



HAL
open science

Limites en grande population du modèle de Moran et chaînes de Markov bifurcantes

Gorgui Gackou

► **To cite this version:**

Gorgui Gackou. Limites en grande population du modèle de Moran et chaînes de Markov bifurcantes. Statistiques [math.ST]. Université Clermont Auvergne; Université Assane Seck (Ziguinchor, Sénégal), 2021. Français. NNT : 2021UCFAC080 . tel-03663404

HAL Id: tel-03663404

<https://theses.hal.science/tel-03663404>

Submitted on 10 May 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



UNIVERSITÉ CLERMONT AUVERGNE
ÉCOLE DOCTORALE DES SCIENCES FONDAMENTALES
UMR 6620 - Laboratoire de Mathématiques Blaise Pascal

Thèse présentée pour obtenir le grade universitaire de
Docteur

Discipline : Mathématiques Appliquées et Applications des
Mathématiques
Spécialité : Probabilité et Statistique

Auteur : Gorgui GACKOU

Limites en grande population du modèle de
Moran et chaînes de Markov bifurcantes

Soutenue publiquement le 10/12/2021 au LMBP devant le jury
composé de :

Jean François Delmas	Pr, Ecole des Ponts ParisTech CERMICS	Rapporteur
Amandine Véber	Pr, Université Polytechnique de Paris	Rapporteuse
Hacène Djellout	MCF et HDR, Université Clermont Auvergne	Examinateur
Manon Costa	MCF, Institut Mathématique de Toulouse	Examinatrice
Arnaud Guillin	Pr, Université Clermont Auvergne	Directeur
Alassane Diédhiou	Pr, Université Assane Seck de Ziguinchor	Co- directeur

Remerciements

Me voilà à la dernière partie de ce travail. Il est temps maintenant de ne plus considérer le comportement markovien, mais plutôt d'être reconnaissant envers mes encadreurs, mes professeurs, mes collègues chercheurs, ma famille et mes amis.

Je remercie mon encadreur **Professeur Arnaud Guillin** de m'avoir accueilli au sein du LMBP en 2018 en tant que stagiaire de Master 2, je lui remercie pour tous les efforts qu'il a fourni, les conseils pédagogiques et moraux qu'il m'a prodigué, je lui remercie d'avoir participé à ma formation car j'ai beaucoup appris avec lui. Il n'est pas pour moi un simple encadreur, mais plutôt un parent avec ses qualités humaines hors pair. Sans lui cette thèse n'aurait pas eu lieu. Les mots me manquent pour magnifier la considération que j'ai pour lui. Je lui souhaite une longévité et un succès total dans ses projets et pour sa famille. Merci mille fois Arnaud.

C'est un grand honneur pour moi d'avoir comme rapporteurs de thèse : **Jean François Delmas, Amandine Véber**. Merci beaucoup d'avoir pris du temps pour la lecture scrupuleuse de ce manuscrit.

Mes remerciements vont aussi à l'endroit de **Hacène Djellout et Manon Costa** d'avoir accepté d'être les examinateurs de cette thèse. Je suis vraiment honoré que vous fassiez partie des membres de jury de cette thèse.

Je remercie aussi l'**Ambassade de France au Sénégal** d'avoir financé cette thèse ainsi que le **gouvernement Sénégalais** pour le complément financier octroyé.

Un grand merci aussi à **Valérie Sourlier, Karine Darot** et leur équipe (**tous les membres du secrétariat du LMBP**), je vous remercie pour tous les efforts que vous avez fourni pour mes venues à Clermont Ferrand, mes voyages et autres. Grâce à votre assistance sans faille pour mes logements, mes documents administratifs et autres, ce projet s'est bien déroulé. Je vous exprime ma plus profonde gratitude.

Je remercie aussi tout le personnel du Laboratoire de Mathématiques Blaise Pascal, pour les accueils chaleureux au sein du laboratoire, les démarches pédagogiques et administratives, les échanges que j'ai eu avec certains professeurs, et l'équipement mis à ma disposition pour la réussite de ce projet de thèse. J'ai été ému d'être parmi tant de professeurs émirites, avec beaucoup de publications sur des sujets différents : de la théorie des probabilités aux statistiques appliquées, de l'Analyse fonctionnelle, des équations aux dérivées partielles, de la géométrie à la théorie des nombres. J'ai beaucoup apprécié votre compagnie pendant toutes ces années de thèse.

Je ne peux pas passer sans remercier un collègue, un frère avec qui j'ai beaucoup travaillé et échangé depuis mon stage, **Mister Arnaud Personne**, pour sa dynamique et sa passion pour les mathématiques. Notre collaboration a porté ses fruits avec nos articles. J'espère bien que d'autres papiers verront le jour dans le futur.

Je remercie aussi tous mes collègues doctorants et Post-doctorants du laboratoire de Mathématiques Blaise Pascal pour les moments passés

ensemble, nos pauses café, nos déjeuners, nos échanges et autres : Athina Monemvassitis, Chaoen Zhang, Baptiste Peaucelle, Arthur Bottois, Sophie Millaret, Franck Gillon, Fernando Costa Junior, Tristan Guyon, Arnaud Descours, Sebastien Bissay, Damien Rivet, Léo Hahn et Maéva . Vous avez été remarquables mes amis ; merci beaucoup pour tout. Mes sincères remerciements à mon collègue chercheur Valère Bitseki Penda pour sa collaboration qui a été un succès total dans ma thèse, grâce à vous j'ai découvert un autre domaine des probabilités, les chaînes de Markov bifurcantes. C'est un plaisir d'avoir travaillé avec vous, j'espère bien que nous aurons d'autres sujets à traiter ensemble dans le futur.

Un break à mon université d'origine, je remercie d'abord mon co-encadreur **Professeur Alassane Diédhiou** pour sa compréhension, sa passion, ses conseils et son orientation dans le domaine des probabilités. Vous m'avez initié à la théorie de la mesure et des probabilités depuis ma 3^{ème} année de Licence, vous m'avez imprégné d'avantage dans le domaine des probabilités durant votre cours de modèles aléatoires en Master 1. Ceci constitue une occasion pour moi de vous témoigner ma plus profonde gratitude.

Je remercie aussi tous mes professeurs de l'université Assane Seck de Ziguinchor pour leurs contributions dans mes études, leurs motivations et leurs conseils remarquables. Je vous ai tous estimé grâce à votre pédagogie.

Je remercie toute l'équipe du master 2 de Probabilité et Statistique appliquées au vivant de l'université Félix Houphouët Boigny de Côte d'Ivoire. Je remercie particulièrement **Professeur Modeste N'ZI** pour ses qualités humaines hors pairs envers nous lors de notre séjour en Côte d'Ivoire, merci professeur pour votre contribution dans notre formation et pour tout ce que vous avez fait pour nous.

Je remercie aussi **Professeur Etienne Pardoux** pour sa bonne volonté, de nous avoir fait découvrir un autre niveau des Probabilités grâce au PSAV avec son fameux cours d'épidémiologie. Nous avons beaucoup apprécié professeur. Je remercie aussi mes professeurs **Ibrahima Dramé** de l'université Aix-Marseille et **Ahmadou Bamba Sow** de l'université Gaston-Berger pour leurs remarquables cours des Processus de branchement et des mesures aléatoires de Poisson durant notre master 2 du PSAV. Merci beaucoup pour vos conseils.

Je remercie aussi mon professeur **Babacar Faye** du CEM Malicounda 2 de Nianing de m'avoir donné le goût des maths depuis le collège. Merci professeur pour les conseils et les encouragements que vous m'avez toujours prodigués.

Un détour envers mes parents. Je remercie mes parents en l'occurrence mon père, ma mère, mes frères et sœurs, pour leur patience, leurs motivations, leurs encouragements et leur compréhension. Vous avez remué ciel et terre pour la réussite de mes études. Vous avez ménagé aucun effort pour ma réussite. Je vous dédie cette thèse, ce travail que vous avez toujours attendu de moi depuis mes premiers pas à l'école. Je remercie mes familles d'accueils à Nianing et à Ziguinchor, vous avez contribué financièrement dans mes études, certes ce n'était pas facile, mais avec vos conseils, j'ai pu tenir la tête

haute. Merci à tonton Ibrahima Gakou, à tonton Babacar Dibor Faye et à tonton Diomaye Gakou de m'avoir soutenu dans mes études depuis le Collège, passant par le lycée jusqu' à l'université. Je vous en serai toujours reconnaissant pour tout.

je dédie aussi cette thèse à ma femme Maimouna, ma fille chérie Sokhna Diarra Gackou, pour le plaisir que vous m'apportez tous les jours, vous avez toujours été ma source de motivation, ma force inépuisable, malgré les obstacles, nous y sommes arrivés, ensemble à notre dessein. Merci beaucoup pour votre patience, votre compréhension et vos encouragements.

Merci à mes collègues doctorants de l'université Assane Seck de Ziguinchor : Papa Badiane, Moustapha Camara, Marcel Badiane, Pape Modou Sarr, Alain Agack Diédhiou, Souhaibou Sambou, Ibrahima Sané. Votre compagnie, nos échanges, nos pauses café et autres me manqueront énormément. C'était un plaisir d'être avec vous durant toutes ces années d'études.

Un grand merci aussi à mes amis : Birama Gackou, Bassirou Diop, Ousmane Cissé, Sé mou Diouf, Souleymane Diop, Babacar Gacou, Pape Demba Thiaw, Ndongo Dione, Aita Dione, Amie Diouf, Josué Fotso Tchouanti, Emakoua Alphonse, Mamadou Diagne, Aliou Gakou, Babacar Gackou, Marie Gackou, Marie Madeleine Gakou, Anna Gackou , Nganding Diouf, Moustapha Diémé, Yves Boris, Quenum, Ndeye Adjaratou Diop, Marème Gueye, Gadio Bèye, Adama Gackou, Niakar Gakou, Moussa Thiam, Adama Sarr, Bibi Maliki, Awa Diouf, Ousseynou Diallo, Mariam Adoudou, Douraty, Bob, Papa Mbaye, Demba Cissé, Mamy Ngom, Fallou Gueye, Dieynaba Diallo, Mame Anta Ngom, Maimouna Kébé, Habib Bayo, Pape séga Wade, Seydou Sané, Mamadou Fall, Mass Badji, Aicha Gackou, Modou Gackou, Marie Louise Gackou, Ndeye Mbissine Gakou, Gilbert Gakou, El-hadj Gakou, Mamadou Gakou, Mamadou Ngom, Moustapha Niane, Demba Gning, Abdou Aziz Diallo, Abdoulaye Mbodj, Modou Diop et tous les autres que je n'ai pas pu citer. Merci pour tous les moments passés ensemble.

Résumé

Cette thèse en cotutelle entre l'université Clermont Auvergne et l'université Assane Seck de Ziguinchor constitue une étude scientifique qui repose sur deux modèles de populations : le modèle de Moran et les chaînes de Markov bifurcantes. Chacun d'eux est un thème principal de recherche. Leur richesse est d'une qualité extraordinaire à travers leurs diversités et les aspects qu'ils regorgent. Pour le modèle de Moran, nous étudions une quantification de l'erreur commise en approximant le processus discret de Moran par une diffusion de Wright-Fisher. Cette quantification se fait en présence d'immigration et sélection faible. Sous l'effet des aspects environnementaux, nous avons un contrôle exponentiel en temps de l'erreur. En comparant les paramètres de sélection et d'immigration, des contrôles linéaire et uniforme en temps sont obtenus. Pour plus de détails, vous pouvez vous référer aux articles (1) et (2) qui se trouvent dans la deuxième partie de ce manuscrit.

Pour le deuxième point de cette thèse, nous nous sommes intéressés aux chaînes de Markov bifurcantes. Plus précisément aux principes des déviations modérées pour des fonctionnelles bornées et dépendant d'une variable. Ceci a fait l'objet d'un article (Article 3) qui se trouve dans la deuxième partie de ce manuscrit.

D'autres études plus poussées sont envisagées pour achever celles qui se trouvent dans ce manuscrit.

Mots clés : Chaînes de Markov, chaînes de Markov bifurcantes, Processus markoviens de sauts, Modèle de Moran, Modèle de Wright-Fisher, théorèmes limites, inégalités de déviations, inégalités de transport, martingales, principe des déviations modérées, principe des grandes déviations, formule de Feynman-Kac, Ultracontractivité, Equations différentielles stochastiques, Semigroupes de Markov, ergodicité.



Table des matières

I	Introduction générale	11
1	Introduction	13
2	Moran vers Wright-Fisher	15
2.1	Modèle de Moran	15
2.1.1	Présentation du modèle	15
2.2	Modèle de Wright-Fisher	18
2.2.1	Présentation du modèle	18
2.3	Résultats connus sur Moran vers Wright-Fisher	19
2.4	Mes résultats	23
2.4.1	Sélection constante	23
2.4.2	Sélection aléatoire	26
2.4.3	Approximation quantitative uniforme du processus discret de Moran par une diffusion de Wright -Fisher	29
2.5	Perspectives	45
3	Chaines de Markov bifurcantes	47
3.1	Présentation du modèle	47
3.1.1	L'arbre binaire régulier associé au modèle des CMBs	48
3.1.2	Probabilité de transition associée aux chaines de Markov bifurcantes	49
3.2	Quelques rappels sur les grandes déviations	52
3.3	Outils fondamentaux des déviations modérées sur les martingales	53
3.4	Lois des grands nombres et théorèmes centrales limites	55
3.5	Principes des déviations modérées des chaines de Markov bifurcantes	62
3.6	Mes résultats	64
3.6.1	Notations et Hypothèses	64
3.6.2	Résultats principaux	67
3.7	Perspectives	70
II	Articles	71
4	Article 1	73
4.1	Abstract	73
4.2	Introduction	73

TABLE DES MATIÈRES

4.3	The Moran model and its approximation diffusion	75
4.4	Main result	77
4.4.1	Application : Simpson Index.	78
4.4.2	Proof	79
4.5	Random limiting selection as a pure jump process	86
4.6	Random limiting selection as a diffusion process	90
4.7	Appendix	94
5	Article 2	97
5.1	Abstract	97
5.2	Introduction	97
5.3	Moran model and its approximation diffusion	99
5.4	Main result	100
5.5	Proof of theorem	100
5.5.1	Telescopic decomposition of the error	101
5.5.2	Control of $S_1 - T_1$	102
5.5.3	Control of $\{T_t^{(j)}\}_{t \geq 0}$ and Deviation inequality	104
5.6	Appendix	118
5.6.1	Transportation information of Markov Process	118
6	Article 3	121
6.1	Introduction	121
6.2	The model of bifurcating Markov chain	123
6.2.1	The regular binary tree associated to BMC models	123
6.2.2	The probability kernels associated to BMC models	123
6.3	Notations and assumptions	124
6.4	The main results	127
6.4.1	The sub-critical cases : $2\alpha^2 < 1$	127
6.4.2	The critical cases : $2\alpha^2 = 1$	127
6.5	Proof of Theorem 6.4.1	128
6.5.1	A quick overview of our strategy	128
6.5.2	Proof of (6.18)	129
6.5.3	proof of (6.19)	131
6.5.4	Proof of (6.20) : Moderate deviations principle for $b_n^{-1} \Delta_n(\mathbf{f})$	132
6.5.5	Completion of the proof of Theorem 6.4.1.	138
6.6	Proof of Theorem 6.4.3	138
6.6.1	A quick overview of our strategy	138
6.6.2	proof of (6.55)	139
6.6.3	proof of (6.56)	139
6.6.4	Proof of (6.57) : Moderate deviations principle for $b_n^{-1} n^{-1/2} \Delta_n(\mathbf{f})$	140
6.6.5	Completion of the proof of Theorem 6.4.3.	144
6.7	Numerical studies	145
6.8	Appendix	147

Table des figures

2.1	Dynamique d'un modèle de Moran (source : https://slideplayer.com/slide)	17
2.2	dynamique d'un processus de Wright-Fisher (source : https://www.researchgate.net)	19
2.3	Illustration graphique en fonction de s	43
3.1	Cycle cellulaire d'E. Coli (source http://wikimedia.org)	48
3.2	L'arbre binaire \mathbb{T} associé à l'étude des CMBs	49
5.1	graphics illustration of the previous proposition	116
6.1	Exact and empirical rate functions for the moderate deviation principles of $ \mathbb{G}_n ^{-1/2}b_n^{-1}M_{\mathbb{G}_n}(x - 1/2)$. In the first three figures, one can see that empirical rate function fit well the exact rate function. The differences can be explained from the fact that the sample size is not large enough to generate enough large deviation events. In the last figure, one can see that the empirical rate function is reduced to 0. This is due to the fact that the speed considered here is valid only in the critical case, not in the subcritical case.	146

Première partie
Introduction générale

Chapitre 1

Introduction

Mathématiques, Biologie et Ecologie, voilà un curieux mariage. C'est dans l'interface entre ces disciplines que se sont déroulés les travaux présentés dans cette thèse.

Pour comprendre les problèmes liés à la biodiversité, les biologistes s'intéressent à ces domaines : la dynamique et la génétique de populations.

La génétique de population a pour objectif de comprendre les modèles complexes de la variation génétique qu'on observe autour de nous. Ses origines peuvent être retracées par les travaux effectués par ses pionniers **Fisher, Haldane et Wright**. Leurs contributions étaient fondamentales dans la synthèse de l'évolution moderne, dans laquelle la théorie de l'évolution de la sélection naturelle de Darwin était finalement réconciliée avec la génétique de Mendel. La théorie de l'évolution de Darwin [1859] dans [26] nous dit : " les traits héréditaires qui favorisent la reproduction deviendront plus nombreux dans la population". Afin que la sélection naturelle puisse agir, il doit avoir de la variation au sein de la population et qu'une ressemblance entre les parents et leurs descendants. Ainsi la compréhension de l'évolution nécessite un mécanisme selon laquelle la variation est créée et héritée. Ceci a été effectué par la génétique mendélienne de Mendel (1866). En effet la résolution creuse les fondations de la génétique théorique des populations. En [1918] Fisher a montré comment les corrélations entre les familles qui ont été mesurées par les biométriciens pouvaient être expliquées par plusieurs facteurs mendéliens concernant le hasard, l'absence de génétique et les influences. Par la suite il a développé la théorie statistique de l'analyse de la variance et a montré que la génétique mendélienne était consistante avec l'idée de l'évolution par la sélection naturelle. Aux débuts des années [1924] Haldane a publié une série de papiers qui fournissent une analyse théorique détaillée de telle sorte que les différences sur la reproduction d'un ou de deux gènes mendéliens affecteraient une population en utilisant des exemples d'évolution sur des papillons afin de prouver que la sélection naturelle pouvait être extrêmement rapide.

Ces domaines constituent des champs de recherche dans lesquels beaucoup de problèmes liés aux comportements de grands groupes d'individus et leurs interactions (extinction de populations, équilibre des écosystèmes, invasion d'une population par une autre, métapopulations) ou des problèmes de

généétique de populations (recherche d'ancêtres communs à plusieurs individus dans une espèce, phylogénies) sont étudiés.

La compréhension de l'évolution temporelle ou "dynamique" d'un phénomène biologique nécessite le recours à un modèle mathématique. Du fait de la complexité des systèmes biologiques en l'occurrence des problèmes d'interactions de multitypes, de multi-espèces où les lois de conservation ne sont pas prises en compte, il serait judicieux de les simplifier pour obtenir un modèle mathématique accessible en se basant sur le phénomène biologique que l'on cherche à comprendre. C'est ainsi que les modèles stochastiques sont utilisés pour décrire des phénomènes biologiques à chaque échelle du vivant. Même si la population semble présenter un certain nombre de caractéristiques déterministes, elle est composée d'individus dont le comportement peut être soumis à une grande variabilité. Cependant pour étudier la dynamique de la population, on fait appel à un processus stochastique, c'est à dire une fonction aléatoire du temps qui décrit la succession des différentes générations ou de reproductions périodiques, saisonnières ou annuelles.

Quand la taille de la population est très grande, il devient difficile de décrire le comportement de la population, en prenant en compte chaque naissance ou mort d'un individu. Dans ce cas, des changements d'échelles de taille de la population et de temps sont effectués pour se ramener à des approximations plus faciles à manipuler mathématiquement, sur lesquelles des calculs et des résultats théoriques pourront être développés. Certaines échelles conduisent à des approximations déterministes comme celles introduites pour décrire la dynamique de population en l'occurrence l'équation logistique ou les systèmes de Lotka-Voltéra. D'autres échelles conduisent à des approximations aléatoires définies comme solutions des équations différentielles stochastiques (diffusions) telles que les équations de Feller dans la dynamique de population ou les équations de Wright-Fisher dans le cas de la génétique des populations. Des calculs sur ces diffusions permettent d'en déduire un certain nombre d'informations sur le comportement des populations.

Chapitre 2

Moran vers Wright-Fisher

L'évolution est un processus aléatoire. Les événements aléatoires interviennent de plusieurs manières, des copies de matériel génétique aux changements environnementaux à petite et à grande échelle, mais la source la plus fondamentale du hasard que nous devons comprendre est due à la reproduction dans une population finie conduisant à une dérive génétique aléatoire. Ainsi pour comprendre l'évolution temporelle des individus en génétique et dynamique de populations, deux modèles très célèbres en l'occurrence "**le modèle de Moran et le modèle de Wright-Fisher**" sont les plus utilisés. Quand la taille de la population est très grande, certains modèles sont très difficile à manipuler mathématiquement et numériquement. Pour trouver une solution à ce problème, une technique appelée **approximation de diffusion** est utilisée. Elle consiste à remplacer le processus markovien discret compliqué par une diffusion appropriée. Dans le cas d'une limite en grande population, il est bien connu que le processus de Moran est très difficile à manipuler. Par exemple la convergence vers l'équilibre (indépendant de la taille de la population) ou l'estimation de plusieurs indices de la biodiversité telle que l'indice de Simpson ne sont pas connus. Ce qui incite donc à approximer les dynamiques de ces processus markoviens par la diffusion de Wright-Fisher voir par exemple Ethier [29], Etheridge [27] et Kimura [50].

2.1 Modèle de Moran

Le processus de Moran a été introduit en génétique de population en 1958 par **Moran** [54]. Son objectif est de décrire la dynamique probabiliste d'une population de taille finie et constante composée de plusieurs allèles. Ces allèles sont en compétition pour la fixation ou la disparition dans la population. De façon analogue, il modélise la dynamique stochastique d'une population dans laquelle plusieurs espèces autonomes cohabitent.

2.1.1 Présentation du modèle

On considère une population de taille constante dans le temps et composée de plusieurs espèces.

On considère les notations suivantes :

- La taille de la population étudiée est notée J .
- Le nombre total d'espèces pouvant être dans la population est notée $\mathbb{S} = \{1, \dots, S + 1\}$. Puisque la taille de la population est constante, on va choisir $S + 1$ espèces, car la connaissance des S premières espèces permettent de déduire la quantité d'individu de la $(S + 1)$ -ième espèce.
- La proportion d'individus de l'espèce $i \in \mathbb{N}$ dans la population à l'évènement $n \in \mathbb{N}$ est notée X_n^i . On note I_J l'ensemble des valeurs possibles pour cette variable, $I_J = \{0, \frac{1}{J}, \dots, 1\}$ et $I = [0, 1]$
- Le vecteur d'abondance ayant pour coordonnée i , X_n^i est notée X_n .

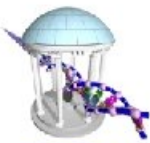
La dynamique d'évolution de la population est ainsi décrite :

1. L'individu désigné pour mourir sera choisi uniformément dans la population.
2. Celui qui le remplace choisira son parent dans la population avec une probabilité $1 - m_n$ (filiation) ou sera d'une nouvelle espèce avec une probabilité m_n (immigration). Le paramètre m_n dépend du temps et est aléatoire.
3. S'il y a immigration le parent choisi est de l'espèce i , avec probabilité p_n^i , $i \in I_J$. Les probabilités p_n^i sont telles que $\sum_{i \in \mathbb{S}} p_n^i = 1$, elles peuvent être aléatoires. On note p_n^i le vecteur ayant pour coordonnée i , p_n^i .
4. S'il y a filiation, le parent est choisi comme étant de l'espèce i avec probabilité

$$\frac{(1 + s_n^i)X_n^i}{1 + \sum_{k=1}^{S+1} X_n^k s_n^k}$$

Les s_n^i , $i \in \mathbb{S}$, représentent des avantages sélectifs (fitness) dûs aux fluctuations environnementales. Ils peuvent donc dépendre du temps et aussi être aléatoires. La probabilité décrite précédemment correspond à l'instant n au poids de l'espèce i divisé par le poids total de la population. On notera s_n le vecteur ayant pour coordonnée i , s_n^i .

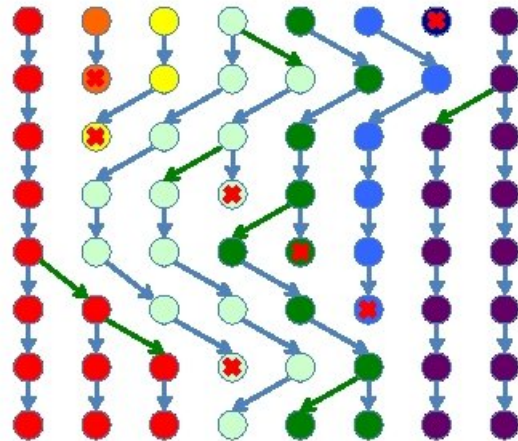
Remarque 2.1.1 *Le choix fait ici pour introduire de la sélection est l'un des plus simples, et s'inspire de modèles issus de la génétique de populations. Il existe bien sûr de nombreuses possibilités pour le choix de $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Ici la sélection influence seulement le choix du père lors du processus de filiation et n'a aucun effet sur la mortalité. Ce choix peut être critiquable mais justifié d'un point de vue biologique par les travaux de CHESSON et WARNER [9] et Kalyuzhny et AL [49]. La dynamique est donc composée de deux processus distincts, l'immigration qui a pour conséquence de conserver de la biodiversité en rajoutant des individus d'espèces potentiellement disparues dans la population et le processus de filiation qui modélise les interactions dans un milieu fermé. Seul elle conduirait à l'invasion définitive de la communauté par une seule espèce.*



Moran Model



- In 1958 Moran proposed an alternative to the Wright-Fisher model where reproductive generations overlap
- Central idea, is that each epoch represents two events, the loss of one gene and its replacement by another
- Rules out multiple coalescent events between epochs



12/6/2020

Comp 790– Continuous-Time Coalescence

4

FIGURE 2.1 – Dynamique d'un modèle de Moran (source :<https://slideplayer.com/slide>)

2.2 Modèle de Wright-Fisher

Différent de certains modèles comme le modèle Hardy-Weinberg, le modèle de Wright-Fisher étudie des populations de taille finie dans laquelle la sélection et l'immigration sont en jeu. Il a été introduit par Wright et Fisher au début des années 30. Pour plus de détails sur ce modèle on peut voir S. Méléard [53], A. Etheridge [27]. Un aperçu de la dynamique de ce modèle est donné par la figure ci-dessous.

Alors que dans les populations de taille infinie, les fréquences alléliques sont stables au cours des générations (lois des grands nombres), les fréquences alléliques varient aléatoirement dans des populations de taille finie (cela est dû à la variabilité dans la distribution des gènes d'une génération à l'autre). Pour permettre un traitement mathématique pas trop compliqué, le modèle de Wright-Fisher modélise la transmission des gènes d'une génération à l'autre de manière très schématique. Il fait l'hypothèse des générations séparées, ce qui est une simplification considérable du cycle de reproduction.

2.2.1 Présentation du modèle

On considère le modèle discret de Wright-Fisher avec sélection et immigration de taille constante J . À chaque instant, toute la population est renouvelée.

Les indices des générations seront notés par $n \in \mathbb{N}$.

Dans ce modèle de Wright-Fisher le parent de chaque individu de la génération $n + 1$ est distribué uniformément dans la n -ième génération.

Les individus se reproduisent indépendamment les uns des autres et la nouvelle génération est formée de J individus choisis uniformément dans la population.

Pour plus de simplification, on considère le cas de deux espèces avec sélection et immigration. Le processus markovien (X_n^J) évolue selon les probabilités suivantes :

$$\mathbb{P}\left(X_{n+1}^J = \frac{k}{J} \mid X_n^J = x\right) = \binom{k}{J} p_x^k (1 - p_x)^{J-k} \quad (2.1)$$

avec $p_x = mp + (1 - m)\frac{(1+s)x}{1+sx}$

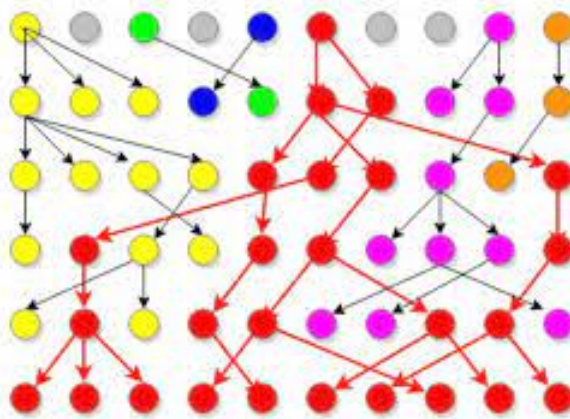


FIGURE 2.2 – dynamique d'un processus de Wright-Fisher (source : <https://www.researchgate.net>)

2.3 Résultats connus sur Moran vers Wright-Fisher

Rappelons quelques résultats issus de la littérature, de la convergence d'un processus de Moran vers une diffusion de Wright-Fisher.

A. Guillin, F. Jabot, A. Personne [41] ont étudié la convergence du processus de Moran vers une diffusion de Wright-Fisher (vers une limite en grande Population). Sous certaines hypothèses, ils ont produit le résultat suivant :

Théorème 2.3.1 *Quand J tend vers l'infini, la suite du processus $(X_t^J)_{t>0}$ converge en loi pour la topologie de Skorokhod vers le processus X_t dont les coordonnées sont solution de l'équation différentielle stochastique suivante :*

$$\begin{pmatrix} dX_t^1 \\ \vdots \\ dX_t^S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_t \times (p_t^1 - X_t^1) + X_t^1 (s_t^1 - \sum_{k \in \mathbb{S}} X_t^k s_t^k) \\ \vdots \\ m_t \times (p_t^S - X_t^S) + X_t^S (s_t^S - \sum_{k \in \mathbb{S}} X_t^k s_t^k) \end{pmatrix} dt + \sigma(X_t) dB_t \quad (2.2)$$

où σ vérifie $\sigma \cdot \sigma^* = a$ avec $a_{i,j} = -2x^i x^j$ si $i \neq j$ et $a_{i,i} = 2x^i(1 - x^i)$.
 $s_t = \lim_{J \rightarrow \infty} s_t^J J$ et $m_t = \lim_{J \rightarrow \infty} m_t^J J$ sont deux processus markoviens de saut de générateurs Q^s et Q^m et de conditions initiales $s_0 = \lim_{J \rightarrow \infty} s_0^J J$ et $m_0 = \lim_{J \rightarrow \infty} m_0^J J$.

La preuve de ce résultat utilise la méthode développée par Stroock et Varadhan [61] : "Problème de martingale". Ils ont procédé ainsi :

Soit $U_t = (X_t, s_t)$ tel que X_t soit solution de l'équation différentielle

stochastique (2.2). Et s_t le processus Markovien de saut vérifiant $\mathbb{P}(s_{s+t} = s' \mid s_t = s) = hQ_{s,s'} + o(h)$.

Ils cherchent à montrer la convergence en loi du processus U_t^J vers U_t . C'est à dire pour une classe de fonction régulières (C^∞), $\mathbb{E}[f(U_t^J) - f(U_t)] \rightarrow 0$.

Pour cela, ils considèrent le générateur de U_t noté $L_x + L_s$. Alors $f(U_t) = L_x f + L_s f + dM$ où M est une martingale donc U_t est solution du problème de martingale associé à $L_x + L_s$. Et d'autre part ils définissent $A_J f(U) = \int_{\mathbb{E}} f(y) - f(U) d\pi_J(U, dy)$ où pour tout $k \in \mathbb{N}, t \in [\frac{k}{J_s}, \frac{k+1}{J_s}[$, $\pi_J(U_t, \Gamma) = \pi_J(U_{\frac{k}{J^2}}, \Gamma) = \mathbb{P}(U_{\frac{k+1}{J^2}}^J \in \Gamma \mid U_{\frac{k}{J^2}})$.

Ensuite ils démontrent dans un premier lemme que $J^2 A_J f$ converge uniformément vers $L_x f + L_s f$. Et que la limite de U_t^J est solution du problème de martingale associé à $L_x + L_s$. Enfin, ils concluent par le fait qu'il existe une unique solution à ce problème de martingale. Puisque U_t vérifie ce problème, la convergence est assurée.

B. Cloez et J. Curujo [11] ont étudié la propagation en temps uniforme du modèle de Moran (voir [11]). Leur objectif est d'étudier la limite d'une distribution empirique induite par un modèle de Moran multi-allélique dont la dynamique est donnée par une chaîne de Markov irréductible en temps continue. La matrice de taux entraînant la mutation est irréductible et les taux de sélection sont uniformément bornés. Leur étude peut être vue sur deux angles :

- la première partie traite des processus avec des taux de sélection généraux. Pour ce cas, ils sont en mesure de prouver la propagation du chaos dans L^p sur les compacts avec une vitesse de convergence d'ordre $\frac{1}{\sqrt{N}}$.
- Pour la deuxième partie, ils considèrent aussi un type spécifique de sélection appelé sélection additive. Essentiellement, ils suposent que le taux de sélection est décomposé comme la somme de trois termes : un terme dépendant du type allélique du parent (ce qui peut être compris comme sélection à la mort), un autre terme dépendant du type allélique du descendant (ce qui peut être compris comme sélection à la naissance) et un troisième qui est symétrique. Dans ce cadre, leurs résultats incluent une borne temporelle uniforme dans L^p d'ordre $\frac{1}{\sqrt{N}}$ et la preuve de la normalité asymptotique avec une moyenne nulle et une variance explicite, pour l'erreur d'approximation entre la distribution empirique et sa limite, lorsque le nombres d'individus tend vers l'infini. De plus, ils explorent l'interprétation du modèle de Moran avec sélection additive comme processus particulaire dont la distribution quasi-stationnaire, dans le même esprit que les systèmes de particules de **Fleming-Viot**. Ils abordent ensuite le problème de la minimisation de l'erreur quadratique asymptotique, lorsque le temps et le nombre de particules tendent vers l'infini.

Ils ont proposé plusieurs théorèmes dans leur papier. Pour plus de détails voir [11].

A. Etheridge, R. C. Griffiths, J. C. Taylor [28] se sont intéressés à un

processus dual coalescent dans un modèle de Moran avec sélection génétique. Leur approche est la suivante :

Un double processus coalescent pour un modèle de Moran multitype avec sélection génétique est dérivé à l'aide d'une approche génératrice. Cela conduit à une expansion des fonctions de transition dans le modèle et la limite du processus de Wright-Fisher en terme de fonction de transition pour le dual coalescent. Une représentation graphique du modèle de Moran identifie le dual comme un fort double processus suivant les lignes tapées en arriere dans le temps. Une application est faite à la mesure harmonique, problème de trouver la distribution de probabilité conjointe du temps jusqu'à la première perte d'un allèle de la population et la distribution des allèles survivants au moment de la perte.

F. CORDERO, G. VECHAMBRE [12] ont mené des études aussi sur le modèle de Moran et la diffusion de Wright-Fisher dans un environnement aléatoire. Plus précisément, Ils ont considéré une population de Moran à deux types de taille N soumise à la sélection et à la mutation, qui est immergée dans un environnement variable. La population est sensible aux changements exceptionnels de l'environnement, qui accentuent l'avantage sélectif des individus aptes. Dans ce cadre, ils ont montré que la composition typique dans la population est continue par rapport à l'environnement. Cela leurs a permis de remplacer l'environnement déterministe par un environnement aléatoire, qui est piloté par un subordonné. En supposant que la sélection, la mutation et l'environnement sont faibles par rapport à N , ils ont montré que le processus type-fréquence, avec vitesse de temps accéléré par N , converge vers une équation différentielle stochastique de type Wright-Fisher avec modélisation de l'effet de l'environnement par terme de saut, quand N tend vers l'infini. Ensuite, ils ont étudié le comportement asymptotique du modèle limite dans un futur et passé lointain, à la fois dans le cas déterministe (quenched) et dans le cas aléatoire (annealed). Leur approche s'appuie sur l'image généalogique derrière le modèle. Ce dernier est décrit au moins d'une extension du graphe Ancestral (ASG). La relation formelle entre les objets avant et arriere est donnée sous la forme d'une dualité de moments entre le processus type-fréquence et le processus de comptage de lignes d'une version élaguée de l'ASG. Cette relation donne des caractérisations des moments dans les cas déterministes et aléatoires de la distribution de type asymptotique. Un élagage plus impliqué de l'ASG leurs a permis d'obtenir des résultats dans les cas déterministes et aléatoires pour la distribution de type ancestral. En l'absence de mutations, l'un des types se fixe et leurs résultats donnent des expressions pour les probabilités de fixation. Pour plus de détails sur l'aspect mathématique, on peut regarder leur papier [12].

G. VECHAMBRE [64] a fourni le résultat suivant qui étudie la convergence du modèle de Moran vers une diffusion de Wright-Fisher. Ce résultat n'est qu'une généralisation du théorème 2.3 dans [12].

Théorème 2.3.2 *Soit J_0 et J_1 deux subordinateurs de sauts purs avec des*

2.3. RÉSULTATS CONNUS SUR MORAN VERS WRIGHT-FISHER

sauts dans $(0, 1)$ et pour tout $s > 0$, posons

$$J_0^N(s) := J_0\left(\frac{s}{N}\right)$$
$$J_1^N(s) := J_1\left(\frac{s}{N}\right)$$

On suppose de plus

$$N\sigma_N \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \sigma \quad \text{avec} \quad \sigma > 0$$

et que

$$X_N(J_0^N, J_1^N, 0) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} x$$

Alors le processus de type-fréquence $(X_N(J_0^N, J_1^N, s))_{s \geq 0}$ converge en loi vers $(X(s))_{s > 0}$ où X est l'unique solution de l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dX(s) = X(s-)(1 - X(s-))dL(s) + \sqrt{2X(s)(1 - X(s))}dB(s)$$

avec $X(0) = x$ et $L(s) := -\sigma s + J_0(s) + J_1(s)$.

Pour la preuve de ce résultat, on peut regarder dans [64].

Dans la littérature, on trouvera pas mal de résultats concernant cette partie, la liste est non exhaustive.

2.4 Mes résultats

Dans cette section, on donne une limite quantitative en grande population de l'erreur commise en utilisant l'approximation de diffusion en présence d'immigration et sélection faibles en dimension une. L'approche est assez robuste pour considérer le cas où la sélection et l'immigration sont des processus de Markov dont la limite en grande population est soit un processus de saut à espace d'état fini, soit un processus de diffusion.

Nous traitons d'abord le cas où la sélection et l'immigration sont constantes. Nous énonçons ici nos principaux résultats pour les différents cas ci-dessous ; une présentation de la preuve dans le cas constant est donné et pour les autres cas, on peut se référer à l'article (1) qui se trouve dans la deuxième partie de ce document, vu que leurs preuves ne sont qu'une simple adaptation de celle du cas de la sélection constante avec un remplacement du générateur infinitésimal du processus limite.

2.4.1 Sélection constante

On note X_n^J : la proportion des individus de la première espèce dans la population de taille J . $T \in \mathbb{N}^*$ est notre temps d'horizon et est fixé.

Pour énoncer le théorème donnant l'ordre d'erreur entre le processus discret et l'approximation de diffusion, nous devons d'abord nous placer à la même échelle de temps .

Rappelons qu'en sélection faible, une unité de temps t correspond à J^2 évènements, on pose alors $n = \lceil J^2 t \rceil$. Notons \mathcal{C}^j l'espace des fonctions j - fois dérivable dont la j -ème dérivée est continue.

Considérons Y_t^J le processus défini sur $[0, J^2 T]$ de générateur

$$L = \frac{1}{J^2} x(1-x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{J} [s x(1-x) + m(p-x)] \frac{\partial}{\partial x}$$

On va montrer la convergence dans l'échelle de temps associé au processus discret, c'est à dire la convergence de Y_t vers X_n^J . Il faut donc discrétiser le processus Y_t^J en prenant en sa valeur aux entiers, $Y_{\lceil J^2 t \rceil}$. On compare alors ces deux processus discrets sur un intervalle de temps fini $[0, J^2 T]$ avec la norme $\|\cdot\|_J$ qui est ainsi définie $\|f\|_J = \sup_{x \in I_J} |f(x)|$ où $I_J = \{\frac{i}{J} : i = 0, 1, 2, \dots, J\}$.

Théorème 2.4.1

Soit $x \in \mathbb{R}, f \in \mathcal{C}^4(I)$. On suppose qu'on est en sélection et immigration faibles, i.e $s = \frac{s'}{J}$ et $m = \frac{m'}{J}$, avec $s' \in \mathbb{R}, m' \in \mathbb{R}_+$. Soit $f \in \mathcal{C}^4(I)$, alors il existe des fonctions positives a, b et K (qui dépendent de m', s' mais pas de t et de f) telles que $q(t) = a(e^{bt} - 1)$:

$$\|\mathbb{E}_x \left[f(X_{\lceil J^2 t \rceil}^J) - f(Y_{\lceil J^2 t \rceil}^J) \right]\| \leq q(t) \left(\frac{(\|f^{(1)}\|_J + \|f^{(2)}\|_J)}{J} + K \frac{\sum_{i=1}^4 \|f^{(i)}\|_J}{J^2} \right)$$

Notons dans un premier temps

$$(S_n f)(x) = \mathbb{E}_x[f(X_n^J)] \quad \forall \quad n \in \mathbb{N}$$

$$(T_t f)(x) = \mathbb{E}_x[f(Y_t^J)] \quad \forall \quad t \geq 0$$

Tout d'abord nous commençons par nous ramener, en utilisant des sommes télescopiques au résultat suivant :

$$\|S_n f - T_n f\|_J \leq \sum_{k=0}^{n-1} \|(S_1 - T_1)T_k f\|_J \quad (2.3)$$

Cette inégalité nous permet maintenant d'étudier simplement la différence des deux processus sur un pas de temps.

Or, sur un pas de temps, S_1 varie au plus de l'ordre de $\frac{1}{J}$ et un développement limité en population de $f(X_1^J)$ donne l'existence de $\zeta \in [0, 1]$ tel que :

$$\begin{aligned} f(X_1^J) &= f(x) + f^{(1)}(x)(X_1^J - x) + \frac{f^{(2)}(x)}{2}(X_1^J - x)^2 + \frac{1}{3!}(X_1^J - x)^3 f^{(3)}(x) \\ &\quad + \frac{1}{4!}(X_1^J - x)^4 f^{(4)}(\zeta) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Et en prenant l'espérance :

$$\begin{aligned} (S_1 f)(x) &= \mathbb{E}_x[f(X_1^J)] \\ &= f(x) + \mathbb{E}_x[X_1^J - x]f^{(1)}(x) + \frac{1}{2!}\mathbb{E}_x[(X_1^J - x)^2]f^{(2)}(x) \\ &\quad + \frac{1}{3!}\mathbb{E}_x[(X_1^J - x)^3]f^{(3)}(x) + \frac{1}{4!}\mathbb{E}_x[(X_1^J - x)^4]f^{(4)}(\zeta) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Ensuite un développement limité en temps de $(T_1 f)(x)$ donne :

$$\begin{aligned} (T_1 f)(x) &= (T_0 f)(x) + (T_0 f)^{(1)}(x)(1 - 0) + \frac{w_2}{2!}(T_0 f)^{(2)}(x)(1 - 0)^2 \\ &= f(x) + (L^1 f)(x) + \frac{w_2}{2!}(L^2 f)(x) \end{aligned} \quad (2.6)$$

Il reste maintenant à faire la différence pour obtenir un développement limité de $\|(S_1 - T_1)f\|_J$. On montre que pour f assez régulière, il existe γ_1^J, γ_2^J d'ordre $\frac{1}{J^3}$ et K_1 une constante vérifiant :

$$\|(S_1 - T_1)f\|_J \leq \|\gamma_1^J\|_\infty \|f^{(1)}\|_J + \|\gamma_2^J\|_\infty \|f^{(2)}\|_J + \frac{K_1}{J^4}$$

On aimerait alors appliquer ce résultat à $T_k f$, pour cela deux propriétés restent à vérifier.

1. La première est de s'assurer que $T_k f$ est assez régulière à condition que f le soit, c'est à dire que $T_k : C^j \longrightarrow C^j$, pour $j = 1, \dots, 4$.
Pour que le développement précédent soit applicable à $T_k(f)$.
On se réfère à [Ethier\[1976\]](#) (théorème 1) pour la justification de ce résultat.

2. La seconde est de vérifier que l'on peut contrôler les $\|(T_k f)^{(j)}\|$, pour $j \in \{1, 2, \dots\}$:

$$\|(T_k f)^{(j)}\| \leq \exp(c_j \frac{t}{J^2}) \sum_{k=1}^j a_{k,j} \|f^{(j)}\|$$

avec c_j une constante indépendante de J .

La démonstration de ce résultat se fait par récurrence. L'initialisation est immédiate.

Pour contrôler $(T_t f)^{(j)}$, il faut dans un premier temps utiliser l'équation de Chapman Kolmogorov pour obtenir l'équation différentielle suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \phi^{(j)} &= L_j \phi^{(j)} - \nu \phi^{(j)} + \psi_j \phi^{(j-1)} \\ \phi^{(j)}(0, \cdot) &= f^{(j)} \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} L_j \phi^{(j)}(x) &= L \phi^{(j)} + j \frac{(1-2x)}{J^2} \phi^{(j+1)} \\ \nu_j(x) &= \left(\frac{j(j-1)}{J^2} - j \frac{s(1-2x) - m}{J} \right) \\ \psi_j &= \frac{-sj(j-1)}{J} \end{aligned}$$

et $\phi(t, x) = (T_t f)(x)$. Si maintenant ψ_j est nul, ce qui est le cas si $s = 0$, la dérivée d'ordre $j - 1$ n'intervient plus. Alors on peut trouver une certaine fonction $\psi^{(j)}$ telle que $\frac{\partial}{\partial t} \psi^{(j)} = L_j \psi^{(j)}$, $\psi^{(j)}(0, \cdot) = f^{(j)}$ et par le principe du maximum, on obtient le résultat : $\|\psi^{(j)}\| \leq \|f^{(j)}\|$.

Cependant la présence de ψ_j complique un peu les choses, on va devoir utiliser la formule de Feynman-Kac pour exprimer $\phi^{(j)}$ comme l'espérance d'un processus dépendant lui aussi de $\phi^{(j-1)}$. Heureusement l'hypothèse de récurrence va nous permettre de contrôler $\phi^{(j-1)}$ et donc de contrôler $\phi^{(j)}$. Se référer à [Ethier et Norman \[1977\]](#).

Une fois ces deux propriétés démontrées, on peut exhiber une fonction \tilde{R}_j indépendante de J vérifiant :

$$\begin{aligned} \|S_n f - T_n f\|_J &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \|(S_1 - T_1) T_k f\|_J \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left[\|\gamma_1\|_\infty \|(T_k f)^{(1)}\|_J + \|\gamma_2\|_\infty \|(T_k f)^{(2)}\|_J + O\left(\frac{1}{J^4}\right) \right] \\ &\leq \sum_{j=1}^2 \|\gamma_j\|_\infty \sum_{k=1}^j a_{k,j} \|f^{(j)}\|_J \sum_{k=0}^{n-1} \exp(c_j \frac{k}{J^2}) + O\left(\frac{1}{J^4}\right) \\ &\leq \sum_{j=1}^2 \|\gamma_j\|_\infty \tilde{R}_j J^2 \|f^{(j)}\|_J + O\left(\frac{1}{J^4}\right) \xrightarrow{J \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

car pour J assez grand

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^j a_{i,j} \sum_{k=0}^{n-1} \exp\left(c_j \frac{k}{J^2}\right) &= \sum_{i=1}^j a_{i,j} \frac{1 - \exp(c_j \frac{n}{J^2})}{1 - \exp(\frac{c_j}{J^2})} \\ &\leq J^2 \frac{\exp(c_j \frac{n}{J^2}) - 1}{c_j} + O\left(\frac{1}{J^2}\right) \end{aligned}$$

et $R_j(t) = \sup_{J \in \mathbb{N}} \frac{\exp(c_j \frac{n}{J^2}) - 1}{c_j}$ est fini car n est de l'ordre de J^2 . Donc il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a(1 - e^{bt}) \geq \sup_{J \in \mathbb{N}} \max_{j \in \{1,2\}} (|\gamma_j^{J,\epsilon}| R_j(t) J^3)$ et $a(1 - e^{bt}) \geq \max_{j \in \{1,\dots,4\}} R_j(t)$. Alors si $q(t) = a(1 - e^{bt})$, on obtient le résultat annoncé :

$$\|S_n f - T_n f\|_J \leq \frac{q(t)}{J} (\|f^{(1)}\|_J + \|f^{(2)}\|_J) + O\left(\frac{1}{J^2}\right)$$

Remarque 2.4.2 *La constante obtenue q est ici exponentielle en temps, car la quantité $c \frac{n}{J^2}$ est de l'ordre de t dans l'équation. On peut en fait trouver une certaine condition sur les paramètres en l'occurrence $m > |s|$ telle que cette constante devienne linéaire en temps.*

2.4.2 Sélection aléatoire

Cas d'un processus markovien de sauts

Dans cette section, le processus de sélection est considéré comme un processus Markovien de saut. On introduit les notations suivantes qui diffèrent du cas constant.

Soit $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un processus de saut homogène de matrice de transition P^J . On note qu'on est toujours en sélection faible donc s_n est de l'ordre de $\frac{1}{J}$ et est à valeurs dans l'espace d'état fini E_s . On note K la cardinalité de E_s . Supposons de plus qu'il existe une matrice $Q \in M_K(\mathbb{R})$ et $\alpha \in (\mathbb{R}_+)^K$ telle que

$$P_{s,s'}^J \times J^2 \xrightarrow{J \rightarrow +\infty} \alpha_s Q_{s,s'} \quad s \neq s' \quad (2.7)$$

Comme dans la section précédente on note (X_n^J) le processus de Moran, mais avec sélection markovienne. (X_n^J) est à valeurs dans I_J . On pose $W_n^J = (X_n^J, s_n)$ et on considère le processus de Markov \tilde{W}_t^J à valeurs dans $I = [0, 1] \times E_s$ de générateur infinitésimal :

$$L_{x,s} f(x, s) = L_x f(x, s) + L_s f(x, s) \quad \forall f \in C^2(I)$$

avec

$$L_x f(x, s) = \frac{x(1-x)}{J^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, s) + \frac{[sx(1-x) + m(p-x)]}{J} \frac{\partial}{\partial x} f(x, s)$$

et

$$L_s f(x, s) = \sum_{s' \in E_s} \frac{\alpha_s Q_{s,s'}}{J^2} (f(x, s) - f(x, s'))$$

Sa première coordonnée est le processus Y^J qui a le même générateur dépendant de s comme dans la section précédente et sa seconde coordonnée est le processus markovien de saut \tilde{s}_t ayant pour générateur $(Q_{s,s'})_{s,s' \in E_s}$ et α/J^2 sont ses taux de transitions.

Comme dans la section précédente, quand J tend vers l'infini, on quantifie la convergence en loi de $(\tilde{W}_n^J)_{n \in \mathbb{N}}$ vers $(W_n^J)_{n \in \mathbb{N}}$. On note que $f^{(j)}$ la j -ème dérivée de f par rapport à x . Ainsi on peut énoncer notre résultat principal concernant cette section.

