Jianyong *et al.*, 2007, Oudghiri *et al.*, 2007]. Ce dernier est généré grâce au système de freinage en appliquant des couples de freinage sur chaque roue. Dans ce cas le modèle bicyclette (2.23) devient

$$\begin{cases} \dot{\beta} = \dfrac{2F_f + 2F_r}{mv_x} - r \\ \dot{r} = \dfrac{2a_f F_f - 2a_r F_r + M_z(t)}{I_z} \end{cases} \tag{2.24}$$

avec $M_z(t)$ représente le moment autour du centre de gravité du véhicule (voir Figure 2.16).

## 2.6 Modèle dérive/lacet/roulis

Dans cette section, nous décrivons le modèle dérive/lacet/roulis [Dahmani, 2011]. Ce modèle est obtenu par les mêmes hypothèses simplificatrices utilisées pour le modèle (2.24) mais en considérant le mouvement de roulis du véhicule qui peut être obtenu en considérant le mouvement de la caisse autour de l'axe $O_aX_a$ (figure 2.12).
Avant de poursuivre notre analyse, nous voulons souligner le fait que la dynamique de roulis est couplée à celle de lacet comme le montre le modèle donné par (2.25). Le contrôleur de roulis est ainsi utilisé non seulement pour faire juste du confort mais également satisfaire la sécurité.

Les équations du mouvement du véhicule s'écrivent alors sous la forme suivante [Kidane *et al.*, 2006, Ryu et Gerdes, 2004, Dahmani, 2011] :

$$\begin{cases} m\dot{\beta} = -mr + \dfrac{2F_f + 2F_r}{v_x} + (\dfrac{mh}{v_x})\ddot{\Phi}, \\ I_z\dot{r} = 2F_f a_f - 2F_r a_r, \\ I_{xeq}\ddot{\Phi} = (mgh - K_\Phi)\Phi + mha_y - C_\Phi\dot{\Phi} + K_\Phi u_\Phi \end{cases} \tag{2.25}$$

avec $m$ est la masse totale du véhicule $(Kg)$, $a_y = v_x(\dot{\beta}+r)$ représente l'accélération latérale mesurée au centre du roulis et $I_{xeq} = I_x + mh^2$ représente le moment d'inertie équivalent autours de l'axe du roulis. Pour de petits angles de dérive de la roue ($\alpha_f$, $\alpha_r$) et en négligeant la sensibilité de la charge, $F_f$ et $F_r$ peuvent être approximées par :

$$F_f = C_f\alpha_f = C_f(\delta_f - \beta - \frac{a_f r}{v_x}), \tag{2.26}$$

$$F_r = C_r\alpha_r = C_r(-\beta + \frac{a_r r}{v_x}) \tag{2.27}$$

**Remarque 2.2** Le modèle dérive/lacet/roulis sera détaillé et utilisé dans le dernier chapitre pour la synthèse de commande globale du châssis.

## 2.7 Modèle longitudinal d'un quart de véhicule

Au vu de notre problématique, le modèle à une roue, comme présenté sur la figure 2.17, est intéressant. Il représente la dynamique longitudinale. Ce modèle est souvent utilisé pour l'élaboration des lois de commande de freinage ABS.

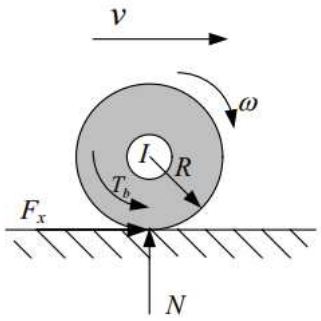


Figure 2.17: Représentation de la dynamique de la roue (lors du freinage).

Les équations qui décrivent cette dynamique sont déterminées par l'application des lois de Newton sur l'une des quatre roues du véhicule.
L'accélération de la roue est donnée par :

$$I\dot{\omega} = F_x R - T_b \tag{2.28}$$

avec $\omega$ est la vitesse angulaire de la roue (rad/s), $v_x$ est la vitesse du véhicule, $I$ est l'inertie de la roue, $T_b$ est le couple de freinage appliquée sur la roue, $F_x$ est la force d'interation longitudinale entre le pneumatique et la chaussée et $R$ est le rayon de la roue. Dans ce travail, nous considèrons que les frottements visqueux et la résistance au roulement de la roue n'existent pas.
La force longitudinale du pneu est donnée par

$$M\dot{v}_x = -F_x = -\mu Mg \tag{2.29}$$

où $\mu$ le coefficient de frottement de la route qui est une fonction de glissement des roues $\lambda$ et $M$ est la masse supportée par la roue.
Le glissement des roues $\lambda$ est défini par

$$\lambda = \frac{v_x - \omega R}{v_x} \times 100\% \tag{2.30}$$

où $v_x$ est la vitesse du véhicule.
En dérivant l'équation (2.30), on obtient la forme dérivée sivante :

$$\dot{\lambda} = \frac{1}{v_x}[\frac{R}{I}(T_b - \mu NR) - (1-\lambda)\mu g] \tag{2.31}$$

$$\ddot{\lambda} = \frac{1}{v_x}[\frac{R}{I}(\dot{T}_b - \dot{\mu}NR) - (1-\lambda)\dot{\mu}g + 2\mu g\dot{\lambda}] \tag{2.32}$$

En intégrant l'expression (2.29), on obtient :

$$v_x = V_0 - g\int_{t_0}^{t} \mu d\tau \tag{2.33}$$

avec $V_0$ représente la vitesse initiale.
En substituant (2.33) dans (2.31) et (2.32), et en définissant

$$a = \frac{2\mu g}{V_0 - g\int_{t_0}^{t}\mu dt} \; ; \; b = \frac{\dot{\mu}g}{V_0 - g\int_{t_0}^{t}\mu dt} \; ; \; c = \frac{R}{I(V_0 - g\int_{t_0}^{t}\mu dt)} \tag{2.34}$$

alors, l'équation (2.32) peut être réécrite sous la forme suivante

$$\ddot{\lambda} = a\dot{\lambda} + b\lambda - b(1 + \frac{MR^2}{I}) + c\dot{T}_b \tag{2.35}$$

On définit

$$\begin{aligned} x_1 &= \lambda - \lambda_d \\ x_2 &= \dot{\lambda} - \dot{\lambda}_d \end{aligned} \tag{2.36}$$

où la constante $\lambda_d$ est le taux de glissement désiré de la roue et $x$ est le vecteur d'état avec $x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^T$.

L'équation (2.35) peut être réécrite comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = a(t)x_2 + b(t)x_1 + c(t)u(t) + f(t) \end{cases} \tag{2.37}$$

avec $u(t) = \dot{T}_b$ est l'entrée de commande, et $f(t) = -b(1+\frac{MR^2}{I})$.
Ce type de modèle est principalement utilisé dans la littérature pour étudier le comportement longitudinal, développer des lois de commandes pour les systèmes de freinage, identifier le coefficient de frottement roue/sol de la chaussée [Kiencke, 1993]. Il est en effet étudié en détail dans la dernière partie de ce chapitre et mis sous forme de multimodèles pour la synthèse d'une loi de commande robuste pour réguler le taux de glissement pneu/sol en vue d'améliorer le freinage et éviter le blocage des roues.

## 2.8 Représentation floue de type Takagi-Sugeno TS de la dynamique du véhicule

L'approche floue de type Takagi-Sugeno TS [Takagi et Sugeno, 1985] a connu un réel succès depuis de nombreuses années et elle a été developpée dans plusieurs travaux de recherche. L'idée principale de cette représentation consiste à représenter de manière précise les systèmes non linéaires par un ensemble de modèles linéaires locaux interpolés par des fonctions non linéaires bornées et positives ou nulles. Chaque modèle local est valide dans une zone de fonctionnement. Les modèles de type TS ont une structure simple qui présente des propriétés intéressantes permettant d'étendre des résultats des systèmes linéaires aux systèmes non linéaires. D'où l'intérêt de représenter la dynamique non linéaire du véhicule par l'approche floue TS.

### 2.8.1 Modèle flou TS

Le modèle flou de type TS d'un système dynamique est représenté par un ensemble de règles floues **Si - Alors**. Sa caractéristique principale est qu'il représente localement les relations entrées/sorties d'un système en exprimant chaque conclusion par un système linéaire.
La $i$ ème règle du modèle flou s'écrit

$$\textbf{Règle } i : \textbf{Si } \theta_1(t) \text{ est } F_{i1} \text{ et } ...\text{et } \theta_\nu(t) \text{ est } F_{i\nu} \qquad \textbf{Alors} \tag{2.38}$$
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t) \\ y(t) = C_i x(t) \end{cases}$$

Où $x(t) \in \Re^n$ est le vecteur d'état, $u(t) \in \Re^m$ est le vecteur de commande et $y(t) \in \Re^p$ est le vecteur de sortie. $A_i \in \Re^{n\times n}$ est la matrice d'etat et $B_i \in \Re^{n\times m}$ est la matrice de commande et $C_i \in \Re^{p\times m}$ est la matrice de sortie. $F_{i\nu}$ est l'ensemble flou et $\theta_1(t)...\theta_\nu(t)$ sont les variables des prémisses qui peuvent être des fonctions des variables d'état, des

entrées ou une combinaison des deux. $i \in \{1,...,r\}$ représentent un ensemble de $r$ modèles linéaires.
En se basant sur l'inférence floue standard, le modèle global d'un modèle flou TS est donné par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{r} h_i(\theta(t))\Big(A_i x(t) + B_i u(t)\Big) \\ y(t) = \sum_{i=1}^{r} h_i(\theta(t)) C_i x(t) \end{cases} \tag{2.39}$$

où les fonctions d'appartenance $h_i(\theta(t))$ sont données par :

$$h_i(\theta(t)) = \frac{w_i(\theta(t))}{\sum_{i=1}^{r} w_i(\theta(t))}, \quad w_i(\theta(t)) = \prod_{j=1}^{\nu} h_{ij}(\theta(t)) \tag{2.40}$$

La fonction $h_i(\theta(t))$ détermine le degré d'appartenance du $i$ ème modèle local associé. Selon la zone où le système évolue, cette fonction indique la contribution plus ou moins importante du modèle local correspondant dans le modèle global. Elle assure un passage progressif de ce modèle aux modèles locaux voisins. Ces fonctions dépendent généralement du vecteur d'état $x(t)$ et elles sont de forme triangulaire, sigmoïdale ou gaussienne, et satisfont les propriétés suivantes (convexité) :

$$0 \leq h_i(\theta(t)) \leq 1, \qquad \sum_{i=1}^{r} h_i(\theta(t)) = 1 \tag{2.41}$$

#### 2.8.1.1 Obtention d'une structure multi-modèles

D'une manière générale, on trouve trois méthodes d'obtention d'une structure multi-modèles à partir d'un modèle non linéaire. [Mansouri, 2005, Benzaouia et Hajjaji, 2014]

- **Méthode par identification** : [Gasso, 2000] elle consiste à identifier, à partir des données entrées/sorties, les paramètres des modèls locaux et des fonctions d'appartenance de la structure considérée [Gasso, 2000].
- **Méthode par linéarisation** : elle consiste à linéariser le modèle autour d'un ensemble de points de fonctionnement choisis judicieusement ; dans ce cas il s'agit de modèles locaux affines pour lesquels le modèle flou est obtenu par interpolation des modèles locaux avec des fonctions d'appartenance conçu de manière judicieuse [Ma *et al.*, 1998] en fonctions de spécifications souhaitées (triangulaire, gaussienne,...ect.)
- **Méthode basée sur les secteurs de non linéarités** : Dans ce cas, le modèle flou TS représente de manière exacte le modèle non linéaire sur un espace compact des variables d'état et est obtenu par transformation polytopique convexe [Wang *et al.*, 1996], [Tanaka *et al.*, 1996] et [Morère, 2000].

Considérons le cas général d'un système continu non linéaire :

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + Bu(t) \tag{2.42}$$

avec $x(.) \in \Re^n$, $u(.) \in \Re^m$, $f(x(.)) \in \Re^n$ et $B \in \Re^{n\times m}$.
Cette dernière méthode est basée sur la bornitude des termes non-linéaires. Elle est basée sur le Lemme suivant :

**Lemme 2.1** soit $M(x(t)) \in \Re$ une fonction bornée de $[a,b]$ pour tout $x \in [a,b]$ avec $(a,b) \in \Re^{+2}$. Alors il existe deux fonctions

$$\begin{array}{c} h_i(.) : [a,b] \to [0,1], \quad i \in I_2 \\ x(t) \to h_i(x(t)) \end{array} \tag{2.43}$$

avec $h_1(x(t))+h_2(x(t)) = 1$ et deux scalaires $\alpha$ et $\beta$ tels que

$$M(x(t)) = h_1(x(t))\alpha+h_2(x(t))\beta \tag{2.44}$$

Une décomposition de $M(x(t))$ est considérée sur $[a,b]$ comme suivant

$$\beta = min_{x\in[a,b]}(M(x(t))), \quad \alpha = max_{x\in[a,b]}(M(x(t))) \tag{2.45}$$

$$h_1(x(t)) = \frac{M(x(t)-\beta}{\alpha-\beta}, \quad h_2(x(t)) = \frac{\alpha-M(x(t)}{\alpha-\beta} \tag{2.46}$$

**Exemple 2.1** Représentation de type TS des forces latérales par la méthode d'identification

Pour générer le modèle flou de type TS, nous avons considéré les données Entrées/Sorties obtenu à partir du modèle de Pacejka (2.8). Dans ce cas le modèle pneumatique non linéaire est approximé par les règles floues de type TS suivantes :

$$\text{Si } |\alpha_f| \text{ est } M_1 \text{ alors} \begin{cases} F_f = C_{f1}\alpha_f \\ F_r = C_{r1}\alpha_r \end{cases} \tag{2.47}$$

$$\text{Si } |\alpha_f| \text{ est } M_2 \text{ alors} \begin{cases} F_f = C_{f2}\alpha_f \\ F_r = C_{r2}\alpha_r \end{cases} \tag{2.48}$$

où $\alpha_f$ et $\alpha_r$ représentent les angles de dérive avant et arrière du pneu et $C_{fi}$, $C_{ri}$ représentent les coefficients de rigidité dépendants du coefficient d'adhérence.
En considérant les règles floues données par les équations (2.47) et (2.48), les forces latérales $F_f$ et $F_r$ peuvent être exprimées comme suit :

$$\begin{cases} F_f = h_1(|\alpha_f|)C_{f1}(\mu)\alpha_f+h_2(|\alpha_f|)C_{f2}(\mu)\alpha_f \\ F_r = h_1(|\alpha_f|)C_{r1}(\mu)\alpha_r+h_2(|\alpha_f|)C_{r2}(\mu)\alpha_r \end{cases} \tag{2.49}$$

où $C_{fi}$, $C_{ri}$ représentent les paramètres des conséquences des règles et $h_i(|\alpha_f|)$, $(i = 1,2)$ représentent les paramètres des fonctions d'appartenance définis comme suit :

$$\begin{cases} h_1(|\alpha_f|) = \dfrac{w_1(|\alpha_f|)}{w_1(|\alpha_f|)+w_2(|\alpha_f|)}, \\ h_2(|\alpha_f|) = 1-h_1(|\alpha_f|) \end{cases} \tag{2.50}$$

avec $w_1(|\alpha_f|) = (1+|\frac{|\alpha_f|-c_1}{a_1}|)^{-2b_1}$ et $w_2(|\alpha_f|) = (1+|\frac{|\alpha_f|-c_2}{a_2}|)^{-2b_2}$.
Pour déterminer les paramètres à la fois des fonctions d'appartenance et des conséquences du modèles TS, on utilise des méthodes d'optimisation numériques. Le but alors est d'optimiser les paramètres des modèles locaux $C_{fi}$, $C_{ri}$ et les paramètres des fonctions d'appartenance $h_i(|\alpha_f|)$ en minimisant l'écart quadratique entre les données obtenues à partir des forces latérales non linéaires données par le modèle de Pacejka (2.12) et les forces estimées (2.19). La Figure 2.19 montre une comparaison entre les forces estimées à partir du modèle TS (2.49) et les forces de Pacejka. Dans notre cas, les paramètres $a_i$, $b_i$ et $c_i$ ainsi que les coefficients de rigidité $C_{fi}$, $C_{ri}$ sont déterminés en utilisant l'algorithme d'optimisation numérique basé sur la méthode de Levenberg-Marquadt combinée avec les moindres carrés [Hajjaji *et al.*, 2006].
Pour un coeffitient de frottement fixe $\mu = 0.7$, les fonctions d'appartenance $h_1$ et $h_2$ sont données dans la Figure 2.18, avec $a_1 = 0.0908$, $b_1 = 23.3421$, $c_1 = 0.7237$, $a_2 = 204.0533$, $b_2 = 0.0415$, $c_2 = 23.4094$, les coefficients de rigidité du véhicule $C_{fi}$ et $C_{ri}$ sont donnés par le Tableau 2.1.

Tableau 2.1: Coefficients de rigidité

| Coefficients de rigidité nominals | $C_{f10}$ | $C_{f20}$ | $C_{r10}$ | $C_{r20}$ |
|---|---|---|---|---|
| Valeurs | 60712 | 4812 | 60088 | 3455 |

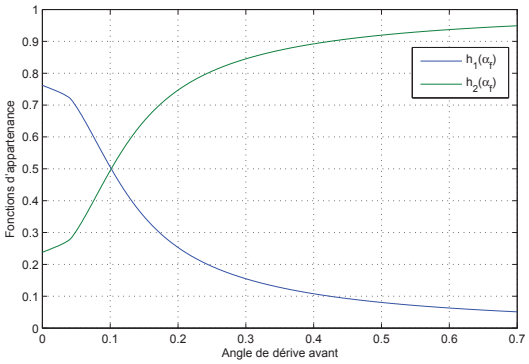


Figure 2.18: Les fonctions d'appartenance

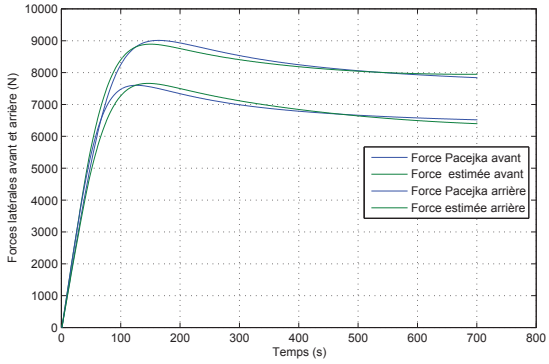


Figure 2.19: Comparaison des forces estimées avec celles de Pacejka

Pour générer le modèle TS de la dynamique dérive/lacet du véhicule décrite par (2.23), nous considérons les modèles de forces de contact décrits par l'expression (2.49) et nous supposons des variations faibles des angles de dérive. Par conséquent :

$$\begin{cases} \alpha_f \cong \beta + \dfrac{a_f r}{v_x} - \delta_f, \\ \alpha_r \cong \beta + \dfrac{a_r r}{v_x} \end{cases} \tag{2.51}$$

avec $\delta_f$ représente l'angle de braquage des roues avant.
Le modèle bicyclette non linéaire (2.24) s'écrit :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{r} h_i(|\alpha_f|)[A_i x(t) + B_{fi}\delta_f + BM_z(t)] \tag{2.52}$$

$$\begin{aligned} A_i &= \begin{bmatrix} -2\frac{C_{fi0}+C_{ri0}}{mv_x} & -2\frac{C_{fi0}a_f - C_{ri0}a_r}{mv_x^2} - 1 \\ -2\frac{C_{fi0}a_f - C_{ri0}a_r}{I_z} & -2\frac{C_{fi0}a_f^2 + C_{ri0}a_r^2}{I_z v_x} \end{bmatrix}, \quad B_{fi} = \begin{bmatrix} \frac{2C_{fi0}}{mv_x} \\ \frac{2a_f C_{fi0}}{I_z} \end{bmatrix}, \\ B &= \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{I_z} \end{bmatrix}, \qquad x(t) = \begin{bmatrix} \beta \\ r \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2.53}$$

**Exemple 2.2** Modèle TS du système ABS par la méthode de secteurs de non-linéarités

Pour illustrer la représentation floue de type TS basée sur les secteurs de non-linéarités, nous considérons le modèle de la dynamique longitudinale donné par l'équation suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ b(t) & a(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ c(t) \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} f(t) \tag{2.54}$$

avec

$$\begin{aligned} a_{min} \leq a(t) \leq a_{max} \\ b_{min} \leq b(t) \leq b_{max} \end{aligned} \tag{2.55}$$

En supposant $c(t) = 0.0068$ et en considérant les expressions données par l'équation (2.34), nous avons

$$max_{[0,3.5]}a(t) = 15, \qquad min_{[0,3.5]}a(t) = 0$$
$$max_{[0,3.5]}b(t) = 110, \qquad min_{[0,3.5]}b(t) = -40$$

Les termes non linéaires $a(t)$ et $b(t)$ peuvent s'écrire comme suit :

$$a(t) = F_1^1(x(t)).(15)+F_1^2(x(t)).(0) \tag{2.56}$$
$$b(t) = F_2^1(x(t)).(110)+F_2^2(x(t)).(-40) \tag{2.57}$$

avec

$$F_1^1(x(t))+F_1^2(x(t)) = 1 \tag{2.58}$$
$$F_2^1(x(t))+F_2^2(x(t)) = 1 \tag{2.59}$$

et

$$F_1^1(x(t)) = \frac{a(t)}{15}, \qquad F_1^2(x(t)) = \frac{15-a(t)}{15} \tag{2.60}$$
$$F_2^1(x(t)) = \frac{b(t)+40}{150}, \qquad F_2^2(x(t)) = \frac{110-b(t)}{150} \tag{2.61}$$

On obtient alors quatre modèles locaux par combinaison des quatre fonctions $F_1^1$, $F_2^1$, $F_1^2$, $F_2^2$.
Le modèle flou de type TS équivalent au modèle non linéaire (2.54) est :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{4}\mu_i(x(t))(A_ix(t)+Bu(t)+\begin{bmatrix}0\\I\end{bmatrix}f(t)) \tag{2.62}$$

avec

$$A_1 = \begin{bmatrix}0 & 1\\ b_{min} & a_{min}\end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix}0 & 1\\ b_{min} & a_{max}\end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix}0\\ 0.0068\end{bmatrix},$$
$$A_3 = \begin{bmatrix}0 & 1\\ b_{max} & a_{min}\end{bmatrix}, \qquad A_4 = \begin{bmatrix}0 & 1\\ b_{max} & a_{max}\end{bmatrix}, \qquad x(t) = \begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

et

$$\mu_1(t) = F_1^1(x(t))\times F_2^1(x(t))$$
$$\mu_2(t) = F_1^1(x(t))\times F_2^2(x(t))$$
$$\mu_3(t) = F_1^2(x(t))\times F_2^1(x(t))$$
$$\mu_4(t) = F_1^2(x(t))\times F_2^2(x(t))$$

## 2.9 Conclusion

Dans ce chapitre, différents modèles de la dynamique de véhicule qui seront utilisés pour la synthèse de la commande ont été utilisés. Les principaux modèles existants des forces de contact pneu/chaussée ont été rappelés. La représentation TS a été présentée pour modéliser la dynamique latérale et longitudinale.

Chapitre

# 3

# Contrôle des systèmes flous commandés en réseau

Sommaire


3.1 Introduction
3.2 Les systèmes commandés en réseau (SCRs)
3.3 Stabilisation par retour d'état flou
3.4 Stabilisation par retour de sortie statique
3.5 Stabilisation par retour d'état reconstruit
3.6 Conclusion


## 3.1 Introduction

Ce chapitre concerne l'étude de la stabilité et de la stabilisation d'une classe de systèmes non linéaires, commandés en réseau, décrits par des modèles flous de type TS.

Une attention particulière est donnée à la recherche des conditions LMIs qui respectent le compromis conservatisme et complexité de calcul pour résoudre les problèmes de la stabilité et de la stabilisation des modèles TS commandés en réseau. Nous étudions également le problème de la robustesse des SCRs incertains et/ou soumis à des perturbations extérieures.

Dans la première partie de ce chapitre, nous définissons les systèmes commandés en réseau, ainsi que les différents avantages et inconvénients de l'utilisation de cette architecture des SCRs. Dans la deuxième partie, nous présentons ces différents inconvénients de l'architecture SCR et nous montrons leurs effets sur la performance du système. Dans la troisième partie, une commande robuste par retour d'état pour les SCRs flous de type TS est analysée, s'appuyant sur l'utilisation du critère $H_\infty$ qui permet d'assurer le rejet

de perturbations. Ensuite, une commande non-fragile par retour de sortie statique est développée pour les SCRs incertains en utilisant une nouvelle approche moins conservative basée sur la bi-partition du retard. Enfin, nous traitons le problème de synthèse de la commande basée sur observateur pour les SCRs en prenant en compte non seulement les pertes de paquets et le retard mais également la quantification des données capteurs et actionneurs. L'ensemble des résultats sont validés en simulation pour le contrôle de la dynamique de véhicule.

## 3.2 Les systèmes commandés en réseau (SCRs)

### 3.2.1 Définition de SCR

Les systèmes commandés en réseau sont constitués d'un ensemble de boucles locales de contrôle fermées via un réseau de communication. Un SCR typique se compose d'un ou plusieurs capteurs pour recueillir les informations à partir du procédé physique à contrôler, un ou plusieurs contrôleurs pour fournir les commandes et les décisions, un ou plusieurs actionneurs pour élaborer les commandes du ou des contrôleurs et d'un réseau de communication. Ce réseau est utilisé pour le partage des données entre les capteurs et les contrôleurs et également entre les contrôleurs et les actionneurs, et pour transmettre les messages pour d'autres types d'applications comme l'indique la Figure 3.1.

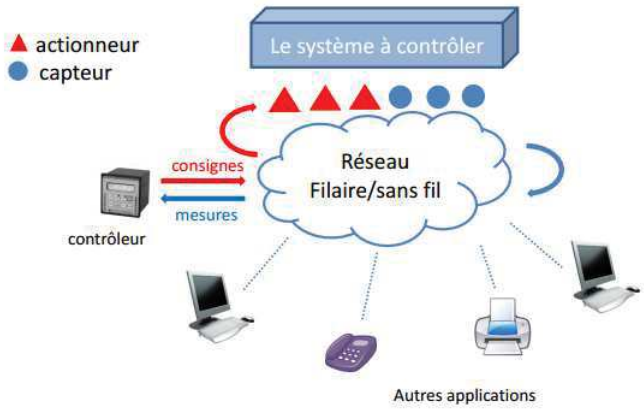


Figure 3.1: Système commandé en réseau [Sid, 2013]

### 3.2.2 Avantages de l'architecture SCR

En comparaison avec les systèmes de contrôle point-à-point conventionnel, un SCR permet non seulement de réduire le câblage et les coûts d'installation, mais offre aussi plus de flexibilité pour faire évoluer une installation existante et favorise les actions de diagnostic et de maintenance. Ces bénéfices justifient l'expansion de l'utilisation des SCRs dans plusieurs domaines tels que :

– L'industrie automobile : dans les véhicules modernes, le protocole de communication basé sur le bus CAN (Controller Area Network)[Lawrenz, 1997] est introduit dans presque tous les modules électromécaniques et permet de surmonter le problème du câblage étendu dans un espace restreint. Parmi les sous-systèmes intégrés dans le réseau, on trouve par exemples, le moteur, la boite de vitesses, les systèmes anti-blocage des roues (ABS) et anti-patinage (ASR). La Figure 3.2 montre l'application du bus CAN dans une automobile.

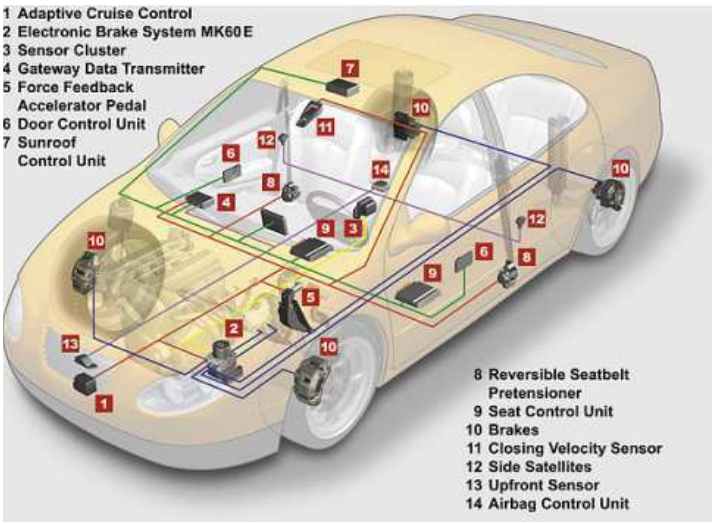


Figure 3.2: Le bus CAN dans un véhicule automobile [Sid, 2013]

– Commande des procédés industriels : actuellement, les réseaux locaux industriels (bus de terrain, Ethernet industriel, etc. ) ont été largement et efficacement utilisés dans plusieurs applications industrielles. Parmi ces applications, on trouve les stations de traitement des eaux usées Figure 3.3. Dans cette application, les mesures de certaines grandeurs physiques telles que le niveau de l'eau, le facteur de PH, la température et la demande chimique en oxygène (DCO), sont recueillis par les dispositifs de commande (API) placés au niveau des stations isolées, puis fournies via Ethernet industriel vers les salles centrales de contrôle pour le traitement et l'analyse.

### 3.2.3 Inconvénients de l'architecture SCR

L'intégration d'un réseau dans la boucle de régulation peut dégrader les performances ou même conduire le système à l'instabilité. Ces contraintes liées au réseau de communication sont réparties principalement selon trois classes comme suit :

1. Retard de communication variable,
2. Pertes de paquets d'information,
3. Erreurs de quantification des signaux transmis à travers le réseau à cause de la longueur finie de la taille des paquets.

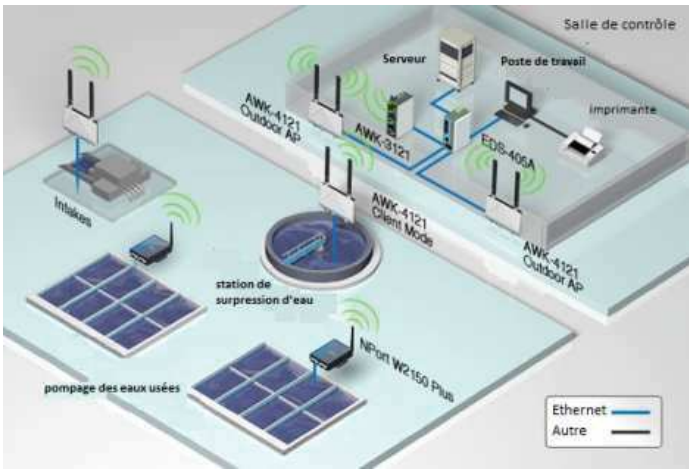


Figure 3.3: Station de traitement des eaux usées [Sid, 2013]

Nous nous efforcerons par la suite de montrer les effets de ces trois contraintes sur les performances d'un système de commande en réseau.

### 3.2.4 Dégradation des performances sous contraintes de communication

Nous présenterons, dans cette section, un aperçu des différents désavantages cités ci-dessus. Nous nous appuierons aussi sur quelques exemples pour illustrer les potentielles dégradations de performances d'un système de commande classique en tenant compte de ces différentes contraintes de communication.

#### 3.2.4.1 Retard de transmission

Un élément fondamental induit par la présence du réseau dans la boucle de commande est la présence de retard entre les capteurs et la commande, et entre la commande et les actionneurs.

Les retards de transmission dans un SCR ne sont pas dus uniquement au support de transmission mais correspondent à une somme de retards provenant des temps de conversion (A/D et D/A), des temps de traitement de la commande, du temps d'acheminement des messages à travers le réseau et des temps de mesure et de réalisation de l'action. Comme le retard de calcul $\tau^c$ est, en général, plus court que le délai de transmission, il est souvent négligé dans l'analyse. Dans une boucle de commande, nous considérons le retard capteurs-calculateur $\tau^{sc}$ et le retard calculateur-actionneurs $\tau^{ca}$ comme illustré dans la Figure 3.4, mais pour faciliter l'étude analytique des SCRs nous utilisons la somme $\tau_k = \tau^{sc}+\tau^{ca}$ pour décrire le retard induit par le réseau. En général, les retards induits par le réseau sont principalement engendrés par deux facteurs : la distance de transmission et les congestions du trafic d'information. La distance de transmission est un facteur évident, dans les mêmes conditions (bande passante du réseau, protocoles, etc.) la distance la plus longue donne lieu à un retard de transmission plus important. L'utilisation

de certains types de réseau (Internet, sans fil, etc.) peut entraîner un retard élevé, qui peut même surpasser la période d'échantillonnage ($\tau_k > T_e$), ce qui n'est pas convenable pour les applications critiques comme la téléopération. D'autre part, le retard découle aussi de la congestion du trafic dans le réseau en raison de la bande passante limitée des canaux de communication. Cela signifie que, même pour une courte distance de transmission, le retard induit peut être très incertain, et probablement valoir plus d'une période d'échantillonnage, en particulier lorsque le réseau est partagé avec d'autres boucles de régulation ou d'autres dispositifs échangeant leurs données. Les retards induits dans les SCRs peuvent être déterministes ou stochastiques.

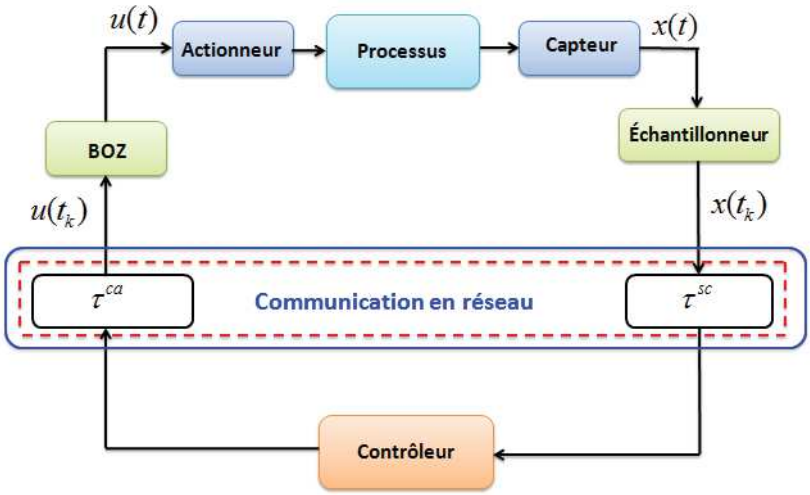


Figure 3.4: Les retards induits dans un SCR

Nous pouvons trouver cette classification dans plusieurs applications employant divers réseaux. Par exemple, dans le protocole CAN, le retard est supposé constant et doit tenir jusqu'à une nouvelle date. Cela est garanti par le biais de circuits tampons (Buffers) intégrés dans chaque noeud. Dans ce cas, les délais non équivalents sont augmentés afin d'être égaux. De nos jours, beaucoup de réseaux (Ethernet) ne peuvent pas garantir un retard constant. Ainsi, les études qui traitent les retards variables sont plus nombreuses. Pour le retard variable, deux classifications peuvent être trouvées dans la littérature, à savoir le retard non-déterministe ou stochastique. Dans le premier cas, la variation du retard n'est pas connue a priori, mais la valeur instantanée est disponible pour le calculateur en temps réel. Le deuxième cas entraîne que la variation du retard est associée à des descriptions statistiques (Gaussienne, chaîne de Markov,...).

#### 3.2.4.2 Pertes de paquets

L'introduction du réseau entre les composants de la boucle de contrôle entraîne aussi la perte des données due à la non-fiabilité du canal de transmission, à la saturation des mémoires dans les équipements d'interconnexion, aux protocoles d'accès au medium,... Les pertes de messages peuvent être assimilées à des délais infinis.

#### 3.2.4.3 Erreur de quantification

Dans un SCR, la quantification est considérée comme une contrainte de communication induite car elle est inséparable de la bande passante limitée du réseau (un nombre limité d'envoi d'informations par seconde). Elle consiste à convertir un signal analogique en une représentation numérique.
Un quantificateur est défini par une fonction constante par morceaux. Dans ce cas, les valeurs des signaux sont mis à des niveaux de quantification avant la transmission aux noeuds suivants qui peuvent représenter un ensemble de capteurs, d'actionneurs ou de contrôleurs ([Yue *et al.*, 2006, Zhang *et al.*, 2011, Latrach *et al.*, 2013a, Mahmoud et Al-Rayyah, 2011, Wu *et al.*, 2012, Liu et Zhang, 2010]). Le quantificateur logarithmique $q(\nu)$ peut être défini par :

$$q(\nu) = \begin{cases} u_i \quad \text{si} \quad \frac{1}{1+\delta}\rho^i u_0 < \nu \leq \frac{1}{1-\delta}\rho^i u_0 \\ 0 \quad \text{si} \quad \nu = 0 \\ -q(-\nu) \quad \text{si} \quad \nu < 0 \end{cases} \tag{3.1}$$

où $\delta = \frac{1-\rho}{1+\rho}$.
Dans ce cas, les niveaux de quantification sont donnés par l'ensemble suivant :

$$u = \{u_i, u_i = \rho^i u_0, i = 0 \pm 1 \pm 2, ...\} \cup \{0\}, \quad u_0 > 0$$

où le paramètre $0 < \rho < 1$ est appelé densité de quantification.
Contrairement à la Figure 3.4 où les données ne sont pas quantifiées, la Figure 3.5 présente la structure d'un SCR avec un quantificateur placé en amont du système de contrôle.

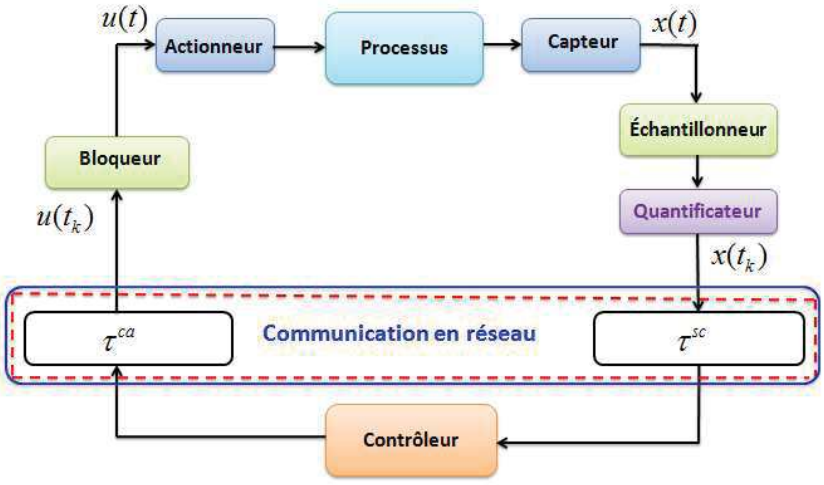


Figure 3.5: Schéma du système commandé en réseau avec quantification des mesures.

**Stabilisation asymptotique des SCRs :**

Dans la littérature, différentes méthodes existent pour l'élaboration des lois de commande des modèles flous de type TS. La majorité de ces techniques se base sur l'approche

de Lyapunov quadratique [Wang *et al.*, 1996], [Liu et Zhang, 2003], [Chadli *et al.*, 2002], [Oudghiri et Hajjaji, 2008b], [Kchaou *et al.*, 2013], [Kchaou et Toumi, 2013]. L'avantage de cette méthode est sa facilité de mise en oeuvre. Nous étendons cette approche aux systèmes commandés en réseau en utilisant la structure PDC et le formalisme LMIs.

## 3.3 Stabilisation par retour d'état flou

Dans cette section, nous proposons des résultats de stabilisation des SCRs par retour d'état flou. Dans la première partie, nous considérons le cas nominal sans rejet de perturbations extérieures en supposant que tous les états sont mesurables. Ensuite, nous étendons ces résultats au cas perturbé, enfin, au cas incertain avec perturbations.

### 3.3.1 Système nominal

On considère la structure du SCR avec les retards induits par le réseau donnée dans la Figure 3.4, où $\tau^{sc}$ est le retard entre le capteur-contrôleur et $\tau^{ca}$ est le retard contrôleur-actionneur. Nous supposons que le temps de calcul du contrôleur peut être absorbé soit par $\tau^{sc}$ soit par $\tau^{ca}$.
Dans ce travail, nous considérons les hypothèses suivantes :

1. Les capteurs sont commandés par une horloge, le contrôleur et les actionneurs sont pilotés par des événements.
2. Les données sont transmises dans un seul paquet, soit à partir de la mesure ou soit à partir de la commande et les variables d'état sont mesurables.
3. L'effet de la quantification du signal et le mauvais code de communication ne sont pas pris en compte.
4. Le signal de commande $u(t)$ utilise un bloqueur d'ordre zéro (BOZ).

Il est à noter que la période d'échantillonnage d'un capteur est pré-déterminée pour la conception d'algorithme de contrôle, et donc le capteur peut être supposé commandé par une horloge. Toutefois, un dispositif d'action ne change pas sa sortie à partir du système sous le contrôle jusqu'à ce qu'un signal de commande mis à jour soit reçu, ce qui implique que l'actionneur est piloté par des événements.
Dans cette section, le but concerne la synthèse d'un contrôleur par retour d'état flou pour stabiliser le système (2.39) qui utilise un réseau de communication. En considérant la structure PDC présentée dans l'annexe B, le signal de commande en réseau s'écrit :

$$u(t_k) = \sum_{i=1}^{r} h_i(\theta(t_k)) K_i x(t_k - \tau_k).$$

En utilisant un BOZ, le signal de commande du système $S$ pour $t_k \leq t \leq t_{k+1}$, devient

$$u(t) = \sum_{i=1}^{r} h_i(\theta(t_k)) K_i x(t_k - \tau_k) \tag{3.2}$$

– Retard induit par le réseau ($\tau_k$) : Le retard induit par le réseau existe toujours quand la donnée est transmise à travers le réseau, et évidemment, il possède deux bornes supérieure et inférieure. Alors, une représentation plus réaliste du retard serait une fonction variant dans le temps. Une hypothèse naturelle de $\tau_k$ peut être faite comme suit :

$$0 < \tau_m \leq \tau_k \leq \tau_M \tag{3.3}$$

– Paquets perdus : L'effet de paquets perdus dans la chaîne de communication signifie que le BOZ n'est pas mis à jour pendant l'intervalle de temps de cet évènement, qui est désigné comme l'échantillonnage vacant. Ainsi, l'effet de perte de paquets dans la transmission n'est qu'un cas où le délai d'une période d'échantillonnage est induite dans l'intervalle de la mise à jour du BOZ.

$$t_{k+1}-t_k = (\sigma_{k+1}+1)T_e+\tau_{k+1}-\tau_k \tag{3.4}$$

où $T_e$ représente la période d'échantillonnage et $\sigma_{k+1}$ est le nombre de paquets perdus cumulés [Rahmani et Markazi, 2013].
En utilisant les équations (2.39) et (3.2), le système commandé en réseau en boucle fermée s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \mathbb{A}(t)x(t)+\mathbb{A}_\eta(t)x(t_k-\tau_k),\ t_k \leq t \leq t_{k+1} \\ x(t) = \phi(t),\ t \in [-\eta_2,0] \end{cases} \tag{3.5}$$

Avec

$$h_i = h_i(\theta(t)),\quad h_i^k = h_i(\theta(t_k)),\quad \mathbb{A}(t) = \sum_{l=1}^{r} h_i A_i,\quad \mathbb{A}_\eta(t) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} h_i h_j^k B_i K_j$$

et $\phi(t)$ est une fonction continue et dérivable qui peut être considérée comme la condition initiale du système de contrôle en réseau en boucle fermée. On pose $\eta(t) = t-t_k+\tau_k,\quad t_k \leq t \leq t_{k+1}$, on a

$$\tau_m \leq \tau_k \leq \eta(t) \leq (\bar{\sigma}+1)T_e+\tau_{k+1} \tag{3.6}$$

Où $\bar{\sigma}$ représente le nombre maximum de paquets perdus dans les periodes de mise à jour, $\eta_1 = \tau_m$ et $\eta_2 = (\bar{\sigma}+1)T_e+\tau_M$. Ainsi nous obtenons à partir de [Gomes Da Silva Jr *et al.*, 2011] que

$$\eta_1 \leq \eta(t) \leq \eta_2,\quad \dot{\eta}(t) \leq h_d \tag{3.7}$$

$\eta_1$ et $\eta_2$ représentent respectivement la borne inférieure et la borne supérieure du retard variable dans le temps $\eta(t)$ et $h_d$ est la borne de la dérivée du retard $\eta(t)$.
Par conséquent, le système en boucle fermée (3.5) devient

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \mathbb{A}(t)x(t)+\mathbb{A}_\eta(t)x(t-\eta(t)), \\ x(t) = \phi(t),\quad t \in [-\eta_2,0] \end{cases} \tag{3.8}$$

En prenant en compte (3.7), le SCR donné par (3.8) est équivalent à un système avec un retard à temps variant sur l'état.

