



HAL
open science

Identification de systèmes non entiers MISO pour la modélisation du climat terrestre

Abir Mayoufi

► **To cite this version:**

Abir Mayoufi. Identification de systèmes non entiers MISO pour la modélisation du climat terrestre. Automatique. Université de Bordeaux; Université de Gabès (Tunisie), 2022. Français. NNT : 2022BORD0056 . tel-03661116

HAL Id: tel-03661116

<https://theses.hal.science/tel-03661116v1>

Submitted on 6 May 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE EN COTUTELLE PRÉSENTÉE

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR DE

L'UNIVERSITÉ DE BORDEAUX

ET DE L'ÉCOLE NATIONALE D'INGÉNIEURS DE GABES

ÉCOLE DOCTORALE SCIENCE, PHYSIQUES ET DE L'INGÉNIEUR UBX

ÉCOLE DOCTORALE SCIENCE, INGÉNIERIE ET SOCIÉTÉ

SPÉCIALITÉ AUTOMATIQUE, PRODUCTIQUE, SIGNAL ET IMAGE, INGÉNIERIE
COGNITIVE

Par Abir MAYOUFI

**Identification de systèmes non entiers MISO pour la
modélisation du climat terrestre**

Sous la direction de Rachid MALTI
et de Mohamed AOUN

Soutenue le 16 Mars 2022

Membres du jury :

Mme. SELLAMI Dorra	Professeur, ENIS, Sfax	Présidente
M. DERBEL Nabil	Professeur, ENIS, Sfax	Rapporteur
M. RAÏSSI Tarek	Professeur, CNAM-Paris	Rapporteur
Mme. CHETOUI Manel	Maître assistante, ENIG, Gabès	Examinatrice
Mme. THOMASSIN Magalie	Maître de conférences, Université de Lorraine	Examinatrice
M. AOUN Mohamed	Professeur, ENIG, Gabès	Directeur
M. MALTI Rachid	Professeur, Université de Bordeaux	Directeur
M. VICTOR Stéphane	Maître de conférences, Université de Bordeaux	Co-directeur

Titre : Identification de systèmes non entiers MISO pour la modélisation du climat terrestre

Résumé :

Cette thèse concerne la planification d'expériences et l'identification de systèmes non entiers multi-entrées-mono-sortie (MISO) à partir d'une représentation par fonctions de transfert. Concernant la planification d'expériences, une étude a été menée pour adapter le signal d'excitation aux paramètres inconnus d'un système de deuxième espèce. L'identification de systèmes MISO a été développée par deux méthodes. L'une basée sur la variable instrumentale optimale, qui permet initialement d'estimer uniquement les coefficients, et qui a été étendue pour l'estimation des ordres de dérivation, par une technique de programmation non linéaire. L'autre méthode est basée sur la minimisation de l'erreur de sortie qui offre l'avantage d'estimer les coefficients et les ordres de dérivation simultanément. Lorsque les ordres de dérivation sont inconnus, une méthode d'initialisation est proposée permettant tout d'abord d'estimer l'ordre s-commensurable global, ensuite les ordres S-commensurables locaux et finalement tous les ordres de dérivation. Enfin une application à l'identification du système climatique terrestre est proposée à la fin de la thèse.

Mots clés : Système non entier, identification, multivariable, S-commensurabilité, planification d'expériences, variable instrumentale, erreur de sortie, système climatique, facteur de forçage, température, réchauffement

Titre : Identification of fractional MISO systems for earth climate modeling

Abstract :

This thesis deals with experiment design and multi-input-single-output (MISO) system identification using transfer function representation. Concerning experiment design, a study has been carried out to adapt the excitation signal to the unknown parameters of elementary fractional systems of the second kind. The identification of MISO systems has been developed by two methods. One is based on the optimal instrumental variable, which initially estimates only the coefficients. It has been extended to estimate differentiation orders, by nonlinear programming. The other method is based on the minimization of the output error which offers the advantage of estimating the coefficients and the differentiation orders simultaneously. When the differentiation orders are unknown, an initialization method is proposed allowing first to estimate the global S-commensurate order, then the local ones and finally all the differentiation orders. Finally, an application to the identification of the earth's climate system is proposed at the end of the thesis.

Keywords : Fractional system, system identification, Multi-Input-Single-Output, S-commensurability, experiment design, instrumental variable, output error, climate system, forcing factor, temperature, global warming

Laboratoire d'Intégration du Matériau au Système

IMS, UMR 5218, 51 Cours de la libération, 33405 Talence cedex, France.

Laboratoire de recherche Modélisation, Analyse et commande des Systèmes

MACS-ENIG, LR16ES22, Avenue Omar Ibn El Khattab, Zrig Eddakhlania 6072, Gabès, Tunisie.

Dédicace

*Je dédie ce travail,
comme preuve
de respect, de gratitude,
et de reconnaissance à
ma chère famille, et à
toute personne
qui porte de l'estime pour moi.*

Remerciements

Le travail présenté dans ce mémoire a été effectué en cotutelle au sein de l'Université de Bordeaux et de l'École Nationale d'Ingénieurs de Gabès, plus particulièrement au laboratoire de l'Intégration du Matériau au Système (IMS), groupe Automatique, équipe CRONE sous la direction de Monsieur Rachid MALTI, Professeur à l'Université de Bordeaux ainsi qu'au laboratoire de Modélisation, Analyse et Commande des Systèmes (MACS) sous la direction de Monsieur Mohamed AOUN Professeur à l'Ecole Nationale d'Ingénieurs de Gabès (ENIG).

Je tiens d'abord à adresser mes plus vifs remerciements à Monsieur **Mohamed Naceur ABDELKRIM**, Professeur de l'École Nationale d'Ingénieurs de Gabès (ENIG) et Directeur du Laboratoire Modélisation, Analyse et Commande des Systèmes (MACS) et à Monsieur **Yann DEVAL**, Professeur de l'Université de Bordeaux et Directeur du Laboratoire Intégration du Matériau au Système (IMS) pour l'opportunité qu'ils m'ont donné de travailler dans ces deux laboratoires et pour la confiance qu'ils m'ont toujours témoigné.

Je tiens à remercier chaleureusement Messieurs **Rachid MALTI** et **Mohamed AOUN**, directeurs de ma thèse, pour l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant de diriger mes travaux de recherche. Je les remercie pour leurs rigueurs, leurs précieuses remarques, leurs qualités humaines, leurs disponibilités et leurs aides permanentes. Je leur serai toujours reconnaissante pour l'effort qu'ils ont investi dans cette thèse.

J'adresse aussi mes sincères remerciements à Madame **Dorra SELLAMI**, Professeur au département de Génie Électrique de l'École Nationale d'Ingénieurs de Sfax (ENIS), pour l'honneur qu'elle m'a fait d'assurer la présidence du jury.

Je tiens à remercier vivement Monsieur **Nabil DERBEL** Professeur au département de Génie Électrique de l'École Nationale d'Ingénieurs de Sfax (ENIS) et Monsieur **Tarek**

RAÏSSI, Professeur au conservatoire National des Arts et Métiers (CNAM-Paris), qui ont eu la gentillesse d'accepter d'être rapporteurs de cette thèse.

Mes sincères remerciements s'adressent à Madame **Magalie THOMASSIN** Maître de conférences à l'Université de Lorraine, pour avoir accepté d'être examinatrice de cette thèse.

Je témoigne toute ma gratitude à Madame **Manel CHETOUI** et Monsieur **Stéphane VICTOR**, encadrants de ma thèse, pour la qualité de leurs encadrements, leurs suivis et leurs conseils, qui ont contribué à la réalisation de cette thèse.

Je ne saurais oublier tous les membres des laboratoires MACS et IMS ainsi que mes enseignants de l'ENIG pour leur encouragement et leur soutien.

Enfin, j'exprime toute ma reconnaissance à mes parents pour leurs innombrables sacrifices tout au long de ces années d'études.

Table des matières

Remerciements	iii
Liste des figures	ix
Liste des tableaux	xv
Notations et Abréviations	xvii
Introduction Générale et organisation de la thèse	1

Chapitre 1

Introduction aux systèmes non entiers

1.1	Introduction	7
1.2	Intégration et dérivation non entières	7
1.2.1	Intégration non entière	8
1.2.2	Dérivation non entière	8
1.3	Transformée de <i>Laplace</i>	10
1.4	Caractérisation fréquentielle	10
1.4.1	Caractérisation fréquentielle d'un intégrateur non entier	10
1.4.2	Caractérisation fréquentielle d'un dérivateur non entier	12
1.5	Représentation des systèmes non entiers	13
1.5.1	Système d'équations différentielles	14
1.5.2	Système de fonctions de transfert	15
1.5.3	Pseudo-représentation d'état	17
1.5.3.1	Système S-commensurable global	17
1.5.3.2	Système S-commensurable local	18
1.5.3.3	Système non commensurable	19
1.6	Stabilité des systèmes non entiers	20
1.6.1	Stabilité d'une fonction de transfert élémentaire de première espèce	21
1.6.2	Stabilité d'une fonction de transfert élémentaire de deuxième espèce	22

1.7	Simulation temporelle de systèmes non entiers	23
1.7.1	Approximation de l'opérateur d'intégration par un modèle entier équivalent	23
1.7.2	Simulation d'une fonction de transfert non entière de première espèce	26
1.7.3	Simulation d'une fonction de transfert non entière de deuxième espèce	27
1.8	Conclusion	31

Chapitre 2

Planification d'expériences d'un système non entier de deuxième espèce

2.1	Introduction	34
2.2	Positionnement du problème de planification d'expériences	36
2.3	Planification d'expériences de systèmes non entiers de première espèce . . .	38
2.3.1	Cas où un seul paramètre est inconnu	38
2.3.2	Cas où deux paramètres sont inconnus	39
2.3.3	Cas où les trois paramètres sont inconnus	39
2.4	Planification d'expériences de systèmes non entiers de deuxième espèce . .	39
2.4.1	Cas où un seul paramètre est inconnu	40
2.4.1.1	Cas où K est inconnu	40
2.4.1.2	Cas où ζ est inconnu	41
2.4.1.3	Cas où ω_0 est inconnue	44
2.4.1.4	Cas où ν est inconnu	45
2.4.2	Cas où deux paramètres sont inconnus	49
2.4.2.1	Cas où K et ζ sont inconnus	49
2.4.2.2	Cas où K et ω_0 sont inconnus	51
2.4.2.3	Cas où K et ν sont inconnus	53
2.4.2.4	Cas où ζ et ω_0 sont inconnus	54
2.4.2.5	Cas où ζ et ν sont inconnus	57
2.4.2.6	Cas où ω_0 et ν sont inconnus	58
2.4.3	Cas où trois ou quatre paramètres sont inconnus	59
2.5	Application à l'identification d'un système non entier de deuxième espèce .	61
2.6	Conclusion	63

Chapitre 3

Identification de systèmes non entiers MISO

3.1	Introduction	66
3.2	Formulation du problème	67
3.3	Identification de systèmes SISO par modèles non entiers	69
3.3.1	Méthode à erreur de sortie	69

3.3.2	Méthode de la variable instrumentale optimale <i>srivcf</i>	71
3.4	Contribution à l'identification de systèmes MISO par modèles non entiers	74
3.4.1	Méthode à erreur de sortie <i>MISO-oe</i>	74
3.4.1.1	Estimation des coefficients	74
3.4.1.2	Estimation des coefficients et des ordres de dérivation	77
3.4.2	Méthode de la variable instrumentale optimale	80
3.4.2.1	Estimation des coefficients <i>MISO-srivcf</i>	80
3.4.2.2	Extension à l'estimation des ordres de dérivation <i>MISO- oosrivcf</i>	84
3.5	Exemples de simulation	89
3.5.1	Estimation des coefficients	89
3.5.2	Estimation des coefficients et des ordres de dérivation d'un système S-commensurable local	92
3.5.2.1	Estimation de l'ordre S-commensurable global	92
3.5.2.2	Estimation des ordres S-commensurables locaux	93
3.5.3	Estimation des coefficients et des ordres de dérivation d'un système non S-commensurable	95
3.5.3.1	Méthode <i>MISO-oe</i>	96
3.5.3.2	Méthode <i>MISO-oosrivcf</i>	96
3.5.3.3	Comparaison des deux méthodes	98
3.6	Conclusion	100

Chapitre 4

Application à l'identification du système climatique terrestre

4.1	Introduction	105
4.2	Description des proxies	105
4.2.1	Définition d'un <i>Proxy</i>	105
4.2.2	Proxies de l'activité humaine	106
4.2.3	Proxies de l'activité volcanique	108
4.2.4	Proxies de l'activité solaire	109
4.2.5	Proxies de température	110
4.2.5.1	Reconstruction de Moberg	112
4.2.5.2	Reconstruction de Ljungqvist	114
4.2.5.3	Reconstruction de Loehle	115
4.2.5.4	Reconstruction de Jones & Mann	116
4.3	Signaux d'entrée et de sortie	117
4.3.1	Facteurs de forçage (ou entrées)	118

4.3.1.1	Activité humaine	118
4.3.1.2	Activité volcanique	119
4.3.1.3	Activité solaire	120
4.3.2	Sortie	123
4.3.3	Sélection des données	124
4.3.3.1	Données d'entrées/sortie	124
4.3.3.2	Période d'identification	125
4.4	Application des méthodes <i>MISO-oe/MISO-oosrivcf</i> sur les données climatiques	126
4.4.1	Période 1850 – 2018	126
4.4.1.1	Estimation des coefficients d'un système MISO S-commensurable de première espèce	127
4.4.1.1.1	Estimation avec un modèle entier (rationnel)	127
4.4.1.1.2	Estimation avec un modèle non entier	129
4.4.1.2	Estimation des coefficients et des ordres de dérivation d'un système MISO S-commensurable de première espèce	131
4.4.1.3	Estimation des coefficients et des ordres de dérivation d'un système MISO S-commensurable de deuxième espèce	133
4.4.2	Période 1000 – 2018	135
4.4.2.1	Estimation des coefficients d'un système MISO S-commensurable de première espèce	136
4.4.2.2	Estimation des coefficients et des ordres de dérivation d'un système MISO S-commensurable de première espèce	138
4.4.2.3	Estimation des coefficients et des ordres de dérivation d'un système MISO S-commensurable de deuxième espèce	140
4.5	Prédiction	143
4.5.1	Premier scénario : entrées figées	143
4.5.2	Deuxième scénario : activité humaine en évolution	144
4.5.3	Troisième scénario : activité solaire en évolution	145
4.5.4	Quatrième scénario : activité volcanique en évolution	146
4.5.5	Cinquième scénario : toutes les entrées en évolution	147
4.6	Conclusion	148
	CONCLUSION GENERALE	151
	Bibliographie	155
	Liste des publications	167

Liste des figures

1.1	Diagrammes de Bode d'un intégrateur non entier pour différentes valeurs de ν	11
1.2	Diagrammes de Bode d'un dérivateur non entier pour différentes valeurs de ν	13
1.3	Régions de stabilité (en vert) des pôles en s^ν pour différents ordres commensurables : $\nu < 1$, $\nu = 1$ et $\nu > 1$	21
1.4	Zones de stabilité et de résonance d'un système de seconde espèce en fonction de ζ et ν	22
1.5	Pulsation normalisée de résonance en fonction de ζ pour différentes valeurs de ν	23
1.6	Diagrammes de Bode de l'intégrateur non entier $I^{0.75}(j\omega)$ et de l'approximation d'Oustaloup et de la variante de Trigeassou	25
1.7	Réponses indicielles de ${}_1F$ pour $\nu = 0.5$	26
1.8	Diagrammes de Bode de ${}_1F$ pour $\nu = 0.5$	27
1.9	Réponses indicielle de ${}_1F$ pour $\nu = 1.5$	28
1.10	Diagrammes de Bode de ${}_1F$ pour $\nu = 1.5$	28
1.11	Réponses indicielle de ${}_2F$ pour $\nu = 0.4$ et $\zeta = -0.7$	29
1.12	Diagrammes de Bode de ${}_2F$ pour $\nu = 0.4$ et $\zeta = -0.7$	30
1.13	Réponses indicielle de ${}_2F$ pour $\nu = 1.9$ et $\zeta = 2$	30
1.14	Diagrammes de Bode de ${}_2F$ pour $\nu = 1.9$ et $\zeta = 2$	31
2.1	Positionnement de la planification d'expériences, d'un système SISO, dans la procédure d'identification	35
2.2	Schéma d'un système SISO	36
2.3	Pulsation optimale normalisée en fonction de ζ , lorsque K est inconnu. La courbe en trait gras et vert correspond à la solution analytique obtenue pour $\nu = 1$	42
2.4	Pulsation optimale normalisée en fonction de ζ , lorsque ζ est inconnu et $\nu = 1$. Le cas $\zeta = 1$ est mis en évidence par le carré rouge	43

2.5	Pulsation optimale normalisée en fonction de ζ , lorsque ζ est inconnu. La courbe en trait gras et vert correspond à la solution analytique pour $\nu = 1$ et le cas $\zeta = 1$ est mis en évidence par le carré rouge	44
2.6	Pulsation optimale normalisée en fonction de ζ , lorsque ω_0 est inconnu et $\nu = 1$. (Le cas $\zeta = 1$ est mis en évidence par le carré rouge)	46
2.7	Pulsation optimale normalisée en fonction de ζ lorsque ω_0 est inconnu. La courbe en trait gras et vert correspond à la solution analytique pour $\nu = 1$. Le cas $\zeta = 1$ est mis en évidence par le carré rouge	46
2.8	Pulsation optimale normalisée en fonction de ζ lorsque ν est inconnu	47
2.9	Pulsation optimale normalisée en fonction de ζ lorsque ν est inconnu et compris dans l'intervalle $0.36 < \nu < 0.38$	48
2.10	Inverse de la variance P_ν^{-1} en fonction de la pulsation optimale normalisée ω_n lorsque $\zeta = 0$, illustrant la présence de deux maximums globaux lorsque $\nu = 0.2$ et $\nu = 0.3$, qui sont mis en évidence avec des carrés, et un seul maximum lorsque $\nu = 0.5$	48
2.11	Pulsation optimale normalisée ω_n en fonction de ν , lorsque $\zeta = 0$; deux maximums globaux lorsque $\nu < \nu_0 \approx 0.38$; les maximums pour $\nu = 0.3$, $\nu = 0.2$ et $\nu = 0.5$, qui correspondent à ceux de la figure 2.10, sont mis en évidence avec des carrés	49
2.12	Pulsation optimale normalisée en fonction de ζ , lorsque K et ζ sont inconnus et $\nu = 1$	50
2.13	Pulsation optimale normalisée en fonction de ζ lorsque K et ζ sont inconnus et ν quelconque. La courbe en trait gras et vert correspond à la solution analytique pour $\nu = 1$	52
2.14	Pulsation optimale normalisée en fonction de ζ lorsque K et ω_0 sont inconnus et $\nu = 1$	53
2.15	Pulsation optimale normalisée en fonction de ζ lorsque K et ω_0 sont inconnus et ν quelconque. La courbe en trait gras et vert correspond à la solution analytique pour $\nu = 1$	54
2.16	Pulsation optimale normalisée en fonction de ζ , lorsque K et ν sont inconnus. La courbe en trait gras et vert correspond à la solution analytique pour $\nu = 1$	55
2.17	Pulsation optimale normalisée en fonction de ζ , lorsque ζ et ω_0 sont inconnus et $\nu = 1$	56
2.18	Pulsation optimale normalisée en fonction de ζ lorsque ζ et ω_0 sont inconnus et ν est quelconque. La courbe en trait gras et vert correspond à la solution analytique pour $\nu = 1$)	57

2.19	Pulsation optimale normalisée en fonction de ζ , lorsque ζ et ν sont inconnus. La courbe en trait gras correspond à la solution analytique pour $\nu = 1$. . .	58
2.20	Pulsation optimale normalisée en fonction de ζ , lorsque ω_0 et ν sont inconnus. La courbe en trait gras et vert correspond à la solution analytique pour $\nu = 1$	59
2.21	Estimation de K et ζ du modèle (2.60) pour $\omega_n = 0.36$ et 50 réalisations de Monte Carlo	62
2.22	Estimation de K et ζ du modèle (2.60) pour $\omega_n = 0.5$ et 50 réalisations de Monte Carlo	62
2.23	Estimation de K et ζ du modèle (2.60) pour $\omega_n = 0.4$ et 50 réalisations de Monte Carlo	63
3.1	Modèle MISO	68
3.2	Modèle à erreur de sortie	70
3.3	Modèle à erreur d'équation	72
3.4	Données d'entrée/sortie utilisées pour l'identification du système (3.107) .	90
3.5	Fonction de coût en fonction de l'ordre commensurable global	92
3.6	Ordres S-commensurables en fonction du nombre d'itérations avec la méthode <i>MISO-oe</i>	94
3.7	Ordres S-commensurables en fonction du nombre d'itérations avec la méthode <i>MISO-oosrivcf</i>	94
3.8	Estimation de tous les ordre de dérivations en fonction du nombre d'itérations avec la méthode <i>MISO-oe</i>	97
3.9	Fonction coût en fonction du nombre d'itérations la méthode <i>MISO-oe</i> . .	97
3.10	Estimation de tous les ordres de dérivation en fonction du nombre d'itérations <i>MISO-oosrivcf</i>	98
3.11	Fonction de coût en fonction du nombre d'itérations de la méthode <i>MISO-oosrivcf</i>	99
4.1	Carottes glaciaires @Helle Astrid Kjær	106
4.2	Site de Law Dome et la position des trois roches glaciaires [Etheridge <i>et al.</i> , 1996, figure. 1]	107
4.3	Reconstruction de la concentration de CO_2 par <i>Proxy</i>	107
4.4	Reconstruction de l'épaisseur optique d'aérosols par <i>Proxy</i>	109
4.5	Reconstruction de l'irradiance solaire totale (TSI) par <i>Proxy</i> calibré	111
4.6	Reconstruction de l'irradiance solaire totale par <i>Proxy</i> non calibré Usoskin	111
4.7	Sédiments @Andreas Steinhoff	112

4.8	Emplacement des proxies utilisées dans la reconstruction de Moberg. Les cercles en bleu indiquent les onze enregistrements des sédiments utilisés et les triangles rouges indiquent les sept séries des cernes utilisées [Moberg <i>et al.</i> , 2005, figure 1]	113
4.9	Reconstruction de température de Moberg (variations, appelées anomalies, par rapport à la période [1961, 1990])	113
4.10	Emplacement des proxies utilisés dans la reconstruction de Ljungqvist [Ljungqvist, 2010, figure 1]	114
4.11	Reconstruction de température par Ljungqvist	115
4.12	Reconstruction de température par Loehle	116
4.13	Reconstruction de température par Jones & Mann	117
4.14	Effet de serre @Sophie Juvenon	118
4.15	Reconstruction de la concentration atmosphérique de CO_2	119
4.16	Reconstruction de l'épaisseur optique des aérosols	120
4.17	Taches solaires http://system.solaire.free.fr	121
4.18	Nombre de taches solaires en fonction des années	122
4.19	Reconstruction Timv17	122
4.20	Reconstruction de l'irradiance solaire totale	123
4.21	Ensemble de données HadCRUT4	124
4.22	Quatre reconstructions de température par proxies connectées à HadCRUT4	125
4.23	Ensemble des données sur la période [1850 2018]	126
4.24	Estimation de la température avec un modèle entier par la méthode <i>MISO-oe</i> , à gauche : températures globales mesurée (—) et estimée (—), à droite : contributions de chaque entrée (TSI, EOA et CO_2 respectivement de haut en bas)	128
4.25	Estimation de la température avec un modèle entier par la méthode <i>MISO-srivcf</i> , à gauche : températures globales mesurée (—) et estimée (—), à droite : contributions de chaque entrée (TSI, EOA et CO_2 respectivement de haut en bas)	128
4.26	Estimation de la température avec un modèle non entier S-commensurable global d'ordre $\nu = 0.5$ par la méthode <i>MISO-oe</i> ; à gauche : températures globales mesurée (—) et estimée (—) ; à droite : contribution de chaque entrée (TSI, EOA et CO_2 respectivement de haut en bas)	130

4.27	Estimation de la température avec un modèle non entier S-commensurable global d'ordre $\nu = 0.5$ par la méthode <i>MISO-srivcf</i> ; à gauche : températures globales mesurée (—) et estimée (---) ; à droite : contribution de chaque entrée (TSI, EOA et CO_2 respectivement de haut en bas)	130
4.28	Estimation de la température avec un modèle non entier S-commensurable local par la méthode <i>MISO-oe</i> ; à gauche : températures globales mesurée (—) et estimée (---) ; à droite : contributions de chaque entrée (TSI, EOA et CO_2 respectivement de haut en bas)	132
4.29	Estimation de la température avec un modèle non entier S-commensurable local par la méthode <i>MISO-oosrivcf</i> ; à gauche : températures globales mesurée (—) et estimée (---) ; à droite : contributions de chaque entrée (TSI, EOA et CO_2 respectivement de haut en bas)	132
4.30	Écart-types des paramètres estimés d'un modèle non entier S-commensurable local par la méthode <i>MISO-oe</i> (en bleu) et la méthode <i>MISO-oosrivcf</i> (en orange)	133
4.31	Estimation de la température avec un modèle non entier de deuxième espèce par la méthode <i>MISO-oe</i> ; à gauche : températures globales mesurée (—) et estimée (---) ; à droite : contributions de chaque entrée (TSI, EOA et CO_2 respectivement de haut en bas)	134
4.32	Écart-types des paramètres estimés d'un modèle non entier de deuxième espèce par la méthode <i>MISO-oe</i>	135
4.33	Ensemble des données sur la période [1000, 2018], Ljunqvist avec HadCRUT4 et Delaygue avec Timv17	136
4.34	Estimation de la température avec un modèle non entier S-commensurable global avec $\nu = 0.5$ par la méthode <i>MISO-oe</i> ; à gauche : températures globales mesurée (—) et estimée (---) ; à droite : contributions de chaque entrée (TSI, EOA et CO_2 respectivement de haut en bas)	137
4.35	Estimation de la température avec un modèle non entier S-commensurable global avec $\nu = 0.5$ par la méthode <i>MISO-oosrivcf</i> ; à gauche : températures globales mesurée (—) et estimée (---) ; à droite : contributions de chaque entrée (TSI, EOA et CO_2 respectivement de haut en bas)	138
4.36	Estimation de la température avec un modèle non entier S-commensurable local par la méthode <i>MISO-oe</i> ; à gauche : températures globales mesurée (—) et estimée (---) ; à droite : contributions de chaque entrée (TSI, EOA et CO_2 respectivement de haut en bas)	139

4.37	Estimation de la température avec un modèle non entier S-commensurable local par la méthode <i>MISO-oosrivcf</i> ; à gauche : températures globales mesurée (—) et estimée (---) ; à droite : contributions de chaque entrée (TSI, EOA et CO_2 respectivement de haut en bas)	140
4.38	Écart-types des paramètres estimés d'un modèle non entier S-commensurable local par la méthode <i>MISO-oe</i> (en bleu) et la méthode <i>MISO-oosrivcf</i> (en orange)	141
4.39	Estimation de la température avec un modèle non entier de deuxième espèce par la méthode <i>MISO-oe</i> ; à gauche : températures globales mesurée (—) et estimée (---) ; à droite : contributions de chaque entrée (TSI, EOA et CO_2 respectivement de haut en bas)	142
4.40	Écart-types des paramètres estimés d'un modèle non entier de deuxième espèce par la méthode <i>MISO-oe</i>	143
4.41	Prédiction de la courbe de température (---) avec des forçages constants après 2018, les deux courbes sont les bornes inférieure et supérieure de la courbe de prédiction (---)	144
4.42	Prédiction de la courbe de température (---), l'activité humaine est en évolution et les activités naturelles sont constantes, après 2018, les deux courbes (---) sont les bornes inférieure et supérieure de la courbe de prédiction	145
4.43	Prédiction de la courbe de température (---), l'activité solaire est en évolution et les deux autres activités sont constantes, après 2018, les deux courbes (---) sont les bornes inférieure et supérieure de la courbe de prédiction	146
4.44	Prédiction de la courbe de température (---), l'activité volcanique en évolution et les deux autres activités sont constantes, après 2018, les deux courbes (---) sont les bornes inférieure et supérieure de la courbe de prédiction	147
4.45	Prédiction de la courbe de température (---) avec des forçages en évolution après 2018, les deux courbes (---) sont les bornes inférieure et supérieure de la courbe de prédiction	148

Liste des tableaux

2.1	Simulation de Monte Carlo, pour 50 réalisations, pour l'estimation des paramètres K et ζ (\bar{K} et $\bar{\zeta}$ sont les moyennes et $\hat{\sigma}(K)$ et $\hat{\sigma}(\zeta)$ sont les écarts-type des estimations)	61
2.2	Le déterminant de $P_{K,\zeta}^{-1}(\omega_n)$ pour différentes valeurs de ω_n	62
3.1	Simulation de Monte Carlo de 100 réalisations pour l'estimation des coefficients avec les deux méthodes <i>MISO-oe</i> et <i>MISO-srivcf</i> avec un $RBS = -20dB$ ($\bar{\theta}$ est la moyenne et $\hat{\sigma}_\theta$ est l'écart type)	91
3.2	Simulation de Monte Carlo de 100 réalisations pour l'estimation des coefficients et des ordres S-commensurables locaux avec les deux méthodes <i>MISO-oe</i> et <i>MISO-oosrivcf</i> ($\bar{\theta}$ est la moyenne et $\hat{\sigma}_\theta$ est l'écart type) avec un $RBS=-20dB$	95
3.3	Simulation de Monte Carlo de 100 réalisations pour l'estimation des coefficients et de tous les ordres de dérivations avec les deux méthodes <i>MISO-oe</i> et <i>MISO-oosrivcf</i> ($\bar{\theta}$ est la moyenne et $\hat{\sigma}_\theta$ est l'écart type) avec un $RBS=-15dB$	100
4.1	Caractéristiques des trois roches issues du site de Law Dome	107
4.2	Estimation des coefficients d'un modèle entier, par les deux méthodes <i>MISO-oe</i> et <i>MISO-srivcf</i>	127
4.3	Estimation des coefficients d'un modèle non entier S-commensurable global avec $\nu = 0.5$ par les deux méthodes <i>MISO-oe</i> et <i>MISO-srivcf</i>	129
4.4	Estimation des coefficients et des ordres de dérivation d'un modèle non entier S-commensurable local par les deux méthodes <i>MISO-oe</i> et <i>MISO-oosrivcf</i>	131
4.5	Estimation des coefficients et des ordres de dérivation d'un modèle non entier de deuxième espèce par la méthode <i>MISO-oe</i>	134
4.6	Estimation des coefficients, avec les deux méthodes <i>MISO-oe</i> et <i>MISO-srivcf</i> , du système climatique terrestre	137

4.7	Estimation des coefficients et des ordres de dérivation d'un modèle non entier S-commensurable local par les deux méthodes <i>MISO-oe</i> et <i>MISO-oosrivcf</i>	139
4.8	Estimation des coefficient et des ordres d'un modèle non entier de deuxième espèce par la méthode <i>MISO-oe</i>	141

Notations et Abréviations

Notations Mathématiques

\mathbb{N}	Ensemble des nombres entiers naturels
\mathbb{Z}	Ensemble des nombres relatifs
\mathbb{R}	Ensemble des nombres réels
\mathbb{R}^*	Ensemble des nombres réels non nuls
\mathbb{R}_+	Ensemble des nombres réels positifs
\mathbb{C}	Ensemble des nombres complexes
p	Opérateur de la dérivation $\frac{d}{dt}$
A^T	Transposée de A
\mathcal{L}	Transformée de Laplace
s	Variable de Laplace
\otimes	Produit de convolution
q^{-1}	Opérateur de retard discret dans le domaine temporel
ω	Pulsation (rad/s)
ω_0	Pulsation propre d'un système d'ordre 2
ω_n	Pulsation normalisée $\omega_n = \tau\omega$ pour un système de première espèce, $\omega_n = \frac{\omega}{\omega_0}$ pour un système de deuxième espèce
j	Nombre complexe tel que $j^2 = -1$
$\Re(\cdot)$	Partie réelle d'un nombre complexe
$\Im(\cdot)$	Partie imaginaire d'un nombre complexe
t	Temps continu
t_h	Temps discret
T_e	Période d'échantillonnage
e	Bruit blanc
$\ f\ _p$	Norme p de la fonction f , $p \in [1, +\infty[: \ f\ _p = (\int_0^\infty f(t) ^p dt)^{\frac{1}{p}}$
$\ f\ _\infty$	Norme infinie ou norme sup $\ f\ _\infty = \sup_{t \in [0, \infty[} f(t) $
$L_p[0, \infty[$	Espace de Lebesgue des fonctions tel que la norme $\ f\ _p < \infty$, $p = 1, 2, \dots$
$L_\infty[0, \infty[$	Espace de Lebesgue des fonctions tel que la norme $\ f\ _\infty < \infty$

Abréviations

<i>SISO</i>	mono-entrée-mono-sortie (Single-Input-Single-Output)
<i>MISO</i>	multi-entrées-mono-sortie (Multiple-Input-Single-Output)
<i>BIBO</i>	Bounded Input Bounded Output
TC	Temps Continu
TD	Temps Discret
<i>BCR</i>	Borne de Cramér-Rao
RSB	Rapport Signal sur Bruit
RBS	Rapport Bruit sur Signal
SBPA	Signal Binaire Pseudo Aléatoire
IV	Variable Instrumentale (Instrumental Variable)
<i>oe</i>	Erreur de sortie (Output Error)
<i>rivc</i>	Variable Instrumentale Raffinée pour systèmes à temps Continu (Refined Instrumental Variable for Continuous-time systems)
<i>srivc</i>	<i>rivc</i> Simplifiée (Simplified <i>rivc</i>)
<i>srivcf</i>	<i>srivc</i> pour systèmes non entiers (<i>srivc</i> for Fractional systems)
<i>oosrivcf</i>	<i>srivcf</i> combinée à l'optimisation des ordres de dérivation (Order Optimisation <i>srivcf</i>)

Introduction Générale et organisation de la thèse

Contexte

L'automatique traite de la modélisation, de l'analyse, de la commande, de la régulation et de la prédiction des systèmes dynamiques. Pour être capable d'analyser ou de commander un système, il faut tout d'abord déterminer son modèle. Par conséquent, la modélisation est une partie cruciale dont les deux principales approches sont la modélisation physique à partir d'équations de la physique (lois de la physique, équations différentielles ou équations aux dérivées partielles) et la modélisation mathématique de type boîte noire qui consiste à déterminer des équations différentielles liant les données d'entrées et de sorties.

L'opérateur de dérivation non entière a gagné de plus en plus d'importance au cours des dernières décennies avec une forte croissance du nombre d'applications dans des domaines scientifiques variés. Cela est principalement dû à la capacité des équations différentielles non entières à modéliser de manière compacte et précise des phénomènes à mémoire longue tels que les systèmes de diffusion. En électrochimie, par exemple, la diffusion des charges dans les batteries acides est régie par les modèles de Randles [Rodrigues *et al.*, 2000] qui utilisent un intégrateur d'ordre 0.5. Depuis, de multiples références concernant la modélisation et l'identification de divers types de batteries ont été proposées dans la littérature [Nasser-Eddine *et al.*, 2020, Wang *et al.*, 2020]. En thermique, [Battaglia *et al.*, 2001] ont montré que la solution exacte de l'équation de la chaleur dans un milieu homogène semi-infini tel qu'un barreau métallique relie la température en un point donné du milieu à l'intégrale d'ordre 0.5 du flux thermique appliqué à un bord du barreau. Par conséquent, [Gabano et Poinot, 2011, Victor *et al.*, 2016] utilisent des modèles non entiers pour estimer les paramètres thermiques et contrôler la température le long d'un barreau thermique. Ces modèles linéaires non entiers ont été étendus à des modèles non linéaires à de grandes variations de température dans [Maachou *et al.*, 2014]. Les systèmes biologiques [Ferdj, 2012, Tzoumas *et al.*, 2018], les systèmes médicaux [Kumar et Singh, 2020, Victor

et al., 2018] et beaucoup d'autres peuvent élégamment s'exprimer en termes d'équations différentielles non entières. L'identification des systèmes par modèles non entiers a débuté à la fin des années 1990 [Trigeassou *et al.*, 1999, Cois *et al.*, 2000]. Elle a continué de gagner de l'intérêt au cours des dernières années [Victor *et al.*, 2013a, Rapačić et Pisano, 2014, Belkhatir et Laleg-Kirati, 2018, Kapetina *et al.*, 2019, Kapetina *et al.*, 2020, Tian *et al.*, 2020].

L'identification des systèmes non entiers multivariables, peu étudiée dans la littérature, se base principalement sur l'extension de la méthode de sous-espaces au cas non entier [Thomassin et Malti, 2009, R. Mansouri et Djennoune, 2010, Malti et Thomassin, 2013, Ivanova, 2017].

La principale thématique abordée dans cette thèse concerne l'identification de systèmes multi-entrées-mono-sortie en se basant sur une représentation de type système de fonctions de transfert.

Objectifs de la thèse

L'identification de systèmes non entiers est un problème non trivial, car il implique l'estimation des ordres de dérivation en plus des coefficients. Les objectifs de la thèse sont décrits dans ce paragraphe.

Tout d'abord, en planification d'expériences, un objectif de cette thèse consiste à trouver les pulsations optimales du signal d'excitation afin d'estimer les paramètres avec la meilleure précision. Ensuite, en identification des systèmes non entiers multi-entrées-mono-sortie (MISO), à partir d'une représentation par fonctions de transfert, un objectif de cette thèse consiste à développer deux méthodes d'identification par modèles non entiers. La première méthode utilise la variable instrumentale optimale à temps continu et la seconde est basée sur la minimisation de l'erreur de sortie. Jusqu'à présent, seuls les systèmes monovariables ont été identifiés avec ces outils. Une nouvelle définition de la commensurabilité dite structurée est introduite dans cette thèse, définition qui permet de réduire le nombre de paramètres estimés afin d'assurer une meilleure convergence. Enfin, un des objectifs de cette thèse consiste à appliquer les algorithmes d'identification développés à l'estimation de la température du système climatique terrestre.

Contributions spécifiques et organisation de la thèse

Cette thèse est divisée en quatre chapitres.

Le **chapitre 1** rappelle, tout d'abord, l'opérateur non entier à travers ses différentes définitions et propriétés. Ensuite, il présente de manière synthétique les systèmes non

entiers à travers les diverses méthodes de représentation. Une nouvelle définition de la commensurabilité, dite structurée (ou S-commensurabilité), est introduite afin de réduire le nombre de paramètres pour une meilleure convergence des algorithmes d'estimation paramétrique. Les systèmes de première et de deuxième espèce sont étudiés plus en détails dans ce chapitre.

Le **chapitre 2** présente une première contribution théorique de cette thèse, à savoir la planification d'expériences pour l'identification d'un système non entier de deuxième espèce. Pour un signal d'entrée multi-sinusoïdal, l'objectif est de déterminer les pulsations optimales permettant d'estimer avec la meilleure précision possible un ou deux paramètres d'une fonction de transfert de deuxième espèce. Ce chapitre permet d'étendre les résultats précédemment établis pour les systèmes de première espèce.

Le **chapitre 3** est consacré à l'identification d'un système non entier MISO dans un contexte de bruit additif blanc. Premièrement, à partir des connaissances *a priori* sur les ordres de dérivation, les coefficients sont estimés en utilisant deux méthodes d'estimation paramétrique. La première (nommée *MISO-srivcf*) est fondée sur la variable instrumentale optimale et la deuxième (nommée *MISO-oe*) sur la minimisation de l'erreur de sortie. Ensuite, en se basant sur la définition d'un système S-commensurable, qui permet de figer la structure des modèles, ces deux méthodes sont étendues pour estimer les ordres de dérivation. La première extension (nommée *MISO-oosrivcf*) est composée de deux étapes : variable instrumentale développée pour l'estimation des coefficients, combinée à un algorithme de type gradient pour l'estimation des ordres de dérivation. La deuxième extension (nommée *MISO-oe*) se base sur la minimisation de l'erreur de sortie pour l'estimation à la fois des coefficients et des ordres de dérivation. Trois variantes de chaque algorithme sont proposées : d'abord, tous les ordres de dérivation sont définis comme des multiples entiers d'un ordre S-commensurable global ; ensuite, les ordres de dérivation sont définis comme des multiples entiers d'un ordre S-commensurable local (de chaque sous-système) ; enfin, tous les ordres de dérivation sont estimés en relâchant la contrainte de S-commensurabilité. Les algorithmes d'optimisation sont évalués par des simulations de Monte Carlo.

Enfin, le **chapitre 4** concerne l'identification du système climatique terrestre. Ce dernier est caractérisé, selon les climatologues, par trois 'facteurs de forçages' (trois entrées), qui sont :

- l'activité humaine (gaz à effet de serre) ;
- l'activité solaire (irradiance, magnétisme, etc) ;
- l'activité volcanique (émissions d'aérosols).

Tout d'abord, une description du système climatique ainsi que les facteurs de forçage est introduite. Ensuite, les différentes méthodes d'identification, développées dans ce mémoire, sont appliquées pour établir un modèle dynamique, afin de trouver une approximation fidèle du comportement du système climatique. Enfin, ce modèle a permis d'établir des prédictions sur les évolutions de la sortie qui est la température terrestre.

Chapitre 1

Introduction aux systèmes non entiers

Sommaire

1.1	Introduction	7
1.2	Intégration et dérivation non entières	7
1.2.1	Intégration non entière	8
1.2.2	Dérivation non entière	8
1.3	Transformée de <i>Laplace</i>	10
1.4	Caractérisation fréquentielle	10
1.4.1	Caractérisation fréquentielle d'un intégrateur non entier	10
1.4.2	Caractérisation fréquentielle d'un dérivateur non entier	12
1.5	Représentation des systèmes non entiers	13
1.5.1	Système d'équations différentielles	14
1.5.2	Système de fonctions de transfert	15
1.5.3	Pseudo-représentation d'état	17
1.6	Stabilité des systèmes non entiers	20
1.6.1	Stabilité d'une fonction de transfert élémentaire de première espèce	21
1.6.2	Stabilité d'une fonction de transfert élémentaire de deuxième espèce	22
1.7	Simulation temporelle de systèmes non entiers	23
1.7.1	Approximation de l'opérateur d'intégration par un modèle entier équivalent	23

1.7.2	Simulation d'une fonction de transfert non entière de première espèce	26
1.7.3	Simulation d'une fonction de transfert non entière de deuxième espèce	27
1.8	Conclusion	31

1.1 Introduction

La notion de dérivation à des ordres non entiers a été révélée par [Leibniz, 1853] dans les correspondances de Wallis (1695) et L'Hôpital (1697). [Dugowson, 1994] a détaillé ces correspondances dans sa thèse. Au XIX^{ème} siècle la formalisation mathématique de la dérivation non entier a pris son essor avec les contributions de [Euler, 1738, Laplace, 1812, Lacroix, 1820, baron de Fourier, 1822, Liouville, 1832, Letnikov, 1868, Riemann, 1876a], etc. Les premières applications et la synthèse de l'opérateur non entier datent principalement de la deuxième moitié du siècle dernier [Oustaloup, 1983, Samko et Ross, 1993, Miller et Ross, 1993, Podlubny, 1998].

Les applications des systèmes d'ordre non entier sont nombreuses et étroitement liées à la géométrie récursive et fractale, pour modéliser : une digue poreuse [Oustaloup, 1995a, Oustaloup, 2014], des phénomènes de diffusion thermique [Gabano et Pointot, 2011, Maachou *et al.*, 2014], la diffusion de charges dans les batteries lithium-ion [Nasser-Eddine *et al.*, 2020, Wang *et al.*, 2020], la modélisation de courants de Foucault à l'intérieur de barres rotoriques dans les machines à induction [Benchellal *et al.*, 2004], ou encore dans les systèmes biologiques [Ionescu et De Keyser, 2008, Magin, 2010, Victor *et al.*, 2018].

L'objectif de ce chapitre est de présenter de manière synthétique les systèmes non entiers à travers différentes définitions, propriétés et méthodes de simulation. Il comporte principalement sept parties : l'intégration et la dérivation non entière, leur transformée de Laplace ainsi que leurs caractérisations fréquentielles sont tout d'abord rappelés. Ensuite, les différentes représentations ainsi que la stabilité de systèmes non entiers commensurables sont énoncées. Enfin, la simulation des systèmes non entiers de première et de deuxième espèces est traitée dans les domaines temporelle et fréquentielle.

1.2 Intégration et dérivation non entières

Les opérations d'intégration et de dérivation à un ordre non entier ν , sont une généralisation de ces opérations du cas entier. Les conditions d'existence d'une dérivée et d'une intégrale non entières sont d'abord présentées avant la définition de ces notions.

Théorème 1.1 [Miller et Ross, 1993] *La dérivée et l'intégrale non entières existent si une fonction monovariante $f(t)$ est continue par morceaux sur $]a, \infty[$, $a \in \mathbb{R}$, et intégrable sur tout sous intervalle fini $[a, \infty[$.*

Remarque 1.1 *Toutes les fonctions dans ce manuscrit respectent les conditions d'existence de la dérivée et de l'intégrale non entières citées dans le Théorème 1.1*

1.2.1 Intégration non entière

Définition 1.1 Définition de Riemann : L'intégrale d'ordre non entier $\nu \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$ d'une fonction $f(t)$ est définie selon Riemann par [Samko et Ross, 1993] :

$$I_a^\nu f(t) \triangleq \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_a^t f(\tau)(t-\tau)^{\nu-1} d\tau, \quad \text{avec} \begin{cases} t > a, & a \in \mathbb{R} \\ \Re(\nu) > 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

où a et t sont les limites de l'intégrale telles que $t > a$ et Γ est la fonction gamma d'Euler définie, pour $\nu \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$, par :

$$\Gamma(\nu) = \int_0^\infty e^{-x} x^{\nu-1} dx, \quad (1.2)$$

L'intégrale non entière (1.1) peut également être définie comme un produit de convolution

$$I_a^\nu f(t) \triangleq \frac{1}{\Gamma(\nu)(t-\tau)^{1-\nu}} \otimes f(t). \quad (1.3)$$

Remarque 1.2 En remplaçant la borne inférieure a par $-\infty$ dans l'équation (1.1), on obtient la définition de l'intégrale non entière de Liouville :

$$I_{-\infty}^\nu f(t) \triangleq \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_{-\infty}^t f(\tau)(t-\tau)^{\nu-1} d\tau \quad (1.4)$$

Comme, la majorité des fonctions du domaine de la physique sont causales alors a est souvent ramené à 0, permettant de définir l'intégrale non entière de Riemann-Liouville :

$$I_0^\nu f(t) \triangleq \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^t f(\tau)(t-\tau)^{\nu-1} d\tau. \quad (1.5)$$

Selon l'équation (1.5) lorsque ν est réel, l'intégrale non entière représente l'aire de la surface que définit la fonction $f(t)$ multiplié par la fonction $\frac{1}{\Gamma(\nu)(t-\tau)^{1-\nu}}$.

1.2.2 Dérivation non entière

Plusieurs définitions de la dérivation non entière existent dans la littérature. Cependant, les plus utilisées dans les sciences de l'ingénieur sont : la définition de Grünwald-Letnikov [Grünwald, 1867], la définition de Riemann-Liouville [Riemann, 1876b] et la définition de Caputo [Caputo, 1967]. Ces trois définitions sont équivalentes lorsque la fonction dérivée est nulle pour tout $t < 0$.

Définition 1.2 Définition de Grünwald-Letnikov : La dérivée non entière d'ordre ν , d'une fonction $f(t)$, est définie selon Grünwald-Letnikov par :

$$p^\nu f(t) \triangleq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{T_e^\nu} \left[\sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \binom{\nu}{l} f(t - lT_e) \right], \quad \nu \in \mathbb{R}_+ \quad (1.6)$$

où $\binom{\nu}{l} = \frac{\Gamma(\nu+1)}{l! \Gamma(\nu-l+1)}$ est le binôme de Newton généralisé au cas non entier et $p = \left(\frac{d}{dt} \right)$ désigne l'opérateur différentiel.

Pour les systèmes échantillonnés T_e représente la période d'échantillonnage et l'équation (1.6) devient :

$$p^\nu f(t) \simeq \frac{1}{h^\nu} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \binom{\nu}{l} f(t - lT_e). \quad (1.7)$$

De plus, si la fonction f est nulle pour tout $t < 0$, sa dérivée non entière au sens de Grünwald-Letnikov peut être réécrite sous la forme suivante :

$$p^\nu f(t) = \frac{1}{h^\nu} \sum_{l=0}^L (-1)^l \binom{\nu}{l} f(t - lT_e) + \mathcal{O}(T_e), \quad (1.8)$$

où $L = \left\lfloor \frac{t}{T_e} \right\rfloor$ est la partie entière de $\frac{t}{T_e}$ et $\mathcal{O}(T_e)$ est l'erreur d'approximation.

Définition 1.3 Définition de Riemann-Liouville : la dérivée d'ordre ν de $f(t)$ est définie, selon Riemann-Liouville, par la dérivée entière d'ordre $[\nu] + 1$ de l'intégrale non entière d'ordre $[\nu] + 1 - \nu$:

$$p^\nu f(t) \triangleq \frac{d^{[\nu]+1}}{dt^{[\nu]+1}} (I^{[\nu]-\nu+1} f(t)), \quad \nu \in \mathbb{R}_+, \quad (1.9)$$

où $[\nu]$ représente la partie entière de ν .

Selon la définition de l'intégrale non entière (1.5), l'équation (1.9) prend la forme suivante :

$$p^\nu f(t) \triangleq \frac{1}{\Gamma([\nu] - \nu + 1)} \frac{d^{[\nu]+1}}{dt^{[\nu]+1}} \left(\int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\nu-[\nu]}} d\tau \right), \quad \nu \in \mathbb{R}_+. \quad (1.10)$$

Définition 1.4 Définition de Caputo : La dérivée d'ordre ν est définie, selon Caputo,

comme étant l'intégrale non entière d'ordre $[\nu]+1-\nu$ de la dérivée entière d'ordre $[\nu]+1$:

$$p^\nu f(t) \triangleq I^{[\nu]-\nu+1} \left(\frac{d^{[\nu]+1}}{dt^{[\nu]+1}} f(t) \right), \quad \nu \in \mathbb{R}_+. \quad (1.11)$$

Selon la définition de l'intégrale non entière (1.5), l'équation (1.11) prend la forme suivante :

$$p^\nu f(t) \triangleq \frac{1}{\Gamma([\nu]-\nu+1)} \left(\int_0^t \frac{f^{[\nu]+1}(\tau)}{(t-\tau)^{\nu-[\nu]}} d\tau \right), \quad \nu \in \mathbb{R}_+. \quad (1.12)$$

Quand toutes les conditions initiales sont nulles ($f(t) = 0 \forall t < 0$) les trois définitions sont équivalentes.

Remarque 1.3 D'après ces définitions, la dérivée non entière de $f(t)$ dépend de tous les instants passés depuis l'instant initial jusqu'à l'instant t , la fonction $f(t - lT_e)$ introduit les termes $f(t)$, $f(t - T_e)$, $f(t - 2T_e)$...

1.3 Transformée de Laplace

Pour une fonction f causale ($f(t) = 0$, pour tout $t < 0$), la transformée de Laplace de l'intégrale non entière d'ordre ν de $f(t)$, définie dans (1.1), peut être calculée à l'aide du produit de convolution [Miller et Ross, 1993] :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(I^\nu f(t)) &= \mathcal{L} \left(\frac{1}{\Gamma(\nu)(t-\tau)^{1-\nu}} \otimes f(t) \right) = \\ &= \mathcal{L} \left(\frac{1}{\Gamma(\nu)(t-\tau)^{1-\nu}} \right) \times \mathcal{L}(f(t)) = \frac{1}{s^\nu} F(s), \end{aligned} \quad (1.13)$$

où s désigne l'opérateur de Laplace.

La transformée de Laplace de la dérivée d'ordre ν d'une fonction f causale est donnée par :

$$\mathcal{L}(p^\nu f(t)) = s^\nu \mathcal{L}(f(t)) = s^\nu F(s). \quad (1.14)$$

1.4 Caractérisation fréquentielle

1.4.1 Caractérisation fréquentielle d'un intégrateur non entier

Soit $y(t)$ la sortie d'un intégrateur non entier dont l'entrée est $u(t)$:

$$y(t) = \frac{1}{\tau^\nu} I^\nu u(t), \quad (1.15)$$

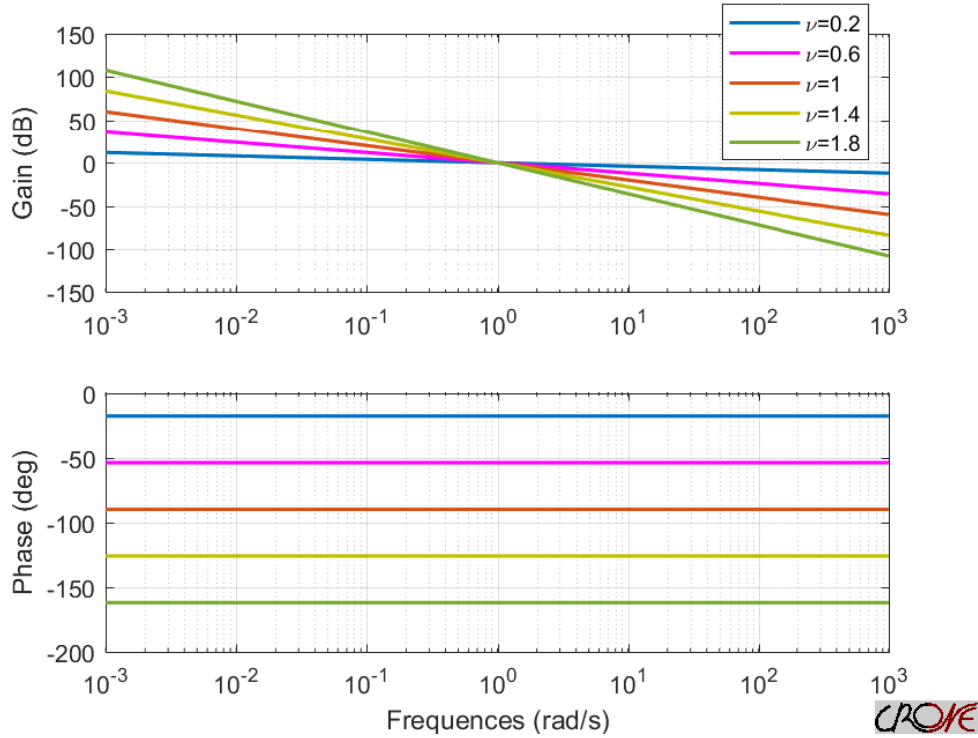


Figure 1.1 – Diagrammes de Bode d'un intégrateur non entier pour différentes valeurs de ν

où τ est la constante d'intégration.

L'application de la transformée de *Laplace* à l'équation (1.15), en supposant que les conditions initiales sont nulles, donne :

$$Y(s) = \left(\frac{\omega_u}{s}\right)^\nu U(s) = I^\nu(s)U(s), \quad (1.16)$$

où $\omega_u = \frac{1}{\tau}$ est la pulsation au gain unité.

En remplaçant s par $j\omega$ la transmittance de l'intégrateur non entier est déduite de (1.16) :

$$I^\nu(j\omega) = \left(\frac{\omega_u}{j\omega}\right)^\nu. \quad (1.17)$$

Le module et l'argument de l'opérateur d'intégration d'ordre ν sont donnés par :

$$\begin{cases} \text{Module (dB)} : 20 \log(|I^\nu(j\omega)|) = 20 \log \left| \left(\frac{\omega_u}{j\omega}\right)^\nu \right| = -20\nu \log \left(\frac{\omega_u}{\omega}\right) \\ \text{Argument (rad)} : \arg(I^\nu(j\omega)) = \arg \left[\left(\frac{\omega_u}{j\omega}\right)^\nu \right] = -\nu \frac{\pi}{2}. \end{cases} \quad (1.18)$$

La figure 1.1 présente les diagrammes de Bode d'un intégrateur non entier, pour différentes valeurs de ν qui varient entre 0.2 et 1.8 avec $\omega_u=1$ rad/s. Le diagramme de gain est représenté par une droite oblique de pente -20ν dB/décade et le diagramme de phase par une droite de pente nulle d'ordonnée $-\nu\frac{\pi}{2}$.

1.4.2 Caractérisation fréquentielle d'un dérivateur non entier

Soit $y(t)$ la sortie d'un dérivateur non entier dont l'entrée est $u(t)$:

$$y(t) = \tau^\nu D^\nu u(t), \quad (1.19)$$

où τ est la constante de dérivation.

La transformée de *Laplace* appliquée à l'équation (1.19), en supposant que les conditions initiales sont nulles, donne :

$$Y(s) = \left(\frac{s}{\omega_u}\right)^\nu U(s) = D^\nu(s)U(s). \quad (1.20)$$

En remplaçant s par $j\omega$, les caractéristiques fréquentielles du dérivateur non entier peuvent être analysées :

$$D^\nu(j\omega) = \left(\frac{j\omega}{\omega_u}\right)^\nu. \quad (1.21)$$

Le module et l'argument de l'opérateur de dérivation d'ordre ν sont donnés par :

$$\begin{cases} \text{Module (dB)} : 20 \log(|D^\nu(j\omega)|) = 20 \log \left| \left(\frac{j\omega}{\omega_u}\right)^\nu \right| = 20\nu \log \left(\frac{\omega_u}{\omega}\right) \\ \text{Argument (rad)} : \arg(D^\nu(j\omega)) = \arg \left[\left(\frac{j\omega}{\omega_u}\right)^\nu \right] = \nu \frac{\pi}{2}. \end{cases} \quad (1.22)$$

La figure 1.2 présente les diagrammes de Bode d'un dérivateur non entier, pour différentes valeur de ν qui varient entre 0.2 et 1.8 avec $\omega_u=1$ rad/s. Le diagramme de gain est représenté par une droite oblique de pente 20ν dB/décade et le diagramme de phase par une droite de pente nulle d'ordonnée $\nu\frac{\pi}{2}$.

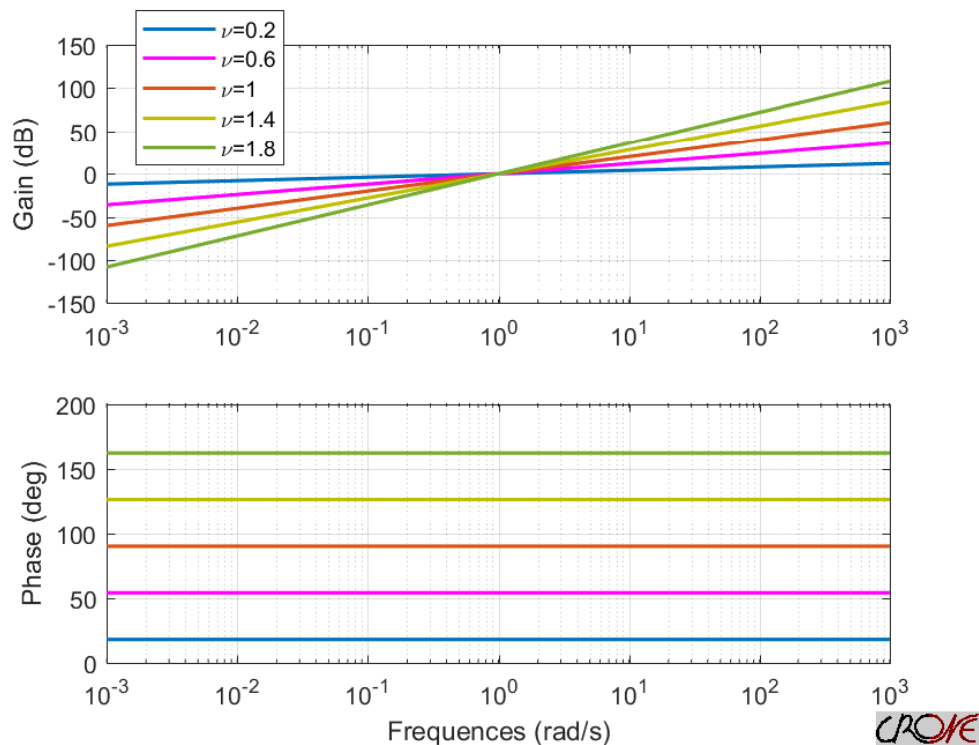


Figure 1.2 – Diagrammes de Bode d'un dérivateur non entier pour différentes valeurs de ν

1.5 Représentation des systèmes non entiers

Dans la littérature, les systèmes non entiers, à temps continus, linéaires, invariants dans le temps (LTI) et causaux, peuvent être décrits par plusieurs types de représentations :

- système d'équations différentielles ;
- système de fonctions de transfert ;
- pseudo-représentation d'état.

Cette section s'intéresse à la représentation de systèmes à multi-entrées mono-sortie (MISO : Multiple Input Single Output en anglais), les systèmes mono-entrée-mono-sortie (SISO : Single Input Single Output en anglais) étant un cas particulier.