Théorème 2.4.3 *On suppose que pour tout $f \in C^2(I)$ et pour tout s , $T_t f(\cdot, s)$ appartient à $C^2(I)$. Soit f telle que pour tout s , $f(\cdot, s) \in C^4(I)$, alors il existe $a, b \in \mathbb{R}$ et une fonction K_0 linéaire en temps qui vérifie que :*

$$\begin{aligned} \left\| \mathbb{E}_{x,s} \left[f(W_{[tJ^2]}^J) - f(\tilde{W}_{[tJ^2]}^J) \right] \right\|_J &\leq \frac{a(e^{bt} - 1)}{J} \left(\|f^{(1)}\|_J + \|f^{(2)}\|_J \right) \\ &\quad + k_0 \max_{s,s' \in E_s} \left| J^2 P_{s,s'} - \alpha_s Q_{s,s'} \right| \|f\|_J \\ &\quad + \frac{a(e^{bt} - 1)}{J^2} \sum_{i=1}^4 \|f^{(i)}\|_J \end{aligned}$$

Cas d'un processus de diffusion

Pour cette partie, on suppose que le processus de sélection est une diffusion homogène. On maintient toujours l'hypothèse d'immigration constant. D'abord on considère l'équation différentielle suivante :

$$\begin{aligned} dS_t^J &= \frac{1}{J^2} b(S_t^J) dt + \frac{\sqrt{2}}{J} \sigma(S_t^J) dB_t \\ S_0^J &= s \end{aligned}$$

avec b et σ sont des fonctions lipschitziennes et bornées, i.e. : pour tout $t \geq 0$, pour tout $s, s' \in \mathbb{R}$, il existe $k \geq 0$ tel que :

$$|b(s) - b(s')| + |\sigma(s) - \sigma(s')| \leq k|s - s'|$$

Ces hypothèses garantissent l'existence de solutions fortes de $(S_t)_{t \geq 0}$ et (S_t) a pour générateur :

$$L_s^J = \frac{\sigma^2(s)}{J^2} \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{b(s)}{J^2} \frac{\partial}{\partial s}$$

Posons $\tilde{S}_t = \tilde{S}_{tJ^2}^J$, ce processus est indépendant de J et satisfait l'équation différentielle suivante :

$$\begin{aligned} d\tilde{S}_t &= \sqrt{2} \sigma(\tilde{S}_t) dB_t + b(\tilde{S}_t) dt \\ \tilde{S}_0 &= s \end{aligned}$$

On suppose maintenant que $T \in \mathbb{N}$, et considérons le processus $(U_n^J)_{n < J^2 T}$ définie par la relation suivante selon le schéma d'Euler standard :

$$U_{k+1}^J = U_k^J + \frac{1}{J^2} b(U_k^J) + \sqrt{2} \sigma(U_k^J) (B_{k+1}^J - B_k^J)$$

où les quantités $(B_{k+1}^J - B_k^J)_{k \leq J^2 T}$ sont indépendantes et identiquement distribuées et de loi normale centrée $\mathcal{N}(0, \frac{1}{J^2})$. Notre processus $(S_t^J)_{t \geq 0}$ est à valeurs dans \mathbb{R} . Il est donc nécessaire d'introduire cette fonction $h : \mathbb{R} \rightarrow E_s$ où E_s est un intervalle fermé borné inclus dans $] -1 + \epsilon, +\infty[$ avec $\epsilon > 0$.

On suppose que $h \in C^2$ et est de l'ordre de $\frac{1}{J}$. On considère maintenant pour le paramètre de sélection la fonction $h((S_t))_{t \geq 0}$. On note encore pour toute fonction $f : I_J \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\|f\|_J = \sup_{I_J \times \mathbb{R}} |f(x, s)|$.

Pour éviter d'avoir une partie stochastique non triviale de notre équation finale, on a besoin comme dans la section " de la sélection constante " que h est de l'ordre de $\frac{1}{J}$. Beaucoup de choix peuvent être faits à propos de la fonction h et qui dépendront de la modélisation faite.

Donnons à nouveau la définition de notre processus de Moran dans ce contexte.

$$P_{x+} = (1-x) \left(mp + (1-m) \frac{x(1+h(s))}{1+h(s)x} \right)$$

$$P_{x-} = x \left(m(1-p) + (1-m) \left(1 - \frac{x(1+h(s))}{1+h(s)x} \right) \right)$$

En notant à nouveau $\Delta = \frac{1}{J}$, on peut donner son espérance et sa variance :

$$\mathbb{E}_x \left[X_{n+1}^J - x \mid X_n^J = x, U_n^J = s \right] = \Delta \left[m(p-x) + \frac{(1-m)h(s)x(1-x)}{1+h(s)x} \right]$$

$$Var \left(X_{n+1}^J - x \mid X_n^J = x, U_n^J = s \right) = \Delta^2 \left[\frac{(1-m)h(s)x(1-x)(1-2x)}{1+h(s)x} \right. \\ \left. + mp(1-2x) + x - \left(m(p-x) + \frac{(1-m)h(s)x(1-x)}{1+h(s)x} \right)^2 \right]$$

Comme dans la section précédente, on utilise le processus $(Y_t^J)_{t \geq 0}$ qui approche le processus de Moran quand J tend vers l'infinie. Son générateur est donné par :

$$L_x^J f(x, s) = \frac{x(1-x)}{J^2} \frac{\partial^2 f(x, s)}{\partial x^2} + \frac{1}{J} [m(p-x) + h(s)x(1-x)] \frac{\partial f(x, s)}{\partial x}$$

Notre objectif est de donner une borne supérieure de l'erreur commise quand

$$(X_n^J, U_n^J) \xrightarrow{J \rightarrow \infty} (Y_n^J, S_n^J)$$

Le générateur du processus bidimensionnel (Y_t^J, S_t^J) est donné par

$$H = L_x^J + L_s^J = \frac{x(1-x)}{J^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{J} [m(p-x) + h(s)x(1-x)] \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\sigma^2(s)}{J^2} \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{b(s)}{J^2} \frac{\partial}{\partial s}$$

Maintenant on peut énoncer notre résultat principal de cette partie :

Théorème 2.4.4

Soit f une fonction de classe C^2 . Alors il existe $a, b \in \mathbb{R}_+$ telle que :

$$\begin{aligned} \left\| \mathbb{E}_x \left(f(X_{[tJ^2]}^J, Z_{[tJ^2]}^J) - f(Y_{[tJ^2]}^J, S_{[tJ^2]}^J) \right) \right\|_J &\leq \frac{a(e^{bt} - 1)}{J} (\|\nabla f\|_J + \|\text{Hess}f\|_J) \\ &+ \frac{a(e^{bt} - 1)}{J^2} (\|f^{(3)}\|_J + \|f^{(4)}\|_J) \end{aligned}$$

La preuve de ce résultat n'est qu'une simple adaptation du cas constant. Il suffit de remplacer le générateur infinitésimal L par H et effectuer les mêmes calculs.

2.4.3 Approximation quantitative uniforme du processus discret de Moran par une diffusion de Wright -Fisher

Cette partie constitue une amélioration des études faites précédemment. Ici on suppose que les paramètres de sélection sont supérieurs strictement à ceux de l'immigration. Grâce aux inégalités de transport développées par Guillin et AL [42], nous obtenons un contrôle de la formule de Feynman-Kac utilisée dans le cas de sélection constant précédemment. Ce qui nous permet d'avoir une borne uniforme de l'erreur commise en approximant le processus discret de Moran X_n^J par la diffusion de Wright-Fisher (Y_t^J).

Pour plus de détails sur cette partie on peut voir l'article 2 dans la deuxième partie de ce manuscrit. Énonçons maintenant notre principal résultat de cette section :

Théorème 2.4.5 *Pour tout $s' \in \mathbb{R}, m' \in \mathbb{R}_+$, on pose $s = \frac{s'}{J}$ et $m = \frac{m'}{J}$. Soit $f \in C^4(I)$. Supposons que $s' > m' > 0$. Alors ils existent des fonctions positives A et K qui ne dépendent que de s' et m' telle que :*

$$\left\| \mathbb{E}_x \left[f(X_{[tJ^2]}^J) - f(Y_{[tJ^2]}^J) \right] \right\|_J \leq A \left(\frac{(\|f^{(1)}\|_J + \|f^{(2)}\|_J)}{J} + K \frac{\sum_{i=1}^4 \|f^{(i)}\|_J}{J^2} \right).$$

La preuve de ce résultat suit la même démarche que celle de la section précédente. Sans reprendre les points déjà faits, nous donnons le contrôle de la formule de Feynman-Kac avec l'aide des inégalités de transport et le contrôle de la norme infinie du semigroupe (T_t) par la norme L^2 , en utilisant la notion d'ultracontractivité développée par Wang, Coulhon (voir [59], [58],[13]).

D'après le théorème 1 dans [32], nous avons, pour tout j ,

$$T_t : C^j(\mathbb{I}) \rightarrow C^j(\mathbb{I})$$

Supposons que $f \in C^4(\mathbb{I})$ et $j \in \{1, 2\}$.

Posons $\phi(t, x) = (T_t f)(x), x \in \mathbb{I}_J, t \geq 0$. Donc si $f \in C^{j+2}(\mathbb{I})$,

2.4. MES RÉSULTATS

alors $\phi(t, x) \in C^{j+2}(\mathbb{I})$.

Cependant l'équation de Chapman-Kolmogorov rétrograde peut être écrite :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\phi &= L\phi \\ \phi(0, \cdot) &= f.\end{aligned}$$

Soit $\phi^{(j)}$ la j -ème dérivée de ϕ par rapport à x et on a

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\phi^{(j)} &= L_j\phi^{(j)} - \nu_j\phi^{(j)} + \psi_j\phi^{(j-1)} \\ \phi^{(j)}(0, \cdot) &= f^{(j)}\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}L_j\phi^{(j)}(x) &= L\phi^{(j)} + j(1-2x)\phi^{(j+1)} \\ \nu_j(x) &= (j(j-1) - j(s'(1-2x) - m')) \\ \psi_j &= -s'j(j-1)\end{aligned}$$

En utilisant la formule de Feynman-Kac, on a

$$\begin{aligned}\phi^{(j)}(t, x) &= \mathbb{E}_x \left[f^{(j)}(Y_t^j) e^{-\int_0^t j(j-1) + j(m-s(1-2Y_u^j)) du} \right. \\ &\quad \left. - \int_0^t s'j(j-1)\phi^{(j-1)}(Y_h^j) e^{-\int_0^t j(j-1) + j(m-s(1-2Y_u^j)) du} dh \right]\end{aligned}$$

Contrôle de la formule de Feynman -Kac avec les inégalités de transport

Différent de l'approche faite dans les sections précédentes dans [39], nous nous focalisons ici sur le générateur infinitésimal du processus de diffusion pour en dériver les fonctions speed et scaling de Feller.

Ces formules nous permettent de définir la mesure invariante de probabilité du processus de diffusion $(Y_{[t, J^2]}^j, t \geq 0)$. Ainsi en introduisant des fonctions assez régulières, nous définissons la constante de transport C qui constitue l'objet principal d'investigation de cette partie.

Soit $(Y_{[t, J^2]}^j)_{t \geq 0}$ le processus de diffusion de Wright-Fisher avec comme générateur :

$$L_j = x(1-x)\frac{\partial^2}{\partial x^2} + [s'x(1-x) + m'(p-x) + j(1-2x)]\frac{\partial}{\partial x}$$

avec $j = 1, 2, \dots, 4$.

On suppose que $s \in \mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{R}_+$ sont des constantes. Posons

$$\begin{aligned}a(x) &= x(1-x) \\ b(x) &= s'x(1-x) + m'(p-x) + j(1-2x)\end{aligned}$$

et pour tout fixé $c \in \mathbb{I}$

$$\begin{aligned}\tilde{s}'(x) &= \exp \left[- \int_c^x \frac{b(u)}{a(u)} du \right] \\ \tilde{m}'(x) &= \frac{1}{a(x)\tilde{s}'(x)}\end{aligned}$$

En remplaçant $a(x)$ et $b(x)$ par leurs expressions on a :

$$\begin{aligned}\tilde{s}'(x) &= K(c) \frac{e^{-s'x}}{x^{m'p+j}(1-x)^{m'(1-p)+j}} \\ \tilde{m}'(x) &= \frac{1}{K(c)} x^{m'p+j-1}(1-x)^{m'(1-p)+j-1} e^{s'x}\end{aligned}$$

où $K(c) = c^{m'p+j}(1-c)^{m'(1-p)+j} e^{s'c}$.

Posons $Z = \int_0^1 \tilde{m}'(x) dx$.

On définit la mesure de probabilité du processus $(Y_{[tJ^2]}^j, t \geq 0)$ par

$$\mu(dx) = \frac{\tilde{m}'(x) dx}{Z}$$

qui est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue \tilde{m}' .

Le générateur L_j est symétrique dans $L^2(\mathbb{I}, \mu)$, la forme de Dirichlet qui lui est associée est définie par :

$$\varepsilon(f, f) = \int_0^1 a(x) f'(x) d\mu(x) \quad f \in \mathbb{D}(\varepsilon)$$

où $\mathbb{D}(\varepsilon) = \left\{ f \in AC(\mathbb{I}) \cap L^2(\mu); \int_0^1 (f')^2 d\mu < +\infty \right\}$.

$AC(\mathbb{I})$ est l'espace des fonctions qui sont absolument continues sur \mathbb{I} .

Considérons la fonction identité suivante qui est absolument continue :

$$\begin{aligned}\gamma : [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \gamma(x) = x\end{aligned}$$

on note que $\gamma'(x) \geq 0$.

La norme Lipschitzienne d'une fonction $f \in C^1(\mathbb{I})$ est définie par

$$\|f\|_{Lip(\gamma)} = \sup_{0 \leq x < y \leq 1} \frac{|f(y) - f(x)|}{|y - x|} = \sup_{x \in [0, 1]} |f'(x)| = \|f'\|_{\infty}$$

et la constante de transport est donnée par :

$$C = \sup_{x \in [0, 1]} \left[\tilde{s}'(x) \sqrt{a(x)} \int_x^1 (\gamma(y) - \mu(\gamma)) \tilde{m}'(y) dy \right]$$

Cette constante constitue l'élément clé de cette partie; raison de plus nous étudions son estimation. Un problème majeur est de trouver une borne explicite pour elle. Pour voir si elle n'explose pas aux points de bord 0 et 1, nous avons fait des développements de Taylor en leurs voisinages. Donnons maintenant le résultat suivant concernant l'estimation de cette constante de transport C .

Proposition 2.4.6

a) Il existe une constante finie B qui dépend de (m', s', p, j) telle que

$$C \leq B$$

où

$$B = \max \left(\mu \times \sqrt{\frac{m'p+j-1}{m'(1-p)+(j-1)}}, (1 - \mu) \times \sqrt{\frac{m'(1-p)+j-1}{m'p+j-1}} \times e^{s' \left(\frac{m'p+j-1}{m'+2(j-1)} \right)} \right)$$

b) μ satisfait $W_1 I(C)$:

$$W_1^2(\nu, \mu) \leq 4C^2 I(\nu/\mu), \quad \forall \nu \in \mathcal{M}_1(I), \quad (W_1 I(C))$$

b') Pour toute fonction Lipschitzienne v , et pour tout $\lambda > 0, t > 0$,

$$\|P_t^{\lambda v}\|_{L^2(\mu)} \leq \exp \left(t(\lambda \mu(v) + \lambda^2 C^2 \|v\|_{L^1 p(\gamma)}^2) \right)$$

avec $W_1(\nu, \mu)$ est la distance de Wasserstein dans $L^1(\mu)$, et $I(\nu/\mu)$ l'information de Fisher-Varadhan -Donsker.

Preuve

La preuve de l'item (a) constitue un développement de Taylor en 0 et 1.

On peut rappeler la définition de la mesure de probabilité μ du processus Markovien $(Y_{tj}^j, t \geq 0)$ définie par :

$$\mu(dx) = \frac{\tilde{m}'(x)dx}{Z} = \frac{x^{m'p+j-1}(1-x)^{m'(1-p)+j-1}e^{s'x}dx}{\int_0^1 x^{m'p+j-1}(1-x)^{m'(1-p)+j-1}e^{s'x}dx}$$

On note que

$$\mu \times \int_0^1 y^{m'p+j-1}(1-y)^{m'(1-p)+j-1}e^{s'y}dy = \int_0^1 y^{m'p+j}(1-y)^{m'(1-p)+j-1}e^{s'y}dy$$

Estimons maintenant la constante C .

$$C = \sup_{x \in [0,1]} \left[\tilde{s}'(x) \sqrt{a(x)} \int_x^1 (y - \mu) \tilde{m}'(y) dy \right]$$

Ainsi on a

$$\begin{aligned} C &= \sup_{x \in [0,1]} \left[\tilde{s}'(x) \sqrt{a(x)} \int_x^1 (y - \mu) \tilde{m}'(y) dy \right] \\ &= \sup_{x \in [0,1]} \left[\frac{K(c)e^{-s'x} \sqrt{x(1-x)}}{x^{m'p+j}(1-x)^{m'(1-p)+j}} \frac{1}{K(c)} \int_x^1 (y - \mu) y^{m'p+j-1}(1-y)^{m'(1-p)+j-1} e^{s'y} dy \right] \\ &= \sup_{x \in [0,1]} \left[\frac{e^{-s'x}}{x^{m'p+j-\frac{1}{2}}(1-x)^{m'(1-p)+j-\frac{1}{2}}} \int_x^1 (y - \mu) y^{m'p+j-1}(1-y)^{m'(1-p)+j-1} e^{s'y} dy \right] \end{aligned}$$

Posons

$$F(x) = \int_x^1 y^{m'p+j}(1-y)^{m'(1-p)+j-1} e^{s'y} dy$$

$$G(x) = \mu \times \int_x^1 y^{m'p+j-1}(1-y)^{m'(1-p)+j-1} e^{s'y} dy$$

On remarque que F et G sont dans $C^\infty(\mathbb{I})$. Effectuons maintenant leurs développements limités à l'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ aux voisinages de 0 et 1. On note que n est le plus petit entier supérieur à $m'p + j - \frac{1}{2}$.

1) D'abord regardons si C est finie en 0.

$$\text{On a : } C = O\left(\frac{F(x)-G(x)}{x^{m'p+j-\frac{1}{2}}}\right)$$

Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F^{(n)}(0) = 0$ et $G^{(n)}(0) = 0$, alors on a donc

$$F(x) = F(0) + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} F^{(n+1)}(t) dt$$

$$= \int_0^1 y^{m'p+j}(1-y)^{m'(1-p)+j-1} e^{s'y} dy + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} F^{(n+1)}(t) dt$$

et

$$G(x) = G(0) + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} G^{(n+1)}(t) dt$$

$$= \mu \times \int_0^1 y^{m'p+j-1}(1-y)^{m'(1-p)+j-1} e^{s'y} dy + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} G^{(n+1)}(t) dt$$

Comme

$$\mu = \frac{\int_0^1 y^{m'p+j}(1-y)^{m'(1-p)+j} e^{s'y} dy}{\int_0^1 y^{m'p+j-1}(1-y)^{m'(1-p)+j-1} e^{s'y} dy}$$

Alors on a

$$G(x) = \int_0^1 y^{m'p+j}(1-y)^{m'(1-p)+j-1} e^{s'y} dy + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} G^{(n+1)}(t) dt$$

Ainsi on obtient

$$F(x) - G(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} (F^{(n+1)}(t) - G^{(n+1)}(t)) dt$$

Comme $(F^{(n+1)}(t) - G^{(n+1)}(t))$ est continue dans $[0, x]$, donc elle est bornée.

Alors il existe un réel M fini qui dépend de (m', s', p, j) tel que :

$$\left| F^{(n+1)}(t) - G^{(n+1)}(t) \right| \leq M$$

Donc

$$\left| F(x) - G(x) \right| \leq \frac{Mx^{n+1}}{(n+1)!}$$

Puisque $n \geq m'p + j - \frac{1}{2}$, alors

$$\left| \frac{F(x) - G(x)}{x^{m'p+j-\frac{1}{2}}} \right| \leq \frac{Mx^{n+1}}{x^{m'p+j-\frac{1}{2}}(n+1)!} \leq \frac{M}{(n+1)!} \leq \infty$$

De ce fait C est finie en 0.

2) Regardons maintenant si C est finie en 1.

On a

$$C = O \left(\frac{F(x) - G(x)}{(1-x)^{m'(1-p)+j-\frac{1}{2}}} \right)$$

Montrons que, $\frac{F(x)-G(x)}{(1-x)^{m'(1-p)+j-\frac{1}{2}}}$ est finie en 1.

Effectuons les développements limités de F et G en 1 à l'ordre n_1 où

$$n_1 \geq m'(1-p) + j - \frac{1}{2}$$

On note aussi que pour tout $n_1 \in \mathbb{N}$, on a : $F^{(n_1)}(1) = 0$, $G^{(n_1)}(1) = 0$

Ainsi on a :

$$\begin{aligned} F(x) &= F(1) + \int_1^x \frac{(x-t)^{n_1}}{n_1!} F^{(n_1+1)}(t) dt \\ &= - \int_x^1 \frac{(x-t)^{n_1}}{n_1!} F^{(n_1+1)}(t) dt \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} G(x) &= G(1) + \int_1^x \frac{(x-t)^{n_1}}{n_1!} G^{(n_1+1)}(t) dt \\ &= - \int_x^1 \frac{(x-t)^{n_1}}{n_1!} G^{(n_1+1)}(t) dt \end{aligned}$$

En faisant la différence des développements limités, on a :

$$F(x) - G(x) = \int_x^1 \frac{(x-t)^{n_1}}{n_1!} \left(G^{(n_1+1)}(t) - F^{(n_1+1)}(t) \right) dt$$

Comme $G^{(n_1+1)}(t) - F^{(n_1+1)}(t)$ est continue dans $[x, 1]$, alors elle est bornée .

Donc il existe une constante M' qui dépend de m', s', p, j tel que :

$$\left| G^{(n_1+1)}(t) - F^{(n_1+1)}(t) \right| \leq M'$$

Ce qui nous donne

$$\left| F(x) - G(x) \right| \leq M' \frac{(1-x)^{(n_1+1)}}{(n_1+1)!}$$

Comme $n_1 \geq m'(1-p) + j - \frac{1}{2}$, on obtient

$$\frac{\left| F(x) - G(x) \right|}{(1-x)^{m'(1-p)+j-\frac{1}{2}}} \leq \frac{M'(1-x)^{(n_1+1)}}{(1-x)^{m'(1-p)+j-\frac{1}{2}} \times (n_1+1)!} \leq \frac{M'}{(n_1+1)!} \leq \infty$$

Donc C est finie en 1.

Tournons maintenant à la preuve de la constante B .

On a

$$C = \sup_{x \in [0,1]} \left[\tilde{s}'(x) \sqrt{a(x)} \int_x^1 (y-\mu) \tilde{m}'(y) dy \right]$$

En utilisant le fait que

$$\tilde{s}'(x) = \frac{1}{a(x) \times \tilde{m}(x)}$$

où $a(x) = \sqrt{x(1-x)}$ et $\mu = \frac{\int_0^1 y \tilde{m}'(y) dy}{\int_0^1 \tilde{m}'(y) dy}$

On peut réécrire C comme suit :

$$C = \sup_{x \in [0,1]} \left[\frac{\mu \int_0^x \tilde{m}'(y) dy}{\sqrt{a(x)} \tilde{m}'(x)} \left(1 - \frac{f(x)}{\mu} \right) \right]$$

qui est aussi équivalent à

$$C = \sup_{x \in [0,1]} \left[\frac{\mu \int_x^1 \tilde{m}'(y) dy}{\sqrt{a(x)} \tilde{m}'(x)} \left(\frac{g(x)}{\mu} - 1 \right) \right]$$

avec

$$f(x) = \frac{\int_0^x y \tilde{m}'(y) dy}{\int_0^x \tilde{m}'(y) dy}$$

qui est croissante sur $[0, \mu]$.

et

$$g(x) = \frac{\int_x^1 y \tilde{m}'(y) dy}{\int_x^1 \tilde{m}'(y) dy}$$

qui est croissante sur $[\mu, 1]$.

Posons $h(x) = x^{m'p+j-1}(1-x)^{m'(1-p)+j-1}$. Elle atteint son maximum en $\alpha = \frac{m'p+j-1}{m'+2(j-1)}$

On a aussi les inégalités suivantes $|1 - \frac{f(x)}{\mu}| \leq 1$ et $|\frac{g(x)}{\mu} - 1| \leq (\frac{1}{\mu} - 1)$

Ainsi pour tout $x \in [0, \alpha]$, on a $\tilde{m}'(x) = h(x) \times e^{s'x}$ est croissante .
Donc

$$\begin{aligned} \frac{\mu \int_0^x \tilde{m}'(y) dy}{\sqrt{a(x)\tilde{m}'(x)}} \left(1 - \frac{f(x)}{\mu}\right) &\leq \mu \frac{\tilde{m}'(x) \times x}{\sqrt{x} \times \tilde{m}'(x) \sqrt{1-x}} \\ &\leq \mu \times \sqrt{\frac{m'p + (j-1)}{m'(1-p) + j-1}} \end{aligned}$$

en passant au sup, on a

$$C \leq \mu \times \sqrt{\frac{m'p + (j-1)}{m'(1-p) + j-1}} \quad (2.8)$$

Ainsi pour tout $x \in [\alpha, 1]$, on a $h(x)$ est décroissante . Donc

$$\begin{aligned} \frac{\mu \int_x^1 \tilde{m}'(y) dy}{\sqrt{a(x)\tilde{m}'(x)}} \left(\frac{g(x)}{\mu} - 1\right) &\leq \mu \left(\frac{1}{\mu} - 1\right) \frac{h(x) \times e^{s'(1-x)}}{\sqrt{x} \times h(x) \times e^{s'x} \times \sqrt{(1-x)}} \\ &\leq (1-\mu) \frac{e^{s'(1-x)} \sqrt{(1-x)}}{\sqrt{x}} \\ &\leq (1-\mu) \times e^{s' \left(\frac{m'(1-p) + j-1}{m'+2(j-1)}\right)} \sqrt{\frac{m'(1-p) + j-1}{m'p + j-1}} \end{aligned}$$

En prenant le sup, on a

$$C \leq (1-\mu) \times e^{s' \left(\frac{m'(1-p) + j-1}{m'+2(j-1)}\right)} \sqrt{\frac{m'(1-p) + j-1}{m'p + j-1}} \quad (2.9)$$

En posant

$$B = \max \left[\mu \times \sqrt{\frac{m'p + (j-1)}{m'(1-p) + j-1}}, (1-\mu) \times e^{s' \left(\frac{m'(1-p) + j-1}{m'+2(j-1)}\right)} \sqrt{\frac{m'(1-p) + j-1}{m'p + j-1}} \right]$$

on obtient le résultat.

Alors il existe un réel B qui dépend de m', s', p et j telle que

$$C \leq B$$

Montrons maintenant le point (b) .

D'après le théorème 2.1 de Djellout et Wu dans [24], on a à vérifier les conditions suivantes pour obtenir l'inégalité de $W_1I(C)$:

1. $a(x)$ et $b(x)$ sont des fonctions continues sur \mathbb{I} et $a(x) \geq 0$
2. $Z = \int_0^1 \tilde{m}'(x) dx \leq \infty$
3. $\begin{cases} \int_c^1 \tilde{s}'(x) \left(\int_c^x \tilde{m}'(u) du\right) dx = \infty \\ \int_0^c \tilde{s}'(u) du \int_x^c \tilde{m}'(x) dx = \infty \end{cases}$

4. $C < \infty$

Preuve.

D'après l'item (a) de la proposition précédente (2.4.6), on a $C < \infty$.
Vérifions les trois points suivants (1), (2) and (3).

Premièrement on a :

1.

$$\begin{aligned} a(x) &= x(1-x) \\ b(x) &= [s'x(1-x) + m'(p-x) + j(1-2x)] \end{aligned}$$

On remarque que $a(x)$ et $b(x)$ sont toutes les deux des fonctions continues sur $\mathbb{I} = [0, 1]$ et $a(x)$ est positive.

2. pour tout $x \in \mathbb{I}$, $x^{m'p+j-1}(1-x)^{m'(1-p)+j-1}$ est une fonction continue sur le compact $[0, 1]$, donc elle est bornée.

Il existe un nombre réel M_1 tel que :

$$\sup_{x \in [0,1]} |x^{m'p+j-1}(1-x)^{m'(1-p)+j-1}| \leq M_1$$

Alors, on a

$$Z = \int_0^1 \tilde{m}'(x) dx = \frac{1}{K(c)} \int_0^1 x^{m'p+j-1}(1-x)^{m'(1-p)+j-1} e^{s'x} dx \leq \frac{M_1 e^{s'}}{K(c)} \leq \infty$$

3. Concernant le troisième point (3)

Puisque la fonction suivante $\frac{J^2}{K(c)} y^{m'p+j-1}(1-y)^{m'(1-p)+j-1} e^{s'y}$ est continue sur $[0, 1]$, donc elle est bornée, donc il existe $m_1, d_1 \in [x, c]$ telle que :

$$m_1(c-x) \leq \int_x^c \frac{J^2}{K(c)} y^{m'p+j-1}(1-y)^{m'(1-p)+j-1} e^{s'y} dy \leq d_1(c-x)$$

Alors on a

$$\begin{aligned} \int_0^c \tilde{s}'(x) \int_x^c \tilde{m}'(u) du dx &= \int_0^c \tilde{s}'(x) \int_x^c \frac{J^2}{K(c)} y^{m'p+j-1}(1-y)^{m'(1-p)+j-1} e^{s'y} dy dx \\ &\geq \zeta \int_0^c \frac{m_1(c-x)}{x^{m'p+j}(1-x)^{m'(1-p)+j}} e^{-s'x} dx \\ &\geq \frac{\zeta}{B_1} \int_0^c \frac{m_1(c-x)}{x} dx \end{aligned}$$

où ζ est une constante.

Cependant, pour tout $x \in [0, 1]$, on a l'inégalité suivante :

$$x^{m'p+j}(1-x)^{m'(1-p)+j} e^{s'x} \leq B_1 x$$

avec B_1 une constante qui est supérieure à $e^{s'x}$. Ainsi on a

$$\frac{m_1(c-x)}{x^{m'p+j}(1-x)^{m'(1-p)+j}}e^{-s'x} \geq \frac{m_1(c-x)}{B_1x}$$

donc

$$\int_0^c \frac{m_1(c-x)e^{-s'x}}{x^{m'p+j}(1-x)^{m'(1-p)+j}}dx \geq \frac{m_1c}{B_1} \int_0^c \frac{dx}{x} - \frac{m_1c}{B_1} = +\infty$$

et

$$\frac{m_1}{B_1} \int_0^c \frac{c-x}{x} dx \leq \int_0^c \tilde{s}'(x) \left(\int_x^c \tilde{m}'(u) du \right) dx$$

Comme

$$\frac{m_1}{B_1} \int_0^c \frac{c-x}{x} dx = +\infty$$

alors

$$\int_0^c \tilde{s}'(x) \left(\int_x^c \tilde{m}'(u) du \right) dx = +\infty$$

De manière analogue, on a

$$\int_c^1 \tilde{s}'(x) \left(\int_c^x \tilde{m}'(u) du \right) dx = \infty$$

□

D'après ces conditions, μ satisfait $W_1I(C)$. □

Soit $v : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable bornée, μ - intégrable définie par

$$v(y) = s'(1-2y) - m'$$

$$\mu(v) = \int_I v d\mu = \frac{1}{ZK(c)} \int_0^1 (s'(1-2y) - m') \left(y^{m'p+j-1}(1-y)^{m'(1-p)+j-1} e^{s'y} \right) dy$$

Soit (P_t^v) le semigroupe de Feynman-Kac défini par :

$$P_t^v f^{(j)}(x) := \mathbb{E}_x \left[f^{(j)}(Y_t^j) e^{\int_0^t v(Y_u^j) du} \right]$$

où $f^{(j)}$ est positive et mesurable .

On rappelle que

$$\|P_t^v\|_{L^2(\mu)} = \sup\{\|P_t^v f\|_{L^2(\mu)}; f \geq 0 \text{ and } \mu(f^2) \leq 1\}$$

$$= \sup\{\langle P_t^v f, g \rangle_\mu; f, g \geq 0 \text{ et } \mu(f^2) \leq 1 \text{ et } \mu(g^2) \leq 1\}$$

et

$$\|v\|_{Lip(\gamma)} = \sup_{0 < x_1 < x_2 < 1} \frac{|2s(x_2 - x_1)|}{|x_2 - x_1|} = 2|s'|$$

Soit la formule de Feynman-Kac donnée précédemment par :

$$\begin{aligned} \phi^{(j)}(t, x) = \mathbb{E}_x \left[f^{(j)}(Y_t^j) e^{-tj(j-1)} e^{j \int_0^t (-(m'-s') - 2s'Y_u^j) du} \right. \\ \left. - s'j(j-1) \int_0^t \phi^{(j-1)}(Y_h^j) e^{-hj(j-1)} e^{j \int_0^h (-(m'-s') - 2s'Y_u^j) du} dh \right] \end{aligned}$$

Ainsi en utilisant la définition du semigroupe de $(P_t^u f(x))$, on a

$$\begin{aligned} \phi^{(j)}(t, x) = \exp(-j(j-1)t) P_t^{jv} f^{(j)}(x) \\ - s'j(j-1) \int_0^t \exp(-sj(j-1)h) P_h^{jv} \phi^{(j-1)}(x) dh \end{aligned}$$

Ce qui nous donne

$$\|\phi^{(j)}\|_{L^2(\mu)} \leq \left[\|f^{(j)}\|_J + |s'| \|\phi^{(j-1)}\|_J \right] \|P_t^{jv}\|_{L^2(\mu)}$$

En utilisant le point (b') de la proposition (2.4.6), nous avons

$$\|\phi^{(j)}\|_{L^2(\mu)} \leq \left[\|f^{(j)}\|_J + |s'| \|\phi^{(j-1)}\|_J \right] \exp\left(t(j\mu(v) + 4j^2 s'^2 C^2)\right) \quad (2.10)$$

Pour conclure nous devons prouver que $(j\mu(v) + 4j^2 s'^2 C^2)$ est négative. Pour cela, il suffit d'étudier le résultat suivant :

Proposition 2.4.7

On suppose que $s' > m' > 0$. Ainsi pour tout $p \in [0, 1]$ et pour tout $\epsilon \in [0, 1]$ fixé, les affirmations suivantes sont vérifiées :

cas1) : $s' - m' - 2s'\epsilon\mu \leq 0$

cas2) : Si $s' - m' \leq \frac{1-p}{p}$, alors on a

$$\sqrt{s' - m'} C - (1 - \epsilon)\mu \leq 0$$

où $C = \sup_{x \in [0, 1]} \left[\sqrt{a(x)} \tilde{s}'(x) \int_x^1 (y - \mu) \tilde{m}'(y) dy \right]$ et $\mu = \frac{\int_0^1 y \tilde{m}'(y) dy}{\int_0^1 \tilde{m}'(y) dy}$

Preuve

1. On a

$$(s' - m') - 2s'\epsilon\mu = \frac{\int_0^1 (s' - m' - 2s'\epsilon y) y^{m'p+j-1} (1-y)^{m'(1-p)+j-1} e^{s'y} dy}{\int_0^1 y^{m'p+j-1} (1-y)^{m'(1-p)+j-1} e^{s'y} dy}$$

Posons $g(x) = \left(s' - m' - 2s'\epsilon x \right) x^{m'p+j-1} (1-x)^{m'(1-p)+j-1} e^{s'x}$.

g est positive pour $x < \frac{1}{2\epsilon} \left(1 - \frac{m'}{s'} \right)$ et négative ailleurs.

Supposons que $\alpha = \frac{1}{2\epsilon} \left(1 - \frac{m'}{s'} \right)$.

On peut trouver une borne supérieure pour $\int_0^1 g(x) dx$ en remplaçant le

terme $\exp(s')$ par la droite qui passe par les points $(0, 1)$ et $(\alpha, e^{s'\alpha})$. En effet, cette droite est supérieure à $\exp(s')$ sur $[0, \alpha]$ où g est positive et est inférieure sur $[\alpha, 1]$ où g est négative. Son équation est donnée par

$$d(x) = \frac{2s'\epsilon}{s' - m'} (e^{\frac{s'-m'}{2\epsilon}} - 1)x + 1$$

Posons $b(x) = x^{m'p+j-1}(1-x)^{m'(1-p)+j-1}$, alors on a les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} g(x) &\leq \left(s' - m' - 2s'\epsilon x \right) \left(\frac{2s'\epsilon}{s' - m'} (e^{\frac{s'-m'}{2\epsilon}} - 1)x + 1 \right) b(x) \\ &\leq \left(s' - m' + 2s'\epsilon \left(e^{\frac{s'-m'}{2\epsilon}} - 2 \right) - \frac{4\epsilon^2 s'^2}{s' - m'} \left(e^{\frac{s'-m'}{2\epsilon}} - 1 \right) x^2 \right) b(x) \end{aligned}$$

Ainsi en passant à l'intégrale et en posant $a=m'p+j$ et $c=m'(1-p)+j$, on a :

$$\begin{aligned} \int_0^1 g(x)dx &\leq (s' - m')\beta_{a,c} + 2s'\epsilon \left(e^{\frac{s'-m'}{2\epsilon}} - 2 \right) \beta_{a+1,c} \\ &\quad - \frac{4s'^2\epsilon^2}{s' - m'} \left(e^{\frac{s'-m'}{2\epsilon}} - 1 \right) \beta_{a+2,c} \end{aligned}$$

où $\beta_{a,c}$ est la fonction bêta de paramètres a et c .

D'après cette inégalité $\beta_{a+1,c} = \frac{a}{a+c}\beta_{a,c}$, il s'en suit que :

$$\begin{aligned} \int_0^1 g(x)dx &\leq \beta_{a,c} \left((s' - m') + 2s'\epsilon \left(e^{\frac{s'-m'}{2\epsilon}} - 2 \right) \frac{m'p+j}{m'+2j} \right. \\ &\quad \left. - \frac{4s'^2\epsilon^2}{s' - m'} \left(e^{\frac{s'-m'}{2\epsilon}} - 1 \right) \frac{(m'p+j)(m'p+j+1)}{(m'+2j)(m'+2j+1)} \right) \\ &\leq \beta_{a,c}(s' - m') \left(1 + \frac{2s'\epsilon}{(s' - m')} \left(e^{\frac{s'-m'}{2\epsilon}} - 2 \right) \frac{m'p+j}{m'+2j} \right. \\ &\quad \left. - \frac{4s'^2\epsilon^2}{(s' - m')^2} \left(e^{\frac{s'-m'}{2\epsilon}} - 1 \right) \frac{(m'p+j)(m'p+j+1)}{(m'+2j)(m'+2j+1)} \right) \end{aligned}$$

Notre objectif est de prouver que

$$\begin{aligned} 1 + \frac{2s'\epsilon}{(s' - m')} \left(e^{\frac{s'-m'}{2\epsilon}} - 2 \right) \frac{m'p+j}{m'+2j} \\ - \frac{4s'^2\epsilon^2}{(s' - m')^2} \left(e^{\frac{s'-m'}{2\epsilon}} - 1 \right) \frac{(m'p+j)(m'p+j+1)}{(m'+2j)(m'+2j+1)} \end{aligned}$$

est toujours négative.

Cette quantité peut s'écrire à nouveau ainsi :

$$1 + \frac{2s'\epsilon}{(s' - m')} \frac{m'p+j}{m'+2j} \left(-1 + \left(e^{\frac{s'-m'}{2\epsilon}} - 1 \right) \left(1 - \frac{2s'\epsilon}{(s' - m')} \frac{(m'p+j+1)}{(m'+2j+1)} \right) \right)$$

Maintenant, avec $\epsilon = \frac{8}{10}$ on obtient

$$1 - \frac{2s'\epsilon}{s' - m'} \frac{(m'p + j + 1)}{(m' + 2j + 1)} = \frac{5(s' - m')(m' + 2j + 1) - 8s'(m'p + j + 1)}{5(s' - m')(m' + 2j + 1)}$$

cette quantité est toujours négative.

Comme $\frac{2s'\epsilon}{s' - m'}$ est strictement supérieur à 1, alors

$$1 + \frac{2s'\epsilon}{(s' - m')} \frac{m'p + j}{m' + 2j} \left(-1 + \left(e^{\frac{s' - m'}{2\epsilon}} - 1 \right) \left(1 - \frac{2s'\epsilon}{(s' - m')} \frac{(m'p + j + 1)}{(m' + 2j + 1)} \right) \right)$$

est toujours négatif.

Cependant $s' - m' - 2s'\epsilon\mu(Y_t^J)$ est négatif.

2. Nous voulons montrer que :

$$\sqrt{s' - m'}C - \mu < 0$$

Rappelons l'expression de C and μ . Nous avons donc

$$C = \sup_{x \in [0,1]} \left[\sqrt{a(x)} \tilde{s}'(x) \int_x^1 (y - \mu) \tilde{m}'(y) dy \right]$$

En utilisant le fait que

$$\tilde{s}'(x) = \frac{1}{a(x) \times \tilde{m}(x)}$$

avec $a(x) = \sqrt{x(1-x)}$ et

$$\mu = \frac{\int_0^1 y \tilde{m}'(y) dy}{\int_0^1 \tilde{m}'(y) dy}$$

Il peut s'écrire aussi C comme ça :

$$C = \sup_{x \in [0,1]} \left[\frac{\mu \int_0^x \tilde{m}'(y) dy}{\sqrt{a(x)} \tilde{m}'(x)} \left(1 - \frac{f(x)}{\mu} \right) \right]$$

où

$$f(x) = \frac{\int_0^x y \tilde{m}'(y) dy}{\int_0^x \tilde{m}'(y) dy}$$

qui est croissant sur $[0, \mu]$.

Tournons maintenant à la preuve de $\sqrt{s' - m'}C - \mu < 0$. Il suffit de montrer que :

$$\frac{\sqrt{s' - m'} \int_0^x \tilde{m}'(y) dy}{\sqrt{x} \tilde{m}'(x)} \left(1 - \frac{f(x)}{\mu} \right) \frac{1}{\sqrt{(1-x)}} < 1$$

2.4. MES RÉSULTATS

Posons $h(x) = x^{m'p}(1-x)^{m'(1-p)}$. Elle atteint son maximum $x = p$
 Pour tout $x \in [0, p]$, $\tilde{m}'(x) = h(x) \times \exp(s'x)$, est croissante. Nous avons donc :

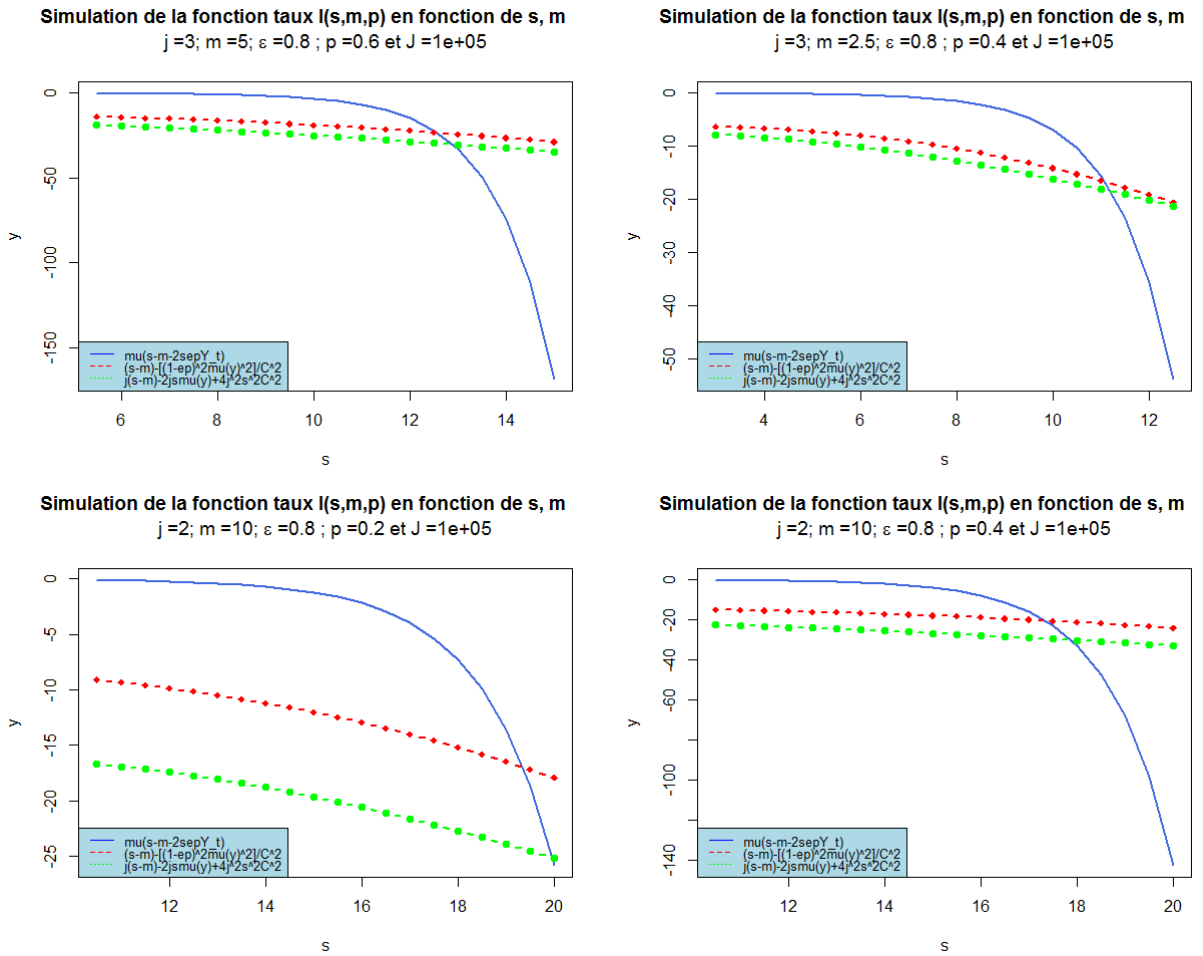
$$\frac{\sqrt{s' - m'} \int_0^x \tilde{m}'(y) dy}{\sqrt{x} \times \tilde{m}'(x)} \left(1 - \frac{f(x)}{\mu}\right) \frac{1}{\sqrt{(1-x)}} \leq \frac{\sqrt{s' - m'} \sqrt{x}}{\sqrt{(1-x)}} \leq \frac{\sqrt{s' - m'} \sqrt{p}}{\sqrt{(1-p)}} \quad (2.11)$$

Comme $s' - m' \leq \frac{1-p}{p}$, on a

$$\frac{\sqrt{s' - m'} \int_0^x \tilde{m}'(y) dy}{\sqrt{x} \times \tilde{m}'(x)} \left(1 - \frac{f(x)}{\mu}\right) \frac{1}{\sqrt{(1-x)}} \leq 1$$

Cependant, en prenant le sup dans (2.11), on obtient que

$$\sqrt{(s' - m')C} - \mu < 0$$


 FIGURE 2.3 – Illustration graphique en fonction de s

Ainsi une illustration de la proposition précédente est donnée par ces figures en fonction des coefficients de sélection.

□

Puisque pour tout $j = 1, 2, \dots, 4$, $j\mu(v) + 4j^2s'^2C^2 \leq 0$, d'après (2.10), on obtient

$$\|\phi^{(j)}\|_{L^2(\mu)} \leq \|f^{(j)}\|_{L^2(\mu)} + |s'| \|\phi^{(j-1)}\|_{L^2(\mu)} \quad (2.12)$$

Ainsi on a

$$\begin{aligned} \|\phi^{(1)}\|_{L^2(\mu)} &\leq \|f^{(1)}\|_J \\ \|\phi^{(2)}\|_{L^2(\mu)} &\leq (|s'| \times \|f^{(1)}\|_J + \|f^{(2)}\|_J) \end{aligned} \quad (2.13)$$

On a $\phi^{(j)} = (T_t f)^{(j)}$, d'après (2.12),

$$\|(T_t f)^{(j)}\|_{L^2(\mu)} \leq \|f^{(j)}\|_J + |s'| \|(T_t f)^{(j-1)}\|_J \quad (2.14)$$

Comme γ_1^J et γ_2^J sont de l'ordre $\frac{1}{j^3}$ et en utilisant la proposition (2.4.8)

ci-dessous, on a alors

$$\begin{aligned}
 \|S_n f - T_n f\|_J &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \|(S_1 - T_1)T_k f\|_J \\
 &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left(\|\gamma_1^J\|_J \|(T_k f)^{(1)}\|_J + \|\gamma_2^J\|_J \|(T_k f)^{(2)}\|_J + O\left(\frac{1}{J^4}\right) \right) \\
 &\leq \|\gamma_1^J\|_J \sum_{k=0}^{n-1} \|(T_k f)^{(1)}\|_J + \|\gamma_2^J\|_J \sum_{k=0}^{n-1} \|(T_k f)^{(2)}\|_J + O\left(\frac{1}{J^2}\right) \\
 &\leq \|\gamma_1^J\|_J \sum_{k=0}^{n-1} \|(T_k f)^{(1)}\|_\infty + \|\gamma_2^J\|_J \sum_{k=0}^{n-1} \|(T_k f)^{(2)}\|_\infty + O\left(\frac{1}{J^2}\right) \\
 &\leq \|\gamma_1^J\|_J \sum_{k=0}^{n-1} \|(T_{\frac{k}{2}} T_{\frac{k}{2}} f)^{(1)}\|_\infty + \|\gamma_2^J\|_J \sum_{k=0}^{n-1} \|(T_{\frac{k}{2}} T_{\frac{k}{2}} f)^{(2)}\|_\infty \\
 &\quad + O\left(\frac{1}{J^2}\right) \\
 &\leq \|\gamma_1^J\|_J \sum_{k=0}^{n-1} \|T_{\frac{k}{2}}\|_{2 \rightarrow \infty} \|(T_{\frac{k}{2}} f)^{(1)}\|_{L^2(\mu)} \\
 &\quad + \|\gamma_2^J\|_J \sum_{k=0}^{n-1} \|T_{\frac{k}{2}}\|_{2 \rightarrow \infty} \|(T_{\frac{k}{2}} f)^{(2)}\|_{L^2(\mu)} + O\left(\frac{1}{J^2}\right) \\
 &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \exp(c_1 + c_2 k^{-\lambda}) \left[(\|\gamma_1^J\|_J + |s'| \|\gamma_2^J\|_J) \|f^{(1)}\|_{L^2(\mu)} \right. \\
 &\quad \left. + \|\gamma_2\|_J \|f^{(2)}\|_{L^2(\mu)} \right] + O\left(\frac{1}{J^2}\right) \\
 &\leq A \left((\|\gamma_1^J\|_J + |s'| \|\gamma_2^J\|_J) \|f^{(1)}\|_J + \|\gamma_2\|_J \|f^{(2)}\|_J \right) \\
 &\quad + O\left(\frac{1}{J^2}\right)
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

Ce qui termine la preuve de ce résultat.

Proposition 2.4.8 *Soit $(T_t)_{t \geq 0}$ un semigroupe de Markov. On suppose que la super-égalité de Poincaré suivante est satisfaite : Pour tout $f \in \mathbb{D}(\varepsilon)$ avec ε la forme de Dirichlet, on a :*

$$\mu(f^2) \leq r\varepsilon(f, f) + \beta(r)\mu(|f|)^2$$

où β est une fonction décroissante positive sur $]0, +\infty[$ et qui est définie par : $\beta(r) = \exp(1 + r^{-\lambda})$ avec $\lambda > 0$ et $r \geq 0$

Alors (T_t) est ultracontractif, c'est à dire :

$$\|T_t\|_{1 \rightarrow \infty} \leq \exp(c_1 + c_2 t^{-r})$$

Si (T_t) est symétrique, alors on a la relation suivante :

$$\|T_t\|_{1 \rightarrow 2} = \|T_t\|_{2 \rightarrow \infty}$$

$$Et\ donc\ \|T_t\|_{1 \rightarrow \infty} \leq \|T_{\frac{t}{2}}\|_{1 \rightarrow 2} \times \|T_{\frac{t}{2}}\|_{2 \rightarrow \infty} = \|T_{\frac{t}{2}}\|_{2 \rightarrow \infty}^2$$

Pour la preuve de cette proposition, on peut voir Wang, Coulhon pour plus details ([59],[58], [13])

2.5 Perspectives

Comme nous le constatons, nos études ont été effectuées sous l'hypothèse d'immigration faible et constante. Comme perspectives nous étudierons les cas suivants :

- Cas où les paramètres de sélection et d'immigration sont tous aléatoires par une autre approche : méthode de couplage
- Une généralisation des différents cas étudiés ci-dessus (Cas multi-espèces)
- Quantification uniforme de l'erreur avec sélection aléatoire et plus grande que l'immigration ($s' > m'$).
- Quantification uniforme de l'erreur dans le cas où la sélection est une diffusion inhomogène(ou bien une dynamique markovien non autonome).

Chapitre 3

Chaines de Markov bifurcantes

3.1 Présentation du modèle

Apparu pour la première fois dans les travaux de Basawa et Zhou [4], les chaînes de Markov bifurcantes (en abrégé CMBs) sont une adaptation des chaînes de Markov usuelles à une donnée d'arbre binaire. Autrement dit, ce sont des chaînes de Markov dont l'ensemble d'indices est un arbre binaire régulier c'est à dire pour une génération donnée, chaque individu donne naissance à deux descendants dans la génération suivante.

On peut dire qu'elles constituent une classe de processus stochastiques indexés par un arbre binaire régulier qui satisfait la propriété de Markov branchante(cf définition ci dessous).