Nous présentons dans un premier temps, les résultats de stabilisation par retour d'état du système contrôlé en réseau (3.8), en utilisant la FLK (Fonction de Lyapunov Krasovskii) quadratique avec une intégrale double [Shao, 2008]. Ensuite, des conditions de stabilisation moins conservatives seront présentées sous forme des LMIs :

**Théorème 3.3.1** Soient les scalaires $\eta_1 > 0$, $\eta_2 > 0$, $\mu_1$, $\mu_2$, $\mu_3$, le système en boucle fermée (3.8) est asymptotiquement stable, s'ils existent des matrices symétriques $\bar{P}$, $\bar{Q}_1$, $\bar{Q}_2$, $\bar{Q}_3$, $\bar{Z}_1$, $\bar{Z}_2$ et des matrices $\bar{G}$ inversible, et les matrices $Y_i$ de dimensions appropriées, vérifiant les LMIs suivantes :

$$\bar{\Phi}_{ij}+\bar{\Phi}_1(\bar{Z}_2) < 0 \tag{3.9}$$

$$\bar{\Phi}_{ij}+\bar{\Phi}_2(\bar{Z}_2) < 0 \tag{3.10}$$

où

$$\bar{\Phi}_{ij} = \begin{bmatrix} \bar{\Phi}_{11i} & \bar{\Phi}_{12ij} & \bar{Z}_1 & 0 & \bar{\Phi}_{15i} \\ * & \bar{\Phi}_{22ij} & 0 & 0 & \bar{\Phi}_{25ij} \\ * & * & -\bar{Q}_2-\bar{Z}_1 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\bar{Q}_3 & 0 \\ * & * & * & * & \bar{\Phi}_{55} \end{bmatrix} \tag{3.11}$$

$$\bar{\Phi}_1(\bar{Z}_2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & -4\bar{Z}_2 & 3\bar{Z}_2 & \bar{Z}_2 & 0 \\ * & * & -3\bar{Z}_2 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\bar{Z}_2 & 0 \\ * & * & * & * & 0 \end{bmatrix} \tag{3.12}$$

$$\bar{\Phi}_2(\bar{Z}_2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & -4\bar{Z}_2 & \bar{Z}_2 & 3\bar{Z}_2 & 0 \\ * & * & -\bar{Z}_2 & 0 & 0 \\ * & * & * & -3\bar{Z}_2 & 0 \\ * & * & * & * & 0 \end{bmatrix} \tag{3.13}$$

$$\bar{\Phi}_{11i} = \bar{Q}_1+\bar{Q}_2+\bar{Q}_3+\mu_1 sym(A_i\bar{G})-\bar{Z}_1, \qquad \bar{\Phi}_{12ij} = \mu_2\bar{G}^T A_i^T+\mu_1 B_i Y_j,$$
$$\bar{\Phi}_{22ij} = \mu_2 sym(B_i Y_j)-(1-h_d)\bar{Q}_1, \qquad \bar{\Phi}_{15i} = \bar{P}-\mu_1\bar{G}+\mu_3\bar{G}^T A_i^T,$$
$$\bar{\Phi}_{25ij} = -\mu_2\bar{G}+\mu_3 Y_j^T B_i^T, \qquad \bar{\Phi}_{55} = \eta_1^2\bar{Z}_1+d_r^2\bar{Z}_2-\mu_3 sym(\bar{G}),$$
$$d_r = \eta_2-\eta_1$$

Avec $Y_j = K_j\bar{G}$

**Preuve 1** On considère la FLK (3.14) suivante :

$$V(x(t)) = x^T(t)Px(t)+\int_{t-\eta(t)}^{t} x^T(s)Q_1x(s)\mathrm{d}s+\int_{t-\eta_1}^{t} x^T(s)Q_2x(s)\mathrm{d}s+\int_{t-\eta_2}^{t} x^T(s)Q_3x(s)\mathrm{d}s$$
$$+\eta_1\int_{-\eta_1}^{0}\Big(\int_{t+s}^{t}\dot{x}^T(\upsilon)Z_1\dot{x}(\upsilon)\mathrm{d}\upsilon\Big)\mathrm{d}s+d_r\int_{-\eta_2}^{-\eta_1}\Big(\int_{t+s}^{t}\dot{x}^T(\upsilon)Z_2\dot{x}(\upsilon)\mathrm{d}\upsilon\Big)\mathrm{d}s \tag{3.14}$$

En dérivant la fonctionelle (3.14), on obtient :

$$\begin{aligned}\dot{V}(x(t)) \leq & 2\dot{x}^T(t)Px(t)+x^T(t)(Q_1+Q_2+Q_3)x(t)-(1-h_d)x^T(t-\eta(t))Q_1x(t-\eta(t))\\ & -x^T(t-\eta_1)Q_2x(t-\eta_1)-x^T(t-\eta_2)Q_3x(t-\eta_2)+\dot{x}^T(t)(\eta_1^2Z_1+d_r^2Z_2)\dot{x}(t)\\ & -\eta_1\int_{t-\eta_1}^{t}\dot{x}^T(\upsilon)Z_1\dot{x}(\upsilon)\mathrm{d}\upsilon-d_r\int_{t-\eta_2}^{t-\eta_1}\dot{x}^T(\upsilon)Z_2\dot{x}(\upsilon)\mathrm{d}\upsilon\end{aligned} \tag{3.15}$$

On note $\psi_1 = x(t)-x(t-\eta_1)$, $\psi_2 = x(t-\eta_1)-x(t-\eta(t))$ et $\psi_3 = x(t-\eta(t))-x(t-\eta_2)$, à partir de l'inegalité de Jensen donnée dans le Lemme (A.9), nous obtenons

$$-\eta_1\int_{t-\eta_1}^{t}\dot{x}^T(\upsilon)Z_1\dot{x}(\upsilon)\mathrm{d}\upsilon \leq -\psi_1^TZ_1\psi_1 \tag{3.16}$$

et

$$\begin{aligned}&-d_r\int_{t-\eta_2}^{t-\eta_1}\dot{x}^T(\upsilon)Z_2\dot{x}(\upsilon)\mathrm{d}\upsilon = -d_r\int_{t-\eta_2}^{t-\eta(t)}\dot{x}^T(\upsilon)Z_2\dot{x}(\upsilon)\mathrm{d}\upsilon-d_r\int_{t-\eta(t)}^{t-\eta_1}\dot{x}^T(\upsilon)Z_2\dot{x}(\upsilon)\mathrm{d}\upsilon\\ &\leq -\frac{d_r}{(\eta(t)-\eta_1)}\psi_2^TZ_2\psi_2-\frac{d_r}{(\eta_2-\eta(t))}\psi_3^TZ_2\psi_3\end{aligned} \tag{3.17}$$

En utilisant le Lemme A.5 de l'annexe A, nous avons

$$\begin{aligned}-d_r\int_{t-\eta_2}^{t-\eta_1}\dot{x}^T(\upsilon)Z_2\dot{x}(\upsilon)\mathrm{d}\upsilon &\leq -\frac{d_r}{(\eta(t)-\eta_1)}\psi_2^TZ_2\psi_2-\frac{d_r}{(\eta_2-\eta(t))}\psi_3^TZ_2\psi_3\\ &\leq max\{-\psi_2^TZ_2\psi_2-3\psi_3^TZ_2\psi_3,-3\psi_2^TZ_2\psi_2-\psi_3^TZ_2\psi_3\}\end{aligned} \tag{3.18}$$

A partir de l'équation (3.8) et pour toutes les matrices $G_1$, $G_2$ et $G_3$ de dimensions appropriées, nous avons l'équation suivante :

$$2\big[x^T(t)G_1^T+x^T(t-\eta(t))G_2^T+\dot{x}^T(t)G_3^T\big]\times\big[-\dot{x}(t)+\mathbb{A}(t)x(t)+\mathbb{A}_\eta(t)x(t-\eta(t))\big] = 0 \tag{3.19}$$

En posant $\Psi^T(t) = \big[x^T(t) \quad x^T(t-\eta(t)) \quad x^T(t-\eta_1) \quad x^T(t-\eta_2) \quad \dot{x}^T(t)\big]$, $G_1 = \mu_1G$, $G_2 = \mu_2G$, et $G_3 = \mu_3G$, avec $\mu_1$, $\mu_2$, $\mu_3$ des scalaires positifs, la dérivée de (3.14) devient :

$$\begin{aligned}\dot{V}(x(t)) \leq & 2\dot{x}^T(t)Px(t)+x^T(t)(Q_1+Q_2+Q_3)x(t)-(1-h_d)x^T(t-\eta(t))Q_1x(t-\eta(t))\\ & -x^T(t-\eta_1)Q_2x(t-\eta_1)-x^T(t-\eta_2)Q_3x(t-\eta_2)+\dot{x}^T(t)(\eta_1^2Z_1+d_r^2Z_2)\dot{x}(t)\\ & -\psi_1^TZ_1\psi_1+max\{-\psi_2^TZ_2\psi_2-3\psi_3^TZ_2\psi_3,-3\psi_2^TZ_2\psi_2-\psi_3^TZ_2\psi_3\}\\ & -2\big[x^T(t)G_1^T+x^T(t-\eta(t))G_2^T+\dot{x}^T(t)G_3^T\big]\times\big[-\dot{x}(t)+\mathbb{A}(t)x(t)+\mathbb{A}_\eta(t)x(t-\eta(t))\big]\\ & \leq max\Big(\Psi^T(t)\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}h_ih_j^k(\Phi_{ij}+\bar{\Phi}_1(Z_2))\Psi(t),\Psi^T(t)\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}h_ih_j^k(\Phi_{ij}+\bar{\Phi}_2(Z_2))\Psi(t)\Big).\end{aligned}$$

La dérivée de FLK (3.15) est négative si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :

$$\Phi_{ij}+\bar{\Phi}_1(Z_2) < 0 \tag{3.20}$$
$$\Phi_{ij}+\bar{\Phi}_2(Z_2) < 0 \tag{3.21}$$

avec

$$\Phi_{ij} = \begin{bmatrix} \Phi_{11i} & \Phi_{12ij} & Z_1 & 0 & \Phi_{15i} \\ * & \Phi_{22ij} & 0 & 0 & \Phi_{25ij} \\ * & * & -Q_2-Z_1 & 0 & 0 \\ * & * & * & -Q_3 & 0 \\ * & * & * & * & \Phi_{55} \end{bmatrix} \tag{3.22}$$

$$\Phi_{11i} = Q_1+Q_2+Q_3+sym(G_1^T A_i)-Z_1, \qquad \Phi_{12ij} = A_i^T G_2+G_1^T B_i K_j,$$
$$\Phi_{22ij} = sym(G_2^T B_i K_j)-(1-h_d)Q_1, \qquad \Phi_{15i} = P-G_1^T+A_i^T G_3,$$
$$\Phi_{25ij} = -G_2^T+K_j^T B_i^T G_3, \qquad \Phi_{55} = \eta_1^2 Z_1+d_r^2 Z_2-sym(G_3)$$

D'après les conditions du Théorème 3.3.1, une solution est faisable si et seulement si la condition $\bar{\Phi}_{55} < 0$ est satisfaite. Ce qui implique que $\bar{G}$ est inversible. Soient $G = \bar{G}^{-1}$, $\bar{P} = \bar{G}^T P \bar{G}$, $\bar{Q}_1 = \bar{G}^T Q_1 \bar{G}$, $\bar{Q}_2 = \bar{G}^T Q_2 \bar{G}$, $\bar{Q}_3 = \bar{G}^T Q_3 \bar{G}$, $\bar{Z}_1 = \bar{G}^T Z_1 \bar{G}$, et $\bar{Z}_2 = \bar{G}^T Z_2 \bar{G}$. En appliquant le lemme de congruence (donné dans l'annexe A) à (3.20)-(3.21) par la matrice de congruence $diag\{\bar{G},\bar{G},\bar{G},\bar{G},\bar{G}\}$, nous obtenons (3.9-3.10). Ce qui implique que $\dot{V}(x(t)) \leq 0$ quand $h_i \geq 0$ et $h_i^k \geq 0$, donc le système (3.8) est asymptotiquement stable. ■

Pour relâcher les conditions de synthèse du Théorème 3.3.1, nous présentons le résultat donné dans le Théorème 3.3.2 basé sur le Lemme A.11. Cette relaxation consiste à décomposer la double somme et à utiliser la condition de Lipschitz suivante :

$$|h_i^k-h_i| \leq \varphi_i \tag{3.23}$$

avec $\varphi_k$ représente la constante de Lipschitz.[Zhang *et al.*, 2014]

**Théorème 3.3.2** Soient les scalaires $\eta_1 > 0$, $\eta_2 > 0$, $\mu_1$, $\mu_2$, $\mu_3$ et $\varphi_i$, le système en boucle fermée (3.8) est asymptotiquement stable, s'ils existent des matrices symétriques $\bar{P}$, $\bar{Q}_1$, $\bar{Q}_2$, $\bar{Q}_3$, $\bar{Z}_1$, $\bar{Z}_2$ et des matrices $\bar{G}$ inversible, et $Y_i$ de dimensions appropriées, vérifiant les LMIs suivantes :

$$\tilde{\Phi}_{ii}+\bar{\Phi}_1(\bar{Z}_2) < 0 \tag{3.24}$$
$$\tilde{\Phi}_{ii}+\bar{\Phi}_2(\bar{Z}_2) < 0 \tag{3.25}$$
$$\tilde{\Phi}_{ij}+\tilde{\Phi}_{ji}+2\bar{\Phi}_1(\bar{Z}_2) < 0 \tag{3.26}$$
$$\tilde{\Phi}_{ij}+\tilde{\Phi}_{ji}+2\bar{\Phi}_2(\bar{Z}_2) < 0 \tag{3.27}$$

où

$$\tilde{\Phi}_{ij} = \sum_{k=1}^{r} \varphi_k \bar{\Phi}_{ik} + \bar{\Phi}_{ij} \tag{3.28}$$

avec $Y_j = K_j \bar{G}$.

**Preuve 2** Pour la preuve, nous procédons de la même manière que pour le Théorème 3.3.1 de (3.14-3.19). Après, nous posons $G_1 = \mu_1 G$, $G_2 = \mu_2 G$, et $G_3 = \mu_3 G$, avec $\mu_1$, $\mu_2$, $\mu_3$ des scalaires positifs. Nous obtenons :

$$\dot{V}(x(t)) \leq max\Big(\Psi^T(t)\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} h_i h_j^k (\Phi_{ij} + \bar{\Phi}_1(Z_2))\Psi(t), \Psi^T(t)\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} h_i h_j^k (\Phi_{ij} + \bar{\Phi}_2(Z_2))\Psi(t)\Big) \tag{3.29}$$

En utilisant le Lemme A.11, l'inégalité (3.29) devient :

$$\dot{V}(x(t)) \leq max\Big(\Psi^T(t)\sum_{i=1}^{r}\sum_{j>i}^{r} h_i h_j [(\hat{\Phi}_{ij} + \bar{\Phi}_1(Z_2)) + (\hat{\Phi}_{ji} + \bar{\Phi}_1(Z_2))]\Psi(t) + \Psi^T(t)\sum_{i=1}^{r} h_i^2 [\hat{\Phi}_{ii} + \bar{\Phi}_1(Z_2)]\Psi(t),$$
$$\Psi^T(t)\sum_{i=1}^{r}\sum_{j>i}^{r} h_i h_j [(\hat{\Phi}_{ij} + \bar{\Phi}_2(Z_2)) + (\hat{\Phi}_{ji} + \bar{\Phi}_2(Z_2))]\Psi(t) + \Psi^T(t)\sum_{i=1}^{r} h_i^2 [\hat{\Phi}_{ii} + \bar{\Phi}_2(Z_2)]\Psi(t)\Big).$$

Pour garantir la stabilité du SCR (3.8), les conditions suivantes doivent être vérifiées :

$$\hat{\Phi}_{ii} + \bar{\Phi}_1(Z_2) < 0 \tag{3.30}$$
$$\hat{\Phi}_{ii} + \bar{\Phi}_2(Z_2) < 0 \tag{3.31}$$
$$\hat{\Phi}_{ij} + \hat{\Phi}_{ji} + 2\bar{\Phi}_1(Z_2) < 0 \tag{3.32}$$
$$\hat{\Phi}_{ij} + \hat{\Phi}_{ji} + 2\bar{\Phi}_2(Z_2) < 0 \tag{3.33}$$

avec

$$\hat{\Phi}_{ij} = \sum_{k=1}^{r} \varphi_k \Phi_{ik} + \Phi_{ij} \tag{3.34}$$

Comme précédemment, les conditions du Théorème 3.3.2 sont faisables si et seulement si la condition $\bar{\Phi}_{55} < 0$ est satisfaite. Ce qui implique que $\bar{G}$ est inversible. En posant $G = \bar{G}^{-1}$, $\bar{P} = \bar{G}^T P \bar{G}$, $\bar{Q}_1 = \bar{G}^T Q_1 \bar{G}$, $\bar{Q}_2 = \bar{G}^T Q_2 \bar{G}$, $\bar{Q}_3 = \bar{G}^T Q_3 \bar{G}$, $\bar{Z}_1 = \bar{G}^T Z_1 \bar{G}$, et $\bar{Z}_2 = \bar{G}^T Z_2 \bar{G}$, et par congruence sur (3.30)-(3.33) par $diag\{\bar{G},\bar{G},\bar{G},\bar{G},\bar{G}\}$, nous obtenons les conditions (3.24-3.27). Ce qui implique que $\dot{V}(x(t)) \leq 0$ quand $h_i \geq 0$ et $h_i^k \geq 0$ , donc le système (3.8) est asymptotiquement stable. ■

Pour illustrer l'approche proposée dans le Théorème 3.3.2, nous présentons l'exemple numérique suivant. Cette approche basée sur la commande par retour d'état permet de stabiliser les états du SCR malgré la présence du retard et des pertes de paquets d'information dus à la communication en réseau.

**Exemple 3.1** Soit le modèle flou de type TS suivant :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{r} h_i[A_i x(t) + B_i u(t)] \tag{3.35}$$

où

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -21 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -13.369 & 0 \end{bmatrix}, \\ B_1 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \end{bmatrix}, \qquad x(t) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3.36}$$

avec les fonctions d'appartenance $h_1 = (0.5 - x_1)/0.5$ et $h_2 = 1 - h_1$ et les paramètres suivants : $T_e = 0.6ms$, $\eta_1 = 6ms$, $\eta_2 = 30ms$ et $\bar{\sigma} = 3$.
Le retard variable dans le temps entre le capteur et le contrôleur ainsi qu'entre le contrôleur et l'actionneur est généré de manière aléatoire telle que $\min(\tau_{sc} + \tau_{ca}) \geq \eta_1$, et $\max(\tau_{sc} + \tau_{ca} + (\bar{\sigma}+1)T_e) \leq \eta_2$ et les pertes de paquets sont aussi générées de manière aléatoire telle que $max(Ne) \leq 3$, où $Ne$ est le nombre de paquets perdus, $h_d = 0.1$, $\varphi_i = min\{1, 0.5\eta_2\} = 0.015$, $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 0.1$ et $\mu_3 = 0.2$.
En résolvant les LMIs du Théorème 3.3.2, nous obtenons les gains du contrôleur suivants :

$$K_1 = \begin{bmatrix} 10.1065 & -4.1378 \end{bmatrix}, \; K_2 = \begin{bmatrix} 8.8134 & -4.4762 \end{bmatrix} \tag{3.37}$$

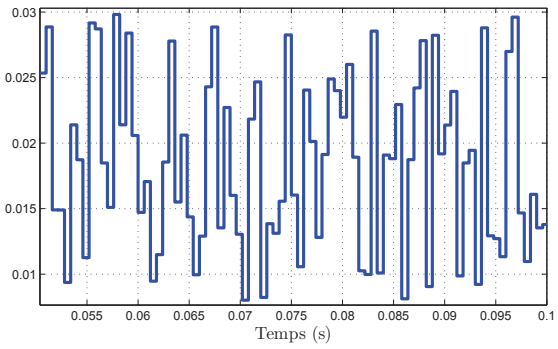


Figure 3.6: Retards induits par le réseau.

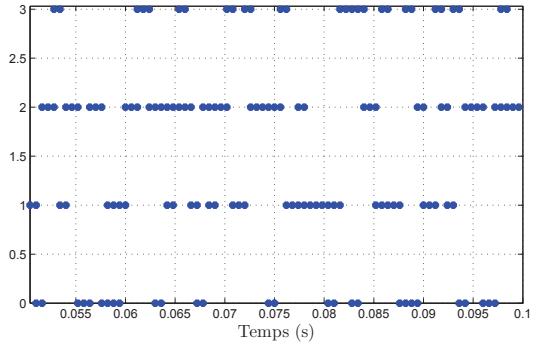


Figure 3.7: Pertes de paquets de données.

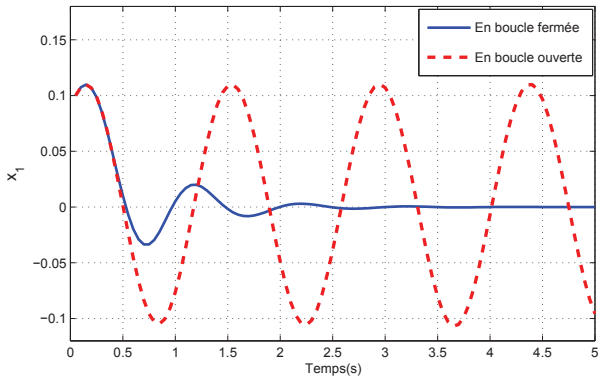


Figure 3.8: Evolution de la variable d'état $x_1$.

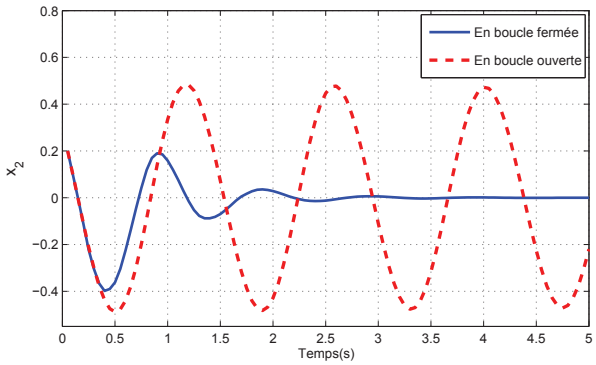


Figure 3.9: Evolution de la variable d'état $x_2$.

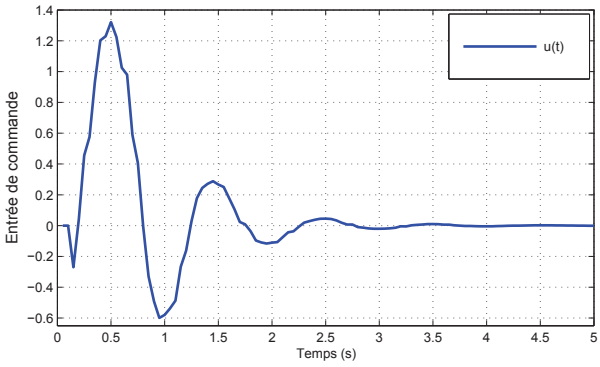


Figure 3.10: Evolution du signal de commande.

Les Figures 3.6 et 3.7 montrent les retards induits par le réseau et les pertes de paquets de données qui sont générés de façon aléatoire.
Les Figures (3.8-3.10) représentent les résultats de simulation pour une condition initiale $x_0 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 \end{bmatrix}$.

Les évolutions des états du système (3.35) instable en boucle ouverte sont illustrées par les Figures 3.6 et 3.7. Nous remarquons que ce système devient stable, en appliquant la loi de commande en réseau (3.2) illustrée dans la Figure 3.10, avec les gains $K_1$ et $K_2$ obtenus en résolvant les LMIs du Théorème 3.3.2.

#### 3.3.1.1 Cas particulier

Dans la suite, nous présentons un cas particulier afin de réduire la complexité du problème d'optimisation et le temps de calcul. Il consiste à supposer les variables de prémisse synchrones et accessibles pour la mesure. Donc les variables de prémisse sont reliées à l'actionneur via l'architecture point à point. (voir Figure 3.11)

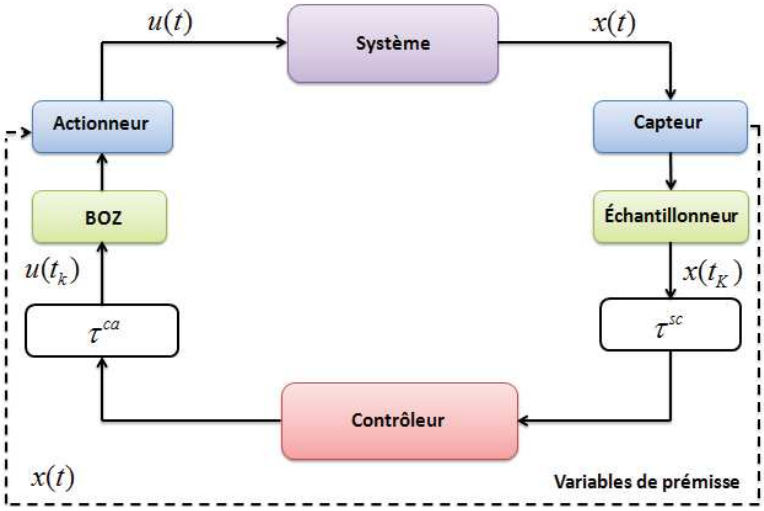


Figure 3.11: Système commandé en réseau avec retards aléatoires

Ainsi, nous présentons un résultat de synthèse de la commande en réseau en utilisant le Lemme A.10 et la FLK utilisée précédemment. Cette FLK sera ensuite améliorée dans le cas de commande par retour de sortie afin de réduire davantage le conservatisme. Dans le cas de variables de prémisse synchrones, les conditions de stabilité en boucle fermée sont données dans le Théorème suivant :

**Théorème 3.3.3** [Latrach *et al.*, 2013b] Soient les scalaires $\eta_1 > 0$, $\eta_2 > 0$, $\mu_1$, $\mu_2$ et $\mu_3$, le système en boucle fermée (3.8) est asymptotiquement stable, s'ils existent des matrices symétriques $\bar{P}$, $\bar{Q}_1$, $\bar{Q}_2$, $\bar{Q}_3$, $\bar{Z}_1$, $\bar{Z}_2$ et une matrice $\bar{G}$ inversible, et $Y_i$ de dimensions appropriées, vérifiant les conditions suivantes :

$$\bar{\Phi}_{ii}+\bar{\Phi}_1(\bar{Z}_2) < 0 \tag{3.38}$$

$$\bar{\Phi}_{ii}+\bar{\Phi}_2(\bar{Z}_2) < 0 \tag{3.39}$$

$$\bar{\Phi}_{ij}+\bar{\Phi}_{ji}+2\bar{\Phi}_1(\bar{Z}_2) < 0 \tag{3.40}$$

$$\bar{\Phi}_{ij}+\bar{\Phi}_{ji}+2\bar{\Phi}_2(\bar{Z}_2) < 0 \tag{3.41}$$

avec $\bar{\Phi}_{ij}$ sont données par (3.11) et $Y_j = K_j\bar{G}$.

**Preuve 3** Pour démontrer les résultats du Theorème 3.3.3, nous suivons la même démarche que celle du Théorème 3.3.2. L'objectif est d'obtenir des conditions de stabilité plus simples en appliquant la relaxation donnée par le Lemme A.10, sous l'hypothèse que toutes les variables de prémisses sont mesurables.

Donc dans la suite, nous nous intéressons au problème de la commande robuste en réseau. Nous considérons à la fois la robustesse vis-à-vis des incertitudes paramétriques et également vis-à-vis des perturbations extérieures.

### 3.3.2 Système flou soumis à des perturbations extérieures

Dans ce paragraphe, nous présentons une technique de synthèse d'un contrôleur robuste qui permet de stabiliser le système en boucle fermée en présence de perturbations extérieures. Le SCR en boucle fermée devient :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t)+H(t)x(t-\eta(t))+B_f(t)W(t), \\ x(t) = \phi(t),\ t \in [t_0-\eta_2,t_0] \\ z(t) = C_1x(t) \\ t_k \leq t \leq t_{k+1} \end{cases} \tag{3.42}$$

avec

$$A(t) = \sum_{i=1}^{r} h_iA_i, \qquad B_f(t) = \sum_{i=1}^{r} h_iB_{fi}, \tag{3.43}$$

$$H(t) = \sum_{i=1}^{r} h_i \sum_{j=1}^{r} h_j^k H_{ij}, \qquad H_{ij} = B_iK_j.$$

et $z(t)$ représente le signal de sortie à contrôler. Les conditions de synthèse sont résumées comme suit :

**Théorème 3.3.4** Soient les scalaires $\eta_1 > 0$, $\eta_2 > 0$, $\mu_1$, $\mu_2$, $\mu_3$ et $\varphi_i$, le système en boucle fermée (3.42) est asymptotiquement stable et la performance $H_\infty$ est garantie pour un niveau d'atténuation $\gamma > 0$, s'ils existent des matrices positives $\bar{P}$, $\bar{Q}_1$, $\bar{Q}_2$, $\bar{Q}_3$, $\bar{Z}_1$, $\bar{Z}_2$ et une matrice $\bar{G}$ inversible et $Y_i$ avec des dimensions appropriées, telles que les conditions suivantes soient vérifiées :

$$\hat{\Phi}_{ii}+\hat{\Phi}_1(\bar{Z}_2) < 0 \tag{3.44}$$

$$\hat{\Phi}_{ii}+\hat{\Phi}_2(\bar{Z}_2) < 0 \tag{3.45}$$

$$\hat{\Phi}_{ij}+\hat{\Phi}_{ji}+2\hat{\Phi}_1(\bar{Z}_2) < 0 \tag{3.46}$$

$$\hat{\Phi}_{ij}+\hat{\Phi}_{ji}+2\hat{\Phi}_2(\bar{Z}_2) < 0 \tag{3.47}$$

où

$$\hat{\Phi}_{ij} = \sum_{k=1}^{r} \varphi_k \check{\Phi}_{ik} + \check{\Phi}_{ij} \tag{3.48}$$

$$\check{\Phi}_{ij} = \begin{bmatrix} \bar{\Phi}_{11i} & \bar{\Phi}_{12ij} & \bar{Z}_1 & 0 & \bar{\Phi}_{15i} & \mu_1 B_{fi} & \bar{\Phi}_{17} \\ * & \bar{\Phi}_{22ij} & 0 & 0 & \bar{\Phi}_{25ij} & \mu_2 B_{fi} & 0 \\ * & * & \bar{\Phi}_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\bar{Q}_3 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & \bar{\Phi}_{55} & \mu_3 B_{fi} & 0 \\ * & * & * & * & * & -\gamma^2 I & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -I \end{bmatrix} \tag{3.49}$$

$$\hat{\Phi}_1(\bar{Z}_2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & -4\bar{Z}_2 & 3\bar{Z}_2 & \bar{Z}_2 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -3\bar{Z}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\bar{Z}_2 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & 0 \end{bmatrix} \tag{3.50}$$

$$\hat{\Phi}_2(\bar{Z}_2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & -4\bar{Z}_2 & \bar{Z}_2 & 3\bar{Z}_2 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -\bar{Z}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -3\bar{Z}_2 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & 0 \end{bmatrix} \tag{3.51}$$

avec

$$\bar{\Phi}_{17} = \bar{G}^T C_1^T$$

où $K_i = Y_i \bar{G}^{-1}$

**Preuve 4** Les conditions du Théorème 3.3.4 impliquent que la condition $\bar{\Phi}_{55} < 0$ et par conséquent $\bar{G}$ est inversible. En posant $G = \bar{G}^{-1}$, $\bar{P} = \bar{G}^T P \bar{G}$, $\bar{Q}_1 = \bar{G}^T Q_1 \bar{G}$, $\bar{Q}_2 = \bar{G}^T Q_2 \bar{G}$, $\bar{Q}_3 = \bar{G}^T Q_3 \bar{G}$, $\bar{Z}_1 = \bar{G}^T Z_1 \bar{G}$, $\bar{Z}_2 = \bar{G}^T Z_2 \bar{G}$, $G_1 = \mu_1 G$, $G_2 = \mu_2 G$ et $G_3 = \mu_3 G$ et en appliquant la congruence à (3.44)-(3.47) par $diag\{G,G,G,G,G,I,I\}$, nous obtenons

les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned}
&\tilde{\Phi}_{ii}+\hat{\Phi}_1(Z_2) < 0\\
&\tilde{\Phi}_{ii}+\hat{\Phi}_2(Z_2) < 0\\
&\tilde{\Phi}_{ij}+\tilde{\Phi}_{ji}+2\hat{\Phi}_1(Z_2) < 0,\ j > i\\
&\tilde{\Phi}_{ij}+\tilde{\Phi}_{ji}+2\hat{\Phi}_2(Z_2) < 0
\end{aligned} \tag{3.52}$$

où

$$\tilde{\Phi}_{ij} = \sum_{k=1}^{r} \varphi_k \acute{\Phi}_{ik}+\acute{\Phi}_{ij} \tag{3.53}$$

avec

$$\acute{\Phi}_{ij} = \begin{bmatrix}
\Phi_{11i} & \Phi_{12ij} & Z_1 & 0 & \Phi_{15i} & \Phi_{16i} & \Phi_{17}\\
* & \Phi_{22ij} & 0 & 0 & \Phi_{25ij} & \Phi_{26i} & 0\\
* & * & -Q_2-Z_1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
* & * & * & -Q_3 & 0 & 0 & 0\\
* & * & * & * & \Phi_{55} & \Phi_{56i} & 0\\
* & * & * & * & * & -\gamma^2 I & 0\\
* & * & * & * & * & * & -I
\end{bmatrix} \leq 0$$

$$\begin{aligned}
\Phi_{16i} &= G_1^T B_{fi}, & \Phi_{26i} &= G_2^T B_{fi},\\
\Phi_{56i} &= G_3^T B_{fi}, & \Phi_{17} &= C_1^T
\end{aligned}$$

A partir du système en boucle fermée (3.42), la dérivée de (3.14) satisfait :

$$\begin{aligned}
&\dot{V}(x(t)) \leq 2\dot{x}^T(t)Px(t)+x^T(t)(Q_1+Q_2+Q_3)x(t)-(1-h_d)x^T(t-\eta(t))Q_1x(t-\eta(t))\\
&-x^T(t-\eta_1)Q_2x(t-\eta_1)-x^T(t-\eta_2)Q_3x(t-\eta_2)+\dot{x}^T(t)(\eta_1^2Z_1+d_r^2Z_2)\dot{x}(t)\\
&-\eta_1\int_{t-\eta_1}^{t}\dot{x}^T(\upsilon)Z_1\dot{x}(\upsilon)\mathrm{d}\upsilon-d_r\int_{t-\eta_2}^{t-\eta_1}\dot{x}^T(\upsilon)Z_2\dot{x}(\upsilon)\mathrm{d}\upsilon+x^T(t)C_1^TC_1x(t)\\
&-\gamma^2W^T(t)W(t)-z^Tz+\gamma^2W^T(t)W(t)
\end{aligned} \tag{3.54}$$

A partir de (3.42), nous avons, pour les matrices de dimensions appropriées $G_1$, $G_2$ et $G_3$ l'équation suivante :

$$2\big[x^T(t)G_1^T+x^T(t-\eta(t))G_2^T+\dot{x}^T(t)G_3^T\big]\times\big[-\dot{x}(t)+A(t)x(t)+H(t)x(t-\eta(t))+B_f(t)W(t)\big] = 0 \tag{3.55}$$

En combinant (3.54), (3.16), (3.55) et en considérant (3.18) avec les notations (3.61), nous obtenons

$$\begin{aligned}
&\dot{V}(x(t))+z^Tz-\gamma^2W^T(t)W(t)\\
&\leq max\Big(\Psi^T(t)\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}h_ih_j^k(\acute{\Phi}_{ij}+\hat{\Phi}_1(Z_2))\Psi(t),\Psi^T(t)\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}h_ih_j^k(\acute{\Phi}_{ij}+\hat{\Phi}_2(Z_2))\Psi(t)\Big) \leq 0
\end{aligned}$$

où $\Psi^T(t) = \begin{bmatrix} x^T(t) & x^T(t-\eta(t)) & x^T(t-\eta_1) & x^T(t-\eta_2) & \dot{x}^T(t) & W^T(t) \end{bmatrix}$.

En utilisant le Lemme A.11, nous déduisons que :

$$\dot{V}(x(t))+z^Tz-\gamma^2W^T(t)W(t)$$
$$\leq max\Big(\Psi^T(t)\sum_{i=1}^{r}\sum_{j>i}^{r}h_ih_j[(\tilde{\Phi}_{ij}+\hat{\Phi}_1(Z_2))+(\tilde{\Phi}_{ji}+\hat{\Phi}_1(Z_2))]\Psi(t)+\Psi^T(t)\sum_{i=1}^{r}h_i^2[\tilde{\Phi}_{ii}+\hat{\Phi}_1(Z_2)]\Psi(t),$$
$$\Psi^T(t)\sum_{i=1}^{r}\sum_{j>i}^{r}h_ih_j[(\tilde{\Phi}_{ij}+\hat{\Phi}_2(Z_2))+(\tilde{\Phi}_{ji}+\hat{\Phi}_2(Z_2))]\Psi(t)+\Psi^T(t)\sum_{i=1}^{r}h_i^2[\tilde{\Phi}_{ii}+\hat{\Phi}_2(Z_2)]\Psi(t)\Big).$$

Par conséquent, si les conditions (3.52) sont vérifiées alors, on peut déduire que :

$$\dot{V}(x(t))+z^Tz-\gamma^2W^T(t)W(t) < 0 \tag{3.56}$$

En intégrant (3.56) entre les deux bornes de $t_k$ à $t_k \leq t \leq t_{k+1}$, nous obtenons

$$V(x(t))-V(x(t_k)) < -\int_{t_k}^{t} z^T(t)z(t)dt+\int_{t_k}^{t}\gamma^2W^T(t)W(t)dt. \tag{3.57}$$

puisque $V(x(t))$ est continu dans $t \in [t_0,\infty)$, il est clair que

$$V(x(t))-V(x(t_0))+\int_{t_0}^{t} z^T(t)z(t)dt-\int_{t_0}^{t}\gamma^2W^T(t)W(t)dt < 0.$$

Quand $t \to \infty$ et sous la condition initiale nulle, l'indice de performance $H_\infty$ est satisfait, i.e., $||z||_2 < \gamma||W(t)||_2$, pour toute condition non nulle $W(t) \in L_2$.

■

Dans la suite, nous appliquons le résultat précédent au contrôle en réseau de la dynamique latérale du véhicule.

**Exemple 3.2** Commande en réseau de la dynamique latérale du véhicule

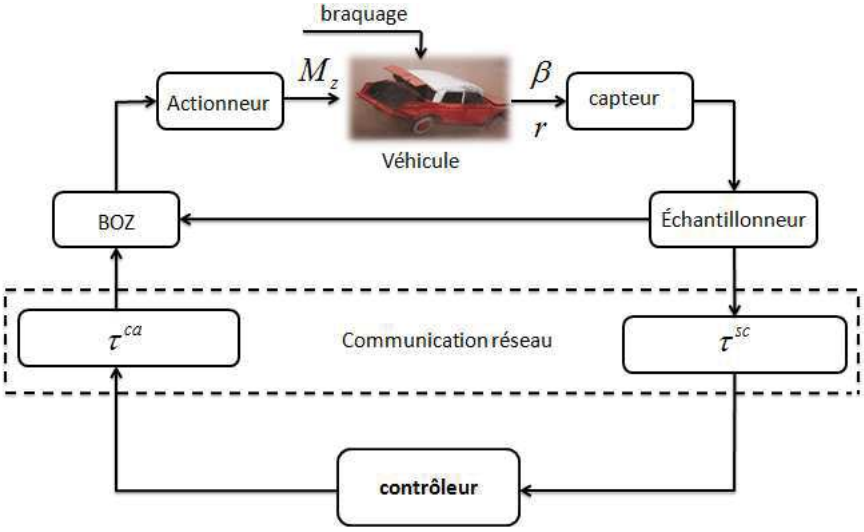


Figure 3.12: Schéma du système commandé en réseau

On considère le modèle TS de la dynamique latérale du véhicule décrit par l'équation (2.52).
La structure de contrôle en réseau est donnée dans la Figure 3.12 où le braquage conducteur est donné dans la Figure 3.13. Les retards induits par le réseau et les paquets de données perdus sont générés aléatoirement et représentés sur la Figure 3.14 et la Figure 3.15. L'objectif du contrôle est de maintenir la stabilité du véhicule pour une manoeuvre de conducteur présentée dans la Figure 3.13.
Les paramètres du véhicule sont donnés dans le tableau suivant :

Tableau 3.1: Paramètres du véhicule

| Paramètres | $I_z(Kg^2m)$ | $m(Kg)$ | $a_f(m)$ | $a_r(m)$ | $v_x(m/s)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Valeurs | 3214 | 1500 | 1.2 | 1.3 | 20 |

En considérant des retards variables sur la mesure et également sur la commande avec $\eta_1 = 6ms$, $\eta_2 = 30ms$ et deux pertes de paquets aléatoires, les coefficients de rigidité du véhicule donnés dans la Table 2.1, et les paramètres $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 0.1$, et $\mu_3 = 0.1$ et en résolvant les LMIs du Théorème 3.3.1, on obtient les gains du contrôleur suivants :

$$K_1 = \begin{bmatrix} 0.0499 & -0.0155 \end{bmatrix}, \quad K_2 = \begin{bmatrix} -0.0644 & 0.0563 \end{bmatrix} \tag{3.58}$$

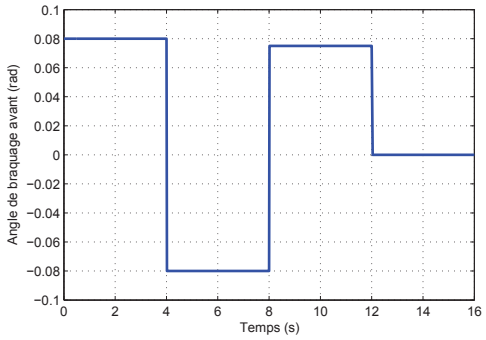


Figure 3.13: Angle de braquage avant $\delta_f$

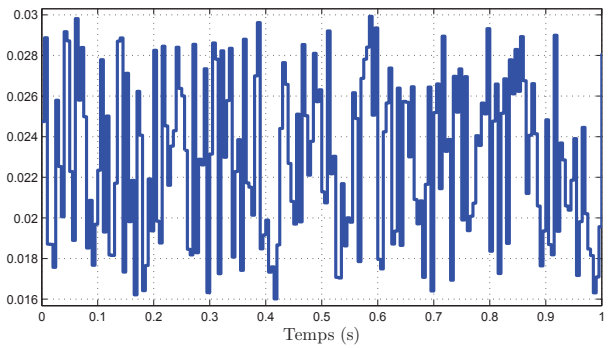


Figure 3.14: Retards induits par le réseau.

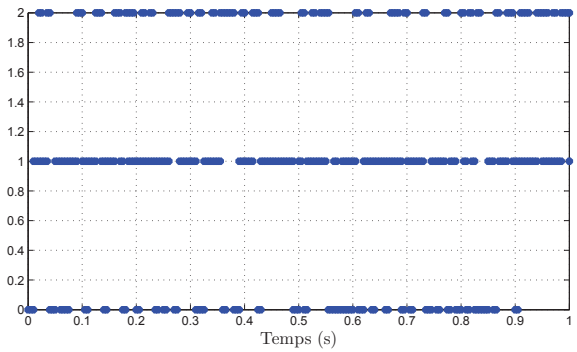


Figure 3.15: Pertes de paquets de données.

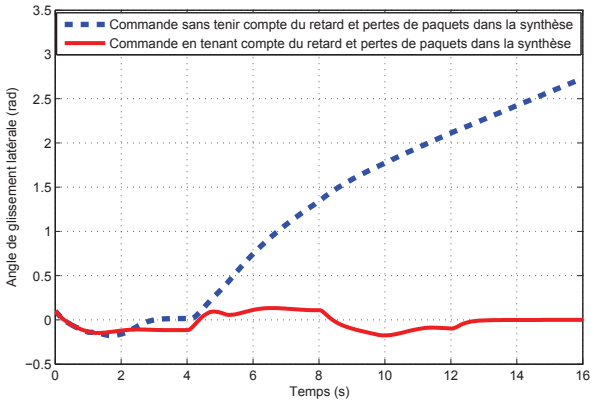


Figure 3.16: Comparaison des angles de glissement latéraux $\beta$ .

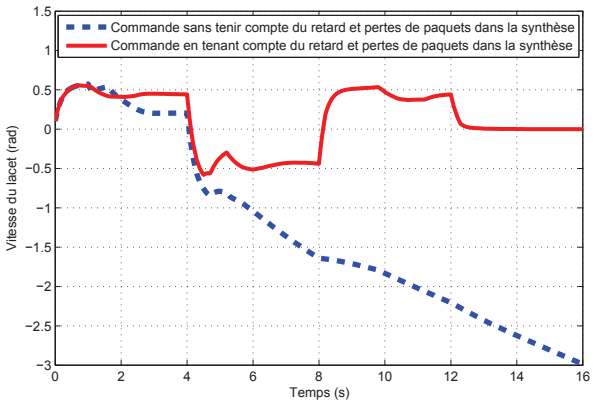


Figure 3.17: Comparaison des vitesses du lacet $r$.

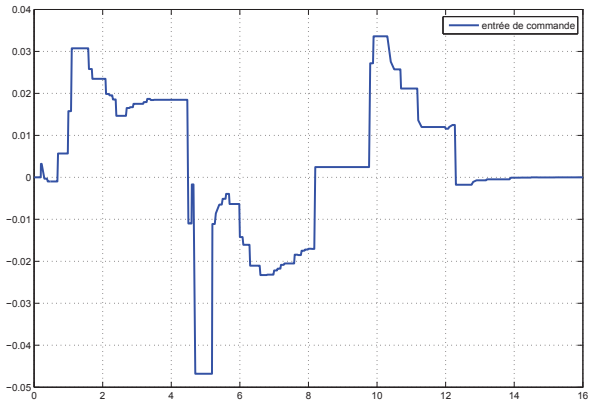


Figure 3.18: Trajectoire du signal de commande $M_z$.

Dans cette partie, nous avons appliqué deux lois de commande floue par retour d'état. La première a été développée sans prendre en compte les effets du réseau de communication, nous remarquons que le véhicule est stabilisable. Cependant, lorsque nous introduisons le retard et les pertes de paquets induits par le réseau, le comportement devient instable, comme indiqué sur la Figure 3.16 et la Figure 3.17.

Pour surmonter ce problème, la méthode de synthèse proposée qui prend en compte le retard et les pertes de paquets dans le réseau a été appliquée. Ainsi, en utilisant la commande PDC avec les gains (3.58), les Figures 3.16 et 3.17 montrent l'évolution de l'angle de dérive et de la vitesse du lacet. La Figure 3.18 montre l'évolution du signal de commande $M_z$.

Pour la simulation, la condition initiale est supposée être $x_0 = [0.1,0.1]^T$, la période d'échantillonnage est choisie par $T_e = 5ms$. Nous remarquons que le contrôleur en réseau développé permet de maintenir la stabilité du véhicule malgré la présence du retard et des pertes de paquets dans le réseau.

**Exemple 3.3** Commande en réseau de la dynamique longitudinale du véhicule

Parmi les systèmes de contrôle de la dynamique longitudinale du véhicule automobile, nous trouvons l'ABS (Anti-lock Braking System). Il s'agit d'un système qui a montré son efficacité au niveau du maintien de la stabilité du véhicule pendant les manoeuvres du freinage. Il a été développé initialement pour empêcher le blocage des roues. Son principe de fonctionnement se base sur la surveillance du taux du glissement longitudinale de chaque roue afin d'éviter son blocage.
On considère le modèle non linéaire (2.37) de la dynamique longitudinale du véhicule décrit par les équations (2.62). Notre objectif est de réguler le taux de glissement $\lambda(t)$.
En supposant des retards variables sur la mesure et également sur la commande avec $\eta_1 = 6ms$, $\eta_2 = 10ms$ et une perte de paquet, et les paramètres $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 0.1$, et $\mu_3 = 0.2$ et en résolvant les LMIs du Théorème 3.3.1, on obtient les gains suivants du contrôleur :

$$\begin{aligned} K_1 &= 10^4\begin{bmatrix}-2.4285 & -1.1305\end{bmatrix}, \quad K_2 = 10^4\begin{bmatrix}-2.5982 & -3.5476\end{bmatrix}, \\ K_3 &= 10^5\begin{bmatrix}-1.7869 & -0.1061\end{bmatrix}, \quad K_4 = 10^5\begin{bmatrix}-1.8042 & -0.3479\end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3.59}$$

Pour la simulation, la condition initiale est supposée être $x_0 = [-0.2,0]^T$, la période d'échantillonnage est choisie par $T_e = 5ms$. L'objectif de la loi de commande consiste à garder le taux de glissement longitudinal $\lambda(t)$ autour d'un glissement désiré $\lambda_d = 0.2$ durant toute la période de freinage. Pour mettre en évidence l'intérêt de prendre en compte les effets des pertes de paquets et de retard dans la synthèse de la commande, nous avons dans un premier temps appliqué la loi de commande obtenue sans prendre en compte le réseau de communication à un système qui utilise un réseau de communication, nous avons remarqué l'effet d'instabilité induit par le réseau.

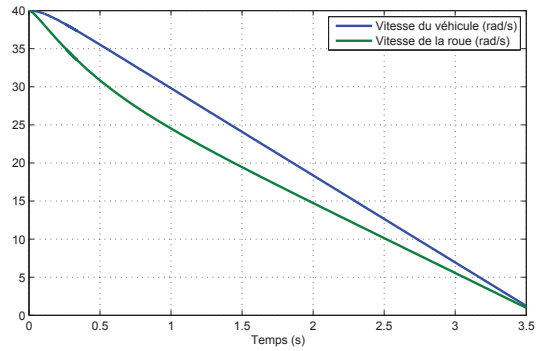


Figure 3.19: Evolution de la vitesse de la roue et la vitesse du véhicule.

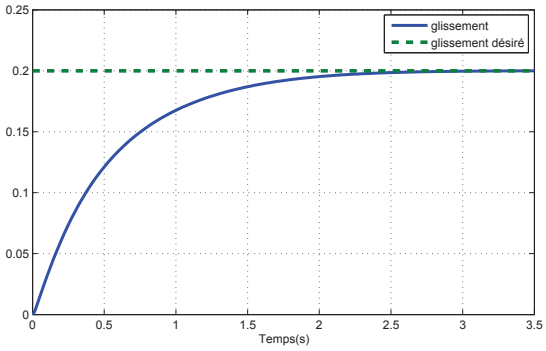


Figure 3.20: Glissement et glissement désiré : avec la loi de commande floue.