1.5.1 Système d'équations différentielles

Un système non entier à entrées multiples peut être représenté par le système d'équations différentielles de la forme suivante

$$\begin{cases} y(t) = \sum_{k=1}^{\mathcal{K}} y_k(t) \\ y_k(t) + a_{1,k} p^{\alpha_{1,k}} y_k(t) + \dots + a_{N_k,k} p^{\alpha_{N_k,k}} y_k(t) = \\ \quad b_{0,k} p^{\beta_{0,k}} u_k(t) + b_{1,k} p^{\beta_{1,k}} u_k(t) + \dots + b_{M_k,k} p^{\beta_{M_k,k}} u_k(t), \quad k = 1, \dots, \mathcal{K}, \end{cases} \quad (1.23)$$

où $u_k(t)$, $y_k(t)$ désignent respectivement l'entrée et la sortie du $k^{\text{ième}}$ sous-système SISO et \mathcal{K} représente le nombre d'entrées. Les coefficients $a_{1,k}, \dots, a_{N_k,k}$, $b_{0,k}, \dots, b_{M_k,k}$ sont supposés réels et les ordres de dérivation sont des nombres réels positifs tels que :

$$\begin{cases} 0 < \alpha_{1,k} < \alpha_{2,k} < \dots < \alpha_{N_k,k} \\ 0 < \beta_{0,k} < \beta_{1,k} < \dots < \beta_{M_k,k} \end{cases}.$$

Par analogie aux systèmes à dérivées entières, le $k^{\text{ième}}$ sous-système est strictement propre si les ordres de dérivation vérifient la contrainte $\alpha_{N_k,k} > \beta_{M_k,k}$.

Remarque 1.4 (*S-commensurabilité*) Une nouvelle notion est introduite dans ce manuscrit, c'est la commensurabilité structurée ou bien la *S-commensurabilité*. Dans le cas classique [Matignon, 1998], la définition d'un système commensurable est indépendante de la structure du modèle et peut générer un nombre très élevé de paramètres lorsque l'ordre commensurable est très faible. La *S-commensurabilité* est liée à la structure du modèle. Elle fixe le nombre de paramètres à une valeur prédéfinie en supposant que tous les ordres de dérivation sont des multiples entiers successifs. Pour un système MISO, deux définitions sont proposées : la *S-commensurabilité locale* et la *S-commensurabilité globale*.

Définition 1.5 *S-commensurabilité locale* : Un système MISO, pour une structure de modèle donnée par l'équation (1.23), a un ordre *S-commensurable local* ν_k si tous les ordres de dérivation, de chaque sous-système, sont des multiples successifs de ν_k :

$$\nu_k = \alpha_{1,k}.$$

Par conséquent, chaque équation différentielle peut être réécrite comme suit :

$$\begin{aligned} y_k(t) + a_{1,k} (p^{\nu_k})^{\frac{\alpha_{1,k}}{\nu_k}} y_k(t) + \dots + a_{N_k,k} (p^{\nu_k})^{\frac{\alpha_{N_k,k}}{\nu_k}} y_k(t) = \\ b_{0,k} (p^{\nu_k})^{\frac{\beta_{0,k}}{\nu_k}} u_k(t) + b_{1,k} (p^{\nu_k})^{\frac{\beta_{1,k}}{\nu_k}} u_k(t) + \dots + b_{M_k,k} (p^{\nu_k})^{\frac{\beta_{M_k,k}}{\nu_k}} u_k(t), \quad k = 1, \dots, \mathcal{K}, \end{aligned} \quad (1.24)$$

où

$$\begin{cases} \frac{\alpha_{i,k}}{\nu_k} = i, & \forall i = 1, \dots, N_k \\ \frac{\beta_{j,k}}{\nu_k} = j, & \forall j = 1, \dots, M_k \end{cases} \quad (1.25)$$

La S-commensurabilité impose que les ordres soient des multiples successifs, comme il est indiqué dans l'équation (1.25).

Définition 1.6 S-commensurabilité globale : Un système MISO, pour une structure de modèle donnée par l'équation (1.23), a un ordre S-commensurable global ν si tous les ordres de dérivation, de tous ses sous-systèmes, sont des multiples successifs de ν :

$$\nu = \alpha_{1,1} = \alpha_{1,2} = \dots = \alpha_{1,\mathcal{K}}.$$

Par conséquent, chaque équation différentielle peut être réécrite comme suit :

$$y_k(t) + a_{1,k}(p^\nu)^{\frac{\alpha_{1,k}}{\nu}} y_k(t) + \dots + a_{N_k,k}(p^\nu)^{\frac{\alpha_{N_k,k}}{\nu}} y_k(t) = b_{0,k}(p^\nu)^{\frac{\beta_{0,k}}{\nu}} u_k(t) + b_{1,k}(p^\nu)^{\frac{\beta_{1,k}}{\nu}} u_k(t) + \dots + b_{M_k,k}(p^\nu)^{\frac{\beta_{M_k,k}}{\nu}} u_k(t), \quad k = 1, \dots, \mathcal{K}, \quad (1.26)$$

où

$$\begin{cases} \frac{\alpha_{i,k}}{\nu} = i, & \forall i = 1, \dots, N_k \\ \frac{\beta_{j,k}}{\nu} = j, & \forall j = 1, \dots, M_k \end{cases}.$$

1.5.2 Système de fonctions de transfert

La représentation d'un système MISO par fonctions de transfert découle de (1.23) :

$$Y(s) = \sum_{k=1}^{\mathcal{K}} G_k(s) U_k(s). \quad (1.27)$$

Sous l'hypothèse de conditions initiales nulles, la transformée de Laplace de chaque équation différentielle (1.23) est donnée par :

$$Y_k(s) + a_{1,k} s^{\alpha_{1,k}} Y_k(s) + \dots + a_{N_k,k} s^{\alpha_{N_k,k}} Y_k(s) = b_{0,k} s^{\beta_{0,k}} U_k(s) + b_{1,k} s^{\beta_{1,k}} U_k(s) + \dots + b_{M_k,k} s^{\beta_{M_k,k}} U_k(s), \quad (1.28)$$

ce qui conduit à la fonction de transfert non entière suivante, liant l'entrée U_k à la sortie Y_k :

$$G_k(s) = \frac{Y_k(s)}{U_k(s)} = \frac{B_k(s)}{A_k(s)} = \frac{b_{0,k} s^{\beta_{0,k}} + b_{1,k} s^{\beta_{1,k}} + \dots + b_{M_k,k} s^{\beta_{M_k,k}}}{1 + a_{1,k} s^{\alpha_{1,k}} + \dots + a_{N_k,k} s^{\alpha_{N_k,k}}}, \quad k = 1, \dots, \mathcal{K} \quad (1.29)$$

Pour un système MISO S-commensurable d'ordre local ν_k , la transformée de *Laplace* de chaque équation différentielle (1.24) peut être réécrite sous la forme :

$$Y_k(s) + a_{1,k}s^{\nu_k}Y_k(s) + a_{2,k}s^{2\nu_k}Y_k(s) + \dots + a_{N_k,k}s^{N_k\nu_k}Y_k(s) = b_{0,k}U_k(s) + b_{1,k}s^{\nu_k}U_k(s) + \dots + b_{M_k,k}s^{M_k\nu_k}U_k(s), \quad k = 1, \dots, \mathcal{K}, \quad (1.30)$$

d'où la fonction de transfert non entière :

$$\begin{aligned} G_k(s) &= \frac{Y_k(s)}{U_k(s)} = \frac{b_{0,k} + b_{1,k}s^{\nu_k} + b_{2,k}s^{2\nu_k} + \dots + b_{M_k,k}s^{M_k\nu_k}}{1 + a_{1,k}s^{\nu_k} + \dots + a_{N_k,k}s^{N_k\nu_k}} \\ &= \frac{\sum_{j=0}^{M_k} b_{j,k}s^{j\nu_k}}{1 + \sum_{i=1}^{N_k} a_{i,k}s^{i\nu_k}}, \quad k = 1, \dots, \mathcal{K}. \end{aligned} \quad (1.31)$$

Pour un système MISO ayant un ordre S-commensurable global ν , la transformée de *Laplace* de l'équation différentielle (1.26) peut être réécrite sous la forme :

$$Y_k(s) + a_{1,k}s^\nu Y_k(s) + a_{2,k}s^{2\nu} Y_k(s) + \dots + a_{N_k,k}s^{N_k\nu} Y_k(s) = b_{0,k}U_k(s) + b_{1,k}s^\nu U_k(s) + \dots + b_{M_k,k}s^{M_k\nu} U_k(s), \quad k = 1, \dots, \mathcal{K}. \quad (1.32)$$

d'où la fonction de transfert non entière :

$$\begin{aligned} G_k(s) &= \frac{Y_k(s)}{U_k(s)} = \frac{b_{0,k} + b_{1,k}s^\nu + b_{2,k}s^{2\nu} + \dots + b_{M_k,k}s^{M_k\nu}}{1 + a_{1,k}s^\nu + \dots + a_{N_k,k}s^{N_k\nu}} \\ &= \frac{\sum_{j=0}^{M_k} b_{j,k}s^{j\nu}}{1 + \sum_{i=1}^{N_k} a_{i,k}s^{i\nu}}, \quad k = 1, \dots, \mathcal{K}. \end{aligned} \quad (1.33)$$

Lorsque la fonction de transfert (1.33) admet :

- un pôle en s^ν simple, elle peut être réécrite sous la forme d'une fonction de transfert de première espèce :

$${}_1G(s) = \frac{K}{1 + (\tau s)^\nu}; \quad (1.34)$$

- deux pôles en s^ν complexes conjugués, elle peut être réécrite sous la forme d'une fonction de transfert de deuxième espèce :

$${}_2G(s) = \frac{K}{1 + 2\zeta\left(\frac{s}{\omega_0}\right)^\nu + \left(\frac{s}{\omega_0}\right)^{2\nu}}; \quad (1.35)$$

où ν est l'ordre commensurable, ζ est la facteur d'amortissement et ω_0 est la pulsation propre non amortie.

1.5.3 Pseudo-représentation d'état

Comme pour les systèmes non entiers, la pseudo-représentation d'état d'un système non entier comporte principalement deux équations [Matignon et d'Andréa Novel, 1996] :

- une équation d'état non entière qui fait apparaître la dérivée non entière du vecteur d'état.
- une équation d'observation où la sortie s'exprime comme une combinaison linéaire de l'état.

1.5.3.1 Système S-commensurable global

Lorsque les ordres de dérivation de toutes les équations différentielles d'un système MISO avec \mathcal{K} entrées, sont des multiples successifs de l'ordre S-commensurable global ν , selon la définition 1.6, la pseudo-représentation d'état non entière est alors de la forme :

$$\begin{cases} D^\nu \tilde{x}(t) = \tilde{A}\tilde{x}(t) + \tilde{B}u(t) \\ y(t) = \tilde{C}\tilde{x}(t) \end{cases} ; \quad (1.36)$$

où :

- ν est l'ordre S-commensurable global ;
- $u(t) = [u_1(t), u_2(t), \dots, u_{\mathcal{K}}(t)]$ est le vecteur des entrées ;
- $\tilde{x}(t) = [\tilde{x}_1(t), \tilde{x}_2(t), \dots, \tilde{x}_{\mathcal{K}}(t)]^T$ est le vecteur du pseudo-état ;
- $y(t)$ est la sortie ;
- $\tilde{B} = [\tilde{B}_1, \tilde{B}_2, \dots, \tilde{B}_{\mathcal{K}}]^T$ est la matrice de commande ;
- $\tilde{C} = [\tilde{C}_1, \tilde{C}_2, \dots, \tilde{C}_{\mathcal{K}}]$ est la matrice d'observation ;

$$\bullet \tilde{A} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \tilde{A}_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \tilde{A}_{\mathcal{K}} \end{bmatrix} \text{ est la matrice d'état ;}$$

- $\tilde{x}_k \in \mathbb{R}^{N_k \times 1}$, $\tilde{A}_k \in \mathbb{R}^{N_k \times N_k}$, $\tilde{B}_k \in \mathbb{R}^{N_k \times 1}$ et $\tilde{C} \in \mathbb{R}^{1 \times N_k}$ pour $k = 1, \dots, \mathcal{K}$.

1.5.3.2 Système S-commensurable local

Lorsque les ordres de dérivation de chaque équation différentielle d'un système MISO avec \mathcal{K} entrées sont des multiples successifs de l'ordre S-commensurable local ν_k , selon la définition 1.5, la pseudo-représentation d'état non entière est alors de la forme :

$$\begin{cases} D^{(\nu)}\tilde{x}(t) = \tilde{A}\tilde{x}(t) + \tilde{B}u(t) \\ y(t) = \tilde{C}\tilde{x}(t) \end{cases} \quad (1.37)$$

où :

- $\nu = [\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_{\mathcal{K}}]^T$ est le vecteur des ordres S-commensurables locaux ;
- $u(t) = [u_1(t), u_2(t), \dots, u_{\mathcal{K}}(t)]$ est le vecteur des entrées ;
- $\tilde{x}(t) = [\tilde{x}_1(t), \tilde{x}_2(t), \dots, \tilde{x}_{\mathcal{K}}(t)]^T$ est le vecteur du pseudo-état ;
- $y(t)$ est la sortie ;
- $\tilde{B} = [\tilde{B}_1, \tilde{B}_2, \dots, \tilde{B}_{\mathcal{K}}]^T$ est la matrice de commande ;
- $\tilde{C} = [\tilde{C}_1, \tilde{C}_2, \dots, \tilde{C}_{\mathcal{K}}]$ est la matrice de d'observation ;

$$\bullet \tilde{A} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \tilde{A}_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \tilde{A}_{\mathcal{K}} \end{bmatrix} \text{ est la matrice d'état ;}$$

- $\tilde{x}_k \in \mathbb{R}^{N_k \times 1}$, $\tilde{A}_k \in \mathbb{R}^{N_k \times N_k}$, $\tilde{B}_k \in \mathbb{R}^{N_k \times 1}$ et $\tilde{C} \in \mathbb{R}^{1 \times N_k}$ pour $k = 1, \dots, \mathcal{K}$.

Exemple 1.1 Soit la fonction de transfert suivante :

$$G(s) = \frac{1}{1 + 1.5s^{1.2} + 0.5s^{2.8}}. \quad (1.38)$$

Selon la définition classique de la commensurabilité [Matignon et d'Andréa Novel, 1996], G est commensurable d'ordre $\nu = 0.4$, à savoir :

$$G(s) = \frac{1}{1 + 1.5s^{3 \times 0.4} + 0.5s^{7 \times 0.4}}, \quad (1.39)$$

$G(s)$ est alors de dimension 7 en $s^{0.4}$:

$$G(s) = \frac{1}{1 + 0s^{0.4} + 0s^{0.8} + 1.5s^{1.2} + 0s^{1.6} + 0s^2 + 0s^{2.4} + 0.5s^{2.8}}. \quad (1.40)$$

Sa représentation d'état est de la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{x}^\nu(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tilde{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \tilde{x}(t) \end{array} \right. \quad (1.41)$$

Si tous les paramètres de (1.40) sont à estimer, dans le cadre d'une procédure automatisées, le système est surdimensionné. Pour éviter ce problème, la notion de S -commensurabilité est introduite. Selon la nouvelle définition 1.5, G n'est pas S -commensurable, car les ordres de différenciation ne sont pas des multiples entiers successifs de $\alpha_{1,1} = 1.2$. En revanche, la fonction de transfert :

$$H(s) = \frac{1}{1 + 1.5s^{1.2} + 0.5s^{2.4}}, \quad (1.42)$$

est S -commensurable d'ordre $\nu = 1.2$. Sa représentation d'état est de la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{x}^\nu(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \tilde{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = [1 \ 0] \tilde{x}(t) \end{array} \right. \quad (1.43)$$

La définition de la S -commensurabilité proposée, liée à la structure du modèle, permet de fixer le nombre de paramètres à une valeur prédéterminée.

1.5.3.3 Système non commensurable

Lorsque les ordres de dérivation des équations différentielles ne sont pas commensurables, la représentation d'état est alors de la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} D^\mu \tilde{x}(t) = \tilde{A} \tilde{x}(t) + \tilde{B} u(t) \\ y(t) = \tilde{C} \tilde{x}(t) \end{array} \right. \quad (1.44)$$

où μ est un vecteur qui contient tous les ordres de dérivation des équations différentielles du système non entier (1.29) où

$$\mu = [\mu_1, \dots, \mu_\kappa],$$

avec

$$\mu_k = [\beta_{1,k}, \dots, \beta_{M_k,k}, \alpha_{1,k}, \dots, \alpha_{N_k,k}], k = 1, \dots, \mathcal{K}.$$

Remarque 1.5 *En tenant compte du caractère de mémoire longue de la dérivée non entière, la condition initiale $\tilde{x}(t_0)$ où t_0 est l'instant initial, ne suffit plus pour prédire le comportement future du système. Pour déterminer les comportements des états futurs du système non entier, il faut connaître tout le passé des états. Dans ce cas, $\tilde{x}(t)$ ne représente plus un vecteur d'état au sens classique d'un système rationnel mais un pseudo-vecteur d'état. [Sabatier et al., 2012] ont proposé une représentation diffusive pour faire apparaître le vrai état du système non entier en mettant en jeu un système linéaire classique et un système décrit par une équation parabolique qui est obtenue à partir de la réponse impulsionnelle du système non entier.*

1.6 Stabilité des systèmes non entiers

Le problème de la stabilité des systèmes non entiers fait l'objet de nombreux travaux de recherche, pour le cas des systèmes linéaires commensurables SISO. Le critère de stabilité le plus connu a été introduit par *Matignon* [Matignon, 1998], pour des ordres commensurables d'ordre ν compris entre 0 et 1. Ce théorème a été étendu par *Moze* [Moze et al., 2005] pour un ordre commensurable ν compris entre 1 et 2 puis par *Aoun* [Aoun et al., 2007a] pour n'importe quel ordre commensurable $\nu \in \mathbb{R}_+^*$.

Théorème 1.2 [Matignon, 1998] : *Un système linéaire d'ordre non entier d'entrée u , de sortie y et de réponse impulsionnelle g est stable dans le sens entrée-bornée-sortie-bornée (BIBO) si et seulement si :*

$$\forall u \in L_\infty[0, \infty[, \quad \text{alors} \quad y = g \otimes u \in L_\infty[0, \infty[, \quad (1.45)$$

et on vérifie l'inégalité suivante :

$$\|y\|_\infty \leq \|g\|_1 \|u\|_\infty \quad \text{si} \quad g \in L_\infty[1, \infty[. \quad (1.46)$$

Théorème 1.3 [Matignon, 1998] : *Un système non entier, décrit par sa fonction de transfert $G(s) = \frac{Q(s)}{P(s)}$, est BIBO stable si et seulement si :*

$$\forall s \quad \Re(s) \geq 0, \quad \exists M, \quad \text{tel que} \quad |G(s)| \leq M. \quad (1.47)$$

Si de plus $G(s) = \frac{Q(s)}{P(s)}$ est commensurable et irréductible, alors G est stable dans le sens

BIBO si et seulement si $P(s) = 0$ n'admet aucune racine à partie réelle positive, c'est à dire :

$$\forall s, \quad \Re(s) \geq 0. \quad (1.48)$$

Théorème 1.4 [Aoun, 2005] Dans le cas où $G(s) = \frac{Q_\nu(s)}{P_\nu(s)}$ est commensurable d'ordre ν , alors elle est stable dans le sens **BIBO** si et seulement si :

$$0 < \nu < 2 \quad (1.49)$$

et

$$\forall s_k \in \mathbb{C}, P_\nu(s_k) = 0 \quad \text{tel que} \quad |\arg(s_k)| > \nu \frac{\pi}{2}. \quad (1.50)$$

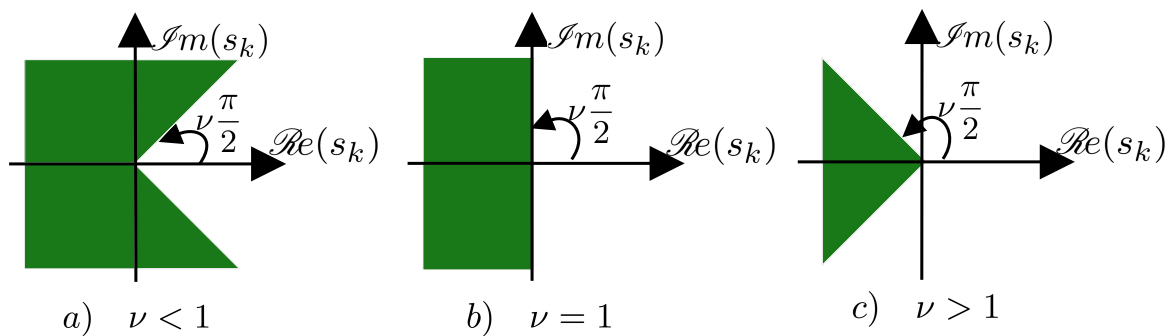


Figure 1.3 – Régions de stabilité (en vert) des pôles en s^ν pour différents ordres commensurables : $\nu < 1$, $\nu = 1$ et $\nu > 1$

La figure 1.3 montre les régions de stabilité pour différents ordres commensurables ($\nu < 1$, $\nu = 1$ et $\nu > 1$) [Aoun, 2005]. Pour que le système soit stable, les arguments des pôles en s^ν doivent être dans la partie verte. Pour un ordre entier $\nu = 1$, le critère de *Matignon* est équivalent à celui de *Routh-Hurwitz*. En effet, le système est BIBO stable si tous les pôles sont situés dans le demi-plan complexe gauche. Par ailleurs, lorsque l'ordre commensurable augmente la région de stabilité diminue et vice versa. Pour un ordre commensurable $\nu > 2$, la région de stabilité est un ensemble vide. Le système est alors instable quelle que soit la valeur de ses pôles en s^ν .

1.6.1 Stabilité d'une fonction de transfert élémentaire de première espèce

L'application du théorème de *Matignon* à la fonction de transfert de première espèce (1.34) conduit aux conditions de stabilité suivantes :

$$\begin{cases} \tau > 0 \\ 0 < \nu < 2. \end{cases} \quad (1.51)$$

Ce système est résonant lorsque $1 < \nu < 2$ et la pulsation de résonance est donnée par [Malti *et al.*, 2011] :

$$\omega_r = \sqrt[\nu]{-\cos\left(\nu\frac{\pi}{2}\right)}. \quad (1.52)$$

1.6.2 Stabilité d'une fonction de transfert élémentaire de deuxième espèce

L'application du théorème de *Matignon* à la fonction de transfert de deuxième espèce (1.35) conduit aux conditions de stabilité suivantes [Malti *et al.*, 2011] :

$$\begin{cases} \omega_0 > 0 \\ 0 < \nu < 2 \\ \zeta > -\cos\left(\nu\frac{\pi}{2}\right) \end{cases}. \quad (1.53)$$

Les conditions de stabilité et de résonance de (1.35) sont tracées en fonction du pseudo-facteur d'amortissements ζ et de l'ordre non entier ν sur la figure 1.4 [Malti *et al.*, 2011]. La zone grise (numérotée 0) présente des combinaisons de ν et ζ d'un système non résonant. Les deux zones jaune et verte (numérotées 1 et 2) présentent des combinaisons de ν et ζ d'un système résonant avec, respectivement, une et deux fréquences de résonance. La zone grise (numérotée 3) présente des combinaisons de ν et ζ d'un système instable.

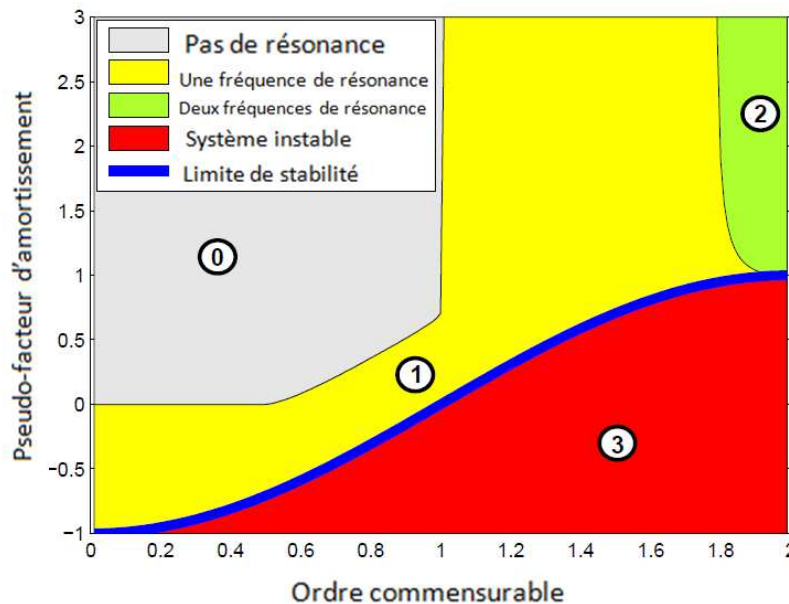


Figure 1.4 – Zones de stabilité et de résonance d'un système de seconde espèce en fonction de ζ et ν

La figure 1.5 représente la pulsation normalisée de résonance définie par $\omega_n = \frac{\omega}{\omega_0}$ en fonction de ζ pour différentes valeurs de ν .

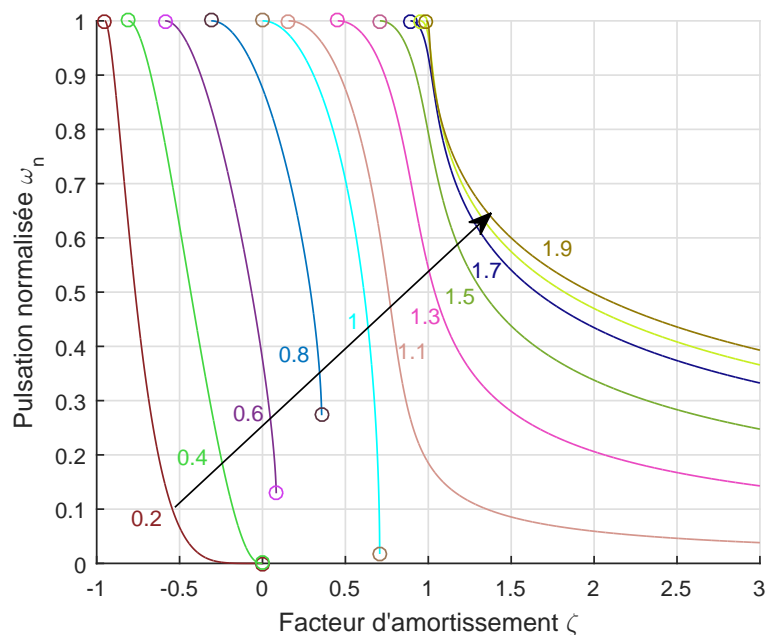


Figure 1.5 – Pulsation normalisée de résonance en fonction de ζ pour différentes valeurs de ν

1.7 Simulation temporelle de systèmes non entiers

La problématique principale de la simulation temporelle des systèmes non entiers est que l'évaluation de la sortie nécessite la connaissance de tout le passé du système, condition difficile à prendre en compte. De ce fait, la simulation des systèmes non entiers a attiré l'attention de plusieurs chercheurs pendant les dernières décennies [Oustaloup, 1995b, Lin *et al.*, 2001, Malti *et al.*, 2005]. Les approches développées dans la littérature sont basées sur l'approximation à temps continu et à temps discret de l'opérateur d'intégration et de dérivation non entier.

1.7.1 Approximation de l'opérateur d'intégration par un modèle entier équivalent

Les trois approches de simulation temporelle des systèmes non entiers les plus utilisées dans la littérature sont présentées dans cette section. La première approche est basée sur le remplacement de chaque opérateur de dérivation non entière par une distribution de pôles et zéros récursifs afin d'obtenir un modèle entier continu. La deuxième approche est

une autre variante de la première. La troisième approche est basée sur une approximation numérique discrète issue de la définition de Grünwald.

[Oustaloup, 1983] a proposé d'approcher l'intégrateur non entier I^ν avec $-1 < \nu < 1$ borné en fréquences $[\omega_A, \omega_B]$ par une distribution de pôles et zéros récursifs avec un gain constant en dehors de la bande $[\omega_A, \omega_B]$:

$$I_{[\omega_A, \omega_B]}^\nu(s) = C_\nu \left(\frac{1 + s/\omega_h}{1 + s/\omega_b} \right)^\nu. \quad (1.54)$$

La partie irrationnelle de (1.54) peut être approchée par une distribution récursive de zéros et de pôles réels :

$$\left(\frac{1 + s/\omega_h}{1 + s/\omega_b} \right)^\nu \approx \prod_{i=1}^N \left(\frac{1 + s/\omega_i}{1 + s/\omega'_i} \right), \quad (1.55)$$

où :

- $I_{[\omega_A, \omega_B]}^\nu(s)$ désigne l'approximation d'Oustaloup d'un intégrateur non entier en utilisant N pôles et N zéros,
- $\omega_b = \frac{\omega_A}{10}$ et $\omega_h = 10\omega_B$, sont choisies de cette forme pour réduire les effets de bord,
- le gain C_ν est fixé de manière à obtenir un gain unitaire à la pulsation logarithmique intermédiaire $\omega_u = \sqrt{\omega_b \omega_h}$:

$$C_\nu = \left| \frac{1 + j\sqrt{\frac{1}{\omega_h}}}{1 + j\sqrt{\frac{1}{\omega_b}}} \right|^{-\nu}, \quad (1.56)$$

- les fréquences ω'_i et ω_i sont respectivement les pôles et les zéros, déterminées à partir des relations récursives [Oustaloup, 1995b] :

$$\begin{cases} \omega_i = \alpha \omega'_i \\ \omega'_{i+1} = \eta \omega_i \end{cases},$$

avec

$$\alpha = \left(\frac{\omega_h}{\omega_b} \right)^{\frac{\nu}{N}}, \quad \eta = \left(\frac{\omega_h}{\omega_b} \right)^{\frac{1-\nu}{N}},$$

$$\nu = \frac{\log \alpha}{\log(\alpha \eta)},$$

où $\omega'_1 = \omega_b$ et $\omega_N = \omega_h$ définissent la bande de fréquences de l'approximation.

L'intérêt de cette méthode d'approximation réside dans sa simplicité de mise en œuvre.

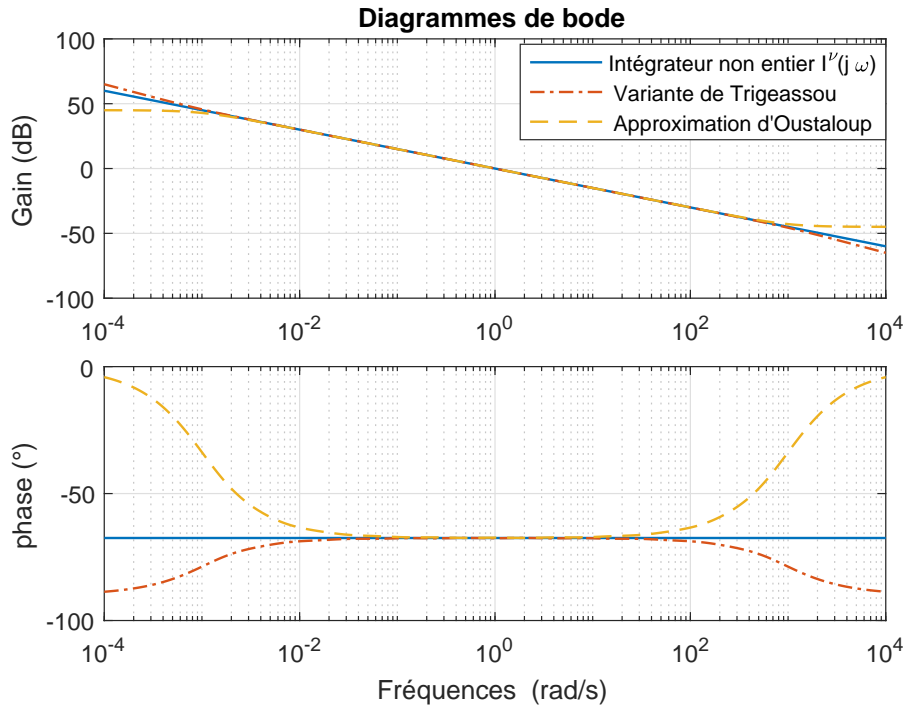


Figure 1.6 – Diagrammes de Bode de l'intégrateur non entier $I^{0.75}(j\omega)$ et de l'approximation d'Oustaloup et de la variante de Trigeassou

Dans la deuxième approche, les auteurs dans [Trigeassou *et al.*, 1999] ont proposé une autre variante de l'approximation d'Oustaloup, dans laquelle un intégrateur pur d'ordre 1 a été rajouté à l'extérieur de la bande de fréquences $[\omega_A, \omega_B]$, alors que l'intégrateur non entier est celui de l'approximation d'Oustaloup à l'intérieur de cette bande de fréquences.

La troisième approche pour réaliser des simulations temporelles consiste à utiliser la définition de Grünwald. Cette approche consiste à remplacer chaque opérateur de dérivation non entière dans l'équation différentielle (1.23) par son approximation à temps discret issue de la définition de Grünwald (1.54). En dépit de sa simplicité de mise en œuvre, cette méthode de simulation est difficilement implémentable dans le cas de simulation en temps réel à cause d'un horizon de simulation croissant.

Pour des simulations temporelles et fréquentielles trois approximations de la fonction de transfert non entière sont utilisées à savoir : l'approximation d'Oustaloup [Oustaloup *et al.*, 1996]; la variante de l'approximation de Oustaloup [Trigeassou *et al.*, 1999] et l'approximation de Grünwald [Rekanos et Yioultsis, 2014]. Ces approximations sont utilisées pour une fonction de transfert non entière de première espèce puis une fonction de transfert non entière de deuxième espèce.

Une toolbox développée au sein de l'équipe CRONE de laboratoire IMS [Malti et Victor, 2015] est utilisée pour la simulation de ce type de systèmes.

La figure 1.6 présente les diagrammes de Bode d'un intégrateur non entier d'ordre $\nu = 0.75$, en utilisant les trois approximations.

1.7.2 Simulation d'une fonction de transfert non entière de première espèce

Soit la fonction de transfert suivante :

$${}_1F(s) = \frac{5}{1 + (0.5s)^\nu}. \quad (1.57)$$

Les réponses indicielles et les diagrammes de Bode de ${}_1F$, en utilisant les trois approches d'approximation décrites dans le paragraphe précédent, sont tracés respectivement sur les figures 1.7 et 1.8 pour $\nu = 0.5$ (fonction de transfert non résonante) et respectivement sur les figures 1.9 et 1.10 pour $\nu = 1.5$ (fonction de transfert résonante).

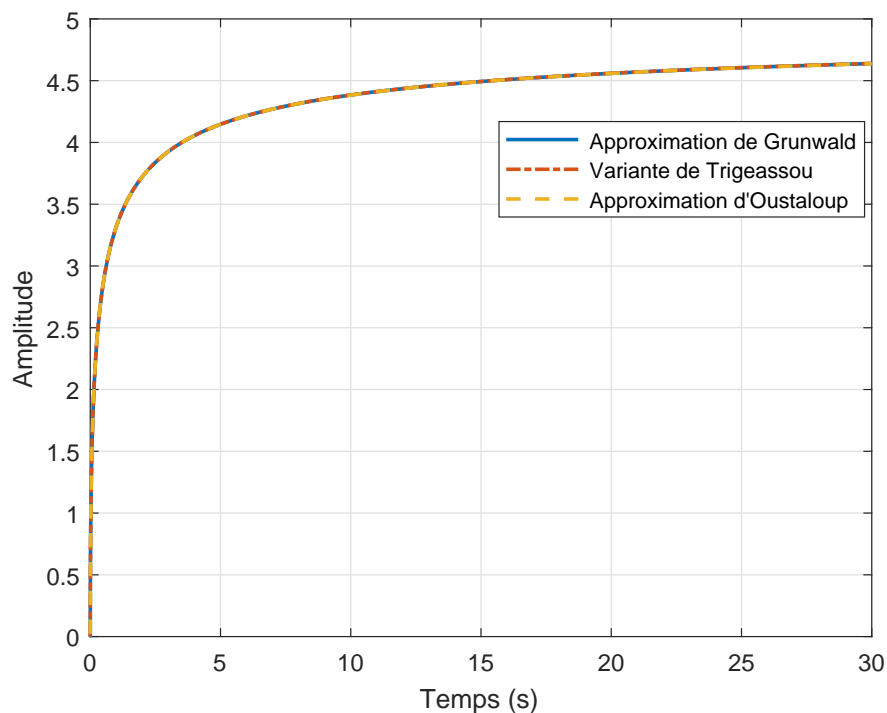
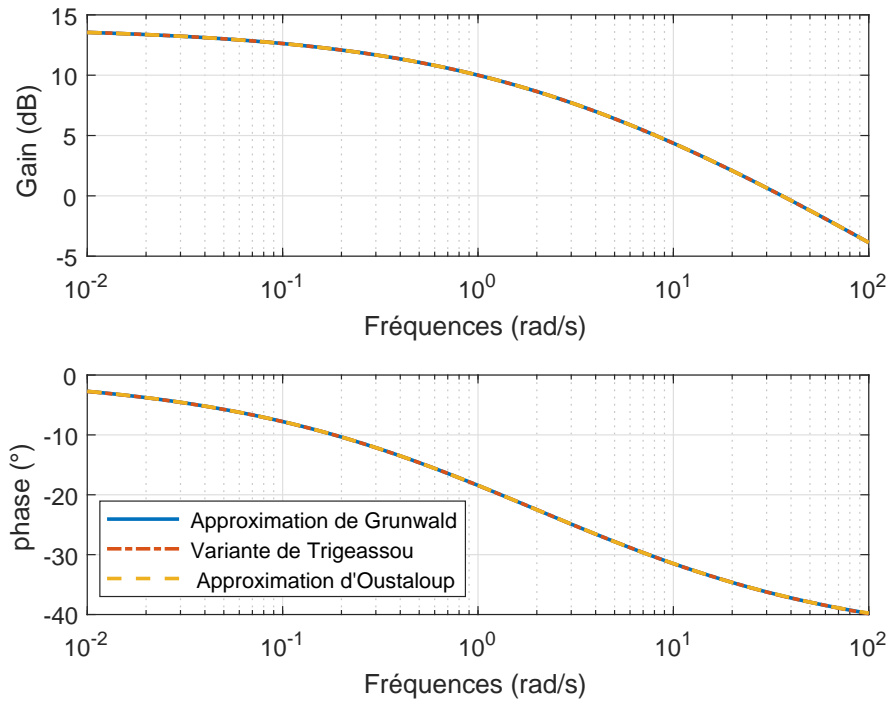


Figure 1.7 – Réponses indicielles de ${}_1F$ pour $\nu = 0.5$

La réponse indicielle de ${}_1F$ pour $\nu = 0.5$ est tracée sur la figure 1.7. Cette figure montre que le système est non résonant ce qui valide la condition de résonance présentée dans (1.52) ($\nu < 1$). En plus, les trois courbes des trois approximations sont superposées.

Les diagrammes de Bode de ${}_1F$ sont tracés sur la figure 1.8, les réponses fréquentielles du système montrent bien que le système est non résonant ce qui valide la condition de

Figure 1.8 – Diagrammes de Bode de ${}_1F$ pour $\nu = 0.5$

résonance présentée dans (1.52) ($\nu < 1$). Le diagramme de gain présente une pente de -20ν dB/décade et le diagramme asymptotique de phase varie entre 0 et $-\nu\frac{\pi}{2}$ avec un point d'inflexion en fréquence de coupure est égale à $\omega_c = \frac{1}{0.5^{0.5}}$ rad/s.

Les réponses indicielles de ${}_1F$ pour $\nu = 1.5$ sont tracées sur la figure 1.9. Les oscillations indiquent clairement que le système est résonant. De plus, les trois courbes des trois approximations sont superposées, ce qui valide les trois méthodes de simulation.

Les diagrammes de Bode de ${}_1F$ sont tracés sur la figure 1.10, les réponses fréquentielles du système montrent bien que le système est résonant, ce qui valide la condition de résonance présentée dans l'équation (1.52). Le diagramme de gain présente une pente de -20ν dB/décade et le diagramme asymptotique de phase varie entre 0 et $-\nu\frac{\pi}{2}$ avec un point d'inflexion à la fréquence de coupure $\omega_c = \frac{1}{0.5^{1.5}}$ rad/s.

1.7.3 Simulation d'une fonction de transfert non entière de deuxième espèce

Soit la fonction de transfert suivante :

$${}_2F(s) = \frac{1}{1 + 2\zeta\left(\frac{s}{1075}\right)^\nu + \left(\frac{s}{1075}\right)^{2\nu}}. \quad (1.58)$$

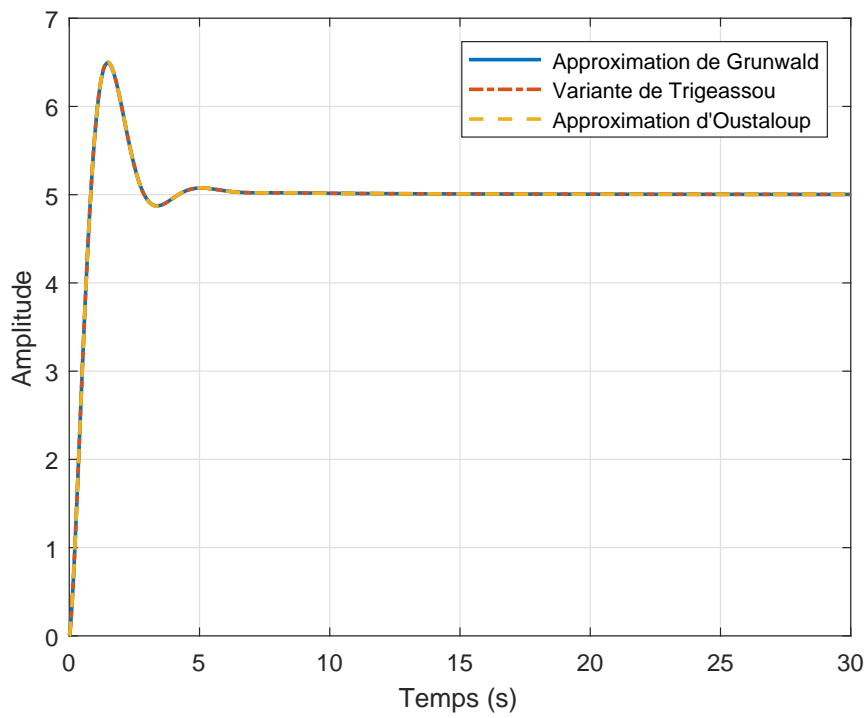


Figure 1.9 – Réponses indicielle de ${}_1F$ pour $\nu = 1.5$

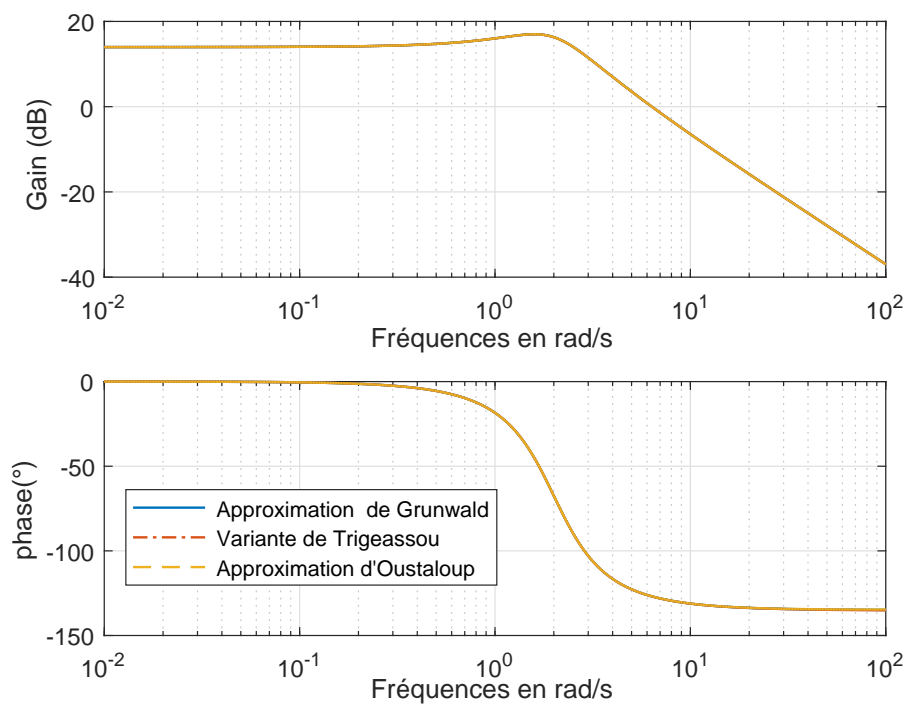


Figure 1.10 – Diagrammes de Bode de ${}_1F$ pour $\nu = 1.5$

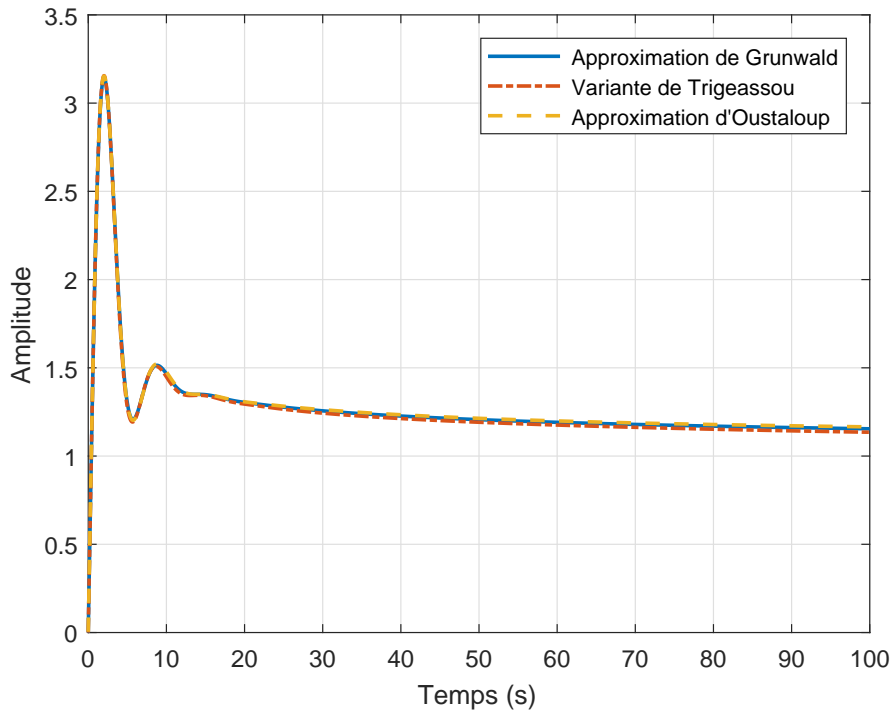


Figure 1.11 – Réponses indicielle de ${}_2F$ pour $\nu = 0.4$ et $\zeta = -0.7$

Les réponses indicielles de ${}_2F$ pour $\nu = 0.4$ et $\zeta = -0.7$ sont tracées sur la figure 1.11. Les oscillations indiquent clairement que le système est résonant. De plus, les trois courbes des trois approximations sont superposées, ce qui valide les trois méthodes de simulation.

Les diagrammes de Bode de ${}_2F$ sont tracés sur la figure 1.12, les réponses fréquentielles du système montrent bien qu'il est résonant, ce qui valide les résultats de la figure 1.4. Le diagramme de gain présente une pente de -40ν dB/décade aux hautes fréquences et le diagramme asymptotique de phase présente un blocage à $-\nu\pi$ aux hautes fréquences.

Les réponses indicielles de ${}_2F$ pour $\nu = 1.9$ et $\zeta = 2$ sont tracées sur la figure 1.13. Les oscillations indiquent clairement que le système est résonant. De plus, les trois courbes des trois approximations sont superposées, ce qui valide les trois méthodes de simulation.

Les diagrammes de Bode de ${}_2F$ sont tracés sur la figure 1.14. Les réponses fréquentielles du système montrent bien que le système est résonant, ce qui valide la figure 1.4. Le diagramme de gain présente une pente de -20ν dB par décade au premier lieu puis une pente de -40ν dB par décade et le diagramme asymptotique de phase présente un blocage à $-\nu\pi$ ainsi que deux points d'inflexion.

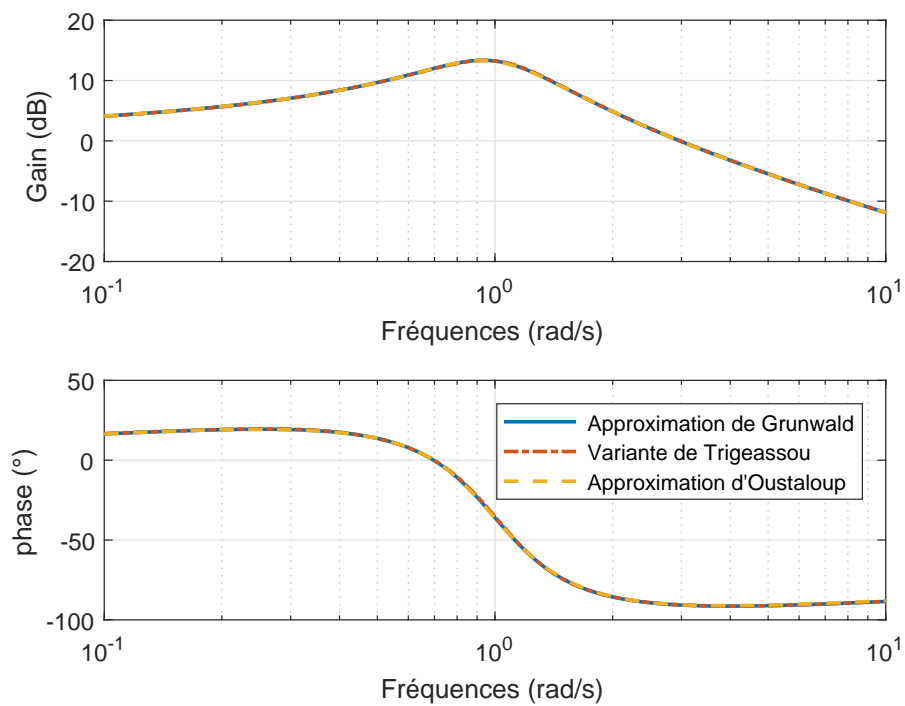


Figure 1.12 – Diagrammes de Bode de ${}_2F$ pour $\nu = 0.4$ et $\zeta = -0.7$

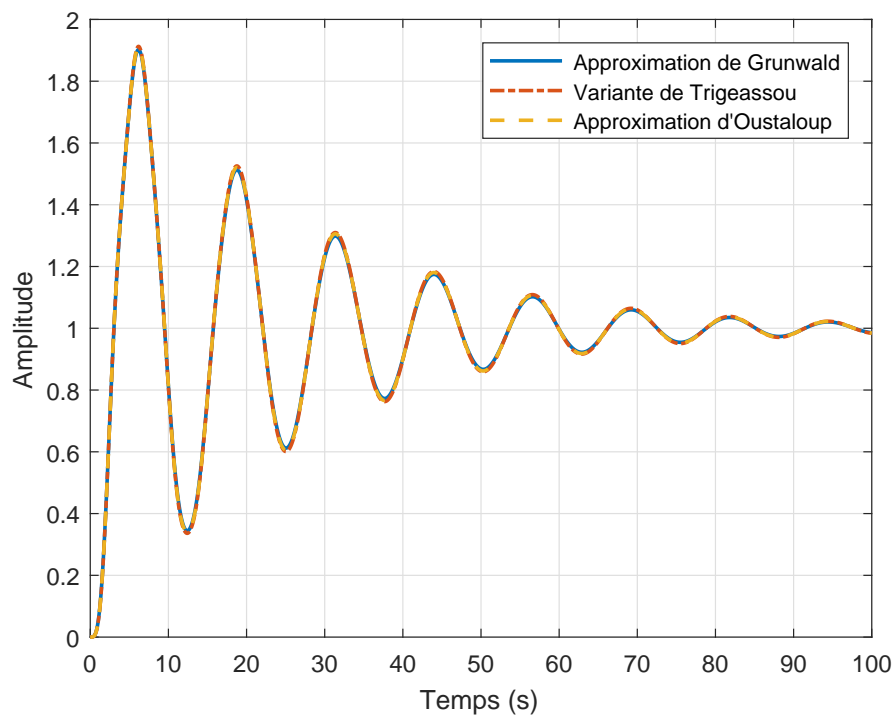
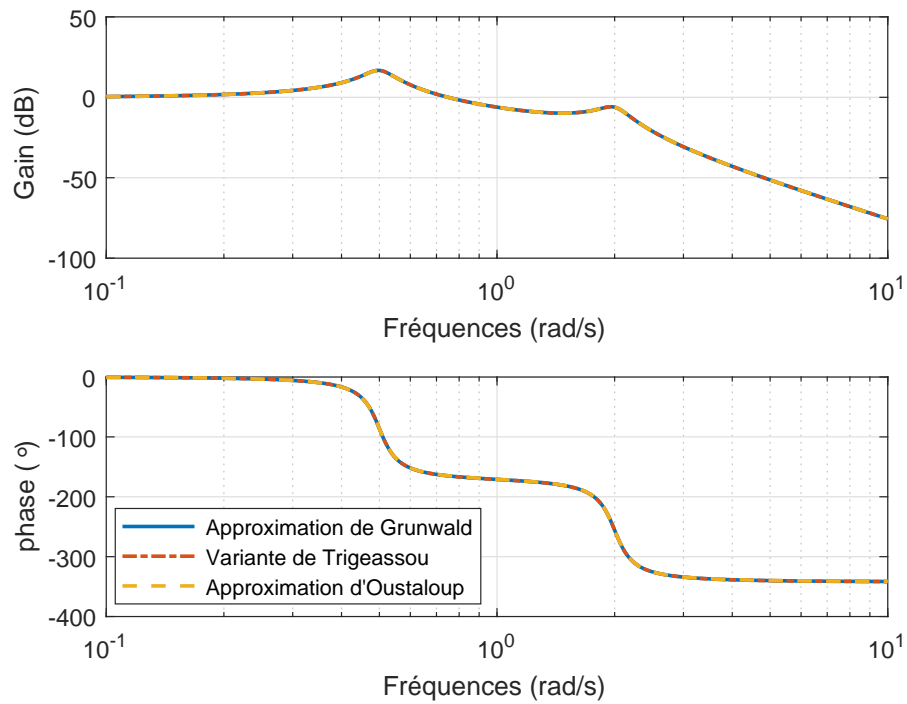


Figure 1.13 – Réponses indicielle de ${}_2F$ pour $\nu = 1.9$ et $\zeta = 2$

Figure 1.14 – Diagrammes de Bode de ${}_2F$ pour $\nu = 1.9$ et $\zeta = 2$

1.8 Conclusion

Ce chapitre présente principalement trois parties : les différentes représentations des systèmes non entiers MISO, l'analyse de la stabilité de ce type de systèmes ainsi que les méthodes de simulation fréquentielle et temporelle pour une fonction de transfert de première et de deuxième espèce.

Une nouvelle notion a été définie, en l'occurrence la commensurabilité structurée, qui permet de conserver la même dimension d'un système non entier.

Chapitre 2

Planification d'expériences d'un système non entier de deuxième espèce

Sommaire

2.1	Introduction	34
2.2	Positionnement du problème de planification d'expériences	36
2.3	Planification d'expériences de systèmes non entiers de première espèce	38
2.3.1	Cas où un seul paramètre est inconnu	38
2.3.2	Cas où deux paramètres sont inconnus	39
2.3.3	Cas où les trois paramètres sont inconnus	39
2.4	Planification d'expériences de systèmes non entiers de deuxième espèce	39
2.4.1	Cas où un seul paramètre est inconnu	40
2.4.2	Cas où deux paramètres sont inconnus	49
2.4.3	Cas où trois ou quatre paramètres sont inconnus	59
2.5	Application à l'identification d'un système non entier de deuxième espèce	61
2.6	Conclusion	63

2.1 Introduction

La planification d'expériences est une partie intégrante dans le processus d'identification (figure 2.1). Elle permet de choisir les signaux d'entrées qui maximisent la quantité d'information extraite du système. Ceci améliore l'estimation paramétrique et minimise la variance des paramètres.

Les premiers travaux sur la planification d'expériences pour l'identification de systèmes remontent aux années 1970. L'idée principale consiste à trouver le meilleur signal d'entrée qui fournit l'estimation la plus précise des paramètres inconnus, où les approches multi-sinus ont donné lieu à des résultats importants encore utilisés aujourd'hui [Goodwin, 1977, Mehra, 1974]. Des développements importants sont apparus à la fin des années 1980, basés sur la formule de covariance asymptotique de *Ljung* [Gevers et Ljung, 1986]. Certaines travaux de recherche se concentrent sur l'optimisation de l'ensemble du spectre du signal d'entrée en fonction des contraintes imposées [Hjalmarsson et Jansson, 2008, Bombois *et al.*, 2021].

La planification d'expériences des fonctions de transfert élémentaires de première espèce a été traitée dans [Abrashov *et al.*, 2017, Abrashov *et al.*, 2018]. Dans [Abrashov *et al.*, 2017], le critère de D-optimalité de la matrice de covariance est minimisé, tandis que dans [Abrashov *et al.*, 2018], le problème est formulé sous une forme convexe de dimension finie. Le spectre d'entrée y est décomposé en base polynomiale de Laguerre et une solution LMI est proposée. Cette méthode permet de synthétiser le spectre d'entrée optimal des systèmes LTI à temps continu qui peuvent aussi être non entiers. Il est connu dans la littérature que le plan d'expériences optimal dépend des paramètres optimaux du système qui sont inconnus. Ce problème de la poule et de l'œuf peut être résolu en pré-estimant les paramètres du système à partir d'un signal d'entrée non optimal, puis en utilisant un signal optimal. Lorsqu'un intervalle borné des paramètres estimés est connu, une autre solution consiste à réaliser un plan d'expériences robuste comme décrit dans [Abrashov *et al.*, 2017] pour les fonctions de transfert de première espèce.

Ce chapitre traite la planification d'expériences de systèmes non entiers de deuxième espèce (1.35). Il comporte principalement quatre parties : le problème de planification d'expériences est tout d'abord défini. Ensuite, un état de l'art sur la planification d'expériences pour les systèmes non entiers de première espèce est présenté. Après, notre approche pour la planification d'expériences de systèmes non entiers de deuxième espèce est détaillée. Enfin, une application à la planification d'expériences de systèmes non entiers de deuxième espèce est illustrée.

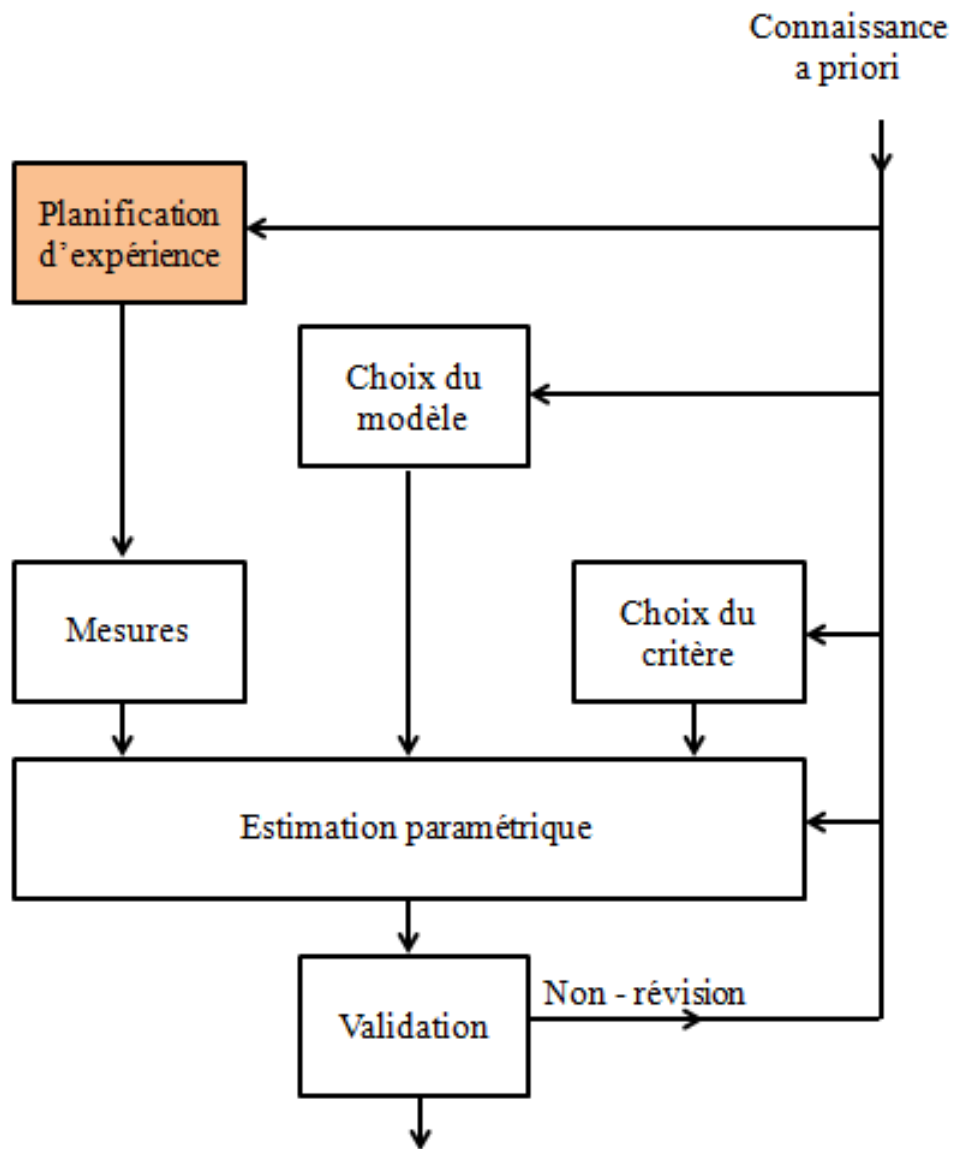


Figure 2.1 – Positionnement de la planification d'expériences, d'un système SISO, dans la procédure d'identification

2.2 Positionnement du problème de planification d'expériences

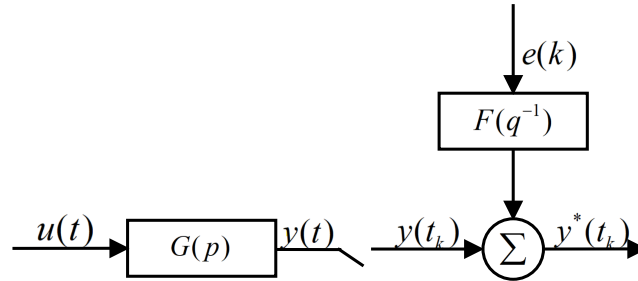


Figure 2.2 – Schéma d'un système SISO

Soit le système représenté dans la figure 2.2 et défini par le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} y(t) = G(p)u(t) \\ y^*(t_k) = y(t_k) + F(q^{-1})e(k) \end{cases} \quad (2.1)$$

avec $t_k = kh$, h est la période d'échantillonnage et q^{-1} désigne l'opérateur de retard discret. $G(p)$ est donnée par l'équation (1.35). y_0 est le signal de sortie non bruité, y est le signal mesuré, entaché d'un bruit blanc ou coloré additif. $F(q^{-1})$ définit le modèle de bruit ($F(q^{-1}) = 1$ lorsque le bruit est blanc). $e(k)$ est un bruit blanc gaussien centré ayant une densité spectrale constante égale à σ^2 .

