



**HAL**  
open science

# Dissipation, cascade et singularités en turbulence

Hugues Faller

► **To cite this version:**

Hugues Faller. Dissipation, cascade et singularités en turbulence. Mécanique des fluides [physics.class-ph]. Université Paris-Saclay, 2022. Français. NNT : 2022UPASP002 . tel-03669581

**HAL Id: tel-03669581**

**<https://theses.hal.science/tel-03669581>**

Submitted on 16 May 2022

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Dissipation, cascade et singularités en turbulence

*Dissipation, cascade and singularities in turbulence*

**Thèse de doctorat de l'université Paris-Saclay**

École doctorale n° 564, Physique en Île-de-France (PIF)  
Spécialité de doctorat : Physique  
Graduate School : Physique, Référent : Faculté des sciences d'Orsay

Thèse préparée dans les unités de recherche **SPEC** (Université Paris-Saclay, CEA, CNRS) et **LISN** (Université Paris-Saclay, CNRS), sous la direction de **Bérengère DUBRULLE**, directeur de recherche CNRS et la co-direction de **Caroline NORE**, professeur des universités.

**Thèse soutenue à Paris-Saclay, le 17 janvier 2022, par**

**Hugues FALLER**

## Composition du jury :

**Sébastien GALTIER**

Professeur des universités, Université Paris-Saclay

**Luca BIFERALE**

Professeur détaché, Università degli studi di Tor Vergata

**Yannick PONTY**

Directeur de recherche, CNRS, Université Côte d'Azur

**Alain PUMIR**

Directeur de recherche, CNRS, École normale supérieure de Lyon

**Bérengère DUBRULLE**

Directeur de recherche, CNRS, Université Paris-Saclay

Président

Rapporteur & Examineur

Rapporteur & Examineur

Examineur

Directrice de thèse



**Titre :** Dissipation, cascade et singularités en turbulence

**Mots clés :** Turbulence, physique hors équilibre, dissipation, singularité

**Résumé :** Les écoulements turbulents sont régis par les équations de Navier-Stokes qui décrivent le mouvement des fluides des échelles macroscopiques aux échelles microscopiques, où des phénomènes de dissipation transforment l'énergie cinétique en énergie thermique. Deux particularités rendent difficile, voire impossible l'utilisation directe de ces équations pour simuler numériquement le comportement des fluides turbulents qui nous entourent :

- les écoulements s'étendent sur des gammes d'échelles gigantesques, impliquant un nombre de degrés de liberté trop grand pour être géré par nos super-calculateurs actuels ;
- ils conduisent au développement de structures localisées caractérisées par de très forts gradients, qu'on ne sait pas bien gérer numériquement, et qui pourraient être la signature de singularités ou de quasi singularités se développant dans la limite des grands nombres de Reynolds.

Dans cette thèse, nous proposons d'utiliser ce second phénomène pour contrer les problèmes liés au premier, i.e. d'améliorer la modélisation des écoulements turbulents en tenant compte de leur irrégularité. Ainsi, nous proposons des modèles de correction des équations de Navier-Stokes aux échelles macroscopiques ou mésoscopiques. Ces modèles sont guidés par les observations et confrontés à des données expérimentales ou des simulations numériques. Nous présentons tout d'abord les équations de Navier-Stokes et le fonctionnement des simulations numériques pour les écoulements turbulents réels, de l'algorithme à la conduite de calcul haute performance. Ensuite, nous nous intéressons à deux quantités macroscopiques des écoulements turbulents : la topologie des grandes recirculations et le flux d'énergie. Pour ces quantités, nous proposons deux modélisations : une première pour le comportement loin des parois des fluides, à l'aide d'une méthode de simula-

tion des grandes structures, et une seconde de prise en compte des parois et d'étude de l'impact de la rugosité sur l'entraînement du fluide. Après cette étude macroscopique, nous regardons d'un point de vue statistique les propriétés macroscopiques, mésoscopiques et microscopiques de la turbulence à l'aide des fonctions de structure et des flux locaux d'énergie inter-échelle. Notre analyse statistique met en lumière la faible régularité des écoulements observés qui ne semblent pas respecter la modélisation classique de Kolmogorov qui prévoit une échelle de régularisation fixe. Pour prendre en compte ce phénomène, nous proposons donc une nouvelle normalisation universelle des écoulements en utilisant les propriétés du modèle multifractal. Cette normalisation est interprétée dans un cadre thermodynamique, et liée à l'extensivité d'une énergie libre. Nous nous intéressons ensuite à la compréhension de la dissipation locale et de la variabilité observée de l'échelle de dissipation. Nous observons que cette dernière est corrélée avec l'existence de valeurs extrêmes de transfert d'énergie aux plus petites échelles, phénomène que nous interprétons comme une signature de l'existence de singularités ou quasi-singularités. Forts de cette vision, nous proposons un modèle de description des fluides incluant des singularités baptisées pinçons qui interagissent entre elles et avec l'écoulement régulier qui les entoure.

Toutes ces modélisations, des plus grandes échelles de l'écoulement jusqu'aux singularités reflètent l'impact des singularités (défauts ponctuels) à différentes échelles. Si l'existence des pinçons n'est pas attestée, leur prise en compte permet d'expliquer ou de modéliser plusieurs phénomènes : la détermination de la topologie des grandes recirculations de l'écoulement, l'apparition de puits d'énergie indépendants de la viscosité et maintenus par le caractère hors équilibre et l'universalité des statistiques filtrées locales.

**Title:** Dissipation, cascade and singularities in turbulence

**Keywords:** Turbulence, out-of-equilibrium physics, dissipation, singularities

**Abstract:** Turbulent flows are governed by the Navier-Stokes equations which describe the motion of fluids from macroscopic to microscopic scales, where dissipation phenomena transform kinetic energy into heat. Two characteristics make it difficult, if not impossible, to use these equations directly to numerically simulate the behaviour of the fluids that surround us:

- the flows extend over gigantic ranges of scales, implying a number of degrees of freedom too great to be managed by our current supercomputers;
- they lead to the development of localised structures characterised by very strong gradients, which we do not know how to manage numerically, and which could be the signature of singularities or quasi-singularities developing in the limit of large Reynolds numbers.

In this thesis, we propose to use this second phenomenon to counter the problems related to the first one, i.e. to improve the modelling of turbulent flows by taking into account their irregularity. Thus, we propose models for the correction of the Navier-Stokes equations at macroscopic or mesoscopic scales. These models are guided by observations and confronted with experimental data or numerical simulations. We first present the Navier-Stokes equations and the functioning of numerical simulations for real turbulent flows, from the algorithm to the high-performance computing. Then, we focus on two macroscopic quantities of turbulent flows: the topology of large recirculations and the energy flow. For these quantities, we propose two models: the first one for the behaviour far from the fluid walls, using a large eddy simulation method,

and the second one taking into account the walls and studying the impact of the roughness on the fluid entrainment. After this macroscopic study, we take a statistical look at the macroscopic, mesoscopic and microscopic properties of the turbulence using structure functions and local inter-scale energy flows. Our statistical analysis highlights the low regularity of the observed flows which do not seem to respect the classical Kolmogorov modelling which predicts a fixed regularisation scale. To take this phenomenon into account, we propose a new universal normalisation of the flows using the properties of the multifractal model. This normalisation is interpreted in a thermodynamic framework, and linked to the extensivity of a free energy. We then turn to the understanding of local dissipation and the observed variability of the dissipation scale. We observe that the latter is correlated with the existence of extreme values of energy transfer at the smallest scales, which we interpret as a signature of the existence of singularities or quasi-singularities. Based on this vision, we propose a model to describe fluids including singularities called pinçons that interact with each other and with the regular flow that surrounds them.

All these models, from the largest scales of the flow to the point singularities, are ultimately a reflection of the impact of the singularities (point defects) at different scales. If the pinçons do not necessarily exist, taking them into account would make it possible to explain or model several phenomena: the determination of the topologies of the large recirculations of the flow, the appearance of energy wells independent of the viscosity and maintained by the non-equilibrium character and the universality of the local filtered statistics.



## R e m e r c i e m e n t s

Menée entre deux laboratoires -LISN et SPEC, cette thèse, est l'aboutissement d'un voyage scientifique dans le monde des écoulements turbulents. Pour m'orienter dans ces contrées, j'ai reçu l'appui ainsi que les conseils avisés et complémentaires de mes directrices de thèse, Bérengère et Caroline. Je vous remercie pour votre disponibilité et ce que vous m'avez transmis. Travailler avec vous fut très agréable. J'ai eu l'occasion de me rendre au Texas pour travailler avec Jean-Luc Guermond, qui m'a guidé dans le monde des mathématiques appliquées à la simulation. Avec Eric vous m'avez chaleureusement accueilli et permis de travailler dans de bonnes conditions. Je remercie également le jury pour les échanges constructifs que nous avons eus et singulièrement les rapporteurs qui ont évalué avec attention mes travaux, tout comme les membres de mon comité de suivi.

Lors de mon exploration du monde de la recherche, j'ai été accompagné par de nombreux collaborateurs du SPEC (où certains expérimentateurs m'ont même laissé l'opportunité de manipuler leurs expériences) et du LISN, mais aussi de nombreuses personnes d'autres laboratoires : au LSCE à Saclay, au LMFL à Lille, au LMFA à Lyon, à la Freie Universität à Berlin, et enfin à l'université de Houston. Je vous remercie tous pour nos échanges.

Pour m'orienter administrativement, j'ai pu me reposer sur une aide administrative et d'assistance de qualité des secrétariats et directions de mes laboratoires, de l'université et de l'école doctorale PIF, en plus des équipes de support informatiques, donc celle des supercalculateurs de l'IDRIS qui est remarquable.

J'ai également trouvé dans mes laboratoires de thèse de très sympathiques collègues et amis qui se reconnaîtront.

Enfin, je souhaite remercier ma famille et mes amis pour leur présence et leur soutien pendant ces trois années, surtout mes parents (qui soutinrent leur thèse au LRI d'Orsay, intégré au LISN après fusion), mais aussi Emma, avec Damien et Solène pour leurs encouragements et les nombreuses relectures de ce manuscrit.

## PUBLICATIONS ET TRAVAUX EN COURS RELATIFS À CETTE THÈSE

---

1. TURBULENCE IN REALISTIC GEOMETRIES WITH MOVING BOUNDARIES: WHEN SIMULATIONS MEET EXPERIMENTS [doi:10.1016/j.compfluid.2020.104750](https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2020.104750) cf Cappanera et al. [20] (2021) et section 2.5.
2. ABOUT UNIVERSALITY AND THERMODYNAMICS OF TURBULENCE [doi:10.3390/e21030326](https://doi.org/10.3390/e21030326) cf Geneste et al. [51] (2019) et section 3.2.
3. ON THE NATURE OF INTERMITTENCY IN A TURBULENT VON KÁRMÁN FLOW [doi:10.1017/jfm.2020.908](https://doi.org/10.1017/jfm.2020.908) cf Faller et al. [42] (2021) et section 3.3.
4. TRANSITION FROM NON-SWIRLING TO SWIRLING AXISYMMETRIC TURBULENCE [doi:10.1103/PhysRevFluids.5.064602](https://doi.org/10.1103/PhysRevFluids.5.064602) cf Qin et al. [117] (2020)
5. A MODEL OF INTERACTING NAVIER-STOKES SINGULARITIES [arxiv.org/abs/2103.15732](https://arxiv.org/abs/2103.15732) cf Faller, Fery, Geneste, et Dubrulle [41] (2021) et section 4.2.



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Préambule</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Dissipation</b>	<b>3</b>
2.1	Comportement d'un fluide	3
2.1.1	Équations de Navier-Stokes	3
2.1.2	Bilans énergétique et de vortacité	4
2.1.3	Régularité des fonctions	6
2.2	Le code Spectral/Finite Elements for Maxwell and Navier-Stokes	6
2.2.1	Décomposition méridionale	6
2.2.2	Décomposition spectrale	9
2.2.3	Avancée temporelle	9
2.2.4	Prise en compte de conditions limites et d'obstacles solides	10
2.2.5	Scalabilité	13
2.2.6	Méthode de simulation des grandes structures	15
2.3	Pénalisation d'ordre élevé	17
2.3.1	Pénalisation itérative pour l'équation de la chaleur	17
2.3.2	Présentation du schéma numérique	17
2.3.3	Schéma numérique et formulation faible	19
2.3.4	Tests analytiques de convergence	21
2.4	L'écoulement de von Kármán	33
2.4.1	Description du dispositif	33
2.4.2	Outils de description de l'écoulement	35
2.4.3	Mesures de données expérimentales	37
2.4.4	Simulations numériques	39
2.5	Évaluation de la modélisation LES	42
2.5.1	Comparaisons expériences et simulations	45
2.5.2	Discussion sur le modèle LES	59
2.6	Étude de rugosité et dissipation : campagne à hauteur variable	60
2.6.1	Description	61
2.6.2	Structure de l'écoulement	62
2.6.3	Puissances dissipées	67
2.6.4	Discussion sur les pales à hauteur variable et la rugosité	68
2.7	Conclusions concernant la dissipation	70
<b>3</b>	<b>Cascade</b>	<b>71</b>
3.1	Description de la cascade	71
3.1.1	Équations filtrées	72
3.1.2	Incréments de vitesse et fonctions de structure	76
3.2	Analyse de l'universalité des fonctions de structure	79
3.2.1	Histoire de la théorie	80
3.2.2	Tests des renormalisations	83
3.2.3	Turbulence et thermodynamique	89
3.2.4	Discussion sur les fonctions de structure	90
3.3	Lien entre intermittence, vortacité et transferts d'énergie	91
3.3.1	Outils utilisés	93
3.3.2	Comparaison entre transfert énergétique local et vortacité	95
3.3.3	Discussion sur l'intermittence, la vortacité et les transferts d'énergie	107
3.4	Conclusions sur la cascade	108

<b>4</b>	<b>Singularités</b>	<b>109</b>
4.1	Défauts de l'équation de vorticité . . . . .	109
4.1.1	Méthode de mise en évidence des défauts . . . . .	110
4.1.2	Étude du tenseur de Reynolds à l'échelle de Kolmogorov . . . . .	111
4.1.3	Discussion sur les défauts de Navier-Stokes . . . . .	119
4.2	Les pinçons, un modèle de singularités de Navier-Stokes en interaction . . . . .	121
4.2.1	Introduction . . . . .	121
4.2.2	Modèle de Pinçon . . . . .	122
4.2.3	Dynamiques d'une paire de pinçons . . . . .	130
4.2.4	Discussion sur les pinçons . . . . .	140
4.3	Discussion sur les singularités . . . . .	143
<b>5</b>	<b>Conclusion générale</b>	<b>145</b>
<b>6</b>	<b>Annexe</b>	<b>147</b>
6.1	Détails sur l'équation de Navier-Stokes Filtrée . . . . .	147
6.1.1	Bilan d'énergie cinétique filtrée . . . . .	147
6.1.2	Lien entre $E_\ell$ et $\overline{\nabla \cdot (\delta \mathbf{u})^3}^\ell$ . . . . .	147
6.2	Étude de la convergence statistique des données DNS . . . . .	148
6.3	Pinçons . . . . .	150
6.3.1	Propriétés remarquables . . . . .	150
6.3.2	Calcul du moment généralisé . . . . .	150
6.3.3	Tenseur des gradients de vitesse du pinçon . . . . .	151
6.3.4	Dynamique des vortons . . . . .	151
	<b>Bibliographie</b>	<b>153</b>



# Préambule

---

La science physique s'efforce à décrire les propriétés fondamentales de la matière et tâche de comprendre et prédire son comportement. Dans le cadre de cette thèse, nous nous concentrons sur la description de cette matière dans les états liquide ou gazeux qui partagent la propriété de pouvoir couler et que nous rassemblons sous le terme de fluide. L'étude de ces écoulements constitue le cœur de la mécanique des fluides, discipline de la Physique et présente des axes de travail et de recherche multiples voire infinis dans la richesse des différentes espèces chimiques ou conditions physiques envisagées.

Parmi ces thématiques, nous nous intéressons à un phénomène complexe qui intrigue les physiciens depuis près de cent cinquante ans : la turbulence. Venant du latin *turbulentia* qui signifie trouble ou perturbation, la turbulence caractérise les écoulements désordonnés, présentant des mouvements saccadés et de nombreux tourbillons. Les fluides ont une capacité à diffuser le mouvement appelée viscosité et supposée lisser l'écoulement. L'aspect erratique des écoulements turbulents s'obtient lorsque les fluides sont mus de manière à ce que la tendance naturelle à l'harmonisation n'arrive pas à contrer l'inertie du remous imposé par l'extérieur. L'absence d'organisation lisse s'accompagne alors d'une forte dissipation d'énergie cinétique et l'agitation décline rapidement si l'écoulement n'est plus entraîné. Il faut donc au minimum trois éléments pour pouvoir parler de turbulence : un fluide caractérisé par ses propriétés intrinsèques, des conditions de forçage défavorables à la régularisation de l'écoulement et enfin une source d'énergie nécessaire à une impulsion initiale conséquente ou au maintien des fortes fluctuations. La turbulence se manifeste dans de nombreux domaines industriels (transports, énergie, armement), géophysiques (météorologie, atmosphère, océans) ou astrophysiques (étoiles, galaxies). Comprendre ces phénomènes constitue donc un enjeu scientifique, technologique et économique important.

Pour appréhender l'étude des fluides, les physiciens se dotent d'outils de modélisation mathématique qui permettent de rendre compte des propriétés mécaniques des écoulements sans recalculer le mouvement de chaque particule élémentaire régi par les quatre interactions fondamentales. Ces outils de description des milieux continus sont parfaitement valides dans certains régimes, mais présentent des défauts qui interrogent sur leur capacité à bien décrire les écoulements turbulents. En effet, l'aspect désordonné des écoulements turbulents paraît incompatible avec les exigences de régularité de la modélisation mathématique. Les mathématiciens eux-mêmes questionnent le bien-fondé de l'espace des solutions éligibles. Ces limites de modélisation des écoulements turbulents se manifestent de plusieurs manières dans les observations. D'un point de vue macroscopique d'une part, on peut mesurer les grandes recirculations ou bien les flux qui traversent le système considéré. Par exemple l'existence de différentes configurations de recirculation pour un même forçage sonde l'unicité de la solution au système mathématique modélisé. De plus les mesures des puissances mécaniques dissipées par l'écoulement questionnent sérieusement la régularité des fonctions obtenues. D'autre part, ces limites s'expriment aussi dans des quantités plus mésoscopiques voire microscopiques lorsqu'on regarde précisément les champs de vitesse obtenus.

Pour tester l'exactitude des théories, il est possible de les confronter à des mesures expérimentales ou à des simulations numériques. Cependant, si les théories ont leurs défauts, les mesures ont elles aussi leurs limites : les simulations numériques bien que précises ne peuvent demander des ressources

informatiques infinies, les expériences de laboratoire dédiées à l'étude de la turbulence demandent des dispositifs d'entraînement et de mesures colossaux et les écoulements réels (naturels ou artificiels) sont très difficilement contrôlés et mesurés. Si de nombreuses tentatives d'amélioration de la modélisation ont été menées, elles révèlent encore des failles à mesure que la qualité des observations s'améliore.

Nous proposons alors ici d'appliquer la méthodologie suivante : observer les écoulements afin de proposer des corrections d'amélioration de la modélisation physique. Dans cette optique, nous pourrions comparer des données expérimentales ou issues de simulations numériques, utilisant des techniques à la pointe des savoir-faire actuels et de grandes capacités de calcul. Cette approche mixte permet de profiter des avantages de chaque jeu de données pour pallier les inconvénients de l'autre.

Dans un premier temps, le [chapitre 2](#) traite les grandeurs macroscopiques. Nous y présentons la modélisation classique de Navier-Stokes [101, 135] (1823, 1845), et le dispositif de turbulence utilisé. Après quelques détails sur la génération des données d'observations, nous confrontons les mesures macroscopiques aux hypothèses de la modélisation et décrivons une méthode permettant de représenter correctement les recirculations et les flux à grande échelle.

Ensuite dans le [chapitre 3](#) nous nous intéressons aux échelles intermédiaires et visqueuses de la turbulence, nous présentons les théories actuelles d'organisation des écoulements, observons plusieurs quantités statistiques dérivées des fonctions de structure et proposons des renormalisations universelles.

Enfin, le [chapitre 4](#) constate de manière globale intégrant toutes les échelles et flux de l'écoulement les défauts de modélisation liés à leur faible régularité et propose une nouvelle modélisation des fluides turbulents qui cherche à améliorer leur description. Cette modélisation introduit au cœur de l'écoulement classiquement supposé lisse, des singularités qui interagissent entre elles et avec un champ de vitesse régulier.

Le but de cette thèse est de proposer une nouvelle description de la turbulence, basée sur l'hypothèse qu'elle contient des singularités dans la limite de la viscosité tendant vers zéro. L'analyse théorique est guidée par des simulations numériques confrontées à des mesures expérimentales.

# Dissipation

Ce chapitre se concentre sur les grandeurs macroscopiques : les recirculations et les flux observés dans un écoulement. Nous introduisons tout d’abord dans la section 2.1 la mise en équation classique de la dynamique des fluides et détaillons les grandes lois qui en découlent. La partie 2.2 présente en détails la méthode utilisée pour la simulation numérique de l’écoulement et amène à la partie 2.3 qui présente une méthode innovante de pris en compte d’obstacles en mouvements dans une simulation fluide. Ensuite, dans la partie 2.4, nous présentons l’écoulement de von Kármán dont sont issues les données d’observations expérimentale et numérique. Dans 2.5, nous évaluons une méthode de simulation des grandes structures de la turbulence et la comparons à des mesures expérimentales. Enfin, nous détaillons dans la section 2.6 une étude des interactions entre structures solide et fluide turbulent pour différentes rugosités.

## 2.1 Comportement d’un fluide

La description des la mécanique des milieux continus suppose que les propriétés locales des matériaux telles que la densité, la température ou les déplacements sont continues et dérivables. On distingue deux types de milieux continus, les solides dont les molécules gardent les mêmes voisines, et les fluides qui se déforment infiniment [118] (2016-2017). Les lois de la mécanique des fluides sont établies à partir de bilans sur des ensembles de molécules statistiquement convergés que l’on appelle particules fluides. Commençons par détailler leur modélisation.

La conservation de la masse appliquée à un fluide de vitesse  $\mathbf{u}$  donne pour la masse volumique  $\rho$  :

$$D_t \rho = \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0. \quad (2.1.1)$$

Si les vitesses de l’écoulement sont bien inférieures à la vitesse des ondes de pression (ou sonores), la densité est supposée constante. C’est le cadre des écoulements que nous considérons dans cette thèse. Nous notons souvent  $\rho = \rho_0$ , voire  $\rho = 1$  dans un formalisme adimensionné. Pour les écoulements incompressibles, (2.1.1) devient :

$$\operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0. \quad (2.1.2)$$

Cette condition de divergence nulle est une contrainte forte pour les écoulements : afin de garantir une densité constante, toute surface fermée doit avoir un flux de matière entrant égal au flux sortant.

### 2.1.1 Équations de Navier-Stokes

Après le bilan de masse, nous présentons ici le bilan de quantité de mouvement. Nous nous restreignons au cas des fluides newtoniens, dont les déformations sont proportionnelles aux contraintes appliquées à chaque instant. Dans le cadre générique des fluides isotropes, l’évolution de la quantité est modélisée par l’équation de Navier-Stokes [101, 135] (1823, 1845) portant sur le champ de vitesse  $\mathbf{u}$  :

$$\rho(\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}) = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{u} + \left( \zeta + \frac{\mu}{3} \right) \nabla(\operatorname{div} \mathbf{u}) + \mathbf{f}, \quad (2.1.3)$$

où  $p$  est le champ de pression,  $\mu$  et  $\zeta$  sont les viscosités de cisaillement et de volume et des propriétés du fluide, et  $\mathbf{f}$  représente les forces volumiques. Dans le cadre d'un fluide incompressible, la densité  $\rho$  constante sera notée  $\rho_0$ . Les équations (2.1.2,2.1.3) se simplifient alors en

$$\rho_0(\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}) = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{f}; \quad (2.1.4)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0. \quad (2.1.5)$$

En adimensionnant l'équation par les grandeurs de référence  $\rho_0$ ,  $U_0$ ,  $R$ , et  $\tau = \frac{R}{U_0}$ , on obtient une équation à un seul paramètre  $\operatorname{Re} = \frac{\rho_0 U_0 R}{\mu}$  évaluant le rapport entre le terme d'inertie  $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$  et le terme visqueux  $\Delta \mathbf{u}$  :

$$\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \frac{1}{\operatorname{Re}} \Delta \mathbf{u} + \mathbf{f}, \quad (2.1.6)$$

où l'on peut interpréter la pression comme un multiplicateur de Lagrange garantissant la divergence nulle. Nous prendrons dans la suite la convention  $\rho_0 = 1$ . Pour les valeurs extrêmes de  $\operatorname{Re}$ , l'équation (2.1.6) peut se décliner en deux variantes.

1.  $\operatorname{Re} \ll 1$ , le terme  $\Delta \mathbf{u}$  devient alors prépondérant (en particulier devant le terme non linéaire puisque  $\frac{\|(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}\|}{\|\Delta \mathbf{u}\|} \sim \operatorname{Re} \ll 1$ ) et l'on obtient alors l'équation linéaire suivante dite de Stokes :

$$\partial_t \mathbf{u} = -\nabla p + \frac{1}{\operatorname{Re}} \Delta \mathbf{u} + \mathbf{f}. \quad (2.1.7)$$

2. dans la limite  $\operatorname{Re} = \infty$ , le terme  $\Delta \mathbf{u}$  est négligé. Cette approximation peut être critiquée puisqu'elle modifie la nature de l'équation différentielle en réduisant l'ordre de la plus haute dérivée spatiale et donc la régularité minimale des solutions considérées. On obtient alors l'équation d'Euler :

$$\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \mathbf{f}. \quad (2.1.8)$$

La turbulence incompressible consiste à étudier les solutions de cette équation pour  $\operatorname{Re} \gg 1$  qui présente deux particularités principales exposées par Frisch [47] (1995). D'une part, le coefficient  $\frac{1}{\operatorname{Re}}$  situé devant le terme de plus grande dérivée en espace pose le problème de l'ordre de l'équation dans la limite  $\operatorname{Re} \rightarrow \infty$ . D'autre part, le terme  $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$  rend l'équation non linéaire, et pose la question de la régularité ou de l'unicité des solutions qui fait encore débat aujourd'hui. L'institut Clay des mathématiques pose même ces questions comme un des problèmes du millénaire, constituant une motivation fondamentale supplémentaire à l'étude de la turbulence [44].

### 2.1.2 Bilans énergétique et de vorticité

L'énergie et la vorticité sont deux quantités dont l'évolution est traditionnellement suivie en turbulence. L'énergie cinétique adimensionnée de l'écoulement est définie par l'intégrale de la vitesse au carré sur l'ensemble du volume considéré pour le fluide  $\Omega_F$  à l'intérieur de la surface  $\Sigma_F$ .

$$E = \int_{\Omega_F} \frac{1}{2} \mathbf{u}^2 d\tau. \quad (2.1.9)$$

L'évolution temporelle de l'énergie peut être due à une variation de  $\mathbf{u}^2$  dans  $\Omega_F$  ou bien au déplacement du volume considéré.

$$\frac{dE}{dt} = \underbrace{\int_{\Omega_F} \frac{1}{2} \frac{D\mathbf{u}^2}{Dt} d\tau}_{\text{variation temporelle interne}} + \underbrace{\oint_{\Sigma_F} \frac{1}{2} \mathbf{u}^2 (\mathbf{u}_{\Sigma_F} \cdot d\mathbf{S})}_{\substack{\text{déplacement du volume} \\ \text{considéré}}} . \quad (2.1.10)$$

Le second terme du membre de droite de (2.1.10) permet d'envisager un volume  $\Omega_F$  arbitraire. En utilisant (2.1.6) et (2.1.5) on retrouve le résultat suivant qui distingue différents termes :

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} = & - \oint_{\Sigma_F} p \mathbf{u} \cdot d\mathbf{S} + \frac{1}{\text{Re}} \oint_{\Sigma_F} \mathbf{u} \cdot (\nabla^S \mathbf{u} : d\mathbf{S}) - \frac{2}{\text{Re}} \int_{\Omega_F} \nabla^S \mathbf{u} : \nabla^S \mathbf{u} \, d\tau \\ & \text{déplacement de fluide} \quad \text{contrainte aux parois} \quad \text{dissipation visqueuse} \\ & + \int_{\Omega_F} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} \, d\tau + \oint_{\Sigma_F} \frac{1}{2} \mathbf{u}^2 (\mathbf{u}_{\Sigma_F} \cdot d\mathbf{S}) \quad . \\ & \text{forçage volumique} \quad \text{déplacement du volume} \\ & \quad \quad \quad \text{considéré} \end{aligned} \quad (2.1.11)$$

On peut tenter de vulgariser ce bilan par une analogie : si  $E$  est la richesse d'un pays, cette quantité peut varier selon différents termes. La pression étant une densité volumique d'énergie, on peut comparer le premier terme à un échange de valeur avec l'extérieur. La contrainte aux parois force le fluide à respecter une sorte de continuité avec l'extérieur, que l'on peut voir comme un élan frontalier, qui diffuse la richesse du pays voisin dans la région frontalière. Le terme de dissipation visqueuse peut se comprendre comme l'usure naturelle des choses, et le forçage volumique comme la puissance de travail des habitants. Enfin le terme de déplacement du volume considéré correspond à une annexion : on augmente  $E$  puisque l'on inclut désormais des parties anciennement exclues.

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} = & - \oint_{\Sigma_F} p \mathbf{u} \cdot d\mathbf{S} + \frac{1}{\text{Re}} \oint_{\Sigma_F} \mathbf{u} \cdot (\nabla^S \mathbf{u} : d\mathbf{S}) - \frac{2}{\text{Re}} \int_{\Omega_F} \nabla^S \mathbf{u} : \nabla^S \mathbf{u} \, d\tau \\ & \text{échange} \quad \text{élan frontalier} \quad \text{déperdition} \\ & + \int_{\Omega_F} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} \, d\tau + \oint_{\Sigma_F} \frac{1}{2} \mathbf{u}^2 (\mathbf{u}_{\Sigma_F} \cdot d\mathbf{S}). \\ & \text{Puissance de travail} \quad \text{annexion} \end{aligned} \quad (2.1.12)$$

Sur un contour fermé orienté  $\mathcal{C}$  entourant la surface  $\mathcal{S}$ , il est courant de calculer la circulation du vecteur vitesse. Cette circulation est fortement liée à la vorticit    $\omega = \text{rot}(\mathbf{u})$ .

$$\Gamma = \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\mathcal{S}} \text{rot}(\mathbf{u}) \cdot d\mathbf{S}. \quad (2.1.13)$$

La vorticit   varie selon la formule suivante :

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \oint_{\mathcal{C}} \frac{D\mathbf{u}}{Dt} \cdot d\mathbf{l} + \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{u} \cdot \frac{D(d\mathbf{l})}{Dt} \quad (2.1.14)$$

Le second terme se ram  ne     $\oint_{\mathcal{C}} \frac{1}{2} d(u^2) = 0$  pour un contour mat  riel (ie qui suit le fluide).

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \oint_{\mathcal{C}} \left( -\nabla p + \frac{1}{\text{Re}} \Delta \mathbf{u} + \mathbf{f} \right) \cdot d\mathbf{l} \quad (2.1.15)$$

Ce r  sultat est connu sous le nom de th  or  me de Kelvin : la circulation autour d'un contour mat  riel est donc conserv  e    condition de r  unir les conditions suivantes : le fluide doit   tre incompressible (ou barotrope), parfait ( $\text{Re} = \infty$ ) et soumis    des forces potentielles. Ce th  or  me a pour cons  quence le fait que la circulation selon n'importe quel contour d'un   coulement irrotationnel est nulle, m  me apr  s advection du contour. La vorticit   d'un   coulement turbulent incompressible initialement irrotationnel ne peut venir que des effets de bords.

### 2.1.3 Régularité des fonctions

La modélisation de Navier-Stokes suppose que le champ de vitesse est continûment dérivable en temps et deux fois continûment dérivable en espace. Nous étendons cette notion à un cadre moins contraignant à l'aide des dérivées faibles et de la régularité de Hölder.

#### 2.1.3.1 Dérivées faibles

Les fonctions considérées sont essentiellement dans l'espace de Sobolev,  $\mathbb{H}^1(\Omega)$  :

$$\mathbb{H}^1(\Omega) = \left\{ f \in \mathbb{L}^2(\Omega), \exists g \in \mathbb{L}^2(\Omega), \forall h \in \mathcal{C}^\infty(\Omega), \int fh' = - \int gh \right\} \quad (2.1.16)$$

Les fonctions  $g$  correspondant à ce critère sont uniques à un ensemble de mesure nulle près, nous les notons par simplicité  $\nabla f$ . Les éléments de  $\mathbb{H}^1(\Omega)$  sont donc des fonctions de carré intégrable faiblement dérivables et dont la dérivée faible est aussi de carré intégrable. Si l'on applique ce principe au champ de vitesse  $\mathbf{u}$  il en ressort que  $\int_{\Omega_0} \mathbf{u}^2 d\tau < \infty$  et  $\int_{\Omega_0} (\nabla \mathbf{u})^2 d\tau < \infty$  ce qui correspond à une énergie et une puissance de dissipation visqueuse finies pour notre écoulement comme on le voit dans (2.1.11).

#### 2.1.3.2 Régularité Hölder

Pour  $\alpha \in \mathbb{R}$  on dit qu'une fonction  $f : X \rightarrow Y$  est de régularité Hölder  $\alpha$  si et seulement si

$$\forall (x_1, x_2) \in X^2, \|f(x_1) - f(x_2)\| \leq \|x_1 - x_2\|^\alpha \quad (2.1.17)$$

Si  $\alpha \geq 0$ , alors  $f$  est continue, et pour  $n \in \mathbb{N}$  si  $\alpha \geq n$  alors la fonction est  $n$  fois continûment dérivable. D'un point de vue mathématique, pour que des solutions des équations de Navier-Stokes existent, elles doivent être de régularité Hölder supérieure ou égale à 2. Les solutions sont alors deux fois dérivables et directement rentrées dans le système d'équations, on qualifie ces solutions de solutions "fortes". Les incréments de vitesse :  $\delta \mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{r}) = \mathbf{u}(\mathbf{x} + \mathbf{r}) - \mathbf{u}(\mathbf{x})$  nous servent à interroger cette régularité en calculant le rapport  $\frac{\ln \|\delta \mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{r})\|}{\ln \|\mathbf{r}\|}$ .

## 2.2 Le code Spectral/Finite Elements for Maxwell and Navier-Stokes

Afin de simuler le mouvement d'un fluide, nous utilisons un code écrit en Fortran 90. Il s'agit du code Spectral/Finite Elements for Maxwell and Navier-Stokes (SFEMaNS) développé par Caroline Nore, Jean-Luc Guermond et leurs collaborateurs. Ce code est conçu pour fonctionner en géométrie cylindrique  $(r, \theta, z)$  (voir figure 2.1).

La discrétisation spatiale repose sur une discrétisation hybride des champs utilisés sur des éléments finis en  $(r, z)$  et une décomposition spectrale pour la composante  $\theta$ .

### 2.2.1 Décomposition méridionale

Le domaine  $\Omega$  étudié est invariant par rotation autour de l'axe  $Oz$ . On note  $\Omega_0$  le demi plan ou plan méridien  $\{(r, \theta, z) \in \Omega, r > 0, \theta = 0\}$ . Sur  $\Omega_0$ , on utilise une méthode de discrétisation par éléments finis décomposant le domaine en triangles de taille au plus  $h$  comme présenté sur la figure 2.2. Une fonction  $f(r, z)$  est approchée par une décomposition polynomiale par morceaux construite sur ce maillage.

Sur chaque triangle ou élément, une fonction de transfert  $\psi$  permet de redresser l'orientation arbitraire en  $(r, z)$ , la position et la taille du triangle afin que l'on travaille avec des triangles canoniques comme présenté sur la figure 2.3. On approche la fonction  $f$  par une décomposition sur des polynômes

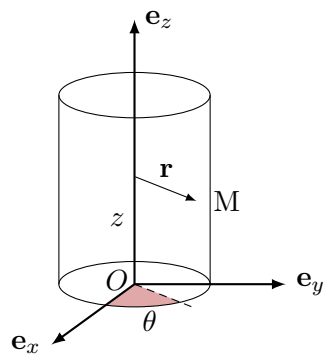


FIGURE 2.1 – Système de coordonnées cylindriques basé sur un repère orthonormé cartésien  $(O, x, y, z)$ . Le vecteur  $O\vec{M}$  se décompose en  $O\vec{M} = \mathbf{r} + z\mathbf{e}_z$ .

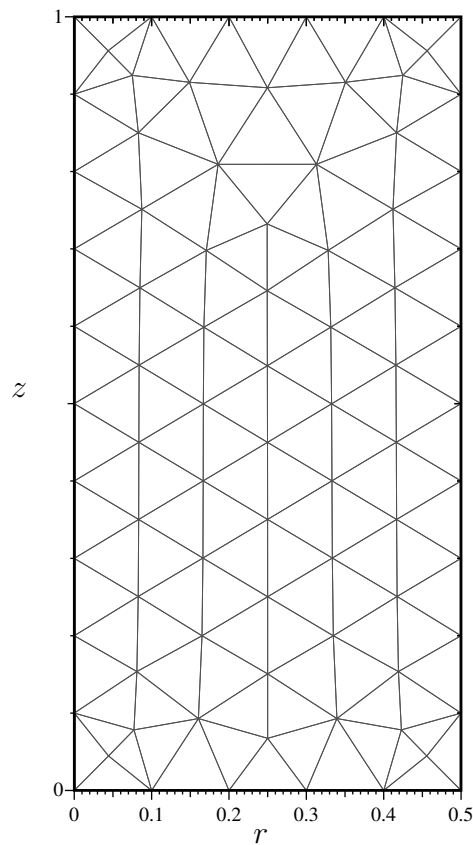


FIGURE 2.2 – Décomposition d'un domaine  $\Omega_0 = \{r, z\} \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \times [0, 1]$  en éléments fins de taille  $h \leq 0,1$ .

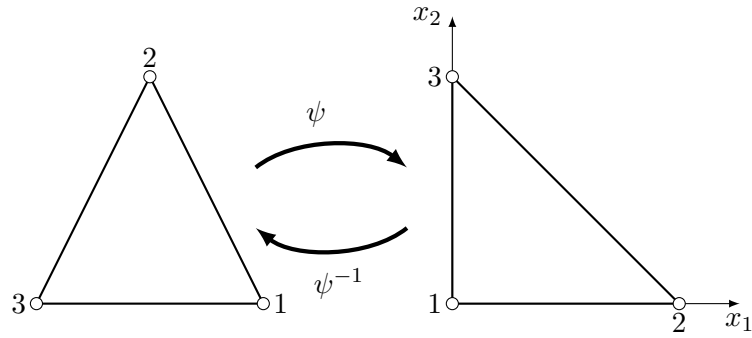


FIGURE 2.3 – Redressement d'un triangle générique

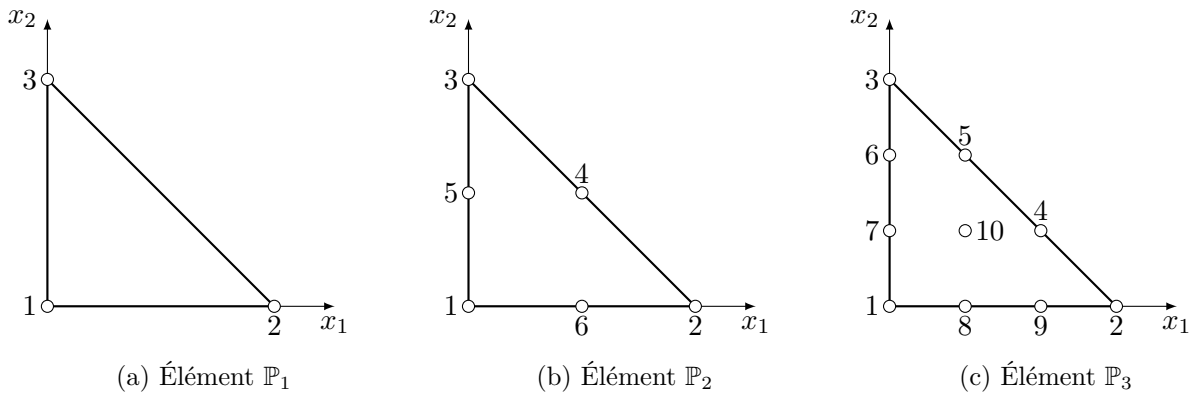


FIGURE 2.4 – Nœuds utilisés pour les décompositions sur des polynômes de degré un, deux ou trois.

à deux variables de degré  $n$  qui donnent la précision de l'approximation. Les éléments finis sont alors qualifiés d'éléments  $\mathbb{P}_n$ . Le champ de vitesse  $\mathbf{u}$  est décomposé sur des polynômes de degré  $n = 2$  et le champ de pression  $p$  utilise des polynômes de degré  $n = 1$ .

$$f(x_1, x_2) \simeq \sum_{i,j=0}^n a_{i,j} x_1^i x_2^j. \quad (2.2.1)$$

Les coefficients  $a_{i,j}$  sont déterminés par un système à  $n(n+1)/2$  équations imposant l'égalité entre  $f$  et sa décomposition sur ces  $N_{\text{points}} = n(n+1)/2$  points appelés nœuds présentés sur la figure 2.4. Ainsi, pour une discrétisation avec des polynômes de degré  $n$  sur  $m$  éléments, il y a donc  $m n(n+1)/2$  degrés de liberté. On note  $\tilde{f}$  la fonction interpolée de  $f$  sur les éléments finis.

La résolution numérique d'équations différentielles aux dérivées partielles sur un maillage d'éléments finis nécessite le calcul de nombreuses intégrales. Pour ce faire, on recourt à la méthode de quadrature de Gauss [50] (1815), approchant l'intégrale grâce aux valeurs de la fonction sur certains points dits de Gauss. Il y en a  $l_G$  sur chaque élément  $E_i$  de  $\Omega_0$  :

$$\int_{V \subset \Omega_0} f \, dr dz \simeq \sum_{E_i \subset V} \sum_{l=0}^{l_G} \tilde{f}(\psi(r_l, z_l)) \omega_{i,l}. \quad (2.2.2)$$

Les  $\omega_{i,l}$  représentent les poids de Gauss et dépendent du point de Gauss concerné dans le triangle canonique ainsi que du maillage utilisé pour paver  $\Omega_0$  par la fonction de transfert  $\psi$ .



Une fois cette discrétisation des composantes,  $(r, z)$  effectuée, il nous faut maintenant nous occuper de la composante azimutale  $\theta$ .

### 2.2.2 Décomposition spectrale

D'après le théorème de Jordan-Dirichlet [65] (1881), une fonction périodique  $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$  continue par morceaux peut se décomposer sur la base des fonctions trigonométriques :

$$\forall \theta \in [0, 2\pi], f(\theta) = f^{0,\cos} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( f^{n,\cos} \cos(n\theta) + f^{n,\sin} \sin(n\theta) \right), \quad (2.2.3)$$

où les  $f^{n,\cos}$  et  $f^{n,\sin}$  sont des réels. Nous utilisons une version tronquée de cette égalité (2.2.3) pour  $M \in \mathbb{N}$  modes afin d'approcher  $f$  :

$$\forall \theta \in [0, 2\pi], f(\theta) \simeq f^{0,\cos} + \sum_{n=1}^M \left( f^{n,\cos} \cos(n\theta) + f^{n,\sin} \sin(n\theta) \right). \quad (2.2.4)$$

Dans le cadre d'une fonction des coordonnées cylindriques, l'équation (2.2.4) est adaptée comme suit :

$$\forall (r, \theta, z), f(r, \theta, z) \simeq \tilde{f}^{0,\cos}(r, z) + \sum_{n=1}^M \left( \tilde{f}^{n,\cos}(r, z) \cos(n\theta) + \tilde{f}^{n,\sin}(r, z) \sin(n\theta) \right), \quad (2.2.5)$$

Fort de cette décomposition, nous pouvons maintenant nous attacher à décrire une avancée temporelle d'équation aux dérivées partielles.

### 2.2.3 Avancée temporelle

Afin de résoudre numériquement l'équation de Navier-Stokes incompressible adimensionnée (2.1.6), il nous faut aussi discrétiser le temps. La résolution utilise un pas de temps  $\Delta t$  et calcule les grandeurs aux temps  $t_k = k\Delta t$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . On utilise la formule de Taylor [30] (1952) pour discrétiser

$$\partial_t \mathbf{u}(t_n) \underset{\Delta t \rightarrow 0}{=} \frac{1}{2\Delta t} (3\mathbf{u}(t_{n+1}) - 4\mathbf{u}(t_n) + \mathbf{u}(t_{n-1})) + \mathcal{O}(\Delta t). \quad (2.2.6)$$

Nous évaluons les termes de l'équation (2.1.6) selon la méthode de formulation implicite. Les plus forts gradients sont associés à l'inconnue  $\mathbf{u}(t_{n+1})$  pour une meilleure stabilité du schéma de discrétisation et éviter la propagation d'erreurs numériques. L'équation (2.1.6) est réécrite dans la forme suivante :

$$\partial_t \mathbf{u} + \text{rot}(\mathbf{u}) \wedge \mathbf{u} = -\nabla \left( p + \frac{1}{2} \mathbf{u}^2 \right) + \frac{1}{\text{Re}} \text{div}(\nabla^S \mathbf{u}) + \mathbf{f}. \quad (2.2.7)$$

Si l'on rentre le schéma temporel de l'équation (2.2.6), on obtient

$$\frac{1}{2\Delta t} (3\mathbf{u}(t_{n+1}) - 4\mathbf{u}(t_n) + \mathbf{u}(t_{n-1})) + \text{rot}(\mathbf{u}(t_n^*)) \wedge \mathbf{u}(t_n^*) = -\nabla \hat{p}(t_n) + \frac{1}{\text{Re}} \text{div}(\nabla^S \mathbf{u}(t_{n+1})) + \mathbf{f}(t_{n+1}); \quad (2.2.8)$$

où  $\mathbf{u}(t_n^*) = 2\mathbf{u}(t_n) - \mathbf{u}(t_{n-1})$  qui se réécrit en séparant les termes inconnus des termes connus :

$$\frac{3}{2\Delta t} \mathbf{u}(t_{n+1}) - \frac{1}{\text{Re}} \text{div}(\nabla^S \mathbf{u}(t_{n+1})) = -\frac{-4\mathbf{u}(t_n) + \mathbf{u}(t_{n-1})}{2\Delta t} - \text{rot}(\mathbf{u}(t_n^*)) \wedge \mathbf{u}(t_n^*) - \nabla \hat{p}(t_n) + \mathbf{f}(t_{n+1}). \quad (2.2.9)$$

La fonction  $\hat{p}(t_n)$  calculée correspond physiquement à  $\frac{p_{\text{réel}}}{\rho_0} + \frac{1}{2} \mathbf{u}^2$ . Afin d'alléger les notations, elle sera notée  $p$ . Prendre le terme  $\mathbf{u}_{n+1}$  pour le terme de dérivée seconde en espace  $\text{div}(\nabla^S \mathbf{u})$  dans (2.2.9)

correspond à ce qu'on appelle un schéma implicite. Cette formulation permet, dans le cas d'études linéaires, d'assurer la stabilité du schéma numérique utilisé.

La valeur du champ est obtenue via une méthode de prédiction-corrrection de la pression proposée par Timmermans, Minev, et Van De Vosse [139] (1996) garantissant une petite divergence, contrôlée par le paramètre  $c_{\text{div}}$  qui doit être choisi par l'utilisateur et de l'ordre de  $\text{Re}$ . Les fonctions  $\mathbf{u}$  et  $p$  étant considérées connues pour tout  $(r, \theta, z) \in \Omega$  aux temps  $t_0$  et  $t_1$ , l'avancée temporelle proposée par Guermond et Shen [56] (2004) consiste à résoudre les équations suivantes pour les inconnues  $\mathbf{u}$ ,  $\xi$ ,  $\delta$  et  $p$  à  $t_{n+1}$  dans l'ordre d'apparition tout en respectant les conditions limites :

$$\begin{aligned} \frac{3}{2\Delta t} \mathbf{u}(t_{n+1}) - \frac{1}{\text{Re}} \operatorname{div}(\nabla^S \mathbf{u}(t_{n+1})) - \frac{c_{\text{div}}}{\text{Re}} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}(t_{n+1})) \\ = \begin{cases} -\frac{4\mathbf{u}(t_n) + \mathbf{u}(t_{n-1})}{2\Delta t} - \nabla \left( p(t_n) + \frac{4\xi(t_n) - \xi(t_{n-1})}{3} \right) \\ + \mathbf{f}(t_{n+1}) - (\operatorname{rot} \mathbf{u}(t_n^*))_{\wedge} \mathbf{u}(t_n^*) \end{cases}, \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

$$\Delta \xi(t_{n+1}) = \frac{3}{2\Delta t} \nabla \cdot (\mathbf{u}(t_{n+1})), \quad (2.2.11)$$

$$\delta(t_{n+1}) = \nabla \cdot (\mathbf{u}(t_{n+1})), \quad (2.2.12)$$

$$p(t_{n+1}) = p(t_n) + \xi(t_{n+1}) - \frac{2 + c_{\text{div}}}{\text{Re}} \delta(t_{n+1}). \quad (2.2.13)$$

Ces équations sont en fait résolues au sens faible pour le produit scalaire  $\langle f|g \rangle = \int_{\Omega} fg$ , c'est-à-dire que  $\mathbf{u}$ ,  $\xi$ ,  $\delta$  et  $p$  à  $t_{n+1}$  sont telles que, pour toute fonction  $\mathbf{v}$  (respectivement  $q$ ) polynomiale de degré 2 (respectivement 1) sur chaque élément du maillage correspondant à  $\Omega$ , on ait :

$$\begin{aligned} \frac{3}{2\Delta t} \langle \mathbf{u}(t_{n+1}) | \mathbf{v} \rangle + \frac{1}{\text{Re}} \langle \nabla^S \mathbf{u}(t_{n+1}) | \nabla \mathbf{v} \rangle + \frac{c_{\text{div}}}{\text{Re}} \langle \nabla \cdot \mathbf{u}(t_{n+1}) | \nabla \cdot \mathbf{v} \rangle \\ = \begin{cases} \left\langle -\frac{4\mathbf{u}(t_n) + \mathbf{u}(t_{n-1})}{2\Delta t} - \nabla \left( p(t_n) + \frac{4\xi(t_n) - \xi(t_{n-1})}{3} \right) \middle| \mathbf{v} \right\rangle \\ + \langle \mathbf{f}(t_{n+1}) - (\operatorname{rot} \mathbf{u}(t_n^*))_{\wedge} \mathbf{u}(t_n^*) | \mathbf{v} \rangle \end{cases}; \end{aligned} \quad (2.2.14)$$

$$\langle \nabla \xi(t_{n+1}) | \nabla q \rangle = \frac{3}{2\Delta t} \langle \mathbf{u}(t_{n+1}) | \nabla q \rangle; \quad (2.2.15)$$

$$\langle \delta(t_{n+1}) | q \rangle = \langle \nabla \cdot (\mathbf{u}(t_{n+1})) | q \rangle; \quad (2.2.16)$$

$$p(t_{n+1}) = p(t_n) + \xi(t_{n+1}) - \frac{2 + c_{\text{div}}}{\text{Re}} \delta(t_{n+1}). \quad (2.2.17)$$

Les équations (2.2.14-2.2.15-2.2.16) correspondent à un système matriciel linéaire simple qui s'écrit  $AX(t_{n+1}) = B(t_n, t_{n-1})$ . Les coefficients de la matrice  $A$  sont indépendants du temps, il nous suffit alors d'inverser cette matrice une seule fois au début de l'algorithme et de construire  $B$  à partir des champs connus à  $t_n$  et  $t_{n-1}$  pour calculer l'état du fluide à  $t_{n+1}$ .

La solution des problèmes linéaires sur le maillage d'éléments finis est obtenue à l'aide de la bibliothèque METIS [67] (1998) ainsi que de fonctions du "portable extensible toolkit for scientific computation library" (PETSc) [4] (2014) pour la gestion de l'algèbre linéaire. Cette méthode nous permet donc d'intégrer l'équation (2.1.6) en prenant en compte des conditions limites appliquées au fluide indispensables à la résolution du système.

Les différentes techniques de prise en compte des conditions limites sont étudiées dans le paragraphe suivant.

## 2.2.4 Prise en compte de conditions limites et d'obstacles solides

Afin de résoudre les équations (2.2.14-2.2.15-2.2.16), il faut prendre en compte les conditions aux bords. Dès que le fluide est en contact avec une interface, on impose une condition de non glissement

telle que  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\text{interface}}$ . Si l'interface ne bouge pas, on s'arrange pour que l'un des côtés des triangles du maillage éléments finis coïncide avec l'interface considérée. Les nœuds à l'interface sont alors facilement identifiés et l'on y impose directement les valeurs souhaitées. On traite l'axe comme un bord un peu particulier devant respecter les symétries de Lewis et Bellan [85] (1990).

$$\begin{aligned} \forall(r, z), r = 0, \quad \forall n \in \{0\} \cup \{2, \dots, M\}, \quad \tilde{u}_r^{n, \cos}(r, z) = \tilde{u}_r^{n, \sin}(r, z) = 0, \\ \forall(r, z), r = 0, \quad \forall n \in \{0\} \cup \{2, \dots, M\}, \quad \tilde{u}_\theta^{n, \cos}(r, z) = \tilde{u}_\theta^{n, \sin}(r, z) = 0, \\ \forall(r, z), r = 0, \quad \forall n \in \{1, \dots, M\}, \quad \tilde{u}_z^{n, \cos}(r, z) = \tilde{u}_z^{n, \sin}(r, z) = 0. \end{aligned} \quad (2.2.18)$$

Pour les obstacles qui se déplacent à l'intérieur du fluide, il serait trop coûteux d'identifier les nœuds concernés. Dans la géométrie utilisée, l'écoulement est mû par les turbines. Pour rendre compte de ces dernières, nous utilisons une méthode de pseudo-pénalisation décrite par Pasquetti, Bwemba, et Cousin [114] (2008). Cette méthode permet de prendre en compte des obstacles non axisymétriques, ou bien des obstacles se déplaçant sur le maillage éléments-finis, rendant complexe la prise en compte des conditions aux bords qui doivent alors être imposées à des endroits différents à chaque pas de temps. À chaque instant  $t$ , l'espace  $\Omega$  est constitué de deux parties disjointes,  $O_t$  représentant l'obstacle et  $F_t$  représentant le fluide de telle sorte que  $\Omega = O_t \sqcup F_t$ . L'idée générale est de modifier l'équation différentielle à l'aide des fonctions indicatrices du fluide et de l'obstacle. La fonction indicatrice d'une partie  $P \subset \Omega$  est la fonction  $\chi_P$

$$\chi_P : \begin{array}{l} \Omega \longrightarrow \{0, 1\} \\ \mathbf{x} \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{x} \in P \\ 0 & \text{si } \mathbf{x} \notin P \end{cases} \end{array} \quad (2.2.19)$$

Pour résoudre dans le fluide une équation du type

$$\partial_t \mathbf{u} - \frac{1}{\text{Re}} \Delta \mathbf{u} = \mathbf{S}(\mathbf{u}, t), \quad (2.2.20)$$

tout en imposant  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\text{obst}}$  dans l'obstacle, on modifie l'équation (2.2.20) comme suit :

$$\partial_t \mathbf{u} - \frac{1}{\text{Re}} \Delta \mathbf{u} + \chi_{O_t} \frac{\mathbf{u} - \mathbf{u}_{\text{obst}}}{\alpha} = \chi_{F_t} \mathbf{S}(\mathbf{u}, t). \quad (2.2.21)$$

Ainsi, l'intégration de l'équation (2.2.21) dans le fluide respecte l'équation (2.2.20) et force dans l'obstacle une convergence exponentielle de  $\mathbf{u}$  vers  $\mathbf{u}_{\text{obst}}$  en un temps caractéristique  $\alpha$  choisi de l'ordre du pas de temps de calcul  $\Delta t$ . En utilisant un simple schéma numérique pour discrétiser la dérivée temporelle  $\partial_t \mathbf{u} \underset{\Delta t \rightarrow 0}{=} \frac{\mathbf{u}(t_{n+1}) - \mathbf{u}(t_n)}{\Delta t} + \mathcal{O}(1)$  et en prenant  $\alpha = \Delta t$ , l'équation (2.2.21) devient

$$\frac{\mathbf{u}(t_{n+1})}{\Delta t} - \frac{1}{\text{Re}} \Delta \mathbf{u}(t_{n+1}) = \chi_{O_t} \frac{\mathbf{u}_{\text{obst}}(t_n)}{\Delta t} + \chi_{F_t} \left( \frac{\mathbf{u}(t_n)}{\Delta t} + \mathbf{S}(\mathbf{u}, t_n) \right). \quad (2.2.22)$$

Si l'on applique cette formulation générale au problème de la résolution des équations (2.2.10-2.2.11-2.2.12) l'équation (2.2.10) devient :

$$\frac{3}{2\Delta t} \mathbf{u}(t_{n+1}) - \frac{1}{\text{Re}} \Delta \mathbf{u}(t_{n+1}) - \frac{c_{\text{div}}}{\text{Re}} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}(t_{n+1})) = \chi_{F_t} \left\{ \begin{array}{l} -\frac{-4\mathbf{u}(t_n) + \mathbf{u}(t_{n-1})}{2\Delta t} - \nabla \left( \frac{4\xi(t_n) - \xi(t_{n-1})}{3} \right) \\ + \mathbf{f}(t_{n+1}) - (\text{rot } \mathbf{u}(t_n^*)) \wedge \mathbf{u}(t_n^*) \\ + \chi_{O_t} \frac{3}{2\Delta t} \mathbf{u}_{\text{obst}}(t_n) - \nabla(p(t_n)) \end{array} \right\}. \quad (2.2.23)$$

Cette écriture est assez proche des équations précédentes, il suffit de corriger le membre de droite pour rendre compte de l'existence de l'obstacle dans le fluide. Elle a surtout l'avantage de vérifier en

formulation faible un système du type  $AX(t_{n+1}) = C(t_n, t_{n-1})$  où il faut adapter  $C$  en fonction de la position  $O_t$  et de la vitesse de l'obstacle  $\mathbf{u}_{\text{obst}}$ . La matrice  $A$  en revanche est exactement la même que pour le problème sans prise en compte d'obstacle. Ceci permet de ne pas recalculer son inverse lors du déplacement de l'obstacle et donc de conserver un coût de calcul raisonnable malgré la prise en compte de l'obstacle.

Illustrons la méthode sur une équation simple en une dimension. Nous souhaitons résoudre un problème thermique d'une plaque immobile à  $u = 0$  plongée dans une cavité de longueur 1 entraînée en  $x = 1$ . La mise en équation du système mène au problème suivant :  $u \in \mathcal{C}^2([0, 1] \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ ,

$$\begin{cases} \partial_t u - \frac{1}{\text{Re}} \Delta u = 0 & \text{pour } F = \{x > 0, 5\}, \\ u(x, t) = u_{\text{obst}}(x, t) = 0 & \text{pour } O = \{x \leq 0, 5\}, \\ u(0, t) = 0 & \text{et } u(1, t) = 1. \end{cases} \quad (2.2.24)$$

En adaptant (2.2.21) avec  $S = 0$  et  $u_{\text{obst}} = 0$ , tout ne dépend plus que d'un seul paramètre  $\tau = \frac{\Delta t}{\text{Re}}$ . La solution stationnaire  $u_\tau \in \mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{R})$  satisfait le système suivant et est continûment dérivable deux fois :

$$\begin{cases} -\partial_{xx} u_\tau = -\chi_O \frac{u_\tau}{\tau}, \\ u_\tau(0) = 0, \\ u_\tau(1) = 1, \\ \chi_O = \mathbf{1}_{x \leq \frac{1}{2}}. \end{cases} \quad (2.2.25)$$

Les solutions  $u_\tau$  sont présentées sur la figure 2.5 et convergent uniformément et en norme  $\mathbb{L}^2$  vers la solution analytique du problème (2.2.24)  $u_0 : x \mapsto (2x - 1)\chi_F(x)$  :

$$u_\tau : \begin{array}{l} [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 1 + \frac{2}{2\sqrt{\tau} \tanh\left(\frac{1}{2\sqrt{\tau}}\right) + 1} (x - 1) & \text{pour } x > \frac{1}{2}, \\ \frac{\sqrt{\tau}}{\sqrt{\tau} \sinh\left(\frac{1}{2\sqrt{\tau}}\right) + \frac{1}{2} \cosh\left(\frac{1}{2\sqrt{\tau}}\right)} \sinh\left(\frac{x}{\sqrt{\tau}}\right) & \text{pour } x \leq \frac{1}{2}. \end{cases} \end{array} \quad (2.2.26)$$

On retrouve un comportement affine à laplacien nul sur  $]\frac{1}{2}, 1]$  et hyperbolique sur  $[0, \frac{1}{2}]$ . L'erreur (en norme infinie ou  $\mathbb{L}^2$ ) entre  $u_\tau$  et  $u_0$  est dominée par le comportement au point  $x = \frac{1}{2}$  et varie comme  $\mathcal{O}(\sqrt{\tau}) = \mathcal{O}\left(\sqrt{\frac{\Delta t}{\text{Re}}}\right)$ . De manière plus générale et multi-dimensionnelle, pour une partition  $\Omega = O \sqcup F$  indépendante du temps, l'erreur d'approximation peut être majorée. Si l'on note  $\Sigma = \partial O \cap \partial F$  la frontière entre le fluide et l'obstacle, l'erreur est contrôlée par le lemme suivant.

**Lemme 2.2.1.** *Soit  $u_0$  la solution deux fois continûment dérivable sur  $F$  de*

$$\begin{cases} u_0|_{\partial\Omega} = 0, \\ \partial_t u_0 - \Delta u_0 = S & \text{dans } F, \\ u_0 = 0 & \text{dans } O. \end{cases} \quad (2.2.27)$$

*et  $u_\tau$  la solution deux fois continûment dérivable sur  $\Omega$  de*

$$\begin{cases} u_\tau|_{\partial\Omega} = 0, \\ \partial_t u_\tau - \Delta u_\tau = S & \text{dans } F, \\ \partial_t u_\tau - \Delta u_\tau = -\frac{u_\tau}{\tau} & \text{dans } O. \end{cases} \quad (2.2.28)$$

*Alors il existe  $C_0 \in \mathbb{R}_+$  tel que, pour tout  $\tau > 0$ , la fonction  $e_\tau = u_\tau - u_0$  satisfasse l'inégalité*

$$\frac{\tau}{8} \left[ 4\partial_t \|e_\tau\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}^2 + 8\|\nabla e_\tau\|_{\mathbb{L}^2(F)}^2 + 7\|\nabla e_\tau\|_{\mathbb{L}^2(O)}^2 \right] + \frac{7}{8} \|e_\tau\|_{\mathbb{L}^2(O)}^2 \leq \tau^{\frac{3}{2}} C_0 \|\partial_n u_0|_F\|_{\mathbb{L}^2(\Sigma)}^2. \quad (2.2.29)$$

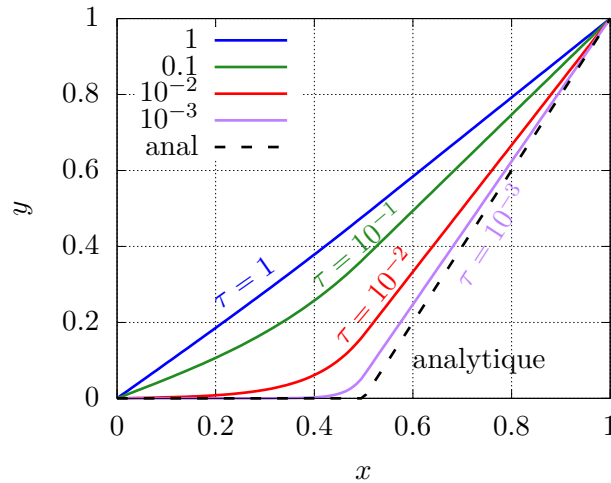


FIGURE 2.5 – Solutions du problème (2.2.25) pour différentes valeurs de  $\tau$  et la solution analytique du problème (2.2.24)

*Démonstration.* Ce lemme sera démontré dans le cadre plus général du lemme 2.3.1.  $\square$

Plusieurs choses sont à noter dans ce résultat. Tout d'abord, la solution analytique  $u_0$  et la solution  $u_\tau$  n'ont pas la même régularité. En effet,  $u_\tau$  doit vérifier l'équation différentielle de type (2.2.20) sur tout  $\Omega$  et être spatialement continûment dérivable deux fois sur tout  $\Omega$ , alors que la régularité de  $u_0$  n'est contrainte que sur  $F$ . De manière générale, la solution exacte  $u_0$  n'est pas continûment dérivable à l'interface  $\Sigma$  entre l'obstacle et le fluide. On se le représente facilement lorsqu'un objet immobile est plongé dans un fluide en mouvement. La dérivée du champ de vitesse à l'intérieur de l'objet est nulle mais le fluide exerce une contrainte sur la paroi de l'objet, témoin d'un gradient du côté fluide à l'interface. Dans le petit exemple (2.2.24) on remarque d'ailleurs que la solution analytique n'est pas continûment dérivable en  $x = \frac{1}{2}$  puisque  $\lim_{x \rightarrow 0,5^-} \partial_x u_0 = 0 \neq 2 = \lim_{x \rightarrow 0,5^+} \partial_x u_0$ . Dans le cadre du lemme, le gradient du champ de vitesse dans l'obstacle est toujours nul. La notation  $\partial_n u_0|_F$  précise que le gradient à l'interface  $\Sigma$  est pris du côté du fluide, seul côté permettant une valeur non nulle.

Ensuite, c'est justement cette valeur de la dérivée  $\partial_n u_0|_F$  à l'interface  $\Sigma$  qui contrôle l'erreur. Ceci n'est pas étonnant puisque  $u_\tau$  cherche à approcher autant que possible  $u_0$  mais avec des contraintes de régularité plus fortes. Le terme  $\|\partial_n u_0|_F\|_{L^2(\Sigma)}^2$  quantifie justement l'irrégularité de  $u_0$  à l'interface, seul emplacement possible pour les irrégularités puisque  $u_0$  a au moins la régularité de  $u_\tau$  à l'intérieur de chacune des parties  $O$  et  $F$  de  $\Omega$ . Nous verrons dans le paragraphe 2.3 un moyen d'améliorer l'erreur.

Enfin, ce résultat est généralisable à un solide en mouvement, il suffit de se mettre dans son référentiel où la vitesse est nulle à l'intérieur de l'objet. Le terme  $\partial_n u_0|_F$  vu dans le référentiel du solide correspond à un saut de dérivée dans le référentiel du laboratoire.

## 2.2.5 Scalabilité

Les simulations directes d'écoulements turbulents requièrent une très grande résolution et des ressources de calculs conséquentes. Malgré la formulation implicite de (2.2.9), le terme non linéaire de notre schéma nous oblige à respecter la condition de Courant, Friedrichs, et Lewy [29] (1928) dite condition CFL qui contraint le pas de temps utilisé en fonction de la résolution du maillage. Il faut

N	$N_S$	$N_F$	$T_N$	$N_\theta$	$S_{WS}(N)$
40	2	20	0.52060	40	1
80	2	40	0.45095	80	1.15
160	2	80	0.48887	160	1.07
320	4	80	0.55159	320	0.94
640	4	160	0.57937	640	0.90
1280	4	320	0.65123	1280	0.80

TABLE 2.1 – Scalabilité faible du code SFEMaNS avec  $N_{\text{ref}} = 40$  le nombre de processeurs de référence et un nombre de degrés de liberté par processeur fixé à environ  $26 \cdot 10^3$ .

ainsi respecter

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{\|\mathbf{u}\|_\infty}. \quad (2.2.30)$$

Ainsi, plus on demande de précision en espace, plus il est nécessaire de raffiner le pas de temps de calcul. Cette contrainte numérique peut se révéler plus contraignante que le pas de temps exigé par l'évolution typique du système considéré.

On lit souvent dans les cours de turbulence que pour la modélisation d'un écoulement turbulent, il faut  $\text{Re}^{3/4}$  points de discrétisation spatiaux dans chaque direction, et au plus un pas de temps de l'ordre de  $\text{Re}^{-1/2}$ . En trois dimensions, les prédictions de coût de calcul sont alors qu'il faut environ  $\text{Re}^{3 \times 3/4 + 1/2 = 11/4}$  opérations élémentaires. Cependant, ce coût ne tient pas compte du respect de la condition (2.2.30) qui exige que  $\Delta t \leq \text{Re}^{-3/4}$ . Ainsi, dès que le schéma numérique est soumis à cet impératif, le coût de calcul est plutôt de l'ordre de  $\text{Re}^3$ .

De manière plus générale, le coût de calcul d'intégration en dimension  $d$  est proportionnel à  $\Delta x^{d+1}$ . Pour pouvoir faire une simulation tout en satisfaisant ces exigences, il est absolument nécessaire d'utiliser plusieurs processeurs à la fois. Nous étudions donc ici les performances de parallélisation du code.

Nous utilisons le module Fastest Fourier Transform of the World [46, 45] (1998, 1999) pour la transformée de Fourier (2.2.3). Nous avons parallélisé le code suivant les modes de Fourier en azimuth en utilisant la bibliothèque Message Passing Interface (MPI) et aussi dans le plan méridien en utilisant une décomposition de domaines à l'aide des bibliothèques MULTifrontal Massively Parallel sparse direct Solver (MUMPS solveur linéaire), Portable, Extensible Toolkit for Scientific Computation (PETSc [5] (2020)) ainsi que Metis. Les tableaux suivants montrent les résultats actuels de performance de parallélisation des calculs appelée scalabilité (faible et forte) pour des calculs couplés magnétohydrodynamiques (selon le cas du benchmark de Jackson et al. [64] (2013)).

La mesure de la scalabilité faible ("weak scalability") est effectuée de la façon suivante :

$$S_{WS}(N) = \frac{T_{N_{\text{ref}}}}{T_N}, \quad (2.2.31)$$

où  $N$  est le nombre de processeurs,  $T_N$  le temps moyen de calcul pour une itération par processeur (en seconde) et  $N_{\text{ref}}$  le nombre minimal de processeurs pour démarrer le test. Le tableau 2.1 contient les résultats avec  $N_S$  le nombre de domaines dans le plan méridien,  $N_F$  le nombre de modes de Fourier,  $N_{\text{med}}$  le nombre de degrés de liberté dans le plan méridien et  $N_\theta$  le nombre de degrés de liberté dans la direction azimuthale. Les résultats reportés dans le tableau 2.1 sont très satisfaisants.

La scalabilité forte ("strong scalability") est mesurée par :

$$S_{SS}(N) = \frac{T_{N_{\text{ref}}} N_{\text{ref}}}{T_N N}. \quad (2.2.32)$$

en utilisant les mêmes notations que précédemment. Quand  $S_{SS}(N) = 1$ , le temps de communication est négligeable devant celui dédié au calcul.

Le tableau 2.2 teste la parallélisation en sous-domaines. L'efficacité de la table 2.2 décroît fortement

N	$N_S$	$N_F$	$T_N$	dof	$S_{SS}(N)$
40	1	40	0.76	52406	1
80	2	40	0.45	26203	0.84
120	3	40	0.334	17469	0.76
160	4	40	0.26	13101	0.74
240	6	40	0.21	6550	0.60

TABLE 2.2 – Scalabilité forte du code SFEMaNS pour la parallélisation en domaines avec  $N_{\text{ref}} = 40$ ,  $\sqrt{N_{\text{med}}} = 161.87$ ,  $N_{\theta} = 80$  (40 modes de Fourier) et dof=  $26203 \times 80/N$  est le nombre de degrés de liberté par processeur.

quand le domaine est découpé en 3 ou 4 sous-domaines. Le plan méridien contenant 26203 points  $\mathbb{P}_2$  de grille, on peut conclure que la parallélisation reste efficace tant que chaque processeur traite environ 9000 points  $\mathbb{P}_2$  de grille par sous-domaine ou encore 18000 degrés de liberté par processeur.

Le tableau 2.3 teste la parallélisation en modes de Fourier. Elle reste très efficace tant qu'un processeur s'occupe de 2 modes de Fourier.

N	$N_S$	$N_F$	$T_N$	dof	$S_{SS}(N)$
40	1	40	1.37902	104816	1
80	1	80	0.76291	52408	0.90
160	1	160	0.42866	26204	0.80
320	1	320	0.22315	13102	0.77

TABLE 2.3 – Scalabilité forte du code SFEMaNS pour la parallélisation en modes de Fourier avec  $N_{\text{ref}} = 40$ ,  $\sqrt{N_{\text{med}}} = 81$ ,  $N_{\theta} = 640$  (320 modes de Fourier) et dof=  $13102 \times 320/N$  est le nombre de degrés de liberté par processeur.

Cette étude nous permet d'évaluer la gamme de paramètres pour laquelle la parallélisation des calculs est efficace et montre que le code SFEMaNS est adapté au calcul scientifique de haute performance.

## 2.2.6 Méthode de simulation des grandes structures

Comme nous venons de le voir, le coût des simulations peut-être très élevé si l'on souhaite obtenir de très grands nombres de Reynolds. Il existe alors des modèles de simulation de grandes structures (Large Eddy Simulations ou LES) qui permettent de rendre compte de l'écoulement aux grandes échelles malgré un maillage sous résolu. Ceci permet d'économiser de la puissance de calcul mais ne donne pas accès aux petites échelles de l'écoulement, et souvent la modélisation introduit des biais dans la réalisation de l'écoulement. Il peut être difficile de retrouver les bonnes propriétés des grandeurs macroscopiques. Nous utilisons un modèle de turbulence appelé "viscosité entropique". Ce modèle proposé par Guermond et al. [57, 58, 59] (2006, 2011, 2011) consiste à ajouter numériquement une viscosité artificielle  $\nu_E$  proportionnelle au résidu de l'équation de conservation d'énergie. On ajoute ainsi à l'équation (2.2.10) un terme de la forme  $\nabla \cdot (\nu_E \nabla \mathbf{u})$ . Cela permet une diffusion non linéaire



proportionnelle au défaut de conservation locale d'énergie cinétique engendré par la faible résolution du maillage.

Les prémices de cette astuce viennent de la notion de solution faible acceptable introduite par Scheffer [130] (1987). Caffarelli, Kohn, et Nirenberg [15] (1982) ont ensuite montré que c'était la seule notion raisonnable de solution pour l'équation de Navier-Stokes (2.1.6) en trois dimensions. Détaillons maintenant le fonctionnement de cette méthode. Puisque le schéma numérique de SFEMaNS mêle éléments finis et décomposition spectrale, on construit un maillage en trois dimensions en considérant l'espace produit du maillage éléments finis dans le plan méridien avec l'ensemble des angles correspondant à la décomposition en série de Fourier. A  $M \in \mathbb{N}$  modes complexes pour la décomposition correspondent  $\frac{2\pi}{2M-1}$  angles. La distance séparant deux plans azimutaux dépend de la distance à l'axe  $r$  et vaut  $\frac{2\pi r}{2M-1}$ . Ainsi, un élément fini  $K$  du maillage éléments finis bidimensionnel de base correspond à  $2M - 1$  éléments du nouveau maillage tridimensionnel construit. On définit alors  $h_K$  la résolution du maillage par la formule suivante :

$$h_K = \min \left( \min_{(r,z) \in K} \left( \frac{2\pi r}{2M-1} \right), \text{diam}(K) \right). \quad (2.2.33)$$

Au pas de temps  $n \geq 2$ , on définit le résidu par la formule suivante :

$$\text{Res}_{\text{NS}}^n = \frac{\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-2}}{2\Delta t} + (\mathbf{u}^{n-1} \cdot \nabla) \mathbf{u}^{n-1} - \frac{1}{\text{Re}} \Delta \mathbf{u}^{n-1} + \nabla(p^{n-1}) - \mathbf{f}^{n-1}. \quad (2.2.34)$$

Ce résidu est calculé à chaque pas de temps sur les éléments du maillage 3D dans l'espace physique. Il correspond aux défauts de l'équation de Navier-Stokes et est homogène à  $\partial_t \mathbf{u}$ . Plus il est grand, moins l'écoulement respecte l'équation de modélisation. On définit alors la viscosité artificielle locale sur chaque cellule  $K$  en fonction des résidus calculés sur l'ensemble  $D_K$  des cellules voisines de  $K$  dans le maillage tridimensionnel par

$$\nu_{\text{R}|K}^n = \frac{h_K^2 \|\text{Res}_{\text{NS}}^n \cdot \mathbf{u}^n\|_{\mathbb{L}^\infty(D_K)}}{\|\mathbf{u}^n\|_{\mathbb{L}^\infty(D_K)}^2}. \quad (2.2.35)$$

D'un point de vue dimensionnel cela est homogène à  $h_K^2 \frac{(\partial_t \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u}}{u^2} \equiv L^2 T^{-1}$  : on retrouve bien des  $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$ . On peut voir le rapport  $\frac{h_K^2 \|\text{Res}_{\text{NS}}^n \cdot \mathbf{u}^n\|_{\mathbb{L}^\infty(D_K)}}{\|\mathbf{u}^n\|_{\mathbb{L}^\infty(D_K)}^2}$  comme la puissance des défauts relativement à l'énergie cinétique locale.  $\nu_{\text{R}|K}^n$  correspond donc à la résolution du maillage au carré divisée par le temps typique d'impact des défauts de l'écoulement sur l'énergie cinétique locale. On s'attend à ce que  $\nu_{\text{R}|K}^n$  soit petite dans les régions où l'écoulement est lisse et où l'erreur numérique est faible et que  $\nu_{\text{R}|K}^n$  soit grande dans les zones à forts gradients, où l'équation de Navier-Stokes est mal résolue. Afin de s'assurer que la viscosité ne soit pas trop importante on utilise comme viscosité effective la viscosité suivante :

$$\nu_{\text{E}|K}^n = \min \left( c_{\text{max}} h_K \|\mathbf{u}^n\|_{\mathbb{L}^\infty(D_K)}^2, c_e \nu_{\text{R}|K}^n \right), \quad (2.2.36)$$

qui est ajustée par deux paramètres  $c_{\text{max}}$  et  $c_e$  que l'on prend égaux respectivement à  $\frac{1}{8}$  et 1. Les valeurs de ces paramètres dépendent de la géométrie de l'écoulement considéré et ont été fixés par des travaux précédents (Cappanera, Guermont, Léorat, et Nore [19] (2016) pour les écoulements cylindriques et Wang, Triantafyllou, Constantinides, et Karniadakis [143] (2019) dans un tube flexible).

Le schéma numérique ainsi défini et utilisant des polynômes d'ordre 2 pour les éléments finis converge comme  $\mathcal{O}(h_K^3)$  dans les régions lisses et  $\mathcal{O}(h_K)$  dans les zones de fort gradient.



## 2.3 Pénalisation d'ordre élevé

La modélisation des interfaces fluide-structure est un problème qui intéresse particulièrement le domaine de la simulation numérique. Selon les problèmes étudiés, les schémas d'intégration temporelle ou de discrétisation spatiale, différentes techniques peuvent être utilisées. Au paragraphe 2.2.4 nous avons présenté l'application de la méthode de pénalisation proposée par Pasquetti, Bwemba, et Cousin [113] (2008) à notre code éléments finis. Cette méthode s'applique pour les problèmes paraboliques du type  $\partial_t g - \nu \operatorname{div}(F[g]) = S(g, t)$  dans le cadre d'un obstacle se déplaçant dans le maillage de discrétisation. C'est bien le cas dans la géométrie de von Kármán étudiée dans cette thèse que nous présentons dans la section suivante 2.4. Comme vu précédemment, l'erreur d'intégration temporelle en norme  $\mathbb{L}^2$  de cette méthode appliquée à l'équation de Navier-Stokes est en  $\sqrt{\frac{\Delta t}{\operatorname{Re}}}$ .

Nous présentons dans ce chapitre une nouvelle méthode de pénalisation itérative permettant une convergence plus rapide en fonction du pas de temps utilisé. Jean-Luc Guermond et moi-même avons eu l'idée de ce schéma numérique lors de mon séjour au Texas en 2019.

Dans cet objectif, nous nous concentrons sur l'étude d'un système obéissant à un problème parabolique générique du style équation de la chaleur (2.2.20) coexistant avec un milieu où les conditions sont imposées. Dans un souci de continuité des notations, on appelle ici fluide la partie régie par l'équation de la chaleur et obstacle la partie dont le comportement est imposé. Le sens physique nous invite à faire l'hypothèse de continuité de la grandeur  $u$  considérée à l'interface fluide-solide.

### 2.3.1 Pénalisation itérative pour l'équation de la chaleur

Présentons maintenant en détail le fonctionnement de la méthode. Il nous faut avant-tout réintroduire les notations de l'espace considéré  $\Omega$ , ainsi que sa décomposition en un fluide  $F$  et un obstacle  $O$  séparés par une interface  $\Sigma$ . La partition de  $\Omega$  entre  $F$  et  $O$  pouvant dépendre du temps, les ensembles sont si besoin assortis d'un indice  $t$  pour insister sur cette dépendance.

$$\begin{aligned}\Omega &\subset \mathbb{R}^n \\ \Omega &= O \sqcup F \\ \Sigma &= \partial O \cap \partial F\end{aligned}$$

Le principal défaut de la méthode de pénalisation classique est que l'application d'une pénalisation à la résolution d'un problème parabolique naïf suppose une certaine continuité des dérivées à l'interface. En effet, la formulation classique de l'équation (2.2.21) suppose que la fonction inconnue  $u$  est au moins deux fois dérivable donc continûment dérivable. Cependant, ceci n'est normalement vrai qu'à l'intérieur du domaine fluide  $F$ . On voit bien sur la figure 2.5 que la solution analytique n'est pas continûment dérivable alors que toutes les solutions du problème pénalisé le sont. Nous proposons donc d'introduire dans le schéma numérique la possibilité d'avoir un saut de dérivée à l'interface  $\Sigma$  entre le fluide et le solide. Afin d'estimer la bonne valeur du saut de dérivée, nous proposons une méthode itérative qui réutilise la méthode de Pasquetti, Bwemba, et Cousin [113] (2008).

### 2.3.2 Présentation du schéma numérique

Nous cherchons à résoudre un problème de type équation de la chaleur unidimensionnelle présentant une zone appelée obstacle où le comportement est imposé. Soit  $f$  une fonction équivalent à un terme source,  $g$  une autre fonction définissant la valeur imposée dans l'obstacle et  $\tilde{u} \in H^1(\Omega)$  la solution du

système suivant dans  $\Omega$

$$\begin{cases} \tilde{u}|_{\partial\Omega} = 0, \\ \partial_t \tilde{u} - \Delta \tilde{u} = f & \text{dans } F, \\ \tilde{u} = g & \text{dans } O. \end{cases} \quad (2.3.1)$$

$\tilde{u}$  est la solution analytique que nous cherchons à approcher. Pour bien différencier les dérivées à l'interface, nous orientons  $\Sigma$  en direction de l'extérieur du fluide et notons  $\partial_n|_O$  (respectivement  $\partial_n|_F$ ), la dérivée normale à  $\Sigma$  dans l'obstacle (respectivement dans le fluide). Lorsque les dérivées sont discontinues à l'interface, on s'attend alors à ce que  $\partial_n \tilde{u}|_O$  diffère de  $\partial_n \tilde{u}|_F$ .

En définissant par convention  $u_{-1}$  la fonction nulle, on définit alors de manière itérative pour  $i \in \mathbb{N}$  la fonction  $u_i \in H^1(\Omega)$  comme la solution de :

$$\begin{cases} u_i|_{\partial\Omega} = 0, \\ \partial_t u_i - \Delta u_i = f & \text{dans } F, \\ \partial_t(u_i - g) - \Delta u_i = -\frac{u_i - g}{\tau} & \text{dans } O, \\ \partial_n u_i|_F - \partial_n u_i|_O = \sum_{k=0}^{i-1} \partial_n u_k|_O \left( = \partial_n u_{i-1}|_F \right) & \text{sur } \Sigma. \end{cases} \quad (2.3.2)$$

Le système (2.3.2) nous donne un schéma d'approximation par pénalisation du problème (2.3.1). On remarque que le cas  $i = 0$  correspond à la méthode de Pasquetti, Bwemba, et Cousin [113] (2008) utilisée pour (2.2.21). Pour  $i \geq 1$ , on introduit un saut de dérivée à l'interface  $\Sigma$  égal à la valeur de la dérivée prise dans le fluide pour  $j = i - 1$ . Même si cette valeur n'est pas forcément exacte, nous souhaitons faire un schéma numérique consistant (dont l'erreur tend vers zéro quand  $\tau$  diminue) et qui converge plus vite que la solution pour  $i = 0$ .

Nous voulons désormais trouver une borne sur l'erreur commise en fonction de  $\tau$  en approchant  $\tilde{u}$  par les fonctions  $u_i$ . Pour alléger les notations, nous fixons la valeur de la fonction  $g$  imposée à zéro, le lecteur pourra adapter le raisonnement pour une autre situation. Nous étudions donc les systèmes d'équations suivants.

$$\begin{cases} \tilde{u}|_{\partial\Omega} = 0, \\ \partial_t \tilde{u} - \Delta \tilde{u} = f & \text{dans } F, \\ \tilde{u} = 0 & \text{dans } O. \end{cases} \quad (2.3.3)$$

$$\begin{cases} u_i|_{\partial\Omega} = 0, \\ \partial_t u_i - \Delta u_i = f & \text{dans } F, \\ \partial_t u_i - \Delta u_i = -\frac{u_i}{\tau} & \text{dans } O, \\ \partial_n u_i|_F - \partial_n u_i|_O = \sum_{k=0}^{i-1} \partial_n u_k|_O \left( = \partial_n u_{i-1}|_F \right) & \text{sur } \Sigma. \end{cases} \quad (2.3.4)$$

L'erreur peut être contrôlée par le lemme suivant dont la démonstration s'inspire de démonstrations présentées par Ern et Guermond [39] (2004).

