



HAL
open science

Sommes fractales de pulses : étude dimensionnelle et multifractale des trajectoires et simulations

Guillaume Saës

► **To cite this version:**

Guillaume Saës. Sommes fractales de pulses : étude dimensionnelle et multifractale des trajectoires et simulations. Analyse numérique [math.NA]. Université Paris-Est, 2021. Français. NNT : 2021PESC0065 . tel-03666654

HAL Id: tel-03666654

<https://theses.hal.science/tel-03666654>

Submitted on 12 May 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ —
— PARIS-EST

École Doctorale MSTIC

UMR 8050 - Laboratoire d'Analyse et de Mathématiques
Appliquées

Thèse

Présentée pour l'obtention du grade de DOCTEUR
DE L'UNIVERSITE PARIS-EST

par

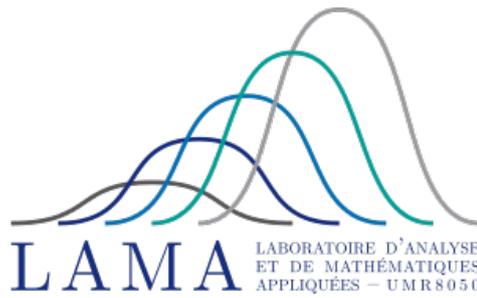
Guillaume Saës

Sommes fractales de pulses : Étude dimensionnelle et multifractale des trajectoires et simulations

Spécialité : Mathématiques

Soutenue le Jeudi 09 Décembre 2021 devant un jury composé de :

Directeur de thèse	Prof. Stéphane Jaffard	(Université Paris-Est Créteil)
Directeur de thèse	Prof. Stéphane Seuret	(Université Paris-Est Créteil)
Rapporteur	Prof. Yanick Heurteaux	(Université Clermont Auvergne)
Rapporteuse	Prof. Céline Lacaux	(Université d'Avignon)
Examinateur	Prof. Patrice Abry	(École Normale Supérieure de Lyon)
Examinatrice	Prof. Céline Esser	(Université de Liège)
Examinateur	Prof. Karl Grosse-Erdmann	(Université de Mons)
Examinateur	Prof. Samuel Nicolay	(Université de Liège)



Thèse effectuée au sein de l'**UMR 8050 - Laboratoire d'Analyse et de
Mathématiques Appliquées**

de l'Université de Paris-Est Créteil
61, avenue du Général de Gaulle
94010 Créteil
France

Résumé

Les deux grandes classes de processus dont l'analyse multifractale a été réalisée sont les processus multiplicatifs (issus des cascades de Mandelbrot) et les processus additifs (processus de Lévy, séries aléatoires d'ondelettes et leurs généralisations). Une classe importante de processus se rattache à cette seconde catégorie : les "sommés de pulses aléatoires". Il s'agit de séries aléatoires où l'on somme des translatées-dilatées d'un "pulse" qui peut avoir une forme arbitraire. Les paramètres de translation, dilatation et d'amplitude peuvent être aléatoires (ou certains peuvent être reliés entre eux de façon déterministe). Des cas particuliers de ce modèle ont été introduits par Lovejoy et Mandelbrot pour modéliser la pluviométrie en un point donné, puis des extensions ont été proposées par Ciosek-Georges, Taqqu, Mandelbrot, ...

Enfin, Y. Demichel, dans sa thèse, a étudié des aspects fractals des trajectoires de tels processus. Certaines propriétés de base de ces processus ont été étudiées (existence, continuité, intégrabilité, dimension de graphe, régularité globale des trajectoires au sens Besov ou Sobolev); cependant, malgré quelques travaux mathématiques déjà existants, de nombreuses questions sont encore ouvertes. Le but de la thèse sera d'introduire un modèle plus général que ceux qui ont été abordés dans le passé, et d'en effectuer également l'analyse multifractale, c'est-à-dire déterminer la régularité ponctuelle presque sûre des trajectoires. Celle-ci pourra être prise au sens de la régularité höldérienne usuelle quand les trajectoires sont localement bornées, ou au sens de p -exposant dans le cas contraire. Pour cela, il sera utile de présenter une nouvelle caractérisation des p -exposants à l'aide des transformées en ondelettes continues.

La thèse se conclut par une partie appliquée : simulation des trajectoires et étude du formalisme multifractal pour les sommes de pulses aléatoires. Enfin, on s'intéressera en particulier à des données physiologiques de coureurs marathoniens fournis par V. Billat et ses équipes.

Fractal sums of pulses :
Dimensional and multifractal study
of paths and simulations

Abstract

Multifractal analysis is the mathematical study of the irregularity of objects or irregular functions. The two main classes of processes where multifractal analysis was performed are multiplicative processes (Mandelbrot cascades and their generalizations) and additive processes (Lévy processes, random wavelet series and their generalization). An important additive process is the random sum of pulses. These series are random sums of translations and dilatations of pulses supplied by a pulse of arbitrary form. The translation, expansion and amplitude parameters can be random (or deterministically related). Special cases of this model were introduced by Lovejoy and Mandelbrot to model the precipitations at a given point and further extensions were proposed by Ciosek-Georges, Taqqu, Mandelbrot,...

Finally, Y. Demichel, studied in his thesis some fractal aspects of the sample paths of such processes. Some basic properties of these processes have been studied by these authors (existence, continuity, integrability, graph dimension, global regularity of trajectories in the Besov or Sobolev sense). However, despite some existing mathematical works, many questions are still open. The purpose of the thesis will be to introduce a more general model than those that have been studied in the past, and perform their multifractal analysis (i.e. to determine the pointwise regularity of its trajectories). This can be taken in the sense of the usual Hölderian regularity when the sample paths are locally bounded, or otherwise in the sense of p -exponent. For this purpose, it will be useful to present a new characterization of the p -exponents using continuous wavelet transforms.

The thesis concludes with an applied part: simulation of the path and the study of multifractal formalism for the sums of random pulses. Finally, we will be particularly interested in the physiological data of marathon runners provided by V. Billat and his teams.

Remerciements

Je souhaite adresser mes profonds et sincères remerciements à mes deux directeurs de thèse Stéphane Jaffard et Stéphane Seuret. Ils ont été d'une grande écoute, de patience et de très bons conseils tout au long de cette thèse dans les bons et mauvais moments. Stéphane Seuret est le premier enseignant de mathématiques post-bac que j'ai connu à mes 17 ans. Il a été dès les premiers instants et tout du long, un véritable guide dans ma formation mathématiques qui n'a jamais cessé de me soutenir et conseiller. Stéphane Jaffard est l'enseignant qui m'a accompagné dans l'univers des ondelettes et ses applications avec générosité et écoute. Il a toujours été d'un grand soutien dans les moments les plus difficiles de la thèse. Je vous remercie très grandement tous les deux pour tous ces moments ! Travailler à vos côtés m'a permis de bénéficier de nombreuses compétences et idées nouvelles dont j'espère continuer à profiter.

Yanick Heurteaux et Céline Lacaux m'ont fait l'honneur d'accepter d'être les rapporteur.se.s de cette thèse. Je leur en suis très reconnaissant ! Ils ont été tous deux des mentors de premiers ordres au cours du GdR d'Analyse Multifractale et de leurs journées. Je remercie également les autres membres du jury. J'ai eu la chance de bénéficier des conseils avisés de Patrice Abry au cours de nos échanges sur l'aspect plus appliqué de cette thèse. Céline Esser et Samuel Nicolay ont toujours été des modèles pour moi et m'ont aidé, avec le soutien de Karl Grosse-Erdmann, à me faire une place en Belgique. Vous tous, je suis très honoré et heureux de vous avoir parmi les membres du jury de cette thèse.

Je tiens à formuler des remerciements très particulier à Véronique Billat qui a été un moteur déterminant dans la partie appliquée de cette thèse. En effet, j'ai eu le grand privilège d'apprendre et d'échanger à ses côtés sur la physiologie du corps humain. Mes remerciements vont aussi à Antoine Ayache dont je ne cesse d'avoir le plaisir d'échanger avec enthousiasme et d'apprendre lors de nos différentes rencontres.

Un grand merci à tous les membres du laboratoire LAMA UMR 8050 qui ont été pour la plupart mes enseignants : Amine Asselah, Julien Brémont, Sonia Boufala, Frédéric Charves, Clothilde Fermanian, Colette Guillopé, Lingmin Liao, Nicolae Miha-lache, Arnaud Le Ny, Thomas Richard, . . . Vous m'avez accueilli très chaleureusement avec bonté et surtout écoute. J'ai partagé beaucoup de très bons moments à vos côtés. Merci ! Je remercie mes amis et collègues scientifiques Florent Bouly, Yacine Esmili, Thomas Lamby qui ont été de bons compagnons d'armes lors des différents moments de la thèse.

Je tiens à remercier toute l'association Animath qui m'a accompagné lors de cette

thèse pour m'aider à changer d'air quand il le fallait. Un remerciement tout particulier à Martin Andler et Fabrice Rouillier qui ont été de véritables sages pour me conseiller, m'apprendre et me guider dans les moments difficiles. Durant ces années de thèse, j'ai eu le plaisir de partager tous ces moments avec plusieurs doctorants et anciens doctorants dont je ne cesse de remercier le soutien au quotidien : Cosmin Burtea qui m'a accueilli, Timothée Crin-Barat mon edpiste préféré, Edouard Daviaud mon frère d'arme, Alaa Marachli ma fidèle amie, Wejdene Nasr Ben Hadj Amor ma courageuse sœur de recherche.

Je remercie l'ensemble des membres du département de Mons (Quentin Brouette, Quentin Menet, Maja Volkov, ...) du groupe de recherche d'Analyse Multifractale (Julien Barral, Atanasios Batakis, Yann Demichel, Arnaud Durand, Guillaume Havard, Yves Meyer, Laurent Loosveldt, Stéphane Roux, Herwig Wendt ...) qui ont été présents tout au long de ces années. Je remercie également tous les membres de mon équipe de Science Trash pour leur disponibilité et la confiance qui m'ont toujours accordé dans mon rôle de leader : Aurélien Achard, Maxence Baumgartner, Nathan Blanchet, Adrien Bouisset, Noa Chastang, Corentin Leroy, Julia Payen, Jérôme Que-nault, Adrien Rolland, Antoine Tondu... Merci à tous mes anciens élèves/étudiants qui sont aujourd'hui de grands professionnels et qui m'ont soutenu à leur tour dans les moments difficiles : Raphaël Bertrand, Georges Guitton, Quentin Rible, Gatien Roujanski, Faustin Saillant, Vincent Salmeron, Anton et William Sanaa. Et aussi à mes étudiants en Belgique.

Je tiens à remercier mes amis proches qui ont joué un rôle très important dans ma vie : Michel Bensimhon et Alex Upellini, vous avez été des sages, mentors et très bons amis ; Jawad Megherbi, Kevin Pognart, Samy Senhadji et Wisly Truong, vous êtes mes plus vieux amis et vous êtes toujours présents à mes côtés ; Victor Chassagne, Rémi Céron, Adrien Duchasseint, Fanny Fargette, Rémi Flippe, Damien Hu, Mélanie Périé et Maxim Tan, on a toujours formé un très gros groupe d'amis et malgré toutes les distances qui nous séparent, vous êtes toujours présents ; Alexis Bouras, Laurent Cardon, Mouadh Haddar et Etienne Rodriguez, avec vous, j'ai toujours eu la chance de décompresser durant toutes ces années. Je remercie aussi les personnes qui me suivent de près ou de loin et que j'ai pu oublier.

Enfin, je remercie ma famille, Didier, et tout particulièrement et chaleureusement, ma mère pour son soutien apporté au quotidien. Tu as su me supporter et m'encourager pendant les périodes de doute et de découragement souvent présentes lors des derniers mois de rédaction. Je te dois énormément et te dédie tout spécialement cette thèse.

Table des matières

Introduction	1
0.1 Les sommes fractales de sauts	2
0.2 Les sommes fractales de pulses	4
0.3 Résultats sur le spectre multifractal	7
0.4 Résultats sur le formalisme multifractal	13
0.5 Résultats sur l'application aux données physiologiques	16
Introduction (English)	21
0.6 Fractal sums of jumps	22
0.7 Fractal sums of pulses	24
0.8 Results on the multifractal spectrum	26
0.9 Results on the multifractal formalism	32
0.10 Results on the application to physiological data	35
1 Analyse multifractale des sommes de pulses aléatoires	39
1.1 Notre modèle de sommes de pulses aléatoires	43
1.2 Résultats préliminaires	48
1.3 Régularité höldérienne uniforme	53
1.3.1 Première méthode de démonstration avec les accroissements	53
1.3.2 Deuxième méthode de démonstration avec les ondelettes	56
1.4 Distribution des pulses isolés	59
1.5 Minoration de l'exposant de Hölder de F via G_δ	64
1.6 Majoration de l'exposant de Hölder de F via les ensembles G'_δ	67

1.7	Calcul du spectre	71
1.8	Module de continuité	74
1.9	Perspectives	76
2	Caractérisation par coefficients continus d'ondelettes des p-exposants	81
2.1	Caractérisations des exposants de régularité par les coefficients discrets d'ondelettes	81
2.2	Motivations	87
2.3	Notion de p -leaders continus	90
2.4	Caractérisation des espaces $T_\alpha^p(x_0)$	93
2.5	p -Spectre des sommes de pulses aléatoires	102
2.6	Perspectives	108
3	Formalisme multifractal, simulations et applications	109
3.1	Introduction	109
3.2	Formalisme Multifractal	110
3.3	Spectre de Legendre	111
3.4	Simulation de séries de pulses aléatoires et spectres de Legendre	114
3.5	Spectre de Legendre continu	116
3.6	Perspective d'applications numériques des coefficients continus leaders	118
4	Applications aux données physiologiques avec analyse multifractale multivariée	121
4.1	Introduction	121
4.2	Analyse Multifractale des données physiologiques	123
4.3	Analyse Multifractale de la Fréquence Cardiaque des marathoniens	129
4.4	Analyse Multifractale de la cadence	135
4.5	Analyse bivariée multifractale Fréquence-Cadence	138
4.6	Conclusion et perspective	142
	Bibliography	153

Introduction

L'étude et l'analyse de la régularité ponctuelle de fonctions, processus aléatoires, signaux ou encore images est un jeune domaine des mathématiques. Plusieurs mathématiciens et physiciens ont mis en évidence dans plusieurs domaines (turbulence, finance, traitement du signal, ...) que la régularité ponctuelle (exposant de Hölder, p -exposant, exposant d'oscillation, ...) variait fortement d'un point à un autre et cela aussi bien par la théorie qu'à l'aide de simulations numériques.

La question de savoir si une fonction continue est nécessairement dérivable en certains points s'est posée au mathématicien Augustin Cauchy, dans son cours d'Analyse donné à l'Ecole Polytechnique et publié en 1821 [37]. Aucune réponse n'a été donnée avant 1872, où Karl Weierstrass exhibe un contre-exemple avec une fonction continue, mais nulle part dérivable (voir [105]) donnée pour $A, B \in \mathbb{R}_+^*$ avec $A \in]0, 1[$ et $AB \geq 1$ par

$$W(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} A^n \cos(B^n \pi x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Considérées longtemps par certains mathématiciens comme de simples curiosités ou "monstruosités", Jean Perrin dès 1913, se rend compte que, contrairement à ce que pensait Henri Poincaré, de telles fonctions sont appelées à jouer un rôle important pour modéliser des phénomènes naturels, comme les mouvements d'une particule en suspension dans un fluide [93]. Au cours du 20ème siècle, plusieurs autres fonctions continues, mais nulle part dérivables, vont être présentées, avec la même particularité pour une grande partie d'entre elles : elles s'écrivent comme des séries de fonctions bien définies. On retrouvera aussi ce type de considération avec des processus stochastiques comme le mouvement brownien introduit en 1827 par R. Brown et défini dans un cadre mathématique cohérent plus tard par L. Bachelier, puis N. Wiener.

Au cours des années 70, B. Mandelbrot étudie des fonctions et processus aléatoires (sommées de pulses, brownien fractionnaire, Lévy,...) comme des modèles

mathématiques qu'il nommera "fractales", afin d'évoquer la géométrie "irrégulière" qu'aura leur graphe [85]. Il s'en servira pour étudier un grand nombre de phénomènes naturels en biologie, physique, finance etc. À la suite de ses observations, plusieurs séries de fonctions déterministes ou aléatoires vont intéresser les scientifiques, leur offrant des modèles adaptés à la représentation de signaux.

0.1 Les sommes fractales de sauts

En 1984, S. Lovejoy et B. Mandelbrot [83] ont défini des modèles mathématiques appelés "Sommes fractales de sauts" afin d'étudier les propriétés des champs de pluies. Les sommes fractales de sauts sont des sommes de fonctions constantes par morceaux de tailles et durées variables, elles sont définies de la manière suivante.

Définition 0.1.1 (Somme fractale de sauts). *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. Soient $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ deux suites réelles strictement positives et $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires sur \mathbb{R}^d . On définit la somme fractale de sauts M par*

$$M(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n \chi \left(\frac{x - X_n}{w_n} \right), \quad x \in \mathbb{R}^d$$

où χ est la fonction saut égale à 1 sur $B(0, 1)$ et 0 sinon.

On note $B(x, r)$ la boule de centre x et de rayon r définie par

$$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^d : \|x - y\| < r\}$$

où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne de \mathbb{R}^d . Ainsi, les termes de la série ont des sauts de hauteurs λ_n et dont le support est $B(X_n, w_n)$. Dans toute la suite, nous allons prendre $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. uniformes sur $[0, 1]$ pour distribuer de façon homogène les boules $B(X_n, w_n)$ sur un intervalle compact. Un exemple est donné en dimension $d = 1$ pour $\lambda_n = n^{-1/2}$ et $w_n = n^{-5/4}$ en Figure 1.

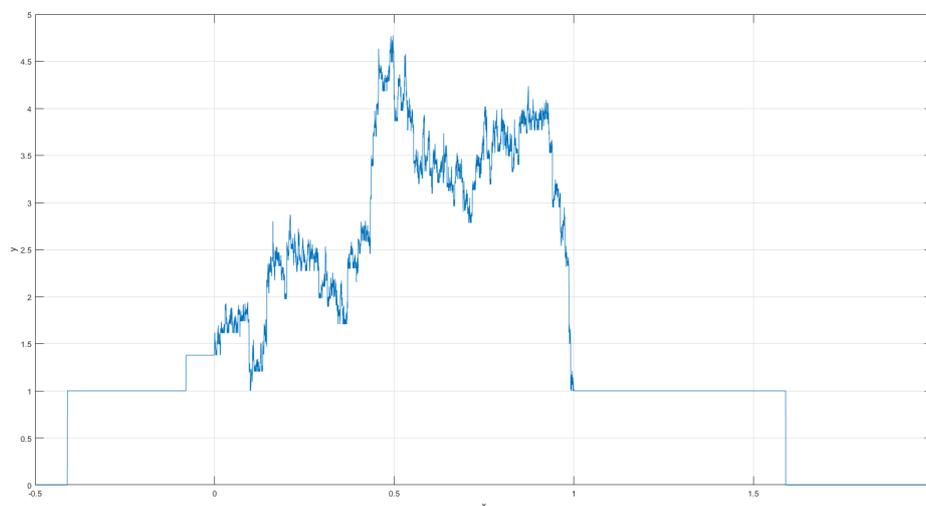


Figure 1: Graphe d'une somme fractale de sauts pour $\lambda_n = n^{-1/2}$ et $w_n = n^{-5/4}$.

Nous rappelons la définition suivante pour toute la suite.

Définition 0.1.2. Soient (X, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré, $p \in [1, +\infty[$ et $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction μ -mesurable. On dit que f appartient à $L_{loc}^p(X)$ lorsque pour tout compact K de X ,

$$\int_K |f(x)|^p d\mu(x) < +\infty.$$

On dit que f appartient à $L_{loc}^\infty(X)$ lorsque pour tout compact K de X , la fonction f est bornée sur K , μ presque partout.

Nous nous intéresserons principalement au cas $d = 1$ pour les représentations graphiques. Dans son article [86], B. Mandelbrot étudie les sommes fractales de sauts, avec différentes conditions sur les suites $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pour que la série converge et soit continue. D'autres propriétés sont aussi étudiées comme la stationnarité et l'auto-affinité du processus. En plus de ces deux propriétés, les sommes fractales de sauts ont un graphe dont les trajectoires dépendent du paramètre α dans le cas $\lambda_n = n^\alpha$ et $w_n = 1/n$. Plusieurs graphes sont présentés en Figure 2 avec $\alpha \in \{0, 2; 0, 4; 0, 8; 1, 2\}$.

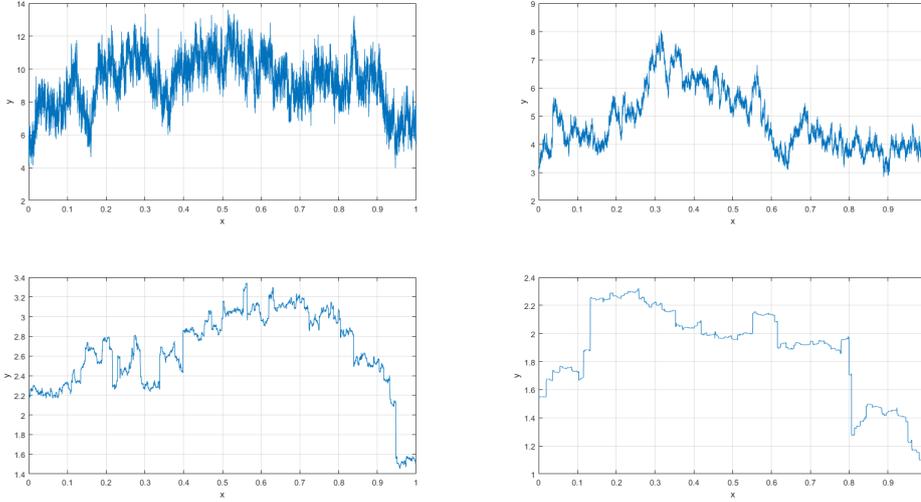


Figure 2: Graphes de sommes fractales de sauts pour $\lambda_n = n^{-\alpha}$ et $w_n = n^{-1}$ avec $\alpha \in \{0.2, 0.4, 0.8, 1.2\}$.

On peut généraliser les processus étudiés avec des fonctions différentes à la place des fonctions sauts afin d'obtenir de nouvelles trajectoires plus régulières.

0.2 Les sommes fractales de pulses

Soit $K : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle positive qu'on nomme "pulse père" à support sur $B(0, 1)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, un pulse est défini comme une fonction réelle $K_n : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$K_n(x) = K\left(\frac{x - X_n}{w_n}\right), \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

De la même manière que les sommes fractales de sauts, on peut définir une somme fractale de pulses de la manière suivante.

Définition 0.2.1 (Somme fractale de pulses). *Soient $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ deux suites réelles strictement positives et $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires sur \mathbb{R}^d . Une somme fractale de pulses est un processus $S : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ donné par*

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n K_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n K\left(\frac{x - X_n}{w_n}\right), \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Il est important de remarquer que les premiers modèles de sommes fractales de

pulses étudiés par B. Mandelbrot puis par Y. Demichel ont des dilatations w_n et λ_n déterministes et non aléatoires. Dans le même article [86], B. Mandelbrot étudie ces sommes fractales de pulses, en particulier leurs propriétés presque sûres de convergence, continuité, stationnarité et auto-affinité. De plus, il montre qu'il est possible d'obtenir différents processus stochastiques comme limite faible de suites de sommes fractales de pulses dont les paramètres sont soigneusement choisis (voir Table I de [86]). On représente deux exemples en Figure 3 avec le graphe de sommes fractales de pulses dans le cas $\lambda_n = n^{-0,5}$ et $w_n = n^{-1}$ à partir de deux fonctions K différentes avec $d = 1$.

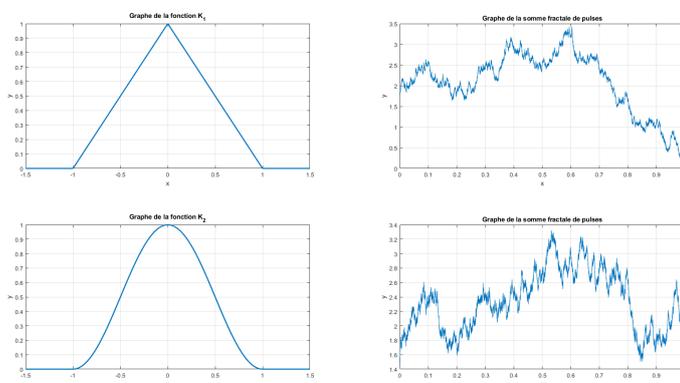


Figure 3: Graphes de deux sommes fractales de pulses pour $\lambda_n = n^{-0,5}$ et $w_n = n^{-1}$ avec $K_1(x) = 1 - |x|$ et $K_2(x) = \cos(\pi x/2)^2$ pour tout $x \in [-1, 1]$.

La condition de positivité de K n'est pas une condition nécessaire pour définir et étudier de tels processus, en voici des exemples avec la Figure 4.

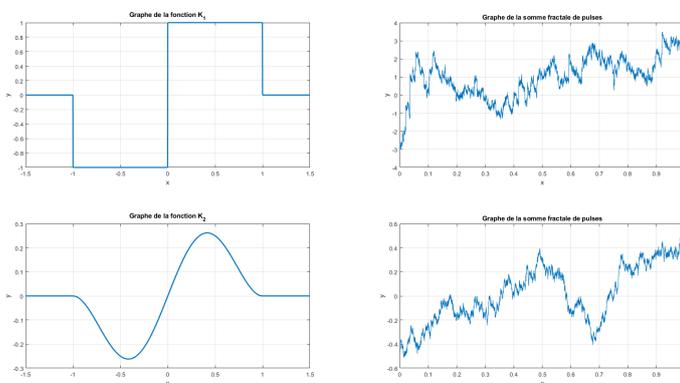


Figure 4: Graphes de sommes fractales de pulses pour $\lambda_n = n^{-0,5}$ et $w_n = n^{-1}$ avec $K_1(x) = \chi(2x - 1) - \chi(2x + 1)$ et une deuxième $K_2(x) = x \cos(\pi x/2)^2$ pour tout $x \in [-1, 1]$.

Dans les différentes Figures 3 et 4 avec $d = 1$, on peut voir que par rapport à la Figure 2, les trajectoires des processus sont continues et que le choix de λ_n sur la Figure 2 influe toujours sur la "rugosité" des trajectoires. D'ailleurs, cette notion de "rugosité" sur l'ensemble du graphe peut être caractérisée à l'aide de l'exposant de Hölder uniforme dont nous rappelons la définition.

Définition 0.2.2 (Exposant de Hölder uniforme). *Soient $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ et $\alpha \in]0, 1[$. Une fonction f appartient à $C^\alpha(I)$ (I un intervalle de \mathbb{R}) lorsqu'il existe $K_\alpha > 0$ tel que*

$$\forall x, y \in I, \quad |f(x) - f(y)| \leq K_\alpha |x - y|^\alpha.$$

Pour $\alpha \geq 1$ et $\alpha \notin \mathbb{N}$, une fonction appartient à $C^\alpha(I)$ lorsque f possède des dérivées continues d'ordre $k \leq \lfloor \alpha \rfloor$ et que $f^{(\lfloor \alpha \rfloor)}$ appartient à $C^{\alpha - \lfloor \alpha \rfloor}(I)$.

On définit l'exposant de Hölder uniforme de f sur \mathbb{R} noté H_f par

$$H_f = \sup\{\alpha : f \in C^\alpha(\mathbb{R})\}.$$

Plus l'exposant H_f est grand, plus la fonction est régulière. Pour les sommes fractales de pulses avec $\lambda_n = n^{-\alpha}$ et $\alpha > 0$, B. Mandelbrot [86] a montré que l'exposant de Hölder uniforme est égal à $\alpha \in]0, 1[$ lorsque le pulse $K : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est défini par

$$K(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{si } x \in [-1, 0[\\ 1 + x & \text{si } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Dans sa thèse Y. Demichel [45] calcule l'exposant de Hölder uniforme pour une plus grande famille de sommes fractales de pulses et s'intéresse au graphe de ces dernières, en déterminant leur dimension de Hausdorff, mais aussi leurs fonctions de structures. Cependant, aucune étude sur la "régularité ponctuelle" de tels processus n'a été menée jusqu'à maintenant. Par conséquent, le premier objectif de cette thèse est de prolonger les études effectuées précédemment avec une analyse multifractale du modèle dans un cadre différent. En effet, les paramètres de dilatations λ_n et w_n seront eux choisis aléatoirement.

Dans le cas $d \geq 2$, il existe plusieurs modèles de champs aléatoires gaussiens ou stables qui sont des cas particuliers de sommes de pulses étudiés par C. Lacaux et H. Biermé dans [29]. En revanche, les mêmes auteurs présentent des modèles de champs gaussiens indexés par \mathbb{R}^N à valeurs dans \mathbb{R}^d qui diffèrent des sommes de pulses dans [32]

dont un cas particulier avec des modèles anisotropes et $d = 1$ sont présentés par Bierné, Meerschaert, Scheffler dans [31]. [30] propose un modèle vérifiant l'invariance d'échelle anisotrope définie dans [31] qui sont motivées par des applications pour modéliser des images d'ostéoporose, qui sont des données très anisotropes.

0.3 Résultats sur le spectre multifractal

Au milieu des années 1980, les mesures sur la vitesse d'un écoulement turbulent (voir [56, 57]) font apparaître des signaux qui semblent partout irréguliers et dont les irrégularités semblent varier de façon très erratique d'un point à l'autre. Pour mesurer ce type de comportement, on a besoin de définir une notion de régularité ponctuelle. Pour une fonction $f \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R})$ la régularité ponctuelle en x_0 est le plus souvent mesurée par l'exposant ponctuel de Hölder défini de la manière suivante :

Définition 0.3.1 (Exposant ponctuel de Hölder). *Soient $f \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R})$, x_0 un réel et α un réel positif. Une fonction f appartient à $C^\alpha(x_0)$ lorsqu'il existe un polynôme P_{x_0} de degré inférieur à $\lfloor \alpha \rfloor$ et $K_\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tels que*

$$\exists r \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in]x_0 - r, x_0 + r[, |f(x) - P_{x_0}(x - x_0)| \leq K_\alpha |x - x_0|^\alpha.$$

L'exposant ponctuel de Hölder de f en un point x_0 est défini par

$$h_f(x_0) = \sup\{\alpha \geq 0 : f \in C^\alpha(x_0)\}.$$

La définition de la régularité hölderienne ponctuelle fait explicitement l'hypothèse que f est localement bornée, donc, dans le cadre plus général des fonctions $f \in L_{loc}^p(\mathbb{R})$ ($p \in [1, +\infty[$), il n'est pas pertinent d'utiliser l'exposant de Hölder. Mais on peut effectuer une analyse multifractale de certaines séries de Fourier ou d'ondelettes convergeant dans des espaces de fonctions non localement, bornées, en prenant comme exposant ponctuel une mesure de la vitesse de divergence au point considéré. Par exemple pour les séries de Fourier,

$$S_n f(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{2i\pi kx} \quad \text{où} \quad c_k = \int_0^1 f(t) e^{-2i\pi kt} dt,$$

Y. Heurteaux et F. Bayart [20] calculent la dimension de Hausdorff des ensembles $E_\beta = \{x \in \mathbb{T} : \limsup_{n \rightarrow +\infty} n^{-\beta} |S_n(f)(x)| > 0\}$, $\beta > 0$. Un autre exemple est donné

par C. Esser et S. Jaffard dans [51] avec les séries d'ondelettes, où l'on considère les ensembles E_a de points où les sommes partielles de la série jusqu'à l'échelle j sont de l'ordre de grandeur de 2^{aj} . Une autre manière est d'étendre la définition des exposants de Hölder de la manière suivante avec la notion de p -exposant.

Définition 0.3.2 (p -Exposant). Soient $p \in [1, +\infty[$, $f \in L_{loc}^p(\mathbb{R})$, x_0 un réel et α un réel positif. Une fonction f appartient à $T_\alpha^p(x_0)$ lorsqu'il existe un polynôme P_{x_0} de degré inférieur à $\lfloor \alpha \rfloor$ et $K_\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tels que

$$\exists R \in \mathbb{R}_+^*, \forall r \in]0, R], \left(\frac{1}{r} \int_{B(x_0, r)} |f(x) - P_{x_0}(x - x_0)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq K_\alpha r^\alpha.$$

Le p -exposant de f en un point x_0 est défini par

$$h_f^{(p)}(x_0) = \sup\{\alpha \geq 0 : f \in T_\alpha^p(x_0)\}.$$

Cette notion a été introduite pour $p > 1$ par Calderón et Zygmund en 1961 [36] pour obtenir des résultats de régularité ponctuelle de solutions d'équations aux dérivées partielles. Les p -exposants n'étaient pas utilisés dans le traitement du signal jusqu'aux années 2000 lorsque leur caractérisation en ondelette a été proposée [68, 69, 71]. On remarquera que le p -exposant est défini de manière équivalente à l'exposant de Hölder ponctuel mais en faisant intervenir des conditions L^p locales.

S. Nicolay et L. Loosevelt dans [82] proposent une généralisation de la définition des p -exposants en remplaçant $T_\alpha^p(x_0)$ par des espaces $T_\alpha^p(x_0)$ où le module de continuité r^α est remplacé par une *fonction de Boyd* $\phi(r)$ (c'est-à-dire une fonction continue avec $\phi(1) = 1$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\sup_{t>0} \frac{\phi(tx)}{\phi(t)} < +\infty$). On obtient ainsi une généralisation des exposants de Hölder proposée par K. Damien et S. Nicolay dans [41]. L'intérêt de ces généralisations sont les applications dans la théorie des opérateurs différentiels et en particulier pour les opérateurs de Bessel et les équations elliptiques aux dérivées partielles [36].

L'analyse multifractale a pour objet l'étude de fonctions dont l'exposant de régularité ponctuelle varie fortement d'un point à un autre. Afin de quantifier et de classifier les ensembles de points ayant le même exposant, on définit les ensembles isohöldériens suivants.

Définition 0.3.3 (Ensemble isohöldérien). Soient $p \in [1, +\infty]$, $f \in L_{loc}^p(\mathbb{R}^d)$ et h un

réel positif. Si $p = +\infty$, l'ensemble isohölderien $E_f(h)$ est défini par

$$E_f(h) = \{x \in \mathbb{R}^d : h_f(x) = h\}.$$

Si $p \in [1, +\infty[$, l'ensemble p -isohölderien $E_f^{(p)}(h)$ est défini par

$$E_f^{(p)}(h) = \{x \in \mathbb{R}^d : h_f^{(p)}(x) = h\}.$$

Les fonctions que nous allons rencontrer par la suite possèdent des ensembles isohölderiens fractals partout denses et qui sont tous de mesure de Lebesgue nulle sauf au plus un. Il est donc pertinent d'utiliser la dimension de Hausdorff, notée \dim_H , pour les distinguer. Pour cela, on définit les notions de spectres multifractals.

Définition 0.3.4 (Spectre multifractal). *Soient $p \in [1, +\infty]$, $f \in L_{loc}^p(\mathbb{R}^d)$ et h un réel positif. Si $p = +\infty$, le spectre multifractal de f est l'application définie par*

$$D_f : \begin{cases} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow [0, d] \cup \{-\infty\} \\ h & \longmapsto \dim_H(E_f(h)). \end{cases}$$

Si $p \in [1, +\infty[$, le p -spectre multifractal de f est l'application définie par

$$D_f^{(p)} : \begin{cases} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow [0, d] \cup \{-\infty\} \\ h & \longmapsto \dim_H(E_f^{(p)}(h)). \end{cases}$$

Par convention, $\dim_H(\emptyset) = -\infty$.

L'analyse multifractale d'une fonction mathématique (déterministe ou aléatoire) consiste à calculer D_f ou $D_f^{(p)}$. Elle va nous permettre de compléter l'analyse des différents modèles dans un cadre plus général.

Définition 0.3.5. *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. Soit $(C_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ un processus ponctuel de Poisson dont l'intensité est la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}_+ . Soit S un processus ponctuel indépendant de $(C_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ dont l'intensité est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}_+^* \times [0, 1]$. On écrit $S = (B_n, X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ où $(B_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite croissante.*

Et par construction, les trois suites de variables aléatoires $(C_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $(B_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ indépendantes. Nous définirons les sommes de pulses aléatoires de la manière suivante.

Définition 0.3.6 (Sommes de pulses aléatoires). *Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\eta \in]0, 1]$. Une*

somme de pulses aléatoires est le processus $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ défini par

$$F(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} C_n^{-\alpha} \psi \left(B_n^{\frac{1}{\eta}} (x - X_n) \right). \quad (1)$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les fonctions $\psi_n : x \mapsto \psi(B_n^{1/\eta}(x - X_n))$ sont les pulses associés à F .

Ainsi, nous étudions les sommes fractales de pulses selon les paramètres $\lambda_n = C_n^{-\alpha}$, $w_n = B_n^{-1/\eta}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\eta \in]0, 1[$ qui sont cette fois-ci des paramètres de dilatation aléatoire. Nous allons effectuer l'analyse multifractale de ces processus, en déterminant leur spectre et leur p -spectre. Le théorème suivant sera démontré dans le Chapitre 1.

Théorème 0.3.1. *Soient $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction lipschitzienne non-nulle à support sur $[-1, 1]$, $\alpha, \eta \in]0, 1[$ et $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la série aléatoire définie par (1). Avec probabilité 1, on a*

$$D_F(H) = \begin{cases} \frac{H}{\alpha} & \text{si } H \in [\alpha\eta, \alpha], \\ -\infty & \text{sinon.} \end{cases}.$$

Nous n'avons considéré dans cette thèse que des fonctions d'une seule variable. Certaines parties de la preuve sont valables lorsque $\alpha > 1$, on le verra. A cette occasion la régularité uniforme de F sera étudiée de deux manières différentes lors du Chapitre 1. Ensuite, dans le Chapitre 2, on étudiera les propriétés multifractales des sommes de pulses aléatoires lorsque α peut prendre des valeurs négatives, c'est-à-dire que F peut avoir des trajectoires localement non-bornés. Nous obtiendrons une majoration en tout point du p -exposant des sommes de pulses dont on déduira une majoration de leur p -spectre.

Pour ce deuxième point, il est intéressant de voir que le support du spectre peut contenir des valeurs négatives. Les valeurs $D_F^{(p)}(H)$ restent toujours comprises entre η et 1.

De plus, les sommes de pulses aléatoires rentrent dans la catégorie des "sparse processes" traitée dans le livre de M.Unser et P.D. Tafti [103] (Cela signifie que le processus a une représentation parcimonieuse sur une base d'ondelettes, et peut donc être compensé efficacement par la méthode de "wavelet shrinkage"). Dans un cadre plus général, ils étudient aussi d'autres processus comme les "Lévy white noise" (dérivées au sens des distributions de processus de Lévy) ou encore des processus qui s'écrivent comme des opérateurs pseudo-différentiels appliqués au "Lévy white noise".

Pour la démonstration des deux théorèmes, il existe plusieurs difficultés qu'on ne rencontre pas dans des processus similaires comme les séries lacunaires d'ondelettes. Dans le cas des séries lacunaires d'ondelettes, les pulses sont des ondelettes centrées (aléatoirement) sur des points dyadiques tandis que dans le cas des sommes de pulses aléatoires, les pulses sont distribués uniformément sur $[0, 1]$. Nous serons amenés à nous intéresser pour $x, r \in [0, 1]$ fixés, aux variables $T_n(x, r)$ données par

$$T_n(x, r) = \begin{cases} 1 & \text{si } B(X_n, B_n^{-\frac{1}{\eta}}) \cap B(x, r) \neq \emptyset \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et } T_n(x) = T_n(x, 0).$$

Ces variables vont permettre de regarder le nombre maximal de supports de pulses qui intersectent $B(x, r)$. Or pour estimer ce nombre maximal, les pulses seront classés selon les ensembles A_j définis par

$$\begin{aligned} A_j &= \{n \in \mathbb{N}^* : 2^{j-1} \leq B_n^{\frac{1}{\eta}} < 2^j\} \quad \text{si } j \neq 0 \\ A_0 &= \{n \in \mathbb{N}^* : 0 \leq B_n^{\frac{1}{\eta}} < 1\}. \end{aligned}$$

Ensuite, on démontrera le lemme suivant qui donne le nombre maximal de pulses de taille comparable contenant un point $x \in [0, 1]$.

Lemme 0.3.1. *Presque sûrement, il existe $K > 0$ tel que pour tout $x \in [0, 1]$ et $J, j \in \mathbb{N}$ avec $j \neq 0$, on a*

$$\sum_{n \in A_j} T_n(x, 2^{-\eta J}) \leq K j^2 \max\{1, 2^{\eta(j-J)}\}.$$

La deuxième difficulté sera de répondre à un problème de recouvrement sur les pulses "isolés". Fixons $\delta \in [1, 1/\eta]$, $\gamma \in]0, 1/\eta - 1[$, p_0 un entier tel que $p_0 > (3 + 3\alpha)/(1 - \alpha\eta)$ et pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, $\varepsilon_j = \log_2(j)/(\eta j)$, on a

$$\mathcal{I}_j = \left\{ n \in A_j : \forall m \in \bigcup_{j'=\lfloor (1-p_0\eta\varepsilon_j)j \rfloor}^{\lfloor (1+\gamma)j \rfloor} A_{j'}, n \neq m, B(X_n, B_n^{-\frac{1}{\eta}}) \cap B(X_m, B_m^{-\frac{1}{\eta}}) = \emptyset \right\}.$$

Les pulses isolés sont les fonctions ψ_n telles que $n \in \mathcal{I}_j$, c'est-à-dire les pulses dont le support ne croise aucun support d'autres pulses dont la taille du support est comparable. L'objectif sera de répondre au problème de recouvrement aléatoire à partir des pulses "isolés" afin d'appliquer le théorème d'ubiquité [64].

Théorème 0.3.2. *Presque sûrement, l'ensemble*

$$G'_1 = \limsup_{j \rightarrow +\infty} \bigcup_{n \in \mathcal{I}_j} B(X_n, B_n^{-(1-\tilde{\varepsilon}_j)}) \quad \text{où} \quad \tilde{\varepsilon}_j = \frac{\log_2(16j \log_2 j)}{\eta}$$

est un recouvrement de $[0, 1]$.

Pour étudier le cas des trajectoires non localement bornées, il faudra trouver une caractérisation des p -exposants à partir des transformées en ondelettes continues. On fixera ψ une fonction qu'on nommera "ondelette mère" suffisamment régulière avec $\psi \in C^{r_\psi}(\mathbb{R})$ à support dans $[-1, 1]$ et avec un nombre $r_\psi + 1$ de moments nuls tel que $r_\psi > \lfloor \alpha \rfloor$.

Définition 0.3.7 (Transformée en ondelette continue). *Les transformées en ondelettes continues sont définies par*

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \quad W_f(a, b) = \frac{1}{a} \int_{\mathbb{R}} f(x) \psi\left(\frac{x-b}{a}\right) dx.$$

Ces transformées en ondelettes ne sont pas uniquement définies le long d'une grille dyadique puisque (a, b) sont des réels et que le support des ondelettes $\psi_{a,b} : x \mapsto \psi((x-b)/a)$ est l'intervalle $[b-a, b+a]$. Il va donc être pertinent de les utiliser dans le cadre des pulses aléatoires qui ont sont distribués uniformément sur $[0, 1]$.

Définition 0.3.8 (Leaders continus d'ondelettes). *Soient $p \in [1, +\infty[$ et $f \in L_{loc}^p(\mathbb{R})$. Si $p = +\infty$, alors les leaders continus d'ondelettes sont définis par*

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \quad L_f(a, b) = \sup_{(s,t) \in]0, a[\times]b-a, b+a[} |W_f(s, t)|.$$

Si $p < +\infty$, alors les p -leaders continus d'ondelettes sont définis par

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \quad L_f^{(p)}(a, b) = \left(\frac{1}{a} \int_{b-a}^{b+a} \left(\int_0^a |W_f(s, t)|^2 \frac{ds}{s} \right)^{\frac{p}{2}} dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

C'est à partir de ces notions que lors du Chapitre 2, nous démontrerons le théorème suivant.

Théorème 0.3.3. *Soient $p \in]1, +\infty[$, $\alpha \in]-1/p, +\infty[$, $x_0 \in \mathbb{R}$ et $f \in L_{loc}^p(\mathbb{R})$. La fonction f appartient à $T_\alpha^p(x_0)$ si et seulement s'il existe $C > 0$ tel que pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$,*

$$|L_f^{(p)}(a, x_0)| \leq C a^\alpha.$$

Afin de compléter, dans le cadre de cette thèse, l'étude des sommes de pulses aléatoires, le Chapitre 3 traitera du formalisme multifractal des sommes fractales de pulses.

0.4 Résultats sur le formalisme multifractal

Soit φ une fonction oscillante, c'est-à-dire ayant au moins un moment nul et appartenant à la classe de Schwartz $S(\mathbb{R})$. On appelle dans cette thèse une telle fonction φ "l'ondelette mère". Supposons que la fonction φ est choisie de manière à ce que la famille $\varphi_{j,k} = 2^{\frac{j}{2}}\varphi(2^j x - k)$ pour $(j, k) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ forme une base orthonormale de $L^2(\mathbb{R})$ [43, 89]. La définition des coefficients discrets d'ondelettes est donnée par

Définition 0.4.1 (Coefficient discret d'ondelettes). *Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$, les coefficients discrets d'ondelettes sont définis par*

$$\forall (j, k) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, c_{j,k} = 2^{\frac{j}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \varphi_{j,k}(x) dx = 2^j \int_{\mathbb{R}} f(x) \varphi(2^j x - k) dx.$$

La formule de reconstruction de la fonction f qu'on peut retrouver dans ces articles [42, 71, 84, 89] est donnée avec l'égalité dans $L^2(\mathbb{R})$ par

$$f(x) = \sum_{(j,k) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}} c_{j,k} \varphi(2^j x - k). \quad (2)$$

Les séries aléatoires d'ondelettes introduite par J-M. Aubry et S. Jaffard [12, 64] sont définies en considérant des coefficients d'ondelettes $c_{j,k}$ tirés aléatoirement. C'est une manière d'étudier différemment les sommes fractales de pulses avec le paramètre de hauteur λ_n aléatoire.

L'article de J-M. Aubry et S. Jaffard [12] traite en particulier des séries aléatoires d'ondelettes et de leurs propriétés multifractales. A chaque échelle, les coefficients d'ondelettes sont tirés de façon indépendante et identiquement distribuée suivant une loi assez générale, ce qui permet d'obtenir des spectres multifractals croissants aux formes variées.

Dans le cadre de cette thèse, un cas particulier va nous intéresser : les sommes lacunaires d'ondelettes.

Définition 0.4.2 (Séries lacunaire d'ondelettes). *Soient $\alpha \in]0, 1[$ et $\eta \in]0, 1[$. Pour tout $j \in \mathbb{N}$, on tire de manière aléatoire et indépendante $\lfloor 2^{\eta j} \rfloor$ entiers $k \in \{0, \dots, 2^j - 1\}$*

tel que $C_{j,k} = 2^{-\alpha j}$ et les autres coefficients valant 0. On définit la série lacunaire d'ondelettes comme le processus

$$L(x) = \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{2^j-1} C_{j,k} \varphi_{j,k}(x) = \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}} C_{j,k} 2^{\frac{j}{2}} \varphi(2^j x - k), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Il a été proposé [64] une étude multifractale du modèle : spectre, p -spectre et module de continuité. On représente en Figure 5 une trajectoire de série lacunaire.

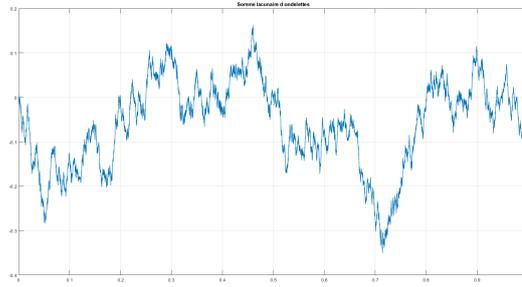


Figure 5: Graphe d'une série lacunaire d'ondelettes avec $\alpha = 0.5$ et $\eta = 0.8$.

Ces résultats se basent principalement sur l'utilisation des coefficients discrets dominants (ou leaders) des ondelettes dont les définitions sont données sur une grille dyadique. Pour tout $(j, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$, on note $\lambda_{j,k}$ l'intervalle dyadique défini par $\lambda_{j,k} = [k2^{-j}, (k+1)2^{-j}]$. On utilisera la notation $3\lambda_{j,k}$ pour l'union de $\lambda_{j,k}$ et des 2 intervalles adjacents à $\lambda_{j,k}$, $3\lambda_{j,k} = [(k-1)2^{-j}, (k+2)2^{-j}]$. Enfin pour tout $j \in \mathbb{N}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$, on note $\lambda_j(x_0)$ l'unique intervalle dyadique $\lambda_{j,k}$ tel que $x_0 \in \lambda_{j,k}$. Cela permet de définir la notion de coefficient d'ondelette dominant de la manière suivante.

Définition 0.4.3 (Coefficient d'ondelette dominant). Soient $p \in \mathbb{R}_+^*$ et $f \in L_{loc}^p(\mathbb{R})$. Si $p = +\infty$, alors les coefficients dominants (ou leaders) de f sont

$$\forall (j, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}, \quad d_{j,k} = \sup_{\lambda_{j',k'} \subset 3\lambda_{j,k}} \{|c_{j',k'}|\}.$$

Si $p < +\infty$, alors les coefficients p -dominants (ou p -leaders) sont

$$\forall (j, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}, \quad l_{j,k}^{(p)} = \left(\sum_{\lambda_{j',k'} \subset 3\lambda_{j,k}} |c_{j',k'}|^p 2^{-(j'-j)} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

A partir des leaders et p -leaders, on peut définir une notion de spectre qui peut

être simulé numériquement sur des données à l'aide d'algorithmes de régressions [2, 3, 107].

Définition 0.4.4 (Spectre de Legendre). *Soient $p \in]0, +\infty]$ et $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R})$. Si $p = +\infty$, alors les fonctions d'échelles sont définies par*

$$\zeta_f(q) = \liminf_{j \rightarrow +\infty} \frac{\log \left| 2^{-j} \sum_{k=0}^{2^j-1} |d_{j,k}|^q \right|}{\log(2^{-j})}, \quad q \in \mathbb{R}$$

et le spectre de Legendre par

$$L_f(h) = \inf_{q \in \mathbb{R}} \{qh - \zeta_f(q) + 1\}.$$

Si $p < +\infty$, alors les fonctions p -échelles sont définies par

$$\zeta_f^{(p)}(q) = \liminf_{j \rightarrow +\infty} \frac{\log \left| 2^{-j} \sum_{k=0}^{2^j-1} |l_{j,k}^{(p)}|^q \right|}{\log(2^{-j})}, \quad q \in \mathbb{R}$$

et le p -spectre de Legendre par

$$L_f^{(p)}(h) = \inf_{q \in \mathbb{R}} \{qh - \zeta_f^{(p)}(q) + 1\}.$$

Dans les articles [12, 64], il est démontré que les séries lacunaires d'ondelettes vérifient le formalisme multifractal. Un argument clé pour obtenir le spectre et p -spectre de Legendre est une conséquence de la proposition 4.1 de [2] qui estime la taille des p -leaders à chaque échelle. Cependant, les simulations numériques restent difficiles pour obtenir des résultats sur le spectre. Dans le cas des sommes de pulses aléatoires, il est intéressant de voir si le formalisme multifractal est vérifié, c'est-à-dire les égalités suivantes $L_f = D_f$ ou $L_f^{(p)} = D_f^{(p)}$. Or, il n'y a pas de résultat, même pouvant être validé par des simulations numériques, pour répondre au formalisme multifractal, c'est-à-dire des simulations numériques donnant un spectre de Legendre qui correspond au spectre multifractal. En effet, la lacunarité ne permet pas d'avoir assez de coefficients ce qui rend les estimations peu stables et ne permet pas d'obtenir un spectre de Legendre digne de confiance.

Dans cette thèse, lors du Chapitre 3, nous allons utiliser des méthodes numériques à l'aide de simulations et algorithmes développés par H. Wendt, P. Abry et R. Leonarduzzi [79, 106] afin d'étudier le support des p -spectres de Legendre des sommes de pulses aléatoires. Il sera pertinent de voir qu'on retombe sur les mêmes difficultés

que pour les séries lacunaires d'ondelettes. Cependant, l'étude du support du spectre de Legendre sera menée pour vérifier une partie du formalisme multifractal, à savoir l'égalité suivante

$$\{h \in \mathbb{R}_+^* : L_f^{(p)}(h) \neq -\infty\} = \{h \in \mathbb{R}_+^* : D_f^{(p)}(h) \neq -\infty\}.$$

Une généralisation serait de croiser les difficultés du Chapitre 2 et celles de l'article de S. Aubry et S. Jaffard [12], c'est-à-dire de prendre des sommes aléatoires de pulses dont les coefficients seraient tirés suivant des lois arbitraires.

0.5 Résultats sur l'application aux données physiologiques

Dans le Chapitre 4 de la thèse, une application à des données de coureurs marathoniens est proposée. Les données physiologiques de coureurs marathoniens sont étudiées depuis 50 ans et déjà de nombreux résultats en analyse multifractale ont été obtenus [33, 108]. Les auteurs ont étudié les fonctions d'échelle de la fréquence cardiaque de coureurs marathoniens à partir de plusieurs méthodes et simulations. C'est dans cette lignée qu'on présentera une classification des spectres de la fréquence cardiaque et de la cadence des pas sur 8 coureurs marathoniens entre le début et la fin de la course (voir Figure 6).