Elles constituent aussi des modèles qui représentent l'évolution d'un trait au sein d'une population dans laquelle chaque individu a deux descendants. En 2006, Guyon dans ses travaux de recherche s'est intéressé à elles (CMBs). Son but était d'étudier l'effet du vieillissement sur la reproduction de la bactérie *Escherichia Coli* (*E. Coli*). *E. Coli* est une bactérie en forme de batonnet qui se reproduit en se divisant au milieu. Elle donne ainsi naissance à deux cellules filles : l'une possédant l'extrémité la plus ancienne de la cellule mère est appelée cellule fille de type ancien pôle, l'autre possédant l'extrémité la plus récente sera appelée cellule fille de type nouveau pôle (voir Figure 3.1) Deux types "0" et "1" seront attribués à ces individus :

- " individu de type 0 " pour les individus de type nouveau pôle
- " individu de type 1 " pour les individus de type ancien pôle

En fait après la division cellulaire, chaque cellule fille a deux extrémités : une des extrémités issue de la division de la cellule mère (nouveau pôle) et une autre qui existait déjà (vieux pôle). L'âge d'une cellule est donnée par l'âge de son vieux pôle au sens du nombre de division depuis lesquelles ce vieux pôle existe. L'objectif fixé par Guyon était de montrer que les cellules de type 0 croissent plus vite que celles de type 1.

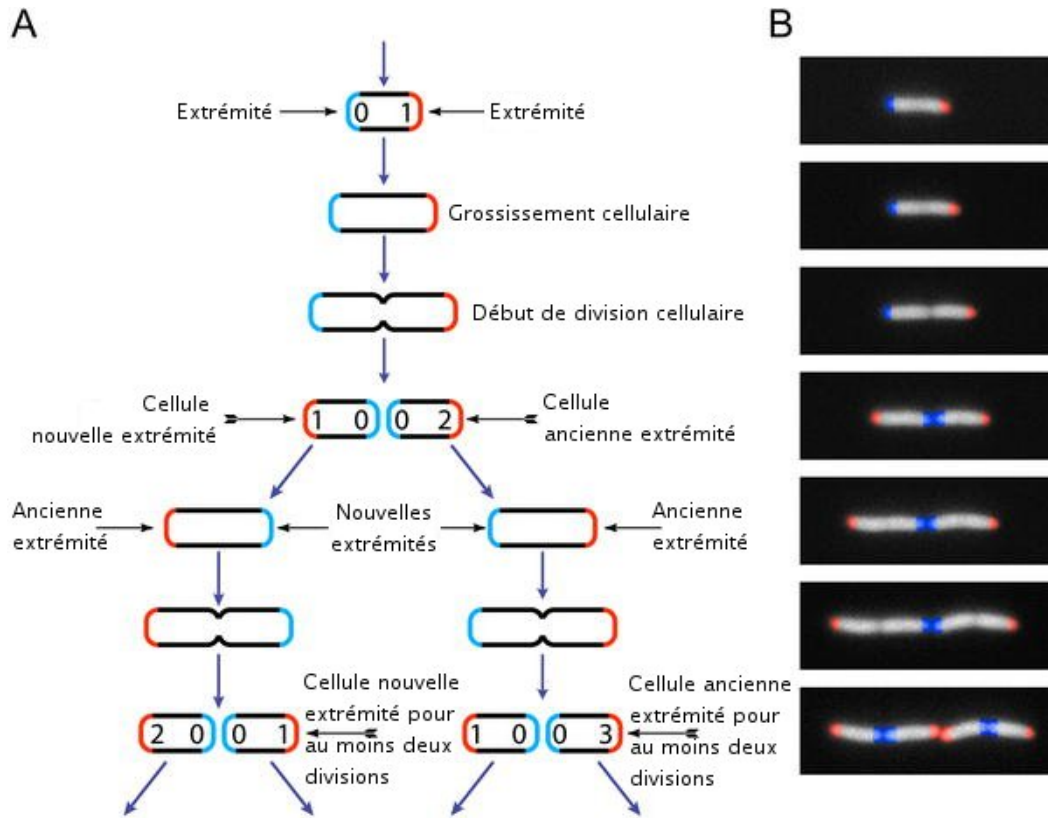


FIGURE 3.1 – Cycle cellulaire d'E. Coli (source [http:// wikimedia.org](http://wikimedia.org))

Avant de donner une définition formelle des chaînes de Markov bifurcantes, donnons au préalable quelques notations .

3.1.1 L'arbre binaire régulier associé au modèle des CMBs

On note par \mathbb{N} l'ensemble des entiers naturels positifs, $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Soit \mathbb{T} un arbre binaire régulier (voir Figure 3.2). Nous verrons \mathbb{T} comme étant l'ensemble de toutes les générations d'une population donnée. Chaque colonne de \mathbb{T} représente alors une génération dans la population. Chaque individu de la population est vu comme un entier naturel non nul.

On pose $\mathbb{T}_0 = \mathbb{G}_0 = \{\emptyset\}$, $\mathbb{G}_k = \{0, 1\}^k$ et $\mathbb{T}_k = \bigcup_{0 \leq r \leq k} \mathbb{G}_r$.

$\mathbb{T}_0 = \mathbb{G}_0 = \{\emptyset\}$ est l'individu initial de la population, \mathbb{G}_k est la k -ième génération, et \mathbb{T}_k constitue les k - premières générations. $\mathbb{T} = \bigcup_{r \in \mathbb{N}} \mathbb{G}_r$ est l'arbre

complet ou bien la population entière (chaque sommet de l'arbre désigne un individu). Pour tout individu $i \in \mathbb{T}$, on note par $|i|$ la génération de l'individu i , ($i = k$, ssi $i \in \mathbb{G}_k$), $iA := \{ij, j \in A\}$, avec $A \subset \mathbb{T}$, où ij est la concaténation des suites $i, j \in \mathbb{T}$ avec la convention que $\emptyset i = i\emptyset = i$

les cardinaux respectifs des générations \mathbb{G}_k et \mathbb{T}_k sont 2^k et $2^{k+1} - 1$.

La génération d'un individu donné i est \mathbb{G}_{k_i} où $k_i = \lfloor \log_2 i \rfloor$, $\lfloor x \rfloor$ désignant la partie entière du réel x .

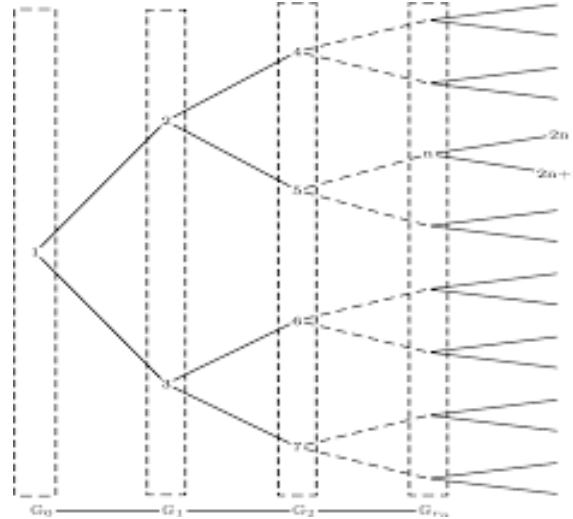


FIGURE 3.2 – L’arbre binaire \mathbb{T} associé à l’étude des CMBs

Ainsi pour tout individu $i \in \mathbb{T}$, on s’intéresse à la quantité aléatoire X_i qui peut être (son taux de croissance, sa taille, ou bien son poids). Cette quantité aléatoire X_i est à valeurs dans un espace métrique S muni de sa tribu borélienne \mathcal{S} .

3.1.2 Probabilité de transition associée aux chaînes de Markov bifurcantes

Soit (S, \mathcal{S}) un espace mesurable. Pour tout $q \in \mathbb{N}^*$, on note par $\mathcal{B}(S^q)$ (respectivement $\mathcal{B}_b(S^q)$, $\mathcal{C}(S^q)$, $\mathcal{C}_b(S^q)$) l’ensemble des fonctions numériques mesurables définies sur S^q (respectivement mesurables et bornées, continues et bornées).

Pour tout $q \in \mathbb{N}^*$, on pose $S^{\otimes q} = S \otimes \dots \otimes S$.

Donnons maintenant la définition d’une \mathbb{T} -probabilité de transition.

Définition 3.1.1

On appelle \mathbb{T} -probabilité de transition, une application $\mathcal{P} : S \times S^{\otimes 2} \rightarrow [0, 1]$ qui satisfait les propriétés suivantes :

- Pour tout $A \in \mathcal{S}$, $\mathcal{P}(\cdot, A)$ est mesurable
- Pour tout $x \in S$, $\mathcal{P}(x, \cdot)$ est une mesure de probabilité sur $(S^2, \mathcal{S}^{\otimes 2})$

Ainsi pour toute fonction $g \in \mathcal{B}_b(S^3)$ et pour tout $h \in \mathcal{B}_b(S^2)$, on pose pour tout $x \in S$:

$$\mathcal{P}g(x) = \int_{S^2} g(x, y, z) \mathcal{P}(x, dy, dz), \quad \mathcal{P}h(x) = \int_{S^2} h(y, z) \mathcal{P}(x, dy, dz) \quad (3.1)$$

On définit $(\mathcal{P}g)$ ou simplement $\mathcal{P}g$ pour $g \in \mathcal{B}(S^3)$ et $(\mathcal{P}h)$ ou simplement $\mathcal{P}h$ pour $h \in \mathcal{B}(S^2)$, si toutefois les intégrales (3.1) sont bien définies et donc on a $\mathcal{P}g$ et $\mathcal{P}h \in \mathcal{B}(S)$.

3.1. PRÉSENTATION DU MODÈLE

On note $\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1$ respectivement la première et la seconde lois marginales de \mathcal{P} et \mathcal{Q} la moyenne de \mathcal{P}_0 et \mathcal{P}_1 définies comme suit : Pour tout $A \in \mathcal{B}(S)$ et pour tout $x \in S$

$$\mathcal{P}_0(x, A) = \mathcal{P}(x, A \times S), \mathcal{P}_1(x, A) = \mathcal{P}(x, S \times A), \quad \mathcal{Q} = \frac{\mathcal{P}_0 + \mathcal{P}_1}{2}$$

Maintenant on peut donner la définition d'une chaîne de Markov bifurcante.

Définition 3.1.2 Soit \mathbb{T} un arbre binaire régulier. On dit qu'un processus $X = (X_i, i \in \mathbb{T})$ indexé par \mathbb{T} , est une chaîne de Markov bifurcante (CMBs) sur l'espace mesurable (S, \mathcal{S}) avec loi de probabilité initiale ν sur (S, \mathcal{S}) et de \mathbb{T} - probabilité de transition \mathcal{P} sur $S \times S^{\otimes 2}$ si :

- (Loi initiale) : la variable aléatoire X_0 a pour loi ν
- (Propriété de branchement) : pour toute suite de fonctions

$$(g_i, i \in \mathbb{T}) \subseteq \mathcal{B}_b(S^3)$$

et pour tout $k \geq 0$, on a :

$$\mathbb{E} \left[\prod_{i \in \mathbb{G}_k} g_i(X_i, X_{i0}, X_{i1}) \mid \sigma(X_j, j \in \mathbb{T}) \right] = \prod_{i \in \mathbb{G}_k} P g_i(X_i)$$

En suivant Guyon [43], on introduit une chaîne de Markov auxiliaire $Y = (Y_n, n \in \mathbb{N})$ sur (S, \mathcal{S}) avec $Y_0 = X_0$ et de probabilité de transition \mathcal{Q} . La chaîne de Markov $(Y_n, n \in \mathbb{N})$ correspond à une lignée aléatoire choisie dans la population.

Dans la suite, on écrira \mathbb{E}_x quand $X_0 = x$ (la loi initiale de X est une masse de Dirac au point $x \in S$).

Ceci signifie que, étant donné les quantités $(X_i, i \in \mathbb{T}_k)$ liées aux individus des générations de 0 à k , les quantités liées aux individus de la génération \mathbb{G}_{k+1} sont construites en tirant 2^k couples indépendants (X_{i0}, X_{i1}) suivant $\mathcal{P}(X_i, \cdot), i \in \mathbb{G}_k$. Sauf mention contraire, la filtration implicitement utilisée sera

$$\mathcal{F}_k = \sigma(X_i; i \in \mathbb{T}_k)$$

Notons que pour tout $g \in \mathcal{B}_b(S^3)$,

$$\mathbb{E}[g(X_i, X_{i0}, X_{i1}) \mid \mathcal{F}_{k_i}]$$

se réduit à un conditionnement par rapport à la variable X_i , de telle sorte que

$$\mathbb{E}[g(X_i, X_{i0}, X_{i1}) \mid \mathcal{F}_{k_i}] = \mathbb{E}[g(X_i, X_{i0}, X_{i1}) \mid X_i]$$

Ceci signifie que chaque X_i dépend du passé que par la quantité liée à la mère seulement. Une conséquence de cette définition est que conditionnellement à \mathcal{F}_{k_i} , les triplets $((X_i, X_{i0}, X_{i1}), i \in \mathbb{G}_{k_i})$, avec k fixé et i varie, sont indépendants. On note par $(Y_k, k \in \mathbb{N})$ la chaîne de Markov induite de noyau de transition \mathcal{Q} définie sur S telle que $Y_0 = X_1$. La chaîne de Markov $(Y_k, k \in \mathbb{N})$ correspond à une lignée aléatoire choisie dans la population.

A cette fin, Guyon & AL [44] ont proposé le modèle gaussien suivant. La cellule initiale est désignée par \emptyset . Les filles de la cellule d'indice i sont désignées par $i0$ la cellule fille de type 0 et $i1$ la cellule fille de type 1. Soit X_i le taux de croissance de l'individu i . Alors les X_i vérifient la relation

$$\mathcal{L}(X_\emptyset) = \nu, \quad \text{et} \quad \forall i \geq 1, \quad \begin{cases} X_{i0} = \alpha_0 X_i + \beta_0 + \varepsilon_{i0} \\ X_{i1} = \alpha_1 X_i + \beta_1 + \varepsilon_{i1} \end{cases} \quad (3.2)$$

où ν est une mesure de probabilité sur \mathbb{R} ; $\alpha_0, \alpha_1 \in (-1, 1)$; $\beta_0, \beta_1 \in \mathbb{R}$ et $((\varepsilon_{i0}, \varepsilon_{i1}), i \geq 1)$ est une suite de vecteurs gaussiens bidimensionnels indépendants centrés et de matrice de covariance

$$\Gamma = \sigma^2 \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 > 0, \quad \rho \in (-1, 1)$$

Notons que le processus défini par (3.2) est un exemple de type de chaînes de Markov bifurcantes, appelé processus bifurcant auto-régressif d'ordre 1 (BAR(1) pour "first order bifurcating autoregressive process"). Afin de savoir si la dynamique des taux de croissance des cellules de type 0 et 1, il convient :

- d'estimer les paramètres $\theta = (\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1), \sigma^2$, et ρ
- de tester l'hypothèse nulle $H_0 = \{(\alpha_0, \beta_0) = (\alpha_1, \beta_1)\}$ contre l'hypothèse alternative $H_1 = \{(\alpha_0, \beta_0) \neq (\alpha_1, \beta_1)\}$

Ainsi, rejeter H_0 reviendrait à admettre que la dynamique de croissance des cellules de type 0 est différente de celle des cellules de type 1. Ceci reviendrait également à admettre la notion de vieillissement cellulaire. L'étude asymptotique rigoureuse des estimateurs de θ, ρ et σ ainsi que des tests d'hypothèse permettant de détecter le vieillissement cellulaire a été depuis lors le principal point de motivation pour l'étude des chaînes de Markov bifurcantes. Afin d'effectuer des études statistiques par exemple l'estimation des paramètres du modèle (5.1), il convient de définir des moyennes empiriques liées à l'observation des chaînes de Markov bifurcantes $(X_i, i \in \mathbb{T})$. Ainsi pour toute fonction mesurable g sur S et pour tout sous-ensemble fini A de \mathbb{T} , on pose

$$M_A(g) = \sum_{i \in A} g(X_i)$$

et

$$\overline{M}_A(g) = \frac{1}{|A|} M_A(g)$$

où $|A|$ désigne le cardinal de A .

3.2 Quelques rappels sur les grandes déviations

Le principe des grandes déviations (PGD) caractérise le comportement limite quand $\epsilon \rightarrow 0$, d'une famille de mesures de probabilité $\{\mu_\epsilon\}$ sur un espace mesurable $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ en termes de fonctions taux. Cette caractérisation est faite via des bornes exponentielles asymptotiques supérieures (ou inférieures) sur les valeurs que μ_ϵ assigne aux sous-ensembles mesurables de \mathcal{X} . Rappelons maintenant les définitions suivantes issue du livre de Dembo et Zeitouni [21] d'une fonction taux et du principe des grandes déviations.

Définition 3.2.1

Une fonction de taux I est une application $I : \mathcal{X} \rightarrow [0, \infty]$ semicontinue inférieurement, c'est à dire pour tout nombre réel $\lambda \in [0, \infty[$, le sous-ensemble de niveau $\psi_I(\lambda) := \{x \in \mathcal{X} : I(x) \leq \lambda\}$ est un sous-ensemble fermé de \mathcal{X} .

Une bonne fonction de taux est une fonction de taux pour laquelle tous ses sous-ensembles de niveaux $\psi_I(\lambda)$ sont des sous-ensembles compact de \mathcal{X} . On notera $D_I := \{x \in \mathcal{X} : I(x) < \infty\}$ le domaine effectif de I .

Remarque 3.2.2

Si \mathcal{X} est un espace métrique, la propriété de semicontinuité est vérifiée par les suites ; c'est à dire I est semicontinue inférieurement (sci en abrégé) si et seulement si

$$\liminf_{x_n \rightarrow x} I(x_n) \geq I(x) \quad \forall x \in \mathcal{X}$$

Une conséquence qu'une fonction de taux soit bonne, est que son minimum peut être atteint sur tous les ensembles fermés.

Définition 3.2.3 (PGD)

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. On dit que la suite de variables aléatoires $(X_n, n \in \mathbb{N})$ définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ à valeurs dans un espace mesurable $(S, \mathcal{B}(S))$ satisfait à un principe de grande déviation (PGD) de vitesse (v_n) et de fonction de taux $I(\cdot)$ si l'on a, pour tout $A \in \mathcal{B}(S)$,

$$-\inf_{x \in A^\circ} I(x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{v_n} \log \mathbb{P}(X_n \in A) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{v_n} \log \mathbb{P}(X_n \in A) \leq -\inf_{x \in \bar{A}} I(x)$$

où A° et \bar{A} désignent respectivement l'intérieur et l'adhérence de A

Rappelons aussi la définition d'un principe de déviation modérée.

Soit $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans S équipée de la tribu de Borel $\mathcal{B}(S)$ et soit $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels positifs qui converge vers $+\infty$. On suppose que $\frac{Z_n}{s_n}$ converge en probabilité vers 0 et $\frac{Z_n}{\sqrt{s_n}}$ converge en loi vers une gaussienne centrée.

Soit $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite positive de nombres réels telle que :

$$b_n \longrightarrow +\infty \quad \text{et} \quad \frac{b_n}{\sqrt{s_n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Définition 3.2.4 (PDM)

On dit que $\frac{Z_n}{b_n\sqrt{s_n}}$ satisfait à un principe de déviation modérée de vitesse b_n^2 et de fonction de taux I , si pour tout $A \in \mathcal{B}(S)$, on a :

$$\begin{aligned} -\inf_{x \in A^\circ} I(x) &\leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{b_n^2} \log \mathbb{P} \left(\frac{Z_n}{b_n\sqrt{s_n}} \in A \right) \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{b_n^2} \log \mathbb{P} \left(\frac{Z_n}{b_n\sqrt{s_n}} \in A \right) \\ &\leq -\inf_{x \in \bar{A}} I(x) \end{aligned}$$

où A° et \bar{A} sont respectivement l'intérieur et l'adhérence de A .

L'importance du principe des déviations modérées est qu'il est un raffinement du théorème central limite et est plus facile à obtenir dans certaines situations que le principe des grandes déviations. Il exhibe une fonction de taux plus simple qui peut être obtenue d'une approximation gaussienne.

3.3 Outils fondamentaux des déviations modérées sur les martingales

Rappelons quelques résultats utiles pour les déviations modérées sur les martingales. Dans cette partie et la suite (b_n) sera considérée comme une suite croissante de nombres réels telle que

$$\frac{b_n}{\sqrt{n}} \uparrow \infty \quad \text{et} \quad \frac{b_n}{n} \downarrow 0 \tag{3.3}$$

Théorème 3.3.1 (Eichelsbacher et Löwe [25])

Soit $(X_i)_{i \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. Les propositions suivantes sont équivalentes :

- Les variables aléatoires (X_i) satisfont $\mathbb{E}[X_1] = 0$ et

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{b_n^2} \log(n\mathbb{P}(|X_1| > b_n)) = -\infty \tag{3.4}$$

- La suite $(\frac{1}{b_n} \sum_{i=1}^n X_i)$ satisfait un PDM de vitesse $(\frac{b_n^2}{n})$ et de bonne fonction de taux

$$I(x) = \frac{x^2}{2\mathbb{E}[X_1^2]}$$

Remarque 3.3.2

- La condition (3.4) est appelée la condition de type "Chen - Ledoux".
- La condition de type Chen-Ledoux (3.4) entraîne que $\mathbb{E}[X_1^2] < \infty$.

Dans la preuve de nos résultats principaux, on a utilisé la notion de convergence "super-exponentielle" ; il me semble alors judicieux de rappeler la définition de la convergence "super-exponentielle".

3.3. OUTILS FONDAMENTAUX DES DÉVIATIONS MODÉRÉES SUR LES MARTINGALES

Définition 3.3.3 Soit d est une distance rendant S complet, on dit que (Z_n) converge (v_n) - super-exponentiellement vite en probabilité vers une variable aléatoire Z si

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{v_n} \log \mathbb{P}(d(Z_n, Z) > \delta) = -\infty \quad \forall \delta > 0$$

Cette convergence sera notée $Z_n \xrightarrow[v_n]{\text{superexp}} Z$ dans la suite.

Donnons les deux principaux théorèmes fondamentaux utiles à l'observation du PDM pour les martingales. Le premier est une version simplifiée du théorème de Puhalskii [57], et le second est une version simplifiée du théorème de Djellout [23]. Nous donnons que les versions simplifiées de ces résultats car c'est sous ces formes que nous les utiliserons dans la suite.

Théorème 3.3.4 (Puhalskii [57]) Soit $(m_j^n)_{1 \leq j \leq n}$ un tableau triangulaire de différences martingales à valeurs dans \mathbb{R}^d , par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 1}$. Supposons que :

(P1) Il existe une matrice symétrique et semi-définie positive \mathcal{Q} , telle que

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[m_k^n (m_k^n)' \mid \mathcal{F}_{k-1}] \xrightarrow[b_n^2/n]{\text{superexp}} \mathcal{Q}$$

(P2) Il existe une constante $c > 0$ telle que, pour chaque $1 \leq k \leq n$,

$$|m_k^n| \leq c \frac{n}{b_n} \quad p.s,$$

(P3) Pour tout $a > 0$, on a la condition de Lindeberg exponentielle

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{E} \left[|m_k^n|^2 \mathbf{1}_{\{|m_k^n| \geq a \frac{n}{b_n}\}} \mid \mathcal{F}_{k-1} \right] \xrightarrow[b_n^2/n]{\text{superexp}} 0$$

Alors $(\sum_{k=1}^n \frac{m_k^n}{b_n})_{n \geq 1}$ satisfait un PDM sur \mathbb{R}^d de vitesse $\frac{b_n^2}{n}$ et de fonction de taux

$$\Lambda^*(v) = \sup_{\lambda \in \mathbb{R}^d} \left(\lambda' v - \frac{1}{2} \lambda' \mathcal{Q} \lambda \right)$$

En particulier si \mathcal{Q} est inversible, $\Lambda^*(v) = \frac{1}{2} v' \mathcal{Q}^{-1} v$

Théorème 3.3.5 (Djellout [23]) Soit $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une martingale de carré intégrable, à valeurs dans \mathbb{R} , adaptée à une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et nulle en 0. Soit $c(n) := \frac{\sqrt{n}}{b_n}$. On définit la réciproque $c^{-1}(t)$ par

$$c^{-1}(t) := \inf\{n \in \mathbb{N} : c(n) \geq t\}$$

Sous les hypothèses suivantes :

(D1) Il existe $\mathcal{Q} \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\frac{\langle M \rangle_n}{n} \xrightarrow[b_n^2/n]{\text{superexp}} \mathcal{Q}$, où $\langle M \rangle_n$ désigne le crochet de la martingale M_n ;

(D2) $\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{b_n^2} \log \left(n \operatorname{ess\,sup}_{1 \leq k \leq c^{-1}(b_{n+1})} \mathbb{P}(|M_k - M_{k-1}| > b_n \mid \mathcal{F}_{k-1}) \right) = -\infty$;

(D3) pour tout $a > 0$,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{E} \left(|M_k - M_{k-1}|^2 \mathbf{1}_{\{|M_k - M_{k-1}| \geq a \frac{n}{b_n}\}} \mid \mathcal{F}_{k-1} \right) \xrightarrow[b_n^2/n]{\text{superexp}} 0$$

$(M_n/b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfait à un PDM dans \mathbb{R} de vitesse b_n^2/n et de fonction de taux $I(x) = x^2/2Q$.

Remarque 3.3.6 les conditions (D3) et (P3) sont appelées condition de Lindeberg exponentielle. La vérification de l'hypothèse (D1) (convergence super-exponentielle du crochet) est fondamentale pour établir les principes des déviations modérées (PDM) des martingales. Pour les martingales à différences bornées par exemple, les hypothèses (D2) et (D3) sont automatiquement vérifiées de telle sorte que pour montrer un PDM, il suffit de montrer la convergence super-exponentielle du crochet c'est à dire (D1). Un outil pour démontrer cette convergence super-exponentielle du crochet est par exemple d'établir des inégalités de déviations.

La stratégie pour prouver nos différents résultats sur le PDM sera la suivante.

- Si la martingale est à différences bornées, alors il suffit juste de montrer la convergence super-exponentielle du crochet et d'appliquer par exemple le théorème de Djellout.
- Si la martingale n'est pas à différence bornée, nous faisons une troncature. Pour la partie bornée, nous montrons qu'un PDM est satisfait en utilisant le théorème de Puhalskii. Ensuite nous montrerons que la partie non bornée est négligeable au sens des déviations modérées.

Maintenant donnons quelques résultats connus portant sur les lois des grands nombres et théorèmes de la limite centrale des CMBs.

3.4 Lois des grands nombres et théorèmes centrales limites

Défini comme étant l'un des résultats le plus important de la théorie des probabilités, les lois des grands nombres trouvent aussi leur place dans cette classe de chaînes de Markov bifurcantes.

Ainsi pour toute fonction $g \in \mathcal{B}(S^3)$, et pour $i \in \mathbb{T}$, désignons par $\Delta_i = (X_i, X_{i0}, X_{i1})$ la quantité associée au triplet mère-filles $(i, i0, i1)$. Plusieurs moyennes empiriques peuvent ainsi être considérées.

- On peut effectuer la moyenne sur la k -ième génération, c'est à dire calculer $\overline{M}_{G_k}(g)$

- On peut effectuer la moyenne sur les k - premières générations, c'est à dire calculer $\overline{M}_{T_k}(g)$

On peut aussi vouloir calculer la moyenne sur les n -premiers individus, c'est à dire calculer $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(X_i)$. Mais comme il n'existe pas un ordre naturel dans

la population, il convient de créer un ordre aléatoire dans la population qui respecte l'ordre de la généalogie. Cet ordre doit être construit de telle sorte que, le comportement asymptotique des moyennes empiriques issues de cette construction coïncide avec le comportement de $\overline{M}_{\mathbb{G}_k}(\cdot)$ et $\overline{M}_{\mathbb{T}_k}(\cdot)$. Un tel ordre a été introduit par Guyon [44]. Cette construction est la suivante.

Désignons par \mathcal{W} l'ensemble de toutes les permutations de \mathbb{N}^* qui laissent invariant chaque \mathbb{G}_k . Indépendamment de $(X_i, i \in \mathbb{T})$, tirons uniformément une permutation Π dans \mathcal{W} . Ceci revient à tirer uniformément la restriction de Π sur \mathbb{G}_k par les $2^k!$ permutations de \mathbb{G}_k . En particulier $(\Pi(2^k), \Pi(2^k + 1), \dots, \Pi(2^{k+1} - 1))$ peuvent être vu comme un tirage sans remise des éléments de \mathbb{G}_k . Π permet ainsi de définir un ordre aléatoire sur \mathbb{T} qui préserve l'ordre généalogique. Désignons alors $(\Pi(i), 1 \leq i \leq n)$ l'ensemble des n "premiers" individus de \mathbb{T} . Ainsi on peut calculer la moyenne sur les n "premiers" individus $\overline{M}_n^\Pi(g) = n^{-1} M_n^\Pi(g)$.

Introduisons maintenant les quantités empiriques suivantes :

$$\begin{cases} \overline{M}_{\mathbb{G}_k}(g) = \frac{1}{|\mathbb{G}_k|} \sum_{i \in \mathbb{G}_k} g(\tilde{\Delta}_i) \\ \overline{M}_{\mathbb{T}_k}(g) = \frac{1}{|\mathbb{T}_k|} \sum_{i \in \mathbb{T}_k} g(\tilde{\Delta}_i) \\ \overline{M}_n^\Pi(g) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(\tilde{\Delta}_{\Pi(i)}) \end{cases} \quad (3.5)$$

où $g(\tilde{\Delta}_i) = g(\Delta_i) = g(X_i, X_{i_0}, X_{i_1})$ si $g \in \mathcal{B}(S^3)$ et $g(\tilde{\Delta}_i) = g(X_i)$ si $g \in \mathcal{B}(S)$. Guyon [44] et Bitseki & AL [7] ont établi des théorèmes limites de ces trois moyennes empiriques (3.5) concernant exactement la loi des grands nombres et le théorème de la limite centrale. Ces résultats ont été effectués dans L^2 sous plusieurs versions diverses. Pour cela ils considèrent des hypothèses de régularité de g et d'ergodicité de la chaîne de Markov $(Y_k, k \in \mathbb{N})$ de probabilité de transition \mathcal{Q} .

Introduisons les notations suivantes avant de rappeler ces résultats.

- Soit $f \otimes g$ l'application qui à tout (x, y) on associe $f(x)g(y)$
- Soit \mathcal{Q}^p la puissance p -ième de \mathcal{Q} définie par les formules de récurrence suivantes :
 $\mathcal{Q}^0(x, \cdot) = \delta_x$ et $\mathcal{Q}^{p+1}(x, B) = \int_S \mathcal{Q}(x, dy) \mathcal{Q}^p(y, B)$, $\forall B \in \mathcal{S}$; \mathcal{Q}^p est un noyau de transition sur (S, \mathcal{S})
- $\nu \mathcal{Q}$ est la probabilité sur (S, \mathcal{S}) définie par $\nu \mathcal{Q}(B) = \int_S \nu(dx) \mathcal{Q}(x, B)$; $\nu \mathcal{Q}^p$ est la loi de Y_p
- $(\mathcal{Q}g)(x) = \int_S g(y) \mathcal{Q}(x, dy)$ quand elle est bien définie.
- (νg) où (ν, g) est l'intégrale $\int_S g d\nu$ quand elle est définie.

Considérons maintenant le sous-espace vectoriel F de $\mathcal{B}(S)$ avec les propriétés suivantes :

- (a) F contient les fonctions constantes
- (b) $F^2 \subset F$
- (c) $F \otimes F \subset L^1(\mathcal{P}(x, \cdot))$ pour tout $x \in S$ et $P(F \otimes F) \subset F$
- (d) il existe une probabilité μ sur (S, \mathcal{S}) telle que $F \subset L^1(\mu)$ et $\lim_{r \rightarrow \infty} \mathbb{E}_x[g(Y_r)] = (\mu, g)$ pour tout $x \in S$ et $g \in F$
- (e) pour tout $g \in F$, il existe $h \in F$ tel que pour tout $r \in \mathbb{N}$, $|\mathcal{Q}^r g| \leq h$
- (f) $F \subset L^1(\nu)$

où les notations suivantes sont ainsi définies : $F^2 = \{f^2/f \in F\}$,
 $F \otimes F = \{f \otimes g/f, g \in F\}$ et $\mathcal{P}F = \{\mathcal{P}g/g \in F\}$ si \mathcal{P} agit sur F .
 Maintenant rappelons le théorème suivant qui résume l'ensemble des résultats
 principaux établis par Guyon.

Théorème 3.4.1 *Soit F vérifiant les hypothèses de (a) à (f).*

1. *Pour toute fonction $g \in F$, les trois moyennes empiriques (3.5) convergent vers (μ, g) dans $L^2(\mu)$*
2. *Soit $g \in \mathcal{B}(S^3)$ tel que $\mathcal{P}g$ et $\mathcal{P}g^2$ existent et sont des éléments de F . Alors les trois moyennes empiriques (5.2) convergent vers (μ, g) dans $L^2(\mu)$*
3. *Soit $g \in F$. Supposons qu'il existe $h \in F$ tel que*

$$\mathcal{P} \left(\sum_{r \in \mathbb{N}} |\mathcal{Q}^r(g - (\mu, g)) \otimes \mathcal{Q}^r(g - (\mu, g))| \right) \leq h \quad (3.6)$$

Alors les trois moyennes empiriques (5.2) convergent presque sûrement vers (μ, g)

4. *Soit $g \in \mathcal{B}(S^3)$ tel que $\mathcal{P}g$ et $\mathcal{P}g^2$ existent et sont des éléments de F . Supposons qu'il existe $h \in F$ tel que*

$$\mathcal{P} \left(\sum_{r \in \mathbb{N}} |\mathcal{Q}^r(\mathcal{P}g - (\mu, \mathcal{P}g)) \otimes \mathcal{Q}^r(\mathcal{P}g - (\mu, \mathcal{P}g))| \right) \leq h \quad (3.7)$$

Alors les trois moyennes empiriques (3.5) convergent presque sûrement vers $(\mu, \mathcal{P}g)$

5. *Soit $g \in \mathcal{B}(S^3)$ tel que $\mathcal{P}g$, $\mathcal{P}g^2$ et $\mathcal{P}g^4$ existent et sont des éléments de F . Alors*
 $n^{-1/2} M_n^\Pi(g - \mathcal{P}g)$ et $|\mathbb{T}_r|^{-1/2} M_{\mathbb{T}_r}(g - \mathcal{P}g)$ convergent en loi vers la loi normale $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ avec $\sigma^2 = (\mu, \mathcal{P}g - (\mathcal{P}g)^2)$

Une condition suffisante pour avoir (3.6) et (3.7) est l'existence d'une fonction $c \in F$ et une suite de nombres positifs $(k_r, r \in \mathbb{N})$ telle que

$$\sum_{r \in \mathbb{N}} k_r < \infty \quad \text{et} \quad \forall x \in S, \forall r \in \mathbb{N}, |\mathcal{Q}^r g(x)| \leq c(x) k_r \quad (3.8)$$

Une extension de ces résultats a été faite par Bitseki & AL [7] sous des hypothèses d'ergodicité uniforme et non uniforme de la chaîne de Markov $(Y_r, r \in \mathbb{N})$. L'hypothèse d'ergodicité suivante est à propos de l'ergodicité géométrique de \mathcal{Q}

- (H1) *Supposons que pour toute fonction $g \in F$ telle que $(\mu, g) = 0$, il existe une fonction $h \in F$ telle que pour tout $r \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in S$*

$$|\mathcal{Q}^r g(x)| \leq \alpha^r h(x), \quad \forall \alpha \in]0, 1[$$

Ce qui signifie que la chaîne de Markov $(Y_r, r \in \mathbb{N})$ est géométriquement ergodique.

3.4. LOIS DES GRANDS NOMBRES ET THÉORÈMES CENTRALES LIMITES

Sous les hypothèses (a)-(f) et (H1), Bitseki & Al [7] ont établi les résultats suivants

Théorème 3.4.2 *Sous les hypothèses (a)-(f) et (H1), soit $g \in F$ tel que $(\mu, g) = 0$. Alors, pour tout $r \in \mathbb{N}$*

$$\mathbb{E}[(\overline{M}_{G_r}(g))^4] \leq \begin{cases} c(\frac{1}{4})^r & \text{si } \alpha^2 < \frac{1}{2} \\ cr^2(\frac{1}{4})^r & \text{si } \alpha^2 = \frac{1}{2} \\ c(\alpha)^{4r} & \text{si } \alpha^2 > \frac{1}{2} \end{cases} \quad (3.9)$$

où c est une constante positive qui dépend de α et de g .

La preuve de ce théorème repose sur deux points essentiels : un calcul explicite du moment d'ordre 4 de $\overline{M}_{G_r}(g)$ via des conditionnements successifs et un contrôle des différents termes apparaissant dans ce calcul en utilisant les hypothèses (a)-(f) et (H1). Pour le calcul explicite du moment d'ordre 4 de $\overline{M}_{G_r}(g)$, ils ont utilisé (avec une légère modification) le calcul explicite du moment d'ordre deux de $\overline{M}_{G_r}(g)$ effectué par Guyon. Autrement dit ils ont généralisé la méthode utilisée par Guyon.

Comme conséquence du théorème précédent, on a le corollaire suivant :

Corollary 3.4.3 *Supposons que les hypothèses (a)-(f) sont satisfaites. Soit $g \in F$ tel que $(\mu, g) = 0$. On suppose de plus que l'hypothèse (H1) est vérifiée. Alors pour tout $r \in \mathbb{N}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, avec $r_n = \lfloor \log_2 n \rfloor$*

$$\mathbb{E}[(\overline{M}_{T_r}(g))^4] \leq \begin{cases} c(\frac{1}{4})^{r+1} & \text{si } \alpha^2 < \frac{1}{2} \\ cr^2(\frac{1}{4})^{r+1} & \text{si } \alpha^2 = \frac{1}{2} \\ c(\alpha)^{4(r+1)} & \text{si } \alpha^2 > \frac{1}{2} \end{cases} \quad (3.10)$$

et

$$\mathbb{E}[(\overline{M}_n^\Pi(g))^4] \leq \begin{cases} c(\frac{1}{4})^{r_n+1} & \text{si } \alpha^2 < \frac{1}{2} \\ cr_n^2(\frac{1}{4})^{r_n+1} & \text{si } \alpha^2 = \frac{1}{2} \\ c(\alpha)^{4(r_n+1)} & \text{si } \alpha^2 > \frac{1}{2} \end{cases} \quad (3.11)$$

où la constante positive c dépend de α et de g et diffère d'une ligne à l'autre.

Le théorème suivant concerne la loi forte des grands nombres pour la moyenne empirique $\overline{M}_n^\Pi(g)$ lorsque $g \in \mathcal{B}(S)$, la loi du logarithme itéré et un théorème de la limite centrale fonctionnelle presque sûr pour $\overline{M}_n^\Pi(g - Pg)$ lorsque $g \in \mathcal{B}(S^3)$. C'est un complément des résultats établis par Guyon sur la loi forte des grands nombres des moyennes empiriques $\overline{M}_{G_r}(g)$ et $\overline{M}_{T_r}(g)$.

Théorème 3.4.4 *Supposons que F satisfait les hypothèses (a)-(f) et aussi l'hypothèse (H1) avec un $\alpha \in (0, \sqrt[4]{8}/2)$. Alors :*

- i) *Pour toute fonction $g \in F$, $M_n^\Pi(g)$ converge presque sûrement vers (μ, g) quand n tend vers l'infini.*
- ii) *Pour tout $g \in \mathcal{B}(S^3)$ tel que Pg, Pg^2 et Pg^4 existent et appartiennent à F , on a :*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{M_n^\Pi(g - Pg)}{\sqrt{2n \log \log n}} = \sqrt{(\mu, Pg^2 - (Pg)^2)} \quad p.s.,$$

iii) Pour tout $g \in \mathcal{B}(S^3)$ tel que $\mathcal{P}g, \mathcal{P}g^2$ et $\mathcal{P}g^4$ existent et appartiennent à F , $M_n^\Pi(g - \mathcal{P}g)$ vérifie un théorème de la limite centrale fonctionnelle presque sûre quand n tend vers l'infini. En particulier, posons

$$s^2 = (\mu, \mathcal{P}g - (\mathcal{P}g)^2)$$

Alors

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\log(s^2 n)} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} \delta \left\{ \frac{M_k^\Pi(g - \mathcal{P}g)}{s\sqrt{k}} \right\} = \mathcal{N}(0, 1) \quad p.s., \quad (3.12)$$

où $\mathcal{N}(0, 1)$ est la loi normale standard sur \mathbb{R} , et la convergence est la convergence étroite des mesures sur \mathbb{R} .

D'autres résultats portant sur le théorème centrale limite des chaines de markov bifurcantes ont été établis par Bitseki et Delmas [6] sous l'hypothèse d'ergodicité géométrique et de la propriété ergodique la plus forte portant sur un second tou spectral pour les trois régimes différents : sous-critique, critique et sur-critique.

Pour tout $f \in \mathcal{B}_b(S)$, on pose :

$$\tilde{f} = f - (\mu, f) \quad \text{et} \quad \hat{f} = \tilde{f} - \sum_{j \in J} \mathcal{R}_j(f)$$

Pour toute fonction $f, g \in \mathcal{B}_b(S)$, on note

$$(f \otimes g)(x, y) = f(x)g(y) \quad \forall x, y \in S$$

$$f \otimes_{sym} g = \frac{1}{2}(f \otimes g + g \otimes f)$$

et

$$f \otimes^2 = f \otimes f$$

$\forall g \in \mathcal{B}_+(S)$,

$$\mathcal{P}(g \otimes_{sym} \mathbf{1}) = \mathcal{Q}(g)$$

$\forall f \in \mathcal{B}_+(S)$,

$$f \otimes f \leq f^2 \otimes_{sym} \mathbf{1}$$

et

$$\mathcal{P}(f \otimes^2) = \mathcal{P}(f \otimes f) \leq \mathcal{P}(f^2 \otimes_{sym} \mathbf{1}) = \mathcal{Q}(f^2)$$

Soit $\mathfrak{f} = \{f_\ell, \ell \in \mathbb{N}\}$ une suite d'éléments de $\mathcal{B}_b(S)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $i \in \mathbb{T}$, on pose :

$$N_{n,i}(\mathfrak{f}) = \sum_{\ell=0}^{n-|i|} N_{n,i}^\ell(f_\ell) = |\mathbb{G}_n|^{-\frac{1}{2}} \sum_{\ell=0}^{n-|i|} M_{i\mathbb{G}_{n-|i|-\ell}}(\tilde{f}_\ell)$$

On en déduit que

$$\sum_{i \in \mathbb{G}_k} N_{n,i}(\mathfrak{f}) = |\mathbb{G}_n|^{-\frac{1}{2}} \sum_{\ell=0}^{n-k} M_{\mathbb{G}_{n-\ell}}(\tilde{f}_\ell)$$

3.4. LOIS DES GRANDS NOMBRES ET THÉORÈMES CENTRALES LIMITES

En prenant $k = 0$, on obtient

$$N_{n,0}(f) = |\mathbb{G}_n|^{-\frac{1}{2}} \sum_{\ell=0}^n M_{\mathbb{G}_{n-\ell}}(\tilde{f}_\ell)$$

Pour étudier les comportements asymptotiques de $N_{n,0}(f)$, il est beaucoup plus commode d'écrire $N_{n,0}(f)$ ainsi :

pour tout $n \geq k \geq 1$:

$$N_{n,0}(f) = |\mathbb{G}_n|^{-\frac{1}{2}} \sum_{r=0}^{k-1} M_{\mathbb{G}_r}(\tilde{f}_{n-r}) + \sum_{i \in \mathbb{G}_k} N_{n,i}(f)$$

Leurs résultats sont énoncés dans le théorème suivant :

Théorème 3.4.5 *Considérons les hypothèses suivantes :*

A1) *Il existe une mesure de probabilité μ sur (S, \mathcal{S}) tel que $F \subset L^1(\mu)$ et un certain $\alpha \in (0, 1)$ tel que pour tout $f \in F$, il existe $g \in F$:*

$$\left| \mathcal{Q}^n(f) - (\mu, f) \right| \leq \alpha^n g \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (3.13)$$

A2) *Il existe une probabilité μ sur (S, \mathcal{S}) tel que $F \subset L^1(\mu)$, un certain $\alpha \in (0, 1)$, un ensemble d'indices fini $J \neq \emptyset$, des valeurs complexes distinctes $(\alpha_j, j \in J)$ de l'opérateur \mathcal{Q} avec $|\alpha_j| = \alpha$, des projecteurs non nuls $(\mathcal{R}_j, j \in J)$ définie sur $\mathbb{C}F$, le \mathbb{C} -ev recouvert par F , tel que $\forall j \neq j', \mathcal{R}_j \circ \mathcal{R}_{j'} = \mathcal{R}_{j'} \circ \mathcal{R}_j = 0$ ($\sum_{j \in J} \mathcal{R}_j$ un projecteur défini sur $\mathbb{C}F$) et une suite de nombre réels positifs $(\beta_n) \subseteq \mathbb{N}$ qui converge vers 0 telle que $\forall f \in F$, il existe $g \in F$ tel que avec $\theta_j = \frac{\alpha_j}{\alpha}$:*

$$\left| \mathcal{Q}^n(f) - (\mu, f) - \alpha^n \sum_{j \in J} \theta_j^n \mathcal{R}_j(f) \right| \leq \beta_n \alpha^n g \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (3.14)$$

cas sous critique :

Soit X une chaîne de Markov bifurcante de noyau de probabilité de transition \mathcal{P} et de loi initiale ν telle que l'hypothèse (A1) est vérifiée avec $\alpha \in (0, 1/\sqrt{2})$. Soit $(f = (f_\ell, \ell \in \mathbb{N}))$ une suite de fonction de F qui vérifie uniformément (A1). Alors on a la convergence en loi suivante :

$$N_{n,0}(f) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{(d)} G$$

où G est une variable aléatoire gaussienne centrée et de variance $\Sigma^{\text{sub}}(f)$ qui est bien définie. avec $\Sigma^{\text{sub}}(f) = \Sigma_1^{\text{sub}}(f) + 2\Sigma_2^{\text{sub}}(f)$

$$\Sigma_1^{\text{sub}}(f) = \sum_{\ell \geq 0} 2^{-\ell} \langle \mu, \tilde{f}_\ell^2 \rangle + \sum_{\ell \geq 0, k \geq 0} 2^{k-\ell} \langle \mu, ((\mathcal{Q}^k \tilde{f}_\ell) \otimes^2) \rangle, \quad (3.15)$$

$$\Sigma_2^{\text{sub}}(f) = \sum_{0 \leq \ell < k} 2^{-\ell} \langle \mu, \tilde{f}_k \mathcal{Q}^{k-\ell} \tilde{f}_\ell \rangle + \sum_{\substack{0 \leq \ell < k \\ r \geq 0}} 2^{r-\ell} \langle \mu, (\mathcal{Q}^r \tilde{f}_k \otimes_{\text{sym}} \mathcal{Q}^{k-\ell+r} \tilde{f}_\ell) \rangle \quad (3.16)$$

Cas critique :

Soit X une chaîne de Markov bifurcante de noyau de probabilité de transition \mathcal{P} et de loi initiale ν telle que les hypothèses (A1) et (A2) sont vérifiées avec $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Soit $(f = (f_\ell, \ell \in \mathbb{N}))$ une suite de fonction d'éléments de F qui vérifie uniformément (A1) et (A2). Alors on a la convergence en loi suivante :

$$n^{-1/2} N_{n,0}(f) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{(d)} G$$

où G est une variable aléatoire gaussienne centrée et de variance $\Sigma^{\text{crit}}(f)$ qui est bien définie. Avec $\Sigma^{\text{crit}}(f) = \Sigma_1^{\text{crit}}(f) + 2\Sigma_2^{\text{crit}}(f)$

$$\Sigma_1^{\text{crit}}(f) = \sum_{k \geq 0} 2^{-k} \langle \mu, f_{k,k}^* \rangle = \sum_{k \geq 0} 2^{-k} \sum_{j \in J} \langle \mu, (\mathcal{R}_j(f_k) \otimes_{\text{sym}} \overline{\mathcal{R}}_j(f_k)) \rangle, \quad (3.17)$$

$$\Sigma_2^{\text{crit}}(f) = \sum_{0 \leq \ell < k} 2^{-(k+\ell)/2} \langle \mu, f_{k,\ell}^* \rangle, \quad (3.18)$$

et pour tout $k, \ell \in \mathbb{N}$:

$$f_{k,\ell}^* = \sum_{j \in J} \theta_j^{\ell-k} \mathcal{R}_j(f_k) \otimes_{\text{sym}} \overline{\mathcal{R}}_j(f_\ell). \quad (3.19)$$

Cas sur-critique :

Soit X une chaîne de Markov bifurcante de noyau de probabilité de transition \mathcal{P} et de loi initiale ν telle que l'hypothèse (A2) soit vérifiée avec $\alpha \in (\frac{1}{\sqrt{2}}, 1)$. Alors pour tout $j \in J$ et $f \in F$, la suite $M_j(f) := (M_{n,j}(f), n \in \mathbb{N})$ avec $M_{n,j}(f) = (2\alpha_j)^{-n} M_{\mathbb{G}_n}(\mathcal{R}_j(f))$ est une \mathcal{H}_n -martingale avec

$$\mathcal{H}_n = \sigma(X_i, i \in \mathbb{T}_n)$$

qui converge presque sûrement et dans L^2 vers une variable aléatoire $M_{\infty,j}(f)$.

De plus on a la convergence en Probabilité suivante :

$$(2\alpha^2)^{-\frac{n}{2}} N_{n,0}(f) - \sum_{\ell \in \mathbb{N}} (2\alpha)^{-\ell} \sum_{j \in J} \theta_j^{n-\ell} M_{\infty,j}(f_\ell) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$$

3.5 Principes des déviations modérées des chaines de Markov bifurcantes

Dans cette section on donne quelques résultats portant sur les principes des déviations modérées des chaines de Markov bifurcantes établis par Bitseki & Al [7]. Ils ont fourni au préalable des inégalités de déviations, ce qui leur facilite le travail.

Les théorèmes suivants constituent une synthèse de ces résultats.

Théorème 3.5.1 *Sous les hypothèses (a)-(f) et (H1) de la section précédente, on a :*

i) *Pour toute fonction $g \in F$, pour tout $\delta > 0$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$\mathbb{P} \left(|\overline{M}_n^\Pi(g) - (\mu, g)| > \delta \right) \leq \begin{cases} \frac{c}{\delta^2} \left(\frac{1}{2}\right)^{r_n+1} & \text{si } \alpha^2 < \frac{1}{2} \\ \frac{c}{\delta^2} r_n \left(\frac{1}{2}\right)^{r_n+1} & \text{si } \alpha^2 = \frac{1}{2} \\ \frac{c}{\delta^2} \alpha^{2(r_n+1)} & \text{si } \alpha^2 > \frac{1}{2} \end{cases}$$

où la constante positive c dépend de α et de g .

ii) *Soit $g \in B(S^3)$ tel que Pg, Pg^2 et Pg^4 existent et appartiennent à F . Soit (b_n) une suite croissante de nombre réels positifs telle que $\sqrt{n} = o(b_n)$ et $b_n = o(\sqrt{n \log n})$. Si*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{b_n} \log \left(n \operatorname{ess\,sup}_{1 \leq k \leq c^{-1}(b_{n+1})} \mathbb{P} \left(|g - Pg|(\Delta_{\Pi(k)}) > b_n \mid \mathcal{H}_{k-1} \right) \right) = -\infty \quad (3.20)$$

où $c^{-1}(b_{n+1}) := \inf\{k \in \mathbb{N} : \frac{k}{b_k} \geq b_{n+1}\}$, alors $(M_n^\Pi(g - Pg)/b_n)$ satisfait un principe de déviation modéré dans \mathbb{R} de vitesse $\frac{b_n^2}{n}$ et de bonne fonction taux $I(x) = \frac{x^2}{2(\mu, Pg^2 - (Pg)^2)}$

Maintenant dans le cadre où la chaine de Markov $(Y_r, r \in \mathbb{N})$ est uniformément ergodique géométriquement, c'est à dire :

(H2) Il existe une mesure de probabilité μ sur (S, S) telle que pour tout $g \in \mathcal{B}_b(S)$, il existe une constante positive c telle que

$$|\mathcal{Q}^r(g)(x) - (\mu, g)| \leq c\alpha^r \quad \text{pour un } \alpha \in (0, 1) \text{ et pour tout } x \in S.$$

Bitseki & Al [7] ont obtenu des inégalités de déviations exponentielles pour les moyennes empiriques $\overline{M}_{\mathbb{G}_r}(g)$, $\overline{M}_{\mathbb{T}_r}(g)$ et $\overline{M}_n^\Pi(g)$, ainsi qu'un principe de déviation modérée pour $\overline{M}_n^\Pi(g - Pg)$ lorsque $g \in \mathcal{B}_b(S^3)$. Notons que $\mathcal{B}_b(S)$ vérifie toutes les hypothèses (a)-(f) de la section précédente. Une synthèse de leurs travaux pour ce cas est le théorème suivant.

