



HAL
open science

Géométrie des variétés de représentations dans des groupes de Lie résolubles et géométrie en dimension 3

Clément Berat

► **To cite this version:**

Clément Berat. Géométrie des variétés de représentations dans des groupes de Lie résolubles et géométrie en dimension 3. Topologie algébrique [math.AT]. Université Grenoble Alpes [2020-..], 2021. Français. NNT : 2021GRALM058 . tel-03667937

HAL Id: tel-03667937

<https://theses.hal.science/tel-03667937v1>

Submitted on 13 May 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THÈSE

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ GRENOBLE ALPES

Spécialité : Mathématiques

Arrêté ministériel : 25 mai 2016

Présentée par

Clément BERAT

Thèse dirigée par **Louis FUNAR**, DR, Université Grenoble Alpes

préparée au sein du **Laboratoire Institut Fourier**
dans l'**École Doctorale Mathématiques, Sciences et technologies de l'information, Informatique**

Géométrie des variétés de représentations dans des groupes de Lie résolubles et géométrie en dimension 3

Geometry of representation manifolds in solvable Lie groups and 3 dimensional geometry

Thèse soutenue publiquement le **2 décembre 2021**,
devant le jury composé de :

Monsieur LOUIS FUNAR

DIRECTEUR DE RECHERCHE, CNRS DELEGATION ALPES, Directeur de thèse

Monsieur GREG MCSHANE

PROFESSEUR DES UNIVERSITÉS, UNIVERSITÉ GRENOBLE ALPES, Examinateur

Monsieur MICHAEL HEUSENER

PROFESSEUR DES UNIVERSITÉS, UNIVERSITÉ CLERMONT AUVERGNE, Président

Madame INDIRA CHATTERJI

PROFESSEUR DES UNIVERSITÉS, UNIVERSITÉ CÔTE D'AZUR, Examinatrice

Monsieur JACQUES DARNE

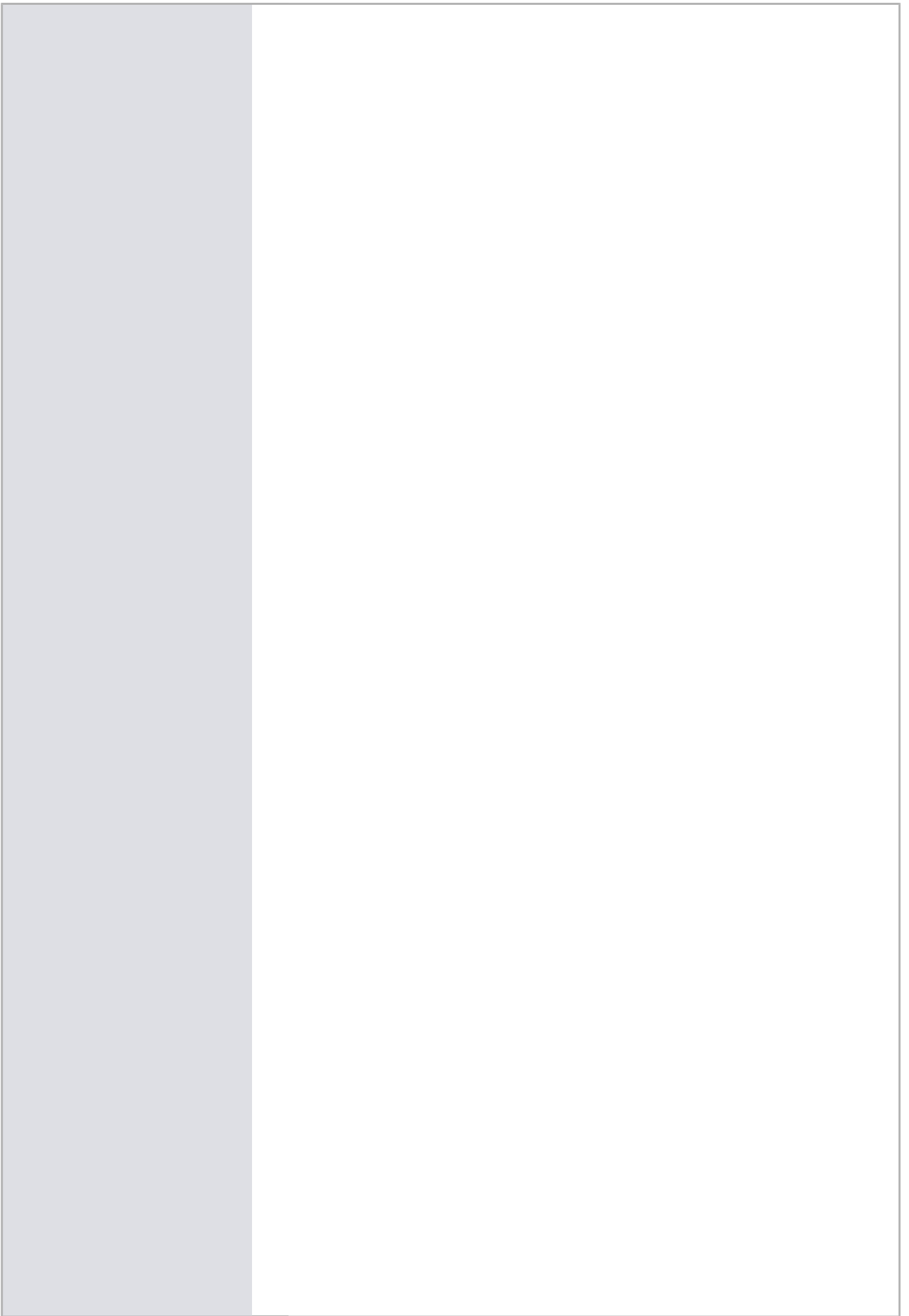
CHARGE DE RECHERCHE, Université catholique de Louvain, Examinateur

Monsieur JULIEN MARCHE

PROFESSEUR DES UNIVERSITÉS, SORBONNE UNIVERSITÉ, Rapporteur

Monsieur GWENAEL MASSUYEAU

PROFESSEUR DES UNIVERSITÉS, UNIVERSITÉ DE BOURGOGNE, Rapporteur



Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier Louis, pour sa patience, ses conseils et son enthousiasme. Il a assuré son rôle de directeur de thèse mieux que je ne pourrais l'exprimer, me confortant quand la recherche avançait, me soutenant dans les moments de doute, me poussant toujours à faire mieux, sans jamais en faire trop. Il a su trouver l'équilibre qui m'était nécessaire entre aide et indépendance, m'a débloqué sur les chemins escarpés bien plus souvent que la fierté me permet de compter, m'a évité bien des impasses, mais sans jamais imposer sa volonté, sans perdre patience malgré l'étudiant borné en face de lui. Cette thèse n'aurait certainement pas vu le jour sans lui, qui m'a si souvent redonné confiance et détermination.

Les membres du jury sont eux aussi largement méritants, pour le temps qu'ils m'ont accordé, en particulier Julien et Gwenaël. La lecture du présent manuscrit a sans aucun doute nécessité des efforts par ses défauts, et pour cela le moins que je puisse faire est de remercier Indira, Greg, Michaël et plus particulièrement Jacques.

Je voudrais ensuite remercier ceux avec qui j'ai eu la chance de partager un bureau, Rémi d'abord, avec qui nous avons souvent échangé, qui m'a aidé sur le plan mathématique mais aussi à mieux appréhender l'enseignement. Mokdad ensuite, avec qui j'ai eu la chance de fraterniser, entre les discussions sur les mathématiques, la physique, l'histoire et bien d'autres sujets. Vient ensuite Dip, qui m'a beaucoup appris. Enfin Stefano, que je n'ai pas eu la chance de beaucoup fréquenter, confinement oblige.

Les autres doctorants sont bien entendu à remercier, m'apportant des discussions passionnantes, et des parties de tarot vivantes. Parmi eux, je pense plus particulièrement à David, Rodolfo, Jean-François, Gabriel, Thomas, Rémi et Vivek.

Enfin, je tiens à remercier chaleureusement Orane, qui m'a accompagné dans chaque instant de ces quatre années, les meilleurs comme les plus difficiles, qui n'a jamais douté de moi alors que je n'y croyais plus, m'a permis de continuer, m'a soutenu, accompagné, parfois porté. Si je suis parvenu à ce résultat, c'est sans doute pour soutenir son regard.

Résumé

Dans cette thèse, nous nous intéressons à la variété des caractères d'un groupe de surface dans un groupe de Lie résoluble. Il s'agit de l'ensemble des morphismes du groupe fondamental d'une surface donnée à valeurs dans un groupe de Lie, à conjugaison près. Les variétés de caractères sont étudiées depuis longtemps, principalement dans le cadre de groupes de Lie semi-simples complexes, et plus généralement les groupes réductifs. Ici nous allons étudier le cas des groupes de Lie résolubles réels. En réalité, nous nous restreindrons aux groupes métabéliens et nilpotents.

Dans une première partie nous étudierons la structure topologique de la variété des caractères, d'abord avec un exemple concret : le groupe de Heisenberg réel, avant d'aborder le cas général. Nous étudierons en particulier l'action du Mapping Class Group sur la variété des caractères, nous permettant d'ébaucher un parallèle avec la filtration centrale descendante du groupe fondamental de la surface. Nous explorerons ensuite la géométrie de la variété des caractères et de la variété des représentations, pour montrer qu'il existe une structure de contact, et une structure pseudo-riemannienne de signature nulle.

Les classes caractéristiques bornées sont intensivement étudiées pour les groupes de Lie semi-simples, avec par exemples les inégalités de Milnor-Wood. Celles-ci donnent une borne sur le nombre de composantes connexes de la variété des caractères. Dans le cadre résoluble, le nombre de composantes connexes peut être infini, comme c'est déjà le cas pour le groupe de Heisenberg.

Finalement nous étudierons l'action du groupe de Torelli sur la variété des caractères pour des surfaces à bord, près de points correspondant aux classes de représentations abéliennes. Nous verrons d'abord que la représentation dérivée se factorise à travers l'abélianisation. Enfin, nous démontrerons que cette représentation abélienne du groupe de Torelli en un point générique est équivalente au morphisme de Johnson, si le groupe de Lie est la complétion de Malcev du second quotient nilpotent du groupe de surface.

Abstract

In this thesis, we are interested in the character variety of a surface group with respect to a solvable Lie group. This is the set of all homomorphisms of the fundamental group of a surface taking values in a Lie group, up to conjugacy. Character varieties have been intensively studied, mostly for the case of complex semisimple Lie groups, or more generally reductive groups. Here we focus on real solvable Lie groups. Actually, we will mostly be concerned with metabelian and nilpotent groups.

In the first part, we study the topological structure of the character variety in such a setting, starting with the example of the real Heisenberg group, before settling the general case. In particular, we will study the Mapping Class Group's action on the character variety, as a first step towards drawing a parallel with the lower central series of the surface fundamental group. We explore the geometry of the character variety and representation variety in solvable and nilpotent Lie groups and show that it has a contact structure, and a natural Riemannian pseudo-metric of null signature.

Bounded characteristic classes for semisimple Lie groups were largely studied in relation with the so-called Milnor-Wood inequalities. They provide bounds for the number of connected components of character varieties. In the solvable context, the number of connected components might be infinite and even for the Heisenberg group.

Eventually we consider the Torelli group action on the character variety for surfaces with boundary, near points corresponding to abelian representation classes. We first show that the tangent representation factors through the abelianization. Finally, we prove that this abelian representation of the Torelli group at a generic point is equivalent to the Johnson homomorphism, if the Lie group is the Malcev completion of the second nilpotent quotient of the surface group.

Table des matières

Introduction	1
Espace des représentations, espace modulaire	1
Fibrés plats	2
Mapping Class Group	3
Action dérivée	4
Organisation du texte	5
1 Composantes connexes de l'espace des représentations	7
1.1 Un exemple : le groupe de Heisenberg	7
1.2 Groupes de Lie généraux	9
2 Groupes nilpotents de classe 2	11
2.1 Introduction	11
2.2 Cas des groupes de Lie	12
2.3 Espace des représentations	13
2.4 Classes caractéristiques	18
2.5 La variété des caractères	20
3 Variété des caractères pour le groupe de Heisenberg	27
3.1 Généralités, contexte	27
3.2 La variété des caractères	28
3.2.1 Le cas du genre 1	28
3.2.2 En genre supérieur	29
3.2.3 Action du groupe de Torelli	32
3.2.4 Structure sur la variété des caractères	34
3.3 Métabéliens généraux	36
3.3.1 Lien avec les extensions d'algèbres de Lie	40
4 Structure sur la variété des caractères	43
4.1 Introduction	43
4.2 Structure lisse	43
5 Structure du quotient	49
5.1 Structure topologique	49
5.2 Structure algébrique	51
5.3 Structure analytique	52
5.4 Fonctions continues	52
5.5 Questions	53

6	Action des noyaux de Johnson	55
6.1	Noyaux de Johnson	55
6.2	Action du Mapping Class Group sur l'espace des représentations	55
6.3	Questions	57
7	Action dérivée	59
7.1	Action dérivée	59
7.2	Représentations abéliennes	63
7.3	Action dérivée réduite	64
7.4	Démonstration du théorème	70
7.5	Exemples de calculs	76
A	Morphisme de Johnson	83
B	Résultat de Long	85

Introduction

Espace des représentations, espace modulaire

Nous allons ici étudier l'espace des représentations d'une surface fermée orientable dans un groupe de Lie résoluble connexe. Notons S une surface (topologique) compacte, orientable et sans bord. Rappelons que son groupe fondamental $\pi = \pi_1(S)$ a une présentation finie :

$$\pi = \pi_1(S) = \left\langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g \mid \prod_{i=1}^n [a_i, b_i] \right\rangle. \quad (1)$$

Étant donné un groupe de Lie G , nous nous intéressons dans un premier temps à l'espace des morphismes définis sur π et à valeurs dans G . Cet espace, noté $\text{Hom}(\pi; G)$, est muni de la topologie compacte-ouverte, π étant discret.

Remarquons que nous n'avons pas imposé de point-base, et donc les morphismes sont, a priori, seulement définis à conjugaison (dans π) près. Pour pallier à cela, nous définissons l'*espace modulaire* (ou *variété des caractères*) $\mathfrak{X}(\pi; G)$ comme le quotient de $\text{Hom}(\pi; G)$ par l'action de G par conjugaison.

Ces espaces ont été largement étudiés dans le cas où G est semi-simple, notamment par William Goldman [19, 20]. Nous connaissons notamment le nombre de composantes connexes dans le cas de $\text{PSL}(2; \mathbb{R})$, et des résultats concernant la géométrie de l'espace modulaire [18]. Remarquons que quand $G = \text{PSL}(2; \mathbb{R})$, $\mathfrak{X}(\pi; G)$ contient l'espace de Teichmüller : il s'agit de l'ensemble des représentations discrètes et libres (c'est donc un ouvert de $\mathfrak{X}(\pi; G)$).

Ainsi, quand G est semi-simple (et, plus généralement, si l'algèbre de Lie \mathfrak{g} de G admet une forme bilinéaire symétrique non-dégénérée invariante par l'action adjointe de G), $\mathfrak{X}(\pi; G)$ admet une structure symplectique. Pour préciser cela, il nous faut déterminer une notion d'espace tangent, étant donné que $\mathfrak{X}(\pi; G)$ n'est pas une variété lisse (ou algébrique) en général.

Soit donc $\rho : \pi \rightarrow G$ un morphisme de groupes. Un chemin de morphismes ρ_t tels que $\rho_0 = \rho$ s'écrit alors pour tout $\gamma \in \pi$

$$\rho_t(\gamma) = \exp(tu(\gamma) + \mathcal{O}(t^2))\rho(\gamma)$$

Un calcul direct, utilisant le fait que ρ_t est un morphisme de groupes pour tout t , montre en dérivant en $t = 0$ que u vérifie pour tous $\gamma_1, \gamma_2 \in \pi$

$$u(\gamma_1\gamma_2) = u(\gamma_1) + \text{Ad}(\rho(\gamma_1))(u(\gamma_2))$$

où pour tout $g \in G$, $\text{Ad}(g) \in \text{GL}(\mathfrak{g})$ désigne la représentation adjointe, c'est-à-dire la différentielle en $1 \in G$ de l'application $h \in G \mapsto ghg^{-1}$. Ainsi, u est

un cocycle de π dans \mathfrak{g} , où \mathfrak{g} est un π -espace par la composition de ρ avec la représentation adjointe. Nous noterons $\mathfrak{g}_{\text{Ad}(\rho)}$ l'algèbre de Lie \mathfrak{g} munie de cette structure de π -espace.

Pour trouver l'espace tangent en une représentation ρ de la classe de conjugaison de ρ , il suffit de faire les mêmes calculs mais en prenant les chemins de la forme

$$\rho_t(\gamma) = \exp(tu + \mathcal{O}(t^2)) \rho(\gamma) \exp(-tu + \mathcal{O}(t^2))$$

et donc l'espace tangent à une orbite sous l'action de G en ρ s'identifie à l'ensemble des cocycles de la forme

$$\gamma \in \pi \mapsto \text{Ad}(\rho(\gamma))(u) - u$$

c'est-à-dire à l'ensemble des cobords de π dans $\mathfrak{g}_{\text{Ad}(\rho)}$. Ainsi, nous pouvons définir l'espace tangent à (la classe de) $\rho \in \mathfrak{X}(\pi; G)$ comme le groupe de cohomologie $H^1(\pi; \mathfrak{g}_{\text{Ad}(\rho)})$.

QUESTION. — Quels éléments de $H^1(\pi; \mathfrak{g}_{\text{Ad}(\rho)})$ définissent effectivement un chemin de $\mathfrak{X}(\pi; G)$? Autrement dit, quel est le cône tangent à un point $\rho \in \mathfrak{X}(\pi; G)$?

Supposons maintenant que \mathfrak{g} admet une forme bilinéaire symétrique non-dégénérée Ad-invariante B (c'est par exemple le cas si G est semi-simple, en prenant la forme de Killing). Nous pouvons alors définir un cup-produit en tout point de la façon suivante

$$H^1(\pi; \mathfrak{g}_{\text{Ad}(\rho)}) \times H^1(\pi; \mathfrak{g}_{\text{Ad}(\rho)}) \longrightarrow H^2(\pi; \mathfrak{g}_{\text{Ad}(\rho)} \otimes \mathfrak{g}_{\text{Ad}(\rho)}) \longrightarrow H^2(\pi; \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}.$$

En utilisant la dualité de Poincaré, nous pouvons montrer que le cup-produit définit une forme bilinéaire antisymétrique non-dégénérée. C'est de ce cup-produit que vient la structure symplectique évoquée plus haut.

Ici, nous nous intéressons à un cadre différent : si G est résoluble, et plus précisément si G est métabelien nilpotent. Avec cette différence, si nous perdons en partie l'aspect algébrique, nous gagnons une description géométrique plus précise de G , et donc de $\mathfrak{X}(\pi; G)$, au prix cependant de constructions *ad-hoc* pour obtenir un espace topologique séparé au lieu par exemple de la théorie des invariants géométriques utilisée pour $SL(n, \mathbb{C})$.

Notons que ces deux cadres — résoluble d'une part, et semi-simple d'autre part — sont complémentaires, la décomposition Levi permettant d'écrire un groupe de Lie connexe comme produit de deux sous-groupes, l'un résoluble et l'autre semi-simple, d'intersection discrète. Les conséquences de cela sont par exemple étudiées dans [9] pour donner des résultats sur un groupe de Lie connexe général, en utilisant des résultats sur la longueur stable de commutateurs dans le cas de groupes résolubles.

Fibrés plats

Une autre façon de voir l'espace modulaire $\mathfrak{X}(\pi; G)$ est comme espace des module de fibrés plats au-dessus de S .

Définition. Soit M un espace topologique, et soit G un groupe topologique. Un G -fibré principal E au-dessus de M est plat s'il admet une connexion plate, c'est-à-dire dont la courbure est nulle.

Il est facile de voir qu'une connexion plate sur un G -fibré principal donne lieu à une représentation de $\pi = \pi_1(S) \rightarrow G$: il s'agit de l'holonomie de la connexion. Réciproquement, étant donné un morphisme $\rho : \pi \rightarrow G$, nous pouvons construire un fibré principal dont l'holonomie sera ρ . En effet, notons \tilde{S} le revêtement universel de S . L'espace total du fibré sera alors $\tilde{S} \times G / \pi$ où π agit diagonalement sur le produit $\tilde{S} \times G$, par automorphismes de revêtement sur le premier facteur, et par translation à gauche via ρ sur le second. Le fibré ainsi défini sera noté ρ_\flat .

Ainsi, nous pouvons identifier l'ensemble des G -fibrés plats au-dessus de S à $\mathfrak{X}(\pi; G)$, autrement dit $\mathfrak{X}(\pi; G)$ est l'espace de modules des G -fibrés plats au-dessus de S .

Goldman explore cette vision dans [21, 17], pour montrer qu'un fibré plat de groupe résoluble est nécessairement virtuellement trivial dès que le groupe dérivé du groupe structurel est simplement connexe.

Mapping Class Group

Étant donnée une surface fermée orientée S , nous noterons $\mathcal{M}od(S)$ son *Mapping Class Group*, c'est-à-dire le groupe des homéomorphismes de S préservant l'orientation à isotopie près. De manière équivalente, il s'agit du groupe $\pi_0(\text{Diff}^+(S))$, le groupe des composantes connexes du groupe de difféomorphismes directs de S .

Remarque. Si S n'est pas fermée, mais a un bord, nous imposons de plus que la restriction des homéomorphismes sur le bord soit l'identité. Si d'autre part S a des points marqués (à considérer comme des piqûres), nous demandons que les homéomorphismes préservent globalement l'ensemble des points marqués.

Le Mapping Class Group entretient une relation particulière avec le groupe fondamental de S . S'il n'agit pas directement sur π , nous avons le théorème suivant.

Théorème (Dehn-Nielsen-Baer). *Le groupe $\mathcal{M}od(S)$ s'identifie à un sous-groupe d'indice 2 de $\text{Out}(\pi)$, le groupe des automorphismes extérieurs de π (quotient du groupe des automorphismes par les automorphismes intérieurs).*

En vertu de ce théorème, $\mathcal{M}od(S)$ désignera indifféremment le Mapping Class Group tel que défini ci-dessus ou son image dans $\text{Out}(\pi)$ (image que nous noterons $\text{Out}^+(\pi)$).

Nous pouvons maintenant définir une action de $\mathcal{M}od(S)$ sur $\mathfrak{X}(\pi; G)$. Commençons par remarquer que le groupe $\text{Aut}(\pi)$ des automorphismes de π agit (à droite) sur l'espace des représentations $\text{Hom}(\pi; G)$ par pré-composition, et donc aussi sur $\mathfrak{X}(\pi; G)$. De plus, il est facile de voir que le groupe $\text{Inn}(\pi)$ des automorphismes intérieurs de π agit trivialement sur $\mathfrak{X}(\pi; G)$ (par définition). Ainsi, par restriction, nous avons une action (à droite) de $\mathcal{M}od(S)$ sur $\mathfrak{X}(\pi; G)$.

Notons que dans le cas de $\text{PSL}(2; \mathbb{R})$, cette action coïncide avec l'action habituelle du Mapping Class Group sur l'espace de Teichmüller. En particulier, ce dernier est stable sous l'action de $\mathcal{M}od(S)$.

Nous étudierons en particulier cette action sur les groupes métabéliens, d'abord dans le cadre du groupe de Heisenberg réel Nil, en montrant par le calcul dans 3.2.9 que le sous-groupe de $\mathcal{M}od(S)$ engendré par les twists de Dehn autour de courbes séparantes (autrement dit le noyau de Johnson) agit

trivialement sur $\mathfrak{X}(\pi; \text{Nil})$. Nous généraliserons ensuite ces calculs aux groupes de Lie métabéliens, ce qui nous donnera une formule explicite dans 3.3.7 pour l'action des courbes séparantes sur $\mathfrak{X}(\pi; G)$, qui se réduira dans le cas où G est de plus nilpotent à une action triviale (3.3.9).

Remarquons que les groupes de tresses apparaissent comme Mapping Class Group de surfaces pointées, et nous donnant un lien avec les représentations de groupes de tresses, comme par exemple avec Long [30, 31]. Dans ces articles, Long nous donne une méthode pour construire des représentations des groupes de tresses, dont nous nous inspirons dans la dernière partie de cette thèse, par ce que nous appellerons l'action dérivée.

Action dérivée

Enfin, nous nous intéresserons à la dérivée de l'action du Mapping Class Group, et plus spécifiquement du groupe de Torelli, sur la variété des caractères. Plus précisément, si ρ est un point fixe pour l'action du groupe de Torelli, alors l'action de ce même groupe donne des endomorphismes de l'espace tangent en ρ à la variété des caractères.

Il s'agit d'une idée introduite par Gunning dans [23], dans le cas où G est \mathbb{C}^* : il étudie les *différentielles de Prym*, qui sont des 1-formes holomorphes sur le revêtement universel de la surface S équivariantes par rapport à l'action de π . Cette approche a ensuite été étudiée par Chueshev [11]. Pour une introduction détaillée, voir également le survey de Louis Funar [15].

Cette technique, utilisée notamment par Long comme nous l'avons indiqué plus haut, cette fois avec le groupe de Lie $SU(2)$, permet dans le cas des groupes de tresses de retrouver la représentation de Burau (voir l'Annexe B). Ici, nous allons alors étudier les informations contenues dans cette représentation, pour démontrer qu'il s'agit précisément des mêmes que celles données par le morphisme de Johnson. Nous obtenons un morphisme du groupe de Torelli $\mathcal{S}(S)$ dans un groupe abélien (en réalité une famille de tels morphismes, paramétrés par les représentations abéliennes de $\mathfrak{X}(\pi; G)$), parce que les représentations abéliennes sont préservées par le groupe de Torelli.

Ce morphisme, introduit en 1980 par Dennis Johnson dans [25] est une construction algébrique d'un morphisme du groupe de Torelli dans un groupe abélien, qui se révèle être le plus grand quotient abélien libre du groupe de Torelli [26]. La construction consiste notamment à étudier la structure de la troncature nilpotente de π , en tant qu'extension de groupe, pour déduire un morphisme de $\mathcal{S}(S)$, vu comme sous-groupe de $\text{Aut}(\pi)$, dans le second quotient de la filtration associée à la suite centrale descendante de π (c'est-à-dire ici $[\pi, \pi]/[\pi, [\pi, \pi]]$). Une présentation plus détaillée est présente dans l'Annexe A.

L'objectif du dernier chapitre sera d'abord de démontrer le théorème suivant.

Théorème (7.1.1). *Pour un choix convenable de groupe de Lie G , il existe des représentations $\rho : \pi \rightarrow G$ telles que le noyau de la représentation dérivée est exactement le noyau de Johnson.*

Dans cette thèse, le «choix convenable» de G pour lequel nous démontrons le théorème est le complété de Malcev (réel) de la troncature nilpotente de π évoquée plus haut, c'est-à-dire un groupe de Lie avec la même structure d'ex-

tension de groupes, ce qui nous permettra de faire apparaître naturellement le morphisme de Johnson.

Nous démontrerons ce théorème dans le cas où S a une composante de bord, ce qui permet d'avoir une action du Mapping Class Group directement sur π (qui est alors un groupe libre), et donc sur l'espace des représentations. Cela permet aussi de rapprocher plus facilement notre représentation dérivée du morphisme de Johnson, sans avoir à passer par un quotient de $\wedge^3 H_1(S)$ comme dans le cadre d'une surface sans bord.

Enfin, nous proposerons une approche plus calculatoire de cette construction, nous fournissant une correspondance explicite avec le morphisme de Johnson (c'est-à-dire une formule pour déterminer l'image par le morphisme de Johnson d'un élément du groupe de Torelli à partir de l'action dérivée).

Organisation du texte

Dans une première partie nous étudierons la structure topologique de la variété des caractères, d'abord avec un exemple concret : le groupe de Heisenberg réel, avant d'aborder le cas général. Nous ferons ensuite un détour par les classes caractéristiques bornées, en explorant notamment les implications du caractère résoluble du groupe de Lie considéré, pour montrer que les classes bornées sont clairement identifiables.

Nous étudierons en particulier l'action du Mapping Class Group sur la variété des caractères, nous permettant d'ébaucher un parallèle avec la filtration centrale descendante du groupe fondamental de la surface. Nous explorerons ensuite la géométrie de la variété des caractères et de la variété des représentations, pour montrer qu'il existe une structure de contact, et une structure pseudo-riemannienne de signature nulle.

Finalement nous étudierons l'action du groupe de Torelli sur la variété des caractères pour des surfaces à bord, près de points correspondant aux classes de représentations abéliennes. Nous verrons d'abord que la représentation dérivée se factorise à travers l'abélianisation. Enfin, nous démontrerons que cette représentation abélienne du groupe de Torelli en un point générique est équivalente au morphisme de Johnson, si le groupe de Lie est la complétion de Malcev du second quotient nilpotent du groupe de surface.

Chapitre 1

Composantes connexes de l'espace des représentations

1.1 Un exemple : le groupe de Heisenberg

Soit Nil le groupe de Heisenberg réel de dimension 3, c'est-à-dire

$$\text{Nil} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

Il s'agit d'un groupe métabélien nilpotent non-trivial, et néanmoins contractile, qui sera notre exemple-jouet tout au long de cette thèse. Son centre est aussi son groupe dérivé, il s'agit de l'ensemble $x = y = 0$ dans la notation ci-dessus.

Un commutateur est donné par un calcul direct

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & x_1 & z_1 \\ 0 & 1 & y_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & x_2 & z_2 \\ 0 & 1 & y_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_1 y_2 - x_2 y_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soit maintenant Σ la surface fermée orientée de genre $g \geq 1$ fixé. Rappelons que son groupe fondamental admet la présentation

$$\pi_1(S) = \left\langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g \mid \prod_{i=1}^g [a_i, b_i] \right\rangle.$$

Une représentation ρ de $\pi_1(\Sigma)$ dans Nil est donnée par l'image des générateurs $a_1, b_1, \dots, a_g, b_g$ de $\pi_1(\Sigma)$ avec la relation

$$\prod_{i=1}^g [\rho(a_i), \rho(b_i)] = \text{Id}.$$

Notons maintenant

$$\rho(a_i) = \begin{pmatrix} 1 & x_{2i-1} & z_{2i-1} \\ 0 & 1 & y_{2i-1} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \rho(b_i) = \begin{pmatrix} 1 & x_{2i} & z_{2i} \\ 0 & 1 & y_{2i} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La condition pour être un morphisme est alors

$$\sum_{i=1}^g x_{2i-1}y_{2i} - x_{2i}y_{2i-1} = 0.$$

Nous reconnaissons la forme symplectique habituelle sur \mathbb{R}^{2g} , que nous noterons ω . Alors pour montrer que deux représentations sont dans la même composante connexe, il suffit de montrer que l'ensemble suivant est connexe par arcs

$$\mathcal{Q} = \{(u, v) \in \mathbb{R}^{2g} \times \mathbb{R}^{2g} \mid \omega(u, v) = 0\}.$$

Tout couple $(u, v) \in \mathcal{Q}$ peut être connecté à $(0, 0)$ par le chemin $t \mapsto (tu, tv)$, d'où le résultat.

Remarque. L'espace $\text{Hom}(\pi_1(\Sigma), \text{Nil})$ s'identifie à $\mathcal{Q} \times \mathbb{R}^{2g}$ (le second facteur vient du fait que le choix des z_i est totalement libre). En particulier, il est connexe par arcs, donc $\text{Hom}(\pi_1(\Sigma), \text{Nil})/\text{Nil}$ aussi.

Pour un quotient de Nil par un sous-groupe discret central, le problème revient à montrer que les lignes de niveau de ω sont connexes (dans $\mathbb{R}^{2g} \times \mathbb{R}^{2g}$). Pour cela, nous aurons besoin d'un lemme :

Lemme 1.1.1. *Le groupe symplectique $\text{Sp}(2g, \mathbb{R})$ agit transitivement sur les lignes de niveau de ω .*

Démonstration. Soient u, v des vecteurs de \mathbb{R}^{2g} . Notons $\alpha = \omega(u, v)$. Si $\alpha = 0$, cela correspond à la connexité de \mathcal{Q} qui a déjà été prouvée. Supposons donc que $\alpha \neq 0$. Il existe une base symplectique $(e_1, \dots, e_g, f_1, \dots, f_g)$ telle que $u \in \text{Vect}(e_1)$ et $v \in \text{Vect}(f_1)$. Alors cela définit la matrice d'un élément φ de $\text{Sp}(2g, \mathbb{R})$, qui envoie $(\lambda, 0, \dots, 0)$ sur u et $(0, \dots, 0, \mu, 0, \dots, 0)$ sur v . Maintenant il est bien clair que la matrice $\text{Diag}(\lambda/\alpha, 1, \dots, 1, \mu, 1, \dots, 1)$ est symplectique, et que la composée avec φ envoie le couple $((\alpha, 0, \dots, 0), (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0))$ sur (u, v) .

Alors si $(u_1, v_1), (u_2, v_2)$ sont deux couples de vecteurs de \mathbb{R}^{2g} tels que $\omega(u_1, v_1) = \omega(u_2, v_2) = \alpha$ et si s_i est l'application linéaire symplectique qui envoie $((\alpha, 0, \dots, 0), (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0))$ sur (u_i, v_i) , alors $s_2 \circ s_1^{-1} \in \text{Sp}(2g, \mathbb{R})$ envoie (u_1, v_1) sur (u_2, v_2) . \square

Maintenant, il suffit d'utiliser la connexité par arcs de $\text{Sp}(2g, \mathbb{R})$ pour montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\{(u, v) \in \mathbb{R}^{2g} \times \mathbb{R}^{2g} \mid \omega(u, v) = \alpha\}$ est connexe par arcs.

Théorème 1.1.2. *Soit G le quotient du groupe de Heisenberg Nil par un sous-groupe central discret. Alors les composantes connexes de $\text{Hom}(\pi_1(\Sigma), G)/G$ sont classifiées par $\pi_1(G)$.*

Démonstration. Soient ρ_0, ρ_1 des morphismes $\pi_1(\Sigma) \rightarrow G$. Alors ρ_j est totalement déterminé par la donnée de $\rho_j(a_i), \rho_j(b_i)$. Relevons maintenant $\rho_j(a_i)$ et $\rho_j(b_j)$ dans le revêtement universel Nil de G , et notons $\overline{\rho_j(a_i)}, \overline{\rho_j(b_i)}$ ces relèvements. Par définition,

$$\prod_i \left[\overline{\rho_j(a_i)}, \overline{\rho_j(b_i)} \right] \in \pi_1(G) = \ker(\text{Nil} \twoheadrightarrow G).$$

Nous savons de plus par ce qui précède que si $c_0 = c_1$, il existe dans Nil des chemins $\overline{\rho_t(a_i)}, \overline{\rho_t(b_i)}$, $t \in [0, 1]$ tels que le produit des commutateurs est constant.

Ces chemins donnent donc un chemin de morphismes $\pi_1(\Sigma) \rightarrow G$ entre ρ_0 et ρ_1 . Alors $\text{Hom}(\pi_1(\Sigma), G)/G$ n'a pas plus de composantes connexes que $\pi_1(G)$, et nous savons de plus que chaque élément de $\pi_1(G)$ permet de déterminer un fibré plat de classe d'obstruction égale à cet élément. Ainsi, les composantes connexes de l'espace des représentations sont classifiées par $\pi_1(G)$. \square

1.2 Groupes de Lie généraux

Considérons maintenant un groupe de Lie (réel) G , et notons \tilde{G} son revêtement universel. La question est de déterminer les composantes connexes de $\text{Hom}(\pi; G)$.

Soit $\rho : \pi \rightarrow G$ un morphisme de groupe. La présentation de π (1) impose donc

$$\prod_{i=1}^n [\rho(a_i), \rho(b_i)] = 1 \in G.$$

En suivant la construction de la partie ci-dessus, choisissons des relevés $\widetilde{\rho(a_i)}$ et $\widetilde{\rho(b_i)}$ dans \tilde{G} de $\rho(a_i)$ et $\rho(b_i)$ respectivement. Rappelons que le produit des commutateurs de ces relevés

$$o_2(\rho_b) = \prod_{i=1}^n [\widetilde{\rho(a_i)}, \widetilde{\rho(b_i)}]$$

ne dépend pas du choix des relevés, et correspond à la classe d'obstruction primaire du fibré plat ρ_b au-dessus de S associé à ρ (l'on pourra consulter [33] pour les détails concernant ces affirmations).