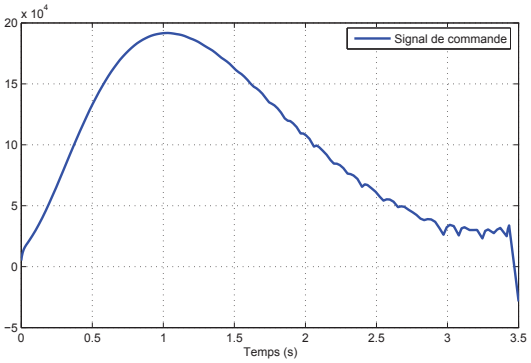


Figure 3.21: Evolution du signal de commande.

En boucle fermée, la Figure 3.19 montre l'évolution dans le temps des vitesses angulaires de la roue et celle du véhicule. Nous remarquons que les deux vitesses s'annulent au même temps, ainsi le blocage de la roue est évité. Une comparaison entre le taux du glissement longitudinal du véhicule et le glissement désiré est montrée par la Figure 3.20. La dérivée du couple de freinage $\dot{M}_b$ appliqué sur la roue lors du freinage est montrée également dans la Figure 3.21.

### 3.3.3 Système flou incertain soumis à des perturbations extérieures

Dans la suite, nous nous intéressons à l'extension des résultats précédents au cas des systèmes incertains avec des perturbations. Nous proposons une technique de synthèse d'un contrôleur robuste vis-à-vis des incertitudes paramétriques et des perturbations extérieures.

En prenant en compte les incertitudes paramétriques et les perturbations extérieures, le SCR en boucle fermée devient :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t)+H(t)x(t-\eta(t))+B_f(t)W(t), \\ x(t) = \phi(t),\ t \in [t_0-\eta_2,t_0] \\ z(t) = C_1x(t) \\ t_k \leq t \leq t_{k+1} \end{cases} \tag{3.60}$$

avec

$$\begin{aligned} A(t) &= \sum_{i=1}^{r} h_i(A_i+\Delta A_i), \quad B_f(t) = \sum_{i=1}^{r} h_i(B_{fi}+\Delta B_{fi}), \\ H(t) &= \sum_{i=1}^{r} h_i \sum_{j=1}^{r} h_j^k H_{ij}, \qquad H_{ij} = (B_i+\Delta B_i)K_j. \end{aligned} \tag{3.61}$$

En utilisant la même fonctionnelle (3.14) et le Lemme A.5, les conditions de synthèse sont résumées dans le Théorème suivant :

**Théorème 3.3.5** [Latrach *et al.*, 2014] Soient les scalaires $\eta_1 > 0$, $\eta_2 > 0$, $\epsilon_i > 0$, $\mu_1$, $\mu_2$, $\mu_3$ et $\varphi_i$, le système en boucle fermée (3.60) est asymptotiquement stable et l'indice de performance $H_\infty$ est garantie pour un niveau d'atténuation $\gamma > 0$, s'ils existent des matrices positives $\bar{P}$, $\bar{Q}_1$, $\bar{Q}_2$, $\bar{Q}_3$, $\bar{Z}_1$, $\bar{Z}_2$ et une matrice $\bar{G}$ inversible et $Y_i$ avec des dimensions appropriées, telles que les conditions suivantes soient vérifiées :

$$\begin{bmatrix} \hat{\Phi}_{ii}+\hat{\Phi}_1(\bar{Z}_2) & \epsilon_i\bar{\mathcal{D}}_i & \bar{\mathcal{E}}_{ii} \\ * & -\epsilon_i I & 0 \\ * & * & -\epsilon_i I \end{bmatrix} < 0 \tag{3.62}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\Phi}_{ii}+\hat{\Phi}_2(\bar{Z}_2) & \epsilon_i\bar{\mathcal{D}}_i & \bar{\mathcal{E}}_{ii} \\ * & -\epsilon_i I & 0 \\ * & * & -\epsilon_i I \end{bmatrix} < 0 \tag{3.63}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\Phi}_{ij}+\hat{\Phi}_{ji}+2\hat{\Phi}_1(\bar{Z}_2) & \epsilon_i\bar{\mathcal{D}}_i & \bar{\mathcal{E}}_{ij} \\ * & -\epsilon_i I & 0 \\ * & * & -\epsilon_i I \end{bmatrix} < 0 \tag{3.64}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\Phi}_{ij}+\hat{\Phi}_{ji}+2\hat{\Phi}_2(\bar{Z}_2) & \epsilon_i\bar{\mathcal{D}}_i & \bar{\mathcal{E}}_{ij} \\ * & -\epsilon_i I & 0 \\ * & * & -\epsilon_i I \end{bmatrix} < 0 \tag{3.65}$$

avec

$$\bar{\mathcal{D}}_i = \begin{bmatrix} -\mu_1 D_{Ai}^T & -\mu_2 D_{Ai}^T & 0 & 0 & -\mu_3 D_{Ai}^T & 0 & 0 \\ -\mu_1 D_{Bi}^T & -\mu_2 D_{Bi}^T & 0 & 0 & -\mu_3 D_{Bi}^T & 0 & 0 \\ -\mu_1 D_{Bfi}^T & -\mu_2 D_{Bfi}^T & 0 & 0 & -\mu_3 D_{Bfi}^T & 0 & 0 \end{bmatrix}^T,$$

$$\bar{\mathcal{E}}_{ij} = \begin{bmatrix} E_{Ai}\bar{G} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_{Bi}Y_j & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_{Bfi} & 0 \end{bmatrix}.$$

où $K_i = Y_i \bar{G}^{-1}$

**Preuve 5** Par conséquent, les conditions du Théorème 3.3.5 impliquent que $\bar{\Phi}_{55} < 0$ d'où $\bar{G}$ est inversible. En posant $G = \bar{G}^{-1}$, $\bar{P} = \bar{G}^T P \bar{G}$, $\bar{Q}_1 = \bar{G}^T Q_1 \bar{G}$, $\bar{Q}_2 = \bar{G}^T Q_2 \bar{G}$, $\bar{Q}_3 = \bar{G}^T Q_3 \bar{G}$, $\bar{Z}_1 = \bar{G}^T Z_1 \bar{G}$, $\bar{Z}_2 = \bar{G}^T Z_2 \bar{G}$, $\bar{\mathcal{D}}_i = \bar{G}^T \mathcal{D}_i$, $\bar{\mathcal{E}}_{ij} = \bar{G}^T \mathcal{E}_{ij}$, $G_1 = \mu_1 G$, $G_2 = \mu_2 G$, $G_3 = \mu_3 G$ et en appliquant le lemme de congruence à (3.62)-(3.65) par $diag\{G,G,G,G,G,I,I,I,I,I,I,I\}$ et le lemme de Schur, nous obtenons, à partir du Lemme A.3, les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} &\Upsilon_{ii} + \hat{\Phi}_1(Z_2) < 0 \\ &\Upsilon_{ii} + \hat{\Phi}_2(Z_2) < 0 \\ &\Upsilon_{ij} + \Upsilon_{ji} + 2\hat{\Phi}_1(Z_2) < 0,\ j > i \\ &\Upsilon_{ij} + \Upsilon_{ji} + 2\hat{\Phi}_2(Z_2) < 0 \end{aligned} \tag{3.66}$$

où $\Upsilon_{ij} = \tilde{\Phi}_{ij} + \Delta\Phi_{ij} \leq 0$ avec la partie incertitude est représentée par :

$$\Delta\Phi_{ij} = sym\Big(\mathcal{D}_i \mathcal{F}(t) \mathcal{E}_{ij}\Big) \tag{3.67}$$

où

$$\mathcal{F}(t) = diag(F(t),F(t),F(t)).$$

■

## 3.4 Stabilisation par retour de sortie statique

Dans ce paragraphe, nous allons nous intéresser à la synthèse d'une commande floue en réseau par retour de sortie statique. Ceci est justifié par le fait que les états internes de nombreux systèmes réels ne peuvent pas être mesurés directement et que juste leurs sorties sont disponibles à des fins de contrôle. De plus, dans ce travail, nous prenons en compte dans la synthèse de la commande non seulement les incertitudes des modèles, mais aussi le problème de la fragilité de contrôleur. En effet, l'objectif de la synthèse de

la commande non-fragile pour un système donné est de trouver un contrôleur qui assure la stabilité lorsque les paramètres du contrôleur et du système sont supposés variables (voir les références [Zhang *et al.*, 2007, Mahmoud et Ismail, 2008, Kchaou *et al.*, 2010, Guo et Bo, 2010, Kchaou et Toumi, 2011, Yue *et al.*, 2011]). Dans [Lin *et al.*, 2010] et [Hongkai *et al.*, 2010], le problème de la commande $H_\infty$ non-fragile par retour d'état a été étudiée, pour une classe de systèmes linéaires, incertains et contrôlés en réseau. Peu de travaux existent dans la littérature sur la commande en réseau non-fragile pour les systèmes non linéaires. Récemment, la question du contrôle non-fragile a été considéré pour certains systèmes pratiques. Dans [Li *et al.*, 2013], le contrôle non-fragile $H_\infty$ des systèmes de suspension active de véhicule a été étudié.

Dans cette section, nous étendons le problème de la synthèse de la commande fragile par retour de sortie statique des systèmes flous TS incertains en prenant en compte des retards et des pertes de paquets de données dans la transmission en réseau, au cas non-fragile en considérant les variations des gains du contrôleur. Le contrôleur flou par retour de sortie en réseau peut être décrit comme suit :

$$u(t_k) = \sum_{i=1}^{r} h_i^k (K_i + \Delta K_i(t_k)) y(t_k - \tau_k)$$

avec $K_i$ sont les gains du contrôleur et $\Delta K_i(t_k)$ sont les perturbations multiplicatives de gain représentées par

$$\Delta K_i(t_k) = H_{ci} \Delta(t_k) E_{ci} K_i \tag{3.68}$$

avec $H_{ci}$ et $E_{ci}$ sont des matrices constantes réelles connues de dimensions appropriées et $\Delta(t_k)$ est une matrice variable dans le temps supposée inconnue qui satisfait $\Delta^T(t_k)\Delta(t_k) \leq I$.

En utilisant un BOZ, le signal de commande du SCR pour $t_k \leq t \leq t_{k+1}$, est donné par :

$$u(t) = \sum_{i=1}^{r} h_i^k (K_i + \Delta K_i(t)) y(t_k - \tau_k) \tag{3.69}$$

Après plusieurs manipulations et en utilisant les équations (2.39), (3.7) et (3.69), le système commandé en réseau est décrit pour $t_k \leq t \leq t_{k+1}$ par

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \mathbb{A}(t)x(t) + \mathbb{A}_\eta(t)x(t-\eta(t)), \\ y(t) = Cx(t), \\ x(t) = \phi(t),\ t \in [-\eta_2, 0] \end{cases} \tag{3.70}$$

avec $y(t) \in R^q$ est le signal de sortie mesuré et nous supposons que la matrice $C$ est de rang plein.

Dans le cas où le système est incertain et en considérant la non-fragilité, nous considèrons les matrices suivantes dans (3.70) :

$$\mathbb{A}(t) = \sum_{i=1}^{r} h_i (A_i + \Delta A_i(t)), \quad \mathbb{A}_\eta(t) \ = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} h_i h_j^k (B_i + \Delta B_i(t))(K_j + \Delta K_j(t)) C \tag{3.71}$$

### 3.4.1 Analyse de stabilité en boucle fermée

L'objectif est de proposer des conditions de synthèse moins conservatives qui permettent de garantir la stabilité asymptotique du SCR (3.70) :

**Lemme 3.1** Soient les scalaires $\eta_1 > 0$, $\eta_2 > 0$, $\mu_s \neq 0$, $s = 1{,}2$, et $\varphi_i$, le système en boucle fermée (3.70) est asymptotiquement stable s'ils existent des matrices positives $\bar{Q}_i = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11}^i & \bar{Q}_{12}^i \\ * & \bar{Q}_{22}^i \end{bmatrix}$, $i = 1{,}2$, $\bar{Z}_i = \begin{bmatrix} \bar{Z}_{11}^i & \bar{Z}_{12}^i \\ * & \bar{Z}_{22}^i \end{bmatrix}$, $\bar{W}_1$, $\bar{W}_2$, $\bar{Q}_3$ et $\bar{P}$, et une matrice $\bar{G}$, avec des dimensions appropriées, vérifiant les conditions suivantes :

$$\bar{\Lambda}(t) = \begin{bmatrix} \bar{\Lambda}_{11}(t) & \bar{\Lambda}_{12}(t) & \bar{Q}_{12}^1+\bar{Z}_{22}^1 & \bar{Q}_{12}^2+\bar{Z}_{22}^2 & 0 & 0 & \frac{\eta_1}{2}\bar{W}_1-\bar{Z}_{12}^1 & -\bar{Z}_{12}^2 & \bar{\Lambda}_{19} \\ * & \bar{\Lambda}_{22}(t) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{\Lambda}_{29}(t) \\ * & * & \bar{\Lambda}_{33} & 0 & -\bar{Q}_{12}^1 & 0 & -\bar{Z}_{12}^1 & 0 & 0 \\ * & * & * & \bar{\Lambda}_{44} & 0 & \bar{Q}_{12}^2 & 0 & \bar{Z}_{12}^2 & 0 \\ * & * & * & * & -\bar{Q}_{22}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -\bar{Q}_{22}^2 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & \bar{\Lambda}_{77} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & \bar{\Lambda}_{88} & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & \bar{\Lambda}_{99} \end{bmatrix} < 0 \tag{3.72}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\Lambda}_{11}(t) &= Sym(\mathbb{A}(t)\bar{G})+\bar{Q}_{11}^1+\bar{Q}_{11}^2+\bar{Q}_3+(\frac{\eta_1}{2})^2\bar{Z}_{11}^1-(\frac{\eta_1}{2})^2\bar{W}_1+(\frac{\eta_2}{2})^2\bar{Z}_{11}^2-\bar{Z}_{22}^1-\bar{Z}_{22}^2-(\frac{\eta_2}{2})^2\bar{W}_2, \\
\bar{\Lambda}_{12}(t) &= \mathbb{A}_\eta(t)\bar{G}+\mu_1\bar{G}^T\mathbb{A}^T(t), \\
\bar{\Lambda}_{22}(t) &= -(1-\eta_d)\bar{Q}_3+\mu_1 Sym(\mathbb{A}_\eta(t)\bar{G}), \\
\bar{\Lambda}_{33} &= -\bar{Q}_{11}^1+\bar{Q}_{22}^1-\bar{Z}_{22}^1, \\
\bar{\Lambda}_{44} &= \bar{Q}_{22}^2-\bar{Z}_{22}^2-\bar{Q}_{11}^2, \\
\bar{\Lambda}_{77} &= -\bar{Z}_{11}^1-\bar{W}_1, \\
\bar{\Lambda}_{88} &= -\bar{Z}_{11}^2-\bar{W}_2, \\
\bar{\Lambda}_{19}(t) &= \bar{P}+(\frac{\eta_1}{2})^2\bar{Z}_{12}^1-\bar{G}+\mu_1\bar{G}^T\mathbb{A}^T(t), \\
\bar{\Lambda}_{29}(t) &= -\mu_1\bar{G}+\mu_2\bar{G}^T\mathbb{A}_\eta^T(t), \\
\bar{\Lambda}_{99} &= (\frac{\eta_1}{2})^2\bar{Z}_{22}^1+\frac{(\frac{\eta_1}{2})^4}{4}\bar{W}_1+(\frac{\eta_2}{2})^2\bar{Z}_{22}^2+\frac{(\frac{\eta_2}{2})^4}{4}\bar{W}_2-\mu_2 Sym(\bar{G})
\end{aligned}$$

**Preuve 6** Soit la FLK avec triple intégrale donnée comme suit :

$$V(x(t)) = V_1(x(t))+V_2(x(t)) \tag{3.73}$$

avec

$$V_1(x(t)) = x^T(t)Px(t)+\int_{t-\frac{\eta_1}{2}}^{t} \xi_1^T(s)Q_1\xi_1(s)\mathrm{d}s+\int_{t-\frac{\eta_2}{2}}^{t} \xi_2^T(s)Q_2\xi_2(s)\mathrm{d}s+\int_{t-\eta(t)}^{t} x^T(s)Q_3x(s)\mathrm{d}s$$

$$V_2(x(t)) = \frac{\eta_1}{2}\int_{-\frac{\eta_1}{2}}^{0} \Big(\int_{t+s}^{t} \xi^T(\upsilon)Z_1\xi(\upsilon)\mathrm{d}\upsilon\Big)\mathrm{d}s+\frac{(\frac{\eta_1}{2})^2}{2}\int_{-\frac{\eta_1}{2}}^{0} \Big(\int_{s}^{0}\int_{t+\alpha}^{t} \dot{x}^T(\upsilon)W_1\dot{x}(\upsilon)\mathrm{d}\upsilon\Big)\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}s$$
$$+\frac{\eta_2}{2}\int_{-\frac{\eta_2}{2}}^{0} \Big(\int_{t+s}^{t} \xi^T(\upsilon)Z_2\xi(\upsilon)\mathrm{d}\upsilon\Big)\mathrm{d}s+\frac{(\frac{\eta_2}{2})^2}{2}\int_{-\frac{\eta_2}{2}}^{0} \Big(\int_{s}^{0}\int_{t+\alpha}^{t} \dot{x}^T(\upsilon)W_2\dot{x}(\upsilon)\mathrm{d}\upsilon\Big)\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}s \tag{3.74}$$

avec

$$\xi_1 = \begin{bmatrix} x^T(s) & x^T(s-\frac{\eta_1}{2})\end{bmatrix}^T,\quad \xi_2 = \begin{bmatrix} x^T(s) & x^T(s-\frac{\eta_2}{2})\end{bmatrix}^T,\quad \xi(t) = \begin{bmatrix} x^T(t) & \dot{x}^T(t)\end{bmatrix}^T,$$
$$Q_1 = \begin{bmatrix} Q_{11}^1 & Q_{12}^1 \\ * & Q_{22}^1\end{bmatrix},\qquad Q_2 = \begin{bmatrix} Q_{11}^2 & Q_{12}^2 \\ * & Q_{22}^2\end{bmatrix},\qquad Z_1 = \begin{bmatrix} Z_{11}^1 & Z_{12}^1 \\ * & Z_{22}^1\end{bmatrix},$$
$$Z_2 = \begin{bmatrix} Z_{11}^2 & Z_{12}^2 \\ * & Z_{22}^2\end{bmatrix}.$$

où $P$, $Q_1$, $Q_2$, $Q_3$, $Z_1$, $Z_2$, $W_1$ et $W_2$ sont des matrices définies positives.
Dérivons la nouvelle classe de FLK avec triple intégrale (3.73) se basant sur la technique de la bi-partition du retard dans laquelle la division du retard variable compris entre $\eta_1$ et $\eta_2$ est faite en deux parties égales comme suit :

$$\dot{V}(x(t)) = 2\dot{x}^T(t)Px(t)+\xi_1^T(t)Q_1\xi_1(t)-\xi_1^T(t-\frac{\eta_1}{2})Q_1\xi_1(t-\frac{\eta_1}{2})+\xi_2^T(t)Q_2\xi_2(t)-$$
$$\xi_2^T(t-\frac{\eta_2}{2})Q_2\xi_2(t-\frac{\eta_2}{2})-(1-\eta_d)x^T(t-\eta(t))Q_3x(t-\eta(t))+(\frac{\eta_1}{2})^2\xi^T(t)Z_1\xi(t)$$
$$-\frac{\eta_1}{2}\int_{t-\frac{\eta_1}{2}}^{t} \xi^T(\upsilon)Z_1\xi(\upsilon)\mathrm{d}\upsilon+\frac{(\frac{\eta_1}{2})^4}{4}\dot{x}^T(t)W_1\dot{x}(t)-\frac{(\frac{\eta_1}{2})^2}{2}\int_{-\frac{\eta_1}{2}}^{0} \Big(\int_{t+s}^{t} \dot{x}^T(\upsilon)W_1\dot{x}(\upsilon)\mathrm{d}\upsilon\Big)\mathrm{d}s$$
$$+(\frac{\eta_2}{2})^2\xi^T(t)Z_2\xi(t)-\frac{\eta_2}{2}\int_{t-\frac{\eta_2}{2}}^{t} \xi^T(\upsilon)Z_2\xi(\upsilon)\mathrm{d}\upsilon+\frac{(\frac{\eta_2}{2})^4}{4}\dot{x}^T(t)W_2\dot{x}(t)$$
$$-\frac{(\frac{\eta_2}{2})^2}{2}\int_{-\frac{\eta_2}{2}}^{0} \Big(\int_{t+s}^{t} \dot{x}^T(\upsilon)W_2\dot{x}(\upsilon)\mathrm{d}\upsilon\Big)\mathrm{d}s \tag{3.75}$$

En appliquant le Lemme A.6, nous obtenons

$$-\frac{\eta_1}{2}\int_{t-\frac{\eta_1}{2}}^{t} \xi^T(\upsilon)Z_1\xi(\upsilon)\mathrm{d}\upsilon \le -(\int_{t-\frac{\eta_1}{2}}^{t} \xi^T(\upsilon)\mathrm{d}\upsilon)Z_1(\int_{t-\frac{\eta_1}{2}}^{t} \xi(\upsilon)\mathrm{d}\upsilon)$$
$$= -\begin{bmatrix} \int_{t-\frac{\eta_1}{2}}^{t} x(\upsilon)\mathrm{d}\upsilon \\ x(t)-x(t-\frac{\eta_1}{2})\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix} Z_{11}^1 & Z_{12}^1 \\ * & Z_{22}^1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} \int_{t-\frac{\eta_1}{1}}^{t} x(\upsilon)\mathrm{d}\upsilon \\ x(t)-x(t-\frac{\eta_1}{2})\end{bmatrix} \tag{3.76}$$
$$= -\begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-\frac{\eta_1}{2}) \\ \int_{t-\frac{\eta_1}{2}}^{t} x(\upsilon)\mathrm{d}\upsilon\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix} Z_{22}^1 & -Z_{22}^1 & Z_{12}^{1T} \\ * & Z_{22}^1 & -Z_{12}^{1T} \\ * & * & Z_{11}^1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-\frac{\eta_1}{2}) \\ \int_{t-\frac{\eta_1}{2}}^{t} x(\upsilon)\mathrm{d}\upsilon\end{bmatrix}$$

$$-\frac{(\frac{\eta_1}{2})^2}{2}\int_{-\frac{\eta_1}{2}}^{0}\Big(\int_{t+s}^{t}\dot{x}^T(\upsilon)W_1\dot{x}(\upsilon)\mathrm{d}\upsilon\Big)\mathrm{d}s \le -\Big(\int_{-\frac{\eta_1}{2}}^{0}\int_{t+s}^{t}\dot{x}^T(\upsilon)\mathrm{d}\upsilon\mathrm{d}s\Big)W_1\Big(\int_{-\frac{\eta_1}{2}}^{0}\int_{t+s}^{t}\dot{x}(\upsilon)\mathrm{d}\upsilon\mathrm{d}s\Big)$$
$$= -\Big(\frac{\eta_1}{2}x(t)-\int_{t-\frac{\eta_1}{2}}^{t}x(\upsilon)\mathrm{d}\upsilon\Big)^T W_1\Big(\frac{\eta_1}{2}x(t)-\int_{t-\frac{\eta_1}{2}}^{t}x(\upsilon)\mathrm{d}\upsilon\Big) \tag{3.77}$$

$$-\frac{\eta_2}{2}\int_{t-\frac{\eta_2}{2}}^{t}\xi^T(\upsilon)Z_2\xi(\upsilon)\mathrm{d}\upsilon \le -\begin{bmatrix} x(t)\\ x(t-\frac{\eta_2}{2})\\ \int_{t-\frac{\eta_2}{2}}^{t}x(\upsilon)\mathrm{d}\upsilon\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix} Z_{22}^2 & -Z_{22}^2 & Z_{12}^{2T}\\ * & Z_{22}^2 & -Z_{12}^{2T}\\ * & * & Z_{11}^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x(t)\\ x(t-\frac{\eta_2}{2})\\ \int_{t-\frac{\eta_2}{2}}^{t}x(\upsilon)\mathrm{d}\upsilon\end{bmatrix} \tag{3.78}$$

$$-\frac{(\frac{\eta_2}{2})^2}{2}\int_{-\frac{\eta_2}{2}}^{0}\Big(\int_{t+s}^{t}\dot{x}^T(\upsilon)W_2\dot{x}(\upsilon)\mathrm{d}\upsilon\Big)\mathrm{d}s \le -\Big(\frac{\eta_2}{2}x(t)-\int_{t-\frac{\eta_2}{2}}^{t}x(\upsilon)\mathrm{d}\upsilon\Big)^T W_2\Big(\frac{\eta_2}{2}x(t)-\int_{t-\frac{\eta_2}{2}}^{t}x(\upsilon)\mathrm{d}\upsilon\Big) \tag{3.79}$$

A partir de (3.70), nous avons :

$$2\big[x^T(t)G^T+\mu_1 x^T(t-\eta(t))G^T+\mu_2\dot{x}^T(t)G^T\big]\times\big[-\dot{x}(t)+\mathbb{A}(t)x(t)+\mathbb{A}_\eta(t)x(t-\eta(t))\big]=0 \tag{3.80}$$

A partir de (3.76), (3.77) et (3.80), nous obtenons

$$\dot{V}(x(t)) \le \Psi^T(t)\Lambda(t)\Psi(t)$$

avec

$$\Psi^T(t)=\Big[x^T(t)\quad x^T(t-\eta(t))\quad x^T(t-\tfrac{\eta_1}{2})\quad x^T(t-\tfrac{\eta_2}{2})\quad x^T(t-\eta_1)\quad x^T(t-\eta_2)\quad \int_{t-\frac{\eta_1}{2}}^{t}x^T(s)\mathrm{d}s\quad \int_{t-\frac{\eta_2}{2}}^{t}x^T(s)\mathrm{d}s\quad \dot{x}^T(t)\Big] \tag{3.81}$$

A partir des conditions du Théorème 3.1, on peut déduire que $\bar{\Lambda}_{99}<0$ , par conséquent, $\bar{G}$ est inversible.
Soient $G=\bar{G}^{-1}$, $\bar{P}=\bar{G}^TP\bar{G}$, $\bar{Q}_1=\bar{G}^TQ_1\bar{G}$, $\bar{Q}_2=\bar{G}^TQ_2\bar{G}$, $\bar{Q}_3=\bar{G}^TQ_3\bar{G}$, $\bar{Z}_1=\bar{G}^TZ_1\bar{G}$, $\bar{Z}_2=\bar{G}^TZ_2\bar{G}$, $\bar{W}_1=\bar{G}^TW_1\bar{G}$, et $\bar{W}_2=\bar{G}^TW_2\bar{G}$.
En appliquant la congruence à (3.72) par $diag\{G,G,G,G,G,G,G,G,G\}$, nous obtenons

$$\Lambda(t)=\begin{bmatrix}
\Lambda_{11}(t) & \Lambda_{12}(t) & Q_{12}^1+Z_{22}^1 & Q_{12}^2+Z_{22}^2 & 0 & 0 & \frac{\eta_1}{2}W_1-Z_{12}^1 & -Z_{12}^2 & \Lambda_{19}(t)\\
* & \Lambda_{22}(t) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Lambda_{29}(t)\\
* & * & \Lambda_{33} & 0 & -Q_{12}^1 & 0 & -Z_{12}^1 & 0 & 0\\
* & * & * & \Lambda_{44} & 0 & Q_{12}^2 & 0 & Z_{12}^2 & 0\\
* & * & * & * & -Q_{22}^1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
* & * & * & * & * & -Q_{22}^2 & 0 & 0 & 0\\
* & * & * & * & * & * & \Lambda_{77} & 0 & 0\\
* & * & * & * & * & * & * & \Lambda_{88} & 0\\
* & * & * & * & * & * & * & * & \Lambda_{99}
\end{bmatrix}<0 \tag{3.82}$$

$$\Lambda_{11}(t) = Sym(G^T\mathbb{A}(t))+Q_{11}^1+Q_{11}^2+\bar{Q}_3+(\frac{\eta_1}{2})^2Z_{11}^1-(\frac{\eta_1}{2})^2W_1+(\frac{\eta_2}{2})^2\bar{Z}_{11}^2-Z_{22}^1-Z_{22}^2-(\frac{\eta_2}{2})^2W_2,$$
$$\Lambda_{12}(t) = G^T\mathbb{A}_\eta(t)+\mu_1\mathbb{A}^T(t)G,$$
$$\Lambda_{22}(t) = -(1-\eta_d)Q_3+\mu_1 Sym(G^T\mathbb{A}_\eta(t)),$$
$$\Lambda_{33} = -Q_{11}^1+Q_{22}^1-Z_{22}^1,$$
$$\Lambda_{44} = Q_{22}^2-Z_{22}^2-Q_{11}^2,$$
$$\Lambda_{77} = -Z_{11}^1-W_1,$$
$$\Lambda_{88} = -Z_{11}^2-W_2,$$
$$\Lambda_{19}(t) = P+(\frac{\eta_1}{2})^2Z_{12}^1-G+\mu_1G^T\mathbb{A}^T(t),$$
$$\Lambda_{29}(t) = -\mu_1G^T+\mu_2\mathbb{A}_\eta^T(t)G,$$
$$\Lambda_{99} = (\frac{\eta_1}{2})^2Z_{22}^1+\frac{(\frac{\eta_1}{2})^4}{4}W_1+(\frac{\eta_2}{2})^2Z_{22}^2+\frac{(\frac{\eta_2}{2})^4}{4}W_2-\mu_2Sym(G^T)$$

Par conséquent $\dot{V}(x(t)) < 0$. Donc, le système en boucle fermée (3.70) est asymptotiquement stable. ■

## 3.4.2 Synthèse d'un contrôleur flou par retour de sortie statique

### 3.4.2.1 Commande fragile des SCRs incertains

Le Théorème suivant résume les conditions de synthèse du contrôleur fragile par retour de sortie statique qui opère à travers un réseau de communication.
En utilisant un BOZ, le signal de commande fragile du SCR est décrit par

$$u(t) = \sum_{i=1}^{r} h_i^k K_i y(t_k-\tau_k) \tag{3.83}$$

**Théorème 3.4.1** Soient $\eta_1$, $\eta_2$, et $\varphi_i$, $\epsilon_1$, et $\epsilon_2$ des scalaires positifs donnés, $\mu_s \neq 0$, $s = 1,2$, des paramètres de réglage scalaires. Il existe un contrôleur flou par retour de sortie statique avec $\Delta K_i(t) = 0$ de la forme (3.83) tel que le SCR en boucle fermée (3.70) est asymptotiquement stable, s'ils existent des matrices positives $\bar{Q}_i = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11}^i & \bar{Q}_{12}^i \\ * & \bar{Q}_{22}^i \end{bmatrix}$, $i = 1,2$, $\bar{Z}_i = \begin{bmatrix} \bar{Z}_{11}^i & \bar{Z}_{12}^i \\ * & \bar{Z}_{22}^i \end{bmatrix}$, $\bar{W}_1$, $\bar{W}_2$, $\bar{P}$ et des matrices $\widehat{\mathbf{G}}_{11} \in \mathbb{R}^{q\times q}$, $\widehat{\mathbf{G}}_{22} \in \mathbb{R}^{(n-q)\times(n-q)}$, $\widehat{\mathbf{G}}_{21} \in \mathbb{R}^{(n-q)\times n}$, et $Y_i$, de dimensions appropriées, telles que les LMIs suivantes sont vérifiées pour $1 \leq i < j \leq r$ :

$$\tilde{\Lambda}_{ii} < 0 \tag{3.84}$$
$$\tilde{\Lambda}_{ij}+\tilde{\Lambda}_{ji} < 0 \tag{3.85}$$

où

$$\tilde{\Lambda}_{ij} = \sum_{k=1}^{r} \varphi_k \hat{\Lambda}_{ik} + \hat{\Lambda}_{ij} \tag{3.86}$$

$$\hat{\Lambda}_{ij} = \begin{bmatrix}
\tilde{\Lambda}_{11} & \tilde{\Lambda}_{12} & \bar{Q}_{12}^1+\bar{Z}_{22}^1 & \bar{Q}_{12}^2+\bar{Z}_{22}^2 & 0 & 0 & \frac{\eta_1}{2}\bar{W}_1-\bar{Z}_{12}^1 & -\bar{Z}_{12}^2 & \tilde{\Lambda}_{19} & \bar{G}E_{Ai}^T & 0 \\
* & \tilde{\Lambda}_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{\Lambda}_{29} & 0 & \tilde{\Lambda}_{211} \\
* & * & \bar{\Lambda}_{33} & 0 & -\bar{Q}_{12}^1 & 0 & -\bar{Z}_{12}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
* & * & * & \bar{\Lambda}_{44} & 0 & \bar{Q}_{12}^2 & 0 & \bar{Z}_{12}^2 & 0 & 0 & 0 \\
* & * & * & * & -\bar{Q}_{22}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
* & * & * & * & * & -\bar{Q}_{22}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
* & * & * & * & * & * & \bar{\Lambda}_{77} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
* & * & * & * & * & * & * & \bar{\Lambda}_{88} & 0 & 0 & 0 \\
* & * & * & * & * & * & * & * & \tilde{\Lambda}_{99} & 0 & 0 \\
* & * & * & * & * & * & * & * & * & -\epsilon_1 I & 0 \\
* & * & * & * & * & * & * & * & * & * & -\epsilon_2 I
\end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\Lambda}_{11} &= Sym(A_i\bar{G})+\bar{Q}_{11}^1+\bar{Q}_{11}^2+\bar{Q}_3+(\frac{\eta_1}{2})^2\bar{Z}_{11}^1-(\frac{\eta_1}{2})^2\bar{W}_1+(\frac{\eta_2}{2})^2\bar{Z}_{11}^2-\bar{Z}_{22}^1-\bar{Z}_{22}^2-(\frac{\eta_2}{2})^2\bar{W}_2 \\
&\quad +\epsilon_1 D_{Ai}D_{Ai}^T+\epsilon_2 D_{Bi}D_{Bi}^T, \\
\tilde{\Lambda}_{12} &= B_iY_jC+\mu_1\bar{G}^TA_i^T+\epsilon_1\mu_1 D_{Ai}D_{Ai}^T+\epsilon_2\mu_1 D_{Bi}D_{Bi}^T, \\
\tilde{\Lambda}_{22} &= -(1-\eta_d)\bar{Q}_3+\mu_1 Sym(B_iY_jC)+\epsilon_1\mu_1^2 D_{Ai}D_{Ai}^T+\epsilon_2\mu_1^2 D_{Bi}D_{Bi}^T, \\
\tilde{\Lambda}_{19} &= \bar{P}+(\frac{\eta_1}{2})^2\bar{Z}_{12}^1-\bar{G}+\mu_1\bar{G}^TA_i^T+\epsilon_1\mu_2 D_{Ai}D_{Ai}^T+\epsilon_2\mu_2 D_{Bi}D_{Bi}^T, \\
\tilde{\Lambda}_{29} &= -\mu_1\bar{G}+\mu_2C^TY_j^TB_i^T+\epsilon_1\mu_1\mu_2 D_{Ai}D_{Ai}^T+\epsilon_2\mu_1\mu_2 D_{Bi}D_{Bi}^T, \\
\tilde{\Lambda}_{99} &= (\frac{\eta_1}{2})^2\bar{Z}_{22}^1+\frac{(\frac{\eta_1}{2})^4}{4}\bar{W}_1+(\frac{\eta_2}{2})^2\bar{Z}_{22}^2+\frac{(\frac{\eta_2}{2})^4}{4}\bar{W}_2-\mu_2 Sym(\bar{G})+\epsilon_1\mu_2^2 D_{Ai}D_{Ai}^T+\epsilon_2\mu_2^2 D_{Bi}D_{Bi}^T, \\
\tilde{\Lambda}_{211} &= C^TY_j^TE_{Bi}^T, \\
\bar{G} &= V\begin{bmatrix}\widehat{\mathbf{G}}_{11} & 0 \\ \widehat{\mathbf{G}}_{21} & \widehat{\mathbf{G}}_{22}\end{bmatrix}V^T.
\end{aligned}$$

De plus, si les inégalités (3.84) et (3.85) sont faisables, les gains du contrôleur $K_i$ dans (3.83) sont donnés par

$$K_i = Y_iUS\widehat{\mathbf{G}}_{11}^{-1}S^{-1}U^T \tag{3.87}$$

où $U$, $S$ et $V$ proviennent de la décomposition en valeurs singulières (SVD) de $C$.

**Preuve 7** En considérant (3.72) en vue de (3.71), on déduit :

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} h_ih_j^k\bar{\Lambda}_{ij}(t) < 0 \tag{3.88}$$

Ce qui implique que $\bar{\Lambda}_{ij}(t) < 0$ avec

$$\bar{\Lambda}_{ij}(t) = \begin{bmatrix} \bar{\Lambda}_{11i}(t) & \bar{\Lambda}_{12ij}(t) & \bar{Q}_{12}^1+\bar{Z}_{22}^1 & \bar{Q}_{12}^2+\bar{Z}_{22}^2 & 0 & 0 & \frac{\eta_1}{2}\bar{W}_1-\bar{Z}_{12}^1 & -\bar{Z}_{12}^2 & \bar{\Lambda}_{19i}(t) \\ * & \bar{\Lambda}_{22ij}(t) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{\Lambda}_{29ij}(t) \\ * & * & \bar{\Lambda}_{33} & 0 & -\bar{Q}_{12}^1 & 0 & -\bar{Z}_{12}^1 & 0 & 0 \\ * & * & * & \bar{\Lambda}_{44} & 0 & \bar{Q}_{12}^2 & 0 & \bar{Z}_{12}^2 & 0 \\ * & * & * & * & -\bar{Q}_{22}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -\bar{Q}_{22}^2 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & \bar{\Lambda}_{77} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & \bar{\Lambda}_{88} & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & \bar{\Lambda}_{99} \end{bmatrix} \tag{3.89}$$

et

$$\begin{aligned} \bar{\Lambda}_{11i}(t) &= Sym(A_i(t)\bar{G})+\bar{Q}_{11}^1+\bar{Q}_{11}^2+\bar{Q}_3+(\frac{\eta_1}{2})^2\bar{Z}_{11}^1-(\frac{\eta_1}{2})^2\bar{W}_1+(\frac{\eta_2}{2})^2\bar{Z}_{11}^2-\bar{Z}_{22}^1-\bar{Z}_{22}^2-(\frac{\eta_2}{2})^2\bar{W}_2, \\ \bar{\Lambda}_{12ij}(t) &= B_i(t)K_jC\bar{G}+\mu_1\bar{G}A_i^T(t), \\ \bar{\Lambda}_{22ij}(t) &= -(1-\eta_d)\bar{Q}_3+\mu_1 Sym(B_i(t)K_jC\bar{G}), \\ \bar{\Lambda}_{19i}(t) &= \bar{P}+(\frac{\eta_1}{2})^2\bar{Z}_{12}^1-\bar{G}-\mu_2\bar{G}^TA_i^T(t), \\ \bar{\Lambda}_{29ij}(t) &= -\mu_1\bar{G}+\mu_2(B_i(t)K_jC\bar{G})^T, \\ \bar{\Lambda}_{99} &= (\frac{\eta_1}{2})^2\bar{Z}_{22}^1+\frac{(\frac{\eta_1}{2})^4}{4}\bar{W}_1+(\frac{\eta_2}{2})^2\bar{Z}_{22}^2+\frac{(\frac{\eta_2}{2})^4}{4}\bar{W}_2-\mu_2 Sym(\bar{G}) \end{aligned}$$

Si la matrice $C$ est de rang plein, alors ils existent des matrices $U$ et $V$ telles que $C = U\begin{bmatrix} S & 0 \end{bmatrix}V^T$, $\bar{G} = V\begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{G}}_{11} & 0 \\ \widehat{\mathbf{G}}_{21} & \widehat{\mathbf{G}}_{22} \end{bmatrix}V^T$, alors nous obtenons que

$$C\bar{G} = U\begin{bmatrix} S & 0 \end{bmatrix}V^TV\begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{G}}_{11} & 0 \\ \widehat{\mathbf{G}}_{21} & \widehat{\mathbf{G}}_{22} \end{bmatrix}V^T = U\begin{bmatrix} S\widehat{\mathbf{G}}_{11} & 0 \end{bmatrix}V^T = US\widehat{\mathbf{G}}_{11}S^{-1}U^TU\begin{bmatrix} S & 0 \end{bmatrix}V^T = \hat{G}C$$

Soit $Y_i = K_i\hat{G} = K_iUS\widehat{\mathbf{G}}_{11}S^{-1}U^T$, $\bar{\Lambda}_{ij}(t)$ peut être écrite comme suit

$$\bar{\Lambda}_{ij}(t) = \bar{\Lambda}_{ij}+sym\Big(\bar{\mathcal{D}}_i\bar{\mathcal{F}}(t)\bar{\mathcal{E}}_{ij}\Big) \tag{3.90}$$

où

$$\bar{\Lambda}_{ij} = \begin{bmatrix} \bar{\Lambda}_{11i} & \bar{\Lambda}_{12ij} & \bar{Q}_{12}^1+\bar{Z}_{22}^1 & \bar{Q}_{12}^2+\bar{Z}_{22}^2 & 0 & 0 & \frac{\eta_1}{2}\bar{W}_1-\bar{Z}_{12}^1 & -\bar{Z}_{12}^2 & \bar{\Lambda}_{19i} \\ * & \bar{\Lambda}_{22ij} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{\Lambda}_{29ij} \\ * & * & \bar{\Lambda}_{33} & 0 & -\bar{Q}_{12}^1 & 0 & -\bar{Z}_{12}^1 & 0 & 0 \\ * & * & * & \bar{\Lambda}_{44} & 0 & \bar{Q}_{12}^2 & 0 & \bar{Z}_{12}^2 & 0 \\ * & * & * & * & -\bar{Q}_{22}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -\bar{Q}_{22}^2 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & \bar{\Lambda}_{77} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & \bar{\Lambda}_{88} & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & \bar{\Lambda}_{99} \end{bmatrix} \tag{3.91}$$

et

$$
\begin{aligned}
\bar{\Lambda}_{11i} &= Sym(A_i\bar{G})+\bar{Q}_{11}^1+\bar{Q}_{11}^2+\bar{Q}_3+(\frac{\eta_1}{2})^2\bar{Z}_{11}^1-(\frac{\eta_1}{2})^2\bar{W}_1+(\frac{\eta_2}{2})^2\bar{Z}_{11}^2-\bar{Z}_{22}^1-\bar{Z}_{22}^2-(\frac{\eta_2}{2})^2\bar{W}_2,\\
\bar{\Lambda}_{12ij} &= B_iY_jC+\mu_1\bar{G}^TA_i^T,\\
\bar{\Lambda}_{22ij} &= -(1-\eta_d)\bar{Q}_3+\mu_1Sym(B_iY_jC),\\
\bar{\Lambda}_{19i} &= \bar{P}+(\frac{\eta_1}{2})^2\bar{Z}_{12}^1-\bar{G}-\mu_2\bar{G}^TA_i^T,\\
\bar{\Lambda}_{29ij} &= -\mu_1\bar{G}+\mu_2(B_iY_jC)^T,\\
\bar{\Lambda}_{99} &= (\frac{\eta_1}{2})^2\bar{Z}_{22}^1+\frac{(\frac{\eta_1}{2})^4}{4}\bar{W}_1+(\frac{\eta_2}{2})^2\bar{Z}_{22}^2+\frac{(\frac{\eta_2}{2})^4}{4}\bar{W}_2-\mu_2Sym(\bar{G}),\\
\bar{\mathcal{D}}_i &= \begin{bmatrix} D_{Ai}^T & \mu_1D_{Ai}^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_2D_{Ai}^T \\ D_{Bi}^T & \mu_1D_{Bi}^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_2D_{Bi}^T \end{bmatrix}^T,\\
\bar{\mathcal{E}}_{ij} &= \begin{bmatrix} E_{Ai}\bar{G} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_{Bi}Y_jC & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\\
\bar{\mathcal{F}}(t) &= diag(F(t),F(t)).
\end{aligned}
$$

En considérant le Lemme A.3 et le complément de Schur donné en annexe A, nous obtenons

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}h_ih_j^k\hat{\Lambda}_{ij}<0 \tag{3.92}$$

En utilisant le Lemme A.11, on peut facilement déduire que les conditions (3.84)-(3.85) sont vérifiées. ■

### 3.4.2.2 Commande non-fragile des SCRs incertains

Dans cette section, la non-fragilité du contrôleur (3.69) qui consiste à ajouter la variation des gains de contrôleur sera étudiée.
En remplaçant $K_i$ par $K_i+\Delta K_i(t)$ dans (3.89) en suivant la même démarche de la preuve du Théorème 3.4.1, nous pouvons déduire que :

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}h_ih_j^k\bar{\Xi}_{ij}(t)<0 \tag{3.93}$$

où

$$
\begin{aligned}
\bar{\Xi}_{ij}(t) &= \hat{\Lambda}_{ij}+\Delta\bar{\Xi}_{ij}(t),\\
\Delta\bar{\Xi}_{ij}(t) &= Sym\big(\mathbf{Y}_c\Delta\mathbf{H}_c\big),\\
\mathbf{H}_c &= \begin{bmatrix} H_{cj}^TB_i^T & \mu_1H_{cj}^TB_i^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_2H_{cj}^TB_i^T & 0 & H_{cj}^TE_{Bi}^T \end{bmatrix},\\
\mathbf{Y}_c &= \begin{bmatrix} 0 & E_{cj}Y_jC & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T.
\end{aligned}
\tag{3.94}
$$

En utilisant le Lemme A.3 et le complement de Schur, nous obtenons

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} h_i h_j^k \tilde{\Xi}_{ij} < 0 \tag{3.95}$$

où $\tilde{\Xi}_{ij}$ est donné par (3.99). En appliquant le Lemme A.11, nous obtenons le résultat suivant :

**Théorème 3.4.2** Soient les scalaires positifs $\eta_1$, $\eta_2$, $\varphi_i$, $\epsilon_1$, $\epsilon_2$, $\epsilon_3$ et les paramètres $\mu_s \neq 0$, $s = 1{,}2$. Le SCR (3.70) est stabilisé par la loi de commande (3.83), pour toutes les variations des gains possibles, s'ils existent des matrices positives $\bar{Q}_i = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11}^i & \bar{Q}_{12}^i \\ * & \bar{Q}_{22}^i \end{bmatrix}$, $i = 1{,}2$, $\bar{Z}_i = \begin{bmatrix} \bar{Z}_{11}^i & \bar{Z}_{12}^i \\ * & \bar{Z}_{22}^i \end{bmatrix}$, $\bar{W}_1$, $\bar{W}_2$, $\bar{P}$ et des matrices $\widehat{\mathbf{G}}_{11} \in \mathbb{R}^{q\times q}$, $\widehat{\mathbf{G}}_{22} \in \mathbb{R}^{(n-q)\times(n-q)}$, $\widehat{\mathbf{G}}_{21} \in \mathbb{R}^{(n-q)\times n}$ et $Y_i$ telles que les LMIs sont faisables pour toutes les incertitudes admissibles.

$$\Xi_{ii} < 0 \tag{3.96}$$

$$\Xi_{ij} + \Xi_{ji} < 0 \tag{3.97}$$

où

$$\Xi_{ij} = \sum_{k=1}^{r} \varphi_k \tilde{\Xi}_{ik} + \tilde{\Xi}_{ij} \tag{3.98}$$

$$\tilde{\Xi}_{ij} = \begin{bmatrix}
\tilde{\Xi}_{11} & \tilde{\Xi}_{12} & \bar{Q}_{12}^1+\bar{Z}_{22}^1 & \bar{Q}_{12}^2+\bar{Z}_{22}^2 & 0 & 0 & \frac{\eta_1}{2}\bar{W}_1-\bar{Z}_{12}^1 & -\bar{Z}_{12}^2 & \tilde{\Xi}_{19} & \bar{G}E_{Ai}^T & \tilde{\Xi}_{111} & 0 \\
* & \tilde{\Xi}_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{\Xi}_{29} & 0 & \tilde{\Lambda}_{211} & \tilde{\Xi}_{212} \\
* & * & \bar{\Lambda}_{33} & 0 & -\bar{Q}_{12}^1 & 0 & -\bar{Z}_{12}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
* & * & * & \bar{\Lambda}_{44} & 0 & \bar{Q}_{12}^2 & 0 & \bar{Z}_{12}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
* & * & * & * & -\bar{Q}_{22}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
* & * & * & * & * & -\bar{Q}_{22}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
* & * & * & * & * & * & \bar{\Lambda}_{77} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
* & * & * & * & * & * & * & \bar{\Lambda}_{88} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
* & * & * & * & * & * & * & * & \tilde{\Lambda}_{99} & 0 & \tilde{\Xi}_{911} & 0 \\
* & * & * & * & * & * & * & * & * & -\epsilon_1 I & 0 & 0 \\
* & * & * & * & * & * & * & * & * & * & -\epsilon_2 I & 0 \\
* & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & -\epsilon_3 I
\end{bmatrix} \tag{3.99}$$

$\tilde{\Xi}_{11} = \tilde{\Lambda}_{11}+\epsilon_3 B_i H_{cj} H_{cj}^T B_i^T$, $\tilde{\Xi}_{12} = \tilde{\Lambda}_{12}+\epsilon_3\mu_1 B_i H_{cj} H_{cj}^T B_i^T$, $\tilde{\Xi}_{19} = \tilde{\Lambda}_{19}+\epsilon_3\mu_2 B_i H_{cj} H_{cj}^T B_i^T$,
$\tilde{\Xi}_{111} = \epsilon_3 B_i H_{cj} H_{cj}^T E_{bi}^T$, $\tilde{\Xi}_{22} = \tilde{\Lambda}_{22}+\epsilon_3\mu_1^2 B_i H_{cj} H_{cj}^T B_i^T$, $\tilde{\Xi}_{29} = \tilde{\Lambda}_{29}+\epsilon_3\mu_1\mu_2 B_i H_{cj} H_{cj}^T B_i^T$,
$\tilde{\Xi}_{211} = \tilde{\Lambda}_{211}+\epsilon_3\mu_1 B_i H_{cj} H_{cj}^T E_{bi}^T$, $\tilde{\Xi}_{212} = Y_j^T E_{cj}^T$, $\tilde{\Xi}_{99} = \tilde{\Lambda}_{99}+\epsilon_3\mu_2^2 B_i H_{cj} H_{cj}^T B_i^T$,
$\tilde{\Xi}_{911} = \epsilon_3\mu_2 B_i H_{cj} H_{cj}^T E_{bi}^T$

Dans ce cas, les gains du contrôleur sont donnés par (3.87).