Tous les paramètres de $G(p)$ sont rassemblés dans un vecteur de paramètres θ à estimer défini par :

$$\theta = [b_0, b_1, \dots, b_M, a_1, \dots, a_N]. \quad (2.2)$$

Le signal d'entrée est supposé de type multi-cosinus :

$$u(t) = A \sum_{i=1}^N \cos(\omega_i t), \quad (2.3)$$

où A est une constante qui fixe la puissance du signal d'entrée, N est le nombre de composantes cosinusoidales et ω_i désigne leurs pulsations.

Le but est de déterminer la meilleure pulsation d'entrée pour que les paramètres du système soient estimés le plus précisément possible. A cet effet, il convient de maximiser une norme de la Matrice d'Information de Fisher (l'inverse de la matrice des covariance $\bar{P}(\Phi_u(\omega))$) :

$$M(\Phi_u(\omega)) = \bar{P}^{-1}(\Phi_u(\omega)) = P^{-1}(\Phi_u(\omega)) + R_0, \quad (2.4)$$

avec

$$P^{-1}(\Phi_u(\omega)) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \Re \left(\left[\frac{\partial G(j\omega_i)}{\partial \theta} \right]^T F^{-1}(j\omega) \Phi_u(\omega) F^{-1}(-j\omega) \left[\frac{\partial G(-j\omega_i)}{\partial \theta} \right] \right) d\omega, \quad (2.5)$$

où $\Phi_u(\omega)$ représente le spectre du signal d'entrée et R_0 une constante qui ne dépend pas du signal d'entrée. La matrice $M(\Phi_u(\omega))$ représente l'information engendrée par le système lorsqu'il est excité par le signal d'entrée $u(t)$.

L'objectif de la planification d'expérience est de maximiser une norme de la matrice d'information de Fisher, en agissant sur le signal d'entrée. Différentes critères existent :

- La **A-optimalité** correspond à la somme des carrés des axes principaux de la région de confiance de θ :

$$J_A(\Phi_u(\omega)) = \text{trace}(P^{-1}(\Phi_u(\omega))). \quad (2.6)$$

- La **E-optimalité** correspond au plus long axe de la région de confiance de θ :

$$J_E(\Phi_u(\omega)) = \max(\text{spec}(P^{-1}(\Phi_u(\omega)))). \quad (2.7)$$

où $\text{spec}(P^{-1}(\Phi_u(\omega)))$ désigne le vecteur qui contient les valeurs propres de $P^{-1}(\Phi_u(\omega))$

- La **D-optimalité** correspond au volume de la région de confiance de θ :

$$J_D(\Phi_u(\omega)) = \det(P^{-1}(\Phi_u(\omega))). \quad (2.8)$$

Notre choix s'est porté arbitrairement sur la maximisation du critère de D-optimalité de la matrice d'information de Fisher. Pour des raisons de simplicité, la densité spectrale est supposée unitaire donc $F(j\omega) = 1$, $\forall \omega$ et $\sigma^2 = 1$.

Le spectre de chaque cosinus étant une distribution de Dirac, l'équation (2.4) peut être réécrite sous la forme suivante :

$$P^{-1}(\Phi_u(\omega)) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \sum_{i=1}^N \Re \left(\left[\frac{\partial G(j\omega_i)}{\partial \theta} \right]^T \left[\frac{\partial G(-j\omega_i)}{\partial \theta} \right] \right). \quad (2.9)$$

Le problème consiste maintenant à chercher les meilleures pulsations ω_i du signal (2.3) qui maximisent le critère de D-optimalité ou le déterminant de $P^{-1}(\Phi_u(\omega))$:

$$\omega_{opt} = \arg \max_{\omega} \det(P^{-1}\Phi_u(\omega)). \quad (2.10)$$

2.3 Planification d'expériences de systèmes non entiers de première espèce

[Abrashov *et al.*, 2017] ont étendu la planification d'expérience aux systèmes non entiers de première espèce.

La fonction de transfert considérée est la suivante :

$${}_1G(s) = \frac{K}{1 + (\tau s)^\nu}. \quad (2.11)$$

et le signal d'entrée est supposé de la forme :

$$u(t) = A \cos(\omega t). \quad (2.12)$$

Le problème consiste à chercher la pulsation optimale ω , maximisant la matrice d'information de Fisher (2.9), conformément à (2.10). Trois cas sont considérés et décrits ci-dessous.

2.3.1 Cas où un seul paramètre est inconnu

Cas 1 : Lorsque K est inconnu, τ et ν sont supposés connus, la pulsation optimale normalisée est :

$$\begin{cases} \omega_n = 0, & 0 < \nu \leq 1 \\ \omega_n = \sqrt[\nu]{-\cos(\nu \frac{\pi}{2})}, & 1 \leq \nu < 2 \end{cases} \quad (2.13)$$

où $\omega_n = \tau\omega$ est définie comme étant la pulsation normalisée. Lorsque le système de première espèce n'est pas résonant la pulsation optimale vaut 0, ce qui revient à avoir une excitation constante à partir de $t = 0$ (ou échelon). Lorsque le système présente une résonance la pulsation optimale correspond à la pulsation de résonance, c'est à cette pulsation que la sensibilité aux variations de gain est la plus forte.

Cas 2 : Lorsque τ est inconnu, K et ν sont supposés connus, la pulsation optimale normalisée vaut :

$$\omega_n = 1. \quad (2.14)$$

quels que soient les paramètres K et τ .

Cas 3 : Lorsque ν est inconnu, une solution numérique est trouvée pour la pulsation optimale normalisée.

2.3.2 Cas où deux paramètres sont inconnus

Cas 1 : Lorsque K et τ sont inconnus, la pulsation optimale normalisée est :

$$\omega_n = \sqrt[\nu]{\frac{\cos(\nu\frac{\pi}{2}) - \sqrt{(\cos(\nu\frac{\pi}{2}))^2 + 3}}{-3}} \quad (2.15)$$

Cas 2 : Lorsque K et ν sont inconnus, une solution numérique est trouvée pour la pulsation optimale normalisée.

Cas 3 : Lorsque τ et ν sont inconnus, la pulsation optimale normalisée vaut :

$$\omega_n = 1. \quad (2.16)$$

2.3.3 Cas où les trois paramètres sont inconnus

Dans le cas où les trois paramètres sont inconnus, le signal sinusoïdal (2.12) n'est pas suffisamment persistant. Les auteurs, dans [Abrashov *et al.*, 2017], définissent à la place :

$$u(t) = A(\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)) \quad (2.17)$$

et trouvent numériquement les pulsation optimales ω_1 et ω_2 .

La contribution originale de ce chapitre consiste à étendre les résultats de planification d'expériences aux systèmes non entiers de deuxième espèce.

2.4 Planification d'expériences de systèmes non entiers de deuxième espèce

Dans cette section, le problème de planification d'expérience de systèmes non entiers de deuxième espèce :

$${}_2G(s) = \frac{K}{1 + 2\zeta(\frac{s}{\omega_0})^\nu + (\frac{s}{\omega_0})^{2\nu}} \quad (2.18)$$

est traité pour les différents cas où 1 à 4 paramètres (K, ζ, ω_0, ν) sont supposés inconnus.

Pour les deux premiers cas, lorsque un ou deux paramètres du système sont inconnus, le signal optimal contient seulement une composante cosinusoidale :

$$u(t) = A \cos(\omega t). \quad (2.19)$$

Pour les deux derniers cas, lorsque trois et quatre paramètres sont inconnus, une

composante cosinusoidale n'est plus suffisante, car le signal n'est plus suffisamment persistant. Deux composantes cosinusoidales sont alors nécessaires :

$$u(t) = A(\alpha \cos(\omega_1 t) + (1 - \alpha) \cos(\omega_2 t)). \quad (2.20)$$

Le paramètre additionnel $0 < \alpha < 1$, permet de fixer la quantité d'énergie à répartir entre les deux composantes.

Définition 2.1 *Un signal quasi stationnaire $u(t)$, ayant comme spectre $\Phi_u(\omega)$, est dit persistant d'ordre n si pour tous les filtres de la forme $M_n(q) = m_1 q^{-1} + \dots + m_n q^{-n}$ on a :*

$$|M_n(e^{i\omega})|^2 \Phi_u(\omega) \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad M_n(e^{i\omega}) \equiv 0. \quad (2.21)$$

La fonction $M_n(j\omega)M_n(-j\omega)$ peut avoir au plus $(n - 1)$ zéros différents à partie réelle positive, par conséquent $u(t)$ est persistant d'ordre n , si $\Phi_u(\omega)$ est différent de zéro en au moins n points dans l'intervalle $-\pi < \omega < \pi$

Rappelons les conditions de stabilité d'un système non entier de deuxième espèce [Malti et al., 2011] :

$$\begin{cases} \omega_0 > 0 \\ 0 < \nu < 2 \\ \zeta > -\cos(\nu \frac{\pi}{2}) \end{cases} \quad (2.22)$$

2.4.1 Cas où un seul paramètre est inconnu

Dans cette section, un seul paramètre parmi K, ζ, ω_0, ν est considéré inconnu. La fréquence optimale ω_{opt} du signal d'entrée (2.19) est calculée. Elle permet d'estimer le paramètre inconnu avec une variance minimale (2.9).

2.4.1.1 Cas où K est inconnu

Dans cette section, K est supposé inconnu et les paramètres ζ, ω_0 et ν sont connus. Il est intéressant d'examiner, tout d'abord, le cas d'un système rationnel ($\nu = 1$).

Cas rationnel ($\nu = 1$) : L'inverse de la variance calculé en utilisant l'équation (2.9) est égale à :

$$P_K^{-1}(\omega) = \frac{A}{2\pi} \times \frac{1}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + 4\zeta^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}. \quad (2.23)$$

La pulsation qui maximise $P_K^{-1}(\omega_n)$ est celle qui minimise son dénominateur :

$$D_1(\omega_n) = [1 - \omega_n^2]^2 + 4\zeta^2 \omega_n^2. \quad (2.24)$$

En définissant la pulsation normalisée $\omega_n = \frac{\omega}{\omega_0}$, la première dérivée de $D_1(\omega_n)$ est donnée par :

$$\frac{dD_1(\omega_n)}{d\omega_n} = 4\omega_n [\omega_n^2 + 2\zeta^2 - 1]. \quad (2.25)$$

Cette dérivée s'annule lorsque :

$$\frac{dD_1(\omega_n)}{d\omega_n} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \omega_{nopt} = 0, & \forall \zeta \\ \omega_{nopt} = \sqrt{1 - 2\zeta^2}, & \text{si } \zeta < \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases} \quad (2.26)$$

Pour $\zeta < 0.7$, on a $D_1(\sqrt{1 - 2\zeta^2}) > D_1(0)$. Par conséquent, $\omega_n = \sqrt{1 - 2\zeta^2}$ correspond à un maximum global de (2.23).

Lorsque K est inconnu et $\nu = 1$, la pulsation ω_n optimale dans le sens de problème (2.10), est donnée par :

$$\begin{cases} \omega_{nopt} = 0, & \text{si } \zeta \geq 0.7. \\ \omega_{nopt} = \sqrt{1 - 2\zeta^2}, & \text{si } \zeta < 0.7. \end{cases}$$

En conséquence, la pulsation optimale correspond à la pulsation de résonance lorsque le système est résonant. C'est là que la sensibilité par rapport aux variations du gain est plus importante.

Cas non entier avec $\nu \in]0, 2[$ L'inverse de la variance est égale à :

$$P_K^{-1}(\omega_n) = \frac{A}{2\pi} \times \frac{1}{(1 + \omega_n^{4\nu} + 4\zeta^2\omega_n^{2\nu} + 2\omega_n^{2\nu} \cos(\nu\pi) + 4\zeta\omega_n^\nu \cos(\nu\frac{\pi}{2}) [1 + \omega_n^{2\nu}])} \quad (2.27)$$

La recherche du maximum global de (2.27) nécessite la résolution de l'équation $\frac{dP_K^{-1}(\omega_n)}{d\omega_n} = 0$ qui est non linéaire par rapport à ω_n . La solution analytique est difficile, voir impossible, à obtenir. Comme dans le cas entier, on peut conclure que la sensibilité par rapport aux variations du gain est la plus importante à la pulsation de résonance. Par conséquent, la solution numérique a été calculée et tracée pour différentes valeurs de ν sur la figure 2.3. Cette figure est identique à la figure 1.5 du chapitre 1. Ceci qui montre que la pulsation optimale du problème décrit en (2.10) correspond à la pulsation de résonance lorsque le couple (ν, ζ) appartient au domaine de résonance d'un système de deuxième espèce (figure 2.3) et est égale à zéro lorsque ce n'est pas le cas.

2.4.1.2 Cas où ζ est inconnu

Dans cette section, ζ est supposé inconnu et les paramètres K, ω_0 et ν sont connus. Il est intéressant d'examiner, tout d'abord, le cas d'un système rationnel avec $\nu = 1$.

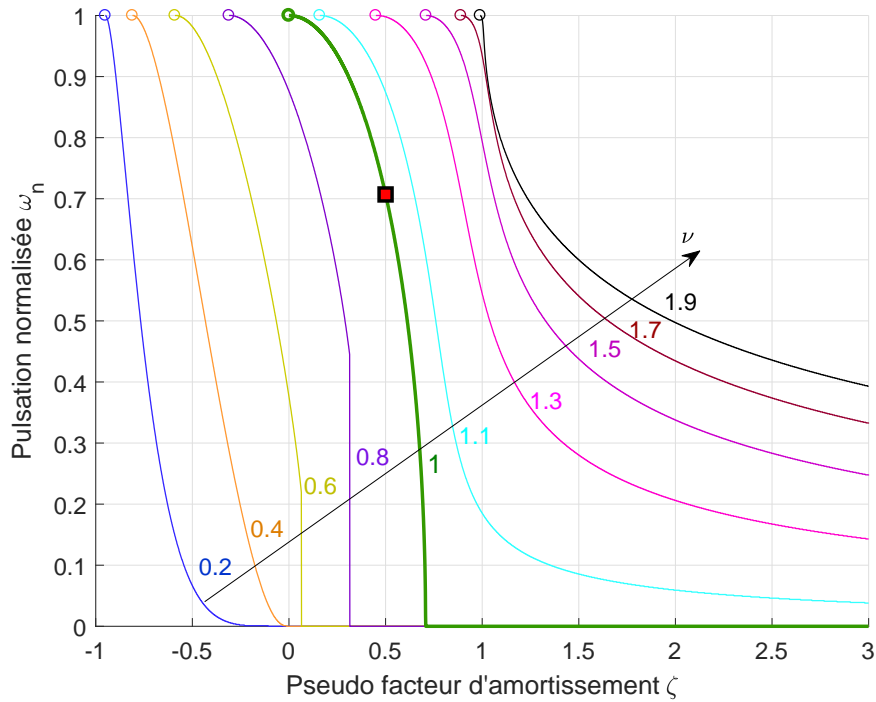


Figure 2.3 – Pulsation optimale normalisée en fonction de ζ , lorsque K est inconnu. La courbe en trait gras et vert correspond à la solution analytique obtenue pour $\nu = 1$

Cas rationnel ($\nu = 1$) : L'inverse de la variance calculé en utilisant l'équation (2.9) est égale à :

$$P_{\zeta}^{-1}(\omega_n) = \frac{2AK^2\omega_n^2}{\pi D_1^2(\omega_n)} \quad (2.28)$$

où $D_1(\omega_n)$ est défini dans (2.24).

La première dérivée de $P_{\zeta}^{-1}(\omega_n)$ par rapport à ω_n est donnée par :

$$\frac{dP_{\zeta}^{-1}(\omega_n)}{d\omega_n} = \frac{4AK^2\omega_n}{\pi} \times \frac{(4\zeta^2\omega_n^2 + (1 - \omega_n^2)^2) - 4\omega_n^2(2\zeta^2 - (1 - \omega_n^2))}{D_1^3(\omega_n)}. \quad (2.29)$$

Cette équation est difficile à résoudre analytiquement mais peut être résolue pour le cas particulier de $\zeta = 1$.

Proposition 1 : Pour $\zeta = 1$:

$$\frac{dP_{\zeta}^{-1}(\omega_n)}{d\omega_n} = \frac{4AK^2}{\pi} \times \frac{\omega_n(3\omega_n^2 - 1)}{(\omega_n^2 + 1)^5}. \quad (2.30)$$

Le maximum global de $P_{\zeta}^{-1}(\omega_n)$, est obtenu pour :

$$\frac{dP_{\zeta}^{-1}(\omega_n)}{d\omega_n} = 0 \Rightarrow \omega_n(3\omega_n^2 - 1) = 0$$

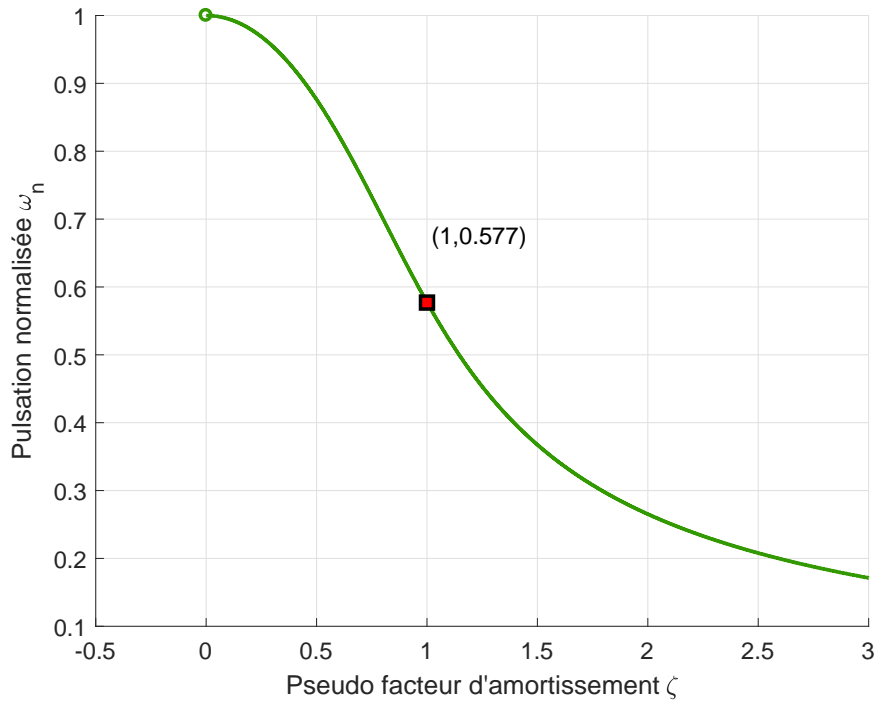


Figure 2.4 – Pulsation optimale normalisée en fonction de ζ , lorsque ζ est inconnu et $\nu = 1$. Le cas $\zeta = 1$ est mis en évidence par le carré rouge

$$\Rightarrow \begin{cases} \omega_{nopt} = 0 \\ \omega_{nopt} = \frac{\sqrt{3}}{3}. \end{cases} \quad (2.31)$$

$P_{\zeta}^{-1}(\frac{\sqrt{3}}{3}) > P_{\zeta}^{-1}(0)$, par conséquent $\omega_{nopt} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ est la pulsation maximisant $P_1^{-1}(\omega_n)$.

La pulsation ω_n optimale dans le sens du problème (2.10) est donnée par l'expression analytique (2.31).

La pulsation normalisée pour le cas ζ inconnu et $\nu = 1$ est tracée sur la figure 2.4.

Cas non entier avec $\nu \in]0, 2[$: Dans ce cas, l'inverse de la variance est égale à :

$$P_{\zeta}^{-1}(\omega_n) = \frac{2AK^2\omega_n^{2\nu}}{\pi} \times \frac{1}{(1 + \omega_n^{4\nu} + 4\zeta^2\omega_n^{2\nu} + 2\omega_n^{2\nu} \cos(\nu\pi) + 4\zeta\omega_n^{\nu} \cos(\frac{\nu\pi}{2}) [1 + \omega_n^{2\nu}])^2}. \quad (2.32)$$

La recherche de la pulsation ω_{nopt} qui maximise $P_{\zeta}^{-1}(\omega_n)$ est difficile à trouver analytiquement car l'équation $\frac{dP_{\zeta}^{-1}(\omega_n)}{d\omega_n} = 0$ est non linéaire par rapport à ω_n . Par conséquent, ce problème est résolu numériquement et tracé sur la figure 2.5 pour différentes valeurs de ν .

En raison des conditions de stabilité (2.22), le point de départ des tracés (en haut à gauche) sur la figure 2.5, ainsi que sur les figures suivantes, correspond à la limite de

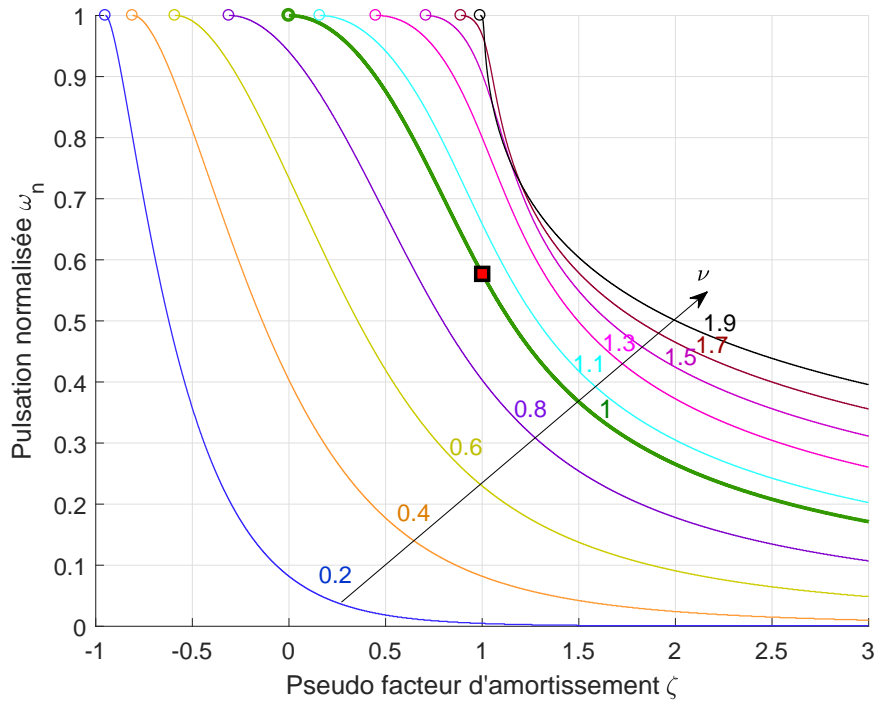


Figure 2.5 – Pulsation optimale normalisée en fonction de ζ , lorsque ζ est inconnu. La courbe en trait gras et vert correspond à la solution analytique pour $\nu = 1$ et le cas $\zeta = 1$ est mis en évidence par le carré rouge

stabilité définie par $\zeta = -\cos(\nu\frac{\pi}{2})$. Dans ce cas, la fréquence d'entrée optimale est égale à la fréquence naturelle et donc la fréquence normalisée est égale à 1. Plus le facteur de pseudo-amortissement ζ est élevé, plus l'amortissement du système est faible, et plus la fréquence naturelle ω_n est petite. Elle tend vers 0 pour tout ν .

2.4.1.3 Cas où ω_0 est inconnue

Dans cette section, ω_0 est supposée inconnue et les paramètres K, ζ et ν sont connus. Là aussi il est intéressant d'examiner, tout d'abord, le cas d'un système rationnel avec $\nu = 1$.

Cas rationnel ($\nu = 1$) L'inverse de la variance calculé par (2.9) est égale à :

$$P_{\omega_0}^{-1}(\omega_n) = \frac{2Ak^2\omega_n^2}{\pi\omega_0^2} \times \frac{\omega_n^2 + \zeta^2}{D_1^2(\omega_n)}. \quad (2.33)$$

où $D_1(\omega_n)$ est défini dans (2.24).

La dérivée de $P_{\omega_0}^{-1}$ par rapport ω_n est donnée par cette expression :

$$\frac{dP_{\omega_0}^{-1}(\omega_n)}{d\omega_n} = \frac{4AK^2\omega_n}{\pi\omega_0^2} \times \frac{(3\omega_n^2 + 2\zeta^2)D_1(\omega_n) - 8\omega_n^2(\omega_n^2 + \zeta^2)(2\zeta^2 - (1 - \omega_n^2))}{D_1^3(\omega_n)} \quad (2.34)$$

Bien que cette équation admette une solution évidente pour $\omega_n = 0$, elle est difficile à résoudre analytiquement pour tout ω_n . Elle est résolue dans le cas particulier $\zeta = 1$.

Proposition 2 : Pour $\zeta = 1$, l'équation (2.34) devient :

$$\frac{dP_{\omega_0}(\omega_n)}{d\omega_n} = \frac{-4AK^2}{\pi\omega_0} \times \frac{\omega_n(2\omega_n^2 - 1)}{(\omega_n^2 + 1)^4}. \quad (2.35)$$

Le maximum global de $P_{\omega_n}^{-1}(\omega_n)$, est obtenu pour :

$$\begin{aligned} \frac{dP_{\omega_0}^{-1}(\omega_n)}{d\omega_n} = 0 &\Rightarrow \omega_n(2\omega_n^2 - 1) = 0, \\ &\Rightarrow \begin{cases} \omega_{nopt} = 0 \\ \omega_{nopt} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \end{aligned} \quad (2.36)$$

Puisque $P_{\omega_n}^{-1}(\frac{\sqrt{2}}{2}) > P_{\omega_n}^{-1}(0)$, l'optimum global se trouve à la pulsation $\omega_{nopt} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

La pulsation ω_n optimale dans le sens du problème (2.10) est donnée par l'expression analytique (2.36).

Pour un ζ quelconque, la pulsation normalisée correspondant au cas entier $\nu = 1$. Elle est tracée sur la figure 2.6 lorsque ω_n est inconnu.

Cas non entier général avec $\nu \in]0, 2[$: Dans ce cas, l'inverse de la variance est égale à :

$$P_{\omega_0}^{-1}(\omega_n) = \frac{2AK^2\nu^2\omega_n^{2\nu}}{\pi\omega_0^2} \times \frac{\omega_n^{2\nu} + 2\zeta\omega_n^\nu \cos(\nu\frac{\pi}{2}) + \zeta^2}{(1 + \omega_n^{4\nu} + 4\zeta^2\omega_n^{2\nu} + 2\omega_n^{2\nu} \cos(\nu\pi) + 4\omega_n^\nu \zeta \cos(\nu\frac{\pi}{2}) [1 + \omega_n^{2\nu}])^2}. \quad (2.37)$$

La recherche de la pulsation ω_{nopt} qui maximise $P_{\omega_0}^{-1}(\omega_n)$ est difficile à trouver analytiquement car l'équation $\frac{dP_{\omega_0}^{-1}(\omega_n)}{d\omega_n} = 0$ est non linéaire par rapport à ω_n . Par conséquent, ce problème est résolu numériquement pour différentes valeurs de ν . La solution optimale est tracée sur la figure 2.7.

2.4.1.4 Cas où ν est inconnu

Dans cette section, l'ordre de dérivation $\nu \in (0, 2)$ est supposé inconnu et les paramètres K, ζ et ω_0 sont connus.

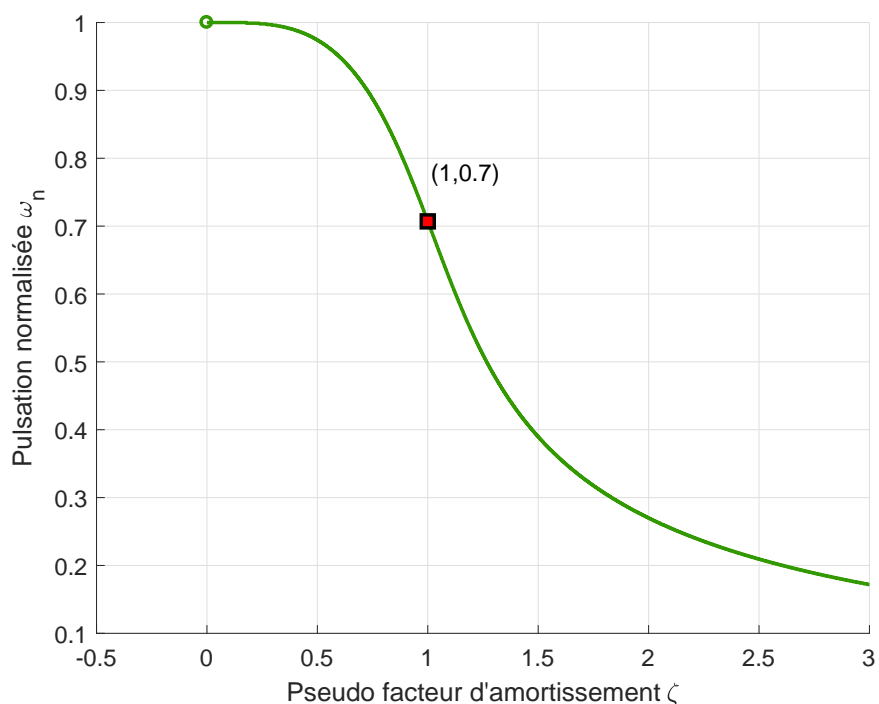


Figure 2.6 – Pulsation optimale normalisée en fonction de ζ , lorsque ω_0 est inconnu et $\nu = 1$. (Le cas $\zeta = 1$ est mis en évidence par le carré rouge)

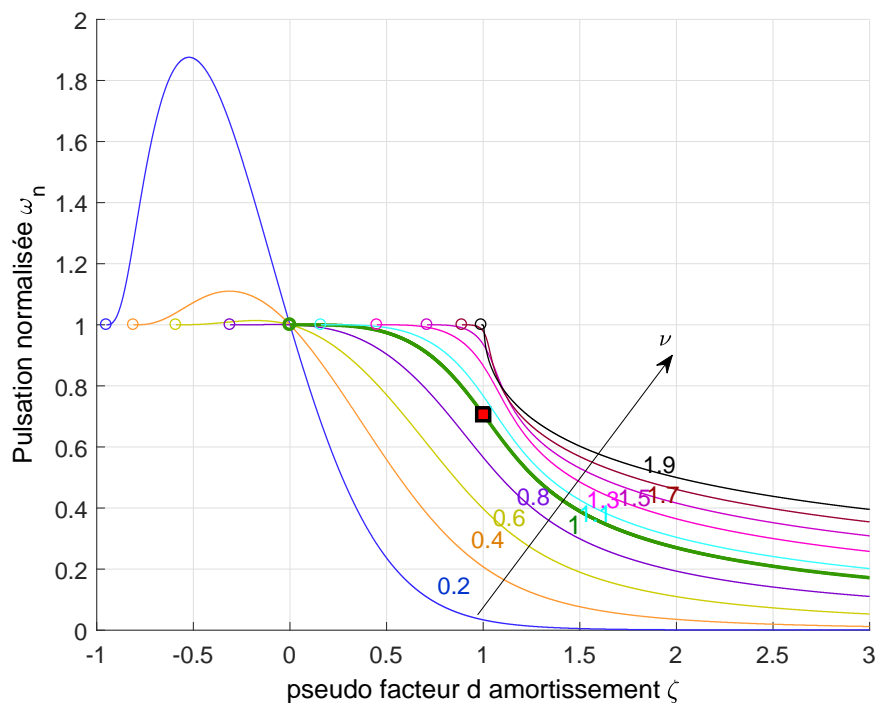


Figure 2.7 – Pulsation optimale normalisée en fonction de ζ lorsque ω_0 est inconnu. La courbe en trait gras et vert correspond à la solution analytique pour $\nu = 1$. Le cas $\zeta = 1$ est mis en évidence par le carré rouge

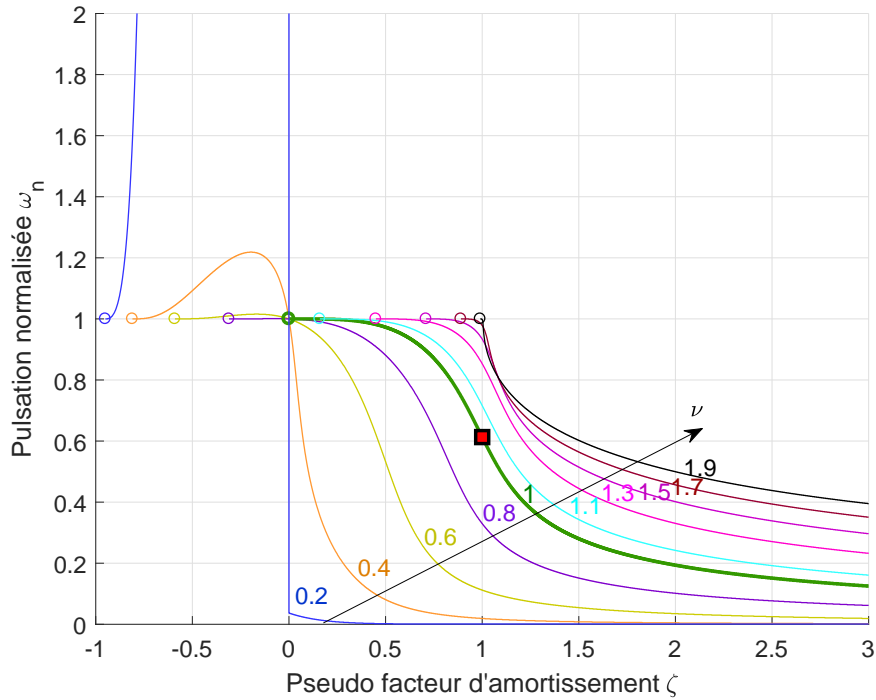


Figure 2.8 – Pulsation optimale normalisée en fonction de ζ lorsque ν est inconnu

L'inverse de la variance est égale à :

$$P_\nu^{-1}(\omega_n) = \frac{AK^2\omega_n^{2\nu}}{2\pi} \times \frac{(4\ln^2(\omega_n) + \pi^2)(\omega_n^{2\nu} + 2\zeta\omega_n^\nu \cos(\nu\frac{\pi}{2}) + \zeta^2)}{(1 + \omega_n^{4\nu} + 4\zeta^2\omega_n^{2\nu} + 2\omega_n^{2\nu} \cos(\nu\pi) + 4\zeta\omega_n^\nu \cos(\nu\frac{\pi}{2}) [1 + \omega_n^{2\nu}])^2}. \quad (2.38)$$

La recherche de la pulsation ω_{nopt} qui maximise $P_\nu^{-1}(\omega_n)$ est difficile à trouver analytiquement car l'équation $\frac{dP_\nu^{-1}(\omega_n)}{d\omega_n} = 0$ est non linéaire par rapport à ω_n . Par conséquent, ce problème est résolu numériquement pour différentes valeurs de ν et la solution optimale est tracée sur la figure 2.8.

Remarque 2.1 La figure 2.8 montre qu'il existe a priori une discontinuité pour $\nu = 0.2$ en $\zeta = 0$. Pour illustrer ce comportement étrange, la pulsation optimale est tracée pour plusieurs valeurs de ζ supplémentaires sur la figure 2.9. L'observation initiale de discontinuités en $\zeta = 0$ se configure a priori pour toutes les valeurs de $\nu < \nu_0$ avec $\nu_0 \approx 0.38$.

Pour rechercher l'origine de cette discontinuité, l'inverse de la matrice de covariance est tracée en fonction de ω_n pour trois valeurs de ν sur la figure 2.10 qui illustre la présence de deux maximums globaux pour les valeurs $\nu = 0.2$ et $\nu = 0.3$ et d'un seul maximum global pour $\nu = 0.5$. La figure 2.11 illustre la présence de deux maximums globaux pour $\nu < \nu_0 \approx 0.38$ et d'un seul optimum global au delà de ν_0 .

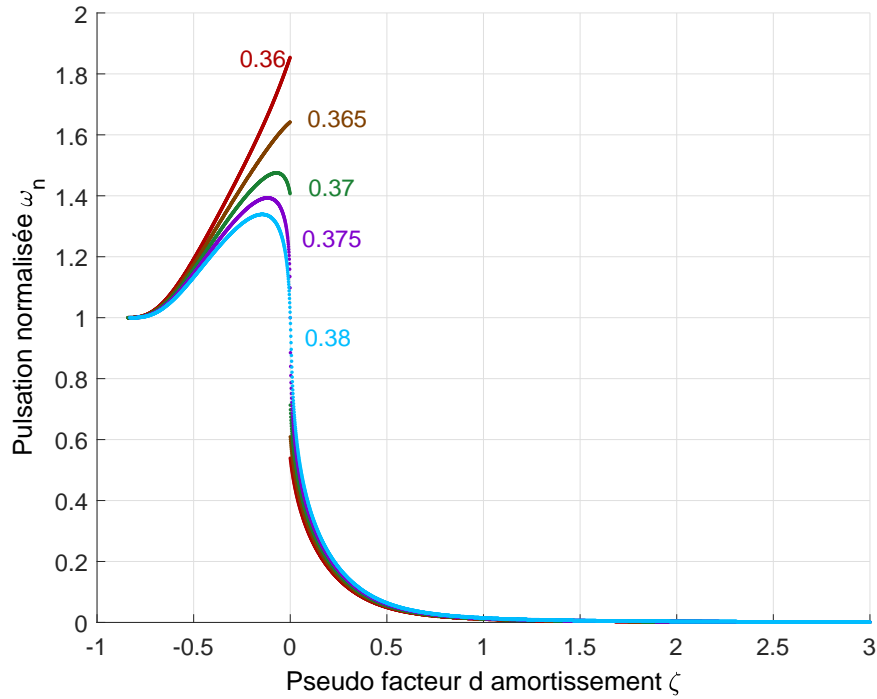


Figure 2.9 – Pulsation optimale normalisée en fonction de ζ lorsque ν est inconnu et compris dans l'intervalle $0.36 < \nu < 0.38$

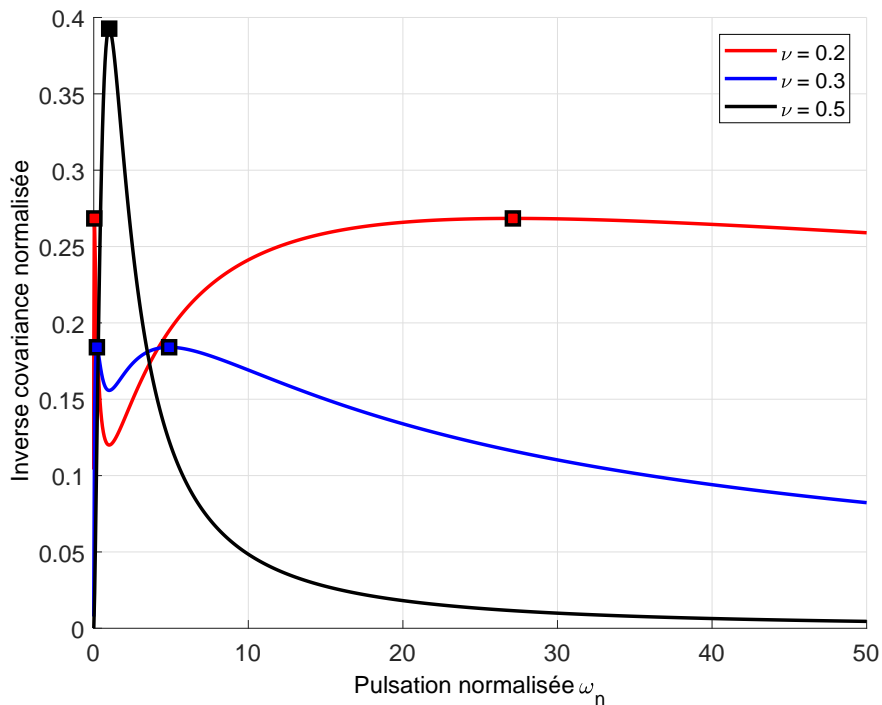


Figure 2.10 – Inverse de la variance P_ν^{-1} en fonction de la pulsation optimale normalisée ω_n lorsque $\zeta = 0$, illustrant la présence de deux maximums globaux lorsque $\nu = 0.2$ et $\nu = 0.3$, qui sont mis en évidence avec des carrés, et un seul maximum lorsque $\nu = 0.5$

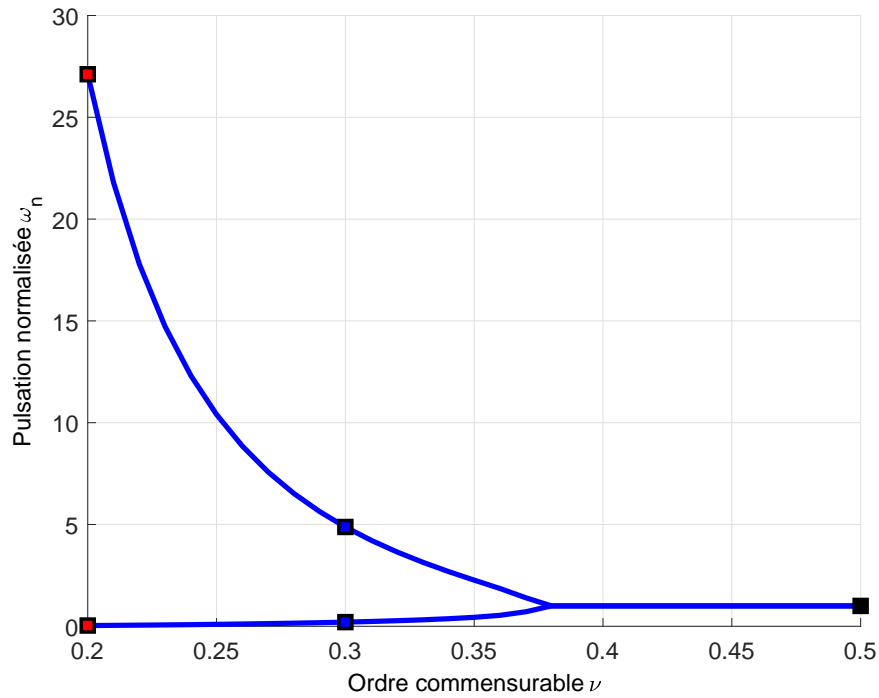


Figure 2.11 – Pulsation optimale normalisée ω_n en fonction de ν , lorsque $\zeta = 0$; deux maximums globaux lorsque $\nu < \nu_0 \approx 0.38$; les maximums pour $\nu = 0.3$, $\nu = 0.2$ et $\nu = 0.5$, qui correspondent à ceux de la figure 2.10, sont mis en évidence avec des carrés

2.4.2 Cas où deux paramètres sont inconnus

Dans cette section le problème de planification d'expériences pour les systèmes non entiers de deuxième espèce est traité dans le cas où deux paramètres sont inconnus. La combinaison de deux paramètres parmi 4 fournit $C_2^4 = 6$ cas à étudier. Dans chaque cas le même principe utilisé dans la section 2.4.1 est appliqué pour déterminer la pulsation normalisée optimale.

2.4.2.1 Cas où K et ζ sont inconnus

Dans cette section, K et ζ sont supposés inconnus et les paramètres ω_0 et ν sont connus. Il est intéressant d'examiner, tout d'abord, le cas d'un système rationnel avec $\nu = 1$.

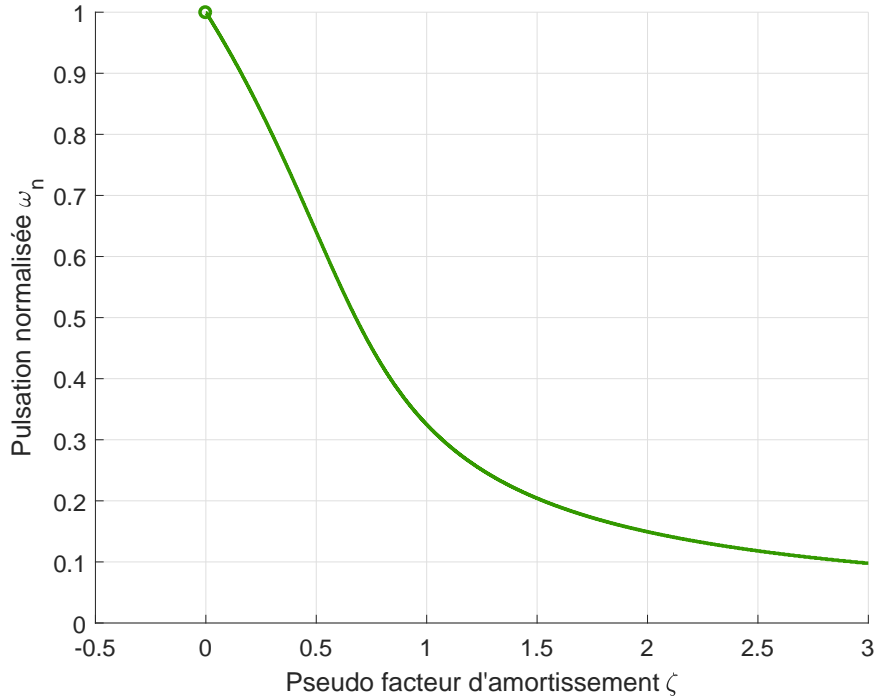


Figure 2.12 – Pulsation optimale normalisée en fonction de ζ , lorsque K et ζ sont inconnus et $\nu = 1$

Cas rationnel ($\nu = 1$) : L'inverse de la matrice de covariance calculé par (2.9) est donnée par :

$$P_{K,\zeta}^{-1}(\omega_n) = \frac{A}{2\pi} \begin{bmatrix} \frac{1}{D_1(\omega_n)} & \frac{-4K\zeta\omega_n^2}{D_1^2(\omega_n)} \\ \frac{-4K\zeta\omega_n^2}{D_1^2(\omega_n)} & \frac{4K^2\omega_n^2}{D_1^2(\omega_n)} \end{bmatrix}. \quad (2.39)$$

Son déterminant est égal à :

$$\det(P_{K,\zeta}^{-1}(\omega_n)) = \frac{A^2 K^2 \omega_n^2}{\pi^2} \times \frac{(1 - \omega_n^2)^2}{D_1^4(\omega_n)}. \quad (2.40)$$

où $D_1(\omega_n)$ est défini dans (2.24).

La recherche du maximum global de (2.40) nécessite la résolution de l'équation $\frac{d\det(P_{K,\zeta}^{-1}(\omega_n))}{d\omega_n} = 0$ dont la solution analytique n'est pas évidente. Seule la solution numérique est calculée et tracée pour $\nu = 1$ sur la figure 2.12.

Cas non entier avec $\nu \in]0, 2[$: Dans ce cas, l'inverse de la matrice de covariance est égale à :

$$P_{K,\zeta}^{-1}(\omega_n) = \frac{A}{2\pi} \begin{bmatrix} \frac{1}{D_2(\omega_n)} & \frac{-2K\omega_n^\nu (\cos(\nu\frac{\pi}{2})\omega_n^{2\nu} + 2\omega_n^\nu\zeta + \cos(\nu\frac{\pi}{2}))}{D_2^2(\omega_n)} \\ \frac{-2K\omega_n^\nu (\cos(\nu\frac{\pi}{2})\omega_n^{2\nu} + 2\omega_n^\nu\zeta + \cos(\nu\frac{\pi}{2}))}{D_2^2(\omega_n)} & \frac{4K^2\omega_n^{2\nu}}{D_2^2(\omega_n)} \end{bmatrix}. \quad (2.41)$$

Le déterminant de l'inverse de la matrice de covariance est égal à :

$$\det(P_{K,\zeta}^{-1}(\omega_n)) = \frac{A^2 K^2 \omega_n^{2\nu}}{\pi^2} \times \frac{D_2(\omega_n) - (\cos(\nu\frac{\pi}{2})\omega_n^{2\nu} + 2\omega_n^\nu\zeta + \cos(\nu\frac{\pi}{2}))^2}{D_2^4(\omega_n)}, \quad (2.42)$$

avec

$$D_2(\omega_n) = 1 + \omega_n^{4\nu} + 4\zeta^2\omega_n^{2\nu} + 2\omega_n^{2\nu} \cos(\nu\pi) + 4\zeta\omega_n^\nu (1 + \omega_n^{2\nu}) \cos\left(\nu\frac{\pi}{2}\right) \quad (2.43)$$

La recherche du maximum global de (2.42) nécessite la résolution de l'équation $\frac{d}{d\omega_n} \det(P_{K,\zeta}^{-1}(\omega_n)) = 0$ qui est non linéaire par rapport à ω_n . Seule la solution numérique a été calculée et tracée pour plusieurs valeurs de ν sur la figure 2.13.

2.4.2.2 Cas où K et ω_0 sont inconnus

Dans cette section, K et ω_0 sont supposés inconnus et les paramètres ζ et ν sont connus. Il est intéressant d'examiner, tout d'abord, le cas d'un système rationnel avec $\nu = 1$.

Cas rationnel ($\nu = 1$) : L'inverse de la matrice de covariance calculée à partir de (2.9) est égale à :

$$P_{K,\omega_0}^{-1}(\omega_n) = \frac{A}{2\pi} \begin{bmatrix} \frac{1}{D_1(\omega_n)} & \frac{2K\omega_n^2(\omega_n^2 + 2\zeta^2 - 1)}{\omega_0^2 D_1^2(\omega_n)} \\ \frac{2K\omega_n^2(\omega_n^2 + 2\zeta^2 - 1)}{\omega_0^2 D_1^2(\omega_n)} & \frac{4K^2\omega_n^2(\omega_n^2 + \zeta^2)}{\omega_0^2 D_1^2(\omega_n)} \end{bmatrix}. \quad (2.44)$$

Son déterminant est égale à :

$$\det(P_{K,\omega_0}^{-1}(\omega_n)) = \frac{A^2 K^2 \omega_n^2}{\pi^2 \omega_0^2} \times \frac{D_1(\omega_n)(\omega_n^2 + \zeta^2) - (\omega_n^2 + 2\zeta^2 - 1)^2}{D_1^4(\omega_n)}, \quad (2.45)$$

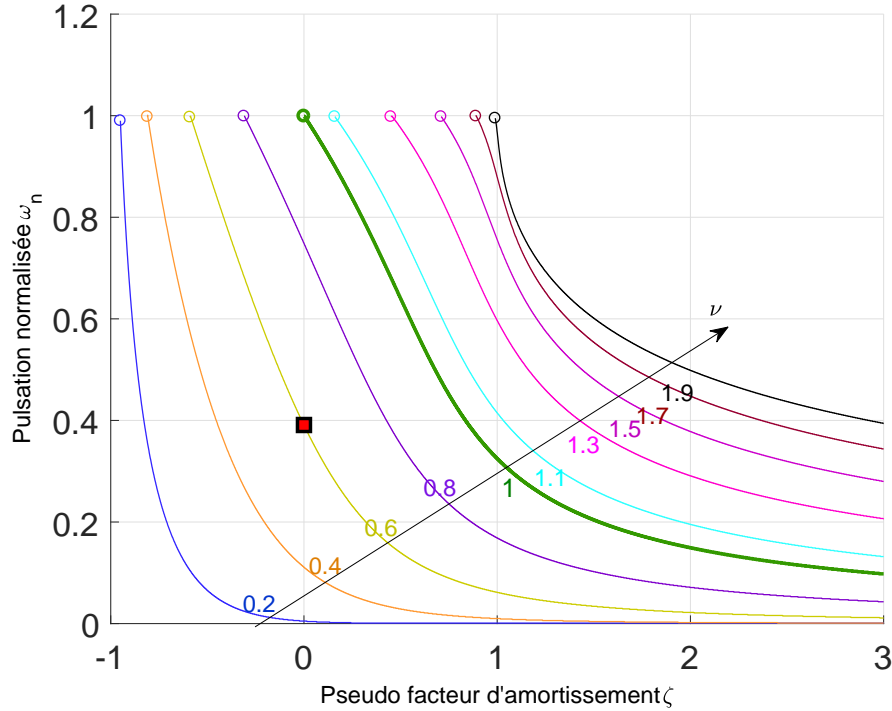


Figure 2.13 – Pulsation optimale normalisée en fonction de ζ lorsque K et ζ sont inconnus et ν quelconque. La courbe en trait gras et vert correspond à la solution analytique pour $\nu = 1$

où $D_1(\omega_n)$ est défini dans (2.24).

La recherche du maximum global de (2.45) nécessite la résolution de l'équation $\frac{d \det(P_{k,\omega_n}^{-1}(\omega_n))}{d\omega_n} = 0$ dont la solution analytique n'est pas évidente. Par conséquent, seule la solution numérique est calculée et tracée pour $\nu = 1$ sur la figure 2.14.

Cas non entier avec $\nu \in]0, 2[$: Dans ce cas, l'inverse de la matrice de covariance est égale à :

$$P_{K,\omega_0}^{-1}(\omega_n) = \frac{A}{2\pi} \times \begin{bmatrix} \frac{1}{D_2(\omega_n)} & \frac{2K\nu\omega_n^\nu(\omega_n^{3\nu} + 3\zeta \cos(\nu\frac{\pi}{2})\omega_n^{2\nu} + (2\zeta^2 + \cos(\nu\pi))\omega_n^\nu + \zeta \cos(\nu\frac{\pi}{2}))}{\omega_0 D_2^2(\omega_n)} \\ \frac{2K\nu\omega_n^\nu(\omega_n^{3\nu} + 3\zeta \cos(\nu\frac{\pi}{2})\omega_n^{2\nu} + (2\zeta^2 + \cos(\nu\pi))\omega_n^\nu + \zeta \cos(\nu\frac{\pi}{2}))}{\omega_0 D_2^2(\omega_n)} & \frac{4K^2\nu^2\omega_n^{2\nu}(\omega_n^{2\nu} + 2\zeta\omega_n^\nu \cos(\nu\frac{\pi}{2}) + \zeta^2)}{\omega_0^2 D_2^2(\omega_n)} \end{bmatrix}. \quad (2.46)$$

Son déterminant est :

$$\det(P_{K,\omega_0}^{-1}(\omega_n)) = \frac{A^2 K^2 \nu^2 \omega_n^{2\nu}}{\pi^2 \omega_0^2} \times \frac{D_2(\omega_n)(\omega_n^{2\nu} + 2\zeta\omega_n^\nu \cos(\nu\frac{\pi}{2}) + \zeta^2) - (\omega_n^{3\nu} + 3\zeta \cos(\nu\frac{\pi}{2})\omega_n^{2\nu} + (2\zeta^2 + \cos(\pi\nu))\omega_n^\nu + \zeta \cos(\nu\frac{\pi}{2}))^2}{D_2^4(\omega_n)} \quad (2.47)$$

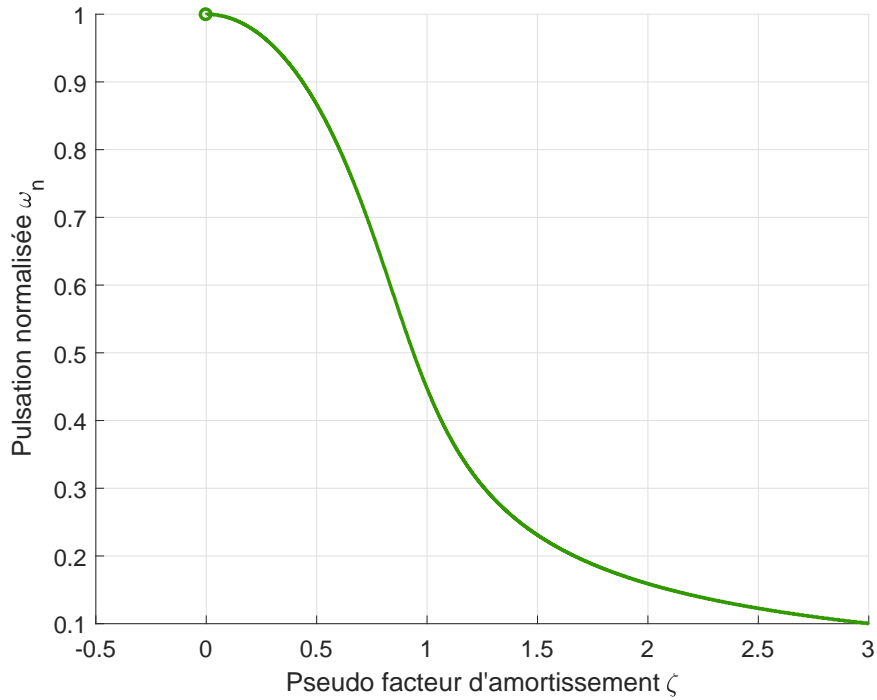


Figure 2.14 – Pulsation optimale normalisée en fonction de ζ lorsque K et ω_0 sont inconnus et $\nu = 1$

où $D_2(\omega_n)$ est défini dans (2.43).

La recherche du maximum global de (2.47) nécessite la résolution de l'équation $\frac{ddet(P_{k,\omega_0}^{-1}(\omega_n))}{d\omega_n} = 0$ dont la solution analytique n'est pas évidente. Seule la solution numérique et la figure 2.15 est calculée et tracée pour plusieurs valeurs de ν sur la figure 2.15.

2.4.2.3 Cas où K et ν sont inconnus

Dans cette section, K et ν sont supposés inconnus, avec $\nu \in]0, 2[$, et les paramètres ζ et ω_0 sont connus.

Dans ce cas, l'inverse de la matrice de covariance est égale à :

$$P_{K,\nu}^{-1}(\omega_n) = \frac{A}{2\pi} \times \begin{bmatrix} \frac{1}{D_2(\omega_n)} & \frac{-2K\omega_n^\nu \ln(\omega_n)(\omega_n^{3\nu} + 3\zeta \cos(\frac{\nu\pi}{2})\omega_n^{2\nu} + (2\zeta^2 + \cos(\nu\pi))\omega_n^\nu + \zeta \cos(\frac{\nu\pi}{2}))}{D_2^2(\omega_n)}} \\ \frac{-2K\omega_n^\nu \ln(\omega_n)(\omega_n^{3\nu} + 3\zeta \cos(\frac{\nu\pi}{2})\omega_n^{2\nu} + (2\zeta^2 + \cos(\nu\pi))\omega_n^\nu + \zeta \cos(\frac{\nu\pi}{2}))}{D_2^2(\omega_n)} & \frac{K^2\omega_n^{2\nu}(4\ln^2(\omega_n) + \pi^2)(\omega_n^{2\nu} + 2\zeta\omega_n^\nu \cos(\frac{\nu\pi}{2}) + \zeta^2)}{D_2^2(\omega_n)} \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

où $D_2(\omega_n)$ est défini dans (2.43).