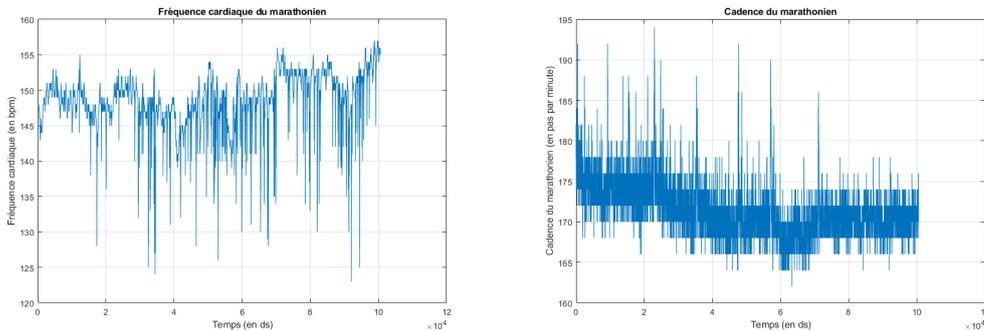


Figure 6: Représentation des données physiologiques (fréquence cardiaque et cadence) nettoyées pour un coureur marathonien (le nombre de données est d'environ $N \simeq 100\,000$)

Dans ce chapitre, il sera mis en évidence des changements d'allure sur le spectre de Legendre entre le début et la fin de la course pour la fréquence cardiaque, ce qu'on ne

retrouvera pas pour la vitesse et l'amplitude des pas. Puisqu'il est difficile de classifier les différents spectres multifractals, on extrait quelques paramètres pertinents. Pour cela, nous allons estimer l'exposant de régularité uniforme h_{min} et trois coefficients c_1 et c_2 donnés par $c_k = \zeta^{(k-1)}(0)$, $k \in \mathbb{N}^*$. En effet, ces coefficients décrivent le comportement de la fonction d'échelle lorsqu'elle est assez régulière pour q proche de 0 d'après le développement limité

$$\zeta_f(q) \sim c_1 + c_2q.$$

On déterminera en particulier les points (h_{min}, c_1) entre le début et la fin de la course des coureurs marathoniens sur la fréquence cardiaque pour décrire les changements d'allure du spectre autour de l'exposant maximal.

Dans un deuxième temps, nous appliquerons l'analyse multifractale multivariée récemment proposée par S. Jaffard, S. Seuret, P. Abry, R. Leonarduzzi et H. Wendt [6] dont l'objectif est d'effectuer l'analyse multifractale conjointe de n données à la fois ($n \geq 2$).

Définition 0.5.1 (Spectre multifractal multivarié). Soient $n \geq 2$ et $f_1, \dots, f_n \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R})$. On définit les ensembles isohöldériens multivariés pour tout $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}_+^n$ par

$$E_{f_1, \dots, f_n}(h) = \{x \in \mathbb{R} : h_{f_1}(x) = h_1, \dots, h_{f_n}(x) = h_n\}$$

et le spectre multifractal multivarié par

$$D_{f_1, \dots, f_n} : \begin{cases} \mathbb{R}_+^n & \longrightarrow [0, 1] \cup \{-\infty\} \\ h & \longmapsto \dim_H(E_{f_1, \dots, f_n}(h)). \end{cases}$$

Pour déterminer des estimations numériques sur les spectres, nous appliquerons les algorithmes basés sur l'article des mêmes auteurs que précédemment [7].

Définition 0.5.2 (Spectre de Legendre multivarié). Soient $f_1, \dots, f_n \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R})$ et $q = (q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{R}^n$. On définit les fonctions de q -structures multivariées au sens des leaders pour tout $j \in \mathbb{N}$ par

$$S_{f_1, \dots, f_n}(q, j) = 2^{-j} \sum_{k=0}^{2^j-1} |d_{j,k}^{(f_1)}|^{q_1} \dots |d_{j,k}^{(f_n)}|^{q_n}$$

où $d_{j,k}^{(f_i)}$ représente les coefficients d'ondelettes leaders de la fonction f_i . Les fonctions

d'échelles multivariées au sens des leaders sont données par

$$\zeta_{f_1, \dots, f_n}(q) = \liminf_{j \rightarrow +\infty} \frac{|\log S_{f_1, \dots, f_n}(q, j)|}{\log(2^{-j})}$$

et le spectre de Legendre multivarié pour tout $h \in \mathbb{R}^d$ par

$$L_{f_1, \dots, f_n}(h) = \inf_{q \in \mathbb{R}^n} \{q_1 h_1 + \dots + q_n h_n - \zeta_{f_1, \dots, f_n}(q) + n\}.$$

Cette notion permettra d'illustrer les corrélations qu'on peut retrouver entre les spectres de Legendre monovariés (1 donnée) et multivariés ($n > 1$ données). En effet, dans le cas de certains processus additifs (par exemple, des processus de Levy indépendants) f_1, \dots, f_n , il est conjecturé que pour tout $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}_+^n$,

$$D_{f_1, \dots, f_n}(h) = \min\{D_{f_1}(h_1), \dots, D_{f_n}(h_n)\}$$

et pour certains processus multiplicatifs (cascades de Bernoulli) g_1, \dots, g_n , la relation est la suivante [6] :

$$D_{g_1, \dots, g_n}(h) = \sum_{i=1}^n D_{g_i}(h_i) - 1.$$

La codimension de l'intersection est parfois obtenue comme la somme des codimensions, c'est le cas pour les intersections "génériques" de variétés régulières [25, 26]. Cette étude peut permettre de réduire le nombre de modèles pertinents dans l'étude des données physiologiques. En comparant les différentes formules qui peuvent relier les spectres de données physiologiques, on peut éliminer certains processus ne correspondant pas aux mêmes relations.

A l'issue de cette thèse, plusieurs perspectives et élargissements du sujet pour de futurs travaux seront proposés. Pour commencer, il serait possible d'effectuer une extension des théorèmes du Chapitre 1 au cas multi-dimensionnel. On pourra également étudier des modèles de sommes de pulses aléatoires inhomogènes et anisotropes, c'est-à-dire que les supports des pulses ne seront plus seulement des boules $B(X_n, B_n^{-1/\eta})$ distribuées de manière homogènes mais des rectangles d -dimensionnels distribués avec différentes intensités selon les directions, ce qui peut avoir des applications directes pour la modélisation de textures. Ensuite, il serait possible d'envisager de déterminer des nouvelles méthodes numériques pour améliorer l'étude des différents spectres afin de répondre aux problèmes que nous avons rencontrés aux Chapitres 3 et 4. Des applications numériques du théorème de caractérisation des p -exposants par les transformées

en ondelettes continues et d'autres applications de l'analyse multifractale multivariée pourraient aussi être proposées.

Introduction (English)

The study and analysis of the regularity of functions at the certain point, random processes, signals or images is a young field of mathematics. Several mathematicians and physicists have demonstrated in several domains (turbulence, finance, signal processing, ...) that the pointwise regularity (Hölder exponent, p -exponent, oscillation exponent, ...) varies strongly from one point to another and this both by theory and by numericals simulations.

The question of whether a continuous function is necessarily differentiable at certain points was raised by the mathematician Augustin Cauchy, in his course on Analysis given at the Ecole Polytechnique and published in 1821 [37]. No answer was given before 1872, when Karl Weierstrass showed a counterexample with a continuous function, but nowhere differentiable (see [105]) given for $A, B \in \mathbb{R}_+^*$ with $A \in]0, 1[$ and $AB \geq 1$ by

$$W(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} A^n \cos(B^n \pi x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Considered for a long time by some mathematicians as simple curiosities or "monstrosities", Jean Perrin, as early as 1913, realized that, contrary to what Henri Poincaré thought, such functions were called upon to play an important role in modeling natural phenomena, such as the movements of a particle suspended in a fluid [93]. During the 20th century, several other continuous functions that were nowhere differentiable were introduced and a large part of them had the same particularity : they are written as series of well-defined functions. This type of consideration would also be found with stochastic processes such as Brownian motion introduced in 1827 by R. Brown and defined in a coherent mathematical framework later by L. Bachelier and N. Wiener.

During the 70's, B. Mandelbrot studied random functions and processes (sums of pulses, fractional Brownian, Lévy,...) as mathematical models that he named "fractals", in order to evoke the "irregular" geometry of their graph [85]. He would use them

to study many natural phenomena in biology, physics, finance, etc. Following his observations, several series of deterministic or random functions would interest scientists, offering them models adapted to the representation of signals.

0.6 Fractal sums of jumps

In 1984, S. Lovejoy and B. Mandelbrot [83] defined mathematical models called "Fractal sums of jumps" to study the properties of rain fields. Fractal sums of jumps are sums of jump functions of variable size and duration, they are defined in the following way throughout the introduction.

Definition 0.6.1 (Fractal sums of jumps). *Let $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ two non-negative real sequences and $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ a sequence of random variables on \mathbb{R}^d . We define the fractal sum of jumps M by*

$$M(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n \chi \left(\frac{x - X_n}{w_n} \right), \quad x \in \mathbb{R}^d$$

where χ is the jump function equal to 1 on $B(0, 1)$ and 0 elsewhere.

Let $B(x, r)$ be the ball of center x and radius r defined by $B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^d : \|x - y\| < r\}$ where $\|\cdot\|$ is the Euclidean norm of \mathbb{R}^d . Thus, the terms of the series are jumps of height λ_n and whose support is $B(X_n, w_n)$. In the following, we will take $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ a probability space and $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ a random variable sequence i.i.d. uniform on $[0, 1]$ to homogeneously distribute the balls $B(X_n, w_n)$ on a compact interval. An example is given in dimension $d = 1$ pour $\lambda_n = n^{-1/2}$ et $w_n = n^{-4/5}$ in Figure 7.

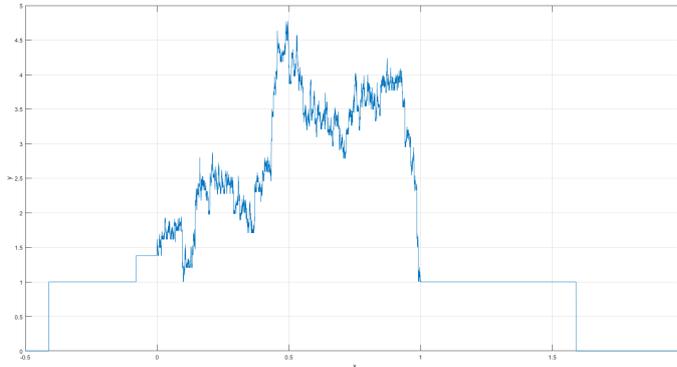


Figure 7: Graph of a fractal sum of jumps for $\lambda_n = n^{-1/2}$ and $w_n = n^{-4/5}$.

We recall the following definition for all the following.

Definition 0.6.2. Let (X, \mathcal{A}, μ) a measured space, $p \in [1, +\infty[$ and $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ a μ -measurable function. We say that f belongs to $L_{loc}^p(X)$ when for any compact K of X ,

$$\int_K |f(x)|^p d\mu(x) < +\infty.$$

We say that f belongs to $L_{loc}^{infy}(X)$ when for any compact K of X , the function f is bounded on K , μ almost everywhere.

We are mainly interested in the case $d = 1$ for graphical representations. In his paper [86], B. Mandelbrot studies the fractal sums of jumps, with different conditions on the sequences $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ so that the series converges and is continuous. Other properties are also studied such as stationarity and self-affinity of the process defined as follows.

In addition to these two properties, the fractal sums of jumps have a graph whose trajectories depend on the parameter α in the case $\lambda_n = n^\alpha$ and $w_n = 1/n$. Several graphs are presented in Figure 8 with $\alpha \in \{0, 2; 0, 4; 0, 8; 1, 2\}$.

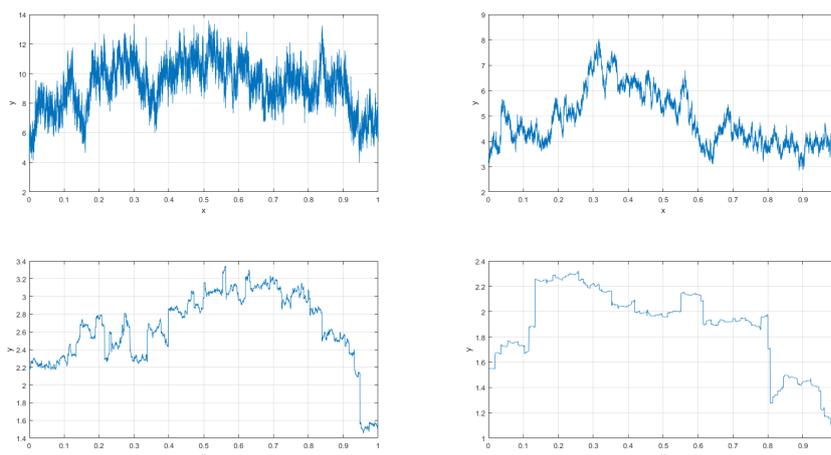


Figure 8: Graphs of fractal sums of jumps $\lambda_n = n^{-\alpha}$ and $w_n = n^{-1}$ with $\alpha \in \{0.2, 0.4, 0.8, 1.2\}$.

We can generalize the studied processes with different functions instead of jump functions in order to obtain smoother trajectories.

0.7 Fractal sums of pulses

Let $K : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ a non-negative real function with support in $B(0,1)$ that we call "father pulse". For all $n \in \mathbb{N}$, a pulse is defined as a real function $K_n : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ by

$$K_n(x) = K\left(\frac{x - X_n}{w_n}\right), \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

In the same way as fractal sums of jumps, we can define a fractal sum of pulses in the following way.

Definition 0.7.1 (Fractal sum of pulses). *Let $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ two non-negatives real sequences and $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ a sequence of random variables on \mathbb{R} . A fractal sum of pulses is the stochastic process $S : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ given by*

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n K_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n K\left(\frac{x - X_n}{w_n}\right), \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

It is important to note that the first models of fractal sums of pulses studied by B. Mandelbrot and then by Y. Demichel have w_n and λ_n dilations which are deterministic and not random. In the same article [86], B. Mandelbrot studies these fractal sums of pulses with properties almost surely of convergence, continuity, stationarity and self-affinity. Moreover, he shows that it is possible to obtain different stochastic processes as a weak limit of sequences of fractal sums of pulses whose parameters are carefully chosen (see Table I of [86]). We represent two examples in Figure 2 with the graph of fractal sums of pulses in the case $\lambda_n = n^{-0.5}$ and $w_n = n^{-1}$ from two different functions K with $d = 1$.

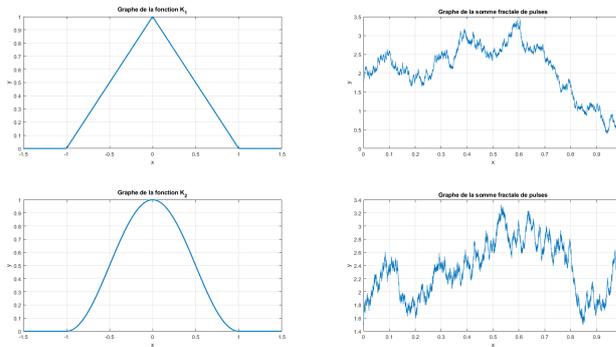


Figure 9: Graphs of two fractal sums of pulses for $\lambda_n = n^{-0.5}$ and $w_n = n^{-1}$ with $K_1(x) = 1 - |x|$ and $K_2(x) = \cos(\pi x/2)^2$ for all $x \in [-1, 1]$.

The condition of positivity of K is not a necessary condition to define and study such processes, here are some examples with Figure 10.

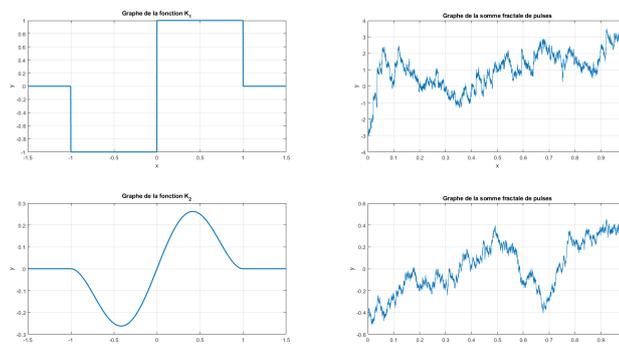


Figure 10: Fractal sums of pulses graphs for $\lambda_n = n^{-0.5}$ and $w_n = n^{-1}$ with $K_1(x) = \chi(2x - 1) - \chi(2x + 1)$ and a second $K_2(x) = x \cos(\pi x/2)^2$ for all $x \in [-1, 1]$.

In the different Figures 9 and 10 with $d = 1$, we can see that compared to Figure 8, the trajectories of the processes are continuous and that the choice of λ_n always influences the "roughness" of the trajectories. Moreover, this notion of "roughness" on the graph can be characterized by the uniform Hölder exponent.

Definition 0.7.2 (Uniform Hölder exponent). *Let $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ and $\alpha \in]0, 1[$. A function f belongs to $C^\alpha(I)$ (I an interval of \mathbb{R}) when there exists $K_\alpha > 0$ such that*

$$\forall x, y \in I, |f(x) - f(y)| \leq K_\alpha |x - y|^\alpha.$$

For $\alpha \geq 1$ and $\alpha \notin \mathbb{N}$, a function belongs to $C^\alpha(I)$ when f has continuous derivatives of order $k \leq \lfloor \alpha \rfloor$ and $f^{(\lfloor \alpha \rfloor)}$ belongs to $C^{\alpha - \lfloor \alpha \rfloor}(I)$.

We define the uniform Hölder exponent of f on \mathbb{R} noted H_f by

$$H_f = \{\alpha : f \in C^\alpha(\mathbb{R})\}.$$

The larger the exponent H_f is, the more regular the process is. For fractal sums of pulses with $\lambda_n = n^{-\alpha}$ and $\alpha > 0$, it has already been shown by B. Mandelbrot that the uniform Hölder exponent is equal to $\alpha \in]0, 1[$ with the pulse $K : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ defined by

$$K(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{if } x \in [-1, 0[\\ 1 + x & \text{if } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{else.} \end{cases}$$

In his thesis Y. Demichel calculates the uniform Hölder exponent for a larger family of fractal sums of pulses and is interested in their graph, determining their Hausdorff dimension, but also their functions and structure curves. However, no study on the "pointwise regularity" of such processes has been conducted so far. Therefore, the first objective of this thesis is to extend the previous studies with a multifractal analysis of the model in a different framework. Indeed, the expansion parameters λ_n and w_n will be chosen randomly.

In the $d \geq 2$ case, there are several models of Gaussian or stable random fields which are special cases of sums of pulses studied by C. Lacaux and H. Bierné in [29]. On the other hand, the same authors present models of Gaussian fields indexed by \mathbb{R}^N with values in \mathbb{R}^d which differ from the sums of pulses in [32] of which a particular case with anisotropic models and $d = 1$ are presented by Bierné, Meerschaert, Scheffler in [31]. [30] proposes a model verifying the anisotropic scale invariance defined in [31] which are motivated by applications to model osteoporosis images, which are very anisotropic data.

0.8 Results on the multifractal spectrum

In the mid-1980s, measurements of the velocity of a turbulent flow (see [56, 57]) show signals that appear to be everywhere irregular and whose irregularities seem to vary very erratically from one point to another. To measure this kind of behavior, we need to define a notion of pointwise regularity. For a function $f \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R})$ the pointwise regularity at x_0 is most often measured by the pointwise Hölder exponent defined as follows:

Definition 0.8.1 (Hölder Exponent). *Let $f \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R})$, x_0 a real and α a positive real. A function f belongs to $C^\alpha(x_0)$ if there are a polynom P_{x_0} of degree less than $\lfloor \alpha \rfloor$ and $K_\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ such that*

$$\exists r \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in]x_0 - r, x_0 + r[, |f(x) - P_{x_0}(x - x_0)| \leq K_\alpha |x - x_0|^\alpha.$$

The Hölder pointwise exponent of f at a point x_0 is defined by

$$h_f(x_0) = \sup\{\alpha \geq 0 : f \in C^\alpha(x_0)\}.$$

The definition of pointwise Hölder regularity explicitly assumes that f is locally

bounded, so in the more general setting of functions $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R})$ ($p \in [1, +\infty[$), it is irrelevant to use the Hölder exponent. But one can perform a multifractal analysis of some Fourier or wavelet series converging in spaces of non-locally bounded functions, by taking as point exponent a measure of the speed of divergence at the point considered. For example for Fourier series,

$$S_n f(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{2i\pi kx} \quad \text{where} \quad c_k = \int_0^1 f(t) e^{-2i\pi kt} dt,$$

Y. Heurteaux and F. Bayart computes the Hausdorff dimension of the sets $E_\beta = \{x \in \mathbb{T} : \limsup_{n \rightarrow +\infty} n^{-\beta} |S_n(f)(x)| > 0\}$, $\beta > 0$. Another example is given by C. Esser and S. Jaffard in [51] with wavelet series, where we consider sets E_a of points where the partial sums of the series up to scale j are of the order of magnitude of 2^{aj} . Another way is to extend the definition of Hölder exponents in the following way with the notion of p -exponent.

Definition 0.8.2 (p -Exponent). *Let $p \in [1, +\infty[$, $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R})$, x_0 a real and α a positive real. A function f belongs to $T^p_\alpha(x_0)$ if there are a polynom P_{x_0} of degree less than $\lfloor \alpha \rfloor$ et $K_\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ such that*

$$\exists R \in \mathbb{R}_+^*, \forall r \in (0, R], \left(\frac{1}{r} \int_{B(x_0, r)} |f(x) - P_{x_0}(x - x_0)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq K_\alpha r^\alpha.$$

The p -exponent of f at a point x_0 is defined by

$$h_f^{(p)}(x_0) = \sup\{\alpha \geq 0 : f \in T^p_\alpha(x_0)\}.$$

This notion was introduced for $p > 1$ by Calderón and Zygmund in 1961 [36] to obtain pointwise regularity results of partial differential equations. The p -exponents were not used in signal processing until the 2000's when their wavelet characterization was proposed [68, 69, 71]. Note that the p -exponent is defined equivalently to the point Hölder exponent using local L^p conditions.

S. Nicolay and L. Loosevelt in [82] propose a generalization of the definition of p -exponents by replacing $T^p_\alpha(x_0)$ by spaces $T^p_\phi(x_0)$ where the continuity modulus r^α is replaced by a $\phi(r)$ function (i.e., a continuous function with $\phi(1) = 1$ and for all $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\sup_{t>0} \frac{\phi(tx)}{\phi(t)} < +\infty$). We thus obtain a generalization of the Hölder exponents proposed by K. Damien and S. Nicolay in [41]. The interest of these generalizations are the applications in the theory of differential operators and in particular for Bessel

operators and elliptic partial differential equations [36].

The purpose of multifractal analysis is to study functions whose point regularity exponent varies strongly from one point to another. In order to quantify and classify the sets of points having the same exponent, we define the following isohölder sets.

Definition 0.8.3 (Isohölderian set). *Let $p \in [1, +\infty]$, $f \in L_{loc}^p(\mathbb{R}^d)$ and h a positive real. If $p = +\infty$, the isohölderian set $E_f(h)$ is defined by*

$$E_f(h) = \{x \in \mathbb{R}^d : h_f(x) = h\}.$$

If $p \in [1, +\infty[$, the set p -isohölderian $E_f^{(p)}(h)$ is defined by

$$E_f^{(p)}(h) = \{x \in \mathbb{R}^d : h_f^{(p)}(x) = h\}.$$

The functions that we will meet in the following have fractal isohölderian sets that are everywhere dense and that are all of Lebesgue measure zero except at most one. It is therefore relevant to use the Hausdorff dimension, noted \dim_H , to distinguish them. For this purpose, we define the notions of multifractal spectra.

Definition 0.8.4 (Multifractal spectrum). *Let $p \in [1, +\infty]$, $f \in L_{loc}^p(\mathbb{R}^d)$ and h be a positive real. If $p = +\infty$, the multifractal spectrum of f is the map defined by*

$$D_f : \begin{cases} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow [0, d] \cup \{-\infty\} \\ h & \longmapsto \dim_H(E_f(h)). \end{cases}$$

If $p \in [1, +\infty[$, the p -multifractal spectrum of f is the map defined by

$$D_f^{(p)} : \begin{cases} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow [0, d] \cup \{-\infty\} \\ h & \longmapsto \dim_H(E_f^{(p)}(h)). \end{cases}$$

By convention, $\dim_H(\emptyset) = -\infty$.

The multifractal analysis consists in computing D_f or $D_f^{(p)}$. It will allow us to complete the analysis of the different models in a more general framework.

Definition 0.8.5. *Let $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ be a probability space. Let $(C_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ be a Poisson point process whose intensity is the Lebesgue measure on \mathbb{R}_+ . Let S be an independent point process of $(C_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ whose intensity is the Lebesgue measure on $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. We write $S = (B_n, X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ where $(B_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ is an increasing sequence.*

By construction, the three sequences of random variables $(C_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $(B_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ and $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ are two by two independent. We will define the sums of random pulses in the following way.

Definition 0.8.6 (Sum of random pulses). *Let $\alpha \in \mathbb{R}$ and $\eta \in]0, 1[$. A sum of random pulses is the process $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ defined by*

$$F(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} C_n^{-\alpha} \psi \left(B_n^{1/\eta} (x - X_n) \right). \quad (3)$$

For any $n \in \mathbb{N}^*$, the functions $\psi_n : x \mapsto \psi(B_n^{1/\eta}(x - X_n))$ are the pulses associated to F .

Thus, we study the fractal sums of pulses according to the parameters $\lambda_n = C_n^{-\alpha}$, $w_n = B_n^{-1/\eta}$ with $\alpha \in \mathbb{R}$ and $\eta \in]0, 1[$ which are this time random expansion parameters. We will perform the multifractal analysis of these processes, determining their spectrum and their p -spectrum. The following Theorem will be proved in the Chapter 1.

Theorem 0.8.1. *Let $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ be a non-zero lipschitz function with support on $[-1, 1]$, $\alpha, \eta \in]0, 1[$ and $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ the process defined by (1). With probability 1, we have*

$$D_F(H) = \begin{cases} \frac{H}{\alpha} & \text{if } H \in [\alpha\eta, \alpha], \\ -\infty & \text{else.} \end{cases}.$$

We have considered in this thesis only functions of one variable. Some parts of the proof are valid when $\alpha > 1$, as we will see. On this occasion the uniform regularity will be studied in two different ways in Chapter 1 to illustrate this. Then, in Chapter 2, we will studied the multifractals proprieties of random pulses sums. The p -spectrum in this framework will be estimate and will show the following theorem.

Theorem 0.8.2. *Let $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ be a non-zero lipschitz function with support on $[-1, 1]$, $\alpha < 0$, $\eta \in]0, 1[$ with $\alpha \in]-\infty, 0[$ such as $\eta - 1 < \alpha$, $p \in [1, -1/(\alpha\eta) + 1/\alpha[$ and $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a function defined by (1). With probability 1, we have*

$$D_F^{(p)}(H) \leq \frac{H\eta p + \eta}{\alpha\eta p + 1}, \quad H \in [\alpha\eta, \alpha + \frac{1 - \eta}{\eta p}].$$

For the second theorem, it is interesting to see that the support of the spectrum $[\alpha\eta, \alpha + (1 - \eta)/(\eta p)]$ can contain negative values since if $\alpha < 0$ then $\alpha\eta < 0$. The values $D_F^{(p)}(H)$ always remain between η and 1.

Moreover, the sums of random pulses in the $\alpha < 0$ case fall into the category of "sparse processes" treated in the book of M.Unser and P.D. Tafti (This means that the process has a sparse representation on a wavelet basis, and can thus be efficiently compensated by the "wavelet shrinkage" method). In a more general framework, they also study other processes like the "Lévy white noise" (derived in the sense of Lévy process distributions) or processes that are written as pseudo-differential operators applied to the "Lévy white noise".

For the proof of both theorems, there are several difficulties that are not encountered in similar processes such as wavelet lacunar series. In the case of wavelet lacunar series, the pulses are centered wavelets (randomly) over dyadic intervals whereas in the case of random pulse sums, the pulses are uniformly distributed over the whole interval $[0, 1]$. We will be interested in the variables $T_n(x, r)$ given by

$$T_n(x, r) = \begin{cases} 1 & \text{if } B(X_n, B_n^{-\frac{1}{\eta}}) \cap B(x, r) \neq \emptyset \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{and } T_n(x) = T_n(x, 0).$$

These variables will allow us to look at the maximum number of pulse supports that intersect $B(x, r)$. To estimate this maximum number, the pulses will be classified according to the sets A_j defined by

$$\begin{aligned} A_j &= \{n \in \mathbb{N}^* : 2^{j-1} \leq B_n^{-\frac{1}{\eta}} < 2^j\} \quad \text{if } j \neq 0 \\ A_0 &= \{n \in \mathbb{N}^* : 0 \leq B_n^{-\frac{1}{\eta}} < 1\}. \end{aligned}$$

Then, we will prove the following lemma which gives the maximum number of pulses of comparable size containing a point $x \in [0, 1]$.

Lemma 0.8.1. *Almost surely, there exists $K > 0$ such that for all $x \in [0, 1]$ and $J, j \in \mathbb{N}$, we have*

$$\sum_{n \in A_j} T_n(x, 2^{-\eta j}) \leq K j^2 \max\{1, 2^{\eta(j-J)}\}.$$

The second difficulty will be to answer a problem of recovery on the "isolated" pulses. Let $\delta \in [1, 1/\eta]$, $\gamma]0, 1/\eta - 1[$, p_0 a integer such that $p_0 > (3 + 3\alpha)/(1 - \alpha\eta)$ and for all $j \in \mathbb{N}$, $\varepsilon_j = \log_2(j)/(\eta j)$, we have

$$\mathcal{I}_j = \left\{ n \in A_j : \forall m \in \bigcup_{j'=\lfloor(1-p_0\eta\varepsilon_j)j\rfloor}^{\lfloor(1+\gamma)j\rfloor} A_{j'}, n \neq m, B(X_n, B_n^{-\frac{1}{\eta}}) \cap B(X_m, B_m^{-\frac{1}{\eta}}) = \emptyset \right\}.$$

Isolated pulses are those functions ψ_n such that $n \in \mathcal{I}_j$. That is to say, the pulses whose support does not cross any support supports of other pulses whose support size is comparable. The objective will be to answer the problem of random overlap from the "isolated" pulses in order to apply the ubiquity theorem [64].

Theorem 0.8.3. *Almost surely, the set*

$$G'_1 = \limsup_{j \rightarrow +\infty} \bigcup_{n \in \mathcal{I}_j} B(X_n, B_n^{(1-\tilde{\varepsilon}_j)}) \quad \text{where} \quad \tilde{\varepsilon}_j = \frac{\log_2(16j \log_2 j)}{\eta}$$

is a cover of $[0, 1]$.

To study the case of non locally bounded trajectories, it will be necessary to find a characterization of p -exponents from the continuous wavelet transforms. We will fix ψ a function which we will call "mother wavelet" sufficiently regular with $\psi \in C^{r_\psi}(\mathbb{R})$ with support in $[-1, 1]$ and with a number $r_\psi + 1$ of zero moment such that $r_\psi > \lfloor \alpha \rfloor$.

Definition 0.8.7 (Continuous wavelet transform). *The continuous wavelet transforms are defined by*

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \quad W_f(a, b) = \frac{1}{a} \int_{\mathbb{R}} f(x) \psi\left(\frac{x-b}{a}\right) dx.$$

These wavelet transforms are not only defined along a dyadic grid since (a, b) are real numbers and the support of the wavelets $\psi_{a,b} : x \mapsto \psi((x-b)/a)$ is the interval $[b-a, b+a]$. It will therefore be relevant to use them in the context of random pulses that are uniformly distributed on $[0, 1]$.

Definition 0.8.8 (Continuous wavelet leaders). *Let $p \in [1, +\infty[$ et $f \in L_{loc}^p(\mathbb{R})$. If $p = +\infty$, else the continuous wavelet leaders are defined by*

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \quad L_f(a, b) = \sup_{(s,t) \in]0,a[\times]b-a,b+a[} |W_f(s, t)|.$$

If $p < +\infty$, then the p -continuous wavelet leaders are defined by

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \quad L_f^{(p)}(a, b) = \left(\frac{1}{a} \int_{b-a}^{b+a} \left(\int_0^a |W_f(s, t)|^2 \frac{ds}{s} \right)^{\frac{p}{2}} dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

It is from these notions that in Chapter 2, we will prove the following theorem.

Theorem 0.8.4. *Let $p \in]1, +\infty[$, $\alpha \in]-1/p, +\infty[$, $x_0 \in \mathbb{R}$ and $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R})$. The function f belongs to $T^p_\alpha(x_0)$ if and only if there exists $C > 0$ such that for all $a \in \mathbb{R}^*_+$,*

$$|L_f^{(p)}(a, x_0)| \leq Ca^\alpha.$$

In order to complete, within the framework of this thesis, the study of the sums of random pulses, Chapter 3 will deal with the multifractal formalism of fractal sums of pulses.

0.9 Results on the multifractal formalism

Let φ be an oscillating function, i.e. having at least one zero moment and belonging to the Schwarz class $S(\mathbb{R})$. In this thesis, we call a φ function "the mother wavelet". Suppose that the function φ is chosen so that the family $\varphi_{j,k} = 2^{frac{j}{2}}\varphi(2^j x - k)$ for $(j, k) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ forms an orthonormal basis of $L^2(\mathbb{R})$ [43, 89]. The definition of the discrete wavelet coefficients is given by

Definition 0.9.1 (Discrete wavelet coefficient). *Let $f \in L^2(\mathbb{R})$, the discrete wavelet coefficients are defined by*

$$\forall (j, k) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, c_{j,k} = 2^{\frac{j}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \varphi_{j,k}(x) dx = 2^j \int_{\mathbb{R}} f(x) \varphi(2^j x - k) dx.$$

The reconstruction formula of the function f that can be found in these articles [42, 71, 84, 89] is given by

$$f(x) = \sum_{(j,k) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}} c_{j,k} \varphi(2^j x - k), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (4)$$

The random sums of wavelets introduced by J-M. Aubry and S. Jaffard Aubry1, Jaffard10 are defined considering wavelet coefficients $c_{j,k}$ drawn randomly. This is a way to study differently the fractal sums of pulses with the random λ_n height parameter. The article by J-M. Aubry and S. Jaffard [12] deals in particular with random sums of wavelets and their multifractal properties. At each scale, the wavelet coefficients are drawn independently and identically distributed according to a fairly general law, which allows to obtain increasing multifractal spectra with various forms.

In the context of this thesis, a particular case will interest us: the wavelet lacunar sums.

Definition 0.9.2 (Wavelet lacunar series). *Let $\alpha \in]0, 1[$ and $\eta \in]0, 1[$. For all $j \in \mathbb{N}$, we take randomly and independently $\lfloor 2^{\eta j} \rfloor$ integers $k \in \{0, \dots, 2^j - 1\}$ such as $C_{j,k} = 2^{-\alpha j}$ and 0 for other coefficients. We define a lacunar serie of wavelets as the process*

$$L(x) = \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{2^j-1} C_{j,k} \varphi_{j,k}(x) = \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}} C_{j,k} \varphi(2^j x - k), \quad x \in \mathbb{R}.$$

A multifractal study of the model has been proposed : spectrum, p -spectrum and continuity modulus. We represent in Figure 11 a sample path of lacunar series.

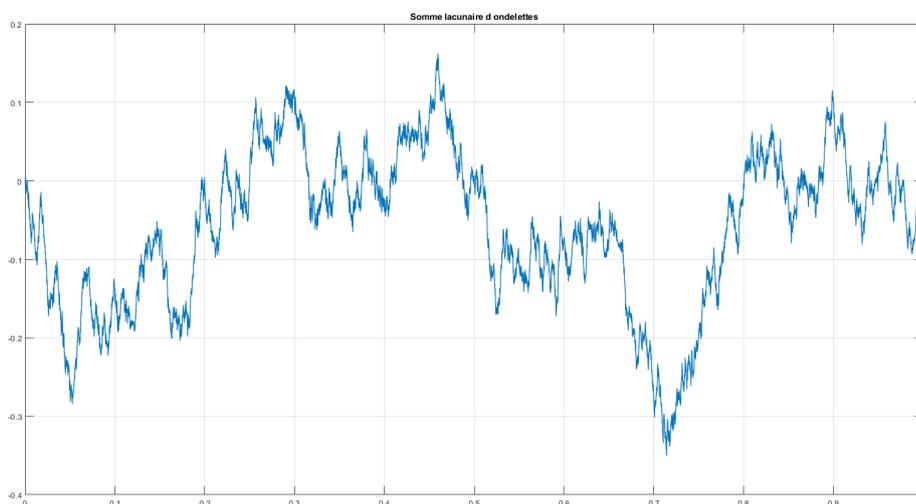


Figure 11: Wavelet lacunar serie graph with $\alpha = 0.5$ and $\eta = 0.8$

These results are mainly based on the use of the dominant discrete coefficients (or wavelet leaders) whose definitions are given on a dyadic grid. For all (j, k) , let $\lambda_{j,k}$ be the dyadic interval defined by $\lambda_{j,k} = [k2^{-j}, (k+1)2^{-j}]$. We will use the notation $3\lambda_{j,k}$ for the union of $\lambda_{j,k}$ and the 2 intervals adjacent to $\lambda_{j,k}$, $3\lambda_{j,k} = [(k-1)2^{-j}, (k+2)2^{-j}]$. Finally, for all j, k and x_0, k , we denote $\lambda_j(x_0)$ the unique dyadic interval $\lambda_{j,k}$ such that $x_0 \in \lambda_{j,k}$. This allows us to define the notion of wavelet leader coefficient in the following way.

Definition 0.9.3 (Wavelet leader). *Let $p \in \mathbb{R}_+^*$ and $f \in L_{loc}^p(\mathbb{R})$. If $p = +\infty$, then the leaders coefficients of f are*

$$\forall (j, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}, \quad d_{j,k} = \sup_{\lambda_{j',k'} \subset 3\lambda_{j,k}} \{|c_{j',k'}|\}.$$

If $p < +\infty$, then the p -leaders coefficients are

$$\forall (j, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}, l_{j,k}^{(p)} = \left(\sum_{\lambda_{j',k'} \subset 3\lambda_{j,k}} |c_{j',k'}|^p 2^{-(j'-j)} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

From the leaders and p -leaders, we can define a notion of spectrum that can be numerically simulated on data using regression algorithms [2, 3, 107].

Definition 0.9.4 (Legendre spectrum). *Let $p \in]0, +\infty]$ and $f \in L_{loc}^p(\mathbb{R})$. If $p = +\infty$, then the scale functions are defined by*

$$\zeta_f(q) = \liminf_{j \rightarrow +\infty} \frac{\log \left| 2^{-j} \sum_{k=0}^{2^j-1} |d_{j,k}|^q \right|}{\log(2^{-j})}, \quad q \in \mathbb{R}$$

and the Legendre spectrum by

$$L_f(h) = \inf_{q \in \mathbb{R}} \{qh - \zeta_f(q) + 1\}.$$

If $p < +\infty$, then the p -scale functions are defined by

$$\zeta_f^{(p)}(q) = \liminf_{j \rightarrow +\infty} \frac{\log \left| 2^{-j} \sum_{k=0}^{2^j-1} |l_{j,k}^{(p)}|^q \right|}{\log(2^{-j})}, \quad q \in \mathbb{R}$$

and the Legendre p -spectrum by

$$L_f^{(p)}(h) = \inf_{q \in \mathbb{R}} \{qh - \zeta_f^{(p)}(q) + 1\}.$$

In the papers [12, 64], it is shown that the lacunar series of wavelets verify the multifractal formalism. A key argument to obtain the spectrum and p -spectrum of Legendre is a consequence of Proposition 4.1 of [2] which estimates the size of p -leaders at each scale. However, numerical simulations remain difficult to obtain results on the spectrum. In the case of random sums of pulses, it is interesting to see if the multifractal formalism is verified, i.e. the following equalities: $L_f = D_f$ or $L_f^{(p)} = D_f^{(p)}$. However, there is no result, even one that can be validated by numerical simulations, to meet the multifractal formalism. That is to say numerical simulations giving a Legendre spectrum which corresponds to the multifractal spectrum. Indeed, the lacunarity does not allow to have enough coefficients which makes the estimates not very stable and does not allow to obtain a trustworthy Legendre spectrum.

0.10 RESULTS ON THE APPLICATION TO PHYSIOLOGICAL DATA

In this thesis, in Chapter 3, we will use numerical methods with simulations and algorithms developed by H. Wendt, P. Abry and R. Leonarduzzi [79, 106] in order to study the support of the p -spectrum of Legendre sums of random pulses. It will be relevant to see that we fall back on the same difficulties as for wavelet lacunar series. However, the study of the Legendre spectrum support will be carried out to verify a part of the multifractal formalism, namely the following equality

$$\{h \in \mathbb{R}_+^* : L_f^{(p)}(h) \neq -\infty\} = \{h \in \mathbb{R}_+^* : D_f^{(p)}(h) \neq -\infty\}.$$

A generalization would be to cross the difficulties of Chapter 2 and those of the article with S. Aubry and S. Jaffard [12], i.e. to take random sums of pulses whose coefficients would be drawn according to arbitrary laws.

0.10 Results on the application to physiological data

In the Chapter 4 of the thesis, an application to data from marathon runners is proposed. Physiological data from marathon runners have been studied for 50 years and many results in multifractal analysis have already been obtained. The authors studied the heart rate scaling functions of marathon runners using several methods and simulations. In this line, a classification of the heart rate and step rate spectra of 8 marathon runners between the beginning and the end of the race will be presented (see Figure 6).

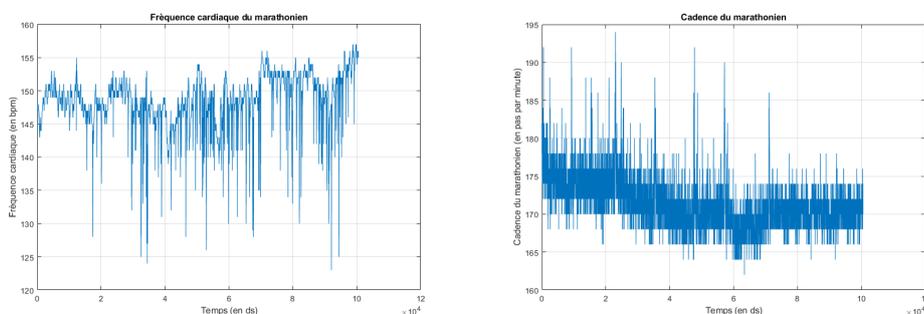


Figure 12: Representation of cleaned physiological (heart rate and step rate) data for a marathon runner ($N \simeq 100\,000$)

In this chapter, changes in the Legendre spectrum between the beginning and

the end of the run will be highlighted for heart rate, which will not be found for speed and step amplitude. Since it is difficult to classify the different multifractal spectra, we extract some relevant parameters. To do so, we will estimate the uniform regularity exponent h_{min} and three coefficients c_1 and c_2 given by $c_k = \zeta^{(k-1)}(0)$, $k \in \mathbb{N}^*$. Indeed, these coefficients describe the behavior of the scale function when it is quite regular for q close to 0 according to the limited development

$$\zeta_f(q) \sim c_1 + c_2q.$$

In particular, we will determine the (h_{min}, c_1) points between the beginning and the end of the run of the marathon runners on the heart rate to describe the changes in the shape of the spectrum around the maximum exponent.

In a second step, we will apply the multivariate multifractal analysis recently proposed by S. Jaffard, S. Seuret, P. Abry, R. Leonarduzzi and H. Wendt [6] whose objective is to perform the joint multifractal analysis of n data at a time ($n \geq 2$).

Definition 0.10.1 (Multivariate multifractal spectrum). *Let $n \geq 2$ and $f_1, \dots, f_n \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R})$. We define the multivariate isohölderian sets for all $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}_+^n$ by*

$$E_{f_1, \dots, f_n}(h) = \{x \in \mathbb{R} : h_{f_1}(x) = h_1, \dots, h_{f_n}(x) = h_n\}$$

and the multivariate multifractal spectrum by

$$D_{f_1, \dots, f_n} : \begin{cases} \mathbb{R}_+^n & \longrightarrow [0, 1] \cup \{-\infty\} \\ h & \longmapsto \dim_H(E_{f_1, \dots, f_n}(h)). \end{cases}$$

To determine numerical estimates on the spectra, we will apply the algorithms based on the article of the same authors as before [7].

Definition 0.10.2 (Multivariate Legendre spectrum). *Let $f_1, \dots, f_n \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R})$ and $q = (q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{R}^n$. We define the functions of q -multivariate structures in the sense of leaders for any $j \in \mathbb{N}$ by*

$$S_{f_1, \dots, f_n}(q, j) = 2^{-j} \sum_{k=0}^{2^j-1} |d_{j,k}^{(f_1)}|^{q_1} \dots |d_{j,k}^{(f_n)}|^{q_n}$$

where $d_{j,k}^{(f_i)}$ represents the leader wavelet coefficients of the f_i function. The multivariate

0.10 RESULTS ON THE APPLICATION TO PHYSIOLOGICAL DATA

scaling functions in the sense of leaders are given by

$$\zeta_{f_1, \dots, f_n}(q) = \liminf_{j \rightarrow +\infty} \frac{|\log S_{f_1, \dots, f_n}(q, j)|}{\log(2^{-j})}$$

and the multivariate Legendre spectrum for any $h \in \mathbb{R}^d$ by

$$L_{f_1, \dots, f_n}(h) = \inf_{q \in \mathbb{R}^n} \{q_1 h_1 + \dots + q_n h_n - \zeta_{f_1, \dots, f_n}(q) + n\}.$$

This notion will allow to illustrate the correlations that can be found between monovariate (1 data) and multivariate ($n > 1$ data) Legendre spectra. Indeed, in the case of some additive processes (for example, independent Levy processes) f_1, \dots, f_n , it is conjectured that for all $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}_+^n$,

$$D_{f_1, \dots, f_n}(h) = \min\{D_{f_1}(h_1), \dots, D_{f_n}(h_n)\}$$

and for some multiplicative processes (Bernoulli cascade) g_1, \dots, g_n , the relation is the following [6] :

$$D_{g_1, \dots, g_n}(h) = \sum_{i=1}^n D_{g_i}(h_i) - 1.$$

The codimension of the intersection is sometimes obtained as the sum of the codimensions as it is the case for the "generic" intersections of regular varieties [25, 26]. This study can reduce the number of relevant models in the study of physiological data. By comparing the different formulas that can relate the spectra on the physiological data, we can eliminate some processes that do not correspond to the same relations.

At the end of this thesis, several perspectives and extensions of the subject for future work will be proposed. To begin with, it would be possible to extend the theorems of the Chapter 1 to multi-dimensionnal cases. We can also study the sums of inhomogeneous and anisotropic random pulses, i.e. the supports of the pulses will no longer be only homogeneously distributed balls $B(X_n, B_n^{-1/\eta})$ but d -dimensional rectangles distributed with different intensities according to the directions, which can have direct applications for the modeling of textures. Then, it would be possible to consider determining new numerical methods to improve the study of the different spectra in order to answer the problems we have encountered in Chapter 3 and Chapter 4. Numerical applications of the p -exponent characterization theorem by continuous wavelet transforms and other applications of multivariate multifractal analysis could also be proposed.

Chapitre 1

Analyse multifractale des sommes de pulses aléatoires

Les sommes aléatoires de pulses sont des processus stochastiques obtenus en sommant un nombre dénombrable de translatées-dilatées d'une même fonction pouvant avoir une forme arbitraire qu'on appelle "pulse". Les paramètres de translation et de dilatation seront aléatoires. Il existe différents modèles dont des cas particuliers ont été introduits par plusieurs mathématiciens [38, 40, 83, 86]. Commençons par un premier exemple de somme de "pulses" aléatoires. On fixe une fois pour toutes dans ce chapitre un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sur lequel sont définies toutes les variables aléatoires qui vont entrer en jeu.

Définition 1.0.1. Soient N une mesure aléatoire de Poisson d'intensité la mesure de Lebesgue sur $E = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^d$, ψ une fonction de \mathbb{R}^d dans \mathbb{R} , $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $\eta \in]0, 1]$. On définit un pulse comme un processus stochastique $\psi_{\lambda, w, \tau}$ de \mathbb{R}^d dans \mathbb{R} de la forme

$$\psi_{\lambda, w, \tau}(x) = \lambda^{-\alpha} \psi(w^{\frac{1}{\eta}}(x - \tau)).$$

La somme de pulses aléatoires est le processus stochastique $M : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$M(x) = \int_E \lambda^{-\alpha} \psi(w^{\frac{1}{\eta}}(x - \tau)) N(d\lambda, dw, d\tau) = \sum_{(\lambda, w, \tau) \in S} \lambda^{-\alpha} \psi(w^{\frac{1}{\eta}}(x - \tau)) \quad (1.1)$$

où S est l'ensemble des points aléatoires donnés par la mesure de Poisson. On appelle la fonction ψ le pulse père de la somme fractale de pulses.

S. Lovejoy et B. Mandelbrot dans leur article [83] publié en 1985 ont proposé de

modéliser les champs de pluie par un modèle bi-dimensionnel de somme aléatoire de pulses (1.1) en prenant pour ψ une fonction constante sur un support borné (ce qu'on appellera une fonction "saut"), $\alpha \in]0, 2[$ et $\eta = 1$. Ils montrent que ce modèle reproduit différents types de champs de pluie dont ceux provenant d'orages isolés. Ils exhibent ainsi différentes modélisations des taux de pluies au court du temps pour les étudier.

R. Cioczek-Georges, B. Mandelbrot, G. Samorodnitsky et M.S. Taqqu montrent en 1995 dans [40] que ces sommes aléatoires de pulses possèdent des propriétés d'auto-affinité statistiques et des accroissements stationnaires.

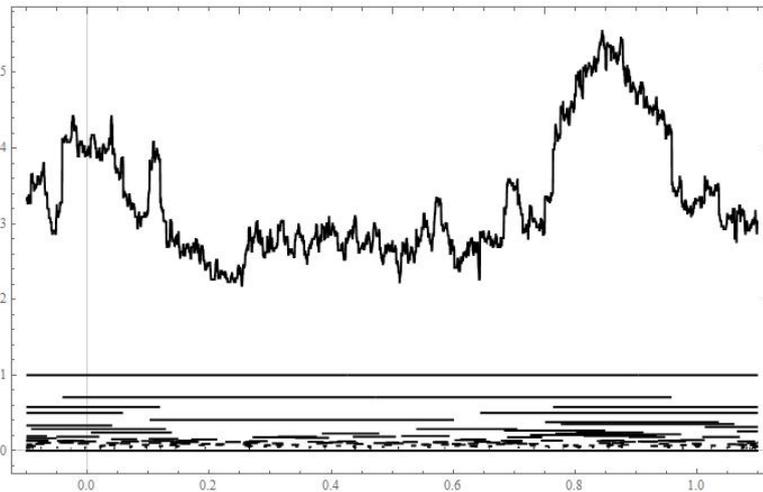


Figure 1.1: Représentation d'un processus $\{M(x), x \geq 0\}$

Dans l'article de R. Cioczek-Georges et B. Mandelbrot [38], il est montré que le mouvement brownien fractionnaire à corrélation négative ($0 < H < 1/2$) peut être obtenu comme limite (au sens des distributions) d'une suite de processus du type (1.1) en prenant pour ψ une fonction saut bien choisie. De plus, il est montré que ces processus admettent des moments d'ordre 2 finis.

Dans l'article [86] paru un an plus tard, les auteurs ont montré que l'on peut obtenir un mouvement brownien fractionnaire corrélé négativement ($H < 1/2$) ou positivement ($H > 1/2$) comme limite (au sens des distributions) d'une suite de processus du type (1.1) en choisissant pour ψ une fonction conique (ou semi-conique) au lieu d'une fonction saut. Cependant, avec cette méthode, ils n'ont pas réussi à retrouver une construction du mouvement brownien standard (i.e. $H = 1/2$).

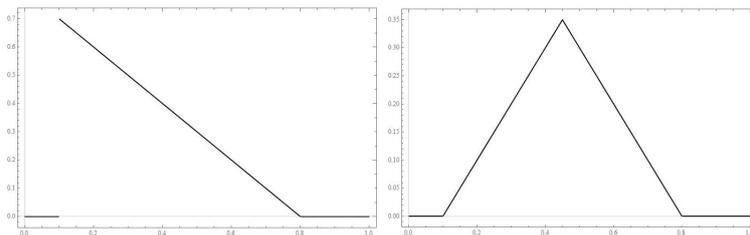


Figure 1.2: Représentation des fonctions ψ_1 et ψ_2

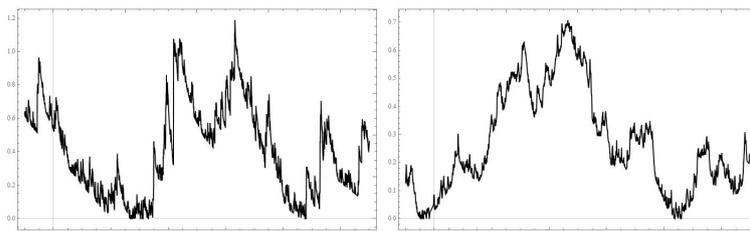


Figure 1.3: Représentations des trajectoires de M_1 et M_2 selon la définition (1.1) pour les fonctions ψ_1 et ψ_2 respectivement avec $\tau = 0.1$ et $w = 0.7$.

