



HAL
open science

Stabilité d'un film viscoplastique sur un plan incliné

Djibrilla Mounkaila Noma

► **To cite this version:**

Djibrilla Mounkaila Noma. Stabilité d'un film viscoplastique sur un plan incliné. Mécanique des fluides [physics.class-ph]. Université de Lyon, 2021. Français. NNT : 2021LYSE1131 . tel-03663371

HAL Id: tel-03663371

<https://theses.hal.science/tel-03663371>

Submitted on 10 May 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



N° d'ordre NNT : 2021LYSE1131

THESE de DOCTORAT DE L'UNIVERSITE DE LYON
opérée au sein de
l'Université Claude Bernard Lyon 1

Ecole Doctorale N° 162
Mécanique – Energétique - Génie civil – Acoustique (MEGA)

Spécialité de doctorat : Mécanique des Fluides

Soutenue publiquement le 16/07/2021, par :
Djibrilla MOUNKAILA NOMA

Stabilité d'un film viscoplastique sur un plan incliné

Devant le jury composé de :

VINKOVIC, Ivana	Professeure des Universités - LMFA Université Claude Bernard Lyon 1	Présidente
CHAMBON, Guillaume	Directeur de Recherche - ETNA INRAé – Grenoble	Rapporteur
RUYER-QUIL, Christian	Professeur des Universités - LOCIE Université Savoie Mont-Blanc	Rapporteur
BENNACER, Rachid	Professeur des Universités - LMT Ecole Normale Supérieure Paris-Saclay	Examineur
MERGUI, Sophie	Maitre de Conférence - FAST Sorbonne Université	Examinatrice
BEN HADID, Hamda	Professeur des Universités - LMFA Université Claude Bernard Lyon 1	Directeur de thèse
DAGOIS-BOHY, Simon	Maitre de Conférence - LMFA Université Claude Bernard Lyon 1	Co-directeur de thèse
MILLET, Séverine	Maitre de Conférence - LMFA Université Claude Bernard Lyon 1	Co-directrice de thèse

Université Claude Bernard – LYON 1

Président de l'Université	M. Frédéric FLEURY
Président du Conseil Académique	M. Hamda BEN HADID
Vice-Président du Conseil d'Administration	M. Didier REVEL
Vice-Président du Conseil des Etudes et de la Vie Universitaire	M. Philippe CHEVALLIER
Vice-Président de la Commission de Recherche	M. Petru MIRONESCU
Directeur Général des Services	M. Pierre ROLLAND

COMPOSANTES SANTE

Département de Formation et Centre de Recherche en Biologie Humaine	Directrice : Mme Anne-Marie SCHOTT
Faculté d'Odontologie	Doyenne : Mme Dominique SEUX
Faculté de Médecine et Maïeutique Lyon Sud - Charles Mérieux	Doyenne : Mme Carole BURILLON
Faculté de Médecine Lyon-Est	Doyen : M. Gilles RODE
Institut des Sciences et Techniques de la Réadaptation (ISTR)	Directeur : M. Xavier PERROT
Institut des Sciences Pharmaceutiques et Biologiques (ISBP)	Directrice : Mme Christine VINCIGUERRA

COMPOSANTES & DEPARTEMENTS DE SCIENCES & TECHNOLOGIE

Département Génie Electrique et des Procédés (GEP)	Directrice : Mme Rosaria FERRIGNO
Département Informatique	Directeur : M. Behzad SHARIAT
Département Mécanique	Directeur M. Marc BUFFAT
Ecole Supérieure de Chimie, Physique, Electronique (CPE Lyon)	Directeur : Gérard PIGNAULT
Institut de Science Financière et d'Assurances (ISFA)	Directeur : M. Nicolas LEBOISNE
Institut National du Professorat et de l'Education	Administrateur Provisoire : M. Pierre CHAREYRON
Institut Universitaire de Technologie de Lyon 1	Directeur : M. Christophe VITON
Observatoire de Lyon	Directrice : Mme Isabelle DANIEL
Polytechnique Lyon	Directeur : Emmanuel PERRIN
UFR Biosciences	Administratrice provisoire : Mme Kathrin GIESELER
UFR des Sciences et Techniques des Activités Physiques et Sportives (STAPS)	Directeur : M. Yannick VANPOULLE
UFR Faculté des Sciences	Directeur : M. Bruno ANDRIOLETTI

Résumé

Cette thèse s'intéresse à la stabilité de l'écoulement d'un film viscoplastique sur un plan incliné. Ce type de fluides présente la particularité de ne pouvoir s'écouler que lorsqu'on applique une contrainte supérieure à la contrainte seuil τ_y . L'étude de ce problème permet notamment de mieux appréhender les phénomènes physiques liés à l'apparition des ondes de surfaces que l'on peut rencontrer par exemple lors des coulées de boue, pouvant entraîner des effets encore plus ravageurs. Contrairement aux fluides newtoniens, les conditions de stabilité des écoulements de films viscoplastiques n'ont pas été étudiées précisément sur le plan expérimental ce qui ne permet pas de confronter les théories. Pour pallier ce manque, nous avons mis en œuvre un dispositif expérimental. Il s'agit d'un canal d'angle variable, dans lequel un écoulement permanent de fluide de Herschel-Bulkley est établi. Des perturbations avec des fréquences et des amplitudes contrôlées sont imposées à l'entrée du canal pour générer des ondes de surface. L'évolution spatiale des ondes est suivie avec un télémètre laser, pour mesurer l'épaisseur locale du film. Les taux de croissance et les fréquences neutres sont obtenus après traitement du signal donnant l'épaisseur du film le long du canal. Il est alors possible de déduire des nombres de Reynolds et de Bingham critiques. Nos expériences montrent que le modèle de Balmforth et Liu (2004), d'ordre 0 en ε (le rapport d'aspect entre l'épaisseur du film et sa longueur caractéristique) décrit bien les seuils de stabilité. Cependant, il est insuffisant pour décrire les effets de dispersion pour lesquels des ordres supérieurs en ε sont nécessaires. Un prolongement du développement de Balmforth et Liu (2004) a été réalisé à l'ordre 1 en ε . Ce développement montre que le modèle de Balmforth et Liu (2004) surestime légèrement les seuils de stabilité et que la correction augmente avec l'indice rhéologique n . Ce modèle permet également d'obtenir des résultats numériques concernant les effets de dispersion systématiquement plus proches des expériences, même si ces derniers s'avèrent encore insuffisants pour décrire le comportement expérimental. Enfin, une étude exploratoire sur le régime non-linéaire montre des comportements similaires à ceux de fluides newtoniens, à savoir une saturation de l'amplitude, un raidissement du front des ondes et une transition supercritique vers le régime non-linéaire.

Mots clés : fluides viscoplastiques, instabilités des écoulements, contrainte seuil, fluides non-newtoniens, films tombants.

Abstract

This thesis studies the instability of a viscoplastic film flowing down an inclined plane. The viscoplastic fluids need to exceed a minimal stress τ_y to flow. Understanding this problem makes it possible to better explain the physical mechanisms involved in the destructive power of roll-waves in mud and lava flows. Unlike for Newtonian fluids, this has not yet been accurately measured for viscoplastic flows. We cannot then compare the existing theoretical models. So, we have designed a model experimental setup. The experimental setup is a channel with a variable slope angle, in which a permanent flow of a Herschel-Bulkley fluid is established. Controlled frequency and amplitude perturbations are imposed at the entrance of the channel to generate roll waves. The spatial evolution of these waves is followed with a laser sensor at the entrance of the channel, which measures the local fluid thickness. Growth rates and cutoff frequencies are obtained after processing the thickness signal. So, we can deduce the experimental critical Reynolds and Bingham numbers. The experimental results show that the model of order 0 in ε of Balmforth and Liu (2004) well describes the stability threshold. However, this does not work for dispersion effects. Higher orders in ε seems necessary. An extension has been carried out up to order 1 in ε . This study shows that the Balmforth's model tends to overestimate the stability thresholds. This effect is more important for high power indices n . Finally, an exploratory study on the nonlinear regime of a visco-plastic film shows results similar to those of Newtonian fluids, notably amplitude saturation, wave front stiffening and coalescence.

Key words : visco-plastic fluids, instability flows, yield stress, non-Newtonian fluids, falling films.

Remerciements

C'est à mes directeurs de thèse que vont mes premiers remerciements. Tout d'abord, le Professeur Hamda Ben Hadid pour sa rigueur, sa confiance et ses conseils notamment sur le second bac tranquillisateur. Monsieur Simon Dagois-Bohy pour sa disponibilité, son accompagnement et son investissement. Il m'a énormément appris sur le plan expérimental et ces mystérieux fluides à seuil. Madame Séverine Millet pour son implication, sa bonne humeur et ses encouragements. Je n'aurai pas réussi sans leur encadrement à tous les trois. Encore merci !

J'exprime ma vive reconnaissance à mes rapporteurs, Monsieur Christian Ruyer-Quil, Professeur à l'Université Savoie Mont-Blanc et Monsieur Guillaume Chambon, Directeur de Recherche à INRAé, pour l'attention et l'analyse détaillée qu'ils ont porté à mon manuscrit. Pour avoir accepté d'examiner ce travail de doctorat et pour la grande richesse des discussions scientifiques, je remercie chaleureusement mes examinateurs, Monsieur Rachid Bennacer, Professeur à l'Ecole Normale Supérieure (ENS) Paris-Saclay, Madame Sophie Mergui, Maître de Conférence à Sorbonne Université et Madame Ivana Vinkovic, Professeure à l'Université Lyon 1 et présidente du jury. Je remercie également Monsieur François Rousset, Maître de Conférence à l'INSA de Lyon, d'avoir participer à mon comité de suivi de thèse.

Mes remerciements sont ensuite destinés aux membres du LMFA et plus particulièrement à l'équipe que j'ai rejoint, Valéry Botton, Daniel Henry et Sophie Miralles. Toutes nos réunions et discussions ont rythmé ces années et m'ont permis d'approfondir mon travail. Merci aux doctorants et post-doctorants que j'ai côtoyé Virgile, Idir, Abdelssamed, Bjarne, Corentin, Clément, Juan, Rafiq, Dimitri et particulièrement à toi Nouhayla, ma collègue de bureau.

Je tiens à adresser mes sincères remerciements à l'ensemble des permanents du département de mécanique que j'ai eu l'occasion de rencontrer notamment Marc Buffat, Jean-Philippe Matas, Delphine Doppler, Laure-Lise Gras, Laurence Chèze, Pierre Valiorgue, Bastien Di Pierro, John Soundar Jérôme Joseph, Claude Inserra, Lionel Le Penven, Laura Dubuis, Lionel Frossard, Frédéric Alizard, Hélène Scolan, Bertrand Frechede et Xavier Escriva. Merci également à Stéphane Marti-

nez et Guillian Geniquet pour leur appui technique si précieux ainsi qu'à Sylvie Duchet pour son appui administratif.

J'ai tellement apprécié enseigner à l'IUT Lyon 1. Merci à Sylvie Ronel, Benjamin Payet, Michel Massenzio, Thomas Castelain, Pauline Schlosser, Roman Peczalskiet Sébastien Ollivier. Ils m'ont permis d'explorer une très large palette d'enseignements (DDS, mécanique, mécanique des fluides, sciences des matériaux, thermodynamique et transferts thermiques).

Enfin, j'adresse mes sincères remerciements et ma gratitude à ma famille et mes amis. Merci maman et papa pour l'éducation, les valeurs et le soutien sans faille. Je ne vous remercierai jamais assez. A Reynatou, Abdoul Magid et Saadia, mes frères et sœurs qui sont et seront toujours là pour moi. Merci à mes amis qui ont compris mes absences, m'ont encouragé et m'ont soutenu pendant ce doctorat.

Pour terminer, je tiens à remercier les étudiantes, étudiants et personnels de cette belle et grande université qu'est l'Université Claude Bernard Lyon 1. Je ne garderai que de bons souvenirs de cette expérience ainsi que du campus Lyon-Tech La Doua, ma vraie maison dans le fond.

Table des matières

Liste des figures	IX
Liste des tableaux	XVII
Liste des symboles	XIX
Introduction	1
1 État de l'art	7
1.1 Stabilité des fluides newtoniens sur plan incliné	9
1.1.1 Stabilité linéaire de l'écoulement de fluides newtoniens sur plan incliné	9
1.1.2 Régime non-linéaire des fluides newtoniens	11
1.2 Fluides viscoplastiques	14
1.2.1 Description des fluides viscoplastiques	14
1.2.2 Propriétés	17
1.3 Stabilité linéaire des fluides non-newtoniens	19
1.3.1 Films de fluides rhéofluidifiants ou épaississants	19
1.3.2 Panorama de la stabilité linéaire des fluides viscoplastiques	20
1.4 Développement analytique aux ondes longues (Balmforth et al., 2004)	22
1.4.1 Écoulement en pseudo-bouchon	22
1.4.2 Équations du mouvement et adimensionnement	23
1.4.3 Stabilité des ondes de surface	27
1.5 Critiques du calcul à l'ordre 0 en ε	32
1.5.1 Développement de Fernandez-Nieto et al. (2010) à l'ordre ε	32
1.5.2 Comparaison des deux approches	33
1.6 Expériences sur plan incliné	36
1.6.1 Fluides newtoniens	36
1.6.2 Fluides non-newtoniens	37

1.7	Conclusion partielle	44
2	Expérience de stabilité primaire de films viscoplastiques	45
2.1	Dispositif expérimental	46
2.1.1	Écoulement de base	47
2.1.2	Fluides	49
2.2	Mesure de stabilité linéaire des ondes de surface	55
2.2.1	Perturbation de l'écoulement de base	55
2.2.2	Détection des ondes	56
2.3	Résumé des incertitudes expérimentales	61
2.4	Conclusion partielle	62
3	Résultats expérimentaux de stabilité primaire	63
3.1	Méthodologie expérimentale	64
3.1.1	Taux de croissance et nombre d'onde	64
3.1.2	Fréquence neutre et cartographie de stabilité	66
3.1.3	Nombres de Reynolds et de Bingham critiques	68
3.2	Seuils de stabilité	70
3.3	Relation de dispersion	75
3.4	Conclusion partielle	78
4	Développement asymptotique à l'ordre ε	79
4.1	Modélisation	80
4.1.1	Perturbation dans la couche cisailée	81
4.1.2	Perturbations dans le pseudo-bouchon	82
4.1.3	Conditions aux limites entre la couche cisailée et le pseudo-bouchon	85
4.1.4	Système d'équations à l'ordre ε	86
4.2	Résolution aux ondes longues	87
4.3	Résolution numérique du système	90
4.4	Étude exploratoire de l'effet de la tension de surface	96
4.5	Conclusion partielle	99
5	Régime non-linéaire d'un film viscoplastique sur plan incliné	101
5.1	Dispositif expérimental	102
5.2	Saturation des ondes et raidissement du front	103
5.3	Longueur d'onde, coalescence et nature de la transition	108
5.4	Conclusion partielle	113
	Conclusion générale et perspectives	115
	Annexes	117
	Bibliographie	130

Table des figures

1	Exemples d'applications industrielles et agro-alimentaires. La figure (a) représente du pétrole (hydrocarbure), (b) du ciment (c) une suspension de boue et (d) de la confiture.	2
2	En haut : coulées de boue à Minas Gerais au Brésil en 2017 d'après AP Photo/Felipe Dana. En bas : Coulées de lave provenant du volcan Kilauea, à Hawaï en 2018 d'après Handout/ US Geological survey / AFP.	3
3	Gauche : illustration du givrage de l'aile d'un avion d'après un document d'Aerospace Technologie Entreprise. Droite : évaporateur à ruissellement d'après haarslev.com	4
1.1	Courbes neutres d'après Yih (1963) : délimitation des zones stables et instables en fonction de α le nombre d'onde et de R le nombre de Reynolds. Les courbes ont été obtenues pour différents taux de croissance c_i et pour un angle d'inclinaison inférieur à 90°	10
1.2	Mécanisme de formation des instabilités pour les fluides newtoniens d'après Smith (1990)	11
1.3	Coalescence : fusion de vagues d'épaisseurs différentes d'après Malamataris <i>et al.</i> (2002).	12
1.4	Saturation et raidissement du front des ondes d'après Balmforth et Mandre (2004).	13
1.5	Contrainte visqueuse en fonction du taux de cisaillement selon le type de fluide. Nous distinguons d'une part les fluides newtoniens pour lesquels la contrainte visqueuse évolue proportionnellement en fonction du taux de cisaillement. Et d'autre part, les fluides non-newtoniens pour lesquels la viscosité croît (rhéoépaississant) ou décroît (rhéofluidifiant) avec le taux de cisaillement.	15

1.6	Comparaison des modèles rhéologiques de Bingham, Casson généralisé et Herschel-Bulkley. Les trois modèles tiennent compte de la limite plastique (contrainte seuil). Toutefois, le modèle de Bingham ne permet pas de prendre en compte l'effet rhéofluidifiant ou rhéoépaississant des fluides réels contrairement aux modèles de Herschel-Bulkley ou de Casson.	17
1.7	Effet de l'élasticité : impact d'une goutte de carboxyméthylcellulose sur une paroi d'après Luu et Forterre (2009). La goutte de carboxyméthylcellulose présente un comportement élastique.	18
1.8	Mécanisme de formation d'instabilités pour les fluides de Carreau d'après Millet <i>et al.</i> (2008)	20
1.9	Modélisation des écoulements en bouchon dans les films tombants de fluides viscoplastiques d'après Balmforth et Liu (2004). Contrairement au bouchon, la modélisation sous forme de pseudo-bouchon (ou pseudo-plug) intègre une correction de vitesse de l'ordre de ϵ permettant à la zone faiblement cisailée de se déformer et permettre le développement d'instabilités.	22
1.10	Évolution du nombre de Reynolds critique Re_c en fonction du nombre de Bingham pour différents indice n selon Balmforth et Liu (2004)	30
1.11	Saturation et raidissement du front des ondes issus des simulation numériques pour $Bi = 0.1$ et $Re = 5$ d'après Balmforth et Liu (2004).	31
1.12	Comparaison des prédictions analytiques de Balmforth et Liu (2004) et avec celles de Fernández-Nieto <i>et al.</i> (2010) pour un fluide de Bingham ($n = 1$)	34
1.13	Dispositif expérimental de film tombant sur plan incliné d'après Liu (1993). Sur les figures de droite sont illustrées les vagues capturées par la caméra (au haut) et l'amplitude des ondes après un traitement de données (en bas)	36
1.14	Résultats expérimentaux d'après Liu (1993) pour des fluides newtoniens. Gauche : courbe de stabilité pour $\phi = 15.6^\circ$: fréquence neutre en fonction du nombre de Reynolds (Re, f_c) pour identifier le nombre de Reynolds critique pour des fluides newtoniens. Le trait plein représente ajustement en racine carrée entre f_c et Re . La ligne en pointillée représente la solution de l'équation d'Orr-Sommerfeld du problème tandis que la ligne pointillée est la solution de l'équation de Benney du problème. Droite : nombre de Reynolds en fonction de l'angle d'inclinaison (ϕ, Re). Les croix représentent des expériences avec une solution glycérine-eau et les carrés blancs les résultats avec de l'eau. Nous observons que l'évolution de Re_c en fonction de ϕ suit bien les prédictions théoriques de Benjamin (1957) et Yih (1963) en traits pleins.	38
1.15	Relations de dispersion d'après Liu <i>et al.</i> (1993). En haut est représentée l'évolution du taux de croissance en fonction du nombre d'onde et en dessous l'évolution de la vitesse de phase adimensionnée en fonction du nombre d'onde. Les données expérimentales (carrés blancs) sont comparées aux solutions de Anshus et Goren (1966). Ils obtiennent alors une bonne adéquation entre les résultats expérimentaux et la théorie.	39
1.16	Schéma et photographie de l'expérience pour étudier la dynamique des ondes libres par gravité pour une mixture kaolin/eau d'après Chambon (2009)	40

TABLE DES FIGURES

1.17	Évolution du nombre de Froude F en fonction de G (l'inverse du nombre de Bingham Bi). Comparaison d'écoulements stables et instables avec des prédictions théoriques d'après Coussot (1994) pour une suspension d'argile.	42
2.1	Schéma du dispositif expérimental utilisé pour la stabilité primaire des fluides viscoplastiques.	46
2.2	Schéma simplifié du fonctionnement des débitmètres magnétiques.	47
2.3	Vérification du débit mesuré par débitmètre magnétique <i>RosemountTM</i> avec une méthode directe. Les points bleus correspondent aux mesures avec le débitmètre et en orange ceux de la méthode directe.	48
2.4	Gauche : Transformée de Fourier d'un signal enregistré par le télémètre laser en absence de perturbation. Le cercle vert indique les vibrations liées à la pompe. Droite : Photo du bac tranquilisateur sous pression. Ce bac permet à l'aide de sa surface libre d'atténuer les pulsations de la pompe.	49
2.5	Structure des particules selon la concentration d'après Oppong <i>et al.</i> (2006). Pour les microgels comme le carbopol, nous observons qu'aux fortes concentrations, il se produit une réticulation des polymères entraînant un gonflement des particules de polymère.	50
2.6	Gauche : Carbopol 980 en poudre. Droite : Agitateur à pales pour éliminer les grumeaux lors la dissolution du carbopol en poudre dans l'eau.	51
2.7	Loi de comportement $(\dot{\gamma}, \tau)$ pour un échantillon de fluide à base de carbopol 980. Les points rouges correspondent aux mesures rhéologiques avec des paliers ($\dot{\gamma} = cst$) à durée fixe alors que les points bleus sont les données obtenues avec des paliers à durée variable. La ligne verte est un ajustement avec un modèle de Herschel-Bulkley des mesures rhéologiques obtenues à durée variable. Les paramètres rhéologiques obtenus sont alors : $\tau_y = 4.24 Pa; K = 0.99 Pa.s^n; n = 0.54$	52
2.8	Évolution des paramètres rhéologiques au cours d'une expérience typique ($\tau_y = 4.24 Pa; K = 0.99 Pa.s^n; n = 0.54$) avec du carbopol 980.	54
2.9	Gauche : Pot vibrant BK 4809. Droite : Photo d'un écoulement instable avec une perturbation contrôlée ($f = 1.5 Hz, A = 10 V$) pour un fluide à base de carbopol 980.	55
2.10	Détection des ondes par réfraction laser	57
2.11	Mesure par télémètre laser. Gauche : Capteur Micro-Epsilon opticNCDS 1420. Droite : Schéma du principe de mesure ;	57
2.12	Influence du dioxyde de titane sur les propriétés rhéologiques du carbopol. Les points en bleu représentent les essais pour une concentration massique de dioxyde de titane de 0%, en orange pour une concentration 0.5% et en vert pour une concentration 1%. La ligne bleue correspond à l'ajustement avec la loi de Herschel-Buckley pour l'échantillon sans titane.	59
2.13	Évolution de l'épaisseur du film en fonction du débit. En rouge, l'épaisseur calculée avec le rhéologie et en bleu, la mesure expérimentale de l'épaisseur du film avec le capteur de triangulation laser.	60

3.1	Le signal temporel $h_s(t)$ enregistré par le capteur laser fixé à une platine de translation se déplaçant à une vitesse de 1 cm/s le long du canal, est représenté en bleu. En rouge, l'enveloppe $h_0 e^{\alpha vt}$ est reconstruite à partir du taux de croissance obtenu ($\alpha = 5.78 \text{ m}^{-1}$) par la méthode de Yoshida <i>et al.</i> (1981) pour un microgel de carbopol 980 ($\tau_y = 1.62 \text{ Pa}$; $K = 0.51 \text{ Pa.s}^n$; $n = 0.58$).	64
3.2	Transformée du Fourier du signal $h_s(t)$, représenté de la figure (3.1), pour une fréquence de forçage de 3,6 Hz. Le pic du signal réel est légèrement décalé par rapport à la fréquence imposée, représenté par la barre rouge.	65
3.3	Détermination de la fréquence neutre dans le plan (f, α) pour $q = 0.42L/s$ et $\phi = 15.6^\circ$ pour un fluide à base de carbopol 980 ($\tau_y = 4.21 \text{ Pa}$; $K = 0.99 \text{ Pa.s}^n$, $n = 0.54$). Les points rouges correspondent au couple (q, f) pour lesquels nous avons mesuré des ondes instables et ceux en bleu, les ondes stables.	66
3.4	Cartographie de stabilité dans le plan (q, f) pour le fluide à base de carbopol 980 . Les points rouges correspondent au couple (q, f) pour lesquels nous avons mesuré des ondes instables et ceux en bleu, les ondes stables. Les étoiles vertes indiquent la fréquence de coupure correspondante pour un débit donné.	67
3.5	Cartographie de stabilité dans le plan (Re, f) . Le nombre de Reynolds critique est obtenu avec un ajustement en racine carré des fréquences de coupures en fonction de Re	68
3.6	Cartographie de stabilité (Bi, f) . La cartographie permet d'identifier des zones d'ondes stables et instables. Le nombre de Bingham critique est obtenu avec un ajustement en racine carré des fréquences de coupures en fonction de Bi	69
3.7	Évolution du Re_c en fonction de Bi_c pour le fluide à base de Carbopol 980 ($n = 0.54$). Les points bleus représentent les données expérimentales. La courbe en rouge la prédiction théorique de Balmforth et Liu (2004) et l'enveloppe bleue la plage d'incertitude pour l'indice rhéologique $n = 0.54 \pm 0.02$ correspondant.	71
3.8	Évolution du Re_c en fonction de Bi_c pour la suspension de Kaolin ($n = 0.25$). Les points bleus représentent les données expérimentales. La courbe en rouge la prédiction théorique de Balmforth et Liu (2004) et l'enveloppe bleue la plage d'incertitude pour l'indice rhéologique $n = 0.25 \pm 0.03$ correspondant.	72
3.9	Evolution de Re_c en fonction de Bi_c pour deux fluides viscoplastiques : Kaolin ($n=0.25$) et Carbopol 980 ($n=0.54$). Les points représentent les résultats expérimentaux (pour le carbopol ($n = 0.54$) en bleu et pour le kaolin ($n = 0.25$) en rouge. La courbe bleue (respectivement rouge) est la prédiction théorique de Balmforth et Liu (2004) du nombre de Reynolds critique Re_c pour $n = 0,54$ (respectivement $n = 0.25$) en fonction du nombre du Bingham. Le couple (Bi_c, Re_c) étudié lors de la présentation de la méthodologie expérimentale correspond au point en vert.	74
3.10	Évolution expérimentale de la vitesse de phase normalisée c/c_b en fonction de la pulsation ω pour $Re = 11.2$ et $Bi = 0.29$	75
3.11	Relation de dispersion : évolution du nombre d'onde k multiplié par une vitesse normalisée en fonction de la pulsation ω pour $Re = 11.2$ et $Bi = 0.29$. Les points rouges représentent les mesures expérimentales et la courbe verte la résolution numérique du développement asymptotique de Balmforth et Liu (2004).	77

TABLE DES FIGURES

3.12	Évolution du taux de croissance α en fonction de la pulsation ω pour $Re = 11.2$ et $Bi = 0.29$. Les points rouges représentent les mesures expérimentales et la courbe verte la résolution numérique du développement asymptotique de Balmforth et Liu (2004).	77
4.1	Comparaison des résultats expérimentaux (points verts) avec le développement à l'ordre 0 en ε (courbe bleue) réalisé par Balmforth et Liu (2004) et le développement à l'ordre 1 en ε (courbe rouge) avec $\varepsilon = 0.28$ pour un fluide à base de carbopol 980 ($n = 0.54$)	88
4.2	Comparaison des résultats expérimentaux (points verts) avec le développement à l'ordre 0 en ε (courbe bleue) réalisé par Balmforth et Liu (2004) et le développement à l'ordre 1 en ε (courbe rouge) avec $\varepsilon = 0.28$ pour le fluide à base de kaolin ($n = 0.25$).	89
4.3	Évolution de l'écart relatif entre les nombres de Reynolds critiques obtenus à l'ordre 0 et 1 en ε en fonction du nombre de Bingham pour différentes valeurs de n	89
4.4	Vitesse de phase normalisée c/c_b en fonction de la pulsation ω pour (a) l'ordre 0 (b) le mode ε^+ et (c) le mode ε^-	92
4.5	Variation de la vitesse phase normalisée c/c_b en fonction de la pulsation ω dans 3 cas différents avec $\Delta Re = Re - Re_c$ pour l'ordre 0 et les modes ε^+ et ε^-	92
4.6	Taux de croissance α en fonction de la pulsation ω pour (a) l'ordre 0 (b) le mode ε^+ et (c) le mode ε^-	93
4.7	Variation du taux de croissance α en fonction de la pulsation ω dans 3 cas différents avec $\Delta Re = Re - Re_c$ pour l'ordre 0 et les modes ε^+ et ε^-	93
4.8	Comparaison de variation de la vitesse de phase normalisée c/c_b en fonction de la pulsation ω entre (a) les expériences (b) l'ordre 0 et (c) le mode ε^-	94
4.9	Comparaison de la variation du taux de croissance α en fonction de la pulsation ω entre (a) les expériences (b) l'ordre 0 et (c) le mode ε^-	94
4.10	Variation du taux de croissance α pour trois cas différents ($\Delta Re = -1.3; 0.7; 7.4$) avec $\Delta Re = Re - Re_c$	95
4.11	Variation du taux de croissance α pour trois cas différents ($\Delta Re = -1.3; 0.7; 7.4$), pour trois nombre de Bond $Bo^{-1} = 0; 3; 9$. La courbe bleue représente l'ordre 0 en ε , et les surfaces comprises entre les modes ε^+ et ε^- ont été colorées selon la valeur de Bo^{-1}	97
5.1	Dispositif expérimental pour l'étude du régime non-linéaire.	102
5.2	Croissance et raidissement du front des ondes pour un film viscoplastique ($\tau_y = 1.34 Pa; K = 1 Pa.s^n; n = 0.53$) sur un plan incliné ($\phi = 13.9^\circ, q = 0.396 L/s, f = 1.5 Hz$). Nous déduisons du débit, une épaisseur moyenne $\langle h \rangle$ de 0.47 cm. . La figure représente l'évolution temporelle de l'amplitude des ondes à une distance de 90 cm (haut) et de 10 cm (bas) de la sortie du canal.	103

5.3	Saturation et raidissement du front des ondes en régime non-linéaire d'un film viscoplastique ($\tau_y = 1.34 Pa$; $K = 1 Pa.s^n$; $n = 0.53$) sur un plan incliné ($\langle h \rangle = 0.47cm$, $\phi = 13.9^\circ$; $q = 0.396 L/s$, $f = 1.5 Hz$). Chaque ligne représente le signal temporel de l'amplitude des ondes à une position donnée le long du canal. La ligne du haut correspondant à la sortie du canal.	104
5.4	Saturation de l'amplitude des ondes sur une distance de 97.5 centimètres de la sortie du canal pour un film viscoplastique ($\tau_y = 1.34 Pa$; $K = 1 Pa.s^n$; $n = 0.53$) sur un plan incliné ($\langle h \rangle = 0.47cm$, $\phi = 13.9^\circ$; $q = 0.396 L/s$, $f = 1.5 Hz$).	105
5.5	Dépendance de l'amplitude de saturation des ondes en fonction de la fréquence imposée pour un film viscoplastique ($\tau_y = 2.44 Pa$; $K = 0.66 Pa.s^n$; $n = 0.55$) sur un plan incliné ($\langle h \rangle = 0.41cm$, $\phi = 15.6^\circ$; $q = 0.400 L/s$).	106
5.6	Évolution de l'amplitude des ondes le long du canal à différents débits à gauche, et à droite la variation de l'amplitude finale de saturation des ondes A_f normalisée par l'épaisseur moyenne h_m en fonction du débit q pour un film viscoplastique ($\tau_y = 1.85 Pa$; $K = 0.54 Pa.s^n$; $n = 0.57$) sur un plan incliné ($\phi = 13.2^\circ$; $f = 1.7 Hz$). 106	
5.7	Évolution de l'amplitude finale des ondes d'un film viscoplastique en fonction de la fréquence. Les points bleus sont des données expérimentales ($\langle h \rangle = 0.47cm$, $\tau_y = 1.34 Pa$; $K = 1 Pa.s^n$; $n = 0.53$; $\phi = 13.9^\circ$; $q = 0.396 L/s$) et la ligne orange décrit l'évolution de l'amplitude de saturation A_f en fonction de la fréquence en $\frac{1}{\sqrt{f}}$. 107	
5.8	Visualisation du régime non-linéaire d'un film viscoplastique ($\tau_y = 2.44 Pa$; $K = 0.66 Pa.s^n$; $n = 0.55$) sur un plan incliné ($\langle h \rangle = 0.41cm$, $\phi = 15.6^\circ$; $q = 0.400 L/s$; $f = 1.8 Hz$).	108
5.9	Schématisation de la construction du diagramme spatio-temporel à partir d'images acquises à différents instants.	109
5.10	Diagramme spatio-temporel des ondes à deux fréquences de forçage respectivement 1.4 Hz à gauche et 2.6 Hz à droite pour un film viscoplastique ($\tau_y = 2.44 Pa$; $K = 0.66 Pa.s^n$; $n = 0.55$) sur un plan incliné ($\langle h \rangle = 0.41cm$, $\phi = 15.6^\circ$; $q = 0.400 L/s$). 110	
5.11	Évolution de l'amplitude finale des ondes en fonction de la longueur d'onde pour un film viscoplastique ($\tau_y = 2.44 Pa$; $K = 0.66 Pa.s^n$; $n = 0.55$) sur un plan incliné de $\phi = 15.6^\circ$ et d'épaisseur moyenne $\langle h \rangle = 0.41 cm$. Les points bleus sont des données expérimentales et la ligne orange correspond à l'évolution décrite par le modèle (5.1) en $A_f \sim \lambda^{1/2}$	111
5.12	Évolution de l'amplitude en fonction de position en haut, et en bas $\sigma A - \frac{dA}{dx}$ en fonction de A^3 pour un film viscoplastique ($\tau_y = 2.44 Pa$; $K = 0.66 Pa.s^n$; $n = 0.55$) sur un plan incliné de $\phi = 15.6^\circ$ et d'épaisseur moyenne $\langle h \rangle = 0.41 cm$	112
13	Bac tranquilisateur à surface libre	120
14	Expérience Carpobol 1 : $\tau_y = 4.21$, $K = 0.99$, $n = 0.54$ et $\phi = 15.6^\circ$	122
15	Expérience Carpobol 2 : $\tau_y = 3.59$, $K = 1.03$, $n = 0.54$ et $\phi = 15.6^\circ$	122
16	Expérience Carpobol 3 : $\tau_y = 5.05$, $K = 1.34$, $n = 0.53$ et $\phi = 15.6^\circ$	123
17	Expérience Carpobol 4 : $\tau_y = 3.59$, $K = 1.03$, $n = 0.54$ et $\phi = 15.6^\circ$	123
18	Expérience Carpobol 5 : $\tau_y = 4.53$, $K = 1.37$, $n = 0.54$ et $\phi = 15.6^\circ$	123
19	Expérience 6 : $\tau_y = 4.16$, $K = 1.23$, $n = 0.54$ et $\phi = 13.6^\circ$	124

TABLE DES FIGURES

20	Expérience Carpobol 7 : $\tau_y = 3.28, K = 1.50, n = 0.52$ et $\phi = 11.1^\circ$	124
21	Expérience Carpobol 8 : $\tau_y = 4.33, K = 1.51, n = 0.53$ et $\phi = 12.3^\circ$	124
22	Expérience Carpobol 9 : $\tau_y = 3.58, K = 1.47, n = 0.53$ et $\phi = 15.6^\circ$	125
23	Expérience Carpobol 10 : $\tau_y = 2.96, K = 1.46, n = 0.53$ et $\phi = 15.6^\circ$	125
24	Expérience Carpobol 11 : $\tau_y = 1.87, K = 1.21, n = 0.54$ et $\phi = 9.7^\circ$	125
25	Expérience carpobol 12 : $\tau_y = 2.20, K = 1.20, n = 0.54$ et $\phi = 12^\circ$	126
26	Expérience carpobol 13 : $\tau_y = 1.63, K = 1.26, n = 0.54$ et $\phi = 15.6^\circ$	126
27	Expérience carpobol 14 : $\tau_y = 4.17, K = 1.15, n = 0.53$ et $\phi = 15.6^\circ$	126
28	Expérience carpobol 15 : $\tau_y = 4.55, K = 1.19, n = 0.54$ et $\phi = 15.6^\circ$	127
29	Expérience carpobol 16 : $\tau_y = 4.41, K = 1.21, n = 0.54$ et $\phi = 15.6^\circ$	127
30	Expérience carpobol 17 : $\tau_y = 4.41, K = 1.21, n = 0.54$ et $\phi = 12.9^\circ$	127
31	Expérience carpobol 18 : $\tau_y = 4.41, K = 1.21, n = 0.54$ et $\phi = 10.5^\circ$	128
32	Expérience carpobol 19 : $\tau_y = 4.26, K = 1.22, n = 0.53$ et $\phi = 8.9^\circ$	128
33	Expérience carpobol 20 : $\tau_y = 3.60, K = 1.15, n = 0.54$ et $\phi = 15.6^\circ$	128
34	Expérience carpobol 21 : $\tau_y = 4.06, K = 1.25, n = 0.54$ et $\phi = 15.6^\circ$	129
35	Expérience carpobol 22 : $\tau_y = 4.12, K = 1.46, n = 0.52$ et $\phi = 15.6^\circ$	129
36	Expérience kaolin 1 : $\tau_y = 8.15, K = 5.27, n = 0.25$ et $\phi = 15.6^\circ$	130
37	Expérience kaolin 2 : $\tau_y = 8.48, K = 5.45, n = 0.25$ et $\phi = 15.6^\circ$	130
38	Expérience kaolin 3 : $\tau_y = 4.74, K = 3.82, n = 0.24$ et $\phi = 15.6^\circ$	131
39	Expérience kaolin 4 : $\tau_y = 9.48, K = 8.07, n = 0.3$ et $\phi = 15.6^\circ$	131
40	Expérience kaolin 5 : $\tau_y = 10.55, K = 7.06, n = 0.29$ et $\phi = 15.6^\circ$	131
41	Expérience kaolin 6 : $\tau_y = 7.16, K = 11.46, n = 0.27$ et $\phi = 15.6^\circ$	132
42	Expérience kaolin 7 : $\tau_y = 5.97, K = 12.60, n = 0.25$ et $\phi = 14^\circ$	132
43	Expérience kaolin 8 : $\tau_y = 6.20, K = 9.87, n = 0.25$ et $\phi = 15.6^\circ$	132
44	Expérience kaolin 9 : $\tau_y = 6.90, K = 10.07, n = 0.25$ et $\phi = 15.6^\circ$	133
45	Expérience kaolin 10 : $\tau_y = 6.86, K = 10.07, n = 0.25$ et $\phi = 15.6^\circ$	133
46	Expérience kaolin 11 : $\tau_y = 4.74, K = 11.84, n = 0.25$ et $\phi = 15.6^\circ$	133

Liste des tableaux

2.1	Débit mesuré par le débitmètre magnétique <i>RosemountTM</i> et par méthode directe.	48
2.2	Influence de la concentration de titane sur les paramètres rhéologiques pour un microgel de carbopol 980.	59
2.3	Table récapitulative des incertitudes de mesure.	61
3.1	Plage des paramètres rhéologiques utilisés au cours de nos expériences.	71
3.2	Tableau récapitulatif des expériences à base de Carpbol 980.	73
3.3	Tableau récapitulatif des expériences à base de Kaolin	74
5.1	Évolution de l'amplitude des ondes en fonction de la position le long du canal pour un film viscoplastique ($\tau_y = 1.34 Pa$; $K = 1 Pa.s^n$; $n = 0.53$) sur un plan incliné ($\langle h \rangle = 0.47cm$, $\phi = 13.9^\circ$; $q = 0.396 L/s$, $f = 1.5 Hz$)	105
5.2	Variation de l'amplitude finale des ondes A_f et de l'épaisseur moyenne h_m du film en fonction du débit q pour un film viscoplastique ($\tau_y = 1.34 Pa$; $K = 1 Pa.s^n$; $n = 0.53$) sur un plan incliné ($\phi = 13.9^\circ$; $q = 0.396 L/s$, $f = 1.5 Hz$)	108

Liste des symboles

α	Taux de croissance spatial	m^{-1}
$\dot{\gamma}$	Taux de cisaillement	s^{-1}
ε	Rapport d'aspect de l'épaisseur du film en fonction de la longueur caractéristique	
λ	Longueur d'onde	m
μ	Viscosité dynamique	$Pa.s$
ϕ	Angle d'inclinaison du canal	rad
ρ	Masse volumique	Kg/m^3
τ	Contrainte	Pa
τ_y	Contrainte seuil	Pa
Bi	Nombre de Bingham	
Bi_c	Nombre de Bingham critique	
f_c	Fréquence de coupure ou neutre	Hz
g	Accélération de la pesanteur	m/s^2
h	Épaisseur du film tombant	m
K	Consistance (loi de Herchel-Bulkley)	$Pa.s^n$
k	Nombre d'onde	m^{-1}
n	Indice rhéologique du fluide	
q	Débit de la pompe	m^3/s
Re	Nombre de Reynolds	
Re_c	Nombre de Reynolds critique	

Introduction

Les fluides viscoplastiques ou fluides à seuil constituent une large famille de fluides au sein de notre environnement. Ils sont présents dans l'industrie alimentaire (beurre, ketchup, confiture, mayonnaise...) mais également dans l'industrie des hydrocarbures, des cosmétiques, des composés biomédicaux ou de la construction avec par exemple le béton (Ovarlez, 2011). La figure (1) illustre certaines de ces applications. Au delà de ces applications industrielles, ils peuvent également être impliqués dans des phénomènes géophysiques (Ancey, 2007) comme les coulées de lave (Blake, 1990), les avalanches (Nishimura et Maeno, 1987) ou les coulées de boue (Engelund et Zhaohui, 1984).

Les phénomènes géophysiques, encore très difficiles à prévoir, peuvent conduire à des catastrophes naturelles particulièrement destructrices. À la surface de ces écoulements, des ondes de surfaces peuvent se développer et atteindre de très grandes amplitudes. Qian *et al.* (1979) ont observé des vagues de plus de 3 mètres de hauteur dans les affluents d'une rivière chinoise, riche en sédiments. Ces vagues se déplacent à des vitesses beaucoup plus importantes que l'écoulement de base et sont à l'origine des effets destructeurs. Deux de ces événements sont représentés sur la figure (2). Ainsi, comme évoqué par Köhler *et al.* (2016), nous comprenons l'intérêt d'étudier ces instabilités afin de pouvoir évaluer les risques. Sur le plan industriel, la compréhension de ces instabilités est également pertinente pour accroître l'optimisation des procédés industriels notamment dans les industries alimentaire ou pharmaceutique.

Dans la littérature, de nombreuses études de stabilité linéaire de fluides newtoniens existent. Kapitza et Kapitza (1949) sont les pionniers dans ce domaine, c'est la raison pour laquelle ces instabilités sont couramment appelées les ondes de Kapitza. Ces ondes sont présentes dans l'industrie énergétique, notamment dans les échangeurs thermiques où elles amplifient le transfert d'énergie au sein d'un évaporateur à ruissellement mais également lors de phénomènes physiques comme le givrage des ailes des avions. Le givrage, illustré sur la figure (3), peut conduire à des conséquences très néfastes, allant jusqu'au crash de l'avion.

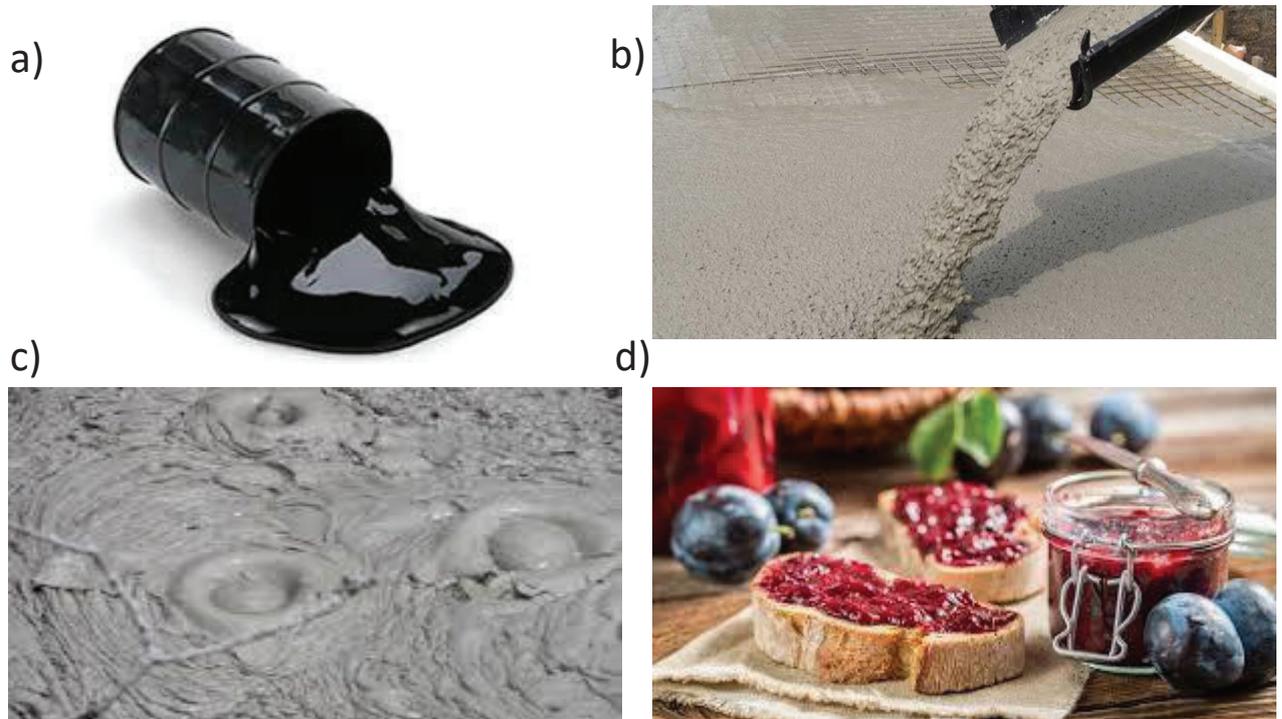


FIGURE 1 – Exemples d’applications industrielles et agro-alimentaires. La figure (a) représente du pétrole (hydrocarbure), (b) du ciment (c) une suspension de boue et (d) de la confiture.

Les instabilités apparaissant dans ce type d’écoulement ont été prédites d’un point de vue théorique par Benjamin (1957) et Yih (1963). Leurs résultats de stabilité linéaire ont été validés expérimentalement par Liu *et al.* (1993). Le mécanisme physique de ces instabilités a été expliqué par Smith (1990). De nos jours, les mécanismes d’instabilités de tels écoulements newtoniens est relativement bien compris sur le plan théorique et validé expérimentalement. Toutefois, pour les fluides non-newtoniens, un certain nombre de travaux ont été réalisés ces dernières années aussi bien d’un point de vue théorique qu’expérimental (Ng et Mei, 1994; Forterre et Pouliquen, 2003; Ruyer-Quil *et al.*, 2012; Nsom *et al.*, 2019; Hu *et al.*, 2021). L’étude des écoulements de films de fluides non-newtoniens sur un plan incliné est l’un des principaux axes de l’équipe que j’ai rejoint pour ma thèse (Hu *et al.*, 2006, 2008a,b; Rousset *et al.*, 2007; Millet *et al.*, 2008, 2013, 2019; Allouche *et al.*, 2015, 2017). Concernant les fluides viscoplastiques, les études de stabilité linéaire ne permettent pas à ce jour d’avoir des résultats permettant de comprendre parfaitement les phénomènes physiques. Des travaux théoriques comme ceux de Balmforth et Liu (2004), Fernández-Nieto *et al.* (2010) ou Noble et Vila (2013) ont été effectués pour tenter d’appréhender les critères de stabilité. Toutefois, il existe très peu d’études expérimentales permettant de confronter ces prédictions théoriques. Coussot (1994) est l’un des premiers à s’être intéressé à cette problématique d’un point de vue expérimental. Il a étudié les ondes de surface dans un canal de forme rectangulaire. Si son étude exploratoire est intéressante, elle ne permet pas de mesurer précisément les seuils de stabilité pour des perturbations contrôlées. Tamburrino et Ihle (2013) ont également effectué une étude



FIGURE 2 – En haut : coulées de boue à Minas Gerais au Brésil en 2017 d’après AP Photo/Felipe Dana. En bas : Coulées de lave provenant du volcan Kilauea, à Hawaï en 2018 d’après Handout/US Geological survey / AFP.

expérimentale à base de bentonite, mais encore une fois, elle ne permet de déterminer précisément ces seuils.

Au regard de la littérature sur le domaine, nous nous sommes alors proposés de mettre en place une expérience modèle afin d’étudier précisément la stabilité linéaire des écoulements des films de fluides viscoplastiques, de mesurer les seuils de stabilité et d’analyser la relation de dispersion. Cette étude nous paraît nécessaire pour comprendre et prédire les phénomènes physiques sous-jacents aux déclenchement des ondes de surface dans ce type d’écoulement.

Dans le premier chapitre, nous dresserons un état de l’art du problème. D’abord, nous présenterons les études de stabilité linéaire des fluides newtoniens sur un plan incliné. Ensuite, nous exposerons plus en détail le comportement des fluides viscoplastiques. Dans un troisième temps, nous

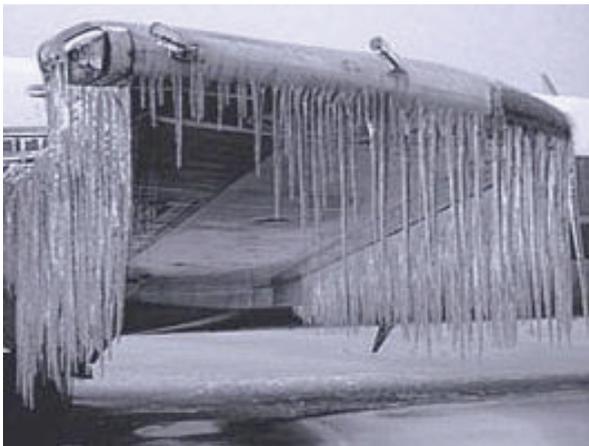


FIGURE 3 – Gauche : illustration du givrage de l’aile d’un avion d’après un document d’Aerospace Technologie Entreprise. Droite : évaporateur à ruissellement d’après haarslev.com .

aborderons la stabilité des fluides non-newtoniens. Nous nous focaliserons sur la difficulté de les modéliser sur un plan incliné et présenterons les prédictions de Balmforth et Liu (2004) ainsi que les insuffisances de cette approche (Fernández-Nieto *et al.*, 2010). Enfin, nous terminerons ce chapitre par la description de certaines des expériences de films tombants menées précédemment.

Le deuxième chapitre sera consacré à l’expérience de stabilité primaire des écoulements de films de fluides viscoplastiques que nous avons élaborée. Dans cette optique, nous présenterons le dispositif expérimental mis en place dans cette étude, les matériaux utilisés, la méthodologie employée pour créer des perturbations forcées, afin d’analyser l’instabilité primaire. Nous ferons aussi un focus sur la méthode de détection et de mesure de ces perturbations le long du canal.

La présentation des résultats expérimentaux des seuils de stabilité et des relations de dispersion sera abordée dans le troisième chapitre. Ce chapitre détaillera la méthode employée pour déterminer le nombre de Reynolds critique Re_c et le nombre de Bingham critique Bi_c . Il s’agit du nombre de Reynolds (respectivement Bingham) en dessous (au dessus) duquel l’écoulement est toujours stable en stabilité primaire. Nous détaillerons au préalable la détermination du taux de croissance des ondes ainsi que la fréquence de coupure (fréquence à laquelle le taux de croissance est nul). Les résultats expérimentaux seront comparés aux prédictions théoriques de Balmforth et Liu (2004). Nous dis-

cuterons alors cette comparaison.

Dans le quatrième chapitre, nous proposerons une étude plus approfondie de la stabilité primaire. Nous présenterons un modèle plus précis que ceux décrit dans la littérature pour prédire les seuils de stabilité. Ces nouvelles prédictions seront comparées à celles de Balmforth et Liu (2004) réalisées avec des ordres inférieurs.

Enfin, le cinquième et dernier chapitre portera sur une étude expérimentale qui se veut exploratoire sur le régime non-linéaire de ces écoulements. Ainsi, nous montrerons qu'il est possible d'observer au delà du régime linéaire, l'existence du phénomène de saturation des amplitudes des ondes et un raidissement des fronts d'onde. Nous regarderons également l'effet de la fréquence de perturbation et du débit sur les longueurs d'onde observées.

CHAPITRE 1

État de l'art

Sommaire

1.1	Stabilité des fluides newtoniens sur plan incliné	9
1.1.1	Stabilité linéaire de l'écoulement de fluides newtoniens sur plan incliné	9
1.1.2	Régime non-linéaire des fluides newtoniens	11
1.2	Fluides viscoplastiques	14
1.2.1	Description des fluides viscoplastiques	14
1.2.2	Propriétés	17
1.3	Stabilité linéaire des fluides non-newtoniens	19
1.3.1	Films de fluides rhéofluidifiants ou épaississants	19
1.3.2	Panorama de la stabilité linéaire des fluides viscoplastiques	20
1.4	Développement analytique aux ondes longues (Balmforth et al., 2004)	22
1.4.1	Écoulement en pseudo-bouchon	22
1.4.2	Équations du mouvement et adimensionnement	23
1.4.3	Stabilité des ondes de surface	27
1.5	Critiques du calcul à l'ordre 0 en ε	32
1.5.1	Développement de Fernandez-Nieto et al. (2010) à l'ordre ε	32
1.5.2	Comparaison des deux approches	33
1.6	Expériences sur plan incliné	36
1.6.1	Fluides newtoniens	36
1.6.2	Fluides non-newtoniens	37
	Dynamique des fluides à seuil sur un plan incliné	37
	Stabilité des fluides non-newtoniens	40
1.7	Conclusion partielle	44

Dans ce chapitre, nous aborderons l'état de l'art relatif à la stabilité des films tombants. Nous commencerons par une présentation de la stabilité des écoulements de films tombants dans le cadre des fluides newtoniens. Ensuite, nous exposerons les fluides viscoplastiques et leurs caractéristiques, notamment les modèles rhéologiques. Puis nous évoquerons la stabilité des fluides non-newtoniens avec un focus sur les fluides viscoplastiques et leur modélisation. La dernière partie concernera une revue des expériences de films tombants.