Ainsi, définir un morphisme $\pi \rightarrow G$ avec une classe d'obstruction prescrite revient à écrire un élément de $\pi_1(G) \subset \tilde{G}$ comme un produit de g commutateurs (où g est le genre de S). De plus, deux morphismes ayant des classes d'obstruction différentes ne peuvent être dans la même composante connexe de $\text{Hom}(\pi; G)$.

La question du nombre de composantes connexes de $\text{Hom}(\pi; G)$ revient ainsi à l'étude du groupe dérivé de G (et plus précisément de l'intersection entre $\pi_1(G)$ et $[\tilde{G}, \tilde{G}]$, qui est exactement le groupe fondamental de $[G, G]$). Un premier résultat est le suivant.

Proposition 1.2.1. *Supposons que l'épaisseur des commutateurs de \tilde{G} est $n < \infty$, c'est-à-dire que tout élément de $[\tilde{G}, \tilde{G}]$ peut s'écrire comme le produit d'au plus n commutateurs. Alors dès que $g \geq n$, le cardinal de l'ensemble des composantes connexes de $\text{Hom}(\pi; G)$ est supérieur ou égal au cardinal de $\pi_1(G) \cap [\tilde{G}, \tilde{G}]$.*

Il nous faut maintenant déterminer une borne supérieure pour l'épaisseur des commutateurs de G .

Remarque 1.2.2. Il ne suffit pas de déterminer l'épaisseur de $\pi_1(G)$. En effet, les relevés des images des a_i et b_i ne peuvent être des éléments de $\pi_1(G)$, car sinon nous serions en train de construire le morphisme trivial (rappelons que $\pi_1(G)$ est abélien). Il nous faut donc chercher à écrire les éléments de $\pi_1(G)$ comme des commutateurs d'éléments de \tilde{G} , mais qui ne sont pas nécessairement dans $\pi_1(G)$.

Nous avons un résultat de Stroud [36, 1] :

Proposition 1.2.3. *Tout groupe nilpotent engendré par n éléments a une épaisseur de commutateurs au plus égale à n .*

Si G est un groupe nilpotent connexe, la question donc est maintenant de savoir si un élément de $\pi_1(G) \cap [\tilde{G}, \tilde{G}]$ peut être inclus dans un sous-groupe de type fini (qui sera automatiquement nilpotent) avec un nombre borné de générateurs et dans lequel il sera encore un produit de commutateurs.

QUESTION 1. — Dans un groupe nilpotent connexe, pouvons-nous borner le nombre minimal de commutateurs nécessaire pour écrire un élément de $[G, G]$?

Proposition 1.2.4. *S'il existe $z \in \pi_1(G) \cap [\tilde{G}, \tilde{G}]$ tel que $z = [x, y]$, alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$ nous pouvons construire une morphisme $\pi \rightarrow G$ dont la classe d'obstruction est z^n . En particulier, si z est d'ordre infini (ce qui est nécessairement le cas si G est nilpotent puisque $\pi_1(G)$ est abélien libre), alors il existe un nombre infini de composantes connexes dans $\text{Hom}(\pi; G)$.*

Démonstration. Commençons par le cas où S est de genre 1. Notons ρ le morphisme $\pi \rightarrow G$ défini sur les deux générateurs de π par $\rho(a) = p(x) \in G$ et $\rho(b) = p(y)$. Si $n \in \mathbb{Z}$, rappelons qu'il existe un revêtement $p_n : S \rightarrow S$ de degré n (si $n \neq 0$, le cas $n = 0$ étant trivial). De plus, la classe d'obstruction est multiplicative (voir par exemple [33]) : $o_2(p_n^* \rho) = o_2(\rho)^n$. Nous avons ainsi démontré le résultat dans le cas $g = 1$.

Passons à présent au cas général. Pour $n \in \mathbb{Z}$, notons encore ρ le morphisme défini de la manière suivante. Les images des deux premiers générateurs de π sont déterminées par le cas du genre 1, et pour $i \geq 2$, $\rho(a_i) = \rho(b_i) = 1 \in G$. Ainsi, nous obtenons dans \tilde{G} :

$$\begin{aligned} o_2(\rho) &= \prod_{i=1}^g [\overline{\rho(a_i)}, \overline{\rho(b_i)}] \\ &= [\overline{\rho(a_1)}, \overline{\rho(b_1)}] \\ &= z^n \end{aligned}$$

□

Chapitre 2

Groupes nilpotents de classe 2

2.1 Introduction

Rappelons la définition d'un groupe métabélien nilpotent

Définition 2.1.1. Soit G un groupe. On dit que G est *métabélien* si c'est une extension d'un groupe abélien par un groupe abélien, c'est-à-dire qu'il rentre dans une suite exacte courte

$$1 \rightarrow C \xrightarrow{i} G \xrightarrow{p} A \rightarrow 1$$

où C et A sont des groupes abéliens. C'est équivalent à dire que le sous-groupe dérivé de G , noté dans la suite $[G, G]$, est abélien. Si G est de plus nilpotent d'ordre 2, ceci revient à dire que $[G, G]$ est *central*.

Proposition 2.1.2. Soit G un groupe de Lie simplement connexe nilpotent et métabélien. Alors G est une extension centrale de \mathbb{R}^k par \mathbb{R}^{n-k} :

$$1 \rightarrow \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow G \rightarrow \mathbb{R}^k \rightarrow 1.$$

Rappelons quelques éléments de la théorie des extensions de groupes (pour plus de détails voir par exemple [7]).

Définition 2.1.3. Une extension d'un groupe H par un groupe abélien A est une suite exacte courte

$$1 \rightarrow A \rightarrow G \rightarrow H \rightarrow 1. \quad (2.1)$$

Si la suite exacte est scindée (c'est-à-dire qu'il y a un morphisme $s : H \rightarrow G$ tel que $p \circ s = \text{Id}_H$), alors nous avons un produit semi-direct. Dans tous les cas, nous avons une action de H sur A : comme (l'image de) A est distingué dans G , l'action de G sur A par conjugaison est bien définie, et passe au quotient en une action de H sur A .

Si la suite n'est pas scindée, nous pouvons toujours prendre une section (ensemble) s normalisée (c'est-à-dire telle que $s(1) = 1$), et définir une application $f : H \times H \rightarrow A$ par

$$\forall x, y \in H, \quad s(x)s(y) = i(f(x, y))s(xy).$$

f est un cocycle de $C^2(H; A)$ (la structure de H -module sur A est donnée par l'action définie plus haut), c'est-à-dire qu'elle vérifie

$$\forall x, y, z \in H, \quad x \cdot f(y, z) - f(xy, z) + f(x, yz) - f(x, y) = 0.$$

Modifier la section revient exactement à modifier f par un cobord, et donc l'ensemble des extensions centrales de H par A est en bijection avec $H^2(H; A)$.

2.2 Cas des groupes de Lie

Précisons nos notations : G est un groupe de Lie nilpotent simplement connexe, $C = [G, G]$ est son groupe dérivé, supposé central (autrement dit, G est nilpotent de classe au plus 2), et A désignera l'abélianisé de G : $A = G/[G, G]$. Remarquons que comme $[G, G]$ est central, l'action de A sur $[G, G]$ est triviale : $\forall a \in A, \forall c \in [G, G], a \cdot c = c$.

La théorie des groupes de Lie (voir par exemple [28]) nous dit que $[G, G]$ et A sont isomorphes (en tant que groupes de Lie) à \mathbb{R}^k et \mathbb{R}^{n-k} respectivement, et seront notés additivement. Nous pouvons de plus écrire tout élément de G sous la forme $g = (c, a)$ avec $c \in [G, G]$ et $a \in A$. La multiplication est alors donnée par

$$\forall (c, a), (c', a') \in G, \quad (c, a) \cdot (c', a') = (c + c' + f(a, a'), a + a')$$

où f désigne un cocycle comme ci-dessus. Notons également B l'antisymétrisé de f :

$$\forall a, a' \in A, \quad B(a, a') := f(a, a') - f(a', a).$$

Proposition 2.2.1. *Un commutateur dans G est donné par la formule suivante*

$$\forall (c, a), (c', a') \in G, \quad [(c, a), (c', a')] = (B(a, a'), 0) \quad (2.2)$$

et la conjugaison par

$$\forall (c, a), (c', a'), \quad (c, a)(c', a')(c, a)^{-1} = (c' + B(a, a'), a'). \quad (2.3)$$

D'autre part, la multiplication d'un groupe de Lie est lisse, donc le cocycle f doit être lisse.

Étudions un exemple : le groupe de Heisenberg Nil des matrices 3×3 réelles triangulaires supérieures avec des 1 sur la diagonale définit ci-dessus. Dans ce cas, le groupe dérivé est :

$$[\text{Nil}, \text{Nil}] = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & z \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} \cong \mathbb{R}.$$

L'extension s'écrit alors : $0 \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow \text{Nil} \rightarrow \mathbb{R}^2 \rightarrow 0$. Le cocycle associé à la section

$$s: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \text{Nil} \\ (x, y) & \longmapsto & \begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

est alors donné par :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ ((x, y), (x', y')) & \longmapsto & xy' \end{array}.$$

2.3 Espace des représentations

Cette section est grandement inspirée de [16].

Soit S une surface fermée orientée de genre g . Notons π son groupe fondamental :

$$\pi = \left\langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g \mid \prod_{i=1}^g [a_i, b_i] = 1 \right\rangle.$$

Nous nous intéressons à l'espace des représentations $\text{Hom}(\pi; G)$, et à l'action de G sur cet espace par conjugaison. Remarquons d'abord qu'à une représentation $\rho : \pi \rightarrow G$ nous pouvons faire correspondre $p_*\rho : \pi \rightarrow A$ simplement en post-composant avec la projection $p : G \rightarrow A = G/[G, G]$. Comme de plus A est abélien, nous avons par le théorème des coefficients universels :

$$\text{Hom}(\pi, A) \cong \text{Hom}(H_1(\pi; \mathbb{Z}), A) \cong H^1(\pi; A).$$

Ainsi, nous verrons p_* comme une application $\text{Hom}(\pi; G) \rightarrow H^1(\pi; A)$.

Soit maintenant $\rho \in \text{Hom}(\pi; G)$ une représentation. Alors ρ s'écrit $(\lambda, p_*\rho)$ dans la décomposition de la première partie. Pour $\gamma, \gamma' \in \pi$ nous avons alors

$$\begin{aligned} \rho(\gamma\gamma') &= \rho(\gamma)\rho(\gamma') \\ &= (\lambda(\gamma), p_*\rho(\gamma)) \cdot (\lambda(\gamma'), p_*\rho(\gamma')) \\ &= (\lambda(\gamma) + \lambda(\gamma') + f(p_*\rho(\gamma), p_*\rho(\gamma')), p_*\rho(\gamma + \gamma')) \end{aligned}$$

Ainsi, pour un $\alpha \in H^1(\pi; A)$, $p_*^{-1}(\alpha)$ s'identifie aux applications $\lambda : \pi \rightarrow [G, G]$ satisfaisant

$$\forall \gamma, \gamma' \in \pi, \quad \lambda(\gamma\gamma') = \lambda(\gamma) + \lambda(\gamma') + f(\alpha(\gamma), \alpha(\gamma')).$$

Étudions maintenant l'action de G par conjugaison : soit $g = (c, a) \in G$, et soit $\rho \in \text{Hom}(\pi; G)$. Soit $\gamma \in \pi$.

$$\begin{aligned} g\rho(\gamma)g^{-1} &= (c, a) (\lambda(\gamma), p_*\rho(\gamma)) (-c - f(a, -a), -a) \\ &= (c, a) (\lambda(\gamma) - c - f(a, -a) + f(p_*\rho(\gamma), -a), p_*\rho(\gamma) - a) \\ &= (\lambda(\gamma) - f(a, -a) + f(p_*\rho(\gamma), -a) + f(a, p_*\rho(\gamma) - a), p_*\rho(\gamma)) \end{aligned}$$

Or la condition de cocycle sur f implique que

$$f(a, p_*\rho(\gamma) - a) = f(a, -a + p_*\rho(\gamma)) = f(a, -a) + f(0, p_*\rho(\gamma)) - f(-a, p_*\rho(\gamma))$$

Comme la section est normalisée, nous avons facilement $f(0, \cdot) = 0$, et donc la première coordonnée de $g\rho(\gamma)g^{-1}$ s'écrit

$$\lambda(\gamma) + f(p_*\rho(\gamma), -a) - f(-a, p_*\rho(\gamma)) = \lambda(\gamma) - B(-a, p_*\rho(\gamma))$$

où B est définie par

$$\forall a, b \in A, \quad B(a, b) = f(a, b) - f(b, a).$$

Étudions maintenant cette application B .

Lemme 2.3.1. *L'application B est \mathbb{Z} -bilinéaire.*

Démonstration. Commençons par écrire la condition de cocycle pour f dans notre cas :

$$\forall x, y, z \in A, \quad f(y, z) - f(x + y, z) + f(x, y + z) - f(x, y) = 0. \quad (2.4)$$

Alors pour $a, b, c \in A$ nous avons

$$\begin{aligned} f(a + b, c) &= f(b, c) + f(a, b + c) - f(a, b) \\ &= f(a, c) + f(b, c) - f(c, b) - f(c, a) + f(c, a + b) \\ &= B(a, c) + B(b, c) + f(c, a + b) \end{aligned}$$

Le passage de la première à la seconde ligne est fait grâce à la condition de cocycle appliquée à $f(c, a + b) = f(c, b + a)$.

Nous en déduisons que

$$B(a, c) + B(b, c) = f(a + b, c) - f(c, a + b) = B(a + b, c).$$

Comme B est antisymétrique par construction, nous obtenons le résultat. \square

Nous aimerions maintenant montrer que B est \mathbb{R} -linéaire, en utilisant la continuité de f , et donc de B . Pour cela il serait intéressant de voir si l'on peut mettre une structure d'espace vectoriel réel naturelle sur A et $[G, G]$. Concernant ce dernier point, il suffit d'identifier les groupes à leur algèbre de Lie *via* l'exponentielle (qui réalise effectivement un isomorphisme).

Nous avons alors la

Proposition 2.3.2. *L'application B est \mathbb{R} -bilinéaire.*

Démonstration. Soit $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, et soient $a, b \in A$. Alors nous avons par le lemme précédent

$$\begin{aligned} B(p \cdot a, b) &= B\left(q \frac{p}{q} \cdot a, b\right) \\ &= q \cdot B\left(\frac{p}{q} \cdot a, b\right) \end{aligned}$$

Nous en déduisons alors que $\frac{p}{q} \cdot B(a, b) = f\left(\frac{p}{q} \cdot a, b\right)$. Par anti-symétrie, B est donc \mathbb{Q} -bilinéaire.

Soit maintenant $\lambda \in \mathbb{R}$. Donnons nous une suite $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de rationnels qui converge vers λ . Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons

$$r_n \cdot B(a, b) = B(r_n \cdot a, b).$$

Ainsi en utilisant la continuité de B , nous obtenons

$$\begin{aligned} \lambda \cdot B(a, b) &= \lim_{n \rightarrow \infty} r_n \cdot B(a, b) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} B(r_n \cdot a, b) \\ &= B(\lambda \cdot a, b) \end{aligned}$$

Encore par anti-symétrie, nous obtenons bien que B est \mathbb{R} -bilinéaire. \square

Étudions maintenant l'espace des représentations en lui-même.

Proposition 2.3.3. *Une représentation $\rho : \pi \rightarrow G$ s'identifie à une application, encore notée ρ , de $\{a_1, b_1, \dots, a_g, b_g\}$ dans G qui vérifie*

$$\sum_{i=1}^g B(p_*\rho(a_i), p_*\rho(b_i)) = 0.$$

Démonstration. Nous savons grâce à la présentation de π qu'une représentation est uniquement déterminée par la donnée des images des a_i, b_i . Réciproquement, si l'on fixe les images des générateurs de sorte que la relation est respectée, alors nous obtenons un morphisme. Calculons donc un commutateur dans G . Soient $h = (c, a)$ et $h' = (c', a')$ deux éléments de G . Alors

$$\begin{aligned} [h, h'] &= (c, a)(c', a')(-c - f(a, -a), -a)(-c' - f(a', -a'), -a) \\ &= (c + c' + f(a, a'), a + a') \cdot \\ &\quad (-c - c' - f(a, -a) - f(a', -a') + f(-a, -a'), -a - a') \\ &= (f(a, a') + f(-a, -a') - f(a, -a) - f(a', -a') + f(a + a', -a - a'), 0) \end{aligned}$$

En utilisant à nouveau la condition de cocycle (2.4) et la commutativité de A , nous obtenons que

$$\begin{aligned} f(a + a', -a - a') &= f(a', -a - a') + f(a, -a) - f(a, a') \\ &= -f(-a', -a) + f(0, -a) + f(a', -a') + f(a, -a) - f(a, a') \\ &= -f(-a', -a) + f(a', -a') + f(a, -a) - f(a, a') \end{aligned}$$

Ainsi en remplaçant dans l'expression précédente nous obtenons

$$\begin{aligned} [h, h'] &= (f(-a, -a') - f(-a', -a), 0) \\ &= (B(-a, -a'), 0) \\ &= (B(a, a'), 0) \end{aligned}$$

En appliquant ceci, la condition de morphisme devient alors

$$\begin{aligned} 1 &= \prod_{i=1}^g [\rho(a_i), \rho(b_i)] = \prod_{i=1}^g (B(p_*\rho(a_i), p_*\rho(b_i)), 0) \\ &= \left(\sum_{i=1}^g B(p_*\rho(a_i), p_*\rho(b_i)), 0 \right) \end{aligned}$$

Le résultat suit alors directement. □

Nous avons ainsi démontré la

Proposition 2.3.4. *L'espace $\text{Hom}(\pi, G)$ s'identifie à*

$$\left\{ (x_1, y_1, \dots, x_g, y_g) \in G^{2g} \mid \sum_{i=1}^g B(p(x_i), p(y_i)) = 0 \right\}.$$

Dans la suite, nous noterons $\text{Hom}^s(\pi, G)$ l'ensemble des points lisses de $\text{Hom}(\pi, G)$, c'est-à-dire les points réguliers de φ dans $\varphi^{-1}(0)$, où

$$\varphi : \begin{cases} G^{2g} & \rightarrow [G, G] \\ (x_1, y_1, \dots, x_g, y_g) & \mapsto \sum_i B(p(x_i), p(y_i)) \end{cases} .$$

Corollaire 2.3.5. *Dès que $g \geq \dim[G, G]$, $\text{Hom}^s(\pi, G)$ est une variété lisse de dimension*

$$\dim \text{Hom}^s(\pi, G) = 2g \dim G - \dim[G, G] \quad (2.5)$$

Démonstration. Remarquons qu'il suffit de vérifier qu'il existe une valeur régulière pour φ . Comme p est une submersion $G \rightarrow A = G/[G, G]$, il suffit de chercher des valeurs régulières pour $\bar{\varphi} : A^{2g} \rightarrow C$ l'application induite par φ (comme G est simplement connexe, rappelons que $[G, G]$ est fermé).

L'image de B est exactement l'ensemble des commutateurs, donc $B(F, F)$ engendre $C = [G, G]$. Alors il existe une base de C de la forme

$$\mathcal{B} = (B(a_i^0, a_i'^0))_{1 \leq i \leq \dim[G, G]}$$

D'autre part, un calcul direct montre que la différentielle de $\bar{\varphi}$ en un point $(a_1, a'_1, \dots, a_g, a'_g) \in A^{2g}$ est donnée pour $(h_1, h'_1, \dots, h_g, h'_g) \in A^{2g}$ par

$$d\varphi_{(a_1, a'_1, \dots, a_g, a'_g)}(h_1, h'_1, \dots, h_g, h'_g) = \sum_i (B(a_i, h'_i) + B(h_i, a'_i)) \quad (2.6)$$

Il est maintenant clair que le point $\mathcal{L} = (a_1^0, 0, \dots, a_{\dim C}^0, 0, 0, \dots, 0)$ est dans $(\bar{\varphi})^{-1}(0)$, et en appliquant la différentielle en un vecteur $\mathcal{H} = (h_1, h'_1, \dots, h_g, h'_g)$ tel que $h'_i = \lambda_i a_i'^0$ pour $1 \leq i \leq \dim C$, et les autres coordonnées nulles, il est clair que tous les points de C sont atteints par $d\bar{\varphi}_{\mathcal{L}}$. En effet,

$$d\bar{\varphi}_{\mathcal{L}}\mathcal{H} = \sum_{i=1}^{\dim C} \lambda_i B(a_i^0, a_i'^0).$$

Ainsi \mathcal{L} est un point régulier pour $\bar{\varphi}$ dans $(\bar{\varphi})^{-1}(0)$, et donc tous les points de $p^{-1}(\mathcal{L})$ sont réguliers pour φ . Le résultat suit alors. \square

Proposition 2.3.6. *L'application $p^{2g} : G^{2g} \rightarrow A^{2g}$ donne à $\text{Hom}^s(\pi, G)$ une structure de fibré vectoriel trivial au-dessus de $\text{Hom}^s(\pi, A)$, de fibre C^{2g} .*

Démonstration. La fibration ici est la restriction de $p^{2g} : G^{2g} \twoheadrightarrow A^{2g}$ à la sous-variété $\text{Hom}^s(\pi, G)$. Comme p est la projection d'un fibré vectoriel (trivial), p^{2g} aussi et donc sa restriction à une sous-variété donne encore une structure de fibré vectoriel trivial. \square

Remarque 2.3.7. Le noyau de B est exactement $p(Z(G)) \subset A = G/[G, G]$.

Démonstration. Rappelons la définition du noyau de B :

$$\ker B = \{a \in A \mid \forall a' \in A, B(a, a') = 0\}$$

Maintenant, si $a \in \ker B$, par définition de B nous avons pour tout $(c', a') \in G$

$$(0, a)(c', a')(0, a)^{-1} = (c' + B(a, a'), a') = (c', a')$$

et donc $(0, a) \in Z(G)$, ainsi $a \in p(Z(G))$.

Réciproquement, si $a \in p(Z(G))$, alors $(0, a) \in Z(G)$ et le calcul ci-dessus montre que pour tout $a' \in A$,

$$B(a, a') = 0$$

d'où nous déduisons que $a \in \ker B$. \square

Remarquons que nous pouvons dans le cas des métabéliens 2-nilpotents utiliser ces outils pour étudier les commutateurs de G . Nous pouvons en réalité répondre à la Question 1.

Proposition 2.3.8. *Soit G un groupe de Lie métabélien et 2-nilpotent comme ci-dessus tel que $[G, G]$ est fermé. Notons $cl(G)$ le nombre de commutateurs nécessaires pour écrire un élément quelconque de $[G, G]$:*

$$cl(G) = \max_{g \in [G, G]} \min \left\{ r \in \mathbb{N} \mid \exists h_1, k_1, \dots, h_r, k_r \in G, g = \prod_{i=1}^r [h_i, k_i] \right\}.$$

Alors

$$cl(G) \leq \min \left\{ \binom{\dim A}{2}, \dim C \right\}.$$

Démonstration. Commençons par supposer que G est simplement connexe, de sorte que A et C sont des espaces vectoriels et B est \mathbb{R} -bilinéaire. Nous avons vu avec (2.2) qu'un commutateur s'écrit sous la forme $(B(a, a'), 1)$ pour des éléments a, a' de A . Alors un calcul direct montre qu'un produit de commutateurs s'écrit

$$\left(\sum_i B(a_i, a'_i), 1 \right).$$

Donc, si e_1, \dots, e_n est une base de A (en tant qu'espace vectoriel réel), il est facile de voir que tout produit de commutateur, c'est-à-dire tout élément de $[G, G]$, s'écrit comme

$$\begin{aligned} \left(\sum_{1 \leq i < j \leq n} \lambda_{i,j} B(e_i, e_j), 1 \right) &= \left(\sum_{1 \leq i < j \leq n} B(\lambda_{i,j} e_i, e_j), 1 \right) \\ &= \prod_{1 \leq i < j \leq n} (B(\lambda_{i,j} e_i, e_j), 1) \\ &= \prod_{1 \leq i < j \leq n} [(0, \lambda_{i,j} e_i), (0, e_j)]. \end{aligned}$$

Ainsi, nous pouvons écrire tout élément de $[G, G]$ comme le produit de $\binom{\dim A}{2}$ commutateurs. Il est de plus clair que ce qui compte dans l'expression ci-dessus est le rang de l'espace vectoriel engendré par les $B(e_i, e_j)$, qui est bien entendu borné par la dimension de C (toujours en tant qu'espace vectoriel réel), et qui est en réalité la dimension de $[G, G]$.

Si nous ne supposons plus que G est simplement connexe, nous pouvons considérer son revêtement universel \tilde{G} . Il est classique que nous avons alors un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \tilde{C} & \longrightarrow & \tilde{G} & \longrightarrow & \tilde{A} \longrightarrow 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & C & \longrightarrow & G & \longrightarrow & A \longrightarrow 1 \end{array}$$

où les lignes sont exactes, et les flèches verticales sont des revêtements. Nous pouvons alors relever un élément de $[G, G]$ dans \tilde{G} . Il s'agit encore d'un produit de commutateurs, et en utilisant ce qui précède nous pouvons en borner le nombre avant de projeter à nouveau dans G , ce qui montre le résultat. \square

2.4 Classes caractéristiques

Les classes caractéristiques sont un élément important de la topologie algébrique classique. Nous nous intéressons ici aux classes dites bornée, étudiées notamment par Milnor (indirectement) dans [34], en lien avec la *cohomologie bornée* introduite par Gromov et étudiée par Barge et Ghys dans [4], puis par Chatterji, Cornulier, Mislin et Pittet dans [9].

Rappelons qu'il existe une application continue entre les espaces classifiants $BG^\delta \rightarrow BG$, qui donne lieu à un morphisme en homologie $H^*(BG; A) \rightarrow H^*(BG^\delta; A)$ pour tout groupe abélien A . Une *classe caractéristique* à valeurs dans A est alors un élément de l'image de ce dernier morphisme. Dans le cas où A est normé (par exemple si A est de type fini, ou un espace vectoriel réel de dimension finie), nous pouvons parler de classes caractéristiques bornées. Pour cela, nous avons besoin d'identifier $H^*(BG^\delta; A)$ et $H^*(G; A)$.

Définition 2.4.1. Une classe caractéristique dans $H^*(BG^\delta; A)$ est dite *bornée* si elle est représentée par un cocycle $G^* \rightarrow A$ dont l'image est bornée.

D'après ce qui précède, si G est un groupe métabelien 2-nilpotent non simplement connexe, alors la classe d'obstruction primaire du fibré universel $EG \rightarrow BG$, notée $o(EG)$, n'est pas bornée (en tant qu'élément de $H^2(G; \pi_1(G))$). Il s'agit en réalité d'une application d'un résultat de [9].

QUESTION 2. — Quelles classes caractéristiques de $H^2(G; \mathbb{Z})$ sont bornées ?

Pour essayer de répondre à cette question, remarquons d'abord que nous avons un isomorphisme naturel $H^2(BG; \mathbb{Z}) \simeq \text{Hom}(\pi_1(G); \mathbb{Z})$. De plus, si α est un élément de $H^2(BG; \mathbb{Z})$ et si ϕ_α est le morphisme $\pi_1(G) \rightarrow \mathbb{Z}$ qui le représente, alors nous savons que

$$(\phi_\alpha)_*(o(EG)) = \alpha$$

où $(\phi_\alpha)_*$ désigne le morphisme $H^2(BG; \pi_1(G)) \rightarrow H^2(BG; \mathbb{Z})$ induit par ϕ_α . Par naturalité, en désignant par α^δ l'image de $\alpha \in H^2(BG; \mathbb{Z})$ dans $H^2(BG^\delta; \mathbb{Z})$, nous avons également

$$(\phi_\alpha)_*(o^\delta(EG)) = \alpha^\delta$$

Ainsi, si α est une classe caractéristique bornée (c'est-à-dire si α^δ est bornée), la dernière relation indique que le morphisme $(\phi_\alpha)_*$ envoie une classe non bornée sur une classe bornée. Ceci semble impossible si $\alpha \neq 0$.

Proposition 2.4.2. *Supposons que G est un groupe de Lie connexe et résoluble. Soit $\alpha \in H^2(BG; \mathbb{Z})$. Si la classe caractéristique α^δ est bornée, alors le morphisme ϕ_α associé se prolonge à \tilde{G} tout entier.*

En particulier, si $f : S_g \rightarrow BG$ est l'application classifiante d'un fibré plat au-dessus d'une surface fermée orientée, alors $f^\alpha = 0$. Autrement dit, une classe caractéristique bornée ne peut pas différentier les fibrés plats au-dessus d'une surface fermée orientée.*

Démonstration. Soit $\alpha \in H^2(BG; \mathbb{Z})$. Rappelons que comme G^δ est discret et résoluble, il est moyennable et donc $H_b^2(G; \mathbb{R})$ est trivial. Le but ici sera donc de montrer que $\alpha_{\mathbb{R}}^\delta$, l'image de α^δ dans $H^2(G; \mathbb{R})$, n'est pas nulle.

Si $\alpha \neq 0$, alors il existe $x \in \pi_1(G)$ tel que $\phi_\alpha(x) \neq 0$. Supposons d'abord qu'il existe un tel x dans $\pi_1(G) \cap [\tilde{G}, \tilde{G}]$. Dans ce cas, nous savons que dès que g est assez grand il existe un morphisme $\rho : \pi = \pi_1(S_g) \rightarrow G$ dont l'obstruction primaire est x . Si $f_\rho : S = S_g \rightarrow BG^\delta$ désigne l'application classifiante du fibré plat associé à ρ , nous avons donc par définition

$$(f_\rho^* \alpha^\delta)([S]) = ((\phi_\alpha)_* f_\rho^* \alpha^\delta(EG))([S]) = \phi_\alpha(x) \neq 0. \quad (2.7)$$

Par naturalité, le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccccc}
& & H^2(G; \mathbb{Z}) & \xrightarrow{f_\rho^*} & H^2(\pi; \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\cong} & \mathbb{Z} \\
& \nearrow (\phi_\alpha)_* & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \phi_\alpha \\
H^2(G; \pi_1(G)) & \xrightarrow{f_\rho^*} & H^2(\pi; \pi_1(G)) & \xrightarrow{\cong} & \pi_1(G) & & \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
& \nearrow (\phi_\alpha)_* & H^2(G; \mathbb{R}) & \xrightarrow{f_\rho^*} & H^2(\pi; \mathbb{R}) & \xrightarrow{\cong} & \mathbb{R} \\
H^2(G; \pi_1(G) \otimes \mathbb{R}) & \xrightarrow{f_\rho^*} & H^2(\pi; \pi_1(G) \otimes \mathbb{R}) & \xrightarrow{\cong} & \pi_1(G) \otimes \mathbb{R} & & \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \phi_\alpha \\
& & & & & & \mathbb{R}
\end{array}$$

Ainsi, en utilisant (2.7), comme $\pi_1(G)$ n'a pas de torsion, l'image de x dans $\pi_1(G) \otimes \mathbb{R}$ n'est pas nulle, et donc nous obtenons que $f_\rho^* \alpha_{\mathbb{R}}^\delta([S])$ n'est pas nul, et donc que $\alpha_{\mathbb{R}}^\delta$ n'est pas bornée, ce qui implique que α^δ n'est pas non plus bornée.

Si nous ne pouvons trouver un x qui convient dans $\pi_1(G) \cap [\tilde{G}, \tilde{G}]$, cela signifie exactement que $\pi_1(G) \cap [\tilde{G}, \tilde{G}] \subset \ker(\phi_\alpha)$. Dans ce cas nous pouvons étendre ϕ_α en un morphisme $\tilde{\phi}_\alpha : \tilde{G} \rightarrow \mathbb{R}$. En effet, comme $\pi_1(G)$ est un sous-groupe discret et distingué de \tilde{G} , il est nécessairement inclus dans le centre $Z(\tilde{G})$ de \tilde{G} . Comme de plus \tilde{G} est simplement connexe, son centre est isomorphe à un espace vectoriel réel. Nous pouvons donc étendre ϕ_α en une application linéaire $Z(\tilde{G}) \rightarrow \mathbb{R}$.

Maintenant, comme $Z(\tilde{G})$ est abélien, l'exponentielle est un isomorphisme, ce qui nous donne donc un morphisme d'algèbres de Lie $d\phi_\alpha : \mathfrak{z}(\tilde{\mathfrak{g}}) \rightarrow \mathbb{R}$ (il s'agit bien d'un morphisme d'algèbres de Lie puisque $d\phi_\alpha|_{[\mathfrak{z}(\tilde{\mathfrak{g}}), \mathfrak{z}(\tilde{\mathfrak{g}})]} = 0$). Nous pouvons maintenant étendre ce morphisme en $d\tilde{\phi}_\alpha : \tilde{\mathfrak{g}} \rightarrow \mathbb{R}$, en prolongeant l'application linéaire et en imposant que $d\tilde{\phi}_\alpha|_{[\tilde{\mathfrak{g}}, \tilde{\mathfrak{g}}]} = 0$.

Alors, en utilisant la simple connexité de \tilde{G} , nous pouvons relever le morphisme d'algèbres de Lie $d\tilde{\phi}_\alpha$ en un morphisme de groupes de Lie $\tilde{\phi}_\alpha : \tilde{G} \rightarrow \mathbb{R}$ qui prolonge ϕ_α . \square

Proposition 2.4.3. *Si de plus $[G, G]$ est fermé, alors les classes caractéristiques bornées sont exactement celles dont le morphisme $\pi_1(G) \rightarrow \mathbb{Z}$ associé s'annule sur $\pi_1(G) \cap [\tilde{G}, \tilde{G}] = \pi_1([G, G])$.*

Démonstration. Soit $\alpha \in H^2(BG; \mathbb{Z})$ telle que $\phi_\alpha|_{\pi_1([G, G])} = 0$. Dans ce cas, nous pouvons factoriser ϕ_α en $\overline{\phi_\alpha} : \pi_1(G)/\pi_1([G, G]) \rightarrow \mathbb{Z}$. Remarquons que $\pi_1(G)/\pi_1([G, G])$ est le noyau du revêtement

$$\tilde{G}_{ab} = \tilde{G}/[\tilde{G}, \tilde{G}] \longrightarrow G/[G, G] = G_{ab}.$$

Ainsi, $\pi_1(G_{ab}) = \pi_1(G)/\pi_1([G, G])$, et donc $\overline{\phi_\alpha}$ correspond à une classe de cohomologie dans $H^2(BG_{ab}; \mathbb{Z})$, que nous noterons $\overline{\alpha}$. Nous pouvons maintenant utiliser [9, Théorème 2.2] pour affirmer que $\overline{\alpha}^\delta$ est bornée, puisque $[G_{ab}, G_{ab}]$ est trivial donc simplement connexe. Maintenant, le morphisme induit par le quotient $H^2(G_{ab}; \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(G; \mathbb{Z})$ envoie $\overline{\alpha}^\delta$ sur α^δ par naturalité. Nous déduisons donc que cette dernière classe est bornée. \square

2.5 La variété des caractères

Rappelons que G agit sur $\text{Hom}(\pi; G)$ par conjugaison. Un calcul direct montre que si $\rho \in \text{Hom}(\pi; G)$, pour tout $g = (c, a) \in G$ et tout $\gamma \in \pi$,

$$(g \cdot \rho)(\gamma) = g(\rho(\gamma))g^{-1} = g(\lambda(\gamma), p_*\rho(\gamma))g^{-1} = (\lambda(\gamma) + B(p_*\rho(\gamma), a), p_*\rho(\gamma))$$

En utilisant l'identification de la proposition 2.3.4, un élément $g = (c, a)$ agit sur $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (x_1, y_1, \dots, x_g, y_g) \in \text{Hom}(\pi; G)$ de la manière suivante :

$$g \cdot (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (gx_1g^{-1}, gy_1g^{-1}, \dots, gx_gg^{-1}, gy_gg^{-1})$$

c'est-à-dire, en écrivant pour tout $i \in \{1, \dots, g\}$, $x_i = (c_i, a_i)$ et $y_i = (c'_i, a'_i)$

$$g \cdot (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = ((c_1 + B(a_1, a), a_1), (c'_1 + B(a'_1, a), a'_1), \dots, (c_g + B(a_g, a), a_g), (c'_g + B(a'_g, a), a'_g)). \quad (2.8)$$

Remarque 2.5.1. La formule (2.8) nous montre que $\text{Hom}^s(\pi; G)$ est stable par l'action de G . En effet, pour tout $g \in G$, $p^{2g} \circ g = p^{2g}$, et d'après la démonstration du corollaire 2.3.5, $\text{Hom}^s(\pi; G) = (p^{2g})^{-1}(\text{Hom}^s(\pi; A))$. Ainsi, G agit sur $\text{Hom}^s(\pi; G)$. D'autre part, la formule (2.8) implique que l'action d'un élément g ne dépend que de $p(g)$.