Enfin, une généralisation sera proposée par les mêmes auteurs [39] avec une fonction ψ quelconque à support dans $[0, 1]$, $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $\eta = 1$. Dans cette généralisation, ils montrent que tous les précédents résultats concernant l'approximation du brownien fractionnaire restent vrais pour certaines fonctions ψ .

On retrouve des sommes de pulses aléatoires dans [46, 47] où Y. Demichel, C. Tricot et K. Falconer définissent la somme de pulses avec seulement des translations aléatoires par

$$G(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-\alpha} \psi(n(x - X_n)), \quad x \in \mathbb{R}$$

où $0 < \alpha < 1$ et $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue paire décroissante sur $[0, 1]$ et égale à 0 sur $[1, +\infty[$ avec $\psi(0) = 1$. Notons Γ_G le graphe de la fonction G et $\dim_B(E)$ la dimension de boîte d'un ensemble $E \subset \mathbb{R}^d$. On rappelle la définition de la régularité höldérienne globale.

Définition 1.0.2. Soient $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ et $\alpha \in]0, 1[$. Une fonction f appartient à $C^\alpha(I)$ (I un intervalle de \mathbb{R}) lorsqu'il existe $K_\alpha > 0$ tel que

$$\forall x, y \in I, \quad |f(x) - f(y)| \leq K_\alpha |x - y|^\alpha.$$

Une fonction f appartient à $C_{\log}^{\alpha}(I)$ lorsqu'il existe $A, K_{\alpha} > 0$ telles que

$$\forall x, y \in I, \quad |f(x) - f(y)| \leq K_{\alpha} |\log |x - y||^A |x - y|^{\alpha}.$$

Pour $\alpha \geq 1$ et $\alpha \notin \mathbb{N}$, une fonction f appartient à $C^{\alpha}(I)$ (resp. $C_{\log}^{\alpha}(I)$) lorsque f possède des dérivées continues d'ordre $k \leq \lfloor \alpha \rfloor$ et que $f^{(\lfloor \alpha \rfloor)}$ appartient à $C^{\alpha - \lfloor \alpha \rfloor}(I)$ (resp. $C_{\log}^{\alpha - \lfloor \alpha \rfloor}(I)$).

Dans l'article [46], ils démontrent que s'il existe un intervalle I sur lequel la fonction ψ est un C^1 -difféomorphisme et que la fonction $\psi \in C^{\epsilon}(\mathbb{R})$ pour un certain $\epsilon > 0$, alors presque sûrement

$$2 - \alpha \leq \dim_H(\Gamma_G) \leq \dim_B(\Gamma_G) \leq 2 - \min\{\alpha, h\}. \quad (1.2)$$

Dans le cas $\alpha < h$, on a presque sûrement $\dim_H(\Gamma_G) = \dim_B(\Gamma_G) = 2 - \alpha$.

Dans la thèse de Y. Demichel en [45], on trouve un autre modèle de somme aléatoire de pulses dans lequel les coefficients de dilatations sont définis par des suites :

$$G(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \psi(\lambda_n^{-1}(x - X_n)), \quad x \in \mathbb{R} \quad (1.3)$$

où $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont deux suites réelles positives telles que $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} a_n$ diverge et $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante vers 0, et $(X_n)_{n \geq 1}$ est toujours une suite i.i.d. de variables aléatoires uniformément distribuées sur $[0, 1]$. Y. Demichel [45] étudie la convergence de telles séries. Dans l'article [21], M. Ben Abid trouve aussi des conditions sur les a_n et les λ_n garantissant l'existence de G , et de plus détermine la régularité uniforme des sommes de pulses définies en (1.3) sous ces mêmes conditions.

Dans l'article [47], Y. Demichel et C. Tricot définissent un paramètre H par

$$H = \liminf_{j \rightarrow +\infty} \left(\inf_{n \in A_j} \frac{\log a_n}{\log \lambda_n} \right)$$

où $A_j = \{n \in \mathbb{N}^* : 2^{-j} \leq \lambda_n < 2^{-(j-1)}\}$. Lorsque $\lambda_n = \alpha/n$ avec $\alpha > 0$ et ψ appartient à $C^1(\mathbb{R})$, alors M. Ben Abid démontre dans [21] que presque sûrement pour tout $\varepsilon \in]0, H[$ on a $G \in C^{H-\varepsilon}([0, 1])$.

E. Amo, I. Bhourri et J. Fernández-Sánchez retrouvent dans [8] le résultat de Y. Demichel (1.2) sur la dimension du graphe pour le modèle (1.3).

1.1 Notre modèle de sommes de pulses aléatoires

Nous allons considérer un modèle plus général incluant ceux étudiés par M. Ben Abid, C. Tricot et Y. Demichel mais aussi B. Mandelbrot et R. Ciozeck-Georges dans le cas des pulses coniques. Nous allons montrer que les principaux résultats sur l'existence et la régularité globale des séries obtenues sont les mêmes. Mais nous pousserons l'étude plus loin et calculerons le spectre multifractal presque sûr des trajectoires, et nous étudierons en détail et estimerons leurs modules de continuité.

Définition 1.1.1. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. Soit $(C_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ un processus ponctuel de Poisson croissant dont l'intensité est la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}_+ . Soit S un processus ponctuel indépendant de $(C_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ dont l'intensité est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}_+^* \times [0, 1]$. On écrit $S = (B_n, X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ où $(B_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite croissante.

Par construction, les trois suites de variables aléatoires $(C_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $(B_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont indépendantes. Définissons à présent nos sommes de pulses aléatoires.

Définition 1.1.2. Soient $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction lipschitzienne non-nulle à support égal à $[-1, 1]$, $\alpha \in]0, 1[$ et $\eta \in]0, 1]$. La somme de pulses aléatoires $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par

$$F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} C_n^{-\alpha} \psi \left(B_n^{\frac{1}{\eta}} (x - X_n) \right), \quad x \in \mathbb{R} \quad (1.4)$$

On interprétera α comme un coefficient de régularité et η comme un coefficient de lacunarité.

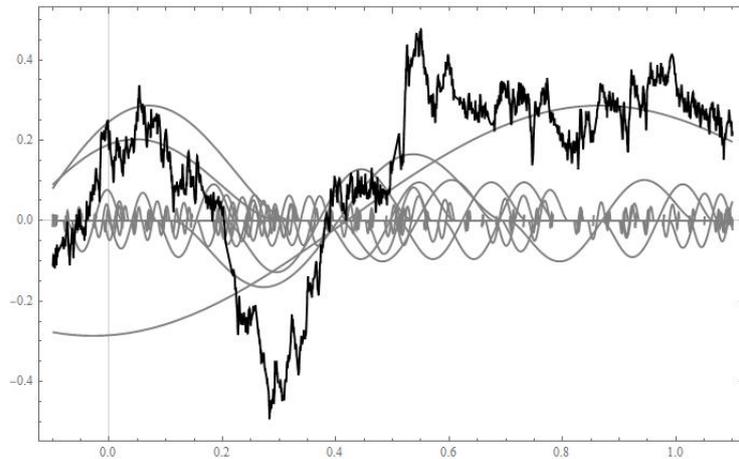


Figure 1.4: Somme de 1000 pulses $t \mapsto t(1 - t^2)^2$ dilatés et translatés aléatoirement selon la définition 1.1.2 avec $\alpha = 0.5$ et $\eta = 0.9$

Des trajectoires de sommes de pulses aléatoires sont tracées sur la Figure 1.5 et 1.6, avec des fonctions ψ variées.

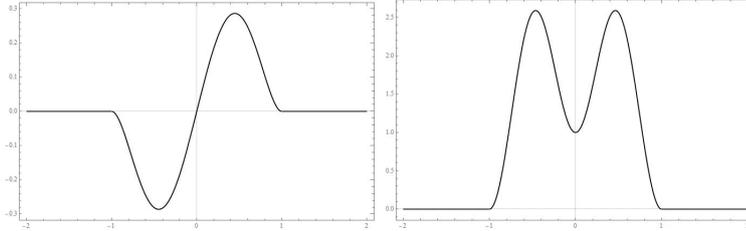


Figure 1.5: Deux pulses $t \mapsto t(1 - t^2)^2$ et $t \mapsto (1 - t^2)^2 + (1 - \cos(2\pi t))$

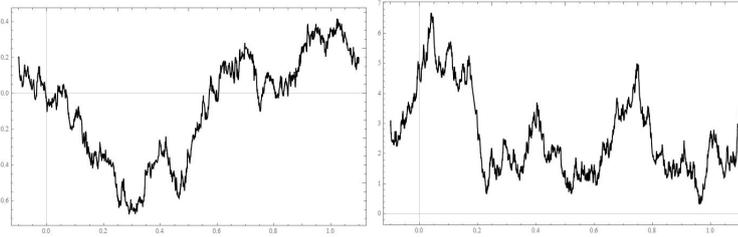


Figure 1.6: Sommes aléatoires de pulses avec $\alpha = 0.5$ et $\eta = 0.9$ et les deux pulses pères du dessus.

En observant les différentes illustrations, il semble que l'allure des sommes de pulses aléatoires dépend du pulse choisi au départ, mais pas véritablement ses propriétés de régularité. On peut confirmer cette observation lorsqu'on regarde ce qu'on obtient avec deux pulses différents mais avec le même tirage de Poisson, voir Figure 1.7.

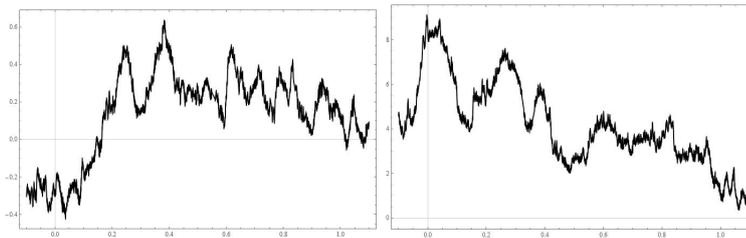


Figure 1.7: Sommes aléatoires de pulses avec $\alpha = 0.5$ et $\eta = 0.9$ et les deux pulses pères du dessus et le même tirage de Poisson

Cette somme aléatoire de pulse ressemble aux séries lacunaires d'ondelettes introduites dans [64] par S. Jaffard. Partant d'une ondelette ψ possédant suffisamment de régularité engendrant une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$, une série lacunaire d'ondelettes est définie par

$$W(x) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} C_{j,k} \psi_{j,k}(x), \quad x \in \mathbb{R} \tag{1.5}$$

où pour tout $(j, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$, $\psi_{j,k}$ est la version translatée et dilatée de ψ donnée par $\psi_{j,k}(x) = \psi(2^j x - k)$, et les coefficients d'ondelettes $C_{j,k}$ sont tirés aléatoirement, indépendamment, suivant une loi de probabilité donnée (qui dépend de j seulement): intuitivement, à chaque échelle j , seuls $2^{j\eta}$ coefficients $C_{j,k}$ sont non-nuls, et ceux qui sont non-nuls sont tous égaux à $2^{-j\alpha}$. On peut remarquer que dans le modèle (1.4) les pulses dilatés-translatés ont un rôle très similaire aux ondelettes $\psi_{j,k}$.

La différence principale entre les deux modèles réside dans le fait que les translations $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et dilatations $(B_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ dans notre modèle sont aléatoires, alors que les positions des ondelettes dans le modèle de Jaffard sont contraintes à la base dyadique. Malgré cette différence, on s'attend à obtenir un résultat similaire à S. Jaffard concernant le spectre multifractal des processus obtenus.

La différence et l'intérêt de notre modèle est que le processus F n'est donc pas construit sur une grille dyadique, ce qui est plus naturel, le processus étant intuitivement statistiquement stationnaire. Plus précisément, F possède des propriétés intéressantes sur l'intervalle $[0, 1]$ seulement, puisque $X_n \in [0, 1]$. Hors de $[0, 1]$, elle a la même régularité que ψ , ou est nulle. Mais on peut facilement étendre F sur \mathbb{R} de la façon suivante : pour tout entier m , considérons F_m , une copie indépendante de F mais translatée de m . Alors

$$\tilde{F} := \sum_{m \in \mathbb{Z}} F_m$$

admet les mêmes propriétés de régularité ponctuelle que F , mais maintenant sur \mathbb{R} tout entier. Ce nouveau processus \tilde{F} a maintenant des accroissements stationnaires, et agrandit la classe encore peu fournie des processus stochastiques à accroissements stationnaires dont on sait faire l'analyse multifractale.

On donne le résultat principal de ce chapitre portant sur le spectre multifractal de F .

Théorème 1.1.1. *Soient $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction Lipschitzienne à support égal à $[-1, 1]$, $\alpha, \eta \in]0, 1[$ et $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la série aléatoire définie par 1.1.2. Presque sûrement, on a*

$$D_F(H) = \begin{cases} \frac{H}{\alpha} & \text{si } H \in [\alpha\eta, \alpha], \\ -\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

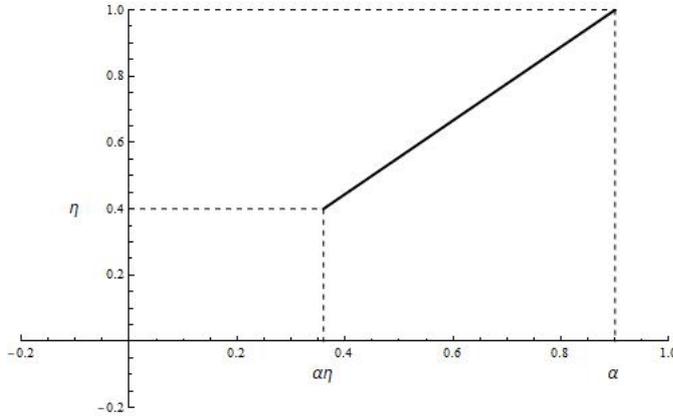


Figure 1.8: Spectre multifractal dans le cas $\alpha = 0.9$ et $\eta = 0.4$

Les autres résultats concernent la régularité presque sûre de F et son module de continuité dont nous rappelons la définition

Définition 1.1.3. *On dit que la fonction $\theta : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ est un module de continuité lorsque θ est une fonction croissante non-identiquement nulle telle que*

1. $\theta(0) = 0$.
2. Il existe $K > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\theta(2x) \leq K\theta(x)$.

À tout module de continuité est naturellement associé un espace fonctionnel.

Définition 1.1.4. *Soient $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ et θ un module de continuité. La fonction f appartient à l'espace $C_\theta(\mathbb{R})$ lorsqu'il existe $K > 0$ tel que*

$$\forall h \in \mathbb{R}_+, w_f(h) := \sup_{|x-y| \leq h} |f(x) - f(y)| \leq K\theta(h).$$

Lorsque $f \in C_\theta(\mathbb{R})$, on dit que θ est un module de continuité uniforme de la fonction f .

Lorsque $\alpha \in]0, 1[$ et $\theta(h) = \theta_\alpha(h) := |h|^\alpha$, les fonctions ayant θ_α comme module de continuité uniforme sont exactement celles de l'ensemble $C^\alpha(\mathbb{R})$.

Nous étudierons également les modules de continuité locale.

Définition 1.1.5. *Une fonction $f \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R})$ admet $\theta : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ comme module de continuité local en $x_0 \in \mathbb{R}$ lorsqu'il existe $r_{x_0} > 0$ et $K_{x_0} > 0$ tels que pour tout $x \in B(x_0, r_{x_0})$, on a*

$$|f(x) - f(x_0)| \leq K_{x_0}\theta(|x - x_0|).$$

Une fonction $f \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R})$ admet $\theta : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ comme module de continuité presque partout lorsque θ est un module de continuité local de f en Lebesgue presque tout point $x_0 \in \mathbb{R}$.

Les résultats sur le module de continuité sont les suivants.

Théorème 1.1.2. *Soit F comme dans la définition 1.1.2. Presque sûrement :*

- (i) *L'application $h \mapsto |h|^{\alpha\eta} |\log_2(h)|^{2+\alpha}$ est un module de continuité uniforme de F .*
- (ii) *L'application $h \mapsto |h|^\alpha |\log_2(h)|^{2+\alpha}$ est un module de continuité presque partout de F .*
- (iii) *En Lebesgue presque tout $x_0 \in [0, 1]$, le module de continuité local de F en x_0 est plus grand que $h \mapsto |h|^\alpha |\log_2(h)|^{2\alpha}$.*

Remarque 1.1.1. *Il est intéressant d'observer que la régularité presque partout de F en (ii) est bien meilleure que la régularité uniforme en (i). Les points (ii) et (iii) ci-dessus nous fournissent une fenêtre étroite pour un module de continuité presque partout optimal θ_F de F , i.e.*

$$|h|^\alpha |\log_2(h)|^{2\alpha} \leq \theta_F(h) \leq |h|^\alpha |\log_2(h)|^{2+\alpha}.$$

Remarque 1.1.2. *La généralisation de nos résultats aux dimensions supérieures, bien que non traitées dans ce manuscrit, sont dignes d'intérêt et on peut raisonnablement s'attendre à ce que les théorèmes précédents, au prix de difficultés techniques, soient étendus en dimension $d > 1$ et avec un paramètre $\alpha > 1$ en prenant $\psi \in C^{[\alpha]+1}(\mathbb{R})$.*

Un point clé sera d'estimer à $x \in [0, 1]$ fixé, le nombre maximal d'entiers $n \in \mathbb{N}^*$ satisfaisant $2^{n(j-1)} \leq B_n < 2^{nj}$ ($j \in \mathbb{N}$), tel que si ψ_n est définie par

$$\psi_n(x) = \psi \left(B_n^{\frac{1}{\eta}} (x - X_n) \right), \quad x \in \mathbb{R},$$

alors le support de ψ_n contient le point x . Autrement dit, on cherche à savoir à quel point les supports des ψ_n peuvent se recouvrir les uns les autres. Ceci est traité dans la section 1.2 des résultats préliminaires. Ensuite, on s'intéresse à ce qu'on nomme les pulses "isolés" ψ_n , c'est-à-dire, les pulses dont le support ne croise aucun support d'autres pulses dont le support est de taille comparable. Ces questions de recouvrements aléatoires sont traitées dans la section 1.4. Ceci est essentiel pour obtenir des

bornes pour l'exposant ponctuel de Hölder de F , et constituent donc un point clé pour obtenir le théorème 1.1.1. Dans la section 1.5, nous démontrons le point (i) du théorème 1.1.2 qui permet d'obtenir une borne inférieure uniforme pour tous les exposants ponctuels de Hölder de F en x . Dans la section 1.6, nous relierons le taux d'approximation d'un point $x \in [0, 1]$ par une famille de boules aléatoires (centrées en les points X_n) à la régularité ponctuelle de F . Cela permet d'en déduire le spectre multifractal presque sûr de F dans la section 1.7. Dans la section 1.8, il est expliqué comment obtenir le module de continuité presque partout pour F (items (ii) et (iii) du théorème 1.1.2). Enfin, la section 1.9 propose quelques perspectives de recherche.

1.2 Résultats préliminaires

Dans cette partie, nous démontrons des résultats préliminaires dont certains peuvent être retrouvés dans plusieurs ouvrages traitant des processus de Poisson [28, 35]. Les résultats moins classiques sont redémontrés.

Pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, on définit les ensembles A_j par

$$\begin{aligned} A_j &= \{n \in \mathbb{N}^* : 2^{j-1} \leq B_n^{\frac{1}{\eta}} < 2^j\} \quad \text{si } j \neq 0 \\ A_0 &= \{n \in \mathbb{N}^* : 0 \leq B_n^{\frac{1}{\eta}} < 1\} \\ N_j &= \text{Card}(A_j). \end{aligned} \tag{1.6}$$

Pour tout $j \in \mathbb{N}$ assez grand, on peut encadrer N_j à l'aide de la fonction aléatoire de comptage du processus ponctuel $(B_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Lemme 1.2.1. *Presque sûrement pour j assez grand*

$$2^{\eta j(1-\varepsilon_j)} \leq N_j \leq 2^{\eta j(1+\varepsilon_j)} \tag{1.7}$$

avec

$$\varepsilon_j = \frac{\log_2(j)}{\eta j}. \tag{1.8}$$

Démonstration. On définit la fonction aléatoire de comptage $(M_t)_{t \in \mathbb{R}_+^*}$ du processus ponctuel $(B_n)_{\mathbb{N}^*}$ par $M_t = \sup\{n \in \mathbb{N}^* : B_n \leq t\} = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbf{1}_{B_n \leq t}$.

Rappelons que par définition, N_j suit une loi de Poisson de paramètre $2^{\eta j} - 2^{\eta(j-1)}$ pour $j \neq 0$.

Pour tous $0 \leq s < t$, la loi de $M_t - M_s$ est une loi de Poisson de paramètre $(t - s)$. Soit $j \in \mathbb{N}^*$. D'après (1.6),

$$A_j = \{n \in \mathbb{N}^* : 2^{j-1} \leq B_n^{\frac{1}{n}} < 2^j\} = \{n \in \mathbb{N}^* : 2^{\eta(j-1)} \leq B_n < 2^{\eta j}\}.$$

On en déduit que $N_j = M_{2^{\eta j}} - M_{2^{\eta(j-1)}}$, ainsi la loi que suit N_j est de Poisson de paramètre $(2^{\eta j} - 2^{\eta(j-1)}) = a2^{\eta(j-1)}$ où $a = 2^\eta - 1$. A l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, puisque $\mathbb{E}[N_j] = \text{Var}(N_j) = a2^{\eta(j-1)}$, on a

$$\mathbb{P}(|N_j - a2^{\eta(j-1)}| \geq j2^{\frac{\eta}{2}(j-1)}) \leq \frac{a2^{\eta(j-1)}}{j^2 2^{\eta(j-1)}} \leq \frac{a}{j^2}. \quad (1.9)$$

D'après le lemme de Borel-Cantelli, presque sûrement, pour j assez grand,

$$|N_j - a2^{\eta(j-1)}| < j2^{\frac{\eta}{2}(j-1)}.$$

Cela implique en particulier que pour tout j assez grand, $j^{-1}2^{\eta j} \leq N_j \leq j2^{\eta j}$. En prenant $\varepsilon_j = \frac{\log_2(j)}{\eta j}$, de sorte que $j = 2^{j\eta\varepsilon_j}$, on trouve le résultat (1.7). \square

Le résultat suivant, qui se déduit de (1.7), sera utile pour ce chapitre: il existe $K > 0$ tel que pour tout $j \in \mathbb{N}$ assez grand

$$\mathbb{P}(N_j \notin [2^{\eta j(1-\varepsilon_j)}, 2^{\eta j(1+\varepsilon_j)}]) \leq \frac{K}{j^2} \quad (1.10)$$

À partir des résultats précédents, nous déduisons pour $j \in \mathbb{N}$ assez grand et $n \in A_j$, un encadrement pour les variables B_n et C_n .

Lemme 1.2.2. *Presque sûrement, il existe $K_1, K_2 > 0$ tels que pour tout $j \in \mathbb{N}^*$ et $n \in A_j$,*

$$K_1 2^{\eta j(1-\varepsilon_j)} \leq B_n, C_n \leq K_2 2^{\eta j(1+\varepsilon_j)}. \quad (1.11)$$

Démonstration. Nous utiliserons le résultat suivant qui découle de la loi des grands nombres: presque sûrement pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ assez grand,

$$\frac{n}{2} \leq C_n \leq 2n \quad \text{et} \quad \frac{n}{2} \leq B_n \leq 2n. \quad (1.12)$$

Soit $J \in \mathbb{N}$ suffisamment grand tel que l'inégalité (1.7) soit vraie pour $j \geq J$. On pose

$$A = \sum_{j'=0}^J N_{j'}.$$

Soit $j \geq J + 1$ et $n \in A_j$. Par définition, nous avons

$$\sum_{j'=0}^{j-1} N_{j'} \leq n \leq \sum_{j'=0}^j N_{j'}.$$

D'après (1.8), d'une part on a

$$\sum_{j'=0}^{j-1} N_{j'} \geq N_{j-1} \geq 2^{\eta(j-1)(1-\varepsilon_{j-1})} \geq K_1 2^{\eta j(1-\varepsilon_j)}.$$

D'autre part, puisque $(j\varepsilon_j)_{j \in \mathbb{N}^*}$ est une suite croissante, quand j est suffisamment grand, il existe $K, K_2 > 0$ tels qu'on a

$$\sum_{j'=0}^j N_{j'} \leq A + \sum_{j'=J+1}^j 2^{\eta j'(1+\varepsilon_{j'})} \leq A + 2^{\eta j \varepsilon_j} \sum_{j'=J+1}^j 2^{\eta j'} \leq A + 2^{\eta j \varepsilon_j} K 2^{\eta j} \leq K_2 2^{\eta j(1+\varepsilon_j)},$$

car A est finie. On déduit que

$$K_1 2^{\eta j(1-\varepsilon_j)} \leq n \leq K_2 2^{\eta j(1+\varepsilon_j)}.$$

Or d'après (1.12), presque sûrement il existe $K'_1, K'_2 \in \mathbb{R}_+^*$ tels que pour $j \in \mathbb{N}^*$ et $n \in A_j$

$$\begin{aligned} B_n, C_n &\leq 2n \leq K'_2 2^{\eta j(1+\varepsilon_j)} \\ B_n, C_n &\geq \frac{n}{2} \geq K'_1 2^{\eta j(1-\varepsilon_j)}. \end{aligned}$$

En combinant les dernières inégalités, on obtient le résultat annoncé par le lemme. \square

Dans la suite, pour tout $j \in \mathbb{N}$ et $n \in A_j$, il est pratique d'avoir davantage d'information sur le nombre de pulses $\psi_n : x \mapsto \psi(B_n^{\frac{1}{\eta}}(x - X_n))$ pour $n \in A_j$ dont le support contient $B(x, r)$ pour un $x \in [0, 1]$ et $r > 0$. Ainsi, pour $x \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$ il est noté

$$T_n(x, r) = \begin{cases} 1 & \text{si } B(X_n, B_n^{-\frac{1}{\eta}}) \cap B(x, r) \neq \emptyset \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et } T_n(x) = T_n(x, 0). \quad (1.13)$$

On majore avec probabilité 1 pour tout $x \in [0, 1]$ et lorsque j est grand, le nombre d'entiers $n \in A_j$ tel que $x \in B(X_n, B_n^{-\frac{1}{\eta}})$ (le support des pulses).

Lemme 1.2.3. *Presque sûrement, il existe $K > 0$ tel que pour tout $x \in [0, 1]$ et $J, j \in \mathbb{N}$ avec $j \neq 0$, on a*

$$\sum_{n \in A_j} T_n(x, 2^{-\eta J}) \leq K j^2 \max\{1, 2^{\eta(j-J)}\}. \quad (1.14)$$

Démonstration. Nous travaillons tout d'abord sur la grille dyadique. Soit $j \in \mathbb{N}$. On pose $j_\eta = \lfloor \eta j \rfloor$. Observons que $[0, 1] = \bigcup_{k=0}^{2^{j_\eta}-1} I_{j_\eta, k}$, où $I_{j_\eta, k} = [k2^{-j_\eta}, (k+1)2^{-j_\eta}]$. Pour tout $k \in \{0, 1, \dots, 2^{j_\eta} - 1\}$, on note

$$L_{j,k} = \text{Card} \{n \in A_j : X_n \in I_{j_\eta, k} \pm 2^{-j_\eta+1}\}$$

et on souhaite majorer la probabilité

$$p_j = \mathbb{P}(\exists k \in \{0, 1, \dots, 2^{j_\eta} - 1\} : L_{j,k} > j^2).$$

Pour cela, on applique la formule de Bayes:

$$\begin{aligned} p_j = & \mathbb{P}(\exists k \in \{0, 1, \dots, 2^{j_\eta} - 1\}, L_{j,k} > j^2 | N_j \in [2^{\eta j(1-\varepsilon_j)}, 2^{\eta j(1+\varepsilon_j)}]) \\ & \times \mathbb{P}(N_j \in [2^{\eta j(1-\varepsilon_j)}, 2^{\eta j(1+\varepsilon_j)}]) \\ + & \mathbb{P}(\exists k \in \{0, 1, \dots, 2^{j_\eta} - 1\}, L_{j,k} > j^2 | N_j \notin [2^{\eta j(1-\varepsilon_j)}, 2^{\eta j(1+\varepsilon_j)}]) \\ & \times \mathbb{P}(N_j \notin [2^{\eta j(1-\varepsilon_j)}, 2^{\eta j(1+\varepsilon_j)}]). \end{aligned}$$

Appliquant (1.10), il existe $K > 0$ tel que

$$p_j \leq \sum_{N \in \{ \lfloor 2^{\eta j(1-\varepsilon_j)} \rfloor, \dots, \lfloor 2^{\eta j(1+\varepsilon_j)} \rfloor \}} p_{j,N} \mathbb{P}(N_j = N) + \frac{K}{j^2},$$

où pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$p_{j,N} = \mathbb{P}(\exists k \in \{0, 1, \dots, 2^{j_\eta} - 1\} : L_{j,k} > j^2 | N_j = N).$$

La quantité $p_{j,N}$ est croissante en N , donc

$$p_j \leq p_{j, \lfloor 2^{\eta j(1+\varepsilon_j)} \rfloor} + \frac{K}{j^2}. \quad (1.15)$$

En conditionnant sur l'évènement $N_j = n_0 := \lfloor 2^{\eta j(1+\alpha\varepsilon_j)} \rfloor$, la loi de chaque $L_{j,k}$ (conditionnée) est binomiale $B(n_0, p)$ de paramètres n_0 et $p = \mathbb{P}(X_n \in I_{j_\eta, k} \pm 2^{-j_\eta+1})$.

Rappelons à présent un argument utilisé par Y. Demichel et C. Tricot lors de la preuve de leur Lemme 2.1 dans [47]: si $L_{j,k}$ conditionnée à $N_j = n_0$ suit une loi binomiale $B(n_0, p)$ alors pour tout $m \geq 1$,

$$\mathbb{P}(L_{j,k} > m | N_j = n_0) \leq \frac{(n_0 p)^m}{m!}.$$

En particulier dans notre cas, comme $p \leq 3 \cdot 2^{-j_\eta} \leq 6 \cdot 2^{-\eta j}$,

$$\mathbb{P}(L_{j,k} > j^2 | N_j = n_0) \leq \frac{(n_0 p)^{j^2}}{(j^2)!} \leq \frac{(6 \cdot 2^{\eta j(1+\varepsilon_j)-\eta j})^{j^2}}{(j^2)!} = \frac{(6 \cdot j)^{j^2}}{(j^2)!}$$

Ainsi,

$$p_{j, \lfloor 2^{\eta j(1+\varepsilon_j)} \rfloor} \leq \sum_{k=0}^{2^{j_\eta-1}} \frac{(6 \cdot j)^{j^2}}{(j^2)!} \leq \frac{2^{j_\eta} (6 \cdot j)^{j^2}}{(j^2)!}.$$

En combinant (1.15), on conclut que

$$p_j \leq \frac{2^{j_\eta} (6 \cdot j)^{j^2}}{(j^2)!} + \frac{K}{j^2}$$

qui est le terme général d'une série convergente.

Le lemme de Borel-Cantelli donne que presque sûrement, pour tout $j \in \mathbb{N}$ assez grand et pour tout $k \in \{0, 1, \dots, 2^{j_\eta} - 1\}$, $L_{j,k} \leq j^2$. Ainsi, presque sûrement, il existe $K > 0$ tel que pour tout entier $j \geq 1$, pour tout $k \in \{0, 1, \dots, 2^{j_\eta} - 1\}$, $L_{j,k} \leq K j^2$.

Afin de conclure, on fixe $J, x \in [0, 1]$ et $2^{-J-1} \leq r \leq 2^{-J}$. Nous distinguons deux cas :

- Lorsque $j \leq J$: on rappelle que $j_\eta = \lfloor j\eta \rfloor$. Le point x appartient à un unique intervalle I_{j_η, k_x} (pour un unique entier k_x). Pour $n \in A_j$, on observe que $T_n(x, 2^{-\eta j}) = 1$ si et seulement si $|X_n - x| \leq 2^{-\eta j} + B_n^{-1/\eta} \leq 2^{-\eta j} + 2^{-j}$. Cela se produit uniquement quand $X_n \in I_{j_\eta, k_x} \pm (2^{-\eta j} + 2^{-j}) \subset I_{j_\eta, k_x} \pm 2 \cdot 2^{-j_\eta}$, car $j \leq J$.

Avec ce qui précède, on en déduit qu'il y a au plus $K j^2$ points $X_n, n \in A_j$, tels que $T_n(x, 2^{-\eta j}) = 1$, d'où (1.14).

- Lorsque $j > J$: comme ci-dessus, on a pour $n \in A_j$, $T_n(x, 2^{-\eta j}) = 1$ qui se

produit seulement si $|X_n - x| \leq 2^{-\eta J} + B_n^{-1/\eta} \leq 2^{-\eta J} + 2^{-j} \leq 2^{-\lfloor \eta J \rfloor + 1}$. L'intervalle $[x - 2^{-\lfloor \eta J \rfloor + 1}, x + 2^{-\lfloor \eta J \rfloor + 1}]$ est recouvert par au plus $\lfloor 2^{\eta(j-J)+3} \rfloor$ intervalles $I_{\lfloor j \eta \rfloor, k}$, et chaque intervalle contient au plus Kj^2 points X_n . Donc, $T_n(x, 2^{-\eta J}) = 1$ pour au plus $Kj^2 2^{\eta(j-J)+3}$ entiers $n \in A_j$. D'où le résultat (1.14).

La preuve fonctionne encore si l'on prend $J = +\infty$, et l'inégalité (1.14) devient alors

$$\sum_{n \in A_j} T_n(x) = \sum_{n \in A_j} T_n(x, 0) \leq Kj^2, \quad (1.16)$$

ce qui nous sera utile par la suite. □

1.3 Régularité höldérienne uniforme

Dans cette partie, on s'intéresse à la régularité höldérienne uniforme de la série aléatoire F définie en (1.4). On présente deux méthodes de démonstration. La première permet d'obtenir la régularité höldérienne uniforme pour $\alpha \in]0, 1[$ tandis que la deuxième permet d'obtenir la régularité höldérienne uniforme pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+^* \setminus \mathbb{N}$.

1.3.1 Première méthode de démonstration avec les accroissements

Cette méthode se base sur des estimations uniformes sur les accroissements $|F_j(x) - F_j(y)|$ pour tout $x, y \in [0, 1]$ où

$$F_j(x) = \sum_{n \in A_j} C_n^{-\alpha} \psi_n(x).$$

La proposition suivante décrit la régularité uniforme de F :

Proposition 1.3.1. *Presque sûrement, pour $\alpha \in]0, 1[$ et $\eta \in]0, 1]$, il existe $K > 0$ tel que pour tout $x, y \in [0, 1]$ assez proches,*

$$|F(x) - F(y)| \leq K |\log_2 |x - y||^{2+\alpha} |x - y|^{\alpha\eta}.$$

Par conséquent, presque sûrement $F \in C_{\log}^{\alpha\eta}([0, 1])$.

La proposition ne permet pas de déterminer s'il existe $h > \alpha\eta$ tel que $F \in C_{\log}^h([0, 1])$ mais nous verrons que l'étude de la régularité ponctuelle permet de montrer que ce n'est pas le cas.

Démonstration. Commençons par démontrer la convergence presque sûre de la série F sur l'intervalle $[0, 1]$. D'après (1.14), presque sûrement il existe $K > 0$ tel que pour tout $x \in [0, 1]$ et $j, J \in \mathbb{N}$ assez grands, l'inégalité (1.16) est réalisée.

La fonction ψ a son support égal à $[-1, 1]$, y est continue et donc bornée. Ainsi

$$|F_j(x)| \leq \|\psi\|_{\infty} \sum_{n \in A_j} C_n^{-\alpha} T_n(x).$$

En utilisant (1.11) puis (1.16), on trouve

$$|F_j(x)| \leq \|\psi\|_{\infty} 2^{-\alpha\eta j(1-\varepsilon_j)} \sum_{n \in A_j} T_n(x) \leq K \|\psi\|_{\infty} j^{2\alpha} 2^{-\alpha\eta j(1-\varepsilon_j)}.$$

Par (1.8), $2^{nj\varepsilon_j} = j$, et donc

$$|F_j(x)| \leq K \|\psi\|_{\infty} j^{2+\alpha} 2^{-\alpha\eta j}. \quad (1.17)$$

Comme $-\alpha\eta < 0$, la série presque sûrement $\sum_{j \in \mathbb{N}} j^{2+\alpha} 2^{-\alpha\eta j}$ converge. On en conclut que la série $\sum_{j \in \mathbb{N}} F_j(x)$ converge uniformément. De plus, ψ est continue donc presque sûrement F est bien définie et continue sur $[0, 1]$.

Etudions à présent les accroissements de F . On note pour tout $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} R_n(x, y) &= \begin{cases} 1 & \text{si } x \in B(X_n, B_n^{-\frac{1}{\eta}}) \text{ ou } y \in B(X_n, B_n^{-\frac{1}{\eta}}) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ &= \max\{0, T_n(x), T_n(y)\}. \end{aligned}$$

D'après (1.16), presque sûrement, il existe une constante $K > 0$ telle que pour tous $x, y \in [0, 1]$ et pour j assez grand

$$\sum_{n \in A_j} R_n(x, y) \leq \sum_{n \in A_j} T_n(x) + \sum_{n \in A_j} T_n(y) \leq 2Kj^2. \quad (1.18)$$

Pour $x \neq y$, il existe un unique $J \in \mathbb{N}$ tel que $2^{-(J+1)} \leq |x - y| < 2^{-J}$. Par l'inégalité

triangulaire, on a

$$|F(x) - F(y)| \leq S_1 + S_2 + S_3 \quad (1.19)$$

avec

$$S_1 = \sum_{j=0}^{J-1} |F_j(x) - F_j(y)|, \quad S_2 = \sum_{j=J}^{+\infty} |F_j(x)| \quad \text{et} \quad S_3 = \sum_{j=J}^{+\infty} |F_j(y)|.$$

Nous commençons par majorer la somme S_1 , en utilisant l'hypothèse que la fonction ψ est lipschitzienne. Il existe $K_0 > 0$ tel que pour tous u et v , $|\psi(u) - \psi(v)| \leq K_0|u - v|$. Ainsi,

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{j=0}^{J-1} |F_j(x) - F_j(y)| \\ &\leq \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{n \in A_j} C_n^{-\alpha} |\psi(B_n^{\frac{1}{\eta}}(x - X_n)) - \psi(B_n^{\frac{1}{\eta}}(y - X_n))| R_n(x, y) \\ &\leq K_0 \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{n \in A_j} C_n^{-\alpha} B_n^{\frac{1}{\eta}} |x - y| R_n(x, y) \end{aligned}$$

D'après (1.6) et (1.11),

$$S_1 \leq K_0 |x - y| \sum_{j=1}^{J-1} 2^{-\alpha \eta j (1 - \varepsilon_j)} 2^j \sum_{n \in A_j} R_n(x, y).$$

De plus, une nouvelle fois d'après le choix (1.8) de ε_j , on a presque sûrement

$$S_1 \leq K K_0 |x - y| \sum_{j=1}^{J-1} 2^j 2^{-\alpha \eta j (1 - \varepsilon_j)} 2^j \leq K K_0 |x - y| \sum_{j=1}^{J-1} 2^{j^2 + \alpha} 2^{(1 - \alpha \eta) j}.$$

Comme $1 - \alpha \eta > 0$, il existe $K_1 > 0$ tel que pour x et y assez proches (i.e. J assez grand)

$$S_1 \leq K_1 |x - y| J^{2 + \alpha} 2^{(1 - \alpha \eta) J} \leq K_1 |\log_2 |x - y||^{2 + \alpha} |x - y|^{\alpha \eta}. \quad (1.20)$$

Pour la somme S_2 , on reprend (1.17), ainsi

$$S_2 = \sum_{j=J}^{+\infty} |F_j(x)| \leq K \|\psi\|_{\infty} \sum_{j=J}^{+\infty} j^{2 + \alpha} 2^{-\alpha \eta j}.$$

Or $-\alpha\eta < 0$, ainsi il existe $K_2 > 0$ tel que pour $|x - y|$ suffisamment petit,

$$S_2 \leq K_2 J^{2+\alpha} 2^{-\alpha\eta J} \leq K_2 |\log_2 |x - y||^{2+\alpha} |x - y|^{\alpha\eta}. \quad (1.21)$$

Pour la somme S_3 , on procède de la même manière, ainsi il existe $K_3 > 0$ tel que

$$S_3 \leq K_3 |\log_2 |x - y||^{2+\alpha} |x - y|^{\alpha\eta}. \quad (1.22)$$

On en conclut d'après (1.19), (1.20), (1.21) et (1.22) qu'il existe $K > 0$ tel que

$$|F(x) - F(y)| \leq K |\log_2 |x - y||^{2+\alpha} |x - y|^{\alpha\eta}.$$

□

1.3.2 Deuxième méthode de démonstration avec les ondelettes

Il est proposé une deuxième méthode de démonstration pour généraliser à $\alpha > 0$. Dans cette partie, on fixe α un réel strictement positif.

Soit une ondelette ϕ dans la classe $C^{r_\phi}(\mathbb{R})$ avec $r_\phi > \lfloor \alpha \rfloor$ telle que ϕ soit paire, à support dans $[-1, 1]$ et de $r_\phi + 1$ moments nuls. Dans le cas $\alpha \in]0, 1[$, on peut choisir pour tout $x \in [0, 1]$

- $\phi(x) = \psi(4x - 1)$ si $x \in [0, \frac{1}{2}]$.
- $\phi(x) = -\psi(4x - 3)$ si $x \in [\frac{1}{2}, 1]$.

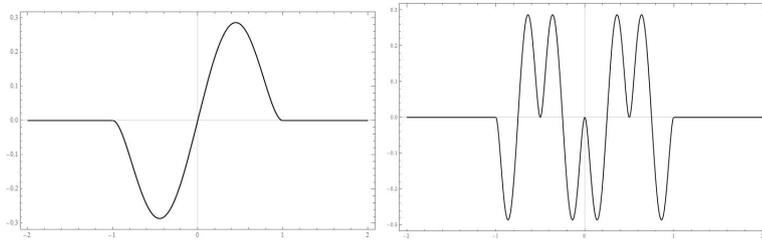


Figure 1.9: Représentation des fonctions ψ et ϕ

Dans ce chapitre uniquement, une définition différente des coefficients continus en ondelette sera utilisée pour répondre à des problèmes de renormalisations dans l'utilisation des théorèmes de caractérisations qui relient les exposants de régularité ponctuelle, uniforme et modules de continuités aux coefficients continus d'ondelettes.

Définition 1.3.1. Soit $(s, t) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. Les coefficients continus d'ondelettes d'une fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$ sont

$$W_f(s, t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \int_{\mathbb{R}} f(x) \phi_{s,t}(x) dx \quad \text{où} \quad \phi_{s,t}(x) = \phi\left(\frac{x-t}{s}\right). \quad (1.23)$$

Nous rappelons ici le théorème [73] liant les coefficients continus d'ondelettes et la régularité uniforme.

Théorème 1.3.1. Soient $H \in \mathbb{R}_+^*$, $f \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R})$, et $\psi \in C^{H+1}(\mathbb{R})$ une ondelette possédant au moins $\lfloor H \rfloor + 1$ moments nuls. La fonction f appartient à $C^H(\mathbb{R})$ si et seulement s'il existe $K > 0$ tel que

$$\forall (s, t) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \quad |W_f(s, t)| \leq K s^{H+\frac{1}{2}}.$$

La fonction f appartient à $C_{\log}^H(\mathbb{R})$ si et seulement s'il existe $K, \gamma > 0$ tels que

$$\forall (s, t) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \quad |W_f(s, t)| \leq K |\log |s||^\gamma s^{H+\frac{1}{2}}.$$

Soit $(s, t) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. Remarquons que

$$W_F(s, t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \int_{\mathbb{R}} F(x) \phi_{s,t}(x) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} C_n^{-\alpha} d_n(s, t)$$

avec

$$d_n(s, t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \int_{\mathbb{R}} \psi_n(x) \phi_{s,t}(x) dx. \quad (1.24)$$

Le lemme ci-dessous, démontré dans dans [45] (Proposition 2.2.1), permet d'obtenir une majoration des coefficients d'ondelettes de F .

Lemme 1.3.1. Si ϕ est d'intégrale nulle alors il existe $K > 0$ tel que

$$\forall (s, t) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \quad |d_n(s, t)| \leq K s^{\frac{1}{2}} \min\{s B_n^{\frac{1}{\eta}}, s^{-1} B_n^{-\frac{1}{\eta}}\} T_n(t, s) \quad (1.25)$$

L'objectif va être d'appliquer le théorème 1.3.1 dans le cas de F , pour cela on énonce la proposition suivante.

Proposition 1.3.2. Presque sûrement, pour $\alpha \in \mathbb{R}_+^* \setminus \mathbb{N}$, $\eta \in]0, 1]$, $\alpha\eta < 1$ et ψ suffisamment régulière, il existe $K > 0$ tel que pour tout $(s, t) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$,

$$|W_F(s, t)| \leq K s^{\alpha\eta+\frac{1}{2}} |\log_2(s)|^{2+\alpha}$$

Par conséquent, presque sûrement $F \in C_{\log}^{\alpha\eta}([0, 1])$.

Démonstration. Soit $t \in \mathbb{R}$ et $0 < s < 1$. Il existe un unique $J \in \mathbb{N}$ tel que $2^{-\eta(J+1)} \leq s < 2^{-\eta J}$. Quand $j \leq \eta J$ et $n \in A_j$, on a

$$\min\{sB_n^{\frac{1}{\eta}}, s^{-1}B_n^{-\frac{1}{\eta}}\} = sB_n^{\frac{1}{\eta}} \leq s2^j.$$

D'après (1.14), il existe $K > 0$ tel que

$$\sum_{n \in A_j} T_n(t, 2^{-\eta J}) \leq Kj^2.$$

Puis d'après le lemme 1.3.1 et (1.11), il existe une constante $K_1 > 0$ (dont la valeur peut changer à chaque ligne, mais ne dépend pas de s, t, j ou J) telle que

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\lfloor \eta J \rfloor} \sum_{n \in A_j} C_n^{-\alpha} |d_n(s, t)| &\leq K_1 s^{\frac{1}{2}} \sum_{j=0}^{\lfloor \eta J \rfloor} 2^{-\alpha\eta(1-\varepsilon_j)j} s 2^j \sum_{n \in A_j} T_n(t, s) \\ &\leq K_1 s^{\frac{1}{2}} \sum_{j=0}^{\lfloor \eta J \rfloor} 2^{-\alpha\eta(1-\varepsilon_j)j} s 2^j \sum_{n \in A_j} T_n(t, 2^{-\eta J}) \\ &\leq K_1 s^{\frac{3}{2}} \sum_{j=0}^{\lfloor \eta J \rfloor} j^{2+\alpha} 2^{(1-\alpha\eta)j} \leq K_1 s^{\frac{3}{2}} (\eta J)^{2+\alpha} 2^{(1-\alpha\eta)\eta J} \\ &\leq K_1 s^{\alpha\eta + \frac{1}{2}} |\log_2(s)|^{2+\alpha}. \end{aligned}$$

Quand $\eta J + 1 \leq j \leq J$, si $n \in A_j$, alors $\min\{sB_n^{\frac{1}{\eta}}, s^{-1}B_n^{-\frac{1}{\eta}}\} = s^{-1}B_n^{-\frac{1}{\eta}} \leq s^{-1}2^{-j}$ et le lemme 1.3.1 donne que $\sum_{n \in A_j} T_n(t, 2^{-\eta J}) \leq Kj^2$. Ainsi, il existe $K_2 > 0$ tel que

$$\begin{aligned} \sum_{j=\lfloor \eta J \rfloor + 1}^J \sum_{n \in A_j} C_n^{-\alpha} |d_n(s, t)| &\leq K_2 s^{\frac{1}{2}} \sum_{j=\lfloor \eta J \rfloor + 1}^J 2^{-\alpha\eta(1-\varepsilon_j)j} s^{-1} 2^{-j} \sum_{n \in A_j} T_n(t, 2^{-\eta J}) \\ &\leq K_2 s^{-\frac{1}{2}} \sum_{j=\lfloor \eta J \rfloor + 1}^J j^{2+\alpha} 2^{-(1+\alpha\eta)j} \leq K_2 s^{-\frac{1}{2}} J^{2+\alpha} 2^{-(1+\alpha\eta)\eta J} \\ &\leq K_2 s^{\alpha\eta + \frac{1}{2}} |\log_2(s)|^{2+\alpha}. \end{aligned}$$

Finalement, lorsque $j \geq J$, $\min\{sB_n^{\frac{1}{\eta}}, s^{-1}B_n^{-\frac{1}{\eta}}\} \leq s^{-1}2^{-j}$ et le lemme (1.3.1) assure

que $\sum_{n \in A_j} T_n(t, 2^{-\eta J}) \leq K j^2 2^{\eta(j-J)}$. Ainsi, il existe $K_3 > 0$ tel que

$$\begin{aligned} \sum_{j=J}^{+\infty} \sum_{n \in A_j} C_n^{-\alpha} |d_n(s, t)| &\leq K_3 s^{\frac{1}{2}} \sum_{j=J}^{+\infty} 2^{-\alpha \eta (1-\varepsilon_j) j} s^{-1} 2^{-j+1} \sum_{n \in A_j} T_n(t, 2^{-\eta J}) \\ &\leq K_3 s^{-\frac{1}{2}} \sum_{j=J}^{+\infty} j^{2+\alpha} 2^{-(1+\alpha \eta) j} 2^{\eta(j-J)} \leq K_3 s^{-\frac{1}{2}} J^{2+\alpha} 2^{-(1+\alpha \eta) J} \\ &\leq K_3 s^{\alpha \eta + \frac{1}{2}} |\log_2(s)|^{2+\alpha}. \end{aligned}$$

La combinaison des précédentes inégalités permet de déduire qu'il existe $K > 0$ tel que

$$|W_F(s, t)| \leq K s^{\alpha \eta + \frac{1}{2}} |\log_2(s)|^{2+\alpha}.$$

Cela conclut la preuve de la proposition. \square

1.4 Distribution des pulses isolés

La grande différence entre la série aléatoire F et les séries aléatoires d'ondelettes, et une des principales difficultés de notre analyse, est qu'il peut exister des pulses dans A_j dont les supports se recouvrent les uns les autres, créant des possibles phénomènes de compensation entre pulses. Certains pulses pourraient possiblement être compensés par d'autres, rendant la série F plus régulière qu'envisagé initialement.

Afin étudier la régularité en tout point, et de démontrer que ces phénomènes de recouvrement sont exceptionnels, on a besoin, pour tout $j \in \mathbb{N}$ assez grand et $n \in A_j$, d'information sur la manière dont les pulses ψ_n sont répartis sur $[0, 1]$.

Pour cela, soit p_0 un entier naturel suffisamment grand pour que

$$p_0 > (3 + 3\alpha)/(1 - \alpha\eta). \quad (1.26)$$

Fixons $\gamma \in (0, 1/\eta - 1)$ et Considérons pour tout $j \in \mathbb{N}$ les ensembles

$$\tilde{A}_j = \bigcup_{j'=\lfloor (1-p_0\eta\varepsilon_j)j \rfloor}^{\lfloor (1+\gamma)j \rfloor} A_{j'} \quad (1.27)$$

$$\mathcal{I}_j = \{n \in A_j : \forall m \in \tilde{A}_j, n \neq m, B(X_n, B_n^{-\frac{1}{\eta}}) \cap B(X_m, B_m^{-\frac{1}{\eta}}) = \emptyset\} \quad (1.28)$$

et posons

$$\tilde{N}_j = \text{Card}(\tilde{A}_j).$$

Les éléments de \mathcal{I}_j sont les entiers $n \in A_j$ tels que le support de ψ_n n'intersecte aucun support de ψ_m pour $m \in \tilde{A}_j$ avec $m \neq n$.

Définition 1.4.1. *On dit qu'un point X_n avec $n \in \mathcal{I}_j$ est un point isolé.*

Pour tout $j \in \mathbb{N}$ assez grand, nous allons étudier la répartition des points X_n pour $n \in \mathcal{I}_j$. En effet, comme dit plus haut, de telles informations plus loin sont cruciales pour obtenir une majoration efficace de l'exposant de Hölder en tout point. Elles nous permettront plus tard également d'être en mesure d'appliquer des théorèmes d'ubiquité pour trouver le spectre multifractal de F .

On définit les deux familles d'ensembles

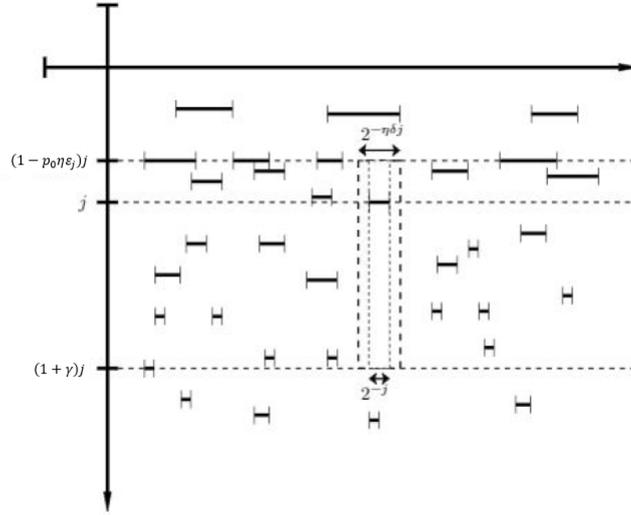
$$\begin{aligned} G_\delta &= \limsup_{j \rightarrow +\infty} \bigcup_{n \in A_j} B(X_n, B_n^{-\delta}) \\ \text{et } G'_\delta &= \limsup_{j \rightarrow +\infty} \bigcup_{n \in \mathcal{I}_j} B(X_n, B_n^{-\delta(1-\tilde{\varepsilon}_j)}) \end{aligned} \tag{1.29}$$

où $\tilde{\varepsilon}_j = \log_2(16j \log_2 j) / (\eta j)$.