1.1 Stabilité des fluides newtoniens sur plan incliné

Dans cette section, nous allons rappeler quelques résultats de la littérature concernant la stabilité des films tombants ainsi que les mécanismes à l'origine de ces instabilités et nous terminerons par un état de l'art sur le régime non-linéaire de fluides newtoniens sur plan incliné.

1.1.1 Stabilité linéaire de l'écoulement de fluides newtoniens sur plan incliné

La stabilité de fluides newtoniens sur plan incliné a été largement étudiée dans la littérature. Benjamin (1957) et Yih (1963) sont les pionniers dans la formalisation théorique de ce problème. Benjamin (1957) s'intéresse à un film en considérant un écoulement dans le plan (x, z) et une épaisseur de film h . Le profil de vitesse horizontal U dépend uniquement de la composante verticale y telle que est $U(y) = 1 - z^2$. Par adimensionnement de la vitesse, il trouve que la vitesse moyenne de l'écoulement peut s'exprimer comme $\bar{u} = \frac{2}{3}u$ avec $u = \frac{1}{2}h^2g \sin \phi / \nu$ où g est la gravité, ϕ l'angle d'inclinaison et ν la viscosité cinématique. Ainsi, le nombre de Reynolds Re caractérisant le rapport entre les termes d'inertie et visqueux est donné par :

$$Re = \frac{h^3 g \sin \phi}{3 \nu^2} ,$$

Pour étudier la stabilité temporelle linéaire des films tombants, il introduit une perturbation de vitesse infinitésimale décrite par, l'équation $y = \eta(x, t) = \delta e^{i\alpha(x-ct)}$ avec A le nombre d'onde sans dimension et δ l'amplitude d'onde ($\delta \ll 1$). Après la linéarisation des équations et l'élimination du champ de pression, Benjamin (1957) obtient l'équation d'Orr-Sommerfeld suivante :

$$(U - c)(f^{(2)} - \alpha^2 f) - U^{(2)}f + \frac{\nu}{-i\alpha u h}(f^{(4)} - 2\alpha^2 f^{(2)} + \alpha^4 f) = 0 . \quad (1.1)$$

où $f(y)$ est l'amplitude de la fonction de courant dont dérive l'écoulement.

En effectuant un développement aux ondes longues et en introduisant les conditions aux limites, il obtient une première approximation de l'équation telle que :

$$\frac{i}{\nu u} [\alpha^3 \gamma + \alpha h^2 g \cos \phi] + 3c - 6 + \frac{3}{2}i\alpha Re \left[-\frac{6}{5}c^2 + \frac{68}{55}c - \frac{24}{35} \right] = 0 , \quad (1.2)$$

avec $\gamma = \frac{\tau}{\rho}$ la tension de surface cinématique et $c = c_r + ic_i$ la célérité complexe.

La résolution de cette équation permet de déterminer la célérité des ondes $c_r = 2$, ainsi que le nombre de Reynolds critique dans le cas des ondes longues. Il s'agit du nombre de Reynolds pour lequel le taux de croissance temporel des ondes c_i est nul. Il est donné pour les fluides newtoniens par :

$$Re_c = \frac{5}{6} \cot \phi . \quad (1.3)$$

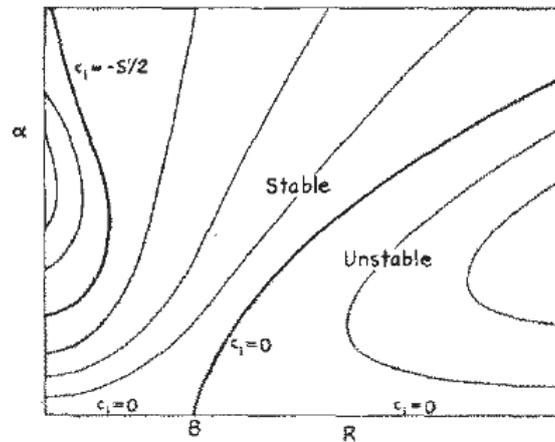


FIGURE 1.1 – Courbes neutres d’après Yih (1963) : délimitation des zones stables et instables en fonction de α le nombre d’onde et de R le nombre de Reynolds. Les courbes ont été obtenues pour différents taux de croissance c_i et pour un angle d’inclinaison inférieur à 90° .

Benjamin (1957) et Yih (1963) montrent que ce sont les termes inertiels qui alimentent les instabilités (pour $Re \neq 0$) et affirment que les déformations de la surface libre sont dues à des instabilités de grande longueur d’onde à petit nombre de Reynolds. Ces instabilités sont couramment nommées ondes de surface. La figure (1.1) donne une cartographie des zones stables et instables pour une inclinaison ϕ donnée et pour différents taux de croissance c_i . Les ondes deviennent stables lorsque $Re \leq \frac{5}{6} \cot \phi$. Yih (1967) affirme que l’instabilité de grande longueur d’onde provient de la composante longitudinal de la gravité mais n’explique pas le processus. Une des premières explications est apportée par Kelly *et al.* (1989). Ils ont identifié que les forces de cisaillement au niveau de l’interface sont les termes dominants d’un point de vue énergétique.

Le mécanisme physique de ces instabilités de grande longueur d’ondes à la surface libre est détaillé par Smith (1990). Il distingue deux phases bien distinctes : la phase de naissance des instabilités et la phase de croissance des instabilités. Concernant la phase de naissance des instabilités, Smith (1990) l’explique par la présence d’un gradient de vitesse non nul dans la direction longitudinale de l’écoulement. Ce gradient non nul ne permet pas de satisfaire la condition dynamique telle que la contrainte tangentielle soit nulle au niveau de la surface libre perturbée. Cela entraîne le développement d’une perturbation infinitésimale de vitesse de la forme $u(x, z, t)$ représenté sur la figure (1.2). Smith (1990) explique la croissance de l’instabilité par les interactions entre le champ de vitesse de base et celui engendré par la perturbation. Elles produisent des contraintes inertielles proportionnelles au nombre de Reynolds. Lorsque les contraintes inertielles sont positives, la perturbation réduit la déformation de l’interface et stabilise l’écoulement. Ruyer-Quil et Manneville (2002) montrent également que la tension de surface a un rôle stabilisant sur l’écoulement.

Une autre méthodologie très employée pour la résolution des problèmes de stabilité de films tombants est celle de Benney (1966). Benney (1966) a étudié les perturbations d’ondes dans un écou-

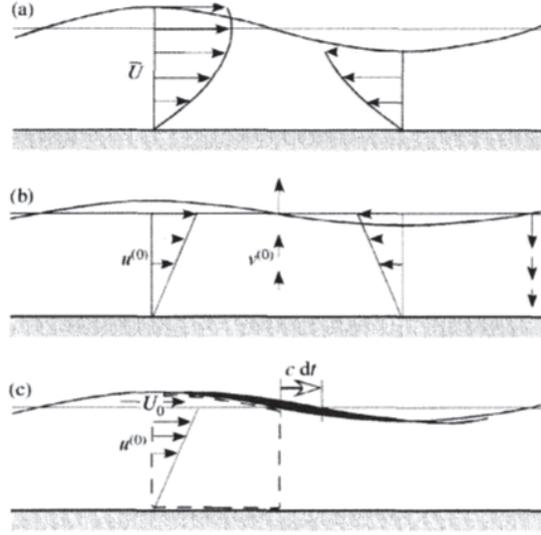


FIGURE 1.2 – Mécanisme de formation des instabilités pour les fluides newtoniens d'après Smith (1990)

lement laminaire d'un fluide newtonien visqueux sur un plan incliné. Sa méthodologie consiste à introduire une fonction de courant due à la perturbation de l'écoulement ψ . Ensuite, il introduit la fonction de courant dans les équations adimensionnées pour obtenir la formalisation du problème de stabilité. Enfin, pour une valeur de ε (rapport d'aspect en eaux peu profondes) petite, il considère un développement de la forme :

$$\psi(x, z, t) = \psi^{(0)}(x, z, t) + \varepsilon \psi^{(1)}(x, z, t) + \varepsilon^2 \psi^{(2)}(x, z, t) + \dots \quad (1.4)$$

Sa démarche consiste alors à effectuer un modèle intégré sur l'épaisseur de la forme :

$$h_t = A(h)h_x + \varepsilon[(B(h)h_{xx} + C(h)h_x^2] + \varepsilon^2[D(h)h_{xxx} + E(h)h_x h_{xx} + F(h)h_x^3] + \varepsilon^3[G(h)h_{xxxx} + H(h)h_x h_{xxx} + I(h)h_{xx}^2 + J(h)h^2 h_{xx}] + O(\varepsilon^4) . \quad (1.5)$$

L'équation (1.5) constitue l'équation type de "Benney" souvent utilisée dans la littérature. Cette notation permet de trouver facilement les solutions $\psi^{(0)}$, $\psi^{(1)}$ à l'aide des fonctions $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J$. Pour les ordres supérieurs, la démarche est plus laborieuse. La démarche suivie pour obtenir cette équation ainsi que les étapes suivantes nécessaires pour obtenir une évaluation des seuils de stabilité sont explicitées dans l'annexe (A).

1.1.2 Régime non-linéaire des fluides newtoniens

Nous allons à présent nous intéresser au régime non-linéaire des fluides newtoniens. Chang *et al.* (2000) ont effectué une analyse théorique et des simulations numériques sur les structures auto-similaires ainsi que sur la dynamique de coalescence des ondes de surface pour des fluides new-

toniens. Leurs simulations numériques montrent une croissance de type auto-similaire liée à la coalescence (fusion) irréversible d'ondes qui se répètent dans le temps.

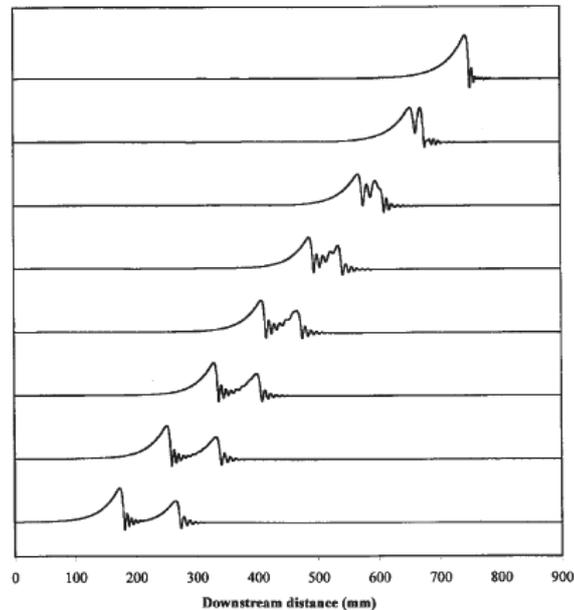


FIGURE 1.3 – Coalescence : fusion de vagues d'épaisseurs différentes d'après Malamataris *et al.* (2002).

Les ondes solitaires sur plan incliné ont été étudiées par Malamataris *et al.* (2002). Ils ont cherché à prédire les scénarios d'interaction entre des ondes solitaires notamment savoir si la coalescence était un phénomène inévitable. Pour de faibles perturbations, ils obtiennent une croissance linéaire avec une vitesse de phase et un taux de croissance en accord avec les expériences et l'analyse de stabilité. Pour les perturbations plus importantes, une évolution non linéaire est observée, en accord avec les expériences (Liu *et al.*, 1993). Les résultats des simulations numériques montrent que la pression est fonction de la distance à la paroi à cause de la variation hydrostatique, sauf au sein d'une zone de dépression en amont des crêtes. Ils trouvent également que les ondes solitaires ont des profils de vitesse non paraboliques devant la crête. Leurs calculs montrent que la coalescence n'est pas inévitable mais qu'elle est liée à l'épaisseur des vagues. Cela s'explique par une forte interaction oscillatoire entre les deux crêtes. En effet, lorsque l'écart d'épaisseur entre des deux ondes est important, la répulsion devient faible et la coalescence se produit tandis que des vagues d'épaisseurs similaires se repoussent. La figure (1.3) montre que c'est le développement d'ondes solitaires d'épaisseur sensiblement différentes qui entraîne la coalescence.

Balmforth et Mandre (2004) abordent la dynamique non-linéaire des ondes de surface en utilisant des équations en eaux peu profondes. A faible amplitude, les instabilités croissent le long du canal puis saturent pour créer une onde de surface d'amplitude plus importante et non linéaire. En plus d'avoir un accroissement de l'instabilité le long du canal, ils mettent en évidence le raidissement

1.1. STABILITÉ DES FLUIDES NEWTONIENS SUR PLAN INCLINÉ

des ondes de surface (voir fig (1.4)) . Elles se propagent à des vitesses différentes, ce qui engendre leur collision puis leur fusion en une onde d'amplitude plus importante. Ce phénomène a été également observé dans les expériences de Brock (1969).

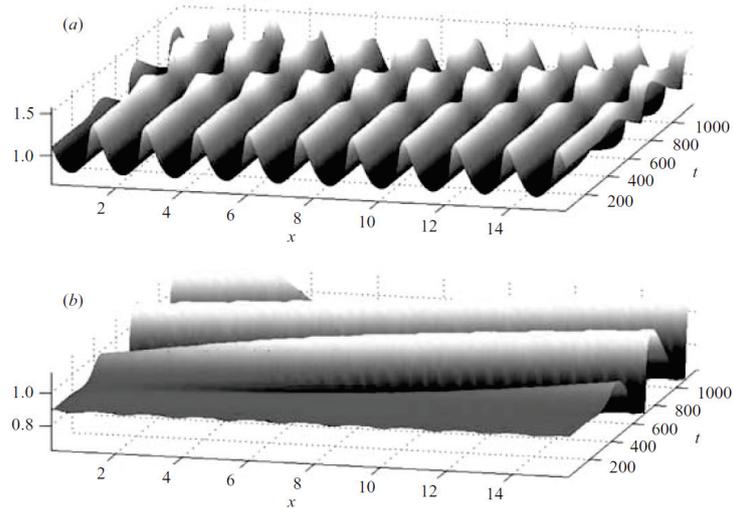


FIGURE 1.4 – Saturation et raidissement du front des ondes d'après Balmforth et Mandre (2004).

Ce sujet est encore d'actualité et a mené à nombreuses publications récentes comme celles de Scheid *et al.* (2006); Ruyer-Quil *et al.* (2014); Kofman *et al.* (2014); Denner *et al.* (2016, 2018); Ranganathan *et al.* (2020)

1.2 Fluides viscoplastiques

Dans la section précédente, nous avons abordé la stabilité des fluides newtoniens. Nous allons à présent évoquer les fluides viscoplastiques, leurs spécificités et nous étudierons leur comportement qui constituent le cœur de nos travaux.

1.2.1 Description des fluides viscoplastiques

Les fluides peuvent être classés en deux grandes catégories. Premièrement, les fluides newtoniens, comme l'eau ou l'air, pour lesquels la contrainte visqueuse τ évolue proportionnellement avec le taux de cisaillement $\dot{\gamma}$. Ainsi, leur viscosité est constante dans les conditions standards de laboratoire. Elle peut néanmoins évoluer avec d'autres paramètres comme la température, la concentration,... A l'opposé, il existe les fluides non-newtoniens.

Parmi les fluides non-newtoniens, nous pouvons évoquer deux grandes sous-catégories que sont les fluides rhéoépaississants et les fluides rhéofluidifiants. Sur la figure (1.5), nous représentons le comportement des fluides non-newtoniens. Nous nous intéressons à la relation entre la contrainte τ et le taux de cisaillement $\dot{\gamma}$. Cette relation est appelée loi de comportement ou équation constitutive. Cette loi est caractérisée par la viscosité apparente qui est le rapport entre la contrainte τ et le taux de cisaillement $\dot{\gamma}$. Les fluides rhéofluidifiants sont des fluides dont la viscosité apparente décroît avec le taux de cisaillement. A l'inverse, les fluides rhéoépaississants ont une viscosité apparente qui croît avec le taux de cisaillement. Leur comportement rhéologique a été décrit la première fois par Ostwald (1925) avec une loi de puissance :

$$\tau = K\dot{\gamma}^n, \quad (1.6)$$

avec K la consistance et n l'indice rhéologique du fluide. L'indice rhéologique n est inférieur à 1 pour les fluides rhéofluidifiants et supérieur à 1 pour les fluides rhéoépaississants. La viscosité dynamique apparente μ est donnée par :

$$\mu = K\dot{\gamma}^{n-1}.$$

Toutefois, pour les fluides rhéofluidifiants la loi de puissance prédit une viscosité infinie quand le taux de cisaillement tend vers zéro. Pour pallier ce problème, des extensions de la loi de puissance de Ostwald ont été proposées notamment par Carreau *et al.* (1979) et Yasuda *et al.* (1981). Il s'agit du modèle de Carreau-Yasuda donné par :

$$\frac{\mu - \mu_\infty}{\mu_0 - \mu_\infty} = [1 + (\delta\dot{\gamma})^a]^{\frac{n-1}{a}}, \quad (1.7)$$

avec μ_0 la viscosité à cisaillement nul, μ_∞ la viscosité à un cisaillement infini, δ une constante de temps, n l'exposant de loi de d'Ostwald et a un paramètre caractérisant la transition entre la loi de comportement à faible cisaillement et la zone décrite en loi de puissance.

1.2. FLUIDES VISCOPLASTIQUES

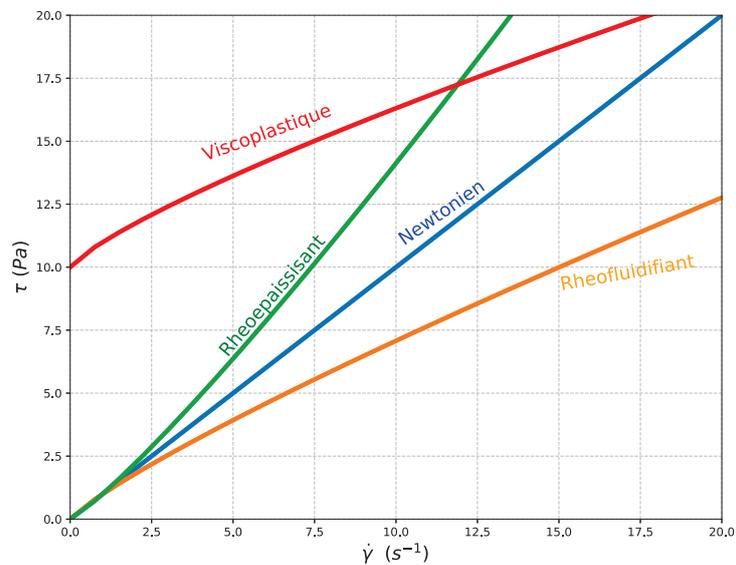


FIGURE 1.5 – Contrainte visqueuse en fonction du taux de cisaillement selon le type de fluide. Nous distinguons d’une part les fluides newtoniens pour lesquels la contrainte visqueuse évolue proportionnellement en fonction du taux de cisaillement. Et d’autre part, les fluides non-newtoniens pour lesquels la viscosité croît (rhéoépaissant) ou décroît (rhéofluidifiant) avec le taux de cisaillement.

Dans nos travaux, nous nous intéressons aux fluides viscoplastiques ou fluides à seuil qui constituent une catégorie particulière de fluides rhéofluidifiants. Leur particularité est qu’ils présentent non seulement une viscosité apparente qui décroît avec le taux de cisaillement (fluide rhéofluidifiant) mais ils sont aussi caractérisés par l’existence d’une limite plastique. Cette limite plastique est appelée contrainte seuil τ_y . En dessous de cette contrainte seuil, le fluide se déforme élastiquement de manière similaire à un solide. Pour mieux comprendre cette propriété, prenons l’exemple du dentifrice. Lorsqu’il n’est soumis à aucun cisaillement sur notre brosse à dent, il se comporte comme un solide mais dès lors qu’il est soumis à un cisaillement lors du brossage, il se met à se comporter comme un liquide. Le passage entre les deux états est le franchissement de la contrainte seuil.

L’existence de cette contrainte seuil n’a pas toujours fait consensus au sein de la communauté scientifique. Barnes et Walters (1985) émettent l’hypothèse que ces fluides peuvent s’écouler en dessous de cette limite plastique sur un pas de temps très important. Cependant, des expériences récentes comme celle de Piau (2007) illustrent l’existence de cette contrainte seuil. En effet, ils affirment que Barnes et Walters (1985) ont négligé les effets de glissements ainsi que l’évaporation. Ainsi, nous pouvons affirmer que ce débat est clos dans la mesure où même si les affirmations de Barnes et Walters (1985) étaient réelles le fluide finirait par s’évaporer ou subir une transformation chimique avant de franchir la contrainte seuil. Cette discussion a été largement traitée par Balmforth *et al.* (2014).

Le comportement rhéologique des fluides viscoplastiques est décrit par plusieurs modèles rhéologiques. La plupart de ces modèles sont issus de données empiriques. Parmi les plus connus, nous pouvons citer :

- Le modèle rhéologique de Bingham (1922) :

$$\begin{cases} \tau = \tau_y + \mu \dot{\gamma} & \text{si } \tau > \tau_y, \\ \dot{\gamma} = 0 & \text{sinon} \end{cases},$$

avec τ la contrainte visqueuse, τ_y la contrainte seuil, μ la viscosité et $\dot{\gamma}$ le taux de cisaillement.

- Le modèle rhéologique de Casson (1959) généralisé :

$$\begin{cases} \tau = \tau_y + \mu_\infty \dot{\gamma} + k \dot{\gamma}^n & \text{si } \tau > \tau_y, \\ \dot{\gamma} = 0 & \text{sinon} \end{cases},$$

avec τ la contrainte visqueuse, τ_y la contrainte seuil, μ_∞ la viscosité à un cisaillement infini, k la consistance, $\dot{\gamma}$ le taux de cisaillement et n l'indice rhéologique du fluide.

- Le modèle rhéologique de Herschel et Bulkley (1926) :

$$\begin{cases} \tau = \tau_y + k \dot{\gamma}^n & \text{si } \tau > \tau_y \\ \dot{\gamma} = 0 & \text{sinon} \end{cases},$$

avec τ la contrainte visqueuse, τ_y la contrainte seuil, k la consistance, $\dot{\gamma}$ le taux de cisaillement et n l'indice rhéologique du fluide.

Ces modèles, représentés sur la figure (1.6), permettent de décrire correctement le comportement au delà de la limite plastique. Au delà de la contrainte seuil τ_y , le fluide se comporte comme un fluide newtonien par le modèle de Bingham, comme un fluide de loi de puissance pour le modèle de Herschel-Bulkley, et comme un intermédiaire entre les 2 types de fluide pour le modèle de Casson. Ces modèles présentent toutefois une singularité due à la discontinuité dans la contrainte et la viscosité en $\dot{\gamma} = 0$. Cette singularité est problématique notamment pour les simulations numériques. Ainsi, Papanastasiou (1987) a proposé une méthode de régularisation exponentielle de la loi de Bingham. Cette approche intitulée loi de Bingham-Papanastasiou est définie comme suit :

$$\tau = \mu + \frac{\tau_y}{|\dot{\gamma}|} [1 - e^{-m|\dot{\gamma}|}] \dot{\gamma}, \quad (1.8)$$

avec τ la contrainte visqueuse, $\dot{\gamma}$ le taux de cisaillement, μ la viscosité dynamique apparente, τ_y la contrainte seuil et m le paramètre de régularisation. Le paramètre de régularisation m permet de traiter cette singularité lors des simulations numériques. Cette méthode de régularisation a été

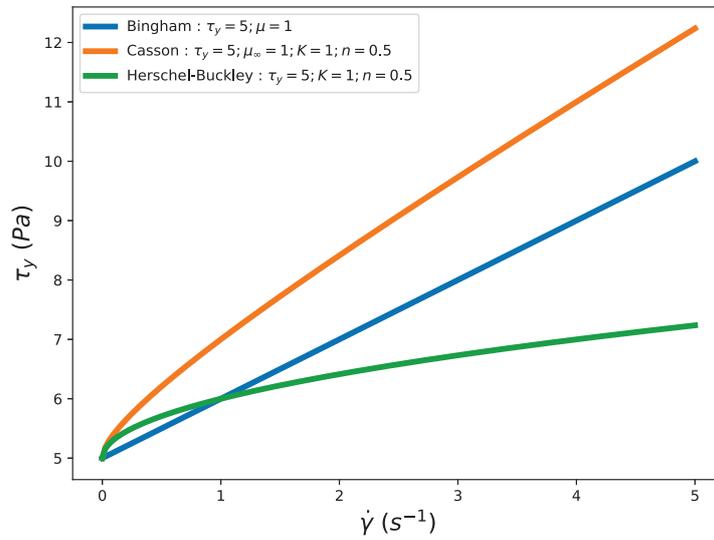


FIGURE 1.6 – Comparaison des modèles rhéologiques de Bingham, Casson généralisé et Herschel-Bulkley. Les trois modèles tiennent compte de la limite plastique (contrainte seuil). Toutefois, le modèle de Bingham ne permet pas de prendre en compte l'effet rhéofluidifiant ou rhéoépaississant des fluides réels contrairement aux modèles de Herschel-Bulkley ou de Casson.

étendue par Mitsoulis (2007) pour les modèles rhéologiques de Casson et Herschel-Bulkley.

Tous ces modèles rhéologiques introduisent une nouvelle échelle liée à la contrainte seuil dans tout problème impliquant des fluides à seuil. Cette nouvelle échelle est caractérisée par un nombre sans dimension qu'est le nombre de Bingham Bi . Il s'agit du rapport entre les contraintes plastiques et les contraintes visqueuses. Il est calculé par :

$$Bi = \frac{\tau_p}{\tau_v}, \quad (1.9)$$

avec $\tau_p = \tau_y$ les contraintes plastiques et τ_v les contraintes visqueuses.

1.2.2 Propriétés

Au delà de la viscoplasticité, les fluides à seuil peuvent présenter d'autres caractéristiques. Par exemple, certains fluides viscoplastiques ont des propriétés thixotropiques. Il s'agit de la caractéristique d'un matériau à voir sa viscosité apparente décroître en fonction du temps et son histoire lorsqu'il est soumis à une contrainte ou à un taux de cisaillement. Plusieurs travaux se sont penchés sur ce phénomène. L'une des conséquences de la thixotropie est la présence d'hystérésis. Putz et Burghlea (2009) ont observé cet effet pour différentes concentrations de polymère, températures et différents temps de forçage.

Nous pouvons également citer le fait que certains fluides viscoplastiques peuvent présenter un comportement élastique. Luu et Forterre (2009) étudient l'impact d'une goutte de carbopol sur une paroi solide. La figure (1.7) illustre une goutte de carbopol très concentrée qui impacte la paroi, se déforme avant de rebondir sous l'effet de l'élasticité du matériau. Il est à noter alors qu'un tel phénomène peut modifier la dynamique de l'écoulement de base lors d'un écoulement non-permanent. Dans la suite, nous allons négliger ces effets et focaliser notre attention sur un fluide de Herschel-Bulkley simple (ni thixotrope, ni élastique).

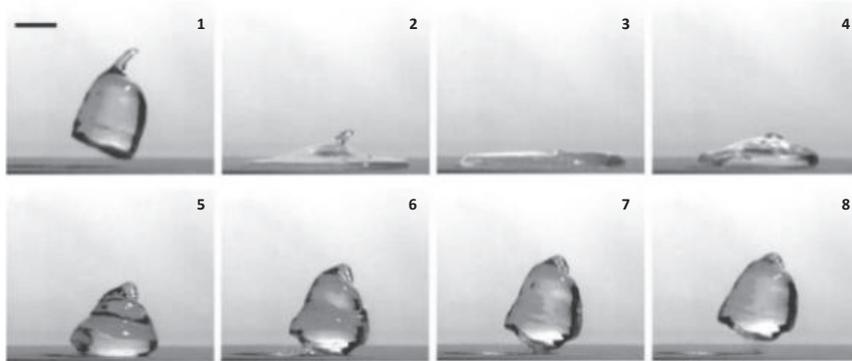


FIGURE 1.7 – Effet de l'élasticité : impact d'une goutte de carbopol sur une paroi d'après Luu et Forterre (2009). La goutte de carbopol présente un comportement élastique.

1.3 Stabilité linéaire des fluides non-newtoniens

Nous proposons dans cette section de présenter des travaux sur la stabilité des fluides non-newtoniens. Dans un premier temps, nous aborderons la stabilité des films de fluides rhéofluidifiants, puis nous dresserons un panorama non-exhaustif des travaux sur les films tombants de fluides à seuil.

1.3.1 Films de fluides rhéofluidifiants ou épaississants

Au cours des trente dernières années, de nombreux scientifiques se sont intéressés à la stabilité des films tombants de fluides rhéofluidifiants. Tout d'abord, pour comprendre le mécanisme à l'origine des instabilités dans les films tombants de fluides non-newtoniens, Millet *et al.* (2008) utilisent une démarche similaire à celle de Smith (1990). Ces auteurs montrent alors que le mécanisme des instabilités est de la même nature que celui observé au sein des fluides newtoniens, comme cela est illustré sur la figure (1.8). Ces instabilités de grande longueur d'onde à petits nombre de Reynolds sont appelées "ondes de surface" ou "roll waves" dans la littérature. Dans cette étude, Millet *et al.* (2008) s'intéressent aux fluides de Carreau-Yasuda avec $n = 2$ qui sont une extension du modèle des fluides en loi de puissance (équation 1.7). Rousset *et al.* (2007) démontrent que dans ce cas, l'expression du nombre de Reynolds critique Re_c aux ondes longues et pour les fluides faiblement rhéofluidifiants ($L \rightarrow 0$) est donnée par :

$$Re_{c-cy} = \frac{5}{6} \cot \phi - \frac{71}{28 \cdot 3^{1/3}} (I-1)(n-1) \cot \phi L^2 + O(L^4), \quad (1.10)$$

avec Re_{c-cy} le nombre de Reynolds critique pour les fluides de Carreau-Yasuda, ϕ l'angle d'inclinaison du plan incliné, I le rapport la viscosité dynamique à cisaillement infini et celle à cisaillement nul, $L = \frac{\delta Q}{ds^2}$ ave Q le débit et ds une échelle de longueur caractéristique $d_s = \left(\frac{\mu_0 Q}{\rho g \sin \phi} \right)^{1/3}$.

Lorsque $L = 0$ et/ou $n = 1$, c'est à dire pour les fluides newtoniens, ils retrouvent les résultats de Benjamin (1957) et Yih (1963). L'équation (1.10) montre que le seuil de stabilité est légèrement plus faible pour les fluides de Carreau-Yasuda que pour les fluides newtoniens (Benjamin, 1957; Yih, 1963) lorsque $I < 1$ et $n < 1$. Un résultat similaire a également été obtenu par Ruyer-Quil *et al.* (2012).

Dans la littérature, plusieurs chercheurs se sont intéressés à l'influence de l'élasticité ou de la plasticité sur le comportement des films tombants. Concernant les fluides rhéoépaississants ($n > 1$), Shaqfeh *et al.* (1989) ont analysé la stabilité linéaire d'un film de fluide viscoélastique sur un plan incliné. Ils montrent que pour de faibles nombres de Reynolds, l'élasticité du matériau déstabilise l'écoulement tandis que pour les nombres de Reynolds plus élevés, l'élasticité du matériau a un effet stabilisant. Huang et Khomami (2001) ont réalisé une étude intéressante sur le déclenchement des ondes de surface dans les films tombants de fluides viscoélastiques avec une ou plusieurs couches. Là encore, ils montrent comme Smith (1990) et Millet *et al.* (2008) que les instabilités de surface sont liées à des contraintes de cisaillement au niveau des interfaces. La nouveauté est

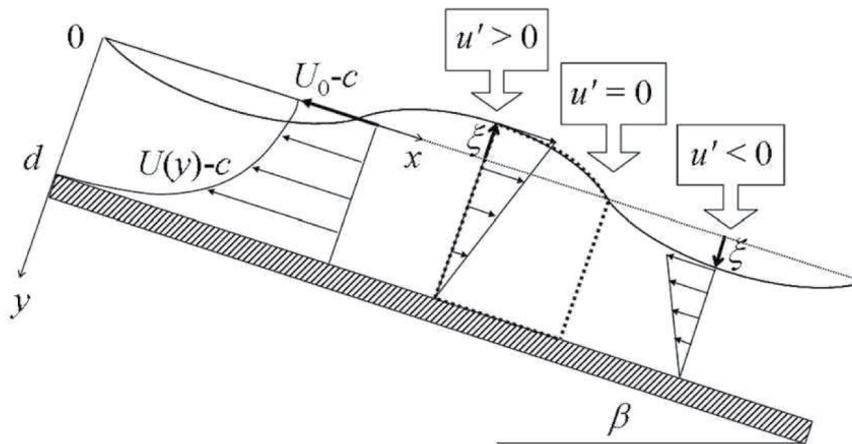


FIGURE 1.8 – Mécanisme de formation d’instabilités pour les fluides de Carreau d’après Millet *et al.* (2008)

que contrairement aux fluides newtoniens où l’origine de l’instabilité dépend du cisaillement à l’interface, pour les fluides viscoélastiques, le déclenchement de l’instabilité est lié, non seulement au couplage entre la vitesse de base et celle de la perturbation, mais également au couplage contraintes visqueuses - taux de cisaillement à l’interface. L’étude des fluides à plusieurs couches a également été traitée par Millet *et al.* (2013) pour la stabilité des écoulements de films bicouches par cisaillement mais cette fois-ci pour des fluides rhéofluidifiants.

Nsom *et al.* (2019) montrent, par une étude de la stabilité des fluides en loi de puissance que la pression et la tension de surface ont un effet stabilisant tandis que l’inertie et la fluidification ($n < 1$) ont un effet déstabilisant. Chakraborty *et al.* (2019) ont quant à eux étudié la dynamique et la stabilité d’un fluide en loi de puissance s’écoulant sur un plan glissant sous l’effet de la gravité où ils illustrent notamment que le glissement sur la paroi a un impact sur l’instabilité primaire. En effet, il a un effet stabilisant à des valeurs importantes du nombre de Reynolds, tandis qu’au début de l’instabilité, le rôle est déstabilisant à cause de l’augmentation de la vitesse dynamique de l’onde sur la paroi glissante.

1.3.2 Panorama de la stabilité linéaire des fluides viscoplastiques

A présent, nous allons aborder une revue non-exhaustive de travaux portant sur la stabilité linéaire des fluides à seuil. Peng et Zhu (2004) ont étudié la stabilité linéaire d’un fluide de Bingham pour un écoulement de Couette spiral. Un écoulement de Couette est un écoulement de fluide visqueux entre deux surfaces (dans ce cas, deux cylindres coaxiaux). L’une des surfaces est en mouvement de rotation et translation axiale vis à vis de l’autre qui est fixe. Ils affirment que la mise en rotation et une diminution de l’écart entre les deux cylindres ont un effet stabilisant sur l’écoulement. Ils

1.3. STABILITÉ LINÉAIRE DES FLUIDES NON-NEWTONIENS

montrent aussi que pour un écoulement de Taylor-Couette, un fluide de Bingham est moins stable qu'un fluide newtonien. Pour comprendre la raison, il faut consulter les travaux de Landry *et al.* (2006) qui montrent que la diminution du nombre de Reynolds critique est due à une augmentation, à petits nombres de Bingham, du taux de déformation de l'écoulement de base qui amplifie le transfert d'énergie de l'écoulement de base vers la perturbation, via les termes inertiels dans l'équation d'énergie. Aux grands nombres de Bingham, la région cisailée se contracte et le transfert d'énergie inertiel est limité par la contrainte seuil.

Frigaard *et al.* (1994) ont étudié la stabilité linéaire d'un fluide de Bingham dans un écoulement de Poiseuille et constatent que le nombre de Reynolds critique augmente presque linéairement avec l'augmentation du nombre de Bingham. Liu *et al.* (2018) ont effectué une étude similaire à celle de Frigaard *et al.* (1994) mais avec un fluide de Herschel-Bulkey dans un écoulement de Poiseuille plan. Pour cela, ils ont utilisé une méthode énergétique et une théorie de stabilité non modale. Aux faibles nombres de Bingham, ils retrouvent le résultat de Frigaard et observent que le nombre de Reynolds critique Re_c varie presque linéairement avec le nombre de Bingham Bi , tandis que pour les grands nombre de Bingham Bi , le nombre de Reynolds critique Re_c augmente en $Bi^{1/2}$.

Liu et Mei (1989) cherchent à analyser la dynamique d'une suspension de boue riche en argile. Dans cette optique, ils étudient la stabilité d'un film mince d'un fluide de Bingham sur un plan incliné. Ils observent l'étalement de la boue sur le plan et constatent que le front de l'écoulement se déplace à une vitesse constante puis s'arrête quand les contraintes visqueuses sous l'effet de la gravité deviennent inférieures à la contrainte seuil. Ng et Mei (1994) ont élaboré une analyse similaire avec une théorie des ondes de surface pour un film de boue modélisé comme un fluide en loi de puissance. Ils montrent que pour les fluides en loi de puissance, le nombre de Reynolds critique est donné par $Re_c = \frac{3n+2}{2} \cot \phi$ avec ϕ la pente et n l'indice rhéologique du fluide.

Concernant les études portant sur les coulées de boue (Qian *et al.*, 1979), Ng et Mei (1994) ont apporté quelques éléments de réponse. Toutefois, ils ont modélisé la boue par une loi de puissance ce qui est insuffisant pour caractériser le comportement des suspensions riche en sédiments. En effet, ces fluides sont caractérisés par une contrainte seuil τ_y qui n'est pas prise en compte. Trowbridge (1987) a modélisé le comportement rhéologique de ces écoulements avec la loi de Bingham, et montré que le mécanisme des vagues évoquées en introduction peut également être expliqué par les instabilités linéaires aux ondes longues de type ondes de surface.

1.4 Développement analytique aux ondes longues (Balmforth et al., 2004)

A notre connaissance, il n'existe dans littérature que deux principaux développements portant sur la stabilité linéaire des films viscoplastiques sur un plan incliné (Balmforth et Liu, 2004; Fernández-Nieto *et al.*, 2010). Dans cette partie, nous proposons de décrire le développement de Balmforth et Liu (2004) ainsi que les principaux résultats qu'ils ont obtenu. Ce développement analytique constituera la référence pour nos travaux expérimentaux.

1.4.1 Écoulement en pseudo-bouchon

La stabilité primaire des fluides à seuil sur un plan incliné présente de nombreuses difficultés. Tout d'abord, lorsque le débit est faible, des zones mortes peuvent apparaître au sein l'écoulement lorsque celui-ci n'est pas permanent et modifier sa dynamique. Mais comme évoqué par Frigaard (2019) dans sa revue de littérature sur les travaux théoriques et analytiques relatives aux fluides à seuil simples (ni élastique, ni thixotrope), la principale difficulté réside dans la modélisation de ces écoulements. Leur modélisation a été au cœur de nombreuses études ces vingt dernières années. La particularité réside dans la coexistence de deux régions au sein de l'écoulement sur l'épaisseur du film. Une première région entièrement cisailée en profondeur près de la paroi et une seconde région présentant un comportement rigide près de la surface libre. Des études comme celles de Piau (1996) qualifient la région supérieure de "bouchon", c'est à dire une région où le taux de cisaillement est nul. Cette hypothèse conduit alors à conclure que les écoulements de sédiments sur plan incliné sont toujours stables. Or, de telles affirmations sont en contradiction avec des observations de phénomènes naturels comme des coulées de lave ou de boue dans lesquels des ondes instables de grandes amplitudes peuvent se développer (Qian *et al.*, 1979; Engelund et Zhaohui, 1984). La modélisation de l'écoulement en bouchon, c'est à dire avec une région rigide à la surface libre, ne permet pas d'expliquer le développement des instabilités car si l'épaisseur et la vitesse du bouchon dépendent de x alors le taux de cisaillement $\frac{\partial u}{\partial x}$ n'est pas nul dans cette région.

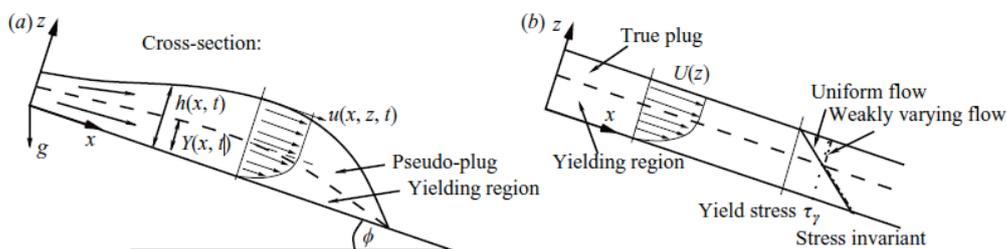


FIGURE 1.9 – Modélisation des écoulements en bouchon dans les films tombants de fluides viscoplastiques d'après Balmforth et Liu (2004). Contrairement au bouchon, la modélisation sous forme de pseudo-bouchon (ou pseudo-plug) intègre une correction de vitesse de l'ordre de ϵ permettant à la zone faiblement cisailée de se déformer et permettre le développement d'instabilités.

1.4. DÉVELOPPEMENT ANALYTIQUE AUX ONDES LONGUES (BALMFORTH ET AL., 2004)

Balmforth et Craster (1999) apportent une contribution significative pour résoudre la contradiction dans la modélisation de la région "rigide". Dans leur approche, ils considèrent que la région rigide, c'est à dire non-cisaillée, et qualifiée de "bouchon" (plug en anglais) ne l'est que pour le champ de base. Dans cette optique, ils expriment la vitesse horizontale dans le bouchon sous la forme $u(x, y) = u_b + \varepsilon u_\varepsilon(x, y)$ avec u vitesse de l'écoulement en bouchon, u_b la vitesse du champ de base du bouchon, ε le rapport d'aspect en eaux peu profondes et u_ε une vitesse infinitésimale. Le second terme $\varepsilon u_\varepsilon$ permet d'obtenir une déformation à l'ordre 1 en ε dans cette zone et donc le développement des instabilités. C'est pour cela qu'ils utilisent le terme d'écoulement en pseudo-bouchon (pseudo-plug dans la littérature).

Cette approche est reprise par Balmforth et Liu (2004) pour leur développement asymptotique des ondes de surface dans le cas où le fluide est de la boue, "Roll waves in mud". Elle a pour conséquence d'obtenir une contrainte visqueuse toujours supérieure à la contrainte seuil et donc d'obtenir des instabilités. Cette modélisation est illustrée sur la figure (1.9).

1.4.2 Équations du mouvement et dimensionnement

Nous allons aborder dans la suite de cette section, le développement en utilisant le formalisme de Balmforth et Liu (2004). Nous considérons un écoulement d'un fluide de Herschel-Bulkley dans le plan (x, z) , comme représenté sur la figure (1.9), avec un champ de vitesse défini par $(u(x, z, t), w(x, z, t))$. Les équations constitutives sont données par :

$$\rho(u_t + uu_x + ww_z) = -p_x + \partial_x \tau_{xx} + \partial_z \tau_{xz} + \rho g \sin \phi , \quad (1.11)$$

$$\rho(w_t + uw_x + ww_z) = -p_z + \partial_x \tau_{xz} + \partial_z \tau_{zz} + \rho g \cos \phi , \quad (1.12)$$

$$u_x + w_z = 0 , \quad (1.13)$$

avec p le champ de pression, ϕ l'inclinaison du plan, ρ la masse volumique, τ_{ij} la contrainte, et g la gravité. Par souci de simplification, nous avons utilisé les notations de la forme : $\partial_z u = u_z = \frac{\partial u}{\partial z}$.

Les conditions aux limites associées sont :

$$(\bar{\tau} - p\bar{I}) \cdot \bar{n} = \vec{0} \quad \text{à la surface libre } (z = h),$$

$$u = w = 0 \quad \text{au fond } (z = 0)$$

avec \bar{I} le tenseur identité, $\bar{\tau}$ le tenseur des contraintes et \bar{n} le vecteur normal sortant à la surface libre.

La contrainte τ_{ij} vérifie la loi de comportement de Herschel-Bulkley. Sous forme tensorielle, elle est donnée par :

$$\begin{cases} \tau_{ij} = (\tau_y + K\dot{\gamma}^n) \frac{\dot{\gamma}_{ij}}{\dot{\gamma}} \text{ si } \tau \geq \tau_y, \\ \dot{\gamma}_{ij} = 0 \text{ si } \tau \leq \tau_y. \end{cases} \quad (1.14)$$

Les invariants tensoriels sont définis par : $\tau = \sqrt{\frac{1}{2} \sum_{ij} \tau_{ij} \tau_{ij}}$ et $\dot{\gamma} = \sqrt{\frac{1}{2} \sum_{ij} \dot{\gamma}_{ij} \dot{\gamma}_{ij}}$.

Les tenseurs du taux de cisaillement peuvent être exprimés en fonction du champ de vitesse, en utilisant (1.13), par :

$$\dot{\gamma}_{ij} = \begin{bmatrix} 2u_x & u_z + w_x \\ u_z + w_x & -2u_x \end{bmatrix},$$

avec un second invariant :

$$\dot{\gamma} = \sqrt{(u_z + w_x)^2 + 4u_x^2}.$$

En utilisant que $\tau_{ij} = \tau_{ji}$ par construction et que $\tau_{xx} = -\tau_{zz}$ par incompressibilité, ils obtiennent :

$$\tau = \sqrt{\tau_{xx}^2 + \tau_{xz}^2}.$$

Dans le but d'adimensionner les équations constitutives, nous introduisons des variables sans dimension de sorte que :

$$\hat{x} = \frac{x}{L}; \hat{z} = \frac{z}{h}; \hat{u} = \frac{u}{U}; \hat{w} = \frac{w}{W} = \frac{w}{hU}; \hat{t} = \frac{t}{T};$$

avec h l'épaisseur caractéristique du film, $L = \frac{h}{\tan \phi}$ l'échelle de longueur longitudinale caractéristique, W vitesse verticale caractéristique, U la vitesse horizontale caractéristique et $T = \frac{L}{U} = \frac{h}{W}$ le temps caractéristique.

La vitesse de référence U est construite à partir de la rhéologie et de la gravité. En effet, les effets de la gravité s'équilibrent avec la contrainte visqueuse de la loi de comportement tel que $\rho g h \sin \phi \sim K \left(\frac{U}{h} \right)^n$ d'où la vitesse de Balmforth $U = \left(\frac{\rho g h^{n+1} \sin \phi}{K} \right)^{\frac{1}{n}}$. La viscosité cinématique est quant à elle construite à partir du taux de cisaillement au fond du canal telle que $\nu = \frac{K}{\rho} \left(\frac{U}{h} \right)^{n-1} = \frac{K}{\rho} \left(\frac{\rho g h^{n+1} \sin \phi}{K} \right)^{\frac{n-1}{n}} h^{1-n}$. Le choix de la longueur caractéristique L permet de simplifier l'expression du rapport d'aspect ε tel que $\varepsilon = \frac{h}{L} = \tan \phi$.

1.4. DÉVELOPPEMENT ANALYTIQUE AUX ONDES LONGUES (BALMFORTH ET AL., 2004)

L'analyse dimensionnelle montre que nous avons 3 dimensions et 6 paramètres que sont ρ la masse volumique, τ_y la contrainte seuil, K la consistance de la loi rhéologique de Herschel-Bulkley, n l'indice rhéologique du fluide, ϕ l'angle d'inclinaison du canal et h l'épaisseur du film. Il est donc nécessaire de construire 3 nombres sans dimension. Le premier est n , l'indice rhéologique du fluide. Le second nombre sans dimension est le nombre de Reynolds Re qui prend la valeur suivante :

$$Re = \frac{\rho \tan \phi}{K} \left(\frac{\rho g h^{n+1} \sin \phi}{K} \right)^{\frac{2-n}{n}} h^n . \quad (1.15)$$

Le troisième nombre sans dimension est le nombre de Bingham Bi calculé par :

$$Bi = \frac{\tau_y}{\rho g h \sin \phi} . \quad (1.16)$$

Le nombre de Bingham peut également s'exprimer le rapport entre l'épaisseur du pseudo-bouchon sur l'épaisseur totale du film tel que :

$$Bi = \frac{h_b}{h} , \quad (1.17)$$

avec h_b l'épaisseur du pseudo-bouchon et h l'épaisseur total du film. Ainsi, nous avons $0 \leq Bi \leq 1$.

Une fois les variables et les nombres sans dimension définis, les équations constitutives sont adimensionnées sous la forme :

$$u_x + w_z = 0 , \quad (1.18)$$

$$Re(u_t + uu_x + ww_z) = -p_x + \varepsilon \partial_x \tau_{xx} + \partial_z \tau_{xz} + 1 , \quad (1.19)$$

$$\varepsilon^2 Re(w_t + uw_x + ww_z) = -p_z + \varepsilon^2 \partial_x \tau_{xz} + \partial_z \tau_{zz} - 1 , \quad (1.20)$$

avec les conditions aux limites en $z = h$ qui traduisent l'équilibre des contraintes normales et tangentielles :

$$\tau_{xz} = h_x(\varepsilon \tau_{xx} - p) , \quad (1.21)$$

$$p = \varepsilon \tau_{zz} - \varepsilon^2 h_x \tau_{xz} , \quad (1.22)$$

ainsi que la condition cinématique à la surface libre en $z = h$:

$$h_t + uh_x = w . \quad (1.23)$$

Les conditions cinématiques à la paroi en $z = 0$ sont données par :

$$u = 0 , \quad (1.24)$$

$$w = 0 . \quad (1.25)$$

La contrainte devient :

$$\tau_{ij} = (Bi + \dot{\gamma}^n) \frac{\dot{\gamma}_{ij}}{\dot{\gamma}} , \quad (1.26)$$

et le taux de cisaillement sans dimension est donné par :

$$\dot{\gamma}_{ij} = \begin{bmatrix} 2\varepsilon u_x & u_z + \varepsilon^2 w_x \\ u_z + \varepsilon^2 w_x & -2\varepsilon u_x \end{bmatrix} \text{ et } \dot{\gamma} = \sqrt{4\varepsilon^2 u_x^2 + (u_z + \varepsilon^2 u_x)^2} . \quad (1.27)$$

Ils simplifient le système d'équation en ne gardant que les termes d'ordre 0 en ε . L'expression du champ de pression obtenue est donnée par :

$$p = h - z$$

Les équations du mouvement (1.19) et (1.20) deviennent :

$$Re(u_t + uu_x + wu_z) = 1 - h_x + \partial_z \tau_{xz} , \quad (1.28)$$

$$0 = -p_z - 1 . \quad (1.29)$$

Et les conditions aux limites peuvent s'écrire en $z = h$ comme :

$$p = 0 , \quad (1.30)$$

$$\tau_{xz} = 0 . \quad (1.31)$$

En adoptant le développement introduit par Balmforth et Craster (1999) pour la vitesse horizontale dans le pseudo-bouchon, $u = u_b(x, t) + \varepsilon u_\varepsilon(x, z, t)$ avec u_b la vitesse dans le pseudo-bouchon, l'équation du mouvement horizontale (1.28) à l'ordre 0 en ε devient :

$$Re(\partial_t u_b + u_b \partial_x u_b) - 1 + h_x = \partial_z \tau_{xz} = -\Sigma(x, t) . \quad (1.32)$$

En utilisant la condition $\tau_{xz}(h) = 0$ à la surface libre ($z = h$), la contrainte est exprimée par $\tau_{xz} = \Sigma(x, t)(h - z)$. Cette contrainte est valable dans le pseudo-bouchon c'est à dire là où $\tau_{xz}(h) < Bi$. De là, une altitude Y' est définie. Cette altitude est la position verticale de l'interface fictive entre la zone cisailée et le pseudo-bouchon. Elle est donnée à partir de l'expression ci-dessous :

$$Y' = h - \frac{Bi}{|\Sigma(x, t)|} . \quad (1.33)$$

1.4. DÉVELOPPEMENT ANALYTIQUE AUX ONDES LONGUES (BALMFORTH ET AL., 2004)

Attention, cette altitude n'est pas à confondre avec l'altitude à l'équilibre, c'est dire en absence de perturbation. L'altitude à l'équilibre est la position de référence de la limite entre la région cisailée et le pseudo-bouchon. Elle est construite en normalisant Y' , en absence de perturbation de sorte que $h \rightarrow 1$ et $\Sigma = 1$. Ainsi, la position non-perturbée est définie par $Y = 1 - Bi$.

Pour la détermination de la vitesse horizontale à l'ordre 1 en ε , nous utilisons d'une part l'équation (1.26) en introduisant la correction de vitesse Balmforth et Craster (1999) telle que $u = u_b + \varepsilon u_\varepsilon$ et d'autre part, nous utilisons la contrainte de cisaillement à l'ordre 0 en ε (cf. fig (1.32)). Ainsi

$$\tau_{xz} = \Sigma(h - z) = \frac{Bi u_{\varepsilon z}}{\sqrt{u_{\varepsilon z}^2 + 4u_b^2}}. \quad (1.34)$$

Ils déduisent alors que :

$$u_\varepsilon = \frac{2|u_{bx}|}{\Sigma} \sqrt{Bi^2 - \Sigma^2(h - z)^2} \text{ avec } u_\varepsilon(z = Y') = 0. \quad (1.35)$$

Balmforth et Liu (2004) affirment que le signe de u_ε est simplement le signe de Σ . Il est à noter qu'ils calculent l'expression de u_ε , mais elle n'est pas utilisée dans la suite de leur étude puisque le développement est effectué à l'ordre 0 en ε .

Concernant la contrainte normale, elle est donnée de manière analogue à l'ordre 0 en ε par :

$$\tau_{xx} = \frac{2Bi u_{bx}}{\sqrt{u_{\varepsilon z}^2 + 4u_{bx}^2}}. \quad (1.36)$$

1.4.3 Stabilité des ondes de surface

Le champ de vitesse de l'écoulement de base est exprimé comme :

$$U(z) = \begin{cases} \frac{Y^m}{m} - \frac{(Y - z)^m}{m} & \text{si } z \leq Y, \\ \frac{Y^m}{m} & \text{si } Y < z < h, \end{cases} \quad (1.37)$$

avec Y l'interface entre la zone cisailée et le pseudo-bouchon non-perturbé c'est à dire $Y = 1 - Bi$ et $m = \frac{n+1}{n}$. La vitesse du bouchon non-perturbé u_b est égale à $\frac{Y^m}{m}$.