L'objectif maintenant est de déterminer les orbites de $\text{Hom}^s(\pi; G)$ sous cette action. Soit $\alpha \in \text{Hom}(\pi; A)$. Observons ce qu'il se passe dans la fibre au-dessus de $\alpha = (a_1, a'_1, \dots, a_g, a'_g)$, notée F_α . Notons ι_α l'inclusion évidente $[G, G]^{2g} \hookrightarrow F_\alpha$, c'est-à-dire définie par

$$\iota_\alpha : (c_1, c'_1, \dots, c_g, c'_g) \mapsto ((c_1, a_1), (c'_1, a'_1), \dots, (c_g, a_g), (c'_g, a'_g))$$

Maintenant, la formule (2.8) montre que pour tout élément $\rho \in F_\alpha \subset G^{2g}$ et tout $h = (c, a) \in G$,

$$\begin{aligned} h\rho h^{-1} &= \left((c_1 + B(a_1, a), a_1), (c'_1 + B(a'_1, a), a'_1), \dots, (c'_g + B(a'_g, a), a'_g) \right) \\ &= \rho \cdot ((B(a_1, a), 0), (B(a'_1, a), 0), \dots, (B(a_g, a), 0), (B(a'_g, a), 0)) \\ &= \iota_\alpha((c_1, c'_1, \dots, c_g, c'_g)) \cdot (B(a_1, a), B(a'_1, a), \dots, B(a_g, a), B(a'_g, a)) \\ &= \iota_\alpha(\iota_\alpha^{-1}(\rho) + \psi_\alpha(a)) \end{aligned}$$

où ψ_α est l'application $A \rightarrow [G, G]^{2g}$ définie par

$$\psi_\alpha : a \mapsto (B(a_1, a), B(a'_1, a), \dots, B(a_g, a), B(a'_g, a)).$$

Ainsi, l'orbite d'un élément $\rho \in F_\alpha$ est incluse dans F_α , et si $\rho = \iota_\alpha(\underline{c})$, il est clair que l'orbite de ρ est

$$G \cdot \rho = \iota_\alpha(\underline{c} + \text{Im } \psi)$$

Nous pouvons maintenant établir la

Proposition 2.5.2. *Soient $\alpha \in \text{Hom}(\pi; A)$, et F_α la fibre de $\text{Hom}(\pi; G)$ au-dessus de α . Alors G agit par conjugaison sur F_α , l'inclusion ι_α induit un plongement, encore noté ι_α , de $[G, G]^{2g}/\text{Im } \psi_\alpha$ dans $\text{Hom}(\pi; G)/G$, et de plus*

$$F_\alpha/G = \iota_\alpha \left([G, G]^{2g}/\text{Im } \psi_\alpha \right). \quad (2.9)$$

Démonstration. La composée $[G, G]^{2g} \xrightarrow{\iota_\alpha} \text{Hom}(\pi; G) \rightarrow \text{Hom}(\pi; G)/G$ passe clairement au quotient une application injective $[G, G]^{2g}/\text{Im } \psi_\alpha \rightarrow \text{Hom}(\pi; G)/G$. Il est également clair que cette application induite est une immersion. Il reste donc à vérifier que nous avons un plongement, c'est-à-dire que ι_α est un homéomorphisme sur son image. Il suffit pour cela de voir que ι_α a une réciproque continue, ce qui est évident par construction. \square

Maintenant, il nous faut étudier cette application ψ_α , à commencer par son rang (rappelons que ψ_α est linéaire). Celui-ci est donné par la

Proposition 2.5.3. *L'application $\psi_\alpha : A = G/[G, G] \rightarrow [G, G]^{2g}$ est de rang*

$$\text{rg } \psi_\alpha = \dim G - \dim Z_G(\rho) \quad (2.10)$$

où ρ désigne un élément de F_α , et $Z_G(\rho) = \{h \in G \mid \forall \gamma \in \pi, \rho(\gamma)h = h\rho(\gamma)\}$ est le stabilisateur de ρ sous l'action de G .

Démonstration. Nous cherchons à identifier le noyau de ψ_α . Soit donc $a \in \ker \psi_\alpha$. Par définition de ψ_α , cela signifie exactement que pour tout $i \in \{1, \dots, g\}$,

$$B(a_i, a) = 0 = B(a'_i, a)$$

Fixons un élément $\rho = \iota_\alpha((c_1, c'_1, \dots, c_g, c'_g)) \in F_\alpha$. Alors pour tout $c \in [G, G]$ et tout i ,

$$[(c_i, a_i), (c, a)] = (B(a_i, a), 0) = 1 \quad \text{et} \quad [(c'_i, a'_i), (c, a)] = (B(a'_i, a), 0) = 1$$

Ainsi $(c, a) \in Z_G(\rho)$, et donc $a \in p(Z_G(\rho))$. Réciproquement, si $a \in p(Z_G(\rho))$, alors il existe $c \in [G, G]$ tel que $(c, a) \in Z_G(\rho)$, et il est immédiat que $a \in \ker \psi_\alpha$. Nous avons ainsi montré que $\ker \psi = p(Z_G(\rho))$. En particulier, $p(Z_G(\rho))$ ne dépend pas de ρ mais seulement de $p_*\rho = \alpha$.

Remarquons maintenant que $[G, G] \subset Z(G) \subset Z_G(\rho)$, donc

$$\dim \ker \psi_\alpha = \dim p(Z_G(\rho)) = \dim Z_G(\rho) - \dim([G, G])$$

Nous pouvons maintenant conclure que (2.10) est vraie, en utilisant le fait que $\dim A + \dim [G, G] = \dim G$. \square

Corollaire 2.5.4. Soit $\alpha \in p_*(\text{Hom}(\pi; L))$, et soit F_α la fibre au-dessus de α . Alors pour tout $\rho \in F_\alpha$, F_α/G est de dimension

$$\dim\left(\frac{F_\alpha}{G}\right) = (2g - 1) \dim[G, G] - \dim A + \dim Z_G(\rho).$$

Proposition 2.5.5. Soit α un point lisse de $p_*(\text{Hom}(\pi; G))$. Alors il existe un voisinage U de α tel que $p_*^{-1}(U)/G$ soit une variété lisse, dont la dimension est donnée pour tout $\rho \in F_\alpha$ par

$$\dim p_*^{-1}(U)/G = (2g - 2) \dim G + \dim A + \dim Z_G(\rho).$$

Démonstration. Soit α un point lisse de $p_*(\text{Hom}(\pi; G))$, c'est-à-dire tel que la différentielle en α de l'application $(a_1, a'_1, \dots, a_g, a'_g) \mapsto \sum B(a_i, a'_i)$ est surjective. Alors il existe un ouvert de $p_*(\text{Hom}(\pi; G))$ contenant α avec uniquement des points lisses, noté U . U est donc muni d'une structure de variété lisse, et sa dimension est $2g \dim A - \dim[G, G]$. Alors d'après le corollaire précédent, la dimension est donnée par

$$\begin{aligned} \dim p_*^{-1}(U)/G &= (2g - 1) \dim[G, G] - \dim A + \dim Z_G(\rho) + 2g \dim A - \dim[G, G] \\ &= (2g - 1) (\dim[G, G] + \dim A) - \dim[G, G] + \dim Z_G(\rho) \\ &= (2g - 1) \dim G - \dim[G, G] + \dim Z_G(\rho) \\ &= (2g - 1) \dim G - \dim G + \dim A + \dim Z_G(\rho) \end{aligned}$$

□

On s'attend à ce que la dimension sur la partie de $\text{Hom}^s(\pi; G)/G$ pour laquelle $\dim Z_G(\rho)$ est minimale soit égale à

$$(2g - 2) \dim G + \dim A + \dim Z_G(\rho).$$

Lemme 2.5.6. L'ensemble des $\alpha \in \text{Hom}^s(\pi; A)$ pour lesquels quel que soit $\rho \in F_\alpha$, $\dim Z_G(\rho)$ est minimal est un ouvert de $\text{Hom}^s(\pi; A)$.

Démonstration. Notons que dire que $Z_G(\rho)$ est de dimension minimale est équivalent à dire que la dimension de $p(Z_G(\rho))$ est minimale (puisque $[G, G] \subset Z(G) \subset Z_G(\rho)$). Ainsi, comme $p(Z_G(\rho)) = \ker \psi_\alpha$, l'ensemble des α tels que $\dim Z_G(\rho)$ est minimal est exactement l'ensemble des α tels que ψ_α est de rang maximal. Il s'agit donc d'un ouvert. □

Maintenant nous avons le

Théorème 2.5.7. L'ensemble des représentations $\rho \in \text{Hom}^s(\pi; G)$ telles que $Z_G(\rho)$ est de dimension minimale forme une sous-variété de $\text{Hom}^s(\pi; G)$, notée (suivant Goldman [18]) $\text{Hom}(\pi; G)^-$. De plus, le quotient par l'action de G est une variété lisse (non séparée a priori), dont la dimension est

$$\dim\left(\frac{\text{Hom}(\pi; G)^-}{G}\right) = (2g - 2) \dim G + \dim A + \dim Z_G(\rho) \quad (2.11)$$

En réalité nous avons mieux.

Théorème 2.5.8. *La variété des caractères $\mathrm{Hom}(\pi; G)^-/G$ est un fibré vectoriel au-dessus de $\mathrm{Hom}(\pi; A)^-$, de fibre $[G, G]^{2g}/G$. En particulier, c'est une variété lisse séparée.*

Démonstration. Commençons par remarquer que $\mathrm{Hom}(\pi; G)^-$ est un fibré vectoriel au-dessus de $\mathrm{Hom}(\pi; A)^-$, de fibre $[G, G]^{2g}$. En effet, la fibration ici est l'application p_* , qui est la restriction de la fibration canonique $G^{2g} \twoheadrightarrow A^{2g}$ au-dessus de $\mathrm{Hom}(\pi; A)^-$. Il suffit maintenant de remarquer que le quotient par l'action de G est simplement le quotient de ce fibré vectoriel par le sous-fibré donné au-dessus de $\alpha \in \mathrm{Hom}(\pi; A)^-$ par $\iota_\alpha(\mathrm{Im} \psi_\alpha)$. \square

Proposition 2.5.9. *Si $\ker(\psi_\alpha) = p(Z(G))$, alors la classe de Stiefel-Whitney (totale) de ce fibré est égale à $1 \in H^*(\mathrm{Hom}(\pi; A)^-; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.*

Démonstration. Rappelons que le fibré vectoriel $\mathrm{Hom}(\pi; G)^- \twoheadrightarrow \mathrm{Hom}(\pi; A)^-$ est trivial (puisque c'est la restriction du fibré $G^{2g} \rightarrow A^{2g}$, qui est lui-même trivial). De plus, si $\ker \psi_\alpha = p(Z(G))$ pour tout $\alpha \in \mathrm{Hom}(\pi; A)^-$, nous pouvons fixer une base d'un supplémentaire de $\ker \psi_\alpha$ qui ne dépend pas de α . Notons (e_1, \dots, e_k) cette base. Notons d'autre part $e_i^\alpha = \psi_\alpha(e_i) \in [G, G]^{2g}$ pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$. Alors $(\iota_\alpha(e_1^\alpha), \dots, \iota_\alpha(e_k^\alpha))$ fournit une base lisse du fibré $\xi = \iota_\alpha(\mathrm{Im} \psi_\alpha)$, qui est donc trivial. Ainsi, nous obtenons que $\mathrm{Hom}(\pi; G)^-/G \oplus \xi$ est un fibré trivial (c'est $\mathrm{Hom}(\pi; G)^-$ au-dessus de $\mathrm{Hom}(\pi; A)^-$ (ici, \oplus désigne la somme de Whitney des fibrés vectoriels réels). Donc au niveau des classes de Stiefel-Whitney, notées w , cela revient à :

$$1 = w(\mathrm{Hom}(\pi; G)^-) = w\left(\mathrm{Hom}(\pi; G)^-/G \oplus \xi\right) = w\left(\mathrm{Hom}(\pi; G)^-/G\right).$$

\square

Revenons à la structure lisse, et plus précisément à la notion d'espace tangent. Nous savons que l'espace tangent à $\mathfrak{X}(\pi; G)$ en un point ρ est l'espace de cohomologie $H^2(\pi; \mathfrak{g}_{\mathrm{Ad}(\rho)})$.

QUESTION. — Quels vecteurs de $H^2(\pi; \mathfrak{g}_{\mathrm{Ad}(\rho)})$ sont effectivement tangents à un chemin de $\mathfrak{X}(\pi; G)$?

Comme ici G est métabélien 2-nilpotent, nous pouvons préciser un peu cette question. Nous allons chercher des obstructions à ce qu'un vecteur soit tangent à un chemin de $\mathfrak{X}(\pi; G)$.

Proposition 2.5.10. *Soit $u : \pi^2 \rightarrow \mathfrak{g}_{\mathrm{Ad}(\rho)}$ un cocycle représentant un vecteur tangent à (la classe de) $\rho : \pi \rightarrow G$. On peut associer à u une suite d'applications $c_i : \pi^2 \rightarrow \mathfrak{g}_{\mathrm{Ad}(\rho)}$ avec $i \geq 1$ telles que pour tout $i \in \mathbb{N}$, si c_j est un cobord pour tout $j < i$, c_i est un cocycle, et si u représente un vecteur tangent à un chemin de morphismes ρ_t , alors tous les c_i sont des cobords.*

Démonstration. Soit ρ_t un chemin de morphismes tel que $\rho_0 = \rho$. Écrivons ρ_t de la façon suivante :

$$\forall t \in]-\varepsilon, \varepsilon[, \forall \gamma \in \pi \quad \rho_t(\gamma) = \exp\left(\sum_{i \geq 1} u_i(\gamma) t^i\right) \rho(\gamma).$$

Comme ρ_t est — par définition — un morphisme de groupe pour tout t , nous avons pour tous $\gamma, \gamma' \in \pi$

$$\begin{aligned} \exp\left(\sum_{i \geq 1} u_i(\gamma\gamma')t^i\right)\rho(\gamma\gamma') &= \rho_t(\gamma\gamma') = \rho_t(\gamma)\rho_t(\gamma') = \\ &= \exp\left(\sum_{i \geq 1} u_i(\gamma)t^i\right)\rho(\gamma) \exp\left(\sum_{i \geq 1} u_i(\gamma')t^i\right)\rho(\gamma'). \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} \exp\left(-\sum_{i \geq 1} u_i(\gamma)t^i\right)\exp\left(\sum_{i \geq 1} u_i(\gamma\gamma')t^i\right) &= \rho(\gamma) \exp\left(\sum_{i \geq 1} u_i(\gamma')t^i\right)\rho(\gamma)^{-1} \\ &= \exp\left(\sum_{i \geq 1} t^i \operatorname{Ad}(\rho(\gamma))(u_i(\gamma'))\right). \end{aligned}$$

En utilisant la formule de Baker-Campbell-Hausdorff, et le fait que G est nilpotent d'indice 2 (et plus précisément ici, le fait que $[\mathfrak{g}, [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]] = \{0\}$), le terme de gauche devient alors

$$\begin{aligned} \exp\left(\sum_{i \geq 1} t^i (u_i(\gamma\gamma') - u_i(\gamma)) - \frac{1}{2} \left[\sum_{i \geq 1} t^i u_i(\gamma), \sum_{j \geq 1} t^j u_j(\gamma\gamma') \right]\right) &= \\ = \exp\left(t^i (u_i(\gamma\gamma') - u_i(\gamma)) - \frac{1}{2} \sum_{i \geq 2} t^i \sum_{j=1}^{i-1} [u_j(\gamma), u_{i-j}(\gamma\gamma')]\right) \end{aligned}$$

Comme l'exponentielle est un difféomorphisme sur un voisinage de $0 \in \mathfrak{g}$, nous en déduisons que u_1 est un cocycle (ce que nous savions déjà), et que pour tout $i \geq 2$, nous avons l'équation

$$u_i(\gamma\gamma') - u_i(\gamma) - \operatorname{Ad}(\rho(\gamma))(u_i(\gamma')) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{i-1} [u_j(\gamma), u_{i-j}(\gamma\gamma')]. \quad (2.12)$$

Ainsi, nous obtenons une suite d'obstructions à ce que la suite u_i définisse un morphisme comme ci-dessus. Remarquons que si (2.12) est vérifiée jusqu'au rang $i-1$, comme \mathfrak{g} est nilpotente d'indice 2, alors le rang i devient

$$u_i(\gamma\gamma') - u_i(\gamma) - \operatorname{Ad}(\rho(\gamma))(u_i(\gamma')) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{i-1} [u_j(\gamma), \operatorname{Ad}(\rho(\gamma))u_{i-j}(\gamma')] \quad (2.13)$$

vu que le terme $\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{i-1} [u_j(\gamma), u_{i-j}(\gamma)]$ est nul. De plus, le terme de droite dans (2.13), que nous noterons ici c_i , est un cocycle (toujours si (2.12) est vérifiée jusqu'au rang $i-1$). En effet, pour tous $\gamma, \gamma', \gamma'' \in \pi$, nous avons (en notant,

pour tout $X \in \mathfrak{g}$, $\gamma \cdot X = \text{Ad}(\rho(\gamma))(X)$

$$\begin{aligned}
2\delta c_i(\gamma, \gamma', \gamma'') &= \gamma \cdot \left(\sum_{j=1}^{i-1} [u_j(\gamma'), \gamma' \cdot u_{i-j}(\gamma'')] \right) - \sum_{j=1}^{i-1} [u_j(\gamma\gamma'), \gamma\gamma' \cdot u_{i-j}(\gamma'')] \\
&\quad + \sum_{j=1}^{i-1} [u_j(\gamma), \gamma \cdot u_{i-j}(\gamma'\gamma'')] - \sum_{j=1}^{i-1} [u_j(\gamma), \gamma \cdot u_{i-j}(\gamma')] \\
&= \sum_{j=1}^{i-1} [\gamma \cdot u_j(\gamma') - u_j(\gamma\gamma'), \gamma\gamma' \cdot u_{i-j}(\gamma'')] \\
&\quad + \sum_{j=1}^{i-1} [u_j(\gamma), \gamma \cdot u_{i-j}(\gamma'\gamma'')] - \sum_{j=1}^{i-1} [u_j(\gamma), \gamma \cdot u_{i-j}(\gamma')] \\
&= \sum_{j=1}^{i-1} [-u_j(\gamma), \gamma\gamma' \cdot u_{i-j}(\gamma')] + [u_j(\gamma), \gamma \cdot u_{i-j}(\gamma'\gamma'')] \\
&\quad - \sum_{j=1}^{i-1} [u_j(\gamma), \gamma \cdot u_{i-j}(\gamma')] \\
&= \sum_{j=1}^{i-1} [u_j(\gamma), \gamma(-\gamma' \cdot u_{i-j}(\gamma') + u_{i-j}(\gamma'\gamma''))] \\
&\quad + \sum_{j=1}^{i-1} [u_j(\gamma), \gamma \cdot u_{i-j}(\gamma')]
\end{aligned}$$

Et donc

$$\delta c_i(\gamma, \gamma', \gamma'') = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{i-1} [u_j(\gamma), -\gamma \cdot u_{i-j}(\gamma')] + [u_j(\gamma), \gamma \cdot u_{i-j}(\gamma')] = 0.$$

Ainsi, nous avons une chaîne d'obstructions dans l'homologie $H^2(\pi; \mathfrak{g}_{\text{Ad}\rho})$. \square

La question est donc maintenant de déterminer si un vecteur de $H^1(\pi; \mathfrak{g}_{\text{Ad}\rho})$ représenté par un cocycle u permet de définir un chemin de morphismes tangent à u (c'est-à-dire, avec les notations ci-dessus, tel que $u_1 = u$). La relation (2.13) permet de construire pas à pas une suite u_i tant que les c_i sont des cobords.

QUESTION. — Si tous les c_i sont nuls en homologie, est-ce que nous pouvons construire un chemin de morphismes tangent à (la classe de cohomologie de) u ?

Chapitre 3

Variété des caractères pour le groupe de Heisenberg

3.1 Généralités, contexte

Dans la suite, Nil désignera le groupe de Heisenberg réel de dimension 3, c'est-à-dire (comme rappelé dans les sections précédentes) le sous-groupe de $GL(3, \mathbb{R})$ formé des matrices triangulaires supérieures avec des 1 sur la diagonale. Rappelons que ce groupe est nilpotent d'ordre 2 et contractile. Son groupe dérivé, qui est égal à son centre, est

$$[\text{Nil}, \text{Nil}] = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & z \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\}$$

Nous pouvons donc écrire Nil dans une suite exacte comme ci-dessus

$$0 \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow \text{Nil} \xrightarrow{p} \mathbb{R}^2 \rightarrow 0.$$

Dans ce cas, un cocycle f est donné par $((x, y), (x', y')) \mapsto xy'$, donc le produit dans Nil identifié à $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ est

$$(z, (x, y)) \cdot (z', (x', y')) = (z + z' + xy', (x + x', y + y'))$$

et B est la forme symplectique habituelle sur \mathbb{R}^2

$$\forall (x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2, \quad B((x, y), (x', y')) = xy' - x'y$$

Ainsi, l'espace des représentations $\text{Hom}(\pi; \text{Nil})$ s'identifie à

$$\left\{ \left((z_1, (x_1, y_1)), \dots, (z'_g, (x'_g, y'_g)) \right) \in \text{Nil}^{2g} \mid \sum_{i=1}^g x_i y'_i - x'_i y_i = 0 \right\}.$$

De plus, l'ensemble des points réguliers est exactement l'ensemble des points tels que l'un au moins des (x_i, y_i) ou des (x'_i, y'_i) est non nul. C'est une sous-variété de dimension $6g - 1$.

3.2 La variété des caractères

3.2.1 Le cas du genre 1

Nous allons étudier en détail un exemple précis : le groupe G est le groupe de Heisenberg Nil, et π est le groupe fondamental de la surface fermée orientée de genre 1 (c'est-à-dire du tore).

Théorème 3.2.1. *Si S est de genre 1, alors $\text{Hom}^s(\pi; \text{Nil})/\text{Nil}$ est une variété lisse séparée connexe de dimension 4.*

Démonstration. Nous allons ici déterminer un atlas explicite de $\text{Hom}^s(\pi; \text{Nil})/\text{Nil}$.

Rappelons que dans ce cas, l'espace des représentations $\pi \rightarrow \text{Nil}$ s'identifie au sous-ensemble de Nil défini par

$$\left\{ \left((z, (x, y)), (z', (x', y')) \right) \in \text{Nil}^2 \mid xy' - x'y = 0 \right\}.$$

Remarquons que cela implique que la famille $((x, y), (x', y'))$ est liée. Ici, il est facile de voir que $\text{Hom}^s(\pi; G)$ est constitué des représentations telles que x, y, x', y' ne sont pas tous nuls, c'est-à-dire

$$\text{Hom}^s(\pi; \text{Nil}) = \text{Hom}(\pi; \text{Nil}) \setminus p_*^{-1}(0).$$

Soit $\rho = ((z, (x, y)), (z', (x', y))) = ((c, a), (c', a'))$ une représentation dans $\text{Hom}^s(\pi; G)$. Calculons son centralisateur. En utilisant la formule pour la conjugaison (2.3), nous obtenons que

$$\begin{aligned} p(Z_G(\rho)) &= \{(x_0, y_0) \in A \mid B((x, y), (x_0, y_0)) = 0 = B((x, y), (x_0, y_0))\} \\ &= \{(x_0, y_0) \in A \mid xy_0 - x_0y = 0 = x'y_0 - x_0y'\} \end{aligned}$$

Comme la famille (a, a') est liée et que l'un de ces deux vecteurs (au moins) est non nul, $p(Z_G(\rho))$ est constitué des multiples de a et a' . En particulier, $\dim p(Z_G(\rho)) = 1$ et donc $\dim Z_G(\rho) = 2$. Ainsi, la dimension du centralisateur est constante (égale à 2) sur $\text{Hom}^s(\pi; G)$.

Cherchons maintenant des cartes explicites du quotient $\text{Hom}^s(\pi; \text{Nil})/\text{Nil}$. Notons

$$U = \left\{ \text{Nil} \cdot \rho \in \text{Hom}^s(\pi; G)/G \mid a \neq 0 \right\} \quad \text{et} \quad U' = \{ \text{Nil} \cdot \rho \mid a' \neq 0 \}.$$

Ce sont clairement des ouverts du quotient. Étudions maintenant la classe d'une représentation $\rho \in F_\alpha$ dont la classe est dans U . En utilisant de nouveau (2.3), et le fait que $a \neq 0$ et $a' = \lambda a$ pour un certain réel λ , comme de plus la forme bilinéaire B est surjective dans \mathbb{R} (car non nulle), la classe de ρ est

$$\text{Nil} \cdot \rho = \left\{ \left((z + t, (x, y)), (z' + \lambda t, (x', y')) \right) \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

Posons maintenant $\varphi : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, *)\} \rightarrow U$ définie par

$$\varphi : (x, y, \lambda, t) \mapsto \text{Nil} \cdot \left((0, (x, y)), (t, (\lambda x, \lambda y)) \right)$$

et $\varphi' : \mathbb{R}^4 \setminus \{(0, 0, *, *)\} \rightarrow U'$ définie par

$$\varphi : (x', y', \mu, s) \mapsto \text{Nil} \cdot \left((s, (\mu x', \mu y')), (0, (x', y')) \right)$$

Vérifions que φ est un homéomorphisme, la démonstration pour φ' étant la même. D'abord, il est clair que φ est continue (comme la composition d'une application lisse à valeurs dans $\text{Hom}^s(\pi; \text{Nil})$ et de la projection sur le quotient). Cherchons un inverse à φ . Soit $\rho = ((z, (x, y)), (z', (x', y'))) \in \text{Hom}^s(\pi; \text{Nil})$ tel que $a = (x, y) \neq 0$.

$$\begin{aligned} \text{Nil} \cdot \rho &= \text{Nil} \cdot \left((z, (x, y)), (z', (x', y')) \right) \\ &= \text{Nil} \cdot \left((0, (x, y)), (z' - \lambda z, (\lambda x, \lambda y)) \right) \\ &= \varphi(x, y, \lambda, z' - \lambda z) \end{aligned}$$

Nous avons ainsi une réciproque bien définie (en effet, $\text{Nil} \cdot \rho \mapsto \lambda$ est bien définie et continue dans U) et continue, donc φ est un homéomorphisme sur U . De la même manière, φ' est un homéomorphisme sur U' . Calculons maintenant le changement de carte. Soit donc $(x', y', \mu, s) \in \mathbb{R}^4$ tel que $(x', y') \neq (0, 0)$ et $\mu \neq 0$. Notons $(x, y) = (\mu x', \mu y')$. Alors

$$\begin{aligned} \varphi^{-1} \circ \varphi'(x', y', \mu, s) &= \varphi^{-1} \left(\text{Nil} \cdot \left((s, (\mu x', \mu y')), (0, (x', y')) \right) \right) \\ &= \varphi^{-1} \left(\text{Nil} \cdot \left((0, (x, y)), \left(-\frac{s}{\mu}, (x', y') \right) \right) \right) \\ &= \left(x, y, \frac{1}{\mu}, -\frac{s}{\mu} \right) \\ &= \left(\mu x', \mu y', \frac{1}{\mu}, -\frac{s}{\mu} \right) \end{aligned}$$

Cette application est clairement lisse, ainsi que sa réciproque (par un calcul direct, il s'agit en fait de la même application). Nous avons donc un atlas pour $\text{Hom}^s(\pi; \text{Nil})/\text{Nil}$, formé de deux cartes. En particulier, c'est une variété lisse de dimension 4 (séparée), et elle est connexe (car $U \cap U' \neq \emptyset$, et U, U' sont connexes). \square

3.2.2 En genre supérieur

Nous allons maintenant étudier le cas de $\text{Hom}(\pi; \text{Nil})$ où $\pi = \pi_1(S_g)$ avec $g \geq 2$. D'après le Théorème 2.5.7, il nous suffit de calculer la dimension minimale de $Z_{\text{Nil}}(\rho)$.

Proposition 3.2.2. *Pour tout $g \geq 2$, il existe un élément $\rho \in \text{Hom}^s(\pi; \text{Nil})$ tel que $Z_{\text{Nil}}(\rho) = Z(\text{Nil}) = [\text{Nil}, \text{Nil}]$. Ainsi la dimension minimale de $Z_{\text{Nil}}(\rho)$ est 1.*

Nous retrouvons ainsi un résultat de Goldman [18] :

Corollaire 3.2.3. *La dimension de $\text{Hom}(\pi; \text{Nil})/\text{Nil}$ est $6g - 3$ dès que $g \geq 2$.*

Démonstration du corollaire. En utilisant le Théorème 2.5.7 et la proposition précédente, nous obtenons

$$\begin{aligned} \dim \left(\text{Hom}(\pi; \text{Nil})^- / \text{Nil} \right) &= (2g - 2) \dim \text{Nil} + \dim A + \dim Z_{\text{Nil}}(\rho) \\ &= 6g - 6 + 2 + 1 \\ &= 6g - 3 \end{aligned}$$

□

Démonstration de la proposition. Il suffit de trouver des vecteurs linéairement indépendants dans A qui vérifient l'équation pour définir un morphisme. En effet, B est ici une forme bilinéaire non-dégénérée (c'est la forme symplectique habituelle sur \mathbb{R}^2), donc le seul moyen d'annuler ψ_α sera d'être égal à 0. Posons donc $a_1 = (1, 1)$, $a'_1 = (1, -1)$, $a_2 = (1, -1)$, $a'_2 = (1, 1)$ et $a_i = a'_i = 0$ pour $i \geq 3$. Dans ce cas, nous avons bien

$$\sum_i B(a_i, a'_i) = B(a_1, a'_1) + B(a_2, a'_2) = -2 + 2 = 0$$

donc tout point de Nil^{2g} dans la fibre au-dessus de $\alpha = (a_1, a'_1, a_2, a'_2, \dots, a_g, a'_g)$ est une représentation, et même dans $\text{Hom}^s(\pi; \text{Nil})$. De plus, la famille (a_1, a'_1) est libre, donc si un vecteur $u \in A$ est dans le noyau de ψ_α il doit vérifier

$$B(u, a_1) = 0 = B(u, a'_1).$$

Cela implique que u est nul, et donc $\ker(\psi_\alpha) = p(Z_{\text{Nil}}(\rho)) = \{0\}$ pour tout $\rho \in F_\alpha$. Ainsi, $Z_{\text{Nil}}(\rho) = Z(\text{Nil})$. □

Précisons les points singuliers dans $\text{Hom}(\pi; \text{Nil})$. Commençons par rappeler qu'il s'agit des points $\alpha \in p_* \text{Hom}(\pi; \text{Nil})$ pour lesquels l'application ψ_α n'est pas de rang maximal (c'est-à-dire, d'après ce qui précède, de rang au plus 1). Un calcul direct utilisant l'identification de $\text{Hom}(\pi; \mathbb{R}^2)$ avec $(\mathbb{R}^2)^{2g}$ montre que cela revient à l'ensemble des morphismes de groupes $\pi \rightarrow \mathbb{R}^2$ dont l'image est contenue dans une droite vectorielle de \mathbb{R}^2 .

Proposition 3.2.4. *L'image de l'ensemble des points singuliers de $\text{Hom}(\pi; \text{Nil})$ dans $\text{Hom}(\pi; \mathbb{R}^2)$ privé de 0 est homéomorphe à $\mathbb{S}^1 \times (\mathbb{R}^{2g} \setminus \{0\})$.*

Démonstration. Soit $\alpha \in p_* \text{Hom}(\pi; \text{Nil})$ tel que ψ_α est de rang 1. Nous savons donc que l'image de π par α est contenue dans une droite de \mathbb{R}^2 , et qu'elle n'est pas réduite à $\{0\}$, de sorte que α définit bien une droite de manière unique, et les images des générateurs de π définissent $2g$ points non tous nuls sur cette droite.

D'autre part, étant donnée une droite vectorielle de \mathbb{R}^2 et $2g$ points non tous nuls sur cette droite, nous pouvons construire un morphisme $\pi \rightarrow \mathbb{R}^2$. De plus, la condition pour être la projection d'un morphisme $\pi \rightarrow \text{Nil}$ est clairement vérifiée, vu que pour tout i , $\alpha(a_i)$ et $\alpha(b_i)$ sont colinéaires, donc par antisymétrie $B(\alpha(a_i), \alpha(b_i)) = 0$. □

Étudions maintenant plus en détails l'action de G sur $\text{Hom}(\pi; \text{Nil})^-$. Remarquons d'abord que cette action se restreint en fait à une action de A . En effet,

rappelons que pour tout $\rho \in \text{Hom}(\pi; \text{Nil})$ et tout $h \in \text{Nil}$, si l'on note $\alpha = p_*\rho$, alors

$$h\rho h^{-1} = i_\alpha \left(i_\alpha^{-1}(\rho) + \psi_\alpha \circ p(h) \right) \quad (3.1)$$

Ainsi l'action d'un élément $h \in \text{Nil}$ ne dépend que de $p(h) \in A$. Nous avons maintenant la

Proposition 3.2.5. *L'action de A sur $\text{Hom}(\pi; \text{Nil})^-$ est propre et libre.*

Démonstration. Commençons par démontrer la liberté de l'action. Soit $\rho \in \text{Hom}(\pi; \text{Nil})^-$, et soit $\alpha = p_*\rho$. Alors d'après la formule (3.1), un élément $a \in A$ fixe ρ si et seulement si $\psi_\alpha(a) = 0$. Mais nous savons d'autre part que $\ker \psi_\alpha = p(Z_{\text{Nil}}(\rho))$ est trivial par définition de $\text{Hom}(\pi; A)$. Ainsi, le seul élément de A à avoir des points fixes dans $\text{Hom}(\pi; \text{Nil})^-$ est 0, et donc l'action est libre.

Étudions maintenant la propriété de l'action. Rappelons que (topologiquement) $\text{Nil}^{2g} = A^{2g} \times [\text{Nil}, \text{Nil}]^{2g} = (\mathbb{R}^2)^{2g} \times \mathbb{R}^{2g}$. Équippedes alors ces espaces vectoriels d'une norme, que nous noterons $\|\cdot\|$. Soit $K \subset \text{Hom}(\pi; \text{Nil})^-$ un compact. Pour tout $\rho \in K$, avec $\alpha = p_*\rho$, nous avons

$$\begin{aligned} \{a \in A \mid (K \cap F_\alpha) \cap a \cdot (K \cap F_\alpha) \neq \emptyset\} &\subset \{a \in A \mid \|\psi_\alpha(a)\| \leq 2\text{diam}(K \cap F_\alpha)\} \\ &\subset \psi_\alpha^{-1} \left(\bar{B}(0, 2\text{diam}(K)) \right) \end{aligned}$$

Comme ψ_α est injective, elle est propre et donc ce dernier ensemble est borné, donc compact. D'autre part, comme ψ_α dépend continûment de α , en utilisant la compacité de K (et plus précisément la compacité de $p_*K \subset A$), nous obtenons que l'ensemble des éléments de A tels que $a \cdot K$ rencontre K est relativement compact dans A . \square

Remarque 3.2.6. Dans la démonstration précédente, nous n'utilisons pas réellement le fait que $G = \text{Nil}$. En réalité nous utilisons l'hypothèse que ψ_α est injective, c'est-à-dire que le centralisateur de toute représentation dans $\text{Hom}(\pi; G)^-$ est réduit à $[G, G]$. Cela implique en particulier que $[G, G] = Z(G)$.

