

Réduction de modèles par identification de systèmes et application au contrôle du sillage d'un cylindre

Jessie Weller

► To cite this version:

Jessie Weller. Réduction de modèles par identification de systèmes et application au contrôle du sillage d'un cylindre. Mathématiques générales [math.GM]. Université Sciences et Technologies - Bordeaux I, 2009. Français. NNT: 2009BOR13763. tel-03666686

HAL Id: tel-03666686 https://theses.hal.science/tel-03666686

Submitted on 12 May 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers. L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés. $\rm N^od' or dre$: 3763

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ BORDEAUX I

ÉCOLE DOCTORALE DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

par Jessie WELLER

pour obtenir le grade de

DOCTEUR

SPÉCIALITÉ : Mathématiques Appliquées et Calcul Scientifique

RÉDUCTION DE MODÈLES PAR IDENTIFICATION DE SYSTÈMES ET APPLICATION AU CONTRÔLE DU SILLAGE D'UN CYLINDRE

Thèse dirigée par M. Angelo IOLLO, Professeur

Soutenue le 14 janvier 2009 devant la commission d'examen :

M. Michel BERGMANN	Chargé de Recherche - INRIA Bordeaux Sud-Ouest	
M. Charles-Henri BRUNEAU	Professeur - Université Bordeaux I	
M. Florian DE VUYST	Professeur - Ecole Centrale Paris	Rapporteur
M. Angelo IOLLO	Professeur - Université Bordeaux I	Directeur
M. Bernd R. NOACK	Professeur - Université Technique de Berlin	
M. Jean-Pierre RAYMOND	Professeur - Université Toulouse III	
M. Pierre SAGAUT	Professeur - Université Paris VI	Rapporteur

Réduction de modèles par identification de systèmes et application au contrôle du sillage d'un cylindre

L'objectif est de construire un modèle d'écoulement qui se prête bien à des problèmes de contrôle, en associant un faible nombre de degrés de liberté à la possibilité de décrire la dynamique d'un écoulement relativement complexe. Dans ce travail nous considérons un écoulement bidimensionnel laminaire autour d'un cylindre carré. Des actionneurs placés sur le cylindre permettent un contrôle actif par soufflage et aspiration. Ce contrôle peut être défini par rétroaction, exploitant des mesures de la vitesse dans le sillage du cylindre. Nous construisons un modèle d'ordre réduit (ROM) des équations de Navier-Stokes incompressibles, basé sur la technique de décomposition orthogonale aux valeurs propres (POD). Une façon classique de construire un tel modèle est de réaliser une projection Galerkin des équations sur le sous-espace réduit obtenu par POD. Un tel modèle peut cependant être peu précis, voire instable. Une technique de calibration est alors mise en place pour assurer la bonne représentativité dynamique du modèle. Nous définissons ensuite une stratégie pour mettre à jour le modèle au cours d'un processus d'optimisation. La méthode est enfin appliquée pour réduire la différence entre l'écoulement contrôlé et la solution stationnaire instable à Re = 150.

Mots clés : Contrôle, POD, réduction de modèles, calibration, écoulement de sillage, contrôle proportionnel.

Model reduction by system identification and application to the control of a cylinder wake

The aim is to build a flow model adapted for control applications combining a low number of degrees of freedom with the possibility of describing relatively complex flows. In this work a two-dimensional laminar flow past a square cylinder is considered. Actuators placed on the cylinder enable active control by blowing and suction. Proportional feedback control can then be applied using velocity measurements taken in the cylinder wake. The proper orthogonal decomposition (POD) approach is used to build a low order model of the incompressible Navier-Stokes equations. A classical way of obtaining a Reduced-Order Model (ROM) is to perform a Galerkin projection of the equations onto the subspace spanned by the POD modes. Such a model can however be inaccurate, even unstable. A calibration technique is therefore applied, leading to a model that is accurate and robust to variations of the control parameters. A strategy is then defined to update the model within an optimisation loop. The method is tested at Re = 150 for reducing the difference between the actuated flow field and the steady unstable solution.

Key words : Control, POD, model reduction, wake flow, feedback control.

Remerciements

Je tiens d'abord à remercier Angelo Iollo, mon directeur de thèse, dont la disponibilité, la compétence et l'enthousiasme m'ont donné la motivation nécessaire pour compléter ce travail. Je le remercie également d'avoir créé un environnement de travail exceptionnel, me permettant de rencontrer des experts de mon domaine et de collaborer avec d'autres doctorants.

Je remercie les personnes qui ont pris le temps d'étudier ce travail et ont apporté des critiques constructives : mes rapporteurs de thèse, Florian De Vuyst et Pierre Sagaut, ainsi que les membres du Jury, Michel Bergmann, Charles-Henri Bruneau, Bernd Noack et Jean-Pierre Raymond.

Ce travail n'aurait pas été possible sans l'aide et la sympathie de plusieurs personnes. Je suis notamment très reconnaissante envers Maria Vittoria Salvetti et Simone Camarri pour l'accueil que j'ai reçu à l'Université de Pise, et envers Marcelo Buffoni pour son amitié et ses patientes explications.

Un grand merci à mes amis thésards, Delphine, Sylvain, Ludo et Benjamin pour avoir joyeusement partagé repas et râleries.

Je remercie tout particulièrement Edoardo Lombardi pour l'échange d'idées autour de très nombreux cafés, et toujours dans la bonne humeur.

Enfin, je remercie mes parents, Gwyneth et Pierre de m'avoir supportée et encouragée pendant ces années de doctorat.

Table des matières

Introduction

1	Tec	hniques de réduction de modèle	5
	1.1	Réduction de modèle pour des systèmes linéaires	6
		1.1.1 Méthodes de troncature	6
		1.1.2 Méthodes dites de Krylov	8
	1.2	Méthodes empiriques	10
		1.2.1 Les types de paramètres considérés	10
		1.2.2 Bases de Lagrange et d'Hermite	11
		1.2.3 Décomposition orthogonale aux valeurs propres (POD)	12
		1.2.4 Alternatives aux méthodes POD-Galerkin	13
		1.2.5 Quelques problématiques pour les bases empiriques	14
	1.3	Applications en optimisation et contrôle d'écoulements	15
2	Sim	ulation numérique de l'écoulement contrôlé	17
	2.1	Présentation du code	17
		2.1.1 Les équations du problème	17
		2.1.2 Discrétisation en espace	19
		2.1.3 Discrétisation en temps	21
	2.2	Configuration pour l'étude du contrôle	22
		2.2.1 Description du domaine et des conditions au bord	22
		2.2.2 Justification du choix du domaine	22
	2.3	Contrôle par actionneurs	24
		2.3.1 Implémentation des actionneurs	24
		2.3.2 Contrôle par soufflage/aspiration	25
	2.4	Utilisation de capteurs	27
		2.4.1 Placements des capteurs	27
		2.4.2 Des capteurs pour un contrôle PID	27
		2.4.3 Effet du contrôle proportionnel	28
3	Мо	dèle POD-ROM d'un écoulement contrôlé	31
	3.1	Construction des modes POD	32
		3.1.1 Création de la base de donnée	32
		3.1.2 Relèvement des conditions aux bords	33
		3.1.3 Calcul des modes	34
		3.1.4 Reconstruction de solutions	35
	3.2	Le modèle réduit pour la vitesse	37

1

		3.2.1 Projection des équations	37
		3.2.2 Intégration du modèle réduit	39
	3.3	Techniques de calibration	42
		3.3.1 Un ajustement du modèle POD-Galerkin	42
		3.3.2 Première approche : Calibration sur les états	44
		3.3.3 Deuxième approche : Calibration sur les dynamiques	47
	3.4	Un modèle vitesse-pression	51
		3.4.1 Un modèle réduit pour la pression	51
		3.4.2 Reconstruction des coefficients aérodynamiques avec le modèle vitesse-	
		pression	52
4	Réd	uction de modèle adaptée au contrôle d'écoulement	55
	4.1	Extension du modèle réduit au contrôle par rétroaction	55
		4.1.1 Intégration en temps du modèle en rétroaction	56
		4.1.2 Le modèle calibré	56
	4.2	La calibration sur plusieurs dynamiques	57
		4.2.1 Région de validité du modèle	57
		4.2.2 Construction d'une base de données multi-contrôle	58
		4.2.3 Efficacité des modèles multi-dynamiques	60
5	App	lications au contrôle d'écoulement	65
	5.1	Formulation du problème du problème de contrôle	66
		5.1.1 Définition de la fonctionnelle	66
		5.1.2 Définition des paramètres d'optimisation	67
		5.1.3 Algorithme d'optimisation par modèle réduit	70
		5.1.4 Initialisation du problème d'optimisation	70
	5.2	Une loi de contrôle <i>précalculée</i>	71
		5.2.1 Résolution du problème de contrôle réduit	71
		5.2.2 Les difficultés d'application	72
	5.3	Contrôle par rétroaction	73
		5.3.1 Résolution du problème de contrôle réduit	73
		5.3.2 Application au contrôle proportionnel	75
		5.3.3 Effet du contrôle en temps long	78
C	onclu	sion	83
\mathbf{A}	nnex	2	85
	А	Le calcul des modes propres	85
	В	Méthodes spectrales	88
		B.1 Application aux équations du modèle réduit	89
		B.2 Application au problème de calibration	90
	С	Résultats de contrôle supplémentaire	91
Bi	ibliog	raphie	93

Introduction

L'écoulement dans le sillage d'un cylindre qui nous sert d'exemple clé tout au long de ce mémoire, appartient au large domaine des *écoulements autour de corps épais*. Ce type d'écoulement peut résulter du déplacement d'un corps dans un fluide - par exemple l'écoulement autour d'un avion ou d'une voiture - et/ou du déplacement du fluide autour d'un obstacle - on peut penser au vent qui souffle autour d'un immeuble, ou encore d'un pont. Lorsque les forces d'inertie en présence atteignent un certain seuil par rapport aux forces de viscosité (nombre de Reynolds à un seuil critique), ces écoulements se caractérisent par le développement de tourbillons dans le sillage de l'objet. Ces derniers sont notamment à l'origine de vibrations des structures et de perturbations acoustiques. Le contrôle de tels écoulements a donc des applications pratiques avec des perspectives de gain en manoeuvrabilité des véhicules, de réduction de la consommation de carburant et du bruit, pour ne citer que quelques exemples.

Depuis que Roshko [66] a mesuré la période de l'allée tourbillonnaire de Von Kármán derrière un corps épais en 1955, les phénomènes de détachement tourbillonnaire et d'écoulement de sillage ont fait l'objet de nombreuses études, notamment un grand intérêt a été porté aux moyens de suppression ou de modification de ces tourbillons (nous renvoyons à Choi *et al.* [22] pour un état de l'art).

Le développement des moyens de calculs au cours des quinze dernières années, associé aux avancées en calcul numérique pour la mécanique des fluides (CFD) et en techniques de contrôle, a permis d'entreprendre la résolution de problèmes de contrôle réalistes d'un point de vue numérique. Ainsi Bewley et Moin [12] déterminent une loi de contrôle optimal pour un problème de contrôle gouverné par les équations de Navier-Stokes. Cet étude comporte cependant des limites, notamment le fait que l'optimisation est réalisée sur une période de temps très courte. La résolution de ce type de problème est en effet très exigeante en ressources de calcul, d'une part en espace de stockage, mais surtout en temps CPU. Plus les écoulements sont complexes, plus le nombre de degrés de liberté des problèmes discrets sous-jacents est élevé. A cela il faut ajouter le fait que les algorithmes d'optimisation sont généralement des algorithmes itératifs nécessitant des résolutions multiples des équations décrivant l'écoulement. Les demandes en temps de calculs deviennent alors prohibitifs.

Le constat ci-dessus a donc conduit au développement d'approches de simplification, qui, en réduisant de façon conséquente le nombre de degrés de liberté, rendent ces problèmes de contrôle abordables.

Les techniques de contrôle

Nous rappelons la classification des techniques de contrôle telle qu'elle est présentée dans Choi *et al.* [22]. Nous renvoyons à ce papier pour une bibliographie approfondie des techniques présentées ci-dessous.

Nous distinguerons donc trois types de contrôle :

– Le contrôle dit **passif** :

Cette technique consiste essentiellement à jouer sur la géométrie de l'obstacle. Ainsi une réduction de traînée a pu être obtenue en créant des rainures, ou une rugosité sur la surface de l'objet.

Aucune modification du contrôle n'intervient alors durant l'écoulement - aucune nouvelle énergie n'est injectée dans le système.

– Les contrôles dits **actifs** :

Des exemples essentiels de contrôle actifs sont la manipulation de l'objet (oscillations, rotations, mouvements transversaux et longitudinaux), l'utilisation de jets synthétiques ou d'actionneurs permettant une action de soufflage/aspiration. La mise en place d'un tel contrôle passe par la variation d'un certain nombre de paramètres au cours du temps (amplitude et vitesse de rotation, puissance de soufflage etc.) Nous parlerons alors d'une loi de contrôle.

- Contrôle actif en boucle ouverte :

Un contrôle est dit *en boucle ouverte* lorsque la loi de contrôle est fixée une fois pour toute, et n'est pas réactualisée selon son effet sur l'écoulement. Par exemple, dans le cas du contrôle par soufflage/aspiration, la puissance des actionneurs peut être constante, ou une fonction périodique du temps (voir par exemple les travaux de Lin *et al.* [46])

– Contrôle actif en boucle fermé :

Dans ce cas la loi de contrôle varie en fonction de l'évolution de l'écoulement. Ce type de contrôle nécessite la présence de *capteurs*, qui vont relever des informations sur l'écoulement au cours de son développement. L'action de contrôle est alors modifiée en fonction de ces informations. Nous parlerons alors de *contrôle actif par rétroaction*.

La problématique numérique

Considérons par exemple un écoulement tridimensionnel autour d'un objet avec une géométrie plus ou moins simple modélisé par les équations de Navier-Stokes. Une discrétisation permettant d'obtenir une solution suffisamment précise, va conduire à un problème avec un très grand nombre de degrés de liberté (de l'ordre de 10⁶ pour des problèmes issus de l'industrie). Nous notons $\boldsymbol{u} = \{u_1, \dots, u_N\}$ les variables qui caractérisent l'écoulement (vitesse, pression etc.) Nous introduisons à présent la possibilité de contrôler cet écoulement avec une des techniques de contrôle actif décrites ci-dessus. Nous ajoutons ainsi au problème un ensemble de paramètres que nous notons $\boldsymbol{c} = \{c_1, \dots, c_M\}$ qui caractérisent le contrôle, et peuvent éventuellement dépendre du temps. Nous désignons par $\mathcal{J}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{c})$ la quantité que nous souhaitons contrôler. Le choix de \mathcal{J} peut être motivé par des objectifs différents. Si notre but est de réduire la taille des tourbillons de sillage, \mathcal{J} peut être égale à l'énergie de la vorticité (comme dans [60]). Pour les problèmes d'aérodynamique, \mathcal{J} est plus classiquement la traînée. Si nous notons $\mathcal{N}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{c}) = 0$ une discrétisation des équations de Navier-Stokes, le problème de contrôle peut s'écrire :

$$\min_{\boldsymbol{c}} \mathcal{J}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{c})$$
sous la condition : (1)
 $\mathcal{N}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{c}) = 0$

Les méthodes d'optimisation a priori les plus adaptées à ce type de problème sont les méthodes dites de descente. Ces méthodes nécessitent l'évaluation de la fonctionnelle \mathcal{J} , et de son gradient ce qui peut-être en soi exigeant du point de vue numérique (détermination et implémentation des équations adjointes, ainsi que leur résolution). La descente vers une solution optimale implique alors de résoudre à nouveaux les équations (1) et les équations adjointes, et ce un grand nombre de fois ($\mathcal{O}(10 \sim 100)$ selon Protas [59]).

La réduction de modèle

L'idée d'utiliser une réduction de modèle en contrôle d'écoulement part de l'hypothèse qu'un modèle classique - type éléments finis - qui permet d'obtenir une solution précise moyennant un grand nombre de degrés de libertés, fournit un grande quantité d'information qui n'intervient pas nécessairement dans le problème en question. Autrement dit nous cherchons une méthode visant à retenir d'un écoulement complexe que ce qui est nécessaire à son contrôle pour un choix précis de fonctionnelle.

Pour les systèmes de contrôle linéaires de type entrées-sorties, des techniques systématiques de réduction ont pu être mises en place, s'appuyant sur la théorie du contrôle linéaire. Les travaux de Moore [53], Rowley [69], ou encore Antoulas [3] feront l'objet d'une section dans le Chapitre 1.

Pour des problèmes non-linéaires, les techniques existantes sont moins rigoureuses, mais présentent une variété d'applications beaucoup plus intéressantes. La deuxième section du Chapitre 1 de ce manuscrit sera ainsi consacrée aux méthodes dites *empiriques*. Le raisonnement derrière ces méthodes peut se formuler de façon très schématique :

Si l'on connaît les équations d'un problème, et une solution pour un ensemble donné de paramètres (ici, il s'agira donc d'un choix de la loi de contrôle), on dispose de plus d'information que si on ne connaît que les équations

En pratique une solution ne sera pas forcément suffisante pour dire qu'on dispose de plus d'informations sur le système. En revanche la connaissance d'un ensemble plus ou moins grand de solutions, soit une base de donnée de solutions, permet de construire des modèles dits réduits de l'écoulement. La validité de telles méthodes pour décrire un écoulement complexe, et surtout la validité de l'approche pour des applications au contrôle fait encore débat, pourtant les résultats d'un nombre de travaux suggèrent que ces méthodes pourraient être viables. Nous nous efforcerons dans la suite de mettre en évidence les avancées dans ce domaine, et d'en souligner les limites.

Il nous semble souhaitable que le modèle qui se destine à des applications de contrôle doit remplir les trois critères suivants :

- Il doit être précis : Le modèle doit permettre de reproduire les simulations de la base de donnée qui a été utilisée pour le construire.
- Il doit être robuste : On s'attend à ce que le modèle donne des bonnes approximations de simulations non incluses dans la base, dans la limite d'une certaine région de confiance.
- Il doit être adaptable au contrôle et à l'optimisation : La précision et la robustesse du modèle ne sont pas toujours des critères faciles à vérifier. Le modèle doit prendre en compte l'existence d'éventuels erreurs d'optimisation, afin de pouvoir être utilisé au sein d'un algorithme d'optimisation autonome.

Dans ce mémoire nous nous intéresserons à l'écoulement autour d'un cylindre carré dans un domaine confiné. Comme nous le justifierons au Chapitre 2 cette configuration présente un compromis raisonnable entre complexité numérique et coûts de calcul. Nous nous intéressons en particulier à un écoulement à Re = 150. Le problème du contrôle de cet écoulement n'est pas trivial, ce qui peut être le cas à des nombres de Reynolds plus faibles (voire section 2.4.3). La méthode de contrôle choisie est l'action de soufflage/aspiration aux moyens d'actionneurs placés sur le cylindre. A notre connaissance aucune application de la réduction de modèle à ce type de contrôle n'a été étudiée auparavant.

L'organisation du mémoire sera le suivant :

Dans un premier chapitre nous présenterons les principales techniques de réduction de modèle qui existent actuellement en nous attardant en particulier sur les méthodes basées sur la décomposition aux valeurs propres (POD), qui reste encore la méthode la plus utilisée en mécanique des fluides, et que nous avons ainsi choisie d'utiliser pour ce travail.

Le Chapitre 2 est consacré aux outils numériques mis en place pour simuler l'écoulement autour du cylindre. Nous décrirons notamment la mise en place de la stratégie de contrôle, et nous introduirons les outils permettant de faire du contrôle par rétroaction.

Les trois chapitres suivants du mémoire seront destinés à répondre aux exigences soulevées ci-dessus :

Le Chapitre 3 présente la limite des modèles obtenus par simple projection Galerkin des équations sur un espace de dimension réduite. Nous montrons alors que des techniques de correction, ou de *calibration*, permettent d'obtenir des modèles précis. Une de ces techniques sera sélectionnée pour construire les modèles réduits dans le reste du travail.

Le Chapitre 4 commence par aborder le problème du contrôle par rétroaction, et les difficultés supplémentaires qu'un tel contrôle peut poser dans la construction de modèles. Une méthode est alors mise en place pour améliorer la robustesse du modèle, aussi bien dans le cas de contrôle en boucle ouverte que dans le cas de contrôle par boucle fermée.

Dans le Chapitre 5 nous présentons un algorithme d'optimisation basé sur un modèle réduit pour le contrôle du sillage d'un cylindre. Après avoir présenté des exemples de résultat pour les deux types de contrôle envisagés, nous soulèverons des problèmes liés à l'efficacité de ce contrôle et à son application pratique.

Chapitre 1 Techniques de réduction de modèle

Introduction

Pour introduire l'idée de réduction de modèle nous considérons le système linéaire de type entrée-sortie :

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = A\boldsymbol{x}(t) + B\boldsymbol{u}(t)$$

$$\boldsymbol{y}(t) = C\boldsymbol{x}(t)$$

$$\boldsymbol{x}(t) \in X = \mathbb{R}^{N}, \, \boldsymbol{u}(t) \in U = \mathbb{R}^{M}, \, \boldsymbol{y}(t) \in Y = \mathbb{R}^{P}$$
(1.1)

Ce système peut encore être représenté schématiquement de la façon suivante :



FIG. 1.1 – Système linéaire d'entrée-sortie

L'idée à la base de la réduction de modèle est dans ce schéma (Fig. 1.1) : ce qui est important n'est pas la solution du système, mais plutôt sa capacité à transformer une entrée u en une sortie y. La réduction du système consiste donc à essayer d'éliminer tout ce qui ne contribue pas à cette transformation.

Pour les systèmes issus de problèmes physiques, la dimension N de l'espace des états X est généralement très importante. On souhaiterait donc projeter ces équations sur un espace de plus petite dimension, et se limiter à la recherche d'une solution approchée, ou solution réduite.

Le processus de réduction peut se dérouler ainsi :

- Choisir un sous-espace X_R de X de dimension N_R
- Déterminer une base orthonormale de X_R notée $\{ \boldsymbol{\phi}_1, \cdots, \boldsymbol{\phi}_{N_R} \}$
- La solution réduite \boldsymbol{x}_R peut alors s'écrire $\boldsymbol{x}_R = \boldsymbol{\Phi} \cdot \boldsymbol{\alpha}_R$ où $\boldsymbol{\phi} = [\boldsymbol{\phi}_1, \cdots, \boldsymbol{\phi}_{N_R}]$ et $\boldsymbol{\alpha}_R \in \mathbb{R}^{N_R}$. – Effectuer une projection Galerkin des équations (1.1) sur le sous-espace X_R . On obtient alors le modèle réduit :

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}}(t) = \boldsymbol{\Phi}^t A \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{\alpha}(t) + \boldsymbol{\Phi}^t B \boldsymbol{u}(t)$$

$$\boldsymbol{u}(t) = C \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{x}(t)$$
(1.2)

La difficulté est alors de déterminer X_R pour que le système (1.2) reproduise au mieux la transformation du système original (1.1) pour $N_R \ll N$.

Une alternative à l'approche précédente est d'utiliser une projection Petrov-Galerkin, au lieu d'une projection Galerkin. Il est alors nécessaire de déterminer un espace test Y_R de dimension N_R , ayant une base $\{\psi_1, \dots, \psi_{N_R}\}$ vérifiant $(\phi_i, \psi_j) = \delta_{ij}$. Le modèle réduit obtenu s'écrit alors :

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}}(t) = \boldsymbol{\Psi}^{t} A \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{\alpha}(t) + \boldsymbol{\Psi}^{t} B \boldsymbol{u}(t)$$

$$\boldsymbol{y}(t) = C \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{x}(t)$$
(1.3)

Nous verrons plus loin que l'approche projection Galerkin peut conduire à des modèles réduits peu précis, voire instables, l'utilisation d'une projection Petrov-Galerkin peut alors s'avérer utile.

Le but de ce chapitre est de donner un petit aperçu des avancées en réduction de modèle sur les dix dernières années. Dans un premier paragraphe nous présenterons des méthodes de réduction développées pour les systèmes linéaires du type (1.1), à savoir les méthodes de « Balanced Truncation » et de Krylov. Ces méthodes s'appuient sur la théorie du contrôle linéaire pour réduire la taille du système (1.1). Dans un second temps nous nous intéresserons à des méthodes développées pour des systèmes non-linéaires : les méthodes dites *empiriques*. Toutes ces méthodes ont en commun d'être des méthodes de **projection**. D'autres méthodes de réduction existent comme les méthodes par réseaux de neurones, ou encore les méthodes spécifiques au type d'écoulement considéré comme les vortex model (Protas [59]).

1.1 Réduction de modèle pour des systèmes linéaires

1.1.1 Méthodes de troncature

La réduction de modèle passe par le choix d'un sous-espace de basse dimension de l'espace des états \mathbb{R}^N . Pour les systèmes linéaires et stables de type entrée-sortie une méthode pour faire ce choix est la méthode dite de balanced truncation introduite par Moore [53]. Le point de départ est de noter qu'il y a deux sous-espaces essentiels de l'espace de états : le sous-espace contrôlable \mathcal{C} , et le sous-espace observable \mathcal{O} . Le premier correspond à l'ensemble des états qui peuvent être atteint en partant d'un état initial nul $\boldsymbol{x}(0) = 0$, et en appliquant un contrôle $\boldsymbol{u}(t)$. Le sous-espace observable correspond à l'ensemble des états, qui, choisis comme condition initiale du système peuvent donner une sortie $\boldsymbol{y}(t)$ non-nulle en l'absence d'entrée supplémentaire $(\boldsymbol{u}(t) = 0)$. Le système est à la fois contrôlable et observable si les deux matrices suivantes sont définies positives :

$$W_c = \int_0^{+\infty} \exp(At) BB^* \exp(A^*t) dt \quad W_o = \int_0^{+\infty} \exp(A^*t) C^* C \exp(At) dt$$
(1.4)

La matrice W_c s'appelle grammien de contrôlabilité : ses vecteurs propres engendrent le sous espace C. La matrice W_o s'appelle grammien d'observabilité : ses vecteurs propres engendrent le sous espace O. Ces matrices sont solutions des équations de Lyapunov :

$$AW_c + W_c A^* + BB = 0 \quad A^* W_o + W_o A + CC = 0 \tag{1.5}$$

Ces matrices permettent notamment de mesurer à quel point un état donné est contrôlable ou observable. En effet, si le système est contrôlable, $\sqrt{\boldsymbol{x}_1^t W_c \boldsymbol{x}_1}$ est égale à la norme du contrôle \boldsymbol{u}_1 permettant de passer d'un état initial nul à l'état \boldsymbol{x}_1 . (On considère ici la norme de $L^2([0, +\infty[).)$ Si le système est observable, la norme de la sortie \boldsymbol{y}_0 obtenue à partir d'un état initial \boldsymbol{x}_0 est donnée par $\sqrt{\boldsymbol{x}_0^t W_o \boldsymbol{x}_0}$. Cette remarque permet de justifier la réduction qui va suivre.

Lorsque le système est observable et contrôlable, il existe une transformation T, dite transformation d'équilibre telle que :

$$T^{-1}W_c(T^{-1})^t = T^tW_oT = \Sigma =$$
matrice diagonale

qui peut être obtenue en résolvant le problème aux valeurs propres :

$$W_c W_o T^k = \lambda^k T^k$$
 (T^k kème colonne de T)

La diagonale de la matrice Σ est alors composée des racines carrées des valeurs propres λ^k rangées en ordre croissant :

$$\Sigma = diag(\sigma_1, \cdots, \sigma_N), \sigma^k = \sqrt{\lambda^k}, \sigma_1 \ge \sigma_2 \ge \cdots \ge \sigma_N$$

Ces éléments diagonaux sont appelés valeurs singulières de Hankel, et ont la particularité de décroître rapidement ([3]).

On considère à présent le système transformé suivant :

$$\dot{\boldsymbol{z}}(t) = T^{-1}AT\boldsymbol{z}(t) + T^{-1}B\boldsymbol{u}(t)$$

$$\boldsymbol{y}(t) = CT\boldsymbol{z}(t)$$
(1.6)

Il est immédiat de voir que les grammiens de ce système sont égaux à la matrice diagonale Σ . Ainsi, si y_0 est obtenu en partant d'un état initial x_0 , et u_1 permet d'atteindre un état x_1 on a :

$$\| \boldsymbol{u}_1 \|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^N \sigma_i \boldsymbol{x}_{1,i}^2}$$
 et $\| \boldsymbol{y}_0 \|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^N \sigma_i \boldsymbol{x}_{0,i}^2}$

S'il existe un indice N_R tel que σ_i est petit pour $i \ge N_R$ alors :

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{u}_{1}\|_{2} &\approx \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \sigma_{i} \hat{\boldsymbol{x}}_{1,i}^{2}} \text{ et } \|\boldsymbol{y}_{0}\|_{2} &\approx \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \sigma_{i} \hat{\boldsymbol{x}}_{0,i}^{2}} \\ \text{où } \hat{\boldsymbol{x}}_{1,i} &= \boldsymbol{x}_{1,i}, \, \hat{\boldsymbol{x}}_{0,i} = \boldsymbol{x}_{0,i}, \, i \geqslant N_{R} \text{ et } \hat{\boldsymbol{x}}_{1,i} \hat{\boldsymbol{x}}_{0,i} = 0i > N_{R} \end{aligned}$$

On peut faire la même remarque pour le côté observable.

On désigne par T_R la matrice $N \times N_R$ contenant les N_R premières colonnes de T, et par S_R la matrice $N_R \times N$ contenant les N_R premières lignes de T^{-1} . Enfin on suppose que $\mathbf{z}_i = 0$ pour $i > N_R$ et on note \mathbf{z}_R les N_R premiers éléments de \mathbf{z} . Le système (1.6) peut alors s'écrire : :

$$\dot{\boldsymbol{z}}_{R}(t) = S_{R}AT_{R}\boldsymbol{z}_{R}(t) + S_{R}B\boldsymbol{u}(t)$$

$$\boldsymbol{y}(t) = CT\boldsymbol{z}_{R}(t)$$
(1.7)

La solution réduite est alors définie par $\boldsymbol{x}_R = T_R \boldsymbol{z}_R(t)$

Un système d'entrée-sortie se caractérise par sa fonction de transfert :

$$\hat{G}(s) = C(sI - A)^{-1}B$$
 (1.8)

qui lie la transformée de Laplace de la sortie, $\hat{y}(s)$, à la transformée de Laplace de l'entrée, $\hat{u}(s)$: $\hat{y}(s) = \hat{G}(s)\hat{u}(s)$.