### 3.4.3 Application à la commande robuste en réseau de la dynamique latérale du véhicule

Dans cet exemple, nous proposons d'appliquer la commande non-fragile floue par retour de sortie statique développée à la dynamique latérale du véhicule en considérant les variations des coefficients de rigidité notés $C_{fi}$ et $C_{ri}$ qui peuvent changer selon les conditions routières.
On considère

$$\begin{cases} C_{fi} = C_{fi0}(1+d_i f_i) \quad ,||f_i|| \leq 1 \\ C_{ri} = C_{ri0}(1+d_i f_i) \end{cases} \tag{3.100}$$

Où $d_i$ indique l'écart de l'amplitude du coefficient de rigidité $C_{fi}(C_{ri})$ à partir de sa valeur nominale $C_{fi0}(C_{ri0})$.
Le modèle (2.52) devient

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{r} h_i(|\alpha_f|)[(A_i+\Delta A_i(t))x(t)+(B_{fi}+\Delta B_{fi}(t))\delta_f+BM_z(t)] \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \tag{3.101}$$

$$\begin{aligned} A_i &= \begin{bmatrix} -2\frac{C_{fi0}+C_{ri0}}{mv_x} & -2\frac{C_{fi0}a_f-C_{ri0}a_r}{mv_x{}^2}-1 \\ -2\frac{C_{fi0}a_f-C_{ri0}a_r}{I_z} & -2\frac{C_{fi0}a_f^2+C_{ri0}a_r^2}{I_z v_x} \end{bmatrix}, \quad B_{fi} = \begin{bmatrix} \frac{2C_{fi0}}{mv_x} \\ \frac{2a_f C_{fi0}}{I_z} \end{bmatrix}, \\ B &= \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{I_z} \end{bmatrix}, \qquad E_{Ai} = \begin{bmatrix} -2\frac{C_{fi0}+C_{ri0}}{mv_x} & -2\frac{C_{fi0}a_f-C_{ri0}a_r}{mv_x{}^2} \\ -2\frac{C_{fi0}a_f-C_{ri0}a_r}{I_z} & -2\frac{C_{fi0}a_f^2+C_{ri0}a_r^2}{I_z v_x} \end{bmatrix}, \\ E_B &= 0, \qquad E_{Bfi} = \begin{bmatrix} \frac{2C_{fi0}}{mv_x} \\ \frac{2a_f C_{fi0}}{I_z} \end{bmatrix}, \\ C &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad F_i(t) = \begin{bmatrix} f_i & 0 \\ 0 & f_i \end{bmatrix}, \\ D_{Ai} &= D_{Bfi} = \begin{bmatrix} d_i & 0 \\ 0 & d_i \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{3.102}$$

Le but de cette partie est de concevoir un dispositif de commande afin d'améliorer la stabilité et la maniabilité du véhicule lors du changement de voie.
Les paramètres reliés au réseau sont $\eta_1 = 6ms$, $\eta_2 = 20ms$ et $\bar{\sigma} = 3$. Le retard variable dans le temps entre le capteur et le contrôleur ainsi qu'entre le contrôleur et l'actionneur est généré de manière aléatoire tel que $\min(\tau^{sc}+\tau^{ca}) \geq \eta_1$, et $\max(\tau^{sc}+\tau^{ca}+(\bar{\sigma}+1)T_e) \leq \eta_2$ et les pertes de paquets sont aussi générées de manière aléatoire tel que $max(Ne) \leq 3$, avec $Ne$ est le nombre de paquets perdus. Notons $\mu_1 = 0.1$, $\mu_2 = 0.2$, $\epsilon_1 = 0.1$, $\epsilon_2 = 0.1$, $\epsilon_3 = 0.5$, $H_{c1} = 1$, $H_{c2} = 11$, $E_{c1} = -1.8$, et $E_{c2} = 0.02$, en résolvant les LMIs du Theorème 3.4.2, nous obtenons les matrices gain des contrôleurs comme suit :

$$K_1 = -1.9313\times10^5, \quad K_2 = -1.6423\times10^5 \tag{3.103}$$

nous obtenons également les résultats suivants :

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} 3.9071 & 0.0520 \\ 0.0520 & 4.2868 \end{bmatrix} \times 10^{-4}, \quad \widehat{\mathbf{G}}_{11} = 3.7746, \quad U = -1, \quad S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \text{ et } \quad V = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.104}$$

Si nous ne tenons pas compte du retard induit par le réseau et des pertes de paquets dans la synthèse, alors d'après le Théorème 2 dans [Oudghiri et Hajjaji, 2008a], nous obtenons les gains des contrôleurs suivants :

$$K_3 = -5.8156, \quad K_4 = -3.2056 \tag{3.105}$$

En simulation, nous considérons la condition initiale suivante : $x_0 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 \end{bmatrix}^T$, la période d'échantillonnage est choisie $T_e = 3ms$ et la variable d'incertitude de la non-fragilité est $\Delta = 0.8{+}0.2\sin(3t)$.

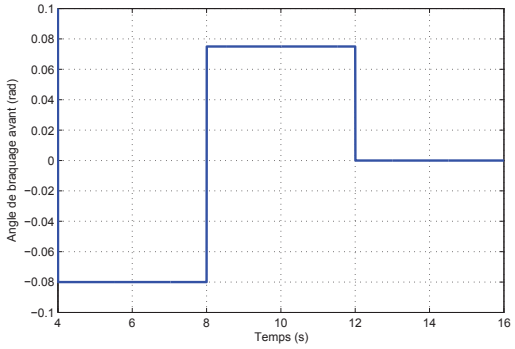


Figure 3.22: Angle de braquage avant

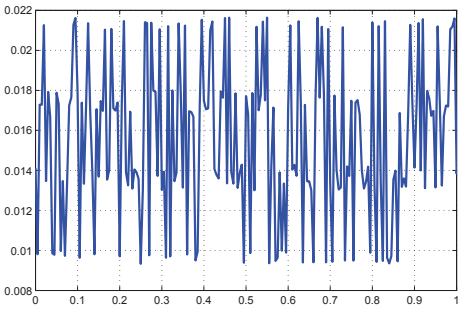

Figure 3.23: Retard induit par le réseau .

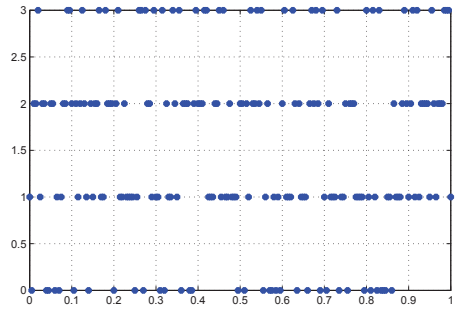

Figure 3.24: Pertes de paquet d'information.

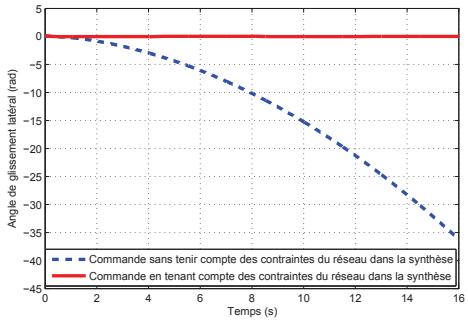


Figure 3.25: Réponses de l'angles de glissement latéral avec le contrôleur non-fragile (3.103) et le contrôleur (3.105).

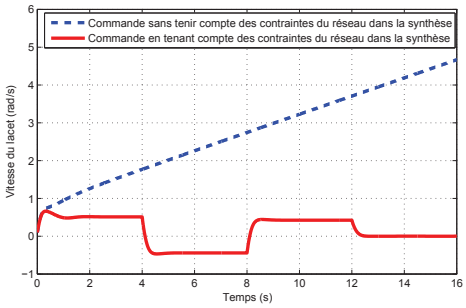


Figure 3.26: Réponses de vitesse de lacet avec le contrôleur non-fragile (3.103) et le contrôleur (3.105).

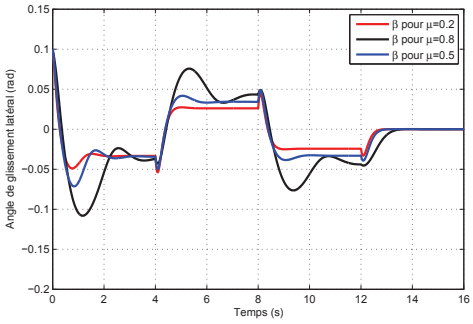


Figure 3.27: Angle de glissement latéral pour certains coefficients d'adhérence à la route .

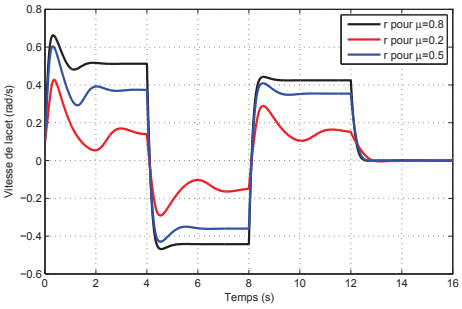


Figure 3.28: Vitesse de lacet pour certains coefficients d'adhérence à la route.

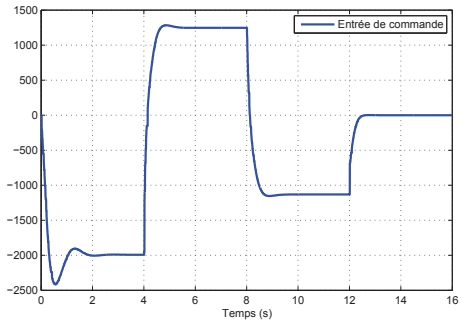


Figure 3.29: Signal de commande : Moment du lacet pour $\mu = 0.7$.

Toutes les simulations sont réalisées sur le modèle non linéaire donné par (2.24). La manoeuvre du changement de voie est représentée par le braquage du conducteur donné dans la Figure 3.22. Pour mettre en évidence l'intéret de prendre en compte les effets du réseau dans la synthèse, nous avons réalisé une série de simulation :

Dans un premier temps, une commande par retour de sortie statique a été développée sans tenir compte des contraintes liées au réseau. Les résultats obtenus montrent que cette loi de commande stabilise le véhicule. Néanmoins, quand ce dernier opère à travers un réseau de communication, le compotement du véhicule devient instable comme le montrent les Figures 3.25 - 3.26 (en trait bleu). Dans un deuxième temps, nous avons appliqué la commande par retour de sortie statique obtenue en résolvant les LMIs du Theorème 3.4.2, les Figures 3.25 et 3.26 (en trait rouge) montrent les évolutions de la dérive et de la vitesse du lacet du véhicule. La Figure 3.27 et la Figure 3.28 illustrent les évolutions de l'angle de glissement latéral du véhicule et les évolutions de la vitesse du lacet pour différents coefficients d'adhérence ($\mu$), nous remarquons que le véhicule maintient sa stabilité et sa maniabilité malgré une grande variation de l'angle de braquage et la variation des conditions de la route. Nous rappelons qu' en boucle ouverte, le véhicule a un comportement instable avec cet angle de braquage. La Figure 3.29 représente la loi de commande par retour de sortie statique en présence de la communication en réseau. Les Figures 3.23 et 3.24 montrent les retards induits par le réseau et les pertes de paquets de données qui sont générés de façon aléatoire. Nous remarquons que notre approche permet de stabiliser le véhicule qui reçoit des données du contrôleur via le réseau de communication avec retard variant dans le temps et pertes de paquets d'information.

## 3.5 Stabilisation par retour d'état reconstruit

Un observateur d'état est un filtre permettant de reconstruire l'état du système à temps continu. Il existe différents types d'observateur. Nous retiendrons cependant l'observateur flou de Luenberger, qui possède une structure simple et facilement interprétable. En effet, puisque les variables d'état ne sont généralement pas toujours mesurables, la commande floue par retour de sortie statique ou la commande basée sur observateur est souvent utilisée.
La commande en réseau par retour d'état reconstruit a fait l'objet de travaux de recherche ces dernières années. En effet, le problème de la commande basée sur observateur a été étudié pour les SCRs linéaires incertains [Zhang *et al.*, 2011] ainsi que pour les SCRs non linéaires décrits par des modèles TS [Zhang *et al.*, 2009].

Une contrainte supplémentaire liée au réseau de communication est prise en compte dans cette partie. Il s'agit du phénomène de la quantification des signaux. En effet, en raison de la limitation de la bande passante, les réseaux de communication ne sont pas en mesure d'envoyer des données avec une précision infinie.

Dans cette section, nous étudions le problème de la commande basée sur observateur des SCRs. Dans la première partie, nous considérons seulement la quantification des données capteurs dans la chaîne de commande [Latrach *et al.*, 2014]. Nous étendons ensuite notre étude, à la fois, à la quantification des données capteurs et actionneurs.

### 3.5.1 Commande basée sur observateur avec un quantificateur de mesures

Dans un premier temps, on s'intéresse à la synthèse d'un contrôleur flou en réseau par retour d'état avec un seul quantificateur placé en amont du contrôleur. Ensuite, on va étendre cette étude pour le cas de la commande basée sur observateur dans le cas où les états du système ne sont pas tous mesurables.

#### 3.5.1.1 Synthèse d'un contrôleur flou en réseau par retour d'état

Considérons le modèle global d'un modèle flou TS donné comme suit :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{r} h_i \Big( A_i x(t) + BU(t) + B_{fi} W(t) \Big) \tag{3.106}$$

En appliquant la méthode du secteur borné, définie dans la section 3.2.4.3, le quantificateur $q(\nu)$ peut s'exprimer comme suit : [Mahmoud et Al-Rayyah, 2011]

$$q(\nu) = (I + \Delta(t))\nu$$

où

$$\begin{gathered} \Delta(t) = diag\{\Delta_1(t), \Delta_2(t), ..., \Delta_n(t)\}, \\ \|\Delta_j(t)\| \leq \delta, \quad j = 1,2,...,n \end{gathered} \tag{3.107}$$

La structure du système commandé en réseau avec quantificateur (3.106) est donnée dans la Figure 3.5 où le signal d'entrée de commande est :

$$U(t) = \sum_{i=1}^{r} h_i^k \bar{K}_i x(t_k - \tau_k), \quad t_k \leq t \leq t_{k+1} \tag{3.108}$$

avec $\bar{K}_i = K_i(I + \Delta(t))$.
Après plusieurs manipulations, le système commandé en réseau en boucle fermée s'écrit pour $t_k \leq t \leq t_{k+1}$ :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{r} h_i A_i x(t) + \sum_{i=1}^{r} h_i^k B \bar{K}_i x(t - \eta(t)) + \sum_{i=1}^{r} h_i B_{fi} W(t) \\ z(t) = C_1 x(t) \\ y(t) = C_2 x(t) \\ x(t) = \phi(t), t \in [t_0 - \eta_2, t_0] \end{cases} \tag{3.109}$$

Où $\phi(t)$ représente la condition initiale, $y(t) \in R^q$ est le signal de sortie mesuré et $z(t)$ représente le signal de sortie à contrôler.
On pose :

$$\begin{gathered} A(t) = \sum_{i=1}^{r} h_i A_i, \; B_f(t) = \sum_{i=1}^{r} h_i B_{fi}, \\ H(t) = \sum_{i=1}^{r} h_i^k H_i, \; H_i = BK_i(I + \Delta(t)) \end{gathered} \tag{3.110}$$

Le système en boucle fermée (3.109) devient :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t)+H(t)x(t-\eta(t))+B_f(t)W(t) \\ z(t) = C_1x(t) \\ y(t) = C_2x(t) \\ x(t) = \phi(t), t \in [t_0-\eta_2, t_0] \end{cases} \tag{3.111}$$

L'objectif est de déterminer la loi de commande (3.108) telle que le SCR soit asymptotiquement stable avec la performance $H_\infty$.

Les conditions de synthèse du contrôleur flou par retour d'état quantifié sont données par le Théorème suivant sous forme de LMIs :

**Théorème 3.5.1** [Latrach *et al.*, 2014] Soient les scalaires $\eta_1 > 0$, $\eta_2 > 0$, $\varphi_i$, $\mu_1$, $\mu_2$, $\mu_3$, $\lambda$, $\epsilon > 0$ et la densité de quantification $\rho > 0$, le système en boucle fermée (3.111) est asymptotiquement stable et la performance $H_\infty$ est garantie pour un niveau d'atténuation $\gamma > 0$, s'ils existent des matrices positives $\bar{P}$, $\bar{Q}_1$, $\bar{Q}_2$, $\bar{Q}_3$, $\bar{Z}_1$, $\bar{Z}_2$ et des matrices $\bar{G}$ et $Y_i$ avec des dimensions appropriées, telles que les conditions suivantes soient vérifiées :

$$\begin{bmatrix} \bar{\Phi}_i+\Phi_1(\bar{Z}_2) & \bar{\Gamma}_i & \epsilon\bar{G}^T\bar{\Delta}^T \\ * & \epsilon\bar{\Xi}_1 & 0 \\ * & * & -\epsilon I \end{bmatrix} < 0 \tag{3.112}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{\Phi}_i+\Phi_2(\bar{Z}_2) & \bar{\Gamma}_i & \epsilon\bar{G}^T\bar{\Delta}^T \\ * & \epsilon\bar{\Xi}_1 & 0 \\ * & * & -\epsilon I \end{bmatrix} < 0 \tag{3.113}$$

où

$$\bar{\Phi}_i = \begin{bmatrix} \bar{\Phi}_{11i} & \bar{\Phi}_{12i} & \bar{Z}_1 & 0 & \bar{\Phi}_{15i} & \mu_1 B_{fi} & \bar{\Phi}_{17} \\ * & \bar{\Phi}_{22i} & 0 & 0 & \bar{\Phi}_{25i} & \mu_2 B_{fi} & 0 \\ * & * & -\bar{Q}_2-\bar{Z}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\bar{Q}_3 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & \bar{\Phi}_{55} & \mu_3 B_{fi} & 0 \\ * & * & * & * & * & -\gamma^2 I & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -I \end{bmatrix} \tag{3.114}$$

$$\Phi_1(\bar{Z}_2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & -4\bar{Z}_2 & 3\bar{Z}_2 & \bar{Z}_2 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -3\bar{Z}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\bar{Z}_2 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & 0 \end{bmatrix} \tag{3.115}$$

$$\Phi_2(\bar{Z}_2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & -4\bar{Z}_2 & \bar{Z}_2 & 3\bar{Z}_2 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -\bar{Z}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -3\bar{Z}_2 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & 0 \end{bmatrix} \tag{3.116}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\Phi}_{11i} &= \bar{Q}_1+\bar{Q}_2+\bar{Q}_3+\mu_1 sym(A_i\bar{G})-\bar{Z}_1, & \bar{\Phi}_{12i} &= \mu_2\bar{G}^T A_i^T+\mu_1 BY_i, \\
\bar{\Phi}_{22i} &= \mu_2 sym(BY_i)-(1-\eta_d)\bar{Q}_1, & \bar{\Phi}_{15i} &= \bar{P}-\mu_1\bar{G}+\mu_3\bar{G}^T A_i^T, \\
\bar{\Phi}_{25i} &= -\mu_2\bar{G}+\mu_3 Y_i^T B^T, & \bar{\Phi}_{55} &= \eta_1^2\bar{Z}_1+\eta_r^2\bar{Z}_2-\mu_3 sym(\bar{G}), \\
\bar{\Phi}_{17} &= \bar{G}^T C_1^T, & d_r &= \eta_2-\eta_1, \\
\bar{\Gamma}_i &= \begin{bmatrix} \bar{\Phi}_{18i}^T & \bar{\Phi}_{28i}^T & 0 & 0 & \bar{\Phi}_{58i}^T & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, & \bar{\Xi}_1 &= \lambda^2 I-\lambda Sym(\bar{G}), \\
\bar{\Delta} &= \begin{bmatrix} 0 & \delta I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & \bar{\Phi}_{18i} &= \mu_1 BY_i, \\
\bar{\Phi}_{28i} &= \mu_2 BY_i, & \bar{\Phi}_{58i} &= \mu_3 BY_i
\end{aligned}$$

où $Y_i = K_i\bar{G}$

**Preuve 8** Premièrement, à partir du fait que $(\bar{G}-\lambda I)^T(\bar{G}^T-\lambda I) \geq 0$, on peut déduire :

$$-\bar{G}^T\bar{G} \leq \lambda^2 I-\lambda Sym(\bar{G}) \tag{3.117}$$

D'après les conditions du Théorème 3.5.1, une solution faisable implique que $\bar{G}$ inversible. On pose $G_1 = \mu_1 G$, $G_2 = \mu_2 G$, $G_3 = \mu_3 G$, avec $\mu_1$, $\mu_2$, $\mu_3$ sont des scalaires, $G = \bar{G}^{-1}$, $\bar{P} = \bar{G}^T P\bar{G}$, $\bar{Q}_1 = \bar{G}^T Q_1\bar{G}$, $\bar{Q}_2 = \bar{G}^T Q_2\bar{G}$, $\bar{Q}_3 = \bar{G}^T Q_3\bar{G}$, $\bar{Z}_1 = \bar{G}^T Z_1\bar{G}$, et $\bar{Z}_2 = \bar{G}^T Z_2\bar{G}$.

En considérant (3.117) et en appliquant la transformation par congruence de (3.112)-(3.113) par $diag\{G,G,G,G,G,I,I,G,I\}$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
&max\Big(\Psi^T(t)\sum_{i=1}^{r} h_i h_i^k \begin{bmatrix} (\Phi_i+\Phi_1(Z_2)) & \Gamma_i & \epsilon\bar{\Delta}^T \\ * & -\epsilon I & 0 \\ * & * & -\epsilon I \end{bmatrix}\Psi(t), \\
&\Psi^T(t)\sum_{i=1}^{r} h_i h_i^k \begin{bmatrix} (\Phi_i+\Phi_2(Z_2)) & \Gamma_i & \epsilon\bar{\Delta}^T \\ * & -\epsilon I & 0 \\ * & * & -\epsilon I \end{bmatrix}\Psi(t)\Big) < 0.
\end{aligned} \tag{3.118}$$

En utilisant le Lemme A.5, on peut déduire :

$$\begin{aligned}
&max\Big(\Psi^T(t)\sum_{i=1}^{r} h_i h_i^k(\Phi_i+\Phi_1(Z_2)+Sym(\Gamma_i\Delta(t)\bar{\Delta}^{-1}\bar{\Delta})\Psi(t), \\
&\Psi^T(t)\sum_{i=1}^{r} h_i h_i^k(\Phi_i+\Phi_2(Z_2)+Sym(\Gamma_i\Delta(t)\bar{\Delta}^{-1}\bar{\Delta})\Psi(t)\Big) < 0.
\end{aligned} \tag{3.119}$$

où $\Psi^T(t) = \begin{bmatrix} x^T(t) & x^T(t-\eta(t)) & x^T(t-\eta_1) & x^T(t-\eta_2) & \dot{x}^T(t) & W^T(t) \end{bmatrix}$,

$$\Phi_i = \begin{bmatrix} \Phi_{11i} & \Phi_{12i} & Z_1 & 0 & \Phi_{15i} & G_1^T B_{fi} & \Phi_{17} \\ * & \Phi_{22i} & 0 & 0 & \Phi_{25i} & G_2^T B_{fi} & 0 \\ * & * & -Q_2-Z_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -Q_3 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & \Phi_{55} & G_3^T B_{fi} & 0 \\ * & * & * & * & * & -\gamma^2 I & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -I \end{bmatrix} \tag{3.120}$$

$\Phi_{11i} = Q_1+Q_2+Q_3+sym(G_1^T A_i)-Z_1$, $\Phi_{12i} = A_i^T G_2+G_1^T BK_i$,
$\Phi_{22i} = sym(G_2^T BK_i)-(1-\eta_d)Q_1$, $\Phi_{15i} = P^T-G_1^T+A_i^T G_3$,
$\Phi_{25i} = -G_2^T+K_i^T B^T G_3$, $\Phi_{55} = \eta_1^2 Z_1+\eta_r^2 Z_2-sym(G_3)$,
$\Phi_{17} = C_1^T$, $\Gamma_i = \begin{bmatrix} \Phi_{18i}^T & \Phi_{28i}^T & 0 & 0 & \Phi_{58i}^T & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$,
$\Phi_{18i} = G_1^T BK_i$, $\Phi_{28i} = G_2^T BK_i$,
$\Phi_{58i} = G_3^T BK_i$.

En se basant sur la même FLK (3.14) et le résultat du Théorème 3.3.4, la combinaison de (3.54), (3.16), (3.18) et (3.55) entraîne que $\dot{V}(x(t)) \leq max\Big(\Psi^T(t)\sum_{i=1}^r h_i h_i^k(\Phi_i+\Phi_1(Z_2)+Sym(\Gamma_i\Delta(t)\bar{\Delta}^{-1}\bar{\Delta})\Psi(t)-z^T(t)z(t)+\gamma^2 W^T(t)W(t), \Psi^T(t)\sum_{i=1}^r h_i h_i^k(\Phi_i+\Phi_2(Z_2)+Sym(\Gamma_i\Delta(t)\bar{\Delta}^{-1}\bar{\Delta})\Psi(t)-z^T(t)z(t)+\gamma^2 W^T(t)W(t)\Big) \leq max\Big(\Psi^T(t)\sum_{i=1}^r h_i h_i^k(\Phi_i+\Phi_1(Z_2)+Sym(\Gamma_i\Delta(t)))\Psi(t)-z^T(t)z(t)+\gamma^2 W^T(t)W(t), \Psi^T(t)\sum_{i=1}^r h_i h_i^k(\Phi_i+\Phi_2(Z_2)+Sym(\Gamma_i\Delta(t)))\Psi(t)-z^T(t)z(t)+\gamma^2 W^T(t)W(t)\Big)$.
On peut déduire :

$$\dot{V}(x(t))+z^T(t)z(t)-\gamma^2 W^T(t)W(t) < 0 \tag{3.121}$$

Etant donné $V(x(t))$ est continue dans $t \in [t_0,\infty)$, en intégrant (3.121), nous obtenons :

$$V(x(t))-V(x(t_0))+\int_{t_0}^{t} z^T(t)z(t)dt-\int_{t_0}^{t}\gamma^2 W^T(t)W(t)dt < 0$$

Quand $t \to \infty$ et sous la condition initiale nulle, l'indice de performance $H_\infty$ est satisfait, $||z(t)||_2 < \gamma||W(t)||_2$, pour toute valeur non nulle $W(t) \in l_2$. ■

#### 3.5.1.2 Synthèse de la commande en réseau basée sur observateur flou

L'observateur flou global est représenté comme suit :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^{r} h_i[A_i\hat{x}(t)+B_{fi}W(t)+BU(t)+L_i(y(t)-\hat{y}(t))] \\ \hat{y}(t) = C_2\hat{x}(t) \end{cases} \tag{3.122}$$

où $\hat{x}(t)$ est l'état estimé, et $\hat{y}(t)$ est la sortie mesurée estimée, $L_1$ et $L_2$ sont les gains constants de l'observateur à déterminer.
Le contrôleur flou PDC global en réseau est donné par :

$$U(t) = \sum_{i=1}^{r} h_i^k K_i(I+\Delta(t))\hat{x}(t_k-\tau_k) \tag{3.123}$$

où $K_i$ sont des gains constants à déterminer.
Définissons l'erreur d'observation comme suivant :

$$e(t) = x(t)-\hat{x}(t) \tag{3.124}$$

A partir des systèmes (3.106), (3.122), (3.123), et (3.124) et après plusieurs manipulations, le système augmenté peut s'écrire par :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A}(t)\tilde{x}(t)+\tilde{H}(t)(I+\bar{\Delta}(t))\tilde{x}(t-\eta(t))+\tilde{B}_f(t)W(t), \\ z(t) = \tilde{C}_1\tilde{x}(t) \end{cases} \tag{3.125}$$

où

$$\tilde{A}(t) = \sum_{i=1}^{r} h_i\tilde{A}_i, \quad \tilde{B}_f(t) = \sum_{i=1}^{r} h_i\tilde{B}_{fi}, \quad \tilde{H}(t) = \sum_{i=1}^{r} h_i^k\tilde{H}_i. \tag{3.126}$$

$\tilde{A}_i = \begin{bmatrix} A_i & 0 \\ 0 & A_i-L_iC_2 \end{bmatrix}$, $\tilde{H}_i = \begin{bmatrix} BK_i & -BK_i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\tilde{B}_{fi} = \begin{bmatrix} B_{fi} \\ 0 \end{bmatrix}$, $\tilde{C}_1 = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \end{bmatrix}$,$\bar{\Delta}(t) = \begin{bmatrix} \Delta(t) & 0 \\ 0 & \Delta(t) \end{bmatrix}$ et $\tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} x^T(t) & e^T(t) \end{bmatrix}^T$.
Les conditions de synthèse de la commande floue basée sur observateur pour le système (3.125) sont résumées dans le Théorème suivant :

**Théorème 3.5.2** Soient les scalaires $\eta_1 > 0$, $\eta_2 > 0$, $\mu_1$, $\mu_2$, $\mu_3$, $\varphi_i$, $\epsilon > 0$, $\lambda_1$, et la densité de quantification $\rho > 0$, le SCR en boucle fermée(3.125) est asymptotiquement stable et la performance $H_\infty$ est garantie pour un niveau d'atténuation $\gamma > 0$, s'ils existent des matrices positives $\tilde{P}$, $\tilde{Q}_1$, $\tilde{Q}_2$, $\tilde{Q}_3$, $\tilde{Z}_1$, $\tilde{Z}_2$ et des matrices $\hat{G}$, $g$, $Y_i$ et $F_i$ de dimensions appropriées, telles que les conditions suivantes soient vérifiées :

$$\begin{bmatrix} \tilde{\Phi}_i+\Phi_1(\tilde{Z}_2) & \tilde{\Gamma}_i & \epsilon\mathcal{G}^T\bar{\Delta}^T \\ * & -\epsilon\tilde{\Xi}_1 & 0 \\ * & * & -\epsilon I \end{bmatrix} < 0 \tag{3.127}$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{\Phi}_i+\Phi_2(\tilde{Z}_2) & \tilde{\Gamma}_i & \epsilon\mathcal{G}^T\bar{\Delta}^T \\ * & -\epsilon\tilde{\Xi}_1 & 0 \\ * & * & -\epsilon I \end{bmatrix} < 0 \tag{3.128}$$

où

$$\tilde{\Phi}_i = \begin{bmatrix} \tilde{\Phi}_{11i} & \tilde{\Phi}_{12i} & \tilde{Z}_1 & 0 & \tilde{\Phi}_{15i} & \tilde{\Phi}_{16i} & \tilde{\Phi}_{17} \\ * & \tilde{\Phi}_{22i} & 0 & 0 & \tilde{\Phi}_{25i} & \tilde{\Phi}_{26i} & 0 \\ * & * & -\tilde{Q}_2-\tilde{Z}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\tilde{Q}_3 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & \tilde{\Phi}_{55} & \tilde{\Phi}_{56i} & 0 \\ * & * & * & * & * & -\gamma^2 I & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -I \end{bmatrix} \tag{3.129}$$

$\tilde{\Phi}_{11i} = \tilde{Q}_1+\tilde{Q}_2+\tilde{Q}_3+sym(\mathbf{A}_i)-\tilde{Z}_1$, $\tilde{\Phi}_{12i} = \mathbf{A}_i+\mathbf{A}_{\eta i}^T$,
$\tilde{\Phi}_{22i} = sym(\mathbf{A}_{\eta i})-(1-\eta_d)\tilde{Q}_1$, $\tilde{\Phi}_{15i} = \tilde{P}-\mathbf{G}+\mathbf{A}_i$,
$\tilde{\Phi}_{16i} = \mu_1\mathbf{B_{fi}}$, $\tilde{\Phi}_{26i} = \mu_2\mathbf{B_{fi}}$,
$\tilde{\Phi}_{56i} = \mu_3\mathbf{B_{fi}}$, $\tilde{\Phi}_{25i} = -\mathbf{G}^T+\mathbf{A}_{\eta i}$,
$\tilde{\Phi}_{55} = \eta_2^2\tilde{Z}_1+\eta_r^2\tilde{Z}_2-sym(\mathbf{G})$, $\tilde{\Phi}_{17} = \begin{bmatrix} C_1 g & C_1 \end{bmatrix}^T$,
$\tilde{\Gamma}_i = \begin{bmatrix} \tilde{\Phi}_{18i}^T & \tilde{\Phi}_{28i}^T & 0 & 0 & \tilde{\Phi}_{58i}^T & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$, $\tilde{\Phi}_{18i} = \mu_1\mathbf{A}_{\eta i}$,
$\tilde{\Phi}_{28i} = \mu_2\mathbf{A}_{\eta i}$, $\tilde{\Phi}_{58i} = \mu_3\mathbf{A}_{\eta i}$,
$\tilde{\Xi}_1 = \lambda_1^2 I-\lambda_1 Sym(\mathcal{G})$, $\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} A_i g & A_i \\ 0 & \hat{G}^T A_i - F_i C_2 \end{bmatrix}$,
$\mathbf{A}_{\eta i} = \begin{bmatrix} BY_i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\tilde{G} = \begin{bmatrix} g & G \\ 0 & G \end{bmatrix}$,
$\mathbf{B_{fi}} = \begin{bmatrix} B_{fi} \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{G} = \begin{bmatrix} g & I \\ 0 & \hat{G} \end{bmatrix}$,
$\mathcal{G} = \begin{bmatrix} g & I \\ 0 & I \end{bmatrix}$.

où $Y_i = K_i g$, $F_i = \hat{G} L_i$

**Preuve 9** Le Théorème 3.5.2 implique que $\tilde{G}$ est inversible. Par conséquent, $g$ et $G$ sont aussi inversibles. Définissons $\hat{G} = G^{-1}$ et $\grave{G} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \hat{G} \end{bmatrix}$.
Notons que $\mathbf{A}_i = \grave{G}^T \tilde{A}_i \tilde{G} \grave{G}$, $\mathbf{A}_{\eta i} = \grave{G}^T \tilde{A}_{\eta i} \tilde{G} \grave{G}$, $\mathbf{G} = \grave{G}^T \tilde{G} \grave{G}$ et $\mathcal{G} = \tilde{G}\grave{G}$.
Soient $\tilde{P} = \mathcal{G}^T P \mathcal{G}$, $\tilde{Q}_1 = \mathcal{G}^T Q_1 \mathcal{G}$, $\tilde{Q}_2 = \mathcal{G}^T Q_2 \mathcal{G}$, $\tilde{Q}_3 = \mathcal{G}^T Q_3 \mathcal{G}$, $\tilde{Z}_1 = \mathcal{G}^T Z_1 \mathcal{G}$, et $\tilde{Z}_2 = \mathcal{G}^T Z_2 \mathcal{G}$.

En suivant la même démarche de la preuve du Théorème 3.5.1, et en appliquant les transformations de congruence à (3.127)-(3.128) par $diag(\grave{G}^{-1},\grave{G}^{-1},\grave{G}^{-1},\grave{G}^{-1},\grave{G}^{-1},I,I,\grave{G}^{-1},I)$ et ensuite par $diag(\tilde{G}^{-1},\tilde{G}^{-1},\tilde{G}^{-1},\tilde{G}^{-1},\tilde{G}^{-1},I,I,\tilde{G}^{-1},I)$, on peut conclure que l'observateur

flou (3.122) existe et garantie pour le système en boucle fermée (3.125) d'être asymptotiquement stable. ■

### 3.5.2 Commande basée sur observateur avec quantificateurs à la fois des mesures et des commandes

Dans ce paragraphe, nous considérons la structure de commande en réseau basée sur observateur dans la Figure 3.30.

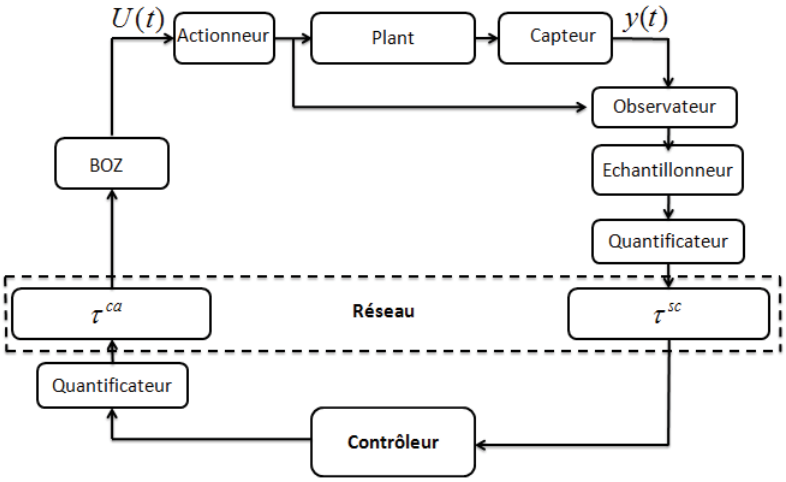


Figure 3.30: Schéma du système commandé en réseau en présence de deux quantificateurs à la fois des mesures et des commandes.

Considérons le modèle global d'un modèle flou TS donné comme suit :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{r} h_i \Big( (A_i + \Delta A_i(t))x(t) + (B_i + \Delta B_i(t))U(t) + (B_{fi} + \Delta B_{fi}(t))W(t) \Big) \tag{3.130}$$

L'équation dynamique de l'observateur de type Luenberger d'un modèle flou continu est de la forme :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^{r} h_i [A_i \hat{x} + B_{fi} W(t) + B_i U(t) + L_i (y(t) - \hat{y}(t))] \\ \hat{y}(t) = C_2 \hat{x}(t) \end{cases} \tag{3.131}$$

où $\hat{x}(t)$ est l'état estimé, et $\hat{y}(t)$ est la sortie de l'observateur et $L_i$ sont les gains constants de l'observateur à déterminer. Dans le cas de deux quantificateurs (voir Figure 3.30), la loi de commande en réseau basée sur observateur devient : [Yue *et al.*, 2006]

$$U(t) = \sum_{i=1}^{r} h_i^k \bar{K}_i \hat{x}(t_k - \tau_k), \quad t_k \leq t \leq t_{k+1} \tag{3.132}$$

où

$$\bar{K_i} = (I+\Delta_s)K_i(I+\Delta_g) = K_i+\Delta_s K_i+K_i\Delta_g+\Delta_s K_i\Delta_g = K_i+\Delta(K_i). \tag{3.133}$$

où $K_i$ sont les gains du contrôleur à déterminer.
On suppose que les mesures échantillonnées $x(t)$ sont premièrement quantifiées par l'intermédiaire d'un quantificateur de mesures, et ensuite par l'intermédiaire d'un deuxième quantificateur de commandes.
Dans ce travail, les quantificateurs sont logarithmiques. Soient $s$ ou $g$ l'ensemble des niveaux quantifiés, qui fait référence respectivement au quantificateur des mesures et des commandes, décrit comme suit

$$u = \{u_i, u_i = \rho_\omega^i u_0, i = 0\pm1\pm2,...\}\cup\{0\}, \quad u_0 > 0 \tag{3.134}$$

où le paramètre $0 < \rho_{\omega=s,g} < 1$ est appelé densité de quantification, et le quantificateur logarithmique $q(\varsigma)$ est défini comme suit

$$q(\varsigma) = \begin{cases} u_i \quad \text{si} \quad \dfrac{1}{1+\delta_\omega}\rho_\omega^i u_0 < \varsigma \leq \dfrac{1}{1-\delta_\omega}\rho_\omega^i u_0 \\ 0 \quad \text{si} \quad \varsigma = 0 \\ -q(-\varsigma) \quad \text{si} \quad \varsigma < 0 \end{cases} \tag{3.135}$$

où $\delta_\omega = \frac{1-\rho_\omega}{1+\rho_\omega}$.
Il découle de [Mahmoud et Al-Rayyah, 2011, Yue *et al.*, 2006] que la commande quantifiée est équivalente à la commande robuste avec le secteur d'incertitude bornée, et $s()$ ou $g()$ peuvent être exprimés par

$$s(\nu) = (I+\Delta_s(\nu))\nu \tag{3.136}$$

$$g(x) = (I+\Delta_g(x))x \tag{3.137}$$

où

$$\begin{aligned} \Delta_s = diag\{\Delta_{s1},\Delta_{s2},...,\Delta_{sm}\}, \qquad & \Delta_g = diag\{\Delta_{g1},\Delta_{g2},...,\Delta_{gn}\}, \\ \|\Delta_{sf}\| \leq \delta_s, \qquad & \|\Delta_{gj}\| \leq \delta_g, \\ f = 1,2,...,m, \qquad & j = 1,2,...,n \end{aligned} \tag{3.138}$$

où $I$ désigne la matrice identité de dimension appropriée.
En posant

$$e(t) = x(t)-\hat{x}(t) \tag{3.139}$$

et $\tilde{x} = \begin{bmatrix} x^T & e^T \end{bmatrix}^T$, nous obtenons à partir des équations (3.130), (3.132) et (3.139) et après plusieurs manipulations, le système augmenté suivant :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{\mathcal{A}}(t)\tilde{x}(t)+\tilde{\mathcal{A}}_\eta(t)\tilde{x}(t-\eta(t))+\tilde{\mathcal{B}}_f(t)W(t) \\ z(t) = \tilde{\mathcal{C}}\tilde{x}(t) \\ \tilde{x}(t) = \phi(t), t \in [t_0-\eta_2, t_0] \end{cases} \tag{3.140}$$

Où les matrices $\tilde{\mathcal{A}}(t)$, $\tilde{\mathcal{A}}_\eta(t)$, $\tilde{\mathcal{B}}_f(t)$ et $\tilde{\mathcal{C}}$, sont définies comme suit :

$$\tilde{\mathcal{A}}(t)=\sum_{i=1}^{r}h_i\begin{bmatrix}A(t) & 0\\ 0 & A(t)-L_iC_2\end{bmatrix},$$

$$\tilde{\mathcal{A}}_\eta(t)=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}h_ih_j^k\begin{bmatrix}B(t)(K_j+\Delta(K_j)) & -B(t)(K_j+\Delta(K_j))\\ 0 & 0\end{bmatrix},$$

$$\tilde{\mathcal{B}}_f(t)=\sum_{i=1}^{r}h_i\begin{bmatrix}B_f(t)\\ 0\end{bmatrix},\qquad \tilde{\mathcal{C}}=\begin{bmatrix}C_1 & 0\end{bmatrix},$$

$$A(t)=A_i+\Delta A_i(t),\qquad B(t)=B_i+\Delta B_i(t),$$

$$B_f(t)=B_{fi}+\Delta B_{fi}(t),\qquad \Delta A_i(t)=D_{Ai}F(t)E_{Ai},$$

$$\Delta B_i(t)=D_{Bi}F(t)E_{Bi},\qquad \Delta B_{fi}(t)=D_{Bfi}F(t)E_{Bfi}.$$

et $\phi(t)$ peut être considérée comme condition initiale du système en boucle fermée.
Notre objectif est de développer un système de commande floue basé sur observateur qui utilise un réseau de communication pour échanger des données capteurs et actionneurs quantifiées entre le système et le contrôleur. Le SCR doit assurer en plus de la stabilité, les performances $H_\infty$ en terme de rejet de perturbation par un niveau d'atténuation $\gamma$ c'est à dire :

$$\|z(t)\|_2\leq\gamma\|W(t)\|_2 \tag{3.141}$$

Le résultat suivant présente les conditions de stabilisation du système flou en boucle fermée robuste (3.140) :

**Lemme 3.2** Soient les scalaires $\eta_1$, $\eta_2$, $\mu_1$, $\mu_2$, $\mu_3$ et $\gamma>0$, le SCR en boucle fermée (3.140) est asymptotiquement stable avec la norme $H_\infty$, s'ils existent des matrices positives $P$, $Q_1$, $Q_2$, $Q_3$, $Z_1$, $Z_2$, et des matrices $S$ et $\tilde{G}$ avec des dimensions appropriées, telles que les conditions suivantes sont vérifiées :

$$\begin{bmatrix}Z_2 & S\\ * & Z_2\end{bmatrix}>0 \tag{3.142}$$

$$\Xi(t)=\begin{bmatrix}\Xi_{11}(t) & \Xi_{12}(t) & Z_1 & 0 & \Xi_{15}(t) & \mu_1\tilde{G}^T\tilde{\mathcal{B}}_f(t) & \tilde{\mathcal{C}}^T\\ * & \Xi_{22}(t) & Z_2-S^T & Z_2-S & \Xi_{25}(t) & \mu_2\tilde{G}^T\tilde{\mathcal{B}}_f(t) & 0\\ * & * & -Q_2-Z_1-Z_2 & -S & 0 & 0 & 0\\ * & * & * & Q_3-Z_2 & 0 & 0 & 0\\ * & * & * & * & \Xi_{55} & \mu_3\tilde{G}^T\tilde{\mathcal{B}}_f(t) & 0\\ * & * & * & * & * & -\gamma^2I & 0\\ * & * & * & * & * & * & -I\end{bmatrix}<0 \tag{3.143}$$

où

$$\Xi_{11}(t)=Q_1+Q_2+Q_3+\mu_1 sym(\tilde{G}^T\tilde{\mathcal{A}}(t))-Z_1,\qquad \Xi_{12}(t)=\mu_2\tilde{\mathcal{A}}^T(t)\tilde{G}+\mu_1\tilde{G}^T\tilde{\mathcal{A}}_\eta(t),$$

$$\Xi_{22}(t)=\mu_2 sym(\tilde{G}^T\tilde{\mathcal{A}}_\eta(t))-(1-h_d)Q_1-2Z_2+Sym(S),\quad \Xi_{15}(t)=P-\mu_1\tilde{G}^T+\mu_3\tilde{\mathcal{A}}^T(t)\tilde{G},$$

$$\Xi_{25}(t)=-\mu_2\tilde{G}^T+\mu_3\tilde{\mathcal{A}}_\eta^T(t)\tilde{G},\qquad \Xi_{55}=\eta_2^2Z_1+\eta_r^2Z_2-\mu_3 sym(\tilde{G}),$$

$$\eta_r=\eta_2-\eta_1.$$

**Preuve 10** Sous les conditions du Lemme 3.2, nous avons d'abord étudié la stabilité du système donné par l'équation (3.140) avec $W(t) \equiv 0$.