Théorème 3.5.2 *On suppose que l'hypothèse (H2) est satisfaite.*

3.5. PRINCIPES DES DÉVIATIONS MODÉRÉES DES CHAINES DE
MARKOV BIFURCANTES

i) Pour tout $g \in \mathcal{B}_b(S)$ et pour tout $\delta > 0$ on a

$$\mathbb{P} \left(\left| \overline{M}_n^\Pi(g) - (\mu, g) \right| > \delta \right) \leq \begin{cases} \exp(c''\delta) \exp(-c'\delta^2 n) & \forall n \in \mathbb{N}, \\ & \text{si } \alpha < \frac{1}{2} \\ \exp(2c'\delta(r_n + 1)) \exp(-c'\delta^2 n) & \forall n \in \mathbb{N}, \\ & \text{si } \alpha = \frac{1}{2} \\ \exp(-c'\delta^2 n) & \forall n \in \mathbb{N}, \\ \text{tel que } r_n > r_0 \text{ si } \frac{1}{2} < \alpha < \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \exp(-c'\delta^2 \frac{n}{r_{n+1}}), & \forall n \in \mathbb{N}, \\ \text{tel que } r_n > r_0 \text{ si } \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \exp(-c'\delta^2 \frac{1}{\alpha^2(r_{n+1})}), & \forall n \in \mathbb{N}^*, \\ \text{tel que } r_n > r_0 - 2 \text{ si } \alpha > \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

où $r_0 := \log(\frac{\delta}{c_0}) / \log(\alpha)$, et c_0, c' et c'' sont des constantes positives qui dépendent de $\alpha, \|g\|_\infty$ et c

ii) Soit (b_n) une suite croissante de nombres réels positifs telle que

- $\frac{b_n}{\sqrt{n}} \rightarrow +\infty$,
- si $\alpha^2 < \frac{1}{2}$, la suite (b_n) est telle que $\frac{b_n}{n} \rightarrow 0$,
- si $\alpha^2 = \frac{1}{2}$, la suite (b_n) est telle que $\frac{b_n \log n}{n} \rightarrow 0$,
- $\alpha^2 > \frac{1}{2}$, la suite (b_n) est telle que $\frac{b_n \alpha^{r_{n+1}}}{\sqrt{n}} \rightarrow 0$,

Alors, pour tout $g \in \mathcal{B}_b(S^3)$, $(M_n^\Pi(g - \mathcal{P}g)/b_n)$ satisfait à un PDM dans S de vitesse $\frac{b_n^2}{n}$ et de bonne fonction taux $I(x) = \frac{x^2}{2(\mu, \mathcal{P}g^2 - (\mathcal{P}g)^2)}$

3.6 Mes résultats

Dans cette section on donne nos principaux résultats qui complètent ceux effectués par Bitseki et Delmas dans [6]. Le but est d'établir le principe des déviations modérées pour des fonctionnelles additives des chaînes de Markov bifurcantes. Différents des résultats précédents de Bitseki, Djellout et Guillin dans [7], on considère ici le cas des fonctions qui dépendent d'une seule variable. Principalement inspiré des travaux de Bitski & Delmas [6] sur le théorème centrale limite pour des fonctionnelles additives générales des chaînes de Markov bifurcantes, on donne ici un principe de déviation modérée pour des fonctionnelles additives de CMBs quand les fonctions dépendent d'une variable. Ce travail est effectué sous des hypothèses d'ergodicité géométriquement uniforme et celle basée sur le second trou spectral.

La preuve de nos résultats est basée sur la décomposition martingale récemment développée par Bitseki & Delmas [6], les résultats de Dembo [20], Djellout [23] et Pukhalskii [57]. Donnons maintenant les notations et les principales hypothèses de nos résultats.

3.6.1 Notations et Hypothèses

Pour toute fonction $f \in \mathcal{B}_b(S)$, on pose :

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)|, x \in S\}$$

Notre travail s'est fait sous les hypothèses suivantes :

Hypothèse 3.6.1

Il existe une mesure de probabilité μ sur (S, \mathcal{S}) , un nombre réel positif M et un certain $\alpha \in (0, 1)$ tel que pour tout $f \in \mathcal{B}_b(S)$:

$$\left| \mathcal{Q}^n(f) - (\mu, f) \right| \leq M\alpha^n \|f\|_\infty \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (3.21)$$

On a aussi l'hypothèse suivante portant sur la propriété ergodique la plus forte basée sur le second trou spectral.

Hypothèse 3.6.2 *Il existe une mesure de probabilité μ sur (S, \mathcal{S}) , un nombre réel positif M , un certain $\alpha \in (0, 1)$, un ensemble d'indices non vide J , des valeurs propres complexes distinctes $(\alpha_j, j \in J)$ de l'opérateur \mathcal{Q} avec $|\alpha_j| = \alpha$, des projecteurs non nuls $(\mathcal{R}_j, j \in J)$ définie sur $\mathbb{C}\mathcal{B}_b(S)$, qui est le \mathbb{C} - espace vectoriel recouvert par $\mathcal{B}_b(S)$, tel que $\mathcal{R}_j \circ \mathcal{R}_{j'} = \mathcal{R}_{j'} \circ \mathcal{R}_j = 0$ pour tout $j \neq j'$ ($\sum_{j \in J} \mathcal{R}_j$ est aussi un projecteur défini sur $\mathbb{C}\mathcal{B}_b(S)$) et une suite de nombres réels positifs $(\beta_n, n \in \mathbb{N})$ qui converge vers 0 tel que pour tout $f \in \mathcal{B}_b(S)$, et avec $\theta_j = \frac{\alpha_j}{\alpha}$:*

$$\left| \mathcal{Q}^n(f) - (\mu, f) - \alpha^n \sum_{j \in J} \theta_j^n \mathcal{R}_j(f) \right| \leq M\beta_n \alpha^n \|f\|_\infty \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (3.22)$$

Le fait que la suite $(\beta_n, n \in \mathbb{N})$ soit décroissante et bornée supérieurement par 1, sera utilisé dans le cas critique.

Pour tout $f \in \mathcal{B}_b(S)$, on pose :

$$\tilde{f} = f - (\mu, f) \quad \text{et} \quad \hat{f} = \tilde{f} - \sum_{j \in J} \mathcal{R}_j(f)$$

Soit $\mathfrak{f} = \{f_\ell, \ell \in \mathbb{N}\}$ une suite d'éléments de $\mathcal{B}_b(S)$, on suppose dans la suite que

$$\sup_{\ell \in \mathbb{N}} \{\|f_\ell\|_\infty\} = c_\infty < +\infty \quad (3.23)$$

de telle sorte que (3.21) et (3.22) soient uniformément satisfaites par la suite \mathfrak{f} . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, et pour tout $i \in \mathbb{T}$, on pose :

$$N_{n,i}(\mathfrak{f}) = \sum_{\ell=0}^{n-|i|} N_{n,i}^\ell(f_\ell) = |\mathbb{G}_n|^{-\frac{1}{2}} \sum_{\ell=0}^{n-|i|} M_{i\mathbb{G}_{n-|i|-\ell}}(\tilde{f}_\ell) \quad (3.24)$$

On en déduit que

$$\sum_{i \in \mathbb{G}_k} N_{n,i}(\mathfrak{f}) = |\mathbb{G}_n|^{-\frac{1}{2}} \sum_{\ell=0}^{n-k} M_{\mathbb{G}_{n-\ell}}(\tilde{f}_\ell)$$

En prenant $k = 0$, on obtient

$$N_{n,\emptyset}(\mathfrak{f}) = |\mathbb{G}_n|^{-\frac{1}{2}} \sum_{\ell=0}^n M_{\mathbb{G}_{n-\ell}}(\tilde{f}_\ell)$$

Pour étudier les comportements asymptotiques de $N_{n,\emptyset}(\mathfrak{f})$, il est beaucoup plus commode d'écrire $N_{n,\emptyset}(\mathfrak{f})$ ainsi :

pour tout $n \geq k \geq 1$:

$$N_{n,\emptyset}(\mathfrak{f}) = |\mathbb{G}_n|^{-\frac{1}{2}} \sum_{r=0}^{k-1} M_{\mathbb{G}_r}(\tilde{f}_{n-r}) + \sum_{i \in \mathbb{G}_k} N_{n,i}(\mathfrak{f}) \quad (3.25)$$

La normalité asymptotique de $N_{n,\emptyset}(\mathfrak{f})$ a été étudié par Bitseki & Delmas [6].

Ici on complète leur travaux en étudiant le principe des déviations modérées pour $N_{n,\emptyset}(\mathfrak{f})$. De manière plus précise, pour toute suite $(b_n, n \in \mathbb{N})$ donnée telle que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b_n}{\sqrt{|\mathbb{G}_n|}} = 0 \quad (3.26)$$

alors on a $b_n^{-1} N_{n,\emptyset}(\mathfrak{f})$ satisfait à un PDM de vitesse b_n^2 et de fonction de taux I définie par :

$$I(x) = \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} \left\{ \lambda x - \frac{1}{2} \lambda^2 \Sigma(f) \right\} = \begin{cases} \frac{1}{2} \Sigma(f)^{-1} x^2 & \text{si } \Sigma(f) \neq 0 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.27)$$

où

$$\Sigma(f) = \begin{cases} \Sigma^{sub}(f) & = \Sigma_1^{sub}(f) + 2\Sigma_2^{sub}(f) & \text{si } 2\alpha^2 < 1 \\ \Sigma^{crit}(f) & = \Sigma_1^{crit}(f) + 2\Sigma_2^{crit}(f) & \text{si } 2\alpha^2 = 1 \end{cases}$$

avec

$$\Sigma_1^{\text{sub}}(f) = \sum_{\ell \geq 0} 2^{-\ell} \langle \mu, \tilde{f}_\ell^2 \rangle + \sum_{\ell \geq 0, k \geq 0} 2^{k-\ell} \langle \mu, ((\mathcal{Q}^k \tilde{f}_\ell) \otimes^2) \rangle, \quad (3.28)$$

$$\Sigma_2^{\text{sub}}(f) = \sum_{0 \leq \ell < k} 2^{-\ell} \langle \mu, \tilde{f}_k \mathcal{Q}^{k-\ell} \tilde{f}_\ell \rangle + \sum_{\substack{0 \leq \ell < k \\ r \geq 0}} 2^{r-\ell} \langle \mu, (\mathcal{Q}^r \tilde{f}_k \otimes_{\text{sym}} \mathcal{Q}^{k-\ell+r} \tilde{f}_\ell) \rangle, \quad (3.29)$$

$$\Sigma_1^{\text{crit}}(f) = \sum_{k \geq 0} 2^{-k} \langle \mu, f_{k,k}^* \rangle = \sum_{k \geq 0} 2^{-k} \sum_{j \in J} \langle \mu, (\mathcal{R}_j(f_k) \otimes_{\text{sym}} \overline{\mathcal{R}}_j(f_k)) \rangle, \quad (3.30)$$

$$\Sigma_2^{\text{crit}}(f) = \sum_{0 \leq \ell < k} 2^{-(k+\ell)/2} \langle \mu, f_{k,\ell}^* \rangle, \quad (3.31)$$

et pour tout $k, \ell \in \mathbb{N}$:

$$f_{k,\ell}^* = \sum_{j \in J} \theta_j^{\ell-k} \mathcal{R}_j(f_k) \otimes_{\text{sym}} \overline{\mathcal{R}}_j(f_\ell). \quad (3.32)$$

Plus précisément, on veut montrer que

$$\begin{aligned} - \inf_{x \in A^\circ} I(x) &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n^2} \log \mathbb{P}(b_n^{-1} N_{n,\emptyset}(f) \in A) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n^2} \log \mathbb{P}(b_n^{-1} N_{n,\emptyset}(f) \in A) \\ &\leq - \inf_{x \in \bar{A}} I(x), \end{aligned}$$

où A° et \bar{A} sont respectivement l'intérieur et l'adhérence de A . En particulier, ce resultat asymptotique implique que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n^2} \log \mathbb{P}(|b_n^{-1} N_{n,\emptyset}(f)| > \delta) = -I(\delta) \quad \forall \delta > 0.$$

On note que $2\alpha^2 < 1$ correspond au cas sous-critique et $2\alpha^2 = 1$ au cas critique.

Soit $f \in \mathcal{B}_b(S)$. Si la suite $\mathfrak{f} = (f_\ell, \ell \in \mathbb{N})$ est définie par : $f_0 = f$ et $f_\ell = 0$ pour tout $\ell \geq 1$, alors on a $N_{n,\emptyset}(f) = |\mathbb{G}_n|^{-1/2} M_{\mathbb{G}_n}(\tilde{f})$ et $\Sigma(f) = \Sigma_{\mathbb{G}}(f)$, où

$$\Sigma_{\mathbb{G}}(f) = \begin{cases} \Sigma_{\mathbb{G}}^{\text{sub}}(f) = \langle \mu, \tilde{f}^2 \rangle + \sum_{k \geq 0} 2^k \langle \mu, (\mathcal{Q}^k \tilde{f} \otimes^2) \rangle & \text{if } 2\alpha^2 < 1 \\ \Sigma_{\mathbb{G}}^{\text{crit}}(f) = \sum_{j \in J} \langle \mu, (\mathcal{R}_j(f) \otimes_{\text{sym}} \overline{\mathcal{R}}_j(f)) \rangle & \text{if } 2\alpha^2 = 1, \end{cases}$$

Si la suite $\mathfrak{f} = (f_\ell, \ell \in \mathbb{N})$ est définie par : $f_\ell = f$ pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, alors on a $N_{n,\emptyset}(f) = |\mathbb{G}_n|^{-1/2} M_{\mathbb{T}_n}(\tilde{f}) = \sqrt{2-2^{-n}} |\mathbb{T}_n|^{-1/2} M_{\mathbb{T}_n}(\tilde{f})$ et $\Sigma(f) = \Sigma_{\mathbb{T}}(f)$, où

$$\Sigma_{\mathbb{T}}(f) = \begin{cases} \Sigma_{\mathbb{T}}^{\text{sub}}(f) = \Sigma_{\mathbb{G}}^{\text{sub}}(f) + 2\Sigma_{\mathbb{T},2}^{\text{sub}}(f) & \text{if } 2\alpha^2 < 1 \\ \Sigma_{\mathbb{T}}^{\text{crit}}(f) = \Sigma_{\mathbb{G}}^{\text{crit}}(f) + 2\Sigma_{\mathbb{T},2}^{\text{crit}}(f) & \text{if } 2\alpha^2 = 1, \end{cases}$$

avec

$$\begin{aligned} \Sigma_{\mathbb{T},2}^{\text{sub}}(f) &= \sum_{k \geq 1} \langle \mu, \tilde{f} \mathcal{Q}^k \tilde{f} \rangle + \sum_{\substack{k \geq 1 \\ r \geq 0}} 2^r \langle \mu, (\mathcal{Q}^r \tilde{f} \otimes_{\text{sym}} \mathcal{Q}^{r+k} \tilde{f}) \rangle, \\ \Sigma_{\mathbb{T},2}^{\text{crit}}(f) &= \sum_{j \in J} \frac{1}{\sqrt{2}\theta_j - 1} \langle \mu, (\mathcal{R}_j(f) \otimes_{\text{sym}} \overline{\mathcal{R}}_j(f)) \rangle. \end{aligned}$$

Maintenant on peut énoncer nos principaux résultats pour les deux régimes : sous-critique et critique.

3.6.2 Résultats principaux

Cas sous critique : $2\alpha^2 < 1$. On considère une suite $(b_n, n \in \mathbb{N})$ telle que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b_n}{\sqrt{|\mathbb{G}_n|}} = 0$$

Alors on a le résultat suivant :

Théorème 3.6.3 *Soit X une chaîne de Markov bifurcante de probabilité de transition \mathcal{P} et de loi initiale ν tel que l'hypothèse (3.6.1) est vérifiée avec $\alpha \in (0, \frac{1}{\sqrt{2}})$.*

Soit $f = (f_\ell, \ell \in \mathbb{N})$ une suite d'éléments de $B_b(S)$ satisfaisant (3.23) et (3.6.1) uniformément. Alors $b_n^{-1} N_{n, \emptyset}(f)$ satisfait à un principe de déviation modérée de vitesse b_n^2 et fonction de taux I définie par (3.27).

La preuve de ce résultat utilise une décomposition de martingale (pour plus de détails pour cette méthode on peut voir : Puhalskii [57], Bitseki et Delmas [6] et Djellout [23]). Sans entrer trop dans les détails, on donne une brève présentation de la stratégie utilisée.

On considère une suite croissante $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de \mathbb{N}^* tel que :

$$p_n \leq \frac{n}{2} \tag{3.33}$$

On notera p à la place p_n sans ambiguïté.

Soit $i, j \in \mathbb{T}$. On écrit $i \preceq j$, si $j \in i\mathbb{T}$. On note $i \wedge j$, le plus récent ancêtre commun à i et j , qui est défini comme le seul $u \in \mathbb{T}$ tel que si $v \in \mathbb{T}$ et $v \preceq i, v \preceq j$ alors $v \preceq u$.

On définit l'ordre lexicographique $i \leq j$, si $i \preceq j$ ou $v_0 \leq i$ et $v_1 \leq j$ pour $v = i \wedge j$.

Soit $X = (X_i, i \in \mathbb{T})$ une chaîne de Markov bifurcante de noyau de transition \mathcal{P} et de loi de probabilité initiale ν . Pour tout $i \in \mathbb{T}$, on définit la tribu ou sigma-algèbre \mathcal{F}_i par :

$$\mathcal{F}_i = \sigma\{X_u, u \in \mathbb{T}, u \leq i\}$$

Par construction, les tribus $(\mathcal{F}_i, i \in \mathbb{T})$ sont emboîtées puisque $\mathcal{F}_i \subset \mathcal{F}_j$ pour $i \leq j$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $i \in \mathbb{G}_{n-p_n}$ et pour tout $f \in F^{\mathbb{N}}$, on définit les accroissements de martingales suivantes :

$$\Delta_{n,i}(f) = N_{n,i}(f) - \mathbb{E}[N_{n,i}(f)/\mathcal{F}_i] \quad \text{et} \quad \Delta_n = \sum_{i \in \mathbb{G}_{n-p}} \Delta_{n,i} \tag{3.34}$$

On a alors

$$\begin{aligned} \sum_{i \in \mathbb{G}_{n-p}} N_{n,i}(f) &= |\mathbb{G}_n|^{-1/2} \sum_{\ell=0}^{p_n} M_{\mathbb{G}_{n-\ell}}(\tilde{f}_\ell) \\ &= |\mathbb{G}_n|^{-1/2} \sum_{k=n-p_n}^n M_{\mathbb{G}_k}(\tilde{f}_{n-k}) \end{aligned}$$

En utilisant la propriété de Markov forte, et (3.24) on obtient pour tout $i \in \mathbb{G}_{n-p_n}$:

$$\mathbb{E}[N_{n,i}(f)/\mathcal{F}_i] = \mathbb{E}[N_{n,i}(f)/X_i] = |\mathbb{G}_n|^{-1/2} \sum_{\ell=0}^{p_n} \mathbb{E}_{X_i}[M_{\mathbb{G}_{p_n-\ell}}(\tilde{f}_\ell)]$$

Ainsi on en déduit de (3.25) avec $k = n - p_n$ que :

$$N_{n,\emptyset}(f) = \Delta_n(f) + R_0(n) + R_1(n)$$

avec

$$R_0(n) = |\mathbb{G}_n|^{-1/2} \sum_{k=0}^{n-p_n-1} M_{\mathbb{G}_k}(\tilde{f}_{n-k})$$

et

$$R_1(n) = \sum_{i \in \mathbb{G}_{n-p_n}} \mathbb{E}[N_{n,i}(f)/\mathcal{F}_i]$$

Ainsi notre objectif est atteint en négligeant au sens des déviations modérées les quantités $R_0(n)$ et $R_1(n)$ c'est à dire en montrant que :

$$\begin{aligned} \forall \delta > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{b_n^2} \log \mathbb{P}[|b_n^{-1} R_0(n)| > \delta] &= -\infty \\ \forall \delta > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{b_n^2} \log \mathbb{P}[|b_n^{-1} R_1(n)| > \delta] &= -\infty \end{aligned} \quad (3.35)$$

et en prouvant que le crochet martingale $b_n^{-1} \Delta_n(f)$ satisfait un principe de déviation modérée sur S avec vitesse b_n^2 et fonction taux I . On notera que $N_{n,\emptyset}(f)$ et $\Delta_n(f)$ satisfont le même principe de déviation des déviations modérées (voir Dembo et Zeitouni chapitre 4, [21]). Pour plus de détails sur la preuve se référer à l'article (3).

Cas critique : $2\alpha^2 = 1$

On considère une suite $(b_n, n \in \mathbb{N})$ telle que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b_n}{\sqrt{n|\mathbb{G}_n|}} = 0 \quad (3.36)$$

$$\text{et pour tout } a \in (0, 1), \text{ on a } \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n^2 n^2 2^{-n^a} = 0$$

Alors on a le résultat suivant :

Théorème 3.6.4 *Soit X une chaîne de Markov bifurcante de probabilité de transition \mathcal{P} et de loi initiale ν tel que l'hypothèse (3.6.2) est vérifiée avec $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$.*

Soit $f = (f_\ell, \ell \in \mathbb{N})$ une suite d'éléments de $\mathcal{B}_b(S)$ satisfaisant (3.23) et (3.6.2) uniformément. Alors $b_n^{-1} n^{\frac{1}{2}} N_{n,\emptyset}(f)$ satisfait à un principe de déviation modérée de vitesse b_n^2 et fonction de taux I définie par (3.27).

La preuve de ce théorème suit la même stratégie que celle du cas sous-critique ($2\alpha^2 < 1$). Comme la répétition est pédagogique, rappelons la stratégie utilisée pour ce cas critique.

Soit (p_n) une suite croissante d'éléments de \mathbb{N}^* tel que pour tout $\lambda > 0$, on a :

$$\begin{aligned} p_n < n, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{n} = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 b_n^2 2^{-(n+p)} = 0 \\ \text{et } \lim_{n \rightarrow \infty} n - p_n - \lambda \log(n) = +\infty \end{aligned} \quad (3.37)$$

De (3.36), on peut choisir $p_n = n - n^a$ avec $a \in (0, 1)$.

Considérons la suite de fonction $f = (f_\ell, \ell \in \mathbb{N})$ d'éléments de $\mathcal{B}_b(S)$ qui satisfont les hypothèses (3.6.2) et (3.6.1) uniformément c'est à dire :

$$|\mathcal{Q}^n(\tilde{f}_\ell)| \leq M\alpha^n c_\infty \quad \text{et} \quad |\mathcal{Q}^n(\hat{f}_\ell)| \leq M\beta_n \alpha^n c_\infty \quad (3.38)$$

Il résulte de (3.38) qu'il existe une constante finie c_J dépendant seulement de $\{\alpha_j, j \in \mathbb{N}\}$ telle que pour tout $\ell \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}, j_0 \in J$, on a

$$\begin{aligned} |f_\ell| \leq M c_\infty, |\tilde{f}_\ell| \leq M c_\infty, |\langle \mu, \tilde{f}_\ell \rangle| \leq M c_\infty, \left| \sum_{j \in J} \theta_j^n \mathcal{R}_j(f_\ell) \right| \leq 2M c_\infty \\ \text{et } |\mathcal{R}_{j_0}(f_\ell)| \leq c_J M c_\infty \end{aligned}$$

On rappelle que :

$$N_{n,\emptyset}(f) = \Delta_n(f) + R_0(n) + R_1(n)$$

avec $R_0(n), R_1(n)$ données par :

$$R_0(n) = |\mathbb{G}_n|^{-1/2} \sum_{k=0}^{n-p_n-1} M_{\mathbb{G}_k}(\tilde{f}_{n-k})$$

et

$$R_1(n) = \sum_{i \in \mathbb{G}_{n-p_n}} \mathbb{E}[N_{n,i}(f) / \mathcal{F}_i]$$

soit $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de \mathbb{N} qui vérifie :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = +\infty, \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b_n}{\sqrt{n} |\mathbb{G}_n|} = 0$$

Ainsi le théorème est achevé en vérifiant les items suivants comme dans le cas sous-critique :

$$\forall \delta > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{b_n^2} \log \mathbb{P}[|b_n^{-1} n^{-1/2} R_0(n)| > \delta] = -\infty \quad (3.39)$$

$$\forall \delta > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{b_n^2} \log \mathbb{P}[|b_n^{-1} n^{-1/2} R_1(n)| > \delta] = -\infty \quad (3.40)$$

et en prouvant que le crochet martingale $b_n^{-1} n^{-1/2} \Delta_n(f)$ satisfait à un principe de déviations modérées sur S avec vitesse b_n^2 et fonction taux I .

3.7 Perspectives

Dans la suite de nos recherches, nous nous intéresserons

- au régime sur-critique des déviations modérées pour les BMC qui va compléter nos résultats étudiés.
- au principe des grandes déviations des processus auto-régressifs bifurcants de premier ordre en abrégé (BAR(1)).

Deuxième partie

Articles

Chapitre 4

Quantitative approximation of the discrete Moran process by a Wright-Fisher diffusion

Authors : *Gorgui Gackou , Arnaud Guillin, Arnaud Personne*

4.1 Abstract

The Moran discrete process and the Wright-Fisher model are the most popular models in population genetics. It is usual in order to understand the dynamics of these models by using an approximating diffusion process, called Wright-Fisher diffusion. Here, we give a quantitative large population limit of the error done by using the approximation diffusion in the presence of weak selection and weak immigration in one dimension. The approach is robust enough to consider the case where selection and immigration are markovian processes, with limits jump or diffusion processes.

4.2 Introduction

Diffusion approximation is a technique in which a complicated and intractable (as the dimension increases) discrete markovian process is replaced by an appropriate diffusion which is generally easier to study. This technique is used in many domains and genetics and populations dynamics are no exceptions to the rule. Two of the main models used in population dynamics are the Wright-Fisher see for example Fisher [38],[37]; Wright [66], [67]) and the Moran [54] models which describe the evolution of a population having a constant size and subject to immigration and environmental variations. In the case of a large population limit, it is well known that the Moran process is quite difficult to handle mathematically and numerically. For example, the convergence to equilibrium independent of the population size or the the estimation of various biodiversity index such as the Simpson index are not known. It is thus tempting to approach the dynamics of the

these markovian processes by a diffusion, called a Wright-Fisher diffusion, see for example [29],[31] or [50], and work on this simpler (low dimensional) process to get good quantitative properties.

A traditional way to prove this result is to consider a martingale problem, as was developed by Stroock and Varadhan [61]. See also [18],[31] and [30] to illustrate the Wright-Fisher process with selection but they do not provide any estimate of the error. This technique ensures that the discrete process converges to a diffusion as the size of the population grows to infinity. If the setting is very general and truly efficient, it is usually not quantitative as it does not give any order of the error done in replacing the discrete process by the diffusion for a fixed population size. To obtain an estimation of this error we will consider another approach by Ethier-Normann in [32], which makes for a quantitative statement of the convergence of the generator using heavily the properties of the diffusion limit. For the Wright-Fisher model with immigration but without selection they showed that the error is of the order of the inverse of population size, and uniform in time. Our main goal here, and the improvements compared to the existing results, will be to consider the more general model where

- (1) weak selection is involved
- (2) immigration and selection may be also Markov processes.

To include selection, constant or random is of course fundamental for modelisation, see for example [35],[22],[49], [15], [16], [17] for recent references. Also, to study biodiversity, a common index is the Simpson index called also heterozigosity, which is intractable in non neutral model ([34] or [33] in the neutral case), and is not even easy to approximate via Monte Carlo simulation when the population is large. Based on the Wright-Fisher diffusion, an efficient approximation procedure has been introduced in [23]. Other properties, such as estimating the invariant distribution of the Moran process or fixation probabilities when the population is large are intractable. It is thus a crucial issue to get quantitative diffusion approximation result in the case of random selection to get a full approximation procedure for this biodiversity index.

We will focus in this paper in the two species (or diallelic) case. We may then denote the proportion of one species by X^J when the total population size is J , and Y^J the rescaled Wright-Fisher process (see section 2). Let us now state the main result of this paper : for f regular enough, when immigration and selection are weak (namely scaled in $\frac{1}{J}$) we have

$$\left\| \mathbb{E}_x \left[f(X_{[tJ^2]}^J) - f(Y_{[tJ^2]}^J) \right] \right\| \leq \frac{K(t)}{J}$$

where $K(t)$ may be exponential or linear in time (t) depending on the coefficients of immigration (or mutation) and selection. One point is that we may consider here random immigration and selection (under proper scaling). It gives the first order of the error made in approximating the Moran model by the Wright-Fisher diffusion in weak selection and immigration when the population size tends to infinity. Here the error is inversely proportional to

the population size.

Let us give the structure of this paper. First in Section 2, we present the Moran model. As an introduction to the method, we first deal with the case of a constant selection and we find an error of the order of the inverse of the population size but growing exponentially or linearly in time. It will be done in Section 3. Sections 4 and 5 deal with the case of random environment. Section 4 considers the case when the limit of the selection is a pure jump process and Section 5 when it is a diffusion process. We will indicate the main modifications of the previous proof to adapt to this setting. An appendix indicates how to adapt the preceding proofs to the case of Wright-Fisher discrete process.

4.3 The Moran model and its approximation diffusion

Consider to simplify a population of J individuals with only two haploid species (in genetics diallelic). At each time step, one individual dies and is replaced by one member of the community or a member of a distinct (infinite) pool, which is called immigration (but can also be interpreted as mutation in genetics). We may refer to [27] or [54] in the genetically point of view for the description of this simple birth and death process, or in ([47],[49]) in the population dynamics point of view. To clarify this mechanism of evolution, let us introduce the following parameters :

- m is the immigration probability, i.e. the probability that the next member of the population comes from the exterior pool ;
- p is the proportion of the first species in the pool ;
- s is the selection parameter, which acts as favoring one of the two species when the parent is chosen in the initial population .

Let us first consider that m, p and s are functions depending on time (but not random to simplify) and taking values in $[0, 1]$ for the two first and in $] - 1, +\infty[$ for the selection parameter.

Note that this process may also be described by considering mutations, rather than immigration but there is a relation between these two interpretations. Our time horizon will be denoted by T it corresponds to the upper limit of the time interval during which the process evolves.

Rather than considering the process describing the number of elements in each species, we will study the proportion in the population of the first species.

To do so, let $I_J = \{\frac{i}{J} : i = 0, 1, 2, \dots, J\}$, and we denote for all f in $B(I_J)$, the bounded functions on I_J ,

$$\|f\|_J = \max_{x \in I_J} |f(x)|$$

And for a bounded function $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, we denote by $\|g\| = \sup |g|$, the supremum norm of g .

Then, let C^i the set of i times continuously differentiable functions, and for $f \in C^i$ let $f^{(i)}$ be the i^{th} derivative of f .

4.3. THE MORAN MODEL AND ITS APPROXIMATION DIFFUSION

In this section, X_n^J is thus the Moran process, namely a Markov process evolving with the following transition probabilities : denote $\Delta = \frac{1}{J}$

$$\begin{cases} \mathbb{P}\left(X_{n+1}^J = x + \Delta | X_n^J = x\right) &= (1-x) \left(m_n p_n + (1-m_n) \frac{x(1+s_n)}{1+xs_n}\right) := P_{x^+} \\ \mathbb{P}\left(X_{n+1}^J = x - \Delta | X_n^J = x\right) &= x \left(m_n(1-p_n) + (1-m_n) \left(1 - \frac{x(1+s_n)}{1+xs_n}\right)\right) := P_{x^-} \\ \mathbb{P}\left(X_{n+1}^J = x | X_n^J = x\right) &= 1 - P_{x^+} - P_{x^-} \end{cases}$$

To study the dynamical properties of this process a convenient method developed first by Fisher [19], [20] and Wright [29], [30] aims at approximating this discrete model by a diffusion when the size of the population tends to infinity.

In the special case of the Moran model with weak selection and weak immigration, meaning that the parameters s and m are inversely proportional to the size J , we usually use the process $\{Y_t^J\}_{t \geq 0}$ taking values in $I = [0, 1]$ defined by the generator :

$$L = \frac{x(1-x)}{J^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{(sx(1-x) + m(p-x))}{J} \frac{\partial}{\partial x}$$

Note that, in weak selection and immigration, $s = \frac{s'}{J}$ and $m = \frac{m'}{J}$, so the process defined by $\{Z_t\}_{t \geq 0} = \{Y_{tJ^2}^J\}_{t \geq 0}$ do not depend on J . Its generator is

$$\mathcal{L} = x(1-x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + [s'x(1-x) + m'(p-x)] \frac{\partial}{\partial x}$$

or equivalently by stochastic differential equation

$$dZ_t = \sqrt{2Z_t(1-Z_t)} dB_t + [s'Z_t(1-Z_t) + m'(p-Z_t)] dt$$

Our aim is to find for sufficiently regular test function, say $f \in C^4$, an estimation of :

$$\left\| \mathbb{E}_x[f(Z_{[t]})] - \mathbb{E}_x[f(X_{[tJ^2]}^J)] \right\|_J$$

for $0 \leq t \leq T$ and $x \in I_J$. By replacing Z_t by $Y_{tJ^2}^J$ we thus get :

$$\left\| \mathbb{E}_x[f(X_{[tJ^2]}^J)] - \mathbb{E}_x[f(Y_{[tJ^2]}^J)] \right\|_J$$

for $0 \leq t \leq T$ and $x \in I_J$.

So equivalently it is convenient to study, if we note $n = [tJ^2]$:

$$\left\| \mathbb{E}_x[f(X_n^J)] - \mathbb{E}_x[f(Y_n^J)] \right\|_J$$

on $0 \leq n \leq TJ^2$ and $x \in I_J$.

Note, once again, that such a limit has been derived (non quantitatively) in many papers, by the martingale methods (or convergence of the generators in this simple setting), see for example [27] where it is even hinted that the order of the error should be $\frac{1}{J}$ but no quantitative statements are given. The only quantitative statement that we know is given by **Ethier-Norman** [32] without selection and in the constant non random case.

4.4 Estimate of the error in the approximation diffusion for constant weak immigration and selection

We now give our main result in the case where immigration and selection are constant. It furnishes an estimation of the error done when the discrete Moran process X_n converges toward the Wright-Fisher diffusion process Y_n . The method used here is that developed by Ethier and Norman in [32], we extend there results to the case of a constant selection here, we still find an error inversely proportional to the population size.

Theorem 4.4.1

Let us consider the weak immigration and selection case, so that $s = \frac{s'}{J}$ and $m' = \frac{m'}{J}$ for $s' \in \mathbb{R}$, $m' \in \mathbb{R}_+$ with (J large enough), $t \in [0, T]$. Let $f \in C^4(I)$, then there exist positive functions a, b and K depending on m' and s' but not on f nor J such that :

$$\left\| \mathbb{E}_x \left[f(X_{[tJ^2]}^J) - f(Y_{[tJ^2]}^J) \right] \right\|_J \leq a(e^{bt} - 1) \left(\frac{(\|f^{(1)}\|_J + \|f^{(2)}\|_J)}{J} + K \frac{\sum_{i=1}^4 \|f^{(i)}\|_J}{J^2} \right)$$

If we suppose moreover that $m' > |s'|$ then there exists a positive constant a such that :

$$\left\| \mathbb{E}_x \left[f(X_{[tJ^2]}^J) - f(Y_{[tJ^2]}^J) \right] \right\|_J \leq a(t + 1) \left(\frac{(\|f^{(1)}\|_J + \|f^{(2)}\|_J)}{J} + \frac{\sum_{i=1}^4 \|f^{(i)}\|_J}{J^2} \right)$$

Remarque 4.4.2 By considering $s = 0$ then $b = 0$ and we find back the uniform in time approximation diffusion with speed $\frac{1}{J}$. Our method of proof, requiring the control of some Feynman-Kac formula based on the limiting process, seems limited to give a non uniform in time result. Our hope is that we may get weaker conditions than $m > |s|$ to get linear in time estimates. Another possibility is to mix these dependance in time approximation with known ergodicity of the Wright-Fisher process, as in Norman [55]. It is left for future work.

Remarque 4.4.3 We have considered to simplify $s = \frac{s'}{J}$ and $m = \frac{m'}{J}$ but one may generalize a little bit the condition to locally bounded s and m such that $\lim Js < \infty$ and $\lim Jm < \infty$. In the same way, one can also follow closely our proofs to get estimates based directly on s, m, p without requiring any scaling in the population size.

Remarque 4.4.4 By using an approximation procedure, one may show that for $f \in C^2(I)$, then there exists positive functions a, b and K depending on m' and s' such that :

$$\lim_{J \rightarrow \infty} J \times \left\| \mathbb{E}_x \left[f(X_{[tJ^2]}^J) - f(Y_{[tJ^2]}^J) \right] \right\|_J \leq a(e^{bt} - 1) (\|f^{(1)}\|_\infty + \|f^{(2)}\|_\infty)$$

So that we may relax assumptions on the derivatives of f but only gets asymptotic result. One can also get non asymptotic results with an approximation procedure of C^2 functions, but then losing the decay in $\frac{1}{J}$ (by playing with the approximation bounds and the already obtained decay rate $\frac{1}{J}$).

4.4.1 Application : Simpson Index.

This index commonly used in ecology to measure abundance was proposed by Simpson in the late [60] and repeated in many articles dealing with neutral models : [34],[60],.... The Simpson index measures the probability that two individuals randomly selected (and uniformly) belong to the same species. It thus varies from 1 to 0 and makes it possible to express the dominance of a species when it tends to 1, or the co-dominance of several species when it tends to 0. Thus it is a good indicator of the heterogeneity of the community and is known as heterozigosity in genetics.

Let denote S_n^J the Simpson index for the discrete Moran process, and S_t the Simpson index for the Wright-Fisher diffusion. Note in each case it is a polynomial function of X_n or Y_t verifying : $S_t = Y_t(1 - Y_t)$. It exists an efficient algorithm able to approximate $\mathbb{E}[S_t]$ see [41]. Let denote by \tilde{S}_t this approximation and ϵ the error made in this approximation.

Then, thanks Theorem 1 it is possible to estimate the full error made in the approximation of $\mathbb{E}[S_t^J]$ by \tilde{S}_t :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_x \left[\left| S_{[t^2 J]}^J - \tilde{S}_t \right| \right] &\leq \mathbb{E}_x \left[\left| S_{[t^2 J]}^J - S_{[t^2 J]} \right| \right] + \mathbb{E}_x \left[\left| \tilde{S}_t - S_{[t^2 J]} \right| \right] \\ &\leq \epsilon_t + \frac{4a(e^{bt} - 1)}{J} + o\left(\frac{1}{J}\right) \end{aligned}$$

Remarque 4.4.5 *There are also other applications that can be considered, such as estimating the stationary distributions, fixation probabilities, average time to fixation to a mutant. It has been explored for example in Bürger- Ewens [8], McCandlish-Epstein-Plotkin [52] or Chuley and AL [10] for the fixation probabilities. Note however two important characteristics of our results. The first one is that our bounds depend on time, so that for the estimation of the invariant probability measure it may needs a careful tuning of the speed of convergence to equilibrium of the Wright-Fisher process and a quite J to get good approximations. Of course, when the error between the Moran process and the Wright-Fisher one is linear, it may give interesting results with a limited size of population. The second point is that we need to consider regular functional, and fixation probabilities are by essence discontinuous (namely an indicator function). It will thus need further approximations to consider such a case that we will consider in future work.*

4.4.2 Proof

The proof relies on three factors ;

- (1) a "telescopic" decomposition of the error ;
- (2) a quantitative estimate of the error at time 1 of the approximation of the Moran process by the diffusion ;
- (3) a quantitative control of the regularity of the Wright-Fisher process.

Note also that in the sequel we will not make distinction between function on $C(I)$ and their restrictions on I_J .

Let S_n be defined on $B(I_J)$ (the space of bounded functions on I_J) by :

$$(S_n f)(x) = \mathbb{E}_x[f(X_n^J)] \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

As is usual S_n verifies the semigroup property, namely that

$$S_{n+k} = S_n S_k \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Let T_t be the operator defined on the space of bounded continuous function by :

$$(T_t f)(x) = \mathbb{E}_x[f(Y_t^J)] \quad \forall t \geq 0$$

It also defines a semigroup property

$$T_{t+s} = T_s T_t, \quad s \geq 0$$

Thanks to these properties, we have

$$\begin{aligned} S_n T_0 f - S_0 T_n f &= \sum_{k=0}^{n-1} S_{n-k} T_k f - S_{n-k-1} T_{k+1} f \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} S_{n-k-1} S_1 T_k f - S_{n-k-1} T_1 T_k f \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} S_{n-k-1} (S_1 - T_1) T_k f \end{aligned}$$

and as $\|S_n f\|_J \leq \|f\|_J$ by triangular inequality, we get $\forall n \in \mathbb{N}, \forall f \in C(I_J)$.

$$\|S_n f - T_n f\|_J \leq \sum_{k=0}^{n-1} \|S_{n-k-1} (S_1 - T_1) T_k f\|_J \leq \sum_{k=0}^{n-1} \|(S_1 - T_1) T_k f\|_J \quad (4.1)$$

We have two main terms to analyze : $S_1 - T_1$ for a " one-step " difference between the Moran process and the Wright-Fisher diffusion process, and $T_k f$ for which we need regularity estimates.

Control of $(S_1 - T_1)$

Let us first study, for $f \in C^4$, $(S_1 - T_1)f$. The main goal is to obtain the Taylor expansion of this function when J is big enough.

4.4. MAIN RESULT

Lemma 4.4.6 *Assume $s > -1 + \varepsilon$ with $\varepsilon > 0$ and write $s' = Js$, then there exists $K_1(\varepsilon) > 0$ such that $K_1(\varepsilon)$ is independent of J and*

$$\begin{aligned} \|(S_1 - T_1)f\|_J &\leq \frac{|s'|m' + s'^2}{4\varepsilon J^3} \|f^{(1)}\|_J + \frac{m'p + \frac{|s'|}{4} + m'(1 + |s'|)}{2\varepsilon J^3} \|f^{(2)}\|_J \\ &\quad + \frac{K_1(\varepsilon) \left(\sum_{i=1}^4 \|f^{(i)}\|_J \right)}{J^4} \end{aligned}$$

Let us begin by some known facts on the Wright-Fisher diffusion process. Note, as usual for this diffusion process,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left\| \frac{T_t f - f}{t} - Lf \right\|_J = 0, \forall f \in C^2(I)$$

The Chapman-Kolmogorov backward equation reads

$$\frac{\partial}{\partial t} (T_t f)(x) = L(T_t f)(x) = T_t(Lf)(x)$$

And more generally if f is enough regular, for $j \in \mathbb{N}$ it is possible to define L^j the j -th iterate of L , it verifies :

$$\frac{\partial^j}{\partial t^j} (T_t f)(x) = T_t(L^j f)(x), \forall x \in I, t \geq 0$$

For this proof, we only need to go to the fourth order in j . So let $f \in C^4(I)$ (possible depending on J), using Taylor theorem for $(T_1 f)(x)$ there exists w_2 , independent of J such that :

$$\begin{aligned} (T_1 f)(x) &= (T_0 f)(x) + (T_0 f)^{(1)}(x)(1 - 0) + w_2 \frac{1}{2} (T_0 f)^{(2)}(x) \\ &= f(x) + (L^1 f)(x) + \frac{w_2}{2} (L^2 f)(x) \end{aligned} \tag{4.2}$$

Recall

$$L^1 f(x) = \frac{x(1-x)}{J^2} f^{(2)}(x) + \frac{sx(1-x) + m(p-x)}{J} f^{(1)}(x)$$

By direct calculations, we have

$$\begin{aligned} L^2 f(x) &= \frac{(x(1-x))^2}{J^4} f^{(4)}(x) + \left[\frac{2(1-2x)x(1-x)}{J^4} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2x(1-x)(sx(1-x) + m(p-x))}{J^3} \right] f^{(3)}(x) \\ &\quad + \left[\frac{-2x(1-x)}{J^4} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2x(1-x)(s(1-2x) + m(p-x)) + (1-2x)(sx(1-x) + m(p-x))}{J^3} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(sx(1-x) + m(p-x))^2}{J^2} \right] f^{(2)}(x) + \left[\frac{-2sx(1-x)}{J^3} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(s(1-2x) - m)(sx(1-x) + m(p-x))}{J^2} \right] f^{(1)}(x) \end{aligned}$$

Remark now by our assumption on the boundedness of the successive derivatives of f that there exists K_0 (depending also on m', p, s')

$$\|L^2 f\|_J \leq \frac{K_0}{J^4}$$

Thus, in the following this term could be neglected.

Let us now look at the Moran process and so get estimates on S_1 . The quantity $X_1 - x$ is at least of the order of $\frac{1}{J}$ and when J goes to infinity, goes to 0. So using the Taylor's theorem, there exists ζ such that :

$$\begin{aligned} f(X_1^J) &= f(x) + (X_1^J - x)f^{(1)}(x) + \frac{(X_1^J - x)^2}{2}f^{(2)}(x) + \frac{(X_1^J - x)^3}{3!}f^{(3)}(x) \\ &\quad + \frac{(X_1^J - x)^4}{4!}f^{(4)}(\zeta) \end{aligned}$$

and thus

$$\begin{aligned} (S_1 f)(x) &= \mathbb{E}_x \left[f(X_1^J) \right] \\ &= f(x) + \mathbb{E}_x[X_1^J - x]f^{(1)}(x) + \frac{1}{2!}\mathbb{E}_x[(X_1^J - x)^2]f^{(2)}(x) \\ &\quad + \frac{1}{3!}\mathbb{E}_x[(X_1^J - x)^3]f^{(3)}(x) + \frac{1}{4!}\mathbb{E}_x[(X_1^J - x)^4]f^{(4)}(\zeta) \end{aligned} \quad (4.3)$$

Direct estimates on the centred moments of the Moran process give :

$$\mathbb{E}_x[X_1^J - x] = \frac{sx(1-x)(1-m)}{J(1+sx)} + \frac{m(p-x)}{J} \quad (4.4)$$

$$\mathbb{E}_x[(X_1^J - x)^2] = \frac{1}{J^2} \left(mp(1-2x) + \frac{(1-m)(1+s)x(1-2x)}{1+sx} + x \right) \quad (4.5)$$

$$\mathbb{E}_x[(X_1^J - x)^3] < \frac{K_3}{J^4} \quad (4.6)$$

$$\mathbb{E}_x[(X_1^J - x)^4] < \frac{K_4}{J^4} \quad (4.7)$$

where K_3, K_4 are constant(independent of J).

We may then consider $(S_1 - T_1)f$ through (4.2) and (4.3) so that there exists a constant K_1 such as :

$$\begin{aligned} (S_1 f)(x) - (T_1 f)(x) &= \mathbb{E}_x[X_1^J - x]f^{(1)}(x) + \frac{1}{2!}\mathbb{E}_x[(X_1^J - x)^2]f^{(2)}(x) \\ &\quad + \frac{1}{3!}\mathbb{E}_x[(X_1^J - x)^3]f^{(3)}(x) + \frac{1}{4!}\mathbb{E}_x[(X_1^J - x)^4]f^{(4)}(\zeta) \\ &\quad - \left((L^1 f)(x) + \frac{w_2}{2}(L^2 f)(x) \right) \end{aligned} \quad (4.8)$$

and

$$\left| (S_1 f)(x) - (T_1 f)(x) \right| \leq |\gamma_1^J| \|f^{(1)}\|_J + |\gamma_2^J| \|f^{(2)}\|_J + \frac{K_1 \left(\sum_{i=1}^4 \|f^{(i)}\|_J \right)}{J^4} \quad (4.9)$$

with

$$\begin{aligned}\gamma_1^J &= \frac{-sx(1-x)(m+sx)}{J(1+sx)} \\ \gamma_2^J &= \frac{1}{2J^2} \left[mp(1-2x) + \frac{(1-m)(1+s)x(1-2x)}{1+sx} - x(1-2x) \right] \\ &= \frac{1}{2J^2} \left[mp(1-2x) + x(1-2x) \frac{s(1-x) - m(1+s)}{1+sx} \right]\end{aligned}$$

As selection and immigration are weak, γ_1^J and γ_2^J are at the most of the order of $\frac{1}{J^3}$. Then the fact that $s > -1 + \epsilon$ and $x < 1$ implies $\frac{1}{1+sx} < \frac{1}{\epsilon}$ and we obtain :

$$\begin{aligned}\|(S_1 - T_1)f\|_J &\leq \frac{|s'|m' + s'^2}{4\epsilon J^3} \|f^{(1)}\|_J + \frac{m'p + \frac{|s'|}{4} + m'(1 + |s'|)}{2\epsilon J^3} \|f^{(2)}\|_J \\ &\quad + \frac{K_1(\epsilon) (\|f^{(3)}\|_J + \|f^{(4)}\|_J)}{J^4}\end{aligned}$$

which concludes the proof. In the following we write :

$$\begin{aligned}\gamma_1^{J,\epsilon} &= \frac{|s'|m' + s'^2}{4\epsilon J^3} \\ \gamma_2^{J,\epsilon} &= \frac{m'p + \frac{|s'|}{4} + m'(1 + |s'|)}{2\epsilon J^3}\end{aligned}$$

Regularity estimates on T_t

We have now to prove the regularity estimates on T_t . By Ethier [29], we have that $T_t : C^j(I) \rightarrow C^j(I)$ for all j .

Assume for now that $f \in C^4(I)$ and $\forall j \in \{1, 2\}, \forall k \leq j$, there are c_j and $a_{k,j} \in \mathbb{R}_+$ independent of J such that :

$$\|(T_t f)^{(j)}\|_J \leq e^{c_j \frac{t}{J^2}} \sum_{i=1}^j a_{i,j} \|f^{(i)}\|_J \quad (4.10)$$

with $c_j = \sup_{x \in [0,1]} |j(j-1) - Js(1-2x) - Jm|$.

Let us see how to conclude under the assumption that (4.10) is satisfied.

First it exists a continuous (time dependent) function R_j independent of J and a function of ϵ , $K(\epsilon)$ such that :

$$\begin{aligned}\|S_n f - T_n f\|_J &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \|(S_1 - T_1)T_k f\|_J \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{i=1}^2 |\gamma_i^{J,\epsilon}| \|(T_k f)^{(i)}\|_J + K_1(\epsilon) \frac{\sum_{i=1}^4 \|(T_k f)^{(i)}\|_J}{J^4} \right) \\ &\leq \sum_{j=1}^2 |\gamma_j^{J,\epsilon}| \sum_{i=1}^j a_{i,j} \|f^{(i)}\|_J \sum_{k=0}^{n-1} \exp(c_j \frac{k}{J^2}) \\ &\quad + K_1(\epsilon) \frac{\sum_{j=1}^4 \sum_{i=1}^j a_{i,j} \|f^{(i)}\|_J \sum_{k=0}^{n-1} \exp(c_j \frac{k}{J^2})}{J^4} \\ &\leq \sum_{j=1}^2 |\gamma_j^{J,\epsilon}| \times R_j(t) J^2 \times \|f^{(j)}\|_J + K(\epsilon) \frac{\sum_{j=1}^4 \|f^{(j)}\|_J R_j(t)}{J^2} \xrightarrow{J \rightarrow +\infty} 0\end{aligned}$$

because if J is big enough,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^j a_{i,j} \sum_{k=0}^{n-1} \exp(c_j \frac{k}{J^2}) &= \sum_{i=1}^j a_{i,j} \frac{1 - \exp(c_j \frac{n}{J^2})}{1 - \exp(\frac{c_j}{J^2})} \\ &\leq J^2 \frac{\exp(c_j \frac{n}{J^2}) - 1}{c_j} + O\left(\frac{1}{J^2}\right) \end{aligned}$$

and $R_j(t) = \sup_{J \in \mathbb{N}} \frac{\exp(c_j \frac{n}{J^2}) - 1}{c_j}$ is finite because n is of the order of J^2 . So it exists $a, b \in \mathbb{R}$ such as $a(1 - e^{bt}) \geq \sup_{J \in \mathbb{N}} \max_{j \in \{1,2\}} (|\gamma_j^{J,\epsilon}| R_j(t) J^3)$ and $a(1 - e^{bt}) \geq \max_{j \in \{1,\dots,4\}} R_j(t)$.