Corollaire 3.2.7. *La variété des caractères $\text{Hom}(\pi; \text{Nil})^- / \text{Nil}$ est une variété lisse séparée dès que $g \geq 2$.*

Étudions plus en détails la base de la fibration du Théorème 2.5.8, c'est-à-dire $\text{Hom}(\pi; A)^-$. Il s'agit d'une sous-variété de $\text{Hom}(\pi; A) \simeq \mathbb{R}^{4g}$ de codimension 1. Nous cherchons à définir une structure de contact sur $\text{Hom}(\pi; A)^-$. Commençons par rappeler la définition de $\text{Hom}(\pi; A)^-$:

$$\text{Hom}(\pi; A)^- = \left\{ \alpha = (x_1, y_1, \dots, x'_g, y'_g) \in \mathbb{R}^{4g} \mid \begin{array}{l} \sum_{i=1}^g x_i y'_i - x'_i y_i = 0, \\ \ker \psi_\alpha = \{0\} \end{array} \right\}. \quad (3.2)$$

Maintenant, en utilisant l'algorithme de Gauss, nous voyons que pour tout $(x_1, y_1, \dots, x'_g, y'_g) \in \mathbb{R}^{4g}$ nous avons

$$\sum_{i=1}^g x_i y'_i - x'_i y_i = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^g \left((x_i + y'_i)^2 - (x_i - y'_i)^2 - (x'_i + y_i)^2 + (x'_i - y_i)^2 \right).$$

Ainsi $\text{Hom}(\pi; A)^-$ est un ouvert du cône isotrope de la forme quadratique non-dégénérée sur \mathbb{R}^{4g} de signature $(2g, 2g)$. Nous en déduisons en particulier que

l'espace tangent en un point $\alpha \in \text{Hom}(\pi; A)^-$ est exactement l'orthogonal de α (pour cette forme quadratique).

Définissons maintenant les coordonnées (globales) suivantes

$$p_i = x_i - y'_i, \quad q_i = x_i + y'_i, \quad p'_i = x'_i + y_i, \quad q'_i = x'_i - y_i.$$

Alors, par construction, dans ces coordonnées $\text{Hom}(\pi; A)^-$ est un ouvert de l'ensemble des points réguliers de la forme quadratique $\sum p_i^2 + p_i'^2 - q_i^2 - q_i'^2$. Notons maintenant $\omega = d(pdq + p'dq')$ la forme symplectique habituelle (en considérant $\text{Hom}(\pi; A)$ comme un espace cotangent). Alors par un théorème de Weinstein [3, Théorème 5.3], $\text{Hom}(\pi; A)^-$ est donc munie d'une structure de contact.

Proposition 3.2.8. *La variété des caractères $\text{Hom}(\pi, \text{Nil})^-/\text{Nil}$ est une variété de contact. En particulier, c'est une variété orientable.*

Démonstration. Nous allons utiliser la fibration du Théorème 2.5.8, notée p . Notons α la forme de contact sur $\text{Hom}(\pi; A)^-$ définie ci-dessus. Nous noterons $2k + 1$ la dimension de $\text{Hom}(\pi; A)^-$, et $2n + 1$ la dimension de $\text{Hom}(\pi; \text{Nil})^-/\text{Nil}$. Remarquons que $p^*\alpha$ n'est pas une forme de contact sur $\text{Hom}(\pi; \text{Nil})^-/\text{Nil}$. Nous allons cependant en construire une à partir de $p^*\alpha$.

Il nous faut construire une forme différentielle fermée qui est symplectique sur l'espace tangent vertical (c'est-à-dire sur la fibre). Admettons provisoirement l'existence d'une telle forme différentielle exacte, notée $\omega = d\lambda$. Posons alors $\eta = \alpha + \lambda$.

$$\begin{aligned} \eta \wedge (d\eta)^n &= (p^*\alpha + \lambda) \wedge (d\alpha + \omega)^n \\ &= (p^*\alpha + \lambda) \wedge \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} p^*(d\alpha)^i \wedge \omega^{n-i} \\ &= (p^*\alpha + \lambda) \wedge \binom{n}{k} p^*(d\alpha)^k \wedge \omega^{n-k} \\ &= \binom{n}{k} p^*(\alpha \wedge d\alpha^k) \wedge \omega^{n-k} + \binom{n}{k} p^*(d\alpha^k) \wedge \lambda \wedge \omega^{n-k} \\ &= \binom{n}{k} p^*(\alpha \wedge d\alpha^k) \wedge \omega^{n-k} \end{aligned}$$

□

Nous savons donc maintenant que $\text{Hom}(\pi; A)^-$ est une variété de contact (en particulier elle est orientable).

QUESTION. — Existe-t-il une structure contact invariante par l'action de $\text{Mod}(S)$ sur $\text{Hom}(\pi; A)^-$?

3.2.3 Action du groupe de Torelli

Rappelons que S désigne une surface (topologique) fermée orientable. Supposons encore que le genre g est au moins 2. Soit δ une courbe fermée simple séparante sur S , identifiée à sa classe dans $\pi_1(S, p)$. Il est classique que le twist de Dehn autour de δ , noté T_δ , est dans le groupe de Torelli (essentiellement parce que δ est séparante, elle borde donc une sous-surface et donc sa classe d'homologie est nulle, cf [14]).

D'après une formule bien connue, pour tout élément $\gamma \in \pi = \pi_1(S, p)$ il existe des courbes β_i , $1 \leq i \leq k$ où k est le nombre d'intersection (géométrique) de γ et δ , telles que

$$T_\delta(\gamma) = \gamma \prod_{i=1}^k \beta_i^{-1} \delta^{(-1)^{i+1}} \beta_i \quad (3.3)$$

Appliquons maintenant une représentation $\rho = (\lambda, \alpha) \in \text{Hom}(\pi; \text{Nil})^-$ à cette égalité.

$$\begin{aligned} \rho(T_\delta(\gamma)) &= \rho\left(\gamma \prod_{i=1}^k \beta_i^{-1} \delta^{(-1)^{i+1}} \beta_i\right) \\ &= \left(\lambda\left(\gamma \prod_{i=1}^k \beta_i^{-1} \delta^{(-1)^{i+1}} \beta_i\right), \alpha\left(\gamma \prod_{i=1}^k \beta_i^{-1} \delta^{(-1)^{i+1}} \beta_i\right)\right) \end{aligned}$$

Commençons par étudier la partie dans A , c'est-à-dire $\alpha(T_\delta(\gamma))$. Nous avons en réalité $\alpha(\delta) = 0$ si δ est séparante (pour évaluer α en δ , nous avons choisi un représentant de δ qui passe par le point-base). En effet, comme δ est séparante, elle borde une sous-surface de S , et donc sa classe d'homologie est nulle. D'autre part,

$$\text{Hom}(\pi; A) \cong \text{Hom}\left(\pi / [\pi, \pi], A\right) \cong \text{Hom}(H_1(S); A).$$

Proposition 3.2.9. *Un twist de Dehn autour d'une courbe séparante agit trivialement sur $\mathfrak{X}(\pi; \text{Nil})$.*

Démonstration. Soit δ une courbe séparante sur S , et soit $\gamma \in \pi_1(S, p)$. Alors d'après la formule (3.3),

$$\rho(T_\delta(\gamma)) = \left(\lambda\left(\gamma \prod_{i=1}^k \beta_i^{-1} \delta^{(-1)^{i+1}} \beta_i\right), \alpha\left(\gamma \prod_{i=1}^k \beta_i^{-1} \delta^{(-1)^{i+1}} \beta_i\right)\right).$$

Intéressons-nous à la première coordonnée :

$$\begin{aligned} \lambda\left(\gamma \prod_{i=1}^k \beta_i^{-1} \delta^{(-1)^{i+1}} \beta_i\right) &= \lambda(\gamma) + \lambda\left(\prod_{i=1}^k \beta_i^{-1} \delta^{(-1)^{i+1}} \beta_i\right) \\ &\quad + f\left(\alpha(\gamma), \alpha\left(\prod_{i=1}^k \beta_i^{-1} \delta^{(-1)^{i+1}} \beta_i\right)\right) \end{aligned}$$

Mais le dernier terme de la somme est nul. En effet, comme α est un morphisme à valeurs dans A qui est abélien, et que $\alpha(\delta) = 0$,

$$f\left(\alpha(\gamma), \alpha\left(\prod_{i=1}^k \beta_i^{-1} \delta^{(-1)^{i+1}} \beta_i\right)\right) = f\left(\alpha(\gamma), \sum_{i=1}^k \pm \alpha(\delta)\right) = 0.$$

En utilisant encore que $\alpha(\delta) = 0$, avec la condition de cocyclicité de λ ,

$$\begin{aligned} \lambda\left(\prod_{i=1}^k \beta_i^{-1} \delta^{(-1)^{i+1}} \beta_i\right) &= \sum_{i=1}^k \lambda\left(\beta_i^{-1} \delta^{(-1)^{i+1}} \beta_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^k \lambda\left(\delta^{(-1)^{i+1}}\right) \\ &= \sum_{i=1}^k (-1)^{i+1} \lambda(\delta) \\ &= (1 - \mathbb{1}_{2\mathbb{Z}}(k)) \lambda(\delta) \end{aligned}$$

La seconde égalité vient du fait que $\alpha(\delta) = 0$. En effet, comme ρ est un morphisme, en utilisant la formule de conjugaison (2.3) nous avons pour tout $\beta \in \pi$

$$\begin{aligned} (\lambda(\beta^{-1}\delta\beta), \alpha(\beta^{-1}\delta\beta)) &= \rho(\beta^{-1}\delta\beta) \\ &= \rho(\beta)^{-1} \rho(\delta) \rho(\beta) \\ &= (\lambda(\delta) + B(\alpha(\delta), \alpha(\beta)), \alpha(\beta)) \\ &= (\lambda(\delta), \alpha(\delta)) \end{aligned}$$

donc $\lambda(\beta^{-1}\delta\beta) = \lambda(\delta)$.

Or δ est une courbe séparante, donc le nombre d'intersection de γ et de δ est forcément pair, et donc ce terme est lui aussi nul. Au final ne reste donc plus que

$$\lambda\left(\gamma \prod_{i=1}^k \beta_i^{-1} \delta^{(-1)^{i+1}} \beta_i\right) = \lambda(\gamma).$$

En utilisant une fois de plus que $\alpha(\delta) = 0$, nous obtenons donc

$$\rho(T_\delta(\gamma)) = (\lambda(\gamma), \alpha(\gamma)) = \rho(\gamma).$$

□

Remarque 3.2.10. Dans cette démonstration, nous n'avons utilisé les propriétés spécifiques de Nil, et effectivement il se généralisera aux groupes métabéliens 2-nilpotents, comme nous le verrons dans 3.3.9. Cependant, l'action du noyau de Johnson n'est pas triviale pour tout groupe métabélien : Ghazouani montre dans [16] qu'elle est même ergodique si G est le groupe affine complexe de dimension 1. Nous donnerons plus tard une formule générale de l'action d'une courbe séparante pour un groupe métabélien.

3.2.4 Structure sur la variété des caractères

Dans la suite, nous nous cantonnerons au cas du groupe de Heisenberg. Rappelons que, d'après Goldman [18], l'espace tangent en un point a dans $\text{Hom}(\pi; A)$ s'identifie à $H^1(S; \mathfrak{a})$, où \mathfrak{a} est l'algèbre de Lie de A . Nous pouvons maintenant définir une forme bilinéaire sur cet espace, en utilisant le cup-produit avec B comme appariement. Plus précisément, si φ, ψ sont des cochaines

dans $C^1(S; \mathfrak{a})$, et si $\sigma \in C_2(S)$ est un simplexe singulier défini sur le simplexe $[v_0, v_1, v_2]$, posons

$$(\varphi \smile \psi)(\sigma) = B\left(\varphi(\sigma|_{[v_0, v_1]}), \psi(\sigma|_{[v_1, v_2]})\right)$$

En étendant par linéarité, nous obtenons ainsi une application bilinéaire

$$\smile: C^1(S; \mathfrak{a}) \times C^1(S; \mathfrak{a}) \longrightarrow C^2(S; \mathbb{R})$$

qui passe à l'homologie, ce qui donne donc une application bilinéaire

$$\smile: H^1(S; \mathfrak{a}) \times H^1(S; \mathfrak{a}) \longrightarrow H^2(S; \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R},$$

autrement dit nous avons défini une forme bilinéaire sur $T_a \text{Hom}(\pi; A)$.

Proposition 3.2.11. *La forme bilinéaire \smile (en homologie) est symétrique.*

Démonstration. Suivant Hatcher [24, §3.2], nous allons définir un morphisme de chaînes $\mu: C_\bullet(S) \rightarrow C_\bullet(S)$ homotope à l'identité, en posant

$$\forall \sigma \in C_n(S), \quad \mu(\sigma)(v_i) = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \sigma(v_{n-i})$$

Pour $\varphi, \psi \in C^1(S; \mathfrak{a})$ et $\sigma \in C_2(S)$, nous avons

$$\begin{aligned} (\mu^* \varphi \smile \mu^* \psi)(\sigma) &= B\left(-\varphi(\sigma|_{[v_1, v_0]}), -\psi(\sigma|_{[v_2, v_1]})\right) \\ &= B\left(\varphi(\sigma|_{[v_1, v_0]}), \psi(\sigma|_{[v_2, v_1]})\right) \\ \mu^*(\psi \smile \varphi)(\sigma) &= -B\left(\psi(\sigma|_{[v_2, v_1]}), \varphi(\sigma|_{[v_1, v_0]})\right) \\ &= B\left(\varphi(\sigma|_{[v_1, v_0]}), \psi(\sigma|_{[v_2, v_1]})\right) \\ &= (\mu^* \varphi \smile \mu^* \psi)(\sigma) \end{aligned}$$

Si μ est un morphisme de complexes de chaînes homotope à l'identité, nous obtenons donc le résultat. Pour la démonstration de ce dernier fait, nous renvoyons à l'ouvrage d'A. Hatcher [24], notre cas particulier n'affectant en rien la preuve du résultat. \square

Remarque 3.2.12. En utilisant la même technique (toujours suivant Hatcher [24]), pour des cocycles de degré quelconque nous obtenons la règle de commutation suivante :

$$\forall \varphi \in H^k(S; \mathfrak{a}), \psi \in H^a(S; \mathfrak{a}), \quad \psi \smile \varphi = (-1)^{ka+1} \varphi \smile \psi$$

Nous aimerions maintenant utiliser la dualité de Poincaré pour voir que \smile est non-dégénérée. Posons donc pour $\varphi \in C^1(S; \mathfrak{a})$ et $\sigma \in C_2(S)$

$$\varphi \smile \sigma = \varphi(\sigma|_{[v_0, v_1]}) \otimes \sigma|_{[v_1, v_2]} \in \mathfrak{a} \otimes C_1(S) \cong C_1(S; \mathfrak{a}) \quad (3.4)$$

Proposition 3.2.13. *Pour $\varphi, \psi \in C^1(S; \mathfrak{a})$ et $\sigma \in C_2(S)$ nous avons la relation*

$$\varphi \smile \psi(\sigma) = B(\psi(\varphi \smile \sigma)) \quad (3.5)$$

où B est vue comme une application linéaire $C^1(S; \mathfrak{a}) \otimes C^1(S; \mathfrak{a}) \rightarrow \mathbb{R}$.

Démonstration. Considérons le cas où σ est un simplexe singulier défini sur le simplexe $[v_0, v_1, v_2]$. Nous avons alors, en étendant ψ à $\mathfrak{a} \otimes C_1(S; \mathfrak{a})$ de la manière évidente (autrement dit en notant encore ψ l'application $\text{id} \otimes \psi$)

$$\begin{aligned} (\varphi \smile \psi)(\sigma) &= B\left(\varphi(\sigma|_{[v_0, v_1]}), \psi(\sigma|_{[v_1, v_2]})\right) \\ \psi(\varphi \frown \sigma) &= \psi\left(\varphi(\sigma|_{[v_0, v_1]}) \otimes \sigma|_{[v_1, v_2]}\right) \\ &= \varphi(\sigma|_{[v_0, v_1]}) \otimes \psi(\sigma|_{[v_1, v_2]}) \end{aligned}$$

Le résultat suit alors immédiatement en appliquant B à la dernière égalité et en utilisant la linéarité. \square

Admettons le théorème de dualité suivant

Théorème 3.2.14. *L'application de dualité habituelle*

$$D \quad : \quad \begin{array}{ccc} H^1(S; \mathfrak{a}) & \rightarrow & H_1(S; \mathfrak{a}) \\ \varphi & \mapsto & \varphi \frown [S] \end{array}$$

est un isomorphisme.

Avec cette version de la dualité de Poincaré, nous pouvons montrer la non dégénérescence du produit cup.

Proposition 3.2.15. *La forme bilinéaire symétrique \smile sur $H^1(S; \mathfrak{a}) \times H^1(S; \mathfrak{a})$ est non-dégénérée.*

Démonstration. Soit $\varphi \in H^1(S; \mathfrak{a})$ telle que pour tout $\psi \in H^1(S; \mathfrak{a})$, $\varphi \smile \psi = 0$. Alors nous avons en particulier, en utilisant la relation (3.5)

$$\forall \psi \in H^1(S; \mathfrak{a}), \quad 0 = \varphi \smile \psi([S]) = B(\varphi(D(\psi))).$$

Mais, comme D est un isomorphisme, cela revient exactement à dire que

$$B \circ (\text{id} \otimes \varphi) = 0$$

et vu que B est non-dégénérée, cela implique que $\varphi = 0$, c'est-à-dire que \smile est une forme bilinéaire non dégénérée. \square

QUESTION. — Existe-t-il une structure de contact naturelle (et en particulier invariante par l'action du Mapping Class Group) sur cette hypersurface ?

Une piste ici est de trouver un champs de Liouville invariant par $\text{Mod}(S)$, et l'idée ici serait de voir si l'orthogonal de $\text{Hom}(\pi; \mathbb{R}^2)^-$ pour la 2-forme introduite ci-dessus pourrait en fournir un.

3.3 Métabéliens généraux

Commençons par écrire la loi de groupe de l'extension

$$0 \rightarrow C \rightarrow G \xrightarrow{P} A \rightarrow 0$$

où C et A sont abéliens. Pour $(c, a), (c', a')$ deux éléments de G (identifié à $C \times A$ en tant qu'ensemble), nous avons la loi (donnée dans [7])

$$(c, a) \cdot (c', a') = (c + a \cdot c' + f(a, a'), a + a') \quad (3.6)$$

où f est comme avant un cocycle normalisé. La condition de cocyclicité s'écrit maintenant

$$\forall x, y, z \in A, \quad x \cdot f(y, z) - f(x + y, z) + f(x, y + z) - f(x, y) = 0. \quad (3.7)$$

Nous noterons encore $B(a, a') = f(a, a') - f(a', a)$. La différence avec le cas 2-nilpotent est l'action non nécessairement triviale de A sur C qui apparaît dans la loi de groupe.

Proposition 3.3.1. *La conjugaison dans G est donnée pour $(c, a), (c', a') \in G$ par*

$$(c, a)(c', a')(c, a)^{-1} = (c + a \cdot c' - a' \cdot c + B(a, a'), a'). \quad (3.8)$$

Démonstration. Commençons par expliciter une formule pour l'inverse de (c, a) (suivant [7]). Un calcul direct montre que

$$(c, a)^{-1} = (-(-a) \cdot c - (-a) \cdot f(a, -a), -a).$$

Nous pouvons maintenant calculer directement la conjugaison :

$$\begin{aligned} \text{LHS} &= (c + a \cdot c' + f(a, a'), a + a') (-(-a) \cdot c - (-a) \cdot f(a, -a), -a) \\ &= (c + a \cdot c' + f(a, a') \\ &\quad + (a + a') \cdot (-(-a) \cdot c - (-a) \cdot f(a, -a), -a) + f(a + a', -a), a) \\ &= (c - a' \cdot c + a \cdot c' + f(a, a') - a' \cdot f(a, -a) + f(a + a', -a), a) \end{aligned}$$

Mais la condition de cocyclicité (3.7) montre que

$$a' \cdot f(a, -a) - f(a' + a, -a) + \underbrace{f(a', 0)}_0 - f(a', a) = 0,$$

autrement dit, en utilisant la commutativité de A :

$$-a' \cdot f(a, -a) + f(a + a', -a) = -f(a', a).$$

Nous en déduisons alors

$$\begin{aligned} (c, a)(c', a')(c, a)^{-1} &= (c + a \cdot c' - a' \cdot c + f(a, a') - f(a', a), a') \\ &= (c + a \cdot c' - a' \cdot c + B(a, a'), a'). \end{aligned}$$

□

Proposition 3.3.2. *Soit $a \in \text{Hom}(\pi; A) = H^1(S; A)$ fixé. Alors la fibre au-dessus de a pour la projection naturelle $\text{Hom}(\pi; G) \xrightarrow{P^*} \text{Hom}(\pi; A)$ est un espace affine (éventuellement vide) dirigé par l'espace vectoriel*

$$Z_a^1(\pi; C) = \{ c : \pi \rightarrow C \mid \forall \gamma, \gamma' \in \pi \ c(\gamma\gamma') = c(\gamma) + a(\gamma) \cdot c(\gamma') \}$$

Démonstration. Il est clair par les propriétés d'un morphisme et de multiplication dans G que la fibre au-dessus de a est exactement l'ensemble

$$\left\{ \lambda : \pi \rightarrow C \mid \forall \gamma, \gamma' \in \pi \lambda(\gamma\gamma') = \lambda(\gamma) + a(\gamma) \cdot \lambda(\gamma') + f(a(\gamma), a(\gamma')) \right\}.$$

De plus, le terme dans la somme ci-dessus ne dépend que de a , nous pouvons donc ajouter un élément de $Z_a^1(\pi; C)$ sans modifier la formule. Autrement dit, le groupe additif de l'espace vectoriel $Z_a^1(\pi; C)$ agit sur la fibre, de manière transitive et fidèle. Donc il s'agit bien d'un espace affine dirigé par $Z_a^1(\pi; C)$. \square

Rappelons que G agit par conjugaison sur la fibre au-dessus de α , plus précisément pour $g = (c, a) \in G$ et $\lambda : \pi \rightarrow C$ un élément de $p_*^{-1}(\alpha)$,

$$\forall \gamma \in \pi, \quad g \cdot \lambda(\gamma) = a \cdot \lambda(\gamma) + c - \alpha(\gamma) \cdot c + B(a, \alpha(\gamma)). \quad (3.9)$$

Remarquons d'autre part que, pour la cohomologie de π à valeurs dans C tordue par α , $c - \alpha \cdot c$ est exactement un cobord (c'est le cobord de l'application constante $\pi \rightarrow C$, $\gamma \mapsto c$). En notant $B_\alpha^1(\pi; C)$ l'espace des cobords, le quotient de la fibre au-dessus de α par la conjugaison (dans G) est donc le quotient de l'espace affine $p_*^{-1}(\alpha)/B_\alpha^1(\pi; C)$ — dirigé par $H^1(\pi; C)$ — par l'action de A

$$a \star [\lambda](\gamma) = \left[a \cdot \lambda(\gamma) + B(a, \alpha(\gamma)) \right].$$

Remarque 3.3.3. Dans ce contexte général, l'application B n'est pas bilinéaire. Cependant, elle vérifie tout de même une relation.

Lemme 3.3.4. *L'application $B : A^2 \rightarrow C$ vérifie pour tous $x, y, z \in A$*

$$(B(y, z) - x \cdot B(y, z)) + (B(z, x) - y \cdot B(z, x)) + (B(x, y) - z \cdot B(x, y)) = 0 \quad (3.10)$$

Démonstration. Soient $x, y, z \in A$. En utilisant la condition de cocyclicité et la commutativité de A nous avons

$$\begin{aligned} f(x + y, z) &= x \cdot f(y, z) + f(x, y + z) - f(x, y) \\ &= x \cdot f(y, z) - x \cdot f(z, y) + f(x + z, y) + f(x, z) - f(x, y) \\ &= x \cdot B(y, z) + z \cdot f(x, y) + f(z, x + y) - f(z, x) + f(x, z) - f(x, y) \end{aligned}$$

d'où nous déduisons que

$$B(x + y, z) = B(x, z) + x \cdot B(y, z) - (f(x, y) - z \cdot f(x, y))$$

et par symétrie

$$B(y + x, z) = B(y, z) + y \cdot B(x, z) - (f(y, x) - z \cdot f(y, x)).$$

Maintenant, comme A est abélien, nous obtenons en soustrayant ces égalités

$$\begin{aligned} 0 &= B(x, z) - B(y, z) + x \cdot B(y, z) - y \cdot B(x, z) - (B(x, y) - z \cdot B(x, y)) \\ &= - (B(y, z) - x \cdot B(y, z)) + (B(x, z) - y \cdot B(x, z)) - (B(x, y) - z \cdot B(x, y)) \\ &= (B(y, z) - x \cdot B(y, z)) + (B(z, x) - y \cdot B(z, x)) + (B(x, y) - z \cdot B(x, y)) \end{aligned}$$

\square

Corollaire 3.3.5. *Pour tous $x, y, z \in C$, $B(x, y) - z \cdot B(x, y)$ est d'ordre au plus 2 dans C . En particulier, si C ne contient pas d'élément d'ordre 2, alors $z \cdot B(x, y) = B(x, y)$.*

Démonstration. Soient $x, y, z \in A$. Notons D la différence

$$D = B(x + y, z) - B(x, z) - B(y, z)$$

Nous avons alors en utilisant la preuve précédente et la formule (3.10)

$$\begin{aligned} D &= x \cdot B(y, z) - B(y, z) - (f(x, y) - z \cdot f(x, y)) \\ &= (B(z, x) - y \cdot B(z, x)) + (B(x, y) - z \cdot B(x, y)) - (f(x, y) - z \cdot f(x, y)) \\ &= (B(z, x) - y \cdot B(z, x)) - (f(y, x) - z \cdot f(y, x)) \end{aligned}$$

et comme A est abélien ainsi que C

$$\begin{aligned} D &= B(y + x, z) - B(y, z) - B(x, z) \\ &= y \cdot B(x, z) - B(x, z) - (f(y, x) - z \cdot f(y, x)) \\ &= -(B(z, x) - y \cdot B(z, x)) - (f(y, x) - z \cdot f(y, x)) \end{aligned}$$

La soustraction de ces deux égalités donne alors

$$0 = 2(B(z, x) - y \cdot B(z, x))$$

d'où le résultat. \square

Remarque 3.3.6. Cela implique en particulier que l'action de A est triviale sur l'image de l'application $B : A^2 \rightarrow C$ dès que C est simplement connexe (ou plus généralement dès que l'image de B est contenue dans un sous-groupe simplement connexe de C).

Proposition 3.3.7. *Soit δ une courbe séparante dans S , vue comme un élément de $\pi_1(S) = \pi$, et soit $\lambda \in p_*^{-1}(\alpha)$. Pour tout $\gamma \in \pi$ il existe des courbes $\beta_1, \dots, \beta_k \in \pi$, où k est le nombre d'intersections (géométrique) de γ et δ , telles que*

$$\lambda(T_\delta \gamma) = \lambda(\gamma) + \alpha(\gamma) \cdot \sum_{i=1}^k (-1)^{i+1} (\alpha(\beta_i^{-1}) \cdot \lambda(\delta)) \quad (3.11)$$

Démonstration. Suivant Ghazouani [16], il existe des courbes β_1, \dots, β_k telles que

$$T_\delta \gamma = \gamma \prod_{i=k}^1 \beta_i^{-1} \delta^{(-1)^{i+1}} \beta_i.$$

Comme δ est séparante, nous savons que $\alpha(\delta) = 0$, et donc

$$\alpha\left(\prod_{i=k}^1 \beta_i^{-1} \delta^{(-1)^{i+1}} \beta_i\right) = \sum_{i=1}^k \alpha(\delta^{\pm 1}) = 0.$$

Ainsi nous pouvons écrire, en utilisant la formule (3.6) et le fait que f est normalisé (c'est-à-dire que $f(0, *) = f(*, 0) = 0$)

$$\lambda(T_\delta \gamma) = \lambda(\gamma) + \alpha(\gamma) \cdot \lambda\left(\prod_{i=k}^1 \beta_i^{-1} \delta^{(-1)^{i+1}} \beta_i\right).$$

Nous avons d'autre part pour toute courbe $\beta \in \pi$, par la formule pour la conjugaison (3.8)

$$\begin{aligned} \lambda(\beta^{-1}\delta\beta) &= \lambda(\beta^{-1}) + \alpha(\beta^{-1}) \cdot \lambda(\delta) - \underbrace{\alpha(\delta) \cdot \lambda(\beta^{-1})}_{\lambda(\beta^{-1})} + \underbrace{B(\alpha(\beta^{-1}), \alpha(\delta))}_0 \\ &= \alpha(\beta^{-1}) \cdot \lambda(\delta) \end{aligned}$$

Maintenant, une récurrence immédiate montre que

$$\begin{aligned} \lambda\left(\prod_{i=k}^1 \beta_i^{-1} \delta^{(-1)^{i+1}} \beta_i\right) &= \sum_{i=1}^k \lambda\left(\beta_i^{-1} \delta^{(-1)^{i+1}} \beta_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^k (-1)^{i+1} \left(\alpha(\beta^{-1}) \cdot \lambda(\delta)\right) \end{aligned}$$

d'où le résultat. \square

Remarque 3.3.8. Ce dernier résultat montre que l'action d'un twist de Dehn le long d'une courbe séparante ne dépend que de l'action de A sur C , et pas du tout du cocycle $A^2 \rightarrow C$. En particulier, l'action d'un twist de Dehn autour d'une courbe séparante est triviale dès que l'action de A est triviale (comme pour Nil par exemple, et en fait dès que G est nilpotent d'ordre 2). Autrement dit, d'après Brown [7], l'action du noyau de Johnson ne dépend que du choix d'un élément de $H^1(A; C)$, et pas de celui d'un élément de $H^2(A; C)$.

Corollaire 3.3.9. *Si G est métabélien et 2-nilpotent, alors un élément du noyau de Johnson agit comme l'identité sur $\mathfrak{X}(\pi; G)$.*

3.3.1 Lien avec les extensions d'algèbres de Lie

Rappelons (voir [27]) que l'extension (2.1) donne lieu à une extension de l'algèbre de Lie \mathfrak{a} de A par \mathfrak{c} (l'algèbre de Lie de C) :

$$0 \rightarrow \mathfrak{c} \xrightarrow{i} \mathfrak{g} \xrightarrow{p} \mathfrak{a} \rightarrow 0. \quad (3.12)$$

Notons φ la représentation de A dans $\text{Aut}(C)$ déterminée par cette extension. La représentation de \mathfrak{a} dans \mathfrak{c} est alors la différentielle de φ , notée $d\varphi : \mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{c})$. En écrivant $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{c}$ en tant qu'espace vectoriel, nous obtenons la formule suivante pour le crochet de Lie dans \mathfrak{g} . Pour $X, X' \in \mathfrak{a}$ et $Y, Y' \in \mathfrak{c}$,

$$[X + Y, X' + Y'] = \omega(X, X') + d\varphi(X)(Y') - d\varphi(X')(Y). \quad (3.13)$$

Ici, ω désigne un cocycle de $C^2(\mathfrak{a}; \mathfrak{c}) = \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\wedge^2 \mathfrak{a}; \mathfrak{c})$ déterminé de la façon suivante. Soit σ une section linéaire de \mathfrak{p} (que nous utilisons implicitement pour écrire $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{c}$). Alors

$$\forall X, X' \in \mathfrak{a} \quad \omega(X \wedge X') = i^{-1} \left([\sigma(X), \sigma(X')] - \sigma([X, X']) \right).$$

Si $s : A \rightarrow G$ est une section lisse de p telle que σ est la différentielle de s , nous pouvons écrire un élément de G comme (c, a) en identifiant G à $C \times A$ (en tant qu'ensemble). En prenant maintenant $X + Y, X' + Y' \in \mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{c}$, et

en posant $(c(t), a(t)) = \exp(t(X + Y))$ et $(c'(t), a'(t)) = \exp(t(X' + Y'))$, nous avons facilement que $(c(t), 1) = \exp(tY)$ et $(c'(t), 1) = \exp(tY')$. En utilisant maintenant la formule bien connue

$$\exp(tX) \exp(tY) = \exp\left(t(X + Y) + \frac{t^2}{2}[X, Y] + \mathcal{O}(t^3)\right) \quad (3.14)$$

nous pouvons voir facilement que le crochet de Lie dans \mathfrak{g} est donné par

$$[X + Y, X' + Y'] = \mathfrak{i} \left(\frac{d^2}{dt^2} \Big|_{t=0} \left(e^{t(X+Y)} e^{t(X'+Y')} e^{-t(X+Y)} e^{-t(X'+Y')} \right) \right) \quad (3.15)$$

Un calcul direct donne une formule pour les commutateurs dans G , explicitement :

$$(c, a)(c', a')(c, a)^{-1}(c', a')^{-1} = \left((c - \varphi(a')(c)) - (c' - \varphi(a)(c')) + B(a, a'), 1 \right)$$

Un calcul direct, utilisant le fait $(0, a(t)) = \exp(-tY) \exp(t(X + Y))$ et de nouveau la formule (3.14) montre maintenant que

$$\begin{aligned} d\varphi(X)(Y') &= \mathfrak{i} \left(\frac{d^2}{dt^2} \Big|_{t=0} \varphi(a(t))(c'(t)) \right), \\ d\varphi(X')(Y) &= \mathfrak{i} \left(\frac{d^2}{dt^2} \Big|_{t=0} \varphi(a'(t))(c(t)) \right), \\ \omega(X \wedge X') &= \frac{1}{2} \mathfrak{i} \left(\frac{d^2}{dt^2} \Big|_{t=0} B(a(t), a'(t)) \right). \end{aligned}$$

Chapitre 4

Structure sur la variété des caractères

4.1 Introduction

Nous travaillons dans le cadre d'une extension de groupes de Lie abéliens. Plus précisément, soient A et C des groupes de Lie abéliens. Nous considérons l'extension de A par C (comme (2.1))

$$0 \rightarrow C \xrightarrow{i} G \xrightarrow{p} A \rightarrow 1.$$

où C sera noté additivement et A multiplicativement. Rappelons (voir par exemple [7]) qu'une telle extension est déterminée par la donnée d'une action de A sur C , dont le morphisme correspondant sera noté $\varphi : A \rightarrow \text{Aut}(C)$, et un élément de $H^2(A; C)$ où la structure de A -module sur C est donnée par l'action. Si f est un cocycle $A^2 \rightarrow C$ qui représente cette classe, nous noterons B l'antisymétrisé de f . Notons que B ne dépend pas du choix du cocycle f , et en particulier B est lisse.

Soit maintenant une surface fermée orientée S . La variété des caractères de S dans G est par définition le quotient de $\text{Hom}(\pi_1(S); G)$ par l'action par conjugaison de G . Nous noterons $\mathfrak{X}(S; G)$ cet espace, ou $\mathfrak{X}(G)$ s'il n'y a pas d'ambiguïté.

En général, il ne s'agit pas d'une variété lisse, mais en nous restreignant aux classes d'équivalence de morphismes dont le centralisateur est de dimension minimale $\mathfrak{X}(G)$ est lisse (mais en général non séparée). Nous savons, grâce à Goldman [18], que l'espace tangent en une classe $[\rho]$ est $H^1(\pi_1(S); \mathfrak{g}_{\text{Ad}(\rho)})$ où $\mathfrak{g}_{\text{Ad}(\rho)}$ désigne l'algèbre de Lie de G munie de l'action de $\pi_1(S)$ donnée par la composition de $\rho \in [\rho]$ avec la représentation adjointe de G sur \mathfrak{g} .

4.2 Structure lisse

Nous supposons dans cette section que G est métabelien et 2-nilpotent, c'est-à-dire que l'action de A sur C est triviale. Cela implique en particulier que C est central dans G . Comme précédemment, nous nous restreignons aux représentations dont le centralisateur dans G est de dimension minimale, dont l'en-

semble est noté (suivant Goldman [18]) $\text{Hom}(\pi; G)^-$. Cependant, nous supposons de plus que l'image par p de ce centralisateur est discrète dans A . Étudions d'abord la fibre au-dessus d'un élément $\alpha \in \text{Hom}(\pi; A)^- = p_*(\text{Hom}(\pi; G)^-)$. Soit donc $\rho \in p_*^{-1}\alpha$. Écrivons $\rho = (\lambda, \alpha)$ (λ dépend ici du choix d'une section ensembliste $A \rightarrow G$). Un calcul direct utilisant le fait que ρ est un morphisme montre que pour tous $\gamma_1, \gamma_2 \in \pi$, λ vérifie

$$\lambda(\gamma_1\gamma_2) = \lambda(\gamma_1) + \lambda(\gamma_2) + f(\alpha(\gamma_1), \alpha(\gamma_2)) \quad (4.1)$$

où f désigne le cocycle $A^2 \rightarrow G$ choisi précédemment (et qui correspond à la section choisie).