**Lemme 2.3.1.** *Il existe une constante  $C_0 \in \mathbb{R}_+$  telle que, pour tout  $i \in \mathbb{N}$ , la fonction  $e_i = u_i - \tilde{u}$  satisfait l'inégalité suivante :*

$$\frac{\tau}{8} \left[ 4\partial_t \|e_i\|_{L^2(\Omega)}^2 + 8\|\nabla e_i\|_{L^2(F)}^2 + 7\|\nabla e_i\|_{L^2(O)}^2 \right] + \frac{7}{8} \|e_i\|_{L^2(O)}^2 \leq \tau^{\frac{3}{2}} C_0 \|\partial_n e_{i-1}|_F\|_{L^2(\Sigma)}^2 \quad (2.3.5)$$

*Démonstration.* Soit  $C_0 \in \mathbb{R}_+$  la constante de trace multiplicative entre  $\Sigma$  et  $O$  (cf "multiplicative trace inequality" [99, 21] (1998, 2000)). La différence entre les systèmes (2.3.3) et (2.3.4) donne pour  $i \in \mathbb{N}$  :

$$\begin{cases} e_i|_{\partial\Omega} = 0, \\ \tau(\partial_t e_i - \Delta e_i) = 0 & \text{dans } F, \\ \tau(\partial_t e_i - \Delta e_i) + e_i = 0 & \text{dans } O, \\ \partial_n e_i|_F - \partial_n e_i|_O = \sum_{k=0}^{i-1} \partial_n u_k|_O - \partial_n \tilde{u}|_F \left( = \partial_n e_{i-1}|_F \right) & \text{sur } \Sigma. \end{cases} \quad (2.3.6)$$

Nous intégrons ensuite par partie sur  $\Omega$  les termes de (2.3.6) scalaire  $e_i$ .

$$\begin{aligned} \tau \int_F (\partial_t e_i - \Delta e_i) \cdot e_i + \tau \int_O (\partial_t e_i - \Delta e_i) \cdot e_i + \int_O e_i^2 &= 0, \\ \tau \int_\Omega \partial_t e_i \cdot e_i + \tau \int_\Omega (\nabla e_i)^2 - \tau \int_{\Sigma_{F \rightarrow O}} e_i \cdot (\nabla e_i|_F - \nabla e_i|_O) : dS + \int_O e_i^2 &= 0, \\ \tau \int_\Omega \partial_t e_i \cdot e_i + \tau \int_\Omega (\nabla e_i)^2 - \tau \int_{\Sigma_{F \rightarrow O}} e_i (\partial_n e_i|_F - \partial_n e_i|_O) dS + \int_O e_i^2 &= 0, \\ \tau \int_\Omega \partial_t e_i \cdot e_i + \tau \int_\Omega (\nabla e_i)^2 - \tau \int_{\Sigma_{F \rightarrow O}} e_i \partial_n e_{i-1}|_F dS + \int_O e_i^2 &= 0. \end{aligned}$$

On obtient donc ensuite avec l'inégalité de Cauchy-Schwartz :

$$\begin{aligned} \tau \left[ \int_\Omega \frac{\partial_t(e_i^2)}{2} + (\nabla e_i)^2 \right] + \int_O e_i^2 &= \tau \int_{\Sigma_{F \rightarrow O}} e_i \partial_n e_{i-1}|_F dS; \\ &\leq \tau \sqrt{\sqrt{2C_0\tau^{\frac{1}{2}}} \int_{\Sigma_{F \rightarrow O}} (\partial_n e_{i-1}|_F)^2 dS} \frac{1}{\sqrt{2C_0\tau^{\frac{1}{2}}} \int_{\Sigma_{F \rightarrow O}} e_i^2 dS}. \end{aligned}$$

Puis, à l'aide d'identités remarquables et de l'inégalité de trace multiplicative, on trouve

$$\begin{aligned} \tau \left[ \int_\Omega \frac{\partial_t(e_i^2)}{2} + (\nabla e_i)^2 \right] + \int_O e_i^2 &\leq \tau^{\frac{3}{2}} C_0 \|\partial_n e_{i-1}|_F\|_{L^2(\Sigma)}^2 + \tau^{\frac{1}{2}} \frac{\|e_i\|_{L^2(\Sigma)}^2}{4C_0}; \\ &\leq \tau^{\frac{3}{2}} C_0 \|\partial_n e_{i-1}|_F\|_{L^2(\Sigma)}^2 + \frac{1}{4} \tau^{\frac{1}{2}} \|e_i\|_{L^2(O)} \|\nabla e_i\|_{L^2(O)}; \\ &\leq \tau^{\frac{3}{2}} C_0 \|\partial_n e_{i-1}|_F\|_{L^2(\Sigma)}^2 + \frac{1}{8} \left( \|e_i\|_{L^2(O)}^2 + \tau \|\nabla e_i\|_{L^2(O)}^2 \right); \end{aligned}$$

ce qui donne finalement l'inégalité (2.3.5) cherchée :

$$\frac{\tau}{8} \left[ 4\partial_t \|e_i\|_{L^2(\Omega)}^2 + 8\|\nabla e_i\|_{L^2(F)}^2 + 7\|\nabla e_i\|_{L^2(O)}^2 \right] + \frac{7}{8} \|e_i\|_{L^2(O)}^2 \leq \tau^{\frac{3}{2}} C_0 \|\partial_n e_{i-1}|_F\|_{L^2(\Sigma)}^2.$$

□

**Remarque 2.3.2.** *Ce lemme est une généralisation du lemme 2.2.1 en donnant la preuve. Il nous donne une borne contrôlant les normes de  $\partial_t \|e_i\|_{L^2(\Omega)}$ ,  $\|\nabla e_i\|_{L^2(F)}$ ,  $\|\nabla e_i\|_{L^2(O)}$  et  $\|e_i\|_{L^2(O)}$ . Les trois premières doivent nécessairement être des  $\mathcal{O}\left(\tau^{\frac{1}{2}} \|\partial_n e_{i-1}|_F\|_{L^2(\Sigma)}^2\right)$ , tandis que la dernière converge plus vite en  $\mathcal{O}\left(\tau^{\frac{3}{2}} \|\partial_n e_{i-1}|_F\|_{L^2(\Sigma)}^2\right)$ .*

Cette relation nous permet de bien comprendre l'intérêt de la méthode itérative : l'erreur de l'itération  $i$  est bornée par une puissance de  $\tau$  fois l'erreur de l'itération  $i - 1$ . La valeur de  $\partial_n e_{i-1}|_F$  est fixée par la solution analytique  $\tilde{u}$  et limite la convergence de  $u_0$ .

### 2.3.3 Schéma numérique et formulation faible

Pour coder ce schéma numérique sur un maillage éléments finis, il faut le formuler dans le cadre des distributions comme nous l'avons présenté dans le système (2.3.4). Ainsi, si l'on intègre les fonctions contre une fonction générique  $v$  de  $H^1(\Omega)$ , on obtient :

— dans l'obstacle  $O$

$$\int_O \partial_t u_i \cdot v - \int_O \Delta u_i \cdot v = - \int_O \frac{u_i}{\tau} \cdot v,$$

— dans le fluide  $F$

$$\begin{aligned} \int_F \partial_t u_i \cdot v - \int_F \Delta u_i \cdot v &= \int_F f \cdot v \\ \int_F \partial_t u_i \cdot v + \int_F \nabla u_i \cdot \nabla v - \int_{\Sigma_{F \rightarrow O}} \partial_n u_i|_F \cdot v &= \int_F f \cdot v \\ \int_F \partial_t u_i \cdot v + \int_F \nabla u_i \cdot \nabla v + \int_{\Sigma_{O \rightarrow F}} \partial_n u_i|_F \cdot v &= \int_F f \cdot v \\ \int_F \partial_t u_i \cdot v + \int_F \nabla u_i \cdot \nabla v + \int_{\Sigma_{O \rightarrow F}} \sum_{k=0}^i \partial_n u_k|_O \cdot v &= \int_F f \cdot v \\ \int_F \partial_t u_i \cdot v + \int_F \nabla u_i \cdot \nabla v + \sum_{k=0}^i \int_O \operatorname{div}(\nabla u_k \cdot v) &= \int_F f \cdot v \\ \int_F \partial_t u_i \cdot v + \int_F \nabla u_i \cdot \nabla v + \sum_{k=0}^i \int_O (\Delta u_k \cdot v + \nabla u_k \cdot \nabla v) &= \int_F f \cdot v \\ \int_F \partial_t u_i \cdot v + \int_F \nabla u_i \cdot \nabla v + \int_O \Delta u_i \cdot v + \int_O \nabla u_i \cdot \nabla v + \sum_{k=0}^{i-1} \int_O (\Delta u_k \cdot v + \nabla u_k \cdot \nabla v) &= \int_F f \cdot v \\ \left. \begin{aligned} \int_F \partial_t u_i \cdot v + \int_F \nabla u_i \cdot \nabla v + \int_O \Delta u_i \cdot v + \int_O \nabla u_i \cdot \nabla v \\ + \sum_{k=0}^{i-1} \int_O \left( \left( \partial_t u_k + \frac{u_k}{\tau} \right) \cdot v + \nabla u_k \cdot \nabla v \right) \end{aligned} \right\} &= \int_F f \cdot v \end{aligned}$$

— dans tout  $\Omega$

$$\int_{\Omega} \partial_t u_i \cdot v + \int_{\Omega} \nabla u_i \cdot \nabla v = \int_F f \cdot v - \int_O \frac{u_i}{\tau} \cdot v - \sum_{k=0}^{i-1} \left[ \int_{\Omega} \chi_O \nabla u_k \cdot \nabla v + \int_{\Omega} \chi_O \left( \partial_t u_k + \frac{u_k}{\tau} \right) \cdot v \right]. \quad (2.3.7)$$

Cette équation nous donne le système d'équations que doivent vérifier les fonctions que nous considérons dans l'espace  $\mathbb{P}_n$ . Elle correspondrait à résoudre au sens fort

$$\forall i \in [0, 5], \partial_t u_i - \Delta u_i = \chi_F f_{\text{anal}} - \chi_O \frac{u_i}{\tau} + \sum_{k=0}^{i-1} \left[ \operatorname{div}(\chi_O \nabla u_k^{n+1}) - \chi_O \left( \partial_t u_k + \frac{u_k}{\tau} \right) \right]. \quad (2.3.8)$$

Il est indispensable de passer par la formulation faible pour être certain de n'oublier aucun terme.

Nous devons encore modifier (2.3.7) pour intégrer un schéma de discrétisation temporelle. Nous étudions ici le cas du schéma "Backward differentiation formula" (BDF1 et BDF2 [30] (1952)) déjà présenté à l'équation (2.2.6). Nous discrétisons le temps avec la notation  $t^{n+1} = t^n + \tau$ , et notons  $u^n$  pour  $u(t^n)$ . Nous avons choisi d'utiliser deux schémas différents pour les deux dérivées présentes dans l'équation (2.3.7) :  $\partial_t u_i(t^n) = \frac{3u_i^{n+1} - 4u_i^n + u_i^{n-1}}{2\tau} + \mathcal{O}(\tau)$  mais nous utilisons une approximation plus simple pour  $\partial_t u_k$  à savoir que  $\partial_t u_k^n + \frac{u_k^n}{\tau} = \frac{u_k^{n+1}}{\tau} + \mathcal{O}(1)$ . Ce choix peut être critiqué et il est possible de raffiner l'erreur, mais nous nous concentrons ici à présenter une méthode qui améliore la pénalisation de Pasquetti, Bwemba, et Cousin [113] (2008) et notre discrétisation suffit. Pour de meilleurs résultats utilisant un grand nombre d'itérations de la méthode il est nécessaire d'améliorer le schéma de discrétisation temporelle afin qu'il ne limite pas la convergence.

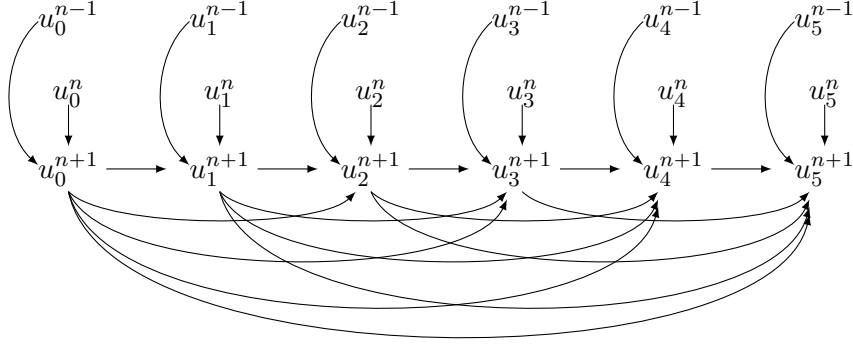


FIGURE 2.6 – Dépendances des  $u_i^{n+1}$  en fonction des grandeurs aux deux pas de temps précédents.

Le schéma temporel appliqué aux équations (2.3.4) pour  $0 \leq i \leq 5$  mène aux systèmes suivants

$$(0) \Leftrightarrow \frac{3u_0^{n+1}}{2\tau} - \Delta u_0^{n+1} = \frac{4u_0^n - u_0^{n-1}}{2\tau} + \chi_F(f(x, y, t^{n+1})) - \chi_O \frac{u_0^n}{\tau},$$

$$(\forall i \in [1, 5]) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3u_i^{n+1}}{2\tau} - \Delta u_i^{n+1} = \frac{4u_i^n - u_i^{n-1}}{2\tau} + \chi_F(f(x, y, t^{n+1})) - \chi_O \frac{u_i^n}{\tau} \\ + \sum_{k=0}^{i-1} \left[ \text{div}(\chi_O \nabla u_k^{n+1}) - \chi_O \frac{u_k^{n+1}}{\tau} \right], \end{cases}$$

auxquels il faut ajouter les conditions limites. Les dépendances entre les termes sont présentées dans la figure 2.6. On reconnaît bien le caractère itératif du schéma. L'utilisateur peut ainsi choisir les valeurs de  $i$  qu'il souhaite calculer.

Le schéma numérique total présentant la discrétisation temporelle choisie ainsi que la formulation faible sur les éléments finis est donc :

$$\int_{\Omega} \frac{3u_i^{n+1} \cdot v}{2\tau} + \int_{\Omega} \nabla u_i^{n+1} \cdot \nabla v = \begin{cases} \int_{\Omega} \left( \frac{4u_i^n - u_i^{n-1}}{2\tau} + \chi_F f^{n+1} - \chi_O \int_{\Omega} \frac{u_i^n}{\tau} \right) \cdot v \\ - \sum_{k=0}^{i-1} \left[ \int_{\Omega} \chi_O \nabla u_k^{n+1} \cdot \nabla v + \int_{\Omega} \chi_O \frac{u_k^{n+1}}{\tau} \cdot v \right]. \end{cases} \quad (2.3.9)$$

Comme pour résoudre le système d'équations (2.2.14-2.2.15-2.2.16), l'avancée temporelle correspond encore à un système linéaire du type  $AX_i^{n+1} = B(X_i^n, X_i^{n-1}, (X_k^{n+1})_{0 \leq k \leq i-1})$  où la matrice  $A$  ne dépend ni du temps, ni de  $i$ . Il suffit donc d'inverser  $A$  en début de simulation et de calculer le membre de droite pour résoudre (2.3.9). Connaissant  $u_i$ , le coût de calcul supplémentaire pour calculer le terme  $u_{i+1}$  se limite à des opérations linéaires simples afin de calculer  $A^{-1}B$ .

Ce schéma numérique est donc facile d'utilisation et relativement peu gourmand en ressources.

### 2.3.4 Tests analytiques de convergence

Nous allons maintenant tester cette méthode sur deux tests de convergence avec une formule analytique : obstacle fixe dérivé du cas détaillé dans 2.2.4, puis un cas d'obstacle en déplacement.

Ces tests nous donnent une idée des vitesses de convergence observées en temps, et en espace pour le schéma décrit. Pour ce faire, nous menons les tests de  $t = 0$  à  $t_{\text{final}} = 3$  et comparons au temps final

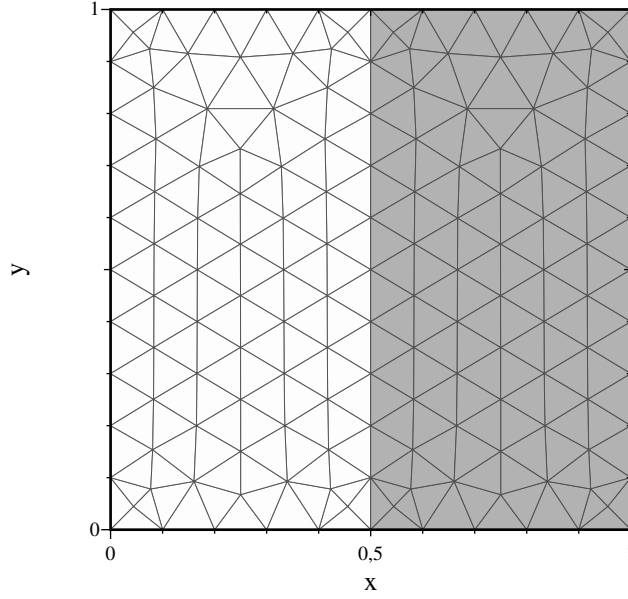


FIGURE 2.7 – Maillage éléments finis utilisé pour les tests analytiques, ici  $h_{\text{resol}} = 0,1$ .  
Pour le cas de l'obstacle fixe : l'obstacle est en blanc, le fluide est en gris.

les normes  $\mathbb{L}^2$  des fonctions erreurs  $e_i = u_i - \tilde{u}$  relativement à la norme de  $\tilde{u}$ . On définit alors :

$$\|e_i\|_{\mathbb{L}^2}^{\text{rel}} = \frac{\|e_i\|_{\mathbb{L}^2}}{\|\tilde{u}\|_{\mathbb{L}^2}}, \quad (2.3.10)$$

$$\|\nabla e_i\|_{\mathbb{L}^2}^{\text{rel}} = \frac{\|\nabla e_i\|_{\mathbb{L}^2}}{\|\nabla \tilde{u}\|_{\mathbb{L}^2}}. \quad (2.3.11)$$

Ces normes sont parfois regardées dans tout le domaine  $\Omega$ , ou bien seulement dans le fluide ou dans l'obstacle. Deux paramètres sont choisis pour chaque simulation : le nombre d'itérations  $n_{\text{it}}$  et la résolution  $h_{\text{resol}}$  du maillage éléments finis  $\mathbb{P}_3$  utilisé.

Pour un couple  $(n_{\text{it}}, h_{\text{resol}})$  choisi, on détermine l'origine de l'erreur de la manière suivante :

- si l'erreur ne change pas en diminuant le pas de temps  $\Delta t = \frac{t_{\text{final}}}{n_{\text{it}}}$ , c'est que l'erreur est dominée par la discrétisation spatiale ; on peut alors obtenir le taux de convergence de l'erreur pour deux valeurs de  $h_{\text{resol}} \in (h_1 \neq h_2)$  par la formule  $\alpha = \frac{\ln(\|e_i\|_{\mathbb{L}^2}(h_1)) - \ln(\|e_i\|_{\mathbb{L}^2}(h_2))}{\ln(h_1) - \ln(h_2)}$  de telle sorte que  $\|e_i\|_{\mathbb{L}^2}(h_{\text{resol}}) \propto h_{\text{resol}}^\alpha$  ;
- si l'erreur ne change pas en diminuant  $h_{\text{resol}}$  l'erreur est dominée par la discrétisation temporelle, on obtient le taux de convergence temporel avec deux pas de temps  $\Delta t_1$  et  $\Delta t_2$  nous donnant  $\beta = \frac{\ln(\|e_i\|_{\mathbb{L}^2}(\Delta t_1)) - \ln(\|e_i\|_{\mathbb{L}^2}(\Delta t_2))}{\ln(\Delta t_1) - \ln(\Delta t_2)}$  de telle sorte que  $\|e_i\|_{\mathbb{L}^2}(\Delta t) \propto \Delta t^\beta$ .

Nous attachons une étude particulière à déterminer les taux de convergence dans le fluide ou dans l'obstacle, puisque le lemme 2.3.1 nous donne des bornes différentes pour chaque sous domaine.

Le maillage utilisé pour ces tests est présenté à la figure 2.7. On utilisera des maillages de résolutions  $h_{\text{resol}} \in 10^{-3} \times \{100, 50, 25, 12.5, 10, 5\}$  et des pas de temps  $\Delta t$  dans l'ensemble  $\frac{3}{10} \times \{2^{-k}\}_{0 \leq k \leq 14}$ .

$n_{it}$	$\ \chi_O e_0\ _{\mathbb{L}^2}^{rel}$	taux	$\ \chi_O \nabla e_0\ _{\mathbb{L}^2}^{rel}$	taux	$\ \chi_F e_0\ _{\mathbb{L}^2}^{rel}$	taux	$\ \chi_F \nabla e_0\ _{\mathbb{L}^2}^{rel}$	taux
10	$4.09E-1$	--	$7.67E-1$	--	$5.48E-1$	--	$7.62E-1$	--
20	$3.55E-1$	0.20	$7.04E-1$	0.12	$4.95E-1$	0.15	$6.89E-1$	0.15
40	$2.84E-1$	0.32	$6.30E-1$	0.16	$4.24E-1$	0.22	$5.90E-1$	0.22
80	$2.09E-1$	0.45	$5.61E-1$	0.17	$3.43E-1$	0.30	$4.77E-1$	0.30
160	$1.42E-1$	0.55	$5.04E-1$	0.16	$2.67E-1$	0.37	$3.71E-1$	0.37
320	$9.26E-2$	0.62	$4.50E-1$	0.16	$2.02E-1$	0.40	$2.80E-1$	0.40
640	$5.88E-2$	0.66	$3.98E-1$	0.18	$1.50E-1$	0.43	$2.08E-1$	0.43
1280	$3.66E-2$	0.68	$3.47E-1$	0.20	$1.10E-1$	0.45	$1.53E-1$	0.45
2560	$2.25E-2$	0.70	$3.00E-1$	0.21	$7.97E-2$	0.46	$1.11E-1$	0.46
5120	$1.37E-2$	0.71	$2.57E-1$	0.22	$5.75E-2$	0.47	$7.99E-2$	0.47
10240	$8.31E-3$	0.72	$2.19E-1$	0.23	$4.12E-2$	0.48	$5.73E-2$	0.48
20480	$5.00E-3$	0.73	$1.86E-1$	0.24	$2.94E-2$	0.49	$4.09E-2$	0.49
40960	$3.00E-3$	0.74	$1.57E-1$	0.24	$2.10E-2$	0.49	$2.91E-2$	0.49
81920	$1.79E-3$	0.74	$1.33E-1$	0.24	$1.49E-2$	0.49	$2.07E-2$	0.49
163840	$1.07E-3$	0.74	$1.12E-1$	0.25	$1.06E-2$	0.50	$1.47E-2$	0.49

TABLE 2.4 – Erreurs relatives pour l'obstacle fixe à  $t_{\text{final}} = 3$  pour  $u_0$  sur maillage  $h_{\text{resol}} = 0,01$ 

### 2.3.4.1 Obstacle fixe

Dans un premier temps, nous menons une étude avec un obstacle fixe dans un milieu bidimensionnel. Nous définissons ici un problème respectant (2.3.3). Le maillage utilisé coïncide parfaitement avec l'interface fluide-obstacle. Cela nous permet d'optimiser la précision de la discrétisation spatiale pour nous concentrer dans un premier temps sur l'erreur temporelle.

$$\begin{aligned}
\Omega &= \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]\}, \\
O &= [0, 0.5] \times [0, 1], \\
F &= [0.5, 1] \times [0, 1], \\
\chi_F &= \mathbb{1}_{\{x \geq \frac{1}{2}\}}, \\
\chi_O &= 1 - \chi_F, \\
\tilde{u}(x, y, t) &= \chi_F(x) \cos(t) (1 - 4(x - 1)^2), \\
f(x, y, t) &= \chi_F(x) (-\sin(t) (1 - 4(x - 1)^2) + 8 \cos(t)),
\end{aligned}$$

Les résultats sont présentés dans les tables suivantes 2.4 à 2.9.

Les tables nous permettent de mettre en lumière les taux de convergence d'erreur ainsi que les seuils de saturation de la résolution spatiale. Nous obtenons des taux de convergence temporelle de la table 2.10. L'amélioration du taux de convergence est certaine. Cependant, la performance du schéma temporel révèle les failles du schéma spatial. Plus  $i$  est grand, plus  $u_i$  est précisément évalué par la discrétisation temporelle, et plus vite les erreurs spatiales sont atteintes. Sur le maillage de résolution  $10^{-2}$  (tables 2.5 à 2.8), on observe des seuils de saturation spatiale lorsque le taux de convergence chute et que les erreurs stagnent. Un phénomène intéressant se produit alors : puisque l'erreur de l'itération  $i + 1$  est contrôlée par l'erreur à l'interface de  $i$ , (cf lemme 2.3.1) dès que la convergence de l'erreur de

$n_{it}$	$\ \chi_O e_1\ _{\mathbb{L}^2}^{rel}$	taux	$\ \chi_O \nabla e_1\ _{\mathbb{L}^2}^{rel}$	taux	$\ \chi_F e_1\ _{\mathbb{L}^2}^{rel}$	taux	$\ \chi_F \nabla e_1\ _{\mathbb{L}^2}^{rel}$	taux
10	$1.81E-1$	--	$3.41E-1$	--	$2.44E-1$	--	$3.39E-1$	--
20	$1.43E-1$	0.34	$2.84E-1$	0.26	$2.00E-1$	0.29	$2.78E-1$	0.29
40	$9.82E-2$	0.54	$2.18E-1$	0.38	$1.47E-1$	0.45	$2.04E-1$	0.45
80	$5.84E-2$	0.75	$1.57E-1$	0.47	$9.63E-2$	0.61	$1.34E-1$	0.61
160	$3.09E-2$	0.92	$1.10E-1$	0.52	$5.80E-2$	0.73	$8.06E-2$	0.73
320	$1.52E-2$	1.02	$7.40E-2$	0.57	$3.32E-2$	0.81	$4.60E-2$	0.81
640	$7.17E-3$	1.09	$4.85E-2$	0.61	$1.83E-2$	0.86	$2.54E-2$	0.86
1280	$3.28E-3$	1.13	$3.10E-2$	0.65	$9.83E-3$	0.90	$1.37E-2$	0.90
2560	$1.46E-3$	1.16	$1.94E-2$	0.67	$5.18E-3$	0.92	$7.20E-3$	0.92
5120	$6.42E-4$	1.19	$1.20E-2$	0.69	$2.69E-3$	0.95	$3.74E-3$	0.94
10240	$2.79E-4$	1.21	$7.34E-3$	0.71	$1.38E-3$	0.96	$1.92E-3$	0.96
20480	$1.20E-4$	1.22	$4.45E-3$	0.72	$7.05E-4$	0.97	$9.81E-4$	0.97
40960	$5.12E-5$	1.23	$2.68E-3$	0.73	$3.57E-4$	0.98	$4.99E-4$	0.97
81920	$2.17E-5$	1.23	$1.61E-3$	0.74	$1.80E-4$	0.99	$2.57E-4$	0.96
163840	$9.22E-6$	1.24	$9.67E-4$	0.74	$9.00E-5$	1.00	$1.48E-4$	0.80

TABLE 2.5 – Erreurs relatives pour l’obstacle fixe à  $t_{\text{final}} = 3$  pour  $u_1$  sur maillage  $h_{\text{resol}} = 0, 01$ 

$n_{it}$	$\ \chi_O e_2\ _{\mathbb{L}^2}^{rel}$	taux	$\ \chi_O \nabla e_2\ _{\mathbb{L}^2}^{rel}$	taux	$\ \chi_F e_2\ _{\mathbb{L}^2}^{rel}$	taux	$\ \chi_F \nabla e_2\ _{\mathbb{L}^2}^{rel}$	taux
10	$8.02E-2$	--	$1.51E-1$	--	$1.08E-1$	--	$1.50E-1$	--
20	$5.74E-2$	0.48	$1.14E-1$	0.41	$8.04E-2$	0.43	$1.12E-1$	0.43
40	$3.39E-2$	0.76	$7.52E-2$	0.60	$5.06E-2$	0.67	$7.02E-2$	0.67
80	$1.63E-2$	1.05	$4.39E-2$	0.78	$2.69E-2$	0.91	$3.73E-2$	0.91
160	$6.69E-3$	1.28	$2.37E-2$	0.89	$1.26E-2$	1.10	$1.75E-2$	1.10
320	$2.49E-3$	1.43	$1.21E-2$	0.97	$5.43E-3$	1.21	$7.53E-3$	1.21
640	$8.70E-4$	1.52	$5.89E-3$	1.04	$2.22E-3$	1.29	$3.08E-3$	1.29
1280	$2.91E-4$	1.58	$2.76E-3$	1.09	$8.75E-4$	1.34	$1.22E-3$	1.34
2560	$9.44E-5$	1.63	$1.26E-3$	1.14	$3.34E-4$	1.39	$4.67E-4$	1.38
5120	$2.99E-5$	1.66	$5.59E-4$	1.17	$1.24E-4$	1.42	$1.80E-4$	1.38
10240	$9.29E-6$	1.69	$2.45E-4$	1.19	$4.52E-5$	1.46	$7.81E-5$	1.20
20480	$2.85E-6$	1.70	$1.07E-4$	1.20	$1.58E-5$	1.51	$5.01E-5$	0.64
40960	$8.71E-7$	1.71	$4.70E-5$	1.18	$5.13E-6$	1.63	$4.52E-5$	0.15
81920	$2.70E-7$	1.69	$2.61E-5$	0.85	$1.38E-6$	1.89	$4.64E-5$	-0.04
163840	$1.11E-7$	1.28	$3.16E-5$	-0.28	$7.18E-7$	0.94	$5.26E-5$	-0.18

TABLE 2.6 – Erreurs relatives pour l’obstacle fixe à  $t_{\text{final}} = 3$  pour  $u_2$  sur maillage  $h_{\text{resol}} = 0, 01$



$n_{it}$	$\ \chi_O e_3\ _{\mathbb{P}_2}^{rel}$	taux	$\ \chi_O \nabla e_3\ _{\mathbb{P}_2}^{rel}$	taux	$\ \chi_F e_3\ _{\mathbb{P}_2}^{rel}$	taux	$\ \chi_F \nabla e_3\ _{\mathbb{P}_2}^{rel}$	taux
10	$3.55E-2$	--	$6.69E-2$	--	$4.77E-2$	--	$6.64E-2$	--
20	$2.30E-2$	0.62	$4.58E-2$	0.55	$3.22E-2$	0.57	$4.48E-2$	0.57
40	$1.16E-2$	0.98	$2.58E-2$	0.83	$1.74E-2$	0.89	$2.41E-2$	0.89
80	$4.53E-3$	1.36	$1.22E-2$	1.08	$7.49E-3$	1.22	$1.04E-2$	1.22
160	$1.44E-3$	1.65	$5.11E-3$	1.26	$2.71E-3$	1.46	$3.76E-3$	1.46
320	$4.05E-4$	1.83	$1.97E-3$	1.38	$8.84E-4$	1.62	$1.23E-3$	1.62
640	$1.05E-4$	1.95	$7.11E-4$	1.47	$2.68E-4$	1.72	$3.75E-4$	1.71
1280	$2.58E-5$	2.03	$2.44E-4$	1.54	$7.66E-5$	1.81	$1.16E-4$	1.69
2560	$6.06E-6$	2.09	$8.09E-5$	1.59	$2.06E-5$	1.90	$5.28E-5$	1.13
5120	$1.39E-6$	2.13	$2.67E-5$	1.60	$4.88E-6$	2.08	$4.42E-5$	0.26
10240	$3.18E-7$	2.12	$1.01E-5$	1.41	$9.02E-7$	2.43	$4.34E-5$	0.03
20480	$8.60E-8$	1.89	$5.80E-6$	0.79	$9.11E-7$	-.01	$4.32E-5$	0.00
40960	$3.88E-8$	1.15	$5.47E-6$	0.09	$1.12E-6$	-.29	$4.33E-5$	-.00
81920	$2.89E-8$	0.43	$8.33E-6$	-.61	$1.18E-6$	-.07	$4.37E-5$	-.02
163840	$3.69E-8$	-.36	$1.47E-5$	-.82	$1.19E-6$	-.02	$4.54E-5$	-.05

TABLE 2.7 – Erreurs relatives pour l'obstacle fixe à  $t_{\text{final}} = 3$  pour  $u_3$  sur maillage  $h_{\text{resol}} = 0,01$ 

$n_{it}$	$\ \chi_O e_4\ _{\mathbb{P}_2}^{rel}$	taux	$\ \chi_O \nabla e_4\ _{\mathbb{P}_2}^{rel}$	taux	$\ \chi_F e_4\ _{\mathbb{P}_2}^{rel}$	taux	$\ \chi_F \nabla e_4\ _{\mathbb{P}_2}^{rel}$	taux
10	$1.57E-2$	--	$2.95E-2$	--	$2.10E-2$	--	$2.93E-2$	--
20	$9.21E-3$	0.77	$1.83E-2$	0.69	$1.29E-2$	0.70	$1.79E-2$	0.71
40	$3.99E-3$	1.21	$8.85E-3$	1.05	$5.96E-3$	1.11	$8.27E-3$	1.11
80	$1.26E-3$	1.67	$3.38E-3$	1.39	$2.08E-3$	1.52	$2.88E-3$	1.52
160	$3.10E-4$	2.02	$1.10E-3$	1.62	$5.82E-4$	1.83	$8.09E-4$	1.83
320	$6.56E-5$	2.24	$3.19E-4$	1.78	$1.42E-4$	2.03	$2.03E-4$	1.99
640	$1.26E-5$	2.38	$8.55E-5$	1.90	$3.13E-5$	2.18	$6.22E-5$	1.71
1280	$2.27E-6$	2.48	$2.19E-5$	1.97	$5.89E-6$	2.41	$4.42E-5$	0.49
2560	$3.96E-7$	2.52	$6.35E-6$	1.78	$8.29E-7$	2.83	$4.31E-5$	0.03
5120	$8.32E-8$	2.25	$3.45E-6$	0.88	$1.01E-6$	-.28	$4.30E-5$	0.00
10240	$3.59E-8$	1.21	$2.81E-6$	0.30	$1.16E-6$	-.21	$4.30E-5$	0.00
20480	$2.29E-8$	0.65	$2.43E-6$	0.21	$1.19E-6$	-.04	$4.30E-5$	0.00
40960	$1.54E-8$	0.58	$2.55E-6$	-.07	$1.19E-6$	-.01	$4.30E-5$	-.00
81920	$1.28E-8$	0.27	$4.03E-6$	-.66	$1.19E-6$	0.00	$4.31E-5$	-.00
163840	$1.75E-8$	-.45	$7.09E-6$	-.81	$1.19E-6$	0.00	$4.35E-5$	-.01

TABLE 2.8 – Erreurs relatives pour l'obstacle fixe à  $t_{\text{final}} = 3$  pour  $u_4$  sur maillage  $h_{\text{resol}} = 0,01$

$n_{it}$	$\ \chi_O e_5\ _{\mathbb{L}^2}^{rel}$	taux	$\ \chi_O \nabla e_5\ _{\mathbb{L}^2}^{rel}$	taux	$\ \chi_F e_5\ _{\mathbb{L}^2}^{rel}$	taux	$\ \chi_F \nabla e_5\ _{\mathbb{L}^2}^{rel}$	taux
10	$6.89E-3$	--	$1.30E-2$	--	$9.15E-3$	--	$1.29E-2$	--
20	$3.67E-3$	0.91	$7.31E-3$	0.83	$5.13E-3$	0.84	$7.14E-3$	0.86
40	$1.36E-3$	1.43	$3.02E-3$	1.27	$2.04E-3$	1.33	$2.82E-3$	1.34
80	$3.47E-4$	1.97	$9.35E-4$	1.69	$5.73E-4$	1.83	$7.95E-4$	1.83
160	$6.62E-5$	2.39	$2.35E-4$	1.99	$1.24E-4$	2.20	$1.73E-4$	2.20
320	$1.06E-5$	2.65	$5.14E-5$	2.19	$2.28E-5$	2.45	$3.57E-5$	2.28
640	$1.51E-6$	2.81	$1.03E-5$	2.32	$3.58E-6$	2.67	$1.68E-5$	1.09
1280	$2.01E-7$	2.91	$2.16E-6$	2.25	$3.64E-7$	3.30	$1.59E-5$	0.08
2560	$3.14E-8$	2.68	$9.92E-7$	1.12	$2.43E-7$	0.58	$1.59E-5$	0.00
5120	$1.24E-8$	1.34	$8.17E-7$	0.28	$3.00E-7$	-0.30	$1.59E-5$	0.00
10240	$7.69E-9$	0.69	$7.05E-7$	0.21	$3.07E-7$	-0.03	$1.59E-5$	0.00
20480	$5.02E-9$	0.61	$5.97E-7$	0.24	$3.07E-7$	-0.00	$1.59E-5$	0.00
40960	$3.18E-9$	0.66	$4.99E-7$	0.26	$3.07E-7$	0.00	$1.59E-5$	0.00

TABLE 2.9 – Erreurs relatives pour l’obstacle fixe à  $t_{final} = 3$  pour  $u_5$  sur maillage  $h_{resol} = 0,005$ 

$i$	$e_i \mathbb{L}^2$	$\nabla e_i \mathbb{L}^2$	$\chi_O e_i \mathbb{L}^2$	$\chi_O \nabla e_i \mathbb{L}^2$	$\chi_F e_i \mathbb{L}^2$	$\chi_F \nabla e_i \mathbb{L}^2$
0	1/2	1/4	3/4	1/4	1/2	1/2
1	1	3/4	5/4	3/4	1	1
2	3/2	5/4	7/4	5/4	3/2	3/2
3	2	7/4	2	7/4	2	7/4
4	5/2	2	5/2	2	5/2	2
5	3	9/4	3	9/4	3	9/4

TABLE 2.10 – Taux de convergence temporelle observés sur le maillage  $h_{resol} = 0,01$ 

$i$  sature, celle de  $i + 1$  sature aussi, et au même niveau. Les erreurs peuvent même polluer légèrement les résultats de  $u_j$  pour  $j > i$  puisqu’elles suivent les dépendances de la figure 2.6. Nous reportons les seuils et les taux de convergence de saturation spatiaux observés pour plusieurs résolutions dans la table 2.11. Les taux sont empiriques et à cette heure non prouvés.

Les résultats de cette méthode de pénalisation dans le cadre d’un obstacle fixe sont encourageants et confirment que l’intuition de la méthode itérative est bonne.

Cependant, le cas d’un obstacle fixe n’est pas très intéressant en pratique : il suffit d’imposer la condition aux bords souhaitée sur les nœuds correspondant à l’obstacle. Nous allons donc maintenant étudier le cas d’un obstacle mobile avec une autre solution analytique.

### 2.3.4.2 Obstacle en mouvement

Le test d’un obstacle en déplacement cherche à reproduire la solution analytique suivante. Il s’agit d’une sinusoïde tronquée se déplaçant selon l’axe  $x$  et présentée à la figure 2.8.

$h_{\text{resol}}$	$\ \chi_{Oe}\ _{\mathbb{L}^2}^{\text{rel}}$	$\ \chi_{O\nabla e}\ _{\mathbb{L}^2}^{\text{rel}}$	$\ \chi_{Fe}\ _{\mathbb{L}^2}^{\text{rel}}$	$\ \chi_{F\nabla e}\ _{\mathbb{L}^2}^{\text{rel}}$
0,1	—	—	$1,35 \cdot 10^{-4}$	$1,43 \cdot 10^{-3}$
0,05	$5 \cdot 10^{-8}$	$9 \cdot 10^{-6}$	$4,8 \cdot 10^{-5}$	$6,0 \cdot 10^{-4}$
0,025	$4 \cdot 10^{-8}$	$5 \cdot 10^{-6}$	$9,1 \cdot 10^{-6}$	$1,85 \cdot 10^{-4}$
0,0125	$2 \cdot 10^{-8}$	$3 \cdot 10^{-6}$	$1,7 \cdot 10^{-6}$	$5,8 \cdot 10^{-5}$
0,01	$1 \cdot 10^{-8}$	$2 \cdot 10^{-6}$	$1,2 \cdot 10^{-6}$	$4,3 \cdot 10^{-5}$
0,005	—	—	$3 \cdot 10^{-7}$	$1,6 \cdot 10^{-5}$
taux	$h_{\text{resol}}^{\frac{3}{2}}$	$h_{\text{resol}}$	$h_{\text{resol}}^2$	$h_{\text{resol}}^{\frac{3}{2}}$

TABLE 2.11 – Seuils de saturation et taux de convergence des erreurs spatiales pour l'obstacle fixe avec un maillage aligné

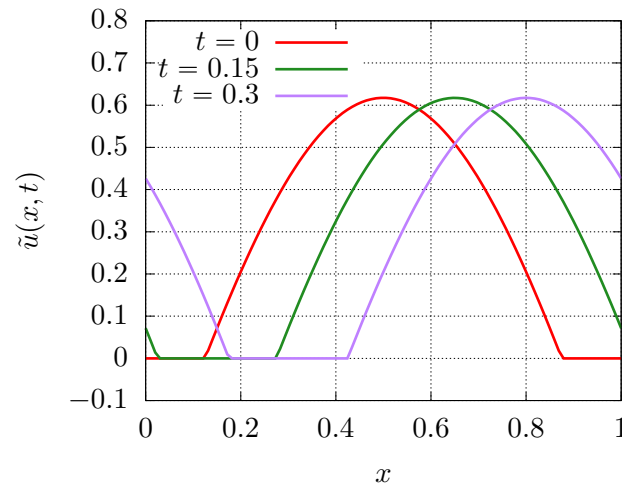


FIGURE 2.8 – Solution analytique  $\tilde{u}$  pour trois temps différents.

$$\begin{aligned}
\Omega &= (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1], \text{ étendu par périodicité sur } [0, 1] \times \mathbb{R} \\
O_t &= [t - \frac{1}{8}, t + \frac{1}{8}] \times [0, 1], \text{ périodisé} \\
F_t &= \Omega \setminus O_t, \\
\chi_F(x, t) &= 1_{F_t}(x) \\
\chi_O(\cdot, t) &= 1 - \chi_F(\cdot, t), \\
\tilde{u}(x, y, t) &= \chi_F(x, t) \left( \sin(\pi|x-t|) - \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \right), \\
f(x, y, t) &= -\pi \operatorname{sgn}(x-t) \cos(\pi|x-t|) + \pi^2 \sin(\pi|x-t|),
\end{aligned}$$

Pour ces simulations, nous utilisons le même maillage que pour le cas précédent, qui n'est alors plus parfaitement aligné avec l'interface fluide-solide à chaque instant. Nous utilisons encore une discrétisation spatiale avec éléments finis  $\mathbb{P}_3$ . Nous imposons des conditions de Dirichlet en  $y = 0$  et  $y = 1$  et des conditions limites périodiques entre  $x = 0$  et  $x = 1$ . Ici encore nous regardons les normes relatives par rapport à celles de la solution analytique  $\tilde{u}$ . Tout comme pour le cas précédent, nous présentons les erreurs obtenues dans les tables 2.12 à 2.17, puis les taux de convergence spatiaux dans la table 2.18 et temporels dans la table 2.19.

$n_{it}$	$\ \chi_O e_0\ _{\mathbb{L}^2}^{rel}$	taux	$\ \chi_O \nabla e_0\ _{\mathbb{L}^2}^{rel}$	taux	$\ \chi_F e_0\ _{\mathbb{L}^2}^{rel}$	taux	$\ \chi_F \nabla e_0\ _{\mathbb{L}^2}^{rel}$	taux
10	$7.63E-1$	--	$6.13E-1$	--	$9.79E-1$	--	$8.99E-1$	--
20	$6.84E-1$	0.16	$5.66E-1$	0.11	$9.13E-1$	0.10	$8.21E-1$	0.13
40	$5.79E-1$	0.24	$5.11E-1$	0.15	$8.02E-1$	0.19	$7.20E-1$	0.19
80	$4.44E-1$	0.38	$4.50E-1$	0.18	$6.50E-1$	0.30	$5.88E-1$	0.29
160	$3.04E-1$	0.55	$4.04E-1$	0.15	$4.89E-1$	0.41	$4.50E-1$	0.39
320	$1.90E-1$	0.68	$3.79E-1$	0.09	$3.52E-1$	0.47	$3.34E-1$	0.43
640	$1.13E-1$	0.75	$3.58E-1$	0.08	$2.52E-1$	0.48	$2.49E-1$	0.42
1280	$6.76E-2$	0.74	$3.29E-1$	0.12	$1.83E-1$	0.46	$1.89E-1$	0.40
2560	$4.12E-2$	0.71	$2.91E-1$	0.18	$1.34E-1$	0.45	$1.45E-1$	0.38
5120	$2.53E-2$	0.70	$2.52E-1$	0.21	$9.72E-2$	0.46	$1.11E-1$	0.38
10240	$1.55E-2$	0.71	$2.16E-1$	0.22	$7.01E-2$	0.47	$8.63E-2$	0.37
20480	$9.40E-3$	0.72	$1.83E-1$	0.23	$5.03E-2$	0.48	$6.77E-2$	0.35
40960	$5.70E-3$	0.72	$1.55E-1$	0.24	$3.59E-2$	0.48	$5.45E-2$	0.31

TABLE 2.12 – Erreurs relatives pour l’obstacle en mouvement à  $t_{final} = 3$  pour  $u_0$  sur maillage  $h_{resol} = 0,005$

$n_{it}$	$\ \chi_O e_1\ _{\mathbb{L}^2}^{rel}$	taux	$\ \chi_O \nabla e_1\ _{\mathbb{L}^2}^{rel}$	taux	$\ \chi_F e_1\ _{\mathbb{L}^2}^{rel}$	taux	$\ \chi_F \nabla e_1\ _{\mathbb{L}^2}^{rel}$	taux
10	$4.77E-1$	--	$3.80E-1$	--	$5.92E-1$	--	$5.62E-1$	--
20	$3.93E-1$	0.28	$3.24E-1$	0.23	$5.18E-1$	0.19	$4.72E-1$	0.25
40	$2.90E-1$	0.44	$2.56E-1$	0.34	$3.98E-1$	0.38	$3.61E-1$	0.39
80	$1.79E-1$	0.69	$1.85E-1$	0.47	$2.60E-1$	0.62	$2.41E-1$	0.58
160	$9.27E-2$	0.95	$1.31E-1$	0.50	$1.46E-1$	0.83	$1.47E-1$	0.72
320	$4.25E-2$	1.12	$9.58E-2$	0.45	$7.63E-2$	0.94	$9.05E-2$	0.70
640	$1.92E-2$	1.15	$7.22E-2$	0.41	$3.98E-2$	0.94	$6.21E-2$	0.54
1280	$9.12E-3$	1.07	$5.55E-2$	0.38	$2.16E-2$	0.88	$4.70E-2$	0.40
2560	$4.55E-3$	1.00	$4.31E-2$	0.37	$1.19E-2$	0.86	$3.83E-2$	0.30
5120	$2.33E-3$	0.97	$3.49E-2$	0.30	$6.52E-3$	0.86	$3.29E-2$	0.22
10240	$1.19E-3$	0.96	$2.97E-2$	0.23	$3.55E-3$	0.88	$2.97E-2$	0.15
20480	$6.16E-4$	0.96	$2.66E-2$	0.16	$1.91E-3$	0.89	$2.78E-2$	0.09
40960	$3.16E-4$	0.96	$2.53E-2$	0.07	$1.08E-3$	0.82	$2.76E-2$	0.01

TABLE 2.13 – Erreurs relatives pour l’obstacle en mouvement à  $t_{final} = 3$  pour  $u_1$  sur maillage  $h_{resol} = 0,005$

$n_{it}$	$\ \chi_O e_2\ _{\mathbb{L}^2}^{rel}$	taux	$\ \chi_O \nabla e_2\ _{\mathbb{L}^2}^{rel}$	taux	$\ \chi_F e_2\ _{\mathbb{L}^2}^{rel}$	taux	$\ \chi_F \nabla e_2\ _{\mathbb{L}^2}^{rel}$	taux
10	$2.98E-1$	--	$2.37E-1$	--	$3.51E-1$	--	$3.56E-1$	--
20	$2.26E-1$	0.39	$1.87E-1$	0.34	$2.92E-1$	0.27	$2.72E-1$	0.39
40	$1.45E-1$	0.64	$1.30E-1$	0.52	$1.97E-1$	0.57	$1.82E-1$	0.58
80	$7.27E-2$	1.00	$8.05E-2$	0.69	$1.04E-1$	0.92	$1.02E-1$	0.83
160	$2.88E-2$	1.34	$5.11E-2$	0.66	$4.42E-2$	1.23	$5.61E-2$	0.87
320	$1.04E-2$	1.46	$3.81E-2$	0.42	$1.71E-2$	1.37	$3.83E-2$	0.55
640	$4.27E-3$	1.29	$3.20E-2$	0.25	$6.99E-3$	1.29	$3.17E-2$	0.27
1280	$2.05E-3$	1.06	$2.95E-2$	0.12	$3.21E-3$	1.12	$2.86E-2$	0.15
2560	$1.03E-3$	1.00	$2.76E-2$	0.09	$1.51E-3$	1.08	$2.70E-2$	0.08
5120	$5.31E-4$	0.95	$2.70E-2$	0.03	$7.77E-4$	0.96	$2.61E-2$	0.05
10240	$2.82E-4$	0.91	$2.65E-2$	0.03	$5.05E-4$	0.62	$2.56E-2$	0.03
20480	$1.61E-4$	0.81	$2.63E-2$	0.01	$4.66E-4$	0.12	$2.53E-2$	0.02
40960	$8.98E-5$	0.85	$2.64E-2$	-0.01	$5.41E-4$	-0.22	$2.58E-2$	-0.03

TABLE 2.14 – Erreurs relatives pour l'obstacle en mouvement à  $t_{final} = 3$  pour  $u_2$  sur maillage  $h_{resol} = 0,005$

$n_{it}$	$\ \chi_O e_3\ _{\mathbb{L}^2}^{rel}$	taux	$\ \chi_O \nabla e_3\ _{\mathbb{L}^2}^{rel}$	taux	$\ \chi_F e_3\ _{\mathbb{L}^2}^{rel}$	taux	$\ \chi_F \nabla e_3\ _{\mathbb{L}^2}^{rel}$	taux
10	$1.86E-1$	--	$1.49E-1$	--	$2.02E-1$	--	$2.32E-1$	--
20	$1.31E-1$	0.51	$1.09E-1$	0.44	$1.62E-1$	0.32	$1.59E-1$	0.54
40	$7.30E-2$	0.84	$6.92E-2$	0.66	$9.64E-2$	0.75	$9.45E-2$	0.76
80	$2.97E-2$	1.30	$4.15E-2$	0.74	$4.11E-2$	1.23	$4.87E-2$	0.96
160	$9.29E-3$	1.68	$3.08E-2$	0.43	$1.31E-2$	1.64	$3.17E-2$	0.62
320	$3.11E-3$	1.58	$2.84E-2$	0.11	$4.00E-3$	1.71	$2.78E-2$	0.19
640	$1.39E-3$	1.16	$2.75E-2$	0.05	$1.62E-3$	1.31	$2.64E-2$	0.08
1280	$6.94E-4$	1.00	$2.78E-2$	-0.02	$9.62E-4$	0.75	$2.59E-2$	0.03
2560	$3.50E-4$	0.99	$2.73E-2$	0.02	$7.40E-4$	0.38	$2.56E-2$	0.01
5120	$1.87E-4$	0.90	$2.76E-2$	-0.01	$7.12E-4$	0.05	$2.55E-2$	0.01
10240	$1.11E-4$	0.76	$2.75E-2$	0.00	$7.08E-4$	0.01	$2.53E-2$	0.01
20480	$7.95E-5$	0.48	$2.74E-2$	0.00	$7.08E-4$	0.00	$2.53E-2$	0.00
40960	$5.64E-5$	0.50	$2.76E-2$	-0.01	$7.47E-4$	-0.08	$2.57E-2$	-0.03

TABLE 2.15 – Erreurs relatives pour l'obstacle en mouvement à  $t_{final} = 3$  pour  $u_3$  sur maillage  $h_{resol} = 0,005$

$n_{it}$	$\ \chi_O e_4\ _{\mathbb{L}^2}^{rel}$	taux	$\ \chi_O \nabla e_4\ _{\mathbb{L}^2}^{rel}$	taux	$\ \chi_F e_4\ _{\mathbb{L}^2}^{rel}$	taux	$\ \chi_F \nabla e_4\ _{\mathbb{L}^2}^{rel}$	taux
10	$1.16E-1$	--	$9.49E-2$	--	$1.12E-1$	--	$1.60E-1$	--
20	$7.54E-2$	0.62	$6.65E-2$	0.51	$8.82E-2$	0.34	$9.67E-2$	0.73
40	$3.68E-2$	1.04	$4.18E-2$	0.67	$4.62E-2$	0.93	$5.30E-2$	0.87
80	$1.23E-2$	1.59	$3.01E-2$	0.47	$1.56E-2$	1.56	$3.12E-2$	0.76
160	$3.21E-3$	1.93	$2.73E-2$	0.14	$3.59E-3$	2.12	$2.68E-2$	0.22
320	$1.17E-3$	1.45	$2.74E-2$	-0.01	$1.21E-3$	1.57	$2.62E-2$	0.03
640	$5.56E-4$	1.07	$2.73E-2$	0.00	$8.93E-4$	0.44	$2.59E-2$	0.02
1280	$2.77E-4$	1.01	$2.82E-2$	-0.04	$8.92E-4$	0.00	$2.60E-2$	-0.00
2560	$1.44E-4$	0.94	$2.79E-2$	0.01	$8.82E-4$	0.02	$2.59E-2$	0.00
5120	$8.70E-5$	0.72	$2.82E-2$	-0.02	$8.77E-4$	0.01	$2.59E-2$	0.00
10240	$6.58E-5$	0.40	$2.82E-2$	0.00	$8.72E-4$	0.01	$2.58E-2$	0.00
20480	$5.69E-5$	0.21	$2.82E-2$	0.00	$8.64E-4$	0.01	$2.58E-2$	-0.00
40960	$5.09E-5$	0.16	$2.82E-2$	-0.00	$8.88E-4$	-0.04	$2.62E-2$	-0.02

TABLE 2.16 – Erreurs relatives pour l’obstacle en mouvement à  $t_{final} = 3$  pour  $u_4$  sur maillage  $h_{resol} = 0,005$

$n_{it}$	$\ \chi_O e_5\ _{\mathbb{L}^2}^{rel}$	taux	$\ \chi_O \nabla e_5\ _{\mathbb{L}^2}^{rel}$	taux	$\ \chi_F e_5\ _{\mathbb{L}^2}^{rel}$	taux	$\ \chi_F \nabla e_5\ _{\mathbb{L}^2}^{rel}$	taux
10	$7.27E-2$	--	$6.28E-2$	--	$6.17E-2$	--	$1.22E-1$	--
20	$4.36E-2$	0.74	$4.40E-2$	0.51	$4.60E-2$	0.42	$6.37E-2$	0.94
40	$1.86E-2$	1.23	$3.16E-2$	0.48	$2.11E-2$	1.13	$3.59E-2$	0.83
80	$5.15E-3$	1.86	$2.79E-2$	0.18	$5.28E-3$	2.00	$2.74E-2$	0.39
160	$1.23E-3$	2.06	$2.71E-2$	0.04	$9.57E-4$	2.46	$2.65E-2$	0.05
320	$5.19E-4$	1.25	$2.76E-2$	-0.03	$1.01E-3$	-0.07	$2.65E-2$	-0.00
640	$2.50E-4$	1.05	$2.77E-2$	-0.01	$9.56E-4$	0.07	$2.64E-2$	0.01
1280	$1.28E-4$	0.97	$2.86E-2$	-0.05	$1.01E-3$	-0.08	$2.66E-2$	-0.01
2560	$7.48E-5$	0.78	$2.83E-2$	0.01	$1.01E-3$	-0.00	$2.66E-2$	0.00
5120	$6.60E-5$	0.18	$2.86E-2$	-0.02	$9.94E-4$	0.03	$2.66E-2$	0.00
10240	$5.48E-5$	0.27	$2.86E-2$	0.00	$9.90E-4$	0.01	$2.65E-2$	0.00
20480	$5.08E-5$	0.11	$2.86E-2$	0.00	$9.79E-4$	0.02	$2.66E-2$	-0.00
40960	$5.02E-5$	0.02	$2.87E-2$	-0.00	$9.96E-4$	-0.02	$2.68E-2$	-0.01

TABLE 2.17 – Erreurs relatives pour l’obstacle en mouvement à  $t_{final} = 3$  pour  $u_5$  sur maillage  $h_{resol} = 0,005$

$i$	$e_i L^2$	$e_i H^1$	$\chi_O e_i L^2$	$\chi_O e_i H^1$	$\chi_F e_i L^2$	$\chi_F e_i H^1$
0	1/2	1/4	3/4	1/4	1/2	1/4
1	1	1/2	5/4	1/2	1	1/2
2	5/4	3/4	3/2	3/4	5/4	3/4
3	7/4	–	7/4	–	7/4	–
4	2	–	2	–	2	–
5	–	–	–	–	2	–

TABLE 2.18 – Taux de convergence temporelle empiriques observés sur le maillage  $h_{\text{resol}} = 0,005$ . Les tirets correspondent à des valeurs non significatives.

$h_{\text{resol}}$	$\ \chi_O e\ _{\mathbb{L}^2}^{\text{rel}}$	$\ \chi_O \nabla e\ _{\mathbb{L}^2}^{\text{rel}}$	$\ \chi_F e\ _{\mathbb{L}^2}^{\text{rel}}$	$\ \chi_F \nabla e\ _{\mathbb{L}^2}^{\text{rel}}$
0,1	$4,2 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-1}$	$2 \cdot 10^{-2}$	$1,5 \cdot 10^{-1}$
0,05	$1 \cdot 10^{-3}$	$6 \cdot 10^{-2}$	$5 \cdot 10^{-3}$	$6 \cdot 10^{-2}$
0,025	$5 \cdot 10^{-4}$	$6 \cdot 10^{-2}$	$3 \cdot 10^{-3}$	$4 \cdot 10^{-2}$
0,0125	$3 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-2}$	$2 \cdot 10^{-3}$	$3 \cdot 10^{-2}$
0,01	$1,6 \cdot 10^{-4}$	$4 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^{-3}$	$3 \cdot 10^{-2}$
0,005	$5 \cdot 10^{-5}$	$2,7 \cdot 10^{-2}$	$5 \cdot 10^{-4}$	$2,6 \cdot 10^{-2}$
0,002	–	$2,0 \cdot 10^{-2}$	–	$1,6 \cdot 10^{-2}$
taux	$h_{\text{resol}}^{\frac{3}{2}}$	$h_{\text{resol}}^{\frac{1}{2}}$	$h_{\text{resol}}^{\frac{5}{4}}$	$h_{\text{resol}}^{\frac{1}{2}}$

TABLE 2.19 – Seuils de saturation et taux de convergence des erreurs spatiales pour l'obstacle en mouvement

Si la convergence temporelle des pénalisations itératives reste encore très satisfaisante et représente une grande amélioration par rapport à la pénalisation classique, nous constatons une convergence spatiale très limitée, surtout pour  $\|\nabla e_0\|_{\mathbb{L}^2}^{\text{rel}}$ . La convergence spatiale pour cette norme est lente, surtout pour les éléments  $\mathbb{P}_3$  utilisés. Plusieurs arguments peuvent expliquer la grande erreur spatiale :

- le schéma numérique utilisé demande de calculer des dérivées des fonctions caractéristiques, qui sont très piquées et donc difficiles à calculer ;
- le maillage ne correspondant pas en chaque instant à l'interface fluide-solide rend plus difficile la bonne interpolation des fonctions caractéristiques, donc de ses dérivées. Ce problème disparaît dans SFEMaNS pour les configurations où l'on étudie la pénalisation d'un obstacle ne se déplaçant que selon  $u_\theta$ . On ne pénalise alors que certains modes de Fourier à des endroits fixes dans le maillage  $(r, z)$ .

Il faudrait une étude mathématique précise de l'erreur spatiale pour confirmer les convergences spatiales obtenues. Cependant, la méthode donne toujours un résultat plus satisfaisant pour  $i > 0$  que pour  $i = 0$ , ce qui est déjà une bonne amélioration. Ensuite, puisque nous avons proposé ici un schéma temporel plus précis, il est normal que nous soyons confrontés à la limite de résolution spatiale plus vite. En effet, on constate sur la table 2.19 que le schéma naïf utilisé pour  $u_0$  n'arrive même pas à la saturation spatiale sur toute la gamme de  $n_{\text{it}}$  utilisée. Il faut ainsi adapter la précision de toutes les sources d'erreurs possibles : schéma numérique d'intégration temporelle, schéma de pénalisation et schéma spatial pour être sûr d'avoir un algorithme optimal pour les paramètres utilisés afin de ne pas dépenser des ressources inutiles. Dans cette optique, le schéma temporel proposé pour la pénalisation répond bien aux attentes, puisque presque tous les schémas d'intégration temporelle d'équations aux dérivées partielles ont de nos jours au plus une erreur en  $\mathcal{O}(\Delta_t^3)$ .

Si l'on s'arrête sur les ressources utilisées par cet algorithme, ce nouveau schéma propose un compromis entre utilisation de mémoire et utilisation de ressources de calcul. En effet, par exemple pour obtenir une précision  $\|\chi_O e\|_{\mathbb{L}^2}^{\text{rel}} = 5 \cdot 10^{-3}$  sur le maillage  $h_{\text{resol}} = 0,005$ , il faut  $4 \times 10^5$  itérations pour  $u_0$ ,  $2 \times 10^4$  itérations pour  $u_1$ ,  $6 \times 10^2$  itérations pour  $u_2$ ,  $2 \times 10^2$  itérations pour  $u_3$ ,  $2 \times 10^2$  itérations pour  $u_4$  et  $8 \times 10^1$  itérations pour  $u_5$ . Le nombre d'itérations est réduit mais le temps de calcul de chaque itération est allongé. Par une estimation grossière on peut dire que le calcul de  $u_i$  demande  $i + 1$  fois le nombre d'opérations élémentaires nécessaires au calcul de  $u_0$ . Ainsi, pour la précision énoncée précédemment  $u_5$  requiert  $\frac{6 \times 8 \cdot 10^1}{4 \times 10^5} = 1,2 \times 10^{-3}$  soit un millième du nombre d'opérations nécessaires pour atteindre la même précision qu'avec la méthode classique utilisée pour  $u_0$ . Cette amélioration est un compromis d'espace mémoire, puisqu'il faut stocker cinq champs de vitesse, ainsi que quelques autres variables supplémentaires. Cependant, puisque le système d'équations implicites  $AX_i^{n+1} = B(\{X_k^{n+1}\}_{k \leq i}, X_i^n)$  présente la même matrice  $A$  pour tous les  $i$ , il n'est pas nécessaire de stocker ni d'inverser une matrice pour chaque  $i$ , ce qui économise l'espace mémoire et quelques inversions coûteuses bien que limitées à l'initialisation. Ce sont ce compromis de ressources et la facilité de mise en œuvre ne nécessitant pas une remise à plat du code utilisé qui rendent cette pénalisation itérative particulièrement intéressante.

Pour bien finir ce travail, le schéma numérique mériterait une étude précise des niveaux de convergence avec des bornes plus fines que celles proposées par le lemme 2.3.1. D'une part, il manque le calcul de bornes de l'erreur de discrétisation temporelle, avec une discrétisation idoine pour toutes les dérivées temporelles de (2.3.7), mais aussi une étude de la précision spatiale du schéma éléments finis utilisé. Le terme en  $\text{div}(\chi_O \nabla u_k^{n+1})$  introduit une dérivée assez brutale qui nécessite une bonne résolution. Dans le cadre d'un obstacle en mouvement (plus intéressant pour les applications), une convergence spatiale rapide est exigée afin de limiter les besoins de calcul.

Cette méthode de pénalisation présente donc des résultats encourageants, malgré les défauts de



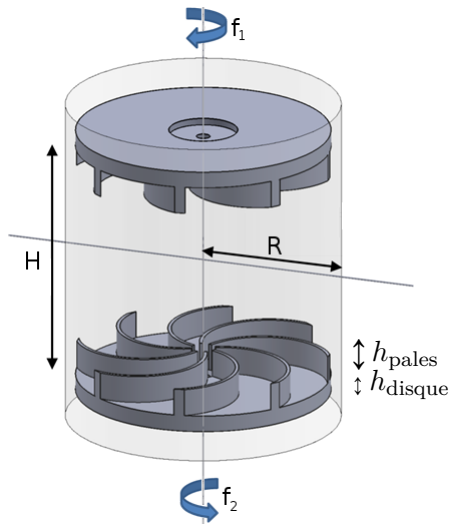


FIGURE 2.9 – Géométrie de l'écoulement de von Kármán.  $H$  représente l'écart entre les faces internes des disques, et  $R$  le rayon du cylindre contenant l'écoulement. Les  $f_i$ , ( $i \in \{1, 2\}$ ) sont les fréquences de rotation des disques. Les turbines utilisées sont appelées TM87. Les flèches représentent le sens de rotation CONTRA.

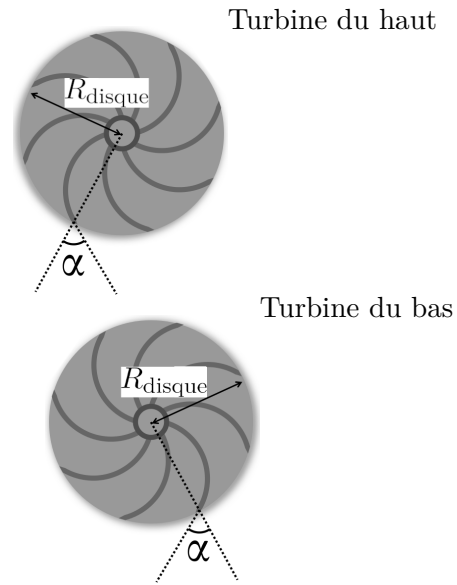


FIGURE 2.10 – Turbines TM87 (huit pales incurvées) de rayon  $R_{\text{disque}}$  et d'angle  $|\alpha| = 72^\circ$ . Les pales sont au premier plan et les disques au second plan.

convergence spatiale exposés. Elle est adaptée pour la résolution de problèmes implicites, et peut être utilisée avec différentes discrétisations temporelles, à condition de veiller à ce que l'erreur soit du même ordre pour toutes les discrétisations utilisées.

Après cette présentation des détails de fonctionnement du code numérique et de ses performances, nous allons maintenant pouvoir présenter l'écoulement étudié ici.

## 2.4 L'écoulement de von Kármán

Dans cette thèse, presque toutes les données d'écoulement utilisées proviennent d'un écoulement de laboratoire que nous présentons ici. L'écoulement de von Kármán (VK) est produit par l'entraînement d'un fluide dans une cavité cylindrique.

### 2.4.1 Description du dispositif

Ce dispositif particulièrement pratique pour générer de la turbulence dans un espace limité a été étudié avec différents fluides : glycérol, eau, air, sodium liquide, hélium (gazeux, liquide, ou superfluide) entre autres [80, 121, 98, 122, 126, 124, 77] (1996, 2004, 2007, 2008, 2014, 2014, 2014). Le rayon et la hauteur du cylindre sont notés respectivement  $R$  et  $H_v = 2,48R$ . Dans le dispositif étudié, l'écart inter-disque vaut  $H = 1,8R$ .

Le fluide est entraîné par deux turbines contra-rotatives séparées par une distance  $H$ . La figure 2.9 présente un schéma du dispositif et la figure 2.10 plus précisément les turbines, vues depuis le centre du cylindre. Ces dernières sont dans notre géométrie formée de huit pales incurvées reposant sur un disque plein. Les propriétés de l'écoulement (isotropie, fluctuations, dissipation) dépendent de

la géométrie des turbines, de leur taille et de la forme des pales. Dans notre cas, nous utilisons des turbines appelées TM87 avec 8 pales. L'angle de courbure des pales présenté sur la figure 2.10 vaut  $\alpha = 72^\circ$ . Le rayon de la turbine est de  $R_{\text{disque}} = 0,925R$  de sorte que cette partie mobile ne touche pas le bord du cylindre. Les pales courent jusqu'au bord du disque mais ne se croisent pas parfaitement au centre du disque : elles commencent à un rayon de  $0,1R$ . La hauteur des pales vaut  $h_{\text{pales}}$ . En général, cette hauteur est fixée à  $0,2R$  mais nous étudions le cas de différentes hauteurs dans le paragraphe 2.6. Les disques ont une épaisseur de  $h_{\text{disque}} = 0,12R$ . Il est possible de faire tourner la turbine  $j \in \{1, 2\}$  à une fréquence orientée  $f_j$  choisie. Nous n'étudions cependant que les cas où les turbines tournent à la même fréquence  $f_t = |f_1| = |f_2|$ , et principalement le cas contrarotatif où  $f_1 = -f_2$ . La figure 2.9 respecte les conventions suivantes : l'axe des  $z$  le long du cylindre est orienté vers le haut, et nous utilisons l'orientation directe induite par l'axe dans les plans où  $z$  est constant. Par exemple, dans la figure 2.9, la turbine du bas tourne avec une fréquence positive alors que la turbine du haut tourne avec une fréquence négative de telle sorte que  $0 \leq f_2 = -f_1$ . Ce sens de fonctionnement est appelé sens CONTRA. De manière équivalente, la configuration où  $-f_1 = f_2 \leq 0$  définit le sens ANTI. Remarquons sur la figure 2.10 que les pales sont courbées. Cette courbure fait que les sens ANTI et CONTRA mènent à des écoulements différents. Le sens CONTRA (horaire pour la turbine du bas sur la figure 2.10) correspond à pousser avec le dos des pales alors que le sens ANTI (trigonométrique pour la turbine du bas sur la figure 2.10) correspond à pousser avec le creux. Cela induit une dissymétrie entre les sens de rotations horaires et antihoraires. Comme nous le verrons plus loin, la différence notoire entre les deux sens, à vitesse de rotation fixée, est que l'écoulement obtenu dans le sens ANTI est plus fluctuant et demande plus de puissance pour être maintenu que le sens CONTRA. De plus le sens ANTI éjecte violemment vers leur bords suivant un effet « chistera » et présente dans un certain régime une brisure de symétrie spontanée qui n'a pas été observée dans le sens CONTRA.

Dans les deux cas, CONTRA ou ANTI, l'égalité  $f_1 = -f_2$  nous assure une symétrie toute particulière de la géométrie. L'écoulement est symétrique par toute rotation d'angle  $\pi$  autour de tout axe passant par l'origine  $O$  et contenu dans le plan  $(O, \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta)$ . Cette symétrie détaillée par Nore, Tuckerman, Daube, et Xin [105] (2003) est appelée symétrie  $\mathcal{R}_\pi$  et agit ainsi sur l'écoulement :

$$\mathcal{R}_\pi \begin{pmatrix} u_r \\ u_\theta \\ u_z \end{pmatrix} (r, \theta, z) = \begin{pmatrix} u_r \\ -u_\theta \\ -u_z \end{pmatrix} (r, -\theta, -z). \quad (2.4.1)$$

En l'absence de pales, les disques et la géométrie seraient aussi parfaitement axisymétriques, mais les pales au nombre de huit restreignent cette symétrie à une rotation angulaire de  $\frac{\pi}{4}$ .

Afin d'adimensionner les équations, nous utilisons la vitesse de bord de pale  $V_0 = 2\pi R f_t$ . Sauf mention explicite du contraire, toutes les longueurs sont adimensionnées par le rayon  $R$  du cylindre. Le paramètre de contrôle de l'écoulement est le nombre de Reynolds défini par la formule suivante en fonction de la viscosité cinématique  $\nu$  du fluide utilisé :

$$\text{Re} = \frac{2\pi f_t R^2}{\nu}. \quad (2.4.2)$$

Ce paramètre de contrôle est choisi selon les besoins. Dans les simulations numériques, il est directement paramétrable. Pour les expériences, il est possible de jouer sur la taille  $R$  du dispositif en utilisant des cuves plus ou moins grandes, sur la viscosité cinématique  $\nu$  en utilisant différents fluides ou des mélanges, ou encore de choisir la fréquence de rotation  $f_t$ .

### 2.4.2 Outils de description de l'écoulement

Afin de caractériser l'écoulement obtenu, nous utilisons plusieurs quantités numériques ou expérimentales.

Nous devons introduire différents moyens de moyennisation statistique. Ainsi, pour une fonction dépendante du temps  $A : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  nous introduisons la moyenne temporelle :

$$\langle A \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T A(\tau) d\tau. \quad (2.4.3)$$

S'il s'agit non pas d'une fonction mais d'une série temporelle expérimentale  $(A_k)_{1 \leq k \leq N}$  mesurée en un point immobile dans le référentiel du laboratoire, nous introduisons la moyenne inertielle discrète :

$$\langle A \rangle_{\circ} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N A_k. \quad (2.4.4)$$

Il faut remarquer que, puisque les mesures sont réalisées en un point fixe alors que l'écoulement tourne, cette moyenne inertielle correspond pour un écoulement dépendant du temps à une moyenne en temps et en angle. En coordonnées cylindriques par exemple, si  $A$  dépend de  $(r, \theta, z, t)$  alors le calcul de  $\langle A \rangle$  à partir des temps de mesure  $(t_1, \dots, t_N)$  donnera une approximation de la moyenne temporelle de la composante axisymétrique  $m = 0$  de la décomposition en série de Fourier angulaire de  $A$ .

Pour rendre compte de l'intensité de la turbulence dans différentes configurations, il nous arrive d'utiliser le nombre  $R_\lambda$  que nous définissons ici. Une longueur typique (appelée longueur de Taylor) est calculée de manière statistique en fonction de l'écoulement dont la variance (root mean square)

$$\lambda = \sqrt{\frac{\langle \mathbf{u}^2 \rangle}{\langle \nabla \mathbf{u}^2 \rangle}}. \quad (2.4.5)$$

Elle permet de définir un nombre de Reynolds empirique grâce à la formule

$$R_\lambda = \lambda u^{\text{rms}} / \nu, \quad (2.4.6)$$

où  $\nu$  peut être expérimentalement le coefficient de viscosité cinématique du fluide ou bien numériquement le coefficient utilisé dans l'intégration numérique.

La vorticité correspond au rotationnel du champ de vitesse et est une quantité beaucoup regardée dans la littérature. Nous nous concentrerons essentiellement sur son amplitude

$$\omega = \|\text{rot} \mathbf{u}\|. \quad (2.4.7)$$

Définissons maintenant les grandeurs nécessaires à la description de l'écoulement vu comme convertisseur énergétique. Comme expliqué au début de la partie 2.1 le fluide convertit l'énergie cinétique en énergie thermique. La puissance mécanique injectée dans l'écoulement se calcule à partir des couples  $C_i, i \in \{1, 2\}$  exercés sur les turbines. Dans le fonctionnement à la fréquence  $f_t$ , la puissance injectée vaut

$$P_{\text{inj}} = 2\pi f_t (|C_1| + |C_2|). \quad (2.4.8)$$

Dans le régime statistiquement stationnaire, cette puissance en W nous sert à définir une puissance adimensionnée :

$$P^* = \frac{P_{\text{inj}}}{2\rho R^5 (2\pi f_t)^3}. \quad (2.4.9)$$

On peut de manière similaire définir un couple adimensionné à partir des  $C_i, i \in \{1, 2\}$

$$K_p = \frac{\langle |C_1| + |C_2| \rangle}{2\rho R^5 (2\pi f_t)^2}. \quad (2.4.10)$$

Remarquons que  $K_p = P^*$ . La mesure des puissances injectées diffère entre expérience et simulation. Dans les expériences, on mesure les fréquences de rotation et les couples appliqués pour chaque turbine. Dans les simulations numériques, on calcule le couple  $K_p$  à l'aide de la contrainte exercée par le fluide aux bords des turbines :

$$K_p = \frac{1}{2} \int_O |\mathbf{r} \wedge \mathbf{f}_s \cdot \mathbf{e}_z| d\tau \quad (2.4.11)$$

où  $\mathbf{f}_s$  représente la force adimensionnée nécessaire pour que la méthode de pénalisation force la rotation des turbines. Elle peut s'écrire à l'aide des tenseurs identité et des gradients de vitesse comme

$$\mathbf{f}_s = \text{div} \left( p\mathbb{I}_3 - \frac{1}{\text{Re}} \nabla \mathbf{u} \right). \quad (2.4.12)$$

L'intégrale volumique de  $\mathbf{f}_s$  correspond à une intégrale surfacique de forces de pression et de contraintes visqueuses. Nous avons déjà trouvé ces contributions dans le bilan énergétique (2.1.11). Il ne faut pas les confondre avec un forçage volumique du fluide qui n'est aucunement présent dans cette géométrie de von Kármán. La valeur de  $\mathbf{f}_s$  est évaluée à l'aide de la méthode de pénalisation par la formule suivante en remplaçant dans (2.4.12) les termes de pénalisation dans le solide de (2.2.23) :

$$K_p = \frac{3}{4} \int_O r \text{signe}(f_2 z) \frac{\mathbf{u}^n - \mathbf{u}_{\text{obst}}}{\Delta t} \cdot \mathbf{e}_\theta dV. \quad (2.4.13)$$

En régime stationnaire, la puissance injectée correspond à la puissance dissipée. Les puissances et couples injectés nous permettent de définir une puissance dissipative par unité de masse :

$$\varepsilon_{\text{dim}} = \frac{P_{\text{inj}}}{\pi R^2 H \rho}; \quad (2.4.14)$$

qui correspond à une grandeur sans dimension proportionnelle à  $P^*$  et  $K_p$

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_{\text{dim}}}{R^2 (2\pi f_t)^3} = \frac{2RP^*}{\pi H}. \quad (2.4.15)$$

A partir de  $\text{Re} \geq 6 \times 10^3$  l'écoulement est complètement turbulent et la dissipation par unité de masse adimensionnée atteint un plateau de l'ordre de  $\varepsilon = 0.045$ . À  $\text{Re} = 6 \cdot 10^3$ , l'échelle spatiale de Kolmogorov qui caractérise selon la modélisation classique la plus petite échelle de l'écoulement vaut  $\eta = 3 \cdot 10^{-3} R$  et l'échelle temporelle turbulente de Kolmogorov vaut  $\tau_K = 4 \cdot 10^{-3} T_{\text{tour}}$ .

Une des caractéristiques principales consiste à vérifier si l'écoulement moyen vérifie les symétries présentées dans 2.4. A faible nombre de Reynolds, l'écoulement moyenné en temps respecte les symétries  $\mathcal{R}_\pi$  et de rotation azimutale de  $\frac{\pi}{4}$ . Cependant, à grand  $\text{Re}$ , on observe des brisures de symétrie. Analysons tout d'abord l'écoulement moyenné en temps et en angle. Ses caractéristiques dépendent des conditions de forçage :

- L'écoulement moyen CONTRA est constitué de deux recirculations toriques séparées par une zone de cisaillement. La symétrie  $\mathcal{R}_\pi$  est respectée et confère à l'écoulement moyen les propriétés suivantes  $\langle u_r(r, -z) \rangle = \langle u_r(r, z) \rangle$ ,  $\langle u_\theta(r, -z) \rangle = -\langle u_\theta(r, z) \rangle$  et  $\langle u_z(r, -z) \rangle = -\langle u_z(r, z) \rangle$ .

- L'écoulement moyen ANTI peut selon les cas avoir plusieurs réalisations possibles. Ceci dépend du nombre de Reynolds mais aussi de la forme des pales des turbines. Soit l'écoulement peut avoir les mêmes symétries que celles du cas CONTRA expliquées ci-dessus, soit il est possible que les deux tores de recirculation fusionnent et donnent lieu à un écoulement à une seule cellule de recirculation [121, 122] (2004, 2008). Dans ce cas, l'écoulement moyen ne respecte plus la symétrie  $\mathcal{R}_\pi$ . On la retrouve uniquement sur plusieurs réalisations. Lorsque les deux cellules contra-rotatives fusionnent, la cellule restante tourne dans un seul sens. Près de la turbine tournant dans l'autre sens, un très fort cisaillement du fluide permet de respecter les conditions de non glissement sur les parois. Cet état bifurqué n'existe qu'au dessus d'un nombre de Reynolds critique comme l'expliquent Ravelet, Marie, Chiffaudel, et Daviaud [121] (2004) et pour des turbines présentant des pales assez incurvées, comme les TM87. Cette bifurcation atteste d'une multi-stabilité entre des écoulements possibles respectant les conditions aux bords. La dynamique complexe de passage de l'un à l'autre a été étudiée dans de nombreux travaux [137, 127, 134] (2015, 2014, 2013).

Cette multi-stabilité atteste dans ce cas particulier de plusieurs solutions respectant les lois de l'écoulement et les conditions aux bords. Elle nous pose la question de l'unicité des solutions de l'équation de Navier-Stokes 2.1.3.

### 2.4.3 Mesures de données expérimentales

Plusieurs campagnes de mesures ont constitué la base de données expérimentale utilisée dans cette thèse. Les choix du fluide, de la température, de la taille de l'expérience utilisée et de la vitesse de rotation permettent d'atteindre des nombres de Reynolds variés jusqu'à  $Re \sim 10^8$ . Il s'agit de mesures dans la même géométrie avec  $h_{\text{pales}} = 0, 2R$ , ou bien des disques lisses. On utilise cependant des fluides et des techniques variés. Parmi les différentes techniques disponibles on trouve :

- Des mesures de couples injectés par les moteurs à l'aide de couplomètre, ils ont le défaut d'être assez peu précis pour mesurer des couples faibles.
- Des mesures d'anémomètre à fil chaud selon la méthode de King et Barnes [72] (1914).
- Des mesures de vélocimétrie par effet Doppler (LDV) donnant accès au champ de vitesse moyen dans un plan. Le système LDV donne accès au champ de vitesse moyen dans les directions verticale et azimutale. Dans une coupe méridienne, la grille de mesure a une résolution de  $19 \times 17$  points situés dans le rectangle  $0 \leq r \leq 10\Delta r$  et  $-8\Delta z \leq z \leq 8\Delta z$  où  $\Delta r = 0, 1$  et  $\Delta z = 0, 1125$ .
- Des mesures de vélocimétrie par images de particules stéréoscopiques (SPIV) qui permettent de remonter au champ de vitesse instantané dans un plan. La SPIV mesure les trois composantes du champ de vitesse dans un plan méridien avec une résolution de  $90 \times 70$  points. Le système optique peut être adapté pour varier la taille du rectangle de mesure sans changer le nombre de points, permettant d'obtenir des résolutions spatiales dans la gamme  $[2, 4 \cdot 10^{-3}, 2, 4 \cdot 10^{-2}]$ . Les zones sondées se situent dans la zone accessible pour le laser à savoir  $(r, z) \in [0, 1] \times [-0, 75, 0, 75]$ . Les moyennes temporelles de séries de mesure SPIV sont notées  $\langle \cdot \rangle_\circ$  puisqu'elles correspondent à une mesure à un point fixe dans le référentiel du laboratoire comme expliqué en commentaire de l'équation (2.4.4).
- Des mesures de vélocimétrie par images de particules tomographiques (TPIV) qui permettent de remonter au champ de vitesse tridimensionnel instantané dans le volume d'un pavé au centre du cylindre.
- Des mesures de vélocimétrie par traçage de particule (PTV) permettent de suivre temporellement la position des particules ensemencées tant qu'elles restent à l'intérieur d'un pavé de mesure. Ces

données peuvent ensuite être traitées de manière lagrangienne ou bien interpolées sur une grille fixe afin d’obtenir un champ eulérien. Seul le cas eulérien issu de l’interpolation des trajectoires sur une grille cartésienne sera traité ici.

Si ces deux dernières reconstructions (TPIV et PTV) utilisent les mêmes images, elles donnent pourtant des résultats différents. La PTV pouvant identifier une particule unique est plus résolue, mais ne nous donne que des trajectoires lagrangiennes que nous interpolons ensuite dans le cadre de notre étude eulérienne. De plus, les deux méthodes filtrent le bruit de mesure, donc les résultats, de deux manières différentes. Toutes les mesures de vitesse avec des particules présentées ici ont été réalisées dans un cylindre von Kármán de rayon  $R$  de 10 cm.

Les paramètres utilisés sont détaillés dans les tables 2.20 et 2.21. Toutes ses données sont en sens ANTI.

Les grandeurs expérimentales sont adimensionnées en fonction de  $R$ ,  $f_t$ , de la viscosité cinématique  $\nu$  du fluide et de la puissance  $\varepsilon$  mesurée par les couplomètres. On utilise souvent la longueur de Kolmogorov  $\eta = (\nu^3 \varepsilon^{-1})^{1/4}$  comme longueur de référence pour la résolution. Remarquons que pour le calcul du  $R_\lambda$ , la résolution de mesure  $\Delta x$  impacte les variances observées pour le calcul de la longueur de Taylor. On note par exemple dans les tables 2.20 et 2.21 que l’on peut retrouver différentes valeurs de  $R_\lambda$  pour le même nombre de Reynolds. Si les tailles de grilles expérimentales sont assez limitées en espace, un très grand nombre de champs instantanés de l’ordre de  $10^4$  permettent d’obtenir de bonnes statistiques comme l’ont étudié Debue et al. [32] (2018) dans l’annexe de leur travail.

### 2.4.3.1 Données SPIV

Nous utilisons les données de SPIV présentées par Saw et al. [129] (2018) et notées A à E. Les vitesses sont mesurées dans des rectangles de différentes résolutions  $\Delta x$ . Cinq expériences ont été menées en conservant la dissipation par unité de passe adimensionnée définie à l’équation (2.4.15). Certaines mesures correspondent à des mesures dans un rectangle délimité par les bords du cylindre et les bouts des pales. Leur résolution absolue est bien moindre que celle d’autres cas qui correspondent à des mesures zoomées au centre du cylindre, sur un rectangle de 2 cm par 2 cm. Pour toutes les mesures de SPIV, les champs de vitesse sont temporellement décorrélés.

Cas	$f_t$ (Hz)	Points de grille	Re	$R_\lambda$	$\varepsilon$ (adim)	$\eta$ (mm)	$\Delta x$ (mm)	Symbole
A	5	$89 \times 65$	$3.1 \cdot 10^5$	610	0.045	0.016	2.1	•
B	5	$77 \times 79$	$3.1 \cdot 10^5$	920	0.045	0.016	0.49	■
C	5	$162 \times 157$	$3.1 \cdot 10^5$	890	0.045	0.016	0.24	◆
D	1	$77 \times 80$	$4.1 \cdot 10^4$	300	0.045	0.073	0.49	▲
E	1.2	$151 \times 174$	$5.8 \cdot 10^3$	72	0.045	0.32	0.24	★

TABLE 2.20 – Paramètres de la SPIV sens ANTI.  $f_t$  est la fréquence de rotation en temps adimensionné ;  $\Re$  le nombre de Reynolds ;  $R_\lambda$  est le nombre de Reynolds empirique basé sur l’échelle de Taylor ;  $\varepsilon$  est la dissipation adimensionnée de l’équation (2.4.14) ;  $\eta$  est l’échelle de dissipation de Kolmogorov ; et  $\Delta x$  la résolution spatiale de mesure.

### 2.4.3.2 Données TPIV & PTV

Les mesures de TPIV utilisées dans cette thèse seront notées T-1 à T-4. Elles donnent accès aux trois composantes de la vitesse dans un pavé droit grâce à une méthode de reconstruction tomogra-

phique (méthode Multiplicative Algorithm Reconstruction Technics) et aux mesures de 5 caméras. Les campagnes de mesures ont été menées par Ostovan et al. [109] (2019) et sont présentées en détail par Debue [31] (2019). Les champs de vitesse mesurés sont soit temporellement corrélés ou décorrélés selon les campagnes de mesure. Dans le cas de mesures corrélées en temps (pour T-4 notamment), on peut mettre en place le suivi PTV des particules, puis interpoler les trajectoires sur une grille cartésienne. Ces deux méthodes TPIV et PTV correspondent soit à interpolation du mouvement de plusieurs particules pour reconstruire le champ de vitesse soit à une reconstruction des trajectoires individuelles des particules puis une interpolation du champ de vitesse eulérien.

Cas	$f_t$ (Hz)	Points de grille	Re	$R_\lambda$	$\varepsilon$ (adim)	$\eta$ (mm)	$\Delta x$ (mm)	Symbole
T-1	5	$149 \times 103 \times 20$	$3.1 \cdot 10^5$	890	0.045	0.016	0.35	○
T-2	1	$139 \times 101 \times 20$	$6.3 \cdot 10^4$	390	0.045	0.054	0.35	□
T-3	0.5	$148 \times 103 \times 20$	$3.1 \cdot 10^4$	250	0.045	0.09	0.35	◇
T-4	0.1	$149 \times 100 \times 20$	$6.3 \cdot 10^3$	80	0.045	0.3	0.35	△

TABLE 2.21 – Paramètres des TPIV sens ANTI. (T-1 à T-4) et PVT (T-4)  $f_t$  est la fréquence de rotation en temps adimensionné;  $\Re$  le nombre de Reynolds;  $R_\lambda$  est le nombre de Reynolds empirique basé sur l'échelle de Taylor;  $\varepsilon$  est la dissipation adimensionnée de l'équation (2.4.14);  $\eta$  est l'échelle de dissipation de Kolmogorov; et  $\Delta x$  la résolution spatiale de mesure.

Précisons que pour l'expérience T-4, la fréquence d'acquisition est de 200 Hz. La grandeur canonique pour l'évolution temporelle des écoulements turbulents est le temps de Kolmogorov  $\tau_k = (\nu\varepsilon)^{1/2}$  qui correspond à  $\frac{\varepsilon}{\Re}$  dans notre formalisme adimensionné. En utilisant ce paramètre, on trouve que le temps entre deux photos de l'expérience T-4 vaut l'ordre de  $0,05\tau_k$ .

Si le nombre de configurations expérimentales est élevé, c'est pour compenser la relative petite taille de la zone de mesure cartésienne, qui n'a environ qu'une centaine de points dans chaque direction. Il est parait alors impossible de regarder des structures à très petite ou à très grande échelle sur de telles données. Pour y arriver, les expérimentateurs utilisent une astuce : ils gardent le même dispositif de mesure mais font varier le nombre de Reynolds de l'écoulement. Puisque la turbulence est souvent considérée invariante d'échelle, augmenter le nombre de Reynolds dans une zone de mesure fixée correspond à réduire le grossissement.