La méthode de troncature a l'avantage de fournir une borne d'erreur pour la différence entre la fonction de transfert du modèle réduit et la fonction de transfert du modèle complet :

$$\|G - G_R\| < 2\sum_{j=N_R+1}^N \sigma_j$$

Le grand désavantage de cette méthode est le temps de calcul lié au calcul des matrices W_c , W_o et T.

1.1.2 Méthodes dites de Krylov

Un autre choix pour X_R est le sous-espace de dimension N_R engendré par les N_R premières colonnes de la matrice de contrôlabilité du système (A, B):

$$\mathcal{R}_N = [B(AB)(A^2B)\cdots(A^{N-1}B)]$$
 où $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{R})$

L'algorithme d'Arnoldi est un algorithme classique en calcul numérique pour déterminer une base orthonormale de l'espace de Krylov $K_n = vect\{B(AB)(A^2B)\cdots(A^{n-1}B)\}$ associé à un système (A, B). L'argument en faveur de cette méthode est que l'algorithme d'Arnoldi n'implique que des multiplications matrice-vecteur et le calcul de produits scalaires, et est donc beaucoup plus économique en termes de calculs que la méthode précédente. Ce choix de X_R est justifié dans ce qui suit. La fonction de transfert (1.8) peut être développée autour d'un point $s_0 \in \mathbb{C}$:

$$G(s) = \eta_0 + \eta_1(s - s_0) + \eta_2(s - s_0)^2 + \eta_3(s - s_0)^3 + \cdots$$

Les coefficients η_j s'appellent moments du système (A, B, C) au point s_0 . Dans le cas particulier où $s_0 = +\infty$, ces coefficients sont les paramètres de Markov. Le même développement peut être fait pour la fonction de transfert du modèle réduit :

$$G_R(s) = \eta_0^R + \eta_1^R(s - s_0) + \eta_2^R(s - s_0)^2 + \eta_3^R(s - s_0)^3 + \cdots$$

Dans [3] il est montré que si le modèle réduit est obtenu par projection sur l'espace de Krylov présenté ci-dessus alors :

$$\eta_i^R = \eta_i \quad i = 1 \cdots N_R$$

Ainsi cette méthode rentre dans la classe de méthodes dites d'identification de moments. En revanche il n'existe pas d'approximation de l'erreur entre G et G_R : on ne sait pas à si les η_i^R sont proches des η_i pour $i > N_R$. D'autre part le système obtenu peut être instable.

Le choix de projection que nous venons de présenter constitue la méthode la plus simple parmi les méthodes *d'identification de moments*. Il existe plusieurs variantes permettant d'obtenir une meilleure approximation de la fonction de transfert.

On peut notamment doubler le nombre de moments identifiés en construisant X_R à partir de la matrice de contrôlabilité et de la matrice d'observabilité. En notant la matrice d'observabilité

$$\mathcal{O}_N = \left[C^t \left(CA\right)^t \left(CA^2\right)^t \cdots \left(CA^{N-1}\right)^t\right]^t \text{ où } C \in \mathcal{M}_{1,N}(\mathbb{R})$$

et $LU = \mathcal{O}_{N_R} \mathcal{R}_{N_R}$ la factorisation LU du produit des matrices \mathcal{O}_{N_R} et \mathcal{R}_{N_R} , on construit deux matrices de projection :

$$\mathbf{\Psi} = L^{-1} \mathcal{O}_{N_R} \qquad \mathbf{\Phi} = \mathcal{C}_{N_R} U^{-1}$$

Le système réduit est alors obtenu en définissant :

$$A_R = \Psi A \Phi, \quad B_R = \Psi B \quad \text{et} \quad C_R = C \Phi$$

Les coefficients de la nouvelle fonction de transfert sont tels que

$$\eta_i^{\scriptscriptstyle R} = \eta_i \quad i = 1 \cdots 2N_{\scriptscriptstyle R}$$

La factorisation LU se fait par une procédure itérative, qui, comme pour l'algorithme d'Arnoldi, ne comporte que des multiplications matrice-vecteur et des évaluations de produits scalaires. Cet algorithme est connu sous le nom d'algorithme de *Lanczos*.

Des méthodes existent pour déterminer le modèle réduit tel que la fonction de transfert réduite G_R soit une interpolation de la fonction de transfert originale G à des points d'interpolation s_i ([29],[34]) :

$$G_R(s_i) = G(s_i) \quad i = 1 \cdots 2N_R$$

Ces méthodes exploitent une variante de l'algorithme de Lanczos, l'algorithme de Lanczos rationnel.

Plus récemment Gugercin et Antoulas [34] proposent une méthode pour combiner l'approche SVD et les approches par espaces de Krylov. Cette approche permet d'obtenir des systèmes qui sont stables et vérifient toujours les propriétés d'identification de moments.

1.2 Méthodes empiriques

Les méthodes introduites ci-dessus exploitent les propriétés des systèmes linéaires pour créer des modèles réduits. Pour les systèmes non-linéaires, et même les systèmes linéaires de grande taille ces méthodes ne sont pas utilisables, du moins directement.

Le raisonnement derrière les méthodes que nous allons présenter peut être résumé de la façon suivante. Nous nous donnons un problème du type :



Nous supposons que nous avons déjà résolu ce problème pour plusieurs valeurs des paramètres. Nous disposons alors d'une base de données de solutions du problème que nous notons $\{S(\mu^1), S(\mu^2), \dots, S(\mu^n)\}$. Nous faisons ensuite l'hypothèse, que pour une petite variation des éléments de μ , la solution du problème n'est pas *si différente* des solutions déjà trouvées avec μ^1 , μ^2 etc. Autrement dit nous faisons l'hypothèse qu'il n'y a pas de bifurcation et que l'on peut trouver une bonne approximation $S_R(\mu)$ de $S(\mu)$ qui appartienne à l'espace engendré par les solutions de la base de données :

$$S_R(\boldsymbol{\mu}) \in \operatorname{vect}\{S(\boldsymbol{\mu}^1), \cdots, S(\boldsymbol{\mu}^n)\}$$
 et $\operatorname{Erreur}(S_R(\boldsymbol{\mu}) - S(\boldsymbol{\mu})) < \epsilon$

Cette idée suscite de nombreuses questions : qu'est ce qu'on entend par *petite variation*? Comment construire la base de données? Comment choisir les paramètres à utiliser pour la générer? Combien de paramètres choisir? Ces questions sont au coeur du débat sur la validité des modèles réduits.

1.2.1 Les types de paramètres considérés

Avant de présenter les différentes approches pour répondre aux questions ci-dessus nous faisons le point sur les types de problèmes qui peuvent se prêter à ces méthodes de réduction.

Exemple 1 : Navier-Stokes stationnaire, variation du nombre de Reynolds

Nous considérons les équations de Navier-stokes incompressibles stationnaires :

$$\boldsymbol{u} \cdot \nabla \boldsymbol{u} + \nabla p - \frac{1}{Re} \Delta \boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}, \qquad \nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0$$
 (1.9)

Ito et Ravindran [41] se posent le problème de déterminer un modèle réduit de ces équations pour une variation du nombre de Reynolds. En utilisant la méthode des bases de Lagrange (voir 1.2.2), ils construisent un modèle utilisant une base de données comprenant des solutions obtenues à Re = 100, 300, 500, 700 et 900 pour un écoulement dans une cavité. Ils obtiennent ensuite une bonne approximation de l'écoulement à Re = 1200.

Exemple 2 : Euler stationnaire, variation de la géométrie du domaine

Ce type de travail a notamment été entrepris par Lovgren *et al.* [47] et Buffoni *et al.* [15]. Ils définissent un domaine rectangulaire en deux dimensions, et une fonction de mapping ϕ_D , permettant de transformer cette géométrie en la géométrie 2-D souhaitée. Les paramètres du problème sont alors les coefficients de la fonction ϕ_D .

Exemple 3 : Navier-Stokes incompressible, variation du temps

Dans la catégorie des paramètres dépendant du temps, un cas essentiel est $\mu(t) = t$. Nous considérons les équations de Navier-stokes incompressibles :

$$\partial_t \boldsymbol{u} + \boldsymbol{u} \cdot \nabla \boldsymbol{u} + \nabla p - \frac{1}{Re} \Delta \boldsymbol{u} = 0, \qquad \nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0$$
(1.10)

Pour un nombre de Reynolds et une géométrie fixée, la base de donnée est définie par les solutions calculées sur une période [0, T] à des points $t_n \in [0, T]$. Un premier enjeu est de simplement reproduire les données de la base. Dans un second temps il est possible de s'intéresser aux capacités d'extrapolation du modèle pour des temps plus grands que T (Buffoni *et al.* [13]).

1.2.2 Bases de Lagrange et d'Hermite

Les bases de Lagrange sont les bases les plus immédiates à utiliser. Des exemples de modèles réduits construits avec des bases de Lagrange peuvent être trouvés dans ([76], [41], [32]).

A titre d'exemple, considérons une EDP discrétisée en espace par une méthode d'éléments finis. Le problème peut se formuler ainsi :

Trouver
$$\boldsymbol{u} \in X_N$$
, tel que :
 $(\partial_t \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + g(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}; \boldsymbol{\mu}) = 0 \quad \forall \boldsymbol{v} \in Y_N$
(1.11)

où X_N et Y_N sont des espaces de dimension finie, comme par exemple l'espace élément fini P1.

Supposons que cette équation ait été résolue pour $t \in [0, T]$ et pour N_{μ} valeurs des paramètres. Nous disposons, pour chaque paramètre de la solution en N_t instants de temps t^n . Nous avons donc une base de données de fonctions spatiales :

$$\mathcal{S} = \{ \boldsymbol{u}(t^n, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\mu}_i) \mid n = 1 \dots N_t, \quad i = 1 \dots N_{\mu} \}$$

L'approche par base de Lagrange consiste alors à remplacer X_N dans la formulation (1.11) par $vect\{S\}$.

Une alternative est d'augmenter cette base des dérivées des solutions par rapport aux paramètres. Ces bases sont appelées bases d'Hermite. Dans leur travail sur l'écoulement dans une cavité (Exemple 1 ci-dessus) Ito et Ravindran [41] montrent que l'utilisation d'une telle base permet d'améliorer la performance du modèle.

1.2.3 Décomposition orthogonale aux valeurs propres (POD)

Le problème essentiel de l'approche que nous venons de présenter est que la taille de la base peut devenir considérable dès qu'on veut considérer un écoulement complexe sur une période de temps assez longue. Le problème peut se formuler ainsi :

Etant donné un ensemble de n vecteurs \boldsymbol{u}^i ,

comment déterminer un sous-espace E_R de taille N_R de $E_n = vect\{\boldsymbol{u}^i\}$ (1.12)

tel que la différence entre un élément de E_n et sa projection sur E_R soit minimale.

Nous allons voir que la décomposition orthogonale aux valeurs propres est un moyen très efficace de répondre à ce problème.

La POD est en premier lieu une technique d'analyse de données. Elle fut introduite dans le contexte de la turbulence par Lumley [48] en 1967 comme une méthode permettant d'identifier et d'extraire les structures cohérentes d'un écoulement. Elle peut être vue comme une généralisation de la décomposition de Fourier aux directions inhomogènes ou non-périodiques de l'écoulement (Bergmann et Cordier [9]). Dans leur livre de 1980, Holmes *et al.* [38] soulignent qu'une des propriétés remarquables de la base POD est qu'elle permet de décrire les caractéristiques dominantes de l'écoulement avec « étonnamment peu » de modes. Cette technique répond donc bien à la problématique soulevée ci-dessus.

La POD a de nombreux domaines d'application et est connue sous différents noms selon le domaine où elle est appliquée : décomposition de Karhunen-Loève, analyse en composantes principales etc. Nous présentons ici la POD telle qu'elle est utilisée actuellement dans le domaine de la réduction de modèle en mécanique des fluides. Nous utiliserons notamment l'approche dite des *snapshots* introduit par Sirovich [72]. Pour une approche plus complète, étendue notamment au cas des systèmes de dimension infinie nous renvoyons à [38].

Nous considérons un système d'EDO non-linéaires :

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{\mu}(t)) \\ \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0 \end{cases}$$
(1.13)

où $\boldsymbol{x}(t) \in \mathbb{R}^N$ et $\boldsymbol{\mu}(t) \in \mathbb{R}^P$.

Ce type de système peut notamment résulter de la discrétisation en espace d'une équation aux dérivées partielles, N est alors en général très grand (de l'ordre de 10^4 à 10^{10}). Nous supposons que nous avons déterminer la solution de (1.13) pour N_{μ} choix du paramètre μ et à N_T instants de temps. Nous notons ces solutions :

$$\boldsymbol{v}^{j} = \boldsymbol{x}(t^{n}, \boldsymbol{\mu}_{i}), \quad n = 1 \cdots N_{T}, \quad i = 1 \cdots N_{\mu}, \quad j = (i-1) * N_{T} + n$$

Les $N_s = N_T \times N_\mu$ vecteurs v^j sont appelés alors snapshots, étant pour ainsi dire des clichés de l'écoulement à différents instants de temps, et pour des paramètres donnés. N_s est généralement

beaucoup plus petit que N ce qui nous amène à considérer que les vecteurs v^j sont linéairement indépendants. Nous notons alors X^{N_s} l'espace qu'ils génèrent :

$$X^{N_s} = vect\{v^1, \dots v^{N_s}\}$$

Nous notons (\cdot, \cdot) le produit scalaire euclidien, et $\|\cdot\|$ la norme induite. La taille réduite N_R étant posée, le problème (1.12) s'écrit alors ainsi :

Trouver les
$$N_R$$
 vecteurs $\phi^k \in \mathbb{R}^N$ $(1 \le k \le N_R)$,
et les coefficients a_k^n $(1 \le k \le N_R, 1 \le n \le N)$ solutions de :
 $\min_{a,\phi} \sum_n \| \boldsymbol{v}^n - \sum_k a_k^n \phi^k \|$
sous la condition : $(\phi^k, \phi^r) = \delta_{kr}$ $1 \le k, r \le N_r$ (1.14)

La résolution de ce problème est détaillée dans l'annexe A

L'espace de dimension réduit obtenu, noté $X_R = vect\{\phi^k, 1 \leq k \leq N_R\}$, peut alors être utilisé comme dans le paragraphe précédent (1.2.2) pour obtenir un modèle réduit par projection Galerkin.

1.2.4 Alternatives aux méthodes POD-Galerkin

Pour les écoulements de transition, ou pour des écoulements turbulents, les systèmes POD-Galerkin peuvent être peu précis, voire instables (Noack *et al.* [56]). Ces modèles sont alors alors incapables de reproduire correctement les solutions de la base de données utilisée pour les générer. La raison essentielle à ce problème est qu'un modèle réduit obtenu par POD néglige non seulement les modes qui ont peu d'importance énergétique, mais aussi leur interaction avec les modes importants d'un point de vue énergétique.

Plusieurs solutions ont été proposées pour créer des systèmes stables basés sur la POD.

Une première approche est de modifier le problème (1.14) pour obtenir des fonctions de base plus adaptées à la représentation dynamique. Ainsi Iollo *et al.* [40] mesurent l'erreur en norme H^1 plutôt qu'en norme L^2 . Bui-Thanh *et al.* [16] proposent d'inclure le modèle réduit comme contrainte dans (1.14), les coefficients temporels vérifient ainsi les équations réduites par construction.

Il est aussi possible d'enrichir la base POD obtenue classiquement par d'autres modes représentatifs de l'écoulement. Noack *et al.* [56] proposent ainsi d'augmenter la base POD de modes de stabilité et d'un mode de transition. Pour des problèmes de contrôle la base est enrichie des modes de non-équilibre - cette technique doit permettre d'inclure dans le modèle les dynamiques induites par des lois de contrôle différentes (Noack *et al.* [57], Tadmor *et al.* [73]).

Enfin des techniques d'ajustement des coefficients du système POD-Galerkin permettent d'obtenir des modèles réduits précis tout en conservant la base POD optimale au sens de l'énergie. Dans cette catégorie on distingue les méthodes de calibration (Galletti *et al.* [28], Couplet *et al.* [25]) ou d'ajouter de viscosité (Bergmann [7], Rempfer et Fasel [63]).

Une approche encore très différente est celle des **Grammiens empiriques**. Une adaptation empirique de la méthode de troncature présentée à la section 1.1.1 a notamment été mise en place par Lall *et al.* [44] afin d'étendre la méthode au cas des systèmes non-linéaires. Il s'agit sommairement de déterminer des approximations empiriques des grammiens de contrôlabilité et d'observabilité. La méthode est implémentée de différentes façon dans les travaux de Willcox et Peraire [78], Rowley [69] ou encore de King *et al.* [43], mais dans tous les cas présente des liens étroits avec la POD. Rowley [69] montre que cette approche peut être interprétée comme une projection Petrov-Galerkin des équations du modèle d'ordre élevé sur deux sous-espaces obtenus par POD.

1.2.5 Quelques problématiques pour les bases empiriques

Nous adressons brièvement quelques points au sein du travail sur les modèles réduits à savoir :

- Comment choisir les snapshots à inclure dans la base de données?
- Comment évaluer l'erreur d'approximation commise en utilisant le modèle?

Estimation d'erreurs

Veroy et al. [76], Veroy et Patera [75] et Nguyen et al. [55] présentent des méthodes d'estimations a posterori pour des modèles d'ordres réduits obtenu en utilisant des bases de Lagrange et la projection Galerkin. Ils considèrent alors des problèmes stationnaires dépendant d'un nombre limité de paramètres.

Grepl *et al.* [32] et Rovas *et al.* [68] étendent ces méthodes au cas des équations nonstationnaires en traitant le temps comme un paramètre supplémentaire.

Des estimations d'erreurs pour les modèles réduits de systèmes dynamique du type (1.13) ont été établies par Homescu *et al.* [39], Serban *et al.* [70] ou encore par Hinze et Volkwein [37, 36]. Ces auteurs considèrent la réduction de modèle associant bases POD et projection Galerkin.

Notons que dans ces travaux on dissocie deux erreurs

- L'erreur de projection : La différence entre une solution et sa projection sur la base POD.
- l'erreur d'intégration : La différence entre la projection d'une solution sur la base POD, et la solution obtenue par modèle réduit.

La première partie de l'erreur est obtenue facilement comme étant le résidu de (1.14) (voir annexe A).

Le choix des paramètres

Graham *et al.* [30, 31] s'intéressent au cas du cylindre manipulé et génèrent un écoulement avec la loi de contrôle la plus riche possible en amplitudes et en fréquences (utilisation d'un chirp). La POD de la base ainsi obtenue est connu sous le nom de POD généralisé.

Grepl et Patera [33] mettent en place un système d'enrichissement progressif de la base qu'ils nomment Greedy algorithm, soit algorithme gourmand, pour le développement d'estimations d'erreur. Cette idée a été reprise par Bui-Thanh *et al.* [17] et Bashir *et al.* [5] pour d'autres applications. Un modèle réduit est initialement construit à partir d'une petite base donnée, contenant peut être même un seul snapshot. Le problème s'annonce alors de la façon suivante : Trouver le paramètre μ , tel que la différence entre la solution du modèle et la solution du problème d'ordre élevé soit maximale. Une fois ce paramètre μ pour lequel le modèle donne les plus mauvais résultats est repéré, la solution correspondante est ajoutée à la base de donnée. Le processus doit être répété, jusqu'à ce que l'erreur modèle réduit-modèle complet soit toujours au-dessous d'un certain seuil. Cette méthode est extrêmement coûteuse d'où le nom. L'idée est cependant de faire le plus de travail *hors-ligne* possible. Le modèle ainsi construit devrait ainsi être très performant pour des applications en temps réel.

1.3 Applications en optimisation et contrôle d'écoulements

Malgré les difficultés à simplement construire un modèle réduit qui reproduise une simulation d'écoulements, des tentatives d'application au contrôle ont eu lieu. Dans ces applications l'erreur du modèle n'est pas une question fondamentale, l'efficacité du modèle sera déterminée par sa capacité à être utilisée au sein d'un processus d'optimisation.

Une technique de balanced truncation pour déterminer un contrôle pour des systèmes linéaires d'entrée-sortie est détaillée dans les travaux de Camp et King [20]. Toujours dans le domaine des méthodes de troncature, Ahuja et Rowley [2] déterminent un contrôle par forces de volumes pour un écoulement à Re = 100. Des exemples de réussite de contrôle par méthodes basées sur la POD sont données par Afanasiev et Hinze [1], Ravindran [61] ou encore Atwell et King [4].

Nous retiendrons surtout les travaux consacrés au contrôle de l'écoulement autour d'un cylindre qui relèvent de difficultés particulières (5). Nous pouvons notamment citer [30, 31] qui ont déterminé un modèle d'ordre réduit pour l'écoulement autour d'un cylindre pour Re = 100. Le paramètre de contrôle était la rotation du cylindre, et un contrôleur fut déterminé en utilisant la théorie du contrôle optimal. Ils ont montré que leur contrôle permettait de réduire les instabilités dans le sillage, mais que les erreurs de prédictions du modèle augmentaient au cours du processus d'optimisation. Cette idée a été reprise par Bergmann *et al.* [11] qui améliorèrent le processus d'optimisation en incorporant des modes de non-équilibres suivant le modèle de Noack *et al.* [57] et la méthode à région de confiance suggérée par Fahl [26]. Ils ont ainsi obtenu des baisses importantes de la traînée à Re = 200. Siegel *et al.* [71] ont déterminé par modèle réduit un contrôle proportionnel-dérivatif pour déterminer des mouvements verticaux du cylindre, ce qui leur permet de stabiliser l'écoulement autour du cylindre à Re = 100.

Conclusion

Des méthodes systématiques et rigoureuses de réduction de modèles n'existent que pour des systèmes linéaires. C'est pourtant pour des problèmes non-linéaires et plus complexes que cette réduction est la plus nécessaire. Une grande partie de la recherche en modèles réduits concerne donc les modèles dits *empiriques*, obtenus en exploitant des bases de données de solutions numériques. Si les premiers résultats d'application de ces modèles sont déjà apparus notamment dans le domaine du contrôle - plusieurs questions restent ouvertes. L'échantillonnage des snapshots et l'estimation d'erreur sont deux difficultés essentielles qui peuvent être adressées en parallèle. Le choix des paramètres (instants de temps, conditions au bord ...) utilisés pour générer la base de données est un des principaux facteurs de l'erreur de modélisation. Dans de nombreux cas l'estimation de cette erreur n'est pas possible, et dans les autres elle peut s'avérer coûteuse. De même un bon échantillonage peut aussi être une procédure longue, soulevant la question de l'intérêt de la réduction. Ces études ne sont donc utiles que si elle peuvent être réalisées, au moins en partie, *hors-ligne*, c'est à dire à l'extérieur d'une éventuelle procédure d'optimisation. Elles sont pourtant essentielles dans la validation de l'approche par modèle réduit. Au problème de construction de la base de données, s'ajoute celui d'obtenir un *bon* système réduit. La projection Galerkin des équations du problème sur un sous-espace de faible dimension, obtenu par POD, apparaît être la démarche la plus répandue. Cette approche échoue pourtant pour les problèmes les plus complexes, obligeant à associer plusieurs méthodes (calcul de modes de stabilité, calibration etc.) pour obtenir des modèles fiables.

Suite à ces remarques, il semble normal d'émettre une réserve quant à l'applicabilité de ces modèles, notamment leur utilisation dans des problèmes de contrôle. Les algorithmes d'optimisation intégrant ces techniques se caractérisent généralement par l'absence d'une garantie de convergence, résultant du fait qu'il n'est ni possible de valider le modèle réduit sur tout l'espace des paramètres, ni même de quantifier ses performances. Les raisons évoquées en Introduction et les premiers résultats dans le domaine du contrôle présentés ci-dessus motivent tout de même la poursuite de recherches dans ce domaine, tandis que les travaux de réduction décrits dans ce chapitre forment une bonne base à partir de laquelle évoluer.

Chapitre 2

Simulation numérique de l'écoulement contrôlé

Dans ce chapitre nous présentons la configuration utilisée pour le contrôle, et donnons une courte description du code de simulation.

Ce code est notamment parallélisé et utilise la bibliothèque de communications MPI. Le maillage utilisé dans ces travaux était un maillage par tétraèdres irréguliers comportant environs 760000 points de maillage et 3750000 éléments. Le maillage etait partitionné en 32 sous-domaines pour profiter du parallélisme du code. Les simulations ont été réalisées sur les machines de calcul du centre M3PEC ¹, de l'IDRIS ², et du CINES ³.

2.1 Présentation du code

Le code AERO a été développé initialement par Bruno Koobus ⁴ et Alain Dervieux ⁵ pour la résolution des équations de Navier-Stokes compressibles dans des domaines tridimensionnels complexes. Nous les remercions d'avoir autorisé son utilisation pour ce travail. Ce code a par la suite été étendu incorporant notamment la méthode LES (Camarri et Salvetti [18]), mais nous ne nous intéressons pas à ces aspects ici.

2.1.1 Les équations du problème

Nous décrivons dans ce paragraphe les équations du modèle et leur adimensionnement en adoptant les notations d'un récent papier sur le code [50].

En l'absence de forces extérieures, et si l'on considère un gaz parfait, les équations décrivant

 $^{^{1}}$ M3PEC-Mésocentre pôle du Département des Ressources Informatiques et Multimédia de Bordeaux I, dédié à la modélisation et au calcul scientifique

²Institut du Développement des Ressources en Informatique Scientifique

³Centre Informatique national de l'Enseignement Supérieur

⁴Bruno Koobus, maître de conférence à l'Université Montpellier II

⁵Alain Dervieux -Directeur de Recherche à l'INRIA Sophia-Antipolis

un écoulement compressible s'écrivent :

0

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j} = 0$$

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad i = 1 \cdots 3$$

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial \rho E u_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial p u_j}{\partial x_j} + \frac{u(\partial_j \sigma_{kj})}{\partial x_k} - \frac{\partial q_j}{\partial x_j}$$

$$p = \rho \frac{R}{M}T$$

$$T = C_v T + \frac{1}{2} u_i u_i$$
(2.1)

où la convention de sommation d'Einstein est utilisée pour les indices j et k.

Dans ces équations, ρ, u_j , p et E désignent respectivement la densité, les composantes de la vitesse, la pression et l'énergie totale. Dans l'avant dernière équation R est la constante universelle d'un gaz parfait, M la masse molaire et T la température. Enfin C_v désigne la constante de chaleur à volume constant.

En supposant le fluide newtonien, et sous l'hypothèse de Stokes, le tenseur des contraintes de viscosité s'écrit :

$$\sigma_{ij} = -\frac{2}{3}\mu \sum_{k} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \text{ où } \mu \text{ est le coefficient de viscosité.}$$

La loi de Fourier est utilisée pour modéliser le flux de chaleur : $q_i = K \frac{\partial T}{\partial x_i}$, où K est le coefficient de conduction.

Dans le code les équations sont adimensionnées avec les quantités de référence suivantes :

- $-L_{ref} =$ longueur caractéristique de l'écoulement
- $U_{ref} =$ vitesse de l'écoulement libre
- $-\rho_{ref} = \text{densité de l'écoulement libre}$
- $-\mu_{ref} =$ viscosité moléculaire de l'écoulement libre

Les variables peuvent être adimensionnées avec les quantités de référence de la façon suivante :

$$\rho \leftarrow \frac{\rho}{\rho_{ref}} \quad u_j \leftarrow \frac{u_j}{U_{ref}} \quad p \leftarrow \frac{p}{U_{ref}p_{ref}}$$
$$E \leftarrow \frac{E}{\rho_{ref}U_{ref}^2} \quad \mu \leftarrow \frac{\mu}{\mu_{ref}} \quad t \leftarrow t\frac{L_{ref}}{U_{ref}}$$

Après adimensionnement les équations de Navier-Stokes compressibles s'écrivent :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j} = 0$$

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$$

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial \rho E u_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial p u_j}{\partial x_j} + \frac{1}{Re} \frac{u(\partial_j \sigma_{ij})}{\partial x_i} - \frac{\gamma}{RePr} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu(E - \frac{1}{2}u_j u_j)\right)$$
(2.2)

où Re est le nombre de Reynolds, Pr est le nombre de Prandlt qui sera supposé constant, et $\gamma = C_p/C_v$ est le rapprt des constantes spécififiques de chaleur à pression et volume contants.

2.1.2 Discrétisation en espace

Une méthode mixte éléments finis / volumes finis est utilisé pour la discrétisation en espace En écrivant les variables du problème sous la forme d'un seul vecteur :

 $\boldsymbol{W} = (\rho, \rho u, \rho v, \rho w, \rho E)^T$

Les équations (2.2) peuvent s'écrire sous la forme compacte :

$$\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{W} + \frac{\partial}{\partial x_j}\boldsymbol{F}_j(\boldsymbol{W}) - \frac{1}{Re}\frac{\partial}{\partial x_j}\boldsymbol{V}_j(\boldsymbol{W},\nabla\boldsymbol{W}) = 0$$
(2.3)

où la matrice F rassemble les termes convectifs de l'équation et V les termes diffusifs.

La pression p est alors liée aux composantes de W par :

$$p = (\gamma - 1) \left(w_5 - \frac{1}{2} \left(\frac{w_2^2 + w_3^3 + w_4^4}{w_1} \right) \right)$$

Une méthode de volumes finis *upwind* est utilisée pour le traitement des termes convectifs, tandis qu'une méthode classique d'éléments finis P1 est utilisée pour discrétiser les termes de diffusion.

Le domaine de calcul Ω est approximé par un domaine polygonal Ω_h . Ce dernier est divisé en N_t tétraèdres T_i par un processus de triangulation standard. On a alors :

$$\Omega_h = \bigcup_{i=1}^{N_t} T_i$$

L'ensemble des éléments T_i forme le maillage utilisée pour la formulation par éléments finis.

Le maillage dual pour le traitement par volumes finis est obtenu à partir de la triangulation en appliquant la méthode des médians. Chaque tétraèdre est divisé en 4 selon la méthode des plans médians - une sous-partie du tétraèdre est ainsi attribué à chacun de ses sommets. A un point du maillage, appartenant à plusieurs tétraèdres, peut être associé un ensemble de sousparties de tétraèdres. Pour chaque point S_i du millage, correspond donc un tel ensemble qui sera défini comme étant la cellule de centre S_i et sera noté C_i . Si N_s est le nombre de points de millage on aura donc :

$$\Omega_h = \bigcup_{i=1}^{N_s} C_i$$

Termes de convection

Les fonctions de base pour la formulation volumes finis sont définies par :

$$\psi^{i}(P) = \begin{cases} 1 \text{ si } P \in C_{i} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

$$(2.4)$$

On désigne par ∂C_i la surface de la cellule C_i . Pour deux cellules voisines, C_i et C_j , ∂C_{ij} désigne leur surface commune. La formulation de Galerkin pour les termes de convection est alors obtenue en multipliant les termes convectifs de (2.3) par ψ^i et en intégrant sur Ω_h , utilisant la formule de divergence, ce qui donne

$$\int \int_{\Omega_h} \frac{\partial F_j}{\partial x_j} \psi^i \, d\boldsymbol{x} = \int \int_{C_i} \frac{\partial F_j}{\partial x_j} \, d\boldsymbol{x} = \int_{\partial C_i} F_j \boldsymbol{n}_j^i \, d\gamma$$

où n_j^i désigne la jème composante de la normale unitaire extérieure à la cellule C_i .