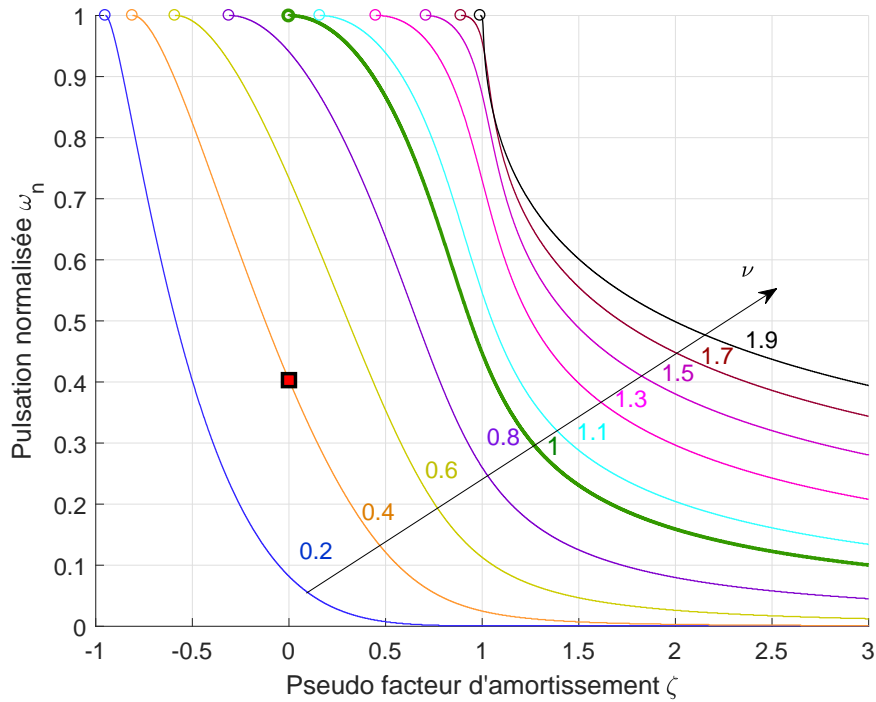


Figure 2.15 – Pulsation optimale normalisée en fonction de ζ lorsque K et ω_0 sont inconnus et ν quelconque. La courbe en trait gras et vert correspond à la solution analytique pour $\nu = 1$

Le déterminant de l'inverse de la matrice de covariance est égale à :

$$\det(P_{K,\nu}^{-1}(\omega_n)) = \frac{A^2 K^2 \omega_n^{2\nu}}{4\pi^2} \times \frac{D_2(\omega_n)(4\ln^2(\omega_n) + \pi^2)(\omega_n^{2\nu} + 2\zeta\omega_n^\nu \cos(\nu\frac{\pi}{2}) + \zeta^2) - (\ln(\omega_n)(\omega_n^{3\nu} + 2\omega_n^\nu \zeta^2 + \omega_n^\nu \cos(\nu\pi) + \zeta \cos(\nu\frac{\pi}{2})(3\omega_n^{2\nu} + 1)))^2}{D_2^4(\omega_n)}. \quad (2.49)$$

La recherche du maximum global de (2.49) nécessite la résolution de l'équation $\frac{d\det(P_{K,\nu}^{-1}(\omega_n))}{d\omega_n} = 0$ dont la solution analytique n'est pas évidente. Seule la solution numérique est calculée et tracée pour différentes valeurs de ν sur la figure 2.16.

2.4.2.4 Cas où ζ et ω_0 sont inconnus

Dans cette section, ζ et ω_0 sont supposés inconnus et les paramètres K et ν sont connus. Il est intéressant d'examiner, tout d'abord, le cas d'un système rationnel avec $\nu = 1$.

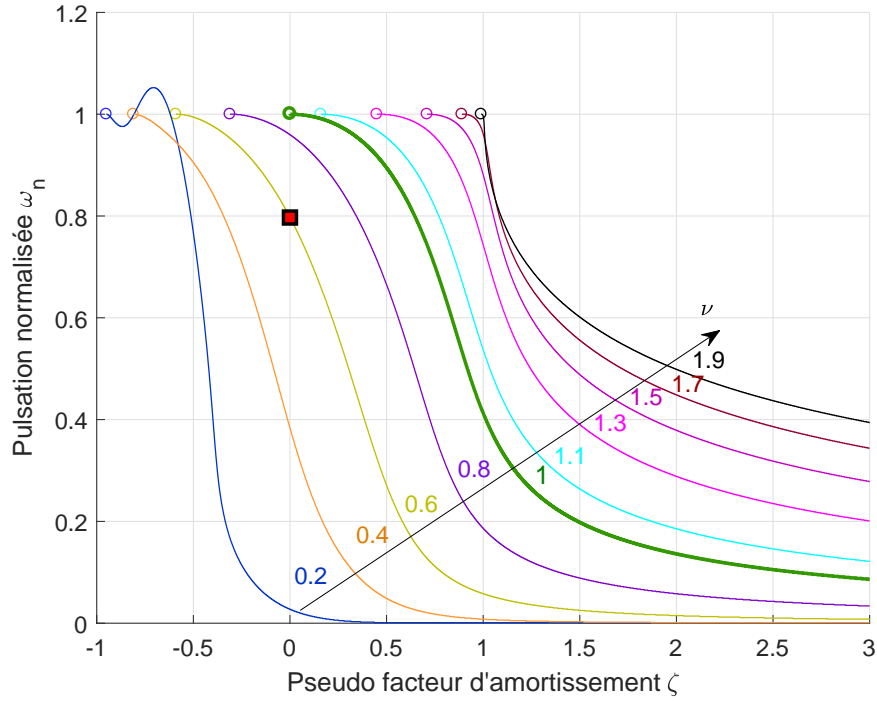


Figure 2.16 – Pulsation optimale normalisée en fonction de ζ , lorsque K et ν sont inconnus. La courbe en trait gras et vert correspond à la solution analytique pour $\nu = 1$

Cas rationnel ($\nu = 1$) : L'inverse de la variance calculé par (2.9) est égale à :

$$P_{\zeta, \omega_0}^{-1}(\omega_n) = \frac{A}{2\pi} \begin{bmatrix} \frac{4K^2\omega_n^2}{D_1^2(\omega_n)} & \frac{-4K^2\zeta\omega_n^2}{\omega_0 D_1^2(\omega_n)} \\ \frac{-4K^2\zeta\omega_n^2}{\omega_0 D_1^2(\omega_n)} & \frac{4K^2\omega_n^2(\omega_n^2 + \zeta^2)}{\omega_0^2 D_1^2(\omega_n)} \end{bmatrix}, \quad (2.50)$$

où $D_1(\omega_n)$ est défini dans (2.24).

Le déterminant de l'inverse de la matrice de covariance est égal à :

$$\det(P_{\zeta, \omega_0}^{-1}(\omega_n)) = \frac{4A^2 K^4 \omega_n^6}{\pi^2 \omega_0^2 D_1^4(\omega_n)}. \quad (2.51)$$

La recherche du maximum global de (2.51) nécessite la résolution de l'équation $\frac{d \det(P_{\zeta, \omega_0}^{-1}(\omega_n))}{d\omega_n} = 0$ dont la solution analytique n'est pas évidente. Par conséquent, seule la solution numérique est calculée et tracée pour $\nu = 1$ sur la figure 2.16.

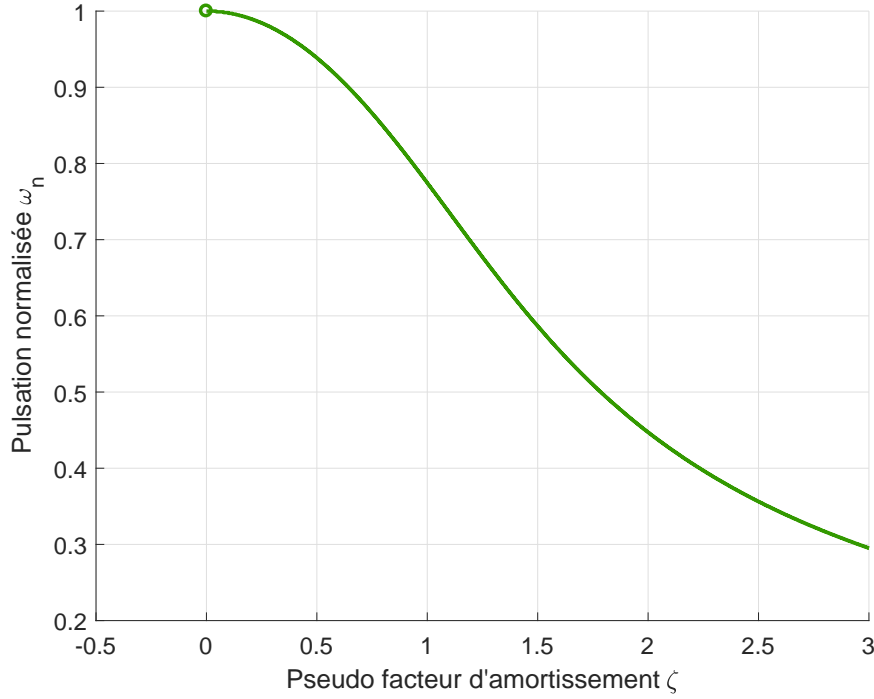


Figure 2.17 – Pulsation optimale normalisée en fonction de ζ , lorsque ζ et ω_0 sont inconnus et $\nu = 1$

Cas non entier avec $\nu \in]0, 2[$: Dans ce cas, l'inverse de la matrice de covariance est égale à :

$$P_{\zeta, \omega_0}^{-1}(\omega_n) = \frac{A}{2\pi} \begin{bmatrix} \frac{4K^2\omega_n^{2\nu}}{D_2^2(\omega_n)} & \frac{-4K^2\nu\omega_n^{2\nu}(\zeta + \omega_n^\nu \cos(\nu\frac{\pi}{2}))}{\omega_0 D_2^2(\omega_n)} \\ \frac{-4K^2\nu\omega_n^{2\nu}(\zeta + \omega_n^\nu \cos(\nu\frac{\pi}{2}))}{\omega_0 D_2^2(\omega_n)} & \frac{4K^2\nu^2\omega_n^{2\nu}(\omega_n^{2\nu} + 2\zeta\omega_n^\nu \cos(\nu\frac{\pi}{2}) + \zeta^2)}{\omega_0^2 D_2^2(\omega_n)} \end{bmatrix}, \quad (2.52)$$

où $D_2(\omega_n)$ est défini dans (2.43).

Son déterminant vaut :

$$\det(P_{\zeta, \omega_0}^{-1}(\omega_n)) = \frac{4A^2K^4\nu^2\omega_n^{6\nu}}{\pi^2\omega_0^2} \times \frac{\sin^2(\nu\frac{\pi}{2})}{D_2^4(\omega_n)}. \quad (2.53)$$

La recherche du maximum global de (2.53) nécessite la résolution de l'équation $\frac{d\det(P_{\zeta, \omega_0}^{-1}(\omega_n))}{d\omega_n} = 0$ dont la solution analytique n'est pas évidente. Par conséquent, seule la solution numérique est calculée et tracée pour différentes valeurs sur la figure 2.18.

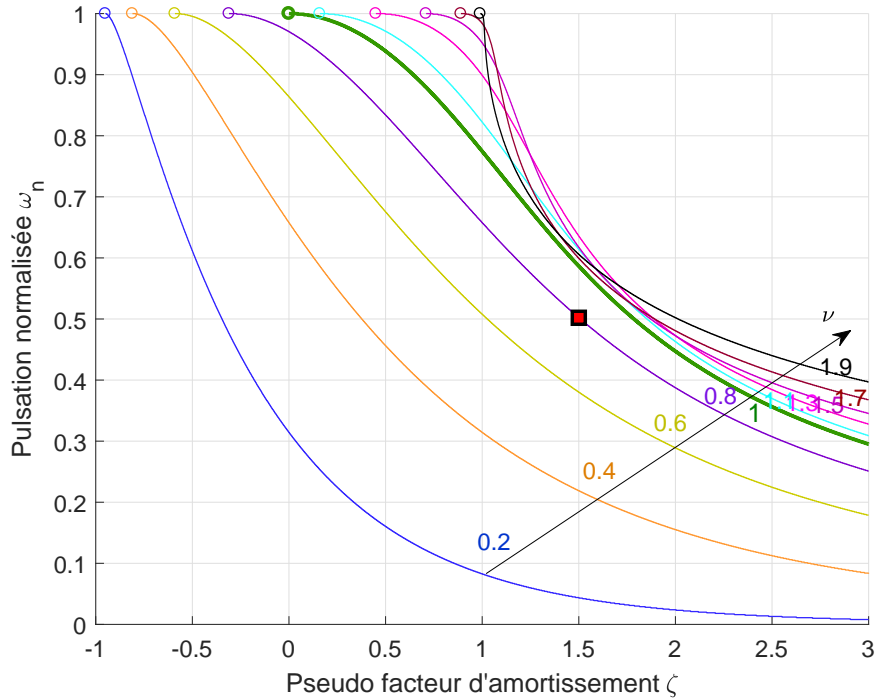


Figure 2.18 – Pulsation optimale normalisée en fonction de ζ lorsque ζ et ω_0 sont inconnus et ν est quelconque. La courbe en trait gras et vert correspond à la solution analytique pour $\nu = 1$)

2.4.2.5 Cas où ζ et ν sont inconnus

Dans cette section, ζ et ν sont supposés inconnus alors que les paramètres K et ω_0 sont connus.

L'inverse de la matrice de covariance est égale à :

$$P_{\zeta, \nu}^{-1}(\omega_n) = \frac{A}{2\pi} \begin{bmatrix} \frac{4K^2\omega_n^{2\nu}}{D_2^2(\omega_n)} & \frac{4K^2\omega_n^{2\nu}\ln(\omega_n)(\zeta + \omega_n^\nu \cos(\nu\frac{\pi}{2}))}{D_2^2(\omega_n)} \\ \frac{4K^2\omega_n^{2\nu}\ln(\omega_n)(\zeta + \omega_n^\nu \cos(\nu\frac{\pi}{2}))}{D_2^2(\omega_n)} & \frac{K^2\omega_n^{2\nu}(4\ln^2(\omega_n) + \pi^2)(\omega_n^{2\nu} + 2\zeta\omega_n^\nu \cos(\nu\frac{\pi}{2}) + \zeta^2)}{D_2^2(\omega_n)} \end{bmatrix}, \quad (2.54)$$

où $D_2(\omega_n)$ est défini dans (2.43).

Dans ce cas, le déterminant de $P_{\zeta, \nu}^{-1}(\omega_n)$ est égal à :

$$\det(P_{\zeta, \nu}^{-1}(\omega_n)) = \frac{A^2 K^4 \omega_n^{4\nu}}{\pi} \times \frac{(4\ln^2(\omega_n) + \pi^2)(\omega_n^{2\nu} + 2\zeta\omega_n^\nu \cos(\nu\frac{\pi}{2}) + \zeta^2) - (\ln(\omega_n)(\zeta + \omega_n^\nu \cos(\nu\frac{\pi}{2})))^2}{D_2^4(\omega_n)}. \quad (2.55)$$

La recherche du maximum global de (2.55) nécessite la résolution de l'équation $\frac{d\det(P_{\zeta, \nu}^{-1}(\omega_n))}{d\omega_n} = 0$ dont la solution analytique n'est pas évidente. Par conséquent, seule

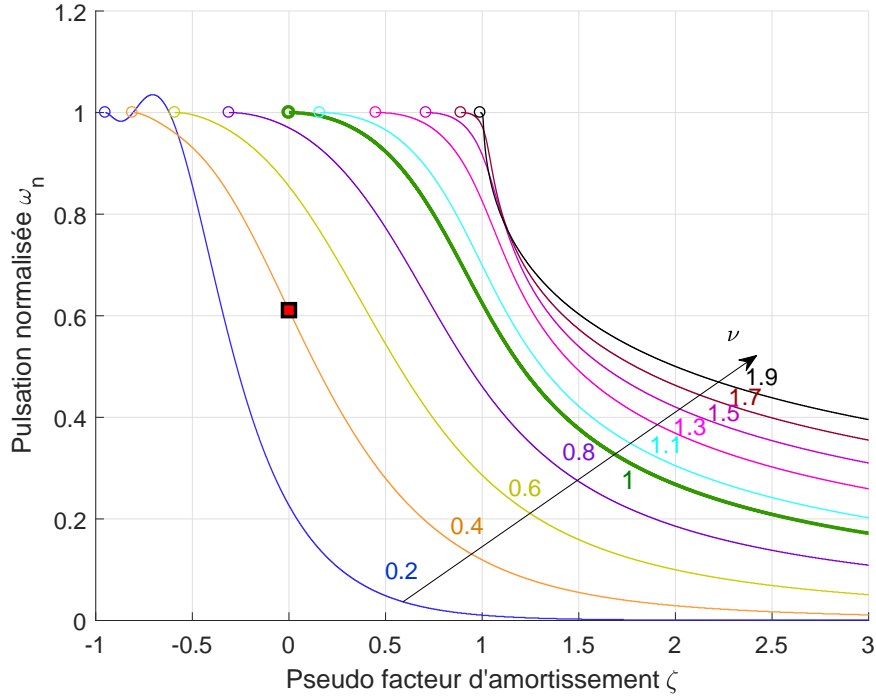


Figure 2.19 – Pulsation optimale normalisée en fonction de ζ , lorsque ζ et ν sont inconnus. La courbe en trait gras correspond à la solution analytique pour $\nu = 1$

la solution numérique est calculée et tracée pour différentes valeurs de ν sur la figure 2.19.

2.4.2.6 Cas où ω_0 et ν sont inconnus

Dans cette section, on suppose que ω_0 et ν sont inconnus et que les paramètres K et ζ sont connus.

L'inverse de la matrice de covariance est égale à :

$$P_{\omega_0, \nu}^{-1}(\omega_n) = \frac{A}{2\pi} \times \begin{bmatrix} \frac{4K^2\nu^2\omega_n^{2\nu}(\omega_n^{2\nu} + 2\zeta\omega_n^\nu \cos(\nu\frac{\pi}{2}) + \zeta^2)}{\omega_0^2 D_2^2(\omega_n)} & \frac{-4K^2\nu\omega_n^{2\nu} \ln(\omega_n)(\zeta^2 + \omega_n^{2\nu} + 2\zeta\omega_n^\nu \cos(\nu\frac{\pi}{2}))}{\omega_0 D_2^2(\omega_n)} \\ \frac{-4K^2\nu\omega_n^{2\nu} \ln(\omega_n)(\zeta^2 + \omega_n^{2\nu} + 2\zeta\omega_n^\nu \cos(\nu\frac{\pi}{2}))}{\omega_0 D_2^2(\omega_n)} & \frac{4K^2\omega_n^{2\nu}(\ln^2(\omega_n) + \frac{\pi^2}{4})(\omega_n^{2\nu} + 2\zeta\omega_n^\nu \cos(\nu\frac{\pi}{2}) + \zeta^2)}{D_2^2(\omega_n)} \end{bmatrix}, \quad (2.56)$$

où $D_2(\omega_n)$ est défini dans (2.43).

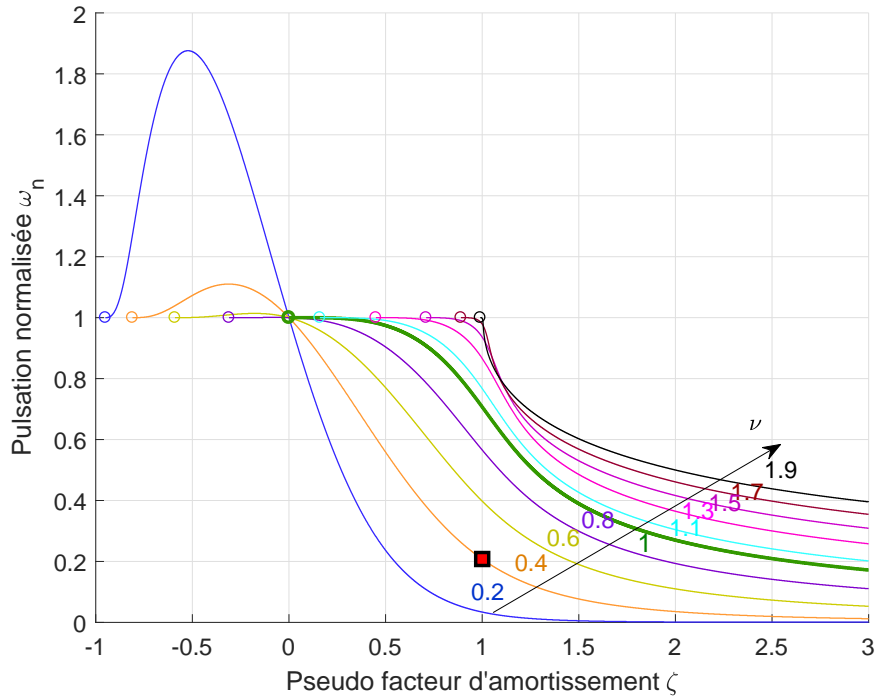


Figure 2.20 – Pulsation optimale normalisée en fonction de ζ , lorsque ω_0 et ν sont inconnus. La courbe en trait gras et vert correspond à la solution analytique pour $\nu = 1$

Son déterminant est :

$$\det(P_{\omega_0, \nu}^{-1}(\omega_n)) = \frac{A^2 K^4 \nu^2 \omega_n^{4\nu}}{\omega_0^2} \times \frac{(\omega_n^{2\nu} + 2\zeta \omega_n^\nu \cos(\nu \frac{\pi}{2}) + \zeta^2)^2}{D_2^4(\omega_n)}. \quad (2.57)$$

La recherche du maximum global de (2.57) nécessite la résolution de l'équation $\frac{d \det(P_{\omega_0, \nu}^{-1}(\omega_n))}{d \omega_n} = 0$ dont la solution analytique n'est pas évidente. Par conséquent, seule la solution numérique est calculée et tracée pour différentes valeurs de ν sur la figure 2.20.

2.4.3 Cas où trois ou quatre paramètres sont inconnus

Dans le cas où il y a trois ou quatre paramètres inconnus, une composante cosinusoidale n'est plus suffisante, le signal d'entrée doit comporter au moins deux termes en cosinus, comme dans l'équation (2.20). Par conséquent, le problème devient encore plus difficile à résoudre car deux fréquences ainsi que le facteur de pondération α dans (2.20) doivent être déterminés en maximisant le déterminant d'une matrice 3×3 ou 4×4 par rapport aux deux fréquences et au facteur de pondération. Dans le cas de 4 paramètres inconnus, l'inverse de la matrice de covariance calculée par (2.9) s'écrit :

$$P_{K, \zeta, \omega_0, \nu}^{-1}(\omega_{n1}, \omega_{n2}, \alpha) = \frac{A}{2\pi} (\alpha M_1 + (1 - \alpha) M_2) \quad (2.58)$$

où

$$M_i = \begin{bmatrix} \frac{1}{D_2(\omega_{n_i})} & \frac{-2K\omega_{n_i}^\nu (\cos(\nu \frac{\pi}{2})\omega_{n_i}^{2\nu} + 2\omega_{n_i}^\nu \zeta + \cos(\nu \frac{\pi}{2}))}{D_2^2(\omega_{n_i})} & & & \\ \frac{-2K\omega_{n_i}^\nu (\cos(\nu \frac{\pi}{2})\omega_{n_i}^{2\nu} + 2\omega_{n_i}^\nu \zeta + \cos(\nu \frac{\pi}{2}))}{D_2^2(\omega_{n_i})} & \frac{4K^2\omega_{n_i}^{2\nu}}{D_2^2(\omega_{n_i})} & & & \\ \frac{2K\nu\omega_{n_i}^\nu (\omega_{n_i}^{3\nu} + 3\zeta \cos(\nu \frac{\pi}{2})\omega_{n_i}^{2\nu} + (2\zeta^2 + \cos(\pi\nu))\omega_{n_i}^\nu + \zeta \cos(\nu \frac{\pi}{2}))}{\omega_0 D_2^2(\omega_{n_i})} & \frac{-4K^2\nu\omega_{n_i}^{2\nu} (\zeta + \omega_{n_i}^\nu \cos(\nu \frac{\pi}{2}))}{\omega_0 D_2^2(\omega_{n_i})} & & & \dots \\ \frac{-2K\omega_{n_i}^\nu \ln(\omega_{n_i}) (\omega_{n_i}^{3\nu} + 3\zeta \cos(\nu \frac{\pi}{2})\omega_{n_i}^{2\nu} + (2\zeta^2 + \cos(\pi\nu))\omega_{n_i}^\nu + \zeta \cos(\nu \frac{\pi}{2}))}{D_2^2(\omega_{n_i})} & \frac{(4K^2\omega_{n_i}^{2\nu} \ln(\omega_{n_i})) (\zeta + \omega_{n_i}^\nu \cos(\nu \frac{\pi}{2}))}{D_2^2(\omega_{n_i})} & & & \\ \frac{2K\nu\omega_{n_i}^\nu (\omega_{n_i}^{3\nu} + 3\zeta \cos(\nu \frac{\pi}{2})\omega_{n_i}^{2\nu} + (2\zeta^2 + \cos(\pi\nu))\omega_{n_i}^\nu + \zeta \cos(\nu \frac{\pi}{2}))}{\omega_0 D_2^2(\omega_{n_i})} & \frac{-2K\omega_{n_i}^\nu \ln(\omega_{n_i}) (\omega_{n_i}^{3\nu} + 3\zeta \cos(\nu \frac{\pi}{2})\omega_{n_i}^{2\nu} + (2\zeta^2 + \cos(\pi\nu))\omega_{n_i}^\nu + \zeta \cos(\nu \frac{\pi}{2}))}{D_2^2(\omega_{n_i})} & & & \\ \frac{-4K^2\nu\omega_{n_i}^{2\nu} (\zeta + \omega_{n_i}^\nu \cos(\nu \frac{\pi}{2}))}{\omega_0 D_2^2(\omega_{n_i})} & \frac{(4K^2\omega_{n_i}^{2\nu} \ln(\omega_{n_i})) (\zeta + \omega_{n_i}^\nu \cos(\nu \frac{\pi}{2}))}{D_2^2(\omega_{n_i})} & & & \\ \frac{4K^2\nu^2\omega_{n_i}^{2\nu} (\omega_{n_i}^{2\nu} + 2\zeta\omega_{n_i}^\nu \cos(\nu \frac{\pi}{2}) + \zeta^2)}{\omega_0^2 D_2^2(\omega_{n_i})} & \frac{-4K^2\nu\omega_{n_i}^{2\nu} \ln(\omega_{n_i}) (\omega_{n_i}^{2\nu} + 2\zeta\omega_{n_i}^\nu \cos(\nu \frac{\pi}{2}) + \zeta^2)}{\omega_0 D_2^2(\omega_{n_i})} & & & \\ \frac{-4K^2\nu\omega_{n_i}^{2\nu} \ln(\omega_{n_i}) (\omega_{n_i}^{2\nu} + 2\zeta\omega_{n_i}^\nu \cos(\nu \frac{\pi}{2}) + \zeta^2)}{\omega_0 D_2^2(\omega_{n_i})} & \frac{K^2\omega_{n_i}^{2\nu} (4 \ln(\omega_{n_i})^2 + \pi^2) (\omega_{n_i}^{2\nu} + \zeta^2 + 2\zeta\omega_{n_i}^\nu \cos(\nu \frac{\pi}{2}))}{D_2^2(\omega_{n_i})} & & & \end{bmatrix}. \tag{2.59}$$

Là encore, la résolution de $\frac{ddet(P_{K,\zeta,\omega_0,\nu}^{-1}(\omega_1,\omega_2,\alpha))}{d[\omega_1,\omega_2,\alpha]} = [0,0,0]$ est difficile. Une solution numérique peut être calculée.

Dans le cas de n'importe quelle combinaison de 3 paramètres est inconnu, l'inverse de la matrice de covariance calculée par (2.9) peut être déduite de (2.58) et (2.59), en éliminant la ligne et la colonne correspondant au paramètre supposé connu dans (2.59) :

- Première ligne et première colonne pour K .
- Deuxième ligne et deuxième colonne pour ζ .
- Troisième ligne et troisième colonne pour ω_0 .
- Quatrième ligne et quatrième colonne pour ν .

Tableau 2.1 – Simulation de Monte Carlo, pour 50 réalisations, pour l'estimation des paramètres K et ζ (\bar{K} et $\bar{\zeta}$ sont les moyennes et $\hat{\sigma}(K)$ et $\hat{\sigma}(\zeta)$ sont les écarts-type des estimations)

	<i>srivcf</i>			
	\bar{K}	$\hat{\sigma}_K$	$\bar{\zeta}$	$\hat{\sigma}_\zeta$
$\omega_n = 0.36$	10.031	0.229	0.431	0.027
$\omega_n = 0.4$	10.008	0.200	0.427	0.023
$\omega_n = 0.5$	9.970	0.347	0.424	0.035

2.5 Application à l'identification d'un système non entier de deuxième espèce

Soit la fonction de transfert de deuxième espèce (2.18) avec les conditions de stabilité (2.22) satisfaites, ayant pour vrais valeurs des paramètres $K = 10$, $\omega_0 = 100$, $\zeta = 0.427$ et $\nu = 0.8$.

$${}_2F(s) = \frac{10}{1 + 2\zeta\left(\frac{s}{100}\right)^{0.8} + \left(\frac{s}{100}\right)^{1.6}} \quad (2.60)$$

La sortie du système est corrompue par un bruit blanc additif avec un Rapport-Signal-Bruit $RSB = 20dB$. Dans le cas où il y a deux paramètres inconnus (K , ζ), le problème consiste à trouver la meilleure pulsation du signal d'entrée (2.19) telle que les paramètres K , ζ soient estimés avec la meilleur précision. D'après les résultats tracés sur la figure 2.13 la pulsation optimale normalisée est égale à $\omega_n = 0.4$, pour les valeurs choisies de ζ et ν .

Afin de valider ce résultat, les paramètres K et ζ du système sont estimés en utilisant le modèle non entier à erreur de sortie [Victor *et al.*, 2013b] à partir de trois excitations cosinusoïdales (2.19) ayant des pulsations normalisées $\omega_1 = 0.36$, $\omega_2 = 0.4$ et $\omega_3 = 0.5$. Les résultats sont représentés dans le tableau 2.1. L'écart-type est plus petit pour $\omega_n = 0.4$, comparé aux deux autres pulsations.

De plus le déterminant de $P_{K,\zeta}^{-1}(\omega_n)$ a été calculé à partir de (2.42) et reporté dans le tableau 2.2 qui confirme davantage que le maximum de déterminant existe pour $\omega_n = 0.4$.

Les figure 2.21, 2.22 et 2.23 montrent les surfaces estimées des régions de confiance ainsi que leurs valeurs théoriques en fonction de ω_n . La dispersion des estimations est plus petite pour $\omega = 0.4$.

Tableau 2.2 – Le déterminant de $P_{K,\zeta}^{-1}(\omega_n)$ pour différentes valeurs de ω_n

	$\omega_n = 0.36$	$\omega_n = 0.4$	$\omega_n = 0.5$
$\det(P_{K,\zeta}^{-1}(\omega))$	0.0678	0.0691	0.0615

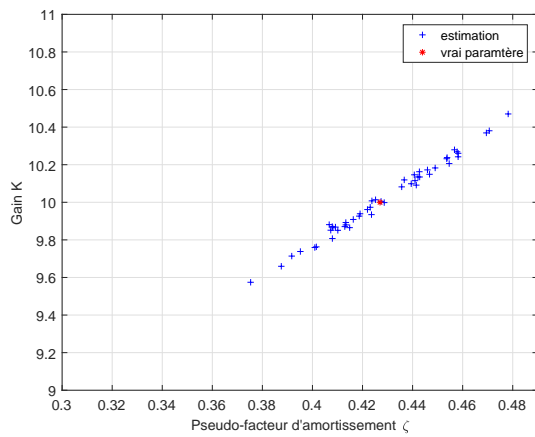


Figure 2.21 – Estimation de K et ζ du modèle (2.60) pour $\omega_n = 0.36$ et 50 réalisations de Monte Carlo

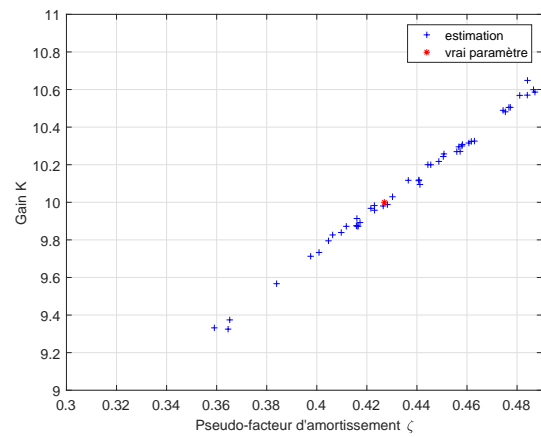


Figure 2.22 – Estimation de K et ζ du modèle (2.60) pour $\omega_n = 0.5$ et 50 réalisations de Monte Carlo

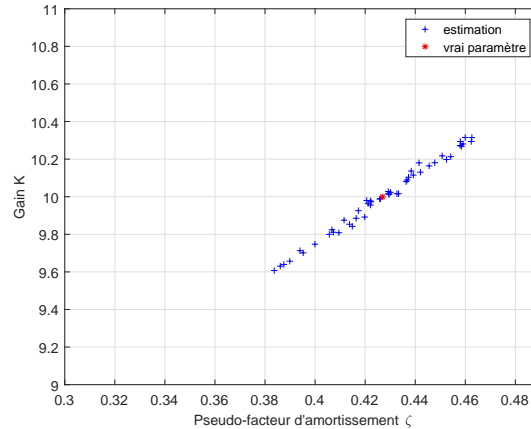


Figure 2.23 – Estimation de K et ζ du modèle (2.60) pour $\omega_n = 0.4$ et 50 réalisations de Monte Carlo

2.6 Conclusion

Ce chapitre présente la planification d'expériences des fonctions de transfert élémentaires de deuxième espèce.

La principale contributions dans ce chapitre est la détermination des entrées sinusoïdales optimales pour une fonction élémentaire de 2^{ème} espèce lorsque un ou deux paramètres sont inconnus. Les résultats d'[Abrashov *et al.*, 2016], qui traitaient de fonctions élémentaires de 1^{ère} espèce, ont ainsi pu être étendus aux fonctions de 2^{ème} espèce.

La matrice de covariance est déterminée lorsque 3 ou 4 paramètres sont inconnus. Le calcul, même numérique des pulsations optimales devient alors complexe, compte-tenu de la taille des matrices manipulées. Les résultats de la planification d'expériences ont été confirmés en identification de système par une simulation de Monte Carlo de 50 réalisations.

Ces contributions principales, ont donné lieu à une communication dans la conférences internationale *18th IFAC Symposium on System Identification (SYSID 2018)* [Malti *et al.*, 2018] et à la soumission d'un article dans la revues *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation (CNSNS 2021)* [Malti *et al.*, 2022] (provisoirement accepté).

Chapitre 3

Identification de systèmes non entiers MISO

Sommaire

3.1	Introduction	66
3.2	Formulation du problème	67
3.3	Identification de systèmes SISO par modèles non entiers	69
3.3.1	Méthode à erreur de sortie	69
3.3.2	Méthode de la variable instrumentale optimale <i>srivcf</i>	71
3.4	Contribution à l'identification de systèmes MISO par modèles non entiers	74
3.4.1	Méthode à erreur de sortie <i>MISO-oe</i>	74
3.4.2	Méthode de la variable instrumentale optimale	80
3.5	Exemples de simulation	89
3.5.1	Estimation des coefficients	89
3.5.2	Estimation des coefficients et des ordres de dérivation d'un système S-commensurable local	92
3.5.3	Estimation des coefficients et des ordres de dérivation d'un système non S-commensurable	95
3.6	Conclusion	100

3.1 Introduction

L'identification des systèmes vise à déterminer des modèles mathématiques décrivent le comportement dynamiques des systèmes réels. Ces systèmes sont souvent à temps continu (TC) et sont décrits par des équations différentielles. Alors que, la plupart des algorithmes d'identification sont à temps discret (TD).

La variable instrumentale a été explorée pendant plusieurs décennies [Young, 1970]. Deux méthodes ont été développées : la première connu sous le nom riv (refined instrumental variable) traite le cas où le système est entaché d'un bruit coloré. La deuxième méthode, connu sous le nom sriv (simplified refined instrumental variable), traite le cas où le système est entaché d'un bruit blanc. Ces deux méthodes ont été étendues à temps continu dans [Young et Jakeman, 1980, Young, 2002, Young, 1981]. Elles sont connues respectivement sous les noms rirc : Refined Instrumental Variable for continuous-time models et srirc : simplified refined instrumental variable for continuous-time models. Lorsque le système réel est dans la classe des modèles considérés, la méthode rirc fournit des estimations consistantes avec une variance minimale. Certains développements ont visé à étendre la méthode srirc pour traiter l'identification de systèmes à entrées multiples dans [Garnier *et al.*, 2007], l'identification de modèles hybrides de Box-Jenkins dans [Garnier *et al.*, 2008] et l'identification des modèles non entiers dans [Victor *et al.*, 2013a]. Une analyse de cohérence de la méthode srirc pour les systèmes à TC a été discutée récemment dans [Pan *et al.*, 2020].

La méthode à erreur de sortie est basée sur la minimisation d'un critère défini par la norme quadratique de l'erreur de sortie. Un algorithme basé sur le gradient est utilisé pour minimiser le critère. De nombreux problèmes d'identification de systèmes non entiers ont déjà été résolus en utilisant la méthode à erreur de sortie [Lin *et al.*, 2000, Pointot *et al.*, 2002, Pointot et Trigeassou, 2004, Rapaić et Pisano, 2014, Kapetina *et al.*, 2019]. Cependant, l'ensemble de ces articles concerne l'identification de systèmes non entiers mono-entrée mono-sortie (SISO : Single-Input-Single-Output) et aucun d'eux ne traite le cas non entier à entrées multiples (MISO : Multiple-Input-Single-Output). L'identification des systèmes non entiers multivariables, a été peu étudiée dans la littérature. Les principales méthodes se basent sur l'extension de la méthode de sous-espaces au cas non entier [Thomassin et Malti, 2009, R. Mansouri et Djennoune, 2010, Malti et Thomassin, 2013, Ivanova, 2017]. Ce chapitre porte sur l'identification des systèmes linéaires MISO à TC en utilisant un système de fonctions de transfert.

L'estimation de tous les paramètres d'un système non entier nécessite l'estimation à la fois des coefficients et des ordres de dérivation. L'estimation des ordres de dérivation est délicate car l'ordre du modèle change et le problème d'optimisation est non linéaire par rapport aux ordres. De plus, cette estimation est encore plus délicate lorsque le système

à entrées multiples est non entier car les ordres de dérivation peuvent être différents pour chaque sous-système. Dans ce cas, trois variantes sont proposées, pour l'estimation des ordres de dérivation : tout d'abord, tous les ordres de dérivation sont définis comme des multiples entiers d'un ordre S-commensurable global qui est estimé ; ensuite, les ordres S-commensurables locaux sont estimés, un pour chaque sous-modèle ; et enfin, la contrainte de S-commensurabilité est relâchée et tous les ordres de dérivation sont optimisés indépendamment.

Ce chapitre comporte principalement quatre parties. Dans la première partie le problème d'identification de systèmes MISO non entiers est posé. La deuxième partie rappelle les résultats d'identification de systèmes SISO par modèles non entiers. La troisième partie présente une contribution sur l'identification de systèmes MISO. Dans cette partie l'algorithme *oe* est étendu aux modèles non entiers multi-entrées mono-sortie (*MISO-oe*) pour l'estimation des coefficients linéaires et des ordres de dérivation simultanément. De plus, la méthode *srvcf* est étendue aux modèles non entiers multi-entrées mono-sortie (*MISO-srvcf*) pour l'estimation des coefficients linéaires, en supposant que tous les ordres de dérivation sont connus. Cette méthode est combinée avec une approche basée sur la méthode du gradient pour l'estimation des coefficients ainsi que des ordres de dérivation simultanément. Enfin une conclusion termine le chapitre.

3.2 Formulation du problème

Soit un système non entier MISO (voir figure 3.1) décrit par le modèle :

$$\mathcal{S} : \begin{cases} y_k(t) = G_k(p)u_k(t) \\ y(t) = \sum_{k=1}^{\mathcal{K}} y_k(t) \\ y^*(t_h) = y(t_h) + e(t_h) \end{cases} \quad (3.1)$$

où \mathcal{K} est le nombre d'entrées et $u(t) = [u_1(t), \dots, u_{\mathcal{K}}(t)]$. Les signaux d'entrée $u_1(t), u_2(t), \dots, u_{\mathcal{K}}(t)$ sont supposés non corrélés. La mesure de sortie $y(t)$ est entachée quant à elle d'un bruit blanc $e(t_h)$. Les données d'entrée-sortie $(u(t), y^*(t_h))$ sont collectées à des échantillons réguliers. $G_k(p)$ est une fonction de transfert non entière, définie par l'équation qui relie le signal d'entrée $u_k(t)$ à la sortie sans bruit $y_k(t)$:

$$G_k(p, \theta) = \frac{B_k(p, \theta)}{A_k(p, \theta)} = \frac{\sum_{j=0}^{M_k} b_{j,k} p^{\beta_{j,k}}}{1 + \sum_{i=1}^{N_k} a_{i,k} p^{\alpha_{i,k}}}. \quad (3.2)$$

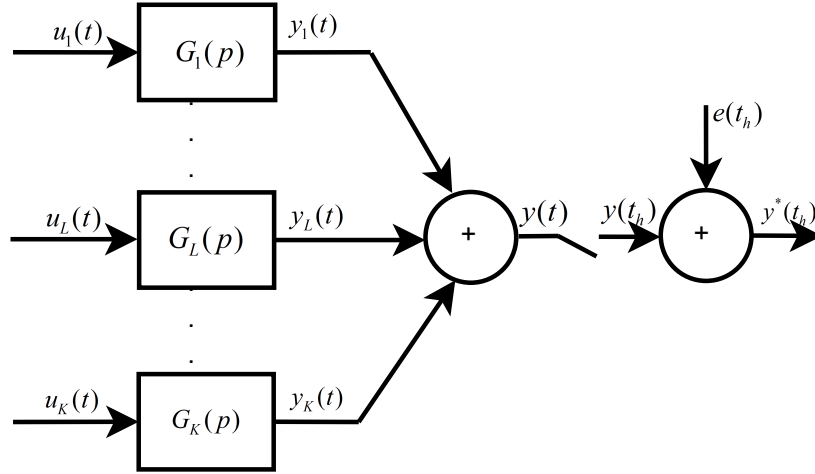


Figure 3.1 – Modèle MISO

L'objectif est d'estimer les paramètres du modèle décrit par l'équation (3.2) en utilisant H échantillons de données d'entrées/sorties $\{u_1(t_h), \dots, u_k(t_h), \dots, u_{\mathcal{K}}(t_h), y^*(t_h)\}_{h=1}^H$.

Le vecteur des paramètres est défini comme suit :

$$\theta = \begin{bmatrix} \rho \\ \mu \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

où ρ rassemble tous les coefficients de la fonction de transfert MISO,

$$\rho = [\rho_1^T, \dots, \rho_{\mathcal{K}}^T]^T \quad (3.4)$$

avec $\rho_k = [b_{0,k}, b_{1,k}, \dots, b_{M_k,k}, a_{1,k}, \dots, a_{N_k,k}]^T$ pour $k = 1, \dots, \mathcal{K}$; donc, ρ a un nombre total de coefficients égale à $\sum_{k=1}^{\mathcal{K}} (N_k + M_k + 1)$. Le vecteur μ rassemble tous les ordres de dérivation de la fonction de transfert MISO. Ces ordres peuvent être définis selon 3 cas.

Cas 1 : Si un ordre S-commensurable global est recherché, alors le vecteur d'ordre de dérivation μ est réduit à un seul paramètre

$$\mu = \nu. \quad (3.5)$$

Cas 2 : Si des ordres S-commensurables locaux sont recherchés, alors le vecteur des ordres de dérivation μ est étendu à \mathcal{K} paramètres

$$\mu = [\nu_1, \dots, \nu_{\mathcal{K}}]^T. \quad (3.6)$$

où ν_k est l'ordre commensurable de chaque sous-système G_k .

Cas 3 : Si tous les ordres sont recherchés, alors le vecteur des ordres de dérivation contient

$$\mu = \left[\mu_1^T, \dots, \mu_{\mathcal{K}}^T \right]^T, \quad (3.7)$$

avec

$$\mu_k = \left[\beta_{0,k}, \beta_{1,k}, \dots, \beta_{M_k,k}, \alpha_{1,k}, \dots, \alpha_{N_k,k} \right]^T.$$

pour $k = 1, \dots, \mathcal{K}$; par conséquent, μ a un nombre total d'ordres de dérivation de $\sum_{k=1}^{\mathcal{K}} (N_k + M_k + 1)$.

3.3 Identification de systèmes SISO par modèles non entiers

Les méthodes d'identification par modèle non entier développées jusqu'à présent sont basées soit sur la minimisation de l'erreur de sortie soit sur la minimisation de l'erreur d'équation.

L'approche de la variable instrumentale raffinée simplifiée (srivc) à été étendu aux modèles non entiers dans [Malti *et al.*, 2008b, Victor *et al.*, 2013a].

3.3.1 Méthode à erreur de sortie

Dans la littérature il existe trois approches d'identification par modèle non entier à erreur de sortie. Le principe de ces trois approches est illustré sur la Fig 3.2. La différence entre ces trois approches se résume dans la présentation de la fonction de transfert. Dans la première approche, [Le Lay, 1998] a utilisé la forme développée d'une fonction de transfert non entière. Dans la seconde approche [Cois *et al.*, 2000] a utilisé une décomposition modale et dans la troisième approche [Aoun *et al.*, 2007b] a utilisé une décomposition en fonctions orthogonales non entières.

L'erreur de sortie s'écrit sous la forme suivante :

$$\varepsilon(t_h, \theta) = y^*(t_h) - \hat{y}(t_h, \theta) \quad (3.8)$$

avec $y^*(t_h) = y(t_h) + e(t_h)$ et $u(t_h)$ sont les données d'entrée/sortie discrétisées. $e(t_h)$ est un bruit blanc additif gaussien. $\hat{y}(t_h, \theta)$ est la sortie estimée :

$$\hat{y}(t_h, \theta) = \sum_{k=1}^{\mathcal{K}-1} \hat{y}_k(t_h, \theta_k) \quad (3.9)$$

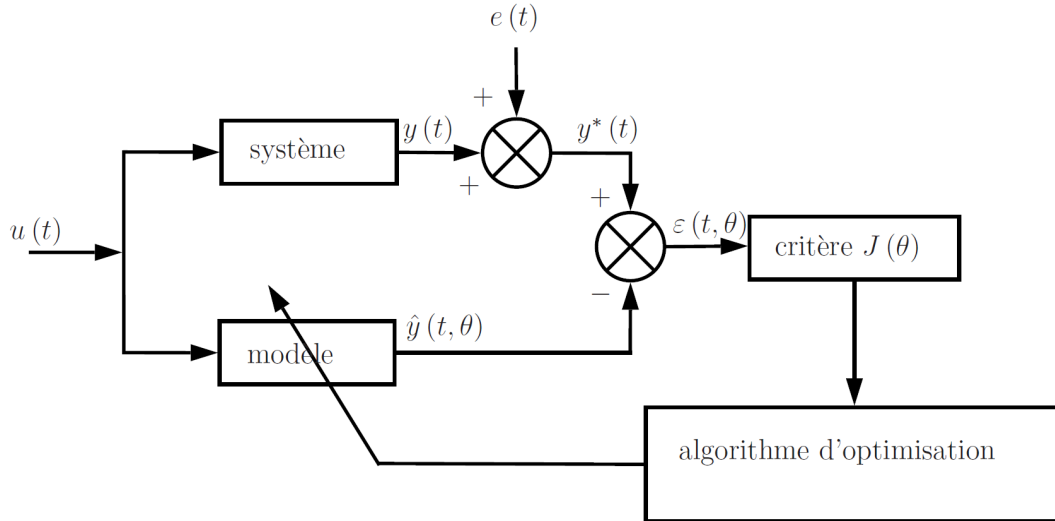


Figure 3.2 – Modèle à erreur de sortie

avec

$$\hat{y}_k(t_h, \theta_k) = G_k(p, \theta_k) u_k(t_h) \quad (3.10)$$

où

$$G_k(p, \theta_k) = \frac{\sum_{j=0}^{M_k} b_{j,k} p^{\beta_{j,k}}}{1 + \sum_{i=1}^{N_k} a_{i,k} p^{\alpha_{i,k}}}, \quad k = 1, \dots, \mathcal{K} \quad (3.11)$$

La norme L_2 de l'erreur de sortie à minimiser s'écrit :

$$J(\theta) = \frac{1}{H} \sum_{h=0}^{H-1} \varepsilon^2(t_h, \theta). \quad (3.12)$$

Dans [Malti *et al.*, 2008a], les auteurs ont proposé une méthode d'estimation paramétrique indépendante de la méthode de simulation de l'opérateur non entier, l'estimation du modèle (3.19), avec $\mathcal{K} = 1$, se réduit à l'estimation des paramètres de la fonction de transfert non entière :

$$\theta_1 = \rho_1.$$

où

$$\rho_1 = [b_{0,1}, b_{1,1}, \dots, b_{M_1,1}, a_{1,1}, \dots, a_{N_1,1}]^T$$

La sortie $\hat{y}(t_h, \hat{\theta})$ est non linéaire par rapport à $\hat{\theta}$. Un algorithme fondé sur le gradient, tel que l'algorithme de Levenberg-Marquardt [Marquardt, 1963], est utilisé pour estimer itérativement le vecteur $\hat{\theta}_1$ selon :

$$\hat{\theta}_1^{i+1} = \hat{\theta}_1^i - \left\{ [\mathcal{H} + \xi I]^{-1} \frac{\partial J}{\partial \theta_1} \right\}_{\theta_1 = \hat{\theta}_1^i} \quad (3.13)$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial J}{\partial \theta_1} = -2 \sum_{h=0}^{H-1} \varepsilon(t_h) S(t_h, \theta_1) \text{ représente le gradient} \\ \mathcal{H} \approx 2 \sum_{h=0}^{H-1} S(t_h, \theta_1) S^T(t_h, \theta_1) \text{ est le hessien approché} \\ S(t_h, \theta_1) = \frac{\partial y(t_h, \theta_1)}{\partial \theta_1} \text{ est la fonction de sensibilité de la sortie} \\ \text{et } \xi \text{ est le paramètre de Marquardt.} \end{array} \right. \quad (3.14)$$

L'algorithme de Levenberg-Marquardt garantit la convergence vers un minimum local. Les fonctions de sensibilité des sorties sont calculées par :

$$\frac{\partial \hat{y}}{\partial b_{j,1}} = \frac{p^{\beta_{j,1}}}{1 + \sum_{i=1}^{N_1} a_{i,1} p^{\alpha_{i,1}}} u(t), \quad j = 0, \dots, M_1 \quad (3.15)$$

et

$$\frac{\partial \hat{y}}{\partial a_{i,1}} = - \frac{\sum_{j=0}^{M_1} b_{j,1} p^{\beta_{j,1} + \alpha_{i,1}}}{\left(1 + \sum_{i=1}^{N_1} a_{i,1} p^{\alpha_{i,1}} \right)^2} u(t), \quad i = 1, \dots, N_1 \quad (3.16)$$

L'estimation de la matrice de covariance des paramètres, tout en supposant que le bruit additionnel est gaussien et blanc de moyenne nulle, est donnée par [Ljung, 1999] :

$$\text{cov}(\hat{\theta}_1) = \hat{\sigma}^2 \left(\sum_{h=0}^{H-1} S(t_h, \hat{\theta}_1) S^T(t_h, \hat{\theta}_1) \right)^{-1}, \quad (3.17)$$

où $\hat{\sigma}^2$ représente la variance du bruit, qui n'étant pas connue, peut être estimée grâce à l'erreur résiduelle :

$$\hat{\sigma}^2 = \sum_{k=0}^{H-1} \left(y(t_k) - \hat{y}(t_k, \hat{\theta}) \right). \quad (3.18)$$

Les éléments de la diagonale de la matrice $\text{cov}(\hat{\theta}_1)$ représentent les variances des paramètres estimés alors que les autres éléments en dehors de la diagonale représentent les coefficients de corrélation.

3.3.2 Méthode de la variable instrumentale optimale *srivcf*

L'estimateur de la variable instrumentale relève de la méthode des moindres carrés. Il repose sur des techniques de régression linéaire, qui distinguent le modèle à erreur d'équation. Le principe du modèle à erreur d'équation est illustré sur la Fig 3.3.

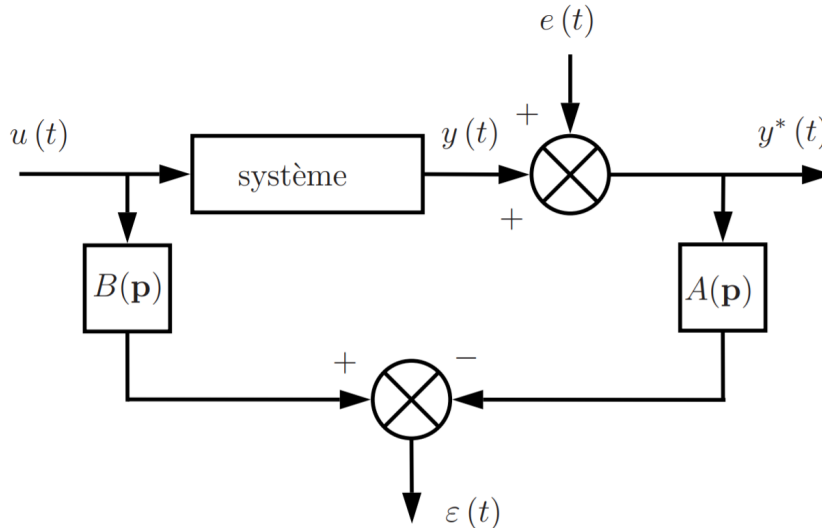


Figure 3.3 – Modèle à erreur d'équation

L'approche *srivcf* est développée dans [Victor *et al.*, 2013a] pour l'identification de système SISO par modèles non entiers. Elle est basée sur l'utilisation d'un modèle auxiliaire. La fonction d'erreur ε est donnée par la formule de l'erreur de sortie :

$$\varepsilon(t, \theta) = y^*(t) - \frac{B(p, \theta)}{A(p, \theta)} u(t), \quad (3.19)$$

qui peut être réécrite comme :

$$\varepsilon(t, \theta) = A(p, \theta) \left(\frac{1}{A(p, \theta)} y^*(t) \right) - B(p, \theta) \left(\frac{1}{A(p, \theta)} u(t) \right). \quad (3.20)$$

Ainsi, un filtre passe-bas est appliqué à la fois à l'entrée et à la sortie.

En supposant que $y_f^*(t) = \frac{1}{A(p, \theta)} y^*(t)$ et $u_f(t) = \frac{1}{A(p, \theta)} u(t)$ dans ce cas l'équation (3.20) prend la forme suivante :

$$\varepsilon(t, \theta) = A(p, \theta) y_f^*(t) - B(p, \theta) u_f(t). \quad (3.21)$$

où

$$F^{opt}(p) = \frac{1}{A(p, \theta)}. \quad (3.22)$$

Cependant, en pratique, θ est inconnu, tout comme $A(p, \theta)$. Par conséquent, ce problème est résolu par une optimisation itérative, qui vise à ajuster les estimations jusqu'à convergence. Par conséquent, le filtre suivant est initialisé et calculé de manière itérative :

$$F^{iter}(p) = \frac{1}{\hat{A}(p, \hat{\theta}^{iter})} = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^N \hat{a}_i p^{\alpha_i}}, \quad (3.23)$$

où $iter$ est le numéro de l'itération, $iter = 1, 2, \dots$ jusqu'à convergence, et \hat{a}_i est l'estimation à chaque itération.

L'expression (3.21) peut être réécrite comme suit :

$$\varepsilon(t, \theta) = y_f^*(t) - \varphi_f(t)\theta, \quad (3.24)$$

où $\varphi_f(t)$ est le vecteur de régression défini comme :

$$\varphi_f(t) = \left[p^{\beta_0} u_f(t), \dots, p^{\beta_M} u_f(t), -p^{\alpha_1} y_f^*(t), \dots, -p^{\alpha_N} y_f^*(t) \right]^T. \quad (3.25)$$

La minimisation des moindres carrés conduit à des estimations biaisées lorsque la sortie est corrompue par un bruit additif. Pour éviter ce problème, un vecteur instrumental $\varphi_f^{iv}(t, \theta)$ est construit à chaque itération :

$$\varphi_f^{iv}(t, \hat{\theta}^{iter}) = \left[p^{\beta_0} u_f(t), \dots, p^{\beta_M} u_f(t), -p^{\alpha_1} y_{u,f}^{iter}(t), \dots, -p^{\alpha_N} y_{u,f}^{iter}(t) \right]^T. \quad (3.26)$$

L'estimation de la sortie sans bruit $y_{u,f}^{iter}(t)$ est obtenue à partir du modèle auxiliaire calculé à chaque itération :

$$y_{u,f}^{iter}(t, \hat{\theta}^{iter}) = \frac{y_u^{iter}(t)}{\hat{A}(p, \hat{\theta}^{iter})} = \frac{\hat{B}(p, \hat{\theta}^{iter})}{\hat{A}(p, \hat{\theta}^{iter})^2} u(t). \quad (3.27)$$

Les estimations optimales sont calculées à chaque itération selon :

$$\hat{\theta}^{iter+1} = [\Phi_f^{iv} \Phi_f^T]^{-1} \Phi_f^{iv} \mathbf{Y}_f^* \quad (3.28)$$

où

$$\Phi_f^{iv} = [\varphi_f^{iv}(t_1, \theta^{iter}), \dots, \varphi_f^{iv}(t_H, \theta^{iter})] \quad (3.29)$$

$$\Phi_f = [\varphi_f(t_1), \dots, \varphi_f(t_H)] \quad (3.30)$$

$$\mathbf{Y}_f^* = [y_f^*(t_1), \dots, y_f^*(t_H)]. \quad (3.31)$$

L'algorithme *srivcf* est itéré jusqu'à convergence, ou encore jusqu'à ce que l'évolution paramétrique soit inférieure à un seuil ϵ :

$$\sum_{j=1}^{\dim(\hat{\theta})} \left| \frac{\hat{\theta}_j^{iter+1} - \hat{\theta}_j^{iter}}{\hat{\theta}_j^{iter+1}} \right| < \epsilon \quad (3.32)$$

Une estimation de la matrice de covariance du vecteur θ peut être calculée :

$$\hat{P}_\theta = \hat{\sigma}^2 [\Phi_f^{iv} (\Phi_f^{iv})^T]^{-1}, \quad (3.33)$$

où $\hat{\sigma}^2$ est l'estimation empirique de la variance du bruit et Φ_f^{iv} est le vecteur instrumental calculé à la dernière itération.

Les propriétés de convergence des méthodes variable instrumentale raffinées peuvent être trouvées dans [Liu *et al.*, 2011].

Remarque 3.1 *Il est montré dans [Victor *et al.*, 2013a], lorsque le signal d'entrée quasi-stationnaire est excitant de manière persistante et que le bruit sur le signal de sortie est blanc et de moyenne nulle, que l'algorithme srivcf est asymptotiquement sans biais grâce au mécanisme IV. De plus, lorsque le bruit est normalement distribué, les estimations de srivcf peuvent être interprétées en termes statistiques optimaux, donnant des estimations consistantes avec une variance minimale. La matrice de covariance est comparée à la matrice de covariance minimale donnée par la borne de Cramer-Rao (CRB) [Kay *et Kay*, 1993, Stoica *et al.*, 2005, Young *et al.*, 2008].*

3.4 Contribution à l'identification de systèmes MISO par modèles non entiers

3.4.1 Méthode à erreur de sortie *MISO-oe*

3.4.1.1 Estimation des coefficients

Dans cette section, la structure réelle du modèle ainsi que tous les ordres de dérivation non entiers sont supposés connus ou sont fixés a priori. Ainsi, seuls les coefficients linéaires des modèles MISO sont à estimer. Par conséquent, le vecteur de paramètres inconnus $\hat{\theta}$ se réduit à $\hat{\rho}$:

$$\hat{\theta} = \hat{\rho} = [\hat{\rho}_1, \dots, \hat{\rho}_k, \dots, \hat{\rho}_\kappa]^T. \quad (3.34)$$

Pour un modèle MISO, un algorithme basé sur une méthode à erreur de sortie est proposé pour estimer les coefficients. Le vecteur de paramètres ρ est estimé avec l'algorithme de Levenberg-Marquardt [Marquardt, 1963].