Lemme 4.2.1. $p_*^{-1}\alpha$ est un espace affine dirigé par $\text{Hom}(\pi; C) = H^1(\pi; C)$.

Remarque 4.2.2. Ici, comme $H^1(\pi; C)$ n'est pas un espace vectoriel mais seulement un \mathbb{Z} -module, nous entendons par espace affine un ensemble sur lequel le \mathbb{Z} -module $H^1(\pi; C)$ agit fidèlement et transitivement.

Démonstration. Il est clair que $p_*^{-1}\alpha$ est l'ensemble des applications $\lambda : \pi \rightarrow C$ qui vérifient (4.1) (cela permet de définir un morphisme $\rho = (\lambda, \alpha)$, et de plus le centralisateur de ρ ne dépend que de $p_*\rho = \alpha$). Maintenant, si λ désigne un élément de $\text{Hom}(\pi; C)$, alors il est clair que pour tout $\lambda \in p_*^{-1}\alpha$, $\lambda + \bar{\lambda}$ vérifie encore (4.1), et que cela définit bien une action. De plus, cette action est clairement fidèle (et même libre).

Pour vérifier que cette action est transitive, il suffit de remarquer que si $\lambda_1, \lambda_2 \in p_*^{-1}\alpha$, alors $\lambda_1 - \lambda_2$ est un morphisme de groupes. \square

Remarque 4.2.3. Si nous ne supposons pas que G est nilpotent, la fibre au-dessus de α sera un espace affine de direction $Z_\alpha^1(\pi; C)$, le groupe des 1-cocycles tordus par α . Cela correspond à l'ensemble des applications $\lambda : \pi \rightarrow C$ vérifiant pour $\gamma_1, \gamma_2 \in \pi$

$$\lambda(\gamma_1\gamma_2) = \lambda(\gamma_1) + \varphi(\alpha(\gamma_1))(\lambda(\gamma_2)) + f(\alpha(\gamma_1), \alpha(\gamma_2)).$$

Dans le cas nilpotent, l'espace des cobords est réduit à $\{0\}$, ce qui nous permet d'identifier l'espace des cocycles à la cohomologie.

Étudions maintenant l'action de G sur la fibre au-dessus de α par conjugaison.

Lemme 4.2.4. L'action de G sur $p_*^{-1}\alpha$ se réduit à une action de A , c'est-à-dire que l'image par $g \in G$ d'un élément λ de la fibre ne dépend que de $p(g) \in A$.

Démonstration. Soit $g = (c, a)$ un élément de G (identifié encore une fois à $C \times A$ en tant qu'ensemble, à l'aide d'une section fixée). Soit $\rho = (\lambda, \alpha)$ un élément de la fibre au-dessus de α . Pour tout $\gamma \in \pi$, nous avons

$$\begin{aligned} g\rho(\gamma)g^{-1} &= (c, a) (\lambda(\gamma), \alpha(\gamma)) (c, a)^{-1} \\ &= (c + \lambda(\gamma) + f(a, \alpha(\gamma)), a\alpha(\gamma)) (-c - f(a, a^{-1}), a^{-1}) \\ &= (\lambda(\gamma) + f(a, \alpha(\gamma)) - f(a, a^{-1}) + f(a\alpha(\gamma), a^{-1}), \alpha(\gamma)) \end{aligned}$$

Mais en utilisant le fait que f est un cocycle réduit, nous obtenons

$$f(\alpha(\gamma)a, a^{-1}) = f(a, a^{-1}) - f(\alpha(\gamma), a),$$

et la commutativité nous permet de remplacer dans l'égalité précédente pour finalement obtenir

$$(g \cdot \lambda)(\gamma) = \lambda(\gamma) + B(p(g), \alpha(\gamma)). \quad (4.2)$$

Le résultat suit alors directement. \square

Proposition 4.2.5. *Soit $\alpha \in \text{Hom}(\pi; A)^-$. L'action de A sur $p_*^{-1}\alpha$ est localement libre.*

Démonstration. Soit $\lambda \in p_*^{-1}\alpha$, et soit $a \in A$. En utilisant la formule (4.2), nous voyons que $a \cdot \lambda = \lambda$ si et seulement si $B(a, \alpha(\gamma)) = 0$ pour tout $\gamma \in \pi$. Cela est équivalent à dire que a (plus précisément que tout relevé de a dans G) commute avec tous les éléments de l'image du morphisme $\rho = (\lambda, \alpha)$. Ainsi, le sous-groupe isotrope de A associé à λ est exactement $p(Z_G(\rho))$ la projection dans A du centralisateur de l'image de ρ . Or nous avons supposé que ce sous-groupe de A était discret. \square

Ainsi, nous avons sur la fibre au-dessus de α une action libre du groupe $A/p(Z_G(\rho))$, où ρ désigne n'importe quel morphisme $\pi \rightarrow G$ qui relève α (c'est-à-dire tel que $p \circ \rho = \alpha$). Fixons $\alpha \in \text{Hom}(\pi; A)^-$, et notons $S = S_\alpha$ le stabilisateur de n'importe quel élément de $p_*^{-1}\alpha$ (c'est un sous-groupe de A).

Étudions un exemple : dans Nil/\mathbb{Z} , regardons la fibre au-dessus de la représentation $\alpha : \pi = \pi_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$\alpha(a_1) = \alpha(b_1) = (1, 1), \quad \alpha(a_2) = (\sqrt{2}, 0), \quad \alpha(b_2) = (0, \sqrt{2}).$$

Vérifions d'abord qu'il s'agit bien d'une représentation : nous avons

$$\begin{aligned} B(\alpha(a_1), \alpha(b_1)) + B(\alpha(a_2), \alpha(b_2)) &= 1 \times 1 - 1 \times 1 + \sqrt{2} \times \sqrt{2} - 0 \times 0 \\ &= 2 \\ &\equiv 0 \pmod{\mathbb{Z}}. \end{aligned}$$

Déterminons maintenant la projection du centralisateur de cette représentation. D'abord la projection du centralisateur de $(1, 1)$ dans G est l'ensemble des couples (x, y) tels que

$$B((1, 1), (x, y)) \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}.$$

Maintenant, le centralisateur de $(\sqrt{2}, 0)$ est l'ensemble des couples (x, y) tels que

$$B((\sqrt{2}, 0), (x, y)) \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow y\sqrt{2} \in \mathbb{Z}$$

et de même, le centralisateur de $(0, \sqrt{2})$ est l'ensemble des (x, y) tels que $x\sqrt{2}$ est entier. L'intersection des deux derniers ensembles est le \mathbb{Z} -sous-module de \mathbb{R}^2 engendré par $(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$ et $(0, \frac{\sqrt{2}}{2})$. Il s'agit du module libre de rang 1 engendré par $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$, donc le quotient $\mathbb{R}^2/p(Z_G(\rho))$ est le produit d'un cercle et d'une droite. En particulier, il n'est pas compact, et donc l'action de A/S sur $p_*^{-1}\alpha$ ne peut pas être propre.

Remarquons tout de même qu'il existe des cas où l'action est propre : si α est défini par

$$\alpha(a_1) = (1, 1), \quad \alpha(b_1) = (-1, 1), \quad \alpha(a_i) = \alpha(b_i) = 0 \quad \forall i \geq 2,$$

alors l'image du centralisateur dans $A = \mathbb{R}^2$ est un sous-module libre de rang 2, engendré par $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ et $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$. Alors A/S est compact, et donc son action est nécessairement propre.

Attardons nous sur le cas où C est simplement connexe. Dans ce cas, S_α est trivial pour tout α . En effet, dans ce cas le centralisateur d'un élément de G est connexe. Pour voir cela, prenons $h \in G$, et $g \in Z_G(h)$. Comme G est connexe et nilpotent, nous pouvons écrire $g = \exp(X)$ et $h = \exp(Y)$ avec $X, Y \in \mathfrak{g}$. Nous cherchons à montrer que $\exp(tX) \in Z_G(h)$ pour $t \in [0, 1]$. Nous avons pour tous $s, t \in \mathbb{R}$

$$\exp(tX) \exp(sY) \exp(-tX) = \exp(sY + st[X, Y])$$

puisque \mathfrak{g} est nilpotente de classe 2 : $[\mathfrak{g}, [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]] = 0$ (sinon il y aurait des termes de plus haut degré en X, Y). En prenant $s = 1$, nous voyons donc qu'il suffit de vérifier que $[X, Y] = 0$. Or par hypothèse, $ghg^{-1} = h$, c'est-à-dire

$$\exp(Y + [X, Y]) = \exp(Y)$$

donc $\exp([X, Y]) = 1 \in G$. Mais $[X, Y] \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{c}$, et donc $\exp([X, Y]) \in C$. Comme C est simplement connexe et abélien, l'exponentielle est un difféomorphisme $\mathfrak{c} \rightarrow C$, et donc $[X, Y] = 0$. Nous en déduisons que $\exp(tX)h \exp(-tX) = h$ et donc $\exp(tX) \in Z_G(h)$ pour tout t . Maintenant, nous avons fait l'hypothèse que S_α est discret dans A , et comme il est connexe (en tant qu'intersection de connexes qui ont un point commun : $1 \in A$) ce ne peut être que le groupe trivial. Autrement dit, si C est simplement connexe alors l'action de A sur $p_*^{-1}\alpha$ est libre.

Il nous reste maintenant à étudier la propriété de cette action. Mais dans le cas où C est simplement connexe, il s'agit d'une action par translation sur un espace affine (réel), donc la propriété est immédiate.

Étudions la topologie du quotient $F_\alpha = p_*^{-1}\alpha/A$. Nous savons déjà que cela revient à étudier le quotient du groupe de Lie abélien $H^1(\pi; C)$ par le sous-groupe $\text{Im}(B(\cdot, \alpha))$. Notons pr la projection canonique de $p_*^{-1}\alpha$ sur F_α . Nous noterons d'autre part $\overline{F_\alpha}$ le quotient de $H^1(\pi; C)$ par l'adhérence de $\text{Im}(B(\cdot, \alpha))$, ou de manière équivalente l'ensemble des fermetures des orbites dans $p_*^{-1}\alpha$ sous l'action de A . Enfin, \overline{pr} désignera la projection $H^1(\pi; C) \rightarrow \overline{F_\alpha}$.

Proposition 4.2.6. *La topologie sur $\overline{F_\alpha}$ est exactement la topologie initiale associée à la projection naturelle $F_\alpha \rightarrow \overline{F_\alpha}$.*

Démonstration. Notons φ la projection $F_\alpha \rightarrow \overline{F_\alpha}$. Nous devons montrer que si $U \subset F_\alpha$, il existe un ouvert $V \subset \overline{F_\alpha}$ tel que $U = \varphi^{-1}(V)$. Soit donc U un ouvert de F_α . Notons $\tilde{V} = pr^{-1}(U) \subset H^1(\pi; C)$. Son complémentaire, noté F , est un fermé de $H^1(\pi; C)$. De plus, pour tout $\lambda \in F$, $\lambda + \text{Im}(B(\cdot, \alpha)) \subset F$ par construction, et comme F est fermé nous avons de plus $\lambda + \overline{\text{Im}(B(\cdot, \alpha))} \subset F$. Ainsi, nous en déduisons que \tilde{V} contient également l'adhérence des orbites qu'il contient. Notons maintenant $V = \overline{pr}(\tilde{V})$. Alors

$$\varphi^{-1}(V) = pr(\overline{pr}^{-1}(V)) = U$$

ce qui donne la conclusion. \square

Ce que dit la proposition précédente, c'est que la topologie de F_α ne "voit" que $\overline{F_\alpha}$. Remarquons d'ailleurs que $\overline{F_\alpha}$ est une variété lisse séparée (c'est le quotient d'un groupe de Lie par un sous-groupe fermé).

Intéressons nous maintenant à la structure de la projection dans $\text{Hom}(\pi; A)$. Dans le cas particulier du groupe de Heisenberg quotienté par un sous-groupe discret $G = \text{Nil}/Z$, nous savons que les composantes connexes sont classifiées par Z (qui est le groupe fondamental de G). La théorie des quadriques montre que les composantes connexes de $\text{Hom}(\pi; \mathbb{R}^2)^-$ correspondant à un élément *non trivial* de Z sont homéomorphes au produit d'une sphère \mathbb{S}^{2g-1} et d'un espace euclidien \mathbb{R}^{2g} .

Une autre manière de voir ces composantes connexes est de les voir comme des espaces homogènes. En effet, nous avons vu que $\text{Sp}(2g, \mathbb{R})$ agit transitivement sur les composantes connexes, qui sont les lignes de niveau pour la forme symplectique usuelle sur \mathbb{R}^{2g} . Maintenant, considérons un élément (u, v) de $\mathbb{R}^{4g} = \mathbb{R}^{2g} \times \mathbb{R}^{2g}$ avec $\omega(u, v) = n \neq 0$. Son stabilisateur pour l'action de $\text{Sp}(2g, \mathbb{R})$ (qui, rappelons le, agit diagonalement sur $\mathbb{R}^{2g} \times \mathbb{R}^{2g}$) est alors isomorphe à $\text{Sp}(2g-2, \mathbb{R})$. Pour voir cela, il suffit de compléter (u, v) en une base symplectique de \mathbb{R}^{2g} (quitte à renormaliser u et v). Ainsi, si $M \in \text{Sp}(2g, \mathbb{R})$ fixe u et v , alors elle fixe également le plan engendré par ces deux vecteurs, mais il n'y a pas de contrainte sur les autres sous-espaces dans la décomposition de \mathbb{R}^{2g} en plans symplectiques. Donc nous avons montré que les composantes connexes de $\text{Hom}(\pi; \mathbb{R}^2)^-$ correspondant à des niveaux non nuls est un espace homogène, identifié à $\text{Sp}(2g, \mathbb{R})/\text{Sp}(2g-2, \mathbb{R})$.

Dans ce cas, nous pouvons également expliciter l'action du Mapping Class Group sur $\text{Hom}(\pi; \mathbb{R}^2)$. Tout d'abord, remarquons que comme \mathbb{R}^2 est un groupe abélien, $\text{Hom}(\pi; \mathbb{R}^2)$ est naturellement isomorphe à $H^1(\pi; \mathbb{R}^2) \simeq H^1(S; \mathbb{R}^2)$ (grâce au théorème des coefficients universels). Nous retrouvons donc l'action du Mapping Class Group sur l'homologie (par la naturalité des isomorphismes).

Comme nous étudions ici un exemple, nous pouvons cependant calculer directement cette action. Rappelons que nous avons identifié $\text{Hom}(\pi; \mathbb{R}^2)$ à $(\mathbb{R}^2)^{2g}$ en associant à un morphisme les images des générateurs de π . Maintenant, l'action d'un élément de $\text{Mod}(S) \subset \text{Out}(\pi)$ doit clairement respecter la forme bilinéaire B , qui est la forme symplectique de \mathbb{R}^{2g} .

Chapitre 5

Structure du quotient

5.1 Structure topologique

Fixons les notations : G est un groupe nilpotent de classe 2, et rentre dans la suite exacte suivante

$$0 \rightarrow C \rightarrow G \xrightarrow{p} A \rightarrow 1$$

où C est noté additivement et G et A sont notés multiplicativement. Rappelons que comme G est 2-nilpotent, C est central dans G , et donc l'action de A sur C est triviale. Il ne reste alors qu'un cocycle $f : A^2 \rightarrow C$, supposé normalisé (i.e. $f(1, *) = f(*, 1) = 0$), qui correspond au choix d'une section de p , et donc d'une écriture (ensembliste) $G = C \times A$. Avec cette écriture, le produit de deux éléments de G s'écrit :

$$(c, a) \cdot (c', a') = (c + c' + f(a, a'), aa'). \quad (5.1)$$

Si l'on note B l'antisymétrisé de f , alors B est \mathbb{Z} -bilinéaire, et est en réalité la formule des commutateurs. En particulier, comme C est le groupe dérivé de G , B est surjective de A^2 dans C . Nous garderons en tête l'exemple du quotient du groupe de Heisenberg par un sous-groupe discret : $A = \mathbb{R}^2$, $C = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ et $f((x, y), (x', y')) = xy' \pmod{\mathbb{Z}}$.

Dans la suite, π désigne le groupe fondamental d'une surface fermée orienté S de genre $g \geq 1$. Rappelons que G agit sur $\text{Hom}(\pi; G)$ par conjugaison, mais que la projection de cette action dans $\text{Hom}(\pi; A)$ est triviale : si $\rho : \pi \rightarrow G$ et $g \in G$, alors pour tout $\gamma \in \pi$

$$p(g\rho(\gamma)g^{-1}) = p(g)p(\rho(\gamma))p(g)^{-1} = p(\rho(\gamma)).$$

Ainsi, l'action de G préserve les fibres de p .

Étudions la fibre de p_* au-dessus de $\alpha \in \text{Hom}(\pi; A)$ fixé. Soit $\rho \in \text{Hom}(\pi; G)$ tel que $p_*\rho = \alpha$. Écrivons $\rho = (\lambda, \alpha)$. Comme ρ est un morphisme, pour tous $\gamma_1, \gamma_2 \in \pi$ nous avons $\rho(\gamma_1\gamma_2) = \rho(\gamma_1)\rho(\gamma_2)$, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} (\lambda(\gamma_1\gamma_2), \alpha(\gamma_1\gamma_2)) &= (\lambda(\gamma_1), \alpha(\gamma_1)) \cdot (\lambda(\gamma_2), \alpha(\gamma_2)) \\ &= (\lambda(\gamma_1) + \lambda(\gamma_2) + f(\alpha(\gamma_1), \alpha(\gamma_2)), \alpha(\gamma_1)\alpha(\gamma_2)) \end{aligned}$$

et nous en déduisons

Proposition 5.1.1. *La fibre au-dessus de α s'identifie à l'ensemble des applications λ de π dans C qui vérifient pour tous $\gamma_1, \gamma_2 \in \pi$*

$$\lambda(\gamma_1\gamma_2) = \lambda(\gamma_1) + \lambda(\gamma_2) + f(\alpha(\gamma_1), \alpha(\gamma_2)). \quad (5.2)$$

Il s'agit d'un espace affine de direction $H^1(\pi; C)$ où π agit trivialement sur C (donc $H^1(\pi; C) = \text{Hom}(\pi; C)$).

Démonstration. Il est clair que $p_*^{-1}\alpha$ est l'ensemble des applications $\lambda : \pi \rightarrow C$ qui vérifient (5.2) (cela permet de définir un morphisme $\rho = (\lambda, \alpha)$, et de plus le centralisateur de ρ ne dépend que de $p_*\rho = \alpha$). Maintenant, si $\bar{\lambda}$ désigne un élément de $\text{Hom}(\pi; C)$, alors il est clair que pour tout $\lambda \in p_*^{-1}\alpha$, $\lambda + \bar{\lambda}$ vérifie encore (5.2), et que cela définit bien une action. De plus, cette action est clairement fidèle (et même libre).

Pour vérifier que cette action est transitive, il suffit de remarquer que si $\lambda_1, \lambda_2 \in p_*^{-1}\alpha$, alors $\lambda_1 - \lambda_2$ est un morphisme de groupes. \square

Cela permet en particulier d'identifier $p_*^{-1}\alpha$ à $H^1(\pi; C)$ en choisissant une origine.

Remarque 5.1.2. Si nous ne supposons pas que G est nilpotent, la fibre au-dessus de α sera un espace affine de direction $Z_\alpha^1(\pi; C)$, le groupe des 1-cocycles tordus par α . Cela correspond à l'ensemble des applications $\lambda : \pi \rightarrow C$ vérifiant pour $\gamma_1, \gamma_2 \in \pi$

$$\lambda(\gamma_1\gamma_2) = \lambda(\gamma_1) + \alpha(\gamma_1) \cdot (\lambda(\gamma_2)) + f(\alpha(\gamma_1), \alpha(\gamma_2)).$$

Dans le cas nilpotent, l'espace des cobords est réduit à $\{0\}$, ce qui nous permet d'identifier l'espace des cocycles à la cohomologie.

Ainsi, nous obtenons une application $L_\alpha : A \rightarrow p_*^{-1}\alpha$, $L_\alpha : a \mapsto B(a, \alpha)$ qui décrit l'action de G sur $p_*^{-1}\alpha$.

Écrivons maintenant les formules explicites pour le groupe de Heisenberg quotienté par \mathbb{Z} , noté G dans ce qui suit. Nous allons identifier $\text{Hom}(\pi; A) = \text{Hom}(\pi; \mathbb{R}^2)$ à A^{2g} en associant à un morphisme l'image des générateurs habituels de π , notés $a_1, b_1, \dots, a_g, b_g$. D'autre part, nous voulons identifier $p_*^{-1}\alpha$ à C^{2g} . Pour cela, nous allons identifier $\lambda \in p_*^{-1}\alpha$ à $(\lambda(a_1), \dots, \lambda(b_g))$. Il faut cependant vérifier que cela suffit. Comme $p_*^{-1}\alpha$ est un espace affine de direction $H^1(\pi; C)$, nous pouvons vectorialiser : soit $\lambda_0 \in H^1(\pi; C)$. Alors $\lambda = \lambda_0 + (\lambda - \lambda_0)$, le terme entre parenthèses étant clairement un élément de $H^1(\pi; C = \text{Hom}(\pi; C))$. Alors la donnée des $\lambda(a_i), \lambda(b_i)$ (et des $\lambda_0(a_i), \lambda_0(b_i)$) nous permet de connaître $\lambda(a_i) - \lambda_0(a_i)$ et $\lambda(b_i) - \lambda_0(b_i)$, ce qui est suffisant pour reconstruire $\lambda - \lambda_0$, et donc λ .

Soit donc $\alpha \in \text{Hom}(\pi; A)$, $\alpha = ((x_1, y_1), (x'_1, y'_1), \dots, (x_g, y_g), (x'_g, y'_g))$ où $(x_i, y_i) = \alpha(a_i)$ et $(x'_i, y'_i) = \alpha(b_i)$ pour $i = 1, \dots, g$. En utilisant la formule (4.2), nous avons donc pour tout $\lambda = (\theta_1, \theta'_1, \dots, \theta_g, \theta'_g) \in p_*^{-1}\alpha$ et pour tout $a = (x, y) \in A$

$$a \cdot \lambda = (\theta_1 + xy_1 - x_1y, \theta'_1 + xy'_1 - x'_1y, \dots, \theta_g + xy_g - x_gy, \theta'_g + xy'_g - x'_gy).$$

L'application L_α s'écrit donc

$$L_\alpha : \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & H^1(\pi; C) \\ (x, y) & \longmapsto & (xy_1 - x_1y, \dots, xy'_g - x'_gy) \end{array} \quad (5.3)$$

5.2 Structure algébrique

Dans cette section, nous allons nous intéresser exclusivement au groupe de Heisenberg Nil, et à son quotient $\text{Nil}/\mathbb{Z} = G$. Nous allons plus précisément chercher les polynômes de l'espace des représentations $\text{Hom}(\pi; \text{Nil}/\mathbb{Z})$ qui sont invariants par l'action du groupe Nil/\mathbb{Z} (et en réalité par l'action de \mathbb{R}^2 , ce qui revient au même par la formule (4.2)). Rappelons cependant que si Nil est un groupe algébrique (c'est un sous-groupe de $\text{GL}(3; \mathbb{R})$ défini par des équations polynomiales), son quotient Nil/\mathbb{Z} n'est pas algébrique.

Nous allons identifier $\text{Hom}(\pi; G)$ à un sous-ensemble V de $(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{C})^{2g}$:

$$V = \left\{ \left((x_i, y_i, z_i), (x'_i, y'_i, z'_i) \right)_{1 \leq i \leq g} \left| \begin{array}{l} \sum_{i=1}^g x_i y'_i - x'_i y_i \in \mathbb{Z} \\ |z_i|^2 = 1 = |z'_i|^2 \end{array} \right. \right\}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, définissons l'ensemble algébrique affine (réel) V_n par

$$V_n = \left\{ \left((x_i, y_i, z_i), (x'_i, y'_i, z'_i) \right)_{1 \leq i \leq g} \left| \begin{array}{l} \prod_{k=-n}^n \left(k - \sum_{i=1}^g (x_i y'_i - x'_i y_i) \right) = 0 \\ |z_i|^2 = 1 = |z'_i|^2 \end{array} \right. \right\}.$$

Ainsi, chaque V_n est défini par un polynôme P_n dépendant seulement des variables X_i, Y_i, X'_i, Y'_i , et dont le degré en chacune de ces variables est $2n + 1$, et il est clair que V est la réunion (croissante) des V_n . Donc un polynôme qui s'annule sur tout V s'annule sur chaque V_n , c'est-à-dire que c'est un multiple de P_n , et donc son degré en chacune des variables X_i, Y_i, X'_i, Y'_i est au moins $2n + 1$ pour tout n ou 0. Nous en déduisons que tout polynôme qui s'annule sur V ne dépend pas des variables X_i, Y_i, X'_i, Y'_i . Une autre façon de voir cela est de dire que la projection de $\text{Hom}(\pi; G)$ dans $\text{Hom}(\pi; \mathbb{R}^2) \subset (\mathbb{R}^2)^{2g}$ est Zariski dense dans $\text{Hom}(\pi; \mathbb{R}^2)$.

En écrivant $z_i = (u_i, v_i)$ et $z'_i = (u'_i, v'_i)$ les coordonnées restantes, nous obtenons que l'anneau des polynômes sur V est

$$\begin{aligned} \mathbb{R}[V] &= \frac{\mathbb{R}[X_i, Y_i, U_i, V_i, X'_i, Y'_i, U'_i, V'_i, 1 \leq i \leq g]}{(U_i^2 + V_i^2 - 1, U'_i{}^2 + V'_i{}^2 - 1, 1 \leq i \leq g)} \\ &\simeq \mathbb{R}[T]^{\otimes 4g} \otimes \left(\mathbb{R}[U, V] / (U^2 + V^2 - 1) \right)^{\otimes 2g}. \end{aligned}$$

Dans notre identification, l'action d'un élément $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ correspond à la multiplication de z_k par $\exp(2i\pi(ay_k - bx_k))$. Donc un polynôme P sur V (c'est-à-dire un élément de $\mathbb{R}[V]$) est envoyé par (a, b) sur

$$\begin{aligned} (a, b) \cdot P &= P \left((X_k, Y_k, U_k \cos(2\pi(Y_k - bX_k)) - V_k \sin(2\pi(aY_k - bX_k)), \right. \\ &\quad \left. U_k \sin(2\pi(aY_k - bX_k)) + V_k \cos(2\pi(aY_k - bX_k)), \right. \\ &\quad \left. X'_k, Y'_k, U'_k \cos(2\pi(aY'_k - bX'_k)) - V'_k \sin(2\pi(aY'_k - bX'_k)), \right. \\ &\quad \left. U'_k \sin(2\pi(aY'_k - bX'_k)) + V'_k \cos(2\pi(aY'_k - bX'_k)) \right)_{1 \leq k \leq g}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Donc un polynôme $P \in \mathbb{R}[V]$ est invariant par l'action de \mathbb{R}^2 si et seulement si $aY_k - bX_k, aY'_k - bX'_k \in \mathbb{Z}$, ou P ne dépend pas des U_k, V_k, U'_k, V'_k . La première

possibilité étant clairement absurde (car il faudrait que les polynômes $aY_k - bX_k$ et $aY'_k - bX'_k$ soient constants, donc que $a = b = 0$), on en déduit que l'algèbre des polynômes G -invariants de V est $\mathbb{R}[X_k, Y_k, X'_k, Y'_k, 1 \leq k \leq g]$.

Remarque 5.2.1. Notons que l'image d'un polynôme par un élément $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ n'est en général pas un polynôme par la formule (5.4). En revanche, c'est une fonction analytique bien définie, donc l'action de \mathbb{R}^2 est plutôt à considérer sur l'anneau des séries entières (réelles) sur $(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{C})^{2g}$ (c'est-à-dire de rayon de convergence infini), et restreinte à l'anneau des polynômes (qui n'est donc pas stable par cette action).

5.3 Structure analytique

Nous nous intéressons cette fois aux fonctions analytiques sur $\text{Hom}(\pi; G)$, avec $G = \text{Nil}/\mathbb{Z}$. Nous allons une fois encore considérer $\text{Hom}(\pi; G)$ comme un sous-ensemble de $(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1)^{2g}$. Il est clair que le revêtement évident $(\mathbb{R}^3)^{2g} \rightarrow (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1)^{2g}$ est analytique, aussi nous allons travailler sur ce dernier espace. Les fonctions auxquelles nous allons donc nous intéresser sont donc les fonctions analytiques définies au voisinage de l'ensemble

$$W = \left\{ \left((x_i, y_i, z_i), (x'_i, y'_i, z'_i) \right)_{1 \leq i \leq g} \in \mathbb{R}^{6g} \mid \sum_{i=1}^g x_i y'_i - x'_i y_i \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Soit donc f une fonction analytique définie sur (un voisinage de) W . Fixons un point $p \in W$, alors pour tout vecteur $h = \left((x_i, y_i, z_i), (x'_i, y'_i, z'_i) \right)_{1 \leq i \leq g}$ dans un voisinage de 0, nous avons

$$f(p+h) = \sum_{k \geq 0} \left(\sum_{n_{x_1} + \dots + n_{z'_g} = k} a_{n_{x_1}, \dots, n_{z'_g}} x_1^{n_{x_1}} \dots z'_g{}^{n_{z'_g}} \right). \quad (5.5)$$

Pour tout point $p \in W$, nous pouvons trouver une suite de points $(p_n)_n$ dans W qui converge vers p et pour lesquels les orbites pour l'action de \mathbb{R}^2 sont denses dans les fibres. Comme f est en particulier continue, cela implique que f est constante dans les directions z_i, z'_i pour tout i en chaque p_n , et donc que dans (5.5) les $a_{n_{x_1}, \dots, n_{z'_g}}$ sont nuls dès que $n_{z_i} > 0$ ou $n_{z'_i} > 0$ pour un certain i . Alors f est constante sur la fibre passant par p .

Il est donc clair qu'une fonction analytique sur $\text{Hom}(\pi; G)$ doit être constante sur toutes les fibres (si f était une fonction analytique non constante sur une fibre, son tiré en arrière par le revêtement évoqué ci-dessus ne serait pas constant sur certaines fibres, ce qui est impossible d'après ce qui précède).

5.4 Fonctions continues

Soit $f : \text{Hom}(\pi; G) \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et G -invariante (nous restons dans le cadre $G = \text{Nil}/\mathbb{Z}$). Rappelons que l'application $p : G \rightarrow \mathbb{R}^2$ induit une fibration localement triviale $p_* : \text{Hom}(\pi; G) \rightarrow p_*(\text{Hom}(\pi; G)) \subset \text{Hom}(\pi; \mathbb{R}^2)$. Dans cette section, nous voulons montrer que la valeur de f en un point $\rho \in \text{Hom}(\pi; G)$ ne dépend que de la fibre de ρ , c'est-à-dire de sa projection $\alpha = p_*\rho$.

Soit donc $\alpha \in p_*(\text{Hom}(\pi; G))$. Nous cherchons à montrer que pour tous $\rho, \rho' \in p_*^{-1}\alpha$, $f(\rho) = f(\rho')$. Supposons dans un premier temps que l'orbite de tout point de $p_*^{-1}\alpha$ est dense dans $p_*^{-1}\alpha$. Comme f est G -invariante, elle est constante sur les orbites, et par continuité elle est constante sur la fibre au-dessus de α .

Maintenant, pour un α quelconque, donnons nous une suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers α , et telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, toute orbite de G est dense dans la fibre au-dessus de α_n . Soient $\rho, \rho' \in p_*^{-1}\alpha$. Nous pouvons choisir pour tout n des relevés ρ_n, ρ'_n de α_n tels que $\rho_n \rightarrow \rho$ et $\rho'_n \rightarrow \rho'$ (nous pouvons le faire car $\text{Hom}(\pi; G)$ est localement un produit, et nous pouvons supposer que toute la suite $(\alpha_n)_n$ est contenue dans un ouvert de trivialisations contenant α). Ainsi, par ce qui précède nous avons que pour tout n , $f(\rho_n) = f(\rho'_n)$, et donc par continuité $f(\rho) = f(\rho')$.

Ainsi nous avons montré que toute fonction invariante pour l'action de G et continue $\text{Hom}(\pi; G) \rightarrow \mathbb{R}$ est constante sur les fibres $p_*^{-1}\alpha$. Autrement dit, le morphisme d'algèbres naturel

$$p^* : \mathcal{C}(p_* \text{Hom}(\pi; G)) \longrightarrow \mathcal{C}(\text{Hom}(\pi; G))^G$$

est un isomorphisme, où pour un G -espace X , $\mathcal{C}(X)^G$ désigne l'algèbre des fonctions continues (à valeurs réelles) invariantes pour l'action de G .

5.5 Questions

Nous avons vu que dans le cas d'un groupe nilpotent de classe 2, le cas problématique est celui où le groupe dérivé (c'est-à-dire, avec les notations ci-dessus le groupe abélien C) n'est pas simplement connexe. En effet, la topologie du quotient $\text{Hom}(\pi; G)/G$ est essentiellement déterminée par sa projection dans $\text{Hom}(\pi; A)$ (c'est-à-dire que les fonctions continues à valeurs réelles sont les mêmes). Il nous faut donc étudier cette projection.

QUESTION. — De quelle(s) structure(s) pouvons-nous équiper $p_* \text{Hom}(\pi; A)$?

Notons que du coup, l'action du Mapping Class Group de S sur $\text{Hom}(\pi; A)$ revient à celle sur l'homologie, et que donc son action sur $p_* \text{Hom}(\pi; A)$ est une restriction de l'action du groupe symplectique $\text{Sp}(2g; \mathbb{Z})$ à un sous-ensemble.

Chapitre 6

Action des noyaux de Johnson

6.1 Noyaux de Johnson

Dans la suite, S désignera une surface fermée et orientée. Notons π son groupe fondamental. Rappelons que le *Mapping Class Group* de S , noté $\text{Mod}(S)$ s'identifie à un sous-groupe d'indice 2 de $\text{Out}(\pi) = \text{Aut}(\pi)/\text{Inn}(\pi)$. Nous noterons $\text{Out}^+(\pi)$ l'image de $\text{Mod}(\pi)$ dans $\text{Out}(\pi)$ (et nous confondrons fréquemment les deux notations lorsque le contexte est clair).

Notons par ailleurs, pour tout groupe G , $\Gamma_n G$ le n -ième terme de sa suite centrale descendante :

$$\Gamma_1 G = G, \quad \Gamma_{n+1} G = [G, \Gamma_n G].$$

Il est facile de voir que la projection naturelle $\pi \rightarrow \pi/\Gamma_{n+1}\pi$ donne lieu à un morphisme $\text{Out}^+(\pi) \rightarrow \text{Out}(\pi/\Gamma_{n+1}\pi)$, dont le noyau est appelé n -ième *noyau de Johnson*, et sera noté $\mathcal{K}_n(S)$. Remarquons que $\mathcal{K}_1(S)$ est le groupe de Torelli $\mathcal{S}(S)$ (les classes d'homéomorphismes qui agissent trivialement sur l'homologie $H_1(S) = \pi/[\pi, \pi]$), et que $\mathcal{K}_2(S)$ est le noyau de Johnson classique.

6.2 Action du Mapping Class Group sur l'espace des représentations

Dans la suite, G désignera un groupe de Lie (réel) nilpotent, c'est-à-dire tel que $\Gamma_n G$ est trivial pour un certain n . Rappelons que l'ordre de nilpotence de G est l'entier n_0 tel que $\Gamma_{n_0} G \neq \{1\}$ et $\Gamma_{n_0+1} G = \{1\}$.

L'espace des représentations de S dans G est l'ensemble $\text{Hom}(\pi; G)$ des morphismes de π dans G , muni de la topologie compacte-ouverte (π étant discret). Il est clair que $\text{Aut}(\pi)$ opère (à droite) sur cet espace par pré-composition. Nous avons également une action (à gauche) de G dessus par conjugaison (autrement dit, G agit par post-composition avec un automorphisme intérieur). Il est également clair que l'action de $\text{Aut}(\pi)$ sur le quotient $\text{Hom}(\pi; G)/G$ se factorise en une action de $\text{Out}(\pi)$ sur cet espace, et donc par restriction nous avons une action de $\text{Mod}(S)$ sur $\text{Hom}(\pi; G)/G$.