On note $\mathcal{F}(\boldsymbol{W}, \boldsymbol{n}^i) = \sum_j \boldsymbol{F}_j(\boldsymbol{W}) \boldsymbol{n}_j^i$, et on a :

$$\int_{\partial C_i} \boldsymbol{F}_j \boldsymbol{n}_j^i \, d\gamma = \int_{\partial C_i} \mathcal{F}(\boldsymbol{W}, \boldsymbol{n}^i) \, d\gamma = \sum_{l \in \mathcal{V}(i)} \int_{\partial C_{il}} \mathcal{F}(\boldsymbol{W}, \boldsymbol{n}^{il}) \, d\gamma + \int_{\partial C_i \cap \Gamma_h} \mathcal{F}(\boldsymbol{W}, \boldsymbol{n}^i) \, d\gamma$$

où $\mathcal{V}(i)$ est l'ensemble d'indices désignant les cellules voisines de la cellule C_i .

Nous nous intéresserons au terme de bord dans la prochaine section lorsque nous parlerons des conditions au bord liées au contrôle. Pour l'instant nous ne parlerons que du traitement de la première partie de la précédente intégrale.

L'approximation utilisée est :

$$\int_{\partial C_{ij}} \mathcal{F}(\boldsymbol{W}, \boldsymbol{n}^{ij}) \, d\gamma \approx \Phi^{R}(\boldsymbol{W}_{i}, \boldsymbol{W}_{j}, \boldsymbol{\nu}_{ij})$$

ou $\boldsymbol{\nu}_{ij} = \int_{\partial C_{ij}} \boldsymbol{n}^{ij} \, d\gamma$

et $\Phi^{R}(W_{i}, W_{j}, \nu_{ij})$ est l'approximation du flux entre la cellule C_{i} et la cellule C_{j} , composée d'un terme centré et d'un terme *upwind*, proportionnel à une constante γ_{s} , qui introduit de la diffusion numérique et stabilise l'évaluation des flux de convection :

$$\Phi^{R}(U, V, \boldsymbol{n}) = \frac{\mathcal{F}(U, \boldsymbol{n}) + \mathcal{F}(V, \boldsymbol{n})}{2} - \gamma_{s} D^{R}(U, V, \boldsymbol{n})$$
$$D^{R}(U, V, \boldsymbol{n}) = |\mathcal{R}(U, V, \boldsymbol{n})| \frac{V - U}{2}$$

La matrice de Roe $\mathcal{R}(U, V, n)$ est le jacobien de \mathcal{F} calculé en un point moyen entre U et V:

$$\mathcal{R}(U, V, \boldsymbol{n}) = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{W}}(\widehat{\boldsymbol{W}}, \boldsymbol{n})$$

où $\widehat{\boldsymbol{W}}$ est la moyenne de Roe [65].

Termes de diffusion

Nous notons $\phi_{|T}^i$ la restriction d'un élément de base P1 au tétraèdre T (caractérisé par $\phi_{|T}^i(S_j) = \delta_{ij}$). La formulation Galerkin du terme de diffusion est alors obtenue en multipliant le terme de diffusion par $\phi_{|T}^i$ et en intégrant sur le domaine Ω_h :

$$\int \int_{\Omega_h} \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \phi^i_{|T} \, d\boldsymbol{x} = \int \int_T \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \phi^i_{|T} \, d\boldsymbol{x}$$

En intégrant par parties cela donne :

$$\int \int_{T} \frac{\partial V_{i}}{\partial x_{j}} \phi^{i}_{|T} \, d\boldsymbol{x} = \int_{\partial T} V_{j} \phi^{i}_{|T} \, d\gamma - \int \int_{T} V_{i} \frac{\partial \phi^{i}_{|T}}{\partial x_{j}} \, d\boldsymbol{x}$$

Finalement la contribution du terme diffusif au flux i est donnée par :

$$\mathcal{D}_i = \sum_{T,i\in T} \int_{\partial T} V_j \phi^i_{|T} \, d\gamma - \int \int_T V_i \frac{\partial \phi^i_{|T}}{\partial x_j} \, d\boldsymbol{x}$$

2.1.3 Discrétisation en temps

Une fois le problème discrétisé en espace, l'inconnu du problème est le vecteur solution à chaque noeud du maillage, pour un temps donné : $W_h(t)$. La discrétisation conduit donc à un système d'EDO :

$$\frac{d\boldsymbol{W}_h}{dt} + \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{W}_h(t)) = 0$$

où ϕ est un opérateur prenant en compte les termes de convection et de diffusion.

Le code AERO utilise un schéma implicite en temps, d'ordre 2 :

$$\alpha_{n+1}\boldsymbol{W}^{n+1} + \alpha_n\boldsymbol{W}^n + \alpha_{n-1}\boldsymbol{W}^{n-1} + \Delta t^n\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{W}^{n+1}) = 0$$

où les coefficients α_n sont définis par :

$$\alpha_{n+1} = \frac{1+2\tau}{1+\tau}, \ \alpha_n = -1-\tau, \ \alpha_{n-1} = \frac{\tau^2}{\tau+1}, \ \tau = \frac{\Delta t^n}{\Delta t^{n-1}}$$

Le système non-linéaire obtenu est linéarisé de la façon suivante :

$$\begin{cases} \alpha_{n+1} \boldsymbol{W}^n + \alpha_n \boldsymbol{W}^n + \alpha_{n-1} \boldsymbol{W}^{n-1} + \Delta^n \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{W}^n) = \\ - \left[\alpha_{n+1} + \delta^n \frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial \boldsymbol{W}}(\boldsymbol{W}^n) \right] \left(\boldsymbol{W}^{n+1} - \boldsymbol{W}^n \right) \end{cases}$$
(2.5)

Une discrétisation à l'ordre 1 des jacobiens est associée à la précédure de Unsteady Defect-Correction de Martin et Guillard [51], le schéma final est d'ordre 2 en temps.

2.2 Configuration pour l'étude du contrôle

2.2.1 Description du domaine et des conditions au bord

Ecoulement autour d'un cylindre carré

Nous considérons un écoulement autour d'un cylindre confiné entre deux parois. La géométrie est décrite par la figure 2.1.

Le confinement se traduit par des conditions d'adhérence sur les bords $y = y_{min}$ et $y = y_{max}$. Des conditions périodiques sont imposées dans la direction transversale (en $z = z_{min}$ et $z = z_{max}$). A l'entrée ($x = x_{min}$) nous imposons un profil de Poiseuille à la vitesse, tandis qu'à la sortie ($x = x_{max}$) des conditions aux limites non-réflectives sont appliquées. Ces dernières sont des conditions aux limites artificielles permettant de limiter les réflexions à la sortie. Ce type de condition permet de simuler un effet de sortie libre, sans prendre un domaine extrêmement long.



FIG. 2.1 – Domaine de Calcul Ω .

Les proportions choisies sont L/H = 1/8, $L_{in}/L = 12$, $L_{out}/L = 20$ et $L_z/L = 0.6$ (écoulement bidimensionnel).

Actionneurs sur le cylindre

Les travaux réalisés jusqu'à présent sur le contrôle actif par soufflage/aspiration par actionneurs placés sur le cylindre (Min et Choi [52],Park *et al.* [58]) traitaient du cas du cylindre circulaire. Dans ces études, les actionneurs, ou *jets*, sont placés sur la partie supérieure du cylindre, comme décrit dans la figure 2.2(a). Nous avons donc décider d'adopter un placement similaire pour le cas du cylindre carré, en plaçant deux jets comme montré à la figure 2.2(b). Cet emplacement correspond au point de départ du détachement.

2.2.2 Justification du choix du domaine

Le domaine décrit ci-dessus est bien défini et les conditions aux bords sont simples et modélisent correctement une éventuelle expérience. Nous renvoyons aux travaux de Camarri *et al.* [19] et Mariotti *et al.* [50] pour des exemples de validation. L'écoulement se caractérise néanmoins par certaines particularités non-triviales. Une allée tourbillonnaire de Von Kármán se développe dès que le nombre de Reynolds dépasse un certain seuil (ce seuil se situe autour de



FIG. 2.2 – Placement des jets

Re = 50). Ce détachement alterné de tourbillons est le résultat d'une instabilité absolue dans le proche sillage qui entraîne une oscillation auto-entretenue globale, tandis que loin de l'obstacle, l'écoulement est de nature convective.

Le choix d'un cylindre carré résulte du fait que les travaux de réduction de modèle qui nous servent de référence ([14, 13, 28, 27]) ont utilisé cette configuration. Cela peut générer des difficultés supplémentaires pour contrôler l'écoulement, mais ne devrait pas gêner cependant l'étude du contrôle par modèles réduits.

Un écoulement bidimensionnel

Les nombres de Reynolds que nous considérons dans ce travail (Re = 60, Re = 150) sont tels que l'écoulement peut être considéré bidimensionnel. Deux modes d'instabilités tridimensionnels, initialement identifiés pour les écoulements autour de cylindres, ont été mis en évidence pour le cylindre non-confiné en expériences (Luo *et al.* [49]) et dans l'analyse d'instabilités de Floquet ([64]). Le premier de ces modes est caractérisé par la formation de tourbillons de grande échelle et est présent pour $Re \approx 160$. Le second se caractérise par la formation de tourbillons de petite échelle et apparaît à $Re \approx 190 - 200$. Nous notons que des apports d'énergie importante via les actionneurs peuvent promouvoir des comportements tri-dimensionnels - cette éventualité sera négligée dans le présent travail.

Un écoulement incompressible

L'incompressibilité est obtenu en imposant un faible nombre de Mach (Ma=0.1). En pratique, un test est fait à chaque itération du code pour vérifier que la condition $\rho(\boldsymbol{x},t) \approx 1$ est bien remplie. Cette approche avait été validée pour le travail effectué par Buffoni *et al.* [14].

2.3 Contrôle par actionneurs

2.3.1 Implémentation des actionneurs

La présence d'un actionneur est modélisée en imposant une nouvelle condition aux limites sur une petite surface Γ_c de $\partial\Omega$:

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)\cdot\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})=c(t),\quad \boldsymbol{x}\in\Gamma_{c}$$

où $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})$ est le vecteur normal unitaire extérieur au domaine.

Le maillage sur la surface de l'obstacle est un maillage triangulaire non-uniforme. Nous présentons Figure 2.3, la surface supérieure du cylindre (dans le plan (x, z)). Pour plus de clarté nous présentons un maillage plus grossier que celui utilisé pour les calculs. Dans ce cas $L_z/L = 0.2$, et non $L_z/L = 0.6$ comme il est le cas dans nos exemples numériques. Sur la figure nous avons marqué d'un '+' les éléments appartenant à Γ_c . Nous présentons ci-dessus les contributions des nouvelles conditions aux bords aux flux définis précédemment.



FIG. 2.3 – Vue de dessus du cylindre avec maillage

Nous distinguons :

- Une contribution au terme convectif

La nouvelle condition au bord entre dans la formulation du problème introduit à la section précédente via le terme convectif :

$$\int_{\partial C_i \cap \Gamma_c} \boldsymbol{W}_j(W) \cdot \boldsymbol{n}_j \, d\gamma = \mathcal{F}_{ctrl}$$

Nous détaillons ici l'expression de F(W):

$$F_{1}(\boldsymbol{W}) = (\rho u, \rho u^{2} + p, \rho uv, \rho uw, \rho(E + p)u)^{T}$$

$$F_{2}(\boldsymbol{W}) = (\rho v, \rho vu, \rho v^{2} + p, \rho vw, \rho(E + p)v)^{T}$$

$$F_{3}(\boldsymbol{W}) = (\rho w, \rho wu, \rho wv, \rho w^{2} + p, \rho(E + p)w)^{T}$$

Nous commençons par évaluer $\boldsymbol{W}_{i}(W) \cdot \boldsymbol{n}_{j}$:

$$\begin{split} \boldsymbol{W}_{j}^{(1)}(W) \cdot \boldsymbol{n}_{j} &= \rho u \boldsymbol{n}_{x} + \rho v \boldsymbol{n}_{y} + \rho w \boldsymbol{n}_{z} = \rho(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n}) = \rho c \\ \boldsymbol{W}_{j}^{(2)}(W) \cdot \boldsymbol{n}_{j} &= (\rho u^{2} + p) \boldsymbol{n}_{x} + \rho u v \boldsymbol{n}_{y} + \rho u w \boldsymbol{n}_{z} = \rho u(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n}) + p \boldsymbol{n}_{x} = \rho u c + p \boldsymbol{n}_{x} \\ \boldsymbol{W}_{j}^{(3)}(W) \cdot \boldsymbol{n}_{j} &= \rho v c + p \boldsymbol{n}_{y} \\ \boldsymbol{W}_{j}^{(4)}(W) \cdot \boldsymbol{n}_{j} &= \rho w c + p \boldsymbol{n}_{z} \\ \boldsymbol{W}_{j}^{(4)}(W) \cdot \boldsymbol{n}_{j} &= \rho(E + p) c = \rho E c + p \rho c \end{split}$$

Nous notons W_i et p_i les approximations de $W_{|\partial C_i \cap \Gamma_c}$ et $p_{|\partial C_i \cap \Gamma_c}$ respectivement, et A_i l'aire de $\partial C_i \cap \Gamma_c$

Nous avons alors :

$$\mathcal{F}_{ctrl} \equiv \begin{pmatrix} A_i w_1 c \\ A_i w_2 c + p_i \boldsymbol{\nu}_x \\ A_i w_3 c + p_i \boldsymbol{\nu}_y \\ A_i w_4 c + p_i \boldsymbol{\nu}_z \\ A_i (w_5 + p_i w_1) c \end{pmatrix}$$

où
$$\boldsymbol{\nu} = \int_{\partial C_i \cap \Gamma_c} \boldsymbol{n} \, d\sigma.$$

- Une contribution au Jacobien pour méthode implicite en temps

Le Jacobien est modifié par l'ajout d'un terme $\frac{\partial \mathcal{F}_{ctrl}}{\partial W}$ où \mathcal{F}_{ctrl} est défini ci-dessus. En utilisant l'expression de la pression en fonction des composantes de W, le calcul de $\frac{\partial \mathcal{F}_{ctrl}}{\partial W}$ est immédiat.

2.3.2 Contrôle par soufflage/aspiration

Dans une optique de contrôle nous plaçons deux actionneurs sur le cylindre, fonctionnant avec une phase opposée (voir Figure 2.4) :

$$v(\boldsymbol{x},t) = -c(t), \quad \boldsymbol{x} \in \Gamma_c$$

(avec les notations précédentes, ceci correspond à imposer : $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) \cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}) = c(t)$ pour $\boldsymbol{x} \in \Gamma_c^1$ -sur le haut du cylindre-, et $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) \cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}) = -c(t)$ pour $\boldsymbol{x} \in \Gamma_c^2$ -sur le bas du cylindre.) Pour tester l'implémentation du contrôle, nous comparons les valeurs de la fonction de contrôle c(t) et la valeur effective de la vitesse verticale $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}_j,t)$ au point \boldsymbol{x}_a , centre de l'actionneur. Une bonne correspondance est relevée avec une erreur maximale de $|\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}_a,t)-c(t)|$ de l'ordre de 10^{-3} .

Une vue rapprochée du cylindre est donnée Figure 2.5, montrant les actionneurs en fonctionnement à un instant t^* , avec $c(t^*) = 0.3$.

Le profil de vitesse constant choisi pour les actionneurs a été fait dans un soucis de simplicité d'implémentation. Tout comme le placement des capteurs pour un contrôle par rétroaction, dont nous discutons dans le paragraphe suivant, il serait à déterminer de manière plus réfléchie


FIG. 2.4 – Position des actionneurs pour le contrôle



(a) Isolignes de la vitesse verticale (b) Isolignes de la vitesse longitudinale

FIG. 2.5 – Actionneurs en fonctionnement : aspiration en haut, soufflage en bas

si l'objectif était le contrôle du sillage. Dans ce travail nous nous intéressons avant tout à la capacité d'un modèle réduit à approximer la solution d'un problème de contrôle donné, un bon choix du profil n'est pas impératif. Le choix fait ici résulte tout de même en une irrégularité des fonctions de base de l'espace réduit au niveau du bord des actionneurs. Dans un futur travail il serait donc intéressant de choisir un profil éliminant ce problème.

2.4 Utilisation de capteurs

En vue de faire du contrôle actif en boucle fermée, nous plaçons des capteurs dans le sillage du cylindre. Ces capteurs mesureront la vitesse verticale de l'écoulement.

2.4.1 Placements des capteurs

Le placement des capteurs n'est pas sans effet sur l'efficacité du contrôle (Cohen *et al.* [24], Min et Choi [52]).

Nous plaçons nos capteurs très proches du cylindre, dans la zone de recirculation. Si l'on se place dans un repère ayant pour origine le centre du cylindre, les coordonnées des N_s points de mesures seront les $(x_j, 0, 0), j = 1 \dots N_s$.

Notons qu'il n'est pas très réaliste de mettre des capteurs à cet endroit là. Dans des conditions expérimentales, Roussopoulos [67] note que le simple fait de placer un capteur dans le sillage pouvait contrôler l'écoulement. Or, traitant un cas numérique nos capteurs n'ont aucun effet sur l'écoulement.

Nous ne sommes donc pas limiter physiquement dans le nombre de capteurs utilisés. La limitation du nombre de capteurs provient donc davantage du souhait de limiter le nombre de degrés de liberté du problème.

2.4.2 Des capteurs pour un contrôle PID

Nous définissons un contrôle proportionnel intégral :

$$\begin{split} c(t) &= \sum_{j} (\mathsf{K}_{j} \mathcal{P}_{j}(t) + \mathsf{K}_{j}^{i} \mathcal{I}_{j}(t) + \mathsf{K}_{j}^{d} \mathcal{D}_{j}(t)) \\ \text{où } \mathcal{P}_{j}(t) &= v(\boldsymbol{x}_{j}, t), \quad \mathcal{I}_{j}(t) = \int_{t-\Delta}^{t} v(\boldsymbol{x}_{j}, s) \, ds, \quad \mathcal{D}_{j}(t) = \frac{\partial v}{\partial t}(\boldsymbol{x}_{j}, t) \end{split}$$

et les scalaires K_j , K_j^i et K_j^d sont des réels appelés coefficients de gain.

La discrétisation suivante est utilisée pour \mathcal{I} et \mathcal{D} :

$$\mathcal{I}_{j}(t^{n}) = \int_{t^{n-k}}^{t^{n}} v(\boldsymbol{x}_{j}, s) \, ds \\
= \mathcal{I}_{j}(t^{n-1}) + \int_{t^{n-1}}^{t^{n}} v(\boldsymbol{x}_{j}, s) \, ds - \int_{t^{n-1-k}}^{t^{n-k}} v(\boldsymbol{x}_{j}, s) \, ds \\
= \mathcal{I}_{j}(t^{n-1}) + (t_{n} - t_{n-1}) \frac{v(\boldsymbol{x}_{j}, t_{n}) + v(\boldsymbol{x}_{j}, t_{n-1})}{2} \\
-(t_{n-k} - t_{n-1-k}) \frac{v(\boldsymbol{x}_{j}, t_{n-k}) + v(\boldsymbol{x}_{j}, t_{n-1-k})}{2}$$
(2.6)

$$\mathcal{D}_{j}(t^{n}) = \frac{v(x_{j}, t_{n}) - v(x_{j}, t_{n-1})}{t_{n} - t_{n-1}}$$
(2.7)

L'implémentation de ces capteurs exploite le parallélisme du code. Les partitions du maillage où se trouvent des capteurs sont identifiées en début de simulation. A chaque pas de temps, les processus correspondants à ces partitions envoient leurs mesures de vitesse aux autres. Le nombre de capteurs étant très petit (16 maximum dans nos tests) l'alourdissement des temps de communication est minimal.

2.4.3 Effet du contrôle proportionnel

Nous avons fait deux séries de simulation, une à Re = 60 et une à Re = 150, pour déterminer l'effet d'un contrôle proportionnnel utilisant un seul capteur de vitesse. Choisissant un repère dont l'origine est centre du carré, ce capteur est placé au point $(L/2 + \delta, 0, 0)$. Avec L = 1, nous avons donné à *delta* des valeurs entre 0.2 et 2, restant ainsi toujours dans la zone de recirculation.

Exemple à Re=60

Pour de faibles nombres de Reynolds l'on peut envisager un contrôle proportionnel utilisant un seul capteur. En effet le sillage a typiquement un seul mode instable résultant du détachement tourbillonnaire de Von Kármán (Choi *et al.* [22]). Nous constatons en effet qu'en appliquant un tel contrôle à Re = 60 il est possible d'éliminer toutes les oscillations de l'écoulement (Figure 5.10).



(a) Sans contrôle



(b) Avec contrôle proportionnel

FIG. 2.6 – Effet du contrôle proportionnel sur la vorticité à Re = 60 : K = 2.5 et $\delta = 0.25$

Exemple à Re=150

Pour des nombres de Reynolds plus élevés le sillage est caractérisé par la présence de plusieurs modes instables. Nous regardons ici l'effet de l'application d'un contrôle basé sur un seul capteur sur le coefficient de traînée. Ce type de contrôle peut entraîner une diminution de la traînée, mais ne stabilise pas l'écoulement. Des contrôles un peu plus forts (K plus important) peuvent entraîner une diminution un peu plus importante que celle montrée ci-dessus, mais augmenter encore plus la puissance de l'actionneur fait apparaître de nouvelles instabilités.



FIG. 2.7 – Effet d'un contrôle proportionnel sur le coefficient de traînée utilisant un seul capteur (Re = 150) : K = 1.0 et $\delta = 0.5$

Conclusion

L'implémentation d'un contrôle par soufflage/aspiration dans le code AERO a été réalisée. Nous disposons à présent des moyens nécessaires à la simulation du contrôle pour l'écoulement bidimensionnel autour d'un cylindre carré. Le système de capteurs mis en place permet notamment de tester des contrôles du type MISO (*Multiple Input Single Output*). Nous notons qu'aucune étude approfondie n'a été faite concernant le placement des capteurs et des actionneurs, nous nous sommes contentés de baser ces choix sur des configurations présentées dans la littérature. Nous ne revenons pas sur cette problématique dans la suite car nous estimons qu'elle n'influence pas le problème de réduction de modèle, mais nous rappelons qu'elle peut cependant jouer un rôle important dans des applications pratiques.

Chapitre 3

Modèle POD-ROM d'un écoulement contrôlé

Tout le travail présenté à partir de maintenant concerne les équations de Navier-Stokes incompressibles :

$$\begin{cases} \partial_t \boldsymbol{u} + \boldsymbol{u} \cdot \nabla \boldsymbol{u} + \nabla p - \frac{1}{Re} \Delta \boldsymbol{u} = 0 \\ \nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0 \end{cases}$$
(3.1)

Ces équations sont résolues avec le code présenté précédemment en imposant un faible nombre de Mach (Ma = 0.1).

Nous présentons la construction d'un modèle réduit basé sur la technique de décomposition orthogonale aux valeurs propres introduite à la section 1.2.3 pour l'écoulement autour d'un cylindre présenté au chapitre précédent. Pour créer la base de données nous choisissons une loi de contrôle par rétroaction, obtenue en utilisant les données d'un seul capteur placé dans le sillage du cylindre. A Re = 60 ce type de contrôle a permis de stabiliser l'écoulement. A Re = 150, à défaut de stabiliser, il permet de réduire un peu la traînée. Faute d'un meilleur choix ceci semble donc être un point de départ intéressant pour mettre en place une procédure de minimisation de la traînée. Nous choisissons donc une loi de contrôle ainsi obtenue, que nous appellerons simplement c(t) par la suite.

Le contrôle est appliqué une fois l'écoulement développé (fréquence de détachement stable). Une simulation des équations de Navier-Stokes incompressibles est alors réalisée sur une période de temps T. Une décomposition orthogonale de l'ensemble des snapshots obtenus est réalisée. Un modèle réduit pour la vitesse peut alors être construit par projection Galerkin des équations sur le sous-espace généré par les fonctions propres. Après avoir présenté la construction de la base POD, nous étudierons le comportement du modèle réduit obtenu. Nous présenterons ensuite des techniques de calibration. Nous finirons par la construction d'un modèle pour la pression, et la reconstruction des coefficients aérodynamiques.

3.1 Construction des modes POD

3.1.1 Création de la base de donnée

La figure 3.1(a) montre l'évolution du coefficient de portance obtenu en l'absence de contrôle pour Re = 150 et une vitesse initiale donnée par :

$$u(x, y, 0) = 1 - \frac{y^2}{16} \quad v(x, y, 0) = 0 \tag{3.2}$$

Le contrôle n'est appliqué qu'une fois l'écoulement développé $(t_c = 0 \text{ sur la figure 3.1(b)})$, et est maintenu pendant une période de temps T.



FIG. 3.1 – Evolution du coefficient de portance

Dans la suite de ce travail la solution à $t_c = 0$ sera donc toujours considérée comme la donnée initiale, et la variable t désignera le temps écoulé depuis cet instant là. Dorénavant nous ne considérons donc plus comme solution initiale, la solution (3.2) mais la solution à $t_c = 0$, que nous noterons par la suite u(x, 0) et dont la vorticité est représentée Figure 3.2.



FIG. 3.2 – Isolignes de vorticité à $t_c = 0$ - pour Re = 150

Pour la construction de la base POD, nous considérons les solutions obtenues sur une période de temps T à partir du temps initial de contrôle, avec une loi de contrôle c(t). Les champs de vitesse sont sauvegardés en N_T instants de temps t^n , $1 \leq n \leq N_T$. Ceci donne une base de données de solutions S:

 $\mathcal{S} = \{ \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t^n), \, \boldsymbol{x} \in \Omega, \, 1 \leqslant n \leqslant N_T \}$

3.1.2 Relèvement des conditions aux bords

Afin de faciliter la construction du modèle nous allons définir des snapshots homogènes, notés $\boldsymbol{w}^n(\boldsymbol{x})$. Cette définition permettra notamment d'expliciter la dépendance de la solution du problème réduit sur la loi de contrôle.

Pour cela nous définissons :

- La solution moyenne sans contrôle :

Une simulation des équations de N.-S. est réalisée sur [0,T] avec pour solution initiale $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},0)$ et avec une loi de contrôle nulle c(t) = 0. Les champs de vitesse $\boldsymbol{u}^0(\boldsymbol{x},t^n)$ sont sauvés en N_T instants de temps, et on calcule le champ moyen :

$$oldsymbol{u}_0(oldsymbol{x}) = rac{1}{N_T}\sum_{n=1}^{N_T}oldsymbol{u}^0(oldsymbol{x},t^n)$$

- La solution moyenne avec contrôle :

Une simulation des équations de N-S est réalisée sur [0,T] avec pour solution initiale $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},0)$ et avec une loi de contrôle constante $c(t) = c^*$. Les champs de vitesse $\boldsymbol{u}'(\boldsymbol{x},t^n)$ sont sauvés en N_T instants de temps, et on calcule le champ moyen :

$$oldsymbol{u}_0^\prime(oldsymbol{x}) = rac{1}{N_T}\sum_{n=1}^{N_T}oldsymbol{u}^\prime(oldsymbol{x},t^n)$$

On définit ensuite :

$$\boldsymbol{u_c}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{c^\star} \left(\boldsymbol{u}_0'(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x}) \right)$$

Les champs u_0 et u_c se caractérisent par :

$$\begin{split} \boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x}) &= \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t^n) \text{ sur } \partial \Omega \backslash (\Gamma_c \cup \Gamma_s) \quad \forall n, \ 1 \leqslant n \leqslant N_T \\ \boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{n} &= 0 \text{ sur } \Gamma_c \\ \boldsymbol{u}_c(\boldsymbol{x}) &= 0 \text{ sur } \partial \Omega \backslash (\Gamma_c \cup \Gamma_s) \\ \boldsymbol{u}_c(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{n} &= 1 \text{ sur } \Gamma_c \end{split}$$

 Γ_s désigne le bord de sortie sur lequel sont appliquées les conditions aux limites non-réflectives.

Les snapshots homogènes sont alors définis par :

$$\boldsymbol{w}^n(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t^n) - \boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x}) - c(t^n)\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{x})$$

Un exemple de u_0 et u_c est donné pour Re = 150 dans la figure 3.3. Le champ moyen contrôlé u_c a été obtenu avec $c^* = 0.05$.



(a) Première composante de la solution moyenne u_0

(b) Première composante de u_c

FIG. 3.3 – Isovaleurs de la vitesse longitudinale des solutions utilisées pour le relèvement

3.1.3 Calcul des modes

Nous notons \mathcal{W}_{N_T} le sous-espace engendré par les fonctions snapshots $\boldsymbol{w}^n(\boldsymbol{x})$ définies précédemment :

$$\mathcal{W}_{N_T} = vect\{oldsymbol{w}^1(oldsymbol{x}),\cdots,oldsymbol{w}^{N_T}(oldsymbol{x})\}$$

La décomposition orthogonale aux valeurs propres consiste à déterminer un sous-espace \mathcal{W}_{N_R} de dimension N_R de \mathcal{W}_{N_T} tel que la différence, mesurée en utilisant la norme $L^2(\Omega)$, entre un élément de \mathcal{W}_{N_T} et sa projection sur \mathcal{W}_{N_R} soit minimale. En notant $\{\phi^k(\boldsymbol{x})\}_{k=1\cdots N_R}$ une base orthonormale de l'espace recherché, le problème est formulé de la façon suivante :

Trouver les fonctions $\phi^k \in \mathcal{W}_{N_T}$ et les coefficients $a_k^n \in \mathbb{R}$, $1 \leq k \leq N_R$ et $1 \leq n \leq N_T$

solutions du problème :

Minimiser
$$\sum_{n=1}^{N_T} \left\| \boldsymbol{w}^n - \sum_{k=1}^{N_R} \boldsymbol{a}_k^n \boldsymbol{\phi}^k \right\|^2$$
(3.3a)

sous la condition :

$$\forall \quad 1 \leqslant r \leqslant N_R, \quad 1 \leqslant k \leqslant N_R \quad (\phi^k, \phi^r) = \delta_{kr} \tag{3.3b}$$

où (\cdot, \cdot) et $\|\cdot\|$ désignent respectivement le produit scalaire et la norme de $L^2(\Omega)$.