Remarquons que $G_\delta \subset G_{\delta'}$, $G'_\delta \subset G'_{\delta'}$ si $\delta > \delta'$.

L'ensemble G_δ est l'ensemble des points sur lequel nous serons capables de minorer l'exposant de Hölder de F par α/δ , et G'_δ l'ensemble sur lequel nous arriverons à majorer l'exposant de Hölder de F par α/δ . L'idée est que sur le support d'un pulse isolé, le processus F a de grandes oscillations, et si un point x est infiniment souvent proche d'un pulse isolé, alors l'exposant de Hölder de F en x pourra être majoré. Inversement, si un point x reste éloigné des pulses (de tous les pulses) à chaque échelle, nous serons en mesure de minorer l'exposant de Hölder de F en x .

Dans un premier temps, pour une infinité de j , on souhaite montrer qu'il existe un grand nombre de points isolés X_m pour $m \in \mathcal{I}_j$ et qu'ils sont bien répartis dans l'intervalle $[0, 1]$.

Figure 1.10: Représentation des supports des pulses dans \mathcal{I}_j .

Pour cela nous allons établir un résultat de recouvrement impliquant les supports des pulses ψ_n avec $n \in \mathcal{I}_j$.

Des problèmes très comparables de recouvrements aléatoires ont été déjà étudiés dans le passé dans le cas du tore $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Le contexte est le suivant: soient une suite $(l_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ positive, décroissante, convergente vers 0 et $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite i.i.d. uniformément distribuée de variables aléatoires sur le tore \mathbb{T} . Le problème de Dvoretzky se résume à la question: "Est ce que le tore \mathbb{T} est entièrement recouvert une infinité de fois par les boules $B(X_n, l_n)$?" Cette question initiée par Dvoretzky [49] a été étudiée parmi de nombreux mathématiciens dont J. Barral, A.H. Fan, J.P. Kahane, S. Jaffard, S. Seuret et L.A. Shepp [19, 54, 100]. En 1972, L.A. Shepp [100] démontre une caractérisation exacte sur le tore avec des suites d'arcs aléatoires de longueurs décroissantes $0 < l_n < 1$. Il montre que presque sûrement $\limsup B(x_n, l_n) = [0, 1]$ si et seulement si $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} n^{-2} \exp(l_1 + \dots + l_n) = +\infty$. Récemment de nombreuses généralisations ont été obtenues [17, 55] et justement pour le cas des supports ψ_n avec $n \in A_j$, J. Barral, N. Fournier, S. Jaffard et S. Seuret démontrent dans l'article [19] que G_1 est un recouvrement aléatoire presque sûr du segment $[0, 1]$, si on remplace $B(X_n, B_n)$ par $B(X_n, B_n^{-1-\varepsilon_n})$ où $\varepsilon_n \sim 1/\log_2 n$. Cependant, ce résultat ne peut s'étendre directement à l'ensemble G'_1 des points isolés, et nous devons raffiner la démonstration, pour obtenir le résultat suivant.

Théorème 1.4.1. *Presque sûrement, G'_1 est un recouvrement de $[0, 1]$.*

Démonstration. Soit $j \in \mathbb{N}$. On définit l'ensemble suivant

$$D_j = \{[8k2^{-\lfloor nj \rfloor}, (8k+1)2^{-\lfloor nj \rfloor}] : \forall k \in \mathbb{N}, 0 \leq 8k \leq 2^{\lfloor nj \rfloor} - 1\}.$$

On remarque que $\text{Card}(D_j) \sim 2^{\lfloor nj \rfloor}/8$. Pour tout $V \in D_j$ avec $V \subset [0, 1]$, on considère l'événement suivant :

$$\mathcal{A}_j(V) = \left\{ \exists n \in A_j \text{ tel que } X_n \in V \text{ et } B(X_n, 2B_n^{-(1+\gamma)}) \cap \bigcup_{m \in \tilde{A}_j} \{X_m\} = \{X_n\} \right\}. \quad (1.30)$$

Lemme 1.4.1. *Si $\mathcal{A}_j(V)$ est réalisé, alors le point X_n donné par (1.30) est isolé au sens de la Définition 1.4.1.*

Démonstration. Quand $\mathcal{A}_j(V)$ est réalisé, le point X_n est tel que pour tout $m \in \tilde{A}_j$, $X_m \notin B(X_n, 2B_n^{-1-\gamma})$.

Ensuite, rappelons que $2^{(j-1)\eta} \leq B_n \leq 2^{-j\eta}$, et que $B_n^{-1/\eta} < B_n^{-1-\gamma}$ par le choix de γ . De plus, remarquons que lorsque $m \in \tilde{A}_j$ pour j assez grand,

$$B_m^{-1/\eta} \leq 2^{-((1-p\eta\varepsilon_j)j-1)/\eta} \leq j^{p\eta} 2^{-j/\eta+1/\eta} \leq B_n^{-1-\gamma},$$

toujours par le choix judicieux de γ .

Ce qui précède prouve que $B(X_n, B_n^{-1/\eta}) \cap B(X_n, B_n^{-1-\gamma}) = \emptyset$, ainsi X_n est isolé. \square

Nous allons à présent démontrer que $\mathcal{A}_j(V)$ est souvent réalisé.

Pour $j > 0$, les restrictions du processus de Poisson ponctuel $\{(X_n, B_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ sur $V \times [1, +\infty]$, ou de manière équivalente, de $\{(X_n, B_n^{-\frac{1}{\eta}})\}_{n \in \mathbb{N}}$ sur $V \times [0, 1]$, sur les intervalles dyadiques $V \in D_j$, sont mutuellement indépendantes. De plus, les intervalles dans D_j sont deux à deux distants d'au moins $3 \cdot 2^{1-nj}$. Ainsi comme $B_n^{-1-\gamma} \leq B_n^{-1} \leq 2^{-\eta(j-1)}$, et donc deux boules $B(X_n, B_n^{-1})$ avec $X_n \in V$ et $B(X_m, B_m^{-1})$ avec $X_m \in V' \neq V$ (avec $n, m \in A_j$) ne peuvent s'intersecter. Les événements $\mathcal{A}_j(V)$ pour $V \in D_j$ sont donc mutuellement indépendants.

Considérons à présent l'ensemble

$$Q_j = \{V \in D_j : \mathcal{A}_j(V) \text{ est vraie}\}.$$

Soit $V \in D_j$ avec $V \subset [0, 1]$. On considère la variable aléatoire $T_j(V) = \mathbb{1}_{\mathcal{A}_j(V)}$. D'après ce qui précède, les variables aléatoires $(T_j(V))_{V \in D_j}$ sont indépendantes et identiquement distribuées suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p_j(1 + \gamma) = \mathbb{P}(\mathcal{A}_j(V) \text{ est vraie})$. On a

$$\text{Card}(Q_j) = \sum_{V \in D_j} T_j(V),$$

et $\sum_{V \in D_j} T_j(V)$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(\text{Card}(D_j), p_j(1 + \gamma))$ de paramètre $\text{Card}(D_j) \sim \lfloor \frac{2^{\lfloor \eta j \rfloor}}{8} \rfloor$ et $p_j(1 + \gamma)$.

On note le paramètre $p_j(1 + \gamma)$ car, les lois des variables aléatoires X_n et B_n étant données, il dépend exclusivement de γ . Afin de conclure, on utilise le lemme suivant qu'on peut retrouver dans l'article de J. Barral, N. Fournier, S. Jaffard et S. Seuret [19], lemme 28 (voir aussi [17]).

Lemme 1.4.2. *Il existe une fonction continue $\kappa : (1, +\infty) \rightarrow]0, 1[$ telle que pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, $p_j(\delta) \geq \kappa(\delta) > 0$.*

En particulier, $p_j(1 + \gamma) > \kappa(1 + \gamma) > 0$, pour tout j .

Soit $(j_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$ la suite d'entiers croissante telle que $j_1 = 1 + \lfloor p\eta\varepsilon_1 \rfloor$ et $j_{p+1} = \lfloor 2(1/\eta + 1)j_p + 1 \rfloor$. Cette construction assure que $\tilde{A}_{j_p} \cap \tilde{A}_{j_{p+1}} = \emptyset$.

Deux intervalles $V, V' \in D_j$ sont dit successifs lorsqu'il existe un entier k tel qu'on peut écrire $V = [8k2^{-\lfloor \eta j \rfloor}, (8k + 1)2^{-\lfloor \eta j \rfloor}]$ et $V' = [8(k + 1)2^{-\lfloor \eta j \rfloor}, (8(k + 1) + 1)2^{-\lfloor \eta j \rfloor}]$ ou $V' = [8(k - 1)2^{-\lfloor \eta j \rfloor}, 8k2^{-\lfloor \eta j \rfloor}]$. Le lemme suivant montre qu'il est très probable que parmi tout ensemble de $j_p \log_2 j_p$ intervalles successifs dans D_j au moins l'un d'entre eux, disons V , satisfait $\mathcal{A}_j(V)$.

Lemme 1.4.3. *Pour tout $p \in \mathbb{N}$, soit \mathcal{E}_p l'événement*

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_p = & \{ \text{pour tout } (V_1, \dots, V_{\lfloor j_p \log j_p \rfloor}) \text{ intervalles successifs de } D_{j_p} \\ & \exists k \in \{1, \dots, \lfloor j_p \log j_p \rfloor\} \text{ tel que } \mathcal{A}_{j_p}(V_k) \text{ est vraie} \}, \end{aligned}$$

Alors $\mathbb{P}(\limsup_{p \rightarrow +\infty} \mathcal{E}_p) = 1$.

Démonstration. Les événements $\{\mathcal{E}_p\}_{p \in \mathbb{N}}$ sont mutuellement indépendants d'après le

choix de la suite $(j_p)_{p \geq 1}$. Ainsi, il existe une constante $K > 0$ telle que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}((\mathcal{E}_p)^c) &= \mathbb{P}(\{\text{il existe } (V_1, \dots, V_{\lfloor j_p \log j_p \rfloor}) \text{ intervalles successifs de } D_{j_p} \\ &\quad \text{tels que } \forall k \in \{1, \dots, \lfloor j_p \log j_p \rfloor\}, \mathcal{A}_{j_p}(V_k) \text{ est faux}\}) \\ &\leq \sum_{i=1}^{\text{Card}(D_{j_p})} \prod_{k=1}^{\lfloor j_p \log j_p \rfloor} \mathbb{P}(\mathcal{A}_{j_p}(V_k) \text{ est faux}) \\ &\leq K 2^{\eta j_p} (1 - p_{j_p}(1))^{j_p \log j_p} \\ &\leq K 2^{\eta j_p} (1 - \kappa(1))^{j_p \log j_p}. \end{aligned}$$

Par construction, $j_p \gg p$ et $0 < 1 - \kappa(1) < 1$. Pour p assez grand, $2^{\eta j_p} (1 - \kappa(1))^{j_p \log j_p} \leq 2^{-p}$. Donc il existe $K' > 0$ tel que pour tout p assez grand, $\mathbb{P}((\mathcal{E}_p)^c) \leq K' 2^{-p}$ et ainsi $\mathbb{P}(\mathcal{E}_p) \geq 1 - K' 2^{-p}$.

On en déduit que $\sum_{p \in \mathbb{N}^*} \mathbb{P}(\mathcal{E}_p) = +\infty$. Le lemme de Borel-Cantelli nous donne donc le résultat demandé. \square

Soit p un entier tel que \mathcal{E}_p est réalisé (ce qui arrive pour une infinité de p).

Soit $V \in D_{j_p}$ tel que $A_j(V)$ est vrai. Donc V contient un point X_n isolé, d'après le Lemme 1.4.1.

D'après la définition des évènements \mathcal{E}_p , parmi $\lfloor j_p \log_2 j_p \rfloor$ intervalles consécutifs dans D_{j_p} , il existe au moins un intervalle qui contient un point isolé. Par conséquent, l'union

$$\bigcup_{n \in \mathcal{I}_{j_p}} B(X_n, 8j_p \log j_p 2^{-\eta j})$$

recouvre $[0, 1]$. Puisque cela se produit pour un nombre infini d'entiers j_p et en rappelant (1.29) et la définition de $\tilde{\varepsilon}_j$, on peut conclure que presque sûrement,

$$[0, 1] = \limsup_{j \rightarrow +\infty} \bigcup_{n \in \mathcal{I}_j} B(X_n, 8j \log j 2^{-\eta j}) \subseteq \limsup_{j \rightarrow +\infty} \bigcup_{n \in \mathcal{I}_j} B(X_n, B_n^{-(1-\tilde{\varepsilon}_j)}) = G'_1,$$

puisque $B_n \geq 2^{(j_p-1)/\eta}$ quand $n \in \mathcal{I}_j$. D'où le résultat. \square

1.5 Minoration de l'exposant de Hölder de F via G_δ

Pour des points x_0 n'appartenant pas à $G_\delta = \limsup_{j \rightarrow +\infty} \bigcup_{n \in A_j} B(X_n, B_n^{-\delta})$ avec $\delta \in]1, \frac{1}{\eta}[$, on détermine une minoration de l'exposant de Hölder de F en x_0 .

Proposition 1.5.1. *Soit $\alpha \in]0, 1[$. Presque sûrement, pour tout $\delta \in (1, \frac{1}{\eta})$, si $x_0 \notin G_\delta$ alors il existe $K > 0$ tel que pour tout x assez proche de x_0*

$$|F(x) - F(x_0)| \leq K |\log_2 |x - x_0||^{2+\alpha} |x - x_0|^{\frac{\alpha}{\delta}}.$$

Par conséquent, $h_F(x_0) \geq \frac{\alpha}{\delta}$.

Démonstration. Soit $\delta \in (1, \frac{1}{\eta})$.

Soit x_0 n'appartenant pas à G_δ . Pour tout x avec $|x - x_0| \leq 1$, il existe un unique entier j_0 tel que

$$2^{-\eta(j_0+1)} \leq |x - x_0| < 2^{-\eta j_0}$$

et on appelle j_1 le plus grand entier positif qui vérifie $|x - x_0| + 2^{-j_1} \leq 2^{-\delta \eta j_1}$. L'entier j_1 existe puisque $2^{-j \eta \delta j_1}$ tend vers 0 lorsque j_1 tend vers $+\infty$. Lorsque j_0 tend vers l'infini, $|j_1 - j_0/\delta| \rightarrow 0$. On suppose donc que j_0 est suffisamment grand de sorte que $j_0/\delta - 2 \leq j_1 \leq j_0/\delta + 2$, donc que $2^{-j_0 \eta} \sim 2^{-j_1 \delta \eta} \sim |x - x_0|$.

Par définition de G_δ , puisque $x_0 \notin G_\delta$, il n'existe qu'un nombre fini N_{x_0} de boules $\{B(X_{n_k}, B_{n_k}^{-\delta})\}_{1 \leq k \leq N_{x_0}}$ contenant x_0 . Notons \tilde{j}_0 le plus petit entier j tel que $\bigcup_{k=1}^{N_{x_0}} \{n_k\} \in \bigcup_{j=1}^{\tilde{j}_0} A_j$.

On suppose x suffisamment proche de x_0 afin que pour tout $j \geq \delta j_1/2$, $j \varepsilon_j \geq \tilde{j}_0 + 1$ et pour tout $n \in A_j$ avec $j \geq j_1$, $|x - x_0| + B_n^{-1/\eta} \leq B_n^{-\delta}$. Ainsi $x \in B(X_n, B_n^{-1/\eta})$ implique que $x_0 \in B(X_n, B_n^{-\delta})$, ce qui n'est possible que pour les boules $\{B(X_{n_k}, B_{n_k}^{-\delta})\}_{1 \leq k \leq N_{x_0}}$ ci-dessus.

Par conséquent, x et x_0 appartiennent simultanément à au plus N_{x_0} support de pulses ψ_n avec $n \in A_j$ et $j \leq j_1$.

On étudie à présent l'accroissement de F . Par l'inégalité triangulaire, on a

$$|F(x) - F(x_0)| \leq S_1 + S_2 + S_3 \tag{1.31}$$

avec

$$S_1 = \sum_{j=0}^{j_1-1} |F_j(x) - F_j(x_0)|, \quad S_2 = \sum_{j=j_1}^{+\infty} |F_j(x_0)| \quad \text{et} \quad S_3 = \sum_{j=j_1}^{+\infty} |F_j(x)|.$$

Nous commençons par majorer S_1 . D'après la remarque ci-dessus, S_1 contient au plus N_{x_0} termes non-nuls de la forme $C_{n_i}^{-\alpha}(\psi_{n_i}(x) - \psi_{n_i}(x_0))$ (pour les entiers $n_1, \dots, n_{N_{x_0}}$).

En utilisant l'hypothèse que la fonction ψ est lipschitzienne, il existe $K > 0$ tel que

$$C_{n_i}^{-\alpha} \left| \psi \left(B_{n_i}^{\frac{1}{\eta}}(x - X_{n_i}) \right) - \psi \left(B_{n_i}^{\frac{1}{\eta}}(x - X_{n_i}) \right) \right| \leq C_{n_i}^{-\alpha} B_{n_i}^{\frac{1}{\eta}} K |x - x_0|.$$

D'après (1.6) et (1.11) et la définition de \tilde{j}_0 , si $n_i \in A_j$, alors nécessairement $j \leq \tilde{j}_0$ et il existe une autre constante $K > 0$ telle que

$$C_{n_i}^{-\alpha} B_{n_i}^{\frac{1}{\eta}} \leq K 2^{-\alpha n_j (1-\varepsilon_j)} 2^j \leq K \tilde{j}_0^{-\alpha} 2^{\tilde{j}_0(1-\alpha\eta)} \leq K j_1^\alpha 2^{\varepsilon_{j_1} j_1} = K j_1^{\alpha+1/\eta}.$$

En utilisant que $j_1 \sim \delta j_0 \sim \frac{\delta}{\eta} |\log_2 |x - x_0||$, finalement pour une certaine constante $K_{x_0} > 0$ dépendant de x_0 , on a

$$\begin{aligned} S_1 &\leq K N_{x_0} |x - x_0| j_1^{\alpha+1/\eta} \\ &\leq K_{x_0} |x - x_0| |\log_2 |x - x_0||^{\alpha+1/\eta} \\ &\leq K_{x_0} |x - x_0|^\alpha |\log_2 |x - x_0||^{2+\alpha}. \end{aligned} \tag{1.32}$$

On remarque que la dernière inégalité est vraie lorsque j_1 tend vers $+\infty$. Par construction, $\psi_n(x_0) = 0$ pour tout $n \in A_j$ avec $j \geq j_1$, donc $S_2 = 0$.

Pour la somme S_3 , on majore radicalement $|\psi_n(x)|$ par sa norme $\|\psi\|_\infty$ et on voit par (1.16) que

$$\begin{aligned} S_3 &= \sum_{j=j_1}^{+\infty} |F_j(x)| \leq K \|\psi\|_\infty \sum_{j=j_1}^{+\infty} \sum_{n \in A_j} C_n^{-\alpha} \mathbf{1}_{\psi_n(x) \neq 0} \\ &\leq K \|\psi\|_\infty \sum_{j=j_1}^{+\infty} j^\alpha 2^{-\alpha n_j} \sum_{n \in A_j} T_n(x, 0) \\ &\leq K \|\psi\|_\infty \left(\sum_{j=j_1}^{+\infty} j^\alpha 2^{-\alpha n_j} j^2 \right) \leq K j_1^{2+\alpha} 2^{-\alpha n_{j_1}} \leq K j_0^{2+\alpha} 2^{-j_0 \frac{\alpha\eta}{\delta}} \\ &\leq K |\log_2 |x - x_0||^{2+\alpha} |x - y|^{\frac{\alpha}{\delta}}. \end{aligned} \tag{1.33}$$

On en conclut d'après (1.31), (1.32), (1.33) et le fait que $\delta \in (1, \frac{1}{\eta})$, qu'il existe $K > 0$ tel que

$$|F(x) - F(x_0)| \leq K |\log_2 |x - x_0||^{2+\alpha} |x - x_0|^{\frac{\alpha}{\delta}}.$$

□

1.6 Majoration de l'exposant de Hölder de F via les ensembles G'_δ

Nous allons à présent démontrer que pour tout point $x_0 \in G'_\delta$, l'exposant de Hölder de F en x_0 est majoré par $\frac{\alpha}{\delta}$ en utilisant une méthode d'analyse en ondelette. Nous rappelons ici le théorème de S.Jaffard [60] liant les transformées d'ondelettes continues et les exposant de Hölder ponctuels de fonctions.

Théorème 1.6.1. *Soit $f \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R})$.*

Si $f \in C^H(x_0)$, alors il existe $K > 0$ et un voisinage $U \subseteq \mathbb{R}^2$ de $(0^+, x_0)$ tels que

$$\forall (s, t) \in U \quad , \quad |W_f(s, t)| \leq K s^{H+\frac{1}{2}} \left(1 + \left| \frac{x_0 - t}{s} \right|^H \right).$$

Réciproquement, s'il existe $K > 0$, $0 < H' < H < 1$ et un voisinage $U \subseteq \mathbb{R}^2$ de $(0^+, x_0)$ tels que

$$\forall (s, t) \in U \quad , \quad |W_f(s, t)| \leq K s^{H+\frac{1}{2}} \left(1 + \left| \frac{x_0 - t}{s} \right|^{H'} \right),$$

alors $h_f(x_0) = H$.

Ce théorème va nous permettre de démontrer le résultat suivant.

Proposition 1.6.1. *Soit $\alpha > 0$. Presque sûrement, pour tout $\delta \in \left] 1, \frac{1}{\eta} \right]$ et $x_0 \in G'_\delta$, $h_F(x_0) \leq \frac{\alpha}{\delta}$.*

Démonstration. Rappelons que la fonction ϕ utilisée pour calculer la transformée en ondelettes peut être choisie dans la classe $C^2(\mathbb{R})$, être paire et à support dans $[-1, 1]$, avec 1 moment nul. On impose de plus ici que

$$\int_{-1}^1 \phi(u) \psi(u) du \neq 0. \tag{1.34}$$

L'existence d'une telle fonction ϕ est un exercice.

Soit $x_0 \in G'_\delta$. Il existe deux suites d'entiers $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(j_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telles que $n_k \in \mathcal{I}_{j_k}$ et $x_0 \in \bigcap_{n \in \mathcal{I}_{j_k}} B(X_n, B_n^{-\delta(1-\varepsilon_{j_k})})$.

Soient $k \in \mathbb{N}^*$ avec $n_k \in \mathcal{I}_{j_k}$. Nous allons estimer les transformées d'ondelettes continues $W_F(B_{n_k}^{-\frac{1}{\eta}}, X_{n_k})$. Posons $J_k = \lfloor (1-p_0\eta\varepsilon_{j_k})j_k \rfloor$ et $\tilde{J}_k = \lfloor (1+\gamma)j_k \rfloor$, où $\gamma \in (0, 1/\eta - 1)$

a été fixé dans la section 1.4. On décompose $W_F(B_{n_k}^{-\frac{1}{\eta}}, X_{n_k})$ en

$$W_F(B_{n_k}^{-\frac{1}{\eta}}, X_{n_k}) = S_1 + S_2 + S_3. \quad (1.35)$$

avec

$$S_1 = \sum_{j=0}^{J_k-1} \sum_{n \in A_j} C_n^{-\alpha} d_n(B_{n_k}^{-\frac{1}{\eta}}, X_{n_k}), \quad S_2 = \sum_{j=J_k}^{\tilde{J}_k} \sum_{n \in A_j} C_n^{-\alpha} d_n(B_{n_k}^{-\frac{1}{\eta}}, X_{n_k})$$

et $S_3 = \sum_{j=\tilde{J}_k+1}^{+\infty} \sum_{n \in A_j} C_n^{-\alpha} d_n(B_{n_k}^{-\frac{1}{\eta}}, X_{n_k}).$

L'idée consiste à minorer W_F pour utiliser la contraposée du théorème 1.6.1. Pour cela, on montre que dans (1.35) le terme S_2 est largement supérieur au deux autres termes (qui correspondent aux termes hautes et basses fréquences).

Commençons par traiter la somme S_2 . D'après la définition de \hat{A}_j en (1.28), il existe un unique $\tilde{n}_k \in \tilde{A}_{j_k}$ tel que $x_0 \in B(X_{\tilde{n}_k}, B_{\tilde{n}_k}^{-\frac{1}{\eta}})$. Ainsi $\tilde{n}_k = n_k$ et

$$S_2 = C_{n_k}^{-\alpha} d_{n_k}(B_{n_k}^{-\frac{1}{\eta}}, X_{n_k}).$$

Une intégration par parties et un changement de variables donnent

$$d_{n_k}(B_{n_k}^{-\frac{1}{\eta}}, X_{n_k}) = B_{n_k}^{-1/(2\eta)} \int_{-1}^1 \psi(u) \phi(u) du.$$

La condition (1.34) implique que pour une constante $K_2 > 0$ (dépendant de ψ et ϕ seulement), pour tout entier k ,

$$|S_2| \geq K_2 C_{n_k}^{-\alpha} B_{n_k}^{-\frac{1}{2\eta}} \geq K_2 B_{n_k}^{-\frac{1}{2\eta}} 2^{-\alpha\eta(1+\varepsilon_{j_k})j_k} \geq K_2 B_{n_k}^{-\frac{1}{2\eta} - \alpha(1+\varepsilon_{j_k})}. \quad (1.36)$$

où (1.11) et la définition de ε_j ont été utilisées.

Ensuite, on majore S_1 à l'aide de l'inégalité (1.25) puis on applique (1.11) et (1.6).

Ainsi

$$\begin{aligned}
 |S_1| &\leq \sum_{j=0}^{J_k-1} \sum_{n \in A_j} C_n^{-\alpha} |d_n(B_{n_k}^{-\frac{1}{\eta}}, X_{n_k})| \\
 &\leq \sum_{j=0}^{J_k-1} \sum_{n \in A_j} C_n^{-\alpha} B_{n_k}^{-\frac{1}{2\eta}} \min\{B_{n_k}^{-\frac{1}{\eta}} B_n^{\frac{1}{\eta}}, B_{n_k}^{\frac{1}{\eta}} B_n^{-\frac{1}{\eta}}\} T_n(X_{n_k}, B_{n_k}^{-\frac{1}{\eta}}) \\
 &\leq \sum_{j=0}^{J_k-1} 2^{-\alpha\eta j(1-\varepsilon_j)} B_{n_k}^{-\frac{1}{2\eta}} \min\{B_{n_k}^{-\frac{1}{\eta}} 2^j, B_{n_k}^{\frac{1}{\eta}} 2^{-j+1}\} \sum_{n \in A_j} T_n(X_{n_k}, 2^{-j_k}).
 \end{aligned}$$

Puisque $j < (1 - p_0\eta\varepsilon_{j_k})j_k$ et d'après (1.14) et (1.8), il existe $K, K_1 > 0$ tels que

$$|S_1| \leq K B_{n_k}^{-\frac{3}{2\eta}} \sum_{j=0}^{J_k-1} j^{2+\alpha} 2^{(1-\alpha\eta)j} \leq K_1 B_{n_k}^{-\frac{3}{2\eta}} j_k^{3+\alpha} 2^{(1-\alpha\eta)(1-p_0\eta\varepsilon_{j_k})j_k}.$$

Puisque $j_k = 2^{\eta\varepsilon_{j_k}j_k}$ et que $n_k \in \mathcal{I}_{j_k}$, $2^{j_k} \leq 2B_{n_k}^{\frac{1}{\eta}}$, il existe $K'_1 > 0$ tel qu'on ait

$$|S_1| \leq K'_1 B_{n_k}^{-\frac{3}{2\eta}} B_{n_k}^{(3+\alpha)\varepsilon_{j_k}} B_{n_k}^{(\frac{1}{\eta}-\alpha)(1-p_0\eta\varepsilon_{j_k})} \leq K'_1 B_{n_k}^{-\frac{1}{2\eta}-\alpha-(p_0-3-\alpha-\alpha\eta p_0)\varepsilon_{j_k}}.$$

Par notre choix (1.26) de l'entier p_0 , $p_0 - 3 - \alpha - \alpha\eta p_0 > 2\alpha$. Cela nous donne

$$|S_1| \leq K_1 B_{n_k}^{-\frac{1}{2\eta}-\alpha(1+2\varepsilon_{j_k})}. \quad (1.37)$$

On majore à présent S_3 de la même manière que S_1 avec (1.25), (1.11) et (1.6). Ainsi

$$\begin{aligned}
 |S_3| &\leq \sum_{j=\tilde{J}_k+1}^{+\infty} \sum_{n \in A_j} C_n^{-\alpha} |d_n(B_{n_k}^{-\frac{1}{\eta}}, X_{n_k})| \\
 &\leq \sum_{j=\tilde{J}_k+1}^{+\infty} \sum_{n \in A_j} C_n^{-\alpha} B_{n_k}^{-\frac{1}{2\eta}} \min\{B_{n_k}^{-\frac{1}{\eta}} B_n^{\frac{1}{\eta}}, B_{n_k}^{\frac{1}{\eta}} B_n^{-\frac{1}{\eta}}\} T_n(X_{n_k}, B_{n_k}^{-\frac{1}{\eta}}) \\
 &\leq \sum_{j=\tilde{J}_k+1}^{+\infty} 2^{-\alpha\eta j(1-\varepsilon_j)} B_{n_k}^{-\frac{1}{2\eta}} \min\{B_{n_k}^{-\frac{1}{\eta}} 2^j, B_{n_k}^{\frac{1}{\eta}} 2^{-j+1}\} \sum_{n \in A_j} T_n(X_{n_k}, 2^{-j_k}).
 \end{aligned}$$

Puisque $j > \tilde{J}_k = \lfloor (1 + \gamma)j_k \rfloor$, le minimum ci-dessus est atteint à $B_{n_k}^{\frac{1}{\eta}} 2^{-j+1}$. Alors,

d'après le lemme (1.3.1), il existe une constante $K > 0$ telle que la sommes

$$\sum_{n \in A_j} T_n(X_n, 2^{-j_k})$$

est majorée Kj^2 quand $j \leq j_k/\eta$, et par $Kj^2 2^{\eta(j-j_k/\eta)}$ quand $j > j_k/\eta$. Ainsi par (1.8), il existe une constante $K_3 > 0$ (pouvant changer de valeur à chaque ligne mais ne dépend pas de k ou d'autres paramètres) telle que

$$\begin{aligned} |S_3| &\leq K_3 \left(\sum_{j=\lfloor (1+\gamma)j_k \rfloor}^{\lfloor j_k/\eta \rfloor} j^{2+\alpha} 2^{-\alpha\eta j} B_{n_k}^{-\frac{1}{2\eta}} B_{n_k}^{\frac{1}{\eta}} 2^{-j} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=\lfloor j_k/\eta \rfloor + 1}^{+\infty} j^{2+\alpha} 2^{-\alpha\eta j} B_{n_k}^{-\frac{1}{2\eta}} B_{n_k}^{\frac{1}{\eta}} 2^{-j} 2^{\eta(j-j_k/\eta)} \right) \\ &\leq K_3 B_{n_k}^{\frac{1}{2\eta}} \left(\sum_{j=\lfloor (1+\gamma)j_k \rfloor}^{\lfloor j_k/\eta \rfloor} j^{2+\alpha} 2^{-(1+\alpha\eta)j} + 2^{-j_k} \sum_{j=\lfloor j_k/\eta \rfloor + 1}^{+\infty} j^{2+\alpha} 2^{(\eta-1-\alpha\eta)j} \right). \end{aligned} \quad (1.38)$$

La première somme ci-dessus est majorée par

$$\sum_{j=\lfloor (1+\gamma)j_k \rfloor}^{\lfloor j_k/\eta \rfloor} j^{2+\alpha} 2^{-(1+\alpha\eta)j} \leq K_3 j_k^{2+\alpha} 2^{-(1+\alpha\eta)(1+\gamma)j_k}$$

et la seconde somme par

$$2^{-j_k} \sum_{j=\lfloor j_k/\eta \rfloor + 1}^{+\infty} j^{2+\alpha} 2^{(\eta-1-\alpha\eta)j} \leq K_3 2^{-j_k} j_k^{2+\alpha} 2^{(\eta-1-\alpha\eta)j_k/\eta} = K_3 j_k^{2+\alpha} 2^{-\frac{j_k}{\eta}(1+\alpha\eta)}.$$

Comme $B_{n_k}^{\frac{1}{\eta}} \sim 2^{j_k}$ et $j_k = 2^{j_k \eta \varepsilon_{j_k}} \sim B_{n_k}^{\varepsilon_{j_k}}$ et $1 + \gamma < 1/\eta$, on obtient que

$$\begin{aligned} |S_3| &\leq K_3 j_k^{2+\alpha} 2^{-(1+\alpha\eta)(1+\gamma)j_k} + K_3 j_k^{2+\alpha} 2^{-\frac{j_k}{\eta}(1+\alpha\eta)} \\ &\leq K_3 B_{n_k}^{-\frac{(1+\alpha\eta)(1+\gamma)}{\eta} + (2+\alpha)\varepsilon_{j_k}}. \end{aligned}$$

On remarque que $\frac{(1+\alpha\eta)(1+\gamma)}{\eta} - (2 + \alpha)\varepsilon_{j_k} > \frac{1}{2\eta} + \alpha(1 + 2\varepsilon_{j_k})$. Ainsi,

$$|S_3| \leq K_3 B_{n_k}^{-\frac{1}{2\eta} - \alpha(1+2\varepsilon_{j_k})}, \quad (1.39)$$

l'inégalité étant ici très généreuse (S_3 est vraiment beaucoup plus petit que le terme

de droite).

En comparant (1.36), (1.37) et (1.39), on trouve que

$$|W_F(B_{n_k}^{-\frac{1}{\eta}}, X_{n_k})| \geq K B_{n_k}^{-\frac{1}{2\eta} - \alpha(1+\varepsilon_{j_k})}. \quad (1.40)$$

Supposons que $F \in C^{\frac{\alpha}{\delta} + \varepsilon}(x_0)$, alors d'après le théorème 1.6.1, on en déduit qu'il existe $K' > 0$ tel que

$$\begin{aligned} |W_F(B_{n_k}^{-\frac{1}{\eta}}, X_{n_k})| &\leq K' B_{n_k}^{-\frac{1}{2\eta}} \left(B_{n_k}^{-\frac{1}{\eta}} + |x_0 - X_{n_k}| \right)^{\frac{\alpha}{\delta} + \varepsilon} \\ &\leq K' B_{n_k}^{-\frac{1}{2\eta}} \left(B_{n_k}^{-\frac{1}{\eta}} + B_{n_k}^{-\delta(1-\tilde{\varepsilon}_{j_k})} \right)^{\frac{\alpha}{\delta} + \varepsilon} \\ &\leq K' B_{n_k}^{-\frac{1}{2\eta}} B_{n_k}^{-\delta(1-\tilde{\varepsilon}_{j_k})(\frac{\alpha}{\delta} + \varepsilon)} = K' B_{n_k}^{-\frac{1}{2\eta} - (\alpha + \delta\varepsilon)(1-\tilde{\varepsilon}_{j_k})}, \end{aligned}$$

puisque $|x_0 - X_{n_k}| \leq B_{n_k}^{-\delta(1-\tilde{\varepsilon}_{j_k})}$. Ceci contredit (1.40) puisque la suite (ε_j) et $(\tilde{\varepsilon}_j)$ converge vers 0. Par conséquent, $F \notin C^{\frac{\alpha}{\delta} + \varepsilon}(x_0)$ pour tout $\varepsilon > 0$ ce qui prouve que $h_F(x_0) \leq \alpha/\delta$, i.e. la Proposition 1.6.1 est démontrée. \square

On peut remarquer que la preuve ne fonctionne pas pour $\delta > 1/\eta$, car on ne peut pas majorer $B_{n_k}^{-\frac{1}{\eta}} + B_{n_k}^{-\delta(1-\tilde{\varepsilon}_{j_k})}$ par $B_{n_k}^{-\delta(1-\tilde{\varepsilon}_{j_k})}$ dans la dernière série d'inégalités sur $|W_F(B_{n_k}^{-\frac{1}{\eta}}, X_{n_k})|$. On peut aussi remarquer que la preuve fonctionne pour $\alpha > 1$.

1.7 Calcul du spectre

Tout d'abord, on borne les exposants possibles pour F .

Lemme 1.7.1. *Presque sûrement, pour tout $x \in [0, 1]$, $\alpha\eta \leq h_F(x) \leq \alpha$.*

Démonstration. Par la Proposition 1.3.2, presque sûrement pour tout $x \in [0, 1]$, $h_F(x) \geq \alpha\eta$.

Puis le Théorème 1.4.1 nous garantit que $[0, 1] = G'_1$, et la Proposition 1.6.1 assure que tout $x \in G'_1$ vérifie que $h_F(x) \leq \alpha$. \square

Pour calculer le spectre multifractal presque sûr de F , dans un premier temps, on étudie les ensembles isohölderiens de F à l'aide des propositions 1.5.1 et 1.6.1.

On sait, par contraposition de ces deux propositions, que presque sûrement, pour tout $x \in [0, 1]$ et $\delta \in \left[1, \frac{1}{\eta}\right]$:

- Si $h_F(x) > \frac{\alpha}{\delta}$ alors $x \notin G'_\delta$.
- Si $h_F(x) < \frac{\alpha}{\delta}$ alors $x \in G_\delta$.

Cela implique que, presque sûrement pour tout $H \in [\alpha\eta, \alpha]$ (que l'on écrit $H = \alpha/\delta$ avec $\delta \in [1, 1/\eta]$),

$$\begin{aligned} h_F(x) = H &\implies \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \quad x \in G_{\frac{\alpha}{H+\varepsilon}} \setminus G'_{\frac{\alpha}{H-\varepsilon}} \\ &\implies x \in \bigcap_{\delta < \frac{\alpha}{H}} G_\delta \setminus \bigcup_{\delta > \frac{\alpha}{H}} G'_\delta. \end{aligned}$$

On en déduit que presque sûrement, pour tout $H \in [\alpha\eta, \alpha]$,

$$E_F(H) \subset \bigcap_{\delta < \frac{\alpha}{H}} G_\delta \setminus \bigcup_{\delta > \frac{\alpha}{H}} G'_\delta. \quad (1.41)$$

Toujours grâce aux propositions 1.5.1 et 1.6.1, on voit que presque sûrement pour tout $H \in [\alpha\eta, \alpha]$,

$$G'_{\frac{\alpha}{H}} \setminus \bigcup_{\delta > \frac{\alpha}{H}} G_\delta \subset E_F(H). \quad (1.42)$$

Grâce aux deux dernières inclusions, on majorera d'une part la dimension de Hausdorff de $E_F(H)$ en majorant la dimension des ensembles G_δ , et d'autre part on minorera la dimension de $E_F(H)$ en calculant la mesure α/H -dimensionnelle de $G'_{\alpha/H}$.

Proposition 1.7.1. *Avec probabilité 1, pour tout $\delta \in [1, 1/\eta]$, on a $\dim_H G_\delta \leq 1/\delta$ et $\mathcal{H}^{1/\delta}(G'_\delta) = +\infty$.*

Démonstration. En remarquant que pour tout $J \geq 0$, la famille $\{B(X_n, B_n^{-\delta})\}_{j \geq J, n \in A_j}$ forme un recouvrement de G_δ , on en déduit d'après (1.6) et (1.7) que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{2^{-\eta J}}^{1/\delta+\varepsilon}(G_\delta) &\leq \sum_{j \geq J} \sum_{n \in A_j} |B(X_n, B_n^{-\delta})|^{1/\delta+\varepsilon} \\ &\leq \sum_{j \geq J} \sum_{n \in A_j} |B_n^{-\delta}|^{1/\delta+\varepsilon} \\ &\leq \sum_{j \geq J} 2^{\eta j(1+\varepsilon_j)} 2^{-\eta j(1+\varepsilon/\delta)}. \end{aligned}$$

Or on sait que $2^{\eta j \varepsilon_j} = j$, donc

$$\mathcal{H}_{2^{-\eta J}}^{1/\delta+\varepsilon}(G_\delta) \leq \sum_{j \geq J} j 2^{-\frac{\eta \varepsilon}{\delta} j}$$

ce qui est le reste d'une série convergente. Ainsi $\mathcal{H}^{1/\delta+\varepsilon}(G_\delta) = 0$ et $\dim_H(G_\delta) \leq \frac{1}{\delta} + \varepsilon$.

Ceci étant valable pour tout $\varepsilon > 0$, $\dim_H(G_\delta) \leq \frac{1}{\delta}$.

Comme $G'_\delta \subset G_{\delta-\varepsilon}$ pour tous δ et ε , on trouve également que $\dim_H(G'_\delta) \leq \frac{1}{\delta}$.

Pour la minoration de la dimension de Hausdorff, on utilise un cas particulier du théorème d'ubiquité en [27, 48, 64].

Théorème 1.7.1. *Soient $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de nombres réels appartenant à $[0, 1]$ et $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite décroissante de réels strictement positifs. On définit pour tout $\delta \geq 1$, l'ensemble L_δ par*

$$L_\delta = \limsup_{n \rightarrow +\infty} B(x_n, \lambda_n^\delta) = \bigcap_{N \geq 1} \bigcup_{n \geq N} B(x_n, \lambda_n^\delta)$$

Si la mesure de Lebesgue $\mathcal{L}(L_1) = 1$ alors pour tout $\delta > 1$, $\mathcal{H}^{\frac{1}{\delta}}(L_\delta) = +\infty$ et $\dim_H(L_\delta) \geq \frac{1}{\delta}$.

Nous pouvons appliquer ce théorème à G'_1 , grâce au théorème 1.4.1 qui stipule que presque sûrement, $\mathcal{L}(G'_1) = 1$. On déduit que presque sûrement, pour tout $\delta \geq 1$, $\mathcal{H}^{\frac{1}{\delta}}(G'_\delta) = +\infty$ et $\dim_H(G'_\delta) \geq \frac{1}{\delta}$. \square

On peut maintenant calculer le spectre multifractal du processus F .

Pour tout $\delta \in \left[1, \frac{1}{\eta}\right]$ tel que $H < \frac{\alpha}{\delta}$, on a pour tout $\varepsilon \in]0, \frac{\alpha}{H}[$,

$$E_F(H) \subset G_{\frac{\alpha}{H}-\varepsilon}.$$

On en déduit que pour tout $\varepsilon \in]0, \frac{\alpha}{H}[$,

$$D_F(H) \leq \dim_H(G_{\frac{\alpha}{H}-\varepsilon}) \leq \frac{1}{\frac{\alpha}{H} - \varepsilon}, \quad (1.43)$$

et donc en faisant tendre ε vers 0, on trouve que $D_F(H) \leq H/\alpha$.

D'après (1.42), pour tout $\delta \in \left[1, \frac{1}{\eta}\right]$ tel que $H > \frac{\alpha}{\delta}$, on a

$$G'_{\frac{\alpha}{H}} \setminus \bigcup_{p \in \mathbb{N}^*} G_{\frac{\alpha}{H} + \frac{1}{p}} \subset E_F(H).$$

Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\dim_H\left(G_{\frac{\alpha}{H} + \frac{1}{p}}\right) \leq \frac{1}{\frac{\alpha}{H} + \frac{1}{p}}$ ainsi $\mathcal{H}^{\frac{H}{\alpha}}\left(G_{\frac{\alpha}{H} + \frac{1}{p}}\right) = 0$. Il en est de même

pour leur union dénombrable

$$\mathcal{H}_\alpha^{\frac{H}{\alpha}} \left(\bigcup_{p \in \mathbb{N}^*} G_{\frac{\alpha}{H} + \frac{1}{p}} \right) \leq \sum_{p \in \mathbb{N}^*} \mathcal{H}_\alpha^{\frac{H}{\alpha}} \left(G_{\frac{\alpha}{H} + \frac{1}{p}} \right) = 0.$$

On a démontré dans la proposition 1.7.1 que $\mathcal{H}_\alpha^{\frac{H}{\alpha}} \left(G'_{\frac{\alpha}{H}} \right) = +\infty$, et donc

$$\mathcal{H}_\alpha^{\frac{H}{\alpha}}(E_F(H)) \geq \mathcal{H}_\alpha^{\frac{H}{\alpha}} \left(G'_{\frac{\alpha}{H}} \right) - \mathcal{H}_\alpha^{\frac{H}{\alpha}} \left(\bigcup_{p \in \mathbb{N}^*} G_{\frac{\alpha}{H} + \frac{1}{p}} \right) = +\infty.$$

En particulier, $D_F(H) = \dim_H E_F(H) \geq H/\alpha$.

On conclut que presque sûrement, pour tout $H \in [\alpha\eta, \alpha]$, $D_F(H) = H/\alpha$.

Comme on a vu auparavant que $D_F(H) = -\infty$ pour $H \notin [\alpha\eta, \alpha]$, la preuve du résultat principal de ce chapitre est terminée.

1.8 Module de continuité

Dans la partie 1.5, on a montré par deux méthodes que l'application $h \mapsto |h|^{\alpha\eta} |\log_2(h)|^{2+\alpha}$ est un module de continuité uniforme de F . Le point (i) du théorème 1.1.2 est démontré. Afin de démontrer les points (ii) et (iii), nous utilisons le théorème de Jaffard-Meyer (proposition 1.2 dans [74]).

Théorème 1.8.1. *Soit $f \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R})$, $x_0 \in \mathbb{R}$ et $H > 0$.*

Si la fonction f possède un module de continuité local θ en x_0 , alors il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall (s, t) \in U \quad , \quad |W_f(s, t)| \leq K s^{\frac{1}{2}} (\theta(s) + \theta(|x_0 - t|)). \quad (1.44)$$

Réciproquement, si $f \in C^\varepsilon(\mathbb{R})$ pour un certain $\varepsilon > 0$, et si (1.44) est vraie, alors il existe des constantes $\eta, C > 0$ et un polynôme P tel que si on pose $j_0 = \lfloor \log_2 |x - x_0| \rfloor$, alors

$$\forall x \text{ tel que } |x - x_0| \leq \eta, \quad |f(x) - P(x - x_0)| \leq C \inf_{j \geq j_0} ((j - j_0)\theta(|x - x_0|) + 2^{-j\varepsilon}). \quad (1.45)$$

Remarquons que si $\theta(h) = |h|^\beta |\log |h||^\gamma$ avec $\varepsilon < \beta < 1$, l'infimum du côté droit

de l'inégalité (1.45) est à peu près atteint at $j = j_0\beta/\varepsilon$, et (1.45) se réécrit alors en

$$|f(x) - P(x - x_0)| \leq C|x - x_0|^\beta |\log |x - x_0||^{1+\gamma}.$$

Soit $x_0 \in G'_1$. Si on revient à la proposition 1.6.1, à la fin de la preuve, il est montré

$$|W_F(B_{n_k}^{-\frac{1}{\eta}}, X_{n_k})| \geq K B_{n_k}^{-\frac{1}{2\eta} - \alpha(1+\varepsilon_{j_k})}$$

avec $2^{\eta(j_k-1)} < B_{n_k} \leq 2^{\eta j_k}$ et $|x_0 - X_{n_k}| \leq B_{n_k}^{-(1-\tilde{\varepsilon}_{j_k})}$. On remarque qu'il existe $C > 0$ tel que pour tout entier k suffisamment grand, on a

$$\begin{aligned} B_{n_k}^{-\varepsilon_{j_k}} &\geq j_k^{-1} \geq |\log_2 j_k|^{-1} \geq C |\log |x_0 - X_{n_k}||, \\ B_{n_k}^{-\tilde{\varepsilon}_{j_k}} &\geq |\log_2 j_k|^{-1} \geq C |\log |x_0 - X_{n_k}||, \\ B_{n_k}^{-1} &\geq C |x_0 - X_{n_k}| |\log |x_0 - X_{n_k}||. \end{aligned}$$

On en déduit qu'il existe une autre constante $C > 0$ qui dépend seulement de η telle que

$$\begin{aligned} |W_F(B_{n_k}^{-\frac{1}{\eta}}, X_{n_k})| &\geq K B_{n_k}^{-\frac{1}{2\eta} - \alpha(1+\varepsilon_{j_k})} \geq K B_{n_k}^{-\frac{1}{2\eta} - \alpha} |\log_2 |x_0 - X_{n_k}||^\alpha \\ &\geq K C B_{n_k}^{-\frac{1}{2\eta}} |x_0 - X_{n_k}|^\alpha |\log_2 |x_0 - X_{n_k}||^{2\alpha} \\ &\geq \frac{K C}{2} B_{n_k}^{-\frac{1}{2\eta}} (\theta(|x_0 - X_{n_k}|) + \theta(B_{n_k}^{-\frac{1}{\eta}})), \end{aligned}$$

où $\theta(h) = |h|^\alpha |\log |h||^{2\alpha}$ et parce que $B_{n_k}^{-\frac{1}{\eta}} \ll |x_0 - X_{n_k}|$.

Par le théorème 1.8.1, cela démontre que presque sûrement, pour tout $x \in G'_1$, le module de continuité local de F en x est nécessairement plus grand que $|h|^\alpha |\log |h||^{2\alpha}$.

On introduit à présent l'ensemble

$$\tilde{G}_1 = \limsup_{j \rightarrow +\infty} \bigcup_{n \in A_j} B(X_n, B_n^{-(1+3\varepsilon_j)}).$$

D'après le lemme 1.2.1, presque sûrement,

$$\sum_{n \in A_j} |B(X_n, B_n^{-(1+3\varepsilon_j)})| \leq 2^{\eta j(1+\varepsilon_j)} 2^{-\eta(j-1)(1+3\varepsilon_j)} = j^{-2}.$$

Pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, la mesure de Lebesgue de $\bigcup_{n \in A_j} B(X_n, B_n^{-(1+3\varepsilon_j)})$ est majorée par j^{-2} , or $\sum_{j \in \mathbb{N}^*} j^{-2} < +\infty$ par le lemme de Borel-Cantelli, la mesure de Lebesgue de \tilde{G}_1

est nulle.

En adaptant la preuve de la proposition 1.5.1, il est possible de montrer que pour tout $x_0 \notin \tilde{G}_1$, il existe $K_{x_0}, r > 0$ tel que pour tout $x \in B(x_0, r)$,

$$|F(x) - F(x_0)| \leq K_{x_0} |x - x_0|^\alpha |\log_2 |x - x_0||^{2+\alpha}.$$

La modification dans la preuve du théorème consiste à remplacer δ par $1+3\varepsilon_j$ et adapter les calculs en conséquence. En conclusion, si on considère l'ensemble $G = G'_1 \setminus \tilde{G}_1$ de mesure pleine puisque $\mathcal{L}(G'_1) = 1$ et $\mathcal{L}(\tilde{G}_1) = 0$, on obtient que, presque sûrement, pour tout point $x_0 \in G$, le module de continuité local de F en x_0 vérifie que

$$|h|^\alpha |\log_2 |h||^{2\alpha} \leq \theta_{x_0}(h) \leq |h|^\alpha |\log_2 |h||^{2+\alpha}.$$

Ceci démontre les points (ii) et (iii) du théorème 1.1.2.

1.9 Perspectives

Une première perspective consiste à étendre nos résultats aux dimensions supérieures. Modulo des difficultés techniques, il semble raisonnable de croire que nos résultats se généraliseront.

Une autre perspective serait de traiter le cas des pulses anisotropes (i.e. en imposant des facteurs de dilatation différents dans plusieurs directions) et d'étudier la régularité anisotrope de leur somme. De telles études ont été menées dans plusieurs cas, voir [3, 23, 24]. Cela permettrait par exemple de modéliser et d'étudier des textures anisotropes.

Nous nous sommes contentés ici de traiter le cas où F est presque sûrement continue, mais pour d'autres choix des paramètres α et η on peut obtenir des trajectoires non localement bornées. Dans ce cas, il faut utiliser des exposant de régularité adaptés, c'est l'objet du chapitre suivant.

Enfin, il serait intéressant de décrire plus finement les singularités ponctuelles présentes dans le processus aléatoire F . En effet, il est connu qu'il existe pour un même exposant de Hölder des distinctions possibles entre deux singularités ponctuelles. L'exemple typique est celui des "cusp" et des "chirps". On définit les "chirps" par la

fonction $g_{\alpha,\beta}$ suivante :

$$g_{\alpha,\beta}(x) = |x - x_0|^\alpha \sin\left(\frac{1}{|x - x_0|^\beta}\right), \quad x \in \mathbb{R}$$

et les "cusp" sont des fonctions "chirps" avec $h_\alpha(x) = |x - x_0|^\alpha$, $x \in \mathbb{R}$. On peut remarquer pour $\beta = 0$ que $g_{\alpha,0}(x) = h_\alpha(x) \sin(1)$, $x \in \mathbb{R}$. Ces deux fonctions ont la particularité d'avoir le même exposant de Hölder en x_0 avec $h_{g_{\alpha,\beta}}(x_0) = \alpha$. Cependant, le coefficient β qu'on appelle exposant d'oscillation permet de mesurer la vitesse des oscillations au voisinage de x_0 .