The conclusion follows :

$$\left\| \mathbb{E}_x \left[f(X_{[tJ^2]}^J) - f(Y_{[tJ^2]}^J) \right] \right\|_J \leq a(e^{bt} - 1) \left(\frac{\|f^{(1)}\|_J + \|f^{(2)}\|_J}{J} + K \frac{\sum_{i=1}^4 \|f^{(i)}\|_J}{J^2} \right)$$

This concludes the proof in the first case. Indeed, we see that the function $R_j(t)$ is exponential in time in the general case.

But we will see later how, when some additional conditions are added on m' and s' , one may obtain a linear in time function.

We will now prove (4.10). It will be done through the following proposition.

Proposition 4.4.7 *Let $\phi(t, x) = (T_t f)(x)$, $x \in I_J$ and $t \geq 0$.*

Assume $f \in C^{j+2}(I)$ then, for fixed t , $\phi(t, \cdot) \in C^{j+2}(I)$ and for $j \in \mathbb{N}$, $\forall k \leq j$, there are c_j and $a_{k,j} \in \mathbb{R}$ independent of J such as

$$\|\phi(t, x)^{(j)}\|_J \leq \exp(c_j \frac{t}{J^2}) \sum_{k=1}^j a_{k,j} \|f^{(k)}\|$$

First remark that Chapman-Kolmogorov backwark equation may be written :

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi = L\phi, \quad \phi(0, \cdot) = f.$$

The following lemma gives the equations verified by $\frac{\partial}{\partial t} \phi^{(j)}$:

Lemma 4.4.8 *Let $\phi^{(j)}$ be the j^{th} derivative of ϕ with respect to x then we get :*

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi^{(j)} = L_j \phi^{(j)} - \nu_j \phi^{(j)} + \psi_j \phi^{(j-1)}, \quad \phi^{(j)}(0, \cdot) = f^{(j)}$$

where

$$\begin{aligned} L_j \phi^{(j)} &= L\phi^{(j)} + j \frac{(1 - 2x)}{J^2} \phi^{(j+1)} \\ \nu_j(x) &= \left(\frac{j(j-1)}{J^2} - j \frac{s(1-2x) - m}{J} \right) \\ \psi_j &= \frac{-sj(j-1)}{J} \end{aligned}$$

4.4. MAIN RESULT

Let us remark that there are two new terms when there is selection in Moran processes, i.e. ψ which will lead to the dependence in time of our estimates handled via the Feynman-Kac formula, and one in ν_j which will be the key to the condition to get only linear dependence in time. A recurrence is sufficient

to prove this result ; for simplicity's sake let us only look at the case $j = 1$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\phi^{(1)} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial t}\phi \right) = \frac{\partial}{\partial x} L\phi \\
&= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x(1-x)}{J^2}\phi^{(2)} + \frac{sx(1-x) + m(p-x)}{J}\phi^{(1)} \right) \\
&= \frac{x(1-x)}{J^2}\phi^{(3)} + \frac{1}{J}(sx(1-x) + m(p-x))\phi^{(2)} + \frac{1-2x}{J^2}\phi^{(2)} \\
&\quad + \frac{(s(1-2x) - m)}{J}\phi^{(1)} \\
&= \left(L + \frac{1-2x}{J^2}\frac{\partial}{\partial x} \right)\phi^{(1)} + \frac{(s(1-2x) - m)}{J}\phi^{(1)} \\
&= L_1\phi^{(1)} + \frac{(s(1-2x) - m)}{J}\phi^{(1)}
\end{aligned}$$

with $L_1\phi^{(1)} = L\phi^{(1)} + \frac{(1-2x)}{J^2}\frac{\partial}{\partial x}\phi^{(1)}$, we find the good initial coefficients. Let us now use the Feynmann-Kacc formula to get,

$$\begin{aligned}
\phi^{(j)}(t, x) &= \mathbb{E}_x \left[f^{(j)}(\tilde{Y}_t^j) \exp \left(- \int_0^t \frac{j(j-1)}{J^2} + \frac{m - s(1 - 2\tilde{Y}_u^j)}{J} du \right) \right. \\
&\quad \left. - \int_0^t \frac{sj(j-1)}{J} \phi^{(j-1)}(\tilde{Y}_h^j) \exp \left(- \int_0^h \frac{j(j-1)}{J^2} + \frac{m - s(1 - 2\tilde{Y}_u^j)}{J} du \right) dh \right]
\end{aligned}$$

with \tilde{Y}_t^j the process having L_j for generator. Then look first in $j = 1$. As we are in regime of weak selection and weak immigration,

$$\begin{aligned}
\|\phi^{(1)}(x, t)\|_J &\leq \mathbb{E}_x \left[\|f^{(1)}(\tilde{Y}_t^J)\| \exp \left(\frac{t}{J^2} \sup_{x \in [0,1]} J(m - s(1 - 2x)) \right) \right] \\
&\leq \|f^{(1)}\|_J \exp \left(\frac{t}{J^2} \lambda_1 \right)
\end{aligned}$$

where $\lambda_1 = \sup_{x \in [0,1]} J(m - s(1 - 2x)) = m' + |s'|$ is independent of J . The case $j = 1$ is proved.

We will then prove the result by recurrence : we suppose true this hypothesis until $j - 1$.

For $j > 1$, denote $c_j = \sup_{x \in [0,1]} |J^2 \nu_j(x)|$, and remark that c_j is no equal to zero

and is independent of J because the selection and immigration are weak. Thus

$$\begin{aligned}
 \left\| \phi^{(j)}(t, x) \right\|_J &\leq \mathbb{E}_x \left[\left\| f^{(j)}(\tilde{Y}_t^j) \right\| e^{c_j \frac{t}{J^2}} + \int_0^t \frac{sj(j-1)}{J} \left\| \phi^{(j-1)}(\tilde{Y}_h^j) \right\|_J e^{c_j \frac{h}{J^2}} dh \right] \\
 &\leq \left\| f^{(j)} \right\|_J e^{c_j \frac{t}{J^2}} + \frac{sj(j-1)}{J} \left\| \phi^{(j-1)} \right\|_J \int_0^t e^{\frac{c_j h}{J^2}} dh \\
 &\leq \left\| f^{(j)} \right\|_J e^{c_j \frac{t}{J^2}} \\
 &\quad + \exp\left(c_{j-1} \frac{t}{J^2}\right) \sum_{k=1}^{j-1} a_{k,j-1} \left\| f^{(k)} \right\|_J \frac{Jsj(j-1)}{c_j} \left(\exp c_{j-1} \frac{t}{J^2} - 1 \right) \\
 &\leq e^{c_j \frac{t}{J^2}} \left(\left\| f^{(j)}(x) \right\|_J + e^{c_{j-1} \frac{t}{J^2}} \sum_{k=1}^{j-1} a_{k,j-1} \left\| f^{(k)} \right\|_J \frac{Jsj(j-1)}{c_j} \right) \\
 &\leq e^{\frac{tc_j}{J^2}} \left(\sum_{k=1}^j a_{k,j} \left\| f^{(k)} \right\|_J \right)
 \end{aligned}$$

The $a_{k,j}$ do not depend on J , because $\frac{Jsj(j-1)}{c_j}$, the $a_{k,j-1}$ and $\exp(\lambda_j \frac{t}{J^2})$ can be bounded independently of J .

To conclude we have to justify that c_j is finite for all j . For it we just need to note that the processes \tilde{Y}_t^j are bounded by 0 and 1 for all j .

This is partly due to the fact that their generator $L_j \phi^{(j)}(x) = L\phi^{(j)} + j \frac{1-2x}{J^2} \phi^{(j+1)}$ has a negative drift at the neighbourhood of 1 and a positive in the neighbourhood of 0 and the diffusion vanish at these points, see Feller [18].

This argument completes the proof. Let us now consider the case where $m > |s|$, we show in this case that we obtain a linear in time dependance rather than an exponential one. Then in the equation (4.10) we can use the following :

$$\begin{aligned}
 \left\| \phi^{(1)}(\cdot, t) \right\|_J &\leq \left\| f^{(1)} \right\|_J \exp\left(-\frac{t}{J^2} \lambda_1\right) \\
 \left\| \phi^{(2)}(\cdot, t) \right\|_J &\leq c_1 \left(\left\| f^{(1)} \right\|_J + \left\| f^{(2)} \right\|_J \right)
 \end{aligned}$$

where c_1 is a constant independent of time. And then,

$$\begin{aligned}
 \left\| S_n f - T_n f \right\|_J &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left\| (S_1 - T_1) T_k f \right\|_J \\
 &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left(|\gamma_1^{J,\epsilon}| \left\| (T_k f)^{(1)} \right\|_J + |\gamma_2^{J,\epsilon}| \left\| (T_k f)^{(2)} \right\|_J + O\left(\frac{1}{J^4}\right) \right) \\
 &\leq |\gamma_1^{J,\epsilon}| \sum_{k=0}^{n-1} \exp\left(-\frac{k}{J^2} \times \lambda_1\right) \left\| f^{(1)} \right\|_J + |\gamma_2^{J,\epsilon}| c_1 \left(\left\| f^{(1)} \right\|_J + \left\| f^{(2)} \right\|_J \right) n \\
 &\quad + O\left(\frac{1}{J^2}\right) \\
 &\leq \max(|\gamma_1^{J,\epsilon}|, |\gamma_2^{J,\epsilon}|) \times J^2 c(t+1) \left(\left\| f^{(1)} \right\|_J + \left\| f^{(2)} \right\|_J \right) + O\left(\frac{1}{J^2}\right)
 \end{aligned}$$

because if J is big enough,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \exp\left(-\frac{k}{J^2} \times \lambda_1\right) = \frac{1 - \exp\left(-\frac{n}{J^2} \times \lambda_1\right)}{1 - \exp\left(-\frac{\lambda_1}{J^2}\right)} \leq c_2 J^2$$

and $c = \max(c_1, c_2)$ is independent of J and independent of time.

4.5 Random limiting selection as a pure jump process

To simplify, we will consider a constant immigration, in order to see where the main difficulty arises. The results would readily apply also to this case. Let us now assume that s is no longer a constant but a Markovian jump process $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ with homogeneous transition probability $(P_{s,s'}^J)$. We are in the weak selection case so s_n is still of the order of $\frac{1}{J}$ and takes values in a finite space E_s , having the cardinality K .

Assume furthermore it exists a transition matrix $Q \in M_K(\mathbb{R})$ such as

$$P_{s,s'}^J \times J^2 \xrightarrow{J \rightarrow +\infty} \alpha_s Q_{s,s'} \quad \forall s \neq s' \quad (4.11)$$

As in the previous section, $(X_n^J)_{n \in \mathbb{N}}$ is the Moran process, but with Markovian selection and $(X_n^J)_{n \in \mathbb{N}}$ takes values in I_J . Finally denote $W_n^J = (X_n^J, s_n)$. Consider now the processes \tilde{W}_t^J taking values in $I = [0, 1] \times E_s$ defined by the following generator :

$$\begin{aligned} L_{x,s} f(x, s) &= \frac{x(1-x)}{J^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, s) + \frac{1}{J} \left[sx(1-x) + m(p-x) \right] \frac{\partial}{\partial x} f(x, s) \\ &+ \sum_{s' \in E_s} \frac{\alpha(s) Q_{s,s'}}{J^2} (f(x, s') - f(x, s)) \quad \forall f \in C^2(I) \end{aligned}$$

Its first coordinate is the process Y_t^J having the same generator as in the first part and the second is \tilde{s}_t the Markovian jump process having $(Q_{s,s'})_{s,s' \in E_s}$ for generator and $\frac{\alpha}{J^2}$ for transition rates.

As in the previous part we want to quantify the convergence of $(\tilde{W}_n^J)_{n \in \mathbb{N}}$ towards $(W_n^J)_{n \in \mathbb{N}}$ in law, when J goes to infinity. We now write $f^{(j)}$ for the j^{th} derivative of x of f . And let denote in this section, for $f : I_J \times E_s \rightarrow \mathbb{R}$, $\|f\|_J = \sup_{x \in I_J \times E_s} |f(x, s)|$. Moreover $T_t f(x, s) = \mathbb{E}_x[f(\tilde{W}_t^J)]$ and $S_n f(x, s) = \mathbb{E}_x[f(W_t^J)]$.

Théorème 4.5.1 *Assume $\forall s$ and $\forall f \in C^2(I)$, $T_t f(\cdot, s)$ is in $C^2(I)$. Let f such as $\forall s, f(\cdot, s) \in C^4(I)$ then it exists $a, b \in \mathbb{R}$ and a function k_0 linear*

in time (t) which verifies when J goes to infinity :

$$\begin{aligned} \left\| \mathbb{E}_x \left[f(W_t^J) - f(\tilde{W}_t^J) \right] \right\|_J &\leq \frac{a(e^{bt} - 1)}{J} \left(\|f^{(1)}\|_J + \|f^{(2)}\|_J \right) \\ &\quad + k_0 \max_{s,s' \in \mathcal{E}_s} \left| J^2 P_{s,s'} - \alpha_s Q_{s,s'} \right| \|f\|_J \\ &\quad + \frac{a(e^{bt} - 1)}{J^2} \sum_{i=1}^4 \|f^{(i)}\|_J. \end{aligned}$$

The theorem shows the balance between the approximation of the Moran process and the random selection process. The structure of proof is the same as for constant selection. Let us focus on the lemma, where some changes have to be highlighted.

Lemma 4.5.2 *There exists bounded functions of (x, s) , Γ_j^J ($j = 1, 2$) of the order of $\frac{1}{J^3}$, and a constant K' such that :*

$$\begin{aligned} \|(S_1 - T_1)f\|_J &\leq |\Gamma_1^J| \|f^{(1)}\|_J + |\Gamma_2^J| \|f^{(2)}\|_J \\ &\quad + \sum_{s' \in \mathcal{E}_s} \left| P_{s,s'}^J - \frac{\alpha_s}{J^2} Q_{s,s'} \right| \|f(x, s) - f(x, s')\|_J + \frac{K' \sum_{i=1}^4 \|f^{(i)}\|_J}{J^4} \end{aligned}$$

We provide first the equivalent of (4.1) in our context, i.e. there exists $|w'_2| < 1$ such that :

$$\begin{aligned} (S_1 - T_1)f(x, s) &= \mathbb{E}_{x,s} \left[f(X_1^J, s_1) \right] - f(x, s) - L_{x,s} f(x, s) + w'_2 L_{x,s}^2 f(x, s) \\ &= \mathbb{E}_{x,s} \left[f(X_1^J, s_1) - f(X_1^J, s) \right] + \mathbb{E}_x \left[f(X_1^J, s) - f(x, s) \right] \\ &\quad - L_x f(x, s) - \sum_{s' \in \mathcal{E}_s} \frac{\alpha_s}{J^2} Q_{s,s'} (f(x, s') - f(x, s)) \\ &\quad + w'_2 L_{x,s}^2 f(x, s) \end{aligned}$$

Note that $L_{x,s}^2 f$ is still of the order of $\frac{1}{J^4}$, then

$$\begin{aligned}
 |(S_1 - T_1)f(x, s)| &\leq \left| \mathbb{E}_x \left[\mathbb{E}_s [f(x_1, s_1) - f(x_1, s) | X_1^J = x_1] \right] - L_x f(x, s) \right. \\
 &\quad \left. + \mathbb{E}_x [f(X_1^J, s) - f(x, s)] - \sum_{s' \in \mathcal{E}_s} \frac{\alpha_s}{J^2} Q_{s,s'} (f(x, s') - f(x, s)) \right| \\
 &\quad + \frac{K \sum_{i=1}^4 \|f^{(i)}\|_J}{J^4} \\
 &\leq \left| \mathbb{E}_x \left[\sum_{s' \in \mathcal{E}_s} P_{s,s'} (f(X_1^J, s') - f(X_1^J, s)) - \frac{\alpha_s}{J^2} Q_{s,s'} (f(x, s') - f(x, s)) \right] \right. \\
 &\quad \left. + \mathbb{E}_x [f(X_1^J, s) - f(x, s)] - L_x f(x, s) \right| + \frac{K \sum_{i=1}^4 \|f^{(i)}\|_J}{J^4} \\
 &\leq \left| \mathbb{E}_x \left[\sum_{s' \in \mathcal{E}_s} P_{s,s'} (f(X_1^J, s') - f(x, s')) + f(x, s') \left(P_{s,s'} - \frac{\alpha_s}{J^2} Q_{s,s'} \right) \right] \right| \\
 &\quad + \left| -P_{s,s'} f(X_1^J, s) + \frac{\alpha_s}{J^2} Q_{s,s'} f(x, s) \right| \\
 &\quad + \left| \mathbb{E}_x [f(X_1^J, s) - f(x, s)] - L_x f(x, s) \right| + \frac{K \sum_{i=1}^4 \|f^{(i)}\|_J}{J^4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 |(S_1 - T_1)f(x, s)| &\leq \left| \mathbb{E}_x [f(X_1^J, s) - f(x, s)] - L_x f(x, s) \right| \\
 &\quad + \left| \sum_{s' \in \mathcal{E}_s} P_{s,s'} (\mathbb{E}_x [f(X_1^J, s') - f(x, s')] + \mathbb{E}_x [f(x, s) - f(X_1^J, s)]) \right| \\
 &\quad + \sum_{s' \in \mathcal{E}_s} \left| P_{s,s'} - \frac{\alpha_s}{J^2} Q_{s,s'} \right| \|f(x, s') - f(x, s)\|_J \\
 &\quad + \frac{K \sum_{i=1}^4 \|f^{(i)}\|_J}{J^4}
 \end{aligned}$$

Let now look at the order in J of each term of the previous inequality.

First with the arguments used in (4.9), there exists K_1 constant, Γ_1^J and Γ_2^J of the order of $\frac{1}{J^3}$ such as :

$$\left| \mathbb{E}_x [f(X_1^J, s) - f(x, s)] - L_x f(x, s) \right| \leq |\Gamma_1^J| \|f^{(1)}\|_J + |\Gamma_2^J| \|f^{(2)}\|_J + \frac{K_1}{J^4}.$$

Then recall that $P_{s,s'}$ is of the order of $\frac{1}{J^2}$ and by the same calculations than in (4.4), $|\mathbb{E}_x [f(X_1^J, s') - f(x, s')]|$ is also of the order of $\frac{1}{J^2}$ so (3.13) is at most of the order of $\frac{1}{J^4}$.

Finally (14) can be written

$$\sum_{s' \in \mathcal{E}_s} \frac{1}{J^2} \left| J^2 P_{s,s'} - \alpha_s Q_{s,s'} \right| \|f(x, s') - f(x, s)\|_J$$

and by (4.11) is at least $o(\frac{1}{J^3})$.

Note, if f is Lipschitz in the second variable, since s is of the order of $\frac{1}{J}$, it is

possible to obtain a better order, $o(\frac{1}{J^3})$.
 Anyway,

$$\begin{aligned} |(S_1 - T_1)f(x, s)| &\leq |\Gamma_1^J| \|f^{(1)}\|_J + |\Gamma_2^J| \|f^{(2)}\|_J \\ &\quad + \sum_{s' \in E_s} \frac{1}{J^2} \left| J^2 P_{s, s'} - \alpha_s Q_{s, s'} \right| \|f(x, s') - f(x, s)\|_J + \frac{K'}{J^4} \end{aligned}$$

Note that the Lemma 2 holds even if s is no longer constant. Indeed L_s is not affected by the derivative in x . So we get $\forall j \in \{1, 2\}$ and $\forall k \leq j$, that there exist c'_j and $a'_{k, j} \in \mathbb{R}^+$ independent of J such that :

$$\|(T_t f)^{(j)}\|_J \leq \exp\left(c'_j \frac{t}{J^2}\right) \sum_{k=1}^j a'_{k, j} \|f^{(j)}\|_J$$

with $c'_j = \sup_{x \in [0, 1]} |j(j-1) - Js(1-2x) - Jm|$.

We still have $T_t(\cdot, s) : C^2(I) \rightarrow C^2(I)$, $\forall s$. And then, there exists a continuous function R_j at most exponential in time and linear function of time k_0 independent of J verifying :

$$\begin{aligned} \|S_n f - T_n f\|_J &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \|(S_1 - T_1)T_k f\|_J \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left[|\Gamma_1^J| \|(T_k f)^{(1)}\|_J + |\Gamma_2^J| \|(T_k f)^{(2)}\|_J \right. \\ &\quad \left. + \sum_{s' \in E_s} \frac{1}{J^2} \left| J^2 P_{s, s'} - \alpha_s Q_{s, s'} \right| \|T_k f(x, s') - T_k f(x, s)\|_J + O\left(\frac{1}{J^4}\right) \right] \\ &\leq \sum_{j=1}^2 |\Gamma_j^J| \sum_{k=1}^j a'_{k, j} \|f^{(j)}\|_J \sum_{k=0}^{n-1} \exp\left(c'_j \frac{k}{J^2}\right) + O\left(\frac{1}{J^4}\right) \\ &\quad + k_0 \max_{s, s' \in E_s} \left| J^2 P_{s, s'} - \alpha_s Q_{s, s'} \right| \|f\|_J \\ &\leq \sum_{j=1}^2 |\Gamma_j^J| R_j(t) J^2 \|f^{(j)}\|_J + k_0 \max_{s, s' \in E_s} \left| J^2 P_{s, s'} - \alpha_s Q_{s, s'} \right| \|f\|_J \\ &\quad + O\left(\frac{1}{J^4}\right) \xrightarrow{J \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

because if J is big enough,

$$\sum_{k=1}^j a'_{k, j} \sum_{k=0}^{n-1} \exp\left(c'_j \frac{k}{J^2}\right) = \sum_{k=1}^j a'_{k, j} \frac{1 - \exp\left(c'_j \frac{n}{J^2}\right)}{1 - \exp\left(\frac{c'_j}{J^2}\right)} \leq J^2 R_j(t)$$

and $R_j(t)$ is finite and independent of J , because $n = [J^2 t]$ is of the order of J^2 . Finally, it exists $a, b \in \mathbb{R}$ such as $a(e^{bt} - 1) = \sup_{J \in \mathbb{N}} (\max_{j \in \{1, 2\}} |\Gamma_j^J| R_j(t) J^3)$.

Then

$$\begin{aligned} \|S_n f - T_n f\|_J &\leq \frac{a(e^{bt} - 1)}{J} (\|f^{(1)}\|_J + \|f^{(2)}\|_J) \\ &\quad + k_0 \max_{s, s' \in E_s} \left| J^2 P_{s, s'} - \alpha_s Q_{s, s'} \right| \|f\|_J + O\left(\frac{1}{J^2}\right) \end{aligned}$$

And this concludes the proof.

4.6 Random limiting selection as a diffusion process

In this section, we assume that the limiting selection is an homogeneous diffusion process. Once again for simplicity we will suppose that the immigration coefficient is constant. First consider the following stochastic differential equation :

$$\begin{aligned} dS_t^J &= \frac{1}{J^2} b(S_t^J) dt + \frac{\sqrt{2}}{J} \sigma(S_t^J) dB_t \\ S_0^J &= s \end{aligned}$$

with b and σ are both bounded and lipschitzian functions, i.e. : $\forall t \geq 0, s, s' \in \mathbb{R}$, it exists $k \geq 0$ such that :

$$|b(s) - b(s')| + |\sigma(s) - \sigma(s')| \leq k|s - s'|$$

These assumptions guarantee the existence of strong solutions of $(S_t^J)_{t \geq 0}$ and $(S_t^J)_{t \geq 0}$ has for generator :

$$L_s^J = \frac{\sigma^2(s)}{J^2} \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{b(s)}{J^2} \frac{\partial}{\partial s}$$

Let $\tilde{S}_t = S_{tJ^2}^J$, then the process $(\tilde{S}_t)_{t \geq 0}$ is independent of J .

$$\begin{aligned} d\tilde{S}_t &= b(\tilde{S}_t) dt + \sqrt{2} \sigma(\tilde{S}_t) dB_t \\ \tilde{S}_0 &= s \end{aligned}$$

Let is $T \in \mathbb{N}$, use now the standard Euler discretization and consider $(U_n^J)_{n < J^2 T}$ defined by the relation :

$$U_{k+1}^J = U_k^J + \frac{1}{J^2} B(U_k^J) + \sqrt{2} \sigma(U_k^J) (B_{k+1}^J - B_k^J)$$

where the quantity $(B_{k+1}^J - B_k^J)_{k \leq J^2 T}$ are IID and follow a $\mathcal{N}(0, \frac{1}{J^2})$.

It is of course possible to use another discretization to approach $S_{[t]}^J$ and the follow method will still hold. There is however a small issue : in the model described in first part, for rescaling argument, the selection parameters must

be in $] - 1, +\infty[$. Our Markov process $(\mathcal{S}_t^J)_{t \geq 0}$ is in \mathbb{R} .

It is thus necessary to introduce the function $h : \mathbb{R} \rightarrow E_s$ where E_s is a close bounded interval included in $] - 1 + \varepsilon, +\infty[$ for some $\varepsilon > 0$.

We assume h is in C^2 and is of the order $\frac{1}{J}$, so let $\tilde{h} = \frac{h}{J}$. We consider now $(h(\mathcal{S}_t))_{t \geq 0}$ for the selection parameter.

Let denote in this section, for $f : I_J \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\|f\|_J = \sup_{(x,s) \in I_J \times \mathbb{R}} |f(x,s)|$.

Note that to have a non trivial stochastic part in our final equation, we need as in the first section that h is of the order of $\frac{1}{J}$. Many choices are possible for h and will depend on modelisation issue.

Let us give back the definition of our Moran process in this context.

$$P_{x^+} = (1-x) \left(mp + (1-m) \frac{x(1+h(s))}{1+h(s)x} \right)$$

$$P_{x^-} = x \left(m(1-p) + (1-m) \left(1 - \frac{x(1+h(s))}{1+h(s)x} \right) \right)$$

Its first moments are given by, still denoting $\Delta = \frac{1}{J}$,

$$\mathbb{E}_x \left[X_{n+1}^J - x | X_n^J = x, U_n^J = s \right] = \Delta \left[m(p-x) + \frac{(1-m)h(s)x(1-x)}{1+h(s)x} \right]$$

$$\text{Var} \left(X_{n+1}^J - x | X_n^J = x, U_n^J = s \right) = \Delta^2 \left[\frac{(1-m)h(s)x(1-x)(1-2x)}{1+h(s)x} \right. \\ \left. + mp(1-2x) + x - \left(m(p-x) + \frac{(1-m)h(s)x(1-x)}{1+h(s)x} \right)^2 \right]$$

As in the previous case we use the process $(Y_t^J)_{t \geq 0}$ having the following generator to approach the Moran process when J tends to infinity :

$$L_x^J f(x,s) = \frac{x(1-x)}{J^2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,s) + \frac{1}{J} [m(p-x) + h(s)x(1-x)] \frac{\partial f}{\partial x}(x,s)$$

So our aim is to give an upper bound for the error done when

$$(X_n^J, U_n^J) \xrightarrow{J \rightarrow \infty} (Y_n^J, \mathcal{S}_n^J)$$

Let denote by H the generator of the two dimensional process (Y_n^J, \mathcal{S}_n^J) .

$$H = L_x^J + L_s^J \\ = \frac{x(1-x)}{J^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{J} [m(p-x) + h(s)x(1-x)] \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\sigma^2(s)}{J^2} \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{b(s)}{J^2} \frac{\partial}{\partial s}$$

Let now state the main result of this section :

Théorème 4.6.1 *Let f be in C^4 then there exists $a, b \in \mathbb{R}^+$ such that*

$$\| \mathbb{E}_{x,s} \left(f(X_{[tJ^2]}^J, Z_{[tJ^2]}^J) - f(Y_{[tJ^2]}^J, \mathcal{S}_{[tJ^2]}^J) \right) \|_J \leq \frac{a(e^{bt} - 1)}{J} (\|\nabla f\|_J + \|Hess f\|_J) \\ + \frac{a(e^{bt} - 1)}{J^2} (\|f^{(3)}\|_J + \|f^{(4)}\|_J)$$

Let P_n be the operator defined on the space of bounded functions on E by :

$$(P_n f)(x, s) = \mathbb{E}_{x,s} \left[f(X_n^J, U_n^J) \right]$$

It is of course a semigroup so that $P_{n+m} = P_n P_m$, $\forall m, n \in \mathbb{N}$. In parallel, let $(T_t)_{t \geq 0}$ be defined on the space of bounded continuous functions by :

$$(T_t f)(x, s) = \mathbb{E}_{x,s} \left[f(Y_t^J, S_t^J) \right]$$

also verifying $T_{t+s} = T_t T_s, \forall s \geq 0, t \geq 0$. The starting point is as in the first part of (4.1),

$$\left| P_n f(x, s) - T_n f(x, s) \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \|(P_1 - T_1) T_k f\|_J$$

We have focus on the quantity $\|(P_1 - T_1) T_k f\|_J$, the following lemma gives a upper bound of the quantity $\|(P_1 - T_1) f\|_J$ for f in C^4 .

Lemma 4.6.2 *Let f in C^4 it exists γ_1^J and γ_2^J such as :*

$$\|(P_1 f)(x, s) - (T_1 f)(x, s)\|_J = |\gamma_1^J| \left\| \frac{\partial}{\partial x} f(x, s) \right\|_J + |\gamma_2^J| \left\| \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, s) \right\|_J + O\left(\frac{1}{J^4}\right)$$

where γ_1^J and γ_2^J are of the order $\frac{1}{J^3}$

We will use the same methodology than before. First the Taylor expansion (in space) of P_1 gives :

$$\begin{aligned} (P_1 f)(x, s) &= f(x, s) + \mathbb{E}_{x,s} \left[X_1^J - x \right] \frac{\partial}{\partial x} f(x, s) + \mathbb{E}_{x,s} \left[U_1^J - s \right] \frac{\partial}{\partial s} f(x, s) \\ &\quad + \frac{1}{2} \mathbb{E}_{x,s} \left[(X_1^J - x)^2 \right] \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, s) + \frac{1}{2} \mathbb{E}_{x,s} \left[(U_1^J - s)^2 \right] \frac{\partial^2}{\partial s^2} f(x, s) \\ &\quad + 2 \mathbb{E}_{x,s} \left[(X_1^J - x)(U_1^J - s) \right] \frac{\partial^2}{\partial x \partial s} f(x, s) + O\left(\frac{1}{J^4}\right) \end{aligned}$$

Indeed we have the quantities :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{x,s} \left[X_1^J - x \right] &= \frac{1}{J} \left[m(p - x) + \frac{(1 - m)h(s)x(1 - x)}{1 + h(s)x} \right] \\ \mathbb{E}_{x,s} \left[(X_1^J - x)^2 \right] &= \frac{1}{J^2} \left[mp(1 - 2x) + x + \frac{(1 - m)x(1 + h(s))(1 - 2x)}{1 + h(s)x} \right] \\ \mathbb{E}_{x,s} \left[U_1^J - s \right] &= \frac{b(s)}{J^2} \\ \mathbb{E}_{x,s} \left[(U_1^J - s)^2 \right] &= \frac{b^2(s)}{J^4} + \frac{2\sigma^2(s)}{J^2} = \frac{2\sigma^2(s)}{J^2} + O\left(\frac{1}{J^4}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}_{x,s} \left[(X_1^J - x)(U_1^J - s) \right] &= \mathbb{E}_{x,s} \left[X_1^J - x \right] \mathbb{E}_{x,s} \left[U_1^J - s \right] \\
 &= \frac{b(s)}{J^3} \left[m(p - x) + \frac{(1 - m)x(1 + h(s))(1 - 2x)}{1 + h(s)x} \right] \\
 &= O\left(\frac{1}{J^4}\right) \\
 \mathbb{E}_{x,s} \left[(X_1^J - x)^3 \right] &= O\left(\frac{1}{J^4}\right) \\
 \mathbb{E}_{x,s} \left[(U_1^J - s)^3 \right] &= O\left(\frac{1}{J^4}\right)
 \end{aligned}$$

And the Taylor expansion of T_1 in times gives :

$$(T_1 f)(x, s) = f(x, s) + L_x^J f(x, s) + L_s^J f(x, s) + O\left(\frac{1}{J^4}\right)$$

Indeed it is easy to see that H^2 is $O\left(\frac{1}{J^4}\right)$. Do now the difference

$$\begin{aligned}
 (P_1 - T_1)f(x, s) &= \mathbb{E}_{x,s} \left[X_1^J - x \right] \frac{\partial}{\partial x} f(x, s) + \mathbb{E}_{x,s} \left[U_1^J - s \right] \frac{\partial}{\partial s} f(x, s) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \mathbb{E}_{x,s} \left[(X_1^J - x)^2 \right] \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, s) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \mathbb{E}_{x,s} \left[(U_1^J - s)^2 \right] \frac{\partial^2}{\partial s^2} f(x, s) \\
 &\quad - L_x^J f(x, s) - L_s^J f(x, s) + O\left(\frac{1}{J^4}\right)
 \end{aligned}$$

Finally

$$\begin{aligned}
 (P_1 - T_1)f(x, s) &= -\frac{1}{J} \left[\frac{h(s)x(1-x)(m+h(s)x)}{1+h(s)x} \right] \frac{\partial}{\partial x} f(x, s) \\
 &\quad + \frac{h(s)x^2 + x(1-2x)(h(s)-m-mh(s)) - 2x(1-x)h(s)}{1+h(s)x} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, s) \\
 &\quad + \frac{b^2(s)}{J^4} \frac{\partial^2}{\partial s^2} f(x, s) + O\left(\frac{1}{J^4}\right)
 \end{aligned}$$

Let us conclude by taking the norm to get

$$\begin{aligned}
 \gamma_1^J &= \sup_{(x,s) \in \mathbf{E}_s \times [0,1]} \frac{1}{J} \left| \frac{h(s)x(1-x)(m+h(s)x)}{1+h(s)x} \right| \\
 \gamma_2^J &= \sup_{(x,s) \in \mathbf{E}_s \times [0,1]} \frac{1}{2J^2} \left| mp(1-2x) + \frac{(1-m)(1+h(s))x(1-2x)}{1+h(s)x} - x(1-2x) \right|
 \end{aligned}$$

so that we obtain the result. Then (4.11) still holds for this case as the proof of the proposition (4.4.7) is exactly the same, so the end follows as in the first part.

4.7 Wright-Fisher discrete model and its approximation diffusion

Let consider the Wright-Fisher discrete model with selection and immigration. The population still consists of two species, immigration and selection are still the same. But the Markovian process X_n^J evolves according to the following probability :

$$\mathbb{P}\left(X_{n+1}^J = \frac{k}{J} \mid X_n^J = x\right) = \binom{J}{k} P_x^k (1 - P_x)^{J-k}$$

with $P_x = mp + (1 - m) \frac{(1+s)x}{1+sx}$

At each step, all the population is renewed, so this process goes J times faster than the Moran process. And we usually, in the case of weak selection and immigration, use the diffusion $(Y_t)_{t>0}$ defined by the following generator to approach this discrete model, when the population goes to infinity.

$$L = \frac{x(1-x)}{2J} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (sx(1-x) + m(p-x)) \frac{\partial}{\partial x}$$

Théorème 4.7.1 *Let f be in $C^5(I)$ then there exists $a, b \in \mathbb{R}^+$, depending on m' and s' (but not on f), and a constant K which satisfy when J goes to infinity :*

$$\left\| \mathbb{E}_x \left[f(X_n^J) \right] - \mathbb{E}_x \left[f(Y_n^J) \right] \right\|_J \leq a(e^{bt} - 1) \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\|f^{(i)}\|_J}{J} + K \frac{\sum_{i=1}^5 \|f^{(i)}\|_J}{J^2} \right)$$

Even if the structure of the proof is the same as for the Moran model, however the difference of the scale (in $\frac{1}{J}$ now) causes some small differences. Mainly, the calculation of the $\{\gamma_j\}_{j \in \{1,2,3,4\}}$ is a bit different. Note that we need to have $f \in C^5$ in the previous theorem, which is stronger than for the Moran process. The main explanation comes from the calculation of $\mathbb{E}[(X_{n+1}^J - x)^k \mid X_n^J = x]$, for which for the Wright- Fisher discrete process it is no longer of the order of $\frac{1}{J^k}$. Let us give some details.

First consider the moments $\{\mathbb{E}[(X_{n+1}^J - x)^k | X_n^J = x]\}_{k \leq 5}$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_{n+1}^J - x | X_n^J = x] &= m(p - x) + \frac{sx(1 - x)}{1 + sx} \\ \mathbb{E}[(X_{n+1}^J - x)^2 | X_n^J = x] &= \frac{x(1 - x)}{J} + \frac{1}{J} \left(m(p - x) + \frac{sx(1 - x)}{1 + sx} \right) \\ &\quad + \left(m(p - x) + \frac{sx(1 - x)}{1 + sx} \right)^2 + O\left(\frac{1}{J^3}\right) \\ \mathbb{E}[(X_{n+1}^J - x)^3 | X_n^J = x] &= \frac{x(x - 1)(2x - 1)}{J^2} \\ &\quad - \frac{3x(x - 1)(m(p - x) + sx(1 - x))}{J} + O\left(\frac{1}{J^3}\right) \\ \mathbb{E}[(X_{n+1}^J - x)^4 | X_n^J = x] &= \frac{3x^2(1 - x)^2}{J^2} + O\left(\frac{1}{J^3}\right) \\ \mathbb{E}[(X_{n+1}^J - x)^5 | X_n^J = x] &= O\left(\frac{1}{J^3}\right) \end{aligned}$$

To get a quantity of the order of $\frac{1}{J^3}$ we need to go the fifth moment of $X_{n+1}^J - x$, so in the Taylor development we need to have f in C^5 . Then,

$$\begin{aligned} L^1 f(x) &= \frac{x(1 - x)}{2J} f^{(2)}(x) + (sx(1 - x) + m(p - x)) f^{(1)}(x) \\ L^2 f(x) &= \frac{(x(1 - x))^2}{4J^2} f^{(4)}(x) \\ &\quad + \left[\frac{2(1 - 2x)x(1 - x)}{4J^2} + \frac{2x(1 - x)(sx(1 - x) + m(p - x))}{2J} \right] f^{(3)}(x) \\ &\quad + \left[\frac{-2x(1 - x)}{4J^2} + \right. \\ &\quad + \frac{2x(1 - x)(s(1 - 2x) - m) + (1 - 2x)(sx(1 - x) + m(p - x))}{2J} \\ &\quad \left. + \frac{(sx(1 - x) + m(p - x))^2}{4J^2} \right] f^{(2)}(x) \\ &\quad + \left[\frac{-2x(1 - x)}{2J} \right. \\ &\quad \left. + (sx(1 - x) - m)(sx(1 - x) + m(p - x)) \right] f^{(1)}(x) \\ L^3 f(x) &= O\left(\frac{1}{J^3}\right) \end{aligned}$$

We are now able to give the expression of the $\{\gamma_j\}_{j \in \{1, 2, 3, 4\}}$, as in the *Lemma 1*.

Lemma 4.7.2 *It exists bounded functions of x , $\{\gamma_j\}_{j \in \{1, 2, 3, 4\}}$ such as when J is big enough,*

$$\|(S_1 - T_1)f\|_J \leq |\gamma_1^J| \|f^{(1)}\|_J + |\gamma_2^J| \|f^{(2)}\|_J + |\gamma_3^J| \|f^{(3)}\|_J + \frac{K_1}{J^3}$$

where for $i = 1, \dots, 3, |\gamma_i^J|$ is of the order of $\frac{1}{J^2}$

The proof of this lemma is exactly the same as *Lemma 1*. Just the calculations are a little bit more tedious :

$$\begin{aligned}\gamma_1^J &= \frac{-sx(1-x)}{J} + ((s(1-2x) - m)(sx(1-x) + m(p-x))) \\ \gamma_2^J &= \frac{-x(1-x)}{4J^2} + \frac{sx(6x^2 - 7x + 1) + m(4x^2 - 2xp - x - p)}{4J} + O\left(\frac{1}{J^3}\right) \\ \gamma_3^J &= \frac{x(x-1)(2x-1)}{12J^2} + O\left(\frac{1}{J^3}\right) \\ \gamma_3^J &= O\left(\frac{1}{J^3}\right)\end{aligned}$$

The end of the proof follow exactly the same pattern. So the Wright-Fisher dynamics causes harder calculations than the Moran model but the spirit of the proof is the same. All the methods studied in this paper can be adapted in order to treat the Wright- Fisher model.

Acknowledgments.

We deeply thank two anonymous referees, the associate editor and editor or all their comments, recommandations and corrections. It greatly improved the presentation of the paper. This work has been (partially) supported by the Project EFI ANR-17-CE40-0030 of the French National Research Agency.

Chapitre 5

Uniform Quantitative approximation of the discrete Moran process by a Wright-Fisher diffusion

Authors : *Gorgui Gackou , Arnaud Personne*

5.1 Abstract

The purpose of this article is to give an uniform time estimation of the error committed when the discrete Moran process is approximated by a Wright-Fisher diffusion. The Moran process and its homologous the Wright-Fisher process are the most popular models in population genetics. They are used for modelling the dynamics of a population. Mainly inspired by the work of Gackou & AL [39], we give here a uniform estimation of the error when the parameters of selection are strictly greater than those of immigration. with help of the transportation-informations inequalities developed by Guillin & AL [42], we get a sharp constant to control the limiting process.

keywords : Moran process, Wright-Fisher diffusion, Transportation-Information inequalities.

5.2 Introduction

Population dynamics is the area of science which tries to explain in a simple mechanistic way the times variations of the size and composition of biological populations. Since some models are more complicated, therefore a useful technique developed by Fisher and Wright is in force. This technique is called the diffusion approximation. More precisely, it is a technique in which a complicated and intractable discrete Markovian process is replaced by an appropriate diffusion which is generally easy to study. This technique is used in many domains and the population dynamics is not an exception. So in this

domain, there is two two main models which are used to describe the evolution of a population having a constant size and subject to immigration and selection. These models are the Moran and Wright-Fisher models see ([38],[37],[54]). Many applications of such diffusion approximations have been studied. Stroock and Varadhan [62] have provided an elementary criteria of the convergence discrete or continuous Markov chain to a diffusion when the martingale problem is well-posed. Feller [36] had provided a result which check that the martingale problem is well-posed for the Wright-Fisher diffusion. Guillin & AL [48] have introduced an efficient approximation procedure for the Wright-Fisher diffusion. Hence this method ensures the convergence of discrete process toward a diffusion, but it does not be quantitative.

Whenever, based on the Wright-Fisher model, Ethier and Norman [32] gave an estimation of the error for the diffusion approximation. They have just considered the Wright-Fisher model with immigration. Instead of the Wright-Fisher model, Gackou & AL in [39] considered the Moran process with selection and immigration. Since our main purpose is to get an estimation of the error, we consider the approach developed by Ethier-Norman in [32] which makes a quantitative statement of the convergence of the generator by using heavily the properties of the diffusion limits. Inspired by the work of Gackou & AL [39] where they gave an exponential time estimation of the error, and a linear time estimation when the parameters of selection are less than those of immigration,so we furnish here the completion of their work by assuming that the parameters of selection are strictly greater than those of immigration. Unlike of the procedure of the last paper we use here another approach to control the Feynman -Kac formula for the Wright-Fisher diffusion limit. To get that we use power tools which are Transportation -Information inequalities see Guillin & AL [42].

Notations

Let us give the following notations which we shall use in the sequel.

In this paper we consider the diallelic case. We denote the proportion of the one species by X^J when the total population size is J , and Y^J the rescaled Wright-Fisher process.

$$\mathbb{I}_J = \{\frac{i}{J} : i = 0, 1, 2, \dots, J\}$$

$\mathbb{I} = [0, 1]$, and for all $f \in B(\mathbb{I}_J)$, the bounded functions on \mathbb{I}_J ,

$$\|f\|_J = \max_{x \in \mathbb{I}_J} |f(x)|$$

and for a bounded function $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, we denote by $\|g\| = \sup |g|$ the supremum norm of g . We denote $C^j(\mathbb{I})$ the set of j times continuously differentiable functions defined in \mathbb{I} , and for $f \in C^j(\mathbb{I})$, let $f^{(j)}$ be the j^{th} derivative of f .

$\mathcal{M}_1(\mathbb{I})$ is defined as the set of probability measure on \mathbb{I} .

This paper is organized as follow : In Section (2) we have the Moran Model

So our purpose is to estimate uniformly the following quantity : for enough regular $f \in C^4(I)$

$$\left\| \mathbb{E}_x \left[f(X_n^J) - f(Y_{tJ^2}^J) \right] \right\|_J$$

$\forall x \in \mathbb{I}_J$ and $0 \leq t \leq T$.

So If we set $n = \lceil tJ^2 \rceil$, we have to control that

$$\left\| \mathbb{E}_x \left[f(X_{\lceil tJ^2 \rceil}^J) - f(Y_{tJ^2}^J) \right] \right\|_J$$

$\forall x \in \mathbb{I}_J$ and $0 \leq t \leq T$.

So let us give our main result

5.4 Main result

We now state our main result in the case where immigration and selection are constant. It furnishes an estimation of the error when the discrete Moran process X_n converges toward the Wright-Fisher diffusion process Y_n . Therefore to obtain a uniform estimation of the error committed when the discrete Moran process X_n^J converges toward the Wright-Fisher diffusion process Y_n^J , we assume that the parameters of selection s are strictly greater than those of immigration m .

Let us give now the main result of this paper.

Théorème 5.4.1 *Let us consider the weak immigration and selection case, namely $s = \frac{s'}{J}$ and $m = \frac{m'}{J}$ for some $s' \in \mathbb{R}$, $m' \in \mathbb{R}_+$. Let $f \in C^4(\mathbb{I})$, and we assume that $s > m > 0$. Then there exist positive functions A and K (depending on m' and s' but not on f) such that :*

$$\left\| \mathbb{E}_x \left[f(X_{\lceil tJ^2 \rceil}^J) - f(Y_{tJ^2}^J) \right] \right\|_J \leq A \left(\frac{\left(\|f^{(1)}\|_J + \|f^{(2)}\|_J \right)}{J} + K \frac{\sum_{i=1}^4 \|f^{(i)}\|_J}{J^2} \right).$$

rem The proof of this result follows the same patterns than the one's done in [39].

The only difference appears in the control of the Feynman-Kac formulae, where we use transportation inequalities.

5.5 Proof of theorem

The proof relies on three ingredients :

1. a " telescopic " decomposition of the error ;
2. a quantitative estimate of the error at time 1 of the approximation of the Moran process by the diffusion ;

3. quantitative control of the regularity of $\left(T_t^{(j)}\right)$ and deviation inequality of $\mu(v)$.

Note also that in the sequel we will not make distinction between function on $C(\mathbb{I})$ and their restriction on \mathbb{I}_J .

Let S_n be defined on $B(\mathbb{I}_J)$ (the space of bounded function on \mathbb{I}_J) by :

$$(S_n f)(x) = \mathbb{E}_x[f(X_n^J)] \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Thus S_n verifies for $k \in \mathbb{N}$ the semigroup property, namely that

$$S_{n+k} = S_n S_k$$

Let T_t be the operator defined on the space of bounded continuous functions by :

$$(T_t f)(x) = \mathbb{E}_x[f(Y_t^J)] \quad \forall t \geq 0$$

Therefore it verifies the Chapman -Kolmogorov property, namely $\forall s \geq 0$

$$T_{s+t} = T_t T_s$$

.

5.5.1 Telescopic decomposition of the error

Thanks to these properties, we have

$$\begin{aligned} S_n T_0 f - S_0 T_n f &= \sum_{k=0}^{n-1} S_{n-k} T_k f - S_{n-k-1} T_{k+1} f \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} S_{n-k-1} S_1 T_k f - S_{n-k-1} T_1 T_k f \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} S_{n-k-1} (S_1 - T_1) T_k f \end{aligned}$$

As $\|S_n f\|_J \leq \|f\|_J$ by triangular inequality, we get $\forall n \in \mathbb{N}, \forall f \in C(\mathbb{I}_J)$.

$$\|S_n T_0 f - S_0 T_n f\|_J \leq \sum_{k=0}^{n-1} \|S_{n-k-1} (S_1 - T_1) T_k f\|_J \leq \sum_{k=0}^{n-1} \|(S_1 - T_1) T_k f\|_J \quad (5.4)$$

We have two main terms to analyze : $S_1 - T_1$ for a " one step " difference between the Moran process and the Wright-Fisher diffusion process, and $T_k f$ for which we need regularity estimates.

5.5.2 Control of $S_1 - T_1$

Let us first study, for f regular enough, $(S_1 - T_1)f$. The main purpose is to obtain the Taylor expansion of this function when J is big enough.

Lemma 5.5.1

When J is big enough, namely $s = \frac{s'}{J} > -1 + \varepsilon$, there exists $K_1(\varepsilon) > 0$ such that

$$\|(S_1 - T_1)f\|_J \leq \frac{|s'|m' + s'^2}{4\varepsilon J^3} \|f^{(1)}\|_J + \frac{m'p + \frac{|s'|}{4} + m'(1 + |s'|)}{2\varepsilon J^2} \|f^{(2)}\|_J + \frac{K_1(\varepsilon)}{J^4}$$

Preuve

Let us begin by consideration on the Wright-Fisher diffusion process. Remark first, as usual for this diffusion process

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left\| \frac{T_t f - f}{t} - Lf \right\|_J = 0, \quad \forall f \in C^2(\mathbb{I})$$

The Chapman-Kolmogorov backward equation reads

$$\frac{\partial}{\partial t} (T_t f)(x) = L(T_t f)(x) = T_t(Lf)(x)$$

and more generally if f is regular enough, for $j \in \mathbb{N}$ it is possible to define L^j as :

$$\frac{\partial^j}{\partial t^j} (T_t f)(x) = (T_t L^j f)(x), \quad \forall x \in \mathbb{I}, t \geq 0$$

For this proof, we only need to go to the fourth order in j . So let $f \in C^4(\mathbb{I})$ (possibly depending on J), using the Taylor theorem for $(T_1 f)(x)$ there exists w_2 , independent of J , such as :

$$\begin{aligned} (T_1 f)(x) &= (T_0 f)(x) + (T_1 f)^{(1)}(x)(1-0) + \frac{w_2}{2!} (T_1 f)^{(2)}(x) \\ &= f(x) + (L^1 f)(x) + \frac{w_2}{2} (L^2 f)(x) \end{aligned} \quad (5.5)$$

By direct calculations, we have the successive L^j

$$\begin{aligned} L^1 f(x) &= \frac{x(1-x)}{J^2} f^{(2)}(x) + \frac{sx(1-x) + m(p-x)}{J} f^{(1)}(x) \\ L^2 f(x) &= \frac{(x(1-x))^2}{J^4} f^{(4)}(x) + \left[\frac{2(1-2x)x(1-x)}{J^4} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2x(1-x)(sx(1-x) + m(p-x))}{J^3} \right] f^{(3)}(x) \\ &\quad + \left[\frac{-2x(1-x)}{J^4} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2x(1-x)(s(1-2x) - m) + (1-2x)(sx(1-x) + m(p-x))}{J^3} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(sx(1-x) + m(p-x))^2}{J^2} \right] f^{(2)}(x) \\ &\quad + \left[\frac{-2sx(1-x)}{J^3} + \frac{(s(1-2x) - m)(sx(1-x) + m(p-x))}{J^2} \right] f^{(1)}(x) \end{aligned}$$

where $f^{(j)}$ the j^{th} derivative of f . Remark now that by our assumption on the boundedness of the successive derivatives of f that there exists K_0 (depending also on m', p, s')

$$\|L^2 f\|_J \leq \frac{K_0}{J^4}$$

Thus, in the sequel this term could be neglected.

Now let us look at the Moran process and so get estimates on S_1 . The quantity $X_1 - x$ is at least of the order of $\frac{1}{J}$ and when J goes to infinity, it goes to 0. So using Taylor expansion, there exists $|w_1| \leq 1$ such that :

$$f(X_1) = f(x) + f^{(1)}(x)(X_1 - x) + \frac{1}{2}f^{(2)}(x)(X_1 - x)^2 + \frac{w_1}{3!}(X_1 - x)^3 \|f^{(3)}\|_J$$

and thus

$$\begin{aligned} (S_1 f)(x) &= \mathbb{E}_x[f(X_1)] = f(x) + \mathbb{E}_x[(X_1 - x)]f^{(1)}(x) + \frac{1}{2}\mathbb{E}_x[(X_1 - x)^2]f^{(2)}(x) \\ &\quad + \frac{w_1}{3!}\mathbb{E}_x[(X_1 - x)^3]\|f^{(3)}\|_J \end{aligned} \quad (5.6)$$

Direct estimates (even if tedious) on the centered moments of the Moran process give

$$\mathbb{E}_x[X_1 - x] = \frac{sx(1-x)(1-m)}{J(1+sx)} + \frac{m(p-x)}{J} \quad (5.7)$$

$$\mathbb{E}_x[(X_1 - x)^2] = \frac{1}{J^2} \left(mp(1-2x) + \frac{(1-m)(1+s)x(1-2x)}{1+sx} + x \right) \quad (5.8)$$

$$\mathbb{E}_x[(X_1 - x)^3] < \frac{K_3}{J^4} \quad (5.9)$$

where K_3 is a constant (independent of J).