#### 2.4.4 Simulations numériques

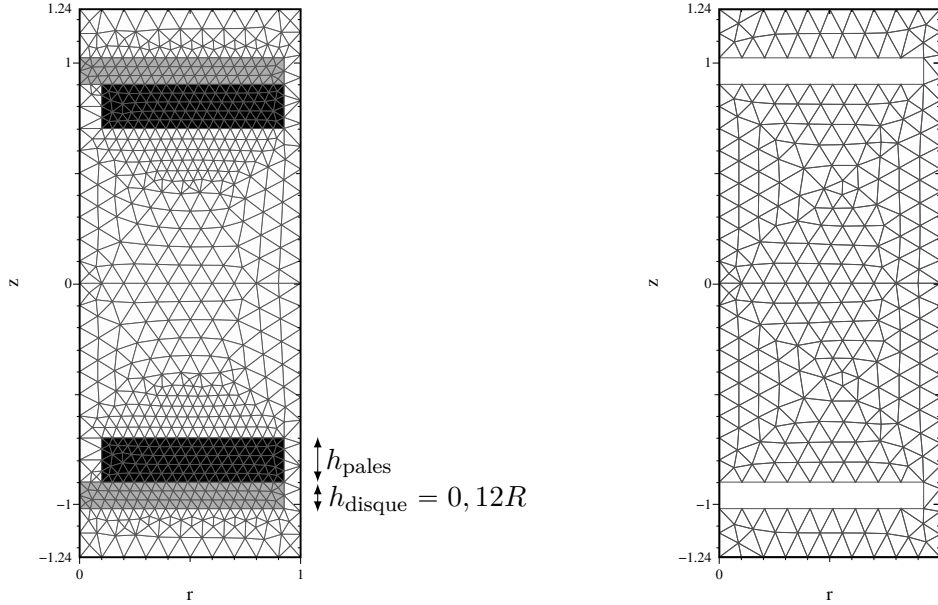
Le code SFEMaNS a déjà été présenté en grande partie, mais nous détaillons ici les spécificités des simulations de l'écoulement de von Kármán. Le grand avantage des simulations numériques est de rendre accessible toute quantité que l'on aimerait évaluer. En revanche, les ressources disponibles pour les calculs étant limitées, nous ne présentons que des simulations numériques directes jusqu'à  $\text{Re} = 6 \times 10^3$ , et des simulations avec modèle LES jusqu'à  $\text{Re} = 10^5$ . La prise en compte des turbines utilise la méthode de pénalisation détaillée dans la partie 2.2.4.

Outre la prise en compte des turbines, le non glissement sur les bords du cylindre est aussi imposé. Les bords correspondent à l'ensemble  $\mathcal{B} = (r, z) \in \{1\} \times [-H_v/2, H_v/2] \cup [0, 1] \times \{\pm H_v/2\}$ .

$$\forall (r, z) \in \mathcal{B}, \forall n \in \{0, \dots, M\}, \tilde{\mathbf{u}}^{n, \cos}(r, z) = \tilde{\mathbf{u}}^{n, \sin}(r, z) = 0. \quad (2.4.16)$$

Le maillage éléments finis couvre tout un plan méridien du domaine cylindrique  $(r, z) \in [0, R] \times [-H_v/2, H_v/2]$ . Le disque de la turbine du haut correspond à la zone  $\mathcal{D}_{\text{haut}} = \{(r, z) \in [0, R_{\text{disque}}] \times$





(a) Cas  $h_{\text{pales}} \neq 0$  : pénalisation dans les turbines. (b)  $h_{\text{pales}} = 0$  : rotation solide imposée sur les disques.

FIGURE 2.11 – Maillages éléments finis d’un écoulement de von Kármán pour  $h_{\text{pales}} = 0,2R$  (2.11a) ou sans pale i.e.  $h_{\text{pales}} = 0$  (2.11b). La résolution du fluide vaut  $0,1R$ , et celle des turbines  $0,05R$ . On distingue sur 2.11a les zones où sont le fluide uniquement (blanc), les pales entourées de fluide (gris foncé) ou les disques (gris clair). Aucun élément fini n’est à cheval entre ces zones.

$[0, 9R; 1, 02R]$  et les pales de la turbine du haut sont dans la zone  $\mathcal{P}_{\text{haut}} = \{(r, z) \in [0, 1R, R_{\text{disque}}] \times [0, 7R; 0, 9R]\}$ . Les zones  $\mathcal{D}_{\text{bas}}$  et  $\mathcal{P}_{\text{bas}}$  sont définies de manière symétrique par rapport au plan  $z = 0$ . On rend compte des turbines par la méthode de pénalisation décrite au paragraphe 2.2.4. Il s’agit en effet d’imposer à chaque instant la vitesse de rotation solide  $\mathbf{u}_{\text{obst},j}(r, \theta, z) = f_j r \mathbf{e}_\theta$  là où les turbines sont présentes, c’est-à-dire dans  $\mathcal{D}_{\text{bas}}$  et  $\mathcal{D}_{\text{haut}}$  pour le mode axisymétrique ainsi que dans  $\mathcal{P}_{\text{bas}}$  et  $\mathcal{P}_{\text{haut}}$  en fonction du mode de Fourier considéré. Dans le cas de disques lisses, la condition aux bords est directement imposée sur les nœuds correspondants.

Les maillages utilisés sont symétriques par rapport au plan équatorial  $z = 0$  et présentent des éléments finis qui coïncident avec les différentes parties de l’écoulement (fluide, disques, pales, bords). Ils sont présentés dans la figure 2.11a. La résolution du maillage  $(r, z)$  et le nombre de modes utilisés sont adaptés selon les cas.

Pour les simulations de von Kármán du chapitre 3 et du chapitre 4 qui ne s’intéressent pas aux flux globaux mais aux propriétés fines de l’écoulement, nous avons supprimé la zone de recirculation derrière les disques pour économiser de la mémoire numérique. Les disques sont alors directement posés sur les couvercles du cylindre. Ces simulations à un nombre de Reynolds de 6000 ont été obtenues par des redémarrages successifs en reprenant la simulation avec un nouveau nombre de Reynolds plus grand, puis en attendant que les grandeurs macroscopiques se stabilisent. Nous avons utilisé pour cette phase transitoire des maillages de différentes résolutions, pour aboutir au maillage final. Ce dernier a des



éléments finis  $\mathbb{P}_2$  de taille  $0.003R$  à  $0.01R$ , et 255 modes de Fourier complexe (sinus et cosinus). Le maillage élément fini a une résolution de  $0.003R$  pour la zone au centre  $(r, z) \in [0; 0, 1] \times [-0, 1; 0, 1]$ , et de  $0.01R$  ailleurs. Le caractère non structuré et irrégulier du maillage élément fini permet de ne privilégier aucune direction. Le maillage tridimensionnel constitué des points de Gauss des éléments finis, et des 509 plans de l'espace physique comporte  $3 \cdot 10^8$  points. Le pas de temps utilisé pour le calcul à  $Re = 6 \cdot 10^3$  est de  $1.5 \cdot 10^{-4}$ .

Nous avons utilisé cette simulation à très haute résolution pour deux études. La première présentée dans le [chapitre 3](#) utilise 21 champs instantanés temporellement décorrélés mais utilisant l'ensemble de la simulation. Pour s'assurer de la décorrélation, nous nous appuyons sur les travaux de Debue [31] (2019) qui assure que à  $Re = 6 \cdot 10^3$ , les champs sont temporellement décorrélés après un quart de tour. La seconde pour la section 4.1 utilise des champs corrélés en se concentrant sur la zone centrale. On utilise 200 champs de vitesse corrélés, écartés de 21 pas de calcul de telle sorte à ce que la fréquence des images de ce film numérique corresponde à la fréquence d'acquisition de la campagne T-4 de la table 2.21 qui a été mesurée à 200 Hz et analysée avec le formalisme TPIV ou PTV. On trouve en effet que  $\frac{21 \times 1,5 \cdot 10^{-4}}{2\pi} = \frac{\Delta_t^{\text{film}}}{T^{\text{tour}}} = \frac{0,1 \text{ Hz}}{200 \text{ Hz}}$ . Cette synchronisation est choisie afin de comparer les deux jeux de donnés. Dans cette optique, nous avons extrait un cube au centre de l'écoulement de côté 0.2, correspondant à la zone de la plus résolue de la DNS et englobant la zone de mesure expérimentale. Enfin, toujours dans l'optique de comparaison avec l'expérience, le champ à l'intérieur de ce cube a été interpolé sur une grille cartésienne de taille  $109^3$ . Les paramètres de cette simulation sont présentés dans la table 2.22.

Cas	$f_t$	Grille Hybride	Re	$R_\lambda$	$\varepsilon$ (adim)	$\eta$ (mm)	$\Delta x$ (mm)	Symbol
DNS	$\frac{1}{2\pi}$	$400 \times 800 \times 509$	$6 \cdot 10^3$	72	0.045	0.37	0.1-0.4	—o—

TABLE 2.22 – Paramètres de la DNS de sens ANTI utilisée pour les chapitres 3 et 4 :  $f_t$  est la fréquence de rotation en temps adimensionné ; Re le nombre de Reynolds ;  $R_\lambda$  est le nombre de Reynolds empirique basé sur l'échelle de Taylor ;  $\varepsilon$  est la dissipation adimensionnée de l'équation (2.4.14) ;  $\eta$  est l'échelle de dissipation de Kolmogorov ; et  $\Delta x$  la résolution spatiale de la simulation. Pour une meilleure comparaison de la résolution et de l'échelle de Kolmogorov avec celles annoncées aux tables 2.20 et 2.21 nous avons dimensionné les quantités de la simulation en remplaçant le rayon numérique de 1 par le rayon expérimental de  $R = 10$  cm.

#### 2.4.4.1 Simulations numériques homogènes isotropes

Le [chapitre 3](#) utilise aussi à des fins de comparaison des données issus d'un second code. Il s'agit du code VISHKOBHA [32] (2018) développé par Vishwanath Shukla. Ce code simule un fluide dans un cube tridimensionnel périodique  $[0, 2\pi]^3$  et utilise une décomposition de Fourier (voir 2.2.2) dans les trois directions. Le cube périodique correspond à un milieu infini sans paroi ni direction privilégiée. Le code utilise  $N$  modes de Fourier dans chaque direction et le cube se compare facilement avec une grille cartésienne. Pour ces simulations, le seul nombre de Reynolds pertinent est  $R_\lambda$  défini par l'équation 2.4.6. Aussi, on parle du plus grand nombre d'onde  $k_{\text{max}}$  pour la résolution. Les paramètres utilisés sont détaillés dans la table 2.23.

Après cette présentation détaillée de la géométrie étudiée, des jeux de données d'observation et de la méthode de simulation numérique utilisée, nous présentons maintenant deux études visant à améliorer la modélisation des écoulements. La première présentée dans la section 2.5 évalue la capacité du modèle

$R_\lambda$	$\eta$	$k_{\max}\eta$	$N_x \times N_y \times N_z$	$\ell_{\min}/\eta$	échantillon	Symbole
25	0.079	3.35	$128^3$	0.635	5000	★
56	0.034	6.42	$256^3$	0.31	105 000	△
80	0.020	1.68	$256^3$	1.22	270 000	□
90	0.017	5.70	$1024^3$	0.36	10 000	◇
138	0.009	1.55	$512^3$	1.37	12 000	○

TABLE 2.23 – Paramètres des simulations DNS homogènes isotropes.  $R_\lambda$  est le nombre de Taylor basé sur l'échelle statistique  $\lambda$ ,  $\eta$  est la longueur de Kolmogorov. La troisième colonne donne le produit  $k_{\max}\eta$ , avec  $k_{\max} = N/3$  le nombre d'onde le plus grand. La quatrième colonne donne la taille de la grille, sachant que le cube a un côté de  $2\pi$ . La cinquième colonne donne la longueur minimale pour le filtrage défini au chapitre 3. L'échantillon correspond au nombre de points (points spatiaux  $\times$  nombre de pas de temps décorrélés) utilisés pour la statistique.

LES présenté dans le paragraphe 2.2.6 et sa capacité à reproduire les grandeurs macroscopiques : champs de vitesse et puissance. Cette première étude a été publiée dans la référence [20] (2021). La seconde étudie le comportement d'un écoulement de von Kármán avec des pales de hauteur variable, en se concentrant sur la transition au régime turbulent, les champs de vitesse moyenne et les puissances mises en jeu.

## 2.5 Évaluation de la modélisation LES

Concentrons-nous maintenant sur l'évaluation du modèle LES. Depuis longtemps, deux stratégies ont été mises en œuvre pour mieux comprendre la turbulence : les simulations numériques et les mesures expérimentales. Les dernières avancées ont repoussé les limites de ces deux méthodes. Par exemple, la prolifération des super-calculateurs toujours plus puissants et les progrès des bibliothèques de calcul parallélisé d'algèbre linéaire permettent aujourd'hui de simuler des régimes à très grands nombres de Reynolds à la fois pour des simulations numériques directes (DNS) ou pour des modèles de turbulence (simulations de grandes structures ou large eddy simulations/LES) permettant de simuler un écoulement dans des conditions beaucoup plus turbulentes. Les récentes techniques algorithmiques de pénalisation permettent d'utiliser des décompositions en séries de Fourier pour des géométries complexes tout en profitant de la puissance des méthodes spectrales. De la même manière, les améliorations technologiques profitent aussi aux mesures expérimentales. Par exemple le perfectionnement des caméras CCD (à transfert de charges) couplé aux nouvelles capacités de calcul a fortement augmenté la précision des mesures de vélocimétrie par image de particule (PIV). La mesure PIV donne accès à l'ensemble des composantes du champ de vitesse dans la zone d'acquisition. Pendant longtemps les simulations numériques ayant pour but de tester des lois d'échelles ont été conduites dans des géométries idéalisées comme par exemple des maillages périodiques ne tenant pas forcément compte des effets des conditions aux bords [148, 149, 66, 62] (2015, 2018, 2021, 2009) comme celles présentées au paragraphe 2.4.4.1. Étant données les récentes avancées des mesures expérimentales, des méthodes de physique numérique ainsi que de la puissance de calcul disponible, il est naturel de se demander si nous pouvons comparer des mesures expérimentales d'écoulements turbulents à des simulations numériques du même écoulement. L'objet de ce paragraphe est de répondre à cette question en étudiant la géométrie de l'écoulement de von Kármán. Dans cette géométrie, nous comparons la topologie de l'écoulement ainsi que le couple nécessaire à la rotation des turbines pour des simulations numériques et des expériences. Une méthode de simulation des grandes structures (LES) permet d'atteindre des

Re	$10^2$	$10^3$	$3 \times 10^5$	$3 \times 10^5$	$3 \times 10^5$
Type	CONTRA	CONTRA	CONTRA	ANTI symétrique	ANTI bifurqué
$\nu(\text{m}^2\text{s}^{-1})$	$4.3 \times 10^{-4}$	$4.3 \times 10^{-4}$	$1.0 \times 10^{-6}$	$1.0 \times 10^{-6}$	$1.0 \times 10^{-6}$
$f(\text{Hz})$	0.68	6.8	5.0	5.0	5.0

TABLE 2.24 – Paramètres expérimentaux : nombre de Reynolds  $Re$ , type d’écoulement, viscosité cinématique  $\nu$ , fréquence de rotation  $f$ .

nombres de Reynolds  $Re$  allant de  $10^2$  à  $10^5$ . Ces comparaisons permettent de certifier la méthode LES utilisée pour modéliser les structures sous-maillages. Le très bon accord entre mesures expérimentales et simulations numériques permet de confirmer la grande précision de chacune des méthodes utilisées et nous donne une grande confiance dans les résultats obtenus.

Jusque récemment, ces comparaisons étaient limitées par l’impossibilité de cartographier précisément un écoulement turbulent en laboratoire. Mais depuis l’avènement de l’imagerie par tomographie laser, on sait aujourd’hui mesurer les trois composantes de la vitesse d’un écoulement en volume, avec une résolution millimétrique et à des cadences de 1 kHz. Ces progrès ont pu être utilisés pour comparer de façon quantitative et pour une même géométrie avec le même paramètre de contrôle, un écoulement très turbulent en laboratoire, avec des données issues de simulations numériques. Dans cette optique, nous avons aussi comparé des simulations numériques directes avec des simulations utilisant un modèle LES.

Si de telles comparaisons entre différents résultats sont fréquentes dans la littérature [150, 8, 116] (2010, 2018, 2011) la spécificité des résultats obtenus ici consiste en la parfaite correspondance des configurations utilisées. L’écoulement ainsi obtenu est bien turbulent dans une certaine gamme de fonctionnement mais n’est ni isotrope ni homogène. L’étude numérique d’écoulements turbulents dans une géométrie complexe et proche des réalisations pratiques est rarement présente dans la littérature et fait l’originalité de ce travail.

Le code SFEMaNS est détaillé dans la partie 2.2. Afin de pouvoir simuler des très grands nombres de Reynolds, nous avons recours à un modèle de turbulence basé sur une viscosité entropique (cf paragraphe 2.2.6). Ceci nous permet, en plus des simulations numériques directes, de comparer les propriétés des écoulements obtenus dans une gamme de Reynolds allant de  $Re = \mathcal{O}(10^2)$  à  $Re = \mathcal{O}(10^5)$ . De plus les simulations ont permis de reproduire des états bifurqués qui correspondent à plusieurs états accessibles pour l’écoulement qui avaient déjà été observés expérimentalement par Ravelet, Marie, Chiffaudel, et Daviaud [121] (2004).

Nous allons comparer les observations des résultats de DNS, LES et d’expériences, pour déterminer si la modélisation LES permet de rendre compte des bonnes quantités macroscopiques pour cet écoulement.

La forte dépendance des valeurs de couple et des topologies des écoulements moyens en fonction des paramètres géométriques (taille, nombre de pales, courbure des pales) étudiée dans [90, 120, 119, 98, 14] (2003, 2005, 2005, 2007, 2014) fait qu’arriver à les reproduire numériquement est un véritable défi.

Dans cette partie, la hauteur des pales est fixée à  $h_{\text{pales}} = 0.2R$ . Les paramètres expérimentaux sont précisés dans la table 2.24 et les différents paramètres des simulations numériques sont présentés dans la table 2.25. Les résolutions spatiales utilisées sont de plus en plus fines quand le nombre de Reynolds augmente. A  $Re$  fixé, les mailles utilisées pour les LES sont plus grossières que celles utilisées pour les DNS. Pour bien résoudre la couche de cisaillement très fine du cas ANTI bifurqué, le maillage est très raffiné près des turbines et moins resserré au centre de la cuve, comme on le voit dans la figure 2.12. Chaque simulation dure entre 15 et 60 tours de turbine.

Re	$10^2$	$10^3$	$10^5$	$10^5$	$10^5$
Type	CONTRA	CONTRA	CONTRA	ANTI symétrique	ANTI bifurqué
Modèle	DNS	DNS	LES	LES	LES
$\tau$	$2.5 \times 10^{-3}$	$2.5 \times 10^{-3}$	$1.25 \times 10^{-3}$	$1.25 \times 10^{-3}$	$10^{-4}$
$h_{\min}$	$2 \times 10^{-2}$	$5 \times 10^{-3}$	$5 \times 10^{-3}$	$5 \times 10^{-3}$	$2.5 \times 10^{-3}$
$h_{\max}$	$2 \times 10^{-2}$	$10^{-2}$	$2 \times 10^{-2}$	$2 \times 10^{-2}$	$10^{-2}$
$n_{dl}$	7589	65861	46291	46291	193051
$M_{\text{modes}}$	128	128	128	128	512
$n_{\text{procs}}$	128	128	128	128	2048

TABLE 2.25 – Paramètres numériques des simulations : nombre de Reynolds  $Re$ , type d'écoulement, modèle numérique utilisé (DNS ou LES), pas de temps de calcul  $\Delta t$ , taille du maillage près des turbines  $h_{\min}$ , taille du maillage près des parois fixes  $h_{\max}$  (le maillage méridien est non uniforme), nombre de points de grille dans le maillage méridien  $\mathbb{P}_2$   $n_{dl}$ , nombre de modes de Fourier réels  $M_{\text{modes}}$ , nombre de processeurs  $n_{\text{procs}}$ .

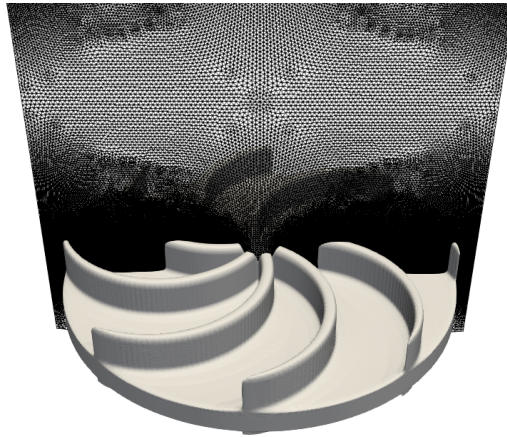


FIGURE 2.12 – Maillage  $(r, z)$  et turbines avec 128 modes de Fourier,  $h_{\text{pales}} = 0.2R$ ,  $h_{\max} = 2 \times 10^{-2}$  et  $h_{\min} = 5 \times 10^{-3}$ .

### 2.5.1 Comparaisons expériences et simulations

Dans ce paragraphe, nous comparons les résultats des différentes configurations. Les quantités utilisées sont les champs de vitesse instantanés et moyens. Afin de rendre les comparaisons plus quantitatives, nous utilisons ici toujours les mêmes barres de couleurs pour les résultats numériques ou expérimentaux. A la fin de ce paragraphe, nous comparons les puissances dissipées dans les différents cas.

#### 2.5.1.1 Types d'écoulements à faible Reynolds.

Tout d'abord, concentrons-nous sur les écoulements de von Kármán à  $\text{Re} \leq 10^3$ .

A très petits Reynolds, ( $\text{Re} \leq 5 \times 10^2$ ), le champ de vitesse est stationnaire. De plus les écoulements CONTRA et ANTI sont très similaires, c'est pourquoi nous ne présentons que les résultats pour le CONTRA. On voit sur la figure 2.13 la comparaison des trois composantes de la vitesse dans un plan méridien. À  $\text{Re} = 10^2$ , la vitesse est stationnaire et axisymétrique. Les panneaux (a) et (d) montrent le champ de vitesse radial  $u_r$ , (b) et (e) montrent la vitesse azimutale  $u_\theta$  alors que (c) et (f) montrent la vitesse axiale  $u_z$ . Les zones blanches dans les champs expérimentaux correspondent aux endroits où la mesure est impossible par LDV, puisque le laser ne peut pas traverser les pales opaques. La résolution des images correspond à la résolution de la LDV. Nous avons interpolé les données numériques bien mieux résolues sur cette grille afin de rendre la confrontation plus facile. Sur la figure 2.13 les résultats obtenus sont très proches, avec de légères différences aux bords de la zone d'acquisition expérimentale.

L'écoulement devient instationnaire à partir de  $\text{Re} = 5 \times 10^2$ . Le caractère instationnaire nous contraint à comparer des profils de vitesse moyens. Nous comparons alors les profils de  $\langle \mathbf{u} \rangle_0$  obtenus par moyenne des résultats LDV avec ceux  $\langle \mathbf{u}^m = 0 \rangle$  obtenus en prenant la moyenne temporelle de la composante axisymétrique de la simulation numérique. La figure 2.14 présente des champs de vitesses à  $\text{Re} = 10^3$  utilisant toujours l'interpolation sur la grille de LDV. De même que pour  $\text{Re} = 10^2$ , les profils de vitesse sont très proches, sauf aux bords de la zone de mesure expérimentale.

Dans cette optique de comparaisons, nous traçons aussi dans la figure 2.15 des profils de vitesse moyenne à cote  $z$  constante pour  $z \in \{-0, 4; 0; 4\}$ . Les mesures LDV sont faites dans un plan méridien mais ne respectent pas parfaitement les conditions aux bords. Puisque les conditions à l'axe imposent que  $\forall z \in \{-0, 4; 0; 4\}$  les valeurs de  $u_r(r = 0, z)$ ,  $u_\theta(r = 1, z)$  et  $u_z(r = 1, z)$  doivent être nulles, nous utilisons des barres d'erreurs expérimentales valant  $\Delta_\theta = \max(|u_\theta^{\text{exp}}(r = 0, z)|, |u_\theta^{\text{exp}}(r = 1, z)|)$  pour  $u_\theta$  et  $\Delta_z = \max(|u_z^{\text{exp}}(r = 0, z)|, |u_z^{\text{exp}}(r = 1, z)|)$  pour  $u_z$ . Cette évaluation de l'erreur est plus précise que d'utiliser la variance des signaux temporels sur des temps de mesures assez courts, et elle permet aussi de prendre en compte le fait que le plan de mesure ne passe pas parfaitement par l'axe.

L'accord sur la figure 2.15 entre simulations numériques et mesures expérimentales respecte les barres d'erreur. On remarque aussi que les mesures expérimentales ne sont pas parfaitement symétriques par rapport à  $\mathcal{R}_\pi$  qui correspond à une symétrie d'axe  $u = 0$  sur la figure 2.15. Les maxima locaux de  $|u_\theta|$  (vers  $r = 0, 8$ ) ainsi que les changements de signe pour  $u_z$  (vers  $r = 0, 75$ ) correspondent.

Comparons maintenant les deux types d'écoulement CONTRA et ANTI. La figure 2.16 présente les simulations DNS des deux types à  $\text{Re} = 10^3$ . Les schémas d'écoulement sont différents : près des pales, la composante radiale est plus forte dans le sens CONTRA que dans le sens ANTI, mais dans la zone de mélange proche de  $z = 0$  on retrouve la situation inverse. De plus la composante azimutale  $u_\theta$  est globalement plus forte pour le type ANTI. Cette différence peut se comprendre en regardant de nouveau la figure 2.10 : en CONTRA, on pousse avec le dos de la pale, et on laisse le champ libre vers le bord du cylindre, alors qu'en ANTI, la pale empêche le fluide de s'écouler de manière radiale et le contraint plus à tourner. Ces différences se maintiennent à plus haut Reynolds.

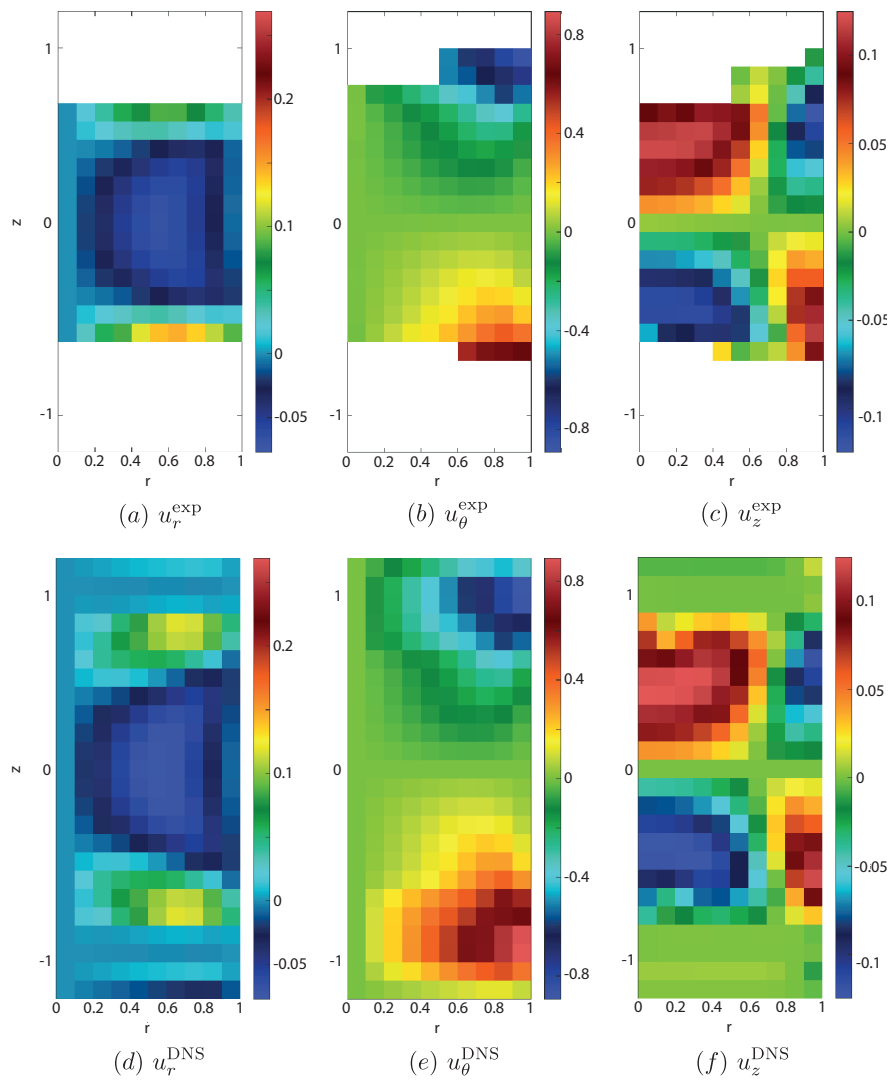


FIGURE 2.13 – Mesures expérimentales et numériques de l'écoulement CONTRA stationnaire et axisymétrique à  $Re = 10^2$ . (a)-(d) composante radiale  $u_r$ , (b)-(e) composante azimutale  $u_\theta$ , (c)-(f) composante verticale  $u_z$ .

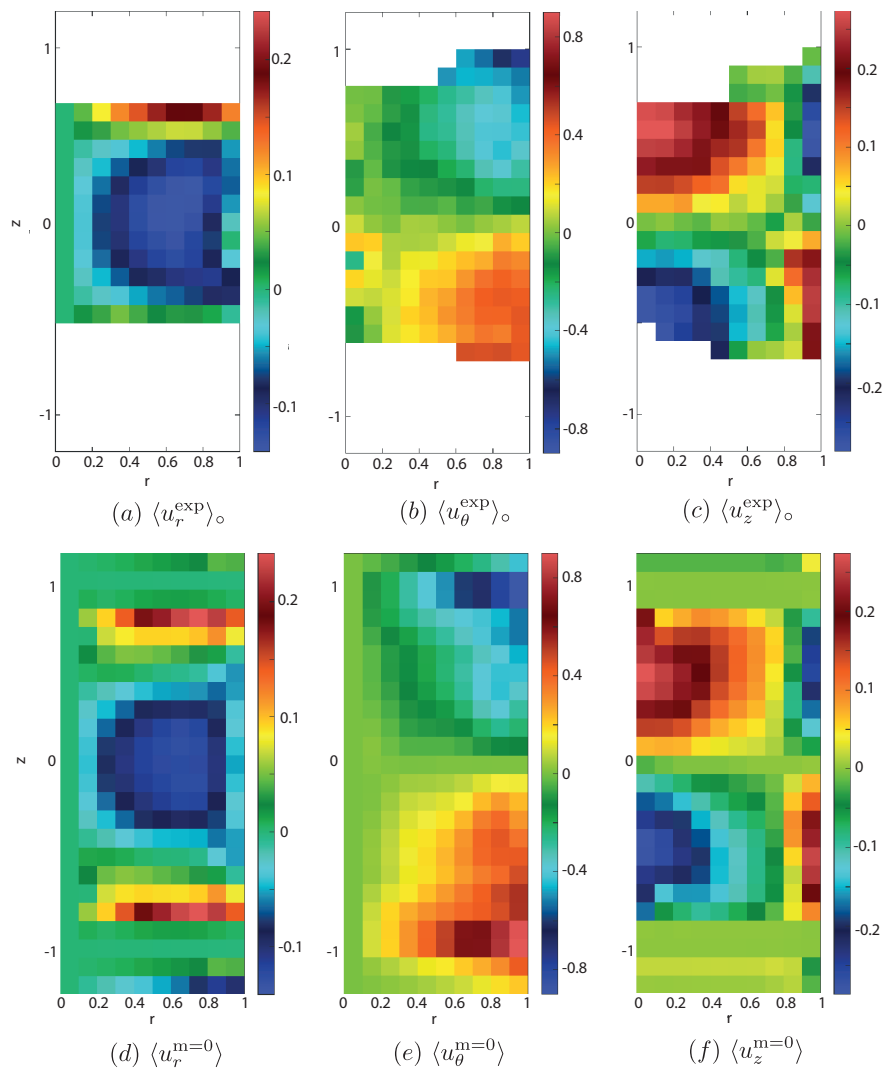


FIGURE 2.14 – Écoulement CONTRA à  $\text{Re} = 10^3$  moyenné en temps expérimental et numérique (mode  $m = 0$ ) : (a)-(d) composante radiale  $u_r$ , (b)-(e) composante azimutale  $u_\theta$ , (c)-(f) composante verticale  $u_z$ .

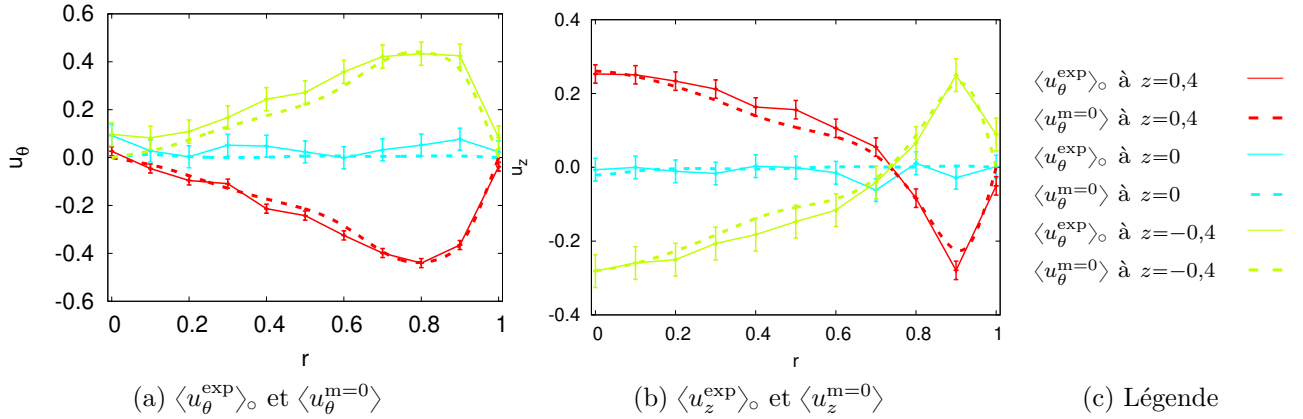


FIGURE 2.15 – Profils radiaux CONTRA à  $Re = 10^3$  des composantes  $u_\theta$  et  $u_z$  moyennées en temps pour différents  $z$ . Les données expérimentales  $\langle u^{\text{exp}} \rangle$  sont en lignes continues avec des barres d’erreurs et les données numériques  $\langle u^{\text{m}=0} \rangle$  sont en pointillés. La légende sera la même pour tous les profils radiaux jusqu’à 2.23.

### 2.5.1.2 Types d’écoulements à grands Reynolds

Décrivons maintenant les écoulements à grands nombres de Reynolds. Les écoulements expérimentaux présentés ici sont à  $Re = 3 \times 10^5$  et les simulations LES ont été menées à  $Re = 10^5$ . Cette légère différence n’impacte que peu les écoulements moyens à grande échelle que nous comparons. À ces nombres de Reynolds, l’écoulement est très turbulent. L’écoulement moyen en configuration CONTRA donne toujours lieu à une double cellule de recirculation respectant la symétrie  $\mathcal{R}_\pi$ , et cet écoulement ne dépend pas des conditions initiales. Pour la configuration ANTI, ce n’est pas le cas : en fonction des conditions initiales, l’écoulement moyen peut atteindre deux états différents : un état à deux cellules symétriques, similaire à l’écoulement CONTRA -modulo les différences montrées à  $Re = 10^3$ , et un état à une seule cellule que nous appelons l’état bifurqué. Cet état brise la symétrie  $\mathcal{R}_\pi$  et apparaît pour  $Re \geq 10^4$  ; nous le décrivons en détail plus loin.

**Écoulement CONTRA** Commençons par analyser l’écoulement CONTRA. La figure 2.17 compare les deux écoulements moyens numériques et expérimentaux à  $Re \sim 10^5$ . La simulation a redémarré d’un écoulement convergé à  $Re = 10^4$  et a fait 20 tours à  $Re = 10^5$ . Puisque les moyennes de tous les modes n’ont pas le temps de converger sur 20 tours, nous ne présentons que la composante axisymétrique du champ de vitesse correspondant à  $m = 0$ . Ce processus de moyenne correspond bien à l’opérateur expérimental  $\langle \cdot \rangle_\circ$ . On peut remarquer plusieurs différences d’imagerie :

- pour cette figure, les résolutions des images sont différentes, elles correspondent à la résolution de la SPIV pour les données expérimentales et à une visualisation directe sur le maillage éléments finis pour la simulation LES ;
- les mesures expérimentales contraintes par les bords s’arrêtent à  $r = 0,95$  et les bords présentent la couleur blanche pour absence de donnée, alors que la simulation numérique couvre tout le domaine et nous permet de voir une couche limite proche du bord en  $R = 1$  ;
- il n’y a pas de mesures expérimentales ni à l’intérieur ni derrière les turbines, mais ces dernières se voient bien dans les résultats de LES.

Les champs de vitesse moyennés sont en bon accord, tant au niveau des structures de recirculation que de l’intensité des vitesses mesurées.



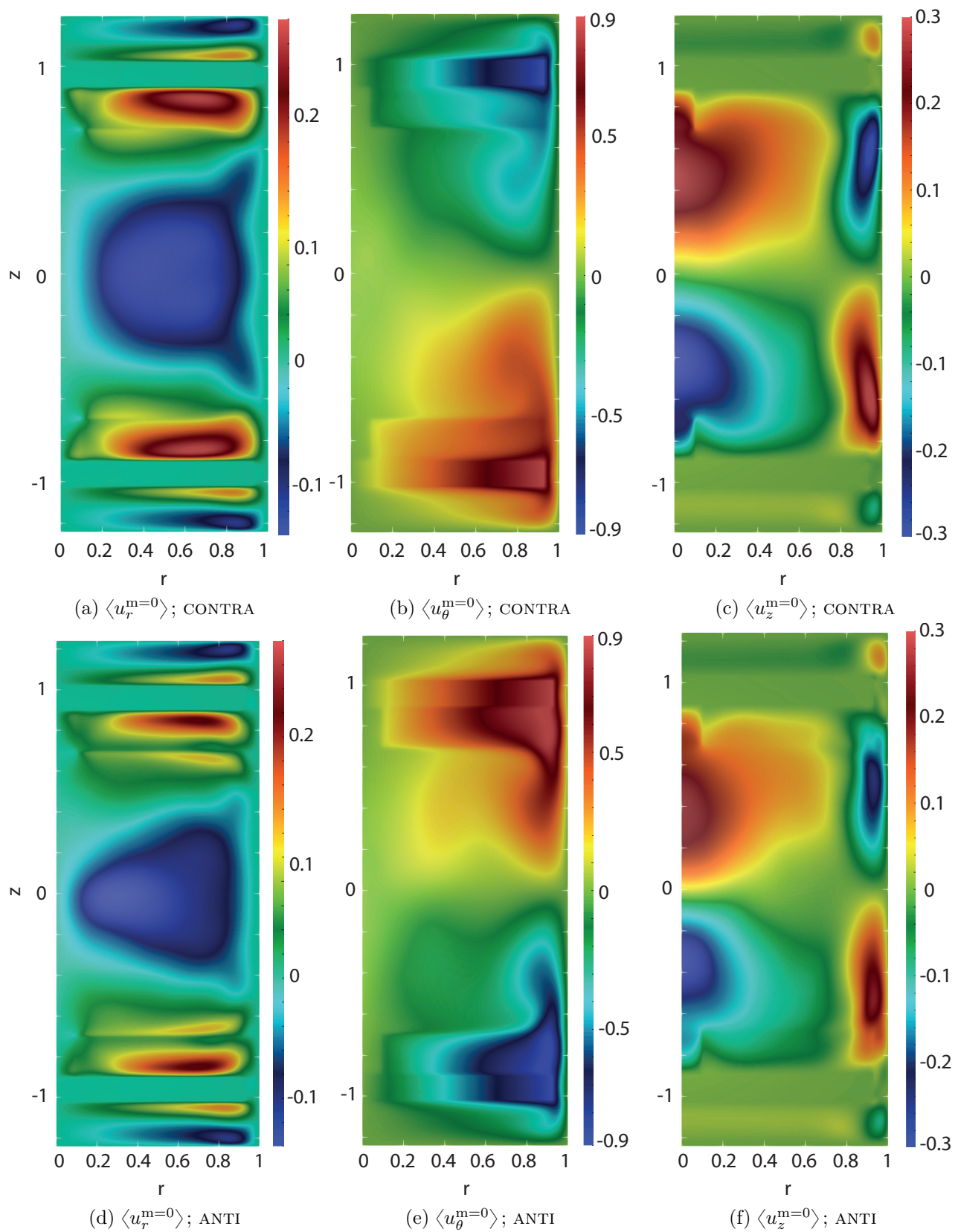


FIGURE 2.16 – Champs de vitesse numériques moyens pour le mode  $m = 0$  à  $\text{Re} = 10^3$  dans les sens CONTRA et ANTI.

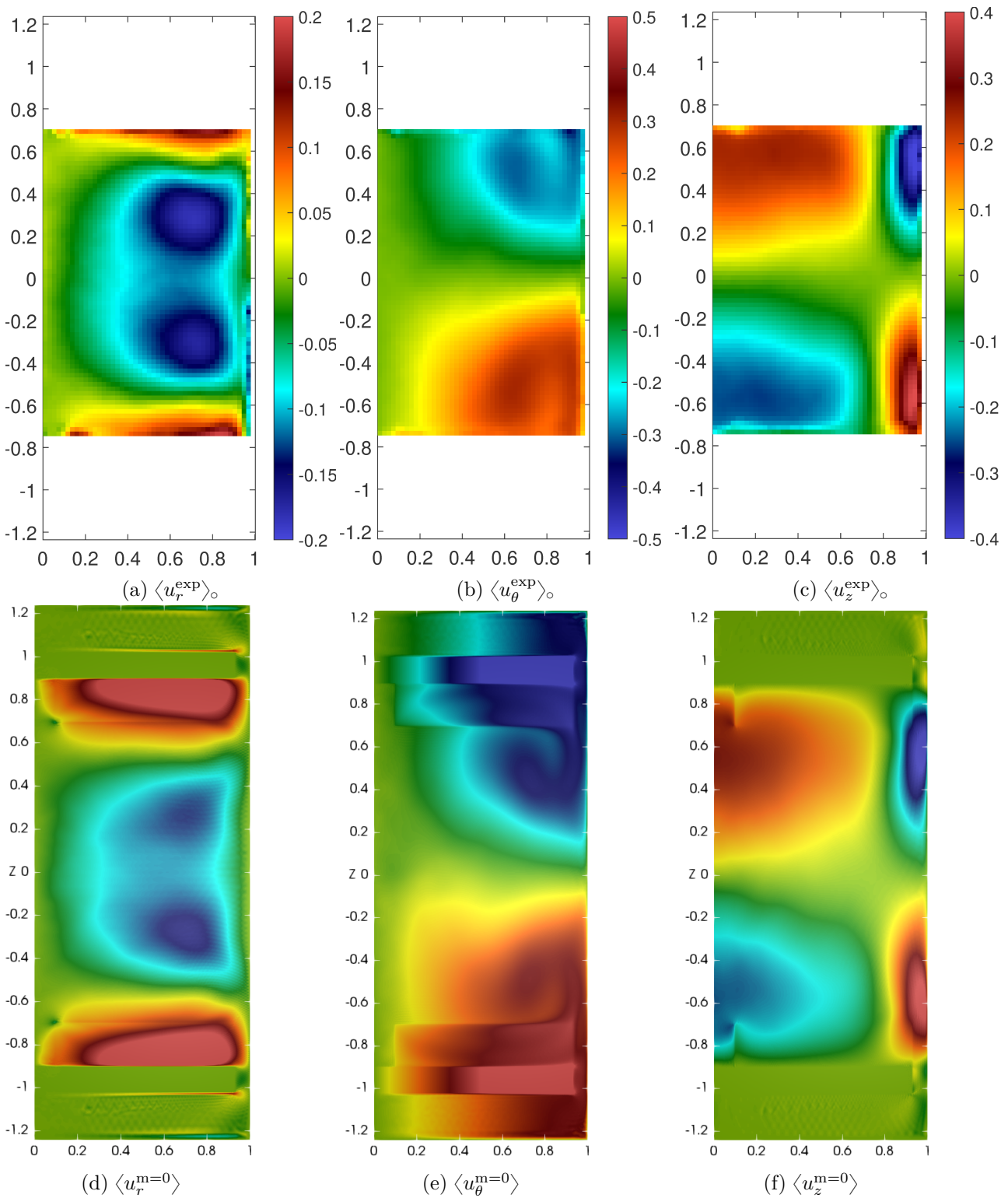


FIGURE 2.17 – Champs de vitesse moyenne en CONTRA :  $Re = 3 \times 10^5$  pour l'expérience ;  $Re = 10^5$  pour la simulation LES.

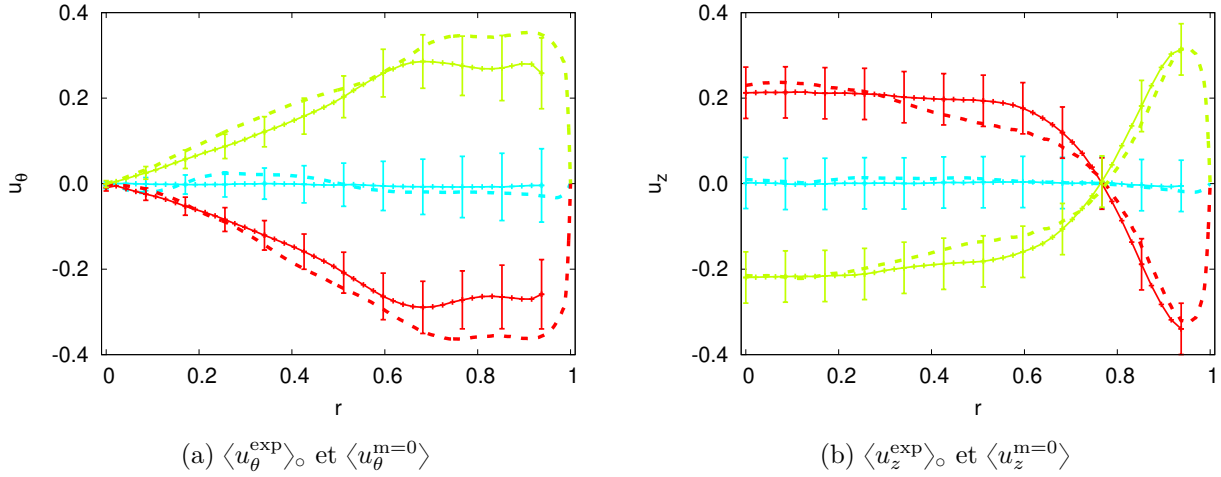


FIGURE 2.18 – Profils de vitesse moyenne pour  $u_\theta$  et  $u_z$  en configuration CONTRA : expérience à  $\text{Re} = 3 \times 10^5$  ligne continue pour  $\langle u^{\text{exp}} \rangle_\circ$ ; LES à  $\text{Re} = 10^5$  en pointillés pour  $\langle u^{\text{m}=0} \rangle$ . Légende définie à la figure 2.15c.

Comme pour le cas à  $\text{Re} = 10^3$ , nous avons aussi tracé les profils de vitesses à  $z$  constant pour  $z \in \{-0,4 ; 0 ; 0,4\}$  dans la figure 2.18. Les mesures SPIV sont faites dans une coupe méridienne complète et donnent accès à deux plans méridiens correspondant aux angles  $\theta = 0$  et  $\theta = \pi$ . Afin de comparer raisonnablement avec l'expérience, nous transformons le signal de mesure pour obtenir un signal sur un demi plan méridien, respectant la symétrie  $\mathcal{R}_\pi$  selon les formules suivantes

$$u_\theta^{\text{exp}}(r, z) = \frac{1}{2}(u_\theta(r, 0, z) - u_\theta(r, \pi, z)), \quad (2.5.1)$$

$$u_z^{\text{exp}}(r, z) = \frac{1}{2}(u_z(r, 0, z) + u_z(r, \pi, z)). \quad (2.5.2)$$

Les séries de mesures sont dans ce cas assez longues pour évaluer des barres d'erreurs à partir de la variance du signal. Ce sera aussi le cas pour les figures de profil 2.21 et 2.23. Les profils de vitesse moyenne coïncident dans la limite des barres d'erreur, ce qui nous conforte dans l'idée que l'écoulement moyen n'est pas impacté par le facteur trois entre les nombres de Reynolds numérique et expérimental.

Les profils sont aussi similaires à ceux obtenus pour  $\text{Re} = 10^3$  dans la figure 2.15 et présentent les extrema locaux de  $|u(\theta)|$  toujours proches de  $r = 0,8$  pour  $z = \pm 0,4$  ainsi d'un changement de signe de  $u_z$  proche de  $r \simeq 0,75$  pour  $z = \pm 0,4$ .

La figure 2.19 présente des résultats de champ de vitesse instantanée dans un plan cartésien contenant l'axe du cylindre. On y voit bien le caractère turbulent de l'écoulement. Bien qu'il soit normal que deux mesures instantanées ne se correspondent pas, on retrouve des structures similaires par leurs formes et leurs amplitudes.

**Écoulement ANTI symétrique** La figure 2.20 présente le champ de vitesse moyenne dans l'état ANTI symétrique. Comme mentionné plus tôt, la réalisation de cet écoulement dépend des conditions initiales. Pour obtenir cet écoulement de manière expérimentale à  $\text{Re} = 3 \times 10^5$  la vitesse de rotation des turbines est augmentée progressivement en conservant toujours  $f_1 = -f_2$ . De manière similaire, pour obtenir l'écoulement numérique, le nombre de Reynolds a été augmenté par paliers en maintenant  $f_1 = -f_2$ . Avec une telle préparation, le fluide conserve la symétrie  $\mathcal{R}_\pi$  et s'organise selon deux cellules visibles dans 2.20c et 2.20f. L'écoulement est aussi notablement différent du CONTRA : on peut voir

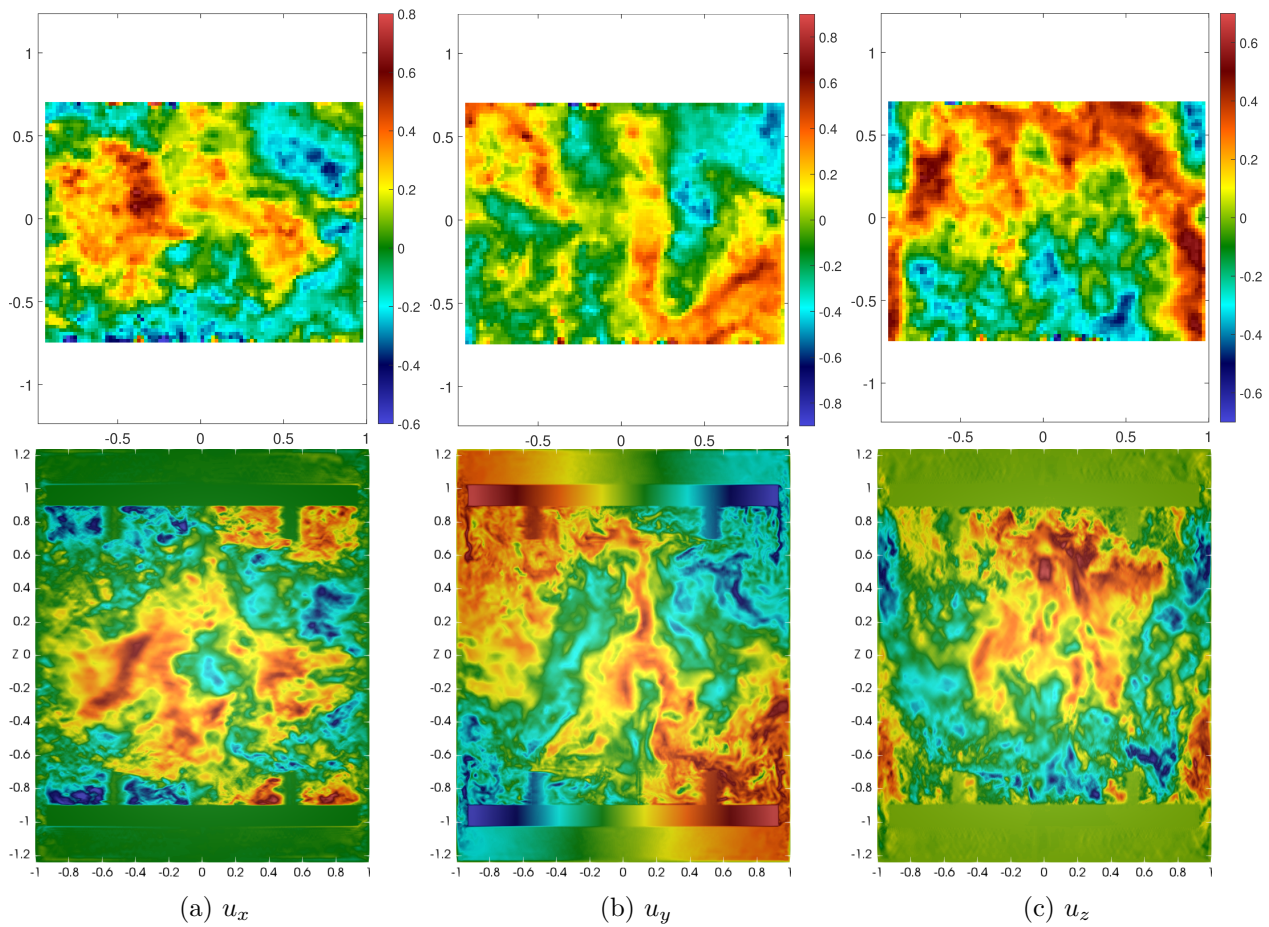


FIGURE 2.19 – Vitesses numériques et expérimentales instantanées en CONTRA dans un plan contenant l'axe. Première ligne : mesures expérimentales à  $Re = 3 \times 10^5$  ; seconde ligne : simulation LES à  $Re = 10^5$ . Les barres de couleurs sont valables pour les deux lignes.

en comparant les figures 2.20a et 2.20d à 2.17a et 2.17d que la forme et l'intensité des zones  $u_r < 0$  sont différentes. C'est aussi le cas pour la composante azimutale : la gamme de la barre de couleurs pour 2.20b et 2.20e est beaucoup plus importante que celle de 2.17b et 2.17e, en revanche les valeurs de  $u_r$  et  $u_z$  sont plus faibles. On remarque aussi que les grandes valeurs de  $u_\theta$  sont concentrées proche de la paroi pour le cas ANTI.

La figure 2.21 présente les profils de vitesse moyenne selon les mêmes modalités que 2.18. Encore une fois, simulations LES et expériences s'accordent dans la limite des barres d'erreur. Cette fois-ci, les profils à  $z = \pm 0,4$  montrent un maximum de vitesse azimutale vers  $r \simeq 0,95$  qui n'est pas complètement résolu par la SPIV. Les amplitudes de  $u_\theta$  sont deux fois plus fortes que pour le cas CONTRA ce qui confirme les observations faites concernant la figure 2.20. Le changement de signe de  $u_z$  intervient toujours vers  $r \simeq 0,75$ .

La reproduction à l'aide de la modélisation LES des deux cas symétriques est donc une réussite.

**Écoulement ANTI bifurqué** Regardons maintenant l'écoulement ANTI bifurqué. Cette solution stationnaire s'obtient en préparant l'écoulement de manière non symétrique. Le protocole expérimental prévoit de ne pas augmenter les fréquences de rotation des deux turbines simultanément. Un léger biais est maintenu pour favoriser une des deux turbines, celle du bas par exemple. Au bout d'un moment, l'écoulement change de structure, la turbine la moins rapide décroche comme une aile d'avion et l'écoulement tourne alors dans le sens de la turbine du bas, on dit qu'il a bifurqué. Cet écoulement reste bifurqué même si l'on revient dans une contra rotation exacte à  $f_1 = -f_2$ . Dans cette situation, les conditions aux bords respectent la symétrie  $\mathcal{R}_\pi$  mais l'écoulement la brise. Cet état découvert expérimentalement par Ravelet, Marie, Chiffaudel, et Daviaud [121] (2004) est particulièrement difficile à reproduire car il n'existe qu'à très hauts Reynolds  $Re \geq 10^4$ , donc nécessite un modèle LES, et est fortement sensible aux conditions limites. Pour l'obtenir numériquement, nous partons de l'écoulement symétrique à  $Re = 10^4$ , puis réalisons quinze tours à  $Re = 5 \times 10^4$  en réduisant la vitesse de la turbine du bas de telle sorte que  $f_1 = -\frac{1}{2}f_2$ , puis nous arrêtons la turbine du bas pour dix tours jusqu'à ce qu'on observe une unique cellule de recirculation dans l'écoulement. Ensuite on redémarre progressivement sur cinq tours la turbine du haut pour revenir à  $f_1 = -f_2$ , avant d'augmenter le nombre de Reynolds jusqu'à  $10^5$  pour une simulation de douze tours. Ce procédé maintient la solution numérique dans l'écoulement bifurqué.

La figure 2.22 présente les écoulements moyens obtenus expérimentalement à  $Re = 3 \times 10^5$  et par la LES à  $Re = 10^5$ . On voit bien que l'écoulement se compose d'une unique cellule de recirculation tournant comme la turbine du bas, ce qui rend cet écoulement très différent du cas ANTI symétrique. Les écoulements moyens expérimentaux et de simulation correspondent bien. On retrouve la cellule de recirculation unique dans les profils de la figure 2.23. Les profils de  $u_\theta$  ne coïncident pas parfaitement mais montrent bien des valeurs de rotation négatives pour les trois valeurs de  $z \in \{-0,4 ; 0 ; 0,4\}$ . L'accord pour la composante verticale de la vitesse  $u_z$  est meilleur, et les profils montrent deux panaches de fluide, un montant, l'autre descendant, pour les trois cotes. Les tendances obtenues montrent que la turbine du dessous l'emporte sur celle du dessus, brisant la symétrie des conditions aux bords.

Il semble que, pour des conditions aux limites identiques, l'équation de Navier-Stokes (2.1.3) admette plusieurs solutions : la solution symétrique et les solutions bifurquées haute et basse.

### 2.5.1.3 Puissance dissipée en fonction du Reynolds

Après avoir comparé les profils de vitesse moyenne, nous nous intéressons à la puissance dissipée par l'écoulement selon les différents cas. Avec les conventions choisies, la puissance adimensionnée (2.4.9) correspond au couple moyen (2.4.10), nous pourrions donc parler de l'un ou l'autre. La figure



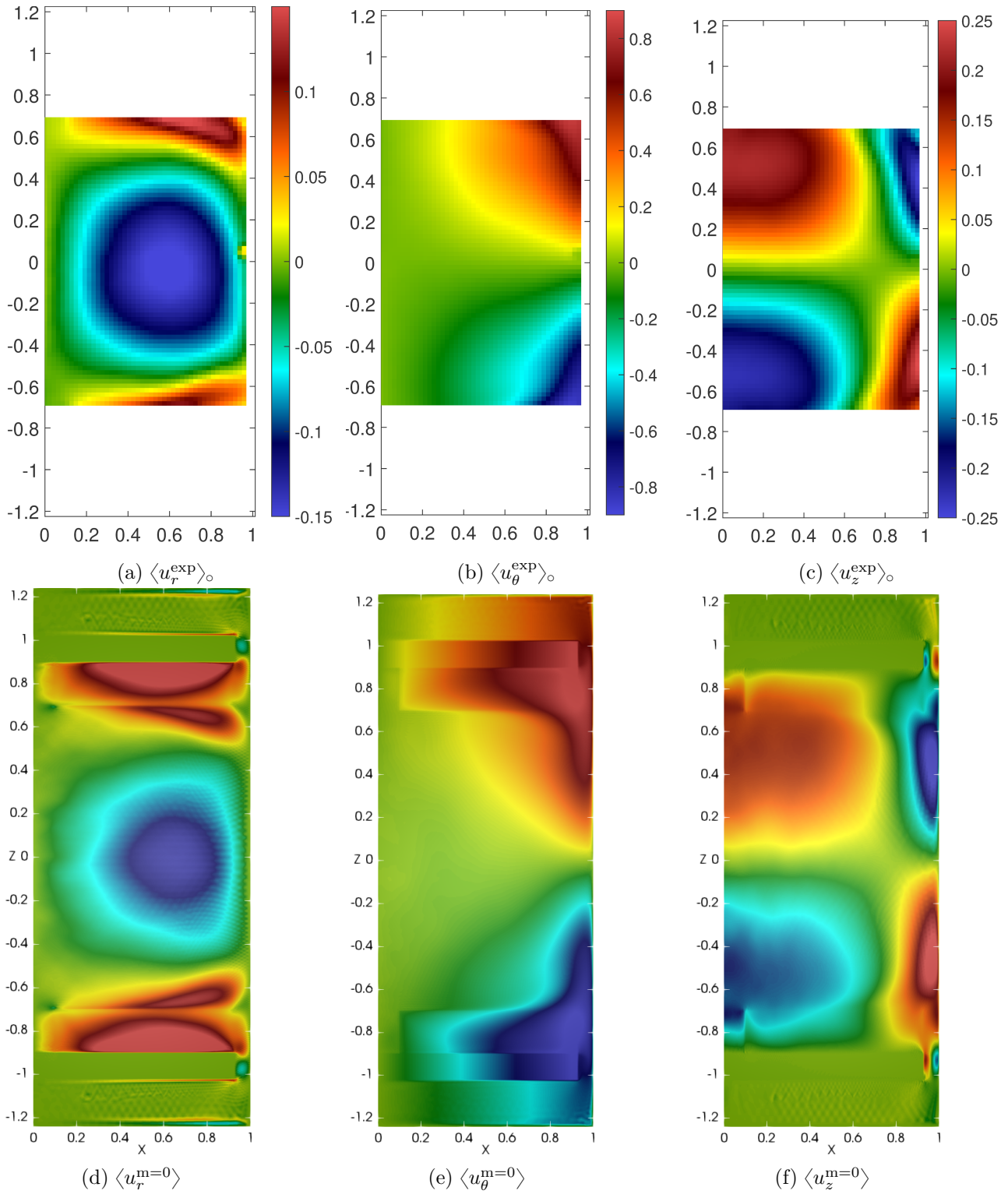


FIGURE 2.20 – Champs de vitesse moyenne pour l'ANTI symétrique (expériences à  $\text{Re} = 3 \times 10^5$  et simulations à  $\text{Re} = 10^5$ ).

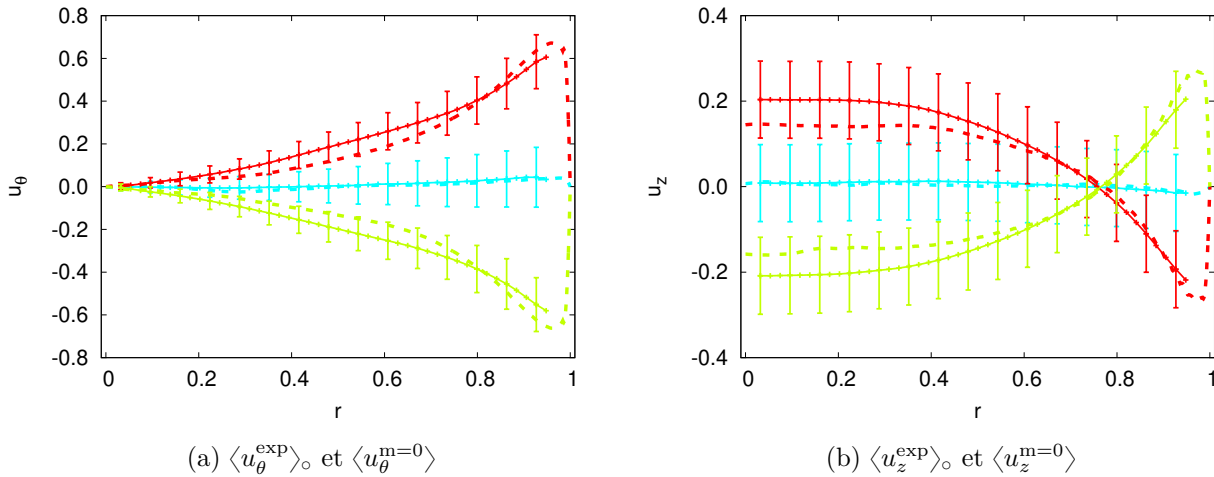


FIGURE 2.21 – Profils de vitesse moyenne pour  $u_\theta$  et  $u_z$  en configuration ANTI symétrique. Expériences :  $\langle u^{\text{exp}} \rangle_\circ$  à  $\text{Re} = 3 \times 10^5$  et simulations à  $\langle u^{m=0} \rangle$  à  $\text{Re} = 10^5$ . Légende identique à celle de 2.15c.

2.24 recense les valeurs des couples pour plusieurs campagnes numériques et expérimentales pour des valeurs de Reynolds dans une très grande gamme :  $\text{Re} \in [10, 10^6]$ . Les points présentent des mesures réalisées avec les turbines TM87 présentées dans 2.10, mais aussi avec des TM60 comportant seize pales au lieu de huit. Les différentes couleurs correspondent aux types d'écoulements présentés dans la légende. Jusqu'à  $\text{Re} = 4 \times 10^2$  les différents écoulements ont la même puissance qui décroît comme  $\text{Re}^{-1}$ . Pour  $\text{Re} > 4 \times 10^2$  le couple de l'écoulement CONTRA continue à décroître pour atteindre une valeur asymptotique de  $K_{p,\text{CONTRA}}^\infty = 0,05$ . L'écoulement ANTI symétrique présente un minimum de couple dans la gamme  $\text{Re} \in [5 \times 10^2, 5 \times 10^3]$  puis augmente légèrement pour se stabiliser à  $K_{p,\text{ANTI sym}}^\infty = 0,14$ . La branche correspondant à l'écoulement ANTI bifurqué apparaît à  $\text{Re} \sim 10^4$  et nécessite un couple moyen très fort. La valeur asymptotique du couple pour l'écoulement bifurqué est  $K_{p,\text{ANTI bif}}^\infty = 0,56$ . Cet écoulement dissipe beaucoup plus d'énergie pour maintenir les forts gradients au voisinage de la turbine qui décroche. Les valeurs asymptotiques ont été mesurées dans des écoulements très turbulents avec du sodium liquide  $\text{Re} \sim 10^7$  dans l'installation VKS à Cadarache et avec de l'Hélium 4 superfluide  $\text{Re} \sim 10^8$  refroidi à 2,17K dans l'installation SHREK à Grenoble [134, 37] (2013, 2019). La décroissance en  $\text{Re}^{-1}$  suivie d'un plateau correspond aux prédictions de Doering et Foias [35] (2002) pour un écoulement turbulent.

Les différentes mesures coïncident à moins de 10% sur l'ensemble de la gamme de Reynolds. De plus l'obtention des trois types d'écoulements à  $\text{Re} = 10^5$  avec les bonnes valeurs de couples est une réussite notoire. Cela confirme les capacités de la modélisation LES utilisée non seulement à rendre compte d'un écoulement turbulent complexe en présence de parois mais aussi à dissiper la bonne puissance tout en stabilisant le calcul numérique.

#### 2.5.1.4 Spectres d'énergie

Afin d'analyser les différentes échelles des simulations LES, nous comparons maintenant les spectres d'énergie à  $\text{Re} = 10^5$ . Ils peuvent être comparés à ceux présents dans la littérature [37, 122] (2019, 2008) et permettent de confirmer la robustesse du modèle.

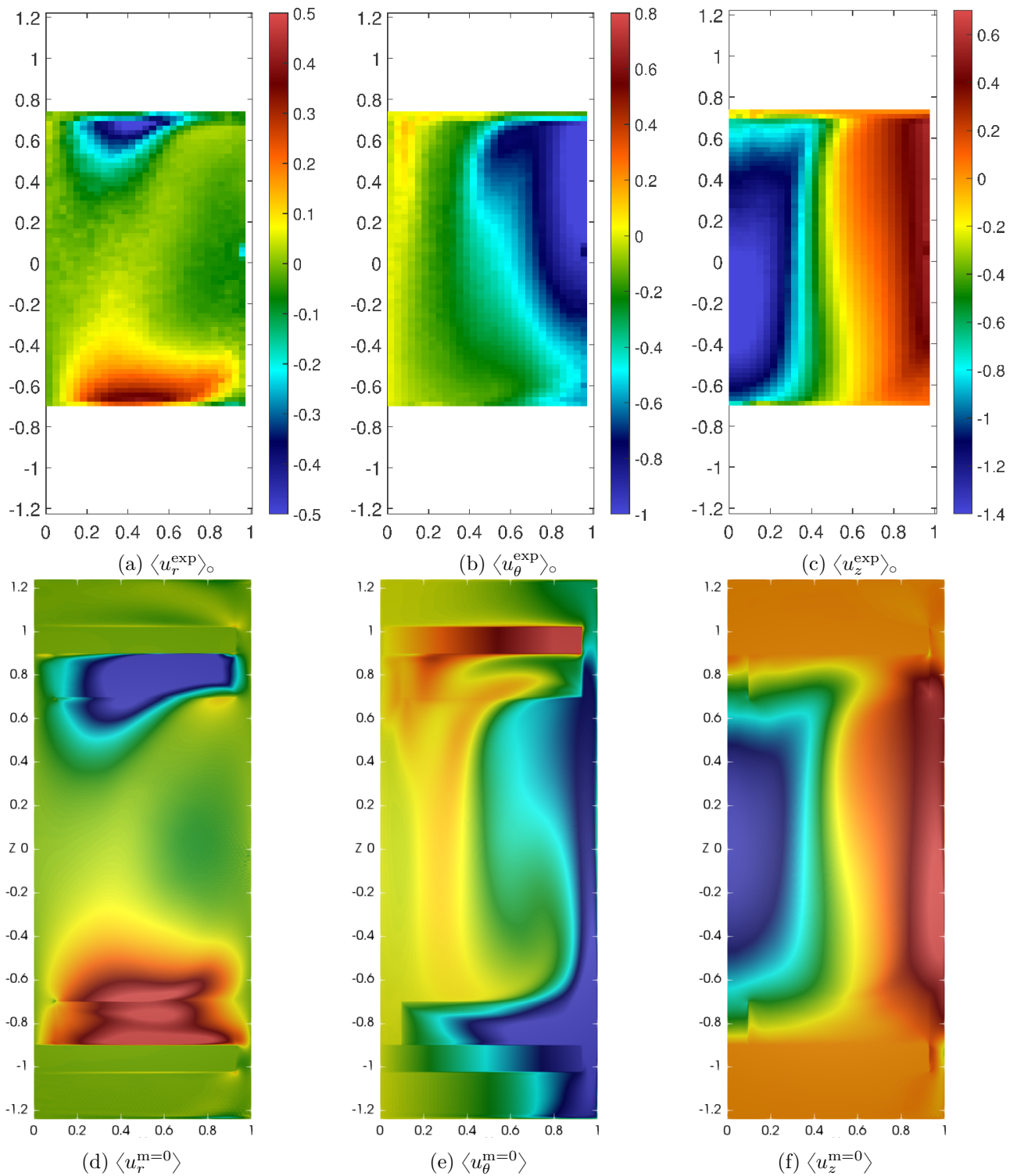


FIGURE 2.22 – Champs de vitesse moyenne pour l'ANTI bifurqué (expériences à  $Re = 3 \times 10^5$  et simulations à  $Re = 10^5$ ).



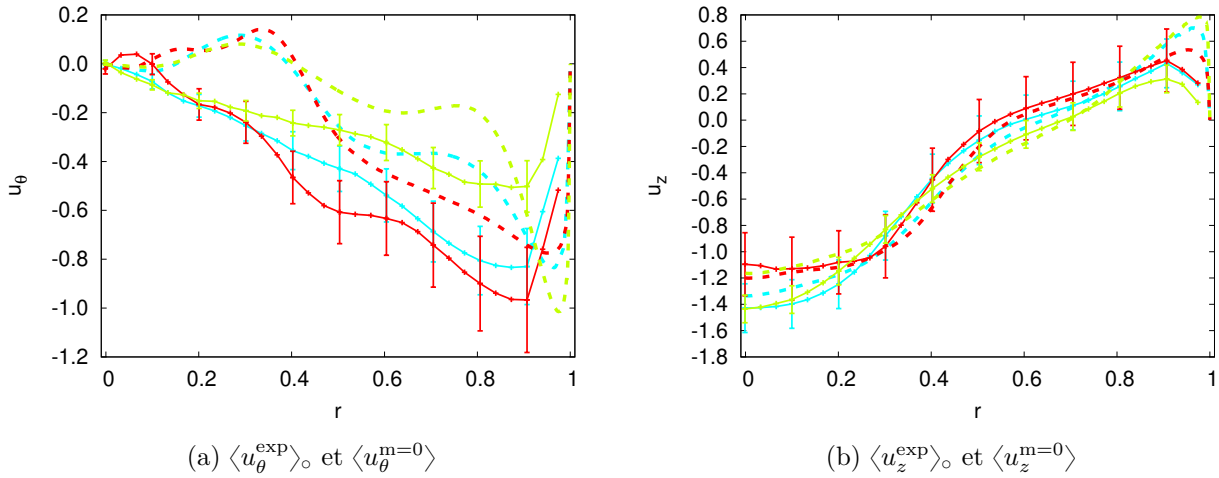


FIGURE 2.23 – Profils de vitesse moyenne pour  $u_\theta$  et  $u_z$  dans la configuration ANTI bifurqué. Expériences :  $\langle u^{\text{exp}} \rangle_\circ$  à  $\text{Re} = 3 \times 10^5$  et simulations à  $\langle u^{\text{m}=0} \rangle$  à  $\text{Re} = 10^5$ . Légende identique à celle de 2.15c.

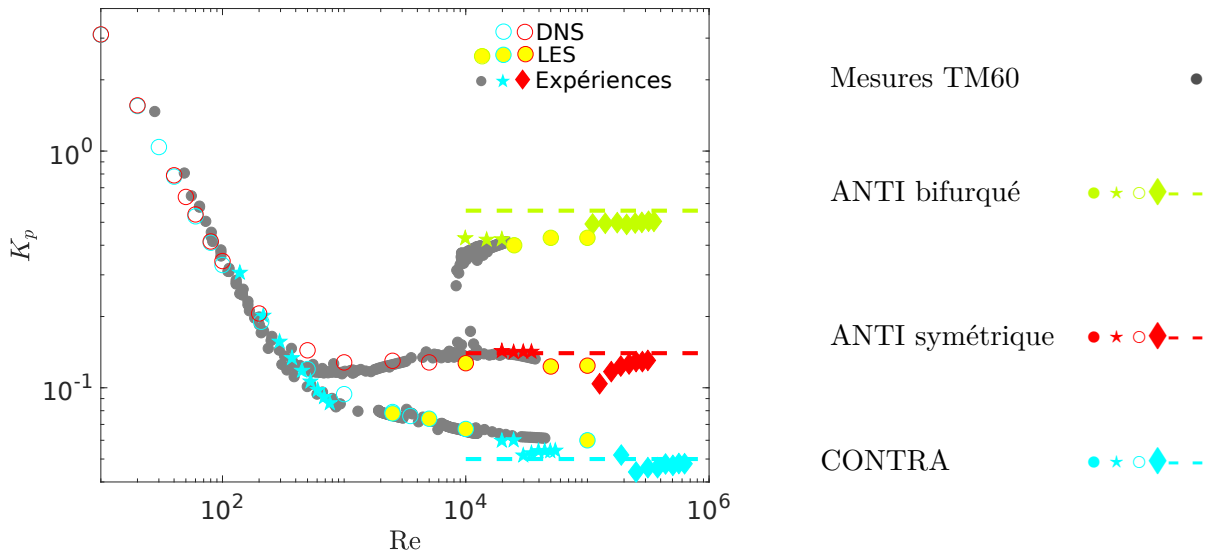


FIGURE 2.24 – Couple adimensionné  $K_p$  en fonction du nombre de Reynolds  $\text{Re}$  pour différents forçages. Les grands cercles (remplis en jaune pour la LES) correspondent à des simulations numériques; les autres symboles sont des mesures expérimentales. Tous les points sauf les points gris sont obtenus avec des turbines TM87, et ces points grisés utilisent des turbines TM60 (avec seize pales au lieu de huit, décrites par Ravelet, Chiffaudel, Daviaud, et Léorat [120] (2005)). Les pointillés correspondent à des asymptotes  $\text{Re} \rightarrow \infty$  mesurées dans du sodium liquide  $\text{Re} \sim 10^7$  et de l'Hélium 4 superfluide.

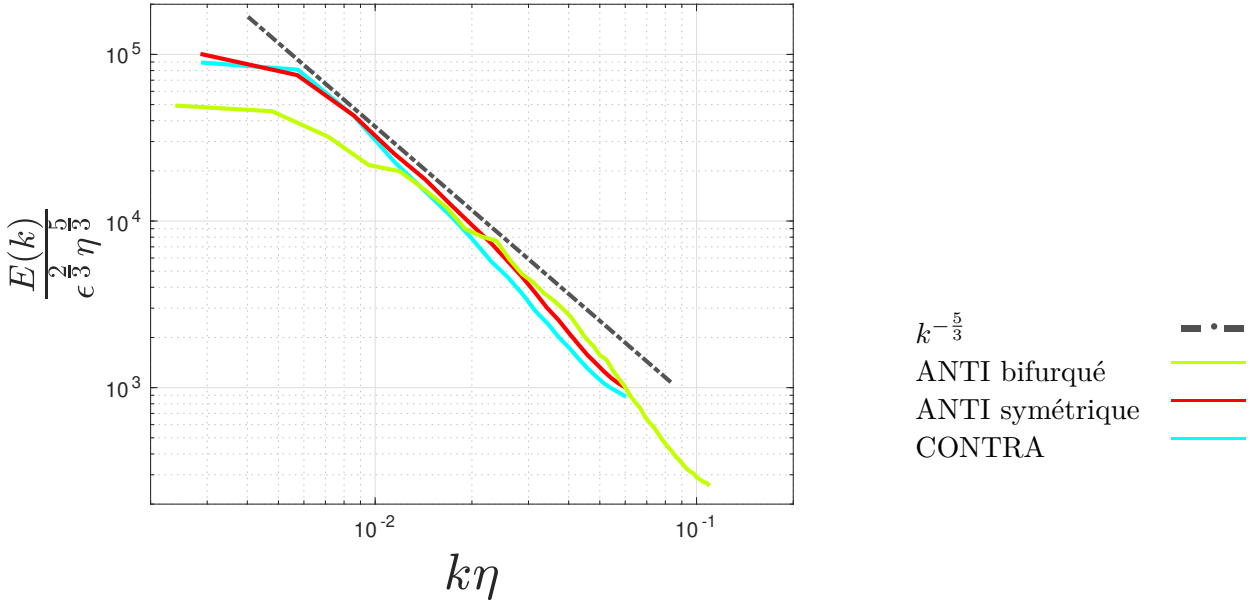


FIGURE 2.25 – Spectre spatial d'énergie  $E(k)$  en fonction du nombre d'onde  $k$  pour les trois écoulements CONTRA, ANTI symétrique et ANTI bifurqué à  $\text{Re} = 10^5$ .

**Spectre spatial** Dans le cadre de la turbulence tridimensionnelle périodique, il est courant d'étudier le spectre d'énergie

$$E(\mathbf{k}) = \left\langle \int_{\mathbf{x}, t} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) d\mathbf{r} \right\rangle. \quad (2.5.3)$$

Pour des écoulements isotropes,  $E(\mathbf{k})$  ne dépend que de la norme  $\|\mathbf{k}\|$  et l'on étudie alors

$$E(k) = \langle E(\mathbf{k}) \rangle_{\|\mathbf{k}\|=k}. \quad (2.5.4)$$

Nous utilisons les résultats LES pour calculer  $E(k)$  à partir du cube unitaire centré au milieu du cylindre  $(x, y, z) \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^3$ , et nous moyennons les résultats sur plusieurs champs instantanés. La théorie prévoit que  $E(k)$  doit varier comme  $k^{-\frac{5}{3}}$  sous réserve des hypothèses d'homogénéité et d'isotropie. Dans la géométrie von Kármán, Dubrulle [37] (2019) prévoit que le couple varie selon la loi d'échelle suivante :

$$\frac{E(k)}{\varepsilon^{\frac{2}{3}} \eta^{\frac{5}{3}}} = f(k\eta), \quad (2.5.5)$$

où  $\eta = (\text{Re}^3 \varepsilon)^{-1/4}$ . Nous vérifions cette loi d'échelle dans la figure 2.25. Hormis pour les petits nombres d'onde correspondant aux grandes échelles on trouve une fonction universelle variant en  $k^{-\frac{5}{3}}$  dans la gamme inertielle. On remarque que l'écoulement ANTI bifurqué est bien moins énergétique dans les petits nombres d'onde. Ceci s'explique par l'unique cellule de recirculation et la structure très différente de cet écoulement par rapport aux deux autres. Les pentes obtenues pour les courbes sont  $-1.7$  pour le CONTRA dans la gamme  $k\eta \in [3 \cdot 10^{-3}, 4 \cdot 10^{-2}]$ ;  $-1.6$  pour l'ANTI symétrique dans la gamme  $k\eta \in [3 \cdot 10^{-3}, 4 \cdot 10^{-2}]$ ; et  $-1.7$  pour le CONTRA dans la gamme  $k\eta \in [2 \cdot 10^{-3}, 1 \cdot 10^{-1}]$ . Ce résultat est compatible avec la prédiction  $-\frac{5}{3}$ .

**Spectres temporels** Outre les spectres spatiaux, il est aussi possible de calculer des spectres temporels à partir de mesures ponctuelles en un point  $\mathbf{x}_0 = (r = 0, 9; \theta = 0; z = 0)$ , comme l'ont fait

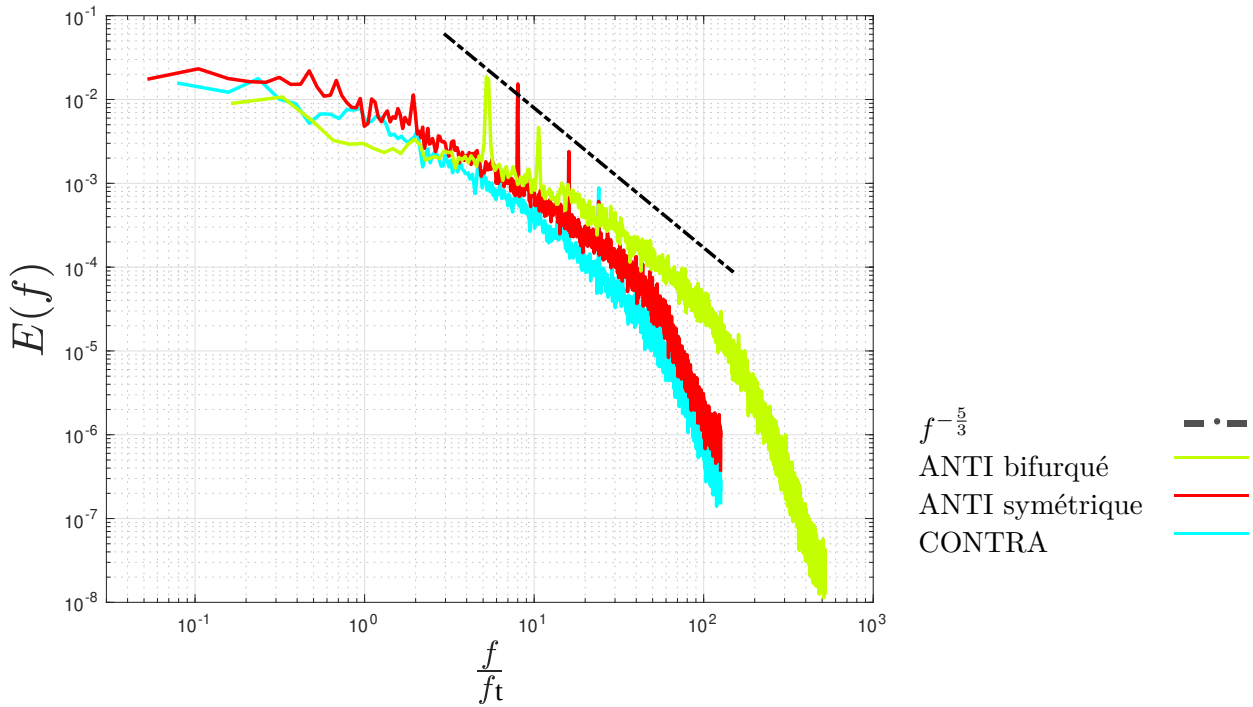


FIGURE 2.26 – Densité spectrale  $E(f)$  pour  $u_\theta(\mathbf{x}_0, t)$  dans les trois écoulements à  $Re = 10^5$ .  $f$  correspond à la fréquence de calcul et  $f_t$  est la fréquence de rotation de la turbine.

Ravelet, Chiffaudel, et Daviaud [122] (2008). On définit la densité spectrale temporelle par

$$E(f) = \left\langle \int u_\theta(\mathbf{x}_0, t) u_\theta(\mathbf{x}_0, t + s) \exp(2i\pi fs) ds \right\rangle. \quad (2.5.6)$$

Pour l'écoulement ANTI à  $Re \leq 6.5 \times 10^3$ , Ravelet, Chiffaudel, et Daviaud [122] (2008) ont observé une variation en  $f^{-1}$  pour les fréquences inférieures à la fréquence d'injection  $f_t$ , puis un spectre en loi de puissance  $f^{-5/3}$  dans la gamme inertielle ( $f \geq f_t$ ). La figure 2.26 présente les spectres temporels pour les trois écoulements à  $Re = 10^5$ . Selon la configuration, l'intégration temporelle couvre entre 10 et 20 tours de turbine.

On observe trois gammes dans ces spectres :

- une gamme de basse fréquence pour les écoulements CONTRA et ANTI symétrique correspondant à la couche de mélange équatoriale ;
- une gamme de fréquences inertielles turbulentes suivant la loi polynomiale  $f^{-5/3}$ , les valeurs des régressions donnent des pentes de  $-1.7$  pour le cas CONTRA pour  $f/f_t \in [1, 50]$ ,  $-1.5$  pour le cas ANTI symétrique pour  $f/f_t \in [1, 50]$  et  $-1.7$  pour le cas ANTI bifurqué pour  $f/f_t \in [6, 5, 125]$  ;
- une gamme visqueuse où  $E(f)$  décroît plus vite que dans la gamme inertielle.

On retrouve donc des gammes inertielles et visqueuses en accord avec les prévisions théoriques. En revanche, la gamme de pente  $f^{-1}$  explore des temps très longs et exige des séries temporelles trop longues pour être retrouvées ici.

### 2.5.2 Discussion sur le modèle LES

Dans cette partie, nous avons comparé des résultats expérimentaux à des simulations (DNS ou LES) d'un écoulement turbulent complexe avec des parois. Nous avons réussi à reproduire les différents types

d'écoulements qui avaient été observés expérimentalement : CONTRA, ANTI symétrique et ANTI bifurqué. Nous avons pu reproduire une solution bifurquée ne respectant plus la symétrie  $\mathcal{R}_\pi$  à très haut Reynolds grâce à une modélisation LES performante. La comparaison qualitative des écoulements moyens obtenus donne de bons résultats en dehors des bords de la zone de mesure expérimentale. Les mesures du couple nécessaire à l'écoulement moyen s'accordent sur une grande plage de nombres de Reynolds pour chacun des trois écoulements. Selon les critères retenus (topologie de l'écoulement et puissance dissipée) nous trouvons les comparaisons concluantes. L'analyse des spectres spatiaux et temporels des simulations à très grands Reynolds donne des résultats compatibles avec la loi des  $-\frac{5}{3}$  de Kolmogorov caractéristique des écoulements turbulents.

Cette étude montre aussi la fiabilité de la modélisation LES proposée. Elle reste performante même pour un écoulement non isotrope et dans une géométrie complexe. Les deux paramètres choisis  $(c_{\max}, c_\epsilon) = (1/8, 1)$  pour l'équation (2.2.35) donnent des résultats satisfaisants pour les trois types d'écoulement ce qui différencie cette modélisation d'autres comme le modèle de Smagorinsky [132] (1963) dont les paramètres doivent être ajustés en fonction de l'écoulement [86, 34] (2006, 2008). Cette modélisation est donc à la fois performante et pratique d'utilisation.