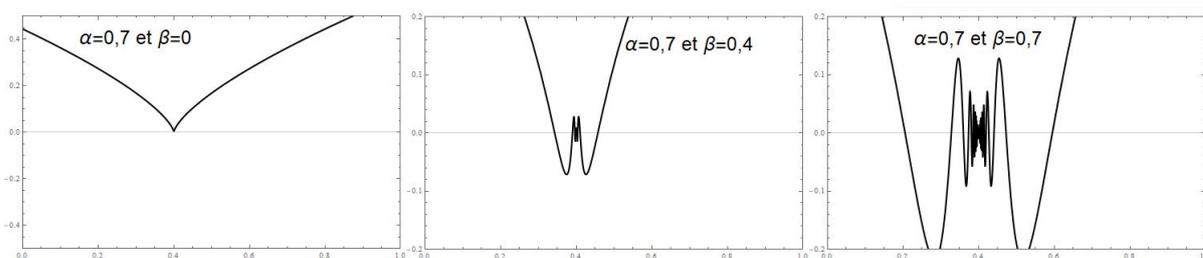


Figure 1.11: Représentations de trois singularités ponctuelles en $x_0 = 0,4$ d'exposant de Hölder $0,7$ mais trois exposants d'oscillation différents $\beta = 0$, $\beta = 0,4$ et $\beta = 0,7$

Nous pouvons rencontrer des singularités oscillantes sur des fonctions comme la fonction de Riemann définie par :

$$R(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{\sin(\pi n^2 x)}{n^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

En effet, au voisinage du point $x_0 = 1$, on a une singularité oscillante de type "chirp" :

$$R(1+x) \sim -\frac{x}{2} + \sum_{k \in \mathbb{N}^*} |x|^{k+\frac{1}{2}} g_k\left(\frac{1}{x}\right)$$

où g_k est essentiellement une primitive à l'ordre k de la fonction de Riemann [73].

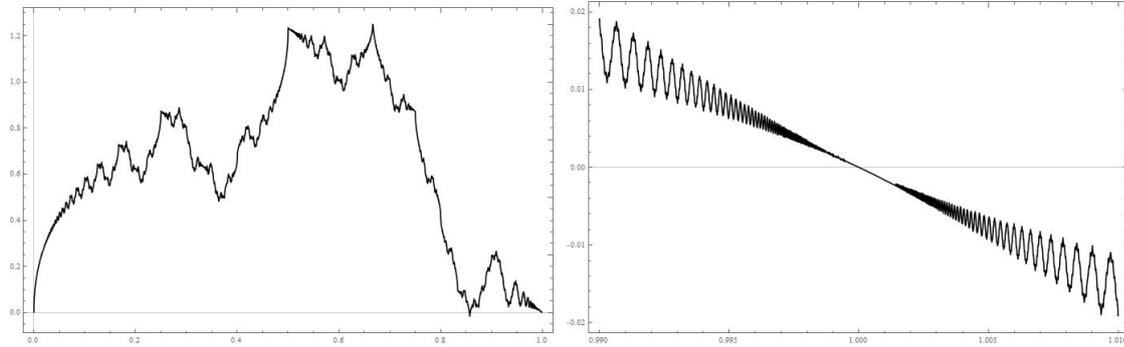


Figure 1.12: Représentation de la fonction de Riemann et un zoom autour du "chirp" au point $x_0 = 1$

Pour définir la notion d'exposant d'oscillation de façon satisfaisante, il faut introduire la notion d'intégrée fractionnaire.

Définition 1.9.1. Soient $f \in L^2_{loc}(\mathbb{R})$ et ϕ une fonction de classe C^∞ à support compact, et telle que $\phi(x_0) = 1$. Si f est localement bornée, son intégrée fractionnaire locale d'ordre s est

$$f^{(-s)} = (Id - \Delta)^{-\frac{s}{2}}(\phi \circ f).$$

L'exposant de Hölder de $f^{(-s)}$ en x_0 est noté $h_f^s(x_0) = h_{f^{(-s)}}(x_0)$.

Cette définition de $h_f^s(x_0)$ ne dépend pas de la fonction ϕ utilisée [79]. De plus, si s est un entier, l'exposant de Hölder de $f^{(-s)}$ et de sa primitive d'ordre s coïncident.

Définition 1.9.2. Soient $f \in L^2_{loc}(\mathbb{R})$ et $x_0 \in \mathbb{R}$, l'exposant d'oscillation de f en x_0 est défini par

$$\beta_f(x_0) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial s} (h_{f^{(-s)}}(x_0)) - 1.$$

On peut ainsi définir de manière naturelle une notion de spectre d'oscillation.

Définition 1.9.3 (Spectre d'oscillation). Soit $f \in L^2_{loc}(\mathbb{R})$. Le spectre multifractal d'oscillation de f est l'application :

$$d_f : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{-\infty\} \\ H \longmapsto \dim_H(\mathcal{E}_f(H)) \end{cases} \quad \text{où } \mathcal{E}_f(H) = \{x \in \mathbb{R} : \beta_f(x) = H\}$$

La fonction F ne semble pas exhiber de comportement particulièrement oscillatoire, comme c'es le cas pour la fonction de Riemann représentée ci-dessus. Cela reste à démontrer.

Enfin, comme la série F est lacunaire, il pourrait être intéressant d'étudier l'exposant de lacunarité en x_0 de f défini de la façon suivante.

Définition 1.9.4 (Exposant de lacunarité). *Soient $f \in L_{loc}^p(\mathbb{R})$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. L'exposant de lacunarité de f en x_0 est défini par*

$$\mathcal{L}_f(x_0) = \frac{\partial}{\partial q} \left(h_f^{1/q}(x_0) \right)_{q=0}.$$

Définition 1.9.5 (Spectre de lacunarité). *Soit $f \in L_{loc}^p(\mathbb{R})$. Le spectre multifractal de lacunarité de f est l'application :*

$$L_f : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{-\infty\} \\ H \longmapsto \dim_H(\tilde{E}_f(H)) \end{cases} \quad \text{où } \tilde{E}_f(H) = \{x \in \mathbb{R} : \beta_f(x) = H\}$$

L'intérêt principal d'étudier les différents exposants de régularité est de procurer davantage d'informations sur le comportement local des fonctions et trajectoires, mais aussi sur le comportement de signaux ou images "réelles" fournies par les applications.

Chapitre 2

Caractérisation par coefficients continus d'ondelettes des p -exposants

Déterminer le spectre multifractal d'une fonction ou d'un processus n'est pas une chose évidente et facile en général comme il a été montré lors du Chapitre 1. On a vu que la théorie des ondelettes est un outil central et pratique pour calculer les exposants de régularité ponctuelle [67]. En effet, l'exposant ponctuel de Hölder (définition 0.3.1) et les p -exposants (définition 0.3.2) possèdent une caractérisation par les coefficients discrets d'ondelettes qui est rappelée dans la prochaine partie.

2.1 Caractérisations des exposants de régularité par les coefficients discrets d'ondelettes

Cette section a pour objectif d'illustrer la caractérisation des exposants de régularité à l'aide des coefficients discrets d'ondelettes. Dans les articles de S. Jaffard, P. Abry, C. Melot portant sur les coefficients dominants d'ondelettes et p -leaders, ils ont démontré des résultats les reliant aux exposants de Hölder et p -exposants [61, 67–69, 71, 75, 79].

Soit $\{\varphi, \psi^{(i)}\}_{i \in \{1, \dots, 2^d - 1\}}$ une famille de fonctions oscillantes dans la classe de Schwartz $S(\mathbb{R}^d)$, elles sont appelées "ondelettes mères". Supposons que la famille de

fonctions est choisie de manière à ce que la famille

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi(x - k) \\ \psi_{j,k}^{(i)} = 2^{\frac{dj}{2}} \psi^{(i)}(2^j x - k) \end{array} \quad \begin{array}{l} k \in \mathbb{Z}^d \\ \text{pour } (j, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}^d \text{ et } i \in \{1, \dots, 2^d - 1\} \end{array} \right.$$

forme une base orthonormale de $L^2(\mathbb{R}^d)$. Les coefficients discrets d'ondelettes d'une fonction $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ sont définis pour tout $i \in \{1, \dots, 2^d - 1\}$ par

$$\forall k \in \mathbb{Z}^d, c_k = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \varphi(x - k) dx$$

et

$$\forall (j, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}^d, c_{j,k}^{(i)} = 2^{\frac{dj}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \psi_{j,k}^{(i)}(x) dx = 2^{dj} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \psi^{(i)}(2^j x - k) dx.$$

Plusieurs auteurs ont étudié en quel sens la formule de reconstruction suivante, qui est a priori valable dans $L^2(\mathbb{R}^d)$, converge [42, 71, 84, 89] :

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} c_k \varphi(x - k) + \sum_{(i,j,k) \in \{1, \dots, 2^d - 1\} \times \mathbb{N} \times \mathbb{Z}^d} c_{j,k}^{(i)} \psi^{(i)}(2^j x - k). \quad (2.1)$$

Les coefficients discrets d'ondelettes permettent d'obtenir une caractérisation de la régularité uniforme des fonctions avec le résultat suivant dont la démonstration est dans [89].

Proposition 2.1.1. *Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^* \setminus \mathbb{N}$. Une fonction $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ appartient à $C^\alpha(\mathbb{R}^d)$ si et seulement si il existe une constante $C > 0$ telle que pour tous $(j, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}^d$, $|c_{j,k}^{(i)}| \leq C 2^{-\alpha j}$ et $|c_k| \leq C$.*

Pour tout $(j, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}^d$ avec $k = (k_1, \dots, k_d)$, on note $\lambda_{j,k}$ le cube dyadique défini par

$$\lambda_{j,k} = \prod_{i=1}^d [k_i 2^{-j}, (k_i + 1) 2^{-j}].$$

On utilise la notation $3\lambda_{j,k}$ pour l'union de $\lambda_{j,k}$ et des $3^d - 1$ cubes adjacents à $\lambda_{j,k}$,

$$3\lambda_{j,k} = \prod_{i=1}^d [(k_i - 1) 2^{-j}, (k_i + 2) 2^{-j}].$$

Enfin pour tout $j \in \mathbb{N}$ et $x_0 \in \mathbb{R}^d$, on note $\lambda_j(x_0)$ l'unique cube dyadique $\lambda_{j,k}$ tel que $x_0 \in \lambda_{j,k}$. Cela permet de définir la notion de coefficients discrets d'ondelettes

dominants ou leaders de la manière suivante.

Définition 2.1.1 (Coefficients dominants d'ondelettes). *Soit $f \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^d)$. Les coefficients dominants ou leaders d'ondelettes de f sont définis par*

$$\forall (j, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}^d, d_{j,k} = \sup_{i \in \{1, \dots, 2^d - 1\}, \lambda_{j',k'} \subset 3\lambda_{j,k}} \{|c_{j',k'}^{(i)}|\}.$$

On note

$$\forall j \in \mathbb{N}, d_j(x_0) = \sup_{i \in \{1, \dots, 2^d - 1\}, \lambda_{j',k'} \subset 3\lambda_j(x_0)} \{|c_{j',k'}^{(i)}|\}.$$

L'intérêt des leaders par rapport aux coefficients d'ondelettes est que la suite $(d_j(x_0))_{j \in \mathbb{N}}$ est décroissante, c'est-à-dire que pour tout $j \in \mathbb{N}$, $d_{j+1}(x_0) \leq d_j(x_0)$. De plus, avec les résultats de S. Jaffard [67], il est possible de relier les leaders et les exposants de Hölder avec le théorème suivant.

Théorème 2.1.1. *Soient $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$, $\alpha > 0$ et $x_0 \in \mathbb{R}^d$. Si $f \in C^\alpha(x_0)$, il existe $C > 0$ tel que*

$$\forall j \in \mathbb{N}, d_j(x_0) \leq C2^{-\alpha j}. \tag{2.2}$$

Réciproquement, si (2.2) est satisfaite avec $\alpha \notin \mathbb{N}$ et s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $f \in C^\varepsilon(\mathbb{R}^d)$, alors $f \in C^\alpha_{\log}(x_0)$, c'est-à-dire qu'il existe $K, \beta > 0$ et un polynôme P_{x_0} de degré inférieur à α tels que

$$\exists r \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in B(x_0, r), |f(x) - P_{x_0}(x - x_0)| \leq K |\log |x - x_0||^\beta |x - x_0|^\alpha.$$

Corollaire 2.1.1. *Soit $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$. S'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $f \in C^\varepsilon(\mathbb{R}^d)$, alors*

$$h_f(x_0) = \liminf_{j \rightarrow +\infty} \frac{\log(d_j(x_0))}{\log(2^{-j})}.$$

Malgré l'utilité des leaders pour trouver les exposants de Hölder des fonctions localement bornées, ils ne sont pas définis lorsque les fonctions appartiennent seulement à des espaces $L^p_{loc}(\mathbb{R}^d)$ avec $p \in [1, +\infty[$. Ceci pose un problème dans les applications, puisqu'il a été montré qu'il existe des données réelles qui ne sont pas modélisables par des fonctions localement bornées [72] et dont nous verrons au Chapitre 4 des exemples. Calderón et Zygmund ont ainsi introduit [36] une nouvelle notion de régularité ponctuelle pour les fonctions qui ne sont pas localement bornées mais qui appartiennent seulement à des espaces $L^p(\mathbb{R}^d)$ avec $p > 1$ pour obtenir des résultats de régularité ponctuelle de solutions d'équations aux dérivées partielle. Ceci permettra dans cette

thèse de considérer une plus large classe de sommes de pulses aléatoires par rapport à ce qui a été effectué lors du Chapitre 1 avec un paramètre $\alpha < 0$. Il existe aussi d'autres fonctions mathématiques multifractales qui ne sont pas localement bornées comme la fonction de Brjuno. Elle a été introduite en 1971 par A. Brjuno pour donner une condition pour que des systèmes dynamiques holomorphes soient linéarisables en 0. Elle est définie par

$$B(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} xA(x)\dots A^{n-1}(x) \log \left(\frac{1}{A^n(x)} \right),$$

où A est l'application de Gauss qui à un irrationnel x de $[0, 1]$ lui associe la partie fractionnaire de $1/x$. En 1995, J-C. Yoccoz montre que $B(\alpha) < +\infty$ si et seulement si pour $\alpha \in [0, 1]$ la fonction $P_\alpha : z \mapsto e^{2i\pi\alpha}z(1+z)$ $z \in \mathbb{C}$ est linéarisable. De plus Marmi, Moussa et Yoccoz ont montré que, si elle n'est pas localement bornée, la fonction de Brjuno appartient à L^p pour tous les $p < +\infty$ (et même à l'espace BMO). L'analyse multifractale de cette fonction (en utilisant les p -exposants) a été effectuée par S. Jaffard et B. Martin, cf. [70]. On notera qu'une technique de transformée continue en ondelettes y est déjà utilisée pour minorer les p -exposants. Une autre fonction multifractale dont les trajectoires ne sont pas localement bornées est la série de Riemann définie pour $s < 1$ par

$$R_s(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{\sin(\pi n^2 x)}{n^s}, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{2.3}$$

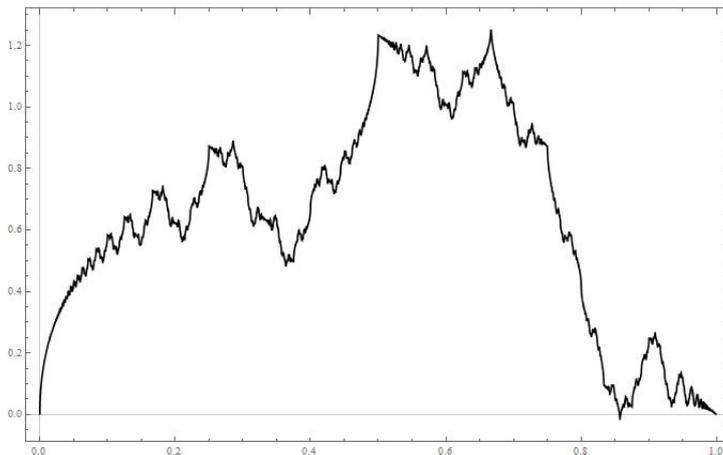


Figure 2.1: Représentation de la fonction de Riemann R_2 sur l'intervalle $[0, 1]$.

Définition 2.1.2 (p -exposant et p -spectre). Soient $p \in [1, +\infty[$, $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^d)$ et

$\alpha > -\frac{d}{p}$. Une fonction f appartient à $T_\alpha^p(x_0)$ lorsqu'il existe deux constantes $C, R \in \mathbb{R}_+^*$ et un polynôme P_{x_0} de degré inférieur à α tels que

$$\forall r \in]0, R[, \left(\frac{1}{r^d} \int_{B(x_0, r)} |f(x) - P_{x_0}(x - x_0)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq Cr^\alpha. \quad (2.4)$$

On dira que f appartient à $T_{\alpha, \log}^p(x_0)$ lorsqu'il existe $A, R > 0$ tels que

$$\forall r \in]0, R[, \left(\frac{1}{r^d} \int_{B(x_0, r)} |f(x) - P_{x_0}(x - x_0)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq C |\log |r||^A r^\alpha.$$

Alors :

- Le p -exposant de f en x_0 est $h_f^p(x_0) = \sup\{\alpha : f \in T_\alpha^p(x_0)\}$;
- L'ensemble p -isohöldérien est donné pour tout $h \geq 0$ par

$$E_f^{(p)}(h) = \{x \in \mathbb{R}^d : h_f^{(p)}(x) = h\};$$

- Le p -spectre multifractal est l'application $D_f^{(p)} : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ définie par

$$D_f^{(p)}(h) = \dim_H(E_f^{(p)}(h)), \quad h \in \mathbb{R}_+^*.$$

Le polynôme P_{x_0} est unique et on remarquera que, si $\alpha \leq 0$, le polynôme $P_{x_0}(x - x_0)$ est nul. La condition pour qu'une fonction appartienne à $T_\alpha^p(x_0)$ s'étend à des $0 < p < 1$ (les espaces L^p sont alors remplacés par les espaces de Hardy réels H^p). Comme pour les fonctions localement bornées qui ont leur exposant de Hölder relié aux coefficients dominants d'ondelettes, les fonctions $L_{loc}^p(\mathbb{R}^d)$ auront leur p -exposant relié à d'autres coefficients [71, 75, 79].

Définition 2.1.3 (Fonction 2-locale). Soit $f \in L_{loc}^p(\mathbb{R}^d)$. Les fonctions 2-locales en $x_0 \in \mathbb{R}^d$ à l'échelle $j \in \mathbb{N}$, notées $S_f(j, x_0)$, sont définies par

$$S_f(j, x_0)(x) = \left(\sum_{i \in \{1, \dots, 2^d - 1\}, \lambda_{j', k'} < 3\lambda_j(x_0)} |c_{j', k'}^{(i)}|^2 \mathbf{1}_{\lambda_{j', k'}}(x) \right)^{1/2}, \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Le résultat de S. Jaffard [68] permet de caractériser les p -exposants grâce à ces fonctions 2-locales, ce qui permet de légèrement améliorer le résultat obtenu par C. Melot et S. Jaffard dans [71].

Théorème 2.1.2. *Soient $p \geq 1$, $\alpha > -1/p$ avec $\alpha \notin \mathbb{N}$ et $x_0 \in \mathbb{R}^d$. La fonction $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ appartient à $T_\alpha^p(x_0)$ si et seulement s'il existe $C > 0$ tel que pour tout $j \in \mathbb{N}$,*

$$\|S_f(j, x_0)\|_{L^p} \leq C2^{j(\alpha+d/p)}.$$

Ce résultat n'est pas performant en pratique par rapport à la caractérisation par les leaders vue précédemment. En effet, il est difficile de calculer même numériquement les quantités $S_f(j, x_0)$. Ainsi, P. Abry, S. Jaffard, R. Leonarduzzi, S. Seuret et H. Wendt ont introduit dans [6] la notion de p -leaders afin d'avoir des coefficients qui relient les ondelettes et p -exposants, de façon à pouvoir les estimer plus facilement par le calcul théorique et numérique.

Définition 2.1.4 (p -leaders). *Soit $f \in L_{loc}^p(\mathbb{R}^d)$. Les p -leaders sont définis par*

$$\forall (j, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}^d, l^{(p)}(j, k) = \left(\sum_{i \in \{1, \dots, 2^d - 1\}, \lambda_{j', k'} \subset 3\lambda_{j, k}} |c_{j', k'}^{(i)}|^p 2^{-d(j'-j)} \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (2.5)$$

On note

$$\forall j \in \mathbb{N}, l_j^{(p)}(x_0) = \left(\sum_{i \in \{1, \dots, 2^d - 1\}, \lambda_{j', k'} \subset 3\lambda_j(x_0)} |c_{j', k'}^{(i)}|^p 2^{-d(j'-j)} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Le résultat qui permet de motiver les propositions à partir des p -leaders numériquement calculables a été montré en [6, 64].

Théorème 2.1.3. *Soient $x_0 \in \mathbb{R}^d$ et $f \in L_{loc}^p(\mathbb{R}^d)$. Si*

$$\liminf_{j \rightarrow +\infty} \frac{\left| \log \sum_{i \in \{1, \dots, 2^d - 1\}, k \in \mathbb{Z}^d} |c_{j, k}^{(i)}|^p \right|}{\log(2^{-j})} > 0,$$

alors

$$h_f^p(x_0) = \liminf_{j \rightarrow +\infty} \frac{|\log(l_{\lambda_j(x_0)}^{(p)})|}{\log(2^{-j})}.$$

Il existe des extensions récentes introduites par L. Loosveldt dans sa thèse [81], où il généralise la condition d'appartenir à $T_\alpha^p(x_0)$ à des modules de continuité généraux à la place de la puissance.

2.2 Motivations

Dans la partie précédente, nous avons rappelé les caractérisations des exposants de Hölder et des p -exposants par les coefficients discrets d'ondelettes $c_{j,k}^{(i)}$. Cependant, il existe des modèles de processus autosimilaires homogènes, comme les sommes de pulses aléatoires du Chapitre 1, où il est plus facile d'estimer certaines transformées en ondelettes continues que celles sur une base orthonormée. Ainsi, le but de ce chapitre est de trouver une caractérisation des exposants de Hölder et p -exposant par les transformées en ondelettes continues. Pour les espaces $C^\alpha(x_0)$ et les exposants de Hölder, il existe déjà des caractérisations dans [69] tandis que pour les espaces $T_\alpha^p(x_0)$ et les p -exposants une telle caractérisation n'était pas encore démontrée.

Dans le cas de la série de Riemann (2.3) avec $s = 2$, S. Jaffard a déjà étudié les exposants de Hölder et obtenu le spectre multifractal à l'aide des transformées continues en ondelettes [62],

$$D_{R_2}(h) = \begin{cases} 4h - 2 & \text{si } h \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] \\ 0 & \text{si } h = \frac{3}{2} \\ -\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

En revanche, le seul résultat connu sur le p -spectre de la fonction de Riemann est celui de S. Seuret et A. Ubis [99] qui dit que pour $s \in]1/2, 1]$, le 2-spectre est donné par

$$D_{R_2}^{(2)}(h) = \begin{cases} 4h + 2 - 2s & \text{si } h \in [0, \frac{s}{2} - \frac{1}{4}] \\ -\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Mais pour la fonction de Brjuno n'appartenant pas à $L_{loc}^\infty(\mathbb{R})$, S. Jaffard et B. Martin [70] ont réussi à obtenir le p -spectre pour toutes les valeurs de p . Il y a peu de résultats sur le p -spectre des processus auto-similaires à plusieurs variables. La question s'est posée pour les processus de Rosenblatt et plus généralement de Hermite [13]. Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et $H \in]1 - 1/(2N), 1[$ fixés. Soit $B = \{B(x)\}_{x \in \mathbb{R}}$ un mouvement brownien. On définit le processus de Hermite $X^{N,H} = \{X^{N,H}(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ par la formule

$$X^{N,H}(t) = \int_{\mathbb{R}^N}' \left(\int_0^t \prod_{p=1}^N (s - x_p)_+^{H-3/2} ds \right) dB(x_1) \dots dB(x_N), \quad \forall t \in \mathbb{R}_+.$$

où le symbole $\int_{\mathbb{R}^N}'$ représente l'intégration sur \mathbb{R}^N avec les diagonales $\{x_i = x_j\}$, $i \neq j$

exclues. On prend la convention que pour tout $(x, \alpha) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$x_+^\alpha = \begin{cases} x^\alpha & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le cas $X^{1,H}$ est le mouvement brownien fractionnaire d'indice H , $X^{2,H}$ est le processus de Rosenblatt non gaussien.

De nombreux articles traitent de la trajectoire des processus de Rosenblatt et de ses propriétés de stationnarité et auto-similarité. De plus, un calcul des dimensions fractales (dimension de Hausdorff, dimension packing, dimension intermédiaire inférieur), a été récemment effectué dans [44]. La question de savoir si les trajectoires sont localement bornées a été traitée par A. Ayache [13] en 2019. Pour cela, A. Ayache exploite le calcul du module de continuité déjà obtenu dans [104] en 2007, ce qui va lui permettre de déterminer l'exposant de Hölder en tout point et de montrer qu'il est constant.

Une autre motivation est l'étude des séries de Davenport définies pour une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $D(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \{nx\}$ où $\{x\} = x - [x] - 1/2$ si $x \notin \mathbb{Z}$ et $\{x\} = 0$ sinon. Dans le cas où les termes $a_n = 1/n^\beta$ décroissent en $n^{-\beta}$ avec $\beta > 2$, S. Jaffard [66] démontre que si s est un réel dans $]0, 1[$ alors la dérivée fractionnaire d'ordre s appartient à $L^p(\mathbb{R})$ dès que $p < 1/s$ de manière optimale pour p . En effet, il existe des exemples où D n'est pas dans $L^p(\mathbb{R})$ si $p > 1/s$. Ces dérivées fractionnaires sont un exemple intéressant de fonctions non localement bornées dont il reste ouvert d'étudier les p -exposants et d'en faire l'analyse multifractale.

Un autre modèle souvent utilisé en mathématique financière est les processus de Lévy, des processus à sauts dont les trajectoires sont localement bornées et dont l'analyse multifractale a été effectuée dans [63]. P. Balança a montré la présence de singularités oscillantes pour certains processus de Lévy [15] et s'est intéressé aux intégrées fractionnaires de processus de Lévy dont il a effectué l'analyse multifractale. Ainsi une question naturelle est celle de la nature des singularités pour des dérivées fractionnaires sachant que N. Jacob et R. Schilling [90, 98] ont déterminé les espaces de Besov auxquels certains processus de Lévy peuvent appartenir, ce qui donne donc les p -exposants qui conviennent pour l'étude multifractale de leurs dérivées fractionnaires. Enfin, d'autres études complémentaires sur les dérivées fractionnaires et dérivées au sens des distributions des Lévy ont été menées en 2017 et 2021 dans plusieurs autres articles [14, 52, 53].

Dans le livre de M.Unser et P.D. Tafti [103], nous pouvons retrouver de nombreux

autres exemples de processus à trajectoires non-localement bornées qui y sont étudiés. Par exemple, une grande partie du livre porte sur les "Lévy white noises" (dérivées au sens des distributions des Lévy) et d'autres processus qui s'écrivent comme des opérateurs pseudo-différentiels appliqués au "Lévy white noise". Enfin les sommes de pulses aléatoires rentrent dans la catégorie des "sparse processes" traitée dans l'ouvrage. On peut retrouver d'autres exemples de tels processus dans le livre de M. Unser et P.D. Tafti [103]. Enfin, nous verrons au Chapitre 4 des exemples de signaux naturels dont les trajectoires ne sont pas localement bornées.

Dans le cas des sommes de pulses aléatoires définies en (1.1.2) au Chapitre 1, il a été traité le cas où α est positif afin d'avoir des trajectoires localement bornées. On représente sur la Figure 2.2 un exemple de trajectoire de sommes de pulses aléatoires.

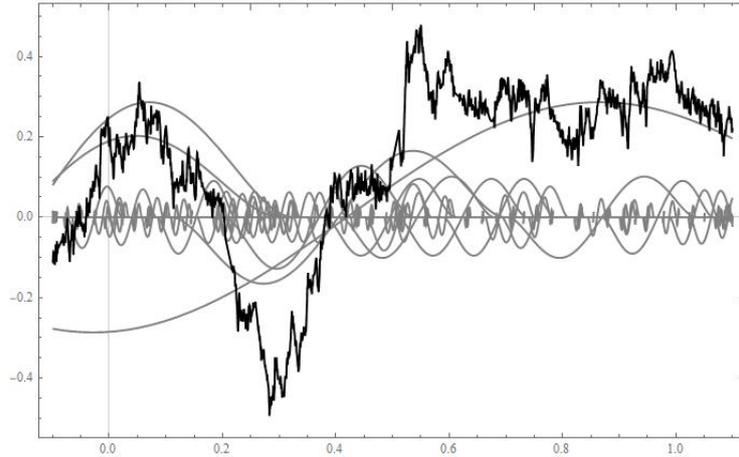


Figure 2.2: Exemple de trajectoire d'une somme aléatoire de pulses pour $\alpha = 0.5$, $\eta = 0.9$ et $\psi(x) = x(1 - x^2)^2$.

Les sommes de pulses aléatoires sont des processus dont les translations et dilatations sont choisies de façon uniforme contrairement aux séries aléatoires ou séries lacunaires d'ondelettes [12, 64] où le réseau dyadique est privilégié. Pour autant, le spectre multifractal des sommes de pulses aléatoires a été déterminé à l'aide des transformées en ondelettes continues lors du Chapitre 1. Presque sûrement,

$$D_F(h) = \begin{cases} \frac{h}{\alpha} & \text{si } h \in [\alpha\eta, \alpha] \\ -\infty & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.6)$$

Le graphe du spectre multifractal est représenté sur la Figure 2.3. Lors de la démonstration du Chapitre 1, nous avons utilisé une caractérisation de l'exposant de Hölder par les coefficients d'ondelettes continues. La difficulté pour déterminer le p -

spectre est d'avoir une telle caractérisation par les coefficients d'ondelettes continues pour les p -exposants.

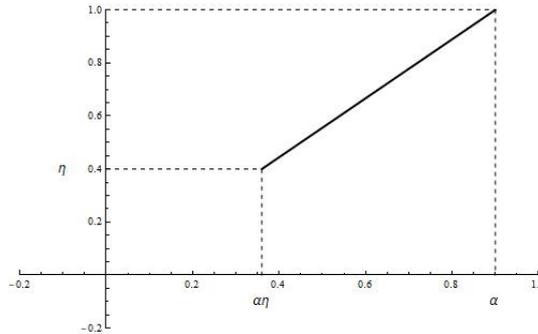


Figure 2.3: Spectre multifractal presque sûr pour $\alpha = 0.9$ et $\eta = 0.4$.

Il reste cependant pertinent d'élargir la définition du modèle (1.1.2) dans le cas $\alpha < 0$ avec des trajectoires de sommes de pulses aléatoires non localement bornées pour y déterminer presque sûrement le p -spectre multifractal. En effet, de nombreuses données expérimentales ont un $h_{min} < 0$ mais une fonction d'échelle ondelette positive pour certaines valeurs de p [75, 79]. D'où la pertinence d'élaborer des outils et modèles adaptés à des fonctions ou processus non localement bornés. Enfin une autre motivation est que les p -exposants diffèrent des exposants de Hölder et donnent une information complémentaire sur la nature des irrégularités en un point, même pour des trajectoires localement bornées, comme la présence de singularités oscillantes ou lacunaires. Donc il est important d'avoir une nouvelle caractérisation des espaces $T_\alpha^p(x_0)$ à partir des transformées en ondelettes continues.

Pour cela, V. Perrier et C. Basdevant dans leur article [92] appliquent un résultat du livre de E. M. Stein [101] afin de caractériser les espaces L^p par les transformées en ondelettes continues. Nous partirons de cette caractérisation pour obtenir celle des espaces $T_\alpha^p(x_0)$ comme il a été effectué dans le cas discret avec les démonstrations de S. Jaffard et C. Melot dans l'article [71].

2.3 Notion de p -leaders continus

Au chapitre 1, la caractérisation de l'exposant de Hölder par la transformée continue en ondelettes s'est avérée être un outil clef pour obtenir une majoration de l'exposant de Hölder en tout point des sommes de pulses. Il est donc raisonnable d'anticiper qu'il en sera de même pour leur p -exposant. Indépendamment de son intérêt intrinsèque, le

but de cette partie est donc d'obtenir une telle caractérisation.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ fixé et $r_\psi \geq \lfloor \alpha \rfloor$. Soit $\psi \in C^{r_\psi}(\mathbb{R}^d)$ une fonction non nulle, à support inclus dans $B(0, 1)$, et possédant un nombre $r_\psi + 1$ de moments nuls. Soient $\theta \in SO(\mathbb{R}^d)$ une rotation de \mathbb{R}^d et $(a, b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^d$. Les transformées en ondelettes continues d'une fonction $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ pour une rotation θ sont définies par R. Murrenzi en [9] (voir aussi [43, 88]) par

$$W_f(a, b, \theta) = \frac{1}{a^d} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \psi \left(\theta \left(\frac{x-b}{a} \right) \right) dx.$$

Dans le cas des ondelettes ψ invariantes par rotation la formule devient

$$W_f(a, b) = \frac{1}{a^d} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \psi \left(\frac{x-b}{a} \right) dx. \quad (2.7)$$

Soit μ une mesure de Haar sur $SO(\mathbb{R}^d)$. La mesure μ est invariante par $SO(\mathbb{R}^d)$, c'est-à-dire que pour tout ensemble B borélien de \mathbb{R}^d et θ élément de $SO(\mathbb{R}^d)$, on a $\mu(\theta(B)) = \mu(B)$. Il existe une constante $c_\psi > 0$ telle que la formule de reconstruction soit valable pour $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ avec

$$f(x) = \frac{1}{c_\psi} \int_{SO(\mathbb{R}^d)} \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{a^{2d+1}} W_f(a, b) \psi \left(\theta \left(\frac{x-b}{a} \right) \right) db da d\mu(\theta), \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Pour toute la suite, il sera pris la dimension $d = 1$ afin d'alléger les notations et preuves. Nous espérons traiter les dimensions supérieures dans des travaux ultérieurs. Si $\hat{\psi}(-\xi) = \overline{\hat{\psi}(\xi)}$ alors il est possible de prendre ϕ une autre ondelette de classe $C^N(\mathbb{R})$ où $N > \alpha$ avec cette fois-ci (au moins) un moment nul telle que la recombinaison de f soit

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{a^2} W_f(a, b) \phi \left(\frac{x-b}{a} \right) db da, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (2.8)$$

(voir par exemple [43, 59, 74] pour les choix possibles de ϕ qui doit être correctement normalisée). Dans le cas des coefficients continus d'ondelettes, il est possible de construire une version continue des p -leaders en tant que norme L^p locale de coefficients $W_f(a, b)$. Pour cela, on va se baser sur l'article de V. Perrier et C. Basdevant [92] pour donner la définition suivante.

Définition 2.3.1 (p -leaders continus). *Soit $f \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R})$. Les leaders continus sont définis par*

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \quad L_f(a, b) = \sup_{(s,t) \in]0, a[\times B(b, a)} |W_f(s, t)|. \quad (2.9)$$

Soit $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R})$. Les p -leaders continus sont

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, L_f^{(p)}(a, b) = \left(\frac{1}{a} \int_{B(b,a)} \left(\int_0^a |W_f(s, t)|^2 \frac{ds}{s} \right)^{\frac{p}{2}} dt \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (2.10)$$

Nous allons vérifier sur un exemple la cohérence de cette définition par rapport à des résultats classiques sur les coefficients discrets p -leaders. Soit la fonction cusp $g_\alpha : x \mapsto |x|^\alpha$ avec $\alpha > 0$. Dans le cas du cusp g_α quand α n'est pas un entier pair, il est connu [60, 75] que les coefficients discrets p -leaders $l_{j,k}^{(p)}$ ont un comportement en loi d'échelle en $2^{-\alpha j}$ en 0, c'est-à-dire qu'il existe $C_\alpha > 0$ tel que pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, $l^{(p)}(j, 0) = C_\alpha 2^{-\alpha j}$ et ainsi $h_{g_\alpha}^{(p)}(0) = \alpha$. Dans le cas continu des p -leaders, il est donc attendu un comportement en loi d'échelle a^α .

Les coefficients continus d'ondelettes du cusp pour $(a, b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ sont

$$W_{g_\alpha}(a, b) = \frac{1}{a} \int_{\mathbb{R}} g_\alpha(x) \psi\left(\frac{x-b}{a}\right) dx = \int_{\mathbb{R}} g_\alpha(au+b) \psi(u) du = a^\alpha \int_{B(0,1)} \left|u + \frac{b}{a}\right|^\alpha \psi(u) du.$$

Ainsi, $W_{g_\alpha}(a, b) = a^\alpha w(b/a)$ où $w(t) = \int_{B(0,1)} |u+t|^\alpha \psi(u) du$. Les p -leaders continus du cusp sont calculés de la même manière par

$$L_{g_\alpha}^{(p)}(a, 0)^p = \frac{1}{a} \int_{B(0,a)} \left(\int_0^a |s^\alpha w(t/s)|^2 \frac{ds}{s} \right)^{\frac{p}{2}} dt.$$

Or la définition de w représente au signe près la convolution de ψ avec $|u|^\alpha$ (au sens des distributions), c'est donc une dérivée fractionnaire de ψ et puisque $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ on en déduit par $\|w\|_\infty < +\infty$ qu'il existe $C'_\alpha > 0$ tel que

$$|L_{g_\alpha}^{(p)}(a, 0)|^p \leq \|w\|_\infty^p \frac{1}{a} \int_{B(0,a)} \left(\int_0^a s^{2\alpha-1} ds \right)^{\frac{p}{2}} dt \leq C'^p_\alpha a^{-1+1+p\alpha}.$$

Donc $|L_{g_\alpha}^{(p)}(a, 0)| \leq C'_\alpha a^\alpha$ ce qui correspond à ce qui était attendu, on retrouve le comportement des coefficients discrets p -leaders.

Ainsi la notion de régularité $T_\alpha^p(x_0)$ peut être reliée aux p -leaders dans le cadre des transformées continues en ondelettes. Cependant pour $p = 1$, on ne peut pas obtenir une telle caractérisation puisque, pour $p > 1$ leur caractérisation est basée sur la caractérisation des espaces L^p , et que L^1 ne peut pas se caractériser par les ondelettes [89].

Le résultat que nous allons démontrer est le suivant.

Théorème 2.3.1. Soient $p \in]1, +\infty[$, $\alpha \in]-1/p, +\infty[$ avec $\alpha \neq 0$, $x_0 \in \mathbb{R}$ et $f \in L^p(\mathbb{R})$. La fonction f appartient à $T_\alpha^p(x_0)$ si et seulement s'il existe $C > 0$ tel que pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$,

$$|L_f^{(p)}(a, x_0)| \leq Ca^\alpha. \quad (2.11)$$

Le théorème permet de déterminer le p -exposant de la manière suivante avec ce corollaire.

Corollaire 2.3.1. Soient $p \in]1, +\infty[$ et $f \in L^p(\mathbb{R})$. Si $h_F^p(x_0) \leq 1$ alors le p -exposant de f en x_0 est donné par

$$h_f^{(p)}(x_0) = \liminf_{a \rightarrow 0^+} \frac{\log(|L_f^{(p)}(a, x_0)|)}{\log(a)}.$$

La démonstration du théorème 2.3.1 commencera par le sens direct puisque la preuve repose seulement sur une application du résultat de V. Perrier et C. Basdevant et le théorème 3.1. de [92]. Pour la preuve de la réciproque, il faudra s'inspirer de la démonstration de S. Jaffard et C. Melot [71] en l'adaptant au cas continu. La difficulté sera d'utiliser la formule de reconstruction en ondelettes pour estimer les accroissements $|f(x) - f(-x_0)|$ si $\alpha > 0$ (ou la valeur de $f(x)$ si $\alpha \leq 0$) à partir des coefficients continus d'ondelettes, selon différentes régions du demi-plan temps-échelles. On notera que pour $\alpha < 0$, P_{x_0} est le polynôme nul.

2.4 Caractérisation des espaces $T_\alpha^p(x_0)$

La première partie de la démonstration dans le sens direct va se baser sur la caractérisation des normes L^p par les coefficients continus d'ondelettes de V. Perrier et C. Basdevant dans [92]. Pour déterminer ce résultat, ils s'inspirent des résultats sur les opérateurs de E.M. Stein [101] avec le théorème 3 chapitre 3 : "the singular integral theorem". Il est rappelé que pour la suite et les démonstrations suivantes, $d = 1$, cependant les prochains résultats peuvent-être généralisés dans les dimensions supérieures sans difficulté.

Démonstration du sens direct. Pour cette partie, nous ne supposons pas de restriction sur les valeurs de α . On rappelle que, si $\alpha \leq 0$, le polynôme P_{x_0} est nul. Soit ψ une ondelette mère à support dans $[-1, 1]$ telle qu'il existe r_ψ un entier avec $r_\psi \geq \max(\alpha, 1)$ et $\psi \in C^{r_\psi}(\mathbb{R})$ avec au moins $r_\psi + 1$ moments nuls.

On sait que $f \in T_\alpha^p(x_0)$, ainsi il existe deux constantes $C, R \in \mathbb{R}_+^*$ et un polynôme P_{x_0} de degré inférieur à α tels qu'on ait (2.4). Soient $r \in]0, R[$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$g(x) = (f(x) - P_{x_0}(x - x_0))\mathbb{1}_{B(x_0, r)}(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2.12)$$

Ainsi d'après (2.4),

$$\|g\|_{L^p} = \left(\int_{B(x_0, r)} |f(x) - P_{x_0}(x - x_0)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq Cr^{\alpha + \frac{1}{p}}. \quad (2.13)$$

Or d'après l'article de V. Perrier et C. Basdevant [92] (Theoreme 3.1), il existe $C_1, C_2 > 0$ ne dépendant que de l'ondelette tels que pour

$$N_g = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} |W_g(s, t)|^2 \frac{ds}{s} \right)^{\frac{p}{2}} dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

on a

$$C_2 N_g \leq \|g\|_{L^p} \leq C_1 N_g. \quad (2.14)$$

Soient $a > 0$ fixé, $r = 2a$ et g définie par (2.12); puisque l'ondelette ψ est à support dans $[-1, 1]$, on en déduit que

$$\forall s \in [0, \frac{r}{2}], \quad \forall t \in B(x_0, \frac{r}{2}), \quad W_g(s, t) = \frac{1}{s} \int_{B(x_0, r) \cap B(t, s)} (f(x) - P_{x_0}(x - x_0)) \psi \left(\frac{x - t}{s} \right) dx. \quad (2.15)$$

Or si $u \in B(t, s)$ alors $|u - x_0| \leq |u - t| + |t - x_0| \leq s + \frac{r}{2} < r$. D'où $B(t, s) \subseteq B(x_0, r)$ et donc $B(x_0, r) \cap B(t, s) = B(t, s)$. On obtient que

$$W_g(s, t) = \frac{1}{s} \int_{B(t, s)} f(x) \psi \left(\frac{x - t}{s} \right) dx - \frac{1}{s} \int_{B(t, s)} P_{x_0}(x - x_0) \psi \left(\frac{x - t}{s} \right) dx$$

La fonction ψ admet $r_\psi + 1 \geq \alpha + 1$ moments nuls et le polynôme P_{x_0} est de degré inférieur à α , d'où

$$\frac{1}{s} \int_{B(t, s)} P_{x_0}(x - x_0) \psi \left(\frac{x - t}{s} \right) dx = 0.$$

On a donc

$$\forall s \in \left[0, \frac{r}{2}\right], \quad \forall t \in B\left(x_0, \frac{r}{2}\right), \quad W_g(s, t) = \frac{1}{s} \int_{\mathbb{R}} f(x) \psi \left(\frac{x - t}{s} \right) dx = W_f(s, t). \quad (2.16)$$

Soient $a > 0$ fixé, $r = 2a$ et g définie par (2.12); alors on a

$$\begin{aligned} \|g\|_{L^p} &\geq C_2 \left(\int_{B(x_0, a)} \left(\int_0^a |W_g(s, t)|^2 \frac{ds}{s} \right)^{\frac{p}{2}} dt \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= C_2 \left(\int_{B(x_0, a)} \left(\int_0^a |W_f(s, t)|^2 \frac{ds}{s} \right)^{\frac{p}{2}} dt \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= C_2 L_f^{(p)}(a, x_0) a^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Comme $f \in T_\alpha^p(x_0)$, d'après (2.13), il existe $C' > 0$ tel que

$$L_f^{(p)}(a, x_0) \leq C' r^{\alpha + \frac{1}{p}} a^{-\frac{1}{p}} \leq C' a^\alpha.$$

□

Pour la démonstration de la réciproque, nous allons adapter la méthode utilisée pour trouver la caractérisation des exposants de Hölder par les leaders et aussi la caractérisation des p -exposants par les coefficients discrets p -leaders vu en [71].

Démonstration de la réciproque. Supposons qu'il existe $C > 0$ tel que pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$,

$$|L_f^{(p)}(a, x_0)| \leq C a^\alpha.$$

Montrons que $f \in T_\alpha^p(x_0)$. Soit ϕ une ondelette de reconstruction de f différente de ψ avec ϕ de classe $C^N(\mathbb{R})$ où $N > \alpha$ et à support compact sur $[-1, 1]$ avec un seul moment nul. Et puisque $\hat{\psi}(-\xi) = \overline{\hat{\psi}(\xi)}$, d'après l'hypothèse en (2.4.7) de [43] ou (B.26) de [74] la formule est valide avec cette nouvelle ondelette. Remarquons également que l'on a à montrer le résultat que pour $r \leq 1$, car le résultat pour $r > 1$ se déduit le l'appartenance de f à L^p . On sépare les cas $\alpha > 0$ et $\alpha \leq 0$.

• **Pour** $\alpha \in]0, 1[$: Soient $r \in]0, 1[$ et $x \in B(x_0, r)$. D'après la formule de reconstruction en ondelette (2.8), on sait que pour le polynôme constant $P_f = f(x_0)$, on a

$$f(x) - P_f(x - x_0) = \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} W_f(s, t) \left(\phi\left(\frac{x-t}{s}\right) - \phi\left(\frac{x_0-t}{s}\right) \right) \frac{dt ds}{s^2}.$$

On définit les quatre intégrales suivantes :

$$\begin{aligned} I_1(x) &= \int_0^r \int_{B(x_0, 2r+s)} W_f(s, t) \left(\phi \left(\frac{x-t}{s} \right) - \phi \left(\frac{x_0-t}{s} \right) \right) \frac{dtds}{s^2} \\ I_2(x) &= \int_r^1 \int_{B(x_0, 2r+s)} W_f(s, t) \left(\phi \left(\frac{x-t}{s} \right) - \phi \left(\frac{x_0-t}{s} \right) \right) \frac{dtds}{s^2} \\ I_3(x) &= \int_1^{+\infty} \int_{B(x_0, 2r+s)} W_f(s, t) \left(\phi \left(\frac{x-t}{s} \right) - \phi \left(\frac{x_0-t}{s} \right) \right) \frac{dtds}{s^2} \\ I_4(x) &= \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R} \setminus B(x_0, 2r+s)} W_f(s, t) \left(\phi \left(\frac{x-t}{s} \right) - \phi \left(\frac{x_0-t}{s} \right) \right) \frac{dtds}{s^2}. \end{aligned}$$

Ainsi, on a décomposé le calcul selon la Figure 2.4 de la manière suivante :

$$f(x) - f(x_0) = I_1(x) + I_2(x) + I_3(x) + I_4(x).$$

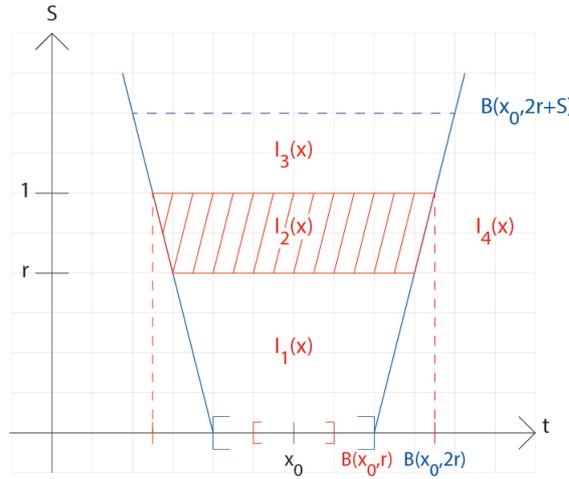


Figure 2.4: Schéma permettant d'illustrer le découpage en 4 parties

Pour démontrer le sens indirect du théorème 2.3.1, il faut majorer la norme L^p de $x \mapsto |f(x) - f(x_0)|\mathbb{1}_{B(x_0, r)}(x)$ ce qui revient à le faire avec les quatre quantités, $\|I_1\mathbb{1}_{B(x_0, r)}\|_{L^p}$, $\|I_2\mathbb{1}_{B(x_0, r)}\|_{L^p}$, $\|I_3\mathbb{1}_{B(x_0, r)}\|_{L^p}$ et $\|I_4\mathbb{1}_{B(x_0, r)}\|_{L^p}$.

Estimation de I_1 : D'après la caractérisation (2.14) de la norme L^p par les coefficients continus en ondelettes qu'on a vu précédemment, il existe $C_1 > 0$ tel que

$$\|I_1\mathbb{1}_{B(x_0, r)}\|_{L^p} \leq C_1 \left[\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}_+^*} |W_{I_1}(s, t)|^2 \frac{ds}{s} \right)^{\frac{p}{2}} dt \right]^{\frac{1}{p}}.$$

Or $W_{I_1}(s, t) = W_f(s, t)$ si $(s, t) \in]0, r[\times B(x_0, 2r + s)$ et $W_{I_1}(s, t) = 0$ sinon ; d'où

$$\begin{aligned} \|I_1 \mathbb{1}_{B(x_0, r)}\|_{L^p} &\leq C_1 \left[\int_{B(x_0, 3r)} \left(\int_0^r |W_f(s, t)|^2 \frac{ds}{s} \right)^{\frac{p}{2}} dt \right]^{\frac{1}{p}} \\ &\leq C_1 (3r)^{\frac{1}{p}} \times L_f^{(p)}(3r, x_0). \end{aligned}$$

D'après l'hypothèse (2.11), on conclut qu'il existe $C_1 > 0$ tel que

$$\|I_1 \mathbb{1}_{B(x_0, r)}\|_{L^p} \leq C_1 r^{\alpha + \frac{1}{p}}. \quad (2.17)$$

Estimation de I_2 : D'après le théorème des accroissements finis appliqué à ϕ qui est C^1 , il existe $C_2 > 0$ tel que

$$I_2(x) \leq C_2 \int_r^1 \int_{B(x_0, 2r+s)} |W_f(s, t)| \times \left| \frac{x - x_0}{s} \right| \frac{dtds}{s^2}.$$

Il existe $J \in \mathbb{N}^*$ tel que $2^{-J} < r \leq 2^{-(J-1)}$. Ainsi,

$$|I_2(x)| \leq C_2 |x - x_0| \sum_{j=1}^J \int_{B(x_0, 2r+2^{-(j-1)})} \int_{2^{-j}}^{2^{-(j-1)}} \frac{|W_f(s, t)|}{s^{\frac{1}{2}}} \frac{ds}{s^{\frac{5}{2}}} dt.$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$|I_2(x)| \leq C_2 |x - x_0| \sum_{j=1}^J \int_{B(x_0, 2r+2^{-(j-1)})} \left(\int_{2^{-j}}^{2^{-(j-1)}} |W_f(s, t)|^2 \frac{ds}{s} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{2^{-j}}^{2^{-(j-1)}} \frac{ds}{s^5} \right)^{\frac{1}{2}} dt.$$

Puisque $B(x_0, 2r + 2^{-(j-1)}) \subseteq B(x_0, 6 \times 2^{-j})$, il existe $C_3 > 0$ tel que

$$|I_2(x)| \leq C_3 |x - x_0| \sum_{j=1}^J 2^{2j} \int_{B(x_0, 6 \times 2^{-j})} \left(\int_0^{6 \times 2^{-j}} |W_f(s, t)|^2 \frac{ds}{s} \right)^{\frac{1}{2}} dt.$$

D'après l'inégalité de Hölder, pour $q \in \mathbb{R}$ tel que $1/p + 1/q = 1$ on a

$$\begin{aligned} |I_2(x)| &\leq C_3 |x - x_0| \sum_{j=1}^J 2^{2j} \left[\int_{B(x_0, 6 \times 2^{-j})} \left(\int_0^{6 \times 2^{-j}} |W_f(s, t)|^2 \frac{ds}{s} \right)^{\frac{p}{2}} dt \right]^{\frac{1}{p}} \\ &\quad \times \left(\int_{B(x_0, 6 \times 2^{-j})} 1^q dt \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

D'après l'hypothèse (2.11), on sait qu'il existe $C > 0$ tel que

$$\begin{aligned} |L_f^{(p)}(6 \times 2^{-j}, x_0)| &= \left[\frac{1}{6 \times 2^{-j}} \int_{B(x_0, 6 \times 2^{-j})} \left(\int_0^{6 \times 2^{-j}} |W_f(s, t)|^2 \frac{ds}{s} \right)^{\frac{p}{2}} dt \right]^{\frac{1}{p}} \\ &\leq C(6 \times 2^{-j})^\alpha. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$|I_2(x)| \leq C_3 |x - x_0| \sum_{j=1}^J 2^{2j} C (6 \times 2^{-j})^{\alpha + \frac{1}{p}} (2 \times 6 \times 2^{-j})^{\frac{1}{q}}.$$

Comme $1/p + 1/q = 1$, il existe $C_4 > 0$ indépendante de J et x tel que pour $\alpha \in]0, 1[$

$$|I_2(x)| \leq C_4 |x - x_0| \sum_{j=1}^J 2^{(1-\alpha)j} \leq C_4 |x - x_0| \frac{2^{1-\alpha}}{2^{1-\alpha} - 1} (2^{(1-\alpha)J} - 1).$$

On en conclut qu'il existe $C_\alpha > 0$ tel que

$$|I_2(x)| \leq C_\alpha |x - x_0| 2^{(1-\alpha)J}.$$

Mais puisque $x \in B(x_0, r)$ et que $r \in]2^{-J}, 2^{-(J-1)}]$, on a

$$|I_2(x)| \leq C_\alpha 2^{-\alpha J} \leq C_\alpha r^\alpha.$$

Donc il existe une constante $C > 0$ indépendante de r telle que

$$\|I_2 \mathbb{1}_{B(x_0, r)}\|_{L^p} \leq C r^{\alpha + \frac{1}{p}}. \quad (2.18)$$

Estimation de I_3 : Elle se déduit directement de la définition des espaces $C^\alpha(\mathbb{R})$ et puisque $s > 1$, il existe $C > 0$ tel que

$$\left| \phi\left(\frac{x-t}{s}\right) - \phi\left(\frac{x_0-t}{s}\right) \right| \leq C \left| \frac{x-x_0}{s} \right|^\alpha \leq C |x - x_0|^\alpha.$$

On note

$$C' = \frac{C}{c_\phi} \left(\int_1^{+\infty} \int_{B(x_0, 3+s)} |W_f(s, t)| \frac{dt ds}{s^2} \right).$$

Ainsi, pour tout $x \in B(x_0, r)$, on a

$$|I_3(x)| \leq \frac{C}{c_\phi} r^\alpha \left(\int_1^{+\infty} \int_{B(x_0, 2r+s)} |W_f(s, t)| \frac{dt ds}{s^2} \right) \leq C' r^\alpha$$

Et donc on en déduit directement qu'il existe $C_3 > 0$ tel que

$$\|I_3 \mathbf{1}_{B(x_0, r)}\|_{L^p} \leq C_3 r^{\alpha + \frac{1}{p}}. \quad (2.19)$$

Estimation de I_4 : Pour tout $s \in \mathbb{R}_+^*$, on sait que $\text{supp}(\phi) \subseteq \overline{B(0, 1)}$. Ainsi, si $t \in \mathbb{R} \setminus B(x_0, 2r + s)$, alors $t \notin B(x_0, s)$. De plus, puisque $x \in B(x_0, r)$, on a

$$2r + s \leq |t - x_0| \leq |t - x| + |x - x_0| \leq |t - x| + r$$

et donc $|t - x| \geq r + s \geq s$. On en conclut que si $t \in \mathbb{R} \setminus B(x_0, 2r + s)$, alors $t \notin B(x_0, s) \cup B(x, s)$, et $\phi\left(\frac{x_0 - t}{s}\right) = \phi\left(\frac{x - t}{s}\right) = 0$. Donc

$$I_4(x) = 0. \quad (2.20)$$

En regroupant les 4 résultats précédents (2.17), (2.18), (2.19) et (2.20), il existe $C > 0$ tel que

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{r} \int_{B(x_0, r)} |f(x) - f(x_0)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} &\leq \frac{1}{r^{\frac{1}{p}}} \sum_{k=1}^4 \|I_k \mathbf{1}_{B(x_0, r)}\|_{L^p} \\ &\leq C r^\alpha. \end{aligned}$$

On en déduit le résultat du théorème avec $f \in T_\alpha^p(x_0)$.