We may then consider $(S_1 - T_1) f$ through (4) and (3) so that there exists a constant K_1 such as :

$$\begin{aligned} (S_1 f)(x) - (T_1 f)(x) &= \mathbb{E}_x[(X_1 - x)]f^{(1)}(x) + \frac{1}{2}\mathbb{E}_x[(X_1 - x)^2]f^{(2)}(x) \\ &\quad + \frac{w_1}{3!}\mathbb{E}_x[(X_1 - x)^3]\|f^{(3)}\|_J \\ &\quad - \left((L^1 f)(x) + \frac{w_2}{2}(L^2 f)(x) \right) \\ &= \gamma_1^J f^{(1)}(x) + \gamma_2^J f^{(2)}(x) + \frac{K_1}{J^4} \end{aligned} \quad (5.10)$$

with

$$\begin{aligned} \gamma_1^J &= \frac{-sx(1-x)(m+sx)}{J(1+sx)} \\ \gamma_2^J &= \frac{1}{2J^2} \left[mp(1-2x) + \frac{(1-m)(1+s)x(1-2x)}{1+sx} - x(1-2x) \right] \\ &= \frac{1}{2J^2} \left[mp(1-2x) + x(1-2x) \frac{s(1-x) - m(1+s)}{1+sx} \right] \end{aligned}$$

As selection and immigration are weak, we easily conclude that γ_1^J and γ_2^J are at most of the order of $\frac{1}{J^3}$. \square

5.5.3 Control of $\{T_t^{(j)}\}_{t \geq 0}$ and Deviation inequality

Let us now prove the estimates on T_t . According to theorem 1 in [32], we have that, for all j

$$T_t : C^j(\mathbb{I}) \rightarrow C^j(\mathbb{I})$$

Assume that $f \in C^4(\mathbb{I})$ and $j \in \{1, 2\}$.

We set $\phi(t, x) = (T_t f)(x)$, $x \in \mathbb{I}_J$, $t \geq 0$.

So if $f \in C^{j+2}(\mathbb{I})$, then $\phi(t, x) \in C^{j+2}(\mathbb{I})$.

Thus, we remark that the Chapman-Kolmogorov backward equation may be written :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \phi &= L\phi \\ \phi(0, \cdot) &= f. \end{aligned}$$

Hence let $\phi^{(j)}$ the j^{th} derivative of ϕ with respect to x and we get

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \phi^{(j)} &= L_j \phi^{(j)} - \nu_j \phi^{(j)} + \psi_j \phi^{(j-1)} \\ \phi^{(j)}(0, \cdot) &= f^{(j)} \end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned} L_j \phi^{(j)}(x) &= L\phi^{(j)} + j(1 - 2x)\phi^{(j+1)} \\ \nu_j(x) &= (j(j - 1) - j(s'(1 - 2x) - m')) \\ \psi_j &= -s'j(j - 1) \end{aligned}$$

So by using the Feynman-Kac formulae, we get

$$\begin{aligned} \phi^{(j)}(t, x) &= \mathbb{E}_x \left[f^{(j)}(Y_t^j) e^{-\int_0^t j(j-1) + j(m-s(1-2Y_u^j)) du} \right. \\ &\quad \left. - \int_0^t s'j(j-1)\phi^{(j-1)}(Y_h^j) e^{-\int_0^t j(j-1) + j(m-s(1-2Y_u^j)) du} dh \right] \end{aligned}$$

So to control this Feynman- Kac formula we use the following transportation inequalities

Transportation inequalities for Wright-Fisher diffusion

Unlike the control done by Gackou & AL in [39], we focus here on the generator of the diffusion limit to get the scaling and speed functions of Feller. These formulas allow us to define the probability measure of the diffusion process $(Y_{[t, J^2]}^j, t \geq 0)$. So including some regular functions, we define the main constant C which is the main object of the investigation of this section.

Let us consider our Wright-Fisher diffusion $(Y_{[tJ^2]}^j)_{t \geq 0}$ with generator :

$$L_j = x(1-x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + [s'x(1-x) + m'(p-x) + j(1-2x)] \frac{\partial}{\partial x}$$

with $j = 1, 2, \dots, 4$.

We assume that $s \in \mathbb{R}$ and $m \in \mathbb{R}_+$ are constant and we set :

$$\begin{aligned} a(x) &= x(1-x) \\ b(x) &= s'x(1-x) + m'(p-x) + j(1-2x) \end{aligned}$$

and for all fixed $c \in \mathbb{I}$

$$\begin{aligned} \tilde{s}'(x) &= \exp \left[- \int_c^x \frac{b(u)}{a(u)} du \right] \\ \tilde{m}'(x) &= \frac{1}{a(x)\tilde{s}'(x)} \end{aligned}$$

Thus by replacing $a(x)$ and $b(x)$ with their expressions, we get :

$$\begin{aligned} \tilde{s}'(x) &= K(c) \frac{e^{-s'x}}{x^{m'p+j}(1-x)^{m'(1-p)+j}} \\ \tilde{m}'(x) &= \frac{1}{K(c)} x^{m'p+j-1} (1-x)^{m'(1-p)+j-1} e^{s'x} \end{aligned}$$

where $K(c) = c^{m'p+j}(1-c)^{m'(1-p)+j} e^{s'c}$.

Let us set $Z = \int_0^1 \tilde{m}'(x) dx$.

We define now the probability measure of the Markov Process $(Y_{[tJ^2]}^j, t \geq 0)$ which is absolutely continuous with respect to the Lebesgue measure \tilde{m}' :

$$\mu(dx) = \frac{\tilde{m}'(x) dx}{Z}$$

We assume that the infinitesimal generator L_j is symmetric in $L^2(\mathbb{I}, \mu)$. So the Dirichlet form associated to L_j is defined by

$$\varepsilon(f, f) = \int_0^1 a(x) f'(x) d\mu(x) \quad f \in \mathbb{D}(\varepsilon)$$

where $\mathbb{D}(\varepsilon) = \left\{ f \in AC(\mathbb{I}) \cap L^2(\mu); \int_0^1 (f')^2 d\mu < +\infty \right\}$.

$AC(\mathbb{I})$ is the space of absolutely continuous functions on \mathbb{I} .

Let us consider the Identity application :

$$\begin{aligned} \gamma : [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \gamma(x) = x \end{aligned}$$

and $\gamma'(x) \geq 0$ and absolutely continuous on \mathbb{I} .

The lipschitzian norm of a function $f \in C^4(\mathbb{I})$ is given by

$$\|f\|_{Lip(\gamma)} = \sup_{0 \leq x \leq y \leq 1} \frac{|f(y) - f(x)|}{|y - x|} = \sup_{x \in [0, 1]} |f'(x)| = \|f'\|_\infty$$

and the constant of transportation is given :

$$C = \sup_{x \in [0,1]} \left[\tilde{s}(x) \sqrt{a(x)} \int_x^1 (\gamma(y) - \mu(\gamma)) \tilde{m}'(y) dy \right]$$

Since this constant is very important for the sequel of this paper, we are interesting to estimate it. Hence, finding an explicite bound for it, is not easy, however, we look for an upper bound which depends on the parameters s', m', p and j by the means of the Taylor expansions in the neighbourhoods of 0 and 1.

This allow us to know that the process $(Y_{[tJ^2]}^j, t \geq 0)$ is not explosive at these points.

Therefore, we give now the second main result of this paper which furnishes an estimation of the constant C .

Proposition 5.5.2

a) *There exists a finite constant B which depends on (m', s', p, j) such that*

$$C \leq B$$

where

$$B = \max \left(\mu \times \sqrt{\frac{m'p+j-1}{m'(1-p)+(j-1)}}, (1 - \mu) \times \sqrt{\frac{m'(1-p)+j-1}{m'p+j-1}} \times e^{s' \left(\frac{m'p+j-1}{m'+2(j-1)} \right)} \right)$$

b) μ satisfies $W_1 I(C)$:

$$W_1^2(\nu, \mu) \leq 4C^2 I(\nu/\mu), \quad \forall \nu \in \mathcal{M}_1(I), \quad (W_1 I(C))$$

b') *For all Lipschitz function v , and for all $\lambda > 0, t > 0$,*

$$\|P_t^{\lambda v}\|_{L^2(\mu)} \leq \exp \left(t(\lambda \mu(v) + \lambda^2 C^2 \|v\|_{Lip(\gamma)}^2) \right)$$

Where $W_1(\nu, \mu)$ is the L^1 - Wasserstein metric, and $I(\nu/\mu)$ the Fisher-Varadhan-Donsker Information .

Remarque 5.5.3 *We note that the items (b) and (b') are equivalent. For this equivalence, the reader can see [42] .*

Preuve

The proof of the first item (a) is based on the Taylor expansions in 0 and 1.

Recall now the probability measure μ of the Markov Process $(Y_{tJ^2}^j, t \geq 0)$ defined by :

$$\mu(dx) = \frac{\tilde{m}'(x) dx}{Z} = \frac{x^{m'p+j-1} (1-x)^{m'(1-p)+j-1} e^{s'x} dx}{\int_0^1 x^{m'p+j-1} (1-x)^{m'(1-p)+j-1} e^{s'x} dx}$$

Notice that that $\mu = \mu(\gamma)$ is a constant. Then we have

$$\mu \times \int_0^1 y^{m'p+j-1}(1-y)^{m'(1-p)+j-1}e^{s'y}dy = \int_0^1 y^{m'p+j}(1-y)^{m'(1-p)+j-1}e^{s'y}dy$$

Now let us estimate the constant C .

$$C = \sup_{x \in [0,1]} \left[\tilde{s}'(x) \sqrt{a(x)} \int_x^1 (y - \mu) \tilde{m}'(y) dy \right]$$

Therefore

$$\begin{aligned} C &= \sup_{x \in [0,1]} \left[\tilde{s}'(x) \sqrt{a(x)} \int_x^1 (y - \mu) \tilde{m}'(y) dy \right] \\ &= \sup_{x \in [0,1]} \left[\frac{K(c)e^{-s'x} \sqrt{x(1-x)}}{x^{m'p+j}(1-x)^{m'(1-p)+j}} \frac{1}{K(c)} \int_x^1 (y - \mu) y^{m'p+j-1}(1-y)^{m'(1-p)+j-1} e^{s'y} dy \right] \\ &= \sup_{x \in [0,1]} \left[\frac{e^{-s'x}}{x^{m'p+j-\frac{1}{2}}(1-x)^{m'(1-p)+j-\frac{1}{2}}} \int_x^1 (y - \mu) y^{m'p+j-1}(1-y)^{m'(1-p)+j-1} e^{s'y} dy \right] \end{aligned}$$

Let us set

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_x^1 y^{m'p+j}(1-y)^{m'(1-p)+j-1} e^{s'y} dy \\ G(x) &= \mu \times \int_x^1 y^{m'p+j-1}(1-y)^{m'(1-p)+j-1} e^{s'y} dy \end{aligned}$$

We note that F and G are in $C^\infty(\mathbb{I})$, so let us doing their Taylor expansions in 0 and 1 of the order of $n \in \mathbb{N}^*$ where n is the least integer which is greater than $m'p + j - \frac{1}{2}$.

1) First let us see if C is finite in 0.

$$\text{We have : } C = O\left(\frac{F(x)-G(x)}{x^{m'p+j-\frac{1}{2}}}\right)$$

Since for all $n \in \mathbb{N}$, $F^{(n)}(0) = 0$ and $G^{(n)}(0) = 0$, so

$$\begin{aligned} F(x) &= F(0) + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} F^{(n+1)}(t) dt \\ &= \int_0^1 y^{m'p+j}(1-y)^{m'(1-p)+j-1} e^{s'y} dy + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} F^{(n+1)}(t) dt \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} G(x) &= G(0) + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} G^{(n+1)}(t) dt \\ &= \mu \times \int_0^1 y^{m'p+j-1}(1-y)^{m'(1-p)+j-1} e^{s'y} dy + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} G^{(n+1)}(t) dt \end{aligned}$$

Since

$$\mu = \frac{\int_0^1 y^{m'p+j}(1-y)^{m'(1-p)+j} e^{s'y} dy}{\int_0^1 y^{m'p+j-1}(1-y)^{m'(1-p)+j-1} e^{s'y} dy}$$

Then

$$G(x) = \int_0^1 y^{m'p+j}(1-y)^{m'(1-p)+j-1} e^{s'y} dy + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} G^{(n+1)}(t) dt$$

Hence we have

$$F(x) - G(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} (F^{(n+1)}(t) - G^{(n+1)}(t)) dt$$

Since $(F^{(n+1)}(t) - G^{(n+1)}(t))$ is continuous in $[0, x]$, so it is bounded. So there exists a real M which depends on (m', s', p, j) such that :

$$\left| F^{(n+1)}(t) - G^{(n+1)}(t) \right| \leq M$$

So

$$\left| F(x) - G(x) \right| \leq \frac{Mx^{n+1}}{(n+1)!}$$

since $n \geq m'p + j - \frac{1}{2}$, we have

$$\left| \frac{F(x) - G(x)}{x^{m'p+j-\frac{1}{2}}} \right| \leq \frac{Mx^{n+1}}{x^{m'p+j-\frac{1}{2}}(n+1)!} \leq \frac{M}{(n+1)!} \leq \infty$$

Therefore C is finite in 0.

2) Let us see if C is finite in 1.

We have :

$$C = O \left(\frac{F(x) - G(x)}{(1-x)^{m'(1-p)+j-\frac{1}{2}}} \right)$$

Let us prove now , $\frac{F(x)-G(x)}{(1-x)^{m'(1-p)+j-\frac{1}{2}}}$ is finite in 1.

So let us doing the Taylor expansions of F and G in 1 of the order of n_1 where

$$n_1 \geq m'(1-p) + j - \frac{1}{2}$$

We note also that for all $n_1 \in \mathbb{N}$, $F^{(n)}(1) = 0$ and $G^{(n)}(1) = 0$

However, we have :

$$\begin{aligned} F(x) &= F(1) + \int_1^x \frac{(x-t)^{n_1}}{n_1!} F^{(n_1+1)}(t) dt \\ &= - \int_x^1 \frac{(x-t)^{n_1}}{n_1!} F^{(n_1+1)}(t) dt \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} G(x) &= G(1) + \int_1^x \frac{(x-t)^{n_1}}{n_1!} G^{(n_1+1)}(t) dt \\ &= - \int_x^1 \frac{(x-t)^{n_1}}{n_1!} G^{(n_1+1)}(t) dt \end{aligned}$$

So we have

$$F(x) - G(x) = \int_x^1 \frac{(x-t)^{n_1}}{n_1!} \left(G^{(n_1+1)}(t) - F^{(n_1+1)}(t) \right) dt$$

Since $G^{(n_1+1)}(t) - F^{(n_1+1)}(t)$ is continuous in $[x, 1]$, so it is bounded. Then, there exists a real M' which depends on m', s', p, j such that :

$$\left| G^{(n_1+1)}(t) - F^{(n_1+1)}(t) \right| \leq M'$$

Thus,

$$\left| F(x) - G(x) \right| \leq M' \frac{(1-x)^{(n_1+1)}}{(n_1+1)!}$$

As $n_1 \geq m'(1-p) + j - \frac{1}{2}$, we get

$$\frac{\left| F(x) - G(x) \right|}{(1-x)^{m'(1-p)+j-\frac{1}{2}}} \leq \frac{M' (1-x)^{(n_1+1)}}{(1-x)^{m'(1-p)+j-\frac{1}{2}} \times (n_1+1)!} \leq \frac{M'}{(n_1+1)!} \leq \infty$$

So C is finite in 1.

Now let us turn to proof of the real B .

We have

$$C = \sup_{x \in [0,1]} \left[\tilde{s}'(x) \sqrt{a(x)} \int_x^1 (y-\mu) \tilde{m}'(y) dy \right]$$

So using the fact that

$$\tilde{s}'(x) = \frac{1}{a(x) \times \tilde{m}(x)}$$

with $a(x) = \sqrt{x(1-x)}$, and

$$\mu = \frac{\int_0^1 y \tilde{m}'(y) dy}{\int_0^1 \tilde{m}'(y) dy}$$

we can write again C as follow :

$$C = \sup_{x \in [0,1]} \left[\frac{\mu \int_0^x \tilde{m}'(y) dy}{\sqrt{a(x)} \tilde{m}'(x)} \left(1 - \frac{f(x)}{\mu} \right) \right]$$

and

$$C = \sup_{x \in [0,1]} \left[\frac{\mu \int_x^1 \tilde{m}'(y) dy}{\sqrt{a(x)} \tilde{m}'(x)} \left(\frac{g(x)}{\mu} - 1 \right) \right]$$

where

$$f(x) = \frac{\int_0^x y \tilde{m}'(y) dy}{\int_0^x \tilde{m}'(y) dy}$$

which is increasing on $[0, \mu]$.

and

$$g(x) = \frac{\int_x^1 y \tilde{m}'(y) dy}{\int_x^1 \tilde{m}'(y) dy}$$

which is increasing on $[\mu, 1]$.

Let us set $h(x) = x^{m'p+j-1}(1-x)^{m'(1-p)+j-1}$. It reaches its maximum at $\alpha = \frac{m'p+j-1}{m'+2(j-1)}$

We have also that $|1 - \frac{f(x)}{\mu}| \leq 1$ and $|\frac{g(x)}{\mu} - 1| \leq (\frac{1}{\mu} - 1)$

Now for all $x \in [0, \alpha]$, we have $\tilde{m}'(x) = h(x) \times e^{s'x}$ which is increasing. So

$$\begin{aligned} \frac{\mu \int_0^x \tilde{m}'(y) dy}{\sqrt{a(x)\tilde{m}'(x)}} \left(1 - \frac{f(x)}{\mu}\right) &\leq \mu \frac{\tilde{m}'(x) \times x}{\sqrt{x} \times \tilde{m}'(x) \sqrt{1-x}} \\ &\leq \mu \times \sqrt{\frac{m'p + (j-1)}{m'(1-p) + j-1}} \end{aligned}$$

So taking the supremum, we get

$$\boxed{C \leq \mu \times \sqrt{\frac{m'p+(j-1)}{m'(1-p)+j-1}}} \quad (5.11)$$

Now for all $x \in [\alpha, 1]$, we have $h(x)$ is decreasing. Thus we have

$$\begin{aligned} \frac{\mu \int_x^1 \tilde{m}'(y) dy}{\sqrt{a(x)\tilde{m}'(x)}} \left(\frac{g(x)}{\mu} - 1\right) &\leq \mu \left(\frac{1}{\mu} - 1\right) \frac{h(x) \times e^{s'(1-x)}}{\sqrt{x} \times h(x) \times e^{s'x} \times \sqrt{(1-x)}} \\ &\leq (1-\mu) \frac{e^{s'(1-x)} \sqrt{(1-x)}}{\sqrt{x}} \\ &\leq (1-\mu) \times e^{s'(\frac{m'(1-p)+j-1}{m'+2(j-1)})} \sqrt{\frac{m'(1-p) + j-1}{m'p + j-1}} \end{aligned}$$

So taking the supremum, we get

$$C \leq (1-\mu) \times e^{s'(\frac{m'(1-p)+j-1}{m'+2(j-1)})} \sqrt{\frac{m'(1-p) + j-1}{m'p + j-1}} \quad (5.12)$$

Therefore by setting

$$B = \max \left(\mu \times \sqrt{\frac{m'p+(j-1)}{m'(1-p)+j-1}}, (1-\mu) \times e^{s'(\frac{m'(1-p)+j-1}{m'+2(j-1)})} \sqrt{\frac{m'(1-p)+j-1}{m'p+j-1}} \right)$$

we get the result. Hence there exists a real B which depends on m', s', p and j such that

$$C \leq B$$

Now let us turn to the proof of the second item (b) .

According to the theorem 2.1 of Djellout and Wu in [24], we have to verify the following conditions to get $W_1 I \left(\frac{1}{C} \right)$ inequality :

1. $a(x)$ et $b(x)$ are continuous functions on \mathbb{I} and $a(x) \geq 0$
2. $Z = \int_0^1 \tilde{m}'(x) dx \leq \infty$
3. $\begin{cases} \int_c^1 \tilde{s}'(x) \left(\int_c^x \tilde{m}'(u) du \right) dx = \infty \\ \int_0^c \tilde{s}'(u) du \int_x^c \tilde{m}'(x) dx = \infty \end{cases}$
4. $C < \infty$

Preuve.

According to the item (a) for the previous proposition (5.5.2), we have $C < \infty$. So let us verify these items (1), (2) and (3).

For the first, we have

1.

$$\begin{aligned} a(x) &= x(1-x) \\ b(x) &= [s'x(1-x) + m'(p-x) + j(1-2x)] \end{aligned}$$

We see that $a(x)$ and $b(x)$ are both continuous functions on $\mathbb{I} = [0, 1]$ and $a(x)$ is nonnegative.

2. For all $x \in \mathbb{I}$, this function $x^{m'p+j-1}(1-x)^{m'(1-p)+j-1}$ is continuous on the compact $[0, 1]$, so it is bounded. There exists a real M_1 such that :

$$\sup_{x \in [0,1]} |x^{m'p+j-1}(1-x)^{m'(1-p)+j-1}| \leq M_1$$

Thus, we have

$$Z = \int_0^1 \tilde{m}'(x) dx = \frac{1}{K(c)} \int_0^1 x^{m'p+j-1}(1-x)^{m'(1-p)+j-1} e^{s'x} dx \leq \frac{M_1 e^{s'}}{K(c)} \leq \infty$$

3. For the third point (3) Since the function $\frac{J^2}{K(c)} y^{m'p+j-1}(1-y)^{m'(1-p)+j-1} e^{s'y}$ is continuous on the compact $[x, c]$, so there exists two reals $m_1, d_1 \in [x, c]$ such as :

$$m_1(c-x) \leq \int_x^c \frac{J^2}{K(c)} y^{m'p+j-1}(1-y)^{m'(1-p)+j-1} e^{s'y} dy \leq d_1(c-x)$$

Hence, we have

$$\begin{aligned} \int_0^c \tilde{s}'(x) \int_x^c \tilde{m}'(u) du dx &= \int_0^c \tilde{s}'(x) \int_x^c \frac{J^2}{K(c)} y^{m'p+j-1}(1-y)^{m'(1-p)+j-1} e^{s'y} dy dx \\ &\geq \zeta \int_0^c \frac{m(c-x)}{x^{m'p+j}(1-x)^{m'(1-p)+j}} e^{-s'x} dx \\ &\geq \frac{\zeta}{B_1} \int_0^c \frac{m_1(c-x)}{x} dx \end{aligned}$$

5.5. PROOF OF THEOREM

where ζ is a constant.

However, for all $x \in [0, 1]$, we have the following inequality :

$$x^{m'p+j}(1-x)^{m'(1-p)+j}e^{s'x} \leq B_1x$$

with B_1 an upper bound of $e^{s'x}$. Thus we have

$$\frac{m_1(c-x)}{x^{m'p+j}(1-x)^{m'(1-p)+j}}e^{-s'x} \geq \frac{m_1(c-x)}{B_1x}$$

and we have

$$\int_0^c \frac{m_1(c-x)e^{-s'x}}{x^{m'p+j}(1-x)^{m'(1-p)+j}} dx \geq \frac{m_1c}{B_1} \int_0^c \frac{dx}{x} - \frac{m_1c}{B_1} = +\infty$$

so

$$\frac{m_1}{B_1} \int_0^c \frac{c-x}{x} dx \leq \int_0^c \tilde{s}'(x) \left(\int_x^c \tilde{m}'(u) du \right) dx$$

As we have

$$\frac{m_1}{B_1} \int_0^c \frac{c-x}{x} dx = +\infty$$

Then

$$\int_0^c \tilde{s}'(x) \left(\int_x^c \tilde{m}'(u) du \right) dx = +\infty$$

As done previously, we have

$$\int_c^1 \tilde{s}'(x) \left(\int_c^x \tilde{m}'(u) du \right) dx = \infty$$

□

Thanks to these conditions, μ satisfies $W_1I(C)$.

□

Let $v : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}_+$ be a bounded and measurable function, μ -integrable defined by

$$v(y) = s'(1-2y) - m'$$

$$\mu(v) = \int_I v d\mu = \frac{1}{ZK(c)} \int_0^1 (s'(1-2y) - m') \left(y^{m'p+j-1}(1-y)^{m'(1-p)+j-1} e^{s'y} \right) dy$$

let (P_t^v) be the semigroup of Feynman-Kac defined by :

$$P_t^v f^{(j)}(x) := \mathbb{E}_x \left[f^{(j)}(Y_t^j) e^{\int_0^t v(Y_u^j) du} \right]$$

where $f^{(j)} \geq 0$ and measurable.

We remind that

$$\|P_t^v\|_{L^2(\mu)} = \sup\{\|P_t^v f\|_{L^2(\mu)}; f \geq 0 \text{ and } \mu(f^2) \leq 1\}$$

$$= \sup\{\langle P_t^v f, g \rangle_\mu; f, g \geq 0 \text{ et } \mu(f^2) \leq 1 \text{ et } \mu(g^2) \leq 1\}$$

and

$$\|v\|_{Lip(\gamma)} = \sup_{0 < x_1 < x_2 < 1} \frac{|2s(x_2 - x_1)|}{|x_2 - x_1|} = 2|s'|$$

Therefore, the Feymann -Kacc formulae is given by :

$$\begin{aligned} \phi^{(j)}(t, x) = \mathbb{E}_x \left[f^{(j)}(Y_t^j) e^{-tj(j-1)} e^{j \int_0^t (-(m'-s') - 2s'Y_u^j) du} \right. \\ \left. - s'j(j-1) \int_0^t \phi^{(j-1)}(Y_h^j) e^{-hj(j-1)} e^{j \int_0^h (-(m'-s') - 2s'Y_u^j) du} dh \right] \end{aligned}$$

So using the definition of the semigroup of Feynman-Kac ($P_t^u f(x)$), we have

$$\begin{aligned} \phi^{(j)}(t, x) = \exp(-j(j-1)t) P_t^{jv} f^{(j)}(x) \\ - sj(j-1) \int_0^t \exp(-sj(j-1)h) P_h^{jv} \phi^{(j-1)}(x) dh \end{aligned}$$

We have :

$$\begin{aligned} |\phi^{(j)}| &\leq \exp(-j(j-1)t) |P_t^{jv} f^{(j)}| \\ &+ |s'j(j-1)| \sup_{0 \leq h \leq t} |P_h^{jv} \phi^{(j-1)}| \int_0^t \exp(-j(j-1)h) dh \\ &\leq \exp(-j(j-1)t) |P_t^{jv} f^{(j)}| + |s'| (1 - \exp(-j(j-1)t)) |P_t^{jv} \phi^{(j-1)}| \end{aligned}$$

Therefore we have

$$\|\phi^{(j)}\|_{L^2(\mu)} \leq \left[\|f^{(j)}\|_J + |s'| \|\phi^{(j-1)}\|_J \right] \|P_t^{jv}\|_{L^2(\mu)}$$

Using the item (b') of the proposition (5.5.2), we have

$$\|\phi^{(j)}\|_{L^2(\mu)} \leq \left[\|f^{(j)}\|_J + |s'| \|\phi^{(j-1)}\|_J \right] \exp(t(j\mu(v) + 4j^2 s'^2 C^2)) \quad (5.13)$$

To conclude we need to prove that $(j\mu(v) + 4j^2 s'^2 C^2) \leq 0$.

For that it is enough to prove the following proposition.

Proposition 5.5.4

Let us assume $s' > m' > 0$. So for all $p \in [0, 1]$ and for all fixed $\epsilon \in [0, 1]$, the following assertions hold.

cas1) : $s' - m' - 2s'\epsilon\mu \leq 0$

cas2) : If $s' - m' \leq \frac{1-p}{p}$, then we have

$$\sqrt{s' - m'} C - (1 - \epsilon)\mu \leq 0$$

where $C = \sup_{x \in [0,1]} \left[\sqrt{a(x)} \tilde{s}'(x) \int_x^1 (y - \mu) \tilde{m}'(y) dy \right]$ and $\mu = \frac{\int_0^1 y \tilde{m}'(y) dy}{\int_0^1 \tilde{m}'(y) dy}$

Preuve

1. For the *cas1*), we have

$$(s' - m') - 2s'\epsilon\mu = \frac{\int_0^1 (s' - m' - 2s'\epsilon y)y^{m'p+j-1}(1-y)^{m'(1-p)+j-1}e^{s'y}dy}{\int_0^1 y^{m'p+j-1}(1-y)^{m'(1-p)+j-1}e^{s'y}dy}$$

Let us set $g(x) = (s' - m' - 2s'\epsilon x)x^{m'p+j-1}(1-x)^{m'(1-p)+j-1}e^{s'x}$.

g is positive for $x < \frac{1}{2\epsilon}(1 - \frac{m'}{s'})$ and negative otherwise.

Assume $\alpha = \frac{1}{2\epsilon}(1 - \frac{m'}{s'})$.

We can find an upper bound for $\int_0^1 g(x)dx$ by replacing the term $\exp(s'x)$ by the straight line passing through the points $(0, 1)$ and $(\alpha, e^{s'\alpha})$. Indeed, this line is upper $\exp(s'x)$ on $[0, \alpha]$, where g is positive and lower on $[\alpha, 1]$ where g is negative. Its equation is

$$d(x) = \frac{2s'\epsilon}{s' - m'}(e^{\frac{s'-m'}{2\epsilon}} - 1)x + 1$$

Let us set $b(x) = x^{m'p+j-1}(1-x)^{m'(1-p)+j-1}$, then we have the following inequalities :

$$\begin{aligned} g(x) &\leq (s' - m' - 2s'\epsilon x) \left(\frac{2s'\epsilon}{s' - m'}(e^{\frac{s'-m'}{2\epsilon}} - 1)x + 1 \right) b(x) \\ &\leq (s' - m' + 2s'\epsilon(e^{\frac{s'-m'}{2\epsilon}} - 2) - \frac{4\epsilon^2 s'^2}{s' - m'}(e^{\frac{s'-m'}{2\epsilon}} - 1)x^2) b(x) \end{aligned}$$

So with the integral, let us set $a = m'p + j$ and $c = m'(1-p) + j$:

$$\begin{aligned} \int_0^1 g(x)dx &\leq (s' - m')\beta_{a,c} + 2s'\epsilon(e^{\frac{s'-m'}{2\epsilon}} - 2)\beta_{a+1,c} \\ &\quad - \frac{4s'^2\epsilon^2}{s' - m'}(e^{\frac{s'-m'}{2\epsilon}} - 1)\beta_{a+2,c} \end{aligned}$$

where $\beta_{a,c}$ is the function beta with parameters a and c .

Using the well known identity $\beta_{a+1,c} = \frac{a}{a+c}\beta_{a,c}$ and it follows that :

$$\begin{aligned} \int_0^1 g(x)dx &\leq \beta_{a,c} \left((s' - m') + 2s'\epsilon(e^{\frac{s'-m'}{2\epsilon}} - 2) \frac{m'p + j}{m' + 2j} \right. \\ &\quad \left. - \frac{4s'^2\epsilon^2}{s' - m'}(e^{\frac{s'-m'}{2\epsilon}} - 1) \frac{(m'p + j)(m'p + j + 1)}{(m' + 2j)(m' + 2j + 1)} \right) \\ &\leq \beta_{a,c}(s' - m') \left(1 + \frac{2s'\epsilon}{(s' - m')} (e^{\frac{s'-m'}{2\epsilon}} - 2) \frac{m'p + j}{m' + 2j} \right. \\ &\quad \left. - \frac{4s'^2\epsilon^2}{(s' - m')^2} (e^{\frac{s'-m'}{2\epsilon}} - 1) \frac{(m'p + j)(m'p + j + 1)}{(m' + 2j)(m' + 2j + 1)} \right) \end{aligned}$$

Our aim is to prove now that

$$1 + \frac{2s'\epsilon}{(s' - m')} \left(e^{\frac{s' - m'}{2\epsilon}} - 2 \right) \frac{m'p + j}{m' + 2j} \\ - \frac{4s'^2\epsilon^2}{(s' - m')^2} \left(e^{\frac{s' - m'}{2\epsilon}} - 1 \right) \frac{(m'p + j)(m'p + j + 1)}{(m' + 2j)(m' + 2j + 1)}$$

is always negative.

The previous quantity can be written again as that :

$$1 + \frac{2s'\epsilon}{(s' - m')} \frac{m'p + j}{m' + 2j} \left(-1 + \left(e^{\frac{s' - m'}{2\epsilon}} - 1 \right) \left(1 - \frac{2s'\epsilon}{(s' - m')} \frac{(m'p + j + 1)}{(m' + 2j + 1)} \right) \right)$$

Now, with $\epsilon = \frac{8}{10}$ we get

$$1 - \frac{2s'\epsilon}{s' - m'} \frac{(m'p + j + 1)}{(m' + 2j + 1)} = \frac{5(s' - m')(m' + 2j + 1) - 8s'(m'p + j + 1)}{5(s' - m')(m' + 2j + 1)}$$

and so this quantity is always negative.

Since $\frac{2s'\epsilon}{s' - m'}$ is stricly greater than 1, so

$$1 + \frac{2s'\epsilon}{(s' - m')} \frac{m'p + j}{m' + 2j} \left(-1 + \left(e^{\frac{s' - m'}{2\epsilon}} - 1 \right) \left(1 - \frac{2s'\epsilon}{(s' - m')} \frac{(m'p + j + 1)}{(m' + 2j + 1)} \right) \right)$$

is always negative.

Therefore $s' - m' - 2s'\epsilon\mu(Y_t^J)$ is negative.

2. for *cas2*), we have to show that :

$$\sqrt{s' - m'}C - \mu < 0$$

So let us recall the expression of C and μ . Thus we have

$$C = \sup_{x \in [0,1]} \left[\sqrt{a(x)} \tilde{s}'(x) \int_x^1 (y - \mu) \tilde{m}'(y) dy \right]$$

so using the fact that

$$\tilde{s}'(x) = \frac{1}{a(x) \times \tilde{m}'(x)}$$

with $a(x) = \sqrt{x(1-x)}$, and

$$\mu = \frac{\int_0^1 y \tilde{m}'(y) dy}{\int_0^1 \tilde{m}'(y) dy}$$

5.5. PROOF OF THEOREM

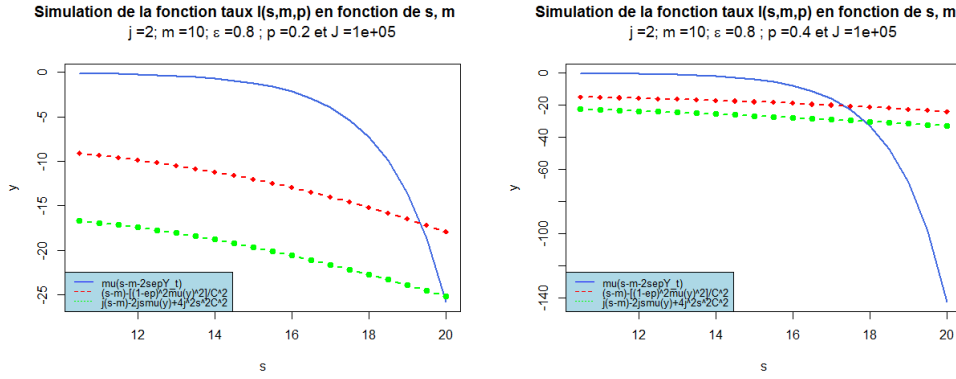


FIGURE 5.1 – graphics illustration of the previous proposition

we can write again C as follow :

$$C = \sup_{x \in [0,1]} \left[\frac{\mu \int_0^x \tilde{m}'(y) dy}{\sqrt{a(x)} \tilde{m}'(x)} \left(1 - \frac{f(x)}{\mu} \right) \right]$$

where

$$f(x) = \frac{\int_0^x y \tilde{m}'(y) dy}{\int_0^x \tilde{m}'(y) dy}$$

which is non decreasing on $[0, \mu]$.

Therefore, let us turn to prove that $\sqrt{s' - m'} C - \mu < 0$. It is enough to show that :

$$\frac{\sqrt{s' - m'} \int_0^x \tilde{m}'(y) dy}{\sqrt{x} \tilde{m}'(x)} \left(1 - \frac{f(x)}{\mu} \right) \frac{1}{\sqrt{(1-x)}} < 1$$

Let us set $h(x) = x^{m'p}(1-x)^{m'(1-p)}$. It reaches its maximum at $x = p$. So for all $x \in [0, p]$, $\tilde{m}'(x) = h(x) \times \exp(s'x)$, is increasing. Thus we have that :

$$\frac{\sqrt{s' - m'} \int_0^x \tilde{m}'(y) dy}{\sqrt{x} \times \tilde{m}'(x)} \left(1 - \frac{f(x)}{\mu} \right) \frac{1}{\sqrt{(1-x)}} \leq \frac{\sqrt{s' - m'} \sqrt{x}}{\sqrt{(1-x)}} \leq \frac{\sqrt{s' - m'} \sqrt{p}}{\sqrt{(1-p)}} \quad (5.14)$$

Since $s' - m' \leq \frac{1-p}{p}$, we get $\frac{\sqrt{s' - m'} \int_0^x \tilde{m}'(y) dy}{\sqrt{x} \times \tilde{m}'(x)} \left(1 - \frac{f(x)}{\mu} \right) \frac{1}{\sqrt{(1-x)}} \leq 1$

Therefore by taking the supremum in (5.14), we get that $\sqrt{(s' - m')} C - \mu < 0$.

So an illustration of the last proposition is given by the following graphics as the parameters of selection are growing.

□

Since for all $j = 1, 2, \dots, 4$, $j\mu(v) + 4j^2s'^2C^2 \leq 0$, so according to (5.13), we get

$$\|\phi^{(j)}\|_{L^2(\mu)} \leq \|f^{(j)}\|_J + |s'| \|\phi^{(j-1)}\|_J \quad (5.15)$$

Hence we

$$\begin{aligned}\|\phi^{(1)}\|_{L^2(\mu)} &\leq \|f^{(1)}\|_J \\ \|\phi^{(2)}\|_{L^2(\mu)} &\leq (|s'| \times \|f^{(1)}\|_J + \|f^{(2)}\|_J)\end{aligned}\quad (5.16)$$

We have $\phi^{(j)} = (T_t f)^{(j)}$, so according to (5.15),

$$\|(T_t f)^{(j)}\|_{L^2(\mu)} \leq \|f^{(j)}\|_J + |s'| \|(T_t f)^{(j-1)}\|_J \quad (5.17)$$

Since γ_1^J and γ_2^J are at most of the order of $\frac{1}{J^3}$, and using the fact that (T_t) is ultracontractive for more details see (Wang [58]) and $\|T_t\|_{2 \rightarrow \infty} = \sup_{\|f\|_{L^2(\mu)} \leq 1} \|T_t f\|_\infty \leq \exp(m(t))$

$$\begin{aligned}\|S_n f - T_n f\|_J &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \|(S_1 - T_1)T_k f\|_J \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left(\|\gamma_1^J\|_J \|(T_k f)^{(1)}\|_J + \|\gamma_2^J\|_J \|(T_k f)^{(2)}\|_J + O\left(\frac{1}{J^4}\right) \right) \\ &\leq \|\gamma_1^J\|_J \sum_{k=0}^{n-1} \|(T_k f)^{(1)}\|_J + \|\gamma_2^J\|_J \sum_{k=0}^{n-1} \|(T_k f)^{(2)}\|_J + O\left(\frac{1}{J^2}\right) \\ &\leq \|\gamma_1^J\|_J \sum_{k=0}^{n-1} \|(T_k f)^{(1)}\|_\infty + \|\gamma_2^J\|_J \sum_{k=0}^{n-1} \|(T_k f)^{(2)}\|_\infty + O\left(\frac{1}{J^2}\right) \\ &\leq \|\gamma_1^J\|_J \sum_{k=0}^{n-1} \|T_{\frac{k}{2}}\|_{2 \rightarrow \infty} \|(T_{\frac{k}{2}} f)^{(1)}\|_{L^2(\mu)} \\ &\quad + \|\gamma_2^J\|_J \sum_{k=0}^{n-1} \|T_{\frac{k}{2}}\|_{2 \rightarrow \infty} \|(T_{\frac{k}{2}} f)^{(2)}\|_{L^2(\mu)} + O\left(\frac{1}{J^2}\right) \\ &\leq \left(\|\gamma_1^J\|_J + |s'| \|\gamma_2^J\|_J \right) \|f^{(1)}\|_J + \|\gamma_2\|_J \|f^{(2)}\|_J \sum_{k=0}^{n-1} \exp(m(k/2)) \\ &\quad + O\left(\frac{1}{J^2}\right) \\ &\leq A \left(\|\gamma_1^J\|_J + |s'| \|\gamma_2^J\|_J \right) \|f^{(1)}\|_J + \|\gamma_2\|_J \|f^{(2)}\|_J + O\left(\frac{1}{J^2}\right)\end{aligned}$$

this ends the proof of the theorem.

Proposition 5.5.5 *Let us consider that $(T_t)_{t \geq 0}$ a Markov semigroup. We assume that the super-poincare inequality is satisfied : that is for all $f \in \mathbb{D}(\varepsilon)$ with ε the Dirichlet form, we have :*

$$\mu(f^2) \leq r\varepsilon(f, f) + \beta(r)\mu(|f|)^2$$

with β a positive decreasing function on $]0, +\infty[$ and $r \geq 0$ defined by $\beta(r) = \exp(1 + r^{-\lambda})$ with $\lambda > 0$

Then (T_t) is ultracontractive i.e. :

$$\|T_t\|_{1 \rightarrow \infty} \leq \exp(c_1 + c_2 t^{-r})$$

If (T_t) is symmetric, then we have the following relation :

$$\|T_t\|_{1 \rightarrow 2} = \|T_t\|_{2 \rightarrow \infty}$$

So we have $\|T_t\|_{1 \rightarrow \infty} \leq \|T_{\frac{t}{2}}\|_{1 \rightarrow 2} \times \|T_{\frac{t}{2}}\|_{2 \rightarrow \infty} = \|T_{\frac{t}{2}}\|_{2 \rightarrow \infty}^2$

5.6 Appendix

5.6.1 Transportation information of Markov Process

In this section, we present some theorems (without proofs) concerning Transportation-Information for Markov processes. We consider a Polish space (complete separable metric space) (\mathbb{I}, d) equipped with its Borel σ - field F . The product space $\mathbb{I} \times \mathbb{I}$ is equipped with the product Borel σ - field $F \otimes F$. We denote $\mathcal{M}_1(\mathbb{I})$ the set of probability measures on (\mathbb{I}, F) . Let $c : \mathbb{I} \times \mathbb{I} \rightarrow [0, \infty]$ be a lower semi-continuous function and let $\mu, \nu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{I})$. The optimal transportation cost for transporting μ onto ν with cost c is defined by

$$T_c(\mu, \nu) = \inf \int_{\mathbb{I} \times \mathbb{I}} c(x, y) d\pi(x, y) \in [0, \infty]$$

where the infimum runs over the set of probability measures $\pi \in \mathcal{M}_1(\mathbb{I} \times \mathbb{I})$ with respective marginals μ , and ν . That is, for all bounded measurable functions u and v on \mathbb{I} ,

$$\int_{\mathbb{I} \times \mathbb{I}} (u(x) + v(y)) d\pi(x, y) = \int_{\mathbb{I}} u d\mu + \int_{\mathbb{I}} v d\nu$$

We call c a cost function and π with marginals μ and ν a coupling of (μ, ν) .

Théorème 5.6.1 (*Kantorovich's Theorem*)

Let $c : \mathbb{I} \times \mathbb{I} \rightarrow [0, \infty]$ be a cost function and let $\mu, \nu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{I})$. Then

$$T_c(\mu, \nu) = \sup \left(\int_0^1 u d\mu - \int_0^1 v d\nu \right) \in [0, \infty]$$

where the supremum runs over all bounded continuous functions u and v or (in $\mathbb{L}^1(\mu)$ and $\mathbb{L}^1(\nu)$ respectively) satisfying, for all $(x, y) \in \mathbb{I} \times \mathbb{I}$,

$$u(x) - v(y) \leq c(x, y)$$

If the cost function is given by a distance function $d(x, y) = c(x, y)$ on $\mathbb{I} \times \mathbb{I}$, then we obtain the Kantorovich-Rubinstein Theorem.

Théorème 5.6.2 (*Kantorovich-Rubinstein Theorem*)

Let d' be a distance on \mathbb{I} , lower semi-continuous with to d (not necessarily the initial distance of (\mathbb{I}, d)). Then

$$T_{d'}(\mu, \nu) = \sup \left(\int_0^1 u d\mu - \int_0^1 v d\nu \right)$$

where the supremum runs over all 1-Lipschitz (with respect to d') functions u . The functions u may be assumed furthermore to be bounded.

When $c = d^p$ where d is the metric on \mathbb{I} and $p \geq 1$ such that $\int_0^1 d^p(x, x_0) d\mu(x) < \infty$ for some $x_0 \in \mathbb{I}$, the optimal transportation cost gives rise to the so-called Wasserstein distance

$$W_p(\mu, \nu) = \inf \left(\int_{\mathbb{I} \times \mathbb{I}} d^p(x, y) d\pi(x, y) \right)^{\frac{1}{p}} = (T_{d^p}(\mu, \nu))^{\frac{1}{p}}$$

From a more probabilistic point of view,

$$W_p(\mu, \nu) = \inf (\mathbb{E} (d^p(X, Y)))^{\frac{1}{p}}$$

where the infimum is over all random variables X and Y with respective laws μ and ν . For more details see [2],[65].

Though the relative entropy (or Kullback information) of ν with respect to μ is given by

$$H(\nu|\mu) = \begin{cases} \int_0^1 f \log f d\mu, & \text{if } \nu \ll \mu \text{ and } f := \frac{d\nu}{d\mu} \\ +\infty, & \text{otherwise} \end{cases}$$

The usual transportation inequalities for a given $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{I})$, introduced by Marton [51] and Talagrand [63], compare the Wasserstein metric $W_p(\nu, \mu)$ with the relative entropy $H(\nu, \mu)$. The following extension of these inequalities

$$\alpha (T_c(\nu, \mu)) \leq H(\nu, \mu), \quad \forall \nu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{I}), \quad (T_c H)$$

has recently been studied by Gozlan and Léonard [40]. We note that $\alpha : [0, \infty] \rightarrow [0, \infty]$ is some left continuous and nondecreasing function with $\alpha(0) = 0$ and we denote

$$\alpha^*(\lambda) := \sup_{r \geq 0} (\lambda r - \alpha(r))$$

the monotone conjugate of α . With α above, one sees that α^* is the restriction to $[0, \infty)$ of the usual convex conjugate $\tilde{\alpha}^*(\lambda) = \sup_{r \in \mathbb{R}} (\lambda r - \tilde{\alpha}(r))$ of $\tilde{\alpha}(r) = 1_{r \geq 0} \alpha(r)$, $r \in \mathbb{R}$. Let us denote $\mu(\nu) := \int_E \nu d\mu$. However, instead of the transportation-entropy inequality $T_c H$, Guillin \propto AL in [42], focus on the following transportation-information inequality

$$\alpha (T_c(\nu, \mu)) \leq I(\nu|\mu), \quad \forall \nu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{I}), \quad (T_c I)$$

5.6. APPENDIX

where $I(\nu|\mu)$ is the Fisher-Donsker -Varadhan information of ν with respect to μ defined by

$$I(\nu|\mu) = \begin{cases} \varepsilon(\sqrt{f}, \sqrt{f}), & \text{if } \nu = f\mu, \quad \sqrt{f} \in \mathbb{D} \\ +\infty, & \text{otherwise} \end{cases}$$

which is associated with the Dirichlet form ε on $L^2(\mu)$ with domain \mathbb{D} . So, they provide the following result.

Théorème 5.6.3 *Guillin and AL [42]*

Let $((X_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P}_\mu)$ be a stationary ergodic Markov process with the symmetrized Dirichlet form $(\varepsilon, \mathbb{D})$, Φ a subset of the bounded measurable functions and $\alpha : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty]$ a left continuous nondecreasing function such that $\alpha(0) = 0$. Consider the following properties which are equivalent

(a) The following transportation inequality holds

$$\alpha(T_\Phi(\nu, \mu)) \leq I(\nu/\mu) \quad (T_\Phi I)$$

(b) For all $(u, v) \in \Phi$ and $\lambda, t \geq 0$

$$\|P_t^{\lambda u}\|_{L^2(\mu)} \leq e^{t[\lambda\mu(v) + \alpha^*(\lambda)]}$$

Where the $P_t^{\lambda u}$ is the Feynman-Kac semigroup defined by :

$$P_t^u f(x) := \mathbb{E}_x f(X_t) \exp\left(\int_0^t u(X_s) ds\right)$$

(b') For all $(u, v) \in \Phi$ and $\lambda, t \geq 0$

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \mathbb{E}_\mu \exp\left(\int_0^t u(X_s) ds\right) \leq \lambda\mu(v) + \alpha^*(\lambda)$$

(c) For any initial measure $\nu = f\mu$ with $f \in L^2(\mu)$ and for all $(u, v) \in \Phi$ and $r, t > 0$

$$\mathbb{P}_\nu\left(\frac{1}{t} \int_0^t u(X_s) ds \geq \mu(v) + r\right) \leq \left\| \frac{d\nu}{d\mu} \right\|_2 e^{-t\alpha(r)}$$

(c') For all $(u, v) \in \Phi$ and for any $r \geq 0$, $\exists \beta \in \mathcal{M}_1(\mathbb{I})$, $\beta \ll \mu$, $\frac{d\beta}{d\mu} \in L^2(\mu)$

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \mathbb{P}_\beta\left(\frac{1}{t} \int_0^t u(X_s) ds \geq \mu(v) + r\right) \leq -\alpha(r)$$

Chapitre 6

Moderate deviation principles for bifurcating Markov process : Case of functions dependent of one variable

Authors : *Valère Bitseki Penda, Gorgui Gackou*

abstract

The main purpose of this article is to establish moderate deviation principles for additive functionals of bifurcating Markov chains. Bifurcating Markov chains are a class of processes which are indexed by a regular binary tree. They can be seen as the models which represent the evolution of a trait along a population where each individual has two offsprings. Unlike the previous results of Bitseki, Djellout & Guillin (2014), we consider here the case of functions which depend only on one variable. So, mainly inspired by the recent works of Bitseki & Delmas (2020) about the central limit theorem for general additive functionals of bifurcating Markov chains, we give here a moderate deviation principle for additive functionals of bifurcating Markov chains when the functions depend on one variable. This work is done under the uniform geometric ergodicity and the uniform ergodic property based on the second spectral gap assumptions. The proofs of our results are based on martingale decomposition recently developed by Bitseki & Delmas (2020) and on results of Dembo (1996), Djellout (2001) and Puhalski (1997).

6.1 Introduction

First, we give a general definition of a moderate deviation principles. Let $(Z_n)_{n \geq 0}$ be a sequence of random variables with values in S endowed with its Borel σ -field $\mathcal{B}(S)$ and let $(s_n)_{n \geq 0}$ be a positive sequence that converges to

$+\infty$. We assume that Z_n/s_n converges in probability to 0 and that $Z_n/\sqrt{s_n}$ converges in distribution to a centered Gaussian law. Let $I : S \rightarrow \mathbb{R}^+$ be a lower semicontinuous function, that is for all $c > 0$ the sub-level set $\{x \in S, I(x) \leq c\}$ is a closed set. Such a function I is called *rate function* and it is called *good rate function* if all its sub-level sets are compact sets. Let $(b_n)_{n \geq 0}$ be a positive sequence such that $b_n \rightarrow +\infty$ and $b_n/\sqrt{s_n} \rightarrow 0$ as n goes to $+\infty$.

Définition 6.1.1 (Moderate deviation principle, MDP)

We say that $Z_n/(b_n\sqrt{s_n})$ satisfies a moderate deviation principle in S with speed b_n^2 and the rate function I if, for any $A \in \mathcal{B}(S)$,

$$\begin{aligned} - \inf_{x \in A^\circ} I(x) &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n^2} \log \mathbb{P}\left(\frac{Z_n}{b_n\sqrt{s_n}} \in A\right) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n^2} \log \mathbb{P}\left(\frac{Z_n}{b_n\sqrt{s_n}} \in A\right) \\ &\leq - \inf_{x \in \bar{A}} I(x) \end{aligned}$$

where A° and \bar{A} denote respectively the interior and the closure of A .