L'erreur de sortie $\varepsilon(t, \hat{\rho})$ est donnée par :

$$\varepsilon(t, \hat{\rho}) = y^*(t) - \hat{y}(t, \hat{\rho}) \quad (3.35)$$

où $\hat{y}(t, \hat{\rho})$ est la sortie estimée donnée par :

$$\hat{y}(t, \hat{\rho}) = \sum_{k=1}^{\mathcal{K}} \hat{y}_k(t, \hat{\rho}) \quad (3.36)$$

où

$$\hat{y}_k(t_k, \hat{\rho}_k) = G_k(p, \hat{\rho}_k)u_k(t) \quad (3.37)$$

et

$$G_k(p, \hat{\rho}_k) = \frac{\sum_{j=0}^{M_k} \hat{b}_{j,k} p^{\beta_{j,k}}}{1 + \sum_{i=1}^{N_k} \hat{a}_{i,k} p^{\alpha_{i,k}}}, \quad k = 1, \dots, \mathcal{K}. \quad (3.38)$$

Le problème d'estimation est formulé comme un problème de minimisation de la norme ℓ_2 de l'erreur :

$$J(\hat{\theta}) = \frac{1}{2} \|\varepsilon(t, \hat{\rho})\|_2. \quad (3.39)$$

L'algorithme étant itératif, le vecteur des coefficients $\hat{\rho}$ exprimé dans (3.34) est désigné par ρ^{iter} . La version *MISO-oe*, pour l'estimation des coefficients d'un système MISO non entier, est décrite dans l'algorithme 1 :

Algorithm 1 MISO-oe pour l'estimation des coefficients

Etape 1 : *Initialisation*

1. $iter = 0$
2. Initialiser le vecteur de paramètres ρ^0
3. Calculer la fonction coût $J(\rho^0)$ à partir de (3.39)

Etape 2 : *Algorithme itératif de Levenberg-Marquardt*

 4. **faire**

- i. $iter = iter + 1$
- ii. *Estimation des paramètres*
Calculer les vecteurs de paramètres $\hat{\rho}^{iter}$

$$\hat{\rho}^{iter+1} = \hat{\rho}^{iter} - \left\{ [\mathcal{H} + \xi I]^{-1} \frac{\partial J}{\partial \hat{\rho}^{iter}} \right\} \quad (3.40)$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial J}{\partial \rho} = -2 \sum_{h=0}^{H-1} \varepsilon(t_h) S(t_h, \rho) \text{ représente le gradient} \\ \mathcal{H} \approx 2 \sum_{h=0}^{H-1} S(t_h, \rho) S^T(t_h, \rho) \text{ est le hessien approché} \\ S(t_h, \rho) = \frac{\partial y(t_h, \rho)}{\partial \rho} \text{ est la fonction de sensibilité de la sortie} \\ \text{et } \xi \text{ est le paramètre de Marquardt} \end{array} \right. \quad (3.41)$$

- iii. Actualiser le vecteur de paramètres

$$\hat{\rho}^{iter} = [\hat{\rho}_1^{iter}, \dots, \hat{\rho}_k^{iter}, \dots, \hat{\rho}_K^{iter}] \quad (3.42)$$

$$\text{tant que } \sum_{j=1}^{\dim \rho_k} \left| \frac{\hat{\rho}_{k,j}^{iter} - \hat{\rho}_{k,j}^{iter-1}}{\hat{\rho}_{k,j}^{iter}} \right| > \epsilon$$

où $\hat{\rho}_{k,j}^{iter}$ correspond au j -ième élément du vecteur des coefficients $\hat{\rho}_k^{iter}$ à l'itération $iter$ et ϵ est un scalaire, fixé pour une précision donnée des estimations

Etape 3 : *Estimation de la matrice de covariance*

5. Calculer la matrice de covariance

$$\hat{P} = \sigma_{opt}^2 \mathcal{H}^{-1} \quad (3.43)$$

où $\hat{\sigma}^2$ est la variance de l'estimation empirique du bruit, donnée par

$$y^*(t) = \sum_{k=1}^{\mathcal{K}} y_k^{iter}(t) \quad (3.44)$$

avec $y_k^{iter}(t)$ calculé à la dernière itération

Le hessien approché \mathcal{H} est donné par :

$$\mathcal{H} = \frac{\partial \varepsilon^T}{\partial \rho} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \quad (3.45)$$

où $\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho}$ est la fonction de sensibilité de l'erreur par rapport aux coefficients donnée par :

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} = \left[\frac{\partial \varepsilon^T}{\partial \rho_1}, \dots, \frac{\partial \varepsilon^T}{\partial \rho_{\mathcal{K}}} \right]^T, \quad (3.46)$$

avec

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho_k} = -\frac{\partial \hat{y}_k}{\partial \rho_k} = -\left[\frac{\partial \hat{y}_k}{\partial b_{0,k}}, \dots, \frac{\partial \hat{y}_k}{\partial b_{M_k,k}}, \frac{\partial \hat{y}_{u_k}}{\partial a_{1,k}}, \dots, \frac{\partial \hat{y}_{u_k}}{\partial a_{N_k,k}} \right]^T \quad (3.47)$$

pour $k = 1, \dots, \mathcal{K}$. Les fonctions de sensibilité de la sortie $\frac{\partial \hat{y}_k}{\partial b_{j,k}}$ et $\frac{\partial \hat{y}_k}{\partial a_{i,k}}$ sont données par :

$$\frac{\partial \hat{y}_k}{\partial b_{j,k}} = \frac{p^{\hat{\beta}_j}}{1 + \sum_{i=1}^{N_k} \hat{a}_{i,k} p^{\hat{\alpha}_i}} u_k(t), \quad \forall j = 0, \dots, M_k, \quad (3.48)$$

et

$$\frac{\partial \hat{y}_k}{\partial a_{i,k}} = -\frac{\sum_{j=0}^{M_k} \hat{b}_{j,k} p^{\hat{\beta}_j + \hat{\alpha}_i}}{\left(1 + \sum_{i=1}^{N_k} \hat{a}_{i,k} p^{\hat{\alpha}_i}\right)^2} u_k(t), \quad \forall i = 0, \dots, N_k. \quad (3.49)$$

3.4.1.2 Estimation des coefficients et des ordres de dérivation

Dans cette section, seule la structure réelle du modèle est supposée connue. Tous les paramètres des modèles MISO dont les ordres de dérivation sont à estimer. Par conséquent, le vecteur de paramètres inconnus θ est défini dans (3.3).

Pour un modèle MISO, un algorithme basé sur une méthode à erreur de sortie est proposé pour estimer les coefficients. Le vecteur de paramètres θ est estimé à partir de l'algorithme de Gauss-Newton.

L'algorithme étant itératif, le vecteur de paramètres θ exprimé dans (3.3) est désormais désigné par θ^{iter} . La version *MISO-oe*, pour l'estimation des paramètres d'un système MISO non entier, est décrite dans l'algorithme 2 :

Algorithm 2 MISO-oe pour l'estimation des coefficients avec les ordres de dérivation

Etape 1 : *Initialisation*

1. $iter = 0$
2. Initialiser le vecteur de paramètres $\theta^0 = \begin{bmatrix} \rho^0 \\ \mu^0 \end{bmatrix}$
3. Calculer la fonction coût $J(\theta^0)$ à partir de (3.39)

Etape 2 : *Algorithme itératif de Levenberg-Marquardt*

 4. **faire**

- i. $iter = iter + 1$
- ii. *Estimation des paramètres*
Calculer le vecteur des paramètres $\hat{\rho}^{iter+1}$

$$\hat{\theta}^{iter+1} = \hat{\theta}^{iter} - \left\{ [\mathcal{H} + \xi I]^{-1} \frac{\partial J}{\partial \hat{\theta}^{iter}} \right\} \quad (3.50)$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} J' = -2 \sum_{h=0}^{H-1} \varepsilon(t_h) S(t_h, \theta) \text{ est le gradient} \\ \mathcal{H} \approx 2 \sum_{h=0}^{H-1} S(t_h, \theta) S^T(t_h, \theta) \text{ est le hessien approché} \\ S(t_h, \theta) = \frac{\partial y(t_h, \theta)}{\partial \theta} \text{ est la fonction de sensibilité de la sortie} \\ \text{et } \xi \text{ est le paramètre de Marquardt} \end{array} \right. \quad (3.51)$$

- iii. Actualiser le vecteur de paramètres

$$\hat{\theta}^{iter} = \left[\hat{\theta}_1^{iter}, \dots, \hat{\theta}_k^{iter}, \dots, \hat{\theta}_K^{iter} \right] \quad (3.52)$$

$$\text{tant que } \sum_{j=1}^{\dim \theta_k} \left| \frac{\hat{\theta}_{k,j}^{iter} - \hat{\theta}_{k,j}^{iter-1}}{\hat{\theta}_{k,j}^{iter}} \right| > \epsilon$$

où $\hat{\theta}_{k,j}^{iter}$ correspond au j -ième élément du vecteur des paramètres $\hat{\theta}_k^{iter}$ à l'itération $iter$ et ϵ est un scalaire, fixé pour une précision donnée des estimations

Etape 3 : *Estimation de la matrice de covariance*

5. Calculer la matrice de covariance

$$\hat{P} = \hat{\sigma}^2 \mathcal{H}^{-1} \quad (3.53)$$

où $\hat{\sigma}^2$ est la variance de l'estimation empirique du bruit, donnée par

$$y^*(t) - \sum_{k=1}^{\mathcal{K}} y_k^{iter}(t) \quad (3.54)$$

avec $y_k^{iter}(t)$ calculé à la dernière itération

Le hessien approché \mathcal{H} est donné par :

$$\mathcal{H} = SS^T = \frac{\partial \varepsilon^T}{\partial \theta} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta}, \quad (3.55)$$

où $\frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta}$ regroupe les fonctions de sensibilité de l'erreur :

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial [\rho^T \mu^T]^T} \quad (3.56)$$

où :

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} = \left[\frac{\partial \varepsilon^T}{\partial \rho_1}, \dots, \frac{\partial \varepsilon^T}{\partial \rho_K} \right]^T \quad (3.57)$$

et

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho_k} = -\frac{\partial \hat{y}_k}{\partial \rho_k} = -\left[\frac{\partial \hat{y}_k}{\partial b_{0,k}}, \dots, \frac{\partial \hat{y}_k}{\partial b_{M_k,k}}, \frac{\partial \hat{y}_{u_k}}{\partial a_{1,k}}, \dots, \frac{\partial \hat{y}_{u_k}}{\partial a_{N_k,k}} \right]^T \quad (3.58)$$

pour $k = 1, \dots, \mathcal{K}$. Les fonctions de sensibilité de la sortie $\frac{\partial \hat{y}_k}{\partial b_{j,k}}$ et $\frac{\partial \hat{y}_k}{\partial a_{i,k}}$ sont respectivement données par :

$$\frac{\partial \hat{y}_k}{\partial b_{j,k}} = \frac{p^{\hat{\beta}_j}}{1 + \sum_{i=1}^{N_k} \hat{a}_{i,k} p^{\hat{\alpha}_i}} u_k(t), \quad \forall j = 0, \dots, M_k, \quad (3.59)$$

et

$$\frac{\partial \hat{y}_k}{\partial a_{i,k}} = -\frac{\sum_{j=0}^{M_k} \hat{b}_{j,k} p^{\hat{\beta}_j + \hat{\alpha}_i}}{\left(1 + \sum_{i=1}^{N_k} \hat{a}_{i,k} p^{\hat{\alpha}_i}\right)^2} u_k(t), \quad \forall i = 0, \dots, N_k. \quad (3.60)$$

Les fonctions de sensibilité des erreurs par rapport aux ordres de dérivation sont données en fonction de μ :

Cas 1 : Si μ est défini comme un ordre S-commensurable global ν pour tous les sous-systèmes comme dans (3.5), alors

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \mu} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \nu} = -\sum_{k=1}^{\mathcal{K}} \frac{\partial \hat{y}_k}{\partial \nu}. \quad (3.61)$$

où les fonctions de sensibilité des sorties sont données par :

$$\frac{\partial \hat{y}_k}{\partial \nu} = \left[\sum_{j=0}^{M_k} j \hat{b}_{j,k} p^{j\nu} + \sum_{j=0}^{M_k} \sum_{i=1}^{N_k} (j-i) \hat{b}_{j,k} \hat{a}_{i,k} p^{(i+j)\nu} \right] \frac{\ln(p) u_k(t)}{\left(1 + \sum_{i=1}^{N_k} \hat{a}_{i,k} p^{i\nu}\right)^2}.$$

Cas 2 : Si μ est défini comme le vecteur des ordres S-commensurables locaux ν_k , comme

dans (3.6), alors

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \mu} = \left[\frac{\partial \varepsilon^T}{\partial \nu_1}, \dots, \frac{\partial \varepsilon^T}{\partial \nu_{\mathcal{K}}} \right]^T = \left[-\frac{\partial \hat{y}_1}{\partial \nu_1}, \dots, -\frac{\partial \hat{y}_{\mathcal{K}}}{\partial \nu_{\mathcal{K}}} \right]^T. \quad (3.62)$$

où les fonctions de sensibilité de sortie sont données, pour $k = 1, \dots, \mathcal{K}$:

$$\frac{\partial \hat{y}_k}{\partial \nu_k} = \left[\sum_{j=0}^{M_k} j \hat{b}_{j,k} p^{j\nu_k} + \sum_{j=0}^{M_k} \sum_{i=1}^{N_k} (j-i) \hat{b}_{j,k} \hat{a}_{i,k} p^{(i+j)\nu_k} \right] \frac{\ln(p) u_k(t)}{\left(1 + \sum_{i=1}^{N_k} \hat{a}_{i,k} p^{i\nu_k} \right)^2}.$$

Cas 3 : Si μ est le vecteur de tous les ordres de dérivation, comme dans (3.7), alors

$$\frac{\partial \varepsilon^T}{\partial \mu} = \left[\frac{\partial \varepsilon^T}{\partial \mu_1}, \dots, \frac{\partial \varepsilon^T}{\partial \mu_{\mathcal{K}}} \right]^T, \quad (3.63)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \mu_k} = \left[-\frac{\partial \hat{y}_k}{\partial \beta_{0,k}}, \dots, -\frac{\partial \hat{y}_k}{\partial \beta_{M_k,k}}, -\frac{\partial \hat{y}_k}{\partial \alpha_{1,k}}, \dots, -\frac{\partial \hat{y}_k}{\partial \alpha_{N_k,k}} \right]^T \quad (3.64)$$

avec $k = 1, \dots, \mathcal{K}$ et les fonctions de sensibilité de la sortie sont données par :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{y}_k}{\partial \beta_{j,k}} &= \ln(p) \frac{\hat{b}_{j,k} p^{\hat{\beta}_{j,k}}}{1 + \sum_{i=1}^{N_k} \hat{a}_{i,k} p^{\hat{\alpha}_{i,k}}} u_k(t) \\ \text{et} \\ \frac{\partial \hat{y}_k}{\partial \alpha_{\ell,k}} &= -\ln(p) \hat{a}_{\ell,k} p^{\hat{\alpha}_{\ell,k}} \frac{\sum_{j=0}^{M_k} \hat{b}_{j,k} p^{\hat{\beta}_{j,k}}}{\left(1 + \sum_{i=1}^{N_k} \hat{a}_{i,k} p^{\hat{\alpha}_{i,k}} \right)^2} u_k(t), \end{aligned} \quad (3.65)$$

pour $j = 0, \dots, M_k$, $\ell = 0, \dots, N_k$.

Vu que le calcul de $\ln(p)$ est impossible analytiquement, les fonctions de sensibilité des erreurs par rapport aux ordres de dérivation sont calculées numériquement.

3.4.2 Méthode de la variable instrumentale optimale

3.4.2.1 Estimation des coefficients *MISO-srivcf*

Dans cette section, la structure réelle du modèle ainsi que tous les ordres de dérivation non entier sont supposés connus. Ainsi seuls les coefficients linéaires des modèles MISO sont à estimer. Par conséquent, le vecteur de paramètres inconnus θ se réduit à ρ .

L'idée principale est de décomposer le modèle MISO, décrit dans (3.2) en \mathcal{K} modèles SISO. En supposant que tous les autres coefficients ρ_n (avec $n \neq k$) sont connus, le vecteur

des coefficients ρ_k est estimé, pour chaque sous-système $G_k, k = 1, \dots, \mathcal{K}$, en appliquant la version SISO de l'algorithme *srivcf*, telle que proposée en section 3.3.2. Dans ce cas, la fonction d'erreur ε_k appropriée, associée au sous-modèle G_k , prend la forme suivante :

$$\varepsilon_k(t, \rho) = x_{k,f}(t, \rho) - y_{k,f}(t, \rho_k), \quad k = 1, \dots, \mathcal{K} \quad (3.66)$$

où y_k est la partie sans bruit de x_k :

$$x_k(t, \rho) = y^*(t) - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq k}}^{\mathcal{K}} y_n(t, \rho_n). \quad (3.67)$$

La relation (3.66) peut être réécrite comme suit :

$$\varepsilon_k(t, \rho) = A_k(p, \rho) \left(\frac{1}{A_k(p, \rho)} x_k(t, \rho) \right) - B_k(p, \rho) \left(\frac{1}{A_k(p, \rho)} u_k(t) \right) \quad (3.68)$$

Le filtre optimal, à appliquer sur les signaux d'entrée et de sortie, est

$$F_{opt,k}(p) = \frac{1}{A_k(p, \rho)}. \quad (3.69)$$

Comme ρ et par conséquent $A_k(p, \rho)$ sont inconnus, une procédure permet d'estimer itérativement les coefficients jusqu'à convergence. Ainsi, le filtre suivant est initialisé et calculé de manière itérative :

$$F_k^{iter}(p) = \frac{1}{\hat{A}_k(p, \hat{\rho}^{iter})} = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^{N_k} \hat{a}_{i,k} p^{\alpha_{i,k}}}, \quad (3.70)$$

où $iter = 1, 2, \dots$, désigne le numéro d'itération, et $\hat{a}_{i,k}$ est le coefficient estimé à l'itération $iter$.

La version MISO de *srivcf* est décrite dans l'algorithme 3.

Algorithm 3 *MISO-srивcf* pour l'estimation des coefficients

Etape 1 : Initialisation

1. $iter = 0$
2. Initialiser le vecteur de paramètres ρ^0

Etape 2 : Estimation itérative de l'IV

3. **Pour chaque sous-système** $k = 1, \dots, \mathcal{K}$

Faire

- i. $iter = iter + 1$
- ii. Actualiser le modèle auxiliaire avec le vecteur de paramètres $\hat{\rho}^{iter-1}$

$$\hat{G}_k^{iter}(p, \hat{\rho}^{iter-1}) = \frac{\hat{B}_k^{iter}(p, \hat{\rho}^{iter-1})}{\hat{A}_k^{iter}(p, \hat{\rho}^{iter-1})} \quad (3.71)$$

et générer les instruments

$$y_k(t, \hat{\rho}^{iter-1}) = \frac{B_k(p, \hat{\rho}^{iter-1})}{A_k(p, \hat{\rho}^{iter-1})} u_k(t) \quad (3.72)$$

- iii. Calculer la réponse $x_k(t, \hat{\rho}_k^{iter-1})$ de $u_k(t)$

$$x_k(t, \hat{\rho}^{iter-1}) = y^*(t) - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq k}}^{\mathcal{K}} y_n(t, \hat{\rho}^{iter}) \quad (3.73)$$

- iv. Actualiser le filtre

$$F_k^{iter}(p) = \frac{1}{\hat{A}_k(p, \hat{\rho}^{iter-1})} \quad (3.74)$$

- v. Évaluer les dérivées préfiltrées

$$\begin{cases} p^{\beta_{j,k}} u_{k,f}(t) = p^{\beta_{j,k}} F_k^{iter}(p) u_k(t) \\ p^{\alpha_{i,k}} y_{k,f}(t) = p^{\alpha_{i,k}} F_k^{iter}(p) y_k(t) \\ p^{\alpha_{i,k}} x_{k,f}(t) = p^{\alpha_{i,k}} F_k^{iter}(p) x_k(t) \end{cases} \quad (3.75)$$

- vi. Calculer les nouvelles estimations

$$\hat{\rho}_k^{iter} = \left(\Phi_{k,f}^{iv T} \Phi_{k,f}^* \right)^{-1} \Phi_{k,f}^{iv T} X_{k,f} \quad (3.76)$$

où la matrice instrumentale est définie par

$$\Phi_{k,f}^{iv} = [\varphi_{k,f}^{iv}(t_1), \dots, \varphi_{k,f}^{iv}(t_H)]^T \quad (3.77)$$

$$\varphi_{k,f}^{iv}(t) = \left[p^{\beta_{0,k}} u_{k,f}(t), \dots, p^{\beta_{M_k,k}} u_{k,f}(t), -p^{\alpha_{1,k}} y_{k,f}^{iter}(t), \dots, -p^{\alpha_{N_k,k}} y_{k,f}^{iter}(t) \right] \quad (3.78)$$

et la matrice de régression est définie par

$$\Phi_{k,f}^* = [\varphi_{k,f}^*(t_1), \dots, \varphi_{k,f}^*(t_H)]^T \quad (3.79)$$

avec

$$\varphi_{k,f}^*(t) = [p^{\beta_{0,k}} u_{k,f}(t), \dots, p^{\beta_{M_k,k}} u_{k,f}(t), -p^{\alpha_{1,k}} x_{k,f}^{iter}(t), \dots, -p^{\alpha_{N_k,k}} x_{k,f}^{iter}(t)] \quad (3.80)$$

et le vecteur de sortie filtré est

$$X_{k,f} = [x_{k,f}(t_1), \dots, x_{k,f}(t_H)] \quad (3.81)$$

vii. Actualiser le vecteur de paramètres

$$\hat{\rho}^{iter} = [\hat{\rho}_1^{iter}, \dots, \hat{\rho}_k^{iter}, \dots, \hat{\rho}_{\mathcal{K}}^{iter}]^T \quad (3.82)$$

Tant que $\sum_{j=1}^{\dim \hat{\rho}_k} \left| \frac{\hat{\rho}_{k,j}^{iter} - \hat{\rho}_{k,j}^{iter-1}}{\hat{\rho}_{k,j}^{iter}} \right| > \epsilon_1$

où $\hat{\rho}_{k,j}^{iter}$ correspond au j -ème élément du vecteur des coefficients $\hat{\rho}_k^{iter}$ à l'itération $iter$ et ϵ_1 est un scalaire fixé pour une précision donnée des estimations

Etape 3 : Calculer la matrice de covariance paramétrique P_ρ

$$P_\rho = \hat{\sigma}^2 \text{diag}(P_{\rho_1}, \dots, P_{\rho_{\mathcal{K}}}) \quad (3.83)$$

où, pour $k = 1, \dots, \mathcal{K}$

$$P_{\rho_k} = \left(\Phi_{k,f}^{iv T} \Phi_{k,f}^{iv} \right)^{-1} \quad (3.84)$$

et $\hat{\sigma}^2$ est la variance de l'estimation empirique du bruit donnée par

$$y^*(t) - \sum_{k=1}^{\mathcal{K}} y_k(t)$$

où $y_k(t)$ est calculé à la dernière itération

La borne de Cramér-Rao (CRB) peut être calculée selon :

$$P_{\rho}^{CRB} = \frac{\sigma^2}{H} \text{diag} (P_{\rho_1}^{CRB}, \dots, P_{\rho_K}^{CRB}) \quad (3.85)$$

où σ^2 est la variance du bruit réel et

$$P_{\rho_k}^{CRB} = \left(E \left[\varphi_{k,f}^{iv,opt}(t_h)^T \varphi_{k,f}^{iv,opt}(t_h) \right] \right)^{-1} \quad (3.86)$$

les matrices de covariance $P_{\rho_k}^{CRB}$ sont obtenus avec le vecteur IV pré-filtré sans bruit de façon optimale

$$\varphi_{k,f}^{iv,opt}(t_h) = F_k^{opt}(p) \left[p^{\beta_{0,k}} u_k(t_h), \dots, p^{\beta_{M_k,k}} u_k(t_h), -p^{\alpha_{1,k}} y_k(t_h), \dots, -p^{\alpha_{N_k,k}} y_k(t_h) \right]^T,$$

avec :

$$F_k^{opt}(p) = \frac{1}{A_k(p, \rho)}.$$

3.4.2.2 Extension à l'estimation des ordres de dérivation *MISO-oosrivcf*

Dans le cas où les ordres de dérivation sont inconnus, il est utile de considérer leur estimation en même temps que les coefficients. Un algorithme en deux étapes est proposé pour estimer tous les paramètres (coefficients et ordres de dérivation) : la première étape utilise l'algorithme MISO de *srivcf* pour l'estimation des coefficients et la deuxième étape utilise un algorithme basé sur le gradient pour l'optimisation de l'ordre de dérivation.

Les algorithmes à deux étapes ont été utilisés dans la littérature dans différents contextes [Bai, 1998, Mukhopadhyay *et al.*, 1991, Rao et Unbehauen, 2006, Spinelli *et al.*, 2006, Victor *et al.*, 2013a]. Bien qu'ils ne disposent pas d'une preuve formelle de convergence, il a été noté dans ces références qu'ils convergent vers un minimum. De plus, la dernière référence a permis d'estimer les paramètres d'un système SISO avec la même stratégie. Trois variantes de l'algorithme d'optimisation de l'ordre sont proposées. La première variante consiste à estimer l'ordre S-commensurable global et possède le plus petit nombre de paramètres. La deuxième variante consiste à estimer les ordres S-commensurable locaux. La troisième variante relâche la contrainte de S-commensurabilité et estime tous les ordres. De ce fait, elle est la plus générale. La première variante fournit une bonne initialisation à la seconde qui à son tour permet d'initialiser convenablement la dernière.

L'erreur de sortie $\varepsilon(t, \hat{\theta})$ est donnée par :

$$\varepsilon(t, \hat{\theta}) = y^*(t) - \hat{y}(t, \hat{\theta}) \quad (3.87)$$

où $\hat{y}(t, \hat{\theta})$ est la sortie estimée :

$$\hat{y}(t, \hat{\theta}) = \sum_{k=1}^{\mathcal{K}} \hat{y}_k(t, \hat{\theta}). \quad (3.88)$$

avec

$$\hat{y}_k(t_k, \hat{\theta}_k) = G_k(p, \hat{\theta}_k) u_k(t) \quad (3.89)$$

où

$$G_k(p, \hat{\theta}_k) = \frac{\sum_{j=0}^{M_k} \hat{b}_{j,k} p^{\hat{\beta}_{j,k}}}{1 + \sum_{i=1}^{N_k} \hat{a}_{i,k} p^{\hat{\alpha}_{i,k}}}, \quad k = 1, \dots, \mathcal{K}. \quad (3.90)$$

Le problème d'estimation est formulé comme un problème de minimisation de la norme ℓ_2 selon :

$$J(\hat{\theta}) = \frac{1}{2} \left\| \varepsilon(t, \hat{\theta}) \right\|_2. \quad (3.91)$$

L'algorithme de Gauss-Newton [Ljung, 1999] est utilisé pour l'estimation des ordres de dérivation. Cet algorithme permet de calculer itérativement le vecteur d'ordre de dérivation μ^{iter+1} :

$$\mu^{iter+1} = \mu^{iter} - \lambda \left[\mathcal{H}^{-1} \frac{\partial J}{\partial \mu^{iter}} \right], \quad (3.92)$$

où λ est un facteur de pondération, $\frac{\partial J}{\partial \mu}$ est le gradient défini selon :

$$\frac{\partial J}{\partial \mu} = \frac{\partial \varepsilon(t, \hat{\theta})}{\partial \mu}^T \varepsilon(t, \hat{\theta}) \quad (3.93)$$

et \mathcal{H} est le hessien approché donné par

$$\mathcal{H} = \frac{\partial \varepsilon(t, \hat{\theta})}{\partial \mu}^T \frac{\partial \varepsilon(t, \hat{\theta})}{\partial \mu}. \quad (3.94)$$

L'ordre de dérivation μ est fixé à un des vecteurs : (3.5), (3.6) ou (3.7), selon que l'ordre S-commensurable global, l'ordre S-commensurable local, ou tous les ordres de dérivation sont estimés. La fonction de sensibilité de l'erreur $\frac{\partial \varepsilon(t, \hat{\theta})}{\partial \mu}$ est calculée en conséquence.

Cas 1 : Si μ est défini comme l'ordre S-commensurable global ν pour tous les sous-systèmes, comme dans (3.5), alors

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \mu} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \nu} = - \sum_{k=1}^{\mathcal{K}} \frac{\partial \hat{y}_k}{\partial \nu}, \quad (3.95)$$

où les fonctions de sensibilité de sortie sont données, pour $k = 1, \dots, \mathcal{K}$, par :

$$\frac{\partial \hat{y}_k}{\partial \nu} = \left[\sum_{j=0}^{M_k} j \hat{b}_{j,k} p^{j\nu} + \sum_{j=0}^{M_k} \sum_{i=1}^{N_k} (j-i) \hat{b}_{j,k} \hat{a}_{i,k} p^{(i+j)\nu} \right] \frac{\ln(p) u_k(t)}{\left(1 + \sum_{i=1}^{N_k} \hat{a}_{i,k} p^{i\nu} \right)^2}. \quad (3.96)$$

Cas 2 : Si μ est défini comme le vecteur des ordres S-commensurables locaux ν_k , comme dans (3.6), alors

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \mu} = \left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial \nu_1}, \dots, \frac{\partial \varepsilon}{\partial \nu_{\mathcal{K}}} \right]^T = \left[-\frac{\partial \hat{y}_1}{\partial \nu_1}, \dots, -\frac{\partial \hat{y}_{\mathcal{K}}}{\partial \nu_{\mathcal{K}}} \right]^T, \quad (3.97)$$

où les fonctions de sensibilité de sortie sont données, pour $k = 1, \dots, \mathcal{K}$, par :

$$\frac{\partial \hat{y}_k}{\partial \nu_k} = \left[\sum_{j=0}^{M_k} j \hat{b}_{j,k} p^{j\nu_k} + \sum_{j=0}^{M_k} \sum_{i=1}^{N_k} (j-i) \hat{b}_{j,k} \hat{a}_{i,k} p^{(i+j)\nu_k} \right] \frac{\ln(p) u_k(t)}{\left(1 + \sum_{i=1}^{N_k} \hat{a}_{i,k} p^{i\nu_k} \right)^2}. \quad (3.98)$$

Cas 3 : Si μ est le vecteur de tous les ordres de dérivation, comme dans (3.7), alors

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \mu} = \left[\frac{\partial \varepsilon^T}{\partial \mu_1}, \dots, \frac{\partial \varepsilon^T}{\partial \mu_{\mathcal{K}}} \right]^T, \quad (3.99)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \mu_k} = \left[-\frac{\partial \hat{y}_k}{\partial \beta_{0,k}}, \dots, -\frac{\partial \hat{y}_k}{\partial \beta_{M_k,k}}, -\frac{\partial \hat{y}_k}{\partial \alpha_{1,k}}, \dots, -\frac{\partial \hat{y}_k}{\partial \alpha_{N_k,k}} \right]^T. \quad (3.100)$$

avec $k = 1, \dots, \mathcal{K}$ et les fonctions de sensibilité de la sortie sont données par :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{y}_k}{\partial \beta_{j,k}} &= \ln(p) \frac{\hat{b}_{j,k} p^{\hat{\beta}_{j,k}}}{1 + \sum_{i=1}^{N_k} \hat{a}_{i,k} p^{\hat{\alpha}_{i,k}}} u_k(t) \\ \frac{\partial \hat{y}_k}{\partial \alpha_{\ell,k}} &= -\ln(p) \hat{a}_{\ell,k} p^{\hat{\alpha}_{\ell,k}} \frac{\sum_{j=0}^{M_k} \hat{b}_{j,k} p^{\hat{\beta}_{j,k}}}{\left(1 + \sum_{i=1}^{N_k} \hat{a}_{i,k} p^{\hat{\alpha}_{i,k}} \right)^2} u_k(t), \end{aligned} \quad (3.101)$$

pour $j = 0, \dots, M_k$, $\ell = 0, \dots, N_k$.

La version MISO de *oosrivcf*, Optimisation des Ordres combinée à la *srivcf*, est décrite dans l'algorithme 4 :

Algorithm 4 *MISO-oostrvcf* pour l'estimation de tous les paramètres (coefficients et ordres de dérivation)

Étape 1 : *Initialisation*

1. $iter = 0$
2. Initialiser le vecteur des ordres μ^0 et calculer le vecteur des coefficients ρ^0 avec *MISO-strvcf* (voir l'algorithme 3 page 82), $\theta^0 = [\rho^{0T}, \mu^{0T}]^T$
3. Calculer la fonction de coût $J(\theta^0)$ à partir de (3.91)

Étape 2 : *Estimation itérative de tous les paramètres*

4. **faire**

- i. $iter = iter + 1$
- ii. *Estimation des coefficients en utilisant l'algorithme 3*
Calculer les vecteurs de coefficient $\hat{\rho}^{iter}$ avec *MISO-strvcf*.
- iii. *Estimation des ordres de dérivation*
 - a. Initialiser $\lambda = \Lambda$ (généralement à 1)
 - b. Évaluer la fonction de coût $J([\hat{\rho}^{iter}, \hat{\mu}^{iter-1}])$ à partir de (3.91)
 - c. Affiner l'estimation de l'ordre $\hat{\mu}^{iter}$:

$$\hat{\mu}^{iter} = \hat{\mu}^{iter-1} - \lambda \left[\mathcal{H}^{-1} \frac{\partial J}{\partial \mu} \right]_{\mu=\hat{\mu}^{iter-1}}$$

- d. Évaluer la fonction de coût $J([\hat{\rho}^{iter}, \hat{\mu}^{iter}])$ à partir de (3.91)
- e. définir $\lambda = \frac{\lambda}{2}$
tant que $\sum_{\ell=1}^{\dim \hat{\mu}_k} \left| \frac{\hat{\mu}_\ell^{iter} - \hat{\mu}_\ell^{iter-1}}{\hat{\mu}_\ell^{iter-1}} \right| > \epsilon_2$
où ϵ_2 est un scalaire fixé pour une précision donnée des estimations
- iv. *Former le vecteur de paramètres $\hat{\theta}^{iter}$*

$$\hat{\theta}^{iter} = [\hat{\rho}^{iter}, \hat{\mu}^{iter}]$$

tant que $\sum_{\ell=1}^{\dim \hat{\theta}_k} \left| \frac{\hat{\theta}_\ell^{iter} - \hat{\theta}_\ell^{iter-1}}{\hat{\theta}_\ell^{iter-1}} \right| > \epsilon_3$

où ϵ_3 est un scalaire fixé pour une précision donnée des estimations

Étape 3 : *Calcul de la matrice de covariance paramétrique P_θ*

$$P_\theta = \hat{\sigma}^2 \mathcal{H}^{-1}$$

avec $\hat{\sigma}^2$ est la variance de l'estimation empirique du bruit donnée par :

$$y^*(t) - \sum_{k=1}^{\mathcal{K}} y_k(t)$$

où $y_k(t)$ est calculé à la dernière itération et le hessien approché \mathcal{H} est donné par (3.102). Après convergence de $\hat{\theta}$, la matrice de covariance paramétrique peut être calculée en utilisant le hessien approché par :

$$\mathcal{H} = \frac{\partial \varepsilon(t, \hat{\theta})}{\partial \theta^T} \frac{\partial \varepsilon(t, \hat{\theta})}{\partial \theta}. \quad (3.102)$$

La fonction de sensibilité à l'erreur, $\frac{\partial \varepsilon(t, \hat{\theta})}{\partial \theta}$, s'écrit :

$$\frac{\partial \varepsilon(t, \hat{\theta})}{\partial \theta} = \frac{\partial \varepsilon(t, \hat{\theta})}{\partial [\rho^T \mu^T]^T} \quad (3.103)$$

où $\frac{\partial \varepsilon}{\partial \mu}$ est défini selon que l'on estime l'ordre S-commensurable global (3.95), les ordres S-commensurables locaux (3.97) ou tous les ordres de dérivation (3.99) et où $\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho}$ est défini par :

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} = \left[\frac{\partial \varepsilon^T}{\partial \rho_1}, \dots, \frac{\partial \varepsilon^T}{\partial \rho_{\mathcal{K}}} \right]^T, \quad (3.104)$$

où

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho_k} = - \frac{\partial \hat{y}_k}{\partial \theta_k} = - \left[\frac{\partial \hat{y}_k}{\partial b_{0,k}}, \dots, \frac{\partial \hat{y}_k}{\partial b_{M_k, \mathcal{K}}}, \frac{\partial \hat{y}_k}{\partial a_{1,k}}, \dots, \frac{\partial \hat{y}_k}{\partial a_{N_k, \mathcal{K}}} \right]^T.$$

Ici, $\frac{\partial \hat{y}_k}{\partial b_{j,k}}$ et $\frac{\partial \hat{y}_k}{\partial a_{i,k}}$ sont les fonctions de sensibilité de la sortie, données par :

$$\frac{\partial \hat{y}}{\partial b_{i,k}} = \frac{p^{\beta_{i,k}}}{1 + \sum_{j=1}^{N_k} a_{j,k} p^{\alpha_{j,k}}} u(t), \quad i = 0, \dots, M_k \quad (3.105)$$

et

$$\frac{\partial \hat{y}}{\partial a_{j,k}} = - \frac{\sum_{i=0}^{M_k} b_{i,k} p^{\beta_{i,k} + \alpha_{j,k}}}{\left(1 + \sum_{j=1}^{N_k} a_{j,k} p^{\alpha_{j,k}} \right)^2} u(t), \quad j = 1, \dots, N_k \quad (3.106)$$

avec $k = 1, \dots, \mathcal{K}$.

3.5 Exemples de simulation

Cette section est divisée en trois parties, les deux premières traitent le même exemple, où le système est décrit avec des sous-systèmes S-commensurables locaux. La troisième partie traite d'un système non S-commensurable.

- Dans la première partie, les coefficients sont estimés avec les deux méthodes *MISO-oe* et *MISO-srivcf* proposés respectivement en algorithmes 1 et 3.
- Dans la deuxième partie, les coefficients ainsi que les ordres S-commensurables locaux sont estimés avec les deux méthodes *MISO-oe* et *MISO-oosrivcf* proposés respectivement en algorithmes 2 et 4. Tout d'abord, un ordre S-commensurable global est estimé. Il est ensuite utilisé pour initialiser l'étape suivante pour estimer des ordres S-commensurables locaux.
- Dans la troisième partie, la contrainte de S-commensurabilité est relâchée de sorte que tous les coefficients et les ordres de dérivation de chaque sous-système sont estimés. Trois variantes sont utilisées. Avec la première variante, un ordre S-commensurable global est estimé pour tous les sous-systèmes. L'ordre ainsi calculé sert d'initialisation à la deuxième variante qui vise à estimer les ordres S-commensurables locaux, qui à leur tour permettent d'initialiser la troisième variante pour estimer tous les ordres de dérivation.

3.5.1 Estimation des coefficients

Soit le système MISO :

$$S : \begin{cases} y_1(t) = \frac{1}{3p^{0.25}+1}u_1(t), \\ y_2(t) = \frac{2}{2p^{0.5}+1}u_2(t), \\ y_3(t) = \frac{5}{p^{0.75}+1}u_3(t), \\ y(t) = \sum_{k=1}^3 y_k(t) \\ y^*(t_h) = y(t_h) + e(t_h). \end{cases} \quad (3.107)$$

Trois Séquences Binaires Pseudo-Aléatoires (SBPA) non corrélées, u_i pour $i = 1, 2, 3$, avec des amplitudes fixées entre -1 et 1 , sont appliquées à (3.107). Les entrées sont persistantes et excitent les sous-systèmes dans la bande de fréquence d'intérêt (autour de la pulsation de coupure). La longueur de chaque SBPA est fixée à $3 \times \tau_{max}$, où $\tau_{max} = \max(3^{1/0.25}, 2^{1/0.5}, 1^{1/0.75})$. La somme des trois réponses fournit la sortie sans bruit $y(t)$, qui est corrompue par un bruit blanc gaussien de moyenne nulle, avec un rapport

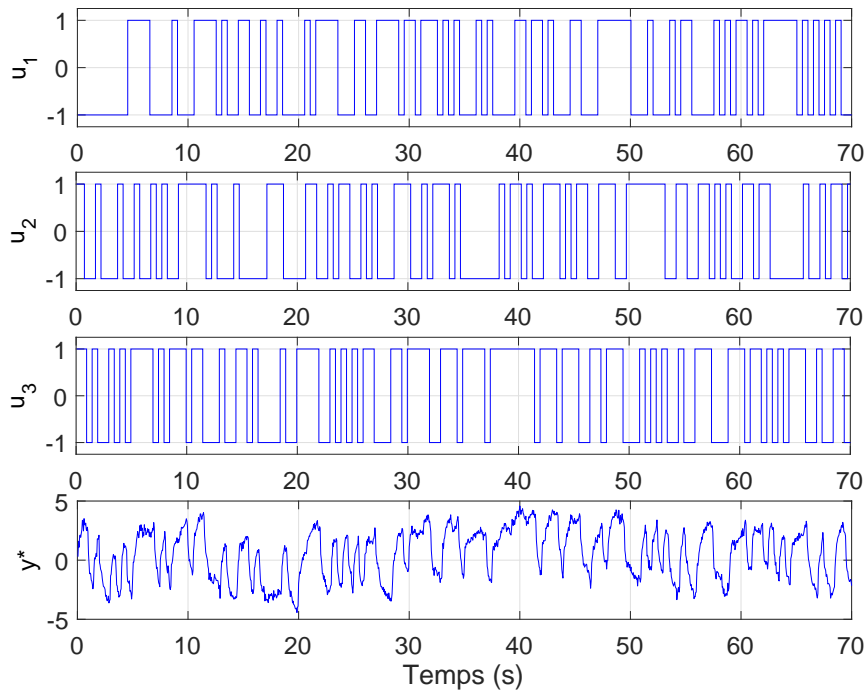


Figure 3.4 – Données d'entrée/sortie utilisées pour l'identification du système (3.107)

signal/bruit (RBS) fixé à -20dB , pour produire la sortie bruitée $y^*(t)$ (figure 3.4). La période d'échantillonnage est fixée à $T = 0,05\text{s}$.

Les coefficients de tous les sous-systèmes sont estimés en supposant que les ordres de dérivation sont connus comme dans (3.107) et la structure du modèle, décrite avec chaque sous-système $k = 1, \dots, 3$:

$$G_k(t) = \frac{b_{0,k}}{1 + a_{1,k}p^{\alpha-1,k}}, \quad (3.108)$$

Deux méthodes pour l'estimation des coefficients sont utilisées à savoir :

- La méthode d'estimation des coefficients *MISO-oe* décrite dans la section 3.4.1.
- La méthode d'estimation des coefficients *MISO-srivcf* décrite dans la section 3.4.2.

Une analyse de Monte Carlo est menée avec 100 réalisations de bruit différentes ayant un RBS = -20dB . Elle permet l'étude de la convergence de chaque méthode.

Les résultats de l'analyse sont résumés dans le tableau 4.3 pour les deux approches. Les valeurs moyennes des paramètres estimés sont proches des vrais paramètres et les variances d'estimation sont très faibles.

Les résultats du tableau 4.3 valident les performances des deux méthodes *MISO-oe* et *MISO-srivcf* vu que les paramètres estimés ont convergé proche des vrais valeurs.

L'algorithme *MISO-srivcf* fournit des estimations consistantes sans biais et à faible variance, proche de la borne de Cramer Rao (CRB) :

$$\|P_\theta\|_2 = 2.107 \cdot 10^{-3} \geq \|P_\theta^{CRB}\|_2 = 1.619 \cdot 10^{-3}.$$

Tableau 3.1 – Simulation de Monte Carlo de 100 réalisations pour l'estimation des coefficients avec les deux méthodes *MISO-oe* et *MISO-srivcf* avec un $RBS = -20dB$ ($\bar{\theta}$ est la moyenne et $\hat{\sigma}_\theta$ est l'écart type)

	True	<i>MISO-oe</i>		<i>MISO-srivcf</i>	
	θ	$\bar{\theta}$	$\hat{\sigma}_\theta$	$\bar{\theta}$	$\hat{\sigma}_\theta$
$b_{0,1}$	1	1.0225	0.1410	1.0096	0.0919
$a_{1,1}$	3	3.0802	0.5373	3.0161	0.3623
$b_{0,2}$	2	2.0082	0.0523	1.9996	0.0349
$a_{1,2}$	2	2.0107	0.0698	1.9983	0.0481
$b_{0,3}$	5	4.9998	0.0206	5.0017	0.0122
$a_{1,3}$	1	1.0005	0.0067	1.0009	0.0046

Influence de l'ordre S-commensurable global

En pratique, les ordres de dérivation ne sont pas toujours connus *a priori*. Il convient alors d'étudier la qualité de l'estimation des coefficients lorsque les ordres de dérivation sont inconnus. A cet effet, les coefficients sont réestimés, avec l'algorithme *MISO-srivcf*, pour un ordre S-commensurable global variant de 0.4 à 1.35

La fonction coût est la norme ℓ_2 , en dB, de l'erreur de sortie normalisée :

$$J_d(\hat{\theta}) = 10 \log \left(\frac{\|\varepsilon(t, \hat{\theta})\|^2}{\|\hat{y}(t)\|^2} \right), \quad (3.109)$$

où l'erreur de sortie $\varepsilon(t, \hat{\theta})$ est définie comme :

$$\varepsilon(t, \hat{\theta}) = y^*(t) - \hat{y}(t, \hat{\theta}), \quad (3.110)$$

et la sortie estimée $\hat{y}(t, \hat{\theta})$ est :

$$\hat{y}(t, \hat{\theta}) = \sum_{k=1}^{\kappa} \hat{y}_k(t, \hat{\theta}). \quad (3.111)$$

avec

$$\hat{y}_k(t_k, \hat{\theta}_k) = G_k(p, \hat{\theta}_k) u_k(t) \quad (3.112)$$

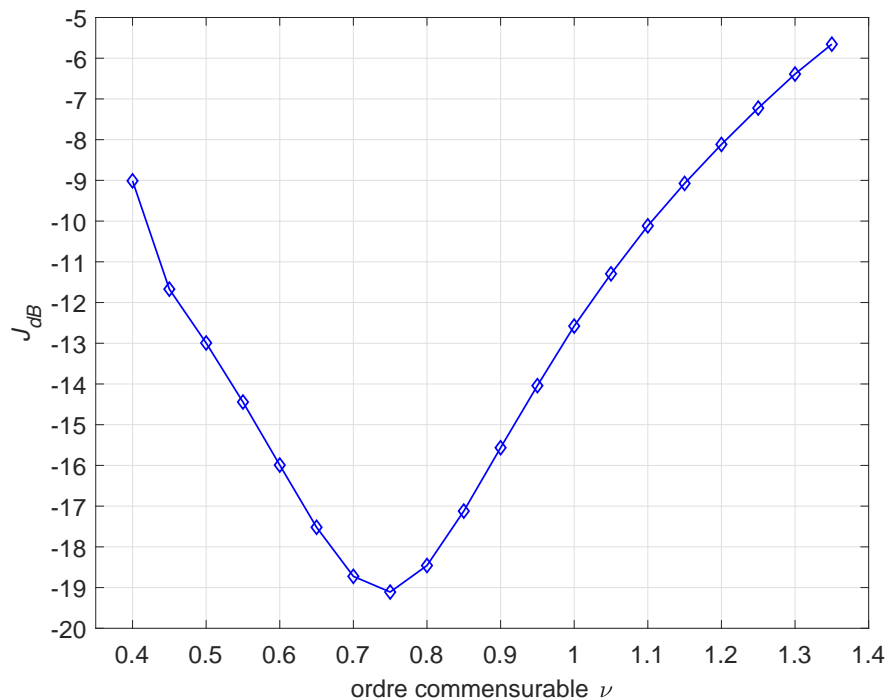


Figure 3.5 – Fonction de coût en fonction de l'ordre commensurable global

où

$$G_k(p, \hat{\theta}_k) = \frac{\sum_{j=0}^{M_k} \hat{b}_{j,k} p^{\hat{\beta}_{j,k}}}{1 + \sum_{i=1}^{N_k} \hat{a}_{i,k} p^{\hat{\alpha}_{i,k}}}, \quad k = 1, \dots, \mathcal{K}. \quad (3.113)$$

La figure 3.5 présente l'évolution de la fonction coût J_{dB} , définie dans (3.109), en fonction de l'ordre S-commensurable global. Le minimum est obtenu pour $\nu = 0.75$. Le minimum de la fonction coût est égal à -19dB , sachant que le RBS de bruit est égal à -20dB par conséquent l'erreur de modélisation est approximativement égale à 1dB .

3.5.2 Estimation des coefficients et des ordres de dérivation d'un système S-commensurable local

3.5.2.1 Estimation de l'ordre S-commensurable global

Le système (3.107) est utilisé pour la génération de données. La structure du modèle est définie selon la relation (3.108), où un ordre S-commensurable global est estimé d'abord avec :

$$\nu = \alpha_{1,1} = \alpha_{1,2} = \alpha_{1,3}.$$

L'ordre S-commensurable global est initialisé à $\nu = 1.1$ et converge aux alentours de 0.75, comme indiqué sur les figure 3.6 et 3.7.

Les algorithmes *MISO-oe* et *MISO-oosrivcf* convergent respectivement vers :

$$\hat{S}_{MISO-oe} : \begin{cases} \hat{G}_1 = \frac{0.358}{0.534s^{0.7399}+1} \\ \hat{G}_2 = \frac{1.367}{1.192s^{0.7399}+1} \\ \hat{G}_3 = \frac{4.992}{s^{0.7399}+1} \end{cases} \quad (3.114)$$

$$\hat{S}_{MISO-oosrivcf} : \begin{cases} \hat{G}_1(s) = \frac{0.273}{0.2118s^{0.751}+1} \\ \hat{G}_2(s) = \frac{1.121}{0.760s^{0.751}+1} \\ \hat{G}_3(s) = \frac{4.878}{0.9676s^{0.751}+1}, \end{cases} \quad (3.115)$$

Dans ce cas, la fonction coût (3.109) est égale à -18.8dB pour le modèle $\hat{S}_{MISO-oe}$ et -19.1dB pour le modèle $\hat{S}_{MISO-oosrivcf}$. En rappelant que le RSB est égal à -20dB , la norme ℓ_2 de l'erreur de modélisation est respectivement évaluée à 1.2dB et 0.9dB .

En rappelant que le vrai système (3.107) est un système S-commensurable local selon la définition 1.5. Dans cette première variante, un modèle S-commensurable global est recherché. Le modèle estimé a convergé vers les modèles (3.114) et (3.115). Les sous-modèles \hat{G}_1 et \hat{G}_2 n'ont pas convergé vers les vrais ordres locaux. Ils ne sont pas dans la même classe de modèle que les vrais sous-modèles. Par conséquent, leurs coefficients estimés compensent les erreurs de modélisation liées aux ordres de dérivation. Au contraire, le sous-modèle \hat{G}_3 a convergé vers son véritable ordre S-commensurable local. Par conséquent, les coefficients estimés, ont bien convergé vers les vrais coefficients.

3.5.2.2 Estimation des ordres S-commensurables locaux

Pour la deuxième variante, les paramètres des systèmes (3.114) et (3.115) sont utilisés respectivement pour initialiser les deux algorithmes *MISO-oe* et *MISO-oosrivcf*, pour évaluer les ordres S-commensurables locaux. Une simulation de Monte Carlo avec 100 essais a été réalisée et les résultats sont fournis dans le tableau 4.4, avec une valeur moyenne proche du véritable ordre S-commensurable local. Les deux algorithmes *MISO-oe* et *MISO-oosrivcf* proposés convergent vers les vrais paramètres avec une très faible variance.

Les figures 3.6 et 3.7 montrent qu'en utilisant le systèmes $\hat{S}_{MISO-oe}$ et $\hat{S}_{MISO-oosrivcf}$ définis dans (3.114) et (3.115) comme modèle initial, les algorithmes *MISO-oe* et *MISO-oosrivcf* convergent vers les vrais ordres S-commensurables locaux. La convergence de l'algorithme *MISO-oe* est plus rapide que celle de *MISO-oosrivcf*, car la matrice hessienne approchée dans l'algorithme *MISO-oe* tient compte des fonctions de sensibilité croisées entre paramètres et ordres de dérivation ce qui n'est pas le cas de la méthode *MISO-*

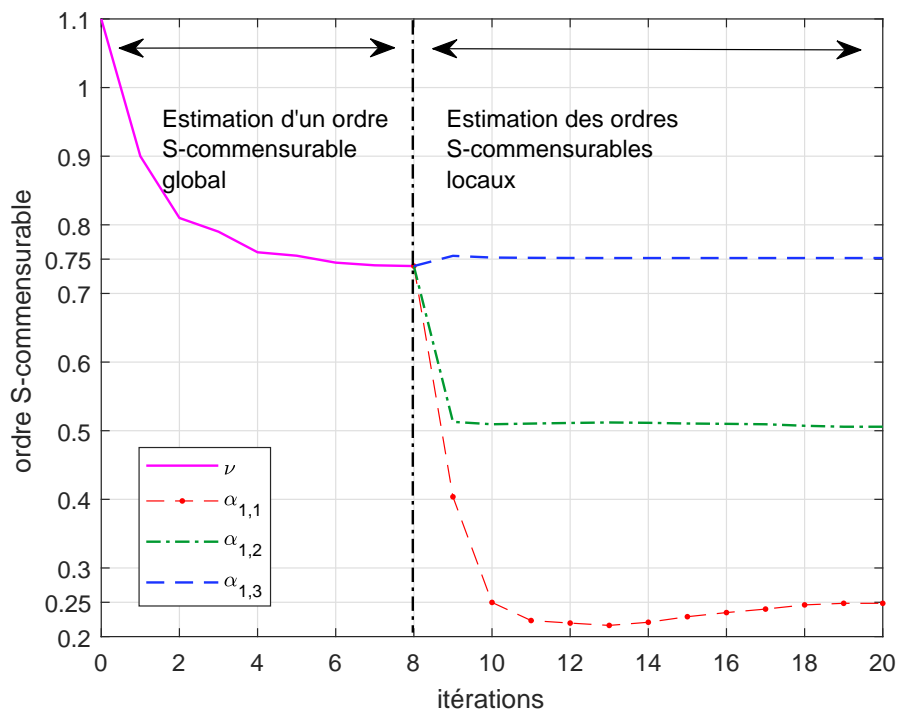


Figure 3.6 – Ordres S-commensurables en fonction du nombre d'itérations avec la méthode *MISO-oe*

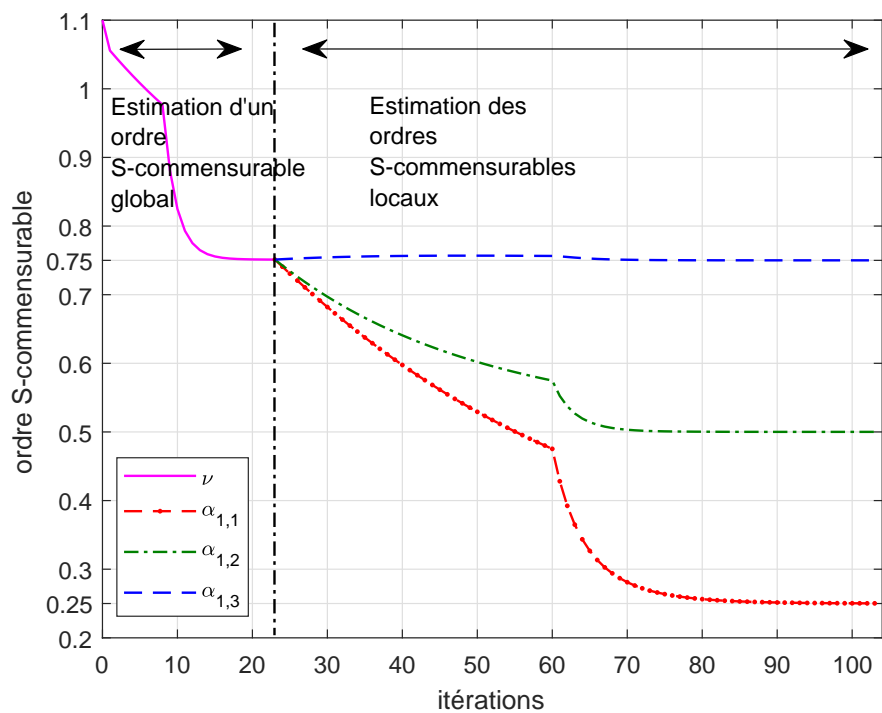


Figure 3.7 – Ordres S-commensurables en fonction du nombre d'itérations avec la méthode *MISO-oosrivcf*

Tableau 3.2 – Simulation de Monte Carlo de 100 réalisations pour l'estimation des coefficients et des ordres S-commensurables locaux avec les deux méthodes *MISO-oe* et *MISO-oosrivcf* ($\bar{\theta}$ est la moyenne et $\hat{\sigma}_\theta$ est l'écart type) avec un RBS=−20dB

	True	<i>MISO-oe</i>		<i>MISO-oosrivcf</i>	
	θ	$\bar{\theta}$	$\hat{\sigma}_\theta$	$\bar{\theta}$	$\hat{\sigma}_\theta$
$b_{0,1}$	1	1.0079	0.1010	1.0047	0.0919
$a_{1,1}$	3	3.0366	0.4073	3.0125	0.3623
$\alpha_{1,1}$	0.25	0.2491	0.0135	0.2498	0.0105
$b_{0,2}$	2	2.0082	0.0523	1.9989	0.0439
$a_{1,2}$	2	2.0107	0.0707	1.9988	0.0625
$\alpha_{1,2}$	0.5	0.4987	0.0068	0.5002	0.0056
$b_{0,3}$	5	4.9998	0.0116	5.0117	0.0098
$a_{1,3}$	1	1.0005	0.0050	1.0009	0.0034
$\alpha_{1,3}$	0.75	0.7504	0.0025	0.7499	0.0012

oosrivcf.

3.5.3 Estimation des coefficients et des ordres de dérivation d'un système non S-commensurable

Considérons maintenant le système MISO non S-commensurable suivant :

$$S' : \begin{cases} G_1(s) = \frac{1}{0.5s^{2.8} + 1.5s^{1.2} + 1} \\ G_2(s) = \frac{0.5}{0.4s^{2.5} + 1.5s^{1.1} + 1} \\ G_3(s) = \frac{1.5}{0.6s^{1.6} + 1.5s^{0.7} + 1} \end{cases} \quad (3.116)$$

Les signaux d'entrée tracés sur la figure 3.4, sont à nouveau utilisés pour l'identification du système. La sortie $y_k(t)$, est corrompue par un bruit blanc gaussien de moyenne nulle avec un rapport signal sur bruit RBS de −15dB.

La structure du modèle est fixée, comme étant la vraie, à :

$$G_k(s) = \frac{b_{0,k}}{1 + a_{1,k}s^{\alpha_{1,k}} + a_{2,k}s^{\alpha_{2,k}}}, \quad \text{pour } k = 1, 2, 3. \quad (3.117)$$

L'objectif est d'estimer tous les ordres de dérivation ainsi que les coefficients de tous les sous-systèmes.

Lors de l'estimation d'un modèle sans connaissance préalable des ordres de dérivation,

il est recommandé d'estimer d'abord un ordre S-commensurable global qui est ensuite utilisé comme valeur initiale pour estimer les ordres S-commensurables locaux. Ces derniers sont utilisés pour initialiser l'étape finale de l'algorithme estimant tous les ordres.

3.5.3.1 Méthode *MISO-oe*

La figure 3.8 illustre l'évolution de l'estimation de tous les ordres de différenciation : dans la première étape, un ordre commensurable global ν est estimé ; puis des ordres commensurables locaux dans la deuxième étape ($\alpha_{1,1}$ pour G_1 , $\alpha_{1,2}$ pour G_2 et $\alpha_{1,3}$ pour G_3). Enfin, à la dernière étape, la contrainte de S-commensurabilité est relâchée et tous les ordres de dérivation sont correctement estimés.

La figure 3.9 illustre les évolutions du critère par rapport aux trois étapes, et confirme que tous les paramètres, aussi bien les ordres de dérivation que les coefficients, ont été correctement estimés avec l'algorithme *MISO-oosrivcf* complet.

- pour la première étape, lorsqu'un ordre S-commensurable global est estimé pour tous les sous-systèmes, la fonction coût $J_{dB} = -3.88\text{dB}$, donc la norme ℓ_2 de l'erreur de modélisation est d'environ 11.12dB (voir le critère J_1 dans la figure 3.9) ;
- pour la deuxième étape, lorsque les ordres S-commensurables locaux sont estimés, la fonction coût $J_{dB} = -7.25\text{dB}$, donc la norme ℓ_2 de l'erreur de modélisation a diminué à 7.75dB (voir le critère J_2 dans la figure 3.9) ;
- pour la dernière étape, lorsque tous les ordres de dérivation sont estimés sans aucune contrainte, la fonction coût $J_{dB} = -14.98\text{dB}$, de sorte que la norme ℓ_2 de l'erreur de modélisation est quasi nulle (voir le critère J_3 dans la figure 3.9).

3.5.3.2 Méthode *MISO-oosrivcf*

La figure 3.10 illustre l'évolution de l'estimation de tous les ordres de dérivation : dans la première étape, un ordre commensurable global ν est estimé ; puis des ordres commensurables locaux dans la deuxième étape ($\alpha_{1,1}$ pour G_1 , $\alpha_{1,2}$ pour G_2 et $\alpha_{1,3}$ pour G_3). Enfin, à la dernière étape, la contrainte de S-commensurabilité est relâchée et tous les ordres de dérivation sont correctement estimés.

La figure 3.11 illustre les évolutions du critère par rapport aux trois étapes, et confirme que tous les paramètres, aussi bien les ordres de dérivation que les coefficients, ont été correctement estimés avec l'algorithme *MISO-oosrivcf* complet.