Cette méthode de simulation LES performante nous donne une première idée de correction des équations de Navier-Stokes. Dans le cas d'un écoulement très turbulent comme un océan par exemple, les observations sont toujours sous-résolues par rapport à la complexité de la structure calculée. Appliquer directement la modélisation classique est alors impossible puisque beaucoup d'information sur l'écoulement est perdue. La méthode proposée par Guermond et al. [57, 58, 59] (2006, 2011, 2011) montre qu'une viscosité effective, qui ajoute artificiellement de la dissipation lorsque le résidu de l'équation (2.2.34) est important, est efficace. Cette idée de corriger les défauts d'observation à petite échelle, par une dissipation supplémentaire va être un fil directeur que nous suivrons dans le reste de cette thèse.

## 2.6 Étude de rugosité et dissipation : campagne à hauteur variable

Dans la partie précédente, nous avons pu mettre en évidence une propriété bien connue des écoulements turbulents : dans la limite  $\text{Re} \rightarrow \infty$ , la dissipation d'énergie adimensionnée tend vers une constante (cf figure 2.24). Nous proposons ici d'étudier l'entraînement du fluide en fonction de la rugosité de l'objet tournant. Pour ce faire, nous avons mené une campagne de simulations numériques directes pour différentes turbines, qui varient légèrement de celles présentées dans la description 2.4. Si l'on conserve la valeur de  $h_{\text{disque}} = 0, 12R$ , nous faisons maintenant varier la valeur de  $h_{\text{pales}}$  afin de mieux comprendre l'influence de la géométrie sur la puissance injectée par l'écoulement. En l'absence de forçage volumique, la puissance de dissipation est le seul terme volumique de l'équation (2.1.11) et l'écoulement stationnaire est entretenu par les termes de bord. La table 2.26 évalue les différents termes de (2.1.11) dans la géométrie étudiée.

Le bilan d'énergie stationnaire de l'écoulement est donc le suivant :

$$\left\langle - \oint_{\Sigma_F} p \mathbf{u} \cdot d\mathbf{S} \right\rangle + \left\langle \frac{1}{\text{Re}} \oint_{\Sigma_F} \mathbf{u} \cdot (\nabla^S \mathbf{u} : d\mathbf{S}) \right\rangle - \left\langle \frac{2}{\text{Re}} \int_{\Omega_F} \nabla^S \mathbf{u} : \nabla^S \mathbf{u} d\tau \right\rangle = 0. \quad (2.6.1)$$

Le premier terme est un entraînement inertiel. La surface du disque supportant les pales ne contribue pas à l'intégrale puisque la non porosité du disque assure que  $\mathbf{u} \cdot d\mathbf{S}$  est nul au niveau du disque. En revanche, les pales se déplaçant à travers le fluide, elles contribuent bien à cette intégrale surfacique. Le deuxième correspond à un entraînement visqueux par diffusion de quantité de mouvement. La contribution principale à l'intégrale vient du disque. Ces deux premiers termes constituent la puissance

Terme	Interprétation	Commentaire
$dE/dt$	Variation temporelle	Nulle en stationnaire
$\oint_{\Sigma_F} p \mathbf{u} \cdot d\mathbf{S}$	Injection ou déplacement de fluide	Liée à la différence de pression entre l'avant et l'arrière d'une pale
$\frac{1}{\text{Re}} \oint_{\Sigma_F} \mathbf{u} \cdot (\nabla^S \mathbf{u} : d\mathbf{S})$	Diffusion quantité de mouvement	Contrainte aux parois
$\frac{2}{\text{Re}} \int_{\Omega_F} \nabla^S \mathbf{u} : \nabla^S \mathbf{u} d\tau$	Dissipation visqueuse	
$\oint_{\Omega_F} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} d\tau$	Travail volumique	Nul : pas de force extérieure
$\oint_{\Sigma_F} \frac{\mathbf{u}^2}{2} (\mathbf{u}_{\Sigma_F} \cdot d\mathbf{S})$	Déplacement volume considéré	Nul : le déplacement des turbines substitue du fluide à la vitesse imposée par autant de fluide à la même vitesse.

TABLE 2.26 – Analyse des termes de variation d'énergie cinétique dans un écoulement de von Kármán

injectée  $P^*$  (2.4.8). Le dernier terme correspond à la dissipation visqueuse, qui est égale à  $P^*$  en stationnaire. Nous nous intéressons ici tout autant à la structure de l'écoulement qu'à la puissance nécessaire à son maintien. Les nombres de Reynolds explorés nous permettent aussi de caractériser la transition vers un écoulement turbulent.

Pour toute cette partie, un nouveau nombre de Reynolds dépendant du rapport de forme des pales est défini par la formule suivante :

$$\text{Re}_h = \text{Re} \frac{h}{R} = \frac{2\pi f_t h R}{\nu}. \quad (2.6.2)$$

Pour  $h = 0$ , on ne peut pas définir un nombre de Reynolds non trivial dépendant du rapport de forme. L'entraînement du fluide par effets visqueux nous permet néanmoins de concevoir une hauteur effective  $h_{\text{eff}}$  correspondant à la taille de la couche limite visqueuse que nous définirons plus loin par l'équation (2.6.10).

$$\text{Re}_{h=0} = \text{Re} \frac{h_{\text{eff}}}{R} = \frac{2\pi f_t h_{\text{eff}} R}{\nu}. \quad (2.6.3)$$

### 2.6.1 Description

La campagne de simulations utilise des maillages éléments finis  $\mathbb{P}_2$  pour la discrétisation  $(r, z)$ . Des exemples de maillages sont présentés dans la figure 2.11. Pour  $h_{\text{pales}} \neq 0$  nous utilisons des maillages similaires à celui présenté en 2.11a. Les turbines sont mises en valeur par les couleurs : gris clair pour les disques et gris foncé pour les zones où sont les pales. Afin d'optimiser les performances de la méthode de pénalisation, nous n'utilisons que des maillages parfaitement alignés avec la géométrie de l'écoulement : les frontières de ces zones ne traversent aucun élément fini. Le cas  $h_{\text{pales}} = 0$  est présenté dans la figure 2.11b. Ici les obstacles ne se déplacent pas à travers le fluide donc l'appel à la méthode de pénalisation 2.2.4 n'est pas nécessaire. La rotation des disques est imposée comme condition aux bords sur les nœuds à l'interface avec les disques. La résolution des différentes zones dépend de la hauteur de pales  $h_{\text{pales}}$  et du nombre de Reynolds choisi. Nous veillons à ce que la résolution des turbines soit au moins inférieure à  $h_{\text{pales}}$  et que la résolution soit assez fine pour le nombre de Reynolds choisi. La table 2.27 présente les caractéristiques des maillages utilisés pour les différentes configurations. La résolution angulaire dépend elle aussi de la configuration et sera précisée pour chaque cas.

Pour  $h_{\text{pales}} \neq 0$ , nous utilisons les turbines TM87 présentées à la figure 2.10. Il y a donc encore deux sens de rotation possibles : CONTRA et ANTI. Afin d'étudier de manière spécifique l'impact de

Maillage	$h_{\text{pales}}/R$	Résolution turbine	Résolution fluide	Gamme de Reynolds
A	0,2	0,02	0,02	$\text{Re} \in [10, 100]$
B	0,2	0,01	0,01	$\text{Re} \in [200, 2500]$
C	0,1	0,025	0,05	$\text{Re} \in [10, 100]$
D	0,1	0,01	0,01	$\text{Re} \in [200, 2500]$
E	0,05	0,025	0,05	$\text{Re} \in [10, 100]$
F	0,05	0,01	0,01	$\text{Re} \in [200, 2500]$
G	0,025	0,01	0,05	$\text{Re} \in [10, 100]$
H	0,025	0,01	0,01	$\text{Re} \in [200, 2500]$
I	0,0125	0,01	0,05	$\text{Re} \in [10, 100]$
J	0,0125	0,01	0,01	$\text{Re} \in [200, 2500]$
K	0	$\emptyset$	0,01	$\text{Re} \in [10, 2500]$

TABLE 2.27 – Résolution des maillages utilisés pour différentes hauteur de pales et différents Reynolds.

la courbure, nous définissons un couple moyen symétrique :

$$K_p^+(h) = \frac{K_p^{\text{ANTI}}(h) + K_p^{\text{CONTRA}}(h)}{2}, \quad (2.6.4)$$

La partie symétrique permet de s'affranchir de la courbure.

Le fonctionnement du code SFEMaNS nous permet de suivre très facilement la structure de l'écoulement et la répartition angulaire de l'énergie cinétique. Nous étudions donc l'énergie cinétique de chaque mode de Fourier :

$$E_C^m(t) = \int_{(r,z) \in \Omega_0} \frac{\pi}{2} \left( (\mathbf{u}^{m,\cos}(t))^2 + (\mathbf{u}^{m,\sin}(t))^2 \right) r dr dz, \quad \text{pour } m \neq 0, \quad (2.6.5)$$

et

$$E_C^0(t) = \int_{(r,z) \in \Omega_0} \pi (\mathbf{u}^{0,\cos}(t))^2 r dr dz, \quad \text{pour } m = 0. \quad (2.6.6)$$

L'identité de Parseval nous assure que  $E(t) = \sum_{m=0}^M E_C^m(t)$  et cette décomposition nous informe sur la répartition de l'énergie cinétique entre chaque mode.

### 2.6.2 Structure de l'écoulement

Avec ou sans pales, l'écoulement laminaire est axisymétrique et stationnaire. Ensuite, lorsque l'on augmente le nombre de Reynolds, des composantes non axisymétriques émergent à des seuils dépendant des conditions de forçage. Après une phase transitoire, l'écoulement se stabilise dans une configuration stationnaire non axisymétrique. Enfin, à encore plus haut Reynolds, l'écoulement devient non stationnaire. Ce comportement général et les seuils d'apparition des composantes non axisymétriques ont été étudiés par Nore, Tuckerman, Daube, et Xin, Nore, Tartar, Daube, et Tuckerman, Nore et al. [105, 106, 107] (2003, 2004, 2006) pour des disques lisses.

Pour toutes les hauteurs, trois cas de figure se présentent en fonction du nombre de Reynolds étudié.

Pour les nombres de Reynolds faibles, jusqu'à une valeur critique  $\text{Re}_c^{\text{axi}} \simeq 350$  qui dépend de la hauteur des pales, l'écoulement est stationnaire et axisymétrique (SA). On retrouve simplement la trace de la décomposition en série de Fourier des pales. On a alors  $E_C^{m=0} \sim 1$ ,  $E_C^m \propto m^{-2}$  pour  $m \in 8\mathbb{N}$ , et  $E_C^{m \in \mathbb{N} \setminus 8\mathbb{N}} = 0$  sinon.

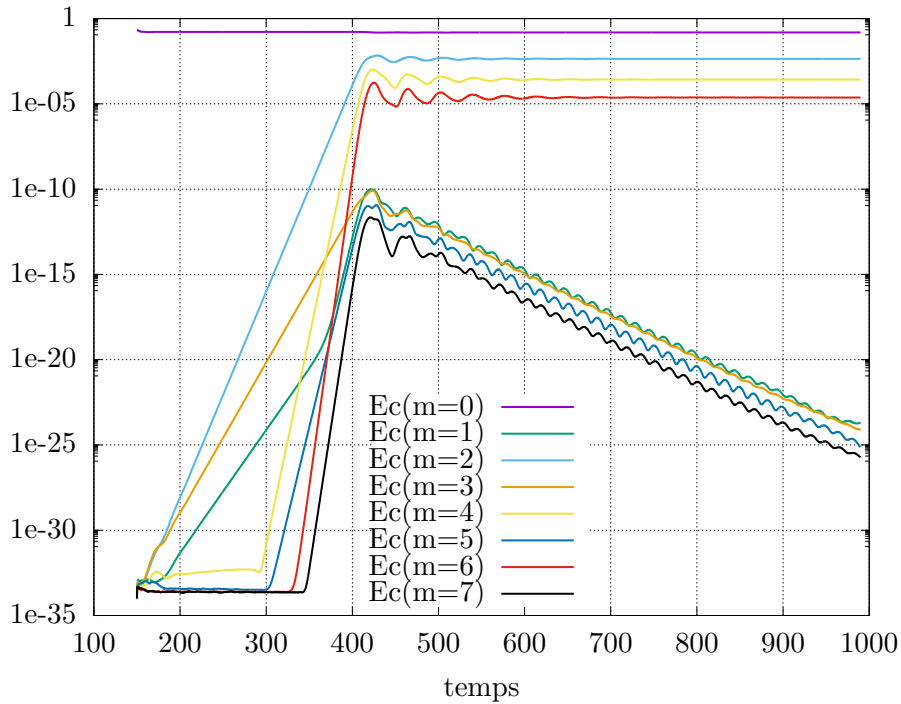


FIGURE 2.27 – Énergie cinétique des modes 0 à 7 pour  $h = 0$  à  $Re = 800$ . Redémarrage à partir d'un écoulement axisymétrique.

Ensuite, entre  $Re_c^{\text{axi}}$  et un autre seuil  $Re_c^{\text{stat}} \simeq 900$ , l'écoulement voit émerger des composantes non axisymétriques. Après un régime transitoire où l'énergie de chaque mode  $m$  instable croît en  $\exp(\lambda_m t)$ , les non linéarités modifient les croissances et l'écoulement se stabilise dans une configuration stationnaire, où seuls les modes pairs sont non nuls :  $E_C^{m=2k+1} = 0$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . On appelle cette configuration la configuration stationnaire paire (SP). Un exemple de réalisation est présenté dans la figure 2.27 pour le cas  $h = 0$  à  $Re = 800$ .

Jusqu'à  $t = 300$ , on observe la croissance exponentielle des modes instables  $m \in \{1, 2, 3\}$  avec des exposants  $\lambda_2 > \lambda_3 > \lambda_1$ . Entre  $t = 300$  et  $t = 400$ , les énergies des modes instables  $m \in \{1, 2, 3\}$  dépassent  $10^{-15}$  et sont assez grandes pour entraîner par non linéarité les autres modes  $m \in \{4, 5, 6, 7\}$ .

Après  $t = 400$ , tous les modes sont excités et l'écoulement converge lentement vers son état stationnaire où seuls les modes pairs sont activés. Pour ces nombres de Reynolds intermédiaires, les régimes transitoires diffèrent. Selon les configurations, les modes instables et les exposants de croissance  $\lambda_m$  varient, mais nous observons toujours le même genre d'état stationnaire avec les modes pairs actifs.

Afin de comparer aux résultats de Nore, Tartar, Daube, et Tuckerman [106] (2004), une étude précise des seuils de stabilité des modes 1 et 2 pour  $h = 0$  a été menée. Notre géométrie correspond à  $\Gamma = 1,8$  selon les notations de Nore, Tartar, Daube, et Tuckerman [106] (2004). Les valeurs de  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont présentées dans la figure 2.28. Nous ne pouvons observer que des valeurs positives de  $\lambda_m$  dans la phase de croissance de l'instabilité. Nous avons pu mesurer  $\lambda_1 > 0$  pour  $Re \in \{350, 375, 400, 425, 500, 800\}$  et  $\lambda_2 > 0$  pour  $Re \in \{375, 400, 425, 500, 800\}$ . Au dessus de  $Re = 800$ , les modes croissent trop vite pour que l'on puisse mesurer avec précision les  $\lambda_m$ , comme on peut le voir sur la figure 2.29a. Plus on se rapproche du Reynolds correspondant à  $\lambda_m = 0$ , plus le régime transitoire est long et les simulations coûteuses. Afin d'obtenir les valeurs des seuils de stabilité des modes, nous prolongeons de manière affine les courbes par rapport aux deux derniers points. Le mode 1 est le plus instable et croît à partir



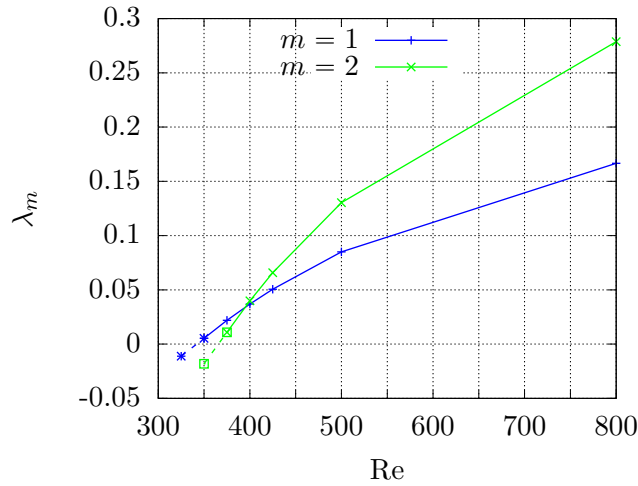


FIGURE 2.28 – Taux de croissance  $\lambda_m$  en fonction de  $Re_h$ . Prolongements affines à partir des deux premiers points pour trouver  $\lambda_m = 0$ . Intersection avec 0 à  $Re = 342$  pour  $m = 1$ , intersection avec 0 à  $Re = 366$  pour  $m = 2$ , et croisement  $m = 1$   $m = 2$  à  $Re = 395$ .

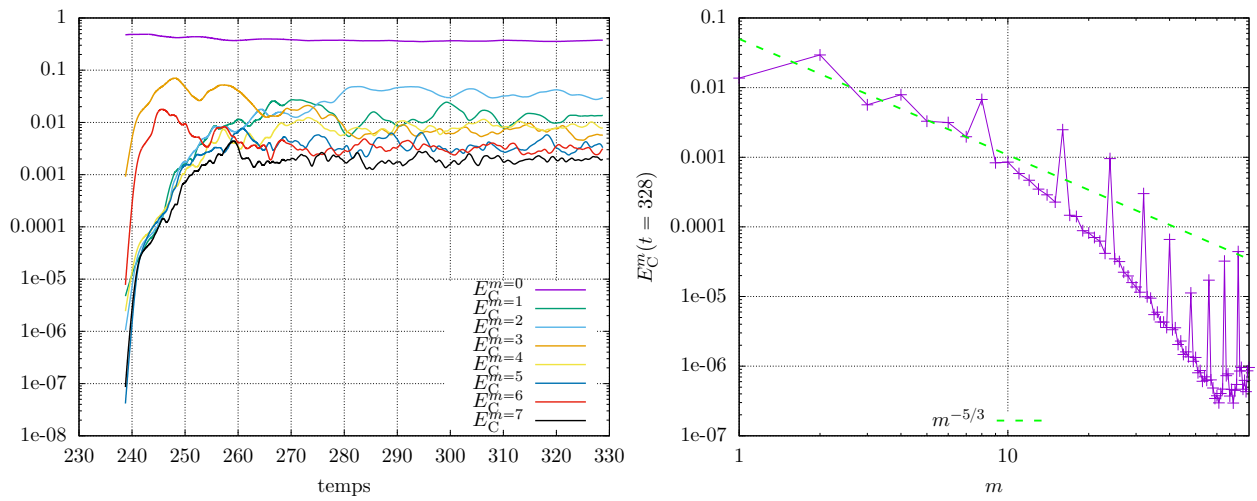
de  $Re = 342$ , alors que le mode 2 apparaît spontanément à partir de  $Re = 366$ . Ces résultats sont en accord avec les seuils trouvés par Nore, Tartar, Daube, et Tuckerman [106] (2004). Dans la gamme  $Re \in [342, 366[$  il faut attendre que le mode 1 soit assez grand et que les non linéarités excitent le mode 2 pour enfin atteindre l'état stationnaire où seuls les modes pairs subsistent. Pour les Reynolds  $Re \geq 395$  on observe  $\lambda_2 \geq \lambda_1$ . Le régime transitoire voit alors le mode 2 s'imposer plus vite et l'écoulement se stabilise alors plus rapidement dans sa forme stationnaire.

Enfin, au dessus de  $Re_c^{\text{stat}}$ , l'écoulement devient instationnaire, et de plus en plus turbulent. Les modes pairs varient légèrement et activent les modes impairs. On peut distinguer deux états, l'un qualifié d'instationnaire simple, où les modes impairs ne sont que légèrement activés et où les énergies des modes pairs dominant ; et un second état totalement turbulent où tous les modes sont activés et l'on retrouve un spectre turbulent où  $E_C^m \propto m^{-\frac{5}{3}}$  pour les petits modes comme on le voit sur la figure 2.29b.

Les différents états sont présentés dans la figure 2.30. Cette figure recense les configurations  $h_{\text{pales}}$ ,  $Re$  et sens (CONTRA ou ANTI) observées et matérialisées par des croix. Les différentes courbes en pointillés séparent par un tracé approximatif les états du système. Seul le seuil de passage de stationnaire axisymétrique à stationnaire pair pour les disques lisses a été exactement établi à  $Re = 342$ . La double courbe séparant l'état stationnaire pair de l'état turbulent manifeste les différences entre le sens ANTI (rouge) et le sens CONTRA (bleu) puisque des comportements différents du sens ont été observés pour la configuration  $h_{\text{pales}} = 0,05R$  et  $Re = 1000$ . Ces deux courbes se rejoignent en  $h_{\text{pales}} = 0$  puisque, pour cette hauteur, le système étudié n'est pas chiral. Il est probable que la séparation entre stationnaire axisymétrique et stationnaire pair dépende aussi du sens de rotation mais nous n'avons pas observé de différence pour les paramètres utilisés.

Lorsque l'état turbulent est atteint Ravelet [119] (2005) a remarqué avec une hauteur  $h_{\text{pales}} = 0,2R$  que les modes dominants dépendaient des conditions de forçage. On voit par exemple dans la figure 2.29a que les modes dominants sont dans l'ordre, le mode 0, puis le 2, puis le 1. Nous avons donc étudié les modes dominants pour toutes nos hauteurs de pales et pour les deux sens ANTI/CONTRA. Les résultats sont présentés dans la table 2.28. Ce paramètre macroscopique dépend fortement des conditions de forçage,  $Re$ , sens ou  $h_{\text{pales}}$ .





(a) Energie cinétique des modes 0 à 7 après redémarrage à partir d'un écoulement axisymétrique. (b) Spectre d'énergie  $E_C^m(t)$  à  $t = 328$  pour les modes  $m \in [0, 80]$

FIGURE 2.29 – Ecoulement CONTRA à  $h = 0,1R$  et  $Re = 2500$ .

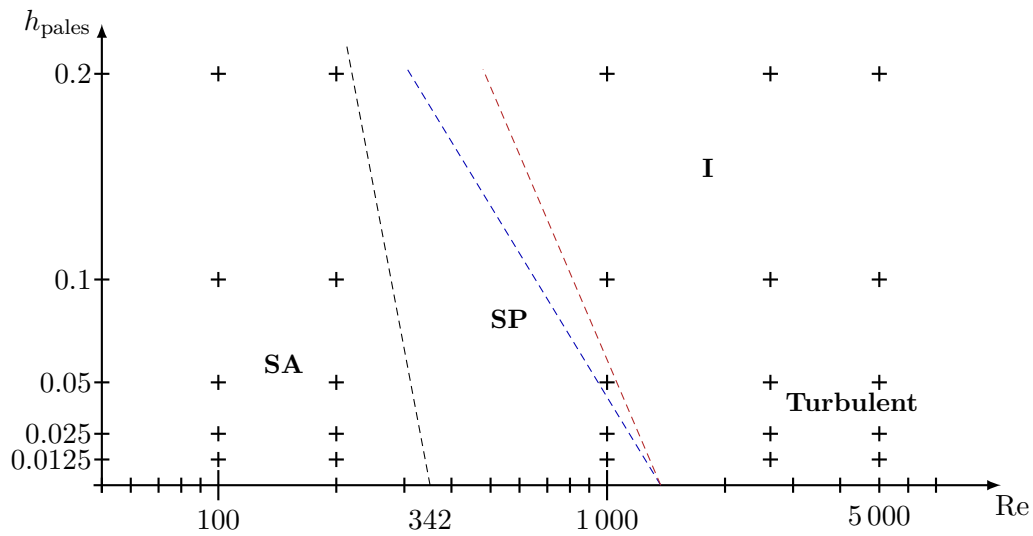


FIGURE 2.30 – États du régime stationnaire : stationnaire axisymétrique (SA), stationnaire pair (SP), et instationnaire (I). Au delà de  $Re = 2500$ , tous les écoulements observés sont turbulents. Les tracés en pointillés sont des limites approximatives séparant les états observés pour les jeux de paramètres matérialisés par des croix. Pour la séparation entre SP et I une différence a été observée entre les sens CONTRA (bleu) et ANTI (rouge) pour la configuration  $h_{pales} = 0,05$  et  $Re = 1000$ , ce qui explique le dédoublement de la ligne.

$h_{\text{pales}}/R$	Re	sens	état ou mode dominant
0	1000	-	SP
0	2500	-	$0 > 2 > 1$
0	5000	-	$0 > 2 > 1$
0.0125	1000	ANTI & CONTRA	$02 > 4 > 6$ (SP)
0.0125	2500	ANTI	$0 > 2 > 1 = 4$
0.0125	2500	CONTRA	$0 > 2 > 1$
0.025	1000	ANTI & CONTRA	$0 > 2 > 4 > 6$ (SP)
0.025	2500	ANTI & CONTRA	$0 > 2 > 1$
0.05	1000	ANTI	SP
0.05	2500	ANTI	$0 > 1 = 2 = 3$
0.05	1000	CONTRA	$0 > 2 > 1$
0.05	2500	CONTRA	$0 > 2 > 1 = 3 = 4$
0.1	1000	ANTI	$0 > 2 > 1 = 3$
0.1	2500	ANTI	$0 > 1 = 3 > 2 = 4$
0.1	1000	CONTRA	$0 > 2 > 4$
0.1	2500	CONTRA	$0 > 2 > 1$
0.2	1000	ANTI	$0 > 2 = 3$
0.2	2500	ANTI	$0 > 2 > 1 = 3$
0.2	1000	CONTRA	$0 > 3$
0.2	2500	CONTRA	$0 > 1 > 2$

TABLE 2.28 – État dominant de l'écoulement : pour les cas stationnaires, on retrouve le cas stationnaire pair (SP) pour les Re présentés. La notation  $m_1 > m_2$  signifie  $E_C^{m_1} > E_C^{m_2}$  (vérifié en moyenne pour les cas instationnaires), il en est de même pour le signe égal.

### 2.6.3 Puissances dissipées

Nous nous intéressons maintenant à la puissance dissipée par l'écoulement. Comme nous l'avons dit plus tôt, deux mécanismes sont à l'œuvre pour les échanges d'énergie entre les turbines et le fluide : l'entraînement visqueux par les disques et l'entraînement inertiel par les pales. Pour  $h \neq 0$  on s'attend au comportement en  $\text{Re}^{-1}$  suivi d'un plateau proposé par Doering et Foias [35] (2002) que nous avons déjà retrouvé à la section 2.5.1.3. Nous nous attendons donc à un comportement de la forme suivante, dont les modalités peuvent dépendre de  $h_{\text{pales}}$ , que nous notons simplement  $h$  pour alléger les notations.

$$K_p \left( \frac{h}{R}, \text{Re} \right) = \frac{a \left( \frac{h}{R} \right)}{\text{Re}} + b \left( \frac{h}{R} \right). \quad (2.6.7)$$

Pour une paroi lisse ( $h = 0$  sans aucune rugosité) seul l'entraînement visqueux contribue à la puissance transmise et on s'attend à une puissance injectée tendant vers 0 quand  $\text{Re} \rightarrow \infty$ . Ce type de comportement a été étudié dans les écoulements de conduite qui présentent des parois lisses. Haaland [60] (1983) projette une formule empirique dépendant de la rugosité de l'interface que l'on peut ré-interpréter dans notre géométrie selon

$$K_p^{\text{Haaland}} \left( \frac{h}{R}, \text{Re} \right) = \frac{1}{a \log^2 \left( b \left( \frac{h}{R} \right)^{1,11} + \frac{c}{\text{Re}} \right)}. \quad (2.6.8)$$

La figure 2.31 montre les mesures de couple numériques pour les différentes hauteurs, ainsi que quelques points expérimentaux de trois campagnes de mesures avec des disques lisses dans de l'eau et de l'hélium. On remarquera que, pour chaque jeu de mesure expérimentale, les points à bas Reynolds correspondant à des faibles couples difficiles à mesurer semblent surestimés par rapport aux autres mesures. Comme vu dans la partie 2.5.1.3, nous retrouvons bien le régime de l'équation (2.6.7) pour la hauteur  $h_{\text{pales}} = 0, 2R$ . Les autres hauteurs ne présentent pas clairement de plateau à haut Reynolds pour que l'on puisse reconnaître le comportement de (2.6.7). On peut s'attendre à ce que des hauteurs de pales plus petites saturent à un plateau de puissance plus bas et pour un nombre de Reynolds plus petit. On remarque qu'il n'y a pas de sensible différence dans la gamme étudiée numériquement  $\text{Re} \in [10, 5000]$  entre la hauteur nulle et  $h_{\text{pales}} = 0, 0125R$ . Pour expliquer ces observations regardons de nouveau les différents termes de la table 2.26. La diffusion de quantité de mouvement aux parois est proportionnelle à  $\text{Re}^{-1}$  et devient de plus en plus petite lorsque  $\text{Re} \rightarrow \infty$ . L'injection ou déplacement de fluide est proportionnelle à la hauteur des pales puisque seule la composante azimutale compte dans le produit  $\mathbf{u} \cdot d\mathbf{S}$ . Ainsi, pour  $h_{\text{pales}} \neq 0$ , on s'attend à ce que l'entraînement inertiel par déplacement de fluide prenne le dessus et qu'on atteigne un plateau dont la valeur est proportionnelle à  $h_{\text{pales}}$ . De même, le nombre de Reynolds le plus adapté à décrire l'écoulement est celui basé sur l'échelle d'injection  $h_{\text{pales}}$  et donc  $\text{Re}_{h_{\text{pales}}}$ . Pour tester cette nouvelle renormalisation sans rendre compte de la chiralité des turbines, nous présentons cette nouvelle renormalisation de  $K_p = f(\text{Re})$  en  $\frac{K_p^+}{h/R} = f(\text{Re}_h)$  dans la figure 2.32. On trouve une forme universelle : presque tous les points sauf les plus grands Reynolds de chaque série de mesure se superposent. Il est possible que, pour ces points à  $\text{Re} = 5000$ , le maillage utilisé avec une résolution de 0,01 en éléments  $\mathbb{P}_2$  ne soit pas assez fin et induise une viscosité numérique qui surestime la puissance injectée  $K_p$ . Cependant, nous retrouvons une loi compatible avec (2.6.7) :

$$\frac{K_p^+}{h/R} = \frac{24}{\text{Re}_h} + 0,45. \quad (2.6.9)$$

En inversant la relation, on peut calculer une hauteur de pale en fonction du couple et du Reynolds

$$\frac{h}{R} = 10 \frac{K_p^+ - 24/\text{Re}}{4,5}. \quad (2.6.10)$$

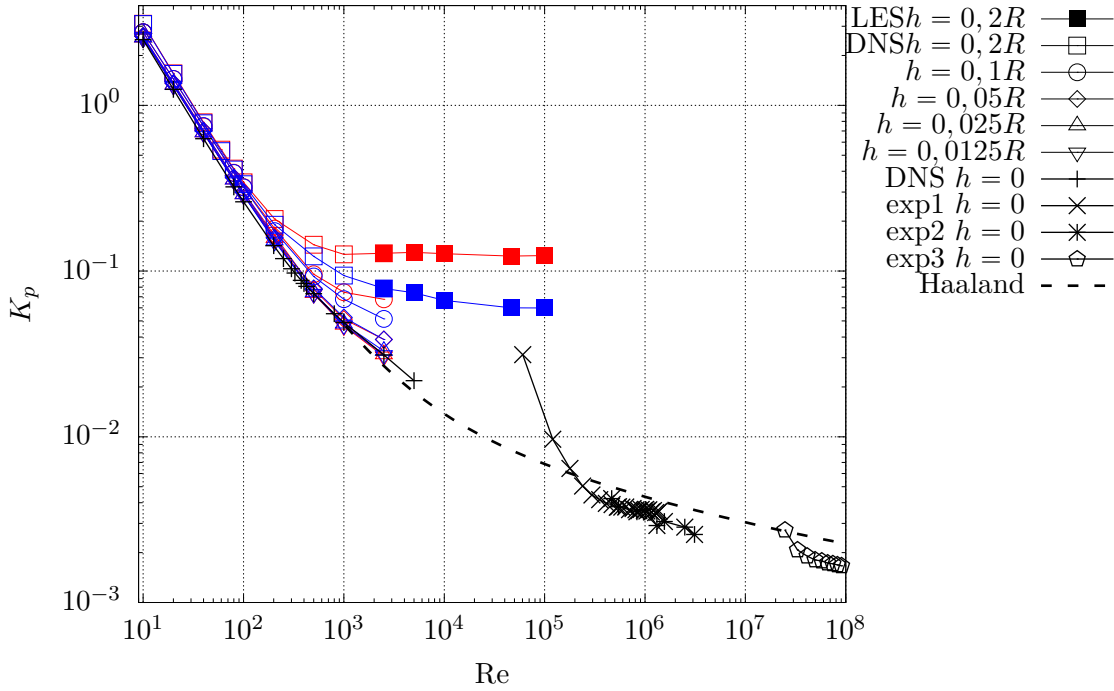


FIGURE 2.31 – Couples mesurés pour différentes hauteurs de pales  $h$  en forçage CONTRA (bleu) et ANTI (rouge).

Cette nouvelle relation (2.6.10) nous permet de définir une hauteur effective pour le cas  $h = 0$ . Cette hauteur nous permet d'assurer que les points à hauteur nulle se retrouvent sur la courbe universelle pour  $h \neq 0$  de la figure 2.32. Puisque dans la couche limite visqueuse, l'entraînement par la paroi lisse joue le même rôle qu'un entraînement inertiel, on peut interpréter cette hauteur effective comme la taille de la couche visqueuse. Cette méthode nous donne accès à la taille de la couche visqueuse sur une grande gamme de Reynolds. La figure 2.33a présente les mesures des turbines lisses renormalisées avec  $h_{\text{eff}}$ . Par construction tous ces points sont parfaitement sur la courbe universelle pour  $h \neq 0$  de la figure 2.32. L'intérêt de cette construction est d'observer une loi empirique pour  $h_{\text{eff}}$ . Cette loi est présentée à la figure 2.33b. Nous ne montrons que les valeurs à haut Reynolds car le comportement de  $h_{\text{eff}}$  à bas Reynolds est trop sensible au coefficient visqueux (devant  $Re_h^{-1}$ ) de la loi de Doering et Foias [35] (2002) proposé dans 2.6.9. A titre de comparaison, nous avons aussi tracé la hauteur effective correspondant au couple suggéré par la loi de Haaland  $h_{\text{eff}}^{\text{Haaland}} = 10R \frac{K_p^{\text{Haaland}}(\text{Re}) - 24/\text{Re}}{4,5}$ . Il n'est pas étonnant que les valeurs ne correspondent pas puisqu'il s'agit de géométries différentes mais les ordres de grandeur dégagent la même tendance.

Cette observation nous donne un modèle quantitatif pour la description des disques rugueux en rotation. Si la rugosité est inférieure à  $h_{\text{eff}}$ , le comportement du disque est comparable à celui d'un disque lisse en prenant la valeur de  $h_{\text{eff}}$  observée ici. Si la rugosité est supérieure à  $h_{\text{eff}}$  la puissance nécessaire à la rotation du disque peut être prévue par la loi présentée dans l'équation (2.6.9).

#### 2.6.4 Discussion sur les pales à hauteur variable et la rugosité

Dans cette étude, nous nous sommes attachés à caractériser l'écoulement de von Karman avec des pales TM87 à hauteur variable. Nous avons d'abord caractérisé les écoulements moyens et les seuils d'émergence des composantes non axisymétriques, ainsi que le seuil d'apparition d'un comportement

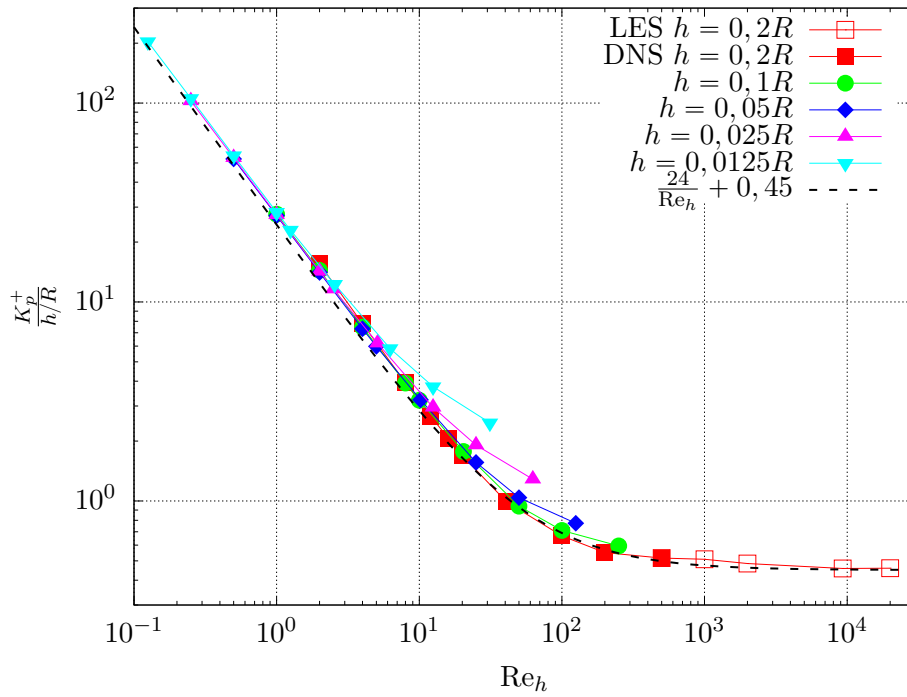
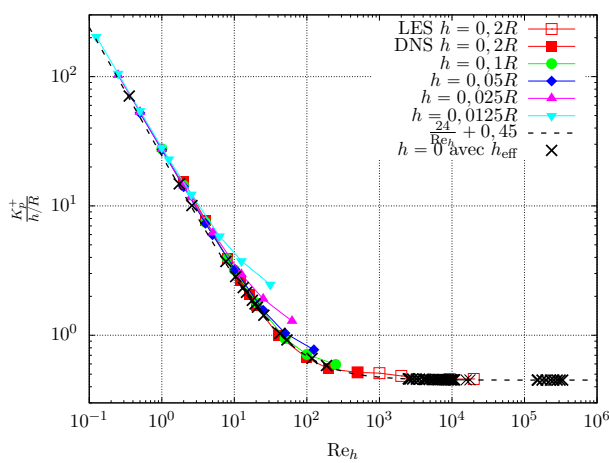
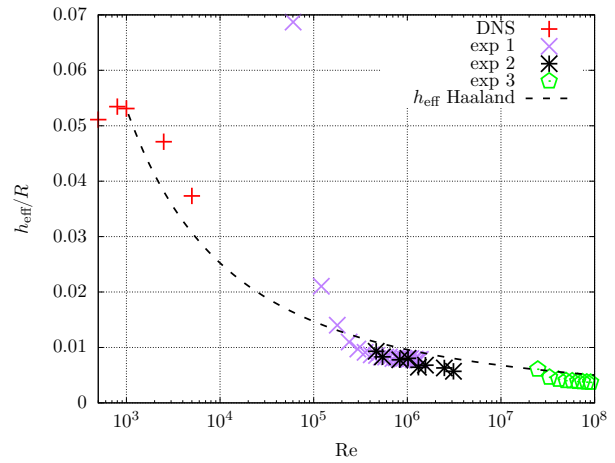


FIGURE 2.32 – Couples pairs  $K_p^+$  normalisés en fonction de  $Re_h$ .



(a) Couples pairs  $K_p^+$  normalisés en fonction de  $Re_h$  avec  $h_{\text{eff}}$ . Les croix noires sont par construction sur la courbe de régression.



(b) Valeurs de  $h_{\text{eff}}$  à grand  $Re$  pour les disques lisses. Mesures issues de simulations numériques directes (DNS) et de trois campagnes d'expériences.

FIGURE 2.33 – Prise en compte du  $h_{\text{eff}}$  : (2.33a) ensemble des mesures de la figure 2.31 renormalisées et (2.33b) valeurs empiriques de hauteurs effectives..

instationnaire brisant l'invariance par translation dans le temps. Les états macroscopiques obtenus sont très dépendants des conditions de forçage. Les écoulements présentent un spectre modal turbulent à partir de  $Re = 2,5 \cdot 10^3$ . Nous avons trouvé une loi universelle pour la puissance dissipée en fonction de la hauteur des pales qui nous a permis de présenter un modèle empirique de description d'un disque lisse avec une certaine rugosité.

## 2.7 Conclusions concernant la dissipation

Dans ce chapitre, nous avons tout d'abord introduit la modélisation classique de Navier-Stokes pour les fluides incompressibles, nous avons présenté en détail les méthodes numériques de simulation utilisées.

Ensuite nous avons décrit l'écoulement de von Kármán largement étudié dans cette thèse. Cet écoulement de laboratoire génère facilement de la turbulence et présente une multi-stabilité de l'écoulement moyen pour certaines conditions de forçage. Cette particularité interroge directement la régularité, l'unicité et le bien fondé des solutions de Navier-Stokes.

Nous nous sommes enfin posé deux problèmes de modélisation des écoulements turbulents dans deux cadres différents.

Le premier cadre a présenté une méthode de simulation LES qui constitue un moyen de retrouver les grandes recirculations du fluide ainsi que la puissance dissipée par effet visqueux dans le cadre d'un jeu de données sous-résolu. L'ajout d'une dissipation artificielle correspondant au résidu de l'équation de Navier-Stokes permet de corriger les défauts de modélisation.

Le second cadre se concentre sur l'impact des conditions limites. Nous avons mis en évidence la forte dépendance de l'écoulement de von Kármán aux conditions limites. Nous avons décrit les états de l'écoulement et déduit des lois empiriques d'interaction fluide-structure dans le cas d'un disque rugueux.

Dans le chapitre précédent, nous avons étudié les propriétés de l'écoulement en le considérant dans son ensemble. Les écoulements turbulents ont cependant la particularité de présenter des structures cohérentes de rotation ou de cisaillement de tailles multiples, et le chapitre précédent ne les différenciait pas. Les différentes échelles de l'écoulement jouent cependant des rôles différents : si l'équation de Navier-Stokes (2.1.5) régit l'ensemble de l'écoulement, la dynamique des plus grandes structures est essentiellement dominée par le terme non linéaire de l'équation de Navier-Stokes et une dynamique d'écoulement d'Euler (2.1.8), alors que les plus petites structures suivent plutôt une évolution de Stokes (2.1.7). Nous proposons ici d'étudier plus précisément l'écoulement selon les échelles. Dans ce chapitre, nous présentons d'abord dans la partie 3.1 un filtrage de l'écoulement et introduisons les fonctions de structure. Ensuite nous présentons dans la partie 3.2 une étude de renormalisation des fonctions de structure à l'aide d'une description multi fractale de l'écoulement. Cette étude présente le phénomène d'intermittence, dont nous questionnerons l'origine dans la section 3.3 en la liant aux transferts d'énergie et à la vorticité.

### 3.1 Description de la cascade

Si toutes les échelles peuvent être considérées individuellement, le terme non linéaire de Navier-Stokes (2.1.5) les lie. Dans le cadre d'un écoulement turbulent à grand Reynolds, on distingue plusieurs échelles caractéristiques :

- l'échelle de l'écoulement correspond à la taille typique de la géométrie considérée, ce qui peut être la taille de la boite pour un écoulement fermé ( $R$  dans un von Kármán) ou bien la taille de la zone de fluide en mouvement pour un écoulement ouvert comme par exemple autour d'un avion ;
- l'échelle d'injection est l'échelle typique du forçage. Dans le cadre de l'écoulement de von Kármán, elle est liée à la géométrie des turbines et correspond à  $h_{\text{pales}}$ .
- l'échelle visqueuse ou échelle de Kolmogorov [73] (1941) notée  $\eta_K$  est l'échelle où les termes visqueux dominent en ordre de grandeur moyen ;
- la taille d'une particule fluide, limite théorique de validité de l'équation de Navier-Stokes permettant de négliger les fluctuations individuelles des molécules du fluide, sans contrainte de régularité.

D'un point de vue énergétique, l'apport de puissance se fait à l'échelle d'injection. Cependant, seules les structures de tailles plus petites que l'échelle visqueuse sont capables de transformer l'énergie cinétique en énergie thermique. Cette conversion est le résultat d'un forçage hors équilibre dont on peut cependant étudier les propriétés stationnaires. Pour les écoulements stationnaires, il s'opère donc un phénomène appelé cascade, qui correspond à un transfert de puissance entre l'échelle d'injection vers les structures plus petites que l'échelle visqueuse transformant le travail reçu à grandes échelles en chaleur. Comme nous le détaillons plus tard, le terme non linéaire permet les échanges entre les différentes échelles. Il

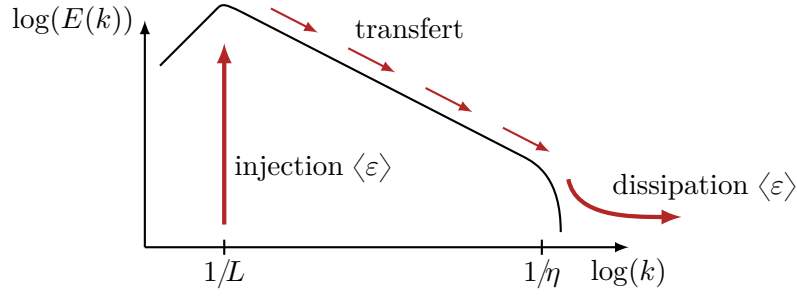


FIGURE 3.1 – Représentation de la cascade énergétique

nourrit aussi des structures plus grandes que l'échelle d'injection, mais ces dernières, étant incapables de dissiper le mouvement, restituent alors en moyenne autant d'énergie cinétique qu'elles en reçoivent.

La description énergétique nous sert à identifier les échelles typiques d'un écoulement turbulent à l'aide du spectre énergétique  $E(k)$  défini à l'équation (2.5.4). Comme nous l'avons vu dans le paragraphe 2.5.1.4, le spectre suit une loi de puissance en  $E(k) \sim k^{-5/3}$  sur une la gamme  $[k_0, k_{\max}]$ , puis décroît exponentiellement. Nous illustrons ceci de manière schématique à la figure 3.1. Le petit nombre d'onde  $k_0$  correspond aux grandes structures  $L \sim 1/k_0$  qui sont liées au forçage. Le plus grand nombre d'onde respectant la loi puissance  $k_{\max}$  correspond en physique à l'échelle de Kolmogorov  $\eta = (\text{Re}^{-3}\varepsilon)^{-1/4} R$ , et vérifie  $k_{\max}\eta \sim 1$ . L'échelle de Kolmogorov correspond à l'échelle moyenne de régularisation. Souvent, les simulations numériques tronquent la résolution dans l'espace de Fourier à  $k_{\max} \sim 1/\eta$ , ou utilisent une résolution dans l'espace physique de  $\delta x \sim \eta$ , sans plus de précaution. Les mesures expérimentales ont, en général, aussi une résolution similaire.

### 3.1.1 Équations filtrées

Pour distinguer les échelles de l'écoulement, nous introduisons un filtre spatial. Soit  $\phi$  une fonction positive d'intégrale unité dont l'essentiel de la contribution à l'intégrale se situe proche de la sphère de rayon unité. En dimension  $d \in \mathbb{N}^*$ , il nous est possible de dilater  $\phi$  d'un facteur  $\ell \in \mathbb{R}_+^*$  en définissant

$$\phi^\ell(\mathbf{x}) = \frac{\phi\left(\frac{\mathbf{x}}{\ell}\right)}{\ell^d}. \quad (3.1.1)$$

La fonction  $\phi^\ell$  est alors aussi d'intégrale unité mais a l'essentiel de sa masse concentrée proche de la sphère de rayon  $\ell$ . On peut alors définir un opérateur de filtrage de tout champ spatial  $f(\mathbf{x})$  comme

$$\bar{f}^\ell(\mathbf{x}) = \int \phi^\ell(\mathbf{y}) f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) d\mathbf{y}. \quad (3.1.2)$$

L'opération de filtrage lisse toutes les variations de taille plus petite que  $\ell$  et ne conserve que les structures plus grandes. C'est un opérateur linéaire et indépendant du temps. Il commute donc avec les dérivées temporelles et spatiales. Appliquons le aux équations de Navier-Stokes incompressibles (2.1.5) et (2.1.6).

$$\partial_t \bar{\mathbf{u}}^\ell + \overline{\partial_i(u_i \mathbf{u})}^\ell = -\nabla \bar{p}^\ell + \frac{1}{\text{Re}} \Delta \bar{\mathbf{u}}^\ell + \bar{\mathbf{f}}^\ell; \quad (3.1.3)$$

$$\text{div } \bar{\mathbf{u}}^\ell = 0. \quad (3.1.4)$$

Si l'on cherche à réécrire l'équation (3.1.3) pour les quantités filtrées, on obtient en inversant le filtre et les dérivées spatiales :

$$\partial_t \bar{\mathbf{u}}^\ell + \partial_i(\bar{u}_i \bar{\mathbf{u}}^\ell) = -\nabla \bar{p}^\ell + \frac{1}{\text{Re}} \Delta \bar{\mathbf{u}}^\ell + \bar{\mathbf{f}}^\ell - \partial_i(\bar{u}_i \bar{\mathbf{u}}^\ell - \bar{u}_i^\ell \bar{\mathbf{u}}^\ell). \quad (3.1.5)$$



Le terme  $-\partial_i(\overline{u_i \mathbf{u}^\ell} - \overline{u_i}^\ell \overline{\mathbf{u}}^\ell)$  qui apparaît dans ce formalisme met en évidence le tenseur  $\tau_{i,j} = \overline{u_i u_j}^\ell - \overline{u_i}^\ell \overline{u_j}^\ell$  appelé tenseur de Reynolds. Ce dernier atteste des différences entre l'équation de Navier-Stokes filtrées et l'équation de Navier-Stokes pour les quantités filtrées. Il reflète la non commutation entre le filtre et le terme non linéaire.

Comme le suggèrent Duchon et Robert [38] (2000), en sommant (3.1.3)  $\cdot \mathbf{u} + (2.1.5) \cdot \overline{\mathbf{u}}^\ell$ , on obtient le bilan suivant.

$$\partial_t \left( \frac{\mathbf{u} \cdot \overline{\mathbf{u}}^\ell}{2} \right) + \frac{1}{2} \operatorname{div} \left( (\mathbf{u} \cdot \overline{\mathbf{u}}^\ell) \mathbf{u} + \overline{p}^\ell \mathbf{u} + p \overline{\mathbf{u}}^\ell - \frac{\nabla(\mathbf{u} \cdot \overline{\mathbf{u}}^\ell)}{\operatorname{Re}} \right) = -\frac{E_\ell}{2} - \frac{1}{\operatorname{Re}} \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \overline{\mathbf{u}}^\ell. \quad (3.1.6)$$

où  $E_\ell$  vaut  $u_j (\overline{u_i \partial_i u_j})^\ell - u_j u_i \partial_i (\overline{u_j}^\ell)$ . Les détails sont présentés en annexe 6.1.1. Lorsqu'on intègre (3.1.6) sur un domaine, on trouve

$$\frac{1}{2} \partial_t \left( \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \overline{\mathbf{u}}^\ell d\tau \right) + \frac{1}{2} \oint_{\Sigma} \left( (\mathbf{u} \cdot \overline{\mathbf{u}}^\ell) \mathbf{u} + \overline{p}^\ell \mathbf{u} + p \overline{\mathbf{u}}^\ell - \frac{\nabla(\mathbf{u} \cdot \overline{\mathbf{u}}^\ell)}{\operatorname{Re}} \right) \cdot d\mathbf{S} = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} E_\ell d\tau - \frac{1}{\operatorname{Re}} \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \overline{\mathbf{u}}^\ell d\tau. \quad (3.1.7)$$

Ceci est un bilan d'énergie cinétique semblable à (2.1.11) mais filtré. Remarquons que, dans la géométrie von Kármán comme expliqué pour le bilan non filtré à la table 2.26, le terme surfacique  $\int_{\Sigma} (\mathbf{u} \cdot \overline{\mathbf{u}}^\ell) \mathbf{u} \cdot d\mathbf{S}$  est nul. Le terme  $\frac{1}{2} (\mathbf{u} \cdot \overline{\mathbf{u}}^\ell)$  correspond à une énergie cinétique à l'échelle  $\ell$ , qui est transportée par le terme de flux présent dans la divergence et qui varie selon deux termes : la dissipation visqueuse que nous avons déjà vue pour le cas non filtré et  $E_\ell$ . Ce dernier provient du filtrage du terme non linéaire et joue le rôle de transmetteur entre les échelles. C'est un puits d'énergie pour les grandes échelles en faveur des échelles plus petites. Dans le cas de champs réguliers, lorsque  $\ell$  tend vers zéro, les quantités filtrées sont censées valoir la valeur non filtrée et l'on devrait retrouver le bilan de (2.1.11).

L'anomalie de dissipation que nous observions dans le chapitre chapitre 2 suggère une divergence des gradients à  $\operatorname{Re} \rightarrow \infty$  qui nous invite à douter de la régularité du champ de vitesse  $\mathbf{u}$ . Il est donc possible que  $E_\ell$  tende vers une limite non nulle, et joue alors le rôle d'un puits d'énergie cinétique pour tout l'écoulement, responsable d'une dissipation appelée inertielle.

Nous allons maintenant détailler le calcul des quantités filtrées dans l'espace hybride éléments finis et spectral de SFEMaNS.

### 3.1.1.1 Méthode de filtrage sur maillage non structuré

Calculer des filtres sur un jeu de données cartésiennes est assez aisé : si le filtre est pair  $\phi(\mathbf{x}) = \phi(-\mathbf{x})$  la définition des quantités filtrées (3.1.1) s'apparente à une convolution. Dans l'espace de Fourier les convolutions sont très facilement calculables. Si le jeu de données est périodique comme par exemple pour les simulations homogènes isotropes (cf 2.4.4.1), la convolution se calcule sans problème. Pour des jeux cartésiens non périodiques comme les champs expérimentaux, on peut aussi calculer facilement la convolution mais le manque de périodicité aux bords pollue les résultats filtrés aux limites de la boîte de mesure. Les termes de bords sont alors en général écartés comme le détaille Debue [31] (2019). En revanche, pour les simulations comme celles obtenues avec le code SFEMaNS, le jeu de données ne se prête pas facilement au calcul de quantités filtrées. D'une part, les points du maillage éléments-finis sont disposés de manière non structurée et la combinaison avec des méthodes spectrales pour la discrétisation angulaire complexifie encore la répartition des points dans l'espace physique.

Ce type de maillage non cartésien est fréquent dans les simulations d'écoulements réels que peuvent mener les industriels ou les météorologues. Dans ces cas, le filtrage est difficile à calculer. Nous proposons ici une méthode utilisant les capacités des codes hyperboliques pour passer outre le problème lié au maillage irrégulier.

Les codes de simulations ayant la capacité de résoudre des problèmes hyperboliques, nous introduisons pour un champ  $\mathbf{u}$  une version filtrée  $\bar{\mathbf{u}}^\ell$  définie par le problème de Helmholtz suivant, inspiré de Guermond, Oden, et Prudhomme [55] (2003) :

$$(1 - \ell^2 \Delta) \bar{\mathbf{u}}_{\text{Helmholtz}}^\ell = \mathbf{u}. \quad (3.1.8)$$

Nous allons comparer dans le cas unidimensionnel les résultats de ce filtrage Helmholtz avec ceux obtenus par un filtrage classique avec un simple créneau :

$$\bar{u}_{\text{créneau}}^\ell(x) = \frac{1}{2\ell} \int_{x-\ell}^{x+\ell} u(r) dr. \quad (3.1.9)$$

La table 3.1 compare les résultats analytiques des deux filtrages dans le cas de fonctions trigonométrique et polynomiale. Les résultats s'étendent pour la trigonométrie hyperbolique. Les résultats du filtrage sont similaires : dans la limite  $\ell$  nul, on retrouve bien la valeur de la fonction non filtrée, mais de plus les développements limités en  $\ell$  des fonctions filtrées donnent les mêmes puissances de  $\ell$  affectées d'un coefficient différent. En fait le filtre respecte au moins la parité des fonctions testées. Le résultat est raisonnable puisque résoudre le problème de Helmholtz correspond à utiliser un filtrage avec la fonction de transfert du problème différentiel. Ceci nous conforte dans l'utilisation de cette méthode pour les maillages non-structurés.

Cas	Trigonométrique	Polynomial
$u(x)$	$\sin(kx)$	$x^n$
$\bar{u}_{\text{Helmholtz}}^\ell(x)$	$\sin(kx) \frac{1}{1+\ell^2 k^2}$	$\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{n!}{(n-2k)!} x^{n-2k} \ell^{2k}$
$\bar{u}_{\text{créneau}}^\ell(x)$	$\sin(kx) \frac{\sin(k\ell)}{k\ell}$	$\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{1}{n+1} C_{n+1}^{2k+1} x^{n-2k} \ell^{2k}$

TABLE 3.1 – Solutions analytiques des filtrages Helmholtz (3.1.8) et créneau (3.1.9) pour des fonctions trigonométrique et polynomiale.

Cette méthode de filtrage Helmholtz est utilisée pour toutes les grandeurs filtrées calculées avec SFEMaNS. Le principe général étant approuvé, il faut s'assurer que le code calcule bien  $\bar{\mathbf{u}}_{\text{Helmholtz}}^\ell$  dans le cas tridimensionnel. Pour cela nous utilisons une solution analytique. Cette solution utilise les fonctions de Bessel de première espèce  $J_m$  [81] (1912). Pour définir la solution analytique, nous utilisons une décomposition spectrale particulière pour un champ vectoriel  $\mathbf{f}(\theta)$  :

$$\mathbf{f}(\theta) = \sum_{m \geq 0} \mathbf{f}^{m,\cos} \cos(m\theta) + \mathbf{f}^{m,\sin} \sin(m\theta), \quad (3.1.10)$$

en introduisant les  $\hat{f}^i, i \in \{1, \dots, 6\}$

$$\hat{f}_m^1 = (f_r)^{m,\cos} + (f_\theta)^{m,\sin}, \quad (3.1.11)$$

$$\hat{f}_m^2 = (f_r)^{m,\cos} - (f_\theta)^{m,\sin}, \quad (3.1.12)$$

$$\hat{f}_m^3 = (f_r)^{m,\sin} + (f_\theta)^{m,\cos}, \quad (3.1.13)$$

$$\hat{f}_m^4 = (f_r)^{m,\sin} - (f_\theta)^{m,\cos}, \quad (3.1.14)$$

$$\hat{f}_m^5 = (f_z)^{m,\cos}, \quad (3.1.15)$$

$$\hat{f}_m^6 = (f_z)^{m,\sin}. \quad (3.1.16)$$

Figure	$m$	$\lambda$	$\mu$	$A^1$	$A^2$	$A^3$	$A^4$
3.2	1	$3.8317^2$	$\frac{\pi^2}{4}$	1	0	1	0
3.32	1	$3.8317^2$	$\frac{\pi^2}{4}$	0	1	0	1
3.4	2	$3.8317^2$	$\frac{\pi^2}{4}$	0	1	0	1

TABLE 3.2 – Paramètres des tests analytiques tridimensionnels

Pour  $m \in \mathbb{N}^*$  et  $\lambda > \mu \in \mathbb{R}_+^*$  on pose :

$$\hat{f}_m^1(r, z) = A^1 J_{m+1}((\lambda - \mu)^{\frac{1}{2}} r) \cos(\mu^{\frac{1}{2}} z), \quad (3.1.17)$$

$$\hat{f}_m^2(r, z) = A^2 J_{m-1}((\lambda - \mu)^{\frac{1}{2}} r) \cos(\mu^{\frac{1}{2}} z), \quad (3.1.18)$$

$$\hat{f}_m^3(r, z) = A^3 J_{m-1}((\lambda - \mu)^{\frac{1}{2}} r) \sin(\mu^{\frac{1}{2}} z), \quad (3.1.19)$$

$$\hat{f}_m^4(r, z) = A^4 J_{m+1}((\lambda - \mu)^{\frac{1}{2}} r) \sin(\mu^{\frac{1}{2}} z), \quad (3.1.20)$$

$$\hat{f}_m^5(r, z) = \frac{(\lambda - \mu)^{\frac{1}{2}} (A^1 - A^2)}{\mu^{\frac{1}{2}}} J_m((\lambda - \mu)^{\frac{1}{2}} r) \sin(\mu^{\frac{1}{2}} z), \quad (3.1.21)$$

$$\hat{f}_m^6(r, z) = \frac{(\lambda - \mu)^{\frac{1}{2}} (A^3 - A^4)}{\mu^{\frac{1}{2}}} J_m((\lambda - \mu)^{\frac{1}{2}} r) \cos(\mu^{\frac{1}{2}} z), \quad (3.1.22)$$

avec  $J_m$  la fonction de Bessel de première espèce. Le lecteur pourra vérifier que  $\Delta f = -\lambda f$  donc

$$\bar{f}^\ell = \frac{f}{1 + \ell^2 \lambda}.$$

La fonction analytique ainsi définie constitue un test non trivial du bon déroulement du filtrage. Nous allons donc calculer à l'aide de SFEMaNS  $\bar{f}^\ell$  sur des maillages de différentes résolutions et configurations puis évaluer la valeur de l'erreur  $\|\bar{f}^\ell - \frac{f}{1 + \ell^2 \lambda}\|_\infty$  en fonction de la résolution.

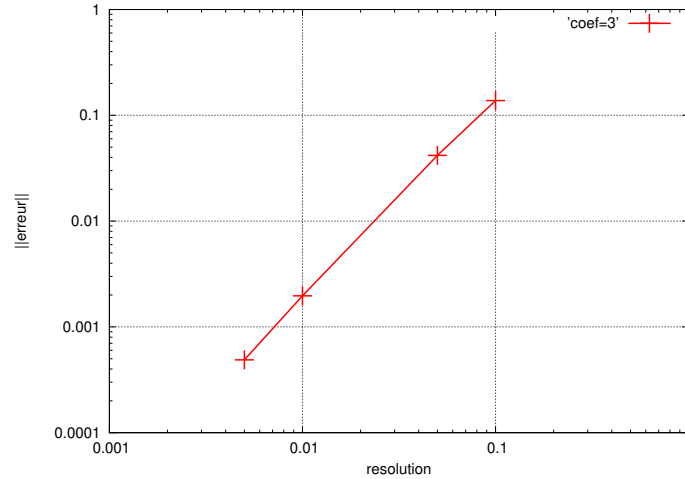


FIGURE 3.2 – Erreur  $L_\infty$  pour  $(m, \lambda, \mu, A^1, A^2, A^3, A^4) = (1, 3.8317^2, \frac{\pi^2}{4}, 1, 0, 1, 0)$  en fonction de la résolution  $\ell = \text{coef} \times \text{resolution}$ .

Les figures 3.2, 3.3 et 3.4 présentent trois jeux de paramètres différents fixant un rapport constant entre la résolution et  $\ell$ . L'erreur absolue entre la fonction calculée et le résultat varie comme la résolution au carré, ce qui valide le code utilisé.

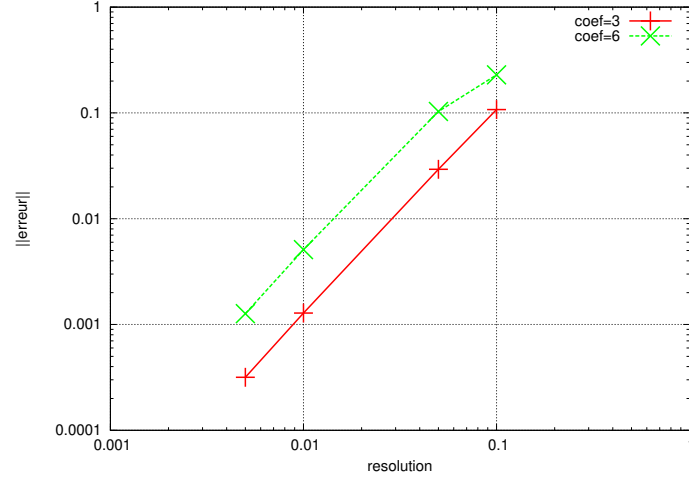


FIGURE 3.3 – Erreur  $L_\infty$  pour  $(m, \lambda, \mu, A^1, A^2, A^3, A^4) = (1, 3.8317^2, \frac{\pi^2}{4}, 0, 1, 0, 1)$  en fonction de la résolution. Les différents coefficients correspondent à des valeurs différentes de  $\ell = \text{coeff} \times \text{resolution}$ .

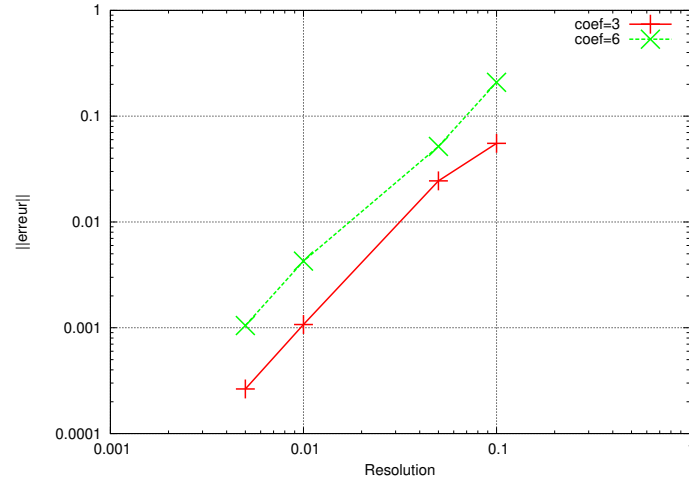


FIGURE 3.4 – Erreur  $L_\infty$  pour  $(m, \lambda, \mu, A^1, A^2, A^3, A^4) = (2, 3.8317^2, \frac{\pi^2}{4}, 0, 1, 0, 1)$  en fonction de la résolution. Les différents coefficients correspondent à des valeurs différentes de  $\ell = \text{coeff} \times \text{resolution}$ .

Après cette présentation des équations filtrées et des méthodes de calcul, nous pouvons maintenant nous attacher à caractériser la structure de l'écoulement.

### 3.1.2 Incréments de vitesse et fonctions de structure

Une méthode traditionnelle pour étudier les propriétés de l'écoulement consiste à regarder les fonctions de structure d'ordre  $p$  définies par :

$$S_p(\ell) = \langle (\delta_\ell u)^p \rangle_{\|\ell\|=\ell}. \quad (3.1.23)$$

Ici, les  $\delta_\ell u$  sont des incréments de vitesse longitudinale à l'échelle  $\ell$ , définis comme suit :

$$\delta_\ell u = \hat{\ell} \cdot (\mathbf{u}(\mathbf{x} + \ell) - \mathbf{u}(\mathbf{x})), \quad (3.1.24)$$

où  $\hat{\ell}$  est le vecteur unitaire de la direction de l'incrément. A partir de maintenant, sauf mention du contraire, puisque nous ne faisons plus varier la géométrie de l'écoulement, la notation  $h$  renverra à la régularité de Hölder locale de l'écoulement définie par l'équation (2.1.17) de telle sorte que  $\delta_\ell u \sim \ell^h$ . Muzy, Bacry, et Arneodo [100] (1991) conseillent d'utiliser des incréments de vitesse définis à l'aide d'ondelettes  $\delta W_\ell$  afin d'obtenir des résultats plus robustes en utilisant la méthode appelée Wavelet Transform Modulus Maxima (WTMM) method. L'utilisation d'ondelettes très présente dans la littérature [43, 131] (1992, 2010) permet de discriminer les zones de forte vorticité de bruit. Afin de mettre en évidence les éventuelles irrégularités de l'écoulement nous utilisons une ondelette au premier moment nul qui permet d'explorer les exposants de Hölder  $h$  plus petits que 1. Nos incréments de vitesse sont alors définis à l'aide du tenseur filtré des gradients  $\partial_j u_i$  :

$$G_{i,j}(\mathbf{x}, \ell) = \int \nabla_j \phi_\ell(\mathbf{r}) u_i(\mathbf{x} + \mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad (3.1.25)$$

où  $\phi_\ell(x) = \ell^{-3} \phi(x/\ell)$  est une fonction filtre que nous avons déjà présentée. A partir des  $G_{i,j}(\mathbf{x}, \ell)$  nous définissons des incréments de vitesse filtrés de la manière suivante :

$$\delta W_\ell(\mathbf{x}) = \ell \max_{i,j} |G_{i,j}(\mathbf{x}, \ell)|. \quad (3.1.26)$$

Debue et al. [32] (2018) ont vérifié que les incréments de vitesse calculés à partir d'ondelettes donnent les mêmes comportements pour les fonctions de structure.

Cette définition nous permet aussi de faire le lien entre les incréments de vitesse et la vorticité en regardant la partie antisymétrique du tenseur des gradients  $\partial_j u_i$ . On peut alors définir l'incrément de vitesse antisymétrique par :

$$\delta \Omega_\ell(\mathbf{x}) = \frac{\ell}{2} \max_{i,j} |G_{i,j} - G_{j,i}|. \quad (3.1.27)$$

### 3.1.2.1 Relation entre incréments de vitesse et transferts énergétiques

Le bilan énergétique de l'équation (3.1.7) peut être r ecrit à l'aide des incréments de vitesse, dans le but de mettre en lumière la régularité Hölder de l'écoulement.

Nous pouvons faire un parallèle avec la formulation de Duchon et Robert [38] (2000) en remarquant que  $E_\ell = -\frac{1}{2}(\overline{\nabla \cdot (\delta \mathbf{u})^3}^\ell + \partial_i(\overline{u_i u_j u_j}^\ell - u_i \overline{u_j u_j}^\ell))$  (détails en annexe 6.1.2). Si l'on fait un bilan global, le terme  $\partial_i(\overline{u_i u_j u_j}^\ell - u_i \overline{u_j u_j}^\ell)$  n'est qu'un terme de transport et l'on a :

$$\begin{aligned} \partial_t \left( \frac{\mathbf{u} \cdot \overline{\mathbf{u}}^\ell}{2} \right) + \frac{1}{2} \operatorname{div}((\mathbf{u} \cdot \overline{\mathbf{u}}^\ell) \mathbf{u} + \overline{p}^\ell \mathbf{u} + p \overline{\mathbf{u}}^\ell) - \frac{1}{2 \operatorname{Re}} \nabla(\mathbf{u} \cdot \overline{\mathbf{u}}^\ell) + \partial_i(\overline{u_i u_j u_j}^\ell - u_i \overline{u_j u_j}^\ell) = \\ - \frac{1}{\operatorname{Re}} \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \overline{\mathbf{u}}^\ell + \frac{1}{4} \overline{\nabla \cdot (\delta \mathbf{u})^3}^\ell. \end{aligned} \quad (3.1.28)$$

On retrouve alors une équation très proche de celle proposée par Duchon et Robert [38] (2000) :

$$\partial_t \left( \frac{\mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \overline{\mathbf{u}}^\ell(\mathbf{x})}{2} \right) + \operatorname{div} \mathbf{J}_\ell(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4} \int_{\mathbf{r}} \nabla \phi_\ell(\mathbf{r}) \cdot \delta \mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{r})^3 d\mathbf{r} - \frac{1}{2 \operatorname{Re}} \int_{\mathbf{r}} \Delta \phi_\ell(\mathbf{r}) (\delta \mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{r}))^2 d\mathbf{r}, \quad (3.1.29)$$

où  $\mathbf{J}_\ell$  est un terme de transport et d'interaction avec les bords. Nous notons les deux termes comme suit :

$$\mathcal{D}_\ell^I(\mathbf{x}) = \frac{1}{4} \int_{\mathbf{r}} \nabla \phi_\ell(\mathbf{r}) \cdot \delta \mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{r})^3 d\mathbf{r} \quad (3.1.30)$$

$$\mathcal{D}_\ell^V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2 \operatorname{Re}} \int_{\mathbf{r}} \Delta \phi_\ell(\mathbf{r}) (\delta \mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{r}))^2 d\mathbf{r} \quad (3.1.31)$$

A l'aide d'intégrations par parties, nous faisons porter les dérivées sur la fonction  $\phi_\ell$  et non sur les grandeurs filtrées. Cela permet d'exprimer des dérivées au sens faible des grandeurs considérées et donc de donner plus de souplesse à la régularité des champs considérés.

Dans le bilan (3.1.29),  $\mathcal{D}_\ell^I$  est un transfert énergétique local, et  $\mathcal{D}_\ell^\nu$  la dissipation visqueuse locale. Comme le remarque Dubrulle [37] (2019), les transferts  $\mathcal{D}_\ell^I$  sont dominants dans la gamme inertielle, puis  $\mathcal{D}_\ell^\nu$  redevient important lorsqu'on filtre dans la gamme visqueuses. Nous reviendrons sur ce comportement dans la section 3.3 à la figure 3.20.

L'utilisation du filtre  $\phi_\ell$  conjuguée au formalisme de solutions faibles présenté au paragraphe 2.1.3.1 nous permet de considérer  $\bar{\mathbf{u}}^\ell$  mais aussi  $\overline{\nabla \mathbf{u}}$  sans que  $\mathbf{u}$  soit dérivable au sens fort en faisant porter la dérivée par le filtre qui a une régularité choisie.

La formulation avec les incréments de vitesse nous permet d'évaluer simplement  $\mathcal{D}_\ell^I$  et  $\mathcal{D}_\ell^\nu$  en fonction de la régularité Hölder de l'écoulement. Si  $\mathbf{u}$  est de régularité  $h$ , alors  $\|\delta \mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{r})\| \sim \|\mathbf{r}\|^h$  et ainsi  $\mathcal{D}_\ell^I \propto \ell^{3h-1}$  et  $\mathcal{D}_\ell^\nu \propto \ell^{2h-2}$ . On illustre ici que si  $h \leq \frac{1}{3}$ , la limite de  $\mathcal{D}_\ell^I$  aux faibles valeurs de  $\ell$  peut être non nulle, voire exploser ponctuellement. Bien que seule l'intégrale spatiale de  $\mathcal{D}_\ell^I$  compte dans le bilan énergétique, le formalisme plus étendu des solutions faibles (dans lequel nous plonge le filtrage) met en lumière une dissipation d'énergie indépendante de la viscosité. Cette dernière peut expliquer l'observation de l'anomalie de dissipation observée.

Pour des raisons techniques, il est plus facile de calculer  $\frac{1}{2}E_\ell - \frac{1}{4} \left( \operatorname{div}(\bar{\mathbf{u}}^3) - (\mathbf{u} \cdot \nabla)(\bar{\mathbf{u}}^2) \right)$  et  $-\frac{1}{\operatorname{Re}} \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}}^\ell$  avec le code SFEMaNS, et  $\mathcal{D}_\ell^I$  et  $\mathcal{D}_\ell^\nu$  sur les grilles cartésiennes.

L'identité  $2E_\ell - \partial_i(\bar{u}_i \bar{u}_j \bar{u}_j^\ell - u_i \bar{u}_j \bar{u}_j^\ell) = \overline{\nabla \cdot (\delta \mathbf{u})}^3$  nous permet de définir les débits génériques sur tous les maillages étudiés comme suit.

$$\begin{array}{ll} \text{grille SFEMaNS} & \text{ou grille cartésienne} \\ \mathcal{D}_\ell^I = \frac{1}{2}E_\ell - \frac{1}{4}(\partial_i(\bar{u}_i \bar{u}_j \bar{u}_j^\ell) - u_i \partial_i(\bar{u}_j \bar{u}_j^\ell)) & \text{ou } \mathcal{D}_\ell^I \\ \mathcal{D}_\ell^\nu = -\frac{1}{\operatorname{Re}} \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}}^\ell & \text{ou } \mathcal{D}_\ell^\nu \end{array} \quad (3.1.32)$$

Le filtre utilisé dans SFEMaNS est celui présenté au paragraphe 3.1.1.1 et le filtre sur les grilles cartésiennes est un filtre gaussien  $\phi_\ell(\mathbf{x}) = \frac{1}{(\ell\sqrt{2\pi})^3} \exp(-\|\mathbf{x}\|^2/2\ell^2)$ . La formule cartésienne correspond à ce qui a été fait dans les travaux expérimentaux précédents. Ces deux formulations ne sont pas identiques, et donnent pour le bilan qui va suivre (3.1.33) des termes de transport légèrement différents, à cause du traitement de  $\mathcal{D}_\ell^\nu$ . Cependant, nous avons de bonnes raisons de les confondre. Tout d'abord, elles ont la même limite à  $\ell \rightarrow 0$ . De plus, elles représentent dans les deux cas un débit local d'énergie inter échelle et une dissipation visqueuse filtrés. Dans le cadre d'un bilan, les deux façons de calculer donnent strictement les mêmes valeurs. Les résultats des deux versions SFEMaNS et grille cartésienne seront présentés au paragraphe 3.3.2.3.

On peut donc réécrire (3.1.7) et (3.1.29) de la manière suivante :

$$\partial_t \left( \int_{\Omega} \frac{\mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{u}}^\ell}{2} \right) + \oint_{\Sigma} \mathbf{J}_\ell \cdot d\mathbf{S} = - \int_{\Omega} \mathcal{D}_\ell^I(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \mathcal{D}_\ell^\nu(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (3.1.33)$$

Dans la limite  $\ell \rightarrow 0$ , ce bilan se rapproche de (2.1.11) :

- $\frac{\mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{u}}^{\ell \rightarrow 0}}{2}$  correspond à l'énergie cinétique,
- $\oint_{\Sigma} \mathbf{J}_{\ell \rightarrow 0} \cdot d\mathbf{S}$  s'apparente au forçage par les parois,
- $\mathcal{D}_{\ell \rightarrow 0}^\nu$  correspond à la dissipation visqueuse.

En revanche, il présente un nouveau terme  $\mathcal{D}_{\ell \rightarrow 0}^I$  qui peut être vu comme un puits d'énergie, appelé dissipation inertielle.

L'étude statistique des incréments de vitesse s'est historiquement concentrée sur les moments d'ordre  $p$  de leur distribution en fonction de l'échelle  $\ell$  considérée. Ces moments notés  $S_p(\ell)$  sont appelés fonctions de structure. Les propriétés de ces fonctions sont des indicateurs de l'organisation des recirculations à travers les échelles et révèlent la régularité du champ de vitesse. Prédire correctement leur comportement correspond à bien comprendre la cascade énergétique. Nous présentons dans la section suivante une analyse de différentes renormalisations des fonctions de structure qui a été publiée dans la référence [51] (2019).

### 3.2 Analyse de l'universalité des fonctions de structure

Les valeurs des fonctions de structure pour une même géométrie d'écoulement semblent dépendre du nombre de Reynolds. Lorsqu'on change de géométrie, il y a encore des différences. La littérature s'est beaucoup interrogée sur les propriétés des fonctions de structure dans les écoulements homogènes isotropes [73, 74] (1941, 1962). Nous cherchons dans cette partie une manière universelle de normaliser les fonctions de structure eulériennes en mêlant données expérimentales (SPIV) dans la géométrie de von Kármán (voir 2.4.3) et simulations numériques homogènes isotropes (voir 2.4.4.1). Nous trouvons que, dans les deux cas, les fonctions de structure jusqu'à l'ordre 9 obéissent à un comportement universel basé sur une loi logarithmique [23] (1993); et que les fonctions de structure se confondent à condition d'utiliser un adimensionnement qui inclut une dépendance logarithmique en  $Re$ .

Une caractéristique bien connue de tout écoulement turbulent est la cascade de Kolmogorov-Richardson par laquelle l'énergie est transférée des grandes aux petites échelles de longueur jusqu'aux échelles de Kolmogorov en dessous desquelles elle est éliminée par dissipation visqueuse. Cette cascade d'énergie est un processus universel non linéaire et hors d'équilibre. De plus, le spectre d'énergie non dimensionnel correspondant  $E(k)/\varepsilon^{2/3}\eta^{5/3}$  est une fonction universelle de  $k\eta$ , où  $\eta = (\nu^3/\varepsilon)^{1/4}$  est l'échelle de longueur de Kolmogorov,  $\varepsilon$  le taux moyen de dissipation d'énergie par unité de masse, et  $\nu$  la viscosité cinématique. Cependant, il semble y avoir peu de dépendances liées au nombre de Reynolds, les conditions aux limites, d'isotropie ou d'homogénéité entre autres [37] (2019). Le spectre d'énergie est basé sur une quantité, la corrélation de vitesse, qui est quadratique en vitesse. Néanmoins, il est maintenant bien admis que l'universalité ne s'applique pas aux quantités statistiques qui impliquent des moments d'ordre supérieur. Par exemple, les fonctions de structure de vitesse d'ordre  $p$ , données par  $S_p(\ell) = \langle \|u(\mathbf{x} + \mathbf{r}) - u(\mathbf{x})\|^p \rangle_{\mathbf{x}, \|\mathbf{r}\|=\ell}$  ne sont pas universelles, du moins lorsqu'elles sont exprimées en unités de l'échelle de Kolmogorov [74] (1962)  $\eta$  et de la vitesse  $u_K = (\nu\varepsilon)^{1/4}$  (voir ci-dessous, section 3.2.2 pour une illustration).

Le mécanisme à l'origine de cette rupture d'universalité a été identifié par Frisch et Parisi [48] (1985), qui ont introduit une généralisation de la théorie de Kolmogorov, basée sur l'hypothèse qu'un écoulement turbulent est multifractal. Dans ce modèle, le champ de vitesse est caractérisé localement par un exposant de Hölder  $h$  (2.1.17), tel que  $|\delta_\ell u(\mathbf{x})| \equiv \langle \|\mathbf{u}(\mathbf{x} + \mathbf{r}) - \mathbf{u}(\mathbf{x})\| \rangle_{\|\mathbf{r}\|=\ell} \sim \ell^{h(\mathbf{x})}$ . Ici,  $h$  est une fonction stochastique qui suit une propriété de grande déviation [40] (2007-2008)  $\mathbb{P}(\log(|\delta_\ell u|/u_0) = h \log(\ell/L_0)) \sim (\ell/L_0)^{C(h)}$ , où  $u_0$  (respectivement  $L_0$ ) est la vitesse intégrale caractéristique (resp. la longueur), et  $C(h)$  est le spectre multifractal. Les champs de vitesse avec  $h < 1$  sont rugueux dans la limite  $\ell \rightarrow 0$ . Dans les écoulements réels, tout champ rugueux avec  $h > -1$  peut être régularisé à une échelle suffisamment petite (l'"échelle visqueuse") par la viscosité. Le premier calcul d'une telle échelle dissipative a été effectué par Paladin et Vulpiani [111] (1987), qui a montré qu'elle évolue avec la viscosité comme

$\eta_h \sim \nu^{1/(1+h)}$ , généralisant ainsi l'échelle de Kolmogorov, qui correspond à  $h = 1/3$ . Une telle échelle dissipative fluctue dans l'espace et le temps (avec  $h$ ), ce qui entraîne une non-universalité pour les moments d'ordre élevé, du moins lorsqu'ils sont exprimés en unités de  $\eta$  et de  $u_K$ .

Quelques années plus tard, Frisch et Vergassola [49] (1991) ont affirmé que l'universalité du spectre d'énergie peut être retrouvée, si les fluctuations de l'échelle de longueur dissipative sont prises en compte en introduisant une nouvelle procédure d'adimensionnement. La nouvelle prédiction est que  $\log\left(E(k)\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\eta^{-\frac{5}{3}}\right)/\log(\text{Re})$  devrait être une fonction universelle de  $\log(k\eta)/\log(\text{Re})$ , où  $\text{Re}$  est le nombre de Reynolds. Cette affirmation a été examinée plus tard par Castaing, Gagne, et Marchand [23] (1993) à l'aide des données des expériences de la soufflerie de Modane. Ils ont également suggéré que la prédiction peut être étendue aux fonctions de structure de la vitesse, de sorte que, pour tout  $p$   $\log(S_p(\ell)/u_K^p)/\log(\text{Re})$  devrait être une fonction universelle de  $\log(\ell/\eta)/\log(\text{Re})$ ; ils ont trouvé un bon accord pour  $p$  jusqu'à 6. Les mesures de vitesse, dans les expériences ci-dessus, ont été effectuées en utilisant l'anémométrie à fil chaud [72] (1914), qui ne donne accès qu'à une seule composante de la vitesse. A notre connaissance, aucune autre tentative n'a été faite pour vérifier cette affirmation avec des mesures plus réalistes.

Le but de la présente section est de réexaminer cette affirmation, mais en utilisant maintenant les champs de vitesse obtenus par la vélocimétrie stéréoscopique par image de particules (SPIV) dans les expériences et les simulations numériques directes (DNS) des équations de Navier-Stokes (NSE). Nous montrons que les fonctions de structure de vitesse numériques et expérimentales jusqu'à l'ordre 9 suivent une log-universalité [23] (1993); elles s'effondrent en effet sur une courbe universelle, si nous utilisons des unités qui incluent la dépendance  $\log(\text{Re})$ . Nous étudions ensuite la signification et les conséquences d'une telle log-universalité, et montrons qu'elle est liée aux propriétés d'une "énergie libre multifractale", basée sur une analogie entre la multifractalité et la thermodynamique (voir [100] (1991) pour un résumé). Nous montrons que, dans un tel cadre, l'existence d'une échelle de longueur de dissipation fluctuante est associée à une transition de phase décrivant la relaminarisation de champs de vitesse rugueux avec différents exposants de Hölder. Une telle transition a déjà été observée pour des fonctions de structure lagrangiennes mais semblait inaccessible dans des jeux de données eulériennes. Les mesures expérimentales utilisées dans cette partie sont décrites au paragraphe 2.4.3 et la table 2.20 résume les différents paramètres. Nous utilisons aussi des simulations homogènes isotropes décrites au paragraphe 2.4.4.1, les paramètres sont détaillés dans la table 2.23.

### 3.2.1 Histoire de la théorie

#### 3.2.1.1 Universalités de Kolmogorov 1941 et 1962

Dans la première théorie de Kolmogorov [73] (1941), les propriétés de la turbulence ne dépendent que de deux paramètres : la dissipation d'énergie moyenne par unité de masse  $\varepsilon$  et la viscosité  $\nu$ . Les seules unités de vitesse et de longueur que l'on peut construire en utilisant ces quantités sont la longueur de Kolmogorov  $\eta = (\nu^3/\varepsilon)^{1/4}$  et la vitesse  $u_K = (\varepsilon\nu)^{1/4}$ . Les fonctions de structure sont alors autosimilaires dans le domaine inertiel  $\eta \ll \ell \ll L_0$ , où  $L_0$  est l'échelle intégrale, et suivent des lois échelles suivantes :

$$S_p(\ell) \equiv \langle |\delta_\ell u|^p \rangle \sim u_K^p \left(\frac{\ell}{\eta}\right)^{p/3}, \quad (3.2.1)$$

qui se renormalise par la formule suivante :

$$\tilde{S}_p \equiv \frac{S_p}{S_3^{p/3}} = C_p, \quad (3.2.2)$$



où  $C_p$  est une constante non universelle.

Cette mise à l'échelle est typique d'une solution de symétrie d'échelle globale, et a été critiquée par Landau, qui la considérait incompatible avec les grandes fluctuations observées de la dissipation d'énergie locale. Kolmogorov a alors construit une seconde théorie [74] (1962), dans laquelle les fluctuations de la dissipation d'énergie étaient supposées suivre une statistique log-normale, et prises en compte via un exposant d'intermittence  $\mu$  et une nouvelle échelle de longueur  $L$ , brisant ainsi l'invariance d'échelle globale. Les fonctions de structure de vitesse résultantes suivent alors la nouvelle échelle :

$$S_p(\ell) \sim (\varepsilon\ell)^{p/3} \left(\frac{\ell}{L}\right)^{\mu p(3-p)}, \quad (3.2.3)$$

ce qui implique un nouveau type d'universalité impliquant les fonctions de structure relatives  $\tilde{S}_p$  :

$$\tilde{S}_p \equiv \frac{S_p}{S_3^{p/3}} \sim A_p \left(\frac{\ell}{L}\right)^{\tau(p)}, \quad (3.2.4)$$

où  $\tau(p) = \mu p(3-p)$  et  $A_p$  est une constante. Une telle formulation permet déjà de prévoir un autre type d'universalité intéressante. Si l'on prend  $L = L_0$ , on devrait alors retrouver :

$$\left(\frac{L_0}{\eta}\right)^{\tau(p)} \tilde{S}_p \sim A_p \left(\frac{\ell}{\eta}\right)^{\tau(p)}. \quad (3.2.5)$$

Par conséquent, nous devrions être en mesure de réduire toutes les fonctions de structure, à différents nombres de Reynolds, en traçant  $(\frac{L_0}{\eta})^{\tau(p)} \tilde{S}_p$  en fonction de  $\frac{\ell}{\eta}$ , étant donné que  $L_0/\eta \sim \text{Re}^{3/4}$ . Il n'y a cependant pas de prédiction claire sur la valeur de  $L$  et nous montrons dans la section d'analyse des données que  $L$  diffère de  $L_0$ .