Bifurcating Markov chains (BMC, for short) are a class of stochastic processes indexed by regular binary tree. They are appropriate for example in the modeling of cell lineage data when each cell in one generation gives birth to two offspring in the next one. Recently, they have received a great deal of attention because of the experiments of biologists on aging of Escherichia Coli (E. Coli, for short). E. Coli is a rod-shaped bacterium which reproduces by dividing in two, thus producing two daughters : one of type 0 which has the old pole of the mother and the other of type 1 which has the new pole of the mother. The genealogy of the cells may be entirely described by a binary tree. To the best of our knowledge, the term bifurcating Markov chains appears for the first time in the works of Basawa and Zhou [3]. Thereafter, it was Guyon in [43] who had introduced and properly studied the theory of BMC. The first example of BMC, named bifurcating autoregressive process (BAR, for short), were introduced by Cowan and Staudte [14] in order to study the mechanisms of cell division in Escherichia Coli. Since this work of Cowan and Staudte, the BAR process has been widely studied in the literature and several extensions have been made. In particular, Guyon, in [43], have used an extension of BAR process to get statistical evidence of aging in E.Coli.

In this paper, we are interested in moderate deviation principles(MDP, for short) for additive functionals of bifurcating Markov chains. The MDP can be seen as an intermediate behavior between the central limit theorem and large deviation. Usually, the MDP exhibits a simpler rate function inherited from the approximated Gaussian process, and holds for a larger class of dependent random variables than the large deviation principle. Unlike the results given in [7], we treat here the case of functions which depends on one variable only. For this type of additive functionals, the martingale decomposition done in [7] is no longer valid. Indeed, as explained for e.g. in [19] Remark 1.7, the error term on the last generation is not negligible. Note that recently, Bitseki and Delmas [6] have studied central limit theorem for

additive functionals of bifurcating Markov chain. They have studied the case where the functions depend only on the trait of a single individual for BMC. Bitseki and Delmas [6] observes three regimes (sub-critical, critical, super-critical), which correspond to a competition between the reproducing rate (a mother has two daughters) and the ergodicity rate for the evolution of the trait along a lineage taken uniformly at random. This phenomenon already appears in the works of Athreya [1]. Here we investigate the moderate deviation principles for MBC depending only on one variable for the two cases : sub-critical and critical regimes. The super-critical regime, which require another way of centering will be done in a future work.

The rest of the paper is organized as follows. In Section 6.2, we present the model of bifurcating Markov chains. In Section 6.3, we give some notations and the main assumptions for our results. In Section 6.4, we set our main results : the sub-critical case in Section 6.4.1 and the critical case in Section 6.4.2. Section 6.5 is dedicated to the proof of the main result in sub-critical case and Section 6.6 is dedicated to the proof of the main result in Critical case. In Section 6.7, we illustrate numerically our results. Finally, in Section 6.8, we give some useful results.

6.2 The model of bifurcating Markov chain

6.2.1 The regular binary tree associated to BMC models

We denote by \mathbb{N} (resp. \mathbb{N}^*) the space of (resp. positive) natural integers. We set $\mathbb{T}_0 = \mathbb{G}_0 = \{\emptyset\}$, $\mathbb{G}_k = \{0, 1\}^k$ and $\mathbb{T}_k = \bigcup_{0 \leq r \leq k} \mathbb{G}_r$ for $k \in \mathbb{N}^*$, and $\mathbb{T} = \bigcup_{r \in \mathbb{N}} \mathbb{G}_r$. The set \mathbb{G}_k corresponds to the k -th generation, \mathbb{T}_k to the tree up to the k -th generation, and \mathbb{T} the complete binary tree. One can see that the genealogy of the cells is entirely described by \mathbb{T} (each vertex of the tree designates an individual). For $i \in \mathbb{T}$, we denote by $|i|$ the generation of i ($|i| = k$ if and only if $i \in \mathbb{G}_k$) and $iA = \{ij; j \in A\}$ for $A \subset \mathbb{T}$, where ij is the concatenation of the two sequences $i, j \in \mathbb{T}$, with the convention that $\emptyset i = i\emptyset = i$.

6.2.2 The probability kernels associated to BMC models

Let (S, S) be a measurable space. For any $q \in \mathbb{N}^*$, we denote by $\mathcal{B}(S^q)$ (resp. $\mathcal{B}_b(S^q)$, resp. $\mathcal{C}_b(S^q)$) the space of (resp. bounded, resp. bounded continuous) \mathbb{R} -valued measurable functions defined on S^q . For all $q \in \mathbb{N}^*$, we set $S^{\otimes q} = S \otimes \dots \otimes S$. Let \mathcal{P} be a probability kernel on $(S, S^{\otimes 2})$, that is : $\mathcal{P}(\cdot, A)$ is measurable for all $A \in S^{\otimes 2}$, and $\mathcal{P}(x, \cdot)$ is a probability measure on $(S^2, S^{\otimes 2})$ for all $x \in S$. For any $g \in \mathcal{B}_b(S^3)$ and $h \in \mathcal{B}_b(S^2)$, we set for $x \in S$:

$$(\mathcal{P}g)(x) = \int_{S^2} g(x, y, z) \mathcal{P}(x, dy, dz) \quad \text{and} \quad (\mathcal{P}h)(x) = \int_{S^2} h(y, z) \mathcal{P}(x, dy, dz). \quad (6.1)$$

We define $(\mathcal{P}g)$ (resp. $(\mathcal{P}h)$), or simply $\mathcal{P}g$ for $g \in \mathcal{B}(S^3)$ (resp. $\mathcal{P}h$ for $h \in \mathcal{B}(S^2)$), as soon as the corresponding integral eq $:\mathcal{P}g$ is well defined, and we have that $\mathcal{P}g$ and $\mathcal{P}h$ belong to $\mathcal{B}(S)$. we denote by \mathcal{P}_0 , \mathcal{P}_1 and \mathcal{Q} respectively the first and the second marginal of \mathcal{P} , and the mean of \mathcal{P}_0 and \mathcal{P}_1 , that is, for all $x \in S$ and $B \in \mathcal{S}$

$$\mathcal{P}_0(x, B) = \mathcal{P}(x, B \times S), \quad \mathcal{P}_1(x, B) = \mathcal{P}(x, S \times B) \quad \text{and} \quad \mathcal{Q} = \frac{(\mathcal{P}_0 + \mathcal{P}_1)}{2}.$$

Now let us give a precise definition of bifurcating Markov chain.

Définition 6.2.1 (Bifurcating Markov Chains, see [43, 6])

We say a stochastic process indexed by \mathbb{T} , $X = (X_i, i \in \mathbb{T})$, is a bifurcating Markov chain (BMC) on a measurable space (S, \mathcal{S}) with initial probability distribution ν on (S, \mathcal{S}) and probability kernel on $S \times S^{\otimes 2}$ if :

- (Initial distribution.) *The random variable X_0 is distributed as ν .*
- (Branching Markov property.) *For any sequence $(g_i, i \in \mathbb{T})$ of functions belonging to $\mathcal{B}_b(S^3)$ and for all $k \geq 0$, we have*

$$\mathbb{E} \left[\prod_{i \in \mathbb{G}_k} g_i(X_i, X_{i_0}, X_{i_1}) | \sigma(X_j; j \in \mathbb{T}_k) \right] = \prod_{i \in \mathbb{G}_k} g_i(X_i).$$

Following [43], we introduce an auxiliary Markov chain $Y = (Y_n, n \in \mathbb{N})$ on (S, \mathcal{S}) with $Y_0 = X_1$ and transition probability \mathcal{Q} . The chain $(Y_n, n \in \mathbb{N})$ corresponds to a random lineage taken in the population. We shall write \mathbb{E}_x when $X_0 = x$ (i.e. the initial distribution ν is the Dirac mass at $x \in S$).

6.3 Notations and assumptions

For $f \in \mathcal{B}_b(S)$, we set $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)|, x \in S\}$. We will work with the following ergodic property.

Assumption 6.3.1 *There exists a probability measure μ on (S, \mathcal{S}) , a positive real number M and $\alpha \in (0, 1)$ such that for all $f \in \mathcal{B}_b(S)$:*

$$|\mathcal{Q}^n f - \langle \mu, f \rangle| \leq M \alpha^n \|f\|_\infty \quad \text{for all } n \in \mathbb{N}. \quad (6.2)$$

We consider the stronger ergodic property based on a second spectral gap.

Assumption 6.3.2 *There exists a probability measure μ on (S, \mathcal{S}) , a positive real number M , $\alpha \in (0, 1)$, a finite non-empty set J of indices, distinct complex eigenvalues $\{\alpha_j, j \in J\}$ of the operator \mathcal{Q} with $|\alpha_j| = \alpha$, non-zero complex projectors $\{\mathcal{R}_j, j \in J\}$ defined on $\mathbb{C}\mathcal{B}_b(S)$, the \mathbb{C} -vector space spanned by $\mathcal{B}_b(S)$, such that $\mathcal{R}_j \circ \mathcal{R}_{j'} = \mathcal{R}_{j'} \circ \mathcal{R}_j = 0$ for all $j \neq j'$ (so that $\sum_{j \in J} \mathcal{R}_j$ is also a projector defined on $\mathbb{C}\mathcal{B}_b(S)$) and a positive sequence $(\beta_n, n \in \mathbb{N})$ converging to 0, such that for all $f \in \mathcal{B}_b(S)$, with $\theta_j = \alpha_j / \alpha$:*

$$\left| \mathcal{Q}^n(f) - \langle \mu, f \rangle - \alpha^n \sum_{j \in J} \theta_j^n \mathcal{R}_j(f) \right| \leq M \beta_n \alpha^n \|f\|_\infty \quad \text{for all } n \in \mathbb{N}. \quad (6.3)$$

Without loss of generality, we shall assume that the sequence $(\beta_n, n \in \mathbb{N})$ in Assumption 6.3.2 is non-increasing and bounded from above by 1. This assumption will be used when $\alpha = 1/\sqrt{2}$. For $f \in \mathcal{B}_b(S)$, \tilde{f} and \hat{f} will denote the functions defined by :

$$\tilde{f} = f - \langle f, \mu \rangle \quad \text{and} \quad \hat{f} = \tilde{f} - \sum_{j \in J} \mathcal{R}_j(f). \quad (6.4)$$

Let $\mathfrak{f} = (f_\ell, \ell \in \mathbb{N})$ be a sequence of elements of $\mathcal{B}_b(S)$. We will assume in the sequel that

$$\sup_{\ell \in \mathbb{N}} \{\|f_\ell\|_\infty\} = c_\infty < +\infty, \quad (6.5)$$

in such a way that (6.2) and (6.3) are uniformly satisfied by the sequence \mathfrak{f} . We set for $n \in \mathbb{N}$ and $i \in \mathbb{T}_n$:

$$N_{n,i}(\mathfrak{f}) = \sum_{\ell=0}^{n-|i|} N_{n,i}^\ell(f_\ell) = |\mathbb{G}_n|^{-1/2} \sum_{\ell=0}^{n-|i|} M_{i\mathbb{G}_{n-|i|-\ell}}(\tilde{f}_\ell). \quad (6.6)$$

We deduce that $\sum_{i \in \mathbb{G}_k} N_{n,i}(\mathfrak{f}) = |\mathbb{G}_n|^{-1/2} \sum_{\ell=0}^{n-k} M_{\mathbb{G}_{n-\ell}}(\tilde{f}_\ell)$ which gives for $k = 0$ that

$$N_{n,\emptyset}(\mathfrak{f}) = |\mathbb{G}_n|^{-1/2} \sum_{\ell=0}^n M_{\mathbb{G}_{n-\ell}}(\tilde{f}_\ell).$$

To study the asymptotics of $N_{n,\emptyset}(\mathfrak{f})$, it is convenient to write for $n \geq k \geq 1$:

$$N_{n,\emptyset}(\mathfrak{f}) = |\mathbb{G}_n|^{-1/2} \sum_{r=0}^{k-1} M_{\mathbb{G}_r}(\tilde{f}_{n-r}) + \sum_{i \in \mathbb{G}_k} N_{n,i}(\mathfrak{f}). \quad (6.7)$$

Asymptotic normality for $N_{n,\emptyset}(\mathfrak{f})$ have been studied in [6]. Our aim in this paper is to complete this result by studying moderate deviation principles for $N_{n,\emptyset}(\mathfrak{f})$. More precisely, given a sequence $(b_n, n \in \mathbb{N})$ such that :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty \quad \text{and} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{\sqrt{|\mathbb{G}_n|}} = 0,$$

our aim is to prove that $b_n^{-1} N_{n,\emptyset}(\mathfrak{f})$ satisfies a moderate deviation principle with speed b_n^2 and rate function I defined by

$$I(x) = \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} \left\{ \lambda x - \frac{1}{2} \lambda^2 \Sigma(\mathfrak{f})^{-1} \right\} = \begin{cases} \frac{1}{2} \Sigma(\mathfrak{f})^{-1} x^2 & \text{if } \Sigma(\mathfrak{f}) \neq 0 \\ +\infty & \text{if } \Sigma(\mathfrak{f}) = 0, \end{cases} \quad (6.8)$$

where

$$\Sigma(\mathfrak{f}) = \begin{cases} \Sigma^{\text{sub}}(\mathfrak{f}) = \Sigma_1^{\text{sub}}(\mathfrak{f}) + 2\Sigma_2^{\text{sub}}(\mathfrak{f}) & \text{if } 2\alpha^2 < 1 \\ \Sigma^{\text{crit}}(\mathfrak{f}) = \Sigma_1^{\text{crit}}(\mathfrak{f}) + 2\Sigma_2^{\text{crit}}(\mathfrak{f}) & \text{if } 2\alpha^2 = 1, \end{cases}$$

with

$$\Sigma_1^{\text{sub}}(f) = \sum_{\ell \geq 0} 2^{-\ell} \langle \mu, \tilde{f}_\ell^2 \rangle + \sum_{\ell \geq 0, k \geq 0} 2^{k-\ell} \langle \mu, ((\mathcal{Q}^k \tilde{f}_\ell) \otimes^2) \rangle, \quad (6.9)$$

$$\Sigma_2^{\text{sub}}(f) = \sum_{0 \leq \ell < k} 2^{-\ell} \langle \mu, \tilde{f}_k \mathcal{Q}^{k-\ell} \tilde{f}_\ell \rangle + \sum_{\substack{0 \leq \ell < k \\ r \geq 0}} 2^{r-\ell} \langle \mu, (\mathcal{Q}^r \tilde{f}_k \otimes_{\text{sym}} \mathcal{Q}^{k-\ell+r} \tilde{f}_\ell) \rangle, \quad (6.10)$$

$$\Sigma_1^{\text{crit}}(f) = \sum_{k \geq 0} 2^{-k} \langle \mu, f_{k,k}^* \rangle = \sum_{k \geq 0} 2^{-k} \sum_{j \in J} \langle \mu, (\mathcal{R}_j(f_k) \otimes_{\text{sym}} \overline{\mathcal{R}}_j(f_k)) \rangle, \quad (6.11)$$

$$\Sigma_2^{\text{crit}}(f) = \sum_{0 \leq \ell < k} 2^{-(k+\ell)/2} \langle \mu, f_{k,\ell}^* \rangle, \quad (6.12)$$

and where for $k, \ell \in \mathbb{N}$:

$$f_{k,\ell}^* = \sum_{j \in J} \theta_j^{\ell-k} \mathcal{R}_j(f_k) \otimes_{\text{sym}} \overline{\mathcal{R}}_j(f_\ell). \quad (6.13)$$

More precisely, our aim is to prove that

$$\begin{aligned} - \inf_{x \in A^\circ} I(x) &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n^2} \log \mathbb{P}(b_n^{-1} N_{n,0}(f) \in A) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n^2} \log \mathbb{P}(b_n^{-1} N_{n,0}(f) \in A) \\ &\leq - \inf_{x \in \bar{A}} I(x), \end{aligned}$$

where A° and \bar{A} denote respectively the interior and the closure of A . In particular, the latter asymptotic result implies that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n^2} \log \mathbb{P}(|b_n^{-1} N_{n,0}(f)| > \delta) = -I(\delta) \quad \forall \delta > 0.$$

We note that $2\alpha^2 < 1$ corresponds to the sub-critical regime and $2\alpha^2 = 1$ to the critical regime. The super-critical regime, that is the case where $2\alpha^2 > 1$, is not treated in this paper. Indeed, for this case, another way to centered the functions is necessary to get moderate deviation principles. This will be done in a future work.

rem Let $f \in \mathcal{B}_i(S)$. If the sequence $\mathfrak{f} = (f_\ell, \ell \in \mathbb{N})$ is defined by : $f_0 = f$ and $f_\ell = 0$ for all $\ell \geq 1$, then we have $N_{n,0}(\mathfrak{f}) = |\mathbb{G}_n|^{-1/2} M_{\mathbb{G}_n}(\tilde{\mathfrak{f}})$ and $\Sigma(\mathfrak{f}) = \Sigma_{\mathbb{G}}(f)$, where

$$\Sigma_{\mathbb{G}}(f) = \begin{cases} \Sigma_{\mathbb{G}}^{\text{sub}}(f) = \langle \mu, \tilde{f}^2 \rangle + \sum_{k \geq 0} 2^k \langle \mu, (\mathcal{Q}^k \tilde{f} \otimes^2) \rangle & \text{if } 2\alpha^2 < 1 \\ \Sigma_{\mathbb{G}}^{\text{crit}}(f) = \sum_{j \in J} \langle \mu, (\mathcal{R}_j(f) \otimes_{\text{sym}} \overline{\mathcal{R}}_j(f)) \rangle & \text{if } 2\alpha^2 = 1, \end{cases}$$

If the sequence $\mathfrak{f} = (f_\ell, \ell \in \mathbb{N})$ is defined by : $f_\ell = f$ for all $\ell \in \mathbb{N}$, then we have $N_{n,0}(\mathfrak{f}) = |\mathbb{G}_n|^{-1/2} M_{\mathbb{T}_n}(\tilde{\mathfrak{f}}) = \sqrt{2-2^{-n}} |\mathbb{T}_n|^{-1/2} M_{\mathbb{T}_n}(\tilde{\mathfrak{f}})$ and $\Sigma(\mathfrak{f}) = \Sigma_{\mathbb{T}}(f)$, where

$$\Sigma_{\mathbb{T}}(f) = \begin{cases} \Sigma_{\mathbb{T}}^{\text{sub}}(f) = \Sigma_{\mathbb{G}}^{\text{sub}}(f) + 2\Sigma_{\mathbb{T},2}^{\text{sub}}(f) & \text{if } 2\alpha^2 < 1 \\ \Sigma_{\mathbb{T}}^{\text{crit}}(f) = \Sigma_{\mathbb{G}}^{\text{crit}}(f) + 2\Sigma_{\mathbb{T},2}^{\text{crit}}(f) & \text{if } 2\alpha^2 = 1, \end{cases}$$

with

$$\Sigma_{\mathbb{T},2}^{\text{sub}}(f) = \sum_{k \geq 1} \langle \mu, \tilde{f} \mathcal{Q}^k \tilde{f} \rangle + \sum_{\substack{k \geq 1 \\ r \geq 0}} 2^r \langle \mu, (\mathcal{Q}^r \tilde{f} \otimes_{\text{sym}} \mathcal{Q}^{r+k} \tilde{f}) \rangle,$$

$$\Sigma_{\mathbb{T},2}^{\text{crit}}(f) = \sum_{j \in J} \frac{1}{\sqrt{2}\theta_j - 1} \langle \mu, (\mathcal{R}_j(f) \otimes_{\text{sym}} \overline{\mathcal{R}}_j(f)) \rangle.$$

6.4 The main results

6.4.1 The sub-critical cases : $2\alpha^2 < 1$

In the sub-critical case, we consider a sequence $(b_n, n \in \mathbb{N})$ such that :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty \quad \text{and} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{\sqrt{|\mathbb{G}_n|}} = 0.$$

Then, we have the following result.

Théorème 6.4.1 *Let X be a BMC with kernel and initial distribution ν such that Assumption 6.3.1 is in force with $\alpha \in (0, 1/\sqrt{2})$. Let $\mathfrak{f} = (f_\ell, \ell \in \mathbb{N})$ be a sequence of elements of $\mathcal{B}_b(S)$ satisfying (6.5) and Assumption 6.3.1 uniformly. Then $b_n^{-1}N_{n,\emptyset}(\mathfrak{f})$ satisfies a moderate deviation principle with speed b_n^2 and rate function I defined in (6.8).*

As a direct consequence of Remark 6.3 and Theorem 6.4.1, we have the following result.

Corollary 6.4.2 *Let X be a BMC with kernel and initial distribution ν such that Assumption 6.3.1 is in force with $\alpha \in (0, 1/\sqrt{2})$. Let $f \in \mathcal{B}_b(S)$. Then $b_n^{-1}|\mathbb{G}_n|^{-1/2}M_{\mathbb{G}_n}(\tilde{f})$ and $b_n^{-1}|\mathbb{T}_n|^{-1/2}M_{\mathbb{T}_n}(\tilde{f})$ satisfy a moderate deviation principle with speed b_n^2 and rate function I defined in (6.8), with $\Sigma(\mathfrak{f})$ replaced respectively by $\Sigma_{\mathbb{G}}(f)$ and $\Sigma_{\mathbb{T}}(f)$.*

6.4.2 The critical cases : $2\alpha^2 = 1$

In this critical case, we consider a sequence $(b_n, n \in \mathbb{N})$ such that :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty \quad \text{and} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{\sqrt{n|\mathbb{G}_n|}} = 0 \tag{6.14}$$

and for some $a \in (0, 1)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n^2 n^2 2^{-n^a} = 0.$

Then, we have the following result.

Théorème 6.4.3 *Let X be a BMC with kernel and initial distribution ν such that Assumption 6.3.2 is in force with $\alpha = 1/\sqrt{2}$. Let $\mathfrak{f} = (f_\ell, \ell \in \mathbb{N})$ be a sequence of elements of $\mathcal{B}_b(S)$ satisfying (6.5) and Assumption 6.3.2 uniformly. Then $b_n^{-1}n^{-\frac{1}{2}}N_{n,\emptyset}(\mathfrak{f})$ satisfies a moderate deviation principle with speed b_n^2 and rate function I defined in (6.8).*

As a direct consequence of Remark 6.3 and Theorem 6.4.3, we have the following result.

Corollary 6.4.4 *Let X be a BMC with kernel and initial distribution ν such that Assumption 6.3.2 is in force with $\alpha = 1/\sqrt{2}$. Let $f \in \mathcal{B}_b(S)$. Then $b_n^{-1}(n|\mathbb{G}_n|)^{-1/2}M_{\mathbb{G}_n}(\tilde{f})$ and $b_n^{-1}(n|\mathbb{T}_n|)^{-1/2}M_{\mathbb{T}_n}(\tilde{f})$ satisfy a moderate deviation principle with speed b_n^2 and rate function I defined in (6.8), with $\Sigma(\mathfrak{f})$ replaced respectively by $\Sigma_{\mathbb{G}}(f)$ and $\Sigma_{\mathbb{T}}(f)$.*

6.5 Proof of Theorem 6.4.1

6.5.1 A quick overview of our strategy

Let $(p_n, n \in \mathbb{N})$ be a non-decreasing sequence of elements of \mathbb{N}^* such that :

$$p_n < \frac{n}{2}. \quad (6.15)$$

When there is no ambiguity, we write p for p_n .

Let $i, j \in \mathbb{T}$. We write $i \preceq j$ if $j \in i\mathbb{T}$. We denote by $i \wedge j$ the most recent common ancestor of i and j , which is defined as the only $u \in \mathbb{T}$ such that if $v \in \mathbb{T}$ and $v \preceq i, v \preceq j$ then $v \preceq u$. We also define the lexicographic order $i \leq j$ if either $i \preceq j$ or $v0 \preceq i$ and $v1 \preceq j$ for $v = i \wedge j$. Let $X = (X_i, i \in \mathbb{T})$ be a *BMC* with kernel and initial measure ν . For $i \in \mathbb{T}$, we define the σ -field :

$$\mathcal{F}_i = \{X_u; u \in \mathbb{T} \text{ such that } u \leq i\}.$$

By construction, the σ -fields $(\mathcal{F}_i; i \in \mathbb{T})$ are nested as $\mathcal{F}_i \subset \mathcal{F}_j$ for $i \leq j$.

We define for $n \in \mathbb{N}$, $i \in \mathbb{G}_{n-p_n}$ and $f \in F^{\mathbb{N}}$ the martingale increments :

$$\Delta_{n,i}(f) = N_{n,i}(f) - \mathbb{E}[N_{n,i}(f) | \mathcal{F}_i] \quad \text{and} \quad \Delta_n(f) = \sum_{i \in \mathbb{G}_{n-p_n}} \Delta_{n,i}(f). \quad (6.16)$$

Thanks to eq :def-NiF, we have :

$$\sum_{i \in \mathbb{G}_{n-p_n}} N_{n,i}(f) = |\mathbb{G}_n|^{-1/2} \sum_{\ell=0}^{p_n} M_{\mathbb{G}_{n-\ell}}(\tilde{f}_\ell) = |\mathbb{G}_n|^{-1/2} \sum_{k=n-p_n}^n M_{\mathbb{G}_k}(\tilde{f}_{n-k}).$$

Using the branching Markov property, and (6.6), we get for $i \in \mathbb{G}_{n-p_n}$:

$$\mathbb{E}[N_{n,i}(f) | \mathcal{F}_i] = \mathbb{E}[N_{n,i}(f) | X_i] = |\mathbb{G}_n|^{-1/2} \sum_{\ell=0}^{p_n} \mathbb{E}_{X_i} [M_{\mathbb{G}_{p_n-\ell}}(\tilde{f}_\ell)].$$

We deduce from eq :nof-D with $k = n - p_n$ that :

$$N_{n,\emptyset}(f) = \Delta_n(f) + R_0(n) + R_1(n), \quad (6.17)$$

with

$$R_0(n) = |\mathbb{G}_n|^{-1/2} \sum_{k=0}^{n-p_n-1} M_{\mathbb{G}_k}(\tilde{f}_{n-k}) \quad \text{and} \quad R_1(n) = \sum_{i \in \mathbb{G}_{n-p_n}} \mathbb{E}[N_{n,i}(f) | \mathcal{F}_i].$$

Our goals will be achieved if we prove the following :

$$\forall \delta > 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n^2} \log \mathbb{P}(|b_n^{-1} R_0(n)| > \delta) = -\infty; \quad (6.18)$$

$$\forall \delta > 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n^2} \log \mathbb{P}(|b_n^{-1} R_1(n)| > \delta) = -\infty; \quad (6.19)$$

$$b_n^{-1} \Delta_n(f) \quad \text{satisfies a MDP on } S \text{ with speed } b_n^2 \text{ and rate function } I. \quad (6.20)$$

Note that (6.18) and (6.19) mean that $R_0(n)$ and $R_1(n)$ are negligible in the sense of moderate deviations in such a way that from (6.54), $N_{n,0}(f)$ and $\Delta_n(f)$ satisfy the same moderate deviation principle (see Dembo and Zeitouni [21], chap. 4).

6.5.2 Proof of (6.18)

Using the Chernoff inequality, we have, for all $\lambda > 0$,

$$\mathbb{P}(b_n^{-1}R_0(n) > \delta) \leq \exp(-\lambda b_n |\mathbb{G}_n|^{1/2}) \mathbb{E} \left[\exp \left(\lambda \sum_{k=0}^{n-p-1} M_{\mathbb{G}_k}(\tilde{f}_{n-k}) \right) \right]. \quad (6.21)$$

For all $\ell \in \{0, \dots, n-p-1\}$, we set

$$\mathbb{I}_\ell = \mathbb{E} \left[\exp \left(\lambda \sum_{k=0}^{n-p-\ell-2} M_{\mathbb{G}_k}(\tilde{f}_{n-k}) \right) \exp \left(\lambda M_{\mathbb{G}_{n-p-\ell-1}} \left(\sum_{r=0}^{\ell} g_{p,r,\ell} \right) \right) \right],$$

where $g_{p,r,\ell} = 2^r \mathcal{Q}^r \tilde{f}_{p+\ell+1-r}$, with the convention that an empty sum is zero. For all $\ell \in \{0, \dots, n-p-2\}$, we have the following decomposition :

$$\mathbb{I}_\ell = \mathbb{E} \left[\exp \left(\lambda \sum_{k=0}^{n-p-\ell-2} M_{\mathbb{G}_k}(\tilde{f}_{n-k}) \right) \exp \left(\lambda M_{\mathbb{G}_{n-p-\ell-2}} \left(\sum_{r=0}^{\ell} 2 \mathcal{Q}(g_{p,r,\ell}) \right) \right) \mathbb{J}_\ell \right], \quad (6.22)$$

where

$$\mathbb{J}_\ell = \mathbb{E} \left[\exp \left(\lambda \sum_{i \in \mathbb{G}_{n-p-\ell-2}} \sum_{r=0}^{\ell} (g_{p,r,\ell}(X_{i0}) + g_{p,r,\ell}(X_{i1}) - 2\mathcal{Q}(g_{p,r,\ell})(X_i)) \right) \middle| \mathcal{H}_{n-p-\ell-2} \right].$$

Using branching Markov property, we get

$$\mathbb{J}_\ell = \prod_{i \in \mathbb{G}_{n-p-\ell-2}} \mathbb{E}_{X_i} \left[\exp \left(\lambda \sum_{r=0}^{\ell} (g_{p,r,\ell}(X_{i0}) + g_{p,r,\ell}(X_{i1}) - 2\mathcal{Q}(g_{p,r,\ell})(X_i)) \right) \right].$$

Using (6.2) and (6.5), we get

$$\left| \sum_{r=0}^{\ell} (g_{p,r,\ell}(X_{i0}) + g_{p,r,\ell}(X_{i1}) - 2\mathcal{Q}(g_{p,r,\ell})(X_i)) \right| \leq 2M c_\infty \sum_{r=0}^{\ell} (2\alpha)^r.$$

Using Lemma 6.8.2 and the latter inequality, we get, for all $i \in \mathbb{G}_{n-p-\ell-2}$,

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_{X_i} \left[\exp \left(\lambda \sum_{r=0}^{\ell} (g_{p,r,\ell}(X_{i0}) + g_{p,r,\ell}(X_{i1}) - 2\mathcal{Q}(g_{p,r,\ell})(X_i)) \right) \right] \\ & \leq \exp \left(2\lambda^2 M^2 c_\infty^2 (1 + \alpha)^2 a_\ell^2 \right) \end{aligned}$$

with $a_\ell = \sum_{r=0}^{\ell} (2\alpha)^r$. The latter inequality implies that

$$\mathbb{J}_\ell \leq \exp\left(2\lambda^2 M^2 c_\infty^2 (1 + \alpha)^2 a_\ell^2 |\mathbb{G}_{n-p-\ell-2}|\right). \quad (6.23)$$

From (6.22) and (6.23), it follows that

$$\mathbb{I}_\ell \leq \exp\left(2\lambda^2 M^2 c_\infty^2 (1 + \alpha)^2 a_\ell^2 |\mathbb{G}_{n-p-\ell-2}|\right) \mathbb{I}_{\ell+1}. \quad (6.24)$$

Using the recurrence (6.24) for all $\ell \in \{0, \dots, n-p-2\}$ for the first inequality, (6.3) and (6.5) for the second inequality, we are led to

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\exp \left(\lambda \sum_{k=0}^{n-p-1} M_{\mathbb{G}_k}(\tilde{f}_{n-k}) \right) \right] = \mathbb{I}_0 \\ & \leq \exp \left(2\lambda^2 M^2 c_\infty^2 (1 + \alpha)^2 \sum_{\ell=0}^{n-p-2} a_\ell^2 |\mathbb{G}_{n-p-\ell-2}| \right) \mathbb{I}_{n-p-1} \\ & \leq \exp \left(2\lambda^2 M^2 c_\infty^2 (1 + \alpha)^2 \sum_{\ell=0}^{n-p-2} a_\ell^2 |\mathbb{G}_{n-p-\ell-2}| + \lambda c_\infty M \sum_{r=0}^{n-p-1} (2\alpha)^{r+1} \right). \end{aligned}$$

We have

$$\sum_{\ell=0}^{n-p-2} a_\ell^2 |\mathbb{G}_{n-p-\ell-2}| \leq \begin{cases} 6 |\mathbb{G}_{n-p-1}| & \text{if } 2\alpha \leq 1 \\ \frac{2\alpha^2}{(2\alpha-1)^2(1-2\alpha^2)} |\mathbb{G}_{n-p-1}| & \text{if } 1 < 2\alpha < \sqrt{2} \\ \frac{1}{(2\alpha-1)^2} (n-p-1) |\mathbb{G}_{n-p-1}| & \text{if } 2\alpha^2 = 1 \\ \frac{1}{(2\alpha-1)^2(2\alpha^2-1)} (2\alpha)^{2(n-p-1)} & \text{if } 2\alpha^2 > 1 \end{cases}$$

It follows from (6.21) that for all $\lambda > 0$, there exists a positive constant c_α such that

$$\mathbb{P}(b_n^{-1} R_0(n) > \delta) \leq \exp\left(-\lambda b_n |\mathbb{G}_n|^{1/2} + c_\alpha \lambda^2 |\mathbb{G}_{n-p}| + c_\alpha \lambda (1 + (2\alpha)^{n-p})\right). \quad (6.25)$$

Taking $\lambda = 2^{-1} c_\alpha^{-1} \delta b_n |\mathbb{G}_p| |\mathbb{G}_n|^{-1/2}$ in (6.25), we get, for some positive constant $c_{\alpha,\delta}$,

$$\mathbb{P}(b_n^{-1} R_0(n) > \delta) \leq \exp\left(-\frac{c_{\alpha,\delta} b_n^2 |\mathbb{G}_p| \delta^2}{4c_\alpha}\right).$$

Doing the same thing for the sequence $-f$ instead of f , we conclude that

$$\mathbb{P}\left(|b_n^{-1} R_0(n)| > \delta\right) \leq 2 \exp\left(-\frac{c_{\alpha,\delta} b_n^2 |\mathbb{G}_p| \delta^2}{4c_\alpha}\right). \quad (6.26)$$

In (6.26), taking the log, dividing by b_n^2 and letting n goes to infinity, we get the result.

Remarque 6.5.1 *Let $f \in \mathcal{B}_b(S)$. Since we will use frequently this type of inequality, we give here a general procedure to upper-bound the probability*

$\mathbb{P}(|\mathbb{G}_{n-p}|^{-1}M_{\mathbb{G}_{n-p}}(\tilde{f})| > \delta)$. From Chernoff inequality, we have, for all $\lambda > 0$,

$$\mathbb{P}\left(|\mathbb{G}_{n-p}|^{-1}M_{\mathbb{G}_{n-p}}(\tilde{f})| > \delta\right) \leq \exp(-\lambda\delta|\mathbb{G}_{n-p}|)\mathbb{E}\left[\exp\left(\lambda M_{\mathbb{G}_{n-p}}(\tilde{f})\right)\right]. \quad (6.27)$$

For all $m \in \{0, \dots, n-p\}$, we set

$$\mathbb{I}_m = \mathbb{E}\left[\exp\left(2^m\lambda M_{\mathbb{G}_{n-p-m}}(\mathcal{Q}^m\tilde{f})\right)\right].$$

Using the branching Markov property, we have

$$\mathbb{I}_m = \mathbb{E}\left[\exp\left(2^{m+1}\lambda M_{\mathbb{G}_{n-p-m-1}}(\mathcal{Q}^{m+1}\tilde{f})\right)\mathbb{J}_m\right],$$

where

$$\mathbb{J}_m = \prod_{i \in \mathbb{G}_{n-p-m-1}} \mathbb{E}_{X_i}\left[\exp\left(2^m\lambda\left(\mathcal{Q}^m\tilde{f}(X_{i_0}) + \mathcal{Q}^m\tilde{f}(X_{i_1}) - 2\mathcal{Q}^{m+1}\tilde{f}(X_i)\right)\right)\right].$$

Using (6.2) and Lemma 6.8.2, we have the following upper-bound :

$$\mathbb{J}_m \leq \exp\left(\lambda^2\|f\|_\infty^2 M^2(1+\alpha)^2(2\alpha^2)^m|\mathbb{G}_{n-p}|\right).$$

This implies that

$$\mathbb{I}_m \leq \exp\left(\lambda^2\|f\|_\infty^2 M^2(1+\alpha)^2(2\alpha^2)^m|\mathbb{G}_{n-p}|\right)\mathbb{I}_{m+1}. \quad (6.28)$$

Using the recurrence relation (6.28) and (6.2) (to upper-bound \mathbb{I}_{n-p}), we are led to

$$\mathbb{I}_0 \leq \exp\left(\lambda^2\|f\|_\infty^2 M^2(1+\alpha)^2 a_{\alpha,n}|\mathbb{G}_{n-p}| + \lambda\|f\|_\infty M(2\alpha)^{n-p}\right), \quad (6.29)$$

where $a_{\alpha,n} = \sum_{m=0}^{n-p-1} (2\alpha^2)^m$. We set $a_\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{\alpha,n}$, which is finite since $2\alpha^2 < 1$. Taking $\lambda = \delta / (2\|f\|_\infty^2 M^2(1+\alpha)^2 a_\alpha)$ in (6.27) and using (6.29), we are led to

$$\mathbb{P}\left(|\mathbb{G}_{n-p}|^{-1}M_{\mathbb{G}_{n-p}}(\tilde{f})| > \delta\right) \leq \exp\left(-\frac{\delta^2|\mathbb{G}_{n-p}|}{4\|f\|_\infty^2 M^2(1+\alpha)^2 a_\alpha} \left(1 - \frac{2\|f\|_\infty M\alpha^{n-p}}{\delta}\right)\right).$$

Finally, since we can do the same thing for $-f$ instead of f , we conclude that

$$\mathbb{P}\left(|\mathbb{G}_{n-p}|^{-1}M_{\mathbb{G}_{n-p}}(\tilde{f})| > \delta\right) \leq 2 \exp\left(-\frac{\delta^2|\mathbb{G}_{n-p}|}{4\|f\|_\infty^2 M^2(1+\alpha)^2 a_\alpha} \left(1 - \frac{2\|f\|_\infty M\alpha^{n-p}}{\delta}\right)\right). \quad (6.30)$$

6.5.3 proof of (6.19)

We set $g_p = \sum_{\ell=0}^p 2^{p-\ell} \mathcal{Q}^{p-\ell} \tilde{f}_\ell$ in such a way that using the definition of $R_1(n)$, we have

$$\mathbb{P}\left(b_n^{-1}|R_1(n)| > \delta\right) = \mathbb{P}\left(|\mathbb{G}_{n-p}|^{-1}\left|M_{\mathbb{G}_{n-p}}(g_p)\right| > \delta b_n |\mathbb{G}_n|^{-1/2} |\mathbb{G}_p|\right).$$

Using (6.2) and (6.5), we have

$$\|g_p\|_\infty \leq \begin{cases} c_\infty M(p+1) & \text{if } 2\alpha \leq 1 \\ c_\alpha c_\infty M & \text{if } 1 < 2\alpha < \sqrt{2}. \end{cases}$$

Applying (6.30) to g_p and $\delta b_n |\mathbb{G}_n|^{-1/2} |\mathbb{G}_p|$, we get, for n going to infinity and for some positive constant $C_{\alpha,\delta}$,

$$\mathbb{P}\left(b_n^{-1} |R_1(n)| > \delta\right) \leq \begin{cases} 2 \exp(-C_{\alpha,\delta} \delta^2 b_n^2 |\mathbb{G}_p| p^{-2}) & \text{if } 2\alpha \leq 1 \\ 2 \exp(-C_{\alpha,\delta} \delta^2 b_n^2 (2\alpha^2)^{-p}) & \text{if } 1 < 2\alpha < \sqrt{2}. \end{cases}$$

Finally, (6.19) follows by taking the log, dividing by b_n^2 and letting n goes to infinity in the latter inequality.

6.5.4 Proof of (6.20) : Moderate deviations principle for $b_n^{-1} \Delta_n(f)$

First we study the bracket of $\Delta_n(f)$:

$$V(n) = \sum_{i \in \mathbb{G}_{n-p_n}} \mathbb{E} \left[\Delta_{n,i}(f)^2 | \mathcal{F}_i \right].$$

Using (6.6) and (6.16), we write :

$$V(n) = |\mathbb{G}_n|^{-1} \sum_{i \in \mathbb{G}_{n-p_n}} \mathbb{E}_{X_i} \left[\left(\sum_{\ell=0}^{p_n} M_{\mathbb{G}_{p_n-\ell}}(\tilde{f}_\ell) \right)^2 \right] - R_2(n) = V_1(n) + 2V_2(n) - R_2(n), \quad (6.31)$$

with :

$$\begin{aligned} V_1(n) &= |\mathbb{G}_n|^{-1} \sum_{i \in \mathbb{G}_{n-p_n}} \sum_{\ell=0}^{p_n} \mathbb{E}_{X_i} \left[M_{\mathbb{G}_{p_n-\ell}}(\tilde{f}_\ell)^2 \right], \\ V_2(n) &= |\mathbb{G}_n|^{-1} \sum_{i \in \mathbb{G}_{n-p_n}} \sum_{0 \leq \ell < k \leq p_n} \mathbb{E}_{X_i} \left[M_{\mathbb{G}_{p_n-\ell}}(\tilde{f}_\ell) M_{\mathbb{G}_{p_n-k}}(\tilde{f}_k) \right], \\ R_2(n) &= \sum_{i \in \mathbb{G}_{n-p_n}} \mathbb{E} [N_{n,i}(f) | X_i]^2. \end{aligned}$$

Lemma 6.5.2 *Under the Assumptions of Theorem 6.4.1, we have*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n^2} \log \mathbb{P}(R_2(n) > \delta) = -\infty. \quad (6.32)$$

Using the branching Markov property, we have

$$R_2(n) = |\mathbb{G}_n|^{-1} \sum_{i \in \mathbb{G}_{n-p}} g_p(X_i), \quad \text{with } g_p = \left(\sum_{\ell=0}^p 2^{p-\ell} Q^{p-\ell} \tilde{f}_\ell \right)^2. \quad (6.33)$$

Using (6.2) and (6.5), we get

$$\|g_p\|_\infty \leq c_\infty^2 M^2 \left(\sum_{\ell=0}^p (2\alpha)^{p-\ell} \right)^2 \leq \begin{cases} c_\infty^2 M^2 (p+1)^2 & \text{if } 2\alpha \leq 1 \\ c_\infty^2 M^2 c_\alpha (2\alpha)^{2p} & \text{if } 1 < 2\alpha < \sqrt{2}. \end{cases}$$

This implies that $R_2(n)$ is upper-bounded by a deterministic sequence which converge to 0. As a consequence, we conclude that (6.32) holds.

Lemma 6.5.3 *Under the Assumptions of Theorem 6.4.1, we have*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n^2} \log \mathbb{P} \left(|V_1(n) - \Sigma_1^{\text{sub}}(\mathbf{f})| > \delta \right) = -\infty,$$

where

$$\Sigma_1^{\text{sub}}(\mathbf{f}) = \sum_{\ell \geq 0} 2^{-\ell} \langle \mu, \tilde{f}_\ell^2 \rangle + \sum_{\ell \geq 0, k \geq 0} 2^{k-\ell} \langle \mu, ((\mathcal{Q}^k \tilde{f}_\ell) \otimes^2) \rangle := H_3(\mathbf{f}) + H_4(\mathbf{f})$$

Using (6.68), we get :

$$V_1(n) = V_3(n) + V_4(n), \quad (6.34)$$

with

$$V_3(n) = |\mathbb{G}_n|^{-1} \sum_{i \in \mathbb{G}_{n-p}} \sum_{\ell=0}^p 2^{p-\ell} \mathcal{Q}^{p-\ell}(\tilde{f}_\ell^2)(X_i),$$

$$V_4(n) = |\mathbb{G}_n|^{-1} \sum_{i \in \mathbb{G}_{n-p}} \sum_{\ell=0}^{p-1} \sum_{k=0}^{p-\ell-1} 2^{p-\ell+k} \mathcal{Q}^{p-1-(\ell+k)} \left((\mathcal{Q}^k \tilde{f}_\ell \otimes^2) \right) (X_i).$$

The proof is divided into two parts.

Part I

First we prove that

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n^2} \log \mathbb{P} (|V_3(n) - H_3(\mathbf{f})| > \delta) = -\infty. \quad (6.35)$$

Since

$$H_3(\mathbf{f}) = \sum_{\ell=0}^p 2^{-\ell} \langle \mu, \tilde{f}_\ell^2 \rangle + \sum_{\ell > p} 2^{-\ell} \langle \mu, \tilde{f}_\ell^2 \rangle \quad \text{and} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\ell > p} 2^{-\ell} \langle \mu, \tilde{f}_\ell^2 \rangle = 0,$$

then to get (6.35), it suffices to prove that

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n^2} \log \mathbb{P} (|V_3(n) - H_3^{[n]}(\mathbf{f})| > \delta) = -\infty, \quad \text{where} \quad H_3^{[n]}(\mathbf{f}) = \sum_{\ell=0}^p 2^{-\ell} \langle \mu, \tilde{f}_\ell^2 \rangle.$$

We set

$$g_p = \sum_{\ell=0}^p 2^{-\ell} \mathcal{Q}^{p-\ell} \left(\tilde{f}_\ell^2 - \langle \mu, \tilde{f}_\ell^2 \rangle \right) \quad \text{and then} \quad V_3(n) - H_3^{[n]}(f) = |\mathbb{G}_{n-p}|^{-1} M_{\mathbb{G}_{n-p}}(g_p).$$

Using (6.2) and (6.5), we have, for some positive constant c_α ,

$$\|g_p\|_\infty \leq \begin{cases} 4c_\infty^2 c_\alpha M 2^{-p} & \text{if } 2\alpha < 1 \\ 4c_\infty^2 M(p+1)\alpha^p & \text{if } 2\alpha > 1. \end{cases}$$

Using (6.30), we get, for n going to infinity and for some positive constant $C_{\alpha,\delta}$:

$$\mathbb{P} \left(|V_3(n) - H_3^{[n]}(f)| > \delta \right) \leq \begin{cases} 2 \exp(-\delta^2 C_{\alpha,\delta} |\mathbb{G}_{n+p}|) & \text{if } 2\alpha \leq 1 \\ 2 \exp(-\delta^2 C_{\alpha,\delta} p^{-2} |\mathbb{G}_n| (2\alpha^2)^{-p}) & \text{if } 1 < 2\alpha < \sqrt{2}. \end{cases}$$

Finally, (6.35) follows from the latter inequality by taking the log and dividing by b_n^2 .

Part II

Next, we prove that

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n^2} \log \mathbb{P} (|V_4(n) - H_4(f)| > 2\delta) = -\infty. \quad (6.36)$$

Note that $V_4(n) - H_4(f) = |\mathbb{G}_{n-p}|^{-1} M_{\mathbb{G}_{n-p}}(H_{4,n}(f) - H_4(f))$, where

$$H_{4,n}(f) = \sum_{\ell \geq 0, k \geq 0} h_{\ell,k}^{(n)} \mathbf{1}_{\{\ell+k < p\}} \quad \text{and} \quad H_4(f) = \sum_{\ell \geq 0, k \geq 0} h_{\ell,k}, \quad (6.37)$$

with

$$h_{\ell,k}^{(n)} = 2^{k-\ell} \mathcal{Q}^{p-1-(\ell+k)} \left((\mathcal{Q}^k \tilde{f}_\ell \otimes^2) \right) \quad \text{and} \quad h_{\ell,k} = \langle \mu, ((\mathcal{Q}^k \tilde{f}_\ell) \otimes^2) \rangle.$$

Using (6.2) and (6.5), we have

$$|h_{\ell,k}| + |h_{\ell,k}^{(n)}| \leq 2c_\infty^2 M^2 (2\alpha^2)^k 2^{-\ell}. \quad (6.38)$$

Let r_0 large enough such that

$$2c_\infty^2 M^2 \sum_{\ell \vee k > r_0} (2\alpha^2)^k 2^{-\ell} \leq \delta. \quad (6.39)$$

For n going to infinity, we have

$$|M_{\mathbb{G}_{n-p}}(H_{4,n}(f) - H_4(f))| \leq |M_{\mathbb{G}_{n-p}} \left(\sum_{\ell \vee k \leq r_0} (h_{\ell,k}^{(n)} - h_{\ell,k}) \right)| \quad (6.40)$$

$$\begin{aligned} &+ M_{\mathbb{G}_{n-p}} \left(\sum_{\ell \vee k > r_0} (|h_{\ell,k}| + |h_{\ell,k}^{(n)}|) \right) \\ &\leq |M_{\mathbb{G}_{n-p}} \left(\sum_{\ell \vee k \leq r_0} (h_{\ell,k}^{(n)} - h_{\ell,k}) \right)| + 2c_\infty^2 M^2 |\mathbb{G}_{n-p}| \sum_{\ell \vee k > r_0} (2\alpha^2)^k 2^{-\ell}, \end{aligned} \quad (6.41)$$

where we used (6.38) for the second inequality. From (6.41), we get

$$|V_4(n) - H_4(f)| \leq |\mathbb{G}_{n-p}|^{-1} |M_{\mathbb{G}_{n-p}}(g_p)| + 2c_\infty^2 M^2 \sum_{\ell \vee k > r_0} (2\alpha^2)^k 2^{-\ell}, \quad (6.42)$$

where $g_p = \sum_{\ell \vee k \leq r_0} (h_{\ell,k}^{(n)} - h_{\ell,k})$. From (6.39) and (6.42), to get (6.36), it suffices to prove that

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n^2} \log \mathbb{P} \left(\left| |\mathbb{G}_{n-p}|^{-1} M_{\mathbb{G}_{n-p}}(g_p) \right| > \delta \right). \quad (6.43)$$

Using (6.2) and (6.5) twice, we have, for some positive constant c_α ,

$$\|g_p\|_\infty \leq c_\infty^3 M^3 c_\alpha \gamma(r_0) \alpha^{p-1} \quad \text{where} \quad \gamma(r_0) = \begin{cases} r_0 (2\alpha)^{r_0} & \text{if } 2\alpha \leq 1 \\ (2\alpha)^{r_0} & \text{if } 1 < 2\alpha < \sqrt{2}. \end{cases}$$

Using (6.30) with g_p instead of f , we get, for some positive constant $C_{\alpha,\delta}$,

$$\mathbb{P} \left(\left| |\mathbb{G}_{n-p}|^{-1} M_{\mathbb{G}_{n-p}}(g_p) \right| > \delta \right) \leq \exp \left(-\delta^2 C_{\alpha,\delta} |\mathbb{G}_{n-p}| \alpha^{-2p} \right).$$

Taking the log, dividing by b_n^2 and letting n goes to infinity in the latter inequality, we get (6.43) and then (6.36).