• **Pour $\alpha \in]-1/p, 0[$:** Soient $r \in]0, 1[$ et $x \in B(x_0, r)$. D'après la formule de reconstruction en ondelette (2.8), on sait que pour le polynôme nul $P_f = 0$, on a

$$f(x) - P_f(x - x_0) = \frac{1}{c_\phi} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} W_f(s, t) \phi\left(\frac{x - t}{s}\right) \frac{dt ds}{s^2}.$$

On définit les quatre intégrales suivantes :

$$\begin{aligned} I_1(x) &= \frac{1}{C_\phi} \int_0^r \int_{B(x_0, 2r+s)} W_f(s, t) \phi\left(\frac{x-t}{s}\right) \frac{dtds}{s^2} \\ I_2(x) &= \frac{1}{C_\phi} \int_r^1 \int_{B(x_0, 2r+s)} W_f(s, t) \phi\left(\frac{x-t}{s}\right) \frac{dtds}{s^2} \\ I_3(x) &= \frac{1}{C_\phi} \int_1^{+\infty} \int_{B(x_0, 2r+s)} W_f(s, t) \phi\left(\frac{x-t}{s}\right) \frac{dtds}{s^2} \\ I_4(x) &= \frac{1}{C_\phi} \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R} \setminus B(x_0, 2r+s)} W_f(s, t) \phi\left(\frac{x-t}{s}\right) \frac{dtds}{s^2}. \end{aligned}$$

Ainsi, on a décomposé le calcul toujours selon la Figure 2.4 de la manière suivante :

$$f(x) = I_1(x) + I_2(x) + I_3(x) + I_4(x).$$

Nous reprenons la même méthode que pour le cas $\alpha < 0$, il faut majorer la norme L^p de $x \mapsto |f(x)|\mathbb{1}_{B(x_0, r)}(x)$ ce qui revient à le faire avec les quatre quantités, $\|I_1\mathbb{1}_{B(x_0, r)}\|_{L^p}$, $\|I_2\mathbb{1}_{B(x_0, r)}\|_{L^p}$, $\|I_3\mathbb{1}_{B(x_0, r)}\|_{L^p}$ et $\|I_4\mathbb{1}_{B(x_0, r)}\|_{L^p}$.

Estimation de I_1 : Elle ne change pas du cas $\alpha \in]0, 1[$.

Estimation de I_2 : On majore ϕ directement par $\|\phi\|_\infty$ puisqu'elle est continue sur un intervalle borné

$$I_2(x) \leq \|\phi\|_\infty \int_r^1 \int_{B(x_0, 2r+s)} |W_f(s, t)| \frac{dtds}{s^2}.$$

Il existe $J \in \mathbb{N}$ tel que $2^{-J} < r \leq 2^{-(J-1)}$. Ainsi, il existe $C_2 > 0$ tel que

$$|I_2(x)| \leq C_2 \sum_{j=1}^J \int_{B(x_0, 2r+2^{-(j-1)})} \int_{2^{-j}}^{2^{-(j-1)}} \frac{|W_f(s, t)|}{s^{\frac{1}{2}}} \frac{ds}{s^{\frac{3}{2}}} dt.$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$|I_2(x)| \leq C_2 \sum_{j=1}^J \int_{B(x_0, 2r+2^{-(j-1)})} \left(\int_{2^{-j}}^{2^{-(j-1)}} |W_f(s, t)|^2 \frac{ds}{s} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{2^{-j}}^{2^{-(j-1)}} \frac{ds}{s^3} \right)^{\frac{1}{2}} dt.$$

Puisque $B(x_0, 2r + 2^{-(j-1)}) \subseteq B(x_0, 6 \times 2^{-j})$, il existe $C_3 > 0$ tel que

$$|I_2(x)| \leq C_3 \sum_{j=1}^J 2^j \int_{B(x_0, 6 \times 2^{-j})} \left(\int_0^{6 \times 2^{-j}} |W_f(s, t)|^2 \frac{ds}{s} \right)^{\frac{1}{2}} dt.$$

D'après l'inégalité de Hölder, pour $q \in \mathbb{R}$ tel que $1/p + 1/q = 1$ on a

$$\begin{aligned} |I_2(x)| &\leq C_3 \sum_{j=1}^J 2^j \left[\int_{B(x_0, 6 \times 2^{-j})} \left(\int_0^{6 \times 2^{-j}} |W_f(s, t)|^2 \frac{ds}{s} \right)^{\frac{p}{2}} dt \right]^{\frac{1}{p}} \\ &\quad \times \left(\int_{B(x_0, 6 \times 2^{-j})} 1^q dt \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

D'après l'hypothèse (2.11), on sait qu'il existe $C > 0$ tel que

$$\begin{aligned} |L_f^{(p)}(6 \times 2^{-j}, x_0)| &= \left[\frac{1}{6 \times 2^{-j}} \int_{B(x_0, 6 \times 2^{-j})} \left(\int_0^{6 \times 2^{-j}} |W_f(s, t)|^2 \frac{ds}{s} \right)^{\frac{p}{2}} dt \right]^{\frac{1}{p}} \\ &\leq C(6 \times 2^{-j})^\alpha. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$|I_2(x)| \leq C_3 \sum_{j=1}^J 2^j C (6 \times 2^{-j})^{\alpha + \frac{1}{p}} (2 \times 6 \times 2^{-j})^{\frac{1}{q}}.$$

Comme $1/p + 1/q = 1$, il existe $C_4 > 0$ indépendante de J et x tel que pour $\alpha \in]-1/p, 0[$,

$$|I_2(x)| \leq C_4 \sum_{j=1}^J 2^{-\alpha j} \leq C_4 \frac{2^{-\alpha}}{2^{-\alpha} - 1} (2^{-\alpha J} - 1).$$

On en conclut qu'il existe $C_\alpha > 0$ tel que

$$|I_2(x)| \leq C_\alpha 2^{-\alpha J}.$$

Mais puisque $x \in B(x_0, r)$ et que $r \in]2^{-J}, 2^{-(J-1)}]$, on a

$$|I_2(x)| \leq C_\alpha 2^{-\alpha(J-1)} 2^{-\alpha} \leq C_\alpha 2^{-\alpha} r^\alpha.$$

Donc il existe une constante $C > 0$ indépendante de r tel que

$$\|I_2 \mathbf{1}_{B(x_0, r)}\|_{L^p} \leq Cr^{\alpha + \frac{1}{p}}. \quad (2.21)$$

Estimation de I_3 : La formule de reconstruction par la transformée continue en ondelettes restreinte à $a \geq 1$ donne une fonction C^N où N est la régularité des ondelettes [43]. En effet, puisque $\alpha \in]-1/p, 0[$, on a $1 \leq r^\alpha$ et donc il existe $C > 0$ tel que

$$C' = \frac{\|\phi\|_\infty}{c_\phi} \left(\int_1^{+\infty} \int_{B(x_0, 2r+s)} |W_f(s, t)| \frac{dt ds}{s^2} \right).$$

Ainsi, pour tout $x \in B(x_0, r)$, on a

$$|I_3(x)| \leq \frac{\|\phi\|_\infty}{c_\phi} \left(\int_1^{+\infty} \int_{B(x_0, 2r+s)} |W_f(s, t)| \frac{dt ds}{s^2} \right) \leq C' \leq C' r^\alpha.$$

Et donc on en déduit directement qu'il existe $C_3 > 0$ tel que

$$\|I_3 \mathbf{1}_{B(x_0, r)}\|_{L^p} \leq C_3 r^{\alpha + \frac{1}{p}}. \quad (2.22)$$

Estimation de I_4 : Elle ne change pas du cas $\alpha \in]0, 1[$.

En regroupant les 4 résultats précédents, il existe $C > 0$ tel que

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{r} \int_{B(x_0, r)} |f(x) - f(x_0)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} &\leq \frac{1}{r^{\frac{1}{p}}} \sum_{k=1}^4 \|I_k \mathbf{1}_{B(x_0, r)}\|_{L^p} \\ &\leq Cr^\alpha. \end{aligned}$$

On en déduit le résultat du théorème avec $f \in T_\alpha^p(x_0)$.

• **Pour $\alpha \geq 1$:** Nous ne le traitons pas dans ce manuscrit: Une fois certains problèmes techniques surmontés liés à la définition du polynôme P_{x_0} dans la définition 2.1.2, ce cas devrait pouvoir être traité de manière similaire à $\alpha < 1$.

□

2.5 p -Spectre des sommes de pulses aléatoires

La définition donnée en (1.1.2) permet d'avoir des trajectoires de sommes de pulses aléatoires localement bornées avec $\eta \in]0, 1[$ et $\alpha > 0$ comme déjà vu lors du Chapitre 1. Cependant, dans cette partie, il est aussi pertinent de s'intéresser au cas non localement

borné avec $\alpha < 0$ et à condition que $\eta - 1 < \alpha\eta$.

Définition 2.5.1. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. Soit $(C_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ un processus ponctuel de Poisson dont l'intensité est la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}_+ . Soit S un processus ponctuel indépendant de $(C_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ dont l'intensité est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}_+^* \times [0, 1]$. On écrit $S = (B_n, X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ où $(B_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite croissante.

Par construction, les trois suites de variables aléatoires $(C_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $(B_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont deux à deux indépendantes.

Définition 2.5.2. Soient $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction lipschitzienne non-nulle à support sur $[-1, 1]$, $\eta \in]0, 1[$, $\alpha \in]-\infty, 0[$ tel que $\eta - 1 < \alpha\eta$. La somme de pulses aléatoires $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est définie formellement par

$$F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} C_n^{-\alpha} \psi \left(B_n^{\frac{1}{\eta}} (x - X_n) \right), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2.23)$$

Par rapport aux sommes de pulses aléatoires du Chapitre 1, le paramètre α est un réel avec la condition $\eta - 1 < \alpha\eta$. Nous allons donner des conditions suffisantes de convergence p.s. de telles séries dans L^p . Plus précisément, nous allons montrer dans un premier temps que lorsque $\alpha < 0$, les sommes de pulses aléatoires sont dans un espace $L_{loc}^p(\mathbb{R})$ pour une valeur de $p \in [1, -1/(\alpha\eta) + 1/\alpha[$. Dans un deuxième temps, nous démontrerons la majoration du p -spectre multifractal des sommes de pulses aléatoires pour $\alpha < 0$. Pour cela, nous reprenons les notations et définition du Chapitre 1.

Théorème 2.5.1. Soient $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction lipschitzienne à support sur $[-1, 1]$, $\eta \in]0, 1[$, $\alpha \in]-\infty, 0[$ tel que $\eta - 1 < \alpha\eta$, $p \in]1, -1/(\alpha\eta) + 1/\alpha[$ et $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ le processus définie par (2.23). Alors presque sûrement, pour tout $\delta \in [1, 1/\eta]$, on a

(i) Pour tout $x_0 \notin G_\delta$,

$$h_F^{(p)}(x_0) \geq \frac{\alpha}{\delta} + \frac{1 - \delta\eta}{\delta\eta p}$$

(ii) On a

$$D_F^{(p)}(H) \leq \frac{H\eta p + \eta}{\alpha\eta p + 1} \quad \text{si } H \in \left[\alpha\eta, \alpha + \frac{1 - \eta}{\eta p} \right].$$

On conjecture qu'il y a égalité dans la dernière inégalité ce qui pourra être démontré en appliquant le théorème 2.3.1 dans de futurs travaux. Lorsque $p = +\infty$, il est intéressant de voir qu'on retombe bien sur des résultats similaires à ceux du Chapitre 1 avec le théorème 1.1.1. De plus, on retrouve le même p -spectre que les séries aléatoires

d'ondelettes lacunaires dans l'article [79]. Tout d'abord, nous déterminons les espaces $L^p_{loc}(\mathbb{R})$ auxquels la fonction f appartient selon les valeurs de α .

Proposition 2.5.1. *Soient $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction lipschitzienne à support sur $[-1, 1]$, $\eta \in]0, 1[$. Soit $\alpha < 0$ tel que $\eta - 1 < \alpha\eta$. Presque sûrement, pour tout $p \in]1, -1/(\alpha\eta) + 1/\alpha[$, la série aléatoire $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par (2.23) appartient à $L^p(\mathbb{R})$.*

Démonstration. On reprend les notations et résultats du Chapitre 1. On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = \sum_{j=0}^{+\infty} F_j(x) \quad \text{où} \quad F_j(x) = \sum_{n \in A_j} C_n^{-\alpha} \psi(B_n^{\frac{1}{\eta}}(x - X_n)). \quad (2.24)$$

D'après la définition (2.23), nous allons estimer séparément la norme L^p de chaque F_j . Pour cela, nous allons exploiter le résultat du Chapitre 1 avec (1.14). Presque sûrement, pour j assez grand, on a au plus j^2 pulses (près) qui se superposent en un point. Du coup, en appliquant la définition (1.13) et le lemme 1.2.2 du Chapitre 1, il existe $K > 0$ telle qu'on majore F_j pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$|F_j(x)| \leq K \|\psi\|_{\infty} \max_{n \in A_j} \{C_n^{-\alpha}\} \sum_{n \in A_j} T_n(x) \leq K j^2 \max_{n \in A_j} \{C_n^{-\alpha}\} \mathbb{1}_{\bigcup_{n \in A_j} B(X_n, B_n^{-1/\eta})}(x)$$

et sa norme L^p se majore par

$$\|F_j\|_{L^p} \leq K j^2 \max_{n \in A_j} \{C_n^{-\alpha}\} \|\mathbb{1}_{\bigcup_{n \in A_j} B(X_n, B_n^{-1/\eta})}\|_{L^p}.$$

Or la taille du support de $\bigcup_{n \in A_j} \mathbb{1}_{B(X_n, B_n^{-1/\eta})}$ se majore par $N_j \max\{B_n^{-1/\eta}\}$, on en déduit que

$$\|F_j\|_{L^p} \leq K j^2 \max_{n \in A_j} \{C_n^{-\alpha}\} N_j^{1/p} \max_{n \in A_j} \{B_n^{-\frac{1}{\eta p}}\}.$$

On reprend les outils de majorations de N_j, C_n et B_n , c'est à dire (1.7) (1.8) et (1.11) vu lors du Chapitre 1 pour conclure avec $\alpha < 0$ que

$$\|F_j\|_{L^p} \leq K j^2 j^{\alpha} 2^{-\alpha\eta j} j^{1/p} 2^{\frac{\eta}{p} j} j^{1/\eta p} 2^{-\frac{1}{p} j} \leq K j^{C(\alpha, \eta, p)} 2^{(-\alpha\eta + \frac{\eta}{p} - \frac{1}{p})j}.$$

Et donc

$$\left(\int_{\mathbb{R}} |F(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq K \sum_{j \in \mathbb{N}} j^{C(\alpha, \eta, p)} 2^{(-\alpha\eta + \frac{\eta}{p} - \frac{1}{p})j}.$$

Pour $p \in [1, -1/(\alpha\eta) + 1/\alpha[$, on a $-\alpha\eta + \eta/p + 1/p < 0$ (noter que la condition $\eta - 1 < \alpha\eta$ garantit que $-1/(\alpha\eta) + 1/\alpha > 1$). On en conclut que presque sûrement la série $\sum_{j \in \mathbb{N}} F_j(x)$ converge au sens L^p pour $p \in [1, -1/(\alpha\eta) + 1/\alpha[$. Et puisque F est sa limite et que L^p est un espace complet, $F \in L^p$ pour $p \in [1, -1/(\alpha\eta) + 1/\alpha[$, comme énoncé. \square

Lors du Chapitre 1, la stratégie a été d'utiliser les transformées continues en ondelettes pour majorer l'exposant de Hölder. Ainsi, on s'attend à ce que la même la stratégie s'applique aussi pour la majoration des p -exposants des sommes pulses aléatoires.

Démontrons maintenant une minoration des p -exposants dans les ensembles G_δ , dont on rappelle la définition (1.29):

$$G_\delta = \limsup_{j \rightarrow +\infty} \bigcup_{n \in A_j} B(X_n, B_n^{-\delta})$$

$$\text{et } G'_\delta = \limsup_{j \rightarrow +\infty} \bigcup_{n \in \hat{A}_j} B(X_n, B_n^{-\delta(1-\tilde{\varepsilon}_j)})$$

où $\tilde{\varepsilon}_j = \log_2(16j \log_2 j)/(\eta j)$.

Proposition 2.5.2. *Soient $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction Lipschitzienne à support sur $[-1, 1]$, $\eta \in]0, 1[$. Soit $\alpha < 0$ tel que $\eta - 1 < \alpha\eta$. Considérons la série aléatoire définie par (2.23). Presque sûrement, pour tout $p \in [1, -1/(\alpha\eta) + 1/\alpha[$, pour tout $\delta \in (1, \frac{1}{\eta})$ et pour tout $x_0 \notin G_\delta$, on a*

$$h_F^{(p)}(x_0) \geq \frac{\alpha}{\delta} + \frac{1 - \delta\eta}{\delta\eta p} = \frac{\alpha + 1/(\eta p)}{\delta} + 1/p.$$

Démonstration. On suppose que $x \notin G_\delta$. Par définition, il existe $N_x \in \mathbb{N}$ dépendant de x tel que pour tout entier $n \geq N_x$, $x \notin B(X_n, B_n^{-\delta})$. La somme

$$\sum_{n \leq N_x} C_n^{-\alpha} \psi(B_n^{1/\eta}(x - X_n))$$

a un nombre fini de termes, ainsi sa régularité globale est celle de l'ondelette. Donc, dans l'estimation de la régularité de F en x , on peut supposer que la somme dans F est prise pour $n \geq N_x$.

On prend $r > 0$ fixé. Pour estimer $\|F\|_{L^p(B(x,r))}$, on décompose F en $\sum_{j \in \mathbb{N}} F_j$ et on va déterminer d'abord pour quels j les supports des pulses indexés par des éléments

de A_j intersectent $B(x, r)$. Comme $x \notin G_\delta$,

$$|x - X_n| \geq B_n^{-\delta} \geq 2^{-\delta\eta j}.$$

Si $B(x, r)$ intersecte $B(X_n, B_n^{-1/\eta})$, cela implique que

$$r \geq \frac{1}{2} B_n^{-\delta} \geq \frac{1}{2} 2^{-\eta\delta j}.$$

Notons $J \in \mathbb{N}$ le premier entier tel que $2^{-\eta J} \leq (2r)^{1/\delta}$.

- Si $B_n \in A_j$ pour $j < J$, alors $B(X_n, B_n^{-\delta})$ n'intersecte pas $B(x, r)$ et donc $\|F_j\|_{L^p(B(x,r))} = 0$.

- Si $B_n \in A_j$ pour $j \geq J$, alors (1.14) affirme qu'il y a au maximums $Kj^2 2^{\eta(j-J)}$ pulses dont les supports intersectent $B(x, r)$. De plus, en un point donné au plus j^2 se superposent. Un calcul similaire à la démonstration de la Proposition 2.5.1 donne

$$\int_{B(x,r)} |F_j(x)|^p dx \leq Cj^{2p} K j^2 2^{\eta(j-J)} \left(\max_{n \in A_j} C_n^{-\alpha} \right)^p \max_{n \in A_j} B_n^{-\frac{1}{\eta}}$$

qui en utilisant (1.11), il existe $c_1 > 0$ tel qu'on majore par

$$Cj^{2p} K j^2 2^{\eta(j-J)} 2^{-\eta p \alpha j} 2^{-j} 2^{c_1 j \varepsilon_j}$$

donc il existe $c_3 > 0$ tel que

$$\|F_j\|_{L^p(B(x,r))} \leq Cj^{c_1} 2^{(-\eta\alpha - \frac{1}{p})J} 2^{c_3 J \varepsilon_J}.$$

La proposition 2.5.1 garantit que la série des normes converge et

$$\sum_{j=J}^{+\infty} \|F_j\|_{L^p(B(x,r))} \leq J^{c_1} 2^{(-\eta\alpha - \frac{1}{p})J} 2^{c_3 J \varepsilon_J}.$$

Comme $2^{-J} \leq Cr^{1/(\delta\eta)}$, on a la majoration par

$$r^{\frac{\alpha}{\delta} + \frac{1}{p\delta\eta}} w(r)$$

avec $w(r) = r^{\varepsilon(r)}$ et $\lim_{r \rightarrow 0} \varepsilon(r) = 0$. En faisant attention au fait que le p -exposant est

en fait donné par

$$h_p(x) = \liminf_{r \rightarrow 0} \frac{\log \left(\frac{1}{r} \int_{B(x,r)} |F(t) - P_{x_0}(t-x)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}}{\log \left(\frac{1}{r} \right)}$$

on obtient donc en tenant compte du facteur $1/r$ devant l'intégrale

$$h_F^p(x) \geq \frac{\alpha}{\delta} + \frac{1}{p\delta\eta} + \frac{1}{p} = \frac{\alpha + \frac{1}{\eta p}}{\delta} + \frac{1}{p}.$$

□

Et donc pour conclure avec la preuve du théorème 2.5.1, il suffit de reprendre la Section 1.7 du Chapitre 1

Pour tout $\delta \in [1, 1/\eta]$, on a $H \in [\alpha\eta, \alpha + \frac{1-\eta}{\eta p}]$ et donc on en déduit pour tout $\varepsilon > 0$,

$$D_F^{(p)}(H) \leq \dim_H \left(G_{\frac{\alpha\eta p + 1}{H + \frac{1}{p}} - \varepsilon} \right) \leq \frac{1}{\frac{\alpha\eta p + 1}{\eta p} - \varepsilon} - \varepsilon \quad (2.25)$$

Ce qui permet de conclure le point (ii) du théorème 2.5.1

$$D_F^{(p)}(H) \leq \frac{H\eta p + \eta}{\alpha\eta p + 1}, \quad H \in [\alpha\eta, \alpha + \frac{1-\eta}{\eta p}].$$

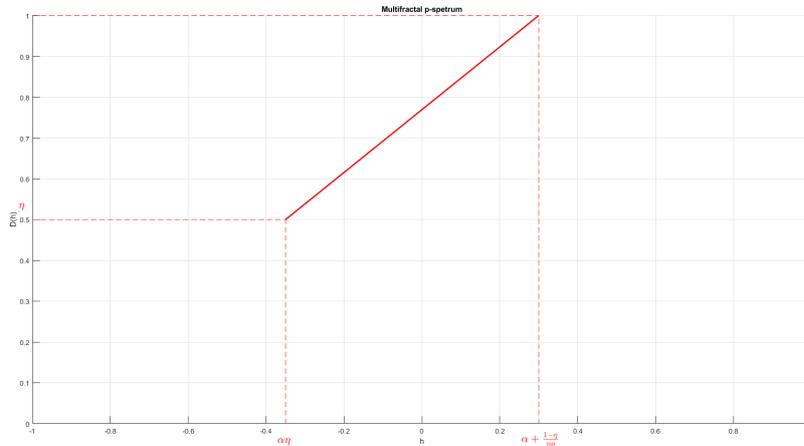


Figure 2.5: Représentation de la majoration du 1-spectre multifractal de la somme de pulse aléatoire pour $\alpha = -0.7$, $\eta = 0.5$

Selon la définition 2.5.2 et le choix des paramètres $\eta \in]0, 1[$, $\alpha \in]-1/\eta, 0[$ et $p \in [1, 1/(\alpha\eta) + 1/\alpha[$ dans le théorème 2.5.1, on a nécessairement le support du spectre multifractal qui est un segment non-vidé contenant $\alpha\eta < 0$ et $\alpha + \frac{1-\eta}{\eta p} > 0$.

2.6 Perspectives

Nous avons obtenu une majoration du p -spectre des séries de pulses. Il reste à obtenir leur p -spectre exact, ce qui nécessite de montrer que la minoration du p -exposant ponctuel fourni par la Proposition 2.5.2 est en fait une égalité. L'exemple des séries lacunaires d'ondelettes (pour lesquelles c'est le cas) montre que l'on peut raisonnablement conjecturer un tel résultat. Il serait pertinent de traiter le cas également le cas $p < 1$. Une difficulté est l'utilisations des espaces de Hardy qui, dans ce cas, remplacent les espaces L^p .

Ensuite, il serait important de vérifier le formalisme multifractal sur ces processus. Sur le plan théorique, il faut étudier les fonctions d'échelles à partir des p -leaders

$$\zeta(q) = \liminf_{j \rightarrow +\infty} \frac{\log \left| 2^{-dj} \sum_k |d_{j,k}|^q \right|}{j}$$

et le spectre de Legendre $L(h) = \inf_{q \in \mathbb{R}} \{qh - \zeta(q) + d\}$, $h \in \mathbb{R}$. Enfin, on dit que le formalisme multifractal est vérifié lorsque $D_F = L_F$. Enfin, on peut appliquer la caractérisation des p -leaders par des transformées en ondelettes continues afin de définir un formalisme continu pour les p -exposants

$$\eta^{(p)}(q) = \liminf_{a \rightarrow 0} \frac{\log \left| \frac{1}{a} \int_{\mathbb{R}} |L_f^{(p)}(a, b)|^q db \right|}{\log(a)}.$$

Ici encore l'exemple des séries lacunaires d'ondelettes laisse penser que le formalisme multifractal sera vérifié.

Enfin, une validation numérique de ces résultats serait intéressante. On peut effectuer des simulations afin d'observer ce qu'il se passe pour différentes valeurs de p pour l'étude du formalisme multifractal. Cependant, les mauvaises estimations des spectres dans le cas des séries d'ondelettes lacunaires qui ont été constatées laissent présager des difficultés numériques importantes pour une telle validation.

Chapitre 3

Formalisme multifractal, simulations et applications

3.1 Introduction

Une motivation majeure à l'analyse multifractale est que les processus multifractals ont des liens directs avec de nombreux champs d'applications mathématiques (analyse harmonique et fonctionnelle, théorie des probabilités et processus stochastique, systèmes dynamiques et théorie ergodique, théorie géométriques de la mesure et même théorie des nombres), et ils ont aussi de nombreux domaines d'application (physique, biologie et physiologie, parmi de nombreux autres exemples à venir) basés sur les développements de nouvelles procédures et algorithmes numériques dans le traitement du signal et de l'image.

Face à des données expérimentales, il n'est pas en général réaliste de pouvoir calculer point par point un exposant ponctuel de régularité puis de déterminer la dimension de Hausdorff de ses ensembles de niveau. Dans le cadre des séries aléatoires lacunaires d'ondelettes, ou séries aléatoires de pulses [64, 74, 97], on peut observer que l'exposant de Hölder prend toutes les valeurs comprises entre α et α/η pour les séries aléatoires d'ondelettes (RWS) ou $\alpha\eta$ et α pour les séries de pulses aléatoires (SRP) où α représente le coefficient de régularité et η le coefficient de lacunarité des séries.

Un formalisme multifractal est une formule qui relie un spectre multifractal associé à un exposant ponctuel à des quantités numériquement calculables sur des données expérimentales. Nous mettrons en lumière dans la prochaine partie plusieurs formalismes multifractals.

3.2 Formalisme Multifractal

La première formule pour donner un formalisme multifractal a été énoncé historiquement dans les années 1980 afin d’interpréter certaines observations de la turbulence pleinement développée. En effet, Kolmogorov [78] a introduit les fonctions de structures comme outil de classification puis U. Frisch et G. Parisi [56] ont mis en évidence le rôle joué par ces fonctions dans leur interprétation en termes de dimensions d’ensemble isohöldériens.

Définition 3.2.1 (Fonctions de structures). *Soient $f \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R}^d)$ et $p \in \mathbb{R}$. On définit les fonctions de structures par*

$$S_p(l) = \int_{\mathbb{R}^d} |f(t+l) - f(t)|^p dt, \quad l \in \mathbb{R}^d.$$

Lorsque l tend vers 0, $S_p(l) \sim |l|^{\zeta_f(p)}$ où ζ_f est la fonction d’échelle.

Définition 3.2.2 (Fonction d’échelle). *Soit $f \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R}^d)$, on définit la fonction d’échelle par*

$$\zeta_f(p) = \sup_{s \in \mathbb{R}_+^*} \{|S_p(l)| \leq |l|^s\}.$$

Or pour $q > 0$ et s un réel tel que $d(1/p - 1) < s < 1$, l’espace de Besov $B_p^{s,q}(\mathbb{R}^d)$ se caractérise par

$$\int_0^{+\infty} \sup_{0 \leq |h| \leq t} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(t+h) - f(t)|^p dt \right)^{q/p} \frac{dt}{t^{sq+1}} < +\infty.$$

Cette caractérisation implique que lorsque $d(1-p) < \zeta_f(p) < p$, on a

$$\zeta_f(p) = \sup \{s \in \mathbb{R}_+^* : f \in B_{p,loc}^{s/p,q}(\mathbb{R}^d)\}.$$

La fonction d’échelle ζ_f étant concave, on obtient par une transformée de Legendre un spectre donné par

$$L_f(h) = \inf_{p \in \mathbb{R}_+} \{hp - \zeta_f(p) + d\}.$$

La propriété intéressante de ce spectre est qu’il majore le spectre multifractal

$$L_f(h) \geq D_f(h)$$

et dans le cas d'une égalité, on dit que le formalisme multifractal est vérifié

$$d_f(h) = \inf_{p \in \mathbb{R}_+} \{hp - \zeta_f(p) + d\}.$$

Le problème de déterminer les fonctions f qui vérifient le formalisme multifractal est encore ouvert. Mais de nombreuses fonctions vérifient cette formule, comme certaines fonctions auto similaires [22], ou par exemple les fonctions génériques dans des espaces fonctionnels [18, 65].

En combinant un autre domaine de l'analyse portant sur les fluctuations redressés et multifractales, un algorithme "multifractal detrended fluctuation analysis" (MFDFA) [76, 77] a été proposé par Kantelhardt, Zschiegner et coll. Avec cet algorithme, il est proposé un spectre calculable à partir de données expérimentales. De plus, il existe un lien avec l'analyse par ondelette établi dans [79] où il est expliqué que le calcul numérique permet d'obtenir des coefficients proches des 2-leaders pour effectuer une représentation numérique du p -spectre avec $p = 2$. Cependant, le point faible de l'algorithme MFDFA est qu'il ne permet pas d'estimer localement un polynôme de Taylor. Ce n'est pas nécessaire si on utilise des méthodes par ondelettes. Dans l'article [50], Espen A. F. Ihlen propose une introduction à l'utilisation de l'algorithme MFDFA sur Matlab. Depuis, on retrouve énormément d'applications dans différents domaines des sciences : étude de marché, battements cardiaques, signaux sismiques, etc. Or cet algorithme repose sur un calcul d'un spectre à partir des coefficients 2-structure locaux vus lors du Chapitre 2 avec la définition 2.1.3, et ne permet pas de déterminer les valeurs de $p < 0$ de la fonction d'échelle permettant d'avoir la partie décroissante du spectre. En effet, on ne peut obtenir que les parties croissantes du spectre. De plus, afin de déterminer le spectre, ce n'est pas le bon algorithme à exploiter sur des données réelles où il peut y avoir la présence de singularités de différents types (oscillantes, lacunaires, etc.). En effet, plusieurs fonctions ne vérifient pas le formalisme. De plus, S. Jaffard a montré qu'en général cette formule n'est pas vraie pour un ensemble générique de fonctions dans les espaces de Besov. La principale cause est la présence de singularités oscillantes comme on peut en trouver sur les fonctions du type $x \mapsto x^\alpha \sin(1/x^\beta)$.

3.3 Spectre de Legendre

Afin d'avoir un spectre numériquement exploitable pour davantage de données réelles, A. Arnéodo et al. [10, 11] proposent une méthode qui se base sur la décomposition en

ondelettes. Ce spectre est généralement calculé soit à partir d’une transformation en ondelettes discrètes (DWT), soit à partir d’une méthode des maxima de la transformée en ondelettes (MMWT).

Soit $\{\varphi, \varphi^{(i)}\}_{i \in \{1, \dots, 2^d - 1\}}$ une famille de fonctions ayant N moments nuls et appartenant à $C^N(\mathbb{R}^d)$ (N suffisamment grand), elles sont appelées ”ondelettes mères”. En pratique, nous prendrons l’ondelette de Daubechies d’ordre 3. Supposons que la famille de fonctions est choisie de manière à ce que la famille

$$\begin{cases} \varphi(x - k) & k \in \mathbb{Z}^d \\ \varphi_{j,k}^{(i)}(x) = 2^{\frac{dj}{2}} \varphi^{(i)}(2^j x - k) & \text{pour } (j, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}^d \text{ et } i \in \{1, \dots, 2^d - 1\} \end{cases}$$

forme une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R}^d)$ [71, 84, 89]. Les coefficients discrets d’ondelettes d’une fonction $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ sont définis pour tout $i \in \{1, \dots, 2^d - 1\}$ par

$$\forall k \in \mathbb{Z}^d, c_k = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \varphi(x - k) dx$$

et

$$\forall (j, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}^d, c_{j,k}^{(i)} = 2^{\frac{dj}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \varphi_{j,k}^{(i)}(x) dx = 2^{dj} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \varphi^{(i)}(2^j x - k) dx.$$

On a la formule de reconstruction suivante [42],

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} c_k \varphi(x - k) + \sum_{(i,j,k) \in \{1, \dots, 2^d - 1\} \times \mathbb{N} \times \mathbb{Z}^d} c_{j,k}^{(i)} \varphi^{(i)}(2^j x - k), \quad x \in \mathbb{R}^d. \quad (3.1)$$

Pour tout $j \in \mathbb{N}$ et $x_0 \in \mathbb{R}^d$, on note $\lambda_j(x_0)$ le cube dyadique $\lambda_{j,k}$ tel que $x_0 \in \lambda_{j,k}$. Il a récemment été suggéré que les grandeurs pertinentes sur lesquelles le formalisme multifractal devrait être basé ne sont pas les coefficients d’ondelettes mais les coefficients leaders vu au Chapitre 2 avec les définitions 2.1.1 et 2.1.4. En effet, il existe des théorèmes de caractérisations pour relier les exposants de Hölder avec les leaders (Corollaire 2.1.1) et les p -exposants avec les p -leaders (théorème 2.1.3). On peut ainsi définir des fonctions de structures et la fonction d’échelle à partir de ces nouveaux coefficients.

Définition 3.3.1 (Fonctions de structures et d’échelle au sens des leaders). *Soient $p \in]0, +\infty[$ et $f \in L_{loc}^p(\mathbb{R}^d)$, on définit les fonctions de structures au sens des p -leaders*

par

$$S_p(q, j) = 2^{-dj} \sum_{k=0}^{2^{jd}-1} |l_{j,k}^{(p)}|^q, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Et on définit la fonction d'échelle au sens des p -leaders par

$$\zeta_p(q) = \liminf_{j \rightarrow +\infty} \frac{|\log S_p(q, j)|}{\log(2^{-j})}.$$

Pour $p = +\infty$, on définit les fonctions de q -structures au sens des leaders par

$$S(q, j) = 2^{-dj} \sum_{k=0}^{2^{jd}-1} |d_{j,k}|^q, \quad j \in \mathbb{N}$$

et les fonctions d'échelle au sens des leaders par

$$\zeta(q) = \liminf_{j \rightarrow +\infty} \frac{|\log S(q, j)|}{\log(2^{-j})}.$$

On en déduit les spectres de Legendre au sens des leaders,

$$\begin{aligned} L_f^{(p)}(h) &= \inf_{q \in \mathbb{R}} \{qh - \zeta_p(q) + d\} \\ L_f(h) &= \inf_{q \in \mathbb{R}} \{qh - \zeta(q) + d\}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Dans l'exemple Figure 3.1 avec une marche aléatoire, le résultat est cette fois-ci bien meilleur que ce qu'on pourrait obtenir si on avait simplement basé l'analyse sur les coefficients d'ondelettes avec la Figure 3.2 et Figure 3.3.

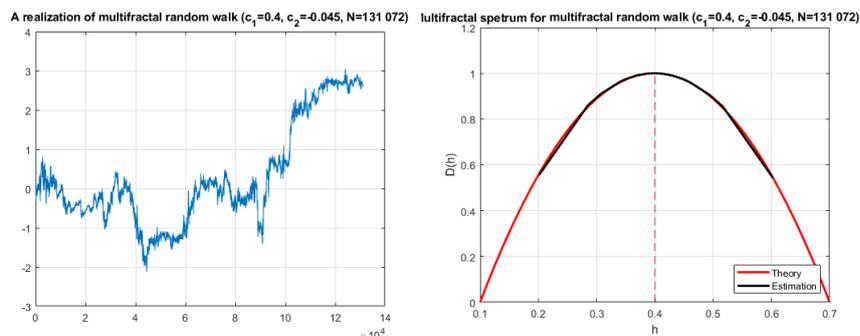


Figure 3.1: Représentation du formalisme multifractal par les coefficients dominants d'ondelettes sur une marche aléatoire (Le nombre de données $N = 131072$)

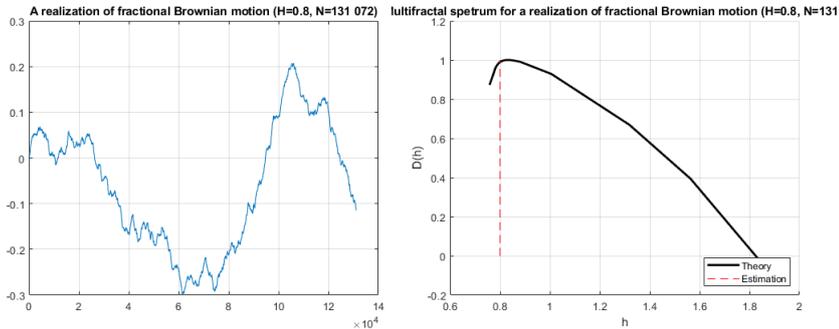


Figure 3.2: Représentation du formalisme multifractal par les coefficients d’ondelettes sur un mouvement brownien fractionnaire (l’exposant de Hurst est $H = 0.8$, le nombre de donnée est $N = 131072$).

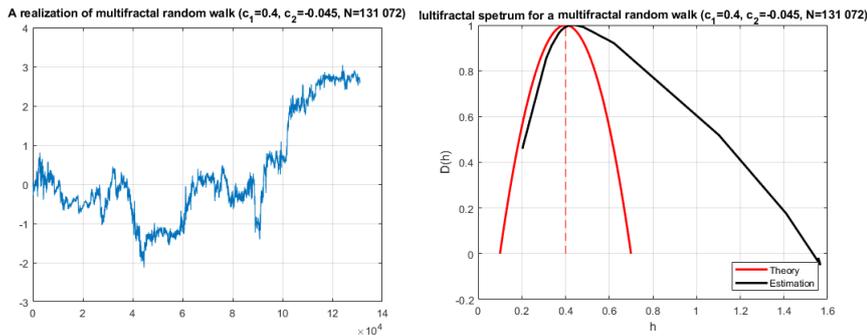


Figure 3.3: Représentation du formalisme multifractal par les coefficients d’ondelettes sur la même réalisation de marche aléatoire que la Figure 3.1 ($N = 131072$)

Dans le cadre de cette thèse, avec $p = +\infty$ et $p < +\infty$, il reste intéressant de déterminer si les sommes de pulses aléatoires définies en (1.1.2) et (2.23) vérifient le formalisme multifractal (c’est à dire l’égalité entre spectre multifractal et spectre de Legendre): pour $\alpha > 0$, on a $D_F = L_F$ et pour $\alpha < 0$, $D_F^{(p)} = L_F^{(p)}$.

3.4 Simulation de séries de pulses aléatoires et spectres de Legendre

L’objectif de cette partie va être d’effectuer des estimations du spectre de Legendre (3.2) sur les sommes de pulses aléatoires. Sur la Figure 3.4, on peut voir une première simulation de 15 spectres de Legendre définis en (3.2). On représente en noir la moyenne de 15 fonctions de structure et ensuite on calcule le spectre de la moyenne.

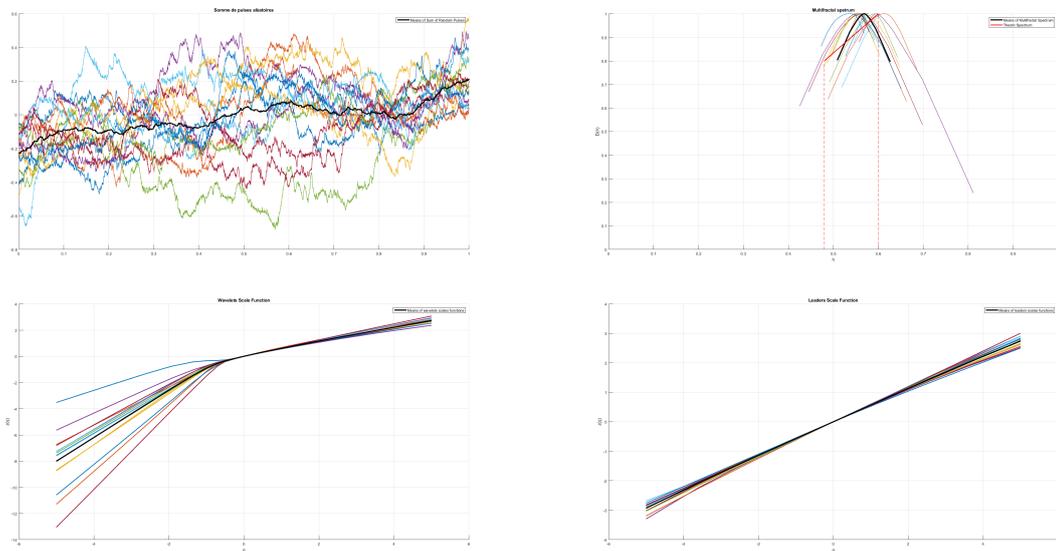


Figure 3.4: Représentation des trajectoires, des fonctions d'échelles ondelettes, échelles leaders, spectre théorique et des spectres simulés pour 15 sommes de pulses aléatoires avec $\alpha = 0.6$ et $\eta = 0.8$

Il peut être pertinent de regarder le support des spectres et voir aussi ce qu'il se passe pour le p -spectre pour différentes valeurs de p . Sur la Figure 3.5, nous représentons le p -spectre pour $p = 1, 2$ et 3 , en considérant qu'on obtient le même spectre théorique que lors du Chapitre 2 avec le théorème 2.5.1.

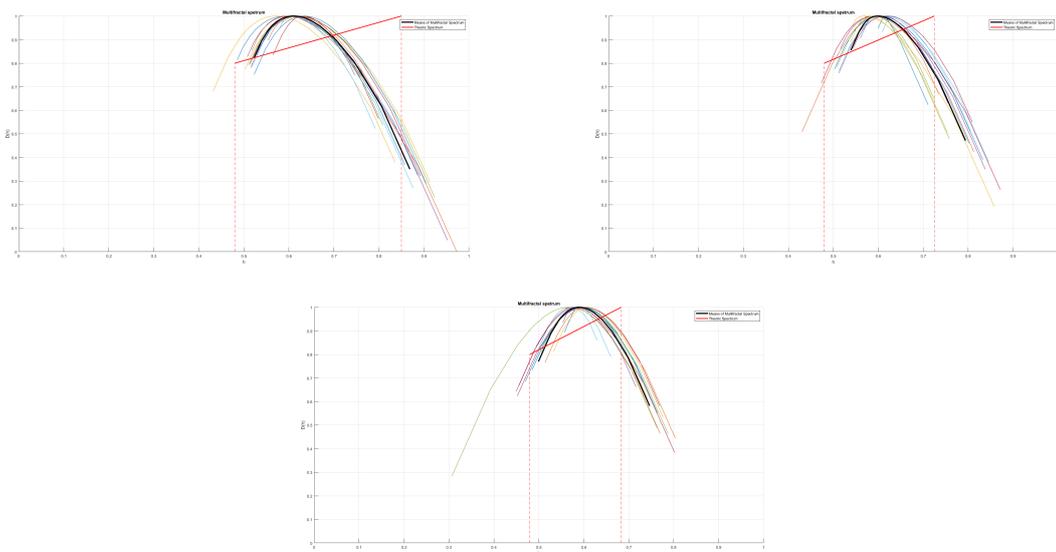


Figure 3.5: Représentation du spectre théorique et des spectres simulés pour 15 sommes de pulses aléatoires avec $\alpha = 0.6$ et $\eta = 0.8$ et $p = 1$ à gauche, $p = 2$ au centre et $p = 3$ à droite

Il est aussi intéressant de regarder le comportement du spectre pour des valeurs de $p < 1$ puisque les définitions des p -leaders donnent un sens au spectre de Legendre. Il est représenté sur la Figure 3.6 un exemple pour $p = 0.8$.

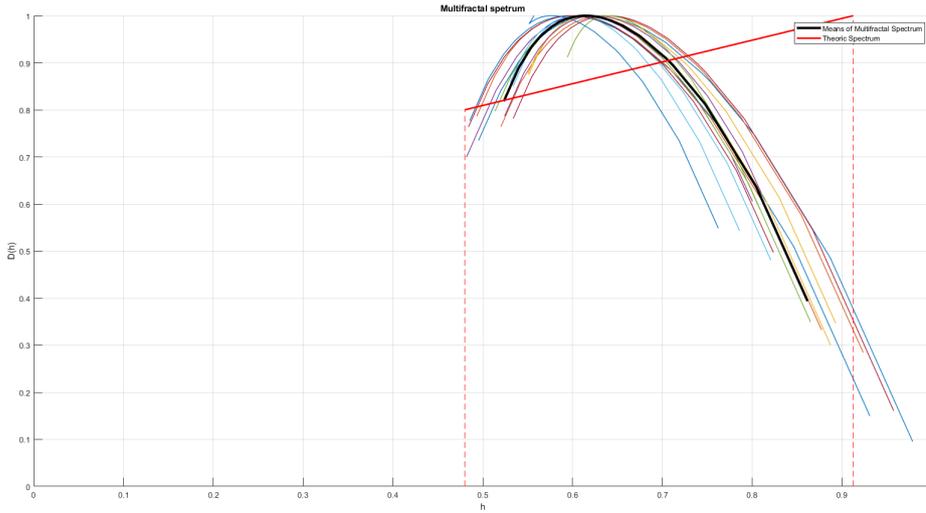


Figure 3.6: Représentation du spectre théorique et des spectres simulés pour 15 sommes de pulses aléatoires avec $\alpha = 0.6$ et $\eta = 0.8$ et $p = 0.8$

On peut constater que le support des différents spectres correspond au support de spectre théorique. Ainsi, malgré la difficulté d'obtenir un résultat sur le formalisme multifractal, il est au moins intéressant de savoir que

$$\{h \in \mathbb{R}_+^* : L_F(h) \neq -\infty\} = \{h \in \mathbb{R}_+^* : D_F(h) \neq -\infty\}.$$

3.5 Spectre de Legendre continu

On peut définir un nouveau spectre de Legendre à partir des coefficients leaders et p -leaders continus d'ondelettes.

Définition 3.5.1. Soit $f \in L^\infty(\mathbb{R})$, les leaders continus sont définis par

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, L_f(a, b) = \sup_{(s,t) \in]0,a[\times B(b,a)} |W_f(s, t)|. \quad (3.3)$$

Soit $f \in L_{loc}^p(\mathbb{R})$, les p -leaders continus sont définis par

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, L_f^{(p)}(a, b) = \left(\frac{1}{a} \int_{B(b, a)} \left(\int_0^a |W_f(s, t)|^2 \frac{ds}{s} \right)^{\frac{p}{2}} dt \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (3.4)$$

Ainsi, on peut donner une définition des fonctions de q -structure continues de la manière suivante.

Définition 3.5.2. Soient $f \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R})$ et $q \in \mathbb{R}$. La fonction de q -structure continue pour les leaders est donnée par

$$S_f(a, q) = \frac{1}{a} \int_{\mathbb{R}} |L_f(a, b)|^q db.$$

Soient $f \in L^p(\mathbb{R})$ et $q \in \mathbb{R}$. La fonction de q -structure continue pour les p -leaders est donnée par

$$S_f^{(p)}(a, q) = \frac{1}{a} \int_{\mathbb{R}} |L_f^{(p)}(a, b)|^q db.$$

On peut ensuite à partir de ces notions définir les fonctions d'échelles continues associées par les régressions linéaires logarithmiques et puis donner des spectres de Legendre à partir de ces données calculables numériquement.

Définition 3.5.3. Soit $f \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R})$. La fonction d'échelle leader est définie par

$$\eta(q) = \liminf_{a \rightarrow 0} \frac{\log |S_f(a, q)|}{\log(a)}.$$

On définit le spectre de Legendre associé par $L(h) = \inf_{q \in \mathbb{R}} \{qh - \eta(q) + 1\}$, $h \in \mathbb{R}$. Soit $f \in L_{loc}^p(\mathbb{R})$. La fonction d'échelle p -leader est définie par

$$\eta^{(p)}(q) = \liminf_{a \rightarrow 0} \frac{\log |S_f^{(p)}(a, q)|}{\log(a)}.$$

On définit le spectre de Legendre associé par $L^{(p)}(h) = \inf_{q \in \mathbb{R}} \{qh - \eta^{(p)}(q) + 1\}$, $h \in \mathbb{R}$.

On dit que le formalisme multifractal est satisfait au sens des leaders lorsque $D_f(h) = L_f(h)$ et des p -leaders lorsque $D_f^{(p)}(h) = L_f^{(p)}(h)$.

3.6 Perspective d'applications numériques des coefficients continus leaders

Soit $s \in \mathbb{R}_+^*$. On définit les séries de Riemann de la manière suivante

$$R_s(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(\pi n^2 x)}{n^s}.$$

L'étude du spectre multifractal dans le cas $s = 2$ a déjà été traité par S. Jaffard [62] et la fonction d'échelle ondelettes de R_2 est calculée et vaut $\eta(p) = 3p/4$ si $p \in]0, 4[$ et $\eta(p) = 1 + p/2$ si $p \geq 4$. L'indice de régularité Besov $u(p) = \sup\{s \in \mathbb{R} : B_p^{s,p}\}$ est $u(p) = \eta(p)/p$. Par ailleurs, une dérivation fractionnaire d'ordre t revient à diminuer l'indice s de la fonction R_s de $2t$ (à une transformée de Hilbert près, qui ne change rien aux indices de régularité). On obtient donc que :

- Si $s \geq 1$, R_s est dans $L^\infty(\mathbb{R})$ et tous les p -exposants conviennent (ce que l'on savait déjà car alors la série converge normalement) ;
- Si $s < 1/2$ aucun p ne convient (la série de Riemann est une "vraie" distribution, sans régularité L^p , même quand $p < 1$, et que L^p est remplacé par l'espace de Hardy H^p) ;
- Si $1/2 \leq s \leq 1$, on peut prendre tous les $p < 2/(1 - s)$.