La relation (3.2.5) montre que  $\log\left(\left(\frac{L_0}{\eta}\right)^{\tau(p)} \tilde{S}_p\right)$  est une fonction linéaire de  $\log(\frac{\ell}{\eta})$ . En principe, une telle renormalisation universelle n'est pas valable en dehors du domaine inertiel, c'est-à-dire par exemple lorsque  $\ell < \eta$ . Pour être plus général que ce que l'on pensait auparavant, il peut cependant être démontré en utilisant le formalisme multifractal, comme l'ont montré pour la première fois Frisch et Vergassola [49] (1991).

### 3.2.1.2 Modèle multifractal et échelle de dissipation fluctuante

Pour le modèle multifractal (MFR), on suppose que la turbulence est localement auto-similaire, de sorte qu'il existe un champ scalaire  $h(\mathbf{x}, \ell, t)$  tel que

$$h(\mathbf{x}, t, \ell) = \frac{\log(|\delta_\ell \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)|/u_0)}{\log(\ell/L)}, \quad (3.2.6)$$

pour une gamme d'échelles dans une "gamme inertielle" appropriée  $\eta_h \ll \ell \ll L$ , où  $L$  est une échelle caractéristique de longueur intégrale,  $\eta_h$  une échelle de longueur de coupure, et  $u_0$  une vitesse caractéristique à grande échelle. Cette échelle  $\eta_h$  est une généralisation de l'échelle de Kolmogorov, et est définie comme l'échelle où le nombre de Reynolds local  $\ell|\delta_\ell \mathbf{u}|/\nu$  est égal à 1. En écrivant  $\delta_\ell u = |\delta_\ell \mathbf{u}| = u_0(\ell/L)^h$ , cela conduit à l'expression de  $\eta_h$  en fonction du nombre de Reynolds global  $\text{Re} = u_0 L/\nu$  par la formule ci-dessous

$$\eta_h \sim L \text{Re}^{-1/(1+h)}. \quad (3.2.7)$$

Cette échelle apparaît donc comme une coupure fluctuante qui dépend de l'exposant d'échelle et donc de  $\mathbf{x}$  et du temps. Il s'agit de la généralisation de l'échelle de Kolmogorov  $\eta \sim \nu^{3/4} \equiv \eta_{\frac{1}{3}}$ , qui a été proposée pour la première fois par Paladin et Vulpiani [111] (1987). En dessous de  $\eta_h$ , le champ de vitesse devient laminaire, et  $|\delta_\ell \mathbf{u}| \propto \ell$ .

Lorsque le champ de vitesse est turbulent,  $h \equiv \log(|\delta_\ell \mathbf{u}|/u_0)/\log(\ell/L)$  varie de manière stochastique en fonction de l'espace et du temps. De plus, si la turbulence est statistiquement homogène, stationnaire et isotrope,  $h$  ne dépend que de  $\ell$ , la grandeur de l'échelle. Par conséquent, formellement,  $h$  peut être considéré comme un processus stochastique continu étiqueté par  $\log(\ell/L)$ . Par le théorème de Kramer [140] (2009), dans la limite  $\ell \rightarrow 0$ ,  $\log(L/\ell) \rightarrow \infty$ , on obtient :

$$\mathbb{P}[\log(\delta_\ell u/u_0) = h \log(\ell/L)] \sim e^{\log(\ell/L)C(h)} = \left(\frac{\ell}{L}\right)^{C(h)}, \quad (3.2.8)$$

où  $C(h)$  est la puissance de  $\ell$  dans la distribution de la fonction  $h$ , aussi appelée spectre multifractal. Formellement,  $C(h)$  peut être interprété comme la co-dimension de l'ensemble où l'exposant local de Hölder à l'échelle  $\ell$  est égal à  $h$ . En utilisant le théorème de Gärtner-Elis [140] (2009), on peut relier  $C$  et les fonctions de structure de vitesse par la formule suivante :

$$S_p(\ell) = \langle (\delta_\ell u)^p \rangle = \int_{h_{\min}}^{h_{\max}} u_0^p \left(\frac{\ell}{L}\right)^{ph+C(h)} dh. \quad (3.2.9)$$

Pour aller plus loin et faire le lien avec la section précédente, on pose  $\varepsilon = u_0^3/L$  de sorte que l'on peut réécrire  $S_p(\ell)$  ainsi :

$$S_p(\ell) = (\varepsilon \ell)^{p/3} \int_{h_{\min}}^{h_{\max}} \left(\frac{\ell}{L}\right)^{p(h-1/3)+C(h)} dh \sim (\varepsilon \ell)^{p/3} \left(\frac{\ell}{L}\right)^{\tau(p)}. \quad (3.2.10)$$

Formulé ainsi,  $\tau(p)$  est la transformée de Legendre de la fonction  $C(h+1/3)$ , i.e.  $\tau(p) = \min_h(p(h-1/3) + C(h))$ . Réciproquement,  $C(h)$  est la transformée de Legendre de  $\tau(p)$ , ce qui lui impose d'être convexe. L'ensemble des points vérifiant le critère  $C(h) \leq d$ , correspond à l'ensemble des valeurs de  $h$  observables ou admissibles. Cet ensemble est, dans notre formalisme, forcément un intervalle  $[h_{\min}, h_{\max}]$  où  $-1 \leq h_{\min}$  et  $h_{\max} \leq 1$ .

Comme l'ont remarqué Frisch et Vergassola [49] (1991), l'exposant d'échelle  $\zeta(p) = p/3 + \tau(p)$  défini par l'équation (3.2.10) n'est constant que sur la gamme où  $\ell > \eta_h$  pour les  $h \in [h_{\min}, h_{\max}]$ . En effet, pour les  $\ell$  assez petits, l'exposant n'est plus valable, puisque, à partir de  $\ell < \eta_h$ , les champs de vitesse d'exposant  $h$  sont régularisés et ne contribuent plus à l'intermittence. Il en résulte une dépendance lente de  $\zeta(p)$  par rapport à l'échelle, qui est obtenue via la formule corrigée :

$$S_p = (\varepsilon \ell)^{p/3} \int_{\eta_h \leq \ell} \left(\frac{\ell}{L}\right)^{p(h-1/3)+C(h)} dh \sim (\varepsilon \ell)^{p/3} \left(\frac{\ell}{L}\right)^{\tau(p,\ell)}. \quad (3.2.11)$$

Pour illustrer cette correction, calculons la valeur de  $h$  pour laquelle  $\ell = \eta(h)$ . Il s'agit de  $h(\ell) = -1 + \log(\text{Re})/\log(L/\eta)$ . En notant  $\theta = \log(L/\ell)/\log(\text{Re})$ , il est possible de réécrire (3.2.11) d'une nouvelle manière :

$$\tilde{S}_p \equiv \frac{S_p}{S_3^{p/3}} = \int_{-1+1/\theta}^{h_{\max}} \left(\frac{\ell}{L}\right)^{p(h-1/3)+C(h)} dh \sim \exp(-\theta \tau(p, \theta) \log(\text{Re})), \quad (3.2.12)$$

où  $\tau(p, \theta) = \tau_p$  lorsque  $\theta \leq 1/(1 + h_{\max})$  et  $\tau(p, \theta) = p(\theta - 1/3) + C(-1 + 1/\theta)$  lorsque  $1/(1 + h_{\max}) \leq \theta \leq 1/(1 + h_{\min})$ . Comme l'ont remarqué Frisch et Vergassola [49] (1991), cela implique une nouvelle renormalisation universelle qui n'est plus limitée aux échelles de la gamme inertielle, mais qui s'étend aussi à la gamme dissipative. Cette renormalisation s'écrit :

$$\frac{\log(\tilde{S}_p)}{\log(\text{Re})} = -\tau(p, \theta)\theta, \quad \theta = \log(L/\ell)/\log(\text{Re}). \quad (3.2.13)$$

Si l'échelle  $L$  est constante et vaut  $L_0$ , l'échelle intégrale, on retrouve  $\text{Re} = (L_0/\eta)^{4/3}$  et l'universalité multifractale implique que  $\log(\tilde{S}_p)/\log(L_0/\eta)$  doit dépendre de  $\log(\ell/\eta)/\log(L_0/\eta)$ . Si la dépendance est linéaire, on retrouve la renormalisation de Kolmogorov [74] (1962). Le cadre multifractal nous donne alors une *généralisation* du modèle Kolmogorov [74] (1962).

Cette renormalisation est cependant difficile à tester, puisque l'échelle  $L$  n'est a priori pas connue, et peut dépendre de  $\text{Re}$ . Nous montrons dans la suite une renormalisation générale qui utilise la liberté de choix du paramètre  $L$  pour unifier Kolmogorov [74] (1962) et le modèle multifractal.

### 3.2.1.3 Renormalisation générale

En supposant que la turbulence maximise les transferts d'énergie inter-échelle, Castaing, B. [24] (1989) proposent une nouvelle renormalisation universelle qui prend la forme suivante :

$$\gamma(\text{Re}) \log\left(\frac{S_p}{A_p u_K^p}\right) = G(p, \gamma(\text{Re}) \log(\ell K_0/\eta)), \quad (3.2.14)$$

où  $A_p$  et  $K_0$  sont des constantes universelles, et  $\beta$  et  $G$  sont des fonctions génériques. Puisque  $G$  est linéaire dans la gamme inertielle, on obtient  $G(p, x) \sim \tau(p)x$ . Cette renormalisation a été vérifiée par Castaing, Gagne, et Marchand [23] (1993) sur des données expérimentales utilisant un anémomètre à fil chaud. Ils ont constaté un bon regroupement des fonctions de structure à différents nombres de Reynolds de Taylor  $R_\lambda$ , à condition que  $\gamma(\text{Re})$  soit constant aux faibles nombres de Reynolds et suive une loi du type :  $\gamma(\text{Re}) \sim \gamma_0/\log(R_\lambda/R_*)$ , où  $R_*$  est une constante, pour  $R_\lambda > 400$ . Les relations  $R_\lambda \sim \text{Re}^{1/2}$  et  $(L_0/\eta) \sim \text{Re}^{3/4}$  nous permettent de réécrire l'équation (3.2.14) comme suit :

$$\beta(\text{Re}) \left(\frac{\log(\tilde{S}_p/S_{0p})}{\log(L_0/\eta)}\right) = G\left(p, \beta(\text{Re}) \frac{\log(\ell/\eta)}{\log(L_0/\eta)}\right), \quad (3.2.15)$$

où les  $S_{0p}$  sont des constantes et  $\beta$  et  $G$  des fonctions génériques. En comparant avec les renormalisations de Kolmogorov [74] (1962) et du modèle multifractal MFR (formules (3.2.5) et (3.2.13)), on trouve que la formule de (3.2.15) généralise ces renormalisations avec  $L = L_0$ . Elle permet de plus une plus grande flexibilité que ces dernières grâce à la fonction  $\beta(\text{Re})$ , qui correspond à un paramètre d'interpolation.

Nous testons les différentes renormalisations proposées dans la section 3.2.2 et proposons une interprétation physique de (3.2.15) à l'aide d'une analogie avec la thermodynamique dans la section 3.2.3.

## 3.2.2 Tests des renormalisations

Les différentes renormalisations sont testées à l'aide des fonctions de structure utilisant les incréments de vitesse calculés à partir d'ondelettes présentés à l'équation (3.1.26). Les ondelettes permettent de lisser le bruit expérimental. Nous utilisons les fonctions suivantes :

$$S_p = \langle |\delta W(\mathbf{u})(\mathbf{x}, \ell)|^p \rangle. \quad (3.2.16)$$

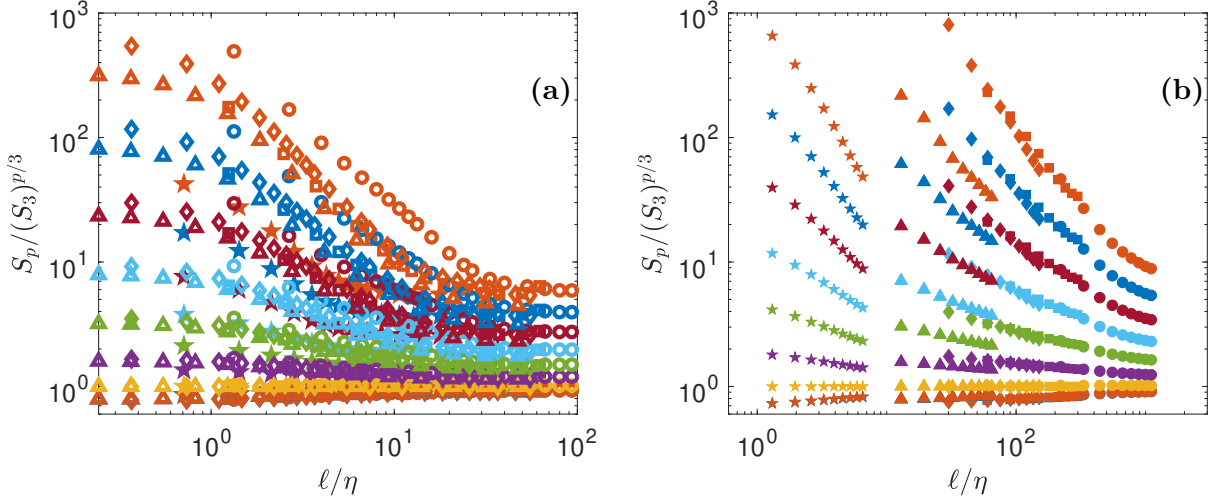


FIGURE 3.5 – Test de la renormalisation Kolmogorov [73] (1941) de l'équation (3.2.2). a) simulations numériques b) Expériences. Les fonctions de structure d'un même ordre ont été multipliées par un facteur arbitraire pour la lisibilité de la figure. Les couleurs correspondent aux ordres :  $p = 1$  bleu (caché derrière  $p = 2$ );  $p = 2$  orange;  $p = 3$  jaune;  $p = 4$  magenta;  $p = 5$  vert;  $p = 6$  bleu clair;  $p = 7$  rouge;  $p = 8$  : blue foncé;  $p = 9$  orange. Pour que la renormalisation Kolmogorov [73] (1941) soit correcte il faudrait que toutes fonctions du même ordre  $p$  soient constantes.

Cette formule est utilisée pour les jeux de données expérimentales (table 2.20) et numériques (table 2.23), et nous fournissent les fonctions de structure en formalisme d'ondelettes pour différentes échelles et de nombreux nombres de Reynolds.

### 3.2.2.1 Test de la renormalisation Kolmogorov [73] (1941)

Testons d'abord la renormalisation de Kolmogorov [73] (1941) de l'équation (3.2.2) en traçant :

$$\log \left( \frac{S_p}{u_K^p} \right) = F \left( \log \left( \frac{\ell}{\eta} \right) \right). \quad (3.2.17)$$

Le graphique contenant les données numériques et expérimentales est présenté à la figure 3.5. Les différentes courbes ne se regroupent pas, ce qui montre que la renormalisation Kolmogorov [73] (1941) ne fonctionne pas, ce qui est connu, et lié aux effets d'intermittence comme le suggère Frisch [47] (1995).

### 3.2.2.2 Test de la renormalisation Kolmogorov [74] (1962)

Nous testons ici la renormalisation Kolmogorov [74] (1962) de l'équation (3.2.5) en traçant dans la figure 3.6 :

$$\log \left[ \left( \frac{L_0}{\eta} \right)^{\tau(p)} \tilde{S}_p \right] = F \left( \log \left( \frac{\ell}{\eta} \right) \right). \quad (3.2.18)$$

La qualité de la renormalisation et du regroupement dépend des valeurs de l'exposant d'intermittence  $\tau(p)$ . D'ailleurs chercher les  $\tau(p)$  qui correspondent au meilleur regroupement correspond à une bonne manière d'obtenir leurs valeurs. Nous avons recours à un algorithme de minimisation qui donne les valeurs de  $\tau(p)$  en minimisant l'écart entre les courbes mesurées et les courbes pointillées de pente  $\tau(p)$ . Les valeurs obtenues sont présentées dans la table 3.3. Le meilleur regroupement est présenté

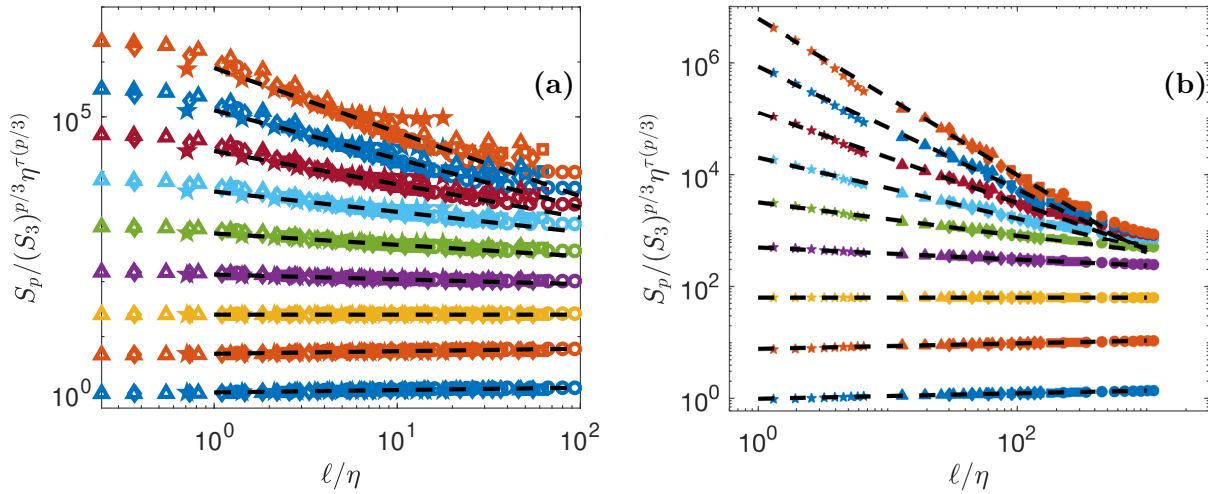


FIGURE 3.6 – Test de la renormalisation Kolmogorov [74] (1962) de l'équation (3.2.5). a) simulations numériques b) Expériences. Les fonctions de structure d'un même ordre ont été multipliées par un facteur arbitraire pour la lisibilité de la figure. Les couleurs correspondent aux ordres :  $p = 1$  bleu ;  $p = 2$  orange ;  $p = 3$  jaune ;  $p = 4$  magenta ;  $p = 5$  vert ;  $p = 6$  bleu clair ;  $p = 7$  rouge ;  $p = 8$  : blue foncé ;  $p = 9$  orange. Les courbes pointillées sont des lois de puissance d'exposants  $\tau(p) = \zeta(p) - \zeta(3)p/3$ , en utilisant les  $\zeta(p)$  de la figure 3.7-a.

dans la figure 3.6, sous figure a) pour les simulations numériques, et b) pour les expériences. L'accord est meilleur pour les mesures expérimentales que pour les simulations numériques. Cependant, dans les deux cas il y a des différences notoires entre les différents jeux de données aux grandes échelles, montrant que la renormalisation n'est pas réussie.

### 3.2.2.3 Test de la renormalisation générale

Évaluons maintenant la renormalisation générale en traçant :

$$\beta(\text{Re}) \left( \frac{\log(\tilde{S}_p/S_{0p})}{\log(L_0/\eta)} \right) = F \left( p, \beta(\text{Re}) \frac{\log(\ell/\eta)}{\log(L_0/\eta)} \right). \quad (3.2.19)$$

Dans ce cas, le meilleur regroupement correspond à une optimisation de deux familles de paramètres :  $S_{0p}$  et  $\beta(\text{Re})$  que nous obtenons avec un procédé de minimisation. La simulation DNS à  $R_\lambda = 138$  est utilisée comme cas de référence  $R_\lambda = 138$ , nous servant à déterminer les valeurs de  $\beta(\text{Re})$  et  $S_{0p}$  qui correspondent au meilleur regroupement pour tous les jeux de données. Les courbes obtenues sont présentées dans la figure 3.8. Le regroupement donne un bon accord pour toutes les valeurs de  $\text{Re}$ , hormis la DNS au plus petit nombre de Reynolds qui ne correspond pas dans la zone dissipative.

### 3.2.2.4 Fonction $\beta(\text{Re})$

Enthousiasmés par les résultats de Castaing, Gagne, et Marchand [23] (1993), nous traçons dans la figure 3.9 les valeurs de  $1/\beta$  en fonction de  $R_\lambda$ . Nos résultats suivent sur une grande gamme de nombres de Reynolds, une loi en  $1/\beta \sim \frac{1}{\beta_0} / \log(R_\lambda)$ , avec  $\beta_0 \sim 3/4$ . La figure 3.9 nous invite à comparer avec les valeurs obtenues par Castaing, Gagne, et Marchand [23] (1993) dans un jet d'hélium liquide. Nous avons multiplié leurs valeurs par un coefficient unique pour les faire coïncider aux grands  $\text{Re}$ . Cette multiplication se justifie puisque  $\beta(\text{Re})$  est déterminé à une constante près, dépendant de l'amplitude de

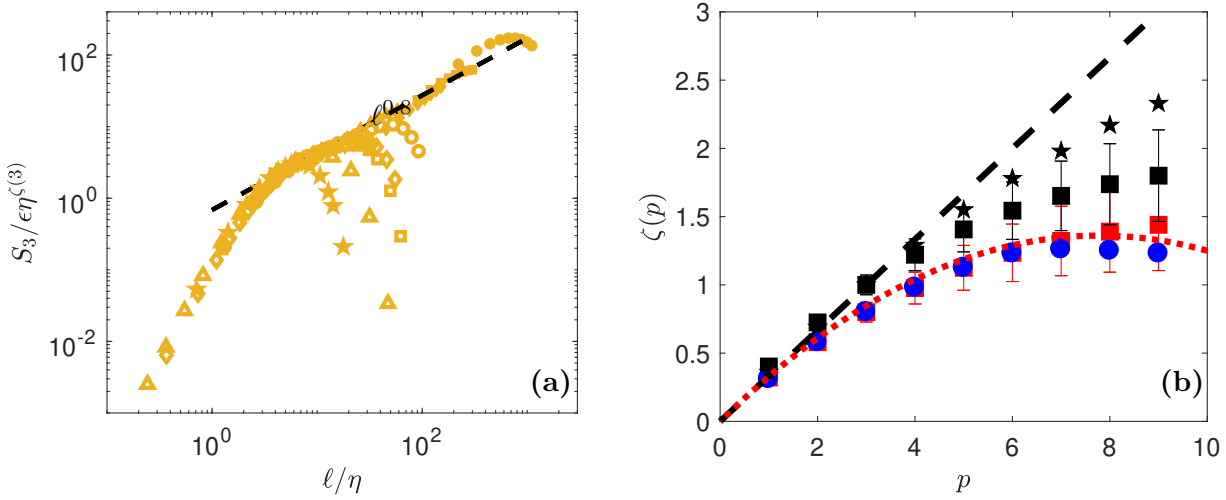


FIGURE 3.7 – . a) Détermination de  $\zeta(3)$  en cherchant le meilleur regroupement des données expérimentales (symboles pleins) et de DNS (symboles creux). La courbe pointillée correspond à  $\ell^{0.8}$ . b) Exposants  $\zeta(p)$  en fonction de  $p$  obtenus pour les fonctions de structure basées sur les ondelettes. Valeurs issues de la table 3.3. Les simulations numériques sont les ronds bleus, et les expériences les carrés rouges. La courbe pointillée rouge correspond à la fonction  $\min_h(hp + C(h))$  en prenant pour  $C(h)$  la formule  $C(h) = (h - a)^2/2b$ , avec  $a = 0.35$  et  $b = 0.045$ . Les étoiles noires indiquent les valeurs de  $\zeta_{\text{SAW}}(p)/\zeta_{\text{SAW}}(3)$  (cf table 3.3), et les triangles noirs celles de  $\zeta_{\text{EXP}}(p)/\zeta_{\text{EXP}}(3)$ .

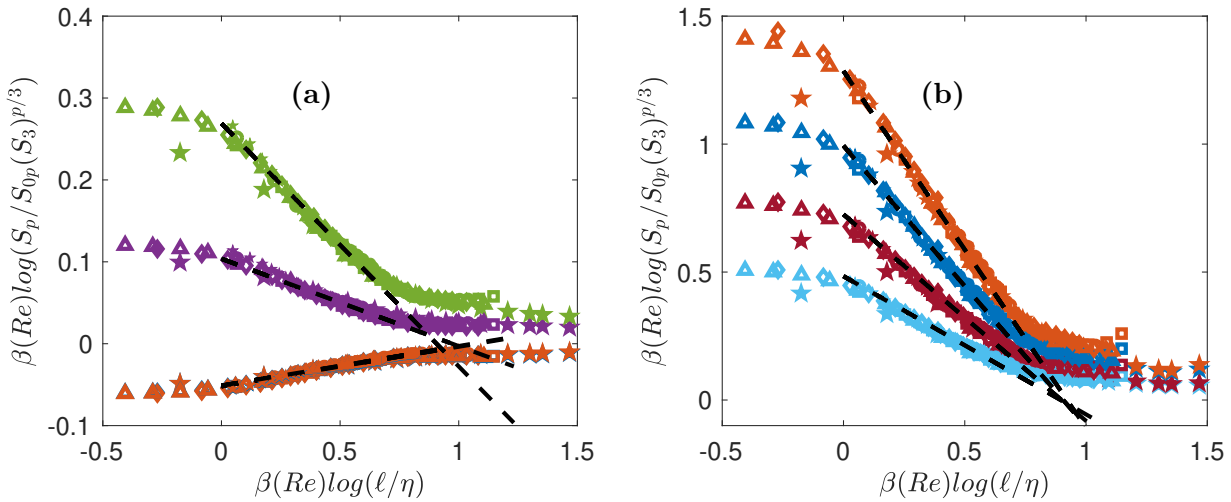


FIGURE 3.8 – Test de la renormalisation générale présentée à l'équation (3.2.19) avec les simulations DNS (symboles creux) et les mesures expérimentales (symboles pleins). Les fonctions sont codées à l'aide de couleur : a)  $p = 1$  bleu (caché derrière  $p = 2$ ) ;  $p = 2$  orange ;  $p = 3$  jaune ;  $p = 4$  magenta ;  $p = 5$  vert ; b)  $p = 6$  bleu clair ;  $p = 7$  rouge ;  $p = 8$  : blue foncé ;  $p = 9$  orange. Les fonctions de structure d'un même ordre ont été multipliées par un facteur arbitraire pour la lisibilité de la figure. Les courbes pointillées sont des lois de puissance d'exposants  $\tau(p) = \zeta(p) - \zeta(3)p/3$ , utilisant les  $\zeta(p)$  de la figure 3.7-b.

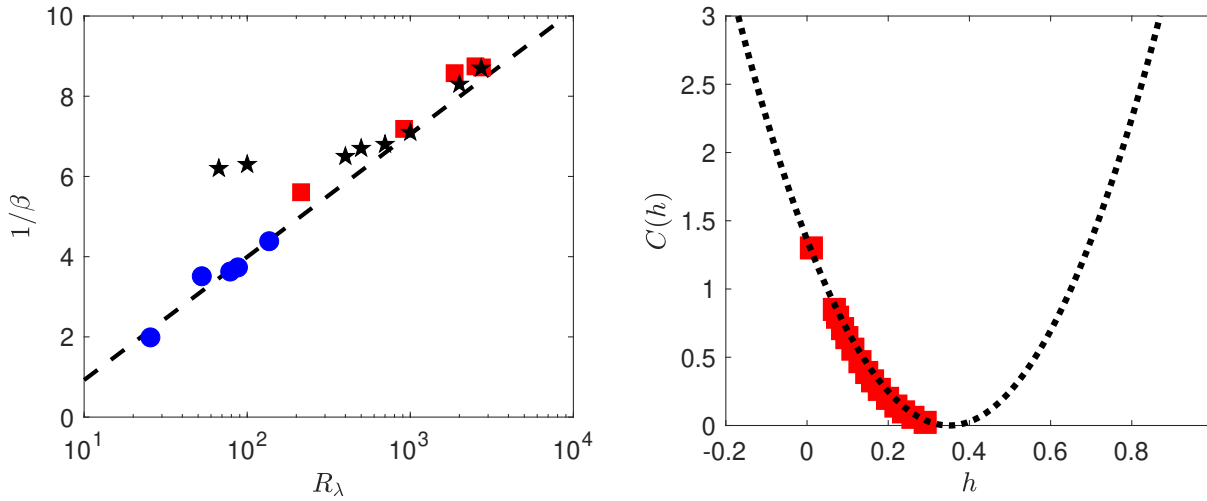


FIGURE 3.9 – a) Valeurs de  $1/\beta(\text{Re})$  en fonction de  $\log(R_\lambda)$  pour les données expérimentales (carrés rouges) et DNS (ronds bleus). Les valeurs sont obtenues en prenant comme référence la DNS à  $R_\lambda = 138$ . Les étoiles noires correspondent aux valeurs obtenues par Castaing, Gagne, et Marchand [23] (1993) multipliées par un facteur arbitraire unique pour qu'elles correspondent à nos valeurs aux grands Reynolds. La courbe pointillée trace  $(4/3) \log(R_\lambda/5)$ . b) Spectre multifractal expérimental  $C(h)$  obtenu à partir de la transformée de Legendre inverse des exposants  $\zeta(p)$  de la figure 3.7-b. La courbe pointillée est la parabole  $(h - a)^2/2b$  avec  $a = 0.35$  et  $b = 0.045$ .

la fonction de structure prise comme référence. Il s'agit alors d'accorder la référence Castaing, Gagne, et Marchand [23] (1993) à la nôtre. Pour les grands Reynolds, nos travaux s'accordent. Cependant, pour les petits nombres de Reynolds, nous n'observons pas la saturation de  $1/\beta$  que Castaing, Gagne, et Marchand [23] (1993) ont observé. Nous proposons une interprétation de la quantité  $\beta(\text{Re})$  au paragraphe 3.2.3.

### 3.2.2.5 Exposants $\zeta(p)$

Il est possible d'obtenir la valeur des exposants des fonctions de structure  $\zeta(p)$  par deux méthodes différentes :

1. comme pour Kolmogorov [74] (1962), on obtient  $\tau(p)$  puis  $\zeta(p) = \zeta(3)p/3 + \tau(p)$ . Leurs valeurs dépendent toujours de  $\zeta(3)$  qui n'est pas encore fixé par la renormalisation basée sur l'équation (3.2.5). Pour obtenir la valeur de  $\zeta(3)$  nous utilisons une régression de manière à minimiser l'écart entre la droite de pente  $\zeta(3)$  et les courbes de  $\log(S_3/u_K^3)$  pour les simulations numériques d'une part et les mesures expérimentales d'autre part. Cette procédure est illustrée par la figure 3.7-a). Les résultats sont présentés dans la table 3.3, et nous permettent de remonter au  $\zeta(p)$  puisque nous avons les  $\tau(p)$ .
2. En utilisant la renormalisation générale, nous pouvons également obtenir  $\tau_{p,\text{univ}}$  par une régression linéaire sur la courbe commune. Notons que, puisque les données sont juxtaposées, cela fournit une très bonne estimation de cette quantité, avec le plus faible bruit possible.

En pratique, nous n'observons pas de différences significatives entre ces deux procédures ; par conséquent, nous ne rapportons que les valeurs obtenues en suivant la première méthode.

Les valeurs obtenues sont reportées dans la figure 3.7 et présentées dans la table 3.3. Remarquons que les valeurs expérimentales et numériques de  $\zeta(3)$  ne sont pas égales à 1, ce qui n'est pas compatible



exposant \ order	$p = 1$	$p = 2$	$p = 3$	$p = 4$	$p = 5$	$p = 6$	$p = 7$	$p = 8$	$p = 9$
$\zeta_{\text{SAW}}/\zeta_{\text{SAW}}(3)$	0.36	0.69	1	1.29	1.55	1.78	1.98	2.17	2.33
$\zeta_{\text{DNS}}$	0.31	0.58	0.80	0.98	1.12	1.23	1.26	1.25	1.23
$\zeta_{\text{EXP}}$	0.32	0.58	0.80	0.98	1.12	1.23	1.32	1.39	1.44
$\tau_{\text{DNS}}$	0.04	0.05	0	-0.09	-0.21	-0.37	-0.61	-0.88	-1.17
$\tau_{\text{EXP}}$	0.05	0.05	0	-0.09	-0.21	-0.36	-0.54	-0.74	-0.96

TABLE 3.3 – Exposants  $\tau(p)$  et  $\zeta(p)$  obtenus par le procédé de minimisation basé sur la renormalisation Kolmogorov [74] (1962) pour les valeurs expérimentales (indice EXP) et numériques (indice DNS). L'indice SAW rapporte aux valeurs obtenues par [129] (2018) sur les données expérimentales avec une technique différente. Les exposants  $\tau_{\text{EXP}}(p)$  (carrés rouges) et  $\tau_{\text{DNS}}$  (ronds bleus) sont obtenus par la méthode des moindres carrés ordinaires optimisant  $\tau(p)$  pour minimiser la dispersion des fonctions de structure normalisées  $\log \left[ \left( \frac{L_0}{\eta} \right)^{\tau(p)} \tilde{S}_p \right]$  tracées en fonction de  $(\ell/\eta)^{\tau(p)}$ . On retrouve ensuite les  $\zeta(p)$  par la formule  $\zeta(p) = \tau(p) + \zeta(3)p/3$ , et à l'aide du  $\zeta(3)$  présenté à la figure 3.7-a.

avec la loi dite des "quatre cinquièmes" proposée par Kolmogorov et qui prévoit que  $\zeta(3) = 1$  pour les écoulements homogènes isotropes, pour des incréments de vitesse sans ondelette. Cette différence peut s'expliquer par le calcul des moments des valeurs absolues des incréments de vitesse, alors que la loi des quatre cinquièmes utilise des quantités signées. Nous avons vérifié que le fait de retirer les valeurs absolues nous donne des valeurs plus proches de 1 mais aussi des quantités plus bruitées. Lorsque l'on regarde les exposants relatifs  $\zeta(p)/\zeta(3)$ , on retrouve des valeurs proches de celles de Saw et al. [129] (2018) qui utilisent le même jeu de données expérimentales mais avec des incréments de vitesse et une technique de renormalisation autosimilaire proposée par Benzi et al. [9] (1993).

### 3.2.2.6 Spectre multifractal

Connaître les  $\zeta(p)$  nous permet de calculer le spectre multifractal  $C(h)$  par la transformée de Legendre inverse :

$$C(h) = \min_p [ph + \zeta(p)]. \quad (3.2.20)$$

En pratique nous utilisons l'identité suivante :

$$C\left(\left.\frac{d\zeta(p)}{dp}\right|_{p^*}\right) = \zeta(p^*) - p^* \left.\frac{d\zeta(p)}{dp}\right|_{p^*}. \quad (3.2.21)$$

Afin d'estimer  $C$ , nous procédons d'abord à une interpolation polynomiale d'ordre 4 sur les  $\zeta(p)$ , puis évaluons à l'aide de la fonction interpolatrice  $\frac{d\zeta(p)}{dp}$ , ce qui nous donne accès à  $C$  grâce à l'équation (3.2.21). Les résultats expérimentaux et numériques sont présentés dans la figure 3.9-b.

La courbe semble être une parabole, ce qui confirme une distribution log-normale des incréments de vitesse compatible suivant la valeur :

$$C(h) = \frac{(h - a)^2}{2b}, \quad (3.2.22)$$

avec  $a = 0.35$  et  $b = 0.045$ . Cette approximation parabolique nous donne aussi (à l'aide de la transformée de Legendre sur l'approximation de  $C(h)$  fournie par l'équation (3.2.22)) les bonnes valeurs des exposants  $\zeta(p)$  comme on le constate sur la figure 3.7.



### 3.2.3 Turbulence et thermodynamique

#### 3.2.3.1 Analogie Thermodynamique

Une analogie entre le modèle multifractal et la turbulence est connue de la littérature [11, 100, 123] (1987, 1991, 1996). Elle nous aide à interpréter les résultats de la renormalisation générale que nous venons de présenter. Regardons la quantité suivante :

$$\mu_\ell = \frac{|\delta W_\ell|^3}{\langle |\delta W_\ell|^3 \rangle}. \quad (3.2.23)$$

Par définition  $\mu_\ell$  est strictement positive et son intégrale vaut  $\langle \mu_\ell \rangle = 1$ , pour tout  $\ell$ . On peut voir  $\mu_\ell$  comme une mesure de probabilité dépendante de  $\ell$ . Nous pouvons analyser ses grandes déviations par la formule :

$$\mathbb{P}[\log(\mu_\ell) = E \log(\ell/\eta)] \sim e^{\log(\ell/\eta)S(E)}, \quad (3.2.24)$$

où  $S(E)$  est la fonction des grandes déviations de  $\log(\mu_\ell)$  et peut être vue comme une énergie, tandis que  $\log(\ell/\eta)$  correspond à un volume, et  $\log(\mu_\ell)/\log(\ell/\eta)$  à une densité d'énergie. La définition de  $\mu_\ell$ , lie directement  $S$  au spectre multifractal  $C$  qui peut se voir comme la fonction des grandes déviations des incréments  $|\delta W_\ell|$ . De plus, puisque dans la gamme inertielle  $\langle |\delta W_\ell|^3 \rangle \sim \ell^{\zeta(3)}$ , ceci implique que  $S(E) = C(3h - \zeta(3))$ . Par définition de  $\tilde{S}_{3p}$ , nous avons pouvons écrire :

$$\tilde{S}_{3p} = \frac{S_{3p}}{S_3^p} = \langle e^{p \log(\mu_\ell)} \rangle, \quad (3.2.25)$$

de telle sorte que  $Z = \tilde{S}_{3p}$  correspond à une fonction de partition associée à la variable  $\log(\mu_\ell)$ , avec une température pseudo-inverse de  $p = 1/kT$ . Ainsi, en prenant le logarithme de  $Z$ , on trouve une énergie libre  $F$  définie par :

$$\log(\tilde{S}_{3p}) = F. \quad (3.2.26)$$

Le théorème de Gärtner-Elis nous assure que  $F$  est la transformée de Legendre de l'énergie  $S$  par la relation  $F = \min_E(pE - S(E))$ . Cette énergie libre dépend a priori de la température  $T = 1/kp$ , du volume  $V = \log(\ell/\eta)$  et du nombre de degrés de liberté  $N$ . En identifiant  $N = (1/\beta(\text{Re})) \log(L_0/\eta)$ , on trouve que la renormalisation universelle correspond, dans le cadre de cette analogie à la relation suivante

$$F(T, V, N) = NF(T, \frac{V}{N}, 1), \quad (3.2.27)$$

qui traduit l'extensivité de l'énergie libre.

	Thermodynamique	Turbulence
Température	$k_B T$	$1/p$
Énergie	$E$	$\log(\mu_\ell)$
Nombre de degrés de liberté	$N$	$\log(\text{Re}) \equiv \log(L_0/\eta)\beta_0$
Volume	$V$	$\log(\ell/\eta)$
Pression	$P$	$\tau(p, \ell)$
Energie libre	$F$	$\log(\tilde{S}_{3p})$

TABLE 3.4 – Ensemble des quantités de l'analogie entre le modèle multifractal dans le formalisme de la turbulence et la thermodynamique.

Cette analogie est donc raisonnable. Nous rappelons l'ensemble des quantités traitées dans la table 3.4. Elle suggère des perspectives intéressantes que nous présentons au paragraphe suivant.

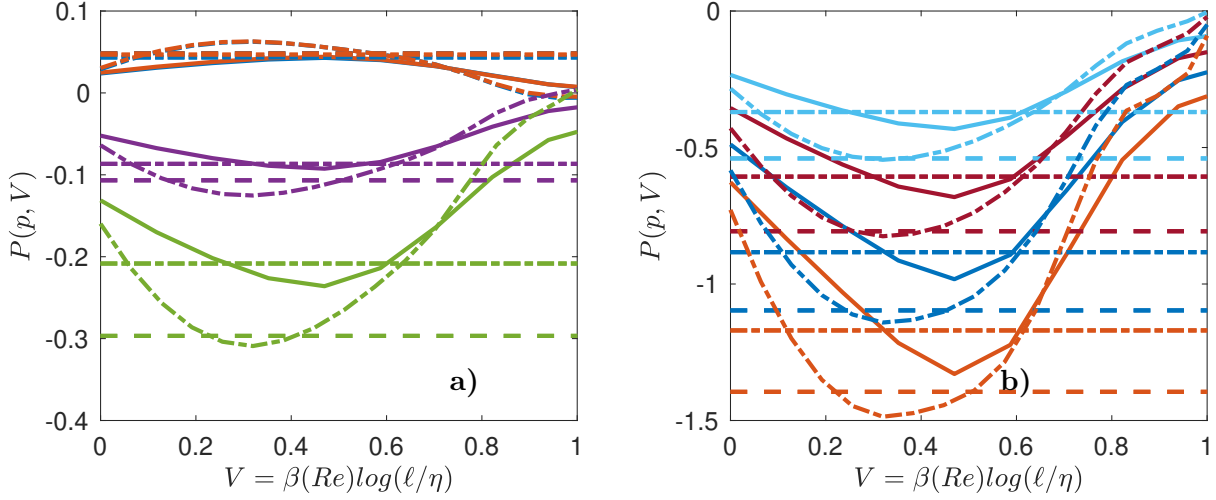


FIGURE 3.10 – Équation d'état multifractale de l'état turbulent. On trace ici la pression multifractale en fonction du volume pour  $R_\lambda = 25$  (courbe continue),  $R_\lambda = 56$  (courbe pointillée). Les couleurs correspondent aux différentes températures **a)**  $p = 1$  : bleu ;  $p = 2$  : orange ;  $p = 4$  : magenta ;  $p = 5$  : vert ; **b)**  $p = 6$  : bleu clair ;  $p = 7$  : rouge ;  $p = 8$  : bleu ;  $p = 9$  : orange. Les droites pointillées correspondent à  $P(p, V) = \tau_{\text{EXP}}(p)$  (ou  $\tau_{\text{DNS}}(p)$ ), en utilisant les valeurs de la table 3.3.

### 3.2.3.2 Pression multifractale et transition de phase

L'énergie libre  $F = \log(\tilde{S}_{3p})$  nous donne accès à la quantité conjuguée au volume : la pression, ici pression multifractale qui vaut  $P = \partial F / \partial V$ . Dans la gamme inertielle, où  $\tilde{S}_p \sim \ell^{\tau(p)}$ , la pression vaut  $P = \tau(p)$  et ne dépend que de la température. En dehors de cette gamme,  $P$  correspond à un exposant local et dépend du volume  $V$  (l'échelle  $\ell$ ) et du nombre de degrés de liberté  $N$  (nombre de Reynolds). En utilisant les fonctions mises en lumière par la renormalisation générale de la figure 3.8, il est possible de calculer la pression multifractale empirique  $P$  et d'étudier ses dépendances en  $T$ ,  $V$  et  $N$ . Nous présentons ces valeurs dans la figure 3.10 pour  $R_\lambda = 25$  et  $R_\lambda = 56$ , et la figure 3.11 pour  $R_\lambda = 90$  et  $R_\lambda = 138$ . Nous constatons que, à faible nombre de Reynolds, la pression diminue de façon monotone à partir de la plage dissipative et atteint un minimum puis augmente à plus grande échelle. Il n'y a pas de plateau plat clair qui correspondrait à une gamme "inertielle". En revanche, à un nombre de Reynolds plus élevé, un plateau apparaît pour  $p = 1$  à  $p = 4$  en allant vers la plus grande échelle, la valeur du plateau correspondant à  $\tau_{\text{DNS}}$ . Le plateau se transforme en un point d'inflexion pour  $p \geq 5$  faisant changer de signe la dérivée  $\partial P / \partial V$ . Ceci rappelle une transition de phase se produisant dans le domaine inertiel, avec la coexistence de deux phases : une "laminaire" et une "turbulente". Nous interprétons une telle transition de phase comme l'expression de la coexistence de régions d'écoulements avec différents exposants Hölder, des zones où l'écoulement est relaminarisé sous l'action de la viscosité, en raison du caractère aléatoire de l'échelle dissipative (voir ci-dessous).

### 3.2.4 Discussion sur les fonctions de structure

Nous avons montré qu'il existe une profonde analogie entre le modèle multifractal et la thermodynamique classique. Dans ce cadre, on peut calculer à partir des fonctions de structure de vitesse habituelle une énergie libre effective qui respecte les propriétés d'extensivité classiques, à condition d'utiliser un nombre de degrés de liberté (donné par  $N = 1/\beta(\text{Re})$ ) proportionnel à  $\log(R_\lambda)$ . Ce nombre est beaucoup plus petit que le nombre de degrés de liberté classique  $N \sim \text{Re}^{9/4}$  qui est associé au nombre

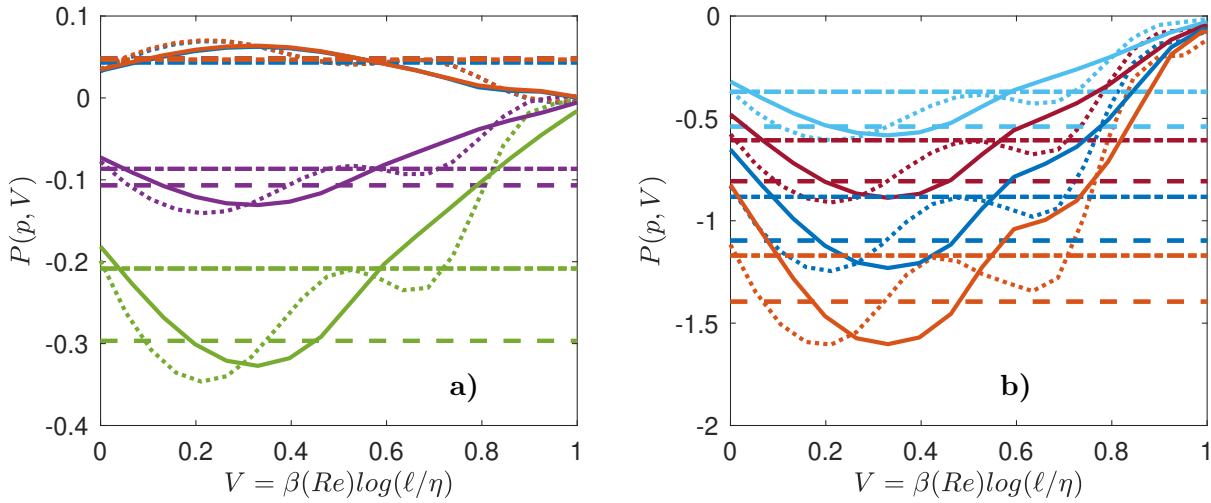


FIGURE 3.11 – Equation d'état multifractale, comme présentée sur la figure 3.10 mais avec  $R_\lambda = 90$  (courbe continue), et  $R_\lambda = 138$  (courbe pointillée). Ces courbes présentent des inflexions.

de nœuds nécessaires pour discrétiser l'équation de Navier-Stokes jusqu'à l'échelle de Kolmogorov. Il serait intéressant de voir si ce nombre peut également correspondre à la dimension d'un "attracteur de turbulence" idoine.

En utilisant l'analogie, le calcul de la pression multifractale  $P = \partial F / \partial V$  nous donne l'équation d'état multifractale de la turbulence. Nous avons constaté que pour des valeurs suffisamment grandes de  $R_\lambda$  et de  $p$  (la température), le système obéit à une transition de phase, avec coexistence de phases comme dans la transition vapeur-liquide. Nous interprétons cette transition de phase comme la manifestation de la coexistence de régions d'écoulements avec différents exposants de Hölder, conjuguant au milieu des zones turbulentes, des zones où l'écoulement a été relaminarisé sous l'action de la viscosité, en raison du caractère aléatoire de l'échelle dissipative. Ce type de phénomène a déjà été observé par Arneodo et al. [3] (2008) dans le contexte des incréments de vitesse lagrangiens, en utilisant l'exposant d'échelle local  $\zeta(p, \tau) = d(\log(S_p(\tau))) / d(\log(\tau))$ .

La transition de phase est alors associée à l'existence d'un temps dissipatif fluctuant. Il a en outre été montré que si l'on considère le modèle multifractal avec un temps dissipatif fixe, l'exposant local décroît de manière monotone de l'échelle dissipative à la grande échelle, impliquant une disparition de la transition de phase décrite par Biferale et al. [10] (2004).

Nous venons d'illustrer que les dépendances des fonctions de structure s'expliquent avec une vision multifractale de la cascade turbulente. La coexistence de multiples exposants de Hölder va de pair avec la fluctuation de l'échelle dissipative. Ces fluctuations sont maintenues par le processus hors équilibre et la puissance transmise par les grandes échelles. Si la littérature a beaucoup étudié le lien entre intermittence et vorticité, nous proposons maintenant de regarder de près l'impact des transferts énergétiques inter-échelles. Cette étude est présentée dans la section suivante et résume les résultats de l'article [42] (2021).

### 3.3 Lien entre intermittence, vorticité et transferts d'énergie

En 1949, Batchelor et Townsend [7] (1949) ont publié la première preuve expérimentale des incohérences de la première théorie de la turbulence de Kolmogorov [73] (1941). En réalisant des mesures

des distributions des dérivées de la vitesse :

$$\alpha(n) = \frac{\overline{\left(\frac{\partial^n u}{\partial x^n}\right)^4}}{\left[\overline{\left(\frac{\partial^n u}{\partial x^n}\right)^2}\right]^2} \quad (3.3.1)$$

ils ont observé que les valeurs de  $\alpha$  augmentaient avec  $n$  et le nombre de Reynolds  $Re$ . Ils interprètent ce résultat en expliquant que  $\partial^n u / \partial x^n$  fluctue de manière de plus en plus intermittente quand l'on augmente  $n$  ou  $Re$ . Ceci est confirmé par des observations sur des oscillogrammes de dérivées de vitesses provenant de fil chaud. Ils résumant de manière remarquable leur découverte dans un paragraphe visionnaire : "*energy associated with large wave-number is very unevenly distributed in space. There appear to be isolated regions in which the large wave-numbers are 'activated', separated by regions of comparative quiescence. This spatial inhomogeneity becomes more marked with increase in the order of the velocity derivative, i.e. with increase in the wave-number. It is suggested that the spatial inhomogeneity is produced early in the history of the turbulence by an intrinsic instability, in the way that a vortex sheet quickly rolls up into a number of strong discrete vortices. Thereafter the inhomogeneity is maintained by the action of the energy transfer.*"

Comme l'a remarqué Moffatt [93] (2002), cette découverte décrit avec précision le phénomène désormais connu de l'intermittence du champ de vorticité. En même temps, elle propose un scénario clair pour l'apparition de l'intermittence et de l'inhomogénéité qui consiste d'abord en une instabilité de Kelvin-Helmholtz (enroulement de la nappe de vorticité), puis en la rupture en amas discrets de vorticité, et enfin en l'action du transfert d'énergie, qui permet de maintenir l'inhomogénéité résultante à travers les échelles.

Le résultat de Batchelor et Townsend [7] (1949) ne concerne que l'intermittence aux échelles dissipatives. Comme nous l'avons vu dans la section 3.2, Kolmogorov [74] (1962) propose une théorie plus précise qui fait le lien entre l'intermittence de la dissipation locale d'énergie, et les corrections des lois d'échelles des fonctions de structure dans la gamme inertielle. Il suggère que des régions 'actives' d'intense dissipation locale sont responsables des corrections d'exposants. Les zones de fortes dissipations étant souvent localisées au voisinage de filaments [142] (1994), ou nappes de [97] (2004) vorticité, plusieurs travaux ont tenté de relier les exposants d'intermittence aux structures cohérentes basées sur la vorticité, avec des conclusions parfois contradictoires. Par exemple, en calculant les fonctions de structure de vitesse et de vorticité basées sur les ondelettes, Kestener et Arneodo [69] (2004) ont aussi observé la même intermittence dans une simulation numérique de  $256^3$     $R_\lambda = 140$ .

Cependant, Nguyen et al. [103] (2019) ont trouvé un spectre multifractal diff rent entre les deux champs dans une simulation numérique au même  $R_\lambda$  mais avec une grande résolution  $768^3$  (voir figures 7-8 de [103]). Du point de vue expérimental, Paret et Tabeling [112] (1998) ont utilisé un suivi simultané de la pression et de la vitesse locales dans un écoulement expérimental à grand nombre de Reynolds pour constater que l'intermittence est moindre lorsqu'on retire du signal de vitesse les portions correspondant à des  v nements de très basse pression (traçant vraisemblablement des noyaux de tourbillon). La procédure a été améliorée par Chainais, Abry, et Pinton [25] (1999) en utilisant le filtrage par ondelettes. Chainais, Abry, et Pinton [25] (1999) concluent que les structures cohérentes affectent effectivement l'intermittence en agissant sur la façon dont la cascade se développe. Dans l'ensemble, ces résultats suggèrent que la vorticité n'est pas le seul ingrédient important de l'intermittence, et que les transferts d'énergie devraient être pris en compte d'une manière ou d'une autre, comme l'a soutenu pour la première fois Kraichnan [76] (1975).

En effet, un lien direct entre les exposants d'intermittence et les transferts d'énergie locaux instantanés à l'échelle de Kolmogorov a été trouvé dans notre écoulement turbulent tourbillonnaire expérimental

utilisant les données SPIV de la table 2.20 et des statistiques conditionnelles [32, 37] (2018, 2019). À cette époque, seules des mesures de vitesse sur un plan étaient disponibles, ce qui signifie qu'une partie du transfert d'énergie local était manquante, et que le champ de vorticité ne pouvait pas être calculé, ce qui empêche l'étude d'éventuelles corrélations entre vorticité et les corrections intermittentes. Grâce à un travail expérimental et aux avancées numériques de cette thèse, nous avons maintenant à notre disposition à la fois des mesures de vitesse résolues en temps et en espace en trois dimensions et des données numériques dans la même géométrie. L'objectif de cette section est donc de rassembler tous les résultats, et d'étudier dans quelle mesure les transferts d'énergie locaux et la vorticité sont corrélés entre eux, et avec des corrections intermittentes des fonctions de structure.

### 3.3.1 Outils utilisés

Nous présentons ici les outils spécifiquement utilisés dans cette étude. La dépendance temporelle du champ de vitesse est parfois cachée pour alléger les notations.

Nous utilisons les incréments de vitesse symétriques  $\delta W_\ell$  définis à l'équation (3.1.26), ou antisymétriques  $\delta \Omega_\ell$  (cf (3.1.27)) et le débit d'énergie inter échelle  $\mathcal{D}_\ell^I$  et la dissipation filtrée  $\mathcal{D}_\ell^\nu$  (cf (3.1.32)).

Comme l'ont noté Kraichnan [76] (1975) et Meneveau [92] (1991), les transferts d'énergie locaux à l'échelle  $\ell$  impactent le phénomène de l'intermittence. Par exemple, si l'on utilise l'hypothèse de raffinement local de Kolmogorov [74] (1962), on trouve que  $(\delta u_\ell)^3 \sim \varepsilon_\ell \ell$  ( $A \sim B$  signifiant A a la même distribution statistique que B), avec  $\varepsilon_\ell$  la dissipation locale sur une boule de rayon  $\ell$ . Il paraît raisonnable dans cette formule de remplacer  $\varepsilon_\ell$  par le transfert énergétique local à l'échelle  $\ell$ . On obtient alors l'hypothèse de raffinement local de Kraichnan, que nous vérifierons à l'aide des quantités introduites dans la section 3.1.1.

Dubrulle [36] (1994) propose de réécrire cette hypothèse de manière plus générale, en substituant à  $\ell$  le rapport  $\frac{\langle \delta W_\ell^3 \rangle}{\varepsilon}$  et à  $\varepsilon_\ell$  la valeur moyenne  $\langle \mathcal{D}_\ell^I \rangle$ . Cela nous donne la relation d'autosimilarité étendue proposée par Dubrulle [37] (2019) :

$$\frac{\langle \delta W_\ell^p \rangle}{\langle \delta W_\ell^3 \rangle^{p/3}} \propto \frac{\langle |\mathcal{D}_\ell^I|^{p/3} \rangle}{\langle |\mathcal{D}_\ell^I| \rangle^{p/3}}. \quad (3.3.2)$$

#### 3.3.1.1 Exposants de structure

Nous rappelons la définition des exposants des fonctions de structure  $\zeta(p)$  que nous avons introduit à la section 3.2 :  $\zeta(p)$  est tel que la fonction de structure  $S_p(\ell) \sim$  varie comme  $\ell^{\zeta(p)}$  dans la gamme inertielle. Plus précisément, la gamme inertielle correspond aux échelles où la loi des quatre cinquièmes de Kolmogorov est valide, à savoir que :

$$S_3(\ell) = -\frac{4}{5}\varepsilon\ell, \quad (3.3.3)$$

avec  $\varepsilon$  la dissipation par unité de masse adimensionnée. Nous avons donc par définition l'égalité  $\zeta(3) = 1$ . Puisque Kolmogorov [73] (1941) prévoit que  $\zeta(p) = p/3$ , des exposants de corrections  $\tau(p)$  ont été définis par les valeurs empiriques de  $\tau(p) = \zeta(p) - p/3$ . On retrouve aussi que  $\tau(3) = 0$ . Nous étendons ces définitions aux incréments de vitesse  $\delta W_\ell$ ,  $\delta \Omega_\ell$  ainsi qu'aux fonctions de structures des transferts

énergétiques  $\mathcal{D}_\ell^I$  à l'aide des fonctions de structure compensées ci dessous :

$$\begin{aligned}\tilde{S}_W(p) &= \frac{\langle \delta W_\ell^p \rangle}{\langle \delta W_\ell^3 \rangle^{p/3}} \propto \ell^{\tau_W(p)}, \\ \tilde{S}_\Omega(p) &= \frac{\langle \delta \Omega_\ell^p \rangle}{\langle \delta \Omega_\ell^3 \rangle^{p/3}} \propto \ell^{\tau_\Omega(p)}, \\ \tilde{S}_D(p) &= \frac{\langle |\mathcal{D}_\ell^I|^p \rangle}{\langle |\mathcal{D}_\ell^I| \rangle^p} \propto \ell^{\tau_D(p)},\end{aligned}\tag{3.3.4}$$

valables dans la gamme inertielle. Nous noterons dans la différence entre fonction de structures et fonctions de structure compensées par la notation tilde. Remarquons que nous avons donc par définition :  $\tau_W(3) = \tau_\Omega(3) = \tau_D(1) = 0$  et que l'hypothèse de similarité raffinée de l'équation (3.3.2) correspond à  $\tau_W(p) = \tau_D(p/3)$ .

### 3.3.1.2 Spectre Multi-fractal

Le modèle multifractal a été introduit à la section 3.2.1.2, nous rappelons ici quelques définitions. Nous utilisons les transformées de Legendre des différents exposants d'échelles des fonctions de structure de vitesse  $\zeta(p)$ , par la formule déjà présentée à l'équation (3.2.20).

$$C(h) = \min_p (-ph + \zeta(p)).\tag{3.3.5}$$

La fonction  $C(h)$  est, dans un formalisme de grandes déviation, la codimension de l'exposant de Hölder local  $h$ . Ainsi,  $C(h)$  vaut aussi  $3 - D(h)$  si l'on note  $D(h)$  la dimension fractale de l'ensemble des points de régularité  $h$  dans l'interprétation de Frisch et Parisi [48] (1985).

Nous définissons aussi de la même manière les spectres de  $\delta W_\ell$ ,  $\delta \Omega_\ell$  et  $\mathcal{D}_\ell^I$  comme suit :

$$\begin{aligned}C_W(h) &= \min_p (-ph + \tau_W(p)), \\ C_\Omega(h) &= \min_p (-ph + \tau_\Omega(p)), \\ C_D(h) &= \min_p (-ph + \tau_D(p)).\end{aligned}\tag{3.3.6}$$

Les propriétés de la transformée de Legendre nous permettent de relier directement  $C_W$  et  $C(h)$  en décalant l'argument :

$$C_W\left(h - \frac{\zeta(3)}{3}\right) = C(h).\tag{3.3.7}$$

De plus, si l'hypothèse de similarité de l'équation (3.3.2) est vérifiée, alors  $C_W(h) = C_D(3h)$ .

### 3.3.1.3 Description des jeux de données

Nous étudions l'écoulement de von Kármán présenté dans la section 2.4. Les données présentées ont déjà été présentés aux paragraphes 2.4.3 et 2.4.4. Il s'agit des quatre mesures de PIV des tables 2.20 et 2.21, et de la DNS de la table 2.22. L'écoulement n'est ni homogène ni isotrope, cependant Ouellette, Xu, Bourgoin, et Bodenschatz [110] (2006) ont remarqué que la zone des mesures de TPIV, au centre du cylindre, était relativement plus homogène et isotrope.

En comparant les tables de description des données TPIV 2.21 et de la DNS 2.22, on peut trouver le nombre de Reynolds numérique assez faible. Il a été choisi à cette valeur de  $Re = 6 \cdot 10^3$  pour plusieurs raisons :

1. elle correspond au début du plateau de l'anomalie de dissipation, confirmant le caractère turbulent de l'écoulement (le lecteur peut se référer à l'étude sur la transition à la turbulence de la section 2.6) ;
2. les échelles typiques de cet écoulement à  $Re = 6 \cdot 10^3$  sont telles qu'il est possible d'étudier convenablement toutes les échelles avec des mesures de PIV moderne et des simulations numériques directes sur un supercalculateur ;
3. elle correspond au plus petit nombre de Reynolds étudié expérimentalement avec la TPIV ;
4. faire une simulation DNS à plus grand nombre de Reynolds aurait été très c teux.

La simulation numérique présente 21 pas de temps décorrélés. La grande résolution spatiale contenant  $3 \cdot 10^8$  points de gauss compense le faible nombre de prises temporelles. Une étude de convergence statistique des quantités numériques est disponible en annexe au paragraphe 6.2. L'étude statistique des quantités expérimentales a été menée par Debue [31] (2019).

Les caractéristiques de nos données permettent ainsi de proposer cette étude hybride sur l'origine de l'intermittence en turbulence.

### 3.3.2 Comparaison entre transfert énergétique local et vorticité

#### 3.3.2.1 Observation des champs

La figure 3.12 montre pour l'expérience T-4 deux coupes représentatives de champs instantanés de la norme de la vorticité et de transfert énergétique local à  $\ell = 3.2\eta$ . La figure 3.13 procède à la même comparaison pour la simulation numérique. Comme on le voit dans les tables 2.21 et 2.22, l'expérience T-4 et la DNS partagent les mêmes caractéristiques.

Malgré un niveau de bruit plus élevé dans les champs de transfert local d'énergie, on observe sur la figure 3.12 une corrélation spatiale franche mais imparfaite entre les zones d'amplitude de vorticité élevée et les grandes valeurs de  $\mathcal{D}_\ell^I$ . Une telle corrélation a déjà été observée par Saw et al. [128] (2016). La figure 3.13 présente une comparaison équivalente entre la norme de la vorticité instantanée et le transfert d'énergie local, dans un plan à mi-hauteur et perpendiculaire à l'axe de rotation. Comme dans le cas expérimental, nous observons une corrélation spatiale entre les maxima locaux de vorticité et le transfert d'énergie local, mais la corrélation n'est pas parfaite. Pour quantifier davantage cette corrélation, nous effectuons dans la section suivante une analyse statistique détaillée.

#### 3.3.2.2 Distributions jointes

Intéressons nous aux statistiques jointes. La figure 3.14 (respectivement 3.15) montre les distributions jointes (PDF) entre la norme de la vorticité  $\omega$  et le transfert local d'énergie  $\mathcal{D}_\ell^I$  à différentes échelles dans l'expérience T-4 (respectivement pour la DNS). Les distributions jointes sont calculées sur l'ensemble de données disponible, c'est-à-dire sur un pavé au centre de l'écoulement pour la TPIV et dans l'ensemble du cylindre pour la DNS. Si l'on exclut les grandes valeurs de  $\omega/\langle\omega\rangle$  et  $\mathcal{D}_\ell^I/\varepsilon$ , on retrouve dans toutes les situations une corrélation en forme de pyramide, proche des observations de Debue [31] (2019).

La distribution jointe de  $(\frac{\mathcal{D}_\ell^I}{\varepsilon}, \frac{\omega}{\langle\omega\rangle})$  présente à toutes les échelles de grandes valeurs de transfert énergétique local associées à de grandes amplitudes de vorticité. Dans la gamme inertielle où  $\ell \gg \eta$  (figures 3.14b, et 3.15b), les distributions sont penchées vers les transferts énergétiques positifs, emmenant de l'énergie vers les plus petites échelles. Dans la gamme visqueuse, (figures 3.14a, et 3.15a), les distributions sont plus symétriques par rapport à la droite  $\mathcal{D}_\ell^I = 0$ . Une différence notoire distingue les résultats numériques et expérimentaux : de fortes valeurs de  $\omega/\langle\omega\rangle$  dessinent une excroissance à la



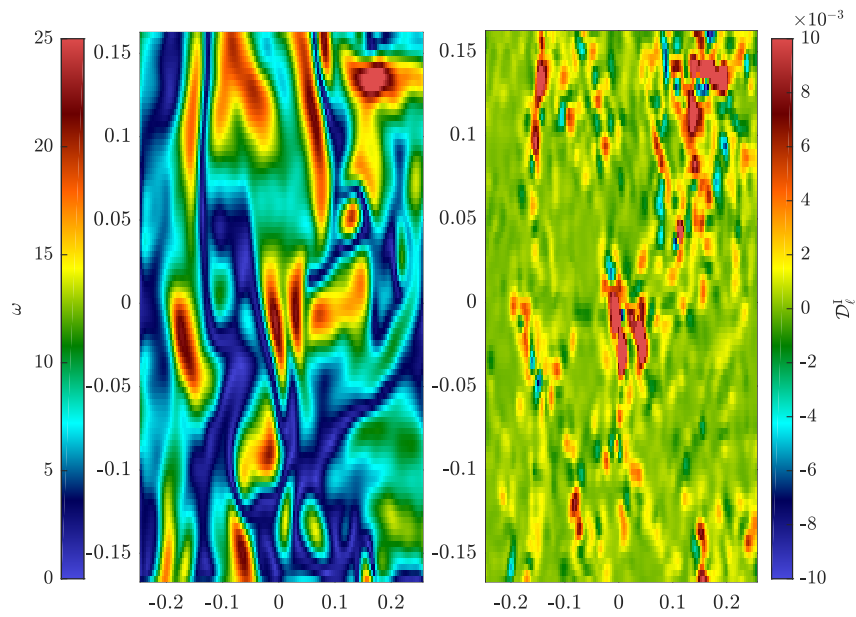


FIGURE 3.12 – Coupes de champs expérimentaux dans un plan contenant l’axe du cylindre : à gauche la norme de la vorticité  $\omega$  et à droite  $\mathcal{D}_\ell^I$  pour  $\ell = 3.2\eta$ . Les détails de l’expérience T-4 sont disponibles à la table 2.21.

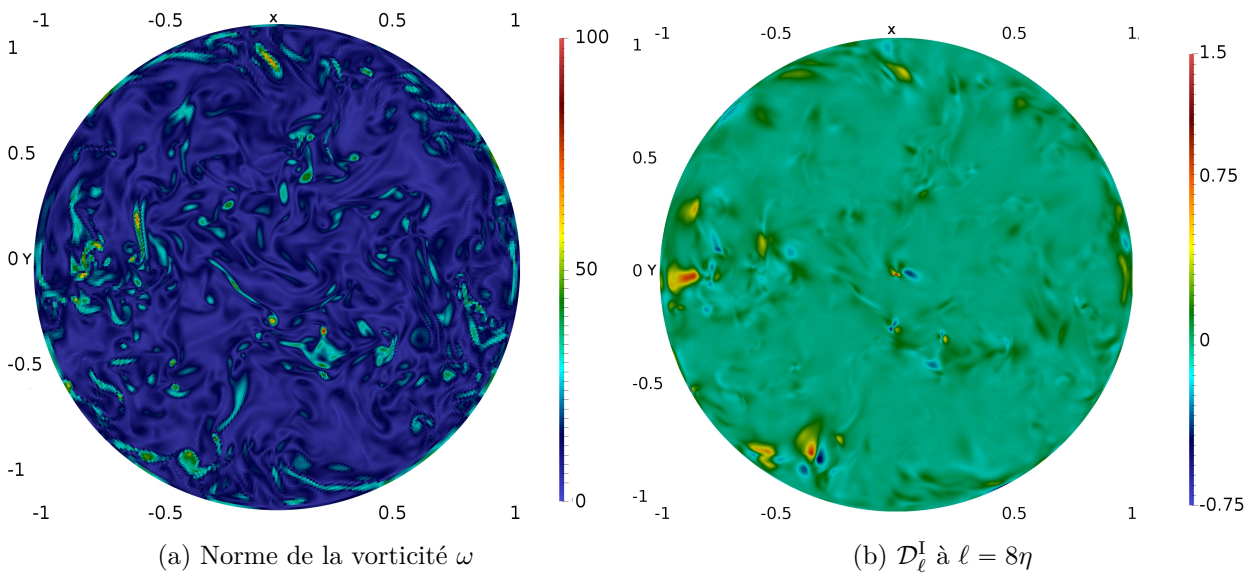


FIGURE 3.13 – Coupes de champs numériques issus de la DNS de la table 2.22. Le plan de coupe passe par le centre du cylindre et est perpendiculaire l’axe  $Oz$ .



distribution numérique, témoignant d'une grande corrélation, entre  $\omega/\langle\omega\rangle$  and  $\mathcal{D}_\ell^I/\varepsilon$ . Pour comprendre les différences, nous nous sommes demandés où sont situés dans le cylindre ces  v nements constitutifs de l'excroissance. La figure 3.16 montre leur position sur un seul champ numérique instantané. Ces  v nements s'organisent dans des structures cohérentes à trois endroits privilégiés de l'écoulement :

1. Sur la face intérieure des turbines, proche des pales, où les parois entraînent violemment l'écoulement ;
2. sur les bords latéraux des disques des turbines ;
3. dans deux régions proches des bords du cylindre, à mi hauteur, juste au dessus ou juste au dessous de la couche de mélange entre les deux recirculations imposées par les turbines.

Si les deux premiers endroits peuvent être associés à des sources de gradient locales dues aux turbines, le dernier endroit correspond à la localisation des forts tourbillons de la couche de cisaillement. Le voisinage des pales n'est pas accessibles aux mesures laser, cependant, pour le troisième endroit, les expérimentateurs ont déjà observé de forts gradients [122] (2008) et de forts transferts d'énergie [91, 79] (2004, 2015). Cela est en accord avec nos observations numériques.

De plus, la localisation de ces zones, en dehors du pavé de mesure TPIV explique pourquoi les distributions jointes expérimentales de  $\mathbb{P}(\frac{\mathcal{D}_\ell^I}{\varepsilon}, \frac{\omega}{\langle\omega\rangle})$  calculées à partir de la mesure T-4 ne présentent pas de telles valeurs.

Il est possible de calculer des espérances conditionnées  $\mathbb{E}(\frac{\mathcal{D}_\ell^I}{\varepsilon} | \frac{\omega}{\langle\omega\rangle})$  à partir de la distribution jointe en calculant la moyenne de  $\frac{\mathcal{D}_\ell^I}{\varepsilon}$  à  $\frac{\omega}{\langle\omega\rangle}$  fixé. Ces espérances conditionnelles numériques et expérimentales sont tracées sur la figure 3.17 en fonction de la variable  $(\frac{\omega}{\langle\omega\rangle})^2$ .

Pour les échelles de la gamme visqueuse  $\ell \sim \eta$ , l'espérance conditionnelle  $\mathbb{E}(\frac{\mathcal{D}_\ell^I}{\varepsilon} | \frac{\omega}{\langle\omega\rangle})$  présente une dépendance linéaire en  $(\frac{\omega}{\langle\omega\rangle})^2$ . Pour les échelles de la gamme inertielle  $\ell \gg \eta$ , l'espérance conditionnelle semble atteindre un plateau, de telle sorte que la valeur moyenne du transfert énergétique ne dépend plus de la vorticité, c'est-à-dire dire que la vorticité n'a pas d'impact sur le transfert énergétique local moyen à grand échelle. Remarquons que cette tendance à grand échelle est plus prononcée sur les données de simulation numérique. Ainsi, les transferts énergétiques moyens ne dépendent de la vorticité qu'à petite échelle.

Pour enquêter sur le lien entre transfert énergétique local et incréments de vitesse, nous avons calculé la distribution jointe entre  $\mathcal{D}_\ell^I$  et l'incrément total  $\delta W_\ell$  d'une part, et l'incrément antisymétrique  $\delta\Omega_\ell$  d'autre part. Les distributions sont présentées dans les figures 3.18 et 3.19. Les valeurs positives de  $\mathcal{D}_\ell^I$  sont favorisées par les deux quantités. Dans la gamme inertielle,  $\mathcal{D}_\ell^I$  semble plus corrélé avec les fortes valeurs de  $\delta\Omega_\ell$  qu'avec celles de  $\delta W_\ell$ . On le remarque car la distribution  $(\mathcal{D}_\ell^I, \delta\Omega_\ell)$  est plus orientée vers la droite, et que la plupart des transferts énergétiques locaux positifs correspondent à des incréments de vitesse forts, de l'ordre plusieurs fois leur valeur moyenne.

### 3.3.2.3 Transferts énergétiques locaux

Concentrons nous maintenant sur la dépendance en échelle des valeurs moyennes du transfert énergétique local  $\mathcal{D}_\ell^I$ , et de la dissipation filtrée  $\mathcal{D}_\ell^\nu$  définis à l'équation (3.1.32). Remarquons une procédure expérimentale astucieuse pour le filtrage : si pour la simulation numérique, toutes les échelles de l'écoulement sont accessibles, chaque mesure expérimentale est contrainte et ne donne accès qu'à des échelles de filtrage  $\ell$  allant de la résolution  $\Delta x$  à  $10\Delta x$ . Afin de sonder une large gamme de  $\frac{\ell}{\eta}$ , les expérimentateurs réalisent plusieurs campagnes de mesures à différents nombres de Reynolds avec un dispositif fixé.

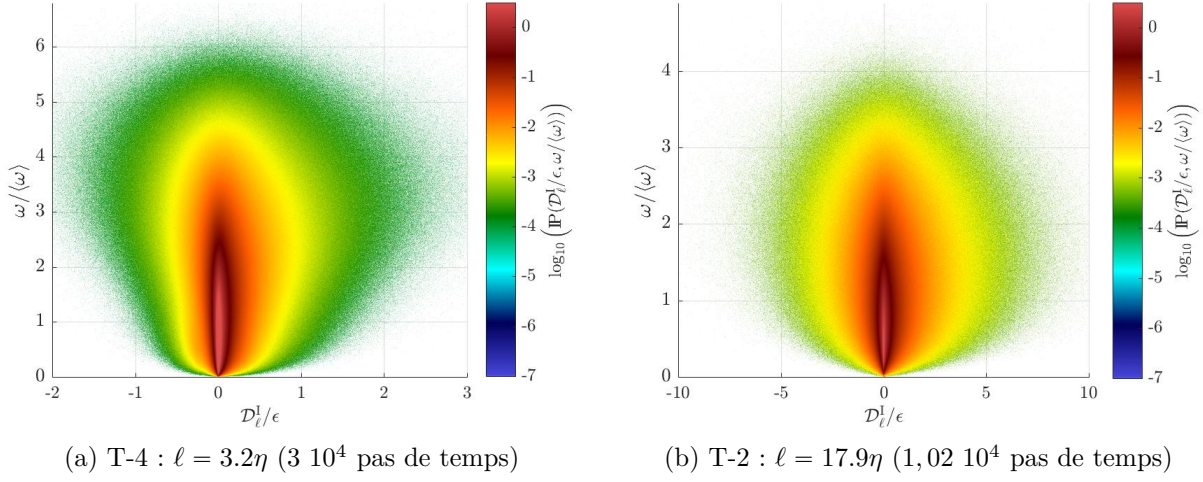


FIGURE 3.14 – Distributions jointes  $\mathbb{P}\left(\frac{\mathcal{D}_\ell^I}{\epsilon}, \frac{\omega}{\langle\omega\rangle}\right)$  pour deux échelles. Les expériences sont détaillées à la table 2.21. Ici  $\omega$  réfère à la norme de la vorticité et  $\mathcal{D}_\ell^I$  au transfert énergétique local. La couleur blanche correspond à l’absence de réalisation sur l’ensemble du jeu de données.

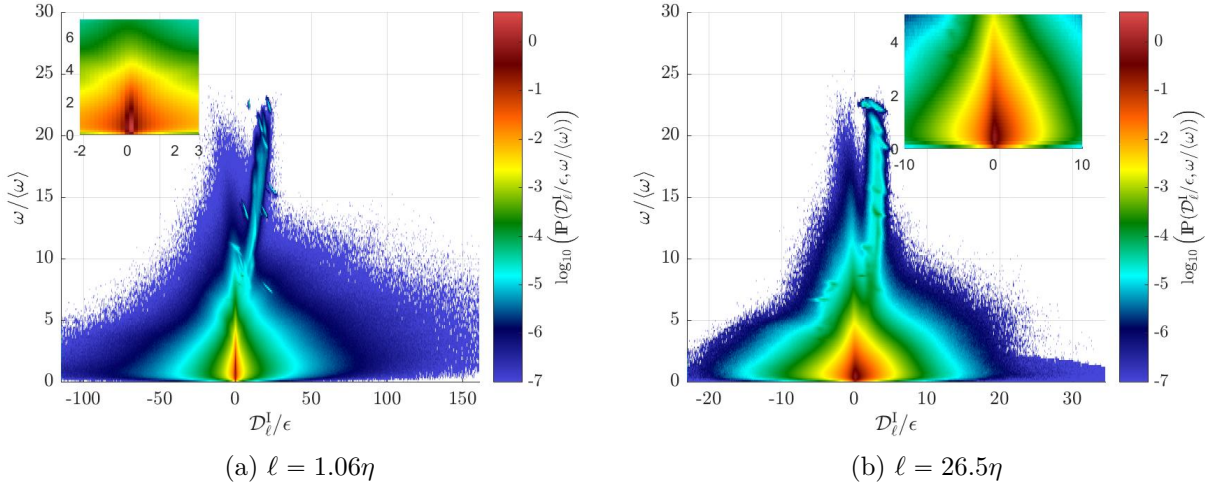


FIGURE 3.15 – Distributions jointes numériques  $\mathbb{P}\left(\frac{\mathcal{D}_\ell^I}{\epsilon}, \frac{\omega}{\langle\omega\rangle}\right)$  calculées sur 21 pas de temps pour deux échelles. Les détails de la simulation sont disponibles à la table 2.22. Ici  $\omega$  réfère à la norme de la vorticité et  $\mathcal{D}_\ell^I$  au transfert énergétique local. Un encart présentant un grossissement de la zone centrale est présenté pour faciliter la comparaison avec la figure 3.14. La couleur blanche correspond à l’absence de réalisation sur l’ensemble du jeu de données.

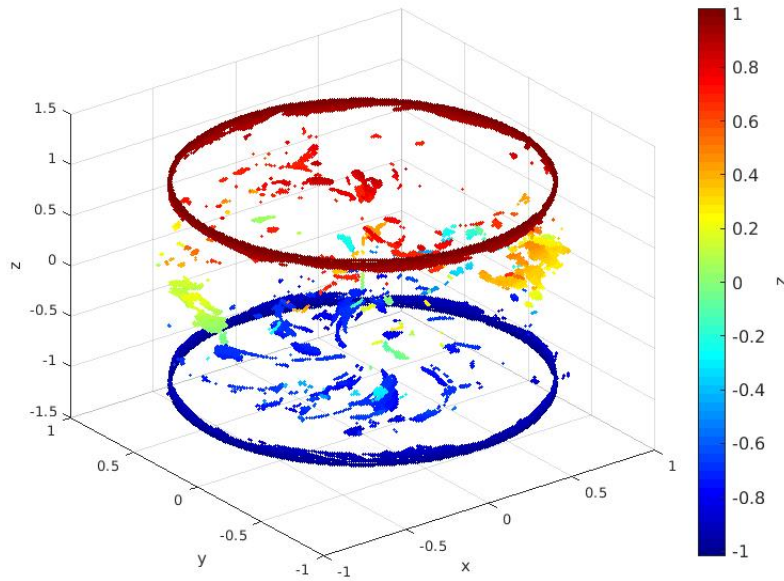


FIGURE 3.16 – Emplacement des points de la simulation DNS correspondant à l'excroissance de la figure 3.15b, où  $\mathcal{D}_\ell^I > \varepsilon$  et  $\omega > 5\langle\omega\rangle$  pour  $\ell = 26.5\eta$ . Pour faciliter la vision tridimensionnelle, la barre de couleurs correspond à la cote  $z$  des points. La plupart de ces points sont situés proches des turbines ( $0.7 < |z| < 1.02$ ), ou bien dans la couche de mélange. Cette figure ne montre les points que d'un seul champ instantané.

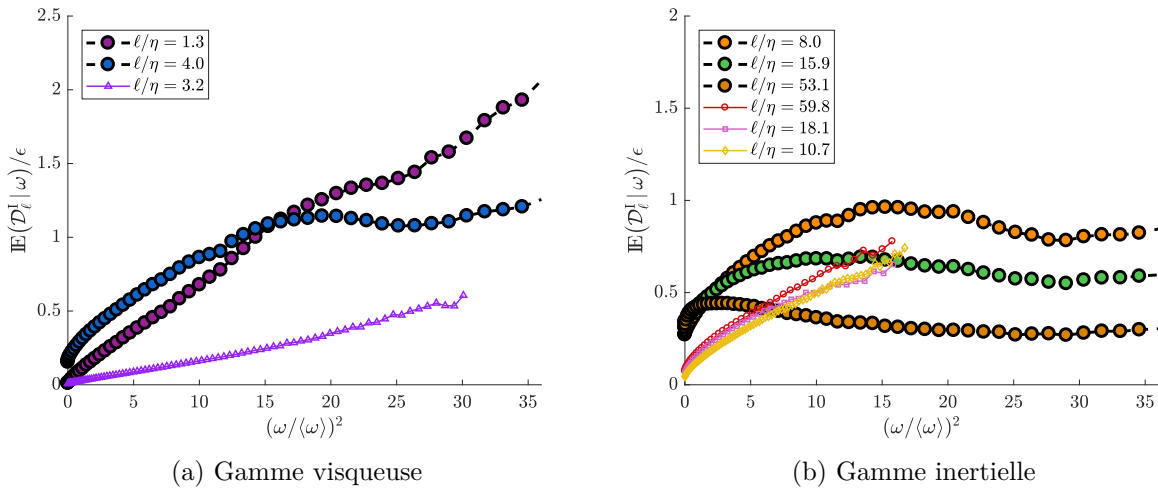


FIGURE 3.17 – Espérances conditionnées  $\mathbb{E}(\mathcal{D}_\ell^I|\omega)/\varepsilon$  en fonction de  $(\omega/\langle\omega\rangle)^2$  pour différentes échelles  $\ell$ . Elles sont calculées à partir des distributions jointes du type de celles des figures 3.14 et 3.15 pour les jeux de données numériques et expérimentales T-1 à T-4. Les symboles correspondent à la convention prise aux tables 2.21 et 2.22.

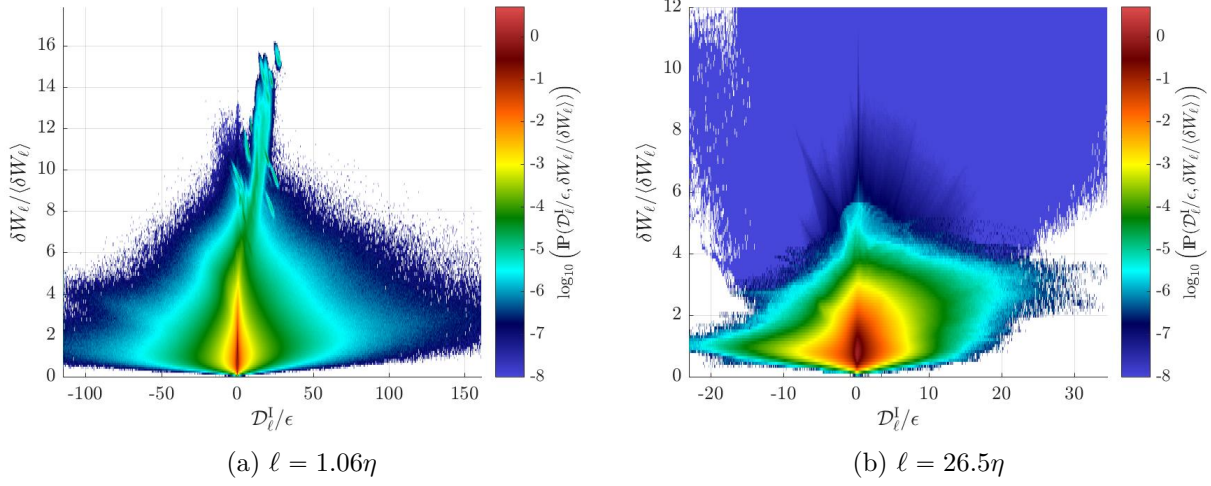


FIGURE 3.18 – Distributions jointes numériques  $\mathbb{P}\left(\frac{D_\ell^I}{\epsilon}, \frac{\delta W_\ell}{\langle \delta W_\ell \rangle}\right)$  calculées sur 21 instantanés pour deux échelles. Les détails de la DNS sont disponibles à la table 2.22 La couleur blanche correspond à l’absence de réalisation sur l’ensemble du jeu de données.

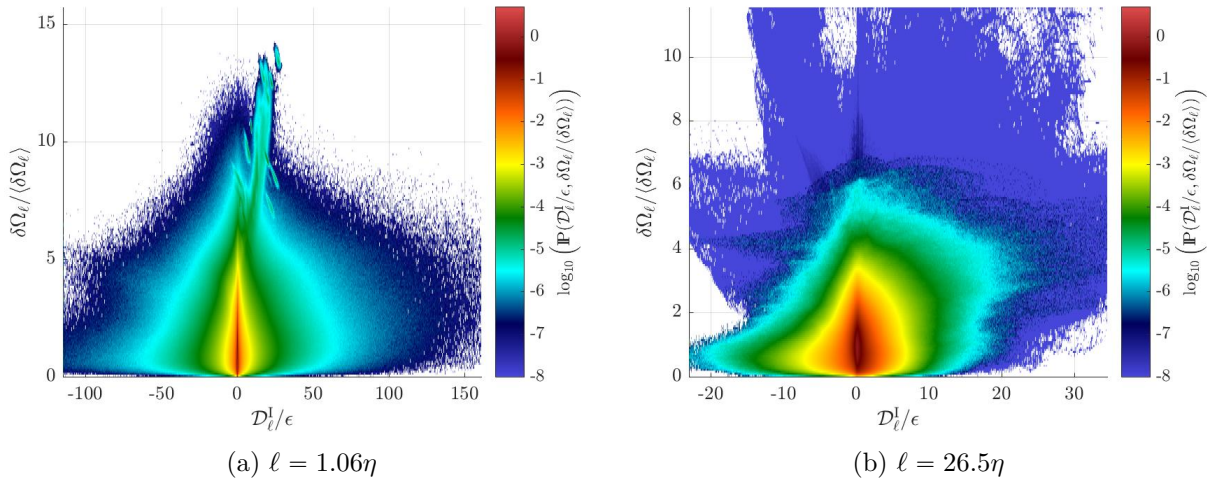


FIGURE 3.19 – Distributions jointes numériques  $\mathbb{P}\left(\frac{D_\ell^I}{\epsilon}, \frac{\delta \Omega_\ell}{\langle \delta \Omega_\ell \rangle}\right)$  calculées sur 21 instantanés pour deux échelles. Les détails de la DNS sont présentés à la table 2.22 La couleur blanche correspond à l’absence de réalisation sur l’ensemble du jeu de données.