L'étape suivante consiste à perturber l'écoulement. Dans ce but, nous introduisons un terme de perturbation de sorte que :

$$u = U + \Psi_z, w = -\Psi_x, \Psi = \psi(z)e^{ikx + \lambda t}, h = 1 + \hat{h}e^{ikx + \lambda t},$$

où k est le nombre d'onde, Ψ une fonction de courant, λ le taux de croissance complexe et \hat{h} l'amplitude de la variation d'épaisseur du film. La normalisation des perturbations par \hat{h} revient à

poser $\hat{h} = 1$. La linéarisation de l'équation du mouvement horizontal permet d'obtenir dans la zone cisailée une équation d'Orr-Sommerfeld simplifiée sous la forme :

$$n(U_z^{n-1}\psi_{zz})_z = ik + Re[(\lambda + ikU)\psi_z - i\psi kU_z] . \quad (1.38)$$

Dans l'optique de la résoudre, nous commençons par déterminer les conditions aux limites. Le non-glisement au fond impose $\psi = 0$ et $\psi_z = 0$ en $z = 0$. Ensuite, nous devons déterminer des conditions à l'interface avec le pseudo-bouchon. Pour cela, nous intégrons l'équation de continuité $u_x + w_z = 0$ sur z entre Y et h , et en utilisant la condition cinématique $w = h_t + u_b h_x$ à la surface libre (en $z = h$), nous obtenons à l'ordre 0 en ε :

$$w(h) = w(Y) - u_{bx}(h - Y) = h_t + u_b h_x . \quad (1.39)$$

Ainsi, la condition cinématique introduite dans (1.39) permet d'obtenir une condition aux limites en $z = Y$:

$$\lambda + ikU + ik(\psi + Bi\psi_z) = 0 . \quad (1.40)$$

La condition dynamique linéarisée s'exprime alors par :

$$\tau_{xz}(Y') = Bi = \tau_{xz}(Y) + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}(Y' - Y) = \tau_{xz}(Y) - (Y' - Y) ,$$

$$\text{car } \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = -1 .$$

La contrainte perturbée devient après linéarisation de (1.26) et (1.27) :

$$\tau_{xz}(Y) = Bi + u_z^n = Bi + (U_z + \psi_{zz}e^{ikx+\lambda t})^n = Bi + nU_z^{n-1}(Y)\psi_{zz}e^{ikx+\lambda t} ,$$

Ensuite, la linéarisation de la position de l'interface fictive permet d'obtenir :

$$Y' - Y = h - \frac{Bi}{\Sigma} - 1 + Bi = 1 + e^{ikx+\lambda t} - 1 + Bi \left(1 - \frac{1}{1 - h_x - Re(u_{bt} + u_b u_{bx})} \right) .$$

soit, avec développant la fraction :

$$Y' - Y = e^{ikx+\lambda t} - ikBie^{ikx+\lambda t} - ReBi(\lambda\psi_z + Uik\psi_z)e^{ikx+\lambda t} . \quad (1.41)$$

Ainsi la condition sur la contrainte est donnée par :

$$Bi = Bi + nU_z^{n-1}\psi_{zz}e^{ikx+\lambda t} - [e^{ikx+\lambda t} - Bi(ik + Re(\lambda\psi_z + iUk\psi_z))e^{ikx+\lambda t}] .$$

1.4. DÉVELOPPEMENT ANALYTIQUE AUX ONDES LONGUES (BALMFORTH ET AL., 2004)

Par conséquent en $z = Y$:

$$nU_z^{n-1}\psi_{zz} = (1 - ikBi) - ReBi(\lambda + ikU)\psi_z . \quad (1.42)$$

En résumé le système complet d'équations à résoudre entre $z = 0$ et $z = h$ s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} n(U_z^{n-1}\psi_{zz})_z = ik + Re[(\lambda + ikU)\psi_z - i\psi kU_z] , \text{ pour } z \in [0, Y] \\ \lambda + ikU + ik(\psi + Bi\psi_z) = 0 \text{ en } z = Y , \\ nU_z^{n-1}\psi_{zz} = (1 - ikBi) - ReBi(\lambda + ikU)\psi_z \text{ en } z = Y , \\ \psi = 0 \text{ et } \psi_z = 0 \text{ en } z = 0 . \end{array} \right. \quad (1.43)$$

Ce système peut être résolu numériquement afin de déterminer $\lambda(k)$. Pour étudier le seuil de stabilité, nous pouvons également procéder à un développement aux ondes longues en introduisant :

$$\lambda = k\lambda_1 + k^2\lambda_2 + \dots, \text{ et } \psi = \psi_0 + k\psi_1 + \dots$$

En écrivant l'équation pour les ordres successifs en k , nous pouvons déterminer une expression pour λ_1 et λ_2 (les calculs sont détaillés dans Balmforth et Liu (2004)). Nous trouvons :

$$\lambda_1 = -i(1 - Bi)^{1/n} , \quad (1.44)$$

$$\lambda_2 = \left[2 + \frac{n(7 + 9n)Bi}{(1 + n)^2} + \frac{(11 + 19n + 6n^2)(2 + nBi)n^2Bi^2}{(2 + n)(1 + n)^2} \right] \frac{Re(1 - Bi)^{3/n}}{(1 + 2n)(2 + 3n)} - \frac{[1 + n + 2nBi(1 + nBi)](1 - Bi)^{1/n}}{(1 + 2n)(1 + n)} . \quad (1.45)$$

λ_1 est un imaginaire pur et donne la vitesse de phase. λ_2 est réel et correspond au taux d'amplification. Il change de signe quand Re franchit le nombre de Reynolds critique Re_c donné par :

$$Re_c = \frac{[1 + n + 2nBi(1 + nBi)](1 + n)(2 + n)(2 + 3n)(1 - Bi)^{-2/n}}{2(2 + n)(1 + n)^2 + n(2 + n)(7 + 9n)Bi + (11 + 19n + 6n^2)(2 + nBi)n^2Bi^2} . \quad (1.46)$$

La figure (1.10) illustre l'évolution du nombre de Reynolds critique Re_c en fonction du nombre de Bingham Bi pour différents n . Nous observons que ce nombre de Reynolds dépend uniquement du nombre de Bingham Bi et de l'indice rhéologique du fluide, n . Par l'intermédiaire du terme $(1 - Bi)^{-2/n}$, nous constatons que lorsque le nombre de Bingham tend vers 1 et/ou que n est petit, le nombre de Reynolds diverge fortement. Nous en déduisons que le nombre de Reynolds critique (Re_c) est très dépendant des paramètres rhéologiques (n, K, τ_c).

Balmforth et Liu (2004) se sont également intéressés au régime non-linéaire. Cette analyse montre que les ondes de surface croissent puis saturent comme pour les fluides newtoniens. De plus, ils observent un phénomène semblable à un onde de choc qui se développe dans l'écoulement. Cette

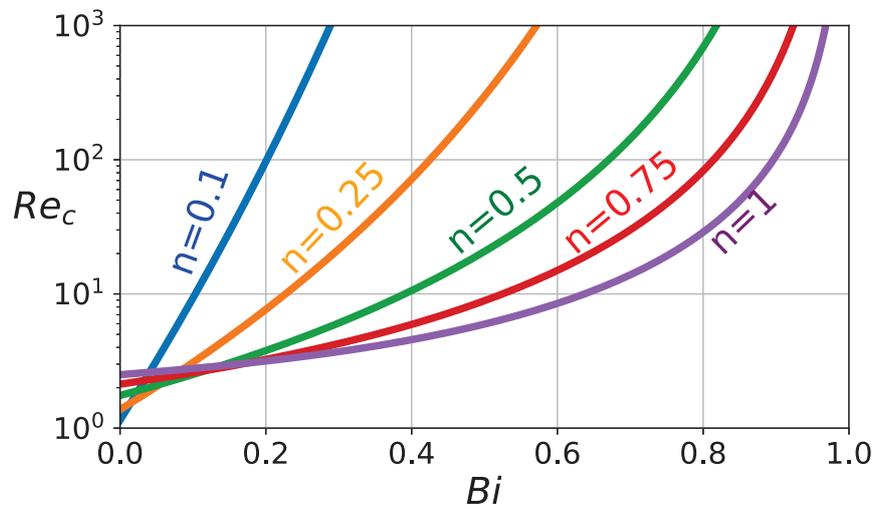


FIGURE 1.10 – Évolution du nombre de Reynolds critique Re_c en fonction du nombre de Bingham pour différents indice n selon Balmforth et Liu (2004)

onde de choc avait également été trouvée par Ng et Mei (1994) pour les fluides en loi de puissance.

Ils remarquent également que l'amplitude crête à crête diminue lorsque le nombre de Reynolds ou la longueur du domaine d'étude se réduit ce qui implique que l'apparition de l'instabilité est supercritique. Enfin, ils mettent en évidence la coalescence des ondes, c'est à dire que les ondes se développent, se rapprochent et entrent en collision pour créer une vague de plus grande amplitude.

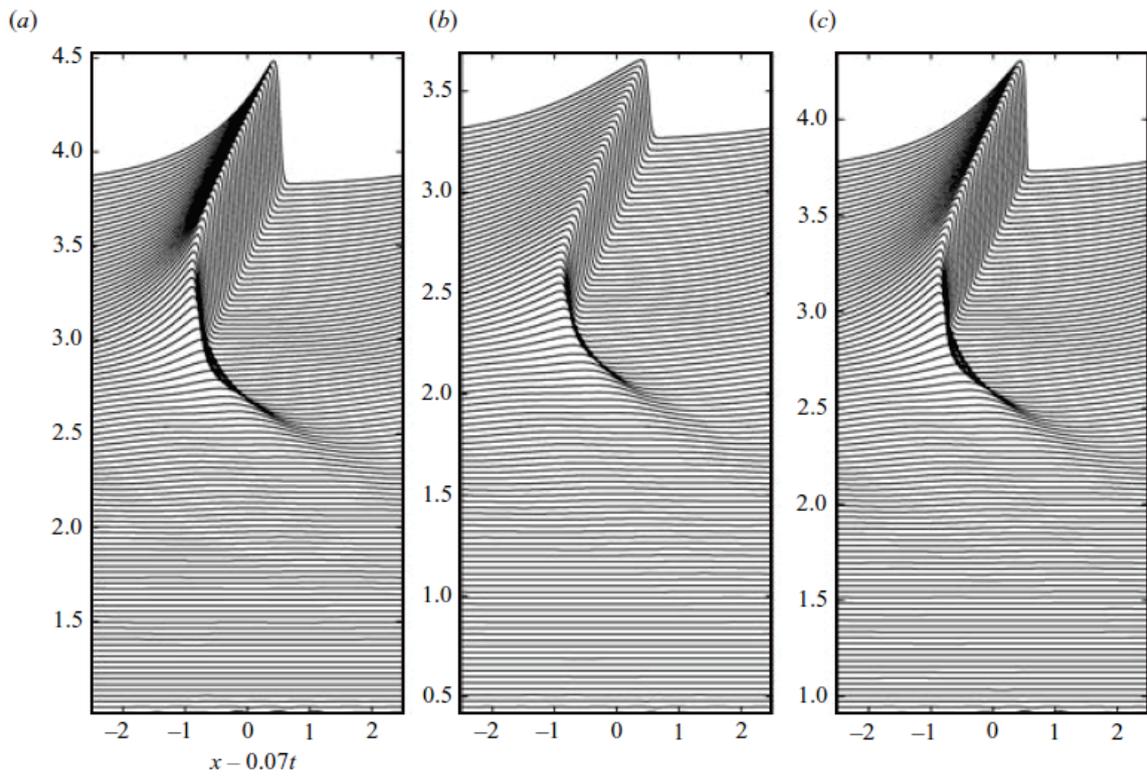


FIGURE 1.11 – Saturation et raidissement du front des ondes issus des simulation numériques pour $Bi = 0.1$ et $Re = 5$ d'après Balmforth et Liu (2004).

1.5 Critiques du calcul à l'ordre 0 en ε

Le calcul de stabilité linéaire de Balmforth et Liu (2004) à l'ordre 0 en ε ne fait pas consensus dans la communauté scientifique. En effet, Fernández-Nieto *et al.* (2010) critiquent cette approche. Dans cette section, nous proposons de présenter dans les grandes lignes l'étude de Fernández-Nieto *et al.* (2010) et de la comparer à celle de Balmforth et Liu (2004).

1.5.1 Développement de Fernandez-Nieto et al. (2010) à l'ordre ε

Fernández-Nieto *et al.* (2010) effectuent un développement des équations en eaux peu profondes dans un premier temps pour un fluide en loi de puissance puis pour un fluide de Bingham. La formalisation des équations dimensionnelles du problème est identique à celle de Balmforth et Liu (2004) (cf. les équations (1.11),(1.12),(1.13)). Pour leur étude en loi de Bingham, ils considèrent trois nombres sans dimension :

- le nombre de Froude caractérisant les termes inertiels par rapport aux termes de gravité :

$$F^2 = \frac{u_0^2}{gh} .$$

- le nombre de Reynolds caractérisant les termes inertiels par rapport aux termes de viscosité :

$$Re = \frac{\rho u_0^{2-n} h^n}{\mu} .$$

- le nombre de Bingham caractérisant les contraintes plastiques par rapport aux contraintes visqueuses :

$$Bi = \frac{\tau_y h}{\mu u_0} ,$$

avec u_0 la vitesse moyenne, g l'accélération de pesanteur, h l'épaisseur du film, τ_y la contrainte seuil, ρ la masse volumique μ la viscosité dynamique.

Ils définissent également le rapport d'aspect propre aux études en eaux peu profondes $\varepsilon = \frac{h}{L}$ avec h_0 l'épaisseur du film et L la longueur caractéristique. Dans l'optique de réaliser des développements asymptotiques, ils introduisent les paramètres α, β, δ et λ :

$$\alpha = \frac{\varepsilon F^2}{Re}, \quad \beta = \varepsilon Re, \quad \delta = \frac{\varepsilon Re}{F^2}, \quad \lambda = \frac{Re}{F^2} \sin \phi .$$

Dans leurs développements, ils négligent la capillarité et considèrent les valeurs de α, β, δ et ε petites. En considérant que ces termes sont d'ordre $O(\varepsilon)$, ils font une étude dimensionnelle qui

1.5. CRITIQUES DU CALCUL À L'ORDRE 0 EN ε

impose que les termes en $\sqrt{\alpha\delta\beta}$ et $\alpha\beta$ soient d'ordre $O(1)$. Par conséquent, leur analyse dimensionnelle les conduit à estimer que Re et F^2 sont nécessairement d'ordre $O(1)$ par rapport à ε .

Ils suivent une approche de type Benney, qui utilise l'équation de conservation de la masse $\partial_t h + \partial_x(h\bar{u}) = 0$, avec une expression du débit $h\bar{u}$ calculée à l'ordre 1 en ε sous la forme :

$$h\bar{u} = \lambda \frac{h_v^3}{3} + \frac{Bi h_v^2}{2} + \sqrt{\alpha\beta} \frac{\pi Bi^2}{2\lambda} h_v |\partial_x h| - \delta c \left(\frac{h_v^3}{3} + h_v h_c h \right) \partial_x h + \beta I_2 + O(\varepsilon^2), \quad (1.47)$$

avec $I_2 = \lambda^2 \left(\frac{2}{15} h_v^6 + \frac{2}{3} h_v^5 h_c + \frac{4}{3} h_v^4 h_c^2 + h_c^3 h_v^3 \right) \partial_x h$, $c = \cos \phi$ et $h_c = Bi/\lambda = h - h_v$.

Nous obtenons alors une équation d'évolution pour h :

$$\partial_t h + \partial_x \left(\lambda \frac{h_v^3}{3} + \frac{Bi h_v^2}{2} \right) = \partial_x (D(h) \partial_x h) - \varepsilon \frac{\pi Bi^2}{2\lambda} \partial_x (h_v |\partial_x h|), \quad (1.48)$$

avec $D(h) = \delta c \left(\frac{h_v^3}{3} + h_v h_c h \right) - \beta \lambda^2 \left(\frac{2}{15} h_v^6 + \frac{2}{3} h_v^5 h_c + \frac{4}{3} h_v^4 h_c^2 + h_c^3 h_v^3 \right)$.¹

Le signe du terme de diffusion de cette équation régit la stabilité, nous trouvons que l'écoulement est stable pour :

$$Re \leq \frac{(\lambda(h_v^2/3) + Bi) \cot \phi - \pi Bi^2 / 2\lambda}{\lambda^2 \left(\frac{2}{15} h_v^5 + \frac{2}{3} h_v^4 h_c + \frac{4}{3} h_v^3 h_c^2 + h_v^2 h_c^3 \right)}. \quad (1.49)$$

1.5.2 Comparaison des deux approches

Nous proposons maintenant de recenser les différences majeures entre le développement à l'ordre 0 (Balmforth et Liu, 2004) et celui à l'ordre ε (Fernández-Nieto *et al.*, 2010). Mis à part la nature de fluide utilisé (fluide de Bingham pour Fernández-Nieto *et al.* (2010) et fluide de Herschel-Bulkley pour Balmforth et Liu (2004)), la première différence notable est dans le calcul du nombre de Reynolds Re . En effet, le nombre de Reynolds de Balmforth est singulier de par la construction de la longueur caractéristique $L = \frac{h}{\tan \phi}$ avec $\varepsilon = \tan \phi$. Ainsi, son nombre de Reynolds est d'ordre ε tandis que celui de Fernandez-Nieto est de l'ordre 0 en ε tel que :

$$Re_{Balm} = \varepsilon Re_{FN}.$$

Il est à noter que le nombre de Bingham Bi (non nommé par Fernández-Nieto *et al.* (2010)) est identique dans les deux approches. La seconde différence notable est dans le calcul de la vitesse dans le pseudo-bouchon. En effet, Balmforth et Liu (2004) ont défini un terme de correction de

1. Dans la publication de Fernández-Nieto *et al.* (2010), le terme d'ordre ε a un facteur $1/4$ au lieu de $1/2$ ce qui ne correspond pas à l'expression précédente du débit.

la vitesse à l'ordre 1 en ε sous la forme $u = u(x, t) + \varepsilon u_\varepsilon(x, z, t)$ dans le pseudo-bouchon pour expliquer le développement d'instabilités dans de tels écoulements. Cependant, ils n'ont pas réalisé un développement asymptotique contenant cette correction, contrairement à Fernández-Nieto *et al.* (2010). Or, la prise en compte de cette correction permet à Fernández-Nieto *et al.* (2010) d'obtenir un terme en $\varepsilon \frac{\pi Bi^2}{4}$ dans le tenseur des contraintes visqueuses. Ainsi, Fernández-Nieto *et al.* (2010) affirment que le fait de négliger ces termes peut influencer la transition vers l'instabilité pour des perturbations à grandes longueurs d'ondes. Cette affirmation provient de l'équation (1.48) de Balmforth dans laquelle il manque le terme $\varepsilon \frac{\pi Bi^2}{2\lambda} \partial_x(h_v |\partial_x h|)$ dans l'étude de Balmforth et Liu (2004). Ceci va entraîner selon eux une surestimation du nombre de Reynolds critique Re_c .

Nous nous sommes également proposé de transformer le nombre de Reynolds critique Re_c de Fernández-Nieto en utilisant les notations de Balmforth. Étant donné que $Re_{Balm} = \varepsilon Re_{FN}$, nous avons :

$$\varepsilon Re_{FN} = \frac{(\lambda(h_v^2/3) + Bi) - \varepsilon \pi Bi^2 / 2\lambda}{\lambda^2 \left(\frac{2}{15} h_v^5 + \frac{2}{3} h_v^4 h_c + \frac{4}{3} h_v^3 h_c^2 + h_v^2 h_c^3 \right)}.$$

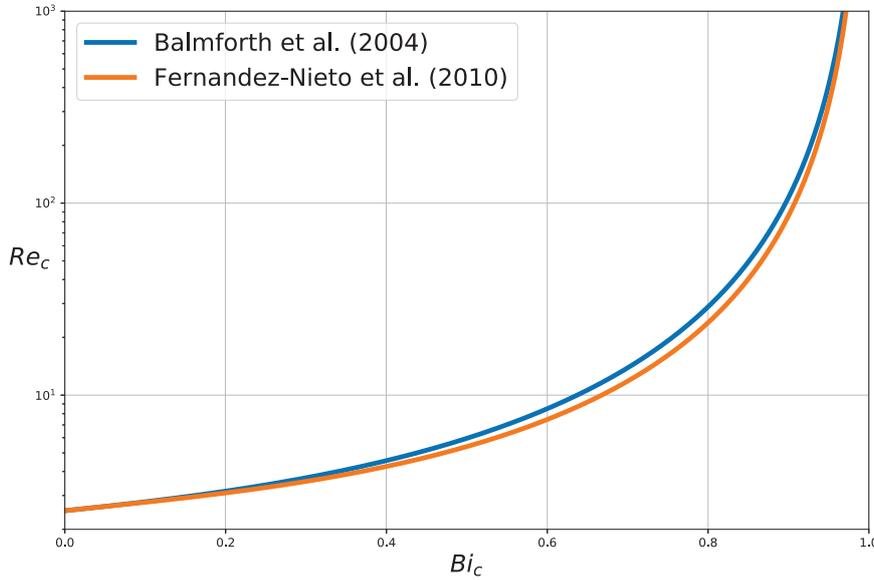


FIGURE 1.12 – Comparaison des prédictions analytiques de Balmforth et Liu (2004) et avec celles de Fernández-Nieto *et al.* (2010) pour un fluide de Bingham ($n = 1$)

Ensuite, nous déterminons λ, h_v et h_c dans le formalisme de Balmforth, nous trouvons alors que :

$$\lambda = 1, h_c = Bi \text{ et } h_v = 1 - Bi.$$

1.5. CRITIQUES DU CALCUL À L'ORDRE 0 EN ε

Par conséquent, nous trouvons pour un fluide de Bingham que :

$$Re_c = \frac{5[1 + Bi + Bi^2 - 3\varepsilon(\pi Bi^2/2)]}{3Bi^5 - 5Bi^3 + 2}. \quad (1.50)$$

Nous observons qu'à l'ordre 0 en ε , ce résultat correspond exactement au résultat de Balmforth (cf. eq. (1.46)) pour $n = 1$. La figure (1.12) est une comparaison des prédictions de Balmforth et Liu (2004) avec celles de Fernández-Nieto *et al.* (2010) pour un fluide de Bingham. Nous observons une tendance similaire même si la prédiction de Balmforth et Liu (2004) semble effectivement surestimer le nombre de Reynolds critique Re_c prédit par Fernández-Nieto *et al.* (2010).

1.6 Expériences sur plan incliné

Dans la section précédente, nous avons pu aborder les deux principaux développements théoriques portant sur la stabilité linéaire de fluides à seuil sur un plan incliné. Au regard des critiques formulées par Fernández-Nieto *et al.* (2010) sur l'absence des termes d'ordre ε dans le développement de Balmforth et Liu (2004), il est nécessaire d'effectuer des études expérimentales afin de pouvoir les confronter. Dans cette section, nous nous proposons de dresser une revue des méthodologies utilisées dans la littérature portant sur des expériences de films tombants.

1.6.1 Fluides newtoniens

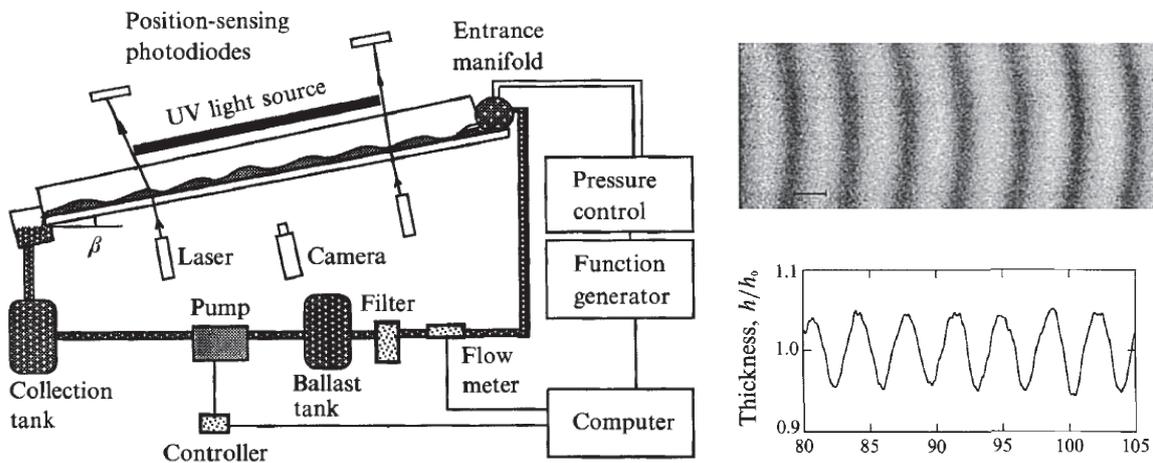


FIGURE 1.13 – Dispositif expérimental de film tombant sur plan incliné d'après Liu (1993). Sur les figures de droite sont illustrées les vagues capturées par la caméra (au haut) et l'amplitude des ondes après un traitement de données (en bas)

Les premières expériences de films tombants ont été réalisées par Kapitza et Kapitza (1949). Ces expériences ont permis de montrer qu'il existe un nombre de Reynolds critique au dessus duquel les instabilités se développent en stabilité primaire. Ces ondes sont appelées parfois "Kapitza waves".

L'une des premières expériences permettant de déterminer précisément ces seuils de stabilité pour des fluides newtoniens est l'expérience de Liu *et al.* (1993). Ils ont étudié d'un point de vue expérimental la stabilité de fluides newtoniens sur un plan incliné. Liu *et al.* (1993) ont mis en place un dispositif expérimental établissant à l'aide d'une pompe un régime permanent sur un canal incliné. Le fluide newtonien employé est un mélange d'eau et de glycérine. Ils imposent en entrée du canal des perturbations d'amplitude et de fréquence contrôlées. La pente locale de l'interface est mesurée avec un système de réfraction laser en deux points. De plus, l'écoulement est éclairé avec une source lumineuse ultraviolette. Dans l'optique de rendre le fluide fluorescent, ils rajoutent de la fluorescéine au fluide. Ainsi, une caméra, placée au dessus de l'écoulement, permet de capturer les instabilités sur la surface du film et de déduire l'épaisseur h du film en fonction de l'intensité

1.6. EXPÉRIENCES SUR PLAN INCLINÉ

lumineuse (cf. figure 1.13). Comme illustré sur la figure (1.13), Liu *et al.* (1993) introduisent un filtre et un réservoir tranquilisateur pour atténuer les perturbations extérieures. Leur protocole expérimental consiste dans un premier temps à fixer la fréquence f , le débit q et l'inclinaison ϕ et grâce à l'acquisition des évolutions spatiales des ondes le long du canal, ils identifient le taux de croissance des ondes α pour la fréquence correspondante. Ensuite, ils répètent cette mesure à différentes fréquences afin de déterminer la fréquence neutre ou fréquence de coupure f_c . Il s'agit de la fréquence pour laquelle le taux de croissance des ondes est nul pour un débit q et une inclinaison ϕ donnés. Enfin ils répètent les étapes précédentes à différents débits afin d'obtenir l'évolution de la fréquence de coupure en fonction du nombre de Reynolds en vue de déterminer le Reynolds critique Re_c pour un angle ϕ donné. Cependant, le nombre de Reynolds critique Re_c ne peut pas être mesuré expérimentalement avec précision. En effet, il n'est pas possible de mesurer des instabilités à fréquence nulle. Par conséquent, ils ont analysé l'évolution de la fréquence de coupure en fonction du nombre de Reynolds à ϕ constant. En stabilité primaire, ils observent que la relation entre la fréquence et le nombre de Reynolds peut être décrite par :

$$f_c = A\sqrt{Re - Re_c}, \quad (1.51)$$

où A est une constante et Re_c le nombre de Reynolds critique.

L'ajustement de cette loi sur les résultats expérimentaux permet par extrapolation, de déterminer le nombre de Reynolds critique Re_c . La détermination de Re_c est illustrée sur la figure (1.14.gauche). Nous observons alors deux régions. Une région avec des ondes instables en dessous de la courbe de stabilité et des ondes stables au dessus. Nous remarquons également qu'en dessous de la valeur critique Re_c , l'écoulement est toujours stable en stabilité primaire. Ces résultats expérimentaux sont ensuite comparés aux prédictions théoriques de Benjamin (1957) et Yih (1963). Cette comparaison, représentée sur la figure (1.14.droite), montre alors que les prédictions sont en adéquation avec les résultats expérimentaux. En effet, ils observent une évolution de nombre de Reynolds critique en fonction de l'angle d'inclinaison en $\frac{5}{6} \cot \phi$.

La figure (1.15) représente l'évolution du taux de croissance et de la vitesse de phase en fonction du nombre d'onde. Les données expérimentales sont comparées à la théorie. Elles montrent alors une bonne adéquation avec les prédictions de Anshus et Goren (1966). Ces prédictions sont basées sur la résolution d'une part des équations d'Orr-Sommerfeld et d'autre part d'une équation de Benney.

1.6.2 Fluides non-newtoniens

Dynamique des fluides à seuil sur un plan incliné

Le comportement des fluides à seuil intéresse fortement les expérimentateurs, en particulier l'analyse de la forme de la surface libre et de l'inertie de l'écoulement en absence de perturbation. Iverson (1997) s'intéresse à la mesure de l'épaisseur et la vitesse du front avec une mélange composé de sable, gravier et eau. Le début des années 2000 est marqué par le développement de ces

2. β dans le cadre de leur étude

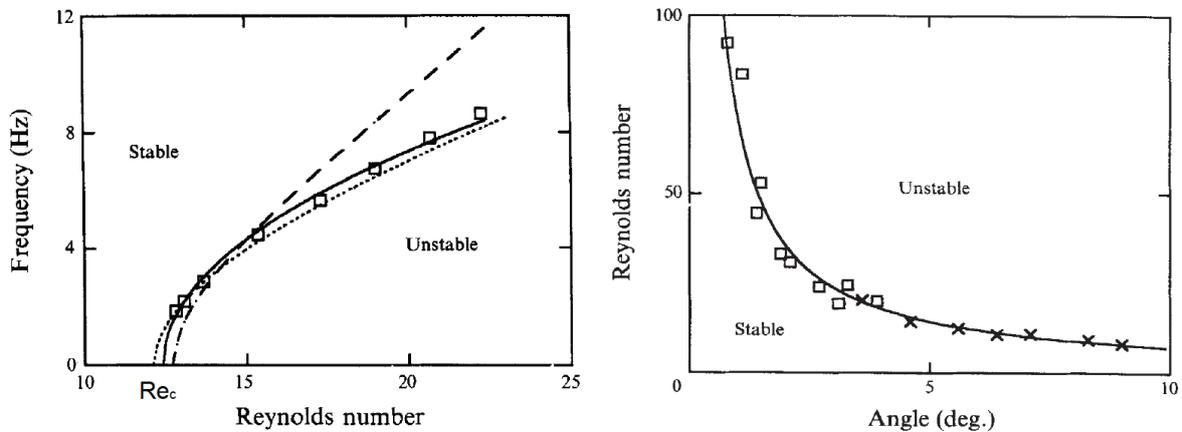


FIGURE 1.14 – Résultats expérimentaux d’après Liu (1993) pour des fluides newtoniens. Gauche : courbe de stabilité pour $\phi = 15.6^\circ$: fréquence neutre en fonction du nombre de Reynolds (Re, f_c) pour identifier le nombre de Reynolds critique pour des fluides newtoniens. Le trait plein représente ajustement en racine carrée entre f_c et Re . La ligne en pointillée représente la solution de l’équation d’Orr-Sommerfeld du problème tandis que la ligne pointillée est la solution de l’équation de Benney du problème. Droite : nombre de Reynolds en fonction de l’angle d’inclinaison (ϕ, Re). Les croix représentent des expériences avec une solution glycérine-eau et les carrés blancs les résultats avec de l’eau. Nous observons que l’évolution de Re_c en fonction de ϕ suit bien les prédictions théoriques de Benjamin (1957) et Yih (1963) en traits pleins.

expériences avec Balmforth *et al.* (2006) qui montrent un bon accord entre les résultats théoriques (théorie de la lubrification) avec une loi rhéologique de Herschel-Bulkley et des expériences relatives à la forme du front au cours de la propagation 2D ou 3D pour une suspension de kaolin.

Chambon *et al.* (2009; 2014) ont étudié la relation vitesse-hauteur, la forme du front et le champ de vitesse dans un écoulement de fluide viscoplastique sur une pente. Le dispositif expérimental utilisé est un canal de 3 mètres de long entraîné par un tapis roulant. Les expériences ont été réalisées avec une pente de 15° et une largeur de 0,4 mètres. Le fluide employé est une suspension de kaolin composée de 35 kilogrammes de kaolin en poudre dans 42,5 litres d’eau déminéralisée pour une masse volumique de 1399 kg/m^3 . La contrainte seuil du fluide a été déterminée à 10 Pa en utilisant le modèle de Herschel-Bulkley. La mesure de la forme et de la hauteur du film est enregistrée grâce à un appareil photo ainsi que des capteurs à ultrasons pour contrôler la hauteur de l’écoulement. Ils distinguent alors trois zones dans l’écoulement que sont le front de l’écoulement, une zone d’épaisseur uniforme et une région influencée par la paroi supérieure. Les résultats obtenus ont été comparés à des développements analytiques basés sur l’approximation des couches minces et ont montré une bonne corrélation entre la forme de la surface libre attendue théoriquement et celle obtenue par l’expérience.

Dernièrement, Freydier *et al.* (2017) ont étudié la dynamique interne d’un écoulement viscoplastique à surface libre sur un canal incliné. Les expériences ont également été réalisées sur un tapis

1.6. EXPÉRIENCES SUR PLAN INCLINÉ

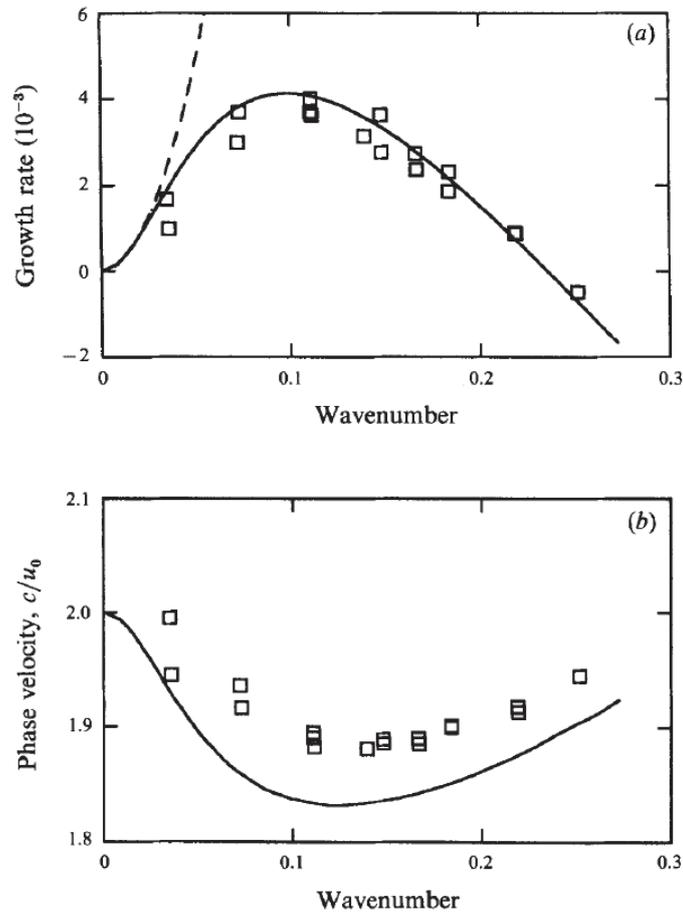


FIGURE 1.15 – Relations de dispersion d’après Liu *et al.* (1993). En haut est représentée l’évolution du taux de croissance en fonction du nombre d’onde et en dessous l’évolution de la vitesse de phase adimensionnée en fonction du nombre d’onde. Les données expérimentales (carrés blancs) sont comparées aux solutions de Anshus et Goren (1966). Ils obtiennent alors une bonne adéquation entre les résultats expérimentaux et la théorie.

roulant à vitesse contrôlée avec du carpool. Ils ont utilisé la technique de PIV (Particle Image Vélocimétrie) pour mesurer les champ de vitesse dans la zone uniforme et dans la zone en amont du front de l’écoulement où l’épaisseur est variable. Ensuite, ils ont comparé les résultats expérimentaux (profil de vitesse, position du pseudo-bouchon) avec un développement analytique qu’ils ont effectué à l’aide de l’approximation de la lubrification. Cette comparaison illustre un accord entre le développement analytique et les expériences sauf à proximité du front. A proximité de ce dernier, l’approximation de la lubrification est défailante pour décrire la dynamique de l’écoulement.

Chambon *et al.* (2020) ont réalisé des travaux sur la dynamique interne du profil de vitesse et du taux de cisaillement dans les films tombants de fluides à seuil. Ils montrent que si le modèle de lubrification permet de bien décrire le dynamique globale de l’écoulement, les termes de correc-

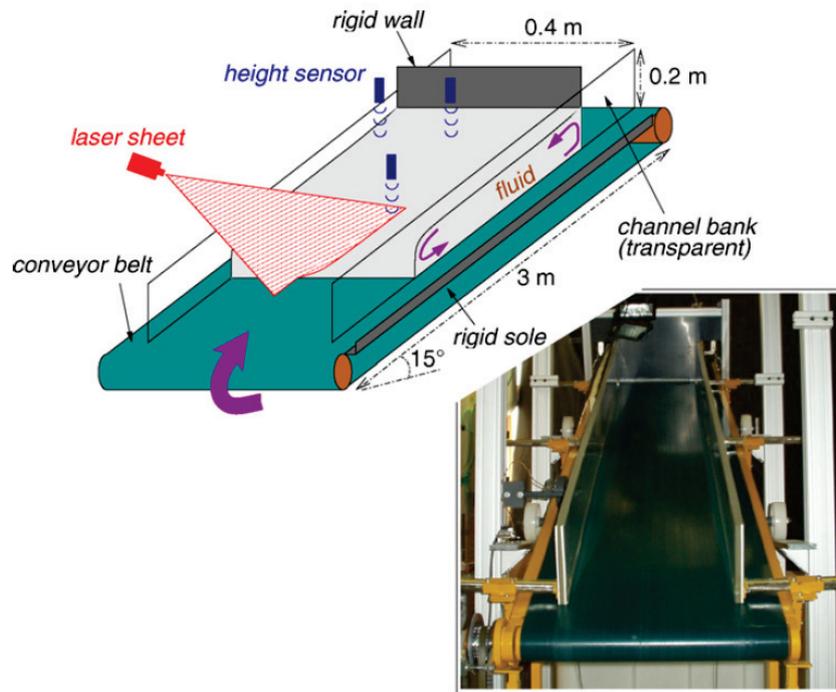


FIGURE 1.16 – Schéma et photographie de l'expérience pour étudier la dynamique des ondes libres par gravité pour une mixture kaolin/eau d'après Chambon (2009)

tion d'ordre ε sont nécessaires pour capturer l'évolution de la vitesse et du taux de cisaillement dans le front de l'écoulement. Ils affirment que si les termes d'ordre ε sont négligeables pour les fluides newtoniens et en loi de puissance, ce n'est pas le cas pour les fluides à seuil où leur présence est indispensable notamment pour les faibles valeurs de n . C'est ainsi qu'ils obtiennent une excellente adéquation entre les développements asymptotiques réalisés jusqu'à l'ordre ε et les mesures expérimentales de Freydier *et al.* (2017) y compris dans le front de l'écoulement.

Stabilité des fluides non-newtoniens

Nous venons de voir quelques études sur la dynamique interne des films de fluides viscoplastiques sur plan incliné. Dans cette sous-section, nous citerons quelques méthodes expérimentales que nous pourrions employer pour étudier la stabilité linéaire des films tombants.

Tout d'abord, Forterre et Pouliquen (2003) ont réalisé une étude sur les instabilités des ondes de surface dans les écoulements granulaires sur un plan incliné. Les fluides granulaires sont constitués de particules solides indépendantes, les grains, qui n'ont d'interactions que par friction ou par contact. Ces matériaux sont impliqués dans des phénomènes naturels comme les tempêtes de sable ou les avalanches. L'expérience est réalisée dans un canal incliné de 2 mètres de long et 35 centimètres de large. Des perturbations de fréquence et d'amplitude contrôlées sont générées par l'injection d'un mince jet d'air sur la surface libre à l'aide de hauts parleurs. Pour déterminer l'épaisseur du film,

1.6. EXPÉRIENCES SUR PLAN INCLINÉ

ils utilisent une méthode d'absorption de lumière qui consiste à éclairer le canal au dessus. Deux photodétecteurs sont alors placés à différentes positions le long du canal et mesurent l'intensité lumineuse qui évolue exponentiellement avec l'épaisseur de la couche granulaire. Ils peuvent donc déduire l'évolution de l'amplitude des ondes. L'analyse de stabilité linéaire montre qu'il s'agit d'instabilités de surface à grande longueur d'onde comme celles observées pour les fluides newtoniens même si les caractéristiques sont différentes à cause de la nature du fluide. A titre d'illustration, nous avons noté que ces matériaux peuvent devenir instables en dessous des conditions d'un écoulement à faible vitesse. Cette caractéristique est liée à l'existence d'un angle critique en dessous duquel les grains se mettent à s'écouler et engendrent un écoulement instable.

Allouche *et al.* (2017) ont effectué une étude expérimentale de l'instabilité primaire d'un film non-newtonien sur un plan incliné. Les expériences ont été réalisées sur un canal de 2 mètres de long avec une pente ajustable entre 0 et 15°. L'écoulement est perturbé en entrée du canal avec un pot vibrant (BK 4809) relié à une plaque plongée dans un collecteur en entrée. La détection des vagues se fait par deux méthodes. La première méthode est une mesure ponctuelle de l'amplitude et du déphasage du signal grâce à 2 détecteurs de position (PSD) permettant de mesurer la déviation d'un rayon laser sur la surface libre en 2 positions différentes. Cette méthode permet d'obtenir l'amplitude et la longueur d'onde des instabilités par l'intermédiaire de la transformée de Fourier. La seconde méthode est une méthode de Schlieren. Elle permet de mesurer la forme de la surface libre de l'écoulement sur une surface donnée. L'épaisseur du film varie selon cette expression :

$$\frac{dh}{dx} \propto e^{\alpha x} \cos(kx - 2\pi ft) . \quad (1.52)$$

Le fluide rhéofluidifiant utilisé est une solution de carboxyméthyl cellulose et de gomme de xanthane) dont la rhéologie a été bien caractérisée par le modèle de Carreau-Yasuda à 4 paramètres en considérant $a = 2$. Les expériences montrent un bon accord avec les prédictions théoriques. Ils montrent également que les propriétés liées à la fluidification ont tendance à déstabiliser l'écoulement.

Coussot (1994) a été l'un des premiers à étudier expérimentalement le développement d'ondes de surface pour des fluides à seuil. Dans son expérience, un écoulement est généré à l'aide d'une pompe sur un canal incliné, entre 0 et 65 °, de forme rectangulaire. La largeur de l'écoulement varie entre 0 et 60 centimètres sur une longueur de 8 mètres. Les expériences ont été faites avec des parois soit rugueuses soit lisses afin de s'assurer que le glissement était négligeable. Le fluide employé est un mélange argile-eau à différentes concentrations d'argile. Coussot (1994) a utilisé un modèle de type Herschel-Bulkley pour caractériser le comportement rhéologique du fluide. Pour la mesure de l'épaisseur du film, il a utilisé deux méthodes. La première méthode consiste à plonger un petit réglet gradué verticalement dans le fluide. La seconde méthode consiste quant à elle à mesurer la distance entre la paroi du fond du canal et la surface libre du fluide (une aiguille a été abaissée jusqu'à ce qu'elle touche la surface libre). L'auteur affirme que les deux méthodes apportent des résultats similaires.

Les résultats de Coussot (1994) montrent que pour de faibles angles, l'écoulement est stable. En

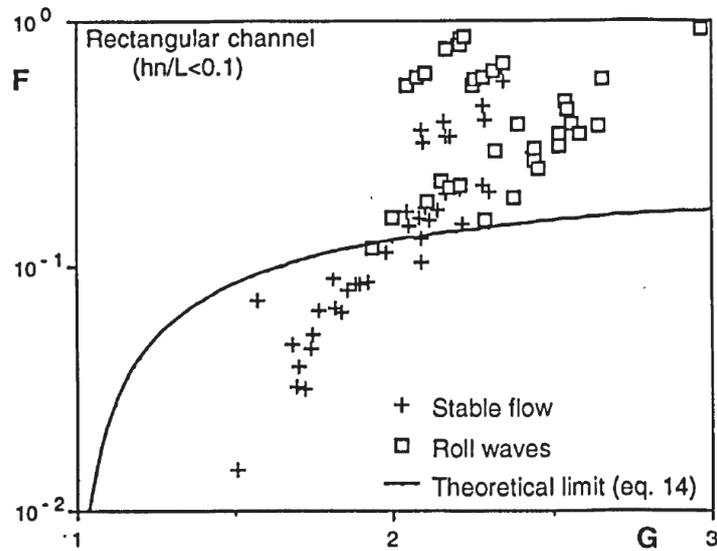


FIGURE 1.17 – Évolution du nombre de Froude F en fonction de G (l'inverse du nombre de Bingham Bi). Comparaison d'écoulements stables et instables avec des prédictions théoriques d'après Coussot (1994) pour une suspension d'argile.

augmentant l'angle d'inclinaison, il observe que l'écoulement devient instable au delà d'une pente critique. Cette pente critique diminue avec le débit. L'auteur indique ne pas avoir réalisé d'expériences précises pour caractériser les situations d'apparition des instabilités. Il a simplement observé si les conditions étudiées donnaient lieu à un écoulement stable ou instable et a relevé les paramètres expérimentaux correspondants. Ce qui apporte une limite à son étude d'autant plus que dans certains cas le canal pouvait ne pas être assez long pour que l'instabilité se développe. D'un point de vue théorique, il définit son critère de stabilité théorique par :

$$F > \frac{(m+1)G^2 - mG - 1}{(m+1)^2G^2 + mG + 1}, \quad (1.53)$$

avec l'indice rhéologique $m = 1/n$, le nombre de Froude $F = \frac{V}{\sqrt{gL \cos \phi}}$ (où V et L sont respectivement la vitesse et la longueur caractéristique) et un nombre sans dimension $G = \frac{\rho g L \sin \phi}{\tau_y}$. Nous remarquons que son nombre sans dimension G est simplement l'inverse du nombre de Bingham Bi si $L = h$.

La figure (1.17) montre la comparaison d'écoulements stables et instables avec les prédictions théoriques. L'auteur estime avoir un bon accord entre les expériences et la théorie. Cependant, son étude présente des limites, car plusieurs essais stables se trouvent au delà du critère de stabilité. Nous en déduisons que si ce travail constitue une étude expérimentale fondatrice pour l'analyse de la stabilité des fluides à seuil sur un plan incliné, elle n'a pas été conçue pour déterminer finement les seuils de stabilité primaire. Nous pouvons également évoquer les travaux de Tamburrino et Ihle

1.6. EXPÉRIENCES SUR PLAN INCLINÉ

(2013) sur l'apparition d'onde de surface pour les suspensions de bentonite s'écoulant dans un plan incliné mais une nouvelle fois, leurs résultats ne permettent pas de prédire précisément les seuils de stabilité primaire.

1.7 Conclusion partielle

Dans ce chapitre, nous avons vu que la modélisation des films tombants de fluides viscoplastiques sur plan incliné est complexe et qu'elle continue d'être le sujet d'études récentes comme celles de Freydier *et al.* (2017) ou Chambon *et al.* (2020). La modélisation de l'écoulement en pseudo-bouchon proposée par Balmforth et Craster (1999) en régime permanent fait consensus aujourd'hui et permet d'expliquer le développement d'instabilités dans ce type d'écoulement. Cette modélisation contient une correction de vitesse à l'ordre ε dans le pseudo-bouchon (région faiblement cisailée à la surface libre) permettant d'expliquer physiquement le développement d'instabilités dans ce type d'écoulements.

Concernant la stabilité linéaire, il existe deux principaux développements analytiques permettant de déterminer les seuils de stabilité. La première est celle de Balmforth et Liu (2004) que nous avons décrit, et en particulier leur prédiction du nombre de Reynolds critique. Cependant, leur développement est critiqué par Fernández-Nieto *et al.* (2010). En effet, si Balmforth et Liu (2004) ont introduit la notion de correction de vitesse dans le pseudo-bouchon, ils n'en tiennent pas compte dans leur étude de perturbation. Ce point leur est reproché car il conduirait à surestimation du seuil de stabilité. Cependant, l'étude de Fernández-Nieto *et al.* (2010) se limite à un fluide de Bingham. Ce modèle n'est pas suffisant pour décrire le comportement des fluides à seuil. C'est la raison pour laquelle nous avons proposé dans ce travail, d'étendre les développements à l'ordre 1 en ε pour un modèle de Hershel-Buckley.

Malheureusement, comme nous l'avons évoqué plus haut, à notre connaissance il existe très peu d'études expérimentales portant sur les films de fluides viscoplastiques sur un plan incliné. Les rares études existantes (Coussot, 1994; Tamburrino et Ihle, 2013) ne permettent pas de déterminer précisément les seuils de stabilité. Cette problématique est alors le cœur de ce travail de thèse qui consiste à mettre en place une étude expérimentale pour pallier ce manque. Nous effectuerons également une étude expérimentale du régime non-linéaire afin de pouvoir les comparer aux phénomènes observés pour les fluides newtoniens.

Expérience de stabilité primaire de films viscoplastiques

Sommaire

2.1 Dispositif expérimental	46
2.1.1 Écoulement de base	47
2.1.2 Fluides	49
Carbopol 980	49
Suspension de Kaolin	51
Rhéologie des fluides	52
2.2 Mesure de stabilité linéaire des ondes de surface	55
2.2.1 Perturbation de l'écoulement de base	55
2.2.2 Détection des ondes	56
Méthode par réfraction	56
Capteur de triangulation laser	58
2.3 Résumé des incertitudes expérimentales	61
2.4 Conclusion partielle	62

Nous avons vu que les deux principaux développements asymptotiques portant sur la stabilité primaire des films de fluides viscoplastiques sur un plan incliné ne font pas consensus. Or, à notre connaissance, il existe peu d'études expérimentales permettant de mesurer précisément ces seuils de stabilité et de pouvoir confronter les modèles théoriques. C'est la raison pour laquelle, nous proposons de présenter l'expérience modèle que nous avons mis en place afin d'étudier cette stabilité primaire. Nous commencerons par aborder le dispositif expérimental ainsi que les fluides utilisés dans le cadre de nos expériences. Nous décrirons ensuite la mesure de stabilité linéaire des ondes de surface effectuée. Et nous terminerons par une conclusion partielle.

2.1 Dispositif expérimental

Dans cette section, nous allons décrire le dispositif expérimental que nous avons mis en place pour étudier les instabilités de type ondes de surface dans un écoulement de films viscoplastiques sur un plan incliné. Le principe de notre dispositif expérimental est similaire à celui utilisé par Allouche *et al.* (2017) et schématisé sur la figure (2.1). Le fluide est introduit dans un collecteur, puis il est acheminé jusqu'à l'entrée du canal à l'aide d'une pompe. Ensuite, il s'écoule sur le plan incliné avant de retourner dans le collecteur. Ce cycle est entretenu par la pompe. L'écoulement est perturbé à l'aide d'une pot vibrant placé en entrée du canal. Concernant la détection des ondes, elle a été effectuée grâce à l'utilisation d'un télémètre laser.

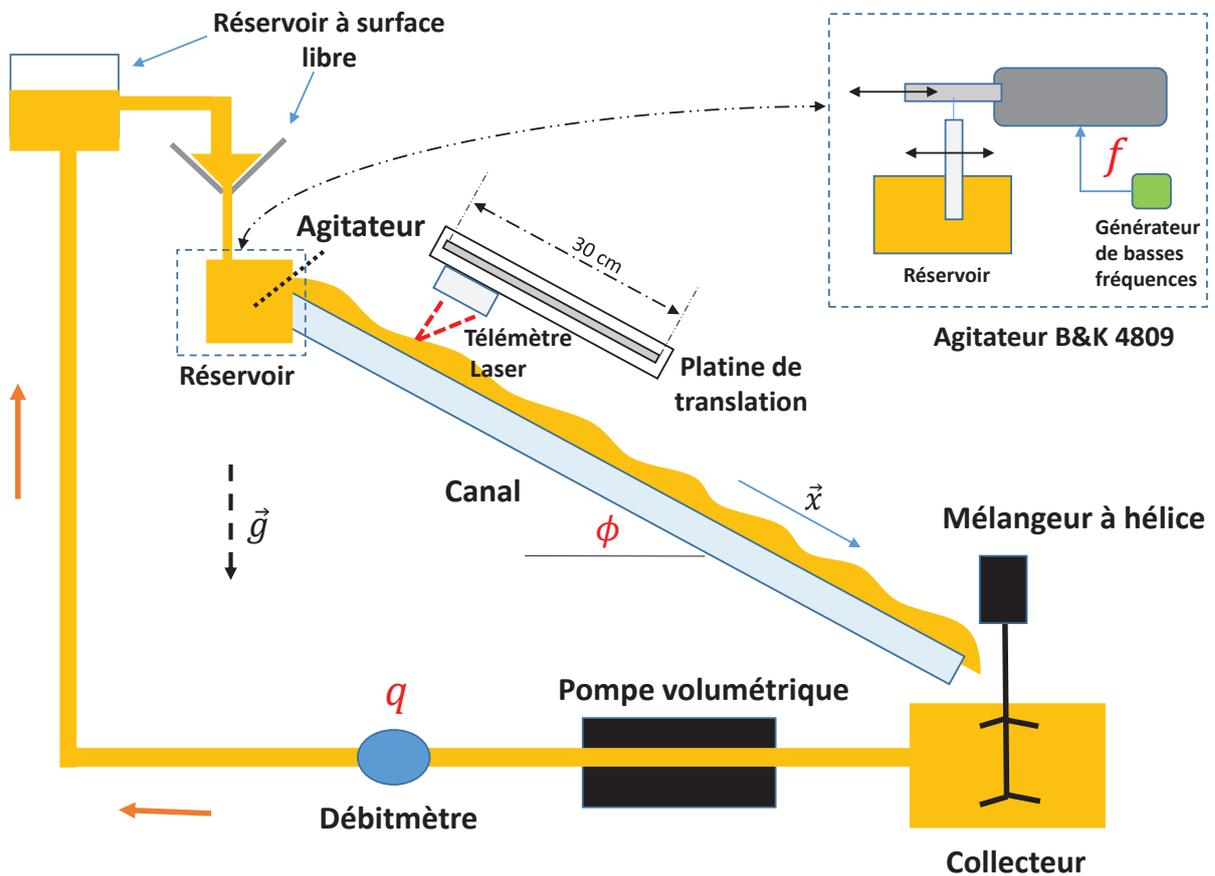
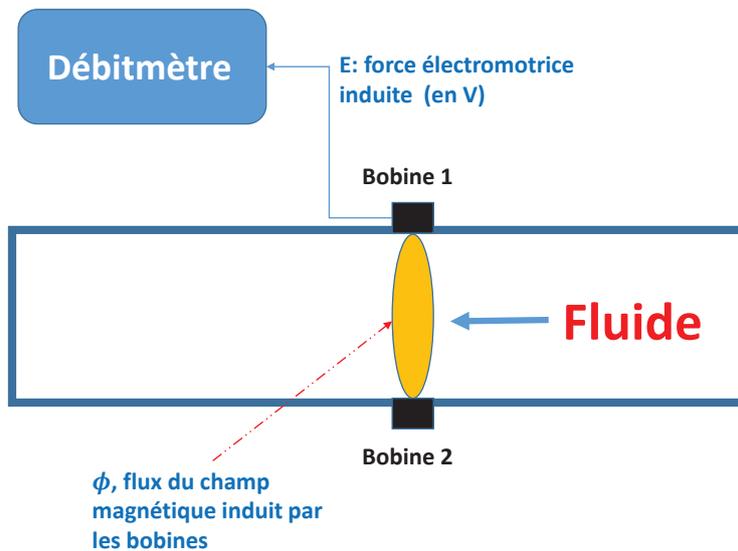


FIGURE 2.1 – Schéma du dispositif expérimental utilisé pour la stabilité primaire des fluides viscoplastiques.