Dans le cas $s \in]1/2, 1[$, S. Seuret et A. Ubis [99] ont obtenu le 2-spectre multifractal. Dans cette section, nous allons seulement nous intéresser au cas $s = 2$. Dans son article [62] S. Jaffard détermine les coefficients continus d'ondelettes et trouve

$$W_{R_2}(a, b) = \frac{ia\pi}{2}(\theta(b + ia) - 1) \text{ où } \theta(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{i\pi n^2 z}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Une représentation graphique (en Figure 3.7) de la fonction θ montre déjà la complexité des valeurs que peuvent prendre les coefficients continus d'ondelettes. Il est représenté en Figure 3.8 le graphe de fonction $(a, b) \mapsto |W_{R_2}(a, b)|$.

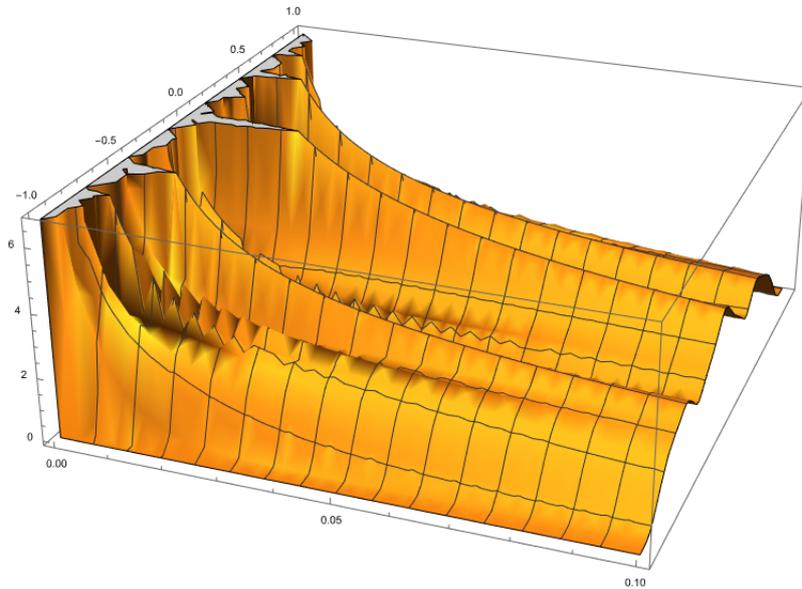


Figure 3.7: Représentation du graphe de la fonction θ dans le plan complexe

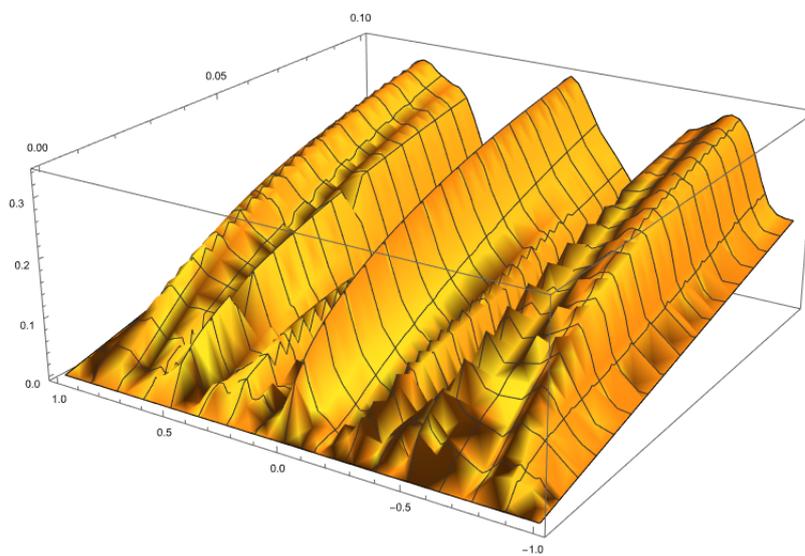


Figure 3.8: Représentation du graphe du module des coefficients continus d'ondelettes de la série de Riemann R_2

A l'aide de simulation numérique, il est possible de représenter les coefficients continus leaders puisque nous connaissons l'expression des coefficients d'ondelettes. Sur la Figure 3.9, il est représenté le graphe de l'application $(a, b) \mapsto L_{R_2}(a, b)$.

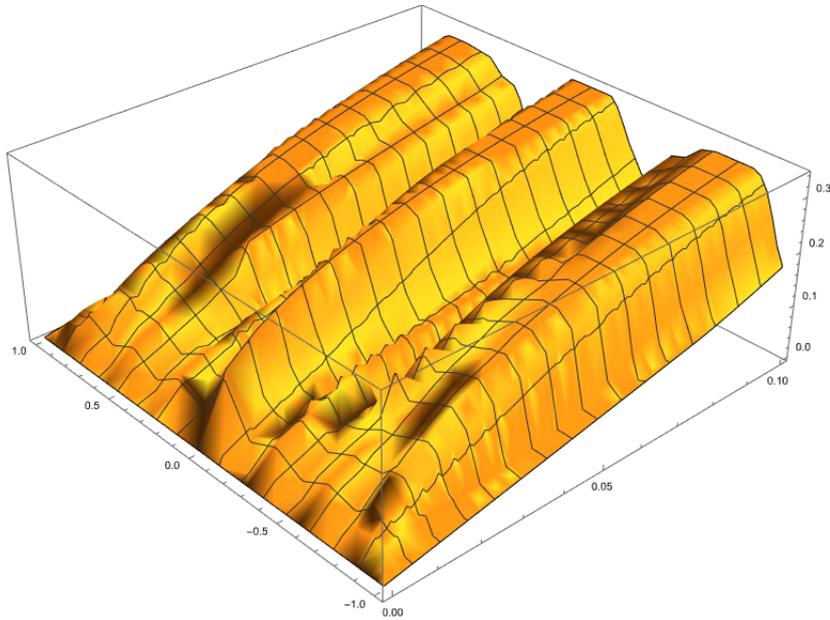


Figure 3.9: Représentation du graphe des coefficients continus leaders de la série de Riemann R_2

A partir de ces premières simulations, il peut être pertinent de construire des fonctions de structures et la fonction d'échelle continue sur la fonction de Riemann afin d'en déduire des nouveaux résultats numériques sur le spectre et p -spectre multifractal.

Chapitre 4

Applications aux données physiologiques avec analyse multifractale multivariée

4.1 Introduction

La capacité de course d'endurance pourrait être apparue initialement chez le genre Homo [34, 80]. Au cours de l'évolution, la physiologie humaine a été optimisée pour couvrir de grandes distances chaque jour, afin de trouver suffisamment de nourriture pour soutenir le métabolisme du cerveau. Chaque année, les marathons de New York, Londres, Berlin et Paris attirent chacun environ 30 000 à 50 000 coureurs adultes de tous niveaux. La plupart de ces coureurs sont des athlètes de loisirs. Beaucoup s'entraînent seuls et espèrent progresser en surveillant leur fréquence cardiaque et/ou leur vitesse de course. En effet, la popularité croissante du marathon chez les humains modernes de tous âges et de tous niveaux peut être considérée comme un héritage de la capacité évolutive de notre espèce à courir de longues distances (> 5 km) en utilisant le métabolisme aérobie [80]. Le nombre de participants au marathon de Londres est passé de 7 000 à 35 000 au cours des 30 dernières années et la participation aux courses sur route en général a augmenté de plus de 50 % au cours de la dernière décennie [91, 96, 102]. La popularité croissante de la course sur route est caractérisée par l'émergence de marathonien amateurs qui terminent l'épreuve de 42,195 km dans un temps compris entre 2 h 40 min et 4 h 40 min. Afin de mieux comprendre les mécanismes de contrôle de l'auto-fréquence dans un cadre écologique (comme les tests

sur piste et les courses sur sentier), il est nécessaire d'examiner la vitesse, la fréquence des pas et les variations de la fréquence cardiaque des coureurs récréatifs. Lorsque les coureurs portent un cardio-fréquencemètre en plus d'un GPS, la fréquence cardiaque, cela donne la possibilité de mettre en évidence la relation entre la stratégie de vitesse, la dynamique cardiaque, et la performance dans des conditions réelles de course. En effet, la course de marathon est considérée comme exigeant une endurance physique extrême et fournit une occasion unique d'étudier les limites de la thermorégulation humaine depuis plus d'un siècle (Cheuvront et Haymes, 2001). On pense actuellement que l'effort cardiaque est à la fois un facteur d'accélération et une conséquence de la diminution de la vitesse de course après le km 12 (c'est-à-dire après environ 90 minutes de course, en moyenne). Cependant, en réalité, on pense que la diminution de la vitesse est due à la force musculaire et aux limitations glycolytiques et métaboliques, comme l'a rapporté Rapoport [94]. En effet, ce dernier auteur a démontré que la capacité de stockage du glycogène n'était un facteur limitant la performance que chez les coureurs ayant des capacités aérobies faibles ou modérées ($\text{Vol. } O_2 \text{ max} < 60 \text{ mL} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{min}^{-1}$) ou ayant des muscles des jambes relativement petits. Nous allons ici vérifier que la dynamique de la fréquence cardiaque n'est pas modifiée au cours d'un marathon contrairement à la fréquence des pas qui est un indicateur de perte de force (Nicol et al., 1991).

A partir des années 90, de nombreux auteurs ont mis en évidence le comportement fractal de la fréquence cardiaque, la pression artérielle et la fréquence respiratoire d'êtres humains, cf. [1, 58]. Il faut attendre 2005 pour que E. Wesfreid, V.L. Billat et Y. Meyer [108] effectuent une première analyse multifractale sur la fréquence cardiaque de marathoniens. Dans cet article, l'allure et le comportement de la fonction d'échelle $\zeta_f(q)$ est présentée à l'aide d'une méthode basée sur les "Wavelet Transform Modulus Maxima" (WTMM). Cette méthode a été introduite par A. Arneodo, F. Argoul, E. Bacry, J. Elezgaray et J.F. Muzzy [10], cependant elle ne permet pas de prendre en compte l'existence de singularités oscillantes, d'après ce que nous avons vu lors du Chapitre 3. De plus, il n'existe pas de résultats mathématiques permettant de valider cette méthode. Ainsi, en 2009, V.L. Billat, L. Mille-Hamard, Y. Meyer et E. Wesfreid [33] proposent de reprendre l'analyse multifractale en utilisant dans un premier temps, un algorithme MF DFA (Multifractal Detrended Fluctuation Analyzes). Or cette méthode pose des problèmes de stabilité numérique [75]. Par conséquent, la deuxième méthode proposée dans l'article découle d'une estimation statistique de la méthode basée sur les coefficients dominants. En effet, le calcul des fonctions d'échelles à partir des coefficients dominants est une bonne façon d'obtenir la fonction d'échelle

$\zeta_f(q)$ pour tout q réel. Dans ce même article, la problématique abordée est de fournir davantage de preuves de l'effet significatif de la fatigue induite par un exercice long lors d'un marathon sur les variations de la fréquence cardiaque et de la vitesse. Enfin, il y a deux articles de H. Wendt, P. Abry, K. Kiyono, J. Hayano, E. Watanabe et Y. Yamamoto dans [5, 107] qui traitent de l'analyse multifractale sur le rythme cardiaque de 173 patients à l'hôpital universitaire de Fujita au Japon. Dans ces articles, il est en particulier confirmé que les signaux du rythme cardiaque sont multifractals.

Nous allons proposer dans ce chapitre, de compléter l'analyse multifractale effectuée jusqu'à ce jour dans le cadre des marathonniens pour mettre en avant des modifications du spectre multifractal entre le début et la fin d'un marathon. Ensuite, une application de l'analyse multifractale multivariée, c'est-à-dire l'analyse conjointe de plusieurs signaux (cf. la définition 0.5.1) sera appliquée afin de comparer les formules qui peuvent relier les spectres monovariés et multivariés. Un des objectifs est de déterminer l'information complémentaire sur les corrélations entre les données et également avec des processus mathématiques pour modéliser les données physiologiques sur les marathonniens. On utilise pour cela un formalisme multifractal multivarié qui est une formule qui relie le spectre multifractal multivarié à des quantités numériquement calculables sur des données expérimentales (voir définition 0.5.2). Le travail sur ce chapitre de thèse a été mené en collaboration avec W. Bennisr, V. Billat, P. Florent et S. Jaffard.

4.2 Analyse Multifractale des données physiologiques

Pour commencer, nous allons nous intéresser à 2 données physiologiques sur 8 marathonniens : La fréquence cardiaque (en battement par minute noté bpm) et la cadence (pas par minute). Cependant, nous n'utiliserons pas les données physiologiques sur la vitesse des marathonniens puisque les mesures ont été effectuées par une localisation GPS rendant les données peu fiables selon la qualité du réseau lors de la course. En effet, il y a des phénomènes de sauts de la vitesse causés à plusieurs moments de la course lorsque le réseau GPS était faible. Nous représentons ces deux types de données sur la figure 4.1 pour un coureur marathonien.

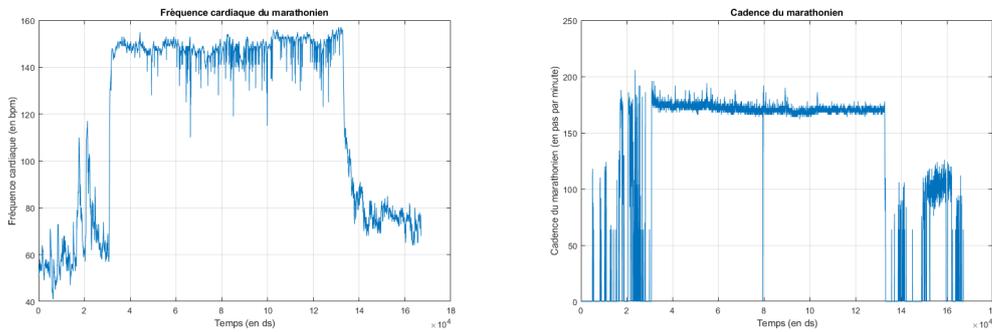


Figure 4.1: Représentation des deux données physiologiques brutes, fréquence cardiaque et cadence pour un marathonien (le nombre de données $N = 167\,198$). Les données ne sont pas nettoyées puisqu'il y a plusieurs parties lors du marathon qui correspondent à l'échauffement au début et à la récupération à la fin du marathon. De plus, il y a plusieurs moments de pauses durant la course qu'on peut repérer par une chute brutale et ponctuelle sur la cadence

La course est composée de plusieurs étapes dont un échauffement lors du début, une récupération lors de la fin du marathon, et plusieurs moments de petites pauses au cours du marathon. Le signal a été nettoyé en supprimant les données qui ne correspondaient pas à la période de course proprement dite (échauffements, récupérations et pauses) et en effectuant des raccords continus pour ne conserver que les parties homogènes. On peut observer sur la figure 4.2 les 2 données physiologiques ainsi nettoyées que nous allons traiter (on verra que les exposants de régularité sont inférieurs à 1, des raccordements continus sont donc suffisants).

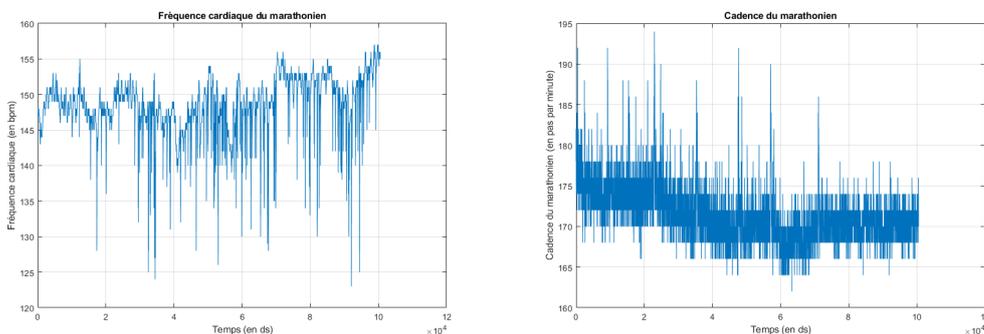


Figure 4.2: Représentation des 2 données physiologiques fréquence cardiaque et cadence nettoyées pour un coureur marathonien (le nombre de données $N \simeq 100\,000$). Le graphe de la fréquence cardiaque apparaît comme plus inhomogène que celui de la cadence

Un objectif majeur de l'analyse multifractale est qu'elle fournit des outils

d'analyse pertinents dans de nombreux champs (analyse harmonique et fonctionnelle, théorie des probabilités et stochastique processus, systèmes dynamiques et théorie ergodique, théorie des mesures géométriques et même théorie des nombres), et simultanément elle a de nombreux domaines d'application (physique, biologie et physiologie, parmi de nombreux autres exemples à venir) basés sur les développements de nouvelles procédures numériques dans le traitement du signal et de l'image. Ces outils mathématiques permettent d'introduire de nouveaux paramètres qui sont autant de nouveaux outils de classification et de sélection de modèles dans les applications.

Dans le Chapitre 3, nous avons vu que, face à des données expérimentales, on ne peut pas mettre en oeuvre directement la définition mathématique du spectre multifarctal (calcul d'un exposant de régularité point par point plus des dimensions fractionnaires de ses ensembles de niveau). Ainsi, il va être pertinent d'utiliser des quantités multirésolutions qui sont numériquement calculables et permettent d'estimer ce spectre grâce à l'application d'un formalisme multifractal. Les quantités sont construites à partir des coefficients dominants qui permettent de caractériser la régularité ponctuelle d'une fonction.

Si les données vérifient : $\exists \alpha > 0$ tel que $f \in C^\alpha(\mathbb{R})$, alors on a $\forall h \in \mathbb{R}$, $D_f(h) \leq L_f(h)$ et le spectre de Legendre permet donc d'estimer le spectre multifractal. Cependant, cette hypothèse n'est pas toujours vérifiée pour des données expérimentales, et nous verrons en particulier que c'est le cas pour les données physiologiques que nous allons analyser. Dans ce cas, les coefficients dominants peuvent prendre la valeur $+\infty$ et le spectre de Legendre n'est pas défini.

Cependant, de nombreux modèles conduisent à un spectre de Legendre au sens des leaders continu et concave, porté par un intervalle I de longueur strictement positive [12, 64, 97] de telles fonctions ont des exposants $h_f(x_0) > 0$ en tout point or nous avons vu en Chapitre 2 que ce n'est pas toujours le cas avec des trajectoires non localement bornées (comme avec les séries de Riemann par exemple) [72]. On doit alors remplacer la notion d'exposant de Hölder par celle de p -exposant déjà introduite au Chapitre 2.

Comme pour les fonctions localement bornées qui ont leur exposant de Hölder relié aux coefficients leaders d'ondelettes, les fonctions $L_{loc}^p(\mathbb{R}^d)$ auront leur p -exposant relié aux p -leaders [71, 75, 79].

Définition 4.2.1 (*p*-leaders). Soit $f \in L_{loc}^p(\mathbb{R}^d)$. Les *p*-leaders sont définis par

$$\forall (j, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}^d, l^{(p)}(j, k) = \left(\sum_{i \in \{1, \dots, 2^d - 1\}, \lambda_{j', k'} \subset 3\lambda_{j, k}} |c_{j', k'}^{(i)}|^p 2^{-(j'-j)} \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (4.1)$$

On note

$$\forall j \in \mathbb{N}, l_j^{(p)}(x_0) = \left(\sum_{i \in \{1, \dots, 2^d - 1\}, \lambda_{j', k'} \subset 3\lambda_j(x_0)} |c_{j', k'}^{(i)}|^p 2^{-(j'-j)} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Le résultat suivant permet de caractériser les *p*-exposants à partir des *p*-leaders [6, 64].

Théorème 4.2.1. Soient $x_0 \in \mathbb{R}^d$ et $f \in L_{loc}^p(\mathbb{R}^d)$. Si

$$\liminf_{j \rightarrow +\infty} \frac{|\log \sum_{i \in \{1, \dots, 2^d - 1\}, k \in \mathbb{Z}^d} |c_{j, k}^{(i)}|^p|}{\log(2^{-j})} > 0,$$

alors

$$h_f^p(x_0) = \liminf_{j \rightarrow +\infty} \frac{|\log(l_{\lambda_j(x_0)}^{(p)})|}{\log(2^{-j})}.$$

On définit ainsi un *p*-spectre de Legendre qui sera utilisé pour les modèles dont les trajectoires ne sont pas localement bornées.

Définition 4.2.2 (*p*-Spectre de Legendre). Soient $p \in]0, +\infty[$ et $f \in L_{loc}^p(\mathbb{R}^d)$, on définit les fonctions de structures au sens des *p*-leaders par

$$S_p(q, j) = 2^{-dj} \sum_{k=0}^{2^{jd}-1} |l_{j, k}^{(p)}|^q, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Et on définit la fonction d'échelle au sens des *p*-leaders par

$$\zeta_f^{(p)}(q) = \liminf_{j \rightarrow +\infty} \frac{|\log S_p(q, j)|}{\log(2^{-j})}.$$

On en déduit les *p*-spectres de Legendre

$$L_f^{(p)}(h) = \inf_{q \in \mathbb{R}} \{qh - \zeta_f^{(p)}(q) + d\}.$$

On rappelle que la fonction d'échelle ondelette ξ_f est définie par

$$\xi_f(p) = \liminf_{j \rightarrow +\infty} \frac{\left| \log \left(2^{-dj} \sum_{k=0}^{2^{jd}-1} |c_{j,k}|^p \right) \right|}{\log(2^{-j})}, \quad p \in \mathbb{R}_+^*.$$

Une propriété importante des spectres de Legendre est que pour tout $h \in \mathbb{R}$, s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $f \in C^\varepsilon(\mathbb{R})$ alors $D_f(h) \leq L_f(h)$ et s'il existe $p \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\xi_f(p) > 0$ alors $D_f^{(p)}(h) \leq L_f^{(p)}(h)$ [68]. Dans le cas de l'égalité, on dit que le formalisme multifractal est vérifié.

Pour les données physiologiques, nous allons devoir déterminer si les trajectoires sont localement bornées. Pour cela, nous allons estimer la valeur de h_{min} à partir des coefficients d'ondelettes où $h_{min} = \sup\{h \in \mathbb{R} : f \in C^h(\mathbb{R}^d)\}$. Si $h_{min} > 0$ alors on peut en déduire que les données ont des trajectoires localement bornées et l'utilisation des leaders seraient adaptées au calcul du spectre et si $h_{min} \leq 0$ alors on peut en déduire que les trajectoires ne sont pas localement bornées et nous examinerons alors dans quels cas il est possible d'utiliser les p -leaders comme quantités multirésolutions. On représente sur la figure 4.3 les estimations de h_{min} sur différents marathonien pour les 2 données physiologiques au moyen de régressions log-log

$$h_{min} = \liminf_{j \rightarrow +\infty} \frac{\log \sup_{k \in \mathbb{Z}} |c_{j,k}|}{\log(2^{-j})}.$$

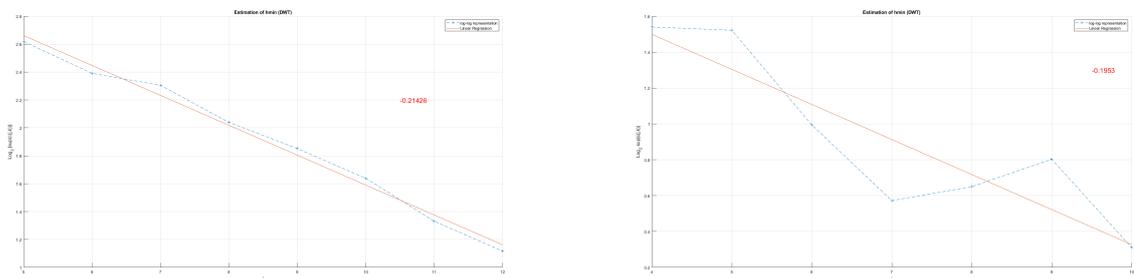


Figure 4.3: Représentation des régressions log-log pour estimer la valeur h_{min} sur les données physiologiques (fréquence cardiaque et cadence) d'un marathonien où on peut observer que $h_{min} < 0$

On représente sur le tableau 4.1 toutes les valeurs h_{min} estimées sur les données physiologiques des marathonien.

Fréquence Cardiaque								
Coureurs	Cédric	Dylan	Frédéric	Pascal	Pierre-Arnaud	Pierre-Louis	René	Sébastien
h_{min}	-0.20422	0.21655	0.28264	-0.37978	-0.35622	-0.21426	-0.1412	-0.47556
Cadence								
Coureurs	Cédric	Dylan	Frédéric	Pascal	Pierre-Arnaud	Pierre-Louis	René	Sébastien
h_{min}	-0.2077	-0.2663	-0.2762	-0.3197	-0.3922	-0.3108	-0.1227	-0.2614

Tableau 4.1: Tableaux des valeurs h_{min} estimées sur les données physiologiques des 8 marathoniens où on peut observer que pour une grande partie des données les $h_{min} < 0$ ce qui va justifier l'utilisation des p -leaders dans l'analyse multifractale

On peut le voir sur les données, les valeurs h_{min} sont strictement négatives sauf dans le cas de la fréquence cardiaque où deux des coureurs, Dylan et Frédéric ont des valeurs positives (voir figure 4.4).

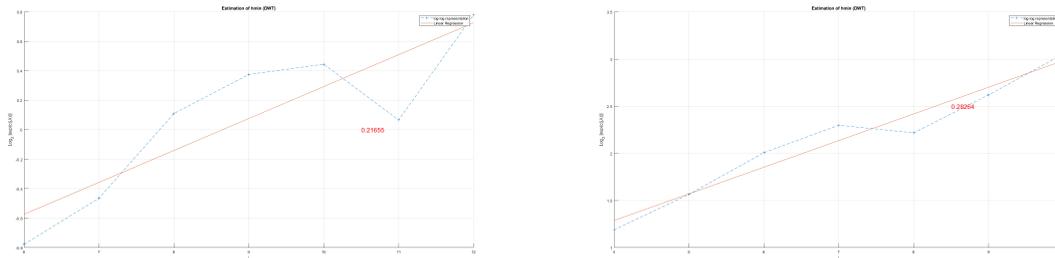


Figure 4.4: Représentation des régressions log-log pour obtenir la valeur h_{min} sur la fréquence cardiaque de Dylan (à gauche) et Frédéric (à droite) où dans ce cas $h_{min} > 0$. Les deux coureurs sont des coureurs en phase de progression qui ont reproduit leur meilleurs performance lors du marathon

Dans ce cas précis avec des valeurs $h_{min} < 0$, il n'est pas possible d'effectuer une analyse à partir des coefficients dominants. En effet, le théorème 2.1.1 qui permet de caractériser l'exposant de Hölder par les coefficients dominants demande une régularité uniforme hölderienne, c'est-à-dire qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $f \in C^\varepsilon(\mathbb{R})$. Or ce n'est pas le cas avec les données physiologiques en notre possession puisque $h_{min} < 0$. Par conséquent, nous allons appliquer l'une des deux méthodes suivantes : soit il est possible d'effectuer un calcul des p -leaders pour obtenir le p -spectre pour au moins une valeur de $p \in \mathbb{R}_+^*$ telle que $f \in L^p(\mathbb{R})$ (ce qui sera le cas si la fonction d'échelle ondelette vérifie $\xi_f(p) > 0$), soit on calcule une intégrée fractionnaire d'ordre $\gamma = 1$ (dans ce cas, c'est une primitive) pour faire l'analyse avec les coefficients dominants sur ces données uniformément höldériennes. L'intégrée fractionnaire d'ordre $\gamma > 0$ d'une fonction f est

notée $I^\gamma(f)$ et elle est définie sur sa transformée de Fourier par

$$\widehat{\mathcal{I}^\gamma(f)}(\xi) = (1 + |\xi|^2)^{\frac{\gamma}{2}} \widehat{f}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}. \quad (4.2)$$

Lorsqu'on effectue l'intégrée fractionnaire d'ordre γ , la valeur de h_{min} se retrouve décalée de γ et dans le cas des données physiologiques puisqu'on a des $h_{min} > -1$, une intégrée fractionnaire d'ordre 1 suffit pour obtenir un nouveau signal dont la valeur de $h_{min} > 0$. Ainsi, il devient possible d'utiliser ses coefficients dominants comme quantités multirésolutions au calcul du spectre.

Notons que, en pratique, on n'effectue pas une intégrée fractionnaire sur le signal, mais on multiplie les coefficients d'ondelette par $2^{-\alpha j}$. Cette pseudo intégrée fractionnaire présente l'avantage d'être beaucoup plus simple à effectuer tout en préservant les mêmes caractéristiques multifractales qu'une intégrée fractionnaire (même exposants ponctuels et mêmes fonctions d'échelle).

Dans la suite, nous allons effectuer une analyse multifractale des deux données physiologiques selon l'une des deux méthodes précédemment citées.

4.3 Analyse Multifractale de la Fréquence Cardiaque des marathoniens

Pour reprendre l'analyse multifractale sur la fréquence cardiaque avec les p -leaders, il est nécessaire de déterminer pour quelles valeurs de $p \in \mathbb{R}_+^*$, f appartient à $L^p(\mathbb{R})$. Pour cela, la fonction d'échelle basée sur les coefficients d'ondelettes $\xi_f(p)$ permet pour $p > 0$ d'obtenir cette information. En effet, si $\xi_f(p) > 0$ alors f appartient à l'espace de Sobolev $H^{s,p}(\mathbb{R})$ pour $s > 0$ et la figure 4.5 montre plusieurs fonctions d'échelles basées sur les coefficients d'ondelettes de la fréquence cardiaque pour déterminer une telle valeur de p .

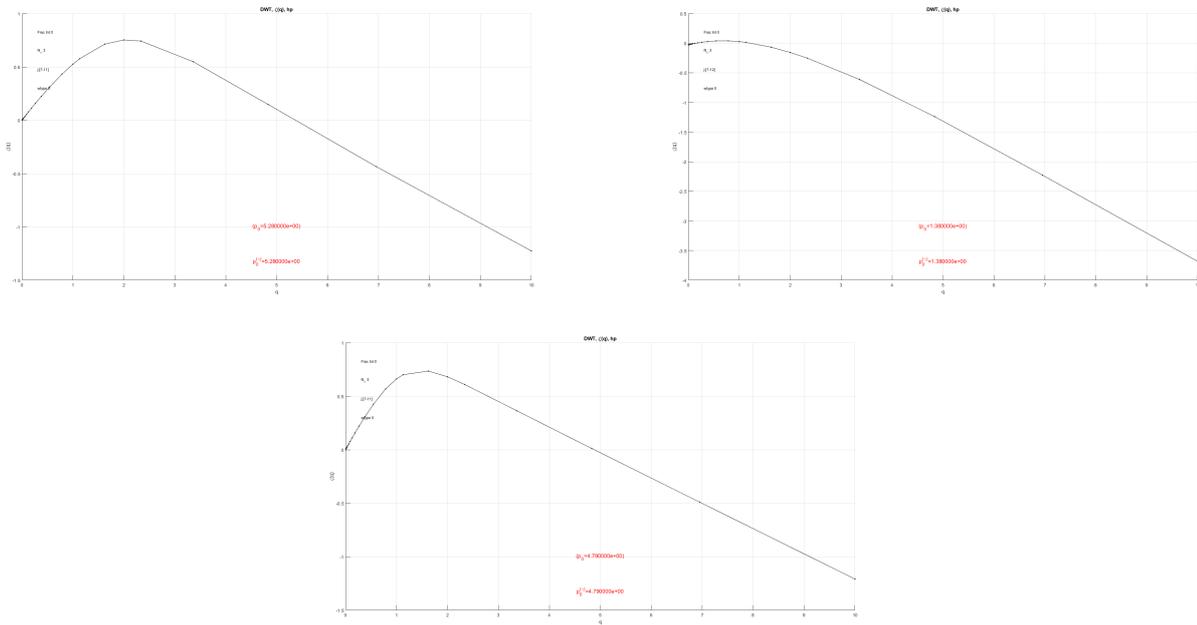


Figure 4.5: Représentation de la fonction d'échelle basée sur les coefficients d'ondelettes de la fréquence cardiaque de trois marathoniens où on peut observer que $\xi_f(q) > 0$ pour $q = 1$ ce qui va nous permettre de calculer les 1-leaders

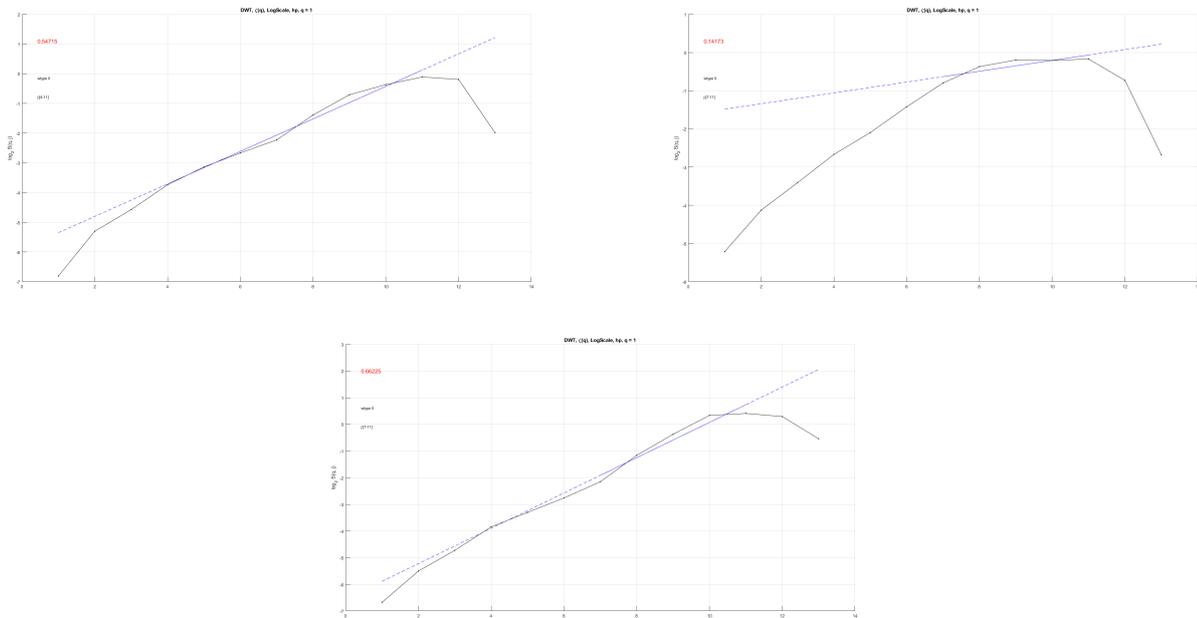


Figure 4.6: Représentation des régressions log-log où on obtient $\xi_f(1) > 0$ pour la fréquence cardiaque de 3 marathoniens

A partir de ces dernières observations, il va être pertinent de prendre $q = 1$

puisque les 8 marathoniens vérifient que $\xi_f(1) > 0$ (voir figure 4.6). Ensuite, nous pouvons effectuer l'estimation du 1-spectre. Il est représenté un exemple pour un coureur sur la figure 4.7.

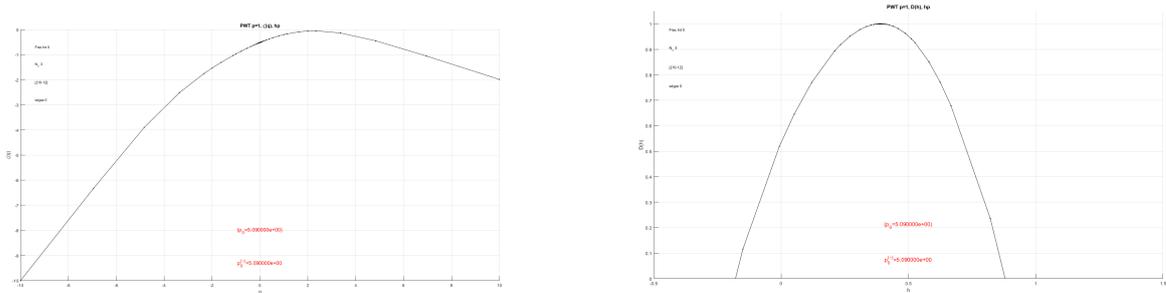


Figure 4.7: Représentation de la fonction d'échelle basée sur les 1-leaders à gauche et le 1-spectre à droite pour la fréquence cardiaque d'un coureur marathonien. On remarque que le support du 1-spectre contient des exposants H négatifs ce qui confirme le résultat que le signal n'est pas localement borné.

Il est difficile d'afficher une classification à partir de courbes (comme les fonctions d'échelle ou les spectres de Legendre). En pratique on souhaite en extraire quelques paramètres de classification. Lorsque la fonction d'échelle est régulière au voisinage de 0, nous allons définir pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, les coefficients c_k par

$$c_k = \zeta^{(k-1)}(0).$$

En effet pour q proche de 0, $\zeta(q) \sim \sum_{k \geq 1} c_k \frac{q^k}{k!}$ et par exemple le coefficient c_1 donne la valeur h où le spectre est maximal, c'est-à-dire la régularité presque partout du signal. La méthode donnant numériquement les valeurs de c_k est donnée dans [106]. On regroupe sur le tableau 4.2 les différents résultats pour l'analyse des marathoniens avec les valeurs c_1 et c_2 .

Fréquence Cardiaque								
Coureurs	Cédric	Dylan	Frédéric	Pascal	Pierre-Arnaud	Pierre-Louis	René	Sébastien
h_{min}	-0.20422	0.21655	0.28264	-0.37978	-0.35622	-0.21426	-0.1412	-0.47556
c_1	0.42637	0.34506	0.3903	0.46872	0.42945	0.42745	0.37951	0.341
c_2	-0.30461	-0.022618	-0.13668	-0.18926	-0.082111	-0.083685	-0.008045	-0.10079

Tableau 4.2: Tableaux des différents paramètres pour le 1-spectre de la fréquence cardiaque pour comparer les différents marathoniens. Les valeurs des paramètres h_{min} et c_2 sont très différents selon les marathoniens mais les valeurs de c_1 sont relativement proches

On peut classifier les résultats sous forme de représentation (h_{min}, c_1) comme sur la figure 4.8 et (h_{min}, c_2) sur la figure 4.9.

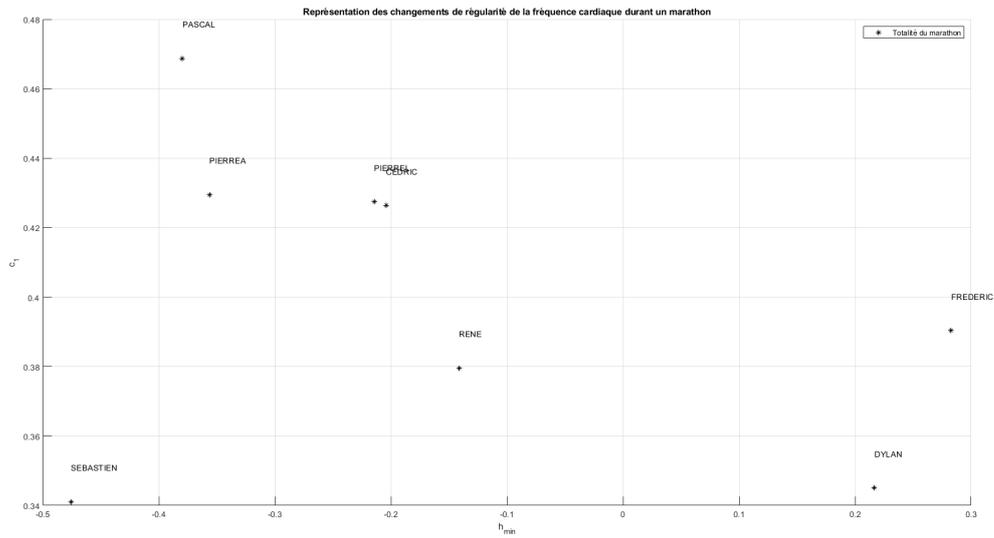


Figure 4.8: Représentation du couple (h_{min}, c_1) pour la fréquence cardiaque des marathoniens dans un plan pour classifier les différents coureurs.

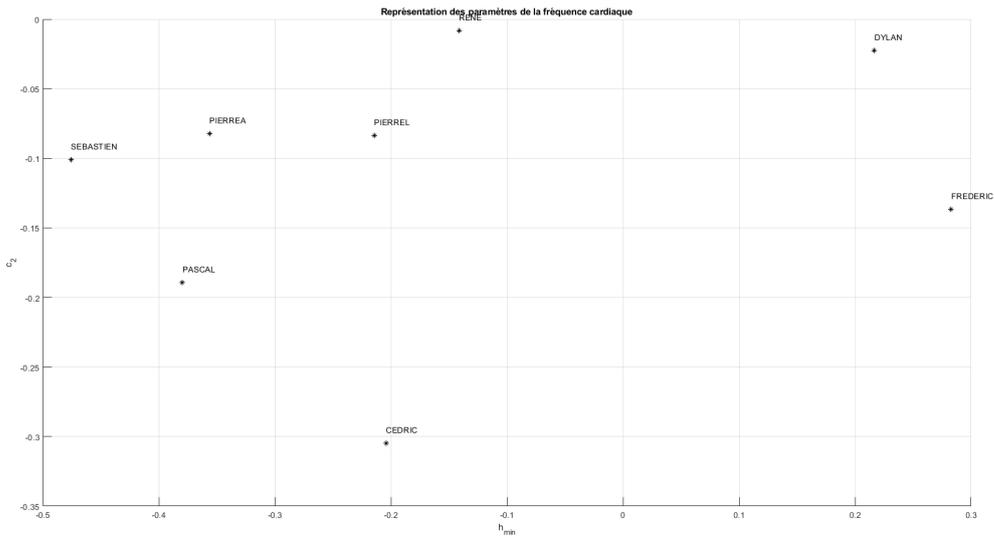


Figure 4.9: Représentation du couple (h_{min}, c_2) pour la fréquence cardiaque des marathoniens dans un plan pour classifier les différents coureurs: on remarque de nouveau que l'analyse effectuée permet de distinguer nettement Dylan et Frédéric

On peut observer sur la figure 4.8 que les valeurs de c_1 restent très proches de 0,4 tandis que la valeur du h_{min} change davantage par rapport aux marathoniens. Elle permet en particulier de mettre en évidence la différence entre coureurs plus ou moins expérimentés. Un autre intérêt de l'analyse multifractale est de pouvoir détecter des changements dans les paramètres multifractals du signal. Lors du 30ème kilomètre (environ 60% du marathon) les différents coureurs auraient ressenti une difficulté et pénibilité accrue sur l'échelle RPE Borg (Rate of Perceived Exertion). Le taux d'effort perçu RPE Borg est une échelle utilisée pour identifier l'intensité d'un exercice en fonction de la force avec laquelle on ressent (ou perçoit) l'effort. Il est basé sur la sensation physique ressentie par une personne qu'on évalue de 6 à 20 à travers des données récoltées sur des appareils de mesures et des questions au cours de l'effort. Par exemple, pour un marathonien le niveau de l'échelle RPE Borg passe de 16/20 à 17/20 au cours du marathon au bout du 30ème kilomètre. Ce changement sur l'échelle RPE Borg se ressent pour les 8 marathoniens toujours entre le 26ème et 30ème kilomètre. Ainsi, nous allons effectuer l'analyse lors de la première moitié de la course et lors du dernier quart. Sur la Table 4.3, nous donnons l'ensemble des résultats de cette analyse.

Fréquence Cardiaque à la première moitié de la course								
Coureurs	Cédric	Dylan	Frédéric	Pascal	Pierre-Arnaud	Pierre-Louis	René	Sébastien
h_{min}	0.22691	0.22262	0.26428	0.071077	0.10657	0.64552	-0.14703	-0.41232
c_1	0.7299	0.40541	0.52777	0.53413	0.39737	0.60129	0.58412	0.3196
c_2	-0.0056098	-0.030165	-0.035252	-0.073762	-0.11421	-0.038191	-0.063816	-0.12546
Fréquence Cardiaque au dernier quart de la course								
Coureurs	Cédric	Dylan	Frédéric	Pascal	Pierre-Arnaud	Pierre-Louis	René	Sébastien
h_{min}	-0.17963	0.18348	0.32993	-0.11973	-0.16021	-0.14597	0.3072	-0.6191
c_1	0.97574	0.40433	0.76657	0.78698	0.75119	0.66218	0.39565	0.46519
c_2	-0.07382	-0.043562	-0.29154	-0.13257	-0.029094	-0.10967	-0.0082882	-0.23666

Tableau 4.3: Tableaux des différents paramètres pour le 1-spectre de la fréquence cardiaque au cours de la course pour comparer le début et la fin du marathon. Les valeurs des paramètres du spectre changent au cours de la course

De la même manière que précédemment, il est représenté sur la figure 4.10 une classification (h_{min}, c_1) et sur la figure 4.11 une classification (h_{min}, c_2) des différentes courses.

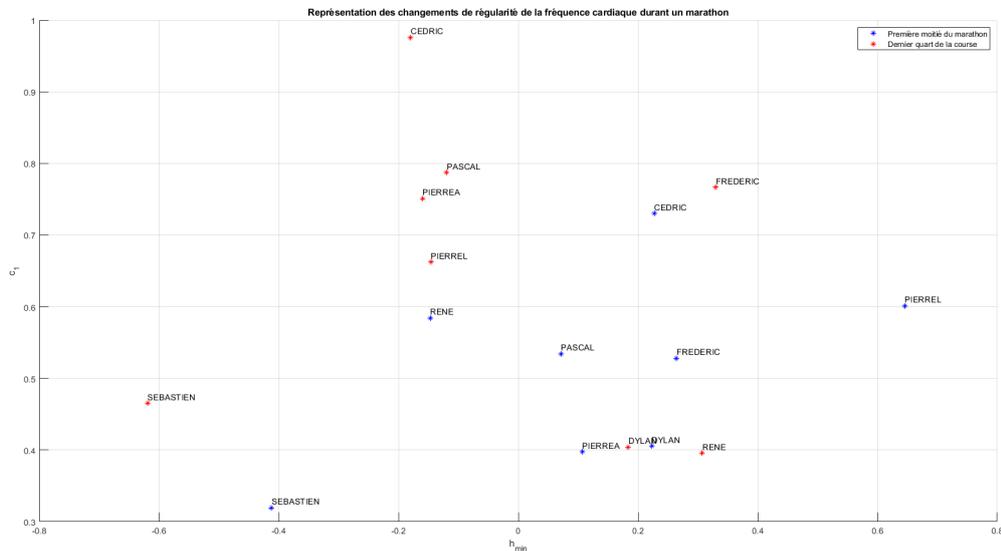


Figure 4.10: Représentation du couple (h_{min}, c_1) au cours de la course sur la fréquence cardiaque des marathoniens afin d'observer des changements sur les spectres au cours de la course. Les changements des paramètres du spectre de René sont différents par rapports aux autres marathoniens. Cela peut s'expliquer par le fait qu'il est le moins expérimenté, a couru plus longtemps sur un régime de course différents des autres et qu'il a subit moins d'effort durant la course

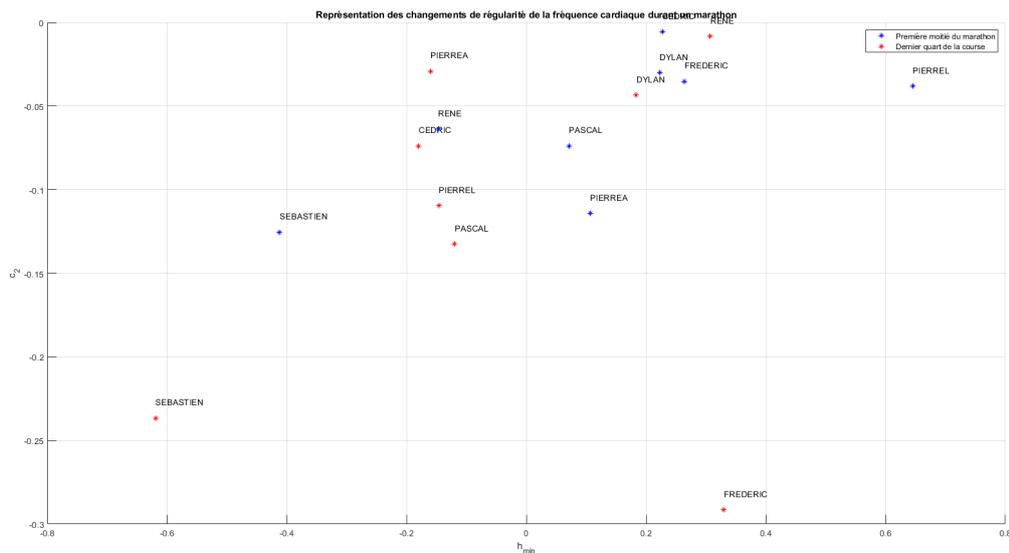


Figure 4.11: Représentation du couple (h_{min}, c_2) au cours de la course sur la fréquence cardiaque des marathoniens afin d'observer des changements sur les spectres au cours de la course

Dans l'ensemble, il est possible d'observer un changement sur l'estimation du 1-spectre de la fréquence cardiaque entre le début et la fin de la course des marathoniens. Cependant, il est moindre sur Sébastien qui est le coureur le plus expérimenté et professionnel. L'interprétation physiologique possible sur ces résultats est la fatigue et la gêne que les différents marathoniens ont commencé à rencontrer au bout du 30ème kilomètre de la course. Par ailleurs, les évolutions se font presque toutes de la même manière sauf pour René qui est le coureur le moins expérimenté de la course avec un régime d'effort différent puisque plus lent avec un temps de course pour lui qui a été plus long que les autres. Nous continuons l'analyse des données physiologiques avec la vitesse et la cadence.

4.4 Analyse Multifractale de la cadence

Dans la même perspective que précédemment, nous allons d'abord déterminer s'il existe des valeurs de p telles que la cadence appartient à l'espace $H^{s,p}(\mathbb{R})$ pour $s > 0$. Ainsi, on représente sur la figure 4.12 un exemple de fonction d'échelle ondelettes pour la cadence d'un marathonien.

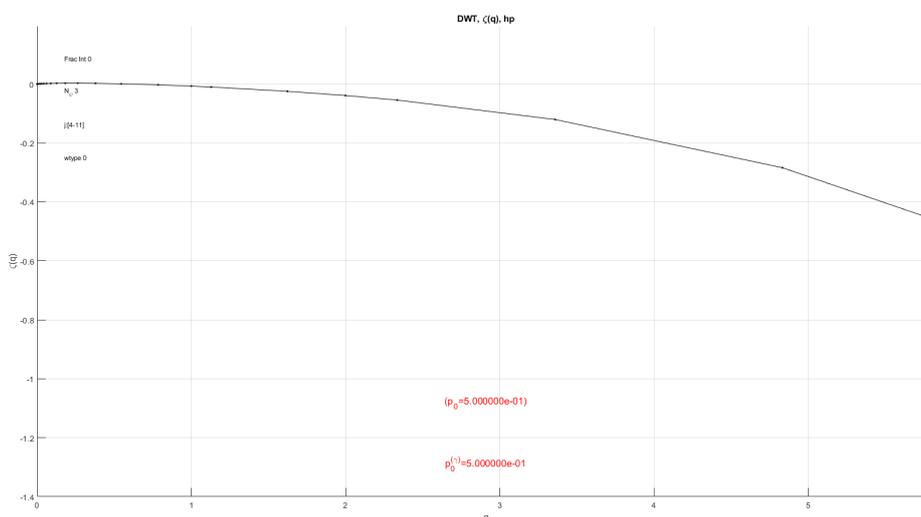


Figure 4.12: Représentation de la fonction d'échelle basée sur les coefficients d'ondelettes de la cadence pour un marathonien où $\xi_f(p) < 0$ pour tout $p > 0$. Il n'est pas possible de calculer de p -leaders

Dans l'ensemble des résultats sur la cadence avec tous les marathoniens, on peut observer que la fonction d'échelle est toujours strictement négative pour toute valeur

de $p > 0$. Ainsi, il n'est pas possible de calculer de p -spectre contrairement à la fréquence cardiaque qui a des trajectoires plus régulières. Cependant, il est possible d'effectuer une intégrée fractionnaire d'ordre 1 (4.2) afin de rendre le signal plus régulier et reprendre l'analyse à partir des coefficients dominants. Sur les figures 4.13, on représente l'estimation de la fonction d'échelle et du spectre multifractal pour l'intégrée fractionnaire d'ordre 1 (notons qu'effectuer une intégrée fractionnaire d'ordre 1 revient à considérer une primitive du signal) de la cadence.