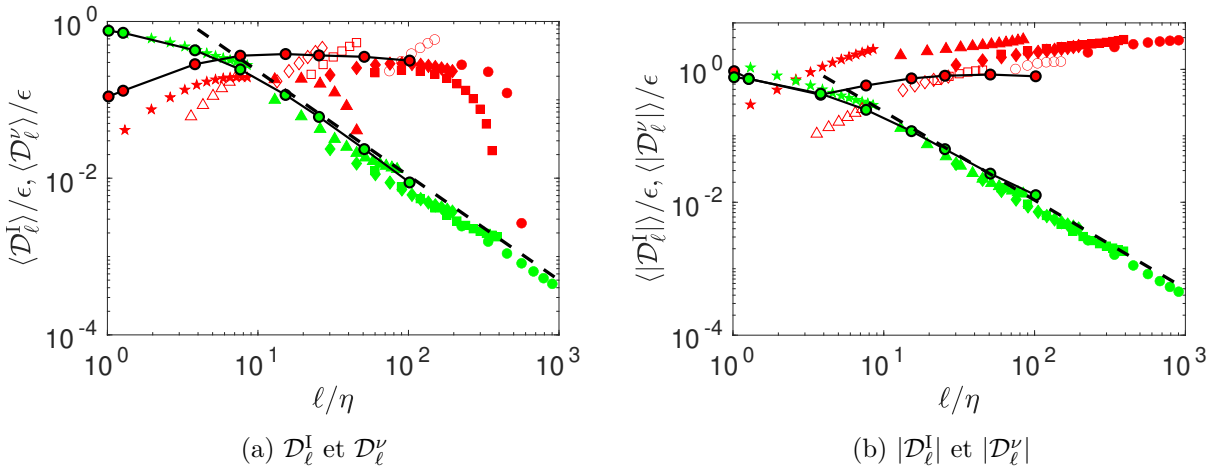


FIGURE 3.20 – Dépendances en échelle de la dissipation filtrée (vert) et des transferts énergétiques (rouge). La ligne brisée correspond à  $\ell^{-4/3}$ . La valeur de  $\epsilon$  est calculée sur chaque jeu de données. Les symboles correspondent à ceux des tables 2.20, 2.21 et 2.22 ; avec les symboles pleins pour la SPIV, creux pour la TPIV, et des disques sertis de noir pour la DNS.

Les valeurs moyennes des flux filtrés sont reportées dans la figure 3.20a.

Les résultats moyens sont compatibles avec la description de la cascade de Kolmogorov [73] (1941), comme l'explique Dubrulle [37] (2019) : pour  $\ell/\eta < 10$ , les transferts énergétiques sont bien plus petits que la dissipation filtrée. Lorsque  $\ell$  augmente, le transfert énergétique croît pour atteindre un plateau, et la dissipation filtrée décroît en suivant une loi en  $\ell^{-4/3}$ .

L'accord entre simulation numérique et expériences est très bon pour  $\mathcal{D}_\ell^V$ , mais modéré pour  $\mathcal{D}_\ell^I$ . Nous attribuons ce décalage à des effets de convergence : en effet, même si nos échantillons statistiques sont assez grands, la présence d'événements extrêmes de transfert local, qui peuvent être à la fois positifs et négatifs, complique la convergence statistique. Remarquons que  $\mathcal{D}_\ell^V$  est essentiellement positif, ce qui s'illustre par le fait que les courbes dans les figures 3.20a pour  $\langle \mathcal{D}_\ell^V \rangle$  et 3.20b pour  $\langle |\mathcal{D}_\ell^V| \rangle$  sont presque les mêmes. Ces deux tracés montrent un très bon accord entre expérience et simulation. En revanche, comme la quantité  $\mathcal{D}_\ell^I$  prend des valeurs extrêmes positives et négatives, nous proposons de tester l'hypothèse de la mauvaise convergence statistique de  $\langle \mathcal{D}_\ell^I \rangle$  sur la figure 3.20a en comparant à la figure 3.20b la statistique en valeur absolue  $\langle |\mathcal{D}_\ell^I| \rangle$ . Le test est concluant car la qualité de la comparaison est bien meilleure. Ce problème est donc bien lié aux événements extrêmes positifs et négatifs de  $\mathcal{D}_\ell^I$ , comme l'ont remarqué Debue et al. [32] (2018) (dans l'annexe de leur papier) sur les données expérimentales. Une étude de la convergence des statistiques numériques est présentée dans l'annexe de cette thèse (cf figure 6.1). Il est normal que la dissipation visqueuse filtrée ne souffre pas de ce problème. La figure 3.20b trace donc les moyennes en valeurs absolues de  $\mathcal{D}_\ell^I$  et  $\mathcal{D}_\ell^V$ . Les données sont bien plus resserrées que dans le cas sans valeurs absolues. On remarque que la DNS s'accorde mieux à la TPIV qu'à la SPIV. Ce peut être lié au fait que les mesures SPIV étant réalisées dans un plan, il manque une direction pour un calcul fiable des gradients, et donc de  $\mathcal{D}_\ell^I$ . Ces courbes montrent que la gamme inertielle (correspondant à  $\mathcal{D}_\ell^I$  constant), couvre une plage allant de  $\ell/\eta = 20$  à  $\ell/\eta = 100$  pour la simulation numérique. Nous utiliserons cette remarque pour calculer les exposants de structure au paragraphe 3.3.2.6.



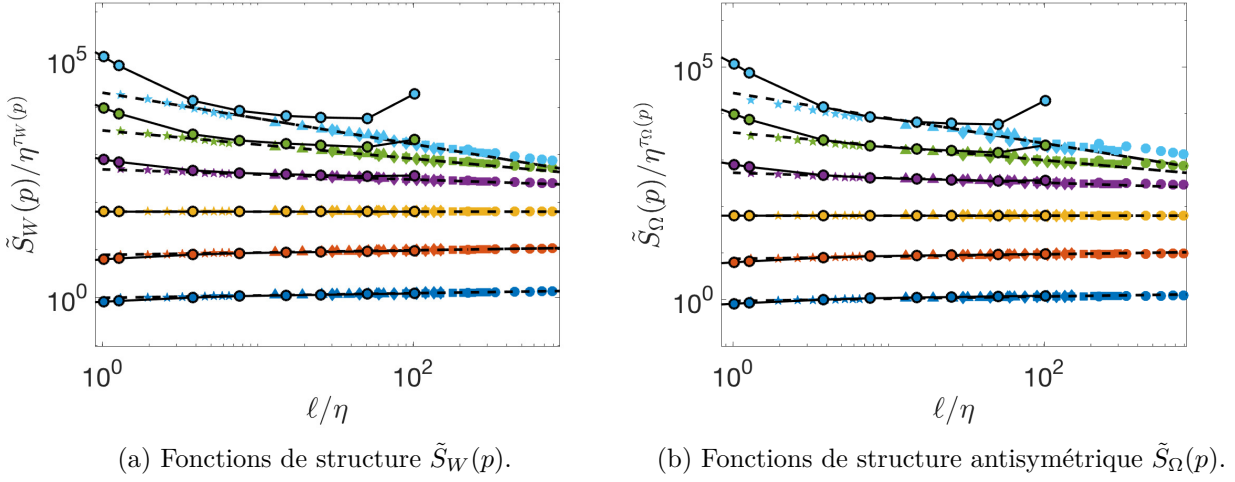


FIGURE 3.21 – Fonctions de structure en ondelette renormalisées d’ordres  $p = 1$  à  $p = 6$  pour la SPIV et la DNS :  $p = 1$  bleu ;  $p = 2$  orange ;  $p = 3$  jaune ;  $p = 4$  magenta ;  $p = 5$  vert ;  $p = 6$  bleu ciel. Pour améliorer la lisibilité de la figure, les fonctions de structure sont multipliées par un facteur arbitraire constant pour un même  $p$ . Les lignes brisées sont des droites de pente  $\tau_W$  et  $\tau_\Omega$  provenant de la figure 3.24a. Les symboles correspondent à ceux des tables 2.20 et 2.22 ; avec les symboles pleins pour la SPIV, et des disques sertis de noir pour la DNS.

### 3.3.2.4 Fonctions de structure

Les fonctions de structure basées sur des incréments de vitesse longitudinaux ou bien calculés à partir d’ondelettes, tout comme les moments de  $\mathcal{D}_\ell^1$  pour les données SPIV, ont déjà été calculés et analysés dans plusieurs travaux [129, 32, 37] (2018, 2018, 2019). L’inconvénient des mesures SPIV est qu’elles ne donnent accès qu’à un plan de mesure. Nous poursuivons donc cette étude, avec les nouveaux jeux de données en volume : la TPIV et la DNS, en utilisant les fonctions de structure calculées sur les incréments en formalismes ondelette définis à la section 3.1.2. La figure 3.21a compare les fonctions de structure compensées  $\tilde{S}_W(p) = \langle \delta W_\ell^p \rangle / \langle \delta W_\ell^3 \rangle^{p/3}$  d’ordres 1 à 6 pour la DNS et la SPIV. Elles sont en bon accord pour  $1 \leq p \leq 4$ , mais moins bon pour  $p \geq 5$ . Il est possible que la convergence statistique des plus grands moments numériques ne soit pas complètement atteinte. Une comparaison similaire, pour les fonctions de structure des incréments en ondelette asymétriques  $\delta \Omega_\ell$ , est présentée à la figure 3.21b, on observe le même comportement.

Enfin, nous comparons également les fonctions de structure compensées des transferts d’énergie locaux  $\mathcal{D}_\ell^1$  numériques et expérimentaux dans la figure 3.22a. L’accord est bon dans la gamme inertielle, mais moins bon aux échelles dissipatives.

### 3.3.2.5 Nouvelle analyse de l’universalité

Dans la figure 3.22a, nous comparons les fonctions de structure des transferts énergétiques locaux pour de nombreux nombres de Reynolds (cf tables 2.20, 2.21 et 2.22). L’hypothèse d’auto-similarité de Kolmogorov suggère un comportement universel, observé dans la gamme inertielle par Frisch et Vergassola [49] (1991) et Castaing, Gagne, et Hopfinger [22] (1990). Comme nous l’avons vu dans la section 3.2, une renormalisation plus générale fonctionne aussi dans la gamme visqueuse, si nous tenons compte des changements proposés par le modèle multifractal. Dans la section 3.2, nous avons constaté que cette renormalisation fonctionnait bien pour les fonctions de structure  $S_W$ , avec une renormalisation

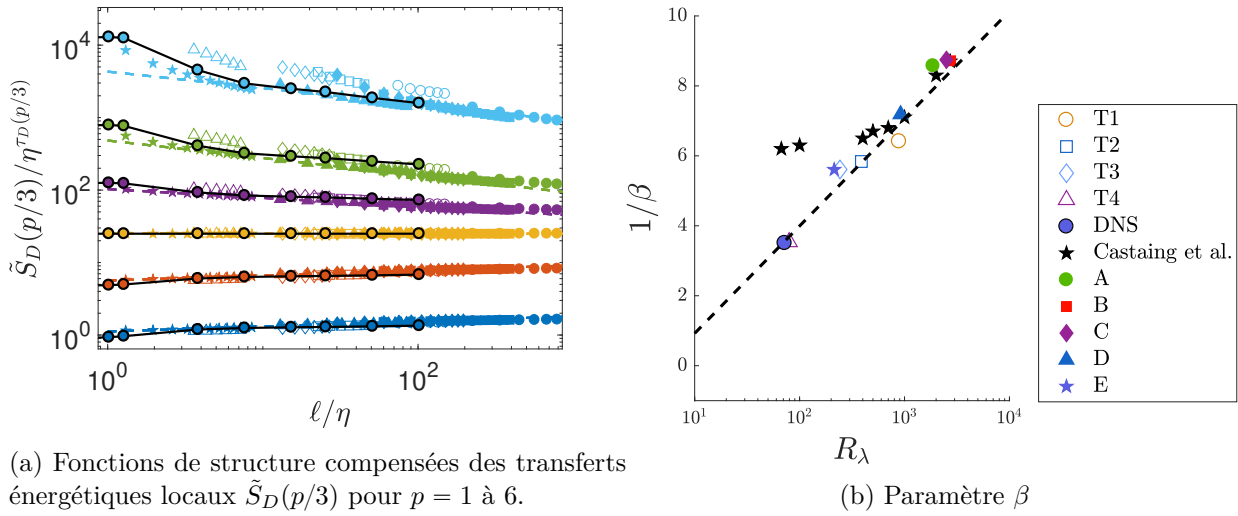


FIGURE 3.22 – a) Fonctions de structure compensées des transferts énergétiques  $\tilde{S}_D(p/3)$  pour la SPIV, la TPIV et la DNS. Les couleurs correspondent aux différents  $p$  :  $p = 1$  bleu ;  $p = 2$  orange ;  $p = 3$  jaune ;  $p = 4$  magenta ;  $p = 5$  vert ;  $p = 6$  bleu ciel. Pour améliorer la lisibilité de la figure, les fonctions de structure sont multipliées par un facteur arbitraire constant pour un même  $p$ . Les lignes brisées sont des droites de pente  $\tau_W$  et  $\tau_\Omega$  provenant de la figure 3.24a. Les symboles correspondent à ceux des tables 2.20, 2.21 et 2.22 ; avec les symboles pleins pour la SPIV, creux pour la TPIV, et des disques sertis de noir pour la DNS. b) Fonction  $\beta$  définie à l'équation (3.3.8). La ligne brisée correspond à  $1/\beta = \frac{4}{3} \log(R_\lambda)$ .

liée à la fonction des grandes déviations de la mesure multifractale (3.2.23). Si l'hypothèse de similarité raffinée (3.3.2) est valide, une renormalisation similaire doit s'appliquer à  $|\mathcal{D}_\ell^I|/\langle|\mathcal{D}_\ell^I|\rangle$ , de sorte que :

$$\beta(\text{Re}) \left( \frac{\ln(\tilde{S}_D(p)/S_{0p})}{\ln(L_0/\eta)} \right) = F \left( p, \beta(\text{Re}) \frac{\ln(\ell/\eta)}{\ln(L_0/\eta)} \right). \quad (3.3.8)$$

Nous prenons la DNS  $R_\lambda = 72$  comme référence. Comme nous l'avons fait dans la partie 3.2, nous déterminons les paramètres  $\beta(\text{Re})$  et  $S_{0p}$  qui optimisent la renormalisation pour tous les jeux de données. Les courbes normalisées sont présentées dans la figure 3.23. L'accord est bon, sauf pour la SPIV au plus petit nombre de Reynolds, qui ne se regroupe pas bien avec la DNS dans la gamme visqueuse. La renormalisation montre plusieurs régimes :

- pour  $\ell/\eta$  petit, on observe une saturation des valeurs dans les données de la DNS, cela correspond à la gamme visqueuse où l'écoulement est régularisé, de telle sorte que  $\langle|\mathcal{D}_\ell^I|^p\rangle \sim \ell^{2p}$  [37] (2019), et  $S_D(p) \sim \text{cte}$  ;
- dans la gamme inertielle, on retrouve un comportement en loi de puissance  $S_D(p) \sim \ell^{\tau_D(p)}$  ;
- enfin, entre ces deux régimes, on constate une situation intermédiaire, signe de la fluctuation de l'échelle de régularisation, correspondant à l'existence de zones à différents exposants de Hölder (cf section 3.2).

Nous reportons les valeurs de  $\beta(\text{Re})$  calculées dans la figure 3.22b. En accord avec la partie 3.2.2.4, nous retrouvons la relation  $\frac{1}{\beta} \sim \frac{1}{\beta_0} \log(R_\lambda)$ , avec  $\beta_0 \sim \frac{3}{4}$  pour l'ensemble des nombres de Reynolds. Ici encore, nous ne voyons pas la saturation de  $1/\beta$  aux petits nombres de Reynolds observée par Castaing, Gagne, et Marchand [23] (1993) dans un jet turbulent expérimental.

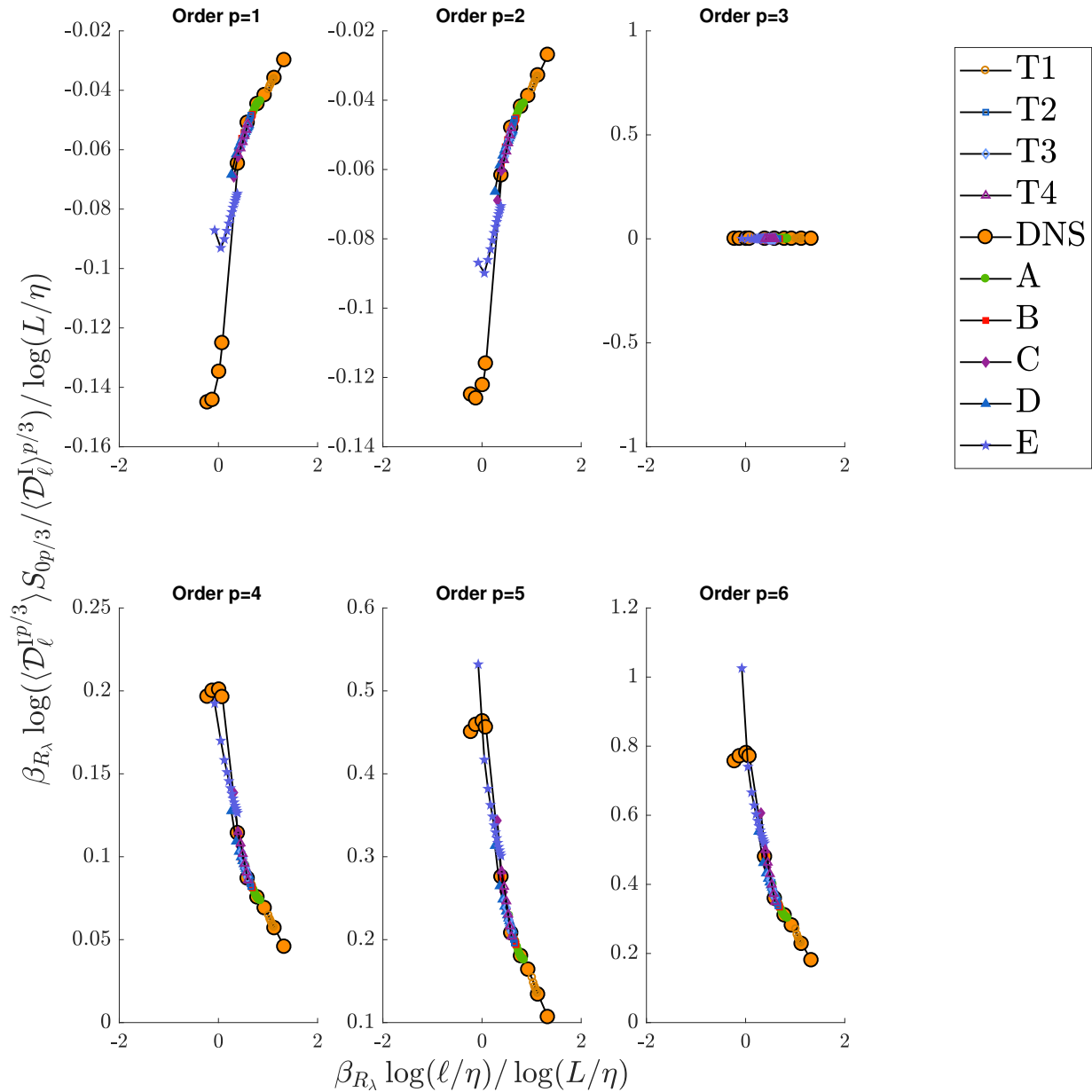


FIGURE 3.23 – Calcul des fonctions de structure normalisées de transferts énergétiques locaux de l'équation (3.3.8) pour  $p = 1$  à  $p = 6$ . Les données rassemblent la DNS (cercles oranges sertis de noir), la SPIV (symboles pleins), et la TPIV (symboles creux) détaillées aux tables 2.20, 2.21 et 2.22. La DNS sert de référence pour le calcul du paramètre  $\beta$  présenté à la figure 3.22b



### 3.3.2.6 Exposants d'échelle et spectre multifractal

En déterminant la plage de la gamme inertielle à partir des valeurs moyennes des transferts énergiques locaux (cf section 3.3.2.3), nous avons déterminé les exposants des fonctions de structure  $\tau_W(p)$ ,  $\tau_\Omega(p)$  et  $\tau_D(p/3)$  à partir des figures 3.21 et 3.22 pour les données numériques. Ils sont présentés à la figure 3.24a. On remarque que  $\tau_W(p)$  et  $\tau_\Omega(p)$  sont confondus sur la gamme  $p \in [-5, 5]$ , et qu'ils sont en accord avec  $\tau_D(p/3)$  sur la plage  $p \in [0, 5]$ . Ceci confirme l'hypothèse de similarité locale de l'équation (3.3.2)[37] (2019).

Les valeurs obtenues sur la DNS de SFEMaNS sont aussi en bon accord avec celles obtenues pour les valeurs de  $\tau_W(p)$  mesurées pour les données SPIV par Debue et al., Dubrulle [32, 37] (2018, 2019). Nous avons vérifié que les valeurs de  $\tau_D(p/3)$  coïncident, dans le régime inertiel, avec les pentes des fonctions de structure compensées de la figure (3.23). Nous avons calculé les moments positifs et négatifs pour obtenir précisément les valeurs des spectres multifractaux  $C_W(h)$ ,  $C_\Omega(h)$  et  $C_D(h)$  par la transformée de Legendre de l'équation (3.3.6). Les spectres sont présentés à la figure 3.24b. On remarque que  $C_W(h)$  et  $C_\Omega(h)$  sont des paraboles, présentant un minimum légèrement décalé de 0 à  $\delta h = 0.08$ . Ces deux spectres sont très proches pour  $h < 0$  mais légèrement différents pour  $h > 0$ . L'approximation en parabole nous permet de déterminer les valeurs de  $h$  pour lesquelles  $C_W(h) = 3$  ou  $C_\Omega(h) = 3$ . Cela correspond à la plus petite valeur de régularité de Hölder visible dans les données : en effet, la codimension fractale ne peut dépasser la dimension de l'espace. Nous obtenons ainsi une valeur du plus petit  $h$  sondé de  $h_{\min} \approx -0.53$ . Ceci est la trace de fortes rugosités dans l'écoulement.

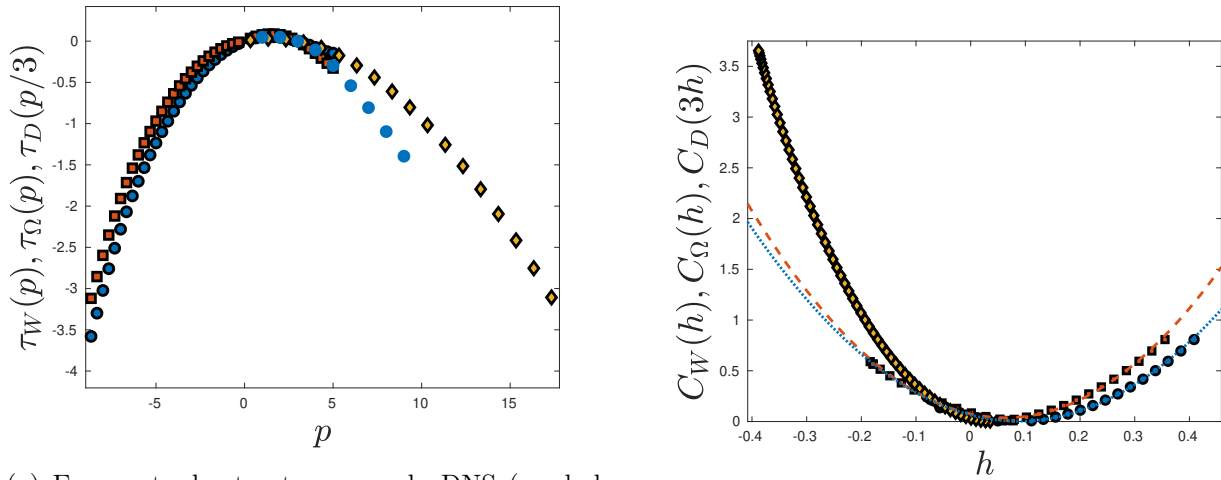
En utilisant la propriété de décalage de l'équation (3.3.7) et la mesure de  $\zeta_W(3) = 0.8$  [37] (2019), on peut estimer la valeur de l'exposant de Hölder le plus probable. Pour les incréments de vitesse totaux  $\delta W_\ell$  ou antisymétriques  $\delta \Omega_\ell$ , l'exposant le plus probable vaut 0.35, ce qui est très proche de la prédiction de Kolmogorov de  $\frac{1}{3}$ . Le plus petit exposant pour  $C_D(h)$  vaut  $h_{\min} = -0.26$ . On remarque que le spectre des transferts énergiques  $C_D(3h)$  n'est pas en accord avec l'approximation parabolique de  $C_W(h)$ . Il se concentre plus sur la valeur la plus probable, indiquant que les transferts sont moins intermittents que les incréments. Ceci n'est pas un effet statistique puisque, comme on le voit en annexe 6.2, les valeurs de  $\tau_D(p/3)$  sont statistiquement convergées sur la plage étudiée. Il se peut cependant que la résolution de la DNS impacte l'occurrence d' v nements extrêmes de transferts énergiques locaux [37] (2019), ou bien que nos résultats soient l'expression d'une différence intrinsèque d'intermittence entre la vorticité et les transferts énergiques.

### 3.3.2.7 Exposants conditionnés

Une tentative antérieure dans cette direction a été faite par Debue et al. [32] (2018) pour les données SPIV. Cependant le conditionnement ne pouvait être fait sur le transfert d'énergie local qu'à la plus petite échelle disponible de l'ensemble de données. Par conséquent, le conditionnement a été effectué à l'échelle de Kolmogorov uniquement pour l'ensemble de données E. Le conditionnement a été fait à partir d'une valeur seuil. La conclusion de ce conditionnement était que l'intermittence était plus élevée pour les zones correspondant à un transfert d'énergie local plus important (en valeur absolue).

Les données numériques nous permettent d'affiner la procédure, en regardant les fonctions de structure conditionnées à une valeur de transfert énergique à l'échelle de Kolmogorov  $\mathcal{D}_\eta^I$ . Nous pouvons aussi regarder plus précisément les statistiques sans valeurs absolues qui peuvent correspondre à des statistiques différentes. Puisque le conditionnement diminue l'ensemble statistique accessible, nous nous limitons à de plus petites valeurs de  $p$  que pour le cas non conditionné.

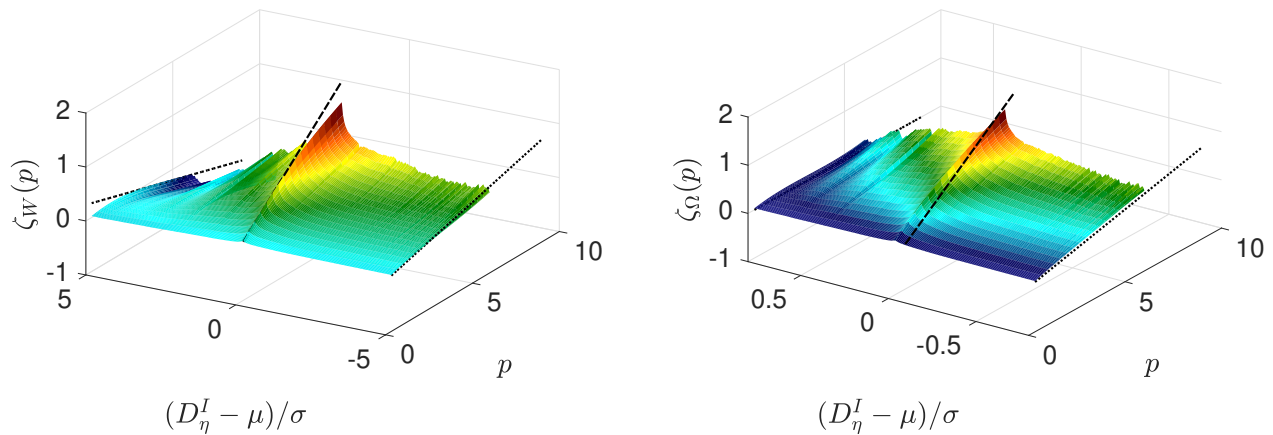
  partir des fonctions de structure conditionnées, on peut calculer les exposants de structure conditionnés selon la méthode classique avec une régression en loi de puissance. Nous présentons les résultats pour  $S_W$  dans la figure 3.25a, pour  $p$  entre 0 et 6, et des valeurs de  $\mathcal{D}_\eta^I$  centré réduit entre



(a) Exposants de structure pour la DNS (symboles sertis de noir) et la SPIV (autres symboles) :  $\tau_W$  ronds bleus ;  $\tau_\Omega$  carrés rouges ;  $\tau_D$  losanges jaunes.

(b) Spectre multifractal numérique  $C(h)$  :  $C_W$  ronds bleus ;  $C_\Omega$  carrés rouges ;  $C_D$  losanges jaunes.

FIGURE 3.24 – Exposants de structure et filtres multifractaux. On passe de l'un à l'autre avec une transformée de Legendre. Pour la figure b, les valeurs sont calculées à partir de la figure 3.24a. Les paraboles correspondent à des régressions paraboliques  $C(h) = ah^2 + bh + c$  avec  $a = 8$  (respectivement 9.5),  $b = -1.4$  (respectivement  $-1.2$ ) et  $c = 0.064$  (respectivement 0.075) pour  $C_W$  en pointillés bleus (respectivement  $C_\Omega$  en ligne brisée rouge).



(a) Exposants conditionnés pour  $S_W$ . Les lignes brisées ont pour pente :  $-0.1$  pour les grandes valeurs positives de  $D_\eta^I$  centré réduit ;  $1/3$  pour les petites valeurs de  $D_\eta^I$  centré réduit (proche de la moyenne) ; et  $0.1$  pour les grandes valeurs négatives.

(b) Exposants conditionnés pour  $S_\Omega$ . Les lignes brisées ont pour pente :  $0$  pour les grandes valeurs positives de  $D_\eta^I$  centré réduit ;  $1/3$  pour les petites valeurs de  $D_\eta^I$  centré réduit (proche de la moyenne) ; et  $0.1$  pour les grandes valeurs négatives.

FIGURE 3.25 – Exposants de structures conditionnés pour les fonctions de structure non normalisées  $S_W$  et  $S_\Omega$ . On obtient ces valeurs à partir des distributions jointes de  $D_\eta^I$  centré réduit et de  $\delta W_\ell$  ou  $\delta \Omega_\ell$  à plusieurs échelles  $\ell$  dans la gamme inertielle.

−5 et 5. Pour des petites valeurs de  $\mathcal{D}_\eta^I$  centré (donc proche de la moyenne) on retrouve des exposants  $\zeta(p)$  positifs et proches des valeurs de Kolmogorov :  $p/3$ .

Pour les grands  $\mathcal{D}_\eta^I$  négatifs, les exposants sont positifs et augmentent linéairement avec une plus petite pente de  $h_- \sim 0.1$ . Pour les grands  $\mathcal{D}_\eta^I$  positifs, on trouve des exposants négatifs, suivant une pente  $h_+ \sim -0.1$ .

Cela montre que les transferts énergétiques négatifs (vers les grandes échelles) sont moins intermittents que les positifs. Remarquons que les exposants des transferts extrêmes sont proches de zéro et correspondent à un choc ou une discontinuité des structures. Obtenir plus de précision sur  $h = -0.26$  (le plus petit exposant observé pour  $C_D(h)$ ) demanderait de bien meilleures statistiques. Nous procédons à la même analyse pour les incréments asymétriques  $S_\Omega$  dans la figure 3.25b. Nous observons un comportement similaire pour les grandes valeurs positives ou négatives de  $\mathcal{D}_\eta^I$ , qui sont bien plus intermittentes que pour des  $\mathcal{D}_\eta^I$  moyens. On observe pour les extrêmes des pentes  $h_- \sim 0.1$  et  $h_+ \sim 0$ , qui sont proches de celles obtenues pour  $S_W$ . Un tel comportement suggère l'existence d'une structure singulière responsable des déviations de la prédiction de Kolmogorov pour les valeurs de  $S_W$  or  $S_\Omega$  associés aux forts transferts énergétiques.

### 3.3.3 Discussion sur l'intermittence, la vorticité et les transferts d'énergie

Nous avons mené une étude sur les propriétés de la cascade turbulente avec des données expérimentales et numériques dans l'écoulement de von Kármán. Nos résultats valident l'intuition de Kraichnan et l'observation initiale de Batchelor : les zones de forte vorticité sont corrélées avec les grands transferts énergétiques ; les deux sont très intermittentes et responsables des déviations des fonctions de structure par rapport à la théorie de Kolmogorov [73] (1941) qui ne prévoit qu'une fractale simple.

Notre découverte s'inscrit dans la continuité des travaux de la littérature sur les liens entre dissipation et intermittence [74] (1962) d'une part, et entre dissipation, enstrophie et transfert énergétique local [37] (2019) d'autre part. Nous rappelons encore la nécessité de bien rendre compte des petites échelles de la turbulence pour obtenir les bonnes valeurs de fluctuations, ce qui est très difficile pour les écoulements à très grands nombres de Reynolds, pour lesquels le rapport entre échelle d'injection et échelle dissipative moyenne vaut comme  $\text{Re}^{3/4}$ .

Pendant, les corrélations que nous avons trouvées entre vorticité et transfert énergétique sont imparfaites : nous observons dans la distribution jointe de la figure 3.15 une forme en diamant étiré pour les valeurs intermédiaires de  $\omega$  indiquant que les grands transferts énergétiques sont corrélés à des valeurs moyennes de  $\omega$ , et que les fortes valeurs de  $\omega$  sont indépendantes du transfert énergétique. Cela indique que l'emplacement des maxima locaux de transfert d'énergie est décalé par rapport à l'emplacement des maxima locaux de vorticité, un fait déjà observé dans les expériences [31, 33] (2019, 2021) et dans des simulations numériques [103] (2019). Ceci met en évidence la dynamique complexe des structures de petite échelle de la turbulence, et appelle à des recherches plus approfondies, pour déterminer le rôle du transfert d'énergie local dans la formation de la zone de haute vorticité, ou l'inverse.

De manière assez intéressante, plusieurs indices suggèrent que, dans l'écoulement de von Kármán, les structures les plus intermittentes pourraient avoir une structure simple intéressante :

- tout d'abord, la tendance linéaire entre la moyenne conditionnelle de  $|\mathcal{D}_\ell^I|$  en fonction de  $\omega^2$  pour des échelles suffisamment petites ;
- ensuite, la tendance linéaire de l'exposant d'échelle conditionnel de  $S_W$  ou  $S_\Omega$ , observée pour des valeurs négatives ou positives élevées du transfert d'énergie local dans nos données numériques de la figure 3.25 ;

- enfin, les queues linéaires observées dans la PDF conjointe entre la vorticit e et le transfert d'énergie local dans nos donn ees num eriques (figure 3.15), qui correspondent en partie aux forts tourbillons de la couche de m elange.

Cet endroit correspond évidemment aux zones où le cisaillement, donc la dissipation et les fluctuations, sont maximales. Marie et Daviaud [91] (2004) ont montré que la plupart du transfert de moment angulaire se produit dans cette zone via les fluctuations de vitesse azimutales et verticales corr el es. Cet endroit (près de la limite du cylindre, à mi-hauteur) est également l'endroit où Luo et Hou [88] (2014) ont détecté une singularité potentielle dans un écoulement axisymétrique d'Euler avec une géométrie similaire à celle de la couche de cisaillement. Il a en outre démontré que la solution explosive développe une structure autosimilaire près du point de la singularité, à mesure que l'on s'approche du moment de la singularité.

Pour déterminer si les tourbillons de la couche de cisaillement de von K arm n que nous avons mis en évidence sur la figure 3.16 correspondent à des quasi-singularités autosimilaires des équations d'Euler, qui pourraient dominer les propriétés d'échelle aux grands ordres, il faudrait une étude plus approfondie avec des instantanés corr el s au temps. En effet, ces  v nements pourraient être la trace d'une solution explosive auto-similaire de l'équation de Burgers sans viscosité ou des modèles de turbulence (shell models) qui ont été proposés récemment par Mailybaev [89] (2015) pour contrôler l'intermittence dans de tels systèmes. Pour explorer ce lien intéressant, nous devons suivre dans l'espace et le temps la dynamique de ces structures, ce qui constitue un défi à la fois expérimental et numérique, pour des raisons différentes (problème de bruit dans le premier cas, charge numérique dans le second) ; de telles études sont néanmoins en cours de réalisation.

Enfin, il serait également intéressant d'effectuer une analyse similaire du lien entre la zone de transferts d'énergie élevés et les grandes vorticités dans d'autres géométries, afin d'explorer si nos résultats sont dus   la géométrie particulière de l'écoulement de von K arm n (avec une couche de cisaillement et un point de stagnation au milieu) ou sont liés à des caractéristiques universelles des écoulements turbulents.

### 3.4 Conclusions sur la cascade

Nous avons mené une analyse de la cascade turbulente, basée essentiellement sur des données dans la géométrie de l'écoulement de von K arm n. Si le calcul de quantités filtrées avait déjà été mené grâce aux méthodes de PIV, nous avons montré qu'il est aussi possible de les calculer sur une grille numérique non structur e dans le cadre d'une géométrie réelle.

L'analyse de la cascade nous montre qu'il existe dans les écoulements plusieurs régularités décrites par les exposants de Hölder et que la prise en compte de leur diversité et de leurs variations a plusieurs conséquences sur les statistiques, sur les flux énergétiques et sur les échelles de régularisation.

Dans la section 3.2 nous avons vu qu'il était nécessaire de les prendre en compte pour obtenir des fonctions de structure universelles, puis nous avons montré dans la section 3.3 que les déviations au modèle de Kolmogorov étaient dues aux forts incréments de vitesse, eux-mêmes associés aux valeurs extrêmes de transferts d'énergie et de vorticité. Ce constat nous pousse à remettre en question la validité de l'équation de Navier-Stokes aux petites échelles. Le chapitre 4 se concentre sur l'étude de ces défauts et propose une méthode de correction.

# Singularités

Nous avons procédé dans le chapitre précédent à une étude de la cascade, mécanisme de transmission de l'énergie des grandes échelles jusqu'aux échelles dissipatives dans les écoulements turbulents. Cette étude statistique suggère que, pour bien rendre compte des écoulements turbulents, il faut dépasser la vision simple d'une échelle dissipative fixe, comme l'ont remarqué Nelkin, Paladin et Vulpiani [102, 111] (1990, 1987). Cette notion d'échelle fluctuante est directement liée au problème de l'existence de singularités. Une singularité est un défaut local de régularité de l'écoulement. Il peut être envisagé de manière brutale comme une divergence du champ de vitesse, ou bien de manière plus fine comme une simple discontinuité, ou une perte de dérivabilité. L'argument classique des physiciens pour nier leur existence est qu'à petite échelle, la viscosité régularise tous les gradients, et qu'il suffit d'augmenter la résolution pour s'apercevoir que finalement le champ est régulier. C'est bien ce qu'on observe pour les exposants de Hölder  $h$  respectant  $-1 < h < 1$  : puisque  $h$  est plus petit que 1 (voire 0) le champ ne paraît plus dérivable (voire continu) puis il le redevient si l'on regarde plus finement que l'échelle de régularisation  $\eta_h \sim \text{Re}^{-1/(1+h)}$ . On peut alors distinguer deux cas. Si  $h > -1$ ,  $\eta_h \sim \text{Re}^{-1/(1+h)}$  est finie et le champ de vitesse est lisse à cette échelle. Cependant, il est possible que les mesures ne soient pas assez fines pour voir  $\eta_h$ , et donc que le champ de vitesse semble irrégulier. Par contre, pour  $h = -1$ , l'échelle de régularisation est nulle et rien n'indique que la singularité ne disparaît pas à petite échelle. Il faut donc adapter la modélisation à ces défauts, c'est ce que nous allons faire dans les parties suivantes. Tout d'abord, dans la section 4.1, nous mesurons les défauts de l'équation de vorticité (rotationnel de Navier-Stokes) sur des champs expérimentaux ou numériques filtrés puis, dans la section 4.2, nous proposons un modèle de fluide contenant des singularités de type  $h = -1$ , qui interagissent entre elles et avec le fluide.

## 4.1 Défauts de l'équation de vorticité

Dans cette section, nous analysons quantitativement les différences entre ce que prévoit la théorie et les observations, sur le bilan de vorticité. Ce travail a été mené en collaboration avec Damien Geneste et Bérengère Dubrulle.

Les sources de défauts sont multiples : si une simulation numérique respecte les équations intégrées modulo les erreurs numériques, elles doivent être très bien résolues et bien plus que ce qui est considéré comme acceptable (à la longueur de Kolmogorov), pour bien modéliser les gradients de vitesse. De même, il arrive de constater dans les écoulements expérimentaux des écarts à la modélisation, ne serait-ce que parce que la précision des mesures n'est pas assez bonne et ne nous permet d'accéder qu'à des champs filtrés par la procédure d'acquisition ou pollués par le bruit. Dans cette section, nous analysons quantitativement les différences entre ce que prévoit la théorie et les observations.

Un jeu de données numérique ou expérimental est considéré par la littérature assez résolu si sa résolution est de l'ordre de la longueur de Kolmogorov  $\eta$ .

- Pour les simulations numériques, de récents calculs en géométrie homogène isotrope très résolus (avec  $k_{max}\eta \in [3, 10]$  cf [149, 63, 12, 147]) ont cependant montré qu'une trop faible résolution nuit

à la qualité de la simulation. Cela empêche le développement de forts gradients et l'émergence des structures de taille inférieure à l'échelle de Kolmogorov  $\eta$  [148].

- Pour les expériences, le niveau de résolution et l'ensemble des techniques de traitement du bruit de mesure opèrent forcément un lissage du champ réel, menant à l'absence de gradients forts à petite échelle.

Ces gradients donnent lieu à des valeurs extrêmes de dissipation locale. Ceci est directement lié à nos observations du [chapitre 3](#).

Ainsi, si l'on tronque l'équation de Navier-Stokes à une certaine résolution, il faut compenser l'impact de la troncature par un terme additionnel modélisant ces forts gradients. L'idée de terme additionnel n'est pas nouvelle, puisqu'il est connu depuis longtemps que les équations de Navier-Stokes filtrées ne correspondent pas aux équations de Navier-Stokes appliquées aux quantités filtrées, qui nécessitent l'ajout du tenseur de Reynolds. Ce qui nous intéresse diffère des corrections de type LES comme celle présentée au [paragraphe 2.2.6](#) et évaluée dans la [section 2.5](#). Les LES cherchent à prédire les quantités macroscopiques (flux et recirculations) sur un maillage grossier. Ici, nous voulons modéliser l'impact des variations extrêmes sous l'échelle de Kolmogorov sur l'ensemble de l'écoulement précisément à l'échelle de Kolmogorov. A notre connaissance, il y a eu peu d'étude de modélisation du tenseur de Reynolds à cette échelle. Nous allons donc mener une étude utilisant encore une fois simulations et expériences pour tenter de l'évaluer. Cette étude est un défi technique car elle demande non seulement des données d'écoulements turbulents spatialement sur-résolus, mais aussi une bonne mesure de l'évolution temporelle, pour être capable de calculer les termes de variation temporelle. Ceci demande une grande précision et énormément de stockage. Nous utiliserons alors les données résolues en temps que nous avons à notre disposition : la DNS de la [table 2.22](#) et l'expérience T-4 de la [table 2.21](#).

Nous détaillons d'abord la méthodologie dans la [section 4.1.1](#) puis comparons les différents résultats dans la [partie 4.1.2](#), avant de conclure au [paragraphe 4.1.3](#)

#### 4.1.1 Méthode de mise en évidence des défauts

Notre étude se basera sur l'analyse de champs expérimentaux et numériques. Pour cela, nous utilisons l'expérience T-4 de la [table 2.21](#) (analysée en TPIV et en PTV cf [paragraphe 2.4.3](#)) et la simulation numérique de la [table 2.22](#). Nous avons tout mis en œuvre pour rendre la comparaison entre les deux possible :

- on traite des champs de vitesse eulériens ;
- les deux jeux de données sont à des nombres de Reynolds comparables  $6, 3 \times 10^3$  pour l'expérience et  $6 \times 10^3$  pour la simulation numérique ;
- les résolutions spatiales sont précisément à l'échelle de Kolmogorov.
- les deux jeux de données sont résolus en temps, et comme expliqué au [paragraphe 2.4.4](#) nous avons synchronisé les fréquences d'acquisition ;
- nous avons interpolé le champ numérique sur un cube cartésien au centre du cylindre pour qu'il corresponde à la zone et à la grille de mesure ;
- les résolutions spatiales sont similaires.

Cependant, les trois acquisitions (PTV, TPIV et DNS) de cet écoulement mènent à des champs de vitesse filtrés pour des raisons différentes : pour l'expérience par la technique de mesure expérimentale, pour la DNS par l'interpolation sur le maillage complet et sur le cube d'extraction. En effet, la double



reconstruction PTV et TPIV sur l'expérience ou bien l'interpolation des données numériques initialement calculées sur une grille beaucoup plus fine nous donnent trois filtrages bien différents. L'intérêt de ces multiples champs est de nous assurer que, si les résultats concordent, cela ne sera pas lié au filtrage utilisée. Pour cette étude uniquement, nous utilisons la convention expérimentale pour les directions des axes. Cette convention n'est plus en accord avec celle prise jusqu'ici et présentée dans la figure 2.1. En effet, les expérimentateurs préfèrent appeler  $z$  la coordonnée de la plus petite dimension du pavé de mesure, qui est perpendiculaire à l'axe du cylindre. Nous travaillons donc maintenant avec la convention que l'axe  $y$  est selon l'axe du cylindre et que les axes  $x$  et  $z$ , sont dans le plan équatorial.

#### 4.1.2  tude du tenseur de Reynolds à l'échelle de Kolmogorov

Pour évaluer les défauts des équations de Navier-Stokes, nous allons donc mesurer tous les termes sur les champs à notre disposition et vérifier s'ils se compensent bien. Pour les quantités filtrées, la somme doit normalement mener au tenseur de Reynolds introduit à l'équation (3.1.5). Cependant, pour pouvoir calculer les termes de l'équation de Navier-Stokes, il faut avoir accès au champ de pression. Cette donnée n'est malheureusement pas mesurée expérimentalement. Pour contourner ce problème, il est possible de calculer le champ de pression à l'aide de l'équation de Laplace  $\Delta p = -\partial_i(u_j \partial_j u_i)$  mais cela présente d'autres inconvénients techniques que nous avons choisi d'éviter. Une solution, et c'est celle que nous avons retenue, est de ne pas regarder directement l'équation de Navier-Stokes, mais plutôt son rotationnel, appelée équation de vorticité. Prendre le rotationnel nous débarrasse en effet du terme de pression qui est un gradient. En revanche, le calcul de dérivées a tendance à amplifier le bruit de mesure, c'est pourquoi nous utiliserons des dérivées au sens faible que nous détaillerons au paragraphe 4.1.2.2.

##### 4.1.2.1 Tenseur de Reynolds pour la vorticité

En notant  $\boldsymbol{\omega} = \text{rot } \mathbf{u}$ , et en prenant le rotationnel de l'équation de Navier-Stokes (2.1.6) on obtient :

$$\partial_t \omega_i + \partial_j (u_j \omega_i) = \partial_j (\omega_j u_i) + \frac{1}{\text{Re}} \partial_{kk}^2 \omega_i. \quad (4.1.1)$$

Si l'on applique un filtre qui commute avec les dérivées temporelles et spatiales, on obtient l'équation suivante :

$$\partial_t \bar{\omega}_i + \partial_j \bar{u}_j \bar{\omega}_i = \partial_j \bar{\omega}_j \bar{u}_i + \frac{1}{\text{Re}} \partial_{kk}^2 \bar{\omega}_i. \quad (4.1.2)$$

Nous pouvons donc définir un tenseur de Reynolds pour la vorticité  $\tau_{ji} = \bar{u}_j \bar{\omega}_i - \bar{u}_i \bar{\omega}_j$  sur le modèle de celui déjà présenté à l'équation (3.1.5) pour la vitesse. Contrairement au tenseur de Reynolds classique, ce tenseur n'est pas symétrique. Si l'on isole ce tenseur, on obtient l'équation suivante :

$$\partial_t \bar{\omega}_i + \partial_j \bar{u}_j \bar{\omega}_i - \partial_j \bar{\omega}_j \bar{u}_i - \frac{1}{\text{Re}} \partial_{kk}^2 \bar{\omega}_i = \partial_j (\tau_{ij} - \tau_{ji}) := \delta \omega_i. \quad (4.1.3)$$

Cette équation définit la quantité  $\delta \omega_i$ , qui représente l'écart à l'équation de vorticité.

##### 4.1.2.2 Filtres et formulation faible ou comment limiter le bruit

Le fait de regarder la vorticité au lieu du champ de vitesse a un impact majeur sur le bruit, puisqu'il faut calculer la dérivée de quantités déjà bruitées. Pour la simulation numérique, la vorticité est calculée sur le maillage du calcul initial, puis interpolée sur le cube extrait. Il n'y a donc pas de bruit afférent. Pour les mesures expérimentales, le problème est important. L'idée pour le résoudre est de calculer les dérivées au sens faible avec un filtre. Nous savons que le champ de vitesse expérimental est déjà le

produit d'un certain filtrage lié à la technique de reconstruction. Il est donc raisonnable de travailler avec le formalisme faible. Nous utilisons un filtre gaussien, sur lequel portent toutes les dérivées. Le filtre total sur les données expérimentales est donc le résultat du filtre associé au processus de mesure et de notre filtre gaussien. Sur la grille cartésienne de mesure, filtrer est très simple en traitant le filtrage dans l'espace de Fourier. Cependant, puisque le cube n'est pas parfaitement périodique, nous devons enlever des points pour éliminer les effets de bords dus au manque de périodicité. Nous avons donc enlevé 10 pixels de bords pour la PTV et 5 pixels pour la TPIV.

Pour l'analyse des données numériques, nous adoptons une double approche.

1. D'une part, nous calculons directement la vorticité avec le code SFEMaNS sur la grille DNS avant de l'interpoler sur le cube cartésien central. Ceci nous permet de calculer les valeurs de  $\delta\omega_i$  par un schéma de différences finies pour l'espace. Ce cas sera appelé I-DNS puisqu'il correspond à une interpolation simple des données de DNS.
2. D'autre part, nous pouvons partir de la vitesse interpolée, puis comme pour les expériences, tout recalculer en formalisme faible, avec un filtre gaussien. Ce traitement sera noté G-DNS en référence au filtre gaussien.

Pour évaluer les dérivées temporelles, nous utilisons un schéma de différences finies centré.

#### 4.1.2.3 Structure et dynamique des zones de grands défauts de vorticité

Puisque les défauts sont liés aux transferts d'énergie, regardons dans un premier temps les réalisations de  $\|\delta\omega\|$  et celles de  $\mathcal{D}_\ell^I$ . La comparaison pour les mesures expérimentales dans un plan de coupe contenant l'axe du cylindre de von Kármán est menée dans la figure 4.1. Les figures de PTV 4.1d et 4.1c paraissent plus claires car la grille est plus fine. Nous invitons le lecteur à zoomer pour s'en rendre compte. Les deux méthodes de reconstruction montrent que  $\|\delta\omega\|$  prend de fortes valeurs, de l'ordre d'une fraction du nombre de Reynolds (ici  $\text{Re} = 6,3 \cdot 10^3$ ). La PTV donne d'ailleurs des valeurs légèrement plus fortes puisque la meilleure résolution permet de calculer des gradients plus forts. On remarque que les zones de fortes valeurs de  $\|\delta\omega\|$  sont les mêmes avec les deux techniques de reconstruction. Lors du suivi dynamique, on constate que ces zones n'apparaissent pas instantanément de manière aléatoire mais se déplacent de manière cohérente. Aussi, dans la plupart des cas, ces zones suivent les endroits de grand transfert énergétique, mais pas systématiquement. L'évolution de ces défauts est complexe et ressort d'une dynamique non-linéaire.

Nous menons la même comparaison sur les données de la DNS interpolée I-DNS et G-DNS dans la figure 4.1. Ici encore, on trouve des valeurs importantes de  $\|\delta\omega\|$ , toujours de l'ordre d'une fraction du nombre de Reynolds. Les défauts sont les mêmes pour les deux méthodes d'interpolation, et semblent liés aux transferts énergétiques locaux.

#### 4.1.2.4 Étude statistique des défauts de vorticité

Pour mener une étude statistique raisonnable, il faut éviter d'utiliser des données redondantes. Ainsi, nous ne prenons pas en compte tous les pas de temps de ces données résolues pour l'analyse statistique. Pour les champs expérimentaux, nous disposons d'une longue série temporelle d'acquisition qui nous permet de ne prendre pour les statistiques qu'un champ sur 200, ce qui correspond à un intervalle de  $10\tau_k$ ,  $\tau_k$  étant le temps caractéristique d'évolution à l'échelle de Kolmogorov. Nous calculons les distributions des composantes de  $\delta\omega$  pour les différents jeux de données. Pour les données G-DNS, on peut jouer sur l'échelle de filtrage gaussien, ce qui nous donne accès à  $\delta\omega$  pour différentes échelles de



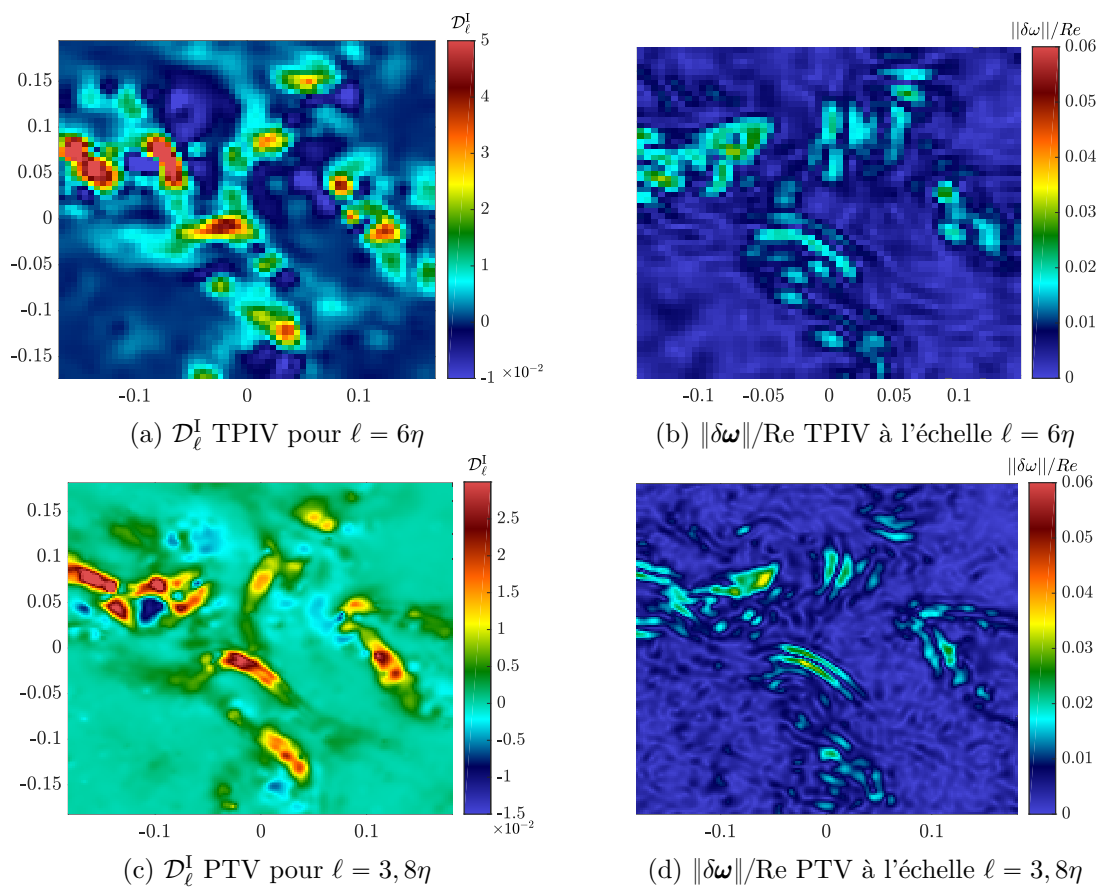


FIGURE 4.1 – Champs expérimentaux  $\mathcal{D}_\ell^I$  et  $\|\delta\omega\|/Re$  pour l'expérience dans un plan de coupe contenant l'axe du cylindre de von Kármán.

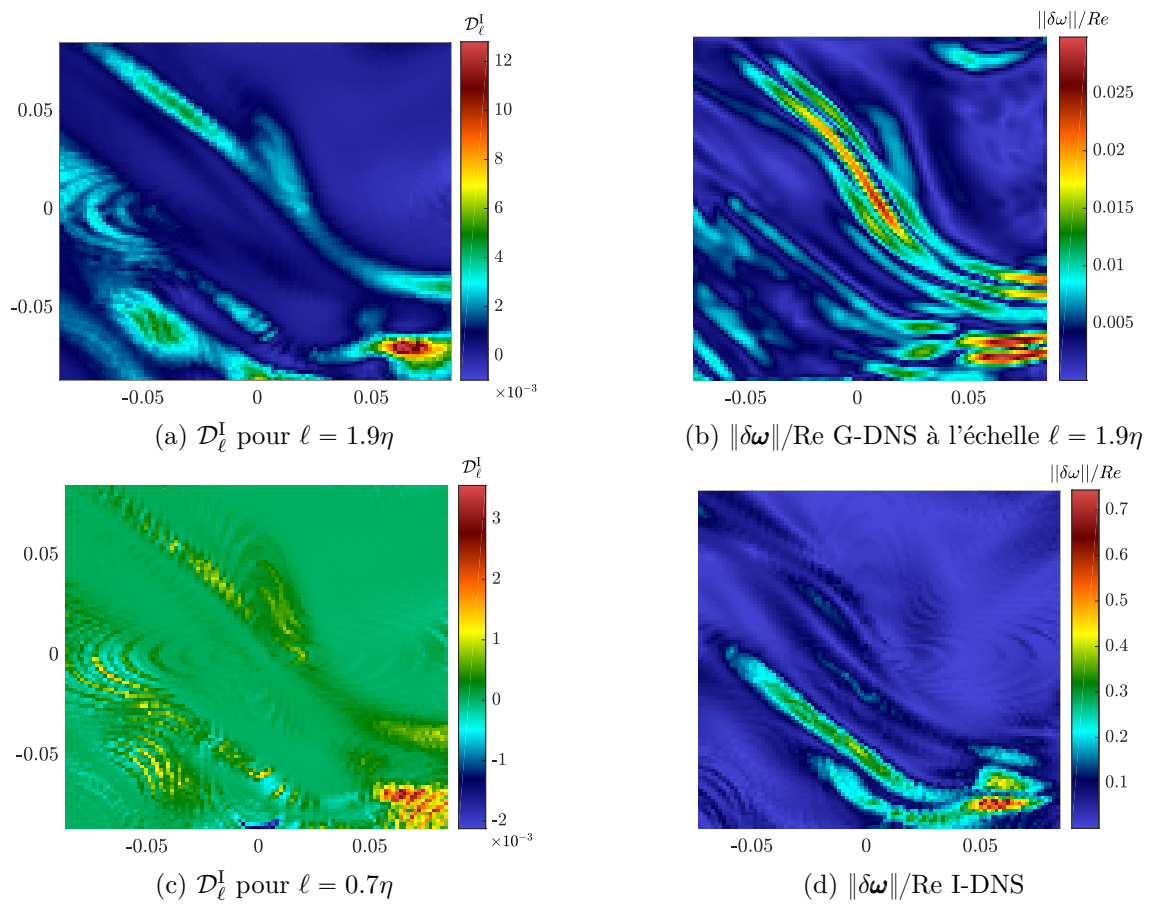


FIGURE 4.2 – Champs numériques  $\mathcal{D}_\ell^I$  et  $\|\delta\omega\|/Re$  dans un plan de coupe

filtrage. Pour les expériences, nous utilisons un filtre unique pour diminuer le bruit de mesure, ce filtre s'ajoute à celui correspondant aux deux méthodes expérimentales qui ont des résolutions différentes.

Puisque l'écoulement n'est pas parfaitement isotrope, et que le pavé de mesure expérimentale est assez aplati, nous regardons les résultats composante par composante. La figure 4.3 trace la distribution des valeurs obtenues pour les trois composantes. Tout d'abord, nous voyons que les distributions ne sont pas gaussiennes, et qu'elles présentent des grandes queues correspondant à des  v nements extrêmes. La figure 4.4 présente les résultats pour les distributions réduites. Avec cette renormalisation, toutes les distributions se regroupent sur une même courbe maître. La statistique des défauts de l'équation de vorticité est donc connue si l'on a accès à sa variance.

#### 4.1.2.5 Corrélations avec d'autres quantités physiques

**Corrélations avec les gradients de vitesse** Nous souhaitons maintenant identifier si les valeurs extrêmes de  $\|\delta\omega\|$  sont le fait du bruit de mesure. Pour ce faire, nous allons évaluer les corrélations avec deux autres paramètres, d'une part avec les gradients, et d'autre part avec les transferts énergétiques locaux, qui sont la source probable des écarts à la modélisation. Comme nous l'avons déjà dit, la fluctuation de l'échelle de régularisation nous incite à regarder plus finement que l'échelle de Kolmogorov qui est homogène et stationnaire [102, 111, 37] (1990, 1987, 2019). On s'attend donc raisonnablement à ce que les gradients soient plus forts dans les zones où l'échelle de régularisation est petite. Cette petite échelle de régularisation est associée à un petit exposant de Hölder et à une perte de régularité locale qui peut expliquer l'apparition des défauts  $\delta\omega$ . Nous devrions ainsi observer une corrélation entre les grands gradients et les grandes valeurs de  $\|\delta\omega\|$ .

Nous nous attendons d'autant plus à un tel résultat que nous avons observé dans le chapitre 3 que ces défauts, liés à la variation de l'échelle de dissipation, sont responsables du phénomène d'intermittence.

Cas	TPIV	PTV	G-DNS
$\alpha_1^T$	0,80	1,13	0,85
$\alpha_2^T$	0,80	1,34	0,73
$\alpha_3^T$	1,22	0,57	0,46

TABLE 4.1 – Coefficients de meilleure corrélation entre  $\delta\omega_i$  et  $\nabla^2\overline{\omega}_i/\text{Re}$ .

La figure 4.5 trace les distributions jointes de  $\nabla^2\omega/\text{Re}$  et  $\delta\omega$  sur la simulation interpolée I-DNS pour les différentes composantes. Les résultats sur les données expérimentales sont similaires. La distribution jointe n'est pas aplatie selon une droite, mais nous pouvons néanmoins procéder à des régressions linéaires. Les pentes noires montrent les coefficients de meilleure corrélation, leurs pentes sont reportées dans la table 4.1.

Nous obtenons trois coefficients différents pour chaque jeu de données pour plusieurs raisons. Premièrement, l'écoulement pris au centre du cylindre n'est pas isotrope ; deuxièmement, les statistiques, en particulier numériques ne sont pas parfaitement convergées ; et troisièmement, le pavé de mesure expérimental est aplati selon la direction 3, ce qui introduit un biais et qui explique les gros écarts pour ce coefficient sur les données expérimentales de la table 4.1.

Ces coefficients correspondent à des équivalents de viscosité turbulente, nous permettant de modéliser les défauts par un terme proportionnel au laplacien de la vorticité. L'équation suivante résume l'égalité statistique obtenue :

$$\delta\omega_i \sim \alpha_i^T \frac{\nabla^2\omega_i}{\text{Re}}. \quad (4.1.4)$$

Nous pouvons tirer de ces observations un modèle empirique pour corriger les défauts, comme

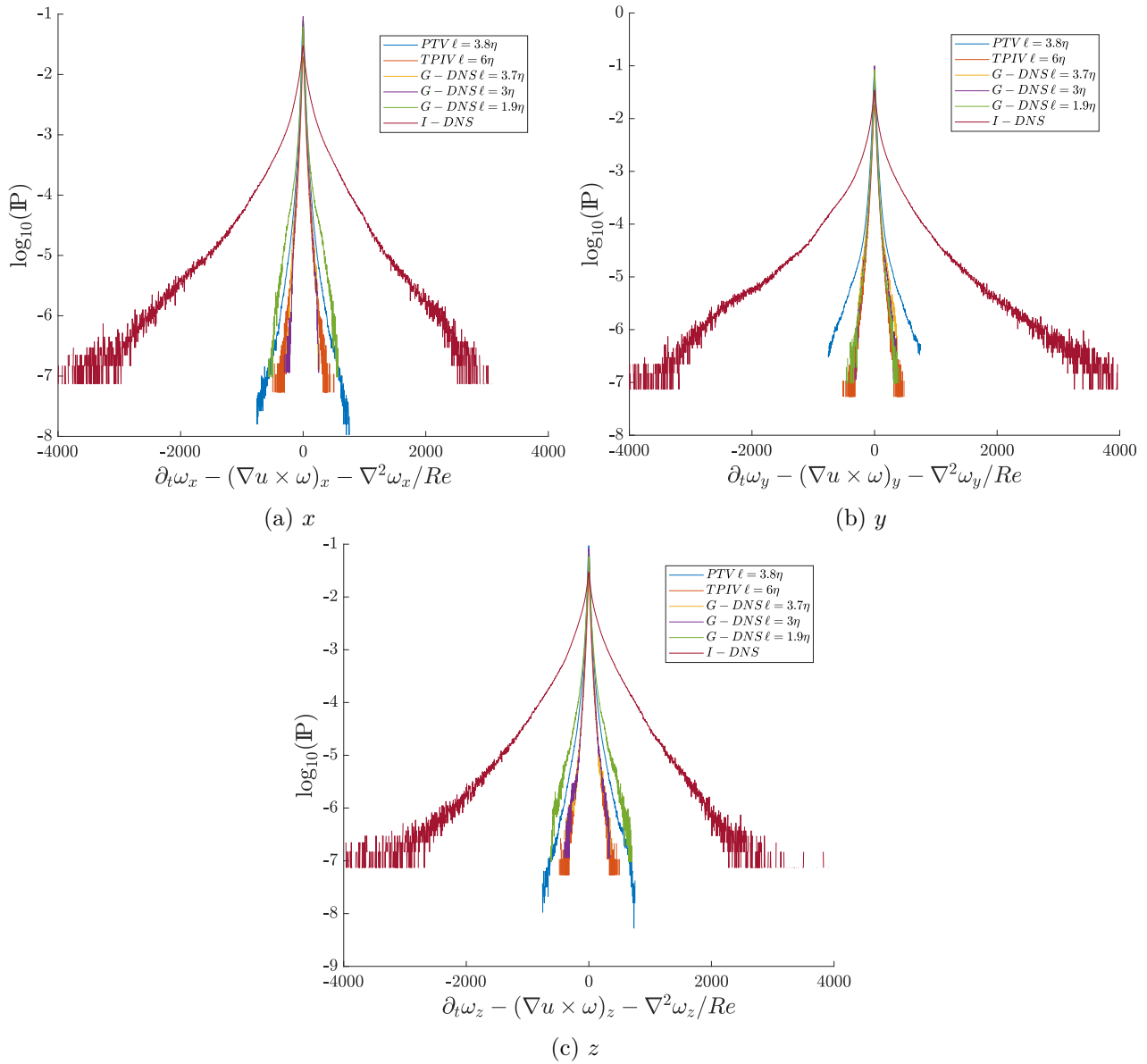


FIGURE 4.3 – Distribution des composantes de  $\delta\omega$ . Pour les données numériques, nous utilisons pour la G-DNS trois échelles différentes. Cette figure utilise les valeurs brutes.

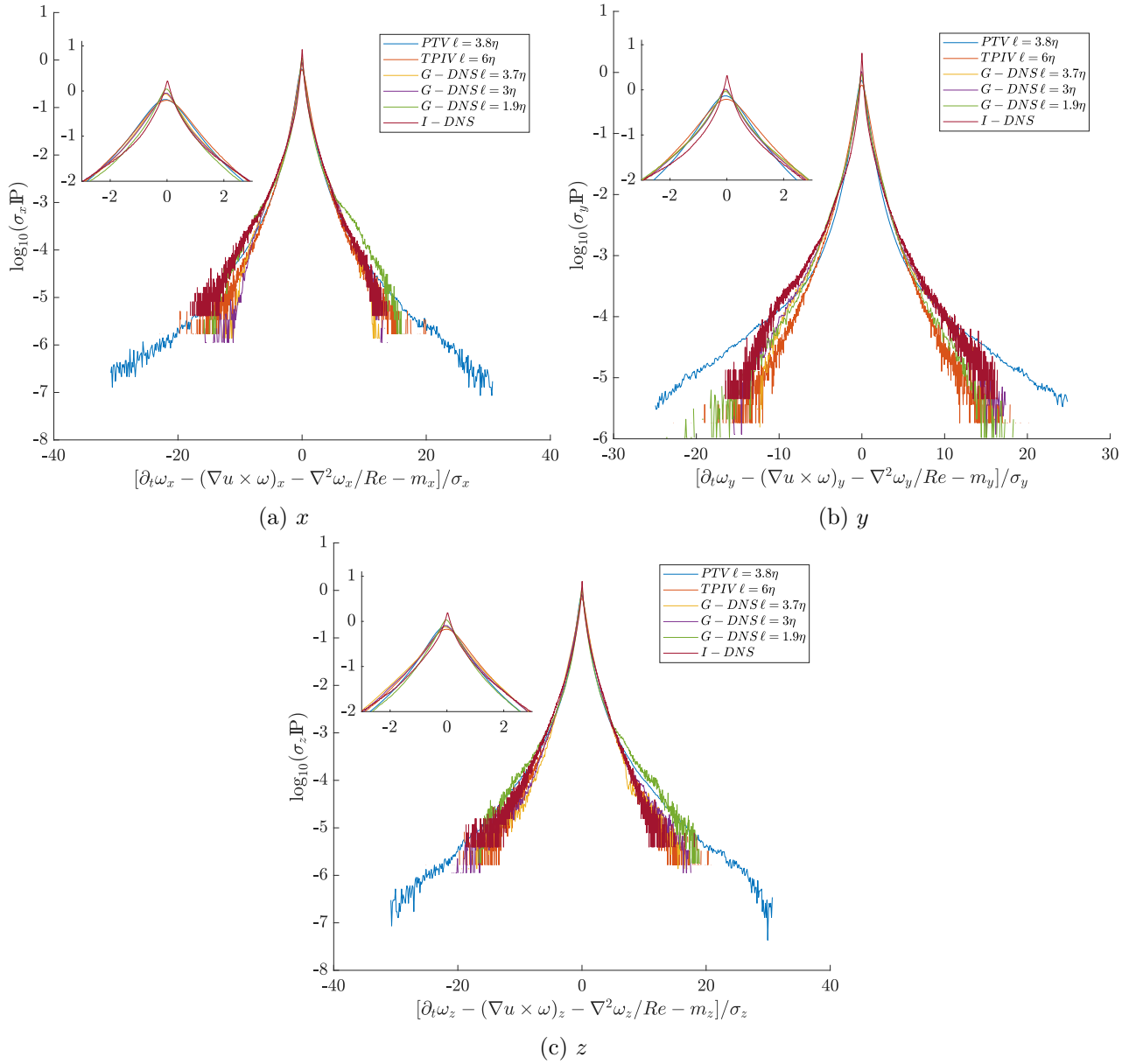


FIGURE 4.4 – Distributions réduites des composantes de  $\delta\omega$ . Pour les données numériques, nous utilisons pour la G-DNS trois échelles différentes. Les  $\sigma_i$  sont les écarts types de  $\delta\omega_i$ .

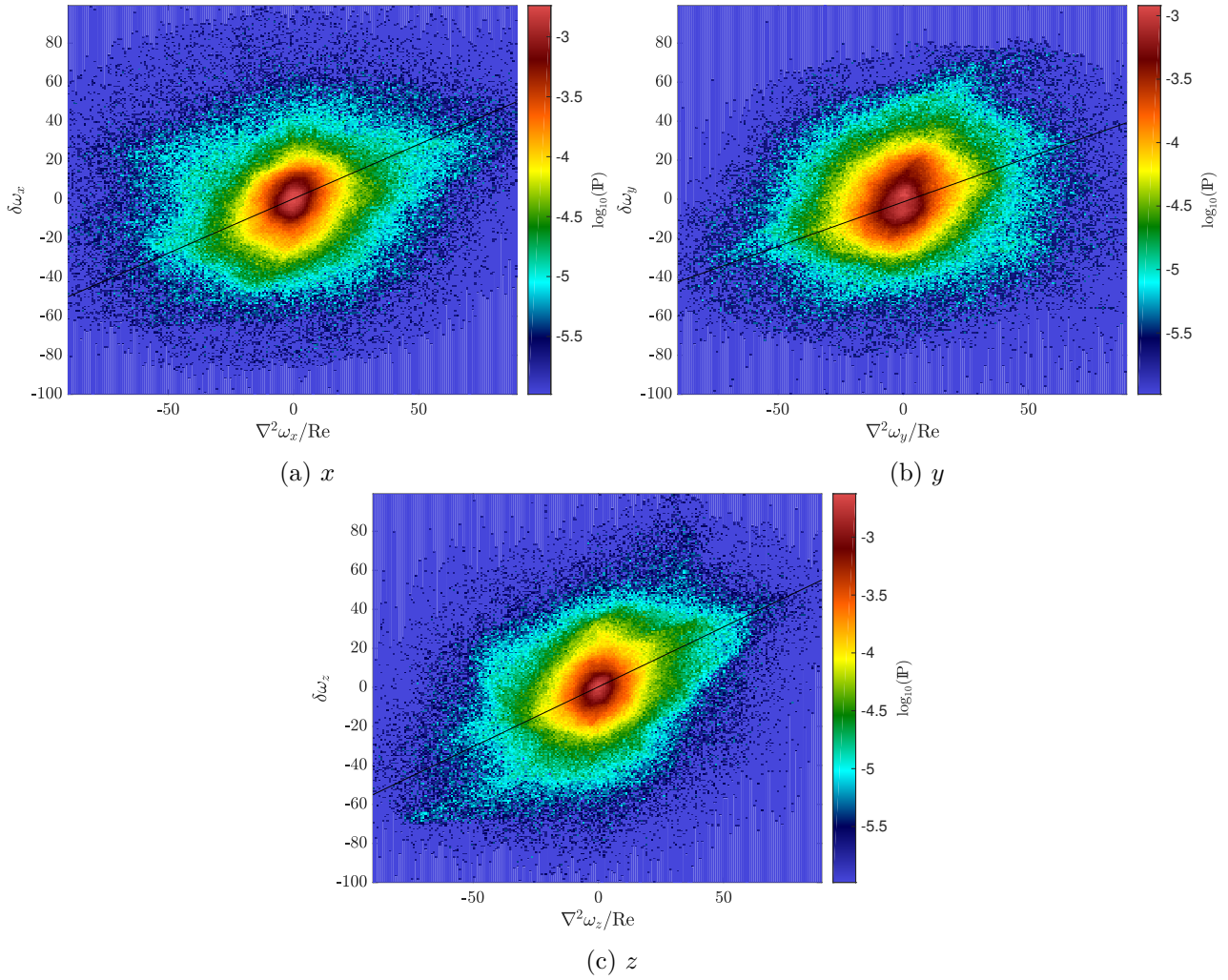


FIGURE 4.5 – Distributions jointes des  $\nabla^2\omega_i/\text{Re}$  et  $\delta\omega_i$  à l'échelle  $\ell = 3\eta$ . Les courbes noires sont les droites de pente  $\alpha_i$  de la table 4.1.

une "viscosité turbulente" adaptée aux petites échelles qui se veut une alternative aux techniques de maillages adaptatifs. Ceci n'est qu'une approximation, puisque, en théorie, la viscosité turbulente est un tenseur d'ordre 4 comme l'ont remarqué Frisch, Dubrulle [47, 37] (1995, 2019). Rappelons ici que la direction 2 correspond à la coordonnée  $y$  qui est pour cette étude le long de l'axe du cylindre.

**Corrélations avec les transferts énergétiques  $\mathcal{D}_\ell^I$**  Comparons maintenant les défauts aux transferts énergétiques  $\mathcal{D}_\ell^I$  définis à l'équation (3.1.32). La dissipation inertielle correspondant à  $\lim_{\ell \rightarrow 0} \mathcal{D}_\ell^I$  entraînant une dissipation supplémentaire selon la régularité de l'écoulement devrait contribuer aux  $\delta\omega$ . Nous avons déjà observé une corrélation visuelle entre les grandes valeurs de ces deux champs aux figures 4.1 et 4.2. Cependant, les valeurs intermédiaires dessinent des contours différents.

Nous proposons une analyse quantitative des corrélations en regardant les distributions jointes de  $\delta\omega$  et  $\mathcal{D}_\ell^I$ , notées  $P(\|\delta\omega\|, \mathcal{D}_\ell^I)$ , ainsi que l'indicateur de corrélations suivant :

$$C_{A,B} = \frac{P(A,B)}{P(A)P(B)}, \quad (4.1.5)$$

avec  $A = \|\delta\omega\|$  et  $B = \mathcal{D}_\ell^I$ . Si deux variables aléatoires  $A$  et  $B$  sont indépendantes,  $C_{A,B}$  doit valoir 1. Les écarts entre cet indicateur et 1 sont donc révélateurs de corrélation, ou anti-corrélation. La figure 4.6 trace cet indicateur de corrélation pour les deux cas expérimentaux et la G-DNS à  $\ell = 3\eta$ . On remarque dans les trois cas que les petites valeurs semblent indépendantes, mais que toutes les valeurs extrêmes sont fortement corrélées. Il faut cependant nuancer le propos car plus une valeur est extrême, moins les statistiques associées sont convergées. La tendance de correspondance des extrêmes est néanmoins bien présente.

### 4.1.3 Discussion sur les défauts de Navier-Stokes

Nous avons donc présenté une étude des défauts de l'équation de vorticité sur des données expérimentales et numériques filtrées à l'échelle de Kolmogorov. Nous avons constaté que les écarts entre la modélisation et les mesures pouvaient atteindre de grandes valeurs et n'étaient pas uniquement liés au bruit apporté par les incertitudes. La statistique de ces défauts se renormalise sur une distribution maître lorsq on regarde les distributions des variables réduites (i.e. normalisées par l'écart type). Ces défauts semblent aussi corrélés aux gradients de vitesse, ce qui nous permet de proposer un modèle de viscosité turbulente empirique, qui est diff rent des modèles classiques ou de celui étudié à la section 2.5, puisqu'il ne vise pas à corriger les grandes échelles mais les petites. Cette méthode permet de ne pas avoir recours à des maillages adaptatifs qui se raffinent en fonction des gradients observés et qui peuvent avoir un c ut élevé en ressources de calcul. Une piste d'amélioration serait de proposer un coefficient de viscosité turbulente variable, comme nous l'avons fait pour la LES, qui retranscrirait mieux l'inconstance de l'échelle de régularisation. Il serait aussi intéressant de tester les paramètres de ce modèle dans d'autres géométries. Nous avons aussi constaté que les valeurs extrêmes de défauts sont corrélées aux extrêmes de transfert énergétique à l'échelle de Kolmogorov, ce qui souligne que ces défauts sont renforcés par le débit d'énergie qu'ils reçoivent et par le caractère hors équilibre de la turbulence.

Les défauts que nous avons observés nous rappellent le problème de la variation de l'échelle de régularisation. Pour essayer de donner une réponse autre que de toujours plus raffiner les jeux de données, nous allons maintenant nous attacher à une nouvelle description des petites échelles de la turbulence qui discrimine dans la modélisation ce qui est plus grand ou plus petit que la taille moyenne des structures dissipatives : l'échelle de Kolmogorov  $\eta$ . Dans la section suivante, nous proposerons

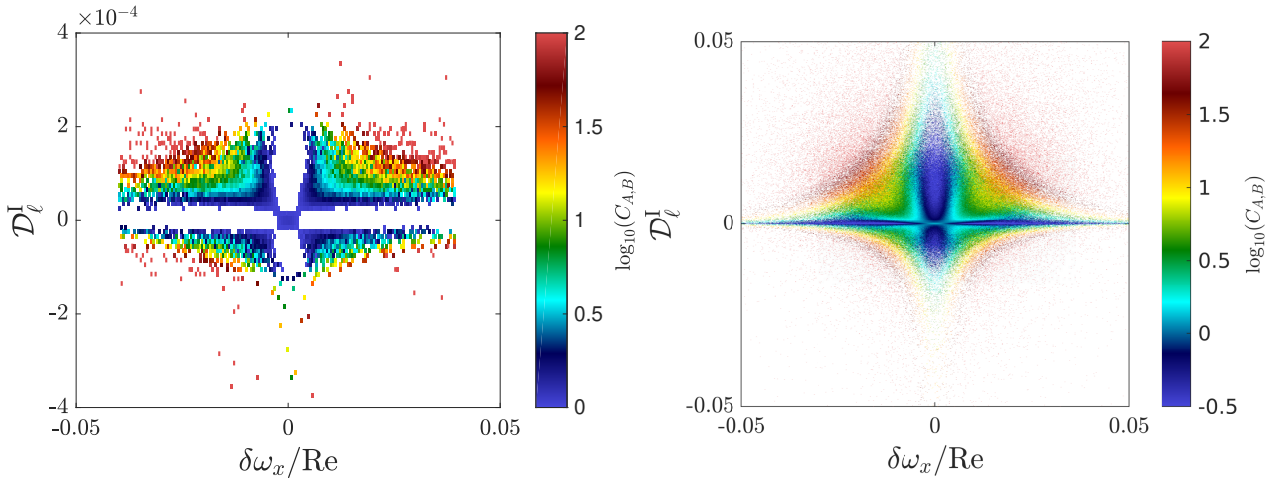
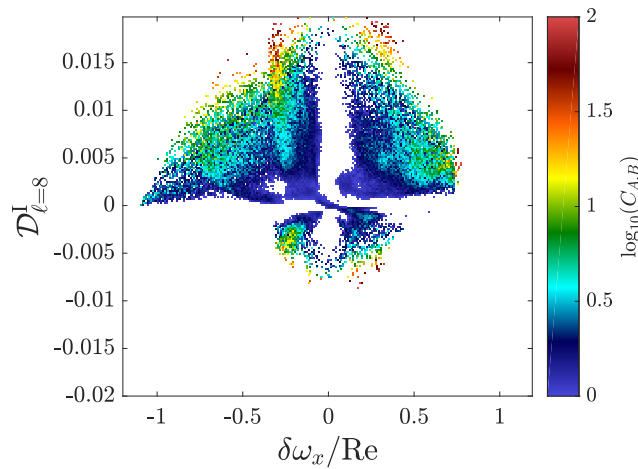
(a) TPIV à l'échelle  $\ell = 6\eta$ .(b) PTV à l'échelle  $\ell = 2.4\eta$ .(c) G-DNS à l'échelle  $\ell = 3\eta$ .

FIGURE 4.6 – Indice de corrélation  $C_{A,B}$  de l'équation (4.1.5) entre  $\delta\omega/\text{Re}$  et  $\mathcal{D}_\ell^I$ . La barre de couleur correspond au logarithme en base  $\log_{10}$  et ne montre donc que les valeurs positives.



de garder une modélisation classique pour ce qui est au dessus de  $\eta$ , et proposons un modèle pour ce qui est en dessous. Les exposants de Hölder associés aux échelles de régularisation inférieurs à  $\eta$  ne correspondant pas à un champ dérivable, nous proposons dans notre modèle d'introduire des singularités, dont nous devons décrire la dynamique et l'interaction avec les structures régulières.

## 4.2 Les pinçons, un modèle de singularités de Navier-Stokes en interaction

Le travail que nous présentons ici est issu de Faller, Fery, Geneste, et Dubrulle [41] (2021).

Nous présentons un modèle de singularités de Navier-Stokes, appelées pinçons. Elles suivent une dynamique hors équilibre, qui suppose que l'écoulement les entourant respecte localement les équations de Navier-Stokes incompressibles (2.1.5) et (2.1.6). Ce modèle peut être interprété comme une généralisation du modèle de vortons de Novikov [108] (1983) qui correspondait à des singularités des équations d'Euler (2.1.8). Les pinçons sont entourées d'un écoulement régulier, et sont transportés et orientés par cet écoulement. En retour, ils appliquent une contrainte à l'écoulement régulier. Cette contrainte est localisée et devient dominante sur des échelles inférieures à  $\eta$  l'échelle de Kolmogorov. Nous utilisons ce modèle pour calculer la dynamique d'une paire de pinçons. Si nous étudions un dipôle, les pinçons se repoussent, puis finissent par être dissipés aux temps longs en absence de forçage. Si l'on ajoute un forçage stochastique au dipôle, les pinçons s'orientent selon une direction perpendiculaire à celle de leur séparation, et peuvent rester dans cet état, maintenu par l'équilibre entre forçage et dissipation.

Dans le cas général où les pinçons ont une intensité et une orientation arbitraires, nous observons trois dynamiques génériques dans la phase initiale : un effondrement avec une dissipation infinie, et deux modes d'expansion, l'éloignement dipolaire anti-aligné et l'éloignement anisotrope aligné. L'effondrement d'une paire de pinçons suit plusieurs caractéristiques de la reconnexion entre deux anneaux de vorticité, y compris la loi d'échelle de la distance entre les pinçons, suivant la loi d'échelle de Leray [84] (1934) en  $\sqrt{t_c - t}$ .

### 4.2.1 Introduction

Mathématiquement, tout champ de vitesse dont la norme  $\mathbb{L}^3$  n'est pas bornée est singulier. Gibbon, Pal, Gupta, et Pandit [52] (2016) ont d'ailleurs mené une analyse détaillée des différents critères de régularité. Les observations du chapitre 3 nous ont montré que, dans les écoulements turbulents, les petites échelles sont intermittentes, locales et irrégulières. Nous avons constaté l'existence d'exposants de Hölder plus petits que  $h < 1/3$  [28] (1994) qui donnent une vorticité non bornée dans la limite des nombres de Reynolds infinis. Plusieurs modèles théoriques de modélisation des irrégularités ont été proposés, utilisant des solutions faibles de l'équation d'Euler, des singularités ou des quasi singularités : structures de taille atomique [61] (1899), les écoulements de Beltrami [27] (1988), les écoulements de Mikado [13] (2018), les spirales [87, 53] (1982, 1993) ou les filaments de vorticité [26] (1991).

Ces constructions théoriques ont de longue date alimenté un cadre analytique de la turbulence, permettant la prolifération des modèles numériques de petites échelles. Un bon représentant de ces modèles est le modèle tridimensionnel de Novikov [108] (1983) qui propose une décomposition en singularités. En effet, dans ce modèle, le champ de vorticité est décomposé en  $N$  singularités discrétisées et infiniment localisées (via une fonction Dirac  $\delta$ ) en des points  $r_\alpha$ , ( $\alpha \in \{1 \dots N\}$ ), chacune caractérisée par un vecteur  $\gamma_\alpha$  fournissant l'intensité et l'axe de rotation des mouvements autour de ces singularités. Les singularités ne sont pas fixes, mais se déplacent sous l'action du champ de vitesse et de la contrainte

induite par les autres singularités, de manière à respecter la conservation de la circulation. Les vortex sont assimilables à des pôles hydrodynamiques interagissant à longue distance par un potentiel décroissant comme  $1/r^2$ .

Le modèle a été adapté pour permettre des simulations numériques d'anneaux ou de filaments de vorticité en interaction en considérant une généralisation sans divergence des vortons [1] (1985). De façon tout à fait remarquable, le modèle des vortons entraîne une reconnexion des vortex, même si aucune viscosité n'est introduite dans le schéma numérique [2] (1993). La littérature se demande encore si la viscosité effective est due à un étirement intense des vortex [115] (1992), ou aux propriétés de l'alignement des vortex pendant la reconnexion [2] (1993).