Proposition 6.2.1. *Si G est n_0 -nilpotent, alors pour tout $n \geq n_0$ le n -ième noyau de Johnson $\mathcal{K}_n(S)$ agit trivialement sur $\text{Hom}(\pi; G)/G$.*

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\Gamma_{n+1}G$ est trivial. Nous voulons montrer que pour tout $[\rho] = G \cdot \rho \in \text{Hom}(\pi; G)/G$, et pour tout $[\varphi] \in \mathcal{K}_n(S)$, $[\rho] \cdot [\varphi] = [\rho]$.

Soient $\varphi \in \text{Aut}(\pi)$ et $\rho \in \text{Hom}(\pi; G)$ des représentants de $[\varphi]$ et $[\rho]$ respectivement. Par définition, pour tout $\gamma \in \pi$, $[\rho] \cdot [\varphi](\gamma) = [\rho \circ \varphi(\gamma)] \in G/\text{Inn}(G)$. Notons $\bar{\varphi}$ l'image de φ dans $\text{Aut}(\pi/\Gamma_{n+1}\pi)$.

Dire que $[\varphi]$ est dans $\mathcal{K}_n(S)$ revient à dire que $[\bar{\varphi}] = \text{Id}$, c'est-à-dire que pour tout $\gamma \in \pi$, nous avons $[\varphi(\gamma)\gamma^{-1}] \in [\Gamma_{n+1}\pi] \subset \pi/\text{Inn}(\pi)$, et donc il existe $\gamma_0 \in \pi$ tel que

$$\gamma_0 \varphi(\gamma) \gamma^{-1} \gamma_0^{-1} \in \Gamma_{n+1}\pi.$$

Donc pour tout $\rho \in \text{Hom}(\pi; G)$, vu que $\Gamma_{n+1}G = \{1\}$, nous avons

$$\rho(\gamma_0) \rho \circ \varphi(\gamma) \rho(\gamma)^{-1} \rho(\gamma_0)^{-1} = 1. \quad (6.1)$$

Ainsi, dans le quotient $\text{Hom}(\pi; G)/G$, nous en déduisons que $[\varphi \circ \rho] = [\rho]$. \square

Remarque 6.2.2. La formule (6.1) montre en fait un résultat légèrement plus fort : si $\varphi \in \text{Aut}(\pi)$ relève un élément de $\mathcal{K}_n(S)$, avec n suffisamment grand, alors φ agit trivialement sur $\text{Hom}(\pi; G)$.

Corollaire 6.2.3. *Soit G un groupe de Lie nilpotent. Alors pour tout $n \geq 1$, $\mathcal{K}_n(S)$ agit trivialement sur $\text{Hom}(\pi; G/\Gamma_{n+1}G)/G$.*

Définissons maintenant l'ensemble des représentations de niveau n par

$$\mathfrak{X}_n := \text{Hom}\left(\pi; \frac{G}{\Gamma_{n+1}G}\right) \Big/ G.$$

Nous pouvons considérer sur \mathfrak{X}_n l'action du groupe abélien $\mathcal{K}_{n-1}(S)/\mathcal{K}_n(S)$. Comme G est nilpotent, nous avons de plus que pour n assez grand (c'est-à-dire plus grand que l'ordre de nilpotence de G), $\mathfrak{X}_n = \mathfrak{X} := \text{Hom}(\pi; G)/G$.

Si G est un groupe de Lie quelconque, et N un sous-groupe (fermé) distingué de G , et si N est nilpotent, nous avons une inclusion

$$\text{Hom}(\pi; N) \Big/ G \hookrightarrow \text{Hom}(\pi; G) \Big/ G$$

induite par l'inclusion $N \rightarrow G$, et donc une application (non nécessairement injective)

$$\text{Hom}(\pi; N) \Big/ N \longrightarrow \text{Hom}(\pi; G) \Big/ G$$

De plus, cette application commute clairement avec l'action de $\text{Mod}(S)$, et en particulier avec celle de $\mathcal{K}_n(S)$ pour tout n . Ainsi par ce qui précède, pour n assez grand, l'image de $\text{Hom}(\pi; N)/N$ — qui est $\text{Hom}(\pi; N)/G$ — est fixe (point par point) sous l'action de $\mathcal{K}_n(S)$. Nous pouvons donc étudier l'action de $\mathcal{K}_n(S)$ en tout point de $\text{Hom}(\pi; N)/G$ sur l'espace tangent à $\mathfrak{X}(\pi; G)$.

Commençons au niveau des représentations. Soit donc $\rho : \pi \rightarrow N$ une représentation de π dans G dont l'image est contenue dans N . Considérons un chemin lisse ρ_t défini pour t dans un voisinage de 0, et tel que $\rho_0 = \rho$. Alors en écrivant pour tout $\gamma \in \pi$

$$\rho_t(\gamma) = \exp(tu(\gamma) + \mathcal{O}(t^2)) \rho(\gamma)$$

où u est un cocycle $\pi \rightarrow \mathfrak{g}$ pour l'action adjointe de ρ sur \mathfrak{g} , c'est-à-dire que pour tous $\gamma_1, \gamma_2 \in \pi$,

$$u(\gamma_1\gamma_2) = u(\gamma_1) + \text{Ad}(\rho(\gamma_1)) \cdot u(\gamma_2).$$

Alors pour $\varphi \in \text{Aut}(\pi)$ représentant un élément $[\varphi] \in \mathcal{K}_n(S)$, comme l'action sur ρ_t est donnée par

$$\begin{aligned} \rho_t \circ \varphi(\gamma) &= \exp(tu \circ \varphi(\gamma) + \mathcal{O}(t^2)) \rho \circ \varphi(\gamma) \\ &= \exp(tu \circ \varphi(\gamma) + \mathcal{O}(t^2)) \rho(\gamma) \end{aligned}$$

où le passage à la seconde ligne se fait en utilisant la remarque 6.2.2. Ainsi, au niveau des cocycles, l'action de $\mathcal{K}_n(S)$ sur l'espace tangent à $\mathfrak{X}(\pi; G)$ — identifié à $H^1(\pi; \mathfrak{g}_{\text{Ad} \rho})$ — obtenue en dérivant l'action de $\mathcal{K}_n(S)$ au point ρ est la pré-composition.

Revenons maintenant au cas où G est nilpotent. Rappelons que $G/\Gamma_{n+1}G$ est nilpotent. Nous voulons étudier l'action de \mathcal{K}_n sur $G/\Gamma_{n+1}G$, qui n'est pas triviale a priori.

Il y a une suite exacte pour tout n

$$1 \longrightarrow \Gamma_{n+1}G/\Gamma_{n+2}G \longrightarrow G/\Gamma_{n+2}G \longrightarrow G/\Gamma_{n+1}G \longrightarrow 1. \quad (6.2)$$

Ceci induit une application

$$\text{Hom}\left(\pi; G/\Gamma_{n+2}G\right) \longrightarrow \text{Hom}\left(\pi; G/\Gamma_{n+1}G\right).$$

Nous voulons ici déterminer plus précisément cette application, notamment son image et ses fibres.

Pour cela, nous pouvons supposer sans perte de généralité que $\Gamma_{n+2}G = 1$ (quitte à remplacer G par $G/\Gamma_{n+2}G$).

Proposition 6.2.4. *Soit $\alpha \in \text{Hom}(\pi; G/\Gamma_{n+1}G)$. Alors la fibre au-dessus de α dans $\text{Hom}(\pi; G)$ (qui peut être vide) s'identifie à l'ensemble des applications $\lambda : \pi \rightarrow \Gamma_k G$ qui vérifient*

$$\forall \gamma_1, \gamma_2 \in \pi, \quad \lambda(\gamma_1\gamma_2) = \lambda(\gamma_1) + \lambda(\gamma_2) + f(\alpha(\gamma_1), \alpha(\gamma_2))$$

où f est le 2-cocycle $G/\Gamma_{n+1}G \rightarrow \Gamma_n G$ qui définit l'extension 6.2.

6.3 Questions

L'idée ici serait d'étudier une action des quotients $\mathcal{K}_n(S)/\mathcal{K}_{n+1}(S)$ sur des espaces bien choisis (construits à partir de $\text{Hom}(\pi; G)/G$). Ainsi, nous pourrions obtenir une action du gradué $\bigoplus \mathcal{K}_n(S)/\mathcal{K}_{n+1}(S)$ sur $\text{Hom}(\pi; G)/G$, triviale à partir d'un certain rang. A priori, il ne s'agit que d'une action de groupe abélien, mais nous avons vu que la dérivée de l'action (en un point fixe) est à valeurs dans le groupe $H^1(\pi; \mathfrak{g}_{\text{Ad}})$, qui est inclus dans une algèbre de Lie graduée : $H^*(\pi; \mathfrak{g}_{\text{Ad}})$. Ainsi, une idée serait d'étudier l'action sur les $\text{Hom}(\pi; \Gamma_n G)$, qui fournissent naturellement des points fixes pour $\mathcal{K}_{n+1}(S)$.

Chapitre 7

Action dérivée

Dans ce chapitre, nous adaptons des idées de Long, présentes dans [30]. Dans cet article, il étudie l'action dérivée introduite dans [13] pour décrire des représentations linéaires des groupes de tresses. Il s'agit de déduire de l'action de B_n sur l'espace des représentations une famille de représentations linéaires, obtenue en dérivant l'action précédente en des points fixes. Dans ce cas, il retrouve notamment la représentation de Burau comme facteur de cette représentation.

Ici, nous allons reprendre ces idées pour les appliquer au groupe de Torelli, agissant sur la variété des caractères, dans le cas d'une surface à une composante de bord. Cette restriction nous permet de simplifier les identifications, notamment parce que le groupe de Torelli est effectivement (isomorphe à) un sous-groupe de $\text{Aut}(\pi)$.

7.1 Action dérivée

Soit S une surface compacte de genre $g \geq 2$, orientée avec zéro ou une composante de bord. Nous noterons dans la suite π son groupe fondamental, et H son premier groupe d'homologie à coefficients entiers :

$$\pi = \pi_1(S) = \begin{cases} \left\langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g \mid \prod_{i=1}^g [a_i, b_i] = 1 \right\rangle & \text{si } \partial S = \emptyset \\ \mathbb{F}_{2g}, \text{ le groupe libre à } 2g \text{ générateurs} & \text{si } \partial S \neq \emptyset \end{cases}$$

$$H = H_1(S) = \pi / [\pi, \pi]$$

où

$$[x, y] = xyx^{-1}y^{-1} \text{ et } [\pi, \pi] = \left\{ \prod_{i=1}^n [x_i, y_i] \mid \forall i \in \{1, \dots, n\}, x_i, y_i \in \pi \right\}.$$

Soit G un groupe de Lie. L'espace des représentations de S dans G , noté $\mathfrak{R}(S; G)$, est l'ensemble des morphismes de groupe de π dans G :

$$\mathfrak{R}(S; G) = \text{Hom}(\pi; G).$$

La variété des caractères $\mathfrak{X}(S; G)$ est le quotient de l'espace des représentations par la conjugaison dans G .

Le Mapping Class Group de S $\text{Mod}(S)$ agit sur $\mathfrak{X}(S; G)$ de la façon suivante :

$$\forall T \in \text{Mod}(S), \forall \rho \in \mathfrak{X}(S; G), \quad T \cdot \rho = \left(x \mapsto \rho(T^{-1}x) \right)$$

où nous avons identifié $\text{Mod}(S)$ à un sous-groupe de $\text{Aut}(\pi)$ par le théorème de Dehn-Nielsen-Baer (ou, dans le cas où S n'a aucune composante de bord, à un sous-groupe de $\text{Out}(\pi)$, auquel cas la formule ci-dessus est à comprendre dans le quotient $\mathfrak{X}(\pi; G)$).

Rappelons que la variété des caractères, quoique n'étant pas en général une variété, possède un espace tangent (issu de la fonction exponentielle, et plutôt à rapprocher du tangent de Zariski) :

$$\forall [\rho] \in \mathfrak{X}(S; G), \quad T_{[\rho]}\mathfrak{X}(S; G) := H^1(\pi; \mathfrak{g}_\rho)$$

où la cohomologie est ici la cohomologie de groupe de π , à valeurs dans \mathfrak{g} , l'algèbre de Lie de G , munie de la structure de π -module par la composition de ρ (un représentant quelconque de la classe $[\rho]$) avec l'action adjointe de G sur \mathfrak{g} .

Étant donné un sous-groupe Γ de $\text{Mod}(S)$, si $[\rho] \in \mathfrak{X}(S; G)$ est un point fixe de Γ pour cette action, c'est-à-dire si pour tout $T \in \Gamma$, $T \cdot \rho$ est conjugué à ρ , alors Γ agit également sur l'espace tangent $H^1(\pi; \mathfrak{g}_\rho)$. Cette action est donnée de la même façon au niveau des cocycles par la pré-composition par T :

$$\forall \varphi \in Z^1(\pi; \mathfrak{g}), \quad [T \cdot \varphi] = [\varphi \circ T^{-1}] \in H^1(\pi; \mathfrak{g}_\rho).$$

Ce que nous appellerons dans la suite *action dérivée* est donné par :

$$\forall \varphi \in Z^1(\pi; \mathfrak{g}), \quad \nu_\rho(T)([\varphi]) := [T \cdot \varphi] - [\varphi] = [\varphi \circ T^{-1} - \varphi].$$

Dans la suite nous allons nous intéresser au cas où Γ est le groupe de Torelli $\mathcal{I}(S)$, c'est-à-dire le sous-groupe des (classes d') homéomorphismes agissant trivialement sur l'homologie de S . Sauf mention explicite du contraire, nous allons également supposer que S a exactement une composante de bord, ce qui nous permet d'identifier $\text{Mod}(S)$ (et donc aussi $\mathcal{I}(S)$) à un sous-groupe de $\text{Aut}(\pi)$. Le but de ce qui suit sera de démontrer le théorème suivant.

Théorème 7.1.1. *Pour un choix convenable de groupe de Lie G , il existe des représentations $\rho : \pi \rightarrow G$ fixées par $\mathcal{I}(S)$ telles que le noyau de la représentation dérivée est exactement le noyau de Johnson.*

Autrement dit, la représentation dérivée contient autant d'informations que le morphisme de Johnson.

Avant cela, commençons par démontrer que, si G est un groupe nilpotent de classe 2, c'est-à-dire si $[G, G]$ est central dans G , alors

Proposition 7.1.2. *L'application $\nu_\rho : \mathcal{I}(S) \rightarrow \text{Hom}(H^1(\pi; \mathfrak{g}_\rho); H^1(\pi; \mathfrak{g}_\rho))$ est un morphisme de groupes, où ρ est fixé par $\mathcal{I}(S)$.*

Lemme 7.1.3. *Soit φ un cocycle de $Z^1(\pi; \mathfrak{g}_\rho)$. Alors $\nu_\rho(T)([\varphi])$ est une classe de cohomologie à valeurs dans $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.*

Avant de prouver ce lemme, remarquons que le fait, pour une classe de cohomologie, d'être à valeurs dans $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ est bien défini. Pour cela, il suffit de

nous assurer qu'un cobord est à nécessairement à valeurs dans $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Rappelons qu'un cobord est une application $\pi \rightarrow \mathfrak{g}$ de la forme

$$\gamma \in \pi \longmapsto \text{Ad}(\rho(\gamma)) \cdot U - U$$

pour un certain $U \in \mathfrak{g}$, et où Ad désigne l'action adjointe de G sur \mathfrak{g} . Nous avons donc seulement besoin, en réalité, de vérifier que

$$\forall g \in G, \forall U \in \mathfrak{g}, \quad \text{Ad}(g) \cdot U - U \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]. \quad (7.1)$$

En écrivant $g = \exp(V)$, nous savons que

$$\begin{aligned} \text{Ad}(g) \cdot U &= \text{Ad}(\exp(V)) \cdot U \\ &= e^{\text{ad}(V)} \cdot U \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{[V, [\dots, [V, U] \dots]]}{n!} \\ &= U + [V, U] \end{aligned}$$

puisque G est nilpotent de classe 2, et donc son algèbre de Lie \mathfrak{g} aussi :

$$[\mathfrak{g}, [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]] = \{0\}.$$

Démonstration du Lemme 7.1.3. Soit T un élément du groupe de Torelli, vu comme un sous-groupe de $\text{Aut}(\pi)$. Par définition, T^{-1} agit trivialement sur $H = \pi/[\pi, \pi]$, c'est-à-dire que pour tout $\gamma \in \pi$, il existe $n \in \mathbb{N}$ et des éléments $x_i, y_i \in \pi$, $i = 1, \dots, n$, tels que

$$T^{-1}\gamma = \gamma \prod_{i=1}^n [x_i, y_i]$$

Soit maintenant φ un cocycle de $Z^1(\pi; \mathfrak{g}_\rho)$, c'est-à-dire que

$$\forall x, y \in \pi \quad \varphi(xy) = \varphi(x) + \text{Ad}(\rho(x)) \cdot \varphi(y).$$

Alors d'après ce qui précède, et en gardant les mêmes notations, pour $\gamma \in \pi$,

$$\begin{aligned} \varphi(T^{-1}\gamma) &= \varphi\left(\gamma \prod_{i=1}^n [x_i, y_i]\right) \\ &= \varphi(\gamma) + \text{Ad}(\rho(\gamma)) \cdot \varphi\left(\prod_{i=1}^n [x_i, y_i]\right) \end{aligned}$$

Or si $x, y \in \pi$, un calcul direct montre que

$$\varphi([x, y]) = \varphi(x) - \text{Ad}(\rho(y)) \cdot \varphi(x) - (\varphi(y) - \text{Ad}(\rho(x)) \cdot \varphi(y)) \in [\pi, \pi]$$

En particulier, l'image par φ d'un commutateur est dans $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, qui est aussi le centre de \mathfrak{g} , et donc l'action adjointe est triviale dessus. Ainsi

$$\varphi(T^{-1}\gamma) = \varphi(\gamma) + \sum_{i=1}^n \varphi([x_i, y_i])$$

et donc

$$\varphi(T^{-1}\gamma) - \varphi(\gamma) = \sum_{i=1}^n \varphi([x_i, y_i]) \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}],$$

c'est-à-dire que $\nu_\rho(T)([\varphi])$ a un représentant à valeurs dans $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, et donc d'après la discussion précédente, $\nu_\rho(T)([\varphi])$ est à valeurs dans $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. \square

Lemme 7.1.4. Soient ρ un point fixe sous l'action de $\mathcal{S}(S)$, et $[\varphi] \in H^1(\pi; \mathfrak{g}_\rho)$ à valeurs dans $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Alors

$$\forall T \in \mathcal{S}(S), \quad \nu_\rho(T)(\varphi) = 0$$

Démonstration. Soit $\gamma \in \pi$. Alors, comme dans la démonstration du lemme précédent, il existe $n \in \mathbb{N}$ et $x_1, y_1, \dots, x_n, y_n \in \pi$ tels que

$$T^{-1}\gamma = \gamma \prod_{i=1}^n [x_i, y_i]$$

et donc

$$\varphi(T^{-1}\gamma) - \varphi(\gamma) = \sum_{i=1}^n \varphi([x_i, y_i]),$$

avec pour chaque $i \in \{1, \dots, n\}$,

$$\varphi([x_i, y_i]) = \varphi(x_i) - \text{Ad}(\rho(y_i)) \cdot \varphi(x_i) - \left(\varphi(y_i) - \text{Ad}(\rho(x_i)) \cdot \varphi(y_i) \right).$$

Mais maintenant, φ est à valeurs dans $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, qui est central dans \mathfrak{g} , et donc l'action adjointe restreinte à l'image de φ est triviale : si $g = \exp(X) \in G$, alors

$$\forall \alpha \in \pi, \quad \text{Ad}(g) \cdot \varphi(\alpha) = e^{\text{ad}(X)} \varphi(\alpha) = \varphi(\alpha) + \underbrace{[X, \varphi(\alpha)]}_0$$

d'où

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad \varphi([x_i, y_i]) = 0$$

et donc au final

$$\varphi(T^{-1}\gamma) - \varphi(\gamma) = 0$$

pour tout $\gamma \in \pi$ et tout $T \in \mathcal{S}(S)$. \square

Démonstration de la Proposition 7.1.2. Soient $T_1, T_2 \in \mathcal{S}(S)$. Nous voulons montrer que, pour tout $\gamma \in \pi$ et tout $[\varphi] \in H^1(\pi; H_{\mathbb{R}})$, nous avons

$$\nu_\rho(T_1 T_2)([\varphi])(\gamma) = \nu_\rho(T_1)([\varphi])(\gamma) + \nu_\rho(T_2)([\varphi])(\gamma)$$

Soient donc $\gamma \in \pi$ et $\varphi \in Z^1(\pi; \mathfrak{g})$. Alors, si nous notons $N_\rho(T)(\varphi)$ le cocycle $\varphi \circ T^{-1} - \varphi$,

$$\begin{aligned} N_\rho(T_1 T_2)(\varphi)(\gamma) &= \varphi(T_2^{-1} T_1^{-1} \gamma) - \varphi(\gamma) \\ &= \varphi(T_2^{-1} T_1^{-1} \gamma) - \varphi(T_1^{-1} \gamma) + \varphi(T_1^{-1} \gamma) - \varphi(\gamma) \\ &= N_\rho(T_2)(\varphi)(T_1^{-1} \gamma) + N_\rho(T_1)(\varphi)(\gamma) \\ &= N_\rho(T_2)(\varphi)(T_1^{-1} \gamma) - N_\rho(T_2)(\varphi)(\gamma) \\ &\quad + N_\rho(T_2)(\varphi)(\gamma) + N_\rho(T_1)(\varphi)(\gamma) \\ &= N_\rho(T_1)(N_\rho(T_2)(\varphi))(\gamma) + N_\rho(T_2)(\varphi)(\gamma) + N_\rho(T_1)(\varphi)(\gamma) \end{aligned}$$

or nous avons vu plus haut, avec le lemme 7.1.3, que le cocycle $N_\rho(T_2)(\varphi)$ est à valeurs dans $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, et que du coup, par le lemme 7.1.4 son image par $N_\rho(T_1)$ est nulle, donc

$$N_\rho(T_1 T_2)(\varphi)(\gamma) = N_\rho(T_2)(\varphi)(\gamma) + N_\rho(T_1)(\varphi)(\gamma)$$

donc en passant au quotient, nous avons

$$\nu_\rho(T_1 T_2)([\varphi])(\gamma) = \nu_\rho(T_2)([\varphi])(\gamma) + \nu_\rho(T_1)([\varphi])(\gamma).$$

□

7.2 Représentations abéliennes

Dans la suite, nous nous restreignons au cas où S a exactement une composante de bord, et donc π est le groupe libre à $2g$ générateurs.

Proposition 7.2.1. *Soit ρ une représentation abélienne, c'est-à-dire un morphisme de π dans G dont l'image est un sous-groupe abélien de G . Alors ρ est un point fixe de $\mathcal{S}(S)$.*

Démonstration. Par définition, $\mathcal{S}(S)$ agit trivialement sur $H_1(S)$, c'est-à-dire sur l'abélianisé de π . Or si ρ a une image abélienne, cela implique immédiatement qu'il se factorise en un morphisme $H_1(S) \rightarrow G$:

$$\begin{array}{ccc} \pi & \xrightarrow{\rho} & G \\ \downarrow & \nearrow & \\ H_1(S) & & \end{array}$$

donc la pré-composition par l'inverse d'un élément T de $\mathcal{S}(S)$ ne change rien :

$$\begin{array}{ccccc} \pi & \xrightarrow{T^{-1}} & \pi & \xrightarrow{\rho} & G \\ \downarrow & & \downarrow & \nearrow & \\ H_1(S) & \xlongequal{\quad} & H_1(S) & & \end{array}$$

c'est-à-dire que $T \cdot \rho = \rho$, et donc dans le quotient $[T \cdot \rho] = [\rho] \in \mathfrak{X}(S; G)$. □

Maintenant, nous allons étudier les représentations abéliennes dans le cas particulier du complété de Malcev de la troncature nilpotente de π d'indice 2. Plus précisément, nous avons une suite exacte :

$$0 \longrightarrow [\pi, \pi] / [\pi, [\pi, \pi]] \longrightarrow \pi / [\pi, [\pi, \pi]] \longrightarrow \pi / [\pi, \pi] \longrightarrow 0$$

et les deux groupes à gauche et droite sont abéliens, donc des \mathbb{Z} -modules. Le *complété de Malcev* réel, que nous noterons G , est l'unique groupe de Lie qui rentre dans la suite exacte

$$0 \longrightarrow [\pi, \pi] / [\pi, [\pi, \pi]] \otimes \mathbb{R} \longrightarrow G \longrightarrow \pi / [\pi, \pi] \otimes \mathbb{R} \longrightarrow 0$$

et qui satisfait à une propriété universelle : tout couple de morphismes définis sur les deux groupes à gauche et à droite s'étend de manière unique en un morphisme défini sur G .

Dans la suite, sauf mention explicite du contraire, G désignera ce complété de Malcev.

Proposition 7.2.2. *Soit $\rho : \pi \rightarrow G$ une représentation abélienne, et notons (e_1, \dots, e_{2g}) un ensemble de générateurs de π . Alors il existe $X \in \mathfrak{g}$, des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_{2g}$ et $z_1, \dots, z_{2g} \in Z(G)$ tels que*

$$\forall i \in \{1, \dots, 2g\}, \quad \rho(e_i) = z_i \exp(\lambda_i X)$$

Démonstration. Pour démontrer ce résultat, attardons nous un instant sur la structure de G . Il s'agit d'un groupe nilpotent de classe 2, c'est-à-dire un groupe nilpotent résultant de l'extension centrale d'un groupe abélien par un autre groupe abélien. En particulier, le centre de G est exactement son sous-groupe dérivé. Commençons par déterminer quand deux éléments de G commutent.

Soient $x, y \in G$. Alors par définition, $[x, y] \in Z(G)$, et de plus ce commutateur ne dépend que de la projection de x et y dans $H_{\mathbb{R}} = G/[G, G]$. Or, comme précisé par exemple par Johnson dans [25], $[\pi, \pi]/[\pi, [\pi, \pi]]$ est isomorphe à $\Lambda^2 H$ (par l'application commutateur, et pour une question de rang), donc $[G, G] \simeq \Lambda^2 H_{\mathbb{R}}$. En particulier, $[x, y] = 0$ si et seulement si leurs projections dans $H_{\mathbb{R}}$ sont proportionnelles.

Ainsi, pour que l'image de ρ soit abélienne, il faut que sa projection dans $H_{\mathbb{R}}$ soit incluse dans une droite (vectorielle). La conclusion suit alors directement du fait que, dans un groupe de Lie nilpotent simplement connexe, l'application exponentielle est un difféomorphisme : il suffit de choisir $X \in \mathfrak{g}$ tel que $\exp(X)$ soit dans l'image de ρ . \square

7.3 Action dérivée réduite

Dans cette section, nous supposons encore que S a exactement une composante de bord et que G est le complété de Malcev réel de $\pi/[\pi, [\pi, \pi]]$ comme ci-dessus. Nous fixons de plus une représentation abélienne ρ . L'objectif est de construire un morphisme $\mathcal{S}(S) \rightarrow \Lambda^2 H_{\mathbb{R}} \otimes H_{\mathbb{R}}$ à partir de l'action dérivée.

Nous avons vu plus haut que l'action dérivée est un morphisme de groupes $\mathcal{S}(S) \rightarrow \text{Hom}(H^1(\pi; \mathfrak{g}_\rho); H^1(\pi; \mathfrak{g}_\rho))$. Commençons par préciser l'espace d'arrivée de ce morphisme.

Proposition 7.3.1. *Nous avons un diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccc} & \text{Hom}(H^1(\pi; H_{\mathbb{R}}); H^1(\pi; \Lambda^2 H_{\mathbb{R}})) & \\ & \nearrow & \downarrow \\ \mathcal{S}(S) & \xrightarrow{\nu_\rho} & \text{Hom}(H^1(\pi; \mathfrak{g}_\rho); H^1(\pi; \mathfrak{g}_\rho)) \end{array}$$

où la flèche verticale est la post-composition par l'inclusion $\Lambda^2 H_{\mathbb{R}} \hookrightarrow \mathfrak{g}$ suivie de la pré-composition par la projection $\mathfrak{g} \rightarrow H_{\mathbb{R}}$ (toutes deux déduites de la suite exacte définissant G).

Remarque 7.3.2. Dans la définition de la flèche verticale, la post-composition par $\wedge^2 H_{\mathbb{R}} \hookrightarrow \mathfrak{g}$ est bien définie parce que l'action adjointe de G sur \mathfrak{g} restreinte à $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ est triviale, en raison de la 2-nilpotence de G . Quant à la pré-composition par $\mathfrak{g} \rightarrow H_{\mathbb{R}}$, elle l'est parce que l'action adjointe est triviale après projection de \mathfrak{g} sur $H_{\mathbb{R}} = \mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ (nous avons vu en (7.1) que la différence entre un élément de \mathfrak{g} et son translaté par l'action adjointe est dans $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$).

Dans la suite, nous noterons (abusivement) ν_{ρ} la flèche en diagonale. Nous allons démontrer cela en deux étapes :

$$\begin{array}{ccc}
 & & \text{Hom}(H^1(\pi; H_{\mathbb{R}}); H^1(\pi; \wedge^2 H_{\mathbb{R}})) \\
 & \nearrow & \downarrow \\
 & & \text{Hom}(H^1(\pi; \mathfrak{g}_{\rho}); H^1(\pi; \wedge^2 H_{\mathbb{R}})) \\
 & \nearrow & \downarrow \\
 \mathcal{S}(S) & \xrightarrow{\nu_{\rho}} & \text{Hom}(H^1(\pi; \mathfrak{g}_{\rho}); H^1(\pi; \mathfrak{g}_{\rho}))
 \end{array}$$

Démonstration de la proposition. Le lemme précédent nous dit que $\nu_{\rho}(T)$ est un morphisme à valeurs dans l'ensemble des (classes de) cocycles à valeurs dans $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, qui est un quotient de $H^1(\pi; [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}])$, la cohomologie de π à valeurs dans le π -module trivial $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, lui-même isomorphe à $\wedge^2 H_{\mathbb{R}}$. Nous avons donc un diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 & & \text{Hom}(H^1(\pi; \mathfrak{g}_{\rho}); H^1(\pi; \wedge^2 H_{\mathbb{R}})) \\
 & \dashrightarrow & \downarrow \\
 \mathcal{S}(S) & \xrightarrow{\nu_{\rho}} & \text{Hom}(H^1(\pi; \mathfrak{g}_{\rho}); H^1(\pi; \mathfrak{g}_{\rho}))
 \end{array}$$

Pour donner un sens à la flèche en pointillés, commençons par remarquer que comme $\wedge^2 H_{\mathbb{R}}$ est un π -module trivial, les cocycles de $Z^1(\pi; \wedge^2 H_{\mathbb{R}})$ sont exactement les morphismes de groupe de π dans $\wedge^2 H_{\mathbb{R}}$, et le seul cobord est 0. En revanche, l'ensemble des classes de $H^1(\pi; \mathfrak{g}_{\rho})$ à valeurs dans $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ est le quotient $Z^1(\pi; [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}])/B^1(\pi; \mathfrak{g}_{\rho})$. Ainsi, étant donné $T \in \mathcal{S}(S)$, nous avons

$$\begin{array}{ccc}
 Z^1(\pi; \mathfrak{g}_{\rho}) & \xrightarrow{\cdot \circ T^{-1} - \text{Id}} & H^1(\pi; \wedge^2 H_{\mathbb{R}}) \\
 \downarrow & \dashrightarrow & \downarrow \\
 H^1(\pi; \mathfrak{g}_{\rho}) & \xrightarrow{\nu_{\rho}(T)} & H^1(\pi; \mathfrak{g}_{\rho})
 \end{array}$$

où la flèche en pointillés est le passage au quotient de la flèche horizontale du haut, ce qui est possible puisque l'image par cette flèche d'un cobord (nécessairement à valeurs dans $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$) est nulle.

Maintenant, terminons la démonstration de la proposition, en complétant le

diagramme

$$\begin{array}{ccc} & \text{Hom}(H^1(\pi; H_{\mathbb{R}}); H^1(\pi; \wedge^2 H_{\mathbb{R}})) & \\ & \nearrow \text{---} & \downarrow \\ \mathcal{S}(S) & \longrightarrow \text{Hom}(H^1(\pi; \mathfrak{g}_{\rho}); H^1(\pi; \wedge^2 H_{\mathbb{R}})) & \end{array}$$

Pour cela, il faut voir que l'image d'un cocycle $\varphi \in Z^1(\pi; \mathfrak{g}_{\rho})$ par $\nu_{\rho}(T)$ ne dépend que de sa projection dans $Z^1(\pi; H_{\mathbb{R}})$. En effet, si nous notons \mathfrak{p} la projection $\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = H_{\mathbb{R}}$, nous pouvons écrire l'application $Z^1(\pi; \mathfrak{g}_{\rho}) \rightarrow Z^1(\pi; H_{\mathbb{R}})$ simplement comme

$$\varphi \in Z^1(\pi; \mathfrak{g}_{\rho}) \longmapsto \mathfrak{p} \circ \varphi.$$

Notons que $\mathfrak{p} \circ \varphi$ est bien un cocycle à valeurs dans le π -module trivial $H_{\mathbb{R}}$, c'est-à-dire un morphisme de groupes de π dans $H_{\mathbb{R}}$, puisque pour tous $x, y \in \pi$,

$$\begin{aligned} \mathfrak{p} \circ \varphi(xy) &= \mathfrak{p}(\varphi(x) + \text{Ad}(\rho(x)) \cdot \varphi(y)) \\ &= \mathfrak{p} \circ \varphi(x) + \mathfrak{p}(\text{Ad}(\rho(x)) \cdot \varphi(y)) \end{aligned}$$

or nous avons vu que $\text{Ad}(\rho(x)) \cdot \varphi(y) - \varphi(y) \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, donc son image par \mathfrak{p} est nulle, c'est-à-dire que

$$\mathfrak{p}(\text{Ad}(\rho(x)) \cdot \varphi(y)) = \mathfrak{p}(\varphi(y)).$$

Il nous suffit maintenant de vérifier que si $\mathfrak{p} \circ \varphi$ est identiquement nul, alors pour tout $T \in \mathcal{S}(S)$, $\nu_{\rho}(T)(\varphi) = 0$. Or dire que $\mathfrak{p} \circ \varphi$ est nul est équivalent à ce que φ soit à valeurs dans $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Mais d'après le lemme 7.1.4, dès que φ est à valeurs dans $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$,

$$\nu_{\rho}(T)([\varphi]) = 0$$

et donc l'image d'un cocycle par $\nu_{\rho}(T)$ ne dépend que de sa projection dans $H^1(\pi; H_{\mathbb{R}})$, ce qui conclut la démonstration. \square

Remarque 7.3.3. Comme annoncé précédemment, nous allons noter (abusivement) dans la suite $\nu_{\rho}(T)$ le morphisme que nous venons de voir, allant de $H^1(\pi; H_{\mathbb{R}})$ dans $H^1(\pi; \wedge^2 H_{\mathbb{R}})$. Cependant, notons que ces deux groupes de cohomologie sont tous les deux à valeurs dans un π -module trivial, c'est-à-dire un espace morphismes de groupes. Nous nous permettrons alors d'identifier une classe de cohomologie de l'un de ces deux groupes avec un morphisme correspondant (puisque nous ne travaillons qu'avec la résolution bar [7], pour laquelle il s'agit d'une véritable égalité : les cocycles sont effectivement des morphismes, et il n'y a pas de cobord).

Maintenant, nous allons passer à l'action réduite, c'est-à-dire que nous allons définir un morphisme

$$\text{Hom}(H^1(\pi; H_{\mathbb{R}}); H^1(\pi; \wedge^2 H_{\mathbb{R}})) \longrightarrow \wedge^2 H_{\mathbb{R}} \otimes H_{\mathbb{R}},$$

afin d'obtenir un morphisme

$$\tilde{\nu}_{\rho} : \mathcal{S}(S) \longrightarrow \wedge^2 H_{\mathbb{R}} \otimes H_{\mathbb{R}}.$$

Commençons par rappeler l'isomorphisme entre un espace de morphismes et un produit tensoriel : si V et W sont deux modules libres et de type fini, alors $\text{Hom}(V; W)$ est naturellement isomorphe à $W \otimes V^*$ via

$$\begin{aligned} W \otimes V^* &\longrightarrow \text{Hom}(V; W) \\ w \otimes dv &\longmapsto (x \mapsto dv(x) \cdot w), \end{aligned}$$

et dont la réciproque, étant donnée une base $(e_i)_{i \in I}$ de V ,

$$\begin{aligned} \text{Hom}(V, W) &\longrightarrow W \otimes V^* \\ f &\longmapsto \sum_{i \in I} f(e_i) \otimes de_i. \end{aligned}$$

Nous utilisons ici la notation de_i pour désigner l'élément de la base duale à $(e_j)_j$ envoyant e_i sur 1 et les autres éléments de la base sur 0. Il est clair à cause du premier isomorphisme que ceci est indépendant du choix d'une base de V .