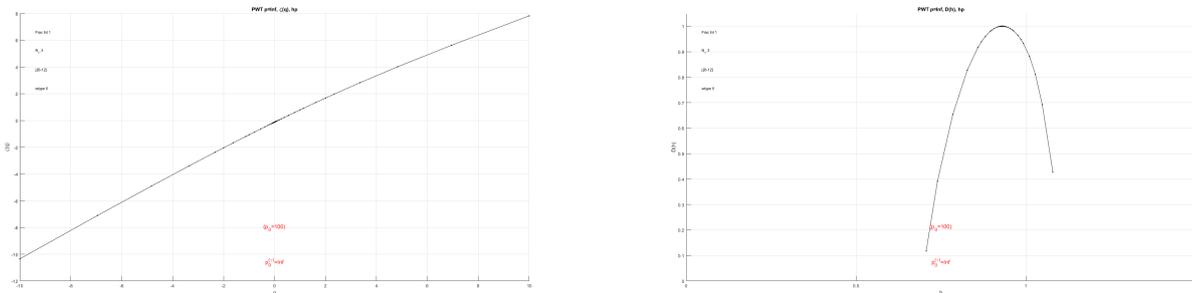


Figure 4.13: Représentation de la fonction d'échelle basée sur les leaders (à gauche) et le spectre (à droite) pour la primitive de la cadence d'un marathonien

On regroupe sur la Table 4.4 les différents résultats pour l'analyse de la cadence des marathonien.

Primitive de la Cadence								
Coureurs	Cédric	Dylan	Frédéric	Pascal	Pierre-Arnaud	Pierre-Louis	René	Sébastien
h_{min}	0.79233	0.73374	0.72383	0.68033	0.60777	0.68915	0.87731	0.73855
c_1	0.97441	0.89747	0.85601	0.82032	0.93991	0.93066	1.018	0.89158
c_2	-0.010829	-0.0073763	0.017227	0.0032935	-0.021764	-0.03074	0.054956	0.014977

Tableau 4.4: Tableaux des différents paramètres pour le spectre de la primitive de la cadence afin de comparer les marathonien. Les valeurs de h_{min} et c_1 restent relativement proches entre les marathonien

On représente une classification (h_{min}, c_1) sur la figure 4.14 où on peut y observer que les valeurs de h_{min} et c_1 sont relativement proches. Pour la cadence h_{min} est proche de 0,75 et c_1 de 0,9.

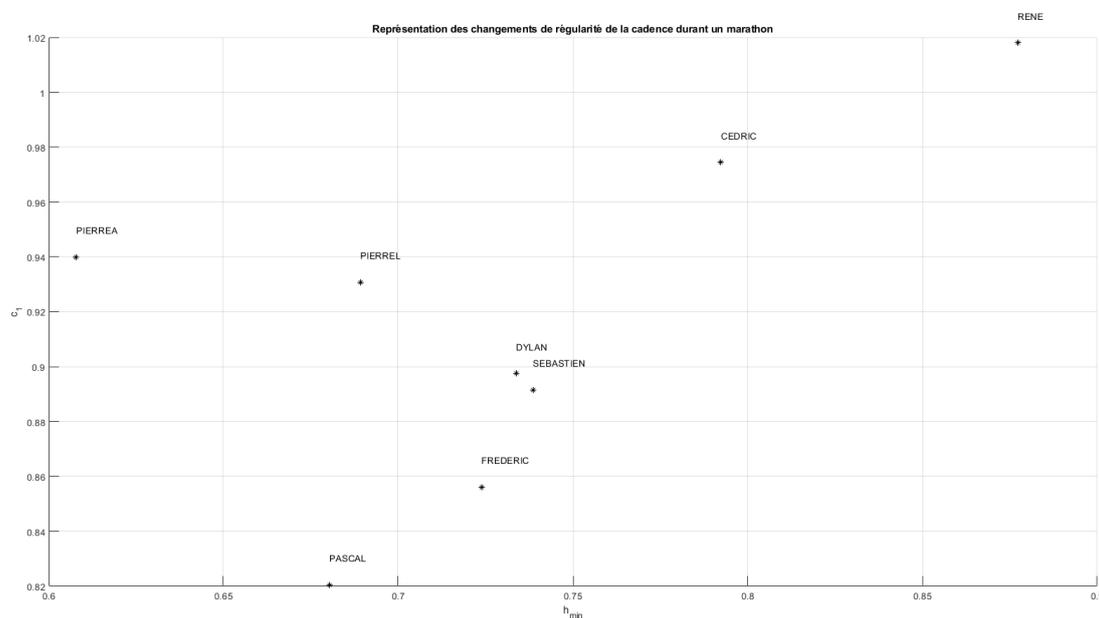


Figure 4.14: Représentation du couple (h_{min}, c_1) sur la primitive de la cadence des marathoniens dans le plan. René se détache une nouvelle fois des autres marathoniens par son manque d'expérience et le régime de course très différents des autres

On peut à nouveau observer sur la figure 4.14 que René est à nouveau éloigné par rapport aux autres marathoniens. Nous allons effectuer dans le cas de la cadence la même analyse que lors de la fréquence cardiaque pour les deux temps de la course (première moitié et dernier quart). De manière plus précise, on représente sur le tableau 4.5, les différentes valeurs h_{min} et c_1 entre la première moitié et le dernier quart du marathon.

Primitive de la cadence sur la première moitié								
Coueurs	Cédric	Dylan	Frédéric	Pascal	Pierre-Arnaud	Pierre-Louis	René	Sébastien
h_{min}	0.76885	0.76623	0.76409	0.65903	0.6983	0.83467	0.75321	0.88164
c_1	1.0388	0.98161	0.85139	0.82032	0.94392	1.0266	1.0008	0.89773
Primitive de la cadence sur le dernier quart								
Coueurs	Cédric	Dylan	Frédéric	Pascal	Pierre-Arnaud	Pierre-Louis	René	Sébastien
h_{min}	0.76456	0.71464	0.58655	0.60995	0.82541	0.7612	0.62289	0.60504
c_1	0.96372	0.96593	0.83686	0.80559	0.97024	1.0324	1.0021	0.7932

Tableau 4.5: Tableaux des différents paramètres pour le spectre de la primitive de la cadence au cours de la course afin de comparer les marathoniens. Les paramètres ne changent relativement pas pour c_1 mais pour h_{min} un léger changement se produit au cours de la course

On peut observer que lors de la première moitié de la course, les coureurs ont des valeurs de h_{min} et c_1 assez proches. On représente sur un plan les points (h_{min}, c_1) au cours du marathon pour la vitesse et la cadence sur la figure 4.15.

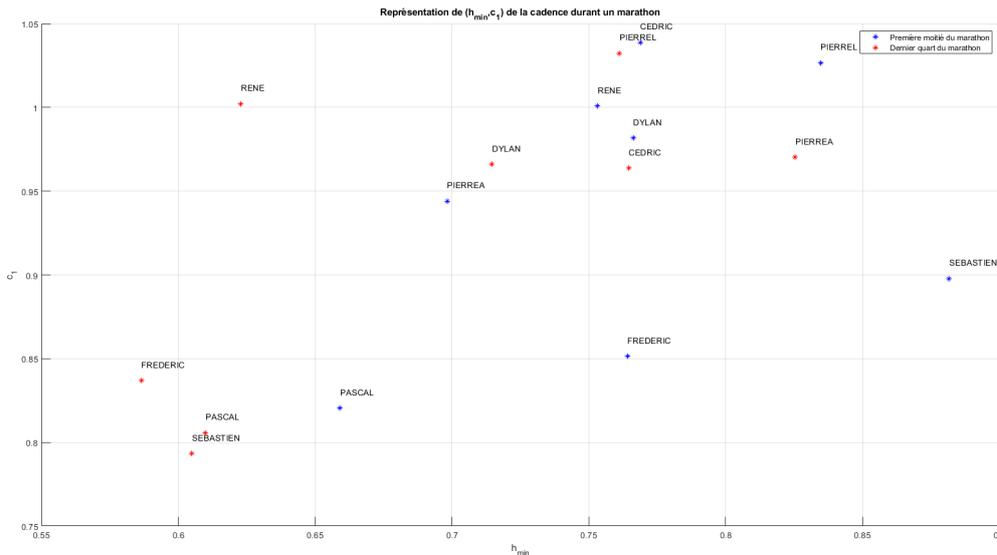


Figure 4.15: Représentation du couple (h_{min}, c_1) sur la primitive de la cadence au cours du marathon dans le plan afin de les classifier

Lors du dernier quart les paramètres (h_{min}, c_1) sont plus disparates entre les différents marathoniens avec une diminution de la valeur du h_{min} .

4.5 Analyse bivariée multifractale Fréquence-Cadence

La première formule pour donner un formalisme multifractal a été énoncée historiquement dans les années 1980 par U. Frisch et G. Parisi [56] puis en 1990, C. Meneveau, K. Sreenivasan, P. Kailasnath et M. Fan [87] afin d’interpréter certaines observations de la turbulence pleinement développée dans le cas bivarié. Dans le cas multivarié, il faut attendre 2019 pour qu’une formulation du formalisme bivarié soit proposée par M. Ben Slimane en utilisant des coefficients dominants, ce qui a permis d’obtenir des résultats génériques dans des Besov [25, 26]. En plus des travaux de Ben Slimane, un formalisme multivarié a été proposé par P. Abry, S. Jaffard, R. Leonarduzzi, C. Melot et H. Wendt dans [4] puis d’autres travaux de P. Abry, S. Jaffard, R. Leonarduzzi, S. Seuret et H.

Wendt dans [6, 7] dans lesquels sont obtenus des résultats mathématiques généraux concernant l'analyse multivariée ainsi que l'analyse de modèle spécifiques (cascades multiplicatives, couples de processus,...). Un spectre bivarié numériquement calculable est défini de la manière suivante.

Définition 4.5.1. Soient $f_1, \dots, f_n \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R}^d)$ et $q = (q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{R}^n$, on définit les fonctions de q -structures multivariées au sens des leaders pour tout $j \in \mathbb{N}$ par,

$$S_{f_1, \dots, f_n}(q, j) = 2^{-dj} \sum_{k=0}^{2^{jd}-1} |l_{j,k}^{(f_1)}|^{q_1} \dots |l_{j,k}^{(f_n)}|^{q_n}$$

où $l_{j,k}^{(f_i)}$ sont les coefficients d'ondelettes leaders pour la fonction f_i . Les fonctions d'échelles multivariées au sens des leaders sont définies par,

$$\zeta_{f_1, \dots, f_n}(q) = \liminf_{j \rightarrow +\infty} \frac{|\log S_{f_1, \dots, f_n}(q, j)|}{\log(2^{-j})}.$$

On définit le spectre de Legendre multivarié pour tout $h \in \mathbb{R}^n$ par,

$$L_{f_1, \dots, f_n}(h) = \inf_{q \in \mathbb{R}^n} \{q_1 h_1 + \dots + q_n h_n - \zeta_{f_1, \dots, f_n}(q) + d\}$$

Pour illustrer ces définitions sur un exemple, on prend un coureur marathonien (Pierre-Louis) et on note sa fréquence cardiaque f_f et sa cadence f_c . Dans un premier temps, on représente le calcul numérique avec une intégrée fractionnaire d'ordre 1 de la fonction d'échelle ζ_{f_f, f_c} et du spectre multifractal bivarié L_{f_f, f_c} entre la fréquence cardiaque et la cadence d'un marathonien sur la figure 4.16.

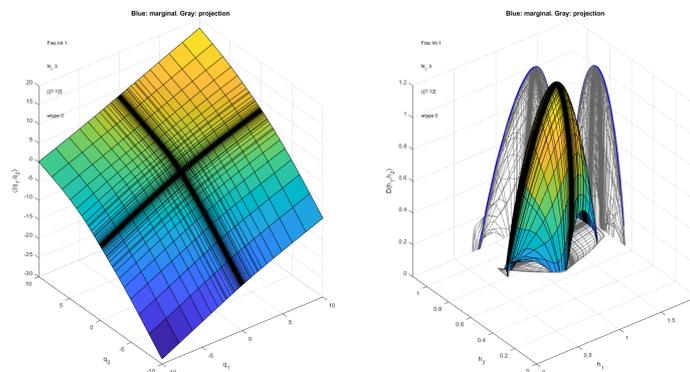


Figure 4.16: Représentation de la fonction d'échelle et du spectre bivarié de la primitive de la fréquence cardiaque et la cadence d'un marathonien (à gauche : la fonction d'échelle bivariée, à droite : le spectre multifractal bivarié)

Dans le cas de la figure 4.16, le spectre bivarié obtenu est très étalé et ne permet pas de mettre en évidence des corrélations significatives entre h_1 et h_2 . On peut observer une autre représentation zoomée du même spectre multifractal bivarié de la fréquence cardiaque et de la cadence sur la figure 4.17 et la représentation du spectre multifractal pour la primitive de la fréquence cardiaque puis de la cadence sur la figure 4.18.

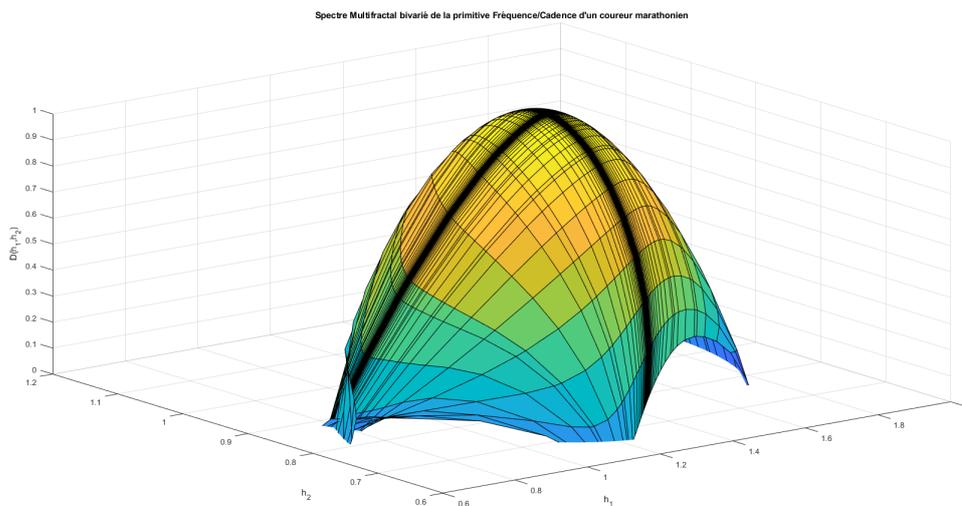


Figure 4.17: Représentation du spectre bivarié de la primitive de la fréquence cardiaque et la cadence d'un marathonien

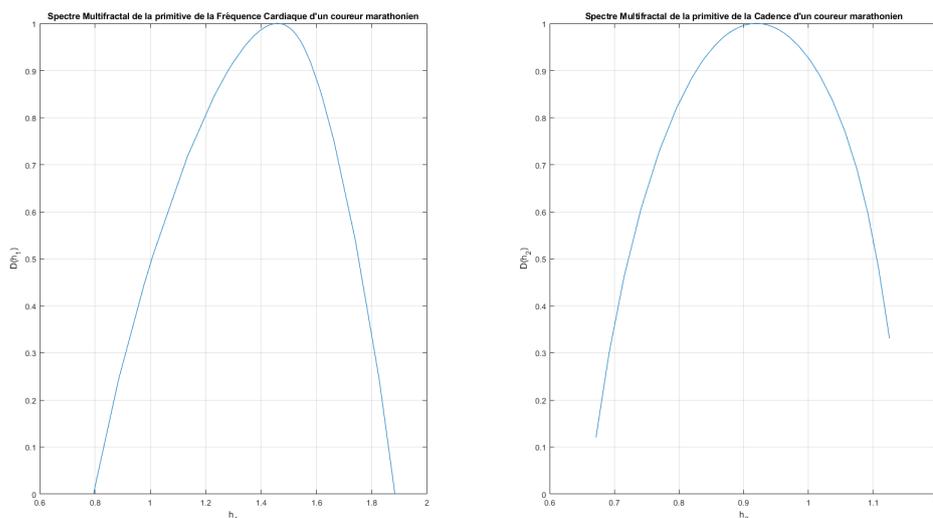


Figure 4.18: Représentation du spectre multifractal de la primitive de la fréquence cardiaque (à gauche) et de la cadence (à droite) d'un marathonien

Sur la figure 4.18, il n'est pas évident d'observer des relations entre les spectres monovariés et le spectre bivarié. Dans ce cas, il peut être intéressant d'approfondir l'étude des spectres et de tester une hypothèse d'indépendance des paramètres de multifractalité. En effet, l'objectif sera de comparer les spectres à ce qu'on peut retrouver dans différents exemples de processus mathématiques additifs ou multiplicatifs afin de réduire l'ensemble des processus qui peuvent servir de modèle dans l'étude de ces signaux. Pour la première formule qu'on retrouve sur certains "processus additifs" indépendants (du type Lévy ou séries aléatoires d'ondelettes), la formule est $D_{f_1, f_2}(h_1, h_2) = \min\{D_{f_1}(h_1), D_{f_2}(h_2)\}$ tandis que pour certains "processus multiplicatifs" indépendants (cascades de Bernoulli), on a $D_{f_1, f_2}(h_1, h_2) = D_{f_1}(h_1) + D_{f_2}(h_2) - 1$. Dans le cas du spectre bivarié fréquence cardiaque et cadence, on retrouve sur la figure 4.19, une comparaison des formules et spectres.

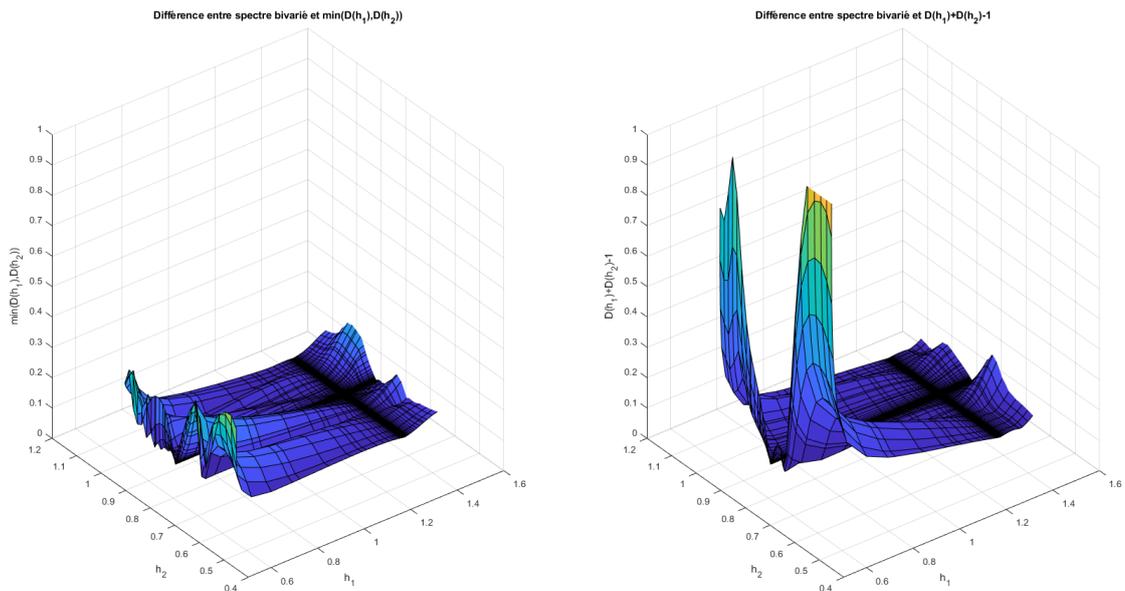


Figure 4.19: Représentation de la différence du spectre bivarié et des formules qui relient les spectres pour les comparer. Le graphe de gauche est plus proche d'un plateau nul que le graphe de droite ce qui permet de suggérer que la formule $D_{f_1, f_2}(h_1, h_2) = \min\{D_{f_1}(h_1), D_{f_2}(h_2)\}$ est la plus pertinente pour ce modèle

Au vu des différences que l'on peut observer, il semble que les spectres bivariés entre la fréquence cardiaque et la cadence sont reliés par la formule qu'on retrouve pour des processus additifs. Cette étude suggère que des processus de type additif seraient donc plus pertinents pour modéliser les données physiologiques. Cependant,

pour prolonger l'étude du spectre, nous pouvons regarder l'amplitude définie par le rapport entre la vitesse et la cadence afin d'avoir un signal plus régulier pour en faire l'analyse et tenter d'effectuer une classification plus fine dessus.

4.6 Conclusion et perspective

L'analyse des différentes phases de la course permet de tirer des conclusions intéressantes pour aider les coureurs à progresser : Ainsi l'exposant H_{min} bouge très peu pour des coureurs expérimentés, mais diminue en fin de course pour les autres, dénotant ainsi une désorganisation dans les efforts de ces coureurs. On voit aussi que la fréquence cardiaque seule ne fournit pas des informations aussi riches que quand elle est considérée conjointement avec la cadence. Cela rejoint les conclusions des physiologistes pour lesquels la fréquence cardiaque n'est pas un facteur discriminant de la fatigue, contrairement à la cadence. Un enjeu est de pouvoir utiliser ces paramètres nouveaux issus de l'analyse multifractale au sein d'algorithmes d'IA permettant de mieux accompagner la progression des coureurs amateurs.

Les différents spectres multifractals obtenus lors de ce chapitre sont des spectres de Legendre concaves, or une perspective est d'utiliser une nouvelle notion de spectre non-concave permettant d'obtenir de meilleures estimations sur le spectre. Une première idée qui a été envisagée à cet égard est de remplacer les fonctions d'échelle leaders (qui sont nécessairement concaves par construction) directement par un spectre de grande déviation dominant défini de la manière suivante [16, 95].

Définition 4.6.1 (Spectre de Grande Déviation Dominant). *Soit $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$, on note pour tout $0 \leq \alpha < \beta$ l'ensemble,*

$$M_j(\alpha, \beta) = \text{Card}\{(d_\lambda)_{\lambda \in \Lambda_j} : 2^{-\beta j} \leq d_\lambda \leq 2^{-\alpha j}\}, j \in \mathbb{N}$$

Le spectre de grande déviation de f est donné par

$$\mu_f(h) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{j \rightarrow +\infty} \frac{\log(M_j(h - \varepsilon, h + \varepsilon))}{\log(2^{dj})}, h \in \mathbb{R}_+^*.$$

L'idée derrière cette définition, c'est qu'il y a $2^{\mu_f(h)j}$ coefficients dominants de taille 2^{-hj} . L'intérêt majeur est que si $\mu_f(h)$ n'est pas concave, alors le spectre de grande

déviations dominant conduit à une estimation plus fine que le spectre de Legendre

$$D_f(H) \leq \mu_f(H) \leq L_f(H), \quad h \in \mathbb{R}.$$

Le défaut technique du spectre de grande déviation dominant est la simulation numérique pour estimer la double limite dans la définition. Ainsi, on pourrait utiliser une méthode différente à l'intersection du spectre de grande déviation dominant et du spectre de Legendre. Ce nouveau spectre est basé sur des quantités qui sont des quantiles statistiques et c'est pourquoi nous appelons le spectre qu'il donne le spectre quantile dominant. Pour la définition, on suppose que le spectre de grande déviation dominant admet un unique maximum au point $h = h_{med}$ tel que $\mu_f(h_{med}) = d$.

Définition 4.6.2 (Spectre Quantile Dominant). *Soit $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$, on note pour tout $h \in \mathbb{R}_+^*$*

- si $h < h_{med}$,

$$M_j(h) = \text{Card}\{(d_\lambda)_{\lambda \in \Lambda_j} : \exists C_H > 0, d_\lambda \geq C_H 2^{-jH}\}, \quad j \in \mathbb{N};$$

- si $h > h_{med}$,

$$M_j(h) = \text{Card}\{(d_\lambda)_{\lambda \in \Lambda_j} : \exists C_H > 0, d_\lambda \leq C_H 2^{-jH}\}, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Le spectre quantile dominant de f est donné par

$$Q_f(h) = \limsup_{j \rightarrow +\infty} \frac{\log(M_j(h))}{\log(2^{dj})}, \quad h \in \mathbb{R}_+^*.$$

A partir de ces nouvelles notions, il peut être pertinent après la thèse d'étendre les estimations des différents spectres.

Références

- [1] P. Abry, H. Wendt, H. Helgason, P. Goncalves, E. Pereira, C. Gharib, P. Gaucherand, and M. Doret. Methodology for multifractal analysis of heart rate variability: from lf/hf ratio to wavelet leaders. *Annu Int Conf IEEE Eng Med Biol Soc*, pages 106–109, 2010.
- [2] P. Abry, S. Jaffard, R. Leonarduzzi, C. Melot, and H. Wendt. Multifractal analysis based on p -exponents and lacunarity exponents. *Recent Developments in Fractals and Related Fields*, pages 279–313, 2015.
- [3] P. Abry, S. Roux, H. Wendt, P. Messier, A. Klein, N. Tremblay, P. Borgnat, S. Jaffard, B. Vedel, J. Coddington, and L.A. Daffner. Multiscale anisotropic texture analysis and classification of photographic prints: Art scholarship meets image processing algorithms. *IEEE Signal Processing Magazine*, pages 18–27, 2015.
- [4] P. Abry, S. Jaffard, R. Leonarduzzi, C. Melot, and H. Wendt. New exponents for pointwise singularity classification. *Birkhäuser*, 2017.
- [5] P. Abry, J. Spilka, R. Leonarduzzi, V. Chudáček, N. Pustelnik, and M. Doret. Sparse learning for intrapartum fetal heart rate analysis. *Biomedical Physics and Engineering Express*, 4:2018, 2018.
- [6] P. Abry, S. Jaffard, R. Leonarduzzi, S. Seuret, and H. Wendt. Multivariate multifractal analysis. *Applied Comput. Harmonic Analysis* 46, 2019.
- [7] P. Abry, S. Jaffard, R. Leonarduzzi, S. Seuret, and H. Wendt. Multifractal formalisms for multivariate analysis. *Proceedings of the Royal Society A* 2229, 2019.
- [8] E. Amo, I. Bhourri, and J. Fernández-Sánchez. A note on the Hausdorff dimension of general sums of pulses graphs. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, pages 110–123, 2011.

- [9] J-P. Antoine, R. Murenzi, P. Vandergheynst, and S.T. Ali. *Two-Dimensional Wavelets and their Relatives*. Cambridge University Press, 2008.
- [10] A. Arneodo, F. Argoul, E. Bacry, J. Elezgaray, and J.F. Muzzy. Ondelettes multifractales et turbulence. *Diderot Éditeur Paris*, 1995.
- [11] A. Arneodo, N. Decoster, and S.G. Roux. Ondelettes multifractales et turbulence. *Eur. Phys. J. B*, vol.15, no3, 2000.
- [12] S. Aubry and S. Jaffard. Random wavelet series. *Mathematical Physics*, pages 483–514, 2002.
- [13] A. Ayache. Lower bound for local oscillations of Hermite processes. *Stochastic Processes and their Applications, Elsevier*, vol. 130(8), pages 4593–4607, 2019.
- [14] S. Aziznejad and J. Fageot. Wavelet analysis of the Besov regularity of Lévy white noises. *Electronic Journal of Probability*, pages 1–38, 2020.
- [15] P. Balança. Fine regularity of Lévy processes and linear (multi)fractional stable motion. *Electron. J. Probab.* 19, pages 1–37, 2014.
- [16] J. Barral and P. Gonçalves. On the estimation of the large deviations spectrum. *Journal of Statistical Physics*, pages 1256–1283, 2011.
- [17] J. Barral and S. Seuret. A localized Jarnik-Besicovich theorem. *Adv. Math.*, pages 3191–3215, 2011.
- [18] J. Barral and S. Seuret. Besov spaces in multifractal environment, and the Frisch-Parisi conjecture. *Preprint*, 2021.
- [19] J. Barral, N. Fournier, S. Jaffard, and S. Seuret. A pure jump Markov process with a random singularity spectrum. *Ann. Proba.*, pages 1924–1946, 2010.
- [20] F. Bayart and P. Heurteaux. Multifractal analysis of the divergence of Fourier series. *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure, Série 4, Tome 45*, pages 927–946, 2012.
- [21] M. Ben Abid. Existence and Hölder regularity of pulse functions. *Colloquium Mathematicum 116*, pages 217–225, 2009.
- [22] B. Ben Slimane. *Étude du formalisme multifractal pour les fonctions*. PhD thesis, ENPC, 1996.

-
- [23] M. Ben Slimane. Wavelet characterizations of multi-directional regularity. *Colloquium Mathematicum* 116, pages 245–256, 2012.
- [24] M. Ben Slimane, I. Ben Omrane, M. Ben Abid, B. Halouani, and F. Alshormani. Directional multifractal analysis in the l^p setting. *Journal of Function Spaces*, pages 1–12, 2019.
- [25] M. Ben Slimane, I. Omrane, and B. Halouani. On the Baire generic validity of the multifractal formalism in Besov and Sobolev spaces. *Journal of Function Spaces*, 2019.
- [26] M. Ben Slimane, M. Ben Abid, I. Omrane, and B. Halouani. Multivariate multifractal formalism for simultaneous pointwise $(t_{u_i}^{p_i})_i$ regularities. *Applicable Analysis*, 2021.
- [27] V. Beresnevich and S. Velani. A mass transference principle and the Duffin–Schaeffer conjecture for Hausdorff measures. *Annals of Mathematics*, pages 971–992, 2006.
- [28] J. Bertoin. *Lévy Processes*. Cambridge university press, 1998.
- [29] H. Biermé and C. Lacaux. Hölder regularity for operator scaling stable random fields. *Stochastic processes and their applications*, pages 2222–2248, 2009.
- [30] H. Biermé and C. Lacaux. Fast and exact synthesis of some operator scaling gaussian random fields. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, pages 293–320, 2020.
- [31] H. Biermé, M.M. Meerschaert, and H-P. Scheffler. Operator scaling stable random fields. *Stochastic Processus and their Applications*, pages 312–332, 2007.
- [32] H. Biermé, C. Lacaux, and Y. Xiao. Hitting probabilities and the Hausdorff dimension of the inverse images of anisotropic Gaussian random fields. *Bull. London Math. Soc.* 41, pages 253–273, 2009.
- [33] V.L. Billat, L. Mille-Hamard, Y. Meyer, and E. Wesfreid. Detection of changes in the fractal scaling of heart rate and speed in a marathon race. *Physica A*, 2009.
- [34] D. M. Bramble and D. E. Lieberman. Endurance running and the evolution of homo. *Nature*, 432(7015):345–352, 2004.

- [35] L. Breiman. *Probability*. SIAM, 1992.
- [36] A.P. Calderon and A. Zygmund. Local properties of solutions of elliptic partial differential equations. *Studia Math.* 20, page 171–223, 1961.
- [37] A. Cauchy. *Cours d'Analyse*. Ecole royale polytechnique, 1821.
- [38] R. Cioczek-Georges and B. Mandelbrot. A class of micropulses and antipersistent fractional Brownian motion. *Stochastic processes and their applications*, pages 1–18, nov 1995.
- [39] R. Cioczek-Georges and B. Mandelbrot. Alternative micropulses and fractional brownian motion. *Stochastic processes and their applications*, pages 143–152, nov 1996.
- [40] R. Cioczek-Georges, B. Mandelbrot, G. Samorodnitsky, and M.S. Taqqu. Stable fractal sums of pulses : the cylindrical case. *Bernoulli*, pages 201–216, sep 1995.
- [41] K. Damien and S. Nicolay. Generalized pointwise Hölder spaces defined via admissible sequences. *Hindawi Publishing Corporation*, 2018.
- [42] I. Daubechies. Orthonormal bases of compactly supported wavelets. *Comm. Pure and App. Math.* 41, page 909–996, 1988.
- [43] I. Daubechies. *Ten Lectures on Wavelets*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1992.
- [44] L. Daw and G. Kerchev. Fractal dimensions of the Rosenblatt process. *preprint*, page 909–996, 2021.
- [45] Y. Demichel. *Analyse fractale d'une famille de fonctions aléatoire : les fonctions de bosses*. PhD thesis, Université Blaise Pascal (France), 2006.
- [46] Y. Demichel and K. Falconer. The Hausdorff dimension of pulse-sum graphs. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, pages 143–145, 2007.
- [47] Y. Demichel and C. Tricot. Analysis of the fractal sum of pulses. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, pages 355–370, 2006.
- [48] M.M. Dodson, M.V. Melian, D. Pestana, and S.L. Vélani. Patterson measure and ubiquity. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math.*, pages 37–60, 1995.

- [49] A. Dvoretzky. On covering the circle by randomly placed arc. *Pro. Nat. Acad. Sci. USA* 42, pages 199–203, 1956.
- [50] A.F. Esoeb Ihlen. Introduction to multifractal detrended fluctuation analysis in matlab. *Frontier in Physiology*, pages 84–88, 2012.
- [51] C. Esser and S. Jaffard. Divergence of wavelet series: A multifractal analysis. *Advances in Mathematics* 328, pages 927–946, 2017.
- [52] J. Fageot, A. Fallah, and M. Unser. Multidimensional Lévy white noise in weighted Besov spaces. *Stochastic Processes and their Applications*, pages 1599–21621, 2017.
- [53] J. Fageot, M. Unser, and J.P. Ward. On the Besov regularity of periodic Lévy noises. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, pages 21–36, 2017.
- [54] A.H. Fan and J.P. Kahane. Rareté des intervalles recouvrant un point dans un recouvrement aléatoire. *Ann. I. H. Poincaré*, pages 453–466, 1993.
- [55] A.H. Fan and J. Wu. On the covering by small random intervals. *Ann. I. H. Poincaré*, pages 125–131, 2004.
- [56] U. Frisch and G. Parisi. On the singularity structure of fully developed turbulence. *Turbulence and predictability in geophysical fluid dynamics and climate dynamics*, pages 84–88, 1985.
- [57] Y. Gagne. *Etude expérimentale de l’intermittence et des singularités dans le plan complexe en turbulence pleinement développée*. PhD thesis, Université Joseph Fourier (France), 1987.
- [58] A.L. Goldberger. Is the normal heartbeat chaotic or homeostatic ? *News Physiol. Sci.* 6, 1991.
- [59] A. Grossmann, R. Kronland-Martinet, and J. Morlet. Reading and understanding continuous wavelet transforms. *Wavelets*, 2002.
- [60] S. Jaffard. *Exposants de Hölder en des points donnés et coefficients d’ondelettes*. C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., 1989.
- [61] S. Jaffard. Pointwise smoothness, two microlocalization and wavelet coefficients. *Publicacions Matemàtiques Vol.35*, pages 155–168, 1991.

- [62] S. Jaffard. The spectrum of singularities of Riemann's function. *Rev. Mat. Iberoamericana* 12, pages 441–460, 1996.
- [63] S. Jaffard. The multifractal nature of Lévy processes. *Probability Theory and Related Fields*, page 207–227, 1999.
- [64] S. Jaffard. On lacunary wavelet series. *The Annals of Applied Probability*, pages 313–329, 2000.
- [65] S. Jaffard. On the Frisch-Parisi conjecture. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, page 525–552, 2000.
- [66] S. Jaffard. On Davenport expansions. *Fractal Geometry and Applications A Jubilee of Benoit Mandelbrot*, page 273–303, 2004.
- [67] S. Jaffard. Wavelet techniques in multifractal analysis. *Proc. Symposia in Pure Mathematics*, vol. 72(2), pages 91–152, 2004.
- [68] S. Jaffard. Wavelet techniques for pointwise regularity. *Ann. Fac. Sci. Toulouse* 15 (1), pages 3–33, 2006.
- [69] S. Jaffard. Pointwise regularity associated with function spaces and multifractal analysis. *Approximation and Probability Vol.72*, pages 93–110, 2006.
- [70] S. Jaffard and B. Martin. Multifractal analysis of the Brjuno function. *Invent. Math.* 212, page 109–132, 2018.
- [71] S. Jaffard and C. Melot. Wavelet analysis of fractal boundaries. *Comm. Math. Phys.* 258 (3), pages 513–565, 2005.
- [72] S. Jaffard and S. Seuret. *B. Mandelbrot, père de la géométrie fractale*. SMF, 2013.
- [73] S. Jaffard, Y. Meyer, and R.D. Ryan. *Wavelets Tools for Science and Technology*. SIAM, 1987.
- [74] S. Jaffard, Y. Meyer, and R.D. Ryan. *Wavelet Methods for Pointwise Regularity and Local Oscillations of Functions*. AMS, 1996.
- [75] S. Jaffard, C. Melot, R. Leonarduzzi, H. Wendt, S.G. Roux, M.E. Torres, and P. Abry. p -exponent and p -leaders, part i: Negative pointwise regularity. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications Vol.448*, pages 300–318, 2016.

- [76] J. W. Kantelhardt, Koscielny-Bunde, Rego E., H. A. A., S. Havlin, and A. Bunde. Detecting long-range correlation with detrended fluctuation analysis. *Physica A* 295, page 441–454, 2001.
- [77] J. W. Kantelhardt, S. A. Zschiegner, E. Koscielny-Bunde, S. Havlin, A. Bunde, and H. E. Stanley. Multifractal detrended fluctuation analysis of nonstationary time series. *Physica A* 316, page 87–114, 2002.
- [78] A.N. Kolmogorov. The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds' numbers. *Doklady Akademiai Nauk SSSR, vol.30*, pages 301–305, 1941.
- [79] R. Leonarduzzi, H. Wendt, P. Abry, S. Jaffard, C. Melot, S.G. Roux, and M.E. Torres. p-exponent and p-leaders, part ii: Multifractal analysis. relations to detrended fluctuation analysis. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications Vol.448*, pages 319–339, 2016.
- [80] D. E. Lieberman and D. M. Bramble. The evolution of marathon running: capabilities in humans. *Sports Medicine*, 37(4-5):288–290, 2007.
- [81] L. Looseveldt. *About some notions of regularity for functions*. PhD thesis, Université de Liège, 2021.
- [82] L. Loosveldt and S. Nicolay. Generalized t_u^p spaces: On the trail of Calderón and Zygmund. *Institute of Mathematics, Polish Academy of Sciences*, 2020.
- [83] S. Lovejoy and B. Mandelbrot. Fractal properties of rain, and a fractal model. *Tellus*, pages 209–232, mai 1985.
- [84] S. Mallat. *A Wavelet tour of signal processing*. London-NewYork: Academic Press, 1998.
- [85] B. Mandelbrot. *Les objets fractals*. Champs Sciences, 1975.
- [86] B. Mandelbrot. Introduction to fractal sums of pulses. *Springer*, pages 469–476, 1995.
- [87] C. Meneveau, K. Sreenivasan, P. Kailasnath, and M. Fan. Joint multifractal measures: Theory and applications to turbulence. *Phys. Rev. A* 41, pages 217–230, 1990.

- [88] Y. Meyer. *Principe d'incertitude, bases Hilbertiennes et algèbres d'opérateurs*. Séminaire Bourbaki n.662, 1987.
- [89] Y. Meyer. *Ondelettes et opérateurs*. Hermann, 1990.
- [90] J. Niels and L. Schilling. Lévy-type processes and pseudodifferential operators. *Lévy Processes*, pages 139–168, 2001.
- [91] D. S. T. Pedoe. Marathon medical support historical perspectives: ‘from cradle to averting the grave’. *Sports Medicine*, 37(4-5):291–293, 2007.
- [92] V. Perrier and C. Basdevant. Besov norms in terms of the continuous wavelet transform. application to structure functions. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences Vol.6*, pages 649–664, 1996.
- [93] J. Perrin. *Les Atomes*. CNRS Editions, 1950.
- [94] B. I. Rapoport. Metabolic factors limiting performance in marathon runners. *PLoS Computational Biology*, 6(10), 2010.
- [95] R.H. Riedi. Theory and applications of long range dependence. *Birkhäuser*, pages 625–717, 2003.
- [96] W. O. Roberts and B. J. Maron. Evidence for decreasing occurrence of sudden cardiac death associated with the marathon. *Journal of the American College of Cardiology*, 46(7):1373–1374, 2005.
- [97] G. Saës and S. Seuret. Multifractal analysis of sums of random pulses. *Preprint*, 2020.
- [98] R.L. Schilling. On Feller processes with sample paths in Besov spaces. *Math. Ann.*, pages 663–675, 1997.
- [99] S. Seuret and A. Ubis. Local l^2 -regularity of riemann fourier series. *Annales de l'Institut Fourier 67*, pages 2237–2264, 2017.
- [100] L.A. Shepp. Covering the circle with random arcs. *Israel J. Math.*, pages 328–345, 1972.
- [101] E.M. Stein. *Harmonic Analysis : Real-Variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals*. Princeton University Press, 1993.

-
- [102] P. D. Thompson and C. V. Venero. A history of medical reports on the boston marathon: 112 years and still running. *Medicine and Science in Sports and Exercise*, 41(6):1341–1348, 2009.
- [103] M. Unser. *An Introduction to Sparse Stochastic Processes*. Cambridge University Press, 2014.
- [104] F.G. Viens and A.B. Vizcarra. Supremum concentration inequality and modulus of continuity for sub-nth chaos processes. *Journal of Functional Analysis*, vol. 248, pages 1–26, 2007.
- [105] K. Weierstrass. On continuous functions of a real argument that do not have a well-defined differential quotient. *Mathematische werke, band II Mayer and Müller*, pages 71–74, 1895.
- [106] H. Wendt. *Contributions of Wavelet Leaders and Bootstrap to Multifractal Analysis: Images, Estimation Performance, Dependence Structure and Vanishing Moments. Confidence Intervals and Hypothesis Tests*. PhD thesis, Ecole Normale Supérieure de Lyon, 2008.
- [107] H. Wendt, P. Abry, K. Kiyono, J. Hayano, E. Watanabe, and Y. Yamamoto. Wavelet p-leader non gaussian multiscale expansions for heart rate variability analysis in congestive heart failure patients. *IEEE T. Biomedical Engineering*, 66(1):80–87, 2019.
- [108] E. Wesfreid, V. Billat, and Y. Meyer. Multifractal analysis of heartbeat time series in human races. *Appl. Comput. Harmon. Anal.* 18, 2005.

Liste des figures

1	Graphe d'une somme fractale de sauts pour $\lambda_n = n^{-1/2}$ et $w_n = n^{-5/4}$. . .	3
2	Graphes de sommes fractales de sauts pour $\lambda_n = n^{-\alpha}$ et $w_n = n^{-1}$ avec $\alpha \in \{0.2, 0.4, 0.8, 1.2\}$	4
3	Graphes de deux sommes fractales de pulses pour $\lambda_n = n^{-0.5}$ et $w_n = n^{-1}$ avec $K_1(x) = 1 - x $ et $K_2(x) = \cos(\pi x/2)^2$ pour tout $x \in [-1, 1]$	5
4	Graphes de sommes fractales de pulses pour $\lambda_n = n^{-0.5}$ et $w_n = n^{-1}$ avec $K_1(x) = \chi(2x - 1) - \chi(2x + 1)$ et une deuxième $K_2(x) = x \cos(\pi x/2)^2$ pour tout $x \in [-1, 1]$	5
5	Graphe d'une série lacunaire d'ondelettes avec $\alpha = 0.5$ et $\eta = 0.8$	14
6	Représentation des données physiologiques (fréquence cardiaque et cadence) nettoyées pour un coureur marathonien (le nombre de données est d'environ $N \simeq 100\ 000$)	16
7	Graph of a fractal sum of jumps for $\lambda_n = n^{-1/2}$ and $w_n = n^{-4/5}$	22
8	Graphs of fractal sums of jumps $\lambda_n = n^{-\alpha}$ and $w_n = n^{-1}$ with $\alpha \in \{0.2, 0.4, 0.8, 1.2\}$	23
9	Graphs of two fractal sums of pulses for $\lambda_n = n^{-0.5}$ and $w_n = n^{-1}$ with $K_1(x) = 1 - x $ and $K_2(x) = \cos(\pi x/2)^2$ for all $x \in [-1, 1]$	24
10	Fractal sums of pulses graphs for $\lambda_n = n^{-0.5}$ and $w_n = n^{-1}$ with $K_1(x) = \chi(2x - 1) - \chi(2x + 1)$ and a second $K_2(x) = x \cos(\pi x/2)^2$ for all $x \in [-1, 1]$	25
11	Wavelet lacunar serie graph with $\alpha = 0.5$ and $\eta = 0.8$	33
12	Representation of cleaned physiological (heart rate and step rate) data for a marathon runner ($N \simeq 100\ 000$)	35

1.1	Représentation d'un processus $\{M(x), x \geq 0\}$	40
1.2	Représentation des fonctions ψ_1 et ψ_2	41
1.3	Représentations des trajectoires de M_1 et M_2 selon la définition (1.1) pour les fonctions ψ_1 et ψ_2 respectivement avec $\tau = 0.1$ et $w = 0.7$	41
1.4	Somme de 1000 pulses $t \mapsto t(1 - t^2)^2$ dilatés et translatés aléatoirement selon la définition 1.1.2 avec $\alpha = 0.5$ et $\eta = 0.9$	43
1.5	Deux pulses $t \mapsto t(1 - t^2)^2$ et $t \mapsto (1 - t^2)^2 + (1 - \cos(2\pi t))$	44
1.6	Sommes aléatoires de pulses avec $\alpha = 0.5$ et $\eta = 0.9$ et les deux pulses pères du dessus.	44
1.7	Sommes aléatoires de pulses avec $\alpha = 0.5$ et $\eta = 0.9$ et les deux pulses pères du dessus et le même tirage de Poisson	44
1.8	Spectre multifractal dans le cas $\alpha = 0.9$ et $\eta = 0.4$	46
1.9	Représentation des fonctions ψ et ϕ	56
1.10	Représentation des supports des pulses dans \mathcal{I}_j	61
1.11	Représentations de trois singularités ponctuelles en $x_0 = 0, 4$ d'exposant de Hölder $0, 7$ mais trois exposants d'oscillation différents $\beta = 0, \beta = 0, 4$ et $\beta = 0, 7$	77
1.12	Représentation de la fonction de Riemann et un zoom autour du "chirp" au point $x_0 = 1$	78
2	Caractérisation par les coefficients continus d'ondelettes des p-exposants	81
2.1	Représentation de la fonction de Riemann R_2 sur l'intervalle $[0, 1]$	84
2.2	Exemple de trajectoire d'une somme aléatoire de pulses pour $\alpha = 0.5$, $\eta = 0.9$ et $\psi(x) = x(1 - x^2)^2$	89
2.3	Spectre multifractal presque sûr pour $\alpha = 0.9$ et $\eta = 0.4$	90
2.4	Schéma permettant d'illustrer le découpage en 4 parties	96
2.5	Représentation de la majoration du 1-spectre multifractal de la somme de pulse aléatoire pour $\alpha = -0.7$, $\eta = 0.5$	107
3	Formalisme multifractal, simulations et applications	109

3.1	Représentation du formalisme multifractal par les coefficients dominants d'ondelettes sur une marche aléatoire (Le nombre de données $N = 131072$)	113
3.2	Représentation du formalisme multifractal par les coefficients d'ondelettes sur un mouvement brownien fractionnaire (l'exposant de Hurst est $H = 0.8$, le nombre de donnée est $N = 131072$).	114
3.3	Représentation du formalisme multifractal par les coefficients d'ondelettes sur la même réalisation de marche aléatoire que la Figure 3.1 ($N = 131072$)	114
3.4	Représentation des trajectoires, des fonctions d'échelles ondelettes, échelles leaders, spectre théorique et des spectres simulés pour 15 sommes de pulses aléatoires avec $\alpha = 0.6$ et $\eta = 0.8$	115
3.5	Représentation du spectre théorique et des spectres simulés pour 15 sommes de pulses aléatoires avec $\alpha = 0.6$ et $\eta = 0.8$ et $p = 1$ à gauche, $p = 2$ au centre et $p = 3$ à droite	115
3.6	Représentation du spectre théorique et des spectres simulés pour 15 sommes de pulses aléatoires avec $\alpha = 0.6$ et $\eta = 0.8$ et $p = 0.8$	116
3.7	Représentation du graphe de la fonction θ dans le plan complexe	119
3.8	Représentation du graphe du module des coefficients continus d'ondelettes de la série de Riemann R_2	119
3.9	Représentation du graphe des coefficients continus leaders de la série de Riemann R_2	120
4	Analyse multifractale multivariée de données physiologiques	121
4.1	Représentation des deux données physiologiques brutes, fréquence cardiaque et cadence pour un marathonien (le nombre de données $N = 167\,198$). Les données ne sont pas nettoyées puisqu'il y a plusieurs parties lors du marathon qui correspondent à l'échauffement au début et à la récupération à la fin du marathon. De plus, il y a plusieurs moments de pauses durant la course qu'on peut repérer par une chute brutale et ponctuelle sur la cadence	124

- 4.2 Représentation des 2 données physiologiques fréquence cardiaque et cadence nettoyées pour un coureur marathonien (le nombre de données $N \simeq 100\,000$). Le graphe de la fréquence cardiaque apparaît comme plus inhomogène que celui de la cadence 124
- 4.3 Représentation des régressions log-log pour estimer la valeur h_{min} sur les données physiologiques (fréquence cardiaque et cadence) d'un marathonien où on peut observer que $h_{min} < 0$ 127
- 4.4 Représentation des régressions log-log pour obtenir la valeur h_{min} sur la fréquence cardiaque de Dylan (à gauche) et Frédéric (à droite) où dans ce cas $h_{min} > 0$. Les deux coureurs sont des coureurs en phase de progression qui ont reproduit leur meilleurs performance lors du marathon 128
- 4.5 Représentation de la fonction d'échelle basée sur les coefficients d'ondelettes de la fréquence cardiaque de trois marathoniens où on peut observer que $\xi_f(q) > 0$ pour $q = 1$ ce qui va nous permettre de calculer les 1-leaders 130
- 4.6 Représentation des régressions log-log où on obtient $\xi_f(1) > 0$ pour la fréquence cardiaque de 3 marathoniens 130
- 4.7 Représentation de la fonction d'échelle basée sur les 1-leaders à gauche et le 1-spectre à droite pour la fréquence cardiaque d'un coureur marathonien. On remarque que le support du 1-spectre contient des exposants H négatifs ce qui confirme le résultat que le signal n'est pas localement borné. 131
- 4.8 Représentation du couple (h_{min}, c_1) pour la fréquence cardiaque des marathoniens dans un plan pour classifier les différents coureurs. 132
- 4.9 Représentation du couple (h_{min}, c_2) pour la fréquence cardiaque des marathoniens dans un plan pour classifier les différents coureurs: on remarque de nouveau que l'analyse effectuée permet de distinguer nettement Dylan et Frédéric 132

4.10	Représentation du couple (h_{min}, c_1) au cours de la course sur la fréquence cardiaque des marathoniens afin d'observer des changements sur les spectres au cours de la course. Les changements des paramètres du spectre de René sont différents par rapports aux autres marathoniens. Cela peut s'expliquer par le fait qu'il est le moins expérimenté, a couru plus longtemps sur un régime de course différents des autres et qu'il a subit moins d'effort durant la course	134
4.11	Représentation du couple (h_{min}, c_2) au cours de la course sur la fréquence cardiaque des marathoniens afin d'observer des changements sur les spectres au cours de la course	134
4.12	Représentation de la fonction d'échelle basée sur les coefficients d'ondelettes de la cadence pour un marathonien où $\xi_f(p) < 0$ pour tout $p > 0$. Il n'est pas possible de calculer de p -leaders	135
4.13	Représentation de la fonction d'échelle basée sur les leaders (à gauche) et le spectre (à droite) pour la primitive de la cadence d'un marathonien	136
4.14	Représentation du couple (h_{min}, c_1) sur la primitive de la cadence des marathoniens dans le plan. René se détache une nouvelle fois des autres marathoniens par son manque d'expérience et le régime de course très différents des autres	137
4.15	Représentation du couple (h_{min}, c_1) sur la primitive de la cadence au cours du marathon dans le plan afin de les classier	138
4.16	Représentation de la fonction d'échelle et du spectre bivarié de la primitive de la fréquence cardiaque et la cadence d'un marathonien (à gauche : la fonction d'échelle bivariée, à droite : le spectre multifractal bivarié)	139
4.17	Représentation du spectre bivarié de la primitive de la fréquence cardiaque et la cadence d'un marathonien	140
4.18	Représentation du spectre multifractal de la primitive de la fréquence cardiaque (à gauche) et de la cadence (à droite) d'un marathonien . . .	140
4.19	Représentation de la différence du spectre bivarié et des formules qui relient les spectres pour les comparer. Le graphe de gauche est plus proche d'un plateau nul que le graphe de droite ce qui permet de suggérer que la formule $D_{f_1, f_2}(h_1, h_2) = \min\{D_{f_1}(h_1), D_{f_2}(h_2)\}$ est la plus pertinente pour ce modèle	141

Liste des tableaux

1	Analyse multifractale des sommes de pulses aléatoires	39
2	Caractérisation par les coefficients continus d'ondelettes des p-exposants	81
3	Formalisme multifractal, simulations et applications	109
4	Analyse multifractale multivariée de données physiologiques	121
4.1	Tableaux des valeurs h_{min} estimées sur les données physiologiques des 8 marathoniens où on peut observer que pour une grande partie des données les $h_{min} < 0$ ce qui va justifier l'utilisation des p -leaders dans l'analyse multifractale	128
4.2	Tableaux des différents paramètres pour le 1-spectre de la fréquence cardiaque pour comparer les différents marathoniens. Les valeurs des paramètres h_{min} et c_2 sont très différents selon les marathoniens mais les valeurs de c_1 sont relativement proches	131
4.3	Tableaux des différents paramètres pour le 1-spectre de la fréquence cardiaque au cours de la course pour comparer le début et la fin du marathon. Les valeurs des paramètres du spectre changent au cours de la course	133
4.4	Tableaux des différents paramètres pour le spectre de la primitive de la cadence afin de comparer les marathoniens. Les valeurs de h_{min} et c_1 restent relativement proches entre les marathoniens	136

- 4.5 Tableaux des différents paramètres pour le spectre de la primitive de la cadence au cours de la course afin de comparer les marathoniens. Les paramètres ne changent relativement pas pour c_1 mais pour h_{min} un léger changement se produit au cours de la course 137