On considère la FLK suivante :

$$\begin{aligned}\tilde{V}(x(t)) = \tilde{x}^T(t)P\tilde{x}(t)+\int_{t-\eta(t)}^{t}\tilde{x}^T(s)Q_1\tilde{x}(s)\mathrm{d}s+\int_{t-\eta_1}^{t}\tilde{x}^T(s)Q_2\tilde{x}(s)\mathrm{d}s+\int_{t-\eta_2}^{t}\tilde{x}^T(s)Q_3\tilde{x}(s)\mathrm{d}s\\ +\eta_1\int_{-\eta_1}^{0}\int_{t+s}^{t}\dot{\tilde{x}}^T(\upsilon)Z_1\dot{\tilde{x}}(\upsilon)\mathrm{d}\upsilon\mathrm{d}s+\eta_r\int_{-\eta_2}^{-\eta_1}\int_{t+s}^{t}\dot{\tilde{x}}^T(\upsilon)Z_2\dot{\tilde{x}}(\upsilon)\mathrm{d}\upsilon\mathrm{d}s\end{aligned} \tag{3.144}$$

En dérivant la FLK (3.144), on obtient :

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{V}}(x(t)) = 2\dot{\tilde{x}}^T(t)P\tilde{x}(t)+\tilde{x}^T(t)(Q_1+Q_2+Q_3)\tilde{x}(t)\\ -(1-h_d)\tilde{x}^T(t-\eta(t))Q_1\tilde{x}(t-\eta(t))-\tilde{x}^T(t-\eta_1)Q_2\tilde{x}(t-\eta_1)-\tilde{x}^T(t-\eta_2)Q_3\tilde{x}(t-\eta_2)\\ +\dot{\tilde{x}}^T(t)(\eta_1^2Z_1+\eta_r^2Z_2)\dot{\tilde{x}}(t)-\eta_1\int_{t-\eta_1}^{t}\dot{\tilde{x}}^T(\upsilon)Z_1\dot{\tilde{x}}(\upsilon)\mathrm{d}\upsilon-\eta_r\int_{t-\eta_2}^{t-\eta_1}\dot{\tilde{x}}^T(\upsilon)Z_2\dot{\tilde{x}}(\upsilon)\mathrm{d}\upsilon\end{aligned} \tag{3.145}$$

Notons $\tilde{\psi}_1 = \tilde{x}(t)-\tilde{x}(t-\eta_1)$, $\tilde{\psi}_2 = \tilde{x}(t-\eta_1)-\tilde{x}(t-\eta(t))$ et $\tilde{\psi}_3 = \tilde{x}(t-\eta(t))-\tilde{x}(t-\eta_2)$, en utilisant l'inégalité de Jensen donnée par le Lemme (A.9), nous pouvons obtenir

$$-\eta_1\int_{t-\eta_1}^{t}\dot{\tilde{x}}^T(\upsilon)Z_1\dot{\tilde{x}}(\upsilon)\mathrm{d}\upsilon \le -\tilde{\psi}_1^TZ_1\tilde{\psi}_1 \tag{3.146}$$

et

$$\begin{aligned}-\eta_r\int_{t-\eta_2}^{t-\eta_1}\dot{\tilde{x}}^T(\upsilon)Z_2\dot{\tilde{x}}(\upsilon)\mathrm{d}\upsilon = -\eta_r\int_{t-\eta_2}^{t-\eta(t)}\dot{\tilde{x}}^T(\upsilon)Z_2\dot{\tilde{x}}(\upsilon)\mathrm{d}\upsilon-\eta_r\int_{t-\eta(t)}^{t-\eta_1}\dot{\tilde{x}}^T(\upsilon)Z_2\dot{\tilde{x}}(\upsilon)\mathrm{d}\upsilon\\ \le -\frac{\eta_r}{(\eta(t)-\eta_1)}\tilde{\psi}_2^TZ_2\tilde{\psi}_2-\frac{\eta_r}{(\eta_2-\eta(t))}\tilde{\psi}_3^T\bar{Z}_2\tilde{\psi}_3\end{aligned} \tag{3.147}$$

En utilisant le Lemme A.7, nous obtenons

$$-\eta_r\int_{t-\eta_2}^{t-\eta_1}\dot{\tilde{x}}^T(\upsilon)Z_2\dot{\tilde{x}}(\upsilon)\mathrm{d}\upsilon \le -\begin{bmatrix}\tilde{\psi}_2\\ \tilde{\psi}_3\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}Z_2 & S\\ * & Z_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{\psi}_2\\ \tilde{\psi}_3\end{bmatrix} \tag{3.148}$$

Pour toute matrice de dimension appropriée $\tilde{G}$, nous avons l'équation suivante :

$$2\big[\mu_1\tilde{x}^T(t)\tilde{G}^T+\mu_2\tilde{x}^T(t-\eta(t))\tilde{G}^T+\mu_3\dot{\tilde{x}}^T(t)\tilde{G}^T\big]\times\big[-\dot{\tilde{x}}(t)+\tilde{\mathcal{A}}(t)\tilde{x}(t)+\tilde{\mathcal{A}}_\eta(t)\tilde{x}(t-\eta(t))\big] = 0 \tag{3.149}$$

Combinant (3.145), (3.146), (3.148) et considérant (4.30), nous avons

$$\dot{\tilde{V}}(t) \le \chi^T(t)\bar{\Xi}(t)\chi(t) \tag{3.150}$$

où $\chi^T(t) = \begin{bmatrix}\tilde{x}^T(t) & \tilde{x}^T(t-\eta(t)) & \tilde{x}^T(t-\eta_1) & \tilde{x}^T(t-\eta_2) & \dot{\tilde{x}}^T(t)\end{bmatrix}$,

$$\bar{\Xi}(t) = \begin{bmatrix} \Xi_{11}(t) & \Xi_{12}(t) & Z_1 & 0 & \Xi_{15}(t) \\ * & \Xi_{22}(t) & Z_2-S^T & Z_2-S & \Xi_{25}(t) \\ * & * & -Q_2-Z_1-Z_2 & -S & 0 \\ * & * & * & Q_3-Z_2 & 0 \\ * & * & * & * & \Xi_{55} \end{bmatrix}.$$

Si (3.143) est vérifiée alors $\dot{\tilde{V}}(t) \leq 0$. Par conséquent, le système en boucle fermée (3.140) avec $W(t) \equiv 0$ est asymptotiquement stable. Maintenant, nous montrons que pour tout $W(t) \in l_2$, le système (3.140) satisfait (3.141) sous la condition initiale nulle. À cette fin, nous considérons l'indice de performance suivant :

$$J = \int_0^\infty (z^T(t)z(t) - \gamma^2 W^T(t)W(t))dt \tag{3.151}$$

Notons $\tilde{\psi}^T(t) = \begin{bmatrix}\chi^T(t) & W^T(t)\end{bmatrix}$. En suivant la même démarche que celle utilisée ci-dessus, nous obtenons :

$$\dot{\tilde{V}}(t)) - \gamma^2 W^T(t)W(t) + \tilde{\psi}^T(t)\mathbb{C}^T\mathbb{C}\tilde{\psi}(t) = \tilde{\psi}^T(t)\Xi(t)\tilde{\psi}(t) \tag{3.152}$$

où $\mathbb{C} = \begin{bmatrix}\tilde{\mathcal{C}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$.
Ensuite, d'après (3.143), nous concluons

$$\dot{\tilde{V}}(t) + z^T(t)z(t) - \gamma^2 W^T(t)W(t))dt < 0 \tag{3.153}$$

En intégrant (3.153) entre $\begin{bmatrix}t_0;\infty\end{bmatrix}$, nous obtenons :

$$\tilde{V}(x(t)) - \tilde{V}(x(t_0)) + \int_{t_0}^t z^T(t)z(t)dt - \int_{t_0}^t \gamma^2 W^T(t)W(t)dt < 0$$

Quand $t \to \infty$ et sous la condition initiale nulle, l'indice de performance $H_\infty$ est satisfait, $||z(t)||_2 < \gamma||W(t)||_2$, pour toute valeur non nulle $W(t) \in l_2$. ■

#### 3.5.2.1 Synthèse d'une commande floue en réseau basée sur observateur

– a. Cas nominal
En supposant $\Delta A_i(t) = 0$, $\Delta B_i(t) = 0$, et $\Delta B_{fi}(t) = 0$, les matrices du SCR (3.140) deviennent :

$$\tilde{\mathcal{A}}(t) = \sum_{i=1}^r h_i \begin{bmatrix} A_i & 0 \\ 0 & A_i - L_i C_2 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathcal{A}}_\eta(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i h_j^k \begin{bmatrix} B_i(K_j + \Delta(K_j)) & -B_i(K_j + \Delta(K_j)) \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{\mathcal{B}}_f(t) = \sum_{i=1}^r h_i \begin{bmatrix} B_{fi} \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \tilde{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Les conditions de synthèse sont données dans le Théorème suivant sous forme de LMIs :

**Théorème 3.5.3** Soient les scalaires $\eta_1 > 0$, $\eta_2 > 0$, $\mu_1$, $\mu_2$, $\mu_3$, $\delta_s$, $\delta_g$ et $\varphi_i$, le SCR en boucle fermée (3.140) est asymtotiquement stable et la performance $H_\infty$ est garantie pour un niveau d'atténuation $\gamma > 0$, s'ils existent des matrices positives $\tilde{P}$, $\tilde{Q}_1$, $\tilde{Q}_2$, $\tilde{Q}_3$, $\tilde{Z}_1$, $\tilde{Z}_2$, $S_i(i = 1,...,3)$ et des matrices $\tilde{S}$, $\hat{G}$, $g$, $Y_i$ et $F_i$ avec des dimensions appropriées, telles que les conditions suivantes vérifient :

$$\tilde{\Lambda}_{ii} < 0 \tag{3.154}$$

$$\tilde{\Lambda}_{ij}+\tilde{\Lambda}_{ji} < 0 \tag{3.155}$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{Z}_2 & \tilde{S} \\ * & \tilde{Z}_2 \end{bmatrix} > 0 \tag{3.156}$$

où

$$\tilde{\Lambda}_{ij} = \sum_{k=1}^{r} \varphi_k \hat{\Lambda}_{ik}+\hat{\Lambda}_{ij} \tag{3.157}$$

$$\hat{\Lambda}_{ij} = \begin{bmatrix} \tilde{\Xi}_{ij}+\tilde{\Gamma}_B^T(S_1+S_2+S_3)\tilde{\Gamma}_B & \mathbb{Y}_j{}^T\bar{\Delta}_s^T & \bar{\Delta}_g^T\mathbb{Y}_j{}^T & \bar{\Delta}_g^T\mathbb{Y}_j{}^T\bar{\Delta}_s^T \\ * & -S_1 & 0 & 0 \\ * & * & -S_2 & 0 \\ * & * & * & -S_3 \end{bmatrix} < 0 \tag{3.158}$$

$$\tilde{\tilde{\Xi}}_{ij} = \begin{bmatrix} \tilde{\tilde{\Xi}}_{11i} & \tilde{\tilde{\Xi}}_{12ij} & \tilde{Z}_1 & 0 & \tilde{\tilde{\Xi}}_{15i} & \mu_1\mathbf{B_{fi}} & \tilde{\tilde{\Xi}}_{17} \\ * & \tilde{\tilde{\Xi}}_{22ij} & \tilde{Z}_2-\tilde{S}^T & \tilde{Z}_2-\tilde{S} & \tilde{\tilde{\Xi}}_{25ij} & \mu_2\mathbf{B_{fi}} & 0 \\ * & * & -\tilde{Q}_2-\tilde{Z}_1-\tilde{Z}_2 & -\tilde{S} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & \tilde{Q}_3-\tilde{Z}_2 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & \tilde{\tilde{\Xi}}_{55} & \mu_3\mathbf{B_{fi}} & 0 \\ * & * & * & * & * & -\gamma^2 I & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -I \end{bmatrix} \tag{3.159}$$

$$\tilde{\Xi}_{11i} = \tilde{Q}_1+\tilde{Q}_2+\tilde{Q}_3+\mu_1 sym(\mathbf{A}_i)-\tilde{Z}_1, \qquad \tilde{\Xi}_{12ij} = \mu_2\mathbf{A}_i+\mu_1\mathbf{A}_{\eta ij}^T,$$
$$\tilde{\Xi}_{22ij} = \mu_2 sym(\mathbf{A}_{\eta ij})-(1-h_d)\tilde{Q}_1-2\tilde{Z}_2+Sym(\tilde{S}), \qquad \tilde{\Xi}_{15i} = \tilde{P}-\mu_1\mathbf{G}+\mu_3\mathbf{A}_i,$$
$$\tilde{\Xi}_{25ij} = -\mu_2\mathbf{G}^T+\mu_3\mathbf{A}_{\eta ij}, \qquad \tilde{\Xi}_{55} = \eta_2^2\tilde{Z}_1+\eta_r^2\tilde{Z}_2-\mu_3 sym(\mathbf{G}),$$
$$\tilde{\Xi}_{17} = \begin{bmatrix} C_1 g & C_1 \end{bmatrix}^T, \qquad \mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} A_i g & A_i \\ 0 & \hat{G}A_i-F_iC_2 \end{bmatrix},$$
$$\mathbf{A}_{\eta ij} = \begin{bmatrix} B_iY_j & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} g^T & I \\ 0 & \hat{G} \end{bmatrix},$$
$$\mathbf{B_{fi}} = \begin{bmatrix} B_{fi} \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbb{Y}_j = \begin{bmatrix} 0 & \tilde{Y}_j & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$
$$\tilde{Y}_j = \begin{bmatrix} Y_j & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbb{B} = \begin{bmatrix} B_i & B_i \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$
$$\tilde{\Gamma}_B = \begin{bmatrix} \mu_1\mathbb{B}^T & \mu_2\mathbb{B}^T & 0 & 0 & \mu_3\mathbb{B}^T & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \bar{\Delta}_s = diag(\bar{\delta}_s,\bar{\delta}_s),$$
$$\bar{\Delta}_g = diag(\bar{\delta}_g,\bar{\delta}_g,\bar{\delta}_g,\bar{\delta}_g,\bar{\delta}_g,\bar{\delta}_g,\bar{\delta}_g)$$

où $Y_i = K_i g$ et $F_i = \hat{G}L_i$.

**Preuve 11** A partir du Lemme A.4, les inégalités suivantes vérifient :

$$\begin{aligned} \Xi(t) &= \hat{\Pi}(t)+Sym(\Gamma_B^T\tilde{\Delta}_s\Gamma_K+\Gamma_B^T\Gamma_K\tilde{\Delta}_g+\Gamma_B^T\tilde{\Delta}_s\Gamma_K\tilde{\Delta}_g) \\ &\leq \hat{\Pi}(t)+\Gamma_B^T S_1\Gamma_B+\Gamma_K^T\bar{\Delta}_s^T S_1^{-1}\bar{\Delta}_s\Gamma_K+\Gamma_B^T S_2\Gamma_B \\ &+\bar{\Delta}_g^T\Gamma_K^T S_2^{-1}\Gamma_K\bar{\Delta}_g+\Gamma_B^T S_3\Gamma_B+\bar{\Delta}_g^T\Gamma_K^T\bar{\Delta}_s^T S_3^{-1}\bar{\Delta}_s\Gamma_K\bar{\Delta}_g < 0 \end{aligned} \tag{3.160}$$

où

$$\hat{\Pi}(t) = \begin{bmatrix} \Xi_{11}(t) & \hat{\Xi}_{12}(t) & Z_1 & 0 & \Xi_{15}(t) & \mu_1\tilde{G}^T\tilde{\mathcal{B}}_f(t) & \tilde{\mathcal{C}}^T \\ * & \hat{\Xi}_{22}(t) & Z_2-S^T & Z_2-S & \hat{\Xi}_{25}(t) & \mu_2\tilde{G}^T\tilde{\mathcal{B}}_f(t) & 0 \\ * & * & -Q_2-Z_1-Z_2 & -S & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & Q_3-Z_2 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & \Xi_{55} & \mu_3\tilde{G}^T\tilde{\mathcal{B}}_f(t) & 0 \\ * & * & * & * & * & -\gamma^2 I & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -I \end{bmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
\hat{\Xi}_{12}(t) &= \mu_2\tilde{\mathcal{A}}(t)^T\tilde{G}+\mu_1\tilde{G}^T\tilde{A}_\eta,\\
\hat{\Xi}_{22}(t) &= \mu_2 sym(\tilde{G}^T\tilde{A}_\eta)-(1-h_d)Q_1-2Z_2+Sym(S),\\
\hat{\Xi}_{25}(t) &= -\mu_2\tilde{G}^T+\mu_3\tilde{A}_\eta^T\tilde{G},\\
\tilde{A}_\eta &= \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}h_ih_j^k\begin{bmatrix}B_iK_j & -B_iK_j\\ 0 & 0\end{bmatrix},\\
\Gamma_B &= \sum_{i=1}^{r}h_i\begin{bmatrix}\mu_1\mathbb{B}^T\tilde{G} & \mu_2\mathbb{B}^T\tilde{G} & 0 & 0 & \mu_3\mathbb{B}^T\tilde{G} & 0 & 0\end{bmatrix},\\
\Gamma_K &= \sum_{i=1}^{r}h_j^k\begin{bmatrix}0 & \tilde{K}_j & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\\
\tilde{K}_j &= \begin{bmatrix}K_j & -K_j\\ 0 & 0\end{bmatrix},\\
\tilde{\Delta}_s &= diag(\Delta_s,\Delta_s)\leq\bar{\Delta}_s,\\
\tilde{\Delta}_g &= diag(\Delta_g,\Delta_g,\Delta_g,\Delta_g,\Delta_g,\Delta_g,\Delta_g)\leq\bar{\Delta}_g.
\end{aligned}
$$

D'après (3.143), on remarque que $\tilde{G}$ est inversible. Soit $\mathbb{G}=\tilde{G}^{-1}=\begin{bmatrix}g & G\\ 0 & G\end{bmatrix}$. Après avoir utilisé le complément de Schur et en appliquant le lemme de congruence à (3.160) par $diag(\mathbb{G},\mathbb{G},\mathbb{G},\mathbb{G},\mathbb{G},I,I)$, et en posant $\bar{P}=\mathbb{G}^TP\mathbb{G}$, $\bar{Q}_1=\mathbb{G}^TQ_1\mathbb{G}$, $\bar{Q}_2=\mathbb{G}^TQ_2\mathbb{G}$, $\bar{Q}_3=\mathbb{G}^TQ_3\mathbb{G}$, $\bar{Z}_1=\mathbb{G}^TZ_1\mathbb{G}$, $\bar{Z}_2=\mathbb{G}^TZ_2\mathbb{G}$, et $\bar{S}=\mathbb{G}^TS\mathbb{G}$ , nous obtenons que

$$
\begin{aligned}
\bar{\Lambda}(t) &= \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}h_ih_j^k\bar{\Lambda}_{ij} =\\
&\begin{bmatrix}\bar{\Pi}(t)+\tilde{\Gamma}_B^T(S_1+S_2+S_3)\tilde{\Gamma}_B & \mathbb{Y}^T(t)\bar{\Delta}_s^T & \bar{\Delta}_g^T\mathbb{Y}^T(t) & \bar{\Delta}_g^T\mathbb{Y}^T(t)\bar{\Delta}_s^T\\ * & -S_1 & 0 & 0\\ * & * & -S_2 & 0\\ * & * & * & -S_3\end{bmatrix} < 0
\end{aligned}
\tag{3.161}
$$

où

$$
\bar{\Pi}(t)=\begin{bmatrix}\bar{\Xi}_{11}(t) & \bar{\Xi}_{12}(t) & \bar{Z}_1 & 0 & \bar{\Xi}_{15}(t) & -\mu_1\tilde{B}_f(t) & \bar{\Xi}_{17}\\ * & \bar{\Xi}_{22}(t) & \bar{Z}_2-\bar{S}^T & \bar{Z}_2-\bar{S} & \bar{\Xi}_{25}(t) & -\mu_2\tilde{B}_f(t) & 0\\ * & * & \bar{\Xi}_{33} & -\bar{S} & 0 & 0 & 0\\ * & * & * & \bar{Q}_3-\bar{Z}_2 & 0 & 0 & 0\\ * & * & * & * & \bar{\Xi}_{55} & -\mu_3\tilde{B}_f(t) & 0\\ * & * & * & * & * & -\gamma^2I & 0\\ * & * & * & * & * & * & -I\end{bmatrix}
$$

$$\bar{\Xi}_{11}(t) = \bar{Q}_1+\bar{Q}_2+\bar{Q}_3+\mu_1 sym(\bar{\mathbb{A}})-\bar{Z}_1, \quad \bar{\Xi}_{12}(t) = \mu_2\bar{\mathbb{A}}^T+\mu_1\bar{\mathbb{A}}_\eta,$$
$$\bar{\Xi}_{22}(t) = \mu_2 sym(\bar{\mathbb{A}}_\eta)-(1-h_d)\bar{Q}_1-2\bar{Z}_2+Sym(\bar{S}), \quad \bar{\Xi}_{15}(t) = \bar{P}-\mu_1\mathbb{G}^T+\mu_3\bar{\mathbb{A}}^T,$$
$$\bar{\Xi}_{25}(t) = -\mu_2\mathbb{G}^T+\mu_3\bar{\mathbb{A}}_\eta^T, \quad \bar{\Xi}_{33} = -\bar{Q}_2-\bar{Z}_1-\bar{Z}_2,$$
$$\bar{\Xi}_{55} = \eta_2^2\bar{Z}_1+\eta_r^2\bar{Z}_2-\mu_3 sym(\mathbb{G}), \quad \bar{\Xi}_{17} = \mathbb{G}^T\tilde{\mathcal{C}}^T,$$
$$\bar{\mathbb{A}} = \tilde{\mathcal{A}}(t)\mathbb{G}, \quad \bar{\mathbb{A}}_\eta = \tilde{A}_\eta\mathbb{G}.$$

Définissons $\mathcal{G} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \hat{G} \end{bmatrix}$ avec $\hat{G} = G^{-1}$. En appliquant le lemme de congruence à (3.161) par $diag(\mathcal{G},\mathcal{G},\mathcal{G},\mathcal{G},\mathcal{G},I,I,I,I,I,I,I,I)$. En considérant (2.41), nous obtenons $\sum_{i=1}^r\sum_{j=1}^r h_i h_j^k\hat{\Lambda}_{ij} = \sum h_i^2\tilde{\Lambda}_{ii}+\sum_{i=1}^r\sum_{j=1}^r h_i h_j(\tilde{\Lambda}_{ij}+\tilde{\Lambda}_{ji}) < 0$. Notons $\tilde{P} = \mathcal{G}^T\bar{P}\mathcal{G}$, $\tilde{Q}_1 = \mathcal{G}^T\bar{Q}_1\mathcal{G}$, $\tilde{Q}_2 = \mathcal{G}^T\bar{Q}_2\mathcal{G}$, $\tilde{Q}_3 = \mathcal{G}^T\bar{Q}_3\mathcal{G}$, $\tilde{Z}_1 = \mathcal{G}^T\bar{Z}_1\mathcal{G}$, $\tilde{Z}_2 = \mathcal{G}^T\bar{Z}_2\mathcal{G}$, et $\tilde{S} = \mathcal{G}^T\bar{S}\mathcal{G}$. D'où, (3.154)-(3.155) sont vérifiées. ■

– b. cas incertain

Dans ce cas, nous supposons que les incertitudes $\Delta A_i(t)$, $\Delta B_i(t)$, et $\Delta B_{fi}(t)$ sont structurées.

En se basant sur la fonctionnelle de Lyapunov-Krasovski (3.144), nous obtenons le résultat suivant :

**Théorème 3.5.4** Soient les scalaires $\eta_1 > 0$, $\eta_2 > 0$, $\epsilon_i > 0$, $\mu_1$, $\mu_2$, $\mu_3$, $\varphi_i$, $\delta_s$, et $\delta_g$, le SCR en boucle fermée (3.140) est asymptotiquement stable et la performance $H_\infty$ est garantie pour un niveau d'atténuation $\gamma > 0$, s'ils existent des matrices positives $\tilde{P}$, $\tilde{Q}_1$, $\tilde{Q}_2$, $\tilde{Q}_3$, $\tilde{Z}_1$, $\tilde{Z}_2$, et $S_i(i = 1,...,6)$ et des matrices $\tilde{S}$, $\hat{G}$, $g$, $Y_i$ et $F_i$ de dimensions appropriées, telles que les conditions suivantes sont vérifiées :

$$\tilde{\Omega}_{ii} < 0 \tag{3.162}$$
$$\tilde{\Omega}_{ij}+\tilde{\Omega}_{ji} < 0 \tag{3.163}$$
$$\begin{bmatrix} \tilde{Z}_2 & \tilde{S} \\ * & \tilde{Z}_2 \end{bmatrix} > 0 \tag{3.164}$$

où

$$\tilde{\Omega}_{ij} = \sum_{k=1}^{r}\varphi_k\Omega_{ik}+\Omega_{ij} \tag{3.165}$$

$$\Omega_{ij} = \begin{bmatrix} \hat{\Lambda}_{ij} & \epsilon_i\bar{\mathcal{D}}_i & \bar{\mathcal{E}}_{ij}^T \\ * & -\epsilon_i I & 0 \\ * & * & -\epsilon_i I \end{bmatrix} < 0 \tag{3.166}$$

$$\bar{\mathcal{D}}_i = \begin{bmatrix} \tilde{D}_{Ai}^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{D}_{Bi}^T & \tilde{D}_{Bi}^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2\mu_1 D_{Bfi}^T & 2\mu_2 D_{Bfi}^T & 0 & 0 & 2\mu_3 D_{Bfi}^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mu_1 \tilde{D}_{\Delta Bi}^T & \mu_2 \tilde{D}_{\Delta Bi}^T & 0 & 0 & \mu_3 \tilde{D}_{\Delta Bi}^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T,$$

$$\bar{\mathcal{E}}_{ij} = \begin{bmatrix} \tilde{E}_{Ai} & \tilde{E}_{Ai} & 0 & 0 & \tilde{E}_{Ai} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{E}_{Bij} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_{Bfi} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{E}_{\Delta Bij} & \tilde{E}_{\Delta Bij} & 0 & 0 & \tilde{E}_{\Delta Bij} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{D}_{Ai} = \begin{bmatrix} D_{Ai} & 0 \\ \hat{G} D_{Ai} & 0 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{D}_{Bi} = \begin{bmatrix} D_{Bi} & 0 \\ \hat{G} D_{Bi} & 0 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{D}_{Bfi} = \begin{bmatrix} D_{Bfi}^T g & 0 \\ D_{Bfi}^T & 0 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{D}_{\Delta Bi} = \begin{bmatrix} D_{Bi} \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{E}_{Ai} = \begin{bmatrix} E_{Ai} g & E_{Ai} \end{bmatrix},$$

$$\tilde{E}_{Bij} = \begin{bmatrix} E_{Bi} Y_j & 0 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{E}_{\Delta Bij} = \begin{bmatrix} E_{Bi}^T & 0 \\ E_{Bi}^T & 0 \end{bmatrix}.$$

**Preuve 12** Dans cette partie, nous considérons $\Delta A_i(t)$, $\Delta B_i(t)$ et $\Delta B_{fi}(t) \neq 0$. En utilisant le Lemme A.3 et en appliquant le complément de Schur, nous obtenons le Théorème 3.5.4, où la partie incertitude est représentée par :

$$\bar{\Lambda}_{ij} = \hat{\Lambda}_{ij} + sym\Big(\bar{\mathcal{D}}_i \mathcal{F}(t) \bar{\mathcal{E}}_{ij}\Big) \leq \hat{\Lambda}_{ij} + \epsilon_i \bar{\mathcal{D}}_i \bar{\mathcal{D}}_i^T + \epsilon_i^{-1} \bar{\mathcal{E}}_{ij}^T \bar{\mathcal{E}}_{ij} \tag{3.167}$$

avec $\mathcal{F}(t) = diag(F(t), F(t), F(t), F(t))$. D'où, nous concluons que l'observateur flou (3.131) existe et garantie au système en boucle fermée (3.140) d'être asymptotiquement stable. ■

### 3.5.3 Application à la commande en réseau de la dynamique latérale

Dans cette section, nous présentons la validation en simulation de l'approche proposée afin d'améliorer la stabilité du véhicule tout en prenant en compte des variations de l'état de la route et les actions du conducteur. Les SCRs doivent assurer la stabilité globale en présence des incertitudes paramétriques dues aux variations d'adhérence de la route, pour cela nous avons réalisé une série de simulations.

Le SCR avec les retards induits par le réseau est montré dans la Figure 3.31, où $\tau^{sc}$ est le retard entre le capteur-contrôleur et $\tau^{ca}$ est le retard contrôleur-actionneur. Nous supposons que le temps de calcul du contrôleur peut être absorbé soit par $\tau^{sc}$ soit par $\tau^{ca}$.

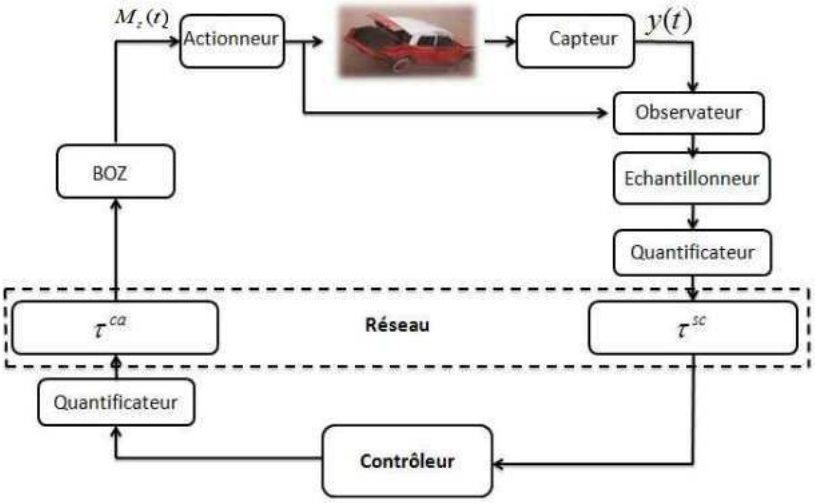


Figure 3.31: Schéma du système commandé en réseau

Le système non linéaire que nous utilisons est le modèle bicyclette donné par (2.24) est décrit par le modèle (3.101).
L'observateur global flou est représenté comme suit :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^{r} h_i[A_i\hat{x}(t)+B_{fi}\delta_f(t)+BM_Z(t)+L_i(y(t)-\hat{y}(t))] \\ \hat{y}(t) = C_2\hat{x}(t) \end{cases} \tag{3.168}$$

où $\hat{x}(t) = \begin{bmatrix}\beta_e(t)^T & r_e(t)^T\end{bmatrix}^T$ et les différentes matrices sont données par l'équation (3.102).

Les paramètres reliés au réseau sont supposés égaux à : retard minimum $\eta_1 = 5ms$, retard maximum $\eta_2 = 20ms$ et le nombre maximum de pertes de paquets est $\bar{\sigma} = 2$. Les retards variables dans le temps entre le capteur et le contrôleur et entre le contrôleur et l'actionneur sont générés aléatoirement $\min(\tau^{sc}+\tau^{ca}) \geq \eta_1$, et $\max(\tau^{sc}+\tau^{ca}+(\bar{\sigma}+1)T_e) \leq \eta_2$ et les pertes de paquets sont aussi générées aléatoirement données par $max(Ne) \leq 2$, où $Ne$ est le nombre de paquets perdus, $S_1 = 10^3\begin{bmatrix}1.1166 & -0.0639\\ -0.0639 & 1.1133\end{bmatrix}$, $S_2 = 10^3\begin{bmatrix}1.1134 & -0.0638\\ -0.0638 & 1.1133\end{bmatrix}$, et $S_3 = 10^3\begin{bmatrix}1.1133 & -0.0638\\ -0.0638 & 1.1133\end{bmatrix}$. Les quantificateurs s(.) et g(.) sont choisis logarithmiques avec $\delta_\omega = 0.001$, $\eta_r = 0.1$, $\epsilon_i = 5$, $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 0.1$ et $\mu_3 = 0.2$.

La résolution des conditions de stabilité du Théorème 3.5.4 nous donne les gains du contrôleur $K_i$ et les gains de l'observateur $L_i$ suivants :

$$K_1 = 10^4\begin{bmatrix}-1.5070 & 0.5147\end{bmatrix}, \quad K_2 = 10^4\begin{bmatrix}0.8762 & -2.1182\end{bmatrix},$$
$$L_1 = \begin{bmatrix}1.2317\\6.1302\end{bmatrix}, \qquad L_2 = \begin{bmatrix}-0.6181\\9.7892\end{bmatrix} \tag{3.169}$$

nous obtenons également les résultats suivants :

$$\hat{G} = 10^4\begin{bmatrix}341.0605 & -32.2049\\-26.1085 & 292.1919\end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix}0.0045 & 0.0029\\0.0037 & 0.0119\end{bmatrix} \tag{3.170}$$

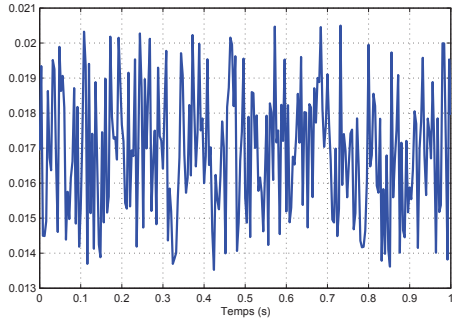


Figure 3.32: Retards induits par le réseau.

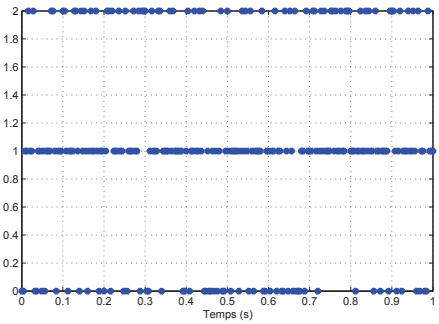


Figure 3.33: Pertes de paquets de données.

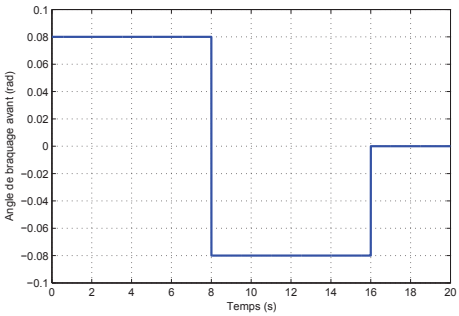


Figure 3.34: Angle de braquage avant

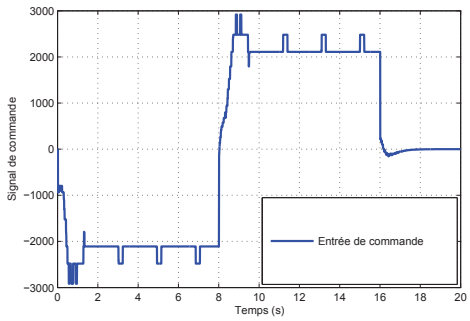


Figure 3.35: Courbe du moment $M_Z$ après application des deux quantificateurs un avant et un après le contrôleur.

L'angle de braquage appliqué est représenté sur la Figure 3.34. Les retards induits par le réseau et les paquets de données perdus sont générés aléatoirement et représentés sur la Figure 3.32 et la Figure 3.33. En premier lieu, nous avons considéré le cas en boucle ouverte, nous remarquons que le comportement du véhicule est stable mais avec des valeurs de vitesse du lacet et d'angle de glissement latéral très importantes comme le montre la Figure 3.36 et la Figure 3.37.

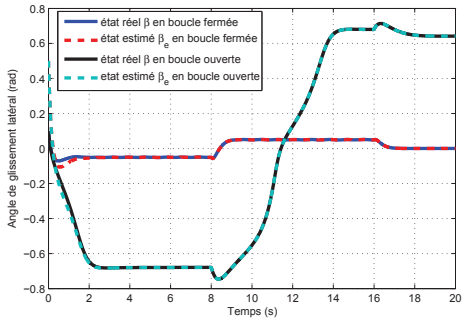


Figure 3.36: Réponses et estimés de l'angle de glissement latéral.

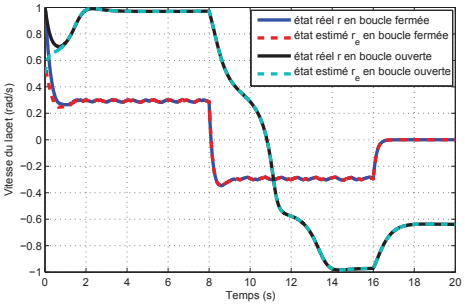


Figure 3.37: Réponses et estimés de la vitesse du lacet .

Ainsi, afin d'améliorer la stabilité du véhicule, nous avons testé la méthode proposée en tenant compte du retard induit par le réseau, les pertes de paquets et les mesures quantifiées dans la synthèse de la commande robuste en utilisant les gains (3.169). La Figure 3.36 et la Figure 3.37 montrent l'évolution des variables d'états et la Figure 3.35 montre l'entrée de commande dans ce cas. Nous remarquons que notre approche est efficace et arrive à stabiliser le véhicule à travers la communication en réseau.

Pour la simulation, la condition initiale est supposée être $x_0 = [0.1,1]^T$, la période d'échantillonnage est choisie par $T_e = 4ms$ et les matrices d'incertitude sont $d_i = 0.01$, et $f_i = \sin(6t)$.
L'entrée de commande est représentée dans la Figure 3.35, à partir de laquelle nous pouvons voir le comportement discontinu du signal. Les réponses des états des SCRs avec entrée de commande sont représentées dans les Figures 3.36 et 3.37 qui montrent que les variables estimées convergent vers les variables d'état mesurées. Les résultats de simulation sont conformes à l'analyse de la stratégie de conception développée.

## 3.6 Conclusion

Dans ce chapitre, la commande floue en réseau mono actionneur a été étudiée et ses performances analysées en utilisant différentes architectures de commande (retour d'état statique, retour de sortie statique, retour d'état reconstruit). Des conditions de stabilité et de stabilisation permettant la synthèse de lois de commande PDC centralisées qui opère à travers un réseau de communication ont été proposées. En effet, nos principales contributions de ce chapitre concernent la stabilisation des systèmes non linéaires décrits par des modèles flous de type Takagi Sugeno (TS) incluant les contraintes liées à la transmission d'information en réseau, au rejet de perturbations, aux variations paramétriques et à la non-fragilité de la commande.

Chapitre

# 4

# Commande floue décentralisée des systèmes de grande dimension

Sommaire


4.1 Introduction

4.2 Systèmes flous interconnectés en réseau et architecture de commande adoptée

4.3 Conclusion


## 4.1 Introduction

Au cours des trois dernières décennies, la commande décentralisée des systèmes de grande dimension (connus sous le nom des systèmes interconnectés dans certains ouvrages) a reçu une attention considérable en raison de son large domaine d'application (les systèmes électriques, les systèmes aéronautiques, les réacteurs nucléaires et les systèmes de contrôle de processus, etc)[Scorletti et Duc, 2001, Park, 2001, 2002, Xiao et Mao, 2011]. Ce chapitre est dédié à l'étude de la stabilisation des systèmes non linéaires de grande dimension décrits par plusieurs modèles flous de type TS interconnectés. Après la présentation des architectures de commande décentralisée dédiée aux systèmes flous de grande dimension, nous étudierons le problème de synthèse de la commande en réseau par retour d'état flou ensuite par retour de sortie statique de cette classe des systèmes de grande dimension. Pour les deux architectures de commande, des conditions de synthèse formulées en termes des LMIs, incluant les contraintes dues au réseau de communication seront proposées. Enfin, des applications au contrôle global du véhicule seront présentées pour illustrer les approches proposées.

## 4.2 Systèmes flous interconnectés en réseau et architecture de commande adoptée

Dans cette section, nous nous intéressons à la commande décentralisée des systèmes interconnectés. L'idée de la décentralisation consiste à décomposer l'information de mesure et développer une loi de commande locale et indépendante pour chaque sous-système [Bakule, 2008]. La figure 4.1 montre la structure de commande décentralisée :

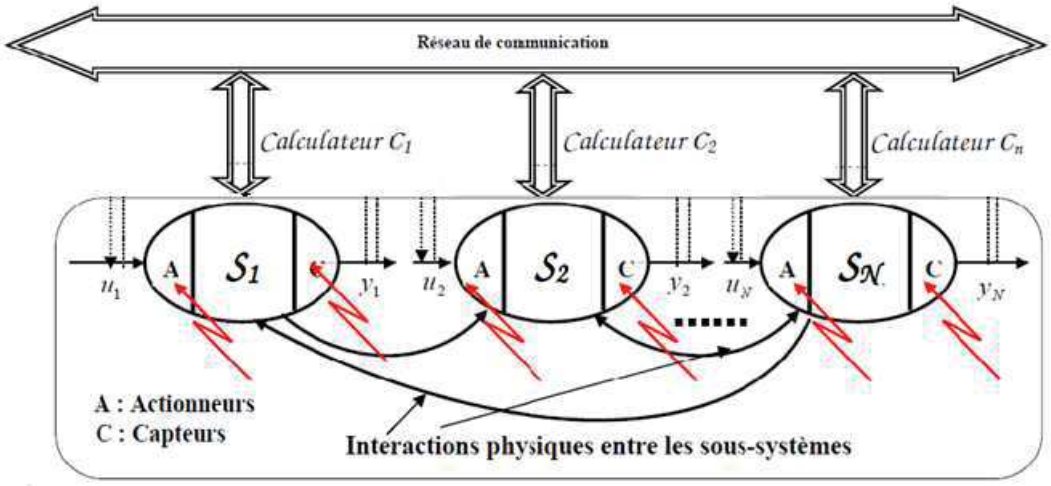


Figure 4.1: Commande décentralisée [Menighed, 2010].

### 4.2.1 Description des systèmes flous de type TS de grande dimension

On considère un système de grande dimension $S$ composé de $J$ sous-systèmes interconnectés $S_i$, $i = 1,2,...,J$. Le $i^{eme}$ sous-système $S_i$ est décrit par le modèle flou TS suivant :

$$S_i : \begin{cases} \text{Si } \theta_{i1}(t) \text{ est } F_{i1}^l \text{ et } \theta_{ig}(t) \text{ est } F_{ig}^l \text{ alors} \\ \dot{x}_i(t) = A_i^l x_i(t) + B_i^l u_i(t) + \sum_{j=1}^{J} f_{ij}^l(x_j(t)) \\ y_i(t) = C_{2i} x_i(t) \end{cases} \tag{4.1}$$

avec $i = 1,2,...,J$, $l = 1,2...,r_i$, où $x_i(t)$ est le vecteur d'état, $y_i(t)$ représente la sortie mesurée, $u_i(t)$ est l'entrée de commande, $A_i^l$, $B_i^l$ et $C_{2i}$ sont des matrices réelles constantes de dimensions appropriées, $\theta_{i1}(t)$,$\theta_{i2}(t)$,...,$\theta_{ig}(t)$, des variables de prémisse pour les sous-systèmes $S_i$, $F_{iq}^l(q = 1,2,...,g)$ représentent les ensembles flous des règles linguistiques, $f_{ij}^l(x_j(t))$ représente l'interconnexion entre le sous-système $S_i$ et le sous-système $S_j$, et $r_i$ représente le nombre de règles floues dans le sous-système $S_i$. Les matrices $C_{2i}$ sont supposées de rand plein.

En utilisant la défuzzification par la méthode du centre de gravité, le système flou TS s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = \sum_{l=1}^{r_i} h_i^l(\theta_i(t))[A_i^l x_i(t) + B_i^l u_i(t) + \sum_{j=1}^{J} f_{ij}^l(x_j(t))] \\ y_i(t) = C_{2i} x_i(t) \end{cases} \tag{4.2}$$

où

$$h_i^l(\theta_i(t)) = \frac{\upsilon_i^l(\theta_i(t))}{\sum_{l=1}^{r_i} \upsilon_i^l(\theta_i(t))}, \quad \upsilon_i^l(\theta_i(t)) = \prod_{q=1}^{g} F_{iq}^l(\theta_{iq}(t)) \tag{4.3}$$

Où $F_{iq}^l(\theta_{iq}(t))$ est le degré d'appartenance de $\theta_{iq}(t)$ à l'ensemble flou $F_{iq}^l$. $h_i^l(\theta_i(t))$ sont les fonctions d'appartenance qui satisfont les propriétés suivantes :

$$0 \leq h_i^l(\theta_i(t)) \leq 1, \text{ for } l = 1,2,...,r_i, \sum_{l=1}^{r_i} h_i^l(\theta_i(t)) = 1 \tag{4.4}$$

On suppose que le système $S$ sera commandé à travers un réseau. La Figure 4.2 représente la structure de la commande en réseau d'un système $S_i$ induisant des retards, où $\tau^{sci}$ est le retard entre le capteur et contrôleur et $\tau^{cai}$ est le retard contrôleur-actionneur. Nous supposons que le temps de calcul du contrôleur pour chaque sous-système peut être absorbé soit par $\tau^{sci}$ soit par $\tau^{cai}$.

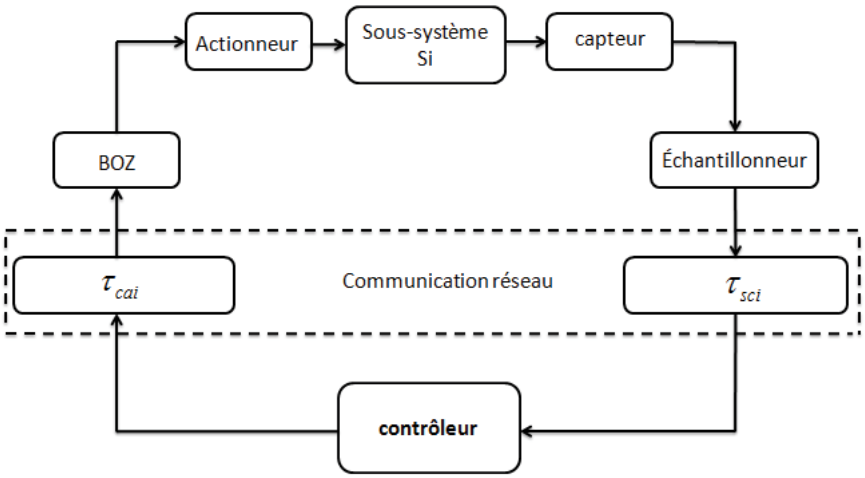


Figure 4.2: Structure du sous-système commandé en réseau $S_i$

On suppose les hypothèses suivantes :

1. Toutes les paires $(A_i^l, B_i^l)$ $(i = 1,2,...,J$ et $l = 1,2,..,r_i)$ sont stabilisables.[Wang et Lin, 2005]
2. L'interconnexion $f_{ij}^l(x_j(t))$ satisfait la condition suivante : $\|f_{ij}^l(x_j(t))\| \leq \bar{f}_{ij}^l \|x_j(t)\|$, où $\bar{f}_{ii}^l = 0$, $\bar{f}_{ij}^l (i \neq j)$ est une constante positive qui correspond à la norme euclidienne de $f_{ij}^l(x_j(t))$.