Mentionnons également que H est muni d'une forme symplectique ι , appelée la forme d'intersection. Celle-ci se prolonge évidemment à $H_{\mathbb{R}}$. Explicitons l'isomorphisme entre H et H^* ainsi fourni :

$$\begin{aligned} H &\longrightarrow H^* \\ x &\longmapsto (y \mapsto \iota(y, x)), \end{aligned}$$

dont la réciproque est donnée dans une base symplectique $(a_i, b_i)_{1 \leq i \leq g}$ de H (pour ι) par

$$\begin{aligned} D: H^* &\longrightarrow H \\ da_i &\longmapsto b_i \\ db_i &\longmapsto -a_i. \end{aligned}$$

Encore une fois, ces isomorphismes ne dépendent pas du choix de la base symplectique choisie à cause du premier. Ils s'étendent bien entendu tel quel à $H_{\mathbb{R}}$.

Nous allons maintenant identifier les espaces $\text{Hom}(H^1(\pi; H_{\mathbb{R}}); H^1(\pi; \wedge^2 H_{\mathbb{R}}))$ et $(\wedge^2 H_{\mathbb{R}}) \otimes H_{\mathbb{R}} \otimes H^1(\pi; H_{\mathbb{R}})$.

Première étape : $H^1(\pi; H_{\mathbb{R}})^* \cong H^1(\pi; H_{\mathbb{R}}^*)$

Pour cela, commençons par écrire que $H^1(\pi; H_{\mathbb{R}})^* = \text{Hom}(H_{\mathbb{R}}; H_{\mathbb{R}})^* \cong (H_{\mathbb{R}} \otimes H_{\mathbb{R}}^*)^*$. Afin de simplifier les notations, nous allons omettre l'indice \mathbb{R} , et noter simplement H l'homologie à valeurs réelles.

D'après ce qui précède, cet isomorphisme est donnée par

$$\begin{aligned} H^1(\pi; H)^* &\longrightarrow (H \otimes H^*)^* \\ d\varphi &\longmapsto (x \otimes dy \mapsto d\varphi(z \mapsto dy(z) \cdot x)). \end{aligned}$$

Ensuite, nous avons

$$\begin{aligned} (H \otimes H^*)^* &\longrightarrow H^* \otimes H \\ d\alpha &\longmapsto \sum_{i,j} d\alpha(e_i \otimes de_j) \cdot de_i \otimes e_j \end{aligned}$$

où $(e_i)_i$ désigne une base quelconque de H . Notons que cela ne dépend pas du choix de cette base. La composition de ces deux isomorphismes est alors donnée par

$$\begin{aligned} H^1(\pi; H)^* &\longrightarrow H^* \otimes H \\ d\varphi &\longmapsto \sum_{i,j} d\varphi(x \mapsto de_j(x) \cdot e_i) \cdot de_i \otimes e_j. \end{aligned}$$

Notons que les morphismes de la forme $x \mapsto de_j(x) \cdot e_i$ forment une base de $\text{Hom}(H; H)$. Nous noterons $\varphi_{e_j}^{e_i}$ le morphisme qui envoie e_j sur e_i et les autres éléments de la base sur 0.

Ensuite, nous pouvons utiliser D^{-1} :

$$\begin{aligned} H^* \otimes H &\longrightarrow H^* \otimes H^* \\ dx \otimes y &\longmapsto dx \otimes (z \mapsto \iota(z, y)), \end{aligned}$$

et enfin

$$\begin{aligned} H^* \otimes H^* &\longrightarrow H^1(\pi; H^*) \\ dx \otimes dy &\longmapsto (z \mapsto dy(z) \cdot dx). \end{aligned}$$

La composition des deux derniers isomorphismes est alors

$$\begin{aligned} H^* \otimes H &\longrightarrow H^1(\pi; H^*) \\ dx \otimes y &\longmapsto (z \mapsto \iota(z, y) \cdot dx). \end{aligned}$$

Ainsi, nous pouvons écrire l'isomorphisme final

$$\begin{aligned} H^1(\pi; H)^* &\longrightarrow H^1(\pi; H^*) \\ d\varphi &\longmapsto \left(x \mapsto \sum_{i,j} d\varphi(\varphi_{e_j}^{e_i}) \cdot \iota(x, e_j) \cdot de_i \right). \end{aligned}$$

Notons encore une fois que cet isomorphisme ne dépend pas de la base de H choisie.

Deuxième étape : $H^1(\pi; H)^* \cong H^1(\pi; H)$ Commençons par fixer une base symplectique $(a_i, b_i)_{1 \leq i \leq g}$ de H . Nous avons tout d'abord un isomorphisme

$$\begin{aligned} H^1(\pi; H^*) &\longrightarrow H^1(\pi; H) \\ \varphi^* &\longmapsto D \circ \varphi^* \end{aligned} \quad \text{où} \quad D : \begin{cases} da_i &\mapsto b_i \\ db_i &\mapsto -a_i \end{cases}$$

L'isomorphisme de la première étape calculé avec la base $(a_i, b_i)_i$ devient

$$\begin{aligned} d\varphi \longmapsto x \mapsto &\sum_{i,j=1}^g d\varphi(\varphi_{a_j}^{a_i})\iota(x, a_j)da_i + d\varphi(\varphi_{b_j}^{a_i})\iota(x, b_j)da_i \\ &+ d\varphi(\varphi_{a_j}^{b_i})\iota(x, a_j)db_i + d\varphi(\varphi_{b_j}^{b_i})\iota(x, b_j)db_i \end{aligned}$$

et donc en composant avec le morphisme ci-dessus nous obtenons

$$\begin{aligned} d\varphi \longmapsto x \mapsto &\sum_{i,j=1}^g d\varphi(\varphi_{a_j}^{a_i})\iota(x, a_j)b_i + d\varphi(\varphi_{b_j}^{a_i})\iota(x, b_j)b_i \\ &- d\varphi(\varphi_{a_j}^{b_i})\iota(x, a_j)a_i - d\varphi(\varphi_{b_j}^{b_i})\iota(x, b_j)a_i \quad (7.2) \end{aligned}$$

qui est bien un isomorphisme de $H^1(\pi; H)^*$ dans $H^1(\pi; H)$, indépendant de la base symplectique choisie. Sur les éléments de la base, cela donne immédiatement

$$\begin{aligned} d\varphi_{a_j}^{a_i} &\mapsto -\varphi_{b_j}^{b_i} \quad , & d\varphi_{a_j}^{b_i} &\mapsto \varphi_{b_j}^{a_i} \quad , \\ d\varphi_{b_j}^{a_i} &\mapsto \varphi_{a_j}^{b_i} \quad , & d\varphi_{b_j}^{b_i} &\mapsto -\varphi_{a_j}^{a_i} \quad . \end{aligned}$$

Troisième étape : $\text{Hom}(H^1(\pi; H); H^1(\pi; \Lambda^2 H)) \cong \Lambda^2 H \otimes H \otimes H^1(\pi; H)$

Pour cela, il suffit de voir que, comme rappelé au début de cette section,

$$\text{Hom}(H^1(\pi; H); H^1(\pi; \Lambda^2 H)) \cong H^1(\pi; \Lambda^2 H) \otimes H^1(\pi; H)^*$$

et de remarquer que, comme $H^1(\pi; \Lambda^2 H) = \text{Hom}(H; \Lambda^2 H) \cong \Lambda^2 H \otimes H^*$, il suffit d'appliquer l'étape précédente. Plus précisément, en fixant une base symplectique $(a_i, b_i)_i$ de H , et en conservant les notations précédentes, nous obtenons l'isomorphisme $\text{Hom}(H^1(\pi; H); H^1(\pi; \Lambda^2 H)) \longrightarrow H^1(\pi; \Lambda^2 H) \otimes H^1(\pi; H)$ défini par

$$\nu \mapsto \sum_{i,j=1}^g -\nu(\varphi_{a_j}^{a_i}) \otimes \varphi_{b_j}^{b_i} + \nu(\varphi_{a_j}^{b_i}) \otimes \varphi_{b_j}^{a_i} + \nu(\varphi_{b_j}^{a_i}) \otimes \varphi_{a_j}^{b_i} - \nu(\varphi_{b_j}^{b_i}) \otimes \varphi_{a_j}^{a_i}$$

ce qui nous donne au final un isomorphisme de $\text{Hom}(H^1(\pi; H); H^1(\pi; \Lambda^2 H))$ dans $\Lambda^2 H \otimes H \otimes H^1(\pi; H)$

$$\begin{aligned} \nu \mapsto & \sum_{i,j,k=1}^g -\nu(\varphi_{a_j}^{a_i})(a_k) \otimes b_k \otimes \varphi_{b_j}^{b_i} + \nu(\varphi_{a_j}^{a_i})(b_k) \otimes a_k \otimes \varphi_{b_j}^{b_i} \\ & + \nu(\varphi_{a_j}^{b_i})(a_k) \otimes b_k \otimes \varphi_{b_j}^{a_i} - \nu(\varphi_{a_j}^{b_i})(b_k) \otimes a_k \otimes \varphi_{b_j}^{a_i} \\ & + \nu(\varphi_{b_j}^{a_i})(a_k) \otimes b_k \otimes \varphi_{a_j}^{b_i} - \nu(\varphi_{b_j}^{a_i})(b_k) \otimes a_k \otimes \varphi_{a_j}^{b_i} \\ & - \nu(\varphi_{b_j}^{b_i})(a_k) \otimes b_k \otimes \varphi_{a_j}^{a_i} + \nu(\varphi_{b_j}^{b_i})(b_k) \otimes a_k \otimes \varphi_{a_j}^{a_i} . \end{aligned}$$

Pour terminer, il suffit de voir que, comme $[G, G]$ est un groupe de Lie simplement connexe et abélien, il est isomorphe à son algèbre de Lie $\Lambda^2 H$, donc comme $[G, G] = \Lambda^2 H$, c'est également le cas de $\Lambda^2 H$. Plus précisément, et en suivant Johnson [25], si x et y désignent deux éléments de $H = H_{\mathbb{R}}$, et \tilde{x}, \tilde{y} deux relevés (quelconques) de x et y dans G , alors le commutateur $[\tilde{x}, \tilde{y}] = \tilde{x}\tilde{y}\tilde{x}^{-1}\tilde{y}^{-1}$ est un élément de $[G, G]$, indépendant du choix des relevés. L'application $(x, y) \mapsto [\tilde{x}, \tilde{y}]$ est clairement bilinéaire et antisymétrique. Nous noterons $\omega : \Lambda^2 H \rightarrow [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ l'application linéaire associée, qui est un isomorphisme pour une question de dimension.

Morphisme de $\text{Hom}(H^1(\pi; H); H^1(\pi; \Lambda^2 H))$ dans $(\Lambda^2 H) \otimes H$

Ici, nous allons simplement appliquer la trace sur le dernier terme du produit tensoriel $\Lambda^2 H \otimes H \otimes H^1(\pi; H)$. En composant avec l'isomorphisme obtenu ci-dessus, et en remarquant que la trace des éléments de la base de $H^1(\pi; H)$ est donnée directement pour tous i, j par

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\varphi_{a_j}^{a_i}) &= \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad , & \text{Tr}(\varphi_{a_j}^{b_i}) &= 0, \\ \text{Tr}(\varphi_{b_j}^{a_i}) &= 0 & , & \text{Tr}(\varphi_{b_j}^{b_i}) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} , \end{aligned}$$

nous obtenons le morphisme

$$\begin{aligned} \text{Hom}(H^1(\pi; H); H^1(\pi; \Lambda^2 H)) &\rightarrow \bigwedge^2 H \otimes H \\ \nu &\mapsto \sum_{i,j=1}^g -\nu(\varphi_{a_i}^{a_i})(a_j) \otimes b_j + \nu(\varphi_{a_i}^{a_i})(b_j) \otimes a_j \\ &\quad -\nu(\varphi_{b_i}^{b_i})(a_j) \otimes b_j + \nu(\varphi_{b_i}^{b_i})(b_j) \otimes a_j \end{aligned}$$

7.4 Démonstration du théorème

Nous allons maintenant démontrer le Théorème 7.1.1, que nous rappelons en précisant maintenant les hypothèses.

Théorème 7.4.1. *Soit G le complété de Malcev réel de la troncature nilpotente d'indice 2 de π . Alors il existe une représentation $\rho: \pi \rightarrow G$ telles que le noyau de la représentation dérivée est exactement le noyau de Johnson.*

Remarque 7.4.2. En réalité, les représentations vérifiant ceci forment une famille générique dans $\text{Hom}(\pi; G)$.

Commençons par l'inclusion la plus facile. Soit T un élément du noyau de Johnson. Alors pour toute représentation abélienne ρ , $\nu_\rho(T) = 0$. En effet, nous savons que le quotient du groupe de Torelli par le noyau de Johnson est exactement la partie sans torsion de l'abélianisé de $\mathcal{S}(S)$. De plus, ν_ρ est un morphisme à valeurs dans $\text{Hom}(H^1(\pi; H_{\mathbb{R}}); H^1(\pi; \Lambda^2 H_{\mathbb{R}}))$, qui est un groupe abélien sans torsion. Ainsi, ν_ρ se factorise en un morphisme défini sur $\mathcal{S}(S)/\mathcal{K}(S)$:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}(S) & \xrightarrow{\nu_\rho} & \text{Hom}(H^1(\pi; H_{\mathbb{R}}), H^1(\pi; \Lambda^2 H_{\mathbb{R}})) \\ \downarrow & \nearrow & \\ \mathcal{S}(S)/\mathcal{K}(S) & & \end{array}$$

et donc le noyau de ν_ρ contient $\mathcal{K}(S)$.

Pour montrer qu'il existe des ρ pour lesquels cette inclusion est une égalité, nous allons encore réduire l'action dérivée, afin d'obtenir un diagramme

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{Hom}(H^1(\pi; H_{\mathbb{R}}); H^1(\pi; H_{\mathbb{R}})) & \longrightarrow & H_{\mathbb{R}} \otimes H_{\mathbb{R}} \\ & \nearrow & \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{S}(S) & \xrightarrow{\nu_\rho} & \text{Hom}(H^1(\pi; H_{\mathbb{R}}); H^1(\pi; \Lambda^2 H_{\mathbb{R}})) & \longrightarrow & \Lambda^2 H_{\mathbb{R}} \otimes H_{\mathbb{R}} \\ & \searrow \tau & & & \uparrow \\ & & \Lambda^3 H & \longrightarrow & \Lambda^2 H \otimes H \end{array}$$

Commençons par établir le triangle

$$\begin{array}{ccc} & \text{Hom}(H^1(\pi; H_{\mathbb{R}}); H^1(\pi; H_{\mathbb{R}})) & \\ & \nearrow & \downarrow \\ \mathcal{S}(S) & \xrightarrow{\nu_\rho} & \text{Hom}(H^1(\pi; H_{\mathbb{R}}); H^1(\pi; \Lambda^2 H_{\mathbb{R}})) \end{array}$$

Dans la suite, nous fixons ρ une représentation abélienne de π dans G . Alors, en reprenant la Proposition 7.2.2, il existe $X \in \mathfrak{g}$ et des applications $\lambda : \pi \rightarrow \mathbb{R}$ et $z : \pi \rightarrow [G, G]$ tels que

$$\forall \gamma \in \pi, \quad \rho(\gamma) = z(\gamma) \exp(\lambda(\gamma)X)$$

Lemme 7.4.3. *Pour tout $T \in \mathcal{S}(S)$ et tout $\varphi \in Z^1(\pi; \mathfrak{g}_\rho)$, le cocycle $\varphi \circ T^{-1} - \varphi$ est à valeurs dans l'idéal $[X, \mathfrak{g}]$.*

Démonstration. Soient e_1, \dots, e_{2g} des générateurs de π , et soit $\gamma \in \pi$. Alors il existe des entiers $n_{i,j}$, avec $1 \leq i < j \leq 2g$ tels que, dans le quotient $\pi/[\pi, [\pi, \pi]]$, nous ayons (avec abus de notation)

$$T^{-1}\gamma = \gamma \prod_{i < j} [e_i, e_j]^{n_{i,j}}$$

Nous avons par ailleurs déjà vu au cours de la démonstration du Lemme 7.1.3 que la restriction de φ à $[\pi, \pi]$ est un morphisme à valeurs dans le centre de \mathfrak{g} , et donc

$$\begin{aligned} \varphi(T^{-1}\gamma) - \varphi(\gamma) &= \varphi(\gamma) + \text{Ad}(\rho(\gamma)) \cdot \varphi\left(\prod_{i < j} [e_i, e_j]^{n_{i,j}}\right) - \varphi(\gamma) \\ &= \sum_{i < j} n_{i,j} \varphi([e_i, e_j]) \end{aligned}$$

Or pour tous $i < j$, en notant $\lambda_i = \lambda(e_i)$ et $\lambda_j = \lambda(e_j)$:

$$\begin{aligned} \varphi([e_i, e_j]) &= \varphi(e_i) - \text{Ad}(\rho(e_j)) \cdot \varphi(e_i) - \varphi(e_j) + \text{Ad}(\rho(e_i)) \cdot \varphi(e_j) \\ &= \varphi(e_i) - \text{Ad}(\exp(\lambda_j X)) \cdot \varphi(e_i) - \varphi(e_j) + \text{Ad}(\exp(\lambda_i X)) \cdot \varphi(e_j) \\ &= \varphi(e_i) - e^{\text{ad}(\lambda_j X)} \varphi(e_i) - \varphi(e_j) + e^{\text{ad}(\lambda_i X)} \varphi(e_j) \\ &= \varphi(e_i) - \left(\varphi(e_i) + [\lambda_j X, \varphi(e_i)]\right) - \varphi(e_j) + \left(\varphi(e_j) + [\lambda_i X, \varphi(e_j)]\right) \\ &= [X, \lambda_i \varphi(e_j) - \lambda_j \varphi(e_i)]. \end{aligned}$$

Ainsi, au final nous obtenons

$$\varphi(T^{-1}\gamma) - \varphi(\gamma) = \sum_{i < j} n_{i,j} [X, \lambda_i \varphi(e_j) - \lambda_j \varphi(e_i)] \in [X, \mathfrak{g}].$$

□

Grâce à ce lemme, nous voyons que ν_ρ se factorise pour donner le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & \text{Hom}(H^1(\pi; H_{\mathbb{R}}); H^1(\pi; H_{\mathbb{R}})) & \\ & \nearrow & \downarrow \\ \mathcal{S}(S) & \xrightarrow{\nu_\rho} & \text{Hom}(H^1(\pi; H_{\mathbb{R}}); H^1(\pi; \wedge^2 H_{\mathbb{R}})) \end{array}$$

par le morphisme $H_{\mathbb{R}} \rightarrow \wedge^2 H_{\mathbb{R}}$ donné par

$$U \in H_{\mathbb{R}} \mapsto \mathfrak{p}(X) \wedge U = [X, \mathfrak{s}(U)] \in \wedge^2 H_{\mathbb{R}} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$$

où \mathfrak{p} désigne la projection $\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, et \mathfrak{s} une section linéaire de cette projection. Maintenant, il nous faut préciser le carré

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}\left(H^1(\pi; H_{\mathbb{R}}); H^1(\pi; H_{\mathbb{R}})\right) & \longrightarrow & H_{\mathbb{R}} \otimes H_{\mathbb{R}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Hom}\left(H^1(\pi; H_{\mathbb{R}}); H^1(\pi; \wedge^2 H_{\mathbb{R}})\right) & \longrightarrow & (\wedge^2 H_{\mathbb{R}}) \otimes H_{\mathbb{R}} \end{array}$$

où les flèches verticales sont déduites de l'application $\mathfrak{p}(X) \wedge \cdot$ de $H_{\mathbb{R}}$ dans $\wedge^2 H_{\mathbb{R}}$. Pour cela, il nous suffit de reprendre les identifications précédentes : la flèche horizontale du haut est la composition

$$\mathrm{Hom}\left(H^1(\pi; H_{\mathbb{R}}); H^1(\pi; H_{\mathbb{R}})\right) \xrightarrow{\simeq} H_{\mathbb{R}} \otimes H_{\mathbb{R}} \otimes H^1(\pi; H_{\mathbb{R}}) \xrightarrow{\mathrm{Id} \otimes \mathrm{Tr}} H_{\mathbb{R}} \otimes H_{\mathbb{R}}$$

ce qui nous donne la même formule :

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}\left(H^1(\pi; H_{\mathbb{R}}); H^1(\pi; H_{\mathbb{R}})\right) & \rightarrow H_{\mathbb{R}} \otimes H_{\mathbb{R}} \\ \nu & \mapsto \sum_{i,j=1}^g -\nu(\varphi_{a_i}^{a_i})(a_j) \otimes b_j + \nu(\varphi_{a_i}^{a_i})(b_j) \otimes a_j \\ & \quad -\nu(\varphi_{b_i}^{b_i})(a_j) \otimes b_j + \nu(\varphi_{b_i}^{b_i})(b_j) \otimes a_j \end{aligned}$$

où, comme avant, $\varphi_{a_i}^{b_i}$ désigne le morphisme qui envoie a_i sur b_i , et les autres générateurs sur 0. Ceci fait clairement commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}\left(H^1(\pi; H_{\mathbb{R}}); H^1(\pi; H_{\mathbb{R}})\right) & \longrightarrow & H_{\mathbb{R}} \otimes H_{\mathbb{R}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Hom}\left(H^1(\pi; H_{\mathbb{R}}); H^1(\pi; \wedge^2 H_{\mathbb{R}})\right) & \longrightarrow & (\wedge^2 H_{\mathbb{R}}) \otimes H_{\mathbb{R}}. \end{array}$$

Pour terminer, il nous faut faire un lien avec le morphisme de Johnson. Pour cela, nous allons préciser ce que nous avons obtenu dans la démonstration du lemme 7.4.3 : si φ est un cocycle de $Z^1(\pi; \mathfrak{g}_{\rho})$, $T \in \mathcal{S}(S)$ et $\gamma \in \pi$, et si $(e_i)_{1 \leq i \leq 2g}$ est une famille de générateurs de π , alors il existe des entiers $n_{i,j}$ tels que, dans le quotient $\pi/[\pi, [\pi, \pi]]$

$$(T^{-1}\gamma) = \gamma \prod_{i < j} [e_i, e_j]^{n_{i,j}}$$

et donc

$$\varphi(T^{-1}\gamma) - \varphi(\gamma) = \sum_{i < j} n_{i,j} [X, \lambda_i \varphi(e_j) - \lambda_j \varphi(e_i)]$$

Suivant Johnson [25], notons δ le morphisme $\mathcal{S}(S) \rightarrow \mathrm{Hom}(H, \wedge^2 H)$ définie de la façon suivante. Étant donné $T \in \mathcal{S}(S)$ et $x \in H = \pi/[\pi, \pi]$, choisissons un relevé γ de x dans $\pi/[\pi, [\pi, \pi]]$. Alors $\delta(T)(x)$ est défini par

$$\delta(T)(x) = (T^{-1}\gamma)\gamma^{-1} \in \ker\left(\pi/[\pi, [\pi, \pi]] \rightarrow H\right) = [\pi, \pi]/[\pi, [\pi, \pi]] \simeq \wedge^2 H$$

Cette définition ne dépend pas du choix du relevé γ de x , et fait de δ un morphisme de groupes (pour plus de détails, voir l'Annexe A).

À partir de δ , le morphisme de Johnson est défini via l'isomorphisme de $\text{Hom}(H, \wedge^2 H)$ avec $\wedge^2 H \otimes H$, et le fait que l'image de δ composé avec cet isomorphisme est $\wedge^3 H$, vu comme un sous-espace de $\wedge^2 H \otimes H$ par

$$x \wedge y \wedge z \in \wedge^3 H \longmapsto (x \wedge y) \otimes z + (y \wedge z) \otimes x + (z \wedge x) \otimes y.$$

Maintenant, comme $[\pi, \pi]$ est central dans $\pi/[\pi, [\pi, \pi]]$, avec les notations précédentes nous obtenons

$$\delta(T)(x) = \prod_{i < j} [e_i, e_j]^{n_{i,j}}.$$

Notons enfin

$$d_\rho^X : \begin{array}{ccc} \wedge^2 H_{\mathbb{R}} & \longrightarrow & H_{\mathbb{R}} \\ \overline{e_i} \wedge \overline{e_j} & \longmapsto & \lambda_i \overline{e_j} - \lambda_j \overline{e_i}, \end{array}$$

où $\overline{e_i} = \mathbf{p}(e_i)$ est la projection de e_i dans H , de sorte que la formule pour $\varphi \circ T^{-1} - \varphi$ ci-dessus s'écrit :

$$\begin{aligned} \varphi(T^{-1}\gamma) - \varphi(\gamma) &= \sum_{i < j} n_{i,j} \mathbf{p}(X) \wedge \overline{\varphi}(d_\rho^X(\overline{e_i} \wedge \overline{e_j})) \\ &= \mathbf{p}(X) \wedge \overline{\varphi} \left(\sum_{i < j} n_{i,j} d_\rho^X(\overline{e_i} \wedge \overline{e_j}) \right) \\ &= \mathbf{p}(X) \wedge \overline{\varphi} \circ d_\rho^X \left(\sum_{i < j} n_{i,j} \overline{e_i} \wedge \overline{e_j} \right) \\ &= \mathbf{p}(X) \wedge \left(\overline{\varphi} \circ d_\rho^X \circ \delta(T)(\mathbf{p}(\gamma)) \right) \end{aligned}$$

avec $\overline{\varphi}$ désignant la projection de φ dans $\text{Hom}(H_{\mathbb{R}}; H_{\mathbb{R}})$ (c'est-à-dire la composition de φ et de \mathbf{p} , factorisée en un morphisme de $H_{\mathbb{R}}$ dans $H_{\mathbb{R}}$). Pour prouver le théorème il suffit de vérifier qu'en choisissant ρ convenablement, pour tout T n'annulant pas δ il existe $x \in H$ tel que

$$d_\rho^X \circ \delta(T)(x) \neq 0.$$

En effet, le fait que la dernière expression ci-dessus soit nulle est équivalent à ce que $\overline{\varphi} \circ d_\rho^X \circ \delta(T)(\mathbf{p}(\gamma))$ soit proportionnel à $\mathbf{p}(X)$. Or $\overline{\varphi}$ est un morphisme choisi librement dans $H^1(\pi, H_{\mathbb{R}})$, donc dès que nous avons un vecteur non nul dans l'image de $d_\rho^X \circ \delta(T)$, nous pouvons choisir $\overline{\varphi}$ pour qu'il n'arrive pas dans la droite engendrée par $\mathbf{p}(X)$. Plus précisément, rappelons que $\overline{\varphi}$ est l'image d'un cocycle (quelconque) $\varphi \in Z^1(\pi; \mathfrak{g}_\rho)$ dans $H^1(\pi; H_{\mathbb{R}}) \cong \text{Hom}(H_{\mathbb{R}}; H_{\mathbb{R}})$, et il suffit de voir que nous pouvons prescrire l'image par $\overline{\varphi}$ d'un vecteur donné. En effet, si $x, y \in H_{\mathbb{R}}$, en supposant par exemple que la composante en a_1 de x est $\lambda \neq 0$, nous pouvons définir un cocycle φ tel que $\overline{\varphi}(x) = y$. Comme π est un groupe libre, nous pouvons définir φ par récurrence sur la longueur des mots en a_i, b_i : si $\varphi(w)$ est défini, et si \tilde{y} désigne un relevé de y dans \mathfrak{g} ,

$$\begin{aligned} \varphi(a_i w) &:= \begin{cases} \text{Ad}(\rho(a_i)) \cdot \varphi(w) & \text{si } i \neq 1 \\ \frac{1}{\lambda} \tilde{y} + \text{Ad}(\rho(a_1)) \cdot \varphi(w) & \text{si } i = 1 \end{cases} \\ \varphi(b_i w) &:= \text{Ad}(\rho(b_i)) \cdot \varphi(w). \end{aligned}$$

Cela définit clairement un cocycle, avec $\overline{\varphi}(x) = y$ par construction.

Ainsi il nous suffit de vérifier qu'il existe un ρ tel que pour tout T n'annulant pas δ , $d_\rho^X \circ \delta(T)$ n'est pas identiquement nul. Il s'agit de l'objet de la partie supérieure du diagramme, et de notre but pour la fin de la démonstration.

Nous pouvons maintenant définir un morphisme $\overline{\nu}_\rho$ à valeurs dans le groupe $\text{Hom}(H^1(\pi; H_{\mathbb{R}}); H^1(\pi; H_{\mathbb{R}}))$ par

$$\begin{aligned} \overline{\nu}_\rho: \mathcal{S}(S) &\longrightarrow \text{Hom}(H^1(\pi; H_{\mathbb{R}}); H^1(\pi; H_{\mathbb{R}})) \\ T &\longmapsto (\varphi \mapsto \varphi \circ d_\rho^X \circ \delta(T)). \end{aligned}$$

Pour compléter le diagramme suivant, il ne nous reste donc plus qu'à expliciter la flèche de $(\wedge^2 H) \otimes H$ dans $H_{\mathbb{R}} \otimes H_{\mathbb{R}}$.

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{Hom}(H^1(\pi; H_{\mathbb{R}}); H^1(\pi; H_{\mathbb{R}})) & \longrightarrow & H_{\mathbb{R}} \otimes H_{\mathbb{R}} \\ & \nearrow \overline{\nu}_\rho & \downarrow (X \wedge \cdot)_* & & \downarrow (X \wedge \cdot)_* \\ \mathcal{S}(S) & \xrightarrow{\nu_\rho} & \text{Hom}(H^1(\pi; H_{\mathbb{R}}); H^1(\pi; \wedge^2 H_{\mathbb{R}})) & \longrightarrow & \wedge^2 H_{\mathbb{R}} \otimes H_{\mathbb{R}} \\ & \searrow \tau & & & \uparrow \curvearrowright \\ & & \wedge^3 H^c & \longrightarrow & (\wedge^2) H \otimes H \end{array}$$

Pour cela, explicitons la composition

$$\mathcal{S}(S) \xrightarrow{\overline{\nu}_\rho} \text{Hom}(H^1(\pi; H_{\mathbb{R}}); H^1(\pi; H_{\mathbb{R}})) \xrightarrow{\text{Tr}} H_{\mathbb{R}} \otimes H_{\mathbb{R}}.$$

Soit donc $T \in \mathcal{S}(S)$. Comme avant, choisissons $(a_i, b_i)_{i \leq g}$ des générateurs, donnant une base symplectique de H . Notons également, pour x, y deux éléments parmi les a_i, b_i , φ_x^y la classe de cohomologie de $H^1(\pi; H_{\mathbb{R}})$ telle que, vue comme un morphisme de $H_{\mathbb{R}}$ dans $H_{\mathbb{R}}$, elle envoie x sur y et les autres générateurs sur

0. Alors

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr} \circ \overline{\nu}_\rho(T) &= \sum_{i,j=1}^g -\overline{\nu}_\rho(\varphi_{a_i}^{a_i})(a_j) \otimes b_j + \overline{\nu}_\rho(\varphi_{a_i}^{a_i})(b_j) \otimes a_j \\
&\quad - \overline{\nu}_\rho(\varphi_{b_i}^{b_i})(a_j) \otimes b_j + \overline{\nu}_\rho(\varphi_{b_i}^{b_i})(b_j) \otimes a_j \\
&= \sum_{i,j=1}^g -\varphi_{a_i}^{a_i} \circ d_\rho^X \circ \delta(T)(a_j) \otimes b_j + \varphi_{a_i}^{a_i} \circ d_\rho^X \circ \delta(T)(b_j) \otimes a_j \\
&\quad - \varphi_{b_i}^{b_i} \circ d_\rho^X \circ \delta(T)(a_j) \otimes b_j + \varphi_{b_i}^{b_i} \circ d_\rho^X \circ \delta(T)(b_j) \otimes a_j \\
&= \sum_{i,j=1}^g (-\varphi_{a_i}^{a_i} - \varphi_{b_i}^{b_i}) \circ d_\rho^X \circ \delta(T)(a_j) \otimes b_j \\
&\quad + (\varphi_{a_i}^{a_i} + \varphi_{b_i}^{b_i}) \circ d_\rho^X \circ \delta(T)(b_j) \otimes a_j \\
&= \sum_{j=1}^g - \left(\sum_{i=1}^g \varphi_{a_i}^{a_i} + \varphi_{b_i}^{b_i} \right) \circ d_\rho^X \circ \delta(T)(a_j) \otimes b_j \\
&\quad + \underbrace{\left(\sum_{i=1}^g \varphi_{a_i}^{a_i} + \varphi_{b_i}^{b_i} \right)}_{=\mathrm{Id}} \circ d_\rho^X \circ \delta(T)(b_j) \otimes a_j \\
&= - \sum_{j=1}^g d_\rho^X \circ \delta(T)(a_j) \otimes b_j - d_\rho^X \circ \delta(T)(b_j) \otimes a_j
\end{aligned}$$

Remarque 7.4.4. Nous pouvons voir cet élément de $H_{\mathbb{R}} \otimes H_{\mathbb{R}}$ comme un morphisme de $H_{\mathbb{R}}$ dans $H_{\mathbb{R}}$ (avec les identifications précédentes) : il s'agit de

$$-d_\rho^X \circ \delta(T).$$

Définissons alors un morphisme de $\Lambda^2 H \otimes H$ dans $H_{\mathbb{R}} \otimes H_{\mathbb{R}}$ par

$$(x \wedge y) \otimes z \longmapsto \left(-d_\rho^X(x \wedge y) \right) \otimes z.$$

D'après ce qui précède, vu que $\tau : \mathcal{S}(S) \rightarrow \Lambda^3 H \subset \Lambda^2 H_{\mathbb{R}} \otimes H_{\mathbb{R}}$ est défini comme

$$\tau(T) = \sum_{j=1}^g \delta(T)(a_j) \otimes b_j - \delta(T)(b_j) \otimes a_j,$$

cela fait commuter le diagramme :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr} \circ \overline{\nu}_\rho(T) &= \sum_{j=1}^g -d_\rho^X \circ \delta(T)(a_j) \otimes b_j + d_\rho^X \circ \delta(T)(b_j) \otimes a_j \\
&= \left((-d_\rho^X) \otimes \mathrm{Id} \right) (\tau(T))
\end{aligned}$$

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème. En effet, nous devons vérifier qu'en choisissant ρ convenablement, si $T \in \mathcal{S}(S)$ est tel que $\tau(T) \neq 0$, alors $\mathrm{Tr} \circ \overline{\nu}_\rho(T) \neq 0$. Comme nous venons de le voir, il suffit de vérifier que $d_\rho^X \otimes \mathrm{Id}$ ne s'annule pas sur toute l'image de τ , c'est-à-dire sur $\Lambda^3 H$.

Précisons un peu ce morphisme d_ρ^X . Soit $(e_i)_{1 \leq i \leq 2g}$ une base de H . Notons pour chaque i λ_i le réel tel que $\rho(e_i)^{-1} \exp(\lambda_i X) \in [G, G]$ (où nous considérons

ρ comme défini sur H , ce que nous pouvons faire puisqu'il s'agit d'une représentation abélienne). Notons maintenant s le morphisme $H \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $s(e_i) = \lambda_i$ pour chaque i . Alors

$$\forall x, y \in H, \quad d_\rho^X(x \wedge y) = s(x)y - s(y)x.$$

Soit maintenant $x \wedge y \wedge z \in \wedge^3 H$. Alors, par définition,

$$x \wedge y \wedge z = (x \wedge y) \otimes z + (y \wedge z) \otimes x + (z \wedge x) \otimes y,$$

et donc

$$\begin{aligned} (d_\rho^X \otimes \text{Id})(x \wedge y \wedge z) &= d_\rho^X(x \wedge y) \otimes z + d_\rho^X(y \wedge z) \otimes x + d_\rho^X(z \wedge x) \otimes y \\ &= s(x)y \otimes z - s(y)x \otimes z + s(y)z \otimes x - s(z)y \otimes x \\ &\quad + s(z)x \otimes y - s(x)z \otimes y \\ &= s(x)(y \otimes z - z \otimes y) + s(y)(z \otimes x - x \otimes z) \\ &\quad + s(z)(x \otimes y - y \otimes x) \\ &= s(x)y \wedge z + s(y)z \wedge x + s(z)x \wedge y. \end{aligned}$$

Ainsi, $d_\rho^X \otimes \text{Id}$ coïncide sur $\wedge^3 H$ avec $\text{Id} \otimes s : \wedge^2 H \otimes H \rightarrow \wedge^2 H \otimes \mathbb{R} \subset H_{\mathbb{R}} \otimes H_{\mathbb{R}}$, et donc est injectif dès que s l'est, ce qui arrive si les λ_i sont \mathbb{Z} -indépendants dans \mathbb{R} .