- pour la première étape, lorsqu'un ordre S-commensurable global est estimé pour tous les sous-systèmes, la fonction coût $J_{dB} = -11.18\text{dB}$, donc la norme ℓ_2 de l'erreur de modélisation est d'environ 3.82dB (voir le critère J_1 dans la figure 3.11) ;

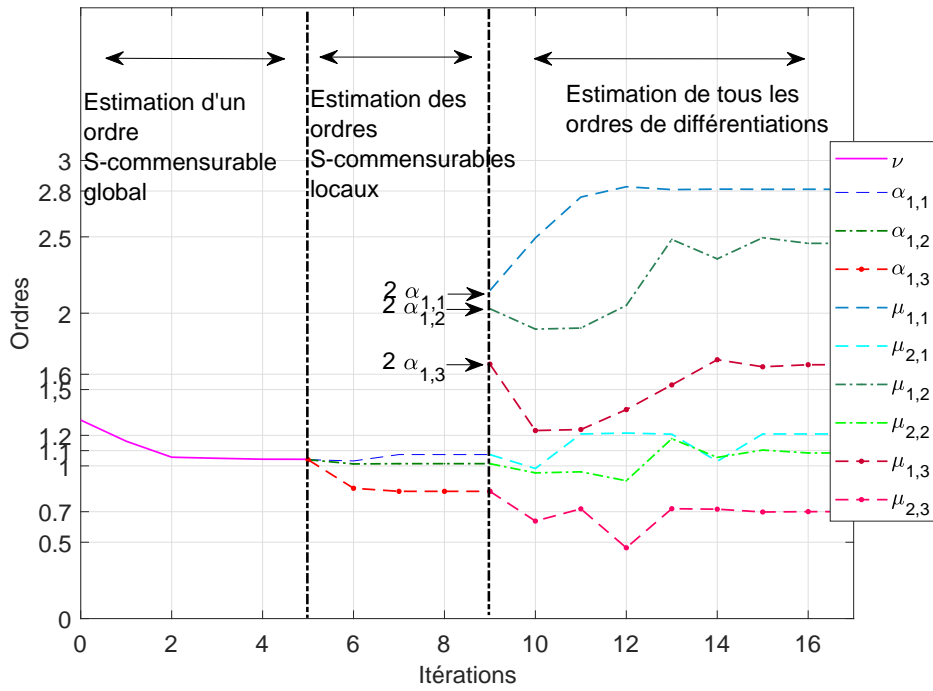


Figure 3.8 – Estimation de tous les ordres de dérivations en fonction du nombre d'itérations avec la méthode *MISO-oe*

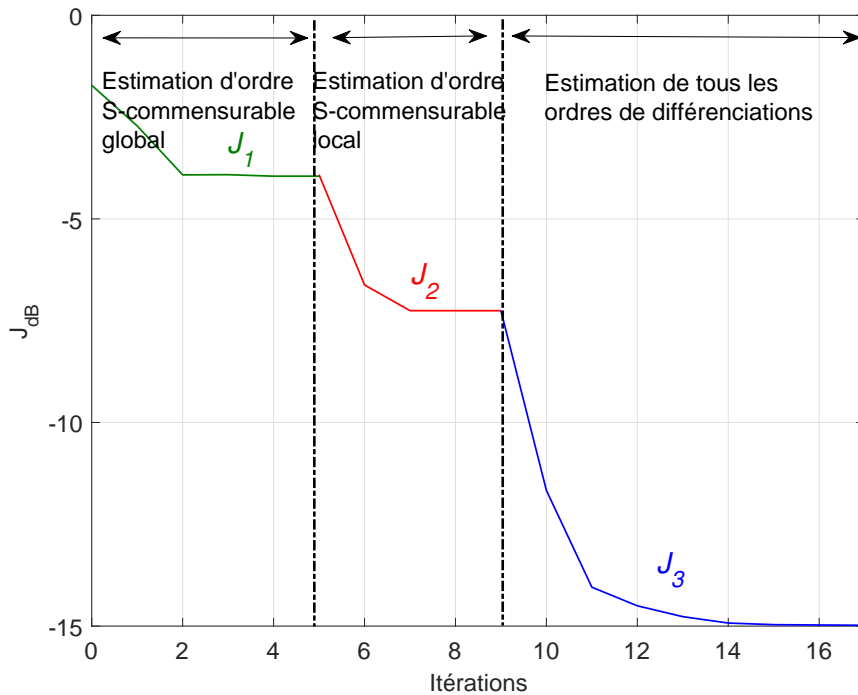


Figure 3.9 – Fonction coût en fonction du nombre d'itérations la méthode *MISO-oe*

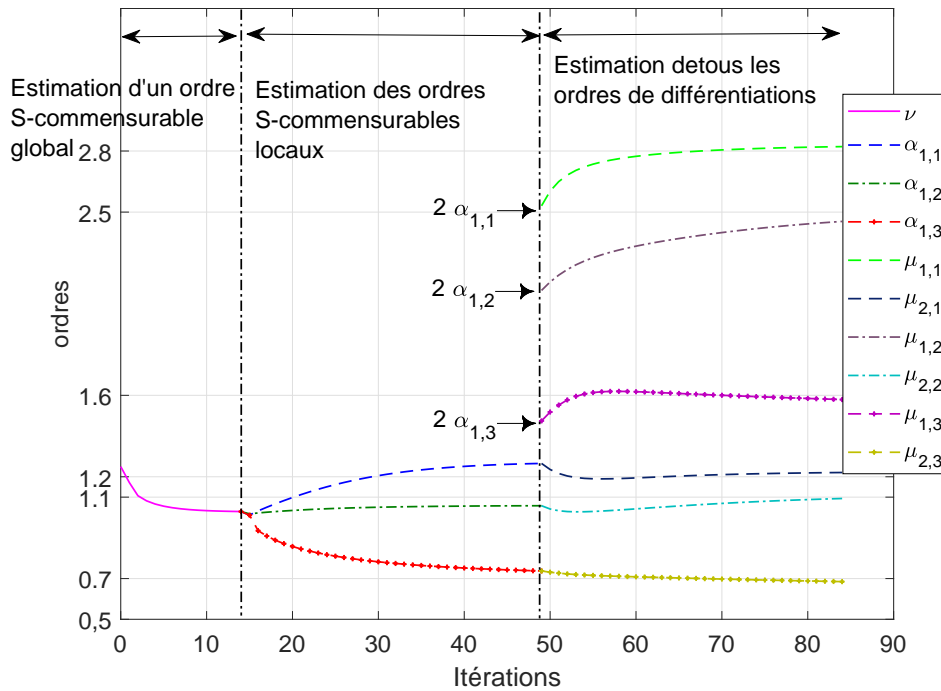


Figure 3.10 – Estimation de tous les ordres de dérivation en fonction du nombre d'itérations *MISO-oosrivcf*

- pour la deuxième étape, lorsque les ordres S-commensurables locaux sont estimés, la fonction coût $J_{dB} = -12.39\text{dB}$, donc la norme ℓ_2 de l'erreur de modélisation a diminué à 2.6dB (voir le critère J_2 dans la figure 3.11) ;
- pour la dernière étape, lorsque tous les ordres de dérivation sont estimés sans aucune contrainte, la fonction coût $J_{dB} = -15.02\text{dB}$, de sorte que la norme ℓ_2 de l'erreur de modélisation est quasi nulle (voir le critère J_3 dans la figure 3.11).

3.5.3.3 Comparaison des deux méthodes

Une simulation de Monte Carlo avec 100 essais a été réalisée et les résultats sont fournis dans le tableau 4.5, avec une valeur moyenne proche des vrais paramètres et une très faible variance d'estimation. Les deux algorithmes proposés pour l'estimation de l'ordre de dérivation et des coefficients ont convergé vers les vrais paramètres. Il est important de noter que la méthode *MISO-oe* converge plus rapidement (17 itérations) que la méthode *MISO-oosrivcf* avec des variances et des moyennes très proches pour les deux méthodes. Ceci est dû à la prise en compte des fonctions de sensibilité croisées (coefficients et ordres de dérivation) dans la matrice hessienne de la méthode *MISO-oe*, contrairement à la méthode *MISO-oosrivcf*. Aussi, l'erreur de modélisation dans les premières phases est

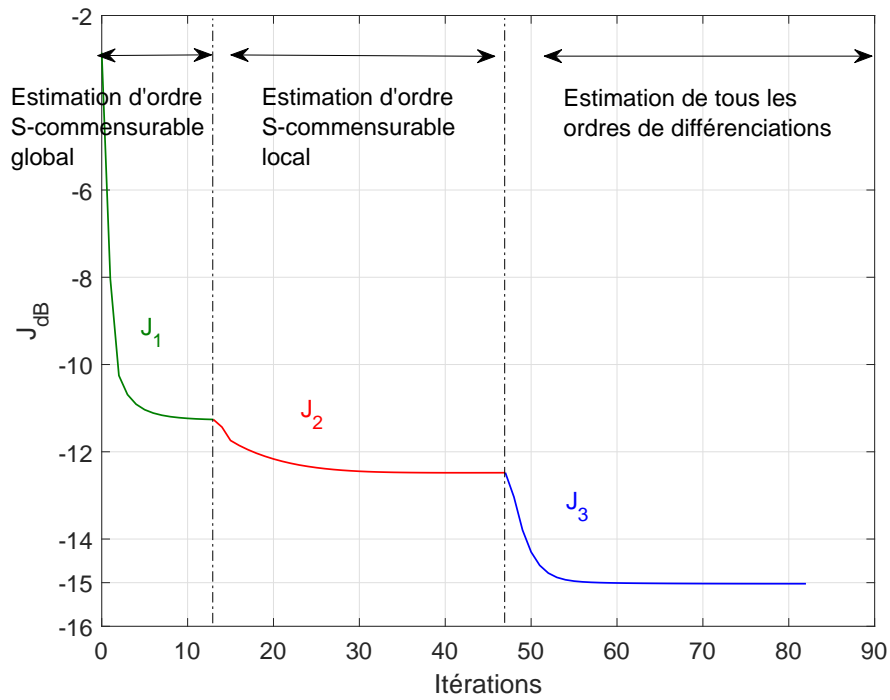


Figure 3.11 – Fonction de coût en fonction du nombre d'itérations de la méthode *MISO-oosrivcf*

plus importante pour la méthode *MISO-oe* comparés à la méthode *MISO-oosrivcf*.

Tableau 3.3 – Simulation de Monte Carlo de 100 réalisations pour l'estimation des coefficients et de tous les ordres de dérivations avec les deux méthodes *MISO-oe* et *MISO-oosrivcf* ($\bar{\theta}$ est la moyenne et $\hat{\sigma}_\theta$ est l'écart type) avec un RBS=-15dB

	True	<i>MISO-oe</i>		<i>MISO-oosrivcf</i>	
	θ	$\bar{\theta}$	$\hat{\sigma}_\theta$	$\bar{\theta}$	$\hat{\sigma}_\theta$
$b_{0,1}$	1	1.0018	0.0110	1.0001	0.0098
$a_{1,1}$	0.5	0.5028	0.0192	0.5022	0.0106
$a_{2,1}$	1.5	1.5021	0.0112	1.5023	0.0152
$\mu_{1,1}$	2.8	2.7988	0.0145	2.7992	0.0161
$\mu_{2,1}$	1.2	1.1985	0.0164	1.1981	0.0108
$b_{0,2}$	0.5	0.4995	0.0158	0.5014	0.0145
$a_{1,2}$	0.4	0.4031	0.0571	0.4075	0.0452
$a_{2,2}$	1.5	1.4997	0.0466	1.5047	0.0479
$\mu_{1,2}$	2.5	2.5068	0.0759	2.4958	0.0685
$\mu_{2,2}$	1.1	1.1009	0.0415	1.0968	0.0356
$b_{0,3}$	1.5	1.5021	0.0336	1.4998	0.0298
$a_{1,3}$	0.6	0.6121	0.1253	0.6099	0.1234
$a_{2,3}$	1.5	1.4891	0.1088	1.4892	0.1023
$\mu_{1,3}$	1.6	1.5958	0.1109	1.6023	0.1065
$\mu_{2,3}$	0.7	0.6959	0.0538	0.6990	0.0501

3.6 Conclusion

Tout d'abord, deux méthodes d'identification pour estimer les coefficients d'un système différentiel MISO non entier lorsque la sortie est corrompue par un bruit blanc additif sont présentées dans ce chapitre :

- la méthode optimale de la variable instrumentale *MISO-srivcf*.
- la méthode à erreur de sortie *MISO-oe*.

Ces deux méthodes ont été utilisées lorsque tous les ordres de dérivation sont fixés en fonction des connaissances préalables.

Lorsque les connaissances préalables ne permettent pas de fixer les ordres, deux autres algorithmes ont été développés :

- un algorithme à deux étapes, qui combine simultanément l'estimation des coefficients par l'algorithme *MISO-srivcf* et l'estimation de l'ordre de dérivation par un algorithme basé sur le gradient (*MISO-oosrivcf*);
- une méthode à erreur de sortie pour estimer directement tous les paramètres de la fonction de transfert des modèles MISO non entiers (*MISO-oe*).

Estimer directement tous les paramètres d'un système MISO peut conduire à des optimums locaux à cause d'un nombre élevé de paramètres. Par conséquent trois variantes, pour chaque algorithme, ont été proposées : la première permet d'estimer un ordre S-commensurable global pour l'ensemble du système non entier MISO, La deuxième variante permet d'estimer des ordres S-commensurables locaux pour chaque sous-système, et enfin la dernière permet d'estimer tous les ordres de dérivation sans contrainte de S-commensurabilité. Les algorithmes proposés ont été validés par une analyse de Monte Carlo.

Ces contributions principales, ont donné lieu à deux communications, dans les conférences internationales *21st IFAC World Congress* [Mayoufi et al., 2020b] et *17th International Multi-Conference on Systems, Signals Devices (SSD 2020)* [Mayoufi et al., 2020a], ainsi que deux articles dans les revues *Calculus and Applied Analysis (FCAA 2021)* [Mayoufi et al., 2021] et *Automatica 2022* [Victor et al., 2022] (accepté provisoirement).

Chapitre 4

Application à l'identification du système climatique terrestre

Sommaire

4.1	Introduction	105
4.2	Description des proxies	105
4.2.1	Définition d'un <i>Proxy</i>	105
4.2.2	Proxies de l'activité humaine	106
4.2.3	Proxies de l'activité volcanique	108
4.2.4	Proxies de l'activité solaire	109
4.2.5	Proxies de température	110
4.3	Signaux d'entrée et de sortie	117
4.3.1	Facteurs de forçage (ou entrées)	118
4.3.2	Sortie	123
4.3.3	Sélection des données	124
4.4	Application des méthodes <i>MISO-oe/MISO-oosrivcf</i> sur les données climatiques	126
4.4.1	Période 1850 – 2018	126
4.4.2	Période 1000 – 2018	135
4.5	Prédiction	143
4.5.1	Premier scénario : entrées figées	143
4.5.2	Deuxième scénario : activité humaine en évolution	144
4.5.3	Troisième scénario : activité solaire en évolution	145
4.5.4	Quatrième scénario : activité volcanique en évolution	146

4.5.5	Cinquième scénario : toutes les entrées en évolution	147
4.6	Conclusion	148

4.1 Introduction

L'évolution actuelle, et donc future du modèle climatique terrestre est un sujet d'actualité. Le GIEC (Groupe d'Experts Intergouvernemental sur l'Evolution du Climat) s'intéresse au changement climatique terrestre depuis la fin des années 80. Les rapports du GIEC avertissent la communauté scientifique d'une élévation significative de la température terrestre globale, jamais atteinte depuis plus de deux millions d'années. Cette élévation est alarmante et peut conduire à des catastrophes climatiques irréversibles. De plus, ces rapports du GIEC se basent sur des Modèles de Circulation Générale du climat.

Il est proposé, dans ce chapitre, de réaliser la modélisation du climat terrestre d'un point de vue de l'automaticien : un modèle dynamique est recherché afin de trouver une approximation fidèle du comportement du système climatique par l'identification d'un système non entier.

Dans ce contexte, l'identification nous permet d'obtenir un modèle mathématique à partir de mesures, pour pouvoir interpréter les évolutions climatiques actuelles. Or, les mesures instrumentales, à savoir par satellite, ne sont disponibles que depuis la seconde moitié du $XX^{\text{ème}}$ siècle. Une méthode permettant de reconstruire des données avant les enregistrements par instrumentation est nécessaire : la méthode de substitution ou la méthode dite par "*Proxy*" est alors utilisée.

L'objectif de ce travail est de déterminer un modèle climatique terrestre à partir de mesures ainsi reconstruites.

Les *Proxies* sont définis et présentés en section 4.2. La section 4.3 décrit les données d'entrées et de sortie et la sélection des données qui seront utilisées pour l'identification du système climatique terrestre. La section 4.4 développe l'application des deux méthodes d'identification, décrites au chapitre 3, à savoir la méthode *MISO-oe* et la méthode *MISO-oosrvcf* qui seront appliquées sur les données climatiques en proposant différentes structures de modèles (première et deuxième espèces). Enfin, une étude sur la prédiction de l'évolution de la température terrestre est proposée en section 4.5 pour finalement conclure.

4.2 Description des proxies

4.2.1 Définition d'un *Proxy*

Définition 4.1 (*Proxy* [Lehu, 2012]) *Un proxy est une expression anglo-saxonne désignant un indicateur, un signal ou une mesure illustrative d'un phénomène.*

Le *Proxy* ("proxies" au pluriel) est utilisé principalement lorsque l'on ne dispose pas

de mesures directes, précises et objectives, d'où l'expression synonyme parfois utilisée d'"indicateur indirect" [Lehu, 2012].

Les proxies paléoclimatiques (paléodonnées) sont des matériaux physiques, chimiques et biologiques conservés dans le registre géologique (les archives paléoclimatiques) qui peuvent être analysés et corrélés avec les paramètres climatiques utilisés pour retracer les caractéristiques climatiques [Foucault, 2016], à savoir : l'activité humaine, l'activité volcanique et l'activité solaire.

4.2.2 Proxies de l'activité humaine

Les changements dans les concentrations atmosphériques passées de dioxyde de carbone peuvent être déterminés en mesurant la composition de l'air emprisonnée dans les carottes glaciaires. La figure 4.1 illustre une carotte issue du site de Law Dome, en Antarctique Est : $66^{\circ}46'08'' E, 112^{\circ}48'28'' S$. Le site de Law Dome répond à plusieurs caractéristiques souhaitables d'un site de glace, à savoir : une faible concentration d'impuretés, une fonte négligeable de la surface de la carotte de glace et la plus importante un taux d'accumulation de neige élevé. Essentiellement, sur ce site, il existe trois roches glaciaires forées DE08, DE08-2 et DSS illustrées sur la figure 4.2.

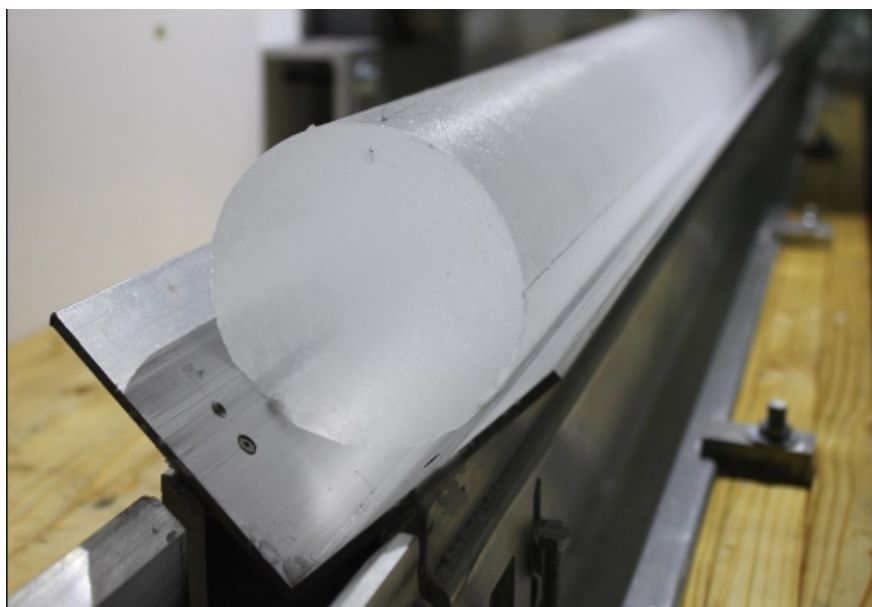


Figure 4.1 – Carottes glaciaires @Helle Astrid Kjær

Le tableau 4.1 illustre les caractéristiques des trois roches [Etheridge *et al.*, 1996].

Des bulles d'air ont été extraites des échantillons de carottes glaciaires en utilisant la technique "râpe de fromage" ("cheese grater" en anglais voir [Etheridge *et al.*, 1996]). Cet air a été pompé dans des conteneurs. Les échantillons d'air piégés ont été analysés par

Roche	Année de forage	Diamètre d'une carotte de glace (mm)	Profondeur (m)
DE08	1987	200	234
DSS	1988-1993	100-200	1200
DE08-2	1993	100	243

Tableau 4.1 – Caractéristiques des trois roches issues du site de Law Dome

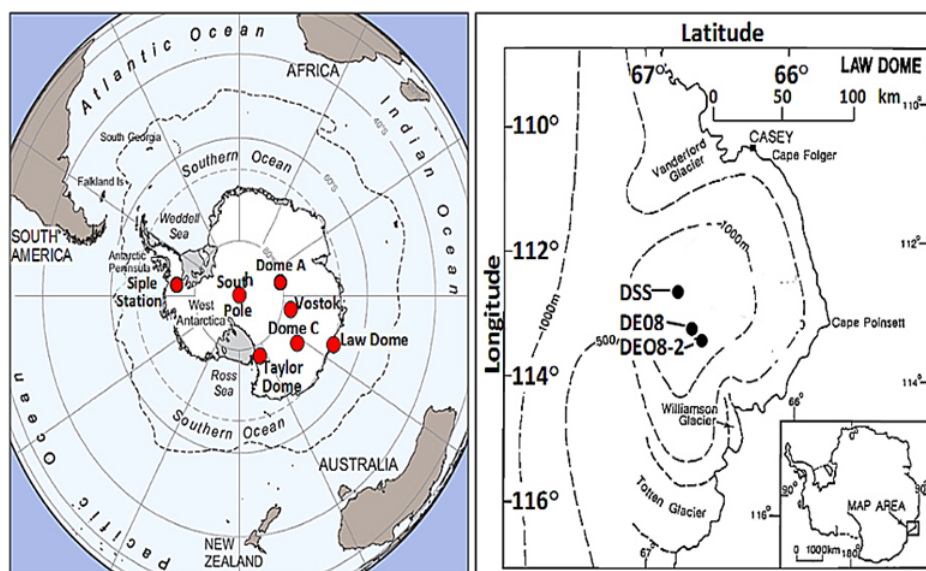


Figure 4.2 – Site de Law Dome et la position des trois roches glaciaires [Etheridge *et al.*, 1996, figure. 1]

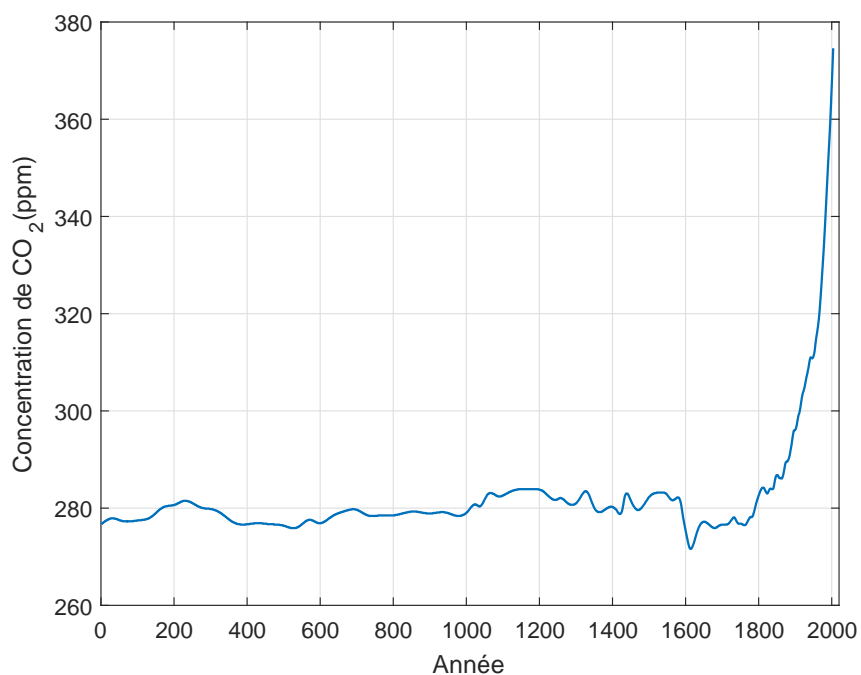


Figure 4.3 – Reconstruction de la concentration de CO_2 par *Proxy*

chromatographie en phase gazeuse et les concentrations en gaz ont été mesurées sur les échelles d'étalonnage maintenues par [Francey *et al.*, 2003]. Cette reconstruction couvre une période de mille an. Les auteurs de [MacFarling Meure *et al.*, 2006] ont corrigé et étendu les enregistrements existants de 0 à l'an 1000. De plus, ils ont augmenté la densité de données entre 1000 et 1980. La figure 4.3 illustre cette reconstruction, les mesures sont disponibles au Carbon Dioxide Information Analysis Center (CDIAC, voir [Etheridge *et al.*, 1998]).

4.2.3 Proxies de l'activité volcanique

L'épaisseur optique d'aérosol produite par les éruptions volcaniques est considérée comme un indicateur de l'activité volcanique.

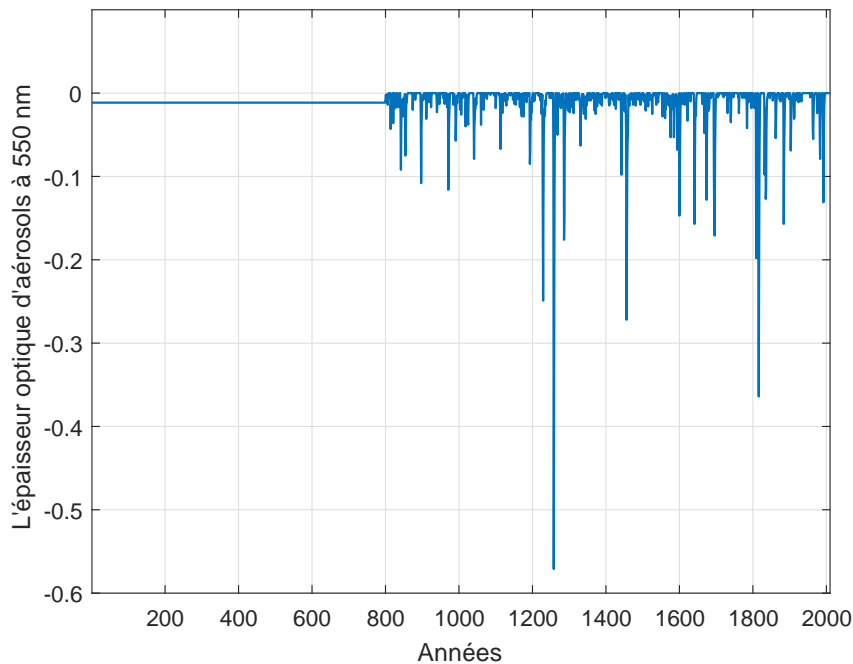
Définition 4.2 (Aérosols [Boucher et Saint-Martin, 2014]) *Les aérosols dans l'atmosphère sont l'ensemble de petites particules liquides/solides résidant dans l'air injectées par des sources naturelles provenant des volcans, des tempêtes de poussière, des feux des forêts ou bien par des sources anthropiques c'est-à-dire créées par les activités humaines telles que la combustion de combustibles fossiles, etc...*

Définition 4.3 (Épaisseur optique d'aérosols EOA [Tahiri *et al.*, 2012])

L'épaisseur optique d'aérosols (Aerosols Optical Depth en anglais) est une grandeur sans unité qui caractérise la transparence de l'atmosphère à la traversée du rayonnement solaire. Elle est définie par la fraction du rayonnement électromagnétique ou de la lumière diffusée ou absorbée par les composants de la couche atmosphérique traversée pour une longueur d'onde donnée (dans ce manuscrit la longueur d'onde considérée est égale à 550nm).

Pour une atmosphère transparente, où il n'y a presque pas de perte d'énergie, l'épaisseur optique est proche de 0. Une épaisseur optique forte signale une atmosphère relativement chargée en aérosols et est donc peu transparente.

Les changements dans l'épaisseur optique d'aérosols passées peuvent être déterminés en se basant principalement sur les enregistrements de sulfate dans les carottes de glace de l'Antarctique (voir [Crowley et Unterman, 2013]). Les carottes de glace de l'Antarctique occidental ont des taux d'accumulation de neige et de sulfate considérablement élevés. Cette reconstruction illustrée sur la figure 4.4 couvre les 1200 dernières années.

Figure 4.4 – Reconstruction de l'épaisseur optique d'aérosols par *Proxy*

4.2.4 Proxies de l'activité solaire

Les manifestations de l'activité solaire sont multiples, à savoir : la distribution spectrale IR/UV (voir la définition 4.4 pour IR, voir définition 4.5 pour UV), le magnétisme solaire et le flux d'énergie totale appelé l'irradiance solaire totale (voir définition 4.6 pour le TSI).

Définition 4.4 (Distribution spectrale IR) *La distribution spectrale IR représente la transmittance en fonction du nombre d'onde (c'est l'inverse de la longueur d'onde).*

Définition 4.5 (Distribution spectrale UV) *La distribution spectrale UV, également appelée « lumière noire » parce qu'elle n'est pas visible à l'œil nu, est un rayonnement électromagnétique d'une longueur d'onde plus courte que celle de la lumière visible.*

Définition 4.6 (Irradiance solaire totale [Fouquart, 2011a]) *L'irradiance solaire totale (notée TSI abréviation en anglais de Total Solar Irradiance) est la quantité d'énergie radiative provenant du soleil reçue par une surface de 1m^2 du sommet de l'atmosphère terrestre.*

Les changements de l'irradiance solaire totale passée et avant 1700 (date de la découverte des tâches solaires) peuvent être déterminés en se basant sur les proxies isotopiques.

Définition 4.7 (Proxies isotopique) *Les proxies isotopiques sont générés dans l'atmosphère par les rayons cosmiques dans l'atmosphère; ce rayonnement est le flux de noyaux atomiques et de particules de haute énergie qui circulent dans le milieu interstellaire. La source de ce rayonnement se situe selon les cas dans le soleil, à l'intérieur ou à l'extérieur de notre galaxie. Parmi les isotopes générés, il y a le Béryllium 10, Be^{10} , qui se produit à partir de l'interaction des rayons cosmiques avec le nitrogène et l'oxygène.*

A partir des enregistrements de Be^{10} dans les carottes de glace de l'Antarctique (stations du pôle sud), il existe trois reconstructions qui sont calibrées.

Définition 4.8 (Calibrage) *Le calibrage est l'action de régler un signal par rapport à des données de référence afin d'obtenir un comportement fidèle lors de l'enregistrement ou de la reproduction.*

Les trois reconstructions calibrées de TSI sont celles de (voir figure 4.5) :

- Brad où le taux de production de Be^{10} est utilisé pour trouver la variabilité magnétique solaire [Bard *et al.*, 2000];
- Delaygue où le taux d'accumulation de Be^{10} est utilisé pour trouver une reconstruction de TSI [Delaygue et Bard, 2011];
- Steinhilber où le taux d'accumulation de Be^{10} est utilisé pour trouver la modulation de l'intensité des rayons cosmiques dans l'héliosphère qui est en relation avec le champ magnétique solaire [Steinhilber *et al.*, 2009].

Parmi les effets des rayons cosmiques qui existent, avec la production de Be^{10} , il y a le changement d'ionisation dans l'atmosphère. [Usoskin et Kovaltsov, 2006] ont proposé une reconstruction du taux d'ionisation induite par les rayons cosmiques, mais cette reconstruction n'est pas calibrée (voir figure 4.6).

4.2.5 Proxies de température

Les reconstructions de la température enregistrées avant 1850 sont basées sur le matériel d'archives (traces laissées sur la planète par le climat dans le passé). Les mesures de substitution sont extraites de ces données.

Il existe quatre reconstructions :

- Moberg [Moberg *et al.*, 2005]
- Ljungqvist [Ljungqvist, 2010]
- Loehle [Loehle, 2007]

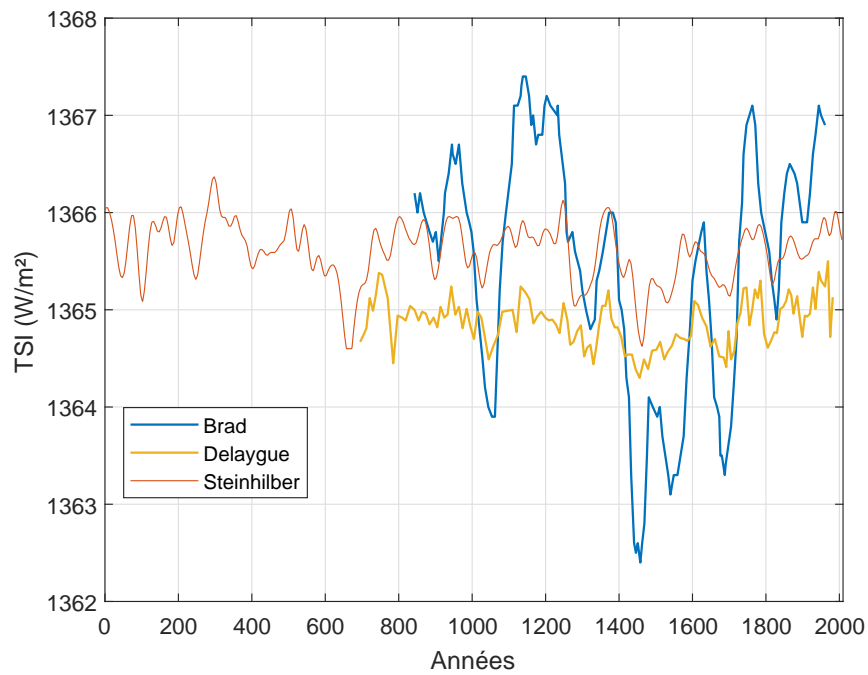


Figure 4.5 – Reconstruction de l'irradiance solaire totale (TSI) par *Proxy* calibré

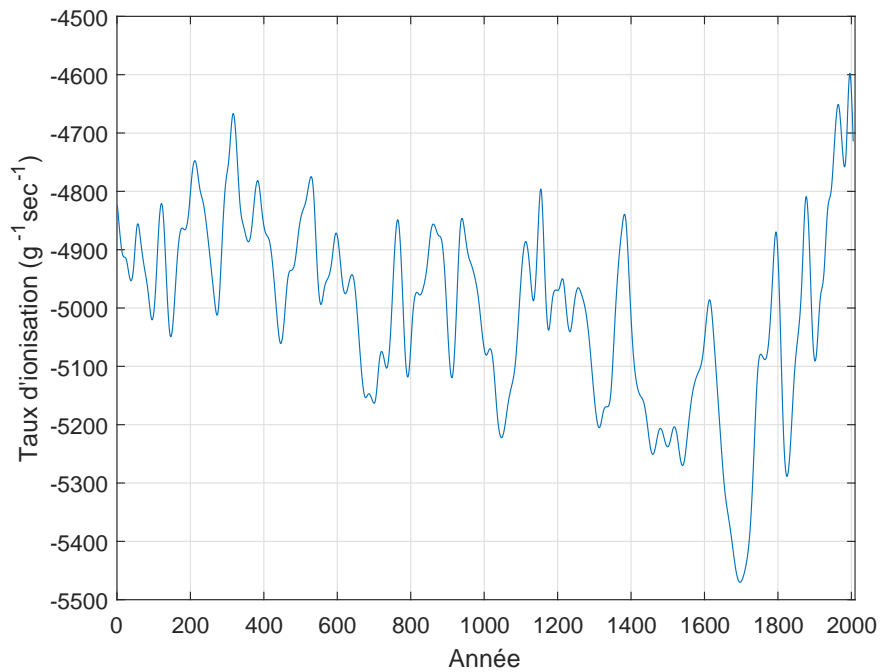


Figure 4.6 – Reconstruction de l'irradiance solaire totale par *Proxy* non calibré Usoskin

- Jones & Mann [[Mann et Jones, 2003](#)].

Ces reconstructions constituent une collection relativement représentative de la variété des reconstructions existantes.

Les stations sur terre sont à des altitudes différentes et différents pays mesurent les températures mensuelles moyennes en utilisant différentes méthodes et formules. Pour éviter les biais qui pourraient résulter de ces mesures, les températures moyennes mensuelles sont réduites à des anomalies de la période ayant la meilleure couverture sur la période [1961, 1990]. Et comme ces reconstructions vont être connectées par les mesures des stations, elles sont converties en des anomalies de température par rapport à la moyenne de la période [1961, 1990].

Certaines de ces reconstructions sont supposées être globales, d'autres sont limitées aux continents ou à l'hémisphère nord.

4.2.5.1 Reconstruction de Moberg

Dans [[Moberg et al., 2005](#)], la reconstruction est annuelle et se prolonge sur deux millénaires (de 1 jusqu'à 1979). Elle est principalement basée sur des données de cernes des arbres et notamment des sédiments lacustres et océaniques (voir figure 4.7).

Définition 4.9 (Sédiment) *Un sédiment est un dépôt meuble laissé par les eaux, le vent et les autres agents d'érosion, et qui, selon son origine, peut être fluvatile, glaciaire, lacustre ou marin. Il se compose donc de particules qui ont été emportées par les agents d'érosion, et qui se déposent en strates successives par gravité. Il s'agit du processus de sédimentation, dont l'importance dépend de facteurs climatiques, écologiques, géomorphologiques et hydrologiques.*



Figure 4.7 – Sédiments @[Andreas Steinhoff](#)

La figure 4.8 montre les emplacements des sites de données proxies avec onze enregistrements de sédiments (cercles bleus) et sept séries de cernes (triangles rouges).

La figure 4.9 illustre la reconstruction de Moberg.

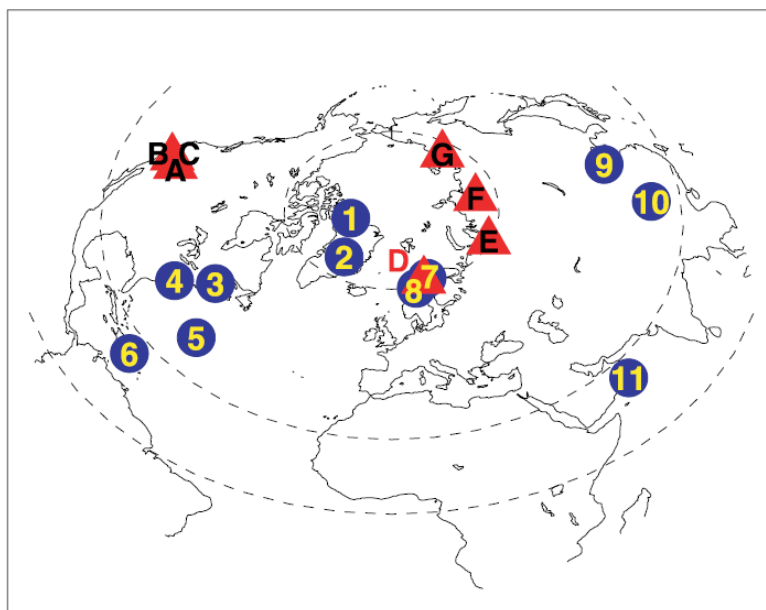


Figure 4.8 – Emplacement des proxies utilisées dans la reconstruction de Moberg. Les cercles en bleu indiquent les onze enregistrements des sédiments utilisés et les triangles rouges indiquent les sept séries des cernes utilisées [Moberg *et al.*, 2005, figure 1]

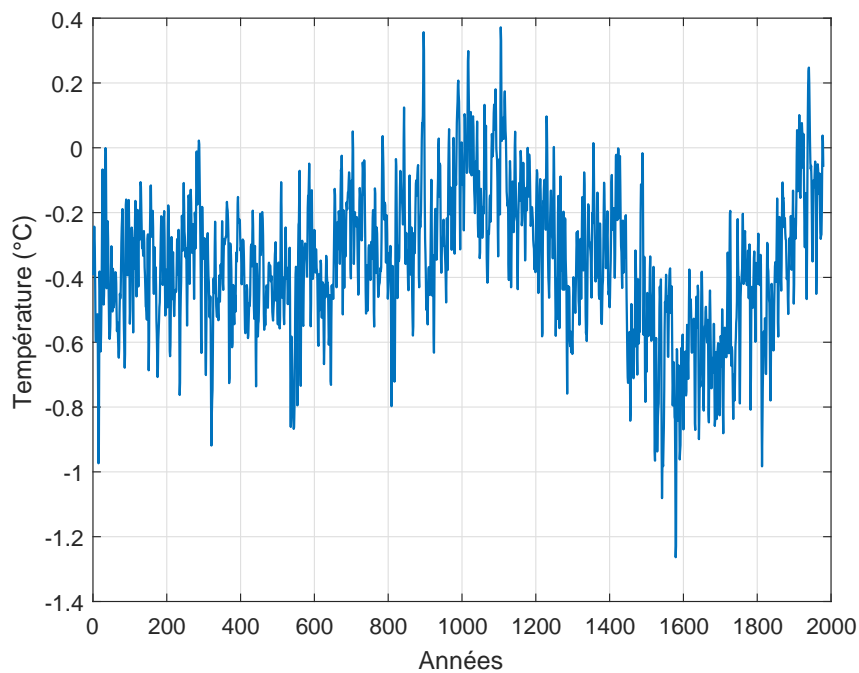


Figure 4.9 – Reconstruction de température de Moberg (variations, appelées anomalies, par rapport à la période [1961, 1990])

4.2.5.2 Reconstruction de Ljungqvist

Une nouvelle reconstruction de température à résolution décennale, couvrant les deux derniers millénaires, est présentée pour l'hémisphère nord extra tropical ($90^\circ - 30^\circ$), en utilisant de nombreux enregistrements proxies de paléo température jamais inclus auparavant dans une reconstruction de température (voir [Ljungqvist, 2010]). La figure 4.10 montre les emplacements géographiques des enregistrements (noyau de glace, cernes, sédiments marins, lacustres et grottes). La figure 4.11 illustre cette reconstruction.

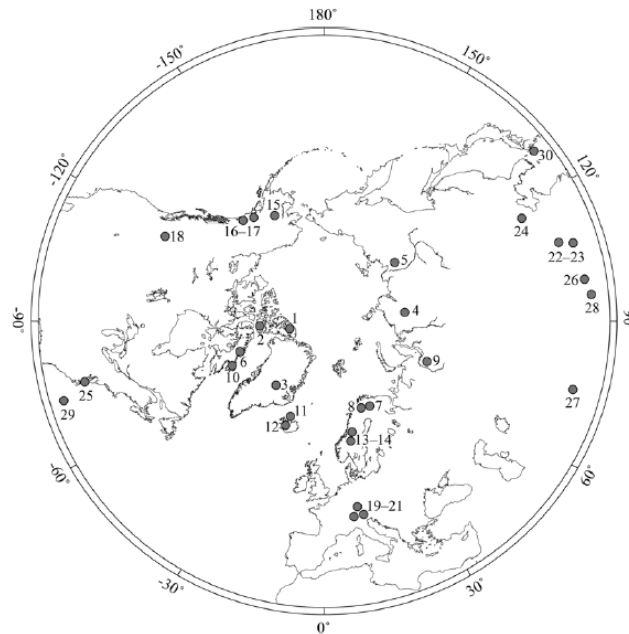


Figure 4.10 – Emplacement des proxies utilisés dans la reconstruction de Ljungqvist [Ljungqvist, 2010, figure 1]

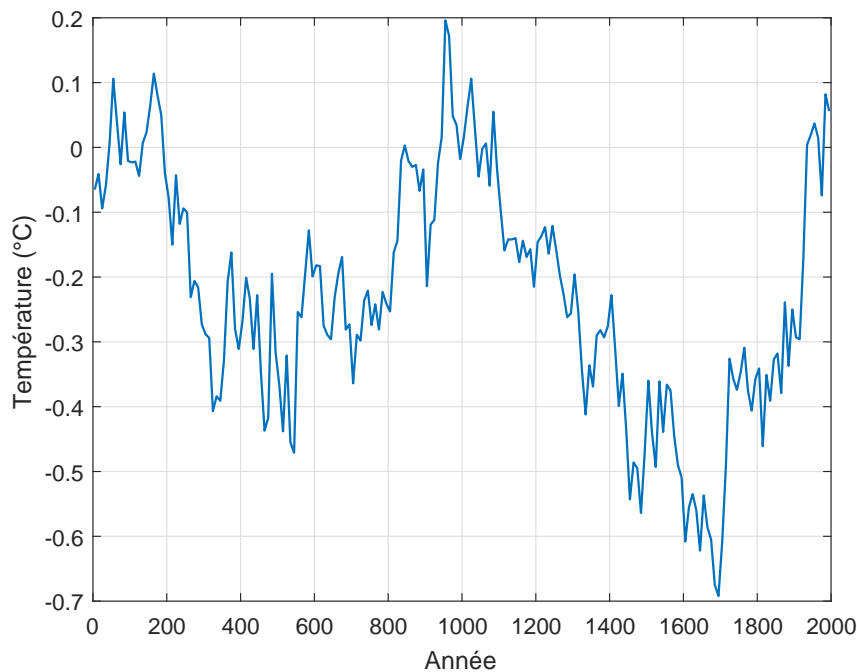


Figure 4.11 – Reconstruction de température par Ljungqvist

4.2.5.3 Reconstruction de Loehle

[Loehle, 2007] a obtenu des données pour de longues séries préalablement calibrées et converties en température. Les séries utilisées sont des températures : du pollen de Conroy Lake ; de Sargasso Sea ; de la mer des Caraïbes ; les diatomées du lac Tsuolbmajavri ; épaisseur de la couche de la grotte de Shihua ; données de spéléothème d'une grotte sud-africaine ; température moyenne pour l'Amérique du Nord basée sur les profils polliniques ; une reconstruction phénologique à partir de la Chine et les données sur les isotopes de l'oxygène de la stalagmite de la grotte de Spannagel. Un ensemble de séries est donné avec une couverture géographique assez large et basée sur plusieurs proxies. La figure 4.12 illustre cette reconstruction.

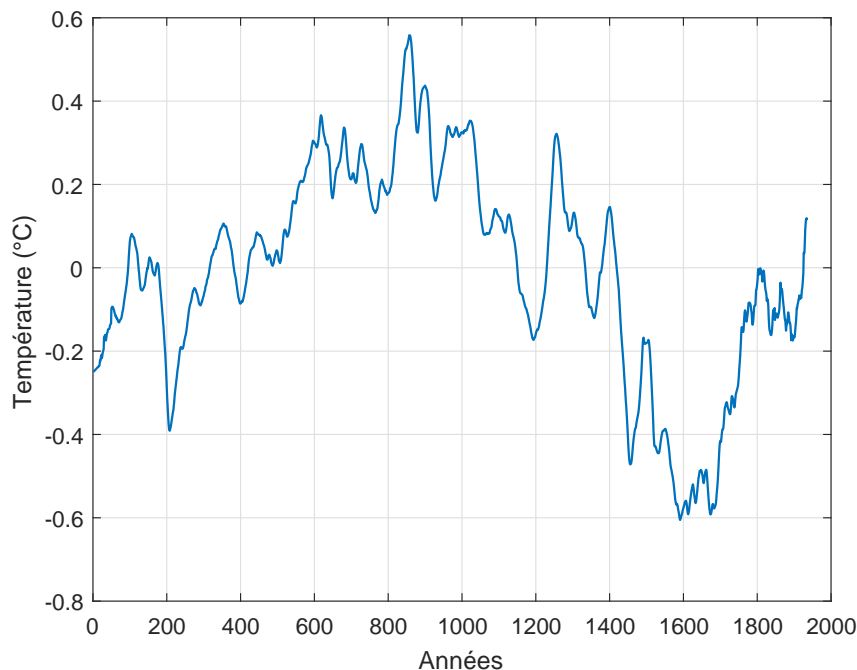


Figure 4.12 – Reconstruction de température par Loehle

4.2.5.4 Reconstruction de Jones & Mann

Les auteurs dans [Mann et Jones, 2003] ont présenté une reconstruction de la température des surfaces moyennes des hémisphères nord et sud au cours des deux derniers millénaires.

Pour l'hémisphère nord, ils utilisent des reconstructions de température de 8 régions distinctes : reconstruction composite multi-*Proxy* des températures moyennes sur l'Asie de l'Est sur la base d'un ensemble de 11 données historiques, de sédiments lacustres, de cernes et de carottes glaciaires provenant de Chine, du Japon, du plateau tibétain et de Taïwan ; la reconstruction de la température des cernes des arbres, normalisée de façon conservatrice, depuis la Mongolie ; la reconstruction de la température des cernes des arbres de l'Eurasie septentrionale ; la reconstruction de la température des cernes des arbres en Amérique du Nord ; la reconstruction décennale de températures de l'est de l'Amérique du Nord ; le registre des isotopes de l'oxygène contenus dans les carottes de glace empilées depuis l'ouest du Groenland et les reconstructions de températures de forage de glace à partir du sud du Groenland et du centre du Groenland.

Pour l'hémisphère sud, ils utilisent des reconstructions de température de 5 régions distinctes : les reconstitutions de températures de saison chaude normalisées pour la Tasmanie ; la reconstruction des cernes des arbres en Amérique du Sud ; la reconstruction de la température des cernes des arbres en saison chaude pour le sud de la Nouvelle

Zelande; l'estimation de la température des isotopes de l'oxygène des carottes de glace pour Law Dome, Antarctique; l'estimation de la température de l'oxygène des carottes de glace pour Quelccaya, Pérou. La figure 4.13 illustre cette reconstruction.

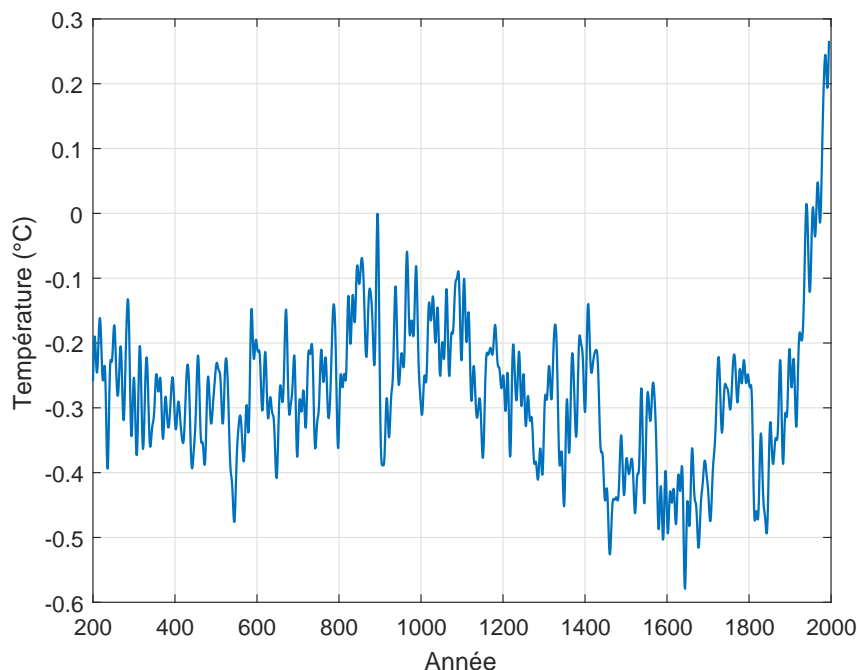


Figure 4.13 – Reconstruction de température par Jones & Mann

4.3 Signaux d'entrée et de sortie

Définition 4.10 (Forçage [Fouquart, 2011b]) *un forçage est une action qui agit (qui force) sur un système dynamique et peut perturber son état d'équilibre.*

En climatologie, on parle de forçage pour désigner les perturbations dans l'équilibre énergétique de la terre. Le système réagit à ces forçages par des variations de température [Fouquart, 2011b].

Ces facteurs de forçages sont considérés comme les signaux d'entrée du système climatique terrestre et la température comme la sortie.

Il existe plusieurs facteurs de forçage pour notre planète, ces forçages peuvent être naturels ou d'origine humaine. Parmi les forçages naturels, les variations de l'ensoleillement, elles-mêmes causées soit par la variation de l'intensité du rayonnement émis par le soleil soit par la variation de la distance Terre-Soleil, et parmi les forçages anthropiques, on trouve les émissions des Gaz à Effet de Serre (GES) et les émissions d'aérosols.

Les scientifiques combinent des reconstructions de paléoclimats à base de *Proxy* avec des enregistrements par instrumentation (tels que des lectures de thermomètre et de pluviométrie) pour élargir leur compréhension de la variabilité climatique avant que l'homme commence à les mesurer. Ces reconstructions du climat et de l'environnement passées couvrent toutes les échelles de temps, des variations d'une année à l'autre à celles qui se sont produites pendant des millions d'années. Ces données facilitent la compréhension des variations du système climatique terrestre au cours du temps.

4.3.1 Facteurs de forçage (ou entrées)

4.3.1.1 Activité humaine

Définition 4.11 (Effet de serre) *L'effet de serre est un phénomène de piégeage de la chaleur qui se produit naturellement dans l'atmosphère. L'atmosphère terrestre ressemble à une couverture qui garde la planète au chaud. Sans l'effet de serre, la terre aurait une température moyenne glaciale de -19°C au lieu de la température douce de 14°C . L'effet de serre est illustré sur la figure 4.14.*

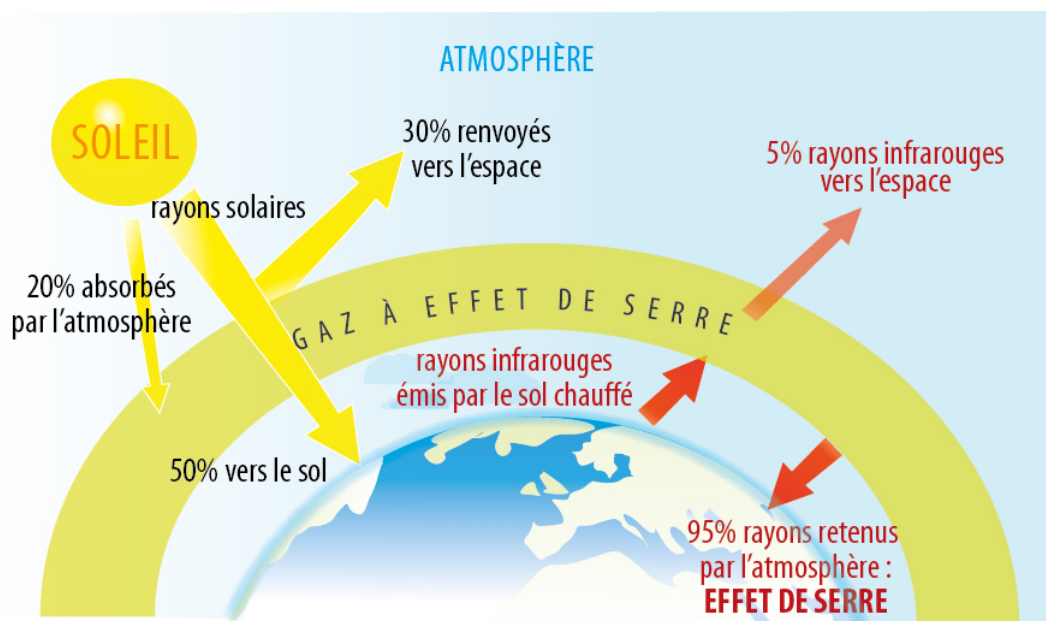


Figure 4.14 – Effet de serre @Sophie Juvenon

Définition 4.12 (Gaz à effet de serre (GES)) *un gaz à effet de serre est le nom donné à un groupe de gaz libérés dans l'atmosphère, qui contribuent à l'effet de serre. Certains gaz sont produits par des phénomènes naturels, alors que d'autres sont entièrement d'origine anthropique.*

Le dioxyde de carbone (CO_2) est sans doute le GES le plus connu qui est à la fois d'origine naturelle humaine (anthropique) et des phénomènes naturels. Par exemple, le CO_2 est produit dans le processus de la décomposition des matières animales et végétales (origine naturelle) et pendant la combustion des combustibles fossiles (origine humaine). Il accentue la capacité de l'atmosphère à conserver la chaleur du soleil par effet de serre.

Le centre de Mauna Loa mesure les concentrations atmosphériques de CO_2 depuis 1958. Pour déterminer cette concentration, la démarche suivante est suivie : l'air est lentement pompé à travers une petite cellule cylindrique avec des fenêtres plates aux deux extrémités. La lumière infrarouge est transmise au travers d'une fenêtre et est mesurée par un détecteur qui est sensible au rayonnement infrarouge ; or, le CO_2 absorbe la lumière infrarouge laissant moins de lumière pour frapper le détecteur. Enfin, le signal du détecteur (en volts) est transformé en une mesure de la quantité de CO_2 dans la cellule.

Le signal est utilisé dans la suite et est considéré comme la connexion de deux enregistrements afin d'obtenir un ensemble de données d'une seule pièce qui est représenté sur la figure 4.15.

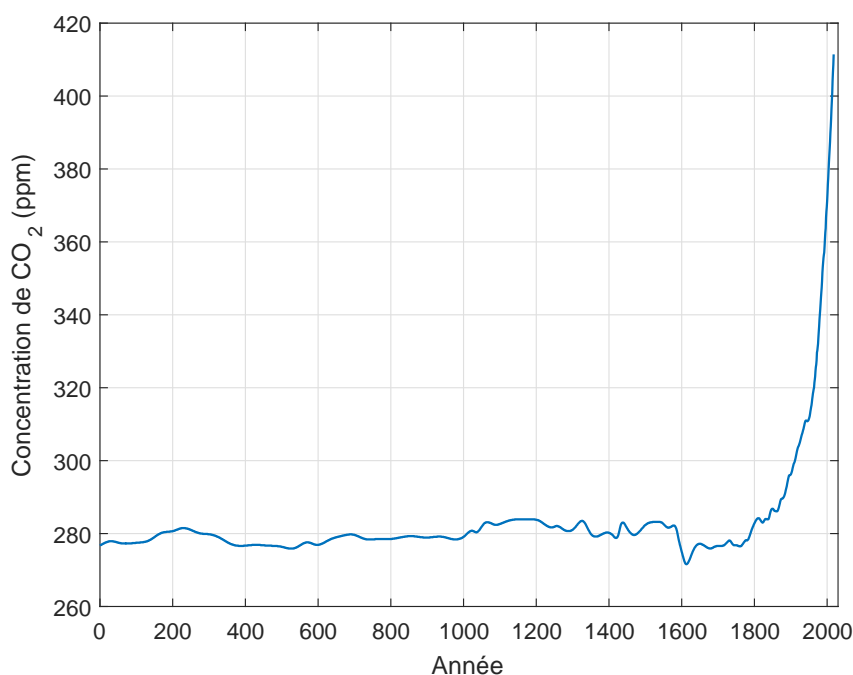


Figure 4.15 – Reconstruction de la concentration atmosphérique de CO_2

4.3.1.2 Activité volcanique

Les aérosols modifient le climat de plusieurs manières. Le premier effet est observé à travers les phénomènes de diffusion et d'absorption du rayonnement solaire, ce qui modifie le bilan radiatif de la planète. Cet effet est connu sous le nom d'effet direct des

aérosols et se produit principalement en l'absence de nuage. La diffusion par les aérosols dévie le rayonnement solaire dans toutes les directions. Une partie de ce rayonnement est renvoyée vers le haut, ce qui rend la planète plus réfléchissante vue de l'espace et entraîne un refroidissement du climat. En revanche, le deuxième effet, l'absorption du rayonnement solaire par les aérosols rend la planète plus sombre et conduit donc à un réchauffement du climat.

L'interaction des aérosols avec le rayonnement solaire contribue à perturber l'équilibre énergétique du système terre-atmosphère. C'est ce qu'on appelle le forçage radiatif direct.

[Sato *et al.*, 1993] a prolongé les mesures par les satellites vers 1850 pour trouver une reconstruction des changements dans l'épaisseur optique d'aérosols plus fiable, cette reconstruction se prolonge de 1850 à 2012 (voir [Solomon *et al.*, 2011]).

Les enregistrements des satellites ont été utilisés dans la calibration des enregistrements de sulfate dans les carottes glaciaires de l'Antarctique (voir [Crowley et Unterman, 2013]).

Le signal utilisé dans la suite est considéré comme la connexion de deux enregistrements afin d'obtenir un ensemble de données d'une seule pièce représenté sur la figure 4.16.

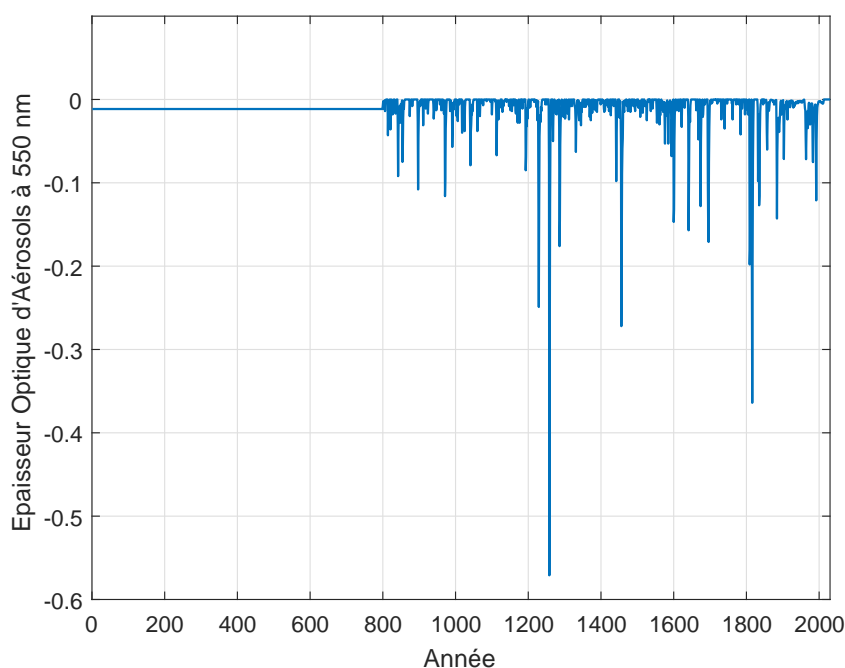


Figure 4.16 – Reconstruction de l'épaisseur optique des aérosols

4.3.1.3 Activité solaire

Définition 4.13 (Taches solaires) *Les taches solaires sont des zones sombres qui se manifestent par intermittence sur la surface apparente du Soleil (voir figure 4.17). Une tache solaire type se compose de deux parties distinctes : une région sombre au centre dite*

umbra, ou ombre, et une bordure plus claire appelée penumbra, ou pénombre. La pénombre est formée de filaments clairs et sombres rayonnant dans toutes les directions à partir du centre. Les taches solaires sont le siège d'un champ magnétique intense.