On montre (voir par exemple [77]) que le problème de minimisation se transforme en un problème aux valeurs propres. Les calculs sont détaillés dans l'annexe A.

Le calcul des vecteurs de base et des coefficients de projection peut alors se faire en quatre étapes :

1. Calculer la matrice de corrélation des snapshots. Cette matrice, notée R est définie par :

$$R_{nm} = (\boldsymbol{w}^n, \boldsymbol{w}^m) \quad 1 \leqslant n, m \leqslant N_T$$

- 2. Déterminer les N_R plus grandes valeurs propres de R et les vecteurs propres associés. On note ces valeurs propres λ_n et les vecteurs propres correspondant $\boldsymbol{\beta}_n$.
- 3. Définir les modes propres par :

$$egin{aligned} oldsymbol{\phi}^k(oldsymbol{x}) &= rac{oldsymbol{\psi}^k(oldsymbol{x})}{\|oldsymbol{\psi}^k\|} & ext{ où } oldsymbol{\psi}^k(oldsymbol{x}) &= \sum_{l=1}^{N_T}eta_k^loldsymbol{w}^l(oldsymbol{x}) \end{aligned}$$

4. Evaluer les coefficients de projection :

$$\boldsymbol{a}_k^n = (\boldsymbol{\phi}^k, \boldsymbol{w}^n)$$

Sur les figures 3.4 et 3.5 nous montrons les premier et troisième modes POD et coefficients temporels correspondants obtenus pour un écoulement non-contrôlé et pour un écoulement contrôlé. La période de temps considérée est de $T \approx 50$ et correspond à environ 7 cycles de détachement, le nombre de snapshots est $N_T = 200$, soit 30 snapshots par cycle. Le choix de la longueur de l'intervalle de temps n'est pas évident. D'un côté nous voulons représenter au mieux les dynamiques de l'écoulement. Puisque nous envisageons des applications d'un contrôle et la perte de la périodicité, l'intervalle doit être suffisamment long pour prendre en compte des évolutions. D'un autre côté, et nous le verrons plus loin, le modèle réduit perd en précision avec le temps. Le premier point nous paraissant essentiel nous avons choisi un intervalle de temps couvrant un nombre assez important de cycles de détachement. Le choix du nombre de snapshots a été fait en ne considérant que l'écoulement non contrôlé : avec 30 snapshots par cycle nous espérons avoir une précision suffisante. Ce choix de T et N_T est utilisé dans tous les exemples qui vont suivre.

3.1.4 Reconstruction de solutions

L'erreur de reconstruction de chaque snapshot s'exprime en fonction des valeurs propres de la matrice de corrélation (voir annexe A pour la justification) :

$$\sum_{n=1}^{N_T} \left\| \boldsymbol{w}^n - \sum_{k=1}^{N_R} \boldsymbol{a}_k^n \boldsymbol{\phi}^k \right\|^2 = \sum_{n=N_R+1}^{N_T} \lambda_n$$

et l'erreur relative est :

$$\frac{\sum_{n=1}^{N_T} \left\| \boldsymbol{w}^n - \sum_{k=1}^{N_R} \boldsymbol{a}_k^n \boldsymbol{\phi}^k \right\|^2}{\sum_{n=1}^{N_T} \left\| \boldsymbol{w}^n \right\|^2} = \frac{\sum_{n=N_R+1}^{N_T} \lambda_n}{\sum_{n=1}^{N_T} \lambda_n}$$



(c) Premier mode POD avec contrôle



FIG. 3.4 – Premier et troisième mode POD dans le cas non-contrôlé et dans le cas contrôle

En pratique les valeurs propres décroissent rapidement et donc peu de modes sont nécessaires pour obtenir une bonne reconstruction de la solution. L'erreur relative de reconstruction est égale 10^{-1} , dès que $N_R = 9$ pour le cas d'écoulement non-contrôlé présenté ci-dessus, et dès $N_R = 14$ pour l'écoulement contrôlé.

La base réduite étant définie, la projection d'une solution $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)$ à n'importe quel temps $t \in [0,T]$, obtenue en utilisant une loi de contrôle c(t) quelconque, se fait en deux étapes :

- Relèvement des conditions aux bords : $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x},t) = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) \boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x}) c(t)\boldsymbol{u}_c(\boldsymbol{x})$
- Calcul des coefficients de projection : $\hat{\boldsymbol{a}}_k(t) = (\boldsymbol{w}(\cdot,t), \boldsymbol{\phi}^k)$

La solution projetée est alors définie par :

$$\hat{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x},t) = \boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x}) + c(t)\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{x}) + \hat{\boldsymbol{a}}_k(t)\boldsymbol{\phi}^k(\boldsymbol{x})$$

Dans le cas particulier où la solution à reconstruire avait été utilisée pour générer la bas POD, on a $\hat{a}_k(t^n) = a_k^n$.

Reprenant les notations du Chapitre 1, nous définissons le sous-espace de dimension faible X_R pour la construction du modèle par :

$$X_{R} = \{ \boldsymbol{u} \mid \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) = \boldsymbol{u}_{0}(\boldsymbol{x}) + c(t)\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{x}) + a_{k}(t)\boldsymbol{\phi}^{k}(\boldsymbol{x}), \ c, a_{k} \in \mathcal{C}^{1}([0,T]) \}$$
(3.4)



FIG. 3.5 – Premier et troisième coefficients temporels dans le cas non-contrôlé et dans le cas contrôlé

3.2 Le modèle réduit pour la vitesse

3.2.1 Projection des équations

La première étape de la construction du modèle réduit consiste à réaliser une projection Galerkin des équations de Navier-Stokes sur le sous-espace de dimension N_R déterminé par POD.

Notons que par construction la solution réduite vérifie l'équation de continuité. La projection des équations du mouvement et de la condition initiale donne un système d'EDO :

$$\forall \quad 1 \leq r \leq N_R$$

$$(\partial \boldsymbol{u}_R(\cdot, t), \boldsymbol{\phi}_r) + (\boldsymbol{u}_R(\cdot, t) \cdot \nabla \boldsymbol{u}_R(\cdot, t)) +$$

$$(\nabla p_R(\cdot, t), \boldsymbol{\phi}_r) - \frac{1}{Re} (\Delta \boldsymbol{u}_R(\cdot, t), \boldsymbol{\phi}_r) = 0$$

$$(\boldsymbol{u}_R(\cdot, 0), \boldsymbol{\phi}_r) = 0$$

$$(3.5)$$

où $\boldsymbol{u}_{R}(\boldsymbol{x},t) = \boldsymbol{u}_{0}(\boldsymbol{x}) + c(t)\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{x}) + \hat{\boldsymbol{a}}_{k}(t)\boldsymbol{\phi}^{k}(\boldsymbol{x})$

Traitement du terme de pression

En appliquant l'opérateur de divergence aux équations du mouvement, et en utilisant l'équation de continuité, nous obtenons une équation de Poisson pour la pression :

$$\Delta p = -\sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = -Tr((\nabla \boldsymbol{u})^2)$$
(3.6)

Nous considérerons que la résolution de cette équation n'est cependant pas nécessaire pour obtenir une approximation réduite. Le terme de pression apparaissant dans (3.5) peut en effet être négligé :

$$(\nabla p(\cdot, t), \boldsymbol{\phi}_r) = \int_{\Omega} \nabla p(t, \boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{\phi}_r(\boldsymbol{x}) \, d\boldsymbol{x}$$

= $-\int_{\Omega} p(t, \boldsymbol{x}) div(\boldsymbol{\phi}_r)(\boldsymbol{x}) \, d\boldsymbol{x} + \int_{\partial\Omega} p(t, \boldsymbol{x}) \boldsymbol{\phi}_r(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}) \, d\gamma$ (3.7)
= $\int_{\Gamma_r} p(t, \boldsymbol{x}) \boldsymbol{\phi}_r(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}) \, d\gamma$

La dernière intégrale résulte du fait que les modes propres s'annulent sur tous les bords, sauf le bord de sortie Γ_s . En pratique cette contribution du bord de sortie est très petite, et nous choisissons de la négliger comme le suggère Galletti *et al.* [28], même si récemment la necessité d'inclure ce terme pour obtenir un bon modèle a été avancée par Morzynski *et al.* [54]. Notons aussi que la procédure de calibration que nous introduisons par la suite permet aussi de modéliser l'erreur commise en négligeant ce terme.

Le modèle réduit POD-Galerkin pour la vitesse

En développant la solution réduite en fonction du contrôle et des modes POD, et en tenant compte des remarques sur la pression, on obtient un modèle réduit pour la vitesse, que l'on appellera le modèle réduit POD-Galerkin. Nous utiliserons la notation $\mathcal{R}(\mathcal{G})$ pour désigner ce modèle.

$$\mathcal{R}(\mathcal{G}) \begin{cases} \forall \quad 1 \leq r \leq N_R \\ \dot{\boldsymbol{a}}_r(t) = \boldsymbol{A}_r + \boldsymbol{B}_{rk} \boldsymbol{a}_k(t) + \boldsymbol{C}_{rks} \boldsymbol{a}_k(t) \boldsymbol{a}_s(t) + \boldsymbol{E}_r \dot{c}(t) + \boldsymbol{F}_r c^2(t) + (\boldsymbol{G}_r + \boldsymbol{H}_{rk} \boldsymbol{a}_k(t)) c(t) \\ \boldsymbol{a}_r(0) = \boldsymbol{a}_r^0 \end{cases}$$

$$(3.8)$$

Les coefficients de ce système sont détaillés dans le tableau 3.1.

Coefficients de la Projection Galerkin			
Notation	Valeur	Facteur	
$oldsymbol{A}_r$	$-((oldsymbol{u}_0 \cdot abla)oldsymbol{u}_0,oldsymbol{\phi}_r)+rac{1}{Re}(\Deltaoldsymbol{u}_0,oldsymbol{\phi}_r)$	1	
$oldsymbol{B}_{rk}$	$-((oldsymbol{u}_0\cdot abla)oldsymbol{\phi}_k,oldsymbol{\phi}_r)-((oldsymbol{\phi}_k\cdot abla)oldsymbol{u}_0,oldsymbol{\phi}_r)+rac{1}{Re}(\Deltaoldsymbol{\phi}_k,oldsymbol{\phi}_r)$	$oldsymbol{a}_k(t)$	
$m{C}_{rks}$	$-((oldsymbol{\phi}_k\cdot abla)oldsymbol{\phi}_s,oldsymbol{\phi}_r)$	$\boldsymbol{a}_k(t) \boldsymbol{a}_s(t)$	
$oldsymbol{E}_r$	$-(oldsymbol{u_c},oldsymbol{\phi}_r)$	$\dot{c}(t)$	
\boldsymbol{F}_r	$-(oldsymbol{u_c} \cdot abla oldsymbol{u}_0, oldsymbol{\phi}_r)$	$c^2(t)$	
G_r	$-((\boldsymbol{u}_0\cdot\nabla)\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{c}},\boldsymbol{\phi}_r)-((\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{c}}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}_0,\boldsymbol{\phi}_r)+\frac{1}{Re}(\Delta\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{c}},\boldsymbol{\phi}_r)$	c(t)	
$oldsymbol{H}_r$	$-((oldsymbol{u_c} \cdot abla)oldsymbol{\phi}_k,oldsymbol{\phi}_r) - ((oldsymbol{\phi}_k \cdot abla)oldsymbol{u_c},oldsymbol{\phi}_r)$	$\boldsymbol{a}_k(t)c(t)$	

TAB. 3.1 – Coefficients du modèle réduit

3.2.2 Intégration du modèle réduit

Nous avons pu voir qu'il suffit de quelques modes pour obtenir une bonne reconstruction des solutions de la base de données (entre 8 et 15 selon le contrôle appliqué). Dans cette section nous nous intéressons à la capacité du modèle réduit dynamique à reproduire une de ces solutions. Plutôt que de reconstruire les solutions sur tout le domaine Ω nous allons comparer les solutions de (3.8) avec les coefficients de projection $\hat{a}_k(t)$. Ces solutions seront appelées coefficients de prédiction ou estimations.

Nous nous intéressons notamment à l'erreur relative :

$$\mathcal{E}(\mathcal{R}) = \frac{\sum_{k=1}^{N_R} \int_0^T (\hat{\boldsymbol{a}}_k(t) - \boldsymbol{a}_k(t))^2 dt}{\sum_{k=1}^{N_R} \int_0^T \hat{\boldsymbol{a}}_k^2(t) dt}$$

Nous présentons les résultats pour les deux écoulements (contrôlé et non-contrôlé) introduits plus haut. Le nombre de modes retenus pour le modèle réduit est $N_R = 15$. Le système est intégré en temps en utilisant une méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 avec un pas de discrétisation en temps de $\Delta t = 0.005$.

Le cas c(t) = 0

Dans le cas non-contrôlé, les 9 premiers modes représentent 99,9% de l'énergie, les 15 modes utilisés pour le modèle représentent presque 100%. Dans la Figure 3.6 nous représentons pour quelques valeurs de k ($1 \le k \le N_R$) l'évolution temporelle des coefficients de projection et de prédiction. Le modèle réduit reproduit presque parfaitement les données, avant cependant un léger écart qui apparaît vers la fin de l'intervalle de temps. L'erreur relative est de 8.15 %.



FIG. 3.6 – Projections vs. solutions du modèle POD-Galerkin(c(t) = 0)

Le cas $c(t) \neq 0$

Pour le cas contrôlé les disparités projections-prédictions sont plus importantes. La comparaison des coefficients est présentée Figure 3.8. La loi de contrôle utilisée, ainsi que son effet sur la traînée sont donnés Figure 3.7.

L'erreur relative du modèle réduit est dans ce cas d'environ 28 %. Le modèle réduit obtenu par projection Galerkin a donc des difficulté à reproduire la transistion induite par la présence des actionneurs.(Figure 3.8)



FIG. 3.7 – Loi de contrôle test et son effet sur la traînée



FIG. 3.8 – Projections vs. solutions du modèle POD-Galerkin ($c(t) \neq 0$)

3.3 Techniques de calibration

Les problèmes de précision du modèle obtenu par POD-Galerkin ont conduit à des recherches de bases alternatives à la base POD [16, 69, 10], ou à son enrichissement par d'autres fonctions [57]. Cette base demeure cependant optimale pour la reconstruction des solutions, nous proposons donc d'adapter le modèle plutôt que de rejeter la base POD. Des recherches en ce sens ont notamment été entreprises par [62, 28, 25, 11, 42, 13].

3.3.1 Un ajustement du modèle POD-Galerkin

La calibration consiste à ajuster les coefficients du modèle réduit (A_r , B_{rk} etc.) pour améliorer sa stabilité. Il s'agit donc de résoudre le problème inverse :

Trouver les coefficients du système (3.8) tels que : Le modèle réduit modélise au mieux les dynamiques du modèle complet.

Puisque ces coefficients vont devenir des « inconnues » dans la suite du chapitre, nous allons ré-écrire le système (3.8) pour faire ressortir cet aspect.

On pose :

$$\mathbf{f}(\mathbf{a}(t), c(t), \dot{c}(t)) = \left[1, \{a_k(t)\}_{k=1\cdots N_r}, \{a_k(t)a_s(t)\}_{k,s=1\cdots N_r}, \dot{c}(t), c^2(t), c(t), \{a_k(t)c(t)\}_{k=1\cdots N_r} \right]$$
(3.9)

 et

$$\boldsymbol{X}_{r} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{r}, \{\boldsymbol{B}_{rk}\}_{k=1\cdots N_{r}}, \{\boldsymbol{C}_{rks}\}_{k,s=1\cdots N_{r}}, \boldsymbol{E}_{r}, \boldsymbol{F}_{r}, \boldsymbol{G}_{r}, \{\boldsymbol{H}_{rk}\}_{k=1\cdots N_{r}} \end{bmatrix}^{T}$$
(3.10)

Le modèle réduit peut alors s'écrire :

$$\begin{cases} \forall \quad 1 \leqslant r \leqslant N_r \\ \dot{\boldsymbol{a}}_r(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}(t), c(t), \dot{c}(t)) \cdot \boldsymbol{X}_r \\ \boldsymbol{a}_r(0) = \boldsymbol{a}_r^0 \end{cases}$$
(3.11)

3.3.1.1 Formulation du problème de calibration

La calibration sur les états

Une première approche introduite par Galletti *et al.* [28] consiste à minimiser l'erreur entre les fonctions de projections $\hat{a}_r(t)$ et les fonctions de prédictions $a_r(t)$ solutions du problème (3.11). Nous définissons l'erreur entre ces coefficients, encore appelée *erreur sur les états* par :

$$\mathcal{E}_{E}(\boldsymbol{X}) = \sum_{r=1}^{N_{R}} \int_{0}^{T} \left(\hat{\boldsymbol{a}}_{r}(t) - \boldsymbol{a}_{r}(t) \right)^{2} dt$$
(3.12)

où \boldsymbol{a}_r est solution de (3.11)

Ce problème a été résolu par Galletti *et al.* [28] pour un écoulement bidimensionnel autour d'un cylindre confiné, en l'absence de contrôle. Le modèle réduit qui en résulte reproduit correctement la phase de transition de l'écoulement. Galletti *et al.* [27] prolongent cette méthode pour le cas de l'écoulement contrôlé par des actionneurs placés sur les parois du domaine à Re = 66. Ces résultats semblant prometteurs nous avons testé la méthode pour notre configuration.

La calibration sur les dynamiques

Une autre approche consiste à trouver les coefficients du système (3.11) de sorte à minimiser le résidu obtenu en injectant les coefficients de projection dans le système réduit. Nous définissons ce résidu, encore appelé *erreur sur les dynamiques* par :

$$\mathcal{E}_{D}(\boldsymbol{X}) = \sum_{r=1}^{N_{r}} \int_{0}^{T} \left(\dot{\boldsymbol{a}}_{r}(t) - \boldsymbol{\hat{f}}(t) \cdot \boldsymbol{X}_{r} \right)^{2} dt$$

où $\boldsymbol{\hat{f}}(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\hat{a}}(t), c(t), \dot{c}(t))$ (3.13)

Déjà suggérée dans les travaux de Galletti *et al.* [28], cette approche a été utilisée avec succès pour le cas d'écoulements tridimensionnels autour d'un cylindre (Buffoni *et al.* [13]) et pour des écoulements turbulents (Couplet *et al.* [25]). Dans le cas non-contrôlé elle est aussi équivalente à la méthode de stabilisation intrinsèque de Kalb et Deane [42]. Ici nous proposons une extension au cas d'un écoulement contrôlé et nous proposons une méthode de régularisation optimisée.

3.3.1.2 La calibration partielle

Dans [63], ou encore [11], l'ajustement du modèle se fait par l'ajout de termes de viscosité dans le modèle réduit. Ce choix repose sur des considérations physiques. Les fonctions de base POD retenues pour construire un modèle réduit sont représentatives des caractères énergétiques dominants de l'écoulement, générés par les grosses et moyennes structures. Les petites structures sont quant à elles négligées du fait de leur faible apport énergétique. Or, la dissipation s'effectue principalement dans les petites structures de l'écoulement. Par conséquent le système réduit POD ne dissipe pas assez d'énergie. Ajouter des viscosités artificielles au système POD-ROM permettrait peut-être d'améliorer le modèle réduit. Rempfer et Fasel [63] considèrent que chaque mode propre dissipe une certaine quantité d'énergie et suggèrent donc d'ajouter une viscosité tourbillonnaire sur chacun des modes POD. Bergmann [7] étend cette idée aux systèmes de contrôle, et obtient des modèles plus performants en considérant que les viscosités ajoutées dépendent du temps.

Pour le cas c(t) = 0, ce raisonnement conduit à vouloir calibrer A_r et B_{rk} , tout en faisant confiance au terme convectif C_{rks} . Cette approche fut notamment choisie par Galletti *et al.* [28], et nous la suivrons également. Dans le cas $c(t) \neq 0$ il faudrait en plus calibrer G_r . Néanmoins, puisque nous voulons un maximum de précision pour tout ce qui est lié au contrôle nous choisissons de calibrer tous les termes liés au contrôle.

Pour une notation plus générale nous désignons par X_r^1 le vecteur formé des éléments de X_r à calibrer, et les X_r^2 le vecteurs des éléments de X_r qui sont issus de la projection Galerkin. Les éléments de f(t) sont divisés de façon analogue pour former $f^1(t)$ et $f^2(t)$. Le modèle réduit peut alors s'écrire sous une forme adaptée à la calibration partielle :

$$\begin{cases} \forall \quad 1 \leqslant r \leqslant N_r \\ \dot{\boldsymbol{a}}_r(t) = \boldsymbol{f}^1(t) \cdot \boldsymbol{X}_r^1 + \boldsymbol{f}^2(t) \cdot \boldsymbol{X}_r^2 \\ \boldsymbol{a}_r(0) = \boldsymbol{a}_r^0 \end{cases}$$
(3.14)

Nous notons N_{cal} le nombre d'éléments calibrés.

3.3.2 Première approche : Calibration sur les états

Une première approche est de trouver les coefficients du système (3.11) tels que l'erreur entre la solution de ce système et les coefficients de projection soit minimale. Il s'agit donc de résoudre le problème de minimisation sous contrainte :

$$\min_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{X}^1} \sum_{r=1}^{N_r} \int_0^T \left(\boldsymbol{a}_r(t) - \hat{\boldsymbol{a}}_r(t) \right)^2 dt$$
(3.15a)

sous la condition :

$$\begin{cases} \forall \quad 1 \leqslant r \leqslant N_r \\ \boldsymbol{a}_r(0) = \boldsymbol{a}_r^0 \\ \dot{\boldsymbol{a}}_r(t) = \boldsymbol{f}^1(t) \cdot \boldsymbol{X}_r^1 + \boldsymbol{f}^2(t) \cdot \boldsymbol{X}_r^2 \end{cases}$$
(3.15b)

3.3.2.1 Résolution du problème de calibration

Le problème de minimisation sous contrainte (3.15) peut s'écrire sous forme d'un problème de minimisation sans contraintes en introduisant les fonctions multiplicateurs de Lagrange $\mathbf{b}_r(t)$.

On définit la lagrangienne $\mathcal{L}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{X}^1)$ par :

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{X}) = \sum_{r=1}^{N_r} \int_0^T (\boldsymbol{a}_r(t) - \hat{\boldsymbol{a}}_r(t))^2 dt + \sum_{r=1}^{N_r} \left[\int_0^T \boldsymbol{b}_r(t) (\dot{\boldsymbol{a}}_r(t) \boldsymbol{f}^1(t) \cdot \boldsymbol{X}_r^1 + \boldsymbol{f}^2(t) \cdot \boldsymbol{X}_r^2) dt + \mu_r(\boldsymbol{a}_r(0) - \boldsymbol{a}_r^0) \right]$$
(3.16)

Le problème (3.15) est alors équivalent au problème :

$$\min_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{X}^1} \mathcal{L}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{X}^1)$$
(3.17)

dont la solution est obtenue en annulant successivement les dérivées de \mathcal{L} par rapport aux variables a_r , b_r et X_r^1 :

- L'annulation des dérivées directionnelles $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial b_l}$ suivant les variables adjointes b_l , redonne les équations du modèle réduit (3.11) ou **équations d'état**.
- L'annulation des dérivées directionnelles $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a_l}$ suivant les variables d'états a_l , donne les équations adjointes.
- L'annulation des dérivées directionnelles $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X_l}$ suivant les coefficients X_r , donne les équations d'optimalité.

Le système adjoint

Pour $1 \leq l \leq N_r$ et δa_l une direction arbitraire, la dérivée au sens de Fréchet de \mathcal{L} au point (a, b, X) et suivant la direction δa_l s'écrit :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{a}_{l}}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{X}) \delta \boldsymbol{a}_{l} = 2 \int_{0}^{T} (\boldsymbol{a}_{l}(t) - \hat{\boldsymbol{a}}_{l}(t)) \delta \boldsymbol{a}_{l}(t) dt + \mu_{l} \delta \boldsymbol{a}_{l}(0)
+ \int_{0}^{T} \boldsymbol{b}_{l}(t) \dot{\delta \boldsymbol{a}}_{l}(t) - \sum_{r=1}^{N_{r}} \boldsymbol{b}_{r}(t) \left[\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{a}_{l}}(t) \cdot \boldsymbol{X}_{r} \right] \delta \boldsymbol{a}_{l}(t) dt$$
(3.18)

En intégrant par parties cette dérivée peut encore s'écrire :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{a}_{l}}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{X}) \delta \boldsymbol{a}_{l} = \boldsymbol{b}_{l}(T) \delta \boldsymbol{a}_{l}(T) + (\mu_{l} - \boldsymbol{b}_{l}(0)) \delta \boldsymbol{a}_{l}(0) - \int_{0}^{T} \left[\dot{\boldsymbol{b}}_{l}(t) + \sum_{r=1}^{N_{r}} \boldsymbol{b}_{r}(t) \left[\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{a}_{l}}(t) \cdot \boldsymbol{X}_{r} \right] - 2(\boldsymbol{a}_{l}(t) - \hat{\boldsymbol{a}}_{l}(t)) \right] \delta \boldsymbol{a}_{l}(t) dt$$
(3.19)

Il est alors évident que :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{a}_{l}}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{X}) \delta \boldsymbol{a}_{l} = 0 \quad \forall \boldsymbol{a}_{l} \quad \Leftrightarrow \\
\begin{cases}
\forall \quad 1 \leq l \leq N_{r} \\
\dot{\boldsymbol{b}}_{l}(t) = (\boldsymbol{g}_{l}(\boldsymbol{a}(t), \boldsymbol{c}(t)) \cdot \boldsymbol{X}_{r}) \boldsymbol{b}_{r}(t) + 2(\boldsymbol{a}_{l}(t) - \hat{\boldsymbol{a}}_{l}(t)) \\
\boldsymbol{b}_{l}(0) = 0
\end{cases} \tag{3.20}$$

où
$$\forall t, \boldsymbol{g}_{l}(\boldsymbol{a}(t), c(t)) = -\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{a}_{l}}(t)$$

= $-\left[0, \{\delta_{kl}\}_{k=1\cdots N_{r}}, \{\delta_{kl}a_{s}(t) + \delta_{sl}a_{k}(t)\}_{k,s=1\cdots N_{r}}, 0, 0, 0, \{\delta_{kl}c(t)\}_{k=1\cdots N_{r}}\right]$

et donc $\boldsymbol{g}_l(\boldsymbol{a}(t), c(t)) \cdot \boldsymbol{X}_r = \boldsymbol{B}_{rl} + \sum_s (\boldsymbol{C}_{rls} + \boldsymbol{C}_{rsl}) \boldsymbol{a}_s(t) + \boldsymbol{H}_{rl} c(t)$

Les conditions d'optimalité

Nous notons $X_{\ell r}^1$ la ℓ ème composante de X_r^1 et $f_\ell^1(t)$ la ℓ ème composante de $f^1(t)$. La dérivée de la lagrangienne \mathcal{L} par rapport au scalaire X_r^ℓ est donnée par :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{X}_{\ell r}^{1}}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{X}) = \int_{0}^{T} \boldsymbol{b}_{r}(t) \boldsymbol{f}_{\ell}^{1}(t) dt$$
(3.21)

Système d'équations

Le problème de minimisation s'écrit au finale sous la forme :

$$\begin{cases} \forall \quad 1 \leqslant r \leqslant N_r \\ \boldsymbol{a}_r(0) = \boldsymbol{a}_r^0 & \text{Equations Directes} \\ \dot{\boldsymbol{a}}_r(t) = \boldsymbol{f}(t) \cdot \boldsymbol{X}_r \\ \forall \quad 1 \leqslant r \leqslant N_r \\ \dot{\boldsymbol{b}}_r(t) = \sum_k (\boldsymbol{g}_r(\boldsymbol{a}(t), c(t)) \cdot \boldsymbol{X}_k) \boldsymbol{b}_k(t) + 2(\boldsymbol{a}_r(t) - \hat{\boldsymbol{a}}_r(t)) & \text{Equations Adjointes} \\ \boldsymbol{b}_r(T) = 0 \\ \forall \quad 1 \leqslant r \leqslant N_r, \quad 1 \leqslant \ell \leqslant N_{cal}/N_r \\ \int_0^T \boldsymbol{b}_r(t) \boldsymbol{f}_\ell(t) \, dt = 0 & \text{Conditions d'optimalité} \end{cases}$$
(3.22)

Les équations sont résolues en utilisant la même méthode pseudo-spectrale que dans [27]. La discrétisation est détaillée dans l'annexe B. En notant N_t le nombre de points de discrétisation en temps, le problème à résoudre devient un système d'équations non linéaires de $N_{spec} = 2 \times N_t \times N_r + N_{cal}$ inconnues. La discrétisation proposée transforme alors le système (3.22) en un système du type $\mathbf{F}(\mathbf{Y}) = 0$ avec $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{N_{spec}}$ qui peut être résolue par la méthode de Newton $(\nabla \mathbf{F}(\mathbf{Y})$ est une matrice creuse dont le calcul est explicité Annexe B). Cette méthode itérative est initialisée par :

$$\begin{cases} \boldsymbol{a}_{r}^{0}(t) = \hat{\boldsymbol{a}}_{r}(t) \\ \boldsymbol{b}_{r}^{0}(t) = 0 \\ \boldsymbol{X}_{r}^{1,0} = \boldsymbol{X}_{r}^{1}(\mathcal{G}) \end{cases}$$
(3.23)

3.3.2.2 Résultats et évaluation de la méthode

Notons que cette approche présente deux défauts importants :

– Unicité et existence de la solution :

Le problème n'admet pas une solution unique, même si le choix précédent de solution initiale devrait permettre d'être proche de la solution optimale au début de l'algorithme. Pour certains choix de N_R le problème se trouve être mal posé, et la boucle d'optimisation ne converge pas

– Les temps de calculs :

Ils dépendent de la discrétisation de l'intervalle de temps. En général N_t ne pourra pas être bien plus petit que N_T si l'on veut correctement modéliser les dynamiques - le problème de calibration devient donc vite de taille importante.

L'utilisation de cette méthode permet cependant dans de nombreux cas de construire un modèle réduit très précis utilisant un faible nombre de mode. Ainsi l'application de la calibration pour l'écoulement contrôlé présenté ci-dessus permet de diviser par 10 l'erreur entre les coefficients de projection et d'estimations : on passe de 27% dans le cas non-calibré à 2.64% dans le cas calibré. Les résultats graphiques présentés Figure 3.9 sont à comparer avec ceux de la Figure 3.8.