3. Les capteurs sont commandés par une horloge, le contrôleur et les actionneurs sont pilotés par des événements.
4. Les données sont transmises dans un seul paquet, soit à partir de la mesure ou de la commande.
5. La commande réelle $u_i(t)$ pour chaque sous-système est réalisée grâce à un bloqueur d'ordre zéro (BOZ).

### 4.2.2 Synthèse de la loi de commande PDC robuste par retour d'état sans communication en réseau

Dans cette section, nous allons présenter un résultat basé sur l'analyse de la stabilité du système en boucle fermée sans communication en réseau (4.5) en utilisant la fonction de Lyapunov-Krasovskii quadratique simple (4.10).
Le système flou de type TS est donné comme suit :

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{l=1}^{r_i} h_i^l(\theta_i(t))[(A_{i0}^l+\Delta A_i^l)x_i(t)+B_i u_i(t)+\sum_{j=1}^{J} f_{ij}^l(x_j(t))] \tag{4.5}$$

Pour stabiliser le modèle flou de type TS (4.5), une commande PDC est utilisée :

$$u_i(t) = \sum_{l=1}^{r_i} h_i^l(\theta_i(t))K_i^l x_i(t) \tag{4.6}$$

En remplaçant dans l'équation (4.5) la commande $u_i(t)$ par son expression donnée dans l'équation (4.6), nous obtenons le modèle en boucle fermée suivant :

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{l=1}^{r_i} h_i^l(\theta_i(t))((A_{i0}^l+\Delta A_i^l+B_i K_i^l)x_i(t)+\sum_{j=1}^{J} f_{ij}^l(x_j(t))) \tag{4.7}$$

La synthèse du contrôleur est basée sur le résultat préliminaire donné par le Lemme 4.1 suivant :

**Lemme 4.1** Soit le scalaire $\mu_1$, le système en boucle fermée (4.7) est asymptotiquement stable, s'ils existent des matrices positives $P_i$, et des matrices $G_i$, de dimensions appropriées, telle que la condition suivante est vérifiée :

$$\Phi_{ij}^{ll} = \begin{bmatrix} \Phi_{11ijl} & \Phi_{12il} \\ * & \Phi_{22i} \end{bmatrix} < 0 \tag{4.8}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_{11ijl} &= sym(G_i^T(A_{i0}^l+\Delta A_i^l)+G_i^T B_i K_i^l)+G_i^T G_i+(2J\sum_{j=1}^{J}\hat{f}_{ji}^2)I,\\
\Phi_{12il} &= \mu_1(A_{i0}^{lT}+\Delta A_i^{lT})G_i+\mu_1 K_i^{lT}B_i^T G_i^T-G_i+P_i,\\
\Phi_{22i} &= -\mu_1 sym(G_i)+\mu_1^2 G_i^T G_i,
\end{aligned}$$

**Preuve 13** La stabilité du système bouclé est établie en considérant la fonction de Lyapunov quadratique :

$$V(t) = \sum_{i=1}^{J} v_i(t),\ i = 1,2,...,J \tag{4.9}$$

Où $v_i(t)$ désigne la fonction de Lyapunov-Krasovskii correspondante au sous-système $S_i$. Chaque $v_i(t)$ est définie comme suit :

$$v_i((t)) = x_i^T(t) P_i x_i(t) \tag{4.10}$$

La dérivée de $v_i(t)$ est donnée par :

$$\dot{v}_i(t) \leq 2\dot{x}_i^T(t) P_i x_i(t) \tag{4.11}$$

A partir de (4.7), nous déduisons l'expression suivante pour toutes matrices de dimensions appropriées $G_i$, :

$$2\sum_{i=1}^{J}\left[x_i^T(t)G_i^T + \dot{x}_i^T(t)\mu_1 G_i^T\right] \times \left[-\dot{x}_i(t) + \sum_{l=1}^{r_i} h_i^l(\theta_i(t))((A_{i0}^l + \Delta A_i^l + B_i K_i^l)x_i(t) + \sum_{j=1}^{J} f_{ij}^l(x_j(t)))\right] = 0 \tag{4.12}$$

Définissons $\Psi_i^T(t) = \begin{bmatrix} x_i^T(t) & \dot{x}_i^T(t) \end{bmatrix}$.
D'après le lemme A.8 et le lemme A.9, nous avons

$$\begin{aligned} 2\sum_{i=1}^{J} x_i^T(t)G_i^T \sum_{j=1}^{J} f_{ij}^l(x_j(t)) &\leq \sum_{i=1}^{J} x_i^T(t)G_i^T G_i x_i(t) + \sum_{i=1}^{J}\sum_{j=1}^{J} f_{ij}^{lT}(x_j(t)) \sum_{j=1}^{J} f_{ij}^l(x_j(t)) \\ &\leq \sum_{i=1}^{J} x_i^T(t)G_i^T G_i x_i(t) + J\sum_{i=1}^{J}\sum_{j=1}^{J} f_{ij}^{lT}(x_j(t)) f_{ij}^l(x_j(t)) \end{aligned} \tag{4.13}$$

D'autre part, nous avons

$$\begin{aligned} 2\sum_{i=1}^{J} x_i^T(t)G_i^T \sum_{j=1}^{J} f_{ij}^l(x_j(t)) &\leq \sum_{i=1}^{J} x_i^T(t)G_i^T G_i x_i(t) + J\sum_{i=1}^{J}\sum_{j=1}^{J} f_{ij}^{lT}(x_j(t)) f_{ij}^l(x_j(t)) \\ &\leq \sum_{i=1}^{J} x_i^T(t)(G_i^T G_i + J\sum_{i=1}^{J}\sum_{j=1}^{J} \hat{f}_{ji}^2) I) x_i(t) \end{aligned} \tag{4.14}$$

avec $\hat{f}_{ij} = \max_l \bar{f}_{ij}^l$.

$$2\sum_{i=1}^{J} \mu_1 \dot{x}_i^T(t)G_i^T \sum_{j=1}^{J} f_{ij}^l(x_j(t)) \leq \mu_1^2 \sum_{i=1}^{J} \dot{x}_i^T(t))G_i^T G_i \dot{x}_i(t) + \sum_{i=1}^{J} x_i^T(t)(J\sum_{j=1}^{J} \hat{f}_{ji}^2 I) x_i(t) \tag{4.15}$$

la dérivée de (4.9) du système en boucle fermée (4.7) peut être décrite comme suit

$$\dot{V}(t) = \sum_{i=1}^{J} \dot{v}_i(t) \leq \sum_{i=1}^{J}\sum_{l=1}^{r_i} h_i^l(\theta_i(t)) \Psi_i^T(t) \Phi_{ij}^{ll} \Psi_i(t) \leq 0 \tag{4.16}$$

D'après le Lemme 4.1, nous avons $\dot{v}_i(t) < 0$, alors le système (4.7) est asymptotiquement stable. ■

L'objectif est maintenant de déterminer les matrices des gains $K_i^l$ tel que le système en boucle fermée par retour d'état soit asymptotiquement stable.
Les conditions de synthèse sont résumées dans le théorème suivant :

**Théorème 4.2.1** Soient les scalaires $\mu_1$ et $\epsilon_l > 0$, le système en boucle fermée (4.7) est asymptotiquement stable, s'ils existent des matrices positives $\tilde{P}_i$, et des matrices $\tilde{G}_i$, et $Y_i^l$, de dimensions appropriées, telles que les conditions suivantes sont vérifiées :

$$\tilde{\Phi}_{ij}^{ll} = \begin{bmatrix} \tilde{\Phi}_{11il} & \tilde{\Phi}_{12il} & \tilde{G}_i^T & \epsilon_l \tilde{\mathcal{D}}_l & \tilde{\mathcal{E}}_{il} \\ * & \tilde{\Phi}_{22i} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & \tilde{\Phi}_{33ij} & 0 & 0 \\ * & * & * & -\epsilon_l I & 0 \\ * & * & * & * & -\epsilon_l I \end{bmatrix} < 0 \tag{4.17}$$

$$\tilde{\Phi}_{11il} = sym(A_{i0}^l \tilde{G}_i + B_i Y_i^l) + I, \qquad \tilde{\Phi}_{12il} = \mu_1 \tilde{G}_i^T (A_{i0}^l)^T + \mu_1 B_i Y_i^l - \tilde{G}_i + \tilde{P}_i,$$
$$\tilde{\Phi}_{22i} = -\mu_1 sym(\tilde{G}_i) + \mu_1^2 I, \qquad \tilde{\Phi}_{33ij} = -(2J \sum_{j=1}^{J} \hat{f}_{ji}^2)^{-1} I$$

et

$$\tilde{\mathcal{D}}_l = \begin{bmatrix} -D_A^{lT} & -\mu_1 D_A^{lT} & 0 \\ -D_A^{lT} & -\mu_1 D_A^{lT} & 0 \end{bmatrix}^T, \qquad \tilde{\mathcal{E}}_{il} = \begin{bmatrix} E_{Ai}^l \tilde{G}_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Les gains du contrôleur sont donnés par $K_i^l = Y_i^l G_i$.

**Preuve 14** Les conditions du Théorème 4.2.1 impliquent que $\tilde{G}_i$ sont inversibles. Soient $G_i = \tilde{G}_i^{-1}$, $\tilde{P}_i = \tilde{G}_i^T P_i \tilde{G}_i$, $\tilde{\mathcal{D}}_l = \tilde{G}_i^T \mathcal{D}_l$ et $\tilde{\mathcal{E}}_{il} = \tilde{G}_i^T \mathcal{E}_{il}$.
En appliquant le lemme de congruence (donné en annexe A) à (4.17) avec la matrice de congruence $diag\{G_i, G_i, I, I, I\}$, et en utilisant le lemme A.3 donné dans l'annexe A, nous obtenons $\Phi_{ij}^{ll} = \hat{\Phi}_{ij}^{ll} + \Delta\Phi_{ij}^{ll} \leq 0$, avec

$$\hat{\Phi}_{ij}^{ll} = \begin{bmatrix} \hat{\Phi}_{11il} & \hat{\Phi}_{12il} & I \\ * & \hat{\Phi}_{22i} & 0 \\ * & * & \tilde{\Phi}_{33ij} \end{bmatrix} \tag{4.18}$$

$$\hat{\Phi}_{11il} = sym(G_i^T A_{i0}^l + G_i^T B_i K_i^l) + G_i^T G_i, \qquad \hat{\Phi}_{12il} = \mu_1 A_{i0}^{lT} G_i + \mu_1 K_i^{lT} B_i^T G_i - G_i^T + P_i,$$
$$\hat{\Phi}_{22i} = -\mu_1 sym(G_i) + \mu_1^2 G_i^T G_i,$$

et avec la partie incertitude est représentée par :

$$\Delta\Phi_{ij}^{ll} = sym\Big(\mathcal{D}_l \mathcal{F}(t) \mathcal{E}_{il}\Big) \tag{4.19}$$

où

$$\mathcal{F}(t) = diag(F(t),F(t)).$$

Ainsi, il existe un contrôleur flou (4.6) tel que le système en boucle fermée (4.7) est asymptotiquement stable. ■

### 4.2.3 Commande en réseau PDC robuste par retour d'état

Dans cette section, nous présentons une contribution à la synthèse de la commande floue en réseau (4.20) des systèmes non linéaires interconnectés (4.24).
La structure du contrôleur flou PDC en réseau du sous-système $S_i$ est définie comme suit :

$$u_i(t_k) = \sum_{l=1}^{r_i} h_i^l(\theta_i(t_k))K_i^l x_i(t_k - \tau_{ki}).$$

En utilisant le BOZ, le signal de commande pour chaque sous-système $S_i$ pour $t_k \leq t \leq t_{k+1}$ est donné par

$$u_i(t) = \sum_{l=1}^{r_i} h_i^l(\theta_i(t_k))K_i^l x_i(t_k - \tau_{ki}) \tag{4.20}$$

Dans la suite, nous posons $h_i^l = h_i^l(\theta_i(t))$ et $h_i^{lk} = h_i^l(\theta_i(t_k))$ pour simplifier l'écriture.
Une hypothèse naturelle $\tau_{ki}$ est donnée par :

$$0 < \tau_{mi} \leq \tau_{ki} \leq \tau_{Mi} \tag{4.21}$$

En utilisant les équations (4.5) et (4.20), le système commandé en réseau est décrit pour $t_k \leq t \leq t_{k+1}$ par

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{l=1}^{r_i}[h_i^l(A_{i0}^l + \Delta A_i^l)x_i(t) + h_i^{lk}(B_i K_i^l x_i(t - \tau_{ki})) + h_i^l \sum_{j=1}^{J} f_{ij}^l(x_j(t))] \tag{4.22}$$

Définissons $\eta_i(t) = t - t_k + \tau_{ki}, \quad t_k \leq t \leq t_{k+1}$, d'où

$$\tau_{ki} \leq \eta_i(t) \leq \bar{\sigma}_i T_e + \max_i\{\tau_{(k+1)i}\}$$

Ainsi nous obtenons à partir de [Gomes Da Silva Jr *et al.*, 2011] que

$$\eta_{1i} \leq \eta_i(t) \leq \eta_{2i}, \quad \dot{\eta}_i(t) \leq h_{di} \tag{4.23}$$

où

$$\eta_{1i} = \tau_{mi} \quad \text{et} \quad \eta_{2i} = \bar{\sigma}_i T_e + \max_i\{\tau_{Mi}\}.$$

comme $\sum_{k=0}^{\infty}[t_k,t_{k+1}) = [0,\infty)$, nous avons

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = \sum_{l=1}^{r_i}[h_i^l(A_{i0}^l+\Delta A_i^l)x_i(t)+h_i^{lk}(B_iK_i^lx_i(t-\eta_i(t)))+h_i^l\sum_{j=1}^{J}f_{ij}^l(x_j(t))] \\ x_i(t) = \phi_i(t), \quad t \in [t_0-\eta_{2i},t_0] \end{cases} \tag{4.24}$$

où $\phi_i(t)$ représente la condition initiale du système commandé en boucle fermée. Comme dans (4.23), le SCR (4.24) est équivalent à un système avec retard variable dans le temps.

**Lemme 4.2** Soient les scalaires $\eta_{1i} > 0$ et $\eta_{2i} > 0$, le système en boucle fermée (4.24) est asymptotiquement stable, s'ils existent des matrices $P_i$, $Q_{1i}$, $Q_{2i}$, $Q_{3i}$, $Z_{1i}$, et des matrices $G_{1i}$, $G_{2i}$ et $G_{3i}$, de dimensions appropriées, telles que les conditions suivantes soient vérifiées :

$$\Xi_{ij} = \begin{bmatrix} \Xi_{11ij} & \Xi_{12i} & Z_{1i} & 0 & \Xi_{15i} & I \\ * & \Xi_{22i} & 0 & 0 & \Xi_{25ij} & 0 \\ * & * & -Q_{2i}-Z_{1i} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -Q_{3i} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & \Xi_{55i} & 0 \\ * & * & * & * & * & \Xi_{66ij} \end{bmatrix} < 0 \tag{4.25}$$

$$\begin{aligned} \Xi_{11ij} &= Q_{1i}+Q_{2i}+Q_{3i}+sym(G_{1i}^TA_i^l)-Z_{1i}+G_{1i}^TG_{1i}, \\ \Xi_{12i} &= A_i^{lT}G_{2i}+G_{1i}^TB_i^lK_i^s, \\ \Xi_{22i} &= sym(G_{2i}^TB_i^lK_i^s)-(1-h_{di})Q_{1i}+G_{2i}^TG_{2i}, \\ \Xi_{15i} &= P_i-G_{1i}^T+A_i^{lT}G_{3i}, \\ \Xi_{25ij} &= -G_{2i}^T+K_i^{sT}B_i^{lT}G_{3i}, \\ \Xi_{55i} &= \eta_{1i}^2Z_{1i}-sym(G_{3i})+G_{3i}^TG_{3i}, \\ \Xi_{66ij} &= -(3J\sum_{j=1}^{J}\hat{f}_{ji}^2)^{-1}I \end{aligned}$$

**Preuve 15** Soit la fonction de Lyapunov-Krasovskii :

$$V(t) = \sum_{i=1}^{J}v_i(t),\ i = 1,2,...,J \tag{4.26}$$

Où $v_i(t)$ désigne la fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii correspondante au sous-système $S_i$. Chaque $v_i(t)$ est définie comme suit :

$$\begin{aligned} v_i(t) = x_i^T(t)P_ix_i(t)+\int_{t-\eta_i(t)}^{t}x_i^T(s)Q_{1i}x_i(s)\mathrm{d}s+\int_{t-\eta_{1i}}^{t}x_i^T(s)Q_{2i}x_i(s)\mathrm{d}s \\ +\int_{t-\eta_{2i}}^{t}x_i^T(s)Q_{3i}x_i(s)\mathrm{d}s+\eta_{1i}\int_{-\eta_{1i}}^{0}\Big(\int_{t+s}^{t}\dot{x}_i^T(\upsilon)Z_{1i}\dot{x}_i(\upsilon)\mathrm{d}\upsilon\Big)\mathrm{d}s \end{aligned} \tag{4.27}$$

La dérivée de $v_i(t)$ est donnée par

$$\begin{aligned}\dot{v}_i(t) \leq\ & 2\dot{x}_i^T(t)P_ix_i(t)+x_i^T(t)(Q_{1i}+Q_{2i}+Q_{3i})x_i(t)-(1-h_{di})x_i^T(t-\eta_i(t))Q_{1i}x_i(t-\eta_i(t)) \\ & -x_i^T(t-\eta_{1i})Q_{2i}x_i(t-\eta_{1i})-x_i^T(t-\eta_{2i})Q_{3i}x_i(t-\eta_{2i})+\dot{x}_i^T(t)(\eta_{1i}^2Z_{1i})\dot{x}_i(t) \\ & -\eta_{1i}\int_{t-\eta_{1i}}^{t}\dot{x}_i^T(\upsilon)Z_{1i}\dot{x}_i(\upsilon)\mathrm{d}\upsilon\end{aligned} \tag{4.28}$$

Soit $\psi_{1i}=x_i(t)-x_i(t-\eta_{1i})$, en utilisant l'inégalité de Jensen donnée par l'équation (A.9), nous obtenons

$$-\eta_{1i}\int_{t-\eta_{1i}}^{t}\dot{x}_i^T(\upsilon)Z_{1i}\dot{x}_i(\upsilon)\mathrm{d}\upsilon \leq -\psi_{1i}^TZ_{1i}\psi_{1i} \tag{4.29}$$

A partir de (4.24), nous avons pour toutes matrices de dimensions appropriées $G_{1i}$, $G_{2i}$, et $G_{3i}$ l'équation suivante :

$$\begin{aligned}&2\sum_{i=1}^{J}\left[x_i^T(t)G_{1i}^T+x_i^T(t-\eta_i(t))G_{2i}^T+\dot{x}_i^T(t)G_{3i}^T\right]\times\left[-\dot{x}_i(t)+\sum_{l=1}^{r_i}h_i^l(A_i^lx_i(t)+\sum_{s=1}^{r_i}h_i^{sk}B_i^lK_i^sx_i(t-\eta_i(t))\right. \\ &\left.+\sum_{j=1}^{J}f_{ij}^l(x_j))\right]=0\end{aligned} \tag{4.30}$$

On définit $\Psi_i^T(t)=\begin{bmatrix}x_i^T(t) & x_i^T(t-\eta_i(t)) & x_i^T(t-\eta_{1i}) & x_i^T(t-\eta_{2i}) & \dot{x}_i^T(t)\end{bmatrix}$.
D'après le Lemme A.8 et le Lemme A.9, nous avons

$$\begin{aligned}2\sum_{i=1}^{J}x_i^T(t)G_{1i}^T\sum_{j=1}^{J}f_{ij}^l(x_j) &\leq \sum_{i=1}^{J}x_i^T(t)G_{1i}^TG_{1i}x_i(t)+\sum_{i=1}^{J}\sum_{j=1}^{J}f_{ij}^{lT}(x_j)\sum_{j=1}^{J}f_{ij}^l(x_j) \\ &\leq \sum_{i=1}^{J}x_i^T(t)G_{1i}^TG_{1i}x_i(t)+J\sum_{i=1}^{J}\sum_{j=1}^{J}f_{ij}^{lT}(x_j)f_{ij}^l(x_j)\end{aligned} \tag{4.31}$$

D'autre part, nous avons

$$\begin{aligned}2\sum_{i=1}^{J}x_i^T(t)G_{1i}^T\sum_{j=1}^{J}f_{ij}^l(x_j) &\leq \sum_{i=1}^{J}x_i^T(t)G_{1i}^TG_{1i}x_i(t)+J\sum_{i=1}^{J}\sum_{j=1}^{J}f_{ij}^{lT}(x_j)f_{ij}^l(x_j) \\ &\leq \sum_{i=1}^{J}x_i^T(t)(G_{1i}^TG_{1i}+J\sum_{i=1}^{J}\sum_{j=1}^{J}\hat{f}_{ji}^2I)x_i(t)\end{aligned} \tag{4.32}$$

avec $\hat{f}_{ij}=\max_l\bar{f}_{ij}^l$.

$$2\sum_{i=1}^{J}x_i^T(t-\eta_i(t))G_{2i}^T\sum_{j=1}^{J}f_{ij}^l(x_j) \leq \sum_{i=1}^{J}x_i^T(t-\eta_i(t))G_{2i}^TG_{2i}x_i(t-\eta_i(t))+\sum_{i=1}^{J}x_i^T(t)(J\sum_{j=1}^{J}\hat{f}_{ji}^2)I)x_i(t) \tag{4.33}$$

$$2\sum_{i=1}^{J}\dot{x}_i^T(t)G_{3i}^T\sum_{j=1}^{J}f_{ij}^l(x_j) \leq \sum_{i=1}^{J}\dot{x}_i^T(t))G_{3i}^TG_{3i}\dot{x}_i(t)+\sum_{i=1}^{J}x_i^T(t)(J\sum_{j=1}^{J}\hat{f}_{ji}^2I)x_i(t) \tag{4.34}$$

La dérivée de (4.26) du système en boucle fermée (4.24) s'écrit comme suit :

$$\dot{V}(t)=\sum_{i=1}^{J}\dot{v}_i(t)\leq\sum_{i=1}^{J}\sum_{l=1}^{r_i}\sum_{s=1}^{r_i}h_i^l h_i^{sk}\Psi_i^T(t)\Xi_{ij}\Psi_i(t)\leq 0 \tag{4.35}$$

D'après le Lemme 4.2 et après avoir appliqué le lemme de Schur donné dans l'annexe A, nous obtenons $\dot{v}_i(t)<0$, alors le système (4.24) est asymptotiquement stable. ■

La synthèse des contrôleurs est donnée dans le théorème suivant en utilisant le Lemme 4.2 et les hypothèses 4.2.1.

**Théorème 4.2.2** Soient les scalaires $\eta_{1i}>0$, $\eta_{2i}>0$, $\epsilon_l$, $\mu_1$, $\mu_2$ et $\mu_3$, le système en boucle fermée (4.24) est asymptotiquement stable, s'ils existent des matrices positives $\bar{P}_i$, $\bar{Q}_{1i}$, $\bar{Q}_{2i}$, $\bar{Q}_{3i}$, $\bar{Z}_{1i}$, et les matrices inversibles $\bar{G}_i$ et $Y_i^l$, de dimensions appropriées, telles que les conditions suivantes soient vérifiée :

$$\bar{\Phi}_{ij}^{ll}=\begin{bmatrix}\bar{\Phi}_{11il} & \bar{\Phi}_{12il} & \bar{Z}_{1i} & 0 & \bar{\Phi}_{15il} & \bar{G}_i^T & \epsilon_l\bar{\mathcal{D}}_l & \bar{\mathcal{E}}_{il}\\ * & \bar{\Phi}_{22il} & 0 & 0 & \bar{\Phi}_{25il} & 0 & 0 & 0\\ * & * & -\bar{Q}_{2i}-\bar{Z}_{1i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ * & * & * & -\bar{Q}_{3i} & 0 & 0 & 0 & 0\\ * & * & * & * & \bar{\Phi}_{55i} & 0 & 0 & 0\\ * & * & * & * & * & \bar{\Phi}_{66ij} & 0 & 0\\ * & * & * & * & * & * & -\epsilon_l I & 0\\ * & * & * & * & * & * & * & -\epsilon_l I\end{bmatrix}<0 \tag{4.36}$$

$$\begin{aligned}
&\bar{\Phi}_{11il}=\bar{Q}_{1i}+\bar{Q}_{2i}+\bar{Q}_{3i}+\mu_1 sym(A_{i0}^l\bar{G}_i)-\bar{Z}_{1i}+\mu_1^2 I, && \bar{\Phi}_{12il}=\mu_2\bar{G}_i^T(A_{i0}^l)^T+\mu_1 B_i Y_i^l,\\
&\bar{\Phi}_{22il}=\mu_2 sym(B_i Y_i^l)-(1-h_{di})\bar{Q}_{1i}+\mu_2^2 I, && \bar{\Phi}_{15il}=\bar{P}_i-\mu_1\bar{G}_i+\mu_3\bar{G}_i^T(A_{i0}^l)^T,\\
&\bar{\Phi}_{25il}=-\mu_2\bar{G}_i+\mu_3(Y_i^l)^T(B_i)^T, && \bar{\Phi}_{55i}=\eta_{1i}^2\bar{Z}_{1i}-\mu_3 sym(\bar{G}_i)+\mu_3^2 I,\\
&\bar{\Phi}_{66ij}=-(3J\sum_{j=1}^{J}\hat{f}_{ji}^2)^{-1}I.
\end{aligned}$$

et

$$\bar{\mathcal{D}}_l=\begin{bmatrix}-\mu_1 D_A^{lT} & -\mu_2 D_A^{lT} & 0 & 0 & -\mu_3 D_A^{lT} & 0\\ -\mu_1 D_A^{lT} & -\mu_2 D_A^{lT} & 0 & 0 & -\mu_3 D_A^{lT} & 0\end{bmatrix}^T,$$

$$\bar{\mathcal{E}}_{il}=\begin{bmatrix}E_{Ai}^l\bar{G} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

avec $Y_i^l=K_i^l\bar{G}$.

**Preuve 16** La faisabilité des conditions du Théorème 4.2.2 implique que $\bar{\Phi}_{55i}<0$. Pa conséquent, $\bar{G}_i$ est inversible. On pose $G_i=\bar{G}_i^{-1}$, $\bar{P}_i=\bar{G}_i^T P_i\bar{G}_i$, $\bar{Q}_{1i}=\bar{G}_i^T Q_{1i}\bar{G}_i$, $\bar{Q}_{2i}=\bar{G}_i^T Q_{2i}\bar{G}_i$, $\bar{Q}_{3i}=\bar{G}_i^T Q_{3i}\bar{G}_i$ et $\bar{Z}_{1i}=\bar{G}_i^T Z_{1i}\bar{G}_i$, $\bar{\mathcal{D}}_l=\bar{G}^T\mathcal{D}_l$, et $\bar{\mathcal{E}}_{il}=\bar{G}^T\mathcal{E}_{il}$.

En appliquant le lemme de congruence à (4.36) par $diag\{G_i,G_i,G_i,G_i,G_i,I,I,I\}$ et à partir du Lemme A.3, l'équation (4.25) est vérifiée, c'est à dire que $\Phi_{ij} = \tilde{\Phi}_{ij}+\Delta\Phi_{ij} < 0$, avec

$$\tilde{\Phi}_{ij} = \begin{bmatrix} \tilde{\Phi}_{11il} & \tilde{\Phi}_{12il} & Z_{1i} & 0 & \tilde{\Phi}_{15il} & I \\ * & \tilde{\Phi}_{22il} & 0 & 0 & \tilde{\Phi}_{25il} & 0 \\ * & * & -Q_{2i}-Z_{1i} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -Q_{3i} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & \Phi_{55i} & 0 \\ * & * & * & * & * & \bar{\Phi}_{66ij} \end{bmatrix} < 0 \tag{4.37}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_{11il} &= Q_{1i}+Q_{2i}+Q_{3i}+sym(G_{1i}^T A_{i0}^l)-Z_{1i}+G_{1i}^T G_{1i}, \\ \tilde{\Phi}_{12il} &= A_{i0}^{lT} G_{2i}+G_{1i}^T B_i K_i^l, \\ \tilde{\Phi}_{22il} &= sym(G_{2i}^T B_i K_i^l)-(1-h_{di})Q_{1i}+G_{2i}^T G_{2i}, \\ \tilde{\Phi}_{15il} &= P_i-G_{1i}^T+A_{i0}^{lT} G_{3i}, \\ \tilde{\Phi}_{25il} &= -G_{2i}^T+K_i^{lT} B_i^T G_{3i}, \end{aligned}$$

et avec la partie des incertitudes est représentée par :

$$\Delta\Phi_{ij} = sym\Big(\mathcal{D}_l \mathcal{F}(t)\mathcal{E}_{il}\Big) \tag{4.38}$$

où

$$\mathcal{F}(t) = diag(F(t),F(t)).$$

Ainsi, il existe un contrôleur flou (4.20) tel que le système en boucle fermée (4.24) est asymptotiquement stable.

■

### 4.2.4 Commande en réseau par retour de sortie

Dans cette section, notre attention sera focalisée sur la synthèse d'un contrôleur en réseau par retour de sortie statique pour stabiliser le système non linéaire interconnecté. Le schéma de commande de type PDC sera considéré pour chaque sous système $S_i$. Le contrôleur flou PDC global en réseau qui correspond à $S_i$ est défini par :

$$u_i(t_k) = \sum_{l=1}^{r_i} h_i^{lk} K_i^l y_i(t_k-\tau_{ki}). \tag{4.39}$$

Comme dans le paragraphe précédent, la dynamique du système en boucle fermée s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = \sum_{l=1}^{r_i} h_i^l [A_i^l x_i(t)+\sum_{s=1}^{r_i} h_i^{sk} B_i^l K_i^s C_{2i} x_i(t-\eta_i(t))+\sum_{j=1}^{J} f_{ij}^l(x_j)] \\ y_i(t) = C_{2i} x_i(t) \\ x_i(t) = \phi_i(t), t \in [t_0-\eta_{2i},t_0] \end{cases} \tag{4.40}$$

où $\phi_i(t)$ représente la condition initiale du système commandé en boucle fermée. Le SCR (4.40) est équivalent à un système avec retard variable dans le temps.

**Lemme 4.3** Soient les scalaires $\eta_{1i} > 0$ et $\eta_{2i} > 0$, le système en boucle fermée (4.40) est asymptotiquement stable, s'ils existent des matrices $P_i$, $Q_{1i}$, $Q_{2i}$, $Q_{3i}$, $Z_{1i}$, et des matrices $G_{1i}$, $G_{2i}$ et $G_{3i}$, de dimensions appropriées, telles que les conditions suivantes soient vérifiées :

$$\Gamma_{ij} = \begin{bmatrix} \Gamma_{11ij} & \Gamma_{12i} & Z_{1i} & 0 & \Gamma_{15i} & I \\ * & \Gamma_{22i} & 0 & 0 & \Gamma_{25ij} & 0 \\ * & * & -Q_{2i}-Z_{1i} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -Q_{3i} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & \Gamma_{55i} & 0 \\ * & * & * & * & * & \Gamma_{66ij} \end{bmatrix} < 0 \tag{4.41}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11ij} &= Q_{1i}+Q_{2i}+Q_{3i}+sym(G_{1i}^T A_i^l)-Z_{1i}+G_{1i}^T G_{1i}, \\
\Gamma_{12i} &= A_i^{lT} G_{2i}+G_{1i}^T B_i^l K_i^s C_{2i}, \\
\Gamma_{22i} &= sym(G_{2i}^T B_i^l K_i^s C_{2i})-(1-h_{di})Q_{1i}+G_{2i}^T G_{2i}, \\
\Gamma_{15i} &= P_i-G_{1i}^T+A_i^{lT} G_{3i}, \\
\Gamma_{25ij} &= -G_{2i}^T+C_{2i}^T K_i^{sT} B_i^{lT} G_{3i}, \\
\Gamma_{55i} &= \eta_{1i}^2 Z_{1i}-sym(G_{3i})+G_{3i}^T G_{3i}, \\
\Gamma_{66ij} &= -(3J\sum_{j=1}^{J}\hat{f}_{ji}^2)^{-1} I
\end{aligned}$$

**Preuve 17** En suivant la même démarche de la preuve du Lemme 4.2, la dérivée de (4.26) du système en boucle fermée (4.40) s'écrit comme suit :

$$\dot{V}(t) = \sum_{i=1}^{J} \dot{v}_i(t) \leq \sum_{i=1}^{J}\sum_{l=1}^{r_i}\sum_{s=1}^{r_i} h_i^l h_i^{sk} \Psi_i^T(t)\Gamma_{ij}\Psi_i(t) \leq 0 \tag{4.42}$$

D'après le Lemme 4.3 et après avoir appliqué le lemme de Schur donné dans l'annexe A, nous obtenons $\dot{v}_i(t) < 0$, alors le système (4.40) est asymptotiquement stable. ■

L'objectif maintenant est de proposer une technique permettant de déterminer les matrices des gains $K_i^l$ des retours de sorties tel que le système en boucle fermée (4.40) soit asymptotiquement stable.

**Théorème 4.2.3** [Latrach *et al.*, 2015] Soient les scalaires $\eta_{1i} > 0$, $\eta_{2i} > 0$, $\mu_1$, $\mu_2$, $\mu_3$ et $\varphi_l$ , le système en boucle fermée (4.40) est asymptotiquement stable, s'ils existent des matrices positives $\bar{P}_i$, $\bar{Q}_{1i}$, $\bar{Q}_{2i}$, $\bar{Q}_{3i}$, $\bar{Z}_{1i}$, et des matrices $\hat{G}_{11i} > 0$, $\hat{G}_{21i} > 0$ et

$\hat{G}_{22i} > 0$, et $Y_i^s$, de dimensions appropriées, telles que les conditions suivantes sont vérifiées :

$$\bar{\Gamma}_{ii}^{ll} < 0 \tag{4.43}$$

$$\bar{\Gamma}_{ij}^{ls} + \bar{\Gamma}_{ij}^{sl} < 0, \quad j > i, \quad s > l \tag{4.44}$$

où

$$\bar{\Gamma}_{ij}^{ls} = \sum_{k=1}^{r} \varphi_k \hat{\Gamma}_{ik}^{ls} + \hat{\Gamma}_{ij}^{ls} \tag{4.45}$$

$$\hat{\Gamma}_{ij}^{ls} = \begin{bmatrix} \bar{\Gamma}_{11il} & \bar{\Gamma}_{12ils} & \bar{Z}_{1i} & 0 & \bar{\Gamma}_{15il} & \bar{G}_i^T \\ * & \bar{\Gamma}_{22ils} & 0 & 0 & \bar{\Gamma}_{25ils} & 0 \\ * & * & -\bar{Q}_{2i} - \bar{Z}_{1i} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\bar{Q}_{3i} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & \bar{\Gamma}_{55i} & 0 \\ * & * & * & * & * & \bar{\Gamma}_{66ij} \end{bmatrix} \tag{4.46}$$

$$\bar{\Gamma}_{11il} = \bar{Q}_{1i} + \bar{Q}_{2i} + \bar{Q}_{3i} + \mu_1 sym(A_i^l \bar{G}_i) - \bar{Z}_{1i} + \mu_1^2 I, \qquad \bar{\Gamma}_{12ils} = \mu_2 \bar{G}_i^T (A_i^l)^T + \mu_1 B_i^l Y_i^s C_{2i},$$

$$\bar{\Gamma}_{22ils} = \mu_2 sym(B_i^l Y_i^s C_{2i}) - (1 - h_{di}) \bar{Q}_{1i} + \mu_2^2 I, \qquad \bar{\Gamma}_{15il} = \bar{P}_i - \mu_1 \bar{G}_i + \mu_3 \bar{G}_i^T (A_i^l)^T,$$

$$\bar{\Gamma}_{25ils} = -\mu_2 \bar{G}_i + \mu_3 C_{2i}^T (Y_i^s)^T (B_i^l)^T, \qquad \bar{\Gamma}_{55i} = \eta_{1i}^2 \bar{Z}_{1i} - \mu_3 sym(\bar{G}_i) + \mu_3^2 I,$$

$$\bar{\Gamma}_{66ij} = -(3J \sum_{j=1}^{J} \hat{f}_{ji}^2)^{-1} I, \qquad \bar{G}_i = V_i \begin{bmatrix} \hat{G}_{11i} & 0 \\ \hat{G}_{21i} & \hat{G}_{22i} \end{bmatrix} V_i^T.$$

Les gains du contrôleur sont donnés par $K_i^s = Y_i^s W_i S_i \hat{G}_{11i}^{-1} S_i^{-1} W_i^T$, où $W_i$, $S_i$ et $V_i$ sont obtenus à partir de la décomposition SVD (Singular value decomposition) de $C_{2i}$.

**Preuve 18** En utilisant les conditions du Théorème 4.2.3, on peut déduire que $\bar{\Phi}_{55i} < 0$. Ce qui implique que $\bar{G}_i$ est inversible. on pose $G_i = \bar{G}_i^{-1}$, $\bar{P}_i = \bar{G}_i^T P_i \bar{G}_i$, $\bar{Q}_{1i} = \bar{G}_i^T Q_{1i} \bar{G}_i$, $\bar{Q}_{2i} = \bar{G}_i^T Q_{2i} \bar{G}_i$, $\bar{Q}_{3i} = \bar{G}_i^T Q_{3i} \bar{G}_i$ et $\bar{Z}_{1i} = \bar{G}_i^T Z_{1i} \bar{G}_i$.

Supposons que $C_{2i}$ est de rang plein, on dfinit la décomposition SVD (Singular value decomposition) de $C_{2i}$ telle que $W_i^T C_{2i} V_i = \begin{bmatrix} S_i & 0 \end{bmatrix}$ et nous obtenons que $\bar{G}_i = V_i \begin{bmatrix} \hat{G}_{11i} & 0 \\ \hat{G}_{21i} & \hat{G}_{22i} \end{bmatrix} V_i^T$, d'où

$$\begin{aligned} C_{2i} \bar{G}_i &= W_i [S_i \quad 0] V_i^T V_i \begin{bmatrix} \hat{G}_{11i} & 0 \\ \hat{G}_{21i} & \hat{G}_{22i} \end{bmatrix} V_i^T = W_i [S_i \hat{G}_{11i} \quad 0] V_i^T \\ &= W_i S_i \hat{G}_{11i} S_i^{-1} W_i^T W_i [S_i \quad 0] V_i^T = \hat{G}_i C_{2i} \end{aligned}$$

Soit $Y_i^l = K_i^l \hat{G} = K_i^l W_i S_i \hat{G}_{11i} S_i^{-1} W_i^T$, après l'application du lemme de congruence à (4.43)-(4.44) par $diag\{G_i,G_i,G_i,G_i,G_i,I\}$, on peut déduire que la condition (4.41) est vérifiée en considérant (4.4) et le Lemme A.11.

Ainsi il existe un contrôleur flou (4.39) tel que le système en boucle fermée (4.40) est asymptotiquement stable. ■

### 4.2.5 Résultats de simulation

**Exemple 4.1** Pour illustrer l'approche proposée dans le Théorème 4.2.3, nous considérons l'exemple numérique donné dans [Guelton *et al.*, 2010], composé de deux sous-systèmes $S_1$ et $S_2$ décrits respectivement par les modèles suivants :

– Sous-système $S_1$ :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \sum_{l=1}^{2} h_1^l(\theta_1(t))[A_1^l x_1(t) + B_1^l u_1(t) + \sum_{j=1}^{J} f_{1j}(x_j(t))] \\ y_1(t) = C_{21} x_1(t) \end{cases} \tag{4.47}$$

avec

$$A_1^1 = \begin{bmatrix} -6 & 6 & 0 \\ 0.5 & -3 & 1 \\ 0 & 0.2 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_1^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0.1 & 0 \\ -0.2 & -2 & 0 \\ 0.3 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B_1^1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$B_1^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.2 & 0.1 \end{bmatrix}, \quad f_{11} = 0, \quad f_{12} = \begin{bmatrix} 0.02 & 0.01 \\ 0.01 & 0.4 \\ 0.01 & 0.1 \end{bmatrix} x_2,$$

$$h_1^1(x_1(t)) = sin^2(x_{11}(t)), \quad h_1^2(x_1(t)) = cos^2(x_{11}(t)).$$

– Sous-système $S_2$ :

$$\begin{cases} \dot{x}_2(t) = \sum_{l=1}^{2} h_2^l(\theta_2(t))[A_2^l x_2(t) + B_2^l u_2(t) + \sum_{j=1}^{J} f_{2j}(x_j(t))] \\ y_2(t) = C_{22} x_2(t) \end{cases} \tag{4.48}$$

avec

$$A_2^1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_2^2 = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B_2^1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$B_2^2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad C_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.1 & 1 \end{bmatrix}, \quad f_{21} = \begin{bmatrix} 0.01 & 0.01 & 0.01 \\ 0.02 & 0.01 & 0.1 \end{bmatrix} x_1, \quad f_{22} = 0,$$

$$h_2^1(x_2(t)) = sin^2(x_{21}(t)), \quad h_2^2(x_2(t)) = cos^2(x_{21}(t)).$$

Les paramètres liés au réseau pour chaque sous-système $S_i$ sont : la période d'échantillonnage $T_e = 0.4ms$, le retard minimum est $\eta_{1i} = 4ms$, le retard maximum est $\eta_{2i} = 20ms$ et le nombre maximum de perte de paquets est $\bar{\sigma}_i = 3$.

Les retards variables dans le temps entre le capteur et le contrôleur ainsi qu'entre le contrôleur et l'actionneur sont aléatoirement générés telle que $\min(\tau_{sci}+\tau_{cai}) \geq \eta_{1i}$, et $\max(\tau_{sci}+\tau_{cai}+(\bar{\sigma}_i+1)T_e) \leq \eta_{2i}$ et les pertes de paquets sont également générées de manière aléatoire telle que $max(Ne) \leq 3$, où $Ne$ est le nombre de paquets perdus, $h_{di} = 0.1$, $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 0.3$, $\mu_3 = 0.5$ et $\varphi_i = min\{1, 0.5\eta_{2i}\} = 0.01$.

Afin de stabiliser le système flou interconnecté décrit par l'équation (4.47) et (4.48), un système de contrôle décentralisé constitué de deux contrôleurs flous locaux de la forme (4.39), est développé. Chaque contrôleur local permet d'assurer la stabilité du sous-système correspondant en tenant compte des interconnexions avec l'autre sous-système et les effets du réseau de communication.

En résolvant les conditions du Théorème 4.2.3, nous trouvons les gains des contrôleurs suivants :

– Gains pour le sous-système $S_1$ :

$$K_1^1 = \begin{bmatrix} -0.5397 & 1.6549 \\ 0.2716 & -0.3336 \end{bmatrix}, K_1^2 = \begin{bmatrix} -0.2760 & 1.1662 \\ 0.3195 & -0.8928 \end{bmatrix} \tag{4.49}$$

– Gains pour le sous-système $S_2$ :

$$K_2^1 = \begin{bmatrix} 0.2231 & -2.2500 \end{bmatrix}, K_2^2 = \begin{bmatrix} 0.1233 & -1.2608 \end{bmatrix} \tag{4.50}$$

En simulation, les conditions initiales sont :

$$x_1(0) = \begin{bmatrix} 1 & .5 & -1 \end{bmatrix}^T, \text{ et } x_2(0) = \begin{bmatrix} 2 & -2 \end{bmatrix}^T. \tag{4.51}$$

Les courbes des variables d'état des SCRs et les signaux de commande sont présentés dans les Figures 4.5, 4.6, et 4.7. Nous pouvons noter que tous les états convergent vers zéro et les retards induits par le réseau et les pertes de paquets d'information sont générés de façon aléatoire et sont montrés dans les Figures 4.3 et 4.4.
Par conséquent, d'après le Théorème 4.2.3, le système flou de grande dimension en boucle fermée composé de deux sous-systèmes $S_1$, et $S_2$ est asymptotiquement stable.

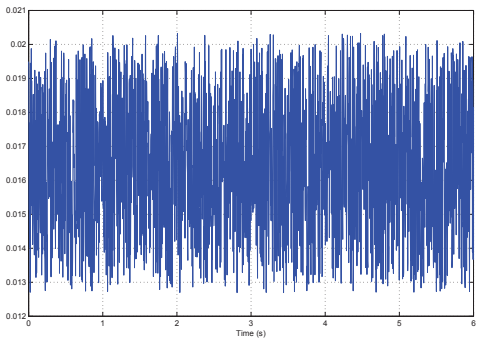


Figure 4.3: Retard induit par la communication en réseau.

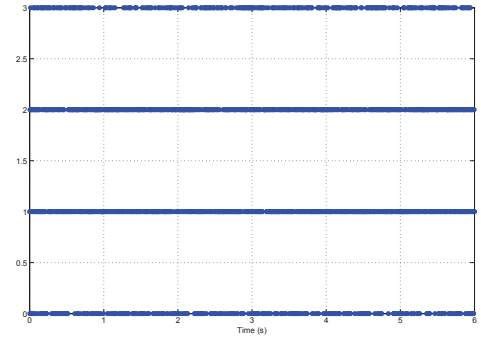


Figure 4.4: Pertes de paquets d'informations.

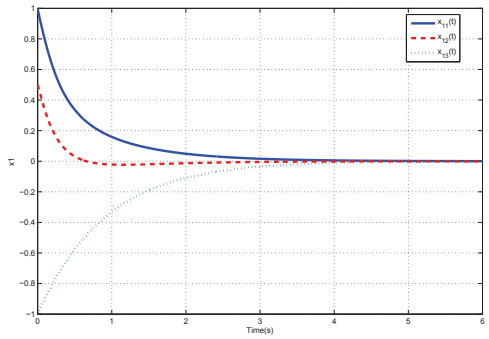


Figure 4.5: Réponses des états $x$ dans $S_1$

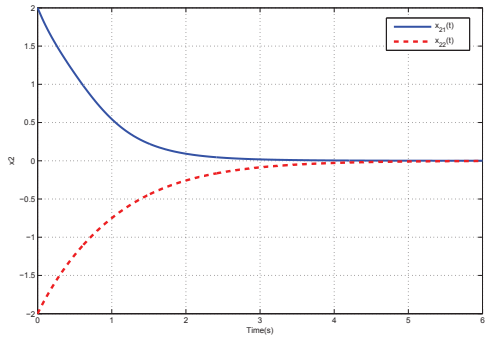


Figure 4.6: Réponses des états $x$ dans $S_2$ .

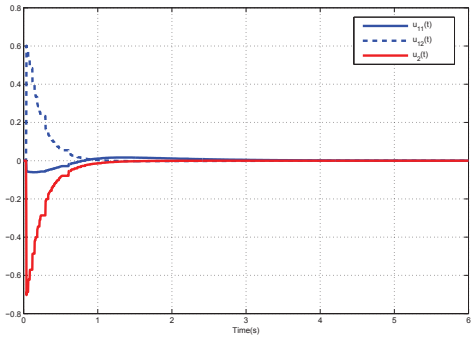


Figure 4.7: Courbes des signaux de commande $u_i(t)$.

**Exemple 4.2** Nous considérons le système de grande dimension $S$ composé par trois sous-systèmes $S_i$, $i$ = 1,2,3, donné dans [Wang et Lin, 2005] pour illustrer l'approche donnée par le Théorème 4.2.3.