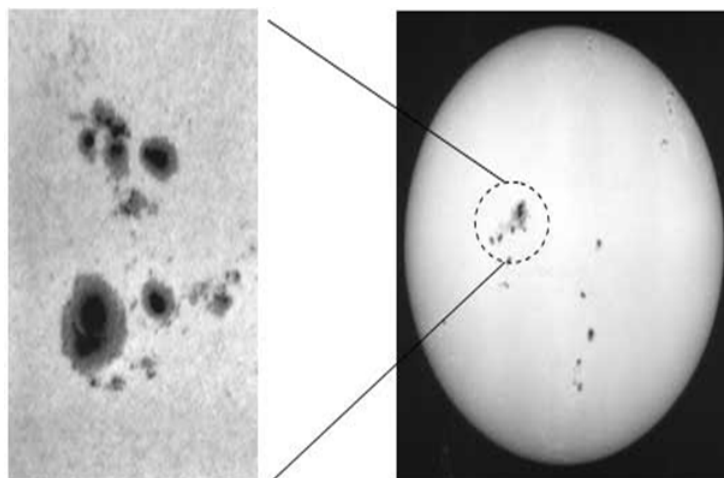


Figure 4.17 – Taches solaires <http://system.solaire.free.fr>

L'intensité et le déplacement de ces taches présentent un cycle de onze ans (cycle de Schwabe découvert en 1843 [Schwabe et Schwabe, 1844]). Ce cycle de l'activité solaire est inexpliqué.

Les taches ont été identifiées en 1610 par Galilée, elles étaient rares et sporadiques entre les années 1610 et 1700.

La figure 4.18 illustre le nombre de taches solaires.

Définition 4.14 (Groupes de taches solaires) *Les taches solaires apparaissent soit isolément, soit plus fréquemment en groupes. Ces constellations sont souvent constituées d'une grande et d'une petite tache "principales", entourées de plusieurs taches plus petites.*

Depuis 1610, les mesures des taches solaires permettent de reconstruire l'irradiance solaire totale. Depuis 1978, ces mesures sont réalisées par satellite.

L'instrument TIM (abréviation en anglais de *Total Irradiance Monitor*) est conçu pour mesurer l'irradiance totale avec une précision absolue de 100 parties par million. Il convertit le signal mesuré en irradiance solaire. La reconstruction Timv17 [Kopp et al., 2005] donne une reconstruction fiable de l'irradiance solaire totale depuis 1610 jusqu'à maintenant (voir figure 4.19).

Le signal utilisé dans la suite du manuscrit est considéré comme la connexion de deux enregistrements (Delaygue-Timv17) afin d'obtenir un ensemble de données d'une seule pièce qui est représenté sur la figure 4.20.

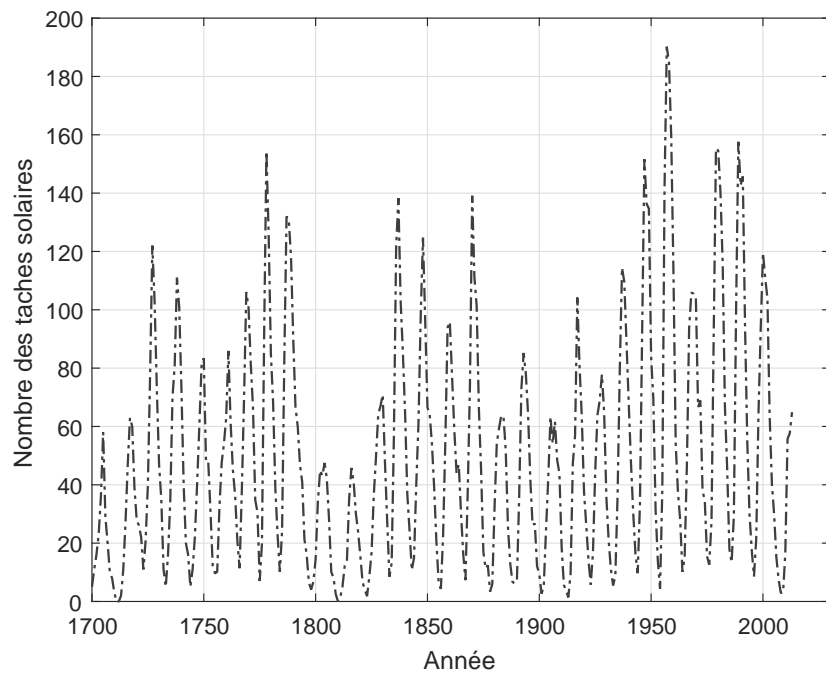


Figure 4.18 – Nombre de taches solaires en fonction des années

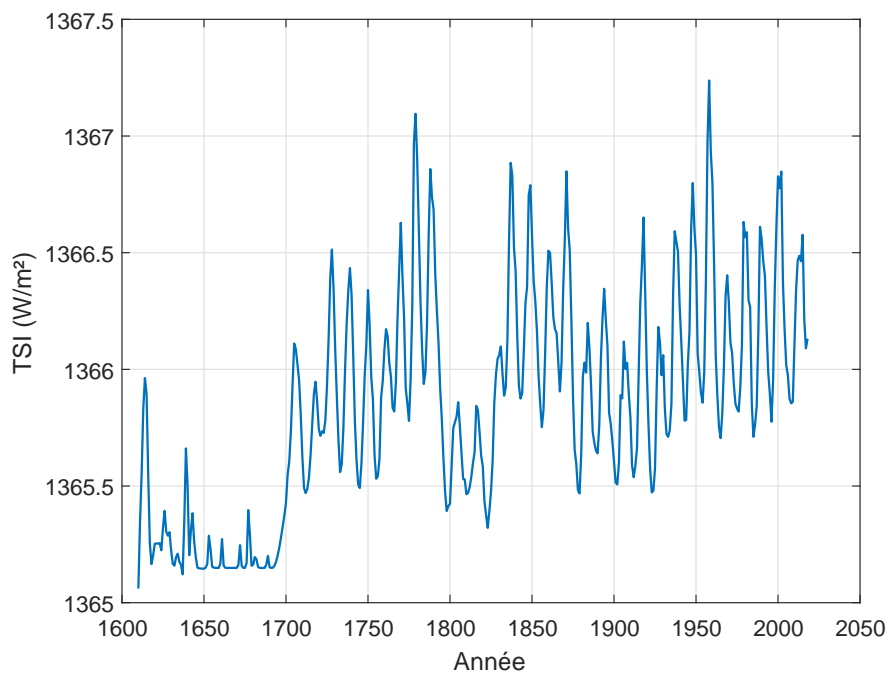


Figure 4.19 – Reconstruction Timv17

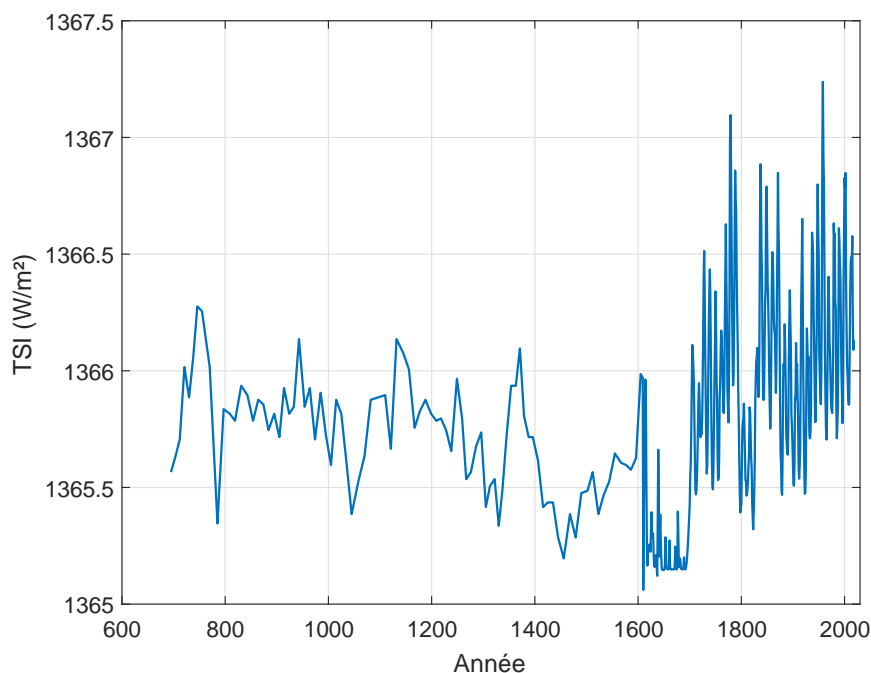


Figure 4.20 – Reconstruction de l'irradiance solaire totale

4.3.2 Sortie

Des enregistrements instrumentaux raisonnablement fiables de la température près de la surface avec une couverture quasi-globale ont démarré vers 1850. Des enregistrements antérieurs existent, mais avec une couverture plus clairsemée et une instrumentation moins normalisée.

Les développements récents dans les analyses observationnelles de la température de l'air proche de la surface et de la température de la surface de la mer sont combinées pour produire la reconstruction de température HadCRUT4. Il contient un nouvel ensemble de données sur l'évolution de la température mondiale et régionale de 1850 à nos jours.

HadCRUT4 se décompose en deux ensembles de deux jeux de données : un jeu des données de la surface de la terre CRUTEM4 et un jeu de données de la surface de la mer HadSST3. La figure 4.21 représente l'ensemble de données HadCRUT4.

CRUTEM4 est un ensemble de données enregistrées dans les stations météorologiques sur tous les continents de la terre. Ces stations sont implémentées dans des grilles, chacune est de résolution spatiale de 5° en latitude par 5° en longitude et contient des observations mensuelles de la température moyenne. Le calcul des moyennes mensuelles est réalisée à partir des valeurs de mesures journalières.

Les stations sur terre sont à des altitudes différentes et différents pays mesurent les températures mensuelles moyennes en utilisant différentes méthodes et formules. Pour

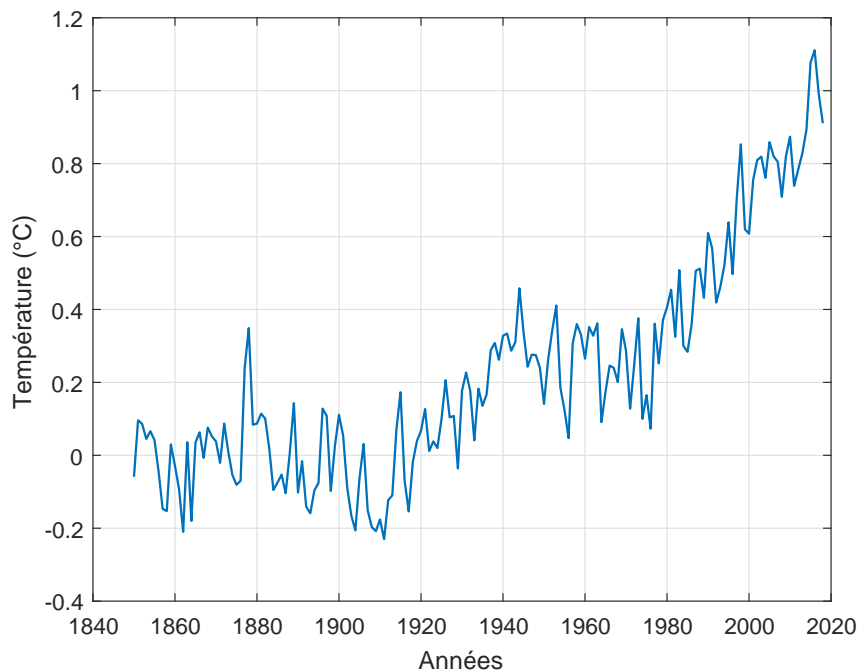


Figure 4.21 – Ensemble de données HadCRUT4

éviter les biais qui pourraient résulter de ces problèmes, les températures moyennes mensuelles sont réduites à des anomalies de la période ayant la meilleure couverture [1961, 1990]. HadSST3 est un ensemble de données de la température de la surface de la mer. Un champ global mensuel entre 1850 et aujourd’hui est récupéré à partir des grilles de résolution spatiale de 5° en latitude par 5° en longitude.

[de Larminat, 2016] a proposé de connecter cet ensemble avec les reconstructions obtenues par proxies, afin d’obtenir un ensemble unique de données. Il a fusionné ces reconstructions avec la température globale HadCRUT4, à partir de 1850, après alignement en égalisant les valeurs moyennes sur la période de chevauchement (voir figure 4.22).

Dans la suite de ce chapitre, la sortie sera également une de ces 4 reconstructions connecté avec les données de HadCRUT4.

4.3.3 Sélection des données

4.3.3.1 Données d’entrées/sortie

Il faut rappeler que la collection de données paléoclimatiques est constituée de :

- quatre reconstructions de l’irradiance solaire totale (figure 4.5 et figure 4.6) ;
- une reconstitution de la concentration du CO_2 dans l’atmosphère (figure 4.15) ;

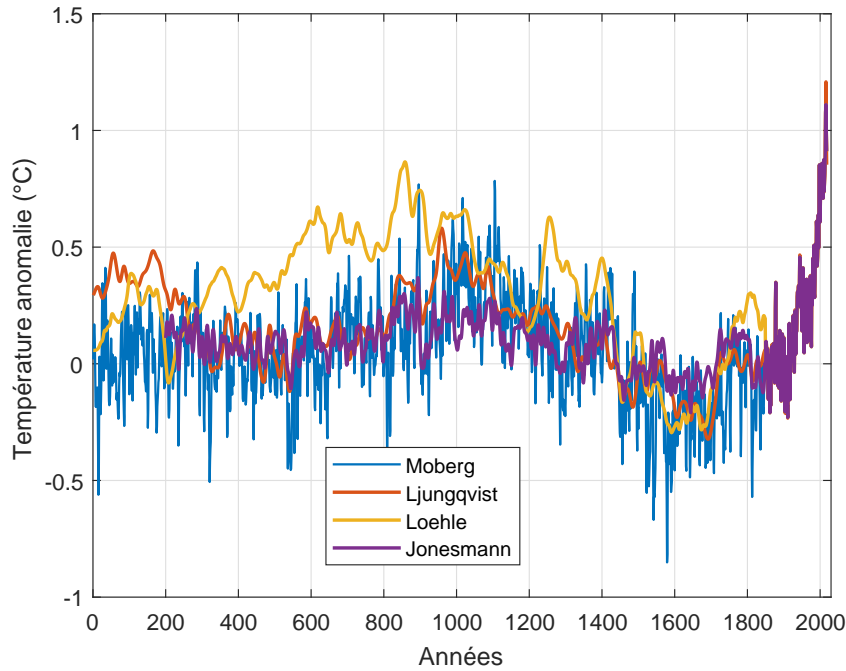


Figure 4.22 – Quatre reconstructions de température par proxies connectées à HadCRUT4

- une reconstitution de l'activité volcanique (figure 4.16) ;
- quatre reconstructions de température (figure 4.22).

Il y a donc 16 combinaisons possibles, selon la température et l'irradiance choisies.

Dans ce chapitre, un choix arbitraire a été fait, et la combinaison de Ljungqvist-HadCRUT4 avec Delaygue-Timv17 (figure 4.20) est utilisée, pour l'identification du système climatique terrestre par modèle non entier. En perspectives, il serait intéressant d'identifier les modèles climatiques terrestres avec les autres reconstructions et de comparer les différents modèles.

4.3.3.2 Période d'identification

Non seulement, il faut choisir les données, mais aussi une période, $[t_0, t_1]$ pour l'identification, deux périodes sont considérées dans ce manuscrit. Les résultats de l'identification sont fortement sensibles à ces périodes.

Début de la période : Deux débuts de période sont considérés.

- $t_0 = 1850$ qui permet d'avoir une période d'acquisition plus récente et donc plus fiable.
- $t_0 = 1000$ qui permet d'avoir une période de couverture plus large et inclut la période de réchauffement médiéval.

Fin de la période : les données d'identification disponibles s'arrêtent en 2018 pour la reconstruction TSI, par conséquent $t_1 = 2018$. Des prédictions à court terme ont été réalisés en section 4.5 afin d'évaluer la capacité de prédiction des modèles proposés.

4.4 Application des méthodes *MISO-oe/MISO-oosrvcf* sur les données climatiques

4.4.1 Période 1850 – 2018

Dans cette première partie, il est proposé de se focaliser sur la période de [1850, 2018] dont les données sont illustrées en figure 4.23. Afin d'identifier le modèle dynamique du système climatique terrestre, les moyennes des données d'entrées et de sortie ont été retirées.

Pour information, cette période de [1850, 2018] correspond à la période utilisée par le GIEC pour justifier que le réchauffement climatique est dû à l'activité anthropologique.

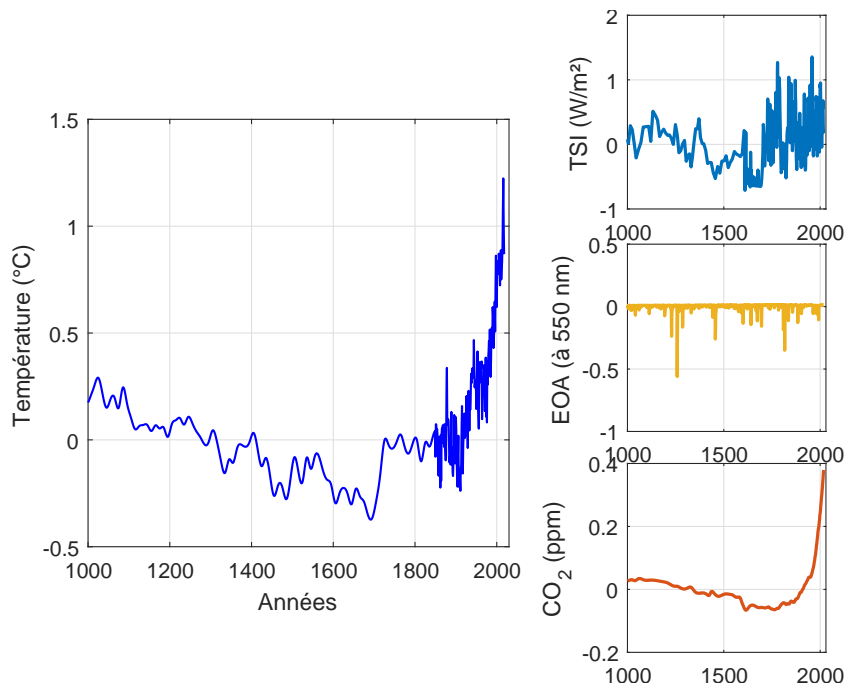


Figure 4.23 – Ensemble des données sur la période [1850 2018]

4.4.1.1 Estimation des coefficients d'un système MISO S-commensurable de première espèce

4.4.1.1.1 Estimation avec un modèle entier (rationnel)

Tout d'abord, il est proposé d'estimer les coefficients de modèles entiers de premier ordre. Pour l'initialisation, on a utilisé le modèle proposé dans [de Larminat, 2016]. Les résultats sont présentés dans le tableau 4.2. Les deux méthodes fournissent des résultats comparables avec des coefficients estimés très proches. Les pourcentages de correspondance (% fit) sont égaux à 45%.

	Modèle initial (de de Larminat)	<i>MISO-oe</i>	<i>MISO-srivcf</i>
TSI	$\frac{4.25}{86s+1}$	$G_1(s) = \frac{0.36}{7.2s+1}$	$G_1(s) = \frac{0.3}{6.5s+1}$
EOA	$\frac{3.86}{86s+1}$	$G_2(s) = \frac{3.6}{86.6s+1}$	$G_2(s) = \frac{3.7}{83.3s+1}$
CO_2	$\frac{3.04}{86s+1}$	$G_3(s) = \frac{1.9}{0.016s+1}$	$G_3(s) = \frac{2.1}{0.02s+1}$
% Fit	32%	45%	45%

Tableau 4.2 – Estimation des coefficients d'un modèle entier, par les deux méthodes *MISO-oe* et *MISO-srivcf*

Les figure 4.24 et 4.25 présentent la température estimée ainsi que les contributions de chaque entrée obtenues respectivement par les méthodes *MISO-oe* et *MISO-srivcf*. La contribution du TSI, à la variation de température, est de l'ordre de 0.09°C. La contribution de l'activité volcanique est de l'ordre de 0.06°C alors que le CO_2 apporte une variation allant jusqu'à 0.21°C.

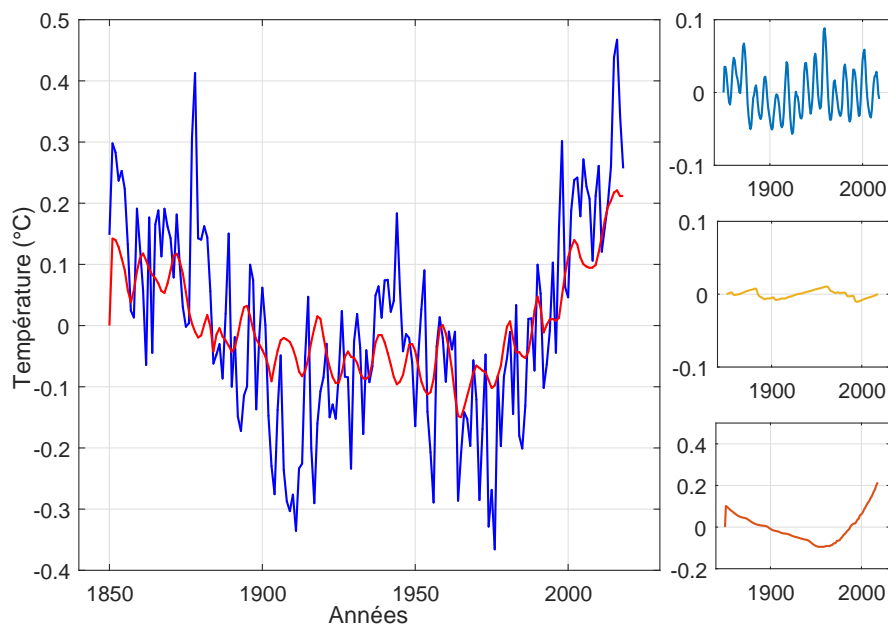


Figure 4.24 – Estimation de la température avec un modèle entier par la méthode *MISO-oe*, à gauche : températures globales mesurée (—) et estimée (—), à droite : contributions de chaque entrée (TSI, EOA et CO_2 respectivement de haut en bas)

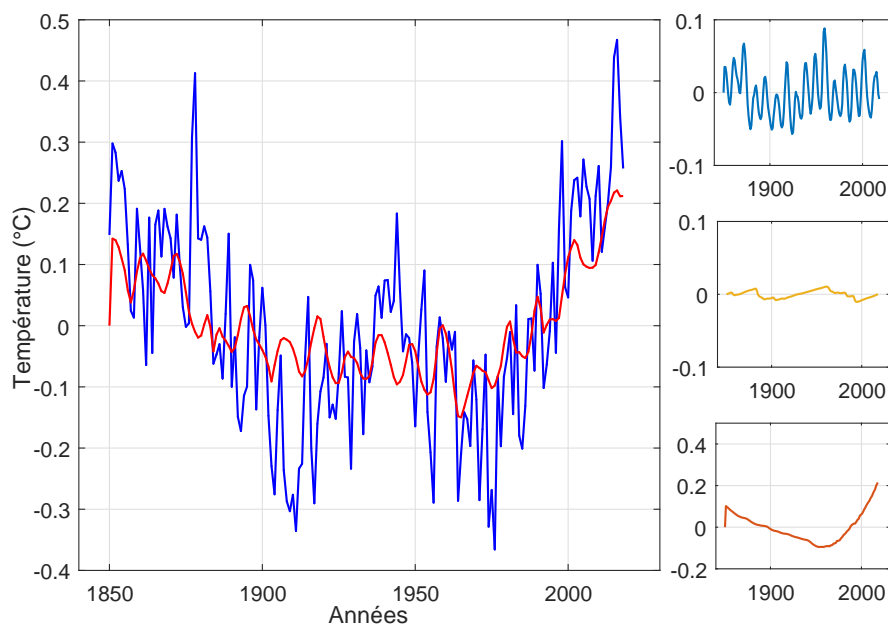


Figure 4.25 – Estimation de la température avec un modèle entier par la méthode *MISO-srvcf*, à gauche : températures globales mesurée (—) et estimée (—), à droite : contributions de chaque entrée (TSI, EOA et CO_2 respectivement de haut en bas)

4.4.1.1.2 Estimation avec un modèle non entier

Dans cette section, il est proposé de fixer les ordres de dérivation et d'estimer les coefficients de modèles de première espèce S-commensurable global d'ordre $\nu = 0.5$. Le système climatique est un système thermique. Or, [Battaglia *et al.*, 2000] montre que la résolution de l'équation de chaleur fait apparaître un modèle d'impédance thermique d'ordre commensurable $\nu = 0.5$. Les méthodes *MISO-oe* et *MISO-srvcf* proposées respectivement en section 3.4.2.1 et 3.4.1.1 sont utilisées pour l'estimation des coefficients. Les modèles trouvés dans la section précédente (voir tableau 4.2) ont permis d'initialiser les deux méthodes. Les deux méthodes présentent des résultats très similaires (tableau 4.3). En effet, les pourcentages de correspondance sont très proches (56% par *MISO-oe* et 58% par *MISO-srvcf*). Les gains statiques et les pseudo-constantes de temps estimés par ces deux méthodes sont très proches à l'exception du modèle représentant l'EOA.

	<i>MISO-oe</i>	<i>MISO-srvcf</i>
TSI	$G_1(s) = \frac{1.07}{50.52s^{0.5}+1}$	$G_1(s) = \frac{0.89}{52.14s^{0.5}+1}$
EOA	$G_2(s) = \frac{12.51}{20.73s^{0.5}+1}$	$G_2(s) = \frac{16.14}{10.08s^{0.5}+1}$
CO_2	$G_3(s) = \frac{2.34}{0.01s^{0.5}+1}$	$G_3(s) = \frac{2.52}{0.008s^{0.5}+1}$
% Fit	56%	58%

Tableau 4.3 – Estimation des coefficients d'un modèle non entier S-commensurable global avec $\nu = 0.5$ par les deux méthodes *MISO-oe* et *MISO-srvcf*

Les figure 4.26 et 4.27 présentent la température estimée ainsi que les contributions de chaque entrée obtenues respectivement par les méthodes *MISO-oe* et *MISO-srvcf*. Ces figures montrent que l'influence de l'activité humaine CO_2 et l'influence de l'activité solaire sur le réchauffement climatique récent sont plus importantes que celle de l'activité volcanique. A partir de la figure 4.26 la contribution du TSI est de l'ordre de 0.08°C . La contribution de l'activité volcanique est de l'ordre de 0.18°C alors que le CO_2 apporte une variation de température allant jusqu'à 0.37°C . A partir de la figure 4.27 la contribution du TSI est de l'ordre de 0.07°C . La contribution de l'activité volcanique est de l'ordre de 0.2°C alors que le CO_2 apporte une variation de température allant jusqu'à 0.39°C .

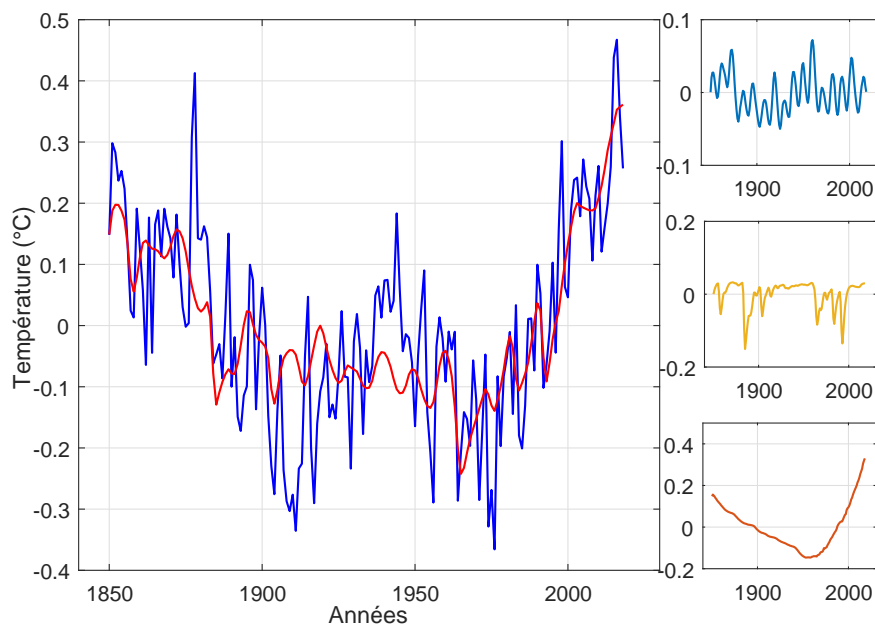


Figure 4.26 – Estimation de la température avec un modèle non entier S-commensurable global d'ordre $\nu = 0.5$ par la méthode *MISO-oe* ; à gauche : températures globales mesurée (—) et estimée (—) ; à droite : contribution de chaque entrée (TSI, EOA et CO_2 respectivement de haut en bas)

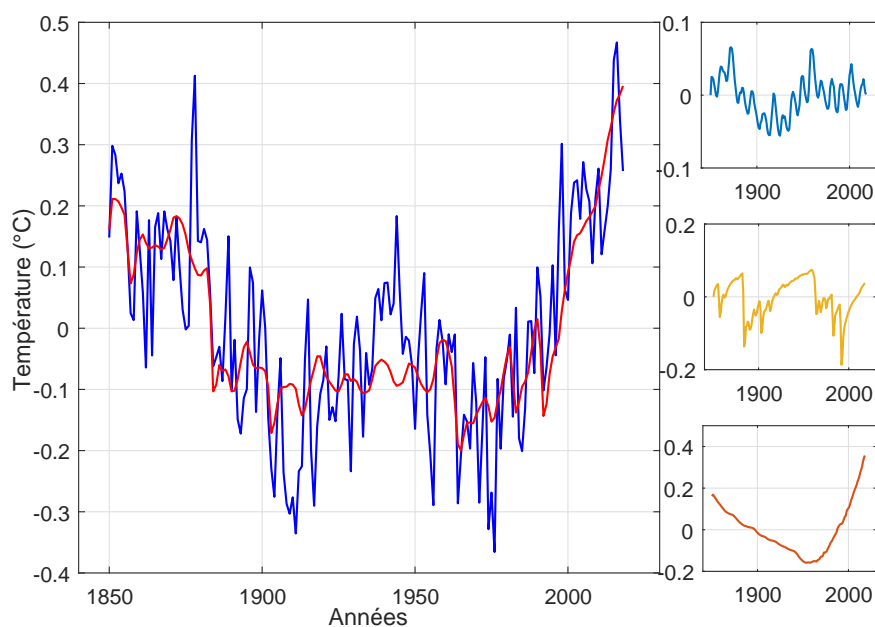


Figure 4.27 – Estimation de la température avec un modèle non entier S-commensurable global d'ordre $\nu = 0.5$ par la méthode *MISO-srivcf* ; à gauche : températures globales mesurée (—) et estimée (—) ; à droite : contribution de chaque entrée (TSI, EOA et CO_2 respectivement de haut en bas)

4.4.1.2 Estimation des coefficients et des ordres de dérivation d'un système MISO S-commensurable de première espèce

Dans cette partie, un degré de liberté est rajouté : l'ordre S-commensurable global. Par conséquent, tous les coefficients et l'ordre S-commensurable global sont estimés avec les deux algorithmes *MISO-oe* et *MISO-oosrivcf* proposés respectivement en section 3.4.1.2 et 3.4.2.2. Les modèles trouvés dans la section précédente (voir tableau 4.3) ont permis d'initialiser les deux méthodes. Les deux méthodes présentent des résultats très similaires (tableau 4.4). En effet, les pourcentages de correspondance sont très proches (67% par *MISO-oe* et 66% par *MISO-oosrivcf*).

	<i>MISO-oe</i>	<i>MISO-oosrivcf</i>
TSI	$G_1(s) = \frac{0.27}{7.54s^{1.25}+1}$	$G_1(s) = \frac{0.3}{6.02s^{1.31}+1}$
EOA	$G_2(s) = \frac{2.69}{80s^{1.84}+1}$	$G_2(s) = \frac{2.94}{65s^{1.86}+1}$
CO_2	$G_3(s) = \frac{2.03}{0.61s^{1.82}+1}$	$G_3(s) = \frac{2.89}{0.85s^{1.81}+1}$
% Fit	67%	66%

Tableau 4.4 – Estimation des coefficients et des ordres de dérivation d'un modèle non entier S-commensurable local par les deux méthodes *MISO-oe* et *MISO-oosrivcf*

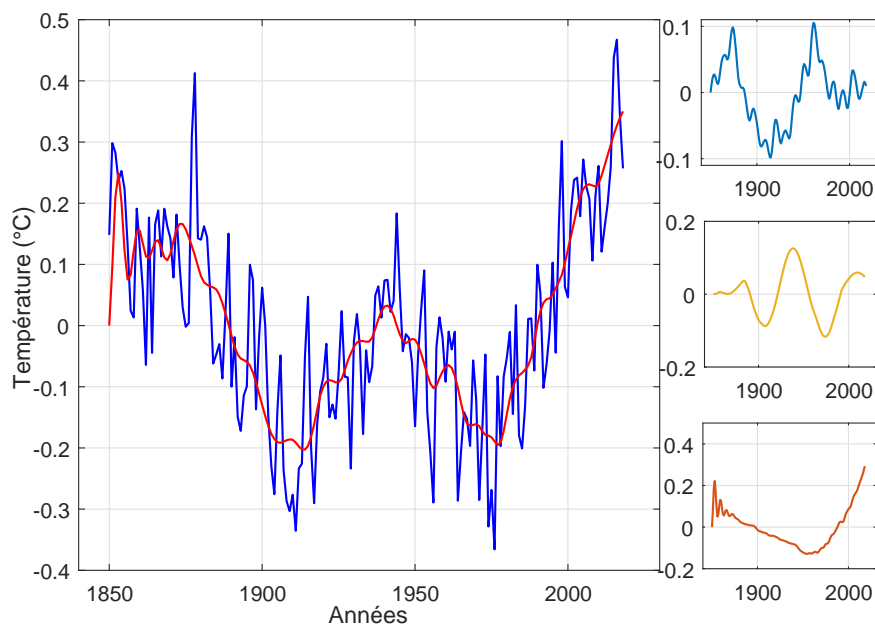


Figure 4.28 – Estimation de la température avec un modèle non entier S-commensurable local par la méthode *MISO-oe* ; à gauche : températures globales mesurée (—) et estimée (—) ; à droite : contributions de chaque entrée (TSI, EOA et CO_2 respectivement de haut en bas)

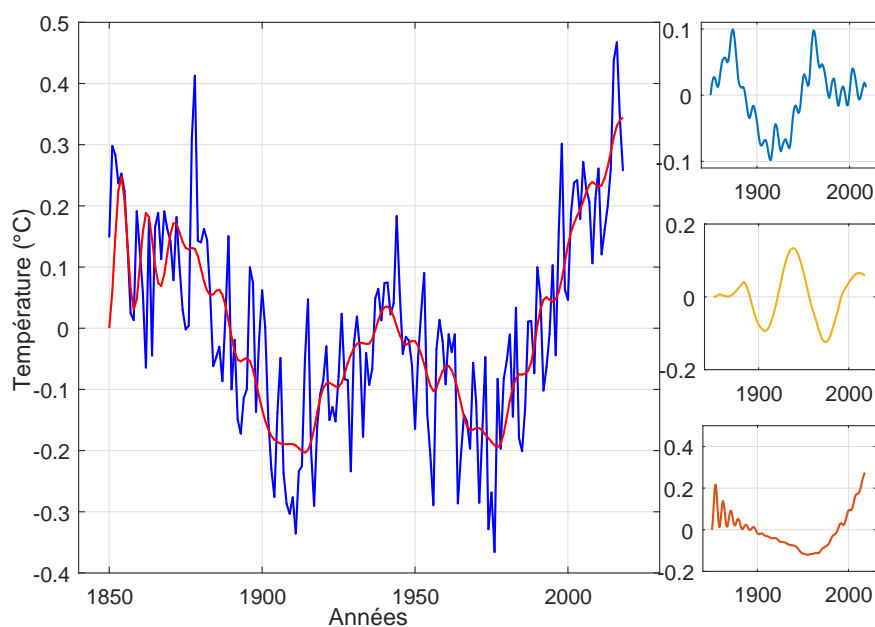


Figure 4.29 – Estimation de la température avec un modèle non entier S-commensurable local par la méthode *MISO-oosrivcf* ; à gauche : températures globales mesurée (—) et estimée (—) ; à droite : contributions de chaque entrée (TSI, EOA et CO_2 respectivement de haut en bas)

Les figures 4.28 et 4.29 présentent la température estimée ainsi que les contributions de chaque entrée obtenues respectivement par les méthodes *MISO-oe* et *MISO-oosrivcf*. Ces figures montrent que la dynamique de la température observée est mieux captée. D'autre part, l'influence de l'activité humaine CO_2 et l'influence de l'activité volcanique sont plus importantes sur le réchauffement climatique récent que celle de l'activité solaire. La contribution du TSI est de l'ordre de $0.1^\circ C$. La contribution de l'activité volcanique est de l'ordre de $0.13^\circ C$ alors que le CO_2 apporte une variation de température allant jusqu'à $0.28^\circ C$. Ce degré de liberté supplémentaire améliore l'estimation de 10% d'où l'intérêt de bien estimer les ordres de dérivation.

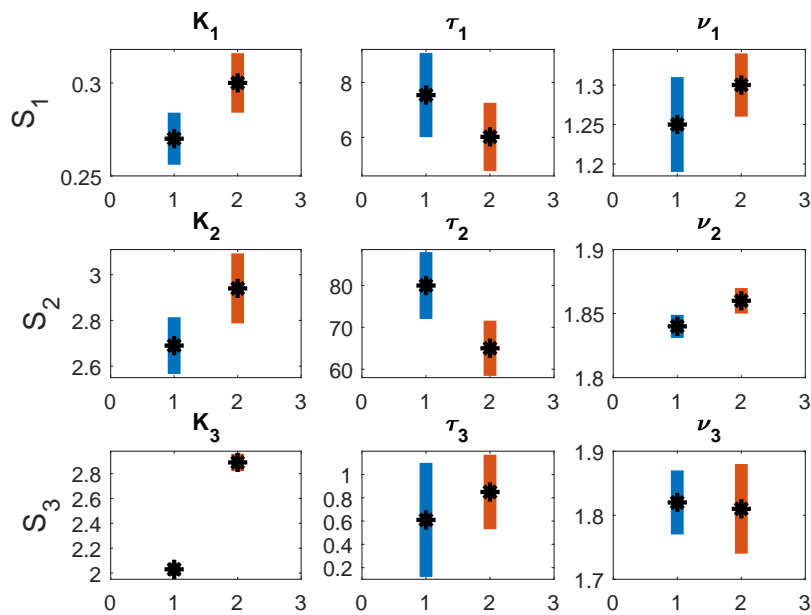


Figure 4.30 – Écarts-types des paramètres estimés d'un modèle non entier S-commensurable local par la méthode *MISO-oe* (en bleu) et la méthode *MISO-oosrivcf* (en orange)

La figure 4.30 présente les estimations des écarts-types des paramètres obtenues respectivement à partir des équations (3.53) et (4) pour la méthode *MISO-oe* et la méthode *MISO-oosrivcf*. Les écarts-types estimés sont faibles et montrent une bonne confiance dans l'estimation.

4.4.1.3 Estimation des coefficients et des ordres de dérivation d'un système MISO S-commensurable de deuxième espèce

Dans cette section, les coefficients de modèles de deuxième espèce S-commensurable sont maintenant estimés. Seule la méthode *MISO-oe* proposée en section 3.4.1.2 est utilisée

pour l'estimation des coefficients et les ordres de dérivation. En effet, la méthode *MISO-oostrivcf* n'a convergé que vers des modèles instables. Les résultats sont présentés dans le tableau 4.5. L'initialisation a été effectuée à partir du modèle de première espèce estimée en section 4.4.1.2 (voir tableau 4.4, colonne *MISO-oe*).

	<i>MISO-oe</i>
TSI	$G_1(s) = \frac{0.36}{0.25s^{2.8} + 22.5s^{1.5} + 1}$
EOA	$G_2(s) = \frac{2.85}{0.1s^{3.8} + 90s^{1.86} + 1}$
CO_2	$G_3(s) = \frac{1.74}{0.01s^{3.5} + 0.97s^{1.8} + 1}$
% Fit	70%

Tableau 4.5 – Estimation des coefficients et des ordres de dérivation d'un modèle non entier de deuxième espèce par la méthode *MISO-oe*

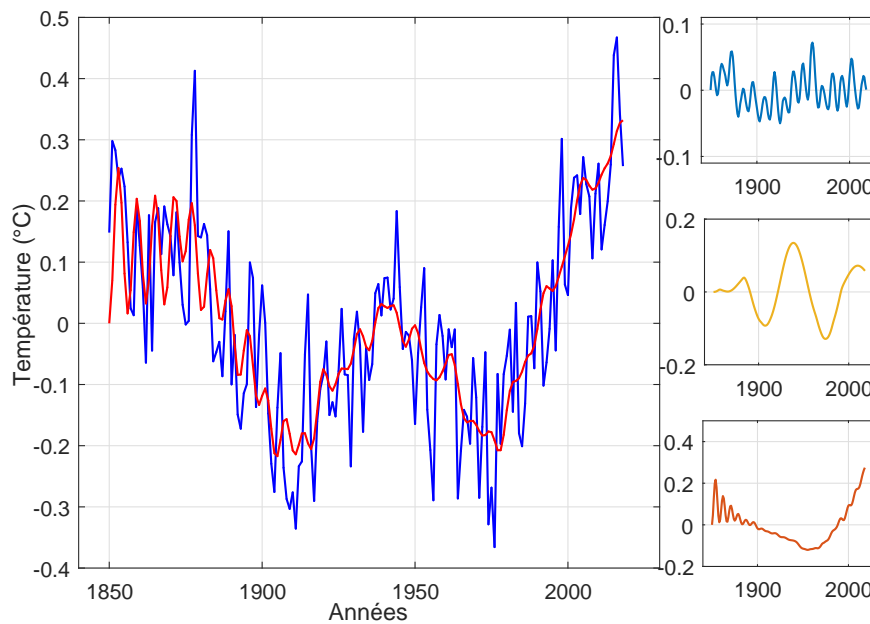


Figure 4.31 – Estimation de la température avec un modèle non entier de deuxième espèce par la méthode *MISO-oe*; à gauche : températures globales mesurée (—) et estimée (—); à droite : contributions de chaque entrée (TSI, EOA et CO_2 respectivement de haut en bas)

La figure 4.31 présente la température estimée ainsi que les contributions de chaque entrée par la méthode *MISO-oe*. Cette figure montre que l'allure de la courbe de

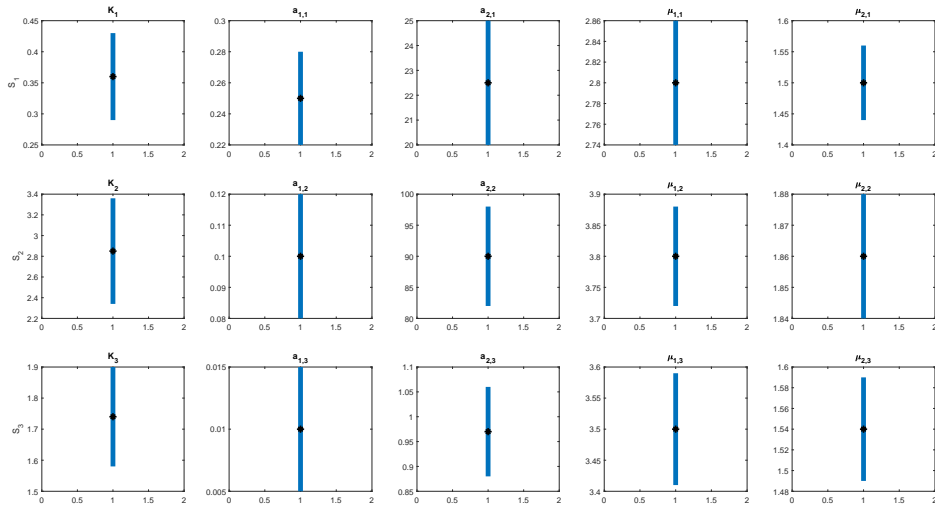


Figure 4.32 – Écart-types des paramètres estimés d'un modèle non entier de deuxième espèce par la méthode *MISO-oe*

température estimée est améliorée et les hautes fréquences sont mieux captées avec un pourcentage de correspondance de 70%. Les influences des trois activités (humaine, volcanique et solaire) sont importantes sur le réchauffement climatique. La tendance principale est toujours bien captée, le système de deuxième espèce permet de mieux capturer un deuxième mode situé aux moyennes fréquences. Par conséquent, le pourcentage de correspondance est amélioré.

La figure 4.32 présente les estimations des écart-types des paramètres obtenues à partir de l'équation (3.53) pour la méthode *MISO-oe*. Les écart-types estimés sont faibles et montrent une bonne confiance dans l'estimation.

4.4.2 Période 1000 – 2018

Dans cette deuxième partie, il est proposé de traiter une période plus élargie entre [1000, 2018] dont les données sont illustrées en figure 4.33.

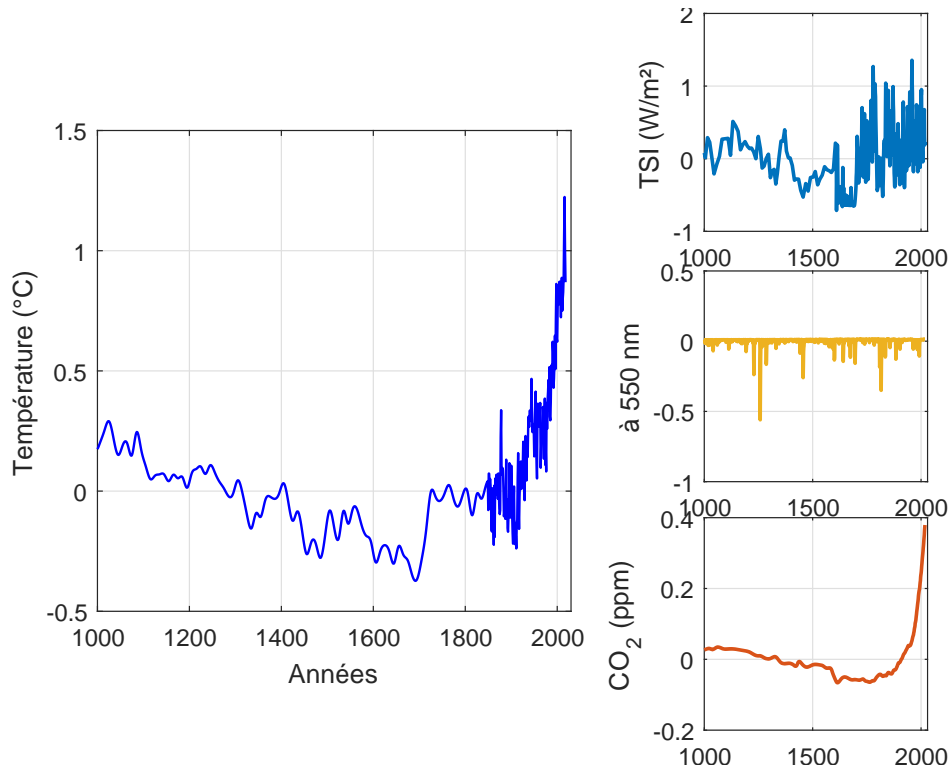


Figure 4.33 – Ensemble des données sur la période [1000, 2018], Ljunqvist avec HadCRUT4 et Delaygue avec Timv17

4.4.2.1 Estimation des coefficients d'un système MISO S-commensurable de première espèce

Tout d'abord, les ordres de dérivation sont fixés et seuls les coefficients sont estimés de modèles de première espèce S-commensurable global d'ordre $\nu = 0.5$. Les méthodes *MISO-oe* et *MISO-oosrivcf* proposées respectivement en section 3.4.2.1 et 3.4.1.1 sont utilisées pour l'estimation des coefficients. L'initialisation a été effectuée à partir du modèle de première espèce estimée respectivement selon la méthode considérée en section 4.4.1.1.2. Les deux méthodes présentent des résultats très similaires (tableau 4.6). En effet, les pourcentages de correspondance sont identiques (75% pour *MISO-oe* et *MISO-srivcf*). Les gains statiques et les pseudo-constantes de temps estimés par ces deux méthodes sont très proches.

	<i>MISO-oe</i>	<i>MISO-srvcf</i>
TSI	$G_1(s) = \frac{0.29}{1.7s^{0.5}+1}$	$G_1(s) = \frac{0.42}{2.14s^{0.5}+1}$
EOA	$G_2(s) = \frac{5.92}{29.8s^{0.5}+1}$	$G_2(s) = \frac{3.6}{31.4s^{0.5}+1}$
CO_2	$G_3(s) = \frac{2.38}{0.02s^{0.5}+1}$	$G_3(s) = \frac{2.05}{0.08s^{0.5}+1}$
% Fit	75%	75%

Tableau 4.6 – Estimation des coefficients, avec les deux méthodes *MISO-oe* et *MISO-srvcf*, du système climatique terrestre

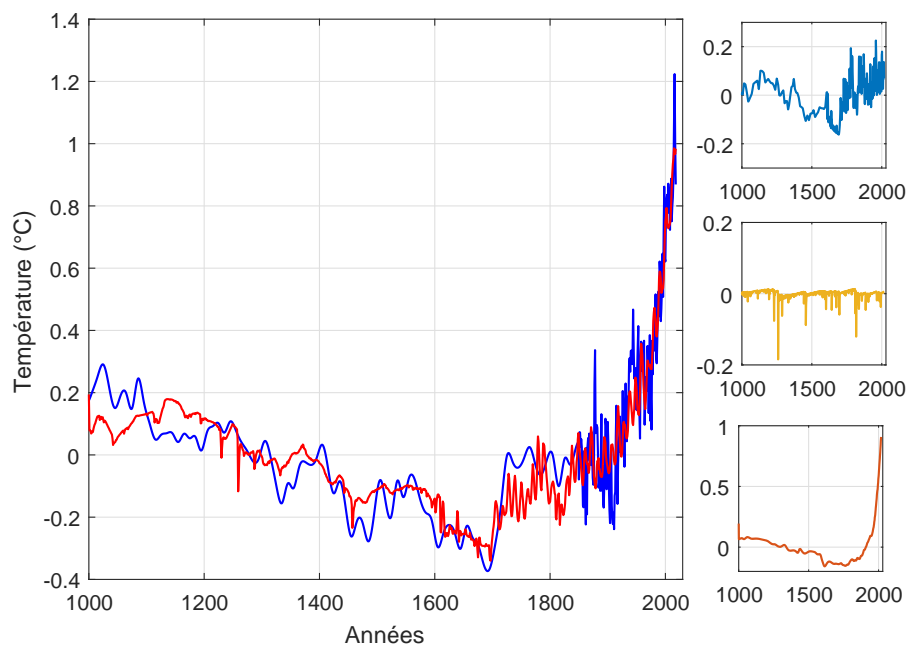


Figure 4.34 – Estimation de la température avec un modèle non entier S-commensurable global avec $\nu = 0.5$ par la méthode *MISO-oe* ; à gauche : températures globales mesurée (—) et estimée (—) ; à droite : contributions de chaque entrée (TSI, EOA et CO_2 respectivement de haut en bas)

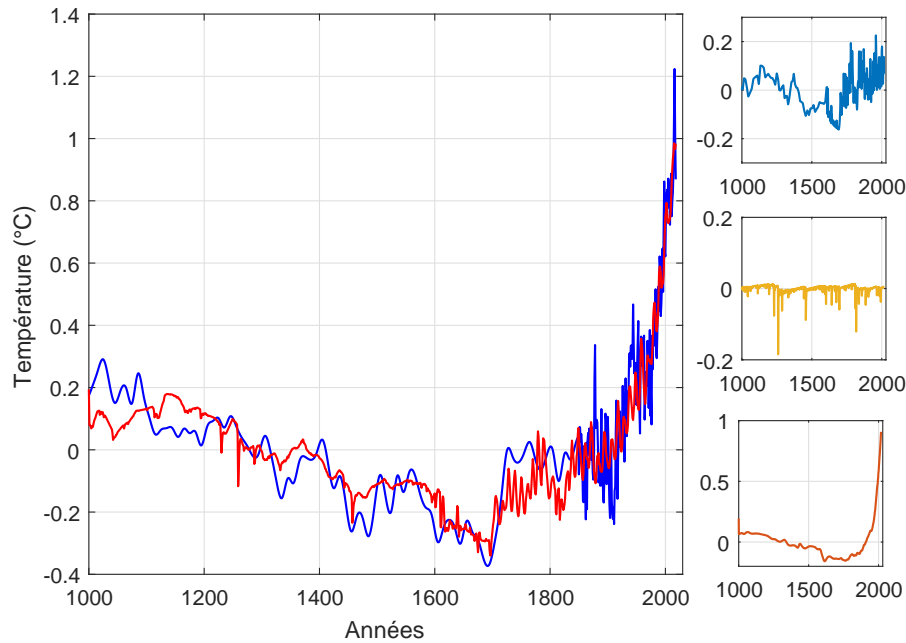


Figure 4.35 – Estimation de la température avec un modèle non entier S-commensurable global avec $\nu = 0.5$ par la méthode *MISO-oosrivcf* ; à gauche : températures globales mesurée (—) et estimée (—) ; à droite : contributions de chaque entrée (TSI, EOA et CO_2 respectivement de haut en bas)

Les figures 4.34 et 4.35 présentent la température estimée ainsi que les contributions de chaque entrée obtenues respectivement par les deux méthodes *MISO-oe* et *MISO-srivcf*. Ces figures montrent que l'influence de l'activité humaine CO_2 à partir de 1850 est plus importante sur le réchauffement climatique par rapport aux autres activités (solaire et volcanique). La contribution du TSI est de l'ordre de $0.21^\circ C$. La contribution de l'activité volcanique est de l'ordre de $0.18^\circ C$ mais de manière plus épisodique, alors que le CO_2 apporte une variation de température allant jusqu'à $0.93^\circ C$. On remarque que l'activité volcanique est moins influente sur le réchauffement climatique. Par contre, on note une tendance générale de l'activité solaire qui croît depuis 1900 (avec des variations de températures de l'ordre de $0.2^\circ C$). Enfin, l'activité de CO_2 est bien plus influente sur le réchauffement climatique avec une variation de température au-delà de $1^\circ C$ depuis 1850.

4.4.2.2 Estimation des coefficients et des ordres de dérivation d'un système MISO S-commensurable de première espèce

Dans cette partie, un degré de liberté est rajouté où tous les paramètres sont estimés (coefficients et ordres de dérivation) pour chaque sous-système avec les deux algorithmes *MISO-oe* et *MISO-oosrivcf* proposés respectivement en section 3.4.1.2 et en section 3.4.2.2. L'initialisation a été effectuée à partir du modèle de première espèce estimée

respectivement selon la méthode considérée en section 4.4.2.1 (voir tableau 4.6). Les deux méthodes présentent encore des résultats très similaires (tableau 4.7). En effet, les pourcentages de correspondance sont très proches (83% pour *MISO-oe* et 84% *MISO-srivcf*). Les gains statiques et les pseudo-constantes de temps estimés par ces deux méthodes sont très proches.

	<i>MISO-oe</i>	<i>MISO-srivcf</i>
TSI	$G_1(s) = \frac{0.22}{8.04s^{1.2}+1}$	$G_1(s) = \frac{0.28}{10.2s^{1.07}+1}$
EOA	$G_2(s) = \frac{0.32}{67.8s^{1.84}+1}$	$G_2(s) = \frac{0.36}{57.7s^{1.86}+1}$
CO_2	$G_3(s) = \frac{2.53}{0.59s^{1.54}+1}$	$G_3(s) = \frac{2.52}{1.13s^{1.48}+1}$
% Fit	83%	84%

Tableau 4.7 – Estimation des coefficients et des ordres de dérivation d'un modèle non entier S-commensurable local par les deux méthodes *MISO-oe* et *MISO-oosrivcf*

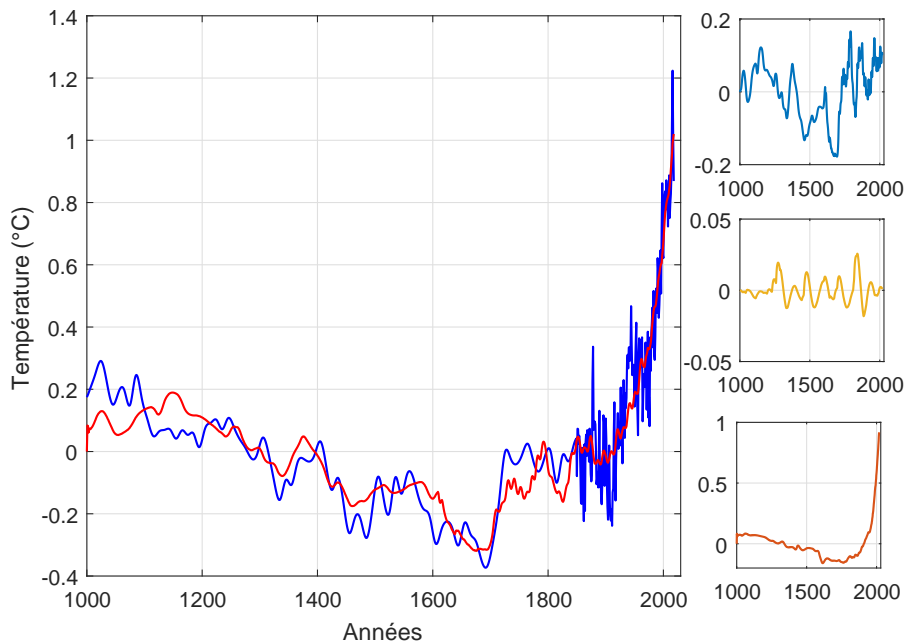


Figure 4.36 – Estimation de la température avec un modèle non entier S-commensurable local par la méthode *MISO-oe* ; à gauche : températures globales mesurée (—) et estimée (—) ; à droite : contributions de chaque entrée (TSI, EOA et CO_2 respectivement de haut en bas)

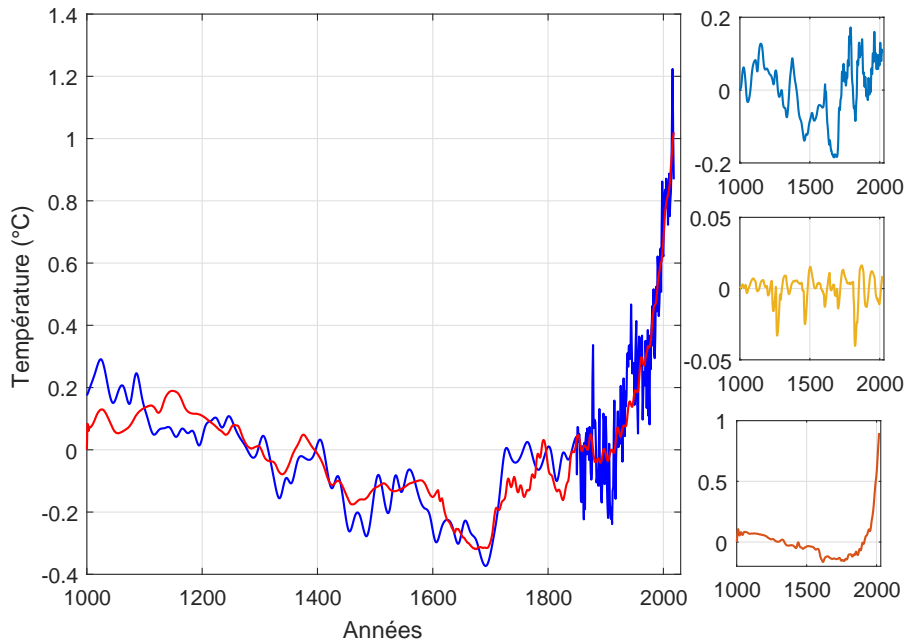


Figure 4.37 – Estimation de la température avec un modèle non entier S-commensurable local par la méthode *MISO-oosrivcf* ; à gauche : températures globales mesurée (—) et estimée (—) ; à droite : contributions de chaque entrée (TSI, EOA et CO_2 respectivement de haut en bas)

Les figures 4.36 et 4.37 présentent la température estimée ainsi que les contributions de chaque entrée obtenues respectivement par les deux méthodes *MISO-oe* et *MISO-srivcf*. Ces figures montrent que le dynamique de la température observée est captée, ainsi que l'influence de l'activité humaine CO_2 sur le réchauffement climatique récent est plus importante que l'influence de l'activité volcanique et l'activité solaire. La contribution du TSI est de l'ordre de $0.18^\circ C$. La contribution de l'activité volcanique est de l'ordre de $0.03^\circ C$ mais de manière plus épisodique, alors que le CO_2 apporte une variation de température allant jusqu'à $0.92^\circ C$. Ce degré de liberté supplémentaire améliore l'estimation de 10% d'où l'intérêt de bien estimer les ordres de dérivation.

La figure 4.38 présente les estimations des écarts-types des paramètres obtenues respectivement à partir des équations (3.53) et (4) pour la méthode *MISO-oe* et la méthode *MISO-oosrivcf*. Les écarts-types estimés sont faibles et montrent une bonne confiance dans l'estimation.