FIG. 3.9 – Projections vs. solutions du modèle calibré

3.3.3 Deuxième approche : Calibration sur les dynamiques

Une deuxième approche consiste à trouver les coefficients du système (3.11) de sorte à minimiser le résidu obtenu en injectant les coefficients de projection dans le système. Il s'agit donc de résoudre le problème de minimisation sans contraintes :

$$\min_{\mathbf{X}^{1}} \sum_{r=1}^{N_{r}} \int_{0}^{T} \left(\dot{\hat{\boldsymbol{a}}}_{r}(t) - \hat{\boldsymbol{f}}^{1}(t) \cdot \boldsymbol{X}_{r}^{1} - \hat{\boldsymbol{f}}^{2}(t) \cdot \boldsymbol{X}_{r}^{2} \right)^{2} dt$$
(3.24)

Cette méthode a été suggérée dans [28], et utilisée avec succès pour des cas tri-dimensionnels [13] et turbulents [25]. Nous la mettons en place ici pour le cas de l'écoulement contrôlé.

3.3.3.1 Résolution du problème de calibration

Nous calculons la dérivée de l'erreur sur les dynamiques (3.13) par rapport au vecteur de coefficients X_r^1 :

$$\frac{\partial \mathcal{E}_{E}}{\partial \boldsymbol{X}_{r}^{1}}(\boldsymbol{X}) = -2 \int_{0}^{T} \boldsymbol{\hat{f}}^{1}(t)^{T} \left(\dot{\boldsymbol{\hat{a}}}_{r}(t) - \boldsymbol{\hat{f}}^{1}(t) \cdot \boldsymbol{X}_{r}^{1} - \boldsymbol{\hat{f}}^{2}(t) \cdot \boldsymbol{X}_{r}^{2} \right) dt$$

L'annulation de cette dérivée est alors réalisée en résolvant le système linéaire de taille N_{cal}^2 :

$$\int_{0}^{T} \hat{f}^{1}(t)^{T} \hat{f}^{1}(t) dt \, \boldsymbol{X}_{r}^{1} = \int_{0}^{T} \hat{f}^{1}(t)^{T} \left(\dot{\hat{\boldsymbol{a}}}_{r}(t) - \hat{f}^{2}(t) \cdot \boldsymbol{X}_{r}^{2} \right) dt$$

Nous appelons S^{cal} la matrice du système :

$$S^{cal} = \int_0^T \hat{\boldsymbol{f}}^1(t)^T \hat{\boldsymbol{f}}^1(t) \, dt,$$

et V^r le terme de droite :

$$V^{r} = \int_{0}^{T} \hat{\boldsymbol{f}}^{1}(t)^{T} \left(\dot{\hat{\boldsymbol{a}}}_{r}(t) - \hat{\boldsymbol{f}}^{2}(t) \cdot \boldsymbol{X}_{r}^{2} \right) dt$$

Puisque S^{cal} est symétrique, sa construction nécessite le calcul de $\frac{N_{cal}(N_{cal}-1)}{2}$ intégrales. Le calcul des termes de droite V^r $(1 \leq r \leq N_R)$ demande $N_{cal} \times N_R$ calculs d'intégrale. N_R et N_{cal} étant typiquement petits, la détermination du système est très rapide. La méthode de quadrature de Legendre est utilisée pour évaluer les intégrales.

La résolution du problème de calibration (3.24) nécessite donc de résolution N_R systèmes linéaires de taille N_{cal}^2 . La matrice est la même pour tous ces systèmes, seul le terme de droite varie.

3.3.3.2 Régularisation du problème

Les gains en temps de la méthode 2 par rapport à la méthode 1 sont considérables (moins d'une minute contre 30 minutes sur la même machine), cependant ce problème est souvent mal conditionné. Notons qu'une solution X^1 de (3.15) devrait être un bon candidat au problème de minimisation (3.24). A défaut d'être la solution de ce problème, elle devrait au moins garantir une erreur $\mathcal{E}_E(X)$ assez petite. Or, comme nous l'avons spécifié plus haut, l'unicité de la solution de (3.15) n'est pas garantie. Il peut donc exister plusieurs choix de X qui permettent d'obtenir une erreur $\mathcal{E}_E(X)$ peu élevée. La matrice S^{cal} est alors presque singulière. Nous verrons que dans le cas où la loi de contrôle a été obtenue par rétroaction proportionnelle, le déterminant de cette matrice est même nulle (section 4.1.2).

Un moyen de contourner ce problème est d'utiliser une méthode classique de régularisation de type Tikhonov, c'est-à-dire de remplacer le problème (3.24) par :

$$\min_{\mathbf{X}^{1}} \sum_{r=1}^{N_{r}} \int_{0}^{T} \left(\dot{\hat{\boldsymbol{a}}}_{r}(t) - \hat{\boldsymbol{f}}^{1}(t) \cdot \boldsymbol{X}_{r}^{1} - \hat{\boldsymbol{f}}^{2}(t) \cdot \boldsymbol{X}_{r}^{2} \right)^{2} dt + \alpha \|\boldsymbol{X}_{r}^{1}\|_{2}^{2}$$
(3.25)

où α est un petit paramètre et $\|\cdot\|_2$ est la norme euclidienne de $\mathbb{R}^{N_{cal}}$

Par analogie avec la méthode 1, pour laquelle nous initialisons le problème non-linéaire avec les coefficients issus de la projection Galerkin, nous définissons un nouveau problème de calibration régularisée :

$$\min_{\mathbf{X}^{1}} \sum_{r=1}^{N_{r}} \int_{0}^{T} \left(\dot{\hat{\boldsymbol{a}}}_{r}(t) - \hat{\boldsymbol{f}}^{1}(t) \cdot \boldsymbol{X}_{r}^{1} - \hat{\boldsymbol{f}}^{2}(t) \cdot \boldsymbol{X}_{r}^{2} \right)^{2} dt + \alpha \|\boldsymbol{X}_{r}^{1} - \boldsymbol{X}_{r}^{1}(\mathcal{G})\|_{2}^{2}$$
(3.26)

Dans les exemples de contrôle à Re = 150 que nous avons choisi, un choix de α entre 10^{-4} et 10^{-1} a permis de régulariser le problème, cependant le choix d'une valeur ou d'une autre influence de façon importante le comportement du modèle obtenu ([25]). Nous avons donc mis en place une méthode systématique pour le choisir.

La méthode L-curve

La méthode L-Curve permet de déterminer le paramètre de régularisation de manière graphique. Développée par Hansen [35] pour la régularisation au sens de Tikhonov, elle est utilisée pour rechercher l'optimum d'une fonctionnelle composée de deux termes, un résidu et la norme de la solution. Ici, plutôt que la norme de la solution nous utiliserons la norme de la différence $\|X_{r}^{1} - X_{r}^{1}(\mathcal{G})\|_{2}$

Nous choisissons deux valeurs extrêmes de α notées α_1 et α_2 . La méthode L-curve est alors composée des étapes suivantes :

- Pour $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$:
 - Résoudre le problème de calibration (3.26) $\Rightarrow X_r^1(\alpha)$

- Définir le résidu :
$$\mathcal{R}(\alpha) = \sum_{r=1}^{N_r} \int_0^T \left(\dot{\hat{a}}_r(t) - \hat{f}^1(t) \cdot X_r^1(\alpha) - \hat{f}^2(t) \cdot X_r^2\right)^2 dt$$

 $\begin{array}{l} - \text{ Définir la différence avec les coefficients de projection Galerkin} : } \mathcal{D}(\alpha) = \left\| \boldsymbol{X}_{r}^{1}(\alpha) - \hat{\boldsymbol{X}}_{r}^{1} \right\|_{2}^{2} \\ - \text{ Normaliser } \mathcal{R} \text{ et } \mathcal{D} : \mathcal{R}(\alpha) \leftarrow \frac{\mathcal{R}(\alpha)}{\max_{\alpha} \mathcal{R}(\alpha)}, \ \mathcal{D}(\alpha) \leftarrow \frac{\mathcal{D}(\alpha)}{\max_{\alpha} \mathcal{D}(\alpha)} \\ - \text{ Définir la courbe en } L \ \mathcal{L}(\alpha) = (\mathcal{R}(\alpha), \mathcal{D}(\alpha)) \\ - \text{ Définir la courbure de } \mathcal{L} : \ \mathcal{L}(\alpha) = \frac{|\dot{\mathcal{R}}(\alpha)\ddot{\mathcal{D}}(\alpha)-\ddot{\mathcal{R}}(\alpha)\dot{\mathcal{D}}(\alpha)|}{(\dot{\mathcal{R}}^{2}(\alpha)+\dot{\mathcal{D}}^{2}(\alpha))^{\frac{3}{2}}} \end{array}$

L'application de la méthode de calibration sur les états associée à la régularisation par L-Curve, permet une diminution de l'erreur d'un facteur de plus de 2, pour un calcul ne prenant que quelques secondes. L'erreur relative est en effet de 10.7%. Les résultats graphiques sont présentés Figure3.11.



FIG. 3.10 – Méthode L-curve pour choisir le paramètre de régularisation



FIG. 3.11 – Premier et troisième coefficient temporel : projection vs. solution du modèle calibré par la méthode L-curve

Méthode de minimisation d'erreur

Une alternative consiste à chercher α telle que l'erreur $\mathcal{E}_{N_R}(\mathbf{X})$ soit minimale :

Pour $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$:

- Résolution du problème de calibration.
- Intégration en temps du modèle réduit calibré.
- Evaluation de l'erreur $\mathcal{E}_{N_R}(\boldsymbol{X})$.

Cette méthode est plus coûteuse que la précédente puisqu'elle demande la résolution du système réduit à chaque itération, son coût reste tout de même dérisoire par rapport au problème de calibration sur les états, d'autant que son coût n'augmente pas si l'on souhaite augmenter le nombre de snapshots dans la base. La diminution de l'erreur par rapport au cas non-calibré est d'un facteur supériereur à 3 - l'erreur est en effet d'environ 8 %. Des résultats graphiques osnt présentés Figure 3.12.



FIG. 3.12 – Premier et troisième coefficient temporel : projection vs. solution du modèle calibré par la méthode de minimisation d'erreur

3.4 Un modèle vitesse-pression

Si la pression ne joue pas un rôle important dans le modèle réduit pour la vitesse, notamment après son amélioration par calibration, il est intéressant d'avoir une valeur pour la pression réduite. D'une part cela rend possible l'évaluation des coefficients aérodynamiques (traînée et portance) dans lesquels le terme de pression est dominant. D'autre part cela permet de calculer éventuellement le résidu des équations de Navier-Stokes incompressibles pour le cas où l'on voudrait envisager un enrichissement de la base (Bergmann *et al.* [8]).

3.4.1 Un modèle réduit pour la pression

La pression vérifie une équation de Poisson qui s'obtient en appliquant l'opérateur de divergence aux équations de la vitesse :

$$\Delta p = -Tr((\nabla \boldsymbol{u})^2) \tag{3.27}$$

La réduction de (3.27) est alors analogue à la réduction des équations du mouvement.

Les modes POD pour la pression sont notées Φ_k^p et la pression réduite p_R peut s'écrire en fonction de ces modes et de la fonction de contrôle :

$$p_{R}(\boldsymbol{x},t) = p_{0}(\boldsymbol{x}) + c(t)p_{c}(\boldsymbol{x}) + \sum_{r=1}^{N_{r}} \boldsymbol{a}_{r}^{p}(t)\Phi_{r}^{P}(\boldsymbol{x})$$
(3.28)

Un modèle d'ordre réduit pour la pression peut alors être obtenu par projection Galerkin de l'équation de pression (3.27) sur les modes de pression Φ_k^P :

$$\boldsymbol{L}_{rk}^{P}\boldsymbol{a}_{k}^{p}(t) = \boldsymbol{A}_{r}^{P} + \boldsymbol{B}_{rk}^{P}\boldsymbol{a}_{k}(t) + \boldsymbol{C}_{rks}^{P}\boldsymbol{a}_{k}(t)\boldsymbol{a}_{s}(t) + \boldsymbol{F}_{r}^{P}\boldsymbol{c}^{2}(t) + \boldsymbol{G}_{r}^{P}\boldsymbol{c}(t) + \boldsymbol{H}_{rk}^{P}\boldsymbol{a}_{k}(t)\boldsymbol{c}(t) \quad (3.29)$$

Les coefficients du système (3.29) sont donnés dans le tableau 3.4.1.

Tous les termes, à l'exception de C_{rks}^{P} , sont calibrés par la méthode de minimisation des résidus avec choix optimal du paramètre de régularisation. Les résultats sont présentés Figure 3.13

Coefficients de la Projection Galerkin			
Notation	Valeur	Facteur	
$oldsymbol{A}_r^{oldsymbol{P}}$	$(Tr(abla oldsymbol{u}_0 ablaoldsymbol{u}_0)+\Delta p_0,oldsymbol{\phi}_r^P)$	1	
$oldsymbol{B}_{rk}^{oldsymbol{P}}$	$(2Tr(abla \phi_k abla u_0), \phi_r^P)$	$oldsymbol{a}_k(t)$	
$oldsymbol{C}^{P}_{rks}$	$(2Tr(\nabla \phi_k \nabla \phi_s), \phi_r^P)$	$oldsymbol{a}_k(t)oldsymbol{a}_s(t)$	
$oldsymbol{F}_r^{oldsymbol{P}}$	$(Tr(abla oldsymbol{u_c} abla oldsymbol{u_c}), oldsymbol{\phi}_r^{\scriptscriptstyle P})$	$c^2(t)$	
G_r^P	$(2Tr(\nabla \boldsymbol{u}_0 \nabla \boldsymbol{u}_c) + \Delta p_c, \boldsymbol{\phi}_r^P)$	c(t)	
$oldsymbol{H}_{rk}^{P}$	$(2Tr(\nabla \boldsymbol{\phi}_k \nabla \boldsymbol{u}_{\boldsymbol{c}}), \boldsymbol{\phi}_r^P)$	$\boldsymbol{a}_k(t)c(t)$	
$oldsymbol{L}_{rk}^{oldsymbol{P}}$	$(-\Delta oldsymbol{\phi}_k^{\scriptscriptstyle P},oldsymbol{\phi}_r^{\scriptscriptstyle P})$	$oldsymbol{a}_k^p(t)$	

TAB. 3.2 – Coefficients pour le pression

3.4.2 Reconstruction des coefficients aérodynamiques avec le modèle vitessepression

Les coefficients de traînée et de portance, notés $C_D(t)$ et $C_L(t)$ respectivement sont donnés par :

$$C_D(t) = 2 \int_{\Gamma_{cyl}} (p - p_{entree}) \boldsymbol{n}_1 - \boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{n} \, d\gamma$$
$$C_L(t) = 2 \int_{\Gamma_{cyl}} (p - p_{entree}) \boldsymbol{n}_2 - \boldsymbol{\tau}_2 \cdot \boldsymbol{n} \, d\gamma$$

où τ_{ij} est le tenseur des contraintes de viscosité défini, dans le cas incompressible par :

$$\tau_{ij} = \frac{1}{Re} ((\nabla \boldsymbol{u})^{\mathrm{T}} + \nabla \boldsymbol{u})_{ij}$$

Ces coefficients peuvent donc s'écrire en tant que somme de termes dépendant de la pression et de termes dépendant de la vitesse. Pour la traînée :

$$C_D(t) = C_D^p(p(\cdot, t)) + C_D^u(\boldsymbol{u}(\cdot, t))$$

Nous définissons alors la traînée réduite par :

$$C_D^R(t) = C_D^p(p_R(\cdot, t)) + C_D^u(\boldsymbol{u}_{rs}(\cdot, t))$$

Les coefficients de traînée et de pression réduite peuvent alors être développés en fonctions des modes POD et des coefficients temporels. Nous présentons Figure 3.14 les estimations obtenues par le modèle vitesse-pression construit avec $N_R = 60$.



FIG. 3.13 – Premier et troisième coefficient temporel : projection vs. solution du modèle calibré par la méthode des dynamiques



FIG. 3.14 – Reconstruction des coefficients de traînée et de portance par modèle réduit

Conclusion

Dans ce chapitre nous avons mis en évidence l'incapacité du modèle réduit basé uniquement sur la projection Galerkin à reproduire une dynamique contrôlée. Deux méthodes de calibration permettant d'améliorer les performances du modèle ont été présentées. La première permet d'obtenir un modèle très précis, mais cela se fait moyennant des temps de calculs dépendant du nombre de snapshots, et ne peut donc pas être retenue pour les problèmes de taille importante. La deuxième méthode a déjà été utilisée avec succès dans d'autres applications. L'optimisation du paramètre de régularisation de ce problème augmente un peu le temps de calcul du modèle, mais celui-ci reste négligeable par rapport au coût de la simulation des équations de Navier-Stokes non-réduites. Nous utiliserons donc le modèle ainsi calibré dans la suite de ce travail.

Chapitre 4

Réduction de modèle adaptée au contrôle d'écoulement

Dans cette partie nous nous intéressons à l'adaptation d'un modèle pour le contrôle d'écoulement en exploitant la méthode de calibration choisie dans le chapitre précédent. Un défaut majeur des lois de contrôle présentées dans ce dernier est qu'elles ne sont définies que sur une période de temps fixé [0, T], relativement courte. La première partie de ce chapitre est donc consacrée à la construction d'un modèle réduit par rétroaction proportionnelle-intégrale : les paramètre de contrôle sont alors de simples scalaires. Dans une seconde partie nous nous posons le problème de la région de validité du modèle. Nous avons vu ($\S1.2.5$) que des efforts se sont déjà portés sur le difficile problème du choix des paramètres de la base de données ([17, 33]). En ce qui concerne le choix des instants de temps t^n nous avons pris une gamme de points assez large pour que la base de donnée représente bien l'écoulement considéré. En revanche, un seul choix des paramètres de contrôle a été pris en compte, et le modèle ainsi construit n'est pas capable de reproduire des dynamiques induites par des contrôles différents. Nous définissons donc des modèles *multi-dynamiques*.

4.1 Extension du modèle réduit au contrôle par rétroaction

Nous rappelons que la solution réduite u_R est fonction de la loi de contrôle et des modes POD :

$$\boldsymbol{u}_{R}(\boldsymbol{x},t) = \boldsymbol{u}_{0}(\boldsymbol{x}) + c(t)\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{a}_{k}(t)\boldsymbol{\phi}^{k}(\boldsymbol{x})$$

Lorsque la loi de contrôle est obtenu par rétroaction,

$$c(t) = \mathsf{K}_j \boldsymbol{u}_2(\boldsymbol{x}_j, t) = \mathsf{K}_j v(\boldsymbol{x}_j, t)$$

on définit le contrôle réduit correspondant par :

$$c_R(t) = \mathsf{K}_j v_R(\boldsymbol{x}_j, t) = \mathsf{K}_j \left(v_0(\boldsymbol{x}_j) + c_R(t) v_c(\boldsymbol{x}_j) + \boldsymbol{a}_k(t) \boldsymbol{\phi}_2^k(\boldsymbol{x}_j) \right)$$

Pour alléger les notations, nous définissons :

pour
$$j = 1...N_s$$
, $v_0^j = v_0(\boldsymbol{x}_j)$, $v_c^j = v_c(\boldsymbol{x}_j)$ et $\boldsymbol{\phi}_2^{k,j} = \boldsymbol{\phi}_2^k(\boldsymbol{x}_j)$

En faisant l'hypothèse que $\mathsf{K}_j v_c^j \neq 1,$ le contrôle réduit peut alors s'écrire :

$$c_R(t) = \sum_k \frac{\sum_j \mathsf{K}_j v_m^j \phi_2^{k,j}}{1 - \sum_i \mathsf{K}_i v_c^i} \boldsymbol{a}_k(t) = \sum_k \hat{\mathsf{K}}_k \boldsymbol{a}_k(t)$$
(4.1)

Le modèle réduit avec contrôle proportionnel est alors défini par :

$$\begin{cases} \forall \quad 1 \leqslant r \leqslant N_R \\ \dot{\boldsymbol{a}}_r(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}(t), c_R(t), \dot{c_R}(t)) \cdot \boldsymbol{X}_r \\ \boldsymbol{a}_r(0) = \boldsymbol{a}_r^0 \\ c_R(t) = \hat{\boldsymbol{K}}_k \boldsymbol{a}_k(t) \end{cases}$$
(4.2)

4.1.1 Intégration en temps du modèle en rétroaction

Comme pour le modèle présenté au chapitre précédent, le système (4.2) est résolu avec une méthode itérative. Remarquons qu'il n'est pas nécessaire de définir une discrétisation pour l'évaluation de $\dot{c}(t)$, en effet :

$$\dot{c_R}(t) = \mathsf{K}_k \dot{\boldsymbol{a}}_k(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}(t), c_R(t), \dot{c_R}(t)) \cdot \boldsymbol{X}_k$$
(4.3)

Avec cette remarque, le schéma d'Euler pour les équations (4.2) s'écrit

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}_{r}^{m} &= \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}^{m}, \boldsymbol{c}_{R}^{m}, \dot{\boldsymbol{c}}^{m}) \cdot \boldsymbol{X}_{r} \\ \boldsymbol{a}_{k}^{m+1} &= \boldsymbol{a}_{r}^{m} + h \boldsymbol{y}_{r}^{m} \\ \boldsymbol{c}_{R}^{m+1} &= \mathsf{K}_{j} \left(\boldsymbol{u}_{0}^{j} + \boldsymbol{c}_{R}^{m}(t) \boldsymbol{u}_{c}^{j} + \boldsymbol{a}_{k}^{m} \boldsymbol{\phi}_{j}^{k} \right) \\ \dot{\boldsymbol{c}}^{m+1} &= \mathsf{K}_{j} \left(\dot{\boldsymbol{c}}^{m}(t) \boldsymbol{u}_{c}^{j} + \boldsymbol{y}_{k}^{m} \boldsymbol{\phi}_{j}^{k} \right) \end{aligned}$$

$$(4.4)$$

L'implémentation du contrôle intégral ou dérivatif nécessite cependant la définition d'une discrétisation spécifique au sein du modèle réduit.

Par la suite nous avons décidé de n'utiliser que des contrôles proportionnels ou proportionnelintégrales. L'introduction de la dérivée de la vitesse introduit en effet des petites perturbations conduisant à des modèles instables.

4.1.2 Le modèle calibré

Dans le cas d'un contrôle proportionnel la matrice du problème de calibration sur les dynamiques est singulière. En effet les équations obtenues en annulant les dérivées par rapport à C_{rk} (coefficients des termes linéaires $\hat{a}_k(t)$) sont alors une combinaison linéaire des équations obtenues en annulant les dérivées par rapport à G_r (coefficients du terme c(t)). La régularisation proposée permet cependant de contourner cette difficulté.

Le nombre de modes conservés a aussi son importance pour ce type de contrôle. Les modèles obtenus avec $N_R = 15$ comme dans le chapitre précédent se sont montrés très imprécis dans le cas présent. L'effet du nombre de modes sur les résultats du modèle réduit est illustré Figure 4.1 et Figure 4.2.



FIG. 4.1 – Reconstruction de la loi de contrôle selon le nombre de modes



FIG. 4.2 – Troisième coefficient temporel : projection vs. solution du modèle calibré pour $N_R = 30$ et $N_R = 60$

4.2 La calibration sur plusieurs dynamiques

4.2.1 Région de validité du modèle

Pour que le modèle puisse être utilisable dans une application de contrôle il est important que le modèle puisse prendre en compte plusieurs dynamiques. Pour cette étude nous avons choisi trois lois de contrôle générées au cours d'un processus d'optimisation. Ces trois lois de contrôle que nous appelons c_1 , c_2 et c_3 , ainsi que les coefficients de traînée qu'elles induisent sont représentés Figure 4.3. Ces trois contrôles ont été obtenues par rétroaction.

Nous construisons d'abord un modèle réduit calibré sur les dynamiques de c_2 . Nous notons ce modèle $\mathcal{R}(\{c_2\})$. Le problème modèle est ensuite résolu pour $c = c_3$. Nous comparons alors les quantités suivantes :

- Les coefficients de projection obtenus en projetant la solution des équations de Navier-
- Stokes pour c_3 sur la base réduite obtenue à partir de c_2 .
- Les solutions du modèle réduit $\mathcal{R}(\{c_2\})$ résolu avec $c = c_3$.

L'erreur de reconstruction relative des fonctions temporelle est alors de 15%. Nous présentons à la figure 4.4 les estimations de $a_k(t)$ pour k = 3 et k = 10.



FIG. 4.3 – Contrôles choisis pour l'étude de la région de validité



FIG. 4.4 – Troisième et dixième coefficients temporels pour c_3 : projection vs. solution du modèle calibré sur c_2

4.2.2 Construction d'une base de données multi-contrôle

Nous rappelons la base de donnée définie en 3.1.1 pour la construction des modes POD :

$$\mathcal{S} = \{ \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t^n), \, \boldsymbol{x} \in \Omega, \, 1 \leq n \leq N_T \}$$

Cette base de données ne contient des informations que sur une dynamique : la dynamique engendrée par la loi de contrôle c(t).

Nous proposons maintenant de construire une base prenant en comptant plusieurs dynamiques. Pour cela nous définissons un ensemble de N_c lois de contrôle $\mathcal{C} = \{c^i(t), 1 \leq i \leq N_c\}$. Pour chaque loi de contrôle une simulation des équations est réalisée sur le même intervalle de temps [0,T] et on note $u^i(x,t^k)$ la solution au temps t^k $(1 \leq k \leq N_T)$ obtenue en appliquant la loi de contrôle $c^i(t)$. La base de donnée ainsi défini comporte $N_T \times N_c$ éléments, et on note :

$$\mathcal{S}(\mathcal{C}) = \{ \boldsymbol{u}^{i}(\boldsymbol{x}, t^{n}), \, \boldsymbol{x} \in \Omega, \, 1 \leq n \leq N_{T}, \quad 1 \leq i \leq N_{c} \}$$

Le même traitement que (3.1.2) est appliqué pour relever les conditions aux bords. Ainsi on définit les snapshots w_j pour $1 \leq i \leq N_c \times N_T$ par :

pour
$$j = (i - 1) * N_T + n$$
, $w^j(x) = u^i(x, t^n) - u_0(x) - c^i(t^n)u_c(x)$

Les N_R modes POD $\phi^r(\mathcal{C})$ sont alors construites en résolvant le problème aux valeurs propres (3.3).

Le problème de calibration (3.26) devient :

$$\min_{\boldsymbol{X}^{1}} \sum_{i=1}^{N_{c}} \sum_{r=1}^{N_{R}} \int_{0}^{T} \left(\dot{\boldsymbol{a}}_{r}^{i}(t) - \boldsymbol{\hat{f}}^{1}(t) \cdot \boldsymbol{X}_{r}^{1} - \boldsymbol{\hat{f}}_{i}^{2}(t) \cdot \boldsymbol{X}_{r}^{2} \right)^{2} dt + \alpha \|\boldsymbol{X}_{r}^{1} - \boldsymbol{X}_{r}^{1}(\boldsymbol{\mathcal{G}})\|_{2}^{2}$$
(4.5)

Notons que cette méthode implique une augmentation de la taille de la base de données et donc du problème aux valeurs propres résolu pour déterminer les fonctions de base. La taille du problème de calibration et celle du modèle réduit restent en revanche constants tant que N_R est inchangé. Nous notons $\mathcal{R}(\mathcal{C})$ le modèle réduit calibré obtenu à partir de la base de donnée $\mathcal{S}(\mathcal{C})$. Si le nombre de lois de contrôle de l'ensemble \mathcal{C} est égale à N_c nous dirons que le modèle $\mathcal{R}(\mathcal{C})$ est un modèle N_c -contrôles.

4.2.2.1 Exemples de calibrations sur deux et trois contrôles

Pour illustrer la construction ci-dessus nous construisons deux modèles 2-contrôles et un modèle 3-contrôles, en utilisant les solutions obtenues avec les lois de contrôles c_1 , c_2 et c_3 . Les résultats pour le modèle $\mathcal{R}(\{c_1, c_3\})$ étant similaires aux résultats obtenus pour $\mathcal{R}(\{c_1, c_2\})$, nous ne présentons que ces derniers ici (Figure 4.5). Les résultats pour le modèle 3-contrôles $\mathcal{R}(\{c_1, c_2, c_3\})$ sont donnés Figure 4.6.



FIG. 4.5 – Estimation par le modèle $\mathcal{R}(\{c_1, c_2\})$



FIG. 4.6 – Estimation par le modèle $\mathcal{R}(\{c_1, c_2, c_3\})$

Les modèles 2- et 3- contrôles sont donc capables de correctement évaluer les coefficients temporels de 2 ou 3 dynamiques. Pour le modèle 2-contrôle l'utilisation du modèle de la pression calibrée sur 2 dynamiques permet d'obtenir une bonne estimation des coefficients de traînée et de portance. Dans le cas du modèle trois contrôle le modèle pour la pression a un comportement plus chaotique. Nous notons tout de même, que, à défaut d'estimer correctement le coefficient de traînée, le modèle réussit à reconnaître un ordre de grandeur.

4.2.3 Efficacité des modèles multi-dynamiques

4.2.3.1 Estimations par modèles multi-dynamiques

Nous avons vu que les modèles à 2- et 3- contrôles permettent d'estimer correctement des solutions de la base de données utilisée pour les générer, mais l'intérêt de tels modèles est de pouvoir estimer correctement des solutions extérieures à la base de donnée.

Nous testons d'abord l'estimation de la solution induite par c_3 par le modèle $\mathcal{R}(\{c_1, c_2\})$. Les résultats, présentés Figure (4.7) sont à comparer avec les résultats de la section 4.2.1 dans laquelle nous avions testé l'estimation des dynamiques induites par c_3 avec le modèle $\mathcal{R}(\{c_2\})$. Nous notons que l'approximation fournit par le modèle 2-contrôles est meilleure que l'approximation fournit par le modèle 1-contrôle - l'erreur relative passe ainsi de 15 % à 10 %. Ce résultat peut paraître surprenant dans la mesure où les dynamiques induites par c_3 sont plus proches de celles induites par c_2 , que de celles induites par c_1 (en terme de traînée). On aurait donc pu

s'attendre à ce que le fait d'ajouter la dynamique 1 au modèle, l'éloigne de la dynamique 3. Nous observons pourtant le contraire. L'hypothèse que nous avançons pour expliquer ce phénomène est que l'ajout d'une seule dynamique permet de façon générale une meilleure approximation du sous-espace des solutions contrôlées en fournissant une *interpolation* de cet espace.



FIG. 4.7 – Résultats pour c_3 avec le modèle $\mathcal{R}(\{c_1, c_2\})$



FIG. 4.8 – Résultats pour c_2 avec le modèle $\mathcal{R}(\{c_1, c_3\})$

4.2.3.2 Etude systématique des modèles multi-dynamiques

Le paragraphe précédent montre que le principe de calibration multi-dynamiques fonctionne bien sur un exemple. Nous aimerions généraliser ce résultat, et mesurer l'effet de l'inclusion de deux ou trois contrôles dans une base de données.