2.1. DISPOSITIF EXPÉRIMENTAL

2.1.1 Écoulement de base

L'écoulement du fluide sur le plan incliné est généré par la gravité. Le canal est en verre, il a une longueur de 2 mètres et une largeur de 47 centimètres. L'angle d'inclinaison du canal est ajustable entre 0° et 16° à l'aide d'un pied télescopique motorisé. Nous introduisons un fluide viscoplastique dans un collecteur en verre de 80 litres. Pour assurer un écoulement permanent, nous avons constaté qu'il est généralement nécessaire d'introduire un volume minimum de 65 litres de fluide. Ensuite, le fluide est acheminé par injection du collecteur vers l'entrée du canal. Nous utilisons une pompe de type PCM EcoMoineau. Il s'agit d'une pompe volumétrique dans laquelle un rotor de forme hélicoïdale est en rotation au sein d'un stator de forme hélicoïdale également. Cela permet de créer une aspiration du fluide. Le débit maximal de la pompe est de 1 L/s.



Débitmètre

FIGURE 2.2 – Schéma simplifié du fonctionnement des débitmètres magnétiques.

Le débit de la pompe est mesuré avec un débitmètre électromagnétique *RosemountTM*. Le fonctionnement de ce type de débitmètre repose sur l'induction électromagnétique : un champ magnétique est induit à l'aide de deux bobines placées de part et d'autre de l'écoulement, comme illustré sur la figure (2.2). Ce champ magnétique génère une force électromotrice en fonction du débit. Ainsi, plus le débit est important et plus la force électromotrice le sera également. La relation entre le débit et la force électromotrice est donnée par la relation ci-dessous :

$$E = k \cdot \frac{DBq}{S} ,$$

CHAPITRE 2. EXPÉRIENCE DE STABILITÉ PRIMAIRE DE FILMS VISCOPLASTIQUES

Essais	1	2	3	4
Débit en L/s (Rosemount)	0.090	0.217	0.345	0.478
Débit en L/s (méthode directe)	0.095	0.216	0.353	0.471

TABLE 2.1 – Débit mesuré par le débitmètre magnétique *Rosemount*TM et par méthode directe.

où E est la force électromotrice, D la distance entre les deux bobines, k une constante d'ajustement, B le champ magnétique, q le débit du fluide et S la section de la conduite.

Nous avons souhaité vérifier que la mesure du débitmètre électromagnétique était fiable pour des fluides à seuil. Dans cette optique, nous avons mesuré le débit en sortie de la pompe à l'aide d'une balance (méthode directe), et nous avons comparé ce résultat à la mesure du débitmètre magnétique *Rosemount*TM.

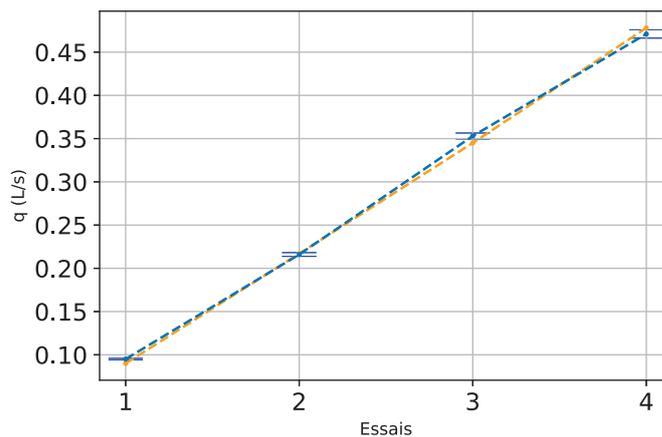


FIGURE 2.3 – Vérification du débit mesuré par débitmètre magnétique *Rosemount*TM avec une méthode directe. Les points bleus correspondent aux mesures avec le débitmètre et en orange ceux de la méthode directe.

La comparaison des deux résultats montre que les deux méthodes donnent des résultats très proches, comme illustré dans la table (2.1) et sur la figure (2.3). Des résultats similaires ont été obtenus lors d'autres vérifications. Ainsi, nous pouvons conclure que les mesures du débitmètre *Rosemount*TM sont fiables y compris pour les fluides à seuil étudiés.

Au cours d'expériences préliminaires, nous avons observé dans l'écoulement des perturbations parasites. Nous avons identifié trois sources à l'origine de ces perturbations. Tout d'abord, celles engendrées par les vibrations du bâtiment. Pour atténuer ce type de perturbations, nous avons placé le canal et la pompe sur des cales en caoutchouc pour les absorber. Ensuite, nous avons des vibrations

2.1. DISPOSITIF EXPÉRIMENTAL

provenant de la structure métallique supportant le déversoir permettant de générer un film mince se déversant dans le bac en entrée du canal. Pour les réduire, nous avons placé une masse sur les pieds de la structure. Enfin, malgré ces atténuations, la figure (2.4) montre qu'en absence de forçage, nous observons encore la présence de perturbations dans le système. Ces perturbations augmentent avec le débit et sont vraisemblablement issues des vibrations de la pompe. Elles sont essentiellement aux basses fréquences et peuvent masquer les vibrations imposées par le pot vibrant. Pour les éliminer, nous introduisons deux réservoirs supplémentaires entre la pompe volumétrique et l'entrée du canal pour atténuer ces perturbations. Ces deux bacs tranquilisateurs possèdent une surface libre permettant d'atténuer fortement ces perturbations à l'image d'un filtre passe-bas. Le premier bac est un réservoir sous pression avec une surface libre tandis que dans le second bac, le fluide se déverse avant de s'écouler sur le canal à l'aide d'une ouverture réglable en dessous. Son fonctionnement est expliqué en annexe (B) et permet de diviser l'amplitude des vibrations par un facteur 20.

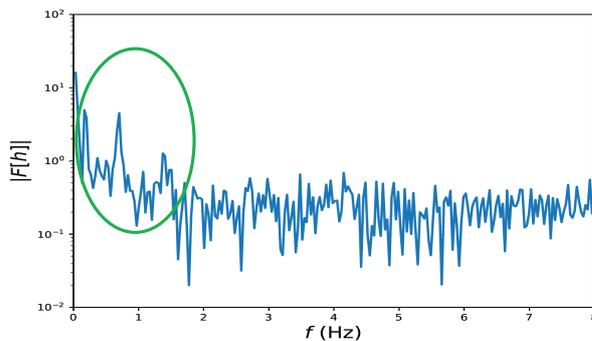


FIGURE 2.4 – Gauche : Transformée de Fourier d'un signal enregistré par le télémètre laser en absence de perturbation. Le cercle vert indique les vibrations liées à la pompe. Droite : Photo du bac tranquilisateur sous pression. Ce bac permet à l'aide de sa surface libre d'atténuer les pulsations de la pompe.

2.1.2 Fluides

Lors des expériences, nous avons employé deux fluides viscoplastiques différents, afin d'identifier les comportements gouvernants qui sont indépendants du fluide choisi. Dans cette section, nous allons présenter ces deux fluides qui sont un microgel carbopol 980 et une suspension de kaolin. Ils ont été choisis pour la simplicité de leur processus de fabrication.

Carbopol 980

Le premier fluide utilisé dans le cadre de nos expériences est une solution à base de carbopol 980 fabriqué par Lubrizol. Il s'agit d'un polymère micro-gel dont la structure moléculaire est constituée d'acide polyacrylique réticulé et de saccharose allylique (Graziano *et al.*, 2021). La concentration

CHAPITRE 2. EXPÉRIENCE DE STABILITÉ PRIMAIRE DE FILMS VISCOPLASTIQUES

en polymère du mélange a un effet direct sur les propriétés rhéologiques du fluide. En effet, plus la concentration en polymère est élevée et plus la contrainte seuil le sera également (Oppong *et al.*, 2006). Lors de sa préparation, il est nécessaire de neutraliser la solution dont le pH initial est aux alentours de 3 avec une quantité de NaOH correspondant à la moitié de celle du carbopol sec. Cette neutralisation permet d'obtenir le gonflement des particules de polymères microgels entraînant les propriétés viscoplastiques. Son utilisation est pertinente dans la mesure où il présente des propriétés rhéologiques stables (peu sensible à la thixotropie).

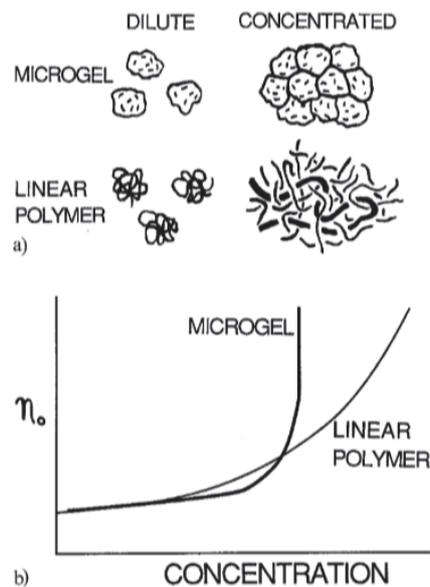


FIGURE 2.5 – Structure des particules selon la concentration d'après Oppong *et al.* (2006). Pour les microgels comme le carbopol, nous observons qu'aux fortes concentrations, il se produit une réticulation des polymères entraînant un gonflement des particules de polymère.

Nous avons préparé le fluide comme suit :

- Définir la concentration massique de carbopol désiré. Nous avons utilisé des fraction massique comprise entre $1.5 \cdot 10^{-3}$ et $2 \cdot 10^{-3}$ pour un volume d'environ 70 litres.
- Verser 15 litres d'eau dans un bidon de 25 litres et saupoudrer progressivement la moitié du carbopol en poudre tout en remuant la solution à l'aide d'un mélangeur mécanique jusqu'à l'obtention d'une solution homogène.
- Répéter l'étape précédente dans un second bidon.
- Laisser le fluide au repos pendant 48 à 72 heures dans chaque bidon. Cette étape a pour but de permettre aux particules de carbopol de pouvoir parfaitement se dissoudre et éliminer les bulles d'air.
- Déverser au bout des 48 à 72 heures les deux bidons dans le collecteur (bac contenant le fluide de l'expérience). Ensuite, introduire le volume d'eau nécessaire pour atteindre la fraction massique de carbopol initialement définie.

2.1. DISPOSITIF EXPÉRIMENTAL

- Neutraliser le fluide avec de l'hydroxyde de sodium (NaOH).

Lors de la neutralisation de la solution et du gonflement des particules microgel, des bulles d'air peuvent se retrouver emprisonnées. Or, ces bulles peuvent entraîner une modification de la rhéologie. Pour les éliminer, nous faisons tourner le mélangeur à hélice 60 à 120 minutes à sa vitesse maximale et ensuite, nous mettons en marche la pompe pour faire circuler le fluide quelques dizaines de minutes pour l'homogénéiser. Tout au long des expériences, le fluide est mis en agitation dans le collecteur avec un mélangeur à hélice afin d'assurer son homogénéité.



FIGURE 2.6 – Gauche : Carbopol 980 en poudre. Droite : Agitateur à pales pour éliminer les grumeaux lors la dissolution du carbopol en poudre dans l'eau.

Suspension de Kaolin

Le second fluide utilisé est une suspension de kaolin. Le kaolin est une argile blanche dont les principaux constituants sont la kaolinite et le silicate d'aluminium (Ross et Kerr, 1930). Il a de nombreuses applications industrielles (céramique, produits de beauté) mais également médicales (maux d'estomac, inflammation des gencives,...). La suspension de kaolin présente les caractéristiques d'un fluide à seuil (Coussot, 1994; Chambon *et al.*, 2009). Pour ce fluide, nous avons considéré dans les conditions de nos expériences (régime permanent, taux de cisaillement permanent) que le comportement viscoplastique était prépondérant par rapport à tout autre effet (viscoélasticité, thixotropie, orientation microstructurale). De plus, les débits employés sont suffisamment faibles pour affirmer que le comportement viscoplastique est régulier (Coussot, 1995). Toutefois, il est primordial de continuer à mélanger la suspension pendant toute la durée de l'expérimentation pour éviter un phénomène de sédimentation.

Dans nos expériences, nous avons pu nous procurer du kaolin en poudre de deux carrières, respectivement de Hostun (près de Grenoble, France) et de Quessoy (près de St-Brieuc, France). Le processus de préparation de la suspension de kaolin est le suivant :

- Déterminer la densité désirée du fluide. Dans nos expérimentations, le fluide a été obtenue en mélangeant environ 40 kg de poudre de kaolin avec 35 à 45 kilogrammes d'eau pour une densité massique de 1.4 kg/m^3 .
- Mettre en marche le mélangeur à hélice pour éviter la sédimentation.
- Saupoudrer progressivement le kaolin en poudre dans l'eau par lot de 1 kg jusqu'à atteindre 35 à 40 kg de kaolin en poudre.
- Continuer à mixer la solution à l'aide du mélangeur à hélice pendant 60 à 120 minutes avant la mise en marche de la pompe.

Rhéologie des fluides

Pour caractériser ces fluides dont le comportement peut évoluer au cours des expériences, nous avons mesuré la rhéologie des fluides à l'aide d'un rhéomètre de type "RM 200 Touch" conçu par *Lamy Rheology Instrument Rheometer*. Il s'agit d'un rhéomètre rotatif de type cône plan. Pour chaque mesure, l'échantillon à étudier est déposé sur le plateau. Ce plateau est rugueux afin de limiter le glissement. Ensuite, le fluide est enfermé dans l'entrefer en abaissant le cône. Une fois ces deux étapes effectuées, nous lançons nos essais à l'aide du logiciel Rheomatic, interface numérique du rhéomètre Lamy Rheology.

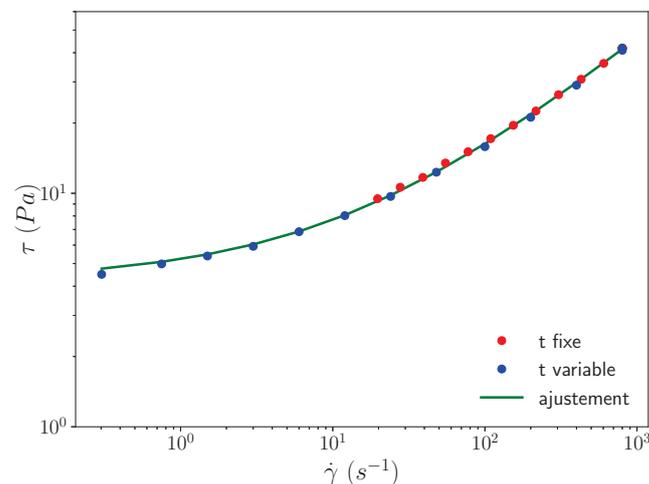


FIGURE 2.7 – Loi de comportement $(\dot{\gamma}, \tau)$ pour un échantillon de fluide à base de carbopol 980. Les points rouges correspondent aux mesures rhéologiques avec des paliers ($\dot{\gamma} = cst$) à durée fixe alors que les points bleus sont les données obtenues avec des paliers à durée variable. La ligne verte est un ajustement avec un modèle de Herschel-Bulkley des mesures rhéologiques obtenues à durée variable. Les paramètres rhéologiques obtenus sont alors : $\tau_y = 4.24 \text{ Pa}$; $K = 0.99 \text{ Pa}\cdot\text{s}^n$; $n = 0.54$.

2.1. DISPOSITIF EXPÉRIMENTAL

Lors des mesures des rampes $(\dot{\gamma}, \tau)$ automatiques à durée constante, nous avons constaté que les mesures aux faibles taux de cisaillement étaient peu fiables, car nous n'atteignons pas forcément un régime permanent. Pour contourner cette difficulté, nous avons opté pour des mesures de durées variables. Cette méthode présente l'avantage d'appliquer une série de taux de cisaillement pendant une durée de temps adaptée pour chaque taux de cisaillement. Ainsi, nous nous assurons que la contrainte mesurée correspond bien à un régime permanent. De plus, nous avons appliqué des paliers décroissants. Ce choix s'explique par la nature du fluide. En effet, lorsque les paliers sont croissants, le fluide peut être initialement en dessous de sa contrainte seuil, ainsi le matériau est déformé de manière élastique. C'est seulement une fois que le chargement en contrainte aura dépassé la contrainte seuil que le fluide adoptera un comportement liquide. Tandis qu'avec des paliers descendants, le matériau est directement en régime liquide, ce qui nous permet d'avoir aux faibles taux de cisaillement des mesures plus précises allant jusqu'à la contrainte seuil. De plus, les rampes descendantes sont moins sensibles au glissement du fluide sur les parois du rhéomètre (Ovarlez, 2011).

La figure (2.7) représente la courbe expérimentale de la contrainte en fonction du taux de cisaillement. Les rampes $(\dot{\gamma}, \tau)$ automatiques à durée constante sont représentées par les points rouges. Celles obtenues avec des paliers à durée variable sont en bleu. La détermination des paramètres rhéologiques est obtenue par un ajustement de la contrainte en fonction du taux de cisaillement pour les mesures de paliers à durée variable (points bleus), à l'aide du modèle rhéologique de Herschel et Bulkley (1926), comme illustré sur la figure. Nous constatons que les mesures avec des paliers variables permettent d'atteindre de faibles taux de cisaillement et donc d'être plus précis sur la détermination de la contrainte seuil.

Les séries de mesures de stabilité sur un plan incliné sont plutôt longues (6-12h), nous avons mesuré plusieurs fois la rhéologie du fluide, afin de s'assurer qu'elle reste constante. Cela a été quasi systématiquement le cas pour les expériences en carbopol, comme nous pouvons le voir sur la figure (2.8)). Pour la suspension de kaolin, nous avons rencontré quelques difficultés. La première réside dans le fait que le fluide n'est pas parfaitement homogène. La conséquence de cette observation est que les paramètres rhéologiques et plus particulièrement la contrainte seuil sont plus complexes à déterminer dans ce cas. La seconde difficulté réside dans la sédimentation du fluide. La sédimentation peut perturber fortement les mesures. Cette sensibilité nous a mené à exclure pour la suspension de kaolin, les paliers de contraintes obtenus pour les taux de cisaillement les plus faibles ($\dot{\gamma} = 1.5, 0.75, 0.30 \text{ s}^{-1}$).

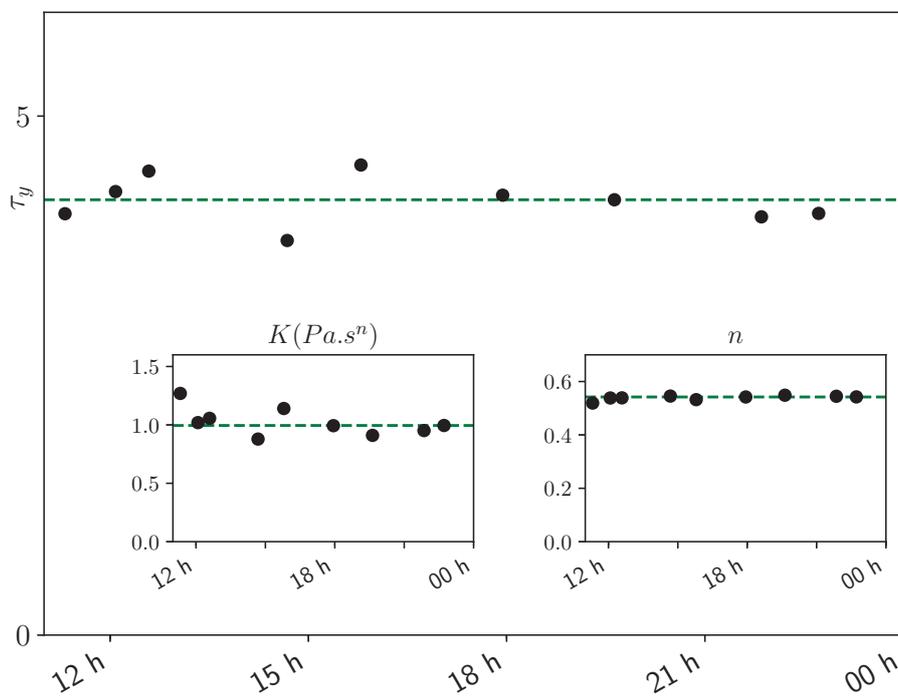


FIGURE 2.8 – Évolution des paramètres rhéologiques au cours d’une expérience typique ($\tau_y = 4.24$ Pa; $K = 0.99$ Pa.sⁿ; $n = 0.54$) avec du carbopol 980.

2.2 Mesure de stabilité linéaire des ondes de surface

Maintenant que nous avons présenté notre dispositif expérimental et les fluides utilisés, nous proposons d'aborder la mesure de stabilité primaire des ondes de surface que nous avons réalisé. Nous présenterons la méthodologie employée pour perturber l'écoulement puis nous détaillerons la méthode de détection des ondes générées.

2.2.1 Perturbation de l'écoulement de base



FIGURE 2.9 – Gauche : Pot vibrant BK 4809. Droite : Photo d'un écoulement instable avec une perturbation contrôlée ($f = 1.5$ Hz, $A = 10$ V) pour un fluide à base de carbopol 980.

Les figures (2.1) et (2.9) illustrent le fonctionnement du dispositif de perturbation que nous allons décrire ci-après. Tout d'abord, nous immergeons une plaque en plexiglas dans un petit réservoir en entrée du canal. La plaque est ensuite attachée à un pot vibrant de type B&K 4809 et serrée sur les cotés du réservoir à l'aide de vis. Le pot vibre à une fréquence de forçage imposée par un générateur de basses fréquences. La vibration produite est alors transmise à la plaque ce qui permet de perturber l'écoulement de base. Les perturbations créées sont des ondes sinusoïdales quasiplanes à la surface du film tombant dont la fréquence et l'amplitude sont contrôlées à l'aide du générateur. Nous avons choisi des amplitudes suffisamment petites pour que les perturbations initiales

restent dans le régime linéaire. Il est également à noter qu'il n'a pas été nécessaire de placer un amplificateur entre le générateur de basses fréquences et le pot vibrant. L'un des principaux points de vigilance est de s'assurer que les pulsations de la plaque entraînent des vagues symétriques sur toute la longueur du canal, afin d'éviter le couplage avec d'autres phénomènes physiques. Dans le cas contraire, nous réglons l'ouverture du bac tranquilisateur d'une part et d'autre part, nous déplaçons légèrement la position de la plaque pour réduire ou augmenter l'ouverture le long du réservoir.

2.2.2 Détection des ondes

Nous allons à présent décrire chronologiquement les deux techniques de détection des ondes que nous avons employé.

Méthode par réfraction

Dans un premier temps, nous avons commencé par utiliser une méthode par réfraction pour le fluide à base de carbopol 980. Dans cette méthode, un faisceau laser est envoyé sur un miroir réfléchissant. Le faisceau laser réfléchi traverse ensuite le film mince où il subit une réfraction due au changement de milieu entre le fluide et l'air comme illustré sur la figure (2.10). Il est à noter que nous avons utilisé un léger angle d'incidence pour éviter les réflexions multiples. La variation d'incidence est donnée par :

$$\alpha = \arctan \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right) = \frac{\partial h}{\partial x},$$

avec α l'angle d'incidence et h l'épaisseur locale du film.

Les oscillations de la surface libre générées par les ondes de surface sont détectées grâce à un capteur de type PSD, fixé au dessus de l'écoulement. Le miroir réfléchissant est placé sur un chariot mobile, installé parallèlement au canal. Le miroir peut alors être déplacé à différentes positions le long du canal. Pour déterminer la variation de l'amplitude des ondes le long de l'écoulement, nous mesurons le signal à différentes positions sur une longueur de 30 centimètres à partir de l'entrée du canal. Les positions successives sont mesurées à l'aide d'un pied à coulisse à partir d'une cale faisant office de référence. Le déplacement du miroir nécessite également la translation du capteur qui est également placé sur un chariot.

Pour chaque mesure à une position donnée, nous calculons la transformée de Fourier. En considérant le premier pic, nous calculons l'amplitude des ondes par l'intermédiaire de la partie réelle de la transformée de Fourier ainsi que le déphasage donné par sa partie imaginaire. Ainsi, en mesurant l'évolution de l'amplitude des ondes le long du canal, nous pouvons déduire le taux de croissance pour une série donnée (ϕ , q et f fixés). Le taux de croissance est positif si les ondes sont amplifiées le long du canal et négatif si elles sont amorties.

2.2. MESURE DE STABILITÉ LINÉAIRE DES ONDES DE SURFACE

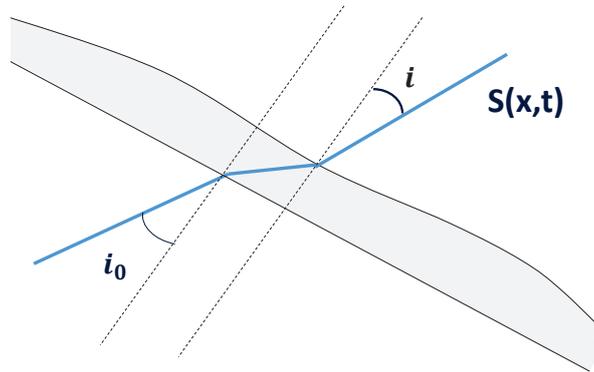


FIGURE 2.10 – Détection des ondes par réfraction laser

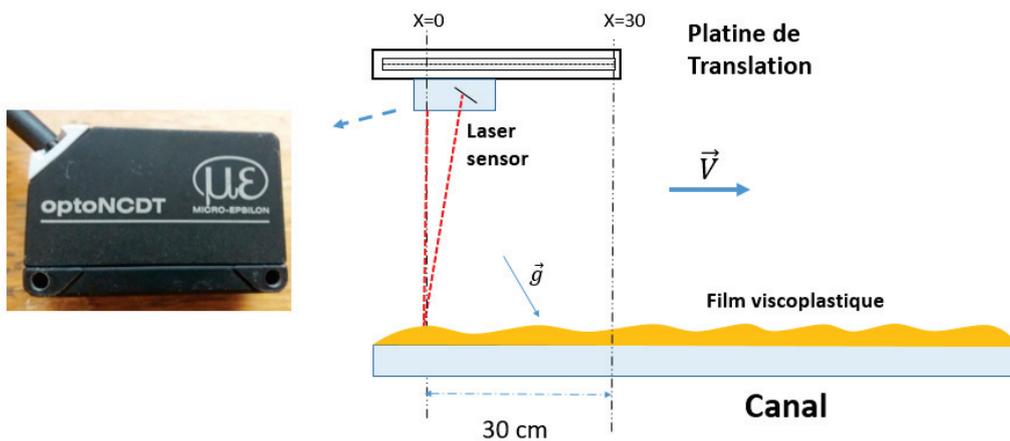


FIGURE 2.11 – Mesure par télémètre laser. Gauche : Capteur Micro-Epsilon optoNCDT 1420. Droite : Schéma du principe de mesure ;

Cependant, cette méthode présente plusieurs inconvénients. Premièrement, c'est une méthode manuelle qui nécessite plusieurs acquisitions locales et donc un temps relativement important pour obtenir in fine peu de points expérimentaux. De plus, le miroir et le capteur sont chacun déplacés manuellement avant de mesurer leur position par rapport à l'entrée du canal avec un pied à coulisse ce qui induit des incertitudes de mesure. Ensuite, la méthode de réflexion laser est sensible à la présence de bulles et d'inhomogénéités dans l'écoulement qui peuvent fortement perturber la détection des ondes. Elle impose également l'utilisation d'un fluide transparent. Enfin, le principal défaut réside dans le fait que l'épaisseur du film n'est pas mesurée mais calculée à partir du débit. Nous ne pouvons pas également accéder au nombre d'onde k .

Capteur de triangulation laser

Au regard des éléments présentés sur la méthode de réfraction, nous nous sommes donc tournés vers une autre méthode de mesure. Cette méthode s'appuie sur un capteur de triangulation laser, de type Micro-Epsilon optic NCDS 1420. Le principe de la mesure est le suivant : le capteur émet un faisceau laser sur la surface du film, ce qui crée une tache lumineuse. Le principe est représenté sur la figure (2.11). Les rayons lumineux issus de la tache sont alors enregistrés sur un capteur CCD, après être passé dans le diaphragme du capteur. La position sur le capteur CCD correspond alors par triangulation à la distance de la tache au diaphragme, et donc à la distance à la surface libre du fluide avec une précision de $4 \mu m$ en théorie, mais $20 \mu m$ en pratique. Cette précision reste largement suffisante pour des ondes d'amplitudes de $200 \mu m$.

Cette méthode de détection nécessite une opacification du fluide afin de créer une tache lumineuse à la surface du fluide. Or, contrairement à la suspension de kaolin, la solution de carbopol est initialement transparente. Ainsi, pour le carbopol, nous lui avons intégré à l'aide d'un mélangeur à hélice actionné pendant 60 minutes, un mélange de 50 grammes de solution de dioxyde de titane (TiO_2) avec de l'eau déminéralisée. Le dioxyde de titane est souvent utilisé dans les peintures, les crèmes cosmétiques ou encore dans certains médicaments comme opacifiant. Il est nécessaire de préparer cette solution dans de l'eau déminéralisée afin d'éviter la formation de grumeaux. Pour nos expériences, la concentration massique de titane est restée inférieure à 0.1%. Nous avons réalisé des mesures rhéologiques pour nous assurer que le rajout de dioxyde de titane n'a que peu d'influence sur les propriétés rhéologiques du fluide comme illustré sur la figure (2.12). Dans ces essais, nous avons testé l'influence de ce composé en rajoutant respectivement de 0, 0.5 et 1g de TiO_2 dans des échantillons de 100 millilitres de microgel avec une masse de 5g de carbopol. La table (2.2) montre que le rajout de particules TiO_2 a très peu d'influence sur les paramètres τ_y et K , et quasiment aucun sur l'indice n . Ce résultat est similaire à celui obtenu par Dagois-Bohy *et al.* (2015)

Pour suivre l'évolution spatiale des ondes, nous fixons le capteur laser sur une platine de translation (Zaber LSQ300-B) capable de se déplacer à une vitesse de 1 cm/s sur une longueur 30 centimètres. La platine est placée proche de l'entrée du canal à environ 50 centimètres (présence du pot vibrant en amont) en entrée du canal afin de rester dans le régime linéaire. Nous supposons que le film est perturbé avec une onde sinusoïdale plane et linéaire de la forme $h(x,t) = \langle h \rangle + h_0 e^{\alpha x} \cos(2\pi ft - kx)$ avec α le taux de croissance spatial, k le nombre d'onde, $\langle h \rangle$ l'épaisseur moyenne du film perturbé et h_0 l'amplitude des ondes. Nous balayons le canal sur une distance de 30 centimètres avec la platine à une vitesse v donnée et nous obtenons le signal mesuré h_s par le capteur de la forme :

$$h_s(t) = \langle h \rangle + h_0 e^{\alpha vt} \cos(2\pi ft - kvt) ,$$

avec $\langle h \rangle$ l'épaisseur moyenne, α le taux de croissance spatial, k le nombre d'onde et h_0 l'amplitude des vagues.

Le télémètre laser employé dans cette étude a une plage de mesure de 25 millimètres. Il est donc nécessaire de le positionner à une distance adaptée afin que l'épaisseur du film (comprise entre 0 et

2.2. MESURE DE STABILITÉ LINÉAIRE DES ONDES DE SURFACE

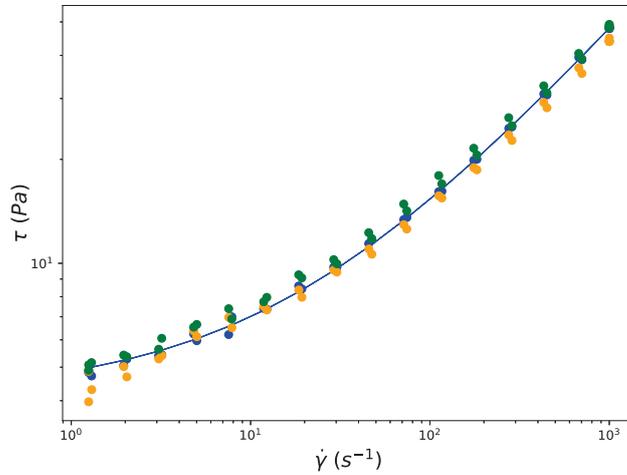


FIGURE 2.12 – Influence du dioxyde de titane sur les propriétés rhéologiques du carbopol. Les points en bleu représentent les essais pour une concentration massique de dioxyde de titane de 0%, en orange pour une concentration 0.5% et en vert pour une concentration 1%. La ligne bleue correspond à l’ajustement avec la loi de Herschel-Buckley pour l’échantillon sans titane.

Densité de titane	0%	0.5%	1%
τ_y (Pa)	4.14	4.12	3.98
K (Pa.s ⁿ)	0.72	0.93	0.75
n	0.58	0.56	0.57

TABLE 2.2 – Influence de la concentration de titane sur les paramètres rhéologiques pour un microgel de carbopol 980.

10 millimètres) soit dans sa plage de mesure. Le signal enregistré par le capteur laser est en volts. Pour le convertir en épaisseur, nous procédons à la calibration du dispositif à l’aide de plusieurs cales d’épaisseurs connues. Ainsi, nous pouvons déterminer la relation affine entre la tension mesurée et l’épaisseur du film. Ensuite, nous nous assurons que la mesure de l’épaisseur locale est identique en chaque point de la platine de translation pour une inclinaison ϕ donnée. Pour cela, nous procédons à une nouvelle calibration de mesure de l’épaisseur locale. A cet effet, nous balayons deux plaques en acier de respectivement 2 et 8 millimètres placées sur le canal à l’aide de la platine de translation. Ainsi, en effectuant un ajustement, nous pouvons calibrer la mesure de l’épaisseur locale pour chaque position le long de la platine.

Lors de nos expérimentations, nous avons constaté un décalage quasi systématique de quelques centaines de micromètres pour une série d’expériences donnée entre l’épaisseur moyenne mesurée $\langle h \rangle$ et l’épaisseur attendue des mesures rhéologiques en supposant un écoulement uniforme, comme

illustré sur la figure (2.13). Nous pensons que cela est dû à une plus forte pénétration optique dans les fluides que dans les surfaces solides. En effet, la méthode de triangulation s'appuie sur la tache créée à la surface du matériau. Or cette tache paraît plus éloignée quand la pénétration optique est plus importante. De ce fait, même si cet écart est sans incidence sur les mesures relatives (taux de croissance,...), nous avons décidé d'adapter l'offset de la calibration pour correspondre aux mesures de débit, quand celui-ci était inférieur à 10 %, et d'exclure l'expérience sinon.

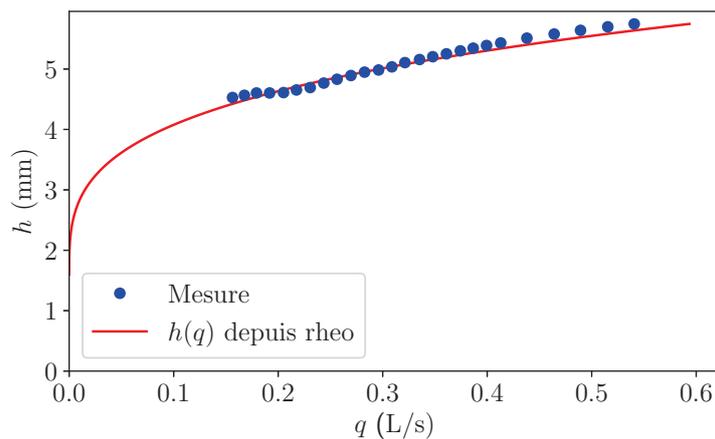


FIGURE 2.13 – Évolution de l'épaisseur du film en fonction du débit. En rouge, l'épaisseur calculée avec le rhéologie et en bleu, la mesure expérimentale de l'épaisseur du film avec le capteur de triangulation laser.

L'acquisition des données expérimentales a été entièrement automatisée grâce à un boîtier d'acquisition pour contrôler le débit, la fréquence de forçage, la position de la platine ainsi que la mesure de l'épaisseur locale par le capteur laser. Les mesures ont été effectuées à l'aide logiciel Labview. La méthodologie et les résultats expérimentaux seront abordés dans le prochain chapitre.

2.3 Résumé des incertitudes expérimentales

Avant de conclure ce chapitre expérimental, nous aimerions fournir une vision concise des différentes incertitudes rencontrées dans les différentes mesures. Nous avons regroupé dans une table récapitulative (2.3) ces différentes incertitudes, ainsi que leur origine quand c'était possible. Les incertitudes présentées sont celles obtenues avec le fluide à base de carbopol 980.

Grandeur	Inc. absolue	Inc. relative	Méthode d'évaluation
Inclinaison ϕ	0.1 °	0.6%	Graduation minimale de l'inclinomètre
Débit q	5.3 mL/s	1.2%	Mesure directe
Épaisseur moy. $\langle h \rangle$	0.16 mm	2.5%	Écart type de $h(t)$,
Amplitude des ondes h_0	10 μm	—	Écart type de $h(t)$ filtré
Taux de croissance α	0.011 m^{-1}	0.6%	Bruit artificiel
Nombre d'onde k	0.011 m^{-1}	0.1%	Bruit artificiel
Contrainte seuil τ_y	0.227 Pa	5.4%	Écart type
Consistance K	0.108 $\text{Pa}\cdot\text{s}^n$	10%	Écart type
Indice rhéologique n	$7\cdot 10^{-3}$	1.2%	Écart type

TABLE 2.3 – Table récapitulative des incertitudes de mesure.

L'incertitude sur le débit est évaluée en comparant la mesure du débitmètre à une mesure directe (cf table 2.1). L'incertitude sur l'épaisseur moyenne est principalement due à la flexion de la table de translation, qui ne dépasse pas les 200 μm , mais qui est bien visible dans nos mesures. L'incertitude sur la mesure des ondes, quant à elle, reflète tout simplement l'erreur de mesure du capteur et est de l'ordre de 10 μm . A noter que l'erreur relative est très variable, et dépend beaucoup de si les ondes sont stables ou non, comme on le verra plus tard dans les résultats. L'incertitude sur les taux de croissance et sur les nombres d'ondes ont toutes deux été déterminées d'après la distribution de ces grandeurs obtenues avec un ensemble de signaux construits avec des bruits aléatoires aux caractéristiques proches du bruit expérimental. La méthode d'obtention de ces grandeurs, quant à elle, sera expliquée au début du chapitre suivant. Enfin les incertitudes sur les grandeurs rhéologiques ont été déterminées grâce aux variations d'une mesure rhéologique à l'autre.

2.4 Conclusion partielle

Dans ce chapitre, nous avons présenté en détail le dispositif expérimental mis en œuvre pour étudier la stabilité primaire de l'écoulement de fluides viscoplastiques sur un plan incliné. Nous avons adapté et amélioré le dispositif employé dans la thèse de Allouche (2014). Nous avons notamment changé le système de mesure, réduisant ainsi considérablement le temps d'acquisition. Nous avons également rénové le circuit hydraulique dans le double objectif de réduire la quantité de fluide employé, ainsi que les perturbations parasites.

Nous sommes maintenant capable de générer un écoulement sur un plan incliné d'un angle ϕ , avec un débit q , que nous perturbons à une fréquence de forçage f . Les perturbations sont enregistrées dans un signal $h_s(t)$. Dans le chapitre suivant, nous allons décrire comment, à partir de ce signal, nous pouvons déduire le nombre d'onde k et le taux de croissance α des ondes générées. Puis, nous allons présenter la méthodologie suivie pour déterminer les seuils de stabilité primaire, ainsi que les résultats obtenus.

Résultats expérimentaux de stabilité primaire

Sommaire

3.1	Méthodologie expérimentale	64
3.1.1	Taux de croissance et nombre d'onde	64
3.1.2	Fréquence neutre et cartographie de stabilité	66
3.1.3	Nombres de Reynolds et de Bingham critiques	68
3.2	Seuils de stabilité	70
3.3	Relation de dispersion	75
3.4	Conclusion partielle	78

Dans ce chapitre, nous allons présenter les résultats de stabilité primaire obtenus à partir du dispositif expérimental mis en œuvre. Nous souhaitons comparer les données expérimentales aux prédictions théoriques de Balmforth et Liu (2004), et plus particulièrement les seuils de stabilité et la relation de dispersion.

Tout d'abord, nous détaillerons l'analyse des signaux mesurés puis nous décrirons la méthodologie employée ensuite nous présenterons les résultats expérimentaux des seuils de stabilité primaire et de la relation de dispersion. Enfin, nous terminerons ce chapitre par une conclusion partielle.

3.1 Méthodologie expérimentale

Dans cette section, nous allons présenter l'analyse des signaux ainsi que la méthodologie "type" utilisée pour obtenir le nombre de Reynolds critique Re_c et le nombre de Bingham critique Bi_c pour chaque série à angle d'inclinaison ϕ et paramètres rhéologiques (τ_y, n, K) constants.

3.1.1 Taux de croissance et nombre d'onde

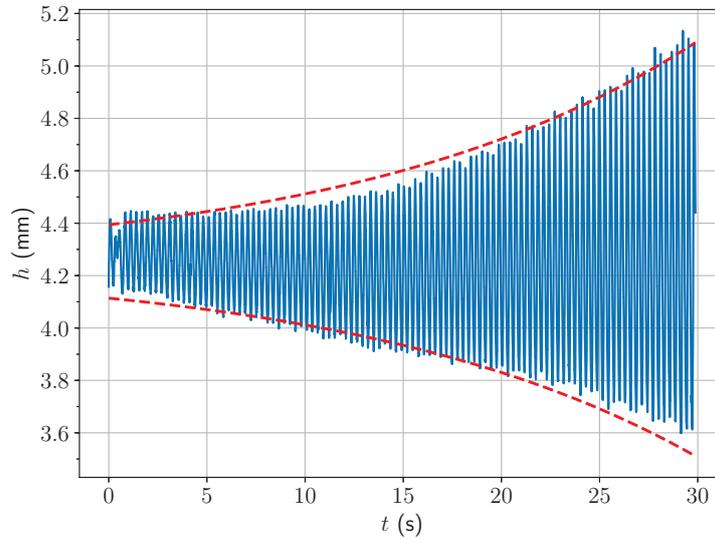


FIGURE 3.1 – Le signal temporel $h_s(t)$ enregistré par le capteur laser fixé à une platine de translation se déplaçant à une vitesse de 1 cm/s le long du canal, est représenté en bleu. En rouge, l'enveloppe $h_0 e^{\alpha vt}$ est reconstruite à partir du taux de croissance obtenu ($\alpha = 5.78 \text{ m}^{-1}$) par la méthode de Yoshida *et al.* (1981) pour un microgel de carbopol 980 ($\tau_y = 1.62 \text{ Pa}$; $K = 0.51 \text{ Pa.s}^n$; $n = 0.58$).

Pour chaque mesure du signal $h_s(t)$, l'angle d'inclinaison du canal ϕ , le débit de la pompe q et la fréquence de forçage f sont imposés. Nous avons vu au chapitre précédent que les perturbations de l'écoulement sont détectées par un télémètre laser en déplacement à vitesse constante sur une platine de translation. Le signal enregistré est donné par l'expression :

$$h_s(t) = \langle h \rangle + h_0 e^{\alpha vt} \cos(2\pi ft - kvt),$$

avec $h_s(t)$ le signal enregistré par le télémètre, $\langle h \rangle$ l'épaisseur moyenne du film, h_0 l'amplitude de l'onde, f la fréquence, v la vitesse de déplacement du capteur.

La figure (3.1) présente un signal $h_s(t)$ typique obtenu pour un jeu de paramètre donné. Dans cet exemple, nous observons que l'amplitude des ondes croît le long du canal. Il s'agit alors d'un écoulement instable. Ces signaux $h_s(t)$ sont analysés afin d'en extraire le nombre d'onde k d'onde et le taux de croissance spatial α . Pour cela, nous calculons la transformée de Fourier discrète du

3.1. MÉTHODOLOGIE EXPÉRIMENTALE

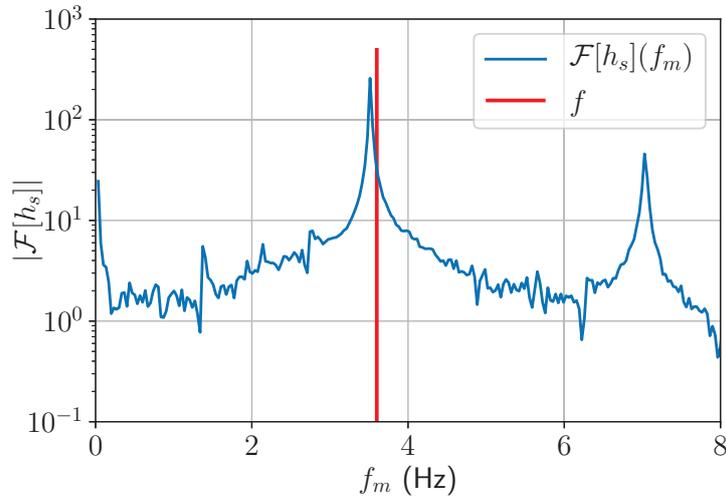


FIGURE 3.2 – Transformée du Fourier du signal $h_s(t)$, représenté de la figure (3.1), pour une fréquence de forçage de 3,6 Hz. Le pic du signal réel est légèrement décalé par rapport à la fréquence imposée, représenté par la barre rouge.

signal $h_s(t)$. Une telle transformée est représentée sur la figure (3.2). Le pic principal correspond à la fréquence de forçage, mais légèrement décalé par un effet Doppler induit par la vitesse de déplacement du capteur. La transformée de Fourier est analysée avec une approche similaire à celle de Yoshida *et al.* (1981). Près du pic, la transformée de Fourier discrète est approximée par l'expression suivante :

$$F[h_s](f_m) = \frac{A}{f^* - f_m} + B + Cf_m ,$$

avec $f^* = (f - kv/2\pi) - i\alpha v/2\pi$ la fréquence complexe du pic et f_m la $m^{\text{ième}}$ fréquence de Fourier. Le premier terme correspond au terme de résonance avec A un pré-facteur qui comprend l'amplitude de l'onde, B un terme de bruit blanc et Cf_m un bruit qui correspond à une approximation linéaire des autres résonances, supposées loin de f^* .

A priori, les constantes A , B et C sont propres à chaque expérience, mais il est possible de les éliminer en calculant des différences finies d'ordre 2 et en remarquant que :

$$R_2 = \frac{F(f_{m+1}) + F(f_{m-1}) - 2F(f_m)}{F(f_{m+2}) + F(f_m) - 2F(f_{m+1})} = \frac{f^* - f_{m-2}}{f^* - f_{m+1}} .$$

Il n'est donc pas nécessaire de déterminer A , B et C pour calculer f^* à partir de la transformée de Fourier, il suffit de calculer ce rapport au pic (c'est à dire là où le modèle de Yoshida *et al.* (1981) est le plus pertinent). Nous pouvons alors déduire la valeur de f^* à partir de l'expression obtenue pour R_2 , et nous obtenons le nombre d'onde k et le taux de croissance α donnés par les expressions suivantes :

$$k = 2\pi \frac{\Re(f^*) - f}{v}, \quad (3.1)$$

$$\alpha = 2\pi \frac{\Im(f^*)}{v}. \quad (3.2)$$

Pour illustrer la validité de cette approche, nous avons représenté sur la figure (3.2) l'enveloppe correspondante au taux de croissance α ainsi calculé.

3.1.2 Fréquence neutre et cartographie de stabilité

Une fois le nombre d'onde k calculé ainsi que le taux de croissance α pour une fréquence donnée, nous répétons ce calcul pour différentes fréquences à ϕ et q fixés. La figure (3.3) représente l'évolution du taux de croissance α en fonction de la fréquence f à $q = 0.42 \text{ L/s}$ et $\phi = 15.6^\circ$. Lorsque le taux de croissance est négatif, l'écoulement est stable, sinon il est instable. Le changement de signe se produit pour $f = f_c$ correspondant à la fréquence de coupure ou fréquence neutre. Nous constatons qu'aux hautes fréquences, l'écoulement reste stable tandis qu'il est instable aux basses fréquences. Pour les très basses fréquences (dans ce cas, $f < 0.5 \text{ Hz}$), l'écoulement semble redevenir stable, alors qu'en théorie il devrait rester instable jusqu'à 0 Hz. Cet effet est probablement dû à une mauvaise réponse du pot vibrant aux faibles fréquences, celui-ci produisant alors des ondes de trop faible amplitude ne permettant pas de bien mesurer α .

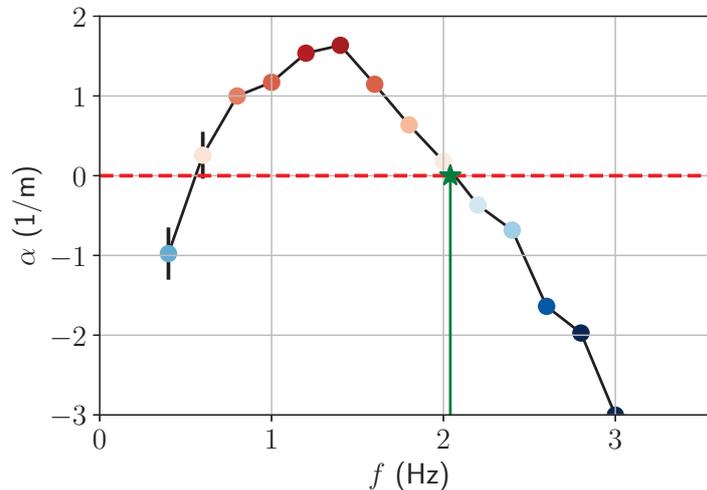


FIGURE 3.3 – Détermination de la fréquence neutre dans le plan (f, α) pour $q = 0.42 \text{ L/s}$ et $\phi = 15.6^\circ$ pour un fluide à base de carbopol 980 ($\tau_y = 4.21 \text{ Pa}$; $K = 0.99 \text{ Pa.s}^n$, $n = 0.54$). Les points rouges correspondent au couple (q, f) pour lesquels nous avons mesuré des ondes instables et ceux en bleu, les ondes stables.

3.1. MÉTHODOLOGIE EXPÉRIMENTALE

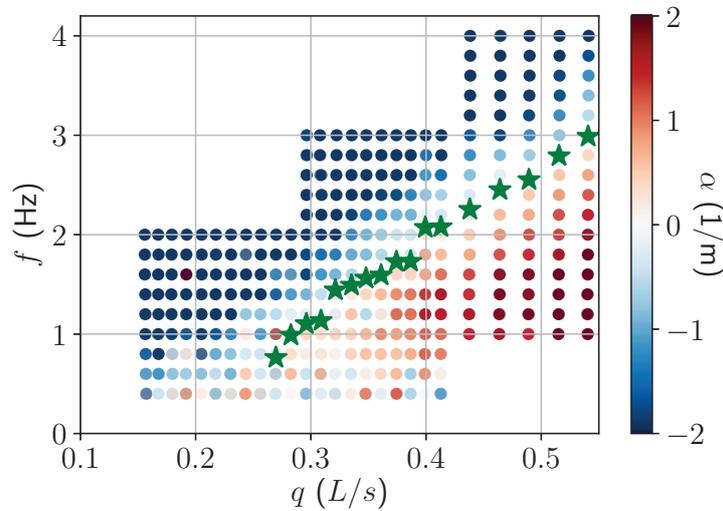


FIGURE 3.4 – Cartographie de stabilité dans le plan (q, f) pour le fluide à base de carbopol 980 . Les points rouges correspondent au couple (q, f) pour lesquels nous avons mesuré des ondes instables et ceux en bleu, les ondes stables. Les étoiles vertes indiquent la fréquence de coupure correspondante pour un débit donné.

Une fois la fréquence de coupure f_c à débit constant ($q = 0.42$ L/s dans le cas type étudié) représentée par une étoile verte sur la figure (3.3) identifiée, nous réitérons ce calcul à différents débits q tout en maintenant les autres paramètres constants ($\tau_y = 4.21$ Pa ; $K = 0.99$ Pa.sⁿ, $n = 0.54$ et $\phi = 15.6^\circ$). Les expériences ont été réalisées dans le sens croissant pour les fréquences f et les débits q imposés. Cela nous permet d’obtenir la cartographie de stabilité (q, f) , représentée sur la figure (3.4). Les points rouges (respectivement bleus) représentent les couples (q, f) pour lesquels nous avons mesuré des écoulements instables (stables) et les étoiles vertes correspondent aux fréquences neutres pour un débit donné. L’évolution de la fréquence neutre f_c en fonction du débit q permet de délimiter deux régions distinctes : les écoulements instables en dessous de la courbe (q, f_c) et les écoulements stables au dessus. Aux basses fréquences, nous avons pu observer quelques anomalies, c’est à dire des ondes instables qui devraient être stables et inversement. Ces anomalies sont probablement liées à la mauvaise réponse du pot vibrant que nous avons déjà évoquée plus haut. Plus globalement, nous observons que la fréquence de coupure f_c converge vers 0 pour une valeur finie de q en dessous de laquelle l’écoulement est stable à toutes les fréquences.