4.4.2.3 Estimation des coefficients et des ordres de dérivation d'un système MISO S-commensurable de deuxième espèce

Dans cette section, il est maintenant proposé d'estimer les paramètres (coefficient et ordres de dérivation) de modèles de deuxième espèce. Seule la méthode *MISO-oe* proposée

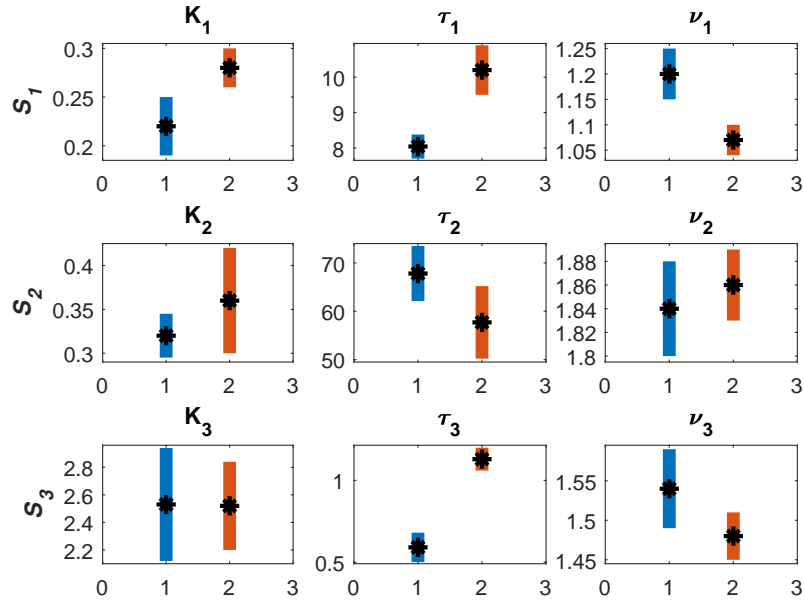


Figure 4.38 – Écart-types des paramètres estimés d'un modèle non entier S-commensurable local par la méthode *MISO-oe* (en bleu) et la méthode *MISO-oosrvcf* (en orange)

en section 3.4.1.2 est utilisée pour l'estimation des coefficients et des ordres de dérivation. En effet, la méthode *MISO-oosrvcf* n'a convergé que vers des modèles instables. Les résultats sont présentés dans le tableau 4.8. L'initialisation a été effectuée à partir du modèle de première espèce estimé en section 4.4.2.2 (voir tableau 4.7, colonne *MISO-oe*).

	<i>MISO-oe</i>
TSI	$G_1(s) = \frac{0.25}{0.35s^{2.4} + 5.17s^{0.87} + 1}$
EOA	$G_2(s) = \frac{0.43}{0.1s^{3.2} + 55.9s^{1.67} + 1}$
CO ₂	$G_3(s) = \frac{2.47}{0.02s^{3.7} + 0.88s^{1.83} + 1}$
% Fit	88%

Tableau 4.8 – Estimation des coefficient et des ordres d'un modèle non entier de deuxième espèce par la méthode *MISO-oe*

La figure 4.39 présente la température estimée ainsi que les contributions de chaque entrée par la méthode *MISO-oe*. Cette figure montre que l'allure de la courbe de température observée est améliorée avec un pourcentage de correspondance de 88%. La

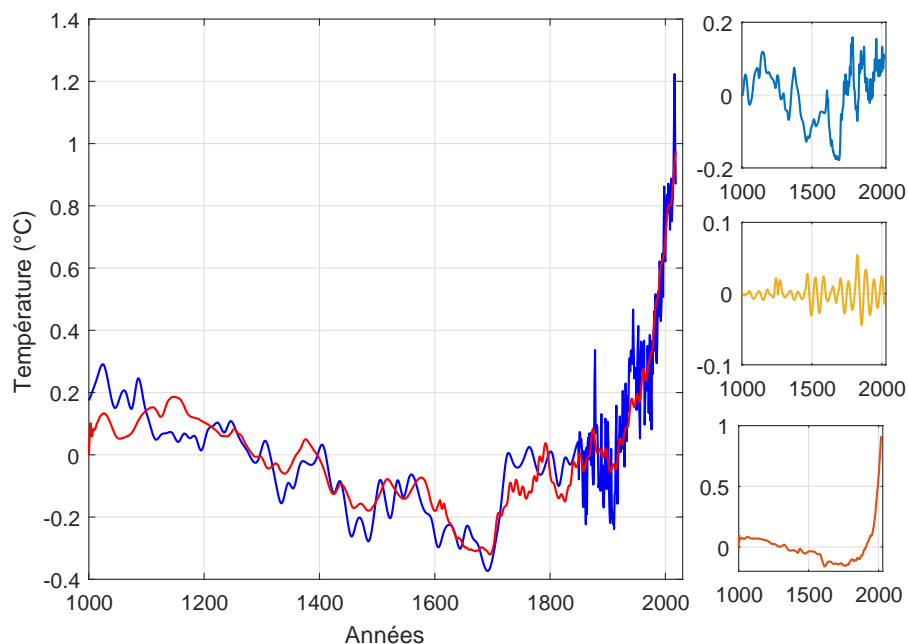


Figure 4.39 – Estimation de la température avec un modèle non entier de deuxième espèce par la méthode *MISO-oe* ; à gauche : températures globales mesurée (—) et estimée (—) ; à droite : contributions de chaque entrée (TSI, EOA et CO_2 respectivement de haut en bas)

contribution du TSI est de l'ordre de $0.18^\circ C$. La contribution de l'activité volcanique est de l'ordre de $0.04^\circ C$ mais de manière plus épisodique, alors que le CO_2 apporte une variation de température allant jusqu'à $0.92^\circ C$. La tendance principale est toujours bien captée le système de deuxième espèce permettent de mieux capter un deuxième mode situé aux moyennes fréquences. Par conséquent, le pourcentage de fit est amélioré.

La figure 4.40 présente les estimations des écarts-types des paramètres obtenues à partir de l'équation (3.53) pour la méthode *MISO-oe*. Les écarts-types sont faibles, montrant une bonne confiance dans l'estimation.

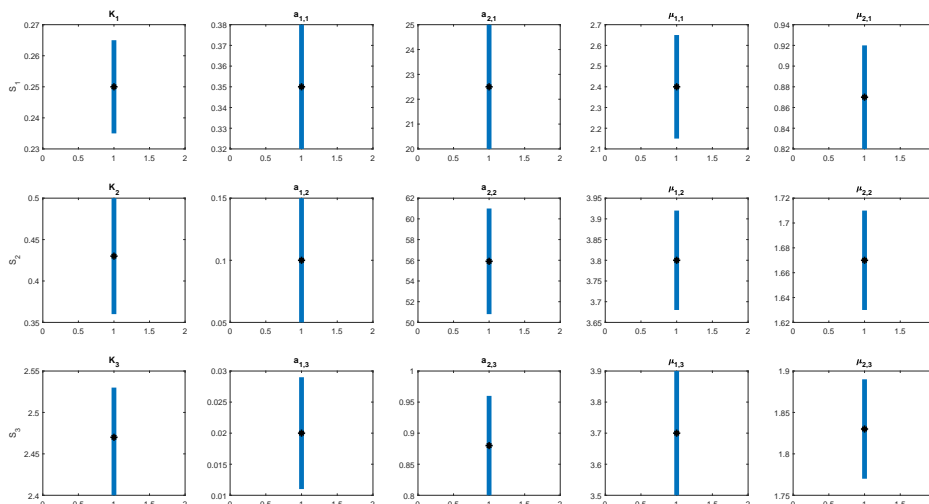


Figure 4.40 – Écart-types des paramètres estimés d'un modèle non entier de deuxième espèce par la méthode *MISO-oe*

4.5 Prédiction

Dans la section précédente, on a déduit que les modèles non entiers permettent de bien estimé le comportement dynamique du système climatique terrestre. Il s'agit maintenant de voir ce qu'il en est au niveau de la prédiction.

Pour cela, cinq scénarios sont considérés :

- premier scénario : toutes les entrées sont figées ;
- deuxième scénario : l'activité humaine est en évolution alors que les deux autres entrées sont figées ;
- troisième scénario : l'activité solaire est en évolution alors que les deux autres entrées sont figées ;
- quatrième scénario : l'activité volcanique est en évolution alors que les deux autres entrées sont figées ;
- cinquième scénario : les trois activités sont en évolution.

4.5.1 Premier scénario : entrées figées

Toutes les entrées sont figées à leur dernière valeur (valeurs de 2018) pour chaque entrée. Le résultat de ce scénario est illustré sur la figure 4.41 où on remarque que la température se stabilise une fois que les trois entrées sont constantes. Ce résultat semble

cohérent car les sous-modèles estimés sont des modèles stables. Les deux courbes en vert sont respectivement les bornes inférieure et supérieure de la courbe de prédiction en utilisant moins un écart type pour la borne inférieure et plus un écart type pour la borne supérieure.

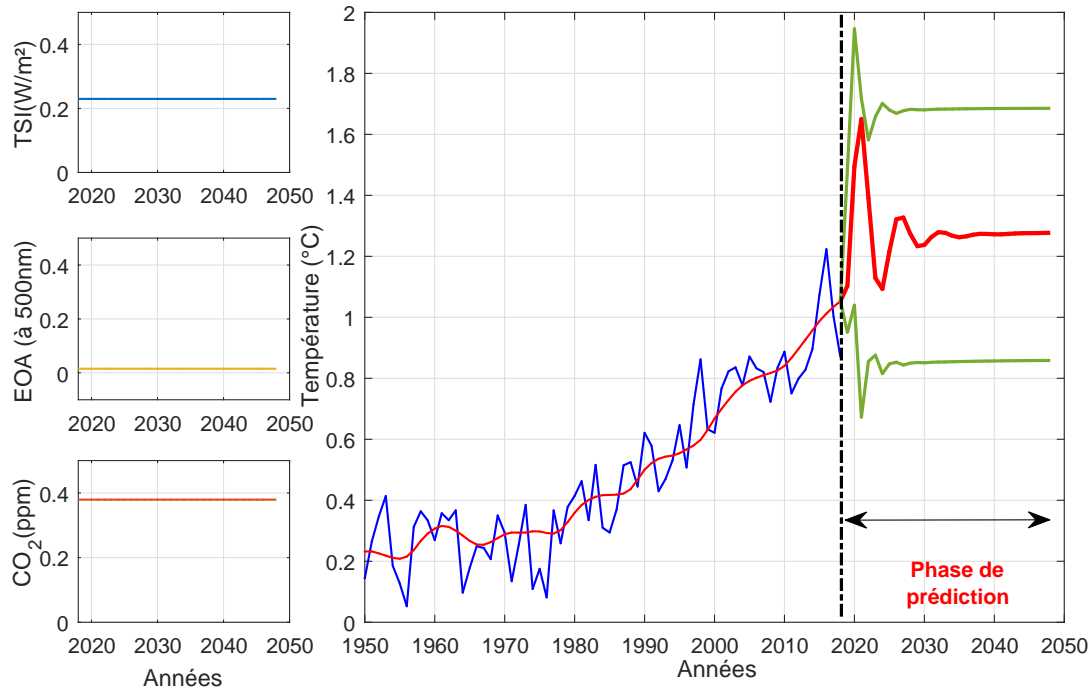


Figure 4.41 – Prédiction de la courbe de température (---) avec des forçages constants après 2018, les deux courbes sont les bornes inférieure et supérieure de la courbe de prédiction (---)

A partir de la température de 2018, la température peut atteindre une augmentation de $0.2^{\circ}\text{C} \pm 0.4^{\circ}\text{C}$ en 30 ans.

4.5.2 Deuxième scénario : activité humaine en évolution

Dans ce scénario, on suppose que seule l'activité humaine continue à évoluer au cours du temps et que les deux autres activités sont figées à leur dernière valeur. Le résultat de ce scénario est illustré sur la figure 4.42 où on remarque que la température augmente au cours de temps à cause de l'augmentation du CO_2 . Ce résultat semble cohérent avec les rapports du GIEC. Les deux courbes en vert sont respectivement les bornes inférieure et supérieure de la courbe de prédiction en utilisant moins un écart type pour la borne inférieure et plus un écart type pour la borne supérieure.

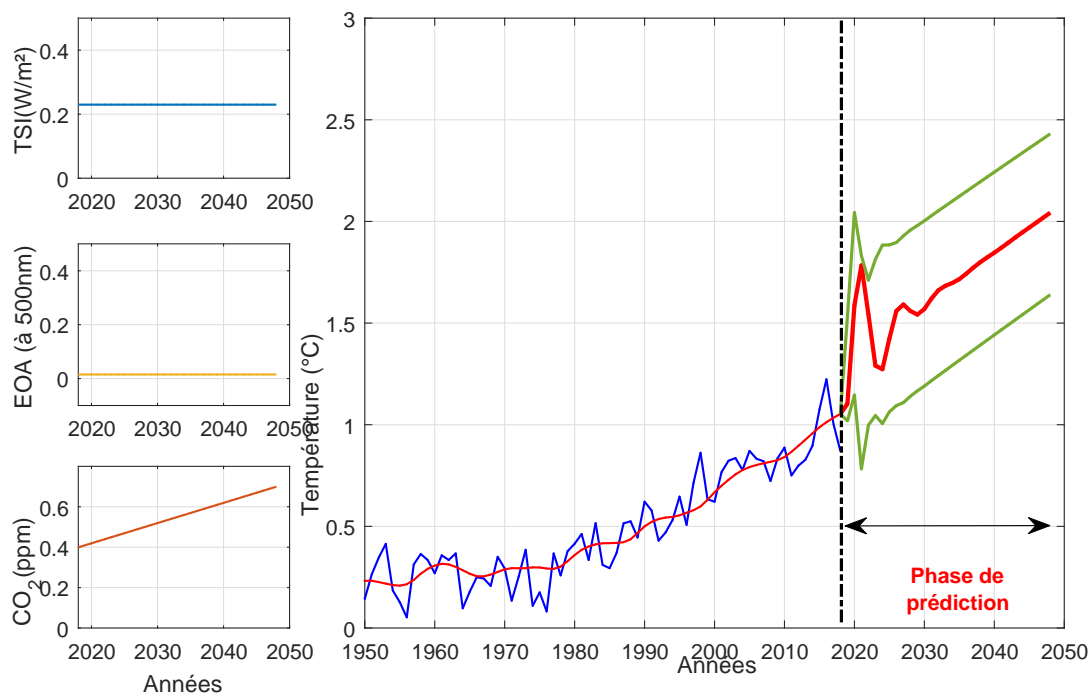


Figure 4.42 – Prédiction de la courbe de température (---), l'activité humaine est en évolution et les activités naturelles sont constantes, après 2018, les deux courbes (---) sont les bornes inférieure et supérieure de la courbe de prédiction

A partir de la température de 2018, la température peut atteindre une augmentation de $1^{\circ}\text{C} \pm 0.4^{\circ}\text{C}$ en 30 ans.

4.5.3 Troisième scénario : activité solaire en évolution

Dans ce scénario, on suppose que seule l'activité solaire continue à évoluer au cours du temps et que les deux autres activités sont figées à leur dernière valeur. Le résultat de ce scénario est illustré sur la figure 4.43 où on remarque que la température augmente doucement au cours du temps. Ce résultat signifie que l'activité solaire n'a pas un grand effet sur l'évolution de la température dans le futur. Les deux courbes en vert sont respectivement les bornes inférieure et supérieure de la courbe de prédiction en utilisant moins un écart type pour la borne inférieure et plus un écart type pour la borne supérieure.

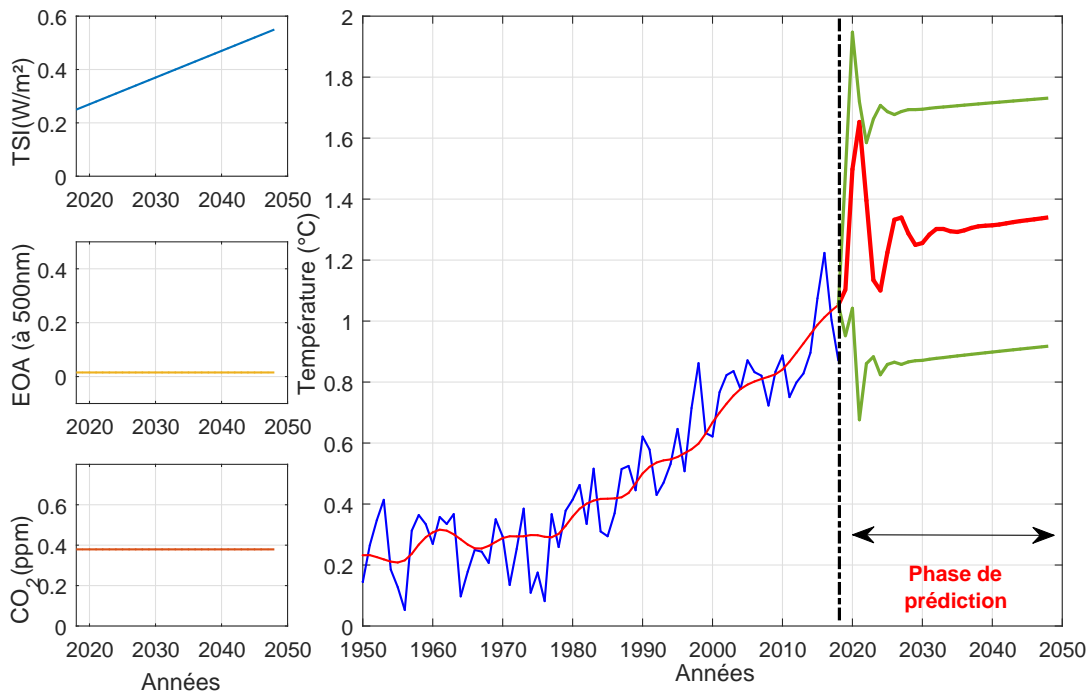


Figure 4.43 – Prédiction de la courbe de température (---), l'activité solaire est en évolution et les deux autres activités sont constantes, après 2018, les deux courbes (---) sont les bornes inférieure et supérieure de la courbe de prédiction

A partir de la température de 2018, la température peut atteindre une augmentation de $0.35^{\circ}\text{C} \pm 0.4^{\circ}\text{C}$ en 30 ans.

4.5.4 Quatrième scénario : activité volcanique en évolution

Dans ce scénario, on suppose que seule l'activité volcanique continue à évoluer au cours du temps et que les deux autres activités sont figées à leur dernière valeur. Le résultat de ce scénario est illustré sur la figure 4.44 où on remarque que la température augmente doucement au cours du temps. Ce résultat signifie que l'activité volcanique n'a pas un grand effet sur l'évolution de la température dans le futur. Les deux courbes en vert sont respectivement les bornes inférieure et supérieure de la courbe de prédiction en utilisant moins un écart type pour la borne inférieure et plus un écart type pour la borne supérieure.

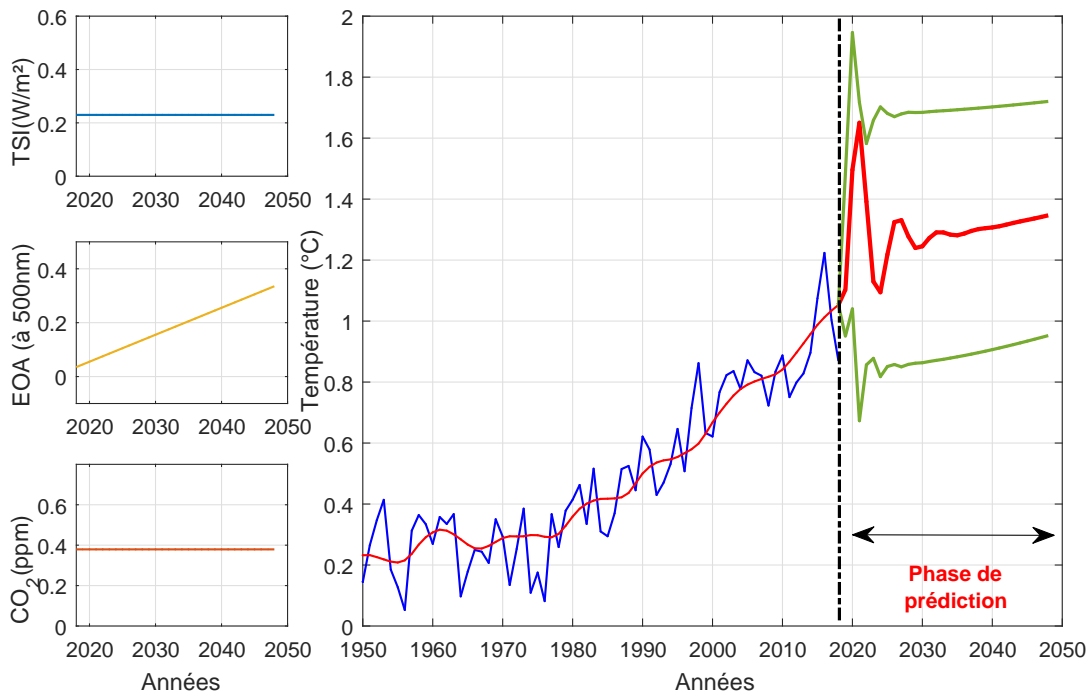


Figure 4.44 – Prédiction de la courbe de température (---), l'activité volcanique en évolution et les deux autres activités sont constantes, après 2018, les deux courbes (---) sont les bornes inférieure et supérieure de la courbe de prédiction

A partir de la température de 2018, la température peut atteindre une augmentation de $0.35^{\circ}\text{C} \pm 0.4^{\circ}\text{C}$ en 30 ans.

4.5.5 Cinquième scénario : toutes les entrées en évolution

Dans ce scénario, toutes les entrées sont en évolution. Le résultat de ce scénario est illustré sur la figure 4.45 où on remarque que la température a évolué d'une manière plus significative. Ce résultat semble cohérent avec les rapports du GIEC. Les deux courbes en vert sont les deux bornes inférieure et supérieure de la courbe de prédiction en utilisant moins un écart type pour la borne inférieure et plus un écart type pour la borne supérieure.

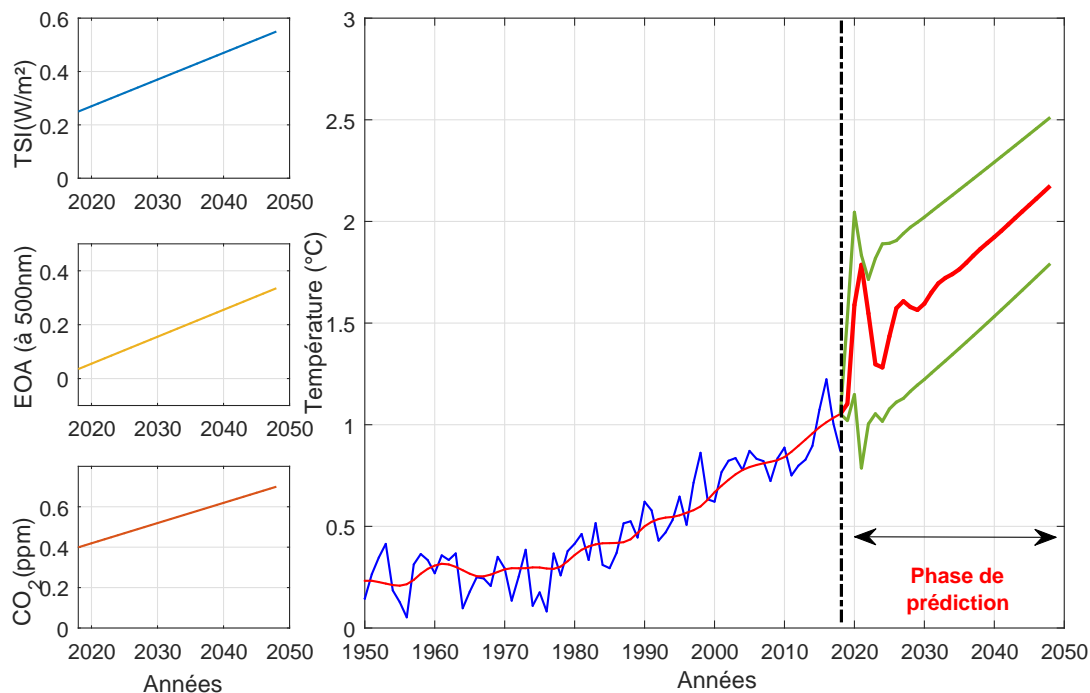


Figure 4.45 – Prédiction de la courbe de température (—) avec des forçages en évolution après 2018, les deux courbes (—) sont les bornes inférieure et supérieure de la courbe de prédiction

Ce scénario est le plus pessimiste. En effet, de la température de 2018, la prédiction de température conduit à une variation de température pouvant atteindre $1.2^{\circ}\text{C} \pm 0.4^{\circ}\text{C}$ en 30 ans.

4.6 Conclusion

Ce chapitre a permis de mettre en application les différentes contributions de ce mémoire sur le système climatique terrestre pour modéliser la température. Après une description du système climatique ainsi que des facteurs de forçages (les entrées), les méthodes d'identification de systèmes MISO non entiers, développées au chapitre 3, sont appliquées afin de trouver le modèle le plus adapté.

Depuis les années 80, les rapports du GIEC ne cessent d'indiquer que le réchauffement climatique est principalement dû à l'activité anthropologique. Il y a indéniablement un réchauffement climatique qui ne fait que s'accélérer depuis le début du *XXI^{ème}* siècle. Compte tenu de la compacité paramétrique qu'apporte les modèles non entiers et de leur atout indéniable pour bien modéliser les phénomènes diffusifs et plus particulièrement les transferts thermiques, identifier le modèle climatique terrestre par des modèles non entiers ne pouvait être que bénéfique. Dans ce chapitre, nous avons souhaité apporter

des contributions pour déterminer de manière objective l'origine de ce réchauffement climatique. Au vu de l'activité solaire, on remarque en effet que l'irradiance solaire est en très forte hausse ces vingt dernières années, cependant sa contribution au réchauffement climatique reste en dessous de 0.2°C . Il semblerait même que cette activité solaire est en baisse ces 4 dernières années. D'autre part, la contribution de l'activité volcanique semble oscillante avec une constante de temps d'environ 56 ans mais reste inférieure à 0.05°C en moyenne. En revanche, il semble indéniable que l'activité anthropologique contribue bien plus fortement au réchauffement climatique : l'évolution de la température augmente significativement et tend vers 1 à 1.2°C , en fonction des scénarios, ce qui est 10 fois plus important que la contribution de l'activité solaire, ou 20 à 24 fois plus important que la contribution de l'activité volcanique.

Enfin, en dernière partie, la prédiction apportée par les modèles non entiers conduit à des variations de température qui sont principalement dues à l'activité humaine. En effet, dans le scénario le plus optimiste où les forçages sont constants, la variation de température atteint $0.35^{\circ}\text{C} \pm 0.4^{\circ}\text{C}$. Dans le scénario le plus pessimiste, où les forçages sont croissants, la variation de température pourrait atteindre jusqu'à $1.2^{\circ}\text{C} \pm 0.4^{\circ}\text{C}$. En conclusion, les modèles non entiers estimés sont précis malgré la qualité des données et sont en cohérence avec les rapports du GIEC sur le réchauffement climatique.

Pour finir, on a établi des modèles d'estimation pour une reconstruction de température, celle de Ljunqvist associée à HadCRUT4 avec l'irradiance solaire Delaygue-TIMV17. En perspective, il serait intéressant de faire cette étude d'identification et de prédiction par modèle non entier avec les autres reconstructions de température et d'irradiance solaire.

CONCLUSION GENERALE

Cette thèse concerne l'identification de systèmes non entiers multi-entrées-mono-sortie à partir d'une représentation par fonctions de transfert. Deux méthodes y sont principalement développées. La première est basée sur la variable instrumentale optimale qui permet d'estimer uniquement les coefficients et qui a été étendue pour l'estimation des ordres de dérivation, par une technique de programmation non linéaire. L'autre méthode, basée sur la minimisation de l'erreur de sortie, permet d'estimer simultanément les coefficients et les ordres de dérivation.

Dans le **chapitre 1**, les principales définitions et propriétés de la dérivation non entière ont été rappelées. La notion de S-commensurabilité a été introduite pour limiter le nombre de paramètres à estimer d'un système multi-entrées-mono-sortie, ce qui permet d'améliorer la convergence des méthodes d'identification.

Dans le **chapitre 2**, la planification d'expériences a été étudiée pour la synthèse du meilleur signal d'excitation pour l'identification de systèmes non entiers de deuxième espèce. Une étude permet d'adapter le signal d'excitation au système de deuxième espèce afin d'estimer ses paramètres avec la meilleure précision possible. Nos contributions ont donné lieu à :

- une communication dans la conférence internationale “18th IFAC Symposium on System Identification (SYSID 2018)” [C–1].
- un article dans la revue “Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation (CNSNS 2021)” [A–2].

Le **chapitre 3** a été consacré à l'identification de systèmes non entiers multi-entrées-mono-sortie. Tout d'abord, lorsque les ordres de dérivation sont supposés connus, deux méthodes d'estimation des coefficients ont été développées, l'une basée sur la variable instrumentale optimale et l'autre sur la minimisation de l'erreur de sortie. Ensuite, lorsque les ordres de dérivation sont inconnus, la première méthode a été combinée à une programmation non linéaire pour estimer les ordres de dérivation et la deuxième méthode a été étendue pour estimer les coefficients et les ordres de dérivation simultanément. Trois variantes ont été proposées : estimation de l'ordre S-commensurable global pour l'ensemble

du système multi-entrées-mono-sortie, estimation des ordres S-commensurables locaux pour chaque sous-système, estimation de tous les ordres de dérivation sans contrainte de S-commensurabilité. Une procédure d'initialisation est proposée, consistant à estimer d'abord un modèle S-commensurable global, puis les ordres S-commensurables locaux, et enfin tous les ordres de dérivation. Nos contributions ont donné lieu à

- une communication dans la conférence internationale “21st IFAC World Congress (IFAC 2020)” [C-2].
- une communication dans la conférence internationale “17th International Multi-Conference on Systems, Signals and Devices (SSD 2020)” [C-3].
- un article dans la revue “Fractional Calculus and Applied Analysis (FCAA 2021)” [A-1].
- un article dans la revue “Automatica (2022)” [A - 3].

Le **chapitre 4** a été consacré à la modélisation du système climatique terrestre. Après un état de l'art sur les données d'entrées/sortie, les méthodes d'identification ont été appliquées afin d'estimer des modèles représentatifs de la température terrestre sur deux périodes : [1850, 2018] et [1000, 2018]. La première période correspond à la première révolution industrielle où les données sont plus significatives alors que la deuxième correspond à une estimation des données d'entrées/sortie par proxies. Tout d'abord, les ordres de dérivation ont été fixés et seuls les coefficients ont été estimés. Sur la période [1850, 2018], il s'avère que le pourcentage de correspondance n'est que de 45% pour un modèle entier, alors qu'il passe à 58% pour un modèle S-commensurable d'ordre 0.5. Ensuite, des modèles non entiers de première espèce et de deuxième espèce ont été identifiés, où on passe respectivement aux pourcentages de correspondance de 66% et 70%. L'identification a également été réalisée sur la deuxième période [1000, 2018], où on atteint un pourcentage de correspondance de 88% pour un modèle non entier de deuxième espèce. Enfin, ce dernier modèle nous a permis d'établir des prédictions sur les évolutions de la température terrestre. Dans le scénario le plus optimiste où les facteurs de forçage se maintiennent constants, la température progresserait de $0.35^{\circ}C \pm 0.4^{\circ}C$ sur un horizon de 30 ans. Dans le scénario le moins optimiste où tous les facteurs de forçage croissent, on pourrait atteindre une croissance de la température de l'ordre de $1.2^{\circ}C \pm 0.4^{\circ}C$ dans 30 ans. Nous avons donc clairement établi des résultats objectifs sur l'évolution du réchauffement climatique terrestre indépendamment de ceux proposés par le GIEC. Nos contributions dans ce chapitre n'ont pas encore donné lieu à des publications.

Les perspectives de recherche s'inscrivent directement dans la continuité des travaux en cours.

Il serait intéressant de développer des techniques permettant de fixer le nombre de paramètres lorsque la structure du modèle MISO n'est pas connue. Il serait également intéressant d'étendre cette étude pour traiter le bruit de sortie coloré en utilisant des modèles MISO hybrides Box-Jenkins avec des modèles d'entrée-sortie non entiers à temps continu et des modèles de bruit à temps discret. Une autre extension des deux algorithmes *MISO-oe* et *MISO-oosrvcf* pourrait aborder l'identification paramétrique de systèmes avec retards.

Bibliographie

- [Abrashov *et al.*, 2018] ABRASHOV, S., MALTI, R., MOREAU, X., MOZE, M., AIOUN, F. et GUILLEMARD, F. (2018). Optimal input design for continuous-time system identification. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 60:92–99.
- [Abrashov *et al.*, 2016] ABRASHOV, S., MALTI, R., MOZE, M., MOREAU, X., AIOUN, F. et GUILLEMARD, F. (2016). Simple and robust experiment design for system identification using fractional models. *IEEE Transactions on Automatic Control*.
- [Abrashov *et al.*, 2017] ABRASHOV, S., MALTI, R., MOZE, M., MOREAU, X., AIOUN, F. et GUILLEMARD, F. (2017). Simple and robust experiment design for system identification using fractional models. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 62(6):2648–2658.
- [Aoun, 2005] AOUN, M. (2005). *Systemes linéaires non entiers et identification par bases orthogonales non entieres*. Thèse de doctorat, Bordeaux 1.
- [Aoun *et al.*, 2007a] AOUN, M., MALTI, R., LEVRON, F. et OUSTALOUP, A. (2007a). Synthesis of fractional Laguerre basis for system approximation. *Automatica*, 43(9): 1640–1648. IF : 3.132.
- [Aoun *et al.*, 2007b] AOUN, M., MALTI, R., LEVRON, F. et OUSTALOUP, A. (2007b). Synthesis of fractional laguerre basis for system approximation. *Automatica*, 43(9): 1640–1648.
- [Bai, 1998] BAI, E.-W. (1998). An optimal two-stage identification algorithm for hammerstein–wiener nonlinear systems. *Automatica*, 34(3):333–338.
- [Bard *et al.*, 2000] BARD, E., RAISBECK, G., YIOU, F. et JOUZEL, J. (2000). Solar irradiance during the last 1200 years based on cosmogenic nuclides. *Tellus B : Chemical and Physical Meteorology*, 52(3):985–992.
- [baron de Fourier, 1822] baron de FOURIER, J. B. J. (1822). *Théorie analytique de la chaleur*. Firmin Didot.

- [Battaglia *et al.*, 2000] BATTAGLIA, J., BATSALÉ, J. C., LE LAY, L., OUSTALOUP, A. et COIS, O. (2000). Heat flux estimation through inverted non-integer identification models; utilisation de modèles d'identification non entiers pour la résolution de problèmes inverses en conduction. *International Journal of Thermal Sciences*, 39.
- [Battaglia *et al.*, 2001] BATTAGLIA, J.-L., COIS, O., PUIGSEGUR, L. et OUSTALOUP, A. (2001). Solving an inverse heat conduction problem using a non-integer identified model. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 44(14):2671–2680.
- [Belkhatir et Laleg-Kirati, 2018] BELKHATIR, Z. et LALEG-KIRATI, T. M. (2018). Parameters and fractional differentiation orders estimation for linear continuous-time non-commensurate fractional order systems. 115:26–33.
- [Benchellal *et al.*, 2004] BENCHELLAL, A., BACHIR, S., POINOT, T. et TRIGEASSOU, J. (2004). Identification of a non-integer model of induction machines. *In 1st IFAC Workshop on Fractional Differentiation and its Applications (FDA)*, pages 400–407.
- [Bombois *et al.*, 2021] BOMBOIS, X., MORELLI, F., HJALMARSSON, H., BAKO, L. et COLIN, K. (2021). Robust optimal identification experiment design for multisine excitation. *Automatica*, 125:109431.
- [Boucher et Saint-Martin, 2014] BOUCHER, O. et SAINT-MARTIN, D. (2014). *le climat en question*.
- [Caputo, 1967] CAPUTO, M. (1967). Linear models of dissipation whose q is almost frequency independent. *Geophysical Journal International*, 13(5):529–539.
- [Cois *et al.*, 2000] COIS, O., OUSTALOUP, A., BATTAGLIA, E. et BATTAGLIA, J.-L. (2000). Non integer model from modal decomposition for time domain system identification. *IFAC Proceedings Volumes*, 33(15):989–994.
- [Crowley et Unterman, 2013] CROWLEY, T. J. et UNTERMAN, M. B. (2013). Technical details concerning development of a 1200 yr proxy index for global volcanism. *Earth System Science Data*, 5(1):187–197.
- [de Larminat, 2016] de LARMINAT, P. (2016). Earth climate identification vs. anthropic global warming attribution. *Annual Reviews in Control*, 42:114–125.
- [Delaygue et Bard, 2011] DELAYGUE, G. et BARD, E. (2011). An antarctic view of beryllium-10 and solar activity for the past millennium. *Climate Dynamics*, 36(11-12):2201–2218.

- [Dugowson, 1994] DUGOWSON, S. (1994). *Les différentielles métaphysiques : histoire et philosophie de la généralisation de l'ordre de la dérivation*. Thèse de doctorat, Université Paris Nord.
- [Etheridge *et al.*, 1998] ETHERIDGE, D., BARNOLA, J. et MORGAN, V. (1998). Historical co₂ records from the law dome de08, de08-2, and dss ice cores. Rapport technique, ESS-DIVE (Environmental System Science Data Infrastructure for a Virtual Ecosystem); Oak Ridge National Lab.(ORNL), Oak Ridge, TN (United States).
- [Etheridge *et al.*, 1996] ETHERIDGE, D. M., STEELE, L., LANGENFELDS, R., FRANCEY, R., BARNOLA, J.-M. et MORGAN, V. (1996). Natural and anthropogenic changes in atmospheric co₂ over the last 1000 years from air in antarctic ice and firn. *Journal of Geophysical Research : Atmospheres*, 101(D2):4115–4128.
- [Euler, 1738] EULER, L. (1738). De progressionibus transcendentibus seu quarum termini generales algebraice dari nequeunt. *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*, pages 36–57.
- [Ferdin, 2012] FERDI, Y. (2012). Some applications of fractional order calculus to design digital filters for biomedical signal processing. *Journal of Mechanics in Medicine and Biology*, 12(02):1240008.
- [Foucault, 2016] FOUCAULT, A. (2016). *Climatologie et paléoclimatologie-2e éd.* Dunod.
- [Fouquart, 2011a] FOUQUART, Y. (2011a). *futura sciences*.
- [Fouquart, 2011b] FOUQUART, Y. (2011b). *Futura Planète*.
- [Francey *et al.*, 2003] FRANCEY, R., STEELE, L., SPENCER, D., LANGENFELDS, R., LAW, R., KRUMMEL, P., FRASER, P., ETHERIDGE, D., DEREK, N., CORAM, S. *et al.* (2003). The csiro (australia) measurement of greenhouse gases in the global atmosphere. *Baseline Atmospheric Program Australia 1999-2000*, pages 42–53.
- [Gabano et Poinot, 2011] GABANO, J.-D. et POINOT, T. (2011). Estimation of thermal parameters using fractional modelling. *Signal Processing*, 91(4):938–948.
- [Garnier *et al.*, 2007] GARNIER, H., GILSON, M., YOUNG, P. C. et HUSELSTEIN, E. (2007). An optimal iv technique for identifying continuous-time transfer function model of multiple input systems. *Control engineering practice*, 15(4):471–486.
- [Garnier *et al.*, 2008] GARNIER, H., WANG, L. et YOUNG, P. C. (2008). Direct identification of continuous-time models from sampled data : Issues, basic solutions

- and relevance. *In Identification of continuous-time models from sampled data*, pages 1–29. Springer.
- [Gevers et Ljung, 1986] GEVERS, M. et LJUNG, L. (1986). Optimal experiment designs with respect to the intended model application. *Automatica*, 22(5):543–554.
- [Goodwin, 1977] GOODWIN, G.C. and PAYNE, R. (1977). Dynamic system identifications : experiment design and data analysis.
- [Grünwald, 1867] GRÜNWARD, A. K. (1867). Über” begrente” derivationen und deren anwedung. *Zangew Math und Phys*, 12:441–480.
- [Hjalmarsson et Jansson, 2008] HJALMARSSON, H. et JANSSON, H. (2008). Closed loop experiment design for linear time invariant dynamical systems via lmis. *Automatica*, 44(3):623–636.
- [Ionescu et De Keyser, 2008] IONESCU, C. M. et DE KEYSER, R. (2008). Relations between fractional-order model parameters and lung pathology in chronic obstructive pulmonary disease. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, 56(4):978–987.
- [Ivanova, 2017] IVANOVA, E. (2017). *Identification de systèmes multivariables par modèle non entier en utilisant la méthode des sous-espaces*. Thèse de doctorat, Bordeaux.
- [Kapetina et al., 2020] KAPETINA, M., PISANO, A., RAPAIC, M. et USAI, E. (2020). Adaptive unit-vector law with time-varying gain for finite-time parameter estimation in lti systems. *Applied Numerical Mathematics*, 155:16–28.
- [Kapetina et al., 2019] KAPETINA, M. N., RAPAIC, M. R., PISANO, A. et JELICIC, Z. D. (2019). Adaptive parameter estimation in lti systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 64(10):4188–4195.
- [Kay et Kay, 1993] KAY, S. M. et KAY, S. M. (1993). *Fundamentals of statistical signal processing : estimation theory*, volume 1. Prentice-hall Englewood Cliffs, NJ.
- [Kopp et al., 2005] KOPP, G., LAWRENCE, G. et ROTTMAN, G. (2005). The total irradiance monitor (tim) : science results. *In The Solar Radiation and Climate Experiment (SORCE)*, pages 129–139. Springer.
- [Kumar et Singh, 2020] KUMAR, D. et SINGH, J. (2020). *Fractional Calculus in Medical and Health Science*. CRC Press.
- [Lacroix, 1820] LACROIX, S. F. (1820). *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral*. Courcier 3 ed. Paris.

- [Laplace, 1812] LAPLACE, P.-S. (1812). Leçons de mathématiques données à l'école normale en 1795. *Oeuvres complètes de Lapalace. Tome XIV*, pages 10–177.
- [Le Lay, 1998] LE LAY, L. (1998). *Identification fréquentielle et temporelle par modèle non entier*. Thèse de doctorat, Bordeaux 1.
- [Lehu, 2012] LEHU, J.-M. (2012). *L'encyclopédie du marketing : Commenté et illustrée*. Editions Eyrolles.
- [Leibniz, 1853] LEIBNIZ, G. W. F. (1853). *Oeuvres Mathématiques de Leibniz*. Correspondance de Leibniz avec Hugens, van Zulichem et le Marquis de L'Hospital.
- [Letnikov, 1868] LETNIKOV, A. (1868). Theory of differentiation with an arbitrary indicator. *Matem Sbornik*, 3:1–68.
- [Lin et al., 2001] LIN, J., POINOT, T., TRIGEASSOU, J.-C. et COIRAULT, P. (2001). Parameter estimation of fractional systems : application to heat transfer. *In IEEE-ECC'2001, 6th European Control Conference*, Porto, Portugal.
- [Lin et al., 2000] LIN, J., POINOT, T., TRIGEASSOU, J.-C. et OUVRARD, R. (2000). Parameter estimation of fractional systems : application to the modeling of a lead-acid battery. *IFAC Proceedings Volumes*, 33(15):983–988.
- [Liouville, 1832] LIOUVILLE, J. (1832). Mémoire sur quelques questions de géométrie et de mécanique et sur un nouveau genre de calcul pour résoudre ces équations. *Ecole polytechnique*, 13:71–162.
- [Liu et al., 2011] LIU, X., WANG, J. et ZHENG, W. X. (2011). Convergence analysis of refined instrumental variable method for continuous-time system identification. *IET Control Theory & Applications*, 5(7):868–877.
- [Ljung, 1999] LJUNG, L. (1999). System identification. *Wiley encyclopedia of electrical and electronics engineering*, pages 1–19.
- [Ljungqvist, 2010] LJUNGQVIST, F. C. (2010). A new reconstruction of temperature variability in the extra-tropical northern hemisphere during the last two millennia. *Geografiska Annaler : Series A, Physical Geography*, 92(3):339–351.
- [Loehle, 2007] LOEHLE, C. (2007). A 2000-year global temperature reconstruction based on non-treering proxies. *Energy & Environment*, 18(7):1049–1058.
- [Maachou et al., 2014] MAACHOU, A., MALTI, R., MELCHIOR, P., BATTAGLIA, J.-L., OUSTALOUP, A. et HAY, B. (2014). Nonlinear thermal system identification using fractional volterra series. *Control Engineering Practice*, 29:50–60.

- [MacFarling Meure *et al.*, 2006] MACFARLING MEURE, C., ETHERIDGE, D., TRUDINGER, C., STEELE, P., LANGENFELDS, R., VAN OMMEN, T., SMITH, A. et ELKINS, J. (2006). Law dome co₂, ch₄ and n₂o ice core records extended to 2000 years bp. *Geophysical Research Letters*, 33(14).
- [Magin, 2010] MAGIN, R. L. (2010). Fractional calculus models of complex dynamics in biological tissues. *Computers & Mathematics with Applications*, 59(5):1586–1593.
- [Malti *et al.*, 2005] MALTI, R., AOUN, M., LEVRON, F. et OUSTALOUP, A. (2005). *Fractional Differentiation and its Applications. Vol. 1 – Mathematical tools, geometrical and physical aspects*, chapitre Unified construction of fractional generalized orthogonal bases, pages 87–102. U-Books, Germany.
- [Malti *et al.*, 2018] MALTI, R., MAYOUFI, A. et VICTOR, S. (2018). Experiment design for system identification using fractional models of the second kind. *In 18th IFAC Symposium on System Identification (SYSID 2018)*, volume 51, pages 371–376, Stockholm, Sweden.
- [Malti *et al.*, 2022] MALTI, R., MAYOUFI, A. et VICTOR, S. (2022). Experiment design for elementary fractional models. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*.
- [Malti *et al.*, 2011] MALTI, R., MOREAU, X., KHEMANE, F. et OUSTALOUP, A. (2011). Stability and resonance conditions of elementary fractional transfer functions. *Automatica*, 47(11):2462–2467. IF : 3.132.
- [Malti et Thomassin, 2013] MALTI, R. et THOMASSIN, M. (2013). Differentiation similarities in fractional pseudo-state space representations and the subspace-based methods. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 16(1):273–287.
- [Malti et Victor, 2015] MALTI, R. et VICTOR, S. (2015). Crone toolbox for system identification using fractional differentiation models. *IFAC-PapersOnLine*, 48(28):769–774.
- [Malti *et al.*, 2008a] MALTI, R., VICTOR, S. et OUSTALOUP, A. (2008a). Advances in system identification using fractional models. *Journal of computational and nonlinear dynamics*, 3(2).
- [Malti *et al.*, 2008b] MALTI, R., VICTOR, S., OUSTALOUP, A. et GARNIER, H. (2008b). An optimal instrumental variable method for continuous-time fractional model identification. *IFAC Proceedings Volumes*, 41(2):14379–14384.

- [Mann et Jones, 2003] MANN, M. E. et JONES, P. D. (2003). Global surface temperatures over the past two millennia. *Geophysical Research Letters*, 30(15).
- [Marquardt, 1963] MARQUARDT, D. W. (1963). An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters. *Journal of the society for Industrial and Applied Mathematics*, 11(2):431–441.
- [Matignon, 1998] MATIGNON, D. (1998). Stability properties for generalized fractional differential systems. *ESAIM proceedings - Systèmes Différentiels Fractionnaires - Modèles, Méthodes et Applications*, 5.
- [Matignon et d'Andréa Novel, 1996] MATIGNON, D. et d'Andréa NOVEL, B. (1996). Some results on controllability and observability of finite-dimensional fractional differential systems. *In Computational engineering in systems applications*, volume 2, pages 952–956. Citeseer.
- [Mayoufi et al., 2020a] MAYOUFI, A., CHETOUI, M., VICTOR, S., AOUN, M. et MALTI, R. (2020a). A comparison between two methods for miso fractional models estimation. *In 2020 17th International Multi-Conference on Systems, Signals & Devices (SSD)*, pages 446–451. IEEE.
- [Mayoufi et al., 2021] MAYOUFI, A., VICTOR, S., CHETOUI, M., MALTI, R. et AOUN, M. (2021). Output error miso system identification using fractional models. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 24(5):1601–1618.
- [Mayoufi et al., 2020b] MAYOUFI, A., VICTOR, S., MALTI, R., CHETOUI, M. et AOUN, M. (2020b). An optimal instrumental variable approach for continuous-time multiple input-single output fractional model identification. *IFAC-PapersOnLine*, 53(2):3701–3706.
- [Mehra, 1974] MEHRA, R. (1974). Optimal input signals for parameter estimation in dynamic systems—survey and new results. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 19(6):753–768.
- [Miller et Ross, 1993] MILLER, K. S. et ROSS, B. (1993). *An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations*. Wiley.
- [Moberg et al., 2005] MOBERG, A., SONECHKIN, D. M., HOLMGREN, K., DATSENKO, N. M. et KARLÉN, W. (2005). Highly variable northern hemisphere temperatures reconstructed from low-and high-resolution proxy data. *Nature*, 433(7026):613.

- [Moze *et al.*, 2005] MOZE, M., SABATIER, J. et OUSTALOUP, A. (2005). LMI tools for stability analysis of fractional systems. *In ASME IDETC/CIE Conferences*, volume DETC2005-85182, Long Beach, CA, USA.
- [Mukhopadhyay *et al.*, 1991] MUKHOPADHYAY, S., PATRA, A. et RAO, G. (1991). Irreducible model estimation for mimo systems. *International journal of control*, 53(1):223–253.
- [Nasser-Eddine *et al.*, 2020] NASSER-EDDINE, A., HUARD, B., GABANO, J.-D., POINOT, T., MARTEMIANOV, S. et THOMAS, A. (2020). Fast time domain identification of electrochemical systems at low frequencies using fractional modeling. *Journal of Electroanalytical Chemistry*, 862:113957.
- [Oustaloup, 1983] OUSTALOUP, A. (1983). *Systèmes asservis linéaires d'ordre fractionnaire : Théorie et Pratique*. Masson - Paris.
- [Oustaloup, 1995a] OUSTALOUP, A. (1995a). La dérivation non entière : Théorie. *Synthèse et Applications*.
- [Oustaloup, 1995b] OUSTALOUP, A. (1995b). *La dérivation non-entière : théorie, synthèse et applications*. Hermès - Paris.
- [Oustaloup, 2014] OUSTALOUP, A. (2014). *Diversity and non-integer differentiation for system dynamics*. Wiley Online Library.
- [Oustaloup *et al.*, 1996] OUSTALOUP, A., LE LAY, L. et MATHIEU, B. (1996). Identification of non-integer order system in the time-domain. *In Proceedings of the CESA*, volume 96, pages 9–12.
- [Pan *et al.*, 2020] PAN, S., GONZÁLEZ, R. A., WELSH, J. S. et ROJAS, C. R. (2020). Consistency analysis of the simplified refined instrumental variable method for continuous-time systems. *Automatica*, 113:108767.
- [Podlubny, 1998] PODLUBNY, I. (1998). *Fractional differential equations : an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications*. Elsevier.
- [Pointot et Trigeassou, 2004] POINOT, T. et TRIGEASSOU, J.-C. (2004). Identification of fractional systems using an output-error technique. *Nonlinear Dynamics*, 38(1):133–154.

- [Poinot *et al.*, 2002] POINOT, T., TRIGEASSOU, J.-C. et JUN, L. (2002). Parameter estimation of fractional models : application to the modeling of diffusive systems. *IFAC Proceedings Volumes*, 35(1):319–324.
- [R. Mansouri et Djennoune, 2010] R. MANSOURI, M. B. et DJENNOUNE, S. (2010). Multivariable fractional system approximation with initial conditions using integral state space representation. *Computers Mathematics with Applications*, 59(5):1842–1851.
- [Rao et Unbehauen, 2006] RAO, G. et UNBEHAUEN, H. (2006). Identification of continuous systems. *Control Theory and Applications, IEE Proceedings -*, 153:185 – 220.
- [Rapaić et Pisano, 2014] RAPAIĆ, M. R. et PISANO, A. (2014). Variable-order fractional operators for adaptive order and parameter estimation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 59(3):798–803.
- [Rekanos et Yioultsis, 2014] REKANOS, I. T. et YIOULTSIS, T. V. (2014). Approximation of grünwald–letnikov fractional derivative for fdtd modeling of cole–cole media. *IEEE Transactions on magnetics*, 50(2):181–184.
- [Riemann, 1876a] RIEMANN, B. (1876a). *Gesammelte mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlass*, volume 1. BG Teubner.
- [Riemann, 1876b] RIEMANN, B. (1876b). Versuch einer allgemeinen auffassung der integration und differentiation. *Gesammelte Werke*, 62(1876).
- [Rodrigues *et al.*, 2000] RODRIGUES, S., MUNICHANDRAIAH, N. et SHUKLA, A. (2000). A review of state-of-charge indication of batteries by means of ac impedance measurements. *Journal of power Sources*, 87(1-2):12–20.
- [Sabatier *et al.*, 2012] SABATIER, J., FARGES, C., MERVEILLAUT, M. et FENETEAU, L. (2012). On observability and pseudo state estimation of fractional order systems. *European journal of control*, 18(3):260–271.
- [Samko et Ross, 1993] SAMKO, S. et ROSS, B. (1993). Integration and differentiation to a variable fractional order. *Integral transforms and special functions*, 1(4):277–300.
- [Sato *et al.*, 1993] SATO, M., HANSEN, J. E., MCCORMICK, M. P. et POLLACK, J. B. (1993). Stratospheric aerosol optical depths, 1850–1990. *Journal of Geophysical Research : Atmospheres*, 98(D12):22987–22994.

- [Schwabe et Schwabe, 1844] SCHWABE, H. et SCHWABE, H. (1844). Sonnenâbeobachtungen im jahre 1843. *Astronomische Nachrichten*, 21(15):234–235.
- [Solomon *et al.*, 2011] SOLOMON, S., DANIEL, J. S., NEELY, R. R., VERNIER, J.-P., DUTTON, E. G. et THOMASON, L. W. (2011). The persistently variable âbackgroundâ stratospheric aerosol layer and global climate change. *Science*, 333(6044):866–870.
- [Spinelli *et al.*, 2006] SPINELLI, W., PIRODDI, L. et LOVERA, M. (2006). A two-stage algorithm for structure identification of polynomial narx models. In *2006 American Control Conference*, pages 6–pp. IEEE.
- [Steinhilber *et al.*, 2009] STEINHILBER, F., BEER, J. et FRÖHLICH, C. (2009). Total solar irradiance during the holocene. *Geophysical Research Letters*, 36(19).
- [Stoica *et al.*, 2005] STOICA, P., MOSES, R. L. *et al.* (2005). Spectral analysis of signals.
- [Tahiri *et al.*, 2012] TAHIRI, A., TANRE, D., DIOURI, M. et BLAREL, L. (2012). Forçage radiatif dû à lâaérosol atmosphérique observé à oujda (maroc) en 2012.
- [Thomassin et Malti, 2009] THOMASSIN, M. et MALTI, R. (2009). Multivariable identification of continuous-time fractional system. In *International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*, volume 49019, pages 1187–1195.
- [Tian *et al.*, 2020] TIAN, J., XIONG, R., SHEN, W., WANG, J. et YANG, R. (2020). Online simultaneous identification of parameters and order of a fractional order battery model. *Journal of Cleaner Production*, 247:119147.
- [Trigeassou *et al.*, 1999] TRIGEASSOU, J., POINOT, T., LIN, J., OUSTALOUP, A. et LEVRON, F. (1999). Modeling and identification of a non integer order system. In *Control Conference (ECC), 1999 European*, pages 2453–2458. IEEE.
- [Tzoumas *et al.*, 2018] TZOUMAS, V., XUE, Y., PEQUITO, S., BOGDAN, P. et PAPPAS, G. J. (2018). Selecting sensors in biological fractional-order systems. *IEEE Transactions on Control of Network Systems*, 5(2):709–721.
- [Usoskin et Kovaltsov, 2006] USOSKIN, I. G. et KOVALTSOV, G. A. (2006). Cosmic ray induced ionization in the atmosphere : Full modeling and practical applications. *Journal of Geophysical Research : Atmospheres*, 111(D21).

- [Victor *et al.*, 2013a] VICTOR, S., MALTI, R., GARNIER, H. et OUSTALOUP, A. (2013a). Parameter and differentiation order estimation in fractional models. *Automatica*, 49(4): 926–935.
- [Victor *et al.*, 2013b] VICTOR, S., MALTI, R., GARNIER, H. et OUSTALOUP, A. (2013b). Parameter and differentiation order estimation in fractional models. *Automatica*, 49(4): 926–935. IF : 3.132.
- [Victor *et al.*, 2022] VICTOR, S., MAYOUFI, A., MALTI, R., CHETOUI, M. et AOUN, M. (2022). System identification of miso fractional systems : parameter and differentiation.
- [Victor *et al.*, 2016] VICTOR, S., MELCHIOR, P., MALTI, R. et OUSTALOUP, A. (2016). Robust motion planning for a heat rod process. *Nonlinear Dynamics*, 86(2):1271–1283.
- [Victor *et al.*, 2018] VICTOR, S., MELCHIOR, P., PELLET, M. et OUSTALOUP, A. (2018). Lung thermal transfer system identification with fractional models. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 28(1):172–182.
- [Wang *et al.*, 2020] WANG, Y., LI, M. et CHEN, Z. (2020). Experimental study of fractional-order models for lithium-ion battery and ultra-capacitor : Modeling, system identification, and validation. *Applied Energy*, 278:115736.
- [Young, 1981] YOUNG, P. (1981). Parameter estimation for continuous-time models—a survey. *Automatica*, 17(1):23–39.
- [Young et Jakeman, 1980] YOUNG, P. et JAKEMAN, A. (1980). Refined instrumental variable methods of recursive time-series analysis part iii. extensions. *International Journal of Control*, 31(4):741–764.
- [Young, 1970] YOUNG, P. C. (1970). An instrumental variable method for real-time identification of a noisy process. *Automatica*, 6(2):271–287.
- [Young, 2002] YOUNG, P. C. (2002). Optimal iv identification and estimation of continuous-time tf models. *IFAC Proceedings Volumes*, 35(1):109–114.
- [Young *et al.*, 2008] YOUNG, P. C., GARNIER, H. et GILSON, M. (2008). Refined instrumental variable identification of continuous-time hybrid box-jenkins models. *In Identification of continuous-time models from sampled data*, pages 91–131. Springer.

Liste des publications

Publications dans des revues internationales

- [A-1] A. Mayoufi, S. Victor, M. Chetoui, R. Malti et M. Aoun. “Output error MISO system identification using fractional models”. In : *Fractional Calculus and Applied Analysis (FCAA)* doi.org/10.1515/fca-2021-0067.
- [A-2] R. Malti, A. Mayoufi et S. Victor. “Experiment design for elementary fractional models”. In : *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation (CNSNS)* doi.org/10.1016/j.cnsns.2022.106337.
- [A-3] S. Victor, A. Mayoufi, R. Malti, M. Chetoui et M. Aoun. “System identification of MISO fractional systems : parameter and differentiation order estimation”. In : *Automatica* doi.org/10.1016/j.automatica.2022.110268.

Communications dans des conférences internationales

- [C-1] R. Malti, A. Mayoufi, S. Victor. “Experiment design for system identification using fractional models of the second kind”. In : *18th IFAC Symposium on System Identification (SYSID) Stockholm, Sweden*. Juil. 2018, Volume 51, Issue 15, Pages 371-376. doi.org/10.1016/j.ifacol.2018.09.173.
- [C-2] A. Mayoufi, S. Victor, R. Malti, M. Chetoui, M. Aoun. “An optimal instrumental variable approach for continuous-time multiple-input-single-output fractional model identification”. In : *21st IFAC World Congress Berlin, Germany*. Juil. 2020, Volume 53, Issue 2, Pages 3701-3706. doi.org/10.1016/j.ifacol.2020.12.2055.
- [C-3] A. Mayoufi, M. Chetoui, S. Victor, M. Aoun, R. Malti. “A comparison between two methods for MISO fractional models estimation”. In : *17th International Multi-Conference on Systems, Signals Devices (SSD) Monastir, Tunisia*. Juil. 2020, Pages 446-451.

doi: [10.1109/SSD49366.2020.9364187](https://doi.org/10.1109/SSD49366.2020.9364187).

Communications dans des manifestations scientifiques nationales

- [C-4] A. Mayoufi, S. Victor, R. Malti, M. Aoun. “*Dynamic Harmonic Regression approach for global terrestrial temperature system identification*”. Poster aux Journées Doctorales et Journées Nationales du GDR MACS JD-JN-MACS, Bordeaux. Mar. 2019. hal.archives-ouvertes.fr/hal-02477628/document.
- [C-5] A. Mayoufi, S. Victor, R. Malti, M. Chetoui, M. Aoun. “*An optimal instrumental variable approach for continuous-time multiple input-single output fractional model identification*”. Poster aux Journées Identification et Modélisation Expérimentale JIME, Caen. Avr. 2020.
- [C-6] A. Mayoufi, S. Victor, R. Malti, M. Chetoui, M. Aoun. “*Multivariable fractional system identification*”. Présentation au Groupe de Travail Identification du Journées de la SAGIP, Nov. 2021.