Nous allons d'abord introduire quelques notations.

Nous supposons qu'à partir d'un ensemble C_{ν} de lois de contrôles, nous avons construit une base de donnée de champs de vitesse S_{ν} , puis un sous-espace propre de dimension N_R noté \mathcal{X}_{ν} et un modèle réduit calibré \mathcal{R}_{ν} . Ainsi, à toute loi de contrôle $c^{\ell}(t)$ nous pouvons associer des coefficients de projection sur \mathcal{X}_{ν} que nous noterons $\hat{a}_k^{\ell,\nu}(t)$, et la solution du modèle réduit \mathcal{R}_{ν} que nous notons $a_k^{\ell,\nu}(t)$.
Nous définissons alors l'erreur du modèle par :

$$\mathcal{E}_{j}^{\nu} = \left(\frac{\sum_{k=1}^{N_{R}} \left\|\hat{\boldsymbol{a}}_{k}^{j,\nu} - \boldsymbol{a}_{k}^{j,\nu}\right\|_{L^{2}([0,T])}^{2}}{\sum_{k=1}^{N_{R}} \left\|\hat{\boldsymbol{a}}_{k}^{j,\nu}\right\|_{L^{2}([0,T])}^{2}}\right)^{1/2}$$

Si $C = \{c^1, \ldots, c^{N_c}\}$, alors nous définissons la *distance* entre le modèle et la solution associée à $c^{\ell}(t)$ par :

$$\Delta_{j}^{\nu} = \frac{1}{N_{c}} \sum_{i=1}^{N_{c}} \left(\frac{\sum_{k=1}^{N_{R}} \left\| \hat{\boldsymbol{a}}_{k}^{i,\nu} - \hat{\boldsymbol{a}}_{k}^{j,\nu} \right\|_{L^{2}([0,T])}^{2}}{\sum_{k=1}^{N_{R}} \left\| \hat{\boldsymbol{a}}_{k}^{i,\nu} \right\|_{L^{2}([0,T])}^{2}} \right)^{1/2}$$

Nous sélectionnons trois lois de contrôle, obtenus par rétroaction avec un capteur unique et en faisant varier les coefficients de gain proportionnel. Pour chaque loi de contrôle nous réalisons une simulation des équations de Navier-Stokes, ce qui permet de définir 7 bases de données :

- Trois bases « 1-contrôle » :

$$S_1 = \{ \boldsymbol{u}^1(\boldsymbol{x}, t^n), \, \boldsymbol{x} \in \Omega, \, 1 \leq n \leq N_T \}$$
$$S_2 = \{ \boldsymbol{u}^2(\boldsymbol{x}, t^n), \, \boldsymbol{x} \in \Omega, \, 1 \leq n \leq N_T \}$$
$$S_3 = \{ \boldsymbol{u}^3(\boldsymbol{x}, t^n), \, \boldsymbol{x} \in \Omega, \, 1 \leq n \leq N_T \}$$

– Trois bases « 2-contrôles » :

$$\begin{split} \mathcal{S}_{12} &= \{ \boldsymbol{u}^{i}(\boldsymbol{x},t^{n}) \,,\, \boldsymbol{x} \in \Omega, \, 1 \leqslant n \leqslant N_{T}, \quad i = 1,2 \} \\ \mathcal{S}_{13} &= \{ \boldsymbol{u}^{i}(\boldsymbol{x},t^{n}) \,,\, \boldsymbol{x} \in \Omega, \, 1 \leqslant n \leqslant N_{T}, \quad i = 1,3 \} \\ \mathcal{S}_{23} &= \{ \boldsymbol{u}^{i}(\boldsymbol{x},t^{n}) \,,\, \boldsymbol{x} \in \Omega, \, 1 \leqslant n \leqslant N_{T}, \quad i = 2,3 \} \end{split}$$

- Une base « 3-contrôles » :

$$\mathcal{S}_{123} = \{ \boldsymbol{u}^{i}(\boldsymbol{x}, t^{n}), \, \boldsymbol{x} \in \Omega, \, 1 \leq n \leq N_{T}, \quad i = 1, 2, 3 \}$$

Pour chaque base, nous construisons un modèle réduit calibré. Nous faisons ensuite une dizaine de simulations supplémentaires avec des contrôles différents - nous obtenons ainsi nos simulations tests. Pour chaque modèle \mathcal{R}_{ν} ($1 \leq \nu \leq 7$), et pour chaque cas test j nous évaluons l'erreur \mathcal{E}_{j}^{ν} et la distance Δ_{j}^{ν} . Les résultats sont donnés Figure 4.9.

Notons que les simulations utilisées pour engendrer les modèles font aussi partie de l'ensemble *test* ce qui explique la présence de points proches de l'erreur 0.

La meilleure performance des modèles 2-contrôles et 3-contrôles ressort immédiatement du graphe. Les erreurs sont inférieures à 20 % dès que la distance au modèle passe en dessous de 40 % pour les modèles 2- et 3-contrôles, alors qu'elles varient de 30 à 80 % pour les modèles 1-contrôle.



FIG. 4.9 – Erreurs des modèles 1-, 2- et 3- contrôles à Re=150

A titre de comparaison le même test a été réalisé à Re = 60. Les courbes ont la même allure qu'à Reynolds 150. Nous observons des erreurs sont inférieures à 10 % dès que la distance au modèle passe en dessous de 60 % pour les modèles 2- et 3-contrôles, alors qu'elles varient de 30 à 70 % pour les modèles 1-contrôle.



FIG. 4.10 – Erreurs des modèles 1-, 2- et 3- contrôles à Re=60

Conclusion

Dans ce chapitre nous avons mis en place les outils nécessaires à l'utilisation d'un modèle réduit dans des applications en contrôle. Nous avons notamment montré qu'un modèle construit par notre méthode de calibration multi-dynamique peut être utilisé pour prédire des dynamiques qui n'étaient pas incluses dans la base de donnée. La reconstruction de la traînée pour le modèle 3-contrôles n'est cependant pas satisfaisante. Nous remarquons en particulier que les modèles par rétroaction, et les modèles multi-dynamiques sont un peu moins précis que les modèles présentés au Chapitre 3. La dépendance quadratique de la pression sur la vitesse réduite fait que des erreurs relativement importantes dans l'estimation de la pression peuvent être induites par des petites perturbations de la vitesse. Une quantité comme la traînée qui dépend de la pression et des dérivées de la vitesse a donc d'autant plus de chance d'être mal estimée.

Chapitre 5

Applications au contrôle d'écoulement

Introduction

Plusieurs types de contrôles actifs ont été envisagés pour tenter de réduire le détachement tourbillonnaire dans le sillage d'un corps épais. Parmi les contrôles en boucle ouverte on peut citer la manipulation du cylindre, l'utilisation d'actionneurs à puissance constante ou périodique ou encore les jets synthétiques. Le succès de ces méthodes est variable mais on dénombre quelques réussites - par exemple, Tokumaru et Dimotakis [74] réduisent la traînée derrière un cylindre grâce à des rotations à haute fréquence. Même si ces contrôles peuvent être efficaces pour atténuer le phénomène tourbillonnaire, ils ne sont pas optimisés - même quand l'écoulement est contrôlé on continue d'ajouter de l'énergie dans l'écoulement.

Des contrôles en boucle fermée utilisant des capteurs ont d'abord été mis en place dans un cadre expérimental ([6, 79, 67]). Roussopoulos [67] mit notamment en évidence des emplacements de capteurs permettant de réaliser un contrôle proportionnel à Re = 65. Park *et al.* [58] réalisèrent une expérience numérique pour une configuration similaire avec un capteur unique placé dans le sillage. Des tentatives pour appliquer la théorie du contrôle optimal à ce type de problème ont aussi eu lieu. Ainsi Li et Aubry [45] appliquent une méthode de contrôle optimal utilisant l'adjoint du système au problème de suppression du détachement tourbillonnaire via soufflage/aspiration sur la surface du cylindre. Ils minimisèrent une fonction coût définie par la différence entre le champ de vitesse de l'écoulement et celui de l'écoulement laminaire stationnaire. Ils réussirent ainsi à contrôler le détachement pour des nombres de Reynolds faibles. L'implémentation de telles méthodes dans des configurations réelles n'est cependant pas possible car elles exigent la connaissance du champ entier pour une période de temps globale.

Choi *et al.* [23] ont alors introduit un algorithme de contrôle sous-optimal consistant à chercher une solution sur une période de temps très courte. Min et Choi [52] appliquèrent ce type de contrôle à l'écoulement derrière un cylindre à Re = 100 et Re = 160. Ils utilisèrent des capteurs placés sur la surface du cylindre, et un mécanisme de soufflage-aspiration. Ils minimisèrent ainsi la différence entre la pression et une pression-objectif, réussissant ainsi à diminuer la traînée.

La dimension de ces problèmes devient cependant rapidement un problème avec l'augmentation du nombre de Reynolds. A ces hauts nombres de Reynolds l'écoulement présente plusieurs modes instables, et le contrôle nécessite la multiplication du nombre de capteurs. Les modèles réduits deviennent alors une nécessité. Graham *et al.* [30], puis Bergmann *et al.* [11] se sont intéressés à l'application des modèles réduits au problème de la détermination de la fréquence de rotation optimale du cylindre (à Re = 100 et Re = 200 respectivement), tandis que que Siegel *et al.* [71] ont déterminé un contrôle par mouvements verticaux du cylindre (à Re = 100). Dans ces cas les contrôles déterminés par modèle réduit permettent de diminuer les instabilités dans le sillage du cylindre.

Dans ce Chapitre nous nous intéressons à la construction de modèles réduits similaires, mais pour un contrôle par soufflage/aspiration. La fonction coût que nous souhaitons minimiser s'inspire des travaux de Li et Aubry [45] et Min et Choi [52] : nous souhaitons minimiser la différence entre la vitesse de l'écoulement et la vitesse d'un écoulement objectif - l'écoulement stationnaire.

5.1 Formulation du problème du problème de contrôle

5.1.1 Définition de la fonctionnelle

Puisque nous avons décidé d'utiliser le modèle réduit pour la vitesse uniquement, une fonction objectif comme le coefficient de traînée ne peut être envisagée. Dans ce travail nous envisagerons donc un coût qui ne dépend que de la vitesse de l'écoulement :

$$\mathcal{J}(\boldsymbol{u},c) = \int_0^T \mathcal{F}(\boldsymbol{u}(\cdot,t),c(t)) dt$$
(5.1)

La quantité $\mathcal{F}(\boldsymbol{u}(\cdot,t),c(t))$ peut être notamment l'énergie du sillage, comme proposé dans Bergmann *et al.* [11] à savoir :

$$\mathcal{F}(\boldsymbol{u}(\cdot,t),c(t)) = \|\boldsymbol{u}(\cdot,t)\|_{L^{2}(\Omega)}^{2}$$

où encore l'enstrophie (Ravindran [60])

$$\mathcal{F}(\boldsymbol{u}(\cdot,t),c(t)) = \|\boldsymbol{\omega}(\cdot,t)\|_{L^{2}(\Omega)}^{2}$$

Puisque nous souhaitons réduire l'effet du détachement tourbillonnaire dans le sillage du cylindre, nous avons plutôt choisi de minimiser la différence entre la solution des équations de Navier-Stokes incompressibles et la solution stationnaire instable (Figure 5.1)), soit :

$$\mathcal{F}(\boldsymbol{u}(\cdot,t),c(t)) = \|\boldsymbol{u}(\cdot,t) - ar{\boldsymbol{u}}\|_{L^2(\Omega)}^2$$

Minimiser cette fonctionnelle ne garantit pas forcément une minimisation de la traînée. L'utilisation d'actionneurs peut en effet permettre d'atteindre d'autres solutions stationnaires dont la traînée est inférieure à la traînée de la solution stationnaire instable. Le choix de cette fonctionnelle présente pourtant un avantage important lorsqu'il est associé à l'utilisation d'un contrôle par rétroaction proportionnelle utilisant des mesures de vitesse verticale prises sur l'axe de symétrie du domaine (y = 0). Sur cette ligne, la vitesse verticale est nulle, donc plus la solution contrôlée s'approche de la solution stationnaire instable, plus le contrôle est faible. Ceci garantit que le contrôle s'éteindra seul si l'objectif est atteint. La fonction objectif modèle ou fonction objectif réduite \mathcal{J}_R est définie à partir de la solution réduite u_R par :

$$\mathcal{J}_{R}(\boldsymbol{a},c) = \mathcal{J}(\boldsymbol{u}_{R},c) = \int_{0}^{T} \mathcal{F}(\boldsymbol{u}_{R}(\cdot,t),c(t)) dt = \int_{0}^{T} \mathcal{F}_{R}(\boldsymbol{a}(t),c(t)) dt$$
(5.2)

Dans la suite (\cdot, \cdot) désigne le produit scalaire sur $L^2(\Omega)$, et $\|\cdot\|$ la norme correspondante. Dans notre cas, en utilisant l'orthonormalité des modes POD, la fonctionnelle réduite s'écrit alors :

$$\mathcal{F}_{R}(\boldsymbol{a}(t), c(t)) = \|\boldsymbol{u}_{0} - \bar{\boldsymbol{u}}\|^{2} + c^{2}(t) \|\boldsymbol{u}_{c}\|^{2} + 2c(t)(\boldsymbol{u}_{0} - \bar{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{u}_{c}) + 2\boldsymbol{a}_{k}(t)(\boldsymbol{u}_{0} - \bar{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{\phi}_{k}) + 2\boldsymbol{a}_{k}(t)c(t)(\boldsymbol{u}_{c}, \boldsymbol{\phi}_{k}) + a_{k}^{2}(t)$$

$$:= \mathcal{F}_{0} + c^{2}(t)\mathcal{F}_{1} + 2c(t)\mathcal{F}_{2} + 2\boldsymbol{a}_{k}(t)\mathcal{F}_{3}^{k} + 2\boldsymbol{a}_{k}(t)c(t)\mathcal{F}_{4}^{k} + a_{k}^{2}(t)$$
(5.3)

Les quantités \mathcal{F}_0 , \mathcal{F}_1 , \mathcal{F}_2 , \mathcal{F}_3^k et \mathcal{F}_4^k sont déterminées dès que la base POD a été construite, et peuvent donc être considérées comme constantes au sein du modèle. La fonctionnelle $\mathcal{J}_R(\boldsymbol{a},c)$ dépend alors uniquement de \boldsymbol{a} et c.



FIG. 5.1 – Solution stationnaire instable à Re = 150

5.1.2 Définition des paramètres d'optimisation

Dans le cas d'un contrôle par rétroaction les paramètres d'optimisation sont naturellement les gains K_j , dans le cas proportionnel, et K_j et K_j^I dans le cas proportionnel-intégral. Nous avons cependant vu dans la section précédente que l'utilisation de telles lois de contrôle pouvait conduire à l'injection d'erreurs supplémentaires dans le modèle réduit. Nous souhaitons donc dans un premier temps considérer une loi de contrôle qui ne dépende pas des coefficients temporels $a_k(t)$. Il est donc nécessaire de définir ce que l'on va considérer comme paramètres de contrôle dans ce cas là.

Un autre souci est la régularité de la loi de contrôle. Le modèle faisant intervenir la loi de contrôle et sa dérivée, nous souhaitons imposer que c(t) soit C^1 sur [0,T]. Cette condition demande une modification de l'approche par rétroaction que nous détaillons ci-dessous.

Paramètres pour le contrôle dit précalculé

Dans un premier temps, pour éviter l'éventuel ajout d'erreurs dans le modèle que peut amener un contrôle par rétroaction, nous avons décidé de travailler avec une loi de contrôle dite précalculée. Dans ce cas, nous n'imposons pas d'autre condition à c(t) que celles de continuité et de dérivabilité. Le nombre de degrés de liberté de ce problème étant trop grand, nous imposons tout de même que c appartienne à un espace d'assez faible dimension de $C^1([0,T])$. Notant $\{\varphi_i\}_{i=1...N_b}$ une base de cet espace, la loi de contrôle s'écrit :

$$c(t) = \sum_{j=1}^{N_b} c_j \varphi_j(t)$$

Les fonctions de base φ_j étant indépendantes des coefficients temporels de la solution réduite, nous n'introduisons pas d'erreur de reconstruction de la loi de contrôle dans le modèle réduit.

En pratique nous avons commencé par faire une simulation des équations de Navier-Stokes avec un contrôle proportionnel. Les paramètres de contrôle sont alors les gains K_j $(1 \leq K_j \leq N_s)$. La loi de contrôle ainsi obtenue est appelée $c^0(t)$. Une nouvelle simulation peut alors être réalisée avec la fonction $c^0(t)$ comme paramètre de contrôle, qui donne exactement le même résultat que le calcul précédent.

Nous cherchons ensuite une approximation de c^0 par B-splines cubiques, appelée c_b^0 . En définissant N_p points de contrôle c_b^j , et $\{\mathcal{B}_j(t)\}_j$ l'ensemble des fonctions de bases B-Splines, l'approximation c_b^0 s'écrit :

$$c_b^0(t) = \sum_{j=1}^{N_p} c_b^j \mathcal{B}_j(t)$$

En supposant que nous connaissons la loi de contrôle $c^0(t)$ en N_t points de temps t^n , les points de contrôle peuvent être déterminés en résolvant un problème aux moindres carrés :

$$\min_{c_b} \sum_{n=1}^{N_p} \left(c(t^n) - c_b^j \mathcal{B}_j(t^n) \right)^2$$
(5.4)

Les paramètres de contrôle peuvent alors être les points de contrôle de la décomposition B-Spline. Nous ajoutons cependant une petite restriction à cela.

Supposons qu'au moment où l'on souhaite commencer l'optimisation $(t = 0^{-})$ le contrôle et sa dérivée soit égale à c_0 et d_0 respectivement. Pour assurer la régularité du contrôle en t = 0, la solution initiale c^0 doit être construite de sorte que $c^0(0) = c_0$ et $\dot{c}^0(0) = d_0$. Nous verrons au paragraphe suivant comment construire un tel contrôle. Pour que cette condition soit vérifiée pour toutes les lois de contrôle $c_b(t)$ rencontrées durant l'optimisation, nous imposons :

$$c_b(0) = c_b^0(0)$$
 $\dot{c}_b(0) = c_b^0(0)$

Notons que par définition des fonctions B-Splines,

$$c_b(0) = c_b^1 \mathcal{B}_1(0) = c_b^1 \quad et \quad \dot{c}_b(0) = c_b^1 \mathcal{B}_1(0) + c_b^2 \mathcal{B}_2(0)$$

Le premier et le deuxième point de contrôle de la décomposition B-Spline doivent donc être fixés, les paramètres de contrôle sont donc les $N_p - 2$ autres points de contrôle.

Paramètres pour le contrôle par rétroaction

Dans le cas d'un contrôle par rétroaction, la propriété C^1 est vérifiée sur $]0, +\infty[$ par régularité de la solution des équations de Navier-Stokes. Un traitement s'impose cependant pour ne pas avoir d'irrégularités en t = 0.

Pour cela nous imposons que le passage d'un gain K_0 à un temps $t = t_0$ à un gain K_1 à temps $t = t_1$ soit progressif. Nous définissons un raccord C^2 noté $R[K_0, K_1, t_0, t_1](t)$:

$$R(t)[\mathsf{K}_{0},\mathsf{K}_{1},t_{0},t_{1}] = \begin{cases} \mathsf{K}_{0} \quad t \leq t_{0} \\ -2(\mathsf{K}_{1}-\mathsf{K}_{0})\left(\frac{t-(t_{0}+t_{1})/2}{t_{1}-t_{0}}\right)^{3} \\ +\frac{3}{2}(\mathsf{K}_{1}-\mathsf{K}_{0})\left(\frac{t-(t_{0}+t_{1})/2}{t_{1}-t_{0}}\right) + \frac{1}{2}(\mathsf{K}_{1}+\mathsf{K}_{0}) \\ \mathsf{K}_{1} \quad t \geq t_{1} \end{cases} \qquad t_{0} \leq t \leq t_{1} \end{cases}$$

$$(5.5)$$

Supposons que dans un premier temps aucun contrôle n'est appliqué. A partir d'un instant t_0 nous souhaiterions démarrer le contrôle avec des coefficients de rétroaction K_j . Jusqu'à t_0 les coefficients de rétroaction peuvent être définis par :

$$\mathsf{K}_j^0 = 0 \quad j = 1 \cdots N_s$$

Nous allons définir une période de transition de durée $t_1 - t_0$, de sorte à ce que en t_1 les des coefficients aient effectivement la valeur souhaitée. Ceci revient à utiliser la loi de contrôle proportionnelle :

$$c(t) = \sum_{j=1}^{N_s} R(t) [\mathsf{K}_j^0, \mathsf{K}_j, t_0, t_1] \boldsymbol{v}_j(t)$$
(5.6)

Notons que la dérivée de la fonction de contrôle qui intervient dans le modèle réduit est alors donné par :

$$\dot{c}(t) = \sum_{j=1}^{N_s} R(t) [\mathsf{K}_j^0, \mathsf{K}_j, t_0, t_1] \dot{\boldsymbol{v}}_j(t) + \dot{R}(t) [KF_j^0, \mathsf{K}_j, t_0, t_1] \boldsymbol{v}_j(t)$$
(5.7)

$$\dot{R}(t) = \begin{cases}
0 \quad t \leq t_0 \text{ et } t \geq t_1 \\
\frac{\mathsf{K}_1 - \mathsf{K}_0}{t_1 - t_0} \left(-6 \left(\frac{t - (t_0 + t_1)/2}{t_1 - t_0} \right)^2 + \frac{3}{2} \right) \quad t_0 \leq t \leq t_1
\end{cases}$$
(5.8)

5.1.3 Algorithme d'optimisation par modèle réduit

Maintenant que la fonctionnelle à contrôler et les paramètres de contrôle sont bien définis, aussi bien dans le cas *précalculé* que le cas *rétroaction*, nous pouvons définir l'algorithme d'optimisation par modèle réduit.

Cet algorithme est basé sur l'observation faite dans la section précédente, que le modèle peut être grandement amélioré en calibrant sur plusieurs contrôles. Nous commençons donc avec un modèle calibré sur un seul contrôle - le contrôle initial c^0 . Une méthode classique d'optimisation - ici celle du gradient conjugué - est appliquée au problème de contrôle réduit. Un critère d'arrêt est imposé à savoir que la différence entre le contrôle de départ et le contrôle optimal ne doit pas être trop grand. Le contrôle obtenu par cette méthode est ensuite injecté dans les équations de Navier Stokes, et la fonctionnelle est évaluée. Si la fonctionnelle a diminué, le pas est accepté. Un modèle basé sur le nouveau contrôle et le précédent est alors construit. Si la fonctionnelle a augmenté, le pas est rejeté. La nouvelle simulation n'est pas perdue pour autant, puisqu'elle est intégrée dans la base de données, et contribue à créer un modèle plus fiable pour la prochaine itération.

Algorithme d'optimisation Modèle réduit - Modèle complet

- 0. Initialisation : $m = 0, k = 0, C^k = \{c^m\}$
- 1. Construire un modèle calibré $\mathcal{R}^k = \mathcal{R}(\mathcal{C}^k)$
- 2. Commencer une méthode de descente pour minimiser $\mathcal{J}_{R}(\boldsymbol{a},c)$ sous la condition \mathcal{R}^{k} , et $Diff(c^{m}-c_{new}^{m}) < \Delta$
- 3. Evaluer $\mathcal{J}(\boldsymbol{u}, c)$.
 - a. Si $\mathcal{J}^k < \mathcal{J}^{k-1}$: Choix de c_{new}^m validé. $\mathcal{C}^{k+1} = \{c^m, c_{new}^m\}$ $m \leftarrow m+1$
 - b. Si $\mathcal{J}^k > \mathcal{J}^{k-1}$: Choix de c_{new}^m rejeté. $\mathcal{C}^{k+1} = \mathcal{C}^k \bigcup \{c_{new}^m\}$ $m \leftarrow m$

Nous soulignons l'analogie de cette méthode avec la méthode à région de confiance déjà employée en réduction de modèle par Bergmann [7]. Ici l'écart entre deux contrôles - $Diff(c^m - c_{new}^m)$ dans l'algorithme - est évalué en calculant la différence relative en termes de la norme $L^2([0,T])$. Le rayon Δ de la région de confiance est fixé au début de l'optimisation, et ne varie pas d'une itération à l'autre.

5.1.4 Initialisation du problème d'optimisation

Afin de pouvoir comparer les deux stratégies de contrôle (précalculé et rétroaction), nous avons choisi une solution initiale obtenue par rétroaction. Un unique capteur est placé au point x_s dans le proche-sillage du cylindre et la loi de contrôle initiale est définie par :

$$c(t) = v(\boldsymbol{x}_s, t)$$



FIG. 5.2 – Loi de contrôle initiale

5.2 Une loi de contrôle précalculée

5.2.1 Résolution du problème de contrôle réduit

Reformulation du problème en fonction des paramètres de contrôle

Nous rappelons que dans ce cas la fonction de contrôle est exprimée sous la forme d'une somme de fonctions B-splines.

$$c(t) = \sum_{j=1}^{N_b} c^j \mathcal{B}_j(t)$$

La fonctionnelle réduite est donc fonction des coefficients c_j et s'écrit :

$$\mathcal{J}_{R}(\boldsymbol{a},c) = \mathcal{F}_{0} + a_{k}^{2}(t) + 2\boldsymbol{a}_{k}(t)\mathcal{F}_{3}^{k} + 2c^{j}\mathcal{B}_{j}(t)(\mathcal{F}_{2} + \boldsymbol{a}_{k}(t)\mathcal{F}_{4}^{k}) + c^{i}c^{j}\mathcal{B}_{i}(t)\mathcal{B}_{j}(t)\mathcal{F}_{1}$$

$$(5.9)$$

Si nous réécrivons la modèle réduit pour faire ressort ir la dépendance sur les coefficients c^j nous obtenons :

$$\dot{\boldsymbol{a}}_{r}(t) = \boldsymbol{A}_{r} + \boldsymbol{B}_{rk}\boldsymbol{a}_{k}(t) + \boldsymbol{C}_{rks}\boldsymbol{a}_{k}(t)\boldsymbol{a}_{s}(t) + \left(\boldsymbol{E}_{r}\dot{\boldsymbol{\mathcal{B}}}_{j}(t) + (\boldsymbol{G}_{r} + \boldsymbol{H}_{rk}\boldsymbol{a}_{k}(t))\boldsymbol{\mathcal{B}}_{j}(t)\right)c^{j} + \boldsymbol{F}_{r}c^{i}c^{j}\boldsymbol{\mathcal{B}}_{i}(t)\boldsymbol{\mathcal{B}}_{j}(t)$$
(5.10)

Calcul du gradient par la méthode de l'adjoint

Pour calculer la dérivée de la fonctionnelle (5.9) nous utilisons la méthode de l'adjoint. Pour cela nous définissons la lagrangienne :

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{a},c) = \mathcal{J}_{R}(\boldsymbol{a},c) + \int_{0}^{T} \boldsymbol{b}_{r}(t) \left(\dot{\boldsymbol{a}}_{r}(t) - \boldsymbol{f}(t) \cdot \boldsymbol{X}_{r} \right)$$
(5.11)

L'annulation de la dérivé de \mathcal{L} par rapport à \boldsymbol{b}_r donne les équations adjointes :

$$\dot{\boldsymbol{b}}_{r}(t) = -\sum_{k} \left(\boldsymbol{B}_{kr} + (\boldsymbol{C}_{krs} + \boldsymbol{C}_{ksr}) \boldsymbol{a}_{s}(t) + \boldsymbol{H}_{kr} c(t) \right) \boldsymbol{b}_{k}(t) + 2 \left(\boldsymbol{a}_{r}(t) - c(t) \mathcal{F}_{4}^{r} - \mathcal{F}_{3}^{r} \right)$$
(5.12)

Les dérivées de \mathcal{L} par rapport aux paramètres de contrôle sont alors fonctions des variables d'états $\boldsymbol{a}_r(t)$ et des variables adjointes $\boldsymbol{b}_r(t)$:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c^{j}} = 2 \int_{0}^{T} \left(\mathcal{F}_{1} + \boldsymbol{a}_{k}(t) \mathcal{F}_{4}^{k} + c^{i} \mathcal{B}_{i}(t) \mathcal{F}_{2} \right) \mathcal{B}_{j}(t) dt + \int_{0}^{T} \boldsymbol{b}_{r}(t) \left(\left(\boldsymbol{G}_{r} + \boldsymbol{F}_{r} c^{i} \mathcal{B}_{i}(t) + \boldsymbol{H}_{rk} \boldsymbol{a}_{k}(t) \right) \mathcal{B}_{j}(t) + \boldsymbol{E}_{r} \dot{\mathcal{B}}_{j}(t) \right) dt$$
(5.13)

Finalement, si les fonctions a_r et b_r sont solutions de (5.10) et (5.12) respectivement, le gradient de la fonctionnelle par rapport aux variables de contrôle est donné par la dérivée de la lagrangienne par rapport aux paramètres de contrôle (5.13).

5.2.2 Les difficultés d'application

L'approximation par B-Splines cubiques de la loi de contrôle $c^{init}(t)$ (Figure 5.3(a)) est construite pour 32 points de contrôle. Le problème d'optimisation a donc 30 degrés de liberté.

L'algorithme d'optimisation a rencontré une difficulté dès la première itération. Le gradient calculé par le modèle est très petit, et ne permet pas de déterminer une direction de descente. Pour remédier au problème nous imposons un modèle 2-contrôles dès le début de la boucle de contrôle. Une simulation est donc réalisée avec une loi de contrôle auxiliaire (un contrôle proportionnel dépendant du même capteur mais avec $K_s = 1.3$) Le calcul du gradient par ce second modèle est beaucoup plus important, et permet de trouver une nouvelle loi de contrôle qui entraîne une baisse effective de la fonctionnelle. A l'itération suivante le modèle est construit en utilisant la simulation initiale, ainsi que la nouvelle simulation. La simulation auxiliaire qui avait servi a améliorer le modèle au départ ne sert plus.

L'application de l'algorithme permet alors une diminution de la fonctionnelle pendant six itérations, pour une baisse totale de 14.7 %. A la septième itération le modèle ne prédit pas une direction de descente correcte. Le gradient calculé par le modèle est élevé, et une descente de la fonctionnelle est prédite. Cependant, l'injection de la nouvelle loi de contrôle dans les équations de Navier-Stokes entraîne au contraire une augmentation de la fonctionnelle. L'utilisation de cette nouvelle solution pour construire un nouveau modèle n'apporte aucune amélioration. Le modèle prédit une fois de plus une decente de la fonctionnelle, mais la fonctionnelle réelle augmente quand le contrôle est appliqué. L'algorithme est donc arrêté.