– Sous-système $S_1$ :

Règle 1 :

Si $x_{11}(t)$ est petit et $x_{12}(t)$ est grand alors

$$\dot{x}_1(t) = A_1^1 x_1(t) + B_1^1 u_1 + \sum_{j=1}^{3} f_{1j}(x_j(t))$$

$$y_1(t) = C_{11} x_1(t)$$

Règle 2 :

Si $x_{11}(t)$ est petit et $x_{12}(t)$ est petit alors

$$\dot{x}_1(t) = A_1^2 x_1(t) + B_1^2 u_1 + \sum_{j=1}^{3} f_{1j}(x_j(t))$$

$$y_1(t) = C_{11} x_1(t)$$

Règle 3 :

Si $x_{11}(t)$ est grand et $x_{12}(t)$ est petit alors

$$\dot{x}_1(t) = A_1^3 x_1(t) + B_1^3 u_1 + \sum_{j=1}^{3} f_{1j}(x_j(t))$$

$$y_1(t) = C_{11} x_1(t)$$

où

$$A_1^1 = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1.5 & -2.2 \end{bmatrix}, A_1^2 = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}, A_1^3 = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -6 & -11 \end{bmatrix},$$

$$B_1^1 = \begin{bmatrix} 0.15 \\ 0.1 \end{bmatrix}, B_1^2 = \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{bmatrix}, B_1^3 = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.2 \end{bmatrix},$$

$$C_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.1 & 1 \end{bmatrix}, f_{11} = 0, f_{12} = \begin{bmatrix} 0.08 & 0.05 \end{bmatrix} x_2, \text{ et } f_{13} = \begin{bmatrix} 0.09 & 0.06 \end{bmatrix} x_3.$$

– Sous-système $S_2$ :
Règle 1 :

Si $x_{21}(t)$ est petit et $x_{22}(t)$ est petit alors

$$\dot{x}_2(t) = A_2^1 x_2(t) + B_2^1 u_2 + \sum_{j=1}^{3} f_{2j}(x_j(t))$$

$$y_2(t) = C_{11} x_2(t)$$

Règle 2 :

Si $x_{21}(t)$ est grand et $x_{22}(t)$ est petit alors

$$\dot{x}_2(t) = A_2^2 x_2(t) + B_2^2 u_2 + \sum_{j=1}^{3} f_{2j}(x_j(t))$$

$$y_2(t) = C_{11} x_2(t)$$

où

$$A_2^1 = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}, A_2^2 = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -0.3 \end{bmatrix}, B_2^1 = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.6 \end{bmatrix}, B_2^2 = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 1.2 \end{bmatrix},$$

$$f_{21} = \begin{bmatrix} 0.02 & 0.12 \end{bmatrix} x_1, f_{22} = 0, \quad \text{et } f_{23} = \begin{bmatrix} 0.06 & 0.36 \end{bmatrix} x_3.$$

– Sous-système $S_3$ :
Règle 1 :

Si $x_{31}(t)$ est grand et $x_{32}(t)$ est grand alors

$$\dot{x}_3(t) = A_3^1 x_3(t) + B_3^1 u_3 + \sum_{j=1}^{3} f_{3j}(x_j(t))$$

$$y_3(t) = C_{11} x_3(t)$$

Règle 2 :

Si $x_{31}(t)$ est petit et $x_{32}(t)$ est grand alors

$$\dot{x}_3(t) = A_3^2 x_3(t) + B_3^2 u_3 + \sum_{j=1}^{3} f_{3j}(x_j(t))$$

$$y_3(t) = C_{11} x_3(t)$$

où

$$A_3^1 = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}, A_3^2 = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}, B_3^1 = \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.8 \end{bmatrix}, B_3^2 = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.4 \end{bmatrix},$$
$$f_{31} = \begin{bmatrix} 0.48 & 0.64 \end{bmatrix} x_1, \; f_{32} = \begin{bmatrix} 0.24 & 0.32 \end{bmatrix} x_2 \text{ et } f_{33} = 0.$$

Les fonctions d'appartenance de chaque état sont montrées dans la Figure 1 de [Wang et Lin, 2005]. Les paramètres reliés au réseau pour chaque sous-système $S_i$ sont supposés égaux avec la période échantillonnage $T_e = 5ms$, le retard minimum $\eta_{1i} = 6ms$, le retard maximum $\eta_{2i} = 20ms$ et le nombre maximum des paquets perdus est $\bar{\sigma}_i = 2$. Comme dans l'exemple précédent, les retards variables dans le temps et les paquets perdus sont aléatoirement générés tels que $\min(\tau_{sci}+\tau_{cai}) \geq \eta_{1i}$, et $\max(\tau_{sci}+\tau_{cai}+(\bar{\sigma}_i+1)T_e) \leq \eta_{2i}$, $max(Ne) \leq 2$, $h_{di} = 0.1$, $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 0.5$, $\mu_3 = 0.9$ et $\varphi_i = min\{1, 0.5\eta_2\} = 0.01$.

En appliquant le Théorème 4.2.3, une solution faisable des LMIs permet d'obtenir les gains du contrôleur suivants :

– Gains pour le sous-système $S_1$ :

$$K_1^1 = \begin{bmatrix} -3.2631 & -3.4051 \end{bmatrix}, K_1^2 = \begin{bmatrix} -1.5409 & -1.6258 \end{bmatrix}, K_1^3 = \begin{bmatrix} 0.8754 & 0.8143 \end{bmatrix} \tag{4.52}$$

– Gains pour le sous-système $S_2$ :

$$K_2^1 = \begin{bmatrix} -2.2514 & -2.8524 \end{bmatrix}, K_2^2 = \begin{bmatrix} -1.3528 & -1.4953 \end{bmatrix} \tag{4.53}$$

– Gains pour le sous-système $S_3$ :

$$K_3^1 = \begin{bmatrix} -0.8119 & -0.8278 \end{bmatrix}, K_3^2 = \begin{bmatrix} -1.2369 & -1.2482 \end{bmatrix} \tag{4.54}$$

Pour la simulation, les conditions initiales sont :

$$x_1(0) = \begin{bmatrix} 1.5 & -1 \end{bmatrix}^T, x_2(0) = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.5 \end{bmatrix}^T, \text{ et } x_3(0) = \begin{bmatrix} 0.7 & -0.3 \end{bmatrix}^T. \tag{4.55}$$

Les Figures 4.8, 4.9, 4.10 et 4.11 montrent les évolutions des états et les signaux de commande du SCR interconnecté. On remarque bien la convergence des variables d'état vers zéro à partir des conditions initiales considérées.
Par conséquent, le système global de grande dimension en boucle fermée composé des trois sous-systèmes $S_1$, $S_2$ et $S_3$ est asymptotiquement stable.

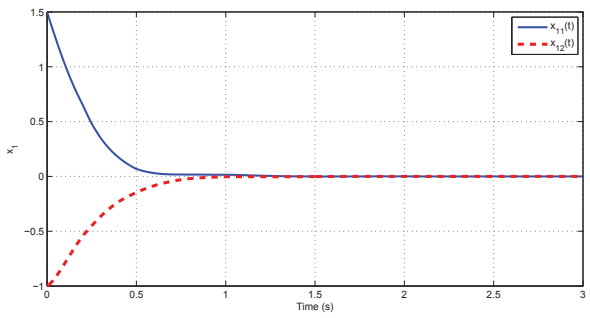


Figure 4.8: Réponse des états $x$ dans $S_1$

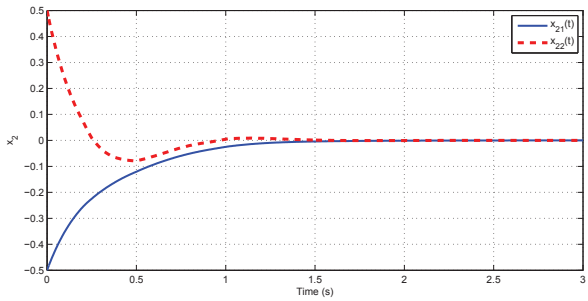


Figure 4.9: Réponse des états $x$ dans $S_2$ .

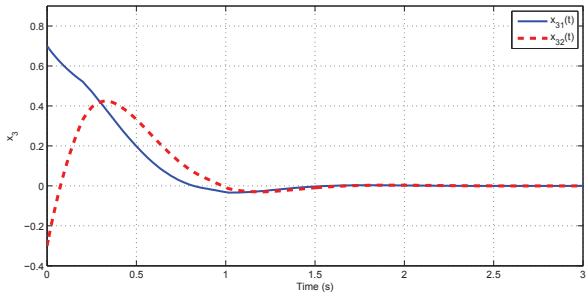


Figure 4.10: Réponse des états $x$ dans $S_3$ .

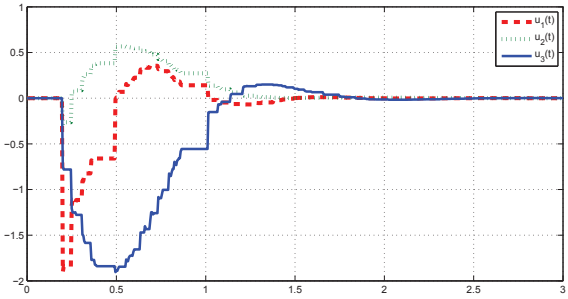


Figure 4.11: Trajectoires des signaux de commande $u_i(t)$.

Dans la suite, nous allons nous intéresser à la synthèse de contrôleurs en réseau décentralisés pour la dynamique latérale et celle de roulis du véhicule automobile. Le modèle dérive/lacet/roulis du véhicule sera considéré en prenant en compte le couplage entre la dynamique latérale et celle de roulis. L'objectif est de proposer une loi de commande globale du véhicule qui utilise le réseau de communication. Pour ce faire, la dynamique du véhicule est représentée par deux modèles flous interconnectés. Un modèle pour la dynamique de roulis donnée par l'équation (2.18) et un pour la dynamique latérale donné par l'équation (2.23). La coordination des différents systèmes ou actionneurs est basée sur la structure de la commande décentralisée représentée sur la Figure 4.12.

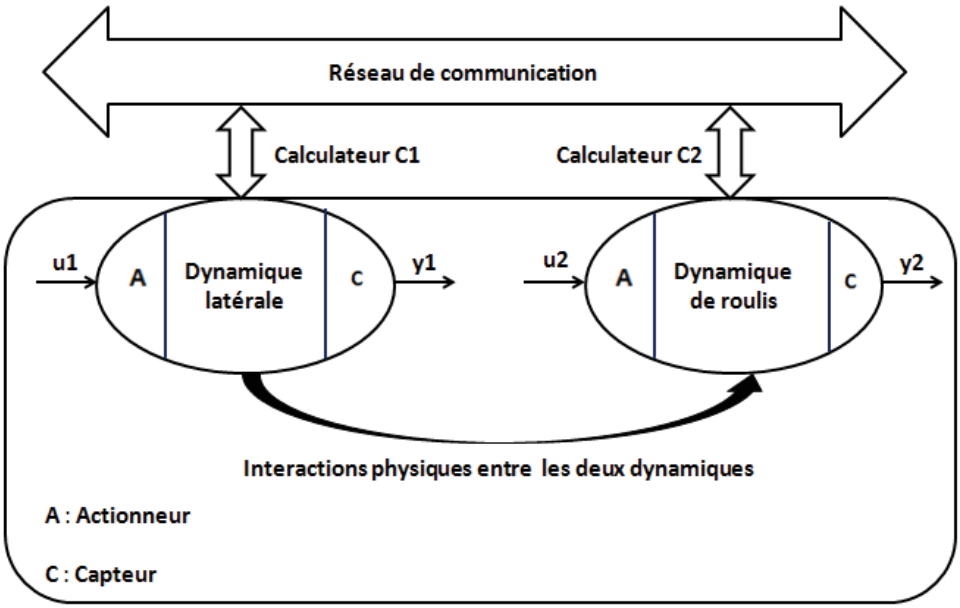


Figure 4.12: Structure de la commande globale du véhicule

### 4.2.6 Modèle TS dérive/lacet/roulis du véhicule

Soit le modèle dérive/lacet/roulis de la dynamique de véhicule (2.25) :

$$\begin{cases} m\dot{\beta} = -mr + \dfrac{2F_f + 2F_r}{v_x} + (\dfrac{mh}{v_x})\ddot{\Phi}, \\ I_z\dot{r} = 2F_f a_f - 2F_r a_r, \\ I_{xeq}\ddot{\Phi} = mgh\Phi + mha_y - K_\Phi\Phi - C_\Phi\dot{\Phi} + K_\Phi u_\Phi \end{cases} \tag{4.56}$$

avec $a_y = v_x(\dot{\beta} + r)$ étant l'accélération latérale mesurée au centre du roulis.
Ce modèle est la combinaison de la dynamique latérale donnée par (2.23) et celle du roulis donnée par (2.18) prenant compte du couplage entre les deux dynamiques qui sera considéré comme une interconnexion entre les deux sous-systèmes.
Nous supposons que les dynamiques de chaque actionneur sont décrites par les équations (4.57) et (4.58) :

$$\tau_1\dot{\delta}_f = -\delta_f + u_1, \tag{4.57}$$

$$\tau_2\dot{u}_\Phi = -u_\Phi + u_2 \tag{4.58}$$

où $\tau_1$ et $\tau_2$ sont les constantes de temps. $u_1$ et $u_2$ représentent respectivement les entrées de commande du braquage et du roulis du véhicule.
En considérant l'approximation des forces latérales par le modèle flou suivant :

$$\begin{cases} F_f = h_i^1(|\alpha_f|)C_{f1}\alpha_f + h_i^2(|\alpha_f|)C_{f2}\alpha_f, \quad (i = 1,2) \\ F_r = h_i^1(|\alpha_f|)C_{r1}\alpha_r + h_i^2(|\alpha_f|)C_{r2}\alpha_r \end{cases} \tag{4.59}$$

avec la variation des coefficients de rigidité pneumatique $C_{fl}$, $C_{rl}$ est donnée comme suit :

$$\begin{cases} C_{fl} = C_{fl0}(1+d_l f_l) & ,||f_l|| \leq 1 \\ C_{rl} = C_{rl0}(1+d_l f_l) \end{cases} \tag{4.60}$$

Où $d_l$ désigne le pourcentage de variation du coefficient de rigidité $C_{fl}(C_{rl})$ par rapport à sa valeur nominale $C_{fl0}(C_{rl0})$. En considérant l'approximation des petits angles (2.51), le modèle peut être réécrit sous forme d'un système de grande dimension $S$ composé par deux sous-systèmes $S_i$, $i = 1{,}2$ suivants :

– Sous-système $S_1$ correspondant à la dynamique latérale :

$$\dot{x}_1(t) = \sum_{l=1}^{r} h_1^l(|\alpha_f|)[(A_{10}^l+\Delta A_1^l))x_1(t)+B_1u_1+(f_{12}^l(x_2(t))] \tag{4.61}$$

$$\begin{aligned}
A_{10}^l &= \begin{bmatrix} -J_{xeq}\frac{C_{fl0}+C_{rl0}}{mv_xJ_{xx}} & -J_{xeq}\frac{C_{fl0}a_f-C_{rl0}a_r}{mv_x{}^2J_{xx}}-1 & \frac{J_{xeq}C_{fl0}}{mv_xJ_{xx}} \\ -\frac{C_{fl0}a_f-C_{rl0}a_r}{I_z} & -\frac{C_{fl0}a_f^2+C_{rl0}a_r^2}{I_zv_x} & \frac{C_{fl0}a_f}{I_z} \\ 0 & 0 & \frac{1}{-\tau_1} \end{bmatrix}, \quad \Delta A_1^l = D_A^l F_l(t) E_{A1}^l, \\
B_1 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\tau_1} \end{bmatrix}, \qquad F_l(t) = \begin{bmatrix} f_l & 0 & 0 \\ 0 & f_l & 0 \\ 0 & 0 & f_l \end{bmatrix}, \\
E_{A1}^l &= \begin{bmatrix} -J_{xeq}\frac{C_{fl0}+C_{rl0}}{mv_xJ_{xx}} & -J_{xeq}\frac{C_{fl0}a_f-C_{rl0}a_r}{mv_x{}^2J_{xx}} & \frac{J_{xeq}C_{fl0}}{mv_xJ_{xx}} \\ -\frac{C_{fl0}a_f-C_{rl0}a_r}{I_z} & -\frac{C_{fl0}a_f^2+C_{rl0}a_r^2}{I_zv_x} & \frac{C_{fl0}a_f}{I_z} \\ 0 & 0 & \frac{1}{-\tau_1} \end{bmatrix}, \qquad D_A^l = \begin{bmatrix} d_l & 0 & 0 \\ 0 & d_l & 0 \\ 0 & 0 & d_l \end{bmatrix}, \\
f_{12}^l(x_2(t)) &= \begin{bmatrix} \frac{-hC_\Phi}{v_xJ_{xx}} & \frac{h(mgh-K_\Phi)}{v_xJ_{xx}} & \frac{K\Phi}{v_xJ_{xx}} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x_2(t)
\end{aligned} \tag{4.62}$$

– Sous-système $S_2$ correspondant à la dynamique du roulis :

$$\dot{x}_2(t) = \sum_{l=1}^{r} h_2^l(|\alpha_f|)[(A_{20}^l+\Delta A_2^l)x_2(t)+B_2u_2+f_{21}^l(x_1(t))] \tag{4.63}$$

$$A_{20}^{l}=\begin{bmatrix}\frac{-C_\Phi}{J_{xx}} & \frac{mgh-K_\Phi}{J_{xx}} & \frac{K_\Phi}{J_{xx}}\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\frac{1}{\tau_2}\end{bmatrix},\qquad B_2=\begin{bmatrix}0\\0\\\frac{1}{\tau_2}\end{bmatrix},$$

$$\Delta A_2^l=D_A^l F_l(t)E_{A2}^l,\qquad E_{A2}^l=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},\quad (4.64)$$

$$f_{21}^l(x_1(t))=\begin{bmatrix}\frac{-h(C_{fl}+C_{rl})}{J_{xx}} & \frac{-h(-a_fC_{fl}+a_rC_{rl})}{J_{xx}v_x} & \frac{hC_{fl}}{J_{xx}}\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}x_1(t)$$

Où le vecteur d'état du sous-système $S_1$ est $x_1$=($\beta$, $\dot{\Psi}$, $\delta_f$) avec le signal de commande $u_1$ et le vecteur d'état du sous-système $S_2$, est $x_2$=($\dot{\Phi}$, $\Phi$, $u_\Phi$) avec le signal de commande $u_2$.

Dans la suite, nous présentons les résultats de simulation de l'application de la commande floue en réseau par retour d'état ensuite par retour de sortie à la dynamique de véhicule décrite par les modèles (4.61) et (4.63).

#### 4.2.6.1 Résultats de simulation en utilisant la commande floue en réseau par retour d'état

Pour illustrer le résultat du Théorème 4.2.2, nous avons testé les lois de commande par retour d'état en réseau développées en simulation en considérant des retards variables sur la mesure et également sur la commande et des pertes de paquets aléatoires.
Les paramètres liés au réseau pour chaque sous-système $S_i$ sont supposés égaux avec : la période d'échantillonnage est $T_e = 0.6ms$, le retard minimum est $\eta_{1i} = 6ms$, le retard maximum est $\eta_{2i} = 30ms$ et le nombre maximum de pertes de paquets est $\bar{\sigma}_i = 3$.
Les retards variables dans le temps entre le capteur et le contrôleur ainsi qu'entre le contrôleur et l'actionneur sont générés de manière aléatoire tels que $\min(\tau_{sci}+\tau_{cai}) \geq \eta_{1i}$, et $\max(\tau_{sci}+\tau_{cai}+(\bar{\sigma}_i+1)T_e) \leq \eta_{2i}$ et les pertes de paquets sont aussi générées de manière aléatoire avec $max(Ne) \leq 3$, où $Ne$ est le nombre de paquets perdus, $h_{di} = 0.1$, $\epsilon_l = 0.1$, $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 0.2$ et $\mu_3 = 0.1$.
En résolvant les LMIs du Théorème 4.2.2, nous trouvons une solution faisable avec :

- Gains pour le sous-système $S_1$ :

$$\begin{aligned}K_1^1&=\begin{bmatrix}-0.0605 & -0.1292 & -0.0437\end{bmatrix},\\ K_1^2&=\begin{bmatrix}-0.2398 & -0.5678 & -1.0892\end{bmatrix}\end{aligned}\quad (4.65)$$

- Gains pour le sous-système $S_2$ :

$$\begin{aligned}K_2^1&=\begin{bmatrix}-0.0539 & 0.0049 & -0.0001\end{bmatrix},\\ K_2^2&=\begin{bmatrix}-0.0539 & 0.0049 & -0.0001\end{bmatrix}\end{aligned}\quad (4.66)$$

Pour mettre en valeur l'intérêt de prendre en compte les effets du retard dans la synthèse de la loi de commande, nous avons comparé nos résultats avec les résultats d'une loi de

commande synthétisée sans prendre en compte le retard et les pertes de paquets dans le réseau 4.2.1. Ainsi, en appliquant le Théorème 4.2.1, donné dans la sous-section 4.2.2, pour le cas où nous ne considérons pas le retard induit par le réseau et les pertes de paquets, on trouve les gains des contrôleurs suivants :

– Gains pour le sous-système $S_1$ :

$$\begin{aligned} K_1^1 &= \begin{bmatrix} 19.5837 & -17.1355 & -1.8288 \end{bmatrix}, \\ K_1^2 &= \begin{bmatrix} 2.9494 & -2.5879 & -1.1462 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{4.67}$$

– Gains pour le sous-système $S_2$ :

$$\begin{aligned} K_2^1 &= \begin{bmatrix} 2.9494 & -2.5879 & -1.1462 \end{bmatrix}, \\ K_2^2 &= \begin{bmatrix} 2.9494 & -2.5879 & -1.1462 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{4.68}$$

Pour la simulation, les conditions initiales suivantes :

$$x_1(0) = \begin{bmatrix} 0.01 & 0.02 & 0.03 \end{bmatrix}^T, \text{ et } x_2(0) = \begin{bmatrix} 0.01 & 0.02 & 0.03 \end{bmatrix}^T \tag{4.69}$$

sont considérées. L'action du conducteur est donnée dans la Figure 4.15.
Les Figures (4.13-4.14) montrent les évolutions des états du systèmes en utilisant la loi de commande qui ne prend pas en compte le retard et les pertes de paquets. Nous remarquons que le comportement du véhicule est stabilisable dans le cas sans réseau de communication. La Figure 4.16 montre les signaux de commande pour ce cas classique sans communication en réseau.

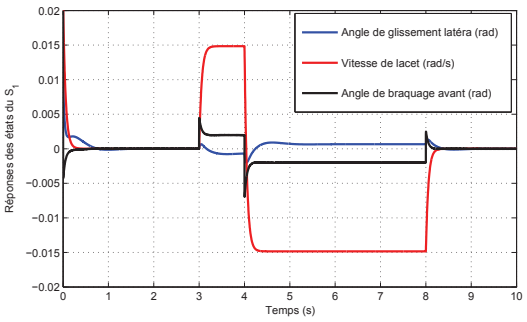


Figure 4.13: Evolution des états du sous-système $S_1$

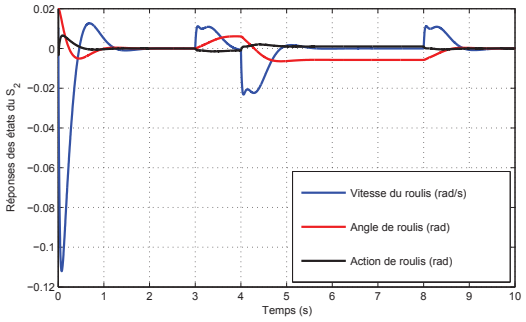


Figure 4.14: Evolution des états du sous-système $S_2$

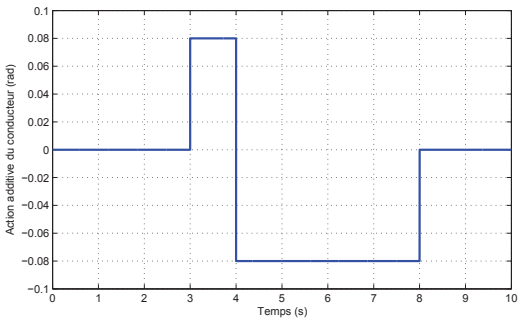


Figure 4.15: Evolution de l'angle de braquage $\delta_c$

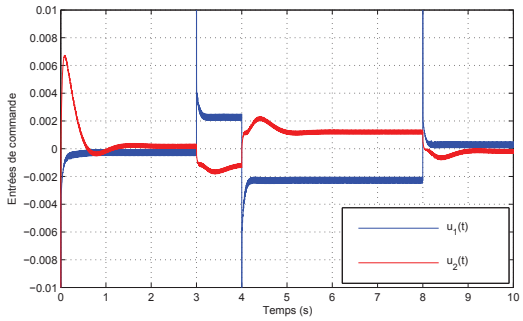


Figure 4.16: Signaux de commande $u_i(t)$.

Ensuite nous avons supposé que ces deux lois de commande fonctionnent à travers un réseau de communication. Ainsi, lorsque nous ajoutons le retard et les pertes de paquets dans le réseau, le comportement du véhicule devient instable comme les montrent les Figures (4.19-4.22). Les Figures 4.17 et 4.18 montrent les retards induits par le réseau et les pertes de paquets de données qui sont générés de façon aléatoire.

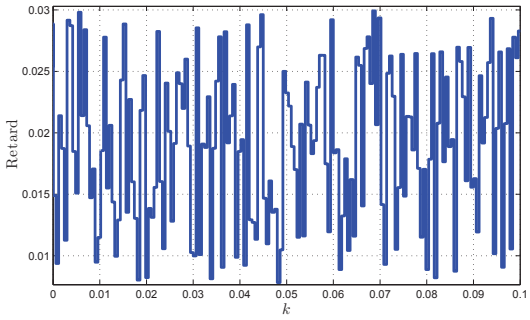


Figure 4.17: Retards induits par le réseau

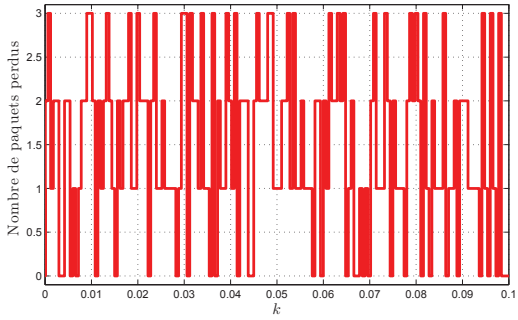


Figure 4.18: Pertes de paquets de donnéees

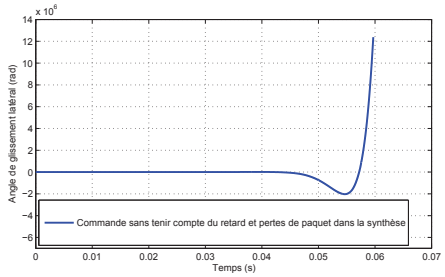


Figure 4.19: Evolution de l'angle de glissement latéral $\beta$

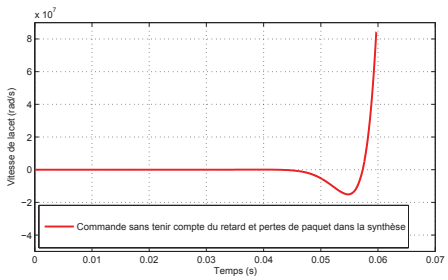


Figure 4.20: Evolution de la vitesse du lacet $r$

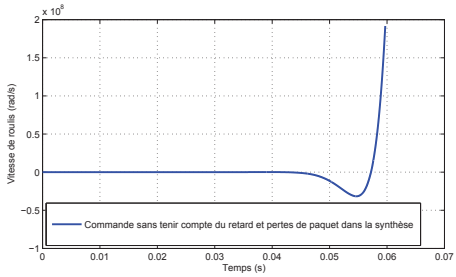


Figure 4.21: Evolution de la vitesse du roulis $\dot{\Phi}$

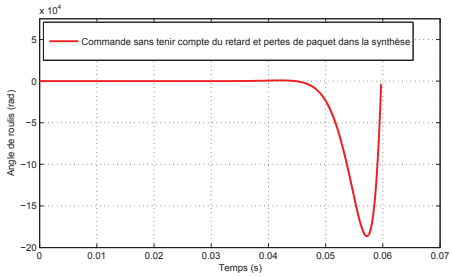


Figure 4.22: Evolution de l'angle de roulis $\Phi$

Pour surmonter ce problème et améliorer la stabilité du véhicule, nous avons testé la méthode proposée dans le Théorème 4.2.2 et qui considére le retard et les pertes de paquets dans la synthèse du contrôleur avec les gains (4.65) et (4.66). Les Figures 4.23-4.28 montrent l'évolution des variables d'état avec et sans contrôle.
Les figures montrent bien que le contrôleur CGC proposé permet d'améliorer le comportement du véhicule par rapport au cas sans contrôle. Les résultats de simulation sont en accord avec la stratégie de synthèse développée. Les signaux de commande sont illustrés dans les Figures 4.29 et 4.30.

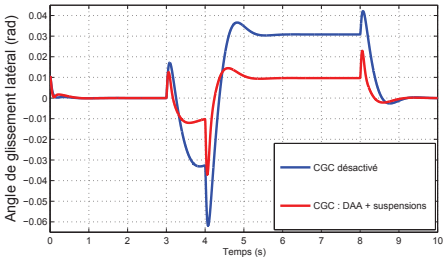


Figure 4.23: Comparaison des angles de glissement latéraux $\beta$

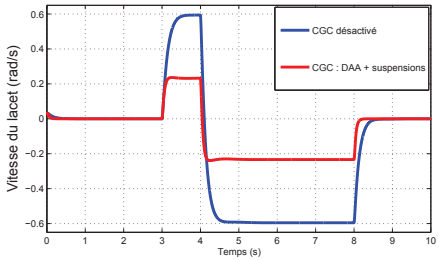


Figure 4.24: Comparaison des vitesses de lacet $r$

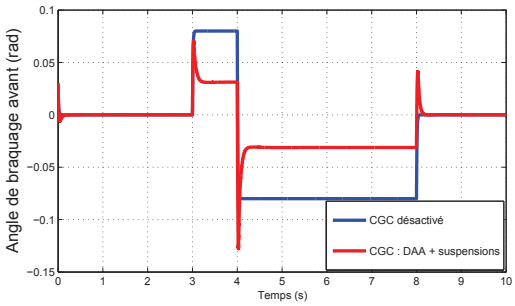


Figure 4.25: Comparaison des angles de braquage avant $\delta_f$

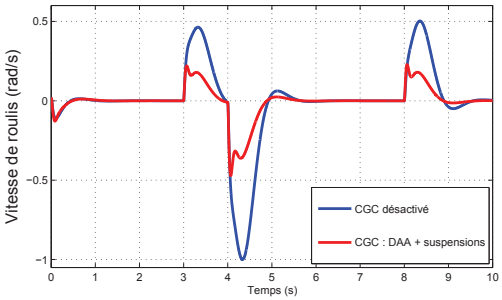


Figure 4.26: Comparaison des vitesses du roulis $\dot{\Phi}$

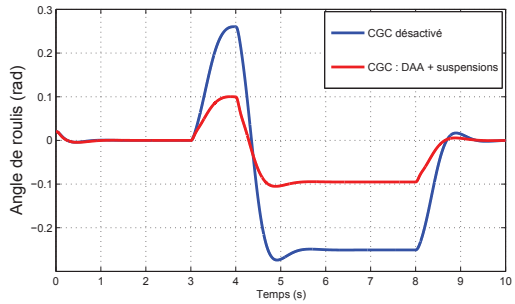


Figure 4.27: Comparaison des angles de roulis $\Phi$

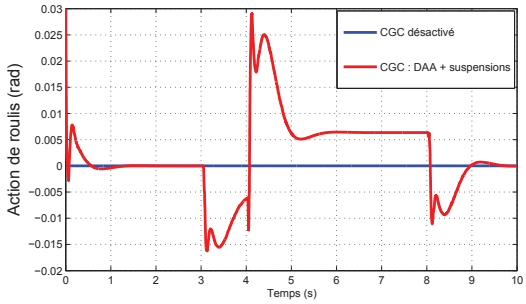


Figure 4.28: Comparaison des actions du roulis $u_\Phi$

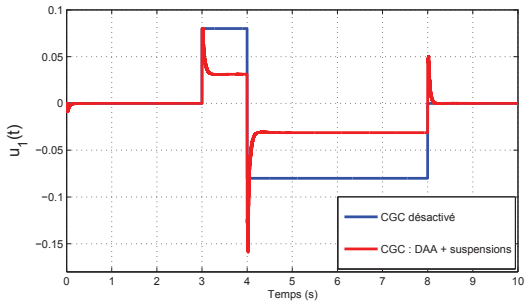


Figure 4.29: Comparaison des entrées de commande $u_1(t)$

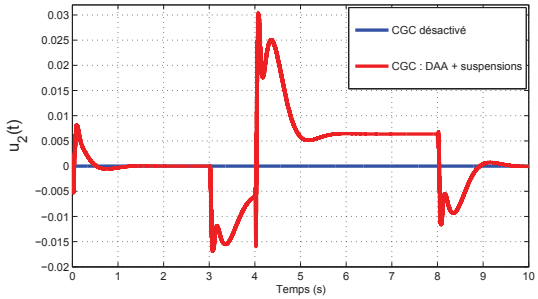


Figure 4.30: Comparaison des entrées de commande $u_2(t)$

Nous remarquons que notre approche permet de maintenir la stabilité du véhicule et améliorer ses performances malgré la présence du retard et des pertes de paquets dans le réseau.

#### 4.2.6.2 Résultats de simulation de la commande floue en réseau par retour de sortie statique

L'objectif est d'illustrer le résultat donné dans le Théorème 4.2.3 sur le modèle dérive/lacet/roulis considéré comme un système de grande dimension $S$ non linéaire (4.2.6), composé par deux sous-systèmes $S_i$, $i = 1,2$ avec :

– Sous-système $S_1$ :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \sum_{l=1}^{r} h_1^l(|\alpha_f|)[A_{10}^l x_1(t) + B_1 u_1 + f_{12}(x_2(t))], \\ y_1(t) = C_1 x_1(t) \end{cases} \tag{4.70}$$

avec $C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

– Sous-système $S_2$ :

$$\begin{cases} \dot{x}_2(t) = \sum_{l=1}^{r} h_2^l(|\alpha_f|)[A_{20}^l x_2(t) + B_2 u_2 + f_{21}(x_1(t))], \\ y_2(t) = C_2 x_2(t) \end{cases} \tag{4.71}$$

avec $C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Les paramètres liés au réseau pour chaque sous-système $S_i$ sont supposés égaux à : $T_e = 0.6ms$, le retard minimum est $\eta_{1i} = 6ms$, le retard maximum est $\eta_{2i} = 30ms$ et le nombre maximum de pertes de paquets est $\bar{\sigma}_i = 3$.

Comme dans le cas précédent, les retards variables dans le temps et les pertes de paquets sont aléatoirement générés tels que $\min(\tau_{sci}+\tau_{cai}) \geq \eta_{1i}$, $\max(\tau_{sci}+\tau_{cai}+(\bar{\sigma}_i+1)T_e) \leq \eta_{2i}$ et $max(Ne) \leq 3$, où $Ne$ est le nombre de paquets perdus, $h_{di} = 0.1$, $\epsilon_l = 0.1$, $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 0.2$ et $\mu_3 = 0.1$.

A partir du Théorème 4.2.3, nous trouvons une solution faisable avec :

– Gains pour le sous-système $S_1$ :

$$\begin{aligned} K_1^1 &= \begin{bmatrix} -0.2328 & 0.0925 \end{bmatrix}, \\ K_1^2 &= \begin{bmatrix} 0.0157 & 0.0036 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{4.72}$$

– Gains pour le sous-système $S_2$ :

$$\begin{aligned} K_2^1 &= \begin{bmatrix} -0.0051 & -0.0159 \end{bmatrix}, \\ K_2^2 &= \begin{bmatrix} -0.0051 & -0.0159 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{4.73}$$

Pour la simulation, nous avons pris les conditions initiales suivantes :

$$x_1(0) = \begin{bmatrix} 0.01 & 0.02 & 0.03 \end{bmatrix}^T, \text{ et } x_2(0) = \begin{bmatrix} 0.01 & 0.02 & 0.03 \end{bmatrix}^T \tag{4.74}$$

Pour mettre en valeur notre résultat, nous avons comparé les évolutions des états du véhicule avec notre loi de commande et sans contrôle (boucle ouverte). les Figures (4.31-4.36) montent les résultats obtenus pour un braquage conducteur donné dans la Figure 4.15. On remarque que le comportement du véhicule est amélioré avec le contrôle en réseau par retour de sortie proposé. Les Figures 4.37 - 4.38 montrent les signaux de commande.

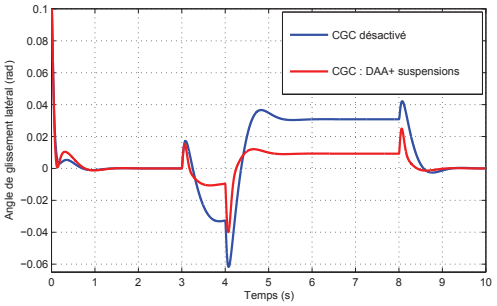


Figure 4.31: Evolution de l'angle de glissement latéral $\beta$

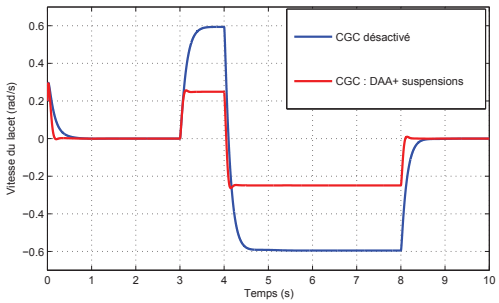


Figure 4.32: Evolution de la vitesse du lacet $r$

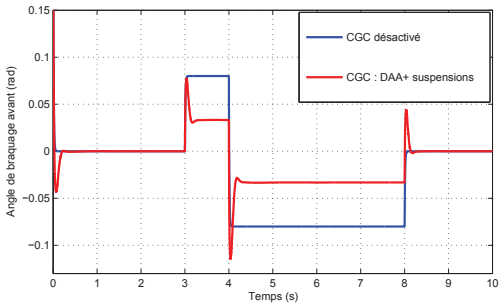


Figure 4.33: Evolution de l'angles de braquage avant $\delta_f$

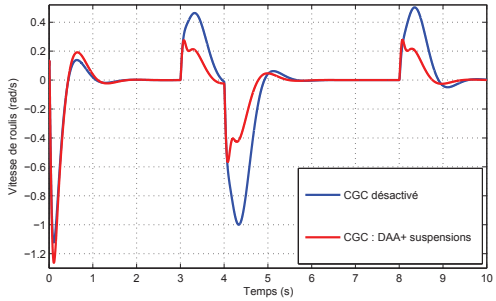


Figure 4.34: Evolution de la vitesse de roulis $\Phi$

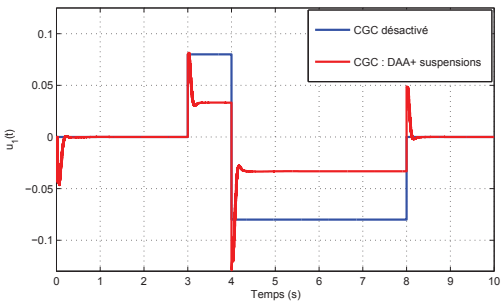


Figure 4.37: Courbe du signal de commande $u_1(t)$ du sous-système $S_1$

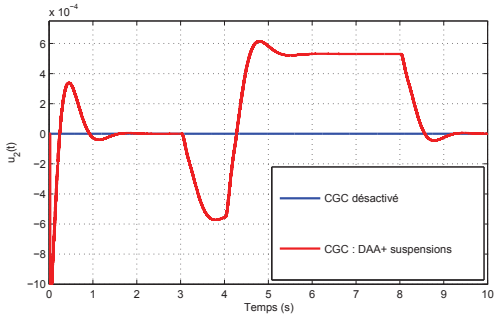


Figure 4.38: Courbe du signal de commande $u_2(t)$ du sous-système $S_2$

Afin d'améliorer la stabilité du véhicule, nous avons testé la méthode proposée par le Théorème 4.2.3 en considérant le retard et les pertes de paquets dans la synthèse du contrôleur avec les gains (4.72) et (4.73). Les Figures (4.31-4.36) montrent l'évolution des variables d'état pour les cas suivants : avec et sans Commande Globale du Châssis notée "CGC" au cas où nous activons simultanément la direction avant active notée "DAA" et l'actionneur de la suspension. Nous pouvons bien voir que les valeurs des amplitudes des états restent faibles par rapport à celles que présente la dynamique du véhicule avec le

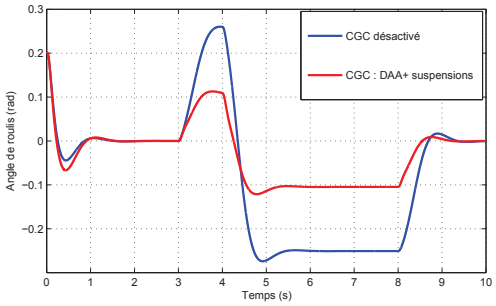


Figure 4.35: Evolution de l'angle du roulis $\dot{\Phi}$

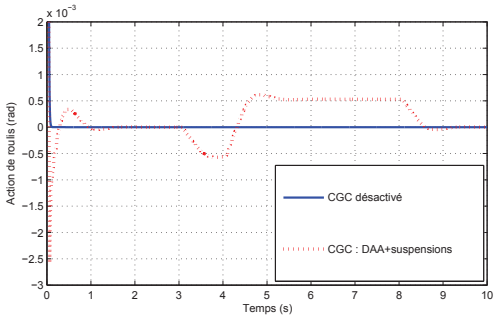


Figure 4.36: Evolution de l'action du roulis $u_{\Phi}$

CGC désactivé qui sont des valeurs très grandes, ce qui peut causer la dégradation des performances du véhicule et ainsi empêche son bon comportement.

Nous remarquons que notre approche permet de maintenir la stabilité du véhicule et améliorer ses performances malgré la présence des retards et des pertes de paquets dans le réseau.

## 4.3 Conclusion

Nous avons étudié dans ce chapitre la stabilisation en réseau des systèmes non linéaires de grande dimension décrits par des systèmes flous de type TS interconnectés. Après la présentation des architectures de commande décentralisée dédiées aux systèmes flous de grande dimension, des conditions de synthèse des lois de commande en réseau par retour d'état flou et par retour de sortie statique sont proposées pour cette classe de systèmes de grandes dimensions. Dans les deux cas, le formalisme LMI a été utilisé. Enfin, l'application à la commande globale du châssis de véhicule a été présentée pour illustrer les résultats proposés.

# Conclusion Générale

Les travaux présentés dans ce mémoire de thèse traitent les problèmes de commande mono actionneur et multi actionneurs des SCRs non linéaires décrits par des modèles TS. En effet, les modèles de type TS constituent un outil privilégié de modélisation des systèmes non linéaires pour de nombreux chercheurs.
Tout au long de ce mémoire, nos investigations se sont focalisées en premier lieu sur la problématique de la stabilisation d'un Système Commandé en Réseau en considérant les différentes contraintes du réseau. Dans cet objectif, nous sommes concentrés sur la synthèse de lois de commande par retour d'état, par retour de sortie et enfin sur celles basées sur observateur, permettant de garantir conjointement la stabilité (asymptotique) en boucle fermée et un certain niveau de performance (en terme de robustesse, ... ), en dépit des retards de communication, pertes de paquets, quantification et contraintes d'accés aux médias, affectants les boucles de commande et de mesure.
En effet, nous nous sommes intéressés à la stabilisation du SCR considéré, dans la communication en réseau, affectant conjointement les boucles de commande et de mesure. En regard de ce contexte, nous avons proposé, au travers de résultats théoriques, des critères garantissant la stabilisation asymptotique du SCR permettant d'orienter la synthèse de telles lois de commande. Après, nous nous sommes intéressés à la synthèse d'observateurs non linéaires de type TS, en tenant compte des contraintes du réseau dans la boucle de mesure. Nous avons étudié deux stratégies de commandes basées sur observateurs l'une utilisant un seul quantificateur et l'autre intégrant deux quantificateurs dans la boucle de commande. Ces conditions de stabilité et de convergence de l'erreur d'observation vers zéro, ont été établies en considérant des fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii. De telles conditions, exprimées en termes d'Inégalités Matricielles Linéaires (LMIs), sont alors directement exploitables pour calculer les gains du correcteur. Enfin, ces différents résultats théoriques et la méthode de synthèse qui en découle ont été illustrés par des résultats numériques et des simulations relatifs à la commande des dynamiques du véhicule.
Dans le quatrième chapitre, en premier lieu, nous avons proposé des méthodes de synthèse de commande décentralisée des systèmes de grande dimension standards. Nous avons pris en considération l'effet des interconnexions en les intégrant dans les différents sous-systèmes, en supposant quelques hypothèses. La synthèse de contrôleur est basée sur des LMIs permettant de déterminer les matrices des gains du contrôleur. La formulation LMI est basée aussi sur l'approche de Lyapunov et déduite des différents lemmes bornés.
En second lieu, nous nous sommes penchés sur le problème d'amélioration de la sécurité active des véhicules. Plus particulièrement, nous avons étudié les fonctions que réalisent aujourd'hui l'ESP pour le contrôle du lacet ainsi que les suspensions pour le contrôle du roulis. Notre étude basée sur la recherche de moyens et structures d'amélioration de ces

fonctions par l'action combinée de différents actionneurs (directions, suspensions ) montre que cette piste sur les inter-systèmes doit être explorée de manière intensive car elle semble être prometteuse.
En se servant des modèles développés nous réalisons l'étude de stabilité de la dynamique du véhicule en lacet et en roulis. Durant cette phase, nous étudions les critères qui sont les mieux adaptés à notre problématique et les types de contrôleurs adoptés. Ensuite, nous développons un CGC qui intègre les fonctions de contrôle du lacet et du roulis et qui est basé sur une architecture décentralisée qui s'adapte bien à notre application et qui permet une bonne performance du véhicule.

Les résultats développés dans cette thèse ouvrent le chemin vers autres axes de recherches :
Dans cette thèse, nous avons considéré le phénomène de quantification pour le cas de la commande mono actionneur. Il serait intéressant de le prendre en compte aussi dans le calcul de lois de commande décentralisées en réseau. Nous comptons aussi introduire d'autres approches et outils mathématiques pour développer des conditions de synthèse moins restrictives afin de réduire davantage le conservatisme. De plus, nous estimons que l'utilisation d'autres schémas de modélisation du véhicule plus complexes, peuvent conduire à d'autres résultats théoriques intéressants et certainement mieux adaptés au véhicule. D'un point de vue applicatif, nous envisageons la vérification des performances obtenues sur un logiciel comme CARSIM. Enfin, nous avons l'intention d'intégrer la dynamique longitudinale en plus de la dynamique latérale et celle du roulis dans le contrôle global du châssis en utilisant l'approche décentralisée.

Annexe

# A

# Quelques Lemmes mathématiques

Sommaire

A.1 Techniques de relaxation

## A.1 Techniques de relaxation

**a) Choix de la fonctionnelle de Lyapunov**

– FLK quadratique avec une intégrale simple [Cao et Frank, 2000]

$$V(x(t)) = x^T(t)Px(t)+\int_{t-\tau(t)}^{t} x(\alpha)^T Sx(\alpha)d\alpha \tag{A.1}$$

où $P > 0$ et $S > 0$ sont des matrices symétriques et définies positives (garantissant ainsi que la fonctionnelle de $V(x(t))$ est définie positive).

– FLK quadratique avec une intégrale double [Li *et al.*, 2004]

$$V(x(t)) = x^T(t)Px(t)+\int_{t-\tau(t)}^{t} x(\alpha)^T Sx(\alpha)d\alpha+\int_{-\bar{\tau}}^{0}\int_{t+\sigma}^{t} \dot{x}(\alpha)^T Z\dot{x}(\alpha)d\alpha d\sigma \tag{A.2}$$

où $P$ , $S$ et $Z$ sont des matrices symétriques et définies positives.
Récemment, de nouvelles FLK ont été proposées pour étudier les modèles SCRs. Par exemple [Jiang et Han, 2007] a considéré la FLK suivante :

$$V(x(t)) = V_1(x(t))+V_2(x(t))+V_3(x(t)) \tag{A.3}$$

avec

$$V_1(x(t)) = x^T(t)Px(t)$$
$$V_2(x(t)) = \int_{t-\tau_1}^{t} x(s)^T Q x(s) ds$$
$$V_3(x(t)) = \int_{-\tau_1}^{0}\int_{t+\theta}^{t} \dot{x}(s)^T R_1 \dot{x}(s) ds d\theta + \int_{-\tau_M}^{-\tau_m}\int_{t+\theta}^{t} \dot{x}(s)^T R_2 \dot{x}(s) ds d\theta$$

où $P$ , $Q$, $R_1$ et $R_2$ sont des matrices symétriques et définies positives.