Au final, nous avons donc montré que

$$\text{Tr} \circ \nu_\rho(T) = \mathfrak{p}(X) \wedge \left(-d_\rho^X(\tau(T)) \right) = d_\rho^X(\tau(T)) \wedge \mathfrak{p}(X)$$

et que, si $\rho : \pi \rightarrow G$ est bien choisi, c'est-à-dire si le morphisme induit $H_{\mathbb{R}} \rightarrow G$ est injectif, alors la seule manière d'annuler ceci est d'annuler τ . Ainsi, ν_ρ a le même noyau que τ . \square

7.5 Exemples de calculs

Commençons par remarquer qu'un twist de Dehn autour d'une courbe séparante a une action triviale sur les cocycles de $Z^1(\pi; \mathfrak{g}_\rho)$, où ρ est comme avant une représentation de π dans G fixée par $\mathcal{I}(S)$. En effet, si α est une courbe séparante de S , nous pouvons trouver une base symplectique de $H_1(S; \mathbb{Z})$ telle que chacun de ses éléments intersecte zéro ou deux fois α (en les voyant comme des éléments de $\pi = \pi_1(S)$). De plus, si γ est une courbe intersectant deux fois α , alors le twist de Dehn autour de α envoie γ sur un conjugué de γ par $\alpha^{\pm 1}$.

Soit maintenant $\varphi \in Z^1(\pi; \mathfrak{g}_\rho)$. Alors par exemple

$$\begin{aligned} \varphi \circ T_\alpha^{-1}(\gamma) - \varphi(\gamma) &= \varphi(\alpha\gamma\alpha^{-1}) - \varphi(\gamma) \\ &= \varphi(\alpha) + \underbrace{\text{Ad}(\rho(\alpha))}_{=\text{Id}} \cdot \varphi(\gamma\alpha^{-1}) - \varphi(\gamma) \\ &= \varphi(\alpha) + \varphi(\gamma) + \text{Ad}(\rho(\gamma)) \cdot \varphi(\alpha^{-1}) - \varphi(\gamma) \\ &= \varphi(\alpha) - \text{Ad}(\rho(\gamma)) \cdot \text{Ad}(\rho(\alpha^{-1})) \cdot \varphi(\alpha) \\ &= \varphi(\alpha) - \text{Ad}(\rho(\gamma)) \cdot \varphi(\alpha) \end{aligned}$$

Or α est un élément de $[\pi, \pi]$, donc est un produit de commutateurs. Or nous avons déjà noté que l'image par un cocycle d'un commutateur est nécessairement dans $\mathfrak{c} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, qui est central dans \mathfrak{g} . Ainsi, l'action adjointe est triviale sur cet idéal, et nous en déduisons que

$$\varphi \circ T_\alpha^{-1}(\gamma) - \varphi(\gamma) = 0,$$

et ainsi $\varphi \circ T^{-1} - \varphi = 0$ pour tout cocycle φ . Si la conjugaison est faite par α^{-1} au lieu de α , le résultat est bien entendu identique.

Dans la suite de cette section, nous allons calculer l'action dérivée dans le cas d'éléments particuliers du groupe de Torelli : les paires séparantes. Soit (α, β) une paire séparante, c'est-à-dire un couple de (classes d'homotopie libre de) courbes fermées simples, homologues mais non homotopes, et non homologiquement triviales. Nous allons nous intéresser à l'élément du groupe de Torelli $T_\alpha^{-1}T_\beta$, c'est-à-dire à la composition du twist de Dehn autour de α et de l'inverse de celui autour de β (où nous considérons les twists de Dehn à droite).

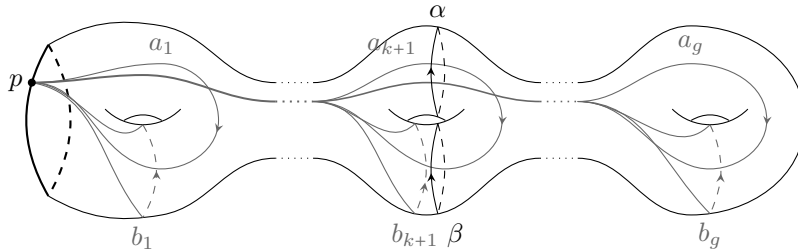


FIGURE 7.5.1 – Une paire séparante et un système de générateurs adapté

Avec cette paire séparante, nous fixons un ensemble de générateurs de π , $(a_i, b_i)_{1 \leq i \leq g}$ comme dans la figure 7.5.1. Notons que ceux-ci fournissent une base symplectique de H , et que le produit $\prod_{i=1}^g [a_i, b_i]$ est la composante de bord de S .

Notons k le genre de la sous-surface de S dont le bord est la réunion de α , β et la composante de bord de S . Nous pouvons alors choisir des générateurs $a_1, b_1, \dots, a_g, b_g$ de π , donnant une base symplectique en homologie, comme dans la figure 7.5.1.

Nous choisissons également une orientation des courbes α et β afin de les considérer comme des éléments de π de la façon suivante :

- pour α , nous suivons a_{k+1} (ou n'importe quel a_i , avec $i > k$) en partant de p jusqu'au point d'intersection avec α , puis nous parcourons α une fois (dans le sens indiqué sur le dessin, c'est-à-dire en partant vers la gauche), et nous revenons à p en suivant le même chemin ;
- pour β , nous l'identifions à b_{k+1}^{-1} .

Avant de passer au calcul de l'action proprement dit, précisons que le produit $\alpha\beta$ (vu comme le produit dans π , et où nous parcourons d'abord α puis β) est une courbe séparante, et plus précisément

$$\alpha\beta = \prod_{i=k+1}^g [a_i, b_i]. \quad (7.3)$$

Cette formule va nous permettre de calculer effectivement l'image de $\nu_\rho(T)$ dans $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \otimes H_{\mathbb{R}}$. D'après la section précédente, il nous suffit d'évaluer $\nu_\rho(T)$ sur les cocycles $\varphi_{a_i}^{b_i}$ et $\varphi_{b_i}^{a_i}$.

Soient donc $i, j \in \{1, \dots, g\}$. Si $j \leq k$, alors ni a_j ni b_j n'intersecte α ou β , et donc pour tout cocycle φ , $\nu_\rho(T)(\varphi)(a_j) = \nu_\rho(T)(\varphi)(b_j) = 0$. De même, $\nu_\rho(T)(\varphi)(b_{k+1}) = 0$.

Si maintenant $i > k + 1$, nous avons alors

$$\begin{aligned} T^{-1}a_j &= T_\alpha T_\beta^{-1} a_j \\ &= \alpha a_j \alpha^{-1} \\ &= \alpha \beta \beta^{-1} a_j \beta \beta^{-1} \alpha^{-1} \\ &= (\alpha \beta) b_{k+1} a_j b_{k+1}^{-1} (\alpha \beta)^{-1} \end{aligned}$$

et de la même façon

$$T^{-1}b_j = (\alpha \beta) b_{k+1} b_j b_{k+1}^{-1} (\alpha \beta)^{-1}.$$

Ainsi, comme nous l'avons déjà mentionné, pour tout cocycle φ , et tout $j > k + 1$,

$$\begin{aligned} (\varphi \circ T^{-1} - \varphi)(a_j) &= \varphi(b_{k+1} a_j b_{k+1}^{-1}) - \varphi(a_j) \\ (\varphi \circ T^{-1} - \varphi)(b_j) &= \varphi(b_{k+1} b_j b_{k+1}^{-1}) - \varphi(b_j) \end{aligned}$$

Ainsi, nous pouvons conclure que, pour tout i et tout $j > k + 1$, en omettant les mentions 'Ad' pour des notations plus digestes, ainsi que l'utilisation d'une section de la projection $\mathfrak{g} \rightarrow H_{\mathbb{R}}$, puisque nous avons vu que le choix d'une telle section n'avait pas d'incidence sur le résultat de l'action adjointe (autrement dit, nous considérons implicitement l'action adjointe comme une application $G \times H_{\mathbb{R}} \rightarrow [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$),

$$\begin{aligned} (\varphi_{a_i}^{b_i} \circ T^{-1} - \varphi_{a_i}^{b_i})(a_j) &= \varphi_{a_i}^{b_i}(b_{k+1} a_j b_{k+1}^{-1}) - \varphi_{a_i}^{b_i}(a_j) \\ &= (1 - \rho(a_j)) \cdot \varphi_{a_i}^{b_i}(b_{k+1}) - (1 - \rho(b_{k+1})) \cdot \varphi_{a_i}^{b_i}(a_j) \\ &= \begin{cases} -(1 - \rho(b_{k+1})) \cdot b_j & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \end{aligned}$$

et, de même

$$\begin{aligned} (\varphi_{a_i}^{b_i} \circ T^{-1} - \varphi_{a_i}^{b_i})(b_j) &= \varphi_{a_i}^{b_i}(b_{k+1} b_j b_{k+1}^{-1}) - \varphi_{a_i}^{b_i}(b_j) \\ &= (1 - \rho(b_j)) \cdot \varphi_{a_i}^{b_i}(b_{k+1}) - (1 - \rho(b_{k+1})) \cdot \varphi_{a_i}^{b_i}(b_j) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Nous avons également

$$\begin{aligned} (\varphi_{b_i}^{a_i} \circ T^{-1} - \varphi_{b_i}^{a_i})(a_j) &= \varphi_{b_i}^{a_i}(b_{k+1} a_j b_{k+1}^{-1}) - \varphi_{b_i}^{a_i}(a_j) \\ &= \begin{cases} (1 - \rho(a_j)) \cdot a_{k+1} & \text{si } i = k + 1 \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \end{aligned}$$

et enfin

$$\begin{aligned} (\varphi_{b_i}^{a_i} \circ T^{-1} - \varphi_{b_i}^{a_i})(b_j) &= \varphi_{b_i}^{a_i}(b_{k+1}b_jb_{k+1}^{-1}) - \varphi_{b_i}^{a_i}(a_j) \\ &= \begin{cases} (1 - \rho(b_j)) \cdot a_{k+1} & \text{si } i = k + 1 \\ -(1 - \rho(b_{k+1})) \cdot a_j & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

Il nous reste maintenant à déterminer $\varphi_{a_i}^{b_i}(a_{k+1})$ et $\varphi_{b_i}^{a_i}(a_{k+1})$. Pour cela, commençons par noter que

$$\begin{aligned} T^{-1}a_{k+1} &= T_\alpha T_\beta^{-1}a_{k+1} \\ &= \alpha a_{k+1} \beta \\ &= (\alpha \beta) b_{k+1} a_{k+1} b_{k+1}^{-1} \end{aligned}$$

Remarquons maintenant que, pour tout cocycle $\varphi \in Z^1(\pi; \mathfrak{g}_\rho)$,

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha\beta) &= \varphi\left(\prod_{j=k+1}^g [a_j, b_j]\right) \\ &= \sum_{j=k+1}^g \varphi([a_j, b_j]) \\ &= \sum_{j=k+1}^g (1 - \rho(b_j)) \cdot \varphi(a_j) - (1 - \rho(a_j)) \cdot \varphi(b_j) \end{aligned}$$

Ainsi, nous avons pour tout $i \in \{1, \dots, g\}$

$$\begin{aligned} (\varphi_{a_i}^{b_i} \circ T^{-1} - \varphi_{a_i}^{b_i})(a_{k+1}) &= \varphi_{a_i}^{b_i}(\alpha\beta) + \varphi_{a_i}^{b_i}(b_{k+1}a_{k+1}b_{k+1}^{-1}) - \varphi_{a_i}^{b_i}(a_{k+1}) \\ &= \sum_{j=k+1}^g (1 - \rho(b_j)) \cdot \varphi_{a_i}^{b_i}(a_j) - (1 - \rho(a_j)) \cdot \varphi_{a_i}^{b_i}(b_j) \\ &\quad + (1 - \rho(a_{k+1})) \cdot \varphi_{a_i}^{b_i}(b_{k+1}) \\ &\quad - (1 - \rho(b_{k+1})) \cdot \varphi_{a_i}^{b_i}(a_{k+1}) \\ &= \sum_{j=k+2}^g (1 - \rho(b_j)) \cdot \varphi_{a_i}^{b_i}(a_j) - (1 - \rho(a_j)) \cdot \varphi_{a_i}^{b_i}(b_j) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } i \leq k + 1 \\ (1 - \rho(b_i)) \cdot b_i & \text{sinon,} \end{cases} \end{aligned}$$

et de la même façon

$$(\varphi_{a_i}^{b_i} \circ T^{-1} - \varphi_{a_i}^{b_i})(a_{k+1}) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \leq k + 1 \\ (1 - \rho(b_i)) \cdot b_i & \text{sinon.} \end{cases}$$

En mettant tout ceci ensemble, nous obtenons ainsi

$$\begin{aligned} \text{Tr} \circ \nu_\rho(T_\alpha^{-1}T_\beta) &= \sum_{j \geq k+2} (1 - \rho(b_{k+1})) \cdot b_j \otimes b_j + (1 - \rho(a_j)) \cdot a_{k+1} \otimes b_j \\ &\quad - (1 - \rho(b_j)) \cdot a_{k+1} \otimes a_j + (1 - \rho(b_{k+1})) \cdot a_j \otimes a_j \\ &\quad + \sum_{i \geq k+2} -(1 - \rho(b_i)) \cdot b_i \otimes b_{k+1} - (1 - \rho(a_i)) \cdot a_i \otimes b_{k+1} \\ &\in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \otimes H. \end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant utiliser la description des représentations abéliennes 7.2.2 pour affiner le résultat. Soient donc $X \in \mathfrak{g}$ et λ_i, μ_i avec $i = 1, \dots, g$ tels que, à multiplication par un élément de $[G, G]$ près,

$$\rho(a_i) = \exp(\lambda_i X), \quad \rho(b_i) = \exp(\mu_i X) \quad \forall i = 1, \dots, g.$$

Alors, comme nous l'avons vu au cours de la démonstration du Théorème 7.1.1, pour tout $j \in \{k+2, \dots, g\}$ et tout $U \in \mathfrak{g}$

$$(1 - \rho(a_j)) \cdot U = -[\lambda_j X, U] \quad \text{et} \quad (1 - \rho(b_j)) \cdot U = -[\mu_j X, U]$$

et donc l'égalité précédente devient

$$\begin{aligned} \text{Tr} \circ \nu_\rho (T_\alpha^{-1} T_\beta) &= \sum_{j \geq k+2} -[\mu_{k+1} X, b_j] \otimes b_j - [\lambda_j X, a_{k+1}] \otimes b_j \\ &\quad + [\mu_j X, a_{k+1}] \otimes a_j - [\mu_{k+1} X, a_j] \otimes a_j \\ &\quad + [\mu_j X, b_j] \otimes b_{k+1} + [\lambda_j X, a_j] \otimes b_{k+1} \\ &= \sum_{j \geq k+2} -[X, \mu_{k+1} b_j] \otimes b_j - [X, \lambda_j a_{k+1}] \otimes b_j \\ &\quad + [X, \mu_j a_{k+1}] \otimes a_j - [X, \mu_{k+1} a_j] \otimes a_j \\ &\quad + [X, \mu_j b_j] \otimes b_{k+1} + [X, \lambda_j a_j] \otimes b_{k+1} \\ &= \sum_{j \geq k+2} -\mathfrak{p}(X) \wedge \mu_{k+1} b_j \otimes b_j - \mathfrak{p}(X) \wedge \lambda_j a_{k+1} \otimes b_j \\ &\quad + \mathfrak{p}(X) \wedge \mu_j a_{k+1} \otimes a_j - \mathfrak{p}(X) \wedge \mu_{k+1} a_j \otimes a_j \\ &\quad + \mathfrak{p}(X) \wedge \mu_j b_j \otimes b_{k+1} + \mathfrak{p}(X) \wedge \lambda_j a_j \otimes b_{k+1} \end{aligned}$$

Il s'agit clairement de l'image par l'application

$$\begin{aligned} H_{\mathbb{R}} \otimes H_{\mathbb{R}} &\xrightarrow{(\mathfrak{p}(X) \wedge \cdot) \otimes \text{Id}} \bigwedge^2 H_{\mathbb{R}} \otimes H_{\mathbb{R}} \\ U \otimes V &\longmapsto (\mathfrak{p}(X) \wedge U) \otimes V \end{aligned}$$

de

$$\begin{aligned} \sum_{j \geq k+2} -\mu_{k+1} b_j \otimes b_j - \lambda_j a_{k+1} \otimes b_j + \mu_j a_{k+1} \otimes a_j - \mu_{k+1} a_j \otimes a_j \\ + \mu_j b_j \otimes b_{k+1} + \lambda_j a_j \otimes b_{k+1}. \end{aligned}$$

En appliquant maintenant $(\sum_i \varphi_{b_i}^{a_i} - \varphi_{a_i}^{b_i})^{-1} \otimes \text{Id}$, c'est-à-dire $(\sum_i \varphi_{a_i}^{b_i} - \varphi_{b_i}^{a_i}) \otimes \text{Id}$, nous obtenons

$$\begin{aligned} \sum_{j \geq k+2} \mu_{k+1} a_j \otimes b_j - \lambda_j b_{k+1} \otimes b_j + \mu_j b_{k+1} \otimes a_j - \mu_{k+1} b_j \otimes a_j \\ - \mu_j a_j \otimes b_{k+1} + \lambda_j b_j \otimes b_{k+1}, \end{aligned}$$

c'est-à-dire, en notant s le morphisme $H_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$ défini par $s(a_i) = \lambda_i$ et $s(b_i) = \mu_i$ pour tout i comme avant,

$$\begin{aligned} \sum_{j \geq k+2} (s(b_{k+1})a_j - s(a_j)b_{k+1}) \otimes b_j + (s(b_j)b_{k+1} - s(b_{k+1})b_j) \otimes a_j \\ + (s(a_j)b_j - s(b_j)a_j) \otimes b_{k+1}. \end{aligned}$$

Maintenant, nous reconnaissons facilement l'image par $d_{\rho}^X \otimes \text{Id}$, où $d_{\rho}^X(U \wedge V) = s(U)V - s(V)U$, de

$$\begin{aligned} \sum_{j \geq k+2} (a_j \wedge b_j) \otimes b_{k+1} + (b_j \wedge b_{k+1}) \otimes a_j + (b_{k+1} \wedge a_j) \otimes b_j = \sum_{j \geq k+2} a_j \wedge b_j \wedge b_{k+1} \\ = \tau(T_{\alpha}^{-1}T_{\beta}) \end{aligned}$$

Annexe A

Morphisme de Johnson

Soient S une surface compacte orientée sans bord de genre $g \geq 2$, de groupe fondamental π . Notons S° la surface obtenue en retirant un disque (ouvert) à S , de sorte que S° a une composante de bord, et π° son groupe fondamental (dont le point base est supposé être sur le bord de S°).

Notons $H = \pi/\pi' = H^1(\pi; \mathbb{Z})$, $E = \pi/[\pi, \pi']$ et $N = \pi'/[\pi, \pi']$, ainsi que $H^\circ = \pi^\circ/\pi'^\circ = H^1(\pi^\circ; \mathbb{Z})$, $E^\circ = \pi^\circ/[\pi^\circ, \pi'^\circ]$ et $N^\circ = \pi'^\circ/[\pi^\circ, \pi'^\circ]$. Nous avons alors les suites exactes

$$0 \rightarrow N \rightarrow E \rightarrow H \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad 0 \rightarrow N^\circ \rightarrow E^\circ \rightarrow H^\circ \rightarrow 0$$

(H et H° sont isomorphes, mais nous continuerons à les noter différemment afin de garder une unité de notation).

Nous pouvons définir une application $\{\cdot, \cdot\} : H^2 \rightarrow N$ de la façon suivante : pour $x, y \in H$, choisissons des relevés $\tilde{x}, \tilde{y} \in E$. Le commutateur $[\tilde{x}, \tilde{y}]$ est alors dans l'image de N (puisque H est abélien), et ne dépend pas des relevés choisis. En effet, si \tilde{x}', \tilde{y}' sont d'autres relevés à E de x et y , alors il existe $u, v \in N$ tels que $\tilde{x}' = u\tilde{x}$ et $\tilde{y}' = v\tilde{y}$. Comme N est central dans E (par construction),

$$[\tilde{x}', \tilde{y}'] = [u\tilde{x}, v\tilde{y}] = [u, v][\tilde{x}, \tilde{y}] = [\tilde{x}, \tilde{y}].$$

Nous pouvons alors définir $\{x, y\}$ comme la pré-image de $[\tilde{x}, \tilde{y}]$ dans N .

Proposition. *L'application $\{\cdot, \cdot\} : H^2 \rightarrow N$ est bilinéaire et antisymétrique, et donne une surjection $\Lambda^2 H \rightarrow N$.*

Démonstration. La bilinéarité et l'antisymétrie viennent d'un calcul élémentaire de commutateurs, et la surjectivité du fait que N est engendré par les commutateurs de E . \square

Nous définissons de la même façon $\{\cdot, \cdot\} : \Lambda^2 H^\circ \rightarrow N^\circ$, qui est de plus un isomorphisme. L'injectivité de $\{\cdot, \cdot\} : \Lambda^2 H^\circ \rightarrow N^\circ$ découle du fait que ces deux \mathbb{Z} -modules libres ont le même rang.

Étudions maintenant l'action du groupe de Torelli sur E° . Soit $T^\circ \in \mathcal{S}(S^\circ)$, qui induit un automorphisme de π° , et donc de E° . Par définition du groupe de Torelli, T° agit trivialement sur H° , et donc aussi sur $N^\circ = \Lambda^2 H^\circ$. Sachant cela, étant donné $x^\circ \in H^\circ$ et $e^\circ \in E^\circ$ qui relève x° , il est facile de voir que $T^\circ(e^\circ)e^{\circ-1}$

ne dépend pas du relèvement de x choisi, et appartient à N° . Cela nous permet de définir un morphisme $\delta T^\circ : H^\circ \rightarrow \Lambda^2 H^\circ$ qui à x° associe $T^\circ(e^\circ)e^{\circ-1}$. L'application

$$\delta : \mathcal{S}(S^\circ) \rightarrow \text{Hom}\left(H^\circ, \bigwedge^2 H^\circ\right)$$

est en réalité un morphisme de groupes.

Nous pouvons modifier le groupe d'arrivée de $\delta : \text{Hom}(H^\circ, \bigwedge^2 H^\circ)$ est naturellement isomorphe à $\bigwedge^2 H^\circ \otimes (H^\circ)^*$, que l'on identifie grâce à la structure symplectique habituelle sur H° à $\bigwedge^2 H^\circ \otimes H^\circ$. Nous obtenons par ces identifications le *morphisme de Johnson*

$$\tau : \mathcal{S}(S^\circ) \longrightarrow \bigwedge^2 H^\circ \otimes H^\circ.$$

Son image est en réalité égale à $\bigwedge^3 H^\circ$, vu comme sous-espace de $\bigwedge^2 H^\circ \otimes H^\circ$:

$$\forall x, y, z \in H^\circ, \quad x \wedge y \wedge z = (x \wedge y) \otimes z + (y \wedge z) \otimes x + (z \wedge x) \otimes y.$$

Ce résultat s'obtient en étudiant l'image de générateurs de $\mathcal{S}(S^\circ)$: les courbes séparantes et les paires séparantes [25].

Surfaces fermées. Nous cherchons maintenant à voir comment ces résultats peuvent s'adapter à la surface fermée S , puisque $\text{Mod}(S)$ ne s'identifie pas à un sous-groupe de $\text{Aut}(\pi)$ mais de $\text{Out}(\pi)$. Notons d'abord un morphisme surjectif $p : \text{Mod}(S^\circ) \rightarrow \text{Mod}(S)$ (qui consiste à prolonger un homéomorphisme de S° par l'identité dans un disque). Ce morphisme ne dépend pas du disque que l'on a retiré à S pour obtenir S° . Étant donné $T \in \mathcal{S}(S)$, et T° un relèvement de T à $\mathcal{S}(S^\circ)$, $\tau(T^\circ)$ est bien défini modulo un élément de la forme $\tau(U^\circ)$ où $U^\circ \in \ker(p)$. Autrement dit, nous pouvons définir τ sur $\mathcal{S}(S)$ en lui faisant prendre ses valeurs dans $\bigwedge^3 H / \tau(\ker(p))$ (notons qu'ici nous identifions H et H° , l'inclusion $S^\circ \hookrightarrow S$ donnant un isomorphisme en homologie). Il nous faut donc déterminer l'image par τ du noyau de p .

Nous savons que ce noyau est engendré par deux types d'éléments : d'une part le twist de Dehn autour du bord de S° d'une part, et les paires séparantes de genre $g-1$ d'autre part. La première catégorie est également dans le noyau de τ (qui envoie tous les twists de Dehn autour de courbes séparantes sur 0), il reste donc à étudier les paires séparantes de genre $g-1$. Pour cela, définissons $u : H \rightarrow \bigwedge^3 H$ par

$$u : x \in H \mapsto \left(\sum_{i=1}^g a_i \wedge b_i \right) \wedge x \in \bigwedge^3 H$$

où $(a_i, b_i)_{1 \leq i \leq g}$ est une base symplectique de H . Notons que l'élément $\theta = \sum a_i \wedge b_i \in \bigwedge^2 H$ ne dépend pas de la base symplectique choisie, et est donc invariant sous l'action du groupe symplectique $\text{Sp}(2g, \mathbb{Z})$. L'image par τ de $\ker(p)$ est alors égale à l'image de u . Cela se démontre en remarquant que la famille $(a_i, b_i)_{i \leq g-1}$ peut être complétée en une base symplectique de H contenant l'une des deux courbes de la paire séparante.

Annexe B

Résultat de Long

Nous allons ici étudier plus en détails les résultats de Long, et dans un premier temps ceux de [30] et de [13]. Pour cela, fixons G un groupe de Lie connexe semi-simple (qui sera le plus souvent $SU(2; \mathbb{C})$ ou $SL(2; \mathbb{C})$). Nous noterons également \mathbb{F}_n le groupe libre à n générateurs, qui seront notés x_1, \dots, x_n .

La variété des représentations $\text{Hom}(\mathbb{F}_n, G)$ sera notée $\mathfrak{R}(\mathbb{F}_n, G)$ (et, en l'absence d'ambiguïté, \mathfrak{R}). Comme le groupe de départ est libre, \mathfrak{R} s'identifie au produit G^n , et hérite ainsi d'une structure de groupe de Lie.

Le groupe $\text{Aut}(\mathbb{F}_n)$ agit sur \mathfrak{R} de la manière évidente (à une subtilité près : si $\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{F}_n)$ et $\rho \in \mathfrak{R}$, alors $\varphi \cdot \rho = \rho \circ \varphi^{-1}$ comme ci-dessus). Considérons maintenant le groupe de tresses à n brins B_n , que nous considérerons sous la forme d'un sous-groupe de $\text{Aut}(\mathbb{F}_n)$:

$$B_n = \left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \left| \begin{array}{ll} \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i & \text{si } |i - j| > 1 \\ \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} & \text{pour } 1 \leq i < n - 1 \end{array} \right. \right\rangle, \\ \sigma_i(x_i) = x_{i+1}, \quad \sigma_i(x_{i+1}) = x_{i+1}^{-1} x_i x_{i+1}, \quad \sigma_i(x_j) = x_j \text{ si } j \neq i, i + 1. \quad (\text{B.1})$$

Notons P_n le groupe de tresses pures, c'est-à-dire le noyau du morphisme habituel $B_n \rightarrow \mathfrak{S}_n$. Dans le cas où G est $SU(2)$, il y a une famille de représentations fixées par le groupe de tresses : les représentations diagonales dont les images des générateurs sont toutes identiques. Plus précisément, notons Λ la matrice $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \bar{\lambda} \end{pmatrix}$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{C}$ de module 1. Nous noterons également Λ_p la matrice obtenue dans le cas où $\lambda = e^{ip}$. Posons maintenant $\rho(p)$ la représentation $(\Lambda_p, \dots, \Lambda_p)$, ce qui nous donne une famille à un paramètre de points fixes sous l'action de B_n .

Théorème. *La représentation $B_n \rightarrow \text{Diff}(\mathfrak{R})_{\rho(p)} \rightarrow \text{GL}(T_{\rho(p)}\mathfrak{R})$, où $\text{Diff}(\mathfrak{R})_{\rho(p)}$ désigne l'ensemble des difféomorphismes qui fixent $\rho(p)$, se décompose comme la représentation par permutations et la représentation de Burau.*

Démonstration. La preuve se résume à calculer l'image des générateurs de B_n , et à constater que nous obtenons sur la partie réelle de l'algèbre de Lie $\mathfrak{su}(2; \mathbb{C})$ des matrices de permutation, et sur la partie complexe les matrices de la repré-

sentation de Burau

$$\sigma_1 \mapsto \begin{pmatrix} 1 - \lambda^2 & \lambda^2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

□

Remarque. La représentation de Burau est en réalité à valeurs dans le groupe $GL(n; \mathbb{Z}[t^{\pm 1}])$. Ce que nous obtenons ici est la spécialisation $t = \lambda^2$ de la représentation de Burau.

Passons maintenant à la *variété dérivée* introduite par Cooper et Long dans [13]. Comme nous considérons ici les morphismes définis sur un groupe libre, l'espace des représentations $\mathfrak{R}(\mathbb{F}_n, G)$ a une structure de groupe de Lie, algébrique dès que G l'est. Nous supposons pour la suite de cette section que G est un groupe de Lie complexe algébrique. Ainsi, nous pouvons définir sur \mathfrak{R} la translation à gauche $L_\rho : \alpha \mapsto \rho \cdot \alpha$. Comme B_n agit sur \mathfrak{R} par difféomorphismes (réguliers dans le cas algébrique), pour $\varphi \in B_n$ nous pouvons parler de sa dérivée en un point $\rho \in \mathfrak{R}$. En utilisant la translation à gauche, nous avons une manière canonique de ramener les vecteurs tangents à ρ et $\varphi \cdot \rho$ en l'identité, définissant ainsi la différentielle généralisée $\xi_\varphi(\rho) \in \text{Aut}(T_1 \mathfrak{R})$:

$$\begin{array}{ccc} T_\rho \mathfrak{R} & \xrightarrow{d\varphi_\rho} & T_{\varphi \cdot \rho} \mathfrak{R} \\ \downarrow dL_\rho^{-1} & & \downarrow dL_{\varphi \cdot \rho}^{-1} \\ T_1 \mathfrak{R} & \xrightarrow{\xi_\varphi(\rho)} & T_1 \mathfrak{R} \end{array}$$

Définition. La *variété dérivée* de $\varphi \in B_n$, notée $B(\varphi)$ est la fermeture de Zariski de l'image de ξ_φ . Il s'agit d'une sous-variété (algébrique affine irréductible) de $\text{Aut}(T_1 \mathfrak{R})$.

Bibliographie

- [1] M. AKHAVAN-MALAYERI, *On commutator length of certain classes of solvable groups*, Internat. J. Algebra Comput., 15 (2005), p. 143–147.
- [2] M. ATIYAH ET R. BOTT, *The Yang-Mills equations over Riemann surfaces*, Phil. Trans. R. Soc. A, 308 (1983), p. 523–615.
- [3] A. BANYAGA ET D. F. HOUENOU, *A brief introduction to symplectic and contact manifolds*, vol. 15, World Scientific, 2016.
- [4] J. BARGE ET E. GHYS, *Surfaces et cohomologie bornée*, Inventiones Mathematicae, 92 (1988), p. 509–526.
- [5] C. BAVARD, *Longueur stable des commutateurs*, Enseign. Math.(2), 37 (1991), p. 109–150.
- [6] J. S. BIRMAN, *Braids, Links, and Mapping Class Groups.(AM-82)*, vol. 82, Princeton University Press, 2016.
- [7] K. BROWN, *Cohomology of Groups*, Springer, 1982.
- [8] D. CALEGARI, *scl*, vol. 20, MSJ Memoirs, 2009.
- [9] I. CHATTERJI, Y. DE CORNULIER, G. MISLIN ET C. PITTET, *Bounded characteristic classes and flat bundles*, J. Diff. Geom., 95 (2013), p. 39–51.
- [10] I. CHATTERJI, G. MISLIN ET C. PITTET, *Flat bundles with complex analytic holonomy*, Q. J. Math., 67 (2016), p. 743–755.
- [11] V. CHUESHEV, *The Gunning cohomology bundle and the Torelli group*, Sib. Math. J., 31 (1990), p. 523–527.
- [12] T. CHURCH ET A. PUTMAN, *Generating the Johnson filtration*, Geom. Topol., 19 (2015), p. 2217–2255.
- [13] D. COOPER ET D. LONG, *Derivative varieties and the pure braid group*, Amer. J. Math., 115 (1993), p. 137–160.
- [14] B. FARB ET D. MARGALIT, *A primer on mapping class groups (pms-49)*, Princeton University Press, 2011.
- [15] L. FUNAR, *On mapping class group quotients by powers of Dehn twists and their representations*, arXiv preprint arXiv :2009.05961, (2020).
- [16] S. GHAZOUANI, *Mapping class group dynamics on $\text{Aff}(\mathbb{C})$ -characters.*, Ann. Inst. Fourier, 66 (2016), p. 729–751.
- [17] W. GOLDMAN, *Flat bundles with solvable holonomy. II. Obstruction theory*, Proc. Amer. Math. Soc., 83 (1981), p. 175–178.
- [18] ———, *The symplectic nature of fundamental groups of surfaces*, Adv. Math., 54 (1984), p. 200–225.

- [19] ———, *Topological components of spaces of representations*, *Inventiones mathematicae*, 93 (1988), p. 557–607.
- [20] ———, *Mapping class group dynamics on surface group representations*, in *Problems on mapping class groups and related topics*, Providence, RI : American Mathematical Society (AMS), 2006, p. 189–214.
- [21] W. GOLDMAN ET M. HIRSCH, *Flat bundles with solvable holonomy*, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 82 (1981), p. 491–494.
- [22] W. GOLDMAN ET J. MILLSON, *Deformations of flat bundles over Kähler manifolds*, *Geometry and topology* (Athens, Ga., 1985), 105 (1988), p. 129–145.
- [23] R. C. GUNNING, *On the period classes of Prym differentials. I*, *J. Reine Angew. Math.*, 319 (1980), p. 153–171.
- [24] A. HATCHER, *Algebraic topology*, Cambridge UP, Cambridge, 2002.
- [25] D. JOHNSON, *An abelian quotient of the mapping class group \mathcal{S}_g* , *Math. ann.*, 249 (1980), p. 225–242.
- [26] ———, *A survey of the Torelli group*, *Contemp. Math*, 20 (1983), p. 165–179.
- [27] A. W. KNAPP, *Lie groups, Lie algebras, and cohomology*, vol. 34, Princeton University Press, 1988.
- [28] ———, *Lie groups beyond an introduction*, vol. 140, Springer Science & Business Media, 2013.
- [29] J.-L. KOSZUL ET S. RAMANAN, *Lectures on fibre bundles and differential geometry*, Springer-Verlag, 1986.
- [30] D. LONG, *On the linear representation of braid groups*, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 311 (1989), p. 535–560.
- [31] ———, *On the linear representation of braid groups, II*, *Duke Math. J.*, 59 (1989), p. 443–460.
- [32] ———, *Constructing representations of braid groups*, *Comm. Anal. Geom.*, 2 (1994), p. 217–238.
- [33] J. MILNOR, *On the existence of a connection with curvature zero*, *Comment. Math. Helv.*, 32 (1958), p. 215–223.
- [34] J. MILNOR ET J. STASHEFF, *Characteristic classes*, Princeton Univ. Press, 1974.
- [35] A. PUTMAN, *The Johnson homomorphism and its kernel*, *J. Reine Angew. Math.*, 735 (2018), p. 109–141.
- [36] P. STROUD, *Topics in the theory of verbal subgroups*, PhD Thesis, (1966).