La loi de contrôle sous-optimale obtenue après 6 itérations de l'algorithme d'optimisation est montrée figure 5.3(b). L'évolution en temps de la vorticité de l'écoulement lorsque la loi de contrôle sous-optimale est appliquée apparaît Figure 5.4.

Nous notons la forte atténuation des tourbillons à une période de l'intervalle de temps (Figure 5.4(c)), mais que celles-ci reprennent voire s'accentuent à la fin de la période de temps (Figure 5.4(d)). De nombreux facteurs peuvent expliquer cette difficulté à contrôler l'écoulement, le choix des fonctions de bases notamment n'est peut être pas adapté. Plutôt que d'insister sur ce problème dont la solution n'aurait pas d'application pratique car contrainte en temps, nous nous tournons vers le cas du contrôle proportionnel.



FIG. 5.3 – Variation de la loi de contrôle au cours de l'optimisation



(c) Solution correspondant à $\mathcal{F}(u(t))$ minimal

(d) Solution à T

FIG. 5.4 – Evolution en temps de la vorticité de la solution sous-optimale

5.3 Contrôle par rétroaction

5.3.1 Résolution du problème de contrôle réduit

Le gradient de la fonctionnelle peut-être déterminé comme précédemment par la méthode l'adjoint. Nous définissons ainsi la lagrangienne :

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, c) = \mathcal{J}_{R}(\boldsymbol{a}, c) + \sum_{r=1}^{N_{r}} \int_{0}^{T} \boldsymbol{b}_{r}(t) \left(\dot{\boldsymbol{a}}_{r}(t) - \boldsymbol{f}(t) \cdot \boldsymbol{X}_{r} \right) dt + \int_{0}^{T} \gamma(t) \left(c(t) - \boldsymbol{R}(\boldsymbol{a}(t), c(t)) \right) dt$$
(5.14)

où la fonction de rétroaction $\mathbf{R}(\mathbf{a}(t), c(t))$ est une fonction dépendant linéairement de \mathbf{a} et c:

$$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{a}(t), c(t)) = \sum_{j=1}^{N_s} \mathsf{K}_j \left(v_m(\boldsymbol{x}_j) + c(t) v_c(\boldsymbol{x}_j) + \boldsymbol{a}_k(t) \boldsymbol{\phi}_2^k(\boldsymbol{x}_j) \right)$$

Les équation adjointes permettant de calculer le gradient sont alors données par :

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{b}}_{r}(t) = \sum_{k} \left(\boldsymbol{B}_{kr} + \sum_{s} (\boldsymbol{C}_{krs} + \boldsymbol{C}_{ksr}) \boldsymbol{a}_{s}(t) + \boldsymbol{H}_{kr} c(t) \right) \boldsymbol{b}_{k}(t) \\ + \frac{\partial \mathcal{J}_{R}}{\partial \boldsymbol{a}_{r}} (\boldsymbol{a}(t), c(t)) - \gamma(t) \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{a}_{r}} (\boldsymbol{a}(t), c(t)) \\ \boldsymbol{b}_{r}(T) = 0 \\ \gamma(t) = \gamma(t) \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial c} (\boldsymbol{a}(t), c(t)) - \sum_{r=1}^{N_{r}} \left(\boldsymbol{b}_{r}(t) (2\boldsymbol{F}_{r} c(t) + \boldsymbol{G}_{r} + \boldsymbol{H}_{rk} \boldsymbol{a}_{k}(t)) - \dot{\boldsymbol{b}}_{r}(t) \boldsymbol{E}_{r} \right) \end{cases}$$
(5.15)

En pratique la méthode adjointe a nécessité de choisir un pas de temps assez petit lors de l'application de Runge-Kutta. D'un autre côté nous ne considérons que l'utilisation d'un faible nombre de capteurs, le calcul de la dérivée par une méthode de différences finies est donc envisageable d'un point de vue des coûts de calcul. C'est donc cette dernière méthode que nous avons utilisé dans les calculs qui vont suivre.

5.3.2 Application au contrôle proportionnel

Nous avons utilisé 16 capteurs placés dans le sillage très proche du cylindre, dans la région correspondante à la zone de recirculation. Le contrôle initiale est obtenue en fixant la valeur d'un des capteur à 1, tous les autres à 0. La loi de contrôle obtenue et les variations de traînée qu'elle provoque sont exposées à la figure 5.5.



FIG. 5.5 – Initialisation du processus d'optimisation

La méthode se montre nettement plus efficace que la méthode par contrôle précalculé :

- Le modèle initial fournit une direction de descente correcte
- En cinq itérations la fonctionnelle a déjà une valeur moindre que la valeur atteinte dans le cas précalculé en 6 itérations.

Avec cette méthode nous réussissons à supprimer complètement les tourbillons, au moins pour une petite période de temps. Dans la suite nous exposons et nous discutons ces résultats.

5.3.2.1 Ajout d'un mode de transition

Suivant l'exemple de Noack *et al.* [57] nous avons enrichi la base POD d'un mode de transition vers la solution stationnaire instable. La solution stationnaire instable (Figure 5.1) est ajoutée à la base POD par l'algorithme de Gram-Schmidt, permettant ainsi de conserver l'orthonormalité de la base. Une fois intégrée à la base ce mode de transition est traité comme un mode POD supplémentaire, et le modèle calibré est construit comme auparavant.



FIG. 5.6 – Ajout d'un mode de transition

L'inclusion de ce mode supplémentaire, quoique ne jouant pas sur la précision du modèle, permet d'accélérer le processus d'optimisation. A titre d'exemple nous comparons (Figure 5.6) l'évolution de la fonctionnelle obtenue sur 5 itérations du processus d'optimisation lorsque le mode transition est inclus dans la base, et lorsqu'il ne l'est pas. (Notons que cette approche a été déjà été utilisée pour le cas contrôle précalculé).

5.3.2.2 Efficacité du contrôle

La boucle d'optimisation réalise 18 itérations avant de s'arrêter. Notons que comme auparavant, la sortie se fait parce que la fonctionnelle réelle ne diminue plus, et pas parce que le gradient calculé avec le modèle réduit devient plus petit. Dans le tableau 5.1 nous reportons les évolutions de la fonctionnelle au cours de l'optimisation.

i	$\mathcal{J}_{\scriptscriptstyle R}^{i-1,OPT}({m a},c)$	$\mathcal{J}(oldsymbol{u})^i$	$\mathcal{J}_{\scriptscriptstyle R}^i({oldsymbol a},c)$	N_c
1	-	448,26	448,56	1
2	$438,\!48$	422,76	413,06	1
3	413,06	$404,\! 6$	404,26	1
4	394,72	$391,\!13$	390,79	1
5	$383,\!81$	380, 35	382,41	1
6	$366,\!84$	$372,\!97$	$372,\!50$	1
$\overline{7}$	$352,\!16$	349,01	$347,\!42$	1
8	$328,\!79$	$336,\!28$	$333,\!83$	1
9	$322,\!59$	$328,\!03$	327,04	1
10	$324,\!80$	309,71	309,38	1
11	$306,\!88$	$\frac{311,19}{309,71}$	$307,\!57$	2
12	$303,\!21$	$299,\!6$	$305,\!67$	2
13	304,5	298,32	$295,\!83$	2
14	$289,\!81$	291,79	$291,\!68$	2
15	$290,\!81$	296,28 291,79	$296,\!59$	3
16	$272,\!32$	$288,\!22$	282,11	2
17	$262,\!35$	282,19	$278,\!99$	2
18	$273,\!97$	259,11	261, 14	2

TAB. 5.1 – Evolution de la fonctionnelle avec un contrôle proportionnel

Ce tableau se lit de la manière suivante :

- La colonne $(\mathcal{J}_R(\boldsymbol{a},c)^{i-1,OPT})$ donne la valeur de la fonctionnelle prédite par la boucle d'optimisation à la fin de l'itération i-1. Nous notons c^i la nouvelle fonction de contrôle.
- La colonne centrale $(\mathcal{J}(\boldsymbol{u})^i)$ donne la valeur de la fonctionnelle calculée à partir des équations de Navier-Stokes résolues avec le contrôle c^i . Cette colonne correspond donc à la valeur réelle de la fonctionnelle.

La comparaison avec la colonne précédente donne une idée de la capacité de prédiction du modèle.

– La colonne $(\mathcal{J}_R(\boldsymbol{a},c)^i)$ donne la valeur de la fonctionnelle calculée à partir du modèle réduit avec le contrôle c^i .

La comparaison avec la colonne précédente donne une idée de la précision du modèle réduit.

la Figure (5.7(a)) montre l'évolution de la fonctionnelle dépendante du temps $\mathcal{F}(\boldsymbol{u}(t))$ au cours du processus d'optimisation. Cette figure permet notamment de voir le type de contrôle envisagé au cours de l'optimisation : La plupart des lois de contrôle (correspondant aux itérations 2-16 de l'optimisation) ont un effet caractéristique : diminution de $\mathcal{F}(\boldsymbol{u}(t))$ sur le début de l'intervalle de temps [0,T] avec une remontée vers la fin de l'intervalle de temps. Un graphe de l'évolution de la traînée au cours du processus donne un résultat semblable. Il ressort que la baisse de $\mathcal{J}(\boldsymbol{u})$ au cours de l'optimisation, se fait en parallèle au recul de ce point de remontée. A la dernière itération ce point de remontée se trouve presqu'à T, ce qui laisse penser que $\mathcal{J}(\boldsymbol{u})$ n'aurait pas pu diminuer beaucoup plus, même si l'algorithme d'optimisation modèle réduit - modèle complet n'avait pas convergé. La Figure 5.8 met en évidence le phénomène de stabilisation au cours du temps avec une légère reprise à la fin de la période.



FIG. 5.7 – Evolution de la fonctionnelle au cours de l'optimisation



(c) Solution correspondant à F(u(t)) minimal

(d) Solution à T

FIG. 5.8 – Evolution de la solution sous-optimale au cours du temps

Des résultats très similaires ont été obtenus avec un contrôle proportionnel-intégral utilisant 8 capteurs (même nombre de degrés de liberté). Le tableau et les graphiques précédents ont été reproduits pour ce second choix de contrôle et sont reportés en Annexe de ce mémoire.

5.3.3 Effet du contrôle en temps long

Les contrôles définis par rétroaction ont l'avantage d'être définis en temps infini. Nous nous intéressons donc au devenir de l'écoulement au delà de T lorsque les coefficients de rétroaction trouvés ci-dessus sont maintenus. La première observation est un redéveloppement des tourbillons, mais plus petits et plus loin du cylindre. La Figure 5.10(b) montre la vorticité de la solution au temps 3T. Cette Figure est à comparer avec la Figure 5.10(a) qui montre la vorticité de la solution initiale au même temps - les tourbillons étaient alors plus importants. De même les courbes 'après optimisation 1' et 'avant optimisation' (Figure 5.11) prolongent les courbes '1' et '18' de la figure 5.7(a) : Malgré la remontée de $\mathcal{F}(\boldsymbol{u}^{18}(t))$ à la fin de la période d'optimisation, cette fonctionnelle n'atteint jamais le niveau de $\mathcal{F}(\boldsymbol{u}^0(t))$.

Pour tenter d'améliorer ces résultats nous commençons une nouvelle procédure d'optimisation. L'optimisation est maintenant effectuée sur une période $[\frac{T}{2}, \frac{3T}{2}]$ en prenant comme solution initiale u^{18} . Cette nouvelle optimisation permet d'allonger davantage la période recirculation (Figures 5.9 et 5.10(c)). Une nouvelle baisse de $\mathcal{F}(\boldsymbol{u}(t))$ est assurée en temps long (Figure 5.11).



FIG. 5.9 – Evolution en temps de la solution issue de l'optimisation 2

Dans les pages suivantes nous regardons l'évolution de l'écoulement au-delà des périodes de contrôle : Evolution de la vorticité (Figure 5.10), de la différence avec la solution stationnaire (Figure 5.11), et des coefficients aérodynamiques (Figure 5.12). Au temps 3T, pour les trois lois de contrôles considérées, la phase de transistion est terminée et le détachement de tourbillons est périodique.

Une fois la phase de transistion terminée, nous pouvons observer l'effet à long terme des lois de contrôles déterminées par l'optimisation par modèle réduit. Nous notons une atténuation de la taille des tourbillons, accompagnée d'un allongement de la zone de recirculation. (Figure 5.10)



(a)



(b)



(c)

FIG. 5.10 – Solutions au temps 3T

L'évolution de la fonctionnelle $\mathcal{F}(\boldsymbol{u}(t))$ au cours des deux boucles d'optimisation fait l'objet de la Figure 5.11. Les courbes pleines correspondent aux valeurs initiale de $\mathcal{F}(\boldsymbol{u}(t))$:

- Courbe Avant optimisation : La partie en noire est la courbe 1 sur la figure 5.7(a). Les pointillés montrent l'évolution en temps de cette solution initiale non-optimisée
- Courbe Après optimisation 1 : Une première partie de la courbe (sur [0,T]) est la courbe 18 sur la figure 5.7(a). Nous regardons ensuite $\mathcal{F}(\boldsymbol{u}(t))$ évoluer en temps. La partie pleine ([T/2, 3T/2]) de cette courbe correspond à la valeur initiale de $\mathcal{F}(\boldsymbol{u}(t))$ pour l'optimisation 2.
- Courbe Après optimisation 2 : Une première partie de la courbe (sur [0, 3T/2]) correspond à $\mathcal{F}^{opt}(\boldsymbol{u}(t))$ obtenue par l'optimisation 2. La partie pleine ([T, 2T]) pourrait être la solution initiale d'un troisième problème d'optimisation



FIG. 5.11 – Evolution de fonctionnelle en temps long

Pour finir nous regardons l'évolution des coefficients aérodynamiques (Figure 5.12). Nous comparons notamment la traînée moyenne avant optimisation et la traînée moyenne après la deuxième optimisation : une diminution d'environ 5% est observée. Ceci peut paraître peu, mais n'est en réalité pas très loin de la diminution maximale que l'on peut espérer : 7 % si l'on avait atteint la solution stationnaire instable. En effet nous observons une baisse d'environ 73% de l'écart entre la traînée moyenne de l'écoulement contrôlé et la traînée moyenne de la solution stationnaire instable.



FIG. 5.12 – Traînée vs. portance

Conclusion

Un bilan partagé est à faire de la tentative de contrôle avec une loi précalculée. D'un côté le modèle a eu besoin d'un ajustement pour commencer, et l'algorithme s'est arrêté après seulement quelques itérations et une diminution de la fonctionnelle d'à peine 15 %. D'un autre côté l'utilisation du modèle a permis de réduire sensiblement le détachement tourbillonnaire sur une période de temps assez courte. La méthode aurait donc peut-être eu du succès si le problème était posé sur un intervalle de temps plus court. On peut aussi débattre du choix des paramètres d'optimisation (points de contrôle B-Spline), une décomposition sur une base de fonctions trigonométriques pourrait être une alternative intéressante.

La méthode de contrôle proportionnel et de contrôle proportionnel-intégral a donné au contraire des résultats assez encourageants. Une diminution importante des variations de traînée et de portance a pu être obtenue, et ce sur le long terme. Le grand avantage de ce type de contrôle et qu'il reste défini à tout temps. L'idée de réinitialisation introduite en fin de chapitre pourrait avoir des extensions intéressantes. Nous pouvons notamment penser à la diminution de l'intervalle de temps du problème d'optimisation et la multiplication des réinitialisations. Alternativement nous pouvons imaginer de définir des coefficients de rétroaction fonctions constantes par morceaux du temps. Il semble peu probable que l'écoulement puisse être contrôlé sur tout le domaine par des actionneurs placés sur le cylindre, mais au vu de ces premiers résultats nous pouvons espérer allonger davantage la zone de recirculation et atténuer encore les tourbillons en employant une des méthodes suggérées ci-dessus.

Conclusion

Dans ce mémoire nous avons étudié la possibilité d'utiliser une technique de réduction de modèle pour le contrôle d'écoulement. La technique choisie est la technique, très utilisée dans ce domaine, de décomposition orthogonale aux valeurs propres ou POD, associée à une projection Galerkin des équations d'état. Cette méthode appartient à la classe des méthodes de réduction dites *empiriques*, c'est à dire qui exploitent la connaissance de solutions du problème obtenues par simulation numérique directe des équations. A travers un état de l'art des avancées en réduction de modèles, nous avons mis en évidence les problématiques soulevées par ce type de méthode. La représentativité par la base de donnée des dynamiques de l'écoulement face à la variation des paramètres du système, ainsi que la validité des modèles POD-Galerkin, sont au centre du débat.

La projection Galerkin des équations de Navier-Stokes incompressibles sur un sous-espace de faible dimension obtenue par POD ne permet pas d'obtenir un modèle réduit précis. Ce problème est résolu en ajustant les termes du système réduit pour que la solution du modèle colle au plus près à la réalité. Cette procédure, appelée *calibration*, peut être réalisée par différentes techniques. Nous retenons une méthode de minimisation du résidu du modèle réduit, qui se ramène à la résolution d'un faible nombre de systèmes linéaires de petite taille. Ce problème, a priori mal conditionné, peut être régularisé en utilisant l'approche classique de Tikhonov. Nous améliorons encore l'efficacité de cette approche en proposant une méthode pour sélectionner le paramètre de régularisation de façon optimale.

Un modèle réduit précis ayant été construit, nous nous sommes posé la question de l'applicabilité de ce modèle dans un problème de contrôle. Dans une première étape le modèle est généralisé au contrôle par rétroaction. La loi de contrôle est alors définie comme une fonction de mesures de la vitesse de l'écoulement au niveau de capteurs placés dans le proche-sillage. Lorsque ce type de contrôle est utilisé la vitesse aux capteurs doit être reconstruite au cours de l'intégration en temps du modèle réduit afin de pouvoir définir la valeur du contrôle à chaque pas. L'accumulation d'erreurs de reconstruction au cours du temps se pose comme une nouvelle difficulté de modélisation. Il est important alors de considérer la nature du contrôle dès le processus de calibration. Il est aussi nécessaire de conserver un plus grand nombre de modes pour obtenir un modèle fiable. Par ailleurs le modèle doit être capable de réagir correctement à des variations limitées de la loi de contrôle. Pour cela nous introduisons une technique de calibration multi-dynamiques. La base de données servant à la POD est augmentée de solutions obtenues avec différentes lois de contrôle, mais la taille du problème de calibration et du modèle réduit final ne varient pas. Une étude systématique à Re = 60 et à Re = 150 montre que le fait d'ajouter simplement une ou deux dynamiques dans le processus de construction du modèle améliore sensiblement son efficacité.

Nous souhaitons enfin utiliser ce modèle pour résoudre un problème de contrôle non-trivial : réduire le détachement tourbillonnaire dans le sillage d'un cylindre à Re = 150. Dans les deux premières parties nous avons montré sur des exemples qu'il est possible de construire des modèles réduits qui soient précis et robustes dans la limite d'une certaine région de confiance. Nous n'avons cependant pas de garanties que de tels modèles puissent être construits pour toutes les valeurs des paramètres de contrôle, ni des bornes précises sur les erreurs générées. Nous construisons donc un algorithme d'optimisation par modèles réduits adaptatifs visant à réduire la différence entre la solution contrôlée et la solution stationnaire instable à Re = 150. Nous commençons par construire un modèle à partir de la solution initiale du problème d'optimisation. Ce modèle est utilisé pour calculer une direction de descente - procédure qui serait très coûteuse si le modèle complet de Navier-Stokes était considéré. Le modèle peut ainsi être utilisé pour réduire une fonction coût tant que le contrôle courant appartient encore au domaine de validité du modèle. Le dernier contrôle ainsi trouvé est injecté dans les équations de Navier-Stokes, et la nouvelle valeur de la fonctionnelle est calculée. La nouvelle simulation est alors utilisée pour mettre à jour le modèle. Si la fonction coût a effectivement diminuée, on calcule le gradient par rapport au nouveau contrôle. Si le modèle a donné une mauvaise prédiction, on recalcule le gradient par rapport au contrôle « n-1 », mais avec le nouveau modèle. L'originalité de cette approche est de profiter des directions de descentes éventuellement fausses du modèle réduit pour enrichir la base de données et améliorer la représentativité dynamique du modèle.

En utilisant la méthode décrite ci-dessus, nous parvenons à stabiliser la solution sur un temps très court et à réduire la traînée à long terme, pour moins d'une vingtaine de simulations des équations de Navier-Stokes. Les résultats d'application de la réduction de modèle au contrôle d'écoulements autour de corps épais se limitaient jusqu'à présent aux cas de contrôle par forces de volume (Noack *et al.* [57]) et par manipulation du cylindre (Graham *et al.* [30], Bergmann *et al.* [11]). Nous avons donc étendu ces résultats au cas du contrôle par soufflage/aspiration. Nous nous posons en plus la question de l'évolution de l'écoulement en dehors de la période d'optimisation. Nous remarquons notamment qu'au delà de cette période les tourbillons supprimés par le contrôle commencent à se développer à nouveau. Nous proposons donc une méthode de réinitialisation du contrôle. Le contrôle suboptimal obtenu pour une période de temps [0,T]est appliqué sur la période de temps [T/2, 3T/2] et une nouvelle optimisation est réalisée, ceci permet de diminuer de façon importante la traînée à long terme.

A la suite de ce travail nous pensons que les efforts à fournir à l'avenir en termes de réduction de modèle devraient concerner davantage des applications au contrôle, que la recherche de précision dans la reproduction de simulations existantes. Ainsi l'utilisation d'estimateurs par modèle réduit, développée par Buffoni et al. [13], pourrait permettre de reconstruire la vitesse dans le proche-sillage en utilisant des mesures de pression prises sur le cylindre. La même méthode d'optimisation pourrait donc être appliquée avec un placement des capteurs plus réaliste. L'idée de ré-initialisation pourrait aussi être exploitée de façon plus efficace. Dans le présent travail nous avons résolu deux problèmes d'optimisation sur des temps assez longs. Nous pouvons maintenant imaginer de résoudre des problèmes d'optimisation sur plusieurs périodes de temps très courtes. Le modèle réduit peut alors vraiment être considéré comme un outil à utiliser en ligne pour des problèmes en temps réel.

Annexe

A Le calcul des modes propres

Nous rappelons le problème de minimisation permettant de trouver les modes propres :

Trouver les fonctions $\phi^k \in \mathcal{W}_{N_T}$ et les coefficients $a_k^n \in \mathbb{R}$, $1 \leq k \leq N_R$ et $1 \leq n \leq N_T$

solutions du problème :

Minimiser
$$\sum_{n=1}^{N_T} \left\| \boldsymbol{w}^n - \sum_{k=1}^{N_R} \boldsymbol{a}_k^n \boldsymbol{\phi}^k \right\|^2$$
 (A.1a)

sous la condition :

$$\forall \quad 1 \leqslant r \leqslant N_R, \quad 1 \leqslant k \leqslant N_R \quad (\boldsymbol{\phi}^k, \boldsymbol{\phi}^r) = \delta_{kr} \tag{A.1b}$$

En utilisant l'orthonormalité donnée par (A.1b), la fonctionnelle (A.1a) peut s'écrire :

$$\sum_{n=1}^{N_T} \left[(\bm{w}^n, \bm{w}^n) - 2 \sum_{k=1}^{N_R} \bm{a}_k^n (\bm{w}^2, \bm{\phi}^k) + \sum_{k=1}^{N_R} (\bm{a}_k^n)^2 \right]$$

Le problème (3.3) se résout alors de façon classique, en transformant le problème de minimisation sous contrainte en un problème de minimisation sans contrainte par l'introduction de multiplicateurs de Lagrange λ_{kr} :

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{\phi}, \lambda) = \sum_{n=1}^{N_T} \left[(\boldsymbol{w}^n, \boldsymbol{w}^n) - 2\sum_{k=1}^{N_R} \boldsymbol{a}_k^n (\boldsymbol{w}^n, \boldsymbol{\phi}^k) + \sum_{k=1}^{N_R} (\boldsymbol{a}_k^n)^2 \right] + \sum_{k,r=1}^{N_R} \lambda_{kr} \left[(\boldsymbol{\phi}^k, \boldsymbol{\phi}^r) - \delta_{kr} \right]$$
(A.2)

Puisque les fonctions ϕ^k appatiennent à \mathcal{W}_{N_T} , elles peuvent s'écrire sous la forme :

$$\boldsymbol{\phi}^{k}(\boldsymbol{x}) = \sum_{l=1}^{N_{T}} \boldsymbol{\beta}_{k}^{l} \boldsymbol{w}^{l}(\boldsymbol{x}) \quad \text{avec} \quad \boldsymbol{\beta}_{k}^{l} \in \mathbb{R}$$
(A.3)

Le lagrangien peut donc s'écrire :

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{\beta},\lambda) = \sum_{n=1}^{N_T} \left[(\boldsymbol{w}^n, \boldsymbol{w}^n) - 2\sum_{k=1}^{N_R} \boldsymbol{a}_k^n \boldsymbol{\beta}_k^l (\boldsymbol{w}^n, \boldsymbol{w}^l) + \sum_{k=1}^{N_R} (\boldsymbol{a}_k^n)^2 \right] + \sum_{k,r=1}^{N_R} \lambda_{kr} \left[\sum_{l,m=1}^{N_T} \boldsymbol{\beta}_k^l \boldsymbol{\beta}_r^m (\boldsymbol{w}^l, \boldsymbol{w}^m) - \delta_{kr} \right]$$
(A.4)

Nous définissons alors la matrice de corrélation R :

$$\boldsymbol{R}_{nm} = (\boldsymbol{w}^n, \boldsymbol{w}^m) \quad n, m = 1 \cdots N_T$$

et nous posons :

$$\boldsymbol{a}_k = \left(\boldsymbol{a}_k^1, \cdots, \boldsymbol{a}_k^{N_T}\right)^T$$
 et $\boldsymbol{\beta}_k = \left(\boldsymbol{\beta}_k^1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_k^{N_T}\right)^T$

Nous pouvons alors écrire le lagrangien sous forme vectorielle :

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{\beta},\lambda) = \left[Tr(R) - 2\sum_{k=1}^{N_R} \boldsymbol{a}_k^T R \boldsymbol{\beta}_k + \sum_{k=1}^{N_R} \boldsymbol{a}_k^T \boldsymbol{a}_k\right] + \sum_{k,r=1}^{N_R} \lambda_{kr} \left[\boldsymbol{\beta}_k^T R \boldsymbol{\beta}_r - \delta_{kr}\right]$$
(A.5)

Le problème de minimisation sous contrainte (A.1) a donc été réduit à un problème de minimisation sans contrainte à $2 \times N_R \times N_T + N_R^2$ inconnus.

Calcul des coefficients de projection sur \mathcal{W}_{N_R}

L'annulation de la dérivée de \mathcal{L} par rapport aux vecteurs a_k donne immédiatement une expression de ces derniers en fonction des vecteurs β_k

en effet,
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{a}_k}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{\beta},\lambda) = -2R\beta_k + 2\boldsymbol{a}_k$$
 et donc $\boldsymbol{a}_k = R\boldsymbol{\beta}_k$

En reportant ce résultat dans (A.5), la lagrangienne s'écrit en fonction de β et λ uniquement :

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\beta},\lambda) = (Trace(R) - \boldsymbol{\beta}_k^T R^T R \boldsymbol{\beta}_k) + \lambda_{kr} \left(\boldsymbol{\beta}_k^T R \boldsymbol{\beta}_r - \delta_{kr} \right)$$
(A.6)

Calcul des coefficients de projection sur \mathcal{W}_{N_T}

Nous rappelons que la matrice de corrélation et symétrique, l'annulation de la dérivée de la lagrangienne par rapport à β_k donne donc :

$$-2R^{2}\boldsymbol{\beta}_{k} = \sum_{r} (\lambda_{kr} + \lambda_{rk})R\boldsymbol{\beta}_{r} \Leftrightarrow R\boldsymbol{\beta}_{k} = \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{N_{R}} (\lambda_{kr} + \lambda_{rk})\boldsymbol{\beta}_{r} \quad k = 1 \cdots N_{R}$$
(A.7)

L'annulation de la dérivée de la la grangienne par rapport à λ_{kr} donne :

$$\boldsymbol{\beta}_{k}^{T} \boldsymbol{R} \boldsymbol{\beta}_{r} = \delta_{kr} \quad k, r = 1 \cdots N_{R} \tag{A.8}$$

- Cas 1 : $N_R = 1$ Dans ce cas (A.7) et (A.8) s'écrivent :

$$R\boldsymbol{\beta}_1 = \lambda_{11}\boldsymbol{\beta}_1 \tag{A.9}$$

$$\boldsymbol{\beta}_1^T R \boldsymbol{\beta}_1 = 1 \tag{A.10}$$

Les solutions de l'équation (A.9) sont les valeurs et vecteurs propres de la matrice R. L'équation (A.10) impose alors une condition sur la norme de ces vecteurs propres. En effet, si β_1 est solution de (A.9), l'équation(A.10) devient :

$$\boldsymbol{\beta}_1^T \boldsymbol{\beta}_1 = \frac{1}{\lambda_{11}} \tag{A.11}$$

D'autre part, pour β_1 ainsi choisi, la fonctionnelle de Lagrange s'écrit :

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\beta}, \lambda) = Tr(R) - \lambda_{11}$$

Pour minimiser $\mathcal{L}(\boldsymbol{\beta}, \lambda)$, λ_{11} doit donc être la plus grande valeur propre de R.