A ce stade, il est important de préciser que pour déterminer les courbes de seuil, nous avons effectué plusieurs cartographies de stabilité pour plusieurs fluides de concentrations différentes et à des angles différents : une vingtaine pour le carbopol et une soixantaine pour le kaolin. Pour le kaolin, nous n’avons retenu qu’une dizaine de séries. Pour la suite du manuscrit, nous avons choisi cette série déjà présentée à la figure (3.4), comme exemple à étudier. Les résultats des autres séries sont présentés en annexe (C).

3.1.3 Nombres de Reynolds et de Bingham critiques

Le débit q est maintenant converti en nombre de Reynolds Re afin de pouvoir comparer les résultats expérimentaux aux prédictions théoriques de Balmforth et Liu (2004). Pour cette conversion, nous avons utilisé le formalisme de Balmforth et Liu (2004) pour calculer le nombre de Reynolds Re et le nombre de Bingham Bi :

$$Re = \frac{\rho \tan \phi}{K} \left(\frac{\rho g h^{n+1} \sin \phi}{K} \right)^{\frac{2-n}{n}} h^n \quad \text{et} \quad Bi = \frac{\tau_y}{\rho g h \sin \phi} .$$

La figure (3.5) représente alors la cartographie de stabilité dans le plan (Re, f) issue de la conversion de q en Re . La cartographie de stabilité obtenue présente la même topologie que celle dans le plan (q, f) avec deux régions d'écoulements stables et instables. La détermination du nombre de Reynolds critique expérimental Re_c^{exp} des cas étudiés consiste à effectuer un ajustement en racine carrée de la fréquence de coupure en fonction du nombre de Reynolds sous la forme :

$$f_c = A \sqrt{Re - Re_c^{exp}} . \quad (3.3)$$

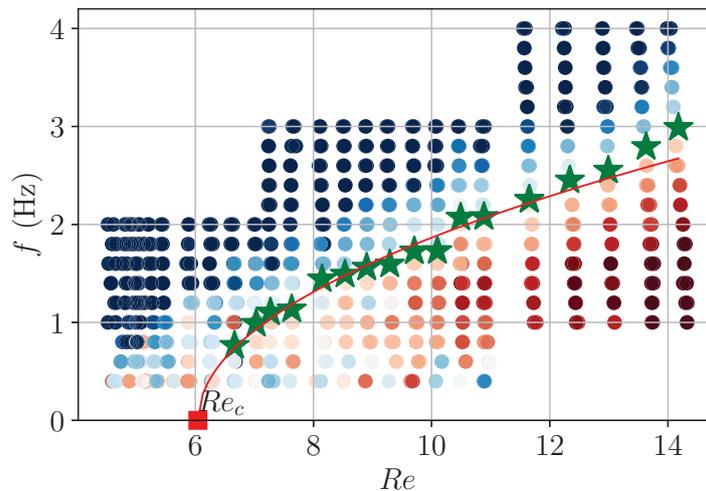


FIGURE 3.5 – Cartographie de stabilité dans le plan (Re, f) . Le nombre de Reynolds critique est obtenu avec un ajustement en racine carrée des fréquences de coupures en fonction de Re .

Cet ajustement est identique à celui utilisé par Liu *et al.* (1993) pour les fluides newtoniens. Dans leur théorie, Balmforth et Liu (2004) utilisent le nombre de Bingham comme un paramètre fixe, alors qu'au cours de nos expériences, le nombre de Bingham Bi varie avec le débit q . Il est alors nécessaire d'identifier le nombre de Bingham de l'écoulement lorsque le nombre de Reynolds critique est franchi. Pour cela, nous remarquons en traçant la cartographie de stabilité dans le plan (Bi, f) , représenté sur la figure (3.6), que ce diagramme présente des caractéristiques similaires (mais inversées) par rapport au précédent, avec notamment un nombre de Bingham critique Bi_c

3.1. MÉTHODOLOGIE EXPÉRIMENTALE

au dessus duquel il n'y a plus d'écoulements instables. En effectuant à nouveau un ajustement en racine carrée de l'évolution de la fréquence du coupure en fonction du nombre de Bingham, nous déduisons le nombre de Bingham critique expérimental Bi_c^{exp} pour un angle ϕ et un fluide donné.

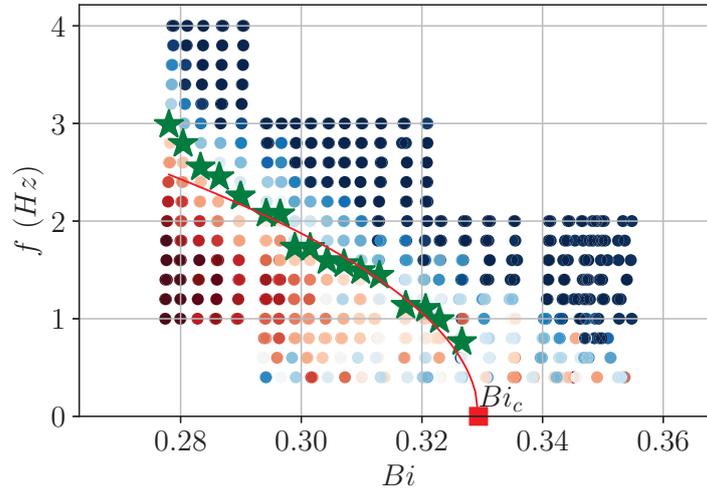


FIGURE 3.6 – Cartographie de stabilité (Bi, f) . La cartographie permet d'identifier des zones d'ondes stables et instables. Le nombre de Bingham critique est obtenu avec un ajustement en racine carrée des fréquences de coupures en fonction de Bi .

L'incertitude sur les valeurs de Re_c^{exp} (respectivement Bi_c^{exp}) est déterminée en modifiant le nombre de points (Re, f_c) (respec. (Bi, f_c)) conservés pour effectuer l'ajustement.

Ainsi, à angle ϕ et paramètres rhéologiques constants, nous avons établi les cartographies de stabilité (Re, f) et (Bi, f) , déduit le couple (Bi_c^{exp}, Re_c^{exp}) correspondant ainsi que les incertitudes associées.

3.2 Seuils de stabilité

Nous allons maintenant comparer les résultats expérimentaux des seuils de stabilité primaire avec les prédictions théoriques de Balmforth et Liu (2004). Les hypothèses employées dans leur étude de stabilité linéaire sont :

- l'épaisseur du film est supposée suffisamment petite pour négliger les termes d'ordre 1 ou plus en ε avec $\varepsilon = \tan \phi$.
- ils effectuent un développement aux ondes longues pour une analyse de stabilité temporelle de la forme $\omega = \omega_1 k + \omega_2 k^2 + \dots$ avec le nombre d'onde k et la pulsation ω .
- le nombre de Bingham Bi et l'indice rhéologique du fluide n sont fixés.
- Re_c est défini comme la valeur de Re qui annule le terme quadratique ω_2 dans leur développement.
- la résolution temporelle des équations d'Orr-Sommerfeld est effectuée pour un fluide de Herschel-Bulkley.

Le nombre de Reynolds critique Re_c obtenu par leur développement asymptotique est donné par :

$$Re_c = \frac{[1 + n + 2n(1 + nBi)](1 + n)(2 + n)(2 + 5n)(1 - Bi)^{-2/n}}{2(2 + n)(1 + n)^2 + n(2 + n)(7 + 9n)Bi + (11 + 19n + 6n^2)(2 + nBi)n^2Bi^2}, \quad (3.4)$$

avec Bi le nombre de Bingham et n l'indice rhéologique du fluide.

Dans les prédictions de Balmforth et Liu (2004), nous constatons que le nombre de Reynolds critique Re_c ne dépend que de deux paramètres qui sont le nombre de Bingham Bi et l'indice rhéologique du fluide n . Dans un premier temps, nous avons étudié l'évolution du nombre de Reynolds critique Re_c en fonction de Bi pour le fluide à base de carbopol 980 ($n = 0.54$). Afin de faire varier le nombre de Bingham critique de la série étudiée, nous avons varié la contrainte seuil τ_y (dépendante de la concentration en carbopol du fluide) ainsi que l'angle d'inclinaison ϕ du canal. Cela nous permet d'obtenir l'évolution expérimentale du nombre de Reynolds critique en fonction du nombre de Bingham critique. Ce résultat, représenté sur la figure (3.7), montre alors une excellente adéquation entre les résultats expérimentaux et les prédictions de Balmforth et Liu (2004), comme indiqué table (3.2). Dans cette table, la série 1 correspond à la série prise en exemple jusqu'à présent. L'écart moyen entre les résultats expérimentaux et les prédictions est d'environ 5 %. Cette différence peut s'expliquer par les incertitudes de mesure de position (capteur laser, système d'excitation, pulsation de la pompe...) ainsi que sur les mesures des paramètres rhéologiques du fluide (n, K, τ_y) indiqués sur le table (3.1).

Dans un second temps, nous avons réalisé les mêmes expériences pour une suspension de kaolin afin d'étudier la dépendance de Re_c avec l'indice rhéologique du fluide n . Ce fluide a un indice rhéologique faible autour de 0,25 ce qui est bien différent de celui du carbopol. La figure (3.8) représente l'évolution expérimentale de Re_c en fonction de Bi_c . Nous constatons alors que nous avons à nouveau des résultats expérimentaux (cf. table (3.3)) en adéquation avec les prédictions

3.2. SEUILS DE STABILITÉ

Fluides	τ_y (Pa)	K (Pa.s ⁿ)	n
Carbopol 980	1.6 – 5	0.5 – 1.5	0.52 – 0.56
Suspension de kaolin	5 – 11	4 – 13	0.22 – 0.28

TABLE 3.1 – Plage des paramètres rhéologiques utilisés au cours de nos expériences.

théoriques de Balmforth et Liu (2004). Le nombre plus restreint de données expérimentales s'explique par le fait que nous avons écarté des expériences pour lesquels les paramètres rhéologiques n'étaient pas suffisamment fiables (dispersion importante de la contrainte seuil mesurée) ou encore un bruit important lors de la mesure du signal par le capteur ne permettant pas de déterminer précisément les seuils de stabilité. De plus, les barres d'erreur telles que nous les avons déterminées sont parfois très grandes, cela correspond au cas où le nombre de Reynolds critique calculé par ajustement était loin en-dehors des nombres de Reynolds mesurés, et donc assez sensible au choix des points retenus pour l'ajustement.

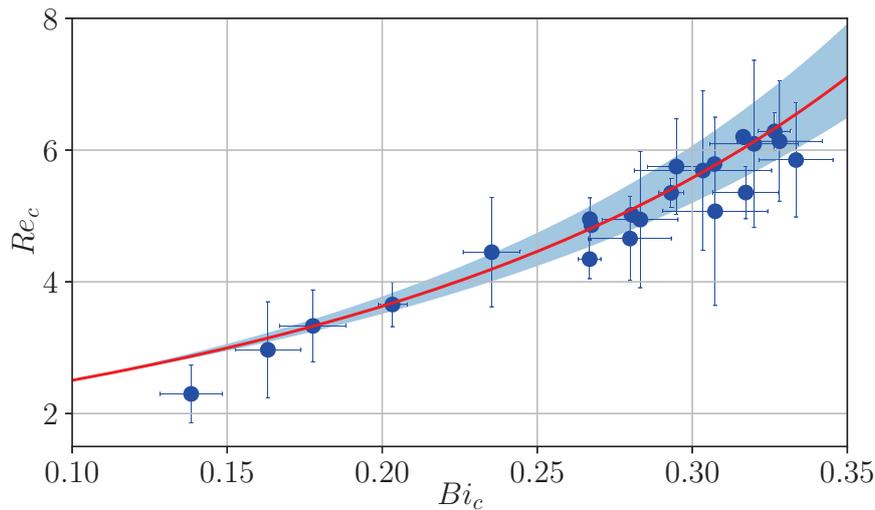


FIGURE 3.7 – Évolution du Re_c en fonction de Bi_c pour le fluide à base de Carbopol 980 ($n = 0.54$). Les points bleus représentent les données expérimentales. La courbe en rouge la prédiction théorique de Balmforth et Liu (2004) et l'enveloppe bleue la plage d'incertitude pour l'indice rhéologique $n = 0.54 \pm 0.02$ correspondant.

L'ensemble des comparaisons entre les prédictions théoriques et les résultats expérimentaux (Mounkaila Noma *et al.*, 2021) est représenté sur la figure (3.9). Nous pouvons alors affirmer que contrairement aux critiques de Fernández-Nieto *et al.* (2010), le développement asymptotique de Balmforth et Liu (2004) prédit relativement bien les seuils de stabilité primaire. Comme évoqué dans le premier chapitre, Fernández-Nieto *et al.* (2010) ont déjà défini un nombre de Reynolds légèrement différent, ce qui fait apparaître en plus des termes inertiels à l'ordre ε . Cette définition est perti-

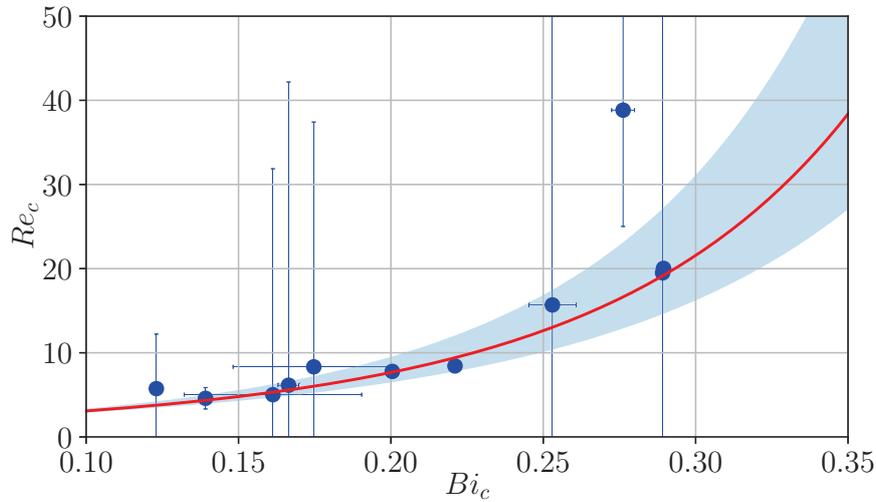


FIGURE 3.8 – Évolution du Re_c en fonction de Bi_c pour la suspension de Kaolin ($n = 0.25$). Les points bleus représentent les données expérimentales. La courbe en rouge la prédiction théorique de Balmforth et Liu (2004) et l’enveloppe bleue la plage d’incertitude pour l’indice rhéologique $n = 0.25 \pm 0.03$ correspondant.

nente lorsque le nombre de Reynolds et ε sont du même ordre de grandeur. Dans nos expériences, nous ne sommes pas dans ce régime puisque le nombre de Reynolds varie entre 2 et 40, alors que $\varepsilon = \tan \phi$ vaut au plus 0.28. Compte tenu du modèle de Fernández-Nieto et al. (2010) pour un fluide de Bingham, nous nous attendons à ce que la correction d’ordre ε devienne de plus en plus importante quand $Bi \rightarrow 1$. Le modèle de Balmforth et Liu (2004) devrait alors devenir de moins en moins précise aux grands angles parce que $\varepsilon = \tan \phi$. Nous n’avons pas été en mesure d’explorer ces domaines dans les expériences, car le nombre de Bingham le plus élevé que nous avons atteint est inférieur à $Bi = 0.35$. Au dessus, il devient très difficile de mesurer expérimentalement Re_c car il diverge fortement avec Bi . Quant à l’angle, il est limité à 16° par le dispositif expérimental.

3.2. SEUILS DE STABILITÉ

Numéro	τ_y (Pa)	K (Pa.s ⁿ)	n	ϕ (°)	Re_{c-exp}	Bi_c
1	4.21	0.99	0.54	15.6	6.28	0.327
2	3.59	1.03	0.54	15.6	4.66	0.279
3	5.05	1.34	0.54	15.6	6.10	0.320
4	4.34	1.20	0.53	15.6	5.07	0.307
5	4.53	1.37	0.54	15.6	5.74	0.295
6	4.16	1.23	0.54	13.6	5.35	0.293
7	3.28	1.50	0.52	11.1	4.34	0.267
8	4.33	1.51	0.53	12.3	4.95	0.284
9	3.58	1.47	0.53	15.6	4.45	0.235
10	2.96	1.46	0.53	15.6	3.66	0.203
11	1.87	1.21	0.54	9.7	2.97	0.163
12	2.20	1.20	0.54	12	3.33	0.178
13	1.63	1.26	0.54	15.6	2.30	0.139
14	4.17	1.15	0.53	15.6	5.79	0.307
15	4.55	1.19	0.54	15.6	6.20	0.316
16	4.41	1.21	0.54	10.5	6.13	0.328
17	4.41	1.21	0.54	12.9	5.36	0.317
18	4.41	1.21	0.54	15.6	5.69	0.303
19	4.26	1.22	0.53	8.9	5.85	0.333
20	3.60	1.15	0.54	15.6	4.95	0.267
21	4.06	1.25	0.54	15.6	5.02	0.280
22	4.12	1.46	0.52	15.6	4.86	0.267

TABLE 3.2 – Tableau récapitulatif des expériences à base de Carpobol 980.

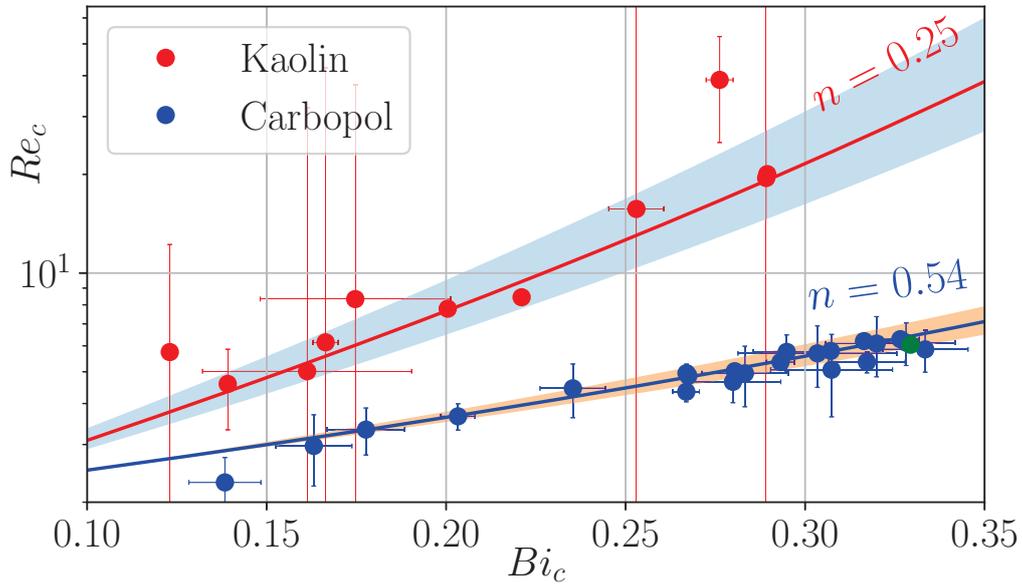


FIGURE 3.9 – Evolution de Re_c en fonction de Bi_c pour deux fluides viscoplastiques : Kaolin ($n=0.25$) et Carbopol 980 ($n=0.54$). Les points représentent les résultats expérimentaux (pour le carbopol ($n = 0.54$) en bleu et pour le kaolin ($n = 0.25$) en rouge). La courbe bleue (respectivement rouge) est la prédiction théorique de Balmforth et Liu (2004) du nombre de Reynolds critique Re_c pour $n = 0,54$ (respectivement $n = 0.25$) en fonction du nombre du Bingham. Le couple (Bi_c, Re_c) étudié lors de la présentation de la méthodologie expérimentale correspond au point en vert.

Numéro	τ_y (Pa)	K (Pa.s ⁿ)	n	ϕ (°)	$Re_c - exp$	Bi_c
1	8.15	5.27	0.25	15.6	19.50	0.289
2	8.48	5.45	0.25	15.6	20.03	0.289
3	4.74	3.82	0.24	15.6	15.68	0.253
4	9.48	8.07	0.3	15.6	8.44	0.221
5	10.55	7.06	0.29	15.6	5.02	0.161
6	7.16	11.46	0.27	15.6	38.83	0.276
7	5.97	12.60	0.25	14	8.33	0.175
8	6.20	9.89	0.25	15.6	4.59	0.140
9	6.90	10.07	0.25	15.6	6.15	0.166
10	6.86	10.07	0.25	15.6	7.79	0.200
11	4.74	11.84	0.25	15.6	5.74	0.123

TABLE 3.3 – Tableau récapitulatif des expériences à base de Kaolin

3.3 Relation de dispersion

Nous allons à présent discuter de la relation de dispersion. La relation de dispersion $k(\omega)$ lie le nombre d'onde k à la pulsation ω . Le rapport entre la pulsation ω et le nombre d'onde k définit la vitesse de phase :

$$c = \frac{\omega}{k(\omega)} .$$

La vitesse de phase c caractérise la vitesse à laquelle une onde se propage à la surface du fluide. Nous allons à présent comparer la relation de dispersion expérimentale au modèle de Balmforth et Liu (2004). Pour aller plus loin dans la comparaison, nous avons résolu numériquement le système d'équation (1.43) de Balmforth et Liu (2004).

Les méthodes de résolution numérique de ce système seront abordées dans le chapitre suivant. La résolution asymptotique aux ondes longues de ce système permet par ailleurs de trouver que $\omega_1 = (1 - Bi)^{1/n}$. Cela implique que la vitesse de phase devrait être constante pour les ondes longues et égale à $c_b = (1 - Bi)^{1/n}$. Pour les hautes fréquences, les termes d'ordre 3 et supérieurs ne sont plus négligeables et la relation devient non linéaire. Il est à noter que la non-linéarité dépend de Re .

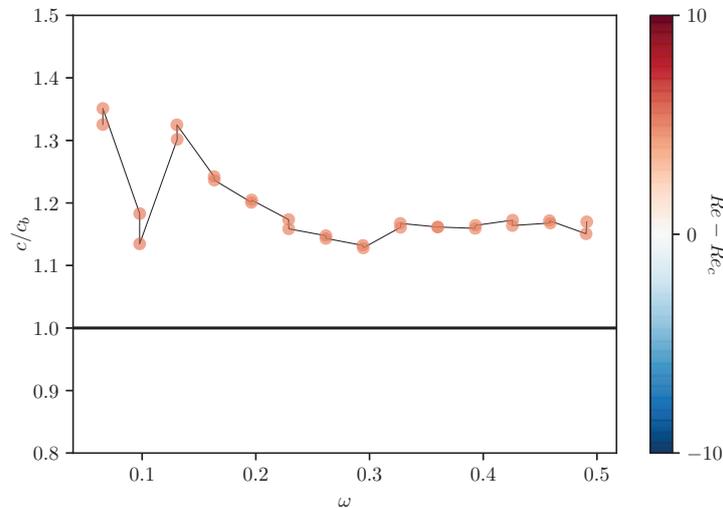


FIGURE 3.10 – Évolution expérimentale de la vitesse de phase normalisée c/c_b en fonction de la pulsation ω pour $Re = 11.2$ et $Bi = 0.29$.

Pour pouvoir comparer les résultats du modèle théoriques aux expériences, nous devons adimensionner les longueurs d'ondes et les pulsations expérimentales. La longueur d'onde et le taux de croissance sont adimensionnés par l'échelle caractéristique des longueurs $L = \langle h \rangle / \tan \phi$, tandis que

la pulsation est adimensionnée par l'échelle de temps caractéristique :

$$T = L/U = \frac{\langle h \rangle / \tan \phi}{(\rho g \langle h \rangle^{n+1} \sin \phi / K)^{1/n}} .$$

Dans nos expériences, il est attendu d'obtenir une vitesse de phase c constante pour les ondes longues, égale à c_b , ainsi qu'une dispersion non-linéaire pour les ondes courtes. La figure (3.10) représente la vitesse de phase normalisée c/c_b en fonction de la pulsation ω pour Re fixé. La vitesse de phase évolue avec la fréquence puis atteint un plateau. Il est par contre étonnant de constater que cette vitesse de phase normalisée ne semble pas tendre vers 1 aux ondes longues.

La figure (3.11) illustre l'évolution du nombre d'onde k en fonction de la pulsation ω . La droite de pente 1 en noir représente l'évolution décrite par le développement aux ondes longues. Nous observons que l'évolution entre les expériences et le modèle de Balmforth et Liu (2004) se produit dans des directions opposées et qu'elle intervient plus tôt dans les expériences. Plus globalement, nous constatons alors que les prédictions obtenues par le modèle de Balmforth et Liu (2004) ont tendance à surestimer celle obtenue avec les résultats expérimentaux.

L'évolution du taux de croissance α en fonction de la pulsation ω à Re fixé, est représentée sur la figure (3.12). Le taux de croissance obtenu numériquement est positif pour les nombres de Reynolds où l'écoulement est instable, mais il décroît beaucoup plus lentement que dans l'expérience. La comparaison de l'évolution du taux de croissance α en fonction de la pulsation ω montre que le modèle de Balmforth et Liu (2004) ne permet pas de décrire le comportement observé expérimentalement. Nous observons alors l'une des principales limites du modèle de Balmforth et Liu (2004) : l'impossibilité de prédire précisément le taux de croissance ainsi que la relation de dispersion. Cela s'explique probablement, au moins en partie, par l'absence de la prise en compte des termes d'ordre ε ou supérieurs dans leur modèle.

3.3. RELATION DE DISPERSION

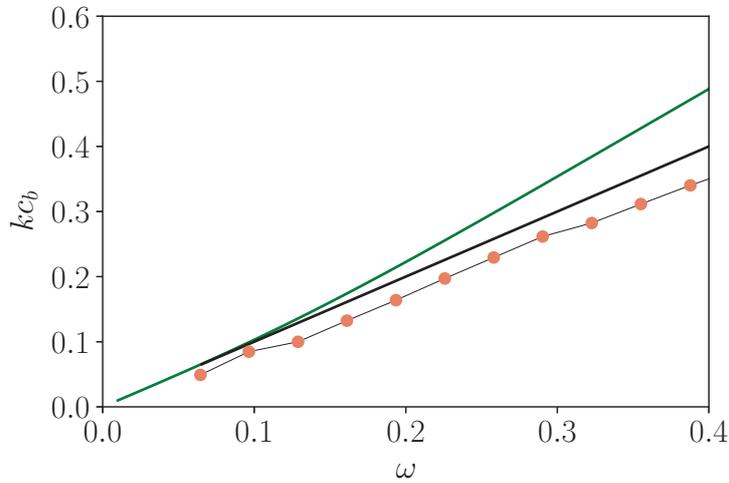


FIGURE 3.11 – Relation de dispersion : évolution du nombre d’onde k multiplié par une vitesse normalisée en fonction de la pulsation ω pour $Re = 11.2$ et $Bi = 0.29$. Les points rouges représentent les mesures expérimentales et la courbe verte la résolution numérique du développement asymptotique de Balmforth et Liu (2004).

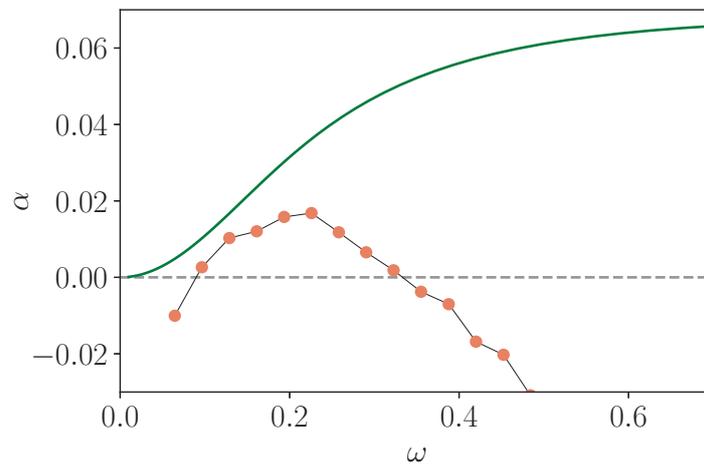


FIGURE 3.12 – Évolution du taux de croissance α en fonction de la pulsation ω pour $Re = 11.2$ et $Bi = 0.29$. Les points rouges représentent les mesures expérimentales et la courbe verte la résolution numérique du développement asymptotique de Balmforth et Liu (2004).

3.4 Conclusion partielle

Dans ce chapitre, les résultats expérimentaux ont été comparés aux prédictions de Balmforth et Liu (2004). Nous avons pu voir que le nombre de Reynolds critique, Re_c , dépend uniquement de deux paramètres qui sont le nombre de Bingham Bi ainsi que l'indice rhéologique du fluide n . Les essais réalisés pour deux fluides (carpobol 980 avec un indice rhéologique $n = 0.54$ et une suspension de kaolin $n = 0.25$) sur un plage de Bi_c allant de 0.1 à 0.35 montrent une bonne correspondance entre les résultats expérimentaux et les prédictions théoriques des seuils d'amplification des instabilités. Nos résultats expérimentaux semblent valider alors les prédictions des seuils de stabilité obtenus par Balmforth et Liu (2004). Il est important de noter que ces résultats expérimentaux sont les premiers à notre connaissance qui permettent de comparer précisément la théorie et les expériences dans la stabilité primaire des films de fluides viscoplastiques sur un plan incliné.

Cependant, la comparaison de l'évolution de la relation de dispersion $k(\omega)$ ainsi que l'évolution du taux de croissance α en fonction de la pulsation ω ont montré que l'approche de Balmforth et Liu (2004) est insuffisante pour déterminer ces évolutions. Cela s'explique peut-être par l'absence de termes d'ordre ε et plus dans la résolution des équations aux ondes longues. Cette observation vient accréditer la critique de Fernández-Nieto *et al.* (2010) dans le cas de la prédiction des relations de dispersion.

Développement asymptotique à l'ordre ε

Sommaire

4.1 Modélisation	80
4.1.1 Perturbation dans la couche cisailée	81
4.1.2 Perturbations dans le pseudo-bouchon	82
Ordre 0 en ε	82
Ordre 1 en ε	83
4.1.3 Conditions aux limites entre la couche cisailée et le pseudo-bouchon . .	85
4.1.4 Système d'équations à l'ordre ε	86
4.2 Résolution aux ondes longues	87
4.3 Résolution numérique du système	90
4.4 Étude exploratoire de l'effet de la tension de surface	96
4.5 Conclusion partielle	99

Dans le chapitre précédent, nous avons comparé nos résultats expérimentaux à ceux de Balmforth et Liu (2004). Ces résultats sont en parfaite accord pour ce qui concerne les seuils de stabilité. Cependant, nous avons constaté que le modèle de Balmforth et Liu (2004) ne décrit pas correctement les relations de dispersion notamment le taux de croissance, ainsi que la vitesse de phase. Cela peut s'expliquer par la non prise en compte des termes d'ordre ε ou supérieurs dans leur modèle. Dans le chapitre décrivant l'état de l'art, nous avons présenté les travaux de Fernández-Nieto *et al.* (2010) qui critiquent la non-prise en compte de ces termes d'ordre supérieur en ε par Balmforth et Liu (2004). Ainsi, dans ce chapitre nous proposons de réaliser un développement asymptotique à l'ordre ε , afin de vérifier si la précision des taux de croissance et célérité expérimentaux pourrait être améliorée.

4.1 Modélisation

Dans cette section, nous exposerons le développement à l'ordre 1 en ε dans un film viscoplastique sur un plan incliné. Le but est d'identifier les termes à l'ordre 1 en ε qui apparaissent en utilisant le formalisme de Balmforth et Liu (2004). Pour cela, nous repartons du système d'équations (1.18) à (1.20) et des conditions aux limites (1.21) à (1.25). A l'ordre 1 en ε , l'équation du mouvement vertical (1.20) devient :

$$0 = -p_z + \varepsilon \partial_z \tau_{zz} - 1, \quad (4.1)$$

et la condition à la surface libre (1.22) en $z = h$ traduisant les contraintes normales nulles s'écrit :

$$p = \varepsilon \tau_{zz}. \quad (4.2)$$

Les équations constitutives (1.18) et (1.19), ainsi que les conditions aux limites (1.23), (1.21), (1.24) et (1.25) restent inchangées à l'ordre 1 en ε .

La loi de Herschel-Bulkley à l'ordre ε vaut quant à elle :

$$\tau_{ij} = (Bi + \dot{\gamma}^n) \frac{\dot{\gamma}_{ij}}{\dot{\gamma}}, \text{ avec } \dot{\gamma}_{ij} = \begin{pmatrix} 2\varepsilon u_x & u_z \\ u_z & 2\varepsilon w_z \end{pmatrix} \text{ et } \dot{\gamma} \simeq \sqrt{u_z^2}.$$

En intégrant l'équation (4.1) et en utilisant la conditions aux limites (4.2), nous trouvons que :

$$p - \varepsilon \tau_{zz} = h - z.$$

En introduisant cette expression dans l'équation du mouvement horizontal (1.19), nous obtenons :

$$Re(u_t + uu_x + wu_z) = 1 - h_x + 2\varepsilon \partial_x \tau_{xx} + \partial_z \tau_{xz}. \quad (4.3)$$

Cette équation est similaire à celle obtenue (1.32) par Balmforth et al. (2004) avec un facteur 2 supplémentaire dans le terme $2\varepsilon \partial_x \tau_{xx}$ à l'ordre 1 en ε .

Dans notre développement, les perturbations sont introduites par un champ de vitesse infinitésimal de la forme $au'(x, z, t)$ avec a l'amplitude de la perturbation. Ainsi, le champ de vitesse $u(x, z, t) = U + \psi_z e^{\lambda t + ikx}$ perturbé de Balmforth et Liu (2004) correspond dans notre développement à $u(x, z, t) = U + au'$.

Nous supposons le champ de vitesse horizontal $u(x, z, t)$ sous la forme :

$$u(x, z, t) = \begin{cases} U_b + au'_b(x, t) + \varepsilon u_\varepsilon(x, z, t) & \text{si } z > Y', \\ U(z) + au'(x, z, t) & \text{si } z < Y', \end{cases} \quad (4.4)$$

avec Y' la position de l'interface fictive perturbée entre la couche cisailée et le pseudo-bouchon. Pour plus de clarté, dans le pseudo-bouchon, nous exprimons les composantes du champ de vitesse qui dépendent de la vitesse à l'interface fictive entre la couche cisailée et le pseudo-bouchon en

4.1. MODÉLISATION

$z = Y'$ par un indice b :

$$\begin{cases} U(Y') & = U_b , \\ u'(x, Y', t) & = u'_b(x, t) . \end{cases}$$

La position de la surface libre est, quant à elle, définie par $h = 1 + ah'(x, t)$. Nous négligerons dans la suite les termes d'ordre 2 et supérieurs en a puisque nous nous intéressons à la stabilité linéaire des ondes.

4.1.1 Perturbation dans la couche cisailée

Dans la couche cisailée, nous représentons le champ de vitesse vertical par $w = 0 + aw'(x, z, t)$ avec aw' la perturbation de vitesse verticale. Si nous nous limitons à l'ordre 1 en ε , et que nous faisons l'hypothèse $|U_z| \gg \varepsilon > 0$, nous pouvons approximer $\dot{\gamma} \simeq U_z + au'_z$ et linéariser la contrainte de cisaillement par :

$$\tau_{xz} = (Bi + (U_z + au'_z)^n) \simeq Bi + U_z^n + nU_z^{n-1}au'_z .$$

La contrainte normale est donnée :

$$\tau_{xx} = (Bi + \dot{\gamma}^n) \frac{2\varepsilon u_x}{\dot{\gamma}} = (Bi + (U_z + au'_z)^n) \frac{2\varepsilon au'_x}{U_z + au'_z} \simeq \varepsilon \tau_{xz} \frac{2au'_x}{U_z} .$$

Nous constatons alors que dans la couche cisailée, la contrainte normale τ_{xx} est d'ordre ε alors que la contrainte de cisaillement est d'ordre 0 en ε . Ainsi, le terme résultant impliquant la contrainte normale dans l'équation du mouvement horizontal (1.19) sera en ε^2 , et sera alors négligé. En introduisant cette expression dans l'équation du mouvement et en ne gardant que les termes linéaires en a , nous retrouvons :

$$Re(u'_t + Uu'_x + w'U_z) = -h'_x + (nU_z^{n-1}u'_z)_z + O(\varepsilon^2) . \quad (4.5)$$

Il s'agit de la même équation que celle obtenue par Balmforth et Liu (2004), voir eq. (1.38). Nous constatons que l'équation est aussi valable à l'ordre 1 en ε avec les conditions aux limites adéquates dans la couche cisailée. L'équation de continuité pour le champ perturbé est :

$$u'_x + w'_z = 0 . \quad (4.6)$$

Pour fermer le système d'équations, nous exprimons les conditions aux limites. Les deux conditions à la paroi sont $u'(z=0) = 0$ et $w'(z=0) = 0$. Concernant les conditions dynamiques et cinématiques à la surface libre, elles sont plus délicates à déterminer car elles concernent également le pseudo-bouchon.

4.1.2 Perturbations dans le pseudo-bouchon

Pour écrire les conditions aux limites, la démarche consiste, comme réalisé par Balmforth et Liu (2004), à effectuer un développement à l'ordre 1 en ε dans le pseudo-bouchon et ensuite à transporter les conditions aux limites à la surface libre en $z = h$ au niveau de l'interface fictive perturbée Y' . A l'ordre 1 en ε , nous décomposons les contraintes tangentielles comme suit :

$$\tau_{xz} = \tau_{xz}^{(0)} + \varepsilon \tau_{xz}^{(1)},$$

avec $\tau_{xz}^{(0)}$ la contrainte de cisaillement à l'ordre 0 et $\tau_{xz}^{(1)}$ à l'ordre ε que nous allons calculer à partir des équations du mouvement.

Ordre 0 en ε

A l'ordre 0 en ε , l'équation du mouvement horizontal (1.19) est :

$$Re(au'_{bt} + U_b au'_{bx}) = 1 - ah'_x + \partial_z \tau_{xz}^{(0)},$$

et le taux de cisaillement, dans le pseudo-bouchon, est donné par :

$$\dot{\gamma} = \varepsilon \sqrt{4a^2 u'_{bx}{}^2 + u_{\varepsilon z}^2}.$$

Les contraintes à l'ordre 0 en ε dans le pseudo-bouchon ont déjà été exprimées par Balmforth et Liu (2004), voir eq. (1.34) et (1.36), et valent avec notre notation :

$$\tau_{xz}^{(0)} = Bi \frac{u_{\varepsilon z}}{\sqrt{4a^2 u'_{bx}{}^2 + u_{\varepsilon z}^2}},$$

$$\tau_{xx}^{(0)} = Bi \frac{2au'_{bx}}{\sqrt{4a^2 u'_{bx}{}^2 + u_{\varepsilon z}^2}}.$$

Il est à noter que la contrainte normale, dans le pseudo-bouchon, n'est pas d'ordre 1 en ε . Ainsi, le terme en $2\varepsilon \partial_x \tau_{xx}$ est maintenu dans l'équation (4.21).

En posant $\Sigma(x, t) = 1 - a[h'_x + Re(u'_{bt} + U_b u'_{bx})]$, et en calculant la primitive de $\partial_z \tau_{xz}^{(0)}$, nous obtenons que $\tau_{xz}^{(0)} = \Sigma(h - z)$. Ainsi, en associant ce résultat à la loi de Herschel-Bulkley, nous obtenons que :

$$Bi \frac{u_{\varepsilon z}}{\sqrt{4a^2 u'_{bx}{}^2 + u_{\varepsilon z}^2}} = \Sigma(h - z).$$

Nous notons que cette relation n'est valable qu'au dessus de l'interface fictive perturbée, c'est à dire pour $z > Y' = h - Bi/\Sigma$. La correction de vitesse u_ε avait déjà été calculée par Balmforth et Liu (2004), voir eq. (1.35), et vaut avec notre notation :

4.1. MODÉLISATION

$$u_\varepsilon(x, z, t) = 2a \frac{|u'_{bx}|}{\Sigma} \sqrt{Bi^2 - \Sigma^2(h-z)^2} + u^+(x, t).$$

Pour déterminer la constante u^+ , nous utilisons la continuité du champ de vitesse entre les deux régions en $z = Y'$:

$$U(Y') + au'(x, Y', t) = U_b + au'_b(x, t) + \varepsilon u^+(x, t),$$

car $u_\varepsilon(x, Y', t) = u^+(x, t)$. Nous déduisons alors que $u^+ = 0$: les contributions d'ordre 1 en ε de la couche cisailée sont déjà incluse dans le terme $au'_b(x, t)$. Ce résultat est lié à notre décomposition dans la couche cisailée en la somme d'un champ de base et d'une perturbation à l'ordre ε . Il est à noter que ce terme de continuité est différent de celui de (Chambon *et al.*, 2020). En effet, ils considèrent que les termes inertiels sont d'ordre ε , et que la forme de l'interface non-perturbée en $z = Y$ (film non-perturbé) n'est pas plate, ce qui ajouterait un terme d'ordre ε au champ de base dans la zone cisailée.

En remplaçant u_ε dans l'expression de la contrainte normale à l'ordre 0 en ε , nous trouvons :

$$\tau_{xx}^{(0)} = Bi \frac{2au'_{bx}}{\sqrt{4a^2u_{bx}^2 + u_{\varepsilon z}^2}} = s \sqrt{Bi^2 - \Sigma^2(h-z)^2},$$

avec s le signe de u'_{bx} . Nous en déduisons alors que :

$$u_\varepsilon = 2a \frac{u'_{bx}}{\Sigma} \tau_{xx}^{(0)}. \quad (4.7)$$

Ordre 1 en ε

Nous procédons ensuite à la détermination de la contrainte de cisaillement à l'ordre 1 en ε . L'équation (1.19) à l'ordre 1 en ε est :

$$Re(u_{\varepsilon t} + U_b u_{\varepsilon x} + u_\varepsilon a u'_{bx} + u'_b a u_{\varepsilon x} + a w' u_{\varepsilon z}) = \partial_z \tau_{xz}^{(1)} + 2\partial_x \tau_{xx}^{(0)}.$$

La correction de vitesse u_ε est également d'ordre a puisque c'est une perturbation. L'équation précédente peut alors être simplifiée en négligeant les termes à l'ordre a^2 en stabilité linéaire. Ainsi :

$$\partial_z \tau_{xz}^{(1)} = Re(u_{\varepsilon t} + U_b u_{\varepsilon x}) - 2\partial_x \tau_{xx}^{(0)}.$$

En remplaçant u_ε par son expression (eq. (4.7)) et en linéarisant ($\Sigma \simeq 1$), nous avons :

$$u_{\varepsilon t} \simeq 2au'_{bx} \tau_{xx}^{(0)} \text{ et } u_{\varepsilon x} \simeq 2au'_{bxx} \tau_{xx}^{(0)}, \quad (4.8)$$

et donc :

$$\partial_z \tau_{xz}^{(1)} = 2\text{Re}(au'_{bxt} + U_b au'_{bxx}) \tau_{xx}^{(0)} - 2\partial_x \tau_{xx}^{(0)} .$$

Dans le but de déterminer la condition dynamique à l'interface fictive en Y' , nous procédons à une intégration dans le pseudo-bouchon, c'est à dire entre Y' et $h(x,t)$. Nous avons :

$$\tau_{xz}^{(1)}(h) - \tau_{xz}^{(1)}(Y') = 2\text{Re}(au'_{bxt} + U_b au'_{bxx}) \int_{Y'}^{h(x,t)} \tau_{xx}^{(0)} dz - 2 \int_{Y'}^{h(x,t)} \partial_x \tau_{xx}^{(0)} dz . \quad (4.9)$$

La dernière intégrale peut être décomposée comme suit :

$$\int_{Y'}^{h(x,t)} \partial_x \tau_{xx}^{(0)} dz = \partial_x \int_{Y'}^{h(x,t)} \tau_{xx}^{(0)} dz - \tau_{xx}^{(0)}|_{z=h} h_x .$$

Nous procédons au changement de variable $\Sigma(h-z)/Bi = \sin u$ pour le calcul de l'intégrale de $\tau_{xx}^{(0)}$ et obtenons :

$$\int_{Y'}^{h(x,t)} \tau_{xx}^{(0)} dz = s \frac{Bi^2}{\Sigma} \int_0^{\pi/2} \cos^2(u) du = s \frac{\pi Bi^2}{4\Sigma} .$$

Ainsi, nous avons, en linéarisant à nouveau :

$$\partial_x \int_{Y'}^{h(x,t)} \tau_{xx}^{(0)} dz = \partial_x \left(s \frac{\pi Bi^2}{4\Sigma} \right) = -\frac{s\pi Bi^2}{4\Sigma^2} \Sigma_x \simeq \frac{s\pi Bi^2}{4} (ah'_{xx} + Reau'_{bxt} + ReU_b au'_{bxx}) . \quad (4.10)$$

Nous négligeons à nouveau les termes non-linéaires. Ensuite nous écrivons l'équilibre des contraintes à la surface libre, en utilisant les équations (1.23) et (1.21) à la continuité. Nous obtenons :

$$\tau_{xz}^{(1)}|_{z=h} = 2h_x \tau_{xx}^{(0)}|_{z=h} .$$

En combinant l'équilibre des contraintes et l'équation (4.9), nous obtenons après simplification :

$$2h_x \tau_{xx}^{(0)}(h) - \tau_{xz}^{(1)}(Y') = 2\text{Re}(au'_{bxt} + U_b au'_{bxx}) \int_{Y'}^{h(x,t)} \tau_{xx}^{(0)} dz - 2\partial_x \int_{Y'}^{h(x,t)} \tau_{xx}^{(0)} dz + 2\tau_{xx}^{(0)}(h)h_x .$$

Soit :

$$\tau_{xz}^{(1)}(Y') = 2\partial_x \left(s \frac{\pi Bi^2}{4\Sigma} \right) - 2\text{Re}(au'_{bxt} + U_b au'_{bxx}) \left(s \frac{\pi Bi^2}{4} \right) ,$$

et en utilisant le développement (4.10), nous avons :

$$\tau_{xz}^{(1)}(Y') = \left(s \frac{\pi Bi^2}{2} \right) (ah'_{xx} + Reau'_{bxt} + ReU_b au'_{bxx}) - \text{Re}(au'_{bxt} + U_b au'_{bxx}) \left(s \frac{\pi Bi^2}{2} \right) .$$

4.1. MODÉLISATION

Par conséquent, l'expression de $\tau_{xx}^{(1)}$ à l'interface fictive entre la couche cisailée et le pseudo-bouchon est :

$$\tau_{xz}^{(1)}(Y') = as \frac{\pi Bi^2}{2} h'_{xx}. \quad (4.11)$$

4.1.3 Conditions aux limites entre la couche cisailée et le pseudo-bouchon

Nous souhaitons à présent déterminer les conditions aux limites à l'interface fictive entre la couche cisailée et le pseudo-bouchon. Nous commençons par utiliser l'équilibre des contraintes de cisaillement à l'interface fictive :

$$\tau_{xz}(Y'^+) = \tau_{xz}(Y'^-),$$

avec $\tau_{xz}(Y'^+)$ la contrainte tangentielle dans le pseudo-bouchon et $\tau_{xz}(Y'^-)$ celle dans la couche cisailée au niveau de l'interface fictive perturbée Y' .

Comme calculée précédemment, la contrainte de cisaillement dans le pseudo-bouchon est donnée par :

$$\tau_{xz}(Y'^+) = \Sigma(h - Y') + \varepsilon as \frac{\pi Bi^2}{2} h'_{xx} = Bi + \varepsilon as \frac{\pi Bi^2}{2} h'_{xx}.$$

Dans la couche cisailée, nous linéarisons la contrainte autour de la position de l'interface fictive non-perturbée Y comme suit :

$$\tau_{xz}(Y'^-) \simeq \tau_{xz}(Y) + \partial_z \tau_{xz}(Y' - Y),$$

avec $\partial_z \tau_{xz} = -1$ et

$$\tau_{xz}(Y) = (Bi + (U_z + au'_z)^n) \simeq Bi + U_z^n + nU_z^{n-1} au'_z,$$

donc, nous avons :

$$\tau_{xz}(Y) = Bi + nU_z^{n-1} au'_z \text{ car } U_z^n(Y) = 0,$$

et

$$(Y' - Y) = h - \frac{Bi}{\Sigma} - 1 + Bi \simeq ah' - Bi (ah'_x + Re(u'_{bt} + U_b au'_{bx})).$$

Nous retrouvons l'équation (1.41) de Balmforth et Liu (2004). Ainsi, la continuité des contraintes de cisaillement à l'interface fictive nous donne :

$$Bi + a\varepsilon s \frac{\pi Bi^2}{2} h'_{xx} = Bi + nU_z^{n-1} au'_z - ah' + aBi (h'_x + Re(u'_{bt} + U_b u'_{bx})),$$

soit :

$$-\varepsilon s \frac{\pi Bi^2}{2} h'_{xx} + n U_z^{n-1} u'_z - h' + Bi (h'_x + Re(u'_{bt} + U_b u'_{bx})) = 0 .$$

Nous allons maintenant déterminer la condition cinématique à cette interface fictive. Tout d'abord, nous partons de la condition cinématique à la surface libre (1.23) linéarisée :

$$h'_t + U_b h'_x = w' \Big|_{z=h} .$$

Pour transporter cette condition sur l'interface fictive Y' , il faut intégrer l'équation de continuité (4.6) :

$$aw' \Big|_{z=h} - aw' \Big|_{z=Y'} = - \int_{Y'}^h (au'_{bx} + \varepsilon u_{\varepsilon x}) dz .$$

Le calcul de l'intégrale de $u_{\varepsilon x}$ en utilisant une méthode similaire à celle employée dans la section précédente pour intégrer $\tau_{xx}^{(0)}$, avec l'équation (4.8), nous permet d'obtenir l'expression suivante :

$$h'_t + U_b h'_x - w' \Big|_{z=Y'} + Bi u'_{bx} + \varepsilon s \frac{\pi Bi^2}{2} u'_{bxx} = 0 .$$

4.1.4 Système d'équations à l'ordre ε

Pour déterminer le système d'équations à l'ordre ε , nous supposons une perturbation de l'épaisseur de forme sinusoïdale :

$$h' = e^{\lambda t + ikx} .$$

Nous introduisons une perturbation dans la vitesse par l'intermédiaire d'une fonction de courant $\Psi = \psi(z) e^{\lambda t + ikx}$ de sorte que :

$$u' = \psi_z e^{\lambda t + ikx} , w' = -ik \psi e^{\lambda t + ikx} \text{ et } u'_b = \psi_z(Y) e^{\lambda t + ikx} .$$

En introduisant cette fonction de courant dans les équations du mouvement et en utilisant les conditions aux limites, le système d'équations à l'ordre 1 en ε est donné par :

$$n (U_z^{n-1} \psi_{zz})_z = ik + Re(\lambda \psi_z + ikU \psi_z - ik \psi U_z) , \quad (4.12)$$

$$n U_z^{n-1} \psi_{zz} = 1 - ikBi - ReBi(\lambda + ikU) \psi_z - \varepsilon s \frac{\pi Bi^2}{2} k^2 \quad \text{en } z = 1 - Bi , \quad (4.13)$$

$$\lambda + ikU + ik \psi + ikBi \psi_z = \varepsilon s \frac{\pi Bi^2}{2} k^2 \psi_z \quad \text{en } z = 1 - Bi , \quad (4.14)$$

$$\psi = 0 \quad \text{en } z = 0 , \quad (4.15)$$

$$\psi_z = 0 \quad \text{en } z = 0 . \quad (4.16)$$

Nous avons alors le même système d'équations que Balmforth et Liu (2004) avec des termes supplémentaires en ε dans les équations (4.13) et (4.14).

4.2 Résolution aux ondes longues

Nous avons réalisé un développement aux ondes longues du système d'équations obtenu dans la section précédente en décomposant $\lambda = k\lambda_1 + k^2\lambda^2 + \dots$ et $\psi = \psi_0 + k\psi_1 + \dots$

En écrivant l'équation (4.12) et les conditions aux limites pour les ordres successifs en k , nous pouvons obtenir une nouvelle expression pour λ_1 et λ_2 et ainsi déduire un nouveau seuil de stabilité à l'ordre 1 en ε . Pour rappel, Balmforth et Liu (2004) ont trouvé que $\lambda_1 = -i(1 - Bi)^{1/n}$ imaginaire pur (eq. (1.44)) et l'expression de λ_2 est réel et est donnée par l'équation (1.4.3).

En introduisant le terme issu de la correction en ε , λ_1 reste inchangé et $\lambda_2 = -i\psi_1 - iBi\psi_{1z} + s\frac{\varepsilon\pi Bi^2\psi_{0z}}{2}$ et avec $\psi_{0z} = (1 - Bi)^{1/n}$ en $z = Y$, nous obtenons :

$$\lambda_2 = \left[2 + \frac{n(7+9n)Bi}{(1+n)^2} + \frac{n^2Bi^2(2+nBi)(11+19n+6n^2)}{(2+n)(1+n)^2} \right] \frac{Re(1-Bi)^{3/n}}{(1+2n)(2+3n)} - \frac{[1+n+2nBi(1+nBi)](1+Bi)^{1/n}}{(1+2n)(1+n)} + \varepsilon s \frac{\pi Bi^2(1-Bi)^{1/n}}{2}.$$

Le développement de l'équation d'Orr-Sommerfeld aux ondes longues nous donne le nombre de Reynolds critique Re_c en calculant le nombre de Reynolds pour lequel $\lambda_2 = 0$. Pour le signe de u'_{bx} représenté par s , nous choisissons le cas le plus défavorable, c'est à dire un signe négatif correspondant au mode le plus instable. Le nombre de Reynolds critique est défini par :

$$Re_c = \frac{(1-Bi)^{-2/n}}{2(2+n)(1+n)^2 + n(2+n)(7+9n)Bi + (11+19n+6n^2)(2+nBi)n^2Bi^2} \times \left[1+n+2nB(1+nBi) \right] (1+n)(2+n)(2+3n) - \varepsilon \frac{\pi Bi^2}{2} (1+2n)(2+3n)(2+n)(1+n^2) \quad (4.17)$$

Notre modèle à l'ordre 1 en ε fait donc apparaître un terme supplémentaire dans l'équation (4.17) relatif au nombre de Reynolds critique par rapport au résultat de Balmforth et Liu (2004). Ce terme supplémentaire vaut :

$$-\varepsilon \frac{\pi Bi^2}{2} \frac{(1+2n)(3+n)(2+n)(1+n^2)(1-Bi)^{-2/n}}{2(2+n)(1+n)^2 + n(2+n)(7+9n)Bi + (11+19n+6n^2)(2+nBi)n^2Bi^2}$$

Nous nous proposons alors d'étudier l'influence du terme à d'ordre 1 en ε sur le nombre de Reynolds critique. Les figures (4.1) et (4.2) représentent l'évolution du nombre de Reynolds critique en fonction du nombre de Bingham pour le modèle de Balmforth et Liu (2004) réalisé à l'ordre 0

en ε et celui que nous avons réalisé à l'ordre 1 en $\varepsilon = 0.28$ qui correspond à la valeur maximale atteinte par $\varepsilon = \tan \phi$ dans nos expériences. Cette comparaison a été réalisée pour les deux fluides employés (carbopol 980 et suspension de kaolin). Nous observons alors que le nombre de Reynolds critique prédit par Balmforth et Liu (2004) a tendance à surestimer légèrement le seuil de stabilité dans les deux cas considérés (cf. fig. (4.1) et (4.2)).