Lemma 6.5.4 *Under the Assumptions of Theorem 6.4.1, we have*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n^2} \log \mathbb{P} \left(\left| V_2(n) - \Sigma_2^{\text{sub}}(f) \right| > \delta \right) = -\infty,$$

where

$$\begin{aligned} \Sigma_2^{\text{sub}}(f) &= \sum_{0 \leq \ell < k} 2^{-\ell} \langle \mu, \tilde{f}_k \mathcal{Q}^{k-\ell} \tilde{f}_\ell \rangle + \sum_{\substack{0 \leq \ell < k \\ r \geq 0}} 2^{r-\ell} \langle \mu, (\mathcal{Q}^r \tilde{f}_k \otimes_{\text{sym}} \mathcal{Q}^{k-\ell+r} \tilde{f}_\ell) \rangle \\ &:= H_5(f) + H_6(f) \end{aligned}$$

Using (6.69), we get :

$$V_2(n) = V_5(n) + V_6(n), \quad (6.44)$$

with

$$V_5(n) = |\mathbb{G}_n|^{-1} \sum_{i \in \mathbb{G}_{n-p}} \sum_{0 \leq \ell < k \leq p} 2^{p-\ell} \mathcal{Q}^{p-k} \left(\tilde{f}_k \mathcal{Q}^{k-\ell} \tilde{f}_\ell \right) (X_i),$$

$$V_6(n) = |\mathbb{G}_n|^{-1} \sum_{i \in \mathbb{G}_{n-p}} \sum_{0 \leq \ell < k < p} \sum_{r=0}^{p-k-1} 2^{p-\ell+r} \mathcal{Q}^{p-1-(r+k)} \left((\mathcal{Q}^r \tilde{f}_k \otimes_{\text{sym}} \mathcal{Q}^{k-\ell+r} \tilde{f}_\ell) \right) (X_i).$$

Part I

First, we prove that

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n^2} \log \mathbb{P}(|V_6(n) - H_6(f)| > 2\delta) = -\infty. \quad (6.45)$$

We have $V_6(n) - H_6(f) = |\mathbb{G}_{n-p}|^{-1} M_{\mathbb{G}_{n-p}}(H_{6,n}(f) - H_6(f))$, where

$$H_{6,n}(f) = \sum_{\substack{0 \leq \ell < k \\ r \geq 0}} h_{k,\ell,r}^{(n)} \mathbf{1}_{\{r+k < p\}} \quad \text{and} \quad H_6(f) = \sum_{\substack{0 \leq \ell < k \\ r \geq 0}} h_{k,\ell,r},$$

with

$$h_{k,\ell,r}^{(n)} = 2^{r-\ell} \mathcal{Q}^{p-1-(r+k)} \left(\left(\mathcal{Q}^r \tilde{f}_k \otimes_{\text{sym}} \mathcal{Q}^{k-\ell+r} \tilde{f}_\ell \right) \right) \quad \text{and} \\ h_{k,\ell,r} = 2^{r-\ell} \left\langle \mu, \left(\mathcal{Q}^r \tilde{f}_k \otimes_{\text{sym}} \mathcal{Q}^{k-\ell+r} \tilde{f}_\ell \right) \right\rangle.$$

Using (6.2) and (6.5), we have

$$|h_{\ell,k,r}| + |h_{\ell,k,r}^{(n)}| \leq 2c_\infty^2 M^2 2^{r-\ell} \alpha^{k-\ell+2r}. \quad (6.46)$$

Let r_0 large enough such that

$$2c_\infty^2 M^2 \sum_{\substack{0 \leq \ell < k \\ r \geq 0 \\ k \vee r > r_0}} 2^{r-\ell} \alpha^{k-\ell+2r} < \delta. \quad (6.47)$$

We set $g_p = \sum_{0 \leq \ell < k, r \geq 0, k \vee r \leq r_0} (h_{k,\ell,r}^{(n)} - h_{k,\ell,r})$. Using (6.46), we have, for n going to infinity in such a way that $p > r_0$,

$$|V_6(n) - H_6(f)| \leq |\mathbb{G}_{n-p}| \left| M_{\mathbb{G}_{n-p}}(g_p) \right| + 2c_\infty^2 M^2 \sum_{\substack{0 \leq \ell < k \\ r \geq 0 \\ k \vee r > r_0}} 2^{r-\ell} \alpha^{k-\ell+2r}. \quad (6.48)$$

From (6.47) and (6.48), to get (6.45), it suffices to prove that

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n^2} \log \mathbb{P} \left(\left| |\mathbb{G}_{n-p}|^{-1} M_{\mathbb{G}_{n-p}}(g_p) \right| > \delta \right) = -\infty. \quad (6.49)$$

Using (6.2) and (6.5) twice, we have, for some positive constant c_α ,

$$\|g_p\|_\infty \leq 2c_\alpha c_\infty^3 M^3 \gamma(r_0) \alpha^p,$$

where

$$\gamma(r_0) = \begin{cases} (2\alpha)^{-r_0} & \text{if } 2\alpha < 1 \\ r_0^2 & \text{if } 2\alpha \geq 1. \end{cases}$$

Using (6.30) with g_p instead of f , we get, for some positive constant $C_{\alpha,\delta}$,

$$\mathbb{P} \left(\left| |\mathbb{G}_{n-p}|^{-1} M_{\mathbb{G}_{n-p}}(g_p) \right| > \delta \right) \leq \exp \left(-\delta^2 C_{\alpha,\delta} |\mathbb{G}_{n-p}| \alpha^{-2p} \right).$$

Taking the log, dividing by b_n^2 and letting n goes to infinity in the latter inequality, we get (6.49) and then (6.45).

Part II

Next, with the finite constant $H_5(f)$ defined by :

$$H_5(f) = \sum_{0 \leq \ell < k} 2^{-\ell} \langle \mu, \tilde{f}_k \mathcal{Q}^{k-\ell} \tilde{f}_\ell \rangle,$$

we prove that

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n^2} \log \mathbb{P} (|V_5(n) - H_5(f)| > 2\delta) = -\infty. \quad (6.50)$$

We set

$$H_{5,n}(f) = \sum_{0 \leq \ell < k} h_{k,\ell}^{(n)} \mathbf{1}_{\{k \leq p\}}, \quad \text{and} \quad H_5^{[n]}(f) = \sum_{0 \leq \ell < k} h_{k,\ell} \mathbf{1}_{\{k \leq p\}},$$

with

$$h_{k,\ell}^{(n)} = 2^{-\ell} \mathcal{Q}^{p-k} \left(\tilde{f}_k \mathcal{Q}^{k-\ell} \tilde{f}_\ell \right) \mathbf{1}_{\{k \leq p\}} \quad \text{and} \quad h_{\ell,k} = \langle \mu, \tilde{f}_k \mathcal{Q}^{k-\ell} \tilde{f}_\ell \rangle.$$

We have the following decomposition :

$$V_5(n) - H_5(f) = |\mathbb{G}_{n-p}|^{-1} M_{\mathbb{G}_{n-p}} \left(H_{5,n}(f) - H_5^{[n]}(f) \right) + \left(H_5^{[n]}(f) - H_5(f) \right).$$

Using (6.2) and (6.5), we have

$$|h_{k,\ell}^{(n)}| + |h_{k,\ell}| \leq 2c_\infty^2 M \alpha^{k-\ell} 2^{-\ell},$$

which implies that $\lim_{n \rightarrow \infty} |H_5(f) - H_5^{[n]}(f)| = 0$. As a result, to get (6.50), it suffices to prove that

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n^2} \log \mathbb{P} \left(\left| |\mathbb{G}_{n-p}|^{-1} M_{\mathbb{G}_{n-p}} \left(H_{5,n}(f) - H_5^{[n]}(f) \right) \right| > \delta \right) = -\infty. \quad (6.51)$$

Setting $g_p = H_{5,n}(f) - H_5^{[n]}(f)$, we have, using (6.2) and (6.5) :

$$\|g_p\|_\infty \leq \begin{cases} c_\alpha 2^{-p} & \text{if } 2\alpha < 1 \\ c_\alpha p \alpha^p & \text{if } 1 \leq 2\alpha < \sqrt{2}, \end{cases}$$

for some positive constant c_α . Finally, (6.51), and then (6.50), follows by applying (6.30) to g_p instead of f and by taking the log, dividing by b_n^2 and by letting n goes to infinity. As a direct consequence of (6.31) and Lemmas 6.5.2, 6.5.3 and 6.5.4, we have the following result.

Lemma 6.5.5 *Under the Assumptions of Theorem 6.4.1, we have*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n^2} \log \mathbb{P} \left(|V(n) - \Sigma^{\text{sub}}(f)| > \delta \right) = -\infty$$

We can now state the following result.

Lemma 6.5.6 *Under Assumptions of Theorem 6.4.1, we have that $b_n^{-1}\Delta_n(\mathfrak{f})$ satisfies a moderate deviation principle with speed b_n^2 and rate function I defined in (6.8).*

Since $p < n/2$, we have for all $i \in \mathbb{G}_{n-p}$,

$$|\Delta_{n,i}(\mathfrak{f})| \leq 2c_\infty 2^{-\frac{n}{2}+p} \leq C,$$

where C is a positive constant. This implies that $\Delta_n(\mathfrak{f})$ is a martingale with bounded differences. Using the result of Dembo [20] (see also Djellout [23] and Puhalski [57]), we get the result from Lemma 6.5.5.

6.5.5 Completion of the proof of Theorem 6.4.1.

Finally, using the decomposition (6.54) and the results of sections 6.5.2, 6.5.3 and 6.5.4, we deduce Theorem 6.4.1.

6.6 Proof of Theorem 6.4.3

6.6.1 A quick overview of our strategy

Let $(p_n, n \in \mathbb{N})$ be a non-decreasing sequence of elements of \mathbb{N}^* such that, for all $\lambda > 0$:

$$\begin{aligned} p_n < n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} p_n/n = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 b_n^2 2^{-n+p} = 0 \\ \text{and} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n - p_n - \lambda \log(n) = +\infty. \end{aligned} \tag{6.52}$$

When there is no ambiguity, we write p for p_n . From (6.14), we can choose $p_n = n - n^a$, $a \in (0, 1)$. Let us consider the sequence $\mathfrak{f} = (f_\ell, \ell \in \mathbb{N})$ of elements of $\mathcal{B}_b(S)$ which satisfies the Assumption (6.3.2) (and then Assumption 6.3.1) uniformly, namely :

$$|\mathcal{Q}^n(\tilde{f}_\ell)| \leq M\alpha^n c_\infty \quad \text{and} \quad |\mathcal{Q}^n(\hat{f}_\ell)| \leq M\beta_n \alpha^n c_\infty \tag{6.53}$$

It follows from (6.53) that there exists a finite constant c_J depending only on $\{\alpha_j, j \in J\}$ such that for all $\ell \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $j_0 \in J$

$$\begin{aligned} |f_\ell| \leq M c_\infty, \quad |\tilde{f}_\ell| \leq M c_\infty, \quad |\langle \mu \\ f_\ell | \leq M c_\infty, \quad \left| \sum_{j \in J} \theta_j^n \mathcal{R}_j(f_\ell) \right| \leq 2M c_\infty \\ \text{and} \quad |\mathcal{R}_{j_0}(f_\ell)| \leq c_J M c_\infty. \end{aligned}$$

We recall that :

$$N_{n,\emptyset}(\mathfrak{f}) = \Delta_n(\mathfrak{f}) + R_0(n) + R_1(n), \tag{6.54}$$

with

$$R_0(n) = |\mathbb{G}_n|^{-1/2} \sum_{k=0}^{n-p_n-1} M_{\mathbb{G}_k}(\tilde{f}_{n-k}) \quad \text{and} \quad R_1(n) = \sum_{i \in \mathbb{G}_{n-p_n}} \mathbb{E}[N_{n,i}(\mathfrak{f}) | \mathcal{F}_i].$$

Let $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ be a sequence elements of \mathbb{N} such that :

$$b_n \rightarrow \infty \quad \text{and} \quad \frac{b_n}{\sqrt{n|\mathbb{G}_n|}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Our goals will be achieved if we prove the following :

$$\forall \delta > 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n^2} \log \mathbb{P}(|b_n^{-1} n^{-1/2} R_0(n)| > \delta) = -\infty; \quad (6.55)$$

$$\forall \delta > 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n^2} \log \mathbb{P}(|b_n^{-1} n^{-1/2} R_1(n)| > \delta) = -\infty; \quad (6.56)$$

$$b_n^{-1} n^{-1/2} \Delta_n(\mathfrak{f}) \quad \text{satisfies a MDP on } S \text{ with speed } b_n^2 \text{ and rate function } I. \quad (6.57)$$

6.6.2 proof of (6.55)

We follow the same lines of the proof of (6.18) with $2\alpha^2 = 1$. First, using Chernoff inequality, we have

$$\mathbb{P}(b_n^{-1} n^{-1/2} R_0(n) > \delta) \leq \exp(-\lambda b_n \delta |\mathbb{G}_n|^{1/2} n^{1/2}) \mathbb{E} \left[\exp \left(\lambda \sum_{k=0}^{n-p-1} M_{\mathbb{G}_k}(\tilde{f}_{n-k}) \right) \right].$$

Next, taking $\lambda = \frac{b_n \delta (n|\mathbb{G}_n|)^{1/2}}{2c_\alpha (n-p) |\mathbb{G}_{n-p}|}$ and doing the same thing for $-\mathfrak{f}$ instead of \mathfrak{f} , we get

$$\mathbb{P}(|b_n^{-1} n^{-1/2} R_0(n)| > \delta) \leq 2 \exp \left(-\frac{b_n^2 \delta^2 n |\mathbb{G}_p|}{4c_\alpha (n-p)} \right).$$

Finally, taking the log, dividing by b_n^2 and letting n goes to infinity, we get the result.

rem We have the following version of Remark 6.5.1 when $2\alpha^2 = 1$:

$$\mathbb{P}(||\mathbb{G}_{n-p}|^{-1} M_{\mathbb{G}_{n-p}}(\tilde{f})| > \delta n^{1/2}) \leq 2 \exp \left(-\frac{\delta^2 n |\mathbb{G}_{n-p}|}{4 \|f\|_\infty^2 M^2 (1 + \alpha)^2 (n-p)} \right). \quad (6.58)$$

6.6.3 proof of (6.56)

With $g_p = \sum_{\ell=0}^p 2^{p-\ell} Q^{p-\ell} \tilde{f}_\ell$, and using the definition of $R_1(n)$, we have for all $\delta > 0$

$$\mathbb{P}(|b_n^{-1} R_1(n)| > \delta n^{1/2}) = \mathbb{P}(|\mathbb{G}_{n-p}|^{-1} |M_{\mathbb{G}_{n-p}(g_p)}| > b_n \delta n^{1/2} |\mathbb{G}_p| |\mathbb{G}_n|^{-1/2}).$$

So according to (6.53) , we have :

$$\|g_p\|_\infty \leq c_\infty c_\alpha M |\mathbb{G}_p|^{1/2}.$$

By applying (6.58) to g_p and $b_n \delta n^{1/2} |\mathbb{G}_p| |\mathbb{G}_n|^{-1/2}$ and using the fact that $2\alpha^2 = 1$, we have :

$$\mathbb{P} \left(|b_n^{-1} R_1(n)| > \delta n^{1/2} \right) \leq 2 \exp \left(- \frac{b_n^2 \delta^2 n}{4c_\infty^2 c_\alpha^2 M^4 (1 + \alpha)^2 (n - p)} \right).$$

So taking the log and dividing by b_n^2 , and letting n goes to infinity, we get the result.

6.6.4 Proof of (6.57) : Moderate deviations principle for $b_n^{-1} n^{-1/2} \Delta_n(f)$

First we study the bracket of $n^{-\frac{1}{2}} \Delta_n(f)$ given by $n^{-1} V(n)$, where $V(n)$ is defined in (6.31). We have the following result :

Lemma 6.6.1 *Under the assumptions of Theorem 6.4.3, we have*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n^2} \log \mathbb{P} \left(|n^{-1} R_2(n)| > \delta \right) = -\infty.$$

Recall the definition of $R_2(n)$ and g_p given in (6.33). So according to (6.53) and using $2\alpha^2 = 1$, we have $\|g_p\|_\infty \leq c_\infty^2 c_\alpha^2 M^2 |\mathbb{G}_p|$. This implies that

$$R_2(n) \leq \frac{c_\infty^2 c_\alpha^2 M^2}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

Therefore, $R_2(n)$ is upper-bounded by a deterministic sequence which goes to 0. According to Remark 6.8.1, we get the result.

Lemma 6.6.2 *Under the assumptions of Theorem 6.4.3, we have*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n^2} \log \mathbb{P} \left(|n^{-1} V_1(n) - \Sigma_1^{\text{crit}}(f)| > \delta \right) = -\infty.$$

Recall the decomposition of $V_1(n)$ given in (6.34) and the definition of $\Sigma_1^{\text{crit}}(f)$ given in 6.11. The proof is divided into two parts.

Part I

First we prove that

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n^2} \log \mathbb{P} \left(|n^{-1} V_3(n)| > \delta \right) = -\infty.$$

Indeed we have

$$n^{-1}V_3(n) = |\mathbb{G}_{n-p}|^{-1}n^{-1}M_{\mathbb{G}_{n-p}}(g_p), \quad \text{where } g_p = \sum_{\ell=0}^p 2^{-\ell} \mathcal{Q}^{p-\ell}(\tilde{f}_\ell^2).$$

Since the sequence $\mathfrak{f} = (f_\ell, \ell \in \mathbb{N})$ satisfies (6.5), we have $\|g_p\|_\infty \leq 4c_\infty^2$. This implies that $|n^{-1}V_3(n)| \leq 4c_\infty^2 n^{-1}$. So $n^{-1}V_3(n)$ is upper-bounded by a deterministic sequence which goes to 0. Then applying the remark 6.8.1 to $n^{-1}V_3(n)$, we get the result.

Part II

Next, we prove that

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n^2} \log \mathbb{P} \left(|n^{-1}V_4(n) - \Sigma_1^{\text{crit}}(\mathfrak{f})| > \delta \right) = -\infty.$$

Recall $H_{4,n}(\mathfrak{f})$ and $f_{k,\ell}$ defined respectively in (6.37) and (6.13). For $k, \ell, r \in \mathbb{N}$, we consider the following \mathbb{C} -valued functions defined on S^2 :

$$f_{k,\ell,r} = \left(\sum_{j \in J} \theta_j^r \mathcal{R}_j(f_k) \right) \otimes_{\text{sym}} \left(\sum_{j \in J} \theta_j^{r+k-\ell} \mathcal{R}_j(f_\ell) \right). \quad (6.59)$$

Recall that $2\alpha^2 = 1$. We set $\bar{H}_{4,n} = \sum_{\ell \geq 0, k \geq 0} \bar{h}_{\ell,k}^{(n)} \mathbf{1}_{\{\ell+k < p\}}$ with

$$\bar{h}_{\ell,k}^{(n)} = 2^{k-\ell} \alpha^{2k} \mathcal{Q}^{p-1-(\ell+k)}(f_{\ell,\ell,k}) = 2^{-\ell} \mathcal{Q}^{p-1-(\ell+k)}(f_{\ell,\ell,k}).$$

For $f \in \mathcal{B}_b(S)$, recall \hat{f} defined in (6.4). Then we have $h_{\ell,k}^{(n)} - \bar{h}_{\ell,k}^{(n)} = h_{\ell,k}^{n,1} + h_{\ell,k}^{n,2} + h_{\ell,k}^{n,3}$, where

$$\begin{aligned} h_{\ell,k}^{n,1} &= 2^{k-\ell} \mathcal{Q}^{p-1-(\ell+k)} \mathcal{P}(\mathcal{Q}^k \hat{f}_k \otimes_{\text{sym}} \mathcal{Q}^k \hat{f}_k), \\ h_{\ell,k}^{n,2} &= 2^{k-\ell} \mathcal{Q}^{p-1-(\ell+k)} \mathcal{P}(\mathcal{Q}^k \hat{f}_k \otimes_{\text{sym}} \mathcal{Q}^k (\sum_{j \in J} \mathcal{R}_j(f_k))), \\ h_{\ell,k}^{n,3} &= 2^{k-\ell} \mathcal{Q}^{p-1-(\ell+k)} \mathcal{P}(\mathcal{Q}^k (\sum_{j \in J} \mathcal{R}_j(f_k)) \otimes_{\text{sym}} \mathcal{Q}^k (\sum_{j \in J} \mathcal{R}_j(f_k))). \end{aligned}$$

This implies that

$$n^{-1} |\mathbb{G}_{n-p}|^{-1} M_{\mathbb{G}_{n-p}}(H_{4,n}(\mathfrak{f}) - \bar{H}_{4,n}(\mathfrak{f})) = n^{-1} |\mathbb{G}_{n-p}|^{-1} \sum_{u \in \mathbb{G}_{n-p}} \sum_{i=1}^3 \sum_{\ell \geq 0, k \geq 0} h_{\ell,k}^{n,i}(X_u) \mathbf{1}_{\{\ell+k < p\}}.$$

Using Assumption 6.3.2, (6.5) and the fact that the sequence $(\beta_k, k \in \mathbb{N})$ is decreasing, we can upper bound each function $|h_{\ell,k}^{n,i}|$, $i \in \{1, 2, 3\}$, by $C2^{-\ell}\beta_k$. This implies that

$$\left| n^{-1} |\mathbb{G}_{n-p}|^{-1} M_{\mathbb{G}_{n-p}}(H_{4,n}(\mathfrak{f}) - \bar{H}_{4,n}(\mathfrak{f})) \right| \leq C n^{-1} \sum_{k=0}^{p-1} \beta_k. \quad (6.60)$$

We set

$$H_4^{[n]} = \sum_{\ell \geq 0; k \geq 0} h_{\ell, k} \mathbf{1}_{\{k+\ell < p\}} \quad \text{with} \quad h_{\ell, k} = 2^{-\ell} \langle \mu, \mathcal{P}(f_{\ell, \ell, k}) \rangle.$$

Using Assumption 6.3.2 and (6.5), we get

$$|\bar{h}_{\ell, k}^{(n)} - h_{\ell, k}| \leq 2^{-\ell} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{p-1-(\ell+k)} \|\mathcal{P}(f_{\ell, \ell, k})\|_{\infty} \leq C \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{p-1} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{\ell-k}.$$

This implies that

$$|n^{-1} |\mathbb{G}_{n-p}|^{-1} M_{\mathbb{G}_{n-p}}(\bar{H}_{4, n}(\mathbf{f}) - H_4^{[n]}(\mathbf{f}))| \leq C n^{-1}. \quad (6.61)$$

Finally, from [6], we have

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |n^{-1} H_4^{[n]}(\mathbf{f}) - \Sigma_1^{\text{crit}}(\mathbf{f})| = 0. \quad (6.62)$$

From (6.60), (6.61) and (6.62), we conclude that $|n^{-1} V_4(n) - \Sigma_1^{\text{crit}}(\mathbf{f})|$ is upper-bounded by a deterministic sequence which goes to 0. Therefore applying the remark 6.8.1 to $n^{-1} V_4(n) - \Sigma_1^{\text{crit}}(\mathbf{f})$, we get the result.

Lemma 6.6.3 *Under the assumptions of Theorem 6.4.3, we have*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n^2} \log \mathbb{P} \left(|n^{-1} V_2(n) - \Sigma_2^{\text{crit}}(\mathbf{f})| > \delta \right) = -\infty.$$

Recall the decomposition given in (6.44). Then following the lines of the proof of Lemma 6.6.2, we prove that

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n^2} \log \mathbb{P} \left(|n^{-1} V_5(n)| > \delta \right) &= -\infty \\ \text{and } \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n^2} \log \mathbb{P} \left(|n^{-1} V_6(n) - \Sigma_2^{\text{crit}}(\mathbf{f})| > \delta \right) &= -\infty \end{aligned}$$

and the result follows. As a direct consequence of (6.31) and Lemmas 6.6.1, 6.6.2 and 6.6.3, we have the following result.

Lemma 6.6.4 *Under the assumptions of Theorem 6.4.3, we have*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n^2} \log \mathbb{P} \left(|V(n) - \Sigma^{\text{crit}}(\mathbf{f})| > \delta \right) = -\infty.$$

Next, contrary to the sub-critical case, we need to check the exponential Lindeberg condition and Chen-Ledoux type condition, that is conditions (C2) and (C3) given in Proposition 6.8.4. Indeed, in the critical case, the martingale $n^{-\frac{1}{2}} \Delta_n(\mathbf{f})$ does not have bounded differences in such a way that Lemma 6.6.4 is not longer sufficient to get the moderate deviations principle of $n^{-\frac{1}{2}} \Delta_n(\mathbf{f})$. In order to check exponential Lindeberg condition, we have the following exponential Lyapunov condition which implies the exponential Lindeberg condition.

Lemma 6.6.5 *Under the assumptions of Theorem 6.4.3, we have*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n^2} \log \mathbb{P} \left(\sum_{i \in \mathbb{G}_{n-p}} n^{-2} \mathbb{E} [\Delta_{n,i}(\mathbf{f})^4 | \mathcal{F}_i] > \frac{\delta n}{b_n^2} \right) = -\infty \quad \forall \delta > 0.$$

For all $i \in \mathbb{G}_{n-p}$, we have

$$\mathbb{E} [\Delta_{n,i}(\mathbf{f})^4 | \mathcal{F}_i] \leq 16(p+1)^3 2^{-2n} \sum_{\ell=0}^p \mathbb{E}_{X_i} [M_{\mathbb{G}_{p-\ell}}(\tilde{f}_\ell)^4], \quad (6.63)$$

where we have used the definition of $\Delta_{n,i}(\mathbf{f})$, the inequality $(\sum_{k=0}^r a_k)^4 \leq (r+1)^3 \sum_{k=0}^r a_k^4$ and the branching Markov property. Using (6.2) and (6.5), we can apply Theorem 2.1 given in [7] with $2\alpha^2 = 1$ to get $\mathbb{E}_{X_i} [M_{\mathbb{G}_{p-\ell}}(\tilde{f}_\ell)^4] \leq Cp^2 2^{2(p-\ell)}$. The latter inequality and (6.63) imply that

$$\frac{b_n^2}{n} \sum_{i \in \mathbb{G}_{n-p}} n^{-2} \mathbb{E} [\Delta_{n,i}(\mathbf{f})^4 | \mathcal{F}_i] \leq Cn^3 2^{-n+p} (n^{-1} b_n^2). \quad (6.64)$$

From (6.52), we have

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^3 2^{-n+p} (n^{-1} b_n^2) = 0. \quad (6.65)$$

Finally, the result of the Lemma follows using (6.64), (6.65) and Remark 6.8.1.

For Chen-Ledoux type condition, we have the following result.

Lemma 6.6.6 *Under the assumptions of Theorem 6.4.3, we have*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n^2} \log \left(|\mathbb{G}_n| \sup_{i \in \mathbb{G}_{n-p}} \mathbb{P}_{\mathcal{F}_i} (|\Delta_{n,i}(\mathbf{f})| > b_n \sqrt{n}) \right) = -\infty.$$

For all $i \in \mathbb{G}_{n-p}$, using (6.16) we have

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{\mathcal{F}_i} (|\Delta_{n,i}(\mathbf{f})| > b_n \sqrt{n}) &\leq \mathbb{P}_{\mathcal{F}_i} (|N_{n,i}(\mathbf{f})| > b_n \sqrt{n}/2) \\ &\quad + \mathbb{P}_{\mathcal{F}_i} (|\mathbb{E}_{X_i} [N_{n,i}(\mathbf{f})]| > b_n \sqrt{n}/2) \end{aligned} \quad (6.66)$$

with $N_{n,i}(\mathbf{f})$ defined in (6.6). Following the proof of (6.26), we get

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{\mathcal{F}_i} \left(|N_{n,i}(\mathbf{f})| > \frac{b_n \sqrt{n}}{2} \right) &= \mathbb{P}_{X_i} \left(\left| \sum_{\ell=0}^p M_{\mathbb{G}_{p-\ell}}(\tilde{f}_\ell) \right| > \frac{b_n \sqrt{n |\mathbb{G}_n|}}{2} \right) \\ &\leq C \exp \left(- \frac{Cb_n^2 |\mathbb{G}_{n-p}| n}{p} \right). \end{aligned}$$

Next, for all $\lambda = Cb_n \sqrt{n |\mathbb{G}_n|} (p |\mathbb{G}_p|)^{-1}$, we have

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{\mathcal{F}_i} \left(\mathbb{E}_{X_i} [N_{n,i}(\mathbf{f})] > \frac{b_n \sqrt{n}}{2} \right) &= \mathbb{P}_{X_i} \left(\sum_{\ell=0}^p 2^{p-\ell} \mathcal{Q}^{p-\ell}(\tilde{f}_\ell)(X_i) > \frac{b_n \sqrt{n |\mathbb{G}_n|}}{2} \right) \\ &\leq \exp \left(- \frac{\lambda b_n \sqrt{n |\mathbb{G}_n|}}{2} \right) \mathbb{E}_{X_i} \left[\exp \left(\lambda \sum_{\ell=0}^p 2^{p-\ell} \mathcal{Q}^{p-\ell}(\tilde{f}_\ell)(X_i) \right) \right] \\ &\leq C \exp \left(- \frac{Cb_n^2 |\mathbb{G}_{n-p}| n}{p} \right), \end{aligned}$$

where we used (6.67) and the branching Markov property for the first equality, Chernoff bound for the first inequality and (6.2) for the last inequality. Doing the same thing for $-f$ instead of f , we get

$$\mathbb{P}_{\mathcal{F}_i} \left(\left| \mathbb{E}_{X_i} [N_{n,i}(f)] \right| > \frac{b_n \sqrt{n}}{2} \right) \leq 2C \exp \left(- \frac{Cb_n^2 |\mathbb{G}_{n-p}| n}{p} \right).$$

From the foregoing, we get, using (6.66),

$$|\mathbb{G}_n| \sup_{i \in \mathbb{G}_{n-p}} \mathbb{P}_{\mathcal{F}_i} \left(|\Delta_{n,i}(f)| > b_n \sqrt{n} \right) \leq C |\mathbb{G}_n| \exp \left(- \frac{Cb_n^2 |\mathbb{G}_{n-p}| n}{p} \right).$$

Finally, taking the log and dividing by b_n^2 in the latter inequality, we get the result of Lemma 6.6.6. We can now state the following result.

Lemma 6.6.7 *Under the assumptions of Theorem 6.4.3, we have that $n^{-1/2} b_n^{-1} \Delta_n(f)$ satisfies a moderate deviation principle with speed b_n^2 and rate function I defined in (6.8).*

Applying Theorem 1 in [23] (a simplified version is given in Proposition 6.8.4) to the martingale differences $n^{-1/2} \Delta_{n,i}(f)$, the proof follows from Lemmas 6.6.4, 6.6.5 and 6.6.6.

6.6.5 Completion of the proof of Theorem 6.4.3.

Finally, using (6.54), (6.55), (6.56) and Lemma 6.6.7, we deduce Theorem 6.4.3.

6.7 Numerical studies

For our numerical illustrations, we consider a BMC $(X_u, u \in \mathbb{T})$ living in $[0, 1]$, with transition $\mathcal{P} = \mathcal{Q} \otimes \mathcal{Q}$ given by

$$\mathcal{Q}(x, y) := (1 - x) \frac{y(1 - y)^2}{B(2, 3)} + x \frac{y^2(1 - y)}{B(3, 2)}, \quad x, y \in [0, 1],$$

with $B(\alpha, \beta)$ the normalizing constant of a standard Beta distribution with shape parameters α and β . For simplicity, we choose X_\emptyset such that $\mathcal{L}(X_\emptyset) = \text{Beta}(2, 2)$, where $\text{Beta}(2, 2)$ is the standard Beta distribution with shape parameters $(2, 2)$. Now, one can prove that this process is stationary, it has an explicit invariant density : the standard Beta distribution with shape parameters $(2, 2)$. One can also prove that $\mathbb{E}[X_{u_0}|X_u] = \mathbb{E}[X_{u_1}|X_u] = X_u/5 + 2/5$, (for more details, we refer e.g. to [56]). Now, it is not hard to verify that this process satisfies our required assumptions. In particular, using for example Theorem 2.1 in [45], one can prove that Assumption 6.3.1 is satisfied with $\alpha = 1/5$. We are thus in the sub-critical case. First, we will illustrate Theorem 6.4.1 (and more precisely Corollary 6.4.4) with the sequence $\mathfrak{f} = (f, 0, 0, \dots)$ and the function $f(x) = x$. In this case, we have the following exact results :

$$\langle \mu, f \rangle = \frac{1}{2}, \quad \mathcal{Q}^k \tilde{f}(x) = 5^{-k} (x - \frac{1}{2}) \quad \forall k \geq 0, \quad \Sigma_{\mathbb{G}}(f) = 6/115$$

and $I(\delta) = \frac{115}{12} \delta^2$

Next, we will illustrate that the range of speed considered in the critical case does not work in this example. For that purpose, we simulate $B = 50000$ samples $(X^{(s)} = (X_u^{(s)}, u \in \mathbb{G}_{12}), s \in \{1, \dots, B\})$ of the bifurcating Markov chain at the n -th generation, with $n = 12$. For each sample $X^{(s)}$, we compute $b_n^{-1} N_{n, \emptyset}^{(s)}(f) = b_n^{-1} |\mathbb{G}_n|^{-1/2} \sum_{u \in \mathbb{G}_n} (X_u^{(s)} - 1/2)$. Finally, for different values of $\delta > 0$, we compute $b_n^{-2} \log(B^{-1} \sum_{s=1}^B \mathbf{1}_{\{|b_n^{-1} N_{n, \emptyset}^{(s)}(f)| > \delta\}})$. This allows us to get empirical values of the rate function. Next in the same graph, we plot the true rate function and the empirical rate function. As we can see in Figure 6.1, the empirical rate function fit well exact rate function, except in the last figure where the empirical rate function is near to 0 since the speed considered is not valid for the subcritical case, but only for the critical. We also stress that the differences observed between empirical and exact rate functions can be explained from the fact that the sample size is not large enough.

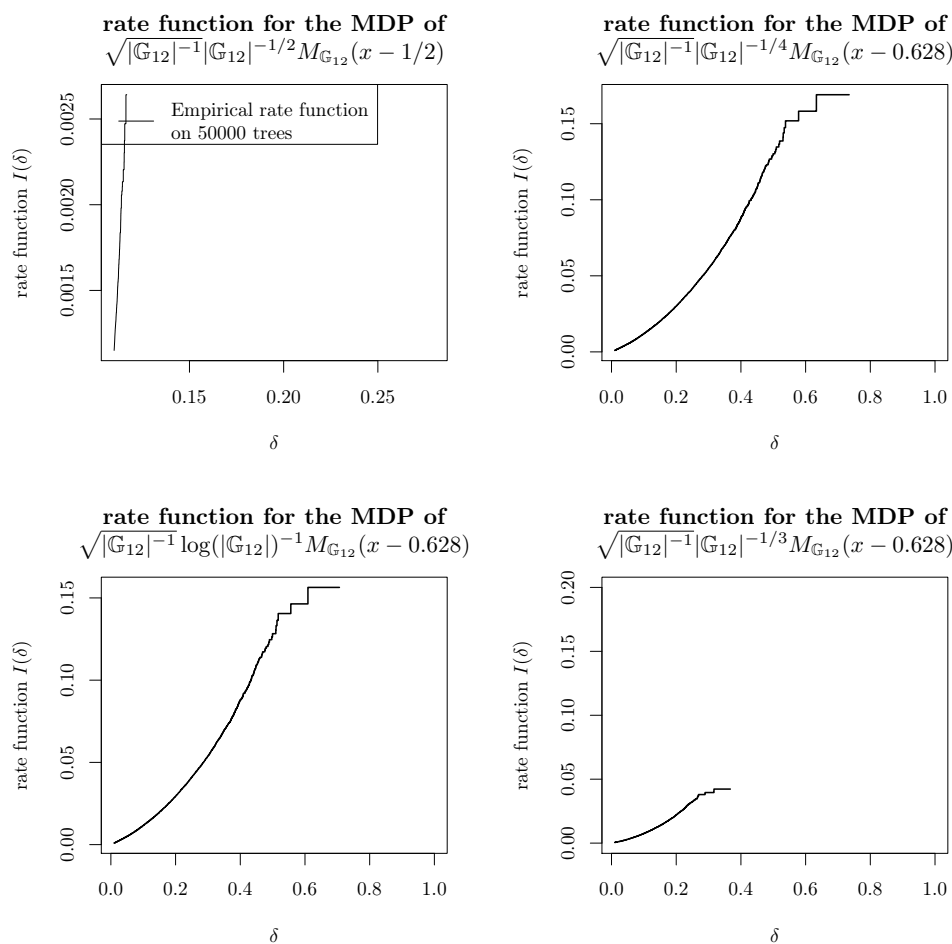


FIGURE 6.1 – Exact and empirical rate functions for the moderate deviation principles of $|\mathbb{G}_n|^{-1/2}b_n^{-1}M_{\mathbb{G}_n}(x - 1/2)$.

In the first three figures, one can see that empirical rate function fit well the exact rate function. The differences can be explained from the fact that the sample size is not large enough to generate enough large deviation events. In the last figure, one can see that the empirical rate function is reduced to 0. This is due to the fact that the speed considered here is valid only in the critical case, not in the subcritical case.

6.8 Appendix

The following Remark is used in the proofs of Lemmas 6.6.2, 6.6.3 and 6.6.1.

Remarque 6.8.1

We assume that (S, d) is a metric space. Let $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ be a sequence of random variables valued in S , Z a random variable valued in S and v_n a rate. So if $d(Z_n, Z)$ is upper-bounded by a deterministic sequence which converges to 0, then, for all sequence $(v_n, n \in \mathbb{N})$ converging to ∞ , Z_n converges v_n -superexponentially fast in probability to Z , that is for all $\delta > 0$,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{v_n} \log \mathbb{P}(d(Z_n, Z) > \delta) = -\infty.$$

The following result is known as Azuma-Bennett-Hoeffding inequality [Azuma, 5, 46].

Lemma 6.8.2 *Let X be a real-valued and centered random variable such that $a \leq X \leq b$ a.s., with $a < b$. Then for all $\lambda > 0$, we have*

$$\mathbb{E}[\exp(\lambda X)] \leq \exp\left(\frac{\lambda^2(b-a)^2}{8}\right).$$

We have the following many-to-one formulas. Ideas of the proofs can be found in [43] and [7].

Lemma 6.8.3 *Let $f, g \in \mathcal{B}(S)$, $x \in S$ and $n \geq m \geq 0$. Assuming that all the quantities below are well defined, we have :*

$$\mathbb{E}_x[M_{\mathbb{G}_n}(f)] = |\mathbb{G}_n| \mathcal{Q}^n f(x) = 2^n \mathcal{Q}^n f(x), \quad (6.67)$$

$$\mathbb{E}_x[M_{\mathbb{G}_n}(f)^2] = 2^n \mathcal{Q}^n(f^2)(x) + \sum_{k=0}^{n-1} 2^{n+k} \mathcal{Q}^{n-k-1} \left((\mathcal{Q}^k f \otimes \mathcal{Q}^k f) \right) (x), \quad (6.68)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_x[M_{\mathbb{G}_n}(f)M_{\mathbb{G}_m}(g)] &= 2^n \mathcal{Q}^m (g \mathcal{Q}^{n-m} f) (x) \quad (6.69) \\ &+ \sum_{k=0}^{m-1} 2^{n+k} \mathcal{Q}^{m-k-1} \left((\mathcal{Q}^k g \otimes_{\text{sym}} \mathcal{Q}^{n-m+k} f) \right) (x). \end{aligned}$$

We recall here a simplified version of Theorem 1 in [23]. We consider the real martingale $(M_n, n \in \mathbb{N})$ with respect to the filtration $(\mathcal{H}_n, n \in \mathbb{N})$ and we denote $(\langle M \rangle_n, n \in \mathbb{N})$ its bracket.

Proposition 6.8.4 *Let (b_n) a sequence satisfying*

$$b_n \text{ is increasing, } b_n \rightarrow +\infty, \quad \frac{b_n}{\sqrt{n}} \rightarrow 0,$$

such that $c(n) := \sqrt{n}/b_n$ is non-decreasing, and define the reciprocal function $c^{-1}(t)$ by

$$c^{-1}(t) := \inf\{n \in \mathbb{N} : c(n) \geq t\}.$$

Under the following conditions :

(C1) there exists $Q \in \mathbb{R}_+^*$ such that for all $\delta > 0$,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n^2} \log \left(\mathbb{P} \left(\left| \frac{\langle M \rangle_n}{n} - Q \right| > \delta \right) \right) = -\infty,$$

(C2) $\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{b_n^2} \log \left(n \operatorname{ess\,sup}_{1 \leq k \leq c^{-1}(b_{n+1})} \mathbb{P}(|M_k - M_{k-1}| > b_n \sqrt{n} \mid \mathcal{H}_{k-1}) \right) = -\infty$,

(C3) for all $a > 0$ and for all $\delta > 0$,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n^2} \log \left(\mathbb{P} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{E} \left(|M_k - M_{k-1}|^2 \mathbf{1}_{\{|M_k - M_{k-1}| \geq a \frac{n}{b_n}\}} \mid \mathcal{H}_{k-1} \right) > \delta \right) \right) = -\infty,$$

$(M_n / (b_n \sqrt{n}))_{n \in \mathbb{N}}$ satisfies the MDP in \mathbb{R} with the speed b_n^2/n and the rate function $I(x) = \frac{x^2}{2Q}$.

Remarque 6.8.5

For all $n \geq 1$, we set $m_n = M_n - M_{n-1}$. Note that, in Proposition 6.8.4, if the sequence $(m_n)_{n \geq 1}$ is uniformly bounded, we recover a simplified version of the result of Dembo [20] and if the sequence $(m_n)_{n \geq 1}$ is bounded by a deterministic sequence, we recover a simplified version of the result of Puhalskii [57].

Bibliographie

- [1] K.B. ATHREYA. “Limit theorems for multitype continuous time Markov branching processes”. In : *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete* 12.4 (1969), p. 320-332.
- [2] D. BAKRY, I. GENTIL et M. LEDOUX. *Analysis and geometry of Markov diffusion operators*. T. 348. Springer Science & Business Media, 2013.
- [3] I. V. BASAWA et J. ZHOU. “Non-Gaussian bifurcating models and quasi-likelihood estimation”. In : *Adv. in Appl. Probab.* 41.A (2004), p. 55-64. DOI : 10.1239/jap/1082552190. URL : <https://doi.org/10.1239/jap/1082552190>.
- [4] IV BASAWA et J ZHOU. “Non-Gaussian bifurcating models and quasi-likelihood estimation”. In : *Journal of Applied Probability* 41.A (2004), p. 55-64.
- [5] G. BENNETT. “Probability Inequalities for the Sum of Independent Random Variables”. In : *Journal of the American Statistical Association* 57.297 (1962), p. 33-45. ISSN : 01621459. URL : <http://www.jstor.org/stable/2282438>.
- [6] S. V BITSEKI PENDA et J.F. DELMAS. *Central limit theorem for bifurcating Markov chains*. 2020. arXiv : 2012.04741 [math.PR].
- [7] S. V. BITSEKI PENDA, H. DJELLOUT et A. GUILLIN. “Deviation inequalities, moderate deviations and some limit theorems for bifurcating Markov chains with application”. In : *Ann. Appl. Probab.* 24.1 (2014), p. 235-291. ISSN : 1050-5164. DOI : 10.1214/13-AAP921. URL : <https://doi.org/10.1214/13-AAP921>.
- [8] W. J BÜRGER R.and Ewens. “Fixation probabilities of additive alleles in diploid populations”. In : *Journal of Mathematical Biology* 33.5 (1995), p. 557-575.
- [9] P.L. CHESSON et R.R. WARNER. “Environmental variability promotes coexistence in lottery competitive systems”. In : *The American Naturalist* 117.6 (1981), p. 923-943.
- [10] T. CHUMLEY, A. AYDOGMUS O.and Matzavinos et A. ROITERSHTEIN. “Moran-type bounds for the fixation probability in a frequency-dependent Wright–Fisher model”. In : *Journal of mathematical biology* 76.1 (2018), p. 1-35.

- [11] B. CLOEZ et J. CORUJO. “Uniform in time propagation of chaos for a Moran model”. In : *arXiv preprint arXiv :2107.10794* (2021).
- [12] F. CORDERO et G. VÉCHAMBRE. “Moran model and Wright-Fisher diffusion with selection and mutation in a one-sided random environment”. In : *arXiv preprint arXiv :1911.12089* (2019).
- [13] T. COULHON. “Ultracontractivity and Nash type inequalities”. In : *Journal of functional analysis* 141.2 (1996), p. 510-539.
- [14] R. COWAN et R. STAUDTE. “The bifurcating autoregression model in cell lineage studies”. In : *Biometrics* 42.4 (déc. 1986), p. 769-783. ISSN : 0006-341X. DOI : 10.2307/2530692. URL : <https://doi.org/10.2307/2530692>.
- [15] M. DANINO et N.M. SHNERB. “Fixation and absorption in a fluctuating environment”. In : *Journal of theoretical biology* 441 (2018), p. 84-92.
- [16] M. DANINO et al. “The effect of environmental stochasticity on species richness in neutral communities”. In : *Journal of theoretical biology* 409 (2016), p. 155-164.
- [17] N. M. DANINO M.and Shnerb. “Theory of time-averaged neutral dynamics with environmental stochasticity”. In : *Physical Review E* 97.4 (2018), p. 042406.
- [18] D.A. DAWSON. “Introductory lectures on stochastic population systems”. In : *arXiv preprint arXiv :1705.03781* (2017).
- [19] J.F. DELMAS et L. MARSALLE. “Detection of cellular aging in a Galton-Watson process”. In : *Stochastic Process. Appl.* 120.12 (2010), p. 2495-2519. ISSN : 0304-4149. DOI : 10.1016/j.spa.2010.07.002. URL : <https://doi.org/10.1016/j.spa.2010.07.002>.
- [20] A. DEMBO et al. “Moderate deviations for martingales with bounded jumps”. In : *Electronic Communications in Probability* 1 (1996), p. 11-17.
- [21] A. DEMBO et O. ZEITOUNI. *Large Deviations Techniques and Applications, Spring-Verlag New York*. 1998.
- [22] A. DEPPERSCHMIDT A.and Greven et P. PFAFFELHUBER. “Tree-valued Fleming–Viot dynamics with mutation and selection”. In : *The Annals of Applied Probability* 22.6 (2012), p. 2560-2615.
- [23] H. DJELLOUT. “Moderate deviations for martingale differences and applications to o-mixing sequences”. In : *Stochastics and stochastics reports* 73.1 (2002), p. 37-64.
- [24] H. DJELLOUT et L. WU. “Lipschitzian norm estimate of one-dimensional Poisson equations and applications”. In : *Annales de l’IHP Probabilités et statistiques*. T. 47. 2. 2011, p. 450-465.
- [25] P. EICHELSBACHER et M. LÖWE. “Moderate deviations for iid random variables”. In : *ESAIM : Probability and Statistics* 7 (2003), p. 209-218.

-
- [26] A. ELLEGÅRD. *Darwin and the general reader : the reception of Darwin's theory of evolution in the British periodical press, 1859-1872*. University of Chicago Press, 1990.
- [27] A. ETHERIDGE. *Some Mathematical Models from Population Genetics : École D'Été de Probabilités de Saint-Flour XXXIX-2009*. T. 2012. Springer Science & Business Media, 2011.
- [28] A.M. ETHERIDGE, R. C GRIFFITHS et J.E TAYLOR. "A coalescent dual process in a Moran model with genic selection, and the lambda coalescent limit". In : *Theoretical population biology* 78.2 (2010), p. 77-92.
- [29] S. N ETHIER. "A class of degenerate diffusion processes occurring in population genetics". In : *Communications on Pure and Applied Mathematics* 29.5 (1976), p. 483-493.
- [30] S. N ETHIER et T. NAGYLAKI. "Diffusion approximations of the two-locus Wright-Fisher model". In : *Journal of mathematical biology* 27.1 (1989), p. 17-28.
- [31] S.N. ETHIER et T.G. KURTZ. *Markov processes : characterization and convergence*. T. 282. John Wiley & Sons, 2009.
- [32] S.N. ETHIER et M. F. NORMAN. "Error estimate for the diffusion approximation of the Wright-Fisher model". In : *Proceedings of the National Academy of Sciences* 74.11 (1977), p. 5096-5098.
- [33] R. S. ETIENNE. "A new sampling formula for neutral biodiversity". In : *Ecology letters* 8.3 (2005), p. 253-260.
- [34] R.S. ETIENNE et H. OLFF. "A novel genealogical approach to neutral biodiversity theory". In : *Ecology Letters* 7.3 (2004), p. 170-175.
- [35] W. J. EWENS. *Mathematical population genetics : theoretical introduction*. T. 1. Springer, 2004.
- [36] W. FELLER. "Diffusion processes in genetics". In : *Proceedings of the second Berkeley symposium on mathematical statistics and probability*. The Regents of the University of California. 1951.
- [37] R. FISHER. *The genetical theory of natural selection (reprint, 1958)*. 1930.
- [38] R.A. FISHER et al. "024 : On the Dominance Ratio." In : (1922).
- [39] G. GACKOU, A. GUILLIN et A. PERSONNE. "Quantitative approximation of the discrete Moran process by a Wright-Fisher diffusion". In : *Journal of Mathematical Biology* 81.2 (2020), p. 575-602.
- [40] N. GOZLAN et C. LÉONARD. "A large deviation approach to some transportation cost inequalities". In : *Probability Theory and Related Fields* 139.1-2 (2007), p. 235-283.
- [41] A. GUILLIN, F. JABOT et A. PERSONNE. "On the Simpson index for the Wright-Fisher process with random selection and immigration". In : *International Journal of Biomathematics* 13.06 (2020), p. 2050046.

- [42] A. GUILLIN et al. "Transportation-information inequalities for Markov processes". In : *Probability theory and related fields* 144.3-4 (2009), p. 669-695.
- [43] J. GUYON. "Limit theorems for bifurcating Markov chains. Application to the detection of cellular aging". In : *Ann. Appl. Probab.* 17.5-6 (2007), p. 1538-1569. ISSN : 1050-5164. DOI : 10.1214/105051607000000195. URL : <https://doi.org/10.1214/105051607000000195>.
- [44] J. GUYON. "Limit theorems for bifurcating Markov chains. Application to the detection of cellular aging". In : *The Annals of Applied Probability* 17.5-6 (2007), p. 1538-1569.
- [45] M. HAIRER et J.C. MATTINGLY. "Yet another look at Harris' ergodic theorem for Markov chains". In : *Seminar on Stochastic Analysis, Random Fields and Applications VI*. Springer. 2011, p. 109-117.
- [46] W. HOEFFDING. "Probability Inequalities for Sums of Bounded Random Variables". In : *Journal of the American Statistical Association* 58.301 (1963), p. 13-30. ISSN : 01621459. URL : <http://www.jstor.org/stable/2282952>.
- [47] S.P. HUBBELL. *The unified neutral theory of biodiversity and biogeography (MPB-32)*. Princeton University Press, 2011.
- [48] F. JABOT, A. GUILLIN et A. PERSONNE. "On the Simpson index for the Moran process with random selection and immigration". In : *arXiv preprint arXiv :1809.08890* (2018).
- [49] M. KALYUZHNY et N.M KADMON R.and Shnerb. "A neutral theory with environmental stochasticity explains static and dynamic properties of ecological communities". In : *Ecology letters* 18.6 (2015), p. 572-580.
- [50] M. KIMURA. *The neutral theory of molecular evolution*. Cambridge University Press, 1983.
- [51] K. MARTON. "A measure concentration inequality for contracting Markov chains". In : *Geometric & Functional Analysis GAFA* 6.3 (1996), p. 556-571.
- [52] D. M MCCANDLISH, C. L EPSTEIN et J. B PLOTKIN. "Formal properties of the probability of fixation : identities, inequalities and approximations". In : *Theoretical population biology* 99 (2015), p. 98-113.
- [53] S. MÉLÉARD. *Modèles aléatoires en Ecologie et Evolution*. Springer, 2016.
- [54] P.A.P. MORAN. "Random processes in genetics". In : *Mathematical proceedings of the cambridge philosophical society*. T. 54. 1. Cambridge University Press. 1958, p. 60-71.
- [55] M. F. NORMAN. "Ergodicity of diffusion and temporal uniformity of diffusion approximation". In : *Journal of Applied Probability* 14.2 (1977), p. 399-404.

-
- [56] M.K. PITT, C. CHATFIELD et S.G WALKER. "Constructing first order stationary autoregressive models via latent processes". In : *Scandinavian Journal of Statistics* 29.4 (2002), p. 657-663.
- [57] A. PUHALSKII. "Large deviations of semimartingales : a maxingale problem approach I. Limits as solutions to a maxingale problem". In : *Stochastics : An International Journal of Probability and Stochastic Processes* 61.3-4 (1997), p. 141-243.
- [58] M. RÖCKNER et F-Y WANG. "Supercontractivity and ultracontractivity for (nonsymmetric) diffusion semigroups on manifolds". In : (2003).
- [59] M. RÖCKNER et F.Y. WANG. "Ultracontractivity and supercontractivity of Markov semigroups". In : (1999).
- [60] E. H SIMPSON. "Measurement of diversity". In : *nature* 163.4148 (1949), p. 688-688.
- [61] D.W. STROOCK et S. VARADHAN. *Multidimensional diffusion processes*. T. 233. Springer Science & Business Media, 1997.
- [62] DW. STROOK et SRS VARADHAN. "Multidimensional diffusion processes". In : (1982).
- [63] M. TALAGRAND. "Transportation cost for Gaussian and other product measures". In : *Geometric & Functional Analysis GAFA* 6.3 (1996), p. 587-600.
- [64] G. VÉCHAMBRE. "Combinatorics of ancestral lines for a Wright-Fisher diffusion with selection in a Lévy environment". In : *arXiv preprint arXiv :2103.12301* (2021).
- [65] C. VILLANI. *Optimal transport : old and new*. T. 338. Springer Science & Business Media, 2008.
- [66] S. WRIGHT. "Evolution in Mendelian populations". In : *Genetics* 16.2 (1931), p. 97.
- [67] S. WRIGHT. "The differential equation of the distribution of gene frequencies". In : *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* 31.12 (1945), p. 382.