– FLK quadratique avec une intégrale triple [Kchaou *et al.*, 2013] et bi-partition du retard :

$$V(x(t)) = V_1(x(t)) + V_2(x(t)) \tag{A.4}$$

avec

$$\begin{aligned} V_1(x(t)) &= x^T(t)Px(t) + \int_{t-\frac{\eta_1}{2}}^{t} \xi_1^T(s) Q_1 \xi_1(s) \mathrm{d}s + \int_{t-\frac{\eta_2}{2}}^{t} \xi_2^T(s) Q_2 \xi_2(s) \mathrm{d}s + \int_{t-\eta(t)}^{t} x^T(s) Q_3 x(s) \mathrm{d}s \\ V_2(x(t)) &= \frac{\eta_1}{2}\int_{-\frac{\eta_1}{2}}^{0} \Big(\int_{t+s}^{t} \xi^T(\upsilon) Z_1 \xi(\upsilon) \mathrm{d}\upsilon\Big)\mathrm{d}s + \frac{(\frac{\eta_1}{2})^2}{2}\int_{-\frac{\eta_1}{2}}^{0} \Big(\int_{s}^{0}\int_{t+\alpha}^{t} \dot{x}^T(\upsilon) W_1 \dot{x}(\upsilon) \mathrm{d}\upsilon\Big)\mathrm{d}\alpha \mathrm{d}s \\ &\quad + \frac{\eta_2}{2}\int_{-\frac{\eta_2}{2}}^{0} \Big(\int_{t+s}^{t} \xi^T(\upsilon) Z_2 \xi(\upsilon) \mathrm{d}\upsilon\Big)\mathrm{d}s + \frac{(\frac{\eta_2}{2})^2}{2}\int_{-\frac{\eta_2}{2}}^{0} \Big(\int_{s}^{0}\int_{t+\alpha}^{t} \dot{x}^T(\upsilon) W_2 \dot{x}(\upsilon) \mathrm{d}\upsilon\Big)\mathrm{d}\alpha \mathrm{d}s \end{aligned} \tag{A.5}$$

avec

$$\xi_1 = \begin{bmatrix} x^T(s) & x^T(s-\frac{\eta_1}{2}) \end{bmatrix}^T, \quad \xi_2 = \begin{bmatrix} x^T(s) & x^T(s-\frac{\eta_2}{2}) \end{bmatrix}^T, \quad \xi(t) = \begin{bmatrix} x^T(t) & \dot{x}^T(t) \end{bmatrix}^T,$$
$$Q_1 = \begin{bmatrix} Q_{11}^1 & Q_{12}^1 \\ * & Q_{22}^1 \end{bmatrix}, \qquad Q_2 = \begin{bmatrix} Q_{11}^2 & Q_{12}^2 \\ * & Q_{22}^2 \end{bmatrix}, \qquad Z_1 = \begin{bmatrix} Z_{11}^1 & Z_{12}^1 \\ * & Z_{22}^1 \end{bmatrix},$$
$$Z_2 = \begin{bmatrix} Z_{11}^2 & Z_{12}^2 \\ * & Z_{22}^2 \end{bmatrix}.$$

où $P$, $Q_1$, $Q_2$, $Q_3$, $Z_1$, $Z_2$, $W_1$ et $W_2$ sont des matrices définies positives.

**b) Lemme de Schur**

**Lemme A.1** (Complément de Schur)Boyd *et al.* [1994] : Soient trois matrices $Q$, $R$ et $S$ de dimensions appropriées avec $Q = Q^T$ et $R = R^T$, les expressions suivantes sont alors équivalentes :

$$\begin{bmatrix} Q & S \\ * & R \end{bmatrix} < 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} R < 0 \\ Q - SR^{-1}S^T < 0 \end{cases} \tag{A.6}$$

ou

$$\begin{bmatrix} Q & S \\ * & R \end{bmatrix} > 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} R > 0 \\ Q - SR^{-1}S^T > 0 \end{cases} \tag{A.7}$$

### c) Lemme de Congruence

**Lemme A.2** (Congruence) Soient deux matrices $P$ et $Q$, si $P$ est définie positive et si $Q$ est de rang plein en colonne alors la quantité $QPQ^T$ est définie positive.

### d) Lemmes de majoration

**Lemme A.3** [Wang *et al.*, 1992] Soient les matrices $D$, $E$, $F(t)$ de dimensions appropriées et $F(t)$ satisfait $F(t)^T F(t) \leq I$. Ensuite, l'inégalité suivante est vérifiée pour tout $\epsilon > 0$ :

$$DF(t)E+E^T F(t)^T D^T \leq \epsilon DD^T+\epsilon^{-1}E^T E$$

**Lemme A.4** Considérons les matrices $X$, $Y$ et $\Delta$ satisfaisant $\Delta < \bar{\Delta}$. Ensuite, l'inégalité suivante vérifie :
$(SX+\Delta Y)^T S^{-1}(SX+\Delta Y) = X^T X+X^T \Delta Y+Y^T \Delta^T X+Y^T \Delta^T S^{-1}\Delta Y$

**Lemme A.5** [Yu *et al.*, 2012] Pour les scalaires $M > 0$, $N > 0$ , $h(t)$ est une fonction continue qui satisfait $h_m < h(t) < h_M$, alors

$$-\frac{h_M-h_m}{h(t)-h_m}M-\frac{h_M-h_m}{h_M-h(t)}N \leq max(-(M+3N),-(3M+N)) \tag{A.8}$$

**Lemme A.6** [Sun *et al.*, 2010] Soit une matrice constante $M > 0$, et soient les scalaires $h_m$ et $h_M$ avec $0 < h_m < h_M$, et le vecteur $x(t) : [-h_M,-h_m] \to R^n$ de telle sorte que les termes intégrales concernés sont bien définis, alors les inégalités suivantes sont vérifiées

$$-(h_M-h_m)\int_{t-h_M}^{t-h_m} x^T(s)Mx(s)ds \leq -\int_{t-h_M}^{t-h_m} x^T(s)ds M \int_{t-h_M}^{t-h_m} x(s)ds \tag{A.9}$$

$$-\frac{1}{2}(h_M^2-h_m^2)\int_{t-h_M}^{t-h_m}\int_{t+\theta}^{t} x^T(s)Mx(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta \leq -\int_{t-h_M}^{t-h_m}\int_{t+\theta}^{t} x^T(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta M \int_{t-h_M}^{t-h_m}\int_{t+\theta}^{t} x(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta \tag{A.10}$$

**Lemme A.7** [Park *et al.*, 2011] Soient des vecteurs $\psi_1$, $\psi_2$, des matrices $S$, $R$ et des scalaires réels $\alpha_1 \geq 0$, $\alpha_2 \geq 0$, qui satisfaient

$$\begin{bmatrix} R & S \\ S^T & R \end{bmatrix} \geq 0,\ \alpha_1+\alpha_2 = 1,\ \psi_i = 0 \text{ si } \alpha_i = 0\ (i = 1,2)$$

nous avons (A.11)

$$-\frac{1}{\alpha_1}\psi_1^T R\psi_1-\frac{1}{\alpha_2}\psi_2^T R\psi_2 \leq -\begin{bmatrix}\psi_1 \\ \psi_2\end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} R & S \\ S^T & R \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix}\psi_1 \\ \psi_2\end{bmatrix}$$

**Lemme A.8** Pour tout vecteur réel $\zeta$ et $\rho$, il vient que

$$2\zeta^T\rho \leq \zeta^T Z\zeta+\rho^T Z^{-1}\rho \tag{A.12}$$

avec $Z > 0$

**Lemme A.9** [Wang et Lin, 2005] L'inégalité suivante est vérifiée pour tout vecteur réel $\nu_i \in R^n$

$$[\sum_{i=1}^{m}\nu_i]^T [\sum_{i=1}^{m}\nu_i] \leq m\sum_{i=1}^{m}\nu_i^T\nu_i. \tag{A.13}$$

**d) Relaxations dues à une double somme** :

**Lemme A.10** [Tanaka et Sano, 1994] Un système flou de type TS est asymptotiquement stable, s'il existe une matrice $X_{ij} < 0$ telle que les conditions suivantes soient vérifiées

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}h_ih_jX_{ij} = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}h_i^2X_{ii}+\sum_{i=1}^{r}\sum_{j>i}^{r}h_ih_j(X_{ij}+X_{ji}) \tag{A.14}$$

**Lemme A.11** Un SCR de type TS est asymptotiquement stable, s'il existe une matrice $X_{ij} < 0$ telle que les conditions suivantes soient vérifiées

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}h_ih_j^kX_{ij} = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}h_i^2\bar{X}_{ii}+\sum_{i=1}^{r}\sum_{j>i}^{r}h_ih_j(\bar{X}_{ij}+\bar{X}_{ji})$$

avec $\bar{X}_{ij} = X_{ij}+\sum_{k=1}^{r}\varphi_kX_{ik}$ et $\varphi_k$ est la constante de Lipschitz qui satisfait la condition $|h_i^k-h_i| \leq \varphi_i$.

**Preuve du Lemme A.11**

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}h_ih_j^kX_{ij} &= \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}h_ih_jX_{ij}+\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}h_i(h_j^k-h_j)X_{ij}\\ &\leq \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}h_ih_j(X_{ij}+\sum_{k=1}^{r}\varphi_kX_{ik})\\ &= \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}h_i^2\bar{X}_{ii}+\sum_{i=1}^{r}\sum_{j>i}^{r}h_ih_j(\bar{X}_{ij}+\bar{X}_{ji})\end{aligned}$$

Annexe

# B

# Formulation LMI et approche PDC

Sommaire

B.1 Formulation LMI
B.2 Principe de l'approche PDC

## B.1 Formulation LMI

Les Inégalités Matricielles Linéaires, communément appellées LMI, constituent un outil de base dans la résolution des problèmes d'optimisation convexes sous contraintes. Ce paragraphe a donc pour but d'introduire les principales propriétés théoriques nécessaires.

Une Inégalité Matricielle Linéaire peut être exprimée sous la forme [Boyd *et al.*, 1994] :

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^{m} x_i F_i > 0 \tag{B.1}$$

où $x = (x_1,...,x_m) \in \Re^m$ est un vecteur de $m$ variables. Les matrices $F_i = F_i^T \in \Re m \times m$ sont des matrices définies positives. Il est aussi possible de trouver des LMI non strictes qui auront la forme $F(x) \geq 0$, dans ce cas les matrices sont semi-définies positives. Par la suite, les contraintes sont sous la forme $F(x) < 0$ ; cette LMI est equivalente à $-F(x) > 0$.

Une seule LMI diagonale regroupe plusieurs LMIs $F^1(x(t)) > 0,...,F^p(x(t)) > 0$ est définie comme suit :

$$F(x(t)) = \begin{bmatrix} F^1(x(t)) & & \\ & \ddots & \\ & & F^p(x(t)) \end{bmatrix} > 0 \tag{B.2}$$

Nous pouvons rencontrer un problème d'optimisation convexe représenté sous forme LMI :

**Faisabilité** :

$$\begin{array}{ll} \text{trouver} & x(t) \in \Re \\ \text{tel que} & F(x(t)) > 0 \end{array} \tag{B.3}$$

La résolution de ce problème utilise le logiciel MATLAB et la boite à outils "LMI CONTROL TOOLBOX" Gahinet et Apkarian [1994].

## B.2 Principe de l'approche PDC

Le principe de l'approche PDC est illustré dans la Figure B.1 :

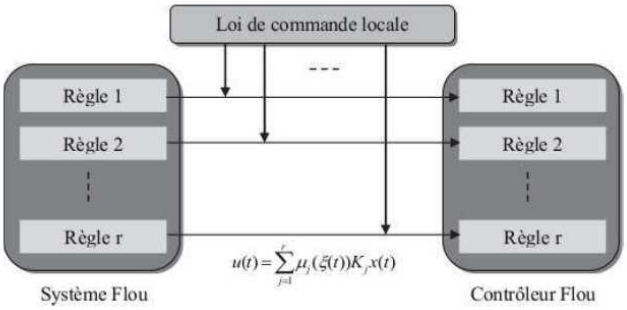


Figure B.1: Principe de l'approche PDC

# Bibliographie


**Ackermann**, J., **Guldner**, J., **Sienel**, W., **Steinhauser**, R. et **Utkin**, V. (1995). Linear and nonlinear controller design for robust automatic steering. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 3(1):132–143.

**Akhmetov**, Y. (2011). *Contrôle Global de Châssis appliqué à la sécurité active des véhicules de distribution.* Thèse de doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, France.

**Azimi-Sadjadi**, B. (2003). Stability of networked control systems in the presence of packet losses. *In proc of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control*, 1:676–681.

**Bakker**, E., **Pacejka**, H. et **lidner**, L. (1989). A new tire model, an application in vehicle dynamics studies. *SAE paper*, pages 83–95.

**Bakule**, L. (2008). Decentralized Control : An overview. *Annual Reviews in Control Journal*, 32(2008):87–98.

**Benzaouia**, A. et **Hajjaji**, A. E. (2014). Advanced Takagi Sugeno Fuzzy Systems : Delay and Saturation. *Studies in Systems, Decision and Control*, pages 1–294.

**Boitard**, P. (1999). *Dynamique des véhicules industriels : modélisation non-linéaire pour l'application à la sécurité active et à l'identification paramétrique*. Thèse de doctorat, INSA de Lyon, France.

**Boyd**, S., **Ghaoui**, L. E., **Feron**, E. et **Balkrishnan**, V. (1994). Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. *Society for Industrial and Applied Mathematics (Philadelphia)*, 15:1–193.

**Burckhardt**, M. (1993). Slip control braking of an automobile during combined braking and steering maneuvers. *Fahrwerktechnik : Radschlupf-Regelsysteme*, 12:1–432.

**Cao**, Y. et **Frank**, P. (2000). Analysis and synthesis of nonlinear time-delays systems via fuzzy control approach. *IEEE Trans Trans Fuzzy Sys*, 8(2):200–211.

**Chadli**, M., **Hajjaji**, A. E. et **Oudghiri**, M. (2008). Robust output fuzzy control for vehicle lateral dynamic stability improvement. *International Journal of Modelling, Identification and Control*, 3(3):247–257.

**Chadli**, M., **Maquin**, D. et **Ragot**, J. (2002). An LMI formulation for output feedback stabilization in multiple model approach. *Conference on Decision and Control, Las Vegas, Nevada USA*, 1:311–316.

**Cogoluenhes**, D. (1996). *Méthode objective d'étude du comportement routier des véhicules industriels*. Thèse de doctorat, INSA de Lyon, France.

**Dahmani**, H. (2011). *Système d'Evaluation de la Dynamique du Véhicule et d'Aide à la Conduite : Détection des sorties de route et des renversements.* Thèse de doctorat, Université de Picardie Jules Verne, Amiens, France.

**Dandach**, H. (2014). *Prédiction de l'espace navigable par l'approche ensembliste pour un véhicule routier.* Thèse de doctorat, UTC, Compiègne, France.

**Edwards**, C., **Herbden**, R. G. et **Spurgeon**, S. K. (2005). Sliding mode observers for vehicle mode detection. *Vehicle System Dynamics*, 43(11):823–843.

**Esmailzadeh**, E., **Goodarzi**, A. et **Vossoughi**, G. (2003). Optimal yaw moment control law for improved vehicle handling. *Mechatronics*, 13(7):659–675.

**Font**, S. (1995). *Méthodologie pour Prendre en Compte la Robustesse des Systèmes Asservis : Optimisation $H_\infty$ et Approche Symbolique de la Forme Standard.* Thèse de doctorat, Université Paris XI Orsay, France.

**Gahinet**, P. et **Apkarian**, P. (1994). A linear Matrix Inequality Approach to $H_\infty$ Control. *Int. J. Robust Nonlinear Cont*, 4(4):421–448.

**Gasso**, K. (2000). *Identification des systèmes dynamiques non-lineaires : approche multimodèles.* Thèse de doctorat, INPL, Nancy, France.

**Gillespie**, T. D. (1992). Fundamentals of Vehicle Dynamics. *Society of Automotive Engineers, SAE International.*

**Gissinger**, G. et **Fort-Piat**, N. L. (2002a). Contrôle-commande de la voiture. *Traité IC2, série Systèmes automatisés.*

**Gissinger**, G. et **Fort-Piat**, N. L. (2002b). La voiture intelligente. *Hermès / Lavoisier.*

**Glaser**, S. (2004). *Modélisation et analyse d'un véhicule en trajectoires limites. Application au développement de systèmes d'aide à la conduite.* Thèse de doctorat, Université d'Evry-Val d'Essonne, France.

**Gomes Da Silva Jr**, J., **Seuret**, A., **Fridman**, E. et **Richard**, J. (2011). Stabilisation of neutral systems with saturating control inputs. *International Journal of Systems Science*, 42(7):1093–1103.

**Goodarzi**, A., **Esmailzadeh**, E. et **Vossoughi**, G. (2001). Direct yaw moment control for motorized wheel electric vehicles. *18th Biennial Conference on Mechanical Vibration and Noise*, 6A:215–222.

**Gordon**, T., **Howell**, M. et **Brandao**, F. (2003). Integrated control methodologies for road vehicles. *Vehicle System Dynamics*, 40(1-3):157–190.

**Guelton**, K., **Manamanni**, N. et **Jabri**, D. (2010). $H_\infty$ Decentralized Static Output Feedback Controller Design For Large Scale Takagi-Sugeno Systems. *IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ), Barcelona, Spain*, pages 1–7.

**Guo**, Z. et **Bo**, R. (2010). Non-Fragile Static Output Controller Design for Fuzzy Systems. *International Conference on Intelligent System Design and Engineering Application (ISDEA)*, 1:1017–1020.

**Hajjaji**, A. E., **Chadli**, M., **Oudghiri**, M. et **Pages**, O. (2006). Observer-based robust fuzzy control for vehicle lateral dynamics. *American Control Conference (ACC), Minneaspolis, USA*, pages 4664–4669.

**Hespanha**, J., **Naghshtabrizi**, P. et **Yonggang**, X. (2007a). A survey of recent results in networked control systems. *Proceedings of the IEEE*, 95:138–162.

**Hespanha**, J., **Naghshtabrizi**, P. et **Yonggang**, X. (2007b). Survey on the stability of networked control systems. *Journal of Control Theory and Applications*, 5:374–379.

**Hilaire**, T. (2006). *Analyse et synthèse de l'implémentation de lois de contrôle-commande en précision finie.* Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Nantes, France.

**Hongkai**, Z., **Qiansheng**, F., **Xiaolong**, W., **Yang**, L. et **Chao**, W. (2010). Non-fragile Guaranteed-Cost Robust $H_\infty$ Control for a Class of Nonlinear Networked Control Systems with Long Time-Delay. *International Conference on Intelligent Computation Technology and Automation (ICICTA),Hong Kong and Macau*, 2:784 –787.

**Hsiao**, T. et **Tomizuka**, M. (2004). Observer-based sensor fault detection and identification with application to vehicle lateral control. *American Control Conference, Boston, USA*, 1:810 – 815.

**ISO** (1991). Road vehicles- Vehicle dynamics and road-holding ability- Vocabulary. *ISO 8855 :1991.*

**Jazar**, R. (2008). Vehicle Dynamics : Theory and Application. *Springer.*

**Jiang**, X. F. et **Han**, Q. L. (2007). Robust $H_\infty$ control for uncertain TakagiSugeno fuzzy systems with interval time-varying delay. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 15(2):321–331.

**Jianyong**, W., **Houjun**, T., **Shaoyuan**, L. et **Wan**, F. (2007). Improvement of vehicle handling and stability by integrated control of four wheel steering and direct yaw moment. *Chinese Control Conference, Zhangjiajie, Hunan, China*, 43:730–735.

**Jianyong**, Y., **Shimin**, Y. et **Haiqing**, W. (2004). Survey on the performance analysis of networked contol systems. *IEEE lntemational Conference on Systems, Man and Cybernetics*, 6:5068–5073.

**Kchaou**, M., **Gassara**, H. et **Hajjaji**, A. E. (2013). Robust observer-based control design for uncertain singular systems with time-delay. *International Journal of Adaptative Control and Signal Processing*, 28(2):169–183.

**Kchaou**, M., **Souissi**, M. et **Toumi**, A. (2010). A new approach to non-fragile $H_\infty$ observer-based control for discretetime fuzzy systems. *International Journal of Systems Science*, 43(1):9–20.

**Kchaou**, M. et **Toumi**, A. (2011). Delay-Dependent $H_\infty$ Resilient Output Fuzzy Control For Nonlinear Discrete-Time Systems With Time-Delay. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 19(2):229–250.

**Kchaou**, M. et **Toumi**, A. (2013). Fuzzy network-based control for a class of T-S fuzzy systems with limited communication. *Transactions on Systems, Signals and Devices, Sousse, Tunisia*, pages 1–6.

**Kidane**, S., **Alexander**, L., **Rajamani**, R., **Starr**, P. et **Donath**, M. (2006). Road Bank Angle Considerations in Modeling and Tilt Stability Controller Design for Narrow Commuter Vehicles. *In Proc. of the 2006 American Control Conference, Minneapolis, Minnesota, USA*, pages 5825–5830.

**Kiencke**, U. (1993). Real time estimation of adhesion characteristic between tyre and road. *Pro .IFAC Congress, Sydney, Australia*, pages 15–18.

**Kiencke**, U. et **Nielsen**, N. (2000). "Automotive control system". *Springer*.

**Kiencke**, U. et **Nielsen**, N. (2005). "Automotive control systems for engine , driveline, and vehicle." $2^{eme}$ edition. *Springer*.

**Latrach**, C., **Kchaou**, M., **Hajjaji**, A. E. et **Rabhi**, A. (2013a). Commande floue décentralisée pour une classe de systèmes interconnectés en réseau. *LFA, Reims, France*, pages 203–210.

**Latrach**, C., **Kchaou**, M., **Rabhi**, A. et **Hajjaji**, A. E. (2014). $H_\infty$ networked fuzzy control for vehicle lateral dynamic with limited communication. *In 19th World Congress IFAC WC, Cape Town, South Africa*, pages 6313–6318.

**Latrach**, C., **Kchaou**, M., **Rabhi**, A. et **Hajjaji**, A. E. (2015). Decentralized networked control system design using (TS) fuzzy approach. *International Journal of Automation and computing (IJAC)*, 12(2):125–133.

**Latrach**, C., **Rabhi**, A., **Kchaou**, M. et **Hajjaji**, A. E. (2013b). Commande en réseau de la dynamique latérale du véhicule. *JD MACS, Strasbourg, France*, pages 311–316.

**Lawrenz**, W. (1997). CAN system engineering : from theory to practical applications. *Springer-verlag, New York*, pages 1–470.

**Lechner**, D. (2002). *Analyse du comportement dynamique des véhicules routiers légers : développement d'une méthodologie appliquée à la sécurité primaire*. Thèse de doctorat, École centrale de Lyon, France.

**Li**, C., **Wang**, H. et **Liao**, X. (2004). Delay-dependent robust stability of uncertain fuzzy systems with time-varying delays. *Proc. Inst. Elect. Eng. Control Theory Appl*, 151(4):417–421.

**Li**, H., **Liu**, H., **Hilton**, C. et **Hand**, S. (2013). Non-fragile $H_\infty$ control for half-vehicle active suspension systems with actuator uncertainties. *Journal of Vibration and Control*, 19(4):560–575.

**Lin**, R., **Ding**, X., **Huang**, T. et **Wang**, C. (2010). Non-fragile guaranteed-cost controller design for the networked control systems with network-induced time delay. *IEEE International Conference on Automation and Logistics (ICAL)*, pages 614 –617.

**Ling**, Q. et **Lemmon**, M. (2002). Robust performance of soft real-time networked control systems with data dopouts. *In Proc. of the the 41st IEEE Conference on Decision and Control, Las Vegas, Nevada USA*, 2:1225–1230.

**Ling**, Q. et **Lemmon**, M. (2003). Optimal dropout compensation in networked control systems. *In Proc. of the the 42st IEEE Conference on Decision and Control, Maui, Hawaii*, 1:670–675.

**Liu**, C. et **Zhang**, Y. (2010). Observer-based $H_\infty$ control of fuzzy systems with quantized feedback. *International Conference on Eletrical and Control Engineering, Wuhan, China*, pages 1403–1405.

**Liu**, X. et **Zhang**, Q. (2003). New approaches to $H_\infty$ controller designs based on fuzzy observers for T-S fuzzy systems via LMI. *Automatica*, 39(9):1571–1582.

**Ma**, X., **Sun**, Z. et **He**, Y. (1998). Analysis and design of fuzzy controller and fuzzy observer. *IEEE Transaction on Fuzzy Systems*, 6(1):41–50.

**Mahmoud**, M. et **Ismail**, A. (2008). Resilient control of non-linear discrete-time state-delay systems. *Applied Mathematics and Computation*, 206(2):561–569.

**Mahmoud**, M. S. et **Al-Rayyah**, A. Y. (2011). Quantized feedback stabilization of interconnected continuous time-delay systems. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 28(1):1–17.

**Mammar**, S. (1992). *Commande Multivariable Robuste par les Approches LQR/LTR et $H_\infty$*. Thèse de doctorat, Université Paris XI Orsay, France.

**Mammar**, S. et **Koenig**, D. (2002). Vehicle handling improvement by active steering. *vehicle system dynamics*, 38(3):211–242.

**Mansouri**, B. (2005). *Contribution à la synthèse de lois de commandes en poursuite de trajectoire pour les systèmes flous de type Takagi Sugeno incertains*. Thèse de doctorat, Université de Reims, France.

**Menighed**, K. (2010). *Embedded and cooperative control for fault tolerant systems*. Thèse de doctorat, Université Henri Poincaré, Nancy, France.

**Morère**, Y. (2000). *Mise en oeuvre de lois de commande pour les modèles flous de type Takagi-Sugeno*. Thèse de doctorat, Université de Valenciennes et du Hainaut Cambrésis, France.

**Nilsson**, J. (1998). *Real-time control systems with delay*. Thèse de doctorat, Departement of Automatic Control, Lund Institute of Technologe, Sweden.

**Oudghiri**, M. (2008). *"Commande multi-modèles tolérante aux défauts : Application au contrôle de la dynamique d'un véhicule automobile"*. Thèse de doctorat, Université de picardie Jules Verne, Amiens, France.

**Oudghiri**, M., **Chadli**, M. et **Hajjaji**, A. E. (2007). Vehicle yaw control using a robust $H_\infty$ observer-based fuzzy controller design. *46th IEEE Conference on Decision and Control, New Orleans, USA*, pages 3895–3900.

**Oudghiri**, M. et **Hajjaji**, M. C. A. E. (2008a). Control and Sensor Fault-Tolerance of Vehicle Lateral Dynamics. *Proceedings of the 17th World Congress The International Federation of Automatic Control*, pages 123–128.

**Oudghiri**, M. et **Hajjaji**, M. C. A. E. (2008b). Robust observer-based fault-tolerant control for vehicle lateral dynamics. *International Journal of Vehicle Design, Seoul, Korea*, 48(3/4):173–189.

**Pacejka**, H. B. (2002). Tyre and vehicle dynamics. *Butterworth-Heinemann Ltd.*

**Palladino**, L. (2006). *Analyse comparative de différentes lois de commande en vue du contrôle global du chassis.* Thèse de doctorat, Université Paris XI Orsay, France.

**Pan**, Y.-J., **Marquez**, H. et **Chen**, T. (2006). Stabilization of remote control systems with unknown time varying delays by LMI techniques. *International Journal of Control*, 79(7):752–763.

**Park**, J. (2001). Design of robust decentralized dynamic controller for uncertain large-scale interconnected systems with time delays. *IEICE Trans Fundam Electron Commun Comput Sci*, E84-A:1747–1754.

**Park**, J. (2002). Robust nonfragile decentralized controller design for uncertain large-scale interconnected systems with time delays. *Trans ASME J Dyn Syst Meas Control*, 124(2):332–336.

**Park**, P., **Ko**, J. et **C.Jeong** (2011). Reciprocally convex approach to stability of systems with time-varying delays. *Automatica*, 47(1):235–238.

**Pham**, A. T. (1991). Nouvelle méthode de modélisation de la dynamique des véhicules. *SIA, Paris, France.*

**Poussot-Vassal**, C. (2008). *Commande Robuste LPV Multivariable de Chassis Automobile.* Thèse de doctorat, INP de Grenoble, France.

**Raharijona**, T. (2004). *Commande Robuste pour le Contrôle Latéral de Véhicule.* Thèse de doctorat, Université Paris XI Orsay, France.

**Rahmani**, B. et **Markazi**, A. (2013). A new method for control of Nonlinear Networked Systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, pages 1–19.

**Rajamani**, R. (2006). Vehicle Dynamics and Control. *Springer Science EDT.*

**Ryu**, J. et **Gerdes**, J. C. (2004). Estimation of Vehicle Roll and Road Bank Angle. *In Proc. of the 2004 American Control Conference, Boston, Massachusetts*, 3:2110–2115.

**Scorletti**, G. (1995). *Approche Unifiée de l'Analyse et de la Commande des Systèmes par Formulation LMI.* Thèse de doctorat, Université Paris XI Orsay, France.

**Scorletti**, G. et **Duc**, G. (2001). An LMI approach to decentralized $H_\infty$ control. *International Journal of Control*, 74(3):211–224.

**Segel**, M. (1956). Theorical prediction and experimental substantiation of the response of the automobile to steering control. *Proc. automobile divesion of the institut of mechanical engineers*, pages 310–330.

**Seuret**, A., **Michaut**, F., **Richard**, J. et **Divoux**, T. (2006). Networked control using gps synchronization. *American Control Conference, Minneapolis, USA,*, pages 4195–4200.

**Shao**, H. (2008). New delay-dependent stability criteria for systems with interval delay. *Automatica*, 45(3):744–749.

**Sid**, M. (2013). *Co-conception diagnostic et ordonnancement des mesures dans un système controlé en réseau.* Thèse de doctorat, Université de Lorraine, France.

**Sun**, J., **Liu**, G., **Chen**, J. et **Rees**, D. (2010). Improved delay-range-dependent stability criteria for linear systems with time-varying delays. *Automatica*, 46(2):466–470.

**Takagi**, T. et **Sugeno**, M. (1985). Fuzzy identification of system and its applications to modeling and control. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 15(1): 116–132.

**Tan**, H. et **Tomizuka**, M. (1990). Discret-time controller design for robust vehicle traction. *IEEE Control Systems Magazine*, 10(3):107–113.

**Tanaka**, K., **Ikeda**, T. et **Wang**, H. O. (1996). Robust stabilization of a class of uncertain nonlinear systems via fuzzy control : quadratic stabilizability, $H_\infty$ control theory, and linear matrix inequalities. *IEEE Trans. Fuzzy Systems*, 4(1):1–13.

**Tanaka**, K. et **Sano**, M. (1994). A robust stabilisation problem of fuzyy control systems and its application to backing up control of a truck-trailer. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2(2):119–134.

**Tang**, X. et **Yu**, Y. (2007). Networked Control System : Survey and Directions. *Springer Berlin/heidelberg edition.*

**Tipsuwan**, Y. et **Chow**, M. (2003). Control methodologies in networked control systems. *Control Engineering Practice*, 11(10):1099–1111.

**Wang**, H., **Tanaka**, K. et **Griffin**, M. (1996). An approach to fuzzy control of non linear systems : Stability and design issues. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 4(1):14–23.

**Wang**, W. et **Lin**, W. (2005). Decentralized PDC for Large-Scale T-S Fuzzy Systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 13(6):779–786.

**Wang**, Y., **Xie**, L. et **Souza**, C. D. (1992). Robust control of a class of uncertain nonlinear systems. *Systems and Control Letters*, 19(2):139–149.

**Witrant**, E., de **Wit**, C. C. et **Alamir**, M. (2007). Remote output stabilization via communication networks with a distributed control law. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 52(8):1480–1486.

**Wu**, J., **Karimi**, H. R. et **Shi**, P. (2012). Observer-based stabilization of stochastic systems with limited communication. *Mathematical Problems in Engineering, Hindawi Edt*, 2012(2012):1–17.

**Xiao**, X. et **Mao**, Z. (2011). Decentralized guaranteed cost stabilization of time-delay large-scale systems based on reduced-order observers. *Journal of the Franklin Institute*, 348(9):2689–2700.

**Yang**, T. (2006). Networked control system : a brief survey. *Control theory and applications (IEEE proceedings)*, 153(4):403–412.

**Yu**, J., **J.Tan**, **Jiang**, H. et **Liu**, H. (2012). Dynamic output feedback control for markovian jump systems with time-varying delays. *IET Control Theory Appl*, 6(6):803–812.

**Yue**, D., **Peng**, C. et **Tang**, G. (2006). Guaranteed cost control of linear systems over networks with state and input quantisations. *IEE Proceedings Control Theory and Applications*, 153(6):658–664.

**Yue**, J., **Chen**, Q., **Chen**, Z. et **Yan**, Y. (2011). Non-Fragile $H_\infty$ Robust Control for Uncertain Nonlinear Fuzzy Systems. *Proceedings of the 30th Chinese Control Conference July 22-24, Yantai, China*, pages 2915–2920.

**Zhan**, W., **Branicky**, M. et **Phillips**, S. (2001). Stability of networked control system. *IEEE Control Sys.Mag*, 21(1):84–99.

**Zhang**, B., **Zhou**, S. et **Li**, T. (2007). A new approach to robust and non-fragile $H_\infty$ control for uncertain fuzzy systems. *Information Sciences*, 177(22):5118–5133.

**Zhang**, D., **Han**, Q. et **Jia**, X. (2014). Network-Based Output Tracking Control for a Class of T-S Fuzzy Systems That Can Not Be Stabilized by Non delayed Output Feedback Controllers. *IEEE Transactions on Cybernetics*, PP(99):1–14.

**Zhang**, H., **Li**, M., **Yang**, J. et **Yan**, D. (2009). Fuzzy Model-Based Robust Networked Control for a Class of Nonlinear Systems. *IEEE Transactions on Systems, Man, And Cybernetics-Part A : Systems and Humans*, 39(2):437–447.

**Zhang**, H., **Yan**, H., **Yang**, F. et **Chen**, Q. (2011). Quantized control design for impulsive fuzzy networked systems. *IEEE Transactions on fuzzy systems*, 19(6):1153–1162.

# Table des matières


**1 Introduction générale** **5**

1.1 Introduction . . . . . 5

1.2 Introduction Générale et motivations . . . . . 6

1.2.1 L'embarqué en automobile . . . . . 6

1.2.2 Contrôle global du châssis du véhicule (CGC) . . . . . 9

1.3 Plan de la thèse . . . . . 13

**2 Modélisation d'un véhicule automobile, aspects généraux** **15**

2.1 Introduction . . . . . 15

2.2 Les différents mouvements du véhicule et définition des repères . . . . . 16

2.3 Modèle de pneumatique . . . . . 19

2.3.1 Introduction . . . . . 19

2.3.2 Forces du pneumatique . . . . . 20

2.3.3 Modèle des forces pneumatiques . . . . . 23

2.4 Dynamique de roulis . . . . . 26

2.5 Modèle dérive/lacet (bicyclette) . . . . . 28

2.6 Modèle dérive/lacet/roulis . . . . . 31

2.7 Modèle longitudinal d'un quart de véhicule . . . . . 32

2.8 Représentation floue de type Takagi-Sugeno TS de la dynamique du véhicule 34

2.8.1 Modèle flou TS . . . . . 34

2.9 Conclusion . . . . . 39

**3 Contrôle des systèmes flous commandés en réseau** **41**

3.1 Introduction . . . . . 41

3.2 Les systèmes commandés en réseau (SCRs) . . . . . 42

3.2.1 Définition de SCR . . . . . 42

3.2.2 Avantages de l'architecture SCR . . . . . 42

3.2.3 Inconvénients de l'architecture SCR . . . . . 43

3.2.4 Dégradation des performances sous contraintes de communication . 44

3.3 Stabilisation par retour d'état flou . . . . . 47

3.3.1 Système nominal . . . . . 47

3.3.2 Système flou soumis à des perturbations extérieures . . . . . 56

3.3.3 Système flou incertain soumis à des perturbations extérieures . . . . 64

3.4 Stabilisation par retour de sortie statique . . . . . 65

3.4.1 Analyse de stabilité en boucle fermée . . . . . 67

3.4.2 Synthèse d'un contrôleur flou par retour de sortie statique . . . . . 70
3.4.3 Application à la commande robuste en réseau de la dynamique latérale du véhicule . . . . . 75
3.5 Stabilisation par retour d'état reconstruit . . . . . 78
3.5.1 Commande basée sur observateur avec un quantificateur de mesures 79
3.5.2 Commande basée sur observateur avec quantificateurs à la fois des mesures et des commandes . . . . . 85
3.5.3 Application à la commande en réseau de la dynamique latérale . . . 94
3.6 Conclusion . . . . . 97

**4 Commande floue décentralisée des systèmes de grande dimension 99**
4.1 Introduction . . . . . 99
4.2 Systèmes flous interconnectés en réseau et architecture de commande adoptée 100
4.2.1 Description des systèmes flous de type TS de grande dimension . . 100
4.2.2 Synthèse de la loi de commande PDC robuste par retour d'état sans communication en réseau . . . . . 102
4.2.3 Commande en réseau PDC robuste par retour d'état . . . . . 105
4.2.4 Commande en réseau par retour de sortie . . . . . 109
4.2.5 Résultats de simulation . . . . . 112
4.2.6 Modèle TS dérive/lacet/roulis du véhicule . . . . . 119
4.3 Conclusion . . . . . 128

**A Quelques Lemmes mathématiques 131**
A.1 Techniques de relaxation . . . . . 131

**B Formulation LMI et approche PDC 135**
B.1 Formulation LMI . . . . . 135
B.2 Principe de l'approche PDC . . . . . 136

**Bibliographie 137**

# Table des figures


1.1 Châssis d'un véhicule : architecture avec systèmes de suspensions, freinage et direction (image de Moving Graphics) [Poussot-Vassal, 2008]. . . . . 8
1.2 Structure monovariable. . . . . 10
1.3 Structure avec superviseur. . . . . 11
1.4 Structure multivariable. . . . . 11

2.1 Illustration des différents mouvements du véhicule. . . . . 16
2.2 Passage entre les différents repères utilisés. . . . . 17
2.3 Définition des repères. . . . . 17
2.4 Repère lié à la caisse après un mouvement de tangage. . . . . 18
2.5 Repère lié à la caisse après un mouvement de roulis. . . . . 18
2.6 Forces et moments appliqués sur la roue [Jazar, 2008]. . . . . 20
2.7 Illustration des angles du pneumatique : (a) : vue de face de l'angle de carrossage $\gamma$ ; (b) : vue de dessus de l'angle de dérive $\alpha$. . . . . 21
2.8 Variation du coefficient de frottement en fonction du glissement [Oudghiri, 2008]. . . . . 22
2.9 Variation du coefficient d'adhérence en fonction de l'état de la chaussée. . . 22
2.10 Modèle de Pacejka : courbes des efforts latéraux et les zones de fonctionnement du pneumatique. . . . . 24
2.11 Courbe générée par l'expression 2.9. . . . . 25
2.12 Mouvement du roulis du véhicule. . . . . 27
2.13 Axe de roulis. . . . . 28
2.14 Modèle bicyclette. . . . . 28
2.15 Les différents paramètres du modèle bicyclette pour la dynamique latérale du véhicule. . . . . 29
2.16 Modèle bicyclette : contrôle par le moment $M_z(t)$. . . . . 31
2.17 Représentation de la dynamique de la roue (lors du freinage). . . . . 32
2.18 Les fonctions d'appartenance . . . . . 37
2.19 Comparaison des forces estimées avec celles de Pacejka . . . . . 38

3.1 Système commandé en réseau [Sid, 2013] . . . . . 42
3.2 Le bus CAN dans un véhicule automobile [Sid, 2013] . . . . . 43
3.3 Station de traitement des eaux usées [Sid, 2013] . . . . . 44
3.4 Les retards induits dans un SCR . . . . . 45
3.5 Schéma du système commandé en réseau avec quantification des mesures. . 46
3.6 Retards induits par le réseau. . . . . 53

3.7 Pertes de paquets de données. . . . . 53
3.8 Evolution de la variable d'état $x_1$. . . . . 54
3.9 Evolution de la variable d'état $x_2$. . . . . 54
3.10 Evolution du signal de commande. . . . . 54
3.11 Système commandé en réseau avec retards aléatoires . . . . . 55
3.12 Schéma du système commandé en réseau . . . . . 59
3.13 Angle de braquage avant $\delta_f$ . . . . . 60
3.14 Retards induits par le réseau. . . . . 60
3.15 Pertes de paquets de données. . . . . 60
3.16 Comparaison des angles de glissement latéraux $\beta$ . . . . . 61
3.17 Comparaison des vitesses du lacet $r$. . . . . 61
3.18 Trajectoire du signal de commande $M_z$. . . . . 61
3.19 Evolution de la vitesse de la roue et la vitesse du véhicule. . . . . 63
3.20 Glissement et glissement désiré : avec la loi de commande floue. . . . . 63
3.21 Evolution du signal de commande. . . . . 63
3.22 Angle de braquage avant . . . . . 76
3.23 Retard induit par le réseau . . . . . 76
3.24 Pertes de paquet d'information. . . . . 76
3.25 Réponses de l'angles de glissement latéral avec le contrôleur non-fragile (3.103) et le contrôleur (3.105). . . . . 77
3.26 Réponses de vitesse de lacet avec le contrôleur non-fragile (3.103) et le contrôleur (3.105). . . . . 77
3.27 Angle de glissement latéral pour certains coefficients d'adhérence à la route . 77
3.28 Vitesse de lacet pour certains coefficients d'adhérence à la route. . . . . 77
3.29 Signal de commande : Moment du lacet pour $\mu = 0.7$. . . . . 77
3.30 Schéma du système commandé en réseau en présence de deux quantificateurs à la fois des mesures et des commandes. . . . . 85
3.31 Schéma du système commandé en réseau . . . . . 95
3.32 Retards induits par le réseau. . . . . 96
3.33 Pertes de paquets de données. . . . . 96
3.34 Angle de braquage avant . . . . . 96
3.35 Courbe du moment $M_Z$ après application des deux quantificateurs un avant et un après le contrôleur. . . . . 96
3.36 Réponses et estimés de l'angle de glissement latéral. . . . . 97
3.37 Réponses et estimés de la vitesse du lacet . . . . . 97

4.1 Commande décentralisée [Menighed, 2010]. . . . . 100
4.2 Structure du sous-système commandé en réseau $S_i$ . . . . . 101
4.3 Retard induit par la communication en réseau. . . . . 113
4.4 Pertes de paquets d'informations. . . . . 114
4.5 Réponses des états $x$ dans $S_1$ . . . . . 114
4.6 Réponses des états $x$ dans $S_2$ . . . . . 114

4.7 Courbes des signaux de commande $u_i(t)$. . . . . 115
4.8 Réponse des états $x$ dans $S_1$ . . . . . 117
4.9 Réponse des états $x$ dans $S_2$ . . . . . 118
4.10 Réponse des états $x$ dans $S_3$ . . . . . 118
4.11 Trajectoires des signaux de commande $u_i(t)$. . . . . 118
4.12 Structure de la commande globale du véhicule . . . . . 119
4.13 Evolution des états du sous-système $S_1$ . . . . . 122
4.14 Evolution des états du sous-système $S_2$ . . . . . 122
4.15 Evolution de l'angle de braquage $\delta_c$ . . . . . 123
4.16 Signaux de commande $u_i(t)$. . . . . 123
4.17 Retards induits par le réseau . . . . . 123
4.18 Pertes de paquets de donnéees . . . . . 123
4.19 Evolution de l'angle de glissement latéral $\beta$ . . . . . 123
4.20 Evolution de la vitesse du lacet $r$ . . . . . 123
4.21 Evolution de la vitesse du roulis $\dot{\Phi}$ . . . . . 124
4.22 Evolution de l'angle de roulis $\Phi$ . . . . . 124
4.23 Comparaison des angles de glissement latéraux $\beta$ . . . . . 124
4.24 Comparaison des vitesses de lacet $r$ . . . . . 124
4.25 Comparaison des angles de braquage avant $\delta_f$ . . . . . 124
4.26 Comparaison des vitesses du roulis $\dot{\Phi}$ . . . . . 124
4.27 Comparaison des angles de roulis $\Phi$ . . . . . 125
4.28 Comparaison des actions du roulis $u_\Phi$ . . . . . 125
4.29 Comparaison des entrées de commande $u_1(t)$ . . . . . 125
4.30 Comparaison des entrées de commande $u_2(t)$ . . . . . 125
4.31 Evolution de l'angle de glissement latéral $\beta$ . . . . . 127
4.32 Evolution de la vitesse du lacet $r$ . . . . . 127
4.33 Evolution de l'angles de braquage avant $\delta_f$ . . . . . 127
4.34 Evolution de la vitesse de roulis $\Phi$ . . . . . 127
4.37 Courbe du signal de commande $u_1(t)$ du sous-système $S_1$ . . . . . 127
4.38 Courbe du signal de commande $u_2(t)$ du sous-système $S_2$ . . . . . 127
4.35 Evolution de l'angle du roulis $\dot{\Phi}$ . . . . . 128
4.36 Evolution de l'action du roulis $u_\Phi$ . . . . . 128

B.1 Principe de l'approche PDC . . . . . 136

# Liste des tableaux

2.1 Coefficients de rigidité . . . . . 37

3.1 Paramètres du véhicule . . . . . 60

# COMMANDE EN RESEAU DES SYSTEMES FLOUS : APPLICATION A LA DYNAMIQUE DE VEHICULE

Chedia LATRECH

**Résumé**. Cette thèse concerne les problèmes de stabilité et de stabilisation des systèmes non linéaires décrits par des modèles flous de type Takagi Sugeno (TS) incluant les contraintes liées à la transmission d'information en réseau, au rejet de perturbations, aux variations paramétriques et à la non fragilité de la commande. L'enjeu consiste à proposer des conditions de stabilité permettant la synthèse des lois de commande centralisées et décentralisées, qui opère à travers un réseau de communication, en utilisant les outils des inégalités linéaires matricielles (LMIs) et l'approche $H_\infty$. Nous abordons dans un premier temps, les systèmes commandés en réseau (SCRs) non linéaires représentés par des modèles flous de type TS, puis nous étendons notre étude aux systèmes de grande dimension pour synthétiser des lois de commande décentralisées. Au final, présentons la validation en simulation sur un modèle du véhicule pour le contrôle global de châssis (CGC) garantissant la sécurité et l'agrément de conduite.
**Mots clés :** Stabilisation, modèles flous de type Takagi Sugeno (TS), LMIs, $H_\infty$, commande décentralisée, SCRs, Contrôle global du châssis.

❁ ❁ ❁

**Abstract**. This thesis studies the stability and stabilization problems of nonlinear systems described by Takagi Sugeno (TS) fuzzy models including the constraints related to the networked transmission, to the disturbance rejection, to the parametric variations and to the non fragility of controller. The challenge is to provide asymptotic stability sufficient conditions developed for the design of centralized and decentralized control laws, that operates through a communications network, using linear matrix inequalities (LMIs) and $H_\infty$ approach. We address initially, nonlinear networked controlled systems (NCSs) described by TS type fuzzy models, and we extend our study to large scale systems for the design of decentralized control laws. Finally, we present simulation validation on the vehicle model for the Global Chassis Control (GCC) ensuring the safety and driveability.
**Key words :** Stabilization, Takagi Sugeno (TS) fuzzy models, LMIs, $H_\infty$, NCSs, Decentralized control, Global Chassis Control.