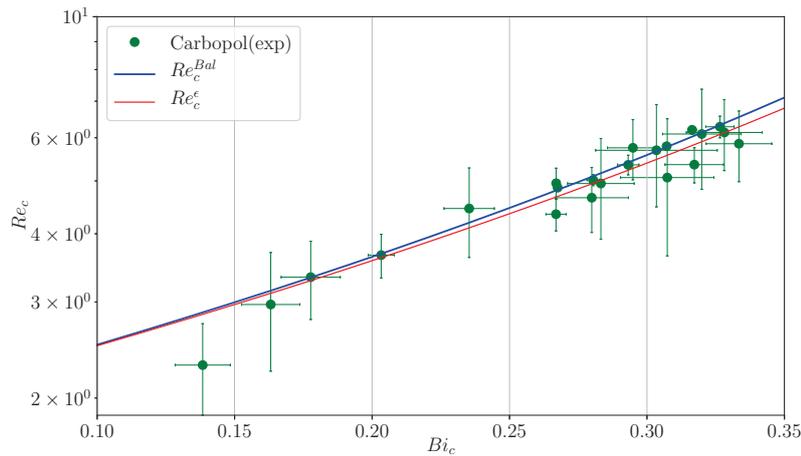


FIGURE 4.1 – Comparaison des résultats expérimentaux (points verts) avec le développement à l'ordre 0 en ε (courbe bleue) réalisé par Balmforth et Liu (2004) et le développement à l'ordre 1 en ε (courbe rouge) avec $\varepsilon = 0.28$ pour un fluide à base de carbopol 980 ($n = 0.54$)

Toutefois, nous constatons que la correction apporte une modification minimale dans la plage de Bingham étudiée. En effet, les courbes théoriques aux ordres 0 et 1 en ε sont quasiment confondues et l'écart reste faible pour les valeurs les élevés de Bi . De plus, la correction apportée ne permet pas d'obtenir une meilleure correspondance avec les résultats expérimentaux qui sont déjà bien décrits par Balmforth et Liu (2004).

Néanmoins, nous rappelons que notre étude a été réalisée, pour deux fluides d'indice rhéologique respectifs de 0.54 et 0.25. Pour étendre la comparaison entre les deux ordres, nous avons analysé l'influence du terme d'ordre 1 en ε sur le seuil pour différentes valeurs de n et Bi . La figure (4.3) représente l'évolution logarithmique de l'écart relatif du nombre de Reynolds critique Re_c en fonction du nombre de Bingham Bi , pour différentes valeurs de n pour $\varepsilon = 0.28$. Nous constatons que la correction est d'autant plus importantes lorsque l'indice rhéologique n se rapproche de 1 (fluide de Bingham) et le nombre de Bingham Bi est grand. Dans la plupart des cas, la correction est inférieure à 10%.

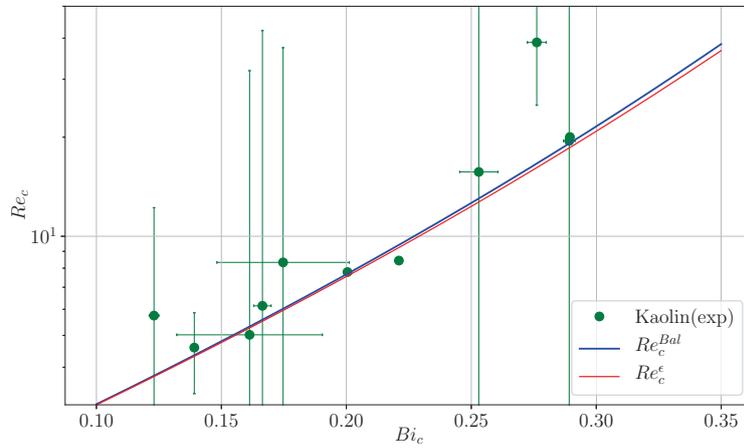


FIGURE 4.2 – Comparaison des résultats expérimentaux (points verts) avec le développement à l'ordre 0 en ε (courbe bleue) réalisé par Balmforth et Liu (2004) et le développement à l'ordre 1 en ε (courbe rouge) avec $\varepsilon = 0.28$ pour le fluide à base de kaolin ($n = 0.25$).

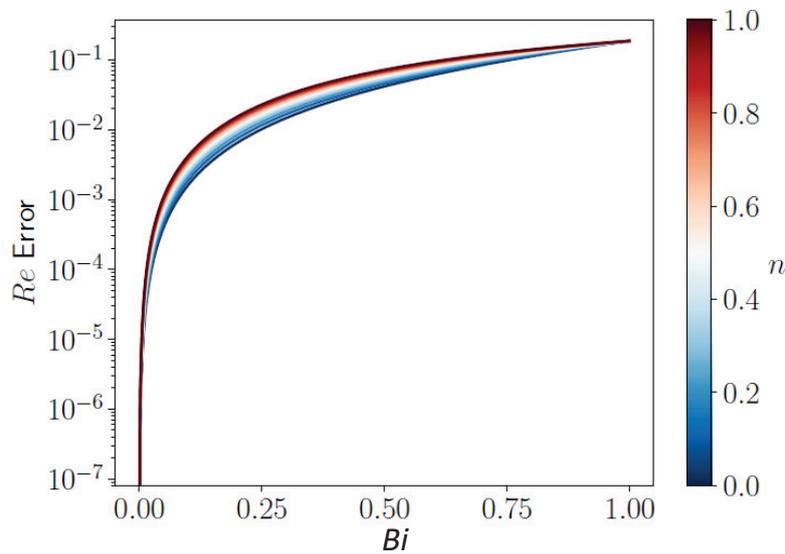


FIGURE 4.3 – Évolution de l'écart relatif entre les nombres de Reynolds critiques obtenus à l'ordre 0 et 1 en ε en fonction du nombre de Bingham pour différentes valeurs de n .

4.3 Résolution numérique du système

Nous avons également effectué une résolution numérique du système complet (4.12) à (4.16) afin d'observer l'effet de la prise en compte de l'ordre 1 en ε sur la prédiction de la vitesse de phase c et des taux de croissance α . La principale difficulté dans la résolution numérique de ce système vient du terme $U_z^{n-1}\psi_{zz}$ qui n'est pas défini en $z = 1 - Bi$ si $n < 1$ car $U_z = 0$. Pour contourner cette difficulté, nous procédons au changement de variable $U_z^{n-1}\psi_{zz} = \phi$. Nous obtenons alors un nouveau système d'équations :

$$n\phi_z = ik + Re(\lambda\psi_z + ikU\psi_z - ik\psi U_z) \quad \text{pour } z \in [0, 1 - Bi[,$$

$$n\phi = (1 - ikB) - ReBi(\lambda + ikU)\psi_z - \varepsilon s \frac{\pi B^2}{2} k^2 \quad \text{en } z = 1 - Bi \quad (\text{continuité contraintes tangentielles}) ,$$

$$(\lambda + ikU) + ik(\psi + Bi\psi_z) = \varepsilon s \frac{\pi B^2}{2} k^2 \psi_z \quad \text{en } z = 1 - Bi \quad (\text{condition cinématique}) , \quad (4.18)$$

$$\psi = 0 \quad \text{en } z = 0 \quad (\text{non glissement}) ,$$

$$\psi_z = 0 \quad \text{en } z = 0 \quad (\text{non glissement}) .$$

Nous avons utilisé deux méthodes de résolution numérique. La première consiste à résoudre l'équation d'Orr-Sommerfeld et les conditions aux limites associées par une **méthode spectrale de collocation de Chebyshev**. Cette méthode vise à calculer l'amplitude des variables du problème dépendant de z telles que $\psi(z)$ et $\theta(z)$ sous la forme d'une série de polynômes de Chebyshev :

$$f(z) = \sum_{n=0}^N a_n T_n(z)$$

avec $T_n(z) = \cos(N \cos^{-1}(z))$.

N est le nombre de noeuds du polynôme de Chebyshev, et correspond aussi au nombre de points discrets sur le maillage de l'épaisseur de la couche, ainsi qu'au nombre de modes calculés. L'équation d'Orr-Sommerfeld et les conditions aux limites peuvent alors être transformées en un problème algébrique linéaire (matriciel) où les inconnues sont les coefficients a_n . Les opérateurs de dérivation (par rapport à z) sont approchés par des opérateurs discrets, sous forme de matrices. Le nombre N de polynômes nécessaire dépend du nombre de Reynolds étudié et de la pulsation λ ou du nombre d'onde k selon l'étude effectuée :

- Stabilité temporelle

Nous résolvons un système aux valeurs propres de la forme $AX = \lambda BX$ avec les vecteurs propres X qui contiennent les champs de perturbations en fonction de z tels que $X = \begin{bmatrix} \psi(z) \\ \theta(z) \end{bmatrix}$

4.3. RÉOLUTION NUMÉRIQUE DU SYSTÈME

et les valeurs propres $\lambda = \lambda_R + i\lambda_I$ où λ_R est le taux de croissance temporel et λ_I la pulsation. Le nombre d'onde k est réel.

- Stabilité spatiale

Nous résolvons un système aux valeurs propres de la forme $(A_0 + kA_1 + k^2A_2)X = 0$ avec les vecteurs propres X qui contiennent les champs de perturbations en fonction de z tels que $X = \begin{bmatrix} \psi(z) \\ \theta(z) \end{bmatrix}$ et les valeurs propres $k = k_R + ik_I$ où k_R est le nombre d'onde et k_I le taux de croissance spatial. La pulsation λ est un imaginaire pur.

La seconde méthode est **la méthode de shooting** dans laquelle nous essayons différents couples (λ, k) jusqu'à trouver ceux qui permettent de vérifier les 4 conditions aux limites. Pour optimiser cette recherche, nous utilisons une méthode de Newton, basée sur l'expression de la condition cinématique, que l'on écrit formellement :

$$\mathcal{F}(k, \lambda) = \lambda + ikU + ik\psi + ikBi\psi_z - \varepsilon s \frac{\pi Bi^2}{2} k^2 \psi_z$$

Il s'agit alors de trouver, à k fixé, la valeur de λ qui annule \mathcal{F} (stabilité temporelle), ou à λ fixé, le k qui annule \mathcal{F} (stabilité spatiale). À chaque itération, il est nécessaire de recalculer la solutions $\psi(z)$ qui correspond au couple (k, λ) .

Pour la méthode shooting, il est important de donner des valeurs initiales raisonnables car cela réduit sensiblement le temps de calcul. Ceci est important pour nous, car à un k donné (respectivement à un λ donné), il y a une infinité de modes possibles or seul le mode le plus instable nous intéresse. Aux ondes longues (ou basses fréquences), une estimation correcte de k ou λ est donnée par la vitesse de phase obtenue dans le développement de Balmforth et Liu (2004). Ainsi, la courbe de dispersion est construite progressivement, chaque résultat servant d'estimation initiale pour la valeur suivante. En pratique, il s'est avéré assez rare de ne pas trouver le mode le plus instable, et les rares fois où c'est arrivé, les résultats ont été identifiés et n'ont pas été gardés.

Nous avons vu dans le chapitre précédent que le modèle de Balmforth et Liu (2004) ne permet pas de décrire les relations de dispersion observées expérimentalement. C'est d'ailleurs l'une des principales raisons qui nous a conduit à effectuer un modèle en prenant en compte les termes d'ordre ε dans le pseudo-bouchon. À l'aide des méthodes de résolution numérique présentées, nous allons comparer les effets de dispersion obtenus expérimentalement avec ceux des simulations numériques. Pour rappel, le modèle d'ordre ε dépend de s , le signe de u'_{bx} , nous nous sommes donc proposés de regarder les deux modes obtenus pour $s = -1$ et $s = 1$. Par souci de clarté, nous noterons ε^+ le mode avec le signe positif et ε^- celui avec le signe négatif.

Pour le modèle à l'ordre 0 en ε , nous voyons sur la figure (4.4.a) que la vitesse de phase part de c_b aux ondes longues et converge vers un plateau quand ω augmente. Ce plateau est supérieur à 1 pour

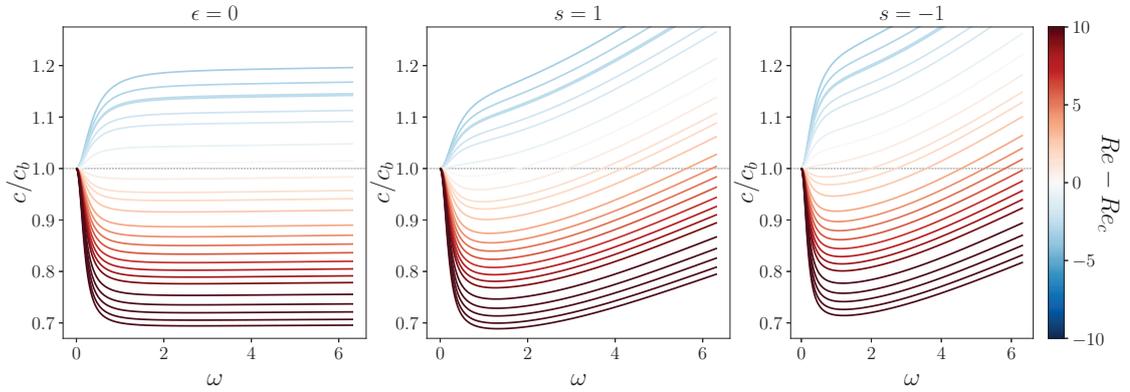


FIGURE 4.4 – Vitesse de phase normalisée c/c_b en fonction de la pulsation ω pour (a) l'ordre 0 (b) le mode ε^+ et (c) le mode ε^- .

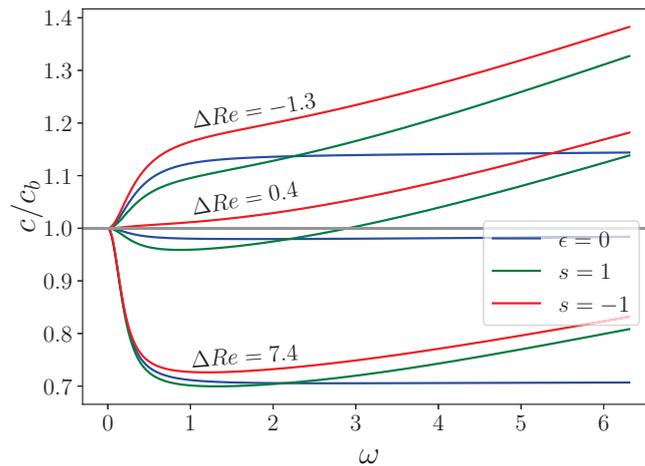


FIGURE 4.5 – Variation de la vitesse phase normalisée c/c_b en fonction de la pulsation ω dans 3 cas différents avec $\Delta Re = Re - Re_c$ pour l'ordre 0 et les modes ε^+ et ε^- .

les nombres de Reynolds pour lesquels l'écoulement est stable et inférieur à 1 pour les nombres de Reynolds pour lesquels l'écoulement est instable. Pour l'ordre ε , représenté sur les figures (4.4.b) et (4.4.c), le comportement aux ondes longues est très similaire, et nous retrouvons $c_{stable} > c_b$ et $c_{instable} < c_b$. Toutefois, aux ondes courtes, contrairement au modèle d'ordre 0 en ε , la vitesse de phase normalisée n'atteint pas un plateau et croît aussi bien pour le mode ε^+ que pour le mode ε^- . Cette différence est observable sur la figure (4.5) qui compare ces résultats pour trois valeurs de Re . Cette croissance de la vitesse de phase aux ondes courtes peut s'expliquer par les termes supplémentaires introduits à l'ordre ε , en particulier le terme en k^2 dans la condition cinématique.

Nous avons aussi comparé les taux de croissance obtenus pour l'ordre 0 et les modes ε^+ et ε^- , re-

4.3. RÉSOLUTION NUMÉRIQUE DU SYSTÈME

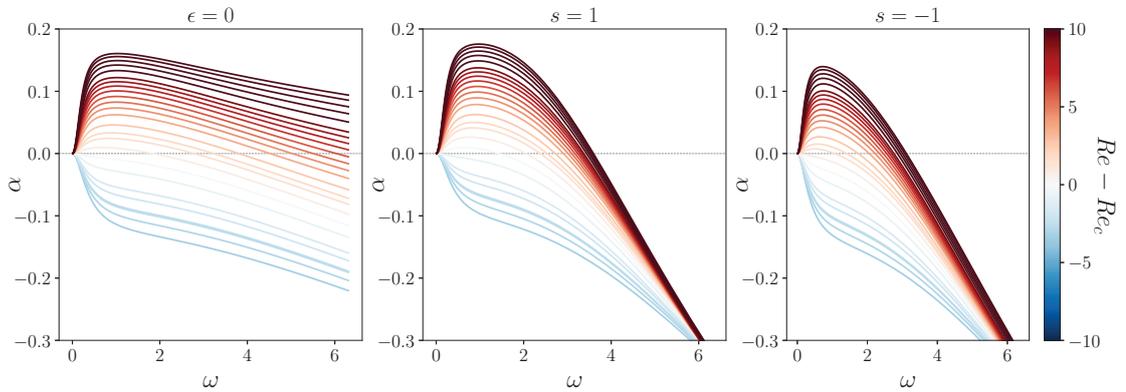


FIGURE 4.6 – Taux de croissance α en fonction de la pulsation ω pour (a) l'ordre 0 (b) le mode ε^+ et (c) le mode ε^- .

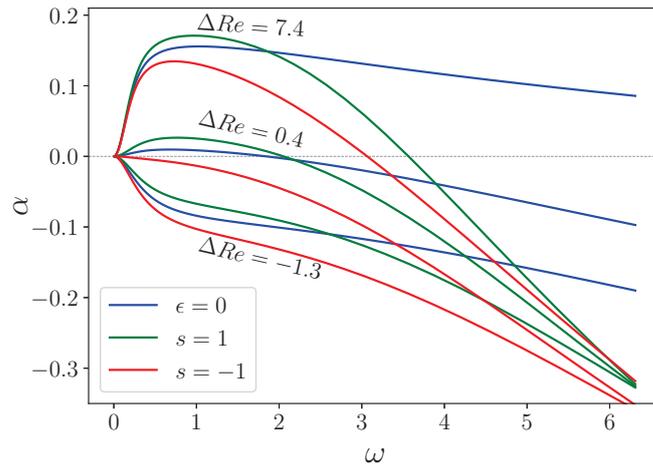


FIGURE 4.7 – Variation du taux de croissance α en fonction de la pulsation ω dans 3 cas différents avec $\Delta Re = Re - Re_c$ pour l'ordre 0 et les modes ε^+ et ε^- .

présentés sur la figure (4.6). Nous observons que la décroissance de α avec ω est plus rapide pour le modèle d'ordre ε quel que soit le cas étudié. Nous avons représenté trois cas distincts dans la figure (4.7) pour faciliter la comparaison. Nous observons notamment que le mode ε^- est toujours plus instable que le mode ε^+ , même si les modes décroissent toujours plus rapidement que l'ordre 0. Une conséquence de cet effet est que, pour les modes instables, la fréquence de coupure obtenue à l'ordre ε est inférieure à celle obtenue à l'ordre 0. Ainsi, le modèle à l'ordre ε permet d'avoir une décroissance de α qui va dans le sens des observations expérimentales (voir fig. (3.12)), car la fréquence du coupure est inférieure à celle calculée avec l'ordre 0. De plus, près du seuil, le mode ε^- est plus instable que celui de l'ordre 0. Cela correspond au choix du signe de s qui abaisse le nombre de Reynolds critique Re_c (voir eq. (4.17)).

Nous nous proposons maintenant de comparer les effets de dispersion (vitesse de phase et taux de croissance) obtenus à l'ordre ε avec les expériences réalisées. Tout d'abord, concernant la vitesse de phase, nous obtenons une structure en faisceau similaire comme illustré sur la figure (4.8). De plus, pour les nombres de Reynolds pour lesquels l'écoulement est instable, la vitesse de phase est inférieure à celle des nombres de Reynolds pour lesquels l'écoulement est stable. Toutefois, nous observons une différence significative entre les résultats de l'expérience et les calculs : pour les expériences, la vitesse de phase est systématiquement supérieure à 1 (Re stables ou instables), alors que dans les résultats numériques la vitesse de phase est inférieure à 1 pour les nombres de Reynolds instables.

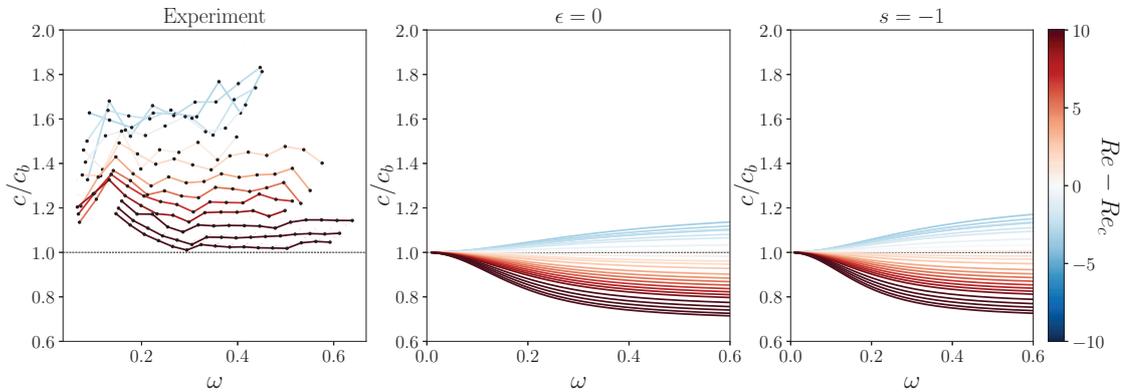


FIGURE 4.8 – Comparaison de variation de la vitesse de phase normalisée c/c_b en fonction de la pulsation ω entre (a) les expériences (b) l'ordre 0 et (c) le mode ε^- .

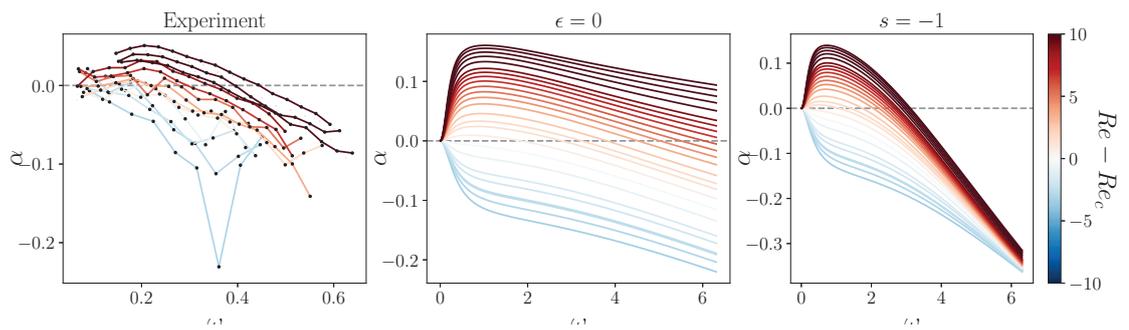


FIGURE 4.9 – Comparaison de la variation du taux de croissance α en fonction de la pulsation ω entre (a) les expériences (b) l'ordre 0 et (c) le mode ε^- .

Ensuite, nous nous intéressons à la variation du taux de croissance α en fonction de la pulsation ω entre les expériences et les simulations numériques pour l'ordre 0 et le mode ε^- . La figure (4.9) montre que nous retrouvons une structure similaire, caractéristique d'une instabilité avec un seuil.

4.3. RÉSOLUTION NUMÉRIQUE DU SYSTÈME

Toutefois, il est à noter que nous n'avons pas les mêmes échelles en ω et en α . Les fréquences de coupure sont encore beaucoup trop grandes pour les résultats numériques (même à l'ordre ε) et les taux de croissance beaucoup trop grands.

Pour aller plus loin, nous avons comparé la variation du taux de croissance dans trois cas différents, représentés sur la figure (4.10). Si nous ne retrouvons pas les mêmes fréquences de coupure dans les expériences et dans les résultats numériques, il est à noter par contre que le comportement aux ondes longues semble bien décrit par les modèles. Les courbes se superposent jusqu'à une certaine pulsation à partir de laquelle la courbe expérimentale s'écarte fortement. Cet écart est d'autant plus tardif que les ondes sont stables. Cette comparaison ne nous permet pas malheureusement de privilégier l'ordre ε par rapport à l'ordre 0. Même si l'ordre ε introduit des changements dans le bon sens, ils restent trop faibles pour rendre compte des expériences. Nous émettons l'hypothèse que l'absence de certains éléments dans le modèle ne permet pas de décrire correctement la chute brutale du taux de croissance α obtenu pour les résultats de l'expérience. Il pourrait s'agir des termes d'ordre 2 en ε , négligés jusqu'à présent dans la modélisation, ou encore d'effets physiques non pris en compte, comme la tension de surface. Cela introduirait des termes stabilisateurs d'ordre supérieur à 2 en k qui auraient pour effet d'abaisser la fréquence de coupure.

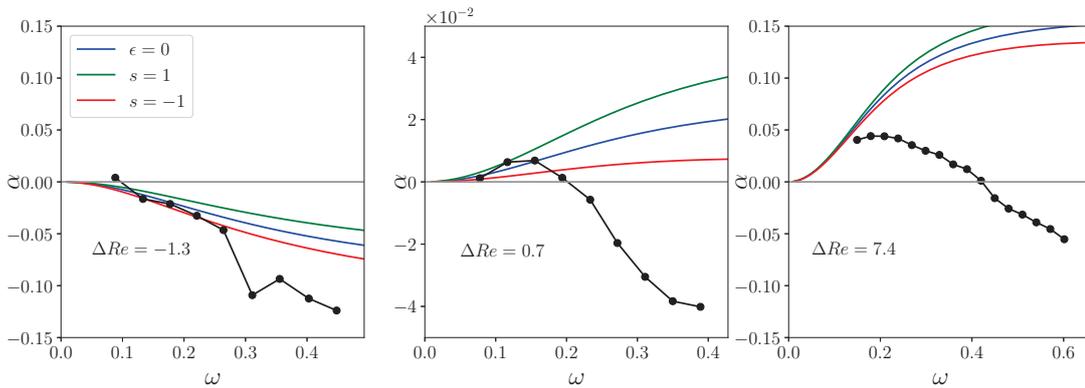


FIGURE 4.10 – Variation du taux de croissance α pour trois cas différents ($\Delta Re = -1.3; 0.7; 7.4$) avec $\Delta Re = Re - Re_c$

4.4 Étude exploratoire de l'effet de la tension de surface

Dans cette section nous avons envisagé l'ajout de l'effet de la tension de surface dans la modélisation en reprenant le développement asymptotique à l'ordre 1 en ε décrit précédemment.

L'équilibre des efforts normaux sur la surface libre fait intervenir la pression de Laplace. Nous avons désormais :

$$(\bar{\tau} - p\bar{\mathbf{I}}) \cdot \bar{\mathbf{n}} = \gamma \mathcal{H} \bar{\mathbf{n}},$$

avec \mathcal{H} la courbure moyenne (m^{-1}) et γ la tension de surface (N/m). Après adimensionnement et linéarisation, seule la composante normale de l'équilibre des contraintes à l'interface (4.2) est modifiée et devient :

$$p = \varepsilon \tau_{zz} - h_{xx} \varepsilon Bo^{-1}, \quad (4.19)$$

avec Bo le nombre de Bond représentant le rapport entre les forces gravitationnelles et les forces de tension de surface. Avec notre système d'adimensionnement, ce nombre sans dimension s'écrit :

$$Bo = \frac{\rho g h^2 \cos \phi}{\gamma \tan \phi}. \quad (4.20)$$

Cette modification de la condition aux limites va changer l'expression de la pression, ce qui va ensuite se répercuter sur l'équation du mouvement et celle sur les contraintes à la surface dans notre modèle.

Nous trouvons ainsi en intégrant la pression p sur l'épaisseur du film à partir de l'équation du mouvement vertical :

$$p - \varepsilon \tau_{zz} + h_{xx} \varepsilon Bo^{-1} = h - z,$$

et l'équation du mouvement horizontal (4.21) devient :

$$Re(u_t + uu_x + wu_z) = 1 - h_x + 2\varepsilon \partial_x \tau_{xx} + \partial_z \tau_{xz} + h_{xxx} \varepsilon Bo^{-1}. \quad (4.21)$$

En conséquence, l'équation linéarisée sur les perturbations dans la zone cisailée (4.5) devient

$$Re(u'_t + Uu'_x + w'U_z) = -h'_x + (nU_z^{n-1}u'_z)_z + h'_{xxx} \varepsilon Bo^{-1} + O(\varepsilon^2). \quad (4.22)$$

La condition aux limites à l'interface fictive entre la partie cisailée et le pseudo-bouchon est déduite du développement asymptotique à l'ordre 1 en ε de l'équation du mouvement horizontal dans le pseudo bouchon, qui s'écrit en tenant compte de la tension de surface :

$$\partial_z \tau_{xz}^{(1)} = Re(u_{et} + U_b u_{\varepsilon x}) - 2\partial_x \tau_{xx}^{(0)} - h'_{xxx} Bo^{-1}.$$

On procède de la même manière en intégrant cette expression sur l'épaisseur du pseudo-bouchon, et l'expression de $\tau_{xx}^{(1)}(Y')$ donnée dans l'eq.(4.11) sans la tension de surface devient :

4.4. ÉTUDE EXPLORATOIRE DE L'EFFET DE LA TENSION DE SURFACE

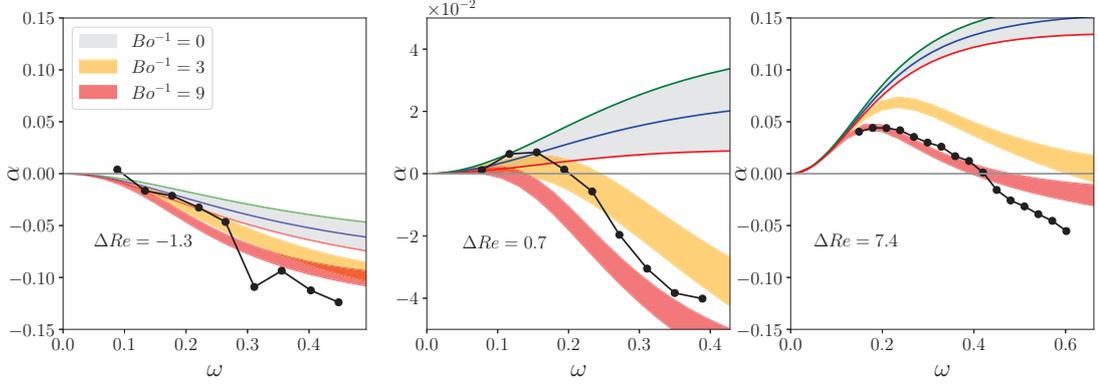


FIGURE 4.11 – Variation du taux de croissance α pour trois cas différents ($\Delta Re = -1.3; 0.7; 7.4$), pour trois nombre de Bond $Bo^{-1} = 0; 3; 9$. La courbe bleue représente l'ordre 0 en ε , et les surfaces comprises entre les modes ε^+ et ε^- ont été colorées selon la valeur de Bo^{-1} .

$$\tau_{xz}^{(1)}(Y') = as \frac{\pi Bi^2}{2} h'_{xx} - Bi h'_{xxx} Bo^{-1}, \quad (4.23)$$

et enfin l'équilibre des contraintes de cisaillement à l'interface fictive s'écrit :

$$-\varepsilon s \frac{\pi Bi^2}{2} h'_{xx} + \varepsilon Bi h'_{xxx} Bo^{-1} + n U_z^{n-1} u'_z - h' - Bi (h'_x + Re(u'_{br} + U_b u'_{bx})) = 0.$$

La condition cinématique sur l'interface fictive n'est, quant à elle, pas modifiée par la prise en compte de la tension de surface.

Finalement, dans le système d'équations (4.12)-(4.16) à l'ordre 1 en ε à résoudre pour déterminer la stabilité spatiale du film de fluide de Hershell-Bulkley sur un plan incliné, la prise en compte de la tension de surface entraîne l'ajout d'un terme supplémentaire uniquement dans les équations (4.12) et (4.13) qui deviennent :

$$n (U_z^{n-1} \psi_{zz})_z = ik + Re (\lambda \psi_z + ikU \psi_z - ik \psi U_z) + ik^3 \varepsilon Bo^{-1}, \quad (4.24)$$

$$n U_z^{n-1} \psi_{zz} = 1 - ikBi - ReBi (\lambda + ikU) \psi_z - \varepsilon s \frac{\pi Bi^2}{2} k^2 - ik^3 \varepsilon Bi Bo^{-1} \quad \text{en } z = 1 - Bi. \quad (4.25)$$

La résolution de ce nouveau système nous a permis d'obtenir la figure (4.11) qui représente l'évolution du taux d'amplification des perturbations en fonction de la pulsation pour les trois cas déjà observés sur la figure (4.10) et pour différentes valeurs du nombre de Bond. Nous observons que les taux de croissance obtenus diminuent plus rapidement et se rapprochent des taux de croissance expérimentaux. Les fréquences de coupure se trouvent donc beaucoup diminuées par l'ajout de la tension de surface, comme on pouvait s'y attendre après l'introduction de termes en k^3 dans les équations. Ainsi le modèle offre une meilleure description du comportement aux ondes courtes. Par contre, le nombre de Bond qui permet de bien reproduire les résultats expérimentaux semble

varier avec le nombre de Reynolds. Ce n'est pas surprenant compte tenu de la variation de Bo avec $\langle h \rangle$, l'épaisseur moyenne de l'écoulement.

Ces résultats bien qu'encourageants nécessitent une étude plus systématique. En effet, dans la littérature, la tension de surface pour un microgel de carbopol serait autour de 50 mN/m (Jørgensen *et al.* (2015)) alors que les valeurs testées nous permettant de nous rapprocher des expériences sont autour de 5 N/m . Cela montre que la tension de surface ne permet pas d'expliquer à elle toute seule l'écart observé entre les expériences et le modèle d'ordre ε .

4.5 Conclusion partielle

Dans ce chapitre, nous avons mené une étude à l'ordre 1 en ε dans le pseudo-bouchon. Ce développement nous a notamment permis de déterminer un terme supplémentaire en $\varepsilon \frac{\pi Bi^2}{2}$ provenant de la condition cinématique. Ce terme avait déjà été trouvé par Fernández-Nieto *et al.* (2010) pour un fluide de Bingham. Cette correction conduit à un abaissement des valeurs du nombre de Reynolds critique Re_c . La comparaison avec nos résultats expérimentaux montre que cet abaissement reste faible. Une analyse plus poussée nous a permis de constater que cette correction ne pouvait pas être négligée pour les très faibles indices rhéologiques. Toutefois, les comparaisons des résultats expérimentaux et théoriques montrent que les prédictions de Balmforth et Liu (2004) sont une bonne approximation des seuils de stabilité (sauf aux très faibles valeurs de n).

Concernant l'évolution de taux de croissance en fonction de la pulsation, nous avons observé que le modèle à l'ordre 1 permet d'avoir une décroissance plus rapide aux ondes courtes que celle à l'ordre 0 (Balmforth et Liu, 2004). Cependant, cette amélioration, qui va dans le bon sens, reste insuffisante. L'étude exploratoire sur la tension de surface suggère qu'il faudrait l'inclure dans le modèle, mais dans tous les cas un modèle d'ordre supérieur en ε semble nécessaire pour parfaitement décrire le comportement aux ondes courtes.

Régime non-linéaire d'un film viscoplastique sur plan incliné

Sommaire

5.1 Dispositif expérimental	102
5.2 Saturation des ondes et raidissement du front	103
5.3 Longueur d'onde, coalescence et nature de la transition	108
5.4 Conclusion partielle	113

Dans les précédents chapitres, nous nous sommes intéressés à la stabilité primaire des films viscoplastiques sur un plan incliné. Dans le présent chapitre, nous nous proposons de regarder le comportement non-linéaire de ces films tombants. Dans cette optique, nous avons réalisé des expériences exploratoires pour observer les différents régimes d'écoulement, leurs structures spatiales et leurs évolutions temporelles. Nous commencerons par présenter les modifications apportées au dispositif expérimental employé. Ensuite, nous présenterons les résultats obtenus et discuterons notamment de la nature de la transition. Enfin, nous terminerons par une conclusion partielle.

5.1 Dispositif expérimental

Le principe du dispositif employé pour l'étude expérimentale du régime non-linéaire d'un film viscoplastique sur plan incliné est identique à celui décrit précédemment pour les expériences de stabilité linéaire. Le dispositif expérimental est schématisé sur la figure (5.1).

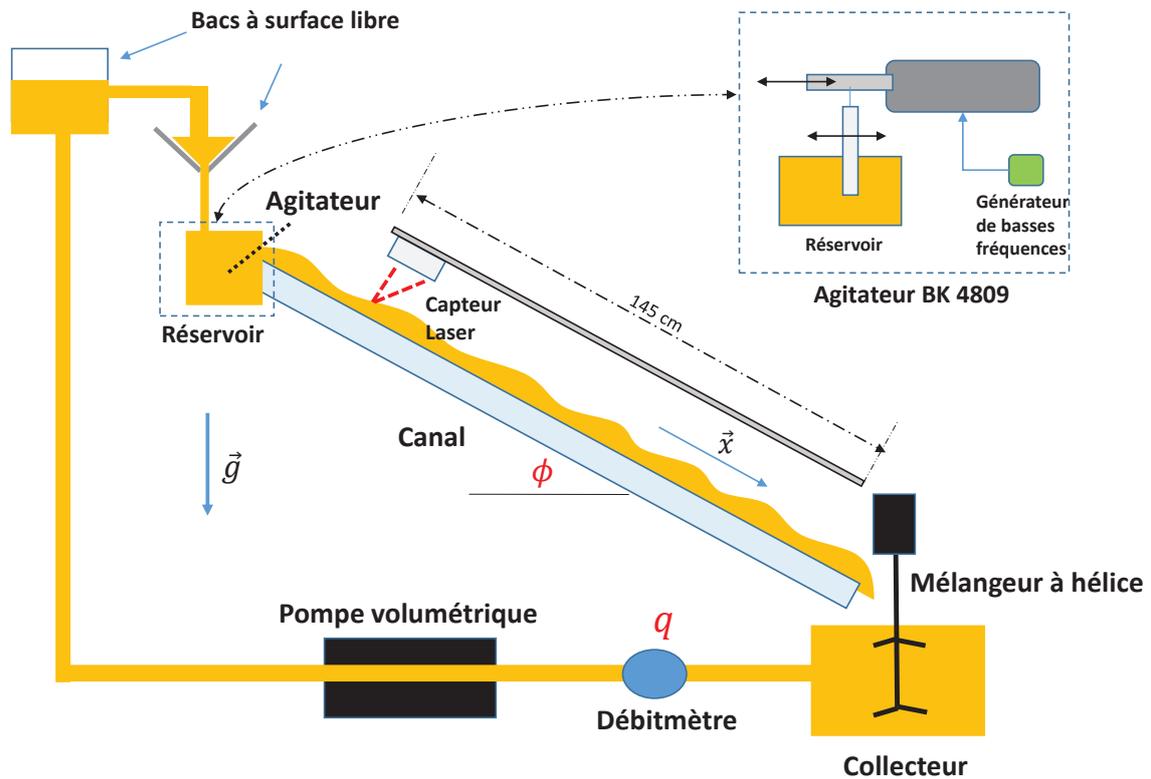


FIGURE 5.1 – Dispositif expérimental pour l'étude du régime non-linéaire.

Le fluide à seuil employé est à base de carbopol 980 selon le procédé de fabrication déjà présenté dans la section (2.1.2). Le fluide est opacifié avec du dioxyde de titane (TiO_2) pour permettre les mesures optiques.

Dans le but d'étudier le régime non-linéaire, nous avons utilisé la même méthode de perturbation et de détection des ondes que celle utilisée pour la stabilité primaire. Toutefois, la distance sur laquelle le régime non-linéaire se développe est plus grande que les 30 centimètres de course de la platine de translation et nous avons dû modifier notre protocole de mesure. Nous avons fixé le télémètre sur un chariot mobile placé au-dessus du canal, qui peut être déplacé manuellement sur l'ensemble de la longueur. Cela nous permet de suivre l'évolution de l'amplitude des ondes sur une distance de

145 centimètres en sortie du canal afin d'observer le régime non-linéaire des ondes. Il est important de mentionner que nous nous plaçons systématiquement dans le cas où l'écoulement est instable, c'est à dire lorsque le taux de croissance linéaire α est positif.

5.2 Saturation des ondes et raidissement du front

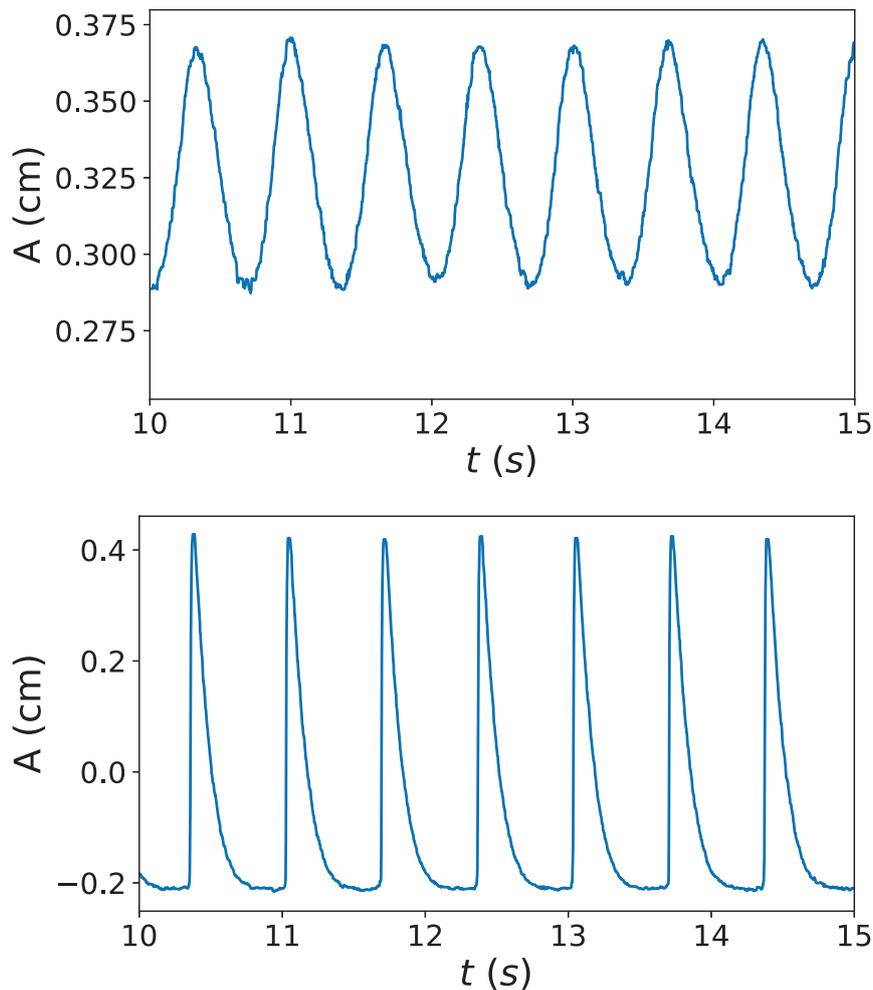


FIGURE 5.2 – Croissance et raidissement du front des ondes pour un film viscoplastique ($\tau_y = 1.34 \text{ Pa}$; $K = 1 \text{ Pa}\cdot\text{s}^n$; $n = 0.53$) sur un plan incliné ($\phi = 13.9^\circ$, $q = 0.396 \text{ L/s}$, $f = 1.5 \text{ Hz}$). Nous déduisons du débit, une épaisseur moyenne $\langle h \rangle$ de 0.47 cm. . La figure représente l'évolution temporelle de l'amplitude des ondes à une distance de 90 cm (haut) et de 10 cm (bas) de la sortie du canal.

Nous allons nous intéresser dans cette section à la saturation et au raidissement des ondes. Tout

CHAPITRE 5. RÉGIME NON-LINÉAIRE D'UN FILM VISCOPLASTIQUE SUR PLAN INCLINÉ

d'abord, la figure (5.2) présente l'amplitude des ondes au cours du temps à deux positions différentes du canal, en haut le signal temporel obtenu à une distance de 90 cm de la sortie du canal et en bas celui à 10 cm. Nous constatons alors que l'amplitude des ondes croît le long du canal. Cette croissance des ondes est accompagnée du raidissement du front c'est à dire que la forme des ondes devient asymétrique, avec la partie amont du front qui est quasi verticale, alors qu'initialement elle était sinusoïdale.

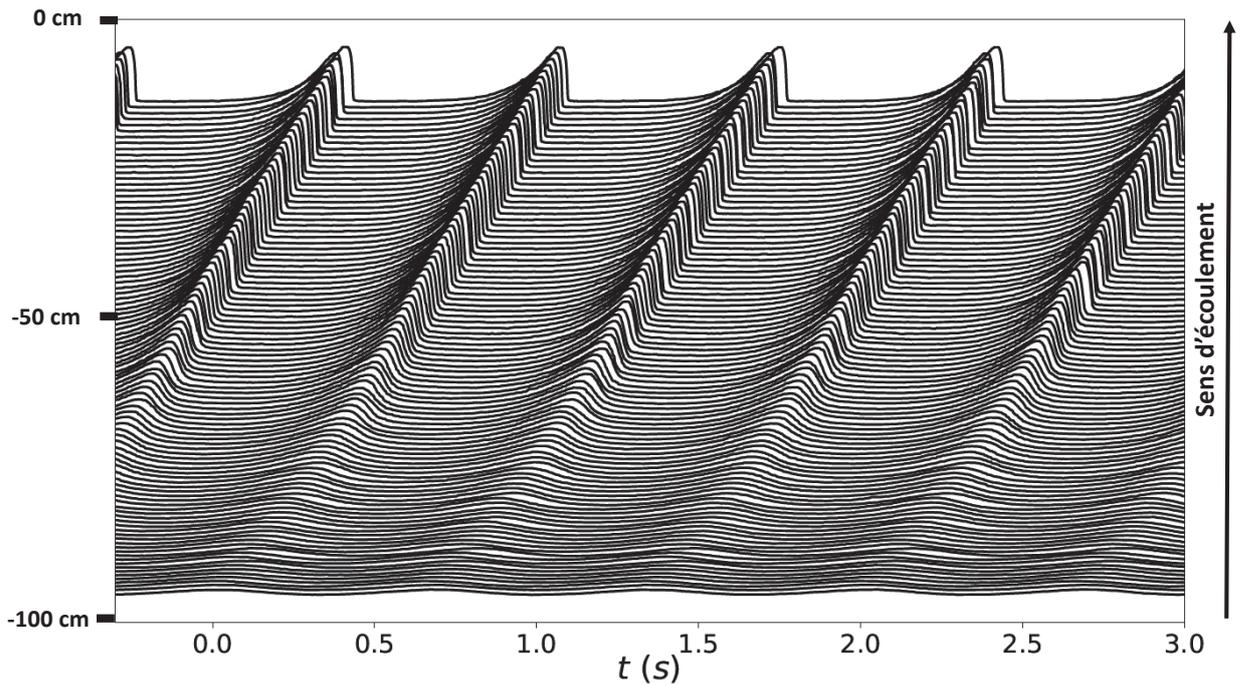


FIGURE 5.3 – Saturation et raidissement du front des ondes en régime non-linéaire d'un film viscoplastique ($\tau_y = 1.34 Pa$; $K = 1 Pa.s^n$; $n = 0.53$) sur un plan incliné ($\langle h \rangle = 0.47 cm$, $\phi = 13.9^\circ$; $q = 0.396 L/s$, $f = 1.5 Hz$). Chaque ligne représente le signal temporel de l'amplitude des ondes à une position donnée le long du canal. La ligne du haut correspondant à la sortie du canal.

Pour visualiser l'évolution et le raidissement du front, qui caractérise le régime non-linéaire, nous avons représenté sur la même figure tous les signaux temporels mesurés à différentes positions dans le canal, accessibles sur la figure (5.3) et la table (5.1). Par souci de visualisation, nous avons effectué un décalage horizontal artificiel pour visualiser le raidissement des fronts lors de la propagation. De plus, les signaux temporels ont été renversés en abscisse pour correspondre à l'observation visuelle. L'amplitude crête à crête est calculée en prenant la moyenne de la différence entre les épaisseurs maximales et minimales du film sur une période donnée. L'amplitude A est alors donnée par :

$$A = \langle \max(h) - \min(h) \rangle$$

5.2. SATURATION DES ONDES ET RAIDISSEMENT DU FRONT

X (en cm)	- 10	-20	-30	-40	-50	-60	-70	-80	-90	-97.5
A (en mm)	6.348	6.340	6.161	5.426	4.134	2.787	1.786	1.200	0.809	0.603

TABLE 5.1 – Évolution de l’amplitude des ondes en fonction de la position le long du canal pour un film viscoplastique ($\tau_y = 1.34 Pa$; $K = 1 Pa.s^n$; $n = 0.53$) sur un plan incliné ($\langle h \rangle = 0.47cm$, $\phi = 13.9^\circ$; $q = 0.396 L/s$, $f = 1.5 Hz$)

avec h , l’épaisseur locale du film.

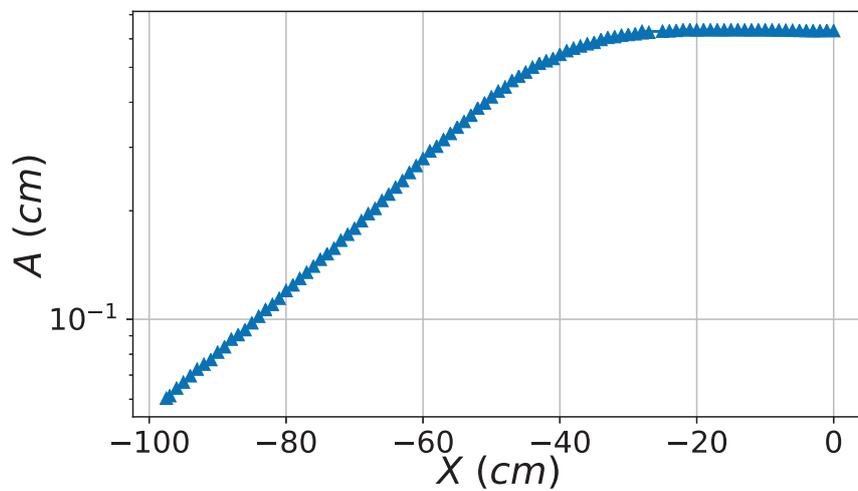


FIGURE 5.4 – Saturation de l’amplitude des ondes sur une distance de 97.5 centimètres de la sortie du canal pour un film viscoplastique ($\tau_y = 1.34 Pa$; $K = 1 Pa.s^n$; $n = 0.53$) sur un plan incliné ($\langle h \rangle = 0.47cm$, $\phi = 13.9^\circ$; $q = 0.396 L/s$, $f = 1.5 Hz$).

La figure (5.4) montre l’amplitude des ondes en fonction de la position le long du canal, et permet de distinguer deux régimes, un régime de croissance exponentielle correspondant au régime linéaire, puis la saturation à une valeur finale A_f . Nous avons pris le soin de nous assurer au préalable que l’amplitude des ondes ne dépend pas de celle engendrée initialement par le pot vibrant. Dans la suite, nous nous sommes intéressé aux éventuelles dépendances de la valeur finale A_f aux deux paramètres de nos expériences, que sont le débit et la fréquence.

Tout d’abord, nous représentons sur la figure (5.5) l’amplitude des ondes en fonction de la distance à la sortie du canal pour différentes fréquences. Dans cet exemple ($\tau_y = 2.44 Pa$; $K = 0.66$; $n = 0.55$; $q = 0.400 L/s$; $\phi = 15.6$), nous observons que l’amplitude de saturation finale des ondes A_f décroît avec la fréquence. La figure (5.6.gauche) montre quant à elle que le régime de saturation dépend également du débit de l’écoulement. Effectivement, nous constatons sur la figure (5.6.droite) et la table (5.2) que l’amplitude des ondes croît avec le débit de l’écoulement.

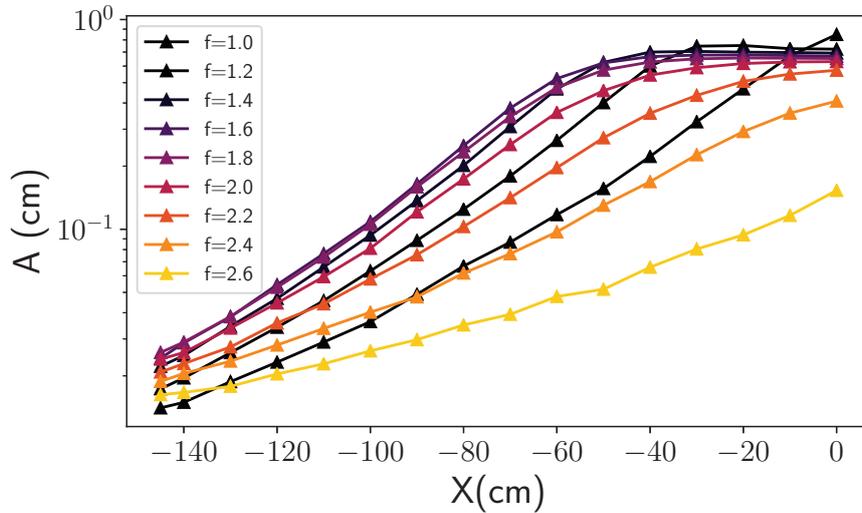


FIGURE 5.5 – Dépendance de l'amplitude de saturation des ondes en fonction de la fréquence imposée pour un film viscoplastique ($\tau_y = 2.44 \text{ Pa}$; $K = 0.66 \text{ Pa}\cdot\text{s}^n$; $n = 0.55$) sur un plan incliné ($\langle h \rangle = 0.41 \text{ cm}$, $\phi = 15.6^\circ$; $q = 0.400 \text{ L/s}$).