D'un point de vue mathématique, le modèle des vortons ne peut être considéré comme une description pleinement satisfaisante des singularités de Navier-Stokes pour deux raisons. Premièrement, les vortons ne constituent pas des solutions faibles exactes des équations d'Euler ou de Navier-Stokes 3D [125, 144, 54] (1986, 1988, 1988), ce qui les rend en quelque sorte moins attrayants que les vortex ponctuels, qui sont des solutions faibles des équations d'Euler 2D comme l'ont remarqué Saffman et Meiron [125] (1986). Deuxièmement, les vortons ne respectent pas l'invariance d'échelle de Navier-Stokes, qui impose que le champ de vitesse soit à l'échelle  $1/r$ . En effet, grâce à la loi de Biot-Savart, nous voyons qu'un champ de vortex de Dirac induit une mise à l'échelle de la vitesse comme  $1/r^2$ , où  $r$  est la distance à la singularité.

Motivés par cette observation, nous introduisons dans cette section une modification du modèle de vorton, qui est construite sur des solutions faibles des équations de Navier-Stokes, et qui respecte leur invariance d'échelle. Elle permet une description dynamique simple de l'évolution des entités de base, ci-après nommées "les pinçons".

Après des remarques assez générales au paragraphe 4.2.2.1, nous présentons en détail le modèle des pinçons au paragraphe 4.2.2.2. Nous déduisons ensuite des postulats de base les propriétés des pinçons au paragraphe 4.2.2.3. Ensuite, le paragraphe 4.2.2.4 détaille les interactions entre les pinçons et l'écoulement régulier, puis dans 4.2.2.5 l'interaction entre pinçons, qui est encore plus linéarisée dans la limite de faible intensité au paragraphe 4.2.2.6. Enfin, nous intégrons dans la section 4.2.3 les équations obtenues, tout d'abord pour un dipôle 4.2.3.2 et 4.2.3.3, puis dans un cadre plus général 4.2.3.4. La section 4.2.4 présente une réflexion sur ce modèle, ses avantages et ses limites.

## 4.2.2 Modèle de Pinçon

### 4.2.2.1 Généralités et motivations du modèle de pinçon

Soit  $\mathbf{U}$  un champ de vitesse régi par les équations de Navier-Stokes. Il est connu, et nous avons déjà vu que, si l'on considère le champ filtré  $\overline{\mathbf{U}}^\ell$ , les équations de Navier-Stokes doivent être modifiées par l'ajout d'une force turbulente modélisée par le tenseur de Reynolds  $\nabla \cdot \left( \overline{\mathbf{U}}^\ell \overline{\mathbf{U}}^\ell - \overline{\mathbf{U}} \overline{\mathbf{U}}^\ell \right)$  (cf équation 3.1.5). Il a été observé dans des simulations numériques et des expériences que, pour  $\ell \rightarrow 0$ , la force turbulente est de plus en plus intermittente, et constituée de zones activées et de zones où elle est presque nulle. La taille des zones activées décroît avec  $\ell$ , mais elles persistent même quand  $\ell$  est en dessous de l'échelle de Kolmogorov  $\eta$ . Ces zones persistantes sont maintenues par le débit d'énergie inter-échelle défini à l'équation (3.1.32), qui peut prendre des valeurs non nulles si le champ n'est pas assez régulier. Il faut alors que les données d'écoulements turbulents soient très résolues, et bien plus que ce qui est considéré comme acceptable, pour bien modéliser les gradients de vitesse [149] (2018) mais aussi les transferts énergétiques [37] (2019). Le côté en temps ou en ressources de calcul, de cette résolution supplémentaire pour les simulations numériques est alors élevé, surtout pour les grands nombres de Reynolds. Ce côté est aussi élevé pour obtenir une bonne résolution pour les mesures

expérimentales.

Pour contourner ce problème, nous proposons de séparer mentalement le fluide en deux sous ensembles, comme deux phases. La première phase est continue et correspond au champ filtré  $\bar{\mathbf{U}}^\ell$  pour une certaine échelle  $\ell_c$  que nous préciserons plus tard. La seconde phase représente les zones de fluide non résolues. Maintenus par la force turbulente, elles sont vues par la première phase comme des puits ponctuels d'énergie. Nous détaillerons leur dynamique plus tard.

Avec cette vision, la seconde phase doit se comporter de manière à restituer l'influence des plus petites échelles de l'écoulement. Notre objectif de décrire fidèlement toutes les structures de taille  $\ell < \ell_c$  nous invite à regarder les solutions autosimilaires de l'équation de Navier-Stokes, c'est-à-dire celles respectant la renormalisation de Leray [84] (1934)  $\mathbf{U}(\mathbf{x}, t) \rightarrow \lambda^{-1}\mathbf{U}(\mathbf{x}/\lambda, t/\lambda^2)$  pour tout  $\lambda$ . De plus, pour décrire la dynamique de cette seconde phase, nous nous concentrons sur les solutions autosimilaires qui ne dépendent pas explicitement du temps. Ceci nous assure des contraintes que les solutions renormalisées doivent être homogènes de degré  $-1$  c'est-à-dire :

$$\forall \lambda \neq 0, \mathbf{U}(\mathbf{x}) = \lambda^{-1}\mathbf{U}(\mathbf{x}/\lambda), \quad (4.2.1)$$

Comme l'a remarqué Sverák [136] (2011), dans son théorème 1, les solutions non triviales de Navier-Stokes qui sont régulières sur  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  doivent être axisymétriques et sont les solutions de Landau. Ces solutions sont des solutions stationnaires de Navier-Stokes sur presque tout l'espace excepté l'origine. Au sens des distributions, on retrouve le système suivant :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{U} &= 0, \\ (\mathbf{U} \cdot \nabla)\mathbf{U} + \frac{\nabla p}{\rho} - \nu \Delta \mathbf{U} &= \nu^2 \delta(\mathbf{x}) \mathbf{F}. \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

Ce système correspond en dehors de l'origine aux équations stationnaires de Navier-Stokes mais présente en zéro un défaut qui vaut le vecteur  $\mathbf{F}$  de norme  $F$  et orienté selon  $\mathbf{e}$ , qui définit un axe de symétrie de rotation.

Il faut donc respecter ces contraintes pour décrire la seconde phase de notre modèle. Nous allons maintenant la définir, à l'aide des solutions de Landau.

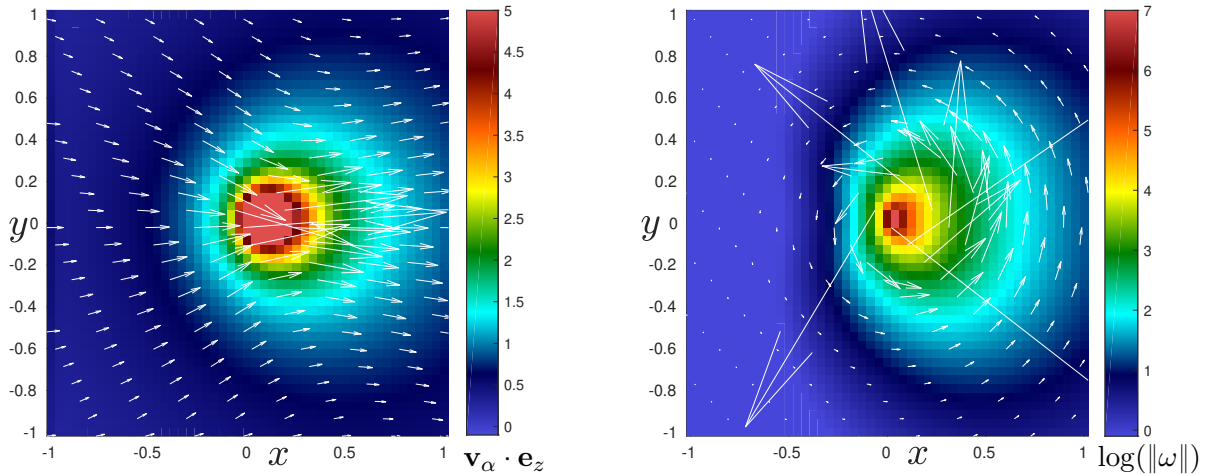
#### 4.2.2.2 Définition d'un pinçon

Nous définissons les pinçons comme des fonctions localisées et individuelles indicées par un paramètre  $\alpha$ . Un pinçon est caractérisé par sa position  $\mathbf{x}_\alpha(t)$ , et un vecteur  $\boldsymbol{\gamma}_\alpha(t)$  vérifiant  $\|\boldsymbol{\gamma}_\alpha\| < 1$ , qui témoigne de l'intensité et de la direction du pinçon. Un pinçon produit localement un champ de pression et de vitesse axisymétrique selon la direction de son vecteur  $\boldsymbol{\gamma}_\alpha$  qui vaut  $(p_\alpha, \mathbf{v}_\alpha)(\mathbf{x}) \equiv (\nu^2 p(\mathbf{x} - \mathbf{x}_\alpha, \boldsymbol{\gamma}_\alpha), \nu \mathbf{U}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_\alpha, \boldsymbol{\gamma}_\alpha))$ . Les fonctions  $\mathbf{U}$  et  $p$  sont déterminées par :

$$\mathbf{U}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_\alpha, \boldsymbol{\gamma}_\alpha) = \frac{2}{\phi_\alpha} \left( \boldsymbol{\gamma}_\alpha - \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_\alpha}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_\alpha\|} \right) + 2(1 - \boldsymbol{\gamma}_\alpha^2) \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_\alpha}{\phi_\alpha^2}, \quad (4.2.3)$$

$$p(\mathbf{x} - \mathbf{x}_\alpha, \boldsymbol{\gamma}_\alpha) = -\frac{4}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_\alpha\| \phi_\alpha} + 4 \frac{1 - \boldsymbol{\gamma}_\alpha^2}{\phi_\alpha^2}. \quad (4.2.4)$$

avec  $\phi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\gamma}) = \|\mathbf{x}\| - \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{x}$  et  $\phi_\alpha = \phi(\mathbf{x} - \mathbf{x}_\alpha, \boldsymbol{\gamma}_\alpha)$ .  $p_\alpha$  est le champ de pression associé au pinçon. Des propriétés pratiques pour le calcul sont présentées dans l'annexe au paragraphe 6.3.1. Remarquons que le champ de vitesse de l'équation (4.2.3) est homogène de degré  $-1$ , centré en  $\mathbf{x}_\alpha$  et axisymétrique autour de la direction de  $\boldsymbol{\gamma}$ .



(a) Champ de vitesse autour d'un pinçon

(b) Champ de vorticité autour d'un pinçon

FIGURE 4.7 – Vitesse et vorticité autour d'un pinçon. Les flèches représentent le champ dans le plan défini par  $\boldsymbol{\gamma}_\alpha \propto \mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$ ; la couleur code pour (a) la composante orthogonale au plan, et pour (b) la norme de la vorticité.

Les valeurs du champ de vitesse et du champ de vorticité dans des plans de coupe contenant  $\boldsymbol{\gamma}$  sont présentées sur la figure 4.7. Proche de la singularité centrale, il y a comme un pincement autour de nos singularités, ce qui explique leur nom de pinçons.

Comme l'a montré Landau [82] (1944) (mais aussi [133, 6, 138, 18, 136] (1952, 2000, 1998, 2004, 2011)), les champs de vitesses  $\mathbf{v}_\alpha$  sont solutions de l'équation (4.2.2) avec les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= F(\gamma) \frac{\boldsymbol{\gamma}_\alpha}{\gamma}, \\ F(\gamma) &= 4\pi \left[ \frac{4}{\gamma} - \frac{2}{\gamma^2} \ln \left( \frac{1+\gamma}{1-\gamma} \right) + \frac{16}{3} \frac{\gamma}{1-\gamma^2} \right], \\ \gamma &= \|\boldsymbol{\gamma}_\alpha\|. \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

Le lecteur peut se référer aux travaux de Cannone et Karch [18] (2004) pour les détails rigoureux. La fonction  $F(\gamma)$  est présentée dans la figure 4.8a. On remarque trois éléments : elle est nulle en  $\gamma = 0$ , elle commence par un comportement linéaire en  $F(\gamma) = 16\pi\gamma$  proche de l'origine et diverge en  $\gamma = 1$ . Aussi,  $F$  étant strictement monotone, on pourrait supprimer le paramètre  $\gamma$  et ne considérer que directement  $F$  comme défaut de l'équation (4.2.2). Cependant, nous conservons le formalisme avec  $\gamma$  qui facilite les calculs.

#### 4.2.2.3 Propriétés des pinçons

**Lois d'échelles pour les quantités filtrées** Le champ de vitesse et toutes ses dérivées divergent à l'endroit où est le pinçon et ne sont pas définis en ce point. On peut en revanche utiliser le formalisme de filtre introduit à la section 3.1.1 pour obtenir des résultats proche de l'origine. Nous utilisons ici un filtrage  $\psi$  infiniment dérivable, positif, d'intégrale 1 et à symétrie sphérique autour de l'origine. La notation  $\psi$  utilisée ici correspond au filtre utilisé dans les sections antérieures. Il ne faut pas la confondre avec la fonction  $\phi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\gamma})$  que nous avons utilisée pour définir un pinçon. Nous espérons que le

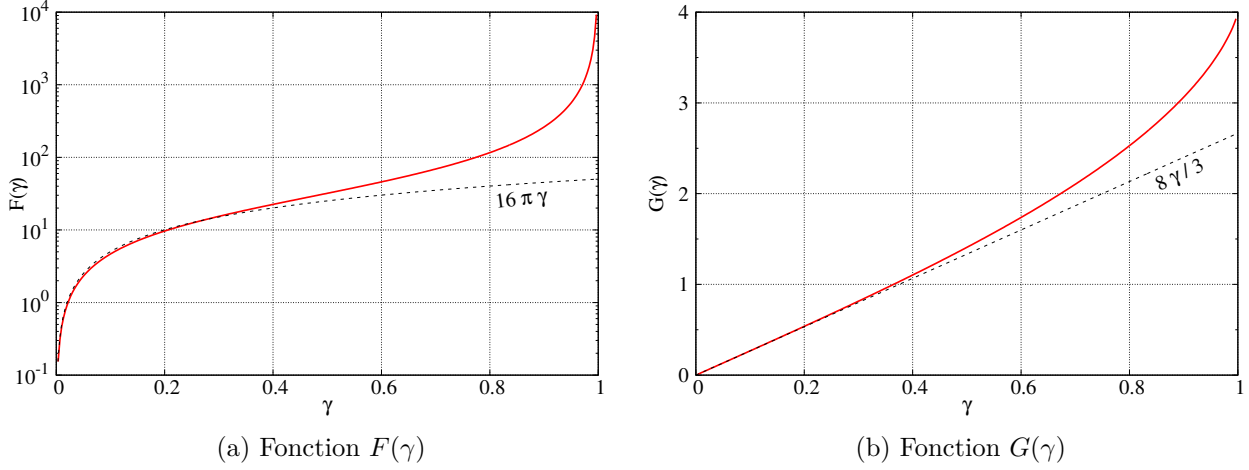


FIGURE 4.8 – Paramètres d'un pinçon en fonction de son intensité  $\gamma$  : (a) intensité de la force ponctuelle produite par le pinçon ; la ligne pointillée correspond à la courbe d'équation  $y = 16\pi\gamma$  ; (b) moment généralisé du pinçon défini à l'équation (4.2.11) ; la courbe pointillée correspond à la droite d'équation  $y = 8\gamma/3$ .

nombre des arguments (un pour le filtre, deux pour la fonction définissant les pinçons) aide le lecteur à les différencier. Nous utilisons ainsi :

$$\bar{\mathbf{v}}_\alpha^\ell(\mathbf{x}) = \int \psi\left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{\ell}\right) \mathbf{v}_\alpha(\mathbf{y}) \frac{d\mathbf{y}}{\ell^3}, \quad (4.2.6)$$

où  $\ell$  est l'échelle de filtrage. Dans la limite  $\ell \rightarrow 0$ , la fonction  $\psi\left(\frac{\mathbf{x}}{\ell}\right)$  est très piquée proche de son origine, de telle sorte que, pour  $\mathbf{x}$  assez loin de  $\mathbf{x}_\alpha$ , nous pouvons considérer que  $\bar{\mathbf{v}}_\alpha^\ell(\mathbf{x}) \approx \mathbf{v}_\alpha(\mathbf{x})$ . Regardons maintenant plus précisément le cas de  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_\alpha$ . Avec l'équation (4.2.6) on obtient :

$$\bar{\mathbf{v}}_\alpha^\ell(\mathbf{x}_\alpha) = \int \psi\left(\frac{\mathbf{x}_\alpha-\mathbf{y}}{\ell}\right) \mathbf{U}(\mathbf{y}-\mathbf{x}_\alpha, \gamma_\alpha) \frac{d\mathbf{y}}{\ell^3}. \quad (4.2.7)$$

En faisant le changement de variable  $\mathbf{y} - \mathbf{x}_\alpha = \ell\mathbf{z}$ , et en utilisant l'homogénéité de  $\mathbf{U}$  et la symétrie sphérique de  $\psi$  on a :

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{v}}_\alpha^\ell(\mathbf{x}_\alpha) &= \frac{1}{\ell} \int \psi(\mathbf{z}) \mathbf{U}(\mathbf{z}, \gamma_\alpha) d\mathbf{z}, \\ &= \frac{C_\psi}{\ell} \langle \mathbf{v}_\alpha \rangle_{\mathcal{S}_1} \underset{\ell \rightarrow 0}{=} \mathcal{O}(\ell^{-1}), \end{aligned} \quad (4.2.8)$$

avec  $C_\psi = 4\pi \int r\psi(r)dr$  et  $\langle \mathbf{v}_\alpha \rangle_{\mathcal{S}_1}$  la moyenne de  $\mathbf{v}_\alpha$  sur la sphère unité. Le théorème d'Euler nous indique que  $\nabla \mathbf{v}_\alpha$  est homogène de degré  $-2$ . La même astuce nous donne que  $\overline{\nabla \mathbf{v}_\alpha}^\ell(\mathbf{x}_\alpha) \underset{\ell \rightarrow 0}{=} \mathcal{O}(\ell^{-2})$ .

Il n'est malheureusement pas possible d'appliquer encore cette astuce pour  $\nabla^2 \mathbf{v}_\alpha$  car rien n'assure que l'intégrale de  $\int \psi(r)dr/r$  converge en 0. Cependant, on peut montrer que  $\overline{(\mathbf{v}_\alpha \cdot \nabla) \mathbf{v}_\alpha}^\ell + \frac{\nabla \bar{p}_\alpha^\ell}{\rho} - \nu \Delta \bar{\mathbf{v}}_\alpha^\ell = \frac{\nu^2}{\ell^3} \psi\left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}_\alpha}{\ell}\right) \mathbf{F}$  est de l'ordre de  $\mathcal{O}(\ell^{-3})$ .

**Potentiel vecteur, vorticité et h licite** L'analyse vectorielle nous permet d'écrire les identités suivantes. Tout d'abord, le champ de vitesse autour d'un pinçon dérive du potentiel :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_\alpha(\mathbf{x}) &= 2\nu(\mathbf{x}-\mathbf{x}_\alpha) \times \nabla \ln(\phi_\alpha), \\ &= 2\nu \frac{\boldsymbol{\gamma}_\alpha \times (\mathbf{x}-\mathbf{x}_\alpha)}{\phi_\alpha}, \end{aligned} \quad (4.2.9)$$

La vorticit   autour d'un pin  on   tant le rotationnel de  $\mathbf{v}_\alpha$ , elle est parall  le au potentiel vecteur et s'  crit :

$$\boldsymbol{\omega}_\alpha(\mathbf{x}) = 4\nu(1 - \gamma^2) \frac{\boldsymbol{\gamma}_\alpha \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}_\alpha)}{\phi_\alpha^3}, \quad (4.2.10)$$

Cette formule nous assure que le pin  on a une h  licit   nulle.

**Moment g  n  ralis   et vorticit   filtr  e** Nous d  finissons le moment g  n  ralis    $\mathbf{\Pi}_\alpha$  d'un pin  on par la moyenne du champ de vitesse du pin  on sur la sph  re unit  . Nous trouvons la relation suivante (les d  tails des calculs sont en annexe 6.3.2).

$$\begin{aligned} \mathbf{\Pi}_\alpha &\equiv \langle \mathbf{v}_\alpha \rangle_{S_1} = \nu G(\gamma_\alpha) \frac{\boldsymbol{\gamma}_\alpha}{\gamma_\alpha}, \\ G(\gamma) &= \frac{2}{\gamma^2} \left[ 2\gamma - (1 - \gamma^2) \ln \left( \frac{1 + \gamma}{1 - \gamma} \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.2.11)$$

Par d  finition,  $\mathbf{\Pi}_\alpha$  nous donne une valeur approch  e de la vitesse filtr  e    l'emplacement du pin  on puisque  $\overline{\mathbf{v}_\alpha}^\ell(\mathbf{x}_\alpha) = C_\psi \mathbf{\Pi}_\alpha / \ell$ . Remarquons que  $\mathbf{\Pi}_\alpha$  a la m  me direction que  $\boldsymbol{\gamma}_\alpha$ . Pour  $0 \leq \gamma < 1$ ,  $G(\gamma)$  est une fonction r  guli  re qui va de 0    4, en d  butant par un comportement lin  aire en  $G(\gamma) = 8\gamma/3$  proche de l'origine et se terminant par une tangente infinie en  $\gamma = 1$  (voir figure 4.8b). La fonction  $G(\gamma)$  est bijective, et nous donne, tout comme la fonction  $F$  une correspondance entre  $G$  et  $\gamma$  mais aussi entre  $\mathbf{\Pi}$  et  $\boldsymbol{\gamma}$ .

Par sym  trie, on remarque que  $\overline{\boldsymbol{\omega}}^\ell(\mathbf{x}_\alpha) = 0$ , de telle sorte que le pin  on filtr   est    rotationnel nul proche de sa position.

#### 4.2.2.4 Interactions entre un pin  on et l'  coulement r  gulier

La notion de pin  on isol   n'a pas vraiment de sens physique pour plusieurs raisons :

1. les pin  ons sont de nature dissipative et ont besoin d'  tre entretenus ; l'  coulement environnant peut en   tre la source ;
2. les pin  ons sont d  finis dans un univers infini, qui ne rend pas compte des conditions limites d'un syst  me r  el ; pour utiliser un pin  on dans un   coulement confin  , il faut le plonger dans un champ de vitesse qui tient compte des conditions limites ;
3. si l'on consid  re qu'un pin  on rend compte du caract  re intermittent des transferts   nerg  tiques non r  solus, il faut envisager la coexistence de plusieurs pin  ons ; en supposant qu'ils sont deux    deux distincts et que le champ est r  gulier partout sauf en leurs positions, cela implique qu'il faut d  crire l'interaction entre un pin  on et un champ r  gulier.

Le caract  re non lin  aire des   quations de Navier-Stokes nous interdit de sommer deux solutions pour en obtenir une troisi  me. Dans notre situation, il faut donc regarder en d  tail les liens entre un pin  on et l'  coulement r  gulier pour que la d  composition soit correcte. Pour trouver la dynamique du pin  on, nous allons maintenant nous demander quelle dynamique est possible, sachant que la superposition du pin  on et du champ r  gulier doit ob  ir localement au syst  me de Navier-Stokes. En particulier, nous allons consid  rer une solution du type  $\mathbf{v}_\alpha = \mathbf{U}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_\alpha(t), \boldsymbol{\gamma}_\alpha(t))$  et  $\mathbf{F} = F(\gamma(t))\mathbf{e}(\mathbf{t})$ , o    $F$  est une fonction fix  e et  $\mathbf{x}_\alpha$  et  $\boldsymbol{\gamma} = \gamma(t)\mathbf{e}(\mathbf{t})$ , sont deux param  tres vectoriels qui d  finissent l'  volution de  $\mathbf{v}_\alpha$  en fonction du temps. Nous allons ensuite introduire le champ de vitesse total  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_R + \mathbf{v}_\alpha$ , o    $\mathbf{v}_R$  est un champ de vitesse r  gulier partout, et nous imposons que  $\mathbf{v}$  soit localement solution de Navier-Stokes

autour de la singularité  $\mathbf{x}_\alpha$ , de telle sorte que  $\mathbf{v}$  soit solution de :

$$\partial_t \overline{\mathbf{v}}^\ell(\mathbf{x}_\alpha) + \overline{(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}}^\ell(\mathbf{x}_\alpha) + \frac{\overline{\nabla p}^\ell(\mathbf{x}_\alpha)}{\rho} - \nu \Delta \overline{\mathbf{v}}^\ell(\mathbf{x}_\alpha) = 0. \quad (4.2.12)$$

En décomposant la contribution du champ régulier  $\mathbf{v}_R$  et celle du pinçon  $\mathbf{v}_\alpha$ , on remarque que l'équation (4.2.12) comporte des termes de différents ordres en fonction de la valeur de  $\ell$  choisie. Les ordres de chaque terme sont présentés dans la table 4.2.

$\mathbf{v}_\alpha$	$(\dot{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha \cdot \nabla_\gamma)(\mathbf{v}_\alpha)$	$(\dot{\mathbf{x}}_\alpha \cdot \nabla) \mathbf{v}_\alpha$	$(\mathbf{v}_\alpha \cdot \nabla) \mathbf{v}_R$	$(\mathbf{v}_R \cdot \nabla) \mathbf{v}_\alpha$	$\nabla \cdot (\overline{\mathbf{v}_R^\ell \mathbf{v}_R^\ell})$
$1/\ell$	$1/\ell$	$1/\ell^2$	$1/\ell$	$1/\ell^2$	1

TABLE 4.2 – Ordres des différents termes de l'équation (4.2.12) en fonction de l'échelle de filtrage  $\ell$  dans la limite  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_\alpha$ .

Remarquons aussi que, puisque le champ  $\mathbf{v}_R$  est régulier, son filtré et ses dérivées sont d'ordre  $\mathcal{O}(1)$ . De plus, nous introduisons la quantité  $\tau^\ell = \overline{\mathbf{v}_R^\ell \mathbf{v}_R^\ell} - \overline{\mathbf{v}_R} \mathbf{v}_R^\ell$  qui correspond à la contribution du tenseur de Reynolds liée à notre opération de filtrage. Ce terme a un ordre différent des autres termes en  $\mathbf{v}_R$ . En effet, comme l'a remarqué Eyink [40] (2007-2008), on peut écrire  $\nabla \cdot \tau^\ell = \mathcal{O}(\delta \mathbf{v}_\ell^2 / \ell)$ , avec  $\delta \mathbf{v}_\ell = \mathbf{v}_R(\mathbf{x} + \ell) - \mathbf{v}_R(\mathbf{x})$ . Puisque  $\mathbf{v}_R$  est régulier, on peut écrire la relation  $\mathbf{v}_R(\mathbf{x} + \ell) - \mathbf{v}_R(\mathbf{x}) = \ell \nabla \mathbf{v}_R$  de sorte que  $\nabla \cdot \tau^\ell \sim \ell (\nabla \mathbf{v}_R)^2 = \mathcal{O}(\ell)$ .

Si l'on recense tous les termes de l'équation (4.2.12) on obtient les ordres ci-dessous.

$$\mathcal{O}(\ell) \quad : \quad -\nabla \cdot \tau^\ell \quad (4.2.13)$$

$$\mathcal{O}(1) \quad : \quad \partial_t \overline{\mathbf{v}_R}^\ell + \nabla \cdot (\overline{\mathbf{v}_R^\ell \mathbf{v}_R^\ell}) + \frac{\overline{\nabla p_R}^\ell}{\rho} - \nu \Delta \overline{\mathbf{v}_R}^\ell \quad (4.2.14)$$

$$\mathcal{O}(1/\ell) \quad : \quad (\dot{\boldsymbol{\gamma}} \cdot \nabla_\gamma) \overline{\mathbf{v}_\alpha}^\ell + \overline{(\mathbf{v}_\alpha \cdot \nabla) \mathbf{v}_R}^\ell \quad (4.2.15)$$

$$\mathcal{O}(1/\ell^2) \quad : \quad -(\dot{\mathbf{x}}_\alpha \cdot \nabla_{\mathbf{x}}) \overline{\mathbf{v}_\alpha}^\ell + \overline{(\mathbf{v}_R \cdot \nabla) \mathbf{v}_\alpha}^\ell \quad (4.2.16)$$

$$\mathcal{O}(1/\ell^3) \quad : \quad \overline{(\mathbf{v}_\alpha \cdot \nabla) \mathbf{v}_\alpha}^\ell + \frac{\overline{\nabla p_\alpha}^\ell}{\rho} - \nu \Delta \overline{\mathbf{v}_\alpha}^\ell \quad (4.2.17)$$

Regardons maintenant ce que les différents ordres nous indiquent.

L'annulation des termes en  $\mathcal{O}(1/\ell^2)$  nous donne une première condition :

$$\dot{\mathbf{x}}_\alpha \nabla_{\mathbf{x}} \overline{\mathbf{v}_\alpha}^\ell = \overline{(\mathbf{v}_R \cdot \nabla) \mathbf{v}_\alpha}^\ell. \quad (4.2.18)$$

En invoquant la régularité de  $\mathbf{v}_R$ , il est raisonnable d'écrire  $\overline{(\mathbf{v}_R \cdot \nabla) \mathbf{v}_\alpha}^\ell = (\mathbf{v}_R(\mathbf{x}_\alpha) \cdot \nabla) \overline{\mathbf{v}_\alpha}^\ell$  pour les échelles  $\ell$  assez petites. Cette condition de l'équation (4.2.18) est alors satisfaite à condition que :

$$\dot{\mathbf{x}}_\alpha = \mathbf{v}_R(\mathbf{x}_\alpha). \quad (4.2.19)$$

Physiquement, cela signifie que la position de la singularité suit la valeur de l'écoulement régulier : le pinçon est simplement advecté par le champ environnant.

La compensation des termes en  $\mathcal{O}(1/\ell)$  nous donne une seconde condition :

$$(\dot{\boldsymbol{\gamma}} \cdot \nabla_\gamma) \overline{\mathbf{v}_\alpha}^\ell = -\overline{(\mathbf{v}_\alpha \cdot \nabla) \mathbf{v}_R}^\ell. \quad (4.2.20)$$

Puisque  $\mathbf{v}_R$  est régulier, on peut écrire  $\overline{(\mathbf{v}_\alpha \cdot \nabla) \mathbf{v}_R}^\ell = (\overline{\mathbf{v}_\alpha}^\ell \cdot \nabla) \mathbf{v}_R(\mathbf{x}_\alpha)$ . Cela nous donne l'équation suivante :

$$(\dot{\boldsymbol{\gamma}} \cdot \nabla_\gamma) \overline{\mathbf{v}_\alpha}^\ell = -(\overline{\mathbf{v}_\alpha}^\ell \cdot \nabla) \mathbf{v}_R. \quad (4.2.21)$$

Interprétons physiquement cette équation : l'intensité et la direction du pinçon sont modifiées par le cisaillement du champ régulier au niveau du pinçon.

La compensation des termes d'ordre  $\mathcal{O}(1)$  nous assure que  $\overline{\mathbf{v}_R}^\ell$  doit être solution du problème de Navier-Stokes. Nous pouvons nous réjouir de ce résultat, puisque c'est typiquement la formule souhaitée par notre modèle pour la dynamique du champ régulier. Cela nous permet de bien décrire les éléments filtrés par l'équation de Navier-Stokes.

Il nous reste à étudier le terme le plus petit, d'ordre  $O(\ell^2)$  et le plus grand, d'ordre  $O(\ell^{-3})$ , qui n'ont pas l'air de pouvoir être compensés. Pour que le système accepte une solution physique, nous imposons une condition de regroupement des ordres qui fixe le paramètre jusqu'ici libre  $\ell_c$ . Ceci correspond à imposer une échelle de filtrage qui rend ces deux termes commensurables, de sorte que  $\nu^2/\ell_c^3 \sim \ell_c(\nabla \mathbf{v}_R)^2$ . Il faut alors prendre  $\ell_c = (\nu^3/\varepsilon_r)^{1/4}$ , avec  $\varepsilon_r = \nu(\nabla \mathbf{v}_R)^2$  le terme dissipatif du champ régulier. Notre filtrage, combiné à la condition de regroupement des ordres nous impose de prendre pour la taille du filtre la longueur de Kolmogorov  $\ell_c = \eta$ .

Nous interprétons physiquement ce résultat par la raison suivante : la singularité est de nature dissipative et a besoin de pomper de l'énergie à l'écoulement régulier. Cet échange d'énergie se fait par l'action d'une force correspondant au terme  $\nabla \cdot \tau^\ell$  qui porte la signature du champ de vitesse à très petite échelle, sous la maille  $\ell_c$ , lié au pinçon. Autrement dit, le terme source pour le pinçon est un surplus du tenseur de Reynolds à l'échelle de Kolmogorov pour le champ régulier. Pour bien quantifier les choses, nous séparons, proche de  $\mathbf{x}_\alpha$ , le tenseur de Reynolds et la force du pinçon qui sera répartie entre le pinçon et le champ régulier par l'action du filtre.

En tenant compte du fait que  $\overline{\mathbf{v}_R}^\eta \approx \mathbf{v}_R$ ,  $\overline{\mathbf{v}_\alpha}^\eta = C_\psi \mathbf{\Pi}_\alpha/\eta$  et  $(\dot{\boldsymbol{\gamma}} \cdot \nabla_\gamma \overline{\mathbf{v}_\alpha}^\eta \approx C_\psi \dot{\mathbf{\Pi}}_\alpha/\eta$ , nous posons les équations suivantes pour décrire le couplage entre le pinçon et le champ régulier :

pour le champ régulier

$$\begin{aligned} \partial_t \overline{\mathbf{v}_R}^\eta(\mathbf{x}) &+ (\overline{\mathbf{v}_R}^\eta \cdot \nabla) \overline{\mathbf{v}_R}^\eta(\mathbf{x}) + \frac{\nabla \overline{p_R}^\eta}{\rho}(\mathbf{x}) - \nu \Delta \overline{\mathbf{v}_R}^\eta(\mathbf{x}) \\ &= \nabla \cdot \tau^\eta(\mathbf{x}) - \frac{\nu^2}{\eta^3} \psi \left( \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_\alpha}{\eta} \right) \mathbf{F}_\alpha; \end{aligned} \quad (4.2.22)$$

et pour le pinçon

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_\alpha &= \overline{\mathbf{v}_R}^\eta(\mathbf{x}_\alpha), \\ \dot{\mathbf{\Pi}}_\alpha &= -(\mathbf{\Pi}_\alpha \cdot \nabla) \overline{\mathbf{v}_R}^\eta(\mathbf{x}_\alpha) + \frac{\eta}{C_\psi} \nabla \cdot \tau^\eta(\mathbf{x}_\alpha) - \frac{\nu^2 \psi(0)}{C_\psi \eta^2} \mathbf{F}_\alpha. \end{aligned} \quad (4.2.23)$$

Ces équations sont une approche bi-fluide de la turbulence, couplant un champ filtré à l'échelle de Kolmogorov avec la singularité qu'est le pinçon. La vitesse du fluide suit les équations de Navier-Stokes filtrées, dont le tenseur de Reynolds est la source du second fluide singulier nécessaire à son existence. Ces singularités vivent dans le monde des échelles plus petites que l'échelle de Kolmogorov et sont advectées et orientées par l'écoulement filtré. Elles exercent en retour une force sur l'écoulement filtré, responsable d'une dissipation énergétique supplémentaire.

Afin que le modèle puisse envisager plusieurs pinçons, nous devons maintenant nous attacher à décrire l'interaction entre deux pinçons, d'une manière compatible avec l'équation de Navier-Stokes.



#### 4.2.2.5 Interactions entre pinçons

Considérons un ensemble de  $N$  pinçons,  $\alpha = 1 \dots N$  à l'origine d'un champ de vitesse  $\mathbf{v}(x, t)$  :

$$\mathbf{v}(x, t) = \sum_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha}(x, t), \quad (4.2.24)$$

Au voisinage d'un pinçon  $\alpha$ , les autres pinçons produisent un champ régulier  $\mathbf{v}_R = \sum_{\beta \neq \alpha} \mathbf{v}_{\beta}(\mathbf{x}_{\alpha})$ . Inspirés par les équations (4.2.23), nous définissons des interactions entre pinçons avec  $2N$  équations indépendantes de la manière suivante :

$$\dot{\mathbf{x}}_{\alpha} = \sum_{\beta \neq \alpha} \mathbf{v}_{\beta}(\mathbf{x}_{\alpha}, t), \quad (4.2.25)$$

$$\dot{\mathbf{\Pi}}_{\alpha} = -(\mathbf{\Pi}_{\alpha} \cdot \nabla_{\mathbf{x}_{\alpha}}) \left( \sum_{\beta \neq \alpha} \mathbf{v}_{\beta}(\mathbf{x}_{\alpha}, t) \right) - \frac{\nu^2 \psi(0)}{C_{\psi} \eta^2} \mathbf{F}_{\alpha} + \frac{E_{\alpha}}{C_{\psi}} \chi, \quad (4.2.26)$$

où  $E_{\alpha} = U_{\alpha}^2$  est la contribution locale de l'écoulement grande échelle qui fournit au pinçon un forçage stochastique  $\chi$  par le caractère aléatoire du tenseur de Reynolds. Dans la suite, nous supposons que la variable aléatoire vectorielle  $\chi$  est isotrope, et autocorrélée sur un temps de l'ordre du temps de Kolmogorov, de sorte que  $\langle \chi_i(t) \chi_j(t') \rangle = \delta(t - t') \delta_{ij}$ . Remarquons que l'équation (4.2.26) est une définition arbitraire qui ne respecte pas toutes les conditions nécessaires pour garantir la bonne représentation des petites échelles. Par exemple, ce modèle est plus adapté à une situation diluée, où les pinçons sont suffisamment loin les uns des autres pour qu'ils puissent être considérés comme des particules ponctuelles. De plus, nous n'essayons pas d'introduire un moyen de discerner les interactions de courte ou de longue portée. Contrairement au cas précédent, les corrélations et les vitesses divergentes peuvent nous empêcher de considérer le champ externe assez lisse pour confirmer l'approximation  $\overline{(\mathbf{v}_R \cdot \nabla) \mathbf{v}_{\alpha}^{\ell}} = \mathbf{v}_R(\mathbf{x}_{\alpha}) \cdot \nabla \mathbf{v}_{\alpha}^{\ell}$  à petit  $\ell$ . Ainsi, même si individuellement un pinçon est une solution faible des équations de Navier-Stokes, l'ensemble de  $N$  pinçons n'est pas une solution faible exacte.

D'une certaine manière, les équations que nous avons posées pour la dynamique des pinçons correspondent à imposer la structure des équations de Navier-Stokes et le fait que le champ de vitesse local induit par les pinçons doit aussi être solution de Navier-Stokes. Les équations (4.2.25) et (4.2.26) peuvent être vues comme un modèle de déplacement de pôles ou de zéros d'équations différentielles, qui, par exemple, a déjà été proposé par Kruskal [78] (1974) pour l'équation de Korteweg et De Vries [75] (1895) (cf [16, 17] (1978, 2001) pour une vue d'ensemble). Dans notre cas, la dynamique est aussi contrainte par le fait que  $\boldsymbol{\gamma}_{\alpha}$  doit rester dans la sphère unité :  $\|\boldsymbol{\gamma}_{\alpha}\| < 1$ .

Les pinçons sont caractérisés par l'énergie d'interaction suivante :

$$E = \frac{C_{\psi}}{\eta} \sum_{\beta \neq \alpha} \mathbf{\Pi}_{\alpha} \cdot \mathbf{v}_{\beta}(\mathbf{x}_{\alpha}, t). \quad (4.2.27)$$

Les termes de dissipation et de forçage ( $\mathbf{F}_{\alpha}$  et  $\chi$ ) font varier cette énergie qui n'est pas conservée en général. Cependant, il arrive que dissipation et forçage se compensent en moyenne et le système atteint alors un état hors équilibre stationnaire.

Étudions maintenant le cas des faibles intensités.

### 4.2.2.6 Limite des pinçons faibles

L'équation du mouvement (4.2.26) prend une forme très simple dans la limite des "faibles pinçons", dans laquelle les intensités des pinçons sont faibles :  $\gamma_\alpha \ll 1$  pour tout  $\alpha$ . La simplicité des équations mérite d'être étudiée, ne serait-ce que pour mieux comprendre le modèle et ses interactions. Dans cette limite, on peut recourir à plusieurs approximations de développement limité dont  $\mathbf{\Pi}_\alpha = 8\nu\boldsymbol{\gamma}_\alpha/3$  et  $\phi_{\alpha\beta}^{-1} = (1 + \boldsymbol{\gamma}_\beta \cdot \mathbf{r}_{\alpha\beta}/\|\mathbf{r}_{\alpha\beta}\|)$ . Les équations du mouvement se simplifient alors en :

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_\alpha &= 2\nu \sum_{\beta \neq \alpha} \left[ \frac{\boldsymbol{\gamma}_\beta}{\|\mathbf{r}_{\alpha\beta}\|} + (\boldsymbol{\gamma}_\beta \cdot \mathbf{r}_{\alpha\beta}) \frac{\mathbf{r}_{\alpha\beta}}{\|\mathbf{r}_{\alpha\beta}\|^3} \right], \\ \dot{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha &= 2\nu \sum_{\beta \neq \alpha} \left[ -(\boldsymbol{\gamma}_\alpha \cdot \boldsymbol{\gamma}_\beta) \frac{\mathbf{r}_{\alpha\beta}}{\|\mathbf{r}_{\alpha\beta}\|^3} + 3(\boldsymbol{\gamma}_\alpha \cdot \mathbf{r}_{\alpha\beta})(\boldsymbol{\gamma}_\beta \cdot \mathbf{r}_{\alpha\beta}) \frac{\mathbf{r}_{\alpha\beta}}{\|\mathbf{r}_{\alpha\beta}\|^5} \right. \\ &\quad \left. - \boldsymbol{\gamma}_\alpha \frac{\boldsymbol{\gamma}_\beta \cdot \mathbf{r}_{\alpha\beta}}{\|\mathbf{r}_{\alpha\beta}\|^3} + \boldsymbol{\gamma}_\beta \frac{\boldsymbol{\gamma}_\alpha \cdot \mathbf{r}_{\alpha\beta}}{\|\mathbf{r}_{\alpha\beta}\|^3} \right] - \frac{6\pi\nu\psi(0)}{C_\psi\eta^2} \boldsymbol{\gamma}_\alpha + \frac{3E_\alpha}{8C_\psi\nu} \boldsymbol{\chi}.\end{aligned}\quad (4.2.28)$$

Ces équations font écho à celle du modèle des vortons de Novikov [108] (1983) (cf équation (6.3.8) en Appendice), sauf que, dans notre cas, les produits vectoriels sont remplacés par des produits scalaires, et que nous avons des termes supplémentaires. Cependant, le mouvement et les intensités des pinçons sont forcés par des sources en  $1/r$  et  $1/r^2$ , au lieu de  $1/r^2$  et  $1/r^3$  pour le modèle de vortons. De plus, les pinçons sont soumis à une friction proportionnelle à la viscosité.

Dans cette limite, l'énergie d'interaction s'écrit :

$$E = \frac{16C_\psi\nu^2}{3\eta} \sum_{\beta \neq \alpha} \left[ \frac{\boldsymbol{\gamma}_\alpha \cdot \boldsymbol{\gamma}_\beta}{\|\mathbf{r}_{\alpha\beta}\|} + \frac{(\boldsymbol{\gamma}_\alpha \cdot \mathbf{r}_{\alpha\beta})(\boldsymbol{\gamma}_\beta \cdot \mathbf{r}_{\alpha\beta})}{\|\mathbf{r}_{\alpha\beta}\|^3} \right], \quad (4.2.29)$$

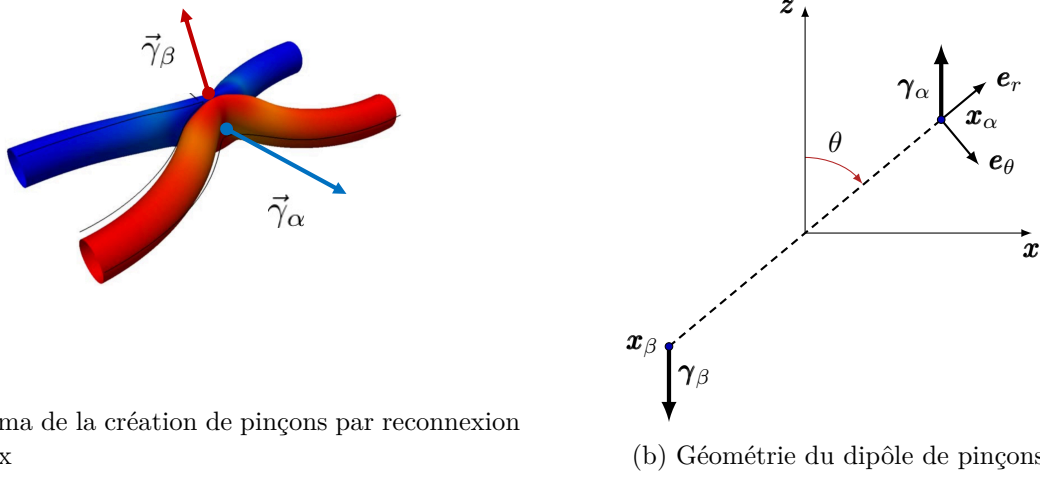
ce qui est une formule classique pour l'interaction mutuelle d'une paire de singularités [115] (1992).

## 4.2.3 Dynamiques d'une paire de pinçons

### 4.2.3.1 Intérêt de l'étude d'une paire de pinçons

Des investigations précédentes, expérimentales [128, 33] (2016, 2021) ou numériques [104] (2020) sur l'organisation de structures de transferts énergétiques locaux extrêmes, ont montré qu'elles se trouvaient toujours à proximité de vortex de Burgers en interaction (et possible reconnexion). Des simulations numériques antérieures ou bien récentes et très résolues de reconnexion de filaments de vorticités antiparallèles [68, 146] (1989, 2020) ont montré que ce processus s'accompagne d'un pincement local de chaque filament, qui pourrait avoir un comportement singulier, comme le suggèrent Yao et Hussain [145] (2020). Dans des scénarios idéaux de reconnexion -par exemple Kimura et Moffatt [70, 71, 94, 95, 96] (2017, 2018, 2019, 2019, 2020), ou dans les reconnexion [145] (2020), on voit se former des singularités ou quasi singularités sous forme de cusp à l'endroit de la reconnexion. Pour Kimura et Moffatt [71] (2018), la reconnexion de vortex va aussi de pair avec une perte d'hélicité, qui s'annule potentiellement à la reconnexion.

Si nous gardons cette image en tête, les pinçons peuvent être associés à ce phénomène, et être créés par le champ régulier lors de la reconnexion. Deux pinçons sont alors créés simultanément, dans la direction du champ de vitesse local comme le représente la figure 4.9a. Cette génération par paire nous motive à étudier la dynamique de l'interaction d'un couple de pinçons, et à nous demander si elle peut se rapprocher du comportement des reconnexions de vortex. C'est ce que nous allons faire dans cette section.



(a) Schéma de la création de pinçons par reconnexion de vortex

(b) Géométrie du dipôle de pinçons

FIGURE 4.9 – La figure (a) est une modification de la figure 3 de [146] (2020). (b) Géométrie du dipôle de pinçons : deux pinçons sont positionnés en  $\mathbf{x}_\alpha$  et  $\mathbf{x}_\beta$ . Initialement on impose  $\gamma_\alpha + \gamma_\beta = 0$ . On note  $\theta$  l'angle entre  $\gamma_\alpha$  et  $\mathbf{r} = \mathbf{x}_\alpha - \mathbf{x}_\beta$ .

Dans la suite, nous utiliserons l'adimensionnement suivant : les longueurs sont exprimées en terme de  $r_0$ , la distance initiale entre les deux pinçons au temps  $t = 0$ , et l'évolution temporelle sont exprimées en unités de temps visqueux  $\tau_\nu = r_0^2/\nu$ . Commençons par le cas le plus simple : le cas du dipôle.

#### 4.2.3.2 Dynamique d'un dipôle de pinçons

**Equations** Un dipôle de pinçons correspond à ce qui est présenté dans la figure 4.9b, il est constitué de deux pinçons positionnés en  $\mathbf{x}_\alpha$  et  $\mathbf{x}_\beta$ , et qui vérifient initialement  $\gamma_\alpha + \gamma_\beta = 0$  et  $\mathbf{x}_\alpha - \mathbf{x}_\beta = r_0\mathbf{r}$ . Le champ de vitesse respecte alors les relations suivantes :  $\mathbf{v}_\beta(\mathbf{x}_\alpha) = -\mathbf{v}_\alpha(\mathbf{x}_\beta) \equiv \nu\mathbf{V}(\mathbf{r})/r_0$  et  $\mathbf{F}_\alpha + \mathbf{F}_\beta = 0$ . Avec la convention de dimensionnement prise ci dessus, nous obtenons les équations de la dynamique d'un dipôle :

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{x}}_\alpha &= \frac{\nu}{r_0}\mathbf{V}, \\
 \dot{\mathbf{x}}_\beta &= -\frac{\nu}{r_0}\mathbf{V}, \\
 \dot{\mathbf{\Pi}}_\alpha &= (\mathbf{\Pi}_\alpha \cdot \nabla_r)\mathbf{V} - \frac{\nu\psi(0)}{C_\psi} \left(\frac{r_0}{\eta}\right)^2 \mathbf{F}_\alpha + \frac{E_\alpha r_0^2}{C_\psi \nu} \chi, \\
 \dot{\mathbf{\Pi}}_\beta &= -(\mathbf{\Pi}_\beta \cdot \nabla_r)\mathbf{V} - \frac{\nu\psi(0)}{C_\psi} \left(\frac{r_0}{\eta}\right)^2 \mathbf{F}_\beta + \frac{E_\beta r_0^2}{C_\psi \nu} \chi.
 \end{aligned} \tag{4.2.30}$$

Le centre de masse du dipôle  $\mathbf{x}_\alpha + \mathbf{x}_\beta$  ne bouge pas, et l'intensité totale  $(\mathbf{\Pi}_\alpha + \mathbf{\Pi}_\beta)/2$  vérifie :

$$\dot{\mathbf{\Pi}}_\alpha + \dot{\mathbf{\Pi}}_\beta = \frac{(E_\alpha + E_\beta)r_0^2}{2C_\psi \nu} \chi. \tag{4.2.31}$$

Ainsi, le forçage induit des fluctuations proportionnelles à l'énergie d'interaction moyenne du dipôle  $(E_\alpha + E_\beta)/2$ . Ce forçage aléatoire conduit à la dissipation du dipôle au bout d'un temps visqueux, ainsi seule l'étude du cas faiblement bruité où  $(E_\alpha + E_\beta)/2 \rightarrow 0$  est intéressante. En adoptant un formalisme de physique statistique, nous confondons le bruit à la notion d'agitation thermique et donc à la température.

**Comportement à température nulle** Étudions dans un premier temps la dynamique non bruitée, "à température nulle",  $E_\alpha + E_\beta = 0$ . Dans cette situation, le dipôle reste un dipôle à tout instant et les relations suivantes restent vraies après  $t = 0$  :  $\mathbf{\Pi}_\alpha = -\mathbf{\Pi}_\beta \equiv \nu\mathbf{\Pi}$ ,  $\mathbf{F}_\alpha = -\mathbf{F}_\beta \equiv \mathbf{F}$  et  $\boldsymbol{\gamma}_\alpha = -\boldsymbol{\gamma}_\beta \equiv \boldsymbol{\gamma}$ . La dynamique du dipôle s'intègre facilement pour trouver les évolutions de  $\mathbf{r}$  et  $\boldsymbol{\gamma}$  (ou de manière équivalente de  $\mathbf{r}$  et  $\mathbf{\Pi}$ ). En effet, pour les équations (4.2.30), si l'on prend la différence entre les deux premières équations d'une part et les deux dernières équations d'autre part, on obtient :

$$\dot{\mathbf{r}} = 4 \left( -\frac{\boldsymbol{\gamma} + \mathbf{r}/r}{r\phi_*} + (1 - \gamma^2) \frac{\mathbf{r}}{r^2\phi_*^2} \right), \quad (4.2.32)$$

$$\dot{\mathbf{\Pi}} = \frac{2\Pi}{r^3\phi_*^3} A(\gamma, \theta) \mathbf{r} - \frac{\psi(0)}{C_\psi} \left( \frac{r_0}{\eta} \right)^2 \mathbf{F}, \quad (4.2.33)$$

avec

$$A(\gamma, \theta) = \gamma(1 - 3\cos^2(\theta) - 3\gamma\cos(\theta) - \gamma\cos^3(\theta) - 2\gamma^2) \quad (4.2.34)$$

où  $r = \|\mathbf{r}\|$ ,  $\cos(\theta) = (\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{r})/(r\gamma)$ ,  $\phi_* = 1 + \gamma\cos(\theta)$  et  $\Pi = \|\mathbf{\Pi}\| = G(\gamma)$ .

Ces expressions nous indiquent que l'évolution de  $\mathbf{r}$  et  $\mathbf{\Pi}$  reste dans le plan défini par les directions initiales de  $\mathbf{r}$  et  $\boldsymbol{\gamma}$ . Il ne reste alors que trois quantités à intégrer, pour obtenir l'axe du dipôle et son orientation :  $r$ ,  $\theta$  et  $\gamma$ . L'évolution des deux premières s'obtient simplement en projetant l'équation (4.2.32) sur  $\mathbf{e}_r$  et  $\mathbf{e}_\theta$ , tandis que l'évolution de la dernière est obtenue en prenant le produit scalaire de l'équation (4.2.33) avec  $\mathbf{\Pi}$  afin d'obtenir une équation sur  $\|\mathbf{\Pi}\|^2$ , qui donne ensuite accès à  $\gamma$  par la formule  $\gamma = G^{-1}(\|\mathbf{\Pi}\|)$ . En intégrant les simplifications, on obtient :

$$\dot{r} = \frac{4}{r} \left( \frac{1 - \gamma^2}{\phi_*^2} - 1 \right), \quad (4.2.35)$$

$$r\dot{\theta} = 4 \frac{\gamma \sin \theta}{r\phi_*}, \quad (4.2.36)$$

$$\dot{\Pi}^2 = 4 \frac{\Pi^2}{r^2} A(\gamma, \theta) \cos(\theta) - \frac{2\psi(0)}{C_\psi} \left( \frac{r_0}{\eta} \right)^2 \mathbf{F} \cdot \mathbf{\Pi} \quad (4.2.37)$$

Nous intégrons les équations du mouvement (4.2.35,4.2.36,4.2.37) avec comme conditions initiales  $r_0 = 1$ ,  $\gamma_0 = 0.1$  et plusieurs valeurs de  $\theta_0$ . La constante de normalisation  $C_\psi(0)$  vaut  $1/(2\pi)^{3/2}$  pour un filtre  $\psi$  gaussien. Nous évaluons les comportements avec ou sans friction. Le premier cas correspond à la première phase de la dynamique, juste après la formation du dipôle. La force de création du pinçon correspond au tenseur de Reynolds local  $\mathbf{F}_\alpha = \eta^3/(\nu^2\psi(0))\nabla \cdot \tau^\eta(\mathbf{x}_\alpha)$ , qui annule la dissipation. Les résultats sont présentés dans la figure 4.10a. Il y a deux points fixes dans la dynamique, un point stable et attractif stable en  $\theta = \pi$  correspondant à une dynamique où  $r^2$  croît, et un point fixe instable et répulsif en  $\theta = 0$  correspondant à une dynamique où  $r^2$  décroît. Les dipôles se rapprochent si  $\theta < \frac{\pi}{2}$  et s'éloignent si  $\theta \geq \frac{\pi}{2}$ . La tendance de  $\theta$  à rejoindre la valeur  $\pi$  mène globalement à un éloignement des pinçons du dipôle, sauf s'ils commencent parfaitement avec l'orientation  $\theta = 0$  pour laquelle ils se rencontrent et s'annulent. Nous présentons l'évolution dans l'espace des phases à la figure 4.11a.

Dans ce cas sans friction, des lois d'échelles intéressantes se dégagent dans les deux évolutions de court ou moyen terme, qui font écho aux observations de reconnections de vortex. Un dipôle dont l'inclinaison initiale  $\theta_0$  est dans l'intervalle ouvert  $]0, \frac{\pi}{2}[$ , voit d'abord son rayon et son intensité diminuer en valeur absolue. Une fois que l'orientation atteint  $\frac{\pi}{2}$ , ils s'éloignent l'un l'autre. On remarque sur la figure 4.12a que durant la phase de rapprochement, le rayon du dipôle varie comme  $\sqrt{t_c - t}$ , ce qui correspond à la loi de Leray [84] (1934). Cette phase d'approche a l'air peu sensible à la valeur de l'orientation initiale, contrairement à la phase d'éloignement où l'on distingue bien les différentes

couleurs. Une telle différence fait écho à l'asymétrie temporelle de la reconnexion de vortex quantiques [141] (2020). Pendant la phase de séparation,  $\theta$  tend vers  $\pi$  et le rayon du dipôle suit une loi puissance en  $r \sim \sqrt{t - t_c}$ . Les comportements des lois d'échelles seront encore examinés pour le cas d'une paire générique, pas forcément dipolaire dans le paragraphe 4.2.3.4.

Dans un second temps, la force d'amorçage des pinçons décroît et ne compense plus le terme dissipatif qu'il faut prendre en compte. En poussant le raisonnement, le cas où le tenseur de Reynolds est nul correspond à la plus grande friction pour les pinçons. Nous avons aussi intégré la dynamique pour ce cas, avec les mêmes valeurs initiales. La figure 4.10b trace l'évolution du dipôle dissipatif. Nous constatons que la dissipation contribue à la baisse de l'intensité et de l'énergie d'interaction. L'intensité décroissant, l'évolution de la distance et de l'orientation du dipôle stagne et n'évolue plus après quelques temps dissipatifs. Ceci correspond la mort ou la disparition du dipôle, qui n'est plus nourri par l'écoulement grande échelle. L'évolution dans l'espace des phases est présentée dans la figure 4.11b, qui montre un rideau plongeant vers les intensités nulles. Les sens de variation de  $r$  et  $\theta$  sont les mêmes que pour le cas sans friction, mais l'évolution est arrêtée prématurément par la perte d'intensité et le décès.

En résumé, la dynamique du dipôle sans forçage stochastique est toujours dissipative, et mène à la disparition du dipôle par perte d'intensité. Si le dipôle ne part pas avec une orientation nulle, cherche à atteindre une position anti alignée correspondant à  $\theta = \pi$ . L'évolution du rayon du dipôle dépend de l'orientation :  $r^2$  décroît si  $\theta < \frac{\pi}{2}$  et augmente si  $\theta \geq \frac{\pi}{2}$ .

La question est maintenant de savoir si le dipôle survit plus longtemps, et prend une autre orientation si nous prenons en compte le forçage stochastique. Comme nous l'avons montré au début, sans bruit stochastique, le dipôle meurt après quelque temps visqueux. Pour le maintenir, il faut un équilibre entre le forçage bruité et la dissipation. Il existe cependant une observation intéressante, qui permet d'aborder le problème d'une manière simple et élégante dans le cadre des faibles intensités. Cette limite de faible intensité est justifiée puisque l'intensité du pinçon diminue avec le temps, donc rentre dans ce cadre à un moment. Cette limite présente des équations simplifiées plus agréables, et qui ressemblent à celles de la dynamique des dipôles électromagnétiques, comme nous allons le voir.

### 4.2.3.3 Cas des faibles températures

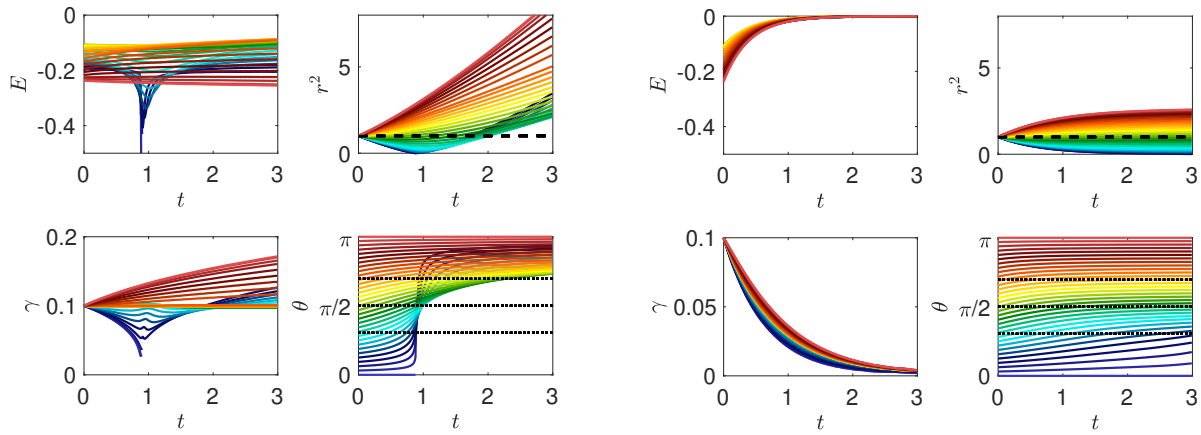
**D'un couple de pinçons à la limite du dipôle de faible intensité** Dans la limite de faible intensité, la dynamique se rapporte à l'évolution de trois quantités : le rayon du dipôle, son orientation et son intensité. Nous utilisons les notations suivantes :  $R = r^2$ ,  $C = \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{r}$  et  $N = \boldsymbol{\gamma}^2$ .  $R$  est un marqueur du rayon du dipôle,  $N$  de son intensité et  $C$  de son orientation. Remarquons que l'inversion des définitions de  $N$ ,  $R$  et  $C$ , nous donne  $r = R^{1/2}$ ,  $\boldsymbol{\gamma} = N^{1/2}$  et  $\theta = \arccos(C/(r\boldsymbol{\gamma}))$ . Les équations du mouvement s'obtiennent à partir de l'équation (4.2.29) écrite pour deux pinçons d'intensités  $\boldsymbol{\gamma}_\alpha$  et  $\boldsymbol{\gamma}_\beta$ . En notant  $\mathbf{r} = \mathbf{x}_\alpha - \mathbf{x}_\beta$ ,  $\boldsymbol{\Gamma} = (\boldsymbol{\gamma}_\alpha + \boldsymbol{\gamma}_\beta)/2$  et  $\boldsymbol{\Pi} = (\boldsymbol{\gamma}_\alpha - \boldsymbol{\gamma}_\beta)/2$ , on obtient le système suivant :

$$\dot{\mathbf{r}} = -4\nu \left( \frac{\boldsymbol{\Pi}}{r} + \mathbf{r} \frac{\boldsymbol{\Pi} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \right), \quad (4.2.38)$$

$$\dot{\boldsymbol{\Pi}} = 2\nu \left[ (\boldsymbol{\Pi}^2 - \boldsymbol{\Gamma}^2) \frac{\mathbf{r}}{r^3} + 3 \frac{\mathbf{r}}{r^5} ((\boldsymbol{\Gamma} \cdot \mathbf{r})^2 - (\boldsymbol{\Pi} \cdot \mathbf{r})^2) \right] - \frac{6\pi\nu\psi(0)}{C_\psi\eta^2} \boldsymbol{\Pi} + \frac{3(E_\alpha - E_\beta)}{16C_\psi\nu} \boldsymbol{\chi}, \quad (4.2.39)$$

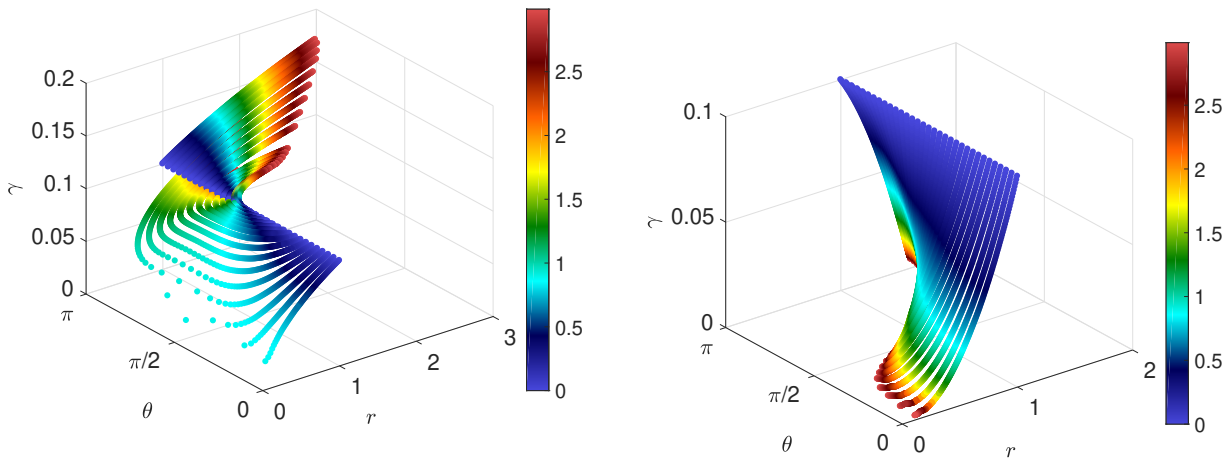
$$\dot{\boldsymbol{\Gamma}} = 4\nu \left[ \boldsymbol{\Gamma} \frac{(\boldsymbol{\Pi} \cdot \mathbf{r})}{r^3} - \boldsymbol{\Pi} \frac{(\boldsymbol{\Gamma} \cdot \mathbf{r})}{r^3} \right] - \frac{6\pi\nu\psi(0)}{C_\psi\eta^2} \boldsymbol{\Gamma} + \frac{3(E_\alpha + E_\beta)}{16C_\psi\nu} \boldsymbol{\chi}. \quad (4.2.40)$$

L'équation (4.2.40) nous indique que  $\boldsymbol{\Gamma}$  est forcé par un bruit d'amplitude  $\bar{E} = (E_\alpha + E_\beta)/2$ . Puisque, dans le cadre du dipôle, nous commençons avec  $\boldsymbol{\Gamma} = 0$ , et que dans la limite de faible température



(a) Évolution sans friction, représentative de la dynamique après la création du dipôle. (b) Evolution avec friction, représentative de la dynamique de long terme.

FIGURE 4.10 – Dynamique d’un dipôle de pinçons avec ou sans friction. Le rayon et l’intensité au temps initial valent  $r_0 = 1$  et  $\gamma = 0.1$ . Nous présentons différentes orientations angulaires initiales  $\theta_0 \in [0, \pi]$  qui sont matérialisées par les couleurs. Les panneaux représentent l’évolution des quatre quantités d’interactions : l’énergie  $E$  ; la distance au carré  $r^2$  ; l’intensité du dipôle  $\gamma$  ; et l’orientation du dipôle  $\theta$ . Les lignes noires pointillées correspondent pour  $r^2(t)$  à  $r^2 = 1$  et pour  $\theta(t)$  aux valeurs  $\arccos(\frac{1}{\sqrt{3}})$ ,  $\frac{\pi}{2}$ , et  $\pi - \arccos(\frac{1}{\sqrt{3}})$ .



(a) Sans friction, dynamique aux temps courts après la création.

(b) Avec friction, dynamique aux temps longs.

FIGURE 4.11 – Évolution du dipôle dans l’espace des phases. La barre de couleur correspond au temps  $t$ . Le rayon et l’intensité au temps initial valent  $r_0 = 1$  et  $\gamma = 0.1$ . Nous présentons différentes orientations angulaires initiales  $\theta_0 \in [0, \pi]$ .

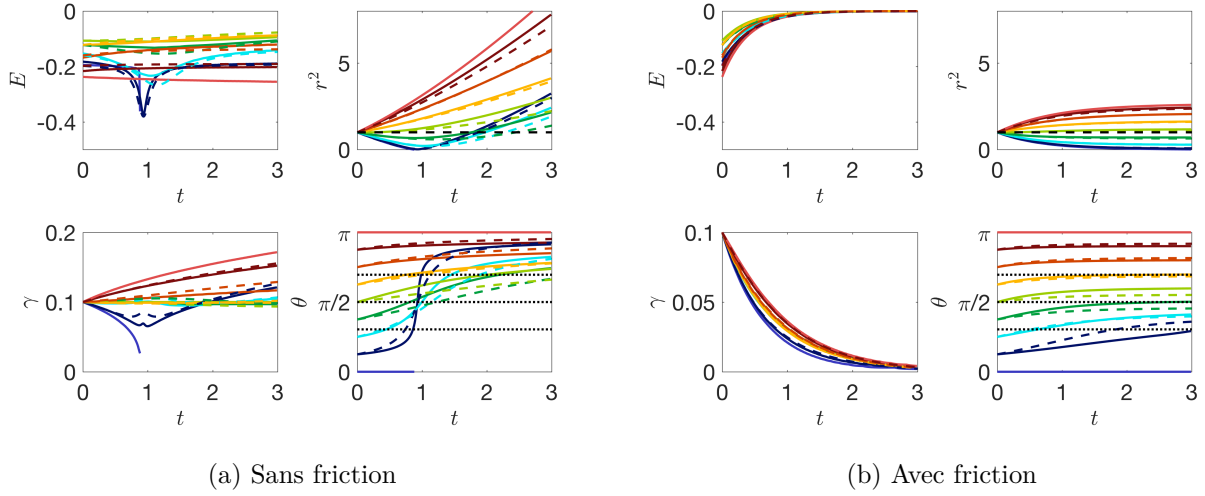


FIGURE 4.12 – Comparaison entre l’approximation de faible intensité (courbes pointillées), et le modèle général (courbes continues). Les panneaux représentent l’évolution des quatre quantités d’interactions : l’énergie  $E$  ; la distance au carré  $r^2$  ; l’intensité du dipôle  $\gamma$  ; et l’orientation du dipôle  $\theta$ . Les lignes noires pointillées correspondent pour  $r^2(t)$  à  $r^2 = 1$  et pour  $\theta(t)$  aux valeurs  $\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ ,  $\frac{\pi}{2}$ , et  $\pi - \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ .

$\bar{E} \ll 1$ , on peut raisonnablement négliger les termes en  $\mathbf{\Gamma}$  dans (4.2.39) aux temps courts devant le temps dissipatif  $\tau = \frac{r_0^2}{\nu}$ . Cette simplification faite, on obtient un système d’équations pour les grandeurs  $R$ ,  $C$  et  $N$ , introduites au début de ce paragraphe. Le système adimensionné par  $r_0$  et  $tr_0^2/\nu$  est le suivant :

$$\begin{aligned}
 \dot{R} &= -16 \frac{C}{R^{1/2}}, \\
 \dot{C} &= -2 \left[ \frac{N}{R^{1/2}} + 5 \frac{C^2}{R^{3/2}} \right] - \rho C + R^{1/2} \mu \zeta, \\
 \dot{N} &= 4 \left[ N \frac{C}{R^{3/2}} - 3 \frac{C^3}{R^{5/2}} \right] - \rho N + N^{1/2} \mu \zeta,
 \end{aligned} \tag{4.2.41}$$

avec  $\zeta$  un bruit blanc delta-corrélé vérifiant  $\langle \zeta(t)\zeta(t') \rangle = \delta(t-t')$ . Les coefficients de friction  $\rho$  et de forçage  $\mu$  sont déterminés par

$$\begin{aligned}
 \mu &= \frac{3r_0^2(E_\alpha - E_\beta)}{16\nu^2 C_\psi}, \\
 \rho &= 6\pi\psi(0) \frac{r_0^2}{\pi^2 C_\psi}.
 \end{aligned} \tag{4.2.42}$$

Afin de vérifier notre limite de faible intensité, nous présentons dans la figure 4.12 une comparaison du système général (4.2.35, 4.2.36, 4.2.37) et des équations du modèle de faible intensité (4.2.41) et les comparons à température nulle  $\mu = 0$  dans les cas avec ( $\rho \neq 0$ ) ou sans friction ( $\rho = 0$ ). Il y a un bon accord dans la plupart des cas, et l’approximation de faible intensité est meilleure dans le cas avec friction 4.12b. Ce résultat est attendu puisque la friction est à l’origine de la perte d’intensité du dipôle.

Cette limite faible met en évidence des angles particuliers. En effet, on remarque que le membre de droite de la dernière équation du système (4.2.41) s’annule lorsque  $\xi(\theta) = \cos(\theta)(1 - 3\cos^2(\theta)) = 0$ . Cette condition est vérifiée par trois angles entre 0 et  $\pi$  :  $\theta = \pi/2$ ,  $\theta = \arccos(1/\sqrt{3})$  et  $\theta = \pi - \arccos(1/\sqrt{3})$ . Ces angles sont représentés par les lignes pointillées dans les panneaux concernant l’orientation aux figures 4.10, 4.12 et 4.13. En l’absence de dissipation, ou si la dissipation est équilibrée par le forçage, ces angles correspondent à des valeurs d’intensité stationnaires. L’angle  $\theta = \pi/2$



est encore plus remarquable puisqu'il correspond à la frontière entre la dynamique d'approche et la dynamique d'éloignement des pinçons du dipôle. A première vue, les deux autres angles ne jouent pas encore un rôle déterminant à température nulle. Étudions maintenant le cas des températures finies.

**Dynamiques à température finie** Pour l'étude de l'intégration du système (4.2.41) dans le cadre du dipôle forcé aléatoirement, il faut vérifier deux conditions.

1. Il faut s'assurer que  $\gamma \leq 0.5$ , pour que l'approximation des faible intensité soit valable. Cette valeur seuil correspond au domaine de validité des approximations linéaires sur la figure 4.8.
2.  $r$  doit être assez grand ( $r \geq \frac{1}{\sqrt{\rho}}$ ) pour que l'approximation de pinçons distincts soit valide.

De plus, l'intégration numérique nous contraint à arrêter le processus si  $\gamma \leq 0.01$  ou  $r \geq \sqrt{\rho}$ . Nous considérons que ces deux cas correspondent respectivement à la mort du dipôle ou à un divorce où les pinçons s'échappent à l'infini. En pratique, les critères d'arrêt de nos intégrations sont le plus souvent liés aux valeurs de l'intensité, qui devient trop faible  $\gamma \leq 0.01$  ou trop élevée  $\gamma \geq 0.5$ . La figure 4.13 montre l'évolution d'un dipôle de faible intensité ( régi par le système (4.2.41)) à température finie, pour les conditions initiales précédemment étudiées :  $r_0 = 1$ ,  $\gamma_0 = 0.1$  et  $\theta_0 \in [0, \pi]$ . Les paramètres de forçage et de dissipation sont  $\rho = 0.12$  et  $\mu = 0.009$ .

Plusieurs tendances se dégagent de l'analyse de la figure 4.13a. Tout d'abord, le temps de survie est légèrement plus long puisque le bruit contribue au maintien de l'intensité. Ensuite, l'évolution de  $\theta(t)$  n'est plus monotone, et les inclinaisons des dipôles se rapprochent des valeurs d'annulation de  $\xi(\theta)$ , et le plus souvent même de  $\theta = \pi/2$ . Ceci permet au dipôle de se maintenir dans une dynamique hors équilibre, où la friction compense exactement le forçage aléatoire, prolongeant l'espérance de vie du dipôle.

Le diagramme des phases 4.13b montre les trajectoires dans l'espace  $(r, \theta, \gamma)$ . On remarque que le bruit donne lieu à des intensités plus fortes et que les trajectoires sont plus longues que celles sans forçage observées dans la figure 4.11b. On remarque aussi que les angles sont plus proches de  $\pi/2$ . Ainsi, ce régime à faible bruit nous apprend que le forçage aléatoire tend à préserver l'intensité du dipôle avec friction, et repousse son décès.

Nous avons vérifié que pour des plus grandes valeurs le forçage, le bruit peut amener rapidement l'intensité aux valeurs critiques de  $\gamma = 0$  ou  $\gamma = 1$ . Dans ce cas, la dynamique de mort ou de fusion est essentiellement déterminée par le bruit et arrive bien plus vite que pour la température nulle.

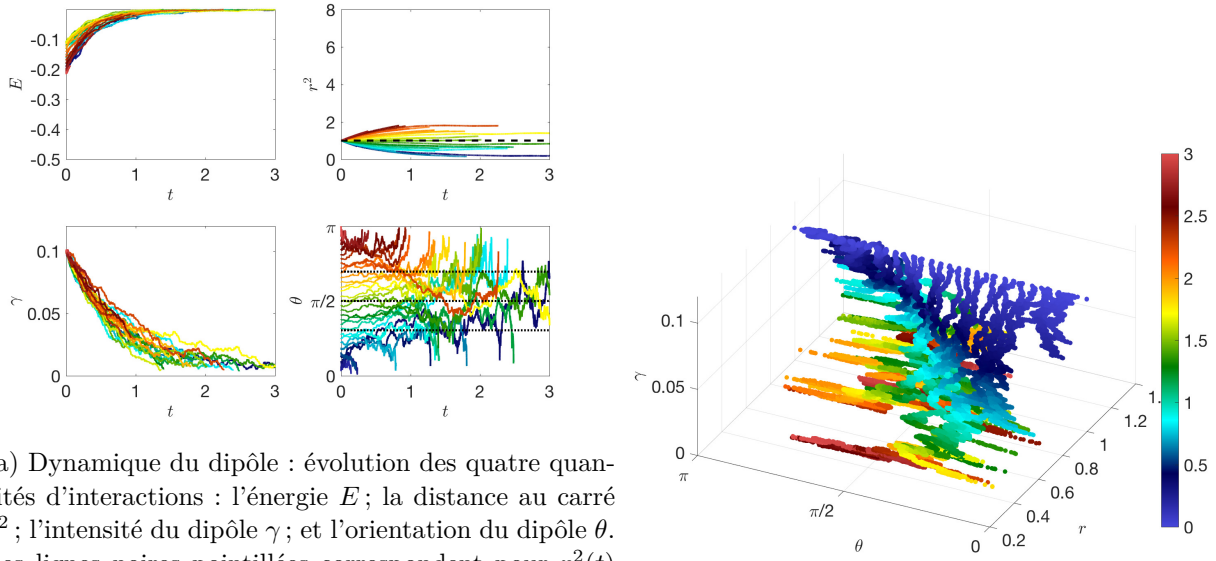
#### 4.2.3.4 Dynamique générale d'une paire de pinçons

Le cadre du dipôle est facile à appréhender, mais il correspond à une évolution très contrainte. Nous allons maintenant décrire l'évolution d'une paire de pinçons libres.

**Évolution à court terme** Pour le dipôle, nous avons identifié deux comportements pour la dynamique de court terme (sans friction) : soit les pinçons se séparent en configuration anti alignée  $\theta \rightarrow \pi$  et l'intensité  $\gamma$  tend vers un, soit ils commencent par s'attirer puis finissent par s'éloigner. Examinons si ce comportement persiste pour le cas général. Pour décrire la dynamique de deux pinçons libres dans leur référentiel, il faut évaluer six variables scalaires indépendantes :

1. leur distance relative  $r$  ;
2. les normes de leurs intensités respectives  $\gamma_\alpha$  et  $\gamma_\beta$  ;
3. les angles formés entre leurs intensités respectives et la droite les reliant respectivement  $\theta_\alpha$  et  $\theta_\beta$  définis par  $\cos \theta_\alpha = (\boldsymbol{\gamma}_\alpha \cdot \mathbf{r}_{\alpha\beta}) / (r\gamma_\alpha)$  et  $\cos \theta_\beta = (\boldsymbol{\gamma}_\beta \cdot \mathbf{r}_{\beta\alpha}) / (r\gamma_\beta)$  ;





(a) Dynamique du dipôle : évolution des quatre quantités d'interactions : l'énergie  $E$ ; la distance au carré  $r^2$ ; l'intensité du dipôle  $\gamma$ ; et l'orientation du dipôle  $\theta$ . Les lignes noires pointillées correspondent pour  $r^2(t)$  à  $r^2 = 1$  et pour  $\theta(t)$  aux valeurs  $\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ ,  $\frac{\pi}{2}$ , et  $\pi - \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ .

(b) Diagramme des phases. La couleur code l'avancée du temps.

FIGURE 4.13 – Impact du forçage aléatoire sur le diôle à faible intensité dissipatif. Conditions initiales :  $r_0 = 1$ ,  $\gamma = 0.1$ ,  $\theta_0 \in [0, \pi]$ . Les paramètres de forçage et de dissipation sont  $\rho = 0.12$  et  $\mu = 0.009$ .

4. et un dernier angle  $\varphi$  correspondant au caractère non coplanaire des intensités et de leur distance relative, défini par  $\cos \varphi = (\boldsymbol{\gamma}_\alpha \cdot \boldsymbol{\gamma}_\beta) / (\gamma_\alpha \gamma_\beta)$ .

Le dipôle correspond au cas  $\gamma = \gamma_\alpha = \gamma_\beta$ ,  $\theta = \theta_\alpha = \theta_\beta$  et  $\varphi = \pi$ . Dans un premier temps, nous intégrons les équations (4.2.26) pour obtenir la dynamique sans friction et sans bruit. Rappelons que cette dynamique correspond aux temps courts puisque le tenseur de Reynolds responsable de la création des pinçons vaut  $\mathbf{F}_\alpha = \eta^3 / (\nu^2 \psi(0)) \nabla \cdot \tau^\eta(\mathbf{x}_\alpha)$  et compense le terme dissipatif. Nous testons différentes conditions initiales en conservant cependant  $r_0 = 1$ .

Sans dissipation, nous nous attendons à ce que l'intensité tende vers 1 comme pour le dipôle. Nous arrêtons alors l'intégration dès que l'un des deux pinçons voit son intensité s'approcher de 1 à moins d'un seuil  $\varepsilon = 10^{-2}$  (i.e.  $\gamma > 1 - \varepsilon$ ). Ce cas correspond à une explosion.

Les résultats d'intégration nous permettent d'identifier trois scénarios :

1. Le divorce bilatéral, illustré dans la figure 4.14a. Dans cette situation, les deux pinçons s'éloignent progressivement dans des directions opposées et prennent la configuration d'un dipôle en expansion : ils s'alignent dans la configuration opposée, leur angle mutuel  $\phi$  tend vers  $\pi$ , leurs intensités sont similaires et tendent vers 1. Dans cette situation, les deux pinçons jouent des rôles symétriques.
2. Le divorce unilatéral, représenté dans la figure 4.14b. Dans cette situation, l'un des deux pinçons voit son intensité croître plus vite que l'autre, leurs intensités s'alignent sont parallèles à la droite reliant les pinçons et ont le même sens (i.e.  $\theta_1 = \pi$ ,  $\theta_2 = 0$ ,  $\phi = 0$ ). Le pinçon de plus faible intensité se déplace alors plus vite et distance l'autre dans son voyage vers l'infini.
3. la fusion, illustrée dans la figure 4.15a. Dans ce cas, les pinçons s'attirent l'un l'autre, et très vite l'intensité d'un des deux explose et tend vers 1. Contrairement aux divorces, les valeurs des angles  $\varphi$  et  $\theta$  ne prennent pas de valeurs particulières. Ce cas est dominé par coalescence, semblable à une reconnexion.

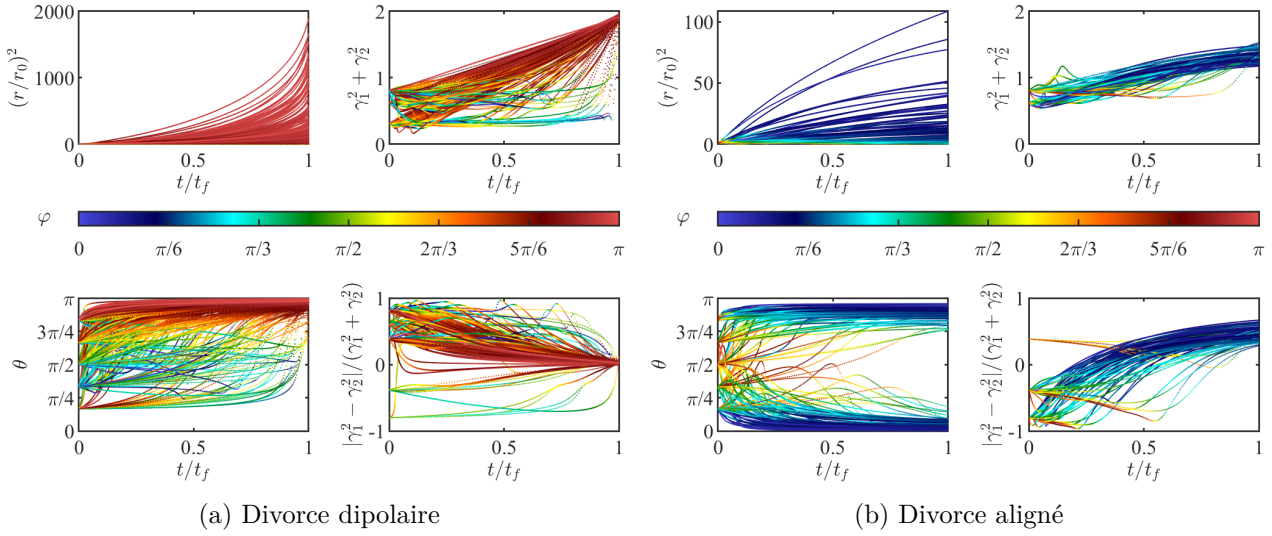


FIGURE 4.14 –  volution temporelle de  $r$ , des angles des pinçons  $\theta_1$ , et  $\theta_2$ , de l'intensité totale  $\gamma_1^2 + \gamma_2^2$  et de l'anisotropie  $(\gamma_1^2 - \gamma_2^2)/(\gamma_1^2 + \gamma_2^2)$  pour les divorces : (a) divorce dipolaire, (b) divorce aligné. Chaque courbe correspond à l'intégration d'une condition initiale. La couleur correspond à la valeur de l'angle mutuel  $\varphi$ .

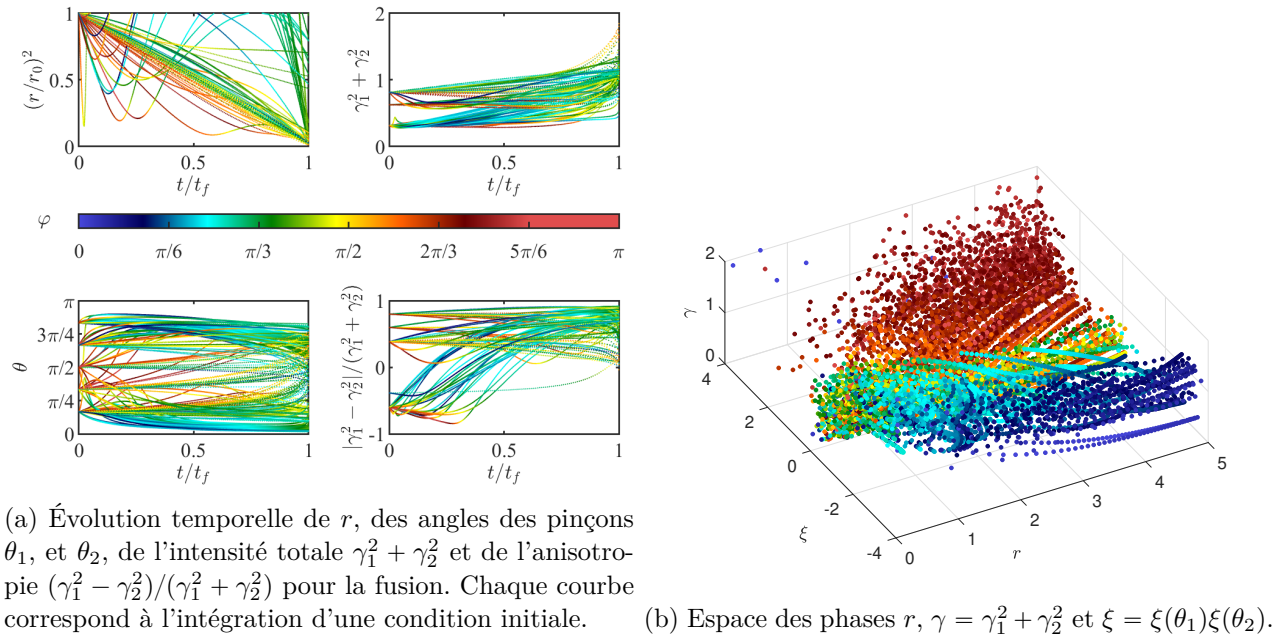
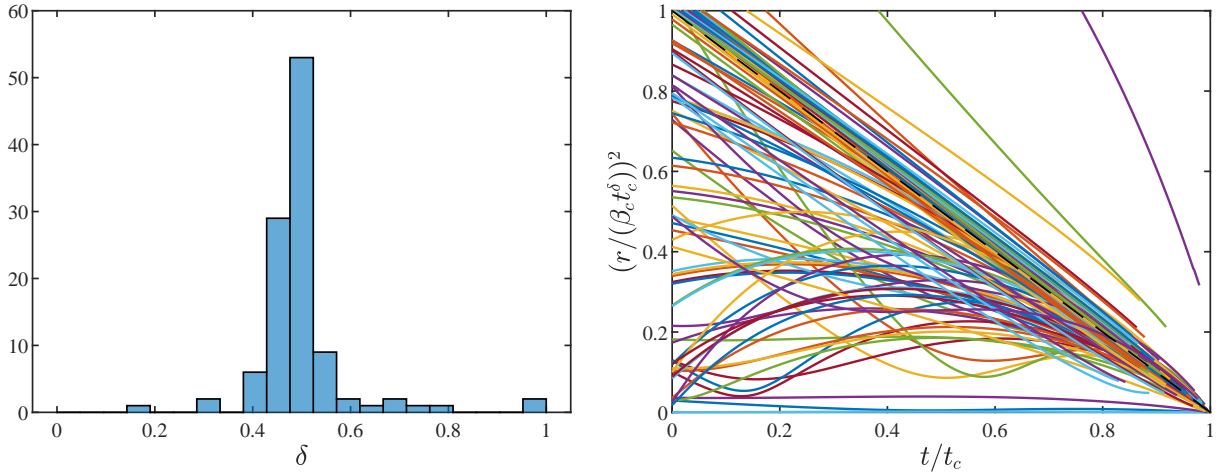


FIGURE 4.15 –  volution temporelle pour la fusion et l'espace des phases communs pour la dynamique de court terme après la création des pinçons. La couleur correspond à la valeur de l'angle mutuel  $\varphi$ .