Dans ce cas l'unique mode propre est donc donné par : $\phi^1(\mathbf{x}) = \sum_l \beta_l^l \mathbf{w}^l(\mathbf{x})$, où β_1 est le vecteur propre de R correspondant à la plus grande valeur propre, notée λ_1 , et ayant pour norme $1/\sqrt{\lambda_1}$

 $- \text{ Cas } 2: N_R = 2$

En utilisant (A.3), le produit scalire de ϕ^1 et ϕ^2 s'écrit :

$$(\boldsymbol{\phi}^1, \boldsymbol{\phi}^2) = \sum_{l,m} \boldsymbol{\beta}_1^l \boldsymbol{\beta}_2^m(\boldsymbol{w}^l, \boldsymbol{w}^m) = \boldsymbol{\beta}_2^T R \boldsymbol{\beta}_1 = \lambda_1 \boldsymbol{\beta}_2^T \boldsymbol{\beta}_1$$

Puisque ϕ^1 et ϕ^2 sont orthogonaux, on a alors :

$$\boldsymbol{\beta}_2^T \boldsymbol{\beta}_1 = 0$$

On utilise à présent (A.7) avec $N_R = 2$ et k = 2:

$$R\beta_{2} = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{2} (\lambda_{2r} + \lambda_{2r})\beta_{r} = \frac{1}{2} (\lambda_{21} + \lambda_{12})\beta_{1} + \lambda_{22}\beta_{2}$$
(A.12)

Le produit scalaire de $R\beta_2$ par β_1 donne alors :

$$(R\boldsymbol{\beta}_{2},\boldsymbol{\beta}_{1}) = \frac{1}{2}(\lambda_{21} + \lambda_{12})(\boldsymbol{\beta}_{1},\boldsymbol{\beta}_{1}) + \lambda_{22}(\boldsymbol{\beta}_{2},\boldsymbol{\beta}_{1})$$

$$\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\beta}_{1}^{T}R\boldsymbol{\beta}_{2} = \frac{1}{2}(\lambda_{21} + \lambda_{12})\boldsymbol{\beta}_{1}^{T}\boldsymbol{\beta}_{1} \qquad (\boldsymbol{\beta}_{1}^{T}\boldsymbol{\beta}_{2} = 0)$$

$$\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\beta}_{2}^{T}R\boldsymbol{\beta}_{1} = \frac{1}{2}(\lambda_{21} + \lambda_{12})\boldsymbol{\beta}_{1}^{T}\boldsymbol{\beta}_{1} \qquad (\text{symétrie de } R)$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 = \frac{1}{2}(\lambda_{21} + \lambda_{12})/\lambda_{1}$$

Par cette dernière égalité, l'équation (A.7) avec $N_R = 2$ devient :

$$R\boldsymbol{\beta}_k = \lambda_{kk}\boldsymbol{\beta}_k \quad k = 1 \cdots N_R$$

On déduit alors que β_k est le vecteur propre de R corresponant à la deuxième plus grande valeur propre, notée λ_2 , et de norme $1/\sqrt{\lambda_2}$.

Ce raisonnement peut être répété pour les autres valeurs de N_R . Au final les β_k sont donc les vecteurs propres de R correspondants aux N_R plus grandes valeurs propres, notées λ_k , et de normes respectives $1/\sqrt{\lambda_k}$ $(1 \le k \le N_R)$. De plus le résidu $\sum_{n=1}^{N_T} \left\| \boldsymbol{w}^n - \sum_{k=1}^{N_R} \boldsymbol{a}_k^n \boldsymbol{\phi}^k \right\|^2$ est alors donné par :

$$\sum_{n=1}^{N_T} \left\| \boldsymbol{w}^n - \sum_{k=1}^{N_R} \boldsymbol{a}_k^n \boldsymbol{\phi}^k \right\|^2 = Tr(R) - \sum_{k=1}^{N_R} \lambda_k = \sum_{k=1}^{N_T} \lambda_k - \sum_{k=1}^{N_R} \lambda_k = \sum_{k=N_R+1}^{N_T} \lambda_k$$

B Méthodes spectrales

Pour résoudre le problème de calibration (B.13) nous utilisons la méthode pseudo-spectrale choisie dans [27] pour résoudre ce système. Dans un premier temps nous détaillons la méthode pour la résolution d'un système d'équations différentielles.

Après calibration le modèle réduit pour les équations de Navier-Stokes avec contrôle s'écrit :

$$\begin{cases} \boldsymbol{a}_{r}(0) = \boldsymbol{a}_{r}^{0} \\ \dot{\boldsymbol{a}}_{r}(t) = \boldsymbol{A}_{r} + \boldsymbol{B}_{rk}\boldsymbol{a}_{k}(t) + \boldsymbol{C}_{rks}\boldsymbol{a}_{k}(t)\boldsymbol{a}_{s}(t) + \boldsymbol{E}_{r}\dot{c}(t) + F_{r}c^{2}(t) - (G_{r} + \boldsymbol{H}_{rk}\boldsymbol{a}_{k}(t))c(t) \end{cases}$$
(B.13)

Au lieu d'appliquer une méthode itérative, type Runge-Kutta, pour résoudre ce système, nous pouvons chercher une solution approchée par une méthode directe, en se plaçant dans sous-espace de dimension finie de $\mathcal{C}^{([0,T])}$.

Si N_t est la dimension de cet espace, et $\varphi_j(t)$ les fonctions de base, alors la solution approchée $a^h(t)$ s'écrira :

$$\boldsymbol{a}_{r}^{h}(t) = \sum_{j=1}^{N_{t}} \boldsymbol{a}_{jr} \varphi_{j}(t)$$

L'intervalle [0, T] est discrétisé de façon non-uniforme en définissant N_t points $t_i = \frac{2}{T}(1-x_i)$, où les x_i sont les points de Gauss-Lobatto $x_i = \cos((i-1)\pi/(N_t-1))$.

On note $\psi_i(x)$ les polynômes de Lagrange associés aux points x_i . Les dérivées des ψ_j aux points x_i sont données dans [21] :

$$\dot{\psi}_{j}(x_{i}) = \begin{cases} \frac{c_{i}}{c_{j}} \frac{(-1)^{i+j}}{x_{i} - x_{j}} & j \neq i \\ \frac{1}{2} \frac{x_{i}}{1 - x_{i}^{2}} & j = i \neq 1, N_{t} \\ \frac{2(N_{t} - 1)^{2} + 1}{6} & j = i = 1 \\ -\frac{2(N_{t} - 1)^{2} + 1}{6} & j = i = N_{t} \end{cases}$$
(B.14)

où $c_1 = c_{N_t} = 2$ et $c_i = 1, i \neq 1, 2$

Le sous-espace considéré pour la résolution de (B.13) est $vect\{\varphi_j\}_j$ où les fonction φ_j sont les polynômes de Lagrange associés aux points t_j :

$$\varphi_j(t) = \psi_j(1 - \frac{2}{T}t)$$

B.1 Application aux équations du modèle réduit

En remplaçant a(t) par $a^h(t)$ dans (B.13), et en écrivant chaque équation pour $t = t_j$, on obtient un système de $N_t \times N_r$ équations et $N_t \times N_r$ inconnues. En utilisant la convention de sommation d'Einstein sur j, r et s ce système s'écrit :

$$\begin{cases} \forall \quad i,r, \quad 2 \leqslant i \leqslant N_t, \quad 1 \leqslant r \leqslant N_r: \\ \boldsymbol{a}_{1r} - \boldsymbol{a}_r^0 = 0 \\ \boldsymbol{D}_{ij}\boldsymbol{a}_{jr} - \boldsymbol{A}_r - \boldsymbol{B}_{rk}\boldsymbol{a}_{ik} - \boldsymbol{C}_{rks}\boldsymbol{a}_{ik}\boldsymbol{a}_{is} - \boldsymbol{E}_r\boldsymbol{D}_{ij}c_j - \boldsymbol{F}_rc_i^2 - (\boldsymbol{G}_r + \boldsymbol{H}_{rk}\boldsymbol{a}_{ik})c_i = 0 \end{cases}$$

où D_{ij} est la matrice de différenciation :

$$\boldsymbol{D}_{ij} = -\frac{2}{T} \dot{\psi}_j (1 - \frac{2}{T} t_i)$$

Ce système peut encore s'écrire :

$$\begin{cases} \forall \quad i,r, \quad 2 \leq i \leq N_t, \quad 1 \leq r \leq N_r: \\ \sum_{j=2}^{N_t} \boldsymbol{D}_{ij} \boldsymbol{a}_{jr} + \boldsymbol{D}_{i1} \boldsymbol{a}_r^0 - \boldsymbol{A}_r - \boldsymbol{B}_{rk} \boldsymbol{a}_{ik} - \boldsymbol{C}_{rks} \boldsymbol{a}_{ik} \boldsymbol{a}_{is} \\ -\boldsymbol{E}_r \boldsymbol{D}_{ij} c_j - \boldsymbol{F}_r c_i^2 - (\boldsymbol{G}_r + \boldsymbol{H}_{rk} \boldsymbol{a}_{ik}) c_i = 0 \end{cases}$$
(B.15)

Le sytème (B.15) est du type F(Y) = 0 et peu être résolue par une méthode de Newton dans la mesure où le gradient de F est facile à calculer.

En effet si on note $L_{ir}^{(1)}(a, c, X)$ le terme de gauche de l'équation (B.15) alors :

$$\begin{cases} \forall \quad i, j, r, k, \quad 2 \leq i, j \leq N_t, \quad 1 \leq r, k \leq N_r: \\ \frac{\partial \boldsymbol{L}_{ir}^{(1)}}{\partial \boldsymbol{a}_{jk}}(\boldsymbol{a}, c, \boldsymbol{X}) = \boldsymbol{D}_{ij}\delta_{rk} + \boldsymbol{P}_{irk}\delta_{ij} \quad 1 \leq i \leq N_t \\ \text{où} \quad \boldsymbol{P}_{irk} = -\boldsymbol{B}_{rk} - \sum_s (\boldsymbol{C}_{rks} + \boldsymbol{C}_{rsk})\boldsymbol{a}_{is} - \boldsymbol{H}_{rk}c_i \end{cases}$$
(B.16)

Si l'on range les inconnus du système (B.15) dans un vecteur \boldsymbol{x} de taille $(N_t - 1) \times N_r$:

$$oldsymbol{x} = [oldsymbol{a}_{21}\cdotsoldsymbol{a}_{N_t1}oldsymbol{a}_{22}\cdotsoldsymbol{a}_{N_t2}\cdots\cdotsoldsymbol{a}_{2N_r}\cdotsoldsymbol{a}_{N_tN_r}]^t$$

on peut écrire le gradient sous forme matrcielle.

 $\nabla_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{L}$ est une matrice creuse qu'on peut écrire avec une notation par blocs :

$$abla_{m{x}}m{L}(m{x}) = \left[egin{array}{ccccc} m{M}^1 & m{N}^{12} & \cdots & m{N}^{1N_r} \ m{N}^{21} & m{M}^2 & & \ dots & & \ddots & \ m{N}^{N_r1} & & & m{M}^{N_r} \end{array}
ight]$$

Les N_r blocs diagonaux M^r sont des matrices pleines de taille $(N_t - 1)^2$ et

$$\boldsymbol{M}_{ij}^r = D_{ij} + \delta_{ij} \boldsymbol{P}_{irr} \quad \forall i, j, \quad 2 \leqslant i, j \leqslant N_t$$

Les blocs extra diagonaux \boldsymbol{N}^{rk} sont des matrices diagonales et

$$N_i^{rk} = P_{irk} \quad \forall i, \quad 2 \leqslant i \leqslant N_t$$

Le modèle d'ordre réduit peut ainsi être résolu par une méthode de Newton en fixant une solution initiale $a_{ir}^0 = \hat{a}_r(t_i)$ puis

$$\boldsymbol{x}^{n+1} = \boldsymbol{x}^n - \alpha (\nabla_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{L}(\boldsymbol{x}^n))^{-1} (\boldsymbol{L}(\boldsymbol{x}^n))$$

B.2 Application au problème de calibration

Traitement des équations adjointes

On rappelle les équations adjointes pour le problème de calibration :

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{b}}_{r}(t) = -\left(\boldsymbol{B}_{kr} + (\boldsymbol{C}_{ksr} + \boldsymbol{C}_{krs})\boldsymbol{a}_{s}(t) + \boldsymbol{H}_{kr}c(t)\right)\boldsymbol{b}_{k}(t) - 2(\boldsymbol{a}_{r}(t) - \hat{\boldsymbol{a}}_{r}(t)) \\ \boldsymbol{b}_{r}(T) = 0 \end{cases}$$
(B.17)

Si l'on applique la méthode précédente les équations discrétisées s'écrivent :

$$\begin{cases} \forall \quad i,r, \quad 1 \leq i \leq N_t - 1, \quad 1 \leq r \leq N_r :\\ \sum_{j=1}^{N_t - 1} \boldsymbol{D}_{ij} \boldsymbol{b}_{jr} + (\boldsymbol{B}_{kr} + (\boldsymbol{C}_{ksr} + \boldsymbol{C}_{krs}) \boldsymbol{a}_{is} + \boldsymbol{H}_{kr} c_i) \boldsymbol{b}_{ik} + 2(\boldsymbol{a}_{ir} - \hat{\boldsymbol{a}}_{ir}) = 0 \end{cases}$$
(B.18)

On note $L_{ir}^{(2)}(a, b, X)$ le terme de gauche de l'équation (B.18).

$$\begin{cases} \frac{\partial \boldsymbol{L}_{ir}^{(2)}}{\partial \boldsymbol{a}_{jk}}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{X}) = \boldsymbol{Q}_{irk} \delta_{ij} \\ \text{où} \quad \boldsymbol{Q}_{irk} = \sum_{s} (\boldsymbol{C}_{srk} + \boldsymbol{C}_{skr}) \boldsymbol{b}_{is} - 2 \end{cases}$$
(B.19)

 et

$$\begin{cases}
\frac{\partial \boldsymbol{L}_{ir}^{(2)}}{\partial \boldsymbol{b}_{jk}}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{X}) = \boldsymbol{D}_{ij}\delta_{rk} + \boldsymbol{R}_{irk}\delta_{ij} \\
\text{où} \quad \boldsymbol{R}_{irk} = \boldsymbol{B}_{kr} + \sum_{s} (\boldsymbol{C}_{krs} + \boldsymbol{C}_{ksr})\boldsymbol{a}_{is} + \boldsymbol{H}_{kr}c_{i}
\end{cases}$$
(B.20)

С Résultats de contrôle supplémentaire



Les résultats pour le contrôle proportionnel-intégral

FIG. 5.13 – Evolution de la fonctionnelle au cours de l'optimisation



(c) Solution correspondant à F(u(t)) minimal

FIG. 5.14 – Evolution en temps de la vorticité de la solution suboptimale

i	$\mathcal{J}_{\scriptscriptstyle R}^{i-1,OPT}({m a},c)$	$\mathcal{J}(oldsymbol{u})^i$	$\mathcal{J}_{\scriptscriptstyle R}^i({oldsymbol a},c)$	N_c
1	-	443,43	432.98	1
2	430.15	426,97	426, 41	1
3	423,16	419,8	419,29	1
4	416,74	$413,\!59$	413,02	1
5	410,085	$405,\!61$	405,31	1
6	399,20	$390,\!99$	$390,\!61$	1
7	386,75	$381,\!93$	$381,\!47$	1
8	$378,\!36$	$375,\!56$	$374,\!97$	1
9	$371,\!86$	370,41	$369,\!68$	1
10	366,41	$365,\!28$	364,97	1
11	361,79	360, 48	$359,\!69$	1
12	352,0	$346,\!38$	$345,\!69$	1
13	$342,\!09$	$325,\!21$	$325,\!6$	1
14	$325,\!52$	$\frac{331,34}{325,6}$	$326,\!87$	2
15	$318,\!58$	$301,\!99$	302,76	2
16	$298,\!93$	278,77	$278,\!56$	2
17	273,71	$292,\!42$ 278,77	384,95	3
18	$272,\!19$	$\frac{286.54}{278,77}$	$267,\!98$	3
19	$260,\!62$	256.81	$255,\!93$	3

TAB. 5.2 – Contrôle proportionnel-intégral

Bibliographie

- [1] K. AFANASIEV et M. HINZE : Adaptive control of a wake flow using proper orthogonal decomposition. In Shape Optimization and Optimal Design, volume 216 de Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, pages 317–332. Marcel Dekker, 2001.
- [2] S. AHUJA et C. W. ROWLEY : Low-dimensional models for feedback stabilization of unstable steady states. In Proceedings of the 46th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, 2008. AIAA Paper 2008-553.
- [3] A. C. ANTOULAS : A survey of model reduction methods for large-scale systems. Annual reviews in control, pages 181–190, 2005.
- [4] J. A. ATWELL et B. B. KING : Reduced order controllers for spatially distributed systems via proper orthogonal decomposition. SIAM Journal on Scientific Computing, 26(1):128–151, 2004.
- [5] O. BASHIR, K. WILLCOX, O. GHATTAS, B. van BLOEMEN WAANDERS et J. HILL : Hessianbased model reduction for large-scale systems with initial-condition inputs. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 73(6):844–868, 2007.
- [6] E. BERGER : Suppression of vortex shedding and turbulence behind oscillating cylinders. *Phys. Fluids*, 10:191–93, 1967.
- [7] M. BERGMANN: Optimisation aerodynamique par reduction de modele POD et controle optimal. Application au sillage laminaire d'un cylindre circulaire. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Lorraine, 2004.
- [8] M. BERGMANN, C.-H. BRUNEAU et A. IOLLO : Enablers for robust pod models. J. Comput. Physics, 228 (2), 2009.
- [9] M. BERGMANN et L. CORDIER : Proper orthogonal decomposition : an overview. In Lecture series 2002-04 and 2003-04 on post-processing of experimental and numerical data. Von Karman Institute for Fluid Dynamics, 2002.
- [10] M. BERGMANN et L. CORDIER : Optimal control of the cylinder wake in the laminar regime by trust-region methods and pod reduced-order models. *Journal of Computational Physics*, 227(16):7813–7840, 2008.
- [11] M. BERGMANN, L. CORDIER et J.-P. BRANCHER : Optimal rotary control of the cylinder wake using pod reduced order model. *Physics of fluids*, 17(9), 2005.
- [12] T. BEWLEY et P. MOIN : Optimal control of turbulent channel flows. Active Control of Vibration and Noise, ASME DE 75, 1994.

- [13] M. BUFFONI, S. CAMARRI, A. IOLLO, E. LOMBARDI et M. V. SALVETTI : A non-linear observer for unsteady three-dimensional flows. *Journal of Computational Physics*, 227(4): 2626–2643, 2008.
- [14] M. BUFFONI, S. CAMARRI, A. IOLLO et M. V. SALVETTI : Low-dimensional modelling of a confined three-dimensional wake flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 569:141–150, 2006.
- [15] M. BUFFONI, H. TELIB et A IOLLO : Iterative methods for model reduction by domain decomposition. Rapport technique, INRIA, 2007. Rapport de recherche RR-6383.
- [16] T. BUI-THANH, K. WILLCOX et O. GHATTAS : Goal-oriented, model-constrained optimization for reduction of large-scale systems. *Journal of Computational Physics*, 224(2):880–896, 2007.
- [17] T. BUI-THANH, K. WILLCOX et O. GHATTAS : Model reduction for large-scale systems with high-dimensional parametric input space. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 30(6):3270–3288, 2008.
- [18] S. CAMARRI et M. V. SALVETTI: Towards the large-eddy simulation of complex engineering flows with unstructured grids. Rapport technique, INRIA, 1999. Tech Rep RR-3844.
- [19] S. CAMARRI, M. V. SALVETTI, B. KOOBUS et A DERVIEUX : A low-diffusion muscl scheme for les on unstructured grids. *Computers and Fluids*, 33(9):1101–1129, 2004.
- [20] K. A. E. CAMP et B. B. KING : A comparison of balanced truncation techniques for reduced order controllers. In Proceedings of the 15th International Symposium on the Mathematical Theory of Networks and Systems, 2002. article 23323_2.
- [21] C. CANUTO, M. HUSSAINI, A. QUARTERONI et T. ZANG : Spectral Methods in Fluid Dynamics. Springer Verlag(Berlin and New York), 1988.
- [22] H. CHOI, W.-P. JEON et J. KIM : Annual Review of Fluid Mechanics, volume 40, chapitre Control of Flow Over a Bluff Body, pages 113–139. Annual Reviews, 2008.
- [23] H. CHOI, R. TEMAM, P. MOIN et J. KIM : Feedback control for unsteady flow and its application to the stochastic burgers equation. J. Fluid Mech., 253:509–43, 1993.
- [24] K. COHEN, S. SIEGEL et T. MCLAUGHLIN : A heuristic approach to effective sensor placement for modeling of a cylinder wake. *Computers and Fluids*, 35(1):103–120, 2006.
- [25] M. COUPLET, C. BASDEVANT et P. SAGAUT : Calibrated reduced-order pod-galerkin system for fluid flow modelling. *Journal of Computational Physics*, 207(1):192–220, 2005.
- [26] M. FAHL : Trust-Region methods for flow control based on Reduced Order Modeling. Thèse de doctorat, université de Trier, 2000.
- [27] B. GALLETTI, A. BOTTARO, C.-H. BRUNEAU et A. IOLLO : Accurate model reduction of transient and forced wakes. *European Journal of Mechanics B/Fluids*, 26:354–366, 2007.
- [28] B. GALLETTI, C.H. BRUNEAU, L. ZANNETTI et A. IOLLO : Low-order modelling of laminar flow regimes past a confined square cylinder. *Journal of Fluid Mechanics*, 503:161 – 170, 2004,.

- [29] K. GALLIVAN, E. GRIMME et P. VAN DOOREN : A rational lanczos algorithm for model reduction. *Numerical Algorithms*, 12:33–63, 1996.
- [30] W. R. GRAHAM, Peraire J. et Tang K. Y. : Optimal control of vortex shedding using loworder models. part i - open-loop model development. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 44:945–972, 1999.
- [31] W. R. GRAHAM, Peraire J. et Tang K. Y. : Optimal control of vortex shedding using loworder models. part ii - model-based control. *International Journal for Numerical Methods* in Engineering, 44:973–990, 1999.
- [32] M. A. GREPL, Y. MADAY, N. C. NGUYEN et A. T. PATERA : Efficient reduced-basis treatment of nonaffine and nonlinear partial differential equations. *ESAIM-Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 41(3):157–181, 2005.
- [33] M. A. GREPL et A. T. PATERA : A posteriori error bounds for reduced-basis approximations of parametrized parabolic partial differential equations. *ESAIM-Mathematical Modelling* and Numerical Analysis, 39 (1):157–181, 2005.
- [34] S. GUGERCIN et A. C. ANTOULAS : Model reduction of large scale systems by least squares. Linear Algebra and its applications, 415:290–32, 2005.
- [35] P. C. HANSEN: The l-curve and its use in the numerical treatment of inverse problems. In in Computational Inverse Problems in Electrocardiology, ed. P. Johnston, Advances in Computational Bioengineering, volume 4, pages 119–142, 2000.
- [36] M. HINZE et S. VOLKWEIN : Proper orthogonal decomposition surrogate models for nonlinear dynamical systems : Error estimates and suboptimal control in dimension reduction of large-scale systems. In Lecture Notes in Computational and Applied Mathematics, Lecture Notes in Computational and Applied Mathematics, pages 261–306, 2005.
- [37] M. HINZE et S. VOLKWEIN : Error estimates for abstract linear-quadratic optimal control problems using proper orthogonal decomposition. *Computational Optimization and Applications*, 39:319–345, 2008.
- [38] P. HOLMES, J. L. LUMLEY et G. BERKOOZ : Turbulence, Coherent Structures, Dynamical Systems and Symmetry. Cambridge University Press, 1996.
- [39] C. HOMESCU, L. R. PETZOLD et R. SERBAN : Error estimation for reduced-order models of dynamical systems. SIAM Journal on Numerical Analysis, 43(4):1693–1714, 2005.
- [40] A. IOLLO, S. LANTERI et J. DÉSIDÉRI : Stability properties of pod-galerkin approximations for the compressible navier-stokes equations. *Theoret. Comput. Fluid Dynamics*, 13:377– 396, 2000.
- [41] K. ITO et S. S. RAVINDRAN : A reduced-order method for simulation and control of fluid flows. Journal of Computational Physics, 143(2):403–425, 1998.
- [42] V. L. KALB et A. E. DEANE : An intrinsic stabilization scheme for proper orthogonal decomposition based low-dimensional models. *Phys. Fluids*, 19:054106, 2007.

- [43] B. B. KING, N. HOVAKIMYANB, K. A. EVANSA et M. BUHLC : Reduced order controllers for distributed parameter systems : LQG balanced truncation and an adaptive approach. *Mathematical and Computer Modelling*, 43(9-10):1136–1149, 2006.
- [44] S. LALL, J. E. MARSDEN et S. GLAVASKI : A subspace approach to balanced truncation for model reduction of nonlinear control systems. Int. J. Robust Nonlinear Control, 12:519–535, 2002.
- [45] F. LI et N. AUBRY : Feedback control of a flow past a cylinder via transverse motion. Phys. Fluids, 15:2163–76, 2003.
- [46] J. LIN, J. TOWFIGHI et D. ROCKWELL : Near-wake of a circular cylinder : control by steady and unsteady surface injection. J. Fluids Struct., 9:659–69, 1995.
- [47] A. F. LOVGREN, Y. MADAY et E. M. RONQUIST : A reduced basis element method for the steady stokes problem. *ESAIM* : *M2AN*, 40(3):529–552, 2006.
- [48] J. L. LUMLEY: Stochastic Tools in Turbulence. Academic Press, 1970.
- [49] SC. LUO, YT. CHEW et YT NG : Characteristics of square cylinder wake transition flows. Physics of Fluids, 15(9):2549–2559, 2003.
- [50] V. MARIOTTI, S. CAMARRI, M. V. SALVETTI, B. KOOBUS, A. DERVIEUX, H. GUILLARD et S. WORNOM : Numerical simulation of a jet in crossflow. application to grid computing. Rapport technique, INRIA, 2005. Tech Rep RR-5638.
- [51] R. MARTIN et H. GUILLARD : A second order defect correction scheme for unsteady problems. Comput. & Fluids, 25(1):9–27, 1996.
- [52] C. MIN et H. CHOI : Suboptimal feedback control of vortex shedding at low reynolds numbers. *Journal of Fluid mechanics*, 401:123–156, 1999.
- [53] B. C. MOORE : Principal component analysis in linear systems : Controllability, observability, and model reduction. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 26 (1), 1981.
- [54] M. MORZYNSKI, B.R. NOACK et G. TADMOR : Global stability analysis and reduced order modeling for bluff-body flow control. J. Appl. Theor. Mech., 45(3):621–642, 2007.
- [55] N. C. NGUYEN, K. VEROY et A. T. PATERA : Handbook of Materials Modeling, chapitre 4.15 Certified Real-Time Solutions of Parametrized Partial Differential Equations, pages 1523–1558. Springer, 2005.
- [56] B.R. NOACK, K. AFANASIEV, M. MORZYNSKI, G. TADMOR et F. THIELE : A hierarchy of low-dimensional models for the transient and post-transient cylinder wake. *Journal of Fluid Mechanics*, 497:335–363, 2003.
- [57] B.R. NOACK, G. TADMOR et M. MORZYŃSKI : Actuation models and dissipative control. Part I empirical Galerkin models of fluid flows. In The 2004 American Control Conference, pages 0001–0006, Boston, MA, U.S.A., June 30–July 2, 2004, 2004. Paper FrP15.6.
- [58] D.S. PARK, D.M. LADD et E.W. HENDRICKS : Feedback control of von karman vortex shedding behind a circular cylinder at low reynolds numbers. *Phys. Fluids*, 6:2390–405, 1994.

- [59] B. PROTAS : Vortex dynamics models in flow control problems. *Nonlinearity*, 21, 2008. R203-R250 (invited paper).
- [60] S. S. RAVINDRAN : A reduced-order approach for optimal control of fluids using proper orthogonal decomposition. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 34:425– 448, 2000.
- [61] S. S. RAVINDRAN : Reduced-order controllers for control of flow past an airfoil. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 50:531–554, 2006.
- [62] D. REMPFER : On low-dimensional galerkin models for fluid flow. Theoret. and Comput. Fluid Dynamics, 14(2):55–88, 2000.
- [63] D. REMPFER et H.F. FASEL : Evolution of three-dimensional coherent structures in a flat-plate boundary layer. J. Fluid Mech., 260:351–375, 1994.
- [64] J. ROBICHAUX, S. BALACHANDAR et S P. VANKA : Three-dimensional Floquet instability of the wake of square cylinder. *Physics of Fluids*, 11(3):560–578, 1999.
- [65] P. L. ROE : Approximate riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes. Journal of Computational Physics, 43:357–372, 1982.
- [66] A. ROSHKO: On the wake and drag of bluff bodies. J. Aeronaut. Sci., 22:124–32, 1955.
- [67] K. ROUSSOPOULOS : Feedback control of vortex shedding at low reynolds numbers. J. Fluid Mech., 96:248 :267, 1993.
- [68] D. V. ROVAS, L. MACHIELS et Y. MASAY : Reduced-basis output methods for parabolic problems. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 26:423–445, 2006.
- [69] C. W. ROWLEY : Model reduction for fluids using balanced proper orthogonal decomposition. International Journal of Bifurcation and Chaos, 15(3):997–1013, 2005.
- [70] R. SERBAN, C. HOMESCU et L. R. PETZOLD : The effect of problem perturbations on nonlinear dynamical systems and their reduced-order models. SIAM Journal on Scientific Computing, 29(6):2621–2643, 2007.
- [71] S.G. SIEGEL, J. SEIDEL, C. FAGLEY, D.M. LUCHTENBURG, K. COHEN et T. MCLAUGHLIN : Low-dimensional modelling of a transient cylinder wake using double proper orthogonal decomposition. *Journal of Fluid Mechanics*, 606:1–42, 2008.
- [72] L. SIROVICH : Turbulence and the dynamics of coherent structures, parts i-iii. Q. Appl. Math., XLV (3):561–590, 1987.
- [73] G. TADMOR, B.R. NOACK, M. MORZYŃSKI et S. SIEGEL : Low-dimensional models for feedback flow control. Part II : Controller design and dynamic estimation. In 2nd AIAA Flow Control Conference, pages 1–12, Portland, Oregon, U.S.A., June 28 – July 1, 2004, 2004. AIAA Paper 2004-2409 (invited contribution).
- [74] P.T. TOKUMARU et P.E. DIMOTAKIS : Rotary oscillatory control of a cylinder wake. J. Fluid Mech., 224:77–90, 1991.
- [75] K. VEROY et A.T. PATERA : Certified real-time solution of the parametrized steady incompressible navier-stokes equations : Rigorous reduced-basis a posteriori error bounds. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 47(8-9):773–788, 2005.
- [76] K. VEROY, C. PRUD'HOMME, D.V. ROVAS et A.T. PATERA : A posteriori error bounds for reduced-basis approximation of parametrized noncoercive and nonlinear elliptic partial differential equations. In Proceedings of the 16th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference, 2003. AIAA Paper 2003-3844.
- [77] S. VOLKWEIN : Model reduction using proper orthogonal decomposition, 2008. Script in English language.
- [78] K. WILLCOX et J. PERAIRE : Balanced model reduction via the proper orthogonal decomposition. In Proceedings of the 16th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference, 2003. AIAA Paper 2001-2611.
- [79] D. WILLIAMS, H. MANSY et C. AMATO : The response and symmetry properties of a cylinder wake subjected to localized surface excitation. J. Fluid Mech., 234:71–96, 1992.