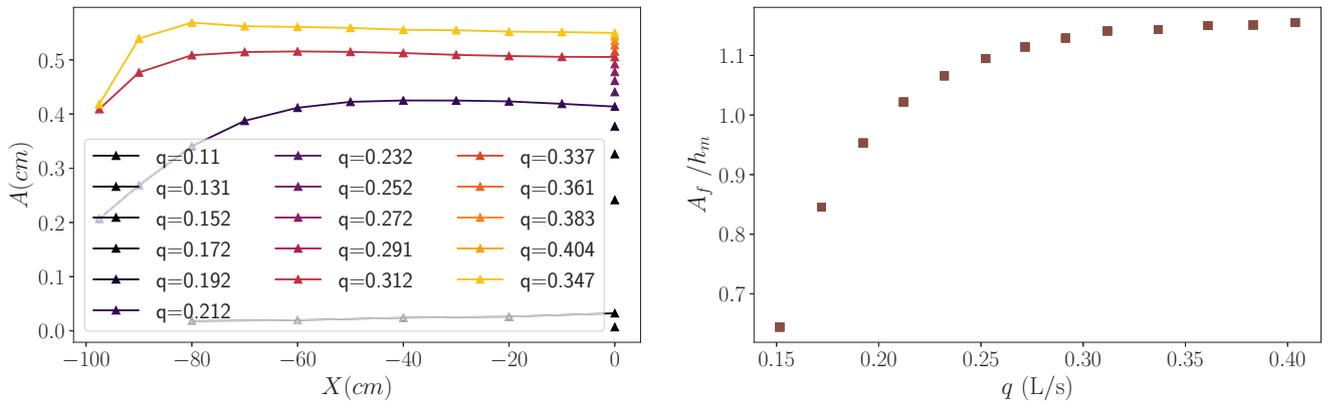


FIGURE 5.6 – Évolution de l'amplitude des ondes le long du canal à différents débits à gauche, et à droite la variation de l'amplitude finale de saturation des ondes A_f normalisée par l'épaisseur moyenne h_m en fonction du débit q pour un film viscoplastique ($\tau_y = 1.85 \text{ Pa}$; $K = 0.54 \text{ Pa}\cdot\text{s}^n$; $n = 0.57$) sur un plan incliné ($\phi = 13.2^\circ$; $f = 1.7 \text{ Hz}$).

Pour aller plus loin, nous avons effectué une modélisation consistant à considérer que l'amplitude de saturation des ondes correspond au moment où l'ensemble du fluide compris dans une longueur d'onde est entraîné par la vague. Nous pouvons estimer que le volume de fluide compris sous une vague varie comme A_f^2 . S'il n'y a pas de perte, et si les ondes n'ont pas été accélérées, ce volume doit correspondre au volume contenu initialement sur une période tel que :

5.2. SATURATION DES ONDES ET RAIDISSEMENT DU FRONT

$$A_f \sim \sqrt{\lambda(\langle h \rangle - h_p)} \sim \sqrt{\frac{c_b}{f}(\langle h \rangle - h_p)}, \quad (5.1)$$

avec A_f l'amplitude des ondes, λ la longueur d'onde, $\langle h \rangle$ l'épaisseur moyenne du film, h_p l'épaisseur du pseudo-bouchon, c_b la vitesse de phase de Balmforth et Liu (2004) et f la fréquence. Pour rappel, la hauteur h_p est aussi l'épaisseur minimale nécessaire pour que le fluide s'écoule.

Dans cette modélisation, nous constatons que lorsque le débit augmente, c'est à dire quand c_b et $\langle h \rangle$ augmentent également, nous avons une augmentation de l'amplitude de saturation des ondes A_f ce qui correspond bien au comportement observé sur la figure (5.6). De manière analogue, nous constatons dans la modélisation que lorsque la fréquence f augmente, nous avons aussi une diminution de l'amplitude de saturation des ondes. Ce comportement est représenté sur la figure (5.7). Nous constatons que la modélisation faite précédemment telle que $A_f \sim \frac{1}{\sqrt{f}}$ correspond à la ligne orange fonctionne bien. Les trois points expérimentaux qui s'en écartent sont des fréquences (2.2, 2.4 et 2.6 Hz) pour lesquels l'amplitude de saturation des ondes n'a pas été atteinte dans le canal comme nous pouvons le voir sur la figure (5.5).

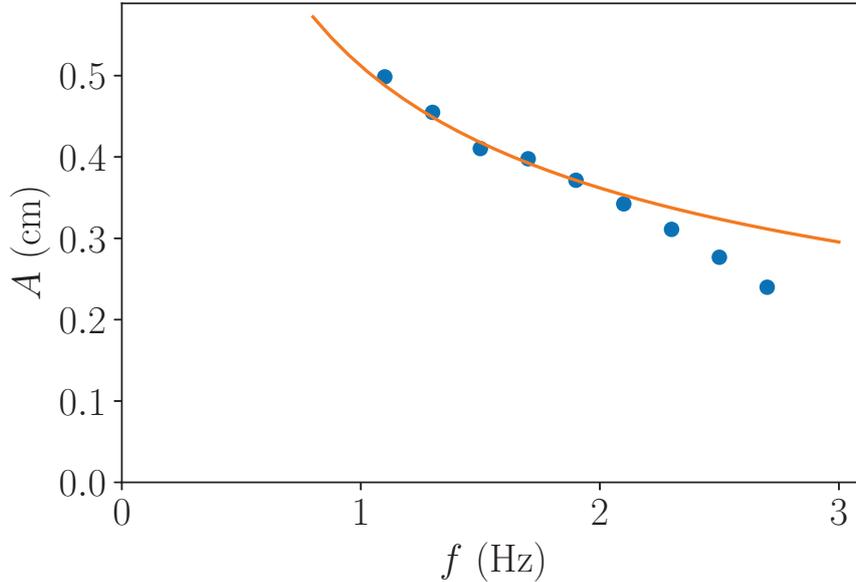


FIGURE 5.7 – Évolution de l'amplitude finale des ondes d'un film viscoplastique en fonction de la fréquence. Les points bleus sont des données expérimentales ($\langle h \rangle = 0.47\text{cm}$, $\tau_y = 1.34\text{ Pa}$; $K = 1\text{ Pa}\cdot\text{s}^n$; $n = 0.53$; $\phi = 13.9^\circ$; $q = 0.396\text{ L/s}$) et la ligne orange décrit l'évolution de l'amplitude de saturation A_f en fonction de la fréquence en $\frac{1}{\sqrt{f}}$.

q (L/s)	h_m (mm)	A (mm)
0.152	3.366	2.414
0.172	3.461	3.261
0.192	3.548	3.773
0.212	3.627	4.137
0.232	3.701	4.407
0.252	3.771	4.613
0.272	3.834	4.777
0.291	3.896	4.921
0.312	3.957	5.053
0.336	4.026	5.154
0.361	4.091	5.269
0.383	4.145	5.349
0.403	4.198	5.434

TABLE 5.2 – Variation de l'amplitude finale des ondes A_f et de l'épaisseur moyenne h_m du film en fonction du débit q pour un film viscoplastique ($\tau_y = 1.34$ Pa; $K = 1$ Pa.s ^{n} ; $n = 0.53$) sur un plan incliné ($\phi = 13.9^\circ$; $q = 0.396$ L/s, $f = 1.5$ Hz)

5.3 Longueur d'onde, coalescence et nature de la transition

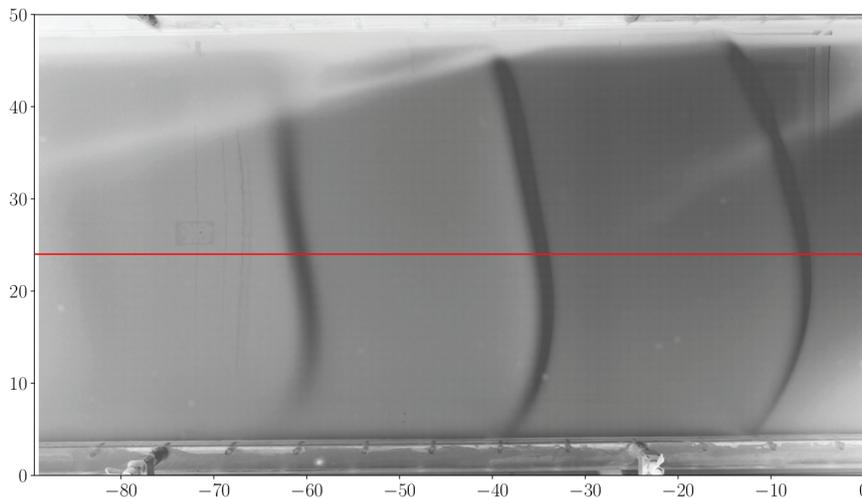


FIGURE 5.8 – Visualisation du régime non-linéaire d'un film viscoplastique ($\tau_y = 2.44$ Pa; $K = 0.66$ Pa.s ^{n} ; $n = 0.55$) sur un plan incliné ($\langle h \rangle = 0.41$ cm, $\phi = 15.6^\circ$; $q = 0.400$ L/s; $f = 1.8$ Hz).

Pour aller plus loin dans la vérification de notre modèle, nous avons voulu déterminer les longueurs d'onde. Pour cela, nous avons suivi l'évolution spatio-temporelle de l'écoulement à l'aide d'une caméra placée au dessus du canal. Ainsi, en éclairant l'écoulement avec un spot lumineux, la ca-

5.3. LONGUEUR D'ONDE, COALESCENCE ET NATURE DE LA TRANSITION

méra permet de filmer les ondes à la surface. Une image typique d'un écoulement est représentée sur la figure (5.8). Ces images obtenues sont ensuite traitées numériquement pour en extraire la longueur d'onde λ . A cet effet, nous construisons un diagramme spatio-temporel, c'est à dire une image formée de la même ligne (en rouge sur la figure (5.8)) prise sur toutes les images du film. La méthodologie est schématisée sur la figure (5.9).

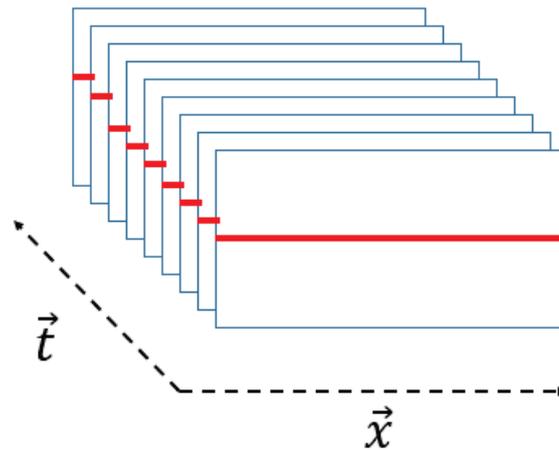


FIGURE 5.9 – Schématisation de la construction du diagramme spatio-temporel à partir d'images acquises à différents instants.

Des diagrammes spatio-temporels obtenus pour deux fréquences imposées (1.4 Hz et 2.6 Hz) sont représentés sur la figure (5.10). La figure (5.10.gauche), correspondant à 1.4 Hz, donne une longueur d'onde en accord avec la fréquence imposée.

Si nous regardons l'évolution de l'amplitude de saturation des ondes A_f en fonction de la longueur d'onde λ , nous observons sur la figure (5.11) que la modélisation effectuée précédemment (5.1) et représentée par la ligne orange ne fonctionne pas. L'une des hypothèses est que nous mesurons λ en sortie et non en entrée du canal, c'est à dire dans le régime non-linéaire. Or il est probable que la vitesse de phase c dépend de A et donc change entre les régimes linéaire et non-linéaire. De ce fait, la longueur d'onde peut également changer à cause de l'accélération ou du ralentissement des ondes au cours de leur croissance. Cette hypothèse est accréditée par la figure (5.10.droite) où les ondes se rapprochent puis fusionnent comme indiqué par le cercle rouge sur cette figure. Cela correspond au phénomène de coalescence, déjà observé pour les fluides newtoniens (Chang *et al.*, 2000; Malamataris *et al.*, 2002).

Pour finir, nous proposons de déterminer le type de transition en modélisant l'évolution de l'amplitude par une équation de Landau :

$$\frac{dA}{dx} = \sigma A - \frac{l}{2} A^3,$$

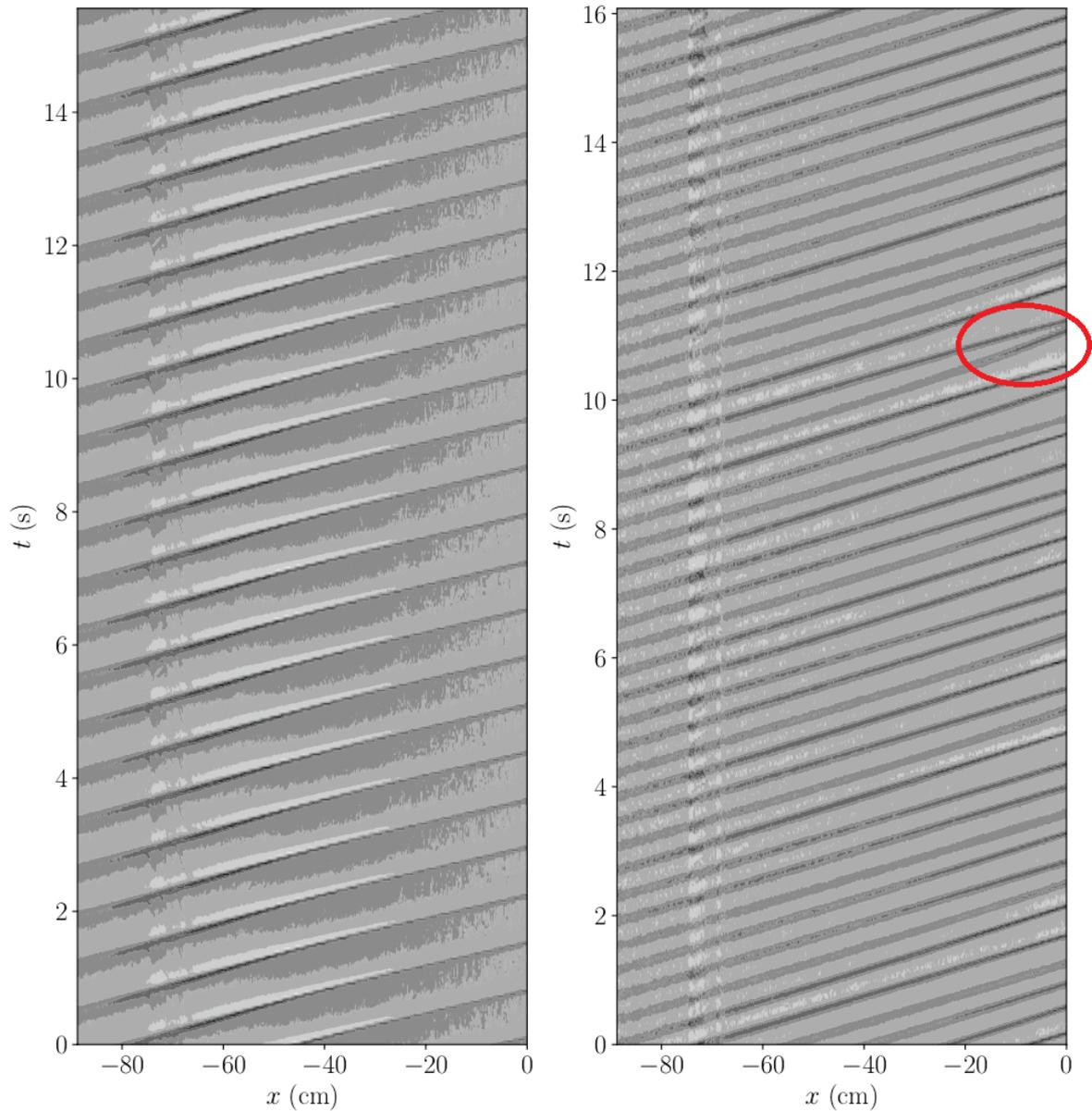


FIGURE 5.10 – Diagramme spatio-temporel des ondes à deux fréquences de forçage respectivement 1.4 Hz à gauche et 2.6 Hz à droite pour un film viscoplastique ($\tau_y = 2.44 \text{ Pa}$; $K = 0.66 \text{ Pa}\cdot\text{s}^n$; $n = 0.55$) sur un plan incliné ($\langle h \rangle = 0.41 \text{ cm}$, $\phi = 15.6^\circ$; $q = 0.400 \text{ L/s}$).

avec A l'amplitude des ondes, σ la croissance linéaire des ondes et l une constante dépendant des caractéristiques de l'écoulement. Lorsque l est positive, la transition est dite supercritique, sinon elle est sous-critique.

A partir de l'évolution expérimentale de l'amplitude des ondes en fonction de la position le long du canal, nous déterminons la croissance linéaire σ en calculant la pente logarithmique puis nous

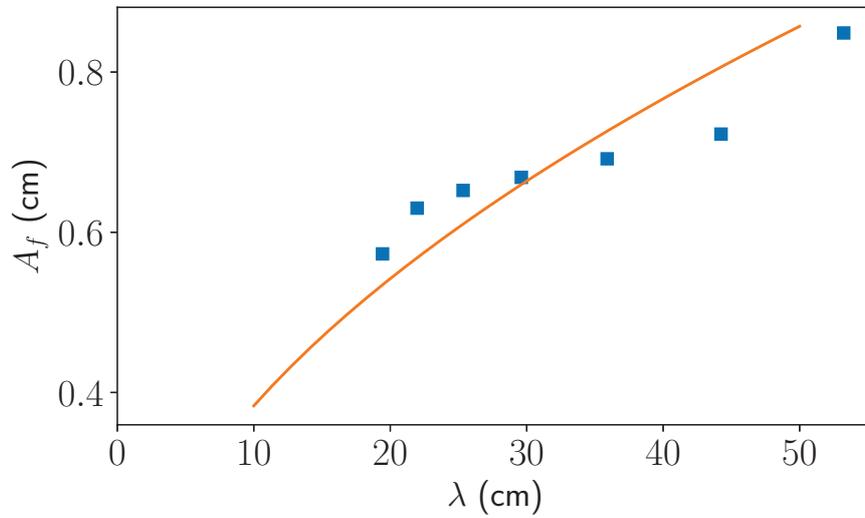


FIGURE 5.11 – Évolution de l’amplitude finale des ondes en fonction de la longueur d’onde pour un film viscoplastique ($\tau_y = 2.44 \text{ Pa}$; $K = 0.66 \text{ Pa}\cdot\text{s}^n$; $n = 0.55$) sur un plan incliné de $\phi = 15.6^\circ$ et d’épaisseur moyenne $\langle h \rangle = 0.41 \text{ cm}$. Les points bleus sont des données expérimentales et la ligne orange correspond à l’évolution décrite par le modèle (5.1) en $A_f \sim \lambda^{1/2}$.

traçons $\sigma A - \frac{dA}{dx}$ en fonction de A^3 . La figure (5.12) montre que nous obtenons bien une allure linéaire et que la pente de l est positive. Par conséquent, nous pouvons affirmer que la transition est supercritique comme l’avaient déjà trouvé Balmforth et Liu (2004) dans leurs résultats numériques sur un modèle intégré.

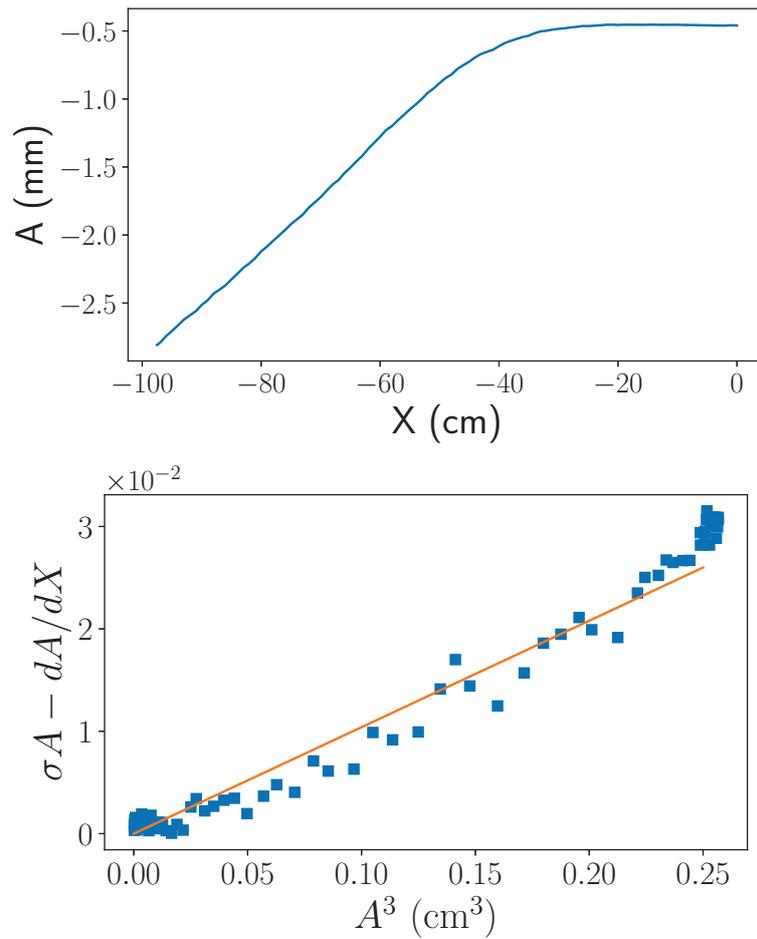


FIGURE 5.12 – Évolution de l'amplitude en fonction de position en haut, et en bas $\sigma A - \frac{dA}{dx}$ en fonction de A^3 pour un film viscoplastique ($\tau_y = 2.44 \text{ Pa}$; $K = 0.66 \text{ Pa}\cdot\text{s}^n$; $n = 0.55$) sur un plan incliné de $\phi = 15.6^\circ$ et d'épaisseur moyenne $\langle h \rangle = 0.41 \text{ cm}$.

5.4 Conclusion partielle

Dans ce chapitre, nous avons examiné le régime non-linéaire de l'écoulement d'un film viscoplastique sur plan incliné. Nous avons pu mettre en évidence la saturation de l'amplitude des ondes. Cette saturation est fonction de la fréquence imposée et du débit de l'écoulement. En effet, plus le débit est important (respectivement plus la fréquence est faible) et plus l'amplitude de saturation des ondes est importante. Cette saturation s'accompagne d'un raidissement du front des ondes, propre au régime non-linéaire et étudié numériquement par Balmforth et Liu (2004). Nos expériences ont permis également de visualiser la coalescence des ondes c'est à dire la fusion des ondes lors du régime non-linéaire d'un film viscoplastique. Enfin, nous avons déterminé que la transition est de nature supercritique.

Conclusion générale et perspectives

Les travaux réalisés dans le cadre de cette thèse ont permis d'étudier expérimentalement la stabilité de l'écoulement d'un film viscoplastique sur un plan incliné. Nous avons présenté en préliminaire les fluides viscoplastiques ou fluides à seuil que nous avons décrit avec un modèle rhéologique de Herschel et Bulkley (1926). Les fluides à seuil sont largement présents dans notre environnement quotidien et sont notamment impliqués dans des catastrophes naturelles comme les coulées de boue ou de lave.

Dans le premier chapitre, nous avons dressé un état de l'art des travaux existants sur le sujet. Nous avons vu que la stabilité linéaire des fluides newtoniens est bien connue dans la littérature, aussi bien d'un point de vue expérimental (Liu *et al.*, 1993) que théorique (Benjamin, 1957; Yih, 1963). Nous avons vu aussi que de nombreux travaux ont abordé la stabilité des fluides non-newtoniens au cours de ces dernières années aussi bien théoriquement (Shaqfeh *et al.*, 1989; Huang et Khomami, 2001; Millet *et al.*, 2008; Chakraborty *et al.*, 2019) qu'expérimentalement (Forterre et Pouliquen, 2003; Allouche *et al.*, 2017). Toutefois, la connaissance de ces écoulements s'avère complexe et est l'objet de nombreux travaux contemporains. Plus particulièrement, nous avons vu qu'il n'existe que deux principaux développements asymptotiques (Balmforth et Liu, 2004; Fernández-Nieto *et al.*, 2010) permettant de décrire la stabilité linéaire des fluides viscoplastiques. Enfin, sur le plan expérimental, nous avons vu que les travaux étaient rares et ne permettaient pas de mesurer précisément les seuils de stabilité.

C'est la raison pour laquelle nous avons mis en place une expérience modèle, présentée dans le chapitre 2, permettant de mesurer ces seuils. Le principe de ce dispositif était d'établir un écoulement permanent sur un canal incliné, puis de le perturber afin de déterminer les conditions dans lesquelles ces perturbations étaient stables ou instables. Nous avons pu ainsi établir des cartes de stabilité dans les plans (Re, f) et (Bi, f) , et ce pour deux fluides viscoplastiques différents que sont le carbopol 980 et le kaolin.

Dans le chapitre 3, les résultats expérimentaux de stabilité primaire ont montré que les prédic-

tions de Balmforth et Liu (2004), étude de référence pour nos expériences, décrivent correctement les seuils de stabilité obtenus expérimentalement. Cependant, ce modèle, issu d'un développement asymptotique à l'ordre 0 en ε , ne permet pas de décrire les effets de dispersion. Fernández-Nieto *et al.* (2010) ont préconisé de compléter l'étude par un développement asymptotique à l'ordre 1 en ε .

Dans le chapitre 4, nous avons proposé une extension du développement jusqu'à l'ordre 1 en ε pour un fluide de Herschel-Bulkley, en utilisant le formalisme de Balmforth et Liu (2004). Nous avons obtenu dans l'expression du nombre de Reynolds critique un terme supplémentaire en $-\varepsilon\pi Bi^2/2$, similaire à celui obtenu par Fernández-Nieto *et al.* (2010) pour un fluide de Bingham. Cependant, nous avons vu que la correction apportée est faible. Les effets de dispersion obtenus numériquement avec ce nouveau modèle présentent par ailleurs une fréquence de coupure plus basse que le modèle à l'ordre 0. Ce résultat va dans le sens des observations expérimentales, mais la correction apportée par le modèle est encore largement insuffisante. Nous avons émis l'hypothèse qu'il manquait des éléments dans le modèle. Il pourrait s'agir des termes d'ordre 2 en ε ou encore de la tension de surface, dont la prise en compte introduirait des termes stabilisateurs d'ordre supérieur à 2 en k .

Dans le dernier chapitre, nous avons exploré le régime non-linéaire des ondes à la surface d'un film viscoplastique sur un plan incliné. Nous avons retrouvé des phénomènes similaires à ceux décrits dans la littérature pour les fluides newtoniens, à savoir une saturation de l'amplitude des ondes, ainsi qu'un raidissement des fronts. Nous avons vu que cette saturation dépendait de la fréquence de forçage et du débit de l'écoulement, ce qui semble indiquer que cette saturation est imposée avant tout par la quantité de fluide disponible. Enfin, nous avons mis en évidence la nature super-critique de la transition.

Pour aller plus loin dans la modélisation, la première étape serait d'intégrer les termes de tension de surface au modèle proposé. Ces termes pourraient avoir pour effet de stabiliser les ondes courtes, ce qui offre de bonnes perspectives pour mieux décrire la dispersion. Si cela s'avère insuffisant, il faudrait alors envisager d'étendre la modélisation jusqu'à l'ordre 2 en ε .

D'un point de vue expérimental, il serait intéressant d'adapter le dispositif pour pouvoir aller plus loin en Bingham afin d'explorer la divergence du seuil d'apparition des instabilités telle que décrite par le modèle de Balmforth et Liu (2004). De telles modifications du dispositif permettraient aussi de tester la validité du modèle pour les fluides à contrainte seuil beaucoup plus élevées pour lesquels le modèle du pseudo-bouchon pourrait sembler moins adapté. Dans la lignée d'études théoriques récentes (Millet *et al.*, 2019), nous pourrions aussi envisager d'étudier l'influence d'un fond poreux sur l'apparition de l'instabilité, ce qui pourrait correspondre à certaines configurations géophysiques ou industrielles particulières.

Enfin, la courte exploration que nous avons menée sur le régime non-linéaire appelle à des études plus poussées, ainsi un canal plus long nous permettrait d'étudier d'autres régimes d'instabilités, comme par exemple la coalescence de plusieurs solitons, ou encore leur déstabilisation transverse comme observé pour les fluides newtoniens (Liu *et al.*, 1995).

Annexes

A. Méthode de Benney (1966)

Dans cette annexe, nous allons aborder la méthode de Benney (1966). Benney a étudié les perturbations d'ondes dans un écoulement laminaire d'un fluide newtonien visqueux sur un plan incliné. Il commence par déterminer les équations constitutives d'un film tombant et les conditions aux limites. Ensuite, il adimensionne les équations en introduisant des variables et nombres sans dimensions. Dans son étude, les trois nombres sans dimension (en plus de la pente ϕ) sont les nombres de Reynolds $Re = \frac{gh^3 \sin \phi}{2\nu^2}$, de Weber $We = \frac{\gamma}{\rho gh^2}$ où γ est la tension de surface ainsi que $\varepsilon = \frac{h}{L}$ le rapport d'aspect propre aux études en eaux peu profondes. Ensuite, il introduit une fonction de courant lié à la perturbation de l'écoulement ψ . En introduisant cette fonction de courant dans les équations adimensionnées, il obtient la formalisation du problème de stabilité donnée par :

$$\psi_{zzzz} = \varepsilon Re \psi_{zzt} + (\bar{u} + \psi_{xzz} - (\bar{u}_{zz})\psi_x + \varepsilon^2(-2\psi_{xxxx}) + \varepsilon^3 Re \psi_{xxt} + (\bar{u} + \psi_z)\psi_{xxx} - \psi_x \psi_{xxz} + \varepsilon^4(-\psi_{xxxx})). \quad (2)$$

Pour déterminer l'apparition de l'instabilité linéaire, il effectue des développements asymptotiques pour des perturbations aux ondes longues c'est à dire ε petit. Les nombres de Reynolds et de Weber sont supposés être de l'ordre 1 en ε . Ainsi, pour une valeur de ε petite, il considère un développement de la forme :

$$\psi(x, z, t) = \psi^{(0)}(x, z, t) + \varepsilon \psi^{(1)}(x, z, t) + \varepsilon^2 \psi^{(2)}(x, z, t) + \dots \quad (3)$$

$$p(x, z, t) = p^{(0)}(x, z, t) + \varepsilon p^{(1)}(x, z, t) + \varepsilon^2 p^{(2)}(x, z, t) + \dots \quad (4)$$

avec p le champ de pression et ψ la fonction de courant.

En s'appuyant sur l'équation (2), il affirme que pour un problème d'ordre 0, $\psi_{zzzz}^{(0)} = 0$ et donc $\psi^{(0)} = \alpha^{(0)}(z, t) + \alpha^{(1)}(z, t)z + \alpha^{(2)}(x, t)z^2 + \alpha^{(3)}(x, t)z^3$ avec α une constante de z . A partir des équations constitutives et des conditions aux limites d'ordre 0, il trouve que :

$$\psi^{(0)} = (h-1)z^2, \quad (5)$$

$$h_t = -2h^2 h_x = A(h)h_x. \quad (6)$$

Au regard des équations différentielles, des conditions aux limites et à la nécessité d'avoir une solution unique, il modifie l'équation (6) sous la forme :

$$h_t = A(h)h_x + \varepsilon[(B(h)h_{xx} + C(h)h_x^2] + \varepsilon^2[D(h)h_{xxx} + E(h)h_x h_{xx} + F(h)h_x^3] + \varepsilon^3[G(h)h_{xxxx} + H(h)h_x h_{xxx} + I(h)h_{xx}^2 + J(h)h^2 h_{xx}] + O(\varepsilon^4). \quad (7)$$

1. μ dans son article

L'équation (7) constitue l'équation de type "Benney" (1966) utilisé par de nombreux scientifiques. Cette notation permet alors de trouver facilement les solutions $\psi^{(0)}, \psi^{(1)}$ à l'aide des fonctions $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J$. Il indique d'au-delà de $\psi^{(2)}$, la résolution devient plus complexe (mais pas plus que pour la théorie linéaire des ondes longues selon lui). A noter qu'en supposant $We = O(1)$, la tension de surface n'apparaîtra que pour les termes d'ordre $O(\varepsilon^3)$.

B. Calcul de l'atténuation des pulsations de la pompe à l'aide du bac tranquilisateur

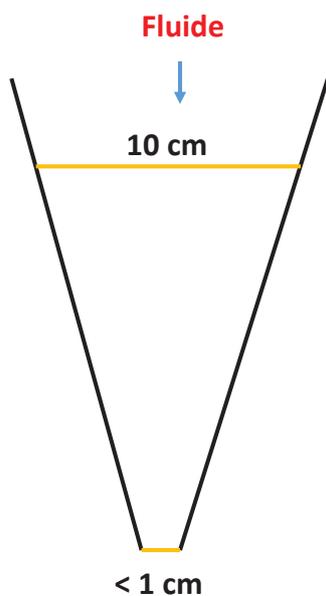


FIGURE 13 – Bac tranquilisateur à surface libre

Nous commençons par définir la variation d'épaisseur de la surface libre sous la forme :

$$H(t) = H_0 + \frac{\partial D}{\omega S} \sin(\omega t) ,$$

avec H_0 la hauteur de la surface libre sans pulsation, ω la pulsation et S la section d'entrée du bac. Le débit en sortie lui s'exprime sous la forme :

$$d = \sqrt{2gHs} ,$$

avec d le débit de sortie, g la gravité ; H la hauteur de la surface libre et s la section de sortie. En introduisant, l'expression de la hauteur H dans celle du débit, nous obtenons :

$$d = \sqrt{2gH} ,$$

$$d = \sqrt{H_0 + \frac{\partial D}{\omega S} \sin(\omega t)s} ,$$

$$d \sim D_0 \left[1 + \frac{\partial D}{\omega S H_0} \sin(\omega t) \right] ,$$

$$d \sim D_0 + \partial d \sin(\omega t) ,$$

avec la variation de débit $\partial d = \frac{\partial D}{\omega S H_0} D_0$ où $D_0 = \sqrt{2gH_0}s$ est le débit d'entrée. Nous pouvons récrire la variation de débit comme suit :

$$\partial d = \frac{\partial D}{\omega S H_0} D_0 ,$$

$$\partial d = \partial D \sqrt{\frac{2g}{H_0}} \frac{1}{\omega} \frac{s}{S} ,$$

$$\partial d = \partial D \frac{\omega_0}{\omega} \frac{s}{S} ,$$

avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{2g}{H_0}}$ la pulsation propre.

En prenant l'exemple d'une vibration à 2Hz, nous trouvons une pulsation d'environ 12 Hz. Considérant une hauteur de H_0 de 10 cm, la pulsation propre du système est d'environ 10 Hz. Ainsi, nous pouvons estimer $\frac{\omega_0}{\omega} \sim 1$. Ainsi, la variation de débit devient :

$$\partial d = \frac{s}{S} \partial D . \quad (8)$$

Par conséquent, nous constatons que l'atténuation dépend uniquement du rapport des sections. Dans notre cas, la section d'entrée S est d'environ 0.1 L m^2 et la section de sortie d'environ 0.005 L m^2 avec L , la distance longitudinale du bac. Nous en déduisons donc que le bac permet d'atténuer les perturbations d'un facteur 20.

C . Seuils de stabilité expérimentaux

Carbopol 980 : $n=0.54$

Dans cette partie, nous présentons les résultats des seuils de stabilité primaire obtenus pour un fluide de carbopol 980. Ces résultats correspondent à ceux décrits dans la table (3.2).

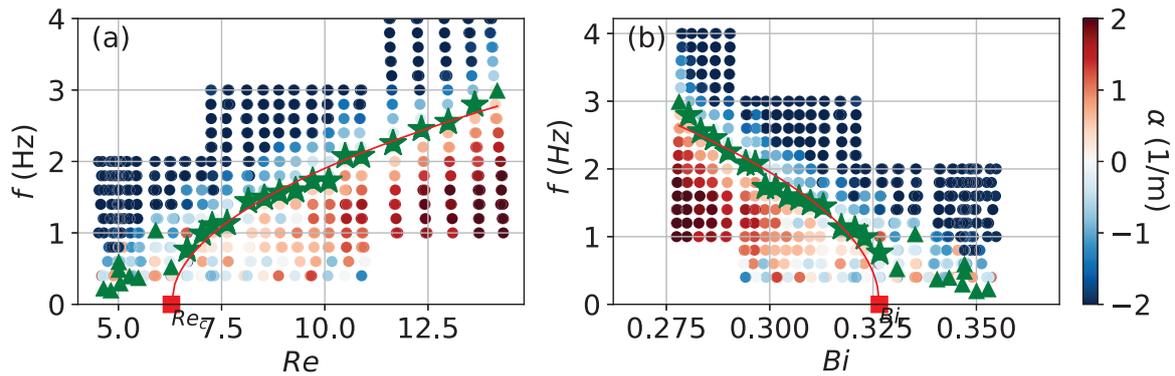


FIGURE 14 – Expérience Carbopol 1 : $\tau_y = 4.21$, $K = 0.99$, $n = 0.54$ et $\phi = 15.6^\circ$

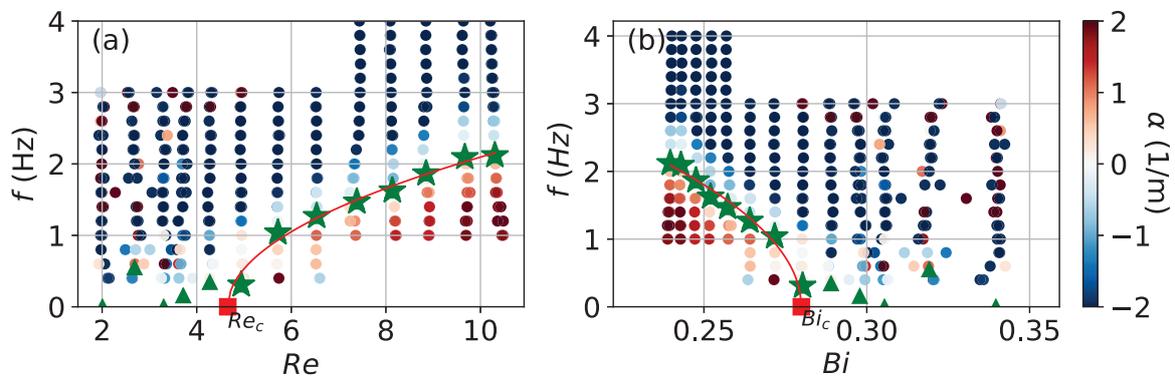


FIGURE 15 – Expérience Carbopol 2 : $\tau_y = 3.59$, $K = 1.03$, $n = 0.54$ et $\phi = 15.6^\circ$

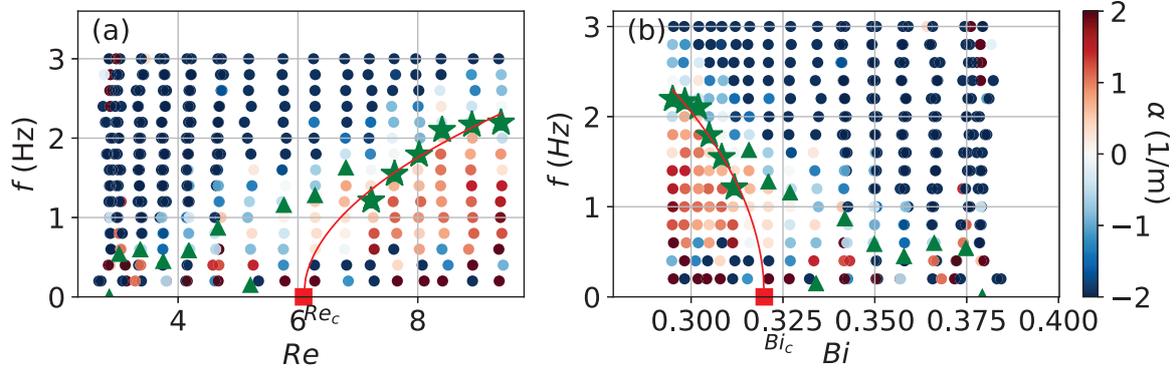


FIGURE 16 – Expérience Carpool 3 : $\tau_y = 5.05$, $K = 1.34$, $n = 0.53$ et $\phi = 15.6^\circ$

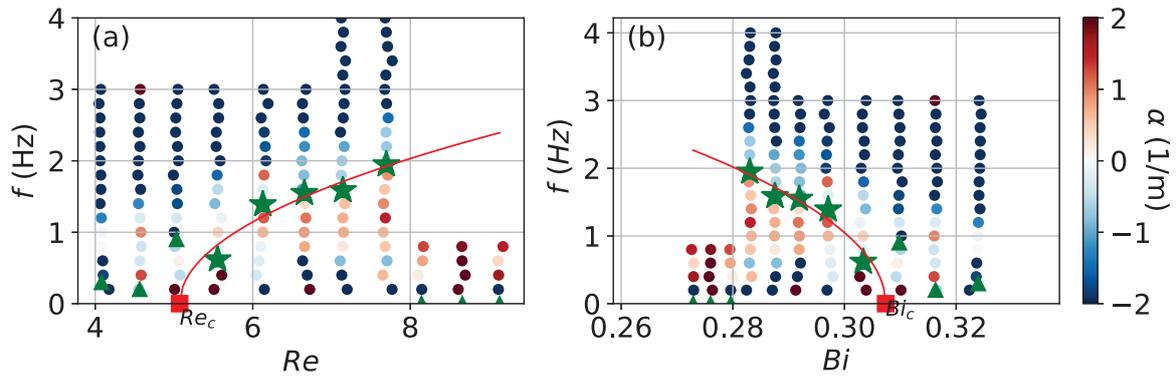


FIGURE 17 – Expérience Carpool 4 : $\tau_y = 3.59$, $K = 1.03$, $n = 0.54$ et $\phi = 15.6^\circ$

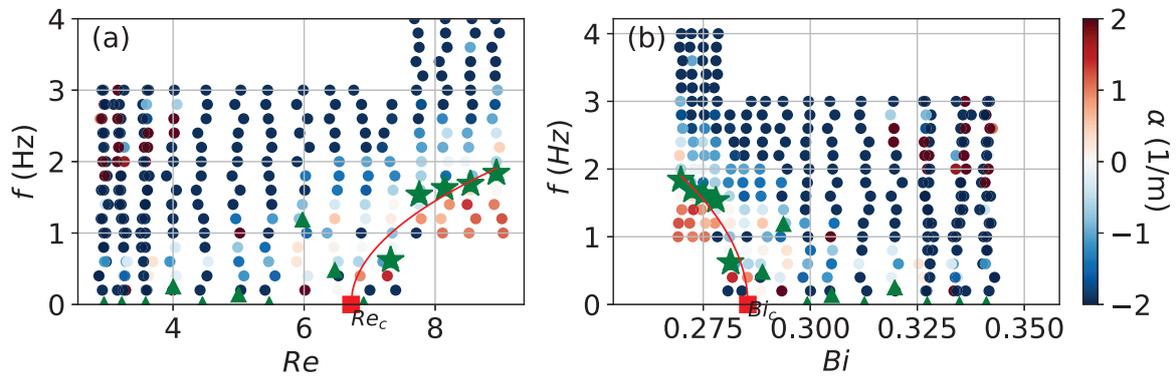


FIGURE 18 – Expérience Carpool 5 : $\tau_y = 4.53$, $K = 1.37$, $n = 0.54$ et $\phi = 15.6^\circ$

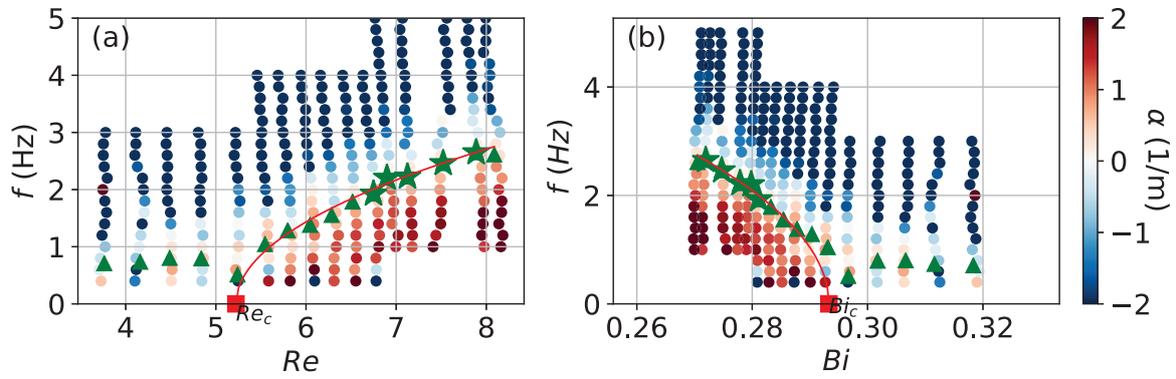


FIGURE 19 – Expérience 6 : $\tau_y = 4.16$, $K = 1.23$, $n = 0.54$ et $\phi = 13.6^\circ$

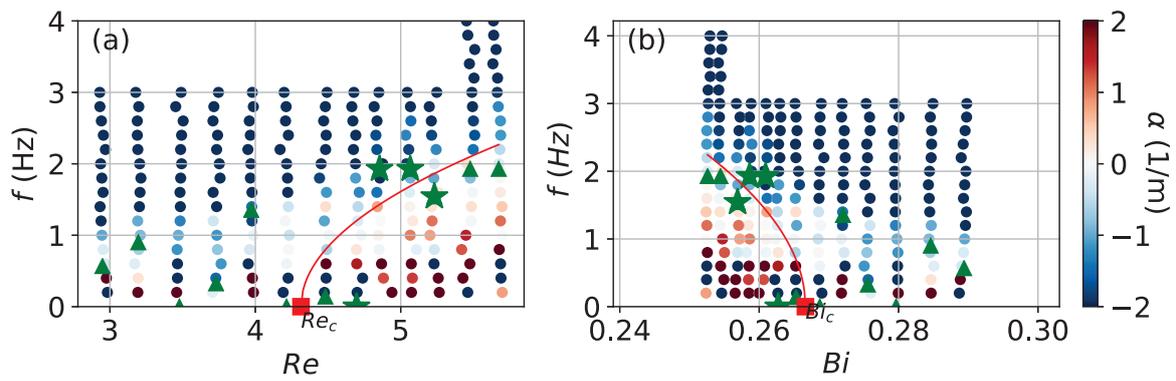


FIGURE 20 – Expérience Carpool 7 : $\tau_y = 3.28$, $K = 1.50$, $n = 0.52$ et $\phi = 11.1^\circ$

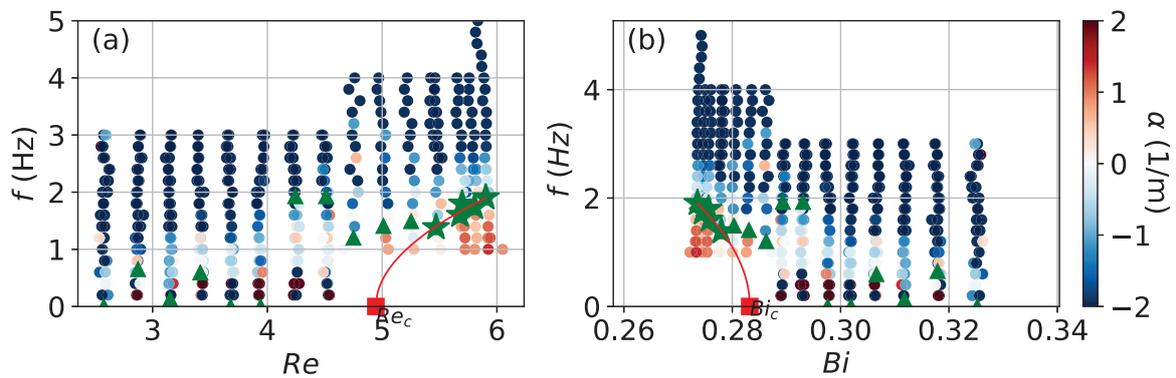


FIGURE 21 – Expérience Carpool 8 : $\tau_y = 4.33$, $K = 1.51$, $n = 0.53$ et $\phi = 12.3^\circ$

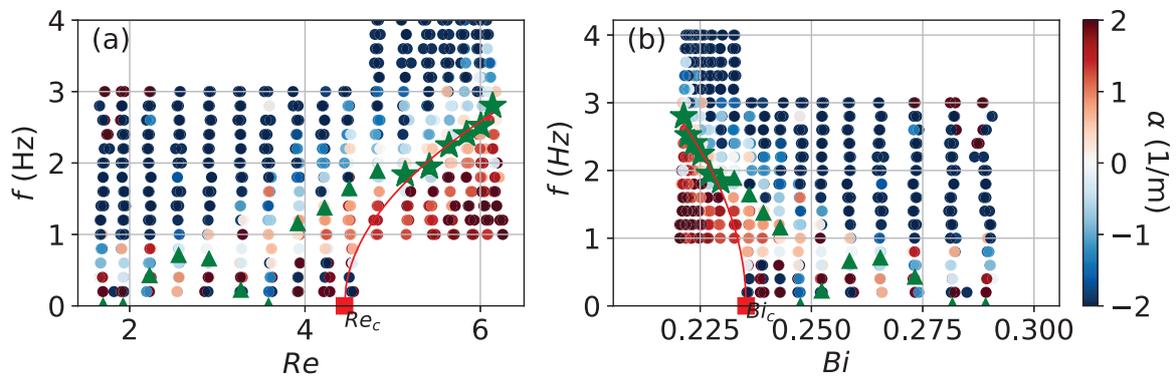


FIGURE 22 – Expérience Carpopol 9 : $\tau_y = 3.58$, $K = 1.47$, $n = 0.53$ et $\phi = 15.6^\circ$

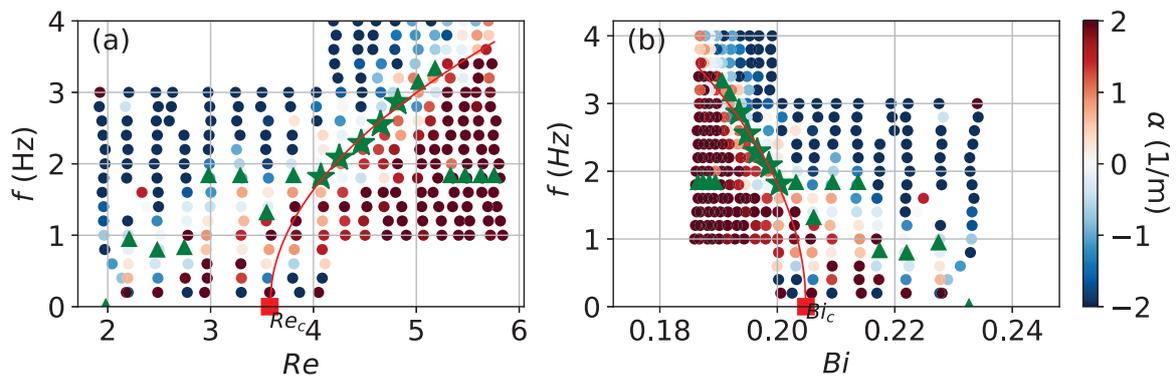


FIGURE 23 – Expérience Carpopol 10 : $\tau_y = 2.96$, $K = 1.46$, $n = 0.53$ et $\phi = 15.6^\circ$

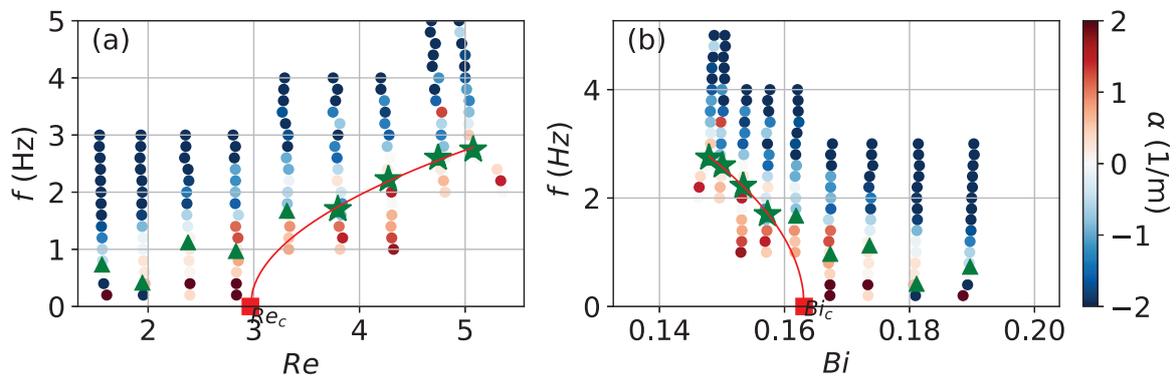
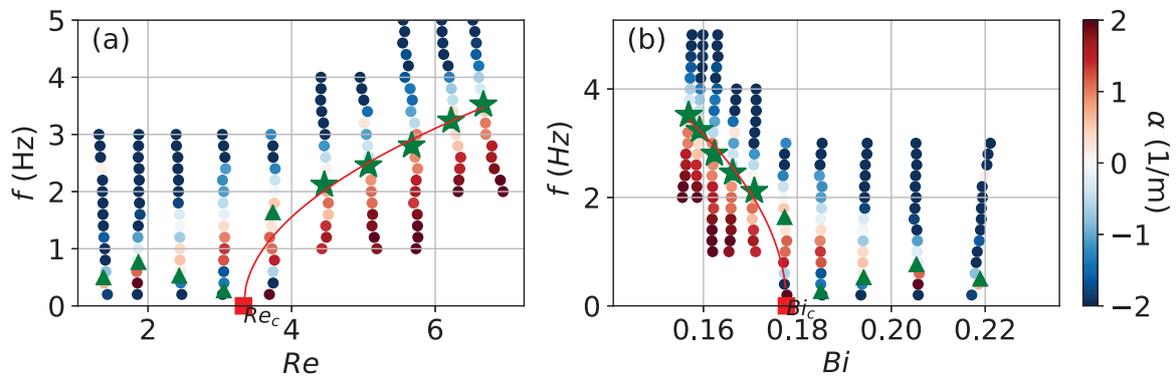
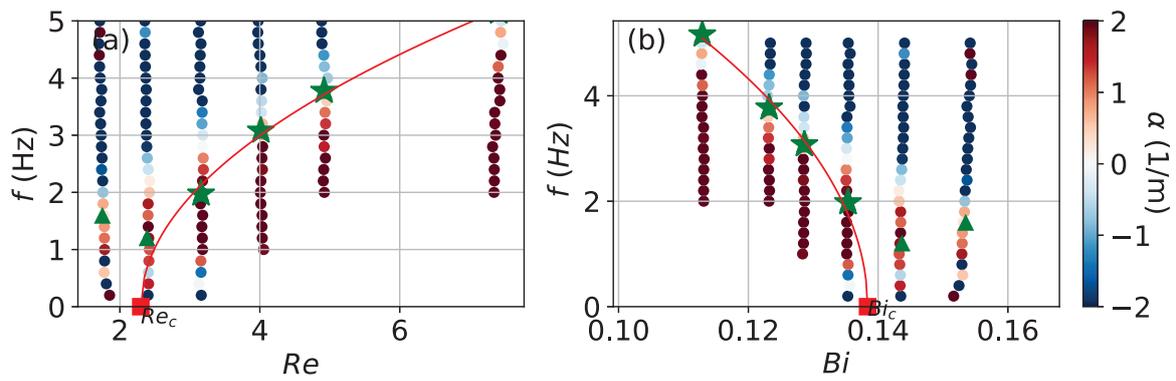
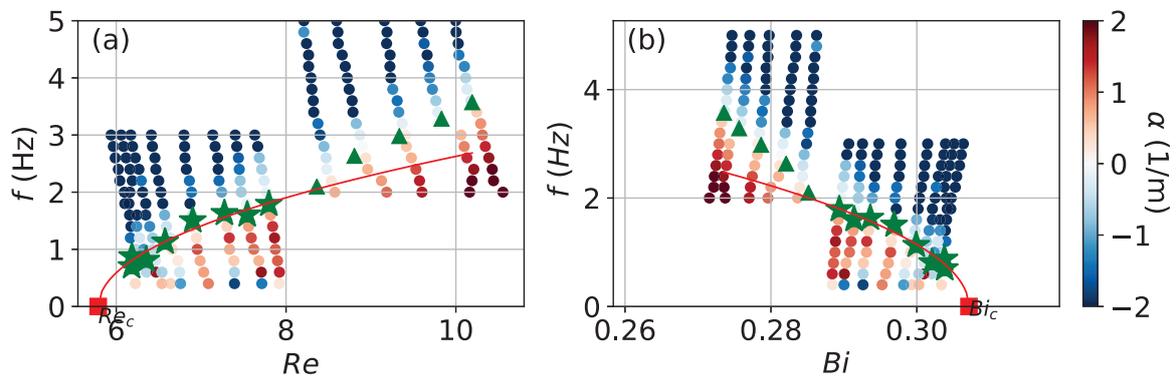


FIGURE 24 – Expérience Carpopol 11 : $\tau_y = 1.87$, $K = 1.21$, $n = 0.54$ et $\phi = 9.7^\circ$

FIGURE 25 – Expérience carpool 12 : $\tau_y = 2.20$, $K = 1.20$, $n = 0.54$ et $\phi = 12^\circ$ FIGURE 26 – Expérience carpool 13 : $\tau_y = 1.63$, $K = 1.26$, $n = 0.54$ et $\phi = 15.6^\circ$ FIGURE 27 – Expérience carpool 14 : $\tau_y = 4.17$, $K = 1.15$, $n = 0.53$ et $\phi = 15.6^\circ$

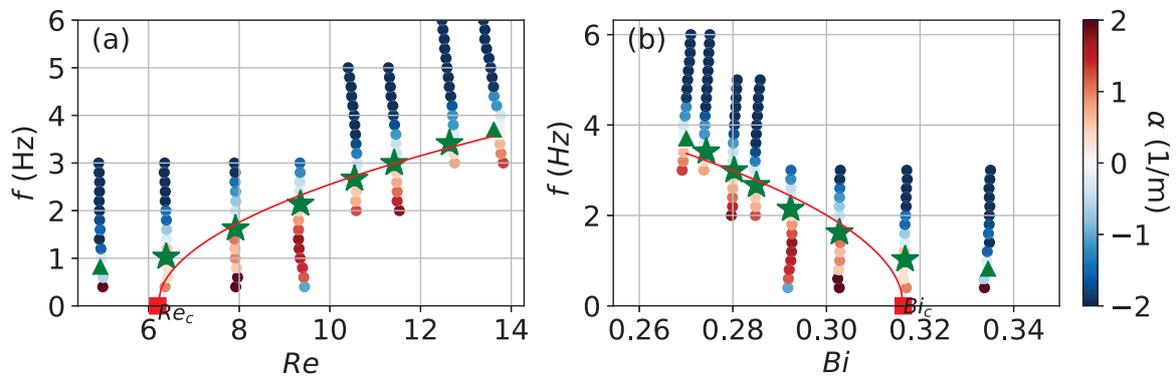


FIGURE 28 – Expérience carpool 15 : $\tau_y = 4.55$, $K = 1.19$, $n = 0.54$ et $\phi = 15.6^\circ$

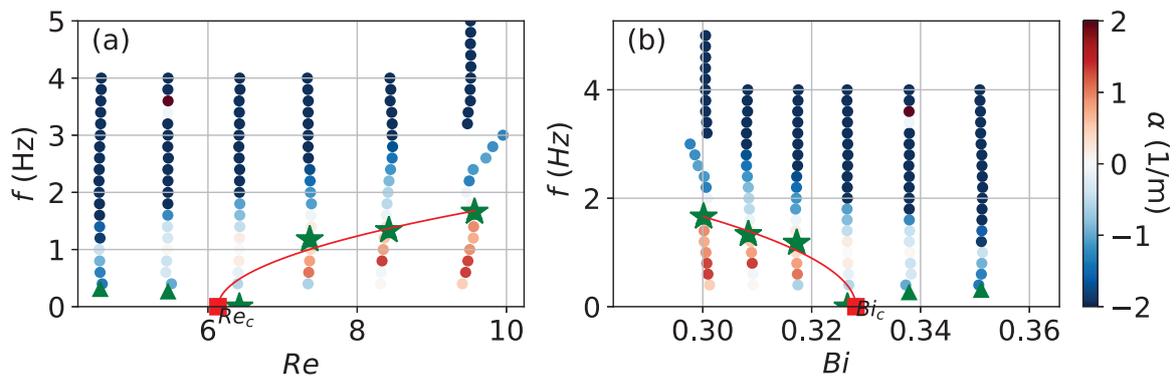


FIGURE 29 – Expérience carpool 16 : $\tau_y = 4.41$, $K = 1.21$, $n = 0.54$ et $\phi = 15.6^\circ$

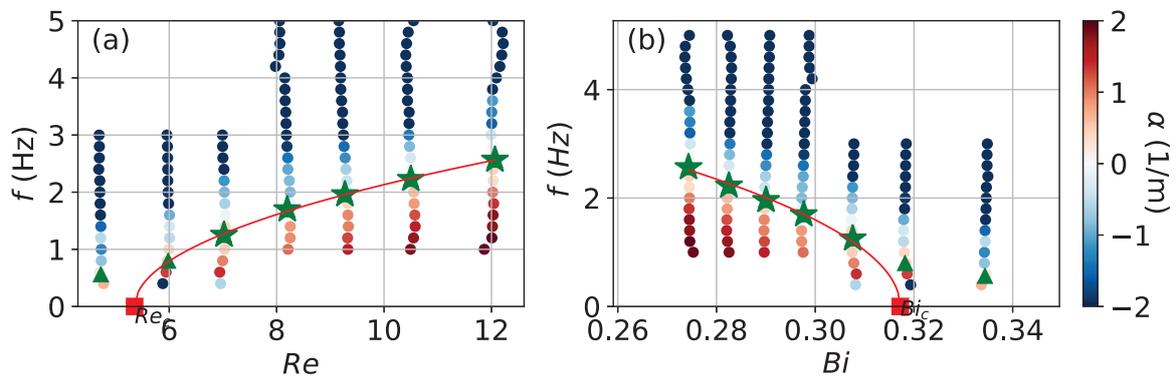


FIGURE 30 – Expérience carpool 17 : $\tau_y = 4.41$, $K = 1.21$, $n = 0.54$ et $\phi = 12.9^\circ$

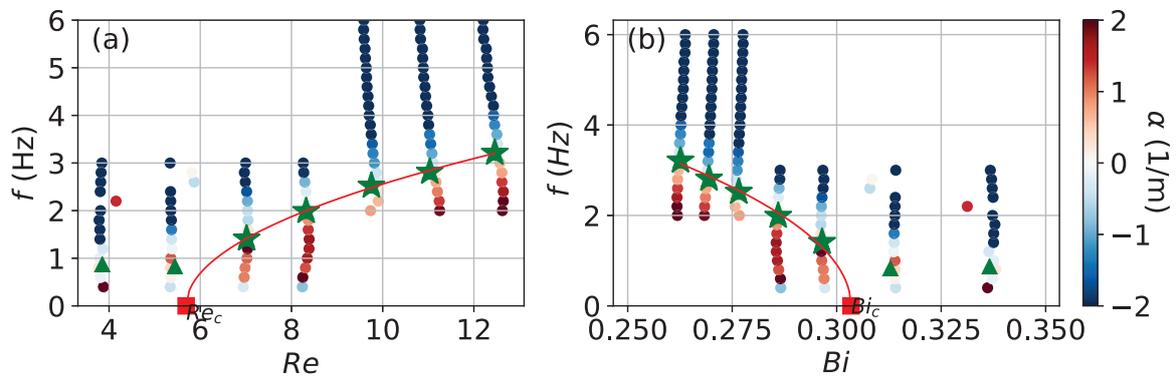


FIGURE 31 – Expérience carpool 18 : $\tau_y = 4.41$, $K = 1.21$, $n = 0.54$ et $\phi = 10.5^\circ$

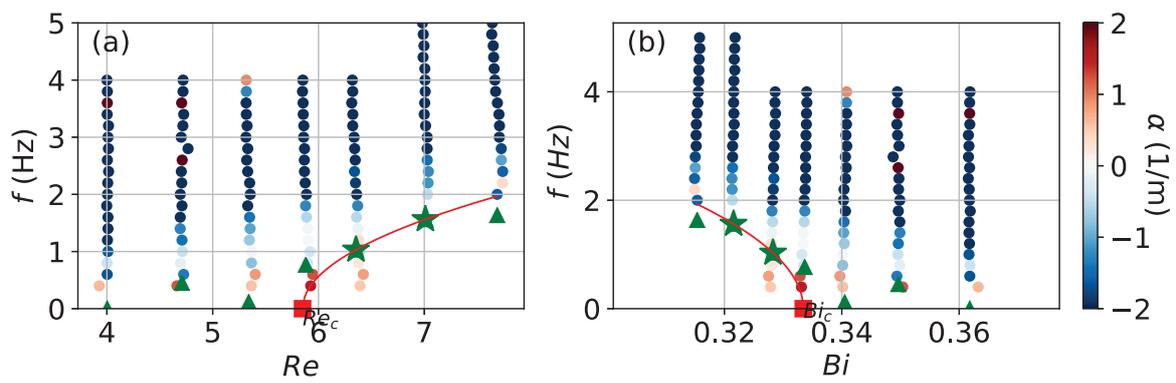


FIGURE 32 – Expérience carpool 19 : $\tau_y = 4.26$, $K = 1.22$, $n = 0.53$ et $\phi = 8.9^\circ$

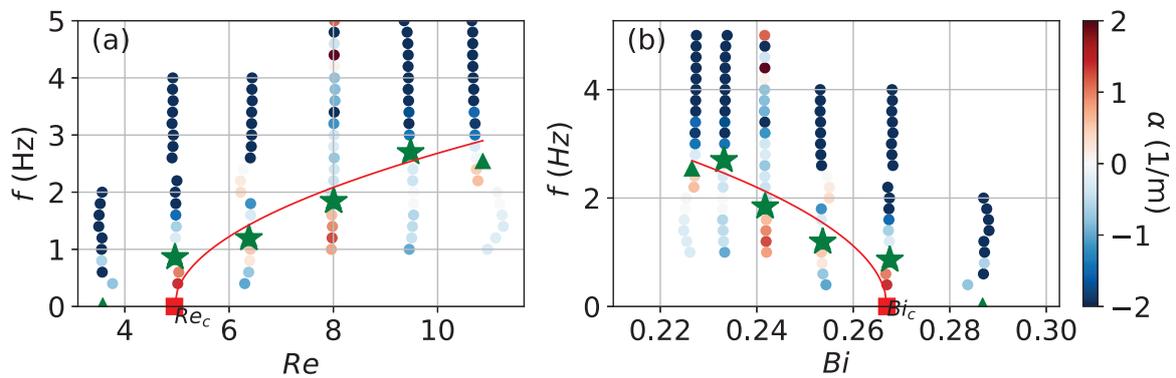


FIGURE 33 – Expérience carpool 20 : $\tau_y = 3.60$, $K = 1.15$, $n = 0.54$ et $\phi = 15.6^\circ$

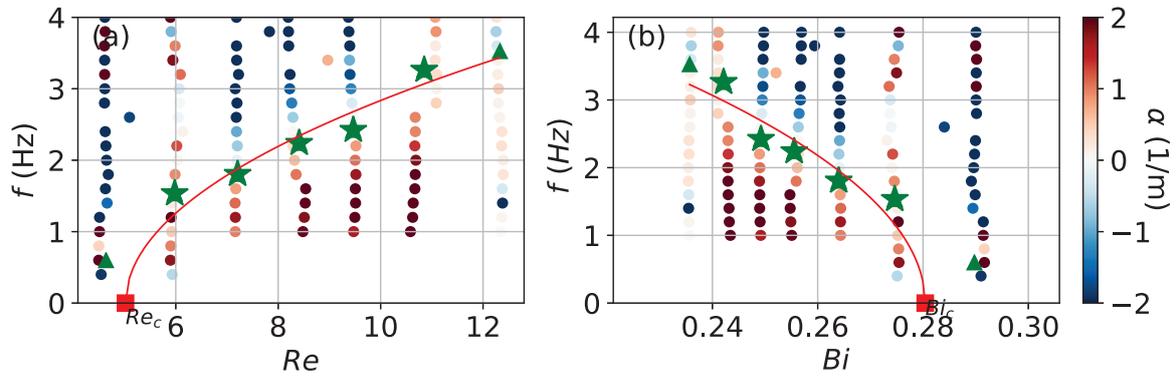


FIGURE 34 – Expérience carpobol 21 : $\tau_y = 4.06$, $K = 1.25$, $n = 0.54$ et $\phi = 15.6^\circ$

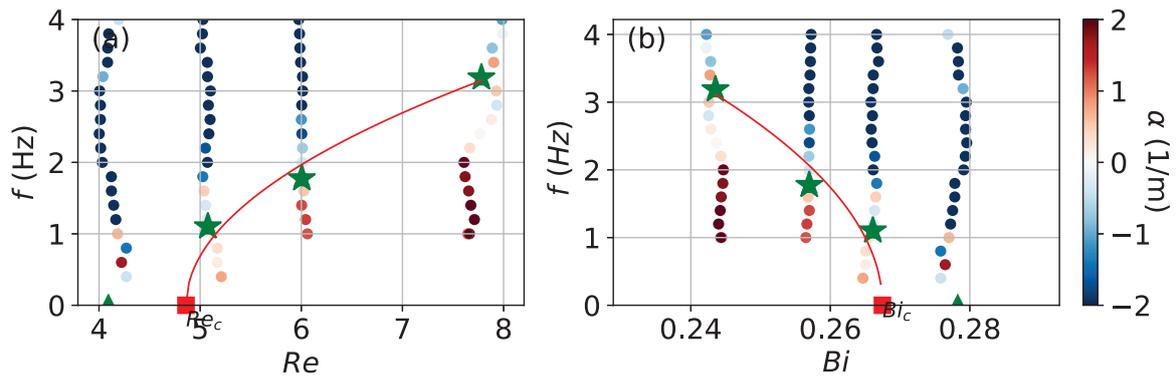


FIGURE 35 – Expérience carpobol 22 : $\tau_y = 4.12$, $K = 1.46$, $n = 0.52$ et $\phi = 15.6^\circ$

Suspension de kaolin : $n=0.25$

Dans cette partie, nous présentons les résultats des seuils de stabilité primaire obtenus pour une suspension de kaolin. Ces résultats correspondent à ceux décrits dans la table (3.3).

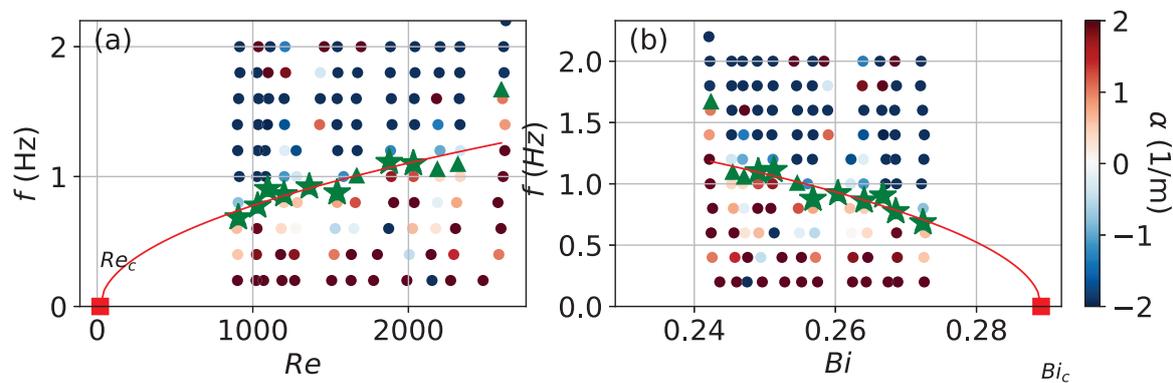


FIGURE 36 – Expérience kaolin 1 : $\tau_y = 8.15$, $K = 5.27$, $n = 0.25$ et $\phi = 15.6^\circ$

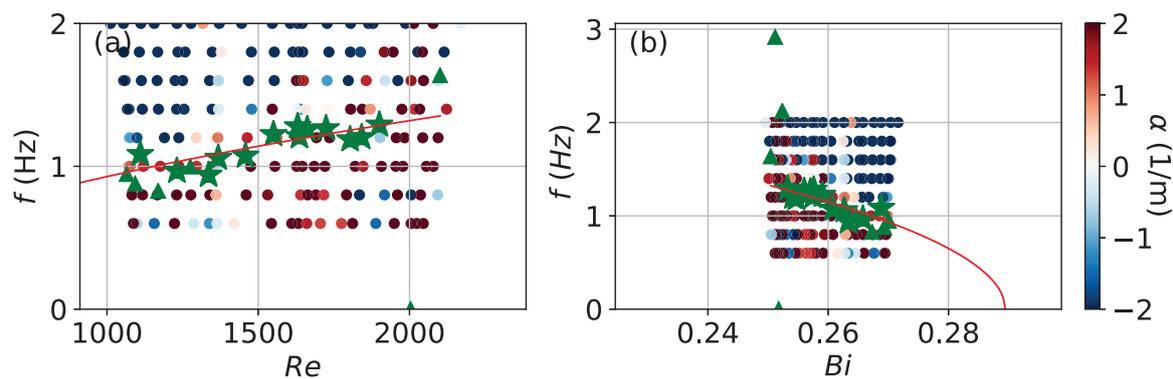


FIGURE 37 – Expérience kaolin 2 : $\tau_y = 8.48$, $K = 5.45$, $n = 0.25$ et $\phi = 15.6^\circ$

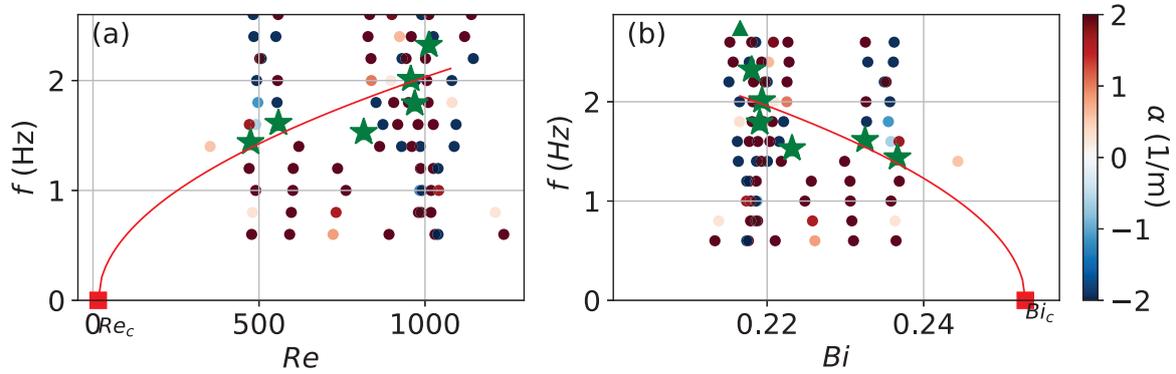


FIGURE 38 – Expérience kaolin 3 : $\tau_y = 4.74$, $K = 3.82$, $n = 0.24$ et $\phi = 15.6^\circ$

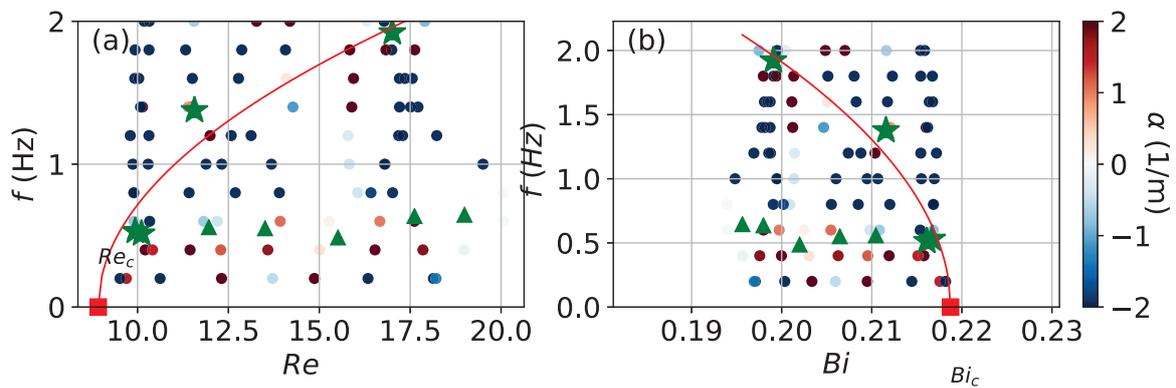


FIGURE 39 – Expérience kaolin 4 : $\tau_y = 9.48$, $K = 8.07$, $n = 0.3$ et $\phi = 15.6^\circ$

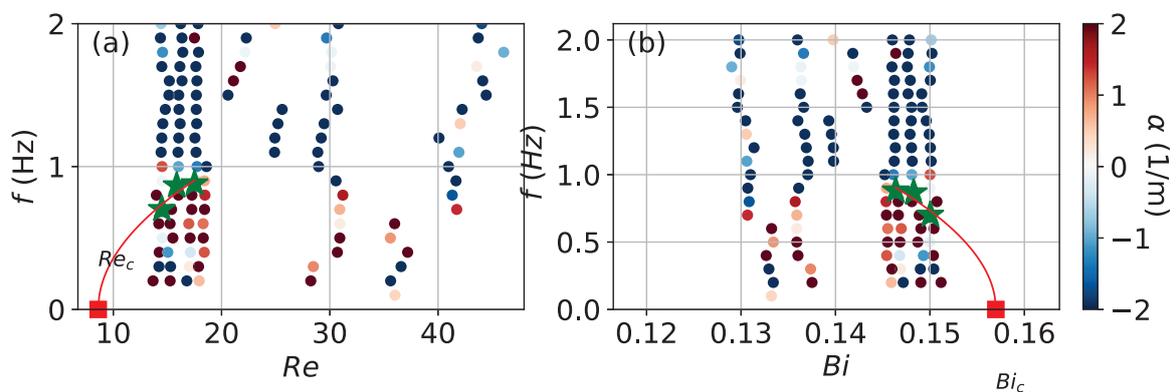


FIGURE 40 – Expérience kaolin 5 : $\tau_y = 10.55$, $K = 7.06$, $n = 0.29$ et $\phi = 15.6^\circ$

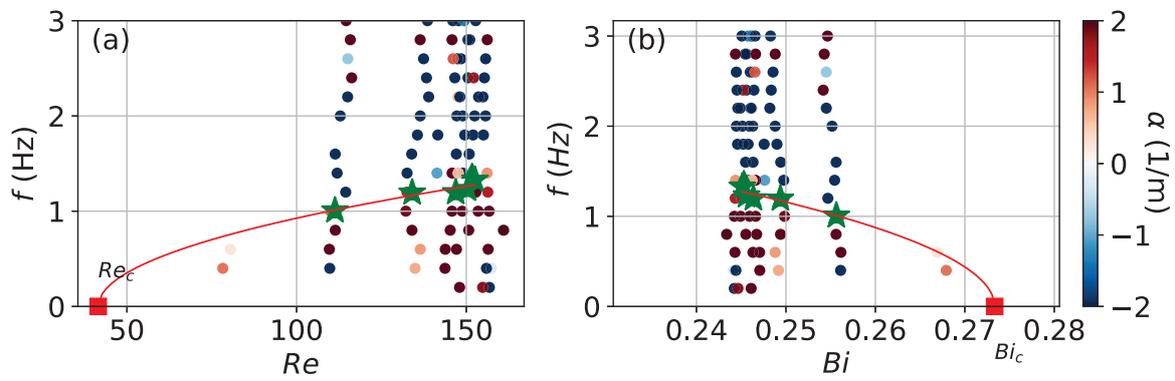


FIGURE 41 – Expérience kaolin 6 : $\tau_y = 7.16$, $K = 11.46$, $n = 0.27$ et $\phi = 15.6^\circ$

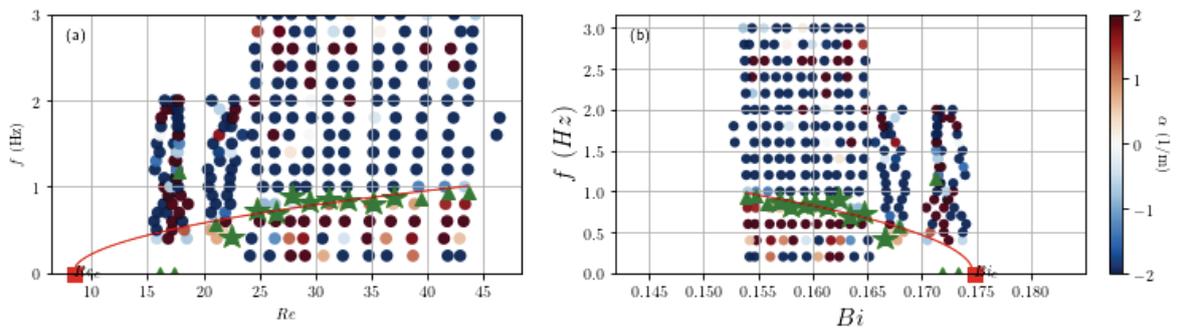


FIGURE 42 – Expérience kaolin 7 : $\tau_y = 5.97$, $K = 12.60$, $n = 0.25$ et $\phi = 14^\circ$

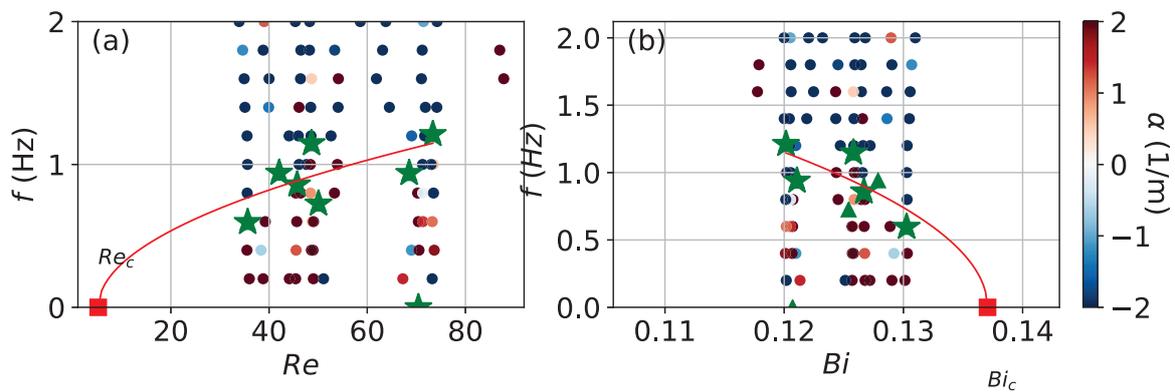


FIGURE 43 – Expérience kaolin 8 : $\tau_y = 6.20$, $K = 9.87$, $n = 0.25$ et $\phi = 15.6^\circ$

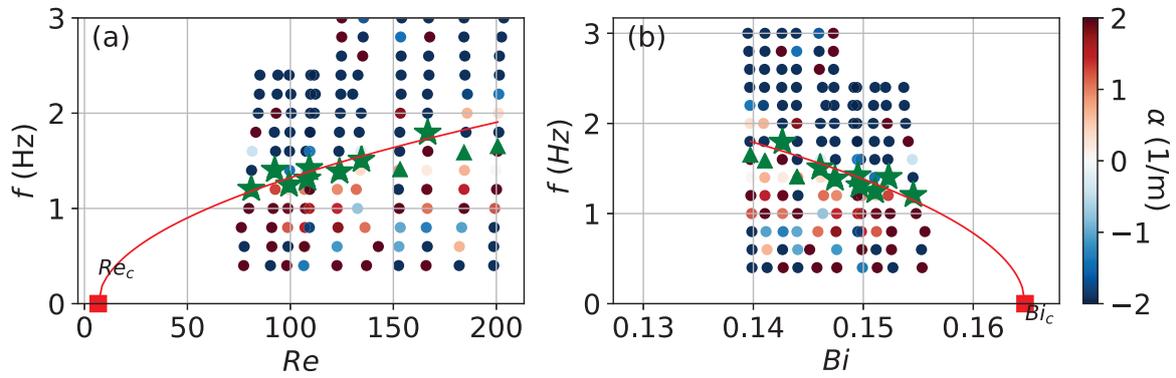


FIGURE 44 – Expérience kaolin 9 : $\tau_y = 6.90$, $K = 10.07$, $n = 0.25$ et $\phi = 15.6^\circ$

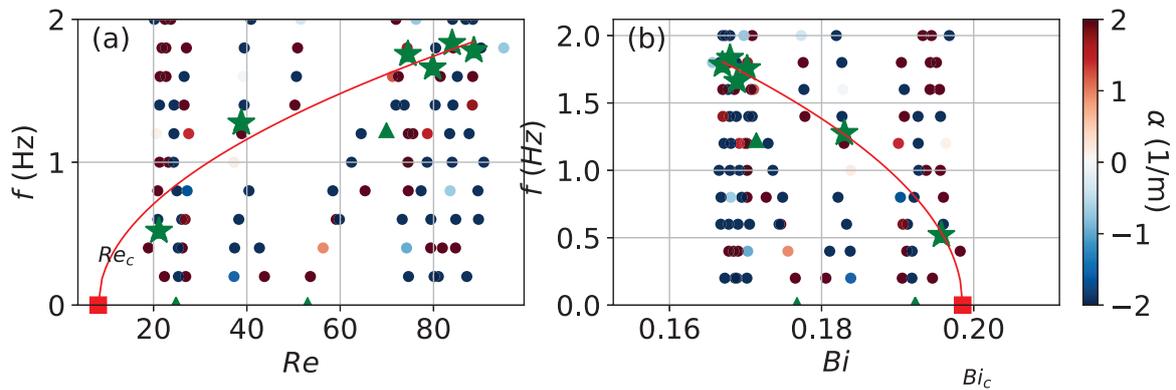


FIGURE 45 – Expérience kaolin 10 : $\tau_y = 6.86$, $K = 10.07$, $n = 0.25$ et $\phi = 15.6^\circ$

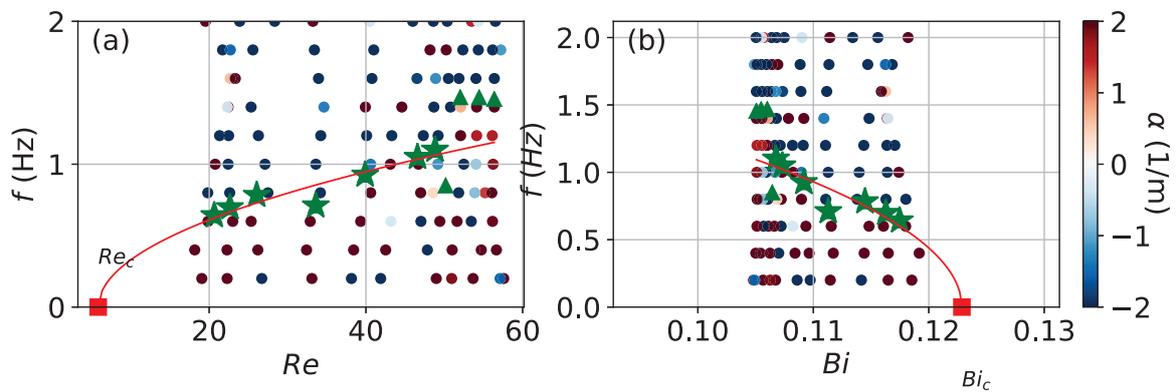


FIGURE 46 – Expérience kaolin 11 : $\tau_y = 4.74$, $K = 11.84$, $n = 0.25$ et $\phi = 15.6^\circ$

Bibliographie

- ALLOUCHE, M. H. (2014). *Étude théorique et expérimentale de la stabilité de l'écoulement de films de fluide non Newtonien sur plan incliné*. Theses, Université Claude Bernard - Lyon I.
- ALLOUCHE, M. H., BOTTON, V., MILLET, S., HENRY, D., DAGOIS-BOHY, S., GÜZEL, B. et BEN HADID, H. (2017). Primary instability of a shear-thinning film flow down an incline : experimental study. *J. Fluid Mech*, 821:R1–R11.
- ALLOUCHE, M. H., MILLET, S., BOTTON, V., HENRY, D., BEN HADID, H. et ROUSSET, F. (2015). Stability of a flow down an incline with respect to two-dimensional and three-dimensional disturbances for newtonian and non-newtonian fluids. *Physical Review E*, 92(6):063010.
- ANCEY, C. (2007). Plasticity and geophysical flows : A review. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 142(1):4–35. Viscoplastic fluids : From theory to application.
- ANSHUS, B. E. et GOREN, S. L. (1966). A method of getting approximate solutions to the orr-sommerfeld equation for flow on a vertical wall. *AICHE Journal*, 12(5):1004–1008.
- BALMFORTH, N. et CRASTER, R. (1999). A consistent thin-layer theory for bingham plastics. *Journal of non-newtonian fluid mechanics*, 84(1):65–81.
- BALMFORTH, N. et LIU, J. (2004). Roll waves in mud. *Journal of Fluid Mechanics*, 519:33–54.
- BALMFORTH, N. J., CRASTER, R. V., RUST, A. C. et SASSI, R. (2006). Viscoplastic flow over an inclined surface. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 139(1-2):103–127.
- BALMFORTH, N. J., FRIGAARD, I. A. et OVARLEZ, G. (2014). Yielding to stress : recent developments in viscoplastic fluid mechanics. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 46:121–146.
- BALMFORTH, N. J. et MANDRE, S. (2004). Dynamics of roll waves. *Journal of Fluid Mechanics*, 514:1.

-
- BARNES, H. et WALTERS, K. (1985). The yield stress myth ? *Rheologica acta*, 24(4):323–326.
- BENJAMIN, T. B. (1957). Wave formation in laminar flow down an inclined plane. *Journal of Fluid Mechanics*, 2(6):554–573.
- BENNEY, D. (1966). Long waves on liquid films. *Journal of mathematics and physics*, 45(1-4):150–155.
- BINGHAM, E. C. (1922). *Fluidity and plasticity*, volume 2. McGraw-Hill.
- BLAKE, S. (1990). Viscoplastic models of lava domes. *In Lava flows and domes*, pages 88–126. Springer.
- BROCK, R. R. (1969). Development of roll-wave trains in open channels. *Journal of the Hydraulics Division*, 95(4):1401–1427.
- CARREAU, P., KEE, D. D. et DAROUX, M. (1979). An analysis of the viscous behaviour of polymeric solutions. *The Canadian Journal of Chemical Engineering*, 57(2):135–140.
- CASSON, N. (1959). A flow equation for pigment-oil suspensions of the printing ink type. *Rheology of disperse systems*.
- CHAKRABORTY, S., SHEU, T. W.-H. et GHOSH, S. (2019). Dynamics and stability of a power-law film flowing down a slippery slope. *Physics of Fluids*, 31(1):013102.
- CHAMBON, G., FREYDIER, P., NAAIM, M. et VILA, J.-P. (2020). Asymptotic expansion of the velocity field within the front of viscoplastic surges : comparison with experiments. *Journal of Fluid Mechanics*, 884.
- CHAMBON, G., GHEMMOUR, A. et LAIGLE, D. (2009). Gravity-driven surges of a viscoplastic fluid : an experimental study. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 158(1-3):54–62.
- CHAMBON, G., GHEMMOUR, A. et NAAIM, M. (2014). Experimental investigation of viscoplastic free-surface flows in a steady uniform regime. *Journal of fluid mechanics*, 754:332.
- CHANG, H.-C., DEMEKHIN, E. A. et KALAJIDIN, E. (2000). Coherent structures, self-similarity, and universal roll wave coarsening dynamics. *Physics of Fluids*, 12(9):2268–2278.
- COUSSOT, P. (1994). Steady, laminar, flow of concentrated mud suspensions in open channel. *Journal of Hydraulic Research*, 32(4):535–559.
- COUSSOT, P. (1995). Structural similarity and transition from newtonian to non-newtonian behavior for clay-water suspensions. *Physical review letters*, 74(20):3971.
- DAGOIS-BOHY, S., HORMOZI, S., GUAZZELLI, E. et POULIQUEN, O. (2015). Rheology of dense suspensions of non-colloidal spheres in yield-stress fluids. *Journal of Fluid Mechanics*, 776.

BIBLIOGRAPHIE

- DENNER, F., CHAROGIANNIS, A., PRADAS, M., MARKIDES, C. N., van WACHEM, B. G. et KALLIADASIS, S. (2018). Solitary waves on falling liquid films in the inertia-dominated regime. *Journal of Fluid Mechanics*, 837:491–519.
- DENNER, F., PRADAS, M., CHAROGIANNIS, A., MARKIDES, C. N., van WACHEM, B. G. et KALLIADASIS, S. (2016). Self-similarity of solitary waves on inertia-dominated falling liquid films. *Physical Review E*, 93(3):033121.
- ENGELUND, F. et ZHAOHUI, W. (1984). Instability of hyperconcentrated flow. *Journal of hydraulic engineering*, 110(3):219–233.
- FERNÁNDEZ-NIETO, E. D., NOBLE, P. et VILA, J.-P. (2010). Shallow water equations for non-newtonian fluids. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 165(13-14):712–732.
- FORTERRE, Y. et POULIQUEN, O. (2003). Long-surface-wave instability in dense granular flows. *Journal of fluid mechanics*, 486:21–50.
- FREYDIER, P., CHAMBON, G. et NAAIM, M. (2017). Experimental characterization of velocity fields within the front of viscoplastic surges down an incline. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 240:56–69.
- FRIGAARD, I. (2019). Simple yield stress fluids. *Current Opinion in Colloid & Interface Science*, 43:80–93.
- FRIGAARD, I., HOWISON, S. et SOBEY, I. (1994). On the stability of poiseuille flow of a bingham fluid. *Journal of Fluid Mechanics*, 263:133–150.
- GRAZIANO, R., PREZIOSI, V., UVA, D., TOMAIUOLO, G., MOHEBBI, B., CLAUSSEN, J. et GUIDO, S. (2021). The microstructure of carbopol in water under static and flow conditions and its effect on the yield stress. *Journal of Colloid and Interface Science*, 582:1067–1074.
- HERSCHEL, W. H. et BULKLEY, R. (1926). Konsistenzmessungen von gummi-benzollösungen. *Kolloid-Zeitschrift*, 39(4):291–300.
- HU, J., BEN HADID, H., HENRY, D. et MOJTABI, A. (2008a). Linear temporal and spatio-temporal stability analysis of a binary liquid film flowing down an inclined uniformly heated plate. *Journal of Fluid Mechanics*, 599:269–298.
- HU, J., MILLET, S., BOTTON, V., BEN HADID, H. et HENRY, D. (2006). Inertialess temporal and spatio-temporal stability analysis of the two-layer film flow with density stratification. *Physics of Fluids*, 18(10):104101.
- HU, J., YIN, X., BEN HADID, H. et HENRY, D. (2008b). Linear temporal and spatiotemporal stability analysis of two-layer falling films with density stratification. *Physical Review E*, 77(2):026302.
- HU, T., FU, Q.-f., XING, Y., YANG, L.-j. et XIE, L. (2021). Stability of a thin viscoelastic film falling down an inclined plane. *Phys. Rev. Fluids*, 6:083902.

-
- HUANG, C.-T. et KHOMAMI, B. (2001). The instability mechanism of single and multilayer newtonian and viscoelastic flows down an inclined plane. *Rheologica acta*, 40(5):467–484.
- IVERSON, R. M. (1997). The physics of debris flows. *Reviews of geophysics*, 35(3):245–296.
- JØRGENSEN, L., LE MERRER, M., DELANOË-AYARI, H. et BARENTIN, C. (2015). Yield stress and elasticity influence on surface tension measurements. *Soft Matter*, 11(25):5111–5121.
- KAPITZA, P. et KAPITZA, S. (1949). Wave flow of thin fluid layers of liquid. *Zh. Eksp. Teor. Fiz*, 19:105.
- KELLY, R., GOUSSIS, D., LIN, S. et HSU, F. (1989). The mechanism for surface wave instability in film flow down an inclined plane. *Physics of Fluids A : Fluid Dynamics*, 1(5):819–828.
- KOFMAN, N., MERGUI, S. et RUYER-QUIL, C. (2014). Three-dimensional instabilities of quasi-solitary waves in a falling liquid film. *Journal of fluid mechanics*, 757:854–887.
- KÖHLER, A., MCELWAIN, J., SOVILLA, B., ASH, M. et BRENNAN, P. (2016). The dynamics of surges in the 3 february 2015 avalanches in vallée de la sionne. *Journal of Geophysical Research : Earth Surface*, 121(11):2192–2210.
- LANDRY, M., FRIGAARD, I. et MARTINEZ, D. (2006). Stability and instability of taylor-couette flows of a bingham fluid. *Journal of Fluid Mechanics*, 560:321.
- LIU, J., PAUL, J. D. et GOLLUB, J. P. (1993). Measurements of the primary instabilities of film flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 250:69–101.
- LIU, J., SCHNEIDER, J. et GOLLUB, J. P. (1995). Three-dimensional instabilities of film flows. *Physics of Fluids*, 7(1):55–67.
- LIU, K. F. et MEI, C. C. (1989). Slow spreading of a sheet of bingham fluid on an inclined plane. *Journal of fluid mechanics*, 207:505–529.
- LIU, R., DING, Z. et HU, K. (2018). Stabilities in plane poiseuille flow of herschel–bulkley fluid. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 251:132–144.
- LUU, L.-H. et FORTERRE, Y. (2009). Drop impact of yield-stress fluids. *Journal of Fluid Mechanics*, 632:301.
- MALAMATARIS, N., VLACHOGIANNIS, M. et BONTOZOGLOU, V. (2002). Solitary waves on inclined films : Flow structure and binary interactions. *Physics of Fluids*, 14(3):1082–1094.
- MILLET, S., BOTTON, V., BEN HADID, H., HENRY, D. et ROUSSET, F. (2013). Stability of two-layer shear-thinning film flows. *Physical Review E*, 88(4):043004.
- MILLET, S., BOTTON, V., ROUSSET, F. et BEN HADID, H. (2008). Wave celerity on a shear-thinning fluid film flowing down an incline. *Physics of Fluids*, 20(3):031701.

BIBLIOGRAPHIE

- MILLET, S., USHA, R., BOTTON, V. et ROUSSET, F. (2019). The mechanism of long-wave instability in a shear-thinning film flow on a porous substrate. *Acta Mechanica*, 230(6):2201–2220.
- MITSOULIS, E. (2007). Annular extrudate swell of pseudoplastic and viscoplastic fluids. *Journal of non-newtonian fluid mechanics*, 141(2-3):138–147.
- MOUNKAILA NOMA, D., DAGOIS-BOHY, S., MILLET, S., BOTTON, V., HENRY, D. et BEN HADID, H. (2021). Primary instability of a visco-plastic film down an inclined plane : experimental study. *Journal of Fluid Mechanics*, 922:R2.
- NG, C.-O. et MEI, C. C. (1994). Roll waves on a shallow layer of mud modelled as a power-law fluid. *Journal of Fluid Mechanics*, 263:151–184.
- NISHIMURA, K. et MAENO, N. (1987). Experiments on snow-avalanche dynamics. *IAHS Publ*, 162:395–404.
- NOBLE, P. et VILA, J.-P. (2013). Thin power-law film flow down an inclined plane : consistent shallow-water models and stability under large-scale perturbations. *Journal of Fluid Mechanics*, 735:29–60.
- NSOM, B., RAMIFIDISOA, L., LATRACHE, N. et GHAEMIZADEH, F. (2019). Linear stability of shear-thinning fluid down an inclined plane. *Journal of Molecular Liquids*, 277:1036–1046.
- OPPONG, F. K., RUBATAT, L., FRISKEN, B. J., BAILEY, A. E. et DE BRUYN, J. R. (2006). Micro-rheology and structure of a yield-stress polymer gel. *Physical Review E*, 73(4):041405.
- OSTWALD, W. (1925). Ueber die geschwindigkeitsfunktion der viskosität disperser systeme. i. *Kolloid-Zeitschrift*, 36(2):99–117.
- OVARLEZ, G. (2011). Caractérisation rhéologique des fluides à seuil. *Rhéologie*, 20:28–43.
- PAPANASTASIOU, T. C. (1987). Flows of materials with yield. *Journal of Rheology*, 31(5):385–404.
- PENG, J. et ZHU, K.-Q. (2004). Linear stability of bingham fluids in spiral couette flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 512:21.
- PIAU, J. (2007). Carbopol gels : Elastoviscoplastic and slippery glasses made of individual swollen sponges : Meso-and macroscopic properties, constitutive equations and scaling laws. *Journal of non-newtonian fluid mechanics*, 144(1):1–29.
- PIAU, J.-M. (1996). Flow of a yield stress fluid in a long domain. application to flow on an inclined plane. *Journal of Rheology*, 40(4):711–723.
- PUTZ, A. M. et BURGHELEA, T. I. (2009). The solid–fluid transition in a yield stress shear thinning physical gel. *Rheologica Acta*, 48(6):673–689.

-
- QIAN, N., C. N., WAN, Z. et QIAN, Y. (1979). The flow with heavy sediment concentration in the yellow river basin. *J Tsinghua Univ*, 19(2):1–17.
- RANGANATHAN, U., CHATTOPADHYAY, G. et TIWARI, N. (2020). Evolution of a thin film down an incline : A new perspective. *Physics of Fluids*, 32(1):013603.
- ROSS, C. S. et KERR, P. F. (1930). The kaolin minerals 1. *Journal of the American Ceramic Society*, 13(3):151–160.
- ROUSSET, F., MILLET, S., BOTTON, V. et BEN HADID, H. (2007). Temporal stability of carreau fluid flow down an incline.
- RUYER-QUIL, C., CHAKRABORTY, S. et DANDAPAT, B. (2012). Wavy regime of a power-law film flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 692:220.
- RUYER-QUIL, C., KOFMAN, N., CHASSEUR, D. et MERGUI, S. (2014). Dynamics of falling liquid films. *The European Physical Journal E*, 37(4):1–17.
- RUYER-QUIL, C. et MANNEVILLE, P. (2002). Further accuracy and convergence results on the modeling of flows down inclined planes by weighted-residual approximations. *Physics of Fluids*, 14(1):170–183.
- SCHEID, B., RUYER-QUIL, C. et MANNEVILLE, P. (2006). Wave patterns in film flows : modelling and three-dimensional waves. *Journal of Fluid Mechanics*, 562:183–222.
- SHAQFEH, E. S., LARSON, R. G. et FREDRICKSON, G. H. (1989). The stability of gravity driven viscoelastic film-flow at low to moderate reynolds number. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 31(1):87–113.
- SMITH, M. (1990). The mechanism for the long-wave instability in thin liquid films. *Journal of Fluid Mechanics*, 217:469–485.
- TAMBURRINO, A. et IHLE, C. F. (2013). Roll wave appearance in bentonite suspensions flowing down inclined planes. *Journal of hydraulic research*, 51(3):330–335.
- TROWBRIDGE, J. (1987). Instability of concentrated free surface flows. *Journal of Geophysical Research : Oceans*, 92(C9):9523–9530.
- YASUDA, K., ARMSTRONG, R. et COHEN, R. (1981). Shear flow properties of concentrated solutions of linear and star branched polystyrenes. *Rheologica Acta*, 20(2):163–178.
- YIH, C.-S. (1963). Stability of liquid flow down an inclined plane. *The physics of Fluids*, 6(3):321–334.
- YIH, C.-S. (1967). Instability due to viscosity stratification. *Journal of Fluid Mechanics*, 27(2): 337–352.
-

YOSHIDA, I., SUGAI, T., S., T., MOTEGI, M., MINAMIDA, K. et HAYAKAWA, H. (1981). Automation of internal friction measurement apparatus of inverted torsion pendulum type. *Journal of Physics E : Scientific Instruments*, 14(10):1201.



FOLIO ADMINISTRATIF

THESE DE L'UNIVERSITE DE LYON OPEREE AU SEIN DE L'UNIVERSITE CLAUDE BERNARD LYON 1

NOM : **MOUNKAILA NOMA**

DATE de SOUTENANCE : 16 /07/2021

Prénoms : **Djibrilla**

TITRE : **STABILITE D'UN FILM VICOPLASTIQUE SUR UN PLAN INCLINE**

NATURE : **Doctorat**

Numéro d'ordre : 2021LYSE1131

Ecole doctorale : N° 162 Mécanique – Energétique - Génie civil - Acoustique

Spécialité : **Mécanique des fluides**

RESUME :

Cette thèse s'intéresse à la stabilité de l'écoulement d'un film viscoplastique sur un plan incliné. Ce type de fluides présente la particularité de ne pouvoir s'écouler que lorsqu'on applique une contrainte supérieure à une contrainte seuil τ_y . L'étude de ce problème permet notamment de mieux appréhender les phénomènes physiques liés à l'apparition d'ondes de surfaces que nous rencontrons par exemple lors des coulées de boue, pouvant entraîner des effets encore plus ravageurs. Contrairement aux fluides newtoniens, les conditions de stabilité des films viscoplastique n'ont pas été étudiées précisément sur le plan expérimental ce qui ne permet pas de confronter les théories. Pour pallier ce manque, nous avons mis en œuvre un dispositif expérimental. Il s'agit d'un canal d'angle variable, dans lequel un écoulement permanent de fluide de Herschel-Bulkley est établi. Des perturbations avec des fréquences et des amplitudes contrôlées sont imposées à l'entrée du canal pour générer des ondes de surface. L'évolution spatiale des ondes est suivie avec un télémètre laser, pour mesurer l'épaisseur locale du film. Les taux de croissance et les fréquences neutres sont obtenus après traitement du signal donnant l'épaisseur du film le long du canal. Il est alors possible de déduire des nombres de Reynolds et de Bingham critiques. Nos expériences montrent que le modèle de Balmforth et Liu (2004), d'ordre 0 en ε (le rapport d'aspect entre l'épaisseur du film et sa longueur caractéristique) décrit bien les seuils de stabilité. Cependant, il est insuffisant pour décrire les effets de dispersion pour lesquels des ordres supérieurs en ε sont nécessaires. Un prolongement du développement de Balmforth et Liu (2004) a été réalisé à l'ordre 1 en ε . Ce développement montre que le modèle de Balmforth et Liu (2004) surestime légèrement les seuils de stabilité et que la correction augmente avec l'indice rhéologique n . Ce modèle permet également d'obtenir des résultats numériques concernant les effets de dispersion systématiquement plus proches des expériences, même si ces derniers s'avèrent encore insuffisants pour décrire le comportement expérimental. Enfin, une étude exploratoire sur le régime non-linéaire montre des comportements similaires à ceux de fluides newtoniens, à savoir une saturation de l'amplitude, un raidissement du front des ondes et une transition supercritique vers le régime non-linéaire.

MOTS-CLÉS : fluides viscoplastiques, instabilités des écoulements, contrainte seuil, fluides non-newtoniens, films tombants

Laboratoire de recherche :

Laboratoire de Mécanique des Fluides et d'Acoustique (LMFA)

Unité Mixte de Recherche UMR CNRS 5509 – Université Lyon 1 / Ecole Centrale de Lyon / INSA de LYON

Directeur de thèse: Hamda BEN HADID

Co-Directeurs : Séverine MILLET et Simon DAGOIS-BOHY

Présidente de jury : Ivana VINKOVIC

Composition du jury : Guillaume CHAMBON et Christian RUYER-QUIL (Rapporteurs), : Ivana VINKOVIC (Présidente) Rachid BENNACER et Sophie MERGUI (Examinateurs), Hamda BEN HADID (directeur de thèse), Simon DAGOIS-BOHY et Séverine MILLET (co-directeurs de thèse)