(a) Histogramme des puissances  $\delta$  telles que  $\beta_c(t_c - t)^\delta$  pendant les trajectoires de fusion. (b) Distances quadratiques renormalisées pour les fusions. La ligne noire correspond à  $\delta = 1/2$ .

FIGURE 4.16 – Étude des lois d'échelles de la fusion. Pour  $t/t_c$  proche de 1, la plupart des trajectoires correspondent à  $\delta \simeq 1/2$ .

La figure 4.15b présente l'évolution dans l'espace des phases  $r$ ,  $\gamma = \gamma_1^2 + \gamma_2^2$  et  $\xi = \xi(\theta_1)\xi(\theta_2)$ , avec  $\xi(\theta) = \cos(\theta)(1 - 3\cos^2(\theta))$ . On remarque que les trois scénarios correspondent à trois zones dans l'espace des phases de la figure 4.15b. La fusion se concentre autour de  $\xi = 0$ , ce qui signifie que l'intensité d'au moins un des deux pinçons s'oriente selon  $\pi/2$ ,  $\arccos(1/\sqrt{3})$  ou  $\pi - \arccos(1/\sqrt{3})$  avec la droite les reliant. Les divorces donnent quant à eux des valeurs de  $\xi = \pm 2$ , correspondant aux configurations parallèles au segment entre les deux pinçons, de même sens ou opposés.

En résumé, nous avons observé deux nouvelles évolutions que l'étude du dipôle n'avait pas illustrées : le divorce unilatéral, avec deux pinçons alignés de même sens qui s'éloignent l'un de l'autre, et la fusion, où les pinçons coalescent en respectant  $\xi(\theta_1)\xi(\theta_2) = 0$  avec une intensité tendant vers 1 pour au moins l'un des pinçons, correspondant à une reconnexion. Nous proposons dans la suite de détailler ces événements de fusion.

**Loi d'échelles de coalescence** Pour vérifier si la phase d'approche respecte la loi d'échelle de Leray [84] (1934) en  $\sqrt{t_c - t}$ , nous effectuons, pour chaque trajectoire, une régression pour déterminer à quelle puissance  $\delta$  du temps correspond l'évolution de la distance entre les pinçons  $r$ . La régression contient trois paramètres,  $\beta_c$ ,  $\delta$  et  $t_c$  et cherche une fonction en  $r(t) = \beta_c(t_c - t)^\delta$ . La figure 4.16a montre l'histogramme des exposants  $\delta$  obtenus. La distribution est bien piquée en  $\frac{1}{2}$ . La figure 4.16b montre la dynamique de la distance renormalisée  $(r/(\beta_c t_c^\delta))^2$  en fonction de  $t/t_c$ . La dynamique observée suit bien la loi de Leray pour  $t/t_c$  proche de 1.

**Dynamique de fusion** Nous proposons maintenant d'étudier la dynamique complète de la fusion, en unifiant les régimes de court et long terme. Pour ce faire, nous supposons que le terme de forçage associé au tenseur de Reynolds décroît exponentiellement en  $\exp(-t/\tau_{\text{forçage}})$ , où  $\tau_{\text{forçage}}$  correspond au temps de forçage, imposé par les grandes échelles. La figure 4.17, montre l'impact de ce paramètre, en variant l'inverse du temps typique de forçage  $\lambda = \tau_\nu/\tau_{\text{forçage}} = r_0^2/(\nu\tau_{\text{forçage}})$  et le coefficient de friction  $\rho = (\psi(0)/C_\psi)(r_0/\eta)^2$  pour sept trajectoires partant de la même condition initiale.

Si la friction  $\rho$  est élevée et que le temps de forçage est court (i.e.  $\lambda = 1$ ), les pinçons meurent

rapidement sans vraiment se rapprocher. En revanche, si le temps de forçage est plus long ( $\lambda = 0, 1$ ) et que la friction est faible, on retrouve une dynamique similaire à la fusion observée dans l'étude des temps courts : les pinçons se rapprochent et leurs intensités se rapprochent de 1. Deux trajectoires :  $((\rho, \lambda) = (0.18, 1.00)$  et  $(\rho, \lambda) = (1.00, 0.10)$ ) correspondent à un régime intermédiaire, présentant une phase d'approche sans explosion de l'intensité. La figure 4.18 présente l'évolution de leurs positions relatives et de leurs intensités. Si l'on observe globalement une approche puis une séparation, les deux trajectoires sont néanmoins bien différentes. Pour  $(\rho, \lambda) = (0.18, 1.00)$  (figure 4.18a), qui correspond à une fraction modérée et un court forçage, les pinçons s'approchent en prenant une configuration proche de celle du dipôle, ensuite ils se retournent brutalement, puis s'éloignent et meurent rapidement. L'autre configuration  $(\rho, \lambda) = (1.00, 0.10)$  (figure 4.18b), avec une friction et un forçage plus forts, est plus lisse. L'orientation relative des intensités ne change pas, et le pinçon survit plus longtemps. Pendant l'interaction, nous suivons les valeurs maxima de vitesse et d'intensité du champ constitué par la paire. Pour ce faire, nous calculons les valeurs des champs sur une grille cartésienne, de résolution finie dont les points ne correspondent pas parfaitement à la position analytique des pinçons. Ceci nous donne néanmoins une tendance intéressante à suivre. Les résultats sont présentés sur la figure 4.19. Les oscillations observées sont liés à la résolution de la grille cartésienne utilisée et ne constituent pas une réalité physique.

On constate que les fusions totales montrent des valeurs divergentes, ce qui est attendu puisque les intensités tendent vers 1. Les deux trajectoires intermédiaires présentant une approche suivie d'une séparation, que nous avons étudiées à la figure 4.18, la vitesse et la vorticit e d ecroissent globalement, avec un ressaut au moment du retournement. Ce comportement fait penser  a la reconnexion de deux anneaux de vorticit e  etudi ee par Yao et Hussain [145] (2020), qui pr esentent aussi un ressaut de vorticit e et de vitesse au plus proche de l'interaction.

#### 4.2.4 Discussion sur les pinçons

Dans cette section, nous avons pr esent e un mod ele de singularit es de Navier-Stokes appel ees pinçons . Elles correspondent  a des particules ponctuelles caract eris ees par leurs positions et leurs intensit es, analogues  a des pinçons. Nous avons posée des  equations du mouvement d ecrivant leur dynamique, en supposant que les singularit es v erifient localement les  equations de Navier-Stokes filtr ees. Nous avons montr e que cette condition ne peut  etre v erifi ee que si l'on filtre  a l' echelle de Kolmogorov. Ces pinçons, baignées dans un  ecoulement r egulier sont d eplac es et  etir es par l' ecoulement r egulier. Ils sont forc es par l' ecoulement grand  echelle provenant du tenseur de Reynolds et soumis  a une friction interne. Nous avons utilisée ces propri et es pour proposer un mod ele simplifiée, d'interaction de pinçons, qui s'interpr ete comme une adaptation  a Navier-Stokes du mod ele de vortons de Novikov [108] (1983), ou bien  a un mod ele d'Ising hydrodynamique, qui pourrait  etre utilisée de mani ere statistique pour mod eliser les fluides  a petite  echelle. Pour illustrer la dynamique, nous avons  etudi e le comportement d'une paire de pinçons, dans un cas dipolaire ou g en eral, en distinguant le r egime imm ediatement apr es la cr eation du r egime de long terme, en consid erant un forçage al eatoire mod elisant le tenseur de Reynolds.

Aux temps courts, nous avons identifiée plusieurs types de comportements, discriminées par le param etre  $\xi(\theta) = \cos(\theta)(1 - 3\cos^2(\theta))$ , avec  $\theta$  l'angle formée entre l'axe reliant les pinçons et la direction de son intensit e. En l'absence de bruit, nous observons deux s eparations appel ees "divorces" qui correspondent  a  $\xi = \pm 2$ , et donc  a des intensit es parall eles, de m eme sens ou de sens contraire. Nous avons aussi constatée une  evolution de type de fusion, avec  $\xi = 0$ . Si l'on prend en compte un forçage stochastique, il existe un  etat transitoire hors  equilibre dans la configuration  $\xi = 0$ , avec des intensit es perpendiculaires  a la droite reliant les pinçons. Remarquons que l'on retrouve la quantit e  $1 - 3\cos^2(\theta)$

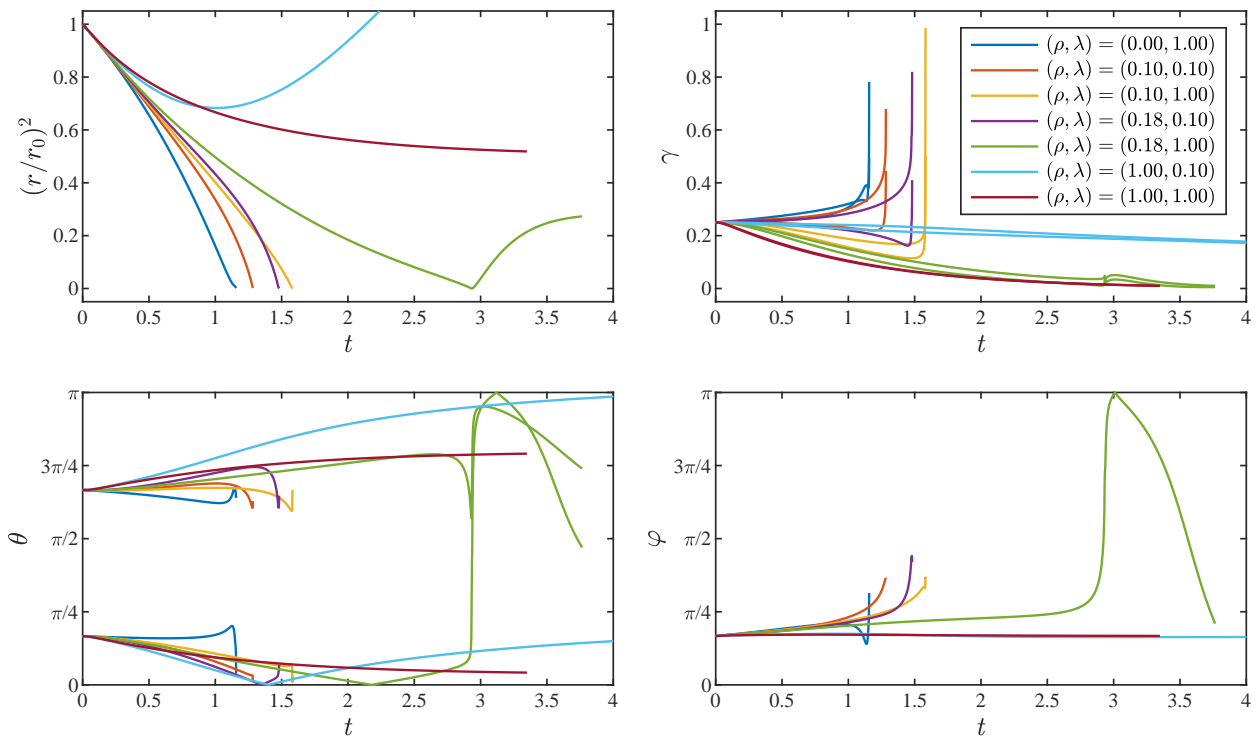


FIGURE 4.17 – Évolution temporelle de sept paires de pinçons partant de la même condition initiale mais avec différents forçages. Nous faisons varier l'inverse du temps typique de forçage  $\lambda = \tau_\nu / \tau_{\text{forcing}} = r_0^2 / (\nu \tau_{\text{forcing}})$  et le coefficient de dissipation  $\rho = (\psi(0) / C_\psi)(r_0 / \eta)^2$ .

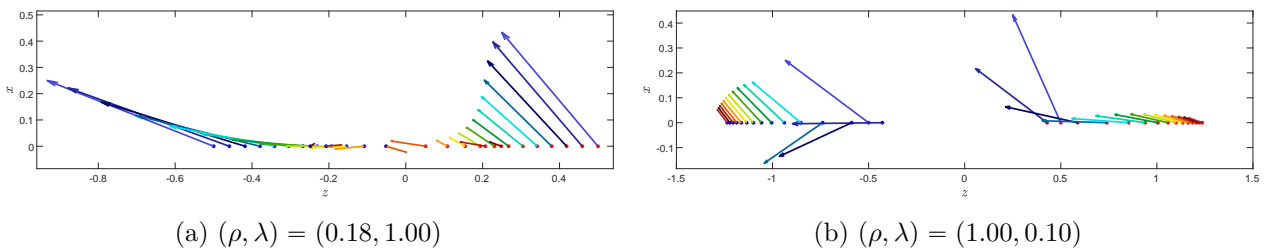


FIGURE 4.18 – Dynamiques intermédiaires de paires de pinçons s’approchant puis s’éloignant avec deux couples de valeurs pour  $(\rho, \lambda)$ . La couleur correspond à l’évolution temporelle, de  $t = 0$  (bleu foncé) à  $t = t_{\text{final}}$  (rouge foncé).

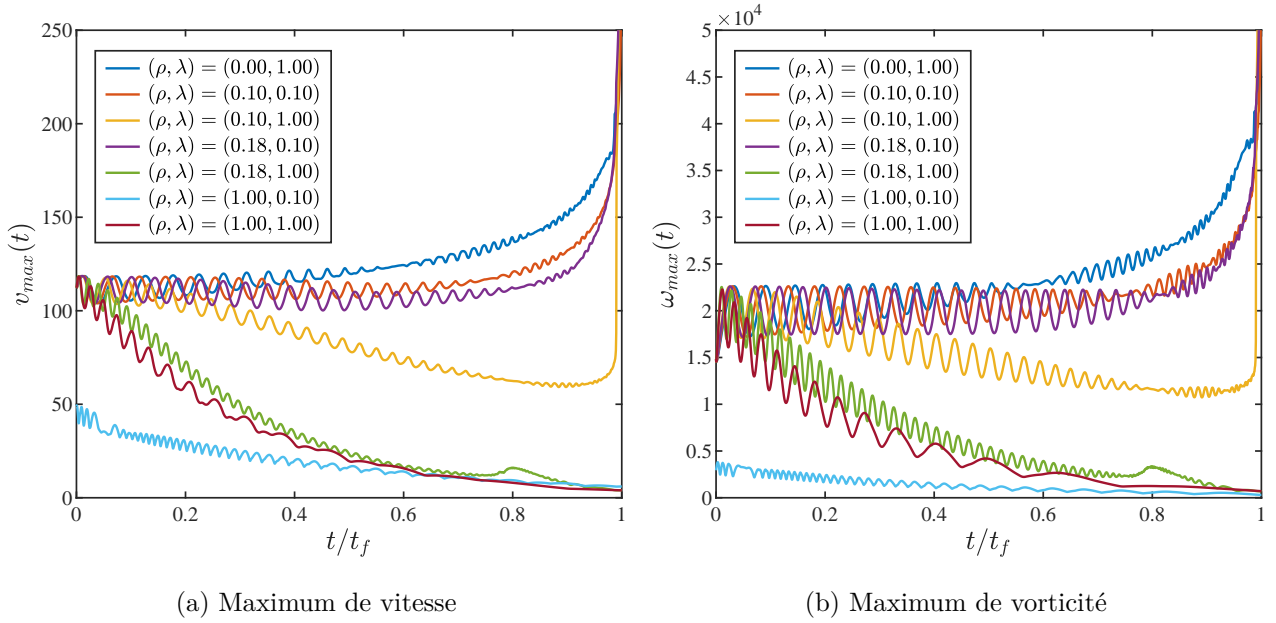


FIGURE 4.19 – Évolution temporelle des maxima de vitesse et de vorticité obtenus sur une grille cartésienne pour les paires de pinçons.

dans la description des cristaux liquides, dont la valeur moyenne définit le paramètre d'ordre du système  $s = (1 - 3 \cos^2(\theta))/2$ , et décrit une transition de phase entre la phase liquide ( $s = 0$ ) et la phase nématique ( $s = 1$ ).

Les différents modes d'interaction ouvrent donc la voie à différents comportements collectifs intéressants lorsqu'on considère un plus grand nombre de pinçons. La question de savoir si de tels comportements sont pertinents pour la description de la turbulence reste ouverte car le modèle présenté ne tient pas compte d'un certain nombre de problèmes qui peuvent limiter son champ de validité : l'existence d'un important transfert d'énergie non localisé à l'échelle de Kolmogorov, l'approximation diluée pour les pinçons, la séparation d'échelle entre le pinçon et le champ de vitesse ambiant, pour n'en citer que quelques-uns.

Notre étude de l'interaction de deux pinçons présente cependant des similitudes intéressantes avec la reconnexion entre deux anneaux de vortex. En effet, nous observons que la fusion obéit généralement à une loi en  $\sqrt{t_c - t}$  qui est observée lors de la reconnexion. De plus la fusion est caractérisée par une croissance transitoire de la vitesse et de la vorticité comme pour une reconnexion. D'un autre point de vue dynamique, les pinçons rappellent également le modèle bifluide du superfluide, où le champ "régulier", constitué de phonons, interagit avec les défauts topologiques locaux qui forment les vortex quantifiés. Comme l'ont montré Villois, Proment, et Krstulovic [141] (2020), l'interaction entre deux vortex donne aussi une approche suivant la loi de Leray en  $\sqrt{t_c - t}$ .

De manière plus générale, l'interaction entre les pinçons et le champ régulier peut correspondre à l'étude de paquets d'ondes localisés dans le modèle WKB-RDT de Laval, Dubrulle, et Nazarenko [83] (2004). De manière analogue, il serait intéressant de voir si les pinçons peuvent décrire un modèle sous maille de la turbulence, rendant compte des interactions entre le champ de vitesse filtré à l'échelle de Kolmogorov et des structures plus petites et intenses comme celles observées par Saw et al. [128] (2016).

Si ce modèle se montre assez précis pour décrire la turbulence à petite échelle, cela permettrait



alors d'utiliser des pas de temps plus grands, puisque le mouvement à petite échelle est régi par des mouvements lagrangiens. Il est aussi important de se pencher plus sur les interactions à courte distance pour rendre le modèle éligible à une modélisation sous-maille.

Même si le modèle pinçon ne décrit pas avec précision le comportement de la turbulence à petite échelle, il s'agit d'un modèle statistique hors équilibre des singularités de Navier-Stokes avec de nombreux modes d'interaction, qui présente certaines similitudes avec les interactions des cristaux liquides. Il peut donc stimuler l'émergence de nouvelles idées concernant la dynamique et les propriétés de la turbulence et jouer un rôle similaire à celui du modèle d'Ising en mécanique statistique.

### 4.3 Discussion sur les singularités

Cette section est consacrée aux plus petites échelles de la turbulence. Nous avons d'abord constaté sur des jeux de données filtrées à l'échelle de Kolmogorov les écarts entre la modélisation et les observations. Cette étude nous a confirmé le lien entre défauts de modélisation, perte de régularité et transferts énergétiques locaux à très petite échelle en nous concentrant sur les échelles intermédiaires au [chapitre 3](#).

Nous avons ensuite proposé une modélisation des phénomènes sous l'échelle de Kolmogorov avec le modèle des pinçons, qui propose une approche singulière des rugosités de l'écoulement, ouvrant plusieurs perspectives. Elle permet tout d'abord de penser une dissipation indépendante de la viscosité, compatible avec les observations d'anomalie de dissipation dans les écoulements turbulents ; elle donne ensuite un cadre à la description dans le formalisme de Navier-Stokes de l'interaction entre singularités et solutions régulières ; et propose enfin une réponse au problème posé par les structures d'exposant de Hölder  $-1$  qui ne sont pas régularisées. Certains d'industriels considèrent qu'une bonne modélisation des petites échelles n'est pas essentielle pour leurs applications, mais l'existence de singularités est liée à la question de l'unicité de la solution, et donc de multi-stabilité des grandes échelles qu'il faut toujours envisager lorsqu'on traite de phénomènes complexes non linéaires. De plus, leur présence impacte aussi plus généralement les statistiques de l'écoulement qu'il convient de modéliser correctement.





# Conclusion générale

---

Dans cette thèse, nous avons cherché à améliorer la modélisation de la turbulence en s'attaquant au problème de la régularité des écoulements, et de toutes les conséquences des faibles régularités, notamment sur le bien fondé de la modélisation pour les très grands nombres de Reynolds. Nous avons donc observé les écoulements afin de proposer des améliorations de la modélisation physique.

Pour obtenir la plupart des jeux de données d'observations, nous nous sommes concentrés sur la géométrie de l'écoulement de von Kármán. Le travail précis de mesures expérimentales des équipes de SHREK, von Kármán Sodium, et du SPEC nous a permis une telle analyse. Parallèlement, le code SFEMaNS que nous avons décrit dans la section 2.2 et les améliorations continues des méthodes numériques sont indispensables à la grande précision exigée par notre méthodologie.

Ces données, dont nous avons pu combiner des avantages et inconvénients complémentaires, nous ont permis de mener une analyse à travers toutes les échelles de la turbulence, de l'échelle macroscopique, aux singularités en passant par la cascade énergétique.

Nous avons ainsi mis en place des méthodes numériques innovantes. D'un point de vue algorithmique, nous avons proposé une nouvelle méthode de la prise en compte des obstacles en mouvement dans un fluide pour les méthodes numériques utilisant un maillage fixe. Nous avons aussi proposé une méthode de calcul de quantités filtrées sur un maillage non structuré correspondant à une géométrie réelle. Nous avons aussi montré que la méthode de viscosité entropique et notre modèle de hauteur variable reproduisaient convenablement le comportement macroscopique des écoulements turbulents, et en transition à la turbulence.

La suite de notre descente dans les échelles, par l'analyse de la cascade, confirme le caractère variable de l'échelle de régularisation de l'écoulement et explique l'intermittence, comportement observé de manière universelle dans tous les écoulements turbulents. Nous montrons aussi son impact sur l'adaptation de Navier-Stokes aux quantités filtrées à l'échelle de Kolmogorov, appelant à une correction. Pour y répondre, nous proposons un modèle d'intégration de singularités à l'écoulement, qui propose un nouveau type de description postulant directement l'existence de singularités. Ce problème fondamental peut avoir des conséquences sur les applications puisqu'il modifie plusieurs propriétés, comme la multi-stabilité, les fluctuations, les événements extrêmes, et le comportement énergétique des écoulements. Dans une perspective d'application, il est essentiel de savoir quelle quantité l'on souhaite contrôler ou connaître, et quelle incertitude on juge acceptable sur les valeurs obtenues. Il faudrait donc, dans un objectif plus appliqué, se demander comment nos observations et conclusions impactent la fiabilité attendue des outils utilisés par les industriels.

Dans la continuité de ce travail de recherche, j'aimerais que plusieurs axes de travail soient explorés. Tout d'abord, il faudrait arriver à une preuve mathématique rigoureuse de la méthode de pénalisation d'ordre élevée qui, intuitivement et numériquement, donne des signes très encourageants. Il est aussi important de bien comprendre ce qui restreint la convergence spatiale observée, bien que le schéma soit avant tout un schéma de discrétisation temporelle.

Ensuite comme nous avons constaté que les plus grandes valeurs d'incrément de vitesse et de transferts énergétiques locaux étaient situées proches de la couche de mélange ou à proximité des

parois, il serait bon de confirmer les résultats obtenus avec différentes conditions limites. On pourrait par exemple regarder les comportements proches des parois dans l'écoulement von Kármán, mais aussi étudier d'autres géométries qui correspondent à des écoulements de laboratoire ou même à des écoulements appliqués. Il serait aussi intéressant de développer une analyse similaire pour les systèmes turbulents et magnétohydrodynamiques, pour lesquels les transferts énergétiques et les échelles de régularisation sont multiples.

Enfin, une perspective intéressante serait de poursuivre la modélisation de type pinçons, et de la pousser jusqu'à la confrontation avec des champs de mesure. Cela constituerait je pense une avancée importante dans la compréhension de l'anomalie de dissipation.

## 6.1 Détails sur l'équation de Navier-Stokes Filtrée

### 6.1.1 Bilan d'énergie cinétique filtrée

détails de (3.1.7)

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{u}}^\ell \partial_t \mathbf{u} + \bar{\mathbf{u}}^\ell \partial_i (u_i \mathbf{u}) - \frac{1}{\text{Re}} \bar{\mathbf{u}}^\ell \Delta \mathbf{u} + \bar{\mathbf{u}}^\ell \nabla p + \mathbf{u} \partial_i \bar{\mathbf{u}}^\ell + \overline{\mathbf{u} \partial_i (u_i \mathbf{u})}^\ell - \frac{1}{\text{Re}} \mathbf{u} \Delta \bar{\mathbf{u}}^\ell + \mathbf{u} \nabla \bar{p}^\ell &= 0 \\
\bar{\mathbf{u}}^\ell \partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \partial_t \bar{\mathbf{u}}^\ell + \bar{\mathbf{u}}^\ell \partial_i (u_i \mathbf{u}) + \overline{\mathbf{u} \partial_i (u_i \mathbf{u})}^\ell - \frac{1}{\text{Re}} \bar{\mathbf{u}}^\ell \Delta \mathbf{u} - \frac{1}{\text{Re}} \mathbf{u} \Delta \bar{\mathbf{u}}^\ell + \bar{\mathbf{u}}^\ell \nabla p + \mathbf{u} \nabla \bar{p}^\ell &= 0 \\
\partial_t (\mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{u}}^\ell) + \overline{u_j^\ell \partial_i (u_i u_j)} + u_j \overline{\partial_i (u_i u_j)}^\ell - \frac{1}{\text{Re}} \left( \overline{u_j^\ell \partial_i \partial_i u_j} + u_j \partial_i \partial_i \overline{u_j^\ell} \right) + \text{div} \left( \bar{\mathbf{u}}^\ell p + \mathbf{u} \bar{p}^\ell \right) &= 0 \\
\partial_t (\mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{u}}^\ell) + \partial_i (u_i u_j \overline{u_j^\ell}) - u_i u_j \partial_i (\overline{u_j^\ell}) + \overline{u_j u_i \partial_i (u_j^\ell)} & \\
- \frac{1}{\text{Re}} \left( \partial_i \left( \overline{u_j^\ell \partial_i u_j} \right) + \partial_i \left( u_j \partial_i \overline{u_j^\ell} \right) - 2 \partial_i u_j \partial_i \overline{u_j^\ell} \right) + \text{div} \left( \bar{\mathbf{u}}^\ell p + \mathbf{u} \bar{p}^\ell \right) &= 0 \\
\partial_t (\mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{u}}^\ell) + \partial_i (u_i u_j \overline{u_j^\ell}) - \frac{1}{\text{Re}} \left( \partial_i \partial_i \left( \overline{u_j^\ell u_j} \right) \right) + \text{div} \left( \bar{\mathbf{u}}^\ell p + \mathbf{u} \bar{p}^\ell \right) &= \\
- \overline{u_j u_i \partial_i (u_j^\ell)} + u_i u_j \partial_i (\overline{u_j^\ell}) - 2 \partial_i u_j \partial_i \overline{u_j^\ell} &
\end{aligned}$$

### 6.1.2 Lien entre $E_\ell$ et $\overline{\nabla \cdot (\delta \mathbf{u})^3}^\ell$

on utilise un résultat de Duchon et Robert [38] (2000) :

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla \cdot (\delta \mathbf{u})^3}^\ell &= \overline{\partial_{y_i} (u(x+y) - u(x))_i^3}^\ell, \\
&= \int \mathcal{G}(y) \partial_{y_i} \left( u_i u_j u_j |_{x+y} - 2 u_i u_j |_{x+y} u_j |_x - u_j u_j |_{x+y} u_i |_x + u_i |_{x+y} u_j u_j |_x \right. \\
&\quad \left. + 2 u_j |_{x+y} u_i u_j |_x + u_i u_j u_j |_x \right) dy \\
&= \int \mathcal{G}(y) \partial_{y_i} \left( u_i u_j u_j |_{x+y} - 2 u_i u_j |_{x+y} u_j |_x - u_j u_j |_{x+y} u_i |_x + 0 \text{ div} \right. \\
&\quad \left. + 2 u_j |_{x+y} u_i u_j |_x + 0(\text{dépendance}) \right) dy, \\
&= \overline{\partial_i u_i u_j u_j}^\ell - 2 \overline{u_j \partial_i (u_i u_j)}^\ell - \overline{u_i \partial_i (u_j u_j)}^\ell + 2 \overline{u_i u_j \partial_i u_j}^\ell, \\
&= \overline{\partial_i \overline{u_i u_j u_j}^\ell} - 2 \overline{u_j \overline{u_i \partial_i u_j}^\ell} - \overline{u_i \partial_i (\overline{u_j u_j}^\ell)} + 2 \overline{u_i u_j \partial_i \overline{u_j}^\ell}, \\
&= -2 E_\ell + \overline{\partial_i \overline{u_i u_j u_j}^\ell} - \overline{\partial_i (u_i \overline{u_j u_j}^\ell)}, \\
&= -2 E_\ell + \overline{\partial_i (\overline{u_i u_j u_j}^\ell} - \overline{u_i \overline{u_j u_j}^\ell}) = -2 E_\ell + \overline{\partial_i (u_i u_j u_j)}^\ell - \overline{u_i \partial_i (u_j u_j)}^\ell.
\end{aligned}$$

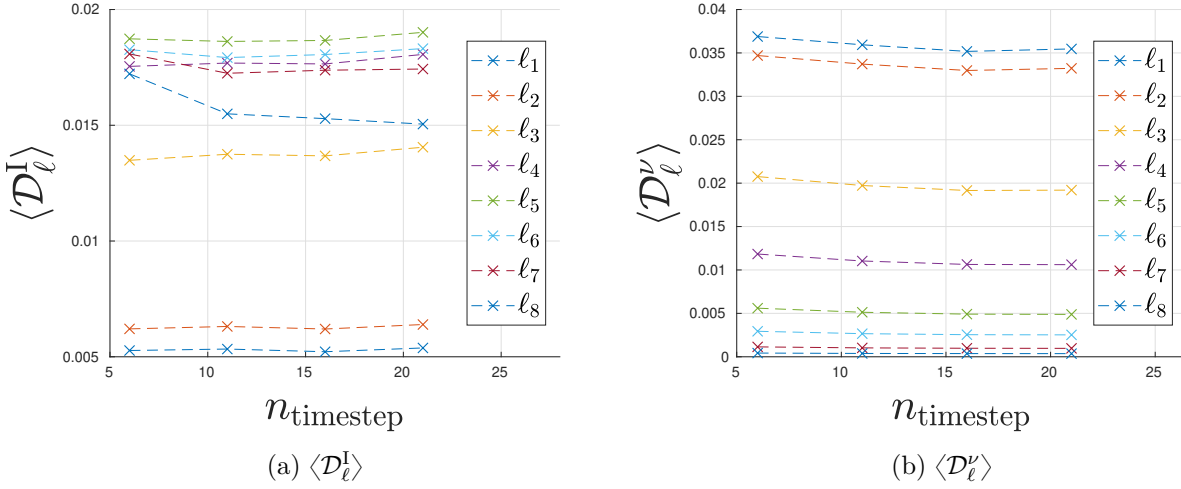
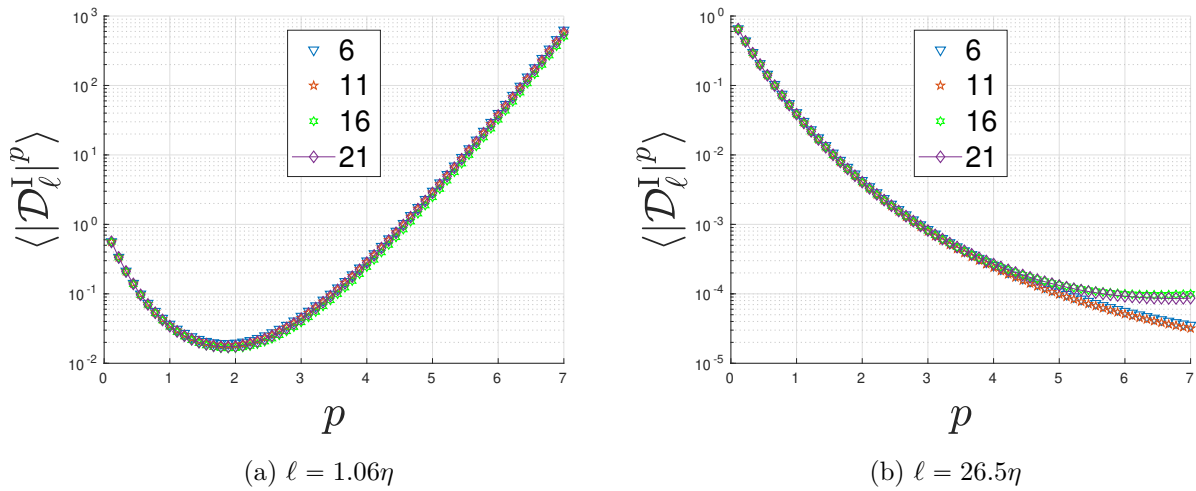
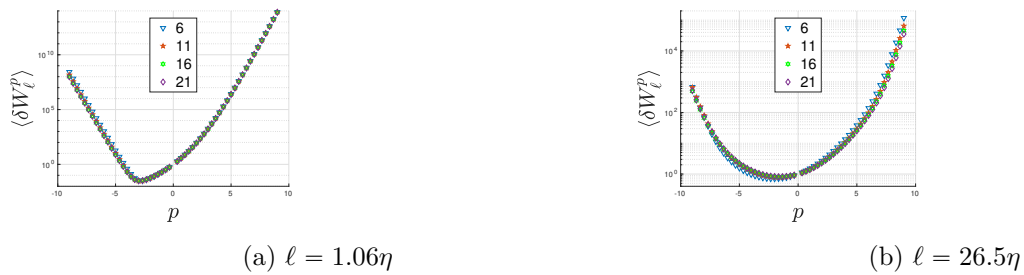
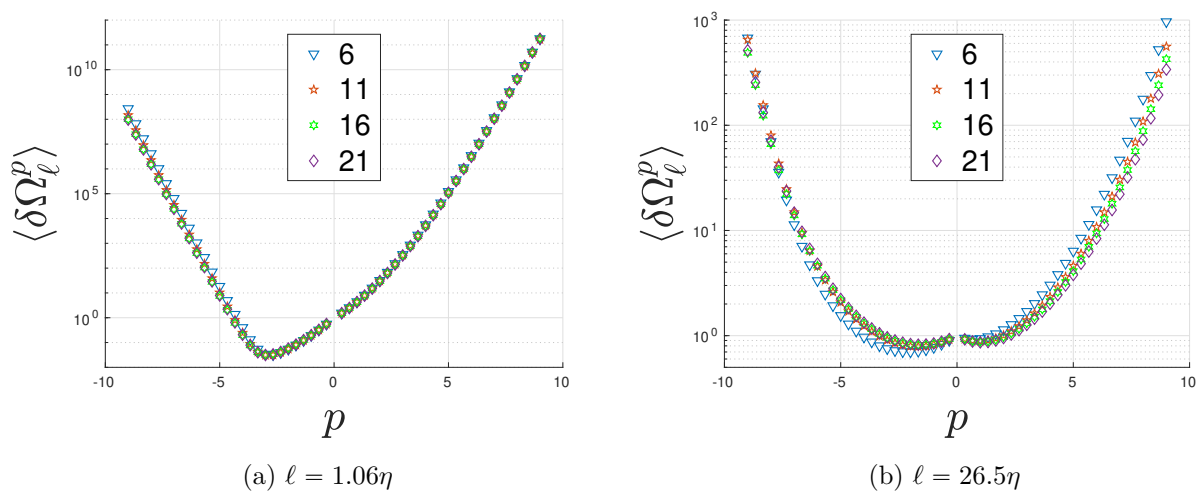


FIGURE 6.1 – Étude de convergence des quantités moyennes de la DNS pour les 8 échelles ( $l_1 < l_2 < \dots < l_8$ ) présentées sur la figure 3.20-a. Le calcul utilise 6, 11, 16 ou 21 champs de vitesse instantané.

## 6.2 Étude de la convergence statistique des données DNS

Les simulations numériques de la table 2.22 représentent 21 champs de vitesse décorréés de  $3 \cdot 10^8$  points chacun. Afin d'évaluer la qualité de la convergence statistique des données DNS, on calcule les moments des quantités considérées sur de plus en plus de champs. Tout d'abord, les moyennes de  $\langle \mathcal{D}_\ell^I \rangle$  et de  $\langle \mathcal{D}_\ell^V \rangle$  utilisées pour la figure 3.20-a sont bien convergées, comme on le voit sur la figure 6.1.

Concentrons nous maintenant sur les moments génériques. Dans la gamme visqueuse, pour  $\ell = 1.06\eta$  (figures 6.2-a, 6.3-a et 6.4-a), on constate que la convergence des moments est bonne pour toutes les valeurs de  $p$  puisque les moments n'évoluent presque plus lorsqu'on passe de 16 à 21 champs et les résultats pour 21 champs sont entre ceux calculés sur 11 et 16 champs. Dans la gamme inertielle, pour  $\ell = 26.5\eta$  (figures 6.2-b, 6.3-b et 6.4-b), les moments sont convergés pour les mêmes raisons jusqu'à  $p = 5$ , mais plus bien convergés au delà (pour  $p \geq 5$ ). On constate en effet que les moments de  $\delta W_\ell$  et  $\delta \Omega_\ell$  évoluent encore de manière monotone lorsqu'on augmente le nombre de champs utilisés. Ces moments étant nécessaires au calcul des exposants  $\tau(p)$ , la figure 3.24 ne montre que les exposants pour  $p \leq 5$  pour la DNS.

FIGURE 6.2 – Moments de  $|D_\ell^I|$  calculés sur 6, 11, 16 ou 21 champs instantanés.FIGURE 6.3 – Moments de  $\delta W_\ell$  calculés sur 6, 11, 16 ou 21 champs instantanés.FIGURE 6.4 – Moments de  $\delta\Omega_\ell$  calculés sur 6, 11, 16 ou 21 champs instantanés.

## 6.3 Pinçons

### 6.3.1 Propriétés remarquables

Nous utilisons la fonction  $\phi(\mathbf{x}, \gamma) = \|\mathbf{x}\| - \gamma \cdot \mathbf{x}$ . Elle vérifie les identités suivantes :

$$\nabla_{\mathbf{x}}\phi = \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} - \gamma \quad (6.3.1)$$

$$\phi = \mathbf{x} \cdot \nabla_{\mathbf{x}}\phi \quad (6.3.2)$$

$$\nabla_{\gamma}\phi = -\mathbf{x} \quad (6.3.3)$$

$$\Delta_{\mathbf{x}}(\ln(\phi)) = \frac{1 - \gamma^2}{\phi^2}. \quad (6.3.4)$$

Ainsi,  $\mathbf{v}_{\alpha}$  s'écrit aussi sous la forme :

$$\mathbf{v}_{\alpha} = -2\nabla(\ln \phi_{\alpha}) + 2\mathbf{x}\Delta \ln(\phi_{\alpha}). \quad (6.3.5)$$

Une telle écriture nous permet de vérifier rapidement que le champ  $\mathbf{v}_{\alpha}$  est à divergence nulle partout sauf en  $x = 0$ , où il n'est pas défini.

### 6.3.2 Calcul du moment généralisé

Par définition, on a :

$$\mathbf{\Pi}_{\alpha} = \frac{1}{4\pi} \oint_{S_{\mathbf{x}_{\alpha}}} \mathbf{v}_{\alpha} dS, \quad (6.3.6)$$

avec  $S_{\mathbf{x}_{\alpha}}$  la sphère de rayon 1 centrée en  $\mathbf{x}_{\alpha}$ . L'intégration n'est faite que sur la surface de la sphère. En utilisant les coordonnées cylindriques s'organisant autour de l'axe  $\boldsymbol{\gamma}_{\alpha}$ ,  $\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\alpha} = (\cos \psi \sin \theta, \sin \psi \sin \theta, \cos \theta)$ , on remarque que la seule composante non nulle est portée par la direction de  $\boldsymbol{\gamma}_{\alpha}$ , et respecte  $\langle \mathbf{x} - \mathbf{x}_{\alpha} \rangle_{\psi} = (0, 0, \cos \theta)$ . En remarquant que  $\cos \theta = (1 - \phi_{\alpha})/\gamma$  avec  $\gamma = \|\boldsymbol{\gamma}_{\alpha}\|$ , on obtient la moyenne angulaire suivante pour  $\mathbf{v}_{\alpha}$  :

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{v}_{\alpha} \rangle_{\psi} &= (0, 0, C); \\ C &= \frac{2\gamma}{\phi} - \frac{2(1 - \phi)}{\gamma\phi} + 2\frac{(1 - \gamma^2)(1 - \phi)}{\gamma\phi^2}. \end{aligned}$$

Nous avons supprimé les indices  $\alpha$  pour la lisibilité. Le changement de variable  $y = \cos \theta$  nous permet d'intégrer sur l'angle  $\theta$  et donne pour  $n \geq 0$  :

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{1}{\phi^{n+1}} \right\rangle_{\theta} &= \int \frac{\sin \theta}{\phi^{n+1}} d\theta; \\ &= \int_{-1}^1 \frac{dy}{(1 - \gamma y)^{n+1}} \\ &= \frac{1}{n\gamma} \left( \frac{1}{(1 - \gamma)^n} - \frac{1}{(1 + \gamma)^n} \right), \end{aligned}$$

en prenant la convention que  $1/nx^n = \ln(x)$  pour  $n = 0$ . La somme des termes nous donne l'équation (4.2.11).

### 6.3.3 Tenseur des gradients de vitesse du pinçon

$$\begin{aligned}
\nabla \mathbf{U} &= \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right)_{i,j} \\
&= -\frac{2}{\phi} \left[ \left( \boldsymbol{\gamma} - \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} + 2 \frac{(1-\gamma^2)}{\phi} \mathbf{x} \right) \otimes \frac{\nabla \phi}{\phi} + \left( \frac{1}{\|\mathbf{x}\|} - \frac{1-\gamma^2}{\phi} \right) \mathbb{I} - \frac{\mathbf{x} \otimes \mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^3} \right] \\
&= -\frac{2}{\phi^2} \left[ -\boldsymbol{\gamma} \otimes \boldsymbol{\gamma} + \frac{(3\gamma \cos(\theta) - \gamma^2(2 + \cos^2(\theta)))}{(1 - \gamma \cos(\theta))} \frac{\mathbf{x} \otimes \mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^2} + \frac{\boldsymbol{\gamma} \otimes \mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} \right. \\
&\quad \left. - \frac{(\gamma \cos(\theta) + 1 - 2\gamma^2)}{(1 - \gamma \cos(\theta))} \frac{\mathbf{x} \otimes \boldsymbol{\gamma}}{\|\mathbf{x}\|} - \gamma (\cos(\theta) - \gamma) \mathbb{I} \right]
\end{aligned}$$

avec  $\cos(\theta) = (\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{x})/(\gamma\|\mathbf{x}\|)$ .

### 6.3.4 Dynamique des vortons

Nous recopions ici l'équation de la dynamique vortons de Novikov [108] (1983) :

$$\dot{\mathbf{x}}_\alpha = -\frac{1}{4\pi} \sum_{\beta \neq \alpha} \frac{\mathbf{r}_{\alpha\beta} \times \boldsymbol{\gamma}_\beta}{\|\mathbf{r}_{\alpha\beta}\|^3} \quad (6.3.7)$$

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha = -\frac{1}{4\pi} \sum_{\beta \neq \alpha} \left[ \frac{\boldsymbol{\gamma}_\alpha \times \boldsymbol{\gamma}_\beta}{\|\mathbf{r}_{\alpha\beta}\|^3} - 3(\boldsymbol{\gamma}_\alpha \cdot \mathbf{r}_{\alpha\beta}) \frac{(\mathbf{r}_{\alpha\beta} \times \boldsymbol{\gamma}_\beta)}{\|\mathbf{r}_{\alpha\beta}\|^5} \right]. \quad (6.3.8)$$





# Bibliographie

- [1] M. J. AKSMAN, E. A. NOVIKOV and S. A. ORSZAG. Vorton method in three-dimensional hydrodynamics. *Phys. Rev. Lett.*, 54 :2410–2413, Jun 1985. doi : 10.1103/PhysRevLett.54.2410. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.54.2410>. (Cité page 122).
- [2] A. J. Q. ALKEMADE, F. T. M. NIEUWSTADT and E. van GROESEN. The vorton method. *Applied Scientific Research*, 51(1) :3–7, 1993. doi : 10.1007/BF01082505. URL <https://doi.org/10.1007/BF01082505>. (Cité page 122).
- [3] A. ARNEODO, R. BENZI, J. BERG, L. BIFERALE, E. BODENSCHATZ, A. BUSSE, E. CALZAVARINI, B. CASTAING, M. CENCINI, L. CHEVILLARD, R. T. FISHER, R. GRAUER, H. HOMANN, D. LAMB, A. S. LANOTTE, E. LÉVÈQUE, B. LÜTHI, J. MANN, N. MORDANT, W.-C. MÜLLER, S. OTT, N. T. OUELLETTE, J.-F. PINTON, S. B. POPE, S. G. ROUX, F. TOSCHI, H. XU and P. K. YEUNG. Universal intermittent properties of particle trajectories in highly turbulent flows. *Phys. Rev. Lett.*, 100 :254504, Jun 2008. doi : 10.1103/PhysRevLett.100.254504. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.100.254504>. (Cité page 91).
- [4] S. BALAY, S. ABHYANKAR, M. F. ADAMS, J. BROWN, P. BRUNE, K. BUSCHELMAN, V. EIJKHOUT, W. D. GROPP, D. KAUSHIK, M. G. KNEPLEY, L. C. MCINNES, K. RUPP, B. F. SMITH and H. ZHANG. PETSc users manual. Technical Report ANL-95/11 - Revision 3.5, Argonne National Laboratory, 2014. (Cité page 10).
- [5] S. BALAY, S. ABHYANKAR, M. F. ADAMS, J. BROWN, P. BRUNE, K. BUSCHELMAN, L. DALCIN, A. DENER, V. EIJKHOUT, W. D. GROPP, D. KAUSHIK, M. G. KNEPLEY, D. A. MAY, L. C. MCINNES, R. T. MILLS, T. MUNSON, K. RUPP, P. SANAN, B. F. SMITH, S. ZAMPINI, H. ZHANG and H. ZHANG. PETSc Web page, 2020. <https://www.mcs.anl.gov/petsc>. (Cité page 14).
- [6] G. BATCHELOR. . In *An introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge University Press, 2000. (Cité page 124).
- [7] G. K. BATCHELOR and A. A. TOWNSEND. The nature of turbulent motion at large wave-numbers. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 199(1057) : 238–255, 1949. doi : 10.1098/rspa.1949.0136. URL <https://royalsocietypublishing.org/doi/abs/10.1098/rspa.1949.0136>. (Cité pages 91 et 92).
- [8] P. BENARD, A. VIRÉ, V. MOUREAU, G. LARTIGUE, L. BEAUDET, P. DEGLAIRE and L. BRICTEUX. Large-Eddy Simulation of wind turbines wakes including geometrical effects. *Computers & Fluids*, 173 :133 – 139, 2018. (Cité page 43).
- [9] R. BENZI, S. CILIBERTO, R. TRIPICCIONE, C. BAUDET, F. MASSAIOLI and S. SUCCI. Extended self-similarity in turbulent flows. *Phys. Rev. E*, 48 :R29–R32, Jul 1993. doi : 10.1103/PhysRevE.48.R29. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.48.R29>. (Cité page 88).
- [10] L. BIFERALE, G. BOFFETTA, A. CELANI, B. J. DEVENISH, A. LANOTTE and F. TOSCHI. Multifractal statistics of lagrangian velocity and acceleration in turbulence. *Phys. Rev. Lett.*, 93 :064502, Aug 2004. doi : 10.1103/PhysRevLett.93.064502. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.93.064502>. (Cité page 91).
- [11] T. BOHR and D. RAND. The entropy function for characteristic exponents. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 25(1-3) :387–398, 1987. (Cité page 89).
- [12] D. BUARIA, A. PUMIR, E. BODENSCHATZ and P. K. YEUNG. Extreme velocity gradients in turbulent flows. *New Journal of Physics*, 21(4) :043004, apr 2019. doi : 10.1088/1367-2630/ab0756. URL <https://doi.org/10.1088/1367-2630/ab0756>. (Cité page 109).

- [13] T. BUCKMASTER, C. DE LELLIS, L. SZÉKELYHIDI and V. VICOL. Onsager’s conjecture for admissible weak solutions. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 0(0), 2018. doi : 10.1002/cpa.21781. URL <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/cpa.21781>. (Cité page 121).
- [14] Y. BURNISHEV and V. STEINBERG. Torque and pressure fluctuations in turbulent von Karman swirling flow between two counter-rotating disks. i. *Physics of Fluids*, 26(5) :055102, 2014. doi : 10.1063/1.4873201. (Cité page 43).
- [15] L. CAFFARELLI, R. KOHN and L. NIRENBERG. Partial regularity of suitable weak solutions of the Navier-Stokes equations. *Comm. Pure Appl. Math.*, 35(6) :771–831, 1982. (Cité page 16).
- [16] F. CALOGERO. Motion of poles and zeros of special solutions of nonlinear and linear partial differential equations and related solvable many-body problems. *Il Nuovo Cimento B (1971-1996)*, 43(2) :177–241, 1978. doi : 10.1007/BF02721013. URL <https://doi.org/10.1007/BF02721013>. (Cité page 129).
- [17] F. CALOGERO. Classical many-body problems amenable to exact treatments. In *Lecture Notes in Physics*, volume 66. Springer Berlin, 2001. (Cité page 129).
- [18] M. CANNONE and G. KARCH. Smooth or singular solutions to the navier–stokes system? *Journal of Differential Equations*, 197(2) :247–274, 2004. ISSN 0022-0396. doi : <https://doi.org/10.1016/j.jde.2003.10.003>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022039603002894>. (Cité page 124).
- [19] L. CAPPANERA, J.-L. GUERMOND, J. LÉORAT and C. NORE. Two spinning ways for precession dynamo. *Physical Review E*, 93(4) :043113, 2016. (Cité page 16).
- [20] L. CAPPANERA, P. DEBUE, H. FALLER, D. KUZAY, E.-W. SAW, C. NORE, J.-L. GUERMOND, F. DAVIAUD, C. WIERTEL-GASQUET and B. DUBRULLE. Turbulence in realistic geometries with moving boundaries : When simulations meet experiments. *Computers & Fluids*, 214 :104750, 2021. ISSN 0045-7930. doi : <https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2020.104750>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045793020303200>. (Cité pages v et 42).
- [21] C. CARSTENSEN and S. A. FUNKEN. Constants in élément-interpolation error and residual based a posteriori estimates in finite element methods. *East-West Journal of Numerical Mathematics*, 8.3 :153–175, 2000. (Cité page 18).
- [22] B. CASTAING, Y. GAGNE and E. HOPFINGER. Velocity probability density functions of high Reynolds number turbulence. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 46(2) :177 – 200, 1990. ISSN 0167-2789. doi : [https://doi.org/10.1016/0167-2789\(90\)90035-N](https://doi.org/10.1016/0167-2789(90)90035-N). URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/016727899090035N>. (Cité page 102).
- [23] B. CASTAING, Y. GAGNE and M. MARCHAND. Log-similarity for turbulent flows? *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 68(3) :387 – 400, 1993. ISSN 0167-2789. doi : [https://doi.org/10.1016/0167-2789\(93\)90132-K](https://doi.org/10.1016/0167-2789(93)90132-K). URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/016727899390132K>. (Cité pages 79, 80, 83, 85, 87, et 103).
- [24] CASTAING, B.. Conséquences d’un principe d’extremum en turbulence. *J. Phys. France*, 50(2) : 147–156, 1989. doi : 10.1051/jphys:01989005002014700. URL <https://doi.org/10.1051/jphys:01989005002014700>. (Cité page 83).
- [25] P. CHAINAIS, P. ABRY and J.-F. PINTON. Intermittency and coherent structures in a swirling flow : A wavelet analysis of joint pressure and velocity measurements. *Physics of Fluids*, 11(11) :3524–3539, 1999. doi : 10.1063/1.870210. URL <https://doi.org/10.1063/1.870210>. (Cité page 92).
- [26] A. J. CHORIN. Equilibrium statistics of a vortex filament with applications. *Comm. Math. Phys.*, 141(3) : 619–631, 1991. URL <https://projecteuclid.org:443/euclid.cmp/1104248398>. (Cité page 121).

- [27] P. CONSTANTIN and A. MAJDA. The beltrami spectrum for incompressible fluid flows. *Communications in Mathematical Physics*, 115(3) :435–456, 1988. doi : 10.1007/BF01218019. URL <https://doi.org/10.1007/BF01218019>. (Cit e page 121).
- [28] P. CONSTANTIN, E. WEINAN and E. S. TITI. Onsager’s conjecture on the energy conservation for solutions of euler’s equation. *Communications in Mathematical Physics*, 165(1) :207–209, Oct 1994. ISSN 1432-0916. doi : 10.1007/BF02099744. URL <https://doi.org/10.1007/BF02099744>. (Cit e page 121).
- [29] R. COURANT, K. O. FRIEDRICHS and F. H. LEWY. Über die partiellen differenzgleichungen der mathematischen physik. *Mathematische Annalen*, 100 :32–74, 1928. doi : doi:10.1007/BF01448839. URL <https://doi.org/10.1007/BF01448839>. (Cit e page 13).
- [30] C. F. CURTISS and J. O. HIRSCHFELDER. Integration of stiff equations. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 38(3) :235–243, 1952. ISSN 0027-8424. doi : 10.1073/pnas.38.3.235. URL <https://www.pnas.org/content/38/3/235>. (Cit e pages 9 et 20).
- [31] P. DEBUE. *Experimental approach to the problem of the Navier-Stokes singularities*. Thesis, Universit  Paris-Saclay, Sept. 2019. URL <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-02420454>. (Cit e pages 39, 41, 73, 95, et 107).
- [32] P. DEBUE, V. SHUKLA, D. KUZZAY, D. FARANDA, E.-W. SAW, F. DAVIAUD and B. DUBRULLE. Dissipation, intermittency, and singularities in incompressible turbulent flows. *Phys. Rev. E*, 97 :053101, May 2018. doi : 10.1103/PhysRevE.97.053101. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.97.053101>. (Cit e pages 38, 41, 77, 93, 101, 102, et 105).
- [33] P. DEBUE, V. VALORI, C. CUVIER, F. DAVIAUD, J.-M. FOUCAUT, J.-P. LAVAL, C. WIERTEL, V. PADILLA and B. DUBRULLE. Three-dimensional analysis of precursors to non-viscous dissipation in an experimental turbulent flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 914 :A9, 2021. doi : 10.1017/jfm.2020.574. (Cit e pages 107 et 130).
- [34] A. DELAFOSSSE, A. LINE, J. MORCHAIN and P. GUIRAUD. LES and URANS simulations of hydrodynamics in mixing tank : comparison to PIV experiments. *Chemical Engineering Research and Design*, 86(12) : 1322–1330, 2008. (Cit e page 60).
- [35] C. R. DOERING and C. FOIAS. Energy dissipation in body-forced turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, 467 :289–306, 2002. doi : 10.1017/S0022112002001386. (Cit e pages 55, 67, et 68).
- [36] B. DUBRULLE. Intermittency in fully developed turbulence : Log-poisson statistics and generalized scale covariance. *Phys. Rev. Lett.*, 73 :959–962, Aug 1994. doi : 10.1103/PhysRevLett.73.959. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.73.959>. (Cit e page 93).
- [37] B. DUBRULLE. Beyond kolmogorov cascades. *Journal of Fluid Mechanics*, 867 :P1, 2019. doi : 10.1017/jfm.2019.98. (Cit e 13 fois).
- [38] J. DUCHON and R. ROBERT. Inertial energy dissipation for weak solutions of incompressible Euler and Navier-Stokes equations. *Nonlinearity*, 13(1) :249–255, 2000. ISSN 0951-7715. (Cit e pages 73, 77, et 147).
- [39] A. ERN and J.-L. GUERMOND. *Theory and practice of finite elements*, volume 159 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 2004. ISBN 0-387-20574-8. (Cit e page 18).
- [40] G. L. EYINK. Turbulence Theory. <http://www.ams.jhu.edu/~eyink/Turbulence/notes/>, 2007-2008. course notes, The Johns Hopkins University,. (Cit e pages 79 et 127).
- [41] H. FALLER, L. FERY, D. GENESTE and B. DUBRULLE. A model of interacting navier-stokes singularities. <https://arxiv.org/abs/2103.15732>, 2021. (Cit e pages v et 121).

- [42] H. FALLER, D. GENESTE, T. CHAABO, A. CHEMINET, V. VALORI, Y. OSTOVAN, L. CAPPANERA, C. CUVIER, F. DAVIAUD, J.-M. FOUCAUT and et AL.. On the nature of intermittency in a turbulent von kármán flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 914 :A2, 2021. doi : 10.1017/jfm.2020.908. (Cité pages v et 91).
- [43] M. FARGE. Wavelet transforms and their applications to turbulence. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 24(1) :395–458, 1992. doi : 10.1146/annurev.fl.24.010192.002143. URL <https://doi.org/10.1146/annurev.fl.24.010192.002143>. (Cité page 77).
- [44] C. L. FEFFERMAN. Existence and smoothness of the navier-stokes equation. <http://www.claymath.org/millennium-problems/navier%E2%80%93stokes-equation>, 2000. (Cité page 4).
- [45] M. FRIGO. A fast Fourier transform compiler. *SIGPLAN Not.*, 34(5) :169–180, May 1999. ISSN 0362-1340. doi : 10.1145/301631.301661. URL <https://doi.org/10.1145/301631.301661>. (Cité page 14).
- [46] M. FRIGO and S. G. JOHNSON. FFTW : An adaptive software architecture for the FFT. In *Proc. 1998 IEEE Intl. Conf. Acoustics Speech and Signal Processing*, volume 3, pages 1381–1384. IEEE, 1998. (Cité page 14).
- [47] U. FRISCH. *Turbulence : The Legacy of A. N. Kolmogorov*. Cambridge University Press, 1995. ISBN 9781139935975. (Cité pages 4, 84, et 119).
- [48] U. FRISCH and G. PARISI. On the singularity structure of fully developed turbulence. In M. GIL, R. BENZI and G. PARISI, editors, *Turbulence and Predictability in Geophysical Fluid Dynamics and Climate Dynamics*, pages 84–88, Amsterdam, North-Holland, 1985. Elsevier. (Cité pages 79 et 94).
- [49] U. FRISCH and M. VERGASSOLA. A prediction of the multifractal model : the intermediate dissipation range. *Europhysics Letters (EPL)*, 14(5) :439–444, mar 1991. doi : 10.1209/0295-5075/14/5/009. URL <https://doi.org/10.1209/0295-5075/14/5/009>. (Cité pages 80, 81, 82, 83, et 102).
- [50] C. F. GAUSS. *Methodus nova integralium valores per approximationem inveniendi*. H. Dietrich, Gottingae, 1815. (Cité page 8).
- [51] D. GENESTE, H. FALLER, F. NGUYEN, V. SHUKLA, J.-P. LAVAL, F. DAVIAUD, E.-W. SAW and B. DUBRULLE. About universality and thermodynamics of turbulence. *Entropy*, 21(3), 2019. ISSN 1099-4300. doi : 10.3390/e21030326. URL <https://www.mdpi.com/1099-4300/21/3/326>. (Cité pages v et 79).
- [52] J. D. GIBBON, N. PAL, A. GUPTA and R. PANDIT. Regularity criterion for solutions of the three-dimensional cahn-hilliard-navier-stokes equations and associated computations. *Phys. Rev. E*, 94 :063103, Dec 2016. doi : 10.1103/PhysRevE.94.063103. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.94.063103>. (Cité page 121).
- [53] A. D. GILBERT. A cascade interpretation of lundgren stretched spiral vortex model for turbulent fine structure. *Physics of Fluids A : Fluid Dynamics*, 5(11) :2831–2834, 1993. doi : 10.1063/1.858746. URL <https://doi.org/10.1063/1.858746>. (Cité page 121).
- [54] C. GREENGARD and E. THOMANN. Singular vortex systems and weak solutions of the euler equations. *The Physics of Fluids*, 31(10) :2810–2813, 1988. doi : 10.1063/1.866988. URL <https://aip.scitation.org/doi/abs/10.1063/1.866988>. (Cité page 122).
- [55] J. GUERMOND, J. ODEN and S. PRUDHOMME. An interpretation of the navier–stokes-alpha model as a frame-indifferent leray regularization, 2003. ISSN 0167-2789. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0167278902007480>. (Cité page 74).
- [56] J.-L. GUERMOND and J. SHEN. On the error estimates for the rotational pressure-correction projection methods. *Journal : Math. Comp.* 73 (2004), 1719–1737, 2004. doi : <https://doi.org/10.1090/S0025-5718-03-01621-1>. (Cité page 10).

- [57] J.-L. GUERMOND, A. MARRA and L. QUARTAPELLE. Subgrid stabilized projection method for 2D unsteady flows at high Reynolds number. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195, 2006. (Cité pages 15 et 60).
- [58] J.-L. GUERMOND, R. PASQUETTI and B. POPOV. Entropy viscosity method for nonlinear conservation laws. *J. Comput. Phys.*, 230(11) :4248–4267, 2011. (Cité pages 15 et 60).
- [59] J.-L. GUERMOND, R. PASQUETTI and B. POPOV. From suitable weak solutions to entropy viscosity. *Journal of Scientific Computing*, 49(1) :35–50, 2011. (Cité pages 15 et 60).
- [60] S. E. HAALAND. Simple and Explicit Formulas for the Friction Factor in Turbulent Pipe Flow. *Journal of Fluids Engineering*, 105(1) :89–90, 03 1983. ISSN 0098-2202. doi : 10.1115/1.3240948. URL <https://doi.org/10.1115/1.3240948>. (Cité page 67).
- [61] W. HICKS. Researches in vortex motion. part iii. on spiral or gyrostatic vortex aggregates. *Proceedings of the Royal Society of London*, 62 :379387, 1899. (Cité page 121).
- [62] T. ISHIHARA, T. GOTOH and Y. KANEDA. Study of high-reynolds number isotropic turbulence by direct numerical simulation. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 41(1) :165–180, 2009. doi : 10.1146/annurev.fluid.010908.165203. URL <https://doi.org/10.1146/annurev.fluid.010908.165203>. (Cité page 42).
- [63] K. P. IYER, J. SCHUMACHER, K. R. SREENIVASAN and P. K. YEUNG. Scaling of locally averaged energy dissipation and enstrophy density in isotropic turbulence. *New Journal of Physics*, 21(3) :033016, mar 2019. doi : 10.1088/1367-2630/ab05e8. URL <https://doi.org/10.1088/1367-2630/ab05e8>. (Cité page 109).
- [64] A. JACKSON, A. SHEYKO, P. MARTI, A. TILGNER, D. CÉBRON, S. VANTIEGHEM, R. SIMITEV, F. BUSSE, X. ZHAN, G. SCHUBERT, S. TAKEHIRO, Y. SASAKI, Y.-Y. HAYASHI, A. RIBEIRO, C. NORE and J.-L. GUERMOND. A spherical shell numerical dynamo benchmark with pseudo-vacuum magnetic boundary conditions. *Geophysical Journal International*, 196(2) :712–723, 11 2013. ISSN 0956-540X. doi : 10.1093/gji/ggt425. URL <https://doi.org/10.1093/gji/ggt425>. (Cité page 14).
- [65] C. JORDAN. *Analyse mathématique - Sur la série de Fourier. Note de M. Camille Jordan. Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*, 92 :228, 1881. (Cité page 9).
- [66] Y. KANEDA, T. ISHIHARA, K. MORISHITA, M. YOKOKAWA and A. UNO. Statistics of local reynolds number in box turbulence : ratio of inertial to viscous forces. *Journal of Fluid Mechanics*, 929 :A1, 2021. doi : 10.1017/jfm.2021.806. (Cité page 42).
- [67] G. KARYPIS and V. KUMAR. A fast and high quality multilevel scheme for partitioning irregular graphs. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 20(1) :359–392, 1998. (Cité page 10).
- [68] R. M. KERR and F. HUSSAIN. Simulation of vortex reconnection. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 37 (1) :474–484, 1989. ISSN 0167-2789. doi : [https://doi.org/10.1016/0167-2789\(89\)90151-6](https://doi.org/10.1016/0167-2789(89)90151-6). URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0167278989901516>. (Cité page 130).
- [69] P. KESTENER and A. ARNEODO. Generalizing the wavelet-based multifractal formalism to vector-valued random fields : application to turbulent velocity and vorticity 3D numerical data. *Phys. Rev. Lett*, 93(4), July 2004. (Cité page 92).
- [70] Y. KIMURA and H. K. MOFFATT. Scaling properties towards vortex reconnection under biot-savart evolution. *Fluid Dynamics Research*, 50(1) :011409, dec 2017. doi : 10.1088/1873-7005/aa710c. URL <https://doi.org/10.1088/1873-7005/aa710c>. (Cité page 130).
- [71] Y. KIMURA and H. K. MOFFATT. A tent model of vortex reconnection under biot-savart evolution. *Journal of Fluid Mechanics*, 834 :R1, 2018. doi : 10.1017/jfm.2017.769. (Cité page 130).



- [72] L. V. KING and H. T. BARNES. On the convection of heat from small cylinders in a stream of fluid : Determination of the convection constants of small platinum wires, with applications to hot-wire anemometry. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, 90(622) :563–570, 1914. doi : 10.1098/rspa.1914.0089. URL <https://royalsocietypublishing.org/doi/abs/10.1098/rspa.1914.0089>. (Cit e pages 37 et 80).
- [73] A. KOLMOGOROV. The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds numbers, translated from the russian by v. levin in 1991, turbulence and stochastic processes : Kolmogorov’s ideas 50 years on. *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*, 434(1890) :9–13, 1941. ISSN 0962-8444. (Cit e pages 71, 79, 80, 84, 91, 93, 101, et 107).
- [74] A. N. KOLMOGOROV. A refinement of previous hypotheses concerning the local structure of turbulence in a viscous incompressible fluid at high reynolds number. *J. Fluid Mech.*, 13 :82, 1962. (Cit e pages 79, 81, 83, 84, 85, 87, 88, 92, 93, et 107).
- [75] D. J. KORTEWEG and G. DE VRIES. Xli. on the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 39(240) :422–443, 1895. (Cit e page 129).
- [76] R. H. KRAICHNAN. Remarks on turbulence theory. *Advances in Mathematics*, 16(3) :305 – 331, 1975. ISSN 0001-8708. doi : [https://doi.org/10.1016/0001-8708\(75\)90116-4](https://doi.org/10.1016/0001-8708(75)90116-4). URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0001870875901164>. (Cit e pages 92 et 93).
- [77] S. KREUZAHLER, D. SCHULZ, H. HOMANN, Y. PONTY and R. GRAUER. Numerical study of impeller-driven von K arm an flows via a volume penalization method. *New Journal of Physics*, 16(10) :103001, 2014. (Cit e page 33).
- [78] M. D. KRUSKAL. The Korteweg-de Vries equation and related evolution equations. In *In : Nonlinear wave motion. (A75-14987 04-70) Providence*, pages 61–83, Jan. 1974. (Cit e page 129).
- [79] D. KUZAY, D. FARANDA and B. DUBRULLE. Global vs local energy dissipation : The energy cycle of the turbulent von K arm an flow. *Physics of Fluids*, 27 :075105, 2015. (Cit e page 97).
- [80] R. LABB E, J. PINTON and S. FAUVE. Study of the von K arm an flow between coaxial corotating disks. *Physics of Fluids*, 8(4) :914–922, 1996. (Cit e page 33).
- [81] A. LAMBERT. D’apr es l’aricle en allemand de de a. wangerin : Fonctions cylindriques ou fonctions de Bessel. 52. Equation diff erentielle. S eries et int egrales relatives aux fonctions de premi ere esp ece, 1912. URL <https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k2025854/f215.item>. (Citée page 74).
- [82] L. D. LANDAU. A new exact solution of the Navier-Stokes equations. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 44 :311314, 1944. (Citée page 124).
- [83] J.-P. LAVAL, B. DUBRULLE and S. NAZARENKO. Fast numerical simulations of 2d turbulence using a dynamic model for subfilter motions. *Journal of Computational Physics*, 196(1) :184–207, 2004. ISSN 0021-9991. doi : <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2003.10.022>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S002199910300593X>. (Cit e page 142).
- [84] J. LERAY. Sur le mouvement d’un liquide visqueux emplissant l’espace. *Acta Math.*, 63 :193248, 1934. (Cit e pages 121, 123, 132, et 139).
- [85] H. R. LEWIS and P. M. BELLAN. Physical constraints on the coefficients of fourier expansions in cylindrical coordinates. *Journal of Mathematical Physics*, 31(11) :2592–2596, 1990. doi : 10.1063/1.529009. URL <https://doi.org/10.1063/1.529009>. (Cit e page 11).
- [86] Y. LI, C. MENEVEAU, S. CHEN and G. L. EYINK. Subgrid-scale modeling of helicity and energy dissipation in helical turbulence. *Physical Review E*, 74(2) :026310, 2006. (Cit e page 60).

- [87] T. S. LUNDGREN. Strained spiral vortex model for turbulent fine structure. *The Physics of Fluids*, 25 (12) :2193–2203, 1982. doi : 10.1063/1.863957. URL <https://aip.scitation.org/doi/abs/10.1063/1.863957>. (Cité page 121).
- [88] G. LUO and T. Y. HOU. Potentially singular solutions of the 3d axisymmetric euler equations. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 111(36) :12968–12973, Aug 2014. ISSN 1091-6490. doi : 10.1073/pnas.1405238111. URL <http://dx.doi.org/10.1073/pnas.1405238111>. (Cité page 108).
- [89] A.-A. MAILYBAEV. Continuous representation for shell models of turbulence. *Nonlinearity*, 28(7) :2497–2514, jun 2015. doi : 10.1088/0951-7715/28/7/2497. URL <https://doi.org/10.1088/0951-7715/28/7/2497>. (Cité page 108).
- [90] L. MARIÉ. *Angular momentum and magnetic field transport in a turbulent swirling flow : influence of rotation*. Theses, Université Paris-Diderot - Paris VII, Sept. 2003. URL <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00007755>. (Cité page 43).
- [91] L. MARIE and F. DAVIAUD. Experimental measurement of the scale-by-scale momentum transport budget in a turbulent shear flow. *Physics of Fluids*, 16(2) :457–461, 2004. doi : <https://doi.org/10.1063/1.1637602>. URL <https://archimer.ifremer.fr/doc/00254/36475/>. (Cité pages 97 et 108).
- [92] C. MENEVEAU. Analysis of turbulence in the orthonormal wavelet representation. *Journal of Fluid Mechanics*, 232 :469–520, 1991. doi : 10.1017/S0022112091003786. (Cité page 93).
- [93] H. MOFFATT. G.K. Batchelor and the homogenization of turbulence. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 34(1) :19–35, 2002. doi : 10.1146/annurev.fluid.34.081701.134821. URL <https://doi.org/10.1146/annurev.fluid.34.081701.134821>. (Cité page 92).
- [94] H. K. MOFFATT and Y. KIMURA. Towards a finite-time singularity of the navier–stokes equations part 1. derivation and analysis of dynamical system. *Journal of Fluid Mechanics*, 861 :930–967, 2019. doi : 10.1017/jfm.2018.882. (Cité page 130).
- [95] H. K. MOFFATT and Y. KIMURA. Towards a finite-time singularity of the navier–stokes equations. part 2. vortex reconnection and singularity evasion. *Journal of Fluid Mechanics*, 870 :R1, 2019. doi : 10.1017/jfm.2019.263. (Cité page 130).
- [96] H. K. MOFFATT and Y. KIMURA. Towards a finite-time singularity of the navier–stokes equations. part 2. vortex reconnection and singularity evasion – corrigendum. *Journal of Fluid Mechanics*, 887 :E2, 2020. doi : 10.1017/jfm.2020.57. (Cité page 130).
- [97] F. MOISY and J. JIMÉNEZ. Geometry and clustering of intense structures in isotropic turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, 513 :111–133, 2004. doi : 10.1017/S0022112004009802. (Cité page 92).
- [98] R. MONCHAUX. *Statistical mechanics and dynamo action in a turbulent von Kármán flow*. Thesis, Université Paris-Diderot - Paris VII, Sept. 2007. URL <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00199751>. (Cité pages 33 et 43).
- [99] P. MONK and E. SÜLI. The adaptive computation of far-field patterns by a posteriori error estimation of linear functionals. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 36(1) :251–274, 1998. doi : 10.1137/S0036142997315172. URL <https://doi.org/10.1137/S0036142997315172>. (Cité page 18).
- [100] J. F. MUZY, E. BACRY and A. ARNEODO. Wavelets and multifractal formalism for singular signals : Application to turbulence data. *Phys. Rev. Lett.*, 67(25) :3515, 1991. (Cité pages 77, 80, et 89).
- [101] M. NAVIER. Mémoire sur les lois du mouvement des fluides. *Mémoires de l'Académie des sciences de l'Institut de France*, 6 :389–440, 1823. URL <https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k3221x/f577.item>. (Cité pages 2 et 3).

- [102] NELKIN. Multifractal scaling of velocity derivatives in turbulence. *Physical review. A, Atomic, molecular, and optical physics*, 42(12) :7226–7229, 1990. doi : doi:10.1103/physreva.42.7226. (Cité pages 109 et 115).
- [103] F. NGUYEN, J.-P. LAVAL, P. KESTENER, A. CHESKIDOV, R. SHVYDKOY and B. DUBRULLE. Local estimates of Holder exponents in turbulent vector fields. *Physical Review E*, 99, 05 2019. doi : 10.1103/PhysRevE.99.053114. (Cité pages 92 et 107).
- [104] F. NGUYEN, J.-P. LAVAL and B. DUBRULLE. Characterizing most irregular small-scale structures in turbulence using local hölder exponents. *Phys. Rev. E*, 102 :063105, Dec 2020. doi : 10.1103/PhysRevE.102.063105. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.102.063105>. (Cité page 130).
- [105] C. NORE, L. S. TUCKERMAN, O. DAUBE and S. XIN. The 1-2 mode interaction in exactly counter-rotating von kármán swirling flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 477 :51–88, 2003. doi : 10.1017/S0022112002003075. (Cité pages 34 et 62).
- [106] C. NORE, M. TARTAR, O. DAUBE and L. S. TUCKERMAN. Survey of instability thresholds of flow between exactly counter-rotating disks. *Journal of Fluid Mechanics*, 511 :45–65, 2004. doi : 10.1017/S0022112004008559. (Cité pages 62, 63, et 64).
- [107] C. NORE, L. MARTIN WITKOWSKI, E. FOUCAULT, J. PÉCHEUX, O. DAUBE and P. LE QUÉRÉ. Competition between axisymmetric and three-dimensional patterns between exactly counter-rotating disks. *Physics of Fluids*, 18(5) :054102, 2006. doi : 10.1063/1.2196090. URL <https://doi.org/10.1063/1.2196090>. (Cité page 62).
- [108] E. A. NOVIKOV. Generalized dynamics of three-dimensional vortex singularities /vortons/. *Zhurnal Eksperimentalnoi i Teoreticheskoi Fiziki*, 84 :975–981, Mar. 1983. (Cité pages 121, 130, 140, et 151).
- [109] Y. OSTOVAN, C. CUVIER, P. DEBUE, V. VALORI, A. CHEMINET, J.-M. FOUCAUT, J.-P. LAVAL, C. WIERTEL-GASQUET, P. VINCENT, B. DUBRULLE et al. 4D particle tracking velocimetry measurements in a von Kármán turbulence experiment. *ISPIV conference*, 2019. (Cité page 39).
- [110] N. T. OUELLETTE, H. XU, M. BOURGOIN and E. BODENSCHATZ. Small-scale anisotropy in lagrangian turbulence. *New Journal of Physics*, 8(6) :102–102, jun 2006. doi : 10.1088/1367-2630/8/6/102. URL <https://doi.org/10.1088%2F1367-2630%2F8%2F6%2F102>. (Cité page 94).
- [111] G. PALADIN and A. VULPIANI. Anomalous scaling laws in multifractal objects. *Phys. Reports*, 156(4) : 147–225, 1987. (Cité pages 79, 82, 109, et 115).
- [112] J. PARET and P. TABELING. Intermittency in the two-dimensional inverse cascade of energy : Experimental observations. *Physics of Fluids*, 10(12) :3126–3136, 1998. doi : 10.1063/1.869840. URL <https://doi.org/10.1063/1.869840>. (Cité page 92).
- [113] R. PASQUETTI, R. BWEMBA and L. COUSIN. A pseudo-penalization method for high Reynolds number unsteady flows. *Appl. Numer. Math.*, 58(7) :946–954, July 2008. (Cité pages 17, 18, et 20).
- [114] R. PASQUETTI, R.-J. BWEMBA and L. COUSIN. A pseudo-penalization method for high reynolds number unsteady flows. *Applied Numerical Mathematics*, 58(7) :946–954, 2008. ISSN 0168-9274. doi : <https://doi.org/10.1016/j.apnum.2007.04.011>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0168927407000815>. Spectral Methods in Computational Fluid Dynamics. (Cité page 11).
- [115] G. PEDRIZZETTI. Insight into singular vortex flows. *Fluid Dynamics Research*, 10(2) :101–115, aug 1992. doi : 10.1016/0169-5983(92)90011-k. URL [https://doi.org/10.1016/0169-5983\(92\)90011-k](https://doi.org/10.1016/0169-5983(92)90011-k). (Cité pages 122 et 130).
- [116] A. POSA, A. LIPPOLIS, R. VERZICCO and E. BALARAS. Large-eddy simulations in mixed-flow pumps using an immersed-boundary method. *Computers & Fluids*, 47(1) :33 – 43, 2011. (Cité page 43).



- [117] Z. QIN, H. FALLER, B. DUBRULLE, A. NASO and W. J. T. BOS. Transition from non-swirling to swirling axisymmetric turbulence. *Phys. Rev. Fluids*, 5 :064602, Jun 2020. doi : 10.1103/PhysRevFluids.5.064602. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevFluids.5.064602>. (Cité page v).
- [118] M. RABAUD. Notes de cours d'hydrodynamique. [http://www.fast.u-psud.fr/~rabaud/NotesCoursL3\\_FIP.pdf](http://www.fast.u-psud.fr/~rabaud/NotesCoursL3_FIP.pdf), 2016-2017. Notes de cours de Licence 3, formation interuniversitaire de physique. (Cité page 3).
- [119] F. RAVELET. *Bifurcations globales hydrodynamiques et magnétohydrodynamiques dans un écoulement de von Kármán turbulent*. PhD thesis, Ecole Polytechnique X, 2005. (Cité pages 43 et 64).
- [120] F. RAVELET, A. CHIFFAUDEL, F. DAVIAUD and J. LÉORAT. Towards an experimental von Kármán dynamo : numerical studies for an optimized design. *Phys. Fluids*, 17 :117104, 2005. (Cité pages 43 et 57).
- [121] F. RAVELET, L. MARIE, A. CHIFFAUDEL and F. DAVIAUD. Multistability and memory effect in a highly turbulent flow : Experimental evidence for a global bifurcation. *Physical Review Letters*, 93(16), Oct 15 2004. (Cité pages 33, 37, 43, et 53).
- [122] F. RAVELET, A. CHIFFAUDEL and F. DAVIAUD. Supercritical transition to turbulence in an inertially driven von Kármán closed flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 601 :339–364, APR 25 2008. (Cité pages 33, 37, 55, 59, et 97).
- [123] A. RINALDO, A. MARITAN, F. COLAIORI, A. FLAMMINI, R. RIGON, I. RODRIGUEZ-ITURBE and J. R. BANAVAR. Thermodynamics of fractal networks. *Physical review letters*, 76(18) :3364, 1996. (Cité page 89).
- [124] B. ROUSSET, P. BONNAY, P. DIRIBARNE, A. GIRARD, J. M. PONCET, E. HERBERT, J. SALORT, C. BAUDET, B. CASTAING, L. CHEVILLARD, F. DAVIAUD, B. DUBRULLE, Y. GAGNE, M. GIBERT, B. H BRAL, T. LEHNER, P.-E. ROCHE, B. SAINT-MICHEL and M. BON MARDION. Superfluid high reynolds von kármán experiment. *Review of Scientific Instruments*, 85(10) :103908, 2014. (Cité page 33).
- [125] P. G. SAFFMAN and D. I. MEIRON. Difficulties with three-dimensional weak solutions for inviscid incompressible flow. *The Physics of Fluids*, 29(8) :2373–2375, 1986. doi : 10.1063/1.865529. URL <https://aip.scitation.org/doi/abs/10.1063/1.865529>. (Cité page 122).
- [126] B. SAINT-MICHEL, B. DUBRULLE, L. MARI , F. RAVELET and F. DAVIAUD. Influence of Reynolds number and forcing type in a turbulent von Kármán flow. *New Journal of Physics*, 16(6) :063037, jun 2014. (Cité page 33).
- [127] B. SAINT-MICHEL, F. DAVIAUD and B. DUBRULLE. A zero-mode mechanism for spontaneous symmetry breaking in a turbulent von Kármán flow. *New Journal of Physics*, 16, JAN 31 2014. (Cité page 37).
- [128] E. W. SAW, D. KUZZAY, D. FARANDA, A. GUITTONNEAU, F. DAVIAUD, C. WIERTEL-GASQUET, V. PADILLA and B. DUBRULLE. Experimental characterization of extreme events of inertial dissipation in a turbulent swirling flow. *Nature Communications*, 7(12466), 2016. doi : <https://doi.org/10.1038/ncomms12466>. (Cité pages 95, 130, et 142).
- [129] E.-W. SAW, P. DEBUE, D. KUZZAY, F. DAVIAUD and B. DUBRULLE. On the universality of anomalous scaling exponents of structure functions in turbulent flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 837 :657–669, 2018. doi : 10.1017/jfm.2017.848. (Cité pages 38, 88, et 102).
- [130] V. SCHEFFER. Nearly one-dimensional singularities of solutions to the Navier-Stokes inequality. *Comm. Math. Phys.*, 110(4) :525–551, 1987. (Cité page 16).
- [131] K. SCHNEIDER and O. V. VASILYEV. Wavelet methods in computational fluid dynamics. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 42(1) :473–503, 2010. doi : 10.1146/annurev-fluid-121108-145637. URL <https://doi.org/10.1146/annurev-fluid-121108-145637>. (Cité page 77).
- [132] J. SMAGORINSKY. General circulation experiments with the primitive equations, part i : the basic experiment. *Monthly Wea. Rev.*, 91 :99–152, 1963. (Cité page 60).

- [133] H. Squire . Xci. some viscous uid ow problems i : Jet emerging from a hole in a plane wall. The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science 43(344) :942-945, 1952. doi : 10.1080/14786440908521003 URL <https://doi.org/10.1080/14786440908521003> . (Cité page 124).
- [134] B. St-Michel , B. Dubrulle , L. Marie , F. Ravelet and F. Daviaud . Evidence for Forcing-Dependent Steady States in a Turbulent Swirling Flow. Physical Review Letters 111(23), DEC 4 2013. (Cité pages 37 et 55).
- [135] G. G. Stokes . On the theories of the internal friction of uids in motion, and of equilibrium and motion of elastic solids. Transactions of the Cambridge Philosophical Society 8 :187-305, 1845. URL <https://www.biodiversitylibrary.org/item/49441> . (Cité pages 2 et 3).
- [136] V. Sverák . On landau's solutions of the navier stokes equations. Journal of Mathematical Sciences 179 (1) :208, 2011. doi :10.1007/s10958-011-0590-5 URL <https://doi.org/10.1007/s10958-011-0590-5> . (Cité pages 123 et 124).
- [137] S. Thalabard , B. Saint-Michel , E. Herbert , F. Daviaud and B. Dubrulle . A statistical mechanics framework for the large-scale structure of turbulent von Kármán ows. New Journal of Physics 17(6) :063006, 2015. (Cité page 37).
- [138] G. Tian and Z. Xin . One-point singular solutions to the navier-stokes equations. Topol. Methods Nonlinear Anal., 11(1) :135-145, 1998. URL <https://projecteuclid.org:443/euclid.tmna/1476842404> . (Cité page 124).
- [139] L. J. P. Timmermans , P. D. Mineev and F. N. Van De Vosse . An approximate projection scheme for incompressible ow using spectral elements. International Journal for Numerical Methods in Fluids 22(7) :673-688, 1996. doi :doi:10.1002/(SICI)1097-0363(19960415)22:7<673::AID-FLD373>3.0.CO;2-O . URL <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/%28SICI%291097-0363%2819960415%2922%3A7%3C673%3A%3AAID-FLD373%3E3.0.CO;2-O> . (Cité page 10).
- [140] H. Touchette . The large deviation approach to statistical mechanics. Physics Reports 478(1) :1-69, 2009. ISSN 0370-1573. doi <https://doi.org/10.1016/j.physrep.2009.05.002>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370157309001410> . (Cité page 82).
- [141] A. Vilhois , D. Proment and G. Krstulovic . Irreversible dynamics of vortex reconnections in quantum uids. Phys. Rev. Lett., 125 :164501, Oct 2020. doi .10.1103/PhysRevLett.125.164501 URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.125.164501> . (Cité pages 133 et 142).
- [142] A. Vincent and M. Meneguzzi . The dynamics of vorticity tubes in homogeneous turbulence. Journal of Fluid Mechanics, 258 :245-254, 1994. doi .10.1017/S0022112094003314 (Cité page 92).
- [143] Z. Wang , M. S. Triantafyllou , Y. Constantinides and G. E. Karniadakis . An entropy-viscosity large eddy simulation study of turbulent ow in a flexible pipe. Journal of Fluid Mechanics, 859 :691-730, 2019. (Cité page 16).
- [144] G. Winckelmans and A. Leonard . Weak solutions of the three-dimensional vorticity equation with vortex singularities. The Physics of Fluids 31(7) :1838-1839, 1988. doi .10.1063/1.866680 URL <https://aip.scitation.org/doi/abs/10.1063/1.866680> . (Cité page 122).
- [145] J. Yao and F. Hussain . On singularity formation via viscous vortex reconnection. Journal of Fluid Mechanics 888 :R2, 2020. doi :10.1017/jfm.2020.58 (Cité pages 130 et 140).
- [146] J. Yao and F. Hussain . A physical model of turbulence cascade via vortex reconnection sequence and avalanche. Journal of Fluid Mechanics, 883 :A51, 2020. doi :10.1017/jfm.2019.905 (Cité pages 